0‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY  
VA 0‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

N. HAMEDOVA, Z. IBRAGIMOVA, **T. TASETOV**

MATEMATIKA

0 ‘zbekiston Respublikasi Oliy va o ‘rta maxsus ta ’lim vazirligi  
oliy o‘quv yurtlarining boshlang‘ich ta’lim yo‘nalishi  
talabalari uchun darslik sifatida tasdiqlagan

TOSHKENT

TURON-IQBOL»

2007

Z. Dadanov — TVDPI Boshlang'ich ta’lim metodikasi fakulteti dekani, p.f.n., dotsent,

Z. Tadjiyeva — gumanitar fakultetlarda mate- matika kafedrasi mudiri.

Taqrizchilar:

**4306020500-41 H M361(04)—2007**

**2007**

ISBN 978-9943-14-010-3

**© «Turon-Iqbol» nashriyoti, 2007-y.**

SO‘ZBOSHI

«Matematika» darsligi 5141600 — Boshlag‘ich ta’lim, tarbiya- viy ishlar va sport yo‘nalishi bakalavriatiga moijallangan boiib, shu yo‘nalishning matematika dasturiga mos keladi. Darslik VI bob 31 paragrafdan iborat, u o‘z oldiga talabalarni boshlang‘ich matematika kursining nazariy asoslari va oliy matematika element- lari bilan tanishtirish maqsadini qo‘yadi.

Uning I bobi boshlang‘ich matematika kursini nazariy asoslash uchun kerak boiadigan barcha umumiy tushunchalarni o‘z ichiga oladi. Bu bobda to‘plamlar va ular ustida amallar, moslik va uning turlari, munosabat va uning xossalari, kombinatorika elementlari, matematik tushunchalar, mulohazalar va ular ustida amallar, predikatlar va ular ustida amallar, teoremalarning tuzilishi va is- botlash usullari haqida so‘z yuritiladi.

Darslikning II bobida nomanfiy butun sonlar to‘plamini qurish to‘plamlar nazariyasi orqali, aksiomatika va miqdorlarni o‘lchash orqali ochib beriladi. Nomanfiy butun sonlarni yozishda qo‘llana- digan turli pozitsion va nopozitsion sanoq sistemalari va boiinish nazariyasi haqida ham so‘z yuritiladi.

III bob son tushunchasini kengaytirish masalasiga bag‘ishlan- gan. Unda son tushunchasi arifmetik amallarning to‘liq bajarilishi, miqdorlarni o‘lchash masalasining hal qilinishi ehtiyojlaridan kelib chiqib butun sonlar, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlarigacha kengaytiriladi. Bu to‘plamlarda son ta’rifi, arifmetik amallar va ularning xossalari bayon qilinadi.

IV bob algebra va analitik geometriya elementlariga bag‘ish- langan bo‘lib, sonli va harfiy ifoda, sonli tenglik va tengsizlik, ularning xossalari, tenglama va tengsizliklar, ularning yechimi, yechish yo‘llari, ayniyatlar, tekislikda chiziq tenglamalari haqida so‘z yuritiladi.

V bobda matematik analiz elementlari qaraladi. Sonli funksiya- lar, ularning xossalari va grafiklari, grafiklarni chizish usullari,

3

ketma-ketlik va uning limiti, funksiya limiti, hosilasi va integrali tushunchalari boshlang‘ich ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun yetarli darajada bayon qilingan.

VI bobda geometriya elementlari va miqdorlar nazariyasi haqida gapiriladi. Bunda planimetriya va stereometriyaning aksiomalari, asosiy tushunchalari, geometrik shakllar ta’rif va xossalari, geometrik masalalar, skalar miqdor tushunchasi, miqdorlarni o‘lchash, asosiy skalar miqdorlar ta’rifi va ular ora- sidagi bog‘lanish qaraladi.

I, II, VI boblar N. Hamedova va T. Tasetov, III, IV, V boblar Z. Ibragimova tomonidan yozilgan. Mualliflar darslik sifatini yaxshilash yuzasidan bildirilgan barcha taklif va milohazalar uchun minnatdorlik bildiradilar.

**I bob.** UMUMIY TUSHUNCHALAR

l-§. TO'PLAM

1.1. To‘plam tushunchasi. To‘plam tushunchasi matemati- kaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, u ta’riflanmaydi va misollar yordamida tasavvur hosil qilinadi. Masalan, auditoriya- dagi talabalar to‘plami, unli harflar to'plami, natural sonlar to'plami, qushlar galasi, qo‘ylar podasi va h. k.

To'plamni tashkil qiluvchi obyektlar to‘plant elementlari deyiladi. To'plamlar lotin alifbosining bosh harflari: A, B, C, ... bilan, uning elementlari lotin alifbosining kichik harflari: a, b, c ... bilan belgila- nadi.

To'plam elementi aEA ko‘rinishda yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o‘qiladi.

Agar a element A to'plamga tegishli bo'lmasa, a£A yoki aGA ko'rinishda yoziladi.

Masalan, A — juft natural sonlar to‘plami bo'lsin, u holda 2GA, 5£A, 628GA va 129&A bo'ladi.

Ba’zi sonli to'plamlar o‘z belgilariga ega. Barcha natural sonlar to'plami — N, barcha butun sonlar to‘plami — Z, barcha ratsional sonlar to'plami — Q, barcha haqiqiy sonlar to‘plami — R harflari bilan belgilanadi.

Birorta ham elementi bo'lmagan to'plam bo‘sh to‘plant deyi­ladi va 0 ko‘rinishda belgilanadi.

Masalan, x2 + 4 = 0 tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami, oydagi daraxtlar to'plami, dengiz tubidagi quruq toshlar to‘plami bo‘sh to'plamlardir.

To'plam chekli sondagi elementlardan tashkil topsa, chekli to‘plant deyiladi. Masalan, lotin alifbosi harflari to‘plami, kamalak ranglari to'plami, raqamlar to‘plami chekli to‘plamlardir.

To'plam elementlari soni cheksiz bo‘lsa, bunday to‘plam chek- siz to‘plant deyiladi. Masalan, barcha natural sonlar to‘plami, te- kislikdagi nuqtalar to‘plami cheksizdir.

5

Bir xil elementlardan tashkil topgan to'plamlar teng to'plam- lar deyiladi. Masalan, x1 - 4 — 0 tenglamaning yechimlari to‘p- lami va \x \ - 2 tenglamaning yechimlari to‘plami teng to‘plam- lardir.

1.2. To‘plamlarning berilish usullari. Agar har bir element- ning ma'lum bir to‘plamga tegishli yoki tegishli emasligi bir qiymatli aniqlangan boisa, to'plam berildi deyiladi.

To‘plamlar, odatda, ikki usulda beriladi:

1) to‘plam elementlari ro‘yxati keltiriladi.

Masalan, A = {a; o; i; u; o‘; e}; 2?={qizil, sariq, yashil}; C={ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

2) to‘plamga kirgan elementlarning yagona xarakteristik xos- sasi ko‘rsatiladi.

Masalan, yuqoridagi to‘plamlarni xarakteristik xossa bilan bersak:

A — o‘zbek alifbosining unli harflari to‘plami;

B — svetofor ranglari to‘plami;

C — bir xonali natural sonlar to‘plami boiadi.

Sonli to‘plamlar uchun xarakteristik xossani formula bilan berish qulay.

Bu holda, odatda, katta qavslar ichiga to‘plam elementi bel- gisi, vertikal chiziq va undan keyin to‘plam elementiga tegishli xossa ypziladi. Masalan: «M — 6 sonidan kichik bo‘lgan natural sonlar» to‘plami boisin. Bu to‘plam xarakteristik xossasi orqali M - {rt|rtE7Vva n < b} ko'rinishda ifodalanadi. Shunga ocxshash: C = {c\ c< 9, CE.N}. «C — 9 sonidan katta bo‘lmagan natural sonlar» to‘plami.

X = {x | x2 -4 = 0,x E R} bo‘lsa, X — x2 - 4 = 0 tenglamaning haqiqiy ildizlari to‘plami boiadi.

y={y\-2<y<6, yGR} boisa, Y — minus 2 dan 6 gacha boi- gan butun sonlar to‘plami.

1.3. Qism to‘plam va universal to‘plam.

1-ta’rif. Agar A to ‘plamning hamma elementi B to ‘pia mg a ham tegishli bo‘Isa, A to‘plam B to‘plamning qism to‘plami deyi­ladi va A C B ko ‘rinishda yoziladi.

Ta’rifga ko‘ra, istalgan to‘plam o‘zining qism to‘plami boiadi: ACA; bo‘sh to‘plam esa, istalgan to‘plamning qism to‘plami boiadi 0C A.

6

Qism to'plamlar ikki turga bo'linadi: xos va xosmas qism to‘plamlar. To‘plamning o'zi va bo‘sh to'plam xosmas qism deyiladi. Ulardan boshqa qism to'plamlar xos qism deyiladi.

Masalan, A = {a; b\ c} to'plamning xos qism to'plamlari: {a}, },

{c}, {a; b}, {a; c}, {b\ c}; xosmas qism to'plamlari: {a; b\ c} va 0 dir.

Agar **AcB** va **BcA** bo'lsa, **A = B** bo'ladi.

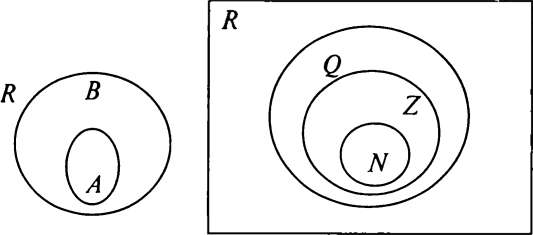
Bu xossadan ko'pincha to'plamlar tengligini isbotlashda foy- dalaniladi. Agar Ato'plamning istalgan dementi i? to'plamga te- gishli ekani va **B** to'plamning istalgan elementi **A** to'plamga te- gishli ekani isbotlangan bo'lsa, **A** = ya’ni bu to'plamlar teng- ligi haqida xulosa chiqariladi.

Bundan tashqari, **A** to'plamning istalgan elementi to'plamga, **B** to'plamning istalgan elementi C to'plamga tegishli bo'lsa, **A** to'plamning hamma elementi C to'plamga tegishli bo'ladi, ya’ni **AcB** va **BcC** bo'lsa, **AcC** bo'ladi.

2-ta’rif. Agar Av Ar ..., An to'plamlar A to'plamning qism to‘pi ami bo'lsa, A to'plam ***Av***A,,..., An to'plamlar uchun universal to1 plam deyiladi.

Universal to'plam, odatda, /yoki harflari bilan belgilanadi. Masalan, A — barcha natural sonlar to'plami; Z — barcha butun sonlar to'plami; **Q** — barcha ratsional sonlar to'plami; **R** — barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, **NcZcQcR** shartlar bajariladi va **R** qolgan sonli to'plamlar uchun universal to'plam vazifasini ba- jaradi.

1.4. Eyler — Venn diagrammalari. To'plamlar orasidagi mu- nosabatlarni yaqqolroq tasawur qilish uchun Eyler —Venn di- agrammalaridan foydalaniladi. Bunda to'plamlar doira, oval yoki biror yopiq soha shaklida, universal to'plam esa, odatda, to'g'ri to'rtburchak shaklida tasvirlanadi (I.l-rasm).



**/.** 1-rasm. *1*

1.5. To'plamlarning kesishmasi.

3-t a ’ r i f. A va B to‘plamlarning kesishmasi deb, bu ning ikkalasiga ham bir vaqtda tegishli elementlar to‘plamiga

aytiladi va AC\B ko'rinishda belgi/anadi.

To‘plamlar kesishmasi belgilar yordamida AC\B = va

xEB) ko'rinishda yoziladi.

M a s a 1 a n:

1) *A - {a*| 4< *a*< 14, *aEN*}va *2) X = {a; b; c; d\ e)* va

B = {b| 10<£< 19, bEN) bo'lsa, Y = {d\ e; /; k) bo'lsa,

Ar\B= {x| 11 <x<14, xeN}bo'ladi. XDY= {d\ e) bo'ladi.

To'plamlar kesishmasi ularning umumiy qismidir. Umumiy qismga ega bo'lmagan to'plamlar kesishmasi bo'sh to'plamdir. Bu holda A va Bto'plamlar kesishmaydi deyiladi va AC\B = 0 ko'rinishda yoziladi. Masalan, juft natural sonlar to'plami va toq natural sonlar to'plami umumiy elementga ega emas, ya’ni kesishmaydi.

Umumiy qismga ega bo'lgan to'plamlar kesishadi deyiladi va AC)B\* 0, ya’ni A va Bto'plamlar kesishmasi bo'sh emas, deb yoziladi. Masalan, 2 ga karrali natural sonlar va 5 ga karrali na­tural sonlar to'plamlari umumiy elementga ega, ya’ni kesishadi yoki kesishmasi bo'sh emas. Bu to'plamlar kesishmasi barcha 10 ga karrali natural sonlardan iborat bo'ladi.

Ikki to'plamning o'zaro munosabatida to'rt hoi bo'lishi mumkin (I.2-rasm):

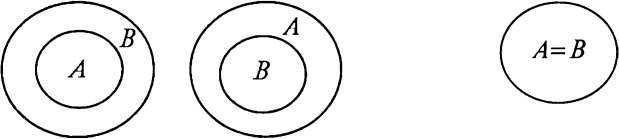
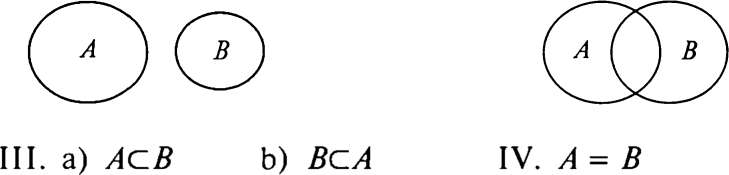
1) to'plamlar kesishmaydi (I.2-rasm, I);

2) to'plamlar kesishadi (I.2-rasm, II);

3) to'plamning bin ikkinchisining qismi bo'ladi (I.2-rasm, III);

4) to'plamlar ustma-ust tushadi, ya’ni teng (I.2-rasm, IV).

I. AHB= 0 II. A(1B\* 0



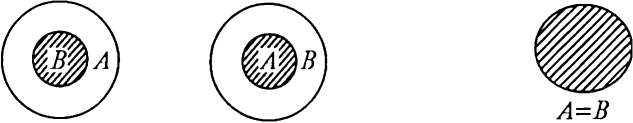
/. 2-rasm. 8

Quyida har bir hoi uchun to‘plamlar kesishmasi shtrixlab ko‘rsatilgan (I.3-rasm):

I. **ADB** = 0 II. 0

III. a) **AnB=B** b) **ADB=A**

IV. ADB = A = B



***L3-rasm.***

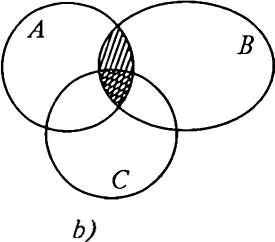
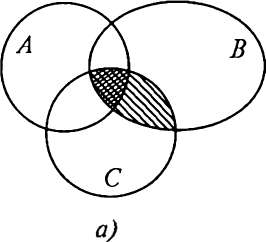
To‘plamlar kesishmasi quyidagi xossalarga ega:

1°. BcA bo‘lsa, AC\B = B bo‘ladi. Bu xossa to‘plamlar ke­sishmasi taTifidan kelib chiqadi.

2°. **AC\B = BC\A** (kommutativlik xossasi).

3°. **Ar\(BC\C) - (ADB)f)C =AHBnC** (assotsiativlik xossasi). Assotsiativlik xossasi **AHBDC** kesishmani qavslarsiz yozishga imkon beradi va istalgan sondagi to‘plamlar kesishmasini topishda qulaylik tug'diradi. Bu xossani Eyler — Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlaymiz (I.4-rasm):

I.4-o rasmda tenglikning chap qismi; 1.4 rasmda tenglik- ning o‘ng qismi tasvirlangan, ikki marta shtrixlangan sohalar ikkala rasmda ham bir xil bo‘lgani uchun {AC\B)f\C va AC\{BC\C) to‘plamlar teng degan xulosaga kelamiz.



I.4-rasm.

4°. zlU(Z?nC) = **{AVJB)C\{AKJC)** (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi).

9

5°. A (10 = 0.

6°. ADA = A.

1.6. To‘plamlarning birlashmasi.

4-ta’rif. A va *Bto'plamlarnin* birlashmasi *deb,* *bu*

to ‘plamlarning hech bo ‘Imaganda biriga tegishli bo ‘Igan elementlar

to'plamiga aytiladi va *AUBko* ‘rinishida belgilanadi.

To‘plamlar birlashmasi belgilar yordamida AUB = yoki

xGB) ko'rinishda yoziladi.

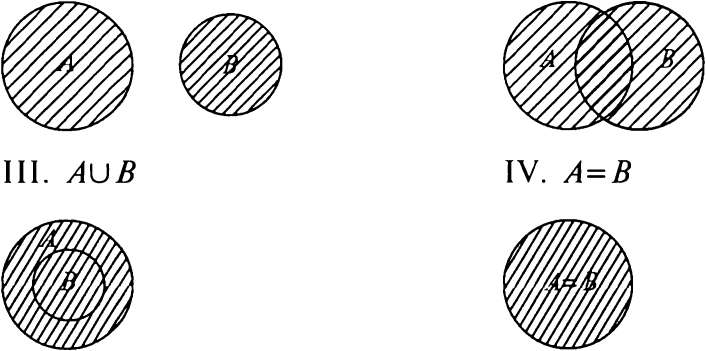
Masalan: 1) A — barcha juft sonlar to'plami, ya’ni A - {a\a - 2 n,nGN] va B — barcha toq sonlar to'plami, ya’ni

B-{b\b-2n- 1, nGN) bo‘lsa, ularning birlashmasi AUB = N bo‘ladi.

2) X-{m; n; p; k; 1} va Yn) bo'lsa, ularning birlashmasi XU Y-{m; «; p\ k\ l\ 5} bo'ladi.

To‘plamlar birlashmasining tasviri va xossalari (I.5-rasm):

I. AUB II. AUB



l.5-rasm.

1°. *BCA ^AUB = A.*

2°. AUB - BUA (kommutativlik xossasi).

3°. AU(BUA) = (AUB)UC - AU(assotsiativlik xossasi). 4°. AU0 = A.

5°. *AUA = A.*

6°. An(BUC) = (AnB)U(ADQ(kesishmaning birlashmaga

nisbatan distributivlik xossasi).

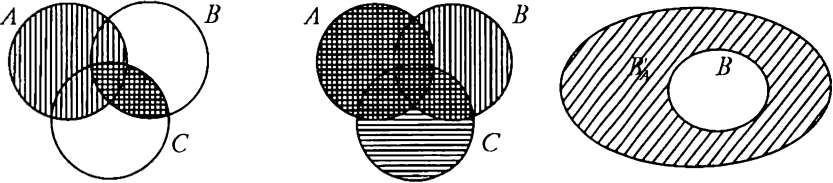
7°. AU(BflC) - (AUB)n(AUC) (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi).

10

7-xossani Eyler —Venn diagrammalarida tasvirlab ko‘rsataylik. 1.6 -arasmda tenglikning chap qismi ((5fiC) kesishma gorizontal va birlashma vertikal shtrixlangan, 1.6 rasmda AVB

vertikal, A\JC gorizontal shtrixlangan, {AUB)C\{AVJ C) esa ikki marta shtrixlangan soha bilan) tasvirlangan. a) rasmdagi barcha shtrixlangan soha bilan, b) rasmdagi 2 marta shtrixlangan sohalar bir xil boigani uchun AVJ{BP\C) va )n(/4uC) to‘plamlar

teng deyish mumkin.



a) b) d)

1.6- rasm.

1.7. To‘plamlar ayirmasi. ToMdiruvchi to‘plam.

5- t a ’ r i f. A va B to ‘plamlarning ayirmasi deb, A to ‘plamning B to‘plamga kirmaydigan elementlari to‘plamiga aytiladi va A\B

ko ‘rinishda belgilanadi.

(A\B) ayirmani belgilar yordamida {x| va xgB}

ko'rinishda yozish mumkin.

Masalan: I) A = {a\| a\ <4, a^R) = { <a < 4, aSR},

*B - {b \ \b\<2*, a<ER) = {b \-2 < b< 2; *beR}* bo‘lsa,

/4\5={x| — 4<x< — 2u2<x<4}.

2) *X=* { *a*; *b; c; d\ ej, Y= {d;* /; *k; 1}* bo‘lsa, *X\Y= {a\ b;* }

va *Y\X={f,* k; /}.

6- t a ’ r i f. B to ‘plamning A to ‘plamga to‘ Idiruvchi to‘plami deb shunday BA' to ‘plamga aytiladiki, bu to ‘plamning B to ‘plam bilan birlashmasi A to‘plamga teng bo‘ladi (1.6 rasm).

A va Bto‘plamlarni universal to‘plamgacha toMdiruvchi

to‘plamlar A’ va B' bilan belgilanadi.

To‘plamlar ayirmasining xossalari va tasviri (I.7-rasm):

,1°. AC\B - 0=>A\B - A(1.7 -arasm).

2°. BCA => A\B= Ba (1.7 -drasm).

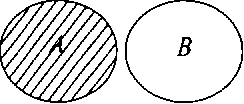
3°. A = B=> A\B — 0 (I.7-e rasm).

4°. A\(BUQ = (A\B)n(A\Q = A\B\C.

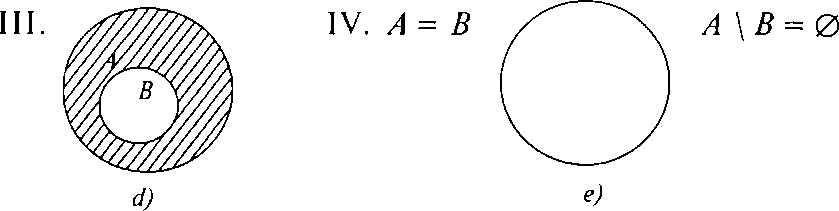
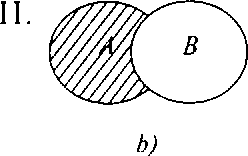
5°. A\(BC\Q = 04\£)U(,4\C).

11

6°. {AC\B)' *=* A'UB'.



a)



**/. *7-rasm.***

T. {A\JB)' = A'DB'.

6- va 7-xossalar De-Morgan qonunlari deyiladi.

4- va 5-xossalarning o‘rinli ekanligiga Eyler —Venn diagram- malarida tasvirlash orqali ishonch hosil qilish mumkin.

6-xossani quyidagicha isbotlaymiz. xE{AC\B)' bo‘lsin. Bundan xEAC\B ekani kelib chiqadi. Kesishma ta’rifiga ko‘ra x£A yoki x£B degan xulosaga kelamiz, bundan esa xEA' yoki xEB' ekani kelib chiqadi. xEA' yoki xEB' bo‘lsa, birlashma ta’rifiga ko‘ra xEA'UB' bo'ladi. Ikkinchi tomondan xEA'UB' bo'lsin. U holda birlashma ta’rifiga ko‘ra xEA' yoki xEB' ekani kelib chiqadi, xEA' ekanidan x£A va xEB' ekanidan x£B degan xulosaga kelamiz, x$lA va x$lB bo‘lsa, x£AC\B bo'ladi, bu esa xE(AC\B)' ekanligini ko‘rsatadi. Demak, (AC\B') vaA'UB' to‘plamlar bir xil elementlar- dan tashkil topgan va shuning uchun ham teng ekan.

7°-xossa ham xuddi shunday isbotlanadi.

1.8. To‘pIamIarning dekart ko‘paytmasi. Ava B to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi deb, 1-elementi A to‘plamdan, 2-elementi B to‘plamdan olingan (a; b) ko‘rinishdagi barcha tartiblangan juft- liklar to'plamiga aytiladi. Dekart ko‘paytma A x B ko‘rinishda belgilanadi: A\*B - {(a; b) | aEA va bEB}.

Masalan: A - {2; 3; 4; 5}, B = {a; b\ c} bo‘lsa, Ax B - {(2; a), (2; b), (2; c), (3; a), (3; b), (3; c), (4; a), (4; b), (4; c), (5; a), (5; b), (5; c)} bo‘ladi.

12

*2°. A x(B*U Q = *(A x B)U(A x* Cj.

Sonli to‘plamlar dekart ko‘paytmasi- ' “ ni koordinata tekisligida tasvirlash qu- lay. Masalan, A = {2; 3; 4}, B={4; 5} 4-

bo‘lsin, u holda A x. B - {(2; 4), (2; 5), ,

(3; 4), (3; 5); (4; 4), (4; 5)} boMadi. " Koordinata tekisligida shunday ko- 2" ordinatali nuqtalarni tasvirlaymizki, bun- 1 - da A to‘plam Ox o‘qida va B to‘plam Oy o‘qida olinadi. 0

Dekart ko‘paytmaning xossalari:

*V. AxB\* B xA.*

• • •

• • •

-i 1 1 ►

**2 3 4** a-

***t.S-rasm.***

*3°. A x(Bn* Q = *(A xB)n(A* x Q.

Ikkitadan ortiq to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini ham qarash mumkin. Umumiy holda Ar Av ..., An to‘plamlar berilgan bo'lsin. Ularning dekart ko‘paytmasi A^A^x ... xAn = {(a,; a2;

at) | afEAr a2EA2, ..., anEAnj dan iborat boMadi. (o,; a2, ..., an) tartiblangan n lik deyiladi. (Masalan, uchlik, to‘rtlik va h.k.). bunday tartiblangan n lik n o'rin/i kortej deb ham ataladi. Yana n o‘rinli kortejlar faqat bitta to‘plam elementlaridan tuzilgan bo‘lishi ham mumkin, bu holda u to‘plamni o‘z-o‘ziga n marta dekart ko‘paytmasi elementidan iborat boMadi.

1.9. TVplamni sinflarga ajratish. Hayotda ko‘pincha to'plam- larni qismlarga ajratishga to‘g‘ri keladi. Masalan, maktab o‘quvchilari o‘zlashtirishi bo‘yicha a’lochi, a’lo va yaxshi baholar- ga o‘quvchi, yaxshi va o‘rta baholarga o‘quvchi va o‘zlash- tirmovchi o‘quvchilarga ajraladi. 0‘quvchilarni ularning qaysi sinf- da o‘qishlariga qarab 1-sinf o‘quvchilari, 2-sinf o‘quvchilari, ..., 9-sinf o‘quvchilari qism to‘plamlariga ajratish mumkin. Bunda 9 yillik maktab o‘quvchilari 9 ta qismga ajraladi. 0‘z-o‘zidan ma’- lumki, bu qismlar umumiy elementga ega bo‘la olmaydi, ya’ni biror o‘quvchi bir vaqtda ikkita sinfda o‘qimaydi. Matematikada to‘plamni bunday o‘zaro kesishmaydigan qismlarga ajratish — to‘plamni sinflarga ajratish deb ataladi.

7-t a ’ r i f. Agar A to ‘plam chekli yoki cheksiz sondagi juft-jufti bilan o‘zaro kesishmaydigan Av Av ..., An, ... to ‘plamlarning bir- lashmasidan iborat bo‘Isa, A to‘plam Av Av ..., An, ... *sinflarga ajratilgan* deyiladi.

Demak, to‘plamni sinflarga ajratishning ikkita sharti bor ekan:

1) A = *AfJAfJ ... \JA\J* ...;

13

2) Af\A. = 0, bu yerda /'; j = 1, 2, «, ... va /\*/.

Masalan, barcha natural sonlar to‘plami bir necha usul bilan sinflarga ajratilishi mumkin:

1) tub sonlar va murakkab sonlar sinfi;

2) juft va toq sonlar sinfi;

3) bir xonali, ikki xonali, uch xonali ... sonlar sinfi.

1- va 2-holda sinflar soni chekli bo‘lsa, 3-holda sinflar soni cheksizdir.

To‘plamni sinflarga ajratish masalasi fanda tasniflash (klassifi- katsiya) deb ataladi. Siz botanikada o‘simliklar, zoologiyada hay- vonlar, kimyo fanida kimyoviy elementlar, geometriyada geomet- rik shakllar tasnifi bilan tanishgansiz.

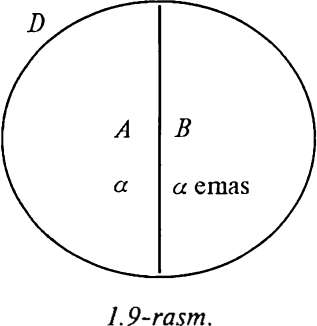
Xulosa qilib aytganda, to‘plamni sinflarga ajratishning ikkita sharti bor ekan: 1) qism to‘plamlar (sinflar) umumiy elementga ega bo‘lmaydi; 2) barcha qism to‘p ( birlashmasi be- rilgan to'plamga teng. Demak, to‘plam sinflarga ajratilgan bo‘lsa,

uning har bir elementi albatta biror sinfga tegishli bo‘ladi.

1.10. To‘pIamni elementlarining bitta, ikkita va uchta xossa- siga ko‘ra sinflarga ajratish. To‘plamni sinflarga ajratish ko‘pin- cha, elementlarining xossalariga qarab amalga oshiriladi. To‘p- lamni sinflarga ajratishga oid uch xil masalani ko‘rib chiqaylik.

I. D to‘plam va biror a xossa berilgan bo‘lsin. D to‘plam ele- mentlari a xossaga ega bo‘lishi ham, ega bo‘lmasligi ham mumkin. Bu holda D to‘plam ikkita o‘zaro kesishmaydigan va qism to‘plamlarga ajraladi. A to‘plam D to‘plamning a xossaga ega bo‘lgan elementlari to‘plami, B esa D to‘plamning a xossaga ega bo‘lmagan elementlari to‘plami. A\JB= D va AC\B= 0 ekanligi ravshan. Agar D to‘plamning hamma elementi a xossaga ega bo‘lsa, B = 0, agar D to‘plamning birorta ham elementi a xossaga

ega bo‘lmasa, = 0 bo‘ladi.



Agar va to‘plamlar bo‘sh bo‘l-

masa, D to‘plamni I.9-rasmdagi kabi tasvirlash mumkin.

Masalan, D — sinfdagi o‘quvchilar to‘plami, — uy vazifani bajarganlik xossasi bo‘lsa, uy vazifani bajarib kelgan va uy vazifani bajarmagan o‘quvchilar to‘plami bo‘ladi.

14

II. D to'plam va uning elementlari ega boiishi ham, boi- masligi ham mumkin bo‘lgan a va xossalar berilgan boisin. Bu ikki xossa D to'plamni ko‘pi bilan to‘rt sinfga ajratishi mumkin.

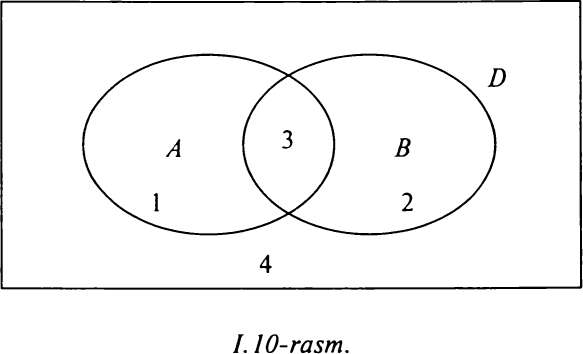
1- sinf: a xossaga cga bo‘lgan va xossaga ega boimagan ele- mentlar to‘plami.

2- sinf: a xossaga ega bo‘lmagan va xossaga ega bo‘lgan ele- mentlar to‘plami.

3- sinf: a va (3xossalarga ega bo‘lgan elementlar to‘plami.

4- sinf: a va [3xossalarga ega boimagan elementlar to‘plami. Bu sinflarning birortasi bo‘sh to‘plam boiishi ham mumkin.

Umumiy holda D to‘plamni ikkita xossaga ko‘ra sinflarga ajra- tishni 1.10-rasmdagi kabi tasvirlash mumkin.



Bu yerda: A — a xossaga ega boigan; xossaga ega

boigan elementlar to‘plami.

Masalan, D — sinf o‘quvchilari to‘plami, a — «aio o‘qish», — «intizomli boiish» xossalari boisin. U holda A — sinfdagi aiochi; B — sinfdagi intizomli o‘quvchilar to‘plami boiadi. Bunda A\B — sinfdagi aiochi, lekin intizomsiz o‘quvchilar; B\A — intizomli, lekin aiochi boimagan o‘quvchilar; ADB — ham aiochi, ham intizomli o‘quvchilar; D\(AL)B) — aiochi boimagan va intizomsiz o‘quvchilar to‘plami boiadi.

111. D to‘plamni a, f3, y xossalar yordamida ajratish mumkin boigan sinflarni ko‘rsating va bu sinflarni Eyler — Venn diag- rammasi yordamida tasvirlang.

15

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

a) butun sonlar; b) nomanfiy butun sonlar; d) ratsional sonlar; e) ha- qiqiy sonlar to'plamiga tegishli bo'ladi?

**1. Quyidagi to'plamlaming xarakteristik xossasini toping:**

**a) barcha musbat butun sonlar to'plami;**

**b) barcha manfiy butun sonlar to'plami.**

**2. 20; Vi~5; 3; -Jj', 0; -20; 45; -2 sonlari berilgan. Ulardan qaysilari:**

O

3. Agar **A = {a; o**; e; **u\** /; o'}, **B=** (11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}, **C=** (1; 3; 5; 7; 9} to'plamlar berilgan bo'lsa, ular elementlarining xa­rakteristik xossasini aniqlang.

4. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi to'plamlami ko'rsating: a) 3 dan kichik sonlar; \* 3 dan katta bo'lmagan sonlar;

d) 3 dan katta bo'lgan sonlar; e) 3 dan kichik bo'lmagan sonlar.

5. Quyidagi to'plamlami koordinata o'qida tasvirlang:

a) Z= (x | xG 7?, -3 < x < 6}; d) Z= {x | xGT?, x < - 3};

**b)** Y={y\y^R, y< **9}; e)** Y={y\yeR, **-8<x<4}.**

6. Quyidagi sonli to'plamlami elementlarining xarakteristik xossasi yordamida bering:

a) ]2; 6[; b) ]-=»; 4]; d) ]-°°; -1[; e) [-7,2; 5];

**0 [-3; +°°[; g) [3,1; +■»[;**

h)

**1; 5­4**

**0 1-2; 5],**

7. Quyidagilami o'qing va ulardan rostlarini ko'rsating:

a) 2**g]**2; 21]; b) -0,7**g[-**0,1; 2]; d) 0G]-=c; 0]; e) 7**g]8; +»[;**

f) 21eQ; g) 5,3GZ; h) -3**gA;** i) -0,2GZ; j) jG/?.

8. Agar **A =** (27; 32; 36; 54; 232; 108; 324} bo'lsa, **A** to'plamning quyidagi sonlardan tuzilgan qism to'plamlarini toping:

a) 4 ga bo'linadi; b) 9 ga bo'linadi; d) 5 ga bo'linmaydi; e) 10 ga boiinadi.

9. **B=** {o; **b\ c; d**} to'plamning barcha qism to'planilarini yozing va ular sonini aniqlang.

10. Agar **A = {x\xE.N, x <** 24} bo'lsa, shu to'plamning

a) 6 ga karrali;

b) 2 ga karrali;

d) 5 ga karrali bo'lmagan;

e) 2 ga va 3 ga karrali sonlarda tuzilgan qism to'plamlarini aniqlang.

11. Agar **A = {a\a&N,** **17<o<23}, B = {b \ bGN, 8<6<21}** bo'lsa, to'plamlar kesishmasi va birlashmasini aniqlang.

12. «Mustaqillik» va «Istiqlol» so'zlarini tashkil qilgan harflar to'plamining birlashmasi va kesishmasini toping.

13. Agar C — «Ikki xonali juft sonlar» to'plami;

**D** — «10 ga karrali ikki xonali sonlar» to'plami bo'lsa, ulaming kesish­masi va birlashmasini toping.

14. Agar **A = {a\a<EN, a** < 20}, **B= {b\b<=N,** 18 < **b** < 27} bo'lsa, a) 17G/4D5, b) 13G/1U5, d) 5G/1U5, e) 21G/1U5,

0 18G/1£/HJ5, g) 20G^U5 tasdiqlar to'g'rimi?

16

15. Agar **A = ]-**2; 4], **B=** [-3; 6[, **C=** [-3; +°o[ bo‘lsa, a) **AUBUC** va b) **AUBnC** larni koordinata o‘qida tasvirlang.

16. Agar **A** = **{a\** oeM 10 < 0 < 14} bo4 Isa,

**1)** {AC\B)C\C\ 2) AC\{BC\C)\ **3)** A\J(BC\C)\ **4)** AU(BuC);

5) **AUBH** C; 6) **AD(BUC)** larni toping.

17. Agar **R** — universal to‘plam boklsa, quyidagilarning to‘ldiruvchilarini aniqlang:

a) ] —°°; 3[; b) 3]; d) **Q**; e) /?; 0 [2; 6]; g) ]-2; 6]; h) ]4; + »[; i) [4; +»[.

18. Har qanday **A** va Z? to‘plamlar uchun **AnB=AvB** ekanligini isbotlang.

19. Agar C={c|cG/V, **2<c<** 10}; **D={d\dGN,** 8 < **d** < 23} - bo‘lsa, **C\D** va /)\C ni toping.

20. Agar **A** — natural sonlar to‘plami, **B** — beshga karrali natural sonlar to‘plami bo'lsa, quyidagilar to‘g‘rimi:

**1)** 25GA\B; 2) **50**GB\A\ **3)** \5eB\A\ **4)** 23eA\B**; 5) 22eA^?**

21. Quyidagilarni aniqlang:

a) natural sonlar to‘plamining butun sonlar to‘plamiga toMdiruvchisi;

b) butun sonlar to‘plamining ratsional sonlar to‘plamiga toMdiruvchisi; d) ratsional sonlar to‘plamining haqiqiy sonlar to‘plamiga toMdiruvchisini.

22. 0‘zbek alifbosidagi harflar to‘plamini qanday sinflarga ajratish mumkin?

23. Universitet kutubxonasidagi kitoblar to‘plamini qanday sinflarga ajratish mumkin?

24. Natural sonlar to‘plamini qanday sinflarga ajratish mumkin? Misollar keltiring.

25. **A = {a\ b\** c; **d**}, **B=\k\** /; **m]** bo‘lsa, **Ax B** ni toping va uni jadval ko‘rinishida tasvirlang.

26. Agar

1) **A=[-**2; 3], 5 = <2; 3; 4};

2) **A** = [-2; 3], 5 = <2; 4};

3) **A = R, B=** [2; 4] bo‘lsa, **AXB** ni to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida tasvirlang.

27. **A** to‘plamda 8 ta element bor. Agar, **AxB** da: 1) 56 ta; 2) 8 ta; 3) 0 ta;

4) 24 ta element bo‘lsa, **B** to‘plamda nechta element bor?

2-§. MOSLIK VA MUNOSABAT

2.1. Ikki to‘plam elementlari orasidagi moslik tushunchasi.

Moslik so‘zi kundalik hayotda ko‘p ishlatiladi. «Ob-havoga mos kiyim», «Bolaning yoshiga mos o‘yinchoq», «Dasturga mos dars- lik», «Mahsulotning naviga mos baho» va hokazo. Keltirilgan mi- sollardan ko'rinadiki, moslik ko‘pincha ikki turli obyektlar to‘p- lamlari orasida o‘rnatiladi. Masalan, «Bolaning yoshiga mos o‘yinchoq» deganda, bola rivojlanishinin^-turli davrlari bilan

is

2— Matern^ti^

**17**



barcha bolalar uchun chiqarilgan o‘yinchoqlar to‘plami orasidagi moslik ko‘zda tutiladi. Yoki talabalar bilan ularning imtihonda olishi mumkin bo'lgan ballari to'plami orasida moslik berilgan bo'lsa, imtihondan so‘ng har bir talaba o‘z bilim darajasiga mos ballga ega bo‘ladi.

Matematikada ikki to‘plam orasidagi moslik «binar moslik» deb ataladi. «Binar» so‘zi lotincha bis — «ikki marta» so'zidan olin- gan. Binar moslik elementlari berilgan to‘plamlarning bir-biriga mos kelgan elementlari juftligidan iborat bo‘ladi. Juftlik o‘z navbatida ikki to‘plam orasidagi dekart ko‘paytma elementi ekanini ham hisobga olsak, moslikka quyidagicha ta’rif berish mumkin. Bunda moslikni lotin alifbosining/, ,t, kabi harflaridan biri bilan belgilaymiz.

1-t a ’ r i f. X va Y to‘plamlar orasidagi f moslik deb, de­kart ko ‘paytma va uning istalgan Gf qism to ‘plami juftligi (Yx Y, Gy) ga aytiladi.

Sizga ma’lum bo‘lgan funksiyalarning hammasi moslik tushun- chasiga misol bo‘la oladi.

Xto‘plam moslikning birinchi to‘plami deyiladi. X to‘plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to'plami esa, moslikning aniqlanish sohasi deyiladi.

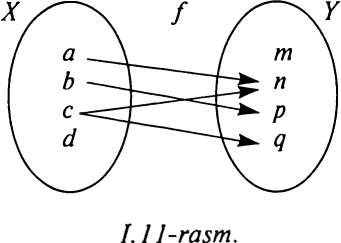
Yto‘plam moslikning ikkinchi to ‘plami deyiladi. Yto'plamning moslikda qatnashgan elementlari to‘plami moslikning qiymatlar to‘plami deyiladi.

2.2. Moslikning grafi va grafigi. to‘plam moslikning

grafigi deyiladi. Ikki to'plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo‘nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning graft deyiladi (graf lotincha «grafo» — «yozaman» so‘zidan olingan) (I.ll-rasm).

Bunda: X- {a\ b\ c; d\ ej — moslikning 1-to‘plami, Y= {m; n\ p; q) — moslikning 2-to‘plami, Gf = {(a; n), ; ; (c;

(d; p)} — moslikning grafigi, {a; b; c; d) — aniqlanish sohasi, {«; p\ } — qiymatlar to‘plami bo‘ladi.



Moslik grafida aniqlanish sohasi- ning har bir elementidan kamida bitta strelka chiqadi va qiymatlar to‘plami- ning har bir elementiga hech bo‘lma- ganda bitta strelka keladi.

18

Sonli to‘plamlar orasidagi moslik ikki o‘zgaruvchili tenglama va tengsizlik ko‘rinishida ifodalanishi mumkin. Masalan, X, YcR va / moslik x + y - 4 tenglama bilan aniqlansin. Gf — cheksiz to‘plam boigani uchun uning ba’zi elementlarini sanab o‘tamiz:

(-2; 6), (0; 4), (4; 0); (2; 2) bunda istalgan x songa y = 4 - x

soni mos keladi.

Sonli to‘plamlar orasidagi moslik grafigini koordinata tekisli- gida tasvirlash qulay. /: x + y = 4 moslik grafigini x, yER va x, yEN hollar uchun tasvirlab ko‘ring.

Sonli to‘plamlar orasidagi moslik ikki o‘zgaruvchili tengsizlik ko‘rinishida ifodalanishi mumkin. M = {1; 2; 3; 4; 5} to‘plamda berilgan x > y moslikni ko‘raylik. Bu yerda x, y E M, bu holda moslik ikkita bir-biriga teng to‘plamlar orasida berilgan bo‘ladi, ya’ni X = Y = M. (Moslikning bunday turi haqida keyingi para- grafda alohida so‘z yuritamiz.) x > y moslik graft x > y shartni qanoatlantiruvchi barcha (x; y)EM\*M juftliklardan iborat, G={(2; 1), (3; 1) (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3); (5; 4)}. Chunki 2 > 1; 2 > 1;

>’A **5­4­3 ■** 2­1-

3 > 2; 4 > 1,...

Bu grafik koordinata tekisligida

I.12-rasmda ko‘rsatilgandek tasvirla- nadi.

2.3. Moslik turlari.

2- ta’rif. Agar *f(X\*Y;* Gf} moslikning aniqlanish sohasi birinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik *hamma yerda aniqlangan* deyiladi.

0

1 2

**7.*12-rasm.***

Bunday moslik grafida A'to'plam- ning har bir elementidan hech bo‘lmaganda bitta strelka chiqadi.

Masalan, X — tekislikdagi barcha kvadratlar, Y — barcha haqiqiy sonlar to‘plami bo'lsin. Har bir kvadratga uning yuzini ifodalovchi haqiqiy sonni mos qo‘ysak, bunday moslik hamma yerda aniqlangan bo‘ladi, chunki har qanday kvadrat o‘z yuzasiga ega.

3- t a ’ r i f. Agar/= (X^Y, Gf) moslikning qiymatlar to ‘plami ik- kinchi to ‘plam Y bilan ustma-ust tushsa, f moslik syuryektiv deyiladi.

Bunday moslik grafida (agar uni chizish mumkin bo‘lsa) 2- to'plamning har bir elementiga hech bo‘lmaganda bitta strelka keladi. Masalan, avvalgi misoldagi moslik syuryektiv bo‘la

19

olmaydi, chunki R dagi manfiy sonlarga mos kvadratlar mavjud emas, kvadrat yuzasi musbat son bilan ifodalanadi. Agar shu misolda 2-to‘plamni barcha musbat haqiqiy sonlar to'plami bi­lan almashtirsak, / moslik syuryektiv moslik bo‘ladi.

4- ta’rif. Agar f moslikda birinchi to ‘plamning har bir ele­ment iga ikkinchi to ‘plamning bittadan ortiq bo ‘Imagan elementi mos kelsa, f moslik funksional deyiladi.

Matematika kursida funksional mosliklar funksiya deb atala- di. Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, 1-to‘plamning har bir elementi- ga 2-to‘plamdan faqat bitta element mos keladi yoki birorta ham element mos kelmaydi. Maktab kursidan sizga tanish har bir fun­ksiya funksional moslikka misoldir.

Funksional moslikka hayotiy misollar ham ko‘p.

Masalan, teatrda tomoshabinlar ust kiyimlarini ilish uchun kiyim ilgichlar nomerlangan bo‘ladi. Har bir ilingan palto uchun nomer beriladi. 0‘z-o‘zidan ma’lumki, ilinmagan ust kiyimga no- mer berilmaydi. Lekin bitta nomerga bir necha ust kiyim ilinishi ham mumkin. Ust kiyimlar va ilgich nomerlari orasidagi moslik funksionaldir. Agar bo‘sh ilgichlar qolmasa, bu moslik syuryektiv ham bo‘ladi.

5- ta’rif. Agar f moslikda ikkinchi to ‘plamning har bir ele­ment iga birinchi to ‘plamning bittadan ortiq bo ‘Imagan elementi mos qo ‘yilgan bo ‘Isa, f moslik inyektiv deyiladi.

Bunday moslik grafida 2-to‘plamning har bir elementiga ko‘pi bilan bitta strelka keladi.

Masalan, tekislikdagi har bir aylanaga unga ichki chizilgan uch- burchak mos qo‘yilgan bo‘lsin. Bu moslik inyektiv bo‘ladi, chunki har bir uchburchakka faqat bitta tashqi aylana chizish mumkin. Lekin bu moslik funksional emas, chunki har bir aylanaga istalgancha ichki uchburchaklar chizish mumkin boiadi. Moslikning syuryektivligi va hamma yerda aniqlangan boiishi haqida o‘ylab ko‘ring.

6- t a ’ r i f. Syuryektiv va inyektiv moslik bir so ‘z bilan biyektiv deyiladi.

Biyektiv moslikda 2-to‘plam elementlari faqat bir martadan ishtirok etadi, moslik grafida (agar chizish mumkin boisa), 2- to‘plamning har bir elementiga bittadan strelka keladi.

Masalan, X = {kvadrat, romb, doira, oval, uchburchak},

7={sariq, qizil, yashil, ko‘k}.

20

Agar Gf= {(kvadrat; ko‘k), (romb; sariq), (oval; yashil), (oval; ko‘k), (uchburchak; qizil)} boisa,/— moslik biyektiv moslikdir.

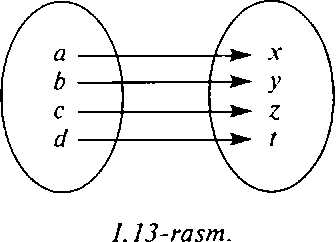
7- ta’rif. Hamma yerda aniqlangan funksional moslik *aks- lantirish* deyiladi.

Akslantirishda 1-to‘plamning har bir elementiga 2-to‘plamning bittadan dementi mos keladi. Agar akslantirishning grafini chizish mumkin boisa, Xto‘plamning har bir elementidan bittadan strelka chiqadi, ya'ni ular moslikda faqat bir martadan ishtirok etadi.

Masalan, X = {a; b\ c; d; ej;

Y={3; 2; 1; 0} Gf= {(a; 3), (b; 0); (c; 3), (d; 2); (e; 0)} bo‘lsa, / moslik akslantirishdir.

8- t a ’ r i f. X va Y to ‘plamlar orasi- dagi f moslik biyektiv akslantirish bo ‘Isa,



X va Y to ‘plamlar orasida o ‘zaro *bir qiymatli moslik* o‘ *rnatilgan* deyiladi.

Masalan:

X= {o; b; c; d};

Y= {x; y; z; t}\ Gf = {(a; x), (b; y);

(c; z), (d; r)} boisa, / moslik X va Y to‘plamlar orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik boiadi.

Chekli va cheksiz to‘plamlar elementlari soni to‘plam quvvati deb yuritiladi va n{A), n{B), n(N) kabi yoziladi. Masalan, A = {a; b\ c; d) boisa, n(A) = 4 boiadi. 0‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish yordamida chekli va cheksiz to‘plamlar elementlari so- nini taqqoslash mumkin.

9- t a ’ r i f. X va Y to ‘plamlar orasida o ‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan bo‘Isa, bu to‘plamlar *teng quvvatli* yoki *ekvivalent* deyi­ladi va X~Yko'rinishda yoziladi. Bu holda *n(X)* = n( *Y)* boiadi.

10- t a ’ r i f. Barcha natural sonlar to ‘plami N ga teng quvvatli to ‘plamlar *sanoqli to1 plam* deyiladi.

Agar istalgan cheksiz to‘plamning har bir elementiga biror qoida yordamida bittadan natural sonni mos keltira olsak, bu to‘plam elementlari natural sonlar yordamida nomerlab chiqilgan boiadi va bunday to‘plam sanoqli to‘plam hisoblanadi. Natural sonlar to‘plamining istalgan cheksiz qism to‘plami sanoqlidir.

Masalan, barcha juft sonlarni quyidagicha nomerlab chiqamiz:

2 4 6 ... 2n ...

•I\* X 'L i1 12 3 ... n ...

21

Hatto barcha butun sonlar to'plami ham sanoqli ekanini ko‘rsatish mumkin.

2.4. To‘plam elementlari orasidagi munosabat. Xususiy holda teng to‘plamlar orasidagi moslik Xto‘plam elementlari orasidagi binar munosabatdeyiladi. Binar munosabatlar P, , R va boshqa lotin harflari bilan belgilanadi.

11-ta’rif. X to ‘plam elementlari orasidagi munosabat deb R = *(X\*X,* *Gr)* juftiikka aytUadi,bu yerda

Agar X to'plamda berilgan R munosabatda aGX elementga bEX element mos kelsa, «a element b element bilan R munosabatda» deyiladi va aRb deb yoziladi, bu yerda (a; b)E:GR.

X odamlar to‘plami bo‘lsa, unda «do‘st bo‘lmoq», «bitta sha- harda yashamoq», «qarindosh bo‘lmoq» kabi munosabatlar bo‘ladi. Sonlar orasida «teng», «katta», «kichik», «karrali», «katta emas», «bo‘luvchisi» va h. k. munosabatlar, geometrik shakllar to‘plamida «tengdoshlik», «parallellik», «perpendikularlik» va boshqa mu­nosabatlar haqida gapirish mumkin.

Matematikada binar munosabatlar «=», «<», «>», «^», «| |», «\_L» kabi belgilar orqali beriladi.

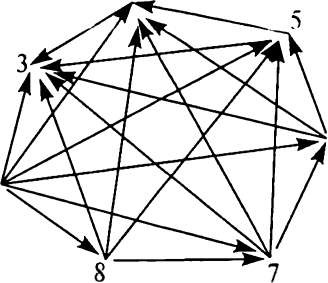
Munosabat grafi chekli to‘plamlar uchun quyidagicha chizi- ladi: to‘plam elementlari nuqtalar bilan belgilanadi, mos element- lar strelkalar bilan tutashtiriladi. Masalan, {3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} to‘plam elementlari orasida P: «x>y» munosabat berilgan.

U quyidagi juftliklar to‘plami orqali ifoda qilinadi:

***I.14-rasm.***

4

6



G={(4; 3), (5; 3), (5; 4), (6; 3),

(6; 4), (6; 5), (7; 3), (7; 4), (7; 5),

(7; 6), (8; 3), (8; 4), (8; 5), (8; 6),

(8; 7), (9; 3), (9; 4), (9; 5), (9; 6),

(9; 7)}.

Uning grafi 1.14-rasmdagi ko‘ri- nishda bo‘ladi. Yoki Y= {2; 4; 5; 6; 8} to‘plamda Q: «x soni y soniga karrali» («x\ y») munosabati berilgan bo'lsin. Munosabat grafida birin- chisi ikkinchisiga karrali sonlar juftligidan iborat bo‘ladi. G= {(2; 2), (4; 2), (4; 4), (5; 5), (6; 2), (6; 6), (8; 2), (8; 4), (8; 8)} muno­sabat grafida (2; 2) juftlikni ko‘rsatuvchi strelkaning boshi ham, oxiri ham bitta nuqtada bo‘ladi, bunday strelkani «halqa» deb ataymiz. Munosabat grafi 1.15-rasmdagi kabi chiziladi:

22**1.15-rasm.**

2.5. Munosabat xossalari.

12- t a ’ r i f. Agar X to‘plamning har bir elementi o‘z-o ‘zi bilan R munosabatda bo‘Isa (ya’ni, xRx bajarilsa), u holda R munosa­bat X to ‘plamda *refleksiv* deyi/adi.

Masalan, «.x = .y>>, «a\\b», «x\y» munosabatlar refleksivdir.

Refleksiv munosabat grafida har bir element atrofida halqa bo‘ladi (2.5-banddagi 2-misol).

13- t a ’ r i f. Agar X to ‘plamning birorta ham elementi uchun xRx bajarilmasa, u holda R munosabat X to ‘plamda *antirefleksiv* deyi- ladi.

Masalan, «a < b», «a > b», «a 1 b» munosabatlar antireflek- sivdir.

Antirefleksiv munosabat grafida birorta ham halqa bo'lmaydi (2.5-banddagi 1-misol).

14- t a ’ r i f. Agar X to ‘plamda R munosabat berilgan bo ‘lib, xRy va yRx bir vaqtda bajarilsa, R *simmetrik munosabat* deyiladi.

Masalan, «a\\b», «a±b», «a - b» munosabatlari simmetrik- dir. Simmetrik munosabat grafida har bir strelkaga parallel qay- tuvchi strelka bo‘ladi.

15- ta ’ ri f. Agar X to‘plamda berilgan R munosabatda xRy va yRx shartlardan faqat bittasi o ‘rinli bo jsa, R munosabat *asimmet- rik munosabat* deyiladi.

Masalan, «a > b», «a < b» munosabatlari asimmetrikdir.

Asimmetrik munosabat grafida birorta ham halqa va qaytuvchi strelkalar bo‘lmaydi.

16- ta ’ ri f. Agar X to'plamda R munosabat uchun xRy va yRx shartlar faqat x - y bojgan holda bajarilsa, u holda R *antisim- metrik munosabat* deyiladi.

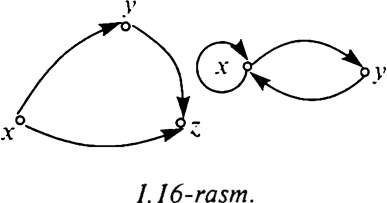
23

Masalan, «a > b», «a < b», «a\b»,«a soni Z>sonining bo‘luvchisi»

kabi munosabatlar antisimmetrik munosabat bo‘ladi. Antisimmet- rik munosabat grafida halqalar bo'ladi, lekin qaytuvchi strelkalar bo‘lmaydi.

17-t a ’ r i f. Agar X to ‘plamda berilgan munosabat uchun xRy va yRz ekanligidan xRz ekanligi kelib chiqsa, u holda R munosabat tranzitiv deyiladi.

Masalan, «a > b», «a - b», «a11 b«a\b» kabi munosabatlar tranzitivdir. Tranzitiv munosabat grafida x dan y ga, y dan z ga bo- ruvchi strelkalar bo‘lsa, albatta x dan Z ga boruvchi strelka ham boiishi kerak (1.16-rasm).



18-ta’rif. Har qanday R munosabat refleksiv, va

tranzitiv bo‘Isa, u holda R ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Masalan, «a \ \ b», «a - b» kabi munosabatlar ekvivalentlik mu­nosabati bo‘ladi. Ekvivalentlik munosabati to‘plamni sinflarga ajratadi.

Masalan, sinf o‘quvchilari orasida «bir oyda tug‘ilgan» mu­nosabati berilgan boisin. Bu munosabat refleksiv, chunki har bir A o‘quvchi o‘zi o‘zi bilan bir oyda tug‘ilgan. Munosabat sim­metrik, chunki A o‘quvchi B bilan bir oyda tugilgan boisa, B ham A bilan bir oyda tug‘ilgan boiadi. Munosabat tranzitiv, chunki A o‘quvchi B bilan, B o‘quvchi C bilan bir oyda tug‘ilgan boisa, A bilan C ning ham tug‘ilgan oyi bir xil boiadi. Demak, bu munosabat ekvivalentlik munosabati boiar ekan. U sinf o‘quvchilarini «bir oyda tugilgan o‘quvchilar» sinflariga ajrata­di. Bunday sinflar soni ko‘pi bilan 12 ta boiishi mumkin.

Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida parallellik munosa­bati ekvivalentlik munosabati boiishini ko‘rsatamiz. Tekislikda­gi to‘g‘ri chiziqlar kesishmasa yoki ustma-ust tushsa, parallel hisoblanishini eslatib oiarniz.

Parallellik munosabati:

a) refleksiv, chunki ixtiyoriy a to‘g‘ri chiziq uchun a\\a boiadi;

b) simmetrik, chunki a\\b boisa, b\\a boiadi;

d) tranzitiv, chunki a \ \ bva boisa, boiadi (pa­rallel to‘g‘ri chiziqlar xossasiga ko‘ra).

24

Parallellik munosabati tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlarni parallel to‘g‘ri chiziqlar sinfiga ajratadi. Bu sinflar geometriyada parallel to’g'ri chiziqlar dastasi deb ataladi.

2.6. Tartib munosabati.

19-t a ' r i f. Agar X to ‘plamda berilgan simmetrik bo ‘Imagan R munosabat tranzitiv bo‘Isa, u holda R *tartib munosabati* deyiladi.

Masalan, «<», «>», «<», «>» lar tartib munosabati bo’ladi.

Simmetrik bo‘lmagan munosabatlar o‘z navbatida asimmet- rik va antisimmetrik munosabatlarga bo‘linar edi.

Agar R munosabat A'to^lamda asimmetrik va tranzitiv bo‘lsa, u qat’iy tartib munosabati deyiladi.

Masalan, sonlar to'plamida «katta», «kichik», daraxtlar to‘plamida «balandroq», kesmalar to‘plamida «uzunroq», odam- lar to‘plamida «yoshi katta», «bo‘yi baland» kabi munosabatlar qat’iy tartib munosabati sanaladi.

Agar R munosabat X to‘plamda antisimmetrik va tranzitiv bo'lsa, u noqat’iy tartib munosabati deyiladi.

Masalan, haqiqiy sonlar to‘plamida «a>b», «a<b», natural sonlar to‘plamida «a\b» va «a soni b sonining bo‘luvchisi» kabi munosabatlar noqat’iy tartib munosabati bo‘ladi. Qat’iy va noqat’iy tartib munosabatlari to‘plamni tartiblaydi.

SAVOL NA TOPSHIRIQLAR

1. **M=** {-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4} va TV — natural sonlar to‘plami be­rilgan. Bu to‘plamlar orasida **R** moslik: **«m** sonning kvadrati **n** soniga teng», bunda weA/, **n&N** berilgan. **R** moslik juftliklari to'plamini aniqlang.

2. **X =** {xG«, x < 7}, **Y = {y\ ySN,** 15 < **y** < 19} to‘plant element lari ora­sida C: «x soni **y** sonining bo‘luvchisi, bunda **xGX, y&Y** moslik beril­gan bo‘lsa, uning grafigini yasang.

3. **A** = {1; 2; 3; 4; 6}, **B** = {5; 7} to‘plamlar elementlari orasida «kichik» mosligi o'rnatilgan. Bu moslik grafigini quring.

4. Kundalik hayotdan mosliklarga misollar keltiring.

5. **X=** {x|xejV, x < 9}, **Y= {y \ y€.M, y <** 4} to‘plamlar elementlari orasida **R: «x** soni **y** soniga karrali» mosligi berilgan (bunda **xGX, yS** k). **R** va **R**mosliklar grafigini quring.

6. 0‘zaro bir qiymatli moslikka misollar keltiring.

7. Quyidagi to‘plamlardan qaysilari **A =** {0; 3; 6; 9; **12,1}** to‘plam elementlari orasidagi munosabat boMadi:

1) (7, = {(6; 3); (9; 3); (12; 3); (12; 6); (15; 3); (3; 3); (6; 6); (9; 9); (12; 12); (15; 15)};

25

2) **G,= {(**0; 3); (3; 6); (6; 9); (9; 12); (12; 15)};

3) **G\** = {(3; 3); (3; 6); (3; 9); (3; 12); (3; 15); (6; 6); (9; 9); (12; 12); (15; 15)};

4) G, = {(3; 6); (6; 12); (9; 18)}"

8. {0; 3; 5; 7} to'plamda berilgan «kichik yoki teng» munosabati grafigini yasang.

9. **X =** {1; 2; 4; 8; 12; 16} to'plamda **«x** soni **y** sonining bo‘luvchisi» munosabati berilgan. Bu munosabat grafigini yasang va xossalarini aniqlang.

10. **C={7;** 14; 28; 25} to'plamda aniqlangan «karrali» munosabati refleksivlik xossasiga cgami? Bu munosabat uchun simmetriklik xossasi o'rinlimi? Javobingizni asoslang.

11. Natural sonlar to'plamida **«x** son bevosita **y** sonidan keyin keladi» munosabati o'rnatilgan bo'lsa, u tartib munosabati bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

12. Natural sonlar to'plamida «5 ga bo'lganda bir xil qoldiq chiqadi» munosabati o'rnatilgan bo'lsa, u ekvivalentlik munosabati bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

13. 5 = 1-; —; —; —; -1 to'plamda «x kasr y kasraa tena» munosabati

12 4’ **10’50’8** **7j** “ “

berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

1) bu munosabat ekvivalentlilik munosabati bo'ladimi? Agar bo'lsa, hosil bo'ladigan ekvivalentlik sinflarini ko'rsating;

2) **B** to'plamda birorta tartib munosabatini aniqlang.

3-§. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

3.1. Kombinatorika masalasi. Elementlarning turli kombi- natsiyalari va ularning sonini topish bilan bog‘liq masalalar kom­binatorika masalalari deyiladi. Bunday masalalar matematika fa- nining tarmog‘i — kombinatorikada o'rganiladi. Kombinatorika asosan, XVII—XIX asrlarda mustaqil fan sifatida yuzaga kelgan bo‘lib, uning rivojiga B. Paskal, P. Ferma, G. Leybnis, Y. Bernulli,

L. Eyler kabi olimlar katta hissa qo‘shganlar.

Kombinatorikada, asosan, chekli to‘plamlar, ularning qism to‘plamlari, chekli to‘plam elementlaridan tuzilgan kortejlar va ularning sonini topish masalalari o‘rganilgani uchun uni to‘plamlar nazariyasining bir qismi sifatida qarash mumkin.

3.2. Yig‘indi qoidasi. Kombinatorikada to‘plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalasi yig‘indi qoidasi deb ataladi.

1) Agar AD5 = 0 bo'lsa,

*n{A\JB) = n(A)* + *n(B)*

(1)

26

bo‘ladi. Ya’ni kesishmaydigan A va B to‘plamlar birlashmasi elementlari soni shu to‘plamlar elementlari sonlarining yig’indisiga teng.

2) Agar v4ni?+0 bo‘lsa,

*n(AUB) = n(A) + n(B) - n(AHB)* (2)

bo'ladi. Ya’ni umumiy elementga ega ikki to‘plam birlashmasi ele­mentlari soni to‘plamlarning har biri elementlari sonlari yig‘indisidan ularning umumiy elementlari sonining ayrilganiga teng. (2) formu­la (1) formulaning umumiy holi bo‘lib, (1) formulada n(ACiB) = 0, ya’ni to‘plamlarning umumiy elementi yo‘q.

3) Yig‘indi qoidasi umumiy elementga ega bo‘lgan uchta A, B, C to‘plam uchun quyidagicha yoziladi: agar AC\Bf\ C = 0 boisa,

«(/4U5UC) = *n(A) + n(B) + n(C)- - n(AnB) - n(ACC) - n(BnC) + n(ACBnC)* (3)

bo‘ladi.

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umu­miy holda quyidagicha ifodalanadi: agar x elementni k usul, y elementni m usul bilan tanlash mumkin bo ‘Isa, «x yoki y» element­ni k + m usul bilan tanlash mumkin.

Masalan, savatda 8 ta olma va 10 ta nok bor bo‘lsa, 1 ta mevani 8+10=18 usul bilan tanlash mumkin.

(2) formula bilan yechiladigan masala: 40 talabadan 35 tasi matematika imtihonini, 37 tasi rus tili imtihonini topshira oldi. 2 talaba ikkala fandan «2» oldi. Nechta qarzdor talaba bor?

Yechish. A — matematika fanidan «2» olgan, B — rus tili fanidan «2» olgan talabalar to‘plami bo‘lsin.

*n{A)* = 40 - 35 = 5 *n{A^B) = 2.*

«(£) = 40 — 37 = 3 n{A\JB) = 5 + 3 - 2 = 6.

Javob: 6 ta qarzdor talaba bor.

3.3. Ko‘paytma qoidasi. Chekli to‘plamlarning dekart ko‘payt- masi elementlari sonini topishga imkon beradigan qoida ko‘paytma qoidasi deyiladi.

27

A - {av av ..., an) va B - {br b2..., bj to‘plamlar element- laridan nechta tartiblangan (abi) juftlik tuzish mumkinligini ko‘raylik. Barcha juftliklarni tartib bilan quyidagicha joylashtira- miz:

(o,; *bj),* (o,; *bj), ...* , *(ar bj, (a2,* 6,), *(av b2), ...* , *(av b*m),

(a ; b(a ; ZO, ... , (a : b ).

Bu jadvalda « ta qator va m ta ustun bo‘lib, undagi barcha juft- liklar soni nm ga teng. Bu yerda n - n{A) va m = n{B).

Ko‘paytma qoidasi n(Ax B) - n{A) • n(B) ko‘rinishda yoziladi.

Ko‘paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umu- miy ko‘rinishi: «Agar x elementni m usul, y elementni n usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (x; y) tartiblangan juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».

Ikkitadan ortiq to‘plamlar uchun bu formula quyidagicha yozi­ladi:

n(A^A2x- ... *\*An) = n(At) ■ n(A2) • ...* • *n(An),* *(n* > 2).

Masalan, A shahardan B shaharga 3 yo‘l bilan, B shahardan C shaharga ikki yo‘l bilan borish mumkin bo‘lsa, A shahardan C shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo‘lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo‘l bilan o‘tish mumkin bo‘lsa, umumiy yo‘lni 3-2 = 6 usul bilan o‘tish mum­kin.

Umumlashgan ko‘paytma qoidasi: «Agar x elementni m usul bilan, y elementni, x ni tanlab bo ‘Igandan so'ng, n usul bilan tanlash mumkin bo‘Isa, (x • y) juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».

Masala. Nechta turli raqamlar bilan yozilgan ikki xonali sonlar bor?

Yechish. 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, ..., 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan (noldan boshlab o‘nliklar raqamidan boshqa raqamlar) tanlash mumkin. Hammasi bo‘lib 9-9 = 81 ta shunday son bor ekan.

3.4. Takrorlanadigan o‘rinlashtirishlar.

Masala, m elementli X to‘plam elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi kortejlar sonini toping.

28

Ye c h i s h . k o'rinli kortej X x X x...xX dekart ko‘paytma-

k murta

ning elementi boiib, tartiblangan £-likni (kalik deb o‘qiladi) bildiradi. Masalani yechish uchun Y x X x ... x X dekart ko‘payt- ma elementlari sonini topish kerak. Bu son n(X) = m boigani uchun

*n(X xX x* ... *x X) - n(X) ■ n(X)* ■... ■ *n(X)* = m ■ m ■... ■ m — mk ga teng.

Demak, m elementli X to‘plam elementlaridan tuzilgan k o'rinli kortejlar soni mk ga teng ekan. Kombinatorikada bunday kortejlarni m elementdan kjadan takrorlanadigan o ‘rinlashtirishlar deyiladi. Ularning soni Akm bilan belgilanadi. (A — fransuzcha arrangement — «o‘rnashtirish, joylashtirish ma’nosini bildiradi.) Akm = mk.

Masala. 6 raqamli barcha telefon nomerlari sonini toping.

Yechish. Telefon nomerlari 0 dan 9 gacha boigan 10 ta raqamdan tuzilgani uchun 10 elementdan tuzilgan barcha tartib­langan 6 o‘rinli kortejlar sonini topamiz:

Javob: zl106 = 106 = 1000000. 6 raqamli telefon nomerlari soni 106 ga teng.

3.5. Takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlar.

1. Agar chekli X to‘plam elementlari biror usul bilan nomer- lab chiqilgan bo‘lsa, X to‘plam tartiblangan deyiladi.

Masalan, X — {x,, x2,

Bitta to‘plamni turli usullar bilan tartiblash mumkin.

Masalan, sinf o‘quvchilarini yoshiga, bo‘yiga, og‘irligiga qarab yoki o‘quvchilar familiyalari bosh harflarini alifbo bo‘yicha tar­tiblash mumkin.

m elementli X to‘plamni necha xil usul bilan tartiblash mum­kin degan savolga javob beraylik.

Tartiblash — bu elementlarni nomerlash demakdir. 1-nomerni m ta elementning istalgan biriga berish mumkin. Shuning uchun

1-elementni m usul bilan, 2-elementni 1-element tanlanib bo‘lgandan so‘ng m - 1 usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi, xolos. Tar- tiblashlarning umumiy soni m(m - 1 )(m — 2) •... • 2 • 1 = m\ ga teng.

m\ — dastlabki m ta natural son ko‘paytmasi (m faktorial deb o‘qiladi). Masalan, 5! = 1 • 2 • 3 • 4 • 5 = 120, m\ - Pm bilan belgi­lanadi va takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar soni deb ataladi.

29

3.6. Takrorlanmaydigan o‘rinlashtirishlar. Umumiyroq ma- salani ko‘rib chiqaylik: m elementli X to‘plamdan nechta tartib- langan k elementli to‘plamlar tuzish mumkin?

Bu masalaning oldingi masaladan farqi shundaki, tartiblash k elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni

m(m - 1 )(m - 2) • ... • (m - k + 1)

ko‘paytmaga teng. U Ak bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan o‘rinlashtirishlar soni deb ataladi:

Akm= *m(m- \)-...-(m~k+* 1) =

A"', = Pm = m\\ 0! = 1 deb qabul qilinadi.

Masalan, sinfdagi 20 o‘quvchidan tozalik va davomat uchun javob beruvchi 2 o‘quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Aj0 =t^t = 20-19 = 380 (usul bilan).

3.7. Takrorlanmaydigan guruhlashlar. «m elementli Xto‘plam- ning nechta k elementli qism to‘plamlari bor?» — degan masalani hal qilaylik.

Masalan, 4 elementli A - {a; b\ c; dj to‘plamning nechta 3 elementli qism to‘plami borligini ko‘raylik. Ular{a; b; c}, {a; b\ d}, {a; c\ d}, {b\ c\ d}. Demak, 4 ta shunday qism to‘plam bor ekan. Bunday qism to‘plamlar takrorlanmaydigan guruhlashlar deb ataladi. Bu qism to‘plamlarni tartiblaganda 6 barobar ko‘proq 3 o‘rinli kortejlarga ega bo‘lamiz.

Masalan, {a; b\ c} ni tartiblasak: (a-, b\ c), (a', c; b), {b\ a\ c), (b; c; a), (c; a\ b), (c; b\ a) tartiblangan uchliklarga ega bo‘lamiz, tartiblanishlar soni 3! = 6 marta ko‘p. Bu bog'lanishdan foyda- lanib, guruhlashlar sonini topish formulasini keltirib chiqarish mumkin.

m elementli to‘plamning k elementli qism to‘plamlari soni Ckm bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan guruhlashlar soni deyiladi. (C— fransuzcha combinaison — «bi- rikma» so‘zidan olingan.) Takrorlanmaydigan guruhlashlar soni uchun

Ak = Ck P => Ck — — *m*'

^m \* m '-'m (*m-k)\k\*

formulaga ega bo‘lamiz.

30

Masala. Sinfdagi 20 o'quvchidan ko'rikda ishtirok etish uchun uch o'quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Yechish. Ko‘rik ishtirokchilarining tartibi ahamiyatga ega bo‘lmagani uchun 20 elementli to‘plamning 3 elementli qism to‘plamlari soni nechtaligini topamiz:

TYY^3' 19-20=1140.

’’ = 20!\_ 20 VAf\

Javob: 3 o‘quvchini 1140 usul bilan tanlash mumkin ekan.

3.8. C\* ko‘rinishdagi sonlarning xossalari.

io s^k \_ s-'m-k ^)0 y^k \_ f'k-1 . s-\*k oo \_ j

1 ■ • L • “ ^m-1 tLm-l ■ J • ~ “ 1 \*

l-xossani isbot qilish uchun Ck = lanamiz:

***ml***

***k'.(m-k)'.***

formuladan foyda-

*s-'m-k*

ml

***(m-k)l(m-(m-k))'.***

***ml ml —Ck***

***(m-k)l(m-m+k)l~ {m-k)lkl~ m***

Xossaga ko‘ra,C230 = C^; C\ = C53 va h. k.

2-xossaning i s b o t i.

Ck~l+Ck - (w-i)!

m-‘ m-‘ (>k-l)!(/w-l)-(\*-l)!

+

(J»-Q!

***kl(m-\-k)l***

(m-1)! (/77—1)! \_ (m — 1)! X:

(A-l)!(/n-£)! + kl(m-k-\)l~ (k-\)lk(m-k)

(m-l)\(m-k) \_(m-l)lk (m-l)l(m-k) + k \{m-k-\)\{m-k) ~ k\{m-k) + kl(m-k)l

(m-\)lk+(m-\)l(m-k) \_ (m-\)l(k+m-k) k'.(m-k)'. k'.(m-k)'.

(m-\)\m \_ ml kl(m-k)l~ kl(m-k)l~ m

2°-va 3°-xossalardan foydalanib,C\* ko'rinishdagi sonlarning qiymatini ketma-ket hisoblash mumkin.

3°-xossaga ko‘ra C0° = C° =C} =C2° =C2 =1. Bundan 2° ga ko‘ra C\ = C,° + C,1 = 1 + 1 = 2 .

C\* ko‘rinishdagi sonlarni Paskal uchburchagi ko‘rinishida joylashtirish mumkin:

31

r°

Ln

1

1 1 1 2 1 13 3 1 14 6 4 1 1 5 10 10 5 1

C nC 1

LiLi

c"c] Cl

Cl C\ Cl cl

C

O s~\* I f'l f'Z /^4 4 4 4 '-'4 ^4

Har bir son o‘zining tepasidagi ikkita son yig‘indisidan iborat. Har bir qatordagi sonlar (a + b)m ko‘phadning yoyilmasidagi binomial koeffitsiyentlarga teng. Ularning yig‘indisi m elementli X to'plamning barcha qism to‘plamlari sonini beradi.

Masalan, 1 + 2 + 1 = 4. Demak, 2 elementli to'plamning hammasi bo‘lib 4 ta qism to'plami bor ekan. Ular 1 ta 0, 2 ta 1 elementli va 1 ta 2 elementli (ya’ni X to'plamning o'zi) qism to'plamdan iborat.

3.9. Chekli to'plam qism to‘plamlari soni. Umumiy holda chekli m elementli A'to'plamning barcha qism to'plamlari sonini topish masalasini qo'yaylik. Uni hal qilish uchun istalgan tarzda Xto'plamni tartiblaymiz. So'ng har bir qism to'plamini m o'rinli kortej sifatida shifrlaymiz: qism to'plamga kirgan element o'rniga 1, kirmagan element o'rniga 0 yozamiz. Shunda qism to'plamlar soni 2 ta {0; 1} elementdan tuzilgan barcha m o'rinli kortejlar soniga teng bo'ladi: A” =2". Masalan, 2 elementli to'plam to'plamostilari soni 22 = 4 ga, 3 elementli to'plamning to'plamostilari soni 23 = 8 ga teng. Shu bilan birga bu son Paskal uchburchagining 4-qatoridagi sonlar yig'indisiga ham teng, ya'ni C3° +C3‘ +Cl +Cl = 1+3 + 3 +1 = 8.

Umumiy holda: C°m+Cm +... + C”~l + C = 2m.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Fizika ma’ruzasiga 20 ta, astronomiya ma’ruzasiga 30 ta talaba qatnashadi. Fizika yoki astronomiya ma’ruzalariga nechta talaba qatnashishini aniqlang. agar:

a) ma’ruzalar bir vaqtda o‘tkazilsa;

b) turli vaqtlarda o‘tkazilsa va 10 talaba har ikki ma’ruzaga qatnashsa.

2. 100 kishidan 85 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o'rganadi. Ikkala tilni o‘rganuvchilar soni nechta?

3. 100 kishidan 35 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o‘rgansa. ikkala tilni o‘rganuvchilar soni nechta bo‘lishi mumkin? Ikki tildan birortasini ham o‘rganmaydiganlar soni-chi?

32

**4. Uydan universitetga 3 yo'l bilan. univcrsitctdan kutubxonaga 2 yo‘l bilan borish mumkin bo'lsa, uydan univcrsitct orqali kutubxonaga nccha xil usul bilan borish mumkin?**

**5. 1, 2, 3, 4, 5 sonlaridan ncchta ikki xonali son tuzish mumkin. Ularning ncchtasida raqamlar takrorlanmaydi?**

**6. Uchburchak uchlarini lotin alifbosining katta harflari yordamida nccha xil usul bilan belgilash mumkin?**

**7. 6 raqamli tclcfon nomcrlarining ncchtasida raqamlar takrorlanmaydi?**

**8. Savatchadagi 12 ta olmadan 5 tasini nccha usul bilan tanlash mum­kin?**

**9. Bir vaqtda 4 bcmor vrach qabuliga nccha xil usul bilan navbatga turishi mumkin?**

**10. 12 ta fizik va 15 ta kimyogar olimdan 4 tadan kishini konfcrensiyaga nccha xil usul bilan yuborish mumkin?**

4-§. MATEMATIK TUSHUNCHA

4.1. Tushuncha. Atrofimizdagi olam turli obyektlardan ibo- rat. Ular o'ziga xos xossalar va o‘zaro munosabatlarga ega. Bu obyektlarni o'rganganimizda ularni o'xshashligi va umumiy xos- salariga qarab sinflarga ajratamiz. Bu obyektlar va sinflar ma’lum bir nom bilan nomlanadi. Masalan, «daraxt», «chumchuq», «mushuk», «uy», «avtobus» yoki «o‘simlik», «qush», «hayvon», «bino», «mashina» va hokazo. Obyektlar yoki obyektlar sinfining nomlanishi inson ongida ular haqida tushuncha paydo bo‘lganini bildiradi. Chunki har bir nom atalishi bilan ongimizda u bilan bog‘liq tasawurlar paydo bo'ladi. Biz bu obyekt yoki obyektlar sinfining eng muhim xossalarini eslaymiz: rangi, shakli, o'lchami, hidi, tuzilishi va h. k.

Demak, tushuncha — bu narsalar va hodisalarni ba’zi bir muhim alomatlariga ko‘ra farqlash yoki umumiylashtirish natija- si ekan. Alomatlar esa narsa yoki hodisalarning bir-biriga o'xshashligi yoki farqlanishini bildiruvchi xossalardir.

Muhim xossa deb, faqat shu obyektga tegishli va bu xossasiz obyekt mavjud bo‘la olmaydigan xossalarga aytiladi. Obyektning mavjudligiga ta’sir qilmaydigan xossalar muhim bo‘lmagan xossalar deb sanaladi.

Agar biror obyektning barcha muhim xossalari to'plangan bo'lsa, bu obyekt haqida tushuncha bor deyiladi.

Fan rivojlanishi natijasida abstrakt tushunchalar yuzaga kela boradi. Bunday tushunchalar insoniyat to'plagan katta tajribani

**33**

umumlashtirish natijasida yuzaga keladi va moddiy dunyoning tub mohiyatini aks ettiradi, lekin real obyektlarning ko‘pgina xos- salaridan ko‘z yumgan holda, ularni ideallashtirish natijasida hosil bo‘ladi.

Masalan, bir jismni geometrik shakl sifatida qarasak, bizni uning shakli, o‘lchamlari qiziqtiradi, lekin uning nimadan yasal- gani, rangi, og‘irligi qandayligi biz uchun ahamiyat kasb etmaydi. Ko‘pincha abstrakt, ideal obyekt ega bo‘lgan xossalar real obyektga tegishli bo‘la olmaydi. Masalan, geometriyada kesmani cheksiz bo‘lish mumkin deb hisoblanadi, real hayotda biror jismni cheksiz ko‘p bo‘lakka bo‘lish mumkin emas, chunki u chekli sondagi atomlardan iborat bo‘ladi.

4.2. Tushunchaning hajmi va mazmuni. Har qanday tushuncha nom, mazmun va hajmga ega bo‘ladi.

Obyektning barcha muhim xossalari to‘plami tushunchaning mazmunini tashkil qiladi. Masalan, «son» tushunchasi maz- muniga sonlarni taqqoslash, yozuvda ifodalash, son o‘qida tasvirlash, sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish kabi xossalar kiradi.

Bir xil muhim xossalarga ega obyektlar to‘plami tushuncha hajmini tashkil etadi. Masalan, «son» tushunchasi hajmini natu­ral, nomanfiy, butun, kasr, ratsional, irratsional, haqiqiy, mavhum va kompleks sonlar tashkil etadi.

Demak, tushuncha hajmi bitta tushuncha bilan nomlanishi mumkin bo‘lgan obyektlar to‘plami ham ekan. Tushuncha mazmuni uning hajmini aniqlaydi va aksincha.

Lekin tushuncha hajmi va mazmuni orasida teskari bog‘lanish mavjud. Tushunchaning hajmi qancha «katta» bo‘lsa, mazmuni shuncha «kichik» va aksincha bo‘ladi. Masalan, «to‘g‘ri to‘rtburchak» tushunchasi mazmuniga «tomonlari teng bo‘lgan» xossasi qo‘shilsa, uning hajmi kamayadi va faqat kvadratlardan iborat bo‘ladi, lekin «burchaklari to‘g‘ri bo‘lishi» xossasi olib tashlansa, hajm kengayib, barcha parallelogrammlardan iborat bo‘lib qoladi.

Agar biror tushuncha hajmi ikkinchi tushuncha hajmiga kir- sa, ikkinchi tushuncha birinchi tushunchaga nisbatan umumiy, birinchi tushuncha ikkinchisiga nisbatan xususiy deyiladi.

Masalan, «uchburchak» tushunchasi «to‘g‘ri burchakli uch- burchak» tushunchasi uchun umumiy, «to‘g‘ri burchakli

**34**

uchburchak» tushunchasi esa «uchburchak» tushunchasining xususiy holidir.

4.3. Tushunchani ta’riflash. Tushunchalarni o‘rganishda ular- ni umumiyroq boMgan tushuncha orqali tushuntirish yoki, boshqacha aytganda, ta’riflashga harakat qilinadi. Shu umumiyroq tushuncha ham ilgariroq tushuntirilgan yoki ta’riflangan bo‘lishi kerak. Lekin har bir uchraydigan tushunchani ilgari ma’lum boigan tushunchani topib ta'rif beraverish murakkab va mumkin bo‘lmagan jarayondir. Shuning uchun ba’zi tushunchalar ta’rif- lanmaydi va boshlang'ich tushuncha deb qabul qilinadi.

Masalan, siz tanishgan «to‘plam» tushunchasi butun mate- matika kursining asosiy tushunchalaridan biridir.

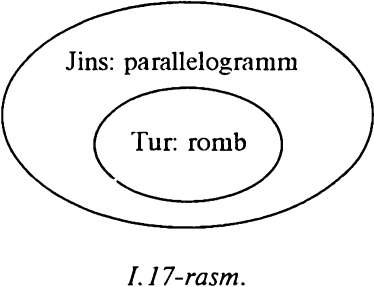
Tushunchaga ta’rif berishning bir necha usuli bor. Shulardan biri oshkor ta’rifbo‘lib, unda, ta’riflanayotgan tushunchaga nis-

batan umumiyroq tushunchani ko‘rsatib, shu umumiy tushun­cha bilan nomlangan obyektlardan ta’riflanayotgan tushuncha qanday xossalari bilan ajralib turishi ko‘rsatiladi.

Masalan, «barcha tomonlari teng parallelogramm — romb deyiladi», ta'rifida parallelogramm umumiy tushuncha bo‘lib, romb qolgan parallelogrammlardan tomonlarining tengligi bilan ajralib turadi. Bunday ta’rif odatda jins va tur orqali ta’riflash deyiladi. Ta’riflanayotgan tushuncha hajmi unga nisbatan umu­miyroq bo‘lgan tushuncha hajmining qism to‘plami bo‘ladi va Eyler —Venn diagrammalarida I.17-rasmda ko‘rsatilgani kabi tasvirlanadi.

Oshkormas ta’rif. bunga aksiomatik ta’riflash kiradi va bun- day ta’rifda ta’rif berilayotgan tushuncha obyekti aniq ko‘rsa- tilmaydi. Aksiomatik ta’riflar bilan siz «Nomanfiy butun sonlar to‘plamining aksiomatik qurilishi» bobida tanishasiz.

Matematikada qarama-qarshilikorqali ta’rif berish usuli ham bor: «X to‘plamda R munosabat refleksiv bo‘lmasa, u antirefleksiv munosabat deyiladi», «A va B to‘plamlar umumiy elementga ega bo‘lmasa, ular kesishmaydi, deyiladi» va h. k.



Ko‘pincha matnda biror obyektni nomlash, biror atama yoki belgini tushuntirish uchun nominal ta’riflar- 35dan foydalaniladi. Masalan, «C\*— bu n elementdan k tadan takrorlashsiz guruhlashlar soni»; «M — sinfdagi barcha o‘quvchilar to‘plami», «5 — besh soni yozuvi» va h. k.

4.4. Tushuncha ta’rifiga qo‘yiladigan talablar. Tushuncha ta- rifiga qo‘yiladigan talablar quyidagilardan iborat. Tushuncha ta’rifi:

1) ta’riflanayotgan tushunchani bir qiymatli aniqlashga im- kon berishi;

2) avval ma’lum bo‘lgan tushunchalarga asoslanishi;

3) yolg‘on doiraga, ya’ni tushunchaning o‘zi yoki shu tushuncha bilan ta’riflangan tushuncha orqali ta’riflashga yo‘l qo‘ymasligi;

4) ortiqcha xossalarni (qolganlaridan keltirib chiqarish mum- kin bo‘lganlarni) ko‘rsatmasligi kerak.

Demak, ta’rifda qisqa va ixcham shaklda ta’riflanayotgan tu­shuncha haqida aniq ma’lumot berilishi kerak ekan.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. Kimyo, fizika, geografiya, tarix fanlariga oid tushunchalarni ayting, bu fanlar uchun umumiy bo'lgan tushunchalarni toping.**

**2. Biror tushunchani tanlab, uning muhim va muhim bo'lmagan xossalarini ayting.**

**3. Parallelogramm» tushunchasining muhim va muhim bo'lmagan xossalari qanday?**

**4. «Aylana» tushunchasining hajmi va mazmunini ayting.**

**5. Biror tushuncha misolida hajm va mazmun orasidagi teskari bog'lanishni ko'rsating.**

**6. Biri ikkinchisi uchun umumiy bo'ladigan tushunchalar ketma-ketligini tuzing. Kvadrat, to'g'ri to'rtburchak, romb, parallelogramm, to'rtburchak tushunchalari shunday ketma-ketlikka misol bo'la oladimi?**

**7. O'rta maktab darsliklaridan tur va jins orqali ta’rifga misol bo'ladigan to'rtta ta’rifni topib yozing, undagi umumiy tushunchani va ta’riflanayotgan tushunchani farqlovchi xossani ko'rsating.**

**8. Boshqa ta’riflash usullariga oid misollar keltiring.**

**9. Ta’riflashdagi «yolg‘on doiraga» misol keltiring.**

**10. Biror tushuncha bir ta’rifda ta’riflanuvchi, boshqa ta’rifda ta’riflovchi bo'lishi mumkinmi? Misol keltiring.**

**36**

5-§. MULOHAZALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

5.1. Mulohazalar haqida urnumiy tushuncha. Ma’lumki, o‘zbek tilidagi gaplar to‘plami 3 ta sinfga ajratiladi.

1. D — «Darak gaplar» to‘plami.

2. C — «So‘roq gaplar» to‘plami.

3. X — «His-hayajon gaplar» to‘plami.

Haqiqatan ham, DuCuX — gaplar to‘plami va DC\CC\X- 0 bo‘ladi.

0‘z navbatida «darak gaplar» to‘plamini ham 3 ta to‘plamga ajratish mumkin.

I. Rost yoki yolg‘onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan darak gaplar. Masalan:

a) Toshkent shahri 0‘zbekiston Respublikasining poytaxti — rost;

b) London shahri Germaniyaning poytaxti — yolg‘on;

d) 2 — tub son — rost;

e) 5 > 6 — yolg‘on;

0 «3 soni 15 sonining bo‘luvchisi» — rost.

II. Tarkibida o‘zgaruvchi ishtirok etgan darak gaplar.

Masalan:

a) X shahar 0‘zbekiston Respublikasida joylashgan;

b) y — 6 dan kichik tub son;

d) x— 5 dan kichik natural son;

e) x — o‘zbek tilidagi unli tovush.

III. Rost yoki yolg‘onligini aniqlash mumkin bo‘lmagan darak gaplar.

Masalan:

a) Men bugun mehmonga bormoqchiman.

b) Bugun yomg‘ir yog‘sa kerak.

d) Men tadbirkor bo‘lmoqchiman.

e) Matematika qiyin fan.

1-t a ’ r i f. Rost yoki yolg ‘onligi bir qiymatli aniqlanadigan da­rak gaplar *mulohaza* deyiladi.

So‘roq yoki his-hayajon gaplar mulohaza bo‘la olmaydi. No- ma’lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi. Mulo­hazalar lotin alifbosining bosh harflari: A, B, C, D, ... orqali bel- gilanadi. Mulohazalar sodda va murakkab bo‘ladi.

Murakkab mulohazalami sodda mulohazalarga ajratish mumkin.

**37**

Masalan, a) «5 tub son va u 10 sonining bo‘luvchisi».

b) «2 eng kichik tub son va u juft son».

d) «Agar sonning raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linsa, u holda shu sonning o‘zi ham 3 ga bo‘linadi».

e) «32 = 9 yoki 9 soni 3 ga bo‘linadi».

0 «Agar sonning oxirgi yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugasa, u faqat va faqat shundagina 5 ga bo‘linadi» — murakkab mulohazalardir.

Bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg‘on bo‘lgan mulohazalar ekvivalent mulohazalar deyiladi. Ekvivalent mulohazalar A - B ko‘rinishda yoziladi.

Matematik mantiq fanini mulohazani bayon qilish shakli emas, faqat rost yoki yolg‘onligi qiziqtiradi. Bundan buyon rost mulohazani «R» yoki «1», yolg‘on mulohazani «Y» yoki «0» bilan belgilaymiz.

5.2. Mulohaza inkori.

2- ta’rif. A mulohaza inkori deb, A rost bo ‘Iganda yolg'on, yolg'on bo‘Iganda rost bo ‘luvchi mulohazaga aytiladi.

A mulohaza inkori A ko‘rinishda belgilanadi va «A emas», «A ekanligi yolg‘on» deb o‘qiladi. Masalan, A: «32 - 6» bo‘lsa, A : «32\* 6»;

A: «Hozir yoz fasli» bo‘lsa, uning inkori: «hozir yoz fasli emas» yoki «hozir yoz fasli ekanligi yolg‘on» kabi ifodalanadi.

Mulohaza inkorining rostlik jadvali quyidagi ko‘rinishda bo‘- ladi: =

Mulohaza inkorining xossasi: A - A bo‘- ladi.

|  |  |
| --- | --- |
| A | A |
| R | Y |
| Y | R |

Masalan, A: «17 —tub son»;

A «17 — tub son emas»;

A : «17 — tub son emasligi yolg‘on»

yoki «17 — tub son».

5.3. Mulohazalar konyunksiyasi.

3- ta’rif. Ikkita sodda A, B mulohazalardan tuzilgan «A va

B» mulohazaga mulohazalar konyunk­siyasi deyiladi.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | AhB |
| R | R | R |
| R | Y | Y |
| Y | R | Y |
| Y | Y | Y |

Mulohazalar konyunksiyasi uning tarkibiga kirgan mulohazalar rost bo‘lganda, rost bo‘ladi va «AhB» yoki «A&B» ko‘rinishda yoziladi hamda «A va B» kabi o‘qiladi.

**38**

Konyunksiyaning rostlik jadvali 38-betdagi ko‘rinishda bo‘ladi:

Masalan, a) A: «5 — tub son» — (R); B\ «5 > 6» — (Y) bo‘lsin, u holda A A B: «5 — tub son va u 6 dan katta» — yolgcon mulohaza bo‘ladi.

b) A: «3 < 8\* - (R), B: «8 < 11\* — (R), AhB: «3 < 8a8 < 11\* yoki «3 < 8 < 11», ya’ni tengsizliklar konyunksiyasini qo‘sh teng- sizlik ko‘rinishida yozish mumkin va aksincha; ta’rifga ko‘ra «3 < 8 < 11» — rost mulohaza.

Mulohazalar konyunksiyasining xossalari:

1°. Ah B - BhA (kommutativlik);

2°. *(AhB) hC - Ah(BhC) - AhB hC* (assotsiativlik);

3°. AhA^Y (AhA — aynan yolg‘on mulohaza).

Mulohazalar konyunksiyasi xossalarining to‘g‘riligini rostlik jadvallari tuzish va mos kataklardagi murakkab mulohazalar qiymatlarini taqqoslab tekshirish mumkin.

5.4. Mulohazalar dizyunksiyasi.

4-t a ’ r i f. Ikkita sodda A, B mulohazalardan tuzilgan «A yoki B» mulohazaga mulohazalar dizyunksiyasi deyiladi.

Mulohazalar dizyunksiyasi «Am B» ko‘rinishda yoziladi, «A yoki B» deb o‘qiladi va uning tarkibiga kirgan mulohazalarning hech bo‘lmaganda bittasi rost bo‘lganda, rost bo‘ladi.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | Ay B |
| R | R | R |
| R | Y | Y |
| Y | R | Y |
| Y | Y | Y |

Dizyunksiyaning rostlik jadvali quyi- dagicha:

Masalan: a) A: «Varshava shahri Germaniyaning poytaxti» — Y.

B: «Varshava shahri Polshaning poytaxti» — R.

Am B: «Varshava shahri Germaniyaning yoki Polshaning poy- taxti» — R.

b) A: «10 — juft son» — R.

B: «n — irratsional son» — R.

Am B: «10 — juft son yoki n — irratsional son» — R.

d) A: «15 — juft son» — Y.

B\ «Kvadrat to‘g‘ri to‘rtburchak emas» — Y.

AmB\ «15 — juft son yoki kvadrat to‘rtburchak emas» — Y.

Mulohazalar dizyunksiyasining xossalari:

1°. Am B = Bm C (kommutativlik).

2°. *(Am B)m C — Am (Bm Q —AmBmC* (assotsiativlik).

**39**

3°. AvA=R (y4v A — aynan rost mulohaza).

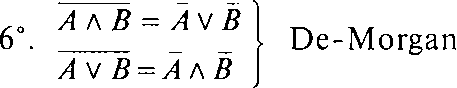
4°. Av(BaC) = (AvB)a(AvC) — dizyunksiyaning konyunk-

siyaga nisbatan distributivligi).

5°. Aa{B\/ Q = (AaB)v(AaQ — konyunksiyaning dizyunk-

siyaga nisbatan distributivligi.

qonunlari (De-Morgan —



shotland matematigi (1806—1871)).

Tengliklarning to‘g‘riligi rostlik jadvalini tuzib isbot qilinishi mumkin.

De-Morgan qonunlarini olaylik. a) = ya’ni mulo-

hazalar konyunksiyasi inkori mulohazalar inkorlarining dizyunk- siyasi bilan ekvivalent.

Rostlik jadvalini tuzamiz.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A | B | AaB | A/\B | AmB |
| R | R | Y | Y | P | Y | Y |
| R | Y | Y | R | Y | R | R |
| Y | R | R | Y | Y | R | R |
| Y | Y | R | R | Y | R | R |

Jadvalning oxirgi ikki ustuni Ava mulohazalar qiymatlarining turli kombinatsiyalarida bir xil. Demak, = v ekanligi

to‘g‘ri.

Misol keltiraylik.

A — «Men shaxmat o‘ynayman».

B — «Men tennis o‘ynayman».

A a B — «Mening shaxmat va tennis o'ynashim yolg‘on».

Av B — «Men shaxmat yoki tennis o‘ynamayman».

5.5. Mulohazalar implikatsiyasi.

5-ta’rif. Sodda A va B mulohazalardan tuzilgan «Agar A bo ‘Isa, B bo ‘ladi» ko ‘rinishidagi mulohaza A va B mulo- hazalarning implikatsiyasi deyiladi va «A =>B» ko‘rinishda belgi- lanadi.

A^>B implikatsiya faqat A rost 5yolg‘on bo‘lgandagina yolg‘on boMadi. A — implikatsiya sharti, B — xulosasi deyiladi. ni uchun yetarli, Bni Auchun zaruriy shart deb ham ataladi. Impli- katsiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo‘ladi:

**40**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | A\*>B |
| R | R | R |
| R | Y | Y |
| Y | R | R |
| Y | Y | R |

Masalan, a) A: «15 soni 3 ga bo‘linadi» — R; B: «15 sonining raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linadi» — R. A =>B: «Agar 15 soni 3 ga bo‘linsa, u holda 15 sonining raqamlari yig£indisi 3 ga bo‘- linadi» — R.

b) A: «5 • 5 = 25», B: «5 + 5 = 15» bo‘lsin. A =>£: «Agar 5 • 5 = 25 bo‘lsa, u holda 5+5=15 bo‘ladi» — Y.

d) A: «25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamaydi» — R. B\ «25 soni 10 ga bo‘linadi» — Y. A=>B: «Agar 25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamasa, u holda 25 soni 10 ga bo‘linadi» — Y.

Agar A=>B implikatsiya berilgan bo‘lsa, B =>A unga tes- kari,A => B esa qarama-qarshi, B => A esa qarama-qarshiga tes- kari implikatsiyalar deyiladi.

Mulohazalar implikatsiyasining xossalari:

1°. A=>B = Av B.

2°. A^-B = B => A (kontrapozitsiya qonuni).

5.6. Mulohazalar ekvivalensiyasi.

6-t a ’ r i f. Sodda A va B mulohazalardan tuzilgan «A faqat va faqat B bo‘lgandagina bo‘ladi» ko‘rinishdagi mulohaza A va B ning ekvivalensiyasi deyiladi va «A <=> B» ko ‘rinishda yoziladi.

A<\* B ekvivalensiya A va B mulohazalarning qiymatlari bir xil bo‘lganda rost bo‘ladi. Ekvivalensiyaning rostlik jadvali:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A | B | A-»B |
| R | R | R |
| R | Y | Y |
| Y | R | Y |
| Y | Y | R |

Masalan, «129 soni 3 ga faqat va faqat uning raqamlari yig£indisi 3 ga bo‘linsagina bo‘linadi».

129:3 O (l + 2 + 9):3. — Rost  
41

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. Mulohazalarga misollar keltiring. Ularning rost yoki yolg'onligini aniqlang.**

**2. Quyidagi jumlalar orasidan mulohazalarni ajrating va ularning rostlik qiymatini toping:**

**a) 9 — butun son; b) 48 ni 5 ga bo'lganda 4 qoldiq qoladi; d) so'roq gap mulohaza bo'ladi; e) x** **< 7: f) 17-2-21 = 13; g) x2 + 4=** **13; h) 24 — tub son.**

**3. Quyidagi mulohazalar inkorini tuzing va ularning rostlik qiymatini toping;**

**a) 225 soni 9 ga bo'linadi; e) 21 soni 7 ga bo'linadi;**

**b) 7,6 — natural son; 0 Praga—Bolgariyaning poytaxti;**

**d) 7 < 3; g) 27 ; 3 + 2 • 3 - 18 ifodaning qiymati 0**

**ga teng.**

**4. A: «4 < 7», B: «Toshkent 0‘zbekistonning poytaxti» mulohazalari be- rilgan bo'lsa, ularning ko\_nyunksiyasini tuzing va rostlik qiymatini toping. Shuningdek, AaB, AaB, AaB fikrlarini so‘z orqali ifodalang.**

**5. A: «26 : 2 + 1\_1 = 28», J?: «3\_^ tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, AvB, BmA, Am B, Am B, Am B larni so‘z orqali ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.**

**6. C: «3 — toq son», B: «7 soni 28 ning bo‘luvchisi» mulohazalari berilgan bo'lsa, ularning implikatsiyasini ifodalang va rostlik qiymatini toping.**

**7. A: <<111201 sonining raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linadi» B: <<111201 soni 3 ga bo‘linadi» mulohazalari berilgan. Ularning ekvivalensiyasini so‘z yordamida ifodalang va rostlik qiymatini toping.**

**8. A: «9 — tub son», B: «17 — toq son», C; «18 soni 3 ga bo‘linadi», £>. «24 — tub son» sodda mulohazalar berilgan bo'lsa, quyidagi murakkab mulohazalarni so‘z yordamida ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping, a) AvB\\_ b) AhB\ \_ d) Am A ; e) A=>B ; f) C<\*D ;**

**g) *AaC\*>D* ; h) *AaD=>C* ; i) *AmD* ; j) *(AaBaC)mD.***

**9. A: «7 soni 56 ning bo‘luvchisi». B\ «4 soni toq son». C: «13 soni tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, a) AmBmC ; b) AaBaC ; d) (AmB)aC ;**

**e) (AaB)mC ; 0 (AmIB)a(AmC) lar uchun rostlik jadvalini tuzing.**

**10. A: «7 < 12», B= «Romb — to‘rtburchak», C= <<2 — tub son» muloha- zalari berilgan bo'lsa, Am B^AaB, Am B\*AaB , AmC=AaC, A aC=Aa B larni isbotlang.**

6-§. PREDIKATLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

6.1. Predikatlar haqida umumiy tushuncha. Mulohazalar algeb- rasining asosiy masalalaridan biri sodda mulohazalarning rostlik qiymatlariga tayangan holda, ulardan tuzilgan murakkab mulo- hazalaming rostlik qiymatlarini topishdan iborat ekanligini biz ko‘rib chiqdik. Lekin mulohazalar algebrasi fan va amaliyotning murakkab mantiqiy xulosalarini chiqarish uchun yetarli emas. Bunday murakkab

**42**

mantiqiy xulosalarni chiqarishda mulohazalar algebrasini ham o‘z ichiga oluvchi predikatlar algebrasi muhim o‘rin tutadi.

1-ta’rif. 0‘zgaruvchi qatnashgan o‘rniga

qiymatlar qo‘yilgandagina rost yoki yolg‘nn gan darak gap predikat *deyiladi.*

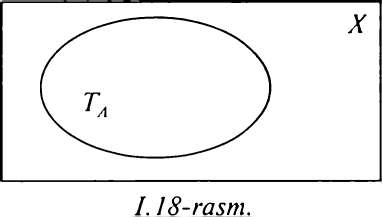
Predikatlar tarkibiga kirgan o‘zgaruvchilar soniga qarab bir o'rinli, ikki o'rinliva hokazo bodadi. Biz ko'proq bir o‘rinli predikat haqida gapiramiz, uni A(x), B(y), ko'rinishda belgilaymiz.

Predikat tarkibiga kirgan o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bodgan barcha qiymatlar to'plami aniqlanish sohasi

deyiladi. Aniqlanish sohasi X, Y, Z, ... kabi belgilanadi.

0‘zgaruvchi o‘rniga qo‘yilganda predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi qiymatlar predikatning rostlik deyiladi, A(x)

predikatning aniqlanish sohasi X to‘plam bodsa, rostlik to‘plami TA bilan belgilanadi va x&X A TACX bodadi (I.18-rasm).



Ta’rifga ko‘ra istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bodadi. Ma- salan:

a) A(x): «x shahar — 0‘zbekiston Respublikasining poy- taxti». Bunda X-{Toshkent, Buxoro, Xiva, Moskva, ...} bodib, Ta = {Toshkent} bodadi.

b) B{x): 5 < x < 1 1 a *x*e N *.*

X=Nbodib, Tb={6; 7; 8; 9; 10} bodadi.

d) C(y): «y — 10 sonning boduvchisi» bodsa, bodib,

rc= {1; 2; 5; 10} bodadi. "

e) D(z): «z2+2z- 1=0 ».ZeR = Z.T. ={1-^2, 1 + V2}.

6.2. Kvantorlar. Yuqorida ko‘rdikki, istalgan tenglama va teng­sizlik predikat bodar ekan, chunki ularni mulohazaga aylantirish mumkin. Buning uchun o‘zgaruvchi o‘rniga qiymat qo‘yish yetarli.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvan- torlardan foydalanishdir. Ikki xil kvantor bor bodib, ularning biri «umumiylik», ikkinchisi «mavjudlik» kvantori deb ataladi.

Umumiylik kvantori « V » belgisi bilan belgilanadi va «har bir», «hamma», «barcha» so‘zlari bilan ifodalanadi. V inglizcha «A11» so‘zining bosh harfidan olingan va «hamma» ma’nosini bildiradi.

Mavjudlik kvantori «3» belgisi bilan belgilanadi, inglizcha «Exist» — «mavjud» so‘zining bosh harfidan olingan va «bor», «mavjud», «topiladi» so‘zlarini bildiradi.

**43**

Masalan, A(x)\ «x son tub son» predikatini olaylik, uni kvan- torlar yordamida mulohazaga aylantiramiz, bu yerda «Barcha x sonlar tub son» — yolg‘on mulohaza, «.x soni tub son boiadigan qiymatlar topiladi» — rost mulohaza.

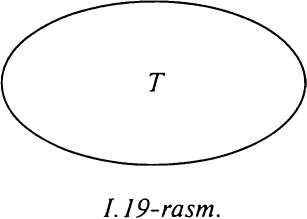
P(x): «x son 5 ga karrali», xe A boisin. «Barcha .x sonlar 5 ga karrali» — yolg‘on mulohaza, «5 ga karrali x son mavjud» — rost mulohaza.

Kvantorlar qatnashgan mulohaza yoki

(3xeA')/>(x) ko‘rinishda yoziladi va «X to‘plamning hamma elementlari uchun P(x) bajariladi» yoki «X to'plamda P(x) bajariladigan elementlar topiladi», deb o‘qiladi.

6.3. Predikatlar inkori. X to‘plamda ) predikat berilgan

bo‘lsin. A(x) rost boiganda yolg‘on, yolg'on boiganda, rost boiadigan



T A(x) predikat A(x) ning inkori deyi- ladi. ning rostlik to'plami T boisa, ning rostlik to'plami boiadi (I.19-rasm).

Masalan: a) A(x): «x son 5 raqami bilan tugaydi» boisa, A(x): «x son 5 raqami bilan tugamaydi» boiadi.

b) X = {xEN, x< 20} to'plamda A(x): «x tub son» predikati berilgan boisin. U holda TA= {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19} boiadi. A(x): «x tub son emas» va T-a-T\ {1; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18} boiadi.

d) X = {Vx E N, x < 15} da A(x): «x soni 15 ning boiuvchisi» predikat berilgan boisin. U holda {1; 3; 5; 15} boiadi. A(x): «x son 15 ning boiuvchisi emas va T-A - {2; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14} boiadi.

e) X — hafta kunlari to'plami boisin. Bu to'plamda A(x): «x —

haftaning juft kuni» predikati berilgan boisa, «x —

haftaning toq kuni», T - {seshanba, payshanba, shanba} va T- -{yakshanba, dushanba, chorshanba, juma} boiadi.

6.4. Predikatlar konyunksiyasi. Aytaylik, X to'plamda A(x) va B(x) predikatlar berilgan boisin.

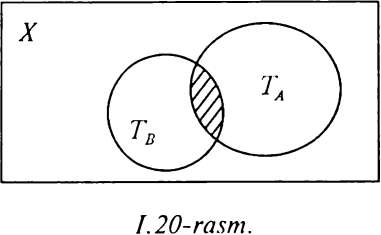
2-t a ’ r i f. *A(x)* va *B(x)* predikatlaming har ikkalasi rost bo ‘Iganda rost, qolgan *hollarda* yolg'onbo ‘ladigan predikatga

siyasi deyiladi va A(x)aB(x) ko‘rinishda belgilanadi.

**44**

Agar A(x) ning rostlik to‘plami T,

B{x) ning rostlik to‘plamini 7',



A(x)aB(x) ning rostlik to‘plamini T desak, T—TA n TB bo'ladi. Uni Eylcr — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak (I.20-rasm), rasmdagi shtrixlangan soha Tf\TB dan iborat bo'ladi.

Masalan, a) X = {xEN, x < 20} da A(x)\ «x soni tub son», B{x)\ «x soni toq son» predikatlari berilgan bo‘lib, ularning konyunksiyasining rostlik to'plamini topish talab qilingan bo‘lsin.

Yechish. Ta = {2; 3; 5; 7; II; 13; 17; 19}, ; 3; 5; 7;

9; 11; 13; 15; 17; 19}, u holda TaaTb= {3; 5; 7; 11; 13; 17; 19} bo‘ladi.

b) X -{VxGjV, x< 17} da A{x)\ {x < 8} va B(x): «x’3» pre-

dikatlar bo‘lsa, ular konyunksiyasining rostlik to‘plamini toping.

Yechish. **TA** = {1,2,3,4,5,6,7}, = {3,6,9,12,15} va

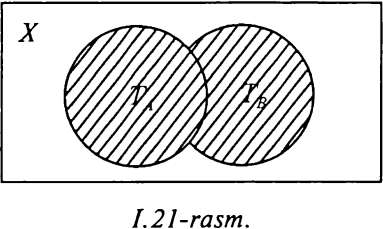
T- TaC\ Tb = {3; 6} bo‘ladi.

6.5. Predikatlar dizyunksiyasi. Aytaylik, X to‘plamda A{x) va B(x) predikatlar berilgan bo'lsin.

3-ta’rif. *A(x)* va *B(x)* predikatlarning har ikkalasi yolg'on bo‘lganda yolg'on, qolgan barcha hollarda rost bo ‘ladigan predi- katga *A{x)* va *B(x)* predikatlar *dizyunksiyasi* deyiladi.

Predikatlar dizyunksiyasi «^(x)v5(x)» ko‘rinishda belgilanib, «A{x) yoki B(x)» deb o‘qiladi.

A(x) predikatning rostlik to‘p- lami Ta, B(x) ning rostlik to‘plami Tb, A(x)\/B(x) ning rostlik to‘pla- mini T desak, T = TAn TBbo‘ladi.



Uni Eyler — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi (I.21-rasm).

Masalan: a) X = {VxEN, x < 20} da A{x): {8 < x < 15}, B(x): «xsoni 18 ning bo‘luvchisi» predikatlari berilgan bo‘lsa, A(x)UB(x) ning rostlik to‘plamini toping.

Yechish. TA = {8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15}, {1; 2; 3;

6; 9; 18} bo‘lgani uchun T = 7^U = {1; 2; 3; 6; 8; 9; 10; 11;

12; 13; 14; 15; 18} bo‘ladi.

**45**

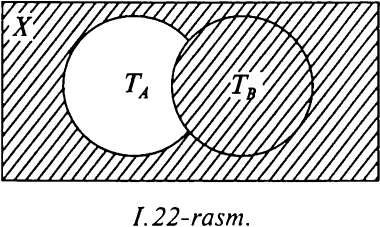
6.6. Predikatlar implikatsiyasi. X to'plamda aniqlangan

va B(x)predikatlar berilgan bo‘lsin.

4- ta'rif. A(x) predikat rost bo‘lib, B(x) bo‘lganda yolg'on, qolgan hollarda rost bo ‘ladigan mulohaza A(x) va B(x) predikatlarning implikatsiyasi deyiladi.

Predikatlar implikatsiyasi « A(x) => B{x) » ko‘rinishda belgilana- di va u A{x) predikatdan B(x) predikat kelib chiqadi deb o‘qiladi. Bu holda B(x) predikat A(x) predikat uchun , predikat B(x) predikat uchun «yetarli shart» deyiladi.

A(x) predikatning rostlik to‘plami Ta, B(x) niki va /4(x)=>5(.x)ning rostlik to‘plami rbo'lsa, bo‘ladi. Uni Eyler — Venn diagram- malari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan ibo- rat bo‘ladi (I.22-rasm).



Masalan, a)

12<x<21} to‘plamda A(x): «x — tub son», B(x): «x — toq son» predikatlari berilgan bo‘lsa, /l(x)^\*5(x)ning rostlik to‘plamini topaylik.

Yechish. 7^ = {13; 17; 19}, TB= {13; 15; 17; 19; 21}, r; = {12; 14; 15; 16; 18; 20; 21} u holda T= T;uTb= {12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21}.

b) a) X = {Vx£/V, x<13} da (x): «12:x», B(x): «x — juft son» predikatlari berilgan bo‘lsa, A(x)=>B(x) ning rostlik to‘plamini topaylik.

Yechish. TA = {1; 2; 3; 4; 6; 12}, T\ = {5; 7; 8; 9; 10; 11; 13}, Tb= {2; 4; 6; 8; 10; 12} bo‘lsa, ; 4; 5; 6; 7;

8; 9; 10; 11; 12; 13} bo'ladi.

6.7. Predikatlar ekvivalensiyasi. Aytaylik, X to'plamda A(x) va B(x) predikatlar berilgan bo'lsin.

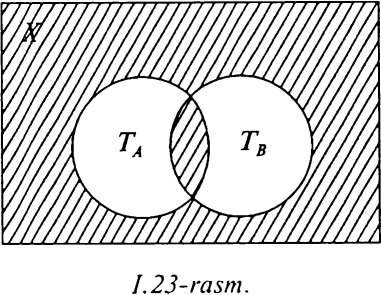
5- ta’rif. A(x)va B{x) predikatlarning har ikkalasi yolg‘on bo ‘Iganda hamda har ikkalasi rost bo ‘Iganda rost bo ‘ladigan, qolgan hollarda yolg‘on bo‘ladigan mulohaza predikatlar ekvivalensiyasi deyiladi.

Predikatlar ekvivalensiyasi A(x)<\*B{x) ko'rinishda belgilanadi va «/l(.v) bilan B(x) teng kuchli» deb o'qiladi. Agar ikkita predikat teng kuchli, ya’ni ekvivalent bo'lsa, ularning har biri ikkinchisi uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.

**46**

A(x)<\*B{x) ning rostlik to‘plamini T desak, u A(x) va B(x) predikatlar- ning har ikkalasi bir vaqtda rost va har ikkalasi bir vaqtda yolg'on bo‘ladigan mulohazalarning rostlik qiymatlari to‘plamidan iborat bo'ladi. Demak, A(x) va B(x) pre- dikatlarning har ikkalasi rost bodgan holdagi rostlik to‘plami TA n TB dan, har ikkalasi yolg‘on bo‘lgan holdagi rostlik to'plami TA U dan iborat bo‘ladi. Demak, T = (TA n U Buni Eyler —

Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrix- langan sohadan iborat bo‘ladi (I.23-rasm).



Masalan, a) X= {V x£N, x< 16} to‘plamda A{x): «x son 3 ga karrali son», B{x): «x soni 12 ning bo‘luvchisi» predikatlari berilgan bo‘lsa, A{x)<\*>B{x) ning rostlik to‘plamini topaylik.

Yechish. T = {3; 6; 9; 12; 15}, T,= {l; 2; 3; 4; 6; 12}. T=(TaDTbMTaDT') = (1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 15}n{3; 6; 12})U U({1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14}n{5; 7; 8; 9; 10; 11})- {3; 6; 12}U{5; 7; 8; 10; 11}-{3; 5; 6; 7; 8; 10; 11}.

Fikr (mulohaza), predikat va ular ustidagi amallar tushun- chalari ko‘p tasdiqlarning mantiqiy tuzilishini aniqlashga yordam beradi.

6.8. Teoremaning tuzilishi. Matematikani o‘rganishda teore- malar deb ataluvchi jumlalar bilan ishlashga to‘g‘ri keladi. Teo- remalar mazmunan xilma-xil bo‘lishiga qaramasdan, ularning hammasi isbotlashni talab qiladigan fikrlardir.

Bizga ma’lum bo‘lgan matematik mantiq tushunchalaridan foydalanib, teoremaning tuzilishini aniqlashga harakat qilaylik.

Masalan, «Agar nuqta burchak bissektrisasida yotsa, u burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan bo‘ladi» teoremasini qaraylik. Bu teoremaning sharti «Nuqta burchak bissektrisasida yotadi» va xu- losasi «Nuqta burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan». Teore­maning sharti ham, xulosasi ham tekislikda yotgan barcha nuqtalarning P to‘plamida aniqlangan predikatlardan iborat. Bu predikatlarni, mos ravishda, A(x) va B(x) deb belgilasak (bu yerda xGP, ya’ni x — tekislikning ixtiyoriy nuqtasi), teoremani A(x)=>B{x) ko‘rinishdagi implikatsiya shaklida yozish mumkin va bu implikatsiya Pto‘plamning ixtiyoriy x nuqtasi uchun o‘rinli,

**47**

ya’ni (VxEP)(A(x)=>B(x)). Shunga ko‘ra ko‘pincha teoremalar tuzilishi uch qismdan iborat bo‘ladi:

1) teorema sharti — A(x);

2) teorema xulosasi — B{x);

3) tushuntirish qismi — VxGPva P ning qanday to‘plam ekani.

Tushuntirish qismida teoremada so‘z yuritilayotgan obyektlar

to‘plami tasvirlanadi. Agar bunday to‘plam alohida ko‘rsatilmagan boisa, teorema mazmunidan uni bilib olish mumkin bo‘ladi.

Teoremaning isboti bu fikrlar ketma-ketligi bo ‘lib, u qaralayot- gan nazariyaning aksiomalariga yoki avvalroq isbot qilingan teoremalarga asoslanadi.

B(x) predikat teoremaning yetarli sharti deyiladi, chunki uning to‘g‘riligi A(x) predikatning to‘g‘riligidan kelib chiqadi. A(x) ni B(x) uchun zaruriy short deyiladi.

Masalan, «Rombning diagonallari o‘zaro perpendikular» teo- remasini qaraylik. Uni implikatsiya ko‘rinishiga keltiramiz: «Agar to‘rtburchak romb bo‘lsa, uning diagonallari perpendikular bo‘ladi». Agar X — tekislikdagi barcha to‘rtburchaklar to‘plami va x — tekislikdagi ixtiyoriy to‘rtburchak bo‘lsa, teoremani umu- miy ko‘rinishda (Vx£l)(^(x)=>5(x)) deb yozish mumkin bo‘ladi. Bu yerda A(x): «x to‘rtburchak — romb», B{x): «x to‘rtburchak diagonallari o‘zaro perpendikular».

Zaruriy shart: «To‘rtburchak romb bo‘lishi uchun uning dia­gonallari perpendikular bo‘lishi zarur».

Yetarli shart: «To‘rtburchak diagonallari perpendikular boiishi uchun uning romb boiishi yetarli».

Teoremalarning turlari. Berilgan

(V x£j)(i(x)=>5(x)) (1)

teoremaga ko‘ra bir nechta yangi teoremalarni hosil qilish mumkin.

A) Teoremaning sharti va xulosasi o‘rni almashsa, berilgan teoremaga teskari teorema hosil boiadi:

(V *xGX)(B(x)\*A(x)).* (2)

Teskari teorema har doim ham to‘g‘ri boiavermaydi. Agar berilgan teoremaga teskari teorema to‘g‘ri boisa, teoremani

**48**

(VxeAr)(y4(.x)o’5(x)) ekvivalensiya ko'rinishida yozish mumkin bo‘ladi. A(x) va B{x) predikatlar bir-biri uchun zarur va yetarli shart bo‘lib xizmat qiladi.

Masalan, «Agar natural son raqamlari yig‘indisi 9 ga bo'linsa, sonning o'zi ham 9 ga bo‘linadi».

Teskari teorema: «Agar natural son 9 ga bo‘linsa, uning raqamlari yig'indisi ham 9 ga bo‘linadi». Teskari teorema to‘g‘ri bo‘lgani uchun bu ikki teoremani bittaga birlashtirish mumkin: «Natural son 9 ga bo‘linishi uchun uning raqamlari yig‘indisi 9 ga bo‘linishi zarur va yetarli».

B) Agar (VxG^)(y4(x)=>5(x)) teoremaning sharti va xulosasi ularning inkorlari bilan almashtirilsa, berilgan teoremaga qarama- qarshi teorema hosil bo'ladi:

( Vxe90 A{x)^>B{x) . (3)

Masalan, «Sonning o‘nli yozuvi 0 raqami bilan tugasa, son 5 ga bo‘linadi» teoremaga qarama-qarshi teorema «Sonning o‘nli yozuvi 0 raqami bilan tugamasa, son 5 ga bo‘linmaydi» ko'rinishida bo‘ladi va bu teorema noto‘g‘ridir. Lekin qarama- qarshi teorema to‘g‘ri bo‘ladigan hollar ham bo‘ladi.

D) (VxGl)(/IW^5(x)) (4)

teorema berilgan teoremaga teskari teoremaga qarama-qarshi teo­rema deyiladi.

Masalan, yuqoridagi teoremaga teskari teoremaning qarama- qarshisi: «Son 5 ga bo‘linmasa, uning o‘nli yozuvi 0 bilan tuga- maydi» ko‘rinishida bo'ladi va u berilgan teoremaga teng kuch- lidir. Umuman olganda (1) va (4) teoremalar hamda (2) va (3) teoremalar o‘zaro teng kuchlidir.

Matematikada (1) berilgan teorema o‘rniga (4) teorema to‘g‘riligini isbotlash usulidan ham keng foydalaniladi va buni isbotning kontrapozitsiya metodi deyiladi.

0‘rta maktab geometriya kursidan quyidagi teoremani qaraylik.

Teorema. Agar ikki to^ri chiziq uchinchi toigiri chiziqqa pa­rallel bo6Isa, ular oimroparallel bo'ladi, ya’ni (a **||** cAb **|| c)=>(a ||** b) .

I s b o t. a || c va b || c berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, a to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa parallel bo'lmasin. U holda, ular biror

**49**

C nuqtada kesishadi. Teorema shartiga ko‘ra bitta C nuqtadan c to‘g‘ri chiziqqa ikkita parallel to‘g‘ri chiziq o‘tgan bo‘ladi. Bu esa B aksiomaga zid. Demak, farazimiz noto‘g‘ri.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**A = {4; 5; 6; 8; 9; 10} to'plamda C(x): «2x - 1 < 15» predikat be- rilgan bo‘lsa:**

1.

**2**.

**3.**

**4.**

**5.**

6.

**a) C(4), C(5), C(6), C(8), C(9), C(10) fikrlaming rostlik qiymatini toping;**

**b) olingan javoblarga asoslanib, (V xGA) C(x) predikat rost bo‘ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.**

**X = {x|xG(V, x < 6} to'plamda 5(x): «x2 - 3 < 18» predikat beril- gan bo'lsa:**

**a) 5(1), 5(2), 5(3), 5(4), 5(5), 5(6) fikrlaming rostlik qiymatini toping;**

**b) olingan javoblarga asoslanib, 5(x) predikat (VxGzl)da rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.**

**A = {x | xe(V, x < 7} to'plamda «x2 - 13 < 0» predikat berilgan. Lining rostlik to'plamini toping.**

**X= {x\xSN, x< 21} to'plamda 5(x): «x — tub son» predikat beril­gan. Lining inkorining rostlik to'plamini toping.**

**Y = {y\yE.N, x< 18} to'plamda A(x): «X — tub son», 5(x): «x — toq son» predikatlar berilgan bo'lsa, A(x), 5(x), ^(x)vfi(x) A(x)aB(x) laming rostlik to'plamini toping.**

**JK= j-2;-l; 0; 1; |; 2j to'plamda C(x): «x — natural son», Z)(x):**

**«x — kasr son» predikatlar berilgan bo'lsa.**

**a)C(1)aZ)(1); b) C(-2)vZ)(-2) ; d) C(0)a5|||; e) C(2)a5(0) larni**

**so'z orqali ifodalang va rostlik qiymatini toping.**

**7.**

***X=***

**to'plamda C(x): «x — butun son», Z)(x): «x —**

**kasr son» degan predikatlar berilgan bo'lsa, a)^^7cvt)I b) 2erCvZ); d) 2£TCaD\ e)-e7’CAB laming rostligini aniqlang.**

**8. Butun sonlar to'plamida D(x): «x:3» va C(x): «x sonini 3 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi» predikatlari berilgan. x = 4, x = 6, x = 7, x= 9, x= 10 bo'lgandagi predikatlar qiymatini toping va ularni solishtiring. C(x) va Z)(x) predikatlar biri ikkinchisining inkori bo'ladimi? Olingan ma’lumotlarga asoslanib javobingizni asoslang.**

**50**

7-§. ALGEBRAIK OPERATSIYA

7.1. Algebraik operatsiya tushunchasi. Awalgi boblarda siz to‘plam, mulohaza va predikat tushunchalari bilan tanishdingiz. Ular ustida ma’lum amallar bajarilishi, bu amallarning o‘ziga xos xossalari borligini bildingiz. Ularning ba’zilarining nomi esa sizga maktab matematika kursidan ma’lum edi. Bu xossalar orasida o‘xshashlari bor. Mazkur bobda mana shu umumiylik haqida so‘z ketadi.

Maktab matematika kursida sonlar ustida turli amallar qaraladi: qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo'lish kabilar. Sonlar ustida har bir operatsiyani bajarish natijasida yana sonlar hosil bo‘ladi. Masalan: 5 + 9 = 14, 5 • 9 = 45. 5-9 amali natijasi esa natural sonlar to‘plamida aniqlangan emas. Agar bu amal (ayirish) butun sonlar (Z) to‘plamida berilsa, aniqlangan, ya’ni 5 — 9 = -4. Nihoyat, 5 : 9 esa Q to‘plamda aniqlangan. Demak, har bir operatsiyani bajarishda ikkita element uchun shu to ‘plamdan uchinchi elementni topish kerak ekan. Boshqacharoq qilib aytganda, biror X to‘plamdan olingan har bir tartiblangan juftga shu to‘plamdan bitta element mos keltirildi. Bunday moslik algebraik operatsiya deyiladi.

1- ta’rif. Agar X to‘plamdan olingan har bir (x; y) juftlikka yana shu to‘plamdan z element mos kelsa, u holda bu moslik X da berilgan *binar algebraik operatsiya* deyiladi, ya’ni (V(x; y)£Jf, 3zeZ)[(x; y) = z].

Mi sol. Qo‘shish N to‘plamda algebraik operatsiya bo‘ladi. Haqiqatan ham, ( V (a; b)GN, 3cGN)(a + b = c).

2- t a ’ r i f. Agar X to ‘plamdan olingan ba ’zi (x; y) — juftliklar- ga shu to‘plamdan bitta z element mos kelsa, u holda bu moslik *qisman algebraik operatsiya* deyiladi, ya’ni (V (x; y)GA, 3zGZ)((x; y) = z).

Masalan, ayirish va bo'lish Ada qisman algebraik operatsiya bo'ladi.

3- t a ’ r i f. X to ‘plamda algebraik operatsiya berilgan bo ‘Isin. Agar X to'plamning biror A qism to'plamidan olingan ixtiyoriy (x; y) juftlikka mos z ham A ga tegishli bo ‘Isa, A to ‘plam berilgan algebraik operatsiyaga nisbatan *yopiq* deyiladi.

7.2. Algebraik operatsiya xossalari. X to‘plamda \* va • al­gebraik operatsiyalari berilgan bo'lsin.

4- t a ’ r i f. Agar X to ‘plamdan olingan istalgan x, y, z element- lar uchun (x \* y) \* z = x \* (y \* z) short bajarilsa, u holda «\*»

**51**

operatsiyasi *assotsiativ* deyiladi, ya’ni (Vx, y, zGA)((x\*y)\*z=

= x\*(y\*z)).

Masalan, «+» operatsiyasi Ada assotsiativ algebraik operatsiya- dir. Chunki (Va, b, cGA)((a + 6) + c = a + (6-l- c)).

Shu kabi to‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi, mulohaza va predikatlar dizyunksiyasi va konyunksiyasi ham assotsiativ al­gebraik operatsiya bo‘ladi.

Agar algebraik operatsiya assotsiativlik xossasiga ega boisa, faqat shu operatsiya qatnashgan ifodalarni qavslarsiz yozish mum- kin: (a\*b)\*c = a\*(b\*c) - a\*b\*c.

5- t a ’ r i f. Agar X dan olingan istalgan x, y elementlar uchun x\*y = y\*x shart bajarilsa, u holda (\*) operatsiyasi *kommutativ* deyiladi.

Qisqacha: (Vx, yGA)(x\*y - y\*x) kabi yoziladi.

Masalan, ( + ) operatsiyasi N da kommutativdir, chunki (Va, bE.N)(a + b = b + a).

6- t a ’ r i f. Agar X dan olingan istalgan x, y, z elementlar uchun x\*{yz) = (x\*y)• (x\*z) shart bajarilsa, u holda (\*) operatsiya (•) ga nisbatan *distribute* deyiladi.

Qisqacha (Vx, y, zGA) (x\*(yz)= = (x\*y)»(x\*z)) yoziladi.

Masalan, N da ko‘paytirish qo‘shishga nisbatan distributiv bo‘ladi. Haqiqatdan (Va, b, cG7V)(a • (b + c) - a • b + a • c).

7- t a ’ r i f. Agar X dan olingan istalgan x, y lar uchun shunday bir aGX topilib, x\*a = y\*a dan x = y kelib chiqsa, u holda (\*) operatsiya *qisqaruvchait* deyiladi.

Qisqacha: (Vx, y GA, 3aGA) (a\*x = a\*y=>x = y) kabi yoziladi.

Masalan, a + x = a + y^>x = y demak, «+» qisqaruvchan operatsiya.

7.3. Algebraik operatsiyaning neytral, simmetrik, yutuvchi ele- mentlari.

8- t a ’ r i f. Agar istalgan xG A uchun shunday eGX topilsaki, na- tijada xTe = eTx = x shart bajarilsa, u holda e shu «T» operatsiyasi uchun *neytral element* deyiladi.

Qisqacha (VxGA, 3eGA)(x7e = eTx = x) kabi yoziladi.

9- t a ’ r i f. Agar X to ‘plamda berilgan (\*) operatsiyaga nisba­tan eGX neytral element bo ‘Isa va *x\*x-x\*x* - e shart bajarilsa, u holdax G A *simmetrik element* deyiladi.

Masalan, -a element a ga qo‘shishga nisbatan simmetrik bo‘ladi, chunki a + (-a) - 0.

**52**

10- ta’rif. Agar X to‘plamda berilgan *(\*)ga* nisbatan *a\*e=* -e \* a-e short bajarilsa, *u* holda e — *yutuvchi element* deyiladi.

Masalan, 0 element ko‘paytirishga nisbatan yutuvchidir.

7.4. Gruppa, halqa va maydon tushunchalari.

11- t a ’ r i f. Agar X to‘plamda binar algebraik operatsiya beril­gan bo‘Isa, *u* holda X to'plam *gruppoid* deyiladi.

12- t a ’ r i f. Assotsiativ operatsiya berilgan gruppoid *assotsiativ,* kommutativ operatsiya berilgan gruppoid *kommutativ* gruppoid deyi­ladi.

13- ta’rif. Agar gruppoid assotsiativ bo‘Isa, *u* holda *yarim gruppa* deyiladi.

14- ta ’ rif. Agar neytral elementga ega bo‘lgan A yarim grup- pada istalgan a^A uchun simmetrik element mavjud bo ‘Isa, u holda A to ‘plam *gruppa* deyiladi.

Mi sol. Z to'plam qo'shishga nisbatan gruppa tashkil qiladi. Haqiqatan ham:

1. Z da « + » assotsiativ algebraik operatsiya.

2. OeZ, «+» uchun neytral element mavjud.

3. Simmetrik element ham mavjud, a + (-0) = 0.

15- t a ’ r i f. G to ‘plam «\*» operatsiyasiga nisbatan gruppa bo ‘Isa va a\*b = b\*a short bajarilsa, u holda G *kommutativ* yoki *Abel gruppasi* deyiladi.

16- 1 a ’ rif. Agar X to ‘plamda ikkita binar algebraik operatsiya ( + , \*) berilgan bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsa:

1) X qo'shishga nisbatan kommutativ gruppa;

2) ko‘paytirish qo'shishga nisbatan distributiv, ya’ni a(b + c) = = a\*b + a\*c, (b + c)\*a = b\*a + c\*a bo‘Isa, u holda X to'plam *halqa* deyiladi.

Misol. Z to'plam halqadir. Chunki:

1) Z da qo'shish va ko'paytirish algebraik operatsiya;

2) Z qo'shishga nisbatan kommutativ gruppa;

3) Z da ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributiv.

17- t a ’ r i f. Agar *M* halqaning noldan tashqari barcha element- lari ko‘paytirishga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qilsa, u holda *M maydon* deyiladi.

Misol. Q ratsional sonlar to'plami maydondir. Chunki:

1) Q halqa kommutativ.

2) Ko'paytirishga nisbatan kommutativ gruppa (nolsiz).

**53**

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. Quyidagi to'plamlarning qaysilari qo'shish, ayirish, ko‘paytirish va bo'lish operatsiyalariga nisbatan yopiq to'plam hisoblanadi: a) natural sonlar; b) toq sonlar; d) musbat ratsional sonlar; e) {0}; 0 {0; 1}; g) {3«+ l|«OZ}?**

**2. Qaysi (\*, X) juftliklar uchun X da algebraik operatsiya bo'ladi, degan mulohaza to'g'riligini aniqlang:**

**a) \* — qo‘shish X = Z\_; b) \* — boiish X = R\**

**d) \* — bo'lish X= R\_\ e) \* — ko'paytirish X = {3k\k^Z\;**

**0 \* - EKUB, X= {2n \n<N}\ g) \* - EKUK, X= {2k + l|£e/V}.**

**3. Barcha butun sonlar to'plami Zda assotsiativ yoki kommutativ**

**bo'ladigan algebraik operatsiyalarni aniqlang:**

**a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e) a\* b = la - 2b.**

**4. Barcha natural sonlar to'plami N da assotsiativ yoki kommutativ operatsiyalarni aniqlang:**

**a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e) bo'lish; 0 B(a\ b) g) K(a; b), a\* b = ab.**

**5. X to'plamda \* operatsiya 0 operatsiyaga nisbatan distributiv, degan mulohaza qaysi (\*, 0) juftliklar uchun to'g'ri ekanligini aniqlang:**

**a) R da \* — bo'lish, 0 — qo'shish;**

**b) R da \* — qo'shish, 0 — ko'paytirish;**

**d) \* — to'plamlar birlashmasi, 0 — kesishmasi;**

**e) Z da \* — yig'indi, 0 — ayirma;**

**0 \* — mulohazalar dizyunksiyasi, 0 — konyunksiyasi.**

**6. To'plamlar kesishmasining yutuvchi dementi bormi, simmetrik yoki neytral elementlari-chi?**

**7. Butun sonlar to'plamida qo'shishga nisbatan 8 ning, —7 ning sim­metrik elementlarini ayting.**

**8. Ratsional sonlar to'plami qo'shishga nisbatan gruppa tashkil qilishini ko'rsating.**

**9. Xto'plamning barcha qism to'plamlari to'plami to'plamlar kesishmasiga nisbatan gruppa tashkil qiladimi?**

**10. Quyidagi to'plamlar halqa bo'ladimi:**

**a) 5 ga karrali butun sonlar to'plami;**

**b) toq natural sonlar to'plami;**

**d) barcha haqiqiy sonlar to'plami;**

**e) a + b-FL ko'rinishdagi sonlar to'plami; bu yerda a, b^R. Bu to'plam­larning qaysilari maydon bo'la oladi?**

8-§. ALGORITM TUSHUNCHASI

8.1. Algoritm tushunchasi va uning xossalari. Algoritm tu- shunchasi fundamental matematik tushunchalardan boiib, ma- tematikaning «Algoritmlar nazariyasi» deb ataluvchi maxsus bo'limining tadqiqot obyekti hisoblanadi.

**54**

Algoritm — bu biror jarayonni aniq tasvirlash va uni bajarish uchun ko‘rsatmadir.

«AJgoritm» so‘zi IX asrda yashagan 0‘rta osiyolik matematik Al-Xorazmiy ismining Yevropa tillariga tarjima qilinishi natija- sida kelib chiqqan. Al-Xorazmiy arifmetik amallarni bajarish qoidasini (algoritmni) ko‘rsatib bergan.

Bu algoritmlar hozirgi vaqtda ham maktab amaliyotida ishla- tilib kelinmoqda. Algoritmlashtirishning vazifasi algoritmlarni tuzishga (yozishga) o‘rgatishdan iborat boiib, bajaruvchi (odam, robot, EHM) algoritmlarni bajarish qoidasiga rioya qilgan holda yagona natijaga erishmog'i lozim. Bu esa algoritmlarni yozish qoidasiga ba’zi talablar qo‘yadi. Bular quyidagi xossalar ko‘ri- nishida ifodalanadi:

1°. Aniqlik xossasi. Algoritm ko'rsatmalari bir ma’noli boiishi zarur. Algoritm bajariladigan amallarning zarur ketma-ketligini aniq belgilab beradi. Algoritmning amalga oshish jarayoni konkret hisobchiga bogiiq boimaydi.

2°. Ommaviylik xossasi. Algoritmning boshlang‘ich ma’lumot- larning ruxsat etilgan ixtiyoriy qiymatlarida yaroqli bo‘lishi zarur.

3°. Natijaviylik xossasi. Izlanayotgan natijani boshlang'ich ma’lumotlarning ruxsat etilgan qiymatlari uchun chekli sonda- gi yetarlicha sodda qadamlardan so‘ng olish mumkin bo‘lishi kerak.

8.2. Algoritmlarni yozish usullari. Bir nechta misollar keltiraylik:

**, lx-A ,**

1. y- 5^3 1- y rung qiymatim toping.

|  |  |
| --- | --- |
| Nq | Amalni bajarish tavsifi |
| 1 | X ni 7 ga ko‘paytir. |
| 2 | (1) ning natijasidan 4 ni ayir. |
| 3 | X ni 5 ga ko‘paytir. |
| 4 | (3) ning natijasiga 3 ni qo'sh. |
| 5 | (2) ning natijasini (4) ning natijasiga bo‘l. |

**55**

|  |  |
| --- | --- |
| Ne | Amalni bajarish tavsifi |
| 1 | a := x \* 7 |
| 2 | b := a - 4 |
| 3 | c := x \* 5 |
| 4 | d := c + 3 |
| 5 | y = b : d |

2. Kesmani teng ikkiga bo‘lish (sirkul va chizg‘ich yordami- da) algoritmi:

yoki

mumkin:

*v =* 2j^A **5x+3**

ni hisoblash algoritmi quyidagicha yozilishi

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ne | Harakatlami bajarish tartibi | |
| 1 | Sirkul ninasini A nuqtaga qo‘y. | |
| 2 | Sirkul oyoqlarini AB ga teng qilib och. | |
| 3 | Aylana o‘tkaz. | |
| 4 | Sirkul ninasini B nuqtaga qo‘y. | |
| 5 | Aylana o‘tkaz. | |
| 6 | Aylanalaming kesishgan nuqtalaridan to'g'ri chiziq o'tkaz. | |
| 7 | To‘g‘ri chiziq va kesma kesishgan nuqtani belgila. | |
| 3. y | = 5",/i£Z. |  |
| i | Agar n> 1 bo‘lsa, 4 ga o'tadi. aks holda 2 ga. |  |
| 2 | Agar n= 1 bo‘lsa, 5 ga o'tadi, aks holda 3 ga. |  |
| 3 | Agar n=0 bo‘lsa, 6 ga o'tadi, aks holda 7 ga. |  |
| 4 | y = 5 ■ 5 ■... ■ 5 , 8 ga o‘tadi. |  |
|  | n maria |  |
| 5 | y = 5, 8 ga o‘tadi. |  |
| 6 | y = 1, 8 ga o‘tadi. |  |
| 7 | 1  y ~ ,  p ■ 0 • ... • 0 |  |
|  | n mana |  |
| 8 | Tamom. |  |

**56**

8.3. BoshlangMch sinflarda qoMlaniladigan algoritmlar. Bosh- lang‘ich sinf matematika darslarida quyidagi kabi sodda algo- ritmlarni qo‘llaymiz.

Qo‘shish algoritmi (o‘nli sanoq sistemasida).

1) Ikkinchi qo‘shiluvchini xona birliklari mos keladigan qilib birinchi qo‘shiluvchi tagidan yozamiz.

2) Birliklarni qo‘shamiz. Agar yig‘indi 10 dan kichik boisa, javobni birliklar xonasiga yozamiz va keyingi o‘nlik xonaga o‘tamiz.

3) Agar yig‘indi 10 dan katta yoki teng boisa, 10 + C0 kabi tasawur qilib (C0 — bir xonali son) C0 ni birlar xonasiga yoza­miz va birinchi qo‘shiluvchining o‘nliklariga 1 ni qo‘shamiz, so‘ng o‘nliklar xonasini qo‘shishga o‘tamiz.

4) Yuqoridagini o‘nliklar bilan, so‘ngra yuzliklar bilan va hokazo takrorlaymiz. Hamma xona birliklari qo‘shilgandan so‘ng tugatamiz.

Xuddi shu kabi ayirish, ko‘paytirish va boiish algoritmlarini tuzib chiqishimiz mumkin.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. BoshlangMch maktab matematika kursidan algoritmlarga misollar keltiring.**

**2. 10 ta qo'shiluvchining yig‘indisini topish algoritmini yozing.**

**3. Qavsli ifodalar qiymatini hisoblash algoritmini eslang, shunga ko‘ra ((36: 2 - 14)(42 • 2 - 14) + 20): 2 ifodaning qiymatini hisoblash algoritmini tuzing.**

**4. Ko‘p xonali sonlarni taqqoslash algoritmini eslang va yozing.**

**5. BoshlangMch sinf o‘quvchisi uchun masala yechish algoritmini yozing.**

**6. Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish algoritmini eslang va ^**

**kasrlar uchun shu algoritmni yozing. ~**

**7. Matematikadan boshqa fanlardan algoritmlarga misollar keltiring.**

**8. Kundalik hayotimizda algoritmlar qanday ko'rinishda uchraydi?**

**9. Tenglamani yechish algoritmini tuzing va unga ko‘ra (6 - 3x)4 + 2x — - 1 = 3(x- 5) tenglamani yeching.**

**10. Tengsizliklarni yechishning intervallar metodini eslang, unga ko‘ra (x+ 3)(x-5)(2 - x)(4 - x) = 0 tengsizlikni yechish algoritmini tuzing.**

**57**

II **bob.** NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMI

1-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMINI TO‘PLAMLAR NAZARIYASI ASOSIDA QURISH

1.1. Nazariyani aksiomatik qurish to‘g‘risida. Har bir fanni bayon etishda tushunchalarga nisbatan turlicha mulohaza yuriti- ladi. Chunki bu tushunchalarning ayrimlari o‘z-o‘zidan tushuni- ladigan tushunchalar bo‘lsa, ayrim tushunchalar esa ma’lum tu­shunchalarga asoslangan holda mantiqiy mulohazalar yuritish aso- sida ta’riflanadi.

Boshqacha aytganda, tushunchalar ta’riflanmaydigan va ta’- riflanadigan tushunchalarga bo‘linadi. Ta’riflanmaydigan tushun­chalar insonning ko‘p asrlik amaliy-ijodiy faoliyatining natijasi bo‘lib, ular boshlang'ich tushunchalar deb yuritiladi. Bularsiz har qanday nazariyani, jumladan, matematikani fan sifatida aksiomatik tuzish mumkin emas.

Boshlang‘ich tushunchalar asosida nazariyaning aksiomalari tuziladi. Aksiomalar isbotlanmaydigan mulohazalar bo‘lib, biri ikkinchisining natijasi sifatida kelib chiqmasligi va biri ikkinchisi- ni- inkor etmasligi zorur. Shuningdek, berilgan nazariyani aksiomatik qurishda uning teoremalarini isbotlash uchun aksiomalar yetarli bo‘lishi zarur.

Amaliyot shuni ko‘rsatadiki, bitta nazariya bir necha yo‘llar bilan aksiomatik qurilishi mumkin. Bu yo‘llar bir-biridan tanlab olingan boshlang‘ich tushuncha va munosabatlari, ularga oid ak­siomalar sistemasi bilan farqlanadi. Natural sonlar nazariyasi ham bir necha yo‘llar bilan aksiomatik qurilgan:

1) to‘plam nazariyasi asosida (sanoq sonlar nazariyasi);

2) peano aksiomalari asosida (tartib sonlar nazariyasi);

3) miqdor tushunchasi asosida (miqdor sonlar nazariyasi).

1.2. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma’lumot. Natural son tushunchasi matemati- kaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga

**58**

kelgan. Turli-tuman chekli to‘plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zarurati ham natural sonlarning vujudga kelishiga sabab bo‘ldi.

0‘zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o‘tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to‘plamlarni taqqoslash uchun berilgan to‘plamlar orasida yoki to‘plamlardan biri bilan ikkinchi to‘plamning qism to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o'rnatishgan, ya’ni bu bosqichda kishilar buyumlar to‘plamining sanog‘ini ularni sanamasdan idrok qilganlar.

Vaqt o‘tishi bilan odamlar faqat sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o‘rganib oldilar. Qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o‘nli sistemasi va nol tushunchasi yaratildi. Asta-sekin natural sonlar­ning cheksizligi haqidagi tasawurlar hosil bo‘la boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so‘ng sonlar mustaqil obyektlar bo‘lib qoldi va ularni matematik obyektlar sifatida o‘rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustida amal- larni o‘rgana boshlagan fan «Arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to‘plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga o‘rta asrlarda Hind, Arab dunyosi mamlakatlari va 0‘rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa Yevropalik olimlar katta hissa qo‘shdilar. «Natural son» atamasini birinchi bo‘lib rimlik olim A. A. Boetsiy qoMladi.

1.3. Nomanfiy butun son tushunchasi. Nomanfiy butun son­lar to‘plamini to‘plamlar nazariyasi asosida qurish XIX asrda G. Kantor tomonidan to‘plamlar nazariyasi yaratilgandan so‘ng mumkin bo‘ldi. Bu nazariya asosida chekli to‘plam va o‘zaro bir qiymatli moslik tushunchalari yotadi.

1- ta ’ rif. Agar A va B to ‘plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o ‘rnatish mumkin bo ‘Isa, bu to ‘plamlar teng quvvatli deyi- ladi. A ~B ko‘rinishda yoziladi.

«Teng quwatlilik» munosabati refleksiv va tranzitiv bo‘lgani uchun u ekvivalentlik munosabati boMadi va barcha chekli to‘plamlarni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Har bir sinfda turli elementli to‘plamlar yig‘ilgan bo‘lib, ularning umumiy xossasi teng quvvatli ekanligidir.

2- t a ’ r i f. Natural son deb, bo ‘sh bo ‘Imagan chekli teng quvvatli to ‘plamlar sinfining umumiy xossasiga aytiladi.

**59**

Har bir ekvivalentlik sinfining umumiy xossasini uning biror to‘plami to‘la ifodalaydi. Har bir sinf xossasini ifodalovchi natural son alohida belgi bilan belgilanadi. A to‘plam bilan aniqlanadigan a son shu to‘plamning quvvati deyiladi va a - n{A) deb yoziladi. Masalan, 3 soni uch elementli to‘plamlar sinfining umumiy xossasini bildiradi va u bu sinfning istalgan to‘plami bilan aniqlanadi. 3 natural sonini ekvivalent to‘plamlar sinfining ,4 = {a; b\ s}, 5={qizil, sariq, yashil}, C = {□; V; 0} kabi vakillarini ko‘rsatish bilan aniqlash mumkin.

Har bir chekli to‘plamga unga tegishli bo'lmagan biror ele- mentni qo‘shib, berilgan to‘plamga ekvivalent bo'lmagan to‘plamni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, o‘zaro ekvivalent bo'lmagan to‘plamlarning cheksiz ketma-ketligini va shu to‘plamlar bilan aniqlanadigan 1, 2, 3, n, ... ko‘rinishda belgilangan natural sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Barcha natural sonlar to‘plamini N= {1; 2; 3; ...} ko‘rinishda yozishga kelishamiz.

3- t a ’ r i f. Bo ‘sh to ‘plamlar sinfining umumiy xossasiga esa son 0 soni deyiladi, 0 = *n(0).*

0 soni va barcha natural sonlar birgalikda nomanfiy butun sonlar to‘plamini tashkil qiladi. Bu to‘plam N0 ko‘rinishida bel­gilanadi. N0 = {0}v N. Bu yerda, N — barcha natural sonlar to‘plami.

1.4. Nomanfiy butun sonlarni taqqoslash. Sonlarni taqqoslash qanday nazariy asosda yuz berishini aniqlaylik. Ikkita nomanfiy butun a va b son berilgan bo'lsin hamda ular chekli A va B to‘plamlar bilan aniqlansin.

4- ta’rif. Agar a va b sonlar teng quvvatli to‘plamlar bilan aniqlansa, u holda ular *teng* deyiladi.

a — b <r> A ~ B, bu yerda *n{A)* = *a; n{B)* — b.

Agar A va B to‘plamlar teng quvvatli bo'lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo'ladi.

5- t a ’ r i f. Agar A to ‘plam B to ‘plamning o ‘z qism to ‘plamiga teng quvvatli va *n(A) - a; n(B)* = b bo ‘Isa, a son b sondan *kichik* deyiladi va a < b kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda b son a sondan *katta* deyiladi va b > a kabi yoziladi.

a < b<>A ~ B, bu yerda *BxdB* va *B{\*B Bx^0.*

1.5. Nomanfiy butun sonlar yig‘indisi, uning mavjudligi va yagonaligi. To‘plamlar ustida bajariladigan har bir amalga shu

60

to‘plamlar bilan aniqlanadigan sonlar ustidagi amallar mos kela- di. Masalan, o‘zaro kesishmaydigan A va B to‘plamlar birlash- masidan iborat C to‘plam A va B to‘plamlar bilan aniqlanadigan a va b nomanfiy butun sonlarning yig‘indisi deb ataluvchi c sonni aniqlaydi.

6- ta’rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning *yigiindisi* deb *n{A) - a; n(B)* - b bo‘lib, kesishmaydigan A va B to‘plamlar bir- lashmasidagi elementlar soniga aytiladi.

a + b - *n(Av B),* bu yerda *n(A) - a; n(B) = b* va *AaB* = 0.

Berilgan ta’rifdan foydalanib, 5 + 2 = 7 bo‘lishini tushunti- ramiz. 5 — bu biror A to‘plamning elementlari soni, 2 — biror Z? to‘plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lishi kerak. Masalan, A - {x; y; z; t; pj, B- {a; b} to‘plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz: Ay B - {x; y; z; t; p\ a; b}. Sanash yo‘li bilan n{Av B) - 7 ekanligini aniqlaymiz. Demak, 5 + 2 = 7.

Umuman, a + b yig‘indi n{A) = a, n(B) — b shartni qanoat- lantiruvchi kesishmaydigan A va B to‘plamlarning tanlanishiga bog‘liq emas. Bu umumiy da’voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari, butun nomanfiy sonlar yig‘indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita no­manfiy a va b sonlar olmaylik, ularning yig‘indisi — butun no­manfiy c sonni har doim topish mumkin. U berilgan a va b sonlar uchun yagona bo‘ladi.

Yig‘indining mavjudligi va yagonaligi ikki to‘plam birlashma- sining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig‘indi ta’rifidan foydalanib, «kichik» munosabatiga bosh­qacha ta’rif berish mumkin:

7- t a ’ r i f. Va, b&N uchun a - b + c bo‘ladigan c son topilsa, b < a (yoki a > b) deyiladi.

(Va, *b* G *N)(3c* G *N)(b* < a <\* a = b + *c).*

1.6. Qo‘shish amalining xossalari.

1°. Qo‘shish amali kommutativdir:

(Va, Z>GZV0) (a+b-b+a),

ya’ni ixtiyoriy nomanfiy butun a va b sonlar uchun a + b-b + a tenglik o‘rinli.

I sbo t. a - *n{A), b - n{B) va.A(~\B = 0* bo‘lsin,

61  
a + b = n(AuB) — n(BL) A) = b + a

(to‘plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2°. Qo‘shish amali assotsiativdir:

(Va, *b*, *c* G *Na) a + (b + c) = (a + b) + c).*

Isbot: *a - n{A), b = n(B*), *c = n(C)* va AC\B = 0, BnC — 0, /lnC = 0 bo‘lsin.

a + (b + c) = n(A U (fiUC)),

(a + b) + c = *n((A* U *B)* U C)

to‘plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko‘ra

*A* U *(B* U C) = *(AUB)UC .*

Demak, *a + (b + c) - (a + b) + c.*

3°. 0 ni yutish qonuni:

(Va **G** N0) a +0 **=** a.

Isbot. a + n(A), 0 - n(0), <3 + 0 = n(AV0) = n(A) + a, Av0 = A bo‘lgani uchun.

4°. Qo‘shish amali qisqaruvchandir:

(Va, *b, c E. N0) a = b* o *a + c = b + c.*

Isbot. *a = n(A), b n(B), c - n(C)* bo‘lsin. A - B=>Av C

- By Cbo‘ladi. Qo‘shish amali ta’rifidan N{A) = n(B)=>n(Av Q -

— *n(By Q, a* = 6=>a *+ c = b + c.*

5°. Qo‘shish amali monotondir:

(Va, *b, cGN0) a < b* =>a + *c < b* + *c.*

Isbot. a = n{A), b - n(B) bo‘lsin.

a < b=>A~ B^tzB, bu yerda B^B, B^0, u holda  
*AyC~B{yC* C *Bv C =>a + c < b + c.*

62

«<» munosabati Nn to'plamda qat’iy tartib munosabati bo‘lishini isbot qilamiz. Burring uchun «<» munosabatining tran- zitiv va asimmetrik ekanligini ko'rsatamiz.

a) tranzitivligi: a <bt\b <c boMsin, 7-ta'rifga ko‘ra, shun-

day kva hsonlar topiladiki, b = a + bo‘ladi, bun- dan c - b + h = (a + k) + h vaqo‘shishning assotsiativligiga ko‘ra c - a + (k + h) ekanligini yozish mumkin, bu esa degan

xulosani beradi.

b) asimmetriklikni teskarisini faraz qilish yo‘li bilan isbotlay-

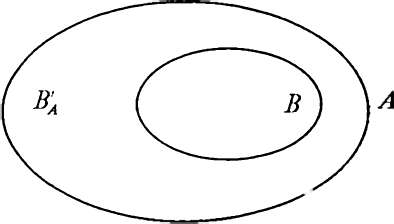
miz. Faraz qilaylik, bir vaqtda a < b va o‘rinli bo‘lsin.

Bundan tranzitivlik xossasiga ko‘ra ekanligi kelib chiqadi,

demak, farazimiz noto‘g‘ri va bir vaqtda va bo ‘ lish i

mumkin emas, degan xulosaga kelamiz.

1.7. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi, uning mavjudligi va yagonaligi.



8-t a ’ r i f. Butun nomanfiy a va b sonlarning *ayirmasi* deb, n(A) - a, n(B) = b va B<zA shartlar bajaril- ganda, B to ‘plamni A to ‘plamgacha

to‘ldiruvchi to'plam elementlari

soniga aytiladi (11.1 - ras m).

a - b = n(Bj), bu yerda a = n(A), b = n(B), BCA.

M i s o 1. Berilgan ta’rifdan foydalanib, 7-4 = 3 bo‘lishini tu- shuntiramiz. 7 — biror A to‘plamning elementlari soni, 4 — shu A to‘plamning qism to‘plami bo‘lgan B to‘plamning elementlari soni bo‘lsin. Masalan: A = {x\ y\ z\ t\ p\ r, 5}, B = {x; y; z\ t) to‘plamlarni olaylik. B to‘plamning A to‘plamgacha to‘ldiaivchisini topamiz:

( B'a) = {p; r\ 5}, n(B'A ) = 3. Demak, 7-4 = 3 bo‘lar ekan. a - bayirma n(A) - a, n(B) = va BCA shartlarni qanoatlan- tiruvchi A va Bto‘plamlarning tanlanishiga bog‘liq emas.

a - n(A), b - n(B) va BcA bo‘ladigan butun nomanfiy a va b sonlar berilgan bo‘lsin va bu sonlarning ayirmasi B to‘plamning A to‘plamgacha to‘ldiruvchisidagi elementlar soni bo‘lsin, ya’ni a ~ b = n(B'A).

Eyler doiralarida A, B, A\Bto‘plamlar rasmda ko‘rsatilganidek tasvirlanadi. A = BvB'Azkani ma’lum, bundan U

BDB'a =0 bo‘lgani uchun biz a-n

-b + (b-a)ga ega bo‘lamiz. Bu esa ayirmaga boshqacha ta’rif berish imkonini beradi.

**63**

9-t a ’ r i f. Butun nomanfiy a va b sonlarning *ayirmasi* deb shun- day butun nomanfiy c songa aytiladiki, uning b son bilan yig ‘indisi a songa teng bo ‘ladi: a-b = c^a = *b+c.*

Shunday qilib, a - b = c yozuvda a — kamayuvchi, b — ayriluvchi, c — ayirma deb ataladi.

Ayirish amali qo‘shishga teskari amaldir. Ayirmaning ikkin- chi ta’rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremalarni isbotlaymiz:

1 -t e o r e m a. Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi b< a botlganda va faqat shunda mavjud bo‘ladi.

Isbo t. Agar a - b boisa, u holda a - b = 0 boiadi va, de- mak, a - b ayirma mavjud boiadi.

Agar b < a boisa, u holda «kichik» munosabati ta’rifiga ko‘ra shunday natural son mavjud boiadiki, bunda a = b + c boiadi. U holda ayirmaning ta’rifiga ko‘ra c = a - b, ya’ni a - b ayirma mavjud boiadi. Agar a - b ayirma mavjud boisa, u holda ayir­maning ta’rifiga ko‘ra shunday butun nomanfiy c son topiladiki, a = b + c boiadi. Agar c = 0 boisa, u holda a = b boiadi; agar c > 0 boisa, u holda «kichik» munosabatining ta’rifiga ko‘ra b < a boiadi. Demak, b < a.

2-teore ma. Agar butun nomanfiy a va b sonlarining ayir­masi mavjud boAsa, u holda u yagonadir.

Isbot. a - b ayirmaning ikkita qiymati mavjud boisin deb faraz qilaylik: a - b = c, va a - b = cr U holda ayirmaning ta’­rifiga ko‘ra a = b + c, va a = b + c2 ga ega boiamiz. Bundan

b + c, = b + c2 va, demak c, = c2 ekani kelib chiqadi.

1.8. YigMndidan sonni va sondan yigindini ayirish qoidalarining to‘plamlar nazariyasi bo‘yicha ma’nosi. Yigindidan sonni ayirish qoidasi: yig'indidan sonni ayirish uchun yig‘indidagi qo‘shiluvchilarning biridan shu sonni ayirish va hosil bo‘lgan na- tijaga ikkinchi qo ‘shiluvchini qo ‘shish yetarli. Bu qoidani simvol- lardan foydalanib yozamiz.

Agar, a, b, c — butun nomanfiy sonlar boisa, u holda:

a) a > c boiganda (a + b) - c - {a - c) + b boiadi;

b) b > c boiganda (a + b) - c = a + (b - c) boiadi;

d) a > c va b > c boiganda yuqoridagi formulalarning ixti- yoriy bittasidan foydalanish mumkin.

a > c boisin, u holda a - c ayirma mavjud boiadi. Uni p orqali belgilaymiz: a — c = p. Bundan a = p + c chiqadi. p + c yigindini {a + b) - c ifodadagi a ning o‘rniga qo‘yamiz va uni shakl almashtiramiz:

**64**

*(a + b) — c = (p + c + b) — c-p + b + c — c - p + b.*

Biroq p harfi orqali a — c ayirma belgilangan edi, demak, is- botlanishi talab etilgan (a + b) - c - (a - c) + b ifodaga ega bo‘lamiz.

Sondan yig’indini ayirish qoidasi: sondan sonlar yig'indisini ayirish uchun bu sondan qo‘shiluvchilarning birini, ketidan ikkin- chisini ketma-ket ayirish yetarli, ya’ni agar a, c, b — butun no- manfiy sonlar bo‘lsa, u holda a>b + c bo'lganda a - c(b +c) = = (a - b) - c ga ega bo'lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi va uning nazariy-to‘plam tasviri yig‘indidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlang'ich maktabda aniq misollarda qaraladi, asoslash uchun ko‘rgazmali chizmalar, tasvirlar namoyish etiladi.

Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi. Masalan, sondan yig‘indini ayirish qoidasi sonni bo'laklab ayirish usuliga asos bo'ladi: 5-2 = 5 — (1 + 1) = (5—1)-1=4-1 = 3.

1.9. Nomanfly butun sonlar ko‘paytmasi, uning mavjudligi va yagonaligi. a - n{A) va b = n(B) bo'lgan a va b nomanfiy butun sonlar berilgan bo'lsin.

10-t a ’ r i f. *a va b* nomanfiy butun sonlar ko ‘paytmasi deb, Ax-B dekart ko ‘paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi. Bu yerda A xB= *{(a,b) \* fl£/l,Z>£.5}ekanini eslatib 0‘tamiz. Demak, ta’rifga ko‘ra:

*a ■ b - n(A* x *B) - c,* bu yerda *a, b, c* G jV0 ,

a - b - c yozuvda a - 1-ko‘paytuvchi, b - 2-ko‘paytuvchi, c — ko‘paytma deyiladi, cEN0 sonni topish amali esa ko‘paytirish deyiladi.

Masalan, ta’rifga ko‘ra 5 • 2 ko‘paytmani topaylik. Buning uchun n{A) - 5 va n(B) - 2 bo'lgan A - {a; b\ c\ d\ e}, B - {1; 2} to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini tuzamiz:

A xB={(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1), (c; 2), (d- 1), (</; 2), (e; 1), (e; 2)}. Dekart ko‘paytma elementlari soni 10 ta bo'lgani uchun 5 • 2 = 10.

3-teorema. Ikkita nomanfiy butun son ko‘paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko‘paytmaning mavjudligi va yagonaligi berilgan sondagi ele- mentlardan tashkil topgan to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini

65

tuzish har doim mumkinligi va dekart ko‘paytma elementlari soni to‘plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog‘liq emasligi bilan isbotlanadi.

1.10. Ko‘paytirish amalining xossalari.

1°. Ko‘paytirish amali kommutativdir:

(Va, b e Nq) ab = ba.

Isbot. a = n(A) vab = n(B), A n B = 0bo‘lsin. AxB^BxA, shunga qaramay, AxB~BxA (bunda istalgan(a, b) e A x B juft- likka (b, a)EBxA juftlik mos keltiriladi):

*A\*B~BxA=> n{A x B)* = *n(B* x *A)* ,

*ab — n{A* x *B) = n(BxA) = ba* => *ab = ba.*

2°. Ko‘paytirish amali assotsiativdir:

(Va, *b, c Ei N0) (ab)c = a{bc).*

I sb o t i. (ab)c - n(A), b - n{B), c = n(Q va A, B, C lar juft- juft i bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin:

*(ab)c - n((Ax B)xQ* va *a(bc) = n(Ax(B\* Q).*

Yuqoridagi dekart ko‘paytmalar doirasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish yo‘li bilan (AxB)xC~Ax{BxQ ekanini ko‘rsatish mumkin (kombinatorika bo‘limidagi ko‘paytma qoidasini eslang). Demak:

*(ab)c* = *n((Ax B)x C) = n(Ax(Bx* Q) = *a(bc).*

3°. Ko‘paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi:

(Va, *b, c* GA^0) (a + *b)c = ac + be.*

Isbot. a-n(A), b = n(B), c - n(Q va A, B, Clar juft-jufti bilan kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lsin. To‘plamlar nazariyasidan ma’lumki, (A U B)xC - (A xC)U(BxC) va ADB = 0 =>(AxC)D D(BxC)-0 chunki, Ax C va Bx C dekart ko‘paytmalar element­lari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

(a + *b) ■ c* = *n((A* U *B) x C) = n((A x C)* U *(B x C)) =*

= *n(A xC) + n(BxC) = ac + be.*

66

Demak, (a + b)c = ac + be.

4°. Yutuvchi elementning mavjudligi:

(Va £ /V0) a- 0 = 0.

I shot, a = n(A), 0 = n(0) bo‘lsin. ,4\*0 = 0 ekanligidan  
<3X0 — «(,4 x 0) — «(0) = 0 .

5°. Ko‘paytirish amalining monotonligi:

(Va, *b, c E. N0, c \** 0) *a > b* ac>bc\

*(Va,b,cEN0)* a>b=>ac>bc\

*(Va,b,cEN0, c\**0) *a<b^>ac<bc.*

I shot. Namuna uchun 1-jumlani isbotlaymiz. a > b=> B~A, CA, bu yerda n(A) - a, n(B) - b, A^0, A^A. U holda B\*C~{AxC)<Z{AxC).

Demak, *n(B xC) —* «(/!, *xC)<n(A* xC)=>bc<ac.

6°. Ko‘paytmaning qisqaruvchanligi:

(Va, b, *c* £ *N0, c* \* 0) ac *=* be=> *a =* b.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik: a^b bo‘lsin. U holda yoki a < b, yoki a > b boiishi kerak. a < b bo‘lsa, ac < be bo‘lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, a = b ekan.

Ko‘paytmaga yig‘indi orqali ta’rif berish ham mumkin. 11-ta’rif. a, *bEN0* bo‘lsin. a sonning b soniga *ko>‘paytmasi* deb, har biri a ga teng bo‘lgan b ta qo‘shiluvchining yig‘indisiga aytiladi.

ab = a + a H l-a.

^ v '

b maria

Bundan a • 1 - a va a - 0 = 0 ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta’rif a - n(A), b - n(B), Aa B — 0 boigan Ax B dekart ko‘paytma elementlarini sanash ma’lum bir qonuniyatga asosla- nishiga bog‘liq.

M i s o 1. *A = {a; b\ c}, B -* {x; *y\ z\* /}.

AxB dekart ko‘paytmani quyidagi jadval ko‘rinishida yozamiz:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (a\ x) | (a; y) | (a\ z) | (a ', t) |
| (b; x) | (b; y) | (b\ z) | (b \ t) |
| (c; x) | (c \ y) | (c, z) | (c, 1) |

67

Dekart ko‘paytma elementlarini ustunlar bo’yicha sanasak, 3x4 = 34-3 + 3 + 3 = 12 ga ega bo‘lamiz.

1.11. Nomanfly butun sonlar boMinmasi, uning mavjudligi va yagonaligi. Nomanfiy butun sonlar to’plamida bo‘lish amalini ta'riflash uchun to‘plamni sinflarga ajratish tushunchasidan foy- dalaniladi.

Quwati a ga teng boflgan A to’plamni teng quwatli sinflarga ajratish mumkin boflsin.

12- t a ’ r i f. Agar b soni A to ‘plamni qismlarga ajratishdagi qism to‘plamlar soni bo‘Isa, a va b nomanfiy butun sonlar *boHinmasi* deb, har bir qismdagi elementlar soni c ga aytiladi.

Agar b soni A to‘plamni sinflarga ajratishdagi har bir qism elementlari soni boflsa, a va b sonlar bo‘linmasi deb, qism to’plamlar soni c ga aytiladi.

Nomanfiy butun a va b sonlar boflinmasini topish amali bo‘lish, a — bo‘linuvchi, b — bo‘luvchi, a : b — bo‘linma deyiladi. Boflish ta’rifiga ko‘ra boflishga oid masalalar ikki turga ajraladi:

1) mazmuniga ko‘ra boflish; 2) teng qismlarga ajratish.

1- turga oid masala: 48 ta qalam 6 ta qutichaga baravardan solingan bo‘lsa, har bir qutichaga nechtadan qalam joylangan?

2- turga oid masala: 48 ta qalam 6 tadan qilib qutichalarga solingan bo‘lsa, nechta quticha kerak bofladi?

Boflishni ko‘paytirishga teskari amal sifatida ham ta’riflash mumkin:

13- ta’rif. a va b *nomanfiy butun sonlar boHinmasi* deb, a - be tenglik bajariladigan c nomanfiy butun songa aytiladi.

Boflishning mavjudligi haqidagi masala n(A) = a boflgan A to‘plamni teng quwatli qism to‘plamlarga ajratish mumkinligi masalasi bilan bogfliq. Agar A to‘plamni berilgan b sondagi yoki quvvatdagi sinflarga ajratish mumkin bo‘lsa, a ning b songa boflinmasi mavjud bofladi.

4- t e o r e m a. a sonining b songa boilinmasi mavjud boUsa, u yagonadir.

I s b o t. Haqiqatan ham, a : b = c va a : b = d va d son c sondan farqli boflsin. Ta’rifga ko‘ra a = be va a = bd. Bundan be = bd va ko‘paytmaning qisqaruvchanligiga ko‘ra c = d ekanligi kelib chiqadi.

5- teorema. a nomanfiy butun son b natural songa boil inis hi uchun a son b sondan kichik boHmasligi zarur.

I s b o t i. a va b natural sonlarning boflinmasi mavjud boflsin, ya’ni a - be shartni qanoatlantiruvchi c natural soni topilsin.

68

Istalgan c natural son uchun 1 < c da’vo o‘rinli. Ko‘paytmaning monotonligiga ko‘ra b • 1 < b -c, be = aAb 1 = b ekani hisobga olinsa, b < a ekani kelib chiqadi.

Lekin b < a shartning bajarilishi a : b bo'linma mavjud bo‘lishi uchun yetarli emas.

Masalan, 3 < 19, lekin 19 soni 3 ga bo‘linmaydi. Bunday hollarda qoldiqli bo‘lish haqida gapiriladi. Agar b < a va a soni b ga bo‘linmasa, shunday q, r natural sonlar topiladiki, r< b bo‘lib, a = bq + r va tenglik bajariladi. (a; b) juftlik uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi (q; r) sonlarning topilishi a ni b ga qoldiqli bo‘lish deyiladi. Bu yerda q — to'liqsiz boTmma va r — qoldiq deyiladi, a : b = q (r qoldiq) shaklida yoziladi.

0 ni va 0 ga bo‘lish masalasiga alohida to‘xtab o‘tamiz. a = 0 va b \* 0 holida 0 : b = 0 tenglik bajariladi, chunki 0 = bO. Demak, 0 ning 0 dan farqli istalgan songa bo‘linmasi 0 ga teng. Lekin 0 ga bo‘lish amali aniqlanmagan. Faraz qilaylik, noldan farqli a sonning 0 ga bo‘linmasi mavjud va u c songa teng bo‘lsin, ya’ni a \* Oao : c. Bundan a = 0 • c = 0 qarama-qarshilik kelib chiqadi. 0 : 0 = c bo‘lsin, bu holda 0 = 0 c tenglik istalgan c son uchun o‘rinli bo‘ladi, bu esa amal natijasi yagona bo‘lish shartiga zid.

1.12. Bo‘lish qoidalari.

1) Yig‘indini songa bo‘lish qoidasi. Yig‘indini songa boTish uchun, agar bo‘linsa, har bir qo ‘shiluvehini shu songa boTib, na- tijalarni qo ‘shish kerak:

{a + b) : c - a : c + a : b

48 : 3 = (30 + 18) : 3 = 30 : 3 + 18 : 3 = 10 + 6 = 16.

2) Ko‘paytmani songa bo'lish qoidasi. Ko'paytmani songa bo ‘lish uchun, agar bo ‘linsa, ko ‘paytuvchilardan birini shu songa bo ‘lib, natijani ikkinchi songa ko ‘paytirish kerak:

(a • b) : c = (a : c) • b = a • (b : c)

75 : 5 = (3 • 25) : 5 = 3 • (25 : 5) = 3 • 5 = 15.

3) Sonni ko‘paytmaga bo‘lish qoidasi. Sonni ko‘paytmaga bo‘lish uchun, agar bo‘linsa, sonni avval ko‘paytuvchilardan biriga, so‘ng ikkinchisiga bo‘lish yetarli.

a : (b • c) - (a : b) : c - (a : c): b.  
105 : (5 -7) = (105 : 5) : 7 = 21 : 7 = 3.

69

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. To'plam nazariyasiga asoslanib **4<5,** 7 > 3, 4 = 4 ekanligini ko'rsating.

2. Arifmetik amallarning to'plam nazariyasiga ko'ra ta’rifiga asoslanib, 2 + 4, **6-4, 3-4 10:2** ni hisoblash yo'lini ko'rsating.

3. Ifoda qiymatini eng qulay usul bilan hisoblang va bunda arifmetik amallarning qanday qoidalaridan foydalanganingizni tushuntiring:

|  |  |
| --- | --- |
| a) 76+19+24+81 | e) 213-5 |
| b) (3828+1562)—828+1438 | 0 4-8-9-25-125 |
| d) 76 : 4 | g) 87-11 |

4. Quyidagi masalalarni yechish amalining tanlanishini tushuntiring:

a) 3 qiz atlas ko'ylakda, 4 qiz oq ko'ylakda raqsga tushdi. Bu raqsda nechta qiz qatnashdi?

b) 1-«A» sinfda a’lochi o'quvchilar 5 ta, 1-«B» sinfda undan 3 ta ortiq. «B» sinfda nechta a’lochi o'quvchi bor?

d) Maktab bog'iga 10 tup ko'chat o'tqazildi. Shundan 7 tasi olma, qolgani o'rik daraxti. Nechta o'rik daraxti o'tqazilgan?

e) To'qish to'garagiga 12 o'quvchi qatnashadi, naqsh to'garagiga qatnashuvchilar undan 3 ta kam. Naqsh to'garagiga nechta o'quvchilar qatnashadi?

0 Bitta paltoga 6 ta tugma qadaladi. 4 ta shunday palto uchun nechta tugma kerak bo'ladi?

g) Nigorada 5 ta rangli qalam bor, Sardorda undan 3 marta ko'p. Sardorda nechta qalam bor?

h) 10 ta daftar 5 o'quvchiga teng bo'lib berildi. Har bir o'quvchi nechtadan daftar olgan?

i) Durdona 12 tuvakda gul o'stirmoqda. Hilolaning gullari undan 3 marta kam. Hilolada nechta gul bor?

2-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMINI  
AKSIOMATIK QURISH

2.1. Peano aksiomalari. Natural sonlar nazariyasini aksioma- tik qurishda Peano (1858—1932) ta’riflanmaydigan tushuncha sifatida «natural son» va ta’riflanmaydigan munosabat sifatida «...dan keyin keladi» degan munosabatni asos qilib olgan.

Peano aksiomalari quyidagilar:

I. Hech qanday sondan keyin kelmaydigan 1 soni mavjud.

Bu aksiomadan ko‘rinadiki, natural sonlar to‘plamida birin- chi element aniqlangan bo‘lib, u 1 sonidan iboratdir.

70

II. Har qanday a son uchun undan keyin keladigan birgina a' soni mavjud. Ya hi a — b bo‘lsa, a' = b' bo‘ladi.

Bu aksioma natural sonlar to‘plamining cheksiz ekanligini ifodalaydi. Haqiqatan ham, natural sonlar to‘plami cheksiz, chun- ki istalgan natural sondan bevosita keyin keladigan natural son mavjud.

III. Istalgan son bevosita bittadan ortiq bo ‘Imagan sondan keyin keladi, ya’ni a' = b' dan a - b ekanligi kelib chiqadi.

Bu aksiomadan ko‘rinadiki, berilgan natural sondan navbat- dagi songa bir necha marta o'tilganda ham bari bir faqat va faqat bitta sonning o‘zi keladi, chunki aks holda navbatdagi son hech bo'lmaganda ikkita sonning ketidan kelgan bo‘lar edi. Demak, natural sonlar to‘plami qat’iy tartiblangan to‘plamdir.

IV. Agar biror S qoida 1 soni uchun o'rinli ekanligi isbotlan- gan bo ‘Isa va uning n natural soni uchun o ‘rinli ekanligidan nav­batdagi natural son n + 1 uchun to‘g‘riligi kelib chiqsa, bu S qoida barcha natural sonlar uchun o‘rinli bo 'ladi.

Bu aksioma matematik induksiya aksiomasi deyiladi va unga matematik induksiya metodi asoslanadi.

Natural sonlar to'plamidagi barcha sonlar uchun «tenglik» mu- nosabati quyidagi xossalarga ega:

1°. Refleksivlik xossasi. Har qanday natural son o ‘z-o ‘ziga teng- dir, ya’ni

(VoGTV) (a - a).

2°. Simmetriklik xossasi. Agar har qanday a natural son b na­tural songa teng bo ‘Isa, u holda b natural son a natural songa teng bo ‘ladi, ya hi

(Va, *bGN)* *(a* = b => b = *a).*

3°. Tranzitivlik. Agar a natural son b natural songa, b natural son c natural songa teng bo ‘Isa, u holda a natural son c natural songa teng bo ‘ladi, ya hi

(Va, b, *cGN)* (a = *b, b-c=>a — c).*

2.2. Matematik induksiya metodi. Matematik induksiya me- todini bilish matematika fanini chuqur egallash, uning ichki sir-

71

larini chuqur anglab yetishda muhim o‘rin tutadi. Deduktiv va induktiv mulohaza yuritish umumiy xulosa chiqarishda har doim ham qo‘l kelavermaydi. Chunki ko‘p hollarda cheksiz ko‘p xususiy hollarni ko'rib chiqqandan so‘nggina, umumiy xulosa chiqarish mumkin bo‘ladi. Umumiy xulosa chiqarishda matematik induk- siya metodi eng qulay va oson metod hisoblanadi. U quyida- gilardan iboratdir:

I. n = 1 uchun berilgan A(n) predikatning rostligi tekshiriladi. (Agar n = 1 uchun berilgan A{n) predikat rost bo'lsa, navbatdagi qadamga o'tiladi, aksincha bo‘lsa, u holda berilgan predikat barcha n lar uchun yolg'on deb, umumiy xulosa chiqariladi.)

II. n = k uchun A(n) predikat rost deb faraz qilinadi.

III. n = k+ 1 *uchun A(n) predikatning* rostligi, ya’ni *A(k)* => *A(k* + 1) isbotlanadi. Shundan so‘ng, A(n) predikat n ning barcha qiymatlarida rost deb umumiy xulosa chiqariladi.

M i s o 11 a r. a) 1+2+3 + ...+n=n(,n^ predikat berilgan bo‘lsin. Uni A(n) deb belgilaymiz va barcha natural sonlar uchun rostligini isbot qilamiz.

Isbot. I. n= 1 uchun tekshiramiz, u holda

Demak, n = 1 uchun A{n) predikat rost.

II. n **=** k uchun 1 + 2 + 3+ ... + A: = -^+1) ni, ya’ni A(k) predi-

katni rost deb taraz qilamiz. “

III. n = k + 1 uchun A(k + 1) predikatning rostligini, ya’ni

l+2 + 3 + ... + A: + A: + l =^± + k+l to‘g‘riligini isbotlaymiz:

l + 2 + 3 + ... + /t + (A: + l) = M^t!2+(£+l) =

&(&+l)+2(&+l) \_ (&+l)(&+2) \_ (&+l)[(&+l)+l]

2 2 2 '

Bu esa A{k + 1) mulohazaning o‘zidan iboratdir. Demak, A(n) predikat n ning barcha qiymatlarida rost.

72

b) («3 + 2ri): 3 ekanligini matematik induksiya metodi yorda- mida isbotlang.

Yechish. I. n = 1 da l3+21 = l + 2 = 3=>3:3.

II. n - k da(k3 + 2k):3 deb faraz qilaylik.

III. n = k+ 1 da[(£ + 1)3 + 2(k +1)]:3 ekanligini isbotlaymiz.

I sb o t.

*(k* + \?+2(k + \)=k} *+3k2 +3k + \+2k + 2 =*

*= (k3 + 2k) + (3k2 + 3k + 3)-(k3 + 2k) + 3- (k2 + k + \).*

Bu yig‘indi 3 ga karrali, chunki birinchi qo‘shiluvchi (k3 + 2k): 3 — farazga asosan, ikkinchi qo'shiluvchi 3 ga karrali ekanligi ko‘rinib turibdi: 3 • (k2 + k + 1):3. Demak,(«3 + 2«):3 bo‘ladi.

d)(«3 +11«):6 bo‘lsa, uni matematik induksiya metodi yor- damida isbotlang.

Yechish. I. n = 1 da 13+111 = 1 + 11 = 12=>12:6.

II. n - k da(A3 +1 l/t):6 deb faraz qilaylik,

III. n-k + 1 da [(£+l)3+ll(yt+l)]:6ni isbotlaymiz.

Isbot. (£+ l)3 + ll(yt+ 1) = A:3+ 3k2 + 3k + 1 + lk+ 11 =

= (A:3 + 12 A:) + (3k2 + 3 k+ 12) = (k1 + 12 k) + 3 (k2 + k + 4).

Bunda (k +12)16 — farazga asosan, 3 • [k2 + k + 4] — bu ifo- daning 3 ga karrali ekanligi ko‘rinib turibdi, (k2 + k + 4) ifoda esa 2 ga karrali. Demak,(«3 + 11«):6 bo‘ladi.

2.3. Natural sonlarni qo‘shish va uning xossalari. Qo‘shish amalining ta’rifi German Grossman (1809—1877) tomonidan be- rilgan qo‘shish amalining induktivlik ta’rifiga asoslanadi. Bu ta’rif ikki qismdan iborat bo‘lib, quyidagicha:

1) ixtiyoriy a natural songa 1 ni qo ‘shish, bevosita a dan keyin keladigan sonni beradi. Ya’ni *(VaGN) (a +* 1 *- a').*

*2)* a + b’ amali, a songa bevosita b sondan keyin keladigan b' sonni qo ‘shish natijasida a + b sondan bevosita keyin keladigan natural (a + b)’ sonni beradi. Ya’ni (Vo, *b£N) [(a + b)' —* = *(a + b) +* 1 ].

Peanoning ikkinchi aksiomasidan ma’lumki, n — natural son bo‘lsa, n + 1 ham albatta natural son bo‘ladi. Bunda a va a + b lar natural son bo‘lganda a + b' = (a + b)’ ham natural son bo‘lishi kelib chiqadi. Shuningdek, a + 1 = a' dan Peanoning

73

4-aksiomasiga asosan a natural son bilan b natural sonning yig‘indisi to‘la aniqlangan va natural sondan iborat bo‘ladi.

Demak, qo‘shish amali natural sonlar to'plamida hamma vaqt bajariladigan bir qiymatli amal ekan.

Natural sonlarni qo‘shish ta’rifidan ko‘rinadiki, har qanday natural son o‘zidan oldingi natural son bilan birning yig‘indisiga teng bo‘lar ekan. Ya’ni

2=1 + 1,

3 = 2+1,

4 = 3+1,

5 = 4+1,

6 = 5 + 1,

7 = 6+1,

8 = 7+1,

9 = 8+1

bo‘ladi. Natijada biz 1 ni qo‘shish jadvalini hosil qildik. Endi 2 ni qo‘shish jadvalini tuzaylik:

2 + 2 = 2 + (l + l) = (2+l) + l= 3 + l = 4. Demak, 2 ni qo‘shish jadvali:

1 + 2 = 1+ (1 + 1) = (1 + 1)+ 1 = 2+ 1 = 3,

2 + 2 = 2 + (l + l) = (2 + l) + l = 3 + l = 4,

3 + 2 = 3 +(1 + 1) = (3+1)+ 1 = 4 +1 = 5,

4 + 2 = 4 + (l + l) + (4 + l) + l = 5+l = 6.

3 ni qo‘shish jadvalini tuzsak:

1+3 — l + (2 + l) — (l + 2) + l — 3 +1—4,

2 + 3 = 2 +(2 + 1) = (2 + 2)+ 1 = 4+1 = 5, 2 + 4 = 2 +(3+1) = (2 + 3)+ 1 = 5 +1 = 6.

Xuddi shu yo‘l bilan bir xonali sonlarni qo‘shish jadvalini tuzishimiz mumkin. Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, agar natural sonlar qatorida a dan bevosita keyin keladigan b ta sonni sana- sak, natijada oxiri sanalgan son a va b sonlarning yig‘indisi bo‘ladi va u a + b ko‘rinishda belgilanadi. Bunda a — birinchi qo‘shiluvchi, b — ikkinchi qo ‘shiluvchi, a + b esa yig'indi deb yuritiladi.

74

Qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Guruhlash (assotsiativlik) xossasi.

(Vo, b, cGN) [(a + ZH-c) = a + (Z? + c)].

Bu xossani matematik induksiya metodi yordamida isbotlaylik. I s b o t. 1) c - 1 bo‘lsin. U holda (a + b) + 1 - a + (b + 1) (ta’rifga asosan).

Demak, c = 1 uchun guruhlash xossasi o‘rinli.

2) c = n uchun (a + b) + n = a + (b + n) o‘rinli deb faraz qilaylik.

3) c = n + 1 uchun bu xossaning to‘g‘riligini isbotlaylik.

(a + b) + (n + 1) = [(a + b) + n] + 1 = (ta’rifga asosan).

= [a + (b + «)] + 1 = (farazga asosan)

= a + [{b + n) + 1] = (ta’rifga asosan) a - [b + (n + 1)] (ta’rifga asosan).

Demak, *(a + b) + (n +* 1) = *a* + *\b + {n +* 1)].

Peanoning 4-aksiomasiga asosan, (a + b) + c - a + (b + c) ekanligi kelib chiqadi.

2°. 0‘rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

(Vo, *b£N) (a + b = b + a).*

Bu xossani ham matematik induksiya metodidan foydalangan holda isbotlaymiz.

Isbot. 1) a = 1 bo‘lsa, 1 + b - b + 1 bo‘lishini isbotlaylik. b = 1 bo‘lsa, 1 + 1 = 1 + 1 bo‘ladi. Demak, b = 1 uchun 1 + b - b + 1 tenglik to‘g‘ri.

b = n uchun 1 + n = n + 1 to‘g‘ri deb faraz qilaylik. b - n + 1 uchun 1 + (n + 1) = (n + 1) + 1 to‘g‘riligini isbot­laymiz.

1 + (n + 1) = (1 + n) + 1 = (ta’rifga asosan)

= (n + 1) + 1 (farazga asosan).

Demak, 1 + (n + 1) = (n + 1) + 1 bo‘ladi.

Endi yuqoridagi xossa VoGTV uchun o‘rinli ekanligini isbot­laylik.

a= 1 uchun o‘rinli ekanligini ko‘rdik. a = m uchun m + b = b + m deb faraz qilaylik.

75

a - m + 1 uchun (m + 1) + b - b + (m + 1) ekanligini isbot- laylik. U holda

(m + 1) + = m + (1 + b) - m + (b + 1) = (1 °-xossaga

asosan)

= (m + b) + 1 = (ta’rifga asosan)

= (b + m) + 1 = b + (m + 1) (farazga asosan).

Demak, a + b - b + a (4-aksiomaga asosan).

2.4. Ayirish amalining ta’rifi va xossalari. Aytaylik, bizga ik- kita qo‘shiluvchining yig‘indisi a va qo‘shiluvchilardan biri b be- rilgan holda ikkinchi qo‘shiluvchini topish talab qilinsin. De­mak, shunday x sonini topish kerakki, bunda a - b + x bo'lsin.

1-t a ’ r i f. Berilgan a sondan b sonni *ayirish* deb, b ga qo ‘sh- ganda a hosil bo ‘ladigan x sonni topishga aytiladi.

Bunda: a — kamayuvchi; b — ayiriluvchr, x — ayirma deb yuritiladi va x - a - b ko ‘rinishda yoziladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchi bilan ayirma- ning yig‘indisidan iborat bo'ladi. Demak, a - b - x=>a - b + x. Bundan ko‘rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchidan katta bo‘ladi, ya’ni a > b. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida kamayuvchi ayiriluv­chidan katta yoki unga teng bo'lgan holdagina ayirish amali aniqlangan bo‘ladi. Ya’ni a > b bo‘lgan holda a - b ayirma mavjud bo‘ladi.

Ayirish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar ikki sonning ayirmasiga ayiriluvchi qo‘shilsa, kama­yuvchi hosil bo ‘ladi, ya hi a — b = c bo ‘Isa, a - b + c bo ‘ladi.

I s b o t. Ta’rifga asosan a = b + c yoki c + b - a. Lekin

c = a- *b=>c + b = (a-b) + b=a.*

2°. Agar ikki son yig ‘indisidan qo‘shiluvchilardan biri ayirilsa, ikkinchi qo ‘shiluvchi hosil bo ‘ladi, ya hi

(Va, *bGN)[(a* + *b)* - b - *a].*

3°. Berilgan songa ikki sonning ayirmasini qo‘shish uchun ka- mayuvchini qo ‘shib, ayiriluvchini ayirish kifoya, ya hi

(Va, b, c£A0[a + (b - c) - (a + b) - c).

76

4°. Berilgan sondan yig‘indini ayirish uchun bu sondan qo ‘shiluvchilarni birin-ketin ayirish kifoya, ya’ni

(’ia, b, G/V)[(a - (b + c) = a - b — c].

5°. Berilgan sondan ayirmani ayirish uchun kamayuvchini ayirib, ayiriluvchini qo'shish kifoya, ya'ni

('ia, b, *c€:N)\a* — (b — c) = (a — b) + c].

2.5. Natural sonlarni ko‘paytirish amali ta’rifi va xossalari. Har

biri a ga teng bo‘lgan b ta natural son yig‘indisi a+a + a + ... + a ni

b ta

topish talab qilingan bo‘lsin. Bunday ko‘rinishdagi yig‘indini hisoblash ko‘p hollarda amaliy jihatdan qiyinchilik tug‘diradi. Shuning uchun bir xil qo‘shiluvchilar yig‘indisini topishni oson- lashtirish maqsadida yangi amal kiritiladi. Bu amal ko‘paytirish amali deb yuritiladi.

2- ta’rif. Har biri a ga teng bo‘lgan b ta qo‘shiluvchining yig ‘indisini topishga koipaytirish amali deyiladi.

U axb yoki a ■ b ko‘rinishda belgilanib, a sonining b soniga ko‘paytmasi deb ataladi.

Demak, a ■ b-a+a + a + ... + a . Bunda a ■ b — ko ‘paytma, a, b —

^ v '

b ta

ko ‘paytuvchilar deb yuritiladi.

Ko‘paytirish amalining aksiomatik ta’rifi quyidagicha:

3- t a ’ r i f. a natural sonining b natural soniga koipaytmasi deb, shunday algebraik operatsiyaga aytiladiki, undo

1) a - 1 = a,

2) a • (b + 1) = a • b + a bo ‘ladi.

Bu ta’rif yordamida bir xonali sonlar uchun ko‘paytirish jad- valini tuzishimiz mumkin.

Masalan, a) 2 ni ko‘paytirish jadvalini tuzaylik:

2-1=2

2-2 = 2- (l + l) = 2- l + 2 = 2+ 2=4 2-3 = 2-(2 + l) = 2- 2 + 2 = 4 + 2 = 6 2-4 = 2-(3 + l) = 2- 3 + 2 = 6 + 2 = 8

77

b) 3 ni ko‘paytirish jadvalini tuzaylik:

3-1=3

3 • 2 = 3 • (1+1) = 3 1 + 3 = 6

3-3 = 3-(2 + l) = 3-2 + 3 = 6+3 = 9 3 ■ 4 = 3 ■ (3 + l) = 3 • 3 + 3=9+3 = 12

Ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. D i s t ri bu t i v 1 ik xossasi (chapdan). a-(b + c) -

- a • b + a • c, ya’ni natural sonning boshqa ikki natural son yig‘indisiga ko‘paytmasi, shu sonning har bir qo‘shiluvchi bilan ko ‘paytmasining yig ‘indisiga teng.

Isbot. Bu xossani isbotlashda matematik induksiya metodi- dan foydalanamiz.

c - 1 uchun a - (b + l) = a - b + a - \ = a - b + a to‘g‘ri bo‘ladi.

c = n uchun a • (b + n) - ab + an to‘g‘ri deb faraz qilamiz.

c = n + 1 uchun bu xossaning to‘g‘riligini isbotlaymiz.

a • (b + n + 1) = a • [(6 + n) + 1] = a(b + n) + a • 1 = [ta’rifga asosan) - ab + an + a - [farazga asosan) = ab + a(n + 1) = [ta’­rifga asosan).

Demak, a • (b + c) - ab + ac bo‘ladi.

2°. Distributivlik xossasi (o‘ngdan). (a + b) ■ c -

- a ■ c + b - c bo‘ladi, ya’ni ikkita son yig‘indisining uchinchi son bilan *ko‘paytmasi,* *har* bir sonning uchinchi son bilan ko‘paytmasining yig ‘indisiga teng.

Isbot. Buni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

c — 1 uchun (a + b) • c = (a + b) • 1 = a + b = a ' 1 + b • 1 to‘g‘ri bo‘ladi.

c = n uchun (a+b)-n = a-n + b- n to‘g‘ri deb faraz qilamiz.

c = n + 1 uchun (a + b) • (n + 1) ni to‘g‘ri bo‘lishini isbot­laymiz.

*(a + b)(n* + 1) - *(a* + *b)* • n + *(a* + *b)* = (ta’rifga asosan)

= an+bn + a+ b = (farazga asosan) -an + a + bn + b = (yig‘indining o‘rin almashtirish xossasiga asosan) = a(n + 1) + + b(n + 1) (ko‘paytirish ta’rifiga asosan).

Demak, (a + b)(n + 1) uchun yuqoridagi xossa to‘g‘ri ekan. Bundan (a+b)-c=a-c+b-c bo‘ladi.

78

3°. K o 1 p a y t i r i s h n i n g o‘rin almashtirish x o s s a s i. a • b + *b-* c, ya’ni ko ‘paytuvchilarning o ‘mini o ‘zgartirish bilan ko ‘paytma o‘zgarmaydi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yorda- mida amalga oshiramiz.

a + 1 uchun 1 • b = b = b • 1 bo‘lib, bu xossa o‘rinli boiadi.

a = n uchun n - b — b - n deb faraz qilaylik.

a = n + 1 uchun to‘g‘ri ekanligini isbotlaylik.

a - b - (n + 1 )• b - nb + 1 • b = (ko‘paytirishning chapdan dis- tributivlik xossasiga asosan) = b • n + b = (farazga asosan) = b- (n + 1) (ko‘paytirishning o'ngdan distributivlik xossasiga asosan).

Demak, (h + 1)6 = b • (n + 1). Bundan a - b - b- a ekanligi ke- lib chiqadi.

4°. K o ‘ p a y t i r i s h n i n g guruhlash xossasi. a-b = b-a bo‘ladi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yorda- mida isbotlaymiz.

(a • b) • 1 = ab = a • (b • 1) to‘g‘ri bo‘ladi.

c = n uchun {a • b) • n - a • (b • n) deb faraz qilamiz.

c = n + 1 uchun to‘g‘riligini isbotlaymiz.

(a • b) • (n + 1) = (a • b) • n + ab - {ko ‘paytirish ta ’rifiga aso­san) = a • {b • n) + a • b = (farazga asosan) = a{b • n + b) = -a(b-(n+ 1)) (ko‘paytmaning distributivlik xossasiga asosan).

Demak, {a • b){n + 1) = a{b{n +1)). Bundan {a • b)c = a(b • c).

N a t i j a. Har qanday natural sonning 0 soni bilan ko ‘paytmasi nolga teng.

Haqiqatan ham, 0 ■ a = 0 + 0 + 0 + ... + 0 = 0.

a ta

2.6. Natural sonlarni bo‘lish ta’rifi va xossalari.

4-t a ’ r i f. Ikki ko ‘paytuvchining ko ‘paytmasi va bir ko ‘paytuvchi berilgan holda ikkinchi ko ‘paytuvchini topish amali *boyish* amali deyiladi.

Bunda berilgan ko‘paytmani ifodalovchi son — bo'linuvchi, berilgan ko‘paytuvchi — bo‘luvchi, izlanayotgan ko‘paytuvchi — bo'linma deyiladi.

Agar a — ko‘paytma, b — berilgan ko‘paytuvchi, c — izlana­yotgan ko‘paytuvchi bo‘lsa, u bo'lish amali yordamida ^ = cyoki

b

a:b = c ko‘rinishda belgilanadi. Ta’rifdan ko‘rinadiki, bo‘lish amali ko‘paytirish amaliga teskari amal ekan.

79

Bo‘lish amali bir qiymatlidir. Masalan, a) 9:3 = 3; b) 21:7 = 3; d) 111 : 3 = 37 .

Bo‘lish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. Ko‘paytmani noldan farqli biror songa bo‘lish uchun ko ‘paytuvchilardan birini shu songa bo‘lish *kifoya,* ya’ni *(a* - *b)* : c - *(a* : c)b, bunda a : c bo‘ladi, ya’ni a soniga butun marta bo‘linadi.

I s b o t. {a • b) : c — x desak, a • b = c • x. Lekin, (a : b) • c = x bo‘ladi.

U holda (a : c) • cb = cx => {a : c) • b - x => (a : c) • b - (ab): c bo‘ladi.

2°. Biror sonni ikki sonning bo ‘linmasiga ko ‘paytirish uchun shu sonni bo‘linuvchiga ko‘paytirish va hosil bo ‘Igan ko‘paytmani bo‘luvchiga bo'lish kifoya, ya’ni *(Va, b, cEN)[a(b: c) - (ab)* : *c].*

I s b o t. a • (b : c) - x bo‘lsin.

Tenglikning ikkala tomonini c ga ko‘paytirsak, a - (b : c) • c - xc bo‘ladi.

Lekin (b : c) • c = b bo‘ladi. Bundan ab - xc. U holda ta’rifga asosan (ab) : c = x bo‘ladi. Demak, (ab) : c = a • (b : c).

3°. *(Va, b, cE.N)[a : (b* • *c) = (a : b) : c = (a : c) : b],*

I s b o t. a(b • c) - x desak, a = be- x bo‘ladi. Tenglikning ik­kala tomonini b ga bo‘lsak a : b - c • x bo‘ladi. U holda bo‘lish ta’rifga asosan (a : b) : c = x boiadi.

Demak, *(a : b) : c = (a : c) : b* bo‘ladi.

4°. *(Va, b, cGN)[a : (b : c) - ac : b}.*

I s b o t. a(b : c) = x desak, a = (b: c) • x bo‘ladi. U holda teng­likning ikkala tomonini c ga ko‘paytirsak, a-c - [(b: c) • c]-x bo‘ladi. Bunda (b: c) • c = b ekanligidan a • c - b- x bo‘ladi. Bun- dan (a - c) : b - x bo‘ladi. Demak, a(b : c) = (ac) : b.

5°. *(Va,* bE.N0, *cEN)* (a: *cAb:* c)=>[(c *+ b) : c = a : c + b : c].*

I s b o t. *(a + b) : c - x* bo‘lsin. U holda *a* = *(a : c)* • *c* va *b = (b : c) • c.* Bundan *(a : c) • c + (b : c) • c - cx* yoki *[(a* : *c)* + *+ (b : c)] : c - cx* yoki *a : c + b : c = x.* Bundan *a : c + b* : *c* = = *(a + b): c* bo‘ladi.

6°. *(Va, b* G *Nn, Vc* G *N)(a : c A b : c) => (a - b): c = a : c — b : c .*

I s b o t. (a - b) : c = x desak, a - b = cx bo‘ladi. a = (a : c) • c va b = (b : c) ■ c desak, (a : c) • c — (b : c) • c — cx, bundan [(a : c) — — (b : c)] : c = cx. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga bo‘lsak, a : c - b : c - x. Demak, a : c - b : c = (a - b): c.

BO

2.7. Nomanfiy butun sonlar to‘plamining xossalari. Yuqorida aytilgan fikrlarni umumlashtirib, nomanfiy butun sonlar to’plamining xossalarini sanab o'tish mumkin:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida eng kichik element mav- jud va u 0 ga teng. Bu esa to'plamning quyidan chegaralangan- ligini bildiradi.

2. Nomanfiy butun sonlar to'plami cheksiz va yuqoridan che- garalanmagan.

3. Nomanfiy butun sonlar to‘plami diskret.

Diskretlik nomanfiy butun sonlar to'plamida har bir natural sondan keyin va oldin keladigan sonlarni ko'rsatish mumkinligi bilan izohlanadi. Faqat 0 hech qanday sondan keyin kelmaydi. Boshqacha aytganda, ikkita ixtiyoriy nomanfiy butun son orasida chekli sondagi nomanfiy sonlar joylashgan.

4. Nomanfiy butun sonlar to‘plami «<» munosabati orqali tartiblangan. (Bu xossalar izohi tegishli bo'limlarda qaralgan edi.)

2.8. Tartib va sanoq natural sonlar. Shuni xulosa qilib aytish kerakki, natural sonlar nafaqat miqdorlarni o'lchash va to'plam elementlarini sanash uchun ishlatiladi, balki to'plam elementlarini tartiblash ham natural sonlar yordamida amalga oshiriladi. Bunda chekli to‘plam uchun natural sonlar qatori kesmasi tushunchasi ishlatiladi.

5- ta’rif. Natural sonlar qatorining Na kesmasi deb, a natu­ral sondan katta bo ‘Imagan barcha natural sonlar to ‘plamiga ay- tiladi.

Masalan, Ns= {1; 2; 3; 4; 5}.

6- t a ’ r i f. A to ‘plam elementlarini sanash deb, A to ‘plam bilan natural sonlar qatorining Na kesmasi orasidagi o ‘zaro bir qiymatli moslik o ‘rnatilishiga aytiladi.

a soni A to‘plam elementlari sonini bildiradi va n{A) = a deb yoziladi. To‘plam elementlarini sanash faqat ularning miqdorini aniqlab qolmay, balki to‘plam elementlarini tartiblaydi ham. Bunda har bir elementning sanoqda «nechanchi» ekanligini ham aytish mumkin bo'ladi. Elementning nechanchi bo‘lishi sanash- ning olib borilishiga bog‘liq. Kombinatorikada ko'rilganidek, a ta elementli to'plam tartiblanishlari umumiy soni a! ga teng bo'lgani uchun bu turli usullar bilan sanalganda element tartib nomeri a\ marta o'zgarishi mumkin degani. Lekin qanday usul bilan sanalmasin, to'plam elementlari soni o'zgarmasdir. Demak,

81

«nechta» savoliga javob beruvchi natural sonlar miqdoriy, «nechanchi» savoliga javob beruvchi natural sonlar tartib natural sonlar deyiladi. To‘plam oxirgi elementining tartib nomeri bir vaqtda to‘plam elementlari sonini bildiradi. Demak, sanoq 19- elementida tugasa, to‘plamda 19 ta element bor degan xulosa chiqariladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qo‘shishning assotsiativlik qonunini yozing va uning yordamida qanday sonli ifodalarni shakliy almashtirish mumkinligini tushuntiring.

2. 209 + 66 + 91 + 34 + 72 va 2751 + 3467 + 749 + 1333 ifodalarning qiymatlarini qulay yo‘l bilan topishda qo‘llaniladigan barcha hollarni ko‘rsating.

3. Ko‘paytirishning kommutativlik va assotsiativlik qonunlaridan foyda- langan holda 4 ■ 4 • 4 ■ 25 • 5 ifodaning qiymatini qulay usul bilan hisoblang.

4. 569-371 + 170-569 + 569-459 = 569-371 + 569- 170 + 569-459 =

= 569 • (371 + 170 + 459) = 569 • [(371 + 459) + 170J = 569 • (830 +

+ 170) = 569 • 1000 = 569000 ni hisoblashda qo‘shish va ko‘payti- rishning qanday qonunlaridan foydalanilganini ko‘rsating.

5. 32 + 46 = (30 + 2) + (40 + 6) = (30 + 40) + (2 + 6) = 70 + 8 = 78 ning yechilishini tushuntiring.

6. 23 • 4 = (20 + 3)- 4= 20- 4 + 3- 4 = 80 + 12 = 92 ning yechilishini tushuntiring.

7. 246 + 123 = (200 + 40 + 6) + (100 + 20 + 3) = (200 + 100) + (40 + + 20) + (6 + 3) = 300 + 60 + 9 = 369 ning yechilishini tushuntiring.

8. 426 • 3 = (400 + 20 + 6) • 3 = 400 • 3 + 20 • 3 + 6 • 3 = 1200 + 60 + + 18 = 1272 ning yechilishini tushuntiring.

9. Turli usullar bilan yeching va tushuntiring: 7 • (6 + 4).

10. Qulay usul bilan hisoblang: 57 + (3 + 4).

11. Quyidagi tengliklar **n** ning har qanday natural qiymatida to‘g‘ri ekanligini ko‘rsating:

2 ’

***n(n+\)***

**a) 1 + 2 + 3 + ... + n =**

n(n+\)(2n+\)

**b) l2 + 22 + 32 + ... + n1 =**

c) 1 - 2 + **2-3+** **3-4** + ... + /i(/7 + l) =

6 ’

**\_ *n(n+\)(n+2)* .**

— - y

1 **n**

e) P + 23 + ... + /?3 = (1 + 2 + 3 + ... + **n)\**

(2\*-1)(2a/+1) 2«+l ;



82

3-§. NATURAL SON MIQDORLARNI 0‘LCHASH  
NATIJASI SIFATIDA

Inson o‘zining amaliy faoliyatida narsalarni sanash bilan bir qatorda har xil miqdorlarni oichash ishlarini ham bajaradi. Shu sababli natural sonlarning vujudga kelishi faqat sanash natijasi- dagina emas, balki o‘lchashning ham mahsulidir.

Bu masalani uzunlikni o‘lchash misolida ko‘rib chiqamiz. Kes- malar to‘plamidan biror e kesmani tanlab, uni birlik kesma deb olamiz. So‘ngra a kesmani e bilan taqqoslaymiz. Agar a kesma n ta e kesmadan tashkil topgan bo‘lsa, u holda a — e + e + e + + ... + e - ne kabi yoziladi va nsN son a kesmaning son qiymati deyiladi.

n soni a kesmaning, m soni b kesmaning e birlik kesma bo‘yicha son qiymatlari bo‘lsin.

Agar a = b bo‘lsa, u holda bu kesmalarning son qiymatlari ham teng bo‘ladi: n — m va aksincha.

Agar a \* b bo‘lsa u holda n m bajariladi.

Masalan, 5 sm > 3 sm => 5 > 3 va aksincha.

Demak, bundan, natural sonni miqdorlarni o‘lchash natijasi sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi.

a kesma b va c kesmalardan tashkil topgan bo‘lsin va b — me, c — ne, m, nEN bo‘lsin.

Bu holda b kesma m ta e birlik kesma yig‘indisiga, c kesma n ta e kesma yig‘indisiga ajraladi. Bundan a kesma (m + n) ta e kesma yig‘indisiga ajralishi ko‘rinib turibdi. Demak a — (m + n)e.

Shunday qilib, m va n natural sonlarning yig‘indisini b va c kesmalardan iborat a kesmaning uzunligi sifatida qarash mum­kinligi kelib chiqadi.

Natural m va n sonlarning ayirmasini a va b kesmalarning ayirmasi bo‘lgan c kesma uzunligining son qiymati kabi qarash mumkin.

Masalan, a - 9e va a - b + c. Agar b - 4e bo‘lsa, c - (9 - 4)e - — 5e.

Boshlang‘ich sinflarning matematika darsliklarida har xil miqdorlar ustidagi amallarga doir masalalar berilgan bo‘lib, ular qo‘shish va ayirishning ma’nolarini ochib berishga qaratilgan.

Masala. Oshxonada har birida 3 / dan sharbat quyilgan 5 ta banka bor. Oshxonada hammasi bo‘lib necha litr sharbat bor?

83

3x5 = 15 (/) nega?

Chunki, 3 / + 3 / + 3 / + 3 / + 3 / — (3 + 3 + 3 + 3 + 3)x 1 l — = (3x5)xi /= 15x1 /= 15/.

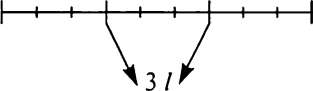
Masala yechishning boshqacha usuli ham mavjud, ya'ni bunda 2 xil hajm o‘lchov birligi ishlatilyapti — 1 banka va 1 /.

Demak, 5xlb = 5x(3/) = 5x(3xi /) = (5x3)xl/= 15xl / = 15 /.

Shunday qilib, natural sonlarni ko'paytirish bir o‘lchov birli- gidan ikkinchi — maydaroq o‘lchov birligiga o‘tish kabi ekan, deb xulosa chiqarish mumkin.

Masala. 15/ sharbatni 3 litrlik bankalardan nechtasiga quyish mumkin? 15 / = 15x(lb : 3) = (15 : 3)x lb = 5x lb = 5b \*

1 /I /I /



a = 15e = 15x(e,: 3) = (15 : 3)e, = 5e,.

Demak, natural sonlarni bo'lish bir o‘lchov birligidan ikkin­chi — yirikroq o‘lchov birligiga o'tish kabi ekan.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. **a < b** boMgan **a** va **b** kesmalarni oling, ularning yig'indisi va ayirmasiga teng kesma yasang.

2. Kesmalar to‘plamida «kichik» munosabati tranzitiv ekanini isbotlang.

3. Kesmalarni qo‘shish o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysunishini isbotlang.

4. Ikki kesmani berilgan uzunlik birligida o'lchab, biri ikkinchisidan 2 marta uzunligi aniqlandi. Uzunlik birligi 10 marta kichraytirilsa, kesmalar nisbati o‘zgaradimi?

5. Quyidagi masalalarni yechish amalini tanlang va nima uchunligini tushuntiring: a) Bir o‘ram simdan avval 8 m, keyin 5 m qirqib olindi. Necha metr sim qirqib olingan? b) Singil 7 yoshda, akasi undan 3 yosh katta. Akasi necha yosh? d) Stolning balandligi 90 sm, stulning balandligi 45 sm, stol stuldan qancha baland? e) G‘oz massasi 7 kg, tovuq undan 4 kg yengil, tovuqning massasini toping. 0 Do'konga har biri 10 kg li 4 yashikda olma keltirildi. Do‘konga qancha olma kelti- rilgan? g) 0‘g‘li 8 yoshda, otasi undan 4 marta katta. Otasi necha yoshda? h) Bolalar paltosiga 2 m gazlama ketsa, 10 m gazlamadan nechta bolalar paltosi tikish mumkin? i) Oshxonada bir kunda 80 kg kartoshka va 8 kg sabzi ishlatildi. Kartoshka sabzidan necha marta ko‘p ishlatildi?

84

6. Masalalarni turli usullar bilan ycching va ycchish vo'lini asoslang: a) Bir idishda **41,** ikkinchisida 3/ sut bor cdi. Nonushtaga 2/ sut sarflandi. Nccha litr sut qoldi? b) 18 mctrlik sim o‘ramidan avval 7 m, kcvin 5 m sim qirqib olindi. 0‘ramda qancha sim qolgan? d) Bir o‘ramda 15 m, ikkinchisida 12 m gazlama bor cdi. Harnma gazlamadan har biriga 3 m gazlama sarflab ko‘vlaklar bichildi. Ncchta ko‘vlak bichilgan? c) Stol stuldan 9 marta qimmat. Ikkalasi birga 400 so‘m tursa, stulning bahosini toping. Stul stoldan nccha so'rn arzon?

4-§. SANOQ SISTEMALARI

4.1. Sanoq sistemalari haqida tushuncha. Insoniyat paydo boiib, madaniyat darajasi ancha yuqori boigan davrdan boshlab yozuv paydo bo‘lgan. Bunda dastlab nima haqida gap yuriti- layotgan bo‘lsa, shu narsa yoki tushunchaning tasvirini beradigan rasmlardan foydalanilgan. Keyinchalik rasmlar o‘rniga maxsus belgilar va nihoyat asta-sekinlik bilan harflar, so‘ng raqamlar paydo bo‘lgan. Avvaliga sonlar chiziqchalar yoki tugunchalar yordamida belgilangan. So‘ng ko‘p miqdordagi belgilarni guruhlash ehtiyoji tug‘ilgan. Odamlar qo‘llaridagi barmoqlari yordamida sanaganlari uchun belgilar 10 talab, ba’zan 20 talab (oyoq va qo‘ldagi barmoqlarning soniga ko‘ra) guruhlangan va bu guruhlar alohida belgi bilan belgilangan. Shu tariqa har bir xalqning sonlarni yozish uchun o‘z sanoq sistemasi vujudga kelgan. Sanoq sistemasi deb, sonlarni yozish, o‘qish va ular ustida amal bajarish usuliga aytiladi.

4.2. Pozitsion va nopozitsion sanoq sistemalari. Sanoq siste­malari tuzilishiga ko‘ra, odatda, ikki turli bo‘ladi: pozitsion va nopozitsion.

Berilgan sonning yozuvidagi belgilar egallagan o'rniga qarab turli xil ma’noni anglatsa, bunday sanoq sistemasi pozitsion sanoq sistemasi deyiladi.

Masalan, 0, 1,2, ..., 9 dan iborat raqamlar deb ataluvchi belgilar yordamida yozilgan sonlar o'nlik sanoq sistemasida yozil- gan sonlar deyiladi va u pozitsion sanoq sistemasidir. Masalan, a) 1101 — bu yerda o‘ngdan birinchi o‘rinda turgan bitta raqami bitta birlikni bildirsa, 3-o‘rinda turgan 1 raqami bitta yuzlikni,

4-o‘rinda turgan 1 raqami bitta minglikni anglatadi.

Odatdagi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yordamida sonlarni yozish hindistonliklar tomonidan joriy qilingan.

85

Shunday sanoq sistemalari ham borki, unda bir xil raqamlar sonning yozuvida qaysi o'rinda joylashishidan qat’i nazar, doim bir xil ma’noni anglatadi. Bunday sanoq sistemalari nopozitsion sanoq sistemalari deb yuritiladi. Rim sanoq sistemasi nopozitsion sanoq sistemasiga misol bo‘ladi.

I, II, III, V, X, L, C, D, M kabi belgilar yordamida yozish rimliklar tomonidan kiritilgan bo‘lib, sonlar I — bir, II — ikki, IV — to‘rt, VI — olti, XI — o‘n bir, XL — qirq, XC — to‘qson va hokazolar ko‘rinishda yozilgan.

Masalan, XXXIX — o‘ttiz to‘qqiz, bunda, X belgi barcha o‘rinlarda o‘nni, I belgi esa birni anglatadi. Rim sanoq sistema- sida kichik qiymat bildiruvchi belgi katta qiymatli belgidan oldin (chapda) yozilsa, sonning qiymati belgilar qiymatlarini ayirib topilgan, agar belgilar qiymatlari chapdan o‘ngga kamayib borish tartibida yozilsa, son qiymati belgilarning qiymatlarini qo‘shib topilgan. XXIII = 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 23.

Qadimgi Bobil, Misr, Yunoniston va Rusda ham nopozitsion sanoq sistemalari qo‘llangan. Grek va slavyan qadimgi sanoq sis- temalarida raqamlar alifbo harflari bilan belgilangan, masalan 1 dan 9 gacha sonlar birinchi 9 ta harf bilan, 100, 200, ..., 900 sonlari esa undan keyingi 9 ta harf bilan belgilangan. Son yozu- vini so‘zdan farqlash uchun tepasiga belgi — «titlo» qo‘yilgan.

Nopozitsion sanoq sistemalari katta sonlarni yozish va ular ustida amal bajarish uchun noqulay bo‘lgan. Shuning uchun ham matematikada pozitsion sanoq sistemalari muhim o‘rin tutadi. Chunki bu sistemada son yozuvida maxsus xona birliklari tu- shunchasi bor bo‘lib, istalgancha katta sonlar bir nechta belgi yordamida yoziladi.

4.3. 0‘nlik sanoq sistemasida son yozuvi. 0‘nlik sanoq siste- masida xona birliklari o‘n, yuz, ming, o‘n ming, yuz ming va hokazolar bo‘lib, ular 10, 102, 103, 104, ... ko‘rinishda ifodalana- di va unda har bir xonaning bitta birligi ikkinchi xonadan boshlab o‘zidan oldingi xonaning o‘nta birligiga teng bo‘ladi, ya’ni qo‘shni xona birliklari nisbati sanoq sistemasining asosi — 10 ga teng. Sonlar 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan iborat 10 ta belgi yordamida yoziladi va bu belgilar raqamlar deb ataladi. Son yozuvida har bir raqam ma’lum xona birliklari sonini bildiradi.

Demak, a natural sonning o‘nlik sanoq sistemasidagi yozuvi deb quyidagi yig‘indiga aytiladi:

86  
a - a • 10" + a • 10"\_ 1 + ... + o, • 102 + a. ■ 10 + an,

n n-1 2 1 0’

bu yerda: an, ..., al — 0 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlar. an\* 0 deb kelishiladi. Son yozuvini 0 lardan boshlash faqat ma’lum sondagi raqamlardan iborat nomerlashda qo‘llanadi, masalan: lotoreya, pasport, avtomobil nomerlarida.

N - a • 10" + a .lO"-1 + ... + a, • 102 + a. ■ 10 + anson beril-

n n-1 2 1 0

gan bo‘lsa, uni N = ko‘rinishda yozish mumkin. Son

yozuvidagi chiziq uni harfiy ko‘paytmadan farqlash uchun chiziladi. Son yozuvidagi o‘ngdan birinchi uchta xona birlar sinfini tashkil qiladi va unga birlar, o‘nlar, yuzlar deb ataluvchi xona birliklari kiradi. Keyingi uchlik minglar sinfini tashkil qilib, xona birliklari minglar, o‘n minglar va yuz minglar deb ataladi.

6-, 7-, 8-raqamlar millionlar sinfini tashkil qilib, xona birlikla­ri millionlar, o‘n millionlar va yuz millionlardan iborat bo‘ladi. Keyingi uch xona milliardlar, undan keyin billionlar va hokazo sinflardan iborat bo‘ladi. Sonni o‘qishda chapdan o‘ngga qarab har bir raqam yoniga xona birligi nomi qo‘shib aytiladi, shuni aytish kerakki, o‘zbek tilida o‘nliklarni atash uchun maxsus so‘zlar: yigirma, o‘ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson va to‘qson qo‘llanadi. 0‘nli sanoq sistemasida sonlarni yozish uchun 10 ta belgi, atash yoki o‘qish uchun esa, masalan, milliongacha bo‘lgan sonlar uchun 20 ta atama kerak bo‘ladi, bu raqamlar va o‘nliklar nomlari, yuz, ming kabi atamalardir. Ko‘p xonali sonlarni o‘qishda million, milliard, billion kabi sinflar nomlari ishlatiladi.

Bo‘sh xona birliklari aytilmaydi, yozuvda 0 lar bilan to‘ldiriladi. Masalan:

412 = 4-102+ 1-10 + 2 (to‘rt yuz o‘n ikki).

4.4. 0‘nlik sanoq sistemasida sonlarni taqqoslash. 0‘nlik sa­noq sistemasida sonlarni taqqoslash quyidagicha amalga oshiri- ladi.

a = a 10"+ a . 10n\_1 + ... + a. 10 + an(a \* 0) va

n n-1 1 0V n '

b - bk 10\* + bk\_x 10\*“' + ... + Z), 10 + b0(bk ^ 0) sonlar berilgan bo‘lsin.

Quyidagi

1) n < k]

2) *n-k, an< bn,*

87

*n = k, a* ^ *b , a = b* ., .... *a. < b. (i < n*) shartlardan biri

} n n\* n-1 n-1 ’ 1 / t ' '

bajarilsa, a < b bo‘ladi.

4.5. 0‘nlik sanoq sistemasida sonlarni qo‘slush algoritmi. Ma’- lumki, har qanday ko‘p xonali sonlarni xona birliklari yig‘indisi shaklida ifodalash mumkin.

Masalan, 1) 527 = 5 ta yuzlik +2 ta o‘nlik +7 ta birlik yoki

527 = 5- 100 + 2 - 10 + 7 - 1;

2) 3728 = 3 • 1000 + 7-100 + 2-10 + 8-1,

3728 = 3 • 103 + 7 • 102 + 2 • 10' + 8 • 10°.

Ixtiyoriy natural sonni qaraylik.

N = anan-\an-2---a\a0 t>OiS3,

N = a • 10" + a • lO"'1 + ... + a, • 102 + a. • 10' + an bo‘ladi.

Bunda an, an\_v ...,av an lar 0 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlar

boiadi, faqat an — birinchi raqamgina 0 dan farqli bo‘ladi.

Endi ko‘p xonali sonlarni og‘zaki qo‘shish qoidasini ko‘rib chiqaylik. Bu qo‘shish qonunlariga asosan amalga oshiriladi.

Masalan, 8324 + 525 = (8 minglik + 3 yuzlik + 2 o‘nlik + 4 birlik) + (5 yuzlik + 2 o‘nlik + 5 birlik) guruhlash va o‘rin al- mashtirish xossalariga asosan:

8324 + 525 = 8 minglik + (3 yuzlik + 5 yuzlik) + (2 o‘nlik + 2 o‘nlik) + (4 birlik + 5 birlik) = 8 minglik + 8 yuzlik + 4 o‘nlik + 9 birlik = 8849 boiadi. Bundan ko‘rinadiki, ko‘p xonali sonlarni go'shish uchun ularning mos xona birliklarini qo‘shish kerak ekan.

Demak, sonlarni yozma qo‘shish uchun qo‘shiluvchilar bir-bi- rining ostiga shunday joylashtiriladiki, bunda bir xil xona birliklari raqamlarining biri ikkinchisining ostida boiadi va o'ngdan boshlab mos xona birliklari qo‘shilib, shu xona ostiga yozib boriladi. Masalan,

8324 + 525 8849

Agar bir xona birliklarini qo‘shganda ikki xonali son hosil boisa, u holda o‘nliklar ajratilib, uning raqami navbatdagi xo- naga qo‘shib hisoblanadi. Masalan,

1725 + 2118 3843

88

4.6. 0‘nlik sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmi. Bir

xonali sonlarni qo'shish jadvali va ayirish amalining ta’rifidan foydalangan holda, ayirish jadvalini tuzish mumkin.

1 ni ayirish jadvali.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | - 1 | = 1 | 6 - | - 1 | = 5 |
| 3 | - 1 | = 2 | 7 - | - 1 | = 6 |
| 4 | - 1 | = 3 | 8 - | - 1 | = 7 |
| 5 | - 1 | = 4 | 9 - | - 1 | = 8 |
| 5 | ni ayirish jadvali | |  |  |  |
| 5 | - 5 | = 0 | 8 - | - 5 | = 3 |
| 6 | - 5 | = 1 | 9 - | - 5 | = 4 |
| 7 | - 5 | = 2 va hokazo. |  |  |  |

Ko‘p xonali sonlarni og‘zaki ayirish yig‘indi va ayirmaning xossalaridan foydalanib amalga oshiriladi.

862 - 241 = (8 yuzlik + 6 o‘nlik + 2 birlik) - (2 yuzlik + 4 o‘nlik + 1 birlik) = (8 yuzlik - 2 yuzlik) + (6 o'nlik - 4 o‘nlik) + (2 birlik - 1 birlik) = 6 yuzlik + 2 o‘nlik + 1 bir­lik = 621.

Yozma ayirishda kamayuvchi va ayiriluvchi ustun tarzda mos xona birliklari bir-birining tagiga yoziladi va tagiga chizilib, uning tagiga mos xonalar ayirmalari natijalari eng kichik xona birlikla- ridan boshlab yoziladi:

\_ 862 241

62l

Ayirishning quyidagi holini ko‘raylik:

862 - 245 = (8 yuzlik + 6 o‘nlik + 2 birlik) - (2 yuzlik + + 4 o‘nlik + 5 birlik) = (8 yuzlik - 2 yuzlik) + (6 o'nlik - - 4 o‘nlik) + (2 birlik - 5 birlik) = (8 yuzlik - 2 yuzlik) + + (5 o‘nlik + 1 o'nlik - 4 o'nlik) + (2 birlik - 5 birlik) = ( 8 yuz­lik - 2 yuzlik) + (5 o‘nlik - 4 o‘nlik) + (12 birlik - 5 birlik) = = 6 yuzlik + 1 o‘nlik + 7 birlik = 617.

Demak, agar biror xona birligida kamayuvchining raqami ayiriluvchi raqamidan kichik bo‘lsa, undan oldingi katta xona birligi raqamidan bir birlik olib, kamayuvchining raqamiga o‘n birlik qilib qo‘shiladi va ayirish bajariladi.

89  
245

6l7

4.7. 0‘nlik sanoq sistemasida ko‘paytmani hisoblash algorit-

mi. Ko‘paytirish amalini bajarishda quyidagi qoidalar mavjud:

1. Bir xonali sonlarning ko‘paytmasi bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvaliga asosan amalga oshiriladi.

2. Bir va nollar bilan tugagan sonlarga ko‘paytirish uchun ko‘paytuvchida qancha nol bo‘lsa, shuncha nol ko‘paytuvchining o‘ng tomoniga yoziladi. Masalan,

23 • 100 = 2300,

31 •1000 = 31000.

3. Bittadan qiymatli raqamlari va undan o‘ngda bir nechta nollar turgan sonlarni ko‘paytirish uchun nollarga e’tibor ber- masdan ko‘paytiriladi va chiqqan natijaning o‘ng tomoniga ikkala ko‘paytuvchida birgalikda nechta nol bo'lsa, shuncha nol yozib qo‘yiladi. Masalan:

a) 200 ■ 30 = (2 ■ 100) ■ (3 ■ 10) = (2 ■ 3) ■ (100 ■ 10) = 6 ■ 1000 = 6000 ;

b) 400 - 500 = 4 - 5 -100 -100 = 20■ 10000 = 200000 .

4. Ko‘p xonali sonni bir xonali songa ko‘paytirish bir necha qo‘shiluvchilar yig‘indisini berilgan songa ko‘paytirish qoidasiga asosan bajariladi. Masalan,

a) 223 • 5 = (200 + 20 + 3) - 5 = 200 \*5 + 20-5 + 3\*5 = 1000 + + 100 +15=1115;

b) 453 - 7 — (400 + 50 I 3) ■ 7 = 400 • 7 + 50 • 7 + 3 • 7 = 2800 + + 350 + 21 = 3171;

223 453

x 5 yoki x 7

1115 3171

5. Ko‘p xonali sonlarni ko‘paytirish sonni bir necha sonning yig‘indisiga ko‘paytirish qoidasiga asosan amalga oshiriladi. Masalan,

a) 2024-328,

328 = 300 + 20 + 8.

Demak,

2024 • 328 = 2024 • (300 + 20 + 8) = 2024 • 30 + 2024 • 20 + + 2024-8 = 663872.

90

2024 **x 20** 40480

Endi to‘g‘ridan to‘g‘ri ko‘paytirishni amalga oshirsak,

2024 x 8 16192

2024

XJ28

16192

+ 4048  
6072

663872

4.8. 0‘nlik sanoq sistemasida boMishni bajarish algoritmi. Bir

xonali va ikki xonali sonlarni bo‘lish ko‘paytirish jadvaliga asoslangan holda amalga oshiriladi.

Ko‘p xonali sonlarni bir xonali sonlarga bo‘lish yig‘indini songa bo‘lish qoidasiga keltiriladi. Masalan,

4792 : 4 = (4000 + 700 + 90 + 2): 4 .

Buning uchun 4 mingni 4 ga bo‘lamiz. Bo‘linmada 1 ta minglik hosil bo‘ladi va qoldiq 0 ga teng bo‘ladi. 7 yuzlikni 4 ga bo'lamiz. Bo‘linmada 1 ta yuzlik va qoldiq 3 yuz hosil bo‘ladi. 3 yuzni o‘nliklarga maydalaymiz, 30 o‘nlik hosil bo‘ladi. Uni 9 o‘nlikka qo‘shamiz. Natijada 39 o‘nlik hosil bo‘ladi. 39 o‘nlikni 4 ga bo‘lsak, bo‘linmada 9 o‘nlik va qoldiq 3 o‘nlik hosil bo‘ladi. 3 o‘nlikni birliklarga maydalasak, 30 birlik hosil bo’ladi. Unga 2 birlikni qo‘shsak, 32 birlik hosil bo‘ladi. 32 birlikni 4 ga bo‘lsak, bo‘linmada 8 birlik va qoldiqda 0 hosil bo‘ladi. Shunday qilib, bo‘linma 1 minglik, 1 yuzlik, 9 o‘nlikva 8 birlikdan iborat bo‘ladi, ya’ni 1198. Demak, 4792:4 = 1198; yuqoridagi jarayon og‘zaki bo‘lish bo‘lib, uni yozma bo‘lish shakliga keltirsak, ushbu ko‘rinishda yoziladi:

91

\_4792 4 j\_ 1198 07 “ 4\_

39 ~ 36

\_ 32

11

0

Ko‘p xonali sonlarni ko‘p xonali sonlarga bo'lishda ham yig‘indini songa bo‘lish xossasidan foydalaniladi. Masalan, 54314: 13 ni hisoblaylik.

Yec h i sh. 54314 = 50000 + 4000 + 300 + 10 + 4 = 5 o‘n ming + 4 ming + 3 yuz + lo‘n + 4.

Avvalo yuqori xona birligini olib, uning 13 ga bo‘linish bo‘linmasligini aniqlaymiz, 5 soni 13 ga bo‘linmaydi. U holda 54 mingni 13 ga bo‘linishini ko‘ramiz. Bunda bo‘linmada 4 ming va qoldiqda 2 ming hosil bo‘ladi. 2 mingni yuzlarga maydalab, unga 3 yuzni qo‘shsak, 23 ta yuzlik hosil bo‘ladi. Uni 13 ga bo‘lsak, bo‘linmada 1 yuzlik va qoldiqda esa 10 yuzlik qoladi. 10 yuzlikni o‘nliklarga maydalab, 1 ta o‘nlikni qo‘shsak, 101 ta o‘nlik hosil bo‘ladi. Uni 13 ga bo‘lsak, bo‘linmada 7 o‘nlik va qoldiqda 10 o‘nlik hosil bo‘ladi. 10 o‘nlikli birliklarga maydalab 4 birlikni qo‘shsak, 104 birlik hosil bo‘ladi, uni 13 ga bo‘lsak, boMinmada 8 birlik va qoldiqda nol hosil bo‘ladi. Demak, bo‘linmada 4 minglik, 1 yuzlik, 7 o‘nlik va 8 birlik hosil bo‘ladi, ya’ni 54314: 13 = 4178. Bu jarayonni yozma ravishda ifodalaymiz.

54314' 13 52 , 4178

\_ 23 13

\_ 101 91

\_ 104 104

0

92

4.9. 0‘nlik bo‘Imagan pozitsion sanoq sistemalarida son yozu-

vi. Amaliyotda o‘nlik sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistema- lari ham uchraydi.

Masalan, a) 10 talab emas, balki, 5 talab sanash yordamida beshlik sanoq sistemasi hosil bo‘ladi. Bunda ikkinchi xonadan boshlab har bir xona o‘zidan oldingi xonaning 5 ta birligiga teng bo‘ladi, ya’ni N sonini beshlik sanoq sistemasida yozgan bo‘lsak,

N = a„an....o,o0 = a„5" + o„\_,

r/i-1

bodadi.

b) Agar 4 talab sanalgan bo‘lsa, u holda to‘rtlik sanoq sistemasi hosil boiadi va bunda ikkinchi xonadan boshlab har bir xonaning bitta birligi o‘zidan oldingi xonaning 4 ta birligiga teng bo‘ladi. Agar

N = ana„\_^ ...o,o() son to‘rtlik sanoq sistemasida yozilgan bo‘lsa, u

N = ono„\_, ...o,an =an4" +o„\_, -4,,\_1 + ... + o,4' +o0 bo‘ladi.

T a ’ r i f. Ikkinchi xona birligidan boshlab har bir xonasining bitta birligi o ‘zidan oldingi xonaning bitta birligidan q marta katta bo'lgan sonlar q lik sanoq sistemasida yozilgan sonlar deyiladi.

Agar N - anan\_x... o,o0 son q lik sanoq sistemasida yozilgan bo'lsa, N(q) - onon\_, ...o,o0( } ko‘rinishda belgilanadi. q — berilgan sanoq sistemaning asosi deb yuritiladi. Bunda q£N0 bo‘lib, 1 < q bo‘ladi. q lik sanoq sistemasida istalgan sonlar 0, 1,2, 3,

..., q — 1 raqamlari yordamida yoziladi. N(q) - o„on\_1...o,o0(?) son- ning o‘zi sistematik son deyiladi. Har qanday sistematik sonni asos darajalarining yig‘indisi ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Masalan, = anan\_l...ala0(q) bo‘lsa,

= anan\_, ...o,o0(?) - a„q" + an\_xqnA + ... + 0,?1 +Oq bo‘ladi. Endi ayrim sanoq sistemalari haqida batafsilroq to‘xtalib o‘taylik.

4.10. Ikkilik sanoq sistemasi. Nazariy masalalarni hal qilishda ikkilik sanoq sistemasidan keng foydalaniladi. Bu sanoq sistemasida istalgan sonni yozish uchun faqat 0 va 1 raqamlaridan foydalaniladi.

Agaryv = onon\_,...o,o0 son ikkilik sanoq sistemasida yozilgan bo‘lsa, N{2) = onofl\_]...0)0o(2) ko‘rinishda belgilanadi va bu sistemadagi har

93

qanday son /V(2)=<w,...a,fl0(2) =an ■ 2n+an\_x • 2n~x + ... + a, • 2' + a0 ko+inishga ega bodadi. Ikkiliksanoq sistemasida an, ana,, o0lar 0 yoki 1 qiymatga ega bodadi. Faqat an0 bodadi. Ba’zi sonlar- ning ikkilik sistemasidagi yozuvini ko‘raylik. .

Masalan, bir — 1 besh — 101 to‘qqiz — 1001

ikki - 10 olti - 110 o‘n - 1010

uch — 11 yetti — 111 o‘n bir — 1011 va h.k.

to‘rt — 100 sakkiz — 1000

4.11. Yettilik sanoq sistemasi. Yettilik sanoq sistemasida ik- kinchi xonadan boshlab, har bir xonaning bitta birligi o‘zidan oldingi xonaning yetti birligidan iborat bodadi va u

W(7) = anan\_v..ala0{7)=a„-T' +an\_t - + ... + a, -7l+a0

ko‘rinishda bodadi.

q lik sanoq sistemasidagi sonlar 0, 1,2, 3, q - 1 raqamlar yordamida yozilishidan yettilik sanoq sistemasida har qanday sonni 0, 1,2, 6 raqamlari yordamida yozish mumkinligi kelib chiqadi.

olti — 6 yetti — 10 sakkiz — 11 to‘qqiz — 12 o‘n - 13

Masalan, bir — 1 ikki - 2 uch — 3 to‘rt — 4 besh — 5

o‘n bir — 14 o‘n ikki — 15 o‘n uch — 16 o‘n to‘rt — 20 o‘n besh — 21 va h.k.

4.12. Sistematik sonlar ustida amallar. Barcha sanoq siste- malarida sonlar ustida arifmetik amallar o‘nlik sanoq sistemasi­dagi kabi bajariladi. Buning uchun dastlab berilgan sanoq sistemasi uchun bir xonali sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish jadvali tuzila- di. Chunki har bir sanoq sistemasi uchun o‘zining maxsus qo‘shish va ko‘paytirish jadvallari bodadi.

1) q = 5 bodsin. Beshlik sanoq sistemasidagi sonlarni 0, 1,2, 3, 4 raqamlari yordamida yozish mumkin. Bu sanoq sistemasi uchun qo‘shish jadvalini tuzsak:

3 + 3 = 11 3 + 4=12

4 + 4=13

1+2 = 2 1+2 = 3 1 + 3 = 4 1+4=10

2 + 2 = 4 2 + 3 = 10 2 + 4=11

Masalan, a) 3214(5) + 2313(S) = 1 1032(5) bodadi.

94

. 3214(5|

2313(5,

1 1032**,**5**,**

b) 301 1(5)- 2124(J) = 322(S)

\_ 3011,5,

2124

332 **-**

Endi beshlik sanoq sistemasi uchun ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

1\*1 = 1 2-2 = 4 3\*3 = 14 4\*4 = 31

1-2 = 2 2-3 = 10 3-4 = 22

1-3 = 3 2-4= 13

1-4 = 4

Masalan, a) 2431(S) • 23(S) = 123013(S).

2431.5, x 23

*ZS>(5)*

+ 13343  
10412

123013**.**5**,**

b) 123013,5,: 23,5, = 2431,5,.

123013 23

101 | 2431

\_ 220 202

\_ i 34 124

\_ 23 23 0

95

4.13. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o‘tish.

Aytaylik o‘nlik sanoq sistemasida biror a son berilgan bo‘lib, boshqa q lik sanoq sistemasiga o'tish talab qilingan bo‘lsin. Bu- ning uchun a soni q lik sanoq sistemasiga o‘tkazildi, deb faraz qilib, lining bu sistemadagi yozuvini ko‘rib chiqamiz.

a = anq" + a/i\_lq"~l + ... + a{q + o0yozuvni shakl almashtiramiz: a = (anq"~l + an\_iqn~2 + ... + a^q + a0, a0< q shart bajarilgani uchun bu yozuvni a ni q ga qoldiqli bo‘lish natijasi va a0 ni qoldiq deb qarash mumkin.

Qavs ichidagi yig‘indini shakl almashtirsak,

anq"~' + an\_,qn~2 + ... + fl, =

= (an *(f~2* + an\_xqn-2 + ... + *a2)q +* a,

hosil bo‘ladi. Buni esa, a, < q shart bajarilgani uchun to'liqsiz boiinmani ^ga qoldiqli bo‘lish natijasi deb qarash mumkin. Shu taxlit a sonning q lik sanoq sistemasidagi yozuvining oxirgi a0 raqami a ni q ga bo‘lgandagi qoldiqqa, 2-raqam natijani q ga bo'lgandagi qoldiqqa va h.k. teng ekanligini ko‘rish mumkin. Qoldiqli bo‘lish to‘liqsiz boiinma 0 ga teng bo‘lguncha davom etadi va qoldiqlar oxirgisidan boshlab sonning q lik sanoq sistemasidagi yozuvining raqamlar ketma-ketligini beradi. Buni misollar yordamida ko‘rib chiqaylik.

Masalan, 1) 827(10 ni oltilik sanoq sistemasida yozaylik.

Eng avval 872 oddiy birlikdan oltilik sanoq sistemasining nechta 2- xona birligi borligini aniqlaymiz. Buning uchun 872 ni 6 ga bo‘lamiz,

\_ 872j 6

6 J 145 (2-xona birligi)

\_ 27 24

\_ 32 30

2 (1-xona birligi)

Endi 145 ta 2-xona birligida oltilik sanoq sistemasining nechta 3-xona birligi borligini aniqlaymiz:

96

145

12 24 (3-xona birligi)

\_ 25 24

1 (2-xona birligi)

Endi 24 ta 3-xona birliklarida qancha oltilik sanoq sistema- sining 4-xona birliklari borligini aniqlaymiz.

\_24 l\_6\_

24 4 (4-xona birliklari)

0 (3-xona birliklari)

4 b6-

0 0 (5-xona birligi) 4 (4-xona birligi)

4 ta 4-xona birliklarida 5-xona birligi yo‘q.

Demak, jarayon tugadi. U holda 872(10) =4012(6)bo‘ladi.

Bu hisoblash jarayoni qulay bo‘lishi uchun quyidagi sxemani tatbiq etish mumkin.

2) 1024(10) = x(5)

1024

10

204

5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 24 | o  o | 5 |  |  |
| 24 | 4 40 | 8 | 5 |  |
| ~0 | 0 | 5 | 1 | j 5 |
|  | 3 | 0 | fo- |

Demak, 1024(10) = 13040(5).

**3) 1495(10) =** x{

V)'

1495

14

Demak, 1495(10) = 4234(7).

213

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 | 21 | 30 | 7 |  |
| 7 | 3 | 28 | [T | 7 |
| 25 |  | 2 | 0 | “o |
| 21 |  |  | 4 |  |
| 4 |  |  |  |  |

**97**

Endi berilgan sanoq sistemasidan o‘nlik sanoq sistemasiga o‘tish usuli bilan tanishib chiqaylik.

Buning uchun yuqorida ko‘rsatilgan qoldiqli bo‘lish amaliga teskari amalni bajaramiz, ya’ni berilgan sonning yuqori xona bir- ligini asosiga ko‘paytirib, chiqqan ko‘paytmaga navbatdagi xona birligini qo‘shamiz. So‘ngra hosil bo'lgan yig‘indini asosiga ko‘paytirib, chiqqan ko‘paytmaga navbatdagi xona birligini qo‘shamiz va oxirgi xona birligini qo‘shgunga qadar davom etti- ramiz. Hosil bo'lgan oxirgi yig‘indi berilgan sonning o‘nlik sanoq sistemasidagi yozuvi bo'ladi.

Masalan,

|  |  |
| --- | --- |
| 1) 425(7) = x(in) bo'lsin. | 2) 720258 — x(|0). |
| X4 | 7-8 + 2 = 58, |
| 7 | 58-8 + 0 = 464, |
| 28 | 464 - 8 + 2 = 3712 + 2 = 3714, |
| + 2 | 3714-8 + 5 = 29712+5=29715, |
| 30  x | Demak, 72025(g) = 29715(,0). |
| 7 |  |
| 210 |  |
| + - |  |
| 5 |  |
| 215 |  |

Demak, 425(7) = 215(]0).

Umuman berilgan sanoq sistemasidan boshqa bir sanoq siste­masiga o‘tish uchun dastlab o‘nlik sanoq sistemasiga o‘tiladi. So‘ngra o‘nlik sanoq sistemasidan talab qilingan sanoq sistema­siga o‘tiladi.

Masalan, 2421(5) = x(4).

2 • 5 + 4 = 14. 14-5 + 2 = 71. 71-5 + 1 = 356.

Demak, 2421(5) = 356(10).

98

Endi o‘nlik sanoq sistemasidan to‘rtlik sanoq sistemasiga o‘tamiz:

356

32

36

4

89

8\_

9

**8**

1

4

22 j\_4 20 |\_5 | 4

**2 ‘** ±\J

1 o

**1**

4

**0**

Demak, 356(10) = 1 1210(4)bo‘ladi. Bundan 2421(5) = 1 1210(4)

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. 0 dan 10 gacha bo‘lgan sonlarni:

a) ikkilik; b) uchlik; d) beshlik; e) yettilik,

sanoq sistemalarida yozing.

2. Quyidagi sonlarni yettilik sanoq sistemasida yozing:

a) 972; b) 84; d) 1239.

29; 50; 140 sonlarini uchlik sanoq sistemasida yozing.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

Quyidagi sonlarni o‘nlik sanoq sistemasida yozing:

a) 1110111 (2); b) 20102(3); d) 443(S); e) 341(S).

Quyidagi sonlarni sakkizlik sanoq sistemasida yozing: a) 3421(S); b) 12010,,,; d)110011(J).

4= 10(x), 7 = ll(x), 8 = 1 00(jc) larda x ni toping. Quyidagilarni hisoblang:

a) 431(S) + 224(S); b) 322(J) - 134,,,;

d) 3221 (S) + 2342(S); e) 4122(S) - 3234(S);

0 514(8)+ 325(8); g) 7124,,, - 3437(8).

Yulduzchalar o'rniga tushirib qoldirilgan raqamlarni qo‘ying: a) 21\*02,3, b) 5\*57(8) d) \* 123(S)

+ »'2'2,3, +\*225„, +422\*,5,

\*2\*021,3, \*' 0 \*4,,, \*34\* 1,5,

Amallarni bajaring:

a) 1312(5) .4,5,; d) 1011(2) 11,2); O 2134(5) ; 12(5)i

b) 4121(5) • 3(5);

e) 3645(8)\*24(8) J g) 3133(g) : 42(g).

99

10. Amallarni bajaring va natijalarni o'nlik sanoq sistemasida tekshirib ko‘ring:

a) 573,s, • **34,+1763,,**

b) 34,5,(4324,5,+3041,5,);

d) 4123,5,+2243,5,-24,5). 14,5,;

e) (54704,s,-32567,s,)-12,8);

f) 75504,8, + 3427,8, - 23(s, - 23(s, ■ 7,s,.

5-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMIDA  
BO‘LINISH MUNOSABATI

5.1. Nomanfly butun sonlar to‘plamida bo‘linish munosabati ta’rifi. Sonlarning bo‘linish munosabati nomanfiy butun sonlar to‘plamida qaraladi. Nomanfiy butun sonlar to‘plami iV0 = {0}uA. Bu to‘plamda qo‘shish va ko'paytirish amallari har doim bajariladi. Ayirish va bo‘lish amallari esa har doim ham bajarilavermaydi. Masalan, N0 to‘plamda 5 va 9 sonlarining ayirmasi va bo‘linmasi mavjud emas. a - b ayirma mavjud bo'lishi uchun a > b bofiishi zarur va yetarli. Lekin a : b bo‘linma mavjud bo‘lishining bunday umumiy qoidasi yo‘q, shunga qaramay, a : b bofiishni bajarmay, a sonning b ga bo'linish yoki bo‘linmasligini aniqlash uchun ba’zi alomatlar topilgan.

Bo‘linish munosabati ta ’ ri fi: Agar a€-N0 va bEN sonlar uchun shunday *cEN0* son topilib, a — be tenglik bajarilsa, a son b songa *boilinadi* deyiladi va a\b ko‘rinishda yoziladi.

(VflGA0, VZ> E N)(3c E N0)(alb o a = be).

a\ b ifoda a son b ga bo'linadi, a son b ga karrali yoki b son

a ning bo'luvchisi deb o'qiladi.

Masalan: 18:3, chunki 18 = 3-6; 18:5, chunki 18 = 5-c shart

bajariluvchi cGN0 son mavjud emas.

«Sonning bo‘luvchisi» tushunchasi umuman «bo‘luvchi» tu- shuchasidan farq qiladi. Sonning bo‘luvchisi shu sondan katta bo‘lmagani uchun bo'luvchilar to‘plami cheklidir. Sonning kar- ralilari to'plami cheksizdir.

VaEA0 uchun nx ko‘rinishdagi barcha sonlar x ga karrali bo'ladi, bu yerda nGN0.

**100**

5.2. BoMinish munosabatining xossalari

1°. Bo'linish munosabati refleksiv, ya'ni istalgan natural son o‘ziga bo'linadi.i^a G N)(a\a), chunki 31 e NQ,a = a ■ 1 (ta’rifga ko ‘ra).

2°. Istalgan nomanfly butun son J ga bo’linadi a -1 «• a = 1 • a .

3°. Agar a\b va a > 0 bo'lsa, a>b bo'ladi, ya’ni(Ma, b&bl) (a:bt\a>0=>a>b).

I shot. a\b ekanligidan, ta’rifga ko‘ra shunday nomanfiy bu­tun c son topiladiki, a - be bo'ladi:

a = be => a - b = bc - b = b(c - 1)(\*)  
a=bc Aa>0 =:>bc >0=>Z>>0ac>0=>c>1=>c-1>0=>

■6'(c-l)>0=>a — b>0=>a>b\

n

4°. Bo‘linish munosabati antisimmetrik, ya’ni (Va,bGN) (a:bAb\a=>a = b).

. , a\b => a < b) ,

I shot. .. . \^>a-b.

*b\a^>b* > *a*5°. *Bo’linish munosabati*

(a:bAb:C=>a:C).

*tranzitiv,*

*ya ’nii'ia, b, cGN)*

a-bk=c(pk)

*3keN„*

a\b => a = bk I shot. 3pe„o

b: c => b = cp

PkeN„ bo'linish ta’rifiga a = c(pk) => a\c ko'ra.

6°. 0 soni istalgan natural songa bo ‘linadi, ya ’ni(\/a e N) 0: a =\*> =>0 = a • 0.

7°. 0 danfarqli istalgan son 0ga bo Tmmaydi(VaE.N0Aa\*Q) aiO.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik. a:Q=><3^Q=>c£//n, a = c-0-0, bu teorema shartiga zid. Demak, a 10.

8°. 0: 0 amali aniqlanmagan. Chunki, 0 : 0 = a bo'lsin, 0 = 0 • a bajariladigan a — istalgan natural son bo'lishi mumkin. Algebraik amal uning natijasi mavjud va yagona bo'lsagina aniqlangan bo'ladi. 0: 0 natijasi istalgan son bo'lgani uchun bu amal aniqlanmagan deyiladi.

5.3. Nomanfly butun sonlar to'plamida yig'indi, ayirma va ko‘paytmaning bo'linishi haqida teoremalar.

**1-teorema.** Agar a va b sonlar c songa bo’linsa, ularning yig’indisi ham c ga bo’linadi.

101

{Va,b,c G Nn)(a :b A b : c => (a + b): c).

I s b o t.

A'd

*a*: *b* => *a-ck*

3pe A'n

*b\c* => *b=cl*

=> a + A = c(/: + l)Ak+lE.N0

bo‘lgani

uchun (a +6):c (ta’rifga ko‘ra).

Berilgan teoremaga teskari teorema to‘g‘ri emas.

2- t e o r e m a. Agarax, a2, **...,** an sonlarning har biri c soniga bo‘linsa, ax + a2 **+...+** an yig‘indi ham c ga bo‘linadi.

Isboti 1-teoremaga o‘xshash.

3- teorema. Agar a va b sonlari c ga bcflinsa va a > b bo‘lsa, a - b ham c ga bo^linadi.

(Va, i,c£ N0){{a':c,b:c A a •> b) => {a - b):c).

Isboti 1-teorema isboti kabi.

4- teorema. Agar ko‘paytuvchilardan biri biror c songa b&’linsa, ko^paytma ham c ga b&'linadi.

('Va,b,c G N0)(a\c => able).

I s b o t.

*b*

a:.c=>a *=* cq=>ab = (cq)b = c(qb) (ta’rifga ko‘ra)  
ab = c(qb) AqbGN0=>ab\c.

5- teorema. Agar ko\paytuvchilardan biri m ga, ikkinchisi n ga bollinsa, ko'paytma mn ga bollinadi.

{Va,b,m,n G N0){a ':m A b\n) => (ab\mn*).*

Isboti 4-teoremadagi kabi.

**6- teorema.** Agar yig‘indida bitta qo'shiluvehidan tashqari hamma qo'shiluvchilar c ga bollinsa, yig‘indi c ga bo'linmaydi.

(Val,a2,...,a„,Z>,cGjV0)(al\c, a2\c,...an\c,b:.c)^((ax *+*a2 *+*...+an *+*b)\c).

I s b o t. S = ax + a2 + ... + a„ + b bo‘lsin S • c deb, faraz qilaylik, u holda b = S ~(ax +... +ajlc => b:c (3-teoremaga ko‘ra), bu

shartga zid. Demak, S\c.

5.4. Bo‘linish alomatlari. Bo‘linish alomati x sonning yozuv- chiga qarab, x ni a ga bo‘lishni bajarmay, x son a ga bo‘linadimi yoki yo‘qmi, degan savolga javob beruvchi qoidadir. Yuqorida

102

aytilganidek, matematikada bunday umumiy qoida yo‘q. Lekin ba’zi sonlar uchun boiinish alomatlari topilgan va biz ularni ko‘rib chiqamiz.

1) 0‘nlik sanoq sistemasida 2 ga boiinish alomatini keltirib chiqaramiz. Buning uchun x sonning o‘nlik sanoq sistemasidagi yozuvini ko‘rib chiqamiz:

x = x„ ■ 10" + ■ 10" ' + ... + X, ■ 10 +x0.

10 soni 2 ga boiingani uchun 10, 102, 10"ko‘rinishidagi son- larning hammasi 2 ga boiinadi. Boiinish haqidagi 2- va 4-teo- remalarga ko‘ray = x„ ■ 10" + ... + x, • 10 yigindi 2 ga boiinadi. x son 2 ga boiinadigan y son va x0 yigindisidan iborat. Demak, x son 2 ga faqat x0 2 ga boiinsagina boiinadi. x0 sonning oxirgi raqami va y 0, 2, 4, 6, 8 ga teng boisagina 2 ga boiinadi. Bu raqamlar juft raqamlar deyiladi.

2 ga boiinish alomati. Son 2 ga uning o ‘nlik yozuvi juft raqam bilan tugasa va faqat shu holdagina bojinadi.

5 ga va 10 ga boiinish alomatlari ham shu kabi keltirib chiqariladi.

5 aa boiinish alomati. Son 5 ga bo jinishi uchun uning yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugashi zarur va yetarli.

10 ga boiinish alomati. Sonning yozuvi 0 raqami bilan tugasa va faqat shu holdagina u 10 ga bojinadi.

2) 4 ga va 25 ga boiinish alomatlari bir-biriga o‘xshash. Bu alomatlarni keltirib chiqarish uchun 100 = 4 • 25 ekanligini hisobga olish yetarli. 100 soni 4 ga ham, 25 ga ham boiinadi. Demak, 10"(« < 2) ko‘rinishidagi hamma sonlar 4 ga ham, 25 ga ham boiinadi. Demak x = x„ • 10" +... + x2 • 102 + x, • 10' + xoson yozu- vidagi z = x„-10" + ... + x2 • 102 qo‘shiluvchi 4 ga va 25 ga boiinadi. x sonning 4 ga va 25 ga boiinishi x, • 10 + x0 yigindiga bogiiq ekan.

4 ga boiinish alomati. x sonning oxirgi ikki raqami hosil qilgan ikki xonali son 4 ga bo jinsa va faqat shu holdagina x son 4 ga bo jinadi.

25 ea boiinish alomati. x son 25 ga bo jinishi uchun uning o'nlik yozuvi 00 yoki 25, yoki 75 bilan tugashi zarur va yetarli.

3) 3 va 9 ga boiinish alomatlarini keltirib chiqarish uchun barcha 10" - 1 ko‘rinishidagi sonlar 9 ga boiinishini ko‘rsatamiz.

103

10" -1 = 9- 1CT-1 +...+9-10+9= 9-(10"-'+...+10+1)= 9- 11... 1.

n~\ ta

Bu ko‘paytma albatta 9 ga va bo‘linishning tranzitivligiga aso- san 9 : 3 bo‘lgani uchun 3 ga ham bo‘linadi.

x = x„ ■ 10"+... + x2 ■ 102 + x, ■ 10 + x0 soni berilgan boisin. Bu sonni

x = x„ • 10" + ... + x2 ■ 102 + x, • 10 + xn = xn(10” - 1) + xn + ... +

+ ... x2( 102 - 1) + x, + x, (10 — 1) + x, + x0 = [xn( 10” - 1) +

+ ... + x,(iO - 1)] + xn + ... + x2 + x, + x0

ko‘rinishida yozish mumkin. 10” - 1 ko‘rinishidagi barcha son- lar 9 ga va 3 ga bo‘lingani uchunx„(10"+I -1) + ... + x,(10- 1) yig‘indi ham 9 ga va 3 ga bo‘linadi. x son 9 ga yoki 3 ga x„ + ... + x, yig‘indi 9 ga yoki 3 ga bo‘lingan holda bo‘linadi. Bu esa sonning raqamlari yig‘indisidir.

3 ga (9 ga) bo‘linish alomati. Son 3 ga (9 ga) bo‘linishi uchun uning raqamlari yig‘indisi 3 ga (9 ga) bo‘linishi zarur va yetarli.

5.5. Tub va murakkab sonlar. Har qanday natural a sonning kamida 2 ta bo‘luvchisi bor: 1 soni va a sonining o‘zi.

1 -t a ’ r i f. Faqat ikkita bo ‘luvchisi bor natural son tub son deyi- ladi.

Masalan, 3, 5, 17 sonlari tub son, chunki ularning 1 va o‘zidan boshqa bo‘luvchilari yo‘q. 12 tub son emas, uning 1 va 12 dan boshqa boiuvchilari ham bor, ular 2, 3, 4, 6 sonlari.

2-ta'rif. Ikkitadan urtiq bu'luvchisi bu'lgan natural sun *mu­rakkab* son deyiladi.

Masalan, 6 — murakkab son, uning to‘rtta bo‘luvchisi bor. Ular: 1, 2, 3, 6. 0 sonining bo‘luvchilari cheksiz ko‘p, 1 ning faqat bitta bo‘luvchisi bor, shuning uchun 0 va 1 ni tub sonlarga ham, murakkab sonlarga ham kiritilmaydi.

Shunday qilib, nomanfiy butun sonlar to‘plami 4 ta sinfga ajraladi. N0 ={0}U{1}U {tub sonlar} U {murakkab sonlar}.

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar p tub soni 1 dan farqli birorta n songa boiinsa, p = n bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, p \* n bo‘lsa, p sonning 3 ta turli bo‘luvchisi bor bo‘ladi: 1, p, n. Bu esa shartga zid, demak, p — tub son bo‘la olmaydi.

104

2°. Agar p va q turli tub sonlar bo‘Isa, p tub son q tub songa bo ‘linmaydi.

I shot, p tub son bo‘lgani uchun u faqat 1 ga va p ga bo‘linadi. q \* p va q \* 1 (q — tub son, 1 tub son emas) bo'lgani uchun p\q .

3°. Agar a va b natural sonlar ko ‘paytmasi p tub songa bo ‘linsa, bu sonlardan biri p ga bo ‘linadi.

I s b o t. Faraz qilaylik, a \ p, u holda p — tub son bo'lgani uchun ularning 1 dan boshqa umumiy bo‘luvchisi yo‘q: ab\ p => b\ p.

4°. 1 dan katta istalgan natural sonning hech bo‘lmaganda bitta tub bo‘luvchisi bor.

I shot. Teskarisini faraz qilaylik, 1 dan katta, birorta ham tub bo‘luvchisi yo‘q natural sonlar mavjud bo'lsin. Bunday son­lar to‘plamini A bilan belgilasak, unda eng kichik son mavjud bo‘ladi, chunki natural sonlar to'plami quyidan chegaralangan. Eng kichik element a bo‘lsin. a > 1 bo‘lgani uchun u yoki tub, yoki murakkab son bo‘lishi kerak. a — tub son bo‘la olmaydi, chunki aEA va farazga ko‘ra a ning tub bo'luvchisi yo‘q. a — murakkab son bo'lsa, u o‘zidan va 1 dan farqli biror b natural bo‘luvchiga ega bo‘lar edi. bE A, chunki b < a. Demak, b ning biror p tub bo'luvchisi bor, u holda tranzitivlik xossasiga ko‘ra, a\b a b\p a\ p, bu farazimizga zid. Demak, 1 dan katta barcha natural sonlar hech bo‘lmaganda bitta tub bo‘luvchiga ega.

5°. a murakkab sonning eng kichik tub bo‘luvchisi 4a dan katta emas.

I s b o t. a — murakkab son, p — uning eng kichik tub bo‘luv- chisi bo‘lsin. U holda a - bp bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki p < b, aks holda b ning tub bo‘luvchilari p dan kichik bo‘lib, a son p dan kichik tub bo‘luvchiga ega bo‘lib qolar edi.p<b tengsizlikning ik- kala qismini p ga ko‘paytirib, p2 < pb = a ni hosil qilamiz. Bundan

p2^>a yoki p<4a ga ega bo‘lamiz.

Bu xossadan sonning tub yoki murakkabligini tekshirishda, sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratishda foydalaniladi. Masalan, 137 sonini olaylik. 121 < 137 < 144, ya’ni 112 < 137 < 122, bundan 11 <Vl37 <12. Demak, 137 soni 12 dan kichik tub sonlarga bo‘linmasa, tub son bo‘ladi. 137 soni 2, 3, 5, 7, 11 sonlarining birortasiga ham bo‘linmaydi. Demak, 137 — tub son.

5.6. Eratosfen g'alviri. Tub sonlar jadvalini tuzishning qulay usulini eramizdan awalgi III asrda Aleksandriyada yashagan grek

105

matematigi va astronomi Eratosfen aniqlagani uchun u Eratosfen g‘alviri deb ataladi.

Bu usulga ko‘ra 2 dan biror n natural songacha bo‘lgan barcha natural sonlar yozib chiqiladi. So'ng 2 dan boshqa barcha 2 ga karrali sonlar o‘chiriladi, bunda 2 dan boshqa barcha juft sonlar, ya’ni har ikkinchi son o‘chiriladi. 2 dan keyin o‘chirilmay qolgan birinchi son 3, endi 3 dan tashqari barcha 3 ga karrali sonlarni o‘chiramiz, bunda 3 dan boshlab har uchinchi son o‘chiriladi, ba’zi sonlar 2 martadan o‘chiriladi. 3 dan keyin o‘chirilmay qolgan son 5 bo‘lgani uchun 5 dan tashqari barcha 5 ga karrali, ya’ni har beshinchi sonni o‘chiramiz. Shu taxlit -Jn dan katta bo‘lmagan o‘chirilmay qolgan songacha davom ettiriladi. Natijada n gacha bo‘lgan barcha tub sonlar qatoriga ega bo‘lamiz. Masalan, n - 40 bo‘lsin. Quyidagi qatorga ega bo‘lamiz:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | i | 1 | 3 | X | 5 | X | 7 | X | X |
| X | n | X | 13 | X | X | X | 17 | X | 19 |
| X | X | X | 23 | X | X | X | X | X | 29 |
|  | 31 | X | X | X | X | X | 37 | X | X X |

1 dan 40 gacha bo‘lgan tub sonlar quyidagilardan iborat:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

5.7. Tub sonlar to‘plamining cheksizligi. Tub sonlar to‘pla- mining cheksiz ekanligi eramizdan awalgi III asrda Aleksandri- yada yashagan grek matematigi Evklid tomonidan isbot qilingan.

Evklid teoremasi. Tub sonlar to^plami cheksizdir.

Isbot. Tub sonlar to‘plami chekli deb faraz qilaylik. U holda P-{P\,Pi> • ••, P„} tut> sonlar to‘plamiga ega bo‘lamiz.

a=p] ' Pi '•••' A,+l sonni hosil qilaylik. a soni tub emas, chunki u • tub sonlaming hammasidan katta va barcha tub sonlar to‘plami P ga kirmaydi. a soni murakkab ham bo‘la olmaydi, chunki

4-xossaga ko‘ra barcha murakkab sonlarning kamida bitta tub bo‘luvchisi bo‘lishi kerak, bu tub bo‘luvchi/?,, p2, ..., pn tub sonlarning biri bo‘lishi kerak, lekin a son bu tub sonlarning birortasiga ham bo‘linmaydi, lekin a son bu tub sonlarning birortasiga ham bo‘linmaydi (ularning har biriga bo‘lganda 1 qoldiq chiqadi). Demak, P to‘plamga kirmaydigan bitta bo‘lsa ham tub

106

son bor ekan. Bu qarama-qarshilik farazimiz noto'g'riligini ko‘rsatadi. Demak, tub sonlar to‘plami cheksiz ekan.

5.8. Arifmetikaning asosiy teoremasi. Matematikada ko‘pincha sonni ko‘paytuvchilarga ajratish yoki uning bo'luvchilarini to- pish masalasiga duch kelamiz. Shu o‘rinda quyidagi teoremani bilib qo‘yish foydalidir. Bu teorema natural sonlar arifmetikasi- ning asosiy teoremasi deyiladi va quyidagicha ifodalanadi:

**7-teorema.** Har bir murakkab son yagona usul bilan tub sonlar koipaytmasiga ajratiladi.

Isbot. Teoremada sonning tub sonlar ko‘paytmasiga ajra- tishning mumkinligi va bunday ko‘paytmaning yagonaligi haqida gapiriladi. Bu tasdiqlarni alohida isbot qilamiz. Tasdiqlarning bi- rinchisini teskarisini faraz qilish yo‘li bilan isbot qilaylik. Faraz qilamiz, tub sonlar ko‘paytmasi shaklida yozib bo‘lmaydigan murakkab sonlar mavjud. Ularning to‘plamini A bilan, to'plamning eng kichik elementini a bilan belgilaymiz. a — murakkab son va u tub ko‘paytuvchilarga ajralmaydi. a murakkab son bo‘lgani uchun uning o‘zidan kichik murakkab bo‘luvchilari bor: a = axa2 bo‘lsin. ax < a, a2 < a bo‘lgani uchun axAa2 sonlar A to‘plamga kirmaydi, demak, ular yoki tub sonlar ko‘paytmasiga ajraladi. ax=pr..pn A a2 = qr..qn bo‘lsin, u holda a = = px... pnqx... qn shaklda tub ko‘paytuvchilarga ajraladi va bu farazimizga zid. Demak, tub sonlar ko‘paytmasiga ajralmaydigan murakkab son bo‘lishi mumkin emas.

Ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz, ya’ni murakkab sonning tub son­lar ko‘paytmasi ko‘rinishida yagona usul bilan yozish mumkin. Faraz qilaylik, turlicha tub sonlar ko‘paytmasiga ajraladigan mu­rakkab sonlar mavjud, ularning to‘plami A va eng kichik elementi a bo‘lsin. Farazga ko‘ra a = px ... pm\a a = qx ... qk. Tengliklarning o‘ng tomonlarini tenglaymiz: px... pm = qx... qk.

Bu tenglikning chap qismi px ga bo‘linadi, demak, o‘ng qismi ham bo‘linishi kerak, qx,..., qk tub sonlar bo‘lgani uchun, ular­ning biri, masalan, qx son p ga bo‘linadi, tub sonlar xossasiga ko‘ra qx = px bo‘ladi. Tenglikning ikkala qismini px ga bo‘lsak, p2...p„ = q2 ••• qk = c soniga ega bo‘lamiz, c = a :pxApx> 2 bo‘lgani uchun c > a va u A to‘plamga tegishli bo'lmaydi, demak, u tub sonlar ko‘paytmasi shaklida yagona usul bilan yoziladi. Demak, p2... pn Aq2... qk yoyilmalar tarkibiga ko‘ra bir xil va faqat ko‘paytuvchilar tartibi bilangina farq qilishi mumkin. U holda

107

p]p2...pn Aq{q2... qk ham bir xil sonlardan iborat bo‘ladi. Bu esa farazimizga zid. Demak, istalgan murakkab son faqat bir xil usul bilan tub sonlar ko‘paytmasiga ajratiladi va turli ko‘paytmalar mavjud bo‘lsa, ular faqat ko‘paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bunday ko‘paytmada, odatda, sonning tub bo‘luvchilari o‘sib borish tartibida, bir xil ko‘paytuvchilarni esa daraja ko‘rinishida yoziladi. Ko‘paytmaning bu shakli sonning kanonik yoyilmasi deyiladi. a sonining kanonik yoyilmasi a = p^'Pi1 ■■■ P°n” shaklida bo‘ladi, bu yerda /?,</?,< ... < pn.

Masalan, 150 = 2 • 3 • 5 • 5 bo‘lsa, kanonik yoyilmasi 2 • 3 • 52 ko‘rinishida, 2000 soni uchun esa, 200 = V • 52 ko‘rinishida bo‘ladi.

5.9. Sonlarning EKUB va EKUK. Sonlarning bo‘linishi haqida nomanfiy butun sonlar to‘plami jY0 da gapirilgan edi. Sonning karralisi va bo‘luvchilari haqida natural sonlar to‘plamida gapi- ramiz, chunki 0 ga bo‘lish mumkin emas va 0 istalgan sonning karralisidir. Shuning uchun bundan keyin son deganda natural sonni tushunamiz.

3- t a ’ r i f. Agar a son b songa bo Tmsa, a son b songa *karrali* yoki b ning *karralisi* deyiladi. Vb ga karrali sonlar to ‘plami chek- siz va ularning umumiy ko ‘rinishi nb eng kichigi esa b bo‘ladi.

4- t a ’ r i f. m son a va b sonlarning karralisi bo ‘Isa, m ularning *umumiy karralisi* deyiladi.

5- ta’rif a son b sonlar umumiy karralilarining eng kichigi shu sonlarning *eng kichik umumiy karralisi* deviladi va EKUK (a: b) ko‘rinishida belgilanadi (qisqacha K(a; b)).

Masalan, 6 sonining karralilari {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...} = A, 8 sonining karralilari {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...} = B bo‘lsin. Bu sonlarning umumiy karralilari {24, 48, 72, ...} = AC\B va ularning eng kichigi 24 = K{6, 8) bo‘ladi.

1°. a va b sonlarning istalgan umumiy karralisi ularning eng kichik umumiy karralisiga boTmadi.

I s b o t. m : a Am : bAK(a, b) = K bo‘lsin. m : k ekanligini is- bot qilish uchun teskarisini faraz qilamiz.

m soni k ga qoldiqli bo‘linsin, ya’ni m = kq + r{r< k) bo‘lsin. m : aAk: a -> r = (m - kq): a (bo‘linish haqidagi teoremaga ko‘ra) shunga o‘xshash (m : bAk : b) -\* r - (m — kq): b; (r: aAr: b) -> r = = UK(a, b). Umumiy karralilarning eng kichigi k bo‘lgani uchun a va b sonlarning umumiy karralisi r>k bo‘lishi kerak, lekin

108

farazga ko'ra qoldiq r boiuvchi k dan kichik bo‘ladi. Bu ziddiyatlik r- 0 ekanini bildiradi.

2°. Agar EKUK (a, b) - k bo‘lsa, VcEN uchun EKUK (ac, be) = kc bo ‘ladi.

I s b o t.

*k:.* o => *kc \ ac k:b=>kc':kb*

=*>kc=UK(ac, be).*

kc ning EKUK (ac, be) ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, EKUK (ac, be) - l va l < kc bo‘lsin. I: acAl: be ekanligidan /: c < kc: c - k, ya’ni /: c <k, shu bilan birga (/: c) : aA(l: c) : b, bu esa k ning a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisi, degan fikrga zid, chunki (l:c) = EKUK (a, b) bo‘lib qolyapti. Demak farazimiz noto‘g‘ri.

6- ta’rif. Agar a son b songa bo'Iinsa, b son a sonning *bo'luvchisi* deyiladi.

7- ta’rif. Agar a va b sonlar c songa bo'Iinsa, c son a va b ning *umumiy bo'luvchisi* deyiladi.

8- ta’rif. a va b sonlar umumiy bo'luvchilarining eng kat- tasi shu sonlarning *eng katta umumiy bo^luvchisi* deyiladi va EKUB(a, b) yoki B (a, b) ko'rinishida belgilanadi.

Masalan, 24 sonining bo'luvchilari to‘plami A - {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}, 36 sonining bo‘luvchilari to‘plami B- {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}, bu sonlarning umumiy bo‘luvchilari A n B - {1, 2, 3, 4, 6, 12} va ularning eng kattasi 12 ga teng, ya’ni 12 = EKUB(24, 36).

Masalan, a = 24 • 33 • 52 • V va b = 2s \* 34 \* 53 \* 1 1 bo'lsa, B(a, b) = 24 • 33 • 52 va K(ab) = 25 • 34 • 53 • 72 • 11 bo'ladi.

Sonlarning kanonik yoyilmasini topish ularni tub ko'paytuv- chilarga ajratish bilan bog‘liq edi. Ko‘p xonali sonlarning tub ko‘paytuvchilarini topish ba’zi hollarda qiyinlik qiladi. Masalan, 8897 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratishda avval 7 ga, so‘ng 1271 sonini 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 sonlariga bo‘lib ko‘ribgina, 31 tub bo‘luvchini topamiz. Shunday hollarda EKUB ni tezroq topish imkonini beruvchi boshqa usullardan foydala- nish mumkin. Bu usul Yevklid algoritmi deyiladi va u quyidagi mulohazalarga asoslanadi.

1. Agar a soni b ga bo‘linsa, B(a, b) - b bo‘ladi, chunki b ning o‘zidan katta bo‘luvchisi yo‘q.

109

2. Agar a soni b ga bo‘linmasa, a = bq + r va UB(a, b) — — (JB(b, r) bo‘ladi, ya’ni a soni b ga qoldiqli bo‘linadi, a va b ning umumiy bo‘luvchilari to‘plami b va a ni b ga bo‘lishdagi qoldiq r ning umumiy bo‘luvchilari to'plami bilan ustma-ust tushadi. d - UB(a, b) bo'lsin. {a : dAb : d) -» (r = a - bq) : d (ayirmaning bo‘linishi haqidagi teoremaga ko‘ra) d = UB(b, r). Aksincha, d — UB(b, r) bo'lsin, u holda a — bq + r ham d ga bo‘linadi (yig‘indining bo‘linishi haqidagi teoremaga ko‘ra), bundan d = UB(a, b) degan xulosa kelib chiqadi.

**960**

**960**

**'725**

3) a = bq + rr\a[b]rG.N bo‘lsa, B(a, b) - B{b, r) bo‘ladi. 2- mulohazaga ko‘ra a, b va b, r sonlarining umumiy bo‘luvchilari to‘plamlari bir xil. Demak, bu to‘plamlarning eng katta elementlari ham bir xil bo‘ladi.

Ana shu uchta mulohazaga tayanib, a, b sonlarining EKUB ni topishni b va rsonlari EKUBni topish bilan almashtirish mum- kin bo‘ladi. Agar b soni r ga karrali bo‘lsa, B{b, r) — r bo‘ladi, b = rqx + rx bo‘lsa, B(b, r) = B(r, ry) va hokazo. Bu jarayon biror qoldiq o‘zidan keyingi qoldiqqa qoldiqsiz bo‘linguncha davom etadi va shu oxirgi 0 dan farqli qoldiq B(a, b) bo‘ladi.

Mi sol. 5(4565, 960) ni topish kerak bo‘lsin. Ketma-ket bo‘lishni ixcham ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin:

4565

**'3840**

725=r

**1**

**725**

**'675**

**135**

'100

**50**

**'35**

**135=r,**

**5**

**50=r,**

**35=r,**

**35**

**30**

**5*=B (a, b)***

**15**

**15**

Demak, 5(4565, 960)=5 ekan.

9-t a ’ r i f. Agar a va b sonlar uchun EKUB {a, b) — 1 bo ‘Isa, bu sonlar oizaro tub sonlar deyiladi.

Masalan, 12 va 35 sonlari o‘zaro tub, chunki 5(12, 35) = 1.

110

Sonlarning EKUB va EKUK quyidagi xossalarga ega: 1°. Agar c= UK(a, b) bo‘lsa, I - -- = UK(a, b) bo‘ladi.

c

*lsbot.Ha* *a* *lib* ekanligini ko‘rsatamiz. c - UB(a, b) => a l c =>a = a^c A bl c =\*> b = l\c ;

, **ah** flic-iic .

/ = - = a,bc\

C C II’

/ = albic = bi(al c) = b]ala=>lla / = fll6lc = a)(Z>| c) = alblb=> lib

*l-UK(a,b*) ekan.

2°. & = K(a, b) bo ‘Isa, d = ^ = B(a, b) bo‘ladi.

k — K(al b)^> klb^> *aklab*

=> *ak*: *dk* => *a \ d.*

d = -^=>ab = dk *k*

Xuddi shu yo‘l bilanftiaf ekanligini ko‘rsatsa bo‘ladi, demak, d = UB(a, b) ekan. Endi 1 = EKUB (a, b) ekanini ko‘rsataylik. Faraz qilaylik, a va b sonlarning d dan katta c umumiy

bo‘luvchisi bo‘lsin. U holda 1-xossaga ko‘ra l = ?lL=UK(a, b);

c>d=>l= =^<Y = k=>l<k . Shunday qilib, a va A sonlarning

umumiy karralisi ularning eng kichik umumiy karralisidan kichik bo‘lib qoldi. Bu qarama-qarshilik farazimiz noto‘g‘riligini bildiradi. Demak, d=EKUB (a, b). Yuqoridagilardan kelib chiqadigan xulosalar:

1) B(a, b) ■ K(a, b) = ~ ■ k = ab, ya ’ni a va b sonlarning eng katta

umumiy bo‘luvchisi bilan eng kichik umumiy karralisining ko ‘paytmasi shu sonlar ko ‘paytmasiga teng.

2) Agar B(a, b) = 1 bo‘lsa, K(a, b) - ab. Ya ’ni o‘zaro tub son­larning eng kichik umumiy karralisi ularning ko‘paytmasiga teng.

3) a va b sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi ularning istalgan umumiy bo‘luvchisiga boTmadi.

4) (B(b, c) = \ *AalbAalc)* => *(albc*), ya ’ni a son o‘zaro tub bo ‘Igan b va c sonlarning har biriga bo ‘linsa, a soni ularning ko ‘paytmasi be ga ham bo Tmadi.

Isbot. alb A ale => a =UK(b, c) => a l EKUB(b, c).

B(b, c) = l => K(b, c) = be . Demak, a l be.

3- va 4-xulosalardan murakkab songa bo‘linish alomatlari kelib chiqadi. Bunda murakkab son kamida ikkita o‘zaro tub sonlar

ill

ko‘paytmasidan iborat bo‘lishi kerak. Bunday alomatlardan bir nechtasini keltiramiz.

1- alomat. x son 6 ga bo‘linishi uchun u 2 ga va 3 ga bo‘linishi zarur va yetarli.

2- alomat. x son 12 ga bo‘linishi uchun u 3 ga va 4 ga bo‘linishi zarur va yetarli va hokazo. Bunda B(2, 3) = 1, B(3, 4) = 1 shartlar bajarilishi kerak.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Bo'linish munosabati ta’rifidan foydalanib: a) 32 soni 8 ga bo'linishini; b) 42 soni 5 ga bo'linmasligini ko'rsating. **n(n** + 1) ko'paytma 2 ga bo'linishini isbotlang.

1.

2.

**3.**

**4.**

**5.**

6.

**7.**

8.

**9.**

10**.** 11**.** 12**.**

**13.**

**14.**

**15.**

**16.**

**17.**

**18.**

Bo'lishni bajarmay 156, 225, 1630, 5031 sonlarining qaysilari 2 ga, 3 ga, 4 ga, 5 ga yoki 9 ga bo'linishini aniqlang.

Amallarni bajarmay, qaysi ifodaning qiymati 5 ga bo'linishini aniqlang:

a) 60 + 145; b) 65 + 141; d) 321 + 134; e) **125-17; 0 239-18;** g) 345 + 127 + 180 + 465.

**a** va **b** sonlari c ga bo'linmasa, ularning yig'indisi va ko'paytmasi ham **c** ga bo'linmaydi, degan mulohaza to'g'rimi?

8 ga va 125 ga bo'linish alomatini keltirib chiqaring.

18, 45, 75, 36 va yana bir nechta murakkab sonlarga bo'linish alomatlarini ayting va asoslang.

Matematik induksiya metodiga ko'ra: a) (4"- 1): 3; b) (62" —1):35; d) (32n+1 + l):4; e) (52"\_1+1):6 bo'linishni isbotlang.

385, 176, 187, 189 sonlari tub yoki murakkabligini aniqlang. Ketma-ket keluvchi 20 ta tub sonni aniqlang.

1440, 17600, 429 sonlarining kanonik yoyilmasini toping.

10! sonining kanonik yoyilmasida 2 soni nechanchi darajada qatnashadi? 20! soni nechta 0 bilan tugaydi?

Sonlarning EKUBni va EKUKni toping : a) 144 va 360; b)351 va 28; d) 80, 120, 280; e) 238, 266, 413 va 329.

Sonlarning EKUBni Yevklid algoritmi yordamida toping: a) 138 va 115;

b) 481 va 703; d) 3762 va 4446.

**a : b=** 11: 13 va EKUB (**a**, **b) =** 5 bo'lsa, **a** va **b** sonlarni toping.

„ . . . . **21120** Kasrm qisqartiring: **.**

Kasrlarni umumiy maxrajga keltiring:

**111 1234**

**21120 va 30720’**

112

Ill **bob.** RATSIONAL VA HAQIQIY SONLAR

1-§. MUSBAT RATSIONAL SONLAR TO'PLAMI

1.1. Kesmalarni o‘lchash. Matematika aksariyat hollarda asosiy ikki masala — chekli to‘plam elementlari sonini hisoblash va kat- taliklarni o‘lchashda qo'llaniladi. Chekli to‘plam elementlarini hisoblashda javob natural son bilan ifodalanadi: to‘rtta tarvuz, sakkizta mashina, 3 bo‘lak gazmol. Bunda tarvuz massalari har xil bo‘lishiga, gazmol bo‘laklari turli uzunlikdaligiga, mashinalar har xil yuk ko‘tara olishligiga e’tibor berilmaydi. Biroq bu bo‘laklardagi gazmollar to‘rtta odamga kastum tikishga yetish- yetmasligini aniqlash uchun har bir bo‘lak gazmol uzunligini o'lchash kerak. Umuman, kattaliklarni o‘lchash, ya’ni bu kattaliklarni o‘lchovning birorta o'lchov birligi — metr, kilogramm va h.k. bilan taqqoslash va taqqoslash natijasini son bilan ifodalash inson faoliyatining turli sohalarida keng uchraydi.

Agar o‘lchanayotgan kattalikni o‘lchov birligiga «teng» (u yoki bu ma’noda) bir necha qismga (bo‘lakka) bo‘lish mumkin bo‘lsa, o‘lchov natijasi (yoki boshqacha, kattalik o'lchovi) natural son bilan ifodalanadi. Biroq ko‘pincha o‘lchov birligi o‘lchanayotgan kattalikka butun son marta joylanmaydi. Shuning uchun kattalik o‘lchovini ifodalashda natural sonlardan farqli sonlar kiritiladi va son tushunchasi kengaytiriladi.

Biz bu bobda sonlar to‘plamining turli xillarini qaraymiz, bunda avval musbat ratsional sonlar to‘plami Q, keyin musbat haqiqiy sonlar to'plami R+, va nihoyat, haqiqiy sonlar to‘plami R qaraladi. Bunda sonlarning har bir ko‘rinishi uchun qo'shish va ko‘paytirish amallari ta’riflanadi, bu ta’riflarda o'lchanayotgan kattaliklar va o'lchov birliklari ustida aniq amallarning qanday bajarilishi ifodalanadi. Bunday bog‘liqlikning qandayligini bilish uchun kesmalar uzunliklarini o'lchaymiz.

Agar a kesma av a2, ..., an kesmalar birlashmasidan iborat bo‘lsa, a kesma av av ..., an kesmalarga bo'lingan (yoki shu kes- 113 malardan tuzilgan) deyiladi. Shu bilan birga ulardan hech bir ik- kitasi umumiy ichki nuqtaga ega emas (ustma-ust tushmaydi), biroq umumiy uchlarga ega bo‘lishi mumkin.

Agar a kesma av a2 an kesmalarga bo‘lingan bo‘lsa, a

kesma bu kesmalar yig'indisi deyiladi va bunday yoziladi:

***n***

a = o, + a2 +.... + o„ yoki a-^ak-

’ \*=i

Biror e kesmani olamiz va uni birlik kesma yoki uzunlik o ‘Ichovining birligi deymiz. Agar a kesmani har biri e birlik kes- maga teng bo‘lgan, n ta kesmaga bo‘lish mumkin bo‘lsa, a kesma e kesmaga karrali deymiz va n sonni o‘lchov yoki e birlik kesma- da a kesma uzunligining qiymati deyiladi. e birlik kesmada kesma o‘lchovini me(a) bilan belgilaymiz. Agar e birlik kesma belgilan- gan bo‘lsa, me(a) o‘rniga m(a) deb yozamiz va bu sonni soddagina qilib kesma uzunligi (uzunlik qiymati emas) deymiz. Shuni esda tutish zarurki, boshqa o‘lchov birligiga o‘tganda m(a) son o‘zgaradi, kesmaning o‘zi esa o‘zgarishsiz qoladi.

m(a) - n desak, a = n • e deb yozamiz, uning ma’nosi: a kes­ma e kesmaga teng n ta kesmadan iborat. Ravshanki, e kesmani unga teng / kesmaga almashtirilsa, o‘lchov o‘zgarmaydi, me(a)-mf(a){birorta kesmani ikkita turli chizg‘ich bilan o‘l- chansa va bunda ikkala chizg‘ich bir xil darajalangan bo‘lsa, bir xil natija olinadi). Aksincha, agar a = n e va a = n f bo‘lsa, e -f bo‘ladi. Demak, agar a-n e va a-m-e bo‘lsa, n = m bo‘ladi (bitta kesma o‘lchovning berilgan birligida turli o‘l- chovlarga ega bo‘lmaydi).

Har bir e kesmaga e ga karrali bo‘lgan kesmalarning 2' to‘plami mos keladi. Bunday kesmalarning har biriga e birlik kesmada uning uzunligi m(a) natural sonni mos keltirdik. Agar a va b kesmalar teng bo‘lsa, m(e) = /«(6)bo‘ladi. Aksincha, agar m(e) = m(b) bo‘lsa, a va b kesmalar teng bo‘ladi. Shunday qilib, 2 to‘plamda «a va b kesmalar teng» va «a va b kesmalar o‘lchovlari bir xil» muno- sabatlar bir xil xossalarga ega. Kesma o‘lchovi ikkita muhim xossa — additivlik va multiplikativlik xossalariga ega. Bu xossalarni ko‘rib chiqamiz.

a kesmani 2 ga tegishli bo‘lgan ikkita b va c kesmaga ajratish mumkin, bunda m(b) = p va m(c) = q . Unda butun kesma e bir- 114 lik kesmaga teng p + q ta qismga ajraladi, shuning uchun uning o'lchovi p + q ga teng, ya’ni m(a) - m(b) + m(c). Shunday qilib, biz kesmalar uzunliklarining quyidagi xossasini isbotladik.

a) Agar a = b + c bo‘lsa, a kesma uzunligi uning qismlari uzun­liklarining yig‘indisiga teng bo'ladi:

m(a) = m(b) + m(c), (1)

bunda, b va c kesmalar uzunliklari natural sonlar bilan ifodala- nadi.

Qo‘shish natijasi additio deyilgani uchun uzunlikning bu xos- sasi additivlik xossasi deyiladi.

Uzunlikning ikkinchi xossasi bir o'lchov birligidan ikkinchi o‘lchov birligiga o‘tish bilan bog'liq. Bilamizki, a kesmani metr- lar bilan o‘lchaganda/?son hosil bo‘lsa, o‘sha kesmani santimetrlar bilan o‘lchanganda 100 p son hosil bo'ladi. Buni m2(a) = 100-m,(a) tenglik ko'rinishida yozish mumkin, bunda m, (a) orqali a kesma uzunligini metrlar bilan o‘lchagandagi qiymati, m2(a) — santimetrlar bilan o'lchagandagi qiymati, 100 soni berilgan o'lchov birligi yangi o‘lchov birliklarining nechtasiga tengligini bildiradi (1 metrda necha santimetr).

Endi uzunlikning bir o'lchov birligidan ikkinchi o‘lchov bir­ligiga o'tishning umumiy ko'rinishini qaraymiz. el va e2 — ikkita o‘lchov birligi bo‘lsin, bunda ex birlik e2 birlikdan n marta katta, ya’ni et =n-e2, bunda n — natural son. a kesmani ex o‘lchov birligi bilan o'lchaganda pn son hosil bo‘lsa (ya’ni, agaras p-el bo‘lsa), u holda o‘sha a kesmani e2 bilan o‘lchagandapn son hosil bo'ladi (ya’ni, a = (p ■ n)ex). Haqiqatan, a kesma e, kesmaga teng p ta kesmadan iborat, p ta kesmaning har biri e2 kesmaga teng n ta kesmadan iborat. Demak, a kesmada e2 kesmaga teng pn ta kesma bor, ya’ni a = (p n)ex, a = (p n)ex va £ = ne2 bo‘lgani uchun p(ne2) = (pn)e2 tenglikni isbotladik.

ex birlik kesma uzunligi bilan o'lchangan a kesma uzunligini mx(a) orqali, e2 birlik kesma uzunligi bilan o‘lchangan shu kes­mani n^ia) orqali belgilaymiz. U holda m{(a) - p va m2(a) - /7/jbo‘ladi, kesma uzunligi bilan o‘lchangan e{ kesma uzunligi n ga tengligidan (m2(ex) = n),m2(a) = pn tenglikni bunday yozish mumkin:

r>h(a) = m^a) ■ *m2(ex).* (2)

Shunday qilib, biz kesma uzunligining quyidagi xossasini isbotladik.

115

b) Agar a kesma e, kesmaga karrali, ey kesma e2 kesmaga karrali bo‘lsa, a kesma e2 kesmaga karrali bo'lib, (2) tenglik bajariladi.

(2) tenglikning o‘ng qismida mx{a) va w2(e,)lar ko‘paytmasi turgani uchun b) xossa o‘lchovning multiplikativligi deyiladi (lo- tincha multiplicatio «ko‘paytirish» demakdir). Bu xossa natural sonlarni ko‘paytirish amali bilan o‘lchovning yangi birligiga o‘tish orasidagi bog‘liqligini ifodalaydi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Kattaliklami o'lchash natijasida son tushunchasi kengayishi sababini tushuntiring.

2. Yassi shakllar to'plamida **«a** va **b** shakllar teng» va **«a** va **b** shakllar yuzlari bir xil» munosabatlar ekvivalentmi?

3. Burchaklar to'plamida «ava **b** burchaklar teng» va **«a** va **b** burchak- lar kattaliklari teng» munosabatlar ekvivalentmi?

4. Birlik kvadratlarga bo'linadigan shakllar yuzlari uchun additivlik va multiplikativlik xossalarini isbotlang.

5. Burchaklar kattaliklari uchun additivlik va multiplikativlik xossalarini isbotlang.

1.2. Ekvivalent kasrlar. a kesma 3e kesmadan uzunroq, lekin Ae dan qisqaroq. Shuning uchun birlik kesmada uning uzunligini natural son bilan ifodalab bo‘lmaydi. Biroq e kesmani 5 ta teng qismga bo'lib, ulardan birini yangi o‘lchov birligi uchun tanlab olsak, a kesma uzunligi natural son 18 bilan ifodalanadi — a kes­ma 18 ta birlik kesmadan iborat bo'lib, ulardan har biri birlik kesmaning beshdan bir qismini tashkil etadi.

Boshqa birorta kesma uzunligini natural son bilan ifodalash uchun dastlabki birlik kesmani 5 ta qismga emas, aytaylik, 38 ta yoki 217 ta qismga bo'lishga to‘g‘ri kelardi. Bunda birlik kesmani nechta qismga bo'lsak ham shunday kesmani topish mumkinki, uni o‘lchash uchun birlik kesmani undan ham ko‘p qismlarga bo‘lishga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun boshqacha yo‘l tutish mumkin — uzunlikni har doim natural son bilan ifodalashga intilmasdan, bitta birlik kesmani saqlagan holda har gal uni necha qismga bo'layotganimizni ko‘rsatish va o'lchanayotgan kesma nechta bunday qismlardan iboratligini ko‘rsatish qulaydir. Yuqorida

yozilgan holda o'lchash natijasi (18; 5) natural sonlar juftligidan

18

iborat. Ko'pincha, bunday juftlik y kasr ko'rinishida yoziladi.

116

Umumiy ko'rinishdagi kasrlar o‘lchashlarda quyidagicha kelib chiqadi. e kesmaning /7-ulushi deb shunday / kesmani aytamizki, unda e-nf agar a kesma e birlik kesmaning w-ulushiga teng p ta kesmaning yig'indisi bo‘lsa va m{a) = - kabi yoziladi. Bunday holda a = - e kabi ham yoziladi va a kesma e birlik kesma bilan o ‘Ichovdosh deyiladi. Ravshanki, na = pe bo‘lgandagina m(a) = - bo‘ladi.

Bitta a kesmaning uzunligi berilgan e birlik kesmada turli kasr ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Haqiqatan, na = pe bo‘lsa, har

qanday m natural sonda (nm)a = (pm)e , shuning uchun a kesma­ning uzunligi ^ kasr ko‘rinishidagina emas, ^ kasr ko‘rinishida ham ifodalanadi. Quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. - va- kasrlar bitta a kesmaning uzunligini ifoda- lashi uchun pq=nt tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan, agar m(a) = - va m{a) = - bo‘lsa, na = pe va

n q

qa = te bo'ladi. Ammo u holda (nq)a = (pq)e va (nq)a = (nt)e , shuning uchun (pq)e = (nt)e . Bu tenglik pq = nt bo‘lgandagina o‘rinli. Demak, ^ va - kasrlar bitta kesmaning uzunligini ifo- dalashi uchun pq = nt shartning bajarilishi zarur ekan.

Aksincha, pq = nt va ^ kasr a kesmaning uzunligi, ~ esa b kesmaning uzunligi bo'lsin. U holda na = pe va qb = te. Bundan (nq)a = (pq)e va (nq)b = (nt)e . pq = nt bo‘lgani uchun (nq)a — = (pq)b bo‘ladi va bu tenglik a va b kesmalar teng bo‘lgandagina o‘rinli. ^ va - kasrlar teng kesmalar yoki, boshqacha aytganda,

bitta kesmaning uzunligini ifodalashi uchun pq = nt shartning bajarilishi yetarlidir.

Kelgusida pq = nt bo‘lgan ikki ^ va - kasrni ekvivalent kasrlar deymiz. Ko‘rib turibmizki, ikki kasr bitta kesmaning uzunligini ifodalasagina bu kasrlar ekvivalent boMar ekan.

1.3. Musbat ratsional sonlar. Kesma uzunligi bitta son bilan ifodalangani uchun ekvivalent kasrlar bitta kasrning turlicha ko‘rinishini ifodalaydi. Kasr ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lgan sonlar musbat ratsional sonlar deyiladi. Musbat ratsional sonlar deb

**1** **2**

ekvivalent kasrlar to'plamiga aytiladi. Shunday qilib, ^ ham, - ham, | ham musbat ratsional sonlar emas. j|; ...j

117

kasrlar majmuasi musbat ratsional son bo ladi. 7 , \ va h. k. — u ■ 2 ’ 4 ’ 6

shu sonning yozuvidir.

Kasr ko‘rinishida berilgan musbat ratsional sonning yozuvlari orasidan surat va maxraji o‘zaro tub bo‘lgan yozuvni tanlash mumkin. Bunday kasrlar qisqarmas kasrlar deyiladi. Shunday qilib, quyidagi teorema o‘rinli.

Te o r e m a. Har qanday musbat ratsional son a (ya’ni, har qanday ekvivalent kasrlar to'"plamlari) uchun surat va maxrajla- ri o‘zaro tub bo‘lgan bitta va faqat bitta kasr topiladi.

Haqiqatan, a sonni tasvirlovchi (ifodalovchi) bitta ^ kasr

mavjud bo‘lsin. a son p va n sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘lsin. U holda p-p{d, n-n^d bo‘lib, px va nl lar

o‘zaro tub. p,n = n,p-dp,n, bo‘lgani uchun - va — kasrlar ek-

vivalent, — kasr esa a sonidir. Demak, — kasr a sonning n\ "1

qisqarmaydigan yozuvidir.

a son boshqa qisqarmaydigan yozuvga ega emasligini isbot-

S *P*

laymiz. Faraz qilaylik, - kasr ham a son bo‘lib, kasrdan farqli.

U holda j/7, = pxt; bu tenglikning chap qismi n{ ga boiingani uchun o‘ng qismi ham «, ga bo‘linadi, t - nxq q son birdan farqli, P s

aks holda va -lar bir xil bo‘lar edi. Shunday qilib, snx - p^q boigani uchun s - p^q.

s

Demak, s ham q ga boiinadi va shuning uchun - kasrni q ga

***p. 1***

qisqartirish mumkin. Shunday qilib, a sonning ~ kasrdan farqli

har qanday yozuvi qisqaruvchidir.

Agar t natural son va a = te boisa, istalgan natural son n uchun na-(nt)e . Bu esa a kesma uzunligini faqat natural son t

bilan emas, balki ^ ko‘rinishdagi kasrlar bilan ham ifodalash mumkinligini ko‘rsatadi. Boshqacha aytganda, natural son t

**r?.**2**r.** ,nt\_. \

IT 2 ’ n

ko‘rinishdagi musbat ratsional son bilan bir xil ekan.

118

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. — - munosabat simmctriklik. rcflcksivlik va tranzitivlik xossalariga

n i

cga ekanligini isbotlang.

2. Kcsmalarning o'lchovdoshlik munosabati rcflcksivlik, simmctriklik va tranzitivlik xossalariga cga ekanligini isbotlang.

84 .

3. ~ kasrga ekvivalent va maxraji **111111** bo'lgan kasrm toping.

„ **l** , . . . . 37 118 78 1415

4. Kasrlarm qisqartinng: ^ ^ ^ , y^y .

1.4. Musbat ratsional sonlarni qo‘shish. Bizbu bandda musbat ratsional sonlarning Q+ to‘plamida qo‘shish amalini ta’riflaymiz. Avval quyidagi tasdiqni isbotlaymiz:

Q+dan olingan har qanday ikki a va b sonni bir xil maxrajli kasrlar ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Haqiqatan, a son ^ kasr, b son q kasr ko‘rinishida berilgan

bo‘lsin. U holda bu sonlarni bir xil maxrajli ~ va ^ kasrlar ko‘rinishida yozish mumkin.

^ va - kasrlarni ularga ekvivalent va bir xil maxrajli kasrlar- ga almashtirish bitta maxrajga keltirish deyiladi. ^ va kasrlarning

eng kichik umumiy maxraji n va q sonlarning eng kichik umumiy karralisidir. Agar k - k(n, q) bo‘lsa, k =nl = qm, shuning uchun

- kasr — - ~ kasrga, ~ esa — = ~ kasrga ekvivalent. n nl k ° ’ q qm k °

4 11

l-misol. yj vayy kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz. Bu

. . . 4 15 60 11 35 385 . . . . . . .

kasrlarni yyTyy = 525 va y=yy = ^5 kasrlarga almashtirish mum­kin; ko‘pincha, 35 va 15 sonlarining eng kichik umumiy karralisi topiladi. k(35, 15) = 105 , keyin bu kasrlar ~ va Tw ~ T05

kasrlarga almashtiriladi, bunda 3 = 105:35,7 = 105:15.

Kasrlarni bitta maxrajga keltirish mumkinligi quyidagini ang- latadi: agar a va b ke.smalar e birlik kesma bilan o‘lchovdosh bo‘lsa, bunda a-^e, b - '-e, shunday / kesma mavjudki, unga

a, b va e kesmalar karrali bo‘ladi. Bunday kesmaga misol qilib e birlik kesmaning /Jtyqismini (ulushini) olish mumkin. Bu /kesma a va b kesmalar o‘lchovining umumiy birligi deyiladi. Bu kesmani yangi birlik kesma deb olsak, a va b kesmalar uzunliklari pq va tn natural sonlar bilan ifodalanadi. Shundan keyin bu kesmalar

119

\_i , yig‘indisi va ayirmasi uzunliklarini

' topish, bu kesmalardan qaysilari uzunroq ekanini bilish va h. k. lar qiyinlik qilmaydi.

***a***

a kesma uzunligi -ga, b kesma

***t ^***

***III. I-rasm.***

uzunligi -ga teng bo‘lib, c bu kesma- lar yig‘indisi boisin (III. 1-rasm).

U holda na = pe , nb = te , shuning uchun ne = n(a + b) = na + + nb = pe + te = (p+t)e. Bu esa c kesma uzunligi ^ kasr orqali

ifodalanishini ko‘rsatadi. Demak, additivlik xossasining bajari- lishini talab qilish1 uchun

***E. + L = HL***

deb olish kerak ekan. Buni quyidagi ta’rif bo'yicha qabul qilamiz: a va b musbat ratsional sonlarni qo‘shish uchun ularni bir xil

maxrajli ^ va ^ kasrlar ko‘rinishiga keltirish kerak; bu sonlar yig‘in- disi ^ kasr ko‘rinishiga keltiriladi (ya’ni o‘sha maxrajli, surati esa qo‘shilayotgan kasrlar suratlarining yig‘indisiga teng kasiga keltiriladi).

^ va - kasrlarni ularga ekvivalent kasrlarga almashtirganda ^ ham ekvivalent kasrga almashinishini tekshirish oson. De­mak, Q dan olingan sonlar yig‘indisi ularning kasr ko'rinishida qanday yozilishiga bog‘liq emas ekan.

Agar a va b sonlar turli maxrajli kasr ko'rinishida berilgan bo‘lsa, awal bu kasrlarni bitta maxrajga keltirib, keyin yuqorida ifodalangan qoidani qo‘llash kerak.

2-misol. H va ^ kasrlarni qo‘shamiz. Eng kichik umu- miy maxraj ^(60,105) = 420 . Demak,

13 22 \_ 13-7 22-4 \_

**.91+88 ' 420**

**179**

**420**

60 + 105 60-7 105-4

xr . , ***p t pq + tn***

Umuman olganda - + - = ■ — ° n q nq

1 Ya’ni kesmalar yig’indisining uzunligi ular uzunliklarining yig‘indisiga tengligini talab qilish.

**120**

1.5. Qo‘shishning xossalari. Ayirish. Q+ to'plamda qo‘shish- ning ta’rifidan qo‘shish amali kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalariga ega ekanligi kelib chiqadi: Q+ dan olingan har qanday a, b, c sonlar uchun a+b-b+ava a + (b + c)-(a + b) + c; a+c-b+c dan a = b kelib chiqadi. Un- dan tashqari Q+ dan olingan har qanday a va b sonlar uchun a + b & a .

a + b - b + a ni isbotlaymiz. a va b sonlarni - va - kasr

J n n

ko‘rinishida yozamiz. U holda, a + b son — , b + a esa —

kasrlar ko‘rinishida yoziladi. Pva / natural sonlar va N da qo‘shish amali kommutativ bo‘lgani uchun p + t = t + p, bunda a + b - - b + a ekanligi kelib chiqadi. Qolgan tasdiqlar ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

Shuni eslatib o‘tamizki, yuqorida ta’riflangan qoida N dan olingan natural sonlarni qo‘shishda o‘sha natijani beradi.

Haqiqatan, p natural sonni y ko‘rinishda, /sonni j ko‘rinishda yozish mumkin, bu sonlar yig‘indisi -y- ga teng, ya’ni p + t na­tural songa teng.

Q+ dagi a son Q+ dagi b sondan katta bo‘lsin, ya’ni Q+ da shunday c son mavjudki, a-b + c bo‘ladi. Bunday holda a > b kabi yoziladi. «>» munosabat nosimmetrik, tranzitiv va chi- ziqli.

Agar ava b sonlar y va \*- bir xil maxrajli kasrlar bilan ifoda- langan bo‘lsa, p > t bo‘lgandagina a > b bo‘ladi. Agar bu sonlar ~ va ~ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, pq > nt bo‘lgandagina a > b bo‘ladi.

Q+ to‘plamda tartib munosabati ikkita xossaga ega bo‘lib, bu xossalar TV to‘plamdagi natural sonlarning tartib munosabatidagi xossalardan farqlidir. Shuni eslatib o‘tamizki, natural sonlar orasida eng kichik son 1 mavjud, undan tashqari natural sonlar to‘plami diskret (uzuq) — har bir natural son uchun undan bevosita keyin keladigan son mavjud, Q+ to‘plam xususida boshqacha:

a) Q+ t° ‘plamda eng kichik son yo ‘q;

b) Q+ dagi turli ikki a va b sonlar orasida shu to ‘plamning cheksiz ko ‘p sonlari mavjud.

121

Avval Q+ da eng kichik sonning yo'qligini isbotlaymiz. Haqiqatan, a shu Q+ to‘plamdan olingan birorta son bo‘lsin. Uni j kasr ko‘rinishida yozish mumkin. U holda ~ kasr a dan kichik sonning yozuvidir. "

Endi istalgan ikkita turli musbat ratsional a va b sonlarni olamiz. U sonlardan biri ikkinchisidan kichik, masalan, a < b

boisin. a va b sonlarni — va - kasrlar bilan ifodalaymiz. a < b

boigani uchun m < p. kasr ko‘rinishidagi c sonni olaylik.

m<p bo‘lgani uchun 2m<m + p<2p, shuning uchun

Yn<rt^n~ < Yn ’ y3™ a < c <b. Shunday qilib, Q+ dagi istalgan

ikki son orasida Q+ ga tegishli hech boimaganda bitta c son mavjud. Keyin avac orasida, c va b orasida ikki sonni tanlab olish mumkin. Bu jarayonni davom ettirib, a va Asonlar orasida Q+ dan cheksiz ko‘p turli sonlarni topish mumkin.

Shuni eslatamizki, Q+ to‘plamdagi sonlar orasida eng katta son yo‘q;

^ kasr ko‘rinishidagi har qanday a son uchun undan katta son, masalan, ^ kasr son mavjud.

Endi Q+ da ayirish amalini ta’riflaymiz. a > b boisin. U holda ta’rifga ko‘ra a = b + c boiadigan cGQ+ mavjud. c son bir qiymatli aniqlanganini isbotlaymiz. Haqiqatan, a - b + d boisin, bunda dEQ+. U holda b + c - b + d. Q+da qoShislming qisqaruvchan- ligidan c = d kelib chiqadi, bu esa c ning bir qiymatli aniqlangan- ligini bildiradi.

a = b + c boiadigan cEQ+ mavjud boisa, c son a va b son- laming ayirmasi deyiladi va a - b kabi belgilanadi. Ravshanki,

agar avab sonlar ^ va ^ kasrlar bilan ifodalangan boisa, a - b

ayirma ^ kasr bilan ifodalanadi. Agar a va b sonlar ^ va

kasrlar bilan berilgan boisa, a - b ayirma P\~l kasrko‘rinishida

boiadi. ^ va kasrlarni K(n, q) maxrajga keltirish mumkin. Masalan,

13 \_ 22 \_ 91-88 \_ 3 \_ 1 60 105 420 420 140'

**122**

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**P\ ’ — va -**

**— bo'lsa, -** n

***Pi***

1. va UU 13a, ■

***n nx q q\ n q***

**sonlar yig'indisi bu sonlar qanday kasrlar bilan ifodalanganligiga bog'liq cmas).**

2**. £?+ da qo'shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchi ckanligini isbotlang.**

**3. Q+ dagi quvidagi munosabatlar bajarilishini isbotlang:**

**a) *a-(b + c) = a-b-c*** **(bunda *a>b+c***);

**b) *a+{b-c)=a+b-c*** **(bunda *b > c)\***

**d) *a-{b-c)=a-b+c*** **(bunda *a > b > c).***

**dan “>— kclib chiqishini isbotlang.** «i <?i

**+ — bo'lishini isbotlang (ya’ni "1** **<?1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4. | P\_Pl | i <i  va L | bo'lsa, | P->1 |
|  | n nx | q q\ |  | n q |
| 5. | a > b | bo'lsa, | a + c > b | + c. ’ |
| 6. | a\*b | bo'lsa a | > b yoki | b > a |
| 7. | Amallarni bajaring: | | |  |

“> i015+2I+iI + 4; “>

2°-|9jV(l7r17H2rs

**,v 5 ,1 .2 5 13**

**b) —+ 5- + 4—+ —+ -**

**44**

**11** 66 **44 ’**

**e)** 2**--**

**3 7 2**

— + +

**5 10 15**

14 105 531 , , . , t . u **,u..** .

215 ’ kasrlarm 0 S1\*D oonsh tartibida yozing.

1.6. Musbat ratsional sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish. a kesma e, birlik kesma bilan, e, kesma e2 kesma bilan o‘lchovdosh bo‘lsin, <\* = £ e\, e\ = e2, ya’ni na = pex, qex = te2. U holda (nq)a = (pt)ex, (pq)ex = (pt)e2, shuning uchun {nq)a - (pt)e2. Bu a kesmaning uzunligi e2 birlik kesmada — kasr bilan ifodalanishini, ya’ni m2{a)

son rr kasr bilan ifodalanishini ko‘rsatadi: ntJa) - rr . Shartga ko‘ra mx(a) = m2{ex) = -. Shuning uchun mx(a) - = mx(a)m2(ex) multiplikativlikxossasining bajarilishi talab qilinsa,

^ = tenglik bajarilishi kerak.

Shunday qilib, musbat ratsional sonlarni ko‘paytirish qoidasini quydagicha ta’riflash mumkin:

Ta ’ r i f. ^ ***kasr bilan ifodalangan a sonning*** *~* ***kasr bilan ifo-***

***dalangan b songa ko ‘paytmasi deb,* ~ *kasr bilan ifodalanuvchi ab songa aytiladi*** (odatda, bunday deyiladi: ikki kasrning ko‘paytmasi

123

surati ko‘paytuvchilar suratlarining ko‘paytmasiga, maxraji ular maxrajlarining ko‘paytmasiga teng kasrdan iborat). Masalan,

**34 15 \_ 3415 \_ 5 87 ' 68 87-68 58'**

a va b sonlarni tasvirlovchi - va ; kasrlar ularga ekvivalent ^ va ~ kasrlarga almashtirganda ~ kasr o‘ziga ekvivalent

bo‘lgan ~ kasrga almashinishini tekshirish oson. Shuning uchun a va 6 sonlar ko‘paytmasi ularni tasvirlovchi kasrlarning qanday bo‘lishiga bog‘liq emas ekan.

Q+ da ko‘paytirish kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruv- chanlik xossalariga ega. Q+ dagi ixtiyoriy a, b, c sonlar uchun ab = ba, a(bc) = (ab)c o‘rinli, ac - be dan a = b kelib chiqadi. Bu tasdiqni a, b, c sonlarni ularni tasvirlovchi kasrlar bilan al- mashtirib, oson isbotlash mumkin. Undan tashqari, Q+ da ko ‘paytirish qo ‘shishga nisbatan distributiv va monoton: Q+ dagi ixtiyoriy uchta a, b, c sonlar uchun a(b + c) - ab + ac o‘rinli, a > b dan ac > be kelib chiqadi.

Birinchi ko‘paytuvchi m natural son bo‘lganda yuqorida be- rilgan ko‘paytirish ta’rifi ko‘paytirishning qo‘shiluvchilari ikkinchi ko‘paytuvchiga teng m ta qo‘shiluvchining yig‘indisiga teng degan ta’rifi bilan bir xil bo‘ladi, ya’ni ma = a + a + ... + a (m marta). Haqiqatan, m sonni y kasr ko‘rinishida yozish mumkin, T ' f = = f ++ f (m marta). Bundan, agar m va n natural

sonlar bo‘lsa, ularning Q+dagi ko‘paytmasi ularning N dagi ko‘paytmasi bilan bir xil bo‘ladi. Undan tashqari, har qanday a£Q+ uchun 1 • a - a, ya’ni 1 soni Q+ da ko‘paytirishga nisbatan ncytraldir.

Q+ da bo‘lish amali ko‘paytirishga teskari amal sifatida ta’riflanadi. Ayirish amalidan farqli ravishda bu amal musbat ratsional sonlarning barcha (a : b) juftligi uchun ta’riflangan: Q+dan olingan ixtiyoriy a va b sonlar uchun shunday cGQ+ son topiladiki, uning uchun a-be bo'ladi. Haqiqatan ham, agar a

son ^ kasr ko‘rinishida, b son ~ kasr ko‘rinishida berilgan bo‘lsa,

124

c = ~ deb olish yetarlidir. U holda be son ~ kasrga ekvivalent

kasr ko'rinishida yoziladi, bu esa be - a dir.

*P0*

***nlq***

SAVOL VA TOPSIIIRIQLAR

1.

2.

**3.**

**4.**

**a) *a* : *(be) = a* : *b* : c ; b) *a(b : c) = (a ■ b)* : *(a ■* c); d) *a* : *(b : c) = (a* : *b) ■ c* ni isbotlang.**

0**+da ko'paytirish amali kommutativlik. assotsiativlik. qo'shishga nisbatan distributivlik xossalariga ega hamda qisqaruvchi va monoton bo'ladimi? Isbotlang.**

**Ko'paytimani toping:**

**. 14 5. 11** 8

**a) T** 8 **’ b) 12 9’ Amallarni bajaring:**

d)5-9'2^C)8H

•9

**7**

9'

**a)**

**b)**

10

**55 + li7**

d)

125+48

):(

\-n)>b

-4b)-

*9\_*

**91**

1.7. Musbat ratsional sonlar nazariyasini aksiomatik asos- lash. Kesmalar uzunliklarini o‘lchash haqidagi masaladan, ya’ni geometrik mulohazalardan kelib chiqqan holda biz musbat ratsional sonlar va ular ustida amallarni ta’rifladik. Biroq musbat ratsional sonlar faqat uzunliklarni oMchash uchungina emas, balki, massa, yuz, hajm va boshqalarni o‘lchash uchun ham kerakdir. Shuning uchun geometrik tushunchalarga asoslanmasdan bun- day sonlar nazariyasini asoslash maqsadga muvofiq. Buning uchun bu sonlar qanoatlantiradigan aksiomalar sistemasini ko‘rsatish yetarlidir.

Q+ da qo‘shish amallari xossalarini hamda na = a + ... + a (n marta) qo'shishga keltiradigan natural songa ko'paytirish amal­lari xossalarini aksiomalar sistemasi yordamida ta’riflaymiz. Ak­siomalar sistemasi bunday:

1) Q+ to ‘plam natural sonlar to ‘plami N ni o‘z ichiga oladi;

2) Q+ to ‘plamda Q+ dan olingan istalgan ikki ava b songa o ‘sha to ‘plamdan olingan ava b sonlarning yig‘indisi deb ataluvchi a + b sonni mos keltiruvchi qo ‘shish amali ta ’riflanadi. N qism to ‘plamda qo ‘shish amali N dagi qo ‘shish amali bilan bir xil;

125

3) Q+ da qo ‘shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan;

4) har qanday aE Q+ uchun shunday p va n natural sonlar to- piladiki, ular uchun na = p bo ‘ladi;

5) istalgan natural son p va n uchun shunday *aEQ+* mavjudki, na = p o ‘rinli.

6) na = nb bo‘lsa, a = b .

Bu aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz hamda Q+ to'plamni va unda qo‘shish amalini bir qiymatli qilib aniqlashini isbotlash mumkin.

Buning uchun 4) aksiomadan foydalanib, har bir<?E0+ga na - p bo‘ladigan qilib {p : n) natural sonlarning barcha juftini, ya’ni ^ kasrni mos keltiramiz va shu bilan har bir aEQ+ songa ekvivalent kasrlar majmuasi mos kelishini ko'rsatamiz. Shundan keyin Q+ da qo‘shish amali kasrlarni qo‘shishning oddiy usuliga keltirilishini isbotlaymiz. Bu esa berilgan aksiomalar sistemasi Q+ ni ta’riflashini va Q+ da qo‘shish amali bir qiymatli ekanligini bildiradi. 1) — 6) aksiomalar sistemasining ziddiyatsiz ekanligi model yasash yo‘li bilan isbotlanadi, bu modelda sonlar ekvivalent kasrlar majmuasi sifatida izohlanadi.

Ba’zan aksiomalar sistemasini bermasdan musbat ratsional sonlarni ekvivalent kasrlar majmuasi sifatida ta’riflanadi, shu bilan mos ravishda sonlar ustidagi amallar ta’riflanadi.

2-§. 0‘NLI KASRLAR

2.1. 0‘nli kasrlar va ular ustida amallar. Biz kasrlarning ke- lib chiqishi yangi o'lchov birligiga o‘tish bilan bog'liqligini ko‘rdik, kasr maxraji esa berilgan o'lchov birligi necha qismga (ulushga) bo'linganligini ko‘rsatadi. Hozirdunyoning deyarli barcha mam- lakatlarida birliklarning metrik sistemasi amalda bo‘lib, bu siste- mada yangi birliklar boshlang‘ich birliklarni yo 10, 100, 1000 va h. k. marta kamaytirish bilan, yoki 10, 100, 1000 va h. k. marta ko‘paytirish bilan hosil qilinadi. Masalan, 1 km = 1000 m = = 1000000 mm, 1 1 = 1000 kg = 1000000 g va boshqalar. Shuning uchun amaliyotda maxraji 10 ning darajasi bo'lgan, ya’ni ko‘rinishidagi kasrlar bilan ishlash juda qulaydir, bunda m va n — natural sonlar. Bunday kasrlar o‘nli kasrlar deyiladi.

126

Suratning o‘nli yozuvi m = mk...m() ko‘rinishda, ya’ni m = = mk 10\* + ...+ mQ ko'rinishda bo'lsin. U holda n < k da daraja- lar ustida amallar qoidasiga ko'ra

m \_ mk \Qk + mn\_\ 10" '+...+ /wo

To" 10"

= mk • 10\*""

+... + mn +

*»>n-\*

10

+ ... +

”'o 10" '

m, 10\*'" +... + m natural sonni M harfi bilan belgilaymiz, kasmi quyidagicha yozish qabul qilingan: M, mn\_x Shunday qilib, kasrni yozishda m sonning o‘nli yozuvidagi oxirgi m

10 571

ta raqam vergul bilan ajratiladi. Masalan, = 5,71. Agar surat- da o‘nli raqamlar n dan kam bo‘lsa, ular oldiga n + 1 ta raqam hosil bo‘lishi uchun shuncha 0 yoziladi, keyin verguldan keyin n ta raqam ajratiladi. Masalan,

**32 \_ 00032** = 0 0032.

**10**

10"

m, n, s natural sonlar qanday bo‘lmasin,

10s/n . .

va kasrlar

*m*

10"

ekvivalent. Haqiqatan, m ■ 10"+i = 10" ■ 10\* ■ m .

kasr yozuvini hosil qilish uchunmk ...ma0...0 (5 ta nol)

sonda o‘ngdan n = s ta raqamni vergul bilan ajratish kerak. Na- tijada M,mn\_v,.m0 va M, mk...maO...O kasrlar ekvivalent.

Shunday qilib, biz quyidagini isbotladik: agar M,mnA kasrga *0* ‘ng tomondan istalganicha nol yozilsa ham berilgan kasrga ekvivalent o‘nli kasr hosil bo‘ladi. Bu xossa o‘nli kasrlarni bitta maxrajga osongina keltirishga yordam beradi. Agar birinchi kasrda verguldan keyin n ta raqam, ikkinchisida p ta raqam bo ‘Isa (bunda n< p), bu kasrlarni bitta maxrajga keltirish uchun birinchi kasrning o‘ng tomoniga p — n ta nol yozish yetarli. U holda ikkala kasrda verguldan keyingi raqamlar soni bir xil bo‘ladi, bu esa ular bitta maxrajga ega ekanligini bildiradi.

Bir xil maxrajli kasrlarni qo‘shish va ayirish uchun ular surat- lari ustida mos amallar bajariladi. Bu esa o‘nli kasrlarni qo‘shish

127

va ayirishni natural sonlar ustida amallar bajarishga keltiradi. Masalan,

2,54 + 3,7126 = 2,5400 + 3,7126 =

\_ 25400 37126 \_ 62526 \_ **,**

**~** 10000 + 10000 “ 10000 “ ’ ■

0‘nli kasrlarni qo‘shish qoidasi umumiy ko‘rinishda bunday ifodalanadi:

Ikkita o ‘nli kasrni qo ‘shish uchun:

1) bu kasrlarda verguldan keyin o ‘nli raqamlar sonini teng- lashtirish kerak, buning uchun zarur bo ‘Isa, bu kasrlardan biriga o‘ng tomondan bir nechta nol yoziladi;

2) hosil bo ‘Igan kasrlarda vergullarni tashlab yuborib, hosil bo ‘Igan natural sonlar qo ‘shiladi;

3) yig‘indida qo‘shiluvchilarning har birida nechta raqam aj- ratilgan bo ‘Isa, shuncha raqam vergul bilan ajratiladi.

0‘nli kasrlarni taqqoslash va ayirish qoidalari xuddi shunday chiqariladi. Masalan, ikkita o‘nli kasrni taqqoslash uchun ularda verguldan keyingi o'nli raqamlar sonini tenglashtirib, vergullar tushirib qoldiriladi va hosil bo‘lgan natural sonlar taqqoslanadi: 4,62517 > 4,623, chunki 4,623 = 4,62300; 462517 > 462300 bo‘lgani uchun 4,62517 > 4,62300.

Endi o‘nli kasrlarni ko‘paytirishni qaraymiz. M,...m0 va

P>Pq~i---Po ~ °‘nli kasrlar. Ularni va ko‘rinishda yozish mumkin. Ammo = Buni maxrajsiz yozish uchun mp

natural sonning o‘nli yozuvida n + q ta oxirgi raqamni vergul bilan ajratish kerak. Bundan o‘nli raqamlarni ko‘paytirishning quyidagi qoidasini keltirib chiqaramiz.

Ikkita o‘nli kasr ko‘paytmasini topish uchun:

1) bu kasrlar yozuvida vergullarni tashlab yuborish;

2) hosil bo ‘Igan ikkita natural son ko ‘paytmasini topish;

3) birinchi va ikkinchi ko‘paytuvchilarda birgalikda nechta raqam vergul bilan ajratilgan bo ‘Isa, ko ‘paytmada oxiridan shuncha *raqamni* vergul bilan ajratish *kerak* (ya’ni agar birinchi ko‘paytuvchida *n* ta raqam, ikkinchisida *q* ta raqam ajratilgan boisa, ko‘paytmada *nq* ta raqam ajratiladi).

0‘nli kasrlarni 10^ ko‘rinishdagi songa ko‘paytirish ancha oson bajariladi. Darajalar ustida amallar qoidalariga ko‘ra;

128

m jqp \_ 10pm \_ m

io" ’ “ TtF ” 10^' ‘

Shunday qilib, agar berilgan kasrda oxiridan n ta raqam ver- gul bilan ajratilgan bo‘lsa, ■ lO^ni hosil qilish uchun oxiridan n - p ta raqamnigina vergul bilan ajratish kerak, ya’ni vergulni o‘ngga p ta raqamga surish kerak. Agar ~ kasr yozuvida verguldan keyin p ta dan kam raqam bo‘lsa, oldindan o‘ng to-

monga tegishli nollarni yozish kerak.

0‘nli kasrlar tushunchasi bilan protsent (foiz) tushunchasi bir- biriga bog‘liqdir. ~ kasr bir protsent deyiladi. U 1% kabi

belgilanadi, p% esa ~ kasrni ifodalaydi. Protsentlar va promil- lar |ya’ni p%0 = o‘nli kasrlardan oldin keltirib chiqarilgan. Qarzlar bo‘yicha hisob-kitob qilish uchun 100 ta pul birligi

hisobida kapitalning o‘sishi aniqlangan. Bujarayon protsent soni deb atalgan (pro vntuni — yuzga). Hozirgi vaqtda protsent tushunchasi turli sohalarda o'ztatbiqini topgan (iqtisodda, kimyo- da, hisob-kitobda va h.k.).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. 0‘li kasrlar ustida bajariladigan amallar qanday xossalarga ega boMadi?

2. Amallarni bajaring:

a) (1,6 :1,28) +(1,5 : 0,24) + (1,1 : 0,08);

b) (1,14 + 0,76): (1,14 - 0,76) + 0,54 : 0,012 ;

d) 1 : 2,5+ 1,44 : 3,6 + 3,6 : 1,44 ■ (0,1 - 0,02);

e) (0,45 : 0,9 + 0,9 : 0,45 + 1,5 : 3 + 0,242 : 0,11): (2,3 - 1,26).

2.2. Oddiy kasrlarni o‘nli kasrlarga almashtirish. ^ kasr ^ kasrga ekvivalent va shuning uchun uni 0,32 ko'rinishda yozish mumkin. ^ kasr qanday holatlarda o‘nli kasrga ekvivalent bo‘ladi?

” qisqarmas kasr o‘nli kasrga ekvivalent bo‘lishi uchun ^

kasr maxraji n ning tub ko'paytuvchilarga yoyilmasiga faqat 2 va 5 tub sonlarigina kirishi zarur va yetarlidir.

129

Haqiqatan, n ni tub ko‘paytuvchilarga ajratilganda u n - 2r5\*

ko‘rinishda bo‘lsin va r > sbo‘lsin. U holda ™ kasrning surat va maxrajini 5r~s ga ko‘paytirib,

***m* \_ *m* 5*r~5m \_* 5r *5 m***

~ - ^7 ~ 2r5s5r-s ~ 2r5r

ni hosil qilamiz. Ammo 2r-5r— 1 O'", shuning uchun

***m* 5 *r~sm***

~n 10r '

Demak, — kasr o‘nli kasrga ekvivalent ekan.

Aksincha, qisqarmas ™ kasr kasrga ekvivalent bo‘lsin, ya’ni \0rm = an. Agar n ning tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida 2 va 5 dan farqli p tub son bo‘lsa, 10th songa bo‘linar edi. Ammo 10r ning tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida 2 va 5 sonlari bo‘lgani uchun 10r son/? songa bo‘linmaydi. U holda m son p ga bo‘linar va ” kasrni shartga zid ravishdap ga qisqartirish mumkin bo‘lar edi. Hosil bo‘lgan ziddiyatlik n ni 2 va 5 dan farqli tub ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin emasligini ko‘rsatadi.

1- m i s o 1. 250 = 2 • 53 bo‘lgani uchun kasr = 2^3 ^ = = ^^ = 0,764 o‘nli kasrga ekvivalent ekan.

2- mi sol. ~ kasr qisqarmas, 14 = 2\*7. Maxraj yoyilmasiga 2 va 5 dan farqli 7 ko‘paytuvchi kirgani uchun bu kasrni o‘nli kasrga aylantirib bo‘lmaydi.

3- misol. ^ kasr maxrajining yoyilmasiga 2 va 5 dan farqli 13 kiradi. Ammo bu kasr qisqaruvchi. Uni 65 ga qisqartirib, | kasrni hosil qilamiz, bu kasrni - = 0,75 o‘nli kasrga aylantirish mumkin.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Quyidagi kasrlardan qaysilarini chekli o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin:**

**17 42**

**a) 640 ’ b) 875 ’**

d)

**52**

**75**

e)

**385 308 '**

**130**

**3. Quyidagi o'nli kasrlarni qisqarmas oddiy kasr ko'rinishida yozing: a) 0,125; b) 0,625; d) 0,1375; e) 0,2454.**

**2. Quyidagi kasrlarni chekli o'nli kasrlarga aylantiring.** a) l:

**b)**

' 40 ’

13

2.3. Cheksiz davriy o‘nli kasrlar. ^ kasrni chekli o‘nli kasrga aylantirib boimaydi. Ammo 1 ni 3 ga bo‘lib, 0,3 < |<0,4ni hosil qilamiz. Yana davom ettirib, 0,33<|<0,34, 0,333<| <0,334 va h. k. larni topamiz. Umuman, har qanday n uchun

0,33...3 < 0,33...4

n n

tengsizliklarning cheksiz to‘plamini yozmaslik uchun ~ kasrga cheksiz o‘nli kasr 0,333...3 mos keladi deyiladi. Bu esa, agar cheksiz kasrda birorta raqamdan boshlab hamma raqamlar tu- shirib qoldirilsa, ^ dan kichik son hosil bo‘lishini, agar hosil bo‘lgan sonda oxirgi raqamni bittaga orttirilsa, ^ dan katta son hosil bo‘lishini anglatadi.

Chekli o‘nli kasrlarni cheksiz kasrlar ko‘rinishida ham yozish mumkin, bunda faqat ularning o‘ng tomoniga nollar ketma-ket- ligi yoziladi: 0,25 = 0,25000...0... Bunda birorta raqamdan bosh­lab hamma raqamlar tushirib qoldirilsa, 0,25 dan katta bo‘lmagan son hosil bo‘ladi (masalan, verguldan keyin faqat bitta raqam qoldirilsa, 0,25 dan kichik 0,2 son hosil bo‘ladi, agar verguldan keyin uchta raqam qoldirilsa, 0,25 ga teng 0,250 hosil bo‘ladi). Agar tashlab yuborilgandan keyin qolgan oxirgi raqamni bittaga orttirilsa, 0,25 dan katta son hosil bo‘ladi (masalan, 0,3 yoki 0,251).

Ko‘rib turibmizki, har bir musbat ratsional sonni cheksiz o‘nli kasr ko'rinishida yozish mumkin ekan. Bunda hosil bo‘lgan o‘nli kasrlar davriy bo'ladi. Bu esa biror joydan boshlab bitta raqamning yoki raqamlar guruhining cheksiz marta takrorlanishi demakdir.

Masalan, ^ soni 0,272727..27.. cheksiz o‘nli kasr ko'rinishida, tt son 0,1454545.. 45.. cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalanadi.

**131**

Qisqalik uchun bu kasrlardan birinchisi 0,(27) ko‘rinishida, ikkinchisi 0,1(45) ko'rinishida yoziladi. Qavs ichiga takrorlanuvchi sonlar guruhi yoziladi va u kasrning davri deyiladi. Ammo 0,(27) o‘rniga 0,2(72) deb ham yozish mumkin, bunday yozuv uzunroqdir.

Davrning paydo bo'lishi sababi quyidagichadir: ™ qisqarmas kasr ko‘rinishidagi a sonni cheksiz o‘nli kasrga aylantirish kerak bo‘lsin. Buning uchun m natural sonni n natural songa bo‘lishi kerak. Bunda n dan kichik qoldiqlar, ya’ni 0, 1, ..., n — 1 sonlar hosil bo‘ladi. Agar qoldiqlardan aqalli bittasi nolga teng bo'lsa, bo‘lish natijasida chekli o‘nli kasr hosil bo‘ladi (yoki nollar ketma- ketligi bilan tugaydigan cheksiz o‘nli kasr hosil bo‘ladi). Agar qoldiqlar noldan farqli bo‘lsa, bo'lish hech tugamaydi, ammo turli qoldiqlar miqdori chekli n ta bo‘lgani uchun biror qadamdan boshlab birorta qoldiq takrorlanadi va shundan keyin bo‘linmada raqamlar takrorlana boshlaydi.

Agar qisqarmas kasr maxrajini tub ko‘paytuvchilarga yoyil- masiga almashtirganda, bu yoyilmasida 2 yoki 5 qatnashmasa, u holda sof davriy kasr, ya’ni davri verguldan keyin darhol bosh- lanadigan kasr hosil bo‘ladi. Agar maxraj yoyilmasiga 2 yoki 5 ko‘paytuvchi kirsa, davriy kasr aralash davriy kasr deyiladi — vergul bilan davr boshining orasida bir necha raqam bo‘ladi (2 va 5 ko‘paytuvchilar daraja ko‘rsatkichining eng kattasi necha bo‘lsa, shuncha raqam bo‘ladi). Masalan, agar n = 23-52-7• 11 boisa, vergul bilan davr boshining orasida uchta raqam bo‘ladi.

Quyida biz har bir cheksiz o‘nli kasrga biror kasr son mos kelishini ko‘rsatamiz, bunda cheksiz o‘nli kasrlar ustida amallar chekli o‘nli kasrlarda bajarilgandek bajariladi. Bundan foydala-

nib, har qanday davriy (sof yoki aralash) kasrni ™ kasr ko'rinishida yozish mumkinligini ko'rsatamiz.

0,(24), ya’ni 0,242424 ... 24 ... davriy kasr berilgan bo'lsin. Unga mos sonni a bilan belgilaymiz. Agar vergulni o‘ng tomon ikki raqamga sursak, a son 100 marta kattalashadi va quyidagini hosil qilamiz: 100a = 24,242424...24..., ya’ni 100a = 24 +

+ 0,242424...24... = 24 + a. 100a = 24 + a tenglamani yechamiz:

**24** 8 **24**

a = — , ya’ni a = —. 24 soni bir vaqtning o'zida ^ kasrning

surati va 0,(24) kasrning davridir.

**132**

Har qanday sof davriy o‘nli kasr ham oddiy kasrga xuddi shun- day almashtiriladi.

Sof davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga almashtirganda surati davrga teng, maxraji esa kasr davrida nechta raqam bo‘lsa, shuncha to‘qqizdan iborat kasr hosil bo‘ladi:

0,35

**35 . 99 ’**

0,(489) =

**489**

**999**

**163**

**333**

**163**

**333**

va h.k.

Aralash davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga almashtirish qoidasi shunga o‘xshash keltirib chiqariladi.

Agar bu kasrning butun qismi nolga teng bo‘lsa, surati ikkin- chi davrgacha bo‘lgan raqamlar bilan yozilgan sondan birinchi davrgacha bo'lgan raqamlar bilan yozilgan sonning ayirmasiga teng maxraji davrda nechta raqam bo'lsa, shuncha to‘qqizdan va birinchi davrgacha nechta raqam bo'lsa, shuncha nollardan iborat kasr hosil bo'ladi. Masalan,

0,7(61) =

**761-7**

**990**

**754**

**990**

**377**

**495'**

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1.

**Oddiy kasrlarni cheksiz o‘nli kasrlarga aylantiring:**

**3. M 4 . ,, 17.**

**a) b) —, d) —,**

**7’ 35 24**

e)

**36 77 '**

**2. Davriy o‘nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantiring: a) 0,(31); b) 2,(75); d) 0,34(9); e) 0,27(15).**

**3. Hisoblang:**

**0,5(6)+0,(8); 3,2(62)— 1,( 15); (0,(**6**)-,(45)) • 0,(33).**

3-§. MUSBAT HAQIQIY SONLAR

3.1. O‘lchovdosh boMmagan kesmalar. Musbat ratsional sonlar yordamida biror kattalikning o'lchash natijasini ixtiyoriy aniqlik darajasida ifodalash mumkin. Masalan, OA kesma uzunligini o'lchash va bu kesma uzunligini birlik kesmaning —^ ulushidan oshib ketmaydigan xatolikda qiymatini topish talab qilinsin. Bunday ish qilamiz. OA kesmada O nuqtadan A nuqta yo‘nalishida

**133**

uzunligi ~ kasrga teng uzunlikda birin-ketin kesmalar qo‘yamiz. A nuqta bu kesmalardan biriga to‘g‘ri keladi (III.2-rasmga qarang, unda n — 1). Demak, quyidagi xossaga ega bo‘lgan nomanfiy son m mavjud ekan: uzunligi ^ga teng boMgan kesma OA kesma-

dan kichik, uzunligi “~ga teng bo‘lgan kesma OA kesmadan katta ekan.

**O 1 2 A**

I—i—i—i—i—i—i—i—i—i—|—i—i—i—i—i—i—i—i—|—i—•

***UJ.2-rasm.***

Shunday qilib, OA kesma uzunligi va sonlar orasida bo‘lishi kerak ekan. Shunga o‘xshash, istalgan jism og‘irligini y^reg aniqligida o‘lchash mumkin. Biroq — va ratsional sonlar bo‘lgani uchun OA kesma uzunligini kami bilan va ortig‘i

bilan taqribiy ifodalaydi, ammo bu kesma uzunligi nimaga ten- gligi haqidagi savolga aniq javob bermaydi. Gap shundaki, faqat ratsional sonlar bilan cheklangan holda bu savolga javob berish ko‘p hollarda mumkin bo‘lmaydi — e birlik kesma bilan o‘lchov- dosh bo‘lmagan kesmalar, ya’ni uzunligini faqat ratsional sonlar bilan ifodalab bo‘lmaydigan kesmalar mavjud. Bunday kesmalar- ning mavjudligi quyidagi tasdiqdan kelib chiqadi:

— kvadratning diagonali uning tomoni bilan oichovdosh emas.

Haqiqatan, kvadrat tomonining uzunligi 1 ga teng bo‘lsin. Fa- raz qilamiz, ABCD kvadratning AC diagonali uning tomoni bilan

P

o‘lchovdosh va uning uzunligi — qisqarmas kasr bilan ifodalana- di. U holda Pifagor teoremasiga ko‘ra | AB |2 + | BC |2 = | AC |2,

ya’ni l2 +12 =?-T bo‘lar edi. Bundan p2 = 2q2. Demak, p2 — juft

Q

son, u holda juft bo‘ladi (toq sonning kvadrati juft bo‘lmaydi). Shunday qilib, p - 2/?,; p2 = 2q2 tenglikda p ni 2Fpx ga almashtirib, 4p\ =2q2, ya’ni 2p\ = q2 ni hosil qilamiz. Bundan q2 ning juft- ligi, demak, q ning juftligi kelib chiqadi. Shunday qilib, p va q sonlar juft, shuning uchun ^ ni 2 ga qisqartirish mumkin, bu esa

**134**

uning qisqarmas ekanligiga zid. Bu ziddiyatlik, agar kvadrat to- moni uzunlik birligi qilib tanlab olinsa, kvadrat diagonali uzun- ligini ratsional son bilan ifodalab boimasligini, ya’ni bu diago­nal kvadrat tomoni bilan oMchovdosh emasligini ko‘rsatadi.

Har qanday kesma uzunligini son bilan ifodalash uchun Q+ musbat ratsional sonlar to‘plamini yangi sonlar bilan toMdirib, kengaytirish kerak. Bunda hosil bo‘lgan sonlar musbat haqiqiy sonlar deyiladi, bunday sonlar to‘plami R+ bilan belgilanadi. Demak, har bir musbat ratsional son R+ ga tegishli boMishi kerak, ya’ni Q+cR+ bajarilishi kerak. Undan tashqari, R+ da qo‘shish va ko'paytirish amallarini shunday ta’riflash kerakki, ular Q+ da ratsional sonlar uchun berilgan ta’rif bilan bir xil boMishi va kesmalar oMchovi sonlar to‘plamini kengaytirgandan keyin ham additivlik va multiplikativlik xossalariga ega boMishi kerak.

3.2. Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o‘nli kasrlar. Biz bu bandda istalgan kesma oMchovining natijasi cheksiz o‘nli kasr (umuman aytganda, davriy boMmagan) ko‘rinishida yozilishi mumkinligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan, e birlik kesma tanlangan va birorta a kesma berilgan bo‘lsin. U holda a kesma yo e dan kichik, yoki shunday n natural son topiladiki, unda n-e<a< <{n + \)e. Bu n natural son, agar a kesma e dan kichik boMsa, 0 son a kesma uzunligining butun qismi deyiladi.

Agar a = n - e boMsa, a kesma uzunligi n natural son bilan ifodalanadi. Aks holda a = ne + a{, bunda a{< e. U holda 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlardan birini qabul qiluvchi shunday

/i, son topiladiki, ■ e < c, < ■ e boMadi. Shuning uchun

(n + 1o)e-n'e + ai + Bu esa («, nx)e<a < (n, «,+

+ 0,l)e, demakdir (bunda n, — o‘nli kasr, masalan, 7,6).

0‘lchashning bu jarayonini davom ettirib, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlardan birini qabul qiluvchi n2, nv ..., nk, ... son- larni hosil qilamiz hamda har qanday l< n uchun a kesma

(n, n{n2 ... nk)e kesmadan kichik boMmagan, ammo [n,n^..nk+^^e

kesmadan kichik boMgan sonlarni hosil qilamiz.

a kesma uzunligini oMchash jarayoni haqidagi hisobotni n, /j,/j2... nk... cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalash mumkin. Agar bu kasrda biror raqamdan boshlab hamma raqamlarni tash- 135 lab yuborsak, oichanayotgan kesma uzunligidan kam boigan n, nv..nk son hosil boiadi; agar hosil boigan sonda oxirgi raqam bitta orttirilsa, bu kesma uzunligidan katta boigan son hosil boiadi. Shuning uchun a kesma uzunligi n, ny..nk... kasr bilan ifodalanadi, ya’ni m(a) — n, ny..nk... Masalan, m(a) = 3,1764...

Har qanday k uchun

n,ny..nk<m(a)<n,ny.. nk+-^

tengsizliklar bajarilishi ravshan.

Kesmalarni oichashda 9 raqamining cheksiz ketma-ketligi bilan tugaydigan kasrlar hosil boimaydi, masalan, 0,499...9... ko'rinishdagi son hosil boimaydi. Sababi hech bir x son

0,4 < x < 0,5,

0,49 < x < 0,50,

0,49...9 < x< 0.50...0

tengsizliklarning hammasini bir vaqtda qanoatlantirmaydi.

Agar bu tengsizliklar o'rniga

0,4 < x < 0,5  
0,49 < x < 0,50  
0,49...9 <x< 0.50...0

tengsizliklarni yozsak, ularni 0,5 soni qanoatlantiradi. Shuning uchun 0,4999...9... = 0,4(9) o‘nli kasr 0,5 sonining boshqacha yozuvi hisoblanadi.

Umuman, chekli o‘nli kasrning oxirgi raqamini bittaga kamay- tirsak va o ‘ng tomoniga 9 ning cheksiz ketma-ketligini yozsak, berilgan kasrga teng cheksiz o ‘nli kasr hosil bo ‘ladi.

Masalan,

0,232 = 0,23199...9...; 7,8 = 7,799...9....

Biz har bir kesmaga cheksiz o‘nli kasrni mos keltirdik. Ak- sincha, to‘qqizlar ketma-ketligi bilan tugamaydigan har bir cheksiz o‘nli kasrga uzunligi shu kasr bilan ifodalanadigan kesma topiladi.

0,00...0...dan tashqari va to'qqizlar ketma-ketligi bilan tuga­maydigan cheksiz o‘nli kasrlar to'plamini R+ bilan belgilaymiz va uni musbat haqiqiy sonlar to'plami deymiz.

Har bir musbat haqiqiy son uchun uning taqribiy qiymatini ko‘rsatish mumkin. Buning uchun musbat haqiqiy sonning butun

**136**

qismini va verguldan keyin dastlabki k ta raqamni qoldirib, boshqa

raqamlar tushirib qoldirilsa, ^ gacha aniqlikda kami bilan olingan

taqribiy qiymat hosil bo‘ladi. U xk bilan belgilanadi. Boshqacha aytganda, agar x = n,nx...nk ... bo‘lsa, xk -n,nx...nk bo‘ladi. Bu

songa ni qo‘shish bilan, x' uchun ortig'i bilan olingan taqribiy qiymat hosil bo‘ladi: x' = n,nx...nk + ^ . Agar nk raqam 9 dan farqli

bo‘lsa, x' hosil qilish uchun nk ni bitta orttirish yetarli.

Masalan, agar x = 4,7128356... bo‘lsa, x, = 4,712 va x' = 4,713 bo‘ladi. Ravshanki, har qanday musbat haqiqiy x son uchun xk < x x' tengsizliklar o‘rinli.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1**. Kesma uzunligini o'lchash misolida cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasr hosil bo‘lishini tushuntiring.**

**2. x = 3,847198... soni uchun: a) 0,01; b) 0,0001; d) 0,00001 gacha aniqlikda kami va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatni yozing.**

**3. jc sonning 0,001 gacha aniqlikda kami bilan olingan taqribiy qiymati 1,754 ga teng. Uning 0,01 gacha aniqlikda ortig'i bilan olingan taqribiy qiymati nimaga teng? jc son 1,756 dan katta bo' 1 ishi mumkinmi?**

3.3. R+ to‘plamda tartib munosabati. Ikkita musbat haqiqiy son x va y berilgan bo‘lsin:

x — m,m1... mk ..., y= n, n,... nk... .

1 -t a ’ r i f. Agar m < n bo ‘Isa yoki shunday k son topilsaki, m - n, m{ — n{, ..., mk\_x - nk X bo‘lib, mk < nk bo‘lsa, x son y sondan kichik deyiladi.

Bunday holda S > k bo‘lganda x uchun ortig‘i bilan olingan x' taqribiy qiymati y uchun kami bilan olingan taqribiy qiymatida ortiq bo‘lmaydi: x' < ys. Shuning uchun shunday s topilsaki, uning uchunx]^^ bo'lsa, x<y bo‘ladi deyish mumkin.

R+ to‘plamda «<» munosabati qat’iy chiziqli tartib munosa­bati bo‘lishini tekshirish oson, ya’ni «<» munosabati asimmetrik, tranzitiv bo‘lishini va x y da yo x < y, yoki y < x bo‘lishini

**137**

tekshirish oson. R+ to'plamda, Q+ to'plamdagidek, na eng kichik element va na eng katta element yo‘q. Undan tashqari, R+ dagi istalgan ikki son orasida cheksiz ko‘p haqiqiy son yotadi.

R+ to'plamda tartib munosabatlarning asosiy xossalaridan biri uzluksizlik xossasidir — bu xossa Q+ to'plamda yo‘q.

R+ to'plamning ixtiyoriy qism to'plami sonli to‘plam deyiladi. (Masalan, N, Q+ to'plamlar, berilgan aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchaklar perimetrlari to'plami, sonli kesmalar va oraliqlar va h. k.)

Agar har qanday xGX va ye Y uchun x < y tengsizlik bajaril- sa, X sonli to'plam Y sonli to'plamdan chapda joylashgan deyi­ladi. Masalan, [1; 4] kesma [6; 10] kesmadan chapda, berilgan doiraga ichki chizilgan ko'pburchaklar yuzi to'plami shu doiraga tashqi chizilgan ko'pburchaklar yuzlari to'plamidan chapda joy­lashgan.

[1; 4] va [6; 10] kesmalarni olaylik. 5 soni yuqoridagi xossaga ega, ya’ni [1; 4] kesma 5 dan chapda, [6; 10] kesma esa undan o'ngda joylashgan. Demak, 5 soni [1; 4] va [6; 10] kesmalarni bir-biridan ajratib turibdi. Xuddi shuningdek, doira yuzi ichki chizilgan ko'pburchaklar yuzlarining to'plamini tashqi chizilgan ko'pburchaklar yuzlari to'plamidan ajratadi, 4 soni [1; 4] va [4; 7] kesmalarni ajratadi.

Umuman, ixtiyoriy xSX va ye Y uchun x < c < y bajarilsa, c soni X va Y sonli to'plamlarni bir-biridan ajratadi deyiladi (bu holda X to'plam Y dan chapda joylashgan). R+ to'plamning uz­luksizlik xossasini quyidagicha tushuntirish mumkin bo'ladi:

Agar X sonli to'plam Y sonli to'plamdan chapda joylashgan bo'lsa, hech bo'lmaganda bitta shunday son topiladiki, u X va Y to'plamlarni ajratadi.

Agar biz R+ to'plamdan hech bo'lmaganda bitta, masalan, 6 sonni ajratib olsak, bu xossaning ma’nosi ravshanlashadi. U holda 6 dan kichik sonlar to'plamini X bilan, 6 dan katta sonlar to'plamini Y bilan belgilaymiz. X to'plam Y to'plamdan chapda joylashgan bo'lsa ham 6 ni ajratib olgandan keyin bu to'plamlarni bir-biridan ajratadigan bitta ham son yo'q. Demak, uzluksizlik xossaning ma’nosi quyidagicha: R+ to'plamda N natural sonlar to'plamidagidek «sakrashlar» hamda Q+ musbat ratsional sonlar to'plamidagidek «tirqishlar» yo'q.

138

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1. Sonlarni o'sib borish tartibida joylashtiring: 7,3165...; 7,315989...; 7,31667... .

2. **R+** to'plamda eng kichik son ham, eng katta son ham yo'qligini isbotlang.

3. 231599987... < v < 2,31660000... bo'ladigan **x** sonni toping.

4. 2, 323232...; 3,52(375); 1,37(9); 1,212012001..., 15,417411741117... sonlaming qaysilari ratsional, qaysilari irratsional sonni ifodalaydi?

3.4. R+ to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish. Endi R+ to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirishni ta’riflaymiz. R+ to‘plamda

x = m,m] ... mk... va y = «,«,«, ... nk ...

sonlar berilgan bo‘lsin. U holda k har qanday bo‘lganda ham xk< x < x'k va yk<y< y'k tengsizliklarga ega bo‘lamiz. x + y son xk + yk sonlarning ixtiyoriysidan kichik emas, ammo x'k + y'k son- larning ixtiyoriysidan katta bo‘lmasligi aniq.

Boshqacha aytganda, x + y son {Xk + yk} Ba {x'k + y'k} to‘plam- larni bir-biridan ajratishi kerak. Bu to‘plamlar faqat bitta son bilan ajratilishini isbotlash mumkin. Shuning uchun quyidagi ta’rifni kiritamiz:

2- ta’rif. Musbat x va y haqiqiy sonlarning yigiindisi deb, {xk + yk} va {jc'^ + y'k) to ‘plamlarni ajratuvchi songa aytiladi, bunda xk va yk — bu sonlaming kami bilan olingan o ‘nli yaqinlashishlaridir, x'k va y'k — ortig‘i bilan olingan o‘nli yaqinlashishlaridir.

R+ to‘plamda qo‘shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruv- chiligini isbotlash mumkin. Bunda, agar x < y boisa, har qanday z^R+ uchun x + z< y + Zga egamiz. Undan tashqari, R+ dan olingan hech qanday x va y uchun x = x + y tenglik bajarilmaydi.

R+ to‘plamda ko‘paytirish ham shunday ta’riflanadi.

3- ta ’ rif. {x^ "yj va {x'k -y'k} to‘plamlarni ajratuvchi yagona son x va y sonlarning *ko‘paytmasi* deyiladi.

R+ to‘plamda ko‘paytirish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchidir. U qo‘shishga nisbatan distribute. Va, nihoyat, 1 soni ko‘paytirishga nisbatan neytral; agar oE/?+ bo‘lsa, 1 • a = a bo‘ladi.

Kesmalar uzunliklari additiv va multiplikativ xossalariga ega ekanligini isbotlash mumkin: agar a kesma b va c kesmalardan

139

iborat bo‘lsa, uning uzunligi bu kesmalar uzunliklarining yig‘in- disiga teng, agar m^a) va m2(a) lar e{ va e2 birlik kesmalarda a kesma uzunligining qiymati bo‘lsa,

m2(a) =

bo‘ladi. Bu tasdiqlar isbotini keltirmaymiz.

R+ da a > b bo‘lgan har qanday ikkita a va b son uchun shun- day cGR+ topiladiki, a - b + c bo‘ladi. Bu son a va b sonlarning ayirmasi deyiladi va a - b kabi belgilanadi. Ma’lumki, R+ da ayi- rish amali qo‘shish amaliga teskaridir: x> y bo‘lsa, {x + y) - y — x va (x — y) + y = x.

R+ da har qanday x va y ikkita son uchun shunday z son to­piladiki, unda x = yz bo‘ladi. Bu son x ning y ga boTinmasi deyi­ladi va x: y kabi belgilanadi. /?+da bo‘lish amali har doim baja- riladi va u ko‘paytirish amaliga teskaridir:

(xy) : y = x,

(x .y) • y = x.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1. n/2=1,4142..., n/3 = 1,7320... ckani ma’lum. **-J5 - -Jl** Ba n/3+%/2 laming 0,001 gacha aniqlikda kami bilan olingan va ortig'i bilan olingan qiymatlarini toping.

2. **x=\** ,703504... va **y** =2,04537... bo‘lsa **x-y** ko'paytma qiymatini 0,01 gacha aniqlikda toping.

3.5. Musbat haqiqiy sonlar to‘plamining aksiomatikasi. Biz

yuqorida cheksiz kasr ko‘rinishida yoziladigan sonlarni musbat haqiqiy sonlar deb atadik.

Ammo qat’iy qilib aytganda, cheksiz o‘nli kasrlar haqiqiy son­lar yozuvining bir shaklidir, xolos. Musbat haqiqiy sonlarni faqat cheksiz o‘nli kasrlar ko‘rinishidagina emas, balki cheksiz ikkili kasr, cheksiz uchlik kasr va boshqa ko‘rinishda ham yozish mumkin. Agar bu sonlar cheksiz ikkili kasr ko‘rinishida yozilsa, nol va birlardan iborat yozuv hosil boMadi, masalan: 101, 01101110**... .**

140

Musbat haqiqiy sonlar tushunchasini bunday sonlarning biror yozuvi bilan bog’lamaslik uchun ular qanoatlantiradigan aksio- malarni ifodalash kerak. Bunday aksioinalar sistemasining bittasi qo‘shish amali xossalariga asoslanadi. Bu sistemada birva qo'shish amali ta’riflanmaydigan tushunchalardir. Bu tushunchalar quyidagi aksiomalar sistemasini qanoatlantiradi:

1) NeR+.

2) Qo‘shish amali R+ dan olingan har qanday (a; b) sonlar juftiga o ‘sha to ‘plamdagi a + b sonni mos keltiradi. Bu son a va b sonlarning yig'indisi, a va b sonlar esa qo ‘shiluvchilar deyiladi. N da qo'shish amali natural sonlarni qo'shish bilan bir xil.

3) R+ da qo'shish amali kommutativ: R+ dan olingan har qanday a va b uchun a + b = b + a.

4) R+ da qo ‘shish amali assotsiativ. R+ dan olingan har qanday a, b va c uchun (a + b) + c - a + (b + c).

5) a va b lar R+ tegishli bo‘Isa, a +b ^ a bo‘ladi.

6) a va b lar R+ ga tegishli bo'tib, a ^ b bo‘Isa, yo shunday cGR+ topiladiki, a — b + c bo'ladi, yoki shunday cG R+ topiladiki, b = a + c bo ‘ladi.

7) Har qanday aGR+ va har qanday n natural son uchun shun­day yagona bcR+ topiladiki, *a-b+b* + ... + b (n marta).

1) — 7) aksiomalar R+ to‘plamga tartib munosabatini kiri- tishga imkon beradi: shunday cGR+ topilsaki, uning uchun b — a + c bo'lsagina a< b bo'ladi, uzluksizlik aksiomasi ham ba- jarilishi kerak.

8) Agar x sonli to'plam Y sonli to'plamdan chapda yotsa (ya’ni har qanday xEX, yE Yuchun x < y bo‘lsa), X va Y ni bir-biridan ajratuvchi aER+ son mavjud bo'ladi (har qanday xGX va yEY uchun x < a < y).

Aksiomalarning bunday sistemasidan foydalanib, R+ dan har qanday olingan sonni cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida tasvirlash mumkinligini isbotlash, R+ da ko‘paytirish amalini ta’riflash mumkin va h. k. Biz bu masalalarga to‘xtalib o‘tmaymiz.

3.6. Kattaliklarni o‘lchash. Har qanday kesma uzunligini ifo­dalash uchun musbat haqiqiy sonlar to‘plami R+ ni kiritdik. Bu sonlar yordamida boshqa kattaliklar, yuz, hajm va boshqalarni o‘lchash natijasini ifodalash mumkin. Miqdorning umumiy ta’- rifida to‘xtab o‘tamiz. Kesmalar uzunliklarini topishda ham, shakllar yuzlarini hisoblashda ham, jismlar hajmlarini izlashda

141

ham, biz biror obyektlar to‘plami bilan ish tutamiz, bu to‘plamda ikkita munosabat — ekvivalentlik munosabati (masalan, Fx va F2 shakllar teng) va «a obyekt /? va y obyektlardan iborat» munosabati (masalan, AB kesma AC va CB kesmalardan iborat) ta’riflangan.

Shuning uchun ekvivalentlik munosabati — aC/?0y («a bu (3 va y dan iborat» deb o‘qiladi) munosabati ta’riflangan Q obyekt­lar to‘plamini qaraymiz. Agar Q dan olingan har bir a elementga musbat m(a) sonni — a ning o‘lchovini shunday mos keltirish mumkin bo‘lsaki, uning uchun ushbu shartlar bajarilsa, bu to‘plamda o‘lchash amali ta’riflangan deyiladi.

a) a~/?©y dan m{a) = m(y3) kelib chiqadi (ekvivalent obyekt­lar bir xil o‘lchovga ega);

b) a - /3©y dan m{a) - m(y3) + m(y) kelib chiqadi (o‘lchovning additivligi).

Q to‘plamda o‘lchashning turli ikkita m va amallari aniqlangan bo‘lib, ular bir-biridan faqat o‘zgarmas ko‘paytuvchi bilan farq qilishi mumkin bo‘lsa, ya’ni shunday musbat son X mavjudki, uning uchun barcha a£Q larda mx{a) = Xm(a) bo‘lsa, bu Q to‘plam kattaliklarni aniqlash maydoni boMadi.

Kattaliklarni aniqlash maydoniga misol qilib barcha kesmalar to‘plami Q ni olish mumkin. Bu to‘plamda a~p yozuvi a va J3 kesmalarning tengligini, a = /?©y yozuvi esa a kesmani (3 va y kesmalarga ajratuvchi nuqta mavjudligini anglatadi. 0‘lchash amali har bir a kesmaga uning uzunligi m(a)ni mos qo‘yadi, shu bilan, ravshanki, uzunlikning invariantligi va additivligini ifodalovchi a) va b) shartlar bajariladi. Uzunlikni o‘lchashning istalgan ikki amali bir-biridan faqat o‘zgarmas ko‘paytuvchi bilan farq qiluvchi natijalarni beradi (multiplikativ xossasiga ko‘ra).

Agar Q maydon kattaliklarni aniqlash maydoni bo‘lsa, unga m(a) = m(fi)ni anglatuvchi tengdoshlik munosabatini kiritish mumkin. Bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega va shuning uchun Q to‘plamni ekvivalentlik sinf- lariga ajratishni ta’riflaydi. Bu ajratish Q maydonga mos kattalik deyiladi. Q kesmalardan iborat boisa, tengdoshlik munosabati ekvivalentlik munosabati bilan bir xil bo‘ladi — ikki kesma uzunliklari bir xil bo‘lsagina, bu kesmalar teng bo‘ladi. Yuzlar bo‘lgan holda boshqacha bo‘ladi — ikki shakl teng bo‘lmasa ham yuzlari bir xil bo‘lishi mumkin (masalan, tomonlari 6 sm

142

va 24 sm bo‘lgan to‘g‘ri to’rtburchak va tomoni 12 sm bo‘lgan kvadrat).

3.7. Yuzlarni oMchash. Shakllar yuzlarini o‘lchashning umu- miy nazariyasi qanday asoslanishini ko‘rsatamiz. Tekislikda o‘zaro perpendikular l va m to‘g‘ri chiziqlarni hamda e birlik kesmani tanlab olamiz. Q orqali tomonlari shu to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to’g‘ri to‘rtburchaklar maj- muasini belgilaymiz, bunda a~(3 ikkita shunday to‘g‘ri to‘rtburchakning teng- ligini, a = ft (By esa a to‘g‘ri to‘rt- burchakning / yoki m parallel to‘g‘ri chiziqlarga parallel to’g‘ri chiziq bilan va a to‘g‘ri to‘rtburchaklarga bo‘lin- ganini anglatadi deymiz (III.3-rasm).

Birlik kvadrat yuzi I ga teng bo‘lishi uchun to‘g‘ri to‘rtburchaklar to‘plamida 5(a) yuz tushunchasini ta’-

***III.3-rasm.***

riflashning yagona usuli mavjudligini ko‘rsatamiz. Buning uchun to‘g‘ri to‘rtburchak yuzini 5(a) = ab formula bilan ifodalash kerak, bunda a va b lar natural sonlar bo‘lsa, a to‘g‘ri to‘rtburchakni ab ta birlik kvadratlarga ajratish mumkin, shuning uchun uning yuzi birlik kvadratlar yuzlarining ab yig‘indisiga, ya’ni ab songa teng.

So‘ngra, agar a ning tomonlari uzunliklari o‘nli kasrlar va bilan ifodalangan bo‘lsa, a to‘g‘ri to‘rtburchakni tomonlari ^ bo‘lgan ab ta kvadratga, birlik kvadratni I02n ta shunday kvadratlarga bo‘lish mumkin. Bundan tomoni bo‘lgan har bir kvadratning yuzi ga, butun to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi ga, ya’ni va ^ sonlar ko‘paytmasiga tengligi kelib chiqadi.

To‘g‘ri to‘rtburchakning hech bo‘lmaganda bitta tomoni irrat- sional uzunlikka ega bo‘lgan hoi yuqorida qaralgan holga keltiriladi — bu holda to‘g‘ri to‘rtburchak yuzi ham, ab ham X — {an; bn} va Y= {a'n; b'n} sonlar to‘plamlarini ajratadi, bunda an va bn a va b sonlarning kami bilan olingan yaqinlashishlari, a'va b'n o‘sha sonlarning ortig‘i bilan olingan yaqinlashishlari.

143

Biz to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi bo‘lsa, u ab son bilan ifo- dalanishini isbotladik. Birlik kesmaning o‘zgarishi bilan to‘g‘ri to‘rtburchak tomonlari uzunligini ifodalovchi sonlar o‘zgaradi, shu bilan birga ular yuzlarini ifodalovchi sonlar ham o‘zgaradi. Bunda bu sonlarning hammasi bitta o‘zgarmas ko'paytuvchiga ega bo‘ladi. ^(a) = ab formula bilan ifodalanadigan yuz 6- banddagi a) va b) xossalarga ega ekanligini isbotlash mumkin. Shu bilan tomonlari l va m to‘g‘ri chiziqlarga parallel to‘g‘ri

- to‘rtburchaklar uchun yuzlarni o‘l- chash nazariyasi nihoyasiga yetdi.

*m*

Umumiy ko'rinishdagi shakllar — (pog‘onali) shakllar uchun yuz tu- shunchasini kiritish uncha qiyin emas. Agar a shakl to‘g‘ri to‘rtburchaklar birlashmasidan iborat bo‘lib, ulardan hech qanday ikkitasi umumiy ichki nuqtaga ega bo‘lmasa, bu a shakl po- g'onali shakl deyiladi (III.4-rasm). Agar pog‘onali shakl /?,, fin to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat bo‘lsa, uning yuzi bu to‘g‘ri to’rtburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. Pog‘onali shaklning yuzi uning to‘g‘ri to'rtburchaklarga qanday ajratilga- niga bog‘liq emasligini isbotlash mumkin. Bundan tashqari, pog'onali shaklning yuzi parallel ko‘chirishda o‘zgarmaydi, agar a shakl yS va y pog‘onali shakllarga bo‘lingan bo‘lsa, uning yuzi shu shakllar yuzlarining yig’indisiga teng.

i

*lll.4-rasm.*

Biz hozircha na uchburchaklarning, na doiralarning, hatto to­monlari l va m to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzlarini topa olmaymiz. Bu tushunchani qo‘llash sohasini kengaytirish uchun kvadratlanuvchi (ya’ni yuzga ega bo‘lgan) shakllarning sinfi Q ni kiritamiz. Har bir a bilan X va Y sonli to‘plamlarni bundan bog‘laymiz. X to‘plam a shaklga butunicha kirgan pog‘onali shakllar yuzlaridan iborat, Y esa a shaklni butunlay o‘z ichiga olgan pog‘onali shakllar yuzlaridan iborat. Ma’lumki, ichki pog'onali shakllar yuzi tashqi pog‘onali shakllar yuzidan katta emas. Shuning uchun, agar xG.X va y£ Y bo‘lsa, x < y bo‘ladi, ya’ni X to‘plam Y to'plamdan chapda joylashgan. Shuning uchun bu to‘plamlarni ajratuvchi hech bo‘lmaganda bitta son mavjud.

**144**

4-t a ’ r i f. Agar a shaklga mos keluvchi X va Ysonli to ‘plamlar bittagina son bilan bo'linsa, a shakl *kvadratlanuvchi* deyiladi.

Shu S(a) son a shaklning yuzi deyiladi. Shunday qilib, shakl yuzi uning ichidagi barcha pog‘onali shakl yuzlaridan kichik emas, uni o‘z ichiga olgan barcha pog'onali shakllar yuzlaridan katta emas.

Shakl yuzi additivlik xossasiga ega ekanligini isbotlash mum- kin: agar ikkita kvadratlanuvchi shakl umumiy ichki nuqtaga ega bo‘lmasa, ular birlashmasining yuzi bu shakllar yuzlarining yig‘indisiga teng. Shakl yuzi shaklning siljishi bilan o‘zgarmaydi. Shakl yuzini ifodalovchi son birlik kesmaning o‘zgarishi bilan o‘zgaradi. Agar e — kf bo‘lsa, Sf(a) = k2Se(a), bunda Se(a) — uzunlikning o‘lchov birligi qilib e kesma olinganda a shaklning yuzi, S^a) — uzunlikning o‘lchov birligi qilib t kesma olinganda a shaklning yuzi.

Jismlar hajmlarini o‘lchash nazariyasi ham xuddi shunday asos- lanadi. Egri chiziqlar uzunliklarini o'lchash nazariyasi ancha qiyinroq bo‘lib, biz unda to‘xtalmaymiz.

4-§. HAQIQIY SONLAR TO'PLAMI

4.1. Musbat va manfly sonlar. Musbat haqiqiy sonlar yorda- mida istalgan skalyar kattalikning o‘lchash natijasini ifodalash mumkin: masalan, uzunlikning, yuzning, hajmning, massa va boshqalarni. Biroq amalda ko‘pincha kattalikning o‘lchash natijasini emas, balki uning o‘zgarishini son bilan ifodalashga, ya’ni bu kattalik qanchaga o‘zgarganini ko‘rsatishga to‘g‘ri keladi. 0‘zgarish ikki yo‘nalishda bo‘lishi mumkin — qancha ortsa, shuncha kamayishi yoki o‘zgarishsiz qolishi mumkin. Shuning uchun kattalikning o‘zgarishini ifodalashda musbat haqiqiy sonlardan tashqari boshqa sonlar ham kerak bo‘ladi, R+ to‘plamni kengaytirish kerak. Bu to‘plamni unga 0 (nol) sonini va manfiy sonlarni kiritib, kengaytiramiz.

Shunday qilib, musbat haqiqiy sonlar to‘plami R+ ni olamiz va R+ dan olingan har bir x songa — x («minus x» deb o‘qiladi) yangi sonni mos keltiramiz. Masalan, 5 soniga-5 soni, 8,14 soniga -8,14 soni mos keltiriladi. -x ko'rinishdagi sonlar, bunda xER+, manfiy sonlar deyiladi va. ular to‘plami R bilan belgilana- 145 di. Undan tashqari, 0 sonini olamiz. R+, R va {0} to’plamlar birlashmasi haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R bilan belgilana- di. Shunday qilib.

R= R+U RU {0},

bunda R+, Rva {0} to‘plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi (hech qanday son bir vaqtning o‘zida na musbat, na manfiy yoki mus- bat va nol bo‘lmaydi).

Agar kattalik awal x qiymatga ega bo‘lib, keyin y qiymatni qabul qilsa (bunda x va y R+ ga tegishli), x < y boiganda, uning o‘zgarishi musbat y — x son bilan ifodalanadi (masalan, kattalik- ning qiymati 6 boiib, keyin 10 boisa, u 10- 6ga, ya’ni 4 ga o‘zgargan). Agar x > y boisa, kattalik - (—x - y) manfiy songa o'zgargan deymiz (masalan, agar kattalik qiymati 6 boiib, keyin 2 boisa, y - (6 - 2)ga, ya’ni — 4 ga o‘zgargan). Shunday qilib, kattalik —a ga o‘zgargan degan gap u a ga kamaygan degan gapga teng kuchlidir.

Musbat haqiqiy sonlar koordinata nurida nuqtalar bilan tas- virlangani kabi ixtiyoriy haqiqiy sonlar koordinata to‘g‘ri chizigida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Bunda musbat va manfiy sonlar qarama-qarshi nurlarda nuqtalar bilan belgilanadi, 0 soni bu nurlarning umumiy boshlanish nuqtasi boiadi.

x va -x sonlar, bunda x£R+, koordinata to‘g‘ri chizigida sanoq boshi 0 ga nisbatan simmetrik joylashgan nuqtalar bilan belgilanadi. Bu sonlar bir-biriga qarama-qarshi sonlar deyiladi, shu bilan birga — (-x) = x. Masalan, -(- 6) = 6. 0 soni o‘z-o‘ziga qarama-qarshi deyiladi. -0 = 0.

Sanoq boshidan koordinata to‘g‘ri chizigidagi nuqtagacha boigan, x sonni ifodalovchi masofa shu x sonning moduli deyi­ladi va | x | bilan belgilanadi. Shunday qilib,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | bunda | x > 0, |
| -X, | bunda | x<0. |
| 0, | bunda | x = 0. |

Masalan, | 12 | = 12; ] -9 | = 9; |0| = 0.

**146**

xe7?+ son a^R ga o‘zgarganda ye7?+ songa o‘tgan. U holda a haqiqiy songa (x; y) musbat haqiqiy sonlar juftligi mos keladi deymiz, masalan, (7; 2) juftlik -5 haqiqiy songa mos keladi, chunki 7 soni -5 ga o‘zgarganda 2 ga o‘tadi, (3; 8) juftlik 5 soniga mos keladi. Chunki 3 soni 5 ga o‘zgarganda 8 songa o‘tadi.

Bitta haqiqiy songa cheksiz ko‘p juftliklar mos keladi. Masa­lan, 4 soniga (1; 5), (1,5; 5,5), (72; 4 + 72) va h. k. juftliklar mos keladi, -3 soniga (4; 1), (10; 7), (729; %/29 — 3) va h. k. juftliklar mos keladi.

(x,; y,) va (x2; y2) juftliklar bitta haqiqiy son a ga qachon mos kelishini aniqlaymiz. Agar a son musbat bo‘lsa, y, = x, + a va y2 - x2 + a bo‘lganda mos keladi. Ammo bu holda x, + y2 — x, + (x2 + a) - (x, + a) + x2 - y, + x2. Agar a son manfiy bo‘lsa, yx-xx-(-a) va y2-x2—(-a) va shuning uchun x, = yx + (-a), x2-y2 + (-o); bu holda ham x, + y2 - x2 + yx, a - 0 bo'lgan hoi shunga o‘xshash tahlil qilinadi. Hamma hollarda (x,; y,) va (x2; y2) juftliklar x, + y2 - x2 + yx bo'lgan holda va faqat shunda bitta a haqiqiy songa mos keladi.

Shuning uchun haqiqiy sonlar tushunchasini musbat sonlar jufti orqali ham ta’riflash mumkin. Buning uchun R+ to‘plamning R2+ dekart kvadratini, ya’ni (x; y) ko‘rinishdagi juftliklar to‘plamini olamiz, bunda xg7?+, (x,; y,) juftlik (x2; y2) juftlikka

ekvivalent deyiladi, agar x, + y2 = x2 + y bo‘lsa, (x,; y,)~(x2; y2) munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega ekanligini tekshirish oson, shuning uchun bu munosabat R+ to‘plamni ekvivalent juftliklar sinfiga ajratadi. Bunday har bir sinf haqiqiy son deyiladi. Agar x < y bo‘lsa, (x; y) ga mos keluvchi son y — x ga teng va musbat, x > y bo‘lsa, bu son —(x - y) ga teng va manfiy. Nihoyat, x-y bo‘lsa, (x; y) juftlikka 0 soni mos keladi.

Har bir (x; y) juftlikni sonli nurdagi boshi x va oxiri y bo'lgan yo‘nalgan kesma bilan tasvirlash mumkin. (Soddalik uchun ko- ordinatasi x bo'lgan nuqtani x bilan belgilaymiz.) Ekvivalent juft- liklarga bir xil uzunlikdagi va bir xil yo‘nalgan kesmalar mos keladi. Bunday yo‘nalgan kesmalar ekvivalent kesmalar deyiladi. Unda haqiqiy son ekvivalent yo ‘nalgan kesmalar sinflni aks ettira- di deyish mumkin.

**147**

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Manfiv sonlarning kiritilishi sababi qandav?**

**2. (3.y — 2,4) - (2x + 1,7) bo'lsa, sonni toping.**

**3. 12 soni: a) 4 ga; b) -7 ga; d) 0 ga o’zgarganda o'tadigan sonni toping.**

4.2. Haqiqiy sonlarni qo'shish va ayirish. Biror x£/?+ sonni avval a ga, keyin b ga o‘zgartirdik, bunda x son shunday katta- likdaki, bu ikkala o‘zgarish uni R+ to‘plamdan tashqariga chiqarmaydi. a va b sonlar yig‘indisini haqiqiy son deymiz, bu son o‘zgarish natijasini ifodalaydi. Masalan, 12 sonini awal 4 ga, keyin 7 ga o‘zgartirsak, 12 soni avval 16 ga, keyin 23 ga o‘tadi. 12 soni 23 ga o‘tishi uchun uni 11 ga o‘zgartirish kerak, demak, 4 + 7 = 11, shunday bo‘lishi kerak edi. Agar avval -4ga, keyin -7 ga o‘zgartirilganda edi, 12 soni avval 8 ga, keyin 1 ga o‘tar edi. 12 dan 1 ni hosil qilish uchun 12 ni -11 ga o'zgartirish kerak. Bundan (-4) + (-7) = -11.

Umuman, agar a va b musbat haqiqiy sonlar bo‘lib, x > a + b bo‘lsa, x ni —a ga o‘zgartirganda u x - a ga, keyin x-a ni —b ga o‘zgartirganda (x-a)-b ga, ya’ni x-(a + b) ga o‘tadi. x-(a + b) hosil qilish uchun x ni -{a + b) ga o'zgartirish kerak. Bundan: (-a) + (-b) = -(a + b).

Endi qarama-qarshi ishorali sonlarni qo‘shishni qaraymiz. Qo‘shuvchilar qarama-qarshi sonlar bo'lgan holni qaraymiz. Rav- shanki, x sonni avval a ga, keyin -a ga o'zgartirsak, x ni hosil qilamiz. Boshqacha aytganda, x I (a I (-a)) - x. Ikkinchi to- mondan, x + 0 = x, shuning uchun a + (-a) = 0. Demak, qara­ma-qarshi haqiqiy sonlar yig‘indisi nolga teng ekan.

Endi umumiy holda a+ (-b) yig‘indisini qaraymiz {a va b sonlarni musbat, -b ni manfiy deymiz). Agar a > b bo‘lsa, a - (a—b) + b, va shuning uchun a + ( — b) — (a - b) + b + ( — b). Ammo x sonning a — b ga, b ga va —b ga ketma-ket o'zgarishini a - b ga o‘zgarish deb olish mumkin. (b ga va -b ga o'zgarish o‘zaro yo‘qotiladi.) Shuning uchun a > b bo'lsa, a + ( — b) - a - b bo'ladi. Ravshanki, a > b bo'lganda ( — b) + a = a - b.

Endi a < b bo'lsin. Bu holda -b - (-a) + [-(b - a)], shuning uchun a + ( — b) - a + (-a) + [-(6 - a)] - -(b a). Demak, a < b bo'lganda a + (-b) - -(b - a) bo'ladi. -b va a sonlarni qo'shishda ham o'sha natija chiqadi: (-b) + a - -(b - a).

**148**

Haqiqiy sonlarni qo'shish qoidasini quyidagicha ta’riflash mumkin:

Bir xil ishorali ikkita haqiqiy sonni qo‘shganda moduli qo ‘shiluvchilar modullarining yig ‘indisiga teng o ‘sha ishorali son hosil bo ‘ladi. Turli ishorali sonlarni qo ‘shganda ishorasi moduli katta bo ‘Igan qo ‘shiluvchining ishorasi bilan bir xil bo ‘Igan, moduli esa katta modulli qo ‘shiluvchidan kichik modulli qo ‘shiluvchining ayirmasiga teng son hosil bo‘ladi. Qarama-qarshi sonlarning yig ‘indisi nolga teng, sonning not bilan qo ‘shilishi sonni o‘zgartirmaydi.

R da qo‘shish kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalariga ega ekanligini tekshirish oson. Yuqorida berilgan ta’- rifdan ko‘rinib turibdiki, nol R da qo‘shishga nisbatan neytral elementdir.

R to‘plamda ayirish amali qo‘shish amaliga teskari amal kabi ta’riflanadi. R da har bir b son o‘ziga qarama-qarshi —b songa ega bo‘lgani uchun b + {-b)~ 0, u holda b sonni ayirish —b sonni qo‘shishga teng kuchlidir: a — b - a + (-b).

Haqiqatan, ixtiyoriy a va b uchun

[a + (-£)] + b = a + [(-A) + b] = a,

bu a — b — a + (-b) demakdir.

a > b bo‘lgan a va b musbat sonlar uchun a — b ayirma b son a ga o‘tgandagi o‘zgarishdir. Shunga o‘xshash, har qanday a va b haqiqiy sonlar uchun a - b ni b ni a ga o‘tkazuvchi o‘zgarish deb qabul qilamiz. U 0 nuqtani a - b nuqtaga o‘tkazadi. Musbat haqiqiy sonlar uchun bo‘lganidagidek, bu o‘zgarish b nuqtadan a nuqtaga yo‘nalgan kesma sifatida geometrik tasvirlanadi. Uning uzunligi sanoq boshidan a - b nuqtagacha, ya’ni a - b sonning moduliga teng.

Biz ushbu muhim tasdiqni isbotladik:

b nuqtadan a nuqtaga yo ‘nalgan kesma uzunligi \ a - b \ ga teng.

R to‘plamda tartib munosabatini kiritamiz. a - b ayirma mus­bat bo'lganda va faqat shunda a > b deymiz. Bu munosabat asim- metrik va tranzitiv ekanligini, ya’ni qat’iy tartib munosabati ekanligini isbotlaymiz. Bunda R dan olingan har qanday a va b uchun a - b, a > b, b > a munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli, ya’ni R da tartib munosabati chiziqli. a - 0 = a bo‘lgani uchun, aGR+ bo‘lsa, a > 0, agar aGR bo‘lsa, a < 0.

149

Agar a > b bo‘lsa, har qanday cER uchun a + c > b + c ni isbotlash oson.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1. **a son** (\*,; **yt) juftlik bilan, b son** (a,; **y,) juftlik bilan bcrilsa, a** + **b son (\*! + x,; yt + y,) juftlik bilan berilishini isbotlang.**

2**. a son (a; y) juftlik bilan berilsa, -a son (y; x) juftlik bilan berilishini isbotlang.**

**3. Haqiqiy sonlar to'plamida qo'shishning kommutativ va assotsiativ- ligini isbotlang.**

**4. Haqiqiy sonlar toplamida qo'shishning qisqarivchanligini isbotlang.**

4.3. Haqiqiy sonlar to‘p]amida ko‘paytirish va bo‘lish. Agar a kesma uzunligi x ga teng bo‘lsa, a-x-e deb yozilar edi, bunda e — birlik kesma. Bitta to‘g‘ri chiziqda yotuvchi yo'nalgan kes- malar uchun a = x - e deb yozamiz va agar a va e kesmalar bir xil yo‘nalgan bo‘lsa, x > 0, agar qarama-qarshi bo'lingan bo‘lsa, x< 0 deymiz (ikkala holda ham |x| e birlik o'lchovida a kesma uzunligiga teng). Agar e = y/bo‘lsa, a = (x(yf) bo'ladi. x va y sonlarning ko'paytmasini shunday z son deb ta’riflaymizki, unda a = z’f bo‘ladi, ya’ni Z’f=x(yf) bo‘lgandagina z-xy deb olamiz.

Agar x va y sonlar berilgan bo‘lsa, xy ni qanday hosil qilishni aniqlash uchun xossaning multiplikativligidan a kesma uzunligi /birlik o‘lchovida |x|\*|y| ga tengligini eslaymiz. Agar x va y sonlar bir xil ishorali bo‘lsa, a va f kesmalar bir xil yo‘nalgan, agar turli ishorali bo‘lsa, qarama-qarshi yo'nalgan boiadi. Masalan, agar x< y va y < 0 bo‘lsa, a va e kesmalar qarama- qarshi e va f kesmalar kabi qarama-qarshi bo‘ladi va shuning uchun a = [OA] va f - [OF] kesmalar yo‘nalishi bir xil bo‘ladi (III.5-rasm). Agar x > 0 va y < 0 bo‘lsa, a = [OA] va e - [0£) kesmalar yo‘nalishi bir xil, evaf = [OF] kesmalar qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi, shuning uchun a va f kesmalar yo'nalishi qarama-qarshidir.

• > • • • • \* «

***E O F A F O E A***

***III.5-rasm.***

Yuqoridagilardan, haqiqiy sonlar ko'paytmasi quyidagicha ta’- riflanadi:

**150**

x va y sonlarning *ko^paytmasi* deb, moduli ko‘paytuvchilar mo- dullarining ko ‘paytmasiga teng, z - \ x | • | y \, ishorasi ko ‘paytuvchilar ishorasi bir xil bo ‘Isa, musbat aks holda manfiy bo ‘ladigan z songa aytiladi. Har qanday x son uchun x • 0 = 0 • x - 0.

R to‘plamda ko‘paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan kom- mutativlik, assotsiativlik va distributivlik xossalariga ega ekanligi- ni isbotlash oson. Bu amal qisqaruvchanlik xossasiga ega emas, chunki zx - zy dan x-y degan xulosa chiqarish mumkin emas; Z - 0 bo‘lib, x y bo‘lishi mumkin, u holda zx - zy - 0 bo‘ladi, Z\* 0 bo‘lsa, zx - zy dan x = y kelib chiqadi. Shunday qilib, tenglikni noldan farqli sonlargagina qisqartirish mumkin ekan.

Agar x: noldan farqli bo‘lsa, har qanday yBR uchun shunday z topiladiki, x-yz bo‘ladi. Bu son x ni y ga boiishdan chiqqan bo‘linma deyiladi va x :y kabi belgilanadi. Shunday qilib, R da noldan farqli har qanday songa bo‘lish ta’riflandi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. R da ko‘paytirish kommutativ va assotsiativ ekanligini isbotlang.**

**2. R da ko‘paytirish qo‘shishga va ayirishga nisbatan distributiv ekanligini isbotlang.**

**3. 27 ta musbat va 32 ta manfiy ko‘paytuvchilarning ko‘paytmasi qanday ishoraga ega?**

**4. -7 dan 10 gacha butun sonlar ko‘paytmasi nimaga teng?**

**5. Ifodalar qiymatini hisoblang;**

**a) 702,3 - (59 - 389,56 :** 6**,**8**) ■ (59,3 - 5,64 : 9,4);**

**b) (**6,8 **52,4 - 256,32) ■ (77,34 -t- 61,32 : 7,3) —919,6.**

**151**

IV **bob.** KOORDINATALAR, TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

**1-§.** TO‘G‘RI CHIZIQDA KOORDINATALAR

1.1. To‘g‘ri chiziqda koordinatalar. Biz bu bandda to‘g‘ri chiziqda nuqtalar o‘rnini sonlar yordamida qanday ko‘rsatishni tushuntiramiz. / to‘g‘ri chiziqni va unda O va E nuqtalarni ola- miz. O nuqtani koordinatalar boshi, E nuqtani esa birlik nuqta deb ataymiz. OE kesma uzunligini uzunlik o'lchovining birligi deb, O nuqtadan E nuqtagacha / yo‘nalishni musbat yo‘nalish deb qabul qilamiz. / to‘g‘ri chiziqdagi har bir M nuqtaga lining koordinatasini, ya’ni shunday x sonni mos keltiramizki, unda:

a) x sonning moduli O nuqtadan M nuqtagacha bo‘lgan masofaga teng: | x | = | OM |;

b) M -\*■ 0 bo‘lib, M nuqta OE nurda yotsa, x son musbat, M nuqta qarama-qarshi nurda yotsa, x son manfiy bo‘ladi.

d) shartni boshqacha ta’riflash mumkin, ya’ni agar O nuqtadan M nuqtagacha yo‘nalish musbat bo‘lsa, M nuqtaning koordinatasi x musbat, agar yo‘nalish manfiy bo‘lsa, x manfiy bo‘ladi. Yuqorida berilgan ta’rifdan O nuqtaning koordinatasi nolga tengligi (00 masofa nolga teng), E nuqtaning koordinatasi birga tengligi kelib chiqadi.

Koordinata sistemasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni koordinata to‘g‘ri chizig‘i deb ataymiz. Agar M nuqta Ykoordinataga ega bo‘lsa M(x) deb yozamiz (IV.l-rasm). Koordinata to‘g‘ri chizig‘idagi har bir M nuqtaga aniq x son (shu nuqtaning koordinatasi), har bir x songa bitta M nuqta (shu koordinatali nuqta) mos keladi. Shunday qilib, haqiqiy sonlar to‘plami bilan to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plami orasidagi x -» M moslik o‘zaro bir qiymatli moslikdir.

/

—• • •—►

O E M(x)

***IV.l-rasm.***

**152**

To‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar bilan sonlar orasidagi moslik son- lar orasidagi munosabatlarni geometrik tasvirlashga va, aksincha, to‘glri chiziqdagi geometrik masalalarni yechishni sonlar ustida amallar bajarishga olib keladi. Birinchi navbatda ba’zi sonli to‘plamlarni, ya’ni haqiqiy sonlardan iborat to'plamlarni to‘g‘ri chiziqda qanday tasvirlashni aniqlaymiz.

a < x tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to’plami sonli nur deyiladi va [a\ +°°) kabi belgilanadi. Koordinata to‘g‘ri chizig‘ida bu to'plam A(a) nuqtadan musbat yo‘nalishda chiqqan AX nur bilan belgilanadi. Bunda A nuqta nurning o‘ziga tegishli (IV.2- rasm). (-=», a] nur a < x tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlardan iborat. Bu nur A nuqtadan manfiy yo'nalishda chiqqan nur bilan belgilanadi (IV.3-rasm).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ♦ -  0 | Afci) | 0 | AC a) |
|  | IV.2-rasm. |  | IV.3-rasm. |

a < x tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to‘plami ochiq sonli nur deyiladi va (°°; +a) nur a <x kabi belgilanadi. Bu to'plam koordinata to‘g‘ri chizig‘ida ochiq nur bilan tasvirlanadi, ya’ni A nuqta kirmaydigan ochiq nur bilan belgilanadi. Rasmlarda nurni ochiq nurdan farq qilish uchun nur boshini qora nuqta bilan, ochiq nur boshini doiracha bilan belgilaymiz (IV.4-rasm).

o o »

***O A(a)***

***lV.4-rasm.***

a < x< b qolsh tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to'plami sonli kesma deyiladi va [o; b] kabi belgilanadi. Sonli kesma ko­ordinata to‘g‘ri chizig'ida uchlari A(a) va B(b) bo‘lgan kesma bilan belgilanadi (uchlar kesmaga tegishli) (IV.5-o rasm).

a < x < b qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to'plami (a; b) kabi belgilanuvchi sonli oraliqdir. Bu oraliq ochiq AB kesma bilan, ya’ni A va B uchlari kirmaydigan AB kesma bilan belgilanadi (IV.5-6 rasm).

**153**

***IV.5-rasm.***

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. To'g'ri chiziqning koordinata to‘g‘ri chizig‘ida aylanish shartlari qanday?**

**2. Sonli nur, ochiq sonli nur, sonli kesma, sonli oraliqlarni ta’riflang va misollar keltiring.**

**3. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi nuqtalarni belgilang:**

**^(-3,5), B( 4i). C(|). D(-4i).**

**Koordinata to'g'ri chizig'ida A(-3) va D(5) nuqtalarni belgilang. Bu nuqtalar orasidagi masofa nimaga teng?**

**4.**

**5.**

6.

**M= (—4; —1), K = [-2; 5] sonli to‘plamlar berilgan. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi to'plamlarni belgilang: a) A/n K; b) Mil K; d) M' U K'\ e) M'CiK. (To'ldiruvchi to‘plamlar haqiqiy sonlar to'plamidan olinadi.)**

**Koordinata to'g'ri chizig'ida to'plamlarni belgilang:**

**N n**



*~Ma) W  
a)*

*~Ma) ~Sb)* ^

***b)***

**va Z n**

**7. Agar A(-1) nuqta avval o'ngga 7 birlik, keyin chapga 10 birlik siljisa, u qanday nuqtaga aylanadi?**

8**. A = {x\x e Ra | x |< 3}, B = {x\x e R** a **-1 < x < 5} bo‘lsa, koordi­nata to‘g‘ri chizig'ida Xl) Y, Xn Y, X\K, Y\X to'plamlarni tasvirlang.**

**9. Koordinata to‘g‘ri chizig'ida quyidagi to'plamlarni tasvirlang:**

**a)** {x **| xE** R **A** 1< x<5}**;**

b) {x | xGZa-3<x<4}; d) {x | xE/? A -4 < x < 2}.

**10.** A — {x **|** x **G** R **A** -4 **<** x<24}, **i?** = {x|xE7?A-2<x<5} **to'plamlar berilgan. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi to'p­lamlarni belgilang:**

**a) A fl *BC\C;* b) AU5UC; d) *(AHB)UC;* e) *(A'VB')nC;* f) *(A \ B)l)C.***

1.2. To‘g‘ri chiziqda koordinatalarni almashtirish. Koordi- natalar boshi O va birlik nuqta E to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy tan- lanishi mumkin. (Faqat O va E nuqtalar ustma-ust tushib qolmasligi kerak.)

**154**

To‘g‘ri chiziqda bir koordinatalar sistemasidan boshqa koor- dinatalar sistemasiga o‘tishda nuqtalar koordinatalari o‘zgaradi. To‘g‘ri chiziqda koordinatalar sistemasining quyidagi almashti- rishlarini qaraymiz.

a) Koordinatalar boshini ko'chirish. Bunday almashtirishda ko­ordinatalar boshi O boshqa O' nuqtaga o‘tadi, birlik kesma uzun- ligi va to‘g‘ri chiziqdagi yo‘nalish esa o‘zgarishsiz qoladi (ya’ni yangi (O'\ E') koordinatalar sistemasi qaraladi, bunda | OE | = | O'E' |, O dan E ga yo‘nalish va O' dan E' ga yo‘nalish bir xil bo‘ladi. (IV.6-rasm)).

-• • • • • ►

***O E (7(a) E M(x)***

***IV.6-rasm.***

O' nuqtaning koordinatasini eski sistemada a bilan belgilay- miz. M nuqtaning koordinatasi x bo‘lsin. Uning yangi x' koor­dinatasini topamiz. Agar M nuqta Odan o‘ng tomonda, O' nuqta esa O va M nuqtalar orasida yotsa, | OM | = x,| 00' |= a,\ O'M | = = x-a bo'ladi. IV.6-rasmdan x =| O’M | = | OM |-| 00' \. Shu-

ning uchun

x' = x - a (1)

tenglikni 00' va MM' nuqtalarning turli joylashishlarida o‘rinli bo‘lishini isbotlash mumkin, bunda va bundan keyin x' — nuqtaning yangi, jc — eski koordinatasi qilib belgilanadi.

IY.7-rasmda tasvirlangan hoi uchun isbotlaymiz. Bu holda O' nuqta O dan chapda joylashgan, shuning uchun uning koordinatasi manfiy: a - —\00'\. x va x' sonlar esa musbat: x - \OM'\, x' =\0'M[. Ammo bu holda \0'M\ -\OM\ + \00'\, shuning uchun x' - x + + (-a) - x - a.

—• • • ►

***O'(a) O M(x)***

***VI. 7-rasm.***

**155**

1- m a s a 1 a. Agar koordinata boshi 0’{-4) nuqtaga ko‘chiril- ganbo‘lsa, /4(5) nuqtaning yangi koordinatasini topamiz. (1) for­mula bo'yicha topamiz:

x' = 5 - (-4) = 9.

2- m a s a 1 a. Koordinatalar boshi 0'{3) nuqtaga ko‘chirilgandan keyin A nuqtaning koordinatasi -7 ga teng bo‘ldi. Bu nuqtaning koordinatasini dastlabki koordinatalar sistemasida topamiz. Bu holda a = 3 va x' = -7, Demak, —7 = x—3, shuning uchun x = -4.

3- m a s a 1 a. A nuqtaning dastlabki koordinatasi 5 ga teng edi, koordinatalar boshi ko‘chirilgandan keyin -2 ga teng bo‘ldi. Ko­ordinatalar boshi qanday nuqtaga ko‘chirilgan?

x- 5, x' — —2 bo‘lgani uchun -2 = 5 - a. Shuning uchun a = 7.

b) 0‘q yo'nalishini o ‘zgartirish. Endi O nuqtani qo‘zg‘almas qilib olamiz va E nuqtani O ga nisbatan E nuqtaga simmetrik bo‘lgan E bilan almashtiramiz. Bunda almashtirishda kesmalar uzunliklarining o‘lchov birliklari o‘zgarmaydi, ammo musbat yo‘nalish manfiy bo‘ladi va aksincha. Shuning uchun hamma nuqtalarning koordinatalari ishoralarini o‘zgartiradi. Masalan, A(4) nuqtaning yangi koordinatasi -4 ga B(5) nuqtaniki esa -5 ga teng. O nuqtaning koordinatasi o‘zgarishsiz qoladi. Demak, bu holda yangi x' koordinata eski koordinata bilan quyidagicha munosabatda bo‘ladi: x'= -x

-9 • • • ►

***O E E (a) M(x)***

***IV.8-rasm.***

d) Masshtabni o‘zgartirish. Bunday almashtirishda O nuqtani qo‘zg‘almas qilib olib, E nuqtani u bilan O nuqtadan bir to- monda yotgan E' nuqtaga almashtiramiz (V1.8-rasm). E' nuqtaning koordinatasi a > 0 bo‘lsin. Eski koordinatasi x ga, yangisi x' ga teng bo‘lgan M nuqtani olamiz. Soddalik uchun bu nuqta koordinatalar boshidan o‘ngda yotadi deymiz. U holda

**156**

x son OM kesma OE kesmadan necha marta uzunligini, a esa \OE'\ kesma fOE] dan necha marta uzunligini, x' esa fOM] kesma \OE'] dan necha marta uzunligini bildiradi. Boshqacha aytganda, uzunlik oichovining birligi qilib OE kesma olinsa, f OM] = x, f OE'] va x = = v bo'ladi. Shunday qilib, x' = - .

\OE'\ a a

Agar M nuqta 0 nuqtadan chapda yotsa ham x = ^ ekanligi

xuddi shunday isbotlanadi. Demak, birlik kesma uzunligi a marta orttirilsa, to‘g‘ri chiziqdagi hamma nuqtalar koordinatalari a marta kamayadi.

Masalan, agar birlik kesma uzunligi ikki marta orttirilsa, ,4(8) nuqtaning yangi koordinatasi 4 ga teng bo‘ladi. B{-5) nuqtaning

yangi koordinatasi -~ga teng bo‘ladi. Agar birlik kesma uzunli­gi 3 marta kamaytirilsa, C(7) nuqtaning yangi koordinatasi 7 : ^ = 21 ga teng bo‘ladi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1**. Koordinata to‘g‘ri chizig'ida o‘q yo'nalishining o‘zgarishi nuqta koordinatasiga qanday ta'sir qiladi?**

**2. Koordinata to‘g‘ri chizig'ida birlik kesma uzunligining o'zgarishi nuqta koordinatasiga qanday ta’sir qiladi?**

**3. Koordinatalar boshi ko'chirilgandan keyin A(-7) nuqtaning koordinatasi 2 ga teng bo'ldi. Koordinatalar boshi qaysi nuqtaga ko'chirildi?**

**4. Agar koordinatalarning yangi sistemasi koordinatalar boshini /1(5) nuqtaga ko'chirishdan va uzunlik birligini 4 marta orttirishdan hosil bo'lgan bo'lsa, koordinatalar qaysi formula bo'yicha almashadi?**

**5. Agar avval masshtab birligini 4 marta orttirib, keyin koordinatalar boshini koordinatasi 5 ga teng bo'lgan nuqtaga ko'chirilsa, koordina­talar qaysi formula bo'yicha almashadi?**

6**. Ma’lumki, Selsiy shkalasining 5 gradusi Farengeyt shkalasining 9 gradusiga teng, shu bilan birga Selsiy shkalasining sanoq boshi Farengeyt shkalasi bo'yicha koordinatasi 32 ga teng bo'lgan nuqtada yotadi. Selsiy shkalasidan o'tish formulasini yozing va aksincha.**

1.3. Analitik geometriyaning to‘g‘ri chiziqdagi ba’zi bir ma- salalari. Endi geometrik masalalarning koordinata yordamida qanday yechilishini ko‘rsatamiz.

1-masala. Koordinata to‘g‘ri chizig‘ida A(a) va B(b) nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofani topamiz.

**157**

Y e c h i 1 i s h i. Avval bu nuqtalardan biri koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan xususiy holni qaraymiz. Ikkinchi nuqtaning koordinatasini c bilan belgilaymiz. To‘g‘ri chiziqdagi koordinatalar ta’rifiga ko‘ra c sonning moduli O dan A gacha boigan masofaga teng, ya’ni \ OA \ = \ c\. Masalan, koordinata­lar boshidan A(— 4) nuqtagacha masofa 4 ga teng.

Endi bu masalani umumiy holda yecha olamiz. Buning uchun koordinatalar boshini A(a) nuqtaga ko‘chiramiz. U holda 1.2.- banddagi (1) formula bo£yicha B nuqtaning yangi koordinatasi b' ga teng boiadi. Demak, A dan B gacha boigan masofa | |

ga, ya’ni | b - a | ga teng.

Shunday qilib, biz A (a) va B(b) nuqtalar orasidagi masofa | b - a | ga tengligini isbotladik:

*\AB\ = \ b-a\.* (1)

Bu formula a va b koordinatalarning turli ishoralarida o‘rinli.

3-masala. A(94) va B{-6) nuqtalar orasidagi masofani to- paylik.

(1) formula bo£yicha:

| AB | = | —6 — 41 = | — 10 | = 10.

3- misol. \ x—l | <7 tengsizlikni yechamiz.

Bu tengsizlikning gcomctrik ma’nosi quyidagicha: shunday B nuqtalarni topish kerakki, B dan A(4) gacha masofa 7 birlikdan katta boimasin. Bunday nuqtalarning barchasi koordinatalari

4-7 = -3va4 + 7 = 11 boigan nuqtalar orasida yotadi. De­mak, -3 < x < 11.

4- masa 1 a. Agar \AC\'.\CB\ = nr.n bo£lsa, AB kesmaning C nuqtasi uni m : n kabi nisbatda boiadi, uchlari A(xJ va B(x2) bo£lgan kesmaning C nuqtasi uni m : n nisbatda boisa, shu nuqtaning x koordinatasini topamiz.

Soddalik uchun xx< x2 deymiz (biz keltirib chiqaradigan for­mula xx > x2 bo£lganda ham to£g£ri). C(x) nuqta A{xx) va B(x2) nuqtalar orasida yotgani uchun jc, < x <x2. Shuning uchun x - - x{ > 0 va, demak, | AC \ = | jc - x,| = x - xr Xuddi shuningdek, x2-x>0 va shuning uchun | CB \ = x2 - x. Shuning uchun

158

shartdan ™ kelib chiqadi. Bu tenglamadan n(x -

- x,) = m(x2 - x) ni topamiz, bundan x = •

Shunday qilib, AB kesmani m : n nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning koordinatasi

X = /U'l +mX2

(2)

formula bilan ifodalanadi, bunda x, shu A nuqtaning koordina­tasi, x2 esa B nuqtaning koordinatasi.

Xususan, kesma o‘rtasi uni 1 : 1 nisbatda bo‘ladi. Demak, kes- ma o‘rtasining koordinatasi

formula bilan ifodalanadi.

5-m a s a 1 a. Agar A - v4(5), B = B( — 9) bo‘lsa, AB kesma o‘rtasining koordinatasini topamiz. (3) formula bo‘yicha:

0 It

5+(-9)

2

= -**2**.

6-m a s a 1 a. Agar A( 1) va B(9) bo‘lsa, AB kesmani 2 : 3 kabi nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatasini topamiz.

(2) bo‘yicha:

31 + 2 (-9) \_ -15

7-masala. Mos ravishda A va B nuqtalarda yotuvchi ml va m2 massalarning og‘irlik markazi AB kesmada yotadi va uni m2: ml nisbatda bo‘ladi. Agar mx massa A{x,) nuqtada, m2 massa B{x2) nuqtada yotsa, og'irlik markazining koordinatasini topamiz.

(2) formula bo‘yicha:

***m\X\ +m2x****2 m\+m2*

O.t

159

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Agar a) a = —** 6**, b = 12; b) a = — 12, b = —** 6**; d) <? =7,**

**b = -4; c) a = -3, b = -19 bo‘lsa, /) (o) va 5(A) nuqtalar orasidagi**

**masofani toping.**

**2. /I (3) nuqtadan 7 birlik uzoqlikdagi nuqtalarni toping.**

**3. Tenglamalarni veching:**

**I .v | = 3; | a-| = 0; |a+2| = 4; |a-2|=-2.**

**4. Tengsizlikning yechimini koordinata to‘g‘ri chizig'ida tasvirlang.**

**|** a **| > 4; ~ |** a+ **5 | > 3; | 2a — 4 | < 3.**

**5. Tengsizliklarni veching:**

a) | a - 3 | < 6; b) | +5 | < 9; d) | 2a +12 | < 8; e) | 13a - 15 | < 9.

6**. Agar a) a =** 8**, b = 22,** m **= 3, n = 4; b) a = 27, b =** 9, m **= 2, n = 1**

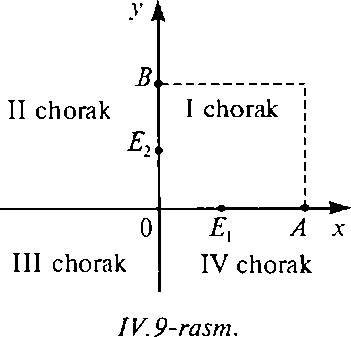
**boisa, A(a) va B(b) nuqtalarni** m **: n kabi nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatasini toping.**

**7. C(4) nuqta AB kesmani 5 : 2 kabi nisbatda bo‘ladi. Agar 5 nuqtaning b koordinatasi** 8 **ga teng bo‘lsa, A nuqtaning a koordinatasini toping.**

2-§. TEKISLIKDA KOORDINATALAR

2.1. Tekislikda to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar siste- masi. To‘g‘ri chiziqdagi har bir nuqtaga uning koordinatasini mos keltirish uchun to‘g‘ri chiziqda koordinatalar sistemasini, ya’ni (0; E) nuqtalar juftini qarab chiqdik. Tekislikda nuqtalar o‘rni

ikki son — abssissa va ordinata bilan beriladi. Bu sonlarni aniqlash uchun awal tekislikda koordinatalar sistema­sini yasaytniz. Buning uchun tekislikda shunday nuqtalar uchligi — (0; E2) ni tanlab olamizki, unda



OE{ va OE2 to‘g‘ri chiziqlar perpen- dikular, OE{ va OE2 kesmalar uzun- liklari birga teng boisin; |OE{\ = = \OEj = 1 (IV.9-rasm).

U holda OEx va OE2 to‘g‘ri chiziqlarning har biri sanoq boshi 0 boigan koordinata to‘g‘ri chizig‘i boiadi. Ularning birinchisi abssissalar o‘qi deyiladi va Ox bilan belgilanadi, ikkinchisi ordinatalar o‘qi deyiladi va Oy bilan belgilanadi. Ikkala o‘qning majmuasi to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi xOy deyiladi. Odatda, rasmda abssissalar o‘qi gorizontal qilib olinadi va unda musbat yo‘nalish chapdan

160

o‘ngga qarab tanlanadi, ordinatalar o‘qi esa vertikal bo‘lib, unda musbat yo‘nalish pastdan yuqoriga qarab tanlanadi. To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan tekislik koordi­nata tekisligi deyiladi. Koordinata o‘qlari koordinata tekisligini choraklar deb ataluvchi 4 ta qismga boiadi.

Endi biz koordinata tekisligida A/nuqtaning vaziyatini (o‘rnini) aniqlovchi sonlarni ko‘rsata olamiz. Buning uchun M nuqtadan abssissalar va ordinatalar o‘qlariga perpendikularlar tushiramiz. A nuqta abssissalar o‘qining unga tushirilgan perpendikular bilan kesilgan nuqtasi bo‘lsin. A nuqtaning koordinatasi (Ox koordinata to‘g‘ri chizig‘ida) M nuqtaning abssissasi, B nuqtaning koor­dinatasi (Oy koordinata to‘g‘ri chizig‘ida) esa ordinatasi deymiz. x va y sonlar M nuqtaning to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari deyiladi. Agar M nuqtaning koordinatalar xvay boisa, A/(x; y) qilib yoziladi.

Quyidagi jadvalda koordinatalar ishoralari ko‘rsatilgan:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Chorak | Abssissa | Ordinata |
| I | + | + |
| II | — | + |
| III | — | — |
| IV | + | — |

Abssissalar o‘qidagi barcha nuqtalarning ordinatalari nolga teng, shuningdek, ordinatalar o‘qidagi barcha nuqtalarning abssissalari ham nolga teng. Koordi­natalar boshi O ning ikki koordina­tasi ham nolga teng.

***y n***

M(-2; 4), 4

3.

2 1

1-masala. M(—2; 4) nuqtani yasaymiz. Buning uchun abssissalar o‘qida chap tomonda uzunligi 2 boigan OA kesma ajratamiz, ordi­natalar o‘qida yuqoriga uzunligi 4 boigan OB kesma ajratamiz. Hosil boigan nuqtalardan o‘qlarga perpen­dikularlar oikazamiz (IV. 10-rasm). ivio-rasm.

-2 -1 0

161

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Izlanayotgan M nuqta bu perpendikularning kesishgan nuqtasidir. Shu natijani boshqacha usulda ham chiqarish mumkin. Avval A nuqta yasaladi, keyin shu nuqta orqali abssissalar o‘qiga perpendikular o‘tkazamiz va unda yuqoriga qarab uzunligi 4 bo'lgan kesma ajratamiz.

2-masala. M nuqtaning koor- dinatalarini topamiz (IV. 11-rasm).

M nuqtadan koordinata o‘qlariga perpendikularlar tushiramiz. A nuqta O nuqtadan o‘ngda 5 birlikdagi ma- sofada, B nuqta esa O nuqtadan pastda 3 birlik masofada bo‘lgani uchun M nuqtaning koordinatalari 5 va 3 ga teng, ya’ni M= M(5; -3).

Shuni eslatib o'tamizki, agar M nuqtaning koordinatlari a va b bo'lsa, ya’ni M = M{a\ b) bo‘lsa, u holda uning abssissa o‘qi bilan proyeksiyasi (M nuqtadan abssissalar o'qiga tushirilgan perpendikular asosi) a va 0 koordinatalarga ega, ya’ni A(a; 0); uning ordinatalar o‘qiga tushirilgan proyeksiyasi 0 va b koordi­natalarga ega, ya’ni B(0; b).

V A

I I I I II

**-1-- 12 3 4** -2 —

**-3**

**5** 6

***IV.l l-rasm.***

1. Koordinata tekisligi qanday elementlardan taskil topadi?

2. Koordinata tekisligida siniq chiziqdan iborat shaklni uning uchlari koordinatalari bilan tutashtirish tartibida bering.

3. Koordinata tekisligida **M(x\ y)** nuqtani va A/,(|x|; **y),** A/,(x; |y|), **M}(\x** |; **\y** |) nuqtalarni belgilang. Bu nuqtalarning hammasi ustma- ust tushishi uchun **M** nuqtaning koordinatalari qanday bo‘lishi ke- rak? Qanday holda to‘rtta turli nuqta hosil bo‘ladi? Koordinata o‘qlarida **M, Mv** A/,, **M}** nuqtalar proyeksiyalarining koordinatalarini yozing.

4. Uchlari **A(-4** ;0), **B(**0; 6), C(—1; -1) nuqtalarda bo‘lgan **ABC** uch- burchak yasang.

5. Markazlari **A(**3; -4) nuqtada bo'lgan va bittasi abssissa o‘qiga urinuvchi, ikkinchisi ordinata o‘qiga urinuvchi ikkita aylana yasang.

6. Markazi **A(**3; -4) nuqtada bo‘lgan va koordinatalar boshidan o‘tuvchi aylana yasang.

7. Uchlari **A(2;** 7), 5(6; 5), C(8; 1) nuqtalarda bo'lgan **ABC** uchbur- chak yasang. **AB, BC, CA** kesmalarni mos ravishda teng ikkiga bo'luvchi **M**, **N, P** nuqtalarning koordinatlarini toping va **M N P** uchburchak yasang.

162

8. >4(1; 2), **B(-**4; -3) nuqtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazing hamda markazi **C(** 1; 1) nuqtada va radiusi **5** boMgan aylana yasang. Chiz- ma bo'yicha to^ri chiziq bilan aylananing kesishish nuqtalarining koordinatalarini aniqlang.

2.2. Tekislikda koordinatalarni almashtirish. Bitta tekislikning o‘zida to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini turlicha tanlab olish mumkin.

a) Koordinatalar boshini ko'chiri koordinatalar siste­masini olamiz va koordinata tekisligidagi 0'(a; b) nuqtani tan­lab olamiz. Bu nuqta orqali koordinatalar o‘qlariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz va ularda xOy sistemaning abssissalar va ordinatalar o‘qlari yo‘nalishlari bilan bir xil yo‘nalishlarni tanlab olamiz (IV.12-rasm). xOy sistemadagi kabi birlik kesmani tanlab olsak, x'O'y' koordinata sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema xOy sistemadagi koordinatalar boshini nuqtaga ko ‘chirish bilan hosil qilingan deyiladi.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| V J  m2 | i y) | \ | , M(x; .v) |
|  | Q'(a; b) |
| o2 |  |  |  |
| 0 |  | M{ x | |

IV. 12-rasm.

Koordinata tekisligida birorta M nuqtani olamiz. xOy siste- mada bu nuqtaning koordinatalari x' va ga, yangi sistemada esa x' va y'ga teng bo‘lsin. x' va larni x va lar orqali ifo- dalovchi formulalarni keltirib chiqaramiz. Buning uchun O' va M nuqtalardan abssissalar va ordinatalar o‘qlariga perpendikular tushiramiz.

Abssissalar o‘qida abssissalari va x bo‘lgan 0, va Mx nuqtalarni hosil qilamiz. Koordinatalar boshini ko'chirish formu- lasiga ko‘ra koordinata to‘g‘ri chizig‘ida (1,2-banddagi (1)

163

formula) x' — x - a ni hosil qilamiz. y' = y — b formula ham xud- di shunday isbotlanadi. Shunday qilib, x' va y' ni x va y lar orqali ifodalovchi formulalar quyidagi ko ‘rinishga ega:

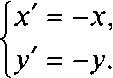
\x = x- a,

\y' = *y-b,* \*1 \*

bunda, a va b yangi koordinata boshining koordinatalari.

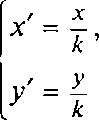
b) 0‘qlar yo'nalishlarini o‘zgartirish. Koordinatalar boshi qo‘zg‘almas bo‘lib, o‘qlar yo‘nalishlari qarama-qarshisiga o‘zgarsin. Ma’lumki, bunda ikkala koordinata o‘z ishoralarini o‘zgartiradi, ya’ni

(2)



d) Masshtabni o‘zgartirish. Endi koordinatalar boshini va o‘qlar yo‘nalishini o‘zgartirmasdan, birlik kesma uzunligini k marta o‘zgartirilsa, koordinatalarning qanday o‘zgarishini qaraymiz. To‘g‘ri chiziqda koordinata sistemasidagi kabi bunda ham

(3)



ni keltirib chiqaramiz.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Tekislikda koordinatalarni almashtirishning qanday turlari bilan tanishdingiz?

Misollar keltiring.

2. Koordinatalar boshi 0'(4; 3) nuqtaga ko‘chirilgan. **A** (5; 2), **B(-**3; -1), C(2; -6) nuqtalarning yangi koordinatalari qanday?

3. Koordinatalar boshi ko‘chirilgandan keyin **A(-4;** 6) nuqtaning yangi koordinatalari 3 va -5 ga teng. **B(**3; 1), C( — 1; 8), **D(—**12; -3) nuqtalarning yangi koordinatalarini toping.

4. Koordinata boshi **0'(-**5; -1) ga ko'chirilgandan keyin **A(x; y)** nuqtaning yangi koordinatalari 2 va 4 ga teng bo‘lsa, **A(x', y)** nuqtaning koordinatalarini toping.

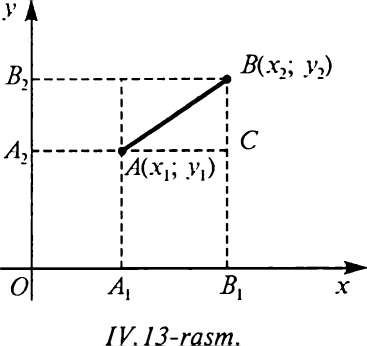
164

5. Agar koordinatalar boshi qo‘zg‘almas bo‘lib, abssissalar o‘qining yo‘nalishi teskariga o‘zgargan bodsa, koordinatalarni almashtirish formulalarini yozing.

6. Agar koordinatalar boshi o‘zgarmas boMib, ordinatalar o‘qining yo^nalishi teskarisiga almashgan bo‘lsa, koordinatalarni almashtirish formulasi qanday boMadi?

7. Agar koordinatalar boshi va o‘qlar yo^nalishi olzgarmasdan, birlik kesma uzunligi 3 marta ortsa, >1(0; 3), **B( —** 6; —12), C( — 3; 15) nuqtalarning yangi koordinatalari qanday boMadi? Agar birlik kesma uzunligi 5 marta kamaysa, bu nuqtalarning koordinatalari qanday boMadi?

2.3. Tekislikda analitik geomet- riyaning ba’zi masalalari. Tekislik­da geometrik masalalarni qanday yechishni ko'rsatamiz.



1-masala. Koordinata tekisli- gida A(xx,y,) va B(x2; y2) nuqtalar orasidagi masofani hisoblaymiz (IV. 13-rasm).

A va Bnuqtalardan koordinata o'qlariga perpendikularlar tushira- miz. AB kesma ACB to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi.

To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi Pifagor teo- remasiga ko‘ra: \ AB\2 = \ AC\2 + \ a 5Ckesmalar uzun-

liklarini topish kerak. Ammo AC va kesmalar uzunliklari

bir xil, AXBX kesmaning uzunligi Ixj-xrJ ga teng (>, nuqta A nuqta kabi Jt, abssissaga, 5, nuqta ega B nuqta kabi x2 abssissaga

ega). Shuning uchun | BC\2 = | 5,|2 =

Shuningdek, | AC\2 = q\ y2-y,|2 aniqlanadi.

Demak, *\AC\2 + \BC\2 + \y2-yx\2.*

Shunday qilib,

\AB\= j(x2 -x,)2 + (y2 - y, )2.

*\X2~ Xl*

2 **\_**

= *q(x2-xx)2.*

(1)

2-masala. A(3; 6) va 5(6; 2) nuqtalar orasidagi masofani topamiz. (I) formula bo'yicha:

| AB |= V(6-3)2 +(2-6)2 = V32 + 42 = V25 = 5.

165

3-masala. Ordinata o‘qida A (6; 3) nuqtadan 10 ga teng masofada yotuvchi nuqtani topamiz.

Ordinata o‘qida har qanday nuqtaning abssissasi nolga teng. Shuning uchun izlanayotgan nuqtani B(0\ y) ko'rinishda yozish mumkin, bu nuqtadan A(6; 3) nuqtagacha bo'lgan masofa

V(0-6)2+(y-3)2 ga teng. Masala shartiga ko‘ra

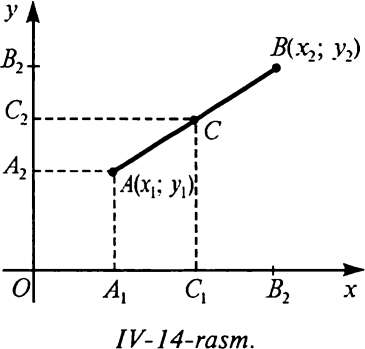
+ (y - 3)2 = 10.

Bu tenglamadan: 36 + (y-3)2 = 100. Shuning uchun (y — - 3)2= 64, demak, y— 3 = ±8, bundan y, = 11, — -5. De-

mak, ordinatalar o‘qida A nuqtadan 10 masofada yotuvchi ikkita nuqta bor ekan: 2?,(0; 11) va B2 (0; -5).

4-m a s a 1 a. Uchlari A (x,; y,) va B (x2; y2) nuqtalarda bo‘lgan kesma o'rtasi C ning koordinatalarini topa­miz (IV. 14-rasm).

abssissasi



Buning uchun va C nuqta- lardan abssissalar o‘qiga perpen- dikular tushiramiz. A]Bl kesmaning o'rtasi C nuqtadir. Demak, uning

ga teng. Xuddi shun-

day, C2 nuqtaning ordinatasi -1—1 §a tengligi aniqlanadi. "

Shuning uchun C nuqta quyidagi koordinatalarga ega:

X, +x2 X .„ = '

(2)

on 2

5-m a s a 1 a. Uchlari A(-6; 5) va (3; -7) nuqtalarda bo‘lgan kesma o‘rtasining koordinatalarini topamiz. (2) formula bo‘yicha:

, c 5-7 ,

x = dll

o'rt 2

= -1,5, y0-n 2“ = \_1

166

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Koordinata tekisligida bir uchi koordinata boshida bo'lgan kesma uzunligini topish formulasini keltirib chiqaring.

2. Koordinata o'qlarida yotgan nuqtalar orasidagi masofani topish formulalari qanday bo'ladi?

3. Uchlari: a) **M(-**3; 2), **N(**5; -2); b) A/(2; 7), **N(**6; 4) nuqtalarda bo'lgan **MN** kesma uzunligini toping:

4. Uchlari /1(0; 5), 5(-5; 3), C(4; -5) nuqtalarda bo'lgan **ABC** uch- burchak berilgan. **AB** va **AC** tomonlar o'rtalarini tutashtiruvchi kesma uzunligini toping.

5. A/nuqtaning abssissasi 7 ga, A/nuqtadan /V(- 1; 5) nuqtagacha masofa 10 ga teng. **M** nuqtaning ordinatasini toping.

6. **ABCD** trapetsiya berilgan: **A(** 1; 3), 5(-2; 8), C(0; 7), **D** (5; 1). Uning o'rta chizig'i uzunligini toping.

7. **A(-** 1; 2) va **B** (3; 5) nuqtalar berilgan. **ABCD** kvadratning yuzini va perimetrini toping.

8. Uchlari **A(** 1; 1), 5(2; 3), C(5; -1) bo'lgan uchburchak to'g'ri bur- chakli ekanligini isbotlang.

9. **ABCD** kvadrat uchta uchining koordinatalari ma’lum: **A(** 2; 6), 5(5; 6), C(5; 3). Kvadrat markazining koordinatalarini, uning to'rtinchi uchini va yuzini toping.

3-§. SONLI VA HARFIY IFODALAR

3.1. Sonli ifodalar. Masala, A va B shaharlar orasidagi ma­sofa 240 km. A shahardan 20 km/coat tezlikda velosipedchi yo‘lga chiqdi, 3 soatdan keyin B shahardan unga qarshi 70 km/coat tezlikda avtomobil yo‘lga chiqdi. Avtomobil yo‘lga chiqqanidan necha soat keyin uchrashuv sodir bo‘ladi?

Awal velosipedchi 3 soatgacha qancha yo‘l bosganini topamiz. Buning uchun 20 ni 3 ga ko‘paytirish kerak. Buni amalni bajar- masdan, 20 • 3 deb yozamiz. Shundan keyin velosipedchi 3 soatdan keyin B shahardan qancha masofada bo‘lishini topamiz; 240 — -20-3. Keyin velosipedchi va avtomobilning yaqinlashishi tez- ligini aniqlaymiz; 20 + 70. Va, nihoyat, avtomobil yo‘lga chiqqan- dan necha soat keyin uchrashuv sodir bo‘lishini topamiz; (240 — - 20- 3); (20 + 70).

Masalani yechish natijasida biz sonli ifoda (240 — 20 • 3) ; ; (20 + 70)ni hosil qildik. Bu ifodada amallar belgilangan bo‘lib, javobini topish uchun masala shartida berilgan sonlar ustida bu amallarni bajarish kerak, ya’ni bu ifoda javobni topish uchun

167

hisoblash dasturidir. Bu dasturni bajarib, sonli ifodaning qiymatini topamiz:

(240 - 20 • 3) : (20 + 70) = (240 - 60) : 90 = 180 : 90 = 2.

Demak, uchrashuv avtomobil yo‘lga chiqqandan 2 soatdan keyin sodir bo‘lar ekan.

Sonli ifoda tushunchasi umumiy ko‘rinishda bunday ta’rifla- nadi:

a) har bir son sonli ifodadir;

b) agar (A) va (B) lar sonli ifodalar bo‘Isa, u holda (A) + (B), (A) - (B), (A) • (B), (A) : (B) lar ham sonli ifodalardir.

Ko‘rsatilgan amallarni bajarib, sonli ifodaning qiymati topi- ladi. Agar bu ta’rifga amal qilinsa, juda ko‘p qavslar yozishga to‘g‘ri kelar edi. Masalan, (2) + (3) yoki (7)-(9). Yozuvni qisqartirish uchun ayrim sonlarni qavs ichiga olmaslikka keli- shilgan. Bundan tashqari, agar bir necha ifoda qo'shiladigan yoki ayriladigan boisa, qavslarni yozmaslikka kelishilgan, bu amallar tartib bo‘yicha chapdan o'ngga qarab bajariladi. Xuddi shuning- dek, bir necha son ko‘paytirilsa yoki boiinsa, qavslar yozilmay- di, bu amallar tartib bo‘yicha chapdan o‘ngga qarab bajariladi. Masalan, bunday yoziladi:

25 - 4 + 61 - 14 - 42 yoki 60 : 3,5 • 15 : 25.

Nihoyat, avval ikkinchi bosqich amallarni (ko‘paytirish va boiishni), keyin birinchi bosqich amallari (qo'shish va ayirish- ni) bajariladi. Shuning uchun (12 • 4 : 3) + (5 • 8 : 2 • 7) ifoda bunday yoziladi: 12\*4:3 + 5\*8:2\*7.

Shunga muvofiq ravishda sonli ifodaning qiymatini hisoblash amallar tartibi bo'yicha bajariladi:

1) Agar sonli ifodada qavslar bo ‘Imasa, uni bir-biridan qo ‘shish va ayirish belgilari bilan ajraladigan qismlarga bo‘lib, har bir qismning qiymati topiladi, bunda ko‘paytirish va bo ‘lish chapdan o ‘ngga qarab tartib bilan bajariladi; shundan keyin har bir qismni uning qiymati bilan almashtiriladi va qo‘shish va ayirish amalla- rini chapdan o‘ngga qarab tartib bilan bajarib, ifodaning qiymati topiladi.

168

2) Agar sonli ifodada qavslar bo‘lsa, ifodaning chap va o‘ng qavslar ichidagi va boshqa qavslar qatnashmagan qismlari olinadi, 1- qoida bo'yicha ularning qiymatlari topiladi va qavslarni tash- lab, qismlar topilgan qiymatlar bilan almashtiriladi. Agar shular- dan keyin qavssiz ifoda hosil bo‘lsa, bu ifoda 1-qoida bo‘yicha hisoblanadi. Aks holda yana 2-qoidani qo‘//ash kerak bo ‘ladi.

Masalan, ((36 : 2 - 14) • (42 • 2 - 14) + 20) : 2 ifodaning qiymatini topish kerak bo'lsin.

Avval

36 : 2 - 14 = 18 - 14 = 4, 42 • 2 - 14 = 84 - 14 = 70

ni topamiz. 36 : 2 - 14 va 42 • 2 - 14 ni ularning qiymatlari bi­lan almashtirilib, hosil qilamiz:

(4 • 70 + 20) : 2 = (280 + 20) : 2 = 300 : 2 = 150.

Demak, berilgan ifodaning qiymati 150 ga teng ekan.

Shuni aytish kerakki, har qanday sonli ifoda ham qiymatga ega bo‘lavermaydi. Masalan, 8 : (4 - 4) va (6 - 6) : (3 - 3) ifoda sonli qiymatga ega emas, chunki nolga bo‘lish mumkin emas.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi ifodalarning qaysilari sonli ifoda bo’ladi: a) 3; b) -17;

d) 41+19; e) (11 + 9): (9 - 4); 0 31+5=4-9; g) 48 : 3 : 4 + 6; h) 14 + 7 > 2 : 2 + 5; i) 3x + 5 = 0,2\* - 4; j) 41 + **2a -** 0,36; k) 22 n/3 ?

2. Ko‘rsatilgan hamma amallarni bajaring va ifodalarning qiymatini toping:

a) 0,039: (^ (2,31: 0,077);

5,2 +17,25 — (3,36:0,3) . „

D') (2,7:0,18) + (0,65:0,13) ’ ’

0,2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | f 2.5 + 3-1 | ,3  4- + 2- |
| 1 | 3 | 5 3 |
| 7 |  | 4,6-2^  3 , |

, (2,1-1,965): (0,12-0,45) 1:0,25 .

0,0325:0,13 0,16-6,25 ’

0,25-0,2

-0,125

3. Agar barcha oraliq amallarning joiz natijalari sifatida faqat nomanfiy butun sonlar qaralsa, ifodaning qiymati mavjud bo’ladimi:

169

a) ((4 - 7) + 3 • 5)) • (8 - 6); b) ((5 + 7) : 24) • 16 - 5; d) (3-7 - 6-8) + 15 - 10?

Agar oraliq natijalar faqat butun sonlar bo'lsa, bu ifodalar qiymatga ega bo'ladimi?

3.2. Sonli tengsizliklar. Tartib munosabatiga asosiy misol qilib haqiqiy sonlar to'plamidagi «kichik» munosabati olinadi, bu munosabat < kabi belgilanadi. Bu munosabat qat’iy chiziqli tar­tib munosabati ekanligini, ya’ni bu munosabat nosimmetrik va tranzitiv ekanligini, shu bilan birga har qanday ikkita turli haqiqiy x va y sonlar uchun x < y yoki y < x munosabatlardan faqat va faqat bittasi bajarilishini isbotlash mumkin. So‘ngra y - x > 0 bo‘lgan holdagina x <y bo‘lishini isbotlash mumkin. Bunda a > 0 va b > 0 lardan a + b>0vaab>0 tengsizliklar kelib chiqadi.

Sonli tengsizliklarning qaralgan xossalaridan uning qolgan hamma xossalarini chiqarish mumkin.

1°. x<y tengsizlikning ikkala qismiga bir xil sonni qo‘shish bilan x <y munosabat o‘zgarmaydi (bu xossa qo'shishga nisbatan tartib munosabatining monotonligidir). Boshqacha aytganda, agar x < y bo'lsa, har qanday a son uchun x + a < y + a tengsizlik bajariladi.

Haqiqatan, x < y dan y — x > 0 kelib chiqadi. Ammo (y + a) — (x + a) - y - x > 0, shuning uchun

x + a < y + a

x - a - x + *(-a), y - a - y + (-a)* bo'lgani uchun x < y dan x — a < y - a kelib chiqadi.

2°. Agar x < y va a < b bo'lsa, x + a < y + a bo'ladi.

Haqiqatan, u holda y - x > 0 va b - a > 0, shuning uchun (y + b) - (x + a) = (y - x) + (b — a) > 0.

3°. x < y tengsizlikning ikkala qismini bir xil musbat songa ko‘paytirish bilan x < y munosabat o'zgarmaydi, ya’ni x < y va a > o dan ax < a tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan, x < y dan e - x > 0 kelib chiqadi. Ikkita musbat sonning ko'paytmasi musbat bo'lgani uchun a(y - x) > 0 bo'ladi. A(y - x) - ay — ax bo'lgani uchun ax < ay tengsizlik kelib chiqadi.

4°. Agar xl y at b — musbat sonlar bo'lsa, x < y va a < b tengsizliklardan ax < by tengsizlik kelib chiqadi.

170

Haqiqatan, x < y va a ning musbatligidan ax < ay, a < bva y ning musbatligidan ay < by kelib chiqadi. U holda tengsizlik mu- nosabati tranzitiv bo‘lgani uchun ax < ay va ax < by kelib chiqadi.

y > x tengsizlik x < y tengsizlikka ekvivalent. Ikkala tengsiz­lik bir vaqtning o‘zida rost yoki yolg‘on. Tengsizlikning < va > belgilari (ishoralari) o‘zaro teskaridir.

5°. Tengsizlikdagi sonning ishorasi o ‘zgarishi bilan bu tengsizlik teskari ma 'nodagi tengsizlikka almashadi: agar x<y bo‘Isa, -x > —y bo‘ladi.

Haqiqatan, x < y tengsizlik y - x > 0 ekani anglatadi. Ammo y - x - (-x) - {y), shuning uchun (—x) - (-y) > 0, ya’ni —y < -x bo‘ladi.

6°. Tengsizlikning ikkala qismini manfiy songa ko‘paytirish bilan tengsizlik ishorasi (belgisi) teskari ma ’nodagi ishoraga (bel- giga) almashinadi: agar x<y va a manfiy bo‘lsa, ax > ay bo ‘ladi.

Haqiqatan, a manfiy songa ko‘paytirishni \a \ musbat songa ko‘paytirish bilan (bunda tengsizlik belgisi saqlanadi) va (-1) ga ko‘paytirish bilan almashtirish mumkin, bunda bu belgi teskari ma’nodagi belgiga almashadi.

7°. Agar 0 < x < y yoki x < y < 0 bo‘lsa, - < bo‘ladi.

Isbotlash uchun --- = — ekanligini bihsh yetarli. x va y

x y xy

sonlar shartga ko‘ra bir xil ishoraga ega bo‘lgani uchun xy — musbat son, shuning uchun va y - x ning ishoralari bir

x y

xil. y - x musbat bo‘lgani uchun \ ~ -J- musbat, ya’ni -J- < 7 .

x < y va x > y munosabatlar bilan bir qatorda x < y va x > y munosabatlar qaraladi. x < y tengsizlik x < y va x = y tengsiz- liklarning dizyunksiyasidir va shuning uchun ulardan bittasi rost bo‘lsa, x<y rost bo‘ladi. Masalan, 4 < 10 rost, chunki 4 < 10 rostdir. Xuddi shuningdek, 4 < 4 tengsizlik rost, chunki 4 = 4 rostdir. 4 < 3 tengsizlik yolg‘ondir, chunki 4 <3 va 4 = 3 laming ikkalasi yolg‘on.

x < y < z qo‘sh tengsizlik x < y va y < z tengsizliklarning konyunksiyasidir, tengsizliklarning ikkalasi rost bo‘lsa, qo‘sh teng­sizlik ham rost bo‘ladi. Masalan, 4<x< 10 qo‘sh tengsizlik rostdir, chunki 4 < 8 va 8 < 10 tengsizliklarning ikkalasi ham rost; 4 < 10 < 8 qo‘sh tengsizlik esa yolg‘on, chunki 4 < 10 tengsizlik rost bo‘lsa ham tengsizlik yolg‘ondir.

171

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi yozuvlarning qaysilari sonli tcngsizlik bo'ladi:

a) 41 < 14; ’ b) **7a + 4 >** 24;

d) 84-(43 -8); e) 64 - 4.9 > 44 - 36 : 18?

2. Sonli tengsizliklarning qanday xossalari bilan tanishdingiz?

3. Quyidagi tengsizliklarning qaysilari rost:

a) 5 < 9; b) -4 < 5;

e) 0 <0; 0 s/7 > VB;

d) 2 > 0; g) V2 >^/3?

4. Quyidagi qo'sh tengsizliklarning qaysilari rost:

a) -6 < -6 < 0; b)8<3<fl;

d) -4 < 0 < 4; e) 7 < 0 < 7?

3.3. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi. Ikkita sonli ifoda A va B berilgan bo‘lsin. Bu ifodalardan A - i? tenglik va A > B, A < By a shunga o‘xshash tengsizliklarni tuzishimiz mumkin. Bu tenglik va tengsizliklar jumlalar bo‘lib, ular rost yoki yolg‘on boiishi mumkin. A va B ifodalar bir xil sonli qiymatga ega bo‘lsa, A = B rost hisoblanadi. Masalan, 2 + 7 = 3 • 3 tenglik rost, chunki bu tenglikning chap va o‘ng qismlari 9 ga teng. 7 + 5 = 4 • 5 tenglik esa yolg‘on, chunki uning chap qismi 12 ga, o‘ng qismi 20 ga teng. 6 : (2 - 2) = 5 tenglik ham yolg‘on, chunki 6 : (2 - 2) ifoda sonli qiymatga ega emas.

Shuni eslatib o‘tamizki, agar faqat natural sonlar to‘plamini qarasak, 4-8 + 10 — 2-3 tenglik yolg‘on, chunki Arto‘plamda

4-8 ifodaning qiymati aniq emas. Biroq natural sonlar to‘plamini kengaytirib va manfiy sonlarni kiritgandan keyin bu tenglik rost bo‘ladi, chunki uning ikkalasi qiymati 6 ga teng.

Sonli ifodalarning tenglik munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranizitivlik xossalariga esa, ya’ni bu munosabat ekvivalent munosabatdir. Shuning uchun barcha sonli ifodalar to‘plami ekvivalentlik guruhlariga bo‘linadi, bu guruhlarga bir xil qiymatga ega bo‘lgan ifodalar kiradi. Masalan, bitta ekvivalentlik guruhiga 5 + 1, 9 - 3, 2 • 3, 12 : 2 va boshqa ifodalar (ulardan har birining qiymati 6 ga teng) kiradi.

Yuqorida berilgan ta’rifdan, agar A = B va C-D tengliklar rost bo‘lsa (bunda, A, B, C, D — sonli ifodalar), u holda tegishli amallarni bajarish natijasida hosil bo‘lgan

172

(A) + (O = (B) + *(D):* (*A)-(Q = (B)-(D*);

*(A) • (C) = (B) • (D); (A)* : (C) = *(B) : (D)*

tengliklar ham rost bo‘ladi.

A < B tengsizlikni (bunda, A va B — sonli ifodalar) biz rost deymiz, agar A va B ifodalar sonli qiymatlarga ega bo‘lib, shu bilan birga A ifodaning sonli qiymati 5 ifodaning sonli qiymatidan kichik bo‘lsa. Masalan, (18-3):5<3+4 tengsizlik rost, chunki (18 - 3): 5 ning qiymati 3 ga, 3 + 4 ning qiymati 7 ga teng, 3 < 7.

A — B, C< D ko‘rinishdagi yozuvlar (bunda. A, B, C, D — sonli ifodalar) mulohaza (jumla) bo‘lgani uchun biz ular ustida konyunksiya, dizyunksiya, implikatsiya va boshqa mantiqiy amal- larni bajarishimiz mumkin. Masalan, A < B tengsizlik A < B teng­sizlik va A = B tenglikning dizyunksiyasidir:

*A< B= (A < B)* U *(A = B).*

A < B tengsizlik A < B, A-B mulohazalardan aqalli bittasi rost bo‘lsa ham rost bo‘ladi. Masalan, (2 • 4 + 15)•2 < 35 + 19 tengsizlik rost, chunki (2 • 4 + 15) • 2 ifodaning qiymati 46 ga teng, 35 + 19 ning qiymati esa 54 ga teng, 46 < 54 tengsizlik rost.

A < B < C qo‘sh tengsizlik A < B va B < C tengsizliklar- ning konyunksiyasidir. Bu qo‘sh tengsizlik A < B va B < C ten- gsizliklarning ikkalasi ham rost bo‘lsa, rost bo'ladi. Masalan, 16 + 4 < 125 : 5 < 3 • 10 tengsizlik rost. Haqiqatan, 16 + 4 ning qiymati 20 ga, 125 : 5 ning qiymati 25 ga, 3 • 10 ning qiymati 30 ga teng. 20 < 25 va 25 < 30 bo‘lgani uchun qo‘sh tengsizlik rost bo‘ladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Tengliklarning rostligini tekshiring:

b) ->/64 = -4;

. 1917 1 .

852 2 4 ’

**d) IP64 = -4;**

0 **I 3 |=3;**

**h) | 3-|-5 || = | 3-5 |; j) 8833 =** 882 **+ 332;**

173

**e) | 7 - 9 | = | 9 - 7 |; g) (4 + V7)(4-V7) = 32; i) 3**3 **+ 4**3 **+ 5**3 **=** 6**3;**

**k) 4626-9396 = 6939-6264.**

2. Tengsizliklarning rostligini tekshiring:

a) 675 + 872 > (63 + 73 + 53) + (83 + 73 + 23);

b) 1973 > (1 + 9 + 7 + 2) (l2 + 92 + 72 + 22) - 197-2 - (197 - 2);

d) 1971 > 19 • 72 + 197 ■ 2 + (197 - 2) + (1 + 9 + 7 + 2).

3. Quyidagi jumlalarni tenglik ko'rinishida yozing:

a) 7 soni 4 dan 3 ta ortiq; d) 3 soni 9 dan 6 ta kam;

b) 7 soni 9 dan 2 ta kam; e) 8 soni 1 dan 7 ta ortiq;

4. Rost sonli tengsizlikning qanday xossalarini bilasiz? Ulami belgilar

yordamida yozing.

3.4. 0‘zgaruvchili ifodalar. Ba’zan masala sharti sonlar bilan emas, balki harflar bilan belgilangan boiadi. Masalan, 3.1-band- dagi masalada shaharlar orasidagi masofa a km bo'lsa, javob bun- day bo‘ladi:

{a - 3 -20): (20 + 70). (1)

Agar masofa a km ga, velosipedchi va avtomobilning tezliklari, mos ravishda, b va c ga teng bo‘lsa, javob bunday bo‘ladi:

*(a-3b):(b* + *c).* (2)

Biz o‘zgaruvchi qatnashgan ifodalar hosil qildik. (1) ifodada a o‘zgaruvchi, (2) ifodada uchta — a, b va c o‘zgaruvchi qatnashgan. Bu harflarga turli qiymatlar berib, turli masalalarni hosil qilamiz. Bu masalalarning har birining javobini topish uchun (1) yoki (2) ifodalardagi harflarga tegishli qiymatlarni qo'shish kerak. Masalan, shaharlar orasidagi masofa 240 km, velosiped- chining tezligi 15km/soat, avtomobilning tezligi 50 km/soat bo‘lsa, (2) ifodada a ni 240 ga, b ni 15 ga, c ni 50 ga almashti- rish kerak. Natijada qiymati 3 bo‘lgan (240 - 3 • 15) : (15 + 50) sonli ifoda hosil bo'ladi. Bu holda avtomobil yo‘lga chiqqandan 3 soat keyin uchrashuv sodir bo'ladi.

O'zgaruvchili ifodalar umumiy tushunchasining ta’rifi sonli ifodalar tushunchasining ta’rifi kabi ifodalanadi, bunda faqat o'zgaruvchi ifodalarda sonlardan tashqari harflar ham qatnashadi. Biz o‘quvchiga bunday ifodalar yozuvining qoidasi tanish deb o'ylaymiz. Masalan, agar x va y o'zgaruvchilar qatnashgan ifodalar berilgan bo'lsa, sonlardan iborat {a\ b) kortejlarning har biriga sonli ifoda mos keladi. Bu sonli ifoda harfiy ifodada x harfini a son bilan, y harfini b son bilan almashtirish orqali hosil bo'ladi. Agar hosil bo‘lgan sonli ifoda qiymatga ega bo‘lsa, bu qiymat x = a, y = b bo'lganda ifodaning qiymati deyiladi. 0‘zgaruvchili

174

ifoda bunday belgilanadi: A(x), B(x; y) va h.k. Agar B(x; y) ifodada x ni 15 bilan, y ni 4 bilan almashtirsak, hosil bo‘lgan sonli ifoda B{ 15; 4) kabi belgilanadi.

0‘zgaruvchili ifodalar predikat boMmaydi, chunki harf o‘rniga sonli qiymat qo’yilsa, mulohaza emas, sonli ifoda hosil bo‘ladi. Bu sonli ifodaning qiymati «rost» yoki «yolg‘on» bo‘lmay, balki birorta son bo’ladi.

Bitta x harfi qatnashgan har bir ifodaga bu ifodaga qo‘yish mumkin bo‘lgan sonlardan, ya’ni bu ifoda aniq qiymatga ega boMadigan sonlardan iborat to‘plam mos keladi. Bu sonlar to‘plami berilgan ifodaning aniqlanish sohasi deyiladi. Masalan, 4 : (x - 3) ifodaning aniqlanish sohasi 3 dan tashqari barcha sonlardan ibo­rat: fx - 5 ifodaning aniqlanish sohasi x-5>0 bo‘ladigan barcha sonlardan, ya’ni [5; oo[ sonli nurga tegishli sonlardan iborat. Ba’zi hollarda x qiymatlarning X sohasi oldindan ba’zi shartlar bilan chegaralangan bo‘ladi. Masalan, x — natural son boMishi mumkin. U holda o‘zgaruvchili ifodaga to‘plamga (masalan, natural sonlar to‘plamiga) tegishli qiymatlarnigina qo‘yish mumkin. Agar ifodada bir nechta harf, masalan, x va y harflari bo‘lsa, bu ifodaning aniqlanish sohasi deyilganda shunday (a; b) sonlar juftlari to‘plami tushuniladiki, x ni a ga, y ni b ga almashtirganda qiymatga ega bo‘lgan sonli ifoda hosil bo‘ladi.

Harfiy ifodalarda o‘zgaruvchilarni nafaqat sonlar bilan, balki boshqa harfiy ifodalar bilan ham almashtirish mumkin. Masalan, agar 3x + 2y ifodada x ni 5a - 2b ga, y ni 6a + 4b ga almashtirilsa, harfiy ifoda hosil bo‘ladi:

3(5a - 2b) + 2(6a + 4b).

a va b ning berilgan qiymatlarida bu ifodaning qiymatlarini hisoblash mumkin, buning uchun awal x va y ning qiymatlari topiladi, keyin bu qiymatlarni berilgan ifodaga qo‘yiladi. Masalan, o=12, b - 10 bo‘lsa, avval x = 5 • 12 - 2 • 10 = 40, y = 6 • 12 + 4 • 10 = 112 topiladi, keyin 3x + 2y = 3•40 + + 2- 112 = 344 topiladi.

0‘zgaruvchili A(x) va B(x) ifodalarga kiruvchi ha flaming joiz qiymatlarida ular bir xil qiymatlar qabul qilsa, bu ifodalar aynan teng deyiladi. Masalan, (x + 3)2 va x2 + 6x + 9 ifodalar aynan x x2 .

teng.^ va — ifodalar aynan teng emas, x = 0 bo‘lsa, ulardan

175

birinchisi 0 qiymat ega boiadi, ikkinchisi esa sonli qiymatga ega boimaydi.

Ammo noldan farqli sonlar sohasida bu ikkala ifoda aynan teng. 0‘zgaruvchili ikki ifodaning aynan tengligi haqidagi tasdiq mulohazadir. Masalan, (x + 3)2 ifoda x2 + 6x + 9 ifodaga aynan tengligi haqidagi tasdiqni bunday yozish mumkin:

(Vx)((x + 3)2 = x2 + 6x + 9).

Odatda, qisqalik uchun Vx kvantor tushirib qoldiriladi va qisqacha bunday yoziladi: (x + 3)2 = x2 + 6x + 9. Ammo bunday yozuv uncha aniq emas — bu tenglikni tenglama deb ham qarash mumkin (4-§ ga q.).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi yozuvlaming qaysilari harfiy ifoda hisoblanadi:

**a)** 2a + b - **4; b)** 7a + b = 4

d) 0,3(x - 2)+42 : 2; e) **7y -** 5 = **4y +** 1;

f) 36:6 + 4-9-5; g) 2**4a2+b2** ?

7

X~ —x

2. va x - 1 ifodalar qaysi sonli to'plamda aynan teng bo'ladi?

3. Tengliklarning rostligini tekshiring:

a)

**, bunda a = 3,** 6 **= 2;**

3 *a2-b22a-b(a+4b)*

(4 *b-a)(b+a)*

j : (^i) = -i ’ bUnda ^ = 1 ^ = -2­

4. Ayniyatlami isbotlang:

**a) (**a2 +b2)(x2 + y2) = (ax + by)2 +(bx + ay)2\

**b)**

— +

*(y-x)(y-z) (z-x)(z-y)*

0.

5. Quyidagi tengliklar **x** ning qanday qiymatlarida ayniyat bo'ladi:

l l

b) =  
x-l a:+1

**a) (-x+**2**)(r**3**)=\*+**2**;** ' x-3

176

4-§. TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

4.1. Bir 0‘zgaruvchili tenglamalar. Masala qaraymiz: «Qa- fasda tustovuq va quyonlar bor. Ularning boshlari 19 ta, oyoqlari 62 ta. Qafasda nechta tustovuq va nechta quyon bor?» Bu masalani arifmetik yechish mumkin. Ammo eng sodda yechish usuli teng- lama tuzib yechishdir. Tustovuqlar sonini x harfi bilan belgilay- miz. U holda tustovuqlar oyoqlari 2x ta. Quyonlar soni 19 - x ta, ularda oyoqlar soni 4(19 - x) ta. Masala sharti bo’yicha 2x + 4(19 - x) = 62, ya’ni 76 - 2x = 62. Tenglama bajarilishi kerak. Bu tenglamani yechamiz: 2x = 76 - 62 = 14, shuning uchun x-7. Demak, qafasda 7 ta tustovuq va 12 ta quyon bo‘lgan.

Agar masala shartida quyon va tustovuqlaming oyoqlari soni 61 ta bo‘lganda edi 2x + 4(19 - x) = 61 tenglamani hosil qilgan

bo‘lar edik, bundan x = 7 Bu masala shartiga zid, chunki x —

natural son. Biz masalani yechib, unda oyoqlar soni 80 ta ekan- ligini topish bilan ham ziddiyatga kelar edik. 2x + 4(19 — x) = 80 tenglamaning ildizi x = - 2, lekin tustovuqlar soni manfiy bo‘la olmaydi. Umuman, x soni 18 dan katta bo‘lmagan natural son- lardan iborat bo‘lishi kerak (qafasda hech bo‘lmaganda bitta quyon bor deb hisoblansa), ya’ni x soni x = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18} to‘plamga tegishli bo‘lishi kerak.

Tenglamalarni yechishda ba’zi shakl almashtirishlarni kirita- miz. Masalan, 76 - 2x = 62 tenglamani yechishda tenglamaning ikkala qismiga 2x ni qo‘shib, ikkala qismidan 62 ni ayirdik. Natijada 2x = 14 tenglama hosil bo‘ldi. Uni yechish uchun teng­lamaning ikkala qismini 2 ga bo‘ldik. Bu o'zgarishlarning har biridan keyin yangi tenglama hosil bo'ldi, ammo hosil bo‘lgan tenglamalar 76 - 2x = 62 tenglama ham, 2x = 14 tenglama ham, x-7 tenglama ham (bu ham tenglama) bitta yechimga, aynan 7 soniga ega bo‘ldi.

Endi nimaga asoslanib tenglamalarni bunday o‘zgartirga- nimizni va nima uchun bunday o'zgarishlar kiritganimizda yechi- layotgan tenglamaning ildizlari o’zgarmayotganligini aniqlaymiz. Ba’zan bunday tushuntiriladi: tenglamaning yechimlaridan birix bo’lsin. U holda x ning bu qiymatida tenglama to‘g‘ri sonli tenglikka aylanadi. Agar sonli tenglikning ikkala qismiga bir xil

177

son qo'shilsa yoki ikkala qismdan bir xil son ayirilsa, sonli tenglik o'zgarmasligi uchun yuqoridagi o‘zgarishlarni kiritib, oxirida x soni nimaga tengligi topiladi. Bunday yondoshishda x ni son deb qabul qilinadi. Biroq yechimga ega bo‘lmagan tenglamalar mavjud, masalan, 2x = 2x + 6. Bundan yuqoridagi o'zgarishlarni bajarib 0 = 6 yolg'on tenglikka kelamiz. Bu esa tenglamaning yechimini «x son tenglamaning yechimi bo‘lsin» degan ibora bilan boshlash mumkin emasligini bildiradi.

Undan tashqari, tenglamani bunday usulda yechish ortiqcha ildizlarga olib keldi, bu ildizlar o‘zgartirishlar kiritilganda hosil bo‘lgan tenglamalarni qanoatlantiradi, ammo dastlab berilgan tenglamani qanoatlantirmaydi. Masalan, Vx + 9 =—5 tenglamani yechganda uning ikkala qismini kvadratga oshiramiz (agar ikkita son teng bo‘lsa, ularning kvadratlari ham teng bo‘ladi. Natijada x + 9 = 25 tenglamani hosil qilamiz, bundan x = 16. Ammo 16 soni x + 9 = 25 tenglamanigina qanoatlantiradi. Bu tenglamada x o'rniga 6 ni qo'ysak, V25=-5 yolg'on tenglikni hosil qilamiz (irratsional tenglamalarni yechishda hamma ildizlar arifmetik qiymat ma’nosida tushuniladi, ya’ni nomanfiy son deb olinadi). Shunday qilib, tenglamalarni ko'rsatilgan usulda yechishda har bir topilgan ildizni tenglamaga qo'yib tekshirish kerak, buni har doim ham bajarib bo'lmaydi.

Shuning uchun tenglama va uning ildizlariga aniqroq ta’rif beramiz: x o'zgaruvchili /,(x) va/2(x) ikki ifoda berilgan bo‘lsin, bunda x o'zgaruvchi birorta to'plamning qiymatlarini birin-ketin qabul qiladi. Bir o‘rinli/^(x) =/2(x), xE.X predikatni tenglama deymiz. Tenglamani yechish x o'zgaruvchining qiymatlarini topish, ya’ni berilgan predikatning rostlik to‘plamini topish demakdir, bu qiymatlarni tenglamaga qo‘yganda tenglik hosil bo‘ladi.

Kelgusida /,(x) = /2(x), xE.X predikatning rostlik to'plamini tenglamalar yechimining to‘plami, bu to'plamga kiruvchi sonlarni tenglamalarning ildizlari deymiz.

Masalan, (x — 1 — (x — 3) = 0 tenglama ikkita ildizga ega: 1 va 3, demak, bu tenglamaning yechimlari to'plami T={ 1; 3} ko'rinishga ega. Cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lgan tenglamalar ham mavjud. Masalan, x = | X\ k tenglamani har qanday nomanfiy son qanoatlantiradi. Bunda yechimlar to'plami barcha nomanfiy sonlardan iborat.

178

Shunday bo'lishi ham mumkinki, /,(x) va f2{x) ifoda x to‘plamdan olingan birorta a da qiymatga ega emas. U holda ^(jc) = f2{x) tenglik yolg‘on hisoblanadi va shuning uchun a son ^(jc) = f2{x) tenglamaning ildizi bo‘la olmaydi. Masalan, 4 ham,

6 ham x + --1— = 7 + —1 — tenglamaning ildizi bo‘la olmaydi, chunki

.v-4 x-6

x - 4 da kasr, x = 6 da ^ kasr ma’noga ega emas. Bun-

dan /,(;c) = f2(x) tenglamani yechishdan oldin/|(x) vaf2(x) ifodalar aniq qiymatga ega bo‘ladigan A to‘plamni topish foydadan holi emasligi ko‘rinib turibdi. Bu to‘plam x o‘zgaruvchining joiz qiymatlari sohasi yoki tenglamaning aniqlanish sohasi deyiladi.

x + = 7 + —^ tenglamaning aniqlanish sohasi 4 va 6 sonlar-

dan tashqari barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat. Bu to‘plamni quyidagicha berish mumkin:

A = ] -oo; 4[ U ]4; 6] U ]6; + °o .

Nazariy xulosalarning soddaligi uchun kelgusida /,(\*) va f2(x) ifodalar butun X to‘plamda aniqlangan deb hisoblaymiz.

/,(x) - f2(x) predikatning X aniqlanish sohasi chegaralangan bo‘lgan holda (masalan, quyon va tustovuqlar haqidagi masala) tenglamaning ildizlarini X to‘plamdagi sonlarni tenglamaga navbatma-navbat qo‘shish bilan topish mumkin. Lekin .Yto‘plam cheksiz bo‘lganda bu usuldan foydalanib bo‘lmaydi, shuning uchun tenglamani boshqacha yo‘l bilan yechish kerak. Bunda tenglamalarning tengkuchlilik tushunchasidan foydalaniladi.

1- ta’rif. fx(x) - f2(x) va Fx(x) - F2(x) ikki tenglamaning yechimlari to ‘plami teng bo ‘Isa, teng kuchli deyiladi, ular, ya’ni birinchi tenglamaning har bir yechimi ikkinchi tenglamaning yechimi bo ‘Isa va aksincha, ikkinchi tenglamaning har qanday yechimi birinchi tenglamani qanoatlantirsa, bu tenglamalar teng kuchlidir.

Bunda biz ikkala tenglama bitta X aniqlanish sohasiga ega deymiz. Boshqacha aytganda, agar *fx{x)* - f2{x) va *Fx{x)* - F2{x) predikatlar ekvivalent bo ‘Isa, tenglamalar teng kuchli bo ‘ladi.

2- ta’rif. Agar *fx{x) -f2(x)* tenglamaning yechimlar to‘plami *Fx(x)* - *F2(x)* tenglamaning yechimlar to'plamining qism to‘plami bo‘Isa, *F{(x)* - *F2(x)* tenglama *fx(x) - f2(x)* tenglamaning natijasi deyiladi.

179

Boshqacha aytganda, agar /,(x) = f2(x) tenglamaning har bir ildizi F{(x) - F2(x) tenglamani qanoatlantirsa, /j(x) - F2(x) teng- lama /j(x) - f2(x) tenglamaning natijasidir.

Masalan, (x + l)2 = 16 tenglama x + 1 = 4 tenglamaning na­tijasidir. Haqiqatan, x + 1 = 4 tenglama bitta x - 3 ildizga ega. Bu ildizni (x + l)2 = 16tenglamaga qo‘yib, (x + l)2 = 16 rost teng- likni hosil qilamiz. Bu tenglik 3 soni (x + 1)2= 16 tenglamani ham qanoatlantirishini ko‘rsatadi.

Agar ikki tenglamaning har biri ikkinchisining natijasi bo‘lsa, bu ikki tenglama teng kuchli deyiladi.

Ba’zan tenglama ikki yoki undan ortiq tenglamalar dizyun- ksiyasiga teng kuchli bo‘ladi. Masalan, (x - l)(x- 3) = 0 tengla­mani va ikki tenglama dizyunksiyasi (2x - 2 = 0) U (7x - 21) = 0 ni olaylik. (x - l)(x- 3) = 0 tenglamaning yechimlar to‘plami {1; 3}. Agar ikki son ko‘paytmasida ko‘paytiruvchilardan aqalli bittasi nolga teng bo‘lsa, ko‘paytma nolga teng bo‘ladi, u holda (2x - 2 = 0) U (lx - 21) = 0 tenglamaning dizyunksiyasi x ning bar- cha qiymatlarida rost mulohaza bo‘ladi. x ning bu qiymatlari uchun 2x - 2 = 0 yoki lx - 21 = 0 mulohazalardan aqalli bittasi rost bo‘ladi. Agar x= 1 bo‘lsa, 2x - 2 = 0 rost, x=3 bo‘lsa, 7x - 21 = 0 ham rost. Demak, {1; 3} dizyunksiyasi rost to‘plami bo‘ladi. Bu esa (x - l)(x-3) = 0 tenglamaning (2x-2 = 0)U U(7x-21)= 0 dizyunksiyaga teng kuchliligini bildiradi.

x = a tenglamaning yechimini topish juda oson, uning yechim- lari to‘plami bitta asondan iborat, T - {a}. Shuning uchun teng- lamalarni yechishda ular sodda ko‘rinishga ega bo‘lgan teng kuchli tenglamalar bilan almashtiriladi, bu almashtirish x = a tengla- maga yoki shunday tenglamalar dizyunksiyasi x = ax U x = a-, U... ...Ux = an ga kelguncha davom ettiriladi. U holda berilgan tengla­maning yechimlari to‘plami T = a2\ ...; aj bo‘ladi. Ba’zan

berilgan tenglamadan unga teng kuchli tenglamaga emas, uning natijasiga o‘tishga to‘g‘ri keladi. Bunda yechimlar to‘plami kengayadi, shuning uchun oxirida topilgan hamma ildizlarni berilgan tenglamaga qo‘yib, tekshiriladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Agar a) **x S R\** b) x e Q; d) x e Z; e) **xeN** bo‘lsa, 2x2 = **lx** + 7 = 0 tenglamaning yechimlari to'plamini toping.

2. Bir o'zgaruvchili tenglama va uning yechimi ta’rifmi ayting.

180

3. Tenglamalarning teng kuchli bo'lish sharti qanday? Teng kuchli tcnglamalarga misollar keltiring.

4. Quyidagi yozuvlarning qaysilari tenglama bo'ladi, qaysilari bo'lmaydi:

a) 3x + 1 = 4; b) 11 < 7; d) 8x > 16;

e) 0.6x-3+ 4x= 5; 0 22 + 8 = 44 -17;

g) x2 + 5x= 7; h) 7x - 2 • (6- x)?

5. a) (x + 4)(x - 1) = 5(x - 1) va x + 4 = 5;

A-2 2a+1 , - .

b) - j— = **Ti-: va x- =** 2**x +** 1

4a +3 4a" +3

tenglamalar teng kuchli bo'lgan to'plamni toping.

6. a) (x - l)(x + 3) = 0 va x - 2 = 0; b) lOx- 2 =4 va 5x - 1 = 2

tenglamalar haqiqiy sonlar to‘plamida teng kuchlimi?

- . . . 6-a 1 .

7. o soni: a) —r=6 +—

A-3 A-3

b) 6 - x = 6(x - 5) + 1

tenglamaning ildizi bo'ladimi? Bu tenglamalar teng kuchlimi?

8. Tenglamalar berilgan:

a) x2 = a2x; b) **ax2 - 4 =** 0;

d) **ax - a2** = 4 - 2x; e) **a + x = a2x** - 1.

**a** parametrning qanday qiymatlarida bu tenglamalar: 1) bitta yechim- ga; b) cheksiz ko‘p yechimga ega bo'ladi; 3) yechimga ega bo'lmaydi?

9. Tenglamalarning aniqlanish sohasini va yechimlar to'plamini toping:

x2-x+l r+|

1 2x-l.

1 x3 + l ’

**b)**

2(a2 + 1) 4a3-13

2a-1

4x^-1

1.

**10. Bir o'rinli predikatlarning rost to'plamini toping: a)** x2+4 **= 0, x e R; b) x = x, x £ Z; d) | x | = | x +** 2 **|, xe??.**

**e)**

3x-2

7TT

15a-3 a-4

a2-9 a+3

**x £ /?;**

**0**

2a-1

7

**2**a**+1**

4-20a2

1-4a2

= 0, *X&R.*

4.2. Tenglamalarning teng kuchliligi haqidagi teoremalar. Biz

bu bandda berilgan tenglamani qanday o‘zgartirganda u teng kuch­li tenglamaga o‘tishi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

1-teorema.

***fl(x)=f1(x),xGX* (1)**

tenglamaning ikkala qismiga barcha x larda qiymatga ega b&'lgan F(x) ifoda qoishilsa, berilgan tenglamaning natijasi boilgan

**/,(\*) +** F(x**) = *f2(x) + F(x),*** ***xGX* (2)**

tenglama hosil bo'ladi.

181

isboti. Haqiqatan, a berilgan (1) tenglamaning ildizi, ya’ni f(a) - f2(a) boisin. Bu tenglikning ikkala qismiga bitta F(a) sonni qo‘shsak, f(a) + F{a) = f2(a) + F{a) rost tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik a ning (2) tenglamaning ham ildizi boiishini ko‘rsatadi. Demak, (1) tenglamaning har bir ildizi (2) tenglamaning ham ildizi ekan, ya’ni (2) tenglama (1) tenglamaning natijasi.

Masalan, 76 - 62 = 2x tenglama 76 - 2x - 62 tenglamaning natijasi, u 76 - 2x - 62 tenglamaning ikkala qismiga bitta 2x — 62 ifodani qo‘shish bilan hosil boiadi.

/,(\*) - f2(x) tenglama o‘z navbatidaf(x) + F(x) - f2{x) + F(x) tenglamaning ikkala qismiga bitta F{x) ifodani qo‘shishdan hosil boiadi. Shuning uchun faqat (2) tenglama (1) tenglamaning natijasigina emas, balki (1) tenglama ham (2) tenglamaning natijasidir, demak, bu tenglamalar teng kuchli.

Shunday qilib, quyidagi teorema o‘rinli: l'-t e o re m a. Agar F(x) ifoda ***xEX***ning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa,

**/,<\*) =/2(x) va *ffx) + F(x) =f1(x) + F(x)*** ***xEX***

tenglamalar teng kuchli boiadi.

Bu teoremadan bunday natija kelib chiqadi:

Har qanday tenglama F{x) - 0 ko‘rinishdagi tenglamaga teng kuchli. Haqiqatan /,(x) = f2{x) tenglamani F(x) - 0 ko‘rinishga keltirish uchun bu tenglamaning ikkala qismiga —f2(x) ni qo‘shish va F(x) - f{(x) -f2(x) deb olish kerak.

Quyidagi teorema ham xuddi shunday isbotlanadi:

2-teorema. Agar

***f1(x)=f1(x) xEX,* (1)**

tenglamaning ikkala qismi F(x) ifodaga koipaytirilsa (bu ifoda barcha xSX larda qiymatga ega), (1) tenglama natijasi hisoblangan yangi

***ffx)*** = F(x) ***=f(x) >F(x)*** x&X(2)

tenglama hosil bo‘ladi.

■777—7 ifoda ham barcha x E X larda qiymatga ega boigan-

F(x)

dagina (1) tenglama (2) ning natijasi boiadi. Bunda yagona F(x) ning x ning ba’zi bir qiymatlarida nolga aylanishi mumkin. Shuning uchun quyidagi tasdiq o‘rinlidir:

182

3-teorema. Agar F(x) ifoda barcha xGX larda qiymatga ega bo'"lib, xGX ning birorta ham qiymatida nolga teng boUmasa, ***f/x) - f/x) va f/x)* •** F(x) - ***f/x)* •** F(x) xGX tenglamalar teng kuchli bofladi. Xususan, agar a\*0 b o'" Isa, u holda ***f/x)*** - f2(x) va ***af/x)*** - af2(x) tenglamalar teng kuchli b&'ladi.

Boshqacha aytganda, har qanday tenglama noldan farqli son- ga ko‘paytirilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi. Masalan, 2x - 14 tenglama x = 7 tenglamaga teng kuchli.

Tenglamalarni yechishda ko‘paytuvchilarga ajratish usuli ham qo‘llaniladi. Faraz qilaylik, f(x), f2{x), ..., ffx) ifodalar barcha xGX larda qiymatlarga ega. U holda ffx), f2(x), ..., fn{x) ifoda- lardan aqalli bittasi x - a da nolga aylansagina, aGX son

***A(x),f2(x),* ..., *f„(x) =*** *0* (3)

tenglamaning ildizi bo‘ladi, bu esa (3) tenglama f^x) - 0, v f2(x) - 0 v ... v fn(x) = 0 tenglamalarning dizyunksiyasiga teng kuchli boiadi, demakdir.

Masalan, x(x - 4)(x + 6)(x - 8) = 0 tenglama x - 0 v x - -4 = 0v.x+6 = 0vx-8 = 0 tenglamalar dizyunksiyasiga teng kuchli, shuning uchun uning yechimlari to‘plami: {0; 4; -6; 8}.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. (**4x - 5)(x2 -** 4) = 7(x2 - 4) tenglama **4x -** 5 = 7 tenglamaning na- tijasi ekanligini isbotlang.

2. Quyidagi tenglamalar jufti teng kuchli ekanligini isbotlang:

a) **2x -** 1 + x2 + 9 = **3x —** 6 + **x2 +** **9** va **2x -** 1 = **3x -** 6;

b) **(2x -** l)(x2 + 9) = (3x - 6)(x2 + 9) va **2x -** 1 = **3x —** 6.

3. **f(x) = q2(x)** tenglama **j{x) = q(x)** tenglamaning natijasi ekanligini isbotlang. Bu tenglamalar har doim teng kuchlimi?

4. Tenglamalarni yeching:

a) 6,4- (2—3\*) = 6(0,8x- 1) + 6,8; d) fi+xl:7 =f|+xl:9;

**b)**

***4-x +* 5** 8

**1**

**16**

**4**

II

**3x-l 1 3-5x\_x+6**

***~4*** 8 ***~~2~***

**4.3. Bir o‘zgaruvchili tengsizliklar.** xo‘zgaruvchi qatnashgan tengsizliklar, masalan, /,(x) < ***f2(x), xGX;*** /,(x) **> *f2(x),*** ***xGX*** va boshqa tengsizliklar bir o‘rinli predikatlardir. Bunday tengsizlikni yechish sonlarning shunday T to ‘plamini topish demakki, bu son- larni x ning o ‘rniga qo ‘yganda rost tengsizlik hosil bo ‘ladi.Sonlar­ning bu to‘plami tengsizlik yechimlari to‘plamideyiladi.

183

Bu tengsizlikning har bir yechimi boshqa tengsizlikni qanoat- lantirishi mumkin. U holda ikkinchi tengsizlik birinchisining natijasi deyiladi. Masalan, x > 4 va x > 2 tengsizliklarni olaylik. Ma’lumki, agar biror son 4 dan katta bo‘lsa, u 2 dan ham katta bo‘ladi. Shuning uchun x>2 tengsizlik x>4 tengsizlikning natijasidir. Berilgan tengsizlik natijasining yechimlar to‘plami Q berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plami T ni o‘z ichiga oladi: QdT.

Agar ikki tengsizlik bitta yechimlar to‘plamiga ega boisa, ular teng kuchli deyiladi. Bu holda ikkala tengsizlik bir-birining natijasidir.

Masalan, biror a son 5 dan katta degan tasdiqni a + 1 son 6 dan katta tasdiqqa teng kuchli deyish mumkin. Shuning uchun x > 5 va x + 1>6 tengsizliklar teng kuchli.

x qatnashgan tengsizliklar predikat boigani uchun ularning konyunksiyasi va dizyunksiyasi haqida gapirish mumkin. Masa­lan, a son 3x - 8 > 1 tengsizlikni ham 2x+ 5 < 15 tengsizlikni ham qanoatlantirsa, bu son (3x — 8) A (2x + 5 < 15) tengsizlik­lar konyunksiyasini ham qanoatlantiradi. Bunday son 4 dir. Mak- tabda konyunksiya haqida emas, tengsizliklar sistemasi haqida gapiriladi va quyidagicha yoziladi:

J3x + 8 > 1,

|2x + 5 < 15.

Agar a ning biror qiymatida ikki yoki undan ortiq tengsizlik- lardan aqalli bittasi rost bo‘lsa, bu tengsizliklar dizyunksiyasi ham a ning bunday qiymatida rost bo‘ladi. Masalan, -2 soni

(2x> 8) v (3x< 3) (4)

tengsizliklar dizyunksiyasining yechimlar to‘plamiga tegishlidir. Haqiqatan, bu sonni tengsizliklardan birinchisiga qo‘yilsa, 2 • (-2) > 8 yolg‘on tengsizlik hosil boiadi. Shu sonning o‘zi ikkinchi tengsizlikka qo‘yilsa, 3\* (-2) < -3 rost tengsizlik hosil bo‘ladi. Demak, -2 soni (4) dizyunksiyaning yechimlar to‘plamiga tegishli ekan. 0 soni bu to‘plamga tegishli emas, chunki bu son (4) dagi ikkala tengsizlikka qo‘yilsa, 2-0>8va3\*0<-3 yolg‘on teng- 184 sizliklarni hosil qilamiz. Tengsizliklar yechimlari to‘plami chek- sizdir: aniqlik uchun bu to‘plamlar koordinata o'qida tasvirlana- di. Buning uchun yechimlar to'plami bir necha juft-jufti bilan kesishmaydigan nuqtalar, kesmalar, oraliqlar yoki nurlar birlash- masi sifatida tasvirlanadi. Buning uchun bir o'zgaruvchili teng­sizliklar haqidagi quyidagi teoremalardan foydalaniladi:

4- teorema. Agar F(x) ifoda har qanday xGX da qiymatga ega boHsa, u holda f/x) < f/x) va f/x) + F(x) = f2(x) + F(x) tengsizliklar teng kuchli bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan, ason/j(x) </2(x) tengsizliklar yechimla- rining to‘plamiga tegishli bo‘lsa, f(aj < f2{a) tasdiq rostdir. Bu rost tengsizlikning ikkala qismiga bitta F(a) sonni qo‘shib, f(a) + F(a) = f2{a) + F(a) rost tengsizlik hosil qilinadi. Bu esa a ning/,(x) + F(x) < f2{x) + F(x) tengsizlik yechimi ekanligini ko‘r- satadi. Xuddi shuningdek, fx{x) + F(x) < f2(x) + F(x) tenglikning har qanday yechimi f^x) < f2{x) tengsizlikni ham qanoatlanti- rishini ko‘rsatish mumkin.

Demak, bu tengsizliklar teng kuchli.

Xuddi shuningdek, ft(x) > f2{x) va f^{x) + F(x) > f2{x) + F(x) tengsizliklarning ham /,(x) < f2(x) va /,(x) + F(x) < f2(x) + F(x) va boshqa tengsizliklarning ham teng kuchliligini isbotlash mumkin.

5- t e o r e m a. Agar a son musbat (a > 0) boilsa, f/x) < f2(x) va af/x) > af/x) tengsizliklar teng kuchli. Agar a < 0 bo'lsa, f/x) < f/x) va af/x) > af/x) tengsizliklar teng kuchli (manfiy songa ko‘paytirganda tengsizlik ishorasi (belgisi)ni o‘zgartirish kerak).

5- teorema quyidagi teoremaning xususiy holidir:

5'-teorema. Agar F(x) ifoda xGX ning barcha qiymatlarida

aniqlangan va musbat boilsa, u holda *f/x)* < f2(x) va f/x) • F(x) < Tf/x) • F(x) tengsizliklar teng kuchli bo‘ladi.

F(x) nomanfiy bo‘lgan holda /,(x) <f2(x) va f(x) • F(x) < f2(x) • F(x) tengsizliklar teng kuchli bo‘ladi.

Quyidagi teoremani ham aytib o‘tamiz.

6- teorema. 0 < f/x) < f/x) va 0 < tengsizlik­lar bir-biriga teng kuchli. 2 1

1-misol. 5x-5>2x+16 tengsizlikni yechamiz. 1-teore- maga ko‘ra bu tengsizlik 5x-2x> 16 + 5 tengsizlikka, ya’ni 3x > 12 tengsizlikka teng kuchli. 5-teoremaga ko‘ra berilgan

185

tengsizlik x > 7 tengsizlikka teng kuchli. Demak, berilgan tengsiz- likning yechimlar to‘plami (7; +oo) sonli nur ekan.

2-m i s o 1. (3x - 5) A (2x - 3 > - 1) tengsizliklar konyunksiya- sini yechamiz. Burring uchun avval tengsizliklardan birinchisini yechamiz.

3x-5<4»3x<9»x<3.

Ikkinchi tengsizlikni yechamiz:

*2x-3>-\o2x<2ox<* 1.

Bu tengsizliklar konyunksiyasini qanoatlantiruvchi sonlar ikkala tengsizlikni ham qanoatlantirishi kerak, ya’ni konyunksiya yechimining to‘plami topilgan yechimlar to‘plamining kesishmasi bo‘lishi kerak. Ammo x < 3 va x 1 sonli nurlarning kesishmasi 1 < x < 3 sonli oraliqdir. Bu oraliq berilgan konyunksiyaning yechimlar to‘plami bo‘ladi.

(x - o,)(x - a2) ... (x — an) > 0 ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechishda quyidagi tasdiqdan foydalaniladi: x < ak da x - ak ko‘paytuvchi manfiy, x > ak da musbat. Boshqacha aytganda, bu ko‘paytuvchi x-ak dagina ishorasini o‘zgartiradi. (x-o,)(x- - a2)... (x - an) ko‘paytma ko'paytuvchilardan biri o‘z ishorasini o‘zgartirganda, ya’ni av a2, ..., an nuqtalarda ishorasini o‘zgartirishi mumkin. Bu nuqtalar sonli o‘qni ]-a>; a{[, ]a,; a2[,..., a„[,

]a„; i=o[ oraliqlarga ajratadi. Bu oraliqlarning har hirida (x - o,)(x - a2)...(x - an) ifodabirxil ishoraga ega. Shuning uchun bu ifodaning butun oraliqdagi ishorasini bilish uchun uning oraliq- dagi bitta nuqtadagi ishorasini bilish yetarlidir.

Ifodaning har bir oraliqdagi ishorasini topib (aniqlab), bu ifoda musbat bo‘lgan oraliqlarni tanlab olamiz. Ularning birlashmasi (x - o,)(x - a2)...(x - an) > 0 tengsizliklar yechimlarining to‘plami bo‘ladi.

3-mi sol. (x + 6)(x — l)(x — 5) > 0 tengsizlikni yechamiz. -6, 1, 3, 5 nuqtalar son to‘g‘ri chizigrini ]-6], ]-6; 1[, ]1; 3[, ]3; 5[, ]5; + co [ oraliqlarga ajatadi, ]5; +oo] nurda 10 sonini tanlab olamiz. Bu sonni (x + 6)(x - l)x(x - 3)(x - 5) ifodagi qo‘yit>, to‘rtta musbat ko‘paytuvchilar ko‘paytmasi (10 + 6)(10-1) (10 - 3)(10 - 5) ni hosil qilamiz, bu ko‘paytma musbat. Shuningdek,

186

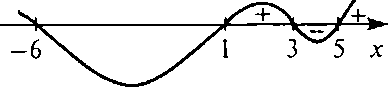
]3; 5[ oraliqda ifodaning manfiyligini, ]1; 3[ da musbatligini, ]-6; 1[ da manfiyligini, ]-°°; -6] nurda musbatligini aniqlaymiz.

Demak, tengsizlikning yechimi ] — oo; —6], J5; +°°[ nurlarning va

|1; 3| oraliqning birlashmasi ekan:

T = ]-°°; -6[U]1; 3[UJ5; + °°[.

Ifodaning ishorasini ] — oo; — 6] nurning o‘zidagini aniqlash bilan chegaralanish mumkin edi. -6, 1,



IV. 15-rasm.

3, 5 nuqtalardan o‘tishda \* + 6, x - — 1, x — 3, x — 5 ko'paytuvchilardan biri o‘z ishorasini o‘zgartiradi, shuning uchun butun ko‘paytma ham o‘z ishorasini o‘zgartiradi. Bundan ]-6; 1[ da ifodaning manfiyligi, ]1; 3[ da musbatligi va hokazo ko'rinib turibdi. Bu mulohazani yaqqolroq ko'rsatish uchun egri chiziq chiziladi, bu egri chiziq ifoda musbat bo‘lgan joyda abssissalar o‘qidan yuqorida, ifoda manfiy bo'lgan joyda abssissalar o‘qidan pastda o‘tadi (IV. 15- rasm). Bu egri chiziq ishoralar egri chizig‘i deyiladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Koordinatalari quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini son o‘qida tasvirlang:

a) **X** =jx**\x** s=-4{}; b) **X={x \** -5<x<0};

d) **X={x** | -3,2<x<3}; e) **X=** {x | 3,6<x<8};

0 **X** = {x 11,7 <x<4,5}.

2. IV. 16-rasmda tasvirlangan son o'qidagi qism to'plamlarni tengsizliklar bilan yozing.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| -5 | 0 |  | ► |
| 3\*5 |  | 12 | w. |

5,75

IV.l6-rasm.

187

3. Quyidagi implikatsiyalar rostmi yoki yolg'onmi:

a) **~** > 0 => **(a** > **0)n(b** > 0); b) (fl> 0) n **(b** >0) =\* **~>** 0 ?

4. Quyidagi tengsizliklar haqiqiy sonlar to'plamida teng kuchlimi:

a) x2 + **3x-2>2 va x**2**+3x-4>0;**

b) -3x + 4 < 0 va 3x - 4 > 0;

**c)** **—>0** va x - 3 > 0;

A" +1

d) 3x- < 6x va x < 2?

5. Tengsizliklarni yeching (xeA);

a) (x - 2)(x + 3)(x - 4) > 0; b) (x2 - 4)(x2 - 9) > 0;

d) (x2 + 4)(x2 - 16) > 0.

4.4. Ikki o‘zgaruvchili tenglamalar. Agar qafasda x ta tustovuq va 4 ta quyon bor bo‘lsa, jami oyoqlar soni 2x + 4y ga teng. Shuning uchun, agar masalada jami oyoqlar soni 62 ga tengligi aytilgan bo‘lsa, biz 2x + 4y = 62 tenglamani yozishimiz mumkin. Bu tenglamada x va y ning qiymatlarini bir qiymatli qilib aniqlab bo‘lmaydi. Hatto agar x va y ning natural qiymatlari bilangina chegaralangan bo‘lsak ham bunday hollar bo‘lishi mumkin: \* = 1, y= 15, x = 3, y= 15, x = 5, y - 13 va h.k.

Ikki x va y o‘zgaruvchili tenglama ikki o‘rinli predikat bo‘ladi. Bu tenglamada x ni a ga, y ni b ga almashtirganda rost tenglik hosil bo‘lsa, (a; b) sonlar jufti bu tenglamaning ildizi bo‘ladi. Masalan, (3; 4) sonlar jufti x2 + y1 - 25 tengla­maning yeehimlaridan biridir, ehunki 32 + 42 - 25. Ammo bu tenglama boshqa yechimlarga ham egadir, masalan, (5; 0), (­3; -4) va h.k.

Ikki o‘zgaruvchili har bir tenglamaga uning yechimlari to‘plami mos keladi, ya’ni bu to‘plam ularni tenglamaga qo‘yganda rost tenglik hosil bo‘ladigan (a; b) sonlar juftining barchasidan iborat. Bunda albatta, x va y noma’lumlar qiymat qabul qilishi mumkin bo‘lgan X va Y to‘plamlar oldindan ko‘rsatilgan bo‘lsa, aGXva bGXo‘rinli bo‘lgan (<3; b) juftlarni- gina olishi kerak.

(a; b) sonlar juftini tekislikda koordinatalari a va b bo‘lgan nuqta bilan tasvirlash mumkin: M = M{a\ b). Ikki noma’lumli tenglamalar yechimlari to‘plamining hamma nuqtalari tasvirini qarab chiqib, tekislikda biror qism to‘plamni hosil qilamiz. Bu

188

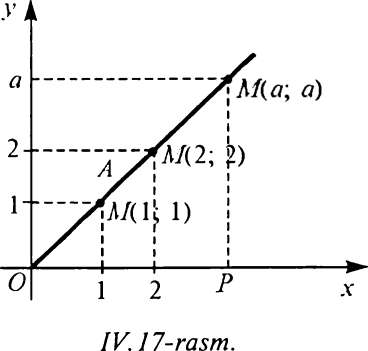
qism to'plam tenglama grafigi deyiladi. Masalan, 3; 4) da

32 + 42 = 25 rost tenglik hosil bo'ladi. A(4; 6) nuqta esa tengla­ma grafigiga tegishli emas, chunki 42 + 62 = 25 tenglik yolg‘on.

Ikki o‘zgaruvchili tenglama, odatda, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi, shuning uchun uning grafigida cheksiz ko'p nuqtalar bor. Bu nuqtalarni birin-ketin tasvirlab bo'lmaydi, faqat chekli nuqtalar to'plamini tasvirlash mumkin. Shuning uchun tasvir- lashning geometrik usulidan foydalaniladi.

1- m isol. y + x= 0 tenglamaning yechimlari to'plami shunday barcha (a; b) sonlar juftidan iboratki, bu juftlarda birinchi koor- dinata ikkinchisiga teng, ya’ni (a; a) Agar tekislikda

a) ko'rinishdagi bir necha nuqtani, masalan, M( 1; 1), A/(2; 2) va h.k.larni belgilasak, bu nuqtalarning hammasi koordinata boshidan o'tuvchi va abssissalar o'qiga 45° burchak ostida og'gan to'g'ri chiziqda yotishini ko'ramiz (IV. 17-rasm). Berilgan tenglama grafigining hamma nuqtalari shu to‘g‘ri chiziqda yotmasmikan, deb taxmin qilinadi. Haqiqatan shun­day ekanligini isbotlaymiz.



Agar M nuqtaning abssissasi uning ordinatasiga teng bo‘lsa, OPM uchburchak teng yonli bo'ladi, bunda O — koordinatalar boshi, esa M nuqtaning abssissa o'qidagi proyeksiyasi (IV. 17-rasm). Shuning uchun burchak kattaligi 45° ga teng. Aksincha, agar to'g'ri chiziq abssissalar o'qiga 45° burchak ostida og'gan bo'lsa, OPM uchburchak teng yonli, shuning uchun M nuqtaning abssissasi uning ordinatasiga teng. Bu misolda tenglama grafigi to'g'ri chiziq bo'ladi. Quyida biz y - kx + b ko'rinishdagi har qanday tenglamaning grafigi to'g'ri chiziq bo'lishini ko'rsatamiz (5.1-band).

2- misol. y/(x — 2)2 + (y — 3)2 =4 (1)

tenglamaning grafigi markazi A(2', 3) va radiusi 4 bo'lgan ayla- nadir. Haqiqatan, M(x; y) nuqtadan 2; 3) nuqtagacha masofa

V(\*-2)2 + (y-3)2 formula bilan ifodalanadi. Shuning uchun (1) tenglik bu masofa grafikdagi barcha nuqtalar uchun 4 ga tengli- gini ko'rsatadi: bu esa nuqtaning yuqorida ko'rsatilgan aylanada

189

yotishini ko‘rsatadi. Aksincha, agar M(x; y) nuqta markazi A(2; 3) nuqtada va radiusi 4 bo‘lgan aylanada yotsa, A dan M gacha masofa 4 ga teng boiadi va shuning uchun (1) tenglik bajariladi.

Bir xil grafikka ega bo‘lgan ikki o‘zgamvchili ikki tenglama teng kuchli tenglamalar deyiladi. Masalan, x + 2y - 5 va 3x + 6y = 15 tenglamalar teng kuchli — bu tenglamalardan biri- ni qanoatlantiruvchi har qanday sonlar jufti ikkinchisini ham qanoatlantiradi.

Quyidagi teoremalarni isbotlash oson:

7- teorema. Agar f(x; y) ifoda x va y rting barcha qiymat- larida aniqlangan bo\*Isa, u holda F(x; y) - F(x; y) va F(x; y) + ***+f(x;*** y) - F(x; y) **+** f(x; y) tenglamalar teng kuchli bo'ladi.

**8**- teorema. Agar f(x; y) ifoda x va y ning barcha qiymatla- rida aniqlangan bo1'lib, x va y hech qanday qiymatlarida nolga aylanmasa, F(x; y) = F(x; y) **va** F(x; y) • f(x; y) = F(x; y) • f(x; y) tenglamalar teng kuchli.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi ikki o'zgaruvchili tenglamalar juftining teng kuchliligini

isbotlang:

**a)** x2 + y2 + 6x =8**j> - 4 va** x2 **+** y2 **+** 6x - 8y + 4 **= 0;**

b) x + **y = 5x — 2y** + 1 va (x2 + **y2 +** 1 )(5.v **— 2y +** 1);

d) x3 - **y**3 + **6x +** 8 = **9x2 +** 5.x + 9 va **xl-y**3 + x = **9x2 +** 1.

2. Tenglamalar grafigini chizing:

a) |x| = y; **b)|x|** = |y|; d) (x- 4)2 + **(y + 5)2 =** 16;

e) y = x2; f) **\y \ = x2.**

4.5. Aylana tenglamasi. 4.4-banddagi 2-misolda x - 2)2 + (y - 3)2 -4 tenglamaning grafigi markazi A(2; 3) nuqtada va radiusi 4 bo‘lgan aylana ekanligi ko‘rsatilgan edi. Umumiy tasdiq ham shunday isbotlanadi.

V(x - a)2 *+(y* - b)2 = R (D

tenglamaning grafigi markazi A(a; b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylanadir.

190

Haqiqatan, agar B(x; y) nuqta aylanada yotsa, u holda | AB | = R bo‘ladi. Ammo \ AB\ = yj(x - a)2 + {y - b)2 , shuning uchun yj{x - a)2 + (y - b)2 - R . Demak, aylananing hamma nuqtalari (1) tenglama grafigiga tegishli ekan. Aksincha, M(x\ y) nuqta (1) tenglama grafigiga tegishli bo‘lsin. y/(x - a)2 + (y - b)2 ifoda B(x; y) nuqtada A(a; b) nuqtagacha masofa bo‘lsa, | AE\ masofa R ga teng, shuning uchun B{x\ j) nuqta aylanada yotadi.

Ravshanki, (1) tenglama

(x - a)2 + (y - b)1 = R2 (2)

tenglamaga teng kuchli. Aylana tenglamasi ham xuddi shu ko‘rinishda yoziladi.

1-m i so 1. Markazi A(7; -6) va radiusi 8 bo‘lgan aylana teng- lamasini yozamiz.

(2) formula bo‘yicha

*(x-7)2 + (y + 6)2 =* 64 (3)

ko‘rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada qavslarni ochib va o‘xshash hadlarni ixchamlab, uni boshqacha yozish mumkin:

x2 + y2 = 14x + 12y + 21. (3')

(3') ko‘rinishdagi tenglamadan (3) ko‘rinishdagi tenglamaga qayta o‘tish uchun toia kvadratlarni ajratish kerak boiadi.

2-m i s o 1. x + y2 - 6x + 8y - 75 = 0 (4)

tenglama aylana tenglamasi ekanligini isbotlaymiz va uning markazi hamda radiusini topamiz.

x2 - 6x ifoda to‘la kvadrat bo‘lishi uchun unga 32 = 9 ni qo‘shish kerak, y2 + 8y ifoda toia kvadrat boiishi uchun esa unga 42 = 16 ni qo‘shish kerak. Shuning uchun (4) tenglamani

(x2 - 6x + 9) + (y2 + 8y + 16) - 75 = 9 + 16

ko‘rinishda yozamiz. Bundan (x - 3)2 + (y + 4)2 = 100. Bu teng- lamaning aylana tenglamasi ekanligi va uning markazi A(3; -4) nuqtada, radiusi 10 ga teng ekanligi ko'rinib turibdi.

191

Shunday bo‘lishi ham mumkinki, toia kvadratlarni ajratib olgandan keyin (x - a)2 + {y - b)2 - 0 ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘ladi. Ikkala qo‘shiluvchi nolga teng boiganda, ya’ni x-£7 = 0vay-6 = 0 boigandagina kvadratlar yig'indisi nolga teng boiadi. Boshqacha aytganda, (x - a)2 + {y - b)2 = 0 tenglama grafigi bitta M{a; b) nuqtadan iborat ekan. Agar toia kvadratlarni ajratgandan keyin (x - a)2 + {y - b)1 = c (bunda c — manfiy son) tenglama hosil boisa, tenglama grafigi bo‘sh, chunki o‘zgaruvchilarning har qanday qiymatida ham ikki kvadrat yigindisi manfiy boia olmaydi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Aylana ta’rifi qanday? Aylana tenglamasini keltirib chiqarishda bu ta’rifdan qanday foydalaniladi?

2. Markazi **A(a; b)** va radiusi **R** bo'lgan aylana tenglamasini yozing, bunda:

a) **a** = —4, **b = 0, R = \0;** b) **a =** 0, **b =** 0, **R =** 6.

3. Quyidagi tenglamalar bilan berilgan aylananing markazini va radiu- sini toping.

**a)** x2 + y2 + \0x - 6y = **100; b)** x2 + y2 — **4.x —12**y = **24;**

d) x2 + y2 + 8x + 8y + 32 = 0; e) x2 + **y2 - 4x -** 12**y=** 24.

4. x2 + **y2** 3x — 4\_y 4 = 0 aylanada abssissasi 4 ga teng bo‘lgan

nuqtalarni toping.

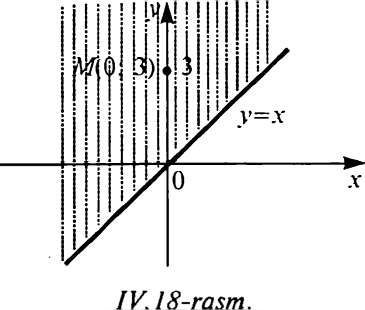
5. x2 + **y2 + 5x - ly -** 4 = 0 aylanada abssissasi ordinataga teng bo'lgan nuqtalarni toping.

4.6. Tengsizliklar grafigi. x va y sonlar orasidagi munosabat nafaqat tenglamalar yordamida, balki tengsizliklar yordamida ham ifodalanadi. x va y qatnashgan tengsizlik berilgan boisin. Bu tengsizlik yechimlarining to‘plami boiib, barcha (a; b) sonlar juftining to‘plami hisoblanadi, bu sonlarni x va y harflar o‘rniga qo‘yganda to‘g‘ri tengsizlik hosil boiadi. Masalan, (4; 2) juftlik x2 + y2 < 25 tengsizlik yechimlari to‘plamiga tegishli, chunki x ni 4 ga, y ni 2 ga almashtirganda 42 + 22 < 25 rost tengsizlik hosil boiadi. Agar (x; y) sonlar juftining har biriga tengsizliklar yechimlari to‘plamidan M(x; y) nuqtani mos keltirsak, tekislikda bu tengsizlik bilan ifodalangan nuqtalar to‘plamini hosil qilamiz. Bu nuqtalar to‘plami berilgan tengsizlik grafigi deyiladi. Tengsiz­lik grafigi tengsizlikdagi biror soha boiadi.

192

F(x, y) >0 tengsizlik yechimlari to'plamini tasvirlash uchun quyidagicha ish yuritiladi. Avval tengsizlik ishorasi tenglik ishorasiga almashtiriladi va F(x; y) tenglama chizig‘i topiladi. Bu chiziq tekislikni bir necha qismga bo‘ladi. Shundan keyin har bir qismdan bittadan nuqta olib, bu nuqtada F(x\ y) > 0 tengsizlik- ning bajarilishini tekshirish kifoya. Agar tengsizlik bu nuqtada bajarilsa, u holda bu nuqta yotgan qismning hamma nuqtalarida tengsizlik ham bajariladi. Bunday qismlarni birlashtirib, berilgan tengsizlik yechimlarining to'plamini hosil qilamiz.

1- misol. y < xtengsizlik grafi-



gini yasaymiz. Biz bilamizki, y

tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi va abssissalar o'qiga 45° bur- chak ostida og'gan to‘g‘ri chiziqdir.

Bu to‘g‘ri chiziq butun tekislikni ikki- ta yarim tekislikka bo'ladi (IV.18- rasm). Yuqorigi yarim tekislikda A/(0; 3) nuqtani olamiz.

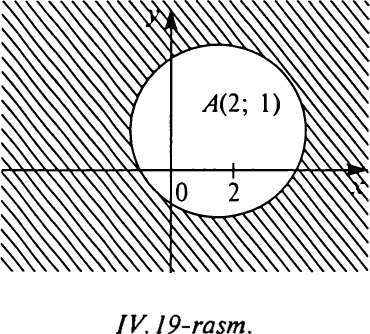
Uning koordinatalarini berilgan tengsizlikka qo'yib, 3 > 0 rost tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak, bu nuqta va y bilan birga yuqori yarim tekislikning hammasi tengsizlik grafigiga tegishli ekan. Pastki yarim tekislik­ning nuqtalari bu grafikka tegishli emasligini ham xuddi shunday tekshiramiz. Va nihoyat, y-x to‘g‘ri chiziqning nuqtalari grafikka tegishli emas, chunki bu to‘g‘ri chiziqda y-x bo'lib, y > x emas. Shunday qilib, y=x to‘g‘ri chiziqdan yuqorida yotgan tekislik nuqtalarining to'plami y > xtengsizlikning grafigidir.

2- m i s o 1.

(x-2)2+(y-l)2 >9 (1)

tengsizlikning grafigini yasaymiz.



Avval (x - 2)2 + (y — l)2 = 9 tenglama chizig'ini o'tkazamiz. Bu markazi A(2\ 1) va radiusi 3 bo'lgan aylanadir (IV. 19-rasm).

Bu aylana tekislikni ikki sohaga bo'ladi — biri aylana ichida yotadi, ikkinchisi aylana tashqarisida yotadi.

193

Aylana markazi, ya’ni A(2; 1) nuqtani olamiz. Agar uning koor- dinatalarini (1) tengsizlikka qo‘ysak,02 + 02 >9 yolg‘on tengsiz- lik hosil bo‘ladi. Bu esa ichki sohaning (1) tengsizlik grafigiga tegishli emasligini bildiradi. Tashqi sohada 5(100; 0) nuqtani tanlab olamiz. Uning koordinatalari (1) tengsizlikni qanoatlan- tiradi: 982 + (-1)2 > 9. Demak, markazi A(2; 1) va radiusi 3 bo‘lgan aylana tashqarisidagi nuqtalar to‘plami tengsizlik grafigi ekan. Geometrik nuqtayi nazardan bu (1) tengsizlikning grafigi shun- day nuqtalardan iboratki, bu nuqtalardan A nuqtagacha masofa 3 dan katta yoki tengligini bildiradi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1**. Ikki o'zgaruvchili tengsizlik deb nimaga aytiladi?**

**2. Ikki o'zgaruvchili tenglizlik yechimi deb nimaga aytiladi va bunday tengsizliklar qanday yechiladi?**

**3. Koordinata tekisligida ikki o'zgaruvchili tengsizlik grafigini yasash bosqichlarini ayting va asoslang.**

**4. Tengsizliklar grafigini yasang:**

a) y > x + 3; b) y < x — 4; d) (x - 6)2 + (y - 5)2 < 4;

e) (x + 1)2+(y-3)2 >9; 0 (x - l)2 + (y +4)2 <4.

4.7. Tenglamalar va tengsizliklar sistemalari. Quyon va tustovuqlar haqidagi masalani boshqacha ham yechish mumkin. Tustovuqlar sonini x bilan, quyonlar sonini y bilan belgilaymiz. U holda masala shartiga ko‘ra ikkita tenglama tuzish mumkin: x + y = 19 va 2x + 4y = 62. Bu tenglamalarning har biri ikki o‘rinli predikatdir, shuning uchun bu tenglamalarning rostlik to‘plami cheksiz. Biz x va y ning shunday qiymatlarini topishimiz kerakki, ular ikkala tenglamani ham qanoatlantirsin, ya’ni x + y = 19 va 2x + 4y = 62 predikatlarning

(x + y = 19) A (2x + 4y = 62)

konyunksiyasini qanoatlantirsin. Maktabda konyunksiyani bunday ko‘rinishda yoziladi:

| x + y = 19,

|2x + 4 y = 62.

Bu x + y = 19 va 2x + 4y = 62 tenglamalar sistemasi deyiladi.

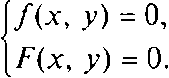
194

Umuman^x; y) = 0 va F(x\ y) = 0 tenglamalar sistemasi deb bu tenglamalarning

f{x\ y) = 0 A F(x; y) = 0

konyunksiyasiga aytiladi. Maktabda bunday yoziladi:

(1)



(1) tenglamalar sistemasini yechish degan so‘z, shunday (a; b) juftliklar to‘plamini topish demakki, bu juftlar tenglamalarga qo‘yilsa, J{x; y) = 0 va F(x\ y) = 0 rost tengliklar hosil bo‘ladi.

Ma’lumki, ikki predikat konyunksiyasining rostlik to‘plami shu predikatlar rostlik to‘plamlarining kesishmasidan iborat. Xuddi shuningdek, (1) tenglamalar sistemasining yechimlari to‘plami ham f{x\ y) = 0 va F(x; y) = 0 tenglamalar rostlik to‘plamlarning kesishmasidan iborat. Geometrik nuqtayi nazardan bu to‘plamni quyidagicha topish mumkin./(x; y) = 0 va F(x; y) = 0 tenglamalar grafiklari chiziladi va ularning kesishish nuqtasi topiladi. Bu nuqtalarning koordinatalari x va y ning izlanayotgan qiymatlari bo‘ladi.

1-mi sol. (2; 5) va (-5; -2) juftlik \y-x=3,

j(x +1)2 + (y - l)2 = 25 (2)

tenglamalar sistemasining yechimlar to‘plamiga tegishli.

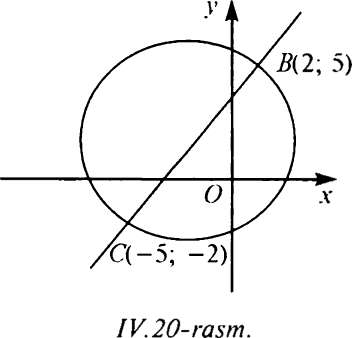
Haqiqatan, agar x = 2 va y = 5 ni ikkala tenglamaga qo‘ysak, 5 - 2 = 3 va (2 + l)2 + (5 - l)2 = 25 rost tengliklarni hosil qila- miz. Shuningdek, x = -5vay = -2 qiymatlarni ikkala tenglamaga qo‘ysak, -2 - (-5) = 3 va (-5 + l)2 + (-2-1)2 = 25 rost teng­liklarni hosil qilamiz. (2) tenglamalarsistemasi boshqa yechimlarga ega emasligini isbotlash mumkin.

(2) tenglamalar sistemasining yechimini geometrik tas- virlaymiz: (x+ \)2 + (y - l)2 = 25 tenglamaning grafigi markazi A(-1; 1), radiusi 5 bo‘lgan aylanadir, y - x = 3 tenglamaning

195

grafigi to‘g‘ri chiziqdir (IV.20-rasm). Bu grafiklar 5(2; 5) va C(-5; -2) nuqtada kesishadi.

Tenglamalar sistemasi bilan bir qatorda tengsizliklar sistemasi ham qaraladi. Masalan,

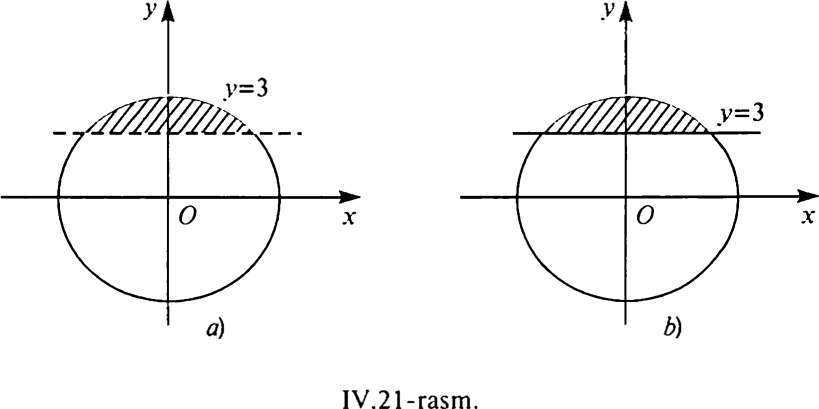
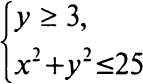


[y > 3,

}x2 + y2<25

sistema bu tengsizliklar konyunksiyasidir, uni (y > 3) A (x2 + y2< 25) ko‘rinishda yozish mumkin.

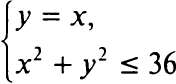
Ko‘rish mumkinki, bu sistemaning grafigi markazi koordina- talar boshida va radiusi 5 bo‘lgan doiraning abssissalar o‘qiga parallel boiib, undan 3 birlik yuqorida yotgan to‘g‘ri chiziqda yuqoridagi tekislik qismi bilan kesishishdan hosil bo‘lgan (IV.21- a rasm). Bunda hosil bo'lgan soha chegarasining bir qismi gra- fikka kirmaydi.



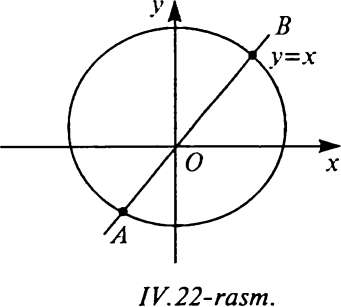
196

tengsizliklar sistemasining grafigi shunga o‘xshash bo‘lib (IV.21- b rasm), unga faqat sohaning o‘sha chegarasi kiradi. (0‘quvchi ko‘rib turibdiki, sohaga kirgan chegara qismlari qora chiziq bi­lan, sohaga kirmagan chegara qismlari shtrix chiziqlar bilan tasvirlangan.)

Tengsizlik va tenglamadan iborat sistemalarni ham qarash mumkin. Masalan,



sistema y=x va 36 teng-



sizlikning konyunksiyasidir. Bu siste- maning grafigi y = xto‘g‘ri chiziq kes- masi bo‘lib, bu kesma to‘g‘ri chi-

ziqning aylana bilan kesishishdan hosil boMgan A va Bnuqtalarni tutashtiruvchi

kesmadir (IV.22-rasm).

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Tenglama va tengsizliklar sistemasi deganda nimani tushunasiz? Lining yechimi deb nimaga aytiladi?**

2**. Ikki o'zgaruvchili tenglama yoki tengsizliklar sistemasi qanday yechiladi?**

**3. Tenglamalar sistemasini yeching:**

**J2x + 3y = 14, Jx**2 **+ y**2 **= 25,**

**[3x-4y=-9; b) [3x-4y = 0;**

d)

**lx**2 **+ y2-** 6**x + 4y 7,**

**|x**2 ***+ y2 + 6x - 4y=3;***

e)

**\y = 9-x2, i>' = x**2 **-4.**

**4. Tengsizliklar sistemasi bilan berilgan sohani tasvirlang:**

a)

|y>x2,

b=s9;

*\y - x*

**\y < 18-x2;**

**[x**2 **+ y**2 **+** 6**x - 4y = 3,**

d) u3.

**5. Quyidagi shartlar bilan berilgan to‘plamni toping:**

{y=x> \y=x,

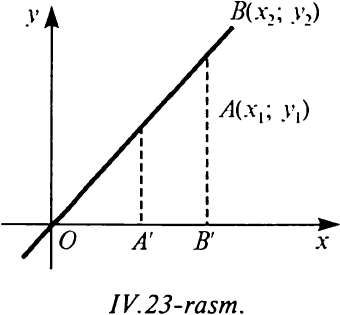
**a) [x**2 **+y**2 **-Sx-6y < 11; }x**2 **+ y2 - Sx - 6y = 11.**

**197**

5-§. CHIZIQLI TENGLAMALAR

5.1. Burchak koeffitsiyentli to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Koor- dinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqni qaraymiz (IV.23-rasm).

Bu to‘g‘ri chiziqda 0 nuqtadan farqli va birinchi chorakda yotuvchi y,)



y\*

nuqtani belgilaymiz. bo‘linma A nuqtaning to‘g‘ri chiziqda qanday tan-

lanishiga bog‘liq emas. Haqiqatan, o'sha to‘g‘ri chiziqda boshqa ; )

nuqtani olamiz. IV.23-rasmdan ko‘rinib turibdiki, OAA' va OBB' uchburchaklar o‘xshash (parallel to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilgan burchak haqidagi teoremaga ko‘ra). Shuning uchun

j^} = j^j- Ammo \AA'\=y{,\OA'\=

y\ y~> v

bundan — = ^-. Bu proporsiyadan ^ nisbatning qiymati M(x\ y) nuqtaning to‘g‘ri chiziqda qanday tanlashiga bog‘liq emasligi ko‘rinib turibdiki: ^ = Agar nuqta uchinchi chorakda olinsa ham o‘sha natija bu holda ikkala va y koordinata manfiy, ammo ular nisbatlari o‘sha k songa teng. k son to‘g‘ri chiziqning abssissalar o‘qining musbat yo‘nalishiga og‘maligini tavsiflaydi va y shu to‘g‘ri chiziqning koeffitsiyentideyiladi, k son abssissa o‘qi bilan OA to‘g‘ri

chiziq orasidagi burchak tangensiga teng: k = tg

Shunday qilib, to‘g‘ri chiziqda yotuvchi har qanday M(x\ y) nuqta uchun (0(0; 0) nuqtadan tashqari) £ = tenglik bajariladi. Tenglikning ikkala qismini x ga ko‘paytirib, y = hosil qilamiz. Bu munosabat 0(0; 0) nuqta uchun ham o'rinli, chunki 0 = • 0.

Endi teskarisini isbot qilamiz. Birorta M(x\ y) nuqtaning ko- ordinatasi uchun (k ning biror qiymatida) y = munosabat ba- jarilsa, bu nuqta burchak koeffitsiyentli nuqtada yotadi.

Haqiqatan, bu to‘g‘ri chiziqda abssissasi x bo‘lgan Mx nuqta mavjud bo‘lsin. Bu nuqtaning yx ordinatasi yuqorida isbotlaga- nimizdek, kx bo‘ladi. U holda y = y, bo‘ladi va M hamda Mx nuqtalar ustma-ust tushadi, bu esa M nuqtaning to‘g‘ri chiziqda yotishini anglatadi.

198

**M** nuqtaning abssissasi musbat, ordinatasi manfiy. Demak, ^ boiinma manfiy. Shuning uchun bu to‘g‘ri chiziq tenglamasi y = kxbo‘lib, k ning qiymati manfiy. Biz birinchi ko‘rinishdagi to‘g‘ri chiziqlar abssissalar o‘qininng musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak, ikkinchi ko‘rinishidagi to‘g‘ri chiziqlar o‘tmas burchak hosil qilishini ayta olamiz. Bunday ifodalash mumkin: abssissa­lar o ‘qining musbat yo ‘nalishi bilan o ‘tkir burchak hosil qiluvchi to‘g'ri chiziqlaming k burchak koeffitsiyenti musbat, bu yo‘nalish bilan o'tmas burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlaming burchak koeffitsiyenti manfiy. k = 0 holda to‘g‘ri chiziq tenglamasi 0 ko‘rinishini oladi. Faqat abssissalar o‘qida yotgan nuqtalargina bu shartni qanoatlantiradi. Koordinata boshidan o‘tuvchi bitta to‘g‘ri chiziq, ya’ni ordinatalar o‘qi uchun = ko‘rinishidagi tenglamani yozib bo‘lmaydi. Bu to‘g‘ri chiziqdagi hamma nuqtalar uchun x = 0 tenglama bajariladi.

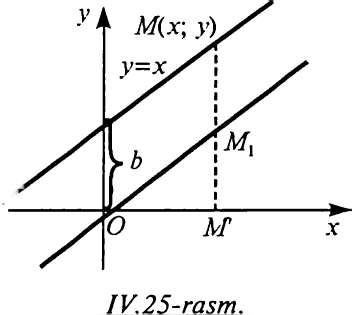
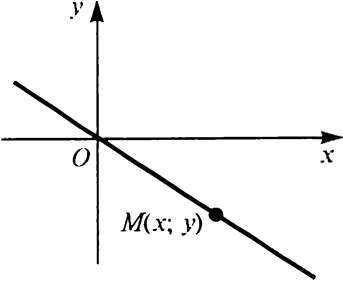
Endi y = kxto‘g‘ri chiziqqa parallel va undan yuqorida yotuvchi, ordina­talar o‘qida b uzunlikdagi kesmani kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni o‘t- kazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqda istalgan **M** (x; y) nuqtani olamiz va undan abssissalar o‘qiga MM' perpendikular tushiramiz. Bu perpendikularning y = kx to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtani A/, bilan belgilaymiz. IV.25-

Shunday qilib, biz quyidagini isbotladik: *k qiymatida y - kxtenglamani koordina boshidan o‘tuvchi*

ta to 'g'ri chiziqda yotgan nuqtalarning koordinatalari boshqa nuqtalarning koordinatalari y = Axtenglama I va III choraklarda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlar uchun keltirib chiqarilgan. Bunday to‘g‘ri chiziqlaming k burchak koeffitsiyenti musbat. Endi koordinatalar boshidan o'tuvchi hamda II va IV choraklarda yotuvchi to‘g‘ri chiziqni olamiz (lV.24-rasm).

Bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi hamma

nuqtalar uchun ^ bo‘linmaning qiymati bir xil. Bu to‘g‘ri chiziqdagi



**199**

rasmdan ko‘rinib turibdiki, | MM' |=| A/, \ + \ M{M'\. Ammo Mx nuqtaning A/,A/' ordinatasi Axga teng, Demak,

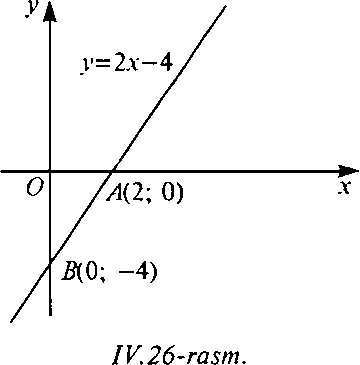
y = | **MM'** | = | MMX | + | A/, A/' | = + **b.**

Biz to‘g‘ri chiziqda yotuvchi istalgan y) nuqtaning ko- ordinatalari y - kx + bni qanoatlantirishini isbotladik. Shuning uchun bu to‘g‘ri chiziqning tenglamasi + ko‘rinishda

bo‘ladi. y = kxto‘g‘ri chiziqdan pastga yotuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasi ham shu ko‘rinishda bo‘ladi. Faqat bunda b manfiy boiadi. Ikkala holda ham to‘g‘ri chiziqning ordinata o‘qi bilan kesishish nuqtasining ordinatasi b ga teng. Shuning uchun b ni to‘g‘ri chiziqning bosh ordinatasi deyiladi. k ni yuqorida xususiy holda qaralgandagidek, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deyi­ladi. Agar to‘g‘ri chiziq abssissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak hosil qilsa, bu koeffitsiyent musbat, agar to‘g‘ri chiziq abssissa o‘qiga parallel bo‘lsa, nolga teng. Ordinata o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar y = kx + bko‘rinishda bo‘la olmaydi.

y = kx + b tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni yasash uchun (kelgusida qisqacha «y = kx + b to‘g‘ri chiziq» deymiz) ordinata o‘qida avval 5(0; b) nuqtani olamiz. Shunday keyin to‘g‘ri chiziqda yana bitta nuqtani topish kerak. Buning uchun istalgan qiymat xx ni olamiz va unga mos qiymatni topamiz:

yx = kxx + b. Mx(xx; y() nuqta izlana- yotgan to‘g‘ri chiziqda yotishi kerak. Shuning uchun to‘g‘ri chiziq 5(0; b) va Mx(xx\ y,) nuqtalardan o‘tadi, bunda yx - kxx + b.



Endi y = — 4 to‘g‘ri chiziqni

yasaymiz. U 5(0; -4) nuqtadan o‘tadi. x= 1 deby=-2 ni topamiz. Demak, to‘g‘ri chiziq >4,(1; —2) nuqtadan ham o‘tadi (IV.26-rasm).

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1. Chiziqli tenglama deganda nimani tushunasiz?

2. To‘g‘ri chiziqning qanday tenglamalarini bilasiz?

3. Chiziq tenglamasidagi ^-burchak koeffitsiyetni nimani bildiradi? Uning qiymati bilan to‘g‘ri chiziq grafigi qanday bog‘langan?

200

**4. a) k= 1, b= 0; b) k = 2, b = 0; d) it = -1,** b **= 0;**

e) £ = I, **b= 2;** 0 A: = **2,** A = —3; g) k = 2, b **=-4;**

**h)** A: = **-1,** **b** = 4; i) **k** = - 1**, b** = -2; j) A: = -2, 6 = **4**

bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqni yasang. Bu to‘gkri chiziqlardan qaysilari abssissalar o'qining musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak hosil qiladi?

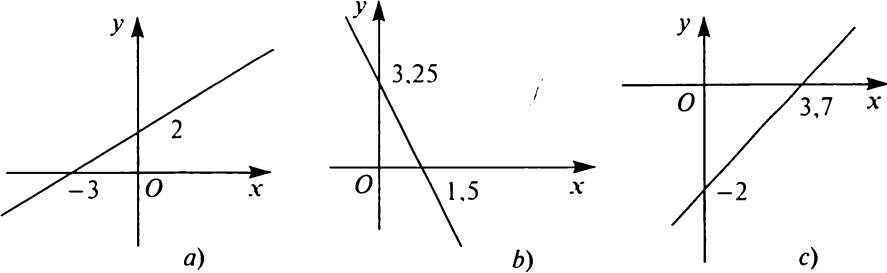
5. **y** = **kx** + b to‘gkri chiziq A/(x0; **yu)** nuqtadan oltadimi? Bunda:

**a) k = 4, Z> =** 1**, \*0= -2, y0= -7;**

b) \*= l, **b=** 6, a0 = 4, y() = 9; d) /c = -3, 6 = 4, **a'**0 = 4, y0 = 4.

6. IV.27-rasmda tasvirlangan tolg‘ri chiziqlar tcnglamalarini yozing.

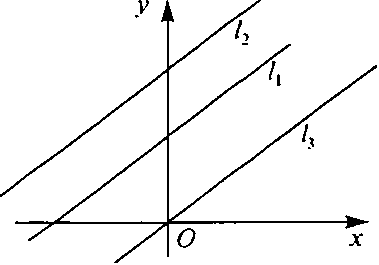
7. **y = 2a** - 4 to‘gkri chiziqda: a) abssissasi 3 bo‘lgan nuqtani; b) ordinatasi 8 bo'lgan nuqtani; d) ordinatasi abssissasidan ikki marta katta bo'lgan nuqtani; c) ordinatasi abssissasidan 3 ta katta bo‘lgan nuqtani toping.



IV.27-rasm.

5.2. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shart- lari. Agar /, va l2 to‘g‘ri chiziqlar bir-biriga parallel bo‘lsa, ular koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarning bittasi va faqat bittasiga parallel (IV.28-rasm).

Shuning uchun ularning burchak koeffitsiyenti shu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentiga teng, ya’ni



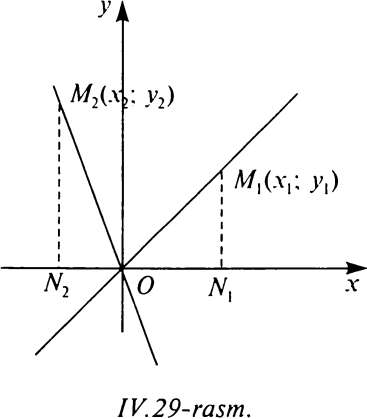
ular bir-biriga teng. Aksincha: a

ikkita to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentlari teng bo ‘Isa, bu ikki to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarning bittasiga va faqat bittasiga parallel bo‘ladi va shuning uchun o‘zaro parallel. *!V.28-rasm.*

201

Demak, o ‘qiga parallel

bo'lmagan ikkita chiziqparallel



bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsiyentlari teng bo ‘lishi zarur va yetarlidir.

Masalan, = 3x — 4 va = 3x + + 1000 to‘g‘ri chiziqlar parallel y = 2x — 1 va -x + 2 to‘g‘ri chiziqlar parallel emas.

Endi ikkita to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik shartini keltirib chiqaramiz. Koordinatalar boshidan ikkita perpendikular to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (IV.29-rasm).

Unda ulardan bittasi (masalan, abssissa o‘qining

musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak, ikkinchisi o‘tmas bur­chak hosil qiladi. Shuning uchun va k2 koeffitsiyentlar turli ishoraga ega. To‘g‘ri chiziqlarning birinchisida (x,; y,) nuqtani, ikkinchisida M2 (x2; y2) nuqtani olamiz. IV.29-rasmdan ko‘rinib turibdiki, MxONx va OM2N2 burchaklar kattaliklari bir xil, shuning uchun MxONx va OM2N2 to‘g‘ri burchakli uchburchaklar o‘xshash.

. Ammo zr = ,, Shuning uchun

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zl |  |  |
|  |  | \*2 |

Demak,

X] X2

I k} 1= prj, ya’ni | kx \ • \ k2|= 1. kxva k2lar turli ishorali bo‘lgani

uchun kx - k2 — manfiy son. Shuning uchun | |= 1 teng-

likdan kx - k2 = — 1 kelib chiqadi. Teskari tasdiq ham o‘rinli: agar

kx‘k2=— 1 bo‘lsa, y = kxx va y =■ k2x to‘g‘ri chiziqlar perpendikular.

Endi istalgan y = kxx + b; va y = k2x + b2 to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. Ulardan birinchisi y = kxx to‘g‘ri chiziqqa, ikkinchisi y = k2x to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgani uchun y = kxx va y = k2x to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lgani holdagina, ya’ni 1 bo‘lgandagina y = kxx + bx va = k2x + b2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘ladi. Shunday qilib, y = kxx + b;va y = k2x + b2 to‘g‘ri chiziqlar ^1 • k2= -1 shart bajarilgandagina perpendikular bo‘ladi.

Masalan, y = 2x+4va y = -|x + 7 to‘g‘ri chiziqlar perpen­dikular, chunki 2-f-jj = -l.

202

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1. Qiiyida berilgan tcnglamalar orasidan parallel va pcrpcndikular tokg‘ri chiziqlar tenglamasini toping:

l

d) y = ix + 6; g) **y** = -3x +11; j) y= -3x+ 8.

b) y = - jX+ 7; **0 y- -3.x +** 2**;**

i) v = j.v-l; b) y = -x - 1;

a) y = 3a - 4; e) y = 3a;

h >' = rV + 4:

2. a) y = 4a + 2; d) y — a + 4;

**e) *y='-x + l***

to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

3. a) y = 4a + 2; b) y = -a + 1; d) y = a + 4; e) y = ■-+7 to‘g‘ri

chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

5.3. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi, ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Te-

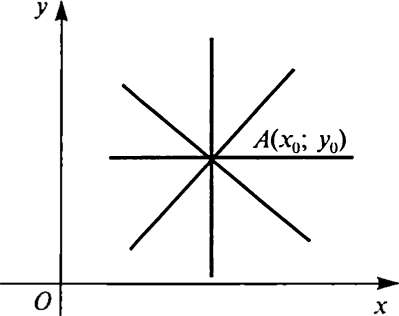
kislikda A(x0; y0)nuqtani olamiz va u orqali ordinata o‘qiga parallel bo'lmagan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. + shu to‘g‘ri

chiziqning tenglamasi bo'lsin. A nuqta o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari y0 = kx0+ b to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi. Shuning uchun b0 — kx0. Agar to‘g‘ri chiziq tenglamasiga b ning topilgan qiymatini qo‘ysak, y - kx + y0- kx0 yoki, boshqacha aytganda,

y - y*0* = k(x ~ **x0)(1)**

tenglama hosil bo‘ladi.

Demak, A(x0; y0) nuqtadan o‘tuvchi har qanday to‘g‘ri chiziq tenglamasini (ordinatalar o'qiga parallel to‘g‘ri chiziq bundan mus- tasno) (1) ko‘rinishda yozish mumkin ekan. k ning qiymatlari o‘zgarishi bilan A nuqtadan o‘tuvchi turli to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi. Shu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami (IV.30-rasm) A markazli to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi.



***IV.30-rasm.***

203

Agar (1) da k ni o‘zgaruvchi desak, (1) tenglama shu dastadagi ordinata o‘qiga parallel bo‘lgani x = x0 to‘g‘ri chiziqdan tashqari liar qanday to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Shuning uchun (1) for­mula markazi A (x0; y0) bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar dastasining teng- lamasi deyiladi.

1- misol. A(4; -7) nuqtadan o‘tuvchi y - 2x + 3 to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq A(4; -7) nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi y - (-7) = k{x - 4) yoki y + 7 = lc(x - 4) ko‘rinishida bo‘lishi kerak. Ammo u to‘g‘ri chiziqqa y - 2x + 3 parallel bo‘lgani, parallel to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari esa teng bo‘lgani uchun k — 2 va shuning uchun izlanayotgan tenglama y + 1 - 2(x - 4) ko‘rinishga ega, bundan y + 7 = 2x - 8 yoki y - 2x — 15.

2- m i s o 1. A{— 1; 5) nuqtadan o‘tuvchi, y = lx + 6 to‘g‘ri chi­ziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz.

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq A(-1; 5) nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi y — 5 = k(x + 1) ko‘rinishda bo‘ladi.

Perpendikularlik shartga asosan k{- k2 = -1, bundan | • k = -1. Shuning uchun k = 3. Demak, izlanayotgan tenglama y — 5 = = -3(x + 1) yoki y-5 = (-3x-3), ya’ni y = — 3x + 2 ko‘rinishga ega.

To‘g‘ri chiziq asosan shu to‘g‘ri chiziqdagi ikkita nuqta bilan beriladi. A(x{\ y,) va B(x2; y2) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu to‘g‘ri chiziq A(x{; y,) nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi

y-yx = k(x-xx) (1')

ko‘rinishda bo‘ladi. Biz k burchak koeffitsiyentining qiymatini topishimiz kerak. Buning uchun to‘g‘ri chiziqning B(x2; y2) nuqtadan ham o‘tishidan foydalanamiz. Agar hosil bo‘lgani teng- lamaga B nuqtaning x2 va y2 koordinatalarini qo‘ysak, y2 - y, = = k(x2 -x,) to‘g‘ri tenglik hosil bo‘ladi. Bundan x2 \* x, desak, ni topamiz. Demak, ^(x,; y,) va B{x2, y2) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi x2 ^ x, da

204

koZinishni oladi. Undan tashqari y, ^ y,, shuning uchun bu teng- lamani proporsiya ko‘rinishida yozisli mumkin:

***y-y* i**

.Y2--Yi

(X- A',)

ZiZl = ZzfL . (3)

x2~x\

a, = a, boigan holda ikkala nuqta bir xil abssissaga ega va shuning uchun ordinata o‘qiga parallel a = a, to‘g‘ri chiziqda yota- di. Xuddi shuningdek, agar y, - y2 bo‘lsa, ikkala nuqta abssissa- lar o‘qiga parallel y = y, to‘g‘ri chiziqda yotadi.

3-m i s o 1. A(4; -8) va B(7; -5) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topamiz. (2) formuladan

-**5**-(-8) **\_ -5 +** 8 **\_ 3 \_ .**

**7-4 7-4 3 '**

4-mi sol. A( 5; 2) va B(— 1; 4) nuqtalardan o'tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Buning uchun (3) tenglamada a, va y, ni 5 va 2 bilan, x, va y, ni — 1 va 4 bilan almashtiramiz:

y-2 \_ x-5 4-2 “ (-1) - 5

Bu tenglamani quyidagicha o'zgartirish mumkin:

= ^ y°ki y~2 = -}(a-5),

ya’ni

5-mi sol. A( 6; 1) va B( 6; 4) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu nuqtalarning abssissalari bir xil bo'lgani uchun to‘g‘ri chiziq tenglamasi x= 6 ko‘rinishda bo‘ladi. Agar bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini proporsiya ko‘rinishda yozsak,

yoki ^ ni hosil qilamiz. Bunday yozuv noto‘g‘ri, chunki 0 ga bo'lish mumkin emas.

**205**

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi? Bu tenglamani keltirib chiqaring.**

**2. Bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar bir-biridan nimasi bilan farq- lanadi? Misollar bilan tushuntiring.**

**3. A(**6**; -3) nuqtadan o‘tuvchi va a) y= 5x — 1 to‘g‘ri chiziqqa paral­lel; b) y = 2x + 4 tokg‘ri chiziqqa perpendikular; d) abssissalar o‘qiga parallel; e) ordinatalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.**

**4. a) A(-3; 2), B(-\;** 6**);b) >1(5; 7), £(0; 3);**

**d) A(4;** 1**), B(4;** 8**); e) >4(1; -3), B(**8**; -3) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.**

**5. Uchlari: >4(—1; 9), B(2; 5), C(-2; 1) nuqtalarda bo‘lgan ABC uchburchak berilgan. Bu uchburchak balandliklari**1 **tenglamasini yozing. Bu uchburchakning balandliklarini o‘z ichiga olgan to‘g‘ri chiziqlar ko‘zda tutilgan.**

6**. Uchlari A( 1; 3), B(5; 7), C(3; 1) nuqtalarda bo‘lgani ABC chburchak berilgan. Bu uchburchak medianalarining tenglamalarini va C uchdan MA medianaga tushirilgan perpendikular tenglamasini yozing.**

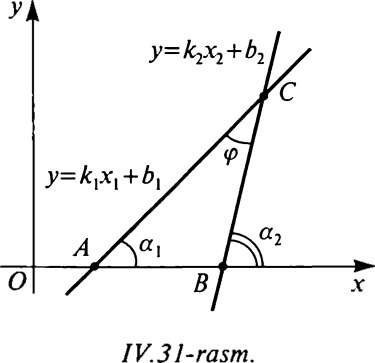
5.4. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. y = + , va

y = k2x2 + b2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi d burchak uchun formula keltirib chiqaramiz. Bu k burchak koeffitsiyent = to‘g‘ri

chiziqning abssissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensi ekanligini, ya’ni k = tgx ni hisobga olamiz. Shuning uchun kx = tgap k2 — tga2, bunda a{ — birinchi to‘g‘ri chiziqning abssissa o‘qiga og‘ish burchagi, a2 — ikkinchisi to‘g‘ri

chiziqning og'ish burchagi.

ABC uchburchakdan (IV.31- rasm) (uchburchakning



tashqi burchagi unga qo‘shni boMmagan ikkita ichki burchak yighndisiga teng). Demak, d - a2- ax va shuning uchun

tntf - tcfcr a ) - tga2"tg«i \_ \*2"\*i **tgV -** tg**(a2** a**,) -** 1+tgartgai - . **kl**

1 **Bu uchburchakning balandliklarini o‘z ichiga olgan to‘g‘ri chiziqlar ko‘zda tutilgan.**

**206**

Shunday qilib, y = ^x, + 6, va y - k2x2 + b2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak tangensi

ki~k\

tg#

1+\*,-\*, formula bilan ifodalanadi.

Misol. y - 3x - 1 va y = -2x + 4 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni topamiz. Bu holda kx = 3, k2 = -2 va

tg#

**-2-3**

l+(-2)-3



& burchak tangensi 1 ga teng bo‘lsa, & burchak 45°ga teng bo‘ladi. Demak, to‘g‘ri chiziqlar 45° li burchak hosil qilar ekan.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. Koordinata tekisligida ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi? Burchak tangensi formulasini keltirib chiqaring.**

**2. a) y = 5x - 1 va y = x + 7; b) y = -Ax + 3 va y = 3x — 1 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak tangensini toping.**

**3. Uchlari A( — 3; 1), B( — 1; 7), C(2; 1) nuqtalarda bo‘lgan ABC uchburchak burchaklarini toping.**

**4. Uchlari A(\\** 8**), B(-3; 2), C(5; 4) nuqtalarda bo‘lgan ABC uchbur- chakning MA va BN medianalari orasidagi burchakni toping.**

5.5. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Burchak koeffi- tsiyentli to‘g‘ri chiziq tenglamasining kamchiliklaridan biri bu tenglama tekislikdagi hamma to‘g‘ri chiziqlarni o‘z ichiga olmay- di — ordinata o'qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar bunday tenglama bilan ifodalanmaydi. Bu to‘g‘ri chiziqlar x = a tenglama ko‘rinishda. Hozir xususiy holi y-kx + bvax-a tenglamalar bo‘lgan tenglamani yozamiz. U quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

Ax + Dy+C= 0. (1)

Bu tenglamada x va y birinchi darajali. Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaga B- 1, A - -k, C - -b larni qo'yib, -kx + y - b - 0, ya’ni y - kx + b

**207**

ni hosil qilamiz. Agar A - 1,5=0, C - -a ni qo‘ysak, x - a = 0, ya’ni x - a ni hosil qilamiz. Demak, burchak koeffitsiyentli to'g’ri chiziq tenglamasi ordinatalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq teng- lamasi ham umumiy chiziq tenglamasining xususiy holidir.

Agar A - 0 va 5 - 0 bo'lsa, umumiy chiziq tenglamasi C - 0 ko‘rinishni oladi. C koeffitsiyent ham nolga teng bo‘lgan holda 0 = 0 tenglikni hosil qilamiz, bu tenglikni tekislikdagi istalgan nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. (x va y ni qanday tanlamaylik, 0 = 0 rost tenglik bo‘lib qoladi.) Demak, A - 0, 5 = 0, C = 0 bo'lganda umumiy chiziq tenglamasining grafigi butun tekislik bo‘ladi. A — 0, 5 = 0, C \* 0 bo‘lsa, 1 = 0 tenglik- ka o‘xshash tekislikni hosil qilamiz. x va y lar har qanday qiymatida bu tenglik yolg‘on, ya’ni 1 = 0 ning grafigi yo‘q.

A = 5 = 0 bo‘lgan hollarni, ya’ni Ax + Bx + C tenglamaning grafigi butun tekislik yoki bo‘sh to‘plam bofigan hollarni tashlab yuborsak, bu grafik to‘g‘ri chiziq bo‘lishini aytish mumkin. Ikki hoi bo‘lishi mumkin: 5=0 yoki 5\*0. Agar 5 = 0 bo‘lsa, teng- lama Ax + C - 0 ko‘rinishni oladi. Biz A va 5 ning bir vaqtning o‘zida nol bo‘lishini tashlab yuborganimiz uchun A\* 0. Shuning

uchun tenglamani x = --^ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu ordi­natalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi. 5\*0 bo'lganda Ax + By + C = 0 tenglama ^x + y + ^ = 0 tenglamaga teng kuchli.

- - = k va - — = b deb, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli B B

y - kx I b tenglamasini hosil qilamiz.

Shunday qilib, Ax + By + C - 0 — umumiy chiziq tenglamasi bo‘lib, uning grafigi

a) butun tekislik (bunda A - B = C = 0);

b) bo‘sh to‘plam (bunda A - B - 0, C & 0);

d) ordinatalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq (bunda 5 = 0, A ^ 0);

e) ordinatalar o‘qiga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq (bunda 5\*0) bo£lishi mumkin.

Oxirgi holda to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti k = formula bilan ifodalanadi.

Yana shuni aytishimiz kerakki, A - 0 bofiganda, to‘g‘ri chiziq abssissalar o‘qiga parallel (k - 0), C - 0 bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq ko- ordinatalar boshidan o‘tadi. Haqiqatan, bu holda to‘g‘ri chiziq tenglamasi Ax + By - 0 ko‘rinishni oladi va 0(0; 0) nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi.

208

Agar X 0 bo‘lsa, Ax + By + C - 0 va X(Ax + By + C) - 0 tenglamalar teng kuchli. Bu tenglamalar bitta to‘g‘ri chiziqni ifo- dalaydi. Masalan, 2x - y + 4 = 0 va 6x - 3y + 12 = 0 tenglamalar bitta to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi (ikkinchi tenglama birinchi teng- lamaning ikkala qismini 3 ga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan).

Umumiy chiziqli tenglamalar bilan ifodalangan Atx + Bxy + C, = 0 va A2x + B2y + C2 - 0 to‘g‘ri chiziqlarning pa- rallellik va perpendikularlik shartlarini yozamiz. Agar 2?, ^ 0, B2 \* 0 bo‘lsa, birinchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti

1A Aj

ga, ikkinchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti ga teng. k.-~irk-„ ya’ni = shart bajarilganda bu to‘g‘ri chiziqlar parallel. Bu shartni boshqacha yozish mumkin:

AlB1 = A1Br (2)

Bu shart ordinata o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar uchun ham o‘rinli.

Atx + Bty + C, = 0 va A2x + B2y + C2 = 0 to‘g‘ri chiziqlarning k{ - k2- -1 perpendikularlik sharti hamda xuddi shunday yoziladi:

r A V

= -l

Bt B7

Bu shartni boshqacha yozish mumkin:

AxA2 = ~BxB2 yoki AXA2 + B{B2 = 0. (3)

(3) shart to‘g‘ri chiziqlardan bittasi ordinata o‘qiga parallel bo‘lganda ham o‘rinli.

M(x0; y0) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yoza­miz. Bu tenglama Ax + By + C - 0 ko‘rinishda bofiishi kerak. Bu to‘g‘ri chiziqning M(x0; y0) nuqtadan o‘tishi uchun Ax0 + By0 + C = 0 tenglik bajarilishi kerak. Bundan C = -Ax0 — By0 bofiadi va to‘g‘ri chiziq tenglamasi Ax + By + (-Ax0 - By0) = 0 ko‘rinishda, ya’ni

A(x - x0) + B(y -y0) = 0 (4)

ko‘rinishda bofiishi kerak.

**209**

Endi ordinatalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqni chiqarib tash- laymiz.

Mi sol. M (4; -2) nuqtadan o‘tuvchi va 3x - 5y + 6 = 0 to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz.

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq M(4; -2) nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi A(x - 4) + B(y + 2) = 0 ko‘rinishda bo‘lishi kerak. Bu to‘g‘ri chiziqning 3x - 5y + 6 = 0 to‘g‘ri chiziqqa parallelligidan A va B koeffitsiyentlar -5A = 3B tenglamani qanoatlantirishi kerak. Biz ikki A va B noma’lumni topish uchun bitta tenglamani hosil qildik. Ammo Ax + By + C - 0 va X(Ax + By + Q - 0 tenglamalar bitta to‘g‘ri chiziqning tengla- malaridir, shuning uchun bizga A va B koeffitsiyentlar emas, ularning nisbatlarigina kerak xolos. Boshqacha aytganda, bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘lmagan va -5A = 3B tenglamani qanoatlantiruvchi hech bo‘lmaganda bitta sonlar jufti (A; B) ni topish kerak. Bunday juftlik sifatida (3; -5) juftlikni olish mumkin. Shuning uchun izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha:

3(x- 4) - 5(y + 2) = 0.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. a) 2x + y = 0; b) —Ax + 2y - 5 = 0;**

**d) —7jc — 2\_v + 1; e) 3x — 5y + 15 = 0**

**to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlarini va boshlang‘ich ordinatalarini toping.**

**2. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlami chizing:**

**a) Ax - 5y + 2d = 0; b) x - 3y + 9 = 0; d) 3x + y -** 6 **= 5;**

**e) Ay - 7 = 0; 0 2x - 5 = 0; g) 3x+8y = 0.**

**3. A(—5; 1) nuqta orqali 3x -** 6**y + 2 = 0 to'g'ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o'tkazing.**

**4. A(A'** 8**) nuqta orqali 2x + 3y - 5 = 0 to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.**

**5. Uchlari A(-A; 1), 5(0; -3), C(2; 4) nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak balandliklari tenglamasini yozing.**

6**. Agar A(-A\ 2), 5(6; 4) bo'lsa, AB kesma o‘rtasidan o'tuvchisi va bu kesmaga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.**

210

5.6. To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. + C, = 0

va A2x + B-,y + C2 = 0 to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Agar bu to‘g‘ri chiziqlar kesishsa, ular kesishish nuqtasining koordinata- lari

+ Bxy + Cx — 0, { A2x + B2y =0

tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak. Boshqacha ayt- ganda, to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasini topish (1) tenglama­lar sistemasini yechish demakdir.

1-m i so 1. 3x - 4y + 5 = 0 va 5x + 2y - 9 = 0 to‘g‘ri chiziqlar

kesishish nuqtasini topamiz. Buning uchun

|3x - 4y + 5 = 0,

[5x + 2y-9 = 0 (2)

tenglamalar sistemasini yechamiz.

Ikkinchi tenglamani 2 ga ko‘paytirib, (2) ga teng kuchli teng­lamalar sistemasini hosil qilamiz:

j3x-4y + 5 = 0, jl0x + 4y —18 = 0.

Bu tenglamalarni qo‘shib, 13x - 13 = 0, x = 1 ni topamiz. Bu qiymatni (2) sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘yib, 3 - - Ay + 5 = 0 ni, bundan y -2 ni topamiz. Demak, 3x - 4y + 5 = 0 va 5x + 2y — 9 = 0 to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasi M( 1; 2) nuqtadir.

Axx + B{y + C, = 0 va A2x + B2y + 0 to‘g‘ri chiziqlar ke-

sishmasligi ham mumkin — ular parallel va turli bo‘lishi yoki ustma-ust tushishi mumkin. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti quyidagicha: AlBi - A2Bt - 0 (5.5-bandga q.) ularning ustma-ust A] B\ Ci

tushishi: ^ = ^ = q" yoki A{B2 - A2B{ = 0, AlC2 - A2CX = 0, *BxC2 - B2C{ =* 0.

211

Shunday qilib, agar AXB2 - A2B{ - 0 bo‘lib, AXC2 — A2Ct & 0 yoki BtC2 - B2CX - 0 bo‘lsa, (1) tenglamalar sistemasi yechimga ega emas. Agar AtB2 - A2B] = AlC2 - CtA2 — BXC2 - CXB2 - 0 bo‘lsa, Atx + Bxy + C, = 0 va A2x + B2y + C2 - 0 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Bunda istalgan nuqtasining koordinatalari sistemaning A2x + B2y + C2= 0 to‘g‘ri chiziqning ikkala tengla- masini qanoatlantiradi, shuning uchun tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

2- misol. 2jc-7y+3 = 0 va 4x-14y+ll = 0 to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasini toping.

2 ■ (-14) - 4 ■ (-7) = 0 2\*11 — 3\*4^0 bo‘lgani uchun bu to‘g‘ri chiziqlar parallel, lekin ustma-ust tushmaydi. Bu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi yo‘q.

3- m i s o 1. 2x - ly + 3 = 0 va 4x - 14y + 6 = 0 to‘g‘ ri chiziqlar kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda 2 • (-14) - 4 • (-7) = = 2 • 6 - 3 • 4 = (-7) • 6 - (-14) • 3 = 0, shuning uchun to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Demak, 2x - ly + 3 = 0 to‘g‘ri chiziqning istalgan nuqtasi izlanayotgan kesishish nuqtasiga te- gishli bo‘ladi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Tekislikda to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi qanday topiladi?**

**2. To'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasiga ko'ra ularning kesishishi, parallel bo'lishi, yoki ustma-ust tushishi shartlarini ifodalang. Bu shartlar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari soni bilan qanday bog'langan?**

**3. Ushbu chiziqlarning kesishish nuqtasini toping:**

**a)** 6x - y - **3 = 0 va** 3x - 4y + 9 = **0;**

**b) 3x - 4y + 1 = 0 va 9x - 12y + 3 = 0; d) 5jc -** 8**y + 7 = 0 va lOx - I**6**y + 1 = 0.**

**4. Tomonlari**

**lx- 3y+ 5 = 0 (AB);**

3x+ 4y **+ 1 = 0** (BQ; x + ly **+ 1 = 0** (A C)

**tenglamalar bilan ifodalangan uchburchak uchlarini toping.**

212

**V bob.** FUNKSIYA, LIMIT, HOSILA, INTEGRAL

l-§. SONLI FUNKSIYALAR

1. Funksiyalar va ifodalar. Har qanday arifmetik masalaning javobi berilgan ma’lumotlarga bog‘liq. Masalan, quyidagi masa- lani qaraylik: «Qizil va qora qalamlar soni 10 ta. Qizil qalamlar 6 ta, qora qalamlar soni qancha?» Javob bunday: «Qora qalamlar soni 4 ta». Agar bu masalada 6 tani 7 taga almashtirilsa, javob bunday bo‘ladi: «Qora qalamlar soni uchta». Shunday qilib, qizil qalamlarning bir soniga qora qalamlarning bir soni mos keladi. Qizil qalamlar sonini x harfi bilan, qora qalamlar sonini y harfi bilan belgilaymiz. Unda x + y- 10 tenglik bajarilishi kerak. Bu tenglikdan y ning qiymatini x orqali belgilaymiz: y = 10 - x. Bu x ning har bir qiymatiga y ning mos qiymatini topishga yordam beradi. (Masalan, agar x = -2 bo'lsa, y- 12, agarx = - bo‘lsa, y = 9~ bo‘ladi.) Qalamlar soni manfiy son bilan ham, kasr son

bilan ham ifodalanmaydi, bu — natural son. Shuning uchun x 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlarnigina qabul qila oladi. x va y orasidagi moslik jadval bilan berilgan:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | l | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | S | 9 |
| y | 9 | S | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Bu jadval X= {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} sonli to‘plamni R haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantirishni aniqlaydi yoki aniqlanish sohasi A^bo'lgan sonli funksiyani aniqlaydi.

1-t a ’ r i f. Umuman XcR to ‘plamdan olingan har bir x songa birorta y son mos keltirilsa, X to ‘plamda sonli funksiya berilgan deyiladi. Funksiya f harfi bilan belgilanadi va y = J{x), xGX kabi yoziladi. X to'plam bu funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi.

Agar x harfi qatnashgan ifoda Xto‘plamdan olingan har qanday x uchun aniq qiymat qabul qilsa, u X to‘plamda funksiyani

**213**

aniqlaydi, bu funksiya har bir ga x nuqtadagi ifodaning qiymatini mos keltiradi.

Masalan, x2 + 3 ifoda berilgan bo‘lsa, unga + 3,

ko'rinishdagi funksiya mos keladi. Bunda turli X to‘plamlarga turli funksiyalar mos keladi: y - x2 + 3, xG funksiya = x2 -f 3, xG Rn funksiyadan farqli. Ulardan birinchisi x=-l da = (-1)2 + 3 = 4 qiymatga ega, ikkinchisi bu nuqtada aniqlan- magan.

Bundan keyin x ni y-fix), x funksiyaning argumenti dey- miz, x argumentning a qiymatiga mos keluvchi funksiya qiymati f(a) kabi belgilanadi. Har bir y -fi funksiya bilan bu funk­siyaning qiymatlaridan, ya’ni f(x) sonlardan iborat yto‘plam bog‘liq. Boshqacha aytganda, Y= {/(x)|xGA'}. yto‘plam ham^(x) bilan belgilanadi. U funksiyaning qiymallari to'plami deyiladi.

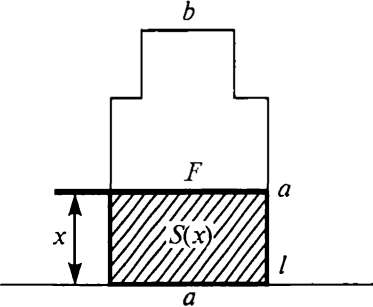
x o‘zgaruvchili har bir ifoda uchun shu ifoda ma’noga ega bo‘ladigan barcha haqiqiy sonlardan iborat eng katta sonli to‘plam mavjud. Bunday to‘plam ifodaning mavjudlik sohasi deyiladi. Masalan, x2 + 3 ifodaning mavjudlik sohasi butun sonlar o‘qidan iborat, yx-9 ifodaning mavjudlik sohasi faqat [9; +°°] nurdir (nomanfiy sonlardangina kvadrat ildizdan chiqarish mumkin).

Shunday bo‘lishi ham mumkinki, ifoda argumentning funksi­yaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lmagan qiymatlarida ham ma’noga ega bo‘ladi. Masalan, kvadratning S yuzi = x2 formu­la bo‘yicha uning tomoni uzunligi x orqali ifodalanadi. x2 ifoda x ning har qanday qiymatida ma’noga ega. Ammo kvadrat tomonining uzunligi doim musbat, shuning uchun funksiyaning aniqlanish sohasi ]0; +oo[ nur bo‘ladi, ya’ni uni =

0 <x< +oo ko‘rinishda yozish mumkin.

Shunday bo‘lishi ham mumkinki, bitta funksiya argumentning

turli qiymatlarida turli ifodalar bilan beriladi. Masalan, F shakldan / va undan x masofada yotuvchi to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq bilan ajratilgan (kesilgan) shakl yuzini 5(x) bilan belgilaymiz (V. 1-rasm).



Rasmdan ko‘rinib turibdiki, x < abo‘lganda ajratilgan shakl yuzi tfxbo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak shak- liga ega. Agar x> a bo‘lib, x < +

V. l-rasm. bo‘lsa, izlanayotgan shakl tomoni a

**214**

**4**

bo‘lgan kvadrat bilan balandligi - - asosi b bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak birlashmasidan iborat. Shuning uchun shakl yuzi a2 + b(x - a)ga teng. Agar x> a + b bo'lsa, shakl yuzi bir xil bo‘lib, a2 + b1 ga teng. Shunday qilib, \*S(x) funksiya quyidagicha

ifodalanadi:

*S(x)* =

bunda

bunda

bunda

*ax*,

a2 + b(x - ),

7 I 7

<r + Zr,

*x<a,*

*a < x<a + b,  
x > a + b.*

Ko‘rib turibmizki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi uchta qismdan iborat va funksiya har bir qismda o‘zining analitik ifodasiga ega.

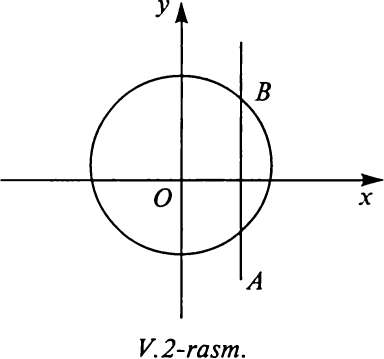
Keltirilgan misollar ko‘rsatadiki, funksiya tushunchasi bilan uning analitik ifodasini bir xil deb hisoblab bo‘lmas ekan. Ana­litik ifodasi bo'lmagan funksiyalar mavjud (masalan, berilgan joyda vaqt momentidagi havo temperaturasi).

2-t a ’ r if. y = fx), xE.X, funksiya deb shunday (x; y)

juftliklar to‘plamiga aytiladiki, xEX da y ya ’ni *(x;J{x)), xEX,*

ko ‘rinishdagi har bir shunday juftlikka koordinata tekisligida koordinatalari x va f(x)bo ‘Igan M nuqta mos keladi. Sunday nuqtalar to ‘plami ham y = f(x), xGX funksiya grafigi deyiladi.

Odatda, funksiya grafigi koordinata tekisligida biror chiziq bilan tasvirlanadi. Biroq har qanday chiziq funksiya grafigi bo‘la olmaydi. Gap shundaki, xGXning berilgan qiymatida y funksi­yaning x ning bu qiymatiga mos keladigan bittagina qiymati mav­jud. Shuning uchun ordinata o'qiga parallel har bir to‘g‘ri chiziqda funksiya grafigining bittadan ortiq nuqtasi yotmaydi. Masalan, aylana biror funksiyaning grafigi bo‘lmaydi — ordinata o‘qiga parallel shunday to‘g‘ri chiziqlar mavjud (V.2-rasm) bo‘lib, ularda aylananing ikkita nuqtasi yotadi.



1-m i so 1. y = x2, xEX = {1; 2; 3;

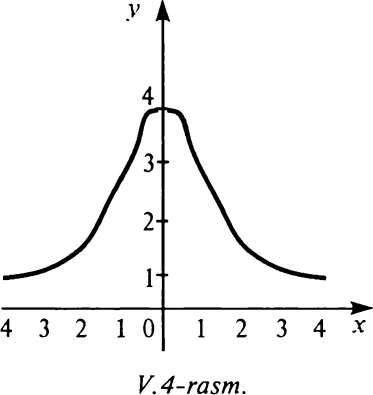
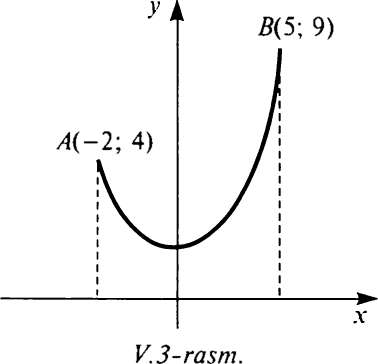
4; 5; 6; 7; 8} funksiya qiymatlari to‘plamini topamiz. Jfto'plam chekli bo'lgani uchun x ning qiymatlarini funksiyaga qiymatlar to‘plamini topish uchun birin-ketin qo‘yib chiqish mumkin:

Y= {1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64}.

**215**

2-m i s o 1. y = x2, — 2 < x < 3 funksiya qiymatlari to‘plamini topa- miz.

V.3-rasmda uning grafigi tasvir- langan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, funksiya [—2; 0] kesmada 4 = (— 2)2 qiymatdan 0 gacha kamayadi, [0; 3] kesmada 0 qiymatdan 9 = 32 qiymat- gacha ortadi. Bundan funksiya qiy- matlarining to‘plami [0; 4] va [0; 9] kesmalar birlashmasidan, ya’ni [0; 9] kesmadan iborat ekan, Y= [0; 9].



3 - m i s o 1 . y = —

l+x

funksiya qiymatlari to‘plamini topa- miz. Agar x2 eng kichik qiymatga ega bo‘lsa, ya’ni x = 0 da (xning boshqa qiymatlarida x2 musbat) funksiya eng katta qiymatni qabul qiladi. Funksi- yaning bu qiymati 4 ga teng. Funk­siya eng kichik qiymatga ega emas, chunki x ning ortishi bilan maxraj

kattalashadi, —kasr esa kamayadi

l+X

va nolga intiladi, lekin nol qiymatni hech ham qabul qilmaydi. Bundan funksiyaning qiymatlar to‘plami ]0; 4] oraliq ekani kelib chiqadi (V.4-rasm).

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Sonli funksiyaga qanday ta’rif beriladi?**

**2. Funksiyaning aniqlanish sonasi va qiymatlar toplami deb nimaga aytiladi? Bu to‘plamlar qanday aniqlanadi?**

**3. Funksiya grafigi nima? Koordinata tekisligidagi istalgan chiziqning funksiya grafigi bo‘la olish sharti qanday?**

**4. To‘g‘ri to‘rtburchak bir tomonining uzunligi 5 m, ikkinchi tomoni** x **m. Bu to‘g‘ri to‘rtburchakning S(m2) yuzi nimaga teng?** a: **va 5(ac) orasidagi moslikning qiymatlar to‘plamini, aniqlanish sohasini, funksiya ifodasining mavjudlik sohasini ko‘r$ating.**

**5. Salimda 5 ta yong‘oq bor, Nigorada undan 5 ta ortiq. Ularning ikkalasida birga nechta yong‘oq bor? Shu masalada ular orasida moslik o‘rnatilgan to‘plamlarni ko‘rsating. Funksiyaning shu mosliklar bilan**

**216**

**aniqlanganligini ko'rsating hamda uning aniqlanish sohasini va qiymatlar to'plamini toping. Bu funksiya ifodasining mavjudlik sohasini toping.**

6**. Quyida grafiklari bilan berilgan mosliklar ko'rsatilgan. Bu mosliklar- dan qaysilari funksiya bo‘lishini aniqlang. Bu mosliklar uchun aniqlanish sohasini va qiymatlar to'plamini toping:**

**a) R= {(1; 2); (3; 4); (5;** 6**); (7;** 8**); (9; 10)};**

**b) /?={(!; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5)};**

**d) R= {(1; 2); (2; 2); (3; 2); (4; 2); (5 ;2)};**

**e) R= {(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5)};**

0 **R= {(1;** 0**); (-**1**;** 0**); (**2**;** 2**); (-**2**;** 2**); (-**2**; -**2**)}.**

**7. y =-Ax. xeA'={-2; -1; 0; 1; 2} funksiya grafigini yasang. Bu funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.**

8**. y = , xGX = {-2; -1; 0; 1; 2} funksiyaning grafigini yasang va**

**qiymatlar to'plamini toping.**

**9.** y **-** 9 **- X2,** xER **, funksiya grafigini yasang va x ning y > 0 bo'ladigan qiymatlar to'plamini ko'rsating.**

**10. Quyidagi munosabatlarning haqiqiy sonlar to'plamida grafigini yasang va ular orasidan funksiya grafiklarini ko'rsating:**

**a) R = {(x; y) \y = x};**

**b) R= {(x; y) \y < x};**

**d) R= {(x; y) |y = |x|};**

**e) R= i(x; y) ||y| = x};**

0 **R= {(x; y) |x = y2}.**

**11. A va B punktlardan bir-biriga qarab piyoda va velosipedchi yo'lga chiqdi. Piyoda soatiga** 6 **km, velosipedchi undan x km ortiq yo'l bosadi. Agar ular 3 soatdan keyin uchrashgan bo'lsa, punktlar orasidagi y masofa nimaga teng? x va y orasidagi moslikni yozing. U funksiya bo'ladimi? Agar velosipedchi soatiga 15 km dan ortiq yo'l bosmasa, funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami qanday?**

**12. Manzura polizdan** 6 **ta bodring topdi. Karim esa undan x ta ortiq topdi. Ular birga topgan y ta bodring soni nimaga teng? Agar Karim 15 tadan ortiq bodring topmagan bo'lsa, x va y orasidagi moslikni yozing va qiymatlar to'plamini toping.**

**Bu moslikning grafigini chizing. Bu grafik** 8**-masala grafigidan nima bilan farq qiladi?**

1.2. To‘g‘ri proporsionallik, chiziqli bog‘liqlik va ularning gra­fiklari. Ko‘pincha, bittasi ikkitasining ko‘paytmasiga teng boigan uchta kattalik qaraladi. Masalan, tekis harakatda yo‘l vaqt bilan harakat tezligining ko‘paytmasiga teng, molning narxi uning

**217**

tannarxi bilan miqdorining ko‘paytmasiga teng, to‘g‘ri to‘rtbur- chakning yuzi uning tomonlari uzunliklarining ko‘paytmasiga teng. Bu kattaliklarning matematik bogiiqligi y = zx tenglik bilan ifo- dalanadi. Agar x yoki z o‘zgaruvchilardan bittasi o‘zgarmas bo‘lsa, masalan, z = kx bo‘lsa, y = kx funksiya hosil bo‘ladi. Bunday holda y kattalik x kattalikka to‘g‘ri proporsional deyiladi. Agar y

kattalik x ga to‘g‘ri proporsional bo‘lsa, ^ kasr jcva y ning mos

qiymatlarining hamma juftligi uchun ((0; 0) juftlikdan tashqari) bitta k qiymat qabul qiladi. Bu qiymat proporsionallik koeffitsiyenti deyiladi.

Proporsionallik koeffitsiyentini topish uchun qiymatlarning bir- biriga mos (x0; y0) juftligidan ((0; 0) juftlikdan tashqari) bittasini

bilish yetarlidir. y = kx tenglikdan k = ^ ni topamiz. Masalan,

x0

tovarning narxi o‘zgarmas bo‘lganda, uning bahosi tovarning soniga (miqdoriga) proporsional, proporsionallik koeffitsiyenti tovarning narxidir. Tovarning narxini topish uchun uning biror miqdorining bahosini bilish kerak. Masalan, agar 5 kg mahsulot 15 so‘m tursa, uning narxi 15:5 = 3 so‘m (1 kg) bo‘ladi.

Biz bilamizki y = kx tenglamaning grafigi koordinata boshi- dan o‘tuvchi va burchak koeffitsiyenti &bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdir. Shunday qilib, k proporsionallik koeffitsiyenti y = k funksiya grafigining burchak koeffitsiyenti bilan bir xil ekan.

To‘g‘ri proporsionallikka qaraganda kattaliklar orasidagi chiziqli bog‘liqlik umumiyroqdir. Misollar qaraymiz.

Taksida yurish haqi quyidagi qoida bo‘yicha aniqlanadi: har bir kilometr uchun 20 so‘m va taksiga har bir o‘tirish uchun 20 so‘m to‘planadi. Boshqacha aytganda, x km yo‘l yurish uchun y = 20x + 20 formula bo‘yicha haq to‘lanadi. Bu formula y = kx + b ko‘rinishdagi umumiy bog‘liqlikning xususiy holidir. Bunday funksiya chiziqli funksiya deyiladi.

k koeffitsiyentning qiymatini topish uchun bir-biriga mos qiymatlarning ikki juftini bilish kerak. Masalan, (x,; y,) va (x2; y2). Bu ikkala juftlik y = kx + b shartni qanoatlantirgani uchun y, = kxl + b va y2 = kx2 + b tengliklarning ikkalasi ham rost. Bulardan y2 - y, = ~kx2 - kx, = k(x2 - x,), shuning uchun

x2~x\ 218

Masalan, agar poyezd A va B shaharlar orasidagi stansiyadan chiqib, harakatlana boshlagandan 2 soat keyin A dan 270 km masofada, harakat boshlagandan 5 soat keyin A dan 510 km ma- sofada bo‘lsa, harakat tezligi

**510-270 on ,, ,**

v = = 80 (km/soat)

bo‘ladi. Umuman to‘g‘ri chiziqli va tekis harakatlanayotgan jism- ning [/,, t2] vaqt oralig‘ida x, nuqtadan x, nuqtaga o‘tgandagi tezligi

v = ^L h-i\

formula bilan ifodalanadi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Teskari proporsionallik funksiyasi ta’rifi qanday? Teskari proporsional bog'langan miqdorlarga misol keltiring.**

**2. Agar chiziqli funksiyaning k koeffitsiyenti va x, nuqtadagi yt ning qiymati berilgan bo'lsa, uning ifodasini yozing:**

**a) k = 2, x, = -3, y, = 4; b) k = -1; x, =** 6**, y, = -2;**

**d) k = |, x, = -7, y, = -3; e) A: = - j, x, = 4, y, = 2.**

**Bu funksiyalarning grafiklarini chizing.**

**3. Chiziqli funksiyaning x, va x**2 **nuqtalardagi y{ va y, qiymatlarini bilgan holda uning ifodasini toping, bunda:**

**a) x, = 3, x**2 **= 5, y, = 4, y, = 0;**

**b) x, = -**6**, x**2 **= 3, y, = 1, y, = 19.**

**4. A stansiyadan B stansiyaga qarab yo‘lga chiqqan poyezd a soatdan keyin B stansiyadan 5, masofada, b soatdan keyin 5**2 **masofada boMgan. Stansiyalar orasidagi masofani va poyczdning tezligini toping.**

1.3. Teskari proporsionallik va uning grafigi. Biz, agar uchta kattalik y = zx- munosabat bilan bog‘langan bo‘lsa, z ning tayin qiymatida y kattalik xga proporsionalligini ko‘rdik. Endi y= k deb olamiz. U holda x va z lar k = zx munosabat bilan bog‘langan, ya’ni Z = x va z lar teskari proporsional deyiladi. Masalan,

bosib o‘tilgan yo‘l o'zgarmas bo‘lsa, tezlik va vaqt vt = k munosa­bat bilan bog‘langan va shuning uchun teskari proporsionaldir.

**219**

Xuddi shuningdek, agar mahsulotning narxi o'zgarmas bo‘lsa, uning tannarxi va miqdori teskari proporsional, to‘g‘ri to'rtbur- chakning yuzi o‘zgarmas bo‘lsa, uning uzunligi va balandligi (eni va bo‘yi) teskari proporsional.

Teskari proporsionallik koeffitsiyenti k ni topish uchun to‘g‘ri proporsionallikdagidek, xva y ning mos qiymatlaridagi bir jufti- ni topish yetarlidir.

y = - funksiya xossalarini o‘rganamiz va grafigini yasaymiz. k X

- ifoda x ning x -0 dan tashqari hamma qiymatlarida aniqlangan.

x k

k >0 bo‘lsin. U holda x ning musbat qiymatlarida - kasr maxraji

o‘sishi bilan uning qiymati kamayadi, cheksiz kattalashganda, kasr qiymati nolga yaqinlasha boradi. Masalan, 2, 2000000

boTganda 3/ < = 0,000001 boTadi, 2000000000

bo‘lganda y < 0,000000001 bo‘ladi. x maxraj nolga yaqinlashganda

£

- kasr qiymati cheksiz kattalasha boradi. Masalan, 2,

0 < x <0,002 boTganday < —= 1000, 0 < <0,000002 boT­

ganda y >1000000 boTadi.

x ning manfiy qiymatlariga mos kelgan grafikning bir qismini hosil qilish uchun y = - funksiya grafigi A/(x0; y0) nuqta bilan birga N(-x0; —y0) nuqtani ham o‘z ichiga olishini hisobga olish kerak.

Bu ya =— boTganda -y0 = — dan kelib chiqadi. Ammo 0;

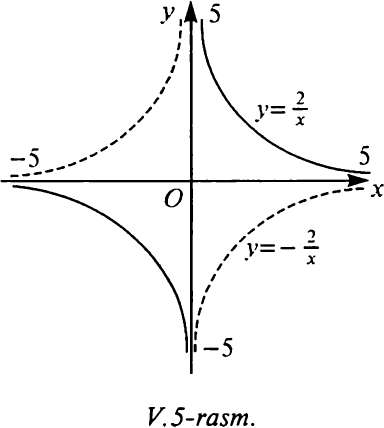
x0 "\*0

>0) va N(-x0\ -y0) nuqtalar koordinatalar boshiga nisbatan sim-

metrik. Shuning uchun y = — funksiyaning grafigi koordinatalar

' ^

boshiga nisbatan simmetrik.



y = - \* funksiya grafigiy = |

funksiya grafigidan undagi har bir nuqta uchun y ning ishorasini o'zgartirish bilan hosil boTadi. Bu grafiklar abssissalar o‘qiga nisbatan bir-biriga simmetrik. 93-rasmda

y = - funksiya grafigi (qora chiziq

x *2*

bilan) va **y** = ~~ funksiya grafigi (shtrix bilan) tasvirlangan.

220

Agar k > 0 bo‘lsa, y = ~ funksiya grafigi I va III choraklar- da, x < 0 bodsa, II va IV choraklarda joylashadi. x cheksizlikka

intilganda y = -- egri chiziq abssissalar o‘qiga yaqinlashadi, le- kin u bilan kesishmaydi. Abssissalar o‘qi bu egri chiziqning go- rizontal asimptotasi deyiladi. x nolga intilganda y = - egri chiziq ordinatalar o'qiga yaqinlashadi, lekin kesishmaydi. Ordinatalar o‘qi bu egri chiziqning vertikal asimptotasi deyiladi. Asimptota- larning yanada aniqroq ta’rifi 4-§, 5-bandda beriladi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**Funksiyalar grafiklarini yasang:**

**a)v = -^; b)y = |; c)y = ||; d)V = ^.**

1.4. Funksiyalar kompozitsiyasi (murakkab funksiya). Kub mas- sasi m-qV formula bo‘yicha hisoblanadi, bunda V — kubning hajmi, q — kub yasalgan materialning zichligi. Kub hajmi V- x3 formula bo‘yicha hisoblanadi (bunda, x — kub tomonining uzunligi), shuning uchun uning massasini m - qx3 formula bo‘yicha hisoblash mumkin. x va m kattaliklar bir-biri bilan shunday bog‘langanki, x ning berilgan qiymati bo‘yicha awal Vni topamiz, keyin esa V ning qiymati bo‘yicha m ni topamiz. Demak, x ning har bir qiymatiga m ning aniq qiymati mos keladi, ya’ni m kattalik x ning funksiyasidir. Bunday funksiya berilgan funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi, bunda V oraliq argument deyiladi.

Funksiyalar kompozitsiyasi umumiy ko‘rinishda bunday ta’- riflanadi. y-f{x), xElX va x&<p(t), t&T funksiyalar berilgan bo‘lsin, bunda x = cp(t) funksiyaning har bir qiymati x to‘plamga tegishli. U holda t ning berilgan qiymati bo‘yicha xEX ning qiymatini, x ning qiymati bo‘yicha y ning qiymatini topamiz. Shu bilan yangi funksiya ta’riflanadi, bu funksiya har bir /Ef ga birorta y ni mos keltiradi. Bu funksiya y - fix) va x = <p(t) funk­siyalarning kompozitsiyasi deyiladi va y - f\<p{t)\, /£ T ko‘rinishda yoziladi, ba’zan bunday belgilanadi:

t—-—^ x—

221

1- m i s o 1. y - x2 + 1 va x = 3t - 4 bo'lsin. Bu funksiyalar kompozitsiyasining ifodasini hosil qilish uchun y ifodasida x ning 3f- 4 ga almashtirish kerak: y = (3t - 4)2 + 1.

2- m isol. y = Vx va x = -t2 - 1 bo‘lsin. Bunday holda funk­siyalar kompozitsiyasi aniqlangan emas, chunki x = -t2 - 1 funk- siyaning hamma qiymatlari manfiy, x = Vx funksiya esa x ning nomanfiy qiymatlari uchun aniqlangan.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Funksiyalar kompozitsiyasi (murakkab funksiya) deb nimaga aytiladi?**

**Misollar keltiring.**

**2. Qanday funksiyalar kompozitsiyasi mavjud bo'lmaydi?**

**3. Funksiyalar kompozitsiyasini toping:**

**a) y = x**3 **va x = t1 + 4; b) y = x2 + 4 va x = /•’;**

**d) y = (x**3 **+ l**)3 **va x = r4; e) y = X1 va x = + l)3.**

**4. y = -J4 -x va x =** 8 **+ t1 funksiyalarning kompozitsiyasi mavjudmi?**

**5. y=**8**+x**2 **vax = \/4-1 funksiyalarning kompozitsiyasi mavjudmi?**

6**. Kub hajmi V ni uning sirti yuzi J orqali ifodalang.**

1.5. Teskari funksiya. Piyoda 5 km • soat tezlik bilan harakat qiladi. U 100 km yo'lni piyoda o'tishi kerak. Piyodaning harakat boshlanganidan t soatdan keyin qolgan yo‘li

S= 100 - 5t, 0 < t < 20 (1)

kabi ifodalanadi (0 < t < 20 tengsizlik piyodaning butun yo‘lga 20 soat sarflashini ko'rsatadi). (1) formula [0; 20] oraliqqa tegishli har qanday t bo'yicha V ni topishga yordam beradi.

Teskari masala — agar 5 km yo‘l qolgan bo‘lsa, harakat bosh- langandan beri qancha vaqt o'tganligini topish uchun (1) teng- likdan t ning qiymatini topish kerak:

t = , 0 < ^<100. (2)

(2) funksiya (1) funksiyaga teskari.

Teskari funksiyaning umumiy ta’rifmi beramiz.

y=f{x) funksiya X to'plamni R haqiqiy sonlar to'plamiga inyektiv akslantirish bo‘lsin (ya’ni x ning turli qiymatlariga y ning

222

turli qiymatlari mos keladi). y=Ax), funksiyaning qiymatlar to‘plamini Ybilan belgilaymiz. U holda istalgan y#GK uchun shunday yagona qiymat xqGX topiladiki, bo'ladi. Bu

bilan Y ning X ga akslanishi ta’riflanadi, ya’ni Bunday funksiya y=ftx), xGX funksiyaning teskari funksiyasi deyiladi. Teskari funksiya ifodasini topish uchun y = f(x) tengla- mani xga nisbatan yechish kerak, bunda to‘plamga tegishli bo‘lgan yechimlargina olinadi. Agar y=J{x), xGX akslantirish inyektiv bo‘lmasa, teskari funksiya mavjud bo‘lmaydi, chunki bitta y0Gf ga x ning turli qiymatlari mos kelishi mumkin.

Mi sol. y = x2, xEXfunksiya teskari funksiyaga ega emas, chunki, masalan, x = 4 va x = -4 qiymatlarga funksiyaning bitta qiymati mos keladi: 42 = (-4)2 = 16, shuning uchun = 16 qiymat bo‘yicha x ning yagona qiymatini topib bo‘lmaydi: x = -4 ham bo‘lishi mumkin, x = -4 ham bo‘lishi mumkin.

Agar biz y = x2, xGR funksiyani olsak, y ning turli qiymatlariga x ning turli qiymatlari mos keladi va shuning uchun teskari fun­ksiya aniqlangan.

Bu teskari funksiya x = Jybilan belgilanadi va x ni dan olingan arifmetik kvadrat ildiz deyiladi. Shunday qilib,x = ^/y yozuv y = x2 ni anglatadi, bunda x > 0, > 0.

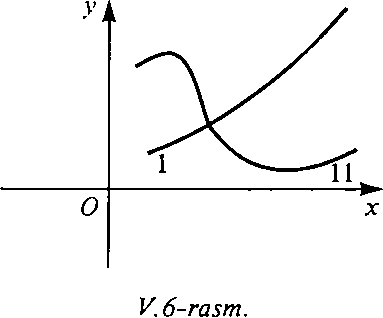
**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Teskari funksiya qanday ta’riflanadi?**

**2. Ushbu funksiyalarga teskari funksiyalarni toping: a)y=2x+6, xEX; b) y=-2x-%,xER;**

**d ) y = x, —4 < x <** 6**; e) y = -x2, 0<x< 5.**

**Berilgan funksiyalar va teskari funksiyalar grafiklarini chizing.**



**3. To'gTi to'rtburchakning perimetri 20 m, yuzi S m2. To‘g‘ri to‘rtbur- chak asosi x ning uzunligini toping. Topilgan javob bir qiymatlimi? x ning 5 orqali ifodasini toping.**

**4. V.**6**-rasmda ikki funksiya grafigi berilgan. Ulardan qaysilari teskari funksiyaga ega?**

**5. Kubning x tomoni uzunligini uning sirti yuzi S orqali ifodalang.**

**223**2-§. FUNKSIYA GRAFIGINI YASASH

2.1. «Nuqtalar bo‘yicha» grafik yasash. y=f{x), funk-

siya grafigi cheksiz ko'p nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘lgani uchun biz uni «aniq» tasvirlay olmaymiz, balki bunday grafik eskizinigi- na chiza olamiz. Kef pincha shu grafikka tegishli bir nechta nuqtani topib va ularni qo‘lda silliq chiziq bilan tutashtirib, grafik chiziladi. Buning uchun oldin bu funksiyaning qiymatlar jadvali tuziladi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**Funksiya grafigini yasashning qanday usullarini bilasiz?**

1.

2.

3.

**Funksiya grafigini nuqtalar bcfyicha yasash deganda nimani tushunasiz?**

**Ushbu funksiyalar grafigini nuqtalar bo'yicha chizing:**

**a) y = (x-1)3; b) y = x} - 1;**

**d) *y = x3* ;**

g) *y=T*

1 . X2-4.

**e) *y =***

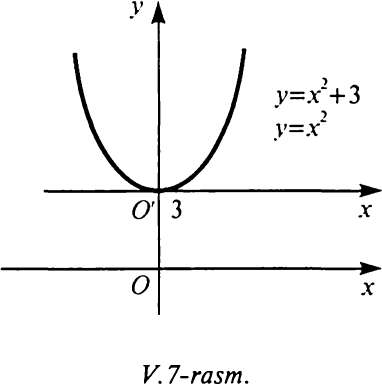
x +4

2.2. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish bilan grafik- lar yasash. Kcfpincha funksiya grafigini yasash uchun koordinata­lar sistemasi o‘zgartiriladi va yangi koordinatalar sistemasida beril- gan funksiya grafigi yasaladi. Masalan, y + 3 funksiya grafigini yasaylik. Buning uchun y - x2 + 3 tenglikni 3 = ko‘rinishda

yozamiz va X - x, Y= y -3 deb olamiz. Koordinatalarni bunday almashtirish dekart koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirishga mos keladi, bunda koordinatalar boshi (0; 3) nuqtaga o‘tadi. Koordinatalarning yangi sistemasida Y - x2 funksiyani hosil qilamiz, bu funksiyaning grafigi paraboladir. Shunday qilib, 3 funksiya

grafigini yasash uchun koordinatalar boshini 0,(0; 3) nuqtaga ko‘chirish kerak va koordinatalarning yangi sistemasida y

parabolani chizish va chizilgan gra- fikni koordinatalar sistemasi bilan birgalikda ko‘chirish kerak (V.7- rasm).



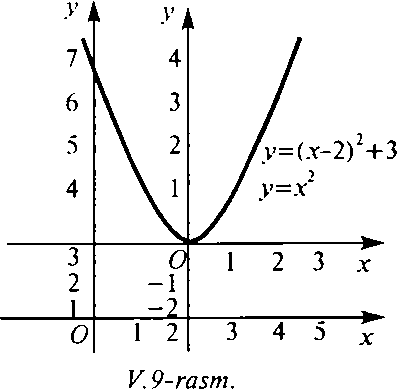
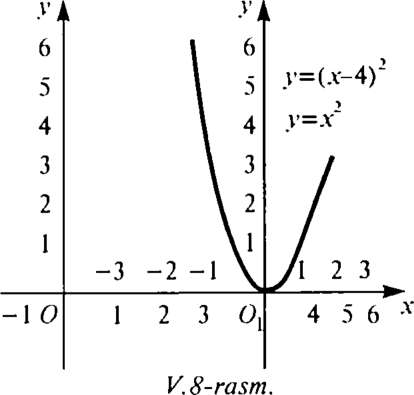
1-m i s o 1. y 4)2 funksiya

grafigini yasaylik. 4, Y—y

desak, ya’ni koordinatalar boshini 0,(4; 0) nuqtaga ko‘chirsak, Y tenglama hosil qilamiz. Demak, ko­ordinatalar boshini 0,(4; 0) nuqtaga ko‘chirish va koordinatalarning yan- 224

gi sistemasida y = parabolani chizish kerak yoki, boshqacha aytganda, y = x2 parabolani chizib, uni o'ng tomonga 4 birlik ko'chi- rish kerak (V.8-rasm).

2-misol. y -2)2 + 3 funksiya grafigini chizamiz. Yuqo- rida aytilganlarga ko'ra u quyi- dagicha: koordinatalar boshini 0,(2; 3) nuqtaga ko‘chirib, xOxy koordinatalar sistemasida y parabolani chizamiz (V.9-rasm).



Endi grafiklarni parallel ko‘chi- rishni umumiy ko‘rinishda qaray- miz. y -J\x) funksiya grafigi beril- gan boisin va

y=Ax~a) + b (1)

funksiya grafigini chizish kerak.

y = Ax - a) + bo‘rniga y - Ax ~ a) ni yozish mumkin.

| X=x - a, 1 Y=y-b

(2)

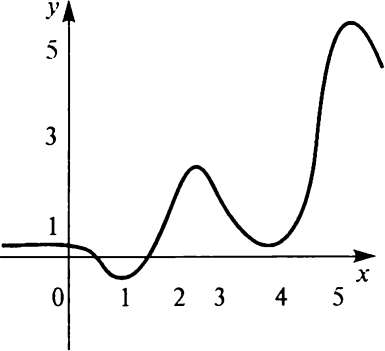
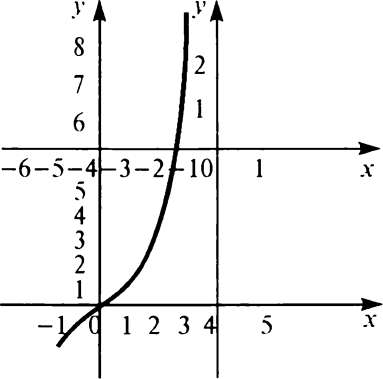
desak, bu tenglama Y=AX)ko‘rinishni oladi. (2) tenglik 0(0; 0) nuqta A{a\ b) nuqtaga o‘tadigan, koordinata o‘qlarining yo‘na- lishi o‘zgarishsiz qoladigan koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirishni tavsiflaydi. Shunday qilib, parallel ko‘chirishni baja- rib, koordinatalarning yangi sistemasida Y f(x) funksiya grafi­gini chizish kerak. Boshqacha bunday ifodalash mumkin: y - f(x) funksiya grafigini olib, 0(0; 0) nuqtasini 0fa; b) nuqtaga o‘tkazadigan parallel ko‘chirishda uning obragini topish kerakki, (1) tenglamada a ning oldida «minus» ishorasi turibdi.

3-mi sol. y -(x + 4)3 - 6 funksiya grafigini chizamiz. Bu funksiya y - Ax- a) + bko‘rinishga ega, bunday(x) = b= -6. Demak, koordinatalar boshini 0,(-4; -6) nuqtaga ko‘- chirish va koordinatalarning yangi sistemasida y - xl grafikni chi­zish kerak (V. 10-rasm).

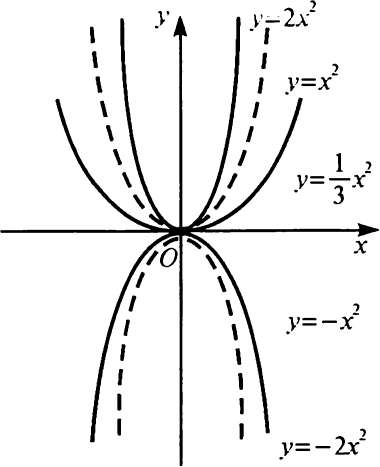
225

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. Koordinatalar sistcmasini parallel ko‘- chirish orqali qanday funksiyalar grafik- larini vasash mumkin bo'ladi? Bunday funksiyalarning umumiy ko'rinishini ayting va parallel kochirish yo'nalishini ko'rsating.**



***V.ll-rasm.***



***V. 12-rasm.***

***V 10-rasm.***

**2. V.ll-rasmda y = f(x)funksiya grafigi berilgan. Quyidagi funksiyalarning gra- fiklarini chizing:**

a) y=Ax~2);

**b) y = Ax)** **- 2;**

d) y=Ax - 1) + 3;

c) y = Ax + 3) - i;

0 y=Ax+ 1) + 3.

2.3. Kvadratik funksiyaning grafigi. y - 2x2 funksiya grafigining har bir ordinatasi y = funksiya grafigining unga mos ordinatasidan ikki marta katta. Shuning uchun y = 2x2 funksiya grafigini chizishda y = x2 parabolaning har bir ordinatasini ikki marta orttirish kerak (V. 12-rasm).

Shuningdek, y = Ix2 funksiya

grafigini chizish uchun y = x2 pa­rabolaning har bir ordinatasini uch marta kamaytirish kerak.

y = -x2 funksiya grafigi abssis- salar o'qiga nisbatan y parabo- laga simmetrikdir, ya’ni y - -x2 funksiya grafigini yasash uchun y = x2 funksiya grafigini abssissalar o‘qiga nisbatan akslantirish kerak (V. 12-rasm).

Endi umumiy y = ko‘rinishdagi kvadratik funksiya­ning grafigini yasashni ko‘rsatamiz. Avval a koeffitsiyentni qavsdan

226

tashqariga chiqaramiz, keyin qavs ichidagi ifodani to‘la kvadratga to'ldiramiz:

y=a\x~ - x +

' a

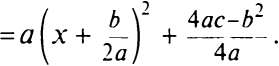
***4 a-***

, fc2 \

7 , 0 , 1

x +2 x +

***2 a***



*b2*

**a 4a"**

Biz y — a(x - a)2 + (5ko‘rinishdagi tenglamani hosil qildik,

bunda qisqalik uchuna= — va = olindi. Bundan

***2a 4a***

y = ax2 + bx + ckvadrat funksiyaning grafigi quyidagicha yasali-

shi kelib chiqadi:

a) koordinatalar boshi Ox{a\ /?) nuqtaga ko'chiriladi. Bunda

b) koordinatalarning yangi sistemasida ***Y*** — X1 parabola ;

d) yangi ordinatalarning hammasi | ‘paytiriladi, agar

a < 0 bo ‘Isa, hosil bo ‘Igan grafik yangi abssissa o ‘qiga nisbatan akslantiriladi.

Yasashni mana bu tartibda ham bajarish mumkin:

a) y - *x2*parabola *yasaladi*;

b) grafik ordinatasi \ e \ *ga* ko ‘paytiriladi, agar ‘Isa, grafik abssissa o‘qiga nisbatan akslantiriladi',

d) 0(0; 0) nuqta O fa; ft) ga o'tadigan qilib hosil bo‘Igan gra­fik ko‘chiriladi, bunda — *\*ac~b* .

***J la r 4a***

Mi sol. y- -2x2 + \2x - 16 funksiya grafigini yasaymiz.

*y =* -2(x2 *-* 6x *+* 8) = -2[(x2 8] =

= -2[(x - 3)2 - 1] = - 3)2 + 2.

Endi koordinatalar boshi 0,(3; 2) nuqtaga ko'chiriladi, ko­ordinatalarning yangi sistemasida parabola yasaladi, bu

parabolaning hamma ordinatalari 2 ga ko'paytiriladi va hosil bo'lgan egri chiziq 0{X o‘qqa nisbatan akslantiriladi. Shuning- dek, y - x2 parabola yasaladi, uning ordinatalari 2 ga ko'payti- riladi, hosil bo'lgan egri chiziq abssissalar o'qiga nisbatan akslan­tiriladi va 0(0; 0) nuqta 0,(3; 2) nuqtaga o'tadigan qilib ko'chi­riladi. Yasashning bu ikkala usuli V. 13-rasmda tasvirlangan.

**227**

***V. 13-rasm.***

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Kvadratik funksiya grafigini yasashning qanday usullari bor? Ularni izohlang.

2. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

a) **y** = **x2** - **Ax** +6; b) **y = x**2 - **3x** + 4;

**d) *y = 2x2* +** 8**x + 3; c) *y = -2x2 - Ax +*** 8**.**

2.4. Kasr chiziqli funksiya grafigi. y = funksiya ikkita

chiziqli funksiyani bir-biriga bo‘lish natijasida hosil bo‘ladi, shuning uchun u kasr chiziqli funksiya deyiladi. Bunday funksiyalarning xususiy hollari bilan tanishamiz. Agar c — 0, d \* 0 boisa, kasr chiziqli funksiya y = -x + - ko‘rinishni oladi, ya’ni chiziqli

funksiyaga aylanadi (l-§, 1.2-bandga qarang). a = d-0, c^O

boiganda kasr chiziqli funksiya y = ^ ko‘rinishni |bunda k = -j

oladi, ya’ni teskari proporsionallikka keltiriladi (l-§, 1.3-band).

Agar c \* 0, d \* 0, ammo ad-bc = 0 bo‘lsa, ~ ^ bo‘ladi, bu holda

a = ck, b = dX, bunda A = “ = ^ va shuning uchun f = ^ ■

c 0, d = 0, ad - be = 0 boiganda ham shunday boiadi. Bu

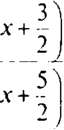
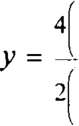
hollarning hammasida funksiya grafigi qanday boiishini bilamiz. c \* 0, ad - be \* 0 boiganda kasr chiziqli funksiyaning grafigi teskari proporsionallik grafigini parallel ko‘chirish yordamida hosil boiishini ko‘rsatamiz. Awal misolga qaraymiz.

228

1-m i s o 1. y = —'— funksiya grafigini yasaymiz. Suratda 4 ni,

2x + 5 5

maxrajda 2 ni qavs tashqarisiga chiqaramiz, keyin suratda v ni qavs ichida qo‘shamiz va ayiramiz:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 17 ^ | 1 5 | 3' |
| X H— | — + | — |
|  | Li 2 J | 1 2 | 2 |

2=2 +

X + --

Shunday qilib, y -2 = — % yoki + ^ = 2 = Y desak,

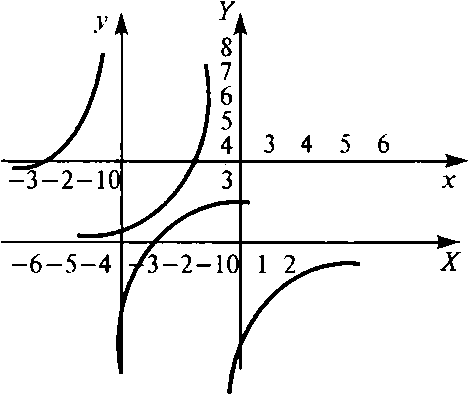
***x + -*** 2

Y = ~—. Shuning uchun v = IrVtf funksiya grafigi v = — funk-

x 2x + 5 x

siya grafigini X = x + , y = y -2 formula bilan berilgan parallel ko‘chirish yordamida hosil bo‘ladi. Boshqacha aytganda, grafik 0(0; 0) nuqtani nuqtaga ko‘chirish yordamida hosil

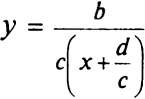
bo‘lgan. Bu grafik V. 14-rasmda tasvirlangan.



*V.* ***14-rasm.***

Masala umumiy holda ham shunday yechiladi. = 0, 0

bo‘lsa, funksiya y = —b— ko‘rinish oladi. Bu holda maxrajda c ni qavs tashqarisiga chiqarish kifoya:



229

Agar jc + - = A\ y = Y deb, ni bilan belgilasak, grafigi

c k C

bizga ma’lum bo'lgan Y =-- funksiyani hosil qilamiz. Bundan b ^

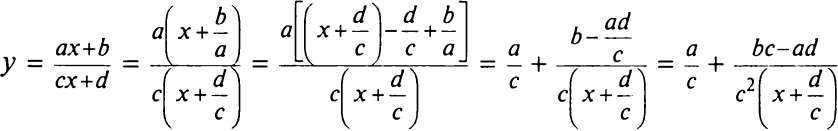
y = —funksiya grafigini yasash uchun abssissalar o‘qi bo‘ylab

d k

-- birlikka parallel ko‘chirish, keyin Y = - funksiya grafigini

yasash kerak, bunda k = ^. Endi 0 va 0 bo'lsin. U holda

funksiyani quyidagicha o‘zgartiramiz:



X = x + — , Y *=y-~, k = — ~*deymiz. Unda *Y = ^* funk-

***c C C A***

siya hosil bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya grafigini yasash uchun koordinatalar boshini O, nuqtaga ko‘chiramiz va teskari

proporsionallikning grafigini chizamiz, bunda k =

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| '2x-4 \* | b)> = | -2x+6 ’ | d );• = |
| jt-1 .  x+15 | f | \_ 3x-4 . = 2x-2 ’ | g)v = |

Kasrli chiziqli funksiya grafigini qaysi usullarda yasash mumkin? Bu usullami izohlang.

Kasr chiziqli funksiyalar grafiklarini yasang: v 1 , v 1 5 . 4

**a *)y***

e)y =

2.x-10 ’

x+4 2x+3 '

2.

3-§. KETMA-KETLIKLAR

3.1. Sonli ketma-ketliklar. Har kuni kunduzi soat 12noda havo temperaturasini yozib boramiz. Ma’lum tartibda qandaydir son- lar yoziladi — awal bugungi temperatura, keyin ertangi tempe- ratura va h. k.

Massasi bir sutkada ikki marta kamayadigan radioaktiv mod- daning bir bo‘lagini olib, har kungi massasini yozib borsak, ma’lum tartibdagi sonlar hosil bo‘ladi, masalan:

230

128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, ... .

Ikkala holda ham har bir n natural songa kuzatish kunlarida- gi ma’lum son mos keladi (birinchi holda — havo temperaturasi, ikkinchisida — radioaktiv moddaning massasi; bunda biz har qanday kuzatish chekli ekanligini hisobga olmay, kuzatishlar seriyasi cheksiz deb hisoblaymiz). Ammo bunday moslik N natural sonlar to'plamida berilgan funksiya bo‘lib, R haqiqiy sonlar to‘plamida qiymatlar qabul qiladi. Bunday funksiyalar sonli ketma- ketliklar deyiladi. Shunday qilib, quyidagi ta’rifni kiritamiz:

(1)

1 -t a ’ r i f. N natural sonlar to ‘plamida berilgan bo ‘lib, sonli qiymatlar qabul qiladigan y - f(n) funksiya sonli ketma-ketlik deyi­ladi.

Odatda, sonli ketma-ketlik f{n) bilan emas, balki av ..., an, ... yoki qisqacha (an) bilan belgilanadi. Sonli ketma-ketliklarga misollar:

a) barcha juft natural sonlar ketma-ketligi: 2, 4, 6, 8, ... ;

b) barcha tub sonlar ketma-ketligi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ;

d) 2 sonning darajalari ketma-ketligi: 2, 4, 8, 16, 32, ... .

a) va d) ketma-ketliklar, shuningdek, (1) ketma-ketlik uchun

n o‘zgaruvchili ifoda mavjud bo‘lib, bu ifoda n ning berilgan qiymatlari bo‘yicha an ning qiymatini topishga yordam beradi. Masalan, a) ketma-ketlik uchun bu ifoda an = 2n ko‘rinishga ega: n - 1 desak, 2 • 1 sonli ifoda hosil bo‘ladi, bu ifodaning qiymati ikkiga teng, ya’ni a) ketma-ketlikning birinchi hadiga teng; n = 4 desak, 2 • 4 = 8, bu a) ketma-ketlikning to‘rtinchi hadiga teng va h. k. b) ketma-ketlik uchun a ifoda a — 2" ko‘rinishni oladi. d) ketma-ketlik uchun ifoda mavjud emas , n tub sonni ifodalovchi formula yo‘q.

Ketma-ketlik n hadining ifodasi (yoki boshqacha aytganda umumiy hadi) berilgan bo‘lsa, n ning istalgan natural qiymatida bu hadning qiymatini topish oson. Masalan, umumiy hadi n2 bo'lgan ketma-ketlikning dastlabki beshta hadi l2, 22, 32, 42, 52, ya’ni 1, 4, 9, 16, 25 bo‘ladi. Biroq ketma-ketlikning berilgan dastlabki hadlari bo'yicha bu ketma-ketlikning umumiy hadi ifodasini bir qiymatli topib bo'lmaydi.

Masalan, an - n2 + (n - 1 )(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) desak ham, 1, 4, 9, 16, 25 sonlari hosil bo‘ladi.

231

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?

1.

2.

**3.**

**4.**

O'rta maktabda siz qanday sonli kctma-ketliklar bilan tanishgansiz? Sonli ketma-ketliklarga misollar keltiring.

Ketma-ketliklarning dastlabki beshta hadini yozing:

a H =

b) a„ =

n **-1**

«J + 1

**d)a„ =**

(-1)" .  
2"

e)a„ = 1 +(-l)-; f) **a„** = #i[l + (-1)" ].

5. Ketma-ketlikning dastlabki bir nechta hadini bilgani holda umumiy hadi formulasidan bittasini toping: a) 1, 3, 5, 7, 9, ... ; b) 3, 7, 11, 15, 19, ... ; d) 3, 9, 27, 81, 243, ...; e) 2, 5, 10, 17, 26, ... ; **^1111** **1** 0 2 ’ 4’ 8’ 16 ’ 32 ’ " ' '

3.2. Rekurrent ketma-ketliklar. Har doim ham ketma-ket- liklar umumiy hadining ifodasi bilan berilavermaydi. Ba’zan dast­labki n ta hadi qoidasi ko‘rsatiladi. Bunday ketma-ketliklar uchun an+l ni au ... a„ orqali ifodalovchi formuladan tashqari bitta yoki bir nechta dastlabki hadini ko‘rsatish zarur. Bunday ketma-ket­liklarning hadlarini hisoblashda biz har gal orqaga qaytgandek bo‘lamiz. Shuning uchun ular qaytma yoki rekurrent ketma-ket­liklar deyiladi (lotincha recurerro — qaytish demakdir).

Rekurrent ketma-ketliklarga oddiy misol qilib arifmetik va geometrik progressiyalarni aytish mumkin.

2-t a ’ r i f. Ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi o ‘zidan ol- dingi hadga bir xil sonni qo'shish bilan hosil qilmgan sonli ketma- ketlik arifmetik progressiya deyiladi.

Qo‘shiladigan son progressiyaning ayirmasi deyiladi va d bilan belgilanadi. Shunday qilib, agar ar av ..., an, ... arifmetik progressiya bo‘lsa, har qanday n uchun an+i = an + d yoki an+1 -an=d tenglik bajariladi. Masalan, juft sonlar ayirmasi 2 bo‘lgan arifmetik progressiya hosil qiladi.

d > 0 bo‘lganda progressiyaning har bir keyingi hadi oldingi- sidan katta, ya’ni u monoton o‘sadi;

d < 0 bo‘lganda progressiya monoton kamayadi, ya’ni uning har bir keyingi hadi oldingisidan kichik.

Arifmetik progressiyani berish uchun uning ayirmasidan tashqari birinchi hadini, ya’ni a, ni berish kerak. U holda ikkin­chi had a2 = ax + d, formula bo‘yicha, uchinchi had a3 = a2 + d formula bo‘yicha va hokazo topiladi. Ammo hisoblashning bu

232

usuli uncha qulay emas, chunki ko‘p marta qo'shishlarni talab qiladi. Shuning uchun arifmetik progressiyaning /7-hadini n orqali to'g'ridan to‘g‘ri ifodalaydigan formula keltirib chiqaramiz. Buning uchun quyidagilarni hisobga olamiz:

a2 = a, + d,

a2 = a2 + d = (o, + d) + d = o, + 2d,

a4 = o3 + d = (a, + 2z/) + d = a{ +3d.

Bu tengliklardan tabiiy ravishda har qanday n uchun

an = a^ +{n-\)d (1)

formulaning bajarilishi kelib chiqadi. Uni induksiya bo‘yicha isbotlaymiz. n = 1 bo'lganda (1) tenglikning o'rinliligi aniq, chunki bu qiymatdao, +(1-1 )d-a. Endi birorta k natural qiymat uchun, ya’nia\* = a, + (k - 1 )d uchun (1) tenglik isbotlangan bo'lsin. U holda

ak+\ = ak + d = [a, + (k - l)t/] + d = ax + kd = ax + [{k + 1) - 1 ]d.

Bundan n = k + 1 deb olsak ham ak +, (1) formula bo‘yicha

topilishini ko‘ramiz. Shunday qilib, (1) formula n = 1 bo'lganda 0‘rinli ekan va uning n = k bo'lganda ham o'rinliligidan n = k + 1 da ham o'rinliligi kelib chiqadi. Demak, (1) formula n ning barcha natural qiymatlarida o'rinli ekan.

Endi geometrik progressiyani qaraymiz. Quyidagi afsona ma’- lum, shaxmat o'yinining kashfiyotchisi o'ziga mukofot o'rniga shaxmat taxtasining birinchi katagi uchun bir dona, ikkinchi katagi uchun ikki dona, uchinchi katagi uchun to'rt dona, to'rtinchi katagi uchun sakkiz dona va hokazo bug'doy talab qilgan. Boshqacha aytganda bunda rekurrent formula quyidagicha:

^n+l

1, 2, 4, 8, 16, ... sonlar ketma-ketligi geometrik progressiya- ga misoldir. Umuman, geometrik progressiya quyidagicha ta’rif- lanadi:

3-ta’rif. Geometrik, progressiya deb, nollardan iborat bo ‘Imagan sonli ketma-ketlikka aytiladi, uning ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi oldingi hadga progressiya maxraji deb ataluv- chi bir xil q sonni ko ‘paytirish bilan hosil bo'ladi.

Boshqacha aytganda, geometrik progressiyaning rekurrent for- mulasi quyidagicha:

233  
a — q a,

ff + l

Bir nechta xususiy hollarni qaraymiz:

a) q> \, a, > 0. Bu holda geometrik progressiyaning har bir keyingi hadi oldingisidan katta. 1, 2, 4, 8, 16, ... ketma-ketlik bunga misol bo‘ladi.

b) q> 1, a{< 0. Bu holda geometrik progressiyaning hamma hadlari manfiy, lekin ularning modullari o‘suvchi ketma-ketlikni hosil qiladi. -3,-6, -12,-24, ... ketma-ketlik bunga misol bo‘ladi.

d) 0 < q < 1, a{ > 0. Bu holda ketma-ketlikning hadlari mus-

bat, lekin hadlar sonining o‘sishi bilan qiymati kamayadi va nolga cheksiz yaqinlashadi. 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, |,... ketma-

ketlik bunday geometrik progressiyaga misol bo‘ladi.

e) q= 1. Bu holda progressiyaning hamma hadlari bir xil, masalan: 6, 6, 6, 6, ...

f) q = -1. Bu holda progressiyaning hamma hadlari har bir qadamda ishoranigina o‘zgartiradi, masalan, 4, —4, 4, —4, 4, —4, ...

g) q < - 1. Bu holda progressiyaning ishorasi o‘zgaradi. Hadlar modullari esa o‘sadi, masalan: 1, -2, 4, -8, 16, -32, . . ..

h) — 1 < q< 0. Bu holda hadlar ishorasi o‘zgaradi, ular mo-

dullar nolga yaqinlashadi, masalan: 1, ••• •

Geometrik progressiyaning umumiy hadi formulasi arifmetik progressiyadagiga o‘xshash keltirib chiqariladi:

a„ = a{qn~\

Endi murakkabroq rekurrent formula bo‘yicha hosil bo‘ladigan ketma-ketlikka misol keltiramiz. Ketma-ketlikning uchinchi hadidan boshlab har bir hadi oldingi ikkita hadining yig‘indisiga teng bo‘lsin:

an+2 = an\* 1 + an-

Unda a, = 1, o2 = 1 desak, c3 = a2 + = 1 + 1 = 2, a4 = a3 +a2 =

= 2 + 1 = 3, a5 = a4 + a3 = 3 + 2 = 5 va h. k. bo‘ladi. Natijada sonlar ketma-ketligi hosil bo‘ladi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... — bu sonlar Fibonachchi sonlari deyiladi (Fibonachchi XIII asr boshlaridagi Italiya matematigi, u shu sonlar qatnashgan masalani qaragan).

234

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Rckurrent ketma-ketlik deb nimaga aytiladi? Bunday ketma- kct 1 iklarga misollar kcltiring.

2. Quyidagi ketma-kctliklar rckurrent ketma-ketlik bo'ladimi:

a) natural sonlar qatori;

b) barcha tub sonlar qatori; d) barcha juft sonlar qatori?

3. **an** + , = **nan, at =** 1 rckurrent munosabat bilan bcrilgan ketma- ketlikning dastlabki oltita hadini yozing.

**4. an** + , = **al-\,at** =2 rekurrent munosabat bilan berilgan ketma- kctlikning dastlabki beshta hadini yozing.

5. Ketma-ketlik an+2 = 2a„+l **-an** rckurrent munosabat bilan berilgan. Agar a, **=** 1, **a2 =** 3 bo'lsa, uning dastlabki oltita hadini yozing.

6. Umumiv hadi **a** =3" bo'lgan ketma-ketlik **a** , = 6**a** -9u rc- kurrcnt munosabatni qanoatlantirishini isbotlang.

3.3. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar. 1, 2, 3,

... , n, ... natural sonlar ketma-ketligi monoton o‘suvchi va uning hadlari kattalashib boradi. Agar 1000 soni berilgan bo‘lsa, 1001- nomerdan boshlab ketma-ketlikning barcha hadlari 1000 soni- dan katta bo‘ladi. Bu ketma-ketlikning 1000001 nomeridan bosh­lab hamma hadlari milliondan katta bo‘ladi. Umuman, biz har qanday katta M son olmaylik, shunday nomer topiladiki, undan boshlab ketma-ketlik hadlari M dan katta bo‘ladi.

1, 4, 9, ... , n2... natural sonlar kvadratlarining ketma-ketligi yuqoridagi xossaga ega. Masalan, 1000000 sonini olsak, 10002 = 1000000, 1001-nomerdan boshlab n1 > 1000000 teng- sizlik bajariladi. Bunday ketma-ketliklar +<» ga (cheksizlikka) in- tiluvchi deyiladi.

4-t a ’ r i f. Agar har qanday M > 0 uchun shunday N nomer topilsaki, bu nomerdan boshlab ketma-ketlikning hamma hadlari an> M tengsizlikni qanoatlantirsa, ar a2, an, ... ketma-ketlik + oo ga intiladi deyiladi.

Bunda ketma-ketlikning hadlari monoton o‘suvchi bo‘lishi shart emas. Natural sonlar va ularning kvadratlari oralab kelgan 1, 1, 2, 4, 3, 9, 4, 16, ... ketma-ketlik monoton o‘suvchi emas. Lekin u +<»ga intiladi, chunki uning hadlari oldindan berilgan sonlardan kattalashib boradi. Masalan, 2000-haddan boshlab an > 1000000 tengsizlik bajariladi.

Agar +<»ga intiluvchi ketma-ketlikning hamma hadlarining ishorasini teskarisiga o‘zgartirsak, -<»ga intiluvchi ketma-ketlik

235

hosil boiadi. Agar ketma-ketlik+oo ga intilsa, lim<3„ = +°° kabi, -oo ga intilsa, limtf„=-oo kabi yoziladi.

1, —4, 9, —16, 25, —36, ... , (— ketma-ketlik + oo ga

ham, -oo ga ham intilmaydi, uning hadlari goh musbat, goh manfiydir. Agar bu ketma-ketlikning hamma hadlarini ular mo- dullariga almashtirsak, +oo ga intiluvchi 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... ketma-ketlik hosil bo‘ladi. Bunday holda berilgan ketma-ketlik cheksizlikka intiladi deyiladi va lim = oo kabi yoziladi. Bunday ketma-ketliklar cheksiz katta deyiladi. Boshqacha aytganda, a,..., an,... ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Ravshanki, agar lim = + oo yoki lim a„ = -oobo‘lsa, (a) — cheksiz katta

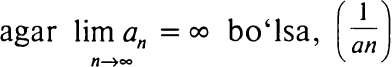
a—n—»oo n

ketma-ketlik bo'ladi.

Biz bilamizki, musbat kasrning maxraji qancha katta bo'lsa, bu kasrning qiymati shuncha kichik.

Maxrajning juda katta qiymatida kasr juda kichik bo'ladi

(masalan, n > 1000000 bo'lsa, ^ < 0,000001 bo'ladi). Bundan,



ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

Aniqroq aytganda, har qanday kichik son e olmaylik, shunday N nomer topiladiki, shu nomerdan boshlab < f tengsizlik baja-

riladi. Ketma-ketlikning hadlari musbat degan shartni tashlab yuborsak, — < etengsizlik o‘rniga — <r ni yozishga to‘g‘ri

“« o„ '

keladi. Demak, quyidagi ta'rifni kiritainiz:

5-t a ’ r i f. Agar har qanday e > 0 uchun shunday N nomer to- pilib, shu nomerdan boshlab < e tengsizlik bajarilsa, a, ***a2,*** ... ***a„,*** ... ketma-ketlik cheksiz kichik deyiladi.

Quyidagi teorema o‘rinli.

1-teorema. Agar, a,,a2, an, ... ketma-ketlik cheksiz katta bo'Isa, ketma-ketlik cheksiz kichik

“I “2

bo'ladi. Aksincha, agar a}, a2, ..., an, ... ketma-ketlik cheksiz

kichik bo'Isa, ketma-ketlik cheksiz katta bo'ladi

a\ aian

(bunda biz an laming hammasini noldan farqli deb olamiz).

Masalan, 1, j, -i, ... ketma-ketlik cheksiz kichik, chunki 1, -2, 3, -4, ... ketma-ketlik cheksiz katta.

236

6-t a ’ r i f. Agar shunday M son mavjud barcha n lar

uchun *\an\<* M tengsizlik bajarilsa, .... an,

chegaralangan deyi/adi.

Masalan, umumiy hadi a. = —- r bo‘lgan ketma-ketlik che­' I +rr

garalangan, chunki barcha n lar uchun 1 + 1 va shuning

uchun I a I < f = 6. 1 — 1, 1 — 1, ...; I a I = 1 ketma-ketlik barcha n lar uchun chegaralangan.

Berilgan ketma-ketlik cheksiz kichik ekanligini tekshirishda oson isbotlanadigan quyidagi teoremalardan foydalaniladi:

2- t e o r e m a. Agar (a J va (ft J ketma-ketliklar cheksiz kichik bo'lsa, ularning (an + fiJ yigiindisi ham cheksiz kichik bo‘ladi.

3- teorema. Agar (aj ketma-ketlik cheksiz kichik, ket­ma-ketlik chegaralangan bo1,Isa, (anan) ketma-ketlik cheksiz ki­chik bo'ladi. Xususan, cheksiz kichik ikki ketma-ketlik koipaytmasi cheksiz kichikdir.

n~ +4

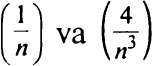
1-misol. Umumiy hadi —5- bo‘lgan ketma-ketlik cheksiz kichikdir. n

Haqiqatan, umumiy hadni boshqacha ko‘rinishda yozish mumkin:

4



'j3

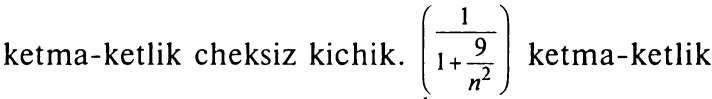
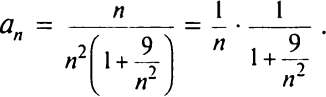


Ko‘rinib turibdiki, berilgan ketma-ketlik cheksiz kichik

ketma-ketliklar yig‘indisi ekan va shuning uchun cheksiz kichikdir.

2-misol. Umumiy hadi bo‘lgan ketma-ketlik cheksiz kichik. n+ Haqiqatan, uning umumiy hadini boshqacha ko‘rinishda yozish mumkin:

Ammo



chegaralangan, chunki barcha n lar uchun —— < 1 tengsizlik ba-

jariladi. Demak, berilgan ketma-ketlik cheksiz kichik.

Ko‘pgina ketma-ketliklarning cheksiz kichikligini darhol bi- lib olishga yordam beradigan foydali tasdiqni aytib o‘tamiz.

237

Agar a„ = va £ < 1 bo'lsa, bu ketma-ketlik cheksiz

***btn +...+b*|)**

kichik.

Masalan, umumiy hadi

3/r-4« + 5

a„ = —i

***6n2 + 3n-9***

boigan ketma-ketlik cheksiz kichik.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**Agar umumiy hadi an: 1**

a) a„

**n2+3 ’ b) 3" ’ d) fl" 2”+3"**

***n2+4***

**1**

e) an 4 , ,c ’ B -in >

**g) *on =***

*n\*+l6’" " nl+2"*

**bo'lsa, ketma-ketlikning cheksiz kichikligini isbotlang.**

***n***

To"

3.4. Ketma-ketlik limiti. Umumiy hadi an =

***rr+9 n2+* 4**

bo‘lgan ket­

ma-ketlik cheksiz kichik emas. Ammo uning umumiy hadini

***r+4***

1 +

ko'rinishida yozish mumkin, ya’ni 1 va cheksiz kichik

ketma-ketlik yig‘indisi ko‘rinishida. Shuning uchun n nomerning

yetarlicha katta qiymatlarida ~r— «tuzatma» moduli juda kichik

bo'ladi, bu esa ketma-ketlikning hadlari 1 dan juda kam farq qiluvchi sonlar boiishini bildiradi. Bunda ketma-ketlik limiti 1 ga teng deyiladi va

lim — = 1

***n +4***

deb yoziladi (lim — qisqartirilgan, lotincha limes — «chegara», «limit» ma’noni anglatadi).

7-t a ’ r i f. Umuman, agar umumiy hadi an = an — a bo ‘Igan ket­ma-ketlik cheksiz kichik bo‘Isa, ap a2, ..., an, ... ketma-ketlik a limitga ega deyiladi va lim a„ = a deb yoziladi.

***n—***

Xususan, cheksiz kichik av a2, ..., an, ... ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya’ni lima„ = 0.

238

Cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalaridan limitlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi, bu xossalar yordamida ketma- ketliklar limitini hisoblash ancha oson bo‘ladi:

4-teorema. Agar **lim** an = a va **lim** b„ - b bo1" Isa,

**lim**(a„+b„) = a + b va **lim** a„b„ = a ■ b

/i—>c« n—r«>

bo^ladi.

5-teorema. Agar **lim**an **=** a va **lim** bn = b (bunda b^ 0 va

n—^ /i—> 00

bn \* 0) bcflsa,

bo‘ladi.



Bundan tashqari, agar (aJ ketma-ketlik *0* ‘zgannas bo‘Isa, ya ’ni uning hamma had lari bitta songa tenga = c bo‘Isa, it holda lim an = c bo ‘ladi.

n fl—

1-misol. Limitni hisoblang:

lim

n—

**3/r+ 2//-1 4/r+6/i + 7**

(**2**)

Buning uchun kasrning surat va maxrajini n2 ga qisqartiramiz va bo‘linma, ko‘paytma, yig'indi limiti haqidagi teoremalami qo‘llaymiz.

lim

**3/j**2**+2/I-1**

lim

**3 + ---L lim| 3 + n nL \_ li­**

ft /i

**«->“ 4/i**2**+6n+7 ^** 6 **7 (** 6 **7**

**+/; +u«+/ 4 + - + — hm 4 + -+-J**

*n n-*

**3+ lim -- lim -i-**

**/j*—n***

**4+ lim -+ lim**

**n—**

Umuman, agar ketma-ketlikning umumiy hadi kasr bo‘lib, surat va maxrajida n ning bir xil darajalaridan tuzilgan ko'phad tursa, bu ketma-ketlikning limiti katta hadlar oldidagi koeffit- siyentlar nisbatiga teng:

lim y-+fl\* = g-

n—>«> b^ti +...+bfc

Masalan, ushbu ketma-ketlik limitini darhol topamiz:

iim 4f-6\*+1 =4 = 1.

«->« 8/r+5/r+9 8 2

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Quyidagi limitlarni Kisoblang:

, ,• 4n2+l

**a) lim^**

8 ’

**b)**

**lim**

n—»«•

8/i4-1 .

16/!4 + n3 + l ’

d)

n -16

e)

**lim**

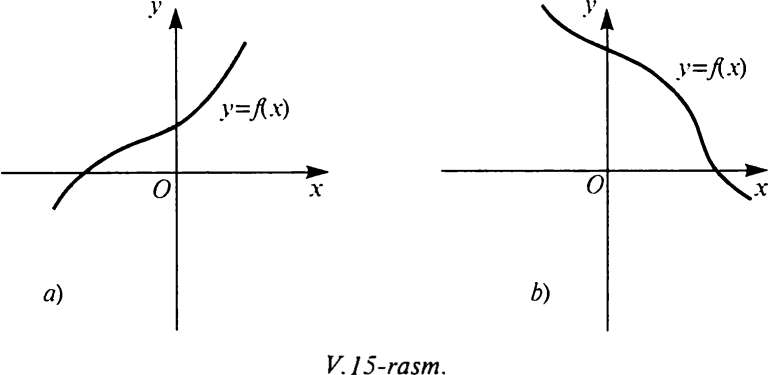
n3 + l 3/1 + 8 '

**239**

4-§. FUNKSIYANING LIMITI

4.1. Funksiyaning o‘sishi va kamayishi. V. 15-o rasmda fun- ksiya grafigi berilgan. Ko'rinib turibdiki, agar nuqta bu grafik bo‘ylab chapdan o‘ngga qarab (ya’ni xning 0‘sishi yo'nalishida) siljisa, bu nuqtaning ordinatasi hamma vaqt kattalashadi va nuqta yuqoriga ko'tariladi. Bunday xossaga ega bo‘lgan y funksiya

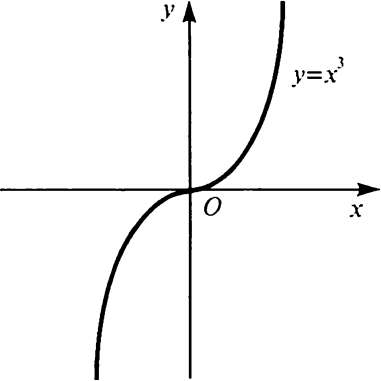
butun son o‘qida o‘sadi deyiladi. Grafigi V.15-6 rasmda tasvirlangan funksiya butun son o‘qida kamayadi.



Funksiyaning 0‘sishi va kamayishi tushunchasini aniqlash- tiramiz. y = fix) funksiya X to'plamda berilgan bo'lsin.

1-t a ' r i f. Agar x ning o ‘sishi bilan f(x) funksiya ham o ‘ssa, ya hi x; < x2 shartdan f(xf)<f(xf) kelib chiqsa, f(x) funksiya X to‘plamda o‘suvchi deyiladi. Masalan, agar 0 < x, < bo‘lsa, x,3 < x3 bo‘lishini

bilamiz. Bu csa y = x3 funksiyaning (0; oo[ nurda o‘sishini anglatadi. Bu funksiyaning butun son o‘qida o'sishini isbotlash mumkin (V.l6-rasm).



2-ta’rif. Agar X to‘plamdan olingan istalgan va x2 sonlar uchun (x j< xj da fix) > f(x) tengsizlik bajarilsa, y = fix) funksiya X to ‘p- lamda kamayuvchi deyiladi.

Masalan, y x2 funksiya x < 0 da kamayadi.

Funksiyalarning o‘sish va ka- mayishini tekshirish tengsizliklar xos- salari asosida bajariladi. Quyidagi **V.** 16-rasm.tasdiqlarni isbotlaymiz.

240

**1-** teorema. Agar y - f(x) va y - g(x) funksiyalar X to'plamda olssa, ular yig'indisi ham shu tolplamda o'sadi.

Haqiqatan, < x2 bo‘ladigan x^X va x2EX sonlarni olamiz. Shartga asosan^x,) < fx2) va ^(jc,) < g(x,). U holda tengsizliklar xossalariga ko‘ra /(x,) + g(x,) < f(x2) + g(x2). Bu esa y =/(x)+ + g(x) funksiyaning X to‘plamda o‘sishini bildiradi.

2- teorema. Agar y — f(x) funksiya X to^lamda olssa, y - -f(x) funksiya shu tolplamda kamayadi.

Haqiqatan,.x,, x2 e X,xx < x2 da f{xx) < /(x2). U holda teng­sizliklar xossalariga ko‘ra-7(x,) >-f{x2). Bu esay = -/(x) funksiyaning X da kamayishini bildiradi.

3- teorema. Agar y - f(x) va y **=** g(x) funksiyalar X to'plamda o'ssa (bu funksiyalar qiymatlari musbat),y = ***f(x)*** ■ **g(x)** funksiya ham X da o'sadi.

Haqiqatan, agar x, ,x2 e X ,xx < xz bo‘lsa, 0 < /(x,) < f(x2) va 0 < g(x,) < g(x2). U holda tengsizliklar xossalariga ko‘ra 0< f(xl)-g(xlj< < f(x2)g(x2). Bu esay = f(x) ■ g(x) funksiya­ning X da o‘sishini bildiradi.

4- teorema. Agar ***y=f(x)*** va y = g(x) funksiyalar X to'plamda o'ssa (bu funksiyalar qiymatlari manfiy), y - f(x) 'g(x) funksiya X da kamayadi.

Yuqoridagidek isbotlanadi.

5- t e o r e m a. Agar y - f(x) funksiya X tolplamda o^ssa va X

tolplamda ishorasini saqlasa, **y=—!—** funksiya X tolplamda ka­mayadi. x

Haqiqatan, agar xx < x, bo‘lsa, 0 < f{xx) < f(x2) yoki

Axx) <fx2) < 0 bo‘ladi. U holda y . Demak, y =

funksiya kamayadi.

1-m i s o 1**.** y - x2 funksiyaning o'sish va kamayishini tekshiramiz.

Bu funksiyani ikkita y = x va y - -x funksiyaning ko‘paytmasi ko‘rinishida yozish mumkin. Ammo bu funksiyalar o‘suvchi. x > 0 da ular musbat qiymatlar, x < 0 da manfiy qiymatlar qabul qiladi. Demak, 3 va 4-teoremalarga ko‘ra y - x2 funksiya x > 0 da o‘sadi, x < 0 da kamayadi.

4

2-mi sol. y = funksiyaning o‘sish va kamayishini tek­shiramiz.

Biz bilamizki, y = x2 funksiya x < 0 da kamayadi, x > 0 da o‘sadi. U holda y = x2 + 1 funksiya ham x < 0 da kamayadi, x > 0 da o‘sadi. Bu funksiyaning hamma qiymatlari musbat. Shuning uchun 5-teoremaga ko‘ra y = -f— funksiya x < 0 da o‘sadi, x > 0 da kamayadi.

241

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qanday funksiyalar o'suvchi voki kamayuvchi deviladi? Ta’rifini ayting va misollar keltiring.

2. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar haqidagi teoremalarni ayting va isbotlang.

3. **y =** x4 + 3x2 + 7 funksiyaning [0; +«>[ nurda o'sishini isbotlang.

4. **y** = 4- funksiyaning [0; +co[ nurda kamayishini isbotlang.

5. Agar **n** juft musbat son bo'lsa, **y = x"** funksiya j-°°; Oj nurda kamayishini, [0; +°°[ nurda o'sishini isbotlang.

6. Agar **n** toq son bo'lsa, **y = x"** funksiya butun son o'qida o'sishini isbotlang.

7. **y** = -L, x \* 0 funksiyaning: a) **n** juft bo'lganda, b) **n** toq bo'lganda

o'sish va kamayishini tekshiring.

8. Funksiyalarning o'sish va kamayishini tekshiring:

a) **y = xA'Xr+r xGR’** b) y = x6+5x2 + l, **xeR;**

d) **y=-x>3■** e) y = 4- + -r> x>0-

X *-It* X X

4.2. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar. y = x",

2 < x < 3 funksiya grafigi abssissalar o‘qiga parallel y = 0 va y - 9 to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan soha ichida butunligicha yotadi. Bunday funksiya [-2; 3] kesmada chegaralangan funksiya deyiladi. y - x? funksiya butun sonli to‘g‘ri chiziqda chegaralangan emas — abssissalar o‘qiga parallel har qanday to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazmaylik, grafikning to‘g‘ri chiziqlar orasida yotmagan nuqtalan topiladi. y - X‘ funksiya ham ]0; 1] oraliqda chegaralanmagan, x = 0 nuqtaga yaqinlashgan sari y ning grafigi abssissalar o‘qidan cheksiz uzoqlashadi.

Funksiyaning chegaralanganligi va chegaralanmaganligi umu- miy ko‘rinishda quyidagicha ta’riflanadi.

3-ta’rif. Agar shunday a va b sonlar mavjud bo‘lib, bar- *chax* G X lar uchun a < *f(x)<b* tengsizliklar bajarilsa, y - f(x), x G X funksiya *chegaralangan* deyiladi.

Bu esa y =f{x) funksiyaning grafigi butunligicha y = a va y = b to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan sohada yotishini bildiradi.

4 - t a ’ r i f. Agar istalgan a va b (a < b) uchun shunday x G X topilsaki, f(x) < a, yoki f(x) > b bajarilsa, y = f(x) x G X funksiya *chegaralanmagan* deyiladi.

242

a< f(x)<b shartda ova A sonlarni bir-biriga qarama-qarshi qilib tanlash mumkin. Masalan, agar barcha x E X uchun -2 < /(x)<5 tengsizlikbajarilsa, -5 < /(x)<5 tengsizlik muqarrar ravishda bajariladi. Ammo -c<f(x)<c tengsizlik |/(x)|<c tengsizlikka teng kuchli. Shuning uchun y=f(x)xE X funksiya barcha x E X lar uchun |/(x)|<c tengsizlik o‘rinli boMadigan shunday c son mavjud bo'lganda chegaralangan deyiladi.

1- misol. y = ~^T, xeR funksiya chegaralangan, bir tomon-

1+\* 4

dan uning barcha qiymatlari musbat, y < , ikkinchi tomon-

dan 1 + x2 > 1 va shuning uchun —^ 4 .

\+X

2- m i s o 1. y = —, x \* ±4 funksiya chegaralanmagan: x son

***x -16***

-4 yoki 4 qiymatlarga yetarlicha yaqin bo‘lganda bu funksiya grafigi abssissalar o‘qidan cheklanmagan holda uzoqlashadi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1.

2.

**3.**

**4.**

**y = x4 + 16 funksiyaning [**0**;** 2**] kesmada chegaralanganligini isbot- lang. Bu funksiya butun son o‘qida chegaralanganmi?**

\_ 1

**y — ^g funksiyaning butun son o‘qida chegaralanganligini**

**isbotlang.**

**y - funksiyaning [**1**;** 2**] kesmada chegaralanganligini, ammo**

**]** 1**; 3[ oraliqda chegaralanmaganligini isbotlang.**

**Quyidagi funksiyalardan qaysilari butun son o‘qida chegaralangan:**

**a) y = ; b) y = , jc^±**5**; d) y = x2+9',**

*x2+9 ’* . *x2+9*

***z) y = zr.***

jr+25 ’

**0**

' *x2-25 x2+9* . *x2-25* ’

x \* ±5;

g) ***y = -r***

*x -*

4.3. Cheksiz kichik funksiyalar. y = (x - 4)2 funksiya x = 4 da nolga aylanadi. Agar argumentning 4 soniga yetarlicha yaqin qiymatlarini olsak, ularga funksiyaning juda kichik qiymatlari mos keladi. Masalan, agar | x — 4 | < 0,1 desak, | x — 4 |2 < 0,01 bo‘ladi, bu esa (x - 4)2 < 0,01 dir.

I x — 4 | <0,1 tengsizlikni bunday yozish mumkin:-0,lx- - 4 < 0,1 yoki 3,9 < x < 4,1. Biz shunday qilib, ]3,9; 4,1 [ oraliqning har bir nuqtasi uchun (x - 4)2 < 0,01 tengsizlik baja- 243rilishini isbotladik. Xuddi shunday ]3,999; 4,001 [ oraliqning har bir nuqtasi uchun (x - 4)2 < 0,000001 tengsizlikning bajarilishi isbotlanadi. 13,999999; 4,000001 [ oraliqda (x - 4)2 < 0,000000000001 ga egamiz.

Ko‘rib turibmizki, har qanday e sonni olmaylik (£ = 0,01; 0,00001; 0,000000000001) markazi 4 nuqtada bo‘lgan shunday oraliq topiladiki, unda (x - 4)2 < e tengsizlik bajariladi.

5-ta’rif. Markazi a nuqtada

-• • • bo'lgan ]<?-(5; a + d[ oraliq a *nuq-*

a~d o+d taning 6 radiusli atrofi deyiladi

*(V.l* 7-rasm).

' msm' Shunday qilib, har qanday e > 0

uchun 4 nuqtaning shunday atrofi topiladiki, unda (x - 4)2 < e tengsizlik bajariladi. Agar x 4 soniga intilsa, y = (x - 4)2 funksiya cheksiz kichik deyiladi. «x a ga intiladi» deyish o‘rniga x -\* a deb yozamiz.

y = ^2 7 17 funksiya x = 4 da aniq qiymatga ega bo‘lmaydi,

chunki x o‘rniga 4 qo‘yilganda surat ham, maxraj ham nolga aylanadi. Ammo bunda ham x ning 4 ga yetarlicha yaqin qiymat- larida funksiyaning qiymati nolga yaqinlashadi. Bu quyidagi jad- valdan ko‘rinib turibdi:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 3,9 | 3,99 | 3,999 | 4,1 | 4,01 | 4,001 |
| y | 1  9 | 1  99 | 1  999 | 1  9 | 1  99 | 1  999 |

Endi cheksiz kichik funksiyaning umumiy ta’rifini beramiz.

6-ta’rif. Agar har qanday *e* > 0 uchun a nuqtaning shunday atrofini ko ‘rsatish mumkin bo ‘Isaki, bu atrofning hamma nuqtalarida (a nuqtaning o‘zidan tashqari ham bo‘Iishi mumkin) |/(x)|<e tengsizlik bajarilsa, y = *f(x)* funksiya x-> a da cheksiz kichik deyi­ladi.

a ning o‘zidan tashqari ham deyilishiga sabab a funksiya bu nuqtada qiymatga ega bo‘lmasligi ham mumkin (masalan,

y = - t v - x funksiya x = 4 da qiymatga ega bo‘lmagan).

x"-/x+12

x->flda cheksiz kichik funksiyaga misol y = x - a funksiyadir. Berilgan e > 0 da a nuqtaning r radiusli atrofini olish yetarli. Bu atrofda | x - a \ < e, bu esa| /(x) |< e demakdir. Cheksiz kichik fun- 244ksiyalarga yanada murakkabroq misollarni quyidagi tasdiqlar yor- damida hosil qilish mumkin, bu tasdiqlar isbotini keltirmaymiz.

**6**- teorema. ***x-\*a*** da cheksiz kichik bo'lgan ikki funksiya yig'indisi x — a da cheksiz kichikdir.

7- teorema. Agar x-» a da a(x) funksiya cheksiz kichik bo'‘lib, y = f(x) funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralan- gan bo'lsa, y = ***f(x)a(x)*** funksiya x **-\*** a da cheksiz kichik bo^ladi.

Shuni aytish kerakki, x^\*a da cheksiz kichik boMgan har qanday y = a(x) funksiya bu nuqtaning biror atrofida chegara- langan (chunki, biror atrofda a(x) < e tengsizlik bajariladi). Shu- ning uchun 2- tasdiqdan quyidagi kelib chiqadi: x-> a da cheksiz kichik bo'igan ikki funksiya ko‘paytmasi x -» a da cheksiz kichik­dir.

1- m isol. y = x - a funksiya x -\* a da cheksiz kichik boMgani uchun y — (x — a)n (bunda, n — natural son) ko‘rinishidagi bar- cha funksiyalar ham x^-a da cheksiz kichikdir (bu funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar ko‘paytmasidan iborat).

Ravshanki, | x - a |"< Ve bo'lganda, ya’ni a - 6 < x < a +<5

(bunda <5 = V7) boMganda (x—a)n<E tengsizlik bajariladi.

2- misol. ***y = A{(x - a) + ... +A„(x*** - a)n(1)

ko‘rinishidagi har qanday funksiya a da cheksiz kichikdir.

Haqiqatan, Ak(x - a)k ko‘rinishidagi hamma ko‘paytmalar cheksiz kichik, u holda (1) yig‘indi ham cheksiz kichikdir.

3- misol. y = yjx-a funksiya x -> a da cheksiz kichik.

Haqiqatan, | %lx -a |< e tengsizlik |x-a|<e3, ya’ni a-£3<x<a + ei boMganda o‘rinli boMadi.

4- misol. a\* 0 boMsa, y = —- funksiya x^a da cheksiz

kichik. ax

Bu tasdiqni isbotlash uchun y = — funksiyaning a nuqtaning biror atrofida chegaralanganligini ko‘rsatish yetarlidir. a > 0

a a oraliqni tanlab olish

boMganda bunday atrof sifatida

2 1 2 A

mumkin. Bu atrofda r-y < — < ~r , shuning uchun

**3 *a ax a °***

Bu esa y = — funksiyaning berilgan atrofda chegaralangan

2

l 2

< — < —j

***ax al***

3a1

demakdir. a < 0 hoi ham shunday qaraladi.

245

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qanday funksiyalar cheksiz kichik deyiladi?

2. Cheksiz kichik funksiyalar haqida qanday teoremalarni bilib oldingiz?

3. | \* - **a** p< 0,00001 tengsizlik bajariladigan **a** sonning atrofini toping.

4. **y** = 3(x-4)2 + 5(x-4)3 funksiyaning **x** -\* 4 da cheksiz kichikligini isbotlang.

5. **y = i]x-** 6 + 7(x - 6)3 funksiyaning **x -\*** 6 da cheksiz kichikligini isbotlang.

4.4. Funksiyaning nuqtadagi limiti. y = x2 + 1 funksiya x -> 3 da cheksiz kichik bo‘lmaydi (masalan, x = 3,01 bo‘lsa, bu fun­ksiya qiymati 10,0601 ga teng).

Ammo bu funksiyani bunday yozish mumkin:

y = 10 + (x2 - 9) = 10 + (x - 3)(x + 3).

Bunda (x-3)(x+3) qo‘shiluvchi x -» 3 da cheksiz kichik. Shuning uchun x son 3 dan kam farq qilganda berilgan funksiya qiymati 10 dan kam farq qiladi. Bu funksiyaning limiti x -» 3 da 10 ga teng:

lim(x2 +1) = 10.

x—>3

7-ta ’ ri f. y *=j{x)* funksiyani b son bilan x a da cheksiz ki­chik bo‘lgan y = a(x) funksiya yig‘indisi ko‘rinishida, ya’ni y - b + a(x) ko ‘rinishida yozish mumkin bo ‘Isa, b son x -» a da bu funksiyaning *limiti* deyiladi va

lim /(x) = b

ko ‘rinishda yoziladi.

Cheksiz kichik funksiyalar xossalaridan limitlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

**8**-teorema. Agar y **=** f(x) va y = g(x) funksiyalar x **-»** a da limitga ega bo‘lsa, u holda f(x) **+** g(x) va f(x) **•** 9(x) funksiyalar hamx **-»** a da limitga ega bo'ladi:

lim [/(x) + g(x)] = lim /(x) + lim **g(x)**

***va***

lim [/(x) • g(x)] = lim /(x) lim g(x).

x->a jt—x-\*a

246

Qisqacha aytganda, yig‘indi limiti limitlar yig‘indisiga teng, ko‘paytma limiti limitlar ko‘paytmasiga teng.

9-teorema. Agar y - f(x) va y — g(x) funksiyalar x ^ a da limitga ega b&’lsa, bunda ikkinchi limit noldan farqli boilsa, u holda

lim .

**x^a** g(x) lim **g(x)**

x—>a

l-misol. lim \* \*10 ni hisoblaymiz.

.v->5 2x~-l

limx = 5. Shuning uchun yuqoridagi tasdiqlarga asosan

2 , |r\ lim(x2 + 10) nim;A2 + 10

**5**2 **+10 2 • 5**2 **— 1**

**35**

**49**

lim '—j— = ^ , = ' ->—

2x2-l lim(2x2-l) 2(lim xf -1

\*-»5 \x\_>5 )

Agar a nuqtada kasr-ratsional funksiyaning maxraji nolga aylansa va surati noldan farqli bo‘lsa, x ning a ga yaqinlashgani sari funksiya qiymati modul bo‘yicha juda katta bo‘ladi. Bunda jc-> a da funksiya cheksiz katta bo‘ladi valim - <» kabi yoziladi. Masalan,

g(x)

lim = oo.

x->o **x** -4

Agar a da surat ham, maxraj ham nolga aylansa, kasrning surat va maxrajini x -» a ga qisqartirib, aynan almashtirish kerak.

♦ ■ 9

2-m i s o 1. lim --g--- ni hisoblaymiz. Buning uchun surat va maxrajni ko‘paytuvchilarga ajratib, kasrni x — 3 ga qisqartiramiz:

lim-/^-

x-»3 ***x1-lx+\2***

lim = lim

.v—>3 **(x-3)(x-4)** x—>3 **x-4**

**3+3**

**3-4**

= -**6**.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Funksiyaning nuqtadagi limiti deb nimaga aytiladi? Uning qanday xossalari bor?

1.

2.

Limitlarni hisoblang:

**b) lim**

\*->l ***x -3x+2***

**d) lim**

x-\*2 \* -6x+8

**247**

4.5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Biz bilamizki, agar x > **0** bo‘lsa, x ning o‘sishi bilan y = - funksiyaning qiymati ki- chiklashib, nolga yaqinlasha boradi. Aniqroq qilib aytganda, har qanday kichik musbat son e olmaylik, shunday N qiymat

topiladiki, -^ < £ bo‘ladi, x>Aday = ^ funksiyaning barcha

qiymatlari e dan kichik bo‘ladi. y = - funksiya x-> +°° da chek- siz kichik deyiladi:

Jim ~ = 0, x-\*+°o day = ~~ funksiya ham cheksiz kichik deyiladi. Ammo bu funksiyaning qiymati manfiy, shuning uchun

l

- < e tengsizlik o‘rniga

< e ni yozish kerak.

Endi x-» +oo da cheksiz kichik funksiyaning umumiy ta’rifi- ni beramiz.

8-ta’rif. Agar har qanday musbat son *e* uchun shunday N topilsaki, x > N bo‘lganda barcha x lar uchun *\f(x)* | < e bajarilsa, y — f(x) funksiya x -» + oo da cheksiz kichik deyiladi.

Buni bunday yozish mumkin:

Ve > 03AVx> TV |/(x)|<£.

Cheksiz kichik funksiyaga radioaktiv moddaning massasi vaqtning funksiyasi sifatida yaqqol misol bo‘la oladi. Har bir sutkada bu moddaning yarmi yemirilsin. U holda har qanday kichik son £ > 0 olmaylik, shunday N kun keladiki, bu kundan boshlab bu moddaning miqdori £ dan kichik boiadi.

Yuqorida ko‘rganimizdek, y - ~ funksiya x-> +°° da cheksiz kichik. Bu funksiya x-> -«> da ham cheksiz kichik bo‘ladi: masalan, x = -1000000 desak, ^ = -0,000001 bo‘ladi, bu son nol- dan juda kam farq qiladi. x ning manfiy qiymati modul bo'yicha qancha katta bo‘lsa, - ning qiymati noldan shuncha kam farq

\* i

qiladi. Bu esa, x-»-»da y = - funksiya cheksiz kichik demak- dir. Funksiya x-» +°o da ham, x-» - oo da ham cheksiz kichik bo‘lgani uchun bu funksiya x-» °° da (cheksizlikning ishorasidan qat’i nazar) cheksiz kichikdir.

Berilgan funksiyaning x-> +“ da cheksiz kichikligini tekshi- rishda quyidagi teoremalar qo‘llaniladi:

248

10-t e o r e m a. Agar y = a(x) va y = b(x) funksiyalar x -» + °o da cheksiz kichik bo'lsa, u holda y = a(x) + b(x) yig'indisi ham x-> +oo da cheksiz kichik boiladi

11 -t e o r e m a. Agar y = a(x) funksiya x -\* + °o da cheksiz kichik, y = f(x) funksiya [0; +°°[ ko'rinishidagi nurda chegara- langan bo‘lsa, y = f(x) • a(x) funksiya x^> da cheksiz kichik boiladi.

Har qanday cheksiz kichik funksiyaning birorta nurda chega- ralanganligi (x > N da |a(jc) | < Q va 2-teoremadan quyidagi ke- lib chiqadi: cheksiz kichik funksiyalar ko‘paytmasi cheksiz ki­chik.

12-teorema. Agar y = f(x) funksiya x-\*+<\*> da cheksiz katta bo'lsa, ya’ni istalgan M> 0 uchun shunday N> 0 topilsaki, x > N

uchun *\f(x)* \ > M bo^lsa, y = 1. funksiya x

+ oo *da cheksiz*

kichik boiladi.

1- misol. Biz bilamizki, y = - funksiya x-\* + oo da cheksiz

**1111** x **1**

kichik = - • - ••• - (n marta) boigani uchun y = — funksiya

ham x -\* +oo da cheksiz kichik boiadi.

2- mi sol. y=^~ + ... + ^ ko+inishdagi funksiya +°o da cheksiz kichik.

3- m i s o 1. y = —^— funksiyani y = \_\* —-— ko‘rinishda yozish

.r4 + io **3 y** 2 io J

1+^

X

mumkin. Ammo y = \ funksiya jc -» +°o da cheksiz kichik, A = —

\* 1+7"

funksiya chegaralangan, chunki 1+^>1 va shuning uchun

X

**10** x**2**

1 + < 1. Demak, y = — funksiya x -\*°° da cheksiz kichik.

x x +10

Quyidagi umumiy tasdiq o‘rinli:

13-t e o r e m a. Agar n > m vaam \*0, *bn\*0* bo'lsa,

\_ v +...+a0

b„x" + ...+b0

*funksiya x -*

Masalan

**2x2+3**

*■°° da cheksiz kichik.*

x**3**+**6**x**-8**

*y =*

**x**4**+2x2+7**

funksiya jc-»°oda cheksiz kichik,

*y =*

funksiya x-\*oo da cheksiz kichik boimaydi (masalan,

249

x = 1000 bo‘lsa, y = > 2 ). Lekin u 2 son bilan y = —

’ 1000001 ' ,v2 + l

cheksiz kichik funksiyaning yig‘indisidan iborat:

2x'+2 1

y — —— — 2 + —

x- + l x +1

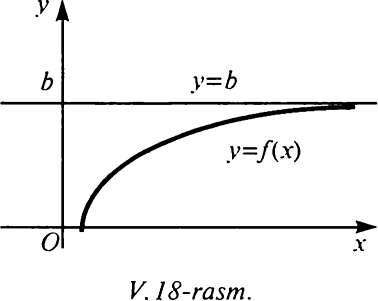
Shuning uchun x ning katta qiymatlarida bu funksiyaning gra- figi y = 2 to‘g‘ri chiziq bilan birlashib ketadi. Bu funksiya x-»°° da 2 songa intiladi deyiladi va bunday yoziladi:

lim 2^11 = 2.

X~ **+ 1**

Umuman, agar /(x) = )

bo‘lib, bunda y = a(x) funksiya x -»oo



da cheksiz kichik boisa, lim f(x) = b

x—>+«»

bo‘ladi. Bunday holda y = /(\*) funksiya x ^oo grafigi x ->o° da y = to‘g‘ri chiziq bilan birlashishga in­tiladi (V. 18-rasm), ya’ni agar gra- fikdagi nuqta grafik bo‘ylab o‘ngga chegarasiz uzoqlashsa, shu nuqtadan y = bto‘g‘ri chiziqqacha masofa nolga intiladi. lim /(x) = b yozuv ham shunday ta’rifianadi.

Biror chiziqning asimptotasi deb quyidagi xossaga ega boigan har qanday to‘g‘ri chiziqqa aytiladi: chiziqda yotuvchi nuqta ko- ordinata boshidan chegarasiz uzoqlashsa, shu nuqtadan asimp- tota deb ataluvchi to‘g‘ri chiziqqacha masofa nolga intiladi. = to‘g‘ri chiziq lim f(x) = b yoki lim f(x) = b boiganda va faqat

JC—>-»

shunday boiganda y = f(x) funksiya grafigining gorizontal asimp­totasi boiadi. Shunday qilib, y = f(x) funksiya grafigining gori­zontal asimptotasini topish uchun uning x -\* <» dagi va

x — oo dagi limitlarini topish yetarli.

Agar y - f(x) funksiyaning x-»+°ovax-»-oo dagi limitlari bir xil boisa, ularning umumiy qiymatlari x-» +oo da bu funk­siyaning limitlari deyiladi va lim /(x) kabi belgilanadi. Funksiya

limitini hisoblashda quyidagi tasdiqlardan foydalaniladi:

Agar lim /(x) = a va lim g(x) = b boisa,

lim[/(x) + g(x)] =

250

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| \_ 3x-4 | b) | y = | 4x2-1 |
| x+5 ’ | x2+6 |
| \_ x2+6 | e) | y = | x3 |
| 4x2-1 ’ | 3x3+1 |

toping.

4. Ushbu funksiyalar grafiklarining gorizontal asimptotalarini toping:

a) y =

251

(yig‘indi limiti limitlar yig‘indisiga teng) va

lim *\f(x)-g(x)\ = a-b*

(ko‘paytma limiti limitlar ko‘paytmasiga teng) bo‘ladi. b) Agar lim f(x) = a va lim g(x) = b bo‘lsa.

lim

**X—»+\*■»**

/(■\*) \_ a

***g(x)***

bo‘ladi.

x- +oo day = ^J±i

**' 2x3+3**

funksiya limitini topamiz:

**4 + -!=- lim f 4 h—^ | 4+Iim-L .**

lim 2^ = lim \_j£ = = 1 = 2

**x^~2x +3 x\_>“ 2 + ~j limf2+-1-) 2+lim^** 2

X X ) \*-\*~x

**4x**3 **+1**

Umuman uslibu tenglik to‘g‘ri:

lim

***a„x* +...+OQ \_ *bnxn+...+b0 b„ ■***

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Quyidagi funksiyalar da cheksiz kichikligini isbotlang:**

1 . . .. x3-8x+15 .

a> \* = x;+3 ■ d) =

**2. Limitlarni hisoblang: a)** lim **^£±3**

2x4+1

**b)** y e)

**1**

**xB+x-14**

n/x2+ 16

b) lim

6x4 +2x3-3

3x4-7x+1 1

**3.** y **= —j—- funksiyaning x = 2356811 bo'lgandagi taqribiy qiymatini**

**x +4**

4.6. Uzluksiz funksiyalar. Kvadrat shaklidagi yer maydoni- ning yuzini hisoblash uchun uning tomoni o‘lchanadi, keyin chiqqan son kvadratga ko‘tariladi. Bunday o'lchash biroz xatolik bilan bajariladi, natijada yuz qiymati ham taqribiy bo'ladi. To- mon uzunligi yaxshiroq o‘lchansa, yuza qiymati ham aniqroq chiqadi. Agar oldindan yuz o'lchovining zarur aniqligi berilgan bo‘lsa, yuz o‘lchovida bu aniqlikka erishish uchun tomon uzun- ligini o‘lchashning aniqlik darajasini ko'rsatish mumkin, chunki oMchovlarda juda kam farq bo‘lsa, ular kvadratlari ham juda kam farq qiladi. Maydon yuzi uning tomoni uzunligiga uzluksiz bog‘liqdir. Kattaliklarning bir-biri bilan uzluksiz bog‘liqligi tez- tez uchrab tursa ham, ko‘pincha u o‘rinsiz bo‘lib qoladi. Masalan, arqonda yuk osilgan bo‘lib, uning vazni bu arqonning mustah- kamlik limitiga yaqin, ammo yukka juda kam miqdorda yuk qo‘shilsa, arqonning uzilib ketishiga sabab bo‘ladi, u holda yuk osilib turgan balandlik sakrab-sakrab o‘zgaradi. Kattaliklardagi bunday tafovutni ko‘rsatish uchun uzluksiz va uzlukli funksiyalar haqida tushuncha kiritamiz. Aniqroq aytganda, bitta kattalikning o‘zi bir sharoitda tekis, ikkinchi sharoitda sakrab-sakrab o‘zgargani uchun bitta funksiyaning uzluksizlik nuqtasi bilan uzilish nuqtasini bir-biridan ajratish kerak. Uzluksizlik nuqtasi shu bilan xarak- terliki, unda argument qiymatining juda kam o‘zgarishlarida fun- ksiya qiymati kam o‘zgaradi, uzilish nuqtasida esa argument qiymatining kam o‘zgarishiga funksiya qiymatining kattagina o‘zgarishi mos keladi.

Biroq uzluksizlik nuqtalari bilan uzilish nuqtalari orasidagi farqning bunday tavsifi uzluksizlikning matematik ta’rifi bo‘la olmaydi. Bu tavsifdagi «kam o‘zgarishi», «kattagina o‘zgarish» so‘zlari juda mujmal va noaniqdir. Masalan, agar yer sharining radiusi haqida gap yuritilsa, 1 mm o‘zgarish juda kam, agar sha- rikli podshipniklarni yasash ustida gap yuritilsa, bu o‘zgarish juda kattadir. 1000000 km Yerdan Oygacha masofa (u 384 ming km ga teng) haqida gap borsa, talaygina kattalikdir, ammo Quyoshdan Siriusgacha bo‘lgan masofaga nisbatan juda kichikdir.

Uzluksizlik tushunchasi quyidagicha aniqroq ta’riflanadi.

9-ta ’ ri f. Agar f(x) funksiya a nuqtada aniqlangan va

lim *f(x)f(a)* (1)

x—>a

bo‘Isa, bu funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

252

Shunday qilib, agar funksiyaning a nuqtadagi limiti mavjud bo‘lib, funksiyaga argumentning qiymatini qo'yganda, bu limitni hisoblash mumkin bo‘lsa, funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

(1) shart bajarilmaydigan nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi. Ko‘p hollarda uzilish qismlarni ajratuvchi nuqtalarda (bu qismlarda funksiya turli analitik ifodalar bilan berilgan) yoki maxraj nolga aylanadigan nuqtalarda sodir bo'ladi. Bu uzluksiz funksiyalar haqidagi teoremalardan kelib chiqadi.

14- t e o re m a. Agar y — f(x) va y — g(x) funksiyalar *a* nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda y **=** f(x) **4-** g(x) va y = f(x)g(x) funksiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

15- teorema. Agar y **=** f(x) va y **=** g(x) funksiyalar *a*

Bu tasdiqlardan ko‘rinib turibdiki, agar funksiya v = ifoda

***nuqtada uzluksiz bo'Isa va bundag(a)* ^ 0 *bo'Isa, y* = *funksiya ham bu nuqtada uzluksiz bo'ladi.***

g(\*)

bilan berilgan bo'lsa, bunda y - f(x) va y = g(x) funksiyalar uzluksiz, maxraj nolga aylanadigan nuqtalardagina uzilish sodir bo‘ladi.

1-mi sol. Limitlar haqidagi teoremalardan har qanday f(x) = b„x" + ... + b0 ko‘phadning limiti x a da bu ko'phadning a nuqtadagi qiymatiga tengligi, ya’ni lim f(x) = f(a) kelib chiqadi.

Bu y = bnxn + ... + b0 ko'rinishdagi funksiya x argumentning bar-

cha qiymatlarida uzluksizligini anglatadi. 2-misol. y = , xER

(2)

cmx +...+c0

ko‘rinishdagi funksiya ikkita ko‘phadni birini biriga bo‘lish natijasidir. Ikkala ko‘phad uzluksiz funksiyalar bo‘lgani uchun (2) funksiya ham maxraj nolga aylanadigan nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarda uzluksiz.

**x~** +9

Masalan, y = funksiyaning uzilish nuqtasini topish

***x-6x+8***

uchun x2 - 6x + 8 = 0 tenglamani yechish kerak: x, = 2, x2 = 4; 2 va 4 nuqtalar berilgan funksiyaning uzilish nuqtalaridir.

3-m i s o 1. /(x) =

x2 +1, x -1,

(X-1)2,

x<0,

0<x< 2, funksiya ]-°°; 0[, [0; 2] x>2

**253**

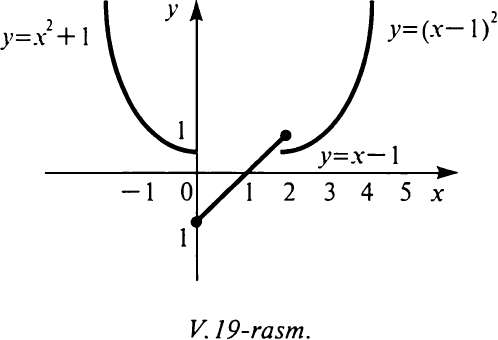
va ]2; +oo[ oraliqlarda turli ifodalar bilan berilgan. x noldan kichik bo‘lgan holda 0 ga intilsa, f(xning limiti lim(x2 + 1) = 1

**x**—>0

ga teng bo‘ladi. Agar x noldan katta bo‘lgan holda 0 ga intilsa, Ax) ning limiti lim(x2 - 1) = -1 ga teng bo'ladi. Bu limitlar turli.

**x**—>0

Shuning uchun y = Ax)funksiya x = 0 nuqtada uzilishga ega va bu nuqtada -1 - 1 = -2 «sakrashga» ega (V. 19-rasm).



x=2 nuqtada funksiya uzluksiz, chunki lim(x-l) = l, lim(x2 -1) = 1

**x**—>2

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping:**

, v Jf^+1

**a)** y =

b) ^ = 718

d)

**i, \_ x2+6x+7 *y ~ x1-7x+\0 '***

e)

**y** =

x3+9 7-81 '

***x<-\,***

***x2 + 7. 9 + x,***

*2. y =*

**1 <x<3, funksiyaning uzilish nuqtalarini toping. x>3**

4.7. Kesmada uzluksiz boMgan funksiyaning xossalari.

10-t a ’ r i f. Agar y = f(x) funksiya [a; b] kesmaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo ‘Isa, bu funksiya [a; b] kesmada uzluksiz deyiladi.

Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalar qator muhim xossalarga ega:

16-t e o r e m a. Agar y = f(x)funksiya [a; A] kesmada uzluksiz *bo1"* Isa, uning bu kesmadagi qiymatlari orasida eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud.

**254**

17-t e o r e m a. Agar y *=* f(x) funksiya[a; b\ kesmada uzluksiz bo1"lib, uning oxirlarida (uchlarida) turli ishorali qiymatlar qabul qilsa (masalan, f(a) **<** 0, f(b) > 0), bu funksiya **[a;** b\ kesma- ning qaysidir nuqtasida nolga aylanadi.

Mi sol. x3 - 6x + 3 tenglama [2; 3] kesmada hech

bo‘lmaganda bitta ildizga ega. Shuni isbotlaymiz.

Haqiqatan, y - x3 - 6x + 3 uzluksiz funksiya bu kesmaning chap oxirida /(2) = 23 — 6\*2 + 3 = —1 qiymatni, o‘ng oxirida f{ 3) = 33 — 6-3 + 3= 12 qiymatni qabul qiladi. Bu qiymatlar turli ishorali, shuning uchun funksiya [2; 3] kesmada nolga aylanadi. Bu esa x2 - 6x + 3 = 0 tenglama bu kesmada hech boMmaganda bitta ildizga ega ekanligini anglatadi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qanday funksiyalar kesmada uzluksiz deyiladi?

2. Kesmada uzluksiz funksiyalarning qanday xossalari bor?

3. Agar:

a) **y** = x2, **a =** -7, **b =** 2; b) **y** = , **a** = -4, **b =** 4 ;

a'+4

d) **y =** , o = 0, **b =** 4; e) **y =-1—.**r, o = -4, **b** = 4, x/3

bo'lsa, **y=f{x)** funksiyaning [o; **b\** kesmadagi eng katta va eng ki- chik qiymatlarini toping.

4. x2 - 7x + 1 = 0 tenglama [0; 1] va [6; 7] oraliqlarda ildizlarga ega ekanligini isbotlang.

5. x3 - 8x + 2 = 0 tenglama ] — 3; -2[ va ]0; 1[ oraliqlarda ildizga ega ekanligini isbotlang.

5-§. DIFFERENSIAL, HOSILA, INTEGRAL

5.1. Funksiya orttirmasi. Kub hajmi uning tomoni uzunligi- ning funksiyasidir, V=xi. Agar kub metalldan yasalgan bo‘lsa, kub isiganda uning tomoni uzunligi ortadi, shu bilan birga uning hajmi ham ortadi. Agar kub tomoni uzunligi x qiymatga ega bo‘lgan bo‘lib, qiziganda h ga ortsa, u x + h qiymatni qabul qiladi va kub hajmi (x + h)1 ga teng bo‘ladi. Demak, qiziganda kub hajmi (x + h)1 - x3 ga ortgan. Bu ayirma kub hajmining orttir­masi deyiladi, kub tomoni uzunligi qancha ortganini ko‘rsatuvchi h son tomon uzunligining orttirmasi deyiladi. Umuman aytgan- da, bu «orttirma» so‘zi nomuvofiqdir, chunki (masalan, kub sovitilganda) kub tomoni uzunligi qisqarishi mumkin, u holda

255

orttirma manfiy boiadi. Shuning uchun orttirma emas, o‘zgarish deb olish yaxshiroq boiar edi, ammo biz an’anaviy atamadan chetga chiqmaymiz.

Matematikada biror x kattalikning orttirmasi Ax bilan belgi- lanadi, bu A — grekcha «delta» yozma harfidir, bu harf difleretia — «ayirma» so‘zini anglatadi. Shunday qilib, x kattalikning yangi qiymati x + Ax ga teng, ya’ni lining dastlabki x qiymati bilan Ax orttirmasining yig‘indisiga teng. Agar y = f(x) biror funksiya bo‘lib, x argument Ax orttirma olsa, unda funksiya qiymati ham o‘zgaradi, natijada y Ay orttirma oladi. Bu orttirmani hisoblash uchun:

a) argumentning dastlabki qiymatida y=/(x) funksiyaning qiymatini topish;

b) argumentning yangi qiymati x + Ax ni topish;

d) funksiyaning yangi qiymati f(x + Ax) ni topish;

e) funksiyaning yangi qiymatidan dastlabki qiymatini ayirish, ya’ni J[x + Ax) — f{x) ayirmani topish kerak.

Demak,

Ay = /(x+Ax)-/(x). (1)

Agarx argumentning 4 qiymati 0,1 orttirma olgan bo‘lsa, y = x2 funksiyaning orttirmasini topamiz. x = 4 da funksiya qiymati 42 = 16 ga teng orttirma olgandan keyin argument qiymati 4+ 0,1 = 4,1 bo‘lgan bo‘lsa, funksiyaning yangi qiymati 4,12= 16,81 ga teng bo'ldi. Demak, funksiya orttirmasi 16,81 — -16 = 0,81 ga teng.

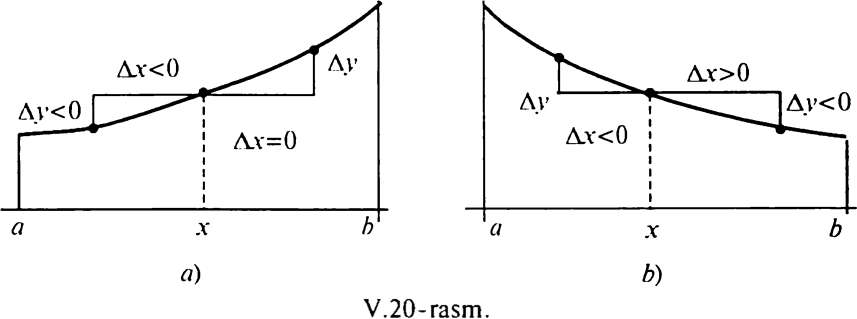
y - x2 funksiyaning orttirmasi umumiy ko‘rinishda bunday:

Ay = (x +Ax)2 - (x)2 = x2 + 2xAx +Ax2 - x2 = 2xAx +Ax2. (2)

Bunda Ax2 orqali Ax ning kvadrati olingan, ya’ni (Ax)2 olin- gan (bu belgini A(x2) bilan almashtirmaslik kerak, bu A(x2) belgi y = x2 ning orttirmasini ko‘rsatadi).

Agar y = f{x) funksiya [a; b\ kesmada o‘ssa, bu kesmada Ay va Ax ning ishoralari bir xil bo‘ladi. x ning ortishi bilan y ham ortadi, x ning kamayishi bilan y ham kamayadi (V.20-a rasm). Agar y = /(x) funksiya bu kesmada kamaysa, uning istalgan nuqtasida Ax va Ay ning ishoralari qarama-qarshi bo‘ladi (V.20- b rasm).

256



SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**1. Funksiya orttirmasi deb nimaga aytiladi?**

**2. Agar:**

**a) x = 1, A\* = 0,1; b) x = 1, Ax = -0,1;**

**d) x = 2, Ax = 0,1; e) x = 2, Ax = —0,2**

**bo‘lsa, y = x2 - 4x + 3 funksiyaning orttirmasini toping.**

5.2. Funksiya differensiali. y = x3 funksiyaning orttirmasi quyidagicha:

Ay = 3x2 Ax - 3xAx2 + Ax3.

Bu orttirmani boshqacha bunday yozish mumkin:

Ay = 3x2 Ax + (3xAx + Ax2 )Ax.

Ko‘rib turibmizki, bu orttirma 2 ta qo‘shiluvchidan iborat: 3x2Ax va [3xAx + (Ax)2JAx . Bu qo'shiluvchilardan birinchisi argument orttirmasi Axga proporsional. Ikkinchi qo‘shiluvchi murakkabroq, u Ax ga bog‘liq. Ammo Ax ning kichik qiymatlarida u 3x2Ax ga qaraganda ancha kam, chunki Ax bilan 3xAx + (Ax)2 ifodaning ko‘paytmasidan iborat, 3xAx + (Ax)2 ifoda Ax -» 0 da nolga intiladi. Bu quyidagi jadvaldan ko'rinib turibdi (bunda x= l deb olindi):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ax | Ay | 3x2Ax | [3xAx+(Ax)2]Ax |
| 0,1 | 0,331 | 0,3 | 0,031 |
| 0,01 | 0,030301 | 0,03 | 0,000301 |
| 0,001 | 0,003003001 | 0,003 | 0,000003001 |

Shunday qilib, Ax ga proporsional bo‘lgan 3x2Ax qo'shiluvchi Ax ning juda kichik qiymatlarida funksiya orttirmasining «bosh qismi» deyiladi. Bu qo'shiluvchi funksiyaning differensiali deyiladi va dy bilan belgilanadi: dy — 3x2Ax. Bu qo‘shiluvchi faqat Ax ga

**257**

emas, balki x ga ham bog‘liqdir. Masalan, y x3funksiya uchun x = 1 va Ajc = 0,1 da differensial 0,3 ga, 2va 0,1 da 1,2 ga teng. Agar x -0, Ax -0,01 bo‘lsa, differensial 0,03 ga teng.

Ta ’ r i f. Agar y funksiyaning Ay = f(x *+ A)* — orttirmasini birinchisi Ax ga proporsional, ikkinchisi Ax ga nisbatan cheksiz kichik bo'lgan ikki qo ‘shiluvchining yig‘indisi ko'rinishida

mumkin bo ‘Isa, y = f(x) funksiya ***x*** ning berilgan qiymatida *diffe- rensiallanuvchi* deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar Ay = AAx + **a** Ax (bunda lima = 0)

Ax—>0

bo'lsa, y=f[x) funksiya, x ning berilgan qiymatida differensial- lanuvchi deyiladi.

Masalan, y = x3 funksiya uchun 3.x2 va 3xAx + (Ax)2.

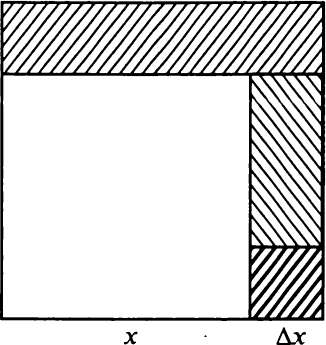
y4Ax qo'shiluvchi funksiya differensiali deyiladi va dy bilan belgilanadi. Shunday qilib, dx = Ax va dy = Adx. Bunda ga bogiiq, shuning uchun aniqrog'i dy = A(x)dx.

M i s o 1. y - x2funksiyaning differensialini topamiz. Bu funk­siya orttirmasi quyidagi ko'rinishda:

Ay = (x + Ax)2 - x2 = 2xAx + (Ax)2.

Ax ga proporsional qo‘shiluvchi 2xAx dir. Bu qo‘shiluvchi be­rilgan funksiyaning differensialidir: dy = 2A =

y = x2 funksiya differensialining for- mulasi sodda geometrik ma’noga ega.



S -x2 tomonining uzunligi x bo'lgan kvadrat yuzi bo'lgani uchun AS V.21- rasmda shtrixlangan shakl yuzidir. Ma’- lumki, Ax ning kichik qiymatlarida bu yuzning asosiy qismini yuzi 2xAx ga, ya’ni S = x2 funksiya differensialiga teng bo'lgan ikki to'g'ri to'rtburchakning yuzi tashkil etadi. (Ax)2 ifoda Ax ga nisbatan cheksiz kichik kvadratchaning yuzidir.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Ushbu funksiyalarning differensiallarini toping:**

**a) y =** **x3** + **4; b)** = **4x2** + **6x** - 1;

**d)** y **= x4; e) 2x\* - x + 1.**

**2. d(x})** **= 3 x2dxformulaga geometrik talqin bering.**

**258**

5.3. Hosila. Ushbu

A y = y4(x)A x +

(**1**)

tenglikning ikkala qismini Ax ga boiamiz:

= A(x) + a .

*Ay\_*

***Ax***

Differensial ta’rifiga ko‘ra lim 0. Shuning uchun

Xt->0

lim = A(x).

A.x->0 Ax

Shunday qilib, (1) tenglikdagi A(x) koeffitsiyent funksiya ort- tirmasini argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitidir. Bu koeffitsiyent x ning berilgan qiymatida y=f{x) funksiyaning hosilasi deyiladi va/'(x) kabi belgilanadi. Shunday qilib,

A(x) = f'(x) lim ^ .

(**2**)

**Alx->o Ax**

dy = A{x)dx bo'lgani uchun dy = f{x)dx.

Masalan, y = x3 funksiya uchun ekanini topgan

edik. Demak, bu funksiyaning hosilasi 3x2 ga teng. = x2 funk­siyaning hosilasi 2x ga teng:

(x3)' = 3x2, (x2)' = 2x.

Hosila tushunchasi matematikaning turli masalalarida uch- raydi. Masalan, hosila yordamida egri chiziqlarga urinmalar o‘tkazish mumkin. Endi awal egri chiziqqa urinma tushuncha- sining umumiy ta’rifini beramiz. Birorta egri chiziq chizamiz va unda Mnuqtani tanlab olamiz (V.22-rasm). Bu nuqta orqali MN kesuvchi o‘tkazamiz. N nuqta M nuqtaga yaqinlashgan sari MN kesuvchi M nuqta atrofida aylana boshlaydi. N nuqta M nuqtaga intilgan sari MN kesuvchi birorta /to‘g‘ri chiziqqa intilsa (ya’ni MNto‘g‘ri chiziq bilan / to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak nolga intilsa), / to‘g‘ri chiziq berilgan egri chiziqqa o ‘tkazilgan

urinma deyiladi. Shunday qilib, egri chiziqning M nuqtadagi urinmasi A/va A^nuqtalar orasidagi masofaning nolga intilgandagi MN kesuvchining limit holatidir.

259

Urinma berilgan egri chiziq bilan bir nechta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin (V.23-rasm). Shunday bo‘lishi ham mumkin- ki, egri chiziq urinish nuqtasi atrofida urinmaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishi mumkin (V.24-rasm). Egri chiziqning uchli yoki singan nuqtalariga urinma o‘tkazib boimaydi (V.25-rasm).

Endi y =J[x) funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma tenglama- sini keltirib chiqaramiz. Bu grafikda abssissasi x0 bo‘lgan nuqta olamiz. Bu nuqtaning y0 ordinatasiy(x0) ga teng va shuning uchun urinma tenglamasi quyidagi ko‘rinishida:

y =f{x0) = ko.T(x - x0). (3)

Urinmaning burchak koeffitsiyentini topish kerak. Buning uchun urinma kesuvchining limit holati ekanligidan foydalana- miz va MNkesuvchining burchak koeffitsiyentini topamiz. V.26-

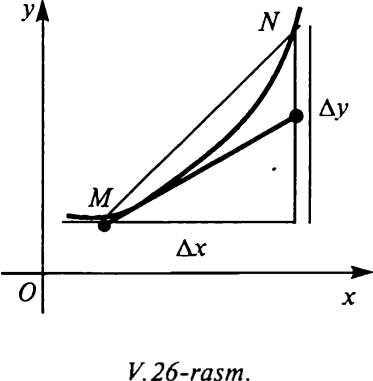
rasmdan ko‘rinib turibdiki, k = — . Bunda Ax nolga intilganda

Nnuqta Mnuqtaga intiladi, kesuvchi urinmaga intiladi va kesuv­chining burchak koeffitsiyenti urinmaning burchak koeffitsiyen- tiga intiladi.

Agar y =J{x) funksiya x0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu limit y=Ax) funksiyaning x0 nuqtadagi hosilasiga teng, ya’ni f'(x0) ga teng. Shuning uchun kur = f'(x0) va urinma tenglamasi:

Demak, k... = lim k... = lim ^ .

Ax—>0 Ax—>0 Ax



***V.22-rasm*.**

***V.23-rasm*.**

***V.24-rasm.***

***V.25-rasm.***

y~ *f(x*0) = *f\x0 )(x -x0).* (4)

M i s o 1. y = x3 funksiya grafigiga abssissasi 2 bo'lgan nuqtada urinma

260

o‘tkazamiz. Bu nuqta uchun x0 = 2, shuning uchun y0 = x„ = = 23 = 8 • So‘ngra f'{x) = 3x2, shuning uchun /'(x0) = 3 • 22 = 12. Demak, urinma tenglamasi ushbu ko‘rinishda: y — 8 = 12(x - 2) yoki y — 8 = 12x - 24, ya’ni y = 12x - 16.

&ur = /(\*0) tenglik hosilaning geometrik ma’nosini anglatadi; /(x) funksiyaning x0 nuqtadagi hosilasi y = funksiya grafigiga abssissasi x0 bo‘lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1.

2.

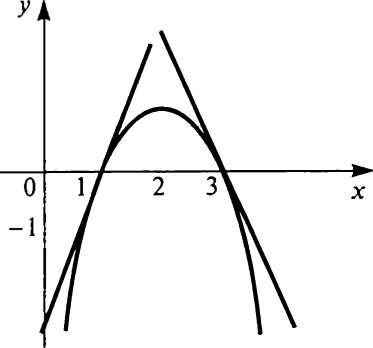
**3**

**4**

**Funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?**

**a) y = x4; b) y - xA - x: funksiyalar hosilalarini toping. x=4 va x - - 1 bo‘lganda ularning qiymatlarini toping. y = x2 funksiya grafigiga abssissasi 5 bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozing.**

**V.27-rasm bo‘yicha abssissalari 1, 2, 3 bo‘lgan nuqtalardagi funksiya hosilasining qiymatini toping.**



***V.27-rasm.***

5.4. Hosilaning mexanik ma’- nosi. Hosila tushunchasi fizikada ko‘p uchraydi. nuqta koordi- nata to‘g‘ri chizig‘i bo‘ylab harakatlansin. U holda bu nuqtaning vaqtning f momentidagi (paytidagi) x koordinatasi rning funksi- yasi bo‘ladi, x = fix)-Bu funksiya nuqtaning harakatlanish qonunini beradi. Vaqtning t] momentida nuqta koordinatasi x{ ga, vaqtning t2momentida bu koordinata x2 ga teng bo'lsin. U holda vaqtning [/,; t2] oralig‘ida nuqta x2 - x, yo‘l o‘tgan bo'ladi va uning o'rtacha

tezligi ga, ya m V0.t = ga teng.

Agar o‘rniga t ni, xx o‘rniga x ni yozib, t2 - va x2 - xx ayirmalar o‘rniga mos ravishda At va Ax larni yozsak, o‘rtacha tezlik uchun ifoda quyidagicha boiadi:

**Ax**

***V°'i At '***

Biroq Atvaqt oralig‘ida nuqta tezligi o‘zgaradi. Uning vaqtning t momentidagi tezligini bilish uchun vaqtning juda kichik oraliqlarini olish kerak va bu vaqt oralig‘ida tezlik limitini qidirish

**261**

kerak. Boshqacha aytganda, nuqtaning vaqtning t momentidagi oniy tezligi deb, uning o'rtacha tezligining [/; t + At] vaqt oralig'i- dagi At nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

*v*

on

lim v . .

Ar-0 ° r

Biz bilamizki, v . Shuning uchun von = lim ^ . Bu

’ O r at ° on Si-,0 A/

esa vaqtning t momentdagi oniy tezlik x=f{x) funksiya hosila- sining shu momentdagi qiymatiga teng:

= fV) •

Masalan, jismning erkin tushishini qaraylik. Erkin tushish qonuni S = formula bilan beriladi. Bu funksiya hosilasi qt ga

teng: = qt. Demak, jismning erkin tushish tezligi vaqtning

t momentida v = qt formula bilan ifodalanar ekan.

5.5 Differensiallash formulalari. Biz y = x3 va y = x2 funksi- yalar hosilalarini topish formulasini bilamiz. Hosila uchraydigan amaliy masalalarni yechish uchun turli ko'rinishdagi funksiya- larning differensialini topa bilish kerak. Biz bu bandda turli algebraik kasrlar (xususan, har qanday ko'phadlar) va ba’zi boshqa funksiyalar uchun differensiallash formulasini keltirib chiqaramiz.

1. O^zgarmasning hosilasi nolga teng: C = 0.

Haqiqatan, Ax ning istalgan qiymatida y = C funksiya orttir-

masi nolga teng (Ay = 0), shuning uchun ^ = 0 , demak, C' = 0.

2. y = x funksiyaning hosilasi birga teng: x' = 1.

Haqiqatan, y =x bo‘lsa, Ay = Ax bo'ladi, u holda ^ = 1 va shuning uchun x' = lim 1 = 1.

A/-0

3. Ikki funksiya yig1,indisining hosilasi ular hosilalarining yigiindisiga teng.

Haqiqatan, u = w(x), v = v(x) va y = u + v bo‘lsin, x ga Ax orttirma beramiz. U holda u va v ham Au va Av orttirmalar oladi va shuning uchun Ay orttirma oladi:

y + Ay = (u + Aw) + (v + Av).

Demak,

**y + Ay = (« + Aw) + (v + Av) -** (u **+ v) = Aw + Av.  
262**

Ammo = ^ + ^ ; yig'indining limiti limitlar yig'indisiga teng bo‘lgani uchun

lim ^ = lim + lim . \x-+0 Ax ax-\*o Ax ax-q Ax

= y' = (u + v)', lim — = u\ lim -- = V

lim ~-

Xx->0 Ax

bo'lgani uchun

Ax-»0 Ax Ax—>0 Ax

(u + v)' = u +v' (1)

4. Ikki funksiya ko<‘paytmasining hosilasi ushbu formula bofyicha hisoblanadi:

(u ■ v)'= uv +u v . (2)

Haqiqatan, y = uv, u = u(x) va v = v(x) bo‘lsa,

y + Ay = (u + Am) • (v + Av) = uv + uAv + vAu +AmAv =  
= y + mAv + vAm +AmAv .

Demak, Ay = mAv + vAu +AmAv . Bundan

Av Av Au Au Av

— = U + V +

Ax Ax Ax Ax Ax

Ammo

lim (m^) = m lim

Ax—>0 \ Ax / Ax—\*C

Av Ax—\*0 AX

= *UV*

**I • Au |\* Au /**

lim v — = v lim — = m v .

ax-»0 Ax ax-\*0 Ax

lim Ax) = u • v'-0 = 0 shunga o'xshash isbotlanadi.

Demak, (uv)’ = uv’+ u’v . (2) formula isbotlandi.

Ushbu

<3)

formula yuqoridagidek isbotlanadi.

(2) formulaning xususiy holini ko'ramiz v = C — o'zgarmas funksiya bo'lsin. 0‘zgarmasning hosilasi nolga teng bo'lgani uchun C = 0 va (2) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

263

(Cv)' = CV + Cv' = .

Shunday qilib, o‘zgarmas ko ‘paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin ekan.

Masalan,

(4x3)' = 4(x3)' = 4 ■ 3x2 = 12x2.

(kx + b)'= k ni isbotlaymiz. Haqiqatan, + =

= k• 1 + 0 = k . Uning geometrik ma’nosi quyidagicha: y to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti istalgan nuqtada k ga teng.

5. n ning har qanday natural qiymatida quyidagi tenglik o'rinli:

(xny=nxnl. (4)

Haqiqatan, n = 1 da bu tenglik yuqorida isbotlangan:

(\*)' = 1 • xw = x° = 1. Endi biror k uchun isbotlangan deb fa- raz qilamiz. (\*\*)' = kxkA ■ U holda (2) formula bo'yicha:

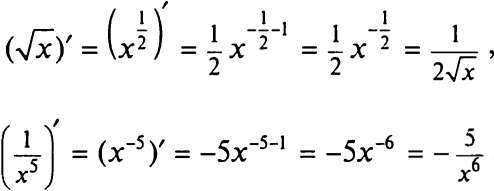
(x\*+1)' = (x\* • x)' = (x\*)' • x + x\* • x = kxk-'x + x\* • 1 =

= kxk + x\* = + 1) • x\*.

Demak,

(xw)' = (ii + l)-iMH.

Bu (4) tenglik n = 1 bo‘lganda to‘g‘ri edi va uning = bo‘lganda to‘g‘ri ekanligidan n = k + 1 bo‘lganda uning to‘g‘riligi kelib chiqadi. Demak, (4) formula n ning barcha natural qiymatlarida o‘rinli ekan. Masalan,



Keltirib chiqarilgan differensiallash formulalari har qanday algebraik kasrlar hosilalarini topishga imkon beradi. Masalan, (3) formula bo'yicha:

f x^l Y = (^2+l)(x2-l)'-(x2+l)'(x2-l)

yx2+l J (x2+l)2 '

264

Ammo (x2 - l)1 = 2x, (x2 + l)‘ =2x, shuning uchun

**x2-l^j \_ (x2+ 1)2x-2x(.y2-1) \_ Ax**

**(x2+l)2 (x2+l)2 '**

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Yig‘indi, ko'paytma, bo‘linma hosilalari qanday topiladi?**

**2. Asosiy differensiallash formulalarini ayting. Ba’zilarini hosila ta’rifiga ko‘ra keltirib chiqaring.**

**3. Hosilalarni toping:**

**a) y = 8x5 - 6x2 = 1; b) y = 64x - ;**

3 \_£ y3 I

**d) *y =* ; *e)y=i/x(Axi/x-l/x).***

**A. y = 5x\* - x + 6 funksiya grafigiga abssissasi 3 ga teng bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozing.**

5.6. Aniqmas integral. Berilgan funksiya bo‘yicha uning hosilasini topishga doir masalalar bilan bir qatorda berilgan hosilasi bo‘yicha differensiallangan funksiyaning o‘zini topishga doir masalalar ham qaraladi. Bu funksiya berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deyiladi. Shunday qilib, y - F(x) funksiya F (x) =AX) boMganda va faqat shunda./(x) funksiyaning boshlan- g‘ich funksiyasi bo‘ladi. Masalan, y = x3 funksiya y = 3x2 ning boshlang‘ich funksiyasidir, chunki (x3)' = 3x2. Bu funksiyadan tashqari har qandayy = x3 + C(C — o‘zgarmas) ko‘rinishdagi funk­siya y = 3x2 funksiyaning boshlang‘ichidir, chunki (x2 + Q' = 3x2.

Ko‘rib turibmizki, har bir funksiya bittagina hosilaga ega bo‘lsa ham uning cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiyalari boMar ekan. Bu boshlang‘ich funksiyalar bir-biridan faqat o‘zgarmas qo‘shiluvchi bilan farq qiladi. Boshqacha aytganda, agar y = F(x) funksiya y=Ax) funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan bittasi bo‘lsa, uning qolgan hamma boshlang‘ich funksiyalari y = F(x) + C ko‘rinishda bo‘lar ekan. y = /(x) funksiyaning hamma boshlang‘ich funksiyalarining majmuasi bu funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi: J f(x)dx. Shunday qilib;

**J** f{x)dx = F(x) + C , bunda: C — ixtiyoriy o‘zgarmas.

**265**

13 x2dx = x3 + C.

Umuman, (x” + ') = (« + l)x” bo‘lgani uchun

Masalan,

J(a?+ \)xndx = xn+1 + C. (1)

Differensiallash formulalaridan aniqmas integralning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. Ikki funksiya yig ‘indisining aniqmas integrali bu funksiyalar integrallarining yig'indisiga teng:

j [/(\*) + £(\*)] dx = \ f(x)dx + J g(x)dx. (2)

2. 0‘zgarmas ko‘paytuvchini integral ishorasi tashqarisiga chiqarish mumkin:

^Xf{x)dx = X^f{x)dx. (3)

Bundan (1) formulani bunday yozish mumkinligi kelib chiqadi: {n + \)^xndx = xn+1 +C

yoki

. n+l

f xndx = + C. (4)

J n+l N

Ammo J dx = x + C.

Mi sol. J (x3 - 4x2 + 8)dx ni toping.

| (x3 - 4x2 + &)dx = | xsdx - 4j x2dx + 8j dx = + 8x + C.

(4) formula n ning n = -1 qiymatidan tashqari hamma qiymat- larida o'rinli. Masalan,

j I +j 2

J yfxdx = J x^dx = y— + C = yX^+C = ^ Vx3" + C,

2+1

f4= \x3dx = ^- + C = -l^x~2 + C = --^+C.

**J x3 j -3+1 2 2x2**

266

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Funksiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?**

**2. Aniqmas integralni topish qoidalari qanday?**

**3. Aniqmas integralni hisoblang:**

**a)** J **(3.v5 -** 6x4 **+ 2x - 7)dx\** b) J **ifxdx;**

**d)f^;**

J X J X~

5.7. Aniq integral. Aniqmas integral ifodasiga ixtiyoriy C o‘zgarmas kirgani uchun x ning berilgan qiymatida bu integral- ning qiymatini topib bo‘lmaydi. Ammo berilgan b va a nuqtalarda integral qiymatlarining ayirmasini topish mumkin:

\F{b) + C]-\F{a) + C]= F{b)~ F{a).

Bu tengliky = f{x) funksiyaning barcha boshlang‘ichlari uchun b va a nuqtalardagi ular qiymatlarining ayirmasi bir xil va u C ning tanlanishiga bog‘liq emasligini ko‘rsatadi. Shuning uchun y = AX) funksiya b va a nuqtalardagi boshlang'ich qiymatlarining ayirmasi y = Ax) funksiyaning [a; b] kesmadagi aniq integrali deyi-

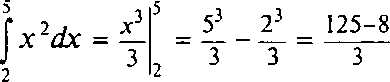
b

ladi. \a\ b] kesmadagi aniq integral J f(x)dx kabi belgilanadi. Shunday qilib, a

| f(x)dx = F{b) - F{a), (1)

a

bunda, F(x) funksiya/(x)ning boshlang'ich funksiyasidir. F(b) - F{a) ayirma/"(x)!\* kabi belgilanadi. Shuning uchun



Aniq integralning ba’zi xossalarini aytib o‘tamiz. Aniqmas integralning 1 va 2-xossalaridan quyidagi kelib chiqadi:

J \f(x) + g(\*)] dx = | f(x)dx +1 g(x)dx (2)

a a a

va

b b

Ja kf(x)dx = ij f(x)dx. (3)

**267**

Agar a < c < b bo‘lsa,

b c b

J f{x)dx = J f(x)dx + J f{x)dx (4)

a a c

ni isbotlaymiz.

Haqiqatan,

b c

J f{x)dx = F(b) - F(a); | f(x)dx = F{c) - F{a)\

a a

j f{x)dx = F(b) - F(c).

C

Bu qiymatlarni isbotlanayotgan tenglikka qo‘yib, quyidagi ay- niyatni hosil qilamiz:

F(b) - F{a) = [F(c) - F(a)} + [F(b) - F(c)].

Ushbu tenglik o‘rinli:

j f(x)dx =-j f(x)dx . (5)

a b

Bu esa

J f(x) dx = F(b) - F(a), | f(x) dx = F(a) - F(b)

a b

tengliklardan kelib chiqadi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Funksiyaning aniq integrali deb nimaga aytiladi?**

**2. Aniq integralni hisoblash formulasini ayting.**

**3. Aniq integralning qanday xossalarini bilib oldingiz?**

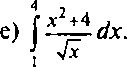
**4. Integrallarni hisoblang:**

a) J x}dx\

5

b) J (x3 - 4x + 3)dx;

3



**268**

i

9

**d) *jx2^dx-***

VI bob. GEOMETRIYA ELEMENTLARI

l-§. GEOMETRIYA FANI TARIXI VA TARKIBI HAQIDA

1.1. Geometriyaning vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma’Iumot. Geometriya matematikaning ajralmas qismi boiib, u matematika fanining rivojlanishida katta ahamiyatga egadir. Geo­metriya fani qadimiy fan boiib, u uzoq tarixga ega. Gcometriyaga oid dastlabki manbalar qadimiy Misrdan topilgan boiib, u Rind va Moskva papiruslarida aks etgan. Angliya sayyohi Rind 1858- yili Nil daryosi qirg‘oqlariga sayohati davrida eramizdan awalgi 1800-yillarga taalluqli matematika va geometriyaga oid papirusni sotib oladi va uni Buyuk Britaniya muzeyiga topshiradi.

Bu papirusning uzunligi 5,5 m, eni 32 sm boiib, unda ama- liy xarakterdagi 84 ta masala yechimi keltirilgan boiib, ular kasrlar ustida amallar bajarish, to‘g‘ri to'rtburchak, uchburchak, trapetsiya va doiralarning yuzini hisoblash, parallelepiped, silindr va pira- midalarning hajmini hisoblash, shuningdek, kesmani proporsio- nal boiaklarga boiish hamda geometrik progressiyalarga oiddir.

Ikkinchi papirus Moskva nomi bilan atalib, u eramizdan awalgi 2000-yillarga mansubdir. Uning uzunligi 5,44 m va eni 8 sm boiib, unda 18 ta arifmetikaga va 7 ta geometriyaga oid masala mavjud.

Bu ikki papirusdagi masalalar va ularning hal qilinishidan qadi­miy misrliklarning matematik bilimlari saviyasini va uni qoilash usullarini bilish mumkin.

Olimlarning bundan 100 yillar muqaddam ikki daryo (Frot va Dajla) oraligiga joylashgan Shumer-Bobilliklar tarixini o‘rganish borasida olib borgan tekshirishlari natijasida topilgan arxeologik yodgorliklardan bu ikki davlat eramizdan 2800 yillar oldin tashkil topganligi va ulardagi fan va madaniyat rivoji haqida maiumotlarga ega boiadilar. 0‘sha davr olimlari tekislik va fa- zodagi geometrik bilimlarga ega boiib, ularning o'ziga xos for- mulalari mavjud boiganligi maium boidi.

Matematika tarixi sohasida hozirgacha topilgan maiumotlar bizga geometriyaning fan sifatida rivojlanishi Gretsiyadan boshlan- 269 ganligini isbotlaydi. Geometriya tarixini o‘rganuvchi olimlar, geometrik ma’lumotlar Misr va Shumer-Bobilliklaridan Gretsiyaga o'tganligini tasdiqlaydilar.

Grek faylasuflari Misr va Shumer-Bobil donishmandlari ish- lari bilan tanisha boshlaganlar. Ular orasida atoqli faylasuflar Aristotel (384-321), Platon (429-348), Fales (640-556), Demokrit (460—360), Anaksimandr (610—546), Pifagor (580— 500), Gippiy (e.a.I asr), Arxit (400—365), Gippokrat (e.a. V asr), Yevdoks (410-355), Yevklid (365-300), Arximed (287-212), Apolloniy (265—170), Eratosfen (276—194), Geron (e.a. I asr) va boshqalar matematika taraqqiyotga salmoqli hissa qo‘shganlar.

Hozirgi vaqtda biz o‘rganayotgan geometriya kursi Yevklid to- monidan sistemaga solinib, nazariy tomondan asoslangan holda yozil- gan «Negizlar» asarining o‘rta maktabga moslab tuzilgan qismidir.

1.2. Maktabda o‘rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi. Biz bilamizki, geometrik tushunchalar bolalarga geometrik shakl- lar yordamida maktabgacha bo‘lgan davrda — bog‘cha davridan tanishtiriladi. Bog‘chada bolalar to'rtburchak, uchburchak, doira, kub, piramida, silindr, shar kabi shakllar va ularning ayrim ele- mentlari bilan tanishadilar, ular yordamida har xil o‘yinlar tashkil qilib, uylar, mashinalar va hokazo narsalarni yasaydilar.

Bog‘chada geometrik ma’lumotlar, umuman, matematik ma’­lumotlar o‘yin orqali beriladi. Shakllarning nomi ularning modelini ko‘rsatish yordamida yoki o‘yinchoq sifatida tanishtiriladi. Bosh- lang‘ich sinfda bu tushunchalar davom ettirilib, bu shakllarning o‘lchovlari bilan tanishtiriladi va ular ustida ayrim hisoblash ishlari olib boriladi. Bu ish asosan amaliy ishlai yordamida, ya’ni shakl­larning uzunligi, eni va balandligini o‘lchash, ularning perimetrini topish, keyinroq yuzini hisoblash kabilardan iborat bo‘ladi. Boshlang‘ich sinflarda qo‘shish, ko‘paytirish amallarining xossa- lari ham kesmalarni qo‘shish, ko‘paytirish orqali beriladi.

Sistemali geometriya kursi asosan ikki qismga bo‘lib o‘rga- niladi: Birinchi qism tekislikdagi geometrik tushuncha va shakl- larga bag‘ishlangan bo‘lib, u «Planimetriya» deb ataladi. Ikkin- chi qism fazoviy shakllarni o'rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, u «Stereometriya» deb ataladi.

Planimetriyada awal boshlang‘ich tushunchalar (nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik) va ularning xossalari ifodalangan aksiomalar sistemasi beriladi. Shu bilan birga geometriya kursini qurish uchun zarur bo‘lgan jumlalar turlari — ta’rif, aksioma, teorema va ularni isbotlashning nima ekanligi tushuntiriladi.

**270**

So‘ngra geometriyaning asosiy qismida keltirilgan aksiomalar yordamida boshlang‘ich tushunchalardan kelib chiqib sistemali geometriya kursi quriladi. Lining mazmunini burchaklar, ular ora- sidagi munosabatlar va ularning turlari, uchburchaklar, to‘rt- burchaklar, ular orasidagi munosabatlar, ularning turlari, ularni yasash, to‘g‘ri burchakli uchburchaklar, ularning burchaklari va tomonlari orasidagi munosabat yordamida trigonometrik funksiyalar kiritiladi. So‘ngra tekislikda Dekart koordinatalari kiritilib, uning yordamida kesma o‘rtasining koordinatalari, ikki nuqta orasidagi masofa, aylana tenglamasi, to‘g‘ri chiziq tengla- masi, to‘g‘ri chiziqlarning koordinata tekisligida joylashishi, to‘g‘ri chiziq bilan aylananing kesishish shartlari kiritiladi.

Shakllarni almashtirish bo‘limida «harakat» tushunchasi kiri­tilib, uning xossalari va turlari beriladi. Harakat natijasida har qanday shakl o‘ziga teng shaklga almashishi ko‘rsatiladi va bun- ga oid parallel ko‘chirish, simmetrik almashtirish, nuqta atrofida ma’lum burchakka burish haqida ma’lumot beriladi. Bu tushun- chalar yordamida tekislikda vektor tushunchasi kiritiladi.

Keyin ko‘pburchaklarning hosil qilinishi, ularning turlari, shakllarning yuzi va ularni hisoblash formulalari beriladi.

Geometriyaning stereometriya qismida stereometriya aksiomala- ri, to‘g‘ri chiziq va tekisliklaming parallelligi, perpendikularligi haqidagi ma’lumotlar beriladi. So‘ngra fazoda Dekart koordinatalar sistemasi va unda vektorlar haqidagi tushunchalar, ko‘pyoqlar, ularning turlari va ko‘pyoqlarga tegishli masala va mulohazalar, aylanma jismlar — silindr, konus, shar va ularning tenglamalari haqidagi tushunchalar, ularning hajmi va sirtlari haqidagi ma’lumotlar beriladi. Yuqorida keltirilgan tushunchalar bir-birini to‘ldirib sistema tashkil qiladi.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Geometriyaning rivojlanish tarixiga oid ma’lumotlarni topib, daftaringizga ko‘chiring.**

**2. Geometriya fanining rivojlanishiga o‘z hissasini qo'shgan 0‘rta Osiyolik matematik olimlar haqida ma’lumot to’plang.**

**3. Maktab geometriya darsligidan planimetriyaga oid asosiy tushuncha­lar, aksiomalar sistemasi, shakllarning ta’riflari, xossa va alomatlarini daftaringizga ko‘chirib oling.**

2-§. PLANIMETRIYA

2.1. Geometrik shakllar, ularning ta’rifl, xossalari va alo- matlari. Geometriya kursini o‘rganish uchun asosiy boshlang‘ich tushunchalar — tekislik, to‘g‘ri chiziq va nuqta bo‘lib, ularga

**271**

ta’rif berilmaydi, ularni amaliy yo'llar bilan tushuntiriladi. Xekislik — tinch turgan suvning sathi sifatida, to‘g‘ri chiziq — ikkita tekislikning kesishish chizig'i ekanligi, nuqta esa bir tekislikdagi ikki to‘g‘ri chiziqning umumiy qismi sifatida tushuntiriladi. Tekislikning qalinligi yo'qligi, to‘g‘ri chiziqning faqat uzunligi borligi va nuqtaning hech qanday 0‘lchami yo‘qligi keltiriladi.

Geometriya kursidagi eng sodda shakllarga nuqta, to‘g‘ri chiziq va ularning bo‘laklari kiradi. Bularning o‘ziga xos xossalari mav- jud bo‘lib, unda nuqta hamda to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda o‘zaro joylashuvi hamda ularning tegishlilik xossalari beriladi. Kesma va burchaklarni o'lchashning asosiy xossalari, ularning yig‘indisi va ayirmasini o'lchash asboblari (chizg'ich va transportir) yor- damida aniqlash haqida ma’lumot beriladi (Vl.l-rasm).

**^£ S, srn, 4 sra**

• • •

**A 3 sra B( C) 4 sra D**

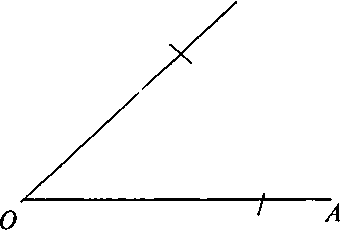
***AB* + *CD — AD,***

**AD =AB + CD = 3 sra + 4 sra = 7 sra, AB + CD ~3 + 4 = 7 (sra).**

***VI. I-rasm.***

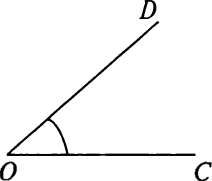
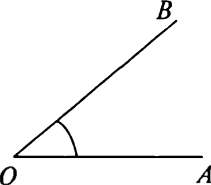
LAOB da AO, OB — burchakning tomonlari. O nuqta burchakning uchi (IV.2-rasm).

***B***



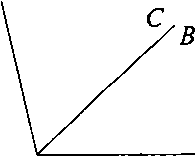
Ikkita burchakning yig‘indisi qanday hosil qilinishi va uni transportir yordamida oMchash ko‘rsatiladi (IV.3- rasm).

***VI.2-rasm.***



***ZAOB+ ZCOD* = *ZAOD VI.3-rasm.***

***D***



O

***A***

**272**

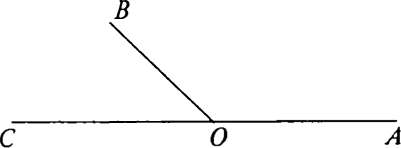
90°ga teng burchak to‘g‘ri burchak deb ataladi. To‘g‘ri bur- chakdan kichik burchak o‘tkir burchak deb ataladi. 90°dan katta burchak o ‘tmas burchak deb ataladi (IV.4-rasm).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | |
| ? A | 0 | | C | 0 |
| o'tkir burchak |  | to'g'ri burchak | | o‘tmas burchak |
|  |  |  | VI. 4-rasm. |  |

B

D

1-t a ’ r i f. Agar ikkita burchak- ning bitta tomoni umumiy, qolgan tomonlari to ‘Idiruvchi yarim to‘g‘ri



**AOB burchak BOC burchakka qo'shni burchak.**

chiziqlar bo‘Isa, ular qo‘shni bur-

chaklar deyiladi (IV 5-rasm).

1-teorema. Qo'shni burchak- larning yig‘indisi 180° ga teng.

***VI. 5-rasm.***

/.AOB + /.BOC 180°.

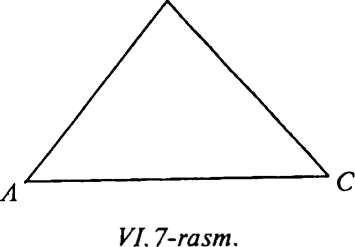
I I I 1 1 )



**ZAOB va ZCOD vertikal burchaklardir.**

***VI. 6-rasm*.**

***B***



2-ta’rif. Agar ikki burchak tomonlari biri ikkinchisini to ‘Idiruvchi yarim to‘g‘ri chigiqlardan iborat bo ‘Isa, bu ikki burchak vertikal bur- chaklar deyiladi (VI.6-rasm).

2-teorema. Vertikal burchaklar teng:

*/.AOB = L*

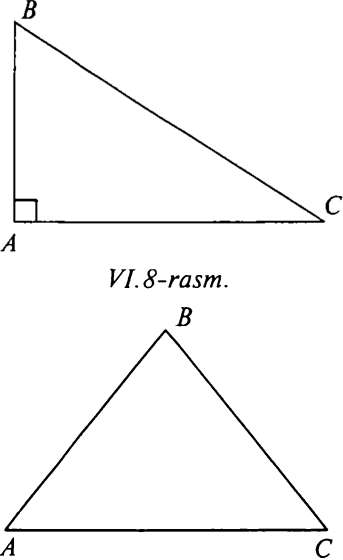
2.2. Uchburchaklar, ularning elementlari, turlari.

3-ta’rif. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan va shu nuqtalarni ikkitalab tutashtiruvchi uchta kesmadan iborat shakl uchburchak deyiladi (IV.7-rasm).

**273**

A, uchburchakning uchlari; AB, AC, BC — uchburchakning tomonlari;

/.ABC, /.BAC, /.ACB uchbur- chak burchaklari.



***VI. 9-rasm.***

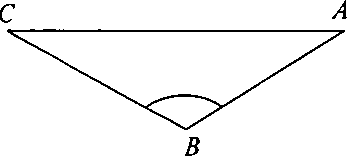
4- t a ’ r i f. Bin a burchagi 90° ga teng bo‘lgan uchburchak to‘g‘ri burchakli uchburchak deyiladi (IV 8-rasm).

5- t a ’ r i f. Hamma burchaklari o ‘tkir burchak bo‘lgan uchburchak, burchakli uchburchak deyiladi rasm).

6- t a ’ r i f. Bitta burchagi o ‘tmas bo'lgan uchburchak o‘tmas burchakli

uchburchak deyiladi

Uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabat: uchburchakda katta tomon qarshisida katta burchak, va aksincha, katta bur­chak qarshisida katta tomon yotadi.

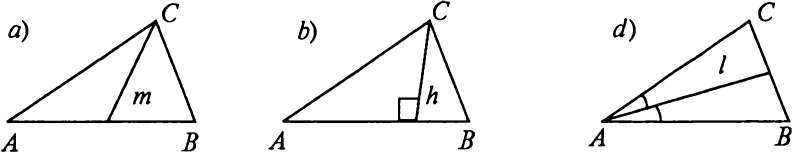


***VI. 10-rasm.***

7- ta’rif. Uchburchakning chagidan uning qarshisidagi tomon o ‘rtasiga o ‘tkazilgan kesma mediana deyiladi (Vl.ll-a rasm).

8- t a ' r i f. Uchburchakning bir uchidan uning qarshisidagi monga tushirilgan perpendikular kesma uchburchakning balandligi deyiladi (Vl.II-b rasm).

9- t a ’ r i f. Uchburchakning bir burchagini teng ikkiga bo ‘luvchi va shu burchak qarshisidagi tomon bilan kesishguncha davom etuvchi kesma uchburchakning bissektrisasi deyiladi (VI.ll-J rasm).

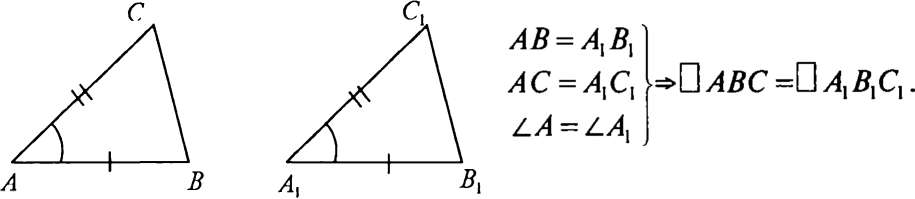


***VI. 11-rasm.* 274**

II alomat. Uchburchaklarning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko‘ra tenglik alomati (VI. 13-rasm).

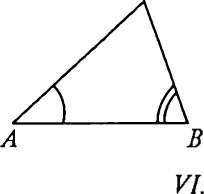
2.3. Uchburchaklarning tenglik alomatlari.

I alomat. Uchburchaklarning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko‘ra tenglik alomati (VI. 12-rasm).



***VI. 12-rasm.***

**C**



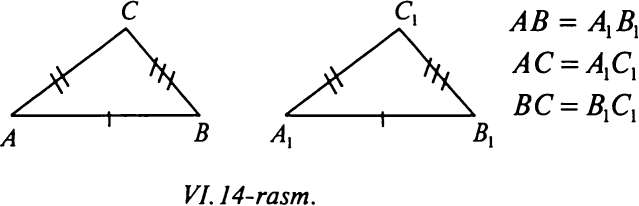
AB = AXB LA = *lb=lb*,



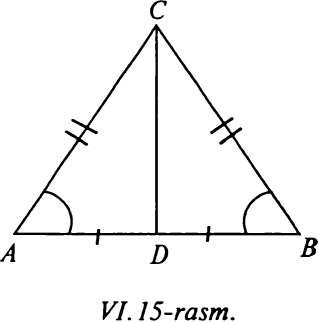
*=>U ABC* =□

Ill alomat. Uchburchaklarning uchta tomoniga ko‘ra tenglik alomati (V1.14-rasm).

2.4. Teng yonli uchburchak va uning xossalari.



10-ta’rif. Agar uchburchakning ikkita tomoni teng bo ‘Isa, u teng yonli uch­burchak deyiladi.



Teng tomonlar uchburchakning yon tomonlari, uchinchi tomon esa uning aso- si deyiladi.

AC, BC — uchburchakning yon to­monlari,

AB — uning asosi (VI. 15-rasm).

**275**

Teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklari teng boiadi: LA = LB.

3- teorema. Teng yonli uchburchakning asosiga medianasi ham balandlik, ham bissektrisa bo'ladi.

2.5. Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi.

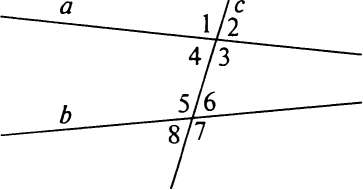
Bunda to‘g‘ri chiziqlarning parallellik alomatlari berilib, keyin uchburchakning burchaklari yig‘indisi chiqariladi.

4- teorema. Uchinchi to<‘g<‘ri chiziqqaparallel bo'lgan ikki- ta to<‘g‘‘ri chiziq *0*‘zaro parallel bo‘ladi (IV.l6-rasm).

***a***

***VI. 16-rasm.***

Ikki to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq kesganda hosil bo'ladigan burchaklar: c — to‘g‘ri chiziq va kesuvchilar (VI.17-rasm).



***VI. 17-rasm.***

(L 1; L5), 2; l6), 3; (Z.4; Z.8) — mos burchaklar.

(L4 va 5), (Z.3 va Z.6) — ichki bir tomonli burchaklar.

(Ll; Z.8), (Z.2; Ll) — tashqi bir tomonli burchaklar.

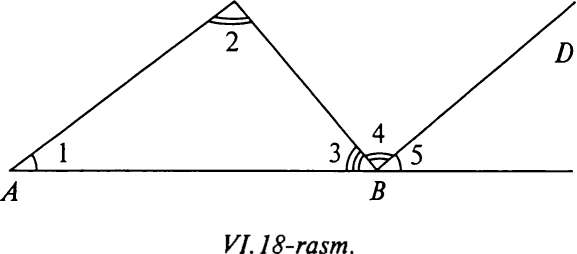
(Z.3; Z.5). (Z.4; Z.6) — ichki almashinuvchi burchaklar.

(Z.1; Z.7), (Z.2; Z.8) — tashqi almashinuvchi burchaklar.

5-teorema. Uchburchak ichki burchaklarining yig‘ indisi 18(T ga teng.

BD || AC 0‘tkazamiz (VI. 18-rasm):

C



**276**

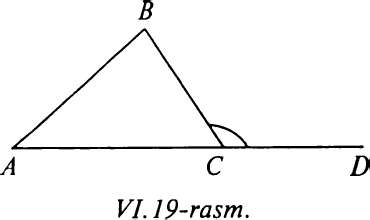
L3 + L\ + Z5 = 180°.

L3 + Ll + Ll = 180°.

L 1 = L5 — mos burchaklar.

L2 = Z.4 — ichki almashinuvchi burchaklar.

6-teorema. Uchburchakrting tashqi burchagi *o'ziga*



bo^lmagan ikkita ichki burchak yig'indisiga teng.

LBCD — uchburchakning tashqi burchagi.

LA + LB + LACB = 180° ^LA + 180° - LACB. (1).

shakldan:

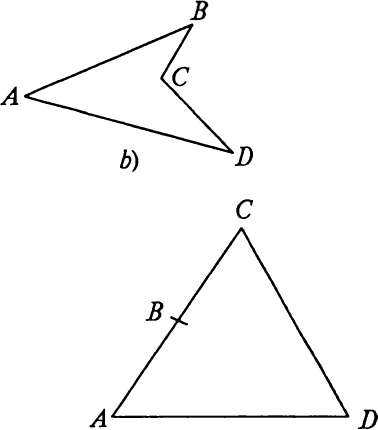
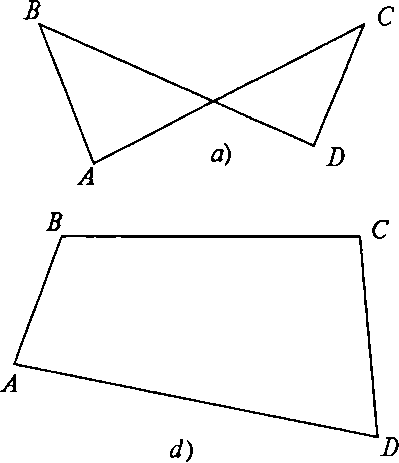
LBCD = m° - LACB. (2).

(1) va (2) dan: lA + LB= lBCD.

2.6. TVrtburchaklar, ularning turlari va xossalari.

11-ta’rif. To ‘rtta nuqta va bu nuqtalarni ketma-ket tutashti- ruvchi to ‘rtta kesmadan iborat shakl deyiladi.

Geometriya kursida a), b), e) ko‘rinishidagi shakllar va ularning xossalari haqida fikr yuritilmaydi. d) ko‘rinishidagi to‘rtburchaklar, ularning elementlari (uchlari, tomonlari, qo‘shni tomonlari, qarama- qarshi tomonlari, diagonallari va burchaklari) o‘rganiladi (VI.20- rasm). Turlari: parallelogramm, to‘g‘ri to‘rtburchak, romb, kvadrat.



***e)***

***Vf.20~rasm.***

***Ill***

12-ta’rif. Qarama-qarshi tomonlari parallel to‘rtburchak parallelogramm deyiladi.

**B C**



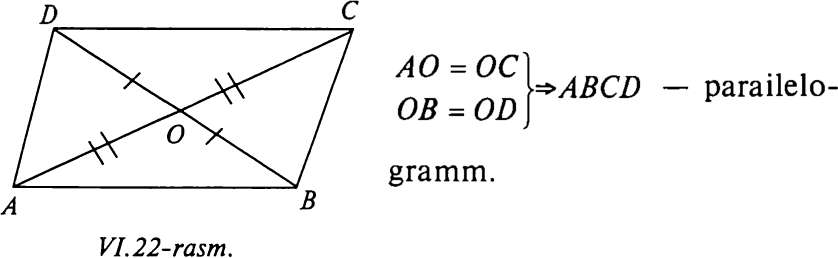
I ^ || ^ j — parallelogramm.

***A D***

***VL21-rasm.***

7-teorema. Agar to\*'rtburchakning diagonallari kesishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bu

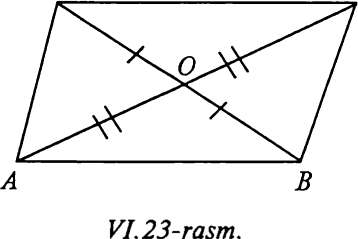
parallehgrammdir.



8-teorema. Parallelogrammning diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga boUinadi.

ABCD — parallelogramm => (AO = OC \* [BO = OD ‘

***D C***



Bu xossadan foydalanib parallelogrammning boshqa xossala- ri: qarama-qarshi burchaklari tengligi va qarama-qarshi tomon­lari tengligi isbot qilinadi.

13-ta’rif. Hamma burchaklari to‘g‘ri burchak bo'lgan to'rtburchaklar to^g^ri tot rtburchak deyiladi.

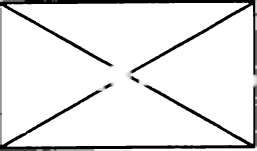
**278**

9-t e o r e m a. Toigiri to‘rtburchakning diagonallari teng.

ABCD to‘g‘ri to‘rtburchak \*\* AC = BD (VI.24-rasm).

***A B***

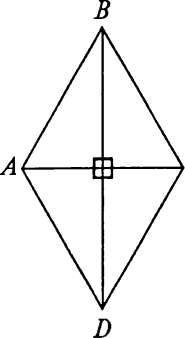
***VI.24-rasm.***



14- ta’rif. Hamma tomonlari teng bo‘Igan parallelogramm romb deyiladi.

Rombning diagonallari to‘g‘ri burchak ostida kesishadi.

Rombning diagonallari uning burchaklarining bissektrisasidir (VI.25- rasm).



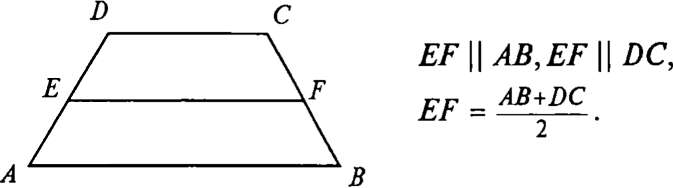
***VI.25-rasm.***

15- ta’rif. Hamma tomonlari teng bo ‘Igan to ‘g ‘ri to ‘rtburchak kvadrat deyiladi.

Kvadrat romb hamdir, shuning uchun u ham rombning, ham to‘g‘ri to‘rt- burchakning xossalariga ega.

16- ta’rif. Ikkita qarama-qarshi to- monlarigina parallel bo‘Igan to'rtburchak trapetsiya deyiladi.

Parallel tomonlari lining asoslari, parallel boimagan tomonlari lining yon tomonlari deyiladi. Yon tomonlari teng boigan trapetsiya teng yonli trapetsiya deyiladi. Yon tomonlarining o‘rtalarini tutashtiruvchi kesma trapetsiyaning o'rta chizig'i deyiladi (VI.26-rasm).



***VI.26-rasm.***

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

1. Planimetriyaning asosiy tushunchalari va aksiomalarini ayting.

2. Uchburchak, uning turlari, tenglik alomatlari, balandligi, bissektrisasi, medianasi ta’riflarini ayting.

3. To'rtburchakning ta’rif, xossa va alomatlarini ayting.

279

3-§. GEOMETRIK MASALALAR

3.1. Geometrik masalalar turlari haqida. Matematikaning boshqa bo'limlari kabi geometriya bo‘limida ham olingan nazariy va ama- liy bilimlarni mustahkamlash va malaka hosil qilish uchun uni amalda qo'llay bilish zaruriy shartdir. Shuning uchun geometriyaning har bir bo'limida nazariy ma’lumotlardan so‘ng uni masalalar yechish bilan mustahkamlash va malaka, ko‘nikmalar hosil qilish kerak.

Geometrik masalalar amaliy mashqlar bilan hal qilinadigan masalalar, hisoblashga doir masalalar, isbotlashga doir masalalar va yasashga doir masalalarga bo‘linadi.

Amaliy mashqlar bilan hal qilinadigan masalalar, asosan, chizg‘ich va transports kabi o‘lchash asboblari bilan hal qilina­digan masalalardir. Masalan, berilgan ikki kesma uzunliklari yig‘indisiga teng bo‘lgan kesmani topish. Kesmalarning birini ikkinchisidan uzun yoki qisqa ekanligini aniqlash va h.k.

Hisoblashga doir masalalar geometriya kursining har bir bo‘limida mavjud bo‘lib, bunday masalalar geometriyadan olin­gan nazariy bilimlar, o‘rganilgan formula va xossalarga asoslanib geometrik shakllarning biror kattaligini, uning yuzini, hajmini berilgan elementlar kattaliklariga asosan topishga qaratiladi. Masalan, uchburchakning balandligi va asosiga ko‘ra, yoki to‘g‘ri burchakli uchburchakning kattaliklariga ko‘ra, yoki tomonlari ora- sidagi munosabatlariga ko‘ra uning yuzini, perimetrini va boshqa noma’lum elementlarini topish, shuningdek, radiusiga ko‘ra ay- lana uzunligini C = 2nR orqali, doiraning yuzini S = jiR2 orqali, yoki bu formulalardan R ni topish kabi masalalar.

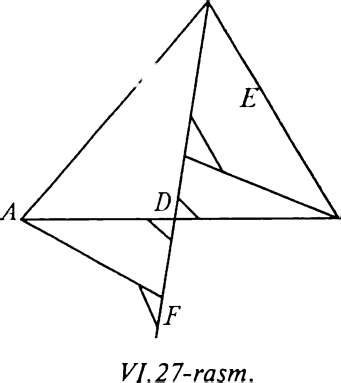
Isbotlashga doir masalalarga o‘rganilgan geometrik shakllarning xossalari, alomatlari yoki ular orasidagi munosabatlarni nazariy jihatdan asoslashga doir masalalar kiradi. Isbotlashga doir masalalarni hal qilishda matematika o‘qitish metodikasining deduksiya va induksiya metodlaridan foydalaniladi. Bunda masalaning shartidan nima ma’lum, berilgan ekanligi aniqlanadi. So‘ngra nimani keltirib chiqarish kerakligini aniqlab, ma’lum ta’rif, teorema va aksiomalarga asoslanib, mulohazalar ketma-ketligidan isbotlanishi kerak bo‘lgan mulohazaning rostligi keltirib chiqariladi. Agar masalaning sharti A va xulosasi i?bo‘lsa, u holda isbot A > B implikatsiyaning rostligini ko‘rsatishdan iborat bo'ladi.

Masala. Uchburchakning biror uchidan uning qarshisidagi to- monga o‘tkazilgan medianasi uchburchakning qolgan ikki uchidan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.

280

Berilgan: t\ABC da CD mediana (VI.27-rasm).

Isbot qilish kerak: AF- BE.



I s b o t i: CD mediana -\*AD - DB,

AADF - /LBDE (vertikal burchak boigani uchun).

tsADFva A#£)£lar to‘g‘ri bur- chakli uchburchak boigani uchun to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning

tenglik alomatlariga ko‘ra a ADF-

= tsBDE boiadi. Bundan, teng uchburchaklarda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotishi shartidan BE ekanligi kelib chiqadi. Bunday masalani yechishda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa boigan masofani to‘g‘ri tushunish masalaning yechimini topish- ga ko‘rsatma boiadi. Bu alohida mavzu boiib, uni sirkul va chizgich yordamida masalalar yechishda ko‘ramiz.

3.2. Geometrik shakllarni sirkul va chizgich yordamida yasash. Yasashga doir masalalarni yechish — talab qilingan geometrik shakllar yoki ularning elementlarini berilgan rna’lu- motlar asosida geometrik yasash qurollari yordamida yasashdan iboratdir. Bunday masalalar oiganilgan geometrik nazariyalarni ketma-ket qoilab, faqat ko‘rsatilgan yasash qurollaridan foyda- lanib hal qilinadi. Yasashga doir geometrik masalalar «konstruk- tiv masalalar» deyiladi va geometriyaning bu qismi o'rganiladigan boiimi «konstruktiv geometriya» deb ataladi. Konstruktiv geo­metriyaning asosiy yasash quroli chizgich va sirkuldir. Bu qurollarni ishlatishda, asosan, ularning imkoniyatlarini e’tiborga olib tuzilgan quyidagi aksiomalardan foydalaniladi:

1. Berilgan ikki nuqta orqali to‘g‘ri chiziq mumkin.

(Chizgich aksiomasi.)

2. Berilgan markazi va radiusiga ko ‘ra U(0, r) aylanani yasash mumkin. (Sirkul aksiomasi.)

3. Ikki to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasini topish mumkin, agar ular kesishadigan bo'lsa. (Chizgich aksiomasi.)

4. Ikki aylananing kesishgan nuqtalarini topish mumkin, agar ular umumiy nuqtaga ega bo'lsa. (Sirkul aksiomasi.)

5. Berilgan to'g'ri chiziq va aylanalarning kesishgan nuqtalarini topish mumkin, agar ular kesishsa. (Chizgich va sirkul aksio­masi.)

281

Yasashga doir masalalarni yechishda bu aksiomalar chekli marta qoilaniladi. Geometriyaning shakllarni yasashga doir qismi ancha murakkab va keng soha bo‘lib, chet el geometrlaridan Ita- lyan geometri Maskeroni 1797-yilda, nemis olimi Yakob Shteyner 1833-yilda, Adler 1890-yillarda har bir yasash qurolining ahamiyati haqida mukammal fikr yuritib, ularning har birini va ularning o'rnini bosuvchi boshqa asboblarni ta’riflaganlar va tabaqalarga ajratganlar. Fransuz matematigi Adamar elementar geometriya kursida shunday deb yozadi: «Geometrik yasashlar degan so'zdan chizg‘ich va sirkul yordami bilan bajariladigan yasashlar tushuniladi». Geometrik yasash qurollari safiga ikki tomonli chizg‘ich, to‘g‘ri yoki o‘tkir burchak, go'niya kabi as- boblar ham kirishiga qaramay, biz ham faqat sirkul va chizg'ich bilan cheklanamiz.

0‘rta osiyolik olimlardan Umar Xayyom (1048—1030), Nas- riddin Tusiy (1201—1274), Bag‘dod matematigi Abul Hasan Sobit ibn Karra (836—901), Abul-Vafo Muhammad al-Buzdakoni (940—988), Sidjizi (951 — 1024), al Kuxi (X asr), Muhammad ibn al-Xusayn (XII asr) chizmachilikni takomillashtirish, chizma- chilik asboblari va yasashga doir tarixiy masalalarning yechimi haqida risolalar yaratganlar.

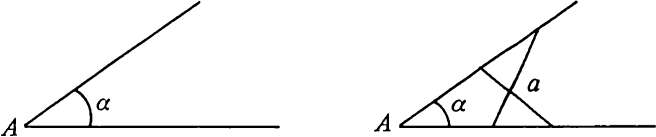
3.3. Yasashga doir geometrik masalalarni yechishdagi asosiy bosqichlar. Yasashga doir geometrik masalalarning berilishiga qarab, uning yechimi mavjudmi yoki yo‘qmi, degan savol tug'iladi.

Bu savolga javobni ayrim masalalarda, ayniqsa, shu masalani yechishda qo'llaniladigan usul yoki ketma-ketlik aniq va sodda bo‘lsa, oldindan aytish mumkin.

Masalan, a tomoni va uning qarshisidagi A burchagi bo'yicha uchburchak yasash talab qilinsin.

Bunday masalaning sharti yetarli emas, lekin bu berilgan shart- larni qanoatlantiruvchi yechim cheksiz ko‘p ekanligini aytish mumkin (VI.28-rasm). Shuning uchun bu masalaning yechimi aniq emas deyiladi.

***a***

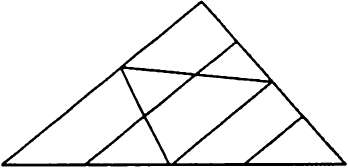


***VL28-rasm*.**

282

Yoki, masalan: 3 ta burchagiga ko‘ra uchburchak yasash. Burchaklari berilgan burchaklarga teng boigan juda ko‘p o‘xshash uchburchaklar yasash mumkin (VI.29-rasm). Ularning har biri yechim bo‘la oladi. Demak, vi.29-rasm.

yechim aniq emas.



Bunday masalalarda, albatta, hech bo‘lmaganda, bitta chiziqli element berilishi kerak, bunday shart uchburchakni toia aniqlaydi.

Bu masaladan ko'rinadiki, yasashga doir masalalarni yechishda o‘ziga xos xususiyat mavjud ekan. Bu xususiyat bunday masala­larni yechishdagi asosiy bosqichlardir. Ular quyidagilar:

1. Tahlil bosqichi;

2. Yasash bosqichi;

3. Isbotlash bosqichi;

4. Tekshirish bosqichi.

Tahlil bosqichi — bu bosqichda «masala yechildi», deb faraz qilib, so‘ralgan shaklning taxminiy chizmasi chiziladi va unda masala shartida berilgan elementlar aniqlanadi. So‘ngra ular bilan so‘ralgan shaklning asosiy elementlari orasidagi bog‘lanish aniqlanadi. Keyin berilgan elementlarga ko‘ra, so‘ralgan shaklni yasash rejasi tuziladi. Bu bosqich ijodiy bosqich deb ataladi, chunki tuzilgan reja asosida so'ralgan shaklni bemalol yasash mumkin.

Yasash bosqichi — bu bosqich ijro etish bosqichi deb atalib, tahlil bosqichida tuzilgan reja asosida so‘ralgan shakl yasaladi (sirkul va chizg‘ich yordamida).

Isbotlash bosqichi — bu bosqichda yasalgan shakl masalaning shartlarini qanoatlantirishi isbotlanadi.

Tekshirish bosqichi — bu bosqichda quyidagi savollarga javob berish kerak boiadi:

1. Masala doim yechimga egami yoki yechimga ega bo‘lmagan hoi ham bormi?

2. Agar masala yechimga ega boisa, qachon nechta yechimga ega boiadi?

Bu bosqichlar masalaning toia hal qilinishini ta’minlaydi.

Berilgan masalaning sodda va murakkabligiga qarab ayrim bosqichlarni og‘zaki ham bajarish yoki bajarmaslik mumkin boiadi. Lekin to‘rtta bosqichga toia e’tibor berish kerak boiadi.

Yasashga doir masalalarni yechishda ko‘p qoilaniladigan bir qancha elementar masalalar mavjud. Jumladan,

**283**

1) kesmaga teng kesma yasash;

2) burchakka teng burchak yasash;

3) uchta tomoniga ko‘ra uchburchak yasash;

4) ikki tomoni va ular orasida burchagiga ko‘ra uchburchak yasash;

5) bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko‘ra uch­burchak yasash;

6) burchak bissektrisasini yasash;

7) kesmani teng ikkiga boiish;

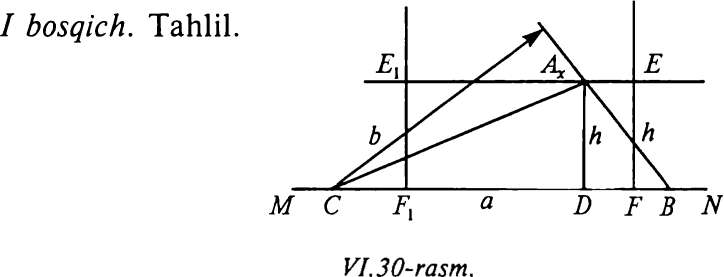
8) berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular tushirish;

9) berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish va hokazo.

Yasashga doir masalalarni yechishda bunday elementar ma- salalar chekli marta takrorlab qo‘llanilishi mumkin.

Masala. Asosi, bir yon tomoni va asosiga tushirilgan baland- ligiga ko‘ra uchburchak yasang.

Berilgan: CB = a, ADl CB, AD = =



Rej a:

1. M/Vto‘g‘ri chiziqda a kesma yasaladi. B, C uchlar topiladi;

2. A uchi asosdan h masofada bo'lgani uchun EF L BC o'tkaziladi;

3. EF = h belgilanadi. E — nuqta topiladi;

4. Xuddi shuningdek, F] £, — topiladi;

5. E, E] — o‘tkaziladi. / — to‘g‘ri chiziq topiladi;

6. Markazi C nuqtada, radiusi b ga teng bo'lgan 0; 2) ay- lana yasaladi, natijada / n U = Axnuqta topiladi (VI.31-rasm).

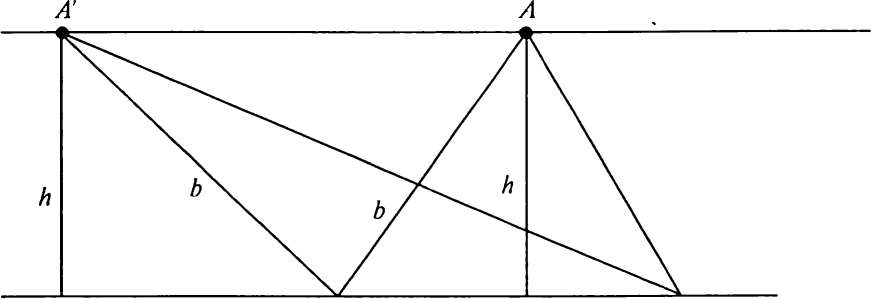
II bosqich. Yasash. Tuzilgan rejaga ko‘ra A ABC yasaladi.

**284**

Ill bosqich. I shot.

Yasalishiga ko‘ra A ABC ning asosi a ga, yon tomoni ga, balandligi h ga teng boiadi.

IVbosqich. T e k s h i r i sh.



***M C N B***

***VI. 31-rasm.***

b < h bo‘lsa, A topilmaydi, yechimi yo‘q. h - b bo'lsa, masala bitta yechimga ega. b > h bo'lsa, 2 ta yechimga ega.

**SAVOL VA TOPSHIRIQLAR**

**1. Geometrik masalalar turlarini ayting, o‘rta maktab geometriya darsliklaridan isbotlashga va hisoblashga oid 5 tadan masala topib yeching.**

**2. Yasashga oid masalaning ta’rifi va yechish bosqichlarini ayting.**

**3. Chizg‘ich va sirkul aksiomalarini ayting.**

**4. Yasashga oid elementar masalalarni ayting va yechilishini ko‘rsating.**

**5. Quyidagi masalalarni chizg‘ich va sirkul yordamida yeching:**

1**) Uchburchak chizing. Uning barcha: a) balandliklari; b) media- nalari; d) bissektrisalarini yasang.**

**2) 60° va 30° li burchaklar yasang.**

**3) Berilgan: a) ikki tomoni va diagonaliga; b) tomoni va ikki diagonaliga; d) ikki tomoni va bitta burchagiga; e) diagonallari va ular orasidagi burchagiga ko‘ra parallelogramm yasang.**

**4) Berilgan: a) burchagi va shu burchakdan chiqqan diagonaliga; b) diagonali va uning qarshisidagi burchagiga; d) tomoni va diago­naliga; e) ikkita diagonaliga ko‘ra romb yasang.**

**5) Berilgan: a) asoslari va yon tomonlariga; b) asoslari va diagonal- lariga ko‘ra trapetsiya yasang.**

6**) Berilgan aylanaga berilgan nuqtadan urinma o‘tkazing.**

**285  
4-§. STEREOMETRIYA**

4.1. Stereometriya aksiomalari. Stereometriya geometriyaning fazoviy shakllarini o‘rganadigan qismi bo'lib, uning o‘ziga xos aksiomalari mavjud. Bu aksiomalar quyidagilardan iborat:

1. Tekislik qanday bo‘lmasin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.

2. Agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.

3. Agar ikkita turli to‘g‘ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

Bu aksiomalardan va planimetriyaning ayrim aksiomalarini mulohaza qilgan holda quyidagi natijalar keltirib chiqariladi:

1 -t e o r e m a. Totgtri chiziq va undo yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik ***0***‘tkazish mumkin.

2- teorema. Toigtri chiziqning ikkita nuqtasi tekislikka tegishli boilsa, u holda toig<‘ri chiziqning oizi ham tekislikka tegishli bol'ladi.

3- teorema. Tekislik bilan unda yotmaydigan toig<‘ri chiziq yo kesishmaydi, yoki bitta nuqtada kesishadi.

4- teorema. Bitta toigiri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan bitta va faqat bitta tekislik oitkazish mumkin.

4.2. To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning paralleliigi va perpendiku- larligi.

1- ta’rif. Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotsa va kesishmasa, ular *parallel toig<‘ri chiziq* deyiladi. Kesishmaydigan va bina tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziqlar *ayqash toigiri chiziqlar* deyiladi.

5- teorema. Tat'gri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan shu to^gfri chiziqqa parallel tof’gfri chiziq oitkazish mumkin va faqat bitta.

**6**- teorema. Uchinchi to^'H chiziqqa parallel ikki toigiri chiziq paralleldir.

7- teorema. Agar tekislikda yotmagan to'g'ri chiziq shu te- kislikdagi biror toig<‘ri chiziqqa parallel boilsa, u holda u tekis- likning o'ziga ham parallel botladi.

2- t a ’ r i f. Agar ikki tekislik kesishmasa, ular *parallel* deyiladi.

**8**- teorema. Ikki tekislikdan biri ikkinchi tekislikda yotgan kesishuvchi ikkita toigiri chiziqqa parallel botlsa, bu ikki tekis­lik parallel botladi.

9- teorema. Tekislikdan tashqaridagi nuqta orqali berilgan te­kislikka parallel qilib bitta va faqat bitta tekislik oitkazish mumkin.

286

10-teorema. Agar ikkiia parallel tekislik uchinchi bilan kesishsa, u holda kesishish *t* chiziqlari parallel bo'ladi.

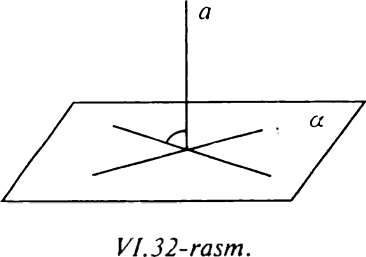
11 -t e o r e m a. Ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan pa­rallel to'g'ri chiziqlarning kesmalari teng.

3- t a ’ r i f. Tekislikdagidek, to ‘ burchak ostida kesishgan ikki to‘g‘ri chiziq perpendikular to'g'ri chiziqlar deyiladi.

12- teorema. Perpendikular chiziqlarga mos

da parallel bo'lgan kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning o'zlari ham perpendikular dir.

4- ta’rif. Agar tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o'tuvchi istalgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo‘Isa, to'g'ri chiziq shu tekislikka perpendikular deyiladi (VI.32-rasm).



13- teorema. Agar tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tekislik­dagi shu kesishish nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpen­dikular bo'Isa, bu to'g'ri chiziq tekislikka perpendikular bo'ladi.

14- teorema. Agar tekislik ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikular bo'lsa, u holda ikkinchisiga ham perpen- dikulardir.

15- t e o r e m a. Bitta tekislikka perpendikular ikki to'g'ri chiziq

o'zaro paralleldir. -

16- t e o r e m a. (Uch perpendikular haqidagi teorema.) Tekis- likda og'maning asosidan uning proyeksiyasiga perpendikular qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq og'maning o'ziga ham perpendikular- dir. Aksincha, tekislikdagi to'g'ri chiziq og'maga perpendikular bo'lsa, u og'maning o'ziga ham perpendikular dir.

5- ta’rif. Kesishuvchi ikkita tekislikning kesishgan to'g'ri chizig'iga perpendikular bo'lgan uchinchi tekislik ularni perpendikular to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tsa, bu ikki tekislik perpendikular tekisliklar deyiladi.

17- t e o r e m a. Agar tekislik boshqa bir tekislikka perpendikular to'g'ri chiziq orqali o'tsa, bu tekisliklar perpendikulardir.

18- t e o re m a. Ikkita perpendikular tekislikning birida yotuv- chi to'g'ri chiziq shu tekisliklar kesishgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, ikkinchi tekislik ham perpendikular bo'ladi.

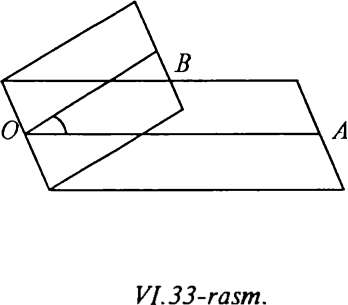
6- t a ’ r i f. Ikkiayqash to ‘g'ri chiziqning umumiy perpendikulari deb, uchlari shu to'g'ri chiziqlarda bo‘lib, ularning har biriga perpendikular bo'lgan kesmaga aytiladi.

**287**

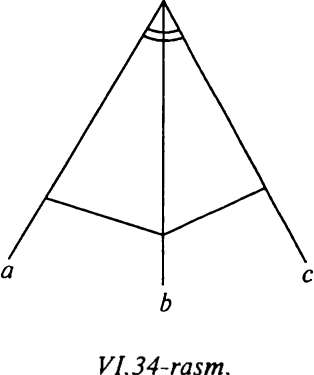
Ayqash to‘g‘ri chiziqlar umumiy perpendikularining uzunligi ular orasidagi masofa deyiladi.

4.3. Ko‘pyoqli burchaklar. Ikkita yarim tekislik va ularni che- garalab turgan umumiy to‘g‘ri chiziqdan tashkil topgan shakl yoqli burchak deyiladi (VI.33-rasm). Yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning yoqlari, ularni chegaralovchi to‘g‘ri chiziq esa ikki yoqli burchakning qirrasi deyiladi. AOB burchak ikki yoqli bur­chakning chiziqli burchagideyiladi. Ikki yoqli burchakning kattaligi uning ikki yoqli burchagi kattaligi bilan o‘lchanadi.

Uchta yassi burchakdan tashkil topgan shakl uchyoqli burchak deyiladi (V1.34-rasm).

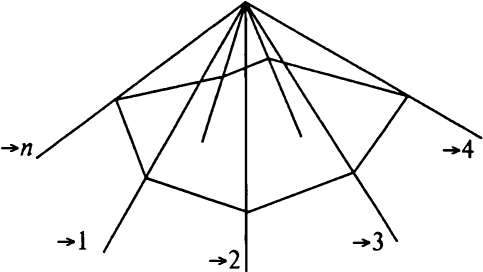


***S***



S — uchyoqli burchakning ucdeyiladi. Agar bunday, ya’ni bitta umumiy uchga ega bo'lgan tekisliklar (yoqlar) ko‘p bo‘lsa, bunday shakl ko‘pyoqli burchak deyiladi (V1.35-rasm).

5



***VI.35-rasm.***

288

4.4. Ko‘pyoqlar. Chekli miqdordagi tekisliklar bilan chegaralangan jism ko'pyoq deyiladi. Ko‘pyoqning chegarasi uning deyiladi.

Agar ko‘pyoqning o‘zi uni chegaralovchi tekisliklarning har bi- ridan bir tomonda yotsa, bunday ko‘pyoq qavariq ko'pyoq deyiladi.

Ko‘pyoqlardagi A, B, C, D, — ko‘pyoqning uchlari, AB, BC, AD', AAr BB, ... — ko'pyoqning qirralari, a aABD, aACD, \JABCD, \3ADDXA^ — ko'pyoqning deyiladi (VI.36,

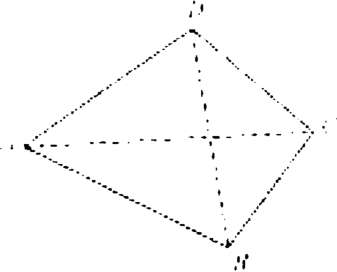
37-rasmlar).

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| />‘L |  |
|  | 7 |

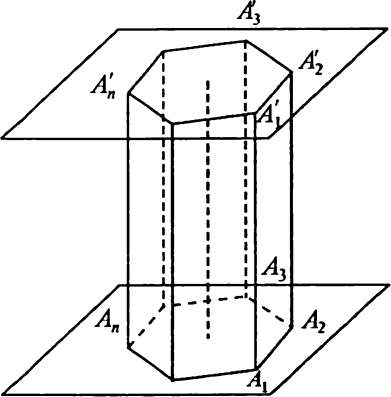
;/

VI.37-rasm.

Bizga ma’lum bo‘lgan ko'pyoqlar: prizma, parallelepiped, pi- ramidalardir.



***Vl,36-rasm.***



***VI.38-rasm.***

Prizma deb, ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan barcha parallel to‘g‘ri chiziqlar kesmalaridan tuzilgan ko‘pyoqqa aytiladi (VI.38- rasm). Bu kesmalar shu tekisliklar- dan birida yotgan yassi ko‘pburchak- ni kesib o‘tadi. Prizmaning parallel tekisliklarda yotgan yoqlari prizma­ning asoslari deyiladi. Boshqa yoqlari prizmaning yon yoqlari deyiladi. Yon yoqlar parallelogrammlardan iborat bo'ladi.

AxA2 A'2A'v A2A3 A'^A'y— prizmaning yon yoqlari;

Av A2 — prizmaning uchlari;

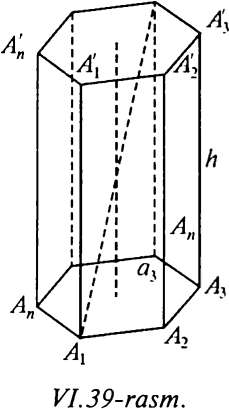
AlA\, A2A'2 — prizmaning yon qirralari;

A{ A2A3... An va A' A2A3... A'n — prizmaning asoslari deyiladi. Prizmaning asoslari orasidagi masofa uning balandligi deyila­di. Prizmaning ikki asosidagi bir yon yoqqa tegishli bo‘lmagan

**289**

uchlarini tutashtiruvchi kesmalar prizmaning diagonali deyiladi (VI.39-rasm). Agar priz­maning yon qirralari asoslariga perpendikular boisa, uni to‘g‘ri prizma deyiladi. Aks holda og‘ma prizma deyiladi.

Asoslari muntazam ko‘pburchak bo‘lgan to‘g‘ri prizma muntazam prizma deyiladi.

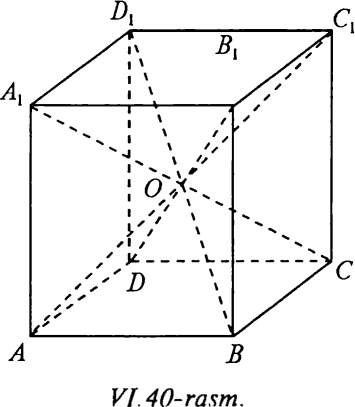


Prizma yon yoqlari yuzlarining yig‘indisi prizmaning yon sirti deyiladi.

19-t e o r e m a. To‘g‘ri prizmaning yon sirti asosiningperimetri bilan balandligining, ya’ni yon qirrasi uzunligining teng.

S = a^h + a2h + ah = ph.

4.5. Parallelepiped. Prizmaning asosi parallelogramm bo‘lsa, bunday prizma parallelepiped deyiladi (VI.40- rasm).



Parallelepipedning umumiy uchga ega bo'lmagan yoqlari qarama-qarshi yoqlar deyiladi.

ABB va DCC{D — qarama-qarshi

yoqlari.

BCC{BX va ADD{Aj — qarama-qar­shi yoqlari.

20-teorema. Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari parallel va teng.

21- teorema. Parallelepipedning diagonallari bir nuqtada ke- sishadi va kesishgan nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

Parallelepiped diagonallarining kesishgan nuqtasi «0» uning simmetriya markazi bo'ladi.

Asosi va yon qirrasi orasidagi burchak to‘g‘ri burchakdan iborat bo'lgan parallelepiped to‘g‘ri burchakli parallelepiped deyiladi.

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning hamma yoqlari to‘g‘ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi.

Hamma qirralari teng boigan to‘g‘ri burchakli parallelepiped kub deyiladi.

22- t e o r e m a. To'g'ri burchakli parallelepipedning istalgan diagonalining kvadrati uning uchta chiziqli odchovi kvadratlari- ning yig<‘indisiga teng.

**290**

B e r i 1 g a n: ABCD Bx C, Z), — to‘g‘ri burchakli parallelepiped (VI.41-rasm).

Isbot qilish kerak: **AC**2 = AB2 + BC- +

Isboti: Shaklda a ABC dan Pifagor teoremasiga ko‘ra:

AC- **=** A**2 + 2**

*ac:- = ac- +*

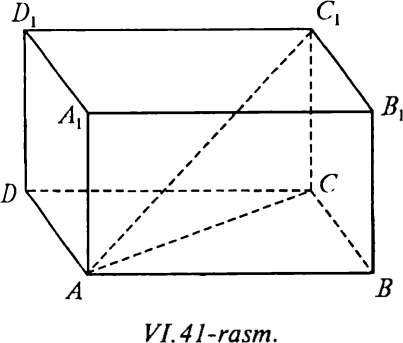
**CC2**

1 ■ '■''■'I •

AC} **= + 2 + CC,2**

Teo-

A ACC,dan:



rema isbotlandi.

4.6. Piramida. Piramida deb, berilgan nuqtani yassi ko‘pburchakning nuqtalari bilan tutashtiradigan barcha kesma- lardan tashkil topgan ko‘pyoqqa aytiladi (V.42-rasm).

S — piramidaning uchi.

A ABC — piramidaning asosi.

A SAB,SBC, SAC — piramidaning yon

yoqlari.

SA, SB, SC — piramidaning yon qirralari.

SO — piramidaning balandligi deyiladi.

Uchburchakli piramida tetraedr ham deyiladi.

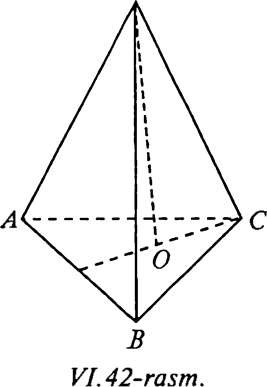
23- teorema. *Piramidaning asosiga parallel va uni kesib o'tadigan tekislik shu piramidaga o'xshash piramida ajratadi.*

24- t e o r e m a. *Muntazam piramidaning yon sirti asosi perimetrining yarmi bilan apofemasining ko'paytmasiga teng.*

= a bo‘lib, tomonlar soni n ta bo‘lsin.

***X n***

2 “ a ' 2



5 = 1^

yon 2

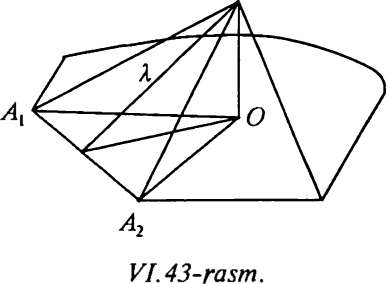
*n = a - n*

*= P­2*

A — apofema.

4.7. Muntazam ko‘pyoqlar. Agar qavariq ko‘pyoqlaming tomonlari soni bir xil bo‘lgan muntazam ko‘pbur- chaklardan iborat bo‘lsa va shu bilan birga ko‘pyoqning har bir uchida bir xil miqdordagi qirralar uchrashsa, bunday qavariq ko‘pyoq muntazam ko ‘pyoq deyiladi. Bunday ko‘pyoqlarga muntazam tetraedr,kub, dodekaedr va ikosaedrlar kiradi.

S



291

Bizga tanish boimagan oktaedryoqlari muntazam uchburchak- lar boiib, har bir uchida to'rtta qirra uchrashadi.

Dodekaedr — yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat, uning bitta uchida uchta qirra uchrashadi.

Ikosaedr — yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo‘lib, uning har bir uchida beshtadan qirra uchrashadi.

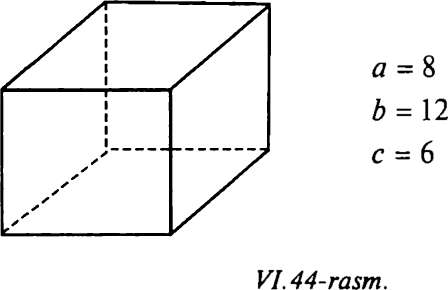
4.8. Ko‘pyoqlilar haqida Eyler teoremasi. Eyler o‘zining qavariq ko‘pyoqlar ustida o'tkazgan ilmiy izlanishlari natijasida ularning uchlari soni — a, qirralari soni — va yoqlari soni —

corasidagi munosabatni quyidagi tenglik orqali ifodalagan: qavariq ko ‘pyoqlarning qirralari soni uchlari va yoqlari sonidan 2 ta kamdir.

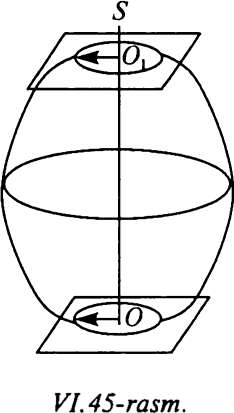
a + c - b = 2.

Mi sol. Kubda Eyler teoremasini ko'raylik (VI.44-rasm).

8 + 6-12 = 2.



4.9. Aylanma jism va aylanma sirt haqida tushuncha. Biror egri chiziqni yoki to‘g‘ri chiziqni bir to‘g‘ri chiziq atrofida ay- lantirishdan aylanma sirt hosil bo‘ladi. Agar uni o‘q deb ataluvchi to‘g‘ri chiziqqa perpen- dikular bo‘lgan parallel ikki tekislik bilan ke- silsa, aylanma sirt va doira bilan chegaralan- gan aylanma jism hosil bo‘ladi (VI.45-rasm). OS — aylanma jismning o‘qi deyiladi.



Bu jismning sirti — egri sirt aylanma sirt deyiladi.

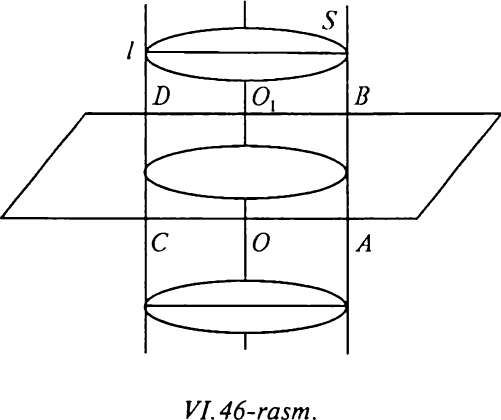
Parallel tekisliklarda hosil bo'lgan kesim doira shaklida bo'ladi.

O, 0, — doiralarning markazi bo‘ladi. Silindr. 0‘q atrofida unga parallel bo'lgan to‘g‘ri chiziq aylantirilsa, silindrik sirt hosil boiadi.

**292**

Uni o‘qqa perpendikular ikkita parallel tekislik bilan kesilsa, ular orasida silindrik jism hosil bo‘ladi (VI.46-rasm).

/ — silindr yasovchisi; OOt — silindrning o‘qi; / — to‘g‘ri chiziqning trayektoriyasi silindrning yon sirtini yasaydi.

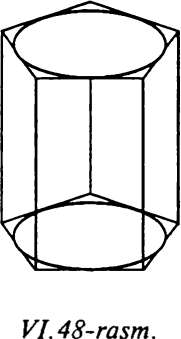
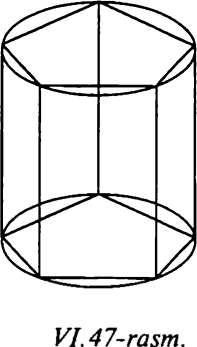


Tekisliklarda hosil bo‘lgan doiralar silindrning asoslari deyiladi. Silindr asosining radiusi silindrning radiusi deyiladi. Silindr o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan kesimi silindrning o‘q kesimi deyiladi. Silindrning yasovchisi orqali o‘tib, bu yasovchi orqali o'tadigan o‘q kesimga perpendikular tekislik silindrning urinma tekisligi deyiladi.

25-t e o r e m a. Silindr o'qiga perpendikular tekislik uning yon sirtini asos aylanasiga teng aylana bo'yicha kesadi.

Bu teorema tekislikni asosga ustma- ust tushirish orqali isbot qilinadi.

Silindrga ichki chizilgan prizma deb, shunday prizmaga ayti- ladiki, uning asoslari silindrning asoslariga ichki chizilgan teng ko‘pburchaklardan iborat, uning qirralari silindr yasovchilari bo‘ladi (VI.47-rasm).



293

Silindrga tashqi chizilgan prizma deb, shunday prizmaga ayti- ladiki, uning asoslari silindr asoslariga tashqi chizilgan teng ko'pburchaklardan iborat bo'ladi. Uning yon yoqlari tekisliklari silindrning yon sirtiga urinadi (VI.48-rasm).

Konus. Konus deb, shunday jismga aytiladiki, u berilgan nuqtani biror doira nuqtalari bilan tutashtiruvchi hamma kes- malardan tashkil topgan boiib, berilgan nuqta konus uchi, doira esa konus asosi deyiladi. Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar konusning yasovchilari deyiladi. Konusning sirti asosidan va yon sirtidan iborat. Agar konus uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikular uning marka- ziga tushsa, bunday konusni to‘g‘ri konus deyiladi (VI.49-rasm).

Konusning uchidan asosiga tushirilgan perpendikular konus­ning balandligi deyiladi. To‘g‘ri konusning balandligidan o'tuvchi to‘g‘ri chiziq konusning o'qi deyiladi. Konusning o'qi orqali o'tuvchi tekislik bilan kesimi o‘q kesim deyiladi. Konusning yasovchisi orqali o'tuvchi va bu yasovchi orqali o'tkazilgan o'q kesimga perpendikular tekislik konusning urinma deyiladi.

Shakldan: ABS uchburchak konusning o'q kesimi.

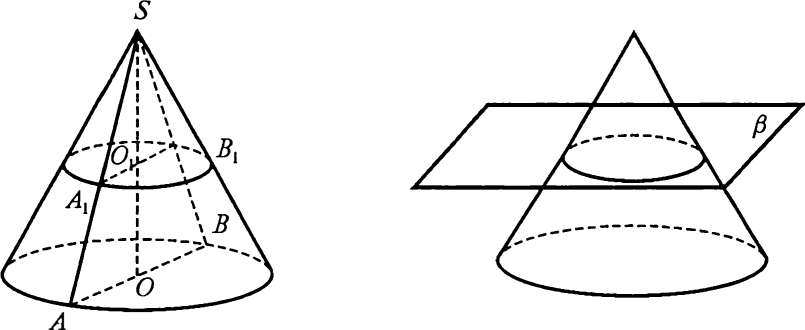
26-t e o r e m a. Konusning o'qiga perpendikular tekislik ko­nusni doira bolyicha kesadi, yon sirtini esa markazi konusning yog'ida joylashgan aylana bolyicha kesib oltadi.

Tekislikni asos tekisligi bilan ustma-ust tushiruvchi konus uchiga nisbatan gomotetik almashtirish konusning tekislik bilan kesimini konusning asosi bilan ustma-ust tushiradi.

Demak, konusning tekislik bilan kesimi doira bo'lib, yon sir- tining kesim markazi konus o'qida joylashgan aylanadir.

VI.49-rasm.

VI.50-rasm.



**294**

Konus o‘z o‘qiga perpendikular tekislik bilan kesilsa, uch tomonida kichik konus ajraladi, pastda qolgan qismi esa kesik konus deyiladi (VI.50-rasm).



***VI.51-rasm. V1.52-rasm.***

Asosi konus asosidagi aylanaga ichki chizilgan ko‘pburchak bo‘lib, uchi esa konusning uchida bo‘lgan piramida konusga ichki chizilgan piramida deyiladi (VI.51-rasm).

Asosi konusning asosiga tashqi chizilgan ko‘pburchak bo‘lib, uchi esa konusning uchi bilan ustma-ust tushgan piramida konusga tashqi chizilgan piramida deyiladi (VI.52-rasm). Tashqi chizilgan piramida yon yoqlarining tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo‘ladi.

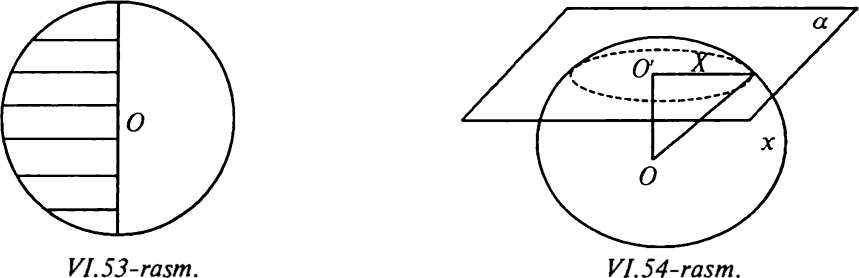
Shar.

7-t a ’ r i f. Fazoning berilgan nuqtasidan berilgan masofadan kat- ta bo‘lmagan uzoqlikda yotgan hamma nuqtalaridan qismi

shar deyiladi.

Berilgan nuqta shar markazi, berilgan masofa shaming radi- usi deyiladi. Shaming chegarasi shar sirti yoki sfera deb ataladi. Shar markazidan o‘tuvchi va shar sirtining ikki nuqtasini tutash- tiruvchi kesma shar diametri deyiladi.

Yarim doirani uning diametri atrofida aylantirish natijasida ham shar hosil bo‘ladi (VI.53-rasm).



295

*21-X*e o r e m a. Shaming har qanday tekislik bilan kesimi doi-

radir. Bu doiraning markazi shaming markazidan kesuvchi te- kislikka tushirilgan perpendikularning asosidir.

VI.54-rasmdan a — kesuvchi tekislik; O — shar markazi. 00' perpendikular o‘tkazamiz. X shu tekislikning sharga te- gishli nuqtasi bo‘lsin. Pifagor teoremasiga ko‘ra OX = 00'2+0’X,

lekin OX < R bo‘lgani uchun O'X > - OO'2

Demak, O’ nuqta radiusi V/?2 - GO'2 bo‘lgan doiraga tegishli. Shaming a tekislik bilan kesimi markazi O’ nuqtada bo‘lgan

doiradan iboratdir, uning radiusi OO'2 formula bilan

ifodalanadi.

Bundan shar markazidan bir xil uzoqlikdagi kesimlari teng doiralardan iborat bo‘ladi. Tekislik markazga yaqinlashib borsa, kesimdagi doiralar ham kattalashib boradi. Shar markazidan o‘tuvchi kesim eng katta doira bo‘lib, uning radiusi doira radiusiga teng bo‘ladi.

28-teorema. Shaming istalgan tekisligi uning

metriya tekisligi bo‘ladi. Shaming tekisligi uning simmetriya tekisligi bo'ladi. Shaming markazi uning simmetriya markazidir.

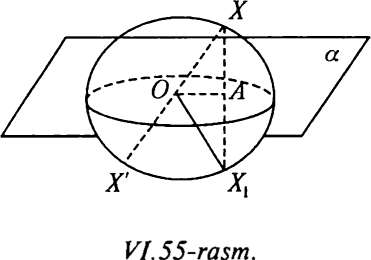
I s b o t i. a — diametrial tekislik, X — shaming ixtiyoriy nuq­tasi.

X nuqtaga simmetrik nuqtani (A'') yasaymiz.

XXx ± a => XA = AX,.

**A** A OX — **A** A OX dan: OX{ - OX. OX < R kelib chiqib X{ nuqta sharga tegishlidir.

Endi X nuqta shar markaziga nisbatan X nuqtaga simmetrik nuqta boisin. U holda OX = OX < R, ya’ni X nuqta sharga te­gishli.



296

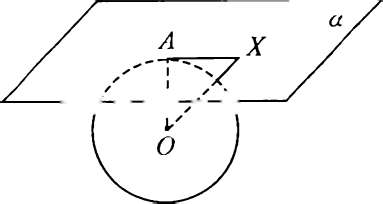
Shar sirtidagi nuqtadan o‘tib shu nuqtaga o‘tkazilgan radiusga per­pendikular tekislik urinma tekislik deyiladi. A nuqta urinish nuqtasi deyiladi.

29-t e o r e m a. *Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuq­taga — urinish nuqtasiga ega.*

A — urinish nuqtasi boTsin (VI.55-rasm).

AO = R, V *XElo.*bo'lsin. AO La.

OX esa a tekislikka og‘ma kabi bo‘- ladi. U holda OX > OA = R =>



VI. 56-rasm.

=> OX > R ■

Demak, X nuqta sharga tegishli

emas. AXto‘g‘ri chiziq sharga urin

ma deyiladi.

30-teorema. Shar sirtidagi

istalgan nuqtadancheksiz ko‘p urinma o‘tadi, ularning hammasi

shaming urinma tekisligida yotadi.

A nuqtadan o‘tuvchi har qanday urinma OA radiusga perpen- dikular bo‘ladi, demak, ular bitta tekislikda yotadi.

Sfera tenglamasi. Sferaning markazi dekart koordinatalar sistemasida A(a; b; c) nuqtada va radiusi R ga teng bo‘lsin. A nuqta bilan sfera ustidagi ixtiyoriy nuqta orasidagi masofa (jc - a)2 + (y -b)2 + (z -c)2 ga teng. Bu masofa R ga teng bo'lgani uchun sfera tenglamasi ( x- a)2 + (y - b)2 - c)2 = R2 bo‘ladi.

Agar sferaning markazi dekart koordinatalar boshida yotsa, uning tenglamasi

*x1 +*

*+ z2 = R2*

bo‘ladi.

31-teorema. Ikkita sferaning kesishgan chizig'i aylanadir.

Birinchi sferaning markazi 0{(a\ 0; 0) nuqtada, radiusi /?, bo‘lsin. Ikkinchi sferaning markazi 02{b\ 0; 0) nuqtada, radiusi /?2bo‘lsin. U holda ularning markazlarini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq X o‘qidan iborat bo‘ladi. Sferalarning tenglamasi

(x-a)2+y2 + z2 = R2, (1)

(. x-b)*2*+y*2* + *Z2* = *R.* (2)

bo‘ladi.

*(x~ a)2 -(x-* b)2 = *R2* - *x2 - lax + a2 -x2 +* 2bx- = *R2-Rf*

2(b - a)x = *R2- R2*-a2 + b2.(3)

**297**

Bu tenglama YZ koordinata tekisligiga parallel tekislik teng- lamasi bo‘lib, u ikki sferaning kesishgan chizig‘ini beradi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Stereometriyaning asosiy tushunchalari va aksiomalarini ayting.

2. Asosiy ko‘pyoqlarning ta’riflari, elementlarining nomlari va turlarini ayting.

3. Muntazam ko‘pyoq deb nimaga aytiladi va uning qanday turlari bor?

4. Aylanish shakllari deb nimaga aytiladi, ularning qanday turlari bor? Asosiy elementlarining nomlari va xossalarini ayting.

5. Ko‘pyoqlar uchun Eyler teoremasini ayting, uni misollar bilan izohlang.

5-§. MIQDORLAR VA ULARNI 0‘LCHASH

5.1. Miqdor tushunchasi. Miqdor tushunchasi faqat matema- tika fanida qo‘llaniladigan asosiy tushunchalardan birigina emas, balki fizika, kimyo kabi boshqa fanlarda qo‘llaniladigan tushun- cha hisoblanadi. Turli fanlarda (bitta fanning turli bo‘limlarida) turlicha talqin qilinganligidan, ularni tavsiflash ancha qiyinchi- liklarga olib keladi. Lekin, matematikada ularni quyidagicha ta’riflaymiz.

1-t a ’ r i f. Obyektlar yoki hodisalarga xos umumiy xossa *miqdor* deyiladi.

2 ta’rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan miqdor *bir jinsli additiv-skalyar miqdor* deyiladi:

1) Ixtiyoriy bir jinsli a va b miqdorlarni taqqoslash mumkin, ya’ni a = b, a > b, a < b munosabatlardan faqat bittasi bajariladi.

2) Ixtiyoriy bir jinsli a va b miqdorlarni qo ‘shish mumkin, ya ’ni a + b = c (yig‘indi miqdor).

3) Miqdorni songa ko ‘paytirish mumkin, ya’ni b = xa, xV R+.

4) Miqdorlarni ayirish mumkin, ya ’ni a = b + c shartni qanoat­lantiradigan c miqdor a va b miqdorlarning ayirmasi deyiladi.

5) Bir jinsli miqdorlarni bo‘lish mumkin: a/b = x.

5.2. Miqdorlarni o‘lchash tushunchasi.

3-ta’rif. Agar a miqdor va e birlik miqdor berilgan bo Tib, a =xe ni qanoatlantiradigan x soni topilsa, u holda x soni a miqdorning e o ‘Ichov birligi bo ‘yicha *o'lchovi* yoki son *qiymati* de­yiladi.

**298**

Masalan, 12 sm = 12 x 1 sm.

Miqdorlarni o‘lchash ularni taqqoslashni sonlarni taqqoslashga olib kelish mumkinligini beradi.

1. a va b miqdorlar o‘lchov birligi bilan oMchangan bo‘lsa, u holda:

a = b «> mc(a) = mc(b); a < b •» mc{a) < mc(b)', a > b ■» mt{a) > mc(b).

2. a + b = *cmc(a* + b) = mc(a) + m,.(b).

3. b = x ■ a o mc(b) = x ■ mc(a).

Masalan, b - 3a - 3 x (2 kg) = (3 x 2) kg. (a - 2 kg).

5.3. Kesma uzunligi va uning xossalari.

4-t a ’ r i f. Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan musbat miqdor kesma *uzunligi* deyiladi:

1. Teng jismlar teng uzunlikka ega;

2. Agar kesma chekli sondagi bo ‘laklardan tashkil topgan bo ‘Isa, u holda uning uzunligi bo‘laklarning uzunliklari yig‘indisiga teng- dir.

Xossalari.

1. Kesma uzunligi haqiqiy songa teng.

2. a = b ■» mc(a) = mc(b).

3. c = a + b ■» mc(c) = mc(a) + me(b).

4. b = x ■ a •» mt{b) = x ■ mc(a).

5. 0‘lchov birligi o‘zgarishi bilan kesma uzunligining son qiymati ham o‘zgaradi.

6. a > b •» mc(a) > mc(b).

7. c = a - b o me(c) = mt{a) - me(b).

8. x = a : b o me(a): mc(b).

Xalqaro o‘lchov birliklar sistemasida metr (m) asosiy uzunlik o‘lchov birligi bo‘lib, u tekis elektromagnit to‘lqinining vakuumda

sekundning 299792458 bosib o‘tgan masofasiga tengdir.

299

1 km = 103 • 1 m 1 dm = 10\_l • 1 m 1 mm = 10~3 • 1 m 1 sm = 10'2 • 1 m

**5.4. Shaklning yuzi.**

5-t a ’ r i f. Shaklning yuzi deb, miqdorga

tiladiki, u quyidagi xossalarga ega:

1) Teng shakllar teng yuzga ega, ya’ni

Fx =F2~ *S(F{)* = S(F2).

2) Agar shakl chekli sondagi qismlardan tashkil topgan bo‘Isa, u holda uning yuzi qismlarning yuzlari yig‘indisidan iborat, ya’ni

F = Fl+ F2 + ... *+ F„*o *S(F)* = *S(F{) + S(F2) ++*

Shakl yuzini o‘lchash, bu uni tomoni e ga teng (yuzi e1) birlik kvadrat bilan taqqoslash, demakdir. Taqqoslash natijasida shun­day x soni kelib chiqadiki, u S(F) = ni qanoatlantiradi. X — soni berilgan o‘lchov birligida shakl yuzining son qiymati deyiladi.

Shakl yuzini o‘lchashning ba’zi usullarini ko‘rib chiqamiz. Shakl yuzini oichash usullaridan bir palyotkalar (katakli plyonka) yordamida o‘lchash. Bunda o‘lchanayotgan shakl ustida palyotkani yuzma-yuz qo‘yamiz.

1. Berilgan shakl yuziga tegishli to‘liq kvadratlar (kataklar) sonini aniqlaymiz. Ularning soni m bo‘lsin.

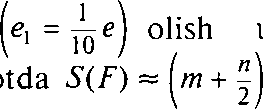
2. Berilgan shakl konturida yotgan kvadratlar (kataklar) sonini aniqlaymiz. Ularning soni n ga teng bo‘lsin.

Bu holda Fning yuzi S(F) shartini qanoatlantiradi.

Shakl yuzini aniqroq hisoblash uchun kataklarni yana ham

mumkin.

maydaroq



Amaliyc e2 formula yordamida hisoblanadi.

6- ta’rif. Yuzlari teng shakllar tengdosh deyiladi. Tengdosh shakllar teng bo'lmasligi ham mumkin.

7- ta’rif. Agar ikkita shakl bir xil qismlardan tashkil topsa, teng tuzilgan deyiladi.

Teng tuzilgan figuralar har doim tengdoshdir.

Agar yuz o‘lchov birligini almashtirsak, u holda yuzning son qiymati yangi o‘lchov birligi necha marta ortiq (kam) bo‘lsa, shuncha marta kamayadi (ortadi).

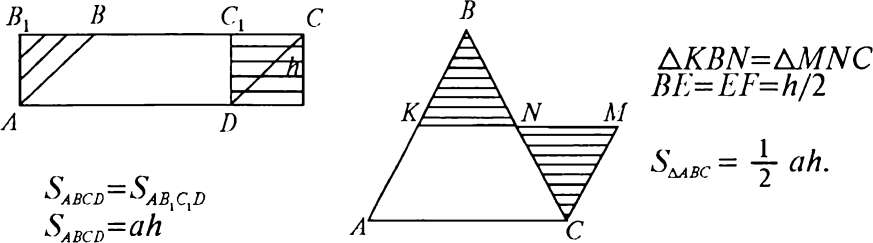
**300**

Masalan, 5 sm2 = 5x1 sm2 = 5x (0,01 dm2) - (5x0,01) dm2 = = 0,05 dm2.

Boshlang‘ich sinf o‘quvchilari to'gTi to‘rtburchak yuzini palyotka yordamida topish uchun uning ichiga joylashgan birlik kvadratlarni sanaydi yoki eni va uzunligining son qiymatlarini ko'paytiradi. Teng tuzilgan shakllar xususiyatidan foydalanib, ba’zi shakllarning yuzlarini topish formulalarini keltirib chiqaramiz.

***VI.57-rasm.***

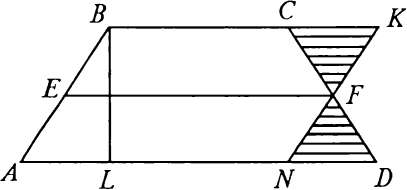
***VI. 58-rasm.***



*(a+b)*

■h

***V[.59-rasm.***



2

Teng tuzilganlikdan foydalanib boshqa shakllarning yuzlarini topish mumkin.

**5.5. Jismning massasi va hajmi haqida tushuncha.**

8-t a ’ r i f. Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan musbat miqdor

*massa* deyiladi:

1) Tarozida bir-birlarini teng muvozanatda saqlaydigan jism- larning massalari tengdir.

2) Agar jism bo ‘laklardan tashkil topgan bo ‘Isa, u holda jism­ning massasi uni tashkil qiluvchi bo'laklar massalarining yig‘in- disidan iboratdir.

Jismning massasini tarozi yordamida o‘lchaymiz. e massaga ega bo'lgan jismni tanlaymiz va uni o‘lchov birligi sifatida qabul

**301**

qilamiz. Bu massaning birlik qismini olish ham mumkin. Masalan, 1 g = 1/100 kg.

Kilogramm (kg) asosiy massa o‘lchovi birligi sifatida qabul qilingan. Platina va iridiy qotishmasidan 1889-yilda tayyorlan- gan silindrning massasi 1 kg deb qabul qilingan. Bu etalon xalqaro o‘lchovlar byurosida Fransiyaning Sevre shahrida saqlanadi. Bun- dan oldingi asrda 1 kg deb 1 dm3 (4°C) suvning massasi qabul qilingan edi. Gramm (g), tonna (t), sentner (s) va boshqa birliklar hosilaviy oichov birliklari deyiladi.

1 g = 10~3• 1 kg, 1 m = 103• 1 kg, 1 s = 102• 1 kg.

Jism hajmi tushunchasiga ta’rif beraylik. Fazoda biror D jism berilgan bo‘lsin va uning chegarasi sifatida bir yoki bir nechta yopiq sirtlar xizmat qilsin.

Biror K — ko‘pyoq D — jismga tashqi, k — ko‘pyoq esa D — jismga ichki chizilgan deb olaylik.

8-t a ’ r i f. Agar tashqi (K„)"=i va ichki (k„)~=i chizilgan ko ‘pyoqlar ketma-ketligi chekli limit lim V(K„) = lim V(k„) = Vga ega bo‘lsa,

*n—n—*

u holda D — jism kublashtiriluvchi deyiladi.

Umumiy limit V — D jism hajmining son qiymati deyiladi.

Jism hajmi quyidagi xossalarga ega:

1. Jism hajmining son qiymati nomanfiy haqiqiy son.

2. Teng jismlar teng hajmiga ega.

3. Agar jism ichki umumiy nuqtaga bo‘lmagan jismlarning bir- lashmasidan iborat bo‘lsa, u holda jismning hajmi birlashuvchi jismlar hajmlari yig‘indisiga tengdir.

4. 0‘lchovlari birlik kesmadan iborat kubning hajmi birga teng.

Hajm birliklari:

Kub metr (m3); kub detsimetr (dm3), kub santimetr (sm3), kub millimetr (mm3). Litr (1), gektolitr (gl), millimetr (ml). SI sistemada 11=1 dm3.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

**l.Ikki bo‘lak simni o‘lchamasdan uzunliklarini qanday taqqoslash mumkin?**

**2. Ikki turli idishlardagi suv hajmini o'lchamasdan qanday taqqoslash mumkin?**

**302**

**3. Qanday kattaliklarni oichash natijasida quyidagi natijalar olingan boiishi mumkin: a) 12.3 m; b) 17 mm; d) 140 1; e) 5 kg 300 g; 0 160 t; g) 6 km/soat; h) 16 so‘m?**

**4. Uzunlik, massa, vaqt, yuz va tezlikning asosiy va hosilaviy birliklarini ayting.**

**5. Agar o'lchov birligi a) 3 marta kattalashsa; b) 7 marta kichiklashsa, miqdorning son qiymati qanday o'zgaradi?**

**6. e birlik kesma oling va a) 3e; b) 0,6e; d) l,75e kesmalarni yasang.**

**Agar birlik kesma uchun ^ e; 2e; 0,75e olinsa, yuqoridagi kesmalar**

**uzunliklarining son qiymati qanday o'zgaradi?**

**7. «Teng shakllar tengdoshdir» degan mulohazaga teskari mulohazani tuzing va rost yoki yolg'onligini aniqlang.**

**8. Bitta shakl yuzining son qiymati turlicha, turli shakllar yuzlarining son qiymatlari bir xil sonlar bilan ifodalanishi mumkinmi? Misol keltiring.**

**9. Agar kvadrat tomonlari: a) 2 baravar orttirilsa; b) 25% ga orttirilsa; d) 3 marta kamaytirilsa, kvadrat yuzi qanday o'zgaradi?**

**10. Orasidagi bog'lanish: a) to'g'ri proporsional; b) teskari proporsional bo'lgan kattaliklarga misol keltiring.**

**11. Ikkita kvadrat shaklidagi yer maydonining tomonlari 100 m va 150 m. Ularga tengdosh kvadrat shaklidagi yer maydonining tomonini toping.**

**12. Kvadrat yuzini uning diagonali a** **ga ko'ra toping.**

**13. Kvadratga tashqi chizilgan aylana yuzi unga ichki chizilgan kvadrat yuzidan necha marta katta?**

**14. Kvadrat va romb bir xil perimetrga ega. Ularning qaysi birining yuzi katta va nima uchun?**

**15. Rombning yuzi uning diagonallari ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang.**

**16. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 74 dm, yuzi 3 kv m bo'lsa, tomonlarini toping.**

**17. Uchburchakni bir uchidan chiqqan to'g'ri chiziqlar yordamida uchta tengdosh bo'lakka bo'ling.**

**18. Asoslari 60 sm va 20 sm, yon tomonlari 13 sm va 37 sm bo'lgan trapetsiyaning yuzini toping.**

**19. Doira yuzining unga ichki chizilgan: a) kvadrat; b) muntazam uchbur- chak; d) muntazam oltiburchak yuziga nisbatini toping.**

**20. Qirralari 3 sm, 4 sm, 5 sm bo'lgan uchta metall kub eritilib, bitta kub yasalgan. Shu kubning hajmini toping.**

**21. Kubning qirralari 1 m orttirilsa, hajmi 125 marta ortadi. Kubning qirrasini toping.**

**22. To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari 15 m, 50 m, 36 m bo'lsa, unga tengdosh kubning qirrasini toping.**

**303**

MUNDARIJA

**So'zboshi**

I b o b. UMUMIY TUSHUNCHALAR

1- §. TO‘PLAM

**1.1. To'plam tushunchasi**

**1.2. To'plamlarning berilish usullari**

**1.3. Qism to'plam va universal to'plam**

**1.4. Eyler —Venn diagrammalari**

**1**[**.5. To'plamlarning kesishmasi**](#bookmark1)

**1.6. To‘plamlarning birlashmasi**

[**1.7. To'plamlar ayirmasi. To'ldiruvchi to'plam**](#bookmark3)

**1.8. To'plamlarning dekart ko'paytmasi**

**1.9. To'plamni sinflarga ajratish**

**1.10. To'plamni elementlarining bitta, ikkita va uchta**

**xossasiga ko‘ra sinflarga ajratish**

2[- §. MOSLIK VA MUNOSABAT](#bookmark4)

**2.1. Ikki to‘plam elementlari orasidagi moslik tushunchasi..**

**2.2. Moslikning graft va grafigi**

**2.3. Moslik turlari**

**2.4. To'plam elementlari orasidagi munosabat**

**2.5. Munosabat xossalari**

**2.6. Tartib munosabati**

3- §. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

**3.1. Kombinatorika masalasi**

**3.2. Yig'indi qoidasi**

**3.3. Ko'paytma qoidasi**

**3.4. Takrorlanadigan o'rinlashtirishlar**

**3.5. Takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlar**

**3.6. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar**

**3.7. Takrorlanmaydigan guruhlashlar**

[**3.8. C\* ko'rinishdagi sonlarning xossalari**](#bookmark11)

**3.9. Chekli to'plam qism to'plamlari soni**

**304**

[**4-§. MATEMATIK TUSHUNCIIA 33**](#bookmark12)

**4.1. Tushuncha 33**

**4.2. Tushunchaning hajmi va mazmuni 34**

**4.3. Tushunchani ta’riflash 35**

**4.4. Tushuncha ta’rifiga qo‘yiladigan talablar 36**

[**5-§. MULOHAZALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR 37**](#bookmark13)

**5.1. Mulohazalar haqida umumiv tushuncha 37**

[**5.2. Mulohaza inkori 38**](#bookmark14)

**5**[**.3. Mulohazalar konyunksiyasi 38**](#bookmark15)

[**5.4. Mulohazalar dizyunksiyasi 39**](#bookmark16)

[**5.5. Mulohazalar implikatsiyasi 40**](#bookmark17)

[**5.6. Mulohazalar ekvivalensiyasi 41**](#bookmark18)

[**6-§. PREDIKATLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR 42**](#bookmark19)

**6.1. Predikatlar haqida umumiy tushuncha 42**

**6.2. Kvantorlar 43**

**6.3. Predikatlar inkori 44**

**6.4. Predikatlar konyunksiyasi 44**

**6.5. Predikatlar dizyunksiyasi 45**

**6.6. Predikatlar implikatsiyasi 46**

**6.7. Predikatlar ekvivalensiyasi 46**

**6.8. Teoremaning tuzilishi 47**

[**7-§. ALGEBRAIK OPERATSIYA 51**](#bookmark20)

**7.1. Algebraik operatsiya tushunchasi 51**

**7.2. Algebraik operatsiya xossalari 51**

[**7.3. Algebraik operatsiyaning neytral, simmetrik, yutuvchi**](#bookmark21)

[**elementlari 52**](#bookmark21)

[**7.4. Gruppa, halqa va maydon tushunchalari 53**](#bookmark22)

[**8-§. ALGORITM TUSHUNCHASI 54**](#bookmark23)

**8.1. Algoritm tushunchasi va uning xossalari 54**

**8.2. Algoritmlarni yozish usullari 55**

**8.3. Boshlang'ich sinflarda qo'llaniladigan algoritmlar 57**

**II bob. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMI**

**l-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMINI**

**TO‘PLAMLAR NAZARIYASI ASOSIDA QURISH 58**

**1.1. Nazariyani aksiomatik qurish to‘g‘risida 58**

**\.T.S Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi**

**haqida qisqacha tarixiy ma’lumot Va^58**

**1.3. Nomanfiy butun son tushunchasi 59**

**305**

**1.4. Nomanfiy butun sonlami taqqoslash 60**

**1.5. Nomanfiy butun sonlar yig'indisi, uning mavjudligi**

**va yagonaligi 60**

**1**[**.6. Qo'shish amalining xossalari 61**](#bookmark24)

**1.7. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi, uning mavjudligi**

**va yagonaligi 63**

**1.8. Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to‘plamlar nazariyasi bo'yicha ma’nosi ....64**

**1.9. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi, uning mavjudligi**

**va yagonaligi 65**

**1**[**.10. Ko'paytirish amalining xossalari 66**](#bookmark25)

**1.11. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasi, uning mavjudligi**

**va yagonaligi 68**

**1**[**.12. Bo'lish qoidalari 69**](#bookmark26)

[**2-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMINI**](#bookmark27)

[**AKSIOMATIK QURISH**](#bookmark27)

**..70 ..70 .. 71 ..73 ..76 ..77** [**..79**](#bookmark28) **..81 ..81**

**2.1. Peano aksiomalari**

**2.2. Matematik induksiya metodi**

**2.3. Natural sonlarni qo'shish va uning xossalari**

**2.4. Ayirish amalining ta’rifi va xossalari**

**2.5. Natural sonlarni ko'paytirish amali ta’rifi va xossalari**

**2.6. Natural sonlarni bo‘lish ta’rifi va xossalari**

**2.7. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari**

**2.8. Tartib va sanoq natural sonlar**

**3- §. NATURAL SON MIQDORLARNI 0‘LCHASH**

**NATIJASI SIFATIDA 83**

[**4- §. SANOQ SISTEMALARI 85**](#bookmark29)

**4.1. Sanoq sistemalari haqida tushuncha 85**

**4.2. Pozitsion va nopozitsion sanoq sistemalari 85**

**4.3. 0‘nlik sanoq sistemasida son yozuvi 86**

**4.4. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni taqqoslash 87**

**4.5. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni qo'shish algoritmi ....88**

[**4.6. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmi 89**](#bookmark30)

**4.7. O'nlik sanoq sistemasida ko'paytmani hisoblash**

**algoritmi 90**

**4.8. O'nlik sanoq sistemasida bo'lishni bajarish algoritmi ....91**

**4.9. O'nlik bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalarida**

**son yozuvi 93**

**4.10. Ikkilik sanoq sistemasi 93**

**4.11. Yettilik sanoq sistemasi 94**

**4.12. Sistematik sonlar ustida amallar 94**

**306**

**4.13. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga**

**o‘tish**

**5-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO‘PLAMIDA**

**BO‘LINISH MUNOSABATI**

[**5.1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo‘linish**](#bookmark31)

**munosabati ta’rifi**

**5.2. Bo'linish munosabatining xossalari**

**5.3. Nomanfiy butun sonlar to'plamida yig'indi, ayirma**

**va ko'paytmaning bo'linishi haqida teoremalar**

**5.4. Bo'linish alomatlari**

**5.5. Tub va murakkab sonlar**

**5.6. Eratosfen g'alviri**

**5.7. Tub sonlar to'plamining cheksizligi**

**5.8. Arifmetikaning asosiy teoremasi**

**5.9. Sonlarning EKUB va EKUK**

**Ill bob. RATSIONAL YA HAQIQIY SONLAR**

[**1- §. MUSBAT RATSIONAL SONLAR TO‘PLAMI**](#bookmark33)

**1.1. Kesmalarni o'lchash**

**1.2. Ekvivalent kasrlar**

**1.3. Musbat ratsional sonlar**

**1.4. Musbat ratsional sonlarni qo'shish**

**1.5. Qo'shishning xossalari. Ayirish**

**1.6. Musbat ratsional sonlarni ko'paytirish va bo'lish**

**1.7. Musbat ratsional sonlar nazariyasini aksiomatik**

**asoslash**

[**2- §. 0‘NLI KASRLAR**](#bookmark34)

**2.1. O'nli kasrlar va Ular ustida amallar**

**2.2. Oddiy kasrlarni o'nli kasrlarga almashtirish**

**2.3. Cheksiz davriy o'nli kasrlar**

**3- §. MUSBAT HAQIQIY SONLAR**

**3.1. O'lchovdosh bo'lmagan kesmalar**

**3.2. Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o'nli kasrlar**

**3.3. to'plamda tartib munosabati**

**3.4. /?t to'plamda qo'shish va ko'paytirish**

**3**[**.5. Musbat haqiqiy sonlar to'plamining aksiomatikasi...**](#bookmark35)

**3.6. Kattaliklarni o'lchash**

**3.7. Yuzlarni o'lchash**

[**4- §. HAQIQIY SONLAR TO‘PLAMI**](#bookmark36)

**4.1. Musbat va manfiy sonlar**

**307**

**4.2. Haqiqiy sonlarni qo'shish va ayirish**

**4.3. Haqiqiy sonlar to'plamida ko'paytirish va bo'lish**

**148**

**150**

**IV b o b. KOORDINATALAR, TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR**

**l**[**-§. TO‘G‘RI CHIZIQDA KOORDINATALAR 152**](#bookmark37)

**1.1. To'g'ri chiziqda koordinatalar 152**

**1.2. To'g'ri chiziqda koordinatalarni almashtirish 154**

**1.3. Analitik geometriyaning to'g'ri chiziqdagi ba’zi bir**

**masalalari 157**

**2**[**- §. TEKISLIKDA KOORDINATALAR 160**](#bookmark38)

**2.1. Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar**

**sistemasi 160**

**2.2. Tekislikda koordinatalarni almashtirish 163**

**2.3. Tekislikda analitik geometriyaning ba’zi masalalari 165**

**3**[**- §. SONLI VA HARFIY IFODALAR 167**](#bookmark39)

**3.1. Sonli ifodalar 167**

**3.2. Sonli tengsizliklar 170**

**3.3. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi 172**

**3.4. O'zgaruvchili ifodalar 174**

**4-§. TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR 177**

**4.1. Bir o'zgaruvchili tenglamalar 177**

**4.2. Tenglamalarning teng kuchliligi haqidagi teoremalar... 181**

**4.3. Bir o'zgaruvchili tengsizliklar 183**

**(47$) Ikki o'zgaruvchili tenglamalar 188**

**4.5. Aylana tenglamasi 190**

**4.6. Tengsizliklar grafigi 192**

**4.7. Tenglamalar va tengsizliklar sistemalari 194**

**5-§. CHIZIQLI TENGLAMALAR 198**

**5.1. Burchak koeffitsiyentli to'g'ri chiziq tenglamasi 198**

**5.2. To'g'ri chiziqlaming parallellik va perpendikularlik**

**shartlari 201**

**5.3. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining**

**tenglamasi, ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi 203**

**5.4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak 206**

**5.5. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi 207**

**To'g'ri chiziqlaming kesishish nuqtasi 211**

**V b o b. FUNKSIYA, LIMIT, HOSILA, INTEGRAL**

**l**[**-§. SONLI FUNKSIYALAR 213**](#bookmark40)

**1.1. Funksiyalar va ifodalar 213**

**1.2. To'g'ri proporsionallik, chiziqli bog'liqlik va ularning**

**grafiklari 217**

**308**

**1.3. Teskari proporsionallik va uning grafigi**

**1.4. Funksiyalar kompozitsiyasi (murakkab funksiya)**

[**219**](#bookmark41)

221

222

**1.5. Teskari funksiya**

**2- §. FUNKSIYA GRAFIGINI YASASH**

**2.1. «Nuqtalar bo‘yicha» grafik yasash**

**2.2. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish bilan**

**grafiklar yasash**

**2.3. Kvadratik funksiyaning grafigi**

**2.4. Kasr chiziqli funksiya grafigi**

**3- §. KETMA-KETLIKLAR**

**3.1. Sonli ketma-ketliklar**

**3.2. Rekurrent ketma-ketliklar**

**3.3. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar....**

**3.4. Ketma-ketlik limiti**

**4- §. FUNKSIYANING LIMITI**

**4.1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi**

**4.2. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar ....**

**4.3. Cheksiz kichik funksiyalar**

**4.4. Funksiyaning nuqtadagi limiti**

**4.5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti**

**4.6. Uzluksiz funksiyalar**

**4.7. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari..**

[**5- §. DIFFERENSIAL, HOSILA, INTEGRAL**](#bookmark44)

**5.1. Funksiya orttirmasi**

**5.2. Funksiya differensiali**

**5.3; Hosila**

**5.4. Hosilaning mexanik ma’nosi**

**5.5. Differensiallash formulalari**

**5.6. Aniqmas integral**

**5/7) Aniq integral**

**YI bob. GEOMETRIYA ELEMENTLARI**

**1**[**- §. GEOMETRIYA FANI TARIXI YA TARKIBI HAQIDA**](#bookmark45)

**' 1.1. Geometriyaning vujudga kelishi haqida qisqacha**

**, tarixiy ma’lumot**

**1.2. Maktabda o‘rganiladigan geometrik tushunchalar**

**sistemasi**

[**2- §. PLANIMETRIYA**](#bookmark46)

**2.1. Geometrik shakllar, ularning ta’rifi, xossalari**

**va alomatlari**

[**2.2. Uchburchaklar, ularning elementlari, turlari**](#bookmark47)

**309**

**2.3. Uchburchaklarning tenglik alomatlari**

**2.4. Teng yonli uchburchak va uning xossalari**

**2.5. Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi**

**2**[**.6. To'rtburchaklar, ularning turlari va xossalari**](#bookmark48)

**3- §. GEOMETRIK MASALALAR**

**3.1. Geometrik masalalar turlari haqida**

**3.2. Geometrik shakllami sirkul va chizg'ich yordamida**

**yasash**

**3.3. Yasashga doir geometrik masalalarni yechishdagi**

**asosiy bosqichlar**

**4- §. STEREOMETRIYA**

**4.1. Stereometriya aksiomalari**

**/ To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning parallelligi va**

**perpendikularligi**

**4.3. Ko'pyoqli burchaklar**

**4.4. Ko'pyoqlar**

**4.5. Parallelepiped**

**4.6. Piramida**

**4.7. Muntazam ko'pyoqlar**

**4.8. Ko'pyoqlilar haqida Eyler teoremasi**

**4.9. Aylanma jism va aylanma sirt haqida tushuncha**

**Silindr**

**Konus**

**Shar**

**Sfera tenglamasi**

**5- §. MIQDORLAR VA ULARNI 0‘LCIIASII**

**5.1. Miqdor tushunchasi**

**5.2. Miqdorlami o'lchash tushunchasi**

**5.3. Kesma uzunligi va uning xossalari**

**5.4. Shaklning yuzi**

**5.5. Jismning massasi va hajmi haqida tushuncha**

**310**

***Nilufar Azimovna Xamedova, Zuhra Ibragimova, Tog'aybek Tasetov***

MATEMATIKA

***Oliy o'quv yurtlarining boshlang'ich ta’Iim yo ‘nalishi  
talabalari uchun darslik***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Muharrir | N. | G'oyipov |
| Rassom | G. | Gurova |
| Tex. muharrir | T. | Smirnova |
| Musahhih | H. | Zokirova |
| Kompyuterda tayyorlovchi | E. | Kim |

**Bosishga ruxsat etildi 19.01.07. Bichimi 60x90'/lfi. <>Tayms» garniturasi.  
Shartli b. t. 19,5. Nashr t. 22,5. Adadi 3000. Buyurtma N° 8.**

**«Arnaprint» MCHJ da sahifalanib chop etildi.**

**100182, Toshkent, H. Boyqaro ko'chasi, 41.**

N. Xamedova, Z. Ibragimova,

Matematika. Oliy o‘quv yurtlarining boshlang'ich ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun darslik. — T.: «Turon-Iqbol» nash- riyoti, 2007.- 312 b.

**T. Tasetov**

**«Matematika» darsligi boshlang'ich ta’lim yo'nalishi bakalavriati uchun mo'ljallangan bo'lib, unda boshlang'ich matematika kursi nazariy asoslari berilgan, ularni o'zlashtirish uchun zarur umumiy tushunchalar va qisqa oliy matematika kursi 5141600-boshlang‘ich ta’lim va tarbiyaviy ish yo'nalishi standartiga mos holda bayon qilingan. Darslik 6 bobdan iborat bo'lib, boblar paragraflarga bo'lingan, har bir paragraf oxirida nazorat savollari va topshiriqlar berilgan.**