O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

A. QODIRIY NOMIDAGI JIZZAX DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

Rustamov M.J.

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI
(amaliy mashgulot uchun)

(5110100 - matematika o`qitish metodikasi bakalavriat ta`lim yo`nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun o`quv qo`llanma)

Toshken-2020

Ushbu o’quv qo’llanma «Matematika o’qitish metodikasi» 5110100 yo`nalishida tahsil oluvchi bakalavrlar uchun “Algebra va sonlar nazariyasi” fanidan amaliy mashqulot (1-qism) uchun mo`ljallangan bo`lib, u O`zRO va O`MTV ning 2018 yil 24 iyun №167 sonli buyruq asosida tasdiqangan namunaviy o`quv dasturi asosida tuzildi.

Unda talabalarning ob'ektiv borliqni anglab olishlarida to`g`ri mantiqdan foydalanib, matematik hisoblashlarni puxta egallab, o`z bilimlarini oshirishlarida matematik formulalaridan o`z o`rnida to`g`ri foydalanishlariga imkoniyatlar yaratish ko`zda tutiladi.

Данный учебный пособия (часть 1) предназначен для практических занятий по предмету «Алгебра и теория чисел» для бакалавров, обучающихся по специальности «Методика преподавания математики» - 5110100, и основан на стандартной учебной программе, утвержденной приказом Министерства высшего и среднего специального образования № 167 от 24 июня 2018 года.

Он направлен на создание возможностей для студентов использовать математические формулы в правильном понимании объективного существования, овладевать математическими вычислениями и расширять свои знания.

This textbook (Part 1) is designed for practical training in the subject "Algebra and Number Theory" for bachelors studying in the field of "Methods of teaching Mathematics" – 5110100 and is based on the standard curriculum approved by the Decree of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education No. 167 dated June 24, 2018.

It aims to create opportunities for students to use mathematical formulas in the correct understanding of objective existence, to master mathematical calculations and to increase their knowledge.

SO’Z BOSHI

«Algebra», «Algebra va sonlar nazariyasi», fanlari o’quv rejasiga kiritilgan pedagogika va boshqa oliy o’quv yurtlar talabalarining mazkur fan bo’yicha nazariy hamda amaliy bilim, malaka, ko’nikmalarini nazorat qilish va baholash reyting tizimiga ko’ra talabalar joriy, oraliq, yakuniy nazoratlar hamda mustaqil ishlar topshiradilar.

Pedagogika va boshqa oliy o’quv yurtlar o’quv rejalarida «Algebra va sonlar nazariyasi» faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmi va ayniqsa, semestrlar boyicha taqsimoti bir-biridan farq qiladi. Ammo shu bilan birga fanning ta’lim mazmuni bir. Shu sababga kora mazkur o’quv qollanma modul texnologiyasi asosida tuzilgan. Talabalarining «Algebra va sonlar nazariyasi» fani boyicha nazariy hamda amaliy bilimlarini tartiblash, nazorat qilish va baholash, mustaqil ta’limini tashkil etish maqsadida tuzilgan.

O’quv qo’llanma dasturga ko’ra modul texnologiyasiga asoslangan ishlarni tayyorashlarida va ushbu ish amali mashgulotlarni chuqurroq ozlashtirishi,mustaqil ishlaini tayyorlashda yordam bolsin uchun tayyorlandi.

Talabalar bilimini nazorat qilish va baholash reyting tizimiga ko’ra talabalar Yakuniy yozma ish ko’rinishida topshiradilar va bu yozma ish variantlari nazariy hamda amaliy topshiriqlardan iborat bo’ladi. Ushbu qo’llanmada keltirilgan amaliy topshiriqlar, takrorlash uchun savollar fanning «Matematik mantiq elementlari», «To’plamlar va munosabatlar», «Algebra. Algebraik sistemalar», «Asosiy sonli sistemalar»,”Vektor fazolar”,”matritsalar” bo’limlari mazmunini qamrab olganligi sababli Yakuniy ish variantlariga asos bo’la oladi.

Talaba bajaradigan mustaqil ishlar variantini talabaning guruh jurnalidagi tartib raqami asosida belgilashni tavsiya etamiz. Ishda keltirilgan ishlab ko’rsatilgan misollar ishdakeltirilga nazariy materialarni to’la qamraydi.

Ishda nazariy qism faqat amaliy mashgulotda foydalanish uchun keltirilib,unda teoremalar isbotsiz keltirilgan.Ishda echib korsatilgan misollar etarlicha bolib,nazariy mazmunni

5. Mustaqil ta’lim mazmuni.

Talabalarning mustaqil ta’limiga 221 soat ajratilgan bo‘lib, ularning mavzulari dasturning 2-bandida keltirilgan. Mustaqil ta’lim talabalarning ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar davomida olgan bilim, ko‘nikmalarini mustahkamlash, malakalarga shakllantirishga qaratilgan. Bunda ular fan bo‘yicha tayyorlangan o‘quv qo‘llanmasi, ma’ruza matnlari, nazorat topshiriqlar to‘plami, test topshiriqlari, ko‘rgazmali qurollarning elektron versiyalaridan foydalanadilar. Har bir ma’ruza, amaliy mashg’ulotiarda berilgan mustaqil ta’lim topshiriqlari modullarni topshirish vaqtida baholanadi.

Mustaqil ishiar topshiriqlari mazmuni adabiyotlar ro’yxatida keltirilgan mustaqij ishlar to’plamlarida berilgan.

1-modul. Matematik mantiq elementlari

1.1 Mulohaza. Mulohazalar ustida mantiqiy amallar

Mulohaza rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir. Masalan, «Kvadrat to'g'ri to'rtburchakdir», «7-tub son», «2>5» kabi tasdiqlar mulohazalar bo'lib, birinchi va ikkinchi mulohazalar rost, uchinchi mulohaza esa yolg'on mulohazadir.[1] Demak, biror bir gap mulohaza bo'lishi uchun, u albatta darak gap bo'lishi va rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.[1]

Undov, so'roq gaplar mulohaza bo'la olmaydi. Rost mulohazaga 1 qiymatni, yolg'on mulohazaga 0 qiymatni mos qo'yamiz. Mulohazalarni lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilashni kelishib olamiz.

Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari[3] deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko'rib chiqamiz.

1.1.1-ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\rceil$A yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.

Inkor amali quyidagi jadval yordamida to'liq aniqlanadi:

A	$\rceil$A
1	0
0	1

Bunday jadvallarni rostlik jadvali deb ataymiz.

Masalan, A mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo'lsin, u holda $\rceil$A - «7-tub son emas» degan yolg'on mulohazadan iborat.

1.1.2-ta'rif. A va V mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va V mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va $A \wedge V$ yoki A & V ko'rinishda belgilanadi

Kon'yunksiya amalining rostlik jadvali quyidagichadir:

A	V	$A \wedge V$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.1.3-ta'rif. A va V mulohazalar diz'yunksiyasi deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \vee V$ mulohazaga aytiladi.

1.1.4-ta'rif. A va V mulohazalar <u>implikasiyasi</u> deb, A mulohaza rost va V mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \to V$ mulohazaga aytiladi.

1.1.5-ta'rif. A va V mulohazalar <u>ekvivalensiyasi</u> deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow V$ mulohazaga aytiladi

Bu amallar uchun rostlik jadvallarini keltiramiz:

A	V	$A \vee V$	$A \to V$	$A \leftrightarrow V$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

$\wedge$ - mantiqiy ko'paytirish, $\vee$ - mantiqiy qo'shish amallari deb yuritiladi. $A \wedge V$ mulohazani A va V; $A \vee V$ mulohazani A yoki V; $A \to V$ mulohazani A mulohazadan V mulohaza kelib chiqadi yoki agar A bo'lsa, u xolda V bo'ladi; $A \leftrightarrow V$ mulohazani A mulohazadan V mulohaza va V mulohazadan A mulohaza kelib chiqadi yoki A bo'ladi, faqat va faqat shu holda-ki, agar V bo'lsa, deb o'qiymiz.

Mulohazalar to'plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to'plam, unda bajariladigan barcha $\rceil, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda <u>mulohazalar algebrasi</u> deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.

M to'plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo'lsa, u xolda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon'yunksiya, undan so'ng diz'yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

1.2 Formula. Teng kuchli formulalar. Mantiq qonunlari.

1.2.1-ta'rif. 1) Har qanday mulohaza MAning formulasidir.[2]

2) Agar A, V lar MAning formulasi bo'lsa, u holda $(\rceil A)$, $(A \wedge V)$, $(A \vee V)$, $(A \to V)$, $(A \leftrightarrow V)$ lar ham MAning formulasidir.

3) MAning formulalari 1),2)-punktlar yordamida hosil qilinadi.

cnligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan $A(A_1)$ formuladagi A_1 mulohazaning qiymatalari tizimi (0), (1) dan iborat. $A(A_1,A_2)$ formuladagi A_1,A_2 - mulohazalarning qiymatlari tizimi (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0) lardan tashkil topgan 4 ta ya'ni, 2^2 ta tizimdan iborat. $A(A_1,A_2,A_3)$ formuladagi A_1,A_2,A_3 mulohazalarning barcha qiymatlari tizimini yozish uchun A_1,A_2 mulohazalarning barcha qiymatlari tizimiga 3-koordinata sifatida avval 1 qiymatni yozib chiqamiz, natijada (1,1,1); (1,0,1); (0,1,1); (0,0,1) qiymatlar tizimiga ega bo'lamiz. Endi A_1, A_2- mulohazalarning barcha qiymatlari tizimiga 3 – koordinata sifatida 0 qiymatni yozib chiqsak, (1,1,0); (1,0,0); (0,1,0); (0,0,0) qiymatlar tizimlarini hosil qilamiz.

SHunday qilib $A(A_1,A_2,A_3)$ formuladagi A_1,A_2,A_3 mulohazalarning barcha qiymatlari tizimi 8 ta, ya'ni 2^3 ta ekan. Xuddi shunday usulda $A(A_1,A_2,A_3,A_4)$ formuladagi A_1,A_2,A_3,A_4 mulohazalarning qiymatlar tizimini ham yozib chiqishimiz mumkin va hokazo.[1].

1.2.2-ta'rif. MA ning A va V formulalari tarkibiga kirgan barcha mulohazalar $A_1 \ldots A_n$ lardan iborat bo'lsin. Agar $A_1 \ldots A_n$ mulohazalarning barcha $(i_1,\ldots,i_n)$ qiymatlari tizimida A va V formulalar bir xil qiymatlar qabul qilsalar, u holda bu formulalar <u>teng kuchli formulalar</u> deyiladi va $\mathcal{A} \equiv \mathcal{V}$ ko'rinishida belgilanadi.

Jadvaldan ko'rinib turibdiki $\rceil(A \wedge V)$ va $\rceil A \vee \rceil V$ formulalar, bu formulalarning tarkibiga kirgan barcha mulohazalarning ixtiyoriy qiymatlari tizimida bir xil qiymatlar qabul qiladilar. Demak, $\rceil(A \wedge V) \equiv \rceil A \vee \rceil V$.

1.2.3-ta'rif. Formulada qatnashgan mantiq amallari soni <u>formulaning rangi</u> deyiladi.

1.2.4-ta'rif. 1. A formula - A mulohazadan iborat bo'lsa, uning formulaosti faqat uning o'zidan iborat.

2. Agar formulaning ko'rinishi $A * V$ dan iborat bo'lsa, u holda uning formulaostilari A, V, $A * V$ lar hamda A va V larning barcha formulaostilaridan iborat bo'ladi. Bu erda $*$ - $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallaridan biri.

Agar formulaning ko'rinishi $\rceil A$ bo'lsa, uning formulaostilari A formula, A formulaning barcha formulaostilari va $\rceil A$ ning o'zidan iborat.

Boshqa formulaostilari yo'q.

1.2.5-ta'rif. Mulohazalar algebrasining A formulasi, shu formula tarkibiga kirgan barcha mulohazalarning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari tizimida rost bo'lsa, bu formula <u>aynan rost</u> formula yoki <u>mantiq qonuni</u> yoki <u>tavtologiya</u> deyiladi.

1.2.6-ta'rif. MA ning $A(A_1 \ldots A_n)$ formulasi $A_1 \ldots A_n$ mulohazalarning kamida bitta qiymatlari tizimida rost qiymat qabul qilsa, <u>bajariluvchi</u> formula, barcha qiymatlari tizimida yolg'on qiymat qabul qilsa, <u>aynan yolg'on</u> formula yoki <u>ziddiyat</u> deyiladi.

1.2.1-teorema. MA ning A va V formulalari teng kuchli formulalar bo'lishi uchun $A \Leftrightarrow V$ formula aynan rost formula bo'lishi zarur va etarlidir.

MA ning asosiy teng kuchli formulalari quyidagilardan iborat:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad A \wedge A \equiv A \\ 2.\quad A \vee A \equiv A \end{array}\right\} \text{idempotentlik qonunlari.}$$

3. $A \vee 1 \equiv 1$
4. $A \wedge 1 \equiv A$
5. $A \wedge 0 \equiv 0$
6. $A \vee 0 \equiv A$
7. $A \vee \overline{A} \equiv 1$ - uchinchisini inkor qilish qonuni.
8. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$ - ziddiyatga keltirish qonuni.
9. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ - qo'sh inkor qonuni.

10. $A\wedge(B\vee A)\equiv A$
11. $A\vee(B\wedge A)\equiv A$ } yutilish qonunlari.

12. $A\leftrightarrow B\equiv(A\to B)\wedge(B\to A)$

13. $A\to B\equiv\overline{A}\vee B$

14. $\overline{A\wedge B}\equiv\overline{A}\vee\overline{B}$
15. $\overline{A\vee B}\equiv\overline{A}\wedge\overline{B}$ } De Morgan formulalari.

16. $A\wedge B\equiv\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}$

17. $A\vee B\equiv\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}$

18. $A\wedge B\equiv B\wedge A$
19. $A\vee B\equiv B\vee A$ } kommutativlik qonunlari.

20. $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$
21. $(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$ } assosiativlik qonunlari.

22. $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
23. $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ } distributivlik qonunlari.

izohlar. 1°-bu teng kuchlilikda 2.11-teoremaga asosan «$\equiv$» teng kuchlilik belgisini $\Leftrightarrow$ amal bilan almashtirsak, mantiq qonunlari hosil bo'ladi, shuning uchun teng kuchli formulalar berilganda mantiq qonuni berilgan deb hisoblashimiz mumkin.

2°. Mantiq qonunlarining hammasiga ham nom qo'yish mumkin. Lekin biz eng ko'p ishlatiladigan mantiq qonunlarining nomlarinigina yozdik.

YUqorida keltirilgan teng kuchliliklarning isboti rostlik jadvali yordamida bajariladi. Masalan, A $\to$ V $\equiv\urcorner$A $\vee$ V tengkuchlilikni isbot qilaylik:

A	V	A $\to$ V	$\urcorner$A	$\urcorner$A $\vee$ V
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Jadvaldan A, V mulohazalarning barcha qiymatlar tizimida A $\to$ V va $\urcorner$A $\vee$ V formulalar bir xil qiymatlar qabul qilishi ko'rinib turibdi.

1. 3 Predikatlar. Kvantorlar. Predikatlar algebrasining formulasi va uning tadbiqlari.

Predikatlar mantiqining asosiy tushunchalaridan biri predikat tushunchasi bilan tanishib chiqamiz. Birorta bo'sh bo'lmagan M to'plam berilgan bo'lsin. M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiqni R(a) orqali belgilaymiz. Misol uchun N – natural sonlar to'plami R(a) «a-tub son» degan tasdiq bo'lsin, u holda

R(1)-«1-tub son»- yolg'on mulohaza

R(2)-«2-tub son»- rost mulohaza

R(3)-«3-tub son»- rost mulohaza

R(4)-«4-tub son»- yolg'on mulohaza va hokazo mulohazalarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiq a ning o'rniga M ning aniq bitta elementini qo'ysak mulohaza bo'lar ekan. Bunday tasdiqlarni bir o'zgaruvchili mulohazaviy formula yoki bir o'zgaruvchili predikat deb ataymiz. Shunga o'xshash ikki, uch o'zgaruvchili predikat tushunchalari kiritilishi mumkin.

Yuqoridagidek n ta $x_1, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq R $(x_1, \ldots, x_n)$-tasdiq berilgan bo'lsin [7]. U holda $x_1, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarning mazmunga ega bo'ladigan qiymatlar to'plami N – natural sonlar to'plamida aniqlangan R(x)-«x-toq son»; Q(x)-«x birorta natural sonning kvadratiga teng»-predikatlarni qaraylik. U holda x=1, 4, 5, 9 qiymatlar uchun $R \wedge Q$, $R \vee Q$ predikatlarning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$(R \wedge Q)(1) = R(1) \wedge Q(1) = 1 \wedge 1 = 1$

$(R \wedge Q)(2) = R(2) \wedge Q(2) = 0 \wedge 0 = 0$

$(R \wedge Q)(3) = R(3) \wedge Q(3) = 1 \wedge 0 = 0$

$(R \wedge Q)(5) = R(5) \wedge Q(5) = 1 \wedge 0 = 0$

$(R \wedge Q)(9) = R(9) \wedge Q(9) = 1 \wedge 1 = 1$

$(R \vee Q)(1) = R(1) \vee Q(1) = 1 \vee 1 = 1$

$(R \vee Q)(2) = R(2) \vee Q(2) = 0 \vee 0 = 0$

$(R \vee Q)(3) = R(3) \vee Q(3) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(5) = R(5) \vee Q(5) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(9) = R(9) \vee Q(9) = 1 \vee 1 = 1$

Shunga o'xshash $R \rightarrow Q$, $R \leftrightarrow Q$, $\rceil R$, $\rceil Q$ predikatlarning qiymatlarini hisoblab chiqish mumkin.

1.3.1-ta'rif. $M \neq \varnothing$ to'plamda aniqlangan R(x) predikat berilgan bo'lsin, u holda R(x) predikatni rost mulohazaga aylantiradigan x ning M to'plamga tegishli barcha elementlarini E_r orqali belgilaymiz. E_r-R(x) predikatning rostlik sohasi deyiladi.

Rostlik sohasi quyidagi xossalarga ega.

1°. $E_{\bar{p}} = M \setminus E_p$

2°. $E_{p \wedge q} = E_p \bigcap E_q$

3°. $E_{p \vee q} = E_p \bigcup E_q$

4°. $E_{p \rightarrow q} = E_{\bar{p}} \bigcup E_q$

M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili R(x)-predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x R(x)$ ifoda, M to'plamning barcha elementlari uchun R(x) rost bo'lganda rost, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Bu erdagi $\forall$ belgi umumiylik kvantorini bildiradi.

Endi umumiylik kvantorining ko'p o'zgaruvchili predikatlarga qo'llanilishi bilan tanishib chiqamiz. M to'plamda aniqlangan $R(x_1,\dots,x_n)$ predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x_1 R(x_1,\dots,$shu o'zgaruvchilarning yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasi deyiladi. Agar $R(x_1,\dots,x_n)$ tasdiq $x_1,\dots,x_n$ o'zgaruvchilarning yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan har qanday qiymatlarida mulohazaga aylansa, n- o'zgaruvchili predikat yoki n o'zgaruvchili mulohazaviy formula deyiladi. Bu erda n - 0, 1, 2 va hokazo manfiy bo'lmagan butun qiymatlar qabul qiladi. 0- o'rinli predikat sifatida mulohaza tushuniladi.

1.3.2-ta'rif. $M \neq \varnothing$ to'plamda aniqlangan bir o'rinli R(x) - predikat berilgan bo'lsin, u holda R(x) -

predikatning inkori deb har qanday $x \in M$ element uchun R(x)-predikat rost bo'lganda yolg'on bo'ladigan; R(x) yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan $\rceil$ R(x) predikatga aytiladi. Ya'ni, M ning ixtiyoriy elementi uchun $(\rceil R)(x) = \rceil(R(x))$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Xuddi shunday $M \neq \varnothing$ to'plamda aniqlangan P(x) va Q(x) bir o'rinli predikatlar uchun $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ amallari quyidagi tengliklar yordamida aniqlanadi:

$(R \wedge Q)(x) = R(x)$
$\wedge\, Q(x);$

$(R \vee Q)(x) = R(x) \vee Q(x);$

$(R \rightarrow Q)(x) = R(x$
$) \rightarrow Q(x);$

$(R \leftrightarrow Q)(x) = R(x) \leftrightarrow Q(x).$

$x_n)$-(n-1) o'zgaruvchili predikatdir. Haqiqatdan $x_2,\dots,x_n$ lar o'rniga M to'plamning $a_2,\dots,a_{n-1}$ elementlarini qo'ysak, $\forall x_1 R(x_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ - mulohazaga ega bo'lamiz. Bu mulohaza yo rost, yo yolg'on qiymatni qabul qiladi.

Kelgusida $\forall x_1 R(x_1,\dots,x_n)$ ifoda «barcha x_1 lar uchun $R(x_1,\dots,x_n)$», yoki «ixtiyoriy x_1 uchun $R(x_1,\dots,x_n)$» deb o'qiladi. $\forall x_1 R(x_1,\dots,x_n)$ ifodadagi x_1 o'zgaruvchi bog'liq o'zgaruvchi, $x_2,\dots,x_n$ o'zgaruvchilar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

YAna bitta kvantor bilan tanishib chiqamiz. M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili R(x) predikat berilgan bo'lsin. U holda $\exists x R(x)$ mulohaza bo'lib, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ rost bo'lganda rost qolgan hollarda, ya'ni M to'plamning barcha elementlari uchun R(x)- yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir.

M to'plamda aniqlangan $R(x_1,\dots,x_n)$ predikat berilgan bo'lsin, u holda $\exists x_1 R(x_1,\dots,x_n)$- ifoda n-1 o'zgaruvchili predikat bo'lishini ko'rib chiqamiz. Haqiqatdan, $x_2,\dots,x_n$ o'zgaruvchilar M to'plamdan olingan $a_2,\dots,a_{n-1}$ qiymatlarni qabul qilsin, u holda $\exists x_1 R(x_1,a_2,\dots,a_{n-1}$) ifodalar x_1 ning M to'plamdan olingan kamida bitta qiymatida rost bo'lsa rost, aks holda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Ko'rinib turibdiki, $\exists x_1 R(x_1,\dots,x_n)$ - predikat $x_2,\dots,x_n$ o'zgaruvchilarning M dagi qiymatlari bilan aniqlanib x_1 ga bog'liq emas ekan. Ya'ni n-1 o'zgaruvchili predikat ekan.

$\exists x_1 R(x_1,\ldots,x_n)$ - ifoda «Shunday x_1 mavjud-ki, $R(x_1,\ldots,x_n)$ bo'ladi» deb o'qiladi. $\exists$ - simvol esa mavjudlik kvantori deyiladi.

Amaliyotda predikatlarga kvantorlar ketma-ket bir necha marta qo'llanish hollari uchraydi. Masalan, $\forall x \exists u R(x,u)$ ko'rinishdagi mulohazani $\forall x(\exists u R(x, u))$ deb tushunish kerak.

$\exists x \forall u R(x,u)$-«shunday x butun son mavjud bo'lib, uning ixtiyoriy u butun son bilan yig'idisi musbat» - yolg'on mulohaza;

$\exists x \exists u R(x,u)$-«shunday x va u butun sonlar mavjud-ki, ularning yig'indisi musbat» - rost mulohaza bo'ladi.

Bizga R(x) R(x, u)…$Q(x_1,\ldots,x_n)$ A, V ko'rinishdagi predikatlar berilgan bo'lsin. Har qanday n(n=0, 1, 2) o'rinli predikatni elementar formula deb ataymiz. Xususan har qanday mulohaza ham elementar formuladir.

1.3.3-ta'rif. 1) har qanday elementar formula predikatlar mantiqining formulasidir;

2) agar A va V lar predikatlar mantiqining formulalari bo'lsa, u holda ($\rceil$A), $(A \wedge V)$, $(A \vee V)$, $(A \leftrightarrow V)$, $(\exists xA)$, $(\forall xA)$ ifodalar ham predikatlar mantiqining formulalaridir;

3) boshqa usul bilan predikatlar mantiqining formulalarini hosil qilib bo'lmaydi.

Formula ifodasini ixchamlashtirish tartibi mulohazalar algebrasidek, ya'ni tashqi qavslarni tashlab yozamiz, qolgan qavslar amallarning bajarilish tartibiga mos ravishda tashlab yoziladi. Undan tashqari har doim avval kvantor bilan bog'lash bajariladi deb hisoblaymiz, masalan, $(\forall x A(x)) \rightarrow V$ ko'rinishdagi forlulani $\forall x A(x) \rightarrow V$ ko'rinishda yozish mumkin.

Predikatlar mantiqining A formulasi tarkibidagi elementar formulalarni, har qanday predikatlar bilan almashtirish natijasida aynan rost predikat hosil bo'lsa bunday formula aynan rost formula yoki mantiq qonun yo umumqiymatli formula deyiladi. Predikatlar algebrasining ikkita formulasi ularga kirgan barcha predikatlarni har qanday predikatlar bilan almashtirganimizda bir xil qiymatlar qabul qilsalar, ular teng kuchli deyiladi. A va V formulalar teng kuchliligi $A \equiv V$ ko'rinishida belgilanadi.

Mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklarda mulohazalarni predikatlar mantiqining formulalari bilan almashtirib predikatlar mantiqining teng kuchli formulalarini hosil qilishimiz mumkin, masalan, $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ teng kuchlilikdagi A, V mulohazalarni predikatlar mantiqining mos ravishda A va V formulalari bilan almashtirsak $\overline{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \vee \overline{\mathcal{B}}$ teng kuchlilikka ega bo'lamiz, xususan $\overline{F(x) \wedge F(y)} \equiv \overline{F(x)} \vee \overline{F(y)}$

Bu teng kuchliliklardan tashqari predikatlar mantiqning o'zigagina xos bo'lgan teng kuchli formulalar ham bor. Shunday teng kuchli formulalar namunalarini keltiramiz [1]:

1. $\rceil(\forall x R(x)) \equiv \exists x \rceil R(x)$.

2. $\rceil(\exists x R(x)) \equiv \forall x \rceil R(x)$.

3. $\forall x R(x) \equiv \rceil(\exists x \rceil R(x))$.

4. $\exists x R(x) \equiv \rceil(\forall x \rceil R(x))$.

5. $\exists x A(x) \vee \exists x V(x) \equiv \exists x(A(x) \vee V(x))$.

6. $\forall x A(x) \wedge \forall x V(x) \equiv \forall(x)(A(x) \wedge V(x))$.

Mulohazalar algebarsidagidek predikatlar mantiqining teng kuchli formulalarida «$\equiv$» tengkuchlilik belgisini «$\Leftrightarrow$» ekvivalensiya amali bilan almashtirsak, aynan rost formulalar, ya'ni mantiq qonunlari hosil bo'ladi. Masalan, $\rceil(\forall x R(x)) \Leftrightarrow \exists x \rceil R(x)$; $\rceil(\exists x R(x)) \Leftrightarrow \forall x \rceil R(x)$- formulalar mantiq qonunlardir.

Matematik mantiq elementlari mavzuning o'qitilishidan qo'yilgan asosiy maqsad–matematik mantiq fanining algebra, geometriya, matematik tahlil kabi bir qancha matematik fanlarga tadbiqining eng sodda ko'rinishlaridan biri-matematik jumlalar (aksioma, teorema, ta'rif,...)larni mulohazalar va predikatlar algebralari tili orqali ifodalashga o'quvchilarni o'rgatishdir.

Predikatli formulalarga kvantorlarni qo'llash natijasida hosil qilingan mulohazaviy formulalar yordamida ta'rif, teoremalarni ifodalashga bir nechta misollar ko'rib chiqamiz.

Teorema va uning turlari. Har qanday teorema shart va natijadan iborat. Agar A teoremaning sharti V esa uning hulosasi bo'lsa, u holda teoremani $A \Rightarrow V$ (1) ko'rinishda yozishimiz mumkin.

$V \Rightarrow A$ (2) teoremaga (1) teoremaga teskari teorema deyiladi.

$\rceil A \Rightarrow \rceil V$ (3) teoremaga (1) teoremaga qarama-qarshi teorema deyiladi.

$\rceil V \Rightarrow \rceil A$ (4) teoremaga berilgan (1) teoremaning teskarisiga qarama-qarshi (yoki berilgan (1) teoremaning qarama-qarshisiga teskari) teorema deyiladi.

Rostlik jadvallari orqali $A \Rightarrow V \equiv \rceil V \Rightarrow \rceil A$ va $V \Rightarrow A \equiv \rceil A \Rightarrow \rceil V$ tengkuchliliklarni isbot qilib, quyidagi xulosani chiqaramiz:

$A \Rightarrow V$ teorema o'rniga $\rceil V \Rightarrow \rceil A$ teoremani isbot qilib, $A \Rightarrow V$ rost, ya'ni to'g'ri deb aytishimiz mumkin.

Isbot tushunchasi. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (1) mulohazalar berilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa:

1. A_1 - aksioma yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.

2. Har bir A_i, $i \geq 2$ yoki o'zidan oldingi mulohazadan keltirib chiqarilsin, yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.

U holda (1) ketma-ketlikni biz A_n mulohazaning isboti deymiz.

Isbot qilish usullari. Isbot qilish usullarini shartli ravishda ikki turga bo'lish mumkin:

1. Bevosita - to'g'ridan-to'g'ri isbot qilish.

2. Mantiq qonunlari (isbot qilish sxemalari) orqali isbot qilish.

Teorema shartining rostligidan, xulosaning rostligini to'g'ridan-to'g'ri keltirib chiqarishni bevosita isbot qilish deb tushunamiz. Mantiq qonunlari orqali isbot qilishga, teskarisidan isbot qilish, uchinchisini inkor qilish qonuni orqali isbot qilish, induksiya yordamida isbot qilish va h.k.lar kiradi [1].

$x = y \cdot k = (z \cdot 1) \cdot k = z \cdot (1 \cdot k)$. Demak $x \vdots z$ implikatsiya ta'rifiga ko'ra, bu holda ham berilgan $\forall(x, y, z \in N)(x \vdots y \wedge y \vdots z \Rightarrow x \vdots z)$ mulohaza rost.

Demak, berilgan mulohaza rost mulohaza.

0-variant - echib korsatilgan misollar.

1.1-misol. $\rceil$(A $\wedge$ V) $\equiv$ $\rceil$A $\vee$ $\rceil$V tengkuchlilikni isbot qilish uchun rost jadvali tuzamiz [7]:

A	V	A $\wedge$ V	$\rceil$(A $\wedge$ V)	$\rceil$A	$\rceil$V	$\rceil$A $\vee$ $\rceil$V
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

1.2-misol. (A $\wedge$ V) $\Rightarrow$ $\rceil$A formulaning formulaostilari ta'rifga ko ra quyidagilardan iborat : [1]

A , V , $\rceil$A , A $\wedge$ V , (A $\wedge$ V) $\Rightarrow$ $\rceil$A .

1.3-misol. $\rceil$ (A $\wedge$ V) $\rightarrow$ $\rceil$ A $\vee$ $\rceil$ V – formula aynan rost formuladir. 2.5-misoldagi jadval yordamida bu formula A va V mulohazalarning ixtiyoriy qiymatlari tizimida rost qiymat qabul qilishini ko'rish qiyin emas.

1.4-misol. A $\vee$ V $\vee$ S formula bajariluvchi formuladir, chunki A, V, S mulohazalarning (1, 0, 0) qiymatlari tizimida rost bo'ladi.

1.5-misol. A $\wedge$ $\rceil$A- formula ziddiyatdir.[8]

Haqiqatdan ham, A rost bo'lganda ham, A yolg'on bo'lganda ham bu formula yolg'on qiymat qabul qiladi.

1.6-misol. N – natural sonlar to'plamida aniqlangan R(x)-«x-toq son»; Q(x)-«x birorta natural sonning kvadratiga teng»-predikatlarni qaraylik. U holda x=1, 4, 5, 9 qiymatlar uchun R $\wedge$ Q, R $\vee$ Q predikatlarning qiymatlari quyidagicha bo'ladi [3]:

(R $\wedge$ Q)(1) = R(1) $\wedge$ Q(1) = 1 $\wedge$ 1 = 1

(R $\wedge$ Q)(2) = R(2) $\wedge$ Q(2) = 0 $\wedge$ 0 = 0

(R $\wedge$ Q)(3) = R(3) $\wedge$ Q(3) = 1 $\wedge$ 0 = 0

(R $\wedge$ Q)(5) = R(5) $\wedge$ Q(5) = 1 $\wedge$ 0 = 0

$(R \wedge Q)(9) = R(9) \wedge Q(9) = 1 \wedge 1 = 1$

$(R \vee Q)(1) = R(1) \vee Q(1) = 1 \vee 1 = 1$

$(R \vee Q)(2) = R(2) \vee Q(2) = 0 \vee 0 = 0$

$(R \vee Q)(3) = R(3) \vee Q(3) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(5) = R(5) \vee Q(5) = 1 \vee 0 = 1$

$(R \vee Q)(9) = R(9) \vee Q(9) = 1 \vee 1 = 1$

Shunga o'xshash $R \rightarrow Q$, $R \leftrightarrow Q$, $\rceil R$, $\rceil Q$ predikatlarning qiymatlarini hisoblab chiqish mumkin. [1]

1.7-misol. Natural sonlr to'plamida aniqlangan «x⋮u», ya'ni, «x natural son u natural songa qoldiqsiz bo'linadi» degan predikatni R(x,u) - deb belgilaylik. U holda $\forall xR(x,u)$ - ifoda ixtiyoriy natual son u natural songa bo'linadi, degan bir o'zgaruvchili predikatni bildiradi. Agar u=1 bo'lsa, $\forall xR(x,1) = 1$, u = 2, 3, … bo'lsa, $\forall xR(x,2) = 0$, $\forall xR(x,3) = 0$,… bo'lad.[7]

1.8-misol. Natural sonlar to'plamida R (a, b) –predikat $a \geq b$ tengsizlikni bildirsin, u holda R(1, 0) = 1, R(1, 2) = 0,…,R(2, 1) = 1, R(2, 2) = 1, R(2, 3) = 0 va hokazo bo'lishini tushunish qiyin emas.

Predikatlarni P, Q yoki R(x), R(x, u), A(x, u, z) ko'rinishida belgilashni kelishib olamiz.

Bir o'rinli predikatlar bilan to'liqroq tanishib chiqamiz. Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ amallarni kiritishimiz mumkin

1.9-misol. $A \wedge V \rightarrow A \wedge S$ – formulaning rostlik jadvalini tuzaylik. Bu formulada faqat A, V, S mulohazalar qatnashib, ularning 8 ta qiymatlari tizimiga formulaning mos qiymatlari quyidagi jadvalda ko'rsatilgan:[7]

A	V	S	$A\wedge V$	$A\wedge S$	$A\wedge V\rightarrow A\wedge S$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1

1.10-Misol. $A \wedge V \rightarrow A \wedge S$ formulaning turini aniqlang [6].

Yechish. Berilgan formulada uchta A, V, S mulohazalar qatnashganligi sababli, ularning qiymatlar tizimlari $2^3 = 8$ ta bo'ladi. Formulaning rostlik jadvaliga 8 ta tizimni tartib bilan joylashtiramiz. Mantiq amallarining bajarilish tartibiga ko'ra avval $A \wedge V$ kon'yunksiyani, keyin $A \vee S$ diz'yunksiyani va nihoyat hosil qilingan formulalarning implikasiyasini bajaramiz. Ya’ni amallarning ta’riflariga ko’ra mos ustunlarni to’ldiramiz. Natijada quyidagi rostlik jadvali xosil bo’ladi:

A	V	S	$A \wedge V$	$A \vee S$	$A \wedge V \to A \vee S$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1

Formulaning rostlik jadvalidagi oxirgi ustun - formulaning rostlik qiymatlar ustuni faqat rost qiymatlardan iborat bo’lganligi uchun berilgan formula aynan rost (tavtologiya, mantiq qonuni) degan xulosaga kelamiz.[1]

1.11-Misol. Berilgan $\neg(A \wedge V)$, $\neg A \vee \neg V$ formulalar tengkuchli ekanligini isbotlang.

Yechish. Berilgan formulalar teng kuchli ekanligini isbotlash uchun rostlik jadvallari tuzamiz:

A	V	$A \wedge V$	$\neg(A \wedge V)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

A	V	$\neg A$	$\neg V$	$\neg A \vee \neg V$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Formulalarning rostlik jadvallaridagi formulalar rostlik qiymatlari ustunlari mos tizimlarda bir hil ekanligidan berilgan formulalarning teng kuchli ekanligi kelib chiqadi.

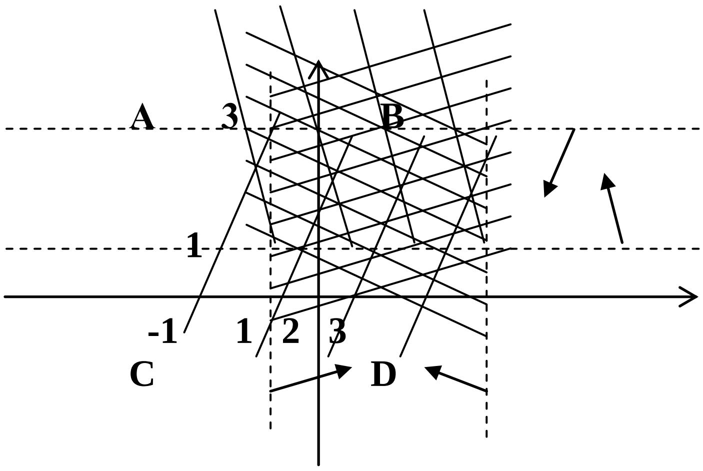
Formulalarning teng kuchli ekanligini isbotlash uchun bitta rostlik jadvalini tuzish ham mumkin:

A	V	$A \wedge V$	$\neg(A \wedge V)$	$\neg A$	$\neg V$	$\neg A \vee \neg V$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

hosil bo'lgan 4- va 7- ustunlardagi rostlik qiymatlarini solishtirib, berilgan formulalarning teng kuchli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

1.12-Misol. Dekart koordinatalar tekisligida $x<3 \wedge x>-1 \wedge y < 3 \wedge y >1$ predikatning rostlik sohasini tasvirlang [6].

Yechish. . Berilgan ikki o'rinli predikat to'rtta bir o'rinli predikatlarning kon'yunksiyasidan tashkil topgan. Kon'yunksiya amalining ta'rifidan, predikatlardagi ikkala o'zgaruvchi o'rniga qiymatlar berganimizda, ularning barchasini rost mulohazaga aylantiruvchi x va u larning qiymatlari berilgan predikatning rostlik sohasi bo'ladi. Buning uchun har bir predikatning rostlik sohalarini aniqlab, ularning kesishmasini topamiz:



hosil bo'lgan chizmadagi ABCD to'rtburchakning ichki nuqtalari berilgan predikatning rostlik sohasi bo'ladi.[8]

1.13-Misol. M = { 1, 2, . . . , 20} to'plamda quyidagi predikatlar berilgan:
A(x): «(x : 5)»; B(x): «x – juft son»; C(x): «x – tub son»; D(x): «x 3 ga karrali».
$A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x) \vee D(x)$ predikatning rostlik sohasini toping.

Yechish. . K orqali M to'plamning $A(x) \wedge B(x)$ predikatni rost, $C(x) \vee D(x)$ predikatni yolg'on mulohazaga aylantiradigan elementlarini belgilab olamiz. Mantiq amallarining ta'rifiga ko'ra berilgan predikatning rostlik sohasi M to'plamdan K to'plamni ayirishdan hosil bo'lgan to'plamdan iborat. K to'plamni aniqlaymiz:

1) $A(x) \wedge B(x)$ predikat rost mulohazaga aylanadigan qiymatlar to'plami A(x) va B(x) predikatlarni bir vaqtda rost mulohazaga aylantiradigan M to'plamning elementlari, ya'ni $A_1=\{5,10,15,20\}$ va $B_1=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ to'plamlarning kesishmasidan iborat. Bu to'plamni M_1 orqali belgilaymiz: $M_1= A_1 \cap B_1 = \{10,20\}$.

2)$C(x) \vee D(x)$ predikat C(x) va D(x) predikatlar bir vaqtda yolg'on mulohazaga aylanadigan M to'plamning qiymatlarida yolg'on mulohaza bo'ladi. U $S_1 =\{1,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$ va

$D_1=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$ to'plamlarning kesishmasidan iborat $M_2 = \{1,4,8,10,14,16,20\}$ to'plamdan iborat.

Demak, berilgan $A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x) \vee D(x)$ predikatning rostlik sohasi $M_1 \cap M_2 = \{10,20\}$ to'plamdan iborat.

1.14-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan «$x^2+u^2=16$» - ikki o'zgaruvchili R(x, u) predikat berilgan bo'lsin, u holda:

$\exists xR(x, 1) = 0$; $\exists xR(x, 2) = 0$; $\exists xR(x, 3) = 0$;

$\exists xR(x, 4) = 1$; $\exists xR(x, 5) = 0$,…, va hokazo.

$\exists x_1R(x_1,\dots,x_n)$ predikatda x_1 o'zgaruvchi bog'liq o'zgaruvchi, qolgan $x_2,\dots,x_n$ lar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

1.15-misol. R(x,u)- butun sonlar to'plami Z da aniqlangan «x+u>0» mazmunidagi predikat bo'lsin, u holda

$\forall x\forall uR(x,u)$- «ixtiyoriy ikkita butun son yig'inidisi musbat bo'ladi» - yolg'on mulohaza;

$\forall x\exists uR(x,u)$-«har qanday butun son x uchun shunday u butun son mavjud bo'lib ulraning yig'indisi musbat» - rost mulohaza;

$\exists x\forall uR(x,u)$-«shunday x butun son mavjud bo'lib, uning ixtiyoriy u butun son bilan yig'idisi musbat» - yolg'on mulohaza;

1-mustaqil ish topshiriqlari:

Amaliy nazorat ishi uchun variantlar.[11]

1. *Mulhazaning rost yoki yolg'onligini aniqlang [9]*:

1.1. $2 \in \{ x |\ 2x^3 - 3x^2+1=0,\ x\in R\}$.

1.2. $-3 \in \{ x |\ \frac{x^3-1}{x^2+2} < -2,\ x \in R\}$.

1.3. $3 \in \{ n |\ \frac{2n+1}{3n-2},\ n \in N\}$.

1.4. $\{1; 1{,}2\} \subset \{ x \mid x^3 + x^2 - x - 1 = 0,\ x \in Z\}$.

1.5. $\{ x |\ x^3 + x^2 - x - 1 = 0,\ x \in Z\} \subset \{1; 1{,}2 \}$.

1.6. $\forall x\ (x < 0 \Rightarrow x > 0),\ x \in \{0,1,2\}$.

1.7. $2 \le 3;\ 2 \ge 3;\ 2 \cdot 2 \le 4;\ 2 \cdot 2 \ge 4$.

1.8. $2 \cdot 2 = 4\ \wedge\ 2 \cdot 2\ \ge\ 5$.

1.9. $\forall\ (x\in T)\ (a^2 + b^2 = c^2)$, T – uchburchaklar to'plami va a, b, c - uchburchak tomonlari.

1.10. $A \wedge (x^2 > 0)$, A – rost mulohaza.

1.11. $\forall\ (x ,y \in N)\ (\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x})$.

1.12. $\{ x \mid (x^2 + 3x - 1 = 0) \wedge (x > 0)\} \subset \{0 ; 1\}$.

1.13. $\forall\ (x \in R)\ (f(x) > 0),\ f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1.14. $15 : 5 \Leftrightarrow 15 : 3$.

1.15. $15 : 3 \Leftrightarrow 15 : 6$.

1.16. $11 : 6 \Rightarrow 11 : 3$.

1.17. $12 : 6 \Rightarrow 12 : 3$.

1.18. $\forall\ (x \in N)\ (x - 3 \ge 4)$.

1.19. $\forall\ (x \in R)\ (\frac{2x-5}{x} \in R)$.

1.20. $\forall\ (x \in A)\ (x < 10),\ A = \{1, \ldots , 10\}$.

1.21. $\forall\ (x \in A)\ (x + 5 \le 15),\ A = \{1, \ldots , 10\}$.

1.22. $\forall\ (x , y \in A)\ (x - y < 10),\ A = \{1, \ldots , 10\}$.

1.23. $\forall\ (x , y \in A)\ (\frac{x}{y} \in A),\ A = \{1, \ldots , 10\}$.

1.24. $\forall(x\in A)\forall(y\in V)(x < y)$; $A=\{1, \ldots , 5\},\ V=\{5 , \ldots , 10\}$.

1.25. $\forall(x\in A)\forall(y\in V)\ (x \vdots\ y),\ A = \{4 k \mid k \in Z \},\ V = \{1, 2, 4 \}$.

2. *Berilgan formulalar tengkuchi ekanligini isbotlang:[7]*

2.1. $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \equiv X.$
2.2. $X \wedge Y \vee Z \wedge T \equiv (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \wedge (X \vee T) \wedge (Y \vee T).$
2.3. $(X \vee Y) \wedge (Z \vee T) \equiv X \wedge Z \vee Y \wedge Z \vee X \wedge T \vee Y \wedge T.$
2.4. $X \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$
2.5. $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z) \equiv Z \wedge Y \Rightarrow Z.$
2.6. $X \Rightarrow \neg Y \equiv Y \Rightarrow \neg X.$
2.7. $X \wedge Y \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y \equiv X \Rightarrow Y.$
2.8. $X \Leftrightarrow Y \equiv \neg X \Leftrightarrow \neg Y.$
2.9. $X \vee (\neg X \wedge Y) \equiv X \vee Y.$
2.10. $X \Rightarrow (X \Rightarrow Y) \equiv \neg X \vee Y.$
2.11. $\neg(\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \Rightarrow Y) \wedge X \equiv X \vee Y.$
2.12. $(X \Leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y) \equiv X \wedge Y.$
2.13. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (Z \Rightarrow X) \equiv X \vee \neg Z.$
2.14. $(X \vee \neg Y \Rightarrow (Z \Rightarrow Y \vee \neg Y \vee X) \wedge (X \vee \neg(X \Rightarrow (X \Rightarrow X))) \Rightarrow Y \equiv X \Rightarrow Y.$
2.15. $X \wedge \neg(X \wedge \neg X \Rightarrow Y \wedge \neg Y) \Rightarrow Z) \vee X \vee (Y \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \equiv 1.$
2.16. $(X \wedge (Y \vee Z \Rightarrow Y \vee Z)) \vee (Y \wedge X \wedge \neg Y) \vee X \vee (Y \wedge \neg(X \wedge \neg X)) \equiv X \vee Y.$
2.17. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z) \equiv 1.$
2.18. $(X \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \equiv X \vee Y \wedge Z.$
2.19. $(X \vee Y \Rightarrow \neg X \vee Y) \wedge Y \equiv Y.$
2.20. $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z).$
2.21. $(X \vee (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow X \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Z).$
2.22. $X \vee Y \vee \neg(\neg X \vee \neg Y) \equiv (\neg X \wedge \neg Y) \Rightarrow (X \wedge Y).$
2.23. $((X \vee Y \vee Z) \Rightarrow X) \vee Z \equiv \neg(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z).$
2.24. $(\neg X \vee (Y \wedge Z)) \wedge \neg Z \equiv \neg((X \wedge (\neg Y \vee \neg Z)) \vee Z).$
2.25. $\neg X \vee Y \vee \neg Z \equiv \neg((X \wedge Y) \vee \neg Z) \Rightarrow \neg(X \wedge Z).$

3. *Dekart koordinatalar tekisigida predikatning rostlik sohasini tasvirlang:[11]*

3.1. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} < 0.$
3.2. $\sqrt{x^2-1} = -3.$
3.3. $2x^2 + x - 30 > 0.$
3.4. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} < 0.$
3.5. $((x > 2) \wedge (y \geq 1)) \wedge ((x < -1) \wedge (y < -2)).$
3.6. $x + 3y = 3.$
3.7. $x - y \geq 0.$
3.8. $\sin x = \sin y.$
3.9. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4.$
3.10. $\lg x = \lg y.$

3.11. $\neg(x > 2) \wedge (y < 2)$.
3.12. $(x = y) \vee (|x| \le 1)$.
3.13. $(x \ge 3) \Rightarrow (y < 5)$.
3.14. $x + y = 1$.
3.15. $((x > 2) \wedge (y \ge 1)) \wedge ((x < -1) \wedge (y < -2))$.
3.16. $\neg(\mathrm{Sin}x \ge 0)$.
3.17. $((x > -2) \wedge (y \ge 2)) \wedge ((x < 1) \wedge (y < 2))$.
3.18. $\neg(|x + 2| < 0)$.
3.19. $(x - 1)^2 + y^2 = 4) \wedge (y = x)$.
3.20. $\neg(2x^2 + x - 1 \le 0)$.
3.21. $(x^2 + 2x + 1 = 0) \wedge (2x + 3 = 0)$.
3.22. $\frac{x}{x-1} < 0$.
3.23. $(3x - 5 = 0) \wedge (x^2 - 1 = 0)$.
3.24. $3x^2 - 2x + 4 > 0$.
3.25. $(x+1)^2+(y+2)^2=9) \wedge (3x-5=0)$.

TEST SAVOLLARI.[10].

1. Ikki mulohazaning ... deb , shunday yangi mulohazaga aytiladiki, bu mulohaza berilgan ikki mulohaza rost bo'lganda rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'lsa [10].
Ta'rifdagi mulohaza o'rnini to'ldiring
A)dizyunksiya B)konyunksiya C)implikatsiya D)ekvivalensiya
2. Aynan rost predikatni ko'rsating?
A) P(x):"sin2x+cos2x=1" , x € R
B) P(x):"x2+y2≤0" x,y €R
C) P(x):"a2+b2=c2" a,b,c – uchburchak tomonlari, x-uchburchaklar to'plami
D) P(x,y): " x2+y2≥9" x,y € R
3. Tenglamani yeching: Ax2.Cxx-1=48
A)3 B) 4 C) 5 D) 6
4. Aynan yolg'on predikatni ko'rsating
A) P(x,y): "x/y >y/x" x,y€N
B) P(x): "x+3=2" x €R
C) P(x): "x/2 >1" x€N
D) P(x): "x2<0" x€Z
5. A(x),B(x) Є M , M={1,2,3,...., 20} bunda A(x):<<x:3>>, B(x):<< x toq son>>
C(x): A(x)^B(x) to'plamni toping
A)C=={3,6,9,15}
B)C=={3,9,15}
C)C=={3,15,18}

D)C=={3,6,9}

6. A(x),B(x) Є M , M={1,2,3,…., 20} bunda A(x):<<x:3>>, B(x):<< x toq son>>
C(x): A(x)^B(x) to'plamni toping

A) C=={3,6,9,15}
B) C=={3,9,15}
C) C=={3,15,18}
D) C=={3,6,9}

7.. Ikki mulohazaning … deb , shunday mulohazaga aytiladiki, ikkala mulohaza ham bir paytda yolg'on yoki rost bo'lganda rost qolgan hollarda yolg'on bo'ladi.
A)dizyunksiya B)konyunksiya C)implikatsiya D)ekvivalensiya

8.. Ikki mulohazaning … deb , shunday mulohazaga aytiladiki, ikkala mulohaza ham bir paytda yolg'on yoki rost bo'lganda rost qolgan hollarda yolg'on bo'ladi.
E)   A)dizyunksiya B)konyunksiya C)implikatsiya D)ekvivalensiya

9..Quyidagi A va B mulohazalarning kon'yunktsiyasini toping.

A	B	$A) A\wedge B$	$B) A\wedge B$	$C) A\wedge B$	$D) A\wedge B$	$E) A\wedge B$
0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0

10..Quyidagi A va B mulohazalarning implikatsiyasini toping.

A	B	$A)\ A\Rightarrow B$	$B)\ A\Rightarrow B$	$C)\ A\Rightarrow B$	$D)\ A\Rightarrow B$	$E)\ A\Rightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

11.. $A\Leftrightarrow B$ *mulohaza bilan o'zaro teng kuchli mulohazani toping.*

$A)\ (A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow B)$
$B)\ (A\Rightarrow B)\vee(A\Rightarrow B)$
$C)\ (A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$
$D)\ (A\Rightarrow B)\vee(B\Rightarrow A)$
$E)\ (B\Rightarrow A)\vee(A\Rightarrow B)$

12.. $A\Rightarrow B$ *mulohaza bilan o'zaro teng kuchli mulohazani toping.*

$A)\ (A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$
$B)\ (B\Rightarrow A)\vee(A\Rightarrow B)$
$C)\ (A\Rightarrow B)\vee(A\Rightarrow B)$
$D)\ (A\Rightarrow B)\vee(B\Rightarrow B)$
$E)\ (A\Rightarrow A)\wedge(B\Rightarrow B)$

13.. $A\vee B$ *mulohaza bilan o'zaro teng kuchli mulohazani toping.*

$A)\ \neg(\neg A \vee \neg B)$ $B)\ \neg A \wedge \neg B$ $C)\ A \wedge \neg B$ $D)\ \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$E)\ \neg A \vee B$

14..Aynan rost formulani toping.

$A)\ (A \Rightarrow B) \vee (A \vee B)$
$B)\ (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$
$C)\ (A \wedge B) \vee (A \vee B)$
$D)\ (A \vee B) \wedge (A \wedge B)$
$E)\ (A \vee B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$

15. Aynan yolg'on formulani toping.

$A)\ (A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow B)$
$B)\ (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Rightarrow B)$
$C)\ (B \Rightarrow A) \wedge (A \wedge B)$
$D)\ (\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge B)$
$E)\ (A \Leftrightarrow B) \wedge \neg(A \Rightarrow B)$

16..Bajariluvchi formulani toping.

$A)\ (A \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)$
$B)\ (A \Leftrightarrow B) \wedge \neg(A \Rightarrow B)$
$C)\ (B \Rightarrow A) \wedge (\neg A \vee B)$
$D)\ (B \Rightarrow A) \vee (\neg A \vee B)$ $E)\ (A \wedge B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

17..Mantiq amallarining bajarilish tartibi .javobda to'g'ri keltirilgan?

$A)\ \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
$B)\ \neg, \wedge, \vee, \Leftrightarrow, \Rightarrow$
$C)\ \wedge, \vee, \neg, \Leftrightarrow, \Rightarrow$
$D)\ \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
$E)\ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

18.Mulhazaning rost yoki yolg'onligini aniqlang:

2 $\in$ { x| 2x3 – 3x2+1=0, x$\in$ R}.

A) Chin B) yolgon C) Muloxaza emas D) Predikat E) Muloxaza

19.Mulhazaning rostlik sohasini aniqlang:

$\{\, x \mid \frac{x^3-1}{x^2+2} < -2,\ x \in R \}.$

A)yoq B) ,(1,2,3,4,5) C) (1,5,8,9) D) (1,2) E) (0,1)

20.Mulhazaning rostlik sohasini aniqlang:

$\{ n | \frac{2n+1}{3n-2}, n \in R\}$.

B) Chin B) yolgon C) Muloxaza emas D) Predikat E) Muloxaza

.

21.Formulaning turini aniqlang :

$$\neg(\neg(X \vee U) \Rightarrow \neg(X \wedge U)).$$

A)Chin B) yolgon C) Muloxaza emas D) Predikat E) Muloxaza

22. Formulaning turini aniqlang :

$$(X \Rightarrow U) \Rightarrow (\neg U \Rightarrow \neg X).$$

A)Chin B) yolgon C) Muloxaza emas D) Predikat E) Muloxaza

23.Formulaning turini aniqlang :

$$\neg(X \Rightarrow (U \Rightarrow X) \wedge Z.$$

A)Ziddiyatli B) Ziddiyatsiz C) Teng kuchli D) Teng kuchlimas E) Aniqmas

24.Formulaning turini aniqlang :

$\neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y) \vee Z.$

A)Ziddiyatli B) Ziddiyatsiz C) Teng kuchli D) Teng kuchlimas E) Aniqmas

25.Berilgan formulalar tengkuchlimi

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \equiv X.$$

A)Ziddiyatli B) Ziddiyatsiz C) Teng kuchli D) Teng kuchlimas E) Aniqmas

Nazariy savollar.[7],[1],[7].

1. Gap. Darak gap. Mulohaza.
2. Mulohazalar ustida mantiq amallari.
3. Mulohazaviy formula.
4. Aynan rost, aynan yolg’on, bajariluvchi formulalar.
5. Matematik mantiqning asosiy qonunlari.
6. Teng kuchli mulohazaviy formulalar.
7. Asosiy tengkuchliliklar.
8. Predikatlar.
9. Predikatning qiymatlar va rostlik sohalari.
10. Predikatlar ustida mantiq amallari.
11. Aynan rost, aynan yolg’on, bajariluvchi predikatlar.
12. Teng kuchli predikatlar.
13. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari.
14. 1, 2, 3 o’rinli predikatlardan kvantorlar yordamida mulohazalar hosil qilish.
15. Predikatli formulalar.
16. Asosiy predikatli mantiq qonunlari.
17. Mulohazalarni predikatlar tilida yozish.
18. Teorema va uning turlari.
19. Teoremalarni isbotlash usullari.
20. Qisman, chiziqli, to‘la tartiblangan to‘plamlar. Misollar.
21.Binar, n – ar amallar. Binar amallar turlari. Misollar.
22. Neytral, regulyar, simmetrik elementlar. Misollar.
23.Amallarga nisbatan yopiq to‘plam. Additiv, mul’tiplikativ amallar.
24. Kongruensiya. Misollar..
25. Mulohaza, mulohazalar ustida mantiq amallari. Misollar.
26. Mantiqiy formula. Formula turlari. Misollar.
27. Mantiq qonuni, teng kuchli formulalar. Asosiy tengkuchliliklar. Misollar.
28. Predikatlar. Predikatlar ustida mantiq amallari. Misollar.
29.Kvantorlar va ularning tadbiqi. Misollar.
30.Predikatli formulalar, ularning turlari. Teng kuchli predikatli formulalar.
31.1, 2, 3 o‘rinli predikatlardan kvantorlar yordamida mulohazalar xosil qilish.
32. Mulohazaviy formula.
33. Formulaosti.
34. Aynan rost, aynan yolg’on, bajariluvchi formulalar.
35. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengkuchliliklar.
36. Formulalarni teng kuchli almashtirishlar.
37.Mulohaza deb qanday ga
38. Har qanday o’tgan zamon darak gapi mulohaza bo’la oladimi?

39. Kelasi zamon darak gaplari-chi?

40. Mulohazalar kon'yunksiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost kon'yunksiyaga, yolg'on kon'yunksiyaga misollar keltiring.
41. Mulohazalar diz'yunksiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost diz'yunksiyaga, yolg'on diz'yunksiyaga misollar keltiring.
42. Mulohazalar implikasiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost implikasiya, yolg'on implikasiyaga misollar keltiring.
43. Mulohazalar ekvivalensiyasi nima? Qanday o'qiladi? Rost ekvivalensiyaga, yolg'on ekvivalensiyaga misollar keltiring.
44. Mulohaza inkori nima? Qanday o'qiladi? Rost inkorga, yolg'on inkorgaga misollar keltiring.
45. Mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ayting.
46. Rostlik jadvali nima?
47. Mulohazaviy formula.
48. Formulaosti.
49. Aynan rost, aynan yolg'on, bajariluvchi formulalar.
50. Teng kuchli formulalar. Asosiy tengkuchliliklar.
51.Formulalarni teng kuchli almashtirishlar.
52.Predikat.
53.Predikatlar ustida mantiq amallari.
54.Kvantorlar.
55.Predikatli formulalar, turlari.
56.Teorema va uning turlari.
57.Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida yozish.
58.Predikatga ta'rif bering.
59.Predikatning qiymatlar sohasi, rostlik sohasi nima? Misollar yordamida tushuntiring
60.Predikatlar diz'yunksiyasi, kon'yunksiyasi, implikasiyasi, ekvivalensiyasiga misollar keltiring.
61.Mantiq amallarini qo'llash natijasida hosil bo'ladigan predikat o'zgaruvchilarining soni haqida nima deyish mumkin?
62.Umumiylik va mavjudlik kvantorlarini qo'llashga misollar keltiring.
63.Predikatli formula qanday hosil qilinadi?
64.Predikatli formulaning qanday turlarini bilasiz?
65.Teoremaning qanday turlarini bilasiz?
67.Teoremalarni isbotlash usullari qanday?
68.Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida ifodalashga misol keltiring.

2-modul. Toplamlar va munosabatlar.

2.1 To’plam. To’plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Eyler-Venn diagrammalari

To’plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo’lib, misollar yordamida tushuntiriladi [1].

To’plam ixtiyoriy tabiatli ob’ektlardan tashkil topgan bo’lishi mumkin, masalan, Osiyo qit’asidagi barcha daryolar yoki Toshkent shahridagi barcha ko’chalar to’plam bo’la oladi. To’plamni tashkil qiluvchi ob’ektlar to’plamining elementlari deyiladi. To’plam lotin alifbosining bosh harflari A, V, S,... lar orqali belgilanadi.[1]

Barcha natural sonlarni $N = \{1, 2, 3,...\}$ ko’rinishida yozib, natural sonlar to’plami deb ayta olamiz.

$Z = \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$ to’plam butun sonlar to’plamini bildiradi.

Q-orqali barcha rasional sonlar to’plamini bildiradi, ya’ni $\frac{p}{q}$, $q \neq 0, \quad p, q \in Z$ kasr ko’rinishida yozish mumkin bo’lgan sonlarni belgilaymiz.

R-orqali esa barcha xaqiqiy sonlar to’plamini belgilaymiz.

a ob’ekt A to’plamning elementi bo’lsa, $a \in A$ deb belgilaymiz. Aksincha a ob’ekt A ning elementi bo’lmasa, $a \notin A$ yoki $a \,\overline{\in}\, A$ orqali belgilanadi. Agar A to’plamning xar bir elementi V to’plamning ham elementi bo’lsa, $A \subset B$ orqali belgilanadi va A to’plam V to’plamning to’plamostisi deyiladi.[7]

Bir xil elementlardan tashkil topgan to’plamlar teng deyiladi. A, V to’plamlar teng bo’lsa, A=V ko’rinishda belgilaymiz. A va V to’plamlarning teng bo’lishi uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ bo’lishi zarur va etarli ekanligini ko’rish qiyin emas. Bitta ham elementi yo’q to’plamni bo’sh to’plam deb ataymiz, ya’ni $\varnothing$ orqali belgilaymiz.

2.1.1-ta’rif. A va V to’plamlarning kamida biriga tegishli bo’lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to’plam A va V to’plamlarning birlashmasi yoki yig’indisi deyiladi.

2.1.2-ta’rif. A va V to’plamlarning kesishmasi yoki ko’paytmasi deb, A va V to’plamlarning barcha umumiy, ya’ni A ga ham, V ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A \cap B$ to’plamga aytiladi.

2.1.3-ta’rif. A va V to’plamlarning ayirmasi deb, A to’plamning V to’plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to’plamga aytiladi. A va to’plamlarning ayirmasi A \ V ko’rinishida belgilanadi.

(A \ V) ∪ (V \ A) to’plam A va V to’plamlarning simmetrik ayirmasi deyilidi va $A \Delta B$ orqali belgilanadi. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ bo’lishini isbot qilishni o’quvchilarga havola etamiz.[1]

2.1.4-ta'rif. Agar $A \subset B$ bo'lsa, B\ A to'plam A to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi va $\subset A$ yoki A' orqali belgilanadi. Shunday qilib, $\subset A$ = B \ A.

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to'plam va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to'plamostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'radi.

Agar biror E to'plam va faqat uning to'plamostilari bilan ish ko'rsak, bunday E to'plamni universal to'plam deb ataymiz. Universal to'plamning barcha to'plamostilari to'plamini β(E) orqali belgilaymiz.

To'plamlar ustida bajariladigan algebraik amallar quyidagi xossalarga ega.

1^0. A ∩ A = A kesishmaning idempotentligi;

2^0. A ∪ A = A birlashmaning idempotentligi;

3^0. $\begin{matrix} A\bigcap B = B\bigcap A \\ A\bigcup B = B\bigcup A \end{matrix}$ kesishma va birlashmaning kommutativligi;

$4^0. 2^\circ$. $\begin{matrix} (A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C) \\ (A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C) \end{matrix}$ kesishma va birlashmaning assosiativligi

5^0. Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi:

$$A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C);$$

6^0. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi:

$$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C);$$

7^0. $(A \setminus B)\bigcap C = (A\bigcap C)\setminus B = (A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C);$ [7]

$A_1 \cup A_2 \cup ... A_n \cup ...$ birlashmani $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_1 \cap A_2 \cap ... A_n \cap ...$ kesishmani $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ deb belgilab olsak, yana quyidagi xossalarga ega bo'lamiz. A_i, $i = 1...$ to'plamlar birorta X to'plamning to'plamostilari bo'lsin, u holda

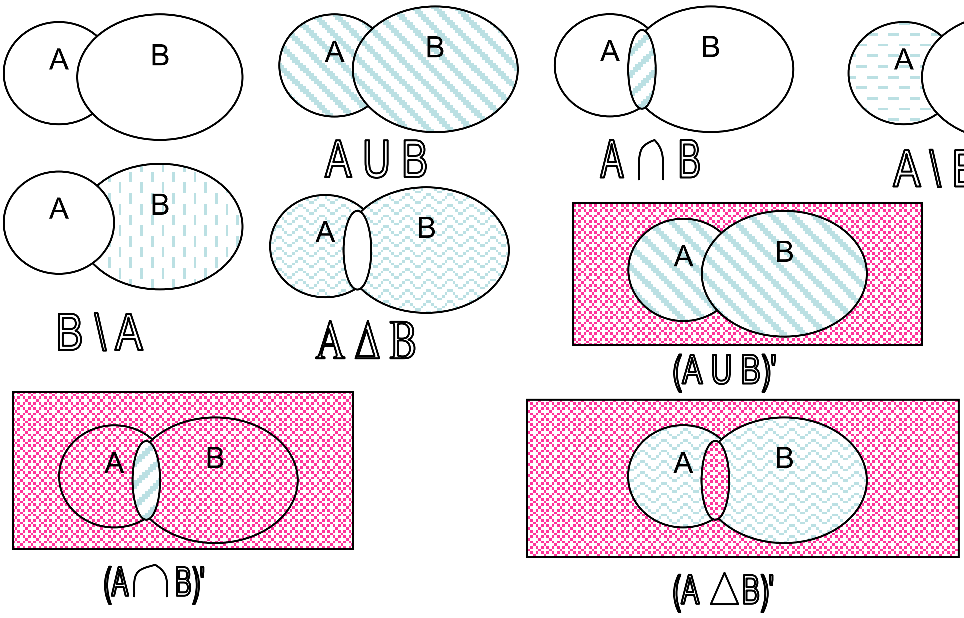
8°. $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(X \setminus A_i);$

9°. $X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(X \setminus A_i).$

Bu tengliklarni isbotlash uchun, tengliklarning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element, tenglikning o'ng tomonidagi to'plamga tegishli va to'plamning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element chap tomonidagi to'plamga ham tegishli bo'lishini ko'rsatish etarli.

To'mlamlar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammalari deb ataladigan quyidagi shakllar yordamida ifoda qilish, amallarning xossalarini isbot qilishni ancha engillashtiradi.

Universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilarini to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U xolda, ikki to'plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'lduruvchi to'plamlar, ikki to'plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:



2.2 Dekart ko'paytma. Binar munosabatlar.

Bo'sh bo'lmagan A to'plam berilgan bo'lsin. $\forall\, a, b \in A$ elementlar uchun $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ to'plam a, b elementlardan tuzilgan tartiblangan juftlik deyiladi. Tartiblangan juftlik (a, b) ba'zi adabiyotlarda $<a, b>$ ko'rinishida belgilanib, a tartiblangan juftlikning birinchi koordinatasi, b esa tartiblangan juftlikning ikkinchi koordinatasi deyiladi.

2.2.1-teorema. Ikkita tartiblangan juftliklar (a, b) va (c, d) lar teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Tartiblangan juftlik yordamida, uchta a, b, c elementlar uchun $((a, b), c)$ ko'rinishda tartiblangan uchlikni aniqlashimiz mumkin. T

Bo'sh bo'lmagan A to'plam berilgan bo'lsin. $\forall\, a, b \in A$ elementlar uchun $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ to'plam a, b elementlardan tuzilgan tartiblangan juftlik deyiladi. Tartiblangan juftlik (a, b) ba'zi adabiyotlarda $<a, b>$ ko'rinishida belgilanib, a tartiblangan juftlikning birinchi koordinatasi, b esa tartiblangan juftlikning ikkinchi koordinatasi deyiladi.

2.2.2-teorema. Ikkita tartiblangan juftliklar (a, b) va (c, d) lar teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Tartiblangan juftlik yordamida, uchta a, b, c elementlar uchun $((a, b), c)$ ko'rinishda tartiblangan uchlikni aniqlashimiz mumkin. Tartiblangan n-lik (uzunligi n ga teng kortej) esa tartiblangan n-1 lik orqali $((a_1, ..., a_{n-1}), a_n)$-ko'rinshda aniqlanadi va $(a_1,...,a_n)$ orqali belgilanadi. $i=1,...,n$ lar uchun a_i element $(a_1,...,a_n)-n$ likning n-koordinatasi deyiladi.

2.2.3-teorema. Ikkita tartiblangan n liklar teng bo'lishlari uchun ularning mos koordinatalari teng bo'lishlari zarur va etarli, ya'ni $(a_1,...,a_n)=(b_1,...,b_n)\Leftrightarrow(a_1=b_1)\wedge...\wedge(a_n=b_n)$ mulohaza tavtalogiyadir.

$a_1-b_1,...,a_{n-1}=b_{n-1}$. Demak, $a_1=b_1,...,a_n=b_n$ bo'ladi.

2.2.1-ta'rif. $A_1,...,A_n$- bo'sh bo'lmgan to'plamlar $\forall a_1\in A_1,...,\forall a_n\in A_n$- elementlardan tuzilgan barcha $(a_1,...,a_n)$ n-liklar to'plami $A_1,...,A_n$ <u>to'plamlarning</u> <u>dekart ko'paytmasi</u> deyiladi. $A_1,...,A_n$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A_1\times...\times A_n$ ko'rinishida belgilanadi.

Bu misoldan $A\times B\neq B\times A$ ekanligini ko'rish mumkin, ya'ni dekart ko'paytma kommutativ emas ekan.

Agar $A_1\times...\times A_n$ dekart ko'paytmada $A_1=A_2=...=A_n=A$ bo'lsa, bunday dekart ko'paytma A^n ko'rinishida yoziladi va A to'plamning <u>n-dekart darajasi</u> deyiladi. Xususan A^2-A ning dekart kvadrati deyiladi.To'plamlarning birinchi va nolinchi darajalarini $A^1=A,\quad A^0=\varnothing$ tengliklar ko'rinishida aniqlash kelishilgan.

2.2.2-ta'rif. $A\neq\varnothing$ to'plam berilgan bo'lsin. A^n ning ixtiyoriy ρ to'plamostini A to'plamda aniqlangan <u>n-ar</u> yoki <u>n-o'rinli munosabat</u> deyiladi. Hususan A^2 ning ixtiyoriy to'plamostisi A to'plamida berilgan <u>binar munosabat</u> deyiladi. Agar (a,b) juftliklar ρ binar munosabatga tegishli bo'lsa, $a\rho b$ deb belgilaymiz.

Binar munosabatlar matematikada ko'p uchraydigan munosabatlardan biri bo'lganligi uchun u bilan to'liqroq tanishib chiqamiz.

2.2.3-ta'rif. Agar R - A to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsa, u holda binar munosabatga tegishli barcha juftliklarning, barcha birinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam $Dom\,R$ orqali, barcha ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam esa $\operatorname{Im}R$ orqali belgilanad. Ular mos ravishda R munosabatning <u>aniqlanish</u> va <u>o'zgarish sohalari</u> deyiladi.

2.2.4-ta'rif. Agar R – ikki o'rinli, ya'ni binar munosat bo'lsa, u holda $\{(a,b)/\forall(b,a)\in R^1\}$ munosabat R^1-munosabatga teskari munosabat deyiladi va R^{-1} orqali belgilanadi. R^{-1} munosabat R ning <u>inversiyasi</u> deyiladi.

2.2.5-ta'rif. P va Q binar munosabatlar bo'sh bo'lmagan A to'plamda berilgan bo'lsin. U holda P ∘ Q = {(a,c)| ∃ b∈A, (a,b)∈Q ∧ (b,c)∈P} to'plam P va Q binar munosabatlarning <u>kompozisiyasi</u> deyiladi.

2.2.4–teorema. Agar f, h, g lar A to'plamida berilgan binar munosabatlar bo'lsa, u holda $f\circ(h\circ g)=(f\circ h)\circ g$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni binar munosabatlar kompozisiyasi assosiativdir.

2.2.6-ta'rif. A to'plamida R –binar munosabat berilgan bo'lsin.

$a)$ Agar $\forall a\in A$ uchun $(a,a)\in R$ bo'lsa, R –binar munosabat <u>refleksiv</u> munosabat deyiladi;

$b)$ Agar $(a,b)\in R$ bo'lishidan $(b,a)\in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R^{-1}=R$ shart bajarilsa, R-<u>simmetrik</u> munosabat deyiladi;

c) Agar $\forall(a,b)\in R$ va $(b,a)\in R$ bo'lishidan $(a,c)\in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R\circ R\subset R$ shart bajarilsa, R-tranzitiv munosabat deyiladi;

d) refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lgan binar munosabat ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Ekvivalentlik munosabati ba'zan ≡, ~, ≃ kabi ko'rinishlarda ham belgilanadi.

2.2.7-ta'rif. A to'plamda aniqlangan R-ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. $\forall a\in A$ uchun $\bar{a}$ orqali A to'plamning a ga ekvivalent bo'lgan barcha elementlarini belgilaymizva to'plamni a element yaratgan ekvivalentlik sinfi deb ataymiz. Ekvivalentlik sinfining ixtiyoriy elementi shu sinfning vakili deyiladi.

2.2.8-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy R ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin, u holda shu R ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan barcha ekvivalent sinflari to'plami A to'plamning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor- to'plami deyiladi.

YUqoridagi 5.18-misolda $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$ to'plam, ya'ni 3 modul bo'yicha olingan barcha chegirmalar sinflari to'plami faktor to'plamdir. A to'plamning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor to'plami A/R orqali belgilanadi.

2.2.9-ta'rif. A to'plamning bo'sh bo'lmagan to'plamostilaridan tuzilgan $B=\{A_\alpha \ /\alpha\in\Omega\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar B ixtiyoriy ikkita elementining kesishmasi bo'sh to'plmadan iborat bo'lib, B ning barcha elementlarining yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamning bo'laklangani deyiladi.

2.2.5–teorema. A to'plamda berilgan har bir R ekvivalentlik munosabati uchun A/R faktor to'plam A to'plamning bo'laklanganidir. Aksincha, B to'plam A ning bo'laklangani bo'lsa, u holda A to'plamda shunday ~ ekvivalentlik munosabat mavjud bo'lib, A/~=V bo'ladi.

$B=\{A_\alpha \ /\alpha\in\Omega\}$- to'plam A ning bo'laklangani bo'lsin. A to'plamning ixtiyotiy ikkita elementi A_α larning faqat bittasigagina tegishli bo'lsa, bu elementlar ~ munosabatda deymiz va $a\sim b$ belgilaymiz, u holda $\forall a\in A$ uchun $a\sim a$ bo'lishi ravshan, chunki a faqat bitta A_α gagina tegishli. YA'ni ~ refleksiv munosabardir.

Faraz qilaylik $a\sim b$, ya'ni a,b lar A_α larning faqat biriga tegishli bo'lsin. Aniqlik uchun $a,b\in A_\alpha^{'}$ bo'lsin, u holda b,a lar ham $A_\alpha^{'}$ ga tegishli, demak $b\sim a$ bo'ladi. Demak, ~ simmetrik munosabat bo'lar ekan.

$a\sim b$ va $b\sim c$ bo'lsin. YAna aniqlik uchun $a,b\in A_\alpha^{'}$ deylik, u holda $b\sim c$ bo'lgani uchun a,b,c lar ham faqat $A_\alpha^{'}$ to'plamgagia tegishli, demak a,c lar ham shu $A_\alpha^{'}$ gagina tegishli, ya'ni $a\sim c$ bo'ladi. Bu esa ~ munosabatning tranzitivligidir.

SHunday qilib ~ munosabat A to'plamda aniqlangan ekvivalentlik munosabati, A_α lar esa ~ ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan ekvivalentlik sinflari ekan.

2.3 Akslantirish (funksiya). Tartib munosabati.

2.3.1-ta'rif. $f - A$ to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsin. Agar $\forall x, y, z \in A$ lar uchun $(x, y) \in f$ va $(x, z) \in f$ bo'lishidan $y = z$ kelib chiqsa, u holda f binar munosabat akslantirish (funksiya) deyiladi [1].

Boshqacha qilib aytsak, f binar munosabatning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan har bir x element uchun, yagona y element topilib, $(x, y) \in f$ bo'lsa, u holda f munosabat funksiya deyiladi. Agar f binar munosabat funksiya bo'lib, $(x, y) \in f$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ deb yozish qabul qilingan. Ba'zan $x \to f(x)$ yoki $f : x \to y$ deb ham yoziladi x elementga f funksiya y elementni mos qo'yadi deb va y element x ning obrazi (tasviri), x esa y ning proobrazi (asli) deyiladi. $Dom\ f = \{x \,/\, \exists y (x, y) \in f\}$ to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, $\operatorname{Im} f = \{y \,/\, \exists x (x, y) \in f\}$ to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi. Bizga ikkita f va g funksiyalar berilgan bo'lsa, ularning tengligini f va g - juftliklar to'plamining tengligi sifatida tushuniladi. Predikatlar algebrasi tiliga o'tsak, $(f = g) \Leftrightarrow ((\forall (x, y) \in f) \leftrightarrow (\forall (x, y) \in g))$ formula tavtologiyadir. [7]

Har qanday funksiya $\forall x \in Dom\ f$ elementga yagona $y \in \operatorname{Im} f$ elementni mos qo'yganligi sababli, f ni akslantirish deb atash maqsadga muvofiq. Agar $Dom\ f \subset A, \quad \operatorname{Im} f \subset B$ bo'lsa, u holda f A to'plamdan B to'plamga akslantirish deyiladi.

Agar $A = Dom\ f \quad B = \operatorname{Im} f$ bo'lsa, u holda f funksiyani A to'plamni B to'lamga akslantirish deb ataymiz. A to'plamni B to'lamga akslantiradigan barcha funksiyalar to'plamini B^A orqali belgilash qabul qilingan. Faraz qilaylik f A to'plamdan B to'lamiga akslantirish bo'lsin. U holda $\forall C \subset A$ uchun $f(c) = \{x \,/ j\,(x) \in C \cap \operatorname{Im} f\}$ to'plam M to'plamning obrazi deyiladi. $f^{-1}(M) = \{x \,/\, f(x) \in M \cap \operatorname{Im} f\}$ to'plam M to'plamning proobrazi deyiladi.

Bundan keyin agar f A to'plamdan B to'plamga akslintirish bo'lsa, $f : A \to B$ deb belgilaymiz. Agar A to'plam tartiblangan juftliklar to'plamidan iborat bo'lsa, u holda $f : A \to B$ akslantirish ikki o'zgaruvchili funksiya, n o'zgaruvchili funksiya sifatida $X \neq \varnothing \quad Y \neq \varnothing$ to'plamlar uchun $f : X^n \to Y$ akslantirish tushuniladi, bu erda n=0, 1, … . n- o'zgaruvchili funksiyani $y = f(x_1, ..., x_n)$ ko'rinishida belgilaymiz.

2.3.2-ta'rif. f va g funksiyalar berilgan bo'lsin, u holda $f \circ g = \{(x, z) \,/ \exists\, t (x, t) \in g \text{ ва } (t, z) \in f\}$ to'plam f va g funksiyalarning kompozisiyasi deyiladi.

2.3.1-teorema. Funksiyalar kompozisiyasi quyidagi xossalarga ega:

1°. $Dom\ f \circ g = \{x \,/ g(x) \in Dom\ f\}$

2°. $\forall x \in Dom\ f \circ g$ учун $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

3°. $f \circ g = \{(x,\ f(g(x))) \,/ g(x) \in Dom\ f\}$

4°. $Dom\ f \circ g \subset Dom\ g$.

5°. $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f$

6°. *Агар* $\operatorname{Im} g = Dom\ f$ *булса*, $Dom\ f \circ g = Dom\ g$ *ва* $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f$

2.3.2-teorema. Funksiyalar kompozisiyasi assosiativdir.

Bu teoremaning isboti binar munosabatlar kompozisiyasi assosiativligining bevosita natijasidir.

2.3.3-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plamning har bir elementini o'zini o'ziga akslantiradigan akslantirish ayniy akslantirish yoki birlik akslantirish deyiladi. Bunday akslantirishni E_A orqali belgilaymiz.

2.3.3-teorema. Agar f - akslantirish A to'plamni B to'lamiga akslintirish bo'lsa $f \circ f^{v} = E_B$ bo'ladi.[1]

2.3.4- ta'rif. $f : A \to B$ akslantirish A to'plmamni B to'plamiga akslantirish bo'lsin. U holda, agar $\forall x_1, x_2 \in A$ va $x_1 \neq x_2$ elementlar uchun $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsa, f -in'ektiv, $\operatorname{Im} f = B$ bo'lsa, f - syur'ektiv akslantirish deyiladi. Agar f ham syur'ektiv, ham in'ektiv akslantirish bo'lsa, u holda biektiv akslantirish deyiladi.

Bu erdan ko'rinadiki, $f \circ g \neq g \circ f$, ya'ni funksiyalar kompozisiyasi har doim ham kommutativ bo'lavermas ekan.

2.3.5-ta'rif. $f : A \to B,\ \ g : B \to A$ akslantirishlar berilgan bo'lsin, u holda agar $f \circ g = E_B$ bo'lsa f akslantirish g akslantirishga chapdan teskari, akslantirish esa f akslantirishga o'ngdan teskari deyiladi. Agar $f \circ g = E_B$ va $g \circ f = E_A$ shartlar bajarilsa, u holda f va g akslantirishlar bir biriga teskari akslantirishlar deyiladi.

2.3.4-teorema. Agar $f : A \to B;\ \ g : B \to A$ akslantirishlar berilgan bo'lib, $g \circ f = E_A$ shart bajarilsa, u holda f -in'ektiv, g esa syur'ektiv akslantirishdir.

2.3.5-teorema. $f : A \to B$ akslantirish uchun teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun uning biektiv bo'lishi zarur va etarli.

2.3.1-natija. O'zaro teskari akslantirishlar biektv akslantirishlardir.

To'plamni o'zini o'ziga akslantirish almashtirish deyiladi.

3.6-teorema. Chekli to'plamni almashtirish biektiv bo'lishi uchun, syur'ektiv yoki in'ektiv bo'lishi zarur va etarlidir.[7]

2.3.6-ta'rif. Agar ikkita A va B to'plamlarning birini ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslantiradigan kamida bitta akslantirish mavjud bo'lsa, to'plamlar teng quvvatli deyiladi va $A \cong B$ ko'rinishida yoki $|A| = |B|$ ko'rinishida belgilanadi.

2.3.7-ta'rif. A to'plamda berilgan $R \subset A \times A$ antisimmetrik va tranzitiv munosabat A to'plamdagi tartib munosabati deyiladi.

2.3.8-ta'rif. A to'plamdagi tartib munosabati refleksiv munosabat bo'lsa, bunday munosabat A to'plamdagi noqat'iy tartib munosabat deyiladi.

A to'plamdagi tartib munosabat antirefleksiv munosabat bo'lsin, bunday munosabat A to'plamdagi qat'iy tartib munosabat deyiladi.

2.3.9-ta'rif. A to'plamda R - tartib munosabat berilgan bo'lsin. U holda, agar $\forall a, b \in A$ elementlar uchun $x R y$ yoki $x = y$ yoki $y R x$ munosabatlardan kamida bittasi albatta bajarilsa, bunday munosabot A to'plamdagi chiziqli tartib munosabat deyiladi.

Chiziqli bo'lmagan tartib munosabat, qisman tartib munosabat deyiladi.

2.3.10-ta'rif. A to'plamda R- tartib munosabat berilgan bo'lsin, (A, R) juftlik <u>tartiblangan to'plam</u> deyiladi. Agar R- qisman tartib munosabati bo'lsa, (A, R) <u>qisman tartiblangan to'plam</u>, R chiziqli tartib munosabati bo'lsa, (A, R) <u>chiziqli tartiblangan to'plam</u> deyiladi.

. Xususan $4 \leq 4, 3 \leq 4$ mulohazalar aynan rost mulohazalardir.

$(A, <)$- tartiblangan to'plam berilgan bo'lsin, u holda $a \in A$ elementdan kichik element mavjud bo'lmasa a- minimal element, agar a dan katta element mavjud bo'lmasa a-maksimal element deyiladi. A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan kichik bo'lgan a element A ning eng kichik elementi, A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan katta bo'lgan b element A ning eng katta elementi deyiladi.

Shunday qilib, maksimal elementlari bir nechta bo'lgan to'plamlar mavjud ekan. Minimal elementlari ham bir nechta bo'ladigan to'plamga misol keltirishni o'quvchilarga havola etamiz.

2.3.11-ta'rif. Har qanday bo'sh bo'lmagan to'plamostisi minimal elementga ega chiziqli tartiblangan to'plam <u>to'liq tartiblangan to'plam</u> deyiladi.

Chiziqli tartiblangan to'plamlarda minimal element tushunchasi eng kichik element tushunchasi bilan, maksimal element tushunchasi esa eng katta element tushunchasi bilan bir xil bo'lishi ravshan.

2.3.12-ta'rif. Tekislikda chekli sondagi nuqtalardan va shu nuqtalarning ba'zilarini tutashtiruvchi chiziqlardan iborat geometrik figura <u>graf</u> deyiladi. Nuqtalar grafning uchlari, chiziqlar esa grafning qirralari deyiladi.

Grafning ba'zi qirralarini kesishish nuqtalari grafning uchlari bo'lmasligi ham mumkin. Agar grafning qirralarini yo'nalishi ko'rsatilgan bo'lsa, bunday graf yo'nalgan graf yoki orietirlangan graf deyiladi.

A to'plamida berilgan R-chekli binar munosabatni graf yordamida ifoda qilish uchun A to'plamning barcha elementlarini tekislikda nuqtalar yordamida belgilab olamiz. Agar $(a, b) \in R$ bo'lsa, bu juftlikni tekislikda a elementni ifoda qilgan nuqtadan b elementni ifoda qilgan nuqtaga qarab yo'nalgan yoy yoki kesma orqali ifoda qilinadi. (a, a) juftlikni esa soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda yo'nalgan aylana sifatida tasvirlaymiz. Natijada hosil bo'lgan figura R- binar munosabatning grafi deyiladi.

Binar algebraik amallarni T,•,+,∗,⊙ ko'rinishlarida belgilash qabul qilingan.

umumiy bo'luvchisini mos qo'yadigan amal, natural sonlar to'plamida aniqlangan ternar algebraik amaldir.

Binar algebraik amallarni T,•,+,∗,⊙ ko'rinishlarida belgilash qabul qilingan.

3.Ekvivalentlik munosabati.

To'plamda berilgan S binar munosabat ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlaymiz:

1. S – refleksivlik munosabati, chunki A to'plamning har bir so'zini o'zi bilan solishtirsak, ularda o harfi bir hil sonda qatnashgan.

2. S – simmetriklik munosabati, chunki A to'plamning har qanday x, u so'zlari uchun agar x so'z bilan u so'zda o harfi bir hil sonda qatnashgan bo'lsa, u holda u so'z bilan x so'zlarda ham o harfi bir hil sonda qatnashadi.

3. S – tranzitivlik munosabati, chunki A to’plamning har qanday x, u, z so’zlari uchun agar x so’z bilan u so’zda va u so’z bilan z so’zda o harfi bir hil sonda qatnashgan bo’lsa, u holda x so’z bilan z so’zlarda ham o harfi bir hil sonda qatnashadi.

Endi S ekvivalentlik munosabati yordamida ekvivalentlik sinflarini tuzamiz. Buning uchun «lola» so’zi bilan ekvivalentlik munosabatida bo’lgan so’zlarni bir to’plamga yig’amiz:

$S/_{lola}$ = {lola, shoda, olma}. Xuddi shunday yo’l bilan qolgan ekvivalentlik sinflarini tuzamiz:

To’plamning chap tomonidagi to’plamga tegishli ixtiyoriy element chap tomonidagi to’plamga ham tegishli bo’lishini ko’rsatish etarli.

$x \in A \cap C$ bo’ladi. $\cap$ - amalining ta’rifiga ko’ra $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in C$ bo’ladi, u holda $x \in A \cap (B \cup C)$.

atida bo’lgan so’zlarni bir to’plamga yig’amiz:

$S/_{lola}$ = {lola, shoda, olma}. Xuddi shunday yo’l bilan qolgan ekvivalentlik sinflarini tuzamiz:

a $x \notin A_2$ va... va $x \notin A_n$,... .Bundan $x \in X \setminus A_1$ va $x \in X \setminus A_2$ va ..., $x \in X \setminus A_n$ va hokazo, ya’ni $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i$ kelib chiqadi.

$x \notin A_n$,... .Bundan $x \in X \setminus A_1$ va $x \in X \setminus A_2$ va ..., $x \in X \setminus A_n$ va hokazo, ya’ni $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i$ kelib chiq (A $\cup$ V) \ S = (A \ S) $\cup$ (V \ S) tenglikni isbotlang va Eyler – Venn diagrammalarini tuzing.

To’plamlarning tengligini isbotlash uchun M=N$\Leftrightarrow$ M $\subset$ N$\wedge$N $\subset$ M tasdiqdan foydalanamiz.

1) $\forall$x$\in$((A $\cup$ V) \ S) $\Rightarrow$ x$\in$(A$\cup$V) $\wedge$ x$\notin$S $\Rightarrow$ x$\in$A $\vee$ x$\in$V $\wedge$ x$\notin$S $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (x$\in$A $\wedge$ x$\notin$S) $\vee$ (x$\in$V $\wedge$ x$\notin$S) $\Rightarrow$ x$\in$(A\S) $\vee$ x$\in$(V\S) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ x$\in$((A \ S) $\cup$ (V \ S)). Bundan (A $\cup$ V) \ S $\subset$ (A \ S) $\cup$ (V \ S) ekanligi kelib chiqadi.

2) $\forall$u$\in$((A \ S) $\cup$ (V \ S)) $\Rightarrow$ u$\in$(A\S) $\vee$ x$\in$(V\S) $\Rightarrow$ (u$\in$A $\wedge$ u$\notin$S) $\vee$ $\vee$ (u$\in$V $\wedge$ u$\notin$S) $\Rightarrow$ u$\in$A $\vee$ u$\in$V $\wedge$ u$\notin$S) $\Rightarrow$ u $\in$(A $\cup$ V) $\wedge$ u$\notin$S $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ u$\in$((A $\cup$ V) \ S). Bundan (A \ S) $\cup$ (V \ S) $\subset$ (A $\cup$ V) \ S ekanligi kelib chiqadi. Demak (A $\cup$ V) \ S = (A \ S) $\cup$ (V \ S).

0-variant - echib korsatilgan misollar.

2.1 -misol. $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C);$ ni isbotlang [8].

$\forall x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ bo'lsin, u holda kesishmaning ta'rifiga asosan, $\forall x\in A$ va $\forall x\in B\bigcup C$ bo'ladi. To'plamlar birlashmasining ta'rifiga asosan $x\in B$ yoki $x\in C$ bo'ladi. Demak, $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$ bo'ladi. Bu esa $x\in A\bigcap B$ yoki $x\in A\bigcap C$ degani. Nihoyat oxirgi munosabat $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ bo'lishini bildiradi. SHunday qilib, $\forall x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ bo'lsa, $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ bo'lar ekan. Endi $\forall x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ bo'lsin, u holda $\bigcup$ - amalining ta'rifiga ko'ra $\forall x\in A\bigcap B$ yoki $x\in A\bigcap C$ bo'ladi. $\bigcap$ - amalining ta'rifiga ko 'ra $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in C$ bo'ladi, u holda $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$.

2.2 -misol. (A \ V) \ S = (A \ S) \ V tenglikni isbotlang.[7]

1. $\forall$ x $\in$ ((A \ V) \ S) $\Rightarrow$ x $\in$ (A \ V) $\wedge$ x $\notin$ S $\Rightarrow$ x $\in$ A $\wedge$ x $\notin$ V $\wedge$
$\wedge$ x $\notin$ S $\Rightarrow$ x $\in$ (A \ S) $\wedge$ x $\notin$ V $\Rightarrow$ x $\in$ ((A \ S) \ V);
2. $\forall$ u $\in$ ((A \ S) \ V) $\Rightarrow$ u $\in$ (A \ S) $\wedge$ u $\notin$ V $\Rightarrow$ u $\in$ A $\wedge$ u $\notin$ S $\wedge$
$\wedge$u $\notin$ V $\Rightarrow$ u $\in$ (A \ V) $\wedge$ u $\notin$ S $\Rightarrow$ u $\in$ ((A \ V) \ S).

2.3-misol. $\mathcal{B}$(A) - A to'plamining barcha to'plamostilaridan tuzilgan to'plam berilgan bo'lsin, u holda $f:B(A)\to B(A), \forall X\in B(A)$ uchun $f(X)=A\setminus X$ tenglik yordamida aniqlanadigan amal unar algebraik amaldir.[1]

2. 4-misol. Natural sonlar to'plamida ixtiyoriy uchta songa ularning eng katta umumiy bo'luvchisini mos qo'yadigan amal, natural sonlar to'plamida aniqlangan ternar algebraik amaldir.

1.5 (A $\cup$ V) \ S = (A \ S) $\cup$ (V \ S).Qanday munosabat.

Endi berilgan tenglikni Eyler – Venn diagrammalarida tasvirlaymiz. Buning uchun tenglikda qatnashgan uchta to'plam uchun biror bir vaziyatni aniqlab, tenglikning ikkala tomonini ikkita diagrammada tasvirlaymiz:

A $\cup$ V ni ; (A $\cup$ V) \ S ni orqali;

A \ S ni ; V \ S ni ;

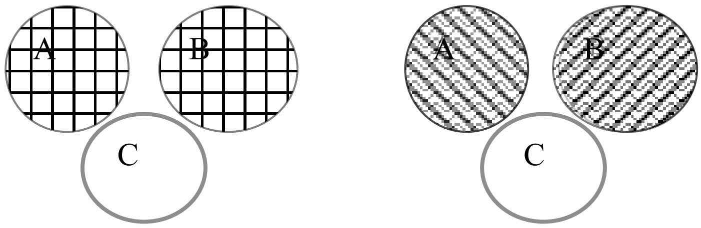
(A \ S) $\cup$ (V \ S) ni orqali tasvirlasak u holda

quyidagilarni hosil qilamiz:

2.5-misol. N^2 ning to'plamostisini qaraylik. Bu munosabat tengsizlik munosabati bo'lib $(a,b)\in"<"$ bo'lishi $a<b$ orqali belgilanadi va a kichik b deb o'qiladi.

2.6-misol. $A=\{a, b\}$ to'plamda aniqlangan barcha unar munosabatlar $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ to'plamlardan iborat [6]

2.7-misol. $A_1=\{0, \Diamond\}, \quad B=\{1, 2, 3\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin, u holda



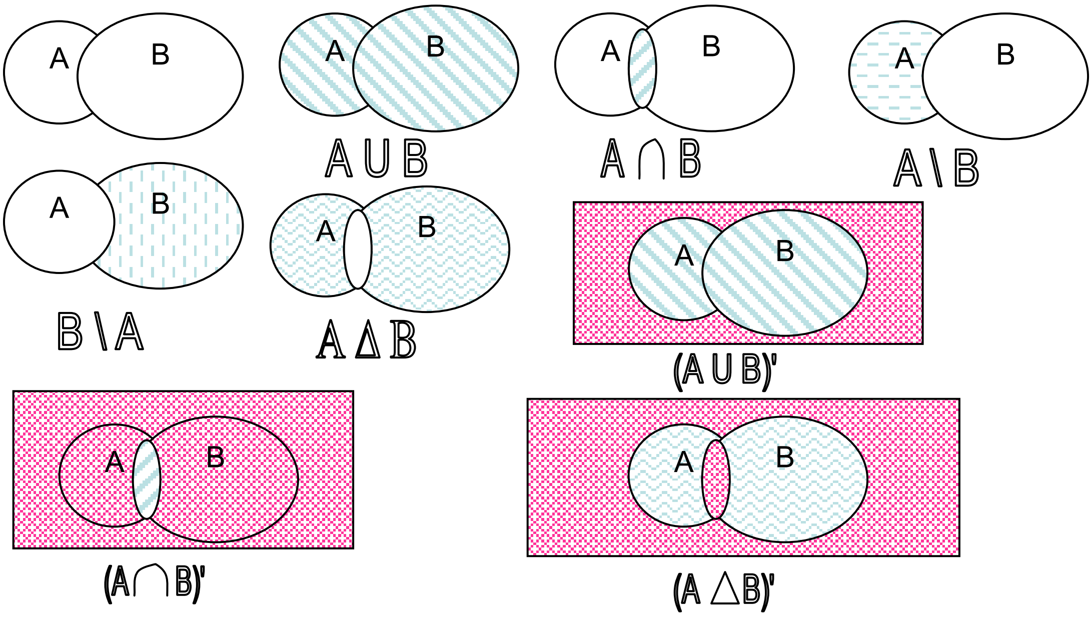
$$A\times B=\{(0,1),(0,2),(0,3),(\Diamond,1),(\Diamond,2),(\Diamond,3)\}$$

$$B\times A=\{(1,0),(1,\Diamond),(2,0),(2,\Diamond),(3,0),(3,\Diamond)\}.$$

2.8-misol. Tekislikdagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plamida to'g'ri chiziqlarning parallel bo'lishi munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

Echim; a).U ekvivalentlikning barcha shartlarini bajaradi.

Barcha a,b lar uchun a//a,a // b dan b // a va a // b va b // c dan a // c.[8]



2.9-misol. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; ni isbotlang.

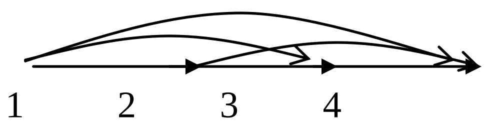
$\forall x\in A\cap(B\cup C)$ bo'lsin, u holda kesishmaning ta'rifiga asosan, $\forall x\in A$ va $\forall x\in B\cup C$ bo'ladi. To'plamlar birlashmasining ta'rifiga asosan $x\in B$ yoki $x\in C$ bo'ladi. Demak, $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$ bo'ladi. Bu esa $x\in A\cap B$ yoki $x\in A\cap C$ degani. Nihoyat oxirgi munosabat $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ bo'lishini bildiradi. SHunday qilib, $\forall x\in A\cap(B\cup C)$ bo'lsa, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ bo'lar ekan. Endi $\forall x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ bo'lsin, u holda $\cup$ - amalining ta'rifiga ko'ra $\forall x\in A\cap B$ yoki $x\in A\cap C$ bo'ladi. $\cap$ - amalining ta'rifiga ko'ra $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in C$ bo'ladi, u holda $x\in A\cap(B\cup C)$.

2.10-misol. Haqiqiy sonlar to'plami R ni o'zini o'ziga akslantiradigan $f(x)=x^2$ funksiya in'ektiv ham emas, biektiv ham emas haqiqatdan ham $+2\neq-2$. Lekin $(-2)^2=2^2=4;\quad \operatorname{Im} f=R^+\cup\{0\};\quad [R^+\cup\{0\}]$- manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plami.

2.11-misol. N-natural sonlar to'plamida $R=\{(x,y)\mid \forall x,y\in N\ x\vdots y\}$ munosabat qisman tartib munosabat bo'ladi. $"<"=\{(x,y)\mid \forall x,\ y\in N\ \exists k\in N\ y=x+k\}$ munosabat esa chiziqli tartib munosabatdir.

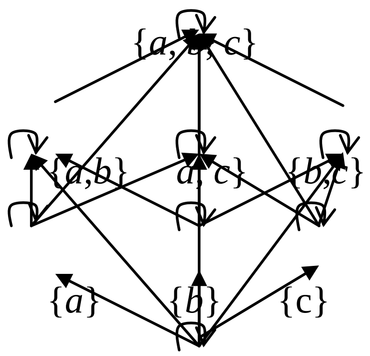
2.12-misol. $f(x)=x^2$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamini $R^+\cup\{0\}$ to'plamga akslantirsin. U holda $\operatorname{Im} f=R^+\cup\{0\}$. Demak, f-syur'ektiv akslantirish, lekin in'ektiv akslantirish emas.

2.13 –misol. R- binar munosabat $A=\{1,2,3,4\}$ to'plamdagi «<» munosabat bo'lsin. U holda «<» munosabatni graf yordamida quyidagi ko'rinishda ifoda qilish mumkin [7]:



2.14 –misol. $A=\{a,b,c\}$ to'plam berilgan bo'lsin.

$\mathcal{B}$(A) -uning barcha to'plamostilari bo'lsin. U holda to'plamosti bo'lish munosabatini quyidagi graf yordamida ifoda qilish mumkin: [8]



Bu misoldan ko'rinadiki, $f\circ g\neq g\circ f$, ya'ni funksiyalar kompozisiyasi har doim ham kommutativ bo'lavermas ekan.

2-mustaqil ish topshiriqlari:

Amaliy nazorat ishi uchun variantlar.[11]

1. *$A, B \subset M = \{1, \dots, 20\}$ to'plamlar uchun quyidagilarni aniqlang [10]: $A \setminus B, B \setminus A, A \cup B, A \cap B, A', B'$:*

1.1. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{11, 13, 15\}$;
1.2. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{12, 14, 16\}$;
1.3. $A = \{7, 9, 11\}$, $B = \{17, 19\}$;
1.4. $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{10, 13, 18\}$;
1.5. $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$;
1.6. $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 5\}$;
1.7. $A = \{11, 13, 14\}$, $B = \{11, 12, 13\}$;

2. *Quyidagilarni isbotlang va Eyler – Venn diagrammalarini tuzing*:

2.1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
2.2. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.
2.3. $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.
2.4. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
2.5. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
2.6. $((A \cup B)' \cap (A' \cup B'))' = A \cup B$.
2.7. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

3. *R, S, T – binar munosabatlar uchun quyidagilarni isbotlang*:

3.2. $(R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T$.
3.3. $(R \cap S) \circ T \subset R \circ T \cap S \circ T$.
3.4. $\mathrm{Dom}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Dom}\,S$.
3.5. $\mathrm{Im}\,(R \circ S) \subset \mathrm{Im}\,R$.
3.6. R, S - tranzitiv $\Rightarrow$ $R \cup S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – tranzitiv.
3.7. R , S – refleksiv $\Rightarrow$ $R \cup S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – refleksiv.
3.8. R, S - simmetrik $\Rightarrow$ $R \cup S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – simmetrik.
3.9. R, S - ekvivalent $\Rightarrow$ $R \cup S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – ekvivalent.
3.10. R, S - qat'iy tartib $\Rightarrow$ $R \cup S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – qat'iy tartib.
3.11. R, S - chiziqli tartib $\Rightarrow$ $R \cup S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – chiziqli tartib.
3.12. R, S - antisimmetrik $\Rightarrow$ $R \cup S, R^{\cup}, S^{\cup}$ – antisimmetrik.
3.13. $A \cup B \subset C \Rightarrow A \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$.
3.14. $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Rightarrow A = B = C$.

4. *M = {1, 2, . . . , 20} to'plamda berilgan quyidagi binar munosabatlarning xossalarini tekshiring va grafini chizing:*

4.1. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \leq y + 1 \}$.
4.2. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x^2 = y^2 \}$.
4.3. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge |x| = |y| \}$.
4.4. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \vdots y \}$.
4.5. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x < y \}$.
4.6. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \leq y \}$.
4.7. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \neq y \}$.
4.8. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x^2 + x = y^2 + y \}$.
4.9. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x^2 + y^2 = 1 \}$.
4.10. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \vdots y \vee x < y \}$.
4.11. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge (x - y) \vdots 2 \}$.
4.12. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x + y = 12 \}$.
4.13. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x + y \leq 7 \}$.

5. *R = A x B , S = B x A binar munosabatlar uchun R o S, S o R, R^2, S^2 larni aniqlang:*

5.1. A = {1, 3, 5}, B = {11, 13, 15};
5.2. A = {2, 4, 6}, B = {12, 14, 16};
5.3. A = {7, 9, 11}, B = {17, 19};
5.4. A = {2, 3, 5}, B = {10, 13, 18};
5.5. A = {3, 5, 7}, B = {1, 3, 5};
5.6. A = {1, 4, 5}, B = {1, 4, 5};
5.7. A = {11, 13, 14}, B = {11, 12, 13};
5.8. A = {5, 6, 7}, B = {1, 11, 15};
5.9. A = {10, 13, 15}, B = {1, 11, 15};
5.10. A = {4, 5}, B = {17, 18, 19};
5.11. A = {3, 5, 7}, B = {8,. . . ,15};
5.12. A = {1 ,2 , 3 , 4 }, B = {3,. . . ,6};

6. *Berilgan A to'plam va undagi S binar munosabat yordamida A / S faktor-to'plamni aniqlang:*

6.1. A - tekislikdagi to'Qri chiziqlar to'plami,
S - parallellik munosabati.
6.2. A - tekislikdagi to'Qri to'rtburchaklar to'plami,
S - o'xshashlik munosabati.
6.3. A - tekislikdagi to'Qri burchakli uchburchaklar to'plami,
S - o'xshashlik munosabati.
6.4. A - tekislikdagi romblar to'plami,

S - o'xshashlik munosabati.

6.5. A - tekislikdagi to'rtburchaklar to'plami,

S - o'xshashlik munosabati.

6.6. A = { ax + by + c = 0 | a, b, c $\in$ R } ,

S - parallellik munosabati.

$\wedge$u $\notin$ V $\Rightarrow$ u $\in$ (A \ V) $\wedge$ u $\notin$ S $\Rightarrow$ u $\in$ ((A \ V) \ S).

Universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilarini to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U xolda, ikki to'plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'lduruvchi to'plamlar, ikki to'plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:

TEST SAVOLLARI.[10].

1. A, B va C bo'shbo'lmagan 3 to'plam. A$\subset$B, C$\subset$B va A$\cap$C=$\emptyset$ bo'lib, s(B)=13 va s(A)=2,

A) . *1

B}. 5

C}. 4

D). 7

2. {0,1,2,3,4} to'plamningelementlari bilan nechta turli 3 xonali son yozish mumkin?

A). 50

B). *48

C). 30

D). 2

3. $A = \{x: |x| < 3,\ x\epsilon Z\},\ B = \{x: x < 6,\ \ x\epsilon N\}$to'plamlarberilgan. Quyidagilardanqaysibiri$A \times B$ningelementiemas?

A). (3,1)

B). (-2,5)

C). *(3,1)

D). (0,4)

4. $A \times B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$bo'lsa, B\A dan A gaqanchaharxilmunosabatbor?

A). 1

B). 2

C). *4

D). 16

5. $\beta = \{(x,y)\backslash x^2 + x = y^2 + y\}$munosabatibarchabutun x va y sonlaruchuntenglikmunosabatidir. βgako'ra 3 ningtengliksinfiqaysibiribo'ladi?

A). {2,-3}

B). *{-4,3}

C). {-2,3}

D). {-3,-4}

6. A={1,2,3} to’plamningikkio’rinlialmashtirishi f va g. Agar
$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}vaf^\circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $bo'lsa, g^{-1}$ =?

A). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

B). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

C).*$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

D). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. A={-1,1,2} va B={1,3} bo’lsa, AxBningnuqtalarinio’zichigaoluvchiengkichikdoiraning diametric nechabirlik?

A).*$\sqrt{13}$

B). 2$\sqrt{13}$

C). 2

D). 5

8. A={1,2,3} va B={0,2,4} orasidagi ushbu munosabatlardan qaysi biri funksiya?

A). {(1,0),(2,2),(2,4)}

B). {(1,0),(1,2),(1,4)}

C).*{(1,2),(2,0),(3,0)}

D). {(1,0),(2,4)}

9. $A = \{x: |x| < 3\ va\ x\epsilon R\}\ va\ \ B = \{x: |x| > 1\ va\ \ x\epsilon R\}$bo’lsa, ko’rsatilganlardan qaysibiri AxB ning elementi?

A). (4,2)

B). (-4,-4)

C). (4,1)

D).*(2,5)

10. A, B va C bo’shbo’lmagan 3 to’plam. A⊂B, C⊂B va A∩C=∅ bo’lib, s(B)=13 va s(A)=2, s(C)=8 bo’lsa, s(B\ $(A \cup C)$)=?

A).*1

B). 5

C). 4

D). 7

11. 30 kishilik bir sinfda boshlig’ivayordamchisi necha usulda saylanish imumkin?

A). 900

B). 885

C). *870

D). 450

12. {0,1,2,3,4} to’plamning elementlari bilan nechta turli 3 xonali son yozish mumkin?

A). 50

B).*48

C). 30
D). 20

13. 70!+30! Yig'indining oxirida nechta nol bor?
A). 5
B). *7
C). 14
D). 16

14. $A = \{x: |x| < 3,\ x\epsilon Z\},\ B = \{x: x < 6,\ \ x\epsilon N\}$to'plamlar berilgan. Quyidagilardan qaysi biri $A \times B$ ning elementi emas?
A). (3,1)
B). (-2,5)
C). *(3,1)
D). (0,4)

15. $A \times B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$bo'lsa, B\A dan A ga qancha harxil munosabat bor?
A). 1
B). 2
C). *4
D). 16

16. $\beta = \{(x,y)\backslash x^2 + x = y^2 + y\}$munosabati barcha butun x va y sonlar uchun tenglik munosabatidir. βga ko'ra 3 ning tenglik sinfi qaysi biri bo'ladi?
A). {2,-3}
B). *{-4,3}
C). {-2,3}
D). {-3,-4}

17. A={1,2,3} to'plamning ikk io'rinli almashtirishi f va g. Agar $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}vaf^\circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ bo'lsa, g^{-1} = ?$
A). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
B). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
C).* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
D). .$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

18. R da berilgan tenglik munosabati$\beta = \{(x,y): x^2 - 3y = y^2 - 3x\}$bo'lsa, 2 ning tenglik sinfi qaysi biri?
A). {0,2}
B). *{-5,2}
C). {-2,2}
D). {-2,0}

19. A={-1,1,2} va B={1,3} bo'lsa, AxB ning nuqtalarini o'z ichiga oluvchi doiraning diametric necha birlik?
A). *$\sqrt{13}$

B). $2\sqrt{13}$
C). 2
D). 5

20. R da $\beta = \{(x, y): y = 3x - 4\}$ munosabati berilgan, $\beta \cap \beta^{-1} =?$
A). (1,1)
B). *(2,2)
C). (3,3)
D). (-1,-1)

21. A, B va C bo'shbo'lmagan 3 to'plam. A⊂B, C⊂B va A∩C=∅ bo'lib, s(B)=13 va s(A)=2,
A) . *1
B}. 5
C}. 4
D). 7

22. {0,1,2,3,4} to'plamningelementlari bilan nechta turli 3 xonali son yozish mumkin?

A). 50
B). *48
C). 30
D). 2

23. $A = \{x: |x| < 3,\ x\epsilon Z\},\ B = \{x: x < 6,\ \ x\epsilon N\}$to'plamlarberilgan. Quyidagilardanqaysibiri$A \times B$ningelementiemas?
A). (3,1)
B). (-2,5)
C). *(3,1)
D). (0,4)

24. $A \times B = \{(2,1), (2,2), (2,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$bo'lsa, B\A dan A gaqanchaharxilmunosabatbor?
A). 1
B). 2
C). *4
D). 16

25. $\beta = \{(x, y) \backslash x^2 + x = y^2 + y\}$munosabatibarchabutun x va y sonlaruchuntenglikmunosabatidir. βgako'ra 3 ningtengliksinfiqaysibiribo'ladi?
A). {2,-3}
B). *{-4,3}
C). {-2,3}
D). {-3,-4}

Nazariy savollar.[7].

1.Tartiblangan juftlik nima?
2.Tartiblangan juftliklar qachon teng bo'ladi?
3.To'plamlarning to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi nima?
4.Tartiblangan n lik qanday hosil qilinadi?
5.Binar munosabatga ta'rif bering. Misollar keltiring.
6.Binar munosabatning aniqlanish sohasiga misol keltiring.
7.Binar munosabatning o'zgarish sohasiga ta'rif bering.
8.Binar munosabat inversiyai qanday xosil qilinadi?
9.Binar munosabatlar kompozisiyasini misol yordamida tushuntiring.
10.Refleksiv binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
11.Simmetrik binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
12.Tranzitiv binar munosabatni ta'riflang va misol keltiring.
13.Ekvivalentlik binar munosabatini ta'riflang va misol keltiring.
14.To'plamni bo'laklash deganda nimani tushunasiz?
15.Faktor-to'plamni tushuntiring.
16.Akslantirish (funksiya).
17. Akslantirishlar kompozisiyasi.
18. Akslantirishlar turlari.
19. Teskari akslantirish.
20. Izomorf to'plamlar.
21. Tartib munosabati va uning turlari.
22. Graf.Akslantirish qanday munosabat?
23. Akslantirishning aniqlanish sohasiga misol keltiring.
24. Akslantirishning qiymatlar to'plmi qanday to'plam?
25. Akslantirishlar kompozisiyasini tushuntiring.
26. Akslantirishlar kompozisiyasi xossalarini ayting.
27. In'ektiv akslantirishga maktab matematikasidan misol keltiring.
28. Syur'ektiv akslantirishga maktab matematikasidan misol keltiring.
29. Biektiv akslantirish maktabda qanday nomlangan? Misol keltiring.
30. Ayniy akslantirishni tushuntiring.
31. Tartib munosabatga misollar keltiring.
32.Tartib munosabat turlarini maktab matematikasidan olingan misollar yordamida tushuntiring.
33. Tartiblangan to'plamlarga misollar keltiring.
34. Butun sonlar to'plami to'la tartiblangan to'plam bo'ladi-mi?
35. Qanday binar munosabatni graf yordamida ifodalash mumkin?
36. To'plam. To'plam elementi.
37. To'plamlarning tengligi.
38. Qismto'plam, universal to'plam.
39. To'plamlar ustida amallar, xossalari.
40. To'plam to'ldiruvchisi.
41. Eyler-Venn diagrammalari.
42.Tartiblangan juftlik nima?

43.Tartiblangan juftliklar qachon teng bo’ladi?
44.To’plamlarning to’g’ri (Dekart) ko’paytmasi nima?
45.Tartiblangan n lik qanday hosil qilinadi?
46.Binar munosabatga ta’rif bering. Misollar keltiring.
47.Binar munosabatning aniqlanish sohasiga misol keltiring.
48.Binar munosabatning o’zgarish sohasiga ta’rif bering.
49.Binar munosabat inversiyai qanday xosil qilinadi?
50.Binar munosabatlar kompozisiyasini misol yordamida tushuntiring.
51.Refleksiv binar munosabatni ta’riflang va misol keltiring.
52.Simmetrik binar munosabatni ta’riflang va misol keltiring.
53.Tranzitiv binar munosabatni ta’riflang va misol keltiring.
54.Ekvivalentlik binar munosabatini ta’riflang va misol keltiring.
55.Binar munosabat inversiyai qanday xosil qilinadi?
56.Binar munosabatlar kompozisiyasini misol yordamida tushuntiring.
57.Refleksiv binar munosabatni ta’riflang va misol keltiring.
58.Simmetrik binar munosabatni ta’riflang va misol keltiring.
59.Tranzitiv binar munosabatni ta’riflang va misol keltiring.
60.Ekvivalentlik binar munosabatini ta’riflang va misol keltiring.
61.To’plamni bo’laklash deganda nimani tushunasiz?Faktor-to’plamni tushuntiring.

3- modul. Algebra.

3.1. Binar algebraik amallar turlari, xossalari. Neytral, simmetrik elementlar. Konguruensiya [1].

3.1.1-ta'rif. A^n to'plamni A ga akslantiradigan har qanday akslantirish A to'plamda berilgan n-ar yoki n-o'rinli algebraik amal deyiladi. Bu erda n-manfiy bo'lmagan butun son bo'lib, algebraik amalning rangi deyiladi. $n=0$ bo'lsa, $A^0=\varnothing$ bo'lgani uchun, 0-ar amal $f:\{\varnothing\}\to A$ ko'rinishidagi akslantirish bo'lib $\varnothing$ ni A ning birorta elementiga o'tkazadi. Boshqacha qilib aytganda 0-ar amal A to'plamning ajratilgan elementidan iborat. Bir o'rinli amal $f:A\to A$ ko'rinishdagi funksiyadan iborat bo'lishi ravshan. Bir o'rinli algebraik amal qisqalik uchun ba'zan unar amal deyiladi.[1]

$n=2$ bo'lganda ikki o'rinli algebraik amal $f:A\times A\to A$ akslantirishdan iborat bo'lib, binar algebraik amal deyiladi. Uch o'rinli algebraik amal ternar algebraik amal deyiladi. Agar ω A to'plamda berigan n-ar algebraik amal bo'lsa, A to'plamni ω- n-ar algebraik amalga nisbatan algebraik yopiq deyiladi.

3.1.2-ta'rif. A^n to'plamdan A to'plamiga akslantirish A da aniqlangan n-o'rinli qisman amal deyiladi.

Shunga o'xshash A to'plamida $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsa, $*(a,b)$ o'rniga $a*b$ yozishni kelishib olamiz.

3.1.3-ta'rif. $A\neq 0$ to'plam va unda aniqlangan $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsin. U 7holda $(A,*)$ juftlik gruppoid deb ataladi.

3.1,4-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin, u holda

a) Agar $\forall a,b\in A$ uchun $a*b=b*a$ bo'lsa, u holda $*$-amali algebraik amal A to'plamida kommutativ deyiladi;

b) Agar $\forall a,b,c\in A$ uchun $a*(b*c)=(c*b)*c$ shart bajarilsa, $*$- A to'plamida assosiativ algebraik amal deyiladi;[1]

v) Agar $\forall a\in A$ uchun shunday $e\in A$ topilib, $e*a=a$ shart bajarilsa, e element $*$ amalga nisbatan chap neytral element, agar $a*e=a$ shart bajarilsa, o'ng neytral element, agar ikkala shart ham bajarilsa neytral element deyiladi.

3.1.5-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin. Agar $e\in A$ element $*$-amalga nisbatan neytral element bo'lsa, u holda e grippoidning neytral elementi deyiladi.

1.1-teorema. Agar $(A,*)$-gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, u yagonadir.[7]

1.1-natija. Agar $(A,*)$-gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, uning barcha chap , o'ng neytral elementlari neytral elementga teng.

1.6-ta'rif. Agar $(A,*)$-gruppoidda $*$ amal qo'shish amalidan iborat bo'lsa, gruppoid additiv gruppoid; agar $*$ amal, ko'paytirish amali bo'lsa, gruppoid mul'tiplikativ gruppoid deyiladi.

Odatda qo'shish amali «+» orqali, ko'paytirish amali «•» orqali belgilanadi. Qo'shish amaliga nisbatan neytral elementni nol deb ataymiz va «0» orqali belgilaymiz. Ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element birlik element deyilib «1» orqali belgilanadi.

3.1.7-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin, u holda $a \in A$ element va $\forall b, c \in A$ elementlar uchun $a * b = a * c$ tenglikdan $b = c$ kelib chiqsa, u holda a element $(A,*)$ gruppoidning <u>chap regulyar elementi</u>, $b * a = c * a$ shartdan $b = c$ kelib chiqsa, a element $(A,*)$ gruppoidning <u>o'ng regulyar elementi</u> deyiladi. Ham chap, ham o'ng regulyar element <u>regulyar element</u> deyiladi.

Agar $(A,*)$-gruppoidda $*$-amal qo'shish bo'lsa, «simmetrik» termini, «qarama-qarshi» termini bilan; agar $*$-amali ko'paytirish bo'lsa, «teskari» termini bilan almashtiriladi.

3.1.8-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid, R esa A to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsin. Agar $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ elementlar uchun $a_1 R b_1$ va $a_2 R b_2$ shartlardan $(a_1 * a_2) R (b_1 * b_2)$ kelib chiqsa, u holda R-ekvivalentlik munosabati $(A,*)$ gruppoidda <u>kongruensiya</u> deyiladi.[1]

3.2.Algebra. Algebralar gomomorfizmi. Algebraosti va uning xossalari. Faktor-algebra

3.2.1-ta'rif. $(A,*)$-gruppoidda $*$-assosiativ amal bo'lsa, bunday gruppoid <u>yarimgruppa</u> deyiladi.

Neytral elementga ega bo'lgan yarimgruppa <u>monoid</u> deyiladi.

3.2.1-teorema. Monoidda ihtiyoriy element ko'pi bilan bitta simmetrik elementga ega.[1]

3.2.1-natija. Monoidda a element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, a elementga chap, o'ng simmetrik elementlar a ga simmetrik bo'lgan elementga teng bo'ladi.

3.2.2-teorema. $(A,*,e)$ - monoidda $a \in A$ elementga $a', b \in A$ elementga esa b'- simmetrik element bo'lsin, u holda $a * b$ elementga $b' * a'$ simmetrik element bo'ladi.

3.2.3-teorema. $(A,*,e)$ - monoid berilgan bo'lsin, agar $a \in A$ element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, bunday element regulyar elementdir.

3.2.2-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid va $B \subset A$ bo'lsin. Agar $\forall b_1, b_2 \in B$ elementlar uchun $b_1 * b_2 \in B$ bo'lsa, B to'plam $*$ algebraik <u>amalga nisbatan algebraik yopiq</u> deyiladi. $(B,*)$ juftlik esa $(A,*)$ gruppoidning <u>qism gruppoidi</u> yoki <u>gruppoidosti</u> deyiladi.[7]

3.2.3-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plam va A da bajariladigan algebraik amallar to'plami Ω berilgan bo'lsin (A,Ω)- juftlik algebra deyiladi. A- to'plam algebraning bosh to'plami, Ω-algebraning bosh amallari to'plami deyiladi.

(A,Ω) to'plam berilgan bo'lsa, A to'plam Ω dagi barcha amallarga nisbatan algebraik yopiq bo'lishi ravshan. Algebradagi Ω-amallar to'plami chekli, ya'ni $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ bo'lsa, $(A,\{\omega_1,...,\omega_n\})$ o'rniga yozuvni ihchamlashtirish maqsadida (A,Ω) - deb yozishga kelishib olamiz.

3.2.4-ta'rif. (A,Ω) va (B,Ω') algebralarning amallari to'plamlari Ω va Ω' lari orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, Ω to'plamidagi har bir ω n-ar amalga nisbatan Ω' dan ω' n-ar amal mos qo'yilgan bo'lsa, bu algebralar bir hil turli algebralar deyiladi.

Agar (A,Ω) algebra berilgan bo'lsa, Ω-to'plamdagi amallarning ranglaridan iborat to'plam algebraning turi deyiladi. Xususan $(A,\varpi_1,...,\omega_n)$ algebraning turi $\{r(\omega_1),...,r(\omega_n)\}$ to'plamdan iborat. Bir hil turdagi algebralarning bir-biriga mos keladigan amallarining ranglari bir hil bo'lishi ravshan.

Algebradagi amallar to'plami chekli bo'lganda, bu algebraning turini ketma-ketlik sifatida yozish maqsadga muvofiq, ya'ni $(A,\varpi_1,...,\omega_n)$ algebraning turi $(r(\omega_1),...,r(\omega_n))$ ketma-ketlik ko'rinishida ifoda qilinadi.[7]

(A,Ω) va (B,Ω') bir hil turli algebralar berilgan bo'lsin. $\forall\omega \in \Omega$ amalga $\omega' \in \Omega'$ amal mos qo'yilgan deb faraz qilaylik. Agar $\varphi : A \to B$, akslantirish va $\forall a_1,...,a_n \in A$ elementlar uchun $\varphi(\omega(a_1,...,a_n)) = \omega'(\varphi(a_1),...,\varphi(a_n))$ tenglik bajarilsa, φ akslantirish ω amalni saqlaydi. ω amal A dagi ajratilgan element, ya'ni nol o'rinli amal bo'lsa, u holda ω ga mos keladigan ω' ham B ning ajratilgan elementi bo'ladi, $\varphi(\omega) = \omega'$.

3.2.5-ta'rif. (A,Ω), (B,Ω') algebralar berilgan bo'lsin. Ω dagi barcha amallarni saqlaydigan $\varphi : A \to B$ akslantirish (A,Ω) agebraning (B,Ω) algebraga gomomorfizmi deyiladi.

3.2.6-ta'rif. $\varphi : A \to B$ akslantirish (A,Ω) agebraning (B,Ω') algebraga gomomorfizmi bo'lsin. U holda agar φ- in'ektiv akslantirish bo'lsa, monomorfizm, φ- syur'ektiv akslantirish bo'lsa, epimorfizm, φ- biektiv akslantirish bo'lsa izomorfizm deyiladi. Monomorf akslantirishni izomorf joylashtirish deb ham yuritiladi.

3.2.7-ta'rif. Algebrani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, algebrani o'zini o'ziga izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

3.2.8-ta'rif. (A,Ω) algebrani (B,Ω') algebraga akslantiradigan kamida bitta izomorfizm mavjud bo'lsa, u holda (A,Ω) algebra (B,Ω') algebraga izomorf deyiladi.

3.2.4-teorema. (A,Ω_1), (B,Ω_2), (C,Ω_3) algebralar berilgan bo'lib, g A to'plamini B to'plamga, φ esa B to'plamini C to'plamga akslantirish, $\varphi \circ g$ esa bu akslantirishlarning kompozisiyasi bo'lsin. U holda φ va g lar gomomorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning gomomorfizm bo'lishi, φ va g lar epimorfizm bo'lishidan

$\varphi\circ g$ ning epimorfizm bo'lishi; φ va g lar monomorfizm bo'lishidan $\varphi\circ g$ ning monomorfizm bo'lishi, φ va g larning izomorfizm bo'lishidan $\varphi\circ g$ ning izomorfizm bo'lishi kelib chiqadi.

3.2.5-teorema. Agar (A,Ω_1) algebraning (B,Ω_2) algebraga izomorfizmi bo'lsa, u holda φ ga teskari bo'lgan φ^{-1} akslantirish (B,Ω_2) algebraning (A,Ω_1) algebraga izomorfizmidir.

3.2.2-natija. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

3.2.9-ta'rif. (A,Ω_1) va (A,Ω_2) bir hil tipli algebralar berilgan bo'lib, $B\subset A$ bo'lsin. Agar $\forall\omega_1\in\Omega$ n-ar algebraik amalga Ω_2 dan mos keladigan n-ar algebraik amalni ω_2 orqali belgilaymiz. Agar $\forall b_1,...,b_n\in B$ uchun $\omega_2(b_1,...,b_n)=\omega_1(b_1,...,b_n)$ tenglik bajarilsa, u holda ω_2 n-ar algebraik amal ω_1 n-ar algebraik amalning B to'plami bo'yicha cheklangani (B,Ω_1) algebra esa (A,Ω_2) algebraning qism algebrasi yoki algebraosti deyiladi.

3.2.6-teorema. Algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik, tranzitiv munosabat, ya'ni noqat'iy tartib munosabatdir.

Algebraosti munosabati tranzitiv bo'lishi ham bevosita tekshiriladi. Buni mustaqil isbotlash uchun talabalarga qoldiramiz.

Shunday qilib, algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik va tranzitiv munosabat, ya'ni, noqat'iy tartib munosabat ekan.

$\{(A_\alpha,\Omega_\alpha)\,|-\alpha\in M\}$ to'plam (B,Ω) algebraning algebraostilari to'plami bo'lsin. Algebraostining ta'rifiga ko'ra har bir (A_α,Ω_α) algebra (B,Ω) algebra bilan bir hil turli va $\forall\omega_2$ n-ar algebraik amal Ω dagi qandaydir ω-ar algebraik amalning cheklanganidir.

Faraz qilaylik $\bigcap\limits_{\alpha\in M}A_\alpha\neq\varnothing$ bo'lsin, u holda $\forall a_1,...,a_n\in\cap A_\alpha$ uchun $\omega_\alpha(a_1,...,a_n)=\omega(a_1,...,a_n)\in\cap A_\alpha$ bo'ladi. Demak, $\bigcap\limits_{\alpha\in M}A_\alpha$ - to'plam ω-ar algebraik amalning $\bigcap\limits_{\alpha\in M}A_\alpha$ dagi cheklanganlarini belgilasak: $(\bigcap\limits_{\alpha\in M}A_\alpha,\Omega')$ algebra (B,Ω) algebraning algebraosti bo'lishi ravshan. Bu algebrani (A_α,Ω_α)-algebraostilarning kesishmasi deb ataymiz.

3.2.7-teorema. Agar (A,Ω) algebrada hech bo'lmaganda bitta nol o'rinli algebraik amal bo'lsa, bu algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilar kesishmasi yana (A,Ω) ning algebraosti bo'ladi.

3.2.3-natija. (A,Ω) algebra va $B\neq\varnothing$ to'plam A ning to'plamosti berilgan bo'lsin. $\{(A_\alpha,\Omega_\alpha)\,|-\alpha\in M\}$ to'plam esa (A,Ω) algebraning $B\subset A_\alpha$ shartni qanoatlantiradigan barcha algebraostilari bo'lsin. U holda barcha (A_α,Ω_α)-algebraostilarning kesishmasi (A,Ω) algebraning algebraosti bo'ladi. Bu algebraosti B to'plam yaratgan algebraosti deyiladi.

A to'plam va unda bajarilgan n-ar algebraik amal, ~-ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1,...,a_n\in A$ va $\forall b_1,...,b_n\in A$ elementlar uchun $a_i\sim b_i,\ i=1,...,n$ shartdan $\omega(a_1,...,a_n)\sim\omega(b_1,...,b_n)$ kelib chiqsa, ~-ekvivalentlik munosabati ω-n-ar algebraik amalga nisbatan kongruensiya deyiladi. $A/\sim$ to'plam A ning ekvivalentlik munosabatiga nisbatan faktor to'plami bo'lsin. $[a_1],...,[a_n]$ lar $A/\sim$ ning ixtiyoriy elementlari bo'lsin. U holda $\forall([a_1],...,[a_n])$ n likga $[\omega(a_1,...,a_n)]$ ekvivalentlik sinfini mos qo'yadigan akslantirish $A/\sim$ to'plamda aniqlangan n-ar algebraik amaldir. Haqiqatdan $[\omega(a_1,...,a_n)]$ sinf $[a_1],...,[a_n]$ ekvivalentlik sinflaridan olingan a_1 vakillarga bog'liq emas. CHunki, agar $\upsilon = 1,...,n$ lar uchun $b_i \in (a_i)$, ya'ni $b_i \sim a_i$ bo'lsa ~-ekvivalentlik munosabati kongruensiya bo'lgani uchun, $\omega(a_1,...,a_n) \sim \omega(b_1,...,b_n)$ bo'ladi, u holda $[\omega(a_1,...,a_n)] \sim [\omega(b_1,...,b_n)]$

$A/\sim$ faktor to'plamda aniqlangan bu amalning ~-kongruensiya orqali ω-n-ar algebraik amal bilan assosirlangan amal deb ataymiz va $\omega*$ orqali belgilaymiz. SHunday qilib $\forall[a_1],...,[a_n] \in A/\sim$ uchun $\omega*([a_1],...,[a_n]) = ([\omega(a_1,...,a_n)])$.

3.2.10-ta'rif. (A,Ω) algebra va ~ Ω dagi har bir amalga nisbatan kongruensiya bo'lsin. $\Omega*$ to'plam esa $A/\sim$ faktor-to'plamda aniqlangan va Ω dagi amallar bilan assosirlangan barcha amallar to'plami bo'lsin. U holda $(A/\sim,\Omega*)$- algebra (A,Ω) algebraning ~- kongruensiya bo'yicha faktor- algebrasi deyiladi.

3.2.8-teorema. $\varphi: A \to B$ akslantirish (A,Ω_1) algebraning (B,Ω_2) algebraga epimorfizmi bo'lsin. U holda A to'plamda aniqlangan $R = \{(x'x'') \mid \forall x', x'' \in A, \varphi(x') = \varphi(x'')\}$- munosabat Ω_1 to'plamdagi har bir amalga nisbatan kongruensiya bo'lib, A/R to'plam Ω_1^* amallar to'plamiga nisbatan (A,Ω_1) algebraning faktor algebrasi bo'ladi. Bu algebrani $(A/R,\Omega*)$ orqali belgilaymiz.

3.2.9-teorema. $\varphi: A \to B$ akslantirish (A,Ω_1) algebraning (B,Ω_2) algebraga epimorfizmi, $R = \{(x'x'') \mid \forall x', x'' \in A, \varphi(x') = \varphi(x'')\}$-esa A da aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo'lsin. U holda $(A/R,\Omega*)$ faktor algebra (B,Ω_1) algebraga izomorfdir.

3.2.10-teorema. $(A,*)$ gruppoid, ~-esa, A dagi kongruensiya munosabati $A/\sim$-A to'plamning ~-ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor-to'plami bo'lsin. U holda $\forall[a_1],[a_2] \in A/\sim$ ekvivalentlik sinflari uchun $[a_1]_*[a_2] = [a_1 * a_2]$ tenglik bilan aniqlanadigan munosabat A/N to'plamda algebraik amal bo'ladi.

3.3 Gruppa. Halqa. Xossalari. Gruppalar, halqalar gomomorfizmi .

3.3.1-ta'rif. Bizga $(2,1)$ turli $(G,*,1)$ algebra berigan bo'lib quyidagi shartlar bajarilsin.[5]

1. $*$-binar algebraik amal assosiativ, ya'ni $\forall a,b,c \in G$ uchun $(a*b)*c = a*(b*c)$ bo'lsin.
2. G da neytral element mavjud, ya'ni $\forall a \in G$ uchun shunday $e \in G$ topilib, $e*a = a$ shart bajarilsin.
3. Har qanday $a \in G$ uchun $a'*a = e$ bo'lsin.

U holda $(G,*,')$- algebra gruppa deyiladi.

Gruppadagi amal kommutativ, ya'ni $\forall a,b \in G$ uchun $a*b = b*a$ shart bajarilsa, bunday gruppa abelь gruppasi deyiladi. Bunday gruppalar, gruppalar nazariyasidagi yuqori darajali tenglamalarni echishi muamolarini qo'ygan I. G. Abelь sharafiga abelь gruppalari deb nomlangan.

Har bir $a \in G$ element uchun $a' \in G$ element a elementga chapdan simmetrik deyiladi. Gurppadagi elementlar soni uning tartibi deyiladi. Agar gruppa tartibi natural sondan iborat bo'lsa, bunday gruppa chekli tartibli gruppa, aks holda cheksiz tartibli gruppa deyiladi.

Gruppada $*$- binar algebraik amal "+"- qo'shish amali yoki "$\bullet$"- ko'paytirish amali bo'lishi mimkin. Bu amallarga nisbatan qo'llaniladigan tushunchalar quyidagi jadvalda keltirilgan.

$*$	$\bullet$	$+$
1) binar amal 2) neytral element 3) simmetrik Element	ko'paytirish birlik element teskari element	qo'shish nol qarama-qarshi element

Birlik elementni ko'pincha e yoki 1 orqali, nolni "0"- orqali, a ga teskari elementni a^{-1}, a ga qarama-qarshi elementni $-a$ orqali belgilash qabul qilingan.

Gruppadagi binar algebraik amal "$\bullet$" bo'lsa, bunday gruppani mulьtiplikativ gruppa, "+" bo'lsa additiv gruppa deymiz. Gruppadagi amalni ko'paytirish deb qarash yozuvni ixchamlashtiradi, shu sabab, mulьtiplikativ gruppaning terminlaridan foydalanamiz.

3. 3.1-teorema. Gruppadagi ixtiyoriy elementga chap teskari element, shu elementga o'ngdan ham teskari bo'ladi.

3.3.2-teorema. Gruppada o'ng birlik element, chap birlik element bo'ladi.

3.3.3-teorema. Gruppada birlik element yagonadir.

3.3.4-teorema. Gruppada ixtiyoriy element uchun yagona teskari element mavjud.

3.3.5-teorema. Gruppaning ixtiyoriy a va b elementlari uchun $ax = b$ va $ya = b$ tenglamalarning har biri yagona echimga ega.

3.3.1-natija. Gruppaning ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun $a \bullet b = a \bullet c$ yoki $b \bullet a = c \bullet a$ bo'lsa $a = c$ bo'ladi.

3.3.2-natija. Gruppada ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun $a \bullet b = e$ yoki $c \bullet b = e$ bo'lsa, $b = e = c$ bo'ladi.

3.3.3-natija. Gruppada ixtiyoriy e element uchun $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, ya'ni a^{-1} elementning teskarisi a elementdir.

3.3.4-natija. Gruppaning ixtiyoriy a,b elementlar uchun $a \bullet b = e$ bo'lsa a va b elementlar bir-biriga teskari elementlardir.

Bu natijalarning isboti yuqoridagi teoremalardan bevosita kelib chiqadi, shuning uchun ularning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida qoldiramiz.

Gruppalar nazariyasida gomomorfizm, izomorfizm, gruppaosti tushunchalari algebradagi mos tushunchalarning xususiy xollari bo'lib, ular quyidagicha kiritiladi: $(G,\bullet,^{-1})$ va $\left(H,\bullet,^{-1}\right)$ gruppalar berilgan bo'lib, $h: G \to H, G$ ni H ga akslantirish bo'lsin. U holda $\forall a,b \in G$ uchun $h(a \bullet b) = h(a) \bullet h(b)$ va $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$ shartlar bajarilsa, h- gomomorf akslantirish deyiladi. Agar h-in'ektiv bo'lsa, monomorf, syur'ektiv bo'lsa, epimorf, biektiv bo'lsa, izomorf akslantirish deyiladi.

3.3.2-ta'rif. $(G,\bullet,^{-1}), (H,\bullet,^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. Agar G ni H ga akslantiradigan kamida bitta izomorf akslantirish mavjud bo'lsa bu gruppalar izomorf deyiladi va $G \cong H$ orqali belgilanadi.

3.3.3-ta'rif. Gruppani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, o'ziga o'zini izomorf akslantirish aftomorfizm deyiladi.

3.3.6-teorema. $(G,\bullet,^{-1}), (H,\bullet,^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. G ni H ga akslantiradigan $\varphi: G \to H$-akslantirish gomomorf akslantirish bo'lishi uchun G dagi binar amalni saqlash etarli, ya'ni $\forall a,b \in G$ uchun $\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$ bo'lishi etarli.

3.3.7-teorema. Gruppalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

3.3.4-ta'rif. Gruppaning gruppadagi amallariga nisbatan yopiq bo'sh bo'lmagan to'plamostisi gruppaosti deyiladi.

$(G,\bullet,^{-1})$-gruppa berilgan bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $H \neq \varnothing$ va $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a,b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b \in H$ va $a^{-1} \in H$ bo'lishi etarli. U holda $a \bullet a^{-1} = e \in H$. Ya'ni gruppaning neytral elementi gruppaosti uchun ham neytral element ekan. $H \subset G$ bo'lganligi uchun gruppaostida ham "$\bullet$" binar algebraik amal assosiativdir. SHunday qilib, gruppaosti ham o'z navbatida gruppa hosil qilar ekan.

3.3.8-teorema. $(G,\bullet,^{-1})$ gruppa berilgan bo'lsin $H \neq \varnothing$ $H \subset G$ to'plamosti gruppaosti bo'lishi uchun $\forall a,b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi zarur va etarli.

3.3.9-teorema. Gruppaosti bo'lish munosabati noqat'iy tartib munosabatdir.

3.3.10-teorema. $(G,\bullet,^{-1})$ gruppaning gruppaostilaridan iborat bo'sh bo'lmagan $\mathcal{B}$ to'plamning barcha elementlarining kisishmasi yana gruppaosti bo'ladi.

$(G,\bullet,^{-1})$ gruppa va G ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi M birilgan bo'lsin. $M \subset G\alpha$ shartni qanotlantiradigan $(G,\bullet,^{-1})$ ning barcha $(G\alpha\bullet^{-1})$ larning kisishmasi M to'plam yaratgan gruppaosti deyiladi va bu gruppaosti $(<M>^{-1},\bullet)$ orqali belgilanadi. Agar M-bir elementli to'plam bo'lsa, bu gruppa siklik gruppa deyiladi.

3.3.11-teorema. (G_1,Ω_1), (G_2,Ω_2), (G,Ω)- bir hil turli algebralar berilgan bo'lib, $G_1 \cong G_2$, (G_2,Ω_2)- algebra (G,Ω)- algebraning algebraostisi bo'lsin. U holda (G_1,Ω_1)- qism algebradan iborat qism algebraga ega bo'lgan (G,Ω) algebraga izomorf (G_3,Ω_3) algebra mavjud.

3.**3.12-teorema.** $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lib, a,b,c lar halqaning ixtiyoriy elementlari bo'lsin, u holda

(I) agar $a+b=a$ bo'lsa, $b=0$.

(II) agar $a+b=0$ bo'lsa, $a=-b$.

(III) $-(-a)=a$.

(IV) $0\bullet a = a\bullet 0 = 0$.

(V) $(-a)(-b)=a\bullet b$.

(VI) $(a-b)\bullet c = ca-bc$.

(VII) $c(a-b)=ca-cb$.

3.3.5-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ va $(K',+,-,\bullet)$ halqalar berilgan bo'lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K,+,-,\bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi: K \to K'$ akslantirish gomomorf akslantirish deyiladi.

Odatdagidek φ-in'ektiv bo'lsa, monomorf, syurъektiv bo'lsa epimorf, biektiv bo'lsa izomorf akslantirish deyiladi. Halqani o'zini-o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

Huddi algebradagidek halqalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabati bo'lib, izomorf halqalar $(K,+,-,\bullet) \cong (K',+,-,\bullet)$ orqali belgilanadi.

3.3.6-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lsin. L esa K ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsin.

Agar L to'plam K dagi $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo'lsa, ya'ni $\forall a,b \in L$ uchun $a+b \in L$, $a\bullet b \in L$, $-a \in L$ shartlar bajarilsa $(L,+,-,\bullet)$- algebra $(K,+,-,\bullet)$ halqaning halqaostisi deyiladi.

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L \subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

3.3.13-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa birlik elementli halqa deyiladi.

Agar halqada $a \neq 0$ va $b \neq 0$ elementlar uchun $a\bullet b=0$ bo'lsa, a nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham o'ng bo'luvchisi bo'lgan element nolning bo'luvchisi deyiladi. Biz asosan birlik eleentga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa birlik elementli halqa deyiladi.

Agar halqada $a \neq 0$ va $b \neq 0$ elementlar uchun $a \bullet b = 0$ bo'lsa, a nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham o'ng bo'luvchisi bo'lgan element nolning bo'luvchisi deyiladi. Biz asosan birlik elementga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

3.3.7-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa butunlik sohasi deyiladi.

.

3.3.14-teorema. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lib, a,b,c lar halqaning ixtiyoriy elementlari bo'lsin, u holda

(I) agar $a+b=a$ bo'lsa, $b=0$.

(II) agar $a+b=0$ bo'lsa, $a=-b$.

(III) $-(-a)=a$.

(IV) $0 \bullet a = a \bullet 0 = 0$.

(V) $(-a)(-b) = a \bullet b$.

(VI) $(a-b) \bullet c = ca - bc$.

(VII) $c(a-b) = ca - cb$.

3.3.8-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ va $(K',+,-,\bullet)$ halqalar berilgan bo'lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K,+,-,\bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi : K \to K'$ akslantirish gomomorf akslantirish deyiladi.

Odatdagidek φ-in'ektiv bo'lsa, monomorf, syurъektiv bo'lsa epimorf, biektiv bo'lsa izomorf akslantirish deyiladi. Halqani o'zini-o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

Huddi algebradagidek halqalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabati bo'lib, izomorf halqalar $(K,+,-,\bullet) \cong (K',+,-,\bullet)$ orqali belgilanadi.

Halqaosti tushunchasi ham, algebraosti tushunchasi kabi kiritiladi.

3.3.9-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lsin. L esa K ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsin.

Agar L to'plam K dagi $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo'lsa, ya'ni $\forall a,b \in L$ uchun $a+b \in L,\quad a \bullet b \in L,\quad -a \in L$ shartlar bajarilsa $(L,+,-,\bullet)$-algebra $(K,+,-,\bullet)$ halqaning halqaostisi deyiladi.

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L \subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

3.3.15-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

Halqaosti tushunchasi ham, algebraosti tushunchasi kabi kiritiladi.

3.3.3.10-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lsin. L esa K ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsin.

Agar L to'plam K dagi $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo'lsa, ya'ni $\forall a,b \in L$ uchun $a+b \in L, \quad a \bullet b \in L, \quad -a \in L$ shartlar bajarilsa $(L,+,-,\bullet)$-algebra $(K,+,-,\bullet)$ halqaning <u>halqaostisi</u> deyiladi.

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L \subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

3.16-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

3.3.11-ta'rif. Agar $(K,+,-,\bullet)$ $(2,1,2)$ turli algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsa

(1) $(K,+,-,)$ abelь gruppasi;

(2) $(K,\bullet)$-yarim gruppa;

(3) $\forall a,b,c \in K$ uchun $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$ va $(b+c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$ u holda $(K,+,-,\bullet)$- algebra <u>halqa</u> deyiladi.

$(K,+,-,)$ additiv gruppaning neytral elementi <u>halqaning noli</u> deyiladi va 0 orqali belgilanadi.

Z halqa unda bajarilgan "$\bullet$"-amalining xossalariga mos ravishda nomlanadi. Agar ko'paytirish amali assosiativ bo'lsa, halqa <u>assosiativ halqa</u>, ko'paytirish amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa <u>birlik elementli halqa</u> deyiladi.

Agar halqada $a \neq 0$ va $b \neq 0$ elementlar uchun $a \bullet b = 0$ bo'lsa, a nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham o'ng bo'luvchisi bo'lgan element <u>nolning bo'luvchisi</u> deyiladi. Biz asosan birlik elementga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

3.3.12-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa <u>butunlik sohasi</u> deyiladi.

3.3.13-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ va $(K',+,-,\bullet)$ halqalar berilgan bo'lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K,+,-,\bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi : K \to K'$ akslantirish <u>gomomorf akslantirish</u> deyiladi.

Odatdagidek φ-in'ektiv bo'lsa, <u>monomorf,</u> syurъektiv bo'lsa <u>epimorf</u>, biektiv bo'lsa <u>izomorf</u> akslantirish deyiladi. Halqani o'zini-o'ziga gomomorf akslantirish <u>endomorfizm</u>, izomorf akslantirish esa <u>avtomorfizm d</u>eyiladi.

Huddi algebradagidek halqalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabati bo'lib, izomorf halqalar $(K,+,-,\bullet) \cong (K',+,-,\bullet)$ orqali belgilanadi.

3.3.14-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ

3.3.17-teorema. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lib, a,b,c lar halqaning ixtiyoriy elementlari bo'lsin, u holda

(I) agar $a+b=a$ bo'lsa, $b=0$.

(II) agar $a+b=0$ bo'lsa, $a=-b$.

(III) $-(-a)=a$.

(IV) $0 \bullet a = a \bullet 0 = 0$.

(V) $(-a)(-b) = a \bullet b$.
(VI) $(a-b) \bullet c = ca - bc$.
(VII) $c(a-b) = ca - cb$.

3.3.14-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa butunlik sohasi deyiladi.

3.3.15-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ va $(K',+,-,\bullet)$ halqalar berilgan bo'lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K,+,-,\bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi : K \to K'$ akslantirish gomomorf akslantirish deyiladi.

3.3.16-ta'rif. $(K,+,-,\bullet)$ halqa berilgan bo'lsin**.** L esa K ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsin.

Agar L to'plam K dagi $+,-,\bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo'lsa, ya'ni $\forall a,b \in L$ uchun $a+b \in L, \quad a \bullet b \in L, \quad -a \in L$ shartlar bajarilsa $(L,+,-,\bullet)$-algebra $(K,+,-,\bullet)$ halqaning halqaostisi deyiladi**.**

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L \subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

3.3.18-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

0-variant - echib korsatilgan misollar.

3.1-misol. N -natural sonlar to'plami «•»- N dagi ko'paytirish amali bo'lsa, u holda $(N\bullet)$-gruppoiddir.Masalan (R,+) gruppoid uchun neytral elementi 0; $(R,\bullet)$-gruppoidning neytral elementi 1. Bu erda R-haqiqiy sonlar to'plami, +, •-R dagi qo'shish va ko'paytirish amallaridir [4],[5].

3.2-misol. $\mathcal{B}$(A) - A to'plamning barcha to'plamostilari bo'lsin, u holda $\mathcal{B}$(A) to'plamlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppoid bo'lib, uning neytral elementi ∅ to'plamdir. $\mathcal{B}$(A) - to'plamlarning kesishmasi amaliga nisbatan ham gruppoid bo'lib, uning neytral elementi A-to'plamdan iborat.

3.3-misol. $(Z,+)$ gruppoidda $\forall Z_1, Z_2 \in Z$ uchun $(Z_1 R Z_2) \Leftrightarrow (Z_1 - Z_2 \vdots 3)$ qonun bilan aniqlangan ekvivalentlik kongruensiyadir. Haqiqatdan, $x_1 R y_2$ va $x_2\, R y_2$ bo'lsin, ya'ni $x_1 - y_1 \vdots 3$ va $x_2 - y_2 \vdots 3$ u holda $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$ ham 3 ga bo'linishi ravshan.

3.4-misol. $(R,\bullet)$- gruppoidda $\forall a \in R$, $a \neq 0$ element uchun a^{-1} element simmetrik elementdir.[7]

Agar $(A,*)$-gruppoidda $*$-amal qo'shish bo'lsa, «simmetrik» termini, «qarama-qarshi» termini bilan; agar $*$-amali ko'paytirish bo'lsa, «teskari» termini bilan almashtiriladi.

3.5-misol. Natural sonlar to'plami qo'shish amaliga nisbatan yarimgruppadir. Kelgusida bu yarimgruppa $(N,+)$ orqali belgilanadi.

3.6-misol. Natural sonlar to'plami ko'paytirish amaliga nisbatan monoiddir. Bu monoidda $(N,\bullet,1)$ tartiblangan uchlik ko'rinishida belgilanadi.

3.7-misol. Haqiqiy sonlar to'plami va unda bajariladigan «•», «+» amallari 0-o'rinli amallar 0, 1 lar bilan birga, ya'ni $(R,+,\bullet,0,1)$-to'plam algebradir. Bu algebraning bosh amallari to'plami $(+,\bullet,0,1)$ bo'lib, darajaga ko'tarish, ayirish amallarini hosilaviy amallar deb qarashimiz mumkin.

3.8-misol. $(A,*)$-gruppoidning turi $\{2\}$ to'plamdan, $(A,*,e)$- monoidning turi esa $\{2,0\}$ to'plamdan iborat.

3.9-misol. R - haqiqiy sonlar to'plami R^+ musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin $(R^+,\bullet,1)$ va $(R,+,0)$ algebralar $(2,0)$ tipli algebralar bo'lib, $\varphi: R^+ \to R,\quad \varphi(x) = \lg x$ akslantirish birinchi algebraning ikkinchi algebraga izomorf akslantirishdir. Haqiqatdan φ- biektiv akslantirish bo'lib $\varphi(a \bullet b) = \lg\,(a \bullet b) = \lg a + \lg b = \varphi(a) + \varphi(b)$.

3.10-misol. R^+-musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. R^+ haqiqiy sonlarni ko'paytirish va teskarisini olish amallariga nisbatan mulьtiplikativ gruppa tashkil qiladi.

R - haqiqiy sonlar to'plami esa qo'shish va qarama- qarshisini olish amallariga nisbatan additiv gruppa hosil qiladi. Bu gruppalarni mos ravishda $(R^+,\bullet,-1)$ va $(R,+,-)$ orqali belgilaylik. $\varphi: R \to R^+\quad \varphi(x) = ex$-biektiv akslantirish bo'lib $e\forall x_1, x_2 \in R$ uchun $\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \bullet e^{x_2} - \varphi(x_1) \bullet \varphi(x_2)$.

3.11-misol. R^+-musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. R^+ haqiqiy sonlarni ko'paytirish va teskarisini olish amallariga nisbatan mulьtiplikativ gruppa tashkil qiladi.

R - haqiqiy sonlar to'plami esa qo'shish va qarama- qarshisini olish amallariga nisbatan additiv gruppa hosil qiladi. Bu gruppalarni mos ravishda $(R^+,\bullet,-1)$ va $(R,+,-)$ orqali belgilaylik. $\varphi: R \to R^+\quad \varphi(x) = ex$-biektiv akslantirish bo'lib $e\forall x_1, x_2 \in R$ uchun $\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \bullet e^{x_2} - \varphi(x_1) \bullet \varphi(x_2)$.

.

3.12 G = $\{\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \mid$ a, b $\in$ Q, $a^2 + b^2 > 0\}$ to'plamni multiplikativ gruppa tashkil etishini isbotlang.

Yechish. . Multiplikativ gruppa ta'rifiga ko'ra berilgan to'plamda quyidagi shartlar bajarilishini tekshiramiz:

1) $\forall(A_1,A_2 \in G), \exists!(A \in G)\ (A_1 \cdot A_2 = A)$;

2) $\forall(A,A_1,A_2 \in G),\ ((A \cdot A_1) \cdot A_2) = A \cdot (A_1 \cdot A_2))$;

3) $\forall(A \in G), \exists!(E \in G)\ (A \cdot E = A)$;

4) $\forall(A\in G),\exists\ (A'\in G)\ (A\cdot A'=E)$.

1. Berilgan G to'plamda ko'paytirish amalini aniqlaymiz. A_1, A_2 berilgan G to'plamning ihtiyoriy ikkita elementi bo'lsin va

$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ bo'lsin, u holda

$$A_1\cdot A_2=\begin{bmatrix} a_1\cdot a_2+3b_1\cdot b_2 & a_1\cdot 3b_2+3b_1\cdot a_2 \\ b_1\cdot a_2+a_1\cdot b_2 & b_1\cdot 3b_2+a_1\cdot a_2 \end{bmatrix}=$$

$=\begin{bmatrix} a_1\cdot a_2+3b_1\cdot b_2 & 3(a_1\cdot b_2+b_1\cdot a_2) \\ a_1\cdot b_2+b_1\cdot a_2 & a_1\cdot a_2+3b_1\cdot b_2 \end{bmatrix}$. [6]. Hosil bo'lgan matrisani $\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}=A$ orqali belgilaymiz. Demak berilgan G to'plamda ko'paytirish amali aniqlangan. Ta'rifga ko'ra <G;™> algebra multiplikativ gruppoid.

1. Berilgan G to'plamda har qanday uchta A,A_1,A_2 elementlar uchun $(A\cdot A_1)\cdot A_2)=A\cdot(A_1\cdot A_2)$ tenglik bajarilishini isbotlaymiz:

$$((A\cdot A_1)\cdot A_2)=(\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix})\cdot\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}=$$

$$=(\begin{bmatrix} aa_1+3bb_1 & 3ab_1+3ba_1 \\ ba_1+ab_1 & 3bb_1+aa_1 \end{bmatrix})\cdot\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (aa_1)a_2+(3bb_1)a_2+(3ab_1)b_2+(3ba_1)b_2 & (aa_1)3b_2+(3bb_1)3b_2+(3ab_1)a_2+(3ba_1)a_2 \\ (ba_1)a_2+(ab_1)a_2+(3bb_1)b_2+(aa_1)b_2 & (ba_1)3b_2+(ab_1)3b_2+(3bb_1)a_2+(aa_1)a_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a(a_1a_2)+3b(b_1a_2)+a(3b_1b_2)+3b(a_1b_2) & a(3a_1b_2)+3b(3b_1b_2)+a(3b_1a_2)+3b(a_1a_2) \\ b(a_1a_2)+a(b_1a_2)+b(3b_1b_2)+a(a_1b_2) & b(3a_1b_2)+a(3b_1b_2)+b(3b_1a_2)+a(a_1a_2) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1a_2+3b_1b_2 & 3a_1b_2+3b_1a_2 \\ b_1a_2+a_1b_2 & 3b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot(\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix})=$$

$=A\cdot(A_1\cdot A_2)$. Demak, G to'plamda aniqlangan ko'paytirish amali assosiativlik xossasiga ega ekan. Ta'rifga ko'ra <G;™> multiplikativ yarimgruppa.

2. G to'plamda har qanday A element uchun $A\cdot E=A$ shartni qanoatlantiradigan E element mavjudligini isbotlaymiz.

$A=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix}$ bo'lsin. U xolda $A\cdot E=A$ tenglikdan $\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$ tenglikni, undan esa $\begin{bmatrix} ax+3by & 3ay+3bx \\ bx+ay & 3by+ax \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$ tenglikni hosil qilamiz. Matrisalar tengligidan $\begin{cases} ax+3by=a \\ bx+ay=b \end{cases}$ tenlamalar sistemasi hosil bo'ladi. Tenlamalar sistemasini o'rniga qo'yish usuli bilan echamiz:

$$\begin{cases} ax+3by=a \\ ay=b-bx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ax+3by=a \\ y=\dfrac{b-bx}{a} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ax+3b\cdot\dfrac{b-bx}{a}=a \\ y=\dfrac{b-bx}{a} \end{cases}\Rightarrow(a,b\in Q,a^2+b^2>0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2x+3b^2-3b^2x=a \\ y=\dfrac{b-bx}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2-3b^2}{a^2-3b^2} \\ y=\dfrac{b-bx}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Demak, E = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in$ G . E matrisa G to’plamda aniqlangan ko’paytirish amaliga nisbatan neytral element. U birlik matrisa deyiladi. Ta’rifga ko’ra <G;™, E> multiplikativ monoid.

3. Berilgan G to’plamda har qanday noldan farqli element uchun A·A’=E tenglikni qanoatlantiradigan A’ element mavjudligini isbotlaymiz.

A=$\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$, A’=$\begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix}$ Bo’lsin. U xolda A·A’=E tenglikdan $\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tenglikni, undan esa $\begin{bmatrix} ax+3by & 3ay+3bx \\ bx+ay & 3by+ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tenglikni hosil qilamiz. Matrisalar tengligidan $\begin{cases} ax+3by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$ tenlamalar sistemasi xosil bo’ladi. Tenlamalar sistemasini o’rniga qo’yish usuli bilan echamiz:

$$\begin{cases} ax+3by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+3by=1 \\ y=\dfrac{-bx}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+3b\cdot\dfrac{-bx}{a}=1 \\ y=\dfrac{-bx}{a} \end{cases} \Rightarrow (a,b\in Q, a^2+b^2>0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2x-3b^2x=a \\ y=\dfrac{-bx}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{a^2-3b^2} \\ y=\dfrac{-b}{a^2-3b^2} \end{cases}.$$

Demak, A’ = $\begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2-3b^2} & \dfrac{-3b}{a^2-3b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2-3b^2} & \dfrac{a}{a^2-3b^2} \end{bmatrix}$. A’ matrisa berilgan G to’plamda aniqlangan ko’paytirish amaliga nisbatan simmetrik element, ya’ni teskari element deyiladi va odatda A^{-1} ko’rinishda belgilanadi.

Yuqorida isbotlangan 4 ta shartdan <G;™, $^{-1}$, E> algebra multiplikativ gruppa ekanligi kelib chiqadi.

3.13 G = {$\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$| a, b $\in$ Q, $a^2 + b^2 > 0$} to’plamni additiv gruppa tashkil etishini isbotlang.

Yechish. . Additiv gruppa ta’rifiga ko’ra berilgan to’plamda quyidagi shartlar bajarilishini tekshiramiz:

1) $\forall(A_1,A_2\in G),\exists!(A\in G)\ (A_1+A_2=A)$;

2) $\forall(A,A_1,A_2\in G),\ ((A+A_1)+A_2)=A+(A_1+A_2))$;

3) $\forall(A\in G),\exists!(E\in G)\ (A+E=A)$;

4) $\forall(A\in G),\exists\ (A'\in G)\ (A+A'=E)$.

1. Berilgan G to'plamda qo'shish amalini aniqlaymiz: To'plamning ihtiyoriy ikkita A_1,A_2 elementlari berilgan bo'lsin:

$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$, u holda

$A_1+A_2=\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 3b_1+3b_2 \\ b_1+\cdot b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}$. ¥osil bo'lgan matrisani $\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$=A orqali belgilaymiz. Demak berilgan G to'plamda qo'shish amali aniqlangan. Ta'rifga ko'ra <G; +> additiv gruppoid.

2.Berilgan G to'plamda har qanday uchta A,A_1,A_2 elementlar uchun $(A+A_1)+A_2)=A+(A_1+A_2)$ tenglik bajarilishini isbotlaymiz:

$$((A+A_1)+A_2)=(\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix})+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a+a_1 & 3b+3b_1 \\ b+b_1 & a+a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a+a_1)+a_2 & (3b+3b_1)+3b_2 \\ (b+b_1)+b_2 & (a+a_1)+a_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a+(a_1+a_2) & 3b+(3b_1+3b_2) \\ b+(b_1+b_2) & a+(a_1+a_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 3b_1+3b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}=$$

$=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}+(\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix})=$ $A+(A_1+A_2)$. Demak, G to'plamda aniqlangan qo'shish amali assosiativlik xossasiga ega ekan. Ta'rifga ko'ra <G;+> additiv yarimgruppa.

3.G to'plamda har qanday A element uchun A+E =A shartni qanoatlantiradigan E element mavjudligini isbotlaymiz.

$A=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix}$ bo'lsin. U xolda A+·E=A tenglikdan $\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$ tenglikni, undan esa $\begin{bmatrix} a+x & 3b+3y \\ b+y & a+x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$ tenglikni hosil qilamiz. Matrisalar tengligidan $\begin{cases} a+x=a \\ b+y=b \end{cases}$ tenlamalar sistemasi hosil bo'ladi. Tenlamalar sistemasining echimi: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ dan iborat. Demak, E =O= $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$. O matrisa G to'plamda aniqlangan qo'shish amaliga nisbatan neytral element. U nol matrisa deyiladi. Ta'rifga ko'ra <G;+, 0> additiv monoid.

4.Berilgan G to'plamda har qanday element uchun A+A'=E tenglikni qanoatlantiradigan A' element mavjudligini isbotlaymiz.

A=$\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$, A’=$\begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix}$ Bo’lsin. U xolda A+A’=E tenglikdan $\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & 3y \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tenglikni, undan esa $\begin{bmatrix} a+x & 3b+3y \\ b+y & a+x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tenglikni hosil qilamiz. Matrisalar tengligidan $\begin{cases} a+x=0 \\ b+y=0 \end{cases}$ tenlamalar sistemasi xosil bo’ladi. Tenlamalar sistemasining echimi $\begin{cases} x=-a \\ y=-b \end{cases}$ dan iborat. Demak, A’ = $\begin{bmatrix} -a & -3b \\ -b & -a \end{bmatrix}$. A’ matrisa berilgan G to’plamda aniqlangan qo’shish amaliga nisbatan simmetrik element, ya’ni qarama-qarshi element deyiladi va odatda -A ko’rinishda belgilanadi.

Yuqorida isbotlangan 4 ta shartdan <G;+, -, 0> algebra additiv gruppa ekanligi kelib chiqadi.

3.14 G = {$\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$| a, b $\in$ Q, $a^2 + b^2 > 0$} to’plamni halqa tashkil etishini isbotlang.

Yechish. . Halqa ta’rifiga ko’ra berilgan to’plamda qo’shish va ko’paytirish amallari aniqlangan bo’lishi hamda bu amallarga nisbatan quyidagi xossalar bajarilishi kerak:

1. <G;+, -, 0>-additiv abel gruppa.

2. <G;·>-mulьtiplikativ gruppoid.

3. $\forall(A,A_1,A_2\in G)$, $(A\cdot(A_1+A_2)=A\cdot A_1+A\cdot A_2;\ (A_1+A_2)\cdot A=A_1\cdot A+A_2\cdot A)$.

Yuqoridagi 2-misolda G to’plam unda aniqlangan qo’shish amaliga nisbatan additiv gruppa tashkil etishi isbotlangan. 1-misolda G to’plamda ko’paytirish amali aniqlangan. Demak, 3-shartni hamda qo’shish amalining kommutativligini isbotlash qoldi.

1.G To’plamning A=$\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$, A_1 = $\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, A_2 = $\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ elementlari berilgan bo’lsin.

U holda

$$A\cdot(A_1+A_2)=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 3b_1+3b_2 \\ b_1+\cdot b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a(a_1+a_2)+3b(b_1+b_2) & a(3b_1+3b_2)+3b(a_1+a_2) \\ b(a_1+a_2)+a(b_1+b_2) & b(3b_1+3b_2)+a(a_1+a_2) \end{bmatrix}=$$

=(rasional sonlar to'plamida ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributivligidan)== $\begin{bmatrix} aa_1+aa_2+3bb_1+3bb_2 & 3ab_1+3ab_2+3ba_1+3ba_2 \\ ba_1+ba_2+ab_1+ab_2 & 3bb_1+3bb_2+aa_1+aa_2 \end{bmatrix}$=

$=\begin{bmatrix} aa_1+3bb_1 & 3ab_1+3ba_1 \\ ba_1+ab_1 & 3bb_1+aa_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} aa_2+3bb_2 & 3ab_2+3ba_2 \\ ba_2+ab_2 & 3bb_2+aa_2 \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$=A·$A_1$ +A·A_2.

Ko'paytirish amali kommutativlik hossasiga ega emas. Shuning uchun distributivlikning ikkinchisini-chapdan ko'paytirishni ham isbotlaymiz:

2.(A_1+A_2)·A=$\left(\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 3b_1+3b_2 \\ b_1+\cdot b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} (a_1+a_2)a+(3b_1+3b_2)b & (a_1+a_2)3b+(3b_1+3b_2)a \\ (b_1+b_2)a+(a_1+a_2)b & (b_1+b_2)3b+(a_1+a_2)a \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} a_1a+a_2a+3b_1b+3b_2b & a_13b+a_23b+3b_1a+3b_2a \\ b_1a+b_2a+a_1b+a_2b & b_13b+b_23b+a_1a+a_2a \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} a_1a+3b_1b & 3a_1b+3b_1a \\ b_1a+a_1b & 3b_1b+a_1a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2a+3b_2b & 3a_2b+3b_2a \\ b_2a+a_2b & 3b_2b+a_2a \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix}$= A_1·A+A_2·A.

3.To'plamning ihtiyoriy ikkita A_1,A_2 elementlari berilgan bo'lsin: A_1 = $\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, A_2 = $\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$, u holda

A_1+A_2=$\begin{bmatrix} a_1 & 3b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & 3b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 3b_1+3b_2 \\ b_1+\cdot b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}$=(rasional sonlar to'plamida qo'shish amali kommutativligidan)=

$=\begin{bmatrix} a_2+a_1 & 3b_2+3b_1 \\ b_2+\cdot b_1 & a_2+a_1 \end{bmatrix}$=$A_2$+$A_1$. Demak, <G;+,·, -, 0> halqa.

3.15 $K=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in R\}$ to'plam maydon tashkil etishini isbotlang.

Yechish. . Maydon ta'rifiga ko'ra berilgan to'plamda quyidagi shartlar bajarilishini tekshiramiz:

1) $\forall(z_1,z_2\in K),\exists!(z\in K)\ (z_1+z_2=z)$;
2) $\forall(z_1,z_2\in K)\ (z_1+z_2=z_2+z_1)$;
3) $\forall(z,z_1,z_2\in K),\ ((z+z_1)+z_2)=z+(z_1+z_2))$;
4) $\forall(z\in K),\exists!(e\in K)\ (z+e=z)$;
5) $\forall(z\in K),\exists\ (z'\in K)\ (z+z'=e)$;
6) $\forall(z_1,z_2\in K),\exists!(z\in K)$ (z_1 ™z_2=z);
7) $\forall(z_1,z_2\in K)\ (z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1)$;
8) $\forall(z,z_1,z_2\in K),\ ((z\cdot z_1)\cdot z_2)=z\cdot(z_1\cdot z_2))$;

9) $\forall(z\in K),\exists!(e\in K)\ (z\cdot e = z)$;

10) $\forall(z\in K),\exists\ (z'\in K)\ (z\cdot z' = e)$;

1. To'plamning ixtiyoriy $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$; $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) + (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p}$ tenglik bilan aniqlanuvchi shu to'plamning $a + b\sqrt{p} =$ z elementi mavjud. Demak, K to'plamda qo'shish amali aniqlangan. <K;+> - additiv gruppoid.

2. To'plamning ixtiyoriy $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p}) = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{p} = z_2 + z_1$. Demak, qo'shish amali kommutativ va <K;+> - additiv abel gruppoid.

3. To'plamning ixtiyoriy $z = a + b\sqrt{p}, z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $(z + z_1) + z_2 = ((a + a_1) + (b + b_1)\sqrt{p}) + (a_2 + b_2\sqrt{p}) =$
$= ((a + a_1) + a_2 + ((b + b_1) + b_2)\sqrt{p}) = a + (a_1 + a_2) + (b + (b_1 + b_2))\sqrt{p} =$
$= z + (z_1 + z_2)$. Demak, qo'shish amali assosiativ va <K;+> - additiv abel yarimgruppa.

4. To'plamning ixtiyoriy $z = a + b\sqrt{p}$ elementi uchun $z + e = z$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a + b\sqrt{p}) + (x + y\sqrt{p}) = a + b\sqrt{p}$ tenglikdan $(a + x) + (b + y)\sqrt{p} = a + b\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ bo'lib, bundan $e = 0 + 0\sqrt{p} = 0$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda qo'shish amaliga nisbatan neytral element mavjud ekan. <K;+> - additiv abel monoidni tashkil etdi..

5. To'plamning ixtiyoriy $z = a + b\sqrt{p}$ elementi uchun $z + z' = e$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a + b\sqrt{p}) + (x + y\sqrt{p}) = 0 + 0\sqrt{p}$ tenglikdan $(a + x) + (b + y)\sqrt{p} = 0 + 0\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$ bo'lib, bundan $z' = -a + (-b)\sqrt{p} = -(a + b\sqrt{p})$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda qo'shish amaliga nisbatan simmetrik element mavjud ekan. <K;+> - additiv abel gruppani tashkil etdi.

6. To'plamning ixtiyoriy $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$; $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 \cdot a_2 + pb_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}$ tenglik bilan aniqlanuvchi shu to'plamning $a + b\sqrt{p} =$ z elementi mavjud. Demak, K to'plamda ko'paytirish amali aniqlangan. <K;·> - multiplikativ gruppoid.

7. To'plamning ixtiyoriy $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 + pb_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}) = (a_2a_1 + pb_2b_1) +$

$+ (a_2b_1 + b_2a_1)\sqrt{p} = z_2 \cdot z_1$. Demak, ko'paytirish amali kommutativ va <K;·> - multiplikativ abel gruppoid.

8. To'plamning ixtiyoriy $z = a + b\sqrt{p}, z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $(z \cdot z_1) \cdot z_2 = ((aa_1 + pbb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p}) =$

$= ((aa_1)a_2 + p(bb_1)a_2 + p(ab_1)b_2 + p(ba_1)b_2) + ((aa_1)b_2 + p(bb_1)b_2 + (ab_1)a_2 +$

$+ (ba_1)a_2)\sqrt{p} = (a(a_1a_2) + pb(b_1a_2) + pa(b_1b_2) + pb(a_1b_2)) +$

$+ (a(a_1b_2) + pb(b_1b_2) + a(b_1a_2) + b(a_1a_2))\sqrt{p} = (a + b\sqrt{p}) \cdot$

$\cdot ((a_1a_2 + pb_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}) = (a + b\sqrt{p})((a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p})) =$

$= z \cdot (z_1 \cdot z_2)$. Demak, ko'paytirish amali assosiativ va <K;·> - multiplikativ abel yarimgruppa.

9. To'plamning ixtiyoriy $z = a + b\sqrt{p}$ elementi uchun $z \cdot e = z$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a + b\sqrt{p})(x + y\sqrt{p}) = a + b\sqrt{p}$ tenglikdan $(ax + pby) + (ay + bx)\sqrt{p} = a + b\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} ax + pby = a \\ ay + bx = b \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ bo'lib, bundan $e = 1 + 0\sqrt{p} = 1$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element mavjud ekan. <K;·> - multiplikativ abel monoidni tashkil etdi..

10. To'plamning ixtiyoriy noldan farqli $z = a + b\sqrt{p}$ elementi uchun $z \cdot z' = e$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a + b\sqrt{p})(x + y\sqrt{p}) = 1 + 0\sqrt{p}$ tenglikdan $(ax + pby) + (ay + bx)\sqrt{p} = 1 + 0\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} ax + pby = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a^2 - pb^2} \\ y = \dfrac{-b}{a^2 - pb^2} \end{cases}$ bo'lib, bundan $z' = \dfrac{a}{a^2 - pb^2} + \dfrac{-b}{a^2 - pb^2}\sqrt{p}$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda ko'paytirish amaliga nisbatan simmetrik element mavjud ekan.

<K;·,$^{-1}$,1> - multiplikativ abel gruppani tashkil etdi.

K to'plam qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan abel gruppa shartlariga bo'ysunganligi uchun <K;+,·,-,$^{-1}$,0,1> - maydon bo'ladi.

3.16 $K=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in R\}$ va $P=\{a+b\sqrt{q}\mid a,b\in R\}$ to'plamlar tashkil etgan maydonlar orasida izomorfizm o'rnating.

Yechish. . Algebralar izomorfizmi ta'rifiga ko'ra berilgan <K;+,·,-,$^{-1}$,0,1> maydon elementlarini <R;+,·,-,$^{-1}$,0,1> maydon elementlariga akslantiradigan akslantirish asosiy amallarni saqlashi, in'ektiv va syur'ektiv bo'lishi kerak.

$f:K\to P$ akslantirishni $f(a+b\sqrt{p})=a+b\sqrt{q}$ ko'rinishda olamiz.

K to'plamning ixtiyoriy $z_1=a_1+b_1\sqrt{p}, z_2=a_2+b_2\sqrt{p}$ elementlariga R to'plamning $t_1=a_1+b_1\sqrt{q}, t_2=a_2+b_2\sqrt{q}$ elementlari mos keladi. Tanlab olingan akslantirish izomorfizm ekanligini isbotlaymiz:

1) $\forall z_1,z_2\in K$ uchun $f(z_1+z_2)=f((a_1+b_1\sqrt{p})+(a_2+b_2\sqrt{p}))=$

$=f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{p}))=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{q}=(a_1+b_1\sqrt{q})+$

$+(a_2+b_2\sqrt{q})=f(a_1+b_1\sqrt{p})+f(a_2+b_2\sqrt{p})$. Demak, qo'shish amali akslantirish natijasida saqlanadi.

2) $\forall z_1,z_2\in K$ uchun $f(z_1\cdot z_2)=f((a_1+b_1\sqrt{p})\cdot(a_2+b_2\sqrt{p}))=$

$=f((a_1a_2+pb_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{p}))=(a_1a_2+qb_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{q}=$

$=(a_1+b_1\sqrt{q})+(a_2+b_2\sqrt{q})=f(a_1+b_1\sqrt{p})\cdot f(a_2+b_2\sqrt{p})$.

Demak, ko'paytirish amali akslantirish natijasida saqlanadi.

3) $f(0)=f(z+(-z))=f((a+b\sqrt{p})+(-a-b\sqrt{p}))=$

$f((a-a)+(b-b)\sqrt{p}))=(a-a)+(b-b)\sqrt{q}=(a+b\sqrt{q})+$

$+(-a-b\sqrt{q})=f(a+b\sqrt{p})+(-f(a+b\sqrt{p}))=0$. Demak, qo'shish amaliga nisbatan neytral element neytral elementga, simmetrik element simmetrik elementga o'tdi.

4) $f(1)=f(z\cdot z^{-1})=f((a+b\sqrt{p})\cdot(\frac{a}{a^2-pb^2}+\frac{-b}{a^2-pb^2}\sqrt{p}))=$

$=1=(a+b\sqrt{q})\cdot(\frac{a}{a^2-qb^2}+\frac{-b}{a^2-qb^2}\sqrt{q})=(a+b\sqrt{q})\cdot(a+b\sqrt{q})^{-1}=$

$+f(z)\cdot f^{-1}(z)=1$. Demak, ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element neytral elementga, simmetrik element simmetrik elementga o'tdi. Aniqlangan akslantirishning gomomorfizm ekanligini isbotladik [7].

5) $\forall z_1,z_2\in K$ lar uchun $f(z_1)=f(z_2)$ ekanligidan $a_1+b_1\sqrt{q}=a_2+b_2\sqrt{q}$ kelib chiqadi. Bu shart $a_1=a_2, b_1=b_2$ shartlar bajarilganda to'g'ri. Bundan esa, $a_1+b_1\sqrt{p}=a_2+b_2\sqrt{p}$ ni hosil qilamiz. Demak, bir-biriga teng tasvirlarga bir-biriga teng asllar mos keldi. Tekshirilayotgan akslantirish in'ektiv akslantirish ekan.

6) R To'plamdan olingan har qanday $f(z)=a+b\sqrt{q}$ elementga $a+b\sqrt{p}\in K$ element mos keladi. Demak, akslantirish syur'ektiv ekan.

Tekshirilgan xossalarga ko'ra, $f :< K,+,\cdot,-,^{-1},0,1 > \to < P,+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ akslantirish izomorfizm.

3-mustaqil ish topshiriqlari:

1. *Quyidagi to'plamlarni multiplikativ gruppa tashkil* e*tishini isbotlang [9]:*

1.1. G = $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.2. G = $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.3. G = $\{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.4. G = $\{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.5. G = $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.6. G = $\{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.7. G = $\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.8. G = $\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.9. G = $\{\begin{bmatrix} a & -2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.
1.10. G = $\{\begin{bmatrix} \sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \mid \varphi \in R\}$.
1.11. G = $\{2^z \mid z \in Z\}$.
1.12. G = $\{5^z \mid z \in Z\}$.
1.13. G = $\{p^z \mid$ p - tub son , $z \in Z\}$.

Quyidagilarni additiv gruppa tashkil etishini isbotlang:[11]

1.14. G = $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$.
1.15. G = $\{a - bi\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.
1.16. G = $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$.
1.17. G = $\{a - bi\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$.
1.18. G = $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Z\}$.
1.19. G = $\{a - bi\sqrt{5} \mid a, b \in Q\}$.
1.20. G = $\{\frac{a}{7^k} \mid a \in Z, k \in N\}$.
1.21. G = $\{\frac{a}{5^k} \mid a \in Z, k \in N\}$.
1.22. G = $\{\frac{a}{2^k} \mid a \in Z, k \in N\}$.

1.23. $G = \{ \frac{a}{3^k} \mid a \in Z, k \in N \}$.

1.24. $G = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in Z\}$.

1.25. $G = \{a - b\sqrt{7} \mid a, b \in Q\}$

2. *Quyidagi to'plamlarni halqa tashkil etishini isbotlang [7]:*

2.1. $K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3Z\}$.

2.2. $K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$.

2.3. $K = \{\begin{bmatrix} a & -2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q,\}$.

2.4. $K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q\}$.

2.5. $K = \{\begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$.

2.6. $K = \{\begin{bmatrix} a & -2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 2Z\}$.

2.7. $K = \{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$.

2.8. $K = \{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q\}$.

2.9. $K = \{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 2Z\}$.

2.10. $K = Q^{n \times n}$.

2.11. $K = R^{n \times n}$.

2.12. $K = C^{n \times n}$.

2.13. $K = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$.

2.14. $K = \{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$.

2.15. $K = \{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in Z\}$.

2.16. $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.

2.17. $G = \{a + \sqrt{2}bi \mid a, b \in Q\}$.

2.18. $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$.

2.19. $G = \{a + \sqrt{3}bi \mid a, b \in Q\}$.

2.20. $G = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q\}$.
2.21. $G = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in Z\}$;
2.22. $G = \{a - b\sqrt{7} \mid a, b \in Z\}$;
2.23. $G = \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$;
2.24. $G = \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$;
2.25. $G = \{a - \sqrt{2}\,bi \mid a, b \in Q\}$.

3. *Quyidagi algebralarni maydon tashkil etishini isbotlan g [8]*:

3.1 $< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, \cdot >$.
3.2 $< \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.3 $< \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.4 $< \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.5 $< \{a - bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, \cdot >$.
3.6 $< \{a + b\sqrt{17} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.7 $< \{a - b\sqrt{5} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.8 $< \{a - b\sqrt{17} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.9 $< \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.10 $< \{a - b\sqrt{19} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.11 $< \{a - b\sqrt{7} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.12 $< \{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.13 $< \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.14 $< \{a - b\sqrt{11} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.15 $< \{a + b\sqrt{13} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.16 $< \{a - b\sqrt{13} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.17 $< Z_5; +, \cdot >$.
3.18 $< Z_7; +, \cdot >$.
3.19 $< Z_{11}; +, \cdot >$.
3.20 $< Z_{13}; +, \cdot >$.
3.21 $< \{a + b\sqrt{23} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.22 $< \{a - b\sqrt{23} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.23 $< \{a + b\sqrt{29} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.24 $< \{a - b\sqrt{29} \mid a, b \in Q\}; +, \cdot >$.
3.25 $< Z_{17}; +, \cdot >$.

4. *Quyidagi algebralar orasida izomorfizm o'rnating [6]:*

4.1. $< \{2^z \mid z \in Z\}; \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < Z; +, -, 0 >$.
4.2. $< \{3^z \mid z \in Z\}; \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < Z; +, -, 0 >$.

4.3. $< \{ 5^z \mid z \in Z \};\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} > \ \wedge\ < Z; +, -, 0 >$.

4.4. $< \{ 7^z \mid z \in Z \};\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} > \ \wedge\ < Z; +, -, 0 >$.

4.5. $< \{ 11^z \mid z \in Z \};\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} > \ \wedge\ < Z; +, -, 0 >$.

4.6. $< Z; +, -, 0 > \ \wedge\ < 2Z; +, -, \mathbf{0} >$.

4.7. $< Z; +, -, 0 > \ \wedge\ < 3Z; +, -, \mathbf{0} >$.

4.8. $< Z; +, -, 0 > \ \wedge\ < 5Z; +, -, \mathbf{0} >$.

4.9. $< Z; +, -, 0 > \ \wedge\ < 7Z; +, -, \mathbf{0} >$.

4.10. $< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, -, 0 >$
$\wedge < R^2; +, -, \mathbf{0} >$.

4.11. $<\{a + bi \mid a,b\in R \wedge i^2 = -1\}; +, \bullet>$
$\wedge <\{a - bi \mid a,b\in R \wedge i^2 = -1\}; +, \bullet >$.

4.12. $< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; \bullet, {}^{-1}, 1 >$
$\wedge < R^2;\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} >$.

4.13. $< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; \bullet, {}^{-1}, 1>$
$\wedge <\{a - bi \mid a,b\in R \wedge i^2 = -1\}; \bullet, {}^{-1}, 1>$.

4.14. $< \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q \}; +, -, 0 >$
$\wedge < \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in Q \}; +, -, 0 >$.

4.15. $< \{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in Q \}; +, -, 0 >$
$\wedge < \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q \}; +, -, 0 >$.

4.16. $< Z; +, -, 0 > \ \wedge < Z_2, +, -, \mathbf{0} >$.

4.17. $< Z^-; +, > \wedge\ < Z^+; + >$.

4.18. $< \{ 2^z \mid z \in Z \};\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} >$
$\wedge\ < \{ 3^z \mid z \in Z \};\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} >$.

4.19. $< 2Z; +, -, \mathbf{0} > \ \wedge\ < 5Z; +, -, \mathbf{0} >$.

4.20. $< \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in Q \}; +, \bullet >$
$\wedge < \{a - b\sqrt{p} \mid a, b \in Q \}; +, \bullet >$.

4.21. $< \{ 13^z \mid z \in Z \};\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} > \ \wedge\ < Z; +, -, 0 >$.

4.22. $< \{ 17^z \mid z \in Z \};\ \bullet, {}^{-1}, \mathbf{1} > \ \wedge\ < Z; +, -, 0 >$.

4.23. $< Z; +, -, 0 > \ \wedge\ < 11Z; +, -, \mathbf{0} >$.

4.24. $< \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in Z \}; +, - . \mathbf{0} >$

$\wedge\ < \{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z \}; +, -, \mathbf{0} >$.

4.25. $< \{ \begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q, \}; +, -, \mathbf{0} >$

$\wedge\ < \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q \}; +, -, \mathbf{0} >$.

Testlar.

1.Mulhazaning rost yoki yolg'onligini aniqlang [10]:

$$2 \in \{ x|\ 2x^3 - 3x^2+1=0,\ x\in R\}.$$

A) chin B) yolgon C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

2.R to'plam halqa bo'lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?

A) 1) < R, + > - additiv gruppa
2) < R, · > - yarim gruppa
3) $(\forall a,v,s\in R)\ a(v+s)=av+as,\ (v+s)a=va+sa$

V) 1) < R, + > - additiv gruppa
2) < R, · > - yarim gruppa
3) $(\forall a,v\in R)\ av=va$ 1.Gruppa aksiomalarini toping.

A) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a\top(v\top s)=(a\top v)\top s$
2) $(\forall a\in G,\exists e\in G)\quad a\top e=a=e\top a$
3) $(\forall a\in G,\exists a^*\in G)\quad a\top a^*=e=a^*\top a$

V) 1) $(\forall a,v\in G)\ a\top v=v\top a$
2) $(\forall a\in G,\exists e\in G)\quad a\top e=a=e\top a$
3) $(\forall a\in G,\exists a^*\in G)\quad a\top a^*=e=a^*\top a$

S) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a\top(v\top s)=(a\top v)\top s$
2) $(\forall a,v\in G)\ a\top v=v\top a$
3) $(\forall a\in G,\exists e\in G)\quad a\top e=a=e\top a$

D) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a\top(v\top s)=(a\top v)\top s$
2) $(\forall a,v\in G)\ a\top v=v\top a$
3) $(\forall a\in G,\exists a^*\in G)\quad a\top a^*=e=a^*\top a$

E) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a\top(v\top s)=(a\top v)\top s$
2) $(\forall a,v\in G)\ a\top v=v\top a$
3) $(\forall a\in G,\exists e\in G)\quad a\top e=a=e\top a$

S) 1) < R, + > - additiv gruppa
2) $(\forall a,v,s\in R)\ a(v+s)=av+as,\ (v+s)a=va+sa$
3) $(\forall a,v\in R)\ av=va$

D) 1) < R, · > - yarim gruppa
2) $(\forall a,v,s\in R)\ a(v+s)=av+as,\ (v+s)a=va+sa$
3) $(\forall a,v\in R)\ av=va$

E) 1) < R, + > - additiv gruppa
2) < R, · > - yarim gruppa
3) $(\forall a,v,s\in R)\ a(v+s)=av+as,\ (v+s)a=va+sa$
4) $(\forall a,v\in R)\ av=va$

3.Gruppa aksiomalarini toping. [10]

A) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a\top(v\top s)=(a\top v)\top s$
2) $(\forall a\in G,\exists e\in G)\quad a\top e=a=e\top a$

3) $(\forall a\in G, \exists a^*\in G)\quad a \top a^*=e=a^* \top a$

V) 1) $(\forall a,v\in G)\ a \top v=v \top a$

2) $(\forall a\in G, \exists e\in G)\quad a \top e=a=e \top a$

3) $(\forall a\in G, \exists a^*\in G)\quad a \top a^*=e=a^* \top a$

S) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a \top (v \top s)=(a \top v) \top s$

2) $(\forall a,v\in G)\ a \top v=v \top a$

3) $(\forall a\in G, \exists e\in G)\quad a \top e=a=e \top a$

D) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a \top (v \top s)=(a \top v) \top s$

2) $(\forall a,v\in G)\ a \top v=v \top a$

3) $(\forall a\in G, \exists a^*\in G)\quad a \top a^*=e=a^* \top a$

E) 1) $(\forall a,v,s\in G)\ a \top (v \top s)=(a \top v) \top s$

2) $(\forall a,v\in G)\ a \top v=v \top a$

3) $(\forall a\in G, \exists e\in G)\quad a \top e=a=e \top a$

$\boxed{a+b=b+a=1/a}$

4.Quyida berilgan to'plamlardan qaysi biri halqa tashkil qiladi, lekin maydon emas:]10]

A(Z,+ ,*)   B) (Q,+,*)   C) (N,+,-)   D) (R,+,*)   E)(N,+,_)

5.Quyida berilgan to'plamlardan qaysi biri berilgan amallarda gruppani tashkil etadi.

A(Z,+)   B) (Q,+)   C) (N,+)   D) (R,+)   E)(N,_-)

6.Teskari element ta'rifini bering

A($a*b=b*a=e$)   B) (a+b=b+a=1)   C) (a-b=b-a=0)   D) (a.b=b.a=3)
E)(a:b=b:a=2)

7.Qarama-qarshi element ta'rifini bering

A(a-b=b-a=a)   B) (a+b=b+a=a)   C) (a+b=b+a=0)   D) (a+b=b+a=1:a)
E)(_a+b=b+a=1)

8.Quyida berilgan to'plamlardan qaysi biri berilgan amallarda yarimguruh tashkil etadi, lekin monoid emas:

A(Z,+)   B) (Q,+)   C) (N,+)   D) (R,+)   E)(N,_-)

9.Quyida berilgan to'plamlardan qaysi biri berilgan amallarda gruppoid bo'ladi, lekin yarimguruh emas

A(Z,+)   B) (Q,+)   C) (N,+)   D) (R,+)   E)(N,_-)

10.Quyida berilgan to'plamlardan qaysi biri halqa tashkil qiladi, lekin maydon emas:

A(Z,+)   B) (Q,+)   C) (N,+)   D) (R,+)   E)(N,_-)

12.Quyidagi to'plam multiplikativ gruppani tashkil etadimi.[10]

$G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.

A) ha B) yoq C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

13.Quyidagi to'plam multiplikativ gruppani tashkil etadimi

$G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.

A) ha B) yoq C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

14.Quyidagi to'plam multiplikativ gruppani tashkil etadimi

$G = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.

A) ha B) yoq C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

15.Quyidagi to'plam multiplikativ gruppani tashkil etadimi

$G = \{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$.

A) ha B) yoq C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

16.Quyidagi to'plam halqa tashkil etadimi

$K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3Z\}$.

A) ha B) yoq C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

17.Quyidagi to'plam halqa tashkil etadimi

$K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z\}$.

A) ha B) yoq C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

18.Quyidagi to'plam halqa tashkil etadimi

$K = \{\begin{bmatrix} a & -2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q,\}$.

A) ha B) yoq C) halqa D) maydon E)yarim gruppa

19.Quyidagi to'plam halqa tashkil etadimi

$K = \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q \}$.

A) ha   B) yoq   C) halqa   D) maydon E)yarim gruppa

20.Quyidagi algebra maydon tashkil etadimi

$< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, \cdot >$.

A) ha   B) yoq   C) halqa   D) maydon E)yarim gruppa

21.Quyidagi algebra maydon tashkil etadimi

$< \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q \}; +, \cdot >$.

A) ha   B) yoq   C) halqa   D) maydon E)yarim gruppa

22.Quyidagi algebra maydon tashkil etadimi

$< \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in Q \}; +, \cdot >$.

A) ha   B) yoq   C) halqa   D) maydon E)yarim gruppa

23.Quyidagi algebra maydon tashkil etadimi

$< \{a + b \sqrt{3} \mid a, b \in Q \}; +, \cdot >$.

A) ha   B) yoq   C) halqa   D) maydon E)yarim gruppa

24.Quyidagi algebralar orasida izomorfizm o'rnating:

$< \{ 2^z \mid z \in Z \}; \bullet, ^{-1}, 1 > \wedge < Z; +, -, 0 >$.

A) ha   B) yoq   C) halqa   D) maydon E)yarim gruppa

.25.Quyidagi algebralar orasida izomorfizm o'rnating:

$< \{ 3^z \mid z \in Z \}; \bullet, ^{-1}, 1 > \wedge < Z; +, -, 0 >$.

A) ha   B) yoq   C) halqa   D) maydon E)yarim g

Nazariy savollar. [3].

1. Gruppa ta’rifini keltiring. Uning asosiy xossalarini ayting.
2. Additiv, mulьtiplikativ gruppalarga algebra, geometriya kursidan misollar keltiring.
3. Gruppalar gomomorfizmining qanday turlarini bilasiz?
4. Har qanday gomomorfizm izomorfizm bo’la oladimi, yoki aksincha?
5. Gruppalar avtomorfizmi nima?
6. Gruppaosti tushunchasiga misollar keltiring.
7. Halqaning qanday turlarini bilasiz?
8. Xalqalar gomomorfizmi, izomorfizmiga misollar keltiring.
9. Halqalar avtomorfizmi ta’rifini bayon qiling.
10. Halqaostilar kesishmasi yana halqaosti bo’lishini isbotlang.
11. Binar algebraik amalga maktab matematikasidan misollar keltiring.
12. n-ar algebraik amal ta’rifini ayting.
13. Unar algebraik amalga misol keltiring.
14. Gruppoid nima?
15. Gruppoidning neytral elementi xossalarini ayting.
16. Gruppoidning regulyar elementi ta’rifini ayting.
17. Pegulyar, simmetrik elementlarga o’rta maxsus ta’lim matematikasidan misollar keltiring.
18. Kongruensiyani misollar yordamida tushuntiring.
19. Binar , n - ar amallar.
20. Binar amallarning turlari.
21. Neytral element va uning xossalari.
22. Simmetrik element va uning xossalari.
23. Regulyar elementlar, xossalari.
24. Amallarga nisbatan yopiq to’plam.
25. Additiv va mulьtiplikativ yozuvlar.
26. Kongruensiya va uning xossalari.
27. Algebra. Algebraning tipi.
28. Algebralar gomomorfizmi va uning turlari.
29. Qismalgebralar.«Qismalgebra» munosabatining xossalari.
30. Faktor - algebra, xossalari.
31. Gruppoid, yarimgruppa, monoid.
32. Gruppa va uning sodda xossalari.
33. Gruppalar gomomorfizmi, xossalari.
34. Qismgruppa, xossalari.
35. Halqa va uning turlari.
36. Halqaning sodda xossalari.
37. Halqalar gomomorfizmi va uning xossalari.
38. Qismhalqa, xossalari.
39. Jism. Maydon. Maydonlar gomomorfizmi.
40. Algebraik sistemalar, qismsistemalar.

41. Algebraik sistemalar gomomorfizmi, xossalari.
42. Yarimgruppa deb nimaga aytiladi?
43. Monoidga ta’rif bering va misol keltiring.
44. Algebra tushunchasiga maktab matematikasidan misollar keltiring.
45. Algebraning turi qanday aniqlanadi?
46. Algebralar gomomorfizmini tushuntiring.
47. Monomorfizm, epimorfizmga misollar keltiring.
48. Izomorfizm, avtomorfizm ta’rifidagi umumiy, farqli shartlarni aniqlang.
49. Gomomorfizmlar kompozisiyasi YAna gomomorfizm ekanligini isbotlang.
50. Biektiv akslantirishlar izomorfizm bo’la oladimi?
51. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabati ekanligini asoslang.
52. Algebraostilar kesishmasi yana algebra bo’lishini isbotlang.
53. Faktor-algebra tushunchasini misol yordamida tushuntiring.
54. Yarimgruppa deb nimaga aytiladi?
55. Monoidga ta’rif bering va misol keltiring.
56. Algebra tushunchasiga maktab matematikasidan misollar keltiring.
57. Algebraning turi qanday aniqlanadi?
58. Algebralar gomomorfizmini tushuntiring.
59. Monomorfizm, epimorfizmga misollar keltiring.
60. Izomorfizm, avtomorfizm ta’rifidagi umumiy, farqli shartlarni aniqlang.
61. Gomomorfizmlar kompozisiyasi YAna gomomorfizm ekanligini isbotlang.
62. Biektiv akslantirishlar izomorfizm bo’la oladimi?
63. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabati ekanligini asoslang.
64. Algebraostilar kesishmasi yana algebra bo’lishini isbotlang.
65. Faktor-algebra tushunchasini misol yordamida tushuntiring.

4-modul. Asosiy sonli sistemalar.

4.1 Algebraik sistemalar. Sistemaosti. Algebraik sistemalar gomomorfizmi

4.1.1-ta'rif. $A\neq\varnothing$ to'plam uchun Ω - A dan aniqlangan amallar to'plami Ω' - A da aniqlangan munosabatlar to'plami bo'lsin. U holda (A,Ω,Ω'') - tartiblangan uchlik- <u>algebraik sistema</u> deyiladi.[1].

A-to'plam algebraik sistemaning asosiy to'plami, Ω-algebraik sistemaning bosh amallari to'plami, Ω' - algebraik sistemaning bosh munosabatlari to'plami deyiladi.

Har qanday n-o'rinli algebraik amalni $(n+1)$ - o'rinli algebraik munosabat sifatida qarashimiz mumkinligi ayon. Haqiqatdan ham $\omega: A^n\rightarrow A$ n-ar algebraik amalni $R_\omega=\{(a_1,...,a_n);\omega(a_1,...,a_n)\mid \forall a_1,...,a_n\in A\}$ $n+1$ o'rinli munosabat deyishimiz mumkin. Agar (A,Ω,Ω') algebraik sistema berilgan bo'lsa, uni A to'plam va unda berilgan $\Omega\bigcup\Omega'$ - munosabatlar to'plamidan iborat $(A,\Omega\bigcup\Omega')$ - juftlik sifatida qarashimiz mumkin. Aytilganlarni hisobga olsak quyidagilarga ega bo'lamiz.

4.1.2-ta'rif. $A\neq\varnothing$ to'plam unda aniqlangan Ω - munosabatlar to'plamidan iborat (A,Ω) juftlik <u>algebraik sistema</u> deyiladi.

4.1.3-ta'rif. (A,Ω_1) va (B,Ω_2) algebraik sistemalar berilgan bo'lsin. Agar Ω_1 va Ω_2 - munosabatlar to'plami orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, natijada Ω_1 dagi har bir n - o'rinli ω_1 munosabatga Ω_2 da ham ω_2 k-o'rinli munosabat mos kelsa, bu algebraik sistemalar <u>bir xil turli sistemalar</u> deyiladi.

(A,Ω_1) va (B,Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan bo'lib, $\omega_1\in\Omega_1$ n-ar munosabatga $\omega_2\in\Omega_2$ n - ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar, A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi: A\rightarrow B$ akslantirish berilgan bo'lib, $\forall a_1,\dots,a_n\in A$ elementlar uchun $(a_1,\dots,a_n)\in\omega_1$ bo'lishidan $(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n))\in\omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa, φ akslantirish, R_1 <u>munosabatni saqlaydi</u> deb ataymiz. A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi: A\rightarrow B$ akslantirish Ω_1 dagi har bir ω_1 munosabatni saqlasa, bunday akslantirish (A,Ω_1) algebraik sistemani (B,Ω_2) algebraik sistemaga <u>gomomorf akslantirish</u> deyiladi. Xuddi algebralardagidik φ-syur'ektiv bo'lsa, <u>epimorfizm</u>, in'ektiv bo'lsa <u>monomorfizm</u>, biektiv bo'lsa <u>izomorfizm</u> deyiladi.

Sistemaosti tushunchasi ham algebraosti tushunchasiga o'xshash usulda kiritiladi (A,Ω_1) va (B,Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan. $A\subset B$, va $\omega_1\in\Omega_1$ n - ar munosabatga $\omega_2\in\Omega_2$ n - ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1,\dots,a_n\in A$ uchun $(a_1,\dots,a_n)\in\omega_1$, bo'lishidan $(a_1,\dots,a_n)\in\omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa ω_1 munosabat ω_2 munosabatning A to'plam bilan cheklangani deyiladi. Agar (A,Ω_1) sistemadagi har bir $\omega_1\in\Omega$ munosat bu munosabatga Ω_2

to'plamdan mos bo'lgan ω_2 munosabatning cheklangani bo'lsa, u holda (A,Ω_1) algebraik sistema (B,Ω_2) algebraik sistemaning sistemaostisi deyiladi.

Algebraik sistemaga xos bo'lgan boshqa tushunchalar va ba'zi teoremalar algebradagilarga mos ravishda ifodalanadi. Algebraik sistemalar haqida to'liqroq ma'lumotlar olishni istagan o'quvchilarga atoqli matematik A.I.Malsevning «Algebraicheskie sistemi» nomli risolasiga murojaat qilishni tavsiya qilamiz.

4.2 Natural sonlar sistemasi. Matematik induksiya prinsipi.

N to'plami unda bajariladigan $+,\bullet$ binar algebraik amallar, N to'plamining ajratilgan elementlari 0 va 1 lardan iborat $(N,\bullet,+,0,1)$ algebra uchun quyidagi aksiomalar (shartlar) bajarilsin:

I. $\forall a,b\in N$ uchun $a+b\neq 1$.

II. $\forall a\in N$ uchun yagona shunday a' element mavjud bo'lib, $a+1=a'$.

III. $\forall a,b\in N$ uchun $a+1=b+1$ bo'lsa, $a=b$.

IV. $\forall a,b\in N$ uchun $a+(b+1)=(a+b)+1$.

V. $\forall a\in N$ uchun $a\bullet 1=a$.

VI. $\forall a,b\in N$ uchun $a(b+1)=ab+a$.

VII. Induksiya aksiomasi. N to'plamning ixtiyoriy M to'plamostisi uchun 1) $1\in M$;

2) $\forall a\in M$ uchun $a+1\in M$ bo'lsa, $M=N$ bo'ladi.

4.2.1-ta'rif. Agar $(N,\bullet,+,0,1)$ algebra uchun yuqorida sanab chiqilgan I-VII shartlar bajrilsa, u holda bu algebra natural sonlar sistemasi deyiladi.

I aksioma 1 soni hech qanday elementlarning yig'indisiga teng emasligini ko'rsatadi;

II aksioma har bir natural son uchun, bu sondan keyin keladigan yagona natural son mavjudligini ko'rsatadi;

III aksioma o'ng tomondan 1 ga qisqartirishni ifodalaydi;

IV aksioma qo'shish amali uchun assosiativlik qonunining engillashtirilgan ko'rinishidir;

V aksioma 1 ko'paytirish amaliga nisbatan o'ng tomondan neytral element ekanligini bildiradi;

VI aksioma ko'paytirish amalining qo'shish amaliga nisbatan distributivligini engillashtirilgan ko'rinishidir;

VII aksioma natural sonlarning asosiy xossalarini isbot qilish imkonini beradigan aksioma bo'lib undan matematik induksiya prinsipi deb ataladigan, quyidagi teorema kelib chiqadi:

4.2.1-teorema. $A(n)$ natural sonlar to'plamida aniqlangan bir o'rinli predikat bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $A(1)$ -rost mulohaza.

2. $\forall k \in N$ uchun $A(k)$ rost mulohaza bo'lishidan $A(k+1)$-mulohazaning rost mulohaza bo'lishi kelib chiqsin. U holda $\forall n \in N$ uchun $A(n)$ mulohaza rost mulohaza bo'ladi.

Matematik induksiya aksiomasini qisqacha quyidagi ko'rinishda belgilab olamiz: $\dfrac{A(1) \wedge \forall k(A \subset K) \to A(k+1)}{\forall n\, A(n)}$.

Shunday qilib, matematik induksiya metodi bilan n natural songa bog'liq $A(n)$ predikatni natural sonlar to'plamida aynan rost bo'lishini isbot qilish uchun quyidagi ishlar qilinadi:

1) $A(1)=1$ bo'lishi, ya'ni 1-shartni qanoatlantirishi ko'rsatiladi;

2) $\forall x \in N$ uchun $A(k)=1$ bo'lishidan $A(k+1)=1$ bo'lishi ko'rsatiladi.

$A(1)$ ni induksiya bazisi, $A(k)$ ni induksiya farazi deb ataymiz.

$A(k)=1$ dan $A(k+1)=1$ kelib chiqishi induksiya qadami deyiladi.

Yozuvni ihchamlashtirish maqsadida A to'plamga tegishli yagona x element mavjud degan tasdiqni $\exists ! x \in A$ deb belgilab olishni va xossalarni esa matematik mantiq tilida yozishni kelishib olamiz. Masalan: $(\forall a,b \in N) \to (\exists ! c \in N) \wedge (a+b=c)$ yozuv «ixtiyoriy ikkita natural son uchun ularning yig'indisi bo'lgan yagona natural son mavjud» deb o'qiladi.

Shunday qilib:

4.2..2-teorema. $(\forall a,b \in N) \Rightarrow (\exists ! c \in N) \wedge (a+b=c)$.

4.2.3-teorema. $\forall a,b,c \in N \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$.

4.2.4-teorema. $(\forall a \in N) \Rightarrow (a+1=1+a)$ bu hossani «+» uchun engillashtirilgan kommutativlik qonuni deymiz.

4.2.5-teorema. $(\forall a,b \in N) \Rightarrow (a+b=b+a)$. Bu teorema natural sonlar sistemasida qo'shish amalining kommutativlik xossasiga ega bo'lishini tasdiqlaydi.

. Demak, ixtiyoriy $a,b \in N$ uchun $a+b=b+a$. Shunday qilib, natural sonlar sistemasida qo'shish amali kommutativ ekan.

4.2.6-teorema. $\forall(a,b,c \in N) \wedge (a+c=b+c) \Rightarrow (a=b)$.**[1]**

4.2.7-teorema. $(\forall a,b \in N) \Rightarrow \exists ! p(a=b=p)$.

4.2.8-teorema. $(\forall a,b,c \in N) \Rightarrow ((a+b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c)$.

4.2.9-teorema. $(\forall a \in N) \Rightarrow (a \bullet 1 = 1 \bullet a)$.

4.2.10-teorema. $(\forall a,b \in N) \Rightarrow (a \bullet b = b \bullet a)$.

$a(k+1)=(k+1)a$.

4.2.11-teorema. $(\forall a,b,c \in N) \Rightarrow c(a+b)=ca+cb$.

4.2.12-teorema. $(\forall a,b,c \in N) \Rightarrow (a \bullet b)c = a(b \bullet c)$.

Shunday qilib, natural sonlar sistemasida $+,\bullet$ amallari bir qiymatli aniqlangan kommutativ, assosiativ amallar bo'lib, ko'paytirish amali qo'shishga nisbatan distributiv amal ekan. Bundan so'ng 1+1 ni 2 orqali 2+1 ni 3 orqali va hokazo belgilab olamiz. U holda $2 \bullet 3 = 6$ yoki $2+3=5$ va hokazo ko'rinishdagi tengliklarni isbot qilish imkoni hosil bo'ladi. Masalan:

$2 \bullet 2 = 2(1+1) = 2 \bullet 1 + 2 \bullet 1 = 2 + 2 = 2 + (1+1) = (2+1) + 1 = 3 + 1 = 4;$
$2 \bullet 3 = 2 \bullet (2+1) = 2 \bullet 2 + 2 = 2 \bullet 2 + (1+1) = 4 + (1+1) = (4+1) + 1 = 5 + 1 = 6$

4.2.13-teorema. $(\forall a \in N) \wedge (a \neq 1) \Rightarrow (\exists\, n \in N) \wedge (a = 1 + n)$.

4.2.14-teorema. $(\forall a, b \in N) \Rightarrow a \neq a + b$.**[7]**

4.2.15-teorema. $\forall a, b \in N$ uchun quyidagi tengsizliklardan faqat biri o'rinli.

1) $a = b$ 2) $\exists\, n \in N \quad b = a + n$ 3) $\exists\, l \in N \quad a = b + l$.

4.2.2-ta'rif. $\forall a, b \in N$ natural sonlar uchun shunday $n \in N$ topilib, $a = b + n$ bo'lsa, a natural son b natural sondan katta deymiz va $a > b$ deb belgilaymiz. YOki b natural son a natural sondan kichik deymiz va $b < a$ deb belgilaymiz. $(a > b) \vee (a = b)$ yozuv o'rniga $a \geq b$ deb yozamiz va a natural son b natural sondan katta yoki teng deb ataymiz. Xuddi shunga o'xshash $(a < b) \vee (a = b)$ o'rniga $a \leq b$, $(a > b) \wedge (b > c)$ o'rniga esa $a > b > c$ yozuvlar ishlatiladi.

4.2.16-teorema. Natural sonlar to'plamida tengsizlik munosabati quyidagi xossalarga ega:

1°. $(\forall a, b \in N) \wedge (a \neq b) \Rightarrow (a > b) \vee (b > a)$.

2°. $(\forall a \in N) \quad учун \quad (\overline{a > a})$.

3°. $\forall a, b \in N \quad a > b \Rightarrow (\overline{b > a})$.

4°. $\forall a, b, c \in N \quad учун \quad (a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$.

5°. $\forall a, b, c \in N \quad учун \quad ((a > b) \Rightarrow (a + c) > (b + c))$.

6°. $\forall a, b \in N \quad учун \quad a + b > a$.

7°. $\forall a, b, c \in N \quad учун \quad (a > b) \Rightarrow ac > bc$.

4.2.3-ta'rif. $(A, +, \bullet)$-algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\forall a, b, c$ uchun $(a + b) + c = a + (b + c)$

2) $\forall a, b \in A$ uchun $a + b = b + a$

4.2.4-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plam uchun Ω- A dan aniqlangan amallar to'plami Ω'- A da aniqlangan munosabatlar to'plami bo'lsin. U holda (A, Ω, Ω'')- tartiblangan Matematik induksiya metodi.

4.2 Butun sonlar halqasi. Rasional sonlar maydoni. Haqiqiy sonlar sistemasi

Natural sonlar to'plamida har qanday ikkita natural son uchun ularning ayirmasi mavjud bo'lavermasligi ma'lum. Shuning uchun natural sonlar yarim halqasini qamrab olib, ayirish amali bajariladigan eng kichik algebrani topish masalasini ko'rib chiqamiz.

$N\times N$ ya'ni, koordinatalari natural sonlardan iborat bo'lgan barcha juftliklar to'plami berilgan bo'lsin. Bu to'plamda ixtiyoriy (m_1,n_1) va (m_2,n_2) juftliklar uchun

$(m_1,n_1)\oplus(m_2,n_2)=(m_1+m_2,n_1+n_2)$

$(m_1,n_1)\otimes(m_2,n_2)=(m_1m_2+n_1n_2,m_2n_1+m_1n_2)$

И $(m_1,n_1)=(n_1,m_1)$ $\oplus,\otimes$ va har bir juftlik uchun qarama-qarshisini topish amallarini aniqlaylik. Undan tashqari $\forall(m_1,n_1),(m_2,n_2)$ juftliklar uchun $((m_1,n_1)\sim(m_2,n_2))\Leftrightarrow(m_1+n_1=m_2+n_2)$ qonuniyat bilan aniqlangan binar munosabatni qaraymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabatidir. Haqiqatdan $\forall(m_1,n_1),(m_2,n_2)$ juftliklar uchun

a) $((m_1,n_1)\sim(m_1,n_1))\Leftrightarrow(m_1+n_1=m_1+n_1)$

b) $((m_1,n_1)\sim(m_2,n_2))\Leftrightarrow(m_1+n_2=m_2+n_1)\Leftrightarrow(m_2+n_1=m_1+n_2)=(m_2,n_2)\sim(m_1,n_1)$

s) $((m_1,n_1)\sim(m_2,n_2))\wedge((m_2,n_2)\sim(m_3,n_3))\Leftrightarrow(m_1+n_2=m_2+n_1)\wedge(m_2+n_3=m_3+n_2)\Rightarrow$
$\Rightarrow(m_1+n_3=m_3+n_1)\Leftrightarrow((m_1,n_1)\sim(m_3,n_3))$

$N\times N$ to'plamda aniqlangan ~ ekvivalentlik munosabati $\oplus,\otimes$ amallarga nisbatan kongurensiya bo'lishi bevosita tekshiriladi.

$Z=N\times N/\sim$ faktor to'plamdagi (a,b) juftlik aniqlagan ekvivalentlik sinfini $[a,b]$ orqali belgilasak, $N\times N/\sim$ to'plamda $\forall\,[m,n],[p,q]$ sinflar uchun $[m,n]+[p,q]=[m+p,n+q],[m,n]\cdot[p,q]=[mp+nq,np+mq],-[m,n]=[n,m]$ -tengliklar faktor to'plamda qo'shish, ko'paytirish, qarama-qarshisini olish amallarini aniqlaydi.

4.2.17-teorema. $Z_1=N\times N/\sim$ faktor to'plam yuqorida aniqlangan $+,\bullet$ amallarga nisbatan, natural sonlar yarim halqasiga izomorf bo'lgan yarim halqani qamrab oluvchi eng kichik kommutativ halqadir.[8]

$(k,+,\bullet)$ halqa $(Z_1,+,\bullet)$ halqaning $A\subset K$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy halqaostisi bo'lsin, u holda $-K=Z_1$ bo'lishini ko'rsatsak, $(Z_1,+,\bullet)$ xalqa $(A,+,\bullet)$-yarim halqani qamrab olgan eng kichik halqa bo'lishini isbot qilgan bo'lamiz. $[m,1],[n,1]$ elementlar A ning elementlari bo'lsa, $[1,n]\in R$ bo'lishi ravshan. U holda $[m,1]+[1,n]=[m+1,1+n]=[m,n]\in K$, ya'ni $\forall[m,n]\in Z$ uchun $[m,n]\in K$ kelib chiqar ekan. U holda $Z_1=K$.

Biz yuqorida Z_1 ning $\forall[m,n]$ elementi $[m,1]+[1,n]$ ko'rinishida ifoda qilinishi mumkinligini ko'rsatdik. Agar $[1,n]$ ni $-[n,1]$ orqali belgilasak $[m,n]=[m,1]+(-[n,1])$ hosil bo'ladi.

4.2.6-ta'rif. $\forall[m,n],[p,q]\in Z_1$ elementlar uchun $[m,n]+[p,q]$ yig'indini $[m,n]$ va $[p,q]$ elementlarning <u>ayirmasi</u> deb ataymiz va $[m,n]+(-[p,q])$ yoki $[m,n]-[p,q]$ ko'rinishida yozamiz.

Shunday qilib, Z_1 ning ixtiyoriy elementi A ning ikkita elementi ayirmasi ko'rinishida ifoda qilinar ekan.

$(Z_1,+,\bullet)$ algebraga izomorf $(Z,+,\bullet)$ algebra mavjud bo'lib $(N,+,\bullet)$ yarim halqa $(Z,+,\bullet)$ algebraning $(A,+,\bullet)$-yarim halqaga izomorf bo'lgan algebraosti bo'ladi. $(Z,+,\bullet)$ va $(Z_1,+,\bullet)$ algebralar izomorf bo'lgani uchun algebraik nuqtai nazardan ikkalasi bir hil, ya'ni $(Z,+,\bullet)$ qanday xossalarga ega bo'lsa, $(Z_1,+,\bullet)$ ham o'sha xossalarga ega. Xususan $\forall z \in Z$ element ikkita natural son ayirmasi ko'rnishida ifoda qilinadi. Kelgusida $\forall n \in N$ uchun $n-n$ ko'rinishida ifoda qilinadigan sonni nol orqali $\forall n \in N$ natural songa qarama-qarshi sonni $-n$ orqali belgilab olamiz. $(Z,+,\bullet)$ halqani <u>butun sonlar halqasi</u> deb ataymiz.

4.2.18-teorema. Har qanday butun son yo natural son yoki «0» yoki natural songa qarama-qarshi bo'lgan sondir.

4.2.7-ta'rif. $\forall m,n \in Z$ uchun agar $m-n \in N$ bo'lsa, $m>n$ deymiz. Agar $m>n$ yoki $n=m$ bo'lsa, u holda $m \geq n$ bo'ladi.

4.2.18-teorema. Butun sonlar halqasida quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) butun sonlar halqasida «>»-munosabat, qat'iy tartib munosabatdir.

b) ixtiyoriy a,b butun sonlar uchun $a>b$ yoki $a=b$ yo $b>a$ shartlardan faqat bittasi o'rinli;

v) $\forall a,b,c \in Z$ uchun $a>b$ bo'lsa, $a+c>b+c$;

g) $\forall a,b \in Z, \quad \forall c \in N$ uchun $a>b$ bo'lsa, $ac>bc$.

4.2.19-teorema. $\forall a \in Z, \quad b \in N$ sonlar uchun (*) $\quad a=bq+r$ va $0 \leq r < b$ shartlarni qanoatlantiradigan faqat bir juft q va r butun sonlar mavjud.

4.2.8-ta'rif. Agar $a,b \;\; b \neq 0$ butun sonlar uchun shunday q butun son topilib $a=bq$ tenglik o'rinli bo'lsa, a butun son b butun songa bo'linadi yoki b butun son a butun sonni bo'ladi deyiladi va mos ravishda $a \vdots b$ yoki $b \setminus a$ ko'rinishda belgilanadi.

4.2.20-teorema. Butun sonlar halqasida bo'linish munosabati quyidagi xossalarga ega:

1°. $\forall a \in Z, \quad a \neq 0$ uchun $a \vdots a$

2°. $\forall a \in Z, \quad a \neq 0$ uchun $0 \vdots a$

3°. $\forall a \in Z, \quad a \vdots 0$ va $a \vdots (-1)$

4°. $\vdots$ munosabati tranzitiv munosabatdir, ya'ni $\forall a,b,c \in Z,$ uchun $a \vdots b$ va $b \vdots c$ bo'lsa $a \vdots c$

5°. $\forall a,b,c \in Z$ uchun $a \vdots c$ bo'lsa $a \cdot b \vdots c$

6°. $\forall a,b,c \in Z$ uchun $a \vdots c$ va $b \vdots c$ bo'lsa $(a+b) \vdots c$

7°. $\forall a,b,c \in Z$ va $c \neq 0$ uchun $bc \vdots ac$ bo'lsa, $b \vdots a$

8°. $\forall a,b,c \in Z$ uchun $a \vdots c$ va $b \vdots d$ bo'lsa $(a \cdot b) \vdots (c \cdot d)$

9°. $\forall a,b,c \in Z$ va $a \vdots b$ bo'lsa $a \cdot c \vdots b \cdot c$

10°. $\forall a,b,c,m,n, \in Z$ uchun $a \vdots c$ va $b \vdots c$ bo'lsa $(ma+nb) \vdots c$

Bu xossalarning isboti $\vdots$ munosabatining ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

4.2.21-teorema. Agar butun sonlar halqasida $1 \vdots a$ bo'lsa, $a=1$ yo $a=-1$.

4.2.9-ta'rif. $\forall a, b \in Z$ sonlar uchun $a \vdots b$ va $b \vdots a$ shartlar bajarilsa a va b sonlar assosiirlangan deyiladi.

4.2.22-teorema. $\forall a, b \in Z$ sonlar assosirlangan butun sonlar bo'lsalar $a = b$ yo $a = -b$.

4.2.10-ta'rif. K halqaning a elementi uchun shunday $a' \in K$ bo'lib, $aa' = a'a = 1$ shart bajarilsa, u holda a teskarilanuvchi element deyiladi. Kelgusida a' o'rniga a^{-1} deb yozamiz.

4.2.11-ta'rif. Assosiativ, kommutativ, birlik elementga ega, noldan farqli har bir element teskarilanuvchi bo'lgan va $1 \neq 0$ shart bajariladigan halqa maydon deyiladi.

4.2.12-ta'rif. Maydonning noldan farqli har qanday elementi teskarilanuvchi bo'lgan halqaosti maydonosti deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, har qanday maydonosti o'z navbatida yana maydon bo'lar ekan. Undan tashqari har qanday maydon o'zi-o'zining maydonostisi bo'lib, bu maydonosti xos maydonosti deyiladi. Agar maydonning boshqa maydonostisi bo'lmasa, bunday maydon tub maydon deyiladi.

4.2.23-teorema. $(P, +, -, \bullet, 1)$ maydonning ihtiyoriy a, b, c elementlari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli.

1°. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

2°. Agar $ab = 1$ bo'lsa, u holda $b = a^{-1}$

3°. $c \neq 0$ bo'lib, $ac = bc$ bo'lsa, $a = b$

4°. $ab = 0$ bo'lsa, $a = 0$ yoki $b = 0$

5°. $a \neq 0$ va $b \neq 0$ bo'lsa, $ab \neq a$

6°. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bo'lsa, $ad = bc$

7°. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ad + bc}{bd}$

8°. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

9°. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

10°. noldan farqli a, b elementlar uchun $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

11°. $c \neq 0$ element uchun $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{ac^{-1}}{bc^{-1}}$

.

4.2.13-ta'rif. K-butunlik sohasi P-maydonning halqaostisi bo'lsin. P-maydonning ixtiyoriy p elementi uchun R-butunlik sohasining $m., n$ elementlari topilib, $P = mn^{-1}$ tenglik o'rinli bo'lsa, P-maydon K-butunlik sohasining nisbatlar maydoni deyiladi. p element esa $m., n$ elementlarning nisbati deb yuritiladi.

4.2.24-teorema. Har qanday butunlik sohasi uchun izomorfizmgacha aniqlikda yagona nisbatlar maydoni mavjud.

Shunga o'xshash sinflarni ko'paytirish amali sinflardan olingan vakillarga bog'liq bo'lmasligi ko'rsatiladi. P to'plamda olingan + va $\cdot$ amallariga nisbatan P to'plam maydon hosil qiladi. Haqiqatdan + va $\cdot$ amallari K da kommutativ, asso siativ, ko'paytirish amali, qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lganligidan R da ham kommutativ assosiativ ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lishi kelib chiqadi. R da $[(1,1)]$ sinf birlik element, $[(0,1)]$ sinf 0 element bo'ladi. Ular bir-biridan farqli bo'lishi ravshan. $-[(a,b)]=[(-a,b)],[(a,b)]\neq[(0,1)]$ element uchun $[(a,b)]^{-1}=[(a,b]]$ bo'lishini ko'rsatish qiyinchilik tug'dirmaydi. SHunday qilib P-maydon bo'lar ekan.

Endi $\kappa^1=\{[(k,1)]/\forall k\in K\}$ - to'plam P-ning k butunlik sohasiga izomorf bo'lgan xalqaostisi bo'lishini ko'rsatamiz. k^1 to'plam +, $\cdot$ amallariga nisbatan yopiq to'plamdir. Haqiqatan $\forall a_1 b\in k$ uchun $[(a,1)]+[(b,1)]=[(a+b,1)];[(a,1)]\cdot[(b,1)]=[(a,b)],1)]$ k^1nolning bo'luvchisi yo'q, ya'ni $[(a,1)]\cdot[(b,1)]=[(0,1)]$ bo'lsa, $a\cdot b=0$ bo'lib, $a=0$ yoki $b=0$. U holda $[(a,1)]=[(0,1)]$ yo $[(b,1)]=[(0,1)]$ bo'ladi. $-[a,1]=[(-a,1)],[(1,1)]\in k^1[1,1]-k^1$ning birlik elementidir. Butunlik sohasi ta'rifining boshqa shartlarining bajarilishi k^1P ning to'plamostisi bo'lishidan kelib chiqadi.

$\varphi:k\to k'$, $\varphi(a)=[(a,1)]$ akslantirish $k$ni k'ga izomorf akslantirishdir. Haqiqatan φ- biektiv akslantirish bo'lishi φ - ning aniqlashidan bevosita kelib chiqadi, $\forall[(a,1)],[(b,1)]\in k'$ elementlar uchun $\varphi(a+b)=[(a+b,1)]=[(a,1)]+[(b,1)]=\varphi(a)+\varphi(b)$;

$\varphi(a\cdot b)=[(a\cdot b,1)]=[(a,1)]\cdot[(b,1)]=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.

P maydon k' btunlik sohasining nisbatlar maydonidir. Haqiqatan $\forall[(a,b)]\in P$ uchun $[(a,b)]=[(0,1)]\cdot[(1,b)]=[(a,1)]\cdot[(b,1)]^{-1}$.

Shunday qilib, $k\cong k'$ va P maydon k'ning nisbatlar maydonidir. Bu hossamizga yuqoridagi teoremani qo'llasak, k butunlik sohasining P ga izomrf bo'lgan F nisbatlar maydon mavjud bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik F_1,F_2 - maydonlar k butunlik sohasining ikkita nisbatlar maydoni bo'lsin. U holda $F_1\cong F_2$. Haqiqatdan shunday $\forall a,b\in k$, $b\neq 0$ elementlar topilib, $f_1=a\cdot b^{-1}$, $k-F_1$ning halqaostisi bo'lgani uchun $\forall a,b\in k,\ b\neq 0$ uchun $a\cdot b^{-1}\in F_1$.

F_2 maydon uchun ham yuqoridagi munosabatlar o'rinli bo'lib, $f_2\in F_2$ u shunday $a,b\in k$ topilib, $f_2\in F_2$ uchun shunday $a,b\in k$ topilib, $f_2=a\cdot b^{-1}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erda $"\cdot"F_2$ dagi ko'paytirish amali F_1 ga tegishli $a\cdot b^{-1}$ elementni mos qo'yuvchi $\Phi:F_1\to F_2$ akslantirish izomorf akslantirishdir.

4.2.15-ta'rif. Butun sonlar xalqasining nisbatlar maydoni <u>rasional sonlar maydoni</u> deyiladi.

Rasional sonlar maydoni Q orqali belgilaymiz. Bu maydonning har bir $p\cdot q^{-1}$ elementi $\frac{p}{q}$ orqali belgilanadi.

$Z\frac{P}{q}$ o’rniga ba’zan p/q yozuv ishlatiladi.

4.2.25-teorema. $\forall a,b,c,d,\in Z$ $c>0,\ d>0$ butun sonlar berilgan bo’lib, $a/b,\ c/d$ rasional sonlar uchun $(a/b>c/d)\Leftrightarrow(ad-bc>0)$ formula bilan aniqlanadigan ">" munosabat rasional sonlar to’plamidagi tartib munosabatidir.

4.2.1-natija. $\forall r_1,r_2\in Q$ rasional sonlar uchun $(r_1\geq r_2)\Leftrightarrow(r_1IOr_2)V(r_1=r_2)$ formula yordamida aniqlangan munosabat noqat’iy tartib munosabatdir.

4.2.16-ta’rif. $\forall r_1,r_2\in Q$ rasional sonlar uchun $a\geq b$ bo’lsa, $b\leq a$ deyiladi.

4.2.17-ta’rif. Agar $(F,<)$ algebraik sistema uchun

1) $\forall a,b,c,\in F$ uchun $a<b$ va $b<c$ bo’lsa, $a<c$.

1) $\forall a,b,c,\in F$ uchun $a<b$ yo $b<a$ yoki $a=b$ shartlardan faqat bittasi bajariladi.

SHartlar o’rinli bo’lsa, $[F,<)$ sistema chiziqli tartiblangan sistema deyiladi.

4.2.18-ta’rif. Q rasional sonlar to’plamida < tartib munosabat chiziqli tartib munosabatdir.

Isbot. Haqiqatdan ihitiyoriy *r₁*, *r₂* lar uchun $r_1<r_2$ yoki $r_2<r_1$ $r_2=r_1$ munosabatlardan faqat bittasi o’rinlidir.

4.2.19-ta’rif. $(F,+,-,\cdot,1,<)$ algebraik sistema uchun

1) $(F,+,-,\cdot,1,<)$ - algebra maydon;

2) $(F\ <)$ - sistema chiziqli tartiblangan to’plam;

3) $\forall a,b,c\in F$ uchun $a<b$ bo’lsa, $a+c<b+c$ bo’ladi.

4) $\forall a,b,c\in F$ elementlar uchun $a<b$ va $0>c$ bo’lsa, $a\cdot c<bc$ bo’ladi.

Bu shartlar bajarilsa, $(F,+,-,\cdot,1,<)$ algebraik sistema tartiblangan maydon deyiladi. Tartiblangan maydonning $a>0$ elementlari musbat elementlar deyiladi. Odatdagidek $a\leq b$ munosabat $(a\leq b)\Leftrightarrow((a<b)V(a=b)$ formula bilan aniqlanadi. Agar $a<b$ bo’lsa $b-a>0$ deb yozishni kelishib olamiz.

4.2.26-teorema. $(F,+,-,\cdot,1,<)$ tartiblangan maydon quyidagi hossalarga ega:

$1^{\circ}.\forall a,b\in F$ uchun $a<b$ bo’lishi uchun $b-a>0$ bo’lishi zarur va etarli;

$2^{\circ}.\forall a\in F$ uchun $a<0,\ 0<a\ 0=a$ shartlardan bir vaqtda faqat biri o’rinli;

3°. agar $a\geq 0$ va $b\geq 0$ bo’lsa, u holda $ab\geq 0$ va $a+b\geq 0$ bo’ladi;

4°. $a\leq b$ va $c\leq d$ bo’lsa, $a+c<b+d$;

5°. Agar $a<b$ va $c<0$ bo’lsa $ac>bc$.

$6^{\circ}.\forall a\in F$ element uchun $a^2\geq 0$. Xususan $a\neq 0$ bo’lsa, $a^2>0$;

$7^{\circ}.\forall n\in N$ uchun $n\cdot 1>0$ xususan $1>0$;

8°. Tartiblangan maydon butunlik sohasidir.

Isbot: 1°. Tartiblangan maydon ta'rifiga ko'ra $a<b$ bo'lsa, $a+(-a)<b+(a)$ yoki $0<b-a$ ya'ni $b-a>0$ bo'ladi.

2°. $(F,<)$ chiziqli tartiblanishdan bevosita kelib chiqadi.

3°.– xossa tartiblangan maydon ta'rifining 3-4 shartlaridan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatdan $a\geq 0$ va $b\geq 0$ bo'lsa, u holda $a+b\geq 0+b$ va $a\cdot b$ yoki $a+b\geq 0$, $a\cdot b\geq 0$. Xususan, agar $a>0$ va $b>0$, $a\cdot b>0$ bo'lishi kelib chiqadi.

4°. $a\leq b$ va $c\leq d$ bo'lsa, $a+c\leq b+c$ va $b+c\leq d+b$ yoki $a+c\leq b+b$.

5°. $a<b$ va $c<0$ bo'lsa, $-c>0$, u holda $-ac<-bc$ ya'ni $ac-bc>0$. Demak $ac>bc$.

6°. $a\neq 0$ bo'lsin. U holda $a>0$ yoki $0>a$ shartlardan faqat biri bajariladi. Agar $a>0$ bo'lsa, u holda 3°-ga ko'ra $(-a)^2>0$ yoki $a^2>0$ bo'ladi. Agar $a=0$ bo'lsa, $a^2=0$ bo'ladi. Demak $\forall a\in F$ uchun $a^2\geq 0$.

7°. Maydonda $1\neq 0$ bo'lgani uchun $1^2>0$ yo $1>0$, u holda $n\cdot 1=1+1+...+1=n\cdot>0$.

8°. - hossa maydonning bevosita ta'rifidan kelib chiqadi.

4.2.20-ta'rif. Tartiblangan maydonning ixtiyoriy elementi uchun.

$$|a|=\begin{cases} a_1 \text{ агар} - a>0 \\ -a_1 \text{ агар } a<0 \\ 0_1 \text{ агар } a=0 \end{cases}$$ tenglik bilan aniqlanadigan $|a|$ - element a ning – absolyut qiymati yoki moduli deyiladi.

4.2.27-teorema. $(F,+,-,\cdot,1,<)$ tartiblangan maydonning $\forall a,b$ elementlari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

1°. $|a|=|-a|$.

2°. $|a|\geq a$ va $|a|\geq -a$;

3°. $|a+b|\leq |a|+|b|$;

4°. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

5°. $|b|>0$.

6°.$\forall a\in F$, $a^2\geq 0$ element uchun $|b|<a$ bo'lishi uchun $-a<b<a$ bo'lishi zarur va etarli.

$\forall a,b,c,F,$ $a>0$ elementlar uchun $|b|>a$ bo'lishi uchun $b>a$ yoki $b<-a$ bo'lishi zarur va etarli.

4.2.21-ta'rif. Tartiblangan maydonning ixtiyoriy musbat a,b elementlari uchun shunday n- natural son mavjud bo'lib $n\cdot a>b$ shart bajarilsa, bu maydon Arximedcha tartiblangan maydon deyiladi.

Bundan buyog'iga chalkashlik tug'dirmaydigan hollarda, $(F,+,-,\cdot,1><)$ tartiblangan maydon berilgan degan gapni ishlatishni kelishib olamiz.

4.2.22-ta'rif. Elementlari F -tartiblangan maydonga tegishli bo'lgan $a_1, \ldots, a_n$ elementlardan tuzilgan $a_1,\ldots\ldots a_n\ldots\ldots(1)$ ketma-ketlik va $a \in F$ element berilgan bo'lsin. Agar F ga tegishli $\forall \varepsilon > 0$ element uchun shunday $n_0 \in N$ natural son topilib, barcha $k > n_0$ natural sonlar uchun $|a_k - a| < \varepsilon$ shart bajarilsa, a element (1) ketma-ketlikning limiti deyiladi. F-maydonda limitga ega bo'lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

4.2.23-ta'rif. Elementlari F - tartiblangan maydondan olingan $a_1,\ldots a_n$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. F - maydonning ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ elementi uchun shunday n_0 natural son topilib, har qanday n_0 dan katta bo'lgan m, k natural sonlar uchun $|a_m - a_k| < \varepsilon$ shart bajarilsa, u holda bunday ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deyiladi.

4.2.24-ta'rif. F tartiblangan maydondagi har qanday fundamental ketma-ketlik shu maydonda yaqinlashuvchi bo'lsa, bunday maydon to'liq deyiladi.

4.2.25-ta'rif. Arximedcha turtiblangan rasional sonlar sistemasini o'z ichiga olgan eng kichik to'liq maydon haqiqiy sonlar sistemasi deyiladi.

Agar $([R,+,-,\cdot,<)$ agebraik sistema, xaqiqiy sonlar sistemasi bo'lsa, $([R,+,-,\cdot)$ - maydon xaqiqiy sonlar maydoni, $[R$ - to'plam – haqiqiy sonlar to'plami deyiladi.

Endi xaqiqiy sonlar maydonini ko'rib chiqamiz.

$a_0, a_1,\ldots\ldots, a_n\ldots\ldots$ hadlari rasional sonlardan iborat ketma-ketlikni qisqalik uchun (a_n) orqali belgilaymiz.

Hadlari rasional sonlardan iborat barcha (a_n) ketma-ketliklar to'plami Q^N da quyida $+ \cdot -$ amallarni kiritamiz:

$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$, $-(a_n)=(-a_n)$ $(a_k)\cdot(b_k)=(a_k\cdot b_k)$.

Hamma elementlari 1dan iborat (1) ketma-ketlikni 1 orqali belgilaymiz.

Q^N- to'plamdagi barcha fundamental ketma-ketliklar to'plamini P orqali belgilaymiz.

$(P+,-,\cdot,1)$ - algebra birlik elementga ega bo'lgan kommutativ halqa bo'lishi bevosita tekshiriladi.

P – to'plamda (a_n) v (b_n) ketma-ketliklar limitlari teng bo'lsa, ular teng kuchli deyiladi va $(a_n) \cong (b_n)$ deb belgilanadi.

$\equiv$ munosabat P to'plamda ekvivalentlik munosabatidir.

Agar shunday n_0 natural son va $\varepsilon > 0$ element topilib, barcha $k > n_0$ natural sonlar uchun $b_k - a_k \geq \varepsilon$ shart bajarilsa, $(a_k) < (b_k)$ deymiz.

R to'plamda $\equiv$ munosabat $+,-,\cdot$ amallari va $<$ - munosabatga nisbatan kongruensiyadir. U holda $P/\equiv$ faktor to'plamda $[(a_n)]+[(b_n)]=[(a_n+b_n)]$;

$[(a_n)]\cdot[(b_n)]=[(a_n\cdot b_n)]$; $-[(a_n)]=[(-a_n)]$ tengliklar orqali $\cdot,+,-$ amallarni aniqlash mumkin.

1 orqali $[(1)]$ ketma-ketlikni belgilaymiz.

$(a_n)<(b_n)$ bo'lsa, $[(a_n)]<[(b_n)]$ deymiz. $(P/\equiv,+,\cdot,-,1,<)$ sistema rasional sonlar sistemasini qamrab olgan eng kichik arximedcha tartiblangan to'liq maydon ya'ni haqiqy sonlar sistemasidir.

4.3 Kompleks sonlar maydoni.
a) Kompleks son, qo'shmasi va moduli, ularning xossalari

Ma'lumki, xaqiqiy sonlar maydonida $x^2+1=0$ tenglama echimga ega emas. Bu tenglama echimga ega bo'ladigan, haqiqiy sonlar maydonining eng kichik kengaytmasi bo'lgan maydonni quramiz.

$\sqrt{-1}$ ni i orqali belgilab olamiz.

$C=\{b+bi/a,b\in\Re\}$ - to'plamni qaraylik. C - da $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$ $(a+bi)\cdot c+di(=(ac-bd)+(ad+bc)i;$ $-(a+bi)=(-a)+(-b)i$ tengliklar orqali qo'shish, ko'paytirish, qarama-qarshisini olish amallarini aniqlaymiz.

C to'plam yuqorida aniqlangan amallarga nisbatan maydon hosil qilishini ko'rsatamiz. Haqiqatda, qo'shish, ko'paytirish amallarining kommutativligi, assosiativligi, ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi bevosita tekshiriladi. $0+0i$ element C da qo'shishga nisbatan neytral element bo'lib, uni 0 orqali belgilaymiz. $1+o_i$ esa birlik elementdir. Ixtiyoriy $a+b_i\neq 0$ element uchun teskari element $(a+b_i)^{-1}\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ formula bilan aniqlanadi. Haqiqatdan ham, $a+bi\neq 0$ bo'lsa, $a^2+b^2\neq 0$ bo'lib, $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$ element mavjud va

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{-ab}{a^2+b^2}-\frac{ba}{a^2+b^2}\right)i=1+oi=1.$$

Shunday qilib, $(C,+,-,\cdot 0,1)$ algebra maydon ekan.

Bu maydonni kompleks sonlar maydoni deb ataymiz.

4.3.1.-ta'rif. Kompleks sonlar maydonining har qanday maydonostisi sonli maydon deyiladi. Kompleks sonlar maydonining har qanday xalqaostisi sonli maydondir.

4.3.2-ta'rif. $Z=a+bi$ kompleks son uchun $Z=a-bi$- qo'shma kompleks son deyiladi.

4.3.1-teorema. Har qanday z_1, z_2 - kompleks sonlar uchun quyidagi hossalar o'rinli:

1^0. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

2^0. $\overline{(-z_1)}=-\overline{z_1}$.

3^0. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

4^0. $\overline{(\overline{z})}=z$.

5^0. $z_2 \neq 0, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

6^0. $z = \overline{z}$ bo'lishi uchun $z \in R$ bo'lishi zarur va etarli.

7^0. Agar $z = a + bi$ bo'lsa, u xolda $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

4.3.3-ta'rif. $\sqrt{a^2 + b^2}$ son $a + bi(a, b \in \Re)$ <u>kompleks sonining moduli</u> deyiladi. Kompleks sonning moduli $|Z|$ orqali belgilanadi.

4.3.2-teorema. Har qanday z_1, z_2 kompleks sonlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

1^0. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

2^0. $|z| = 0$ faqat va faqat shu xoldaki, agar z = 0 bo'lsa.

3^0. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

4^0. $|z^{-1}| = |z|^{-1} (z \neq 0)$.

5^0. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

6^0. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

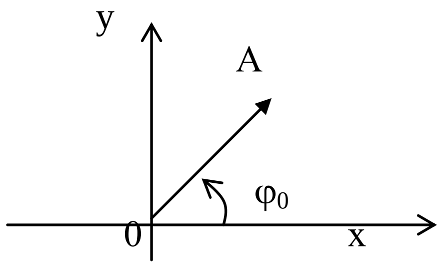
7^0. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

4 .4 Kompleks sonning geometrik tasviri, trigonometrik shakli. Kompleks sondan ildiz chiqarish

Har bir $a + bi$ kompleks songa tekislikda (a, b) nuqtani mos qo'ysak, kompleks sonlar maydoni bilan tekislik orasida biektiv moslik o'rnatiladi. (tekshiring) Shunday qilib, har bir kompleks songa tekisilikdagi yagona nuqta mos qo'yiladi. Bu nuqta <u>kompleks sonning geometrik tasviri</u> deyiladi. Bu nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtirsak, boshi koordinatalar boshida, uchi esa (a,b) koordinatali nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{OA}$ vektor hosil bo'ladi. Bu vektorning uzunligi esa $a + bi$ kompleks sonning moduliga tengligi ayon.

Har bir bi kompleks songa Oy o'qida $(0, b)$ nuqta mos keladi. Bu o'qni <u>mavxum o'q deb</u> ataymiz. Ox o'qni <u>xaqiqiy o'q</u> deymiz. Qo'shma kompleks sonlar Ox o'qiga nisbatan simmetrik nuqtalar orqali ifoda qilinadi, qarama-qarshi kompleks sonlar esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar orqali ifoda qilinadi.

Moduli r ga teng bo'lgan barcha kompleks sonlarning geometrik o'rni, radiusi r ga teng, markazi koordinata boshida yotuvchi aylanadan iboratdir. Kompleks sonlarni qo'shish vektorlarni qo'shishdagi parallelogramm qoidasi bilan bajarilishini ko'rish qiyin emas.



OA vektorning Ox o'qini musbat yo'nalishi soat strelkasi qarama-qarshi yo'nalishida hosil qilgan φ_q burchagi $a+bi$ kompleks sonning boshlang'ich argumenti deyiladi. Agar kompleks son birinchi chorakda bo'lsa, $\varphi_0 = arctg\ b/a$; II-chorakda bo'lsa, $\varphi_0 = \pi - arctg\,|b/a|$; III-chorakda bo'lsa, $\pi + arctg\ |b/a|$, IV- chrakda bo'lsa, $\varphi_0 = 2\pi - arctg\ \ |b/a|$tengliklar bilan hisoblanadi. (1-rasmga qarang).

$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ burchaklar kompleks sonining argumentlari deyiladi. $a+bi$ kompleks son berilgan bo'lib, r uning moduli φ esa argumenti bo'lsin, u holda $b = r\sin\varphi,\ b = r\cos\varphi$ tengliklarni ko'rsatish qiyin emas. Demak, $a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ tenglik o'rnili. Bu esa <u>kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi</u> deyiladi.

4.4.1-teorema. $Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinli:

$1^\circ\ z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$2^\circ\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

4.4.1-natija. $z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ bu formula <u>Muavr formulasi</u> deyiladi.

4.4.2-teorema. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks son berilgan bo'lsin. Bundan r - kompleks sonning moduli $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ kompleks sonning argumenti, φ_0 - boshlang'ich argumenti bo'lsin. U holda z - kompleks son n ta xar hil n - darajali kompleks ildizlarga ega bo'ladi va bu ildizlar quyidagi formula yordamida topiladi:

$$U_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}),\ k = 1,\ \ldots,\ n\text{-}1$$

Amaliy topshiriqlar

0-variant- echib ko'rsatilgan misollar

4.1 $|z+2|=3$ tenglamani eching.[8]

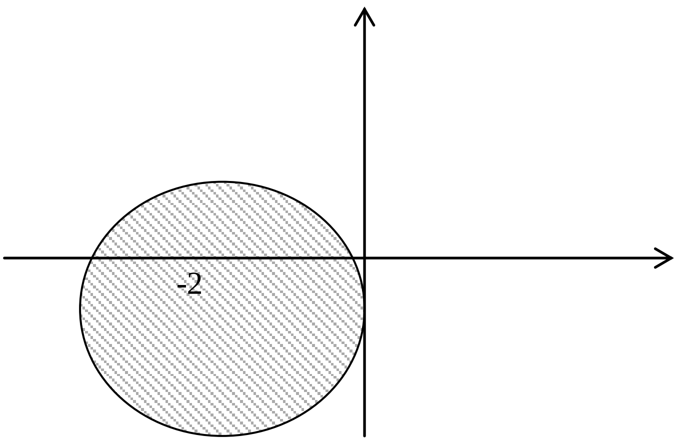
Yechish. . Kompleks sonning moduli, kompleks sonlarning tengligi ta'riflaridan quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$|z+2|=|x+yi+2|=|(x+2)+yi|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ va

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=3$. Bundan $(x+2)^2+y^2=9$ tenglamani hosil qilamiz. Xosil bo'lgan tenglamaning echimlari tekislikdagi markazi (-2; 0) nuqtada radiusi 3 ga teng aylananing nuqtalaridan iborat.

4.2 $|z+2+i|\le 3$ tengsizliklarni eching va echimlar to'plamini Dekart koordinatalar tekisligida ifodalang.[1]

Yechish. . $|z+2+i|\le 2$ tengsizlikka kompleks sonning moduli ta'rifini qo'llasak, $|z+2+i|=|x+yi+2+i|=|(x+2)+(y+1)i|=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}$ ni hosil qilamiz. Bundan $(x+2)^2+(y+1)^2\le 4$ tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikning echimlari markazi (-2; -1) nuqtada, radiusi 2 ga teng doiradan iborat. Doirani Dekart koordinatalar tekisligida chizamiz:



4.3 $\sqrt{3+4i}$ ni hisoblang.

Yechish. . Kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarish formulalari

1) $\underset{b>0}{\sqrt{a+bi}}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$ va

2) $\underset{b<0}{\sqrt{a+bi}}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$ lardan foydalanamiz.

Berilgan misolda $b>0$ bo'lganligi uchun birinchi formulani qo'llaymiz:

$\underset{4>0}{\sqrt{3+4i}}=\pm\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}}+i\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right)=$

$\pm(2+2i)=\pm 2(1+i)$.

4.4 $\sqrt[3]{2+3i}$ ildizlarni hisoblang.[7]

Yechish. . Ixtiyoriy kompleks sondan n - darajali ildizlarni topish formulasi $u_k=|c|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), k=0,\ldots,n-1$ (1) dan foydalanamiz. Buning uchun avval berilgan $z=2+3i$ kompleks sonni trigonometrik ko'rinishga keltiramiz:

kompleks sonning moduli - $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+3^3}=\sqrt{13}$;

argumenti $\varphi=arctg\frac{b}{a}=arctg\frac{3}{2}$ dan iborat. U holda $z=2+3i=\sqrt{13}(\cos(arctg\frac{3}{2})+i\sin(arctg\frac{3}{2}))$. Topilgan modul va argumentni (1) formulaga qo'yamiz: $u_k=\sqrt{13}^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{arctg\frac{3}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{arctg\frac{3}{2}+2\pi k}{3}), k=0,1,2.$

Bundan $u_0=\sqrt[6]{13}(\cos\frac{arctg\frac{3}{2}}{3}+i\sin\frac{arctg\frac{3}{2}}{3})$,

$u_1=\sqrt[6]{13}(\cos\frac{arctg\frac{3}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{arctg\frac{3}{2}+2\pi}{3})$,

$u_2=\sqrt[6]{13}(\cos\frac{arctg\frac{3}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{arctg\frac{3}{2}+4\pi}{3})$ ildizlarni hosil qilamiz.

4.5 $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$ tenglikni isbotlang.

Isbot. 1. $n=1$ bo'lsin. U xolda $\sin x=\frac{\sin\frac{1+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}\Rightarrow\sin x=\sin x$. Tenglik o'rinli.

2. $n=k$ uchun $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin kx=\frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}$ bo'lsin.

U holda $n=k+1$ da $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin kx+\sin(k+1)x=$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x=$$

$$=(2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{kx}{2})=\frac{\sin\frac{k+2}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{k+1}{2}x.$$

Demak, har qanday $n\in N$ uchun $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$ tenglik o'rinli.

4.6 $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2},(n>1)$ ekanligini isbotlang.[8]

isbot. 1. $n=2$ da $\frac{4^2}{2+1}<\frac{(2\cdot 2)!}{(2!)^2}\Rightarrow\frac{16}{3}<6$ kelib chiqadi, ya'ni tengsizlik o'rinli.

2. Har qanday $k>0$ uchun $\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$ ekanligidan

$\frac{4^k}{k+1}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$. Bundan $\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}$ kelib chiqadi.

Demak, har qanday $n>1$ natural son uchun $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

4.7-misol. $Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ to'plamda qo'shish, ko'paytirish amallari quyidagi jadvallarda berilgan.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$(Z_2,+,\bullet)$-maydon tub maydon bo'lishi ko'rinib turibdi. Agar a,b elementlar P-maydonning elementlari bo'lib, $b\neq 0$ bo'lsa, ab^{-1} o'rniga $\frac{a}{b}$ deb yozamiz.

4.8-misol. $(Q+,-,\cdot,1)$ rasional sonlar maydoni $<$ munosabatga nisbatan tartiblangan maydondir. $(Q,+,-,\cdot,1,<)$ algebraik sistema <u>rasional sonlar sistemasi</u> deyiladi.

4.9-misol. 1ning 4-darajali kompleks ildizlarini toping.

Echish. $\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}, k = 0,1,2,3.$

$u_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$

$u_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$

$u_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$

$u_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$

4.10-misol. $\sqrt[3]{2+3i}$ ni hisoblang.

Echish. Avval $2+3i$ ni trigonometrik shaklga keltirib olamiz:

$r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ $\quad \varphi_0 = arctg\frac{3}{2}$ $\quad 2+3i = \sqrt{13}(\cos(arctg\frac{3}{2}) + i\sin(arctg\frac{3}{2}))$.

Hosil bo'lgan trigonometrik shakldagi kompleks sondan 3-darajali ildizlarni formula yordamida topamiz:

$$\sqrt[3]{\sqrt{13}(\cos(arctg\frac{3}{2}) + i\sin(arctg\frac{3}{2}))} = \sqrt[6]{13}(\cos\frac{arctg\frac{3}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{arctg\frac{3}{2}+2k\pi}{3}, k = 0,1,2.$$

4-mustaqil ish topshiriqlari:

1. *Tenglamani eching:[9]*

1.1. $\bar{z} = 5 - z$.

1.2. $\bar{z} = - 3z - 1+2i$.

1.3. $z^2 + \bar{z} = 1$.

1.4. $z^2 - 2z\bar{z} - 3 = 3i$.

1.5. $z^2 + 5z + 5 - 3i = 0$.

1.6. $z^2(1+i) - z + 1+2i = 0$.

1.7. $z^2 + (2+i)z - 1+7i = 0$.

1.8. $(1+ i)z^2 + iz + 2+4i = 0$.

1.9. $z + |z+1| + i = 0$.

1.10. $z|z| - 2z + i= 0$.

1.11. $z|z| -2iz^2 + 2i = 0$.

1.12. $|z - 2i| = |z|$.

1.13. $|z - i| = |z - 1|$.

1.14. $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$.

1.15. $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 3i$.

1.16. $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 7$.

1.17. $z\bar{z} + 4(z + \bar{z}) = -1 + 3i$.

1.18. $(1 - i)\bar{z} -3iz = 2 - i$.

1.19. $z^2 + (1+i)z - 4 = 0$.
1.20. $2iz^2 - z + 7i = 0$.
1.21. $(1 - i)z^2 + 2iz - 9 = 0$.
1.22. $2iz^2 + (2 + i) z + 5 = 0$.
1.23. $(-8i)z^2 - 4z + 3i = 0$.
1.24. $7z^2 + (5-2i)z + 7i = 0$.
1.25. $4z^2 - 7iz + 3 = 0$.

Quyidagi tengsizliklarni eching va echimlar to'plamini Dekart koordinatalar tekisligida ifodalang:[11]

1. $| z + 2 | \geq | z |$.
2. $| z - 1 + i| < | z + 1 |$.
3. $| z - 5 + i| < 4$.
4. $| z + 1 - i| \leq | z - 2 |$.
5. $| z + i| > | z - 1 - i|$.
6. $| z + 4i | \geq | z - i|$.
7. $| z - 5i | \leq | z + i|$.
8. $| z - 2 - 2i | < | z + 1 |$.
9. $| z + 6i | > | z - 3 |$.
10. $| z + 5 | > | z - 1 + i|$.
11. $| z + 2i| < 2$.
12. $| z - 3 | < 1$.
13. $| z + 2 + 2i | \leq \sqrt{2}$.
14. $| z + 2 | < | z |$.
15. $| z - 1 - 3i | \leq | z - 1 |$.
16. $| z + 5 + 6i | > 0$.
17. $| z + 4 - i| \leq 1$.
18. $| z - 3 - 3i | \geq | 1 + i|$.
19. $| z + i| \geq | z - 2 |$.
20. $| z + 1 - i| < | z + 1 + i|$.
21. $| z - 2i | > | z + i |$.
22. $| z + 1 - 2i | < | z + 3i |$.
23. $| z - 3 - i| < | z + 2i |$.
24. $| z + 2 - 3i | > | z |$.
25. $| z + 2 | > | z - 8 - 3i |$.

3. *Hisoblang:[7]*

3.1.	$\sqrt{5+12i}$.	3.10.	$\sqrt{5-17i}$.	3.18.	$\sqrt{4+11i}$.
3.2.	$\sqrt{45-12i}$.	3.11.	$\sqrt{3+2i}$.	3.19.	$\sqrt{-22-15i}$.
3.3.	$\sqrt{15+13i}$.	3.12.	$\sqrt{-2+3i}$.	3.20.	$\sqrt{9+11i}$.

3.4. $\sqrt{5-3i}$. 3.13. $\sqrt{32-17i}$. 3.21. $\sqrt{5-2i}$.
3.5. $\sqrt{-5-2i}$. 3.14. $\sqrt{-1+13i}$. 3.22. $\sqrt{-7+2i}$.
3.6. $\sqrt{-25+2i}$. 3.15. $\sqrt{17+19i}$. 3.23. $\sqrt{5-12i}$.
3.7. $\sqrt{34+12i}$. 3.16. $\sqrt{-5+12i}$. 3.24. $\sqrt{7+4i}$.
3.8. $\sqrt{3+5i}$. 3.17. $\sqrt{12+5i}$. 3.25. $\sqrt{23-17i}$.
3.9. $\sqrt{8+13i}$.

4. *Ildizlarni hisoblang* :[1]

4.1. $\sqrt[8]{\left(\frac{-5+7i}{i}\right)^3}$. 4.10. $\sqrt[7]{-1-2i}$. 4.18. $\sqrt[6]{\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}$.
4.2. $\sqrt[6]{2+3i}$. 4.11. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}((\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i)}$. 4.19. $\sqrt[5]{4-5i}$.
4.3. $\sqrt[5]{\frac{-2i}{1-\sqrt{3}i}}$. 4.12. $\sqrt[10]{1-2i}$. 4.20. $\sqrt[4]{\frac{1}{8}+\frac{iSin60^0}{4}}$.
4.4. $\sqrt[8]{-1+2i}$. 4.13. $\sqrt[4]{2+3i}$. 4.21. $\sqrt[7]{-1-3i}$.
4.5. $\sqrt[6]{64}$. 4.14. $\sqrt[5]{4-3i}$. 4.22. $\sqrt[3]{2-i}$.
4.6. $\sqrt[4]{7+8i}$. 4.15. $\sqrt[5]{1-3i}$. 4.23. $\sqrt[4]{7+8i}$.
4.7. $\sqrt[6]{-2+3i}$. 4.16. $\sqrt[8]{-1-i}$. 4.24. $\sqrt[5]{5+3i}$.
4.8. $\sqrt[4]{12-5i}$. 4.17. $\sqrt[5]{6+13i}$. 4.25. $\sqrt[5]{3+7i}$.
4.9. $\sqrt[6]{12+7i}$.

5. *Isbotlang*:[6]
5.1. $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$.
5.2. $(x_1+\ldots+x_n)^2 = x_1^2 + \ldots+x_n^2 +2(x_1 x_2 + \ldots+x_{n-1} x_n)$.
5.3. $(10^n + 18n - 1) \vdots 18$.
5.4. $1^3 + 2^3 + \ldots+ n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5.5. $(3^{2n+3} + 40n - 27) \vdots 64$.
5.6. $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{(n-1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$.
5.7. $(3^{2n+3} - 24n + 37) \vdots 64$.
5.8. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{4}{4n+1}$.
5.9. $(5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1) \vdots 8$.
5.10. $1\cdot 1! + 2\cdot 2! +\ldots+ n\cdot n! = (n+1)! - 1$.
5.11. $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11$.
5.12. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$.
5.13. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$.

5.14. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.

5.15. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ (n >1).

5.16. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+...+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ ($|x| \neq 1$).

5.17. $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{3n-2}>1$.

5.18. $(3^{6n}-2^{6n}) ⋮ 35$.

5.19. $(11^{n+2}+12^{2n+1}) ⋮ 133$.

5.20. $(9^{n+1}-8n-9) ⋮ 16$.

5.21. $1-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

5.22. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

5.23. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

5.24. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

5.25. $\frac{1}{a\cdot(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+...+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$.

Test savollari

1.Matematik induktsiya printsipini toping.[10]

A) Agar biror V(n) tasdiq n=1 uchun rost bo’lib, uning n=k+1 uchun ham rostligi kelib chiqsa, V(n) tasdiq istalgan natural son uchun ham o’rinli bo’ladi.

V) Agar biror V(n) tasdiq n=k da rostligidan n=k+1 uchun ham rostligi kelib chiqsa, V(n) tasdiq istalgan son uchun ham o’rinli bo’ladi.

S) Agar biror V(n) tasdiq n=1 uchun rost bo’lib, uning n=k da rostligidan n=k+1 uchun ham rostligi kelib chiqsa, V(n) tasdiq istalgan son uchun ham o’rinli bo’ladi.

D) Agar biror V(n) tasdiq n=1 uchun rost bo’lib, uning n=k da rostligidan n=k+1 uchun ham rostligi kelib chiqsa, V(n) tasdiq istalgan natural son uchun ham o’rinli bo’ladi.

E) to’g’ri javob yo’q.

2. $-i^{13}=?$

A) – i   B) -1   C) i   D) 1

3 . z= -i kompleks sonning φ burchagini topinig.

A) 0 V) $\frac{\pi}{2}$ S) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{3}$

4. z=1 kompleks sonning φ burchagini topinig.

A) 0 V) $\frac{\pi}{2}$ S) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

5. $z = 1 + i$ kompleks sonning φ burchagini aniqlang.[7]

A) 0 V) $\frac{\pi}{2}$ S) π D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

6. $z = -1 - i$ kompleks sonning φ burchagini aniqlang.

A) $\frac{\pi}{4}$ V) $\frac{3\pi}{4}$ S) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{2}$

7. $z = 1 - i$ kompleks sonning φ burchagini aniqlang.[8]

A) $\frac{\pi}{4}$ V) $\frac{3\pi}{4}$ S) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{2}$

8. $z = 2 + 2i$ kompleks sonning φ burchagini aniqlang.

A) $\frac{\pi}{4}$ V) $\frac{3\pi}{4}$ S) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{3\pi}{2}$

9. $(1+i)^{20}$ kompleks sonni щisoblang.

A) {12,13} V){10} S){6,14} D){10,15} E) {9,14}

10. $\frac{3}{2+2i}$ sonning mavhum qismi qaysi?

A). $-3/13$

B). 3/13

C). *-9/13

D). 9/13

11. $\sum_{i=0}^{5}\sum_{i=1}^{3}(i+3)$=?

A). 45

B). 54

C). 75

D). *90

12. “KO’ZA” so’zining harflari yordamida “K” bilanboshlangan to’rt harfli nechta harxil so’z yozish mumkin.(so’zlar ma’noga ega bo’lishi sha rt emas).[9]

A). 4

B). *6

C). 1
D). 3

13. Harxi l 4 ta matematika va 3ta fizika kitobi, fizika kitoblari yonma-yon bo'lis hsharti bilan birtokchaga necha harxil usulda qo'yilishi mumkin?
A). *3!·5!
B). 3!·4!
C). 3!·4!·2!
D). 7!·3!

14. Birxil rangda 2 ta koptok 6 ta o'quvchiga har biriga engko'p 1 ta koptok berishs harti bilan necha usulda tarqatilish imumkin?
A). 5
B). 6
C). 10
D). *15

15. Harxi lrangda 2 ta koptok 6 ta o'quvchiga ,har biriga engko'p 1 ta koptok berishs S harti bilan necha usulda tarqatish mumkin?
A). 5
B). 10
C). 15
D).*30

16. 3 tasida haydovchilik guvoxnomasi bo'lgan 8 tadan 5 tasi bir mashinaga, eng kam birkishi hujjatli bo'lish sharti bilan nechta usuldao'tirishlari mumkin?
A). 15
B). 51
C). *55
D). 120

17. 6 kishidan tashkil topgan gruppada, boshliq va yordamchisi yonma-yon o'tirish sharti bilan doira shaklida gistolatrofida necha usulda o'tirishi mumkin?
A). 2
B). 3
C). 6
D). *12

18. Eng kamida uchtasi birto'g'ri chiziq ustida bo'lmagan, va birtekislik ustidagi 8 ta turl I nuqtadan nechta to'g'richiziq o'tkazish mumkin?[10]
A). *28
B). 48
C). 56
D). 64

19. 30 kishilik bir sinfda boshliQ'vyordamchsi necha usulda saylanishi mumkin?
A). 900
B). 885
C). *870
D). 450

20. {0,1,2,3,4} to'plamningelementlari bilan nechta turli 3 xonali son yozish mumkin?

A). 50
B). *48
C). 30
D). 20
21. 70!+30! Yig'indiningoxiridanechtanolbor?
A). 5
B). *7
C). 14
D). 16
22. $4^n \cdot 10^{n-1}$ko'paytmaningmusbatbo'luvchilarisoni 75 ta bo'lsa, n qancha?
A). 3
B). 4
C). *5
D). 6
23. $\sum_{i=0}^{5}\sum_{i=1}^{3}(i+3)$=?

A). 45
B). 54
C). 75
D). *90

24."KO'ZA" so'zining harflari yordamida "K" bilanboshlangan to'rt harfli nechta harxil so'z yozish mumkin.(so'zlar ma'noga ega bo'lishi sha rt emas).

A). 4
B). *6
C). 12
D). 18

25. Harxi l 4 ta matematika va 3ta fizika kitobi, fizika kitoblari yonma-yon bo'lis hsharti bilan birtokchaga necha harxil usulda qo'yilishi mumkin?
A). *3!·5!
B). 3!·4!
C). 3!·4!·2!
D). 7!·3!

Nazariy savollar:[1].[7].

1. Algebraik sistema.
2. Natural sonlarni qo'shishning xossalari.
3. Natural sonlarni ko'paytirishning xossalari.
4. Natural sonlar to'plamida tartib munosabati.
5. Algebraik sistemalar gomomorfizmi.
6. Algebraik sistemaning sistemaosti.

7. Algebraik sistemaga ta’rif bering.
8. Akademik lisey, maktab matematikasidan algebraik sistemaga doir misollar keltiring.
9. Bir xil turli algebralarga misol keltiring.
10. Algebraik sistemalar gomomorfizmini tushuntiring.
11. Algebraik sistemalar izomorfizmiga misol keltiring.
12. Algebraik sistemalar avtomorfizmi deb nimaga aytiladi?
13. Algebraik sistema sistemaosti tushunchasiga ta’rif Bering.
14. Sistemaostiga misollar keltiring.
15. Haqiqiy sonlar maydonining kengaytmasini quring.
16. Kompleks son qanday hosil qilingan?
17. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallarni aniqlang.
18. Kompleks sonlar to’plami maydon tashkil etishini isbotlang.
19. Kompleks sonning qo’shmasi xossalarini isbotlang.
20. Kompleks son moduliga ta’rif Bering.
21. Kompleks son moduli xossalarini isbotlang.
22. Natural sonlar yarimhalqasining kengaytmasi.
23. Butun sonlar halqasi.
24. Butun sonlar halqasida tartib munosabati.
25. Rasional sonlar maydoni.
26. Tartiblangan maydon.
27. Haqiqiy sonlar sistemasi.
28. Natural sonlar yarimhalqasini qamrab olgan eng kichik kommutativ halqani quring.
29. Butun sonlar halqasi qanday aniqlanadi?
30. Butun sonlar halqasida tartib munosabatini aniqlang.
31. Butun sonlar halqasida bo’linish munosabatining xossalarini ayting.
32. Maydon tushunchasiga ta’rif bering.
33. Maydonning soda xossalarini ayting.
34. Butunlik sohasining nisbatlar maydonini tuzing.
35. Maydonlar izomorfizmiga misol keltiring.
36. Rasional sonlar maydonida tartib munosabatini aniqlang.
37. Tartiblangan maydon xossalarini isbotlang.
38. To’liq maydon nima?
39. Haqiqiy sonlar sistemasini quring.
40. Kompleks sonning geometrik tasviri nimadan iborat?
41. Kompleks tekislik deganda qanday tekislikni tushunasiz?
42. Haqiqiy o’q, mavhum o’qlarni farqi nimada?
43. Kompleks sonlarni vektor ko’rinishida ifodalash mumkin-mi?
44. Geometrik ko’rinishdagi kompleks sonlarni qo’shish qanday bajariladi?
45. Kompleks sonning argumenti qanday aniqlanadi?
46. Kompleks son modulining geometrik ma’nosi nima?
47. Trigonometrik ko’rinishda berilgan kompleks sonlarni ko’paytirish, bo’lish amallari qanday bajariladi?
48. Kompleks sonning trigonometrik shaklga keltirish qanday amalga oshiriladi?

49. Birning n-darajali ildiziga ta’rif bering.
50. Birning n-darajali ildizlari soni nechta? Javobingizni asoslang.
51. Ixtiyoriy kompleks sondan n-darajali ildiz topish formulasini ifodalang.
52. Kompleks sonning geometrik tasviri nimadan iborat?
53. Kompleks tekislik deganda qanday tekislikni tushunasiz?
54. Haqiqiy o’q, mavhum o’qlarni farqi nimada?
55. Kompleks sonlarni vektor ko’rinishida ifodalash mumkin-mi?
56. Geometrik ko’rinishdagi kompleks sonlarni qo’shish qanday bajariladi?
57. Kompleks sonning argumenti qanday aniqlanadi?
58. Kompleks son modulining geometrik ma’nosi nima?
59. Trigonometrik ko’rinishda berilgan kompleks sonlarni ko’paytirish, bo’lish amallari qanday bajariladi?
60. Kompleks sonning trigonometrik shaklga keltirish qanday amalga oshiriladi?
61. Birning n-darajali ildiziga ta’rif bering.
62. Birning n-darajali ildizlari soni nechta? Javobingizni asoslang.
63. Ixtiyoriy kompleks sondan n-darajali ildiz topish formulasini ifodalang.
64. Natural sonlar sistemasi. Matematik induksiya prinsipi.
65. Butun sonlar halqasi.
66. Rasional sonlar maydoni.
67. O’aqiqiy sonlar sistemasi.
68. Maydonning kompleks kengaytmasi. Kompleks sonlar maydoni.
69. Kompleks sonning turli shakllari.
70. Kompleks sonning moduli, qo’shmasi xossalari.
71. Birdan va ixtiyoriy kompleks sondan ildiz chiqarish.

5- modul. Arifmetik vektorlar fazosi.

1§. Arifmetik vektor fazo. Asosiy xossalari. Fazoosti

5.**1.1-ta'rif.** $F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ ixtiyoriy maydon bo'lib, F uning asosiy
to'plami bo'lsin. F^n to'g'ri ko'paytmaning ixtiyoriy $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$
elementi n - o'lchovli arifmetik vektor deyiladi. [1].
$a_1,a_2,...,a_n$-sonlar $\vec{a}$ vektorning mos ravish
da 1-,2-. . . n- koordinatalari, n natural son esa uning o'lchovi deyiladi.

5.1.2-ta'rif. F^nning ixtiyoriy ikkita $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ va $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ vektorlari uchun $a_1=b_1,\ a_2=b_2,...,a_n=b_n$ bo'lsa, berilgan vektorlar teng deyiladi.

5.1.3-ta'rif. F^nning ixtiyoriy ikkita $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ va $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ vektorlarining yig'indisi deb $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$ vektorga aytiladi.

Agar $a_i+b_i=c_i, i=1,...,n$ va $\vec{c}=(c_1,...,c_n)$ belgilashlarni qo'llasak, u holda $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ hosil bo'ladi. F to'plam qo'shishga nisbatan yopiq ekanligidan, arifmetik vektorlarning yig'indisi arifmetik vektor bo'ladi. Ya'ni F^n qo'shish amaliga nisbatan yopiq to'plam.

5.1.4-ta'rif. $\forall\lambda\in F$ skalyarni $\forall\vec{a}\in F^n$ vektorga ko'paytirish deb $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$ vektorga aytiladi.[2]

F to'plam ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq ekanligidan, F^n
to'plamning skalyarni vektorga ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi. Skalyarni vektorga ko'paytirish amali odatda $\omega_\lambda(\vec{a})=\lambda\vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. $\forall\vec{a}\in F^n$ vektorga $\exists\lambda\vec{a}\in F^n$ vektor mos qo'yilganligi uchun, skalyarni vektorga ko'paytirish amali F^nda unar amal bo'ladi.

5.1.5-ta'rif. F^n to'plam, unda aniqlangan qo'shish binar amali va skalyarni vektorga ko'paytirish unar amallari yordamida hosil qilingan x algebra F m
aydon ustida qurilgan n – o'lchovli arifmetik vektor fazo deyiladi.

5.1.1-teorema. F^nda aniqlangan qo'shish va skalyarni vektorga ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1°. $\forall(\vec{a},\vec{b}\in F^n)(\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a})$ - qo'shishning kommutativlik xossasi;

2°. $\forall(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in F^n)((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))$ - qo'shishning assotsiativlik xossasi;[8]

3°. $\forall(\vec{a}\in F^n)(\vec{a}+\vec{0}=\vec{a})$ (qo'shishga nisbatan neytral element mavjud);

4°. $\forall(\vec{a}\in F^n)(\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0})$ (qo'shish amaliga nisbatan simmetrik element mavjud);

$5^0. \forall(\lambda \in F) \wedge \forall(\vec{a} \in F^n)(\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b})$ (skalyarni vektorlar yig'indisiga ko'paytirish distributiv);

$6^0. \forall(\lambda, \mu \in F) \wedge \forall(\vec{a} \in F^n)((\lambda \cdot \mu)\vec{a} = \lambda(\mu(\vec{a})))$ (skalyarlar ko'paytmasini vektorga ko'paytirish assotsiativ);

$7^0. \forall(\lambda, \mu \in F) \wedge \forall(\vec{a} \in F^n)((\lambda + \mu)(\vec{a}) = (\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}))$ (skalyarlar yig'indisini vektorga ko'paytirish distributiv;

$8^0. \forall(\vec{a} \in F^n)(1 \cdot \vec{a} = \vec{a})$.

5.1.6-ta'rif. F = < F; +, ™, -, $^{-1}$, 0,1 > maydon ustida V≠∅ to'plam berilgan bo'lib, unda quyidagi shartlar bajarilsa,
V = < V; +, {ω_α | α∈F} > algebraga F maydon ustida qurilgan chiziqli fazo deyiladi: [2]

1. ∀a,b ∈ V ⇒ a + b ∈ V;
2. ∀a,b ∈ V ⇒ a + b = b + a;
3. ∀a,b,s ∈ V ⇒ (a + b) + s = a + (b + s);
4. ∀a ∈ V ∧ ∃ e ∈V ⇒ a + e =a (e=0);
5. ∀a ∈ V ∧ ∃ a' ∈V ⇒ a + a' =0 (a'=-a);
6. ∀a ∈ V ∧ ∀ α∈ F ⇒ ω_α(a)=αa ∈ V;
7. ∀a,b ∈ V ∧ ∀ α∈ F ⇒ α(a+b)=αa+αb;
8. ∀a ∈ V ∧ ∀ α,β∈ F ⇒ (α+β)a=αa+βa;
9. ∀a ∈ V ∧ ∀ α,β∈ F ⇒ (αβ)a=α(βa);
10. ∀a ∈ V ⇒ 1™a=a.

5.1.7-ta'rif. $F^n =< F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}>$ n - o'lchovli arifmetik vektor fazo berilgan bo'lsin. F^nning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan qism to'plami $F^k (k \le n)$ arifmetik vektor fazo tashkil qilsa, F^k arifmetik vektor fazoga F^n arifmetik vetor fazoning fazoostisi (qismfazosi) deyiladi.

2-§. Vektorlarning chiziqli bog'liq, chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemalari, xossalari

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon ustida qurilgan $F^n =< F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\}>$ arifmetik vektor fazo berilgan bo'lsin. [1].

5.2.1-ta'rif. F^n vektor fazoning vektorlaridan iborat $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, ...$ sistemaga vektorlarning cheksiz sistemasi; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sistemaga vektorlarning chekli sistemasi deyiladi.

5.2.2-ta'rif. F^n vektor fazoning $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, ...$ sistemasi va F maydonning $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ skalyarlari berilgan bo'lsin. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n + ...$ ifodaga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, ...$ vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Chiziqli kombinatsiyadagi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ skalyarlar chiziqli kombinatsiyaning koeffitsientlari deyiladi.[8]

5.2.3-ta'rif. F sonlar maydoni ustida qurilgan F^n arifmetik vektor fazoning chekli sondagi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ (1)
vektorlari uchun F maydonda kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalyarlar topilib, ular uchun ushbu

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \qquad (2)$$

tenglik bajarilsa, u holda (1) sistema vektorlarning chiziqli bog'langan sistemasi deyiladi. Agar (2) tenglik $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda_n = 0$ bo'lganda bajarilsa, u holda (1) vektorlarning chiziqli bog'lanmagan (chiziqli erkli) sistemasi deyiladi.

Vektorlarning bo'sh sistemasi chiziqli bog'lanmagan sistema hisoblanadi.

5.2.4-ta'rif. Agar istalgan $\lambda_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ sonlar uchun ushbu

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n \qquad (3)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{a}_i (i = \overline{1, n})$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi ($\vec{a}$ vektor $\vec{a}_i (i = \overline{1, n})$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat) deyiladi.

5.2.1-teorema. Kamida bitta nol vektorga ega vektorlarning $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ chekli sistemasi chiziqli bog'langan sistema bo'ladi.

5.2.2-teorema. Chekli vektorlar sistemasining biror-bir qismi chiziqli bog'langan bo'lsa, sistemaning o'zi ham chiziqli bog'langan bo'ladi.

5.2.3-teorema. Vektorlarning chiziqli bog'lanmagan sistemasining har qanday qism sistemasi chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi.

5.2.4-teorema. Agar $\vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlardan kamida bittasi o'zidan oldingi vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u holda $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ bo'lgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlardan iborat sistema chiziqli bog'langan bo'ladi.

5.2.5-teorema. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlarning sistemasi chiziqli bog'lanmagan bo'lib, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n, \vec{b}$ sistema chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda $\vec{b}$ vektor $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlar sistemasi orqali yagona usulda chiziqli ifodalanadi.

5.2.6-teorema. Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ orqali va $\vec{b}_i (i = \overline{1, n})$ vektorlar $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_m$ vektorlar orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_m$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi.

5.2.7-teorema. Agar $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n+1}$ vektorlar $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ vektorlar orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n+1}$ sistema chiziqli bog'langan bo'ladi.

5.2.1-natija. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlar $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$ sistema orqali chiziqli ifodalansa va $n > m$ bo'lsa, u holda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sistema chiziqli bog'langan bo'ladi.

5.2.2-natija. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ vektorlar $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$ sistema orqali chiziqli ifodalansa va $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sistema chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, u holda $n \leq m$ bo'ladi.

5.2.3-natija. n-o'lchovli arifmetik vektor fazoning har qanday n dan ortiq vektorlardan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'ladi.

3-§. Vektorlarning ekvivalent sistemalari. Vektorlar chekli sistemasining bazisi va rangi

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon ustida qurilgan $F^n = < F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ arifmetik vektor fazo va shu fazo vektorlaridan tuzilgan R va T chekli sistemalar berilgan bo'lsin.[1].

5.3.1-ta'rif. Agar R va T sistemalarning ixtiyoriy biridan olingan har qanday noldan farqli vektorni ikkinchi sistema vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalash mumkin bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent sistemalar deyiladi va $R \sim T$ ko'rinishda belgilanadi.

Vektorlarning chekli sistemalari to'plamida aniqlangan $\sim$ binar munosabat refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik xossalariga ega bo'lganligi uchun ekvivalentlik binar munosabati bo'ladi.

5.3.1-teorema. Agar vektorlarning har qanday chiziqli erkli ikkita chekli sistemalari ekvivalent bo'lsa, ulardagi vektorlar soni teng bo'ladi.

5.3.2-ta'rif. Vektorlar chekli sistemasini elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1) sistemaning qandaydir bir vektorini noldan farqli skalyarga ko'paytirish;

2) sistemaning skalyarga ko'paytirilgan bir vektorini ikkinchi vektoriga qo'shish yoki ayirish;

3) nol vektorni sistemadan chiqarish yoki sistemaga kiritish.

5.3.2-teorema. Agar vektorlarning bir chekli sistemasi ikkinchi sistemani elementar alamashtirishlar natijasida hosil qilingan bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent bo'ladi.

5.3.3-ta'rif. Vektorlar chekli sistemasining chiziqli erkli, bo'sh bo'lmagan qism sistemasi yordamida sistemaning har qanday vektorini chiziqli ifodalash mumkin bo'lsa, bunday qism sistemaga berilgan sistemaning bazisi deyiladi.

5.3.3-teorema. Kamida bitta noldan farqli vektorga ega bo'lgan har qanday chekli sistema bazisga ega. Vektorlar chekli sistemasining har qanday ikkita bazisi bir hil sondagi vektorlardan iborat bo'ladi.

5.3.4-ta'rif. Vektorlar chekli sistemasining ixtiyoriy bazisidagi vektorlar soniga uning rangi deyiladi.

Nol vektorlardan iborat sistemaning va bo’sh sistemaning rangi nolga teng deb hisoblanadi.

5.3.4-teorema. $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlar sistemasi $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m$ vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, u holda $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ sistemaning rangi $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m$ sistemaning rangidan katta emas.

5.3.5-teorema. Vektorlar chekli sistemasining har qanday qism sistemasining rangi sistema rangidan katta emas.

5.3.6-teorema. Vektorlar ekvivalent chekli sistemalarining ranglari teng.

5.3.7-teorema. n-o’lchovli arifmetik vektor fazoni har qanday chekli sistemasining rangi n dan katta emas.

5.3.8-teorema. Agar vektorlar chekli sistemasining rangi n ga teng bo’lsa, u holda uning k ta vektordan iborat har qanday qism sistemasi $k > n$ bo’lganda chiziqli bog’langan bo’ladi.

Vektorlar sistemasining rangi ta’rifiga ko’ra, agar sistemaning rangi n ga teng bo’lsa, u holda sistemadagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni n ga teng. Bundan $k > n$ ta vektordan tuzilgan har qanday qism sistemada $k-n$ ta vektor n ta vektor yordamida chiziqli ifodalanadi.

5.3.9-teorema. Agar $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlar sistemasining rangi $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n,\vec{b}$ vektorlar sistemasining rangiga teng bo’lsa, u holda $\vec{b}$ vektorni $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi ko’rinishida ifodalash mumkin.

4§. Chiziqli qobiq. Chiziqli ko’pxillik

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon ustida qurilgan $F^n =< F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ arifmetik vektor fazo va shu fazo vektorlaridan tuzilgan $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chekli sistemasi berilgan bo’lsin.[1].

5.4.1-ta’rif. $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$ ($\alpha_i\in ¢$) ko’rinishdagi barcha chiziqli kombinatsiyalar to’plamiga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli qobig’i deyiladi va u $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ ko’rinishda belgilanadi.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli qobig’i qo’shish va skalyarni vektorga ko’paytirish amallariga nisbatan yopiqligi bevosita tekshirish tekshirish orqali aniqlanadi.

5.4.1-teorema. $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ chiziqli qobiq vektor fazo tashkil etadi.

5.4.2-ta’rif. F^n vektor fazoning $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ fazoostisiga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarga tortilgan yoki $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlar orqali hosil qilingan fazoosti deyiladi.

Bo’sh to’plamning chiziqli qobig’i nol vektordan iborat to’plam bo’ladi.

5.4.2-teorema. Agar $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$ sistemaning har bir vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sistema orqali chiziqli ifodalansa, u holda $L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m) \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ bo'ladi.

5.4.3-teorema. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ sistemaning rangi k bo'lsa, u holda $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ chiziqli qobiq k o'lchovli bo'ladi.

F maydon ustida n-o'lchovli F^n fazoning W qism fazosi va $\vec{x}_0 \in F^n$ vektor berilgan bo'lsin. $\forall \vec{y} \in W$ uchun $\vec{z} = \vec{x}_0 + \vec{y}$ ko'rinishdagi vektorlar to'plamini H orqali belgilaylik.

5.4.3-ta'rif. $\vec{x}_0 + W = \{\vec{x}_0 + \vec{y} \mid \vec{x}_0 \in F^n\}$ to'plamga W qism fazoning $\vec{x}_0$ vektorga siljitishdan hosil bo'lgan chiziqli ko'pxillik deyiladi va u $H = \vec{x}_0 + W$ orqali belgilanadi.

$H = \vec{x}_0 + W$ tenglik, W qismfazoning barcha vektorlariga $\vec{x}_0$ vektorni qo'shishdan H ning $\vec{z}$ vektorlari hosil bo'lishini ko'rsatadi.

5. **4.4-teorema.** H chiziqli ko'pxillik F^n fazoning qismfazosini ifodalashi uchun $\vec{x}_0 \in W$, ya'ni H=W munosabat bajarilishi zarur va yetarli.

5.4.5-teorema. Ixtiyoriy ikkita $\vec{x}_0 + W$ va $\vec{y}_0 + W$ chiziqli ko'pxilliklar umumiy elementga ega bo'lmaydi yoki ular ustma-ust tushadi. Barcha W qismfazo yordamida hosil qilingan chiziqli ko'pxilliklar birlashmasi V to'plamdan iborat.

5.4.6-teorema. F^n vektor fazoning qismfazolari W , W' va $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ vektorlari berilgan bo'lsin. Agar $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in W'$ va $W \subset W'$ bo'lsa, u holda $\vec{x}_1 + W \subset \vec{x}_2 + W'$ bo'ladi.

5.4.7-teorema. $H = \vec{x}_0 + W$ chiziqli ko'pxillikning o'lchovi W qismfazoning o'lchovi bilan bir xil bo'ladi.

Amaliy topshiriqlar

0-variant- echib ko'rsatilgan misolla.

5.1-мисол. Maktab geometriya kursidan ma'lumki, tekislikdagi vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$ va fazodagi vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ko'rinishda bo'lib, ularning koordinatalari haqiqiy sonlardan iborat. Haqiqiy sonlar to'plami maydon tashkil etadi. Demak, Dekart koordinatalar sistemasi yordamida ifodalanuvchi tekislikda olingan vektorlar 2 o'lchovli, fazoda olingan vektorlar 3 o'lchovli arifmetik vektorga misol bo'ladi.[1]

5.2-мисол.

$\vec{a}=(2,3,-1,4)$ va $\vec{b}=(2,3,-1,4)$ vektorlar teng.

5.3-мисол. $\vec{a}=(2,3,-1,4)$ va $\vec{b}=(3,5,4,2)$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}=(2+3,3+5,-1+4,4+2)=(5,8,3,6)$

5.4-мисол. $\lambda=-2$ skalyarni $\vec{a}=(2,3,-1,4)$ vektorga ko'paytirish natijasida $\omega_{-2}(\vec{a})=(-2)(2,3,-1,4)=(-4,-6,2,-8)$ vektor hosil bo'ladi.

5.5-мисол. R^1, R^2, R^3 lar haqiqiy sonlar maydoni ustida qurilgan arifmetik vektor fazolar va R^1 fazo R^2, R^3 fazolarga; R^1, R^2 fazolar R^3 fazoga fazoosti bo'ladi. [7]

5.6-misol. $\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(-1,2,4),\vec{c}=(7,-5,2)$ vektorlar va $\alpha=-2,\beta=5,\gamma=9$ skalyarlar berilgan bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasini quyidagicha aniqlaymiz: $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=$
$=(-2)(1,2,3)+5(-1,2,4)+9(7,-5,2)=(-2,-4,-6)+(-5,10,20)+$
$+(63,-45,18)=(56,-39,32).$

5.7-misol. $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli vektorlar sistemasi ekanligini isbotlang.

Haqiqatdan ham, $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3=\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,\ 0,1)=$ $=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ bo'lib, bundan $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ kelib chiqadi. Demak, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi.

5.8-misol. F^n arifmetik vektor fazoning $\vec{e}_1=(1,0,\ldots,0),\vec{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\vec{e}_n(0,\ldots,0,1)$ vektorlaridan iborat sistema chiziqli bog'lanmagan. Bu sistema n-o'lchovli birlik vektorlardan iborat sistema.

5.9-misol. $\vec{a}_1=(2,4,7),\vec{a}_2=(3,6,11),\vec{a}_3=(4,8,13)$ vektorlar $\vec{b}_1=(1,2,3),\vec{b}_2=(1,2,4)$ orqali chiziqli ifodalanadi: $\vec{a}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_2,\vec{a}_2=\vec{b}_1+2\vec{b}_2,\vec{a}_3=3\vec{b}_1+\vec{b}_2$.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ vektorlar sistemasining chiziqli bog'liqligini ko'rsatamiz:

$$\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vec{a}_3\end{array}\begin{pmatrix}2&4&7\\3&6&11\\4&8&13\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ 2\vec{a}_2-3\vec{a}_1\\ \vec{a}_3-2\vec{a}_1\end{array}\begin{pmatrix}2&4&7\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ 2\vec{a}_2-3\vec{a}_1\\ \vec{a}_3-2\vec{a}_1-(2\vec{a}_2-3\vec{a}_1)\end{array}\begin{pmatrix}2&4&7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan pog'onasimon matritsada nol satr mavjud. Bundan

$\vec{a}_3-2\vec{a}_1-(2\vec{a}_2-3\vec{a}_1)=\vec{0}$ ifoda yordamida $\vec{a}_3=2\vec{a}_1+(2\vec{a}_2-3\vec{a}_1)=-\vec{a}_1+2\vec{a}_2$ tenglikni, ya'ni $\vec{a}_3$ vektorning $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ vektorlar yordamidagi ifodasini keltirib chiqaramiz. Demak, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan.

5.10-misol. R^3 da $\vec{a}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(-1;\ 0;\ 3)$, $\vec{c}(2;\ 1;\ -1)$,$\vec{d}(3;\ 2;\ 2)$ vektorlar sistemasi berilgan. Uning chiziqli bog'langan yoki chiziqli bog'lanmaganligini tekshiramiz. [8]

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=\vec{0}$ tenglamadan $\alpha=-\frac{1}{4};\beta=\frac{7}{4};\gamma=\frac{5}{2};\delta=-1$ ekanligini topamiz. Demak, ta'rifga ko'ra berilgan sistema chiziqli bog'langan. Haqiqatdan ham, $\vec{d}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}+\frac{5}{2}\vec{c}$, ya'ni sistemaning bitta vektori qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalanadi.

5.11-misol. $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1), $\vec{d}$ (3; 2; 2) vektorlardan iborat sistemaning bazislaridan biri $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan tashkil topgan. Demak, berilgan sistemaning rangi 3 ga teng.

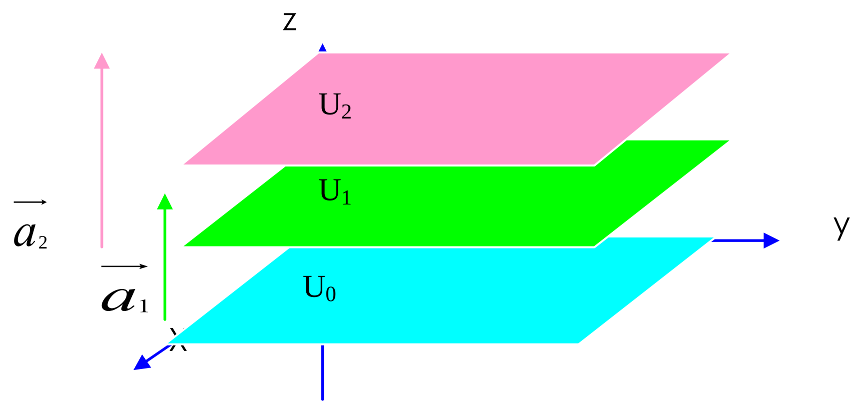
5.12-misol. $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1), $\vec{d}$ (3; 2; 2) vektorlardan iborat sistemaning rangi 3 ga teng. Uning qism sistemasi sifatida $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan tashkil topgan sistemani olsak, u chiziqli bog'lanmagan bo'lganligi sababli rangi 3 ga teng. Berilgan sistemaning ixtiyoriy bitta vektoridan iborat sistema chiziqli bog'lanmagan va rangi 1 ga teng qism sistema bo'ladi.

5.13-misol. $\vec{a}_1=(2,3,1),\vec{a}_2=(-1,2,0),\vec{a}_3=(1,5,1)$ vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=\{\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3 \mid \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R\}$ tashkil etgan chiziqli vektor fazoning bazisi berilgan vektorlar sistemasining bazisi (masalan, $\vec{a}_1,\vec{a}_2$)dan iborat bo'lib, o'lchovi vektorlar sistemasining rangi 2 ga teng.

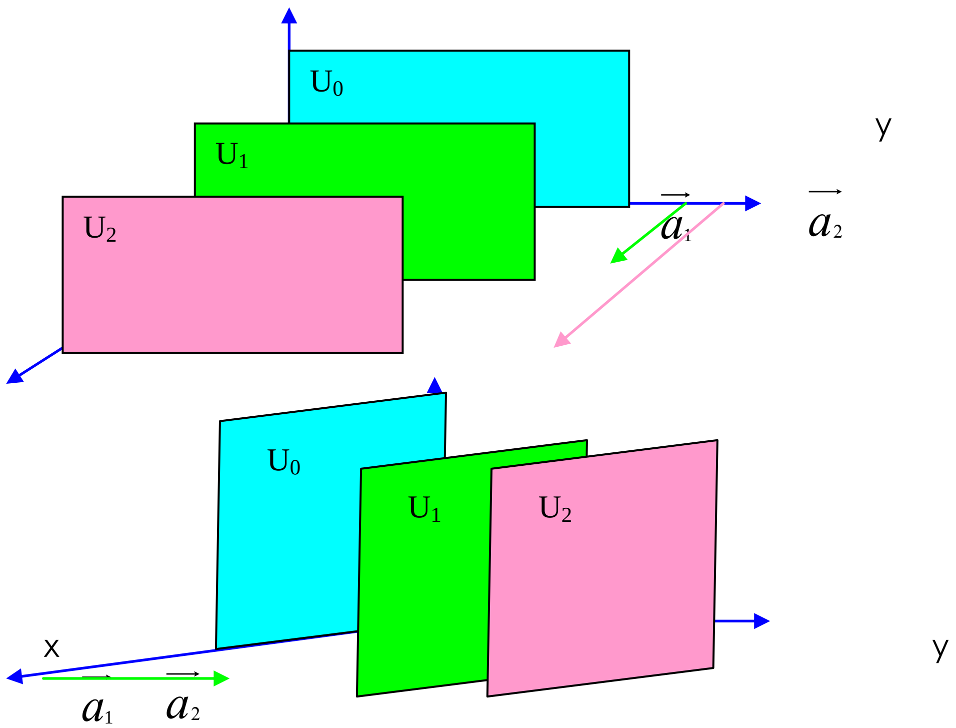
5.14-misol. Dekart koordinatalar tekisligini ikki o'lchovli arifmetik vektor fazo ekanligi ma'lum. Uning qismfazosi sifatida koordinatalar boshidan o'tgan har qanday to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlar to'plamini olish mumkin. U holda chiziqli ko'pxillik sifatida qismfazo sifatida olingan to'g'ri chiziqni biror $\vec{x}_0$ vektorga parallel ko'chirishdan hosil bo'lgan to'g'ri chiziqni qarash mumkin.

5.15-misol. R^3 da koordinatalar boshidan o'tgan har qanday tekislik qismfazo bo'ladi. Uni biror bir o'qda olingan noldan farqli vektorga parallel ko'shirish natijasida hosil bo'lgan tekislik chiziqli ko'pxillik bo'ladi.

(XOU), (YOZ), (XOZ) tekisliklarini parallel ko'chirishlardan hosil bo'lgan chiziqli ko'pxilliklarni quyidagi chizmalarda ko'rish mumkin:



z



5.16-misol. R^3 arifmetik vektor fazoning R^2 qismfazosi yordamida hosil qilingan chiziqli ko'pxillik H=$\vec{x}_0 + R^2$ vektor fazo tashkil etishi uchun $\vec{x}_0 = \vec{0}$ bo'lishi kerak. U holda H=$\vec{0} + R^2 = R^2$ bo'ladi va chiziqli ko'pxillikning o'lchovi qismfazo o'lchoviga teng bo'ladi: $\dim R^2 = \dim H$.

4-mustaqil ish topshiriqlar:

. Quyidagi to`plamlar $R$ maydon ustida chiziqli fazo tashkil etishini isbotlang va uning bazisi, o`lchovini aniqlang:[11]

1.1. $V = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$

1.2. $V = \{(a,\ 0) / a \in R\}$

1.3. $V = \{(0,\ b) / a \in R\}$

1.4. $V = \{(a,\ b) / a, b \in R\}$

1.5. $V = \{(a,\ 0,\ 0) / a \in R\}$

1.6. $V = \{(0,\ b,\ 0) / b \in R\}$

1.7. $V = \{(0,\ 0,\ c) / c \in R\}$

1.8. $V = \{(a,\ b,\ 0) / a, b \in R\}$

1.9. $V = \{(0,\ b,\ c) / b, c \in R\}$

1.10. $V = \{(a,\ 0,\ c) / a, c \in R\}$

1.11. $V = \{(a,\ b,\ c,\ d) / a, b, c, d \in R\}$

1.12. $V = \{(0,\ b,\ c,\ d) / b, c, d \in R\}$

1.13. $V=\{(a,\ 0,\ c,\ d)/a,c,d\in R\}$
1.14. $V=\{(a,\ b,\ 0,\ d)/a,b,d\in R\}$
1.15. $V=\{(a,\ b,\ c,\ 0)/a,b,c\in R\}$
1.16. $V=\{(a,\ b,\ 0,\ 0)/a,b\in R\}$
1.17. $V=\{(a,\ 0,\ b,\ 0)/a,b\in R\}$
1.18. $V=\{(0,\ a,\ b,\ 0)/a,b\in R\}$
1.19. $V=\{(0,\ 0,\ a,\ b)/a,b\in R\}$
1.20. $V=\{(a,\ 0,\ 0,\ b)/a,b\in R\}$
1.21. $V=\{(ax+by)/a,b\in R\}$
1.22. $V=\{(ax+by+cz)/a,b,c\in R\}$
1.23. $V=\{y=ax+b/a,b\in R\}$
1.24. $V=\{(ax+b\sqrt{2})/a,b\in Q\}$
1.25. $V=\{(ax-by+cz)/a,b,c\in R\}$

2. Vektorlarning quyidagi sistemalari chiziqli bog`liq yoki erkliligini aniqlang hamda uning bazis iva rangini toping:[7]

2.1. $a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{-1,2,-3,4\};\ a_3=\{-1,1,-1,1\};\ a_4=\{3,4,1,2\}$
2.2. $a_1=\{3,2,-3,4\};\ a_2=\{1,-2,3,-4\};\ a_3=\{-1,-1,-1,-1\};\ a_4=\{-3,4,1,2\}$
2.3. $a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{-1,1,-1,1\}.$
2.4.
2.5. $a_1=\{2,-2,3,5\};\ a_2=\{-1,1,-3,3\};\ a_3=\{-4,1,-3,0\};\ a_4=\{0,4,-1,2\}$
2.6. $a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{-1,-2,-3,-4\};\ a_3=\{0,1,2,3\};\ a_4=\{3,6,9,12\}$
2.7. $a_1=\{0,2,0,4\};\ a_2=\{0,-2,-3,0\};\ a_3=\{-1,1,-1,1\}$
2.8. $a_1=\{1,2,3\};\ a_2=\{2,-3,4\};\ a_3=\{-1,-1,1\};\ a_4=\{3,4,2\}$
2.9. $a_1=\{0,1,4\};\ a_2=\{2,-3,4\};\ a_3=\{-1,1,-1\}$
2.10. $a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{0,0,-1,4\};\ a_3=\{-1,6,-7,1\};\ a_4=\{8,4,5,2\}$
2.11. $a_1=\{-1,7,-3,9\};\ a_2=\{-1,6,-1,1\};\ a_3=\{3,-4,-1,2\}$
2.12. $a_1=\{1,2,3,4,-3\};\ a_2=\{-1,-2,3,4,1\};\ a_3=\{-5,1,-7,1,2\};\ a_4=\{0,4,1,2,0\}$
2.13. $a_1=\{2,3\};\ a_2=\{-1,-3\};\ a_3=\{1,-1\};\ a_4=\{3,1\}$
2.14. $a_1=\{1,-3,4\};\ a_2=\{-1,-2,-3\};\ a_3=\{8,1,-1\};\ a_4=\{-3,-4,-1\}$
2.15. $a_1=\{3,4\};\ a_2=\{-2,-3\};\ a_3=\{-1,6\}$
2.16. $a_1=\{1,-4\};\ a_2=\{1,4\};\ a_3=\{-1,1\}$
2.17. $a_1=\{0,1,2,3,4\};\ a_2=\{-2,-1,2,-3,4\};\ a_3=\{3,-1,1,-1,1\};\ a_4=\{9,3,4,1,2\}$
2.18. $a_1=\{2,3,-4\};\ a_2=\{-1,2,4\};\ a_3=\{1,1,-1\};\ a_4=\{4,1,2\}\ \ a_5=\{-2,4,7\}$
2.19. $a_1=\{1,-1,-1\};\ a_2=\{4,1,2\};\ a_3=\{-2,4,7\}$
2.20. $a_1=\{-1,11,-21\};\ a_2=\{4,10,-2\};\ a_3=\{-2,-4,7\}$
2.21. $a_1=\{1,-2,0,5\};\ a_2=\{0,1,-2,3\};\ a_3=\{-4,2,3,0\}$
2.22. $a_1=\{0,2,3,4\};\ a_2=\{5,-2,-3,-4\};\ a_3=\{3,1,2,-3\}$
2.23. $a_1=\{8,2,0\};\ a_2=\{0,-2,-3\};\ a_3=\{-1,1,-1\}$
2.24. $a_1=\{-4,2,3\};\ a_2=\{0,-2,-3\};\ a_3=\{-1,1,-1\}$

2.25. $a_1=\{0,0,1,4\};\ a_2=\{2,2,-3,4\};\ a_3=\{2,-1,1,-1\}$

3.Vektorlarning $\{a\}$ va $\{b\}$ sistemalari ekvivalent ekanligini isbotlang:[11]

3.1. $a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{0,0,-1,4\};\ a_3=\{-1,6,-7,1\};\ a_4=\{8,4,5,2\}$
$b_1=\{-1,-2,-3,-4\};\ b_2=\{0,0,1,-4\};\ b_3=\{-1,6,-7,1\}$

3.2. $a_1=\{-2,7,-3,9\};\ a_2=\{-1,6,-1,1\};\ a_3=\{3,-4,-1,2\}$
$b_1=\{-1,7,-3,9\};\ b_2=\{0,7,0,-3\};\ b_3=\{1,-6,-3,0\}$

3.3. $a_1=\{1,2,3,4,-3\};\ a_2=\{-1,-2,3,4,1\};\ a_3=\{-5,1,-7,1,2\}\ a_4=\{0,4,1,2,0\}$
$b_1=\{-1,-2,-3,-4\};\ b_2=\{6,-9,4,3\};\ b_3=\{-5,5,3,2\}$

3.4. $a_1=\{2,3\};\ a_2=\{-1,-3\};\ a_3=\{1,-1\}\ a_4=\{3,1\}$
$b_1=\{-2,-9\};\ b_2=\{1,-1\};\ b_3=\{4,0\}$

3.5. $a_1=\{1,-3,4,\};\ a_2=\{-1,-2,-3\};\ a_3=\{8,1,-1\}\ a_4=\{-3,-4,-1\}$
$b_1=\{-1,3,-4\};\ b_2=\{0,-5,1\};\ b_3=\{5,-3,-2\}$

3.6. $a_1=\{3,4\};\ a_2=\{-2,-3\};\ a_3=\{-1,6\}$
$b_1=\{-7,-4\};\ b_2=\{-3,3\};\ b_3=\{0,7\}$

3.7. $a_1=\{1,-4\};\ a_2=\{1,4\};\ a_3=\{-1,1\}$
$b_1=\{3,4\};\ b_2=\{-1,6\};\ b_3=\{-3,3\}$

3.8. $a_1=\{0,1,2,3,4\};\ a_2=\{-2,-1,2,-3,4\};\ a_3=\{3,-1,1,-1,1\}\ a_4=\{9,3,4,1,2\}$
$b_1=\{0,-1,-2,-3,-4\};\ b_2=\{-2,0,4,0,8\}$

3.9. $a_1=\{2,3,-4,\};\ a_2=\{-1,2,4\};\ a_3=\{1,1,-1\}\ a_4=\{4,1,2\}\ a_5=\{-2,4,7\}$
$b_1=\{-2,-3,4\};\ b_2=\{1,5,0\};\ b_3=\{5,2,1\}$

3.10. $a_1=\{1,1,-1,\};\ a_2=\{4,1,2\};\ a_3=\{-2,4,7\}$
$b_1=\{-1,-1,-3\};\ b_2=\{2,5,9\};\ b_3=\{-8,16,26\}$

3.11. $a_1=\{-1,11,-21\};\ a_2=\{4,10,-2\};\ a_3=\{-2,-4,7\}$
$b_1=\{5,-1,19\};\ b_2=\{6,14,-9\};\ b_3=\{-2,-4,7\}$

3.12. $a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{-1,2,-3,4\};\ a_3=\{-1,1,-1,1\}\ a_4=\{3,4,1,2\}$
$b_1=\{5,6,7,8\};\ b_2=\{0,4,0,8\};\ b_3=\{2,3,2,1\}$

3.13. $a_1=\{1,2,-3,4\};\ a_2=\{1,-2,3,-4\};\ a_3=\{-1,-1,-1,-1\}\ a_4=\{-3,4,1,2\}$
$b_1=\{4,3,-2,5\};\ b_2=\{2,-5,2,-6\}$

3.14. $a_1=\{1,2,3,4,\};\ a_2=\{-1,1,-1,1\};\ a_3=\{3,4,1,2\}$
$b_1=\{3,3,7,7,\};\ b_2=\{-1,1,-1,1\};\ b_3=\{6,8,2,4\}$

3.15. $a_1=\{-1,2,-3,4\};\ a_2=\{-1,1,-1,1\}$
$b_1=\{-2,3,-4,5\};\ b_2=\{-4,4,-4,4\};\ b_3=\{-4,5,-8,10\}$

3.16. $a_1=\{2,-2,3,5\};\ a_2=\{-1,1,-3,3\}\ \ a_3=\{-4,1,-3,0\}\ a_4=\{0,4,-1,2\}$
$b_1=\{0,0,-3,11,\};\ b_2=\{-6,6,-18,18\}$

3.17. $a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{-1,-2,-3,-4\};\ a_3=\{0,1,2,3\}\ a_4=\{3,6,9,12\}$
$b_1=\{1,8,12,15\};\ b_2=\{-1,-1,-1,-1\};\ b_3=\{-3,-5,-7,-9\}$

3.18. $a_1=\{0,2,0,4\};\ a_2=\{0,-2,-3,0\};\ a_3=\{-1,1,-1,1\}$
$b_1=\{0,0,-3,4\};\ b_2=\{6,-8,3,-6\};\ b_3=\{-1,3,-1,5\};$

3.19. $a_1=\{1,2,3\};\ a_2=\{2,-3,4\};\ a_3=\{-1,-1,1\};\ a_3=\{3,4,2\}$
$b_1=\{5,10,15\};\ b_2=\{6,-9,12\};\ b_3=\{3,-1,7\}$

3.20. $a_1=\{0,1,4\};\ a_2=\{2,-3,4\};\ a_2=\{-1,1,-1\}$
$b_1=\{1,-3,8\};\ b_2=\{3,-4,5\};\ b_3=\{-2,2,-2\}$

3.21. $a_1=\{-1,2,-3,4\};\ a_2=\{1,2,3,-4\}\ \ a_3=\{1,1,-1,1\}$
$b_1=\{-1,6,-3,4\};\ b_2=\{0,4,0,0\};\ b_3=\{2,3,2,-3\}$

3.22. $a_1=\{1,-2,3,-4\};\ a_2=\{-1,-1,-1,-1\};\ a_3=\{-3,4,1,2\}$
$b_1=\{0,-3,2,-5\};\ b_2=\{-4,3,0,1\}$

3.23. $a_1=\{0,2,3,4\};\ a_2=\{-1,0,-1,1\};\ a_3=\{3,4,1,0\}$
$b_1=\{-1,2,2,5\};\ b_2=\{2,4,0,-1\};\ b_3=\{-5,-8,-2,0\};$

3.24. $a_1=\{0,-2,-3,4\};\ a_2=\{-1,1,-1,1\}$
$b_1=\{1,-3,-7,9\};\ b_2=\{-4,4,-4,4\};\ b_3=\{-3,1,-11,13\}$

3.25. $a_1=\{-1,1,-3,3\};\ a_2=\{-4,1,-3,0\};\ a_2=\{0,4,-1,2\}$
$b_1=\{-3,0,0,-3\};\ b_2=\{4,3,2,2\}$

4. x **vektorning** $\{a\}$ **sistemadagi chiziqli ifodasini toping:[8]**

4.1. $x=\{1,1,1,5\};\ a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{-1,-2,-3,-4\}\ a_3=\{0,1,2,3\}\ a_4=\{3,5,9,12\}$
4.2. $x=\{-1,2,1,0\};\ a_1=\{0,2,0,4\};\ a_2=\{0,-2,-3,0\}\ a_3=\{-1,1,-1,1\}$
4.3. $x=\{1,1,1\};\ a_1=\{1,2,3\};\ a_2=\{2,-3,4\}\ a_3=\{-1,-1,1\}\ a_4=\{3,4,2\}$
4.4. $x=\{0,1,-5\};\ a_1=\{0,1,4\};\ a_2=\{2,-3,4\}\ a_3=\{-1,1,-1\}$
4.5. $x=\{9,1,-1,1\};\ a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{0,0,-1,4\}\ a_3=\{-1,5,-7,1\}\ a_4=\{8,4,5,2\}$
4.6. $x=\{4,7,1,-1\};\ a_1=\{-1,7,-3,9\};\ a_2=\{-1,6,-1,1\}\ a_3=\{3,-4,-1,2\}$
4.7. $x=\{-4,9\};\ a_1=\{3,4\};\ a_2=\{-2,-3\}\ a_3=\{-1,6\}$
4.8. $x=\{21,-3\};\ a_1=\{1,-4\};\ a_2=\{1,4\}\ a_3=\{-1,1\}$
4.9. $x=\{1,1,1,1,1\};\ a_1=\{0,1,2,3,4\};\ a_2=\{-2,-1,2,-3,4\}\ a_3=\{3,-1,1,-1,1\}$
4.10. $x=\{-5,-1,1\};\ a_1=\{2,3,-4\};\ a_2=\{-1,2,4\}\ a_3=\{1,1,-1\}\ a_4=\{4,1,2\}$
4.11. $x=\{3,-1,5\};\ a_1=\{1,1,-1\};\ a_2=\{4,1,2\}\ a_3=\{-2,4,7\}$
4.12. $x=\{-4,11,1\};\ a_1=\{-1,11,-21\};\ a_2=\{4,10,-2\}\ a_3=\{-2,4,7\}$
4.13. $x=\{5,-6,1\};\ a_1=\{1,2,3\};\ a_2=\{2,-3,4\}\ a_3=\{-1,-1,1\}\ a_4=\{3,4,2\}$
4.14. $x=\{1,-3,0\};\ a_1=\{0,1,4\};\ a_2=\{2,-3,4\}\ a_3=\{-1,-1,1\}$
4.15. $x=\{0,1,-1,-4\};\ a_1=\{1,2,3,4\};\ a_2=\{0,0,-1,4\}\ a_3=\{-1,6,-7,1\}\ a_4=\{8,4,5,2\}$
4.16. $x=\{1,5,-3,1\};\ a_1=\{-1,7,-8,9\};\ a_2=\{-1,6,-1,1\}\ a_3=\{3,-4,-1,2\}$
4.17. $x=\{-6,-1,0,0\};\ a_1=\{1,2,3,4,-3\};\ a_2=\{-1,-2,3,4,1\}\ a_3=\{-5,1,-7,1,2\}$
4.18. $x=\{-9,1\};\ a_1=\{2,3\};\ a_2=\{-1,-3\}\ a_3=\{1,-1\}\ a_4=\{3,1\}$
4.19. $x=\{-2,-1,0\};\ a_1=\{1,-3,4\};\ a_2=\{-1,-2,-3\}\ a_3=\{8,1,-1\}\ a_4=\{-3,-4,-1\}$
4.20. $x=\{-1,-9\};\ a_1=\{3,4\};\ a_2=\{-2,-3\}\ a_3=\{-1,6\}$
4.21. $x=\{2,-13\};\ a_1=\{3,-4\};\ a_2=\{1,2\}\ a_3=\{1,1\}$
4.22. $x=\{2,1,2,1,2\};\ a_1=\{1,1,2,3,0\};\ a_2=\{2,-1,2,0,4\}\ a_3=\{3,0,1,-1,1\}$
4.23. $x=\{4,-1,1\};\ a_1=\{5,3,-4\};\ a_2=\{0,2,4\}\ a_3=\{1,5,2\}$
4.24. $x=\{-13,-1,5\};\ a_1=\{7,1,-1\};\ a_2=\{4,1,2\}\ a_3=\{-2,4,7\}$
4.25. $x=\{4,5,1\};\ a_1=\{-1,1,-2\};\ a_2=\{4,0,-2\}\ a_3=\{-2,4,5\}$

5. 4-topshiriqdagi $\{a\}$ sistema chiziqli qobig`ining chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring hamda uning bazisi va o`lchovini aniqlang:

TEST SAVOLLARI.

1. Vektorlar sistemasining barcha bazislarini aniqlang:[10]

$\mathbf{a}_1$=(1,2,0,0), $\mathbf{a}_2$=(1.2,3,4), $\mathbf{a}_3$=(3,6.0,0).

A) a_1,a_2; a_2,a_3
B) a_1,a_3
C) a_1
D) a_3.
E) a_1, a_2

2. a_1=(-1,2,3,0,-1,-2) a_2=(2,-1,-1,1,0,1) a_3=(4,-5,-7,1,2,5) a_4=(2,-4,-6, 0, 2, 4) a_5=(-4, 2, 2,-2,0,-2) vektorlar sistemasining rangini toping.
A) 6 V) 2 S) 3 D) 4 E) 5

3. a_1=(-1,1,1,2,-1,2) a_2=(2,1,-1,0,1,1) a_3=(-1,-2,0,-2,0,-3)a_4=(3,3,-1, 2, 1, 4) a_5=(2, 4, 0,4,0,6) vektorlar sistemasining rangini toping.
A) 6 V) 2 S) 3 D) 4 E) 5

4. x=(-1,-1,0) vektorning a_1=(-1,2,1) a_2=(0,1,-1) a_3=(2,-1,-1) vektorlar sistemasidagi chiziqli ifodasini toping.

A) $a_1 + 2a_2 - a_3 = x$, V) $-a_1 - a_2 - a_3 = x$,
S) $a_1 + a_2 + a_3 = x$, D) $2a_1 - a_2 - a_3 = x$, E) $-a_1 - a_2 + a_3 = x$,

5. x=(3,2,-3) vektorning a_1=(0,1,-1) a_2=(2,-1,-1) a_3=(-1,2,1) vektorlar sistemasidagi chiziqli ifodasini toping.

A) $-a_1 + 2a_2 + 2a_3 = x$, V) $2a_1 + 2a_2 - a_3 = x$,
S) $-2a_1 - 2a_2 - a_3 = x$, D) $a_1 + 2a_2 + a_3 = x$, E) $2a_1 + 2a_2 + a_3 = x$,

6. x=(-3,1,4) vektorning a_1=(0,1,-1) a_2=(2,-1,-1) a_3=(-1,2,1) vektorlar sistemasidagi chiziqli ifodasini toping.

A) $-2a_1 - a_2 + a_3 = x$, V) $-2a_1 - a_2 - a_3 = x$,
S) $-2a_1 + a_2 + a_3 = x$, D) $-2a_1 + a_2 - a_3 = x$, E) $2a_1 + a_2 + a_3 = x$,

7.Quyidagi to’plamlar R maydon ustida chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring va uning bazisi, o’lchovini aniqlang :

V = $\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z \wedge b \neq 0 \}$.

A) Etadi B) Etmaydi C) Fazo emas D) Bazisi yoq E) olchovi 3 ga teng

8.Quyidagi to’plamlar R maydon ustida chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring va uning bazisi, o’lchovini aniqlang :

V = $\{ (a , 0) \mid a \in R\}$.

B) Etadi B) Etmaydi C) Fazo emas D) Bazisi yoq E) olchovi 3 ga teng

9.Quyidagi to’plamlar R maydon ustida chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring va uning bazisi, o’lchovini aniqlang :

V = $\{ (0, b) \mid b \in R \}$.

C) Etadi B) Etmaydi C) Fazo emas D) Bazisi yoq E) olchovi 3 ga teng

10.Quyidagi to’plamlar R maydon ustida chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring va uning bazisi, o’lchovini aniqlang :

V = $\{ (a , b) \mid a , b \in R \}$.

A).Etadi B) Etmaydi C) Fazo emas D) Bazisi yoq E) olchovi 3 ga teng

11.Vektorlarning quyidagi sistemalari chiziqli bog’liq yoki erkliligini aniqlang hamda uning bazisi va rangini toping:

a_1=(1, 2, 3, 4); a_2 =(-1, 2, -3, 4); a_3=(-1, 1, -1, 1); a_4=(3, 4, 1, 2).

a. Bogliq B) Bogliq emas C) Bazisi yoq D) Bogliq va rangi 4ga teng E) Rangi 3 ga teng

12.Vektorlarning quyidagi sistemalari chiziqli bog’liq yoki erkliligini aniqlang hamda uning bazisi va rangini toping:

a_1=(3, 2, -3, 4); a_2=(1,-2, 3, -4); a_3=(-1,-1,-1,-1); a_4=(-3, 4, 1, 2).

b. Bogliq B) Bogliq emas C) Bazisi yoq D) Bogliq va rangi 4ga teng E) Rangi 3 ga teng

13.Vektorlarning quyidagi sistemalari chiziqli bog'liq yoki erkliligini aniqlang hamda uning bazisi va rangini toping:[10]

$a_1 = (1, 2, 3, 4)$; $a_2 = (-1, 1, -1, 1)$; $a_3 = (3, 4, 1, 2)$.

A) Bogliq B) Bogliq emas C) Bazisi yoq D) Bogliq va rangi 4ga teng E) Rangi 3 ga teng

14.Vektorlarning quyidagi sistemalari chiziqli bog'liq yoki erkliligini aniqlang hamda uning bazisi va rangini toping:

$a_1 = (-1, 2, -3, 4)$; $a_2 = (-1, 1, -1, 1)$.

A) Bogliq B) Bogliq emas C) Bazisi yoq D) Bogliq va rangi 2ga teng E) Rangi 3 ga teng

15.Vektorlarning (a) va (b) sistemalari ekvivalent ekanligini tekshiring:

$a_1=(1,2,3,4)$; $a_2=(0,0,-1,4)$; $a_3 = (-1, 6, -7, 1)$; $a_4 = (8, 4, 5, 2)$;
$b_1 = (-1, -2, -3, -4)$; $b_2 = (0, 0, 1, -4)$; $b_3 =(-1, 6, -7, 1)$.

A) Ekvivalent B) Ekvivalent emas C) Nol vektorlar D)Aniqlab bolmaydi E) Rangi 3 ga teng

16.Vektorlarning (a) va (b) sistemalari ekvivalent ekanligini tekshiring:

$a_1 = (-1, 7, -3, 9)$; $a_2 = (-1, 6, -1, 1)$; $a_3 = (3, -4, -1, 2)$;
$b_1 = (-1, 7, -3, 9)$; $b_2 = (0, 7, 0, -3)$; $b_3 =(1, -6, -3, 0)$.

A) Ekvivalent B) Ekvivalent emas C) Nol vektorlar D)Aniqlab bolmaydi E) Rangi 3 ga teng

17.Vektorlarning (a) va (b) sistemalari ekvivalent ekanligini tekshiring:

$a_1=(1, 2,3,4,-3)$; $a_2=(-1,-2,3,4,1)$; $a_3=(-5,1,-7,1,2)$; $a_4=(0,4,1,2,0)$;
$b_1 = (-1, -2, -3, -4)$; $b_2 = (-6, -9, 4, 3)$; $b_3 = (-5, 5, 3, 2)$.

A) Ekvivalent B) Ekvivalent emas C) Nol vektorlar D)Aniqlab bolmaydi E) Rangi 3 ga teng

18.Vektorlarning (a) va (b) sistemalari ekvivalent ekanligini tekshiring:

$a_1 = (2, 3)$; $a_2 = (-1, -3)$; $a_3 = (1, -1)$; $a_4 = (3, 1)$;

$b_1 = (-2, -6)$; $b_2 = (1, -1)$; $b_3 = (4, 0)$.

A) Ekvivalent B) Ekvivalent emas C) Nol vektorlar D)Aniqlab bolmaydi E) Rangi 3 ga teng

19.x vektorning (a) sistemadagi chiziqli ifodasini toping :

x=(1,1,1,1); a=(1, 2, 3, 4); b=(-1, -2, -3, -4); c=(0, 1, 2, 3);

A)Chiziqli ifodalanmaydi B) X=3a+2b+C C) =3a-2b+C D) =3a+2b-C E) =a+2b+C

20. x vektorning (a) sistemadagi chiziqli ifodasini toping :[10]

x =(-1,2,1,0); a=(0, 2, 0, 4); b=(0, -2, -3, 0); c= (-1, 1, -1, 1) .

A)Chiziqli ifodalanmaydi B) X=a+2b+4C C) =3a-2b+C D) =3a+2b-C E) =a+2b+C

21.x vektorning (a) sistemadagi chiziqli ifodasini toping :

x = (1,1,1) ; a_1 = (1, 2, 3); a_2 = (2, -3, 4) ; a_3 = (-1, -1, 1); a_4=(3, 4, 2).

A)Chiziqli ifodalanmaydi B) X=1\7a+3\14b+4\7C C) =3a-2b+C D) =3a+2b-C E) =a+2b+C

22.x vektorning (a) sistemadagi chiziqli ifodasini toping :

x = (0,1,-5) ; a_1 = (0, 1, 4); a_2 = (2, -3, 4) ; a_3 = (-1, 1, -1) .

A)Chiziqli ifodalanmaydi B) X=-3\4a+1\4b-9]2C C) =3a-2b+C D) =3a+2b-C E) =a+2b+C

23. Vektorlar sistemasi chiziqli qobig'ining chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring hamda uning bazisi va o'lchovini aniqlang:

a_1=(1,2,3,4); a_2=(-1, -2,-3,-4); a_3=(0,1,2,3); a_4=(3, 6, 9, 12).

A)Olchovi 3ga teng ,a(1,1,3,4);b((0,1,2,3,);c(0,0,2,0) B) X=-3\4a+1\4b-9]2C C) =3a-2b+C D) =3a+2b-C E) =a+2b+C

24.Vektorlar sistemasi chiziqli qobig'ining chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring hamda uning bazisi va o'lchovini aniqlang:

$a = (0, 2, 0, 4); b = (0, -2, -3, 0) ; c = (-1, 1, -1, 1)$.

A)Olchovi 3ga teng ,a(0,2,0,4);b((0,0,-3,4);c(-1,1,-1,1) B) X=-3\4a+1\4b-9]2C C) =3a-2b+C D) =3a+2b-C E) =a+2b+C

25.Vektorlar sistemasi chiziqli qobig'ining chiziqli fazo tashkil etishini tekshiring hamda uning bazisi va o'lchovini aniqlang:

$a_1 = (1, 2, 3); a_2 = (2, -3, 4) ; a_3 = (-1, -1, 1); a_4=(3, 4, 2)$.

A)Olchovi 4 ga teng ,a(1,2,3);b((0,1,,4);c(-0,0,34);d(0,0,4) B) X=-3\4a+1\4b-9]2C C) =3a-2b+C D) =3a+2b-C E) =a+2b+C

Nazariy savollar:[1],[7].

1. n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining farqini ayting.
2. Kroneker-Kapelli teoremasini bayon eting.
3. CHTSning hamjoylilik shartlarini ayting.
4. Bir jinsli CHTS deb qanday sistemaga aytiladi?
5. n ta noma'lumli m ta CHTSga assotsirlangan BSTS qanday hosil qilinadi?
6. CHTS va unga assotsirlangan BCHTS yechimlar yig'indisi, ayirmasi qanday sistemaga yechim bo'ladi?
7. BCHTS yechimlar to'plami vektor fazo tashkil etishini tushuntiring.
8. Yechimlar fazosi hosil qilgan chiziqli ko'pxillikka misol keltiring.
9. Arifmetik vektor fazo va uning xossalari.
10. Vektorlar sistemasining chiziqli bog`liq va erkliligi, xossalari.
11. Vektorlarning ekvivalent sistemalari, xossalari.
12. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi.
13. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig`i, xossalari.
14. Chiziqli tenglamalar, chiziqli tenglamalar sistemasi.
15. n-noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.
16. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi, natijasi.
17. Chiziqli tenglamalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
18. Tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar.
19. Teng kuchli chiziqli tenglamalar sistemalari, xossalari.
20. Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylililik shartlari.
21. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
22. Bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi va unga ********bir jinsli tenglamalar sistemalari orasidagi bog`lanishlar.
23. Echimlarning fundamental sistemasi.

24. Chiziqli ko`phillik.
25. Chiziqli tenglamalar sistemasining Gauss usulida echish.
26. n-o’lchovli vektor deb nimaga aytiladi?
27. n-o’lchovli vektorlarning tengligi ta’rifini aytib bering.
28.n-o’lchovli vektorlarning yig’indisi va vektorning skalyarga ko’paytmasi deb nimaga aytiladi?
29.n-o’lchovli arifmetik vektor fazo deb nimaga aytiladi?
28. n-o’lchovli arifmetik vektor fazoning qanday xossalarini bilasiz?
29. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig′ iga ta’rif bering.
30. Ekvivalent sistemalarga ta’rif bering.
31. Chiziqli vekto fazoga ta’rif bering.
32. Vektorlar sistemasi deganda nimani tushunasiz?.
33. Vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasiga ta’rif bering.
34. Vektorlarning chiziqli bog’liq sistemasi deb nimaga aytiladi?.
35. Vektorlarning chiziqli bog’liq bo’lmagan sistemasi ta’rifini ayting.
36. Vektorlarning chiziqli bog’liq sistemasi xossalarini ayting.
37. Vektorlarning chiziqli bog’liq bo’lmagan sistemalari xossalarini ayting.
38. Vektorlarning ekvivalent sistemalari deb nimaga aytiladi?
39. Ekvivalent sistemalar xossalarini ayting.
40. Vektorlarning sistemasida qanday elementar almashtirishlar bajariladi?
41. Elementar almashtirishlar natijasida qanday sistema hosil bo’ladi?
42. Vektorlar chekli sistemasining bazisiga ta’rif bering.
43. Sistema bazisining asosiy xossalarini bayon qiling.
44. Vektorlar chekli sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
45. Sistema rangining qanday xossalarini bilasiz?
46. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig’i deb nimaga aytiladi?
47. Chiziqli qobiqning asosiy xossalarini bayon eting.
48. Chiziqli ko’pxillikka ta’rif bering.
49. Chiziqli ko’pxillikning asosiy xossalarini ayting.
50. Chiziqli ko’pxillikka maktab matematikasidan misol keltiring.
51. Chiziqli tenglamalar, chiziqli tenglamalar sistemasi**.**
52. n-noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.
53. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi, natijasi.
54. Chiziqli tenglamalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
55. Tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar.
56. Teng kuchli chiziqli tenglamalar sistemalari, xossalari.
57. Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylililik shartlari.
58. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
59. Bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi va unga ********bir jinsli tenglamalar sistemalari orasidagi bog`lanishlar.
60. Echimlarning fundamental sistemasi.
61. Chiziqli ko`phillik.
62. Chiziqli tenglamalar sistemasining Gauss usulida echish.
63.n-o’lchovli vektor deb nimaga aytiladi?

63.n-o’lchovli vektorlarning tengligi ta’rifini aytib bering.

65. n-o’lchovli vektorlarning yig’indisi va vektorning skalyarga ko’paytmasi deb nimaga aytiladi?
66. n-o’lchovli arifmetik vektor fazo deb nimaga aytiladi?
67. n-o’lchovli arifmetik vektor fazoning qanday xossalarini bilasiz?
68. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig′ iga ta’rif bering.
69. Ekvivalent sistemalarga ta’rif bering.
70. Chiziqli vekto fazoga ta’rif bering.
71. Vektorlar sistemasi deganda nimani tushunasiz?.
72. Vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasiga ta’rif bering.
73. Vektorlarning chiziqli bog’liq sistemasi deb nimaga aytiladi?.
74. Vektorlarning chiziqli bog’liq bo’lmagan sistemasi ta’rifini ayting.
75. Vektorlarning chiziqli bog’liq sistemasi xossalarini ayting.
76. Vektorlarning chiziqli bog’liq bo’lmagan sistemalari xossalarini ayting.
77. Vektorlarning ekvivalent sistemalari deb nimaga aytiladi?
78. Ekvivalent sistemalar xossalarini ayting.
79. Vektorlarning sistemasida qanday elementar almashtirishlar bajariladi?
80. Elementar almashtirishlar natijasida qanday sistema hosil bo’ladi?
81. Vektorlar chekli sistemasining bazisiga ta’rif bering.
82. Sistema bazisining asosiy xossalarini bayon qiling.
83. Vektorlar chekli sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
84. Sistema ranginining qanday xossalarini bilasiz?
85. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig’i deb nimaga aytiladi?
86. Chiziqli qobiqning asosiy xossalarini bayon eting.
87. Chiziqli ko’pxillikka ta’rif bering.
88. Chiziqli ko’pxillikning asosiy xossalarini ayting.
89. Chiziqli ko’pxillikka maktab matematikasidan misol keltiring.
90. Chiziqli tenglamalar, chiziqli tenglamalar sistemasi**.**
91. -noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.
92. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi, natijasi.
93. Chiziqli tenglamalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
94. Tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar.
95. Teng kuchli chiziqli tenglamalar sistemalari, xossalari.
96. Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylililik shartlari.
97. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
98. Bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi va unga ********bir jinsli tenglamalar sistemalari orasidagi bog`lanishlar.
99. Echimlarning fundamental sistemasi.
100. Chiziqli ko`phillik.
101. Chiziqli tenglamalar sistemasining Gauss usulida echish.

6-Modul. Chiziqli tenglamalar sistemasi.

1-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Teng kuchli CHTS. CHTSning natijasi haqidagi teoremalar.

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon berilgan bo'lsin.

6.1.1-ta'rif. Barcha noma'lumlarining darajasi birdan katta bo'lmagan tenglamaga chiziqli tenglama deyiladi. [1].

6.1.2-ta'rif. $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$ **t**englamani to'g'ri sonli tenglikka aylantiruvchi $\vec{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n),\xi_i\in F, i=\overline{1,n}$ vektorga berilgan tenglamaning yechimi deyiladi.

6.1..3-ta'rif. Ushbu $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ (1) sistemaga F maydon ustida berilgan n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{ij},b_i\in F \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ sistemaning koeffitsientlari, a_{ij} no'malumlar koeffitsientlari, b_j ozod hadlar bo'lib, x_i lar esa no'malumlardan iborat.[5].

6.1.4-ta'rif. n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deb shunday $\vec{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n),\xi_i\in F, i=\overline{1,n}$ vektorga aytiladiki, u sistemaning barcha tenglamalarini to'g'ri tenglikka aylantiradi.

6.1.5-ta'rif. CHTS kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u hamjoyli, yechimga ega bo'lmasa, hamjoyli bo'lmagan CHTS deyiladi.

6.1.6-ta'rif. Yagona yechimga ega bo'lgan sistema aniq sistema, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lgan sistema aniqmas sistema deyiladi.

6.1.7-ta'rif. Berilgan ikkita CHTS uchun birinchisining har bir yechimi ikkinchisi uchun ham yechim bo'lsa, ikkinchi CHTS birinchi CHTSning natijasi deyiladi.

Ta'rifga ko'ra birinchi chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlar to'plami, natija sistema yechimlar to'plamiga qism to'plam bo'ladi.

6.1.8-ta'rif. $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in F$ skalyarlar yordamida hosil qilingan $(\lambda_1a_{11}+\ldots+\lambda_ma_{m1})x_1+\ldots+(\lambda_1a_{1n}+\ldots+\lambda_ma_{mn})x_n=\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_mb_m$ chiziqli tenglama (1) sistemaning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

6.1.1-teorema. CHTSning har qanday chiziqli kombinatsiyasi berilgan sistemaning natijasi bo'ladi.

6.1.9-ta'rif. Ikkita CHTS teng kuchli deyiladi, agar birinchisining har bir yechimi ikkinchisiga yechim bo'lsa va aksincha.

6.1.2-teorema. Ikkita CHTS teng kuchli bo’lishi uchun, har bir sistema ikkinchisining natijasi bo’lishi zarur va yetarli.

6.1.3-teorema. Ikkita CHTS teng kuchli bo’lishi uchun, ularning yechimlar to’plamlari teng bo’lishi zarur va yetarli.

6.1.10-ta’rif. Quyidagilar CHTSni elementar almashtirishlar deyiladi:

1) sistemani qandaydir tenglamasining ikkala qismini noldan farqli skalyarga ko’paytirish:

2) bir tenglamaning ikkala qismiga skalyarga ko’paytirilgan boshqa tenglamaning mos qismlarini qo’shish yoki ayirish:

3) sistemaga nol tenglamani kiritish yoki uni sistemadan chiqarish.

6.1.4-teorema. CHTSni elementar almashtirishlar natijasida unga ekvivalent bo’lgan CHTS hosil bo’ladi.

2-§. Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylilik sharti. Bir jinsli CHTS.[1].

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

(1) chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo’lsin.

6.2.1-ta’rif. (1) chiziqli tenglamalar sistemasining noma’lumlari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matritsa (1) ning asosiy matritsasi, noma’lumlar oldidagi koeffitsientlar va ozod hadlardan iborat B= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ matritsa (1) ning kengaytirilgan matritsasi deyiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ sistema uchun quyidagi belgilashlarni

qo'llaymiz: $A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ … $A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Natijada, $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ tenglamani, ya'ni

$x_1A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = \vec{b}$ (2) tenglamani hosil qilamiz.

6.2.1-teorema. (1) sistema (2) sistemaga teng kuchli.

6.2.2-teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi hamjoyli bo'lishi uchun uning asosiy va kengaytirilgan matritsalari ranglarining teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. 1. Zarurligi. (1) sistema hamjoyli, ya'ni kamida bitta $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ yechimga ega bo'lsin. U holda

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \qquad (3)$$

to'g'ri sonli tengliklar hosil bo'ladi. (2) tenglikdan ko'rinadiki B matritsaning oxirgi $\vec{b}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ustun vektori o'zidan oldingi n ta ustunlarni ifodalovchi $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni

$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_n A^n = \vec{b}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, A va B matritsalarning

$$A^1, A^2, \ldots, A^n, \qquad (4)$$

$$A^1, A^2, \ldots, A^n, \vec{b} \qquad (5)$$

vertikal vektorlari sistemalari ekvivalentdir. Ekvivalent vektorlar sistemalari bir xil rangga ega degan mulohazaga ko'ra A va B matritsalar bir xil rangga ega, ya'ni r(A)=r(B) bo'ladi.

2. Yetarliligi. (1) sistema uchun r(A)=r(B)=k bo'lsin. A matritsaning, ya'ni (5) vertikal vektorlarning rangini aniqlovchi qism sistemani

$A^1, A^2, ..., A^k$ (6)

deylik. B matritsaning rangi ham k ga teng bo'lganidan, (6) sistema (5)sistemaning rangini aniqlovchi sistema bo'ladi. U holda (5) sistemaning $\vec{b}$ vektori (6) sistema orqali va demak, (4) sistema orqali ham chiziqli ifodalanadi, ya'ni $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ sonlar mavjud bo'lib,

$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + ... + \alpha_n A^n = \vec{b}$ tenglik bajariladi. Bundan ikkita vektorlarning tenglik shartiga ko'ra $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right)$ tengliklarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, (1) sistema $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ yechimga ega, ya'ni (1) sistema hamjoyli sistema bo'ladi.

6.2.3-teorema. A va B lar mos ravishda $F =< F; +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1 >$ maydon ustida berilgan (1)chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalari bo'lsin. U holda quyidagi shartlar teng kuchli:

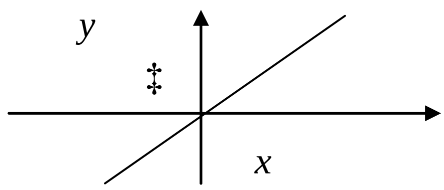
1. (1) sistema hamjoyli.
2. F maydon ustida (2) sistema yechimga ega.
3. $\vec{b}$ vektor A matritsaning ustun vektorlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat, ya'ni, $\vec{b} \in L(A^1, \ldots, A^n)$.
4. A va B matritsalarning ustun (satr) ranglari teng.

Demak, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining satr ranglari teng emas. Bundan berilgan CHTSning hamjoysiz ekanligi kelib chiqadi.

6.2.4-ta'rif. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasiga bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi (BCHTS) deyiladi.

6.**2.4-teorema.** $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ ko'rinishdagi n noma'lumli m ta BCHTS, m<n bo'lganda nolmas yechimga ega bo'ladi.

Masalan, $ax - by = 0$ ikki o'zgaruvchili chiziqli tenglama. Uning yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ulardan bittasi nol yechim, qolganlari nolmas yechimlar. Yechimlar to'plami Dekart koordinatalar tekisligida quyidagi to'g'ri chiziqni ifodalaydi: $y = \dfrac{a}{b}x$



6.2.5-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasida asosiy matritsasining ustun vektorlari sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u nolmas yechimga ega bo'ladi.[1]

6.2.6-teorema. n noma'lumli BCHTSning rangi n dan kichik bo'lsa, u holda sistema nolmas yechimlarga ega bo'ladi.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining tenglamalarini elementar almashtirishlar natijasida sistemaning qolgan tenglamalar orqali chiziqli ifodalanuvchi tenglamasi nol tenglamaga aylanadi. Agar n noma'lumli BCHTSning rangi n dan kichik bo'lsa, demak kamida bitta tenglama qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi. U holda berilgan BCHTSga teng kuchli BCHTSda kamida bitta erkli o'zgaruvchilar mavjud bo'lib, natijada cheksiz ko'p yechimlar hosil bo'ladi. Bu yechimlarni topishda erkli o'zgaruvchilarga noldan farqli kamida bitta qiymat berish bilan nolmas yechim hosil qilinadi.

3-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi va uning bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari orasidagi bog'lanishlar

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(1) chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

6.3.1-ta'rif.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasiga (1) sistemaga assotsirlangan BCHTS deyiladi.[7]

6.3.1-teorema. Bir jinsli bo'lmagan CHTSning yechimiga unga assotsirlangan BCHTSning yechimi qo'shilsa, bir jinsli bo'lmagan CHTSning yechimi hosil bo'ladi.

6.3.2-teorema. Bir jinsli bo'lmagan CHTSning ikkita yechimining ayirmasi unga assotsirlangan BCHTSning yechimi bo'ladi.

6.3.3-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlari to'plami chiziqli fazo tashkil qiladi.

Agar berilgan BCHTSning yechimi yagona nol vektordan iborat bo'lsa, u holda nol vektordan iborat to'plam chiziqli fazo ta'rifiga bo'ysunishini tekshirish oson.

Agar BCHTSning yechimlari cheksiz ko'p bo'lsa, u holda umumiy yechimni ifodalovchi vektor koordinatalari kamida bitta erkli o'zgaruvchi orqali ifodalanadi.

Masalan, $(2x_3 + x_4; -x_3 - 3x_4; x_3; x_4), x_3, x_4 \in R$ biror-bir BCHTSning yechimlarini ifodalovchi vektorlar bo'lsa, u holda x_3, x_4 o'zgaruvchilarning kamida bittasiga noldan farqli qiymat berib, ikkita noldan farqli yechim hosil qilamiz: $x_3 = 1, x_4 = 2; x_3 = 2, x_4 = 3$

$\vec{a}_1 = (4;-7;1;2), \vec{a}_2 = (7;-11;2;3)$. Bu vektorlarning yig'indisi $x_3 = 3, x_4 = 5$ bo'lganda umumiy yechimdan hosil bo'ladigan $(11;-18;3;5)$ vektor bo'ladi. Xuddi shunday, noldan farqli skalyar $\lambda = 3$ni $\vec{a}_1 = (4;-7;1;2)$ yechimga ko'paytirish natijasida $x_3 = 3, x_4 = 6$ qiymatlar yordamida hosil qilingan $(12;-21;3;6)$ yechimga ega bo'lamiz.

6.3.4-teorema. $\vec{a}$ bir jinsli bo'lmagan CHTSning yechimi va L- unga assotsirlangan BCHTSning yechimlari to'plami bo'lsin. U holda $\vec{a} + L$ to'plam berilgan CHTSning yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi.

3.2-ta'rif. 8.4-teoremada keltirilgan $\vec{a} + L$ to'plamga BCHTS yechimlar to'plami yordamida hosil qilingan chiziqli ko'pxillik deyiladi.

6.3.5-teorema. Hamjoyli bir jinsli bo'lmagan CHTS yagona yechimga ega bo'lishi uchun unga assotsirlangan BCHTSning yagona nol yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

6.3.6-teorema. Agar F maydon ustida berilgan n noma'lumli ikkita bir jinsli bo'lmagan CHTS teng kuchli bo'lsa, u holda ularga assotsirlangan BCHTSlari ham teng kuchli bo'ladi.

4§. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental sistemasi. CHTSni yechishning Gauss usuli

$F = \langle F; +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1 \rangle$ maydon va maydon ustida

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi hamda

unga assotsirlangan $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ (1^1)

BCHTS berilgan bo'lsin.

Yuqorida ta'kidlanganidek, (1^1) sistemaning yechimlari to'plami F^n arifmetik vektor fazoning biror W qism fazosini tashkil etadi.

6.4.1-ta'rif. F^n arifmetik vektor fazoning W qism fazosining bazisini tashkil etuvchi istalgan vektorlar sistemasi (1^1) sistemaning fundamental (asosiy) yechimlari sistemasi deyiladi.

Bazis vektorlar sistemasining ta'rifiga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$ sistema (1^1) ning fundamental yechimlari sistemasi bo'lishi uchun quyidagi ikkita shart bajarilishi lozim:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$ sistema chiziqli bog'lanmagan sistema bo'ladi;

2. (1) sistemaning ixtiyoriy yechimi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$ sistema vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

(1) sistemaning umumiy yechimi ushbu

$$\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_r\vec{a}_r \ (k_i \in F,\ i = \overline{1,r})$$

ko'rinishda ifodalanadi. Endi (1) yechimlarining fundamental sistemasini topaylik. Buning uchun (1) da bir necha marta elementar almashtirishlar bajargandan so'ng o'ziga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1^*)$$

ko'rinishdagi sistemaga ega bo'lamiz. (1^*) da $c_{kk} \neq 0$ $(k = \overline{1,r})$, $r<n$ bo'ladi. Aks holda (1^*) sistema nolmas yechimlarga ega bo'lmas edi. (1) da elementar almashtirishlar natijasida $0Ḱx_1+0Ḱx_2+...+0Ḱx_n=b$ $(b\neq 0)$ ko'rinishdaga tenglamalar hosil bo'lishi mumkin. U holda bunday tenglamalar bitta ham yechimga ega bo'lmaydi. Shu sababli berilgan sistema yechimga ega bo'lmaydi. Biz qarayotgan CHTS hamjoyli bo'lganligi sababli bunday holat kelib chiqmaydi. Tenglamalar sistemasini bu usul bilan yechish Gauss usuli deyiladi.

(1^*) sistema r ta tenglama va n-r ta noma'lumlardan iborat. Shuning uchun biz $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ larni erkin (ozod) noma'lumlar deb, ularga ixtiyoriy sonli (kamida bittasi noldan farqli) qiymatlarni berib, (1^*) dan ularga mos $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Aytaylik (1^*) da $x_{r+1}=1$, $x_{r+2}=x_{r+3}=...=x_n=0$ bo'lsin. Unda (1^*)dan $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Parametrlarning yuqoridagi qiymatlariga mos keluvchi (4) sistemaning yechimi $\vec{a}_{r+1} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 1, 0, ..., 0)$ bo'ladi. Bundan keyin $x_{r+1}=x_{r+3}=...=x_n=0$, $x_{r+2}=1$ deb olaylik. U holda (4) sistemadan $x_i (i=\overline{1,r})$ qiymatlarga mos keluvchi qandaydir

$\beta_i(i=\overline{1,r})$ sonlarni topamiz. Natijada (1*) sistemaning $\vec{a}_{r+2}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r,0,1,0,...,0)$ ikkinchi yechimini topamiz. SHu jarayonni davom ettirib, n-r qadamdan so'ng (1^*) sistema (demak, (1) sistema) ning [5].

$$\begin{cases} \vec{a}_{r+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 1, 0, \dots, 0), \\ \vec{a}_{r+2} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 1, \dots, 0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{a}_n = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, 0, 0, \dots, 1) \end{cases}$$

yechimlari sistemasini topamiz. Hosil bo'lgan sistema (1) sistemaning fundamental yechimlari sistemasi bo'ladi.

Amaliy topshiriqlar

0-variant- echib ko'rsatilgan misollar.

6.1-misol. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yagona x =1; y = 2; z = 3, ya'ni (1,2,3) yechimga ega bo'lganligi uchun aniq sistemaga misol bo'ladi.[1]

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ sistema yechimlar to'plami bo'sh to'plam bo'lganligi uchun u hamjoysiz tenglamalar sistemasiga misol bo'ladi.

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega.

Demak, berilgan sistema aniqmas.

6.2-misol. Har qanday n noma'lumli CHTSga n noma'lumli hamjoyli bo'lmagan CHTS natija bo'ladi. CHunki, bo'sh to'plam har qanday to'plamga qism to'plam bo'ladi.

6.3-misol. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$ tenglamalar sistemasiga teng kuchli.

6.4-misol. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -2, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

6.5-misol. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$ tenglamalar sistemasining hamjoyli yoki hamjoysiz ekanligini aniqlang.[7]

Yechish: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $r(A) = 2$ va $r(B) = 3$.

6.6-misol. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$ chiziqli tenglamalar sistemasiga assotsirlangan $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$ bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlarini topamiz.

Hosil qilingan $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga Gauss usulini qo’llasak, unga teng kuchli bo’lgan $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$ sistemaga ega bo’lamiz. Bundan, BCHTSning yagona nol yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan bir jinsli bo’lmagan chiziqli tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar natijasida unga teng kuchli bo’lgan $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$ sistemaga ega bo’lamiz. Bundan sistemaning yagona

$x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$ yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.

6.7-misol. BCHTS $2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0$ tenglamadan iborat bo’lsin. Bitta tenglama va 4 ta noma’lum bo’lganligi uchun berilgan sistema yechimlar to’plamining fundamental sistemasi 3 ta yechimdan iborat bo’ladi. Ularni aniqlash uchun $x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4$ belgilashdagi x_2, x_3, x_4 noma’lumlarga mos ravishda 2,0,0; 0,2.0; 0,0,2 qiymatlarni beramiz. Hosil bo’lgan (-1,2,0,0); (3,0,2,0); (-7,0,0,2) yechimlar berilgan BCHTSning yechimlar to’plamining fundamental sistemasi bo’ladi. [8]

6.8-misol. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechamiz. Buning uchun chiziqli tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar yordamida tanlab olingan tenglamasidan boshqa tenglamalarida biror bir o’zgaruvchi oldidagi koeffisientni nolga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \\ 16x_2 + 24x_3 = -22 \\ 14x_2 + 9x_3 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 8 \\ 8x_2 + 12x_3 = -11 \\ -96x_3 = 58 \end{cases}.$$

Hosil bo’lgan tenglamalar sistemasi berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo’lib, uning yechimi $(69\frac{19}{48}; 13\frac{1}{8}; -\frac{29}{48})$ vektordan iborat.

Test savollari.[10].

1. ChTS echimlari yig’indisini toping.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

A) 1   V) 2   S)0   D) 3   E) 4

2. ChTS echimlari yig'indisini toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

A) -1   V) 0   S) 1   D) 2   E) -2

3. ChTS echimlari yig'indisini toping.

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

A) 0   V) 2   S) -1 D) -2 E) 1

4. ChTS echimini toping.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

A) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=1$

B) $\varnothing$

C) cheksiz kup

D) $x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=1$

E) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=-1$

5. ChTS echimini toping.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

A) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=1$

B) $\varnothing$

C) cheksiz ko'p

D) $x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=1$

E) $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=-1$

6. a ning kanday kiymatida tenglamalar sistemasi yagona echimga ega bo'ladi?

$$\begin{cases} 2ax - 23y + 29z = 4 \\ 7x + ay + 4z = 7 \\ 5x + 2y + az = 5 \end{cases}$$

A) $a^3=27$

V) $a^3=20$

S) a=3

D) a=5

E) a=8

7. Tsikllarga yoying:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}$$

A) (12)(34)

B) (14)(23)

C) (13)(24)

D) (13)(24)

E) (134)(2)

8. Ko’paytmani bajaring :

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 53124 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12345 \\ 54231 \end{pmatrix}$$

A) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$

B) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{matrix}$

C) $\begin{matrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{3} \end{matrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

9. Ko’paytmani bajaring :

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 53124 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12345 \\ 54231 \end{pmatrix}$$

10. AXV=S dagi X o’rniga qo’yishni toping :

A = $\begin{matrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 7\,3\,2\,1\,6\,5\,4 \end{matrix}$ V = $\begin{matrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 3\,1\,2\,7\,4\,5\,6 \end{matrix}$ S= $\begin{matrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,1\,3\,6\,4\,7\,2 \end{matrix}$

A) X= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

B) X= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

C) X= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

D) X= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

11.Tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasi asosida tekshiring va yechimlarini toping:

$$\cdot\begin{cases} -2x_1+3x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \\ 13x_1-x_2+2x_3+11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2-6x_3+2x_4=10 \end{cases}$$

A(to'gri javob yo'q) B) (1,2,3,4) C)(2,1,0,4) D(3,2,1,0) E)(0,2,1,5)

12.Tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasi asosida tekshiring va yechimlarini toping:

$$\begin{cases} 5x_1-13x_2+x_3+23x_4=11 \\ x_1+3x_2-5x_3+3x_4=1 \\ 13x_1+x_2+2x_3-11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2-17x_3+2x_4=20 \end{cases}$$

A(1,2,3,4) B) (0,4,2,1) C)(to'gri javob yo'q) D(1,0,2,3) E)(2,3,3,1)

13.Tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasi asosida tekshiring va yechimlarini toping:

$$\cdot\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2+7x_3+2x_4=0 \end{cases}.$$

A(0,1,3,2) B) (2,2,3,0) C)(0,0,2,1) D(to'gri javob yo'q) E)(2,0,0,1)

14.Tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasi asosida tekshiring va yechimlarini toping:

$$\cdot\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2+7x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

A(2,0,0,1) B) (1,2,0,0,4) C)(4,0,0,1) D(2,0,3,1) E)(to'gri javob yo'q)

15.Gauss usulida tenglamalar sistemasining yechimlarini toping:

$$\begin{cases} 7x_1-3x_2-2x_4=-1 \\ -x_1+3x_2-2x_3+x_4=-6 \\ 2x_2+2x_3+13x_4=14 \\ 2x_1-4x_2-3x_3+2x_4=-3 \end{cases}.$$

A(4,1,0,1) B) (to'gri javob yo'q) C)(0,0,1,2) D(0,0,4,2) E)(3,2,1,4)

16.Gauss usulida tenglamalar sistemasining yechimlarini toping:

$$.\begin{cases} -8x_1+5x_2-12x_4=1 \\ 7x_1-4x_2+x_3+x_4=-4 \\ x_1+x_2+x_3-13x_4=-10 \\ 2x_1+4x_2+9x_3-2x_4=9 \end{cases}. \quad .$$

A(0,0,1,2) B) (4,2,2,0) C)(to'gri javob yo'q) D(4,0,0,2) E)(3,2,1,0)

17.1-sistema 2-sistema uchun natija bo'lishini isbotlang:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \end{cases}; \qquad 2)\quad 3x_1+x_2+x_3+5x_4=0.$$

A(3,2,0,1) B) (2,0,0,1) C)(to'gri javob yo'q) D(1,0,2,0) E)(2,2,1,4)

18.1-sistema 2-sistema uchun natija bo'lishini isbotlang:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}; \qquad 2)\quad -x_1+3x_2-5_3+4x_4=-1.$$

A(0,0,1,2) B) (1,2,0,0) C)(3,0,0,4) D(to'gri javob yo'q) E)(4,0,0,2)

19.1-sistema 2-sistema uchun natija bo'lishini isbotlang:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 12x_1+4x_2+7x_3+2x_4=2 \end{cases}; \qquad 2)\quad -8x_1-3x_2-5x_3-3x_4=-2.$$

A(0,3,2,1) B) (1,0,0,4) C)((to'gri javob yo'q) D(2,2,0,1) E)(3,3,0,2)

20.1-sistema 2-sistema uchun natija bo'lishini isbotlang:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 12x_1+4x_2+7x_3+2x_4=0 \end{cases}; \qquad 2)\quad -11x_1-7x_2-3x_3=1.$$

A(to'gri javob yo'q) B) (3,0,0,2) C)(3,3,2,0) D(1,1,3,0) E)(3,0,0,1)

21. Tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental sistemasini toping:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3+x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ -2x_1+2x_2-3x_3+5x_4=0 \end{cases}$$

A(5,5,0,4) B) (to'gri javob yo'q) C)(3,6,0,4) D(2,1,0,6) E)(1,6,5,2)

22. Tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental sistemasini toping:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+5x_3+x_4=0 \\ 3x_1+3x_2-2x_3-3x_4=0; \\ x_1+2x_2-3x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

A(4,4,0,3) B) (3,3,5,6) C)(to'gri javob yo'q) D(6,5,0,0) E)(6,6,4,0)

23. Tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental sistemasini toping:

$$\begin{cases} 5x_1-3x_2 14x_3-3x_4=0 \\ -4x_1+5x_2+2x_3-6x_4=0 \\ -2x_1+2x_2-3x_3+7x_4=0 \end{cases}$$

A(0,2,2,1) B) (1,3,3,0) C)(2,4,4,3) D(to'gri javob yo'q) E)(4,1,1,2)

24. Tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental sistemasini toping:

$$\begin{cases} -9x_1+3x_2-x_3+4x_4=0 \\ 4x_1-x_2+2x_3-5x_4=0 \\ -8x_1+2x_2-3x_3+15x_4=0 \end{cases};$$

A(4,2,0,3) B) (1,3,0,2) C (2,1,4,0) D(2,2,1,0) E)(to'gri javob yo'q)

25. Tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental sistemasini toping:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3-x_4=-1 \\ -x_1+4x_2-x_3+3x_4=-13 \\ -3x_1+2x_2+3x_3+x_4=10 \\ 22x_1-5x_2+7x_3-2x_4=20 \end{cases}$$

A(1,3,2,0) B) (0,2,1,3) C) (to'gri javob yo'q) D(1,0,3,2) E)(2,1,0,4)

Amaliy topshiriqlar:

1. Tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasi asosida tekshiring va echimlarini toping:[11]

1.1. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2+7x_3+2x_4=0 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2+7x_3+2x_4=0 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x_1+3x_2-6x_3-2x_4=-1 \\ 6x_1+x_2-2x_4=-2 \\ 6x_1-7x_2+21x_3+4x_4=3 \\ 9x_1+4x_2-x_3+4x_4=3 \\ 12x_1-6x_2+21x_3+2x_4=1 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1-2x_2+8x_3+3x_4=-1 \\ 5x_1+10x_2+2x_3+11x_4=3 \\ 9x_1+2x_2+4x_3+31x_4=2 \\ 2x_1+14x_2-3x_3+2x_4=4 \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} -2x_1+3x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=-1 \\ 13x_1-x_2+2x_3+11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2-6x_3+2x_4=10 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 5x_1-13x_2+x_3+23x_4=11 \\ x_1+3x_2-5x_3+3x_4=1 \\ 12x_1+x_2+2x_3-11x_4=0 \\ 12x_1+4x_2-17x_3+2x_4=20 \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} -x_1+3x_2+6x_3-2x_4=21 \\ 6x_1-x_2+2x_4=3 \\ x_1-7x_2+21x_3+4x_4=-3 \\ -2x_1+41x_2-x_3+4x_4=-3 \\ 2x_1+6x_2+x_3-2x_4=11 \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+7x_3-3x_4=-11 \\ 3x_1+x_2-2x_3+21x_4=13 \\ x_1+2x_2+4x_3+31x_4=2 \\ 2x_1-4x_2-3x_3+12x_4=-4 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 = -1 \\ 6x_1 + x_2 - 2x_4 = -2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 21x_3 + 4x_4 = 3 \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -3 \\ -4x_1 + 3x_2 - 14x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 16x_1 - 3x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 22x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 10 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -13 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ 22x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 20 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 14 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -13 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\ 22x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = -12 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} -6x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 13x_4 = 17 \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -31 \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 = -12 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_3 = 12 \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 2 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_2 + 23x_4 = 23 \\ -2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 14 \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 12x_3 + 13x_4 = 7 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 20 \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 41 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 12x_4 = 1 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 13x_4 = -10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 9 \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2. Gauss usulida tenglamalar sistemasining echimlarini toping:

2.1. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 14 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 - 12x_4 = 1 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 13x_4 = -10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 9 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 16x_1 - 3x_2 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 14x_4 = 3 \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -13 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 2 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_2 + 23x_4 = 2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 14 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 5x_1 - 13x_2 + x_3 + 23x_4 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ 13x_1 + x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = -1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 3 \\ 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 31x_4 = 2 \\ 2x_1 + 14x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 5x_1 - 13x_2 + x_3 + 23x_4 = 11 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 17x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 41 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -13 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \\ 22x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 20 \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 2 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_2 + 23x_4 = 23 \\ -2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 14 \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 12x_3 + 13x_4 = 7 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 20 \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -3 \\ -4x_1 + 3x_2 - 14x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_3 + 13x_4 = 17 \\ 2x_1 - 7x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 13x_1 - x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 = -1 \\ 6x_1 + x_2 - 2x_4 = -2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 21x_3 + 4x_4 = 3 \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ 12x_1 - 6x_2 + 21x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x_1 - 13x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 10 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -21 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} -2x_1 - 13x_2 + x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

. Tenglamalar sistemasi echimlarining fundamental sistemasini toping:

5.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 14x_3 - 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 12x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ -22x_1 + x_2 - 13x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 23x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 - x_4 = 0 \\ -12x_1 + 2x_2 - 23x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 25x_1 + 13x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -13x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 32x_2 - 3x_3 - 15x_4 = 0 \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} -12x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 - 7x_3 + x_4 - 11x_5 = 0 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} -32x_1 + x_2 - 17x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ -42x_1 - 7x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} -12x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 - 7x_3 + x_4 - 11x_5 = 0 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} -9x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ -8x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 - 14x_3 + 3x_4 = 0 \\ -5x_1 - x_2 + 12x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 13x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 21x_4 = 0 \\ -3x_1 - 11x_2 + x_4 = 0 \\ -11x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \\ -42x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 2x_1 + 13x_2 - 7x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 11x_5 = 0 \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} -5x_1 + 13x_2 - 3x_3 - 25x_4 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 - 11x_5 = 0 \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} 2x_1 - 13x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 25x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 - 11x_5 = 0 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} -x_1 - 23x_2 + 17x_3 - 15x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_2 - 37x_3 + 4x_4 - 10x_5 = 0 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 - 14x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 9x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 + 13x_3 + x_4 - 15x_5 = 0 \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} -7x_1 + 23x_2 + 27x_3 - 25x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 - 11x_5 = 0 \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Nazariy savollar:[1],[7].

1. Chiziqli tenglamalar, chiziqli tenglamalar sistemasi**.**
2. n-noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi, natijasi.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
5. Tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar.
6. Teng kuchli chiziqli tenglamalar sistemalari, xossalari.
7. Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylililik shartlari.
8. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
9. Bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi va unga ********bir jinsli tenglamalar sistemalari orasidagi bog`lanishlar.
10. Echimlarning fundamental sistemasi.
11. Chiziqli ko`phillik.
12. Chiziqli tenglamalar sistemasining Gauss usulida echish.
13.BCHTSning fundamental yechimlari sistemasiga ta’rif bering.
14.CHTSni yechishning Gauss usulini tushuntiring.
15.BCHTSning fundamental yechimlari sistemasi qanday topiladi?
16.Chiziqli tenglama deb nimaga aytiladi?
17.Tenglamaning yechimiga ta’rif bering.
18.n ta noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi nima?
19.CHTSning yechimi deb nimaga aytiladi?
20.Hamjoyli, hamjoyli bo’lmagan CHTSga ta’rif bering.
21.CHTSni qachon aniq, aniqmas deyiladi?
22.CHTSning natijasiga ta’rif bering.
23.CHTSning chiziqli kombinatsiyasi nima?

24Teng kuchli CHTSlariga ta’rif bering.
25.n ta noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining farqini ayting.
26.Kroneker-Kapelli teoremasini bayon eting.
27.CHTSning hamjoylilik shartlarini ayting.
28.Bir jinsli CHTS deb qanday sistemaga aytiladi?
29.n ta noma’lumli m ta CHTSga assotsirlangan BSTS qanday hosil qilinadi?
30.CHTS va unga assotsirlangan BCHTS yechimlar yig’indisi, ayirmasi qanday sistemaga yechim bo’ladi?
31.BCHTS yechimlar to’plami vektor fazo tashkil etishini tushuntiring.
32.Yechimlar fazosi hosil qilgan chiziqli ko’pxillikka misol keltiring.
33. Chiziqli tenglamalar, chiziqli tenglamalar sistemasi**.**
34. n-noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.
35. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi, natijasi.
36. Chiziqli tenglamalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
37. Tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar.
38. Teng kuchli chiziqli tenglamalar sistemalari, xossalari.
39. Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylililik shartlari.
40. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
41. Bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi va unga ********bir jinsli tenglamalar sistemalari orasidagi bog`lanishlar.
42. Echimlarning fundamental sistemasi.
43. Chiziqli ko`phillik.
44. Chiziqli tenglamalar sistemasining Gauss usulida echish.
45.n-o’lchovli vektor deb nimaga aytiladi?
46.n-o’lchovli vektorlarning tengligi ta’rifini aytib bering.
47.n-o’lchovli vektorlarning yig’indisi va vektorning skalyarga ko’paytmasi deb nimaga aytiladi?
48.n-o’lchovli arifmetik vektor fazo deb nimaga aytiladi?
49.n-o’lchovli arifmetik vektor fazoning qanday xossalarini bilasiz?
50.Vektorlar sistemasining chiziqli qobig’ iga ta’rif bering.
51.Ekvivalent sistemalarga ta’rif bering.
52.Chiziqli vekto fazoga ta’rif bering.
53.Vektorlar sistemasi deganda nimani tushunasiz?.
54.Vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasiga ta’rif bering.
55.Vektorlarning chiziqli bog’liq sistemasi deb nimaga aytiladi?.
56.Vektorlarning chiziqli bog’liq bo’lmagan sistemasi ta’rifini ayting.
57.Vektorlarning chiziqli bog’liq sistemasi xossalarini ayting.
58.Vektorlarning chiziqli bog’liq bo’lmagan sistemalari xossalarini ayting.
59.Vektorlarning ekvivalent sistemalari deb nimaga aytiladi?
60.Ekvivalent sistemalar xossalarini ayting.
61.Vektorlarning sistemasida qanday elementar almashtirishlar bajariladi?
62.Elementar almashtirishlar natijasida qanday sistema hosil bo’ladi?
63.Vektorlar chekli sistemasining bazisiga ta’rif bering.

64.Sistema bazisining asosiy xossalarini bayon qiling.
65.Vektorlar chekli sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
66.Sistema rangining qanday xossalarini bilasiz?
67.Vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i deb nimaga aytiladi?
68. Chiziqli qobiqning asosiy xossalarini bayon eting.
69.Chiziqli ko'pxillikka ta'rif bering.
70.Chiziqli ko'pxillikning asosiy xossalarini ayting.
71.Chiziqli ko'pxillikka maktab matematikasidan misol keltiring.
72.Chiziqli tenglamalar, chiziqli tenglamalar sistemasi**.**
73.n-noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.
74.Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi, natijasi.
75. Chiziqli tenglamalar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
76.Tenglamalar sistemasini elementar almashtirishlar.
77.Teng kuchli chiziqli tenglamalar sistemalari, xossalari.
78.Chiziqli tenglamalar sistemasining hamjoylililik shartlari.
79. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
80. Bir jinsli bo`lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi va unga ********bir jinsli tenglamalar sistemalari orasidagi bog`lanishlar.
81. Echimlarning fundamental sistemasi.
82. Chiziqli ko`phillik.
83. Chiziqli tenglamalar sistemasining Gauss usulida echish.

7-Modul.Matritsalar.

1§. Matritsa va uning rangi. Matritsaning ustun va qator (satr) ranglarining tengligi

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon berilgan bo'lsin.

7.1.1-ta'rif. F maydonning mn ta a_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) elementlaridan tuzilgan ushbu

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishdagi jadval F maydon ustidagi $m\times n$ tartibli matritsa deyiladi.[1]

Matritsa A,B,S,... harflar orqali belgilanadi. a_{ij} lar matritsaning elementlari deyiladi. a_{ij} element, matritsaning i-satri, j-ustuni kesishmasidagi element. Matritsada m>n, m<n, m=n bo'lishi mumkin. Agar matritsada m=n bo'lsa, u holda bunday matritsa n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

7.1.2-ta'rif. A va B matritsalar berilgan bo'lib, ularning mos ravishda satrlari va ustunlari soni teng bo'lsa, u holda A va B matritsalarni nomdosh matritsalar deb yuritiladi.

Masalan, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 22 & 6 \\ 6 & -3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar 4×5 tartibli matritsalar, ya'ni ular nomdosh matritsalar.

7.1.3-ta'rif. A matritsaning har bir a_{ij} elementi B matritsaning unga mos b_{ij} elementiga teng bo'lsa, u holda A va B nomdosh matritsalar teng (aks holda teng emas) matritsalar deyiladi.

$A^i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ matritsaga n ta satrli, 1 ta ustunli, $A_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}$ matritsaga 1 ta satrli, n ta ustunli matritsa deyiladi. Bitta satrli matritsalarni satr vektorlar, bitta ustunli matritsalarni ustun vektorlar deb qarash mumkin.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsada $\overline{A}_1,\dots,\overline{A}_m$ satr vektorlar va $\overline{A}^1,\dots,\overline{A}^n$ ustun vektorlar mavjud.[5]

7.1.4-ta'rif. Matritsadagi satr vektorlar sistemasining rangiga matritsaning satr rangi, ustun vektorlar sistemasining rangiga uning ustun rangi deyiladi. A matritsaning satr rangini $r(A)$, ustun rangini $\rho(A)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Matritsa rangini aniqlash uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajariladi. Ular quyidagilar:

1. Matritsadagi ixtiyoriy ikkita satr yoki ustun o'rinlarini almashtirish.
2. Matritsadagi ixtiyoriy satr yoki ustun elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
3. Matritsaning satr yoki ustun elementlarini noldan farqli songa ko'paytirib, boshqa satr yoki ustunning mos elementlariga qo'shish.
4. Barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan satr yoki ustunni matritsadan chiqarish.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 6 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 4 & 8 & 6\end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 6 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 0 & -5 & 4 & 6\end{pmatrix};$

4. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}.$

7.1.1-teorema. Elementar almashtirishlar matritsa rangini o’zgartirmaydi.

Matritsani elementar almashtirishlar natijasida uning satr (ustun) vektorlari sistemasida elementar almashtirishlar bajariladi. Ma’lumki, vektorlarning chekli sistemasini elementar almashtirishlar natijasida undagi chiziqli erkli vektorlar soni o’zgarmaydi, ya’ni vektorlar sistemasining rangi o’zgarmaydi. Shuning uchun matritsani elementar almashtirishlar natijasida uning rangi o’zgarmaydi.

7.1.5-ta’rif. Matritsa satrining boshlovchi elementi deb uning birinchi (chapdan o’ngga qaraganda) noldan farqli elementiga aytiladi.

7.1.6-ta’rif. Matritsa pog’onasimon deyiladi, agar uning nol qatorlari barcha nolmas qatorlardan keyin joylashgan va $\alpha_{1k_1}, \alpha_{2k_2}, \ldots, \alpha_{rk_r}$ boshlovchi elementlari uchun $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ bo’lsa.

Masalan, $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ matritsa pog’onasimon matritsa emas.

Chunki, 3-, 4- satrlaridagi noldan farqli (chapdan o’ngga) birinchi elementlar 3-ustunda joylashgan. Bu matritsaning 3-satrini (-2) ga ko’paytirib, 5 ga ko’paytirilgan 4-satrga qo’shamiz:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

4-, 5-satrlarning boshlovchi elementlari 4-ustunda bo'lganligi uchun yana elementar almashtirish bajaramiz. 4-ustunni 3ga, 5-ustunni 11ga ko'paytirib, ularni qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hosil bo'lgan matritsaning 5-satrini 112ga bo'lamiz va uni (-4)ga ko'paytirib, 6-satrga ko'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan oxirgi matritsa pog'onasimon matritsa.

7.1.2-teorema. Har qanday $m \times n$ tartibli matritsa satr elementar almashtirishlar natijasida $m \times n$ tartibli pog'onasimon matritsaga ekvivalent bo'ladi.

7.1.7-ta'rif. A^t matritsa A matritsaning transponirlangani deyiladi, agar A^t matritsa A matritsa satrlarini ustunlar orqali yozishdan hosil bo'lgan bo'lsa, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

7.1.3-teorema. Matritsaning satr rangi uning ustun rangiga teng.

a). Matritsaning teskarilanish shartlari. Teskari matritsani topish

$F = < F; +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1 >$ maydon va maydon ustida $F^{n \times n}$ kvadrat matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

7.1.4-teorema. Kamida bitta nol satr yoki ustunga ega kvadrat matritsa teskarilanuvchi emas.

7.1.5-teorema. Agar kvadrat matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lsa, u teskarilanuvchi emas.

Haqiqatdan ham, agar satrlari yoki ustunlari chiziqli bog'liq bo'lgan A kvadrat matritsani shu tartibli shunday nolmas B matritsaga ko'paytirish natijasida $A\cdot B=E$ shart bajarilsa, u holda B matritsa A matritsaga teskari matritsa bo'lar edi. Lekin A matritsaning qaysi satr yoki ustuni chiziqli bog'liq bo'lgan bo'lsa $A\cdot B$ ko'paytma matritsaning ham xuddi shu satr yoki ustuni chiziqli bog'liq bo'ladi. Bundan $A\cdot B\neq E$.

7.1.1-natija. Agar kvadrat matritsa teskarilanuvchi bo'lsa, u holda uning satrlari chiziqli erkli bo'ladi.

7.1.6-teorema. Satrlari chiziqli erkli bo'lgan kvadrat matritsani elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

7.1.7-teorema. Ixtiyoriy A kvadrat matritsa uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

1) A matritsa teskarilanuvi:

2) A matritsaning satrlari (ustunlari) chiziqli erkli:

3) A matritsani elementar matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Teorema elementar matritsalarning xossalari va yuqoridagi teoremalar asosida isbotlanadi.

7.1.8-teorema. Agar A kvadrat matritsani elementar almashtirishlar zanjiri (ketma-ket bajarilgan elementar almashtirishlar) birlik matritsaga o'tkazsa, u holda A matritsa teskarilanuvchi va bajarilgan elementar almashtirishlar zanjiri E matritsani A^{-1} matritsaga keltiradi.

13.5-teorema asosida teskari matritsani topish jarayoni quyidagicha: $A\in F^{n\times n}$ matritsaga teskari matritsani topish uchun tartibi $n\times 2n$ bo'lgan $A\,|\,E=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$ matritsani elementar almashtirishlar zanjiri yordamida $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)=E\,|\,B$ ko'rinishga keltiramiz. Hosil bo'lgan B matritsa berilgan A matritsaga teskari matritsa.

2 §. n ta noma'lumli n ta CHTSni matritsalar yordamida yozish va yechish

R maydon ustida n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

U holda berilgan CHTSni matritsali tenglama, ya'ni $AX = B$ ko'rinishida yozish mumkin.

7.2.1-ta'rif. $AX = B$ chiziqli tenglamaga $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining matritsali ifodasi deyiladi.

7.2.1-teorema. Agar A matritsaning satrlari chiziqli erkli bo'lsa, u holda $A^{-1}B$ vektor $AX = B$ tenglamaning yagona yechimi bo'ladi.

A·X = B tenglamada A matritsa teskarilanuvchi bo'lsa, u holda A^{-1} matritsani topib, tenglamaning ikkala tomonini A^{-1} ga chap tomondan ko'paytiramiz (matritsalarni ko'paytirish, hattoki kvadrat matritsalar bo'lsa, ham kommutativ emas): $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$.

$A^{-1}\cdot A = E$ ekanligidan $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$, bundan esa $X = A^{-1}\cdot B$ ekanligi kelib chiqadi.

n ta noma'lumli n ta CHTS berilgan bo'lsa uning matritsali tenglamasi $AX = B$ bo'ladi. Lekin matritsali tenglamani faqat CHTS yordamida hosil qilinmaydi. Balki A., B matritsalar berilgan bo'lsa $A\cdot X = B$ yoki $X\cdot A = B$ ko'rinishdagi matritsali tenglamalarni; A,B,C matritsalar berilgan bo'lsa $A\cdot X\cdot B = C$ ko'rinishdagi matritsali tenglamalarni tuzish mumkin bo'lsa, ularni yechish uchun o'zgaruvchining chap yoki o'ng tomonidagi A matritsa teskarilanuvchi bo'lsa, uning yechimi $A^{-1}\cdot B$ yoki $B\cdot A^{-1}$ ko'rinishda; o'zgaruvchining o'ng va chap tomonidagi A va B lar teskarilanuvchi bo'lsa, $X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$ ko'rinishda bo'ladi.

a). O’rniga qo’yishlar gruppasi. O’rniga qo’yishlarning juft-toqligi, ishorasi

Bizga n ta elementga ega bo’lgan A to’plam berilgan bo’lsin.

To’plam elementlarini shartli ravishda 1,2,...,n sonlar orqali belgilab olamiz, ya’ni berilgan to’plamni A={1,2,3,...,n} ko’rinishda yozish mumkin.

7.2.2-ta’rif. A={1,2,3,...,n} to’plamni o’ziga biyektiv akslantirishga n-darajali o’rniga qo’yish deyiladi.

A to’plamda aniqlangan φ o’rniga qo’yishni

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

ko’rinishda belgilanadi. Bunda birinchi qatordagi elementlarning joylashish tartibi ahamiyatga ega emas, lekin ikkinchi qator elementlarini joylashtirganda har bir k va unga mos $\varphi(k)$ elementlarning bir ustunda joylashishiga e’tibor berish kerak.

A to’plamning barcha o’rniga o’yishlar to’plamini S_n orqali belgilaymiz.

7.2.3-ta’rif. Agar φ va ψ o’rniga qo’yishlarda $i_k=j_k(k=\overline{1,n})$ bo’lsa, u holda φ va ψ o’rniga qo’yishlar o’zaro teng deyiladi.

Masalan, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ o’rniga qo’yishlar o’zaro teng .

7.2.4-ta’rif. φ va ψ o’rniga qo’yishlar ko’paytmasi deb φ va ψ akslantirishlar kompozitsiyasi $\varphi\psi(i) = \varphi(\psi(i)), i = 1,\dots,n$ ga aytiladi, ya’ni

$$\varphi \cdot \psi = \varphi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \psi(1) & \psi(2) & \dots & \psi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(1) & \psi(2) & \dots & \psi(n) \\ \varphi(\psi(1)) & \varphi(\psi(2)) & \dots & \varphi(\psi(n)) \end{pmatrix}.$$

7.2.5-ta’rif. A to’plamdan olingan φ o’rniga qo’yishga teskari o’rniga qo’yish deb $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \dots & \varphi^{-1}(n) \end{pmatrix}$ o’rniga qo’yishga aytiladi.

7.2.6-ta’rif. A to’plamning har bir elementini shu elementning o’ziga o’tkazuvchi ε akslantirishga ayniy o’rniga qo’yish deyiladi va u

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$ ko’rinishda belgilanadi.

7.2.2-teorema. A chekli to’plamning barcha o’rniga qo’yishlar to’plami multiplikativ gruppa bo’ladi.

7.2.7-ta’rif. $< S_n;\ \cdot,^{-1} >$ gruppaga n-darajali simmetrik gruppa deyiladi va u S_n orqali belgilanadi.

7.2.8-ta’rif. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o’rniga qo’yishda A={1,2,3,...,n} to’plamning ixtiyoriy i, j elementlaridan tuzilgan juftlik uchun $i-j$ va **.3-mi** $\varphi(i)-\varphi(j)$ ayirmalar bir xil ishoraga ega bo’lsa, bu juftlik to’g’ri, bir xil ishoraga ega bo’lmasa to’g’ri emas yoki inversiya tashkil etadi deyiladi.

7.2.9-ta’rif. $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o’rniga qo’yishda inversiyalar soni juft (toq) bo’lsa, o’rniga qo’yish juft (toq) o’rniga qo’yish deyiladi.

$\varepsilon=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ va $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ o’rniga qo’yishlar juft o’rniga qo’yish bo’ladi.

7.2.10-ta’rif. $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o’rniga qo’yishda shunday i, j elementlar mavjud bo’lib, ular uchun $\varphi(i)=j, \varphi(j)=i, \varphi(s)=s, s\in A\setminus\{i,j\}$ shartlar bajarilsa, bunday o’rniga qo’yish transpozitsiya deyiladi.

7.2.3-teorema. Har qanday transpozitsiya toq o’rniga qo’yish bo’ladi.

7.2.11-ta’rif. $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ o’rniga qo’yishning ishorasi deb

$\operatorname{sgn}\varphi=\begin{cases} 1, \text{агар} \quad \varphi-\text{жуфт}, \\ -1, \text{агар} \quad \varphi-\text{ток}. \end{cases}$ qiymatga aytiladi.

7.2.4-teorema. O’rniga qo’yishlar ko’paytmasining ishorasi, o’rniga qo’yishlar ishoralari ko’paytmasiga teng.

7. **2.5-teorema.** O’rniga qo’yishlar ishorasi quyidagi xossalarga ega:

1) sgn funksiya multiplikativ, ya’ni har qanday $\varphi,\psi\in S_n$ lar uchun $\operatorname{sgn}(\varphi\psi)=\operatorname{sgn}\varphi\cdot\operatorname{sgn}\psi$ o’rinli;

2) transpozitsiya ishorasi (-1) ga teng;

3) o’zaro teskari o’rniga qo’yishlar ishorasi bir xil;

4) agar τ-transpozitsiya va φ ixtiyoriy o’rniga qo’yish bo’lsa, u holda $\operatorname{sgn}(\tau\varphi)=\operatorname{sgn}(\varphi\tau)=-\operatorname{sgn}\varphi$ bo’ladi.

7.2.6-teorema. Har qanday ikkita juft yoki toq o’rniga qo’yishlar ko’paytmasi juft o’rniga qo’yish bo’ladi;

Biri juft ikkinchisi toq o’rniga qo’yishlar ko’paytmasi toq o’rniga qo’yish bo’ladi.

3§. Determinantlar va ularning xossalari. Matritsalar ko'paytmasining determinanti

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida $F^{n\times n}$ kvadrat matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

7.3.1-ta'rif. Kvadrat matritsaning har bir satr va har bir ustunidan bittadan elementlar olib tuzilgan ko'paytmalarning algebraik yig'indisiga berilgan kvadrat matritsaning determinanti deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsaning har bir satr va har bir ustunidan

bittadan element olib tuzilgan n ta elementlar ko'paytmasi $a_{1\tau_1}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau_n}$ bilan n-darajali o'rniga qo'yish $\tau=\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \tau(1) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$ larni birini ikkinchisiga mos qo'yuvchi o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bu moslikdan n-tartibli kvadrat matritsaning determinantini aniqlashda foydalanamiz.

Uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar to'plami $S_3=\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\}$dagi o'rniga qo'yishlar quyidagicha:

$$\varphi_0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \varphi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \varphi_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uchinchi tartibli kvadrat matritsa determinanti $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ni hisoblash uchun uchinchi darajali o'rniga qo'yishlar yordamida ko'paytmalar tuzamiz. Urniga qo'yishning ishorasi u yordamida hosil qilingan ko'paytmani qo'shish yoki ayirish kerakligini aniqlab beradi. Bundan quyidagi ifodani hosil qilamiz.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

7.3.2-ta'rif. n-tartibli kvadrat matritsa $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

ning determinanti deb $|A|=\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)}$ ($n!$ qo'shiluvchilardan iborat) yig'indiga aytiladi.

7.3.1-teorema. Nol satr yoki ustunga ega kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

7.3.2-teorema. Diagonal matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

7.3.3-teorema. Uchburchak matritsaning determinanti asosiy diagonal elementlari ko'paytmasiga teng.

7.3.4-teorema. Kvadrat matritsa va unga transponirlangan matritsalar determinantlari teng.

7.3.5-teorema. Kvadrat matritsaning ikkita satr (ustun)lari o'rnini almashtirish natijasida determinant ishorasi o'zgaradi.

7.3.6-teorema. Ikkita bir xil satr (ustun)ga ega kvadrat matritsa determinanti nolga teng.

7.3.7-teorema. A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli λ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti λ skalyarga ko'paytiriladi.

7.3.8-teorema. Qandaydir ikkita satr (ustun)lari proporsional bo'lgan kvadrat matritsaning determinanti nolga teng.

7.3.9-teorema. Kvadrat matritsa i - qatori (ustuni)ning har bir elementi m ta qo'shiluvchilardan iborat bo'lsa, bunday kvadrat matritsaning determinanti m ta determinantlar yig'indisidan iborat bo'lib, birinchi determinant i - qatori (ustuni)da birinchi, ikkinchi determinantda ikkinchi qo'shiluvchilar va h.z. boshqa qatorlar A matritsanikidek bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a & a_{22}+b & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7.3.10-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga noldan farqli skalyarga ko'paytirilgan boshqa satr (ustun)ni qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

7.3.11-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satr (ustun)iga qolgan satr (ustun)lar chiziqli kombinatsiyasini qo'shish natijasida determinant o'zgarmaydi.

7.3.12-teorema. Kvadrat matritsaning biror-bir satri (ustuni) qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, uning determinanti nolga teng.

7.3.13-teorema. Har qanday elementar matritsaning determinanti noldan farqli.

7.3.14-teorema. Kvadrat matritsalar ko'paytmasining determinanti berilgan matritsalar determinantlari ko'paytmasiga teng.

a). Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. Matritsa rangi haqidagi teorema

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon va maydon ustida $F^{m\times n}$ matritsalar to'plami berilgan bo'lsin.

3.15-ta'rif. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matritsaning matritsaosti deb, uning qandaydir satr va ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan matritsaga aytiladi.

7.3.16-ta'rif. k ta satr va k ta ustundan iborat matritsaosti k-tartibli matritsaosti deyiladi.

7.3.17-ta'rif. k-tartibli matritsaosti determinanti A matritsaning k-tartibli minori deyiladi.

Matritsaning har bir elementi 1-tartibli minor bo'ladi.

7.**3.18-ta'rif.** Kvadrat matritsaning i- qatori j-ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan matritsaosti determinanti a_{ij} elementning minori deyiladi va M_{ij} ko'rinishda belgilanadi.

7.3.19-ta'rif. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ ko'paytmaga a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi.

7.3.20-teorema. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadrat matritsaning n-satr (ustun) elementi a_{nn} dan boshqa hammasi nolga teng bo'lsa, u holda $|A|=a_{nn}\cdot M_{nn}$ bo'ladi.

7.3.21-teorema. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadrat matritsaning qandaydir satr (ustun) elementlaridan bittasidan boshqa hammasi nolga teng bo'lsa, u holda berilgan matritsa determinanti shu elementni uning algebraik to'ldiruvchisi bilan ko'paytmasiga teng.

7.3.22-teorema (Laplas teoremasi). A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadrat matritsaning determinanti biror-bir satr (ustun) elementlari bilan ularning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga, ya'ni

$|A| = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} (|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}), i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ga teng.

7.3.23-teorema. $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0, (j \neq k)$ va $a_{i1}A_{m1} + \ldots + a_{in}A_{mn} = 0, (i \neq m)$, ya'ni A matritsaning biror-bir satr (ustun) elementlarini boshqa bir satr (ustun) elementlari algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng.

b). Deteminantning nolga teng bo'lish sharti. Kramer formulasi

$F = < F; +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1 >$ maydon va maydon ustida $F^{n \times n}$ matrisalar to'plami va A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ berilgan bo'lsin.

3.24-teorema. Kvadrat matritsaning determinanti nolga teng bo'lishi uchun uning satr (ustun)lari chiziqli bog'langan bo'lishi zarur va yetarli.

3.25-teorema. Har qanday kvadrat matritsa uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

1. $|A| \neq 0$.
2. Matritsaning satr (ustun)lari chiziqli erkli.
3. A matritsa teskarilanuvchi.
4. A matritsa elementar matritsalar yordamida ifodalanadi.

3.21-teorema. A matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga teng.

7.3.26-ta'rif. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaning a_{ij} elementining

A_{ij} $(i, j \in \{1, \ldots, n\}$ algebraik to'ldiruvchilaridan iborat

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsaga A matritsaga biriktirilgan

matritsa deyiladi.

7.3.27-teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda A matritsa teskarilanuvchi va $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ maydon ustida quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (3)$$

CHTS berilgan va uning asosiy matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ bo'lsin.

7.3.28-teorema. $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

(4) $x_1 = |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + \dots + \beta_n A_{n1}),\dots,x_n = |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + \dots + \beta_n A_{nn}).$

7.3.29-teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

$$x_1 = \frac{|A(1)|}{|A|},\dots,x_n = \frac{|A(n)|}{|A|} \quad (5).$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini

Kramer formulalari yordamida topish uchun sistemaning asosiy matritsasi va A(1), A(2), A(3) matritsalarni tuzib, ularning determinantlarini hisoblaymiz:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

-- $a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

$\Delta_1 = |A(1)| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = |A(2)| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$;

$\Delta_3 = A(3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$;

U holda $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

7.3.30-ta'rif. A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaning a_{ij} elementining A_{ij} $(i, j \in \{1,\dots,n\}$ algebraik to'ldiruvchilaridan iborat

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ matritsaga A matritsaga biriktirilgan matritsa deyiladi.

7.3.31-teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda A matritsa teskarilanuvchi va $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon ustida quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (3)$$

CHTS berilgan va uning asosiy matritsasi

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ bo'lsin.

7.3.32-teorema. $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

(4) $x_1 = |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + \dots + \beta_n A_{n1}),\dots,x_n = |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + \dots + \beta_n A_{nn})$.

7.3.33-teorema Kramer qoidasi va (4) formulalar Kramer formulalari deyiladi.

Agar $A(j)$ $j \in \{1,\ldots,n\}$ orqali A matritsaning j-ustunini (3) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsani belgilasak, u holda

$$A(1)=\begin{pmatrix} \beta_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ \beta_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\ldots,A(n)=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-1} & \beta_1 \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-1} & \beta_n \end{pmatrix}$$ matritsalarga ega bo'lamiz.

Laplas teoremasini qo'llab, $A(j)$ $j \in \{1,\ldots,n\}$ matritsaning determinantini j-ustun yoyilmasi yordamidagi ifodasini hosil qilamiz:

$$|A(j)| = \beta_1 A_{1j} + \ldots + \beta_n A_{nj}),(j=1,\ldots,n).$$

Hosil bo'lgan tengliklar yordamida 18.5-teoremani quyidagicha bayon qilish mumkin:

7.3.34-teorema. Agar $|A| \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) CHTS yagona yechimga ega va u quyidagi formulalar orqali ifodalanadi:

$$x_1 = \frac{|A(1)|}{|A|},\ldots,x_n = \frac{|A(n)|}{|A|} \quad (5).$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida topish uchun sistemaning asosiy matritsasi va A(1), A(2), A(3) matritsalarni tuzib, ularning determinantlarini hisoblaymiz:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\Delta_1 = |A(1)| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = |A(2)| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = A(3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

U holda $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 \frac{\Delta_3}{\Delta}.$

o-variant.Ishlab korsatilgan misollar.

7.1-misol. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini topish uchun uning uchta satr vektorlaridan iborat vektorlar sistemaning rangini aniqlaymiz. Nol vektor chiziqli bog'liq bo'lganligi va vektorlar sistemasidan nol vektorni chiqarish uning rangini o'zgartirmaganligi uchun, ikkinchi qatorni matritsadan chiqaramiz. Vektorlar sistemasini elementar almashtirish natijasida berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo'lishini e'tiborga olsak, berilgan matritsaga ekvivalent $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ matritsa hosil bo'ladi. Ustun nol vektorlarni matritsadan chiqarib $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ matritsaga ega bo'lamiz. Matritsa rangini aniqlash jarayonida ustun va satr vektorlar sistemasida elementar almashtirishlarni bajarish mumkin. Hosil qilingan matritsada ikkita chiziqli bog'lanmagan satr hamda ustun vektorlar sistemalari kelib chiqdi. Demak berilgan matritsaning satr rangi $r(A)$=2 va uning ustun rangi $\rho(A)$=2. [1]

7.2-misol. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (birinchi va ikkinchi satrlarni qo'shib, birinchi satr o'rniga yozamiz) ~ $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (birinchi satr elementlari $\frac{1}{4}$ ga ko'paytirilgan) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (birinchi va ikkinchi satrlar teng bo'lganligi uchun birini qoldiramiz) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Berilgan matritsani satr vektorlar sistemasini elementar almashtirishlar natijasida uning satr rangi $r(A)$=2 ekanligi kelib chiqadi.

7.3-misol. A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning transponirlash natijasida

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ hosil bo'ladi.

7.4-misol. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsali tenglamaga keltirib, yechimini toping.

Yechish. X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida

$AX = B$ tenglamani tuzib olamiz va agar A matritsa teskarilanuvchi bo'lsa A^{-1}ni topib X = A^{-1}·B tenglik yordamida CHTSning yechimini topamiz.

A matritsani satr elementar almashtirishlar yordamida chiziqli erkli ekanligini tekshiramiz:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -16 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan pog'onasimon matritsada nol satrlar yo'q. Demak, A matritsa chiziqli erkli matritsa va matritsaning teskarilanish shartlariga ko'ra uning teskari matritsasi mavjud. Teskari matritsa $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$ni 13-ma'ruzada ko'rsatilgan usul bilan topish mumkin. Teskari matritsa to'g'ri topilganligini tekshirib olamiz:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E$$

Demak, teskari matritsa yordamida CHTSni yechimini topamiz. Ya'ni X = A^{-1}·V tenglikdan

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}V = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ni bundan x =1; y = 2; z = 3 yechimni hosil qilamiz.[7]

7.5-misol. $A=\{1,2\}$ to'plam berilgan bo'lsa, u yordamida hosil qilingan ikkinchi darajali o'rniga qo'yishlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\varphi_0=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \varphi_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ va $S_2=\{\varphi_0,\varphi_1\}$.

7.6-misol. $\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&i&\cdots&n\\1&2&\cdots&i&\cdots&n\end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda inversiyalar yo'q. $\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishda $\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ juftliklar inversiya tashkil etadi.

7.7-misol. $\begin{cases}5x-y-z=0\\x+2y+3z=14\\4x+3y+2z=16\end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish:

$\Delta=\begin{vmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{vmatrix}$ =5(4–9)+(2–12)–(3–8)=-25–10+5=-30;

$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&-1&-1\\14&2&3\\16&3&2\end{vmatrix}$ = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.

$\Delta_2=\begin{vmatrix}5&0&-1\\1&14&3\\4&16&2\end{vmatrix}$ = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.

$\Delta_3=\begin{vmatrix}5&-1&0\\1&2&14\\4&3&16\end{vmatrix}$ = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.

$x_1=\Delta_1/\Delta=1$; $x_2=\Delta_2/\Delta=2$; $x_3=\Delta_3/\Delta=3$.[8]

7.8-misol. $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\2&1&1&-2\\-1&0&1&3\\2&-2&0&4\end{pmatrix}$ matritsa rangini minorlar yordamida aniqlang.

Yechish. Matritsa rangi haqidagi teoremaga ko'ra matritsaning noldan farqli minorlarini aniqlaymiz.

Matritsaning berilishidan, unda kamida bitta noldan farqli birinchi tartibli minor mavjud, masalan, $A_1 = (1)$ matritsaostining determinanti 1ga teng, ya'ni $M_1 = |1| = 1 \neq 0$.

Matritsaning $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0.$$

Matritsaning $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - (-2) = 4 \neq 0.$$

Matritsaning 4-tartibli minori berilgan matritsaning determinantidan iborat, uni hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, berilgan matritsaning noldan farqli minorlari 1-tartibli, 2-tartibli va 3-tartibli. Ulardan yuqori tartibligi 3-tartibli minor bo'lganligi uchun, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

7.9-misol. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4–9)+(2–12)–(3–8)=-25–10+5=-30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$; $x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$; $x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

7.10-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa rangini minorlar yordamida aniqlang.

Yechish. Matritsa rangi haqidagi teoremaga ko'ra matritsaning noldan farqli minorlarini aniqlaymiz.

Matritsaning berilishidan, unda kamida bitta noldan farqli birinchi tartibli minor mavjud, masalan, $A_1 = (1)$ matritsaostining determinanti 1ga teng, ya'ni $M_1 = |1| = 1 \neq 0$.

Matritsaning $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0.$$

Matritsaning $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaostining determinanti

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - (-2) = 4 \neq 0.$$

Matritsaning 4-tartibli minori berilgan matritsaning determinantidan iborat, uni hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, berilgan matritsaning noldan farqli minorlari 1-tartibli, 2-tartibli va 3-tartibli. Ulardan yuqori tartibligi 3-tartibli minor bo'lganligi uchun, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

7.11-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

$$A \mid E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matritsaning satrlari bo'yicha elementar almashtirishlarni bajarib

$$A \mid E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = E \mid A^{-1},$$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz.

Teskari matritsa to'g'ri topilganligi AḰA^{-1}=E tenglik asosida tekshiriladi.

7.12-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa determinantini hisoblang.

Yechish. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$ -5 + 18 + 6 = 19.

7.13-misol. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Demak, determinant -10 + 6 – 40 = -44 ga teng.

7.14-misol. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani algebraik to'ldiruvchilar yordamida toping.

Yechish. Berilgan A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9)+1(2-12)-1(3-8)=-25-10+5=-30.$$

Determinant noldan farqli, demak, matritsaning teskarisi mavjud. Matritsaning har bir elementi algebraik to'ldiruvchisini topamiz:

$A_{11} = (-1)^{1+1}$ ™ $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{12} = (-1)^{1+2}$ ™ $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;$

$A_{13} = (-1)^{1+3}$ ™ $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{21} = (-1)^{2+1}$ ™ $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{22} = (-1)^{2+2}$ ™ $M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$

$A_{23} = (-1)^{2+3}$ ™ $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;$

$A_{31} = (-1)^{3+1}$ ™ $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{32} = (-1)^{3+2}$ ™ $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$

$A_{33} = (-1)^{3+3}$ ™ $M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Tekshirish:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

7.15-misol. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9)+(2-12)-(3-8)=-25-10+5=-30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48)-(42-32) = -20-10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48)-(16-56) = -100+40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42)+(16-56) = -50-40 = -90.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$; $x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$; $x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

7.16-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

$$A \mid E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matritsaning satrlari bo'yicha elementar almashtirishlarni bajarib

$$A\,|\,E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\2&-2&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&0&1&1&0\\1&0&1&0&1&0\\0&-2&0&0&-2&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&1\\1&0&1&0&1&0\\0&-2&0&0&-2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&1&0&1&0\\0&-2&0&0&-2&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-1&0&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&1&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)=E\,|\,A^{-1},$$

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&3&-1\end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz.

Teskari matritsa to'g'ri topilganligi AḰA^{-1}=E tenglik asosida tekshiriladi.

7.17-misol. $\begin{cases}5x-y-z=0\\x+2y+3z=14\\4x+3y+2z=16\end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsali tenglamaga keltirib, yechimini toping.

Yechish. X = $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}0\\14\\16\end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida

$AX=B$ tenglamani tuzib olamiz va agar A matritsa teskarilanuvchi bo'lsa A^{-1}ni topib X = $A^{-1}\cdot$B tenglik yordamida CHTSning yechimini topamiz.

A matritsani satr elementar almashtirishlar yordamida chiziqli erkli ekanligini tekshiramiz:

$$\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&2&3\\4&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-11&-16\\0&-5&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan pog'onasimon matritsada nol satrlar yo'q. Demak, A matritsa chiziqli erkli matritsa va matritsaning teskarilanish shartlariga ko'ra uning teskari matritsasi mavjud. Teskari matritsa $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$ ni 13-ma'ruzada ko'rsatilgan usul bilan topish mumkin. Teskari matritsa to'g'ri topilganligini tekshirib olamiz:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E$$

Demak, teskari matritsa yordamida CHTSni yechimini topamiz. Ya'ni

$X = A^{-1} \cdot V$ tenglikdan

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}V = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ni bundan x =1; y = 2; z = 3 yechimni hosil qilamiz.

Amaliy topshiriqlar:

1. Matritsaning ustun va satr ranglarining tengligini isbotlang:[11]

1.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -6 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1.2. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 7 & 9 \\ 11 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

1.10. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

1.11. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ -8 & 5 & 3 \\ 4 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

1.18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1.19. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -8 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.4. $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 3 \\ -6 & 5 & -3 \\ 7 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

1.5. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & 11 & 2 \\ 7 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.6. $\begin{pmatrix} 6 & 20 & -3 \\ -6 & -5 & 3 \\ 7 & 14 & 4 \end{pmatrix}$

1.7. $\begin{pmatrix} 1 & 20 & 13 \\ -16 & 5 & 3 \\ 7 & 15 & 4 \end{pmatrix}$

1.8. $\begin{pmatrix} 12 & -5 & 5 & 13 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \\ -7 & 15 & 24 & 10 \\ 6 & 17 & 21 & -5 \end{pmatrix}$

1.9. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 4 \\ 51 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 10 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

1.12. $\begin{pmatrix} 11 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1.13. $\begin{pmatrix} -21 & 1 & -4 \\ -6 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 14 \end{pmatrix}$

1.14. $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -7 & 4 \\ -1 & 13 & -5 & 8 \\ 10 & 9 & 11 & 2 \\ 7 & 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

1.15. $\begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 11 & -6 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

1.16. $\begin{pmatrix} 14 & 20 & 23 \\ -6 & -5 & 3 \\ -9 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

1.17. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -6 & 1 \\ 9 & -5 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

1.20. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.21. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -6 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1.22. $\begin{pmatrix} 13 & 10 & 3 \\ -6 & 15 & 3 \\ 27 & 1 & 14 \end{pmatrix}$

1.23. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 11 & 7 \\ 1 & 10 & -6 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

1.24. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 \\ -7 & -3 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

1.25. $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & 11 \\ 1 & -15 & 10 & 13 \\ 4 & 12 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

2. $f(a)$ ni hisoblang:

2.1. $f(x) = 2x^2 + 3x;$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 13 \\ -16 & 5 & 3 \\ 7 & 15 & 4 \end{pmatrix}$

2.2. $f(x) = -3x^2 + 4x - 1;$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 13 \\ -16 & 5 & 3 \\ 7 & 15 & 4 \end{pmatrix}$

2.3. $f(x) = -12x^2 + 3x - 5;$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -3 \\ 6 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

2.4. $f(x) = 13x^2 - 5x - 41;$ $\quad A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -13 \\ -16 & 25 & 3 \\ 7 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

2.5. $f(x) = x^2 + 4x;$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

2.6. $f(x)=x^2+24x+7;$ $A=\begin{pmatrix}-2 & 20 & 1\\ 6 & -4 & 3\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$

2.7. $f(x)=-6x^2+9x;$ $A=\begin{pmatrix}1 & 20 & 1\\ -16 & -4 & 3\\ 7 & 5 & 0\end{pmatrix}$

2.8. $f(x)=5x^3-3x^2+1;$ $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

2.9. $f(x)=-4x^3+5x^2-x+1;$ $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

2.10. $f(x)=-4x^2+14x-3;$ $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$

2.11. $f(x)=7x^2+13x+25;$ $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

2.12. $f(x)=9x^2+56x;$ $A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

2.13. $f(x)=35x^2-6x+3;$ $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

2.14. $f(x)=-3x^3+15x^2-2x+1;$ $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

2.15. $f(x)=6x^3+15x^2-7x+8;$ $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$

2.16. $f(x)=43x^3+x^2-2x;$ $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

2.17. $f(x)=28x^2+7x+5;$ $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

2.18. $f(x)=34x^2-6x+2;$ $A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -7\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$

2.19. $f(x)=-31x^2+6x-45;$ $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

2.20. $f(x)=7x^2+55x+23;$ $A=\begin{pmatrix}-1 & -11 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

2.21. $f(x)=x^2+3x-100;$ $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 10 & 3\\ -1 & 12 & 3\end{pmatrix}$

2.22. $f(x)=-5x^2+4x+3;$ $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

2.23. $f(x)=-4x^2+25x+9;$ $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$

2.24. $f(x)=-x^3+4x^2-1;$ $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

2.25. $f(x)=7x^3+2x+25;$ $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$

3. Ikki usul bilan teskari matritsani toping:[11]

3.1. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

3.2. $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3.3. $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3.4. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

3.5. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

3.6. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$

3.7. $\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 2\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$

3.8. $\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 3\end{pmatrix}$

3.10. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$

3.11. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

3.12. $\begin{pmatrix}-4 & 1 & -1\\ 14 & -2 & 2\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3.13. $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & 8 & 3\end{pmatrix}$

3.14. $\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$

3.15. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & -3 & -1\end{pmatrix}$

3.16. $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$

3.17. $\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & -3 & 4\end{pmatrix}$

3.18. $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

3.19. $\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$

3.20. $\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$

3.21. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

3.22. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$

3.23. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & -3 & -1\end{pmatrix}$

3.24. $\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -2 & -3 & 3\end{pmatrix}$

3.25. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 3 & 5 & 1\\ 5 & -3 & -1\end{pmatrix}$

3.9. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

4. Matritsali tenglamani eching:

4.1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

4.3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4.5. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -12 & 7 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

4.6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 21 & -12 & -3 & 6 \\ 13 & -7 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & -3 & -4 \\ 12 & -11 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4.7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & -1 \\ 9 & 4 & 6 & 0 \\ -7 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

4.8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 8 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

4.9. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4.10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 14 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4.12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

4.13. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 14 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

4.14. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 14 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

4.15. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.17. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4.18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4.20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

4.21. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4.22. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

4.24. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 14 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

4.25. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

5.Tenglamalar sistemasini matritsali tenglamaga keltirib eching:[11]

5.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = 22 \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -21 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 4x_3 = -9 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 14x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17 \\ -x_1 - x_2 = 40 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 19 \\ -x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 23 \\ x_1 - x_2 = -14 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = 23 \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -19 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -11 \\ x_1 - x_2 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 15 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + x_3 = 13 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -24 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 31 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 10 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 25 \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} -12x_1 - 2x_2 + 11x_3 = 3 \\ 8x_1 + x_2 - 7x_3 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 8 \end{cases}$

TEST SAVOLLARI.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, A^{-1}=?[10]

A) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

D) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ E) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A^{-1}=?

$$A)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad B)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad C)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$D)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad E)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=?$

$$A)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\quad B)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\quad C)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$D)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\quad E)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

4. Matrittsali tenglamani eching:[10]

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$A)\ \begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ $B)\ \begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -5\end{pmatrix}$ $C)\ \begin{pmatrix}-2 & -1\\ -5 & 4\end{pmatrix}$

$D)\ \begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $E)\ \begin{pmatrix}-2 & -1\\ -5 & -5\end{pmatrix}$

5. Matrittsali tenglamani eching:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$A)\ \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad C)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

$D)\ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

6. Matrittsali tenglamani eching:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = ?$$

$A)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad C)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

$D)\ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = ?$

A) 2 v)-2 S)5 D)-1 E)3

8. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$

A) 3 B) -3 C) 0 D) 1 E) -1

9. Determinantni xisoblang :[10]

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

A) ..3abc-a^3-b^3-c^3
B) .3abc C) .2abc- D) .3abc-ab

10. $\begin{bmatrix} x+1 & 0 & 2 \\ 3 & x-1 & 0 \\ 1 & x+1 & 3 \end{bmatrix}$=0 bo’lsa, x=?

A).-1
B). 0
C). 2
D). *∅

E). .2abc-ac

11. Determinantntni xisoblang:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta \ -\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$$

A). 0
B). 1
C). -1
D). 5
E). 6

12. $\begin{bmatrix} x+1 & 0 & 2 \\ 3 & x-1 & 0 \\ 1 & x+1 & 3 \end{bmatrix}$=0 bo'lsa, x=?

A). 5
B). -1
C). 0
D). 2
E).*∅

13. f(2^a-1)=5*(2^8-1) va f^{-1}(2^a+3)=7 bo`lsa, a nechabo`laoladi ?

A). 2
B). 3
C). 4
E). *5

14. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ |a+3| & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$bo'lsa, a ning oladigan qiymatlar to'plami quyidagilardan qaysi?

A). {1,-2}
B). {2,-4}
C). *{3,-9}
D). {4,-8}

15. A=$\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$bo'lsa, A^{1991} =?

A). *A
B). –A
C). -5A
D). 5A

16. $\begin{vmatrix} 2018 & 2019 \\ 2020 & 2021 \end{vmatrix}$ =?

A). -8
B). -6
C). *-2

D). 4

17. $\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 2 \\ 3 & x-1 & 0 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ tenglamaning yechimlar to'plami quyidagilardan qaysi biri?

A). (-1,1,0)
B). (-1,1,3)
C). (-1,1)
D). *$\emptyset$

18. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$bo'lsa, A^{10} =?

A). $2^{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
B). $2^{20}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
C). *$2^{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D). $2^{19}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$matritsa A(2,-5) nuqtasini qaysi nuqtqga o'tkazadi?[11]

A). (2,-4)
B). (1,3)
C). *(-4,1)
D). (-8,1)

20. A matritsanxno'lchovlimatritsa. det(3A) =243. detAbo'lsa, n=?

A). 2
B). 3
C). 4
D). *5

21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = ?$

A). 42
B). -48
C). 126
D).*-168

22. A=[1 0 3 -6] va B= [2 -3 1 4] bo'lsa, $A \cdot B^T$ =?

A). *[-19]
B). [7]
C). [24]
D). [45]

23. A matritsasi 3x3 o'lchovlibirmatritsa, det(4A)=?

A). 2 $|A|$
B). 4$|A|$
C). 6$|A|$

D).*64$|A|$

24. A=$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ bo`lsa det(A^3)=?

A). 1

B). 2

C). 4

D). *8

25. A=$\begin{bmatrix} m & n \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ berilgan A=A^{-1}bo`lsa m=?

A). -2

B). -1

C). 0

D). *1

Takrorlash uchun savollar:[1],[7].

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Nomdosh matritsalarga ta’rif bering.
3. Qanday matritsal teng deyiladi?
4. Qanday matritsalar o’hshash deyiladi?
5. Matritsalar ustida amallar
6. Matritsaning satr (ustun) vektorlari sistemasi nima?
7. Matritsaning satr (ustun) rangi deb nimaga aytiladi?
8. Matritsani elementar almashtirishlar deb qanday almashtirishlarga aytiladi?
9. Matritsaning satr va ustun ranglari haqidagi asosiy teoremani ayting.

8. Qanday matritsaning teskarisi mavjud bo’lmaydi?

9. Matritsaning teskarilanish shartlarini ayting.

10. Teskari matritsani elementar matritsalardan foydalanib topish jarayonini tushuntiring.

11. Determinant nolga teng bo’lishining zarur va yetarli shartini ayting.

12. Matritsa rangi minorlar yordamida qanday topiladi?

13. Algebraik to’ldiruvchilar yordamida teskari matritsani topish jarayonini tushuntiring.

14. CHTSni Kramer qoidasi bilan yechish usulini tushuntiring.

15. CHTSning matritsali ifodasi qanday hosil qilinadi?

16. Matritsali tenglamalarning qanday ko’rinishlarini bilasiz?

17. Matritsali tenglama yagona yechimining mavjudlik shartini ayting.

18. Matritsali tenglamani yechish jarayonini bayon qiling.

19. Kvadrat matritsa determinanti tushunchasiga ta’rif bering.

20. Determinantni hisoblash formulasini tushuntiring.

21. Determinantning asosiy xossalarini ayting.

22. Matritsalar ko’paytmasining determinanti nimaga teng?

23. CHTSning matritsali ifodasi qanday hosil qilinadi?

24.Matritsali tenglamalarning qanday ko’rinishlarini bilasiz?
25.Matritsali tenglama yagona yechimining mavjudlik shartini ayting.
26.Matritsali tenglamani yechish jarayonini bayon qiling.
27.Matritsaostiga ta’rif bering.
28.n-tartibli minor deb nimaga aytiladi?.
29.Matritsa biror bir elementining algebraik to’ldiruvchisi nima?
30.Determinantni algebraik to’ldiruvchi yordamida aniqlash jarayonini tushuntiring.
31.Laplas teoremasini ayting.
32.CHTSning matritsali ifodasi qanday hosil qilinadi?
33.Matritsali tenglamalarning qanday ko’rinishlarini bilasiz?
34.Matritsali tenglama yagona yechimining mavjudlik shartini ayting.
35.Matritsali tenglamani yechish jarayonini bayon qiling.
36.n-darajali o’rniga qo’yishga ta’rif bering.
37.O’rniga qo’yishlar gruppa tashkil etishini tekshiring.
38.n-darajali simmetrik gruppaga misol keltiring.
39.Inversiyaga ta’rif bering.
40.Juft, toq o’rniga qo’yishlarni ta’riflang.
41.Transpozitsiya nima?
42.O’rniga qo’yishning ishorasi qanday aniqlanadi?
43.Kvadrat matritsa determinanti tushunchasiga ta’rif bering.
44.Determinantni hisoblash formulasini tushuntiring.
45.Determinantning asosiy xossalarini ayting.
46.Matritsalar ko’paytmasining determinanti nimaga teng?

ADABIYOTLAR:

1. Nazarov R.N., Toshpo’latov B.T, Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. T.,I qism,1993 y.,II qism, 1995 y.
2. Toshpo’latov B.T., Dusumbetov A.D., Qulmatov A.Q. Algebra va sonlar nazariyasi. Ma’ruzalar matni. T., 2001 1-5- qismlar.
3. Yunusov A.S.,Yunusova D.I. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi. Ma’ruzalar matni. T., 2001 y.
4. Yunusov A.S, D.I.Yunusova. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. O’quv qo’llanma. Elektron versiyasi. TDPU sayti.
5. R.Iskandarov, R.Nazarov. Algebra va sonlar nazariyasi. I-II qismlar.T., O’qituvchi, 1979 y.
6. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M., Visshaya shkola. 1979 g.
7. Yunusov A.S., Yunusova D.I. Algebra va sonlar nazariyasidan modul texnologiyasi asosida tayyorlangan nazorat topshiriqlari to’plami. TDPU. 2004.
8. N.Ya.Vilenkin. Algebra i teoriya chisel. M. 1984.
9. Shneperman L.B. Sbornik zadach po algebre i teorii chisel. Minsk. Visheyshaya shkola. 1982 g.

10.M.Rustamov.,A.Parmonov.”Testlar to”plami”.JJizzax 1918y.

11. M.Rustamov.,A.Parmonov.Misol va masalalar to”plami”.Jizzah.1918y.

Mustaqil ta’lim nazorati

Fan bo’yicha talabalarning matematik bilimlari imkoniyatidan kelib chiqqan holda ayrim sodda teorema yoki xossalarni ham nazariy, ham amaliy tomondan tavsiya etilgan adabiyotlardan foydalanib mustaqil o’zlashtirish uchun beriladigan topshiriqlar hamda kurs ishlari. Mustaqil ta’limda talabalarning qo’shimcha ilmiy adabiyotlardan foydalanishlari, misollarni ishlashning bir necha yo’llarini taqqoslab, har bir usulga baho bera olishlariga alohida e’tibor beriladi. Topshiriq ham nazariy, ham amaliy tomondan to’liq bajarilgan, mustaqil ishni topshirish davomida o’qituvchining bergan savollariga to’liq javob bera olgan, berilgan misollarni echishga nazariy bilimlarini qo’llab ishlangan misol natijalariga ko’ra to’g’ri xulosalar chiqara olgan talabalar javoblari joriy va oraliq baholashlarda e’tiborga olinadi (joriy baholashlarning 45 balidan 15 bali va oraliq baholashlarning 40 balidan 5 bali).

Мундарижа

1

1- модул Математик мантиқ элементлари.

2-модул- Тўпламлар ва муносабатлар

3-модул: Алгебра

4- модул.Асосий сонли системалар.

5- модул – Арифметик вектор фазо

6- модул. Чизиқли тенгламалар системаси.

7- модул – Матрицалар