ABDULLAYEVA B.S., SADIKOVA A.V.,
MUXITDINOVA N.M., TOSHPULATOVA M.I.

MATEMATIKA

Taqrizchilar: M.E.Jumayev – Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika universiteti "Boshlang'ich ta'lim metodikasi" kafedrasi professori, pedagogika fanlari nomzodi

A.X.Raxmatullayev – Toshkent Davlat Iqtisodiyot universiteti "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi

Darslik 5111700 – "Boshlang'ich ta'lim va sport- tarbiyaviy ish" bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, davlat ta'lim standartiga to'la mos keladi.

Darslik matematikaning umumiy tushunchalar, nomanfiy butun sonlar, son tushunchasini kengaytirish, elementar algebra va geometriya materiallari, miqdorlar va ularni o'lchash bo'limlarini o'z ichiga oladi. Bo'limlardagi mavzularning nazariy mazmunining ma'nosini ochib berish uchun ko'p miqdorda har xil misol va masalalar keltirilgan hamda o'z-o'zini nazorat qilish savollari bilan ta'minlangan.

Ushbu darslikka O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2013-yil 20 dekabrdagi 484-sonli buyrug'iga asosan nashr qilishga ruxsat etilgan.

MUNDARIJA

Kirish 6

I-BOB **Umumiy tushunchalar** 8

1.1 To'plamlar va ular ustida amallar 8

1.1.1. To'plam tushunchasi. To'plamning elementi. Bo'sh to'plam. To'plamning berilish usullari. To'plam osti. Universal to'plam 8

1.1.2. To'plamlar va ular ustida amallar. 12

1.1.3. To'plamlarni sinflarga ajratish 17

1.2. Moslik va munosabatlar. 34

1.2.1. Ikki to'plam elementlari orasidagi moslik 34

1.2.2. Binar munosabatlar va ularning xossalari. Munosabat tushunchasi ... 40

1.2.3. Munosabatlarning xossalari. 42

1.2.4. Ekvivalentlilik va tartib munosabati. 44

1.3. Algebraik amallar va algebralar 47

1.3.1. Algebraik amallar 47

1.3.2. Algebraik amallarning xossalari 51

1.3.3. Gruppa, halqa, maydon va ularning xossalari 60

1.4. Kombinatorika elementlari 66

1.4.1. To'plamlarning Dekart ko'paytmasi 66

1.4.2. O'rin almashtirish, o'rinlashtirish. Guruhlash 70

1.5. Matematik tushuncha. 84

1.6. Mulohazalar va ular ustida mantiqiy amallar. 89

1.7. Predikatlar va kvantorlar. Predikatlar ustida amallar. 97

1.8. Teoremalar va ularni isbotlash. 108

1.8.1. Teoremaning tuzilishi va ularning turlari. 108

1.8.2. Matematik isbotlar. Deduktiv mulohazalar. 110

1.8.3. To'liqsiz induksiya 114

1.8.4. To'la matematik induksiya 117

1.8.5. Bevosita va bilvosita isbotlash usullari 118

1.9. Algoritm tushunchasi va uning xossalari. 120

II Bob **Nomanfiy butun sonlar**. 125

2.1 Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurish 125

2.1.1. Nomanfiy butun sonlarni qo'shish va ayirish 125

2.1.2. Nomanfiy butun sonlarni ko'paytirish va bo'lish. 132

2.1.3. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish. Qo'shish aksiomalari 139

2.1.4. Matematik induksiya metodi 149

2.1.5. Natural sonlar miqdorlarini o'lchash natijasi sifatida 161

2.1.6. Tartibiy va miqdoriy natural sonlar. 167

2.2. Sanoq sistemalari. Pozitsion sanoq sistemalari. 168

2.2.1. Sanoq sistemalari. 168

2.2.2. Pozitsion sanoq sistemalari. 173

2.2.3. O'nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlar ustida amallar.. 182

2.2.4.	Nomanfiy butun sonlarning bo'linuvchanligi. Bo'linuvchanlik munosabati va uning xossalari	196
2.2.5.	Karrali va bo'luvchilar	202
2.2.6.	Sonlarni eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish usullari	207
III-bob.	**Son tushunchasini kengaytirish**	223
3.1.	Butun sonlar	223
3.1.1.	Butun nomanfiy sonlar. Manfiy sonlarning kiritilishi. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasi	223
3.1.2.	Butun sonlar ustida amallar	225
3.2.	Musbat ratsional sonlar	229
3.2.1.	Musbat ratsional sonlar to'plami	229
3.2.2.	Musbat ratsional sonlar	236
3.2.3.	Musbat ratsional sonlar ustida amallar	237
3.2.4.	Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurish	243
3.3.	O'nli kasrlar	246
3.3.1.	O'nli kasrlar. Musbat ratsional sonlarning o'nli kasr ko'rinishidagi yozuvi	246
3.3.2.	Cheksiz davriy o'nli kasrlar	249
3.4.	Musbat haqiqiy sonlar	252
3.4.1.	O'lchovdosh bo'lmagan kesmalar	252
3.4.2.	Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o'nli kasrlar	254
3.4.3.	R_+ to'rlamda tartib munosabati	257
3.4.4.	R_+ da qo'shish, ko'paytirish, ayirish va bo'lish	258
3.4.5.	Musbat haqiqiy sonlar to'plamining aksiomatikasi	259
3.5.	Haqiqiy sonlar to'plami	260
3.5.1.	Musbat va manfiy sonlar	260
3.5.2.	Haqiqiy sonlar ustida amallar	262
3.5.3.	Haqiqiy sonlar to'plamida ko'paytirish va bo'lish	263
3.6.	Sonlarni yaxlitlash qoidalari va taqribiy sonlar ustida amallar	266
3.6.1.	Sonlarni yaxlitlash va ular ustida amallar	266
3.6.2.	Taqribiy sonlarning absolyut va nisbiy xatolari	270
3.7.	Kompleks sonlar	273
3.7.1.	Kompleks son va uning turli shakllari	273
3.7.2.	Kompleks sonlar ustida amallar	277
IV- bob	**Algebra va geometriya elementlari**	288
4.1.	Sonli ifoda va uning son qiymati. Sonli tenglik va tengsizliklar	288
4.1.1.	Sonli ifodalar	288
4.1.2.	Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi	290
4.2.	O'zgaruvchili ifoda	293
4.3.	Bir o'zgaruvchili tenglamalar. Teng kuchli tenglamalar haqida teoremalar	296
4.3.1.	Bir o'zgaruvchili tenglama	296
4.3.2.	Teng kuchli tenglamalar haqida teoremalar	298
4.4.	Bir o'zgaruvchili tengsizlik	299

4.5.	Geometriyaning rivojlanishu haqida qisqacha tarihiy ma'lumot.......	303
4.6.	Maktabda o'rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi..........	312
4.7.	Geometrik figuralar, ularning ta'rifi , hossalari va alomatlari..........	316
4.7.1	Uchburchaklar..........	316
4.7.2	To'rtburchaklar..........	320
4.7.3	Ko'pburchak..........	323
4.8.	Matematik masalalar va ularni klasifikatsiyalash..........	326
4.8.1.	Geometrik masalalar va ularning turlari..........	329
4.8.2	Yasashga doir geometrik masalalar haqida tushuncha, yasash aksiomalari..........	333
4.8.3	Yasashga doir geometrik masalalarni yechish bosqichlari..........	337
4.9.	Ko'pyoqlar..........	339
4.9.1	Ko'pyoqli burchaklar..........	339
4.9.2	Ko'pyoqlilar..........	340
4.9.3	Muntazam ko'pyoqlilar..........	343
4.9.4.	Muntazam ko'pyoqlilar tarixi to'g'risida qisqacha ma'lumot..........	345
4.10.	Aylanma jism va aylanma sirt haqida tushuncha..........	346
V- bob	**Miqdorlar va ularni o'lchash**..........	355
5.1.	Miqdorlarni o'lchash tushunchasi..........	355
5.2.	Yuzlarni o'lchash..........	357
5.3.	Kesma uzunligi va uni o'lchash..........	358
5.4.	Figuraning yuzi va uni o'lchash..........	362
5.5.	To'g'ri to'rtburchak va boshqa figuralarning yuzini toppish..........	367
5.6.	Jismning hajmi va uni o'lchash..........	371
5.7.	Jismning massasi va uni o'lchash..........	374
5.8.	Vaqt oraliqlari va ularni o'lchash..........	375
5.9.	Birliklar sistemasining rivojlanish tarixi. Birliklarning xalqaro sistemasi..........	376
	Glossariy..........	382
	Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati..........	387

Kirish

Prezidentimiz I.A.Karimov o'z kitoblarida "Yoshlar uchun, ular chin inson, o'z diyorimiz, o'z mamlakatining chinakam vatanparvarlari bo'lib o'sishlari uchun faol kurashmog'imiz lozim"- deb ta'kidlaganlar. Shuning uchun biz yoshlarni tarbiyalashda boshlang'ich sinf o'qituvchilarining ma'suliyatiga yuklatilganligini aytishimiz darkor.[6,62 b]

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimovning O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining 2010 yil 27 yanvar kuni bo'lib o'tgan qo'shma majlisidagi "Mamlakatni modernizatsiya qilish va kuchli fuqarolik jamiyati barpo etish – ustivor maqsadimiz" hamda Vazirlar mahkamasining 2010 yil 29 yanvar kuni bo'lib o'tgan majlisidagi "Asosiy vazifamiz-Vatanimiz taraqqiyotini va xalqimiz faravonligini yanada yuksaltirish" mavzularidagi ma'ruzalari mazmun-mohiyati va undagi xulosalarni o'rganish yuzasidan Vazirlar mahkamasining 2010 yil 23 fevraldagi 101-F –sonli farmoyishi bilan bilan tasdiqlangan tashkiliy tadbirlarni amaliyotga joriy etish jamiyatimizdagi kun tartibidagi bosh masalalardan biridir.[1]

Prezidentimiz o'z ma'ruzasida " ....mamlakatni modernizatsiya qilish va kuchli fuqarolik jamiyati barpo etish ustivor maqsadimiz" degan fikr mulohazalaridan jamiyatimizda barkamol avlodni tarbiyalash boshlang'ich ta'limning asosiy vazifalaridan biri ekanligi gavdalanadi. Ayniqsa, bo'lajak boshlang'ich sinf o'qituvchilari ta'lim va tarbiyaning tub maqsadi kuchli fuqarolik jamiyatining barpo etilishiga xizmat qilishi asosiy maqsadimiz ekanligi Sharqona tarbiya mazmunida his etilishi zaruriyati mavjuddir.

Shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "Barkamol avlod yili" davlat dasturi to'g'risidagi Qarorida mamlakatimizda sog'lom va barkamol avlodni tarbiyalash yoshlarning o'z ijodiy va intelektual saloxiyatini ro'yobga chiqarish bo'yicha qo'yilgan vazifalarda "....ta'lim jarayoniga yangi axborot kommunikatsiya va pedagogik texnologiyalarni, elektron darsliklar, multimediya vositalarini keng joriy etish orqali mamlakatimiz maktablarida, kasb-hunar kollejlari, litseylari va Oliy o'quv yurtlarida o'qitish sifatini tubdan yaxshilash ... samarali tizimini yanada rivojlantirish" ko'zda tutilganligi dolzarb vazifalarimizdan biridir. [2]

Ta'lim sohasida isiohotlar amalga oshirilayotgan bir paytda boshlang'ich sinflar uchun yangi «Matematika» o'quv darsliklari yaratilayotgan bir vaqtda Davlat ta'lim standartida ko'rsatilgan fanlar bo'yicha o'quv adabiyotlarini yangi avlodini yaratish zarurligi tug'ilmoqda. Hozirgacha bor bo'lgan adabiyotlarni ayrimlari standart talablariga javob bermaydi.

Shu jumladan «Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish» bakalavriat ta'lim yo'nalishi bo'yicha «Matematika» fanidan standartga to'la mos keluvchi o'quv darsligi yoki o'quv qo'llanmasi yo'q. Shu nuqtai nazardan biz «Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish» bakalavriat ta'lim yo'nalishi namunaviy dasturiga to'la mos keluvchi darslik yozishni o'z oldimizga maqsad qilib qo'ydik.

Darslik namunaviy fan dasturiga mos bo'lib, V bobni o'z ichiga oladi:

I. Umumiy tushunchalar.

II. Nomanfiy butun sonlar.
III. Son tushunchasini kengaytirish.
IV. Algebra va geometriya elementlari.
V. Miqdorlar va ularni o'lchash.

«Umumiy tushunchalar» bobida "To'plamlar va ular ustida operatsiyalar", «Moslik», «Kombinatorika elementlari», «Matematik mulohazalar va ularning strukturasi», Algoritmlar», «Algebraik operatsiya» mavzulari keltirilgan. Bular "Nomanfiy butun sonlar" bo'limini o'rganishda asos bo'lib xizmat qiladi.

To'plam, cheksiz to'plam tushunchalari ta'rifsiz boshlang'ich tushuncha sifatida kiritilgan. To'plamlar ustidagi operatsiyalar qonunlari geometrik nuqtai nazardan Eyler doiralari yordamida ko'rsatilgan. Sonli to'plamlar koordinata to'g'ri chizig'ida tasvirlangan.Munosabatlar haqida tushuncha berilib ularga tegishli misollar chizmalarda tasvirlab berilgan. Kombinatorika elementlari mavzusi asosan to'plamlar nazariyasi asosida bayon qilingan.

Matematik mantiq elementlari va binar algebraik operatsiyalar bo'limida matematikaning algebra bo'limi uchun zarur bo'lgan umumiy tushunchalar – fikrlar, predikatlar va ular ustidagi mantiq operatsiyalari, ularning to'plamlar nazariyasi bilan bog'liqligi, algebraning umumiy ta'rifi, ayrim strukturalari haqida umumiy matematik ma'lumotlar berilgan.

«Nomanfiy -- butun sonlar bobida boshlang'ich sinf o'qituvchisi uchun eng muhim bo'lgan boshlang'ich sinf matematikasining asosiy ob'ekti hisoblangan nomanfiy butun sonlar to'plamini qurishning: to'plamlar nazariyasi asosida, aksiomatika asosida va miqdorlarni o'lchash asosida qurish ko'rsatilgan. «Sanoq sistemalari» mavzusini o'rganishda asosiy e'tibor o'nli sanoq sistemasida amallar bajarish algoritmiga qaratilgan.

«Son tushunchasini kengaytirish» bo'limida son tushunchasi bo'yicha ega bo'lingan bilimlar umumlashtirilgan, butun sonlar, ratsional sonlar va haqiqiy sonlar haqidagi bilimlar nazariy jihatdan chuqurlashtirilgan, kompleks son tushunchasi, kompleks sonlarini turli ko'rinishlari bilan tanishtirilib, ular ustida amallar bajarish qoidalari berilgan

«Algebra va geometriya elementlari» bobida sonli va algebraik ifodalar, sonli tenglik va tengsizliklar, ularning xossalari, elementar geometriya bo'limidan olingan geometrik bilim va ko'nikmalarni umumlashtirib, uni sistemalashtirib ular to'g'risidagi bilim va malakalar takomillashtirilgan. «Miqdorlar va ularni o'lchash» bobi asosan boshlang'ich matematika kursi asosida berilgan. Bo'limda uzunlik, massa, hajm, vaqt, yo'l, tezlik kabi tushunchalar beriladi.

Kitob qo'lyozmasini o'qib chiqib o'zlarining fikr va mulohazalarini bildirgan Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika universiteti "Boshlang'ich ta'lim metodikasi" kafedrasi dotsenti, pedagogika fanlari nomzodi M.E.Jumayev, Toshkent Davlat Iqtisodiyot universiteti "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi A.X.Raxmatullayevlarga mualliflar o'zlarining chuqur minnatdorchiligini bildiradilar.

Mualliflar darslik haqida bildirgan fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qiladilar.

Mualliflar

I BOB. UMUMIY TUSHUNCHALAR

1.1. To`plamlar va ular ustida amallar

1.1.1. To`plam tushunchasi. To`plamning elementi. Bo`sh to`plam. To`plamning berilish usullari. To`plam osti. Universal to`plam

To`plam deganda narsalar, buyumlar, ob'yektlarni biror xossasiga ko`ra birgalikda (bitta butun deb) qarashga tushuniladi.

Masalan, hamma natural sonlarni birgalikda qarasak, natural sonlar to`plami hosil bo`ladi. Bir talabalar uyida yashovchi talabalarni birgalikda qarash bilan shu talabalar uyidagi talabalar to`plamini hosil qilamiz. To`g`ri chiziqda yotuvchi hamma nuqtalarni bitta butun deb qarash shu to`g`ri chiziqdagi nuqtalar to`plamini, maktabdagi o`quvchilarni birgalikda qarash o`quvchilar to`plamini beradi va h.k.

To`plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, ob'yektlar – bu to`plamning elementlari deyiladi.

Masalan, yuqoridagi misollardagi o`quvchilar, talabalar, natural sonlar mos to`plamlarining elementlari hisoblanadi. To`plamlar odatda lotin yoki grek alfavitining katta harflari bilan, ularning elementlari esa alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi. $A$ to`plam $a,b,c,d,...$ elementlardan tuzilganligi $A=\{a,b,c,d,...\}$ ko`rinishda yoziladi.

1-ta'rif. Bitta ham elementga ega bo`lmagan to`plam bo`sh to`plam deyiladi va $\varnothing$ bilan belgilanadi.

a element A to`plamning elementi ekanligi $a \in A$ ko`rinishda belgilanadi va «a element A to`plamning elementi», «$a$ element $A$ to`plamga tegishli», «a element A to`plamda mavjud» yoki «$a$ element $A$ to`plamga kiradi» deb aytiladi.

a element A to`plamning elementi emasligi $a \notin A$ belgi bilan ko`rsatiladi.

Masalan, $A=\{a,b,c\}$ to`plam uchun $a \in A$, $b,c \in A$ lekin $d \notin A$.

Elementlar soniga ko`ra to`plam chekli yoki cheksiz bo`lishi mumkin.

2-ta'rif. Elementlar soni chekli bo`lgan to`plam chekli, elementlar soni cheksiz bo`lgan to`plam cheksiz to`plam deyiladi.

Elementlar soni chekli bo`lgan to`plam chekli, elementlar soni cheksiz bo`lgan to`plam cheksiz to`plam deyiladi

Masalan, $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c\}$ to`plamlar chekli bo`lib, ular mos ravishda bitta, ikkita va uchta elementlardan tuzilgan. Quyidagi $A=\{1,2,3,...,n,...\}$, $B=\{2,4,6,...,2n,...\}$ to`plamlar cheksiz to`plam.

3-ta'rif. A va B to`plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo`lsa, bunday to`plamlar teng to`plamlar deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $A=B$.

Ta'rifdan ma'lumki, ikki to`plamning tengligi ularning aslida bitta to`plam elementlari ekanligini bildiradi.

To`plamlar ikki xil usulda beriladi:

a) agar to`plamlar chekli to`plam bo`lib, elementlar soni ko`p bo`lmasa, to`plam elementlarni bevosita sanash orqali beriladi;

b) to`plam elementlarning xarakteristik xossalari orqali ham beriladi. Masalan, 12 sonidan kichik natural sonlar to`plami berilgan bolsin. $M=\{x \mid x\in N,\ x<12\}$. Bu esa quyidagicha o`qiladi «$M$ to`plami shunday x elementlardan tashkil topgan bo`lib, u natural sonlar to`plamidagi 12 sonidan kichik sonlardan iborat».

4-ta'rif. Chekli to`plamning elementlar soniga to`plam quvvati deyiladi va $n(A)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ to`plamning quvvati $n(A)=7$ ga,

$B=\{a\}$ to`plamning quvvati $n(B)=1$ ga,

$C=\{b,a,f\}$ to`plamning quvvati $n(C)=3$ ga,

$D=\{a,g\}$ to`plamning quvvati $n(D)=2$ ga,

bo`sh to`plamning quvvati $n(\varnothing)=0$ ga teng.

Cheksiz to`plamlarning quvvati transfinit[1] sonlarda ifodalanadi.

5-ta'rif. Quvvatlari teng bo'lgan to`plamlar teng quvvatli to`plamlar deyiladi.

Masalan, $A=\{a,b,c\}$ va $C=\{b,d,f\}$ to`plamlar teng quvvatli. $n(A)=n(C)=3$.

---

[1] Transfinitsonlar haqida ma`lumotlar "Ikki to`plam elementlari orasidagi moslik" mavzusida keltirilgan.

6-ta'rif. B to`plamning har bir elementi $A$ to`plamga tegishli bo`lsa, $B$ to`plam A to`plamning qism to`plami (qismi, to`plam osti) deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $B \subset A$ yoki $A \supset B$.

A va B to`plamlar uchun bir vaqtda $A \subset B$ va $B \subset A$ bajarilsa, u holda $A$ va $B$ to`plamlar teng to`plamlar bo`ladi.

7-ta'rif. B to`plamning barcha elementlari $A$ to`plamda mavjud bo`lib, shu bilan birga $A$ da $B$ ga tegishli bo`lmagan elementlar ham mavjud bo`lsa $B$ to`plam A to`plamning xos qism to`plami deyiladi.

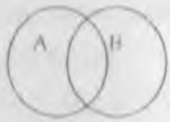
8-ta'rif. A to`plamning o`zi va $\varnothing$ to`plam shu $A$ to`plamning xosmas qism to`plami deyiladi.

Masalan, $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ to`plam uchun $B=\{a\}$, $C=\{b,d,f\}$, $D=\{a,g\}$ to`plamlarning har qaysisi xos qism to`plam bo`ladi. $\varnothing$ va A to`plamning o`zi xosmas qism to`plamlardir.

9-ta'rif. Ko`rilayotgan barcha to`plamlarni o`z ichiga olgan to`plam universal to`plam deyiladi va U bilan belgilanadi.

To`plamlar orasidagi munosabatlar Eyler-Venn diagrammalari deb ataluvchi maxsus chizmalar yordamida ko`rgazmali tasvirlanadi. Buning uchun to`plamlar, ular nechta elementni o`z ichiga olishlaridan, qat'iy nazar, doiralar, ovallar yoki biror boshqa geometrik figuralar ko`rinishida tasvirlanadi.

Ikkita to`plam orasidagi munosabatlar quyidagicha bo`ladi:



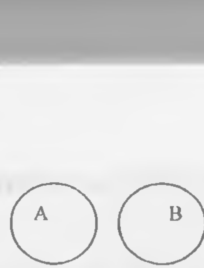
1. A={a,b,c,d,e} va B= {b,d,k,e} to`plamlar kesishadi va ular bir-biriga qism to`plam bo`lmaydi:

1-rasm

2. A={a,b,c,d,e} va B={c,d,e} to`plamlar berilgan bo`lsin. B to`plam $A$ to`plamning xos qism to`plam ekanligi quyidagi ko`rinishda tasvirlanadi:

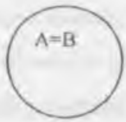
2- rasm

3. Kesishmaydigan A={a,b,c,d,e} va B={m,n,k,p} to`plamlar quyidagi ko`rinishda tasvirlanadi:



3-rasm

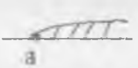
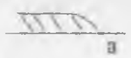
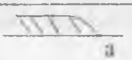
4. Teng A={a,b,c,d,e} va B={b,d,a,e,c} to`plamlar ustma-ust tushgan doiralar bilan tasvirlanadi:



4-rasm

Ba'zi bir sonli to`plamlar uchun maxsus belgilar kiritilgan: N-natural sonlar to'plami, Z – butun sonlar to'plami, N_0 – butun nomanfiy sonlar to'plami, Q – ratsional sonlar to'plami, R – haqiqiy sonlar to'plami.

R to'plamning to'plam ostisini koordinatalar o'qida tasvirlash mumkin. Agar $a,b\in R$ va $a<b$ bo`lsa, quyidagi belgilashni kiritish mumkin.

To'plamosti	Belgilanishi	Tasvirlanishi	Nomlanishi
$x/x\in R, a<x<b$	(a, b)		Interval
$x/x\in R, a\le x\le b$	[a, b]		Kesma
$x/x\in R, a\le x<b$	[a, b)		Yarim interval yoki yarim kesma
$x/x\in R, a<x\le b$	(a, b]		Yarim interval yoki yarim kesma
$x/x\in R, x>a$	$(a;+\infty)$		Ochiq nur
$x/x\in R, x\ge a$	$[a;+\infty)$		Nur yoki yarim to'g'ri chiziq
$x/x\in R, x<a$	$(-\infty.a)$		Ochiq nur
$x/x\in R. x\le a$	$(-\infty;a]$		Nur

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. To`plam deganda nimani tushunasiz?
2. Bo`sh, chekli, cheksiz to`plamlarga misollar keltiring.
3. To`plamlar necha xil usulda beriladi?
4. Teng to`plamlarga ta'rif bering.
5. To`plamning quvvatiga ta'rif bering.
6. Tengquvvatli to`plamlar har doim teng to`plamlar bo`ladimi?
7. Qism to`plam tushunchasiga ta'rif bering va misollar keltiring.
8. Universal to`plam deganda qanday to`plamni tushunasiz? Misollar keltiring.

1.1.2. To`plamlar ustida amallar

1. To`plamlar kesishmasi.

$a, b, c, d, ...$ elementlar A va B to`plamlarning har birida mavjud bo`lsa, ular bu to`plamlarning umumiy elementlari deyiladi. Masalan, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, d\}$ to`plamlar uchun a, b, d – umumiy elementlar.

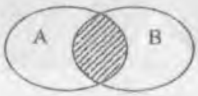
1-ta'rif. A va B to`plamlarning hamma umumiy elementlaridangina tuzilgan $C$ to`plam A va B to`plamlarning kesishmasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $C = A \cap B$.

Bu yerda $\cap$ belgi to`plamlarning kesishmasini bildiradi. Bitta ham umumiy elementga ega bo`lmagan to`plamlarning kesishmasi bo`sh to`plamga teng.

Masalan,

1. $A = \{a, b, c, d, e\}$ va $B = \{a, c, d, e, f\}$ to`plamlar uchun: $A \cap B = \{a, c, d, e\}$ ga teng.
2. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ va $C = \{5,6,9,10,11\}$ to`plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A \cap C = \{5,6\}$
3. $A = \{2,3,4\}$ va $B = \{7,8,9\}$ to`plamlarning kesishmasi bo`sh to`plam: $A \cap B = \varnothing$.

To`plamlarning kesishmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning kesishmasiga mos keladi.



5-rasm

6-rasm

5-rasmda shtrixlangan qism A va B to`plamlar kesishmasini, 6-rasmda $[CB]$ kesma $[AB]$ va $[CD]$ kesmalar kesishmasini ifodalaydi.

To`plamlar kesishmasi quyidagi xossalarga ega:

1. $A \cap A \cap A ... = A$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$
4. Agar $B \subset A$ bo`lsa, u holda $A \cap B = B$ bo`ladi.

Yuqoridagi xossalar to`plamlar soni ikkitadan ortiq bo`lgan hol uchun ham to`g`ri.

2. To`plamlar birlashmasi.

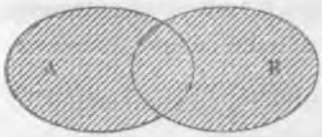
2-ta'rif. Berilgan A va B to`plamlarning birlashmasi deb, shu $A$ va $B$ to`plamlarning har biridagi barcha elementlardan tuzilgan C to`plamga aytiladi. Birlashma $C = A \cup B$ ko`rinishda belgilanadi.

To`plamlar birlashmasida har bir element bir martagina olinishi lozim bo`lgani uchun, to`plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari C birlashmasida bir martagina olinadi.

Misollar.

1. $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f\}$ to`plamlarning birlashmasi $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$ ga teng.
2. $A = \{3,4,5,6\}$ va $B = \{6,7,8,9,10\}$ to`plamlar uchun $A \cup B = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ga teng.

To`plamlarning birlashmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to`plamni bildiradi.



7-rasm

8-rasm

7,8-rasmlarda shtrixlangan soha A va B to`plamlarning birlashmasini bildiradi.

To`plamlar birlashmasi quyidagi xossalarga ega:

1. $A\cup A\cup A\ldots=A$
2. $A\cup\varnothing=A$
3. $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

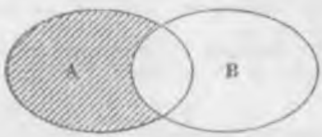
4. Agar $B\subset A$ bo`lsa, u holda $A\cup B=A$ bo`ladi.

Yuqoridagi xossalar to`plamlar soni ikkitadan ortiq bo`lgan hol uchun ham to`g`ri.

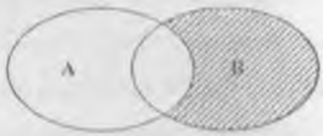
3. To`plamlar ayirmasi.

3-ta'rif. A va B to`plamlarning ayirmasi deb shunday to`plamga aytiladiki, u A ning B ga tegishli bo`lmagan hamma elementlaridangina tuziladi va quyidagicha belgilanadi: $C=A\setminus B$.

To`plamlarning ayirmasi 9-rasmda ko`rsatilgan shtrixlangan sohani bildiradi.



$A\setminus B$



$B\setminus A$

9-rasm

Misollar.

1. $A=\{1,2,3,4\}$ va $B=\{3,4,5,6,7,8\}$ uchun $A\setminus B=\{1,2\}$
2. $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{6,7,8\}$ uchun $A\setminus B=\{1,2,3,4,5\}$
3. $A=\{1,2,3\}$ va $B=\{1,2,3,4,5\}$ uchun $A\setminus B=\varnothing$

To`plamlar ayirmasi quyidagi xossalarga ega:

1. $A \setminus A = \varnothing$

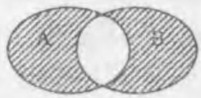
2. $A \setminus \varnothing = A$

3. $\varnothing \setminus A = \varnothing$

4. Agar $A \cap B = \varnothing$ bo`lsa, u holda $A \setminus B = A$ bo`ladi.

4-ta'rif. A va B to`plamlarning simmetrik ayirmasi deb shunday to`plamga aytiladiki, u $A \setminus B$ yoki $B \setminus A$ ayirmalarga tegishli bo`lgan hamma elementlaridangina tuziladi va quyidagicha belgilanadi: $C = A \Delta B$.

To`plamlarning simmetrik ayirmasi 10-rasmda ko`rsatilgan shtrixlangan sohani bildiradi.



10-rasm

3. To`ldiruvchi to`plam

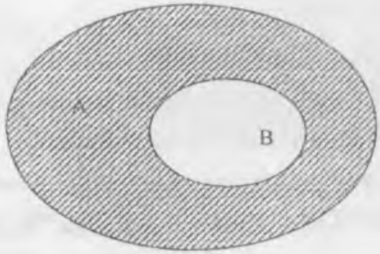
5-ta'rif. A to`plam va uning $B$ qism to`plami $B \subset A$ berilgan bo`lsin. $A$ dagi $B$ ga kirmay qolgan hamma elementlardangina tuzilgan qism, $B$ ning to`ldiruvchisi deyiladi va $\overline{B}_A$ *yoki* B'_A ko`rinishda belgilanadi. Bunda $\overline{B}_A$ qism to`plam B ni A gacha to`ldiradi, ya'ni $B$ va $\overline{B}_A$ ning birlashmasi $A$ to`plamga teng bo`ladi.

Masalan, $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ va $B = \{2,5,6,9\}$ bo`lsa, $\overline{B}_A = \{1,3,4,7,8\}$ bo`ladi.

Agar A to`plam biror boshqa to`plamning qismi deb qaralmasa, u holda A to`plamning to`ldiruvchisi $\varnothing$ bo`sh to`plam bo`lib, $\varnothing$ ning to`ldiruvchisi esa A bo`ladi, ya'ni: $\overline{A} = \varnothing$ va $\overline{\varnothing} = A$.

Agar $B \subset A$ bo`lsa, u holda $A \setminus B$ ayirma, $B$ to`plamni A to`plamgacha to`ldiruvchisi deyiladi.

Bu 11-rasmda quyidagicha ifodalanadi.



11-rasm

Ushbu tengliklar o`rinli:

$$B\cap\overline{B}=\varnothing$$

$$B\cup\overline{B}=A$$

$$B\setminus\overline{B}=B$$

$$\overline{B}\setminus B=\overline{B}$$

Eslatma. A va B to`plamlarning kamida bittasida ikkinchisiga kirmaydigan elementlar mavjud bo`lsa, A va B ni tengmas to`plamlar deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$A\neq B$$

5. To`plamlarning dekart ko`paytmasi.

6-ta'rif. A va B to`plamlarning dekart ko`paytmasi deb shunday to`plamga aytiladiki, u to`plam elementlari tartiblangan (x,y) juftliklardan iborat bo`lib, bu juftni birinchisi $A$ to`plamdan, ikkinchisi esa B to`plamdan olinadi. Dekart ko`paytma $A\times B$ ko`rinishda belgilanadi.

Misol. $A=\{4,5,7\}$ va $B=\{-1,2,3,4\}$ to`plamlar berilgan bo`lsin. U holda A va B to`plamlarning dekart ko`paytmasi quyidagicha bo`ladi:

$$A\times B=\{(4;-1),(4;2),(4;3),(4;4),(5;-1),(5;2),(5;3),(5;4),(7;-1),(7;2),(7;3),(7;4)\}$$

Agar biz dekart ko`paytma elementi $(x,y)$ dagi $x$ ni biror nuqtani absissasi, $y$ ni esa ordinatasi desak, u holda bu dekart ko`paytma tekislikdagi nuqtalar to`plamini ifodalaydi. Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to`plami R ni R ga dekart ko`paytmasi $R\times R$ ko`rinishda bo`ladi.

6. To`plamlar ustida amallar xossalari.

To`plamlar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

To`plamlar kesishmasi uchun:

1) $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik xossasi),

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik xossasi),

To`plamlar birlashmasi uchun:

1) $A \cup B = B \cup A$ (kommutativlik xossasi),

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (assotsiativlik xossasi),

Ixtiyoriy A, B, C to`plamlar uchun quyidagi munosabatlar o`rinli:

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi),

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi),

3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. To`plamlar birlashmasi, kesishmasi, ayirmasiga ta'rif bering va misollar keltiring.
2. To`plamga to`ldiruvchi deganda nimani tushunasiz, izohlang.
3. To`plamlar ustida amallar qanday xossalarga ega.
4. To`plamlarni dekart ko`paytmasini misollar yordamida tushuntiring va ko`paytma kommutativlik xossasiga ega bo`lmasligini izohlang.

1.1.3.To`plamlarni sinflarga ajratish

Agar,

1) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qism to`plamlar juft-jufti bilan o`zaro kesishmasa ($A_i \cap A_j = \varnothing$, bu yerda $i, j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ va $i \neq j$);

2) $A_1, A_2,......, A_n$ qism to`plamlarning birlashmasi $A$ to`plam bilan mos tushsa, ya'ni A to`plam $A_1, A_2..., A_n$ sinflarga ajratilgan deb hisoblanadi.

To`plamlarni sinflarga ajratish masalasi klassifikatsiya deyiladi. Klassifikatsiya – bu sinf ichida ob'yektlarning o`xshashligi va ularning boshqa sinflardagi ob'yektlardan farq qilishi asosida sinflar bo`yicha ob'yektlarni ajratish amalidir.

Agar yuqoridagi shartlardan aqalli bittasi bajarilmasa, klassifikatsiya noto`g`ri hisoblanadi.

Masalan, uchburchaklarning A to`plamini uchta sinfga ajratish mumkin: o`tkir burchakli, to`g`ri burchakli, o`tmas burchakli uchburchaklar. Haqiqatan ham, ajratilgan to`plam ostilari juft-jufti bilan kesishmaydi. Boshqacha aytganda, birinchidan, o`tkir burchakli uchburchaklar ichida o`tmas va to`g`ri burchakli uchburchaklar yo`q, to`g`ri burchakli uchburchaklar ichida o`tkir va o`tmas burchakli uchburchaklar yo`q, shuningdek o`tmas burchakli uchburchaklar ichida o`tkir va to`g`ri burchakli uchburchaklar yo`q.

Ikkinchidan, o`tkir, to`g`ri va o`tmas burchakli uchburchaklar birlashmasi uchburchaklar to`plami $A$ to`plam bilan mos tushadi.

To`plamlarni sinflarga ajratishda sinflar soni chekli yoki cheksiz bo`lishi mumkin.

Masalan, natural sonlar to`plamini bir necha usul bilan sinflarga ajratish mumkin:

1. Toq va juft sonlar sinfi.
2. Tub va murakkab sonlar sinfi.
3. Bir xonali, ikki xonali, uch xonali, ..., xonali sonlar sinfi.

Bunda birinchi va ikkinchi hollarda sinflar soni chekli, uchinchi holda esa sinflar soni cheksiz.

Shuning bilan birga berilgan to`plamning har qanday qism to`plamlari sistemasi ham to`plamni sinflarga ajratishni ifodalamasligini qayd qilish kerak.

Masalan, A uchburchaklar to`plamidan, teng yonli, teng tomonli, turli tomonli uchburchaklar to`plam ostilarini olsak, u holda u A to`plamni sinflarga ajrata olmaydi, chunki birinchi shart bajarilmaydi. Chunki teng yonli va teng tomonli uchburchaklar to`plami ostilari kesishadi, ya'ni hamma teng tomonli uchburchaklar teng yonli uchburchaklardir.

To`plamlarni qism to`plamlarga ajratish uchun, qism to`plam elementlarini xarakteristik xossalarini ko`rsatish kerak. To`plamlarni bitta, ikkita, uchta xossasiga ko`ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

Aytaylik, A to`plam va biror $\alpha$ xossa berilgan bo`lsin. A to`plam elementlari $\alpha$ xossaga ega bo`lishi ham, bo`lmasligi ham mumkin. Bu holda $A$ to`plam o`zaro kesishmaydigan ikkita $B$ va $C$ to`plam ostilarga ajraladi.

B to`plam $A$ to`plamning α xossasiga ega bo`lgan elementlari to`plami, C to`plam $A$ to`plamning α xossasiga ega bo`lmagan elementlari to`plami $B \cup C = A$ va $B \cap C \neq \varnothing$

Agar A to`plamning hamma elementlari $\alpha$ xossaga ega bo`lsa, u holda $C = \varnothing$ bo`ladi, agar $A$ to`plamning hamma elementlari α xossaga ega bo`lmasa $B = \varnothing$ bo`ladi.

Agar B va C to`plamlar bo`sh bo`lmasa, u holda $A$ to`plamni Eyler Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlash mumkin (12-rasm).

12-rasm

Masalan, A – auditoriyadagi talabalar to`plami, $\alpha$-sinovlarni topshirganlik xossasi bo`lsa. B-sinovlarni topshirgan, C esa sinovlarni topshirmagan talabalar to`plami bo`ladi.

Endi to`plamni ikkita xossaga ko`ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to`plam va $\alpha, \beta$ xossalar berilgan bo`lsin. A to`plam elementlari $\alpha, \beta$ xossalarga ega bo`lishi, bo`lmasligi ham mumkin.

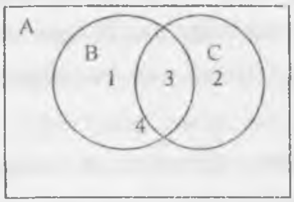
a) α xossaga ega bo`lgan va $\beta$ xossaga ega bo`lmagan elementlar to`plami – 1 sinf;

b) α xossaga ega bo`lmagan va $\beta$ xossaga ega bo`lgan elementlar to`plami – 2 sinf;

d) α va β xossalarga ega bo`lgan elementlar to`plami – 3 sinf;

e) α va β xossalarga ega bo`lmagan elementlar to`plami – 4 sinf.

Bu sinflardan ayrimlari bo`sh to`plam ham bo`lishi mumkin. Bu 4 ta sinf Eyler-Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlanadi (13-rasm).



13-rasm

To`plamni 3 ta xossaga ko`ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to`plam va $\alpha, \beta, \gamma$ xossalar berilgan bo`lsin. A to`plam $\alpha, \beta, \gamma$ xossalarga ega bo`lishi ham bo`lmasligi ham mumkin. Bu uchta xossa $A$ to`plamni ko`pi bilan sakkizta sinfga ajratishi mumkin.

a) α xossaga ega bo`lgan va $\beta, \gamma$ xossalarga ega bo`lmagan to`plam – 1 sinf;

b) α va β xossalarga ega bo`lgan va $\gamma$ xossaga ega bo`lmagan to`plam – 2 sinf;

v) β xossaga ega bo`lgan va $\alpha, \gamma$ xossalarga ega bo`lmagan to`plam – 3 sinf;

g) β, γ xossalarga ega bo`lgan va $\alpha$ xossaga ega bo`lmagan to`plam – 4 sinf;

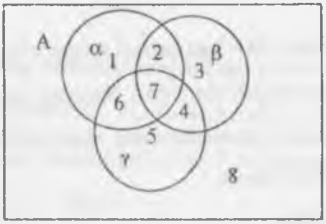
d) γ xossaga ega bo`lgan va $\alpha, \beta$ xossalarga ega bo`lmagan to`plam – 5 sinf;

e) α, γ xossalarga ega bo`lgan va $\beta$ xossaga ega bo`lmagan to`plam – 6 sinf;

j) α, β va γ xossalarga ega bo`lgan to`plam – 7 sinf;

z) a, β va γ xossalarga ega bo`lmagan to`plam – 8 sinf.

Sinflardan ayrimlari bo`sh to`plam ham bo`lishi mumkin. Bu 8 ta sinf 14-rasmda tasvirlangan.



14-rasm

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. To`plamlarni sinflarga ajratishni ta'riflang.
2. To`plamlarni sinflarga ajratishga misollar keltiring.
3. To`plamlarni bitta, ikkita, uchta xossaga ko`ra sinflarga ajrating.
4. Sinflarga ajratishni misollar yordamida Eyler Venn diagrammasi orqali tushuntirib bering.

To`plamlar va ular ustida amallarga doir mustaqil o`rganish uchun topshiriqlar

1. A-juft sonlar to'plami, B-5 ga karrali sonlar to'plami bo'lsin. Bu to'plamlarning kesishmasi ularning umumiy elementlari –5 ga karrali juft sonlardan iborat bo'ladi. Lekin bir to plam ikkinchi to`plamning to'plamostisi bo'la olmaydi: juft sonlar ichida 5 ga karrali bo'lmagan sonlar mavjud, 5 ga karrali sonlar ichida toq sonlar bor.

2. A- juft sonlar to'plami, B - 4 ga karrali sonlar to'plami. 4 ga karrali hamma sonlar juft sonlar, lekin hamma juft sonlar 4ga karrali emas. Shuning uchun A to'plam B to'plamning to'plamostisi bo'ladi, $B \subset A$.

3. A-juft sonlar to`plami, B- toq sonlar to'plami. Bu to'plamlarning umumiy elementlari mavjud emas.

$A \cap B \neq \varnothing$

4. A-juft sonlar to'plami, B - 2ga karrali sonlar to'plami. Barcha juft sonlar 2 ga karrali va 2 ga karrali sonlar juft sonlardir. Shuning uchun, A=B bo'ladi.

5. Eyler doiralari orqali elementlarining xarakteristik xossasi bilan berilgan to'plamlar ustida amallarni ko'ramiz.

I- sinfdagi o'quvchilar to'plami.

K- maktabdagi o'g'il bolalar to'plami.

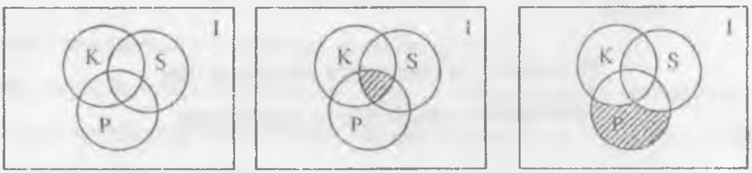
S-sport bilan shug'ullanuvchi o'quvchilar to'plami.

P- sinfdagi a'lochilar to'plami va $K \cap S \cap P \neq \varnothing$

a)Eyler doiralar orqali to'plamlarning tasvirlang.

b) $X = K \cap S \cap P$ ва $Y = (\overline{K} \cap P) \setminus S$ bo'lsa, X va Y to'plamlarning elementlarining xarakteristik xossalarini ko'rsating.

$K \cap S \cap P \neq \varnothing$ bo'lgani uchun ushbu to'plamlarni quyidagicha tasvirlash mumkin (15*a*-rasm).



a *b* *d*

15-rasm

X to'plam a'lochi va sport bilan shug'ullanuvchi o'g'il bolalardan iborat (15*b*-rasm).

Y- sport bilan shug'ullanmaydigan a'lochi qizlar to'plami (15*d*-rasm).

6. A.Navoiy kutubxonasiga a`zo bo'lgan 100 o'quvchidan 40 tasi mumtoz adabiyotga qiziqadi, 50 tasi hozirgi zamon adiblarining asarlariga qiziqadi. Ikkala janrga qiziquvchi o'quvchilar qancha bo`lishi mumkin.(A.Navoiy kutubxonasini hozirgi ko`rinishi)

7. Bizga $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{b, k, d, f, x, l\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

A va B to'plamlarning birlashmasini topish uchun A va B to'plamga tegishli barcha elementlarini yozib olinadi. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, k, f, x, l\}$.

A va B to'plamlarning kesishmasi A va B to'plamga tegishli bo'lgan umumiy elementlardan tuziladi. $A \cap B = \{b, d\}$.

8. Agar to'plamlar elementlarning xarakteristik xossasiga ko'ra berilgan bo'lsa, u holda ular ustida birlashma, kesishma amallari quyidagicha bajariladi:

Agar A-Toshkent shahrida yashovchi talabalar to'plami, B-kunduzgi bo'limda ta'lim oluvchi talabalar to'plami bo'lsa, u holda

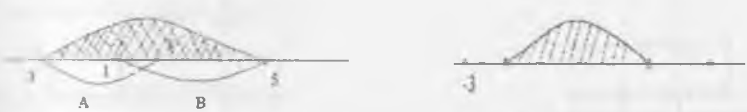
$A \cup B$ - Toshkent shahrida yashovchi yoki kunduzgi bo'limda ta'lim oluvchi talabalar to'plamidan iborat bo'ladi.

$A \cap B$ - Toshkent shahrida yashovchi va kunduzgi bo'limda tahsil olayotgan talabalar to'plami.

9. Agar $\begin{array}{l} A = \{a / 1 \le a \le 5\}, a \in R \\ B = \{b / |b| < 3, b \in R\} = \{b / -3 < b < 3, b \in R\} \end{array}$

U holda,

$A \cup B = \{x / -3 < x \le 5\}$ $\qquad$ $A \cap B = \{x / 1 \le x < 3\}$



16-rasm

10. $A = \{a / a > 2, a \in N\}$ - 2dan katta bo'lgan natural sonlar to'plami.

11. Agar A-Toshkent shahrida yashovchi talabalar to'plami, B-kunduzgi bo'limda ta'lim oluvchi talabalar to'plami bo'lsa, u holda

$A \setminus B$ - Toshkent shahrida yashovchi, lekin kunduzgi bo'limda ta'lim olmaydiganayotgan talabalar to'plami.

$B \setminus A$ - kunduzgi bo'limda ta'lim oluvchi, lekin Toshkent shahrida yashamaydigan talabalar to'plami.

12. Agar $\begin{array}{l} A = \{a / 1 \le a \le 5\}, a \in R \\ B = \{b / |b| < 3, b \in R\} = \{b / -3 < b < 3, b \in R\} \end{array}$

$A \setminus B = \{x / 3 \le x \le 5\}$

$3 \notin B$, u holda $3 \in A \setminus B$

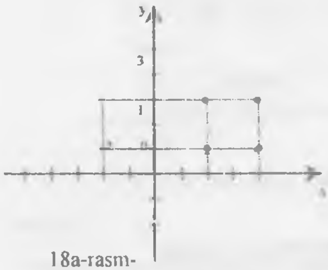
$B \setminus A = \{x / -3 < x < 1\}$

$1 \in A, \qquad 1 \notin B \setminus A$

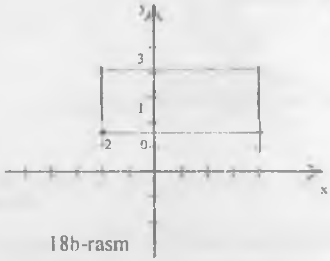
17-rasm

13. Koordinatalar tekisligida sonli to'plamlarning Dekart ko'paytmasini quyidagicha tasvirlanadi.

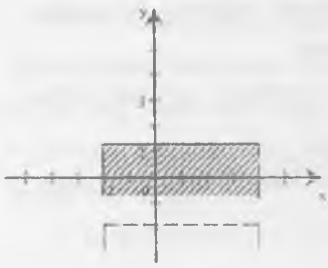
1. A={-2;2;4}; B={1; 3} (18a-rasm)
2. A={-2;4}; B=[1; 3] (18b-rasm)
3. A=[-2;4); B=(1; 3] (18d-rasm)
4. A={-2;2}; B=R (18c-rasm)
5. A=[-2;4]; B=R (18f-rasm)
6. A=R; B=[-1; 3) (18g-rasm)



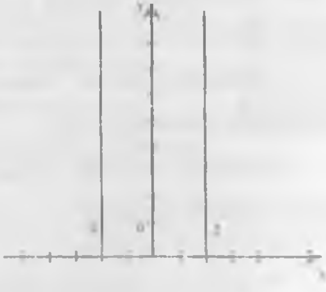
18a-rasm-



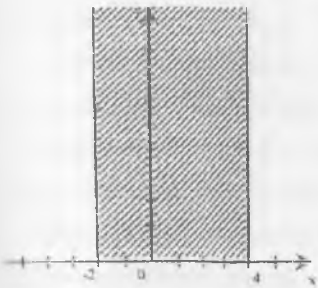
18b-rasm



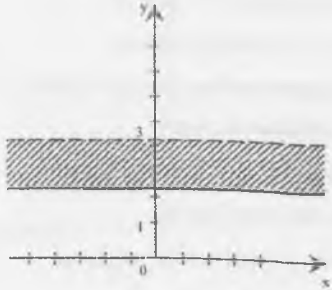
18d-rasm



18e-rasm



18f-rasm



18g-rasm

To`plamlar va ular ustida amallarga doir mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi berilgan to'plamlar orasidagi munosabatni aniqlang:

1. A-juft natural sonlar to'plami.

   B-7 ga karrali natural sonlar to'plami.

2. A-parallelogrammlar to'plami.

   B-kvadratlar to'plami.

3. C-to'rtburchaklar to'plami.

   D-to`g'ri ko`pburchaklar to'plami.

4. A-5 ga karrali sonlar to'plami.

   B-10 ga karrali sonlar to'plami.

5. D-teng yonli uchburchaklar to'plami.

   E-to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami.

6. F-BTU mutaxassisligi talabalari to'plami.

   K-sport bilan shug'ullanadigan talabalar to'plami.

7. L-toq natural sonlar to'plami.

   M-5 ga karrali natural sonlar to'plami.

8. P-ikki xonali sonlar to'plami.

K-3 ga karrali natural sonlar to'plami.

9. X-uchburchaklar to'plami.

Y-to'rtburchaklar to'plami.

10. A-Kutubxonadagi mavjud kitoblar.

B-darsliklar to'plami.

11. A- 4 sinf o'quvchilari to'plami.

B-a'lochilar to'plami.

12. A- Alfavitdagi harflar to'plami.

B- Unli harflar to'plami.

13. A- Barcha juft sonlar to'plami.

B- 4 ga bo'linadigan barcha natural sonlar to'plami.

14. A- 10 dan kichik natural sonlar to'plami.

B- Juft natural sonlar to'plami.

15. P- teng yonli uchburchaklar to'plami.

K- teng tomonli uchburchaklar to'plami.

16. P- teng yonli uchburchaklar to'plami.

K- to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami.

17. A- barcha juft sonlar to'plami.

B- 5 ga karrali sonlar to'plami.

18. A- 45° li burchagi bor uchburchaklar to'plami.

B- teng yonli uchburchaklar to'plami.

19. A- romblar to'plami.

B- beshburchaklar to'plami.

20. A- sinfdagi o'quvchilar to'plami.

B- sinfdagi a'lochilar to'plami.

21. S-trapetsiyalar to'plami.

D- parallelogrammlar to'plami.

22. A- bir xonali sonlar to'plami.

B- bir xonali toq sonlar to'plami.

23. A- bir xonali sonlar to'plami.

B- 3 ga karrali sonlar to'plami.

24. N-natural sonlar to'plami.

Z- Butun sonlar to'plami.

25. A- ikki xonali sonlar to'plami.

B- juft natural sonlar to'plami.

26. A- ikki xonali sonlar to'plami.

B- 3 ga bo'linadigan natural sonlar to'plami.

27. A- manfiy sonlar to'plami.

B- musbat sonlar to'plami.

28. A- maktabdagi o'quvchilar to'plami.

B- a'lochi o'quvchilar to'plami.

Elementlarini xarakterlovchi xossalari bo'yicha berilgan to'plamlar ustida amallarni bajaring:

1. D – 7 dan katta natural sonlar to'plami, M – juft natural sonlar to'plami, P – 3 ga karrali natural sonlar to'plami bo'lsa,

a) Eyler doirasi yordamida N, D, M, P to'plamlarni tasvirlang.

b) $X = (D \cap M) \setminus P$, $\quad Y = (D \cup M) \cap P$ sohani shtrixlang va xarakterlovchi xususiyatini ko'rsating.

d) quyidagi jumlalarning rostmi yoki yolg'onligini isbotlang.

«agar X – juft son bo'lsa, u 3 ga karrali va $x \in X$» «5, 7, 9, $\in Y$»

2. M – juft natural sonlar to'plami, K – 4 ga karrali natural sonlar to'plami, P – 7 ga karrali natural sonlar to'plami bo'lsa,

a) M, K, P, N to'plamlarni Eyler doirasida ko'rsating.

b) $X = M \cup (\overline{K} \cap P)$ sohani shtrixlang va xarakterlovchi xossasini ko'rsating.

d) 7. 8, 12, 15 sonlarining X to'plamga tegishliligini ko'rsating.

3. Y - BTU fakulteti talabalari to'plami, A-qizlar to'plami, B – a'lochilar to'plami, C – sportchilar to'plami bo'lsa,

a) Eyler doirasi yordamida Y, A, B, C to'plamlarni ko'rsating.

b) $X=(A\cap B)\setminus C$, $Y=A'\cap(B\cup C)$ sohalarni shtrixlang elementlarining xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) «Agar y – student sport bilan shug'ullanadigan bo'lsa, u holda $y\in Y$»

«Agar X sport bilan shug'ullanmaydigan a'lochilar bo'lsa, u holda $x\in X$» jumlaning to`g`ri yoki noto`g`ri ekanligini toping.

4. M – toq natural sonlar to'plami, K – 8 ga karrali natural sonlar to'plami, P – 5 ga karrali natural sonlar to`plami bo`lsa,

a) Eyler doiralari yordamida M, K, P, N to'plamlarni chizing.

b) $X=M\cup(K\cap P)$ va $Y=(\overline{M}\cap K)\cup N$ sohani shtrixlab, xarakteristik xususiyatini ko'rsating.

d) 7, 10, 15, 16 sonlari X, Y to`plamlarning qaysi biriga tegishli?

5. J –maktab o'quvchilari to`plami, $D$ –maktabdagi qizlar to'plami, $K$ –3 sinf o'quvchilari to'plami, $P$ – a'lochilar to'plami bo`lsa,

a) J, D, K, P to'plamlarning Eyler doirasi yordamida to'plamlarni tasvirlang.

b) $X=(P\cup K)\cap\overline{D}$ ва $Y=\overline{D}\cap K\setminus P$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) «agar X – 3 sinf o'quvchisi bo'lsa, u holda $x\in X$», «agar y – a'lochi o'quvchi bo'lsa, y holda $y\in Y$», jumlalarning to'g'riligini isbotlang.

6. A –tekislikda ko'pburchaklar to'plami, B – to'g'ri ko'pburchaklar to'plami, C – uchburchaklar to'plami, D – to'rtburchaklar to'plami bo`lsa,

a) A, B, C, D to'plamlarning Eyler doirasi yordamida to'plamlarni tasvirlang.

b) $X=D\cup(C\setminus B)$ ва $Y=(B\cap C)\setminus C$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) to`g`ri ko'pburchaklar va to'rtburchaklar X va Y to'plamlarga tegishlimi?

7. N – natural sonlar to'plami, D – juft natural sonlar to'plami, E –ikki xonali natural sonlar to'plami, A – 5 ga karrali natural sonlar to'plami bo`lsa,

a) D, E, A, N to'plamlarning Eyler doiralari yordamida tasvirlang.

b) $X=(D\cup E)\setminus A$ ва $Y=(\overline{D}\cap A)\cup E$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) 5, 18 sonlari X va Y to'plamlardan qaysi biriga tegishli?

8. M – toq natural sonlar to'plami, K – 11 ga karrali natural sonlar to'plami, P – 5 ga karrali natural sonlar to'plami, N – natural sonlar to'plami bo'lsa,

a) M, K, P, N to'plamlarning Eyler doiralari yordamida tasvirlang.

b) $X=(\overline{M}_N\cap K)\setminus P)$ ва $Y=(M\setminus P)\cup K$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) $9\in X$, $10\in Y$, $11\notin X, 12\notin Y$ to'g'ri noto'g'riligini toping.

9. K –tekislikda uchburchaklar to'plami, D – teng yonli uchburchaklar to'plami, A – teng tomonli uchburchaklar to'plami, M – to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami bo'lsa,

a) $X=(D\setminus A)\cup M$; $Y=(D\cap M)\cap A$ ni Eyler doiralari yordamida tasvirlang

b) $X=(D\setminus A)\cap M$; $Y=(D\cup M)\cap A$ sohani shtrixlang va xarakteristik xossalarini ko'rsating.

d) «agar x to'g'ri burchakli uchburchak bo'lsa, u holda $x\in X$ bo'ladi»

«agar y teng yonli uchburchak bo'lmasa, u holda $y\notin Y$» to'g'ri noto'g'riligini isbotlang.

10. S – to'rtburchaklar to'plami, A – trapetsiyalar to'plami, B –parallelogrammlar to'plami, C – to'g'ri burchakli to'rtburchaklar to'plami bo'lsin.

a) S, A, B, C to'plamlarning Eyler doiralari yordamida tasvirlang.

b) $X=(S\setminus A)\cap B$; $Y=(S\cup C)\cap A$ sohalarni shtrixlang, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) «agar x – to'g'ri burchakli trapetsiya bo'lsa, u holda $x\in X$ bo'ladi»

«agar y –parallelogramm bo'lsa, u holda $y\notin Y$ bo'ladi».

Berilgan to'plamlar orasidagi $A\cup B$, $A\cap B$, A\B, B\A, $A\times B$, $B\times A$ *amallarni bajaring va chizmalarda tasvirlang:*

1. $A=\{a\mid -3\le a<5, a\in R\}$, $B=\{b\mid 3\le b\le 6, b\in R\}$.
2. $A=\{a\mid -2<a\le 3, a\in R\}$, $B=\{b\mid 1\le b<5, b\in R\}$.
3. $A=\{a\mid -5<a<-2, a\in R\}$, $B=\{b\mid -3<b<-1, b\in R\}$.

4. $A=\{a|-3\leq a\leq 1, a\in R\}$, $B=\{b|-1<b\leq 2, b\in R\}$.

5. $A=\{a|2\leq a<5, a\in R\}$, $B=\{b|-4<b<3, b\in R\}$.

6. $A=\{a|\,|a|<3, a\in R\}$, $B=\{b|0\leq b<4, b\in R\}$.

7. $A=\{a|1\leq a\leq 4, a\in R\}$, $B=\{b|\,|b|\leq 2, b\in R\}$.

8. $A=\{a|-5<a<-3, a\in R\}$, $B=\{b|-4<b<1, b\in R\}$.

9. $A=\{a|1<a<5, a\in R\}$, $B=\{b|4\leq b\leq 6, b\in R\}$.

10. $A=\{a|3\leq a\leq 7, a\in R\}$, $B=\{b|1\leq b\leq 5, b\in R\}$.

11. $A=\{a|0\leq a\leq 7, a\in R\}$, $B=\{b|-3<y<2, b\in R\}$.

12. $A=\{a|-2<a\leq 3, a\in R\}$, $B=\{b|1\leq b<5, b\in R\}$

13. $A=R$, $B=\{2,4,6\}$.

14. $A=\{-2,2,4\}$, $B=R$.

15. $A=\{a|\,|-3<a<4, a\in R\}$, $B=\{-2,0,2,4\}$.

16. $A=\{5,6,7\}$, $B=\{b|b>2 b\in R\}$.

17. $A=[1;5]$, $B=[-3;3]$.

18. $A=\{a|\,|a<2, a\in R\}$, $B=R$.

19. $A=\{a|\,|a|<2, a\in R\}$, $B=R$.

20. $A=R$, $B=\{b|\,|b|<3, b\in R\}$.

21. $A=[2;2]$, $B=\{2,3,4\}$.

22. $A=[2;2]$, $B=[2;4]$,

23. $A=R$, $B=[2,4\ ]$

24. $A=\{0,2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$,

25. $A=\{a|\ a<3, a\in R\}$, $B=R$,

26. $A=\{a|\ a\leq 2. a\in R\}$, $B=\{b|\,|b|=3\ b\in R\}$,

27. A=[4, 6] , B=[3, 5],

28. $A=[0,\infty[$, $B=[4,21]$,

29. $A=]-100.10[$, $B=]10;33]$,

30. $A=]0,\infty[$. $B=]-2;\ 2]$.

Testlar

1. A –barcha juft sonlar to'plami

$A = \{a \mid a = 2n,\ n \in N\}$,

B – barcha toq sonlar to'plami ,

$B = \{b \mid b = 2n-1,\ n \in N\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \cup B = N$

b) $A \cup B = Q$

d) $A \cup B = R$

e) $A \cup B = Z$

2. $A = \{a \mid 4 \leq a \leq 14,\ a \in N\}$,

$B = \{b \mid 10 < b < 19,\ b \in N\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \cap B = \{x \mid 11 \leq x \leq 14,\ x \in N\}$.

b) $A \cap B = \{x \mid 4 < x < 19,\ x \in N\}$.

d) $A \cap B = \{x \mid 10 < x < 14,\ x \in N\}$.

e) $A \cap B = \{x \mid 11 \leq x \leq 19,\ x \in N\}$.

3. $A = \{a \mid |a| < 4, a \in R\}$, $B = \{b \mid |b| \leq 2, b \in R\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < -2 \cup 2 < x < 4\}$.

b) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < -2\}$.

d) $A \setminus B = \{x \mid 2 < x < 4\}$.

e) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < 4\}$.

4. $A = \{2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \times B = \{(2;a),(2;b),(2;c),(3;a),(3;b),(3;c)\}$.

b) $A \times B = \{(2;b),(2;a),(3;a),(c;2),(c;3)\}$.

d) $A \times B = \{(a;3),(a,2),(b;a),(c,a)\}$.

e) $A \times B = \{(2;c),(2;b),(2;a),(3;a),(3;b),(3;c)\}$.

5. $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$ sonli to'plamlar uchun xarakteristik xossani formula bilan bering.

a) $C = \{c \mid c \leq 9, C \in N\}$.

b) $C = \{c \mid c < 11, C \in N\}$.

d) $C = \{c \mid c > 10, C \in R\}$.

e) $C = \{c \mid c \geq 9, C \in N\}$.

6. $B = \{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$ ni formula bilan yozing.

a) $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 6, x \in Z\}$.

b) $B = \{x \mid -2 < x \leq 6, x \in N\}$.

d) $B = \{x \mid -2 > x > 6, x \in Z\}$.

e) $B = \{x \mid -1 < x < 10, x \in R\}$.

7. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \neq B$.

b) $A = B$.

d) $A > B$.

e) $A < B$.

8. Tengliklarning qaysi birida distributivlik xossasi to`g'ri ko`rsatilgan?

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$.

d) $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$.

e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

9. $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{1;5\}$ berilgan bo'lsa. to`g`ri tenglikni toping.

a) $A / B = \{2,3\}$.

b) $A / B = \{1,5\}$.

d) $A / B = \{1,2\}$.

e) $A / B = \{3,5\}$.

10. A={2; 5; 7; 9}, B={2; 4; 7} berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \cap B = \{2; 7\}$.

b) $A \cap B = \{\varnothing\}$.

d) $A \cap B = \{5; 9\}$.

11. A={2; 5; 7; 9}, B={2; 4; 7} berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \cup B = \{2; 5; 7; 9\}$.

b) $A \cup B = \{2; 4; 5; 7; 9\}$.

d) $A \cup B = \{\varnothing\}$.

12. $A=\{2; 5; 7; 9\}$, $B=\{2; 4; 7\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{5; 9\}$.

b) $A \setminus B = \{1; 2\}$.

d) $A \setminus B = \{\varnothing\}$.

13. Agar $A=\{1; 2; 3; 4\}$, $B =\{1; 2\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{3; 4\}$.

b) $A \setminus B = \{1; 2\}$.

d) $A \setminus B = \{\varnothing\}$.

14. Agar $A=\{1; 2: 3\}$, $B=\{3; 4; 5; 6\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{1; 2\}$.

b) $A \setminus B = \{1; 2; 3\}$.

d) $A \setminus B = \{3: 4\}$.

15. Agar $A=\{1; 2; 5\}$, $B=\{3; 4\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{\varnothing\}$.

b) $A \setminus B = \{1; 2; 5\}$.

d) $A \setminus B = \{3; 4\}$.

16. Agar $A=\{1; 2\}$, $B=\{1; 2; 3\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{1; 2\}$.

b) $A \setminus B = \{\varnothing\}$.

d) $A \setminus B = \{1; 2; 3\}$.

17. Agar $A=\{2; 5; 7; 9\}$, $B=\{2; 4; 7\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{\varnothing\}$.

b) $A \setminus B = \{1; 2; 3\}$.

d) to'g'ri javob yo'q?

1.2. Moslik va munosabatlar

1.2.1. Ikki to`plam elementlari orasidagi moslik

1. Moslik tushunchasi. "Moslik" so`zi kundalik hayotimizda juda ko`p ishlatiladi. "Kiyimga mos poyafzal", "O`zbek millatiga mos kiyim", "Dasturga mos darslik", "Xonaga mos parda" va hokozo. Bundan ko`rinadagi, moslik ko`pincha ikki turli ob`yektlar orasida o`rnatiladi.

Masalan, "Kiyimga mos poyafzal" deganda, yil fasllari bilan kishilar fasllarga mos kiyimlar to`plami orasida moslik ko`zda ko`zda tutiladi.

Matematikada ikki to`plam orasidagi moslik "binar moslik" deb ataladı. "*Bınar*" so`zi lotincha ***bis*** –"***ikki marta***" so`zidan olingan. Binar moslik elementlari berilgan to`plamlarning bir-biriga mos kelgan elementlari juftligidan iborat bo`ladi.

Moslik lotin alifbosining f,d,t,s kabi harflari bilan belgilanadi.

1-ta'rif. $X\times Y$ dekart ko`paytma va uning istalgan $G_f$ qism to`plami juftligi $f=(X\times Y,G_f)$ X va Y to`plamlar orasidagi binar moslik deyiladi.

X to`plam moslikning birinchi to`plami deyiladi. X to`plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to`plami moslikning *aniqlanish sohasi* deyiladi.

Y to`plam moslikning *ikkinchi to`plami* deyiladi. Y to`plamning moslikda qatnashgan elementlari to`plami moslikning *qiymatlar to`plami* deyiladi.

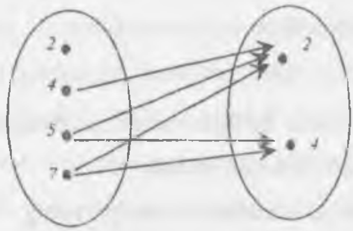
2. Moslik grafi va grafigi. $G_f \subset X\times Y$ to`plam moslikning *grafigi* deyiladi. $G_f$ grafik biror $R$ moslikdagi $(x,y)$ juftliklar to`plami ya'ni xRy. bu yerda $x\in X$, $y\in Y$.

Ikki to`plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo`nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning *grafi* deyiladi. (graf lotincha "grafo" so`zidan olingan bo`lib, "yozaman" degan ma`noni anglatadi

Chekli to`plamlar orasidagi moslik graflar yordamida ko`rgazmali tasvirlanadi.Moslik grafida aniqlanish sohasini har bir elementidan kamida bitta strelka chiqadi va qiymatlar to`plamining har bir elementiga hech bo`lmaganda bitta strelka keladi.

Misollar.

1. $X=\{2,4,5,7\}$ va $Y=\{2,4\}$ to`plamlar orasidagi «katta» mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to`plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to`plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan $Y$ to`plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o`tkazamiz (19-rasm).

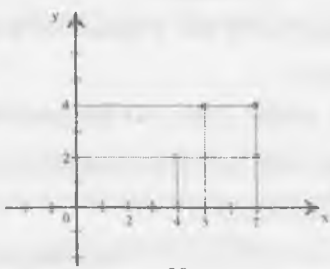


19-rasm

Natijada biz X va Y to`plamlar elementlari orasidagi «katta» mosligiga ega bo`lamiz.

X va Y sonli to`plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi grafik yordamida tasvirlanadi.

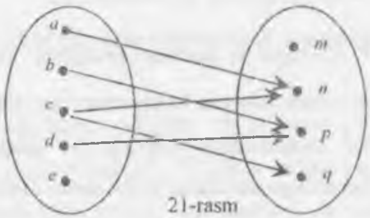
Buning uchun R moslikda bo`lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo`lgan figura R moslikning grafigi bo`ladi. Yuqoridagi misolni grafigini chizamiz (20-rasm).



20-rasm

2. $X=\{a,b,c,d,e\}$, $Y=\{m,n,p,q\}$

Gr. $G_r=\{(a;n),(b;p),(c;n),(c;q),(d;p)\}$ grafini chizaylik (21-rasm).



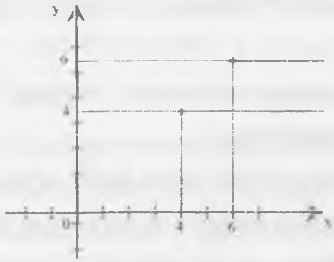
21-rasm

Bunda aniqlanish sohasi $\{a,b,c,d\}$

Qiymatlar to`plami $\{n,p,q\}$

Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko`p sonlar jufti bo`lganda ko`rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

3. $X = R$ va $Y = \{4,6\}$ to`plamlar orasidagi « katta yoki teng » mosligining grafigi [AB) va [CD) nurlar orqali ifodalanai (22-rasm).



22-rasm

Sonli to`plamlar orasidagi moslik ikki o`zgaruvchili tenglama va tengsizlik ko`rinishida ifodalanishi mumkin.

Masalan, $X,Y \subset R$ va f moslik $f: 2x + y = 5$ tenglama bilan aniqlansin. G_f - cheksiz to`plam bo`lgani uchun uning ba`zi elementlarini sanab o`tamiz.

...(-2;9),(-1;7),(0;5),(1;1),(1;3),(2;1),(3;-1)...

$f: 2x + y = 5$ grafigini $x,y \in R$ va $x,y \in N$ hollar uchun tasvirlab ko`ring.

Sonli to`plamlar orasidagi moslik ikki o`zgaruvchili tengsizlik ko`rinishida ifodalanishi ko`rib o`tamiz.

Masalan, $M = \{0,2,4,5,7\}$ to`plamda berilgan $f$ moslik $x < y$ tengsizlik bilan aniqlansin. $G_f$-.chekli to`plam bo`lgani uchun uning elementlarini sanab o`tamiz.

$x<y$ moslik grafi $x<y$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $(x;y)\in M\times M$ juftlikdan iborat,

$G_f=\{(0;2),(0;4),(0;5),(0;7),(2;4),(2;5),(2;7),(4;5),(4;7),(5;7)\}$

3. Moslik turlari.

2-ta'rif. Agar $f(X\times Y:G_f)$ moslikning aniqlanish sohasi birinchi to`plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik *hamma yerda aniqlangan* deyiladi.

Hamma yerda aniqlangan moslikka misol qilib, X – tekisligidagi barcha kvadratlar, Y – barcha haqiqiy sonlar to`plamlar berilgan bo`lsin. Har bir kvadratga uning yuzini ifodalovchi haqiqiy sonni mos qo`yilishini olish mumkin.

3-ta'rif. Agar f-moslikning qiymatlar to`plami ikkinchi to`plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik *syur'yektiv* deyiladi.

Bunday moslik grafida (agar uni chizish mumkin bo`lsa)ikkinchi to`plamning har bir elementiga hech bo`lmaganda bitta strelka keladi. Masalan, avvalgi misolgagi moslik syur'yektiv bo`la olmaydi, chunki R dagi manfiy sonlarga mos kvadratlar mavjud emas, kvadrat yuzasi musbat musbat son bilan ifodalanadi. Agar shu misollarda 2-to`plamni barcha musbat haqiqiy sonlar to`plami bilan almashtirsak, f moslik syur'yektiv bo`ladi.

4-ta'rif. Agar f moslikda birinchi to`plamning har bir elementiga ikkinchi to`plamning bittadan ortiq bo`lmagan elementi mos kelsa, f moslik *funksional* deyiladi.

Funksional moslik funksiya deb ataladi. Ta'rifdan ko`rinadiki, 1-to`plamning har bir elementiga 2-toplamdan faqat bitta element mos kelmaydi. Biz shu davrgacha o`rgangan funksiyalar funksional moslikka mosdik.

Masalan, $f: y=x^2+2x+1$ moslik grafigini $x,y\in N$ va $x,y\in R$ hollar tasvirlab ko`ring.

5-ta'rif. Agar f moslikda ikkinchi to`plamning har bir elementiga birinchi to`plamning bittadan ortiq bo`lmagan elementi mos qo`yilgan bo`lsa, f moslik *inyektiv* deyiladi.

In'ektiv moslik grafida 2-to`plamning har bir elementiga ko`pi bilan bitta strelka keladi.

6-ta'rif. Syur'yektiv va in'ektiv moslik bir so`z bilan *biektiv* deyiladi.

Biektiv moslikda 2-to`plam elementlari faqat bir martadan ishtirok etadi, moslik grafida (agar chizish mumkin bo`lsa), 2-to`plamning har bir elementiga bittadan strelka keladi.

Masalan. $X = \{kvadrat, romb, doira, oval, uchburchak\}$, $Y = \{sariq, qizil, yashil, ko`k\}$. Agar $G_f = \{(kvadrat; ko`k), (romb; sariq), (oval; yashil), (oval; ko`k), (uchburchak, qizil)\}$ bo`lsa, f moslik in'ektiv deyiladi.

7-ta'rif. Hamma yerda aniqlangan funksional moslik *akslantirish* deyiladi.

Akslantirishda 1-to`plamning har bir elementiga 2-to`plamning bittadan elementi mos keladi. Agar akslantirishning grafigi chizish mumkin bo`lsa, X to`plamning har bir elementidan bittadan strelka chiqadi, ya`ni ular moslikda faqat bir martadan ishtirok etadi.

Masalan, $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{x, y, z, e\}$ to`plamlar berilgan bo`lsa, $G_f = \{(a;3), (b;0), (c;3), (d;2), (e,0)\}$ bo`lsa, f moslik akslantirishdir.

8-ta'rif. X va Y to`plamlar orasidagi $f$ moslik biektiv akslantirish bo`lsa, X va Y to`plamlar orasida o`zaro *bir qiymatli moslik* o`rnatilgan deyiladi.

Masalan, $X = \{a; b; c; d\}, Y = \{x; y; z; t\}; G_f = \{(a; x), (b; y), (c; z), (d; t)\}$ bo`lsa, $f$ moslik o`zaro bir qiymatli moslik bo ladi.

Misol: Aytaylik X - kiyim iladigan garderobdagi paltolar to`plami, $Y$ esa shu garderobdagi ilgaklar to`plami bo`lsin.

Agar har bir palto ilgakga ilinib turgan bo`lsa (polda yotmasdan), u holda $X$ to`plam Y to`plamga akslantirish bo`ladi.

Agar bu akslantirishda har bir ilgakga bittadan ortiq palto ilinmagan bo`lsa (bo`sh ilgaklar ham bo`lishi mumkin) bu akslantirish in'ektiv bo`ladi.

Agar hamma ilgaklar band bo`lsa (bunda ayrim ilgaklarda bittadan ortiq paltolar ilingan ham bo`lishi mumkin) bu akslantirish syur'yektiv bo`ladi.

Agar har bir ilgakda bittadan palto ilingan bo`lsa (o`zaro bir qiymatli) bu akslantirish biektiv bo`ladi.

9-ta'rif. X va Y to`plamlar orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatilgan bo`lsa, bu to`plamlar *teng quvvatli* yoki ekvivalent deyiladi va qisqacha $X \sim Y$ ko`rinishda yoziladi.

Masalan, agar $X=\{a,b,c,d,e\}$, $Y=\{x,y,z,t,p\}$ bo`lsa, u holda $X \sim Y$ bo`ladi, chunki, X va Y to`plamlar orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin.

10-ta'rif. Natural sonlar to`plami $N$ ga teng quvvatli to`plamlar sanoqli to`plamlar deyiladi.

Cheksiz to`plamlarning quvvati transfinit sonlarda ifodalanadi. Sanoqli to`plamlarning quvvati birinchi transfinit son χ_0 (o`qilishi "alef nol") ga teng. Haqiqiy sonlar to`plamiga teng quvvatli to`plamlarning quvvati ikkinchi transfinit son $\chi_1$ (o`qilishi "alef bir") ga teng.

Agar ikkita X va Y to`plamlar orasidagi mosliklarning $G_f$ grafigi $X \times Y$ dekart ko`paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to`la moslik deyiladi. Agar moslikning $G_f$ to`plami bo`sh bo`lsa ($G_f = \varnothing$), moslik bo`sh moslik deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita X va Y to`plamlar orasida bo`sh va to`la mosliklar mavjud bo`lishi mumkin.

Shuningdek moslikka teskari moslik ham mavjud. $x\mathrm{R}y$ moslikka teskari $y\mathrm{R}^{-1}x$ ko`rinishda yoziladi.

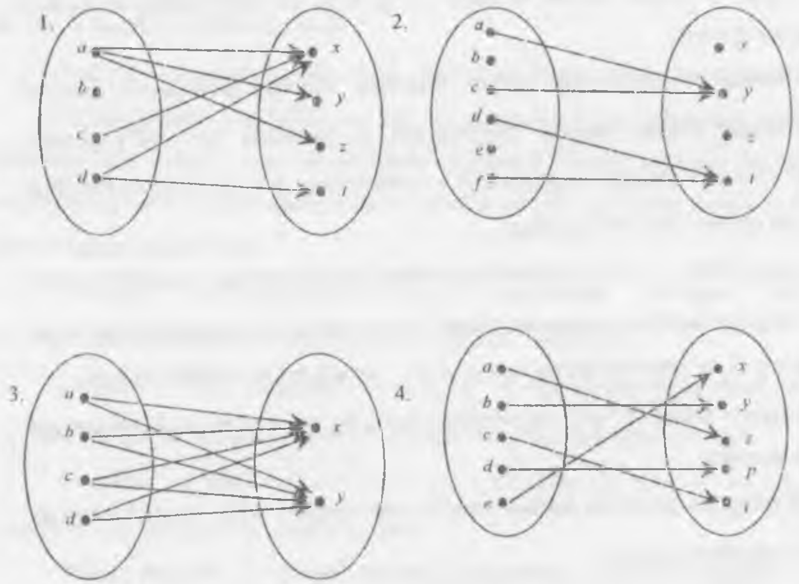
O`z-ozini tekshirish uchun savollar

1. $G_f \subset X \times Y$ nimani bildiradi?
2. Moslikning berilish usullarini aytib bering.
3. Moslik turlariga misollar keltiring va ular graflarining o`ziga xos xususiyatlarini ko`rsating.
4. Uchburchakning o`rta chizig`i bilan asosi orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkinmi?

5. Barcha toq sonlar to`plami bilan barcha juft sonlar to`plami orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkinmi?
6. Chekli to`plamlarning teng quvvatli bo`lish shartini ayting. Cheksiz to`plamlar uchun bu shart qanday?
7. Bo`sh va to`la mosliklar qanday bo`ladi?

Mavzuga doir misollar:

Moslik turini aniqlang:



23-rasm

1.2.2.Binar munosabatlar va ularning xossalari

1. Munosabat tushunchasi. Biz to`plamlarni o`rganganda ularni taqqoslab, ular kesishadi yoki teng, yoki biri ikkinchisini qismi deb to`plamlar orasidagi munosabatni qaradik. Natural sonlar to`plamini qaraganda sonlar orasidagi turli - tuman bog`lanishlarni ko`ramiz. Masalan, 7 soni 6 sonidan katta, 12 soni 9 sonidan 3ta ko`p. 3 soni 2 sonidan keyin keladi va hokazo.

Xuddi shunga o`xshash, geometriyada figuralarning tengligi va o`xshashligi, to`g`ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi kabi munosabatlar qaraladi. Bulardan ko`rinadiki, matematikada asosan, ikki ob'yekt orasidagi munosabat qaraladi, bunga binar munosabatlar deyiladi. Yuqorida ko`rib o`tilgan munosabatlar orasida umumiylik bormi, yo`qmi degan masalani qarasak, u yoki bu munosabatlarni qarashda biz berilgan to`plamlar sonlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar bilan amallar bajarishni ko`ramiz.

Masalan, $X=\{4;5;6\}$ to`plamda 1 ta ko`p munosabatini qarasak, «5 soni 4 sonidan 1 ta ko`p», «6 soni 5 sonidan 1 ta ko`p». Shu to`plamda katta munosabatni qarasak «5>4», «6>4», «6>5». Shunga o`xshash kichik munosabatini qarasak «4 soni 5 sonidan 1 ta kam», «5 soni 6 sonidan 1 ta kam».

Keltirilgan misoldagi «1 ta ko`p» munosabat uchun $\{(5;4),\ (6;5)\}$ to`plam, «katta» munosabati uchun $\{(5;4),\ (6;4),\ (6;5)\}$ to`plam, «kichik» munosabati uchun $\{(4;5),\ (5;6)\}$ to`plamlarga ega bo`lamiz. Bu to`plamlar esa elementlari $X=\{4;5;6\}$ to`plam elementlaridan hosil qilingan sonlar juftliklari to`plami bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, bu to`plamlar $X=\{4;5;6\}$ to`plam Dekart ko`paytmasining elementlaridan tashkil topgan qism to`plamlardir, ya'ni

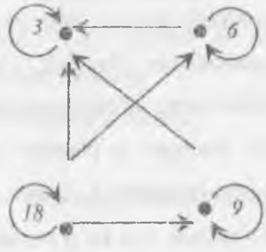
$$X\times X=\{(4;4),(4;5),(4;6),(5;4),(5;5),(5;6),(6;4),(6;5),(6;6)\}:$$

Bundan ko`rinadiki, ko`rib o`tilgan munosabtlar $X\times X$ Dekart ko`paytmaning qism to`plami bilan aniqlanar ekan.

1-ta'rif. $X\times X$ to`plamning istalgan $G$ qism to`plami binar *munosabat* deyiladi. Binar munosabatlar lotin alfavitining bosh harflari P, K, R, S... bilan belgilanadi.

Matematikada binar munosabatlar $a=b$, $a<b$, $a>b, a\neq b, a\| b$, $a\perp b$ kabi belgilar orqali berilgan.

Munosabatlarni graflar yordamida ko`rgazmali tasvirlash mumkin. Masalan: $X=\{3;6;9;18\}$ to`plam elementlari uchun «karrali» munosabatini ko`ramiz va uning grafini chizamiz (24-rasm). 18 soni 3 ga karrali, 18 soni 6 ga karrali, 18 soni 9 ga karrali va hokazo. $X$ to`plamdagi ixtiyoriy son o`z-o`ziga karrali bo`lgani uchun oxiri ustma-ust tushadigan strelkalar mavjud. Bunday strelkalar sirtmoqlar deyiladi.



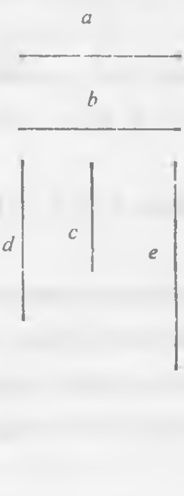
24-rasm

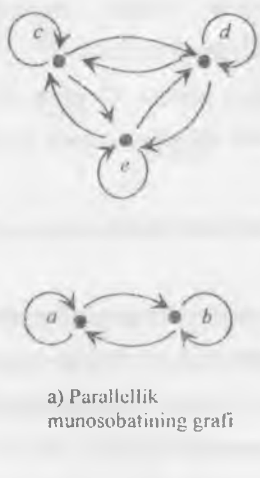
To`plamlarni berilish usullari kabi munosabatlar ham berilish usullariga ega.

1) X to`plamda berilgan R munosabat $X$ to`plamdan olingan va shu munosabat bilan bog`langan barcha elementlar juftliklarini sanab ko`rsatish bilan beriladi.

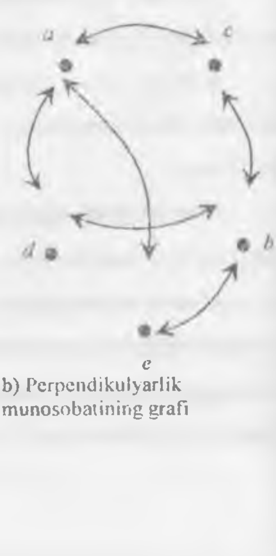
2) X to`plamda bo`lgan barcha elementlar juftliklarining xarakteristik xossasini ko`rsatish bilan beriladi.

1.2.3. Munosabatlarning xossalari. Munosabatlarni xossalarini ajratib ko`rsatish uchun matematikada yuqorida aytib o`tilgan munosabatlarni kesmalar to`plamida graflar yordamida tasvirlaymiz. $a,b,c,d,e$ kesmalar berilgan bo`lsin (25-a, b. d, e rasmlar).

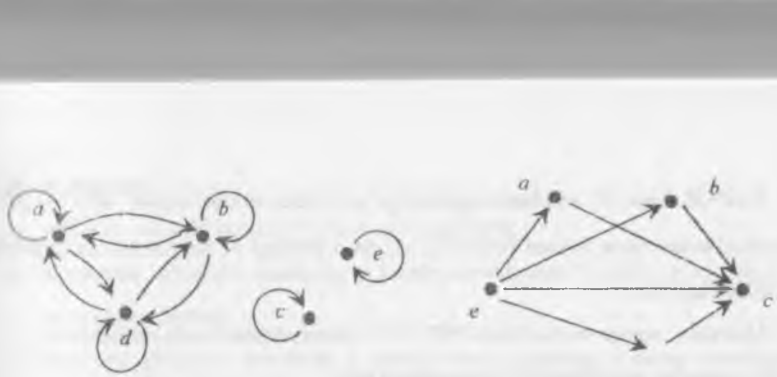




a) Parallellik munosobatining grafi



b) Perpendikulyarlik munosobatining grafi



25-rasm

Graflardan ko`rinadiki parallellik va tenglik munosabatlari refleksiv xossaga ega ekan.

1-ta'rif. Agar X to`plamning ixtiyoriy elementi haqida u o`z-o`zi bilan R munosabatda deyish mumkin bo`lsa (ya'ni xRx bajarilsa) to`plamdagi R munosabat refleksiv deyiladi.

Agar munosabat refleksiv bo`lsa, grafning har bir uchida sirtmoq bo`ladi.

2-ta'rif. Agar X to`plamning birorta ham elementi uchun $x$R$x$ bajarilmasa, R munosabat $X$ to`plamda antirefleksiv deyiladi. «>», «<» (uzun, qisqa), «$\perp$» munosabatlari antirefleksivdir.

Kesmalarning parallellik, perpendikulyarlik va tenglik munosabatlari graflariga e'tibor bersak, ularning o`ziga xos xususiyati, agar elementlar juftini tutashtiruvchi bitta strelka bor bo`lsa, u holda albatta shu elementlarni tutashtiruvchi qarama-qarshi yo`nalgan boshqa strelka ham bo`ladi.

Bundan esa parallellik, perpendikulyarlik va tenglik munosabatlari simmetriklik xossasiga ega ekanligi ko`rinadi.

3-ta'rif. Agar X to`plamda R munosabat uchun xRy va yRx shartlar bir vaqtda bajarilsa, R munosabat simmetrik munosabat deyiladi.

Simmetriklik xususiyatiga ega bo`lmagan munosabatlar ham mavjud. Masalan, graflardagi uzunroq munosabatini qaraylik. Bu grafni o`ziga xos xususiyati: strelka faqat bir tomonli bo`ladi. Bundan «uzunroq» munosabati simmetriklik xossaga ega emas ekanligi ko`rinadi.

4-ta'rif. Agar X to`plamning $x$ va $y$ elementlari uchun $x$R$y$ va $y$R$x$ bir vaqtda bajarilganligidan $x=y$ kelib chiqsa, $X$ to`plamdagi R munosabat antisimmetrik munosabat deyiladi.

5-ta'rif. Agar X to`plamning turli $x$ va $y$ elementlari uchun $xRy$ va $yRx$ munosabatlardan faqat bittasi bajarilsa, $X$ to`plamdagi R munosabat asimmetrik munosabat deyiladi.

Masalan, sonlar to`plamida "$\leq$", "$\geq$" munosabatlar antisimmetriklik, "$<$", "$>$" munosabatlar asimmetriklik xossalariga ega.

6-ta'rif. Agar X to`plamda R munosabat uchun $xRy$ va $yRz$ dan $xRz$ kelib chiqsa, u holda $X$ to`plamda R munosabat tranzitiv munosabat deyiladi.

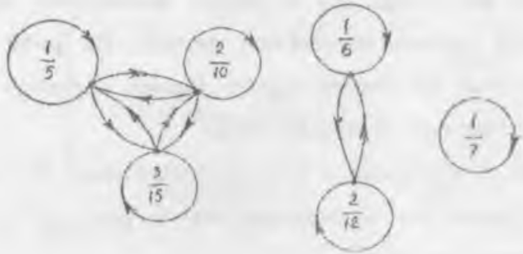
Parallellik, tenglik va uzunroq munosabatlari graflariga e'tibor bersak, strelka birinchi elementdan ikkinchi elementga, ikkinchi elementdan uchinchi elementga borsa, birinchi elementdan uchinchi elementga ham boradi. Bu tranzitivlik xossasini ifodalaydi.

Kesmalarning parallelligi va tengligi munosabatlari refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalarga ega. Perpendikulyarlik munosabati simmetriklik xossasiga, «uzunroq» munosabati asimmetrik va tranzitivlik xossasiga ega.

1.2.4. Ekvivalentlik va tartib munosabati

1-ta'rif. Agar X to`plamda berilgan R munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo`lsa, u holda u ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Misol. $\left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{2}{10}; \frac{2}{12}; \frac{3}{15}\right\}$ kasrlar to`plamida tenglik munosabati berilgan. (26-rasm)



26-rasm

Bu munosabat:

1) refleksiv, chunki ixtiyoriy kasr o`z-o`ziga teng;

2) simmetrik, chunki x kasrning y kasrga tengligidan y kasrni x kasrga tengligi ham kelib chiqadi;

3) tranzitiv, chunki x kasrning y kasrga va y kasrning z kasrga tengligidan x kasrning z kasrga tengligi kelib chiqadi.

Agar X to`plamda ekvivalentlik munosabati berilgan bo`lsa, u holda bu munosabat X to`plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to`plamlariga ajratadi. Yuqoridagi misolimizda qism to`plamlar

$$\left\{\frac{1}{5};\frac{2}{10};\frac{3}{15}\right\},\left\{\frac{1}{6};\frac{2}{12}\right\},\left\{\frac{1}{7}\right\}.$$

Bu qism to`plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va qism to`plamlarining birlashmasi birlamchi misolda berilgan to`plam bilan ustma-ust tushadi.

Teorema. Agar X to`plamda ekvivalentlik munosabati berilgan bo`lsa, u holda bu munosabat X to`plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to`plamlar (ekvivalentlik sinflarga)ga ajratadi.

Teskari da`vo ham o`rinli: agar X to`plamda berilgan biror bir munosabat bu to`plamni sinflarga ajratilishi aniqlansa, u holda bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo`ladi.

Biz bu teoremani isbotsis qabul qilamiz.

«Tartib» so`zi kundalik hayotimizda doimo uchraydi. Masalan, jismoniy tarbiya darslarida talabalarning bo`y-bo`yiga qarab joylashishi tartibi, o`zbek alfavitida harflarning kelish tartibi va hokazo.

2-ta'rif. Agar X to`plamdagi R munosabat tranzitiv va antisimmetrik yoki asimmetrik bo`lsa, u holda bu munosabat tartib munosabati deyiladi. X to`plam esa tartib munosabati bilan tartiblangan deyiladi.

3-ta'rif. Agar X to`plamdagi R munosabat tranzitiv va asimmetrik bo`lsa, u holda bu munosabat qat`iy tartib munosabati, R munosabat tranzitiv va antisimmetrik bo`lsa, u holda bu munosabat noqat`iy tartib munosabati deyiladi.

1-ta'rif. Berilgan X to`plamning ixtiyoriy elementlaridan tuzilgan tartiblangan $(x,y)$ juftlikka, shu to`plamning uchinchi bir z elementini mos qo`yuvchi akslantirish $(x,y)\to z$ mavjud bo`lsa, X to`plamda algebraik amal berilgan deyiladi.

X to`plamida $X\times X$ dekart ko`paytma berilgan bo`lsa, $(x,y)$ juftlik $X\times X$ dekart ko`paytmadan, z esa X to`plamidan olingan bo`lib, dekart ko`paytmada $X\times X\to X$ akslanadi.

Demak, X to`plamda berilgan $X\times X\to X$ akslantirish algebrik amal bo`lib, $x\in X$ element amalning birinchi, $y\in X$ element amalning ikkinchi komponenti z esa amal natijasi deyiladi.

Biz yuqorida $X\times X$ ko`rinishdagi dekart ko`paytmani X to`plamga akslantirishni ko`rdik, ya'ni $X\times X$ dan olingan (x,y) elementlar juftligiga bitta z elementni mos qo`ydik. Bunday akslantirish vositasida berilgan algebraik amalga binar («bis» lotincha – «ikki» ma'nosini bildiradi) algebraik amal deyiladi. Matematikada ko`p hollarda

$$X\times X\times X\to X;\quad \underbrace{X\times X\times\ldots\times X}_{n}\to X$$

ko`rinishdagi dekart ko`paytmani X to`plamiga akslantirish bilan berilgan algebraik amallar ham mavjud.

$X\to X$ unar (lotincha «unus»-bir)

$X\times X\to X$ binar

$X\times X\times X\to X$ ternar

………………

$\underbrace{X\times X\times\ldots\times X}_{n}\to X$ n-nar amal deb yuritiladi.

Algebraik amallarga misollar:

1-misol. Natural sonlar to`plamida qo`shish amali algebraik amaldir, chunki $x\in N$, $y\in N$ uchun $x+y=z$, $z\in N$ hamma vaqt topiladi.

2-misol. Natural sonlar to`plamida ayirish amali algebraik amal bo`la olmaydi, chunki ixtiyoriy ikkita sonni ayirishdan chiqqan natija hamma vaqt natural son bo`lmaydi.

3-misol. Juft sonlar to`plamida qo`shish amali algebraik amaldir, chunki ikki juft sonning yig`indisi yana juft son bo`ladi. Toq sonlar to`plamida qo`shish amali algebraik amal bo`la olmaydi, chunki natija juft son chiqadi.

$13+13=26;\ 15+17=32.\quad (2n+1)+(2n+1)=4n+2=2(2n+1)$ - juft son.

4-misol. Butun sonlar to`plami $Z$ da qo`shish, ayirish, ko`paytirish amali algebraik amaldir. Bo`lish amali esa algebraik amal bo`la olmaydi, chunki ba'zi bir hollarda bo`lish natijasida kasr son chiqadi.

Natural sonlar to`plamida ayirish amali $a,b\in N$, $a>b$ hollarda bajariladi $a-b>0$; $a-b$ ayirma musbat butun son bo`ladi. Yuqoridagi shartlarga mos qo`yilgan sonlar to`plami natural sonlar to`plamining qism to`plami bo`ladi, ya'ni $a>b$ shartga bo`ysinuvchi a va b sonlar jufti akslantirilgan $a-b=c$ sonlardan iborat to`plam natural sonlar to`plamiga tegishli bo`ladi. Natural sonlar to`plamida bo`lish amaliga nisbatan ham ushbu mulohazalarni yuritish mumkin.

Shunga qaramasdan natural sonlar to`plamida ayirish va bo`lish amali algebraik amal bo`la olmaydi. Bunga o`xshagan hollar uchun algebraik amal tushunchasiga kengroq nuqtai nazardan yondashish mumkin.

«Qismiy algebraik amal» tushunchasini kiritamiz.

2-ta'rif. Agar $X\times X$ dekart ko`paytmaning $A$ qism to`plamini X to`plamga akslantirishi berilgan bo`lsa, bu akslantirishga X to`plamda qismiy algebraik amal deyiladi.

$A\subset X\times X$, $A\to X$, ya'ni $(x,y)\to z,(x,y)\in A, z\in X$.

$z\in X$ elementga mos keluvchi (x,y) juftlar to`plami A qismiy algebraik amalning aniqlanish sohasi deyiladi.

Demak, natural sonlar to`plamida ayirish va bo`lish, butun sonlar to`plamida darajaga ko`tarish qismiy algebraik amal hisoblanadi. Qismiy algebraik amal bo`sh ham bo`lishi mumkin, ya'ni (x,y) juftlikka bitta ham z element mos kelmasligi mumkin.

Biror X to`plamda algebraik amal berilgan bo`lsin va A to`plam $X$ ning qism to`plami bo`lsin. $A$ qism to`plamga tegishli elementlardan tuzilgan (x,y) juftlikni qaraylik (x,y), $x,y \in A \subset X$. (x,y) juftlikka X to`plamidan $z$ element mos kelsin. Umuman olganda, bu element $A$ to`plamga tegishli bo`lishi ham tegishli bo`lmasligi ham mumkin. Agar $(x,y) \in A$ juftlikka mos keluvchi z element ham A ga tegishli bo`lsa, $A$ qism to`plam berilgan algebraik amalga nisbatan yopiq deyiladi.

Natural sonlar to`plamining qismi bo`lgan juft sonlar to`plami qo`shish va ko`paytirish amaliga nisbatan yopiq to`plamdir.

Agar A qism to`plam birorta algebraik amalga nisbatan yopiq bo`lsa, faqat shu qism to`plamdagina amalni ko`rish bilan, A to`plamda bu amal algebraik amal bo`ladi.

Yuqorida ko`rgan algebraik amallarning har biri alohida simvol bilan, masalan, qo`shish amali «+», ayirish amali «-», bo`lish amali «:», ko`paytirish amali «·», to`plamlarning birlashmasi «$\bigcup$», to`plamlarning kesishmasi «$\bigcap$» va shu kabi belgilanadi va ikkita komponenta orasiga qo`yiladi: $a+b$; $c \cdot d$; $A \cap B$; $A \cup B$. Bundan tashqari ikkita ob'yekt orasidagi munosabatlarni izohlovchi simvollar ham mavjud: $a \| b$ - ikki $a$ va $b$ to`g`ri chiziqlarning parallelligini, $a \perp b$ - ikki $a$ va $b$ to`g`ri chiziqlarning perpendikulyarligini va hokazolarni ifoda qiladi.

Ikki ob'yekt orasidagi munosabatlarni izohlovchi simvollar bilan bog`lanish natijasida uchinchi element haqida so`z yuritilmaydi, algebraik amal bilan bog`langan ikkita elementdan amal natijasi sifatida uchinchi bir element hosil bo`ladi. Algebraik amallar umumiy xossalarini o`rganamiz.

Algebraik va qismiy algebraik amallarni quyidagi shartli belgilar $*, T, \circ$ bilan belgilaymiz. Boshqacha aytganda ikkita a va b komponentalarga uchinchi komponentani mos qo`yish, bir algebraik amal uchun $a*b=c$, ikkinchi algebraik amal uchun $a\circ b=c$ ko`rinishda bo`ladi va hokazo.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Sonlar ustida qanday amallar bajariladi?
2. Sonlardan boshqa qanday matematik ob'yektlar ustida amallar bajarish mumkin?
3. Biror to`plamda berilgan amal qachon algebraik amal bo`ladi?
4. X to`plamda berilgan dekart ko`paytma $X\times X$ algebraik amalmi?
5. Unar, binar, ternar, n-nar algebraik amallarga misollar keltiring.
6. Qismiy algebraik amal deb nimaga aytiladi?
7. Amallar qanday simvollar bilan belgilanadi?
8. Biror to`plamda qachon algebraik amal berilgan deyiladi?
9. Algebra deb nimaga aytiladi?

1.3.2. Algebraik amallarning xossalari.

Algebraik amallar kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik, qisqaruvchanlik, teskaruvchanlik, neytral va yutuvchi elementlarning mavjudligi va simmetrik elementning mavjudlik xossalariga ega.

1. **Assotsiativlik xossasi.** Algebraik amallar xossalari ayniy shakl almashtirish, ayniy almashtirishlar bilan bevosita bog`liqdir. Ayniy almashtirishlarni bitta algebraik amalga nisbatan qarab chiqaylik va bu algebraik amalni (*) ko`rinishida belgilaylik.

Ifodalar ustida ayniy shakl almashtirishni bajarish jarayonida alebraik amallarning assotsiativlik xossasidan foydalaniladi. A to`plamda * algebraik amal berilgan bo`lsin.

1-ta'rif. A to`plamidan olingan ixtiyoriy $a,b,c$ elementlar uchun $a*(b*c)=(a*b)*c$ munosabat o`rinli bo`lsa * algebraik amal $A$ to`plamda assotsiativlik xossasiga ega deyiladi.

Misollar ketiramiz.

1) Natural sonlar to`plamida qo`shish va ko`paytirish amallari assotsiativlik xossasiga ega.

$4+(8+7)=(4+8)+7$

$6\cdot(5\cdot3)=(6\cdot5)\cdot3$

2) Qo`shish va ko`payritish amallari ixtiyoriy sonlar to`plamida assotsiativlik xossasiga ega.

3) To`plamlarni kesishmasi va birlashmasi assotsiativlik xossasiga bo`ysinadi.

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

4) Butun sonlar to`plamida ayirish amali assotsiativlik xossasiga bo`ysinmaydi.

$7-(8-5)\neq(7-8)-5$

5) Musbat butun sonlar to`plamida bo`lish amali assotsiativ emas.

$12:(6:3)\neq(12:6):2$

$c\neq1 \quad a.(b:c)\neq(a:b):c$

Agar berilgan A to`plamda * algebraik amal uchun assotsiativlik xossasi o`rinli bo`lsa, $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\in A$ elementlardan va * algebraik amal vositasida qavslar qo`yish orqali tuzilgan turli ifodalar bir xil son qiymatiga ega bo`ladi. Shuning uchun bir qancha sonlarni qo`shish va ko`paytirish amallarini bajarish jarayonida qavslar ishlatilmaydi.

2. Kommutativlik xossasi. Biz yuqorida assotsiativlik xossasi o`rinli bo`lgan * algebraik amal vositasida hosil qilingan ifodalarda qavs ishlatmaslik mumkin ekanligini ko`rdik.

Ammo bunday ifodalarda komponentalarning o`rnini almashtirish umuman olganda mumkin emas, shuning uchun $a*b$ ifoda bilan $b*a$ ifodalarni ayni bir xil ifodalar deb bo`lmaydi.

Bu ifodalar ayniy ifodalar bo`lishi uchun $*$ algebraik amal assotsiativlik va kommutativlik xossalariga bo`ysinishi lozim.

2-ta'rif. Berilgan A to`plamning ixtiyoriy ikkita a va b elementlari uchun $*$ algebraik amalda $a*b=b*a$ tenglik bajarilsa $*$ algebraik amal kommutativ deyiladi.

Kommutativlik xossasiga ega bo`lgan $*$ algebraik amal vositasida hosil bo`lgan $a*b$ ifoda bilan $b*a$ ifoda bir xil natijaga ega bo`ladi, bu yerda $a,b\in A$. Natural sonlar to`plamida qo`shish amali uchun kommutativlik amali o`rinli.

$$\forall a,b\in N \qquad a+b=b+a$$

Natural sonlar to`plamida ko`paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o`rinli.

$$\forall a,b\in N \qquad a\cdot b=b\cdot a$$

Haqiqiy sonlar to`plami $R$ da qo`shish va ko`paytirish amallari kommutativdir.

Butun sonlar to`plami $Z$ da ayirish amali kommutativlik xossasiga bo`ysinmaydi.

$$\forall\ a,b\in Z \quad a\neq b; \quad a-b\neq b-a$$

Musbat ratsional sonlar to`plami $Q_+$ da bo`lish amali uchun kommutativlik xossasi o`rinli emas.

$$\forall\ a,b\in Q_+ \quad a\neq b; \quad a:b\neq b:a$$

3. Distributivlik xossasi. Yuqorida bitta algebraik amalga nisbatan assotsiativlik va kommutativlik xossalari ko`rildi, ushbu xossalar o`rinli bo`lgan algebraik amalni o`zida saqlovchi ifodalarda shakl almashtirishlar amalga oshirildi. Endi esa ikkita algebraik amal bilan bog`langan ifodalarni ko`ramiz.

Faraz qilaylik, bizga X to`plam va unda $*,\circ$ -algebraik amallar berilgan bo`lsin.

3-ta'rif. X to`plamidan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun

$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$

munosabat o`rinli bo`lsa, $\circ$ algebraik amal $*$ amalga nisbatan chap tomondan distributivlikka ega deyiladi.

4-ta'rif. X to`plamidan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun

$$(b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a)$$

munosabat o`rinli bo`lsa, $\circ$ algebraik amal $*$ amalga nisbatan o`ng tomondan distributivlikka ega deyiladi.

5-ta'rif. X to`plamidan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun

$$\left.\begin{array}{l} a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c) \\ (b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a) \end{array}\right\}$$

munosabatlar o`rinli bo`lsa $\circ$ algebraik amal $*$ amalga nisbatan distributivlik xossasiga bo`ysinadi deyiladi.

Misollar.

1) Natural sonlar to`plamida ko`paytirish amali qo`shish amaliga nisbatan distributiv, chunki

$$\forall a,b,c\in N \quad \begin{cases} a(b+c)=ab+ac \\ (b+c)a=ba+ca \end{cases}.$$

2) Butun sonlar to`plamida ko`paytirish amali ayirish amaliga nisbatan distributivdir, chunki

$$\forall a,b,c\in Z \quad \begin{cases} a(b-c)=ab-ac \\ (b-c)a=ba-ca \end{cases}$$

3) Qo`shish amali ko`paytirish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga bo`ysinmaydi.

$$a+bc\neq(a+b)\cdot(a+c)$$
$$3+4\cdot 7\neq(3+4)\cdot(3+7)$$

4) To`plamlar kesishmasi $\bigcap$ to`plamlar birlashmasiga nisbatan distributivlik xossasiga bo`ysinadi.

$$\begin{cases} A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \\ (B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A) \end{cases}$$

5) To`plamlar birlashmasi $\bigcup$ to`plamlar kesishmasiga nisbatan distributivlik xossasiga bo`ysinadi.

$$\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ (B\cap C)\cup A=(B\cup A)\cap(C\cup A) \end{cases}$$

6) Ratsional sonlar to`plamida bo`lish amali qo`shish amaliga nisbatan faqat o`ng tomondan distributiv, chunki

$$\forall a,b,c\in Q \qquad (a+b):c=a:c+b:c\ .$$

Natija. Ko`paytirish amali qo`shish amaliga nisbatan distributiv bo`lganidan

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$

o`rinli bo`ladi. Yana bir marta ko`paytirishning qo`shishga nisbatan distributivlik qonunidan foydalanish bilan

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

kelib chiqadi.

Agar berilgan $*$, $\circ$ ikkita algebraik amallardan birinchisi $*$ amali assotsiativlik xossasiga va $\circ$ amali $*$ amalga nisbatan distributivlik xossasiga bo`ysinsa, bu algebraik amallarga nisbatan quyidagi tenglik o`rinli bo`ladi.

$$(a*b)\circ(c*d)=(a\circ c)*(a\circ d)*(b\circ c)*(b\circ d)$$

4. Qisqaruvchanlik xossasi.

Ma`lumki,

a) Natural sonlar to`plami N da berilgan ixtiyoriy a,x,y elementlar uchun

$a+x=a+y \ \Rightarrow\ x=y$

$ax=ay \ \Rightarrow\ x=y$

b) Butun sonlar to`plami $Z$ da $a=0$ bo`lgan holda $0+x=0+y$ munosabatdan $x=y$ kelib chiqadi. Ko`paytirishga nisbatan esa $0x=0y$ munosabat x va y qat'iy son qiymatlarini aniqlash imkoniyatini bermaydi.

6-ta'rif. Bo`sh bo`lmagan A to`plamining ixtiyoriy $x$, $y$ va $a$ elementlari uchun, shu to`plamda aniqlangan $*$ algebraik amalga nisbatan

$$\begin{cases} a*x=a*y \\ x*a=y*a \end{cases}$$

munosabatlar o`rinliligidan $x=y$ kelib chiqsa, $A$ to`plamida $*$ algebraik amal qisqaruvchanlik xossasiga bo`ysinadi deyiladi.

Agar $a*x=a*y$ dan $x=y$ tenglik o`rinli bo`lsa, A to`plam elementlari uchun * amalga nisbatan chapdan qisqaruvchanlik xossasi o`rinli bo`ladi.

Agar $x*a=y*a$ dan $x=y$ tenglik o`rinli bo`lsa, A to`plam elementlari uchun * amalga nisbatan o`ngdan qisqaruvchanlik xossasi o`rinli bo`ladi.

Bir vaqtning o`zida chapdan va o`ngdan qisqaruvchanlik xossasi o`rinli bo`lsagina A to`plamda qisqaruvchanlik xossasi o`rinli deyiladi.

5. Teskaruvchanlik xossasi.

Ma`lumki, ko`paytirish amaliga bo`lish, qo`shish amaliga ayirish amallari teskari amallardir.

$a+x=b \Rightarrow x=b-a$

$a\cdot x=b \Rightarrow x=b:a$ kelib chiqadi.

Qo`shish va ko`paytirish amallari natural sonlar to`plamida algebraik amal bo`lsa ayirish va bo`lish amallari qismiy algebraik amaldir, chunki ayirish faqat $a>b$ bo`lgan hollarda, bo`lish esa $a$ soni $b$ soniga qoldiqsiz bo`lingan hollardagina bajariladi.

Endi esa qisqaruvchan va kommutativ bo`lgan har qanday * algebraik amalga teskari bo`lgan T qismiy algebraik amalni aniqlaymiz hamda ularning umumiy xossalarini keltirib chiqaramiz. Ana shu umumiy xossalardan esa amallarning xususiy holda ayirish va bo`lish amalining xossalari kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, A to`plami va unda qichqaruvchan va kommutativ bo`lgan *algebraik amal berilgan bo`lsin. $A$ to`plamga tegishli va $b*x=a$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy (a,b) juftliklarni Y bilan belgilaylik. Har bir (a,b) juftlikda x bir qiymatli aniqlangandir.

Faraz qilaylik, x bir qiymatli aniqlanmagan, ya`ni $b*x=a$; $b*y=a$ bo`lsin, u holda * algebraik amalning qisqaruvchanlik xossasidan $x=y$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, Y dan olingan har bir (a,b) juftga A to`plamidan bitta $x$ ni mos qo`yish orqali * algebraik amalga A to`plamida teskari bo`lgan T qismiy algebraik amalni aniqlandi.

7-ta'rif. Agar $x \in A$, $(a;b) \in Y$, $Y \subset A$ uchun $x = a\,T\,b$ amal faqat va faqat $b * x = a$ o`rinli bo`lganda bajarilsa, T amalga * amaliga teskari bo`lgan algebraik amal deyiladi.

6. Neytral elementning mavjudlik xossasi.

Butun sonlar to`plami $Z$ da berilgan ixtiyoriy songa 0 sonini qo`shish, ixtiyoriy sonni 1 soniga ko`paytirish bilan natija o`zgarmasligi bizga ma'lum.

Agar $a + 0 = a$; $a \cdot 1 = a$ tenglik o`rinli bo`lsa qo`shish amaliga nisbatan 0 soni, ko`paytirish amaliga nisbatan 1 soni neytral element hisoblanadi.

8-ta'rif. A to`plamda o`rinli bo`lgan * algebraik amalga nisbatan $a, e \in A$ elementlar uchun $a * e = e * a = a$ tenglik o`rinli bo'lsa, shu to`plamning e elementi neytral element deyiladi.

Teorema. Berilgan A to`plamda faqat bitta neytral element mavjud bo`ladi.

Isbot. Aytaylik A to`plamda $e$ dan tashqari $e_1$ ham neytral element bo`lsin, u holda $a \in A$ uchun $e_1 * a = a * e_1 = a$ bajarilishi kerak. $a = e$ bo`lsa, $e_1 * e = e * e_1 = e$, shu bilan birga $e * e_1 = e_1 * e = e$. Bu munosabatlar bajarilishidan $e = e_1$ ekani kelib chiqadi.

Har qanday to`plam ham neytral elementga ega bo`lavermaydi. Natural sonlar to`plamida qo`shishga nisbatan neytral element mavjud emas, chunki $a + e = a$ tenglikni o`rinli qiladigan e soni N da mavjud emas.

Agar A to`plamda * amaliga nisbatan neytral $e$ element mavjud bo`lsa, *algebraik amal bilan berilgan har qanday ifodada neytral e elementni *algebraik amal bilan birgalikda tashlab yuborish mumkin bo`ladi.

$$21 * e * 16 * e * 3 = 21 + 0 + 16 + 0 + 3 = 21 + 16 + 3$$

7. Yutuvchi elementning mavjudlik xossasi.

9-ta'rif. Agar A to`plamda $\exists x \in A$ topilsaki, $\forall a \in A$ uchun $a * x = x * a = x$ tenglik bajarilsa, berilgan * algebraik amalga nisbatan x element yutuvchi element deyiladi.

Butun sonlar to`plami $Z$ da har qanday sonni 0 ga ko`paytirish natijasida 0 soni hosil bo`ladi $a \cdot 0 = 0$.

Demak, ko`paytirish amaliga nisbatan 0 element yutuvchi element hisoblanar ekan. Shuningdek $x$ element * algebraik amalga nisbatan yutuvchi element bo`lsa, x element bilan shu amal birgalikda berilgan har qanday ifodani x element bilan almashtirish mumkin bo`ladi.

8. Simmetrik elementning mavjudlik xossasi.

Ratsional sonlar to`plamida quyidagi tengliklar o`rinli:

$$a - b = a + (-b)$$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}; \ b \neq 0$$

Birinchi tenglikda ayirish amali qo`shish amali bilan, $b$ soni esa, unga qarama-qarshi $(-b)$ soniga, ikkinchi tenglikda bo`lish amali ko`paytirish amali bilan, $b$ soni esa unga teskari bo`lgan $\frac{1}{b}$ soni bilan almashtiriladi.

Qarama-qarshi, teskari sonlar simmetrik elementning xususiy hollaridir.

Aytaylik, A to`plam va * algebraik amal berilgan bo`lsin, e element A to`plamining neytral elementi bo`lsin.

10-ta'rif. Agar $\forall a \in A$ uchun $a * \overline{a} = \overline{a} * a = e$ tenglik o`rinli bo`lsa, $\overline{a}$ element a element uchun simmetrik element deyiladi.

Teorema. A da berilgan * algebraik amal assotsiativ bo`lsa, * amaliga nisbatan A ning har bir elementiga faqat bitta simmetrik element mos keladi.

Isbot. Aytaylik, A to`plamda $a$ elementga ikkita $\overline{a}_1$ va $\overline{a}_2$ elementlar simmetrik bo`lsin.

U holda ta'rifga asosan $\begin{matrix} a*\tilde{a}_1=\tilde{a}_1*a=e \\ a*\tilde{a}_2=\tilde{a}_2*a=e \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a*\tilde{a}_1=a*\tilde{a}_2.$

* amal assotsiativ bo`lganidan

$$(\tilde{a}_1*a)*\tilde{a}_2=\tilde{a}_1*(a*\tilde{a}_2) \;\Rightarrow\; e*\tilde{a}_2=\tilde{a}_1*e \;\Rightarrow\; \tilde{a}_2=\tilde{a}_1.$$

Bundan ko`rinadiki, \* amaliga nisbatan $A$ to`plamning har bir elementi faqat bitta simmetrik elementga ega bo`ladi.

Shunday to`plamlar mavjudki, ularning har bir elementiga bitta ham simmetrik element mos kelmaydi.

Masalan, nomanfiy butun sonlar to`plamida qo`shish amaliga nisbatan $a\in N_0$ ga simmetrik element $(-a)$ mavjud emas, $-a\notin N_0$.

Ko`paytirish amaliga nisbatan simmetrik element teskari element, qo`shish amaliga nisbatan esa simmetrik element qarama-qarshi element deyiladi.

Ma`lumki, ratsional sonlar to`plamida a ga teskari $\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$; $\frac{1}{a}$ ga teskari $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$; a ga qarama-qarshi $(-a)$; $(-a)$ ga qarama-qarshi $-(-a)=a$, ya'ni $\tilde{\tilde{a}}=a$ o`rinli bo`ladi.

Teorema. Agar to`plamda berilgan \* algebraik amal assotsiativ hamda to`plamning ixtiyoriy b va c elementlari $\tilde{b}$ va $\tilde{c}$ simmetrik elementga ega bo`lsa, $\widetilde{(b*c)}=\tilde{b}*\tilde{c}$ tenglik o`rinli bo`ladi.

Teoremaning isboti talabalarga havola qilinadi.

Teoremaga asosan, $b=5; c=7$ bo`lsa, $(5+7)=12$; $\widetilde{12}=-12$; $\widetilde{(5+7)}=-12$; $\tilde{5}+\tilde{7}=-5+(-7)=-12$; $\widetilde{(5+7)}=\tilde{5}+\tilde{7}$ tenglik bajariladi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Natural sonlar to`plamida kommutativlik va assotsiativlik xossalariga qaysi amallar bo`ysinadi?

2. Amallarning qaysi biri uchun butun sonlar to`plami $Z$ da assotsiativlik xossasi o`rinli bo`ladi?

3. Butun sonlar to`plami $Z$ da kommutativlik xossasi o`rinli bo`lgan amallarni ko`rsating.

4. Butun sonlar to`plami $Z$ da ayirish amali qisqaruvchanlik xossasiga bo`ysinadimi?

5. Berilgan amalga nisbatan teskari amal deb qanday amalga aytiladi?

6. Ratsional sonlar to`plami $Q$ da ko`paytirish amaliga teskari amal mavjudmi?

7. Qachon amal teskarilanuvchanlik xossasiga ega bo`ladi deyiladi?

8. Natural sonlar to`plami N da neytral element mavjudmi?

9. Asosiy sonly to`plamlarda qaysi amallarga nisbatan neytral, yutuvchi, simmetrik elementlar mavjud?

1.3.3.Gruppa, halqa, maydon va ularning xossalari.

Algebraik amal berilgan va bo`sh bo`lmagan to`plam algebra deyiladi. Agar natural sonlar to`plami N da qo`shish amali berilgan bo`lsa, bu to`plamda berilgan algebra $\langle N,+\rangle$ ko`rinishda belgilanadi. $\langle N,-\rangle$ ko`rinishda berilgan algebra natural sonlar to`plamida ayirish amali bilan berilgan, $\langle Z,:\rangle$ butun sonlar to`plamida bo`lish amali vositasida berilgan algebralar bo`ladi. Demak, algebra berilishi uchun bo`sh bo`lmagan to`plam va unda algebraik amal berilishi lozim ekan.

Agar X to`plam berilib, unda $*$, $\circ$ algebraik amallar berilgan bo`lsa, ular vositasida berilgan algebra $\langle X,*,\circ\rangle$ ko`rinishda bo`ladi. $\langle X,T,\circ\rangle$ algebra $\langle X,T,*\rangle$ algebradan $\circ$ va $*$ algebraik amallari bilan farq qiladi.

A to`plam va unda berilgan $*$ algebraik amal vositasida $\langle A,*\rangle$ algebra beriladi. Gruppa, halqa, maydon ana shunday algebralar qatoriga kiradi. Quyida gruppa, halqa va maydon kabi algebralarning xossa va xususiyatlarini ko`rib chiqamiz.

1. Gruppa. Aytaylik bizga, $A \neq \varnothing$ to`plam va binar * algebraik amal berilgan bo`lsin.

1-ta'rif. Bo`sh bo`lmagan A to`plamda * algebraik amal assotsiativ bo`lsa, $\langle A, * \rangle$ algebra yarimgruppa deyiladi.

2-ta'rif. Bo`sh bo`lmagan A to`plamda quyidagi xossalar o`rinli bo`lsa, $\langle A, * \rangle$ algebra gruppa deyiladi:

a) A to`plamning ixtiyoriy $a,b,c$ elementlari uchun $a*(b*c)=(a*b)*c$ munosabat o`rinli bo`lsa, ya'ni binar * algebraik amal assotsiativ bo`lsa;

b) A to`plamning ixtiyoriy $a$ elementi uchun shunday $e \in A$ element mavjud bo`lib, u $a*e=e*a=a$ shartni qanoatlantirsa, ya'ni A to`plamda neytral element mavjud bo`lsa;

d) A to`plamning ixtiyoriy $a$ elementi uchun shunday $\bar{a}$ element mavjud bo`lib, u quyidagi $a*\bar{a}=\bar{a}*a=e$ shartni qanoatlantirsa, ya'ni A to`plamning har bir elementiga simmetrik element mavjud bo`lsa.

Ta'rifdan ko`rinadiki, $\langle A, *, e, \bar{a} \rangle$ algebra gruppa bo`lishi uchun * algebraik amal bo`lib, u assotsiativ bo`lishi hamda A to`plamda $e$ neytral, $\bar{a}$ simmetrik elementlar mavjud bo`lishi kerak ekan.

3-ta'rif. Agar A to`plamda berilgan * algebraik amal kommutativ bo`lsa, ya'ni ixtiyoriy $a,b \in A$ uchun $a*b=b*a$ o`rinli bo`lsa, $\langle A, *, e, \bar{a} \rangle$ gruppa * binar algebraik amalga nisbatan kommutativ gruppa deyiladi. Kommutativ gruppa ba'zi hollarda Abel gruppa deb ham ataladi.

Binar «*» algebraik amalni «+» qo`shish amali bilan almashtiraylik. $A$ to`plamda + amali gruppa hosil qilishi uchun u quyidagi xossalarga bo`ysinishi kerak:

a) $\forall a,b,c \in A$ uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$ bajarilishi, ya'ni qo`shish amali assotsiativ bo`lishi;

b) $\forall a \in A$ uchun shunday $e=0$ element bo`lsinki, $a+0=0+a=a$ bo`lsin, ya'ni neytral 0 element mavjud bo`lishi;

d) A to`plamning ixtiyoriy $a$ elementi uchun $a+(-a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi simmetrik ( $-a$ ) element mavjud bo`lishi kerak.

Ma'lumki, qo`shish amali kommutativdir, shuning uchun $\langle A,+,0,-a\rangle$ algebra kommutativ, ya'ni Abel gruppasidir.

Misol. Haqiqiy sonlar to`plami $R$ qo`shish amaliga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qiladi.

Haqiqatan ham, $\forall a,b,c \in R$ uchun

a) $(a+b)+c=a+(b+c)$ assotsiativlik xossasi o`rinli;

b) $\forall a \in R$ uchun $0 \in R$ mavjudki, $a+0=a$;

d) $\forall a \in R$ uchun $-a \in R$ topiladiki, $a+(-a)=0$.

Qo`shish amali haqiqiy sonlar to`plamida kommutativ, assotsiativ bo`lganidan va $R$ da neytral va simmetrik element mavjudligidan $\langle R,+,0,-a\rangle$ kommutativ gruppa bo`lishi kelib chiqadi.

Agar «*» algebraik amal sifatida «+» qo`shish amali olinib, $\langle A,+\rangle$ algebra qo`shish amaliga nisbatan gruppa bo`lsa, bunday gruppalar additiv gruppalar deyiladi.

Agar «*» algebraik amal sifatida «·» qo`shish amali olinib, $\langle A,\cdot\rangle$ algebra ko`paytirish amaliga nisbatan gruppa bo`lsa, bunday gruppalar multiplikativ gruppalar deyiladi.

2. Halqa va uning xossalari.

To`plamning ixtiyoriy elementiga shu to`plamning faqat bitta qarama-qarshi yoki teskari elementini mos qo`yuvchi, har bir elementga bitta neytral elementni mos qo`yuvchi amal unar algebraik amaldir.

Bo`sh bo`lmagan A to`plamda ikkita binar algebraik, bitta unar algebraik amal berilgan bo`lsin. Aniqlik uchun binar algebraik amallar uchun «qo`shish» va «ko`paytirish» amallarini, unar algebraik amal sifatida esa simmetrik (qarama-qarshi, teskari) elementning mavjudligini qabul qilaylik.

4-ta'rif. Bo`sh bo`lmagan A to`plamda qo`shish va ko`paytirish binar algebraik amallari o`rinli bo`lib, ular quyidagi xossalarga bo`ysinsalar, A to`plam va $+,\cdot$ amallari bilan berilgan $\langle A,+,\cdot\rangle$ algebra yarim halqa deyiladi:

a) $\forall a,b,c\in A$ lar uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$, ya'ni assotsiativlik xossasi;

b) $\forall a,b\in A$ uchun $a+b=b+a$, ya'ni kommutativlik xossasi;

d) $\forall a,b,x\in A$ uchun

$$a+x=b+x \Rightarrow a=b$$
$$x+a=x+b \Rightarrow a=b$$

ya`ni qisqaruvchanlik xossasi;

e) $\forall a,b,c\in A$ uchun $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ ko`paytirish amali assotsiativlik xossasiga bo`ysinsa;

f) $\forall a,b,c\in A$ uchun $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ yoki $c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$ ko`paytirish amali qoshish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga ega bo`lsa.

Agar $\langle A,+,\cdot\rangle$ yarim halqa bo`lib, ko`paytirish amali kommutativ bo`lsa, bunday yarim halqa yarim kommutativ halqa deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\langle A,+,\cdot\rangle$ algebra qo`shish amaliga nisbatan Abel gruppa va ko`paytirish amali qo`shish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga bo`ysinsa, $\langle A,+,\cdot\rangle$ algebraga halqa deyiladi.

Demak, $\langle A,*,\circ\rangle$ halqa bo`lishi uchun, A to`plamda * algebraik amal assotsiativ va kommutativ bo`lishi, * algebraik amalga nisbatan neytral va simmetrik elementlari mavjud bo`lishi hamda $\circ$ algebraik amal * algebraik amalga nisbatan distributiv bo`lishi kerak.

Agar $\forall a\in A$ uchun $a+0=a$ va $0+a=a$ munosabat o`rinli bo`lsa, $0\in A$ element A to`plamning nol elementi, agar $\forall a\in A$ uchun $e\in A$ mavjud bo`lib $a\cdot e=e\cdot a=a$ munosabat bajarilsa e elementga A to`plamning birlik elementi deyiladi.

Misol. $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ natural sonlar to`plamida qo`shish va ko`paytirish amallari vositasida tashkil qilingan $\langle N,+,\cdot\rangle$ algebra yarim halqadir. Haqiqatan ham,

1) $4,6,7\in N \quad 4+(6+7)=(4+6)+7$

2) $4+7=7+4$

3) $5+12=5+(5+7) \Rightarrow 12=5+7$

4) $5\cdot(6\cdot 7)=(5\cdot 6)\cdot 7$

$5\cdot 42=30\cdot 7$

$210=210$

5) $6\cdot(7+4)=6\cdot 7+6\cdot 4$

$6\cdot 11=66$

$6\cdot 7+6\cdot 4=42+24=66$

Demak, $\langle N,+,\cdot\rangle$ algebra yarim halqadir.

Agar A to`plamda berilgan ko`paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o`rinli bo`lsa, $\langle A,+,\cdot\rangle$ kommutativ halqa, agar ko`paytirish amali uchun assotsiativlik xossasi o`rinli bo`lsa, $\langle A,+,\cdot\rangle$ assotsiativ halqa, agar ko`paytirish amaliga nisbatan $a\cdot e=e\cdot a=a$ shartni bajaruvchi neytral element mavjud bo`lsa, $\langle A,+,\cdot\rangle$ birlik elementli halqa (chunki $a\cdot 1=1\cdot a=a,\ e=1$) deb yuritiladi.

Agar $\langle A,*,\circ\rangle$ halqani tashkil qilayotgan A to`plam elementlari sonlardan iborat bo`lsa, $\langle A,*,\circ\rangle$ halqa sonli halqa deb yuritiladi. Endi ko`rib chiqilgan halqa va uning xossalaridan foydalanib maydon tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik, kommutativ va birlik elementli assotsiativ halqa berilgan bo`lsin.

6-ta'rif. Agar $\langle A,+,\cdot\rangle$ algebra kommutativ, assotsiativ va birlik elementli halqa bo`lib, $a\in A,\ a\neq 0$ uchun $a$ elementga $a\cdot a^{-1}=e$ shartni qanoatlantiruvchi $a^{-1}$ teskari element mavjud bo`lsa, $\langle A,+,\cdot\rangle$ algebraga maydon deyiladi.

Maydon ta`rifidan ko`rinadiki:

a) har qanday maydonda uning nolga teng bo`lmagan istalgan elementiga teskari element mavjud va yagonadir;

b) $\forall a \in A,\ a \neq 0$ uchun $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$;

d) har qanday maydonda birlik element mavjud va yagonadir;

e) $\forall a,b \in A$ uchun $a \cdot x = b$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in A$ yagonadir, bu $a \cdot a^{-1} = e$ shartni qanoatlantiruvchi a^{-1} ning yagonaligidan kelib chiqadi:

$a \cdot x = b \Rightarrow x = b \cdot a^{-1}$ $b \cdot (a \cdot b^{-1}) = (b \cdot b^{-1}) \cdot a = a$;

f) maydon nolning bo`luvchilariga ega emas.

Agar $\langle A,+,\cdot \rangle$ maydonda A to`plam elementlari sonlardan iborat bo`lsa $\langle A,+,\cdot \rangle$ maydon sonli maydon deyiladi.

Ratsional sonlar to`plami $Q$ da qo`shish va ko`paytirish amallari vositasida hosil qilingan $\langle Q,+,\cdot \rangle$ algebra maydon tashkil etadi.

Butun sonlar to`plamida qo`shish va ko`paytirish amallari vositasida hosil qilingan $\langle Z,+,\cdot \rangle$ algebra maydon hosil qilmaydi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Berilgan to`plamda yarimgruppa hosil qiluvchi amal qanday xossalarga bo`ysinadi?
2. Berilgan to`plamda gruppa hosil qiluvchi amal qanday xossalarga bo`ysinadi?
3. Kommutativ gruppa qanday xossalarga ega?
4. Halqa tashkil qilish uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?
5. Yarim kommutativ halqaga ta'rif bering.
6. Assotsiativ halqaga misollar keltiring.
7. Maydonga ta'rif bering.

1.4. Kombinatorika elementlari

1.4.1. Kombinatorika. Yig`indi va ko`paytma qoidasi

1. To`plamlarning Dekart ko`paytmasi. X va Y to`plamlar dekart ko`paytmasi deb, elementlari (x,y) juftliklardan tashkil topgan $X\times Y$ to`plamga aytiladi, bunda $x\in X$, $y\in Y$ ya'ni

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X\wedge y\in Y\}.$$

Agar X va Y to`plamlar ustma-ust tushsa, ya'ni $X=Y$ bo`lsa, u holda dekart ko`paytma $X\times X$ bo`lib, uning elementlari (x,y) juftliklardan iborat bo`ladi va bunda $x\in X$, $y\in X$.

Misol. $X=\{1;2;3\}$ bo`lsin, u holda

$$X\times X=\{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),(3;1),(3;2),(3;3)\}$$

bo`ladi.

Ixtiyoriy X to`plam uchun $X\times\varnothing=\varnothing\times X=\varnothing$ deb olinadi.

Dekart ko`paytma assotsiativlik xossasiga ega, ya'ni, $X,Y,Z$ to`plamlar uchun $X\times(Y\times Z)=(X\times Y)\times Z$ munosabat o`rinli.

Dekart ko`paytma kommutativlik xossasiga ega emas, ya`ni, agar $X\neq Y$, bo`lsa, $X\times Y\neq Y\times X$.

Kommutativlik xossasiga ega emasligini ko`rsataylik. Haqiqatan ham, $X\times Y$ dekart ko`paytma elementlari $(x;y)$ juftliklardan iborat, bunda $x\in X$, $y\in Y$. $Y\times X$ dekart ko`paytmani elementlari esa $(y;x)$ juftdan iborat, bunda $y\in Y$ va $x\in X$. Ammo $x\neq y$ bo`lganda $(x;y)$ va $(y;x)$ juftliklar turli elementlar bo`ladi, shuning uchun $X\neq Y$ bo`lganda, $X\times Y$ va $Y\times X$ to`plamlar har xil, ya'ni teng emas.

X va Y to`plamlar chekli bo`lsa, ularni dekart ko`paytmasini jadval ko`rinishida berish qulay bo`lib, bunda gorizontal bo`yicha Y to`plam, vertikal bo`yicha X to`plam elementlari joylashtiriladi, satrlar va ustunlar kesishmasida, dekart ko`paytma elementlari joylashadi.

Masalan, $X=\{3;4;5\}$, $Y=\{a;b\}$

Y \ X	a	b
3	$(3;a)$	$(3;b)$
4	$(4;a)$	$(4;b)$
5	$(5;a)$	$(5;b)$

2. **Kortejlar**. Aytaylik, $X_1, X_2, ..., X_n$ to`plamlar berilgan bo`lsin. X_1 to`plamdan $a_1$ elementni, $X_2$ to`plamdan a_2 elementni, ... , X_n to`plamdan $a_n$ elementlarni olib, ularni $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tartibda joylashtiraylik. Bunda $X_1, X_2, ..., X_n$ to`plamlardan tanlangan «n ta tartiblangan» elementlarga ega bo`lamiz. Bu yerda «$n$ ta tartiblangan» degan so`z o`rniga qisqacha «kortej» so`zini ishlaish mumkin (kortej fransuzcha so`z bo`lib, "tantanali namoyish" ni bildiradi, masalan «to`y korteji», «avtomashinalar korteji» va hokazo).

Bunda n – kortej uzunligi, $a_1, a_2, ..., a_n$ elementlar kortejning komponentlari deyiladi.

Matematikada kortejga o`nii sanoq sistemasida olingan sonlar to`plami ham misol bo`ladi. Bunday kortej 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 raqamlaridan tuzilgan bo`lib, bunda raqamlar takrorlanishi ham mumkin.

1-misol. 234567 sonining korteji (2;3;4;5;6;7) ko`rinishda bo`ladi.

Agar ikkita kortej mos komponentlari va uzunliklari teng bo`lsa, ular teng deyiladi, ya'ni $(a_1, a_2, ..., a_n)$ va $(b_1, b_2, ..., b_m)$ kortejlar berilgan bo`lib, bu kortejlarda $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2; ...; a_n = b_m$ va $n = m$ bo`lsa, ular teng deyiladi.

2-misol: $(a;b;c)$ va $(a;b;c)$ lar teng.

$(a;b;c)$ va $(a;b;d)$ lar teng emas.

Bizga $A_1, A_2, ..., A_n$ to`plamlar berilgan bo`lsin. Agar bu to`plamlarning elementlaridan uzunligi $n$ ga teng kortejni yuqoridagi usulda tuzilsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_n$ to`plamlarning Dekart ko`paytmasi $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ hosil qilinadi.

3-misol: $A_1 = \{3;4\}$, $A_2 = \{5;6\}$, $A_3 = \{7;8\}$ to`plamlar Dekart ko`paytmasi quyidagicha bo`ladi:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(3;5;7),(3;5;8),(3;6;7),(3;6;8),(4;5;7),(4;5;8),(4;6;7),(4;6;8)\}:$$

3. Kombinatorika elementlari. Yig`indi va ko`paytma qoidasi. Elementlarning turli kombinatsiyalari, ularning soni haqidagi masalalar kombinatorika masalalari deyiladi. Ko`pgina kombinatorika masalalarini yechish ikkita qoidaga, ya'ni yig`indi va ko`paytma qoidasiga asoslangan.

Kombinatorikada to`plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalalasi yig`indi qoidasiga asoslanib topiladi.

**Yig`indi qoidasi.** Agar $X$ to`plam k ta elementga, Y to`plam $m$ ta elementga ega bo`lsa, va X, Y to`plamlar kesishmasa, u holda $X \bigcup Y$ to`plam $k+m$ ta elementga ega bo`ladi.

Agar $n(X)=k, n(Y)=m$, $X \bigcap Y = \varnothing$ bo`lsa, $n(X \bigcup Y)=n(X)+n(Y)=k+m$

Boshqacha aytganda, agar birinchi elementni tanlash usullari k ta, ikkinchi elementni tanlash usullari m ta bo`lsa, va bu ususllar har xil bo`lsa, u holda birinchi yoki ikkinchi elementni tanlash usullari $k+m$ ta bo`ladi.

Masalan, savatda 7 ta olma va 12 ta nok bor bo`lsa, 1 ta mevani 7+12=19 usul bilan tanlash mumkin.

Agar X va Y to`plamlar kesishmasi bo`sh to`plam bo`lmasa, ya'ni $X \bigcap Y \neq \varnothing$, u holda to`plamlar birlashmasini elementlarni sonini hisoblash boshqacha bo`ladi, chunki ikkala to`plam umumiy elementlarga ega bo`ladi.

Masalan, $\{a;b;c;d;e;f\}$ va $\{e;f;k;l\}$ to`plamlar birlashmasi 6+4=10 ta elementdan emas, balki 8 ta elementdan tashkil topgan, ya'ni $X \bigcup Y = \{a;b;c;d;e;f;k;l\}$. Buning sababi $e;f$ elementlari ikkala to`plamda ham bor.

**Umumlashgan yig`indi qoidasi.** Agar $X$ to`plam k ta elementga, Y to`plam $m$ elementga ega bo`lsa, va X, Y to`plamlar kesishmasida $l$ ta element bo`lsa, u holda $X \bigcup Y$ to`plam $k+m-l$ ta elementga ega bo`ladi.

Demak, birlashmadagi elementlar sonini topish uchun elementlar sonidan $X \cap Y$ kesishma elementlar sonini ayirish kerak. Boshqacha aytganda, agar $X \cap Y \neq \varnothing$ bo`lsa, $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$.

Masala. 60 talabadan 54 tasi matematika imtihonini, 49 tasi chet tili imtihonini topshirdi. 3 talaba ikkala fandan «2» oldi. Nechta qarzdor talaba bor?

Yechish: A-matematika fanidan «2» olgan, B-chet tili fanidan «2» olgan talabalar to`plami bo`lsin.

$n(A) = 60 - 54 = 6$ $\quad$ $n(A \cap B) = 3$

$n(B) = 60 - 49 = 11$ $\quad$ $n(A \cup B) = 6 + 11 - 3 = 14$

Javob: 14 ta qarzdor talaba bor.

Natija. Uchta X, Y, Z to`plamlar uchun $X \cup Y \cup Z \neq \varnothing$ bo`lsa, quyidagi formula o`rinli:

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) -$$
$$- n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z).$$

Kombinatorikaning ikkinchi qoidasi, chekli to`plamlar berilganda ularning elementlaridan tuzilgan kortejlar sonini, boshqacha aytganda, to`plamlarning dekart ko`paytmasi elementlari sonini topish imkonini beradi va bu qoida ko`paytma qoidasi deyiladi.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

**Ko`paytma qoidasi.** Agar $X$ to`plamni x elementini k usul, Y to`plamni $y$ elementini $m$ usul bilan tanlash mumkin bo`lsa, (x, y) tartiblangan juftlikni km usul bilan tanlash mumkin.

n ta to`plam uchun ($n > 2$)

$$n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_n).$$

Masalan, A shahardan B shaharga 3 yo`l bilan, $B$ shahardan $D$ shaharga 2 yo`l bilan borish mumkin bo`lsa, A shahardan D shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo`lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo`l bilan o`tish mumkin bo`lsa, umumiy yo`lni $3 \cdot 2 = 6$ usul bilan o`tish mumkin.

Boshqacha aytganda, agar x elementni k usul bilan, y elementni x ni tanlab bo`lgandan so`ng, m usul bilan tanlash mumkin bo`lsa, (x,y) juftlikni km usul bilan tanlash mumkin.

Masala. Nechta (turli raqamlar bilan yozilgan) 2 xonali sonlar bor?

Yechish: 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, ..., 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan (noldan boshlab o`nliklar raqamidan boshqa raqamlar) tanlash mumkin. Hammasi bo`lib $9*9=81$ ta shunday son bor ekan.

Masala. m-elementli X to`plam elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi kortejlar soni topilsin.

Yechish: k o`rinli kortej $X\times X\times...\times X$ dekart ko`paytmaning elementi bo`lib, tartiblashgan $k$-likni bildiradi. Masalani yechish uchun $X*X*...*X$ dekart ko`paytma elementlari sonini topish kerak. Bu son $n(X)=m$ bo`lgani uchun $n(X*X*...*X)=m^k$ ga teng.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Yig`indi qoidasini tushuntiring.
2. Umumlashgan yig`indi qoidasini tushuntiring.
3. Ko`paytma qoidasini tushuntiring va bu qoida bilan yechiladigan kombinatorik masalalardan namuna keltiring.
4. $n(A\times B)=n(B\times A)$ ekanini isbotlang.

1.4.2. Orin almashtirish, o`rinlashtirish. Guruhlash

1. Orin almashtirish. Agar chekli X to`plam elementlari biror usul bilan nomerlab chiqilgan bo`lsa, X to`plam tartiblangan deyiladi.

Bitta to`plamni turli usul bilan tartiblash mumkin.

Masalan, sinf o`quvchilarini yoshiga, bo`yiga, og`irligiga qarab yoki alfavit bo`yicha tartiblash mumkin.

m-elementli X to`plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin?

Tartiblash – elementlarni nomerlash demakdir. 1-elementni m usul bilan, 2-elementni m-1 usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi xolos.

Tartiblashlarning umumiy soni $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=m!$ ga teng.

Birinchi m ta natural son ko`paytmasi matematikada «$m$ – faktorial» deyiladi va qisqacha $m!$ ko`rinishda yoziladi. Masalan $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

Ta'rif bo`yicha $0!=1$, $1!=1$ deb olinadi.

1-ta'rif. m-elementli X to`plamni turli tartiblashtirishlar takrorsiz o`rin almashtirishlar deyiladi, ularning soni P_m deb belgilanadi va $m!$ ga teng.

$$P_m=m!$$

P_m – fransuzcha "Permutation" – so`zidan olingan bo`lib, "o`rin almashtirish" degan ma'noni bildiradi.

Bu tartiblashtirishlar bir xil elementlardan tashkil topib, ular bir-biridan tartiblashish o`rni bilan farq qiladi, elementlar esa qayta takrorlanmaydi.

Masalan, a,b,c uchta harfdan $3!=6$ ta o`rin almashtirish qilish mumkin

$$abc, acb, cab, cba, bac, bca.$$

**2. O`rinlashtirish.** Endi umumiyroq masalani qaraymiz: $m$ elementli $X$ to`plamdan nechta tartiblangan k-talik to`plamlar tuzish mumkin?

Bu masalaning oldingi masaladan farqi shundaki, tartiblash k-elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni.

$$m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)=m!$$

ko`paytmaga teng.

2-ta'rif. m elementli to`plam elementlaridan tuzilgan elementlari takrorlanmaydigan $k$ uzunlikdagi kortejlar $m$ elementdan $k$ tadan takrorsiz o`rinlashtirishlar deyiladi, ularning soni A_m^k deb belgilanadi va quyidagicha hisoblanadi:

$$A_m^k=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)=\frac{m!}{(m-k)!}.$$

Takrorsiz o`rin almashtirishlar takrorsiz o`rinlashtirishlarning xususiy holi deb ko`rish mumkin: $P_m = A_m^m = m!$

Masala. Sinfdagi 26 o`quvchidan guruh sardori va yordamchisini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$A_{26}^2 = \frac{26!}{24!} = 25 \cdot 26 = 650$ (usul bilan)

3-ta'rif. m elementli to`plam elementlaridan tuzilgan elementlari takrorlanishi mumkin bo`lgan k uzunlikdagi kortejlar m elementdan k tadan takrorli o`rinlatishlar deyiladi, ularning soni $\overline{A}_m^k$ deb belgilanadi va quyidagicha hisoblanadi:

$$\overline{A}_m^k = m^k.$$

($\overline{A}_m^k$ – fransuzcha arrangmment" – "o`rinlatish" so`zini bosh harfi)

3. Guruhlash.

Kombinatorika masalalaridan yana birini ko`raylik: $m$ elementli $X$ to`plamning nechta k elementli to`plam ostilari bor?

4-ta'rif. m elementli to`plam elementlaridan tuzilgan elementlari takrorlanmaydigan $k$ elementli to`plam ostilariga m elementdan k tadan takrorsiz guruhlashlar deyiladi, ularning soni C_m^k deb belgilanadi va quyidagicha hisoblanadi:

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

C_m^k – fransuzcha "combinasion" so`zidan olingan bo`lib, "guruhlash" ma'nosini beradi.

Buning formulasini keltirib chiqarishda C_m^k ni m va k lar orqali ifodalaymiz. Aytaylik m elementli X to`plamning $k$ ta elementli $B$ to`plam ostilari bo`lsin.

B to`plam ostilari k ta elementlarni saqlagani uchun uni $k!$ usulda tartiblashtirish mumkin.

Bunda X to`plam elementlaridan tuzilgan $k$ elementli tartiblangan to`plamlarning soni X to`plamdagi tartiblanmagan $k$-elementli to`plam ostilar sonidan k! marta ko`p.

Masalan, 4 elementli $A=\{a,b,c,d\}$ to`plamning nechta 3 elementli qism to`plami bor?

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\}.$$

4 ta shunday qism to`plam bor ekan.

Bu qism to`plamlarni tartiblaganda 6 barobar ko`proq 3 o`rinli kortejlarga ega bo`lamiz.

Masalan, $\{a,b,c\}$ ni tartiblasak:

$$(a,b,c),(a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)$$

ega bo`lamiz. Qolgan $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$ uchliklar bilan shunday.

Tartibli k elementli to`plamlarining soni $A_m^k$, $k$ elementli to`plam ostilar sonini C_m^k bilan belgilansa, $A_m^k=k!\cdot C_m^k$; $A_m^k=\dfrac{m!}{(m-k)!}$ bo`lishidan

$$C_m^k=\frac{m!}{(m-k)!k!}$$

formulaga ega bo`miz.

Misol. 20 kishilik guruhdan, 4 kishilik nomzodni necha usul bilan saylash mumkin.

$$C_{20}^4=\frac{20!}{16!\cdot 4!}=\frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=4845 \text{ ta usul}$$

C_m^k ko`rinishdagi sonlarning quyidagi xossalari bor (bular $0\le k\le m$ bo`lgan hol uchun o`rinli):

1^0. $C_m^0=C_m^m=1$

2^0. $C_m^k=C_m^{m-k}$

3^0. $C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^k$

1^0 va 2^0 xossalarning isboti talabalarga havola etiladi.

3^0 xossaning isbotini ko`rib chiqamiz:

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$$

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{(m-1)!}{(k-1)!\cdot(m-1-(k-1))!} = \frac{(m-1)!}{(k-1)!\cdot(m-k)!}$$

$$C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{k!\cdot(m-1-k)!} = \frac{(m-1)!}{k!\cdot(m-k-1)!}$$

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{(k-1)!\cdot(m-k)!} + \frac{(m-1)!}{k!\cdot(m-k-1)!} =$$

$$= \frac{k\cdot(m-1)!+(m-k)\cdot(m-1)!}{k!\cdot(m-k)!} = \frac{(m-1)!\cdot(k+(m-k))}{k!\cdot(m-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!\cdot m}{k!\cdot(m-k)!} = \frac{m!}{k!\cdot(m-k)!} = C_m^k$$

C_m^k ko`rinishdagi sonlarni Paskal uchburchagi ko`rinishida joylashtirish mumkin:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Har bir qatordagi birinchi va oxirgi son 1 ga teng (1^0 xossa).

Paskal uchburchagining har bir qator o`rtasiga nisbatan simmetriyaga ega (2^0 xossa).

Har bir son o`zining tepasidagi 2 ta son yig`indisidan iborat (3^0 xossa).

Har bir qatordagi sonlar $(a+b)^m$ ikkihadning yoyilmasidagi binomial koeffitsientlarga teng. Nyuton binomi $(a+b)^m$ yoyilmasi quyidagicha:

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m b^0 + C_m^1 a^{m-1} b^1 + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m a^0 b^m$$

$(a+b)^m$ binom yoyilmasida har qaysi $a^{m-k}b^k$ ifoda oldida turgan koeffitsient C_m^k guruhlashlar soniga teng. Haqiqatan, agar qavslar daraja ko'rsatkichlaridan foydalanilmay $(a+b)^m = (a+b)(a+b)\ldots(a+b)$ (m ta ko'paytuvchi) ko'paytmadagi qavslar daraja ko'rsatkichlaridan foydalanilmay va ko'paytuvchilarni o'rin almashtirmay ochilsa, natijada a va b harflaridan tuzilgan m uzunlikdagi barcha m taliklarning yig'indisi hosil bo'lar edi.

Masalan,

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb.$

Qo'shiluvchilardan, masalan, $k=2$ ta b harfiga va $m - k = 3 - 2 = 1$ ta a harfiga ega bo'ladiganlarini sanasak, ular 3 ta. Bu esa guruhlashlar soni formulasi bo'yicha hisoblab topilganga $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ ga teng.

Umuman, yoyilma tarkibida $a^{m-k}b^k$ ga ega bo'lgan hadiga o'xshash, ya'ni m-k ta a harfiga va k ta b harfiga ega bo'lgan m taliklar soni $C^k{}_{(m-k)+k}$ ga, ya'ni C_m^k ga teng. Shunday qilib,

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m b^0 + C_m^1 a^{m-1} b^1 + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m a^0 b^m$$

bo'ladi.

Yana bir masalani, ya'ni chekli m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari sonini topish masalasini ko'raylik.

Teorema. Chekli m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari soni 2^m ga teng:

$$C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

Isbot.

m elementli X to'plam berilgan bo'lsin. X to'plamni istalgan tarzda tartiblaymiz. So'ng har bir to'plam ostini m o'rinli kortej sifatida shifrlaymiz: to'plam ostiga kirgan element o'rniga 1, kirmagan element o'rniga 0 yozamiz. Shunda qism to'plamlar soni 2 ta {0;1} elementdan tuzilgan barcha m o'rinli kortejlar soniga teng bo'ladi.

Ularning yig'indisi m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari sonini beradi: $\overline{A}_2^m = 2^m$.

Isbotning 2-usuli. Nyuton binomi $(a+b)^m$ yoyilmasidagi a va b sonlarni 1 ga teng deb olsak,

$(1+1)^m = C_m^0 1^m 1^0 + C_m^1 1^{m-1} 1^1 + C_m^2 1^{m-2} 1^2 + ... + C_m^k 1^{m-k} 1^k + ... + C_m^m 1^0 1^m$ yoki

$C_m^{\ 0} + C_m^{\ 1} + ... + C_m^{\ m-1} + C_m^{\ m} = 2^m$ kelib chiqadi.

Masalan, 2 elementli to`plamning to`plam ostilari soni $2^2 = 4$ ga teng, 1+2+1=4. Demak, 2 elementli to`plamning hammasi bo`lib 4 ta qism to`plami bor ekan. Ular 1 ta bo`sh, 2 ta 1 elementli va 1 ta 2 elementli, ya'ni X to`plamning o`zidan iborat bo`lgan qism to plamlardir.

3 elementli to`plamning to`plam ostilari soni $2^3 = 8$ ga teng. Shu bilan birga bu son Paskal uchburchagining 4 qatoridagi sonlar yig`indisiga ham teng, ya'ni:

$$C_3^{\ 0} + C_3^{\ 1} + C_3^{\ 2} + C_3^{\ 3} = 1+3+3+1 = 8$$

4. Takrorli o'rin almashtirish. Jami k=3 ta a_1, a_2, a_3 elementdan $P_k = P_3 =$ 3!=6 ta o'rin almashtirishlar tuzish mumkinligini bilamiz:

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3)$$

$$(a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1)$$

Bu uchtaliklarda har bir element faqat bir martadan qatnashmoqda: $k_1=k_2=k_3=1$. Endi shu elementlardan $(a_1, a_1, a_1, a_2, a_3, a_3)$, $(a_1, a_2, a_3, a_1, a_1, a_3)$ oltitiliklar tuzilgan bo'lsin. Bular ham faqat elementlarning tartibi bilangina farq qiluvchi o'rin almashtirishlardan iborat. Lekin bu holda a_1 element $k_1 = 3$ marta, a_2 element $k_2 = 1$ marta, a_3 element $k_3= 2$ marta takrorlanmoqda va $k= k_1+ k_2+ k_3$=6. O'rin almashtirishlarni yozishni yana davom ettirish mumkin. Ularning sonini $P(k_1, k_2, k_3)$, ya'ni $P(3, 1, 2)$ orqali belgilaylik, bunda (3, 1, 2) yozuv oltitaliklar tarkibida a_1 element 3 marta, a_2 element 1 marta, a_3 element 2 marta takrorlanishini ko'rsatadi. $P(3, 1, 2)$ takrorli o'rin almashtirishlar sonini topish talab qilinsin.

5-ta'rif. Takrorli o'rin almashtirish deb, tarkibida a_1 harfi k_1 marta, ... , a_m harfi k_m marta qatnashuvchi $k= k_1+ k_2+ ... +k_m$ uzunlikdagi har qanday k talikka aytiladi. Takrorli o'rin almashtirishlar sonini $P(k_1, ... , k_m)$ orqali belgilanadi.

$P(3, 1, 2)$ sonini topishning yo`llaridan biri o'sha oltitaliklarning hammasini tuzish va sanash. Lekin, a_i komponentlar soni va k_i takrorlanishlar ko'p bo'lsa, bu yo'l noqulaydir. Umuman, $P(k_1, ... , k_m)$ ni ni hisoblash uchun formula kerak bo'ladi.

k talik tarkibida k_1 ta o'ringa a_1 harfini $C_k^{k_1}$ usul bilan o'rin almashtirish orqali yozish mumkin. U holda qolgan k-k_1 ta o'ringa a_2 ni $C_{k-k_1}^{k_2}$ usul bilan o'rin almashtirib yoziladi. Shu kabi, a_3 ni $C^{k_3}_{k-k_1-k_2}$, ... , a_m ni $C^{k_m}_{k-k_1-k_2-...-k_{m-1}}$ usul bilan o'rin almashtirib yozish mumkin.

Jami o'rin almashtirishlar soni ko'paytirish qoidasiga muvofiq,

$$P(k_1, \dots, k_m) = C_k^{k_1} \cdot C_{k-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C^{k_m}_{k-k_1-\dots-k_{m-1}}$$

ta bo'ladi. Topilgan munosabatni soddalashtiraylik. Shu maqsadda

$C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ formuladan foydalanamiz. Natijada

$$P(k_1, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1!(k-k_1)} \cdot \frac{(k-k_1)}{k_2!(k-k_1-k_2)} \cdot \dots \cdot \frac{(k-k_1 \dots - k_{m-1})}{k_m!(k-k_1 \dots - k_{m-1})}$$

bunda $(k-k_1 \dots - k_{m-1})!=0!=1!$ Yoki qisqartirishlardan so'ng

$$P(k_1, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1! k_2! \dots \cdot k_m!}, \text{ bunda } k = k_1 + k_2 + \dots + k_m.$$

Takrorsiz o'rin almashtirishlar formulasi $k= k_1= k_2= \dots =k_m=1$ bo'lgan xususiy holidir.

5. Takrorli guruhlashlar. Elementlari soni m=2 ta bo'lgan M{a, b} to'plam berilgan. A dan k_1 ta, b dan k_2 ta, jami $k= k_1+ k_2 = 4$ ta olinib, elementlari bilan farq qiluvchi to'rttaliklar tuzaylik:

(a, a, a, a), bunda k_1=4, k_2=0, ya'ni tarkibi (4; 0) ikkilik,

(a, a, a, b), bunda k_1=3, k_2=1, ya'ni tarkibi (3; 1) ikkilik,

(a, a, b, b), bunda k_1=2, k_2=2, ya'ni tarkibi (2; 2) ikkilik,

(a, b, b, b), bunda k_1=1, k_2=3, ya'ni tarkibi (1; 3) ikkilik,

(b, b, b, b), bunda k_1=0, k_2=4, ya'ni tarkibi (0; 4) ikkilik,

bunda elementlar tartibi rol o'ynamasin. Shunga ko'ra, masalan, (a, a, a, a)=(a, a, a, b)=... deb qabul qilinadi. Biz elementlari takrorlangan guruhlashlarga ega bo'lamiz. Ularning sonini $\overline{C}_m^k$ orqali belgilaylik. Bizda $\overline{C}_2^4 = 5$ bo'lmoqda. Bu sonni hisoblash yo'lini topish maqsadida to'rttalik tarkibidagi k_1 va k_2 sonlarini 1, vergullarni 0 orqali almashtiraylik. Masalan, tarkibi (3; 1) bo'lgan ikkitalik bo'yicha (1, 1, 1, 0, 1) beshtalikni hosil qilamiz, unda k=4 ta 1, m-1=2-1=1 ta 0 ishtirok etadi. Har qaysi beshtalikka aynan bitta ikkitalik mos va aksincha, har qaysi ikkitalikka bitta beshtalik mos. Shunga ko'ra izlanayotgan ikkitaliklar soni k=4 ta 1lar va m-1=1 ta 0 dan tuzilgan beshtaliklar soniga teng. Takrorli o'rin almashtirishlar formulasi bo'yicha bunday beshtaliklar soni $P(4;1)=\frac{(4+2-1)!}{4!\cdot 1!}=\frac{5!}{4!}=5$.

6-ta'rif. m xil elementdan k tadan olinib, shunday k taliklar tuzilishi kerak bo'lsinki, ular hech bo'lmasa bir elementi bilan farq qilsin, bir xil elementlardan tuzilganlari esa teng hisoblansin (elementlarning tartibi rol o'ynamaydi). Bunday k taliklar m elementdan k tadan olib tuzilgan *takrorli guruhlashlar* deyiladi. Ularning soni $\overline{C}_m^k$ orqali belgilanadi. Shu son quyidagi formula orqali hisoblandi:

$$\overline{C}_m^k = C_{k+m-1}^k.$$

Guruhlashning har qanday tarkibi nomanfiy butun sonlardan tuzilgan m talik (k_1, k_2, ... , k_m) bilan beriladi va bundagi k_1 son guruhlashdagi birinchi xil elementning, k_2 ikkinchi xil elementning, ... k_m m – xil elementning sonini ko'rsatadi. Shunday qilib, $\overline{C}_m^k$ son m uzunlikdagi (k_1, k_2, ... , k_m) sonli m talikdagi har qaysi sonni k_i ta 1 lar ketma-ketligi bilan, har qaysi vergulni 0 bilan almashtiramiz (agar k_i=0 bo'lsa, 1 lar yozilmaydi). Natijada $k_1+k_2+ ... + k_m=k$ ta 1 lar va m-1 ta 0 dan iborat $k+m$-1 talik hosil bo'ladi (bundagi barcha k_i lar nomanfiy butun sonlardan iborat). Ularning har birida vergullar sonlarga nisbatan bitta kam bo'lishi tushunarli. Masalan, (4, 1, 0, 2) to'rttalikka (1, 1, 1, 1, 0. 1, 0, 0, 1, 1) o'ntalik mos. Shunday qilib, izlanayotgan m talik (k_1, k_2, ... , k_m) lar soni k ta 1 lar va m-1 ta 0 dan tuzilgan $k+m$-1 liklar soniga teng bo'ladi. Takrorli o'rin almashtirishlar formulasi bo'yicha bunday $k+m$-1 taliklar soni

$$P(k,m-1)=\frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}$$

ga teng, ya'ni $\overline{C}_m^k = C_{k+m-1}^k$.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. m elementli X to`plamni necha usul bilan tartiblash mumkin?
2. m elementli X to`plamning nechta $k$ elementli tartiblangan qism to`plami bor?
3. m elementli X to`plamdan uzunligi k ga teng nechta kortej tuzish mumkin?
4. m elementli X to`plamning barcha qism to`plamlari nechta?
5. Paskal uchburchagining xususiyatlarini ayting.
6. Takrorli guruhlashning ta'rifini ayting.

Kombinatorikaga doir topshiriqlar

1. O'rinlashtirishlar.

1-misol. 30 o`quvchisi bo'lgan sinfdan boshliq, yordamchi va kotib necha xil usul bilan saylanishi mumkin?

Yechish: Bunday ixtiyoriy saylash 30 elementdan 3 tadan olinib tuziladigan takrorsiz o'rinlashtirish, ya'ni komponentalari takrorlanmaydigan uchtalik bo'ladi. Bundagi tanlash usullari soni:

$$A_{30}^{3}=30\cdot 29\cdot 28=24360 \text{ ta.}$$

1-misol. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlaridan nechta uch xonali nomerlar tuzish mumkin?

Yechish. Bunday nomerlar X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} to'plam elementlari qatnashadigan uchtaliklardan iborat. Ularning soni $\overline{A}_9^3=9^3=729$ ga teng.

2-misol. $n(X)=k$ va $n(Y)=l$ bo'lsin. X to`plamni $Y$ to`plamga akslantirishlar sonini topamiz.

Yechish. X to'plam elementlarini nomerlaymiz: $X=\{x_1, \ldots, x_k\}$ X to'plamni Y ga o'tkazuvchi har qaysi f akslantirishga o'sha elementlarning obrazlari (nusxalari)dan tuzilgan

$$(f(x_1), \ldots, f(x_k))$$

$(u_1, \ldots, u_k)$ k talikning berilishi f akslantirishni bir qiymatli aniqlaydi: x_i element u_i ga o'tadi. Demak, X to'plamni U to'plamga akslantirishlar soni U to'plam elementlaridan tuzilgan k taliklar soniga teng. $n(Y) = l$ bo'lganidan formula bo'yicha bu son l^k ga teng.

3-misol. 5 ta har xil daftarni uch bola o'rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.

Yechish. Taqsimlashning har bir usuli daftarlar to'plamini bolalar to'plamiga akslantirishdan iborat. Bunday akslantirishlar soni $3^5=243$.

Umuman, k ta elementli X to'plamni m ta elementli Y to'plamga akslantirishni k ta elementni m quti bo'yicha joylashtirilishi deb tushuntirish mumkin. Bunday joylashtirishlar soni m^k ga teng bo'ladi.

4-misol. {a, b, c, d} to'plamning barcha qism to'plamlarini yozamiz.

Yechish. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$ jami 16 ta.

Bu misolda $2^4 = 16$ bo'lmoqda. Umuman, k ta elementli to'plamning qism to'plamlari soni 2^k ta bo'ladi.

2. Takrorsiz o'rin almashtirishlar.

5-misol. X={1, 3, 5} to'plam bo'yicha 135, 315, 351, 153, 531, 513 o'rinlashtirishlar tuzilgan bo'lsin. Bu uchtaliklarda komponentalar takrorlanmagan, bir martadan kelgan, yozilish tartibi bilangina farq qiladi. Ularning soni $A_4^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ta. Ularda elementlar takrorlanmaydi, faqat o'rinlari almashadi.

6-misol. 3 detalni 3 qutiga necha xil tartibda joylashtirish mumkin?

Yechish. Detallarni x_1, x_2, x_3 orqali, qutilarni 1, 2, 3 orqali belgilaylik. Natijada (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2), (x_3, x_2, x_1) o'rin almashtirishlar olinadi. Ularning soni $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ta.

3. Takrorsiz guruhlashlar.

7-misol. $\{a, b, v, g, d\}$ to'plam bo'yicha har birida uchtadan har xil element bo'lgan 10 ta guruhlash tuzish mumkin: $\{a, b, v\}$, $\{a, b, g\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, v, g\}$, $\{a, v, d\}$, $\{a, g, d\}$, $\{b, v, g\}$, $\{b, g, d\}$, $\{b, v, d\}$, $\{v, g, d\}$.

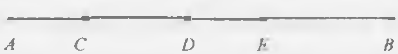
8-misol. 20 sportchidan 17 kishilik terma jamoani necha usul bilan tanlash mumkin?

Yechish. Tanlashlar soni: $C_{20}^{17}=\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}=1140$.

9-misol. k ta a harfiga va n ta b harfiga ega bo'ladigan k+n taliklar sonini topamiz.

Yechish. $k+n$ taliklar tarkibi ma'lum. Ular harflarning tartibi bilangina bir-biridan farq qiladi. Bu tartib a harflari turgan o'rinlarni ko'rsatish bilan bir qiymatli aniqlanadi (chunki qolgan o'rinlarni b lar egallaydi). Boshqacha aytganda, o'rinlarning $(k+n)$ ta elementli to'plamida k ta elementli (k uzunlikdagi) qism to'plam tanlanishi kerak. Bu esa C_{k+n}^{k} usul bilan qilinish mumkin.

10-misol. AB kesmada C, D, E nuqtalar belgilangan (28-rasm). Jami nechta kesma hosil bo'ladi? (bunga AB kesma ham kiradi).



28-rasm

Yechish. Nuqtalar soni 5 ta. Har ikki nuqta izlanayotgan kesmalardan birini beradi. Bunda ikki nuqtaning yozilish tartibi rol o'ynamaydi. Masalan, AC va CA – bitta kesma. Shunday qilib, {A, B, C, D, E} to'plamning ikki elementli qism to'plamlari sonini aniqlashimiz kerak. Ular $C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$ ta.

4. Takrorli o'rin almashtirish.

11-misol. "Matematika" so`zidagi xarflardan nechta har xil "so`z" tuzish mumkin?

Yechish. m xarfi 2 marta, t xarfi 2 marta, a xarfi 3 marta, e xarfi 1 marta, i xarfi 1 marta, k xarfi 1 marta takrorlanadi. $P(2,2,3,1,1,1)=\frac{(2+2+3+1+1+1)!}{2!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151200$

12-misol. 30 ta detalni 5 ta har xil qutiga 6 tadan necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra k=30, k= k_1= k_2= … =k_5=6, m=5. (9) formula bo'yicha usullar soni:

$$P(6,6,6,6,6)=\frac{30!}{6!\,6!\,6!\,6!\,6!}=60$$

13-misol. Yuqoridagi misolda qutilar bir xil bo'lsa-chi?

Yechish. Qutilar har xil bo'lganda oldingi misol natijasiga ko'ra jami o'rin almashtirishlar soni $P(6,6,6,6,6)=\frac{30!}{(6!)^5}$ ta edi. Qutilar bir xil bo'lsa, qutilarni almashtirish detallarni joylashtirish usullari soniga ta'sir qilmaydi. Bunga qaraganda joylashtirish usullari soni 5! marta kamayadi.

Javob: $\frac{1}{5!}P(6,6,6,6,6)=\frac{30!}{5(6!)^5}$

Misol. 4 xil kitobdan necha usul bilan 7 kitobdan iborat to'plam yozish mumkin?

Yechish. Izlanayotgan son $\overline{C}_4^7$ ga yoki C^7_{7+4-1} ga teng. Jami $\overline{C}_4^7=C_{10}^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$

Kombinatorikaga doir mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. 1 dan 9 gacha bo`lgan raqamlardan nechta 5 xonali son tuzish mumkin? Masala yechimi kombinatorikaning qaysi formulasi bilan ifodalanadi?
2. To'rt xil bolt va uch xil gaykadan bittadan olib necha xil juftliklar tuzish mumkin?
3. «Daftar» so'zidan undosh va unli harflarni necha xil usul bilan tanlab olish mumkin? «Qalam» so'zidan – chi?
4. 2 kitob, 3 daftar va 4 qalam bor. Ulardan bittadan olinib komplektlar tuzilmoqchi. Bu ishni necha xil usul bilan qilish mumkin?
5. Savatda 10 dona olma va 8 dona nok bor. Vali undan yo olmani, yo nokni oladi, shundan so'ng Noila qolgan mevalardan ham olma, ham nokni oladi. Bunday tanlashlar soni qancha bo'lishi mumkin? Valining qaysi tanlashida Noilaning tanlash imkoni katta bo`ladi?

6. a, b, v, g, d harflaridan qancha uch harfli so'z tuzish mumkin? Har qaysi so'zda albatta b harfi bo'lishi talab qilinsa-chi?
7. Sexda 6 ishchi ishlaydi. Ulardan uch kishiga uch turli, ya'ni har bir kishiga bir xildan buyum tayyorlashni necha usul bilan topshirish mumkin?
8. 8 ta har xil kitobdan 3 tasi necha xil usul bilan tanlanishi mumkin?
9. Futbol jamoasining 11 ta a'zosidan 1 ta darvozabon, 2 ta hujumchi, 2 ta yarim himoyachi necha usul bilan tanlanishi mumkin?
10. Agar har bir o'quvchiga bittadan ortiq kitob berilmasa, 6 ta kitobni 10 o'quvchiga necha xil usul bilan tarqatish mumkin?
11. 6 raqamiga ega bo'lmagan besh xonali nomerlardan qancha bo'ladi? 0 va 6 raqamiga ega bo'lmaganlari-chi?
12. 10 ta har xil detalni 3 ta qutiga necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?
13. Komplektdagi 14 ta detaldan 4 tasida «1», 4 tasida «2», 3 tasida «3» va qolgan 3 tasida «4» belgi qo'yilgan. Komplektdan 4 ta detalni tanlab olish va ularni biror tartibda joylashtirish yo'li bilan belgilarning nechta har xil guruhlashsini tuzish mumkin?
14. 7 xil kitobni 7 o'quvchiga necha usul bilan tarqatish mumkin?
15. Hech qanday ikki komanda bir xil ochko olmagan bo'lsa, 8 komandani turnir jadvaliga necha usul bilan joylashtirish mumkin?
16. Qutiga 6 xil A, B, V, G, D, Y detal ketma-ket joylashtirilishi kerak. Agar B ning A dan oldin joylashtirilishi mumkin bo'lmasa, unda detallar necha usul bilan joylashtirilishi mumkin? Agar B detal A dan keyin joylashtirilishi talab qilinsachi?
17. 20 sportchi ichidan 6 ta voleybol o'yinchilarini necha usul bilan tanlash mumkin?
18. Bir aylanada yotgan 5 ta nuqta ustidan nechta vatar o'tkazish mumkin?
19. Bir kishida 10 ta kitob, ikkinchisida 12 ta kitob bor. Almashtirish uchun ularning har biri necha usul bilan 3 tadan kitob tanlashlari mumkin?

20. Lotoreya biletidagi 49 nomerdan 5 tasini necha xil usul bilan o'chirish mumkin? Necha holda tanlangan 5 ta nomerdan uchtasi tirajdan keyin topilgan bo'ladi? Necha holda 5 ta nomer to'g'ri topilgan bo'ladi?
21. Savdoda 5 xil qalam bor. Ulardan 8 ta qalamni necha xil usul bilan olish mumkin? 6 tasini-chi? 4 tasini-chi?
22. Tomonlari 3, 4, 5, 6 sm bo'la oladigan uchburchaklardan nechta yasash mumkin?
23. 8 olma, 4 ta nok va 8 ta shaftolidan necha xil usul bilan bir necha meva tanlab olinishi mumkin (bir turdagi mevalar bir-biridan farq qilinmaydi)?
24. O'quvrosting 3 ta ko'k, 4 ta qora, 5 ta qizil qalami bor. Ulardan faqat bittasini necha xil usul bilan tanlashi mumkin?
25. Mukofot uchun bir kitobdan 4 dona, ikkinchisidan 3 dona, uchinchisidan 6 dona ajratilgan. Agar har kishiga bittadan ortiq kitob berilmaydigan bo'lsa, bu mukofotni 30 kishi o'rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?
26. "Bunyodkor"stadionida bo'lib o'tadigan musobaqalarda 16 ta futbol jamoasidan 4 tadan jamoa bir kunda o'ynasa, 1 o'rinni oluvchi jamoa necha marta o'yinni davom ettiradi?

27. "Bunyodkor" stadionida o'tkazilayotgan yugurish bo'yicha musobaqalarda 12 ta musobaqadosh o'rtasida birinchi, ikkinchi, uchunchi o'rinlar necha xil usulda taqsimlanishi mumkin.

(Toshkent shahridagi "Bunyodkor"stadionini xozirgi ko'rinishi)

1.5. Matematik tushuncha.

Bizni o'rab olgan dunyo turli xil ob'yektlardan tashkil topgan. Bu ob'yektlarni o'rganishda biz ularning ba'zi bir xossalari bilan qiziqamiz, masalan, ularni shakli, rangi, hidi, massasi va hokazo. Ayrim hollarda ular sonlar bilan ham ifodalanadi (masalan, 60 kg). Biz ob'yektlarni xossalari to'g'risida gapirib ular to`g`risida hukm chiqaramiz. Masalan, «Olma daraxtining bo`yi 125 sm», «Sinf doskasi qizil» - bu chiqargan hukmlarimiz rost yoki yolg`on bo`lishi mumkin.

Ayrim hukmlarimiz bitta ob'yekt uchun emas, balki ob'yektlar sinfi uchun ham to`g`ri bo`ladi. Ob'yektlarni sinflarga birlashishi ularning yaqinligini va ularning xossalarini bir xilligini ko`rsatadi.

Ob'yektlarni sinflarga birlashishi ayrim nomlar bilan ataladi, masalan, «o`simliklar», «sutemizuvchilar» va hokazo.

Kishilik jamiyati rivojlanishi bilan insonning fikrlashida dastlab kichik ob'yektlarni qamrovchi tushunchalar vujudga kelgan.

Masalan «daraxtlar» tushunchasiga dastlab- daraxtlarning ayrim turlarini ifodalovchi «qayrag`och», «terak», «tol» kabi so`zlardan kelingan.

Dunyoni bilish jarayonida bu tushunchalar orasidagi o`zaro bog`lanishni, ob'yektlarni xossalarini o`rganish tushunchalarni yanada kengaytirishga olib kelgan.

Fan rivojlanishi natijasida abstrakt tushunchalar yuzaga kela boshladi. Bunday tushunchalar insoniyat to`plagan katta tajribani umumlashtirish natijasida yuzaga keladi va moddiy dunyoning tub mohiyatini aks ettiradi, lekin real ob'yektlarning ko`pgina xossalaridan ko`z yumgan holda, ularni ideallashtirish natijasida hosil bo`ladi.

Masalan, kubning xossalarini o`rganishda biz uni sirtini juda silliq, qirralari esa bir-biriga teng bir xil deb qaraymiz. aslida esa kubni haqiqiy jism sifatida qarasak, u ideal silliq sirtga va qirralari ham bir xil uzunlikka ega emas.

Tushuncha o`zi nima?

Tushuncha – bu predmetlar va hodisalarni ba'zi bir muhim alomatlariga ko`ra farqlash yoki umumlashtirish natijasidir.

Alomatlar esa, predmet yoki hodisalarning bir-biriga o`xshashligi yoki farqlanishini bildiruvchi xossalardir.

Muhim xossa deb, faqat shu ob'yektga tegishli va bu xossasiz ob'yekt mavjud bo`la olmaydigan xossalarga aytiladi. Ob'yektning mavjudligiga ta'sir qilmaydigan xossalar muhim bo`lmagan deb hisoblanadi.

Agar biror ob'yektning barcha muhim xossalari to`plangan bo`lsa, bu ob'yekt haqida tushuncha bor deyiladi. Tushuncha nomlanadi, mazmun va hajmga ega bo`ladi.

Ob'yektning barcha muhim xossalari to`plami tushunchaning mazmunini tashkil qiladi.

Bir xil muhim xossalarga ega ob'yektlar to`plami tushuncha hajmini tashkil etadi.

Demak, tushuncha hajmi bitta tushuncha bilan nomlanishi mumkin bo`lgan ob'yektlar to`plami ham ekan.

Tushuncha hajmi va mazmuni orasida teskari bog`lanish mavjud. Tushunchaning hajmi qancha «katta» bo`lsa, mazmuni shuncha «kichik» va aksincha bo`ladi.

Agar biror tushuncha hajmi ikkinchi tushuncha hajmini qismi bo`lsa, u holda ikkinchi tushuncha birinchi tushunchaga nisbatan umumiy, birinchi tushuncha ikkinchi tushunchaga nisbatan xususiy deyiladi.

Masalan, «to`rtburchak» parallelogramm tushunchasi uchun umumiy, parallelogramm tushunchasi esa «to`rtburchak» tushunchasining xususiy holidir.

Ba'zan ikki xil berilgan ta'rif hajmi bir xil bo`lgan tushunchani berishi mumkin.

Masalan, teng tomonli uchburchak va tengburchakli uchburchaklarga berilgan ta'riflar, birinchisida teng tomonlar to`g`risida so`z yuritilsa, ikkinchisida teng burchaklar to`g`risida so`z boradi. Bularda tushuncha hajmi bir xil, ammo tushunchalar mazmuni har xil.

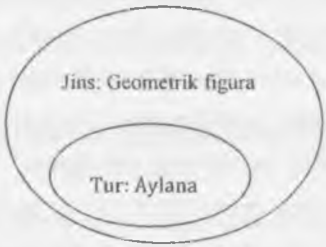
Har bir tushuncha uchun bir qancha xossalar alomatlar va boshqa tushunchalarga bog`liq munosabatlar mavjud. Bular shu tushunchaning mazmunini tashkil qiladi.

Tushunchalarni o`rganishda ularni umumiyroq bo`lgan tushuncha orqali tushuntirish yoki, boshqacha aytganda, ta'riflashga harakat qilinadi. Shu umumiyroq tushuncha ham ilgariroq tushuntirilgan yoki ta'riflangan bo`lishi kerak. Lekin har bir uchraydigan tushunchani ilgari ma'lum bo`lgan tushunchani topib ta'rif beraverish murakkab va mumkin bo`lmagan jarayondir. Shuning uchun ba'zi tushunchalar ta'riflanmaydi va boshlang`ich tushuncha deb qabul qilinadi.

Tushunchaga ta'rif berishning bir necha usullari bor:

Oshkor ta'rif tushunchada unga nisbatan umumiyroq tushunchani ko`rsatib, shu umumiy tushuncha bilan nomlangan ob'yektlardan qanday xossa bilan ajralib turishini aytish orqali beriladi.

Bunday ta'rif odatda jins va tur orqali ta'riflash deyiladi (29- rasm).



29-rasm

Oshkormas ta'rifga aksiomatik ta'riflash kiradi va bunday ta'rifda ta'rif berilayotgan tushuncha ob'yekti aniq ko`rsatilmaydi.

Tushuncha ta'rifi quyidagi talablarni qanoatlantirishi kerak:

1) ta'riflanayotgan tushunchani bir qiymatli aniqlashga imkon berishi;
2) avval ma'lum bo`lgan tushunchalarga asoslanishi;
3) tushunchaning o`zi yoki shu tushuncha bilan ta'riflangan tushuncha bilan ta'riflashga yo`l qo`ymasligi;
4) ortiqcha xossalarni(qolganlaridan keltirib chiqarish mumkin bo`lgan) ko`rsatmasligi kerak.

Tushunchalar va ob'yektlar xossalari orasidagi munosabatlarni qaraylik. Agar biror a tushuncha hajmiga kiruvchi barcha ob'yektlar biror α xossaga ega bo`lsa, $\alpha$ xossa shu tushunchaning zaruriy belgisi, muhim xossasi bo`ladi. Masalan; kvadratning diagonallarini teng bo`lish xossasi, uning zaruriy belgisi, muhim xossasi hisoblanadi. Berilgan tushunchaning muhim xossalari ichida uning ajralib turuvchi xarakteristik xossasi ham mavjud.

Bu xossa ob'yektlarning ma'lum sinfiga xos bo`lib, boshqa ob'yektlarga xos emas. Masalan, dioganallar uzunliklarini tenglik xossasi parallellogramlar sinfidagi to`rtburchaklar uchun xarakteristik xossa sanaladi.

To`rtburchaklar sinfida bu xossa xarakteristik xossa emas, chunki dioganallari teng bo`lgan to`rtburchaklar to`g`ri to`rtburchaklar emas.

Masalan, dioganallari teng bo`lgan to`rtburchak teng yonli trapetsiya ham bo`lishi mumkin.

Agar berilgan sinf ob'yektlarining ba'zilari α xossaga ega bo`lib, bu

sinfga kirmaydigan ob'yektlarning hech bittasi bu xossaga ega bo`lmasa, u holda α - xossa tushuncha uchun yetarlik belgi hisoblanadi.

Masalan, to`rtburchak parallellogramm bo`lishi uchun uning dioganallari uzunliklarining teng bo`lishi yetarlik belgi hisoblanadi.

Tushuncha va xossalar orasida turli xil bog`lanishlar mavjud. Shuningdek xossalarning o`zlarining o`rtasida ham turli xil bog`lanishlar bor. Aytaylik, ikkita α va β xossalar berilgan bo`lsin.

Quyidagi hollar bo`lishi mumkin.

1) ob'ektlar ikkita α va β xossalarga ega bo`lishi, ob'yektlar faqat $\alpha$ xossaga ega bo`lishi, ob'yektlar faqat β xossaga ega bo`lishi, ob'yektlar ikkala $\alpha$ va $\beta$ xossalarga ega bo`lmasligi mumkin Bu xossalarga bog`lanmagan xossalar deyiladi.

Masalan, natural sonlarni 3 ga bo`linishi xossasi 5 ga bo`linishi xossasiga bog`lanmagan, natural sonlar bor 3 ga ham 5 ga ham bo`linadi, 3 ga bo`linadi, ammo 5 ga bo`linmaydi, 5 ga bo`linadi, ammo 3 ga bo`linmaydi, 3 ga ham 5 ga ham bo`linmaydi.

2) Ixtiyoriy ob'yekt α xossaga ega bo`lsa, $\beta$ xossaga ham ega bo`ladi. Bu holda β xossa α xossaning natijasi deyiladi. Masalan, natural sonlarni 3 ga bo`linishi 9 ga bo`linishi xossasini natijasi desa bo`ladi. Shuningdek $\alpha$ xossa $\beta$ xossani natijasi sifatida ham bo`lishi mumkin.

3) Ixtiyoriy α xossaga ega bo`lgan ob'yekt $\beta$ xossaga ham ega, $\beta$ xossaga ega bo`lgan ob'yekt α xossaga ham ega bu holda α va β xossalar teng kuchli deyiladi. Masalan, kvadratning tomonlari teng xossasi, uning diogannallari o`zaro perpendikulyar va teng degan xossasiga teng kuchli.

4) α xossaga ega bo`lgan bitta ob'yekt ham β xossaga ega emas, bu holda α va β xossalari birgalikda emas deyiladi.

5) Ixtiyoriy ob'yekt α va β xossalardan faqat bittasiga ega. Bu holda α va β xossalar qarama-qarshi deyiladi. Masalan, natural sonlarni juftlik va toqlik xossalari qarama-qarshi xossalar. Haqiqatan ham istalgan natural son toq yoki juft bo`ladi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar:

1. Tushunchaning hajmi va mazmuni orasida qanday bog`liqlik bor?
2. Ta'riflanadigan va ta'riflanmaydigan tushunchalarning qanday farqi bor?
3. Tushunchani ta'riflash usullarini ayting va misol keltiring.
4. Tushunchani ta`riflashga qanday talablar qo`yiladi?
5. Xossalar orasidagi bog`lanishlarga misollar keltiring.

1.6.Mulohazalar va ular ustida mantiqiy amallar

1.6.1.Mulohazalar

1. Mulohaza tushunchasi. Maktabda o`quvchilar taqqoslash, ob'yektlarni klassifikatsiyalash, faktlarni analiz qilish, ayrim sodda fikrlarni isbotlash, tenglama, tengsizliklarni yechish kabilar haqidagi jumlalar bilan ish ko`radi. Har qanday matematik nazariya esa u yoki bu matematik jumlani rost yoki yolg`onligini tekshirish bilan ish ko`radi.

1-ta'rif. Rost yoki yolg`onligi haqida fikr yuritish mumkin bo`lgan darak gaplarga mulohaza deyiladi.

So`roq yoki his-hayajon gaplar mulohaza bo`la olmaydi.

Noma'lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi. Mulohazalar bu matematik mantiq fanini boshlang'ich tushunchasi hisoblanib, u quyidagicha quriladi:

1) ob'ektlar to'plami beriladi:

2) ob'yektlarning ba'zi bir xossalari va ular orasidagi munosabatlar bayon qilinadi.

Mulohazalar nazariyasining boshlang'ich ob'yektlarl sodda mulohazalardan tashkil topadi va ular lotin alifbosining katta harflari $A, B, C, ...$ lar bilan belgilanadi. Har bir sodda mulohaza rost yoki yolg'on bo'lishi mumkin. Rost mulohaza qiymati 1, yolg'on mulohaza qiymati 0 bilan belgilanadi. Masalan,

A – "$4>3$" - rost mulohaza

B – "$7+5=12$" - rost mulohaza

C – "5-juft son" - yolg'on mulohaza

D – "7- toq son" - rost mulohaza.

Bu mulohazalarda A, B, D lar rost, C – yolg'on. Matematikada har bir teorema mulohaza hisoblanadi. Teoremani isbotlash uchun oldin rostligi isbotlangan teoremalar, aksiomalar va boshlang'ich tushunchalardan foydalaniladi. Bizga ma'lumki, sodda mulohazalardan bog'lovchi so'zlar yordamida murakkab mulohazalar hosil qilinadi. Bular «emas», «va» , «yoki», «... kelib chiqadi», «agar bo'lsa, ... u holda», «zarur va yetarli» kabi bog'lovchi so'zlar bo'lib, bularni har bittasi bitta mantiqiy amalga mos keladi.

Rost mulohaza R yoki 1, yolg'on mulohaza Yo yoki 0 bilan belgilanadi.

2. Mulohaza inkori.

2-ta'rif. A mulohazaning inkori deb, faqat va faqat A yolg'on bo'lgandagina rost bo'ladigan "A emas" (yoki "A bo'lishi noto'g'ri") mulohazaga aytiladi va $\overline{A}$ bilan belgilanadi.

Rost mulohazani inkori yolg'on, yolg'on mulohazani inkori rost bo'ladi.

Masalan, «$3^2=6$» - $\bar{B}$-yolg`on mulohazani «$3^2 \neq 6$» - $B$ rost mulohaza bo`ladi. Rost mulohazani – 1, yolg`on mulohaza – 0 bilan belgilaymiz. Bulardan quyidagi jadvalni tuzamiz:

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

3. Mulohazalar kon'yunksiyasi. A va B elementar mulohazalar bo`lsin.

3-ta'rif. Ikkita A va B mulohazalarning kon'yunksiyasi deb, faqat va faqat A va B larning ikkalasi rost bo'lgandagina rost bo'ladigan "A va B" mulohazaga aytiladi, va $A \wedge B$ ko`rinishida belgilanadi.

Rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Masalan, «7-4=3» va «4-juft son» kon'yunksiyasi rost, «3<8», «8<11» mulohazalar «3<8», «8<11» kon'yunksiyalar rost ularni birlashtirib «3<8<11» deb yozish mumkin. Demak, qo`sh tengsizlik ham mulohazalar kon'yunksiyasini ifodalar ekan. Mulohazalar kon'yunktsiyasi $A \wedge B = B \wedge A$ kommutativlik, $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$- assotsiativlik xossalariga ega A mulohazani inkori $\bar{A}$ bilan kon'yunksiyasini qaraylik.

A	$\bar{A}$	$A \wedge \bar{A}$
1	0	0
0	1	0

Bunda $A \wedge \bar{A}$ - aynan yolg`on deyiladi.

4. Mulohazalar diz'yunksiyasi.

4-ta'rif. Ikkita A va B mulohazalarning diz'yunksiyasi deb, faqat va faqat A va B larning ikkalasi yolg`on bo'lgandagina yolg`on bo'ladigan "A yoki B" mulohazaga aytiladi, va $A \vee B$ ko`rinishida belgilanadi.

Mulohazalar diz'yunksiyasi rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ikkita elementar mulohazadan diz'yunksiya tuzamiz.

Misollar.

1-misol. «12>8», «12=8» mulohazalari berilgan «12>8» yoki «12=8» - bu mulohaza rost, chunki unga kiruvchi «$12 \geq 8$» kabi yoziladi. Bundan ko`rinadiki, qat'iymas sonli tengsizlik, qat'iy tengsizlik va tenglikni diz'yunksiyasini tashkil qilar ekan.

2-misol. $2 < 2$, $2 = 3$ mulohazalarini ikkalasi ham yolg`on.

Ixtiyoriy A, B, C mulohazalar uchun quyidagilar o`rinli:

$A \vee B = B \vee A$ (kommutativlik xossasi)

$(A \vee B) \vee C = C \vee (B \vee A)$ (assotsiativlik xossasi).

Odatda assotsiativlik xossasini yozishda qavslar tashlab yoziladi. Rostlik jadvali yordamida quyidagilarga ishonch hosil qilish mumkin.

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Birinchisiga diz'yunksiyaga nisbatan kon'yunksiyaning distributivligi deb aytiladi.

A mulohaza va uni inkori diz'yunksiyani tuzamiz.

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
1	0	1
0	1	1

Bu holda $A \vee \overline{A}$ aynan rost deyiladi. Quyidagi misolni qaraylik "$x^2 + 3 = 0$" tenglama haqiqiy idlizga egami yoki ega emas» - mulohazani A bilan belgilasak, «haqiqiy ildizga ega emas» - mulohazasi $\overline{A}$ bo`ladi.

Ikkalasini diz'yunksiyasi ixtiyoriy A da $A \vee \overline{A}$ - 1 deb yoziladi. Rostlik jadvali yordamida kon'yunksiya, diz'yunksiya va mulohaza inkori orasidagi quyidagi munosabatlarni o`rnatish mumkin.

a) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$, b) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

Bu munosabatlar De Morgan qonunlari deyiladi.

6. Mulohazalar implikatsiyasi.

5-ta'rif. Ikkita A va B mulohazalarning implikatsiyasi deb, faqat va faqat A mulohaza rost, B mulohaza yolg'on bo`lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo`ladigan yangi "Agar A bo`lsa, u holda $B$ bo`ladi" mulohazaga aytiladi va $A \Rightarrow B$ ko`rinishida belgilanadi.

$A \Rightarrow B$ implikatsiyasiga kiruvchi A mulohaza implikatsiya sharti, B - mulohaza esa implikatsiya natijasi deyiladi.

Rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikatsiya amalini mulohaza inkori va diz'yunksiya amali orqali ifodalash mumkin. $(A \Rightarrow B) = \overline{A} \vee B$. Buni rostlik jadvali yordamida isbotlash mumkin.

A	B	$\overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$A \Rightarrow B$ implikatsiya berilgan bo`lsa, mulohazalar o`rnini almashtirib $B \Rightarrow A$ yangi implikatsiyaga ega bo`lamiz. Bu yozilgan implikatsiyaga teskari implikatsiya deyiladi. Masalan, «Agar 138 sonini raqamlar yig`indisi 3 ga karrali bo`lsa, u holda 138 soni 3 ga karrali». Teskari implikatsiya: «Agar 138 soni 3 ga karrali bo`lsa, u holda uning raqamlarini yig`indisi 3 ga karrali». Bu rost implikatsiya, ammo hamma vaqt ham teskari implikatsiya rost bo`lavermaydi. Masalan, «Agar 5>2 bo`lsa, u holda 5 juft son» yolg`on, teskarisi: «Agar 5 juft son bo`lsa, u holda 5>2 bo`ladi», bu rost, chunki implikatsiya sharti yolg`on. $A$ va $B$ mulohazalarni ularni inkoriga almashtirsak $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ implikatsiyaga ega bo`lamiz. Bu implikatsiya $A \Rightarrow B$ implikatsiyaga qarama-qarshi deyiladi.

Rostlik jadvali yordamida $A \Rightarrow B$ va $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ lar teng kuchli ekanini ko`rish mumkin.Masalan, «Agar o`nli sanoq sistemasida 130 sonini oxirgi raqami 0 bilan tugasa, u holda 130 soni 5 ga bo`linadi». Unga teng kuchli implikatsiya «Agar 130 soni 5 ga bo`linmasa, u holda uning o`nli sanoq sistemasida yozilishida oxirgi raqami 0 bilan tugamaydi.

Bu holda ikkalasi ham rost. $B \Rightarrow A$ va $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ implikatsiyalarni ham teng kuchli ekanini kuzatish mumkin.

7. Mulohazalar ekvivalensiyasi.

6-ta'rif. Ikkita A va B mulohazalarning ikkalasi ham rost yoki ikkalasi ham yolg`on bo`lganda rost, qolgan hollarda yolg`on bo`ladigan yangi mulohazaga mulohazalarning ekvivalensiyasi deyiladi va $A \Leftrightarrow B$ ko`rinishida belgilanadi. Bu yerdagi A $\Leftrightarrow$ B yozuv "A faqat va faqat, qachonki B", yoki "A ekvivalent B", yoki "A uchun B zarur va yetarli" deb o'qiladi.

Rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Masalan, «129 soni 3 ga bo`linadi, faqat uning raqamlari yig`indisi 3 ga bo`linsa.»

A mulohaza – «129 soni 3 ga bo`linadi».

B mulohaza – «129 sonini raqamlar yig`indisi 3 ga bo`linadi».

Ikki mulohaza ham rost bo`lganligi uchun ekvivalensiya ham rost. Ikkala mulohaza yolg`on bo`lsa, u holda ham ekvivalensiya rost bo`ladi. Masalan, «127 soni 3 ga bo`linadi, faqat 127 sonining raqamlar yig`indisi 3 ga bo`linsa» - bu holda $A$ va $B$ lar ikkalasi ham yolg`on.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Mulohaza nima?
2. Mulohaza inkori nima?
3. Mulohaza kon'yunksiyasi va diz'yunksiyasi deb nimaga aytiladi?
4. Mulohazalar implikatsiyasi va ekvivalensiyasi nima va unga misollar keltiring.
5. Mulohazalar ustidagi amallarni isbotlab bering.

Mulohazalar va ular ustida amallarga doir topshiriqlar

1. $\overline{\overline{A} \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$ mulohazaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\overline{A \Rightarrow B}$	$C \vee A$	$\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1

Rostlik jadvalini tuzing

1. $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$
2. $(\overline{A} \wedge \overline{C}) \Rightarrow B)$
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$
4. $C \wedge (A \Rightarrow \overline{B})$
5. $A \Leftrightarrow (\overline{B \vee C})$
6. $(\overline{A \Rightarrow B}) \wedge C)$
7. $C \wedge (\overline{A} \Leftrightarrow B)$
8. $(\overline{A} \vee B) \Rightarrow C)$
9. $A \vee (\overline{B \wedge C})$
10. $A \Rightarrow (\overline{B \wedge C})$
11. $(A \vee B) \Rightarrow (\overline{A \wedge C})$
12. $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow C$
13. $(\overline{A \vee B}) \Rightarrow C$
14. $A \Leftrightarrow \overline{B \vee C}$
15. $A \Leftrightarrow C \Rightarrow B$
16. $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee C)$
17. $A \Rightarrow (B \Rightarrow \overline{C})$
18. $\overline{A} \vee \overline{B} \Rightarrow \overline{C}$
19. $(A \Rightarrow \overline{B}) \wedge C$
20. $(\overline{A} \vee B) \Leftrightarrow C$

1.7. Predikatlar va kvantorlar

Predikatlar va ular ustida amallar

Matematikada bir yoki bir necha o`zgaruvrosti o`z ichiga oluvchi jumlalar ko`p uchraydi. Masalan, $x>7$, $x+y=11$. Bu jumlalar o`zgaruvrosting qiymatlariga qarab rost yoki yolg`on bo`lishi mumkin, boshqacha aytganda mulohazaga aylanishi mumkin.

1-ta'rif. Tarkibida erkli o`zgaruvchilar qatnashib, bu o`zgaruvchilarning qabul qilishi mumkin bo`lgan qiymatlarida mulohazaga aylanadigan darak gapga predikat deyiladi va u $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $K(x)$,... ko`rinishda belgilanadi.

Predikat tarkibiga kirgan o`zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo`lgan barcha qiymatlar to`plami predikatning aniqlanish sohasi deyiladi.

O`zgaruvchi o`rniga qo`yganda, predikatni rost(rost) mulohazaga aylantiruvchi qiymatlari predikatning rostlik(rostlik) to`plami deyiladi.

Predikatlar tarkibidagi o`zgaruvchilar soniga qarab bir, ikki va hokazo o`rinli predikatlar deyiladi.

$R(x)$ – bir *o`rinli predikat bo`lib, x ob'yektning biror xossaga ega bo`lishini bildiradi.*

Masalan, $R(x)$: «x - toq son» ko`rinishidagi predikat berilgan bo`lsin. $R(x)$ predikat bir o`rinli bo`lib, uning aniqlanish sohasi natural sonlar to`plami $N$ dan, qiymatlar sohasi mulohazalar to`plamidan iborat bo`lib, har bir mulohazaning qiymati esa ikki elementli $\{0;1\}$ to`plamdan iborat. Bu predikat qiymatlarining jadval ko`rinishi quyidagicha:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$R(x)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Jadvaldan ko`rinadiki: 1) predikatlar mulohaza emas, lekin $x$ ning biror to`plamga tegishli aniq qiymatlarida, u mulohaza bo`ladi.

2) A- biror ob'yektlar to`plami bo`lsa, bu to`plamdagi predikat-xossa deganda biz shu $A$ to`plamda rost yoki yolg`on qiymatni qabul qiluvchi bir predmetli funksiyani tushunamiz.

2-ta'rif. A to`plamning $R(x)$ predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi $A$ qism to`plamiga $R(x)$ predikatning rostlik sohasi deyiladi.

3-ta'rif. Agar $R(x)$ predikat A to`plamning barcha elementlarida rost(yolg`on) qiymatni qabul qilsa, $R(x)$ predikat A to`plamda aynan rost (yolg`on) deyiladi.

Masalan,

1) $R(x)$: «x-musbat son» - predikat N to`plamda aynan rost;

2) $R(x)$: «x – manfiy son» - predikat N to`plamda aynan yolg`on;

3) $E(x)$: «x – toq son» - predikat N to`plamda bajariluvchi predikat.

Bir, ikki, uch o`rinli predikatlar mos ravishda unar, binar, ternar predikatlar deyiladi.

Istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo`ladi.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvantorlardan foydalanishdir.

Quyidagi misolni qaraylik.

10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 sonlari haqida quyidagilarni aytish mumkin:

a) berilgan barcha sonlar ikki xonali sonlardir.

b) berilgan sonlardan ba'zilari toq sonlardir.

Bu jumlalarga nisbatan ularning rost yoki yolg`onligi to`g`risida fikr yuritish mumkinligidan ular mulohaza bo`ladi.

Agar biz ulardan «barcha», «ba'zilari» so`zlarini olib tashlasak, jumlalarni rostmi yoki yolg`onmi savoliga javob berib bo`lmaydi. Demak «barcha», «ba'zi» so`zlarni qo`shish bilan mulohaza hosil qilinadi.

4-ta'rif. «Barcha» va «ba'zi» so`zlari kvantorlar deb aytiladi. «Kvantor» so`zi lotincha bo`lib, «qancha» ma'nosini anglatadi, ya'ni kvantor u yoki bu mulohazada qancha (barcha yoki ba'zi) ob'yekt haqida gap borayotganini bildiradi. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari bir-biridan farq qilinadi.

«Ixtiyoriy». «har qanday», «har bir», «barcha(hamma)» so`zlari umumiylik kvantoridir. Umumiylik kvantori «$\forall$» belgisi bilan belgilanadi. U belgi inglizcha «All» so`zining bosh harfidan olingan bo`lib, bizningcha «hamma» ma'nosini beradi.

«Mavjud», «ba'zi (ayrim)», «topiladi», «kamida bitta» so`zlari mavjudlik kvantoridir. Mavjudlik kvantori «$\exists$» belgisi bilan belgilanadi. U belgi inglizcha «Exist» so`zining bosh harfidan olingan bo`lib, bizningcha «mavjud», «bor», «topiladi» ma'nosini beradi.

Biror A to`plamning «barcha x elementlari uchun» deganda mulohaza qisqacha $\forall x \in A$. «ba'zi bir x elementlar uchun» degan mulohaza esa $\exists x \in A$ orqali belgilanib, ular mos ravishda umumiylik va mavjudlik kvantorlari deb yuritiladi. Kvantorlar qatnashgan predikatlar quyidagicha yoziladi:

$$(\forall x \in A)P(x)$$

(qisqacha: $(\forall x \in A)P(x)$) belgi « A to`plamning barcha x elementlari uchun $P(x)$ predikat rost,

$$(\exists x \in A)P(x)$$

(qisqacha: $(\exists x \in A)P(x)$) belgi « A to`plamning shunday $x$ elementi mavjudki, bu element uchun $P(x)$ predikat rost» deb o`qiladi.

Masalan, $P(x)$: « x soni 3 ga karrali». $x \in \mathrm{N}$ bo`lsin

«Ixtiyoriy x soni 3 ga karrali» - yolg`on mulohaza

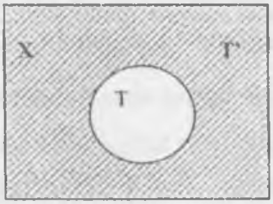
«3 ga karrali x sonlar mavjud» - rost mulohaza

Mulohazalar ustida amallar bajarilganidek predikatlar ustida ham amallar bajariladi:

1. Predikat inkori.

Aytaylik X to`plamda $A(x)$ predikat berilgan bo`lsin. $A(x)$ rost bo`lganda, yolg`on, yolg`on bo`lganda, rost bo`ladigan $\overline{A(X)}$ predikat $A(x)$ predikatning inkori deyiladi.

$A(x)$ predikatning rostlik to`plami $T$ bo`lsa, $\overline{A(X)}$ ning rostlik to`plami, $T'$, ya'ni $T$ to`plamni to`ldiruvchisi bo`ladi (30-rasm).



30-rasm

Masalan, $A(x)$ «x soni 5 ga bo`linadi»

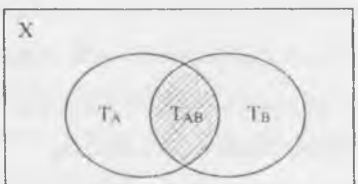
$\overline{A(x)}$ «x soni 5 ga bo`linmaydi»

2. Predikatlar kon'yunksiyasi.

X to`plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo`lsin. Bu holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar kon'yunksiyasi bo`ladi.

$A(x) \wedge B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar rost bo`lganda rost bo`ladi.

$T_A - A(x)$ predikatning rostlik to`plami, $T_B - B(x)$ predikatning rostlik to`plami bo`lsa, u holda $A(x) \wedge B(x)$ predikatning rostlik to`plami $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$ bo`ladi (31-rasm).



31-rasm

Masalan, $X = \{6;10;15;20;24\}$ to`plamda $A(x)$: «$x$ juft son», $B(x)$: «$x$ soni 3 ga karrali» predikatlari berilgan bo`lsin.

U holda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar kon'yunksiyasi predikati $A(x) \wedge B(x)$ «x soni juft va 3 ga karrali». $A(x)$ predikatning rostlik sohasi {6; 10; 20; 24}

$B(x)$ predikatning rostlik sohasi {6; 15; 24} bo`ladi.

$A(x) \wedge B(x)$ predikatning rostlik sohasi {6; 24} bo`ladi.

{6; 24} – to`plam esa $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar rostlik kesishmasidan iborat bo`ladi.

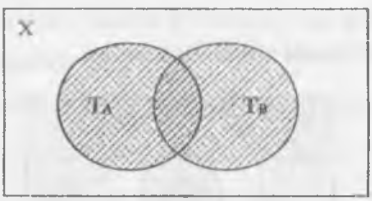
3. Predikatlar diz'yunksiyasi.

X to`plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo`lsin. $A(x) \vee B(x)$ predikat

$A(x)$ va $B(x)$ predikatlar diz'yunksiyasi deyiladi.

$A(x) \vee B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning hech bo`lmaganda biri rost bo`lganda, rost bo`ladi. Shu sababli $T_{A \vee B} = T_A \bigcup T_B$

Masalan, yuqoridagi misolda «x juft son yoki 3 ga karrali». $A(x) \vee B(x)$ predikatning rostlik sohasi {6;10;15;20; 24} to`plamdan iborat, boshqacha aytganda, {6;10;15;20;24} to`plam $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning rostlik to`plamlarining birlashmasidan iborat (32-rasm)



32-rasm

4. Predikatlar implikatsiyasi.

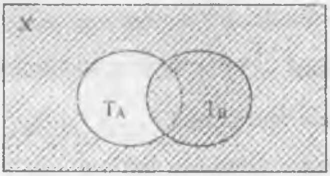
X to`plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bulsin. $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatga berilgan predikatlarning implikatsiyasi deyiladi.

Boshqacha aytganda «Agar $A(x)$ bo`lsa, $B(x)$ bo`ladi» predikatiga aytiladi.

Masalan, $A(x)$: «x natural soni 5 ga bo`linadi», $B(x)$: «$x$ natural soni 4 ga bo`linadi» predikatlari berilgan. Bu predikatlardan $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatini tuzamiz.

$A(x) \Rightarrow B(x)$: «x natural soni 5 ga bo`linsa, u holda u 4 ga ham bo`linadi». Bu predikat x sonning ba'zi qiymatlarida rost, qolgan qiymatlarida yolg`on.

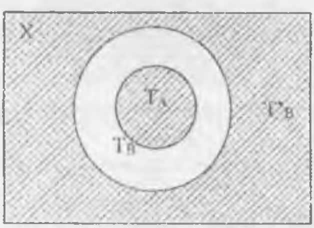
$A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatning rostlik to`plami, $B(x)$ predikatning rostlik to`plami T_B bilan $A(x)$ predikatning rostlik to`plami $T_A$ning to`ldiruvchisi birlashmasidan iborat (33-rasm).



33-rasm

Ba`zi hollarda bir predikatning rostligidan ikkinchi predikatning rostligi kelib chiqadi. Masalan, «$x$ 4 ga bo`linadi», predikatidan « x 2 ga bo`linadi» predikati kelib chiqadi.

Bu hol $T_A \subset T_B$ bo`lganda o`rinli (34-rasm)



34-rasm

Bu holda $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatga mantiqiy kelib chiqishlik deyiladi.

Bunda $B(x)$ predikatga $A(x)$ predikat uchun zaruriy shart, $A(x)$ esa $B(x)$ predikati uchun yetarlik shart deyiladi.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarni rostlik to`plamlari $T_A = T_B$ bo`lsa, u holda $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikati tengkuchlilik (ekvivalentlik) munosabati deyiladi.

Masalan, $A(x)$: «x - natural son» $B(x)$: «x - butun son»

$A(x) \Rightarrow B(x)$: «x -natural son bo`lsa, u butun son»

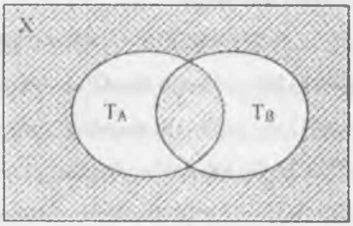
$A(x) \Rightarrow B(x)$ predikati ekvivalentlik munosabati bo`lsa, u holda $A(x)$ va $B(x)$ larning har biri ikkinchisi uchun zarur va yetarli shart deyiladi.

5. Predikatlar ekvivalensiyasi.

Agar X to`plamda berilgan $A(x)$ va $B(x)$ to`plamlar ekvivalent bo`lsalar, ya'ni bu to`plamlarning rostlik to`plamlari $T_1$ va $T_2$ lar ustma-ust tushsa $T_1 = T_2$ bo`lsa, u holda barcha $x \in X$ lar uchun $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekvivalensiya rost bo`ladi. Masalan, $A(x)$: «Natural son $x$ 10 ga bo`linadi» va $B(x)$: «Natural sonni o`nli yozuvi 0 bilan tugaydi» predikatlari berilgan bo`lsa, u holda barcha natural sonlar uchun $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekvivalensiya rost.

Masalan, $x = 130$ uchun ekvivalensiya rost, chunki 130 soni 10 ga bo`linadi va bu sonni oxirgi raqami 0 bilan tugaydi. $x = 13$ bo`lsa ham ekvivalensiya rost, chunki ikkala mulohaza ham yolg`on (13 soni 10 ga bo`linmaydi va 13 sonni oxirgi raqami 0 bilan tugamaydi).

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$ predikatning rostlik to`plami, $A(x)$ predikatning rostlik to`plami T_A va $B(x)$ predikatning rostlik to`plami $T_B$ larning simmetrik ayirmasiga to`ldiruvchi to`plamdan iborat (35-rasm).



35-rasm

Predikatlar tarkibiga kirgan o`zgaruvchilar soniga qarab bir o`rinli, ikki o`rinli va hokazo bo`ladi.

Ikki, uch,..., n o`rinli predikatlar orqali ham kvantorli mulohazalar hosil qilish mumkin. Masalan, $(\forall x, \forall y)P(x;y)$ mulohaza biror to`plamning «barcha x va barcha y elementlari uchun $P(x;y)$ rost» deb o`qiladi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1) Predikat nima?
2) Predikatning aniqlanish sohasini ta'riflang.
3) Umumiylik va mavjudlik kvantorlari deb nimaga aytiladi?
4) Predikat inkori deganda nimani tushunasiz?
5) Predikatlar kon'yunksiyasi va diz'yunksiyasini rostlik to`plamlarini ko rsating.
6) Predikatlar orasida kelib chiqishlik va tengkuchlilik munosabatlari uchun «zarur» va « yetarli» so`zlarini ochib bering.

Predikatlar va ular ustida amallarga doir topshiriqlar

1. X={-3, -2. 0, 1, 3} to'plamda A(x): "(x-1)(x-1)(x-3)=0" predikat berilgan bo'lsa,

a) A(-3), A(-2), A(0), A(1), A(3) fikrlarning rostlik qiymatini toping.

b) olingan javoblarga asosan $(\forall x \in X)$ A(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobni asoslang.

Yechish. a) A(-3): (-3-1)(-3-2)(-3-3)=-4(-5)(-6)=-180 $\Rightarrow$ -180=0, yolg'on;

A(-2): (-2-1)(-2-2)(-2-3)=-3(-4)(-5)=-60 $\Rightarrow$ -60=0, yolg'on;

A(0): (0-1)(0-2)(0-3)=-1(-2)(-3)=-6 $\Rightarrow$ -6=0, yolg'on;

A(1): (1-1)(1-2)(1-3)=0(-1)(-2)=0 $\Rightarrow$ 0=0, rost;

A(3): (3-1)(3-2)(3-3)=2(1)(0)= 0 $\Rightarrow$ 0=0, rost bo'ladi.

b) Yuqoridagilardan ko'rinadiki, X to'plamdan olingan ayrim elementlar uchungina A(x) predikat rost bo'ladi. Shuning uchun $(\forall x \in X)$ A(x) fikr har doimo rost bo'lmaydi, balki x=1; x=3 qiymatlardagina rost bo'ladi.

2. A={4, 5, 6, 8, 9} to'plamda C(x): "2x-1<15" predikat berilgan bo'lsa,

a) C(4), C(5), C(6), C(8), C(9) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib $(\forall x \in A)$ C(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobni asoslang.

3. X={-2, -1, 3, 5, 8} to'plamda D(x): «$4x \le 17$» predikat berilgan bo'lsa,

a) D(-2), D(-1), D(3), D(5), D(8) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib $(\forall x \in X)$ D(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

4. Natural sonlar to'plamida A(x): «x+2>5+x» predikat berilgan bo'lsa,

a) *x=6, x=0, x=8, x=7, x=5, x=7* bo'lgandagi predikatning rostlik qimatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib, «x+2>5+x» predikatni rost fikrga aylantiruvchi X natural son mavjud emas deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

5. A={1, 2, 3, 4, 5, 6} to'plamda B(x): «x^2-3<18» predikat berilgan bo'lsa,

a) B(1), B(2), B(3), B(4), B(5), B(6) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib, $(\forall x \in A)$ B(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

6. A={-4, -3, -2, -1, 0, 1} to'plamda B(x): «x^2+2x-3<0» predikat berilgan bo'lsa,

a) B(-4), B(-3), B(-2), B(-1), B(0), B(1) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib, $(\forall x \in A)$ B(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

7. Butun sonlar to'plamida A(x): «x^2-4x+4=0» predikat berilgan bo'lsa,

a) *x=-4, x=-2, x=0, x=1, x=4, x=5* bo'lganda A(x) predikatning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib, «x^2-4x+4=0» predikatni qanoatlantiruvchi X-butun son bitta deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

8. X={-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} to'plamda S(x): «x+2$\leq$2x-1» predikat berilgan bo'lsa,

a) C(-3), C(-2), C(-1), C(0), C(1), C(2), C(3) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib $(\forall x \in X)$ S(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

9. X={0, 2, 5, 6, 7, 8, 9} to'plamda D(x): «x^2-9x+14=0» predikat berilgan bo'lsa,

a) D(0), D(2), D(5), D(6), D(7), D(8), D(9) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib $(\forall x \in X)$ D(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

10. A={-6, -5, -3, 0, 1, 3, 9} to'plamda A(x): «x^2-16=0» predikat berilgan bo'lsa,

a) A(-6), A(-5), A(-3), A(0), A(1), A(3), A(9) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib $(\forall x \in A)$ A(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

11. $A = \{x / x \in N,\ x \leq 7\}$ to'plamda C(x): «x^2-13<0» predikat berilgan bo'lsa.

a) C(x) predikatning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib $(\forall x \in A)$ C(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

Misol: $P(x) \Rightarrow (Q(x) \wedge R(x))$ predikatning rostlik to'plamini toping.

Yechish:

X – predikatlarning aniqlanish sohasi,

T_P – P(x) predikatning rostlik to'plami,

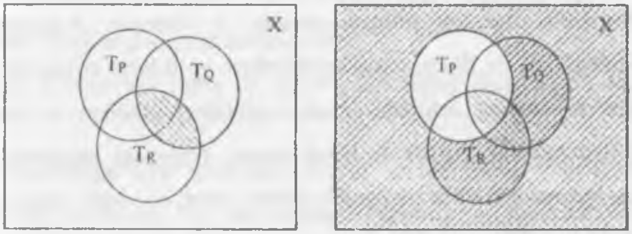
T_Q – Q(x) predikatning rostlik to'plami,

T_R – R(x) predikatning rostlik to'plami bo'lsin.

Bu to’plamlarni diagrammada tasvirlaymiz. Umumiy holda $T_P \cap T_Q \cap T_R \neq \varnothing$ deb olamiz.

$Q(x) \wedge R(x)$ konyunksiyaning rostlik to’plami $T_Q \cap T_R$ sohadan iborat, shtrixlaymiz (36a-rasm).

$P(x) \Rightarrow (Q(x) \wedge R(x))$ predikatning rostlik to’plami: barcha shtrixlangan soha (36b-rasm).



a) b)

36-rasm

Predikatning rostlik to’plamini toping.

1. $P(x) \Rightarrow (\overline{Q(x)}) \wedge R(x))$.
2. $\overline{A(x) \Leftrightarrow B(x)} \wedge C(x)$.
3. $(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{C(x)}$.
4. $\overline{A(x) \vee B(x)} \wedge C(x)$.
5. $(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow R(x)$.
6. $(A(x) \wedge \overline{B(x)}) \vee C(x)$.
7. $\overline{A(x) \wedge C(x)} \Rightarrow B(x)$.
8. $(\overline{P(x)} \wedge Q(x)) \Rightarrow R(x)$.
9. $(A(x) \Leftrightarrow B(x)) \vee C(x)$.
10. $\overline{(P(x) \Rightarrow Q(x))} \vee R(x)$.

1.8.Teoremalar va ularni isbotlash

1.8.1.Teoremaning tuzilishi va ularning turlari

O`rta maktab kursidan ma'lumki, matematikani o`rganishda teoremalar deb ataluvchi so`zlar bilan ishlashga to`g`ri keladi. Tushunchalarning asosiy bo`lmagan va ta'riflarga kiritilmagan xossalari, odatda isbotlanadi. Tushunchalarning isbot qilinadigan xossalari teoremalar deyiladi.

Ular har xil ko`rinishda ifodalanishidan qat'iy nazar, isbotlashni talab qiladigan fikrlardir. Shunday qilib, teorema-bu $A$ xossadan $B$ xossaning kelib chiqishi haqidagi fikr. Bu fikrning rostligi isbotlash yo`li bilan aniqlanadi.

Isbotlashni amalga oshirish uchun mulohaza, predikat va kvantorlarga asoslangan teoremalarni tuzilishini bilish lozim. Quyidagi teoremani qaraylik: "Agar nuqta kesmaning o`rta perpendikularida yotsa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi."

Bunda " nuqta kesmaning o`rta perpenikularida yotadi" gapi teoremaning sharti, "nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi" gapi teoremaning xulosasi hisoblanadi.

Teoremaning sharti va xulosasi tekislikdagi barcha nuqtalarning R to`plamida aniqlangan predikatdan iborat. Bu predikatlarni mos ravishda $A(x)$ va $B(x)$ deb belgilaymiz. U holda teorema $A(x) \Rightarrow B(x)$ implikatsiya ko`rinishda belgilanib, umumiylik kvantorini qo`llab quyidagi ko`rinishda yoziladi:

$$(\forall x \in P)(A(x) \Rightarrow B(x)).$$

Bundan ko`rinadiki, teorema tuzilishi uch qismdan iborat bo`ladi.

Teorema sharti: $A(x)$ predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning R to`plamida berilgan;teoremaning xulosasi: $B(x)$ predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning R to`plamida berilgan; tushuntirish qismida teoremada so`z yuritilayotgan ob'yektlar to`plami tasvirlanadi. Bu qism simvolik tarzda $\forall x \in P$ ko`rinishda yoziladi.

Tushuntirish qismini teorema mazmunidan ham bilib olish mumkin. Ixtiyoriy teoremani so`zlar yordamida ifodalaganda "Agar ..., u holda ...." so`zlari ishlatiladi, formula quyidagi

$$(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x)) \qquad (1)$$

ko`rinishda ifodalandi. Bu yerda $X$ - $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan to`plam. Agar teorema (1) ko`rinishda berilgan bo`lsa, uning sharti va xulosasi implikatsiya tashkil etadi. Shu sababli teorema xulosasi $B(x)$ predikat teoremaning $A(x)$ sharti uchun yetarli sharti, $A(x)$ shart esa teoremaning $B(x)$ xulosasi uchun zaruriy shart deyiladi. Quyidagi teoremani qaraylik:

"Agar to`rtburchak romb bo`lsa, u holda uning diagonallari perpendikular bo`ladi."

Bu teoremaga (1) formulani tadbiq etamiz. X - tekislikdagi barcha to`rtburchaklar to`plami, x tekislikdagi ixtiyoriy to`rtburchak, $A(x)$: "$x$ to`rtburchak –romb", $B(x)$: "x to`rtburchak diagonallari o`zaro perpendikular".

Zaruriy shart: "to`rtburchak romb bo`lishi uchun uning diagonallari perpendikular bo`lishi zarur."

Yetarli shart: "to`rtburchak diagonallari perpendikulyar bo`lishi uchun uning romb bo`lishi yetarli."

(1) teoremaga ko`ra bir nechta yangi teoremalarni hosil qilish mumkin. (1) teoremaning sharti va xulosasi o`rni almashsa, berilgan teoremaga teskari teorema hosil bo`ladi.

$$(\forall x \in X)(B(x) \Rightarrow A(x)) \qquad (2)$$

Masalan,

Teorema: " Agar natural son raqamlari yig`indisi 3 ga bo`linsa, shu sonning o`zi ham 3 ga bo`linadi."

Teskari teorema: " Agar natural son 3 ga bo`linsa, uning raqamlarini yig`indisi ham 3 ga bo`linadi."

Teskari teorema ham to`g`ri bo`lgani uchun ikkita teoremani bittaga birlashtirish mumkin. " Natural son 3 ga bo`linishi uchun uning raqamlarini yig`indisi 3 ga bo`linishi zarur va yetarli." Bu holda teoremani $(\forall x \in X)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ ko`rinishda ifodalash mumkin.

Teskari teorema hamma vaqt ham to`g`ri bo`lmaydi.

Agar $(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x))$ teoremaning sharti va xulosasi ularning inkorlari bilan almashtirilsa, berilgan teoremaga qarama-qarshi teorema hosil bo`ladi.

$$(\forall x \in X)(\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}) \tag{3}$$

(1)- teoremaga qarama-qarshi teorema: "Agar nuqta kesmaning o`rta perpendikularida yotmasa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng

uzoqlikda yotmaydi." va bu teorema rostdir.

$$(\forall x \in X)(\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}) \tag{4}$$

ko`rinishidagi teorema teskari teoremaga qarama-qarshi teorema deyiladi.

(2)teskari teoremaga qarama-qarshi teorema: "Agar natural son 3 ga bo`linmasa, uning raqamlari yig`indisi ham 3 ga bo`linmaydi." bu teorema rostdir. Endi teoremalarni isbotlash usullarini ko`rsatamiz.

1.8.2. Matematik isbotlar. Deduktiv mulohazalar

$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$ teoremani isbotlash - bu har doim A xossa bajarilganda, B xossa ham bajarilishini mantiqiy yo`l bilan ko`rsatishdir.

Matematikada isbotlash ko`rgazmali va tajribalarga biror-bir yo`naltirishsiz logika qoidalari bo`yicha o`tkaziladi.

Isbotlash asosida mulohaza-logik (mantiqiy) operatsiya yotadi. Bu operatsiya natijasida ma'nosiga ko`ra o`zaro bog`langan yoki bir necha jumlalardan yangi (berilgan bilimlarga nisbatan) bilimlarni o`z ichiga olgan jumla hosil bo`ladi. Masalan, boshlang`ich sinf o`quvchisining 6 va 7 sonlari orasidagi «kichik» munosabatini aniqlashdagi mulohazasini ko`raylik. O`quvchi bunday deydi: « 6<7 chunki , 6 sanoqda 7 dan oldin keladi.»

Hosil qilingan bu mulohazada xulosa qanday faktlarga asoslanganini aniqlaylik. Asoslar ikkita: agar a soni sanoqda b sonidan oldin aytilsa, u holda $a < b$ bo`ladi (ixtiyoriy a va b natural sonlar uchun).

6 sanoqda 7 dan oldin keladi.

Birinchi jumla umumiy xarakterga ega, chunki unda jumla ixtiyoriy a va b natural sonlar uchun o`rinli bo`lishini tasdiqlovchi umumiylik kvantori mavjud, shuning uchun umumiy asos deyiladi.

Ikkinchi jumla konkret 6 va 7 sonlariga tegishli, xususiy hollarni ifodalaydi, shunga ko`ra u xususiy asos deyiladi.

Ikki asosdan esa yangi mulohaza (6<7) keltirib chiqariladi, u xulosa deyiladi.

Umuman har qanday mulohazada ham asos, ham xulosa bor. Asos va xulosa orasida ma'lum bog`lanish mavjud, bu bog`lanish yordamida ular mulohazani tashkil etadi.

Asos bilan xulosa orasidagi kelib chiqishlik munosabati o`rinli bo`ladigan mulohaza deduktiv mulohaza deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar mulohaza yordamida rost asosdan yolg`on xulosa chiqarish mumkin bo`lmasa, u holda bu mulohaza deduktiv bo`ladi. Aks holda deduktivmas hisoblanadi.

Mulohaza deduktiv bo`ladigan shartlarni aniqlaymiz. Buning uchun misollarga murojaat qilamiz.

1-misol. Ushbu mulohaza berilgan, unda: umumiy asos: «agar natural son 6 ga karrali bo`lsa u 3 ga karrali bo`ladi»; xulosa: «18 soni 3 ga karrali».

Bu mulohazada asos ham, xulosa ham rost. Uni deduktiv deb taxmin qilish mumkin.

2-misol. Ushbu mulohaza berilgan, unda:

umumiy asos: «Agar natural son 6 ga karrali bo`lsa, u holda u 3 ga karrali bo`ladi»;

xususiy asos: «39 soni 3 ga karrali»;

xulosa: «39 soni 6 ga karrali»;

berilgan mulohazada asoslar rost, xulosa esa yolg`on-39 soni 6 ga bo`linmaydi. Demak, bu mulohaza deduktiv emas, bundan kelib chiqadiki, asoslarning rostligi mulohazaning deduktivligini ta'minlovchi yagona shart emas ekan.

Endi keltirilgan mulohazalarni solishtiramiz. Buning uchun ularni simvolik shaklda tasvirlaymiz. Agar A orqali « x natural son 6 ga karrali» jumlani, B orqali esa « natural son 3 ga karrali» jumlani belgilasak, u holda ikkala mulohaza uchun umumiy asos $A \Rightarrow B$ ko`rinishga ega bo`ladi. 1-misolda ikkinchi asos xususiy asos, u A jumlada x o`rniga 18 ni qo`yish bilan hosil qilinadi. Uni $A(18)$ bilan belgilaymiz. U holda birinchi mulohazada xulosani $B(18)$ bilan belgilash mumkin. Ikkinchi misol uchun: ikkinchi asos $B(39)$ ko`rinishga, xulosa esa $A(39)$ ko`rinishga ega bo`ladi.

Kiritilgan belgilashlarga ko`ra berilgan mulohazalarni bunday ko`rinishda tasvirlash mumkin:

	1-misol.	2- misol.
1-asos:	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
2-asos:	$A(18)$	$B(39)$
xulosa:	$B(18)$	$A(39)$

Birinchi misolda mulohaza ($A \Rightarrow B$) va ($A(18) \Rightarrow B(18)$) sxema bo`yicha, ikkinchi misolda esa, ( $A \Rightarrow B$ ) va ( $B(39) \Rightarrow A(39)$) sxema bo`yicha o`tkaziladi. Ko`rib turibmizki, mulohazalar sxemalari turlicha. Birinchi holda foydalanilgan sxema rost xulosaga, ikkinchi mulohaza sxemasi esa yolg`on xulosaga olib keladi. Mulohazalarni solishtirish ham asoslarning rostligi har doim ham xulosaning rost bo`lishiga kafolat bera olmasligini tasdiqlaydi.

Endi deduktiv mulohazalarning eng sodda sxemalarini ko`rib chiqamiz.

Har bir deduktiv mulohazaning asosida xulosa chiqarishning ma`lum qoidasi yotadi. Biz shunday qoidalardan faqat uchtasini qaraymiz, ularni isbotsiz qabul qilamiz.

xulosa qoidasi. (($A \Rightarrow B$ va $A(a)$) $\Rightarrow B(a)$, bu yerda $A \Rightarrow B$ - umumiy asos, $A(a)$-xususiy asos, $B(a)$- xulosa.

Inkor qoidasi: ($A \Rightarrow B$ va $\overline{B(a)}$) $\Rightarrow \overline{A(a)}$.

Sillogizm qoidasi: ($A \Rightarrow B$ va $B \Rightarrow C$) $\Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Bu qoidalarni qo`llanishi mulohazaning deduktiv bo`lishiga kafolat beradi, ya'ni rost asoslardan rost xulosalar chiqarishga imkon beradi.

Mulohazalarning to`g`riligini tekshirish uchun berilgan qoidalardan qanday foydalanishni ko`rsatamiz.

Quyidagi mulohazalar deduktiv bo`ladimi yoki yo`qmi yuqoridagi sxemalarga asosan tekshiramiz.

1-misol. Agar natural son raqamlari yig`indisi 9 ga bo`linsa, shu sonning o`zi ham 9 ga bo`linadi; son 9 ga bo`linmaydi, demak, son raqamlarining yig`indisi ham 9 ga bo`linmaydi:

2-misol. Agar natural son 8 ga karrali bo`lsa, u holda u 4 ga karrali bo`ladi, agar natural son 4 ga karrali bo`lsa, u holda u 2 ga karrali bo`ladi, demak son 8 ga karrali bo`lsa, u holda u 2 ga karrali bo`ladi.

3-misol. Agar sonning yozuvi nol bilan tugasa, u holda u 5 ga bo`linadi; son nol bilan tugamasa, demak u 5 ga bo`linmaydi.

Yechish: 1) Keltirilgan mulohazaning sxemasini aniqlaymiz.

Dastlab umumiy asosni «Agar natural son raqamlari yig`indisi 9 ga bo`linsa, shu sonning o`zi ham 9 ga bo`linadi» shartli jumla ko`rinishida ifodalaymiz. $A$ harfi bilan «Son raqamlari yig`indisi 9 ga bo`linadi» jumlani, $B$ harfi bilan «Sonning o`zi ham 9 ga bo`linadi» jumlani belgilaymiz. U holda umumiy asos $A \Rightarrow B$ ko`rinishida xususiy asos $\overline{B}$, xulosa $\overline{A}$ ko`rinishga ega bo`ladi, ya'ni ($A \Rightarrow B$ va $\overline{B}$) $\Rightarrow \overline{A}$ ko`rinishdagi sxemaga ega bo`lamiz. Bu qoida xulosaning rostligiga kafolat beruvchi inkor qoidasidir. Demak, mazkur mulohaza deduktivdir.

2) Agar «Natural son 8 ga karrali» jumlani A orqali, « Natural son 4 ga karrali» jumlani B orqali va «Natural son 2 ga karrali» jumlani C orqali belgilasak, u holda mazkur mulohazaning sxemasi ushbu ko`rinishga ega bo`ladi:

$$(A \Rightarrow B \text{ va } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Bunday sxema sillogizm qoidasidir, u asos rost bo`lganda xulosaning ham rost bo`lishiga kafolat beradi.

3) A harfi bilan «Sonning yozuvi nol bilan tugaydi» jumlani, B harfi bilan «Son 5 ga bo`linadi» jumlani belgilaymiz. U holda berilgan mulohazaning sxemasi $(A \Rightarrow B \text{va } \overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$ ko`rinishga ega bo`ladi. U yolg`on xulosaga olib keladi: masalan, 15 soni nol bilan tugamaydi, ammo u 5 ga bo`linadi. Mulohazaning bu sxemasi xulosaning rost bo`lishiga kafolat bera olmaydi, u rost xulosaga ham, yolg`on xulosaga ham olib kelishi mumkin.

Ba'zi hollarda rost xulosaga, ba'zi hollarda yolg`on xulosaga olib keluvchi sxema bo`yicha mulohaza deduktivmas mulohaza hisoblanadi. Demak, berilgan mulohaza deduktivmas mulohaza ekan.

Deduktivmas mulohazalarning ushbu ikkita sxemasini yodda saqlash masadga muvofiq:

1) $(A \Rightarrow B \text{ va } B) \Rightarrow A$; 2) $(A \Rightarrow B \text{ va } \overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$;

Bu sxemalar, asoslar rost bo`lganda xulosalarning ham rost bo`lishiga kafolat bera olmaydi.

Teoremalarni isbotlashda to`liqsiz induksiya usulidan ham foydalaniladi.

1.8.3.To`liqsiz induksiya

Biz 10 soni 5 ga bo`linadi, 20 soni 5 ga bo`linadi, 100 soni 5 ga bo`linadi, 1000 soni 5 ga bo`linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 0 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo`linadi deb, shuningdek 15 soni 5 ga bo`linadi, 25 soni 5 ga bo`linadi, 35 soni 5 ga bo`linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo`linadi deb xulosa chiqaramiz. Bu mulohazalarni umumlashtirib yozuvi 0 va 5 raqamlari bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo`linadi deb xulosa chiqaramiz.

Xuddi shuningdek, n^2+n+41 ifodada n o`rniga 1,2,3,4 va hokazo sonlar qo`yilsa, u holda $n=1$ da ifodaning qiymati tub son 43 ga teng, $n=2$ da ifodaning qiymati tub son 47 ga teng, $n=3$ da ifodaning qiymati tub son 53 ga teng ekanligini ko`rish mumkin. n ning $n=3,4,...$ qiymatlarida ham natija tub son bo`ladi.

Bu natijalarga suyangan holda n ning ixtiyoriy natural qiymatlarida n^2+n+41 ifodaning qiymati tub son bo`ladi deb xulosa chiqarish mumkin.

To`liqsiz induksiya bu shunday mulohazalarki, bunda ob'yektlar to`plamining ba'zi ob'yektlari ma'lum xossalarga ega bo`lishdan bu to`plamning barcha ob'yektlari ham shu xossalarga ega deb xulosa chiqarishga asoslanadi.

To`liqsiz induksiya natijasida olingan xulosalar rost ham, yolg`on ham bo`lishi mumkin. Masalan, yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan sonning 5 ga bo`linishi haqidagi xulosa rost. n ning ixtiyoriy natural qiymatida n^2+n+41 ifodaning qiymati tub son bo`ladi» degan xulosa esa yolg`on. Haqiqatan ham, agar $n=41$ bo`lsa, biz $41^2+41+41=41^2+2\cdot 41=41(41+2)=41\cdot 43$ ga ega bo`lamiz, bu esa n^2+n+41 ifodaning qiymati murakkab son ekanligini ko`rsatadi.

Induktiv mulohazalar har doim to`g`ri xulosalarga olib kelavermasa ham, matematika va boshqa fanlarni o`rganishda ularning roli juda katta. Induktiv mulohazalar yuritish davomida konkret xususiy hollarda umumiylikni ko`ra bilish, o`z taxminlarini ayta olish malakalari shakllanadi.

Boshlang`ich sinflarda to`liqsiz induktiv xulosadan tashqari analogiya bo`yicha (taqqoslab) xulosa chiqarishdan keng foydalaniladi, bunda bilimlarni o`rganilgan ob'yektlarga nisbatan kam o`rganilgan ob'yektlarga ko`chirish amalga oshiriladi. Ko`chirish uchun bu ob`yektlarning o`xshashlik va farq qilish alomatlari haqidagi bilimlar asos bo`lib xizmat qiladi.

Analogiya bizni taxmin va farazlarga olib keladi, matematik induksiyani rivojlantirish imkonini beradi.

Shuning bilan birga analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar rost bo`lishi ham, yolg`on bo`lishi ham mumkin. Analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar deduktiv metod bilan isbot qilinishi lozim.

Fikrlarning rostligini isbotlash usullari.

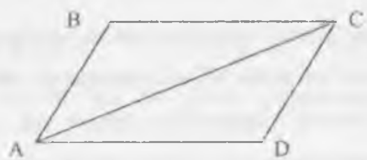
Deduktiv xulosa matematik isbotlashlarning asosiy usulidir. Bunda matematik isbot deduktiv mulohazalarning shunday zanjirini ifodalaydiki, ulardan har birining xulosasi, oxirgisidan tashqari, undan keyin keluvchi mulohazalardan biriga asos bo`ladi.

$6<7$ da`voning rostligining isboti bitta qadamni o`z ichiga olgan bitta mulohazadan tashkil topgan.

Ikki va undan ortiq qadamdan tashkil topgan mulohazaning isbotiga doir misollar ko`rib chiqamiz.

Misol. Har bir diagonal parallelogramni ikkita teng uchburchakka ajratishini isbotlang.

Isboti: 1) ixtiyoriy parallelogramning qarama-qarshi tomonlari teng; $ABCD$-parallelogram (37-rasm), demak $AB=CD$, $BC=AD$. Mulohaza xulosa qoidasi asosida olib borildi, demak, olingan xulosa rost.



37-rasm

Agar bir uchburchakning uchta tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga teng bo`lsa, u holda bunday uchburchaklar teng bo`ladi: $AB=CD$, $BC=AD$, AC tomon umumiy. Demak, ABC va ACD uchburchaklar teng.

Bu holda ham mulohaza xulosa qonuni asosida olib borildi, demak xulosa rost. Teorema isbotlandi.

Teoremaning isboti hamma asoslarni ko`rsatish bilan to`la mantiqiy formada olib borilgan mulohazalarning ikki qadamidan tashkil topganini eslatib o`tamiz. Biroq bunday isbotlash uzundan-uzoq shuning uchun odatda ularni mulohazalar sxemasidagi alohida asoslarni tushirib qoldirish bilan ixchamlangan qisqartirilgan formada olib boriladi.

Masalan, biz o`tkazgan isbotning ixchamlangan shakli bunday bo`lishi mumkin: ABC va ACD uchburchaklarda AB va CD, AD va BC tomonlar teng, chunki ular $ABCD$ parallelogramning qarama-qarshi tomonlari, AC tomon ular uchun umumiy, demak, ABC va ACD uchburchaklar teng.

1.8.4.To`la matematik induksiya

To`la matematik induksiya prinsipining mohiyati quyidagicha: agar biror tasdiq (formula) $n=1$ da (yoki $n$ ning bu tasdiq ma'noga ega bo`ladigan boshqa qiymatida) o`rinli bo`lsa va uning biror $n=k$ natural qiymatida to`g`ri degan farazda navbatdagi natural qiymat $n=k+1$ uchun ham to`g`riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq n ning barcha natural qiymatlari uchun ham to`g`ri bo`ladi. Isbotlashning matematik induksiya printsipiga asoslangan metodi matematik induksiya metodi nomi bilan ataladi. Matematik induksiya metodi bilan isbotlash usuli quyidagidan iborat: tasdiq (formula)ning $n=1$ uchun to`g`ri ekani isbotlanadi yoki tekshirib ko`riladi; tasdiqni birorta natural $n=k$ uchun to`g`ri deb faraz qilinadi. Bu farazdan kelib chiqib. tasdiqning $n=k+1$ uchun to`g`ri ekani isbotlanadi.

Bu metod faqat natural n ga bog`liq bo`lgan tasdiqlarni isbot qilishga tadbiq qilinadi va asosan quyidagi ko`rinishdagi masalalarni yechishda foydalaniladi:

Xususiy kuzatishlardan foydalanib, qandaydir qonuniyat aniqlanadi, so`ngra uni to`g`riligi matematik induksiya yordamida isbotlanadi.

Misol: Natural qatorning dastlabki n ta toq sonlari yig`indisini topish formulasini keltirib chiqaring.

Echish: $S(1)=1$, $S(2)=1+3=4$, $S(3)=1+3+5=9$,

$S(4)=16$, $S(5)=25,...$

bulardan, natural qatorning dastlabki n ta toq sonlari yig`indisi $n^2$ ga teng ekani ya'ni $S(n)=n^2$ ekani ko`rinadi. Endi $S(n)=n^2$ ekanini matematik induksiya metodi yordamida isbotlaymiz: $n=1$ uchun $S(n)=n^2$ formula to`g`ri, chunki

$S(1)=1$; formulani biror natural $n=k$ uchun to`g`ri, ya'ni $S(k)=k^2$ deb faraz qilamiz. U holda $n=k+1$ uchun ham to`g`ri, ya'ni $S(k+1)=(k+1)^2$ ekanini isbotlaymiz:

$$S(k+1)=1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=$$
$$=S(k)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

demak, formula n ning barcha natural qiymatlari uchun to`g`ri, ya'ni $S(n)=n^2$.

1.8.5. Bevosita va bilvosita isbotlash usullari

Olib borish usuliga ko`ra isbotlash bevosita va bilvosita isbotlashga bo`linadi. Yuqorida ko`rilgan barcha isbotlashlar bevosita isbotlashlar edi: ularda biror bir rost jumlaga asoslanib rost xulosaga olib keluvchi mulohazalarning deduktiv zanjiri ko`rilar edi. Oldingi mavzuda so`z borgan to`la induksiya ham bevosita isbotlashga tegishlidir.

Bilvosta isbotlashga teskarisidan isbotlash usuli misol bo`ladi. Shunday isbotlashga quyidagi teoremani qaraymiz.

Teorema: «Agar ikkita turli a va b to`g`ri chiziqlar uchinchi c to`g`ri chiziqqa parallel bo`lsa, u holda ular o`zaro parallel bo`ladi» ni isbotlaymiz.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni a va b to`g`ri chiziqlar o`zaro parallel bo`lmasin. U holda ular c to`g`ri chiziqqa tegishli bo`lmagan biror P nuqtada kesishadi. Shartga ko`ra a to`g`ri chiziq c ga va b to`g`ri chiziq c ga parallel bo`lgani uchun c to`g`ri chiziqdan tashqaridagi P nuqta orqali c to`g`ri chiziqqa ikkita parallel to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin degan xulosaga kelamiz. Bu fikr parallellik aksiomasiga zid. Demak, bizning farazimiz noto`g`ri va berilgan teorema rost (to`g`ri).

Umuman, $A \Rightarrow B$ teoremani teskarisidan isbotlash usulining mohiyati quyidagidan iborat. B teoremaning xulosasi yolg`on, demak, uning inkori $\overline{B}$ rost deb faraz qilinadi. Bu jumlalarni isbotlash jarayonida qo`llaniladigan asoslar to`plamiga (ular orasida $A$ shart ham bo`ladi) qo`shib, ulardan asoslardan biriga zid bo`luvchi jumla chiqmaguncha natijalar chiqarilaveradi. Mulohazalar jarayonini tugatish bilan hosil bo`lgan ziddiyat teoremani isbotlaydi deyiladi.

Bilvosita isbotlashning yana bir formasi kontrpozitsiya qonuniga asoslangan isbotlashdir. Uning mohiyati shundan iboratki, $A \Rightarrow B$ teoremani isbotlash o`rniga unga teng kuchli bo`lgan $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ko`rinishdagi teorema isbotlanadi. Agar bu teorema rost bo`lsa, u holda dastlabki teorema ham rost bo`ladi.

Teorema: « Agar $\frac{a-b}{a+b}$ qisqarmas kasr bo`lsa, u holda $\frac{a}{b}$ ham qisqarmas kasr bo`ladi».

Isbot: $\frac{a}{b}$ - qisqaruvchi kasr bo`lsin deb faraz qilaylik. U holda uning sur'ati va maxraji ayni bir songa, masalan $m$ ga , bo`linadi, ya'ni $a = mq$, $b = mp$. Demak, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{mq-mp}{mq+mp} = \frac{m(q-p)}{m(q+p)}$ bo`ladi.

Shunday qilib, "agar $\frac{a}{b}$ qisqaruvchi kasr bo`lsa, u holda $\frac{a-b}{a+b}$ ham qisqaruvchi kasr bo`ladi" jumlaning rostligi isbotlandi. Bu jumla qarama-qarshisiga teskari teoremani ifodalaydi. Demak, kontrpozitsiya qonuniga ko`ra dastlabki teorema ham rost bo`ladi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Teorema nima? Teoremaga misollar keltiring
2. Ixtiyoriy teoremani olib, sharti, xulosasi va tushuntirish qismlarini ajratib ko`rsating.
3. Ixtiyoriy teoremani tanlab, unga teskari, qarama-qarshi, teskariga qarama-qarshi teoremalarni tuzing, ularni rost yoki yolg`onligini aniqlang.
4. Teoremalarni isbotlash usullarini ayting.
5. To`liq induksiyadan foydalanib bitta teoremani isbotlab bering.

1.9.Algoritm tushunchasi va uning xossasi

Inson biror masalani yechishda uni yechish usullarini va bu yechish usullaridan istagan kishilar foydalanishi uchun bu usullarni qanday qilib yozish lozimligini izlaydi. Ana shu yozish usulidan foydalanib masalani yechishni hisoblash mashinalariga ham topshirish mumkin bo`lsin. Masalani yechish bosqichlarini yozishni birqancha usullari bor, shularning ichida so`z bilan yozish ajralib turadi. Masalani yechishni so`z bilan ifodalash usuli birinchi marta IX asrda yashab ijod qilgan O`rta Osiyolik olim Al-Xorazmiy tomonidan o`nli sanoq sistemasidagi sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishda yozilgan. Masalani yechishni so`z bilan ifodalash masala yechishning algoritmi deb atala boshlandi. Algoritm so`zi Al-Xorazmiy nomidan kelib chiqqan. Algoritm nima? Masalani yechishda bajariladigan amallarning ma'lum tartibda bajarilish qoidalari to`plamiga algoritm deyiladi. Boshqacha aytganda, algoritm – bu biror jarayonni aniq tasvirlash va uni bajarish uchun ko`rsatmadir.

Algoritmlashtirishning vazifasi algoritmlarni tuzishga o`rgatishdan iborat bo`lib, bajaruvchi (odam, robot, EXM) algoritmlarni bajarish qoidasiga rioya qilgan holda yagona natijaga erishmog`i lozim. Algoritmlarni yozish qoidasiga quyidagi xossalar ko`rinishida talablar qo`yiladi:

1. Aniqlik xossasi. Algoritm ko`rsatmalari bir m`anoli bo`lishi zarur. Algoritm bajariladigan amallarning zarur ketma-ketligini aniq belgilab beradi. Algoritm amalga oshish jarayoni konkret hisobchiga bog`liq bo`lmaydi.

2. Ommaviylik xossasi. Algoritm boshlang`ich ma'lumotlarning ruxsat etilgan ixtiyoriy qiymatlarida bajarilishi zarur.

3. Natijaviylik xossasi. Izlanayotgan natijani boshlang`ich ma'lumotlarning berilgan qiymati uchun chekli sondagi sodda qadamlardan so`ng olish mumkin bo`lishi kerak.

Misollar keltiraylik.

1) $y = 3x + 7$

№	Amallarni bajarish tavsifi
1.	3 soni x ga ko`paytiriladi
2.	(1) ning natijasiga 7 qo`shiladi.

2) $y = \dfrac{3x+7}{2x-3}$. y ning qiymatini toping.

№	Amallarni bajarish tavsifi
1.	3 soni x ga ko`paytiriladi
2.	(1) ning natijasiga 7 qo`shiladi.
3.	2 soni x ga ko`paytiriladi
4.	(3) ning natijasidan 3 ayiriladi.
5.	(2) ning natijasi (4) ning natijasiga bo`linadi.

Yuqoridagi misollarni quyidagi ko`rinishda ham ifodalash mumkin.

1) $y = 3x + 7$ ni hisoblash.

Amallarni bajarish tavsifi
$a = x*3$
$b = a+7$

2) $y = \dfrac{3x+7}{2x-3}$ ni hisoblang.

Amallarni bajarish tavsifi
$a = x*3$
$b = a+7$
$c = x*2$
$d = c-3$
$y = b:d$

3) $y = 3^n$ $n \in Z$ ni hisoblang.

1.	Agar $n > 1$ bo`lsa, (4) ga o`tadi, aks holda (2) ga
2.	Agar $n = 1$ bo`lsa, (5) ga o`tadi, aks holda (3) ga

3.	Agar $n=0$ bolsa, (6) ga o`tadi, aks holda (7) ga
4.	$y=\underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{n\ \text{марта}}$, (8) ga o`tadi
5.	$y=3$, (8) ga o`tadi.
6.	$y=1$, (8) ga o`tadi
7.	$y=\dfrac{1}{\underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}}$
8.	Tamom

Boshlang`ich sinf matematika darslarida sodda algoritmlar qo`llaniladi. Masalan, qo`shish algoritmi (o`nli sanoq sistemasida)

Ikkinchi qo`shiluvrosti xona birliklari mos keladigan holda birinchi qo`shiluvchi tagidan yoziladi.

Birliklar qo`shiladi. Agar yig`indi 10 dan kichik bo`lsa, javobni birliklar xonasiga yozamiz va keyingi o`nlik xonasiga o`tamiz.

Agar yig`indi 10 dan katta yoki teng bo`lsa $10+S_0$ kabi tassavur qilib (S_0 – bir xonali son) S_0 ni birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo`shiluvchilarning o`nliklariga 1 ni qo`shamiz, so`ng o`nliklar xonasiga qo`shishga o`tamiz.

Yuqoridagi jarayonni o`nliklar bilan, so`ngra yuzliklar bilan va hokazo takrorlaymiz. Hamma xona birliklari qo`shilgandan so`ng tugatamiz. Xuddi shuning kabi ayirish, ko`paytirish va bo`lish algoritmlarini tuzib chiqishimiz mumkin.

Algoritmlarni hisoblash mashinalarida bajarish uchun unga mos mashina tilida programmalar va blok sxemalar tuziladi (bular «Hisoblash texnikasi» fanida o`qitiladi).

Algoritm tuzishga oid misollar keltiramiz:

1. $y=\dfrac{7x-4}{5x+3}$ u ning qiymatini toping.

№	Amallarni bajarish tavsifi.
1.	7 ni x ga ko'paytiriladi.
2.	(1) ning natijasidan 4 ni ayriladi.
3.	5 ni x ga ko'paytir.
4.	(3) ning natijasiga 3 ni qo'sh.
5.	(2) ning natijasini (4) ning natijasiga bo'l.

2. Kesmani teng ikkiga bo'lish (tsirkul va chizg'ich yordamida)

№	
1.	Sirkul ninasini A(.) ga qo'yiladi.
2.	Sirkul oyoqlarini AB ga teng qilib ochiladi.
3.	Aylana o'tkaziladi.
4.	Sirkul ninasini B(.) ga qo'yiladi.
5.	Aylana o`tkaziladi.
6.	Aylanalarning kesishgan nuqtalaridan to'g'ri chiziq o'tkaziladi.
7.	To'g'ri chiziq va kesmaning kesishgan nuqtasi belgilanadi.

3. $y = \frac{7x-4}{5x+3}$

№	Amallarni bajarish tavsifi.
1.	a=x*7
2.	b=a-4
3.	c=x*5
4.	d=c+3
5.	y=b:d

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

Algoritm so`zining ma'nosini ayting.

Algoritmlarning qanday xossalari bor?

3. Algoritmlar qanday usulda yoziladi?

4. Boshlang`ich sinflarda qo`llaniladigan algoritmlarga misollar keltiring.

Y ning qiymatini topish algoritmini tuzing:

1. $y=\frac{x^2-5x+6}{7x+6}$

2. $y=\frac{7x+3}{2x-1}$

3. $y=\frac{x^2-5x+6}{2x-1}$

4. $y=\frac{5x+3}{x-2}$

5. $y=\frac{x^2-4x+5}{x-1}$

6. $y=\sqrt{\frac{x^2+6}{x+1}}$

7. O'nli sanoq sistemasida qo'shish algoritmini tuzing.

8. O'nli sanoq sistemasida ayirish algoritmini tuzing.

9. O'nli sanoq sistemasida ko'paytirish algoritmini tuzing.

10. O'nli sanoq sistemasida bo'lish algoritmini tuzing.

11. EKUB ni topish algoritmini tuzing

12. EKUK ni topish algoritmini tuzing.

II BOB. NOMANFIY BUTUN SONLAR

2.1. Nomanfiy butun sonlar to`plamini to`plamlar nazariyasi asosida qurish.

2.1.1. Nomanfiy butun sonlarni qo`shish va ayirish

1. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga kelgan. Turli-tuman chekli to`plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zaruriyati natural sonlarning vujudga kelishiga sabab bo`lgan.

O`zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o`tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to`plamlarni taqqoslash uchun berilgan to`plamlar orasida yoki to`plamlardan biri bilan ikkinchi to`plamning qism to`plami orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatishgan, ya'ni bu bosqichda kishilar buyumlar to`plamining sanog`ini ularni sanamasdan idrok qilganlar.

Vaqt o`tishi bilan odamlar faqat sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o`rganib oldilar. Qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o`nlik sistemasi va nol tushunchasi yaratildi. Asta-sekin natural sonlarning cheksizligi haqidagi tasavvurlar hosil bo`la boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so`ng sonlar mustaqil ob'yektlar bo`lib qoldi va ularni matematik ob'yektlar sifatida o`rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustidagi amallarni o`rgana boshlagan fan «Arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika sonlar va sonlar ustidagi amallar haqidagi fandir.

Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to`plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga asr o`rtalarida Hind, Arab dunyosi mamlakatlari va O`rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa, yevropalik olimlar katta hissa qo`shdilar.

«Natural son» terminini birinchi bo`lib rimlik olim A.A. Boesiy qo`lladi.

Natural butun sonlar to`plamini tuzishda ikki xil yondashuv bor:

1) to`plamlar nazariyasi asosida;

2) aksiomatik metod asosida.

Nomanfiy butun sonlar to`plamini to`plamlar nazariyasi asosida qurishni qaraymiz:

XIX asrda G. Kantor tomonidan to`plamlar nazariyasi yaratilgandan so`ng, bu nazariya asosida natural sonlar nazariyasi yaratildi. Bu nazariya asosida chekli to`plam va o`zaro bir qiymatli moslik tushunchalari yotadi.

1-ta'rif. Agar A va B to`plamlar orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin bo`lsa, bu to`plamlar teng quvvatli deyiladi.

«Teng quvvatlilik» munosabati ekvivalentlik munosabati bo`lib, barcha chekli to`plamlarni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Har bir sinfda turli elementli to`plamlar yig`ilgan bo`lib, ularning umumiy xossasi teng sonli ekanligidir.

2-ta'rif. Natural son deb, bo`sh bo`lmagan chekli bir-biriga ekvivalent to`plamlar sinfining umumiy xossasiga aytiladi.

Har bir ekvivalentlik sinfining umumiy xossasini uning biror bir to`plami to`la ifodalaydi. Har bir sinf xossasini ifodalovchi natural son alohida belgi bilan belgilanadi. Masalan: $a = n(A);\ \ b = n(B)$.

3-ta'rif. Bo`sh to`plamlar sinfining umumiy xossasini 0 soni ifodalaydi, $0 = n(\varnothing)$.

4-ta'rif. 0 soni va barcha natural sonlar birgalikda nomanfiy butun sonlar to`plamini tashkil qiladi. Bu to`plam Z_0 ko`rinishida belgilanadi. $Z_0 = \{0\} \cup N$. $N$ - barcha natural sonlar to`plami.

Sonlarni taqqoslash qanday nazariya asosida yuz berishini aniqlaymiz. Ikkita nomanfiy butun a va b son berilgan bo`lsin. Ular chekli $A$ va $B$ to`plamlar elementlari sonini ifodalaydi.

5-ta'rif. Agar a va b sonlar teng sonli to`plamlar bilan aniqlansa, u holda ular teng bo`ladi.

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B \text{, bu yerda } n(A) = a;\ \ n(B) = b.$$

Agar A va B to`plamlar teng sonli bo`lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo`ladi. Agar $A$ to`plam B to`plamning o`z qism to`plamiga teng sonli va $n(A)=a$; $n(B)=b$ bo`lsa, a son b sondan kichik deyiladi va $a<b$ kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda $a>b$ kabi yoziladi.

$$a<b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ bu yerda } B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B; B_1 \neq \varnothing.$$

2. Nomanfiy butun sonlarni qo`shish va ayirish.

6-ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning yig`indisi deb $n(A)=a$, $n(B)=b$ bo`lib, kesishmaydigan A va B to`plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.

$$a+b=n(A\bigcup B), \text{ bu yerda } n(A)=a, \quad n(B)=b \text{ va } A\bigcap B=\varnothing.$$

Berilgan ta'rifdan foydalanib, $5+2=7$ bo`lishini tushuntiramiz.

5-bu biror A to`plamning elementlari soni, 2-biror $B$ to`plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo`sh to`plam bo`lishi kerak.

Masalan $A=\{x,y,z,t,p\}$, $B=\{a,b\}$ to`plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz. $A\bigcup B=\{x,y,z,t,p,a,b\}$ sanash yo`li bilan $n(A\bigcup B)=7$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, $5+2=7$.

Umuman, $a+b$ yig`indi $n(A)=a$, $n(B)=b$ shartni qanoatlantiruvchi kesishmaydigan $A$ va $B$ to`plamlarning tanlanishiga bog`liq emas. Bu umumiy da`voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari butun nomanfiy sonlar yig`indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita nomanfiy $a$ va $b$ sonlar olmaylik, ularning yig`indisi bo`lgan butun nomanfiy $c$ sonni har doim topish mumkin. U berilgan $a$ va $b$ sonlari uchun yagona bo`ladi.

Yig`indining mavjudligi va yagonaligi ikki to`plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig`indi ta'rifidan foydalanib "kichik" munosabatiga boshqacha ta'rif berish mumkin.

7-ta'rif. $\forall a,b \in N$ uchun $a = b + c$, bo`ladigan c son topilsa, $b < a$ (yoki $a > b$) bo`ladi.

$$(\forall a,b \in N)(\exists c \in N)(b < a \Leftrightarrow a = b + c)$$

3. Qo`shish amalining xossalari:

1°. Qo`shish amali kommutativdir:

$$(\forall a,b \in Z_0)(a + b = b + a),$$

ya'ni ixtiyoriy nomanfiy butun a va b sonlar uchun $a+b=b+a$ tenglik o`rinlidir.

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$ va $A \cap B = \varnothing$ bo`lsin,

$$a + b = n(A \cup B) = n(B \cup A) = b + a$$

(to`plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2°. Qo`shish amali assotsiativdir:

$$(\forall a,b,c \in Z_0) \quad (a + (b + c)) = ((a + b) + c)$$

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ va $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ bo`lsin. $a + (b + c) = n(A \cup (B \cup C))$; $(a + b) + c = n((A \cup B) \cup C)$ to`plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko`ra

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Demak, $a + (b + c) = (a + b) + c$

3°. Nolni yutish xossasi:

$$(\forall a \in Z_0) \qquad a + 0 = a$$

Isbot. $a = n(A)$, $0 = n(\varnothing)$, $a + 0 = n(A \cup \varnothing) = n(A) = a$. ($A \cup \varnothing = A$ va $A \cap \varnothing = \varnothing$ bo`lgani uchun)

4^0. *$(\forall a, b, c, \in Z_0)$ $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$*

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ $a = b \Rightarrow n(A) = n(B)$, $n(A + C) = n(a + c)$, $n(B + C) = n(b + c)$, bundan $a + c = b + c$.

5^0. Qo`shish monotonligi

$$(\forall a,c,b \in Z_0) \qquad a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$, bo`lsin. $a<b \Rightarrow A\sim B_1\subset B$ bu yerda $B_1\neq B$, $B_1=\varnothing$ u holda $A\bigcup C\sim B_1\bigcup C\subset B\bigcap C \Rightarrow a+c<b+c$.

Endi ayirmaning ta'rifi va uning mavjudligi va yagonaligini ko`rib o`tamiz.

8-ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B\subset A$ shartlar bajarilganda, B to`plamni $A$ to`plamgacha to`ldiruvchi to`plam elementlari soniga aytiladi.

$a-b=n(B_A)$ bu yerda $a=n(A)$, $b=n(B)$, $B\subset A$, B_A-B ni A ga to`ldiruvchi to`plam.

Misol. Berilgan ta'rifdan foydalanib, $7-4=3$ bo`lishini tushuntiramiz. 7 - biror $A$ to`plamning elementlari soni, 4 - A to`plamning qism to`plami bo`lgan $B$ to`plamning elementlari soni.

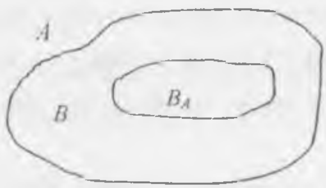
Masalan, $A=\{x,y,z,t,p,r,s\}$, $B=\{x,y,z,t\}$ to`plamlarni olaylik. $B$ to`plamning A to`plamgacha to`ldiruvchisini topamiz:

$$A\setminus B=\{p,r,s\},\ n(A\setminus B)=3$$

Demak, $7-4=3$.

$a-b$ ayirma $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B\subset A$ shartlarini qanoatlantiruvchi A va B to`plamlarning tanlanishiga bog`liq emas.

$a=n(A)$, $b=n(B)$, va $B\subset A$ bo`ladigan butun nomanfiy $a$ va $b$ sonlar berilgan bo`lsin va bu sonlarning ayirmasi B to`plamni $A$ to`plamgacha to`ldiruvchisidagi elementlar soni bo`lsin, ya'ni $a-b=n(B_A)$.



38-rasm

Eyler doiralarida A, B, $A\setminus B$ to`plamlar 38-rasmda ko`rsatilganidek tasvirlanadi. $A=B\bigcup B_A$ ekani ma'lum, bundan $n(A)=n$, $(B\bigcup B_A)=A$, $B\bigcap B_A=\varnothing$ bo`lgani uchun biz

$$a=n(A)=n(B\bigcup B_A)=n(B)+n(B_A)=b+(a-b)$$

ga ega bo`lamiz.

Bu esa ayirmaga boshqacha ta'rif berish imkonini beradi.

9-ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb, shunday butun nomanfiy c songa aytiladiki, uning b son bilan yig`indisi $a$ songa teng bo`ladi: $a-b=c \Leftrightarrow a=b+c$.

Shunday qilib, $a-b=c$ yozuvda a-kamayuvchi, b-ayriluvchi, c-ayirma deb ataladi.

Ayirish amali qo`shishga teskari amaldir. Ayirmaning ikkinchi ta'rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremalarni isbotlaymiz:

1-teorema. Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi faqat $b\leq a$ bo`lgandagina mavjud bo`ladi.

Isbot. Agar $a=b$ bo`lsa, u holda $a-b=0$ bo`ladi, demak, $a-b$ ayirma mavjud bo`ladi.

Agar $b<a$ bo`lsa, u holda «kichik» munosabati ta'rifiga ko`ra shunday natural son mavjud bo`ladiki, bunda $a=b+c$ bo`ladi. U holda ayirmaning ta'rifiga ko`ra $c=a-b$, ya'ni $a-b$ ayirma mavjud bo`ladi. Agar $a-b$ ayirma mavjud bo`lsa, u holda ayirmaning ta'rifiga ko`ra shunday butun nomanfiy c son topiladiki, $a=b+c$, bo`ladi. Agar $c=0$ bo`lsa, u holda $a=b$ bo`ladi; agar $c>0$ bo`lsa, u holda «kichik» munosabatining ta'rifiga ko`ra $b<a$ bo`ladi. Demak, $b\leq a$.

2-teorema. Agar butun nomanfiy a va b sonlarining ayirmasi mavjud bo`lsa, u holda u yagonadir.

Isbot. $a-b$ ayirmaning ikkita qiymati mavjud bo`lsin deb faraz qilaylik: $a-b=c_1$ va $a-b=c_2$. U holda ayirmaning ta'rifiga ko`ra $a=b+c_1$ va $a=b+c_2$ ga ega bo`lamiz. Bundan $b+c_1=b+c_2$ va, demak $c_1=c_2$ ekani kelib chiqadi. Demak, ayirma yagona ekan.

Yig`indidan sonni va sondan yig`indini ayirish qoidalarini to`plamlar nazariyasi bo`yicha ma'nosini qaraymiz.

Yig`indidan sonni ayirish uchun yig`indidagi qo`shiluvchilardan biridan shu sonni ayirish va hosil bo`lgan natijaga ikkinchi qo`shiluvchini qo`shish yetarli.

Bu qoidani simvollardan foydalanib yozamiz:

Agar, a,b,c - butun nomanfiy sonlar bo`lsa, u holda:

a) $a\geq c$ bo`lganda $(a+b)-c=(a-c)+b$ bo`ladi;

b) $b\geq c$ bo`lganda $(a+b)-c=a+(b-c)$ bo`ladi;

v) $a\geq c$ va $b\geq c$ bo`lganda yuqoridagi formulaning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin.

Yig`indidan sonni ayirish qoidasining to`g`riligini ko`rsatamiz. Faraz qilaylik, $a\geq c$ bo`lsin, u holda $a-c$ ayirma mavjud bo`ladi. Uni r orqali belgilaymiz: $a-c=r$. Bundan $a=r+c$ chiqadi, $r+c$ yig`indini $(a+b)-c$ ifodadagi $a$ ning o`rniga qo`yamiz va unda shakl almashtiramiz:

$$(a+b)-c=(r+c+b)-c=r+b+c-c=r+b.$$

Biroq r harfi orqali $a-c$ ayirma belgilangan edi, bundan isbotlanishi talab etilgan $(a+b)-c=(a-c)+b$ ifodaga ega bo`lamiz.

Endi sondan yig`indini ayirish qoidasini qaraymiz:

Sondan sonlar yig`indisini ayirish uchun bu sondan qo`shiluvchilarning birini, ketidan ikkinchisini ketma-ket ayirish yetarli, ya'ni agar a, c, b - butun nomanfiy sonlar bo`lsa, u holda $a\geq b+c$ bo`lganda $a-(b+c)=(a-b)-c$ ga ega bo`lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi ham yig`indidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlang`ich maktabda konkret misollarda qaraladi, asoslash uchun ko`rgazmali tasvirlar namoyish etiladi. Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi.

Masalan, sondan yig`indini ayirish qoidasi sonni bo`laklab ayirish usuliga asos bo`ladi: $5-2=5-(1+1)=(5-1)-1=4-1=3$.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Natural son va nolning ta'rifini ayting.
2. Qaysi holda a soni b sonidan katta deyiladi va aksincha?

3. Nomanfiy butun sonlar yig`indisi ta'rifini ayting, uning mavjudligi va yagonaligini asoslang.
4. Qo`shishning qanday qonunlari bor?
5. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi ta'rifi qanday? Ayirma qaysi holda mavjud bo`ladi?
6. Ayirmaga yig`indi orqali ta'rif bering.
7. Yig`indi va ayirma qoidalarini to`plamlar nazariyasi asosida tushuntiring.

2.1.2. Nomanfiy butun sonlarni ko`paytirish va bo`lish

1. Ko`paytmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi.

$a=n(A)$ va $b=n(B)$ bo`lgan $a$ va $b$ nomanfiy butun sonlar berilgan bo`lsin.

1-ta'rif. a va b nomanfiy butun sonlar ko`paytmasi deb, $A\times B$ dekart ko`paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi.

Bu yerda $A\times B=\{(a,b) \setminus a\in A,\ b\in B\}$ ekanini eslatib o`tamiz.

Demak, ta'rifga ko`ra: $a\cdot b=n(A\times B)=c$ , bu yerda $a,b,c \in Z_0$. $a\cdot b=c$ yozuvda $a$-1-ko`paytuvchi, b-2-ko`paytuvchi, $c$–ko`paytma deyiladi, $c\in Z_0$ sonni topish amali esa ko`paytirish deyiladi.

Masalan, ta'rifga ko`ra $5\cdot 2$ ko`paytmani topaylik. Buning uchun $n(A)=5$ va $n(B)=2$ bo`lgan $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{1,2\}$ to`plamlarning dekart ko`paytmasini tuzamiz:

$$A\times B=\{(a,1),\ (a,2),\ (b,1),\ (b,2),\ (c,1),\ (c,2),\ (d,1),\ (d,2),\ (e,1),\ (e,2)\}.$$

Dekart ko`paytma elementlari soni $10$ bo`lgani uchun $5\cdot 2=10$.

1-teorema. Ikki nomanfiy butun son ko`paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko`paytmaning mavjudligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to`plamlarning dekart ko`paytmasini tuzish har doim mumkinligi va dekart ko`paytma elementlari soni to`plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog`liq emasligi bilan isbotlanadi.

Ikkita nomanfiy butun son ko`paytmasining yagonaligini isbotlash talabalarga topshiriladi.

2. Ko`paytirish amalining xossalari.

1^0. Ko`paytirish kommutativdir:

$$(\forall a,b \in Z_0)\ ab=ba.$$

Isbot. $a=n(A)$ va $b=n(B)$, $A\cap B=\varnothing$ bo`lsin. Dekart ko`paytma ta`rifiga ko`ra $A\times B\neq B\times A$ shunga qaramay, $A\times B=B\times A$ deb olamiz (bunda istalgan $(a,b)\in A\times B$ juftlikka $(b,a)\in B\times A$ juftlik mos keltirildi) $A\times B=B\times A \Rightarrow n(A\times B)=n(B\times A)$, $ab=n(A\times B)=n(B\times A)=ba \Rightarrow ab=ba$.

2^0. Ko`paytirish assotsiativdir.

$$(\forall a,\ b,\ c \in Z_0)\ \ (a\,b)c=a(bc).$$

Isbot: $a=n(A)$ $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A,B,C lar jufti-jufti bilan kesishmaydigan to`plamlar bo`lsin, yani $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$.

$$(ab)c=n((A\times B)\times C) \text{ va } a(bc)=n(A\times (B\times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko`paytmalar doirasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish yo`li bilan $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ ekanini ko`rsatish mumkin (kombinatorika bo`limidagi ko`paytma qoidasini eslang).

Demak $(ab)c=n((A\times B)\times C)=n(A\times(B\times C))=a(bc)$.

3^0. Ko`paytirishning qo`shishga nisbatan distributivligi

$$(\forall a,b,c \in Z_0)\ (a+b)c=ac+bc.$$

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A,B,C lar juft-jufti bilan kesishmaydigan to`plamlar bo`lsin. To`plamlar nazariyasidan ma'lumki

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ va $A\cap B=\varnothing \Rightarrow (A\times C)\cap(B\times C)=\varnothing$ chunki $A\times C$ va $B\times C$ dekart ko`paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$(a+b)\cdot c=n((A\cup B)\times C)=n((A\times C)\cup(B\times C))=n(A\times C)+n(B\times C)=ac+bc.$$

Demak, $(a+b)c=ac+bc$.

4^0. Yutuvchi elementning mavjudligi: $(\forall a \in Z_0)\ a \cdot 0 = 0$

Isboti: $a=n(A)$ $0=n(\varnothing)$ bo`lsin. $A\times\varnothing=\varnothing$ ekanligidan $a\circ 0=n(A\times\varnothing)=n(\varnothing)=0$

5^0 . Ko`paytirishning monotonligi.

$(\forall a,b,c \in Z_0,\ c\neq 0)\qquad a>b \Rightarrow ac>bc;$

$(\forall a,b,c \in Z_0)\qquad a\geq b \Rightarrow ac\geq bc;$

$(\forall a,b,c \in Z_0),\ c\neq 0)\qquad a<b \Rightarrow ac<bc.$

Isbot. Birinchisini isbotlab ko`rsatamiz:

$a>b \Rightarrow B\sim A_1\subset A$ bu yerda $n(A)=a$, $n(B)=b$ $A_1\neq\varnothing$ $A_1\neq A$.

U holda $B\times C\sim(A_1\times C)\subset(A\times C)$.

Demak, $n(B\times C)=n(A_1\times C)<n(A\times C)\Rightarrow bc<ac$.

6^0 . Ko`paytmaning qisqaruvchanligi

$$(\forall a,b,c,\in Z_0,\ c\neq 0)\ ac=bc \Rightarrow a=b$$

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik: $a\neq b$ bo`lsin. U holda yoki $a<b$, yoki $a>b$ bo`lishi kerak. $a<b$ bo`lsa, $ac<bc$ bo`lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a=b$ ekan.

3. Ko`paytmaning yig`indi orqali ta'rifi.

2-ta'rif. $a,b\in Z_0$ bo`lsin. $a$ sonning $b$ soniga ko`paytmasi deb, har biri a ga teng bo`lgan $b$ ta qo`shiluvchining yig`indisiga aytiladi.

$$ab=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\ marta}$$

Bundan $a\cdot 1=a$ va $a\cdot 0=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta'rif $a=n(A)$, $b=n(B)$, $A\cap B=\varnothing$ bo`lgan $A\times B$ dekart ko`paytma elementlarini sanash ma'lum bir qonuniyatga asoslanishiga bog`liq.

Misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y,z,t\}$

$A\times B$ dekart ko`paytmani quyidagi jadval ko`rinishida yozamiz:

Dekart ko`paytma elementlarini ustunlar bo`yicha sanasak, $3\times 4=3+3+3+3=12$ ga ega bo`lamiz.

(a,x)	(a,y)	(a,z)	(a,t)
(b,x)	(b,y)	(b,z)	(b,t)
(c,x)	(c,y)	(c,z)	(c,t)

4. **Bo`lishning ta'rifi.** Nomanfiy butun sonlar to`plamida bo`lish amalini ta'riflash uchun to`plamni sinflarga ajratish tushunchasidan foydalanamiz. $a=n(A)$ A to`plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli sinflarga ajratish mumkin bo`lsin. Butun nomanfiy a sonning natural b songa bo`linmasi quyidagicha ta'riflanadi:

4-ta'rif. Agar b son A to`plamni bo`lishdagi har bir qism to`plam elementlari soni bo`lsa, u holda a va b sonlarning bo`linmasi deb bu bo`linmadagi qism to`plamlar soniga aytiladi. Nomanfiy butun $a$ va $b$ sonlar bo`linmasini topish amali bo`lish, $a$ – bo`linuvchi, b – bo`luvchi, $a:b$ - bo`linma deyiladi. Yuqoridagi ta'riflarni misollar yordamida tushuntiramiz.

Misol. 12 ta gilosni har biriga 3 tadan nechta bolaga tarqatishdi. Masala savoliga javob bo`lish amali orqali topiladi 12:3=4. Masalani tahlil qilaylik: 12 ta elementga ega to`plam 3 ta elementga ega bo`lgan teng quvvatli qism to`plamlarga ajratilgan. Shuning bilan ular juft-jufti bilan kesishmaydi. Masalada nechta shunday qism to`plam borligi so`ralayapti. Javobdagi 4 soni 12 elementli to`plamning 3 elementli qism to`plamlar sonini bildiradi. Boshqacharoq masalani qaraylik. 12 ta gilosni 4 ta bolaga teng bo`lib berishdi. Har bir bolaga nechtadan gilos berishdi? Bu masala ham bo`lish amali bilan yechiladi: 12:4=3 (gilos). Bu yerda 3 soni boshqa ma'noda – 12 elementdan iborat to`plam berilgan teng quvvatli kesishmaydgan har bir to`rtta qism to`plamdagi elementlar sonini bildiradi. Bo`lish amalining to`g`ri bajarilganini tekshirish uchun ko`paytirish amaliga murojaat qilinadi, chunki bo`lish va ko`paytirish amallari o`zaro bog`liq. Bu bog`lanishni qaraylik. $a=n(A)$ son va A to`plam $b$ ta juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli $A_1,A_2,\dots,A_b$ qism to`plamlarga ajratilgan bo`lsin. U holda $c=a:b$ har bir shunday qism to`plamdagi elementlar soni bo`ladi, ya'ni $c=a:b=n(A_1)=n(A_2)=\dots n(A_b)$. Shartga ko`ra $A=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_b$, bo`lgani uchun

$n(A)=n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b)$ bo`ladi. Ammo $A_1, A_2, ..., A_b$ qism to`plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi. Yig`indi ta'rifiga ko`ra

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_b) = \underbrace{c + c + ... + c}_{b \text{ marta}}.$$

Ko`paytma ta'rifiga ko`ra $c \cdot b$ ga teng. Shunday qilib $a=c \cdot b$ ekan. Bundan esa a va b sonlarning bo`linmasi shunday $c$ sonki, u bilan $b$ sonining ko`paytmasi a ga teng bo`ladi. Bundan foydalanib bo`linmaga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

5-ta'rif. Butun nomanfiy a soni bilan b natural sonning bo`linmasi deb, shunday butun nomanfiy $c=a:b$ songa aytiladiki, uning $b$ soni bilan ko`paytmasi a ga teng bo`ladi. Bu ta'rifdan $a:b=c \Leftrightarrow a=c \cdot b$ ekanligi ko`rinadi.

5. Bo`lishning bajarilishi va bir qiymatliligi.

Bo`linma har doim ham mavjud bo`laveradimi degan savol tug`iladi?

2-teorema. Ikkita a va b natural sonning bo`linmasi mavjud bo`lishi uchun $b \leq a$ bo`lishi zarur.

Isbot. a va b natural sonlarning bo`linmasi mavjud bo`lsin, ya'ni $a=c \cdot b$ bajariladigan c natural son mavjud bo`lsin. Ixtiyoriy natural son uchun $1 \leq c$ ekanligi o`z-o`zidan ravshan. Bu tengsizlikning ikkala qismini $b$ natural songa ko`paytirib $b \leq c \cdot b$ ga ega bo`lamiz, $c \cdot b=a$ bo`lgani uchun $b \leq a$ bo`ladi. Teorema isbotlandi. $a=0$ va $b$ natural sonning bo`linmasi nimaga teng? Ta'rifga ko`ra, bu $c \cdot b=0$ shartni qanoatlantiruvchi $a$ sonidir. $b \neq 0$ bo`lgani uchun $c \cdot b=0$ tenglik $c=0$ bo`lganda bajariladi. Demak, $b \in N$ da $0:b=0$ bo`ladi.

3-teorema. Agar a va b natural sonlarning bo`linmasi mavjud bo`lsa, u yagonadir.

Bu teoremaning isboti ayirmaning yagonaligi haqidagi teorema isbotiga o`xshash qilinadi.

Butun nomanfiy sonni nolga bo`lish mumkin emasligini qaraymiz. $a \neq o$ va $b=0$ sonlar berilgan bo`lsin. a va b sonlarning bo`linmasi mavjud deb faraz qilaylik. U holda bo`linmaning ta'rifiga ko`ra $a=c \cdot 0$ tenglik bajariladigan butun nomanfiy $c$ soni mavjud bo`ladi, bundan $a=0$, farazimiz noto`g`ri, demak, $a \neq 0$ va

$b=0$ sonlarining bo`linmasi mavjud emas. Agar $a=0$ va $b=0$ bo`lsa, $0=c\cdot 0$ tenglik kelib chiqadi, undan esa a va b sonlarning bo`linmasi har qanday son bo`lishi mumkin degan xulosa chiqadi. Shuning uchun matematikada nolni nolga bo`lish ham mumkin emas deb hisoblanadi. Nomanfiy butun sonlarni bo`lish ta'rifidan «... marta katta» va «... marta kichik» munosabatlari aniqlanadi. Agar $a=n(A)$, $b=n(B)$, $a>b$ bo`ladigan $a$ va $b$ sonlar berilgan va bunda $A$ to`plamni B to`plamga teng quvvatli $c$ ta qism to`plamga ajratish mumkin bo`lsa $a$ soni $b$ sonidan $c$ marta katta, $b$ soni esa $a$ sonidan $c$ marta kichik deyiladi. $c$ sonini o`zi bo`linmani ifodalaydi. Shularni hisobga olib quyidagi qoidani hosil qilamiz:

Bir son ikkinchi sondan necha marta katta yoki kichik ekanini bilish uchun katta sonni kichik songa bo`lish zarur.

6. Yig`indini songa va sonni ko`paytmaga bo`lish qoidalari.

a) yig`indini songa bo`lish qoidasi:

4-teorema. Agar a va b sonlar c songa bo`linsa, u holda ularning $a+b$ yig`indisi ham c ga bo`linadi: $a+b$ yig`indini c ga bo`lganda hosil bo`ladigan bo`linma $a$ ni $c$ ga va $b$ ni $c$ ga bo`lganda hosil bo`ladigan bo`linmalar yig`indisiga teng, ya'ni $(a+b):c=a:c+b:c$.

Isbot. a soni c ga bo`lingani uchun $a=c\cdot m$ bo`ladigan $m=a:c$ natural son mavjud. Shunga o`xshash $b=c\cdot n$ bo`ladigan $n=b:c$ natural son mavjud. U holda $a+b=c\cdot m+c\cdot n=c(m+n)$. Bundan esa $a+b$ yig`indining $c$ ga bo`linishi va $a+b$ ni c ga bo`lganda hosil bo`ladigan bo`linma $m+n$ ga teng bo`lishi, ya'ni $a:c+b:c$ ekani kelib chiqadi. Bu qoidani to`plamlar nuqtaiy nazaridan tahlil qilsak quyidagicha:

$a=n(A)$, $b=n(B)$ va bunda $A\cap B=\varnothing$ bo`lsin.

Agar A va B to`plamlarning har birini $c$ ga teng quvvatli qism to`plamlarga ajratish mumkin bo`lsa, u holda bu to`plamlar birlashmalarini ham shunday ajratish mumkin. Bunda, agar A to`plamni ajratishdagi har bir qism to`plam $a:c$ elementga, B to`plamning har bir qism to`plami $b:c$ elementga ega bo`lsa, u holda $A\cup B$ to`plamning har bir qism to`plamida $a:c+b:c$ element bo`ladi.

b) Sonni ko`paytmaga bo`lish va sonni ikki sonning bo`linmasiga ko`paytirish qoidalari:

5-teorema. Agar a natural son b va c natural sonlarga bo`linsa, u holda $a$ sonni $b$ va $c$ sonlar ko`paytmasiga bo`lish uchun $a$ sonni $b(c)$ ga bo`lish va hosil bo`lgan bo`linmani $c(b)$ ga bo`lish yetarli:

$$a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b$$

Isboti: $(a:b):c=x$ deb faraz qilamiz, u holda bo`linmaning ta`rifiga ko`ra $a:b=c\cdot x$ bo`ladi, bundan shunga o`xshash $a=b\cdot(c\cdot x)$ bo`ladi. Ko`paytirishning gruppalash qonuniga asosan $a=(b\cdot c)\cdot x$. hosil bo`lgan tenglik $a:(b\cdot c)=x$ ekanini bildiradi.

6-teorema. Sonni ikki sonning bo`linmasiga ko`paytirish uchun bu sonni bo`linuvchiga ko`paytirish va hosil bo`lgan ko`paytmani bo`luvchiga bo`lish yetarli, ya'ni

$$a\cdot(b:c)=(a\cdot b):c$$

Isbot. Bu tenglikni ham sonni ko`paytmaga bo`lish qoidasiga o`xshash isbotlash mumkin.

Misollar.

1) (220+140):10=220:10+140:10=22+14=36;

2) 240:(10·2)=(240:10):2=24:2=12;

3) 12·(30:15)=(12·30):15=360:15=24.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Nomanfiy butun sonlar ko`paytmasi ta'rifini ayting. Ko`paytmaning mavjudlik va yagonalik shartlari qanday?
2. Ko`paytmaning qanday qoidalari bor? Ularni to`plamlar nazariyasiga ko`ra asoslang.
3. Ko`paytmaga yig`indi orqali ta'rif bering.
4. Nomanfiy butun sonlar bo`linmasini ta`riflang.
5. Bo`linmaga ko`paytma orqali ta'rif bering.
6. Bo`linmaning mavjudlik va yagonalik shartlarini ayting.
7. Yig`indi va ko`paytmani songa bo`lish qoidalarini aytib, isbotlab bering.

2.1.3. Nomanfiy butun sonlar to`plamini aksiomatik asosda qurish. Qo`shish aksiomalari.

1. Nomanfiy butun sonlar to`plamini aksiomatik asosda qurish.

Natural sonlar to`plamini aksiomatik metod asosida qurish uchun dastlab aksiomalar sistemalari va ularning xossalarini ko`rib chiqishimiz kerak.

Matematik tushunchalar dastlab kishilik jamiyatining rivojlanishi bilan yuzaga kelgan. Bu tushunchalar aniq ta'riflarga ega bo`lmagan.

Masalan, sharni ko`z oldiga keltirishda uni to`pga o`xshatganlar. Tushunchalarni aniqlashga muhtojlik tug`ilgan, ya'ni tushunchalar orasidagi bog`lanishlarni aniqlashga zaruriyat yuzaga kelgan, misol qilib aytganda, aylana diametri tushunchasi dastlab aylanani teng ikkiga bo`luvchi vatar deb tushunilgan. Keyinchalik bu tushunchani eramizdan oldingi VI asrda yashagan qadimgi Gretsiyaning Milet shahrida yashagan Fales aylana diametri deganda albatta markaz orqali o`tuvchi vatarni tushunish kerakligini aytgan va isbotlab bergan.

Shundan keyin esa aylana diametri deganda uning markazi orqali o`tib ikkita nuqtasini tutashtiruvchi to`g`ri chiziq kesmasi tushunilgan. Bu ta'rifni yanada aniqroq qilish uchun «aylana», «aylana markazi», «to`g`ri chiziq kesmasi» so`zlarining ma'nolarini bilmoq kerak. Bu so`zlarga ta'rif berilsa, yangi ta'rif ichidagi ayrim so`zlarga yana ta'rif berish kerak bo`ladi. Shuning uchun matematik nazariyani yaratishda ayrim tushunchalarni ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar deb qabul qilib, barcha nazariyani shularga asosan qurmoq kerak.

Maktab planimetriya kursida «nuqta», «to`g`ri chiziq» va «masofa» tushunchalari, xuddi shuningdek matematikadagi «to`plam» va «son» tushunchalari shular jumlasiga kiradi. Biror nazariyani aksiomatik qurishda quyidagicha yondashiladi. Ba'zi bir ta'riflanmaydigan tushunchalar boshlang`ichlar sifatida olinib, bu tushunchalar bilan bog`liq ta'riflanmagan munosabatlar ko`rsatilib, keyinchalik bu munosabatlar va tushunchalarning xossalarini ifodalovchi bir qancha mulohazalar shakllantiriladi. Bu mulohazalarga ifodalayotgan nazariyaning aksiomalari deyiladi.

Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalar kiritilgandan keyin nazariyaning rivojlanishi faqat mantiqiy fikrlash asosida boradi. Aksiomatik nazariyani qurishda tushuncha, munosabat va aksiomalar ixtiyoriy bo`lmasdan, ular ba'zi bir haqiqiy ob'yektlar va ularning xossalarini yaqqol ko`rsatishi lozim. Masalan, ixtiyoriy uchta A, B va M nuqtalar uchun, M nuqtadan A va B nuqtalargacha masofalarning yig`indisi bu nuqtalar orasidagi masofadan kichik degan aksioma aytilsa, u holda haqiqatan hayotga aloqasi bo`lmagan nazariya yuzaga kelar edi. haqiqatda esa $|MA|+|MB|\geq|AB|$. Shunday qilib, aksiomatik nazariya reallikning matematik modelini berishi kerak.

2. Aksioma sistemasi modellari.

Agar munosabatlari bilan berilgan to`plamda aksiomalar sistemasini barcha aksiomalari bajarilsa, u holda munosabatlari bilan berilgan to`plam aksiomalar sistemasini modeli deyiladi. Biz quyidagi aksiomalar sistemasining modellarini qaraylik.

1-misol. Quyidagi uchta aksiomani qanoatlantiruvchi $a{\sim}b$ ekvivalentlik munosabati bilan berilgan aksiomalar sistemasini qaraymiz:

1) barcha a lar uchun $a{\sim}a$ bajariladi;

2) ixtiyoriy a va b lar uchun $a\sim b$ dan $b{\sim}a$ kelib chiqadi;

3) ixtiyoriy a,b va c lar uchun $a\sim b$ va $b{\sim}c$ dan $a{\sim}c$ kelib chiqadi.

2-misol. $a<b$ birgina munosabat va quyidagi aksiomalar bilan aniqlanuvchi aksiomalar sistemasini qaraylik:

1) Ixtiyoriy a va b lar uchun $a<b$ dan $b<a$ yolg`onligi kelib chiqadi;

2) Ixtiyoriy a va b lar uchun $a<b$ va $b<c$ dan $a<c$ kelib chiqadi.

Bu aksioma qat'iy tartiblanganlik munosabatini ifodalaydi. Bu sistema interpretatsiyasini quyidagicha ifodalash mumkin: talabalar to`plamida «$a$ talaba $b$ talabadan baland», «$a$ talabaning yoshi $b$ talabaning yoshidan katta» va hokazo. Bu sistemaga quyidagi aksiomani qo`shamiz.

3) $a\neq b$ ekanligidan $a<b$ yoki $b<a$ kelib chiqadi. Endi biz qat'iy chiziqli tartib aksiomalar sistemasiga ega bo`ldik. Berilgan aksiomalar sistemasining ikkita modeli bir-biridan tashqi ko`rinishi bilan farq qilishi mumkin.

Masalan, agar $a<b$, $b<c$ va $a<c$ hamda $1<2$, $2<3$ va $1<3$ desak, $X=\{a;b;c\}$ *ва* $Y\{1,2,3\}$ to`plamlar tartib aksiomalari sistemasi modelini ifodalaydi. Birinchi modelni 2-modelga aylantirish uchun $a$ ni 1, $b$ ni 2, $c$ ni 3 deb olish yetarli. Ikkita model bir-biridan tashqi ko`rinishi bilan farq qilib, mazmuni bir xil bo`lsa, izomorf modellar deyiladi.

Aksiomalar sistemasi modeli real dunyo xossalarini aniqroq ifodalashi uchun ular mantiqan bir qancha talablarni bajarishi lozim.

Birinchi navbatda aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo`lishi kerak. Boshqacha aytganda berilgan aksiomalar sistemasida bir paytda rost va yolg`on tasdiq kelib chiqmasligi kerak.

Masalan, quyidagi ko`rinishdagi aksiomalar sistemasi bo`lishi mumkin emas.

1) Ixtiyoriy a element uchun, shunday b element mavjud, bunda $a\sim b$;
2) Hech bir a element $a\sim a$ bajarilmaydi;
3) Agar $a\sim b$ bo`lsa, u holda $b\sim a$;
4) Agar $a\sim b$ va $b\sim c$ bo`lsa, u holda $a\sim c$.

Haqiqatan ham biror a elementni olaylik. 1- aksiomaga asosan shunday b element topiladiki, $a\sim b$. 3- aksiomaga asosan $b\sim a$. 4- aksiomaga asosan esa, ya'ni $a\sim b$ va $b\sim a$ dan $a\sim a$ kelib chiqadi. Bu esa 2- aksiomaga ziddir.

Ikkinchidan, aksiomalar sistemasi bir-biriga bog`liq bo`lmasligi, ya'ni bir aksioma aksiomalar sistemasining boshqa aksiomalaridan kelib chiqmasligi kerak. Agar biz yuqoridagi sistemani 4- aksiomasini agar $a\sim b$ va $b\sim c$ bo`lsa, u holda $a\sim c$ deb olsak. u aksioma ortiqcha bo`ladi, chunki uni boshqa aksiomalardan keltirib chiqarish mumkin.

Uchinchidan, aksiomalar sistemasi qat'iy bo`lishi kerak.

3. Natural sonlar to`plami aksiomatikasi.

Natural sonlar aksiomatikasini qurish uchun dastlab natural sonlar tushunchasining kelib chiqishi va uning miqdoriy nazariyasini ko`rib o`tamiz.

Natural sonlar tushunchasi ham matematikaning boshqa tushunchalari kabi amaliy ehtiyojlardan kelib chiqqan. Qadim davrlarda chekli to`plamlar elementlarini solishtirishga zaruriyat tug`ilgan. Masalan, ov qurollari qabiladagi barcha ovchilarga yetadimi, tutilgan baliqlar qabilaning barcha a'zolariga yetadimi va hokazo. Bu solishtirishning oddiy usuli sanamasdan ikki to`plam elementlari orasida yoki bir to`plam bilan ikkinchi to`plam to`plam osti elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatishdan iborat bo`lgan. Ammo bunday moslik o`rnatish bir-biridan uzoq bo`lgan to`plamlar o`rtasida mumkin bo`lmagan. Shuning uchun bunday hollarda vositachi to`plamlardan foydalanilgan, ya'ni barmoqlar, toshlar, chig`anoqlar va boshqalar. Masalan, ikkita otardagi qo`ylar to`plamini solishtirish uchun birinchi otardagi qo`ylar to`plamiga teng chig`anoqlarni olib, ikkinchi otarga borib u yerdagi qo`ylar to`plami bilan solishtirganlar. Vositachi to`plamlardan faqat otardagi qo`ylar to`plamini solishtirishgina emas, barcha boshqa to`plamlarni solishtirishda ham foydalanganlar. Shuning bilan birga vositachi to`plam nomlari boshqa to`plamlar sonlarini ifodalash uchun ham ishlatilgan. Masalan, «beshta o`rik» deyish o`rniga «qo`l o`rik», «o`nta olma» deyish o`rniga «ikkita qo`l olma», «yigirma qop bug`doy» deyish o`rniga «odam qop bug`doy» va h.k. Umuman, to`plam elementlari sonini vositachi to`plamlar yordamida ifodalaganlar. Keyinchalik sonlarni har safar bitta birlik qo`shib 1,2,3,... ko`rinishda qator qilib yozganlar. Shunday qilib natural sonlar qatori kelib chiqqan. «Natural sonlar» terminini birinchi bo`lib, rim olimi Boesiy (eramizdan oldingi 475-524 yillar) qo`llagan Natural sonlar tushunchasini paydo bo`lishi matematikani rivojlanishida muhim burilish bo`lib, sonlarni nazariy jihatdan o`rganuvchi «arifmetika» fani yuzaga kelishga sababchi bo`ldi. Dastlab olimlar tomonidan katta sonlar o`rganila boshlandi. Buni qadimgi grek olimlari traktatlarida ko`rish mumkin.

XIX asrda Georg Kantor tomonidan to`plamlar nazariyasiga asos solingandan keyin uning asosida natural sonlar nazariyasi qurildi. Nazariyani qurishga asos qilib chekli to`plamlar va o`zaro bir qiymatli moslik olingan. $A$ va $B$ to`plamlar elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin bo`lsa, ular teng sonli deyiladi. «$A$ to`plam B to`plamga teng sonli» munosabati refleksiv, simmetrik va tranzitiv xossalarga ega. Bundan ko`rinadiki, teng sonlilik munosabati ekvivalentlik munosabati bo`lib, u butun chekli to`plamlar majmuasini ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Bitta sinfda turli xil to`plamlar bo`lishi mumkin, faqat ularning barchasi uchun teng sonlilik xossasi o`rinli, boshqacha aytganda bir xil sondagi elementlarga ega bo`ladi. Masalan, $\{a;b;c\}$ elementlarni saqlovchi sinfga, uchburchaklar sinfi, uchta tayoqcha va hokazo.

**Ta`rif.** Bir-biriga ekvivalent bo`sh bo`lmagan chekli to`plamlar umumiy xossasiga natural sonlar deyiladi.

Yuqoridagi misolda 3 soni asosiy xossa hisoblanadi.

M to`plam bilan aniqlangan son $|M|$ yoki $n|M|$ bilan belgilanadi va $M$ to`plamning quvvati deyiladi.

Ixtiyoriy to`plamga bitta element qo`shib u to`plamga ekvivalent bo`lmagan to`plamga ega bo`lamiz. Shunday jarayonni davom ettirsak, bir-biriga ekvivalent bo`lmagan to`plamlarning cheksiz ketma-ketligini hosil qilamiz va ularni 1,2,3, ..., n , ... ko`rinishda belgilaymiz. Chekli ikkita $A$ va $B$ to`plamlarni qaraylik. Ularga mos natural sonlarni a va b bilan belgilaymiz, bu to`plamlar ekvivalent bo`lishi ham, bo`lmasligi ham mumkin. Agar $A \sim B$ bo`lsa A va B to`plamlar bir sinfga tegishli bo`lib, ularga mos keluvchi sonlar teng bo`ladi, ya'ni $a=b$; Agar $A$ va $B$ lar turli sinflarga tegishli bo`lsalar, ularga mos keluvchi sonlar turlicha bo`ladi. Aytaylik $A$ to`plam a elementga, B to`plam $b$ elementga ega bo`lsin. Agar A to`plam $B$ to`plamning to`plam ostisi $B_1$ ga teng sonli bo`lsa, u holda a soni b sonidan kichik deyiladi va $a<b$ kabi yoziladi.

$$(a<b) \Leftrightarrow (A \sim B_1;\ B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B,\ B_1 \neq \varnothing.$$

$a<b$ munosabat asimmetrik va tranzitiv bo`lgani uchun bu munosabat tartib munosabati ekanini ko`rsatish mumkin. Shunday qilib N natural sonlar to`plami tartiblangan. Chekli to`plamlar ustidagi amallarga, shu to`plamlarga mos sonlar ustidagi amallar mos keladi.

Masalan, A va B to`plamlar kesishmasi $A \cap B = \varnothing$ hamda $a=n(A)$, $b=n(B)$ bo`lsin. U holda $C=AUB$ to`plamga $c$ soni mos keladi va u $a+b$ bilan belgilanib $a$ va $b$ sonlarining yig`indisi deyiladi. A va B to`plamlar birlashmasi kommutativ va assotsiativ xossaga ega ekanligidan natural sonlar yig`indisi ham shu xossalarga ega ekanligi kelib chiqadi.

Sonlarning yig`indisi to`plamlar birlashmasiga bog`liq bo`lsa, sonlarning ayirmasi to`plamga to`ldiruvchi bilan bog`liq. Aytaylik, $A$ chekli to`plam, B esa uning xususiy to`plam ostisi bo`lsin va $a=n(A)$, $b=n(B)$ bo`lsin. Sonlarning $a-b$ ayirmasi deb, $B$ ni $A$ ga to`ldiruvchi B_A – to`plam quvvatiga aytiladi.

$B_A^1 \cup B = A$ bo`lishidan $(a-b)+b=a$ bo`ladi.

Natural sonlarni ko`paytirish amali ikki to`plam Dekart ko`paytmasi elementlarining sonini sanashga bog`liq. Aytaylik $a=n(A)$ va $b=n(B)$ bo`lsin. $a$ va $b$ natural sonlarning ko`paytmasi deb $A\times B$ to`plam ko`paytmasiga aytiladi, boshqacha aytganda A va B to`plamlar elementlaridan tuzilgan juftliklar soniga aytiladi.

To`plamlar Dekart ko`paytmasi kommutativlik xossasiga ega bo`lmasada, ko`paytirishda $n(A\times B)=n(B\times A)$. Natural sonlarni ko`paytirish kommutativ va assotsiativ.

**4. Qo`shish aksiomalari. Natural sonlar to`plamini qo`shish aksiomalari asosida qurish.** N natural sonlar to`plami uchun aksiomalar sistemasini turli usullar bilan qurish mumkin. Asosiy tushunchalar uchun sonlar yig`indisi yoki tartib munosabati yoki bir son ketidan bevosita ikkinchi son kelish munosabati kabilarni olish yordamida tuzish mumkin. Har bir hol uchun asosiy tushunchalar xossalarini ifodalovchi aksiomalarni berish lozim. Biz asosiy tushuncha deb qo`shish amalini olib aksiomalar sistemasini beramiz. Agar bo`sh bo`lmagan N to`plamda quyidagi xossalarga ega qo`shish deb ataluvchi $(a;b)\Rightarrow a+b$ binar algebraik amal aniqlangan bo`lsa, $N$ to`plamga natural sonlar to`plami deyiladi (bunda $a+b$ sonni $a$ va $b$ sonlarning yig`indisi deymiz).

1) qo`shish kommutativ, ya'ni $a\in N$ va $b\in N$ bo`lsa, u holda $a+b=b+a$;

2) qo`shish assotsiativ, ya'ni $a\in$N, $b\in$N, $c\in$N bo`lsa, u holda $a+(b+c)=(a+b)+c$;

3) ixtiyoriy ikki a va b natural sonlari uchun $a+b$ yig`indi a sonidan farqli $a+b\neq a$;

4) N to`plamning bo`sh bo`lmagan ixtiyoriy $A$ to`plam ostida shunday a soni mavjudki, a sonidan farqli barcha $x \in A$ sonini $x=a+b$ shaklida yozish mumkin, bunda $b \in N$.

1– 4 aksiomalar sistemasi, natural sonlar arifmetikasini qurish uchun yetarli.

Natural sonlar arifmetikasini bu aksiomalar asosida qurganda chekli to`plam xossalaridan foydalanishga ehtiyoj qolmaydi.

Birinchi, to`rtinchi aksiomalar sistemasidan uchinchini isbotlaymiz:

Bizga ma'lumki, A va B to`plam bo`sh bo`lmasa u holda $B$ to`plam AUB to`plamdan farq qiladi va $b \neq a+b$ munosabat bajariladi. 3- aksiomada berilishicha yig`indi birinchi qo`shiluvchidan farq qiladi. Shuning uchun $b \neq a+b$ munosabatda $b$ ni birinchi qo`shiluvchi o`rniga qo`yish kerak. Buni esa birinchi, ya'ni $a+b=b+a$ aksiomaga asosan amalga oshiramiz. $b \neq a+b$ da 1-aksiomaga asosan $b \neq a+b$ ga ega bo`lamiz. Odatda, ko`rgazmaliliksiz 1 – 4- aksiomalar vositasida bajarilgan isbotlar juda uzun bo`ladi, lekin ulardan kelib chiqadigan natijalarni nafaqat natural sonlar to`plami, balki 1- 4 - aksiomalar sistemasi ixtiyoriy modellariga qo`llash mumkin bo`ladi. Bizga yaxshi tanish bo`lgan aksiomalar sistemasi modellaridan biri bu oddiy ma'noda qo`shish amali berilgan {1;2;3;4; ...} to`plamdir. Bu model bilan birga boshqa modellar ham mavjud. Masalan: {-1;-2;-3;-4; ...} sonli to`plamda ham qo`shish amali oddiy ma'noda aniqlangan. Ba'zi bir qo`shish aksiomalar sistemasida qo`shish amali odatdagi qo`shish amalidan farq qiladi.

Masalan, agar oddiy qo`shish amali bilan berilgan {3;4;5; ...} sonli to`plamni qaraydigan bo`lsak, bu to`plamda 4) aksiomalar bajarilmaydi, ya'ni 4 va 5 sonlarini 3 sonlarining yig`indisi ko`rinishida yozish mumkin bo`lmaydi. Agar qo`shishni $a*b=a+b-2$ ko`rinishida qabul qilinsa, bu to`plamda 1– 4 - aksiomalar bajariladi.

Masalan: 4=3*3=3+3-2, 5=3*4=3+4-2

Agar qo`shish amali o`rniga ko`paytirish amali qabul qilinsa, ushbu aksiomalar $\{2;2^2;2^3;2^4....\}$ to`plamda ham bajariladi.

Yuqorida qaralgan to`plamlar turlicha va ularda qo`shish amali berilgan oddiy ma'nodagi qo`shish amalidan farq qilishiga qaramasdan 1– 4- aksiomalarga asoslangan holda natural sonlarni qo`shishga oid bo`lgan barcha isbotlar har qanday aksiomalar sistemasi modellari uchun o`rinli bo`ladi.

1- 4- aksiomalar sistemasi barcha modellari qat'iy izomorfligini isbotlash mumkin. Bu aksiomalar sistemasi uchun ikkita interpretatsiyaning izomorfligini quyidagicha isbotlaymiz:

Aksiomalar sistemasining birining interpretatsiyasi oddiy ma'nodagi qo`shish amali bilan berilgan $\{1;2;3;...\}$ to`plam bo`lsin, ikkinchi interpretatsiya oddiy ma'noda ko`paytirish amali bilan berilgan. Bu ikki interpretatsiyaning izomorfligini ko`rsatish uchun har bir natural n soniga $2^n$ sonini mos qo`yish lozim bo`ladi. U holda $m+n$ soniga $2^{m+n}$ soni mos qo`yiladi.

$2^{m+n}= 2^m\ 2^n$ ekanligidan $n \to 2^n$ mos qo`yuvchi akslantirish jarayonida qo`shish amali ko`paytirish amaliga o`tadi.

5. Natural sonlar to`plamida tartib munosabati va uning xossalari.

N natural sonlar to`plamiga tartib munosabatini kiritamiz. Bunda biz birinchi va to`rtinchi aksiomalarga va elementlar yig`indisi tushunchalariga asoslanamiz.

«a natural son b natural sondan kichik» ta'rifini keltirib chiqarishda chekli to`plamlarga bog`liqlikdan foydalanamiz.

Bizga ma'lumki, chekli A to`plam bilan bo`sh bo`lmagan chekli $B$ to`plam birlashmasi $C=A\cup B$ $(A\cap B=\emptyset)$ A to`plamdagidan ko`p elementlarga ega bo`ladi. Bu esa quyidagi ta'rifga olib keladi:

Ta'rif. Agar a va b natural sonlari uchun shunday bir c natural soni mavjud bo`lib, $a+c=b$ munosabat o`rinli bo`lsa, $a$ natural soni $b$ natural sonidan kichik deyiladi va $a<b$ ko`rinishda yoziladi.

Masalan, $5<7$ bu holda shunday natural son 2 mavjudki, $2+5=7$ bo`ladi.

$a<b$ munosabatdan foydalanib, 4- aksiomani quyidagicha ifodalash mumkin:

4^1-aksioma. N natural sonlarning bo`sh bo`lmagan A to`plam ostida eng kichik son bor, ya'ni shunday sonni $a$ desak, $A$ to`plamdagi a dan farqli barcha x sonlari uchun $a<x$.

Endi $<$ munosabatini N to`plamda qattiq tartib munosabati ekanini ko`rsatamiz, ya'ni bu munosabat tranzitiv va antisimmetrik. Aytaylik, $a<b$ va $b<c$

bo`lsin. Ta'rifga asosan shunday $k$ va $l$ sonlari topiladiki $b=a+k$, $c=b+l$ bo`ladi. U holda $c=(a+k)+l$.

2- aksiomaga asosan $c=a+(k+l)$, $k+l$ natural son bo`lgani uchun tenglikdan $a<c$. Demak, $a<b$ va $b<c$ dan $a<c$ kelib chiqadi. Bu esa < munosabati tranzitiv ekanligini ko`rsatadi.

< munosabati asimmetrik ekanligi 4- aksiomadan ko`rinadi. Bu aksiomaga asosan natural sonlar to`plamining bo`sh bo`lmagan A to`plamida eng kamida bitta eng kichik element $a$ bor. A da bu element bir qiymatli aniqlangan va bundan boshqa eng kichik element yo`q ekanligini ko`rsatamiz. Aytaylik $a$ dan boshqa eng kichik $b$ element bor bo`lsin, u holda $a<b$ va $b<a$ bajariladi. Bunday bo`lishi esa mumkin emas. Shunday qilib < munosabati N to`plamda qattiq tartib munosabati ekan. Bu tartibning chiziqli ekanini ko`rsatamiz, ya'ni ixtiyoriy ikkita turli xil $a$ va $b$ natural sonlar uchun $a<b$ va $b<a$ munosabatlardan biri bajariladi. Haqiqatan ham ikkita elementdan tashkil topgan A={$a$; $b$} to`plamni olaylik.

4^1- aksiomaga asosan bu to`plamda eng kichik element bo`lishi kerak. Agar bu element a bo`lsa, $a<b$, agar bu element $b$ bo`lsa, $b<a$ munosabat o'rinli.

Endi natural sonlarni qo`shish monotonlik xossasiga ega ekanligini ko`rsatamiz.

Agar $a<b$ bo`lsa, u holda ixtiyoriy $c\in N$ uchun $a+c<b+c$ ga ega bo`lamiz (tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil soni qo`shsak, tengsizlik belgisi o`zgarmaydi). Aslida ta'rifga ko`ra $a<b$ deganda shunday bir $k$ sonni mavjud bo`lib $b=a+k$ ekanini bildiradi. Lekin $b+c=(a+k)+c$. birinchi va ikkinchi aksiomalarga ko`ra $b+c=(a+k)+c=a+(k+c)=a+(c+k)=(a+c)+k$.

Demak, $b+c=(a+c)+k$. Bu esa $a+c<b+c$ ekanini bildiradi.

Endi natural sonlarni qo`shish qisqaruvchanligini ko`rsatamiz, ya'ni $a+c=b+c$ bo`lsa, u holda $a=b$ ga teng. Aslida quyidagi uch hol bo`lishi mumkin: $a<b$, $b<a$, $a=b$; Ammo $a<b$ bo`lsa, u holda $a+c<b+c$ bo`ladi, biz esa $a+c=b+c$ deb oldik. Demak $a<b$ hol mumkin emas. Shu sababli $b<a$ hol ham mumkin emas, faqat $a=b$ bo`lgan hol qoladi.

6. Natural sonlar to`plamining cheklanmaganligi va diskretligi.

4^1 - aksiomaga ko`ra $N$ natural sonlar to`plamida eng kichik son mavjud. Bu son 1 bilan belgilanadi va birlik deb ataladi. N natural sonlar to`plamida eng kichik son bo`lgani uchun, ixtiyoriy $a \in N$, son uchun $a \neq 1$ va $1<a$ bajariladi. Bu deganimiz $a=1+b$, bu yerda $b \in N$ natural sonlar to`plamida eng katta son mavjud emas, haqiqatan ham ixtiyoriy $a \in N$ uchun $a<a+1$, demak $a$ $N$ to`plam uchun eng katta son bo`la olmaydi. Shunga ko`ra N natural sonlar to`plami quyidan 1 soni bilan chegaralanib, yuqoridan esa chegaralanmagan deb aytiladi.

Barcha sonlar o`rtasida a sonidan keyin keluvchi eng kichik $a+1$ son bor. Haqiqatan ham a sonidan keyin b soni kelsin desak, u holda shunday c natural soni topiladiki $b=a+c$.

Ammo $1 \leq c$ bo`lganidan $a+1 \leq a+c$ ga ega bo`lamiz, bundan esa $a+1 \leq b$. Bu esa $a+1$ soni a sonidan keyin keluvchi eng kichik son ekanligini ko`rsatadi.
Bundan keyin a sonidan keyin keluvchi eng kichik songa, a sonidan bevosita keyin keluvchi son deyiladi. Shunday qilib, N natural sonlar to`plamidagi har bir elementdan bevosita keyin keluvchi element mavjud.

Bu xossa natural sonlar to`plamining diskretligi deyiladi. «$b$ soni $a$ sonidan bevosita keyin keladi» munosabatiga «$a$ soni $b$ sonidan bevosita oldin keladi» munosabati teskari hisoblanadi. Boshqacha aytganda, $a$ soni $b$ sonidan bevosita oldin keladi» munosabati faqat va faqat $b=a+1$ bo`lganda o`rinli. 1 sonidan oldin keluvchi son yo`q, chunki birinchi va uchinchi aksiomalarga ko`ra $1=a+1$ bajarilmaydi. 1 dan boshqa barcha natural sonlar uchun uning oldidan keluvchi faqat bitta va bitta natural son mavjudligini ham ko`rsatish mumkin. Haqiqatan ham $b \neq 1$ bo`lsa, u holda $1<b$ (1-eng kichik natural son), bundan esa shunday $a \in$ N natural soni mavjud bo`lib, $b=1+a=a+1$ ekani ko`rinadi. Demak, $b$ natural soni $a$ dan keyin kelar ekan, ya'ni $b$ natural soni $a$ dan bevosita keyin keladi. Endi $b$ dan boshqa $a$ dan bevosita keyin keluvchi natural son yo`qligini ko`rsatamiz. Faraz qilaylik, $c \neq a$, $c$ $b$ dan bevosita keyin keluvchi son bo`lsin. U holda $b= a+1$; b=c+1 bo`ladi, bundan $a+1=c+1$:

Qo`shishning qisqaruvchanlik xossasiga asosan $a=c$, bu esa farazimizga qarama-qarshi. Demak, b son a sonidan bevosita keyin keluvchi yagona son ekan.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Matematik tushunchalar deganda nimani tushunasiz?
2. Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalarga misollar keltiring.
3. Nazariyani aksiomatik qurishda nimalar talab qilinadi?
4. Aksiomalar sistemasi modellariga misollar keltiring.
5. Aksiomalar sistemalari modellari qachon izomorf deyiladi?
6. Natural sonlar tushunchasining paydo bo`lishini tushuntiring.
7. Natural sonlarga ta'rif bering.
8. Natural sonlar ustidagi amallarni to`plamlar nazariyasi asosida tushuntiring va xossalarini ayting.
9. Natural sonlar to`plamiga ta'rif bering.
10. Qo`shish aksiomalarini izohlab aytib bering.
11. Qo`shish va ko`paytirish amali bilan berilgan aksiomalar sistemasining interpretatsiyasi izomorfligini ko`rsating.
12. a natural soni b natural sonidan qachon kichik deyiladi?
13. Kichik munosabati N to`plamda tartib munosabati bo`lishini izohlang.
14. Natural sonlar to`plamini chegaralanmaganligi va diskretligini tushuntiring.

2.1.4. Matematik induksiya metodi

1. Peano aksiomatikasi.

Natural sonlarni qo`shish tushunchasi natural sonlar to`plami aksiomatikasini qurish uchun yagona asos emas. Shuning bilan birga bu tushuncha sodda emas. Ma`lumki, $n$ natural soniga m natural sonini qo`shishni qadamma-qadam, ya'ni qadamga yana bitta birlikni qo`shish yordamida hosil qilamiz. Masalan, 5+3=(((5+1)+1)+1).

Shuning uchun, qo`shish operatsiyasini eng sodda ya'ni 1 sonini qo`shish operatsiyasiga keltirish mumkin. n +1 soni bevosita n sonidan keyin kelganligi uchun keyingi songa o`tish to`g`risida gapirish mumkin. Shunga ko`ra, natural sonlar to`plamida asosiy tushuncha sifatida «b soni a sonidan bevosita keyin keladi» tushunchasini tanlash mumkin.

Natural sonlar nazariyasini aksiomatik qurishda Peano ta'riflanmaydian tushuncha sifatida "natural son" va ta'riflanmaydian munosabat sifatida "...dan keyin keladi" degan munosabatni asos qilb olgan.

Peano aksiomalari:

1. Hech qanday sondan keyin kelmaydigan 1 soni mavjud.

Bu aksiomadan ko`rinadiki, natural sonlar to`plamida birinchi element aniqlanan bo`lib, u 1 sonidan iboratdir.

2. Har qanday a son uchun undan bevosita keyin keluvchi faqat va faqat bitta son a^* soni mavjud. Ya'ni $a=b \Rightarrow a^*=b^*$.

Bu aksioma natural sonlar to`plamining cheksiz ekanligini ifodalaydi.

3. 1 dan boshqa ixtiyoriy natural son faqat va faqat bitta natural sondan keyin keladi $a^*=b^* \Rightarrow a=b$.

Bu aksiomadan ko`rinadiki, natural sonlar to`plami qat'iy tartiblangan to`plamdir.

4. Agar biror F qoida 1 soni uchun o`rinli ekanligi isbotlangan bo`lsa va uning n natural soni uchun o`rinli ekanligidan navbatdagi natural son $n$+1 uchun to`g`riligi kelib chiqsa, bu $F$ qoida barcha natural sonlar uchun o`rinli bo`ladi.

Bu aksioma matematik induksiya aksiomasi deyiladi va unga matematik induksiya metodi asoslanadi.

2. Matematik induksiya metodi.

X to`plam berilgan bo`lsin. Mulohaza yuritishning quyidagi ikki usulini qaraymiz:

1) biror tasdiq ba'zi $x \in X$ elementlar uchun to`g`ri bo`lsa, bu tasdiq barcha $x \in X$ lar uchun to`g`ri bo`ladi;

2) biror tasdiq har bir $x \in X$ elementlar uchun o`rinli bo`lsa, bu tasdiq barcha $x \in X$ lar uchun o`rinli bo`ladi.

Mulohaza yuritishning birinchi usuli to`liqmas induksiya, ikkinchi usuli esa to`liq (mukammal) induksiya deyiladi («induksiya» so`zi lotincha so`z bo`lib, o`zbek tilida «hosil qilish», «yaratish» ma'nosini bildiradi).

Matematik induksiya metodi quyidagidan iboratdir:

I. $n=1$ uchun berilgan $A(n)$ predikatning rostligi tekshiriladi. (Agar $n=1$ uchun berilgan $A(n)$ predikat rost bo`lsa, navbatdagi qadamga o`tiladi, aksincha bo`lsa, u holda berilgan predikat barcha $n$ lar uchun yolg`on deb, umumiy xulosa chiqariladi).

II. $n=k$ uchun $A(n)$ predikat rost deb faraz qilinadi.

III. $n=k+1$ uchun $A(n)$ predikatning rostligi, ya'ni $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ isbotlanadi. Shundan so`ng, $A(n)$ predikat n ning barcha qiymatlarida rost deb umumiy xulosa chiqariladi.

Masalan,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

tenglikning barcha n natural sonlar uchun to`g`riligini isbotlang.

n ning o`rniga $n=1$ dan boshlab qiymatlar qo`yish bilan bu tenglikni n ning ma'lum bir qiymatigacha to`g`riligiga ishonch hosil qilish mumkin, ya'ni

$n = 1$ bo`lsa, $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1$, demak $1=1$.

$n = 2$ bo`lsa, $\frac{2(2+1)(2\cdot2+1)}{6} = \frac{2\cdot3\cdot5}{6} = 5$, demak $1^2+2^2=5$.

$n = 3$ bo`lsa, $\frac{3(3+1)(2\cdot3+1)}{6} = \frac{3\cdot4\cdot7}{6} = 14$, demak $1^2+2^2+3^2=14$.

Ammo n ning katta qiymatlari uchun tenglikning to`g`riligini ko`rsatish qiyin. Boshqacha aytganda barcha $n$ natural sonlar uchun tenglikning to`g`riligini ko`rsatishga qodir emasmiz. Shu sababli, tenglikni isbotlashda boshqacha muhokama yuritamiz. Dastlab tenglikni $n=1$ uchun to`g`riligini ko`rsatamiz, buni biz ko`rsatdik. Keyinchalik bu tenglikni biror n qiymat uchun to`g`ri deb, undan bevosita keyin keluvchi $n+1$ qiymat uchun to`g`riligini isbotlaymiz, ya'ni

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

to`g`ri deb,

$$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad (2)$$

to`g`riligini isbotlaymiz.

Buning uchun (1) tenglikning chap tomoniga $(n+1)^2$ hadni qo`shib, o`ng tomonida n ni $n+1$ ga almashtiramiz. (1) da n ta natural sonlar kvadratlarining yig`indisi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng bo`lgani uchun (2) ni chap tomonida almashtirish bajaramiz va quyidagini hisoblaymiz.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Demak, n ta natural sonlar kvadratlarining yig`indisi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng ekan.

Bizning bu muhokamamiz mantiqiy jihatdan to`la emas, chunki bizning «ertami kechmi $n$ ni barcha qiymatlariga yetamiz» iborasini aksiomalar yordamida asoslab bo`lmaydi. Asoslash uchun quyidagicha yondashamiz. (1) tenglik to`g`ri bo`lgan $n$ ning qiymatlar to`plamini A bilan belgilaymiz.

Biz 1 sonini A ga tegishli ekanini bilamiz ($n=1$ uchun tenglik o`rinli) $n\in A$ bo`lishidan $n+1\in A$ (agar tenglik n ning ba'zi bir qiymatlari uchun to`g`ri bo`lsa, u $n+1$ uchun ham to`g`ri). U holda matematik induksiya metodiga asosan $A$ to`plam natural sonlar to`plami $N$ bilan ustma-ust tushadi, bu esa tenglikning $n$ ning barcha natural qiymatlari uchun to`g`riligini bildiradi.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Matematik induksiya prinsipi mohiyatini aytib bering.
2. Bitta teorema yoki tenglikni olib uning to`g`riligini matematik induksiya prinsipi yordamida isbotlang.
3. Peano aksiomalarini aytib bering.
4. Qo`shish aksiomalari bilan Peano aksiomalari teng kuchlimi?

Induksiya va matematik induksiya metodiga doir topshiriqlar

1- misol. $N\{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ natural sonlar to`plamida aniqlangan $A(n)=n^2+n+17$ ifodani qaraymiz. $A(1)=19$, $A(2)=23$, $A(3)=29$ va $A(4)=37$ sonlari tub sonlardir. Shuning uchun, barcha $n\in N$ sonlari uchun $A(n)=n^2+n+17$ ifodaning qiymati tub son bo`ladi.

Bu yerda to`liqmas induksiya yordamida xulosa chiqariladi. Chiqarilgan bu xulosa noto`g`ridir, chunki $A(16)=289=17^2$ soni tub son emas.

2- misol. $X=\{10; 20; 30; 40; 50; \ldots\}$ to`plam yozuvi 0 raqami bilan tugaydigan barcha natural sonlar to`plami bo`lsin. 10; 20; 30; 40; 50 sonlarining har biri 2 ga qoldiqsiz bo`linadi. Shuning uchun, X to`plamning har qanday $x$ elementi 2 ga bo`linadi. To`liqmas induksiya yordamida chiqarilgan bu xulosa to`g`ri xulosadir, chunki $X$ to`plamning har qanday elementi juft sondir.

3- misol. $N=\{1; 2; 3; \ldots ; 1\,000\,000\,001; \ldots\}$ natural sonlar to`plamida aniqlangan $B(n)=991n^2+1$ ifodani qaraymiz. $B(1)$, $B(2)$, ... , $B(1000000001)$ sonlari butun sonning kvadrati emas (bu tasdiq isbotlangan). Shuning uchun, barcha $n\in N$ lar uchun $B(n)$ soni butun sonning kvadrati bo`la olmaydi.

To`liqmas induksiya yordamida chiqarilgan bu xulosa noto`g`ridir. Zamonaviy hisoblash mashinalari yordamida $n$ ning $B(n)$ soni butun sonning kvadrati bo`ladigan qiymati aniqlangan (bu qiymat 29 xonali sondan iborat).

To`liqmas induksiya ba`zan noto`g`ri xulosaga olib kelmaganda (1-misol, 3-misol), uning matematikadagi va boshqa fanlar (fizika, kimyo, biologiya va hokazo)dagi, shuningdek, amaliyotdagi ahamiyati juda kattadir. U xususiy xulosalar yordamida umumiy xulosa (faraz, taxmin) qilish imkonini beradi.

To`liq induksiya hamma vaqt to`g`ri xulosaga olib keladi, lekin uni qo`llashda hisoblash ishlariga yoki to`plamdagi elementlar soniga bog`liq bo`lgan ba'zi qiyinchiliklar paydo bo`ladi.

4- misol. $X=\{1; 2; 3; 4\}$ to`plamni qaraymiz.

$A(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)$ ifoda har bir $x \in X$ da nolga teng qiymat qabul qiladi:

$A(1)=(1-1)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)(1-8)(1-9)=0;$

$A(2)=(2-1)(2-2)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-7)(2-8)(2-9)=0;$

$A(3)=(3-1)(3-2)(3-3)(3-4)(3-5)(3-6)(3-7)(3-8)(3-9)=0;$

$A(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)(4-5)(4-6)(4-7)(4-8)(4-9)=0.$

Demak, barcha $x \in X$ lar uchun, A(x)=0 tenglik o`rinli.

Agar X to`plam cheksiz to`plam bo`lsa yoki undagi elementlar soni juda katta bo`lsa, to`plamning har bir elementi uchun berilgan tasdiqning to`g`ri ekanligini ko`rsatish mumkin bo`lmaydi yoki juda qiyin bo`ladi. Shu sababli to`liq induksiyadan juda kam hollarda foydalaniladi.

5-misol. To`liqmas induksiyadan foydalanib, «Agar $m$ xonali $N = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + ... + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$ sonining oxirgi $n$ ta (bu yerda $n \leq m$) raqamidan tuzilgan son $5^n$ ga bo`linsa, N soni ham 5^n ga bo`linadi» degan farazni aytish mumkinmi?

Yechish: n=1 bo`lib, $N$ sonining oxirgi bitta raqamidan tuzilgan son 5 ga bo`linsin. U holda, berilgan m xonali N natural sonni $N = (a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + ... + a_{m-1} \cdot 10) + 5k$ ko`rinishda yozish mumkin. O'ng tomondagi ikkita qo`shiluvchining har biri 5 ga bo`lingani uchun, ularning yig`indisi bo`lgan $N$ soni ham 5 ga bo`linadi.

n=2 bo`lib, $N$ sonining oxirgi ikkita raqamidan tuzilgan son 25 ga bo`linsin: $a_{m-1} \cdot 10 + a_m = 25 \cdot t$.

U holda, berilgan m xonali N natural sonni

$$N = (a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \ldots + a_{m-2} \cdot 100) + 25 \cdot t$$

ko`rinishda yozish mumkin. O`ng tomondagi ikkita qo`shiluvchilarning har biri 25 ga bo`lingani uchun, ularning yig`indisi bo`lgan N soni ham 25 ga bo`linadi.

Yuqorida yuritilgan mulohazalardan foydalanib (to`liqmas induksiya qo`llanilmoqda), «Agar berilgan m xonali natural $N = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \ldots + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$ sonning oxirgi n ta (bu yerda $n \leq m$) raqamidan tuzilgan son 5^n ga bo`linsa, $N$ soni ham $5^n$ ga bo`linadi» degan farazni aytish mumkin.

6-misol. 2 dan katta bo`lgan dastlabki bir nechta juft sonlarni ikkita tub sonning yig`indisi ko`rinishida tasvirlash mumkin: 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7=5+5, … , 50=13+37.

To`liqsiz induksiya yordamida «2 dan katta bo`lgan har qanday juft soni ikkita tub sonning yig`indisi ko`rinishida yozish mumkin» degan xulosaga kelamiz. Bu xulosaning to`g`ri yoki noto`g`ri ekanligi hozircha isbotlanmagan. Bu muammo *L.Eyler – X.Goldbax muammosi* deb yuritiladi.

7-misol. Agar $4^n > n^2$ ($n \in N$) tengsizlik n ning $n=k$ ($k \in N$) qiymatida to`g`ri bo`lsa, u holda bu tengsizlik $n$ ning $n=k+1$ qiymatida ham to`g`ri bo`lishini isbotlang.

Isbot. Berilgan tengsizlik n ning $n=k$ qiymatida to`g`ri bo`lgani uchun,
$4^k > k^2$ (1) to`g`ri tengsizlikka egamiz. $n=k+1$ bo`lsa, berilgan tengsizlik
$4^{k+1} > (k+1)^2$ (2) ko`rinishini oladi.

2) $n=k$ bo`lsa, $n^3+11n$ ifodaning qiymati $k^3+11k$ soniga teng bo`ladi. Bu son 6 ga bo`linadi deb faraz qilamiz.

3) $n=k+1$ bo`lsin. U holda $k^3+11k=(k+1)^3+3$

$(k+1)= (k^3+11k)+3k(k+1)+12$ tenglik o`rinli bo`ladi.

Farazimizga ko`ra, $k^3+11k$ soni 6 ga bo`linadi. Ketma-ket keluvchi ikkita natural sonning ko`paytmasi bo`lgan $k(k+1)$ soni 2 ga bo`lingani uchun, $3k(k+1)$ soni 6 ga bo`linadi. Shuning uchun $(k^3+11k)+3k(k+1)+12$ soni 6 ga bo`linadi.

Demak, n ning barcha natural qiymatlarida n^3+11n ifoda 6 ga bo`linadi.

Matematik induksiya metodi biror-bir tasdiqni hosil qilish usuli emas, balki berilgan (tayyor) tasdiqni isbotlash usuli ekanligini eslatib o`tamiz.

Ba'zan bu metod noto`g`ri ham qo`llanilishi mumkin.

8-misol. Har qanday n natural soni o`zidan keyin keluvchi $n+1$ natural soniga «tengdir».

Isbot. Har qanday k natural soni uchun tasdiq to`g`ri, ya'ni $k=k+1$ bo`ladi, deb faraz qilaylik. Agar endi bu tenglikning har ikki qismiga 1 soni qo`shilsa, $k+1=k+2$ bo`ladi.

Demak, tasdiq n larda o`rinli. Bunda isbotning ba'zi qismi unitib qo`yilgan. Boshidayoq $1 \neq 2$ bo`ligani ma'lum edi.

Mavzuga doir topshiriqlar

1. Quyidagi tengliklarning tuzilishidagi qonuniyatni aniqlang va uni umumlashtiring: $1^3=1^2$; $1^3=2^3=(1+2)^2$; $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$; …

2. $a_4+a_5+\ldots+a_n$ yig`indini Yunon harfi $\Sigma$ dan foydalanib, $\sum_{i=4}^{n} a_i$ ko`rinishda belgilash mumkin: $\sum_{i=4}^{n} a_i = a_4+a_5+\ldots+a_n$.

Quyidagi yig`indilarni yoyib yozing:

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2}$; b) $\sum_{i=1}^{n} i^3$; c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$; d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i^3}$.

3. Σ belgisi yordami bilan yozing.

a) $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{2+3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$;

b) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)$.

4. $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \ldots \cdot a_n$ ko`paytmani yunon harfi $\prod$ («pi») dan foydalanib, $\prod_{i=4}^{n} a_i$ ko`rinishda belgilash mumkin: $\prod_{i=4}^{n} a_i = a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Ko`paytmani yoyib yozing:

a) $\prod\limits_{i=1}^{4}\frac{i}{3-i+i^2}$; b) $\prod\limits_{i=1}^{5}\frac{i+1}{(i-1)i}$; c) $\prod\limits_{i=1}^{n}(2-\frac{3}{i^3})$; d) $\prod\limits_{i=1}^{n}i^3$.

5. Ko`paytmalarni $\prod$ belgisi yordami bilan yozing:

a) $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{(n+1)^2})$;

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{13}{14}$.

6. To`liqmas induksiya yordamida «$m$ xonali natural son $K$ ning oxirgi $n$ ta raqamlaridan tuzilgan son $2^n$ ga ($3^n$ ga) bo`linsa, K sonining o`zi ham $2^n$ ga ($3^n$ ga) bo`linadi», degan farazni aytish mumkinmi?

7. Qadimgi Samarqand madrasalari o`quv qo`llanmalarida sonlar ustida bajarilgan amallar natijalarini tekshirishda *mezon* usulidan foydalanganlar. *Mezon* arabcha so`z bo`lib, o`zbek tilida «*o`lcham*», «*o`lchov*» kabi ma'nolarni beradi. Eslatilgan o`quv qo`llanmalarda sonning mezoni sifatida, shu soni 9 soniga bo`lishda hosil bo`ladigan qoldiq olingan. Masalan, 8 sonining mezoni 8 soniga, 21 sonining mezoni 3 soniga teng deb olingan. Induksiyadan va 9 ga bo`linish belgisidan foydalanib, quyidagi tasdiqlarni isbot qiling:

a) ko`p xonali sonning mezoni shu son tarkibidagi raqamlar yig`indisining mezoniga teng. Masalan, 467 ning mezoni 4+6+7=17, 1+7=8;

b) ikki son ko`paytmasi (ayirmasi, bo`linmasi)ning mezoni shu sonlar mezonlarining ko`paytmasiga (ayirmaga, bo`linmaga) teng.

8. n ning barcha natural qiymatlarida tengsizlik o`rinli bo`lishini isbotlang:

a) $2^n \geq n+1$;

b) $\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} \leq n$;

c) $(1+a)^n \geq 1+na$ *buyerda* $a \geq -1$.

9. n ning barcha natural qiymatlarida tenglik o`rinli bo`lishini isbotlang.

10. Ketma-ketliklarning n-hadi formulasini toping:

a) 2, 4, 6, 8, 10, …;

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, …;

d) 5. 10, 15, 20, 25,…;

e) 1, 4, 9, 25, ...;

f) 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, ...;

g) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \dots$;

h) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$;

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$;

11. Ketma-ketlikning k va $k+1$ hadlarini yozing:

a) n^2; b) $\frac{n}{n+1}$; d) 2^{n-1}; e) $\frac{5}{3^n+1}$; f) $\frac{2n}{2n-1}$; g) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; h) $\frac{n}{2n+1}$.

12. n ning barcha natural qiymatlarida a_n soni b soniga bo`linishini isbotlang, bunda:

1) $a_n=4^n+15n-1$, $b=9$;

2) $a_n=n^3+5n$, $b=6$;

3) $a_n=7^n+3n-1$, $b=9$;

4) $a_n=6^{2n}+19^n-2^{n+1}$, $b=17$;

5) $a_n=(2n-1)^3-(2n-1)$, $b=24$;

6) $a_n=n^3+11n$, $b=6$;

7) $a_n=n^2(n^2-1)$, $b=4$;

8) $a_n=n(2n+1)(7n+1)$, $b=6$;

9) $a_n=2^n+2^{n+1}$, $b=6$;

10) $a_n=n^2(n^2-1)$, $b=12$;

11) $a_n=18^n-1)$, $b=17$;

12) $a_n=3^{3n+2}+7^n$, $b=10$;

13) $a_n=7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$, $b=19$;

14) $a_n=5^{n+3}\cdot 2^n-125$, $b=45$.

13. Matematik induksiya usulidan foydalanib, $(n-1)^2+2n\geq 0$ tengsizlik ixtiyoriy n uchun o`rinli ekanligini isbotlang.

14. $a_n=a_1+d(n-1)$-arifmetik progressiyaning hadi formulasi, bunda a_1-birinchi hadi, d – progressiya ayirmasi. $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ - dastlabki n ta hadning yig`indisini topish formulasi. Yuqoridagi faktlardan foydalanib quyidagi masalalarni yeching:

1) 2, 5, 8, ... arifmetik progressiyaning n va $(n+1)$- hadini va dastlabki n ta hadining yig`indisini toping. Olingan natijani matematik induksiya usuli yordamida tekshiring.

2) -2; -1,5; -1; -0,5; 0, ... - arifmetik pragressiyaning n-va $(n+1)$- hadini va dastlabki n ta hadining yig`indisini toping. Olingan natijani matematik induksiya usuli yordamida tekshiring.

15. $b_n=b_1q^{n-1}$ – geometrik progressiyaning n- hadi formulasi, bunda b_1 – birinchi hadi, q – progressiyaning maxraji, $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$, $q\neq 1$ dastlabki n ta hadning yig`indisini topish formulasi. Yuqoridagilardan foydalanib quyidagi masalalarni yeching:

1) $1;\frac{1}{4};\frac{1}{16};\ldots$ geometrik progressiyaning n– va $(n+1)$ – hadlarini toping. Dastlabki n ta hadning yig`indisini toping. Olingan natijani matematik induksiya usuli yordamida tekshiring.

2) 2; -6; 18; -54,..., geometrik progressiyaning n- va $(n+1)$- hadining yig`indisini toping. Olingan natijalarni matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.

16. Har bir holda foydalanilgan qonunlarni tushuntiring:

a) $(372\cdot 4)\cdot 5$; b) 20 811 4; d) 125 5 $8\cdot 6$; e) $350\cdot 44\cdot 20\cdot 50$.

17. O`rin almashtirish va guruhlash qonunlaridan foydalanib, og`zaki hisoblang:

a) $4\cdot 5\cdot 2\cdot 25$; b) $9348\cdot 5\cdot 25\cdot 4\cdot 2$; d) $8\cdot 7659$ 125; e) $5\cdot 4961\cdot 2\cdot 4\cdot 250$.

18. Natural sonlarni qo`shish va ko`paytirishga nisbatan taqsimot qonunini yozing va undan foydalanib, quyidagi ifodalarning qiymatlarini hisoblang.

a) $57\cdot 247+57\cdot 353$; b) $47\cdot 3-3\cdot 37$;

d) $37\cdot 42+37\cdot 36-78\cdot 27$; e) $49\cdot 54-29\cdot 45+25\cdot 51$.

19. Ixtiyoriy a, b, c natural sonlar uchun quyidagi mulohazalar rostligini ko`rsating:

a) $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$; b) $a=b \Longleftrightarrow a\cdot c=b\cdot c$.

20. Matematik induksiya usulidan foydalanib ixtiyoriy natural son uchun quyidagi tengliklar rost ekanligini ko`rsating:

1) $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$;

4) $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n-1)^2$;

5) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

6) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

7) $1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$;

8) $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

9) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{7}{144}+...+\dfrac{2n+1}{n^2+(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$;

10) $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

11) $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+...+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{2(n+2)}$;

12) $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+...+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{2(n+2)}$;

13) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$;

14) $2\cdot2^0+3\cdot2^1+4\cdot2^2+...+(n+1)\cdot2^{n-1}=n\cdot2^n$;

15) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+...+\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$;

16) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2.1.5. Natural sonlar miqdorlarni o`lchash natijasi sifatida

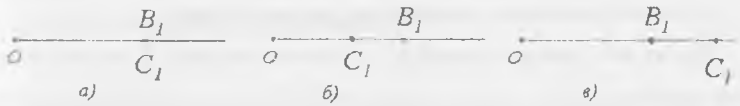
Kishilarning turmush faoliyatida faqat buyumlarning sanog`ini bilishgina emas, balki turli kattaliklarni – uzunlik, massa, vaqt va boshqalarni ham o`lchashga to`g`ri keladi. Shu sababli natural sonlarning paydo bo`lishida sanoqqa bo`lgan ehtiyoj bilan o`lchashga bo`lgan ehtiyoj ham sabab bo`ldi. Natural songa bunday yondoshish bilan bog`liq bo`lgan hamma nazariy dalillarni bitta kattalik-uzunligi misolida qaraymiz.

1. Kesmalarni taqqoslash. Kesmalar ustida amallar. Bizga $a=[AB]$ va $b=[BC]$ kesmalar berilgan bo`lsin. Bu kesmalarga teng kesmalarni boshi $O$ nuqtada bo`lgan biror nurga qo`yamiz. $OB_1=a$ va $OC_1=b$ kesmalarni hosil qilamiz. Bunda uchta hol bo`lishi mumkin:

1) B_1 va C_1 nuqtalar ustma-ust tushadi (39a– rasm). U holda OB_1 va OC_1 bitta kesmani ifodalaydi, demak $a=b$;

2) C_1 nuqta OB_1 kesma ichida yotadi (39b– rasm) . U holda OC_1 kesma OB_1 kesmadan kichik (yoki OB_1 kesma OC_1 kesmadan katta) deyiladi va quyidagicha yoziladi; $OC_1 < OB_1$ ($OB_1 > OC_1$) yoki $b < a$ $(a > b)$:

3) B_1 nuqta OC_1 kesma ichida yotadi (39в- rasm). U holda OB_1 kesma OC_1 kesmadan kichik deyiladi. $OB_1 < OC_1$ yoki $a < b$ ko`rinishda yoziladi.



39- rasm

Kesmalar ustida turli amallar bajariladi.

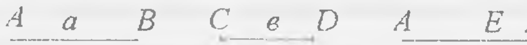
1-ta'rif: Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kesmalarning birlashmasi a kesmaga teng bo`lib, kesmalar biri-biri bilan ustma-ust tushmasa ( ya'ni ichki nuqtalarga ega bo`lmasa) va bir kesma ikkinchi kesmaning oxiriga birin-ketin tushsa, u holda a kesma $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kesmalarning yig`indisi deyiladi (40-rasm) yig`indi quyidagi ko`rinishda yoziladi:

$$a=a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

40-rasm

2-ta'rif. a va b kesmalarning ayirmasi deb, shunday c kesmaga aytiladiki, uning uchun $b+c=a$ tenglik bajariladi.

a va b kesmalarning ayirmasi quyidagicha topiladi. $a=[AB]$ kesma yasaladi va shu kesmada b kesmaga teng $[AE]$ kesma ajratiladi. Natijada $c=[EB]$ kesma hosil bo`ladi (41-rasm).



41-rasm

a-b ayirma mavjud bo`lishi uchun $a$ kesma $b$ kesmadan katta bo`lishi zarur va yetarlidir.

Kesmalar ustida amallar quyidagi xossalarga ega:

1) Har qanday a va b kesmalar uchun $a+b=b+a$ tenglik o`rinli (kesmalarni qo`shish o`rin almashtirish qonunga bo`ysunadi).

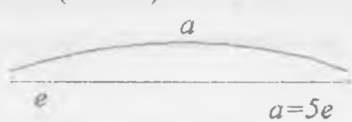
2) Har qanday a, b, c kesmalar uchun $a+(b+c)=(a+b)+c$ tenglik o`rinli (kesmalarni qo`shish gruppalash qonuniga bo`ysunadi)

3) Har qanday a, b va c kesmalar uchun $a<b$ bo`lsa, u holda $a+c<b+c$ bo`ladi.

2. Natural son kesma uzunligining qiymati sifatida.

Eng avvalo kesmalar uzunligini o`lchashni eslaymiz. Kesmalar to`plamida birorta e kesma tanlanib, u birlik kesma yoki uzunlik birligi deyiladi. Keyinchalik esa boshqa kesmalar shu birlik e kesma bilan taqqoslanadi. Biror a kesma e birlik kesmaga teng n ta kesma yig`indisidan iborat bo`lsa, u quyidagicha yoziladi:

$\underbrace{e+e+\ldots+e}_{n\ ta}=ne$ va n natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi son qiymati deyiladi (42-rasm)



42-rasm

$a = 5e$

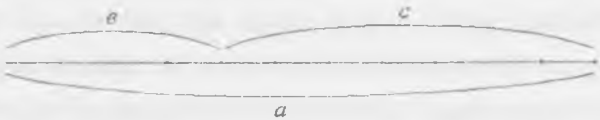
Agar uzunlik birligi sifatida boshqa kesma olinsa, u holda a kesma uzunligining son qiymati o`zgaradi.

Shunday qilib, a kesma uzunligining son qiymati sifatidagi natural son a kesma tanlab olingan e birlik kesmalarning nechtasidan iboratligini ko`rsatadi. Tanlab olingan $e$ uzunlik birligida bu son yagonadir. Bu sonlar uchun «teng» va «kichik» munosabatlarini qaraylik. Aytaylik m natural son $a$ kesma uzunligining, $n$ natural son $b$ kesma uzunligining $e$ uzunlik birligidagi son qiymatlari bo`lsin. Agar a va b kesmalar teng bo`lsa, ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo`ladi, ya'ni $m=n$;

Agar a kesma b kesmadan kichik bo`lsa, u holda $m<n$ bo`ladi va teskari tasdiq ham to`g`ri bo`ladi. Kesmalar va ular uzunliklarining son qiymatlari orasida o`rnatilgan bog`lanish kesmalar uzun-liklarini taqqoslashni ularni tegishli son qiymatlarini taqqoslashga keltiradi.

3. Kattaliklarning qiymatlari bo`lgan sonlarni qo`shish va ayirishning ma'nosi. Agar natural sonlar kesmalarning uzunliklarini o`lchash natijasida hosil bo`lgan bo`lsa, bu sonlarni qo`shish va ayirish qanday ma'noga ega bo`lishini aniqlaymiz.

**Qo`shish.** Masalan, 4 va 7 sonlari $b$ va $c$ kesmalarni $e$ birlik yordamida o`lchash natijalari bo`lsin, $b=4e$, $c=7e$. 4+7=11 ekani ma'lum. Bunda 11 soni $a=b+c$ kesma uzunligining qiymati bo`ladi.



43-rasm

Umumiy holda a kesma b va c kesmalar yig`indisi hamda $b=me;$ $c=ne$ bo`lsin. Bunda m va n - natural sonlar. Bu deganimiz, b kesma m ta, c kesma n ta shunday bo`lakka bo`linadi, bu bo`laklarning har biri birlik kesma $e$ ga teng. Shunday qilib, m va n natural sonlar yig`indisini uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalangan b va c kesmalardan tuzilgan a kesma uzunligining qiymati sifatida qarash mumkin.

Ayirish. Agar *a* kesma, *b* va c kesmalardan iborat bo`lib, *a* va *b* kesmalarning uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalansa (bir xil uzunlik birligida), c kesma uzunligining son qiymati *a* va *b* kesmalar uzunliklari son qiymatlari ayirmasiga teng. $c=(m-n)e$

Bundan ko`rinadiki, natural sonlarning *m-n* ayirmasining uzunliklari mos ravishda m va n natural sonlar bilan ifodalangan *a* va *b* kesmalar ayirmasi bo`lgan c kesma uzunligining qiymatini ifodalar ekan.

Agar $a=7e$ kesma *b* va c kesmalardan iborat bo`lib $b=3e$ bo`lsa, u holda $c=(7-4)e=3e$ bo`ladi.

Natural sonlarni qo`shish va ayirishga bunday yondashish nafaqat kesmalar uzunliklarini o`lchash, balki boshqa kattaliklarni o`lchash bilan ham bog`liq. Boshlang`ich sinflar uchun matematika darsliklarida turli xil kattaliklar va ular ustida amallarga doir masalalar ko`p. Bu masalalarni yechish esa kattaliklarning qiymatlari bo`lgan natural sonlarni qo`shish va ayirishning ma'nosini aniqlash bunday masalalarni yechishda amallarni tanlashga imkon beradi.

Masalan, Karim 5 kg olma, Olim 3 kg nok terdi. Karim va Olim hammasi bo`lib necha kilogramm meva tergan?

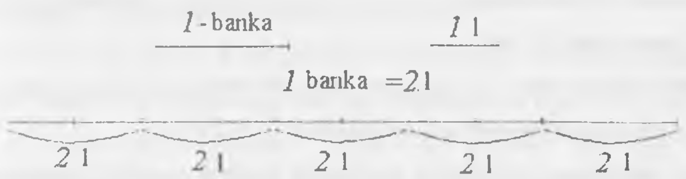
Masala qo`shish amali bilan yechiladi. Masalani yechishda terilgan olmalar massasini *a* kesma, noklar massasini *b* kesma ko`rinishida tasvirlaymiz (44-rasm).

U holda terilgan hamma mevalar massasini *a* ga teng [AB] va *b* ga teng [BC] kesmadan tuzilgan [AC] kesma yordamida tasvirlash mumkin. [AC] kesma uzunligining son qiymati [AB] va [BC] kesmalar son qiymatlarining yig`indisiga teng bo`lgani uchun terilgan mevalar massasini qo`shish amali bilan topamiz.

44-rasm

**4. Kattaliklarning qiymatlari bo`lgan sonlarni ko`paytirish va bo`lishning ma'nosi.** Kattaliklarning qiymatlari bo`lgan sonlarni ko`paytirish va bo`lishning ma'nosini ko`rsatish uchun dastlab masalalarga murojaat qilamiz.

Masala. Omborxonada har birida 2 *l* sharbat bo`lgan 5 ta banka bor. Bu bankalarda hammasi bo`lib qancha litr sharbat bor. Bu masalani kesmalar yordamida ifodalaylik (45-rasm).



45-rasm

Bu masala ko`paytirish amali bilan yechiladi: 2x5=10(*l*). Nima uchun?

Bu savolga yuqoridagi rasm yordamida javob beramiz.

5 ta bankada hammasi bo`lib qancha litr sharbat borligini bilish uchun 2*l*+2*l*+2*l*+2*l*+2*l* yig`indini topish yetarli. 2 *l* deganimiz $2\cdot 1$ ko`paytma bo`lgani uchun yig`indini quyidagi ko`rinishda yozish mumkin. 5 ta bir xil qo`shiluvchining yig`indisini $2\cdot 5$ ko`paytma bilan almashtirib, $(2+2+2+2+2)\cdot 1=(2\cdot 5)\cdot 1l=10\cdot 1l=10l$ ni hosil qilamiz. Bu masalada sharbat egallagan hajmning ikki o`lchov birligi banka va litr haqida so`z yuritilmoqda. Shu sababli bu masalani boshqa usulda ham yechish mumkin. Dastlab birlik sifatida bankani olsak, keyin litrga o`tsak, boshqacha aytganda yangi birlik sifatida litrni olsak 1 banka-2 litr.

U holda $5\cdot 1\,b= 5\,(2l)= 5(2\cdot 1l)=(5\cdot 2)\cdot 1l=10\,l$

Bundan ko`rinadiki, natural sonlarni ko`paytirish kattalikning yangi, yanada maydaroq birligini tasvirlar ekan. Bu xulosamizni sonlarga-kesmalar uzunliklarining qiymatlariga qo`llab umumiy ko`rinishda isbotlaymiz.

a kesma *e* ga teng *m* ta kesmadan, *e* kesmaning o`zi $e_1$ ga teng n ta kesmadan iborat bo`lsa, *a* kesma uzunligining son qiymati uzunlikning e_1 birligida m n ga teng bo`ladi. Haqiqatan ham, *a* kesmaning $e_1$ kesmaga teng bo`laklar soni $\underbrace{n+n+...+n}_{m\ ta}$ ga teng, Shuning uchun u $n\cdot m$ ga teng. Demak, $a=(m\cdot n)e_1$;

Shunday qilib, natural sonlarni ko`paytirish uzunlikning yangi birligiga o`tishni ifodalaydi. Bu deganimiz, agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati bo`lsa, $m \cdot n$ ko`paytma a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati demakdir. Kattaliklarning qiymatlari bo`lgan natural sonlarni bo`lishning ma'nosini aniqlaymiz.

Masala. Bir bankaning sig`imi 2 *l* bo`lsa, 10 *l* meva sharbatini qo`yish uchun necha banka kerak bo`ladi?

Masalani yechish uchun 10 *l* ni kesma bilan tasvirlaymiz va unda 2 *l* ni tasvirlovchi kesma necha marta joylashishini aniqlaymiz: 10 *l* : 2 *l*=5(*b*)

Bu masalaning yechilishini boshqacha asoslash mumkin. Masalada sharbat egallagan hajmning ikki birligi - litr va banka qaralmoqda, o`lchash natijasini bankalar bilan, ya'ni yangi birlikda ifodalash talab etilmoqda. Yangi birlikda (bankada) 2 ta eski birlik (2 *l*) bor.

Shuning uchun, 1 *l*=1 *b*: 2 ; 10 *l* = 10·(1*b*:2)=(10:2)·1*b*=5·1*b*=5*b*;

Ko`rinib turibdiki, natural sonlarni bo`lish kattalikning yangi birligiga o`tish bilan bog`liq ekan. Buni umumiy holda ko`rsatamiz. $a$ kesma $e$ ga teng m ta kesmadan, $e_1$ kesma $e$ ga teng n ta kesmadan iborat bo`lsin. e_1 uzunlik birligida a kesma uzunligini ifodalaydigan sonni qanday topish mumkinligini aniqlaymiz.

$e_1 = n\,e$ bo`lgani uchun $e = e_1 : n$. U holda $a = me = m(e_1 : n) = (m : n)\, e_1$;

Shunday qilib, kesmalar uzunliklarining qiymati bo`lgan natural sonlarni bo`lish uzunlikning yangi (yanada yirikroq) birligiga o`tishni tasvirlaydi: agar m natural son $a$ kesma uzunligining $e$ uzunlik birligidagi qiymati, n natural son $e$ kesma uzunligining $e_1$ uzunlik birligidagi qiymati bo`lsa, m:n bo`linma a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymatidir.

Masalan, agar $a=16e$ va $e_1 = 4e$ bo`lsa, $a$ kesma uzunligining $e_1$ uzunlik birligidagi qiymati $4e_1$ ga teng bo`ladi: $a=16e=16\cdot(e_1:4)=(16:4)\,e_1 = 4\,e_1$;

Boshlang`ich sinf matematika darslarida turli kattaliklar qatnashadigan ko`paytirish va bo`lish bilan yechiladigan sodda masalalar ko`p. Bularni yechishda ko`paytirish bir xil qo`shiluvchilarni qo`shish amali sifatida, bo`lish esa ko`paytirishga teskari amal sifatida qaraladi.

2.1.6. Tartibiy va miqdoriy natural sonlar

Bizga ma'lumki, natural sonlar deb buyumlarni sanashda qo`llaniladigan sonlarga aytiladi. Sanash jarayoni nimani ifodalaydi?

Masalan, biz A={*a, b, c, d, e*} to`plam elementlarini sanashni qanday olib borishimiz kerak? Bu to`plamning har bir elementini ko`rsatib, biz «birinchi», «ikkinchi», «uchinchi», «to`rtinchi», «beshinchi» deymiz. Shu bilan sanash jarayonini tugatamiz, chunki A to`plamning barcha elementlaridan foydalandik. Sanab borishda biz quyidagi qoidalarga amal qildik.

A to`plamning ixtiyoriy elementi sanashda birinchi ko`rsatilishi, birorta element ham tushib qolmasligi, bitta element ikki marta sanalmasligi kerak.

A to`plamni sanab biz A to`plamda 5 ta element bor deymiz, ya'ni bu to`plamning miqdoriy xarakteristikasiga ega bo`lamiz. Buni hosil qilish uchun esa tartibiy natural sonlar: «birinchi», ... «beshinchi» dan foydalandik. Boshqacha aytganda biz natural qator kesmasi deb ataluvchi {1,2,3,4,5,} to`plamdan foydalandik.

1- ta'rif. Natural qatorning N_a kesmasi deb a natural sondan katta bo`lmagan natural sonlar to`plamiga aytiladi.

Masalan, N_5 kesma 1,2.3,4,5 natural qatorning N_a kesmasi $x\leq a$ bo`lgan barcha x sonlardan tashkil topadi.

Natural qator kesmasining ta'rifi to`plam elementlari sanog`i tushunchasiga olib keladi. Bunda A to`plam elementlari bilan $N_a$ kesma o`rtasida bir qiymatli moslik o`rnatiladi.

**2-ta`rif.** A to`plam elementlarini sanash deb, A to`plam bilan natural qatorning $N_a$ kesmasi orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatishga aytiladi.

a soni deb A to`plamdagi elementlar soniga aytiladi va n(A)=$a$ kabi yoziladi. Bu $a$ soni yagona va u miqdoriy natural sondir. Shunday qilib sanashda chekli A to`plam elementlari nafaqat ma'lum tartibda joylashtiriladi(bunda «birinchi», «ikkinchi» va hokazo sonlar bilan ifodalanuvchi tartibiy natural sonlardan foydalaniladi), shuningdek A to`plam nechta elementni o`z ichiga olishi aniqlanadi (miqdoriy natural sonlardan foydalaniladi). Sanash uchun avvaldan yetarlicha sonlar zapasiga ega bo`lish zarur va bu sonlar ma`lum tartibda joylashishi, birinchi son mavjud bo`lishi lozim. Sanash chekli to`plam elementlarini tartiblashtirish uchun, ham ularning miqdorini aniqlash uchun xizmat qiladi. Demak tartibiy son miqdoriy songa olib keladi. Miqdoriy natural sonlar chekli teng quvvatli to`plamlar sinfining umumiy xossasini ifodalaydi.Shunday qilib, miqdoriy va tartibiy natural sonlar boshlang`ich ta'limda o`zaro uzviy boglangan, birgalikda qatnashadi.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kesmalarni taqqoslashni tushuntirib bering.
2. Kesmalar ustida bajariladigan amallarni tushuntiring.
3. Kesmalar ustida amallar qanday xossalarga ega?
4. Kattaliklarni qiymatlari bo`lgan sonlar ustida bajariladigan amallarning ma'nosi.
5. Tartibiy miqdoriy natural sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?

2.2. Sanoq sistemalari. Pozitsion sanoq sistemalari

2.2.1. Sanoq sistemalari

1. Sanoq sistemalari tarixi. Hozirgi kunda har bir qadamda sonlar bilan ish ko`rishga to`g`ri keladi. Shuning uchun biz har qanday sonni to`g`ri aytishimiz va yozishimiz, ular ustida amallar bajarishimiz kerak. Buning uchun sanoq sistemalari to`g`risida bilishimiz lozim. Umuman, sanoq sistemasi deb, sonlarni aytish va yozish hamda ular ustida amallar bajarishda ishlatiladigan tilga aytiladi. Dastavval sanoq sistemalari tarixi bilan tanishamiz.

Ma`lumki, son tushunchasi juda qadim zamonlarda vujudga kelgan. O`sha vaqtning o`zidayoq sonlarni yozishga zaruriyat tug`ilgan. Yozuv paydo bo`lmasdan oldin kishilar sonlarni ayta bilganlar, hisob-kitob yuritganlar. Bunda ularga turli qurollar, eng avvalo qo`l va oyoqdagi barmoqlar yordam bergan. Shuningdek, yog`och tayoqchalar, tugunli ip va arqonlar kabi hisob-kitob asboblaridan foydalanilgan. Tayoqcha va tugunlar yordamida sonlarni «yozish»gan. Ammo bunday «yozish» qulay bo`lmagan, chunki katta sonlarni yozish uchun anchagina tayoqcha va tugunlar yasashga to`g`ri kelgan, bu esa yozuvnigina qiyinlashtirmasdan, balki sonlarni taqqoslashda, sonlar ustida amallar bajarishda ham qiyinchiliklar tug`dirgan. Shuning uchun sonlarni yozishning boshqacha, tejamliroq usuli vujudga kelgan: hisoblash ishlari bir xil sondagi elementlardan iborat bo`lgan gruppalar bilan olib borilgan.

Masalan, bitta odam ikkita qo`l barmoqlari elementlari bir gruppa hisoblangan. Bunda hisob bir necha odam tomonidan olib borilgan. Birinchi odam barmoqlarini tartibli ravishda hammasini buklagandan keyin, ularni yozdiradi va shu zahoti ikkinchi odam birinchi barmog`ini bukadi. Undan keyin ikkinchi odam keyingi o`nliklarni hisobini olib boradi, uning hamma barmoqlari bukilgandan keyin, qaytadan barmoqlarini yozdiradi va uchinchi odam birinchi barmog`ini bukadi, hisob natijasi taxminan quyidagicha olib boriladi:

masalan, uchinchi odamning beshta barmog`i, ikkinchi odamning sakkizta barmog`i va birinchi odamning uchta barmog`i bukilsa, bu 583 sonni bildirgan. Odamning ikkita qo`l barmoqlari va ikkita oyoq barmoqlari gruppa hisoblangan va u 20 ta elementdan iborat bo`lgan. Bunday 20 lik hisob – kitoblar Amerika qabilalarida XVI asrgacha saqlanib kelgan. Fransuzlarda hozir ham uning qoldiqlari bor.

Masalan, ular «sakson besh» sonini «to`rt marta yigirma va besh» deb ataydilar. Iqtisodiy ehtiyojning o`sib borishi natijasida insoniyat asta-sekin hisoblash usullarini vujudga keltira boshladi. Ularning keyingi rivoji bundan taxminan besh ming yil avval qadimgi davlatlar – Vavilon, Misr, Xitoy va boshqalarning shakllanish davriga to`g`ri keladi. Bu davrda sonlar yozuvining yangi usullari yaratildi. Qadimgi Vavilonda oltmishtadan gruppalab hisoblaganlar, ya'ni u yerda oltmishli sanoq sistemasidan foydalanilgan.

Masalan, vavilonlik matematik 137 sonini bunday tasvirlagan : $137=2\cdot60+17$. Albatta bu son belgilar – uchburchaklar va ponalar bilan yozilgan.

Gap shundaki, qadimgi vavilionliklar yozish uchun loyli tablichkalardan uchburchakli ponalar bosib chiqarganlar. Keyin bu tablichkalarni quritganlar va olovga tutib kuydirganlar. Sonlarni yozish uchun ponalarning holatlaridan foydalanilgan: vertikal holat – uchi bilan pastga va gorizontal holat – uchi bilan chapga qaratilgan. Bunda ∇ belgi bir va oltmishni, $\lhd$ belgi – o`nlikni bildirgan boshqa sonlar bu belgilar va qo`shish amali bilan tasvirlangan.

Masalan, 6 soni bunday tasvirlangan: $\begin{matrix}\nabla\nabla\nabla\\ \nabla\nabla\nabla\end{matrix}$

199 soni bunday: $\begin{matrix} & & \nabla\nabla\nabla\\ \nabla\nabla\nabla & \lhd & \nabla\nabla\nabla\\ & & \nabla\nabla\nabla\end{matrix}$. Oxirgi yozuv sonining oltmishli sistemadagi yozuvidir: $60+60+60+10+9=3\cdot 60+19$. Biroq qadimgi Vavilonda paydo bo`lgan sonlar yozuvi kamchiliklarga ega edi: Unda katta sonlarni belgilash qiyin edi: sanoq sistemasining asosini – 60 sonini belgilash uchun maxsus belgi yo`q edi, bu esa ba'zi yozuvlarni turlicha o`qishga olib kelar edi. Oltmishli sanoq sistemasining vujudga kelishida aylanani 360 ta teng bo`lakka bo`lish, shu bilan birga yilni 360 kunga bo`lish asos qilib olingan, degan taxmin mavjud. Bu sanoq sistemasining qoldiqlari shu kungacha saqlanib kelgan: aylanani 360° ga bo`lishga yana burchaklarni gradus, minut va sekundlar bilan o`lchashni ko`rsatish mumkin. Qadimgi misrliklar o`ntalab hisoblaganlar. Ularda maxsus belgilar faqat xonalarni – birlar, o`nlar, yuzlar, minglar va boshqalarni belgilash uchun ishlatilgan. Birdan to`qqizgacha bo`lgan sonlar tayoqchalar yordamida yozilgan.

1-I, 10-$\cap$, 100 - $\subset$, 1000 - I

Masalan, 132 sonini misrliklar quyidagicha: $\subset\cap\cap\cap$II

1234 sonini esa bunday : I$\subset\subset\cap\cap\cap$IIII

ko`rinishda ayrim holatlarda tekis qator qilib o`ngdan chapga yoki ustun qilib yuqoridan pastga qarab yozilgan.

Masalan, 65 sonini III∩∩∩, II∩∩∩ yoki ∩∩∩III, ∩∩∩II ko`rinishda ham yozganlar. Yozuvlar asosan papiruslarda bo`yoqlar bilan bajarilgan. Ba'zan yozish uchun tosh, daraxt, teri, holst, sopol sinig`idan foydalanilgan.

2. Nopozitsion sanoq sistemalari. Yuqorida sonlarni yozishda sonni ifodalovchi belgilarning o`rni ahamiyatga ega emas. Shuning uchun sonlarni yozishning bu sistemasiga nopozitsion sanoq sistemasi deyiladi. Misr papiruslarining ayrimlari bizning kungacha yetib kelgan. Ulardan biri–«Moskva matematik papirusi» deb nomlangani Moskvada A.S.Pushkin nomidagi tasviriy san'at davlat muzeyida saqlanadi. Shunisi qiziqki, misrliklar ko`paytirish amalini ikkilantirish usuli bilan bajarganlar.

Masalan, 25 ni 9 ga ko`paytirish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak bo`lgan.

$$25(1+2\cdot2\cdot2)=25+25\cdot2\cdot2\cdot2=25+50\cdot2\cdot2=25+100\cdot2=25+200=225$$

Bo`lish amali ko`paytirishga teskari amal deb qaralgan, ya'ni shunday son tanlanganki, uni bo`luvchiga ko`paytirganda bo`linuvchi hosil bo`lgan. Umuman, qadimgi misrliklar va vavilonliklar yetarlicha katta hajmdagi matematik bilimga ega edilar, lekin bularning hammasi asosan tajriba xarakterida edi. Aslini olganda umumlashmalar va isbotlar yo`q edi, ya'ni matematika fani endigina dunyoga kelmoqda edi. Uning keyingi rivojlanishiga qadimgi Gretsiya olimlaridan Fales (bizning eramizgacha 624-547 y.), Pifagor (eramizgacha taxminan 580-500 y.), Demokrit (eramizgacha taxminan 460-370 y.), Platon (bizning eramizgacha 427-347 y.), Evklid (bizning eramizgacha taxminan 300 y.), Arximed (bizning eramizgacha taxminan 287-212 y.), Eratosfen (eramizgacha 276-194 y.) va boshqalar katta hissa qo`shdilar. Bu son haqidagi ta'limotning tarixi va rivojlanishidagi butun bir davrdir. Shuni eslatish kerakki, Qadimgi Gretsiyada ham nopozitsion sanoq sistemasi mavjud edi. Ular 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sonlarni grek alfavitining birinchi to`qqizta harfi bilan, masalan, $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3, \delta=4, \varepsilon=5$ va h.k.

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 sonlarini esa navbatdagi 9 ta harf bilan

($10=\iota, 20=\chi, 30=\lambda, 40=\mu, 50=\gamma$ va h.k.)

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800,900 sonlarni qolgan 9 ta harf bilan belgilaganlar ($100 = \rho, 200 = \delta, 300 = \tau$ va h.k.)

Masalan, 325 sonini $\overline{\tau\chi\varepsilon}$ ko`rinishda yozilgan, bu yozuvda son so`zdan farq qilishi uchun ustiga chiziq qo`yilgan.

Greklar mingliklarni ifodalashda birliklarni ifodalovchi harfni chapdan pastiga shtrix qo`yganlar.

Masalan, $\overline{\varepsilon\rho\mu\beta}$ yozuv 5142 sonini bildirgan. 10000 soni esa miriado deyilib, M harfi bilan belgilangan. $\overset{\lambda\varepsilon}{M\gamma\beta}$ yozuv 350052 sonini bildiradi.

Ikki ming yildan sal ilgari Garbiy Yevropadagi barcha mamlakatlar va Osiyoning ko`pgina mamlakatlari qadimgi rimliklarga bo`ysungan. Rim imperiyasida matematika rivojlantirilmasdan, undan faqat amaliy maqsadlar uchun foydalanilgan. Qadimgi Rimdan qolgan narsalardan biri sonlarni yozishning yana bitta usulidir. Rim sanoq sistemasida ham Qadimgi Misr sistemasidagi kabi belgili sonlar bor:

bir- I,	ellik – L,
besh – V,	yuz –C,
o`n - X ,	besh yuz –D,

ming – M

Qolgan hamma sonlar shu belgili sonlarga qo`shish va ulardan ayirish orqali hosil qilinadi. Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan oldin turgan bo`lsa, ayirish bajariladi.

Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan keyin turgan bo`lsa qo`shish bajariladi.

Masalan, IV–to`rt (5-1=4), XC-to`qson (100-10=90), XL–qirq (50-10=40). VI-olti (5+1=6), CX – biryuz o`n (100+10=110)

Bir necha sonni rimcha nomerlash bilan yozamiz. 265- bu ikki yuz (CC) plyus oltmish, ya'ni ellik plyus o`n (LX), plyus besh (V). Demak, 265 soni bunday yoziladi: CCL XV: 385 – bu uch yuz (CCC) plyus sakson, ya'ni ellik plyus o`ndan 3 marta (LXXX), plyus besh (V).

Demak, 385 soni bunday yoziladi: CCC LXXXV. To`rt, besh va olti xonali sonlar m harfi (lotincha millming so`zidan olingan) yordamida yoziladi, uning chap tomoniga minglar, o`ng tomoniga yuzlar, o`nlar, birlar yoziladi.

Masalan, XXXIXM DXXXVI yozuv 39536 sonning,

CCXXXVIIIM DCXLVI yozuv 238646 sonning yozuvidir.

Qadimgi Rus madaniyati greklar madaniyati bilan bog`liq bo`lgani uchun, ularda ham sonlarning belgilanishi greklardagi belgilashlarga o`xshash bo`lgan, ya'ni sonlarni harflar bilan belgilashgan.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sanoq sistemalari tarixi haqida tushuntiring.
2. Vavilonliklarning oltmishli sanoq sistemasi to`g`risida gapiring.
3. Misrliklarda sonlarning yozilishini ko`rsating.
4. Qadimgi Gretsiyada sonlarning grek alvafiti orqali ifodalanishini aytib bering.
5. Rim sanoq sistemasida belgili sonlarni yozib ko`rsating, ixtiyoriy sonni belgili sonlar yordamida ifodalang.

2.2.2. Pozitsion sanoq sistemalari

**1. O`nli sanoq sistemasining vujudga kelishi.** Pozitsion sanoq sistemasining vujudga kelishi matematikaning rivojlanishida katta rol o`ynaydi. Bu sistemada bitta belgi (raqam) sonlarning yozilishida joylashish tartibiga ko`ra turli sonlarni ifodalashi mumkin. Pozitsion sistemaning vujudga kelish tarixi bilan birmuncha tanishib o`tamiz.

V-XII asrlarda Sharq mamlakatlaridan Hindiston va Yaqin Sharqda matematika sezilarli darajada rivojlandi. Hindiston va Xitoyda matematika Misrdagidek bundan 5 ming yil avval paydo bo`lgan.

Ayniqsa, hind olimlarining arifmetikaga qo`shgan hissalari kattadir, chunki ular hozirgi kunda butun insoniyat qo`llagan sonlarni o`qish va yozish usulini ya'ni o`nli sanoq sistemasini kashf qildilar.

Hind matematiklari o`ylab topgan kashfiyotning mohiyati shundaki, ular sonlarni yozishda har bir raqamning yozuvidagi qiymati uning o`rniga, pozitsiyasiga bog`liq.

Masalan, 823 sonidagi 8 raqami 8 yuzlikni, 87 sonidagi o`sha 8 raqami 8 o`nlikni, 8926 sonidagi 8 raqami esa 8 minglikni bildiradi. Bundan o`nta raqam yordamida har qanday sonni yozish mumkin ekan degan xulosa chiqadi. Shuning uchun o`nli sanoq sistemasi pozitsion sistema deyiladi. Undan tashqari, Hindistonda birinchi marta xona birligi yo`qligini bildirish uchun noldan foydalanildi, bu esa sonlar yozuvini takomillashtirish va hisoblashlarni osonlashtirishda katta rol o`ynaydi.

To`g`ri nolning bizga odat bo`lgan yozuvi birdaniga paydo bo`lmagan. Avvalo sonda birorta xona bo`lmasa, hindlar shu xona raqamini aytish o`rniga «bo`sh» so`zini aytardilar, yozishda esa bo`sh o`ringa nuqta qo`yadilar. Keyinchalik nuqtalar o`rniga doiracha chizadigan bo`ldilar. Sonlar yozuvidagi o`nta 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 belgining hammasi raqamlar deyiladi. Biroq bundan 200 yil avval bitta belgi – 0 gina raqam deyilar edi. Sonning o`nli sanoq sistemasida yozilishidagi raqamlarni ham qadimgi Hindiston matematiklari o`ylab topgan, lekin ularning dastlabki yozilishi hozirgi yozilishidan farq qiladi. raqamlarning hozirgi formasi kitob bosib chiqarish kashf qilingandan keyin -XV asrda qaror topdi. Nima uchun Hindistonda kashf qilingan raqamlar ko`pincha arab raqamlari deyiladi? Chunki VII asrda vujudga kelgan Arab xalifaligi rivojlanishning yuqori darajasida turgan bir qancha davlatlarni ikki yuz yilga yaqin o`ziga bo`ysundirgan edi. Jumladan: Shimoliy Hindiston, Misr, O`rta Osiyo, Mesopotamiya, Zakavkaze, Shimoliy Afrika va boshqa davlatlar. Bu katta mamlakatning poytaxti (markazi)

Bag`dod shahri edi. Arablar fanning muhimligini tushunar va o`zlari bosib olgan mamlakatlarning, jumladan, Gretsiya, Hindiston, O`rta Osiyo olimlarining asarlarini (ishlarini) o`z tillariga tarjima qilar, o`rganar va to`plar edilar. Biroq arab matematiklari qadimgi buyuk olimlarning asarlarini saqlabgina qolmasdan, matematikani rivojlantirishga katta hissa ham qo`shdilar. IX asrning buyuk olimlaridan biri o`zbek (Xorazm) matematigi Muhammad ibn Muso al-Xorazmiydir. Uning «Kitob al-jabr» nomli kitobi fanga algebra nomini berdi. Bu kitobda arifmetik masala va tenglamalarning yechilish qoidalari bayon qilingan. Al-Xorazmiy o`zining boshqa kitobida Hindistonda kashf qilingan hind arifmetikasini, ya'ni o`nli sanoq sistemasini yoritdi. Uch yuz yil keyin, ya'ni XII asrda u lotin tiliga tarjima qilindi va bu kitob butun Yevropa xalqlari uchun arifmetikadan birinchi darslik bo`lib qoldi. Natijada Yevropa mamlakatlarida Arab davlatida yashagan muallif yozgan kitob bo`yicha o`nli sanoq sistemasi o`rganilgani uchun o`nli sistemadagi arab raqamlari deyila boshlandi. Bu esa noto`g`ridir. XII asrdan boshlab Garbiy Yevropada uzoq davom etgan turg`unlikdan so`ng matematikaga qiziqish uyg`ondi, bunga savdo-sotiqning kengayishi sabab bo`ldi .

Yevropada o`nli sanoq sistemasining tarqalishiga Leonardo Fibonachchining 1202-yilda chop qilingan «Kniga abaka» kitobi yordam berdi. XIII asrdan boshlab o`nli sistema joriy qilindi va u XVI asrga kelib Garbiy Yevropa mamlakatlarida to`la foydalana boshlandi

XVI asr oxirida, Ivan Grozniy podsholigi davrida, Russiyada birinchi bosma matematik kitoblar paydo bo`ldi, bu kitoblardan maqsad turli amaliy masalalarni yechishda hisoblashni osonlashtirishdan iborat edi. Ularda sonlar slavyancha sanoq sistemasida yozilgan edi.

Rus fanining rivojlanishida Leontiy Filippovich Magniskiy tomonidan yozilgan «Arifmetika sirech nauka chislitelnaya» kitobi muhim rol o`ynadi. Bu kitob Pyotr I davrida 1703-yilda slavyan tilida nashr qilindi, ammo undagi hamma hisoblashlar o`nli sanoq sistemasida bajarilgan edi. Bu kitob uzoq vaqt barcha ilm kishilari uchun eng zarur kitob bo`lib qoldi, chunki bu kitobda nafaqat matematikaga oid materiallar, balki astronomiya, navigasiya va boshqa fanlarning ba'zi bir bo`limlari haqida ma'lumotlar bor edi.

**2. O`nli sanoq sistemasida sonlarning ifodalanishi.** Ma'lumki, o`nli sanoq sistemasida sonlarni yozish uchun 10 ta belgi (raqam)dan foydalaniladi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Ulardan chekli ketma-ketliklar hosil qilinib, bu ketma-ketliklar sonlarining qisqacha yozuvidir.

Masalan, 5 ming +4 yuz+5 o`n+7 bir 5457 ketma-ketlik sonining qisqacha yozuvidir. Bu yig`indini bunday ko`rinishda yozish qabul qilingan: $5\cdot 10^3 +4\cdot 10^2 +5\cdot 10+7$.

Ta'rif . n natural sonning o`nli yozuvi deb bu sonni $n=n_k\cdot 10^k + n_{k-1}\cdot 10^{k-1} + ... + n_1\cdot 10+n_0$ ko`rinishda yozishga aytiladi, bu yerda n_k , n_{k-1}, ... , n_1, n_0– 0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n=n_k\, 10^k+ n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+.....+ n_1\cdot 10 + n_0$ yig`indini qisqacha $n=n_kn_{k-1} .... n_1n_0$ kabi yozish qabul qilingan.

$1,10,10^2,10^3, ... .10^k$ ko`rinishdagi sonlar mos ravishda, birinchi, ikkinchi,... , k+1 - xona birliklari deyiladi, shu bilan birga bitta xonaning 10ta birligi keyingi yuqori xonaning bitta birligini tashkil qiladi, ya'ni qo`shni xonalar nisbati 10 ga – sanoq sistemasining asosiga teng. Sonlar yozuvidagi dastlabki uchta xona bitta gruppaga birlashtiriladi va birinchi sinf yoki birlar sinfi deyiladi. Birinchi sinfga birlar, o`nlar, yuzlar kiradi. Sonlar yozuvidagi to`rtinchi, beshinchi va oltinchi xonalar ikkinchi sinf-minglar sinfini tashkil qiladi. Unga bir minglar, o`n minglar va yuz minglar kiradi. Keyingi uchinchi xona – millionlar sinfi bo`ladi, bu sinf ham uchta xonadan iborat: yettinchi, sakkizinchi va to`qqizinchi xonalardan, ya'ni bir millionlar, o`n millionlar va yuz millionlardan iborat. Navbatdagi uchta xona ham yangi sinfni hosil qiladi va hokazo. Birlar, minglar, millionlar va hokazo sinflarning ajratilishi sonlarni yozishga va o`qishga qulayliklar yaratadi. O`nli sanoq sistemasida hamma sonlarni $n_k\, 10^k +n_{k-1}\cdot 10^{k-1} +...+n_1\cdot 10+n_0$ (bunda n_k, n_{k-1}, n_1, n_0,koeffitsientlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k\neq 0$) ko`rinishdagina yozmasdan ularning hammasiga nom, ism berish mumkin. Bu quyidagicha amalga oshiriladi: birinchi o`nta sonning nomi bor. So`ngra bu sonlardan o`nli yozuv ta'rifiga mos ravishda va ozgina so`z qo`shish natijasida keyingi sonlarning nomi kelib chiqadi.

Masalan, ikkinchi o`nliklardagi sonlar (ular $1\cdot10+a_0$ ko`rinishda yoziladi) o`n bilan birinchi o`nlikdagi sonlar nomining qo`shilishidan tuziladi: o`n bir, o`n ikki va hokazo. Yigirma so`zi ikkita o`nlikni bildiradi. Uchinchi o`nlikdagi sonlar nomi (ular $2\cdot10+a_0$ ko`rinishdagi sonlar) yigirma so`ziga birinchi o`nlikdagi sonlar nomini qo`shish natijasida hosil bo`ladi: yigirma bir, yigirma ikki va h.k. hisobni shunday davom ettirib, to`rtinchi, beshinchi, oltinchi, ettinchi, sakkizinchi, to`qqizinchi va o`ninchi o`nliklarni hosil qilamiz. Navbatdagi o`nliklar mos ravishda quyidagicha ataladi: o`ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson, to`qson. Yuz so`zi o`nta o`nni bildiradi. Yuzdan katta sonlar nomi (ya'ni $1\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$ ko`rinishdagi sonlar) yuz va birinchi hamda keyingi o`nliklardagi sonlar nomidan tuziladi va birinchi yuzlikni anglatish uchun ular oldiga bir so`zi yoziladi: bir yuz bir, bir yuz ikki, ... bir yuz yigirma va h.k. Bu yuzlikni keyingi yuzlikkacha to`ldirib, ikkita yuzlikka ega bo`lamiz, u ikki yuz deyiladi. Ikki yuzdan katta sonlarni hosil qilish uchun ikki yuz soniga birinchi va keyingi o`nlikdagi sonlar qo`shib aytiladi. Har bir yuzlikdan keyin yangi yuzlik hosil bo`ladi: uch yuz, to`rt yuz, besh yuz va h.k., o`nta yuz maxsus nom bilan «ming» deb yuritiladi. Mingdan keyingi sonlar mingga bittadan qo`shib borish natijasida hosil bo`ladi, bu yerda ham birinchi minglik oldiga bir so`zi qo`yiladi (bir ming bir, bir ming ikki va h.k.). Natijada ikki ming, uch ming va h.k. sonlar hosil bo`ladi. Mingta ming soni maxsus nom bilan «million» deb ataladi. Yana sanashni davom ettirib, mingta millionni hosil qilamiz. Mingta million soni maxsus nom bilan «milliard» deb ataladi. hisoblashlarda million 10^6, milliard 10^9, milliard 10^{12} ko`rinishida yoziladi. Shunga o`xshash undan ham katta sonlarni yozish mumkin. Shunday qiiib, milliard ichidagi hamma natural sonlarni aytish uchun hammasi bo`lib 22 ta turli so`z ishlatiladi: bir, ikki, uch, to`rt, besh, olti, etti, sakkiz, to`qqiz, o`n, yigirma, o`ttiz, qirq, ellik, oltmish, etmish, sakson, to`qson, yuz, ming, million, milliard. Natural sonning o`nli yozuvi sonlarni taqqoslashning yana bir usulini beradi. Agar n va m natural sonlar o`nli sanoq sistemasida, ya'ni

$n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+.....+n_1\cdot 10+n_0,\ n_k\neq 0$

$m=m_l\,10^l+m_{l-1}\,10^{l-1}+...+m_1\cdot 10+m_0,\ m_l\neq 0$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, quyidagi shartlardan biri bajarilsa, n soni m dan kichik bo'ladi:

1) $k< l$ (n sondagi xonalar soni m sondagi xonalar sonidan kichik):

2) $k=l$, ammo $n_k< m_l$

3) $k=l$, $n_k=m_k, ..., n_s=m_s$ ammo $n_{s-1}< m_{s-1}$.

Bu tasdiqni isbotsiz qabul qilamiz. Ulardan foydalanib, sonlarni oson taqqoslash mumkin.

Masalan, a) 2465<18328, chunki 2465 sonning yozuvidagi raqamlar 18328 sonning yozuvidagi raqamlardan kam;

b) 2456 <5287, bunda raqamlar soni bir xil, ammo 2456 sonidagi minglar xonasidagi raqam 5287 sonining minglar xonasidagi raqamdan kichik; v) 2475<2486, bunda raqamlar soni bir xil, birlar va o'nlar xonasidagi raqam 2486 sonidagi birlar va o'nlar xonasidagi raqamdan kichik.

3. Sonlarning o'nli sanoq sistemasidan farqli pozitsion sanoq sistemasidagi yozuvi. Biz asosi 10 bo'lgan sanoq sistemasida har qanday son ushbu $n_n10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_1\,10+n_0$ ko'rinishida yozilishini bilamiz,unda n_k, n_{k-1}, ...,n_0 koeffitsientlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, qiymatlarini qabul qiladi va $n_k\neq 0$.

O'nli sanoq sistemasi pozitsiondir – ayni bir belgi (raqam) ning qiymati bu belgining shu sonning yozuvida tutgan o'rniga (pozitsiyasiga) bog'liq.

Ma'lumki, o'nli sanoq sistemasidan boshqa bir qancha pozitsion sanoq sistemalari mavjud va bularni o'nli sanoq sistemasidan farqi bu sistemalarning asoslari turlicha bo'lishligidir.

Masalan, Vavilonda sanoq sistemasi oltmishli bo'lgan. Bundan boshqa sanoq sistemalar ham ma'lum: o'n ikkili sistema va hokazo. Umuman, pozitsion sanoq sistemasining asosi ikkidan katta yoki ikkiga teng istalgan p natural son bo'lishi mumkin. Agar p=2 bo'lsa, sistema ikkili, p=3 bo'lsa, uchli, p=10 bo'lsa, o'nli sistema deyiladi.

p asosli sistemada son qanday yoziladi?

O`nli sistemada sonni yozish uchun 10 ta belgidan foydalaniladi. 0,1,2,3,4,5,6.7,8,9.

Ravshanki, ikkili sistemada sonni 2 ta belgi masalan, 0,1 belgilar yordamida, sakkizli sistemada 0,1,2,3,4.5,6,7,, belgilar yordamida yozish mumkin.

Umuman, p asosli sanoq sistemasida sonni yozish uchun p ta belgidan foydalanish kerak: 0,1,2, 3, ..., p – 1.

Ta'rif. p asosli sanoq sistemasida n natural sonning yozuvi deb uning $n=n_k\,p^k+n_{k-1}\,p^{k-1}+.....+n_1\cdot p+n_0$ ko`rinishdagi yozuviga aytiladi, bunda n_k, n_{k-1}. ... , n_0 lar 0,1,2 ..., p-1 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k\neq0$.

Har qanday n natural sonni bunday yagona ko`rinishda yozish mumkinligini isbotsiz qabul qilamiz.

n sonining $n=n_k\,P^k+n_{k-1}\,P^{k-1}+...n_1\,P+n_o$ ko`rinishini qisqacha ushbu ko`rinishda yozish qabul qilingan: $n=n_k\ n_{k-1}\ ...\ n_1\ n_0$

Masalan, to`rt asosli sanoq sistemada, ya'ni p=4 da $3\cdot4^3+0\ 4^2+2\cdot4+3$ yig`indi $n=3023_4$ ko`rinishda qisqacha yozish mumkin bo`lgan biror n sonining yozuvidir.

Bu son quyidagicha o`qiladi: «uch, nol, ikki, uch to`rtli sanoq sistemasida».

Sonlarni yozishda turli belgilardan foydalanish nuqtaiy nazaridan ikkili sanoq sistemasi tejamkorliroqdir – unda sonlarni yozish uchun faqat ikkita belgi 0 va 1 kerak. Bu sistemada sonning qisqa yozuvi nol va birlardan tuzilgan chekli ketma-ketlikdan iborat.

Masalan,

$$1011_2=1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot10+1; \qquad 10001_2=1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2+1.$$

p asosli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslash o`nli sanoq sistemadagidek bajariladi.

Masalan, $2101_3<2102_3$ chunki bu sonlarda xonalar soni bir xil va yuqori xonadagi uchta raqam bir xil bo`lib, birinchi sondagi kichik xona raqami ikkinchi sondagi o`sha xona raqamidan kichik.

**4. Bir sanoq sistemasidan ikkinchisiga o`tish.** 1) Sonning p asosli sistemadagi yozuvidan o`nli sistemadagi yozuviga o`tish. n soni p asosli sanoq sistemasida yozilgan bo`lsin: $n=n_k n_{k-1}....n_1 n_0$.

Uni ushbu $n_k \cdot p^k+n_{k-1} \cdot p^{k-1}+.....+n_1 p+n_0$ ko`p had ko`rinishda yoyib yozish mumkin, bunda $n_k, n_{k-1},....,n_1,$ n_0 va p sonlar yozuvi o`nli sistemada berilgan. Bu sonlar ustida o`nli sistemada qabul qilingan qoidalar bo`yicha amallar bajarib, n sonning o`nli yozuvini hosil qilamiz.

Masalan, 253_6 sonining o`nli yozuvini topish uchun uni $2\cdot 6^2+5\cdot 6+3$ yig`indi ko`rinishida yozamiz va qiymatlarini topamiz: $2\cdot 6^2+5\cdot 6+3=112$.

Demak, $253_6=112_{10}$

2) Sonning o`nli sistemadagi yozuvidan *p* asosli sistemadagi yozuviga o`tish.

n soni o`nli sistemada yozilgan bo`lsin. Uni p asosli sistemada yozish degan so`z $n_k, n_{k-1}, \dots, n_0$ larning $n=n_k \cdot p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \dots + n_1 p + n_0$ bo`ladigan qiymatini topish demakdir, bunda

$$1\le n_k< p.\ 0\le n_{k-1}<p, \dots ,\ 0\le n_0 < p.$$

Diqqatimizni ushbu qonuniyatga qaratamiz.

$n=n_k p^k+n_{k-1} p^{k-1}+ .. +n_1 \cdot p+n_0$ sonini $n=p\cdot(n_k \cdot p^{k-1}+n_{k-1}\cdot p^{k-2}+...+n_1)+n_0$ ko`rinishda yozish mumkin $0\le n_0 < p$ bo`lgani uchun *n* sonining oxirgi yozuvini *n* sonini *p* qoldiqli bo`lishdagi yozuv deb qarash mumkin, bunda $n_0$ - qoldiq, $n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-2} + \dots + n_1$ - to`liqsiz bo`linma. Xuddi shuningdek, $n_1$ – ni hosil bo`lgan bo`linmani p ga bo`lganda chiqqan qoldiq deb qarash mumkin va hokazo.

Bu qonuniyat sonning o`nli yozuvidan *p* asosli sistemadagi yozuviga o`tish jarayoniga asos bo`ladi. n sonini *p* ga o`nli sistemada bo`lish qoidasi bo`yicha qoldiqli bo`lamiz. Bo`lishda chiqqan qoldiq sonning *p* asosli sistemadagi yozuvining oxirgi raqami bo`ladi.

Chiqqan bo`linmani yana p ga qoldiqli bo`lamiz. Yangi qoldiq n sonining p asosli sistemasidagi yozuvning oxiridan bitta oldingi raqami bo`ladi. Bo`lish jarayonini davom ettirib, n sonining p asosli sistemadagi yozuvining hamma raqamlarini topamiz.

Masalan, 97 sonining uchli sanoq sistemasidagi yozuvini topaylik, ya'ni 97 sonini $n_k \cdot 3^n + n_{k-1} \cdot 3^{n-1} + ... + n_1 \cdot 3 + n_0$ ko`rinishda yozamiz, bunda $n_k, n_{k-1},..., n_1, n_0$ lar $0,1,2$ qiymatlarni qabul qiladi. 97 ni 3 ga bo`lamiz: $97=32\cdot3+1$. Bo`lish natijasida $n_0=1$ ekanligi topildi. Biroq 3 soni oldidagi koeffitsient 3 dan katta: shuning uchun 32 ni 3 ga bo`lamiz: $32=10\cdot3+2$, ya'ni $97=(10\cdot3+2)\cdot3+1=10\cdot3^2+2\cdot3+1$. Bu bo`lishda $n_1=2$ ni topdik, biroq $3^2$ daraja oldidagi koeffitsient 2 dan katta, shuning uchun 10 ni 3 ga bo`lamiz: $10=3\cdot3+1$, ya'ni $97=(3\cdot3+1)\cdot3^2+2\cdot3+1=3\cdot3^3+1\cdot3^2+2\cdot3+1$

Bu bosqichda $n_2=1$ ekanini aniqladik, ammo 3^2 daraja oldidagi koeffitsient 3 dan katta, shuning uchun 3 ni 3ga bo`lamiz: $3=1\cdot3+0$, ya'ni $97=(1\cdot3+0)\cdot3^3+1\cdot3^2+2\cdot3+1=1\cdot3^4+0\cdot3^3+1\cdot3^2+2\cdot3+1$

Oxirgi bo`lishni bajarib, biz $n_3=0$ ekaninigina topmasdan, katta xona raqamini ham aniqladik. Shuning uchun bo`lish jarayoni tugallandi. $1\cdot3^4+0\cdot3^3+1\cdot3^2+2\cdot3+1$ ko`phad 10121_3 sonining yozuvidir. Demak, $97_{10}=101\,21_3$

Ko`rsatilgan bu jarayonni burchak qilib bo`lishni bajarib ham olib borish mumkin.

Demak, $97_{10}=10121_3$;

Bunday bo`lish natijasini yoza borib, katta xona raqami ketma-ket bo`lishdagi oxirgi bo`linma ekanligini esda tutish lozim.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Pozitsion sanoq sistemasi deganda nimani tushunasiz?
2. O`nli sanoq sistemasida sonlar qanday ifodalanadi?
3. Sonlar yozuvidagi sinflarni aytib bering.
4. O`nli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslang.
5. O`ndan farqli pozitsion sistemalarda sonlarning yozilishiga misollar keltiring.
6. Bir sanoq sistemasidan ikkinchi sanoq sistemasiga o`tishni misollar yordamida tushuntiring.

2.2.3. O`nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida Sonlar ustida amallar

1. O`nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni qo`shish.

Dastlab misollardan boshlaymiz: 364+2423 sonlarni qo`shamiz. Buning uchun qo`shiluvchilarni koeffitsientli o`nning darajalari yig`indisi ko`rinishda yozamiz:

$$364+2423=(3\cdot 10^2+6\cdot 10+4)+(2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+2\cdot 10+3).$$

Bu ifodada qavslarni ochib, qo`shiluvchilar o`rnini shunday almash-tiramizki, birlar birlar oldida, o`nlar o`nlar oldida va hokazo bo`lsin va yana qavs ichiga olamiz. Bularning hammasini qo`shishning tegishli qonunlari asosida bajarish mumkin. Haqiqatan, gruppalash qonuni ifodalarini qavslarsiz yozishga imkon beradi:

$3\cdot 10^2+6\cdot 10+4+2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+2\cdot 10+3$. O`rin almashtirish qonuniga ko`ra qo`shiluvchilar o`rnini almashtiramiz: $2\cdot 10^3+(3\cdot 10^2+4\cdot 10^2)+(6\cdot 10+2\cdot 10)+ +(4+3)$. Birinchi qavsdan 10^2 ni, ikkinchisidan 10 ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Buni qo`shishga nisbatan ko`paytirishning taqsimot qonunini qo`llab bajarish mumkin:

$$2\cdot 10^3+(3+4)\cdot 10^2+(6+2)\cdot 10+(4+3)$$

Ko`rib turibmizki, 364 va 2423 sonlarini qo`shish tegishli xonalar raqamlari bilan tasvirlangan bir xonali sonlarni qo`shishga keltirildi. Bu yig`indini qo`shish jadvalidan topamiz: $2\cdot 10^3+7\cdot 10^2+8\cdot 10+7$.

Hosil qilingan ifoda 2787 sonining o`nli yozuvidir.

Endi $n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_o$ va $m=m_k\cdot 10^k+m_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+m_o$ sonlarini qo`shishni ko`raylik. Agar ikkala sonda ham xona birliklari teng bo`lib (agar teng bo`lmasa teng bo`lmagan son oldiga nollar yozib tenglashtiramiz) $n_s+m_s<10$ bo`lsa, yig`indi quyidagicha bo`ladi.

$$(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_o)+(m_k\cdot 10^k+m_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+m_o)=$$
$$=(n_k+m_k)\cdot 10^k+(n_{k-1}+m_{k-1})10^{k-1}+...+(n_o+m_o);$$

Agar $n_s+m_s\geq 10$ bo`lsa qo`shish birmuncha qiyin bo`ladi.

Masalan. 394+827 yig`indini qaraylik.

Qo`shiluvchilarni koeffitsientli o`nning darajalari yig`indisi ko`rinishida yozamiz:

$$(3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4) + (8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7).$$

Qo`shish qonunlari, qo`shishga nisbatan ko`paytirishning taqsimot qonunidan foydalanib, berilgan ifodani quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$(3 + 8) \cdot 10^2 + (9 + 2) \cdot 10 + (4 + 7).$$

Ko`rib turibmizki, bu holda ham berilgan sonlarni qo`shish bir xonali sonlarni qo`shishga keltirildi, ammo 3+8, 9+2, 4+7 yig`indilar 10 sonidan katta, shuning uchun hosil bo`lgan ifoda biror sonning o`nli yozuvi bo`lmaydi. Shunday qilish kerakki, 10 ning darajalari oldidagi koeffitsientlar 10 dan kichik bo`lsin. Buning uchun bir qator almashtirishlar bajaramiz. Avval 4+7 yig`indini 10+1 ko`rinishda yozamiz:

$$(3+8)\, 10^2 + (9+2)\, 10 + (10+1)$$

Endi qo`shish va ko`paytirish qonunlaridan foydalanib, topilgan ifodani quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$(3+8)\, 10^2 + (9+2+1) \cdot 10 + 1$$

Oxirgi almashtirishning mohiyati ravshan:birlarni qo`shishda hosil bo`lgan o`nni berilgan sonlardagi o`nliklarga qo`shdik. 9+3 yig`indini $1 \cdot 10+2$ ko`rinishda yozib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(3+8)\, 10^2 + (10+2)10+1 \text{ yoki } (3+8)10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10+1$$

va nihoyat 3+9 yig`indi hosil qilamiz: $(1 \cdot 10 + 2)\, 10^2 + 2 \cdot 10+1$ bundan

$$1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10+1.$$

Hosil bo`lgan ifoda 1221 sonining o`nli yozuvidir.

O`nli sanoq sistemasida yozilgan ko`p xonali sonlarni qo`shish algoritmi umumiy ko`rinishda quyidagicha ifodalanadi :

1) Ikkinchi qo`shiluvchining tegishli xonalari bir-birining ostiga tushadigan qilib birinchi qo`shiluvchining ostiga yozamiz, agar qo`shiluvchilarning bittasida xonalar soni kam bo`lsa, uning oldiga nollar yozib xonalar sonini tenglashtiramiz;

2) Birlar xonasidagi raqamlar qo`shiladi. Agar yig`indi 10 dan kichik bo`lsa, uni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga (o`nlar xonasiga) o`tamiz.

3) Agar birliklar raqamlarining yig`indisi 10 dan katta yoki 10 ga teng bo`lsa, uni $10+S_0$, bunda S_0 ni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo`shiluvchidagi o`nlar raqamiga 1 ni qo`shamiz, keyin o`nlar xonasiga o`tamiz.

4) O`nlar bilan yuqoridagi amallarni bajaramiz, keyin yuzlar bilan va hokazo. Yuqori xona raqamlari qo`shilgandan keyin bu jarayonni to`xtatamiz.

Boshqa sanoq sistemalarida sonlarni qo`shish ham shunga o`xshaydi. Bunda faqat shu sistemadagi bir qiymatli sonlarni qo`shish jadvalini bilish kerak.

Masalan, ikkilik sanoq sistemasida qo`shish jadvali quyidagicha:

m\n	0	1
0	0	1
1	1	10

Sakkizlik sanoq sistemasida qo`shish jadvali quyidagicha:

m\n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Yuqoridagi jadvallarga mos sonlarni qo`shishga misollar keltiramiz.

$$\begin{array}{r} 1101110_2 \\ +\ \underline{110101_2} \\ 10100011_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 230547_8 \\ +\ \underline{326715_8} \\ 557464_8 \end{array}$$

2. O`nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ayirish.

Quyidagi misollarni qaraylik.

1-misol. 3848 sonidan 725 sonini ayirish talab qilinsin. Dastlab kamayuvchi va ayriluvchida xonalar sonini tenglashtiramiz. Ayriluvchini 0725 ko`rinishda yozib, sonlarni koeffitsientli o`nning darajalari ko`rinishida yozamiz.

$$3248 = 3\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8$$

$$0725 = 0\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 5$$

Endi 3248 – 0725 ayirmani quyidagi ko`rinishda yozamiz.

$3848-0725 = (3\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8) - (0\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 5) =$

$= 3\cdot 10^3 + 8\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8 - 0\cdot 10^3 - 7\cdot 10^2 - 2\cdot 10 - 5;$

Yig`indi va ayirma xossalaridan foydalanib, bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$3848-0725 = (3-0)\cdot 10^3 + (8-7)\cdot 10^2 + (4-2)\cdot 10 + (8-5) = 3\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 3 = 3123$

2-misol. 6157 – 376 ayirmani topish talab qilinsin. Bu holda ayirish oldingi misoldan qiyinroq bo`ladi, chunki bu ayirmani

$(6-0)\cdot 10^3 + (1-3)\cdot 10^2 + (5-7)\cdot 10 + (7-6)$ ko`rinishda yozib bo`lmaydi, sababi ayrim qavs ichidagi ifodalarda ayriluvchi kamayuvchidan katta. Shuning uchun kamayuvchini quyidagi ko`rinishda yozamiz. $6\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 7$

Bu ifodada ham 6 ni 5+1 ko`rinishda yozamiz. U holda $6157 = 6\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 7$; ammo $10^3 = 900 + 100 = 9\cdot 10^2 + 10\cdot 10$ bo`lganligidan $6157 = 5\cdot 10^3 + (9+1)\cdot 10^2 + (5+10)\cdot 10 + 7 = 5\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 15\cdot 10 + 7$

Demak,

$6157-376 = (5-0)\cdot 10^3 + (10-3)\cdot 10^2 + (15-6)\cdot 10 + (7-6) = 5\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 1 = 5791$

Endi umumiy holda $n = n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + n_0$ va $m = m_k 10^k + m_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + m_0$ sonlari berilgan bo`lsin.

U holda n-m ayirma barcha s $(o \leq s \leq k)$ lar uchun $n_s \geq m_s$ shart bajarilganda quyidagiga teng bo`ladi:

$$n-m = (n_k - m_k)10^k + (n_{k-1} - m_{k-1})\, 10^{k-1} + \ldots + (n_o - m_o).$$

Shunday qilib, ikki son ayirmasini topish algoritmi quyidagicha ifodalanadi:

1) ayriluvchini mos xonalari bir-birining ostida bo`ladigan qilib kamayuvchining ostiga yozamiz. Xonalar sonini tenglashtiramiz.

2) agar ayriluvchining birlar xonasidagi raqam kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo`lsa, uni kamayuvchining raqamidan ayiramiz, so`ngra keyingi xonaga o`tamiz.

3) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta, ya`ni $n_o < m_o$ bo`lib, kamayuvchining o`nlar raqami noldan farqli bo`lsa, kamayuvchining o`nlar raqamini bitta kamaytiramiz, shu vaqtning o`zida birlar raqami 10 ta ortadi, shundan keyin $10+n_o$ sonidan m_o ni ayiramiz va natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz, so`ngra keyingi xonaga o`tamiz.

4) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta bo`lib, kamayuvchining o`nlar, yuzlar va boshqa xonasidagi raqamlar nolga teng bo`lsa, kamayuvchining noldan farqli birinchi (birlar xonasidan keyingi) raqamini olib, uni bitta kamaytiramiz, kichik xonalardagi barcha raqamlarni o`nlar xonasigacha 9 ta orttiramiz, birlar xonasidagi raqamni esa 10 ta orttiramiz va $10+n_o$ dan m_o ni ayiramiz, natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga o`tamiz.

5) keyingi xonada bu jarayonni takrorlaymiz.

6) kamayuvchining katta xonasidan ayirish bajarilgandan keyin ayirish jarayoni tugallanadi.

Boshqa sanoq sistemalarida ham sonlarni ayirish yuqoridagiga o`xshash, ammo farqi ayirish qaysi sistemada bajarilayotgan bo`lsa shu sistemalardagi birlik sonlarni qo`shish jadvalidan foydalaniladi.

Misollar keltiramiz:

$$\begin{array}{r} 4823_9 \\ -\ \underline{745_9} \\ 4067_9 \end{array}$$

Haqiqatan ham qo`shish jadvaliga asosan $5_9+7_9=13_9$; $13_9-5_9=7_9$ bo`ladi, boshqalarini ham shunga o`xshash ko`rsatish mumkin.

3. O`nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ko`paytirish.

Ma'lumki, ikkita bir xonali sonni ko`paytirishda hosil bo`lgan hamma ko`paytmalar esda saqlanadi. Hamma bunday ko`paytmalar maxsus jadvalga yoziladi, bu jadval bir xonali sonlarni ko`paytirish jadvali deyiladi.

325 sonini 1000 ga ko`paytirishni bajarganda 325 soni ketiga uchta nolni yozish yetarli, ya'ni 325000 bo`ladi. Haqiqatan ham, $325=3\cdot10^2+2\cdot10+5$ ko`rinishida yozish mumkin va qo`shishga nisbatan ko`paytirish distributivlik xossasiga ega bo`lishidan $10^k\cdot10^s=10^{k+s}$ ga ko`ra,

$$325\cdot1000=(3\cdot10^2+2\cdot10+5)\cdot10^3=3\cdot10^5+2\cdot10^4+5\cdot10^3$$ bo`ladi.

Bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$$325\cdot1000=3\cdot10^5+2\cdot10^4+5\cdot10^3+0\cdot10^2+0\cdot10+0=325000$$

Bundan ko`rinadiki n sonini $10^S$ ga ko`paytirish uchun n sonining o`ng tomoniga s ta nol yozish kifoya. Haqiqatan ham, agar $n=n_kn_{k-1}...n_0$ soni berilgan bo`lsa, u holda $n=n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n$ ni 10^s ga ko`paytiramiz.

$n\cdot10^S=(n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_0)\cdot10^S=n_k10^{k+s}+n_{k-1}10^{k-1+s}+...+n_0\cdot10^s+0\cdot10^{s-1}+...+0;$

Demak, $n\cdot10^s=n_k\cdot n_{k-1}\ ...+n_0\cdot\underbrace{0\cdot0\cdot0}_{s\ ta}$

Endi $n=n_k\cdot n_{k-1}...+n_0$ sonini bir xonali m soniga ko`paytiramiz.

$n\cdot m=(n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_0)m=n_km10^k+n_{k-1}m10^{k-1}+...+n_0m;$

bu yerda n_s m lar bir xonali sonlar bo`lib, ularning ko`paytmalari bir xonali sonlarni ko`paytirish jadvalida bor bo`lib, ularning natijalari bir xonali yoki ikki xonali sonlar bo`ladi.

n_s m ko`paytmani $n_s\ m=a_s10+b_s$ ko`rinishida yozish mumkin, (bunda faqat $a_s=0$ bo`lgan holni hisobga olgan holda.)

U holda biz quyidagiga ega bo`lamiz. $n\ m=(a_k10+b_k)10^k+(a_{k-1}\cdot10+b_{k-1})10^{k-1}+...+(a_0\cdot10+b_0)=(a_k10^{k+1}+a_{k-1}10^k+...++a_010)+(b_k10^k+b_{k-1}10^{k-1}+...+b_0);$

Misol.

$48\cdot7=(4\cdot10+8)\cdot7=4\cdot7\cdot10+8\cdot7=28\cdot10+56=(2\cdot10+8)\cdot10+(5\cdot10+6)=$

$=2\cdot10^2+(8+5)\cdot10+6=2\cdot10^2+(10+3)\cdot10+6=2\cdot10^2+10+3\cdot10+6=3\cdot10^2+3\cdot10+6=336$

Endi ko`p xonali sonlarni ko`paytirishni qaraymiz:

$n=n_k10^k+n_{k-1}10^{k-1}+...+n_0$ va $m=m_l10^l+m_{l-1}10^{l-1}+...+m_0$ sonlari berilgan bo`lsin. $n\cdot m$ ko`paytmani topamiz. Dastlab ko`paytirish xossasiga ko`ra quyidagini hisoblaymiz.

$n\,(m_l10^l+m_{l-1}10^{l-1}+...+m_0)=(nm_l)10^l+(n\,m_{l-1})10^{l-1}+...+nm_0$

n sonini ketma-ket bir xonali $m_l, m_{l-1}, .., m_0$ sonlariga ko`paytirib, natijani $10^l, 10^{l-1}, ...,$ 1 sonlariga ko`paytirib qo`shamiz natijada $n \cdot m$ ko`paytmaga ega bo`lamiz.

Bu esa bizni odatdagi sonlarni ustun shaklda yozib ko`paytirish qoidalarimizga mos keladi.

Masalan,
$$\begin{array}{r} 385 \\ \times\ \underline{\ \ 24} \\ 1540 \\ ^{+}\underline{770\ \ } \\ 9240 \end{array}$$

Shunday qilib, ko`p xonali sonni ko`p xonali songa ko`paytirish ko`p xonali sonni bir xonali songa ko`paytirishga keltirildi.

Umuman, $n = n_k\ n_{k-1} \ldots n_1\ n_0$ sonni $m = m_l m_{l-1} \ldots m_1 m_0$ songa ko`paytirish algoritmini quyidagicha ifodalash mumkin:

1) n ko`paytuvchini yozamiz va uning ostiga ikkinchi ko`paytuvchi m ni yozamiz.

2) n sonni m sonning kichik xonasi m_0 ga ko`paytiramiz va $n \cdot m_0$ ko`paytmani m sonning ostiga yozamiz.

3) n sonni m sonning keyingi xonasi m_1 ga ko`paytiramiz va $n \cdot m_1$ ko`paytmani bir xona chapga surib yozamiz. Bu $n \cdot m_1$ ni 10 ga ko`paytirishga mos keladi.

4) bu jarayonni nm_l ni hisoblaguncha davom ettiramiz.

5) topilgan l+1 ta ko`paytmani qo`shamiz.

O`nli sanoq sistemadan boshqa sistemadagi sonlar ham shunga o`xshash ko`paytiriladi. Bunday ko`paytirishda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko`paytirish jadvalidan foydalaniladi. Ikki, uch va oltilik sanoq sistemalari uchun shunday jadvallarni keltiramiz.

1) ikkilik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1
0	0	0
1	0	1

2) uchlik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

3) oltilik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Misol.

$$\begin{array}{r} \times\ 43_5 \\ \underline{32_5} \\ +\ 141 \\ \underline{234\ \ } \\ 3031_5 \end{array}$$

4. O`nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni bo`lish.

Sonlarni bo`lish texnikasi haqida so`z borar ekan, bu jarayon qoldiqli bo`lish amali kabi qaraladi. Ta'rifni eslayiik. Butun nomanfiy *a* sonni *b* natural songa qoldiqli bo`lish deb, $a=bq+r$ va $0\leq r< b$ bo`ladigan butun nomanfiy *q* va *r* sonlarni topishga aytiladi, q soni esa to`liqsiz bo`linma deyiladi.

Bir xonali va ikki xonali sonlarni bir xonali songa bo`lganda bir xonali sonlarni ko`paytirish jadvalidan foydalaniladi.

Masalan, 63 ni 8 ga bo`lamiz. Ko`paytirish jadvalidan 8-ustunda 63 soni yo`q. Shuning uchun bu ustunda 63 dan kichik eng yaqin 56 sonini olamiz. 56 soni

8-satrda bo`lgani uchun to`liqsiz bo`linma 7 ga teng. Qoldiqni topish uchun 63 dan 56 ni ayiramiz: 63-56=7.

Shunday qilib, $63=8\cdot 7+7$;

Endi ko`p xonali sonni bir xonali songa bo`lish qanday amalga oshirilishini aniqlaymiz. 346 ni 4 ga bo`lish kerak bo`lsin. Bu degani shunday to`liqsiz bo`linma q va r qoldiqni topish kerakki, ular uchun $346=4\cdot q+r$, $0\le r<4$ bo`lsin. Shuni aytish kerakki, 346 va 4 sonlarni to`liqsiz bo`linmasi q ga bo`lgan talabni quyidagicha yozish mumkin:

$$n\cdot q\le 346<n\,(q+1).$$

Avval q sonining yozuvida nechta raqam bo`lishini aniqlaymiz. $q$ bir xonali son ko`paytmasi plyus qoldiq 346 ga teng emas. Agar q soni ikki xonali bo`lsa, ya'ni agar $10<q<100$ bo`lsa, u holda 346 soni 40 va 400 sonlari orasida bo`ladi, bu esa to`g`ri. Demak, 346 va 4 sonlarining bo`linmasi ikki xonali son.

Bo`linmaning o`nlar raqamini topish uchun bo`linuvchi 4 ni ketma-ket 20 ga, 30 ga, 40 ga va hokazo ko`paytiramiz. $4\cdot 80=320$, $4\cdot 90=360$ va $320<346<360$ bo`lgani uchun to`liqsiz bo`linma 80 va 90 sonlari orasida bo`ladi, ya'ni $q=80+q_0$. U holda 346 soni haqida bunday deyish mumkin: $4\cdot(80+q_0)\le 346<4\cdot(80+q_0+1)$, bundan $320+4\cdot q_0\le 346<320+\ldots+4(q_0+1)$ va $4\cdot q_0\le 26<4\cdot(q_0+1)$.

Berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini(bo`linmaning birlar raqamini) ko`paytirish jadvalidan foydalanib topish mumkin. $q_0=6$ hosil bo`ladi demak, to`liqsiz bo`linma $q=80+6=86$, qoldiq ayirish bilan topiladi: $346-4\cdot 86=2$.

Shunday qilib, 346 ni 4 ga bo`lganda to`liqsiz bo`linma 86 va 2 qoldiq hosil bo`ladi: $346=4\cdot 86+2$.

Bo`lishni ifodalagan bu jarayon burchak qilib bo`lish deb nomlanadigan bo`lish asosida yotadi.

$$\begin{array}{r|l} 346 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{32} & 86 \\ 26 & \\ \underline{24} & \\ 2 & \end{array}$$

Ko`p xonali sonni ko`p xonali songa bo`lish quyidagicha bajariladi.

Masalan, 6547 ni 57 ga bo`laylik. Bu bo`lishni bajarish shunday butun nomanfiy q va r sonlarni topish kerakki, uning uchun $6547=57q+r$, $0\leq r<57$ bajarilsin.

Bundan $57q\leq 6547<57(q+1)$ q bo`linmadagi raqamlar sonini aniqlaymiz. Shubhasiz, $q$ bo`linma 100 va 1000 sonlari orasida yotadi (u uch xonali), chunki $5700 < 6547 < 57000$;

Bo`linmaning yuzlar raqamini topish uchun bo`linuvchi 57 ni ketma-ket 100 ga, 200 ga, 300 ga va hokazo ko`paytiramiz. $57\cdot 100=5700$; $57\cdot 200=11400$ va $5700<6547<11400$ bo`lgani uchun to`liqsiz bo`linma 100 va 200 sonlari orasida yotadi, ya'ni $q=100+q_1$, bu yerda q_1 ikki xonali son. U holda quyidagi tengsizlik o`rinli bo`ladi:

$$57\cdot(100+q_1)\leq 6547<57(100+q_1+1).$$

Qavslarni ochib va 5700 sonini ayirib, ushbu tengsizlikka kelamiz:

$$57q_1\leq 847<57(q_1+1)$$

q_1 soni ikki xonali. Shuning uchun bo`linmadagi o`nlar raqamini topish uchun bo`linuvchi 57 ni ketma-ket 10 ga, 20 ga, 30 ga va hokazo ko`paytiramiz.

$57\cdot 10=570$, $57\cdot 20=1140$ va $570<847<1140$ bo`lgani uchun $10<q_1<20$ va $q_1$ sonini $q_1=10+q_0$ ko`rinishda yozish mumkin. U holda 847 soni haqida quyidagilarni aytish mumkin:

$57\cdot(10+q_0)\leq 847<57(10+q_0+1)$, ya'ni

$57\cdot 10+57q_0\leq 847<57\cdot 20+57(q_0+1)$, $57q_0\leq 277<57(q_0+1)$.

Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonining (bo`linmaning birlar raqamini) 57 ni ketma-ket 1 ga, 2 ga, ... , 9 ga ko`paytirib tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini tanlab topamiz. $57\cdot 4=228$. Demak q_0 soni 4 ga q_1 esa 14 ga, to'liqsiz bo'linma $q=100+14=114$ ga teng. Qoldiq ayirish yo'li bilan topiladi $6547-114\cdot 57=49$ 6547 ni 57 ga bo`lganda, to`liqsiz bo`linma 114 ga, qoldiq 49 ga teng. $6547=114\cdot 57+49$.

Butun nomanfiy a sonni b natural songa bo`lishning turli usullarining umumlashmasi quyidagi burchak qilib bo`lish algoritmi hisoblanadi:

1. Agar $a=b$ bo`lsa, bo`linma $q=1$ qoldiq $r=0$ bo`ladi.

II. Agar $a>b$ bo`lib, $a$ va $b$ sonlardagi xonalar soni bir xil bo`lsa, b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 ga ko`paytirib, bo`linma tanlab olinadi. chunki $a < 10\, b$

III. Agar $a > b$ bo`lib, a sondagi xonalar soni $b$ sondagi xonalar sonidan katta bo`lsa, a bo`linuvchini yozib, uning o`ng tomoniga b bo`luvchini yozamiz va oralariga burchak belgisini qo`yib, bo`linma hamda qoldiqni ushbu ketma-ketlikda qidiramiz:

1) b sonda nechta xona bo`lsa, $a$ sonda shuncha katta xonalarni yoki, agar zarur bo`lsa, bitta ortiq xonani shunday ajratamizki, ular b dan katta yoki unga teng d_1 sonni hosil qilsin. b ni ketma-ket 1,2,3,4,5,6.7,8,9. ga ko`paytirib, $d_1$ va $b$ sonlarning $q_1$ bo`linmasini tanlab topamiz. q_1 ni burchak ostiga (b dan pastga) yozamiz.

2) b ni q_1 ga ko`paytirib, ko`paytmani a sonining ostiga shunday yozamizki, bq_1 sonning quyi xonasi ajratilgan d_1 sonning quyi xonasi ostiga yozilsin.

3) b_1 ning ostiga chiziqcha chizamiz va ayirmani topamiz: $r_1 = d_1 - bq_1$

4) r_1 ayirmani bq_1 sonning ostiga yozamiz. r_1 ning o`ng tomoniga $a$ bo`linuvchining foydalanilmagan xonalaridan yuqori xonasini yozamiz va chiqqan d_2 sonni b son bilan taqqoslaymiz.

5) Agar chiqqan d_2 son b dan katta yoki unga teng bo`lsa, u holda $d$ ga nisbatan I yoki II punktlardagidek ish tutamiz. $q_2$ bo`linmani q_1 dan keyin yozamiz.

6) Agar chiqqan d_2 son b dan kichik bo`lsa, birinchi chiqqan $d_3$ son $b$ dan katta yoki unga teng bo`lishi uchun keyingi xonadan qancha zarur bo`lsa yana shuncha yozamiz. Bu holda $q_1$ dan keyin shuncha nol yozamiz. Keyin $d_3$ ga nisbatan I yoki II punktlardagidek ish tutamiz. $q_2$ bo`linma nollardan keyin yoziladi. Agar a sonning kichik xonadan foydalanganda $d_3<b$, bo`lsa, $d_3$ va $b$ sonlarning bo`linmasi nolga teng bo`ladi va bu nolni bo`linmaning oxirgi xonasiga yozamiz, qoldiq $r=d_3$ bo`ladi.

Boshqa sanoq sistemalarida bo`lishda hisoblashlar burchak qilib bo`lishga keltiriladi va unda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko`paytirish jadvallaridan foydalaniladi.

Masalan, $10220_3 : 12_3$ hisoblansin (uchlik sanoq sistemasi).

Demak, $10220_3 : 12_3 = 210_3$.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. O`nli sanoq sistemasida sonlarni qo`shish formulasini keltirib chiqaring.
2. O`nli sanoq sistemasida sonlarni qo`shish algoritmini yozib bering.
3. Yettilik sanoq sistemasida sonlarni qo`shishni misollar yordamida tushuntiring.
4. O`nli sanoq sistemasida sonlarni ayirish formulasini keltirib chiqaring.
5. O`nli sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmini yozib bering.
6. Oltilik sanoq sistemasida sonlarni ayirishni misollar yordamida tushuntiring.
7. O`nli sanoq sistemasida sonlarni ko`paytirish formulasini keltirib chiqaring.
8. O`nli sanoq sistemasida sonlarni ko`paytirish algoritmini yozib bering.
9. Sakkizlik sanoq sistemasida sonlarni ko`paytirishni misollar yordamida tushuntiring.
10. O`nlik sanoq sistemasida sonlarni bo`lishni tushuntiring.
11. O`nli sanoq sistemasida sonlarni bo`lishning umumlashgan burchak qilib bo`lish algoritmini yozib bering.
12. Uchlik sanoq sistemasida sonlarni bo`lishni misollar yordamida tushuntiring.

O`nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida arifmetik amallarni bajarishga doir topshiriqlar

Topshiriqlarida ifodalarning qiymatlari qaysi sanoq sistemasida berilgan bo`lsa, shu sistemada amal bajarib, natija boshqa sanoq sistemasiga o`tkazilsin.

1-misol. $42_5 \cdot 324_5 + 213_5 = x_8$

Yechish. 5-lik sanoq sistemasi uchun bir xonali sonlarni qo`shish va ko`paytirish jadvalini tuzamiz.

Qo`shish jadvali

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Ko`paytirish jadvali

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Jadvaldan foydalangan holda,

1) $42_5 \cdot 324_5$ ning qiymatini topamiz:

$$\begin{array}{r} \times\ 324 \\ \underline{42} \\ +\ 1203 \\ \underline{2411} \\ 30313_5 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r} 30313 \\ +\ \underline{213} \\ 31031_5 \end{array}$$

Shunday qilib, ifodaning qiymati 31031_5 ga teng.

3) $31031_5 \Rightarrow x_8$ sonlarni bir sanoq sistemasidn ikkinchisiga o`tkazish uchun daslab berilgan sonni 10 lik sanoq sistemasiga quyidagi formula orqali keltiramiz.

$n = n_k n_{k-1} \ldots n_0, \quad n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + n_0;$ $31031_5 \Rightarrow x_{10}$

1-usul: 31031_5 asosning darajalarini belgilab olib, so`ng

$31031_5 = 3\cdot5^4+1\cdot5^3+0\cdot5^2+3\cdot5^1+1\cdot5^0 = 3\cdot625+1\cdot125+0\cdot25+3\cdot5+1\cdot1 =$
$=1875+125+15+1=2016_{10}$

2- usul: $31031_5 \Rightarrow x_{10} \Rightarrow 2016_{10}$

$3\cdot5+1=16$
$16\cdot5+0=80$
$80\cdot5+3=403$
$403\cdot5+1=2016$

4) $31031_5 \Rightarrow x_8$. Sonni 8 ga ketma-ket qoldiqli bo`lamiz:

$$
\begin{array}{l}
-2016|\underline{8} \\
\underline{16}\quad -252|\underline{8} \\
-41\quad \underline{24}\quad -31|\underline{8} \\
\underline{40}\quad -12\quad \underline{24}\quad 3 \\
-16\quad \underline{8}\quad 7 \\
\underline{16}\quad 4 \\
0
\end{array}
$$

Qoldiqlarni teskari tartibda yozamiz. $2016_{10} \Rightarrow x_8 \Rightarrow 3740_8$

8-lik sistemadagi son hosil bo`ldi. Demak, $31031_5 \Rightarrow 3740_8$.

Javob: $x_8 = 3740_8$

1. $1221_3 \cdot (2212 - 1220_3) \Rightarrow x_5$.
2. $573_8 \cdot 34_8 + 1763_8 \Rightarrow x_6$.
3. $34_5 \cdot (4321_5 + 2042_5) \Rightarrow x_7$.
4. $4203_5 + 2132_5 - 24_5 \cdot 13_5 \Rightarrow x_9$.
5. $12134_5 - 34_5 \cdot 14_5 \Rightarrow x_3$.
6. $1201_3 + 2122_3 \;\; 201_3 \Rightarrow x_6$.
7. $(45704_8 - 62102_8) \cdot 4_8 \Rightarrow x_7$.
8. $(122_3 + 212_3) \cdot 22_3 \Rightarrow x_2$.
9. $342_5 \cdot 111_5 + 134_5) \Rightarrow x_8$.
10. $75504_8 + 34021_8 - 23_8 - 23_8 \cdot 7_8 \Rightarrow x_9$.

Sonlar ustida amallarni bajaring.

1. $4342_5 + 4221_5 \Rightarrow x_7$
2. $5032_9 + 2106_9 \Rightarrow x_6$
3. $6235_7 + 3463_7 \Rightarrow x_5$
4. $42401_5 - 13432_5 \Rightarrow x_3$
5. $12034_5 + 3444_5 \Rightarrow x_2$
6. $110101_2 + 10101_2 \Rightarrow x_3$
7. $42401_5 - 13432_5 \Rightarrow x_4$
8. $6235_7 + 1235_7 \Rightarrow x_6$
9. $5032_9 + 2106_9 \Rightarrow x_8$

11. $120101_3 : 102_3 \Rightarrow x_2$
12. $2143_5 - 334_5 \Rightarrow x_3$
13. $3203_5 + 263_5 \Rightarrow x_2$
14. $4203_5 + 2132_5 \Rightarrow x_4$
15. $4212_7 + 1132_7 \Rightarrow x_3$
16. $2303_9 + 2112_9 \Rightarrow x_9$
17. $4284_5 + 2062_5 \Rightarrow x_6$
18. $1653_5 + 2132_5 \Rightarrow x_4$
19. $4203_6 + 2122_6 \Rightarrow x_8$

10. $2102_3 \cdot 21_3 \Rightarrow x_2$ 20. $4233_5 + 2152_5 \Rightarrow x_7$

2.2.4. Nomanfiy butun sonlarning bo`linuvchanligi. Bo`linuvchanlik munosabati va uning xossalari

**1. Bo`linuvchanlik munosabati.** Ma'lumki, butun nomanfiy [illegible] doim ham ayirib va bo`lib bo`lmaydi. Ammo butun nomanfiy $a$ va $b$ [illegible] ayirmasining mavjudligi haqidagi masala oson yechiladi, ya'ni $a \geq b$ [illegible] yetarli. Bo`lish uchun esa bunday umumiy shart yo`q. Bu bo`linish [illegible] topish uchun bo`linuvchanlik munosabati tushunchasini aniqlashtirish [illegible]

Butun nomanfiy a son va b natural son berilgan bo`lsin.

1-ta'rif. Agar a ni b ga qoldiqli bo`lganda, qoldiq nolga teng bo`lsa, b [illegible] sonining bo`luvchisi deyiladi.

2-ta'rif. Agar $a \in N_0$ va $b \in N$ sonlar uchun shunday $q \in N_0$ [illegible] $a=b \cdot q$ tenglik bajarilsa, a soni b songa bo`linadi deyiladi va $a \vdots b$ kabi [illegible] Masalan, 6 soni 24 sonining bo`luvchisidir, chunki shunday butun [illegible] son mavjudki, uning uchun 24=6 4 bo`ladi.

"Berilgan sonning bo`luvchisi" terminini "bo`luvchi" [illegible] bilish kerak. Masalan, 25 ni 4 ga bo`lganda 6 soni bo`luvchi deyiladi, [illegible] 25 ning bo`luvchisi emas. Agar 25 ni 5 ga bo`lsak, bunda "bo`luvchi" [illegible] sonning bo`luvchisi" terminlari bitta narsani anglatadi.

b soni a sonining bo`luvchisi bo`lganda a soni b ga karrali [illegible] bo`linadi deyiladi va $a \vdots b$ kabi yoziladi.

$a \vdots b$ yozuv bo`linuvchanlik munosabati yozuvidir, bu yozuv [illegible] ustida bajariladigan amalni ko`rsatmaydi, ya'ni $a \vdots b=c$ deb yozib bo`lmaydi. Berilgan sonning bo`luvchisi shu sondan katta bo`lmagani [illegible] bo`luvchilari to`plami chekli. Masalan, 24 sonining hamma [illegible] qaraylik. Ular chekli to`plamni hosil qiladi: {1,2,3,4,6,8,12,24}.

[illegible] **munosabati xossalari.** Bo`linuvchanlik munosabati qator [illegible]

[illegible] 0 soni ixtiyoriy natural songa bo`linadi, ya'ni $(\forall b \in N)\ 0 \vdots b$

[illegible] ham, ixtiyoriy $b \in N$ uchun shunday $0 \in N_0$ topildiki, $0=b \cdot 0$. [illegible] ta'rifiga ko`ra $0 \vdots b$.

[illegible] Ixtiyoriy natural son nolga bo`linmaydi, ya'ni $(\forall a \in N)\ a \not\vdots 0$ [illegible]

[illegible] $a \in N$ bo`lsin. Ixtiyoriy $b \in N_0$ soni uchun $0 \cdot b=0$ bo`lganligidan, b [illegible] qiymati uchun $a=0 \cdot b$ tenglik bajarilmaydi, chunki $a \neq 0$. Demak, a [illegible]

[illegible] Ixtiyoriy son 1 ga bo`linadi, ya'ni $(\forall a \in N_0)\ a \vdots 1$.

[illegible] $a \in N_0$ soni uchun shunday $a \in N_0$ topildiki, $a=1 \cdot a$, bundan esa a [illegible] kelib chiqadi.

[illegible] Bo`linuvchanlik munosabati refleksivdir, ya'ni har qanday [illegible] bo`linadi $a \vdots a$.

[illegible] natural a son uchun $a=a \cdot 1$ tenglik o`rinli. Bu degani, shunday [illegible] uning uchun $a=a \cdot 1$, bundan bo`linuvchanlik munosabati [illegible] a.

[illegible] Agar $a \vdots b$ va $a>0$ bo`lsa, u holda $a \geq b$ bo`ladi.

[illegible] $a \vdots b$ bo`lsa, u holda $a=bc$, bu yerda $c \in N_0$. Shuning uchun [illegible] $a>0$ deganimiz uchun $c>0$. $N_0$ – butun nomanfiy sonlar [illegible] son 1 dan kichik bo`lmagani uchun $c \geq 1$, demak, $b(c-1) \geq 0$. [illegible] ≥ 0, bundan $a \geq b$.

[illegible] Bo`linuvchanlik munosabati tranzitivdir, ya'ni $a \vdots b$ va $b \vdots c$ dan [illegible]

[illegible] uchun, shunday butun nomanfiy k soni mavjudki, uning uchun [illegible] bo`lgani uchun, shunday butun nomanfiy $\ell$ soni mavjudki, [illegible] bo`ladi. Birinchi tenglikda b o`rniga $c \cdot \ell$ ni qo`yamiz: [illegible] bundan $a=(c \cdot \ell) \cdot k=c \cdot (\ell \cdot k)$. $\ell \cdot k$ ko`paytma ikkita nomanfiy butun sonlar ko`paytmasidan iborat bo`lgani uchun ko`paytma ham nomanfiy butun son. Demak, shunday butun nomanfiy $\ell \cdot k$ soni mavjudki, uning uchun $a=c\cdot(\ell \cdot k)$ tenglik bajariladi. Shuning uchun a soni ham c ga bo`linadi, ya'ni $a \vdots c$.

7-teorema. Agar a va b sonlari c ga bo`linsa, ularning yig`indisi ham c ga bo`linadi, ya'ni $(\forall a,b \in N_0, c \in N_0)\ \ (a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a+b) \vdots c)$.

Isbot. Haqiqatan ham, shunday k va ℓ sonlari topiladiki, $a=ck$ va $b=c\ell$ bo`ladi. U holda $a+b=ck+c\ell=c(k+\ell)$. $k+\ell$ – nomanfiy butun son bo`lgani uchun, $(a+b) \vdots c$ bo`ladi.

Bu isbotlangan tasdiq qo`shiluvchilar soni ikkitadan ko`p bo`lganda ham o`rinli. Bu teorema isbotidan quyidagi jumlaning isboti ham kelib chiqadi.

Agar $a \geq b$ shartda a va b sonlari c ga bo`linsa $a$ - $b$ ayirma ham $c$ ga bo`linadi.

8-teorema. Bo`linuvchanlik munosabati antisimmetrikdir, ya'ni $a \vdots b$ dagi turli a va b sonlar uchun $b \vdots a$ emasligi kelib chiqadi.

Bo`linuvchanlik munosabatlariga doir masalalarini o`rganish va masalalar yechish uchun quyidagilarni bilish zarur.

Masalan, agar son 5 ga bo`linsa, u 5q ko`rinishga ega bo`ladi, bu yerda q – butun nomanfiy son. Agar son 5 ga bo`linmasa, u qanday ko`rinishga ega bo`ladi? Ma'lumki, agar son 5 ga butun son marta bo`linmasa, u holda uni 5 ga qoldiqli bo`lish mumkin, bunda qolgan qoldiq 5 dan kichik bo`lishi kerak, ya'ni 1,2,3 yoki 4 sonlari bo`lishi kerak. Unda 5 ga bo`lganda qoldiqda 1 qoladigan sonlar 5q+1 ko`rinishda; 5 ga bo`lganda qoldiqda 2 qoladigan sonlar 5q+2 ko`rinishda; 5 ga bo`lganda qoldiqda 3 qoladigan sonlar 5q+3 ko`rinishda; 5 ga bo`lganda qoldiqda 4 qoladigan sonlar 5q+4 ko`rinishda bo`ladi. 5q, 5q+1, 5q+2, 5q+3, 5q+4 ko`rinishdagi sonlar juft-jufti bilan o`zaro kesishmaydigan, ularning birlashmasi esa butun nomanfiy sonlar to`plami bilan ustma-ust tushadigan to`plamlar hosil qiladi.

**3. Bo`linuvchanlik alomatlari.** Quyidagicha savol tug`iladi:

O`nli sanoq sistemasida yozilgan biror x sonini a soniga bo`linuvchanligini bevosita (bo`lish ishlarini bajarmasdan) aniqlash mumkinmi?

Ta'rif: O`nli sanoq sistemasida yozilgan $x$ sonini biror $a$ soniga bo`linuvchanligini aniqlash qoidasi bo`linuvchanlik alomatlari deyiladi.

O`nli sanoq sistemasida ba'zi bir bo`linuvchanlik alomatlari mavjud.

**2 ga bo`linish alomati.** $x$ soni 2 ga bo`linishi uchun uning o`nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugashi zarur va yetarlidir.

Isbot. x soni o`nli sanoq sistemasida yozilgan bo`lsin, ya'ni $x=n_k \cdot 10^k+n_{k-1} \cdot 10^{k-1}+ \ldots + n_1 \cdot 10+n_0$ (1), bunda n_k , n_{k-1}, ... , n_1 ,n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k \neq 0$ hamda n_0 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qiladi. U holda $x\vdots 2$ bo`lishini isbotlaymiz.

$10\vdots 2$ bo`lgani uchun $10^2 \vdots 2$, $10^3 \vdots 2$, ... , $10^p \vdots 2$ va demak, $(n_k \cdot 10^k +n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot 10) \vdots 2$. Shartga ko'ra, $n_0$ ham 2 ga bo`linadi, shuning uchun x ni, ya'ni (1) ni har biri 2 ga bo`linadigan ikki qo`shiluvchining yig`indisi sifatida qarash mumkin.

Demak, yig`indining bo`linuvchanligi haqidagi teoremaga ko`ra, $x$ sonning o`zi ham 2 ga bo`linadi.

Endi teskarisini isbotlaymiz. Agar x son 2 ga bo`linsa, uning o`nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugaydi.

(1) tenglikni $n_0=x- (n_k \cdot 10^k +n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot 10)$ ko`rinishda yozamiz. U holda ayirmaning bo`linuvchanligi haqidagi teoremaga ko`ra $n_0 \vdots 2$, chunki $x\vdots 2$ va $(n_k \cdot 10^k +n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot 10) \vdots 2$. bir xonali son 2 ga bo`linishi uchun u 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bu isbotdan 2ga bo`linish alomatini quyidagicha ham ta'riflash mumkin: o`nli sanoq sistemasida yozilgan sonning faqat va faqat oxirgi raqami juft son bilan tugasa, u 2 ga bo`linadi.

**5 ga bo`linish alomati.** $x$ soni 5 ga bo`linishi uchun uning o`nli yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugashi zarur va yetarlidir.

Bu alomatning isboti 2 ga bo`linish alomatining isbotiga o`xshaydi.

**4 ga bo`linish alomati.** $x$ soni 4 ga bo`linishi uchun x sonining o`nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamidan hosil bo`lgan ikki xonali sonning 4 ga bo`linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. x soni o`nli sanoq sistemasida yozilgan bo`lsin, ya'ni $x=n_k \cdot 10^k +n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot 10+n_0$ bunda n_k, n_{k-1}, ... , n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va oxirgi ikkita raqam 4 ga bo`linadigan sonni tashkil qilsin. U holda $x\vdots 4$ bo`lishni isbotlaymiz.

$100\vdots 4$ bo`lgani uchun $(n_k\cdot 10^k + n_{k-1}\cdot 10^{k-1} + ... + n_2\cdot 10^2)\vdots 4$. Shartga ko`ra $a_1\cdot 10+a_0$ (bu ikki xonali sonning yozuvidir) ham 4 ga bo`linadi. Shuning uchun $x$ ni har biri 4 ga bo`linadigan ikki qo`shiluvchining yig`indisi deb qarash mumkin. Demak, yig`indining bo`linuvchanligi haqidagi teoremaga ko`ra $x$ sonining o`zi ham 4 ga bo`linadi.

Teskarisini isbot qilamiz, ya'ni agar x soni 4 ga bo`linsa, uning o`nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamdan hosil bo`lgan ikki xonali son ham 4 ga bo`linadi.

(1) tenglikni quyidagicha yozamiz: $n_1\cdot 10+n_0=x-(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_2\cdot 10^2)$; $x\vdots 4$ va $(n_k\cdot 10^k + n_{k-1}\cdot 10^{k-1} + ... + n_2\cdot 10^2)\vdots 4$ bo`lgani uchun ayirmaning bo`linuvchanligi haqidagi teoremaga ko`ra $(n_1\cdot 10+n_0)\vdots 4$. Ammo $n_1\cdot 10+n_0$ yozuv $x$ sonining oxirgi ikkita raqamidan hosil bo`lgan ikki xonali sonning yozuvidir.

**3 va 9 ga bo`linish alomati.** $x$ soni 9 ga (3 ga) bo`linishi uchun uning o`nli yozuvidagi raqamlari yig`indisi 9 ga (3ga) bo`linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Avval 10^k-1 ko`rinishdagi sonlar 9 ga bo`linishini isbotlaymiz.

Haqiqatan, $10^k-1=(9\cdot 10^{k-1}+10^{k-1})-1=(9\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^{k-2}+10^{k-2})-1=(9\cdot 10^{k-1}+$ $+9\cdot 10^{k-2}+...+10)-1=9\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^{k-2}...+9$. Hosil bo`lgan yig`indining har bir qo`shiluvchisi 9 ga bo`linadi, demak, 10^k-1 soni ham 9 ga bo`linadi.

x soni o`nli sanoq sistemasida yozilgan bo`lsin, ya'ni $x=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+ + ... +$ $n_1\cdot 10 + n_0$, bunda n_k, n_{k-1}, ... , n_1, n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $(n_k+n_{k-1}+...+n_0)\vdots 9$.

U holda $x\vdots 9$ bo`lishini isbotlaymiz. $n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_0$ yig`indiga $n+n_{k-1}$ $+...+n_0$ ifodani qo`shib va ayirib, natijani bunday ko`rinishda yozamiz:

$x=(n_k\cdot 10^k-n_k)+...+(n_1\cdot 10-n_1)+(n_0-n_0)+(n_k+n_{k-1}+...+n_1+n_0)=$

$=n_k(10^k-1)+n_{k-1}(10^{k-1}-1)+...+n_1(10^{k-1}-1)+...+n_1(10-1)+(n_k+n_{k-1}+..+n_0)$

Oxirgi yig`indida har bir qo`shiluvchi 9 ga bo`linadi:

$n_k(10^k-1)\vdots 9$, chunki $(10^k-1)\vdots 9$

$n_{k-1}(10^{k-1}-1)\vdots 9$, chunki $(10^{k-1}-1)\vdots 9$

....

n_1 (10 – 1) ⋮9, chunki (10-1)⋮9.

Shartga ko`ra (n_k +n_{k-1} + ... + n_0)⋮9. Demak, x⋮9.

3 ga bo`linish alomatning isboti 9 ga bo`linish alomatining isbotiga o`xshashdir.

Boshqa pozitsion sanoq sistemalarida bo`linuvchanlik alomatlarini qaraymiz. Aytaylik, P sanoq sistemasining asosi bo`lsin.

Agar P⋮a bo`lsa, u holda $P^2$, $P^3$, ... , $P^p$ ko`rinishdagi barcha sonlar a ga bo`linadi. Shuningdek, $X_pP^p + X_{p-1}P^{p-1} + ... + XP$ ko`rinishdagi yig`indi ham $a$ ga bo`linadi.

Ta'rif. Agar P a soniga bo`linsa va X P asosli sanoq sistemasida

$$X= X_pP^p + X_{p-1}P^{p-1} + ... + X_0$$

ko`rinishda bo`lsa, u holda X soni a ga faqat va faqat X_0 soni a ga bo`linsa bo`linadi.

Masalan, o`n ikkilik sanoq sistemasidagi son faqat va faqat uning oxirgi raqami 0,3,6 va 9 bilan tugasa 3 ga bo`linadi.

Umumiy holda P-1 ga bo`linuvchanlik alomatini yozamiz.

$X= X_kP^k + X_{k-1}P^{k-1} + ... + X_1 P + X_0$ soni berilgan bo`lsin, shu sonni P-1 ga bo`linuvchanlik alomatini yozamiz

Algebradan bizga quyidagi formula ma`lum.

$$P^p -1=(P-1)(P^{p-1} +P^{p-2} + ... + 1)$$

Bu formuladan n ning ixtiyoriy qiymatida P^p–1 ni P-1 ga bo`linishi kelib chiqadi. X sonini quyidagicha yozish mumkin.

$$X=[X_k(P^k - 1) + ... + X_1(P-1)] + (X_k+X_{k-1} + ... + X_o)$$

Birinchi qo`shiluvchi P-1 ga bo`linadi. Bundan esa quyidagi qoida kelib chiqadi: X soni P-1 soniga faqat va faqat uning raqamlarining yig`indisi P-1 songa bo`linsa bo`linadi.

Masalan: 6753_8 soni 8-1=7 ga bo`linadi, chunki uning raqamlarini yig`indisi 6+7+5+3=25_8; 25_8 esa 7 ga bo`linadi.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1.Qachon b soni a sonining bo`luvchisi deyiladi?

2.Bo`linuvchanlik munosabati nima?

3.«Berilgan sonning bo`luvchisi» va «bo`iuvchi» terminlarining farqi nimada?

4.Bo`linuvchanlik munosabatlarining xossalarini ayting.

5.2 ga va 3 ga bo`linish alomatlarini aytib, isbotlab bering.

6.4 ga va 9 ga bo`linish alomatlarini aytib , isbotlab bering.

7.O`nli sanoq sistemasidan boshqa pozitsion sistemalarida bo`linish alomatlarini aytib bering.

2.2.5. Karrali va bo`luvchilar

1. Sonlarning eng kichik umumiy karralisi.

Agar *a* soni *b* soniga bo linsa, *a* soni *b* ga karrali deyiladi. 0 soni barcha sonlarga bo`lingani uchun 0 soni barcha sonlarga karrali. Biz *b* soniga karrali deganda, *b* soniga natural karralini tushunmog`imiz kerak, ya'ni *b* , *2b*, ... , *nb* lar *b* sonining karralilari, bularning eng kichigi *b* hisoblanadi.

Bo`linuvchanlik munosabati xossalarini karralilik xossalari kabi ifodalash ham mumkin.

Masalan, *a* soni *b* soniga karrali, *b* soni esa *c* ga karrali bo`lsa, *a* soni *c* ga karrali bo`ladi. *a* va *b* sonlarini olaylik. Agar *m* soni *a* sonini ham, *b* sonini ham karralisi bo`lsa, u holda *m* soni bu sonlarning umumiy karralisi deyiladi.

a va *b* sonlarining umumiy karralisi ularning ko`paytmasi *ab* hisoblanadi, chunki u *a* ga ham, *b* ga ham bo`linadi.

a va *b* sonlarining umumiy karralisi bo`lgan sonlar to`plami, *a* va *b* sonlariga karrali sonlar to`plamining kesishmasidan iborat bo`ladi.

Masalan: 3 ga karrali sonlar to`plami A, 4 ga karrali sonlar to`plami B bo`lsin.

A={3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,24,27,30,33,36,...}

B={4,8,12,16,20,24,28,32,36,...}

A va B to`plamlarning kesishmasi

$A \cap B = \{12, 24, 36, ...\}$

Bu to`plamning barcha sonlari 3 va 4 ga karrali.

Bu sonlarning ichida eng kichigi 12 soni.

Ta'rif. *a* va *b* sonlariga umumiy karrali bo`lgan sonlarni ichida eng kichigiga, bu sonlarning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va u $K(a,b)$ bilan belgilanadi. Masalan, $K(3,4)= 12$.

Umumiy karralilik xossalari.

1-teorema. Ixtiyoriy ikkita a va b sonlarning umumiy karralisi, u sonlarning eng kichik umumiy karralisiga bo`linadi.

Isbot. Aytaylik $K(a,b)=n$ bo`lsin, *m* soni esa *a* va *b* sonlarining umumiy karralisi bo`lsin. Biz $m \vdots n$ ekanini ko`rsatishimiz kerak. *m* soni *n* ga bo`linsin va biror *r* qoldiq qolsin, ya'ni $m=n\,q+r$; $r=0$ ekanini ko`rsatamiz.

m ham, *n* ham *a* soniga bo`lingani uchun $r=m\text{-}kq$ ham *a* soniga bo`linadi. Shuningdek, *m* ham, *n* ham *b* soniga bo`lingani uchun *r* ham *b* ga bo`linadi. Demak, *r* ham, *a* ga ham *b* ga bo`linadi. Agar *r* noldan farqli bo`lsa, u *a* va *b* sonlarining umumiy karralisi bo`lishi kerak va u *n* dan kichik bo`lmasligi kerak, ya`ni $r \leq n$ (*n* esa *a* va *b* sonlarining eng kichik umumiy karralisi). Buning esa bo`lishi mumkin emas, chunki qoldiq bo`luvchidan katta bo`lmaydi.

Demak, qoldiq *r* noldan farqli emas, ya'ni $r=0$.

Demak, $m = n \cdot q$, ya'ni *m n* ga bo`linadi.

2-teorema. Agar $K(a,b)=n$ bo`lsa, u holda ixtiyoriy natural *s* soni uchun $K(as, bs)=ns$ tenglik o`rinli.

Endi bo`luvchi ustida to`xtalamiz. "*a* sonini *b* soniga karrali" munosabatiga "*b* soni *a* sonining bo`luvchisi" munosabati teskari. Boshqacha aytganda *b* soni *a* sonining bo`luvchisi bo`lishi uchun, faqat va faqat *a* soni *b* soniga karrali bo`lishi kerak.

Agar b soni a sonining bo`luvchisi bo`lsa, $b|a$ ko`rinishida yoziladi. Masalan, $4|16$ yozuvi $16 \vdots 4$ ni bildiradi.

Bo`linuvchilik munosabatining har bir xossasiga bo`luvchilik munosabati mos keladi.

Masalan, bo`linuvchilik munosabatida tranzitivlik xossa quyidagicha ifodalanadi: agar *a* *b* ning bo`luvchisi, *b* esa *s* ning bo`luvchisi bo`lsa, u holda *a*, *s* ning bo`luvchisi bo`ladi. Har bir son o`zining bo`luvchisi, 1 esa ixtiyoriy sonning bo`luvchisidir.

2. Sonlarning eng katta umumiy bo`luvchisi.

1-ta'rif. Agar *a* va *b* sonlari *s* ga bo`linsa, *s* soni bu sonlarning umumiy bo`luvchisi deyiladi. *a* va *b* sonlarining umumiy bo`luvchilarini topish uchun *a* soni bo`luvchilari to`plami bilan *b* soni bo`luvchilari to`plami kesishmasini topish kerak.

Masalan, 16 va 28 sonlarining umumiy bo`luvchilarini toping.

A va B to`plamlar mos ravishda 16 va 28 sonlarining umumiy bo`luvchilarini ifodalasin. U holda

$$A=\{1,2,4,8,16\}, \quad B=\{1,2,4,7,14,28\}$$

$A\cap B=\{1,2,4\}$, Demak, 16 va 28 sonlarining umumiy bo`luvchilari 1,2,4 sonlari ekan. Aytaylik, *a* natural son *b* ga bo`linsin. *a* sonining bo`luvchilar soni *a* dan oshmaydi, shu sababli bo`luvchilar soni chekli bo`ladi. Shunga asosan *a* va *b* sonlarining umumiy bo`luvchilar soni chekli va chekli to`plam tashkil etadi.

2-ta'rif. *a* va *b* sonlarining umumiy bo`luvchilari ichida eng kattasiga, *a* va *b* sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisi deyiladi va $D(a,b)$ ko`rinishda belgilanadi.

Yuqoridagi misolda $D(16,28)=4$ ga teng.

3-ta'rif. Agar *a* va *b* sonlari 1 dan boshqa umumiy bo`luvchilarga ega bo`lmasa, ular o`zaro tub deyiladi. Masalan, 13 va 15 sonlari uchun $D(13, 15)=1$.

3. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo`luvchining xossalari.

1-xossa. Agar *c* soni *a* va *b* sonlarining umumiy bo`luvchisi bo`lsa (ya'ni $a=a_1c$; $b=b_1c$), u holda $\ell=\frac{ab}{c}$ - son *a* va *b* sonlarining umumiy karralisi bo`ladi.

Isbot: Shartga ko`ra $a=a_1c$; $b=b_1c$ bo`lganda $\ell=a_1b$ $\ell=b_1a$ ekanligini ko`rsatamiz.

$\ell=\frac{ab}{c}$ dan $\ell=\frac{a_1cb_1c}{c}=a_1b_1c=b_1(a_1c)=b_1a$; bundan ℓ ni a ga bo`linishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, $\ell=a_1(b_1c)=a_1b$, bundan esa ℓ soni a va b sonlarining umumiy karralisi ekan.

Misol. 6 soni 12 va 18 sonlarining umumiy bo`luvchisi ya'ni, $12=6\cdot2$; $18=6\cdot3$.

Bundan $\ell=\frac{12\cdot18}{6}=36$ soni 12 va 18 sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo`ladi.

2-xossa. Agar d soni a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo`lsa (ya'ni $d=K(a,b)$ bo`lsa) , u holda $k=\frac{ab}{d}$ soni a va b sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisi bo`ladi.

Bu xossa to`g`riligini ko`rsatish oson (buni ko`rsatishni talabalarga mustaqil topshiramiz).

Bu xossadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Ikkita a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisini, uning eng katta umumiy bo`luvchisiga ko`paytmasi shu sonlarning ko`paytmasiga teng.

$$D(a,b)\cdot K(a,b)=\frac{ab}{d}d=ab$$

Xususiy holda, agar $D(a,b)=1$ bo`lsa, u holda $K(a,b)=a\cdot b$ ga teng.

2-natija. O`zaro tub ikkita natural sonning eng kichik umumiy karralisi shu sonlarning ko`paytmasiga teng.

3-xossa. a va b natural sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisi shu sonlarning ixtiyoriy umumiy bo`luvchilariga bo`linadi.

4-xossa. Agar a va b natural sonlar ko`paytmasi $a\cdot b$ m natural soniga bo`linsa hamda m soni a soni bilan o`zaro tub bo`lsa, b soni ham m ga bo`linadi.

5-xossa. Agar a natural soni o`zaro tub bo`lgan b va c sonlarining har biriga bo`linsa. u holda $a$ soni ularning $b \cdot c$ ko`paytmasiga ham bo`linadi.

Bu xossadan natural sonning murakkab sonlarga bo`linish alomatlari kelib chiqadi. Masalan, natural $x$ soni 12 ga bo`linishi uchun u 4 va 3 sonlariga bo`linishi zarur va yetarli.

4. Tub sonlar va ularning xossalari.

Har bir a son kamida ikkita bo`luvchiga ega, $a$ sonining o`zi va 1.

1-ta'rif. Faqat ikkita bo`luvchiga ega bo`lgan va birdan katta sonlarga tub sonlar deyiladi. boshqacha aytganda, o`ziga va 1 ga bo`linadigan sonlarga tub sonlar deyiladi.

Masalan. 7 tub son, uning bo`luvchilari 7 va 1, 15 soni tub son emas, chunki u 15 va 1 bo`luvchilaridan boshqa 3 va 5 bo`luvchilarga ega.

2-ta'rif. Ikkitadan ortiq har xil bo`luvchilarga ega bo`lgan sonlar murakkab sonlar deyiladi.

1 soni 1 ta bo`luvchiga, ya'ni o`ziga, 0 soni esa cheksiz ko`p bo`luvchilarga ega. Shu sababli 1 va 0 sonlari tub sonlarga ham murakkab sonlar tarkibiga ham kiritilmaydi.

Shunday qilib, nomanfiy butun sonlar to`plami N_0 4 ta sinfga ajratiladi:

1) birinchi sinf faqat 0 soni (cheksiz ko`p bo`luvchilarga ega);
2) ikkinchi sinf faqat 1 soni (faqat bitta bo`luvchiga ega);
3) tub sonlar sinfi (ikkita bo`luvchiga ega);
4) murakkkab sonlar sinfi (0 dan farqli ikkitadan ortiq bo`luvchilarga ega).

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar r tub soni 1 dan farqli biror n natural soniga bo`linsa, u $n$ soni bilan ustma-ust tushmasa, u uchinchi bo`luvchiga ega bo`ladi, ya'ni 1, r va n. U holda r tub son emas.

2) Agar r va q lar har xil tub sonlar bo`lsa, u holda $r$ soni $q$ ga bo`linmaydi.

3) Agar $a > r$ bo`lib, $a$ natural soni $r$ tub songa bo`linmasa, u holda a va r sonlari o`zaro tub sonlar.

4) Agar ikkita a va b natural sonlar ko`paytmasi $r$ tub songa bo`linsa, u holda ulardan bittasi shu tub songa bo`linadi.

5) Agar natural son 1 dan katta bo`lsa, kamida bitta tub bo`luvchiga ega bo`ladi.

6) Murakkab a sonining eng kichik tub bo`luvchisi $\sqrt{a}$ dan oshmaydi.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Karrali deganda nimani tushunasiz?
2. Eng kichik umumiy karraliga ta'rif bering.
3. Sonlarning umumiy bo`luvchisini tushuntiring va eng katta umumiy bo`luvchiga ta'rif bering.
4. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo`luvchining xossalarini aytib bering.
5. Tub va murakkab sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?

2.2.6. Sonlarni eng katta umumiy bo`luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish usullari

1. Sonlarni tub ko`paytuvchilarga ajratish [yoyish] usuli bilan ularning eng katta umumiy bo`luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish. Sonni tub sonlar ko`paytmasi ko`rinishida ifodalash bu sonni tub ko`paytuvchilarga ajratish (yoyish) deyiladi. Masalan, $86=2\cdot43$ yozuv 86 soni 2, 43 tub ko`paytuvchilarga ajratilganini bildiradi.

Umuman, har qanday murakkab sonni tub ko`paytuvchilarga ajratish mumkin. U qanday usulda ajratilsa ham bir xil yoyilma hosil bo`ladi (agar ko`paytuvchilar tartibi hisobga olinmasa). Shuning uchun 86 sonini $2\cdot43$ ko`paytma yoki $43\cdot2$ ko`paytma ko`rinishida yozish 86 sonini tub ko`paytuvchilarga ajratishning bir xil yoyilmasidir. 436 sonining yoyilmasini topamiz.

$$\begin{array}{r|l} 436 & 2 \\ 218 & 2 \\ 109 & 109 \\ 1 & \end{array}$$

Bir xil ko`paytuvchilarni ko`paytmasining darajasi qilib yozish qabul qilingan. $436=2^2\cdot109$ sonining bunday yozilishi uning kanonik ko`rinishi deyiladi. Sonlarni tub ko`paytuvchilarga ajratish ularning eng katta umumiy bo`luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topishda ishlatiladi.

Masalan, 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topaylik. Bu sonlarning har birini kanonik ko`rinishda yozamiz.

$1800=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5^2$ $\quad 244=2\cdot2\cdot61=2^2\cdot61$

$$\begin{array}{r|l} 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 244 & 2 \\ 122 & 2 \\ 61 & 61 \\ 1 & \end{array}$$

1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisining tub ko`paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasidagi barcha umumiy tub ko`paytuvchilar kirishi va bu tub ko`paytuvchilarning har biri berilgan sonlarning yoyilmalaridagi eng kichik ko`rsatkichi bilan olinishi kerak. Shuning uchun 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisining yoyilmasiga 2^2 kiradi. Demak, $D(1800,244)=2^2=4$. 1800 va 244 sonlarining eng kichik umumiy karralisining tub ko`paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasining hech bo`lmaganda bittasida bo`lgan hamma tub ko`paytuvchilar kirishi va bu tub ko`paytuvchilarning har biri shu yoyilmalardagi eng katta darajasi bilan olinishi kerak. Shuning uchun

1800 va 244 sonlarning eng kichik umumiy karralisining yoyilmasiga $2^3, 3^2, 5^2, 61$ ko`paytuvchilar kiradi. Demak, $K(1800, 244)= 2^3\, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 61= 109800$.

Umuman, berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun: 1) berilgan har bir sonni kanonik ko`rinishda yozamiz; 2) berilgan sonlar yoyilmasidagi hamma tub ko`paytuvchilar ko`paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko`paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko`rsatkichi bilan olamiz; 3) bu ko`paytmaning qiymatini topamiz – u berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisi bo`ladi. Bir nechta misol qaraymiz:

1-misol. 60, 252, 264 sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz.

Har bir sonni kanonik ko`rinishda yozamiz:

$60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $\quad 252= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $\quad 264=2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo`luvchisini topish uchun berilgan yoyilmalardagi umumiy tub ko`paytuvchilar ko`paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko`paytuvchini berilgan sonlarning yoyilmasiga kirgan eng kichik ko`rsatikichi bilan olamiz. $D(60,252,264)= 2^2 \cdot 3=12$.

Berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun berilgan sonlarning yoyilmasidagi hamma ko`paytuvchilar ko`paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko`paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko`rsatkichi bilan olamiz: $K(60,252, 264)= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11= 27720$

2-misol. 48 va 245 sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz. Har bir sonni kanonik ko`rinishda yozamiz. $48= 2^4 \cdot 3$; $245= 5 \cdot 7^2$.

Berilgan sonlar yoyilmasida umumiy ko`paytuvchilar bo`lmagani uchun $D(48, 245)=1$, $K(48,245)=48 \cdot 245=10760$.

**2. Eratosfen g`alviri.** Matematiklar tomonidan tub sonlarni ifodalovchi bir qancha jadvallar tuzilgan. Bu jadvallardan foydalanilsa, har bir sonning tub yoki murakkabligini tekshirib o`tirish shart emas. Eramizdan oldingi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi va astronomi Eratosfen, tub sonlarni

Agar $a_1= r_1...r_m$ va $a_2=q_1...q_n$ bo`lsa, (bu yerda $r_1,...., r_m$ va $q_1, ... q_n$ lar tub sonlar). U holda $a=a_1 \cdot a_2 = r_1 ....r_m q_1 ... q_m$

a sonini tub ko`paytuvchilarga ajratilmaydi degan farazimizga zid. Demak, murakkab sonni tub sonlar ko`paytmasi shaklida ifodalash mavjud.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

Murakkab sonni tub sonlar ko`paytmasi shaklida ifodalash mumkin va u bir qiymatli aniqlanganligini ko`rsatamiz.

Boshqacha aytganda, murakkab sonni ikki xil tub ko`paytuvchilarga ajratish bir-biridan ko`paytuvchilarning o`rinlarini almashinuvi bilan farq qilishini ko`rsatamiz.

Faraz qilaylik, ikki xil tub ko`paytuvchilarga ajratilgan natural sonlar mavjud. Bu sonlar to`plamini A bilan belgilaymiz. Farazga ko`ra A to`plam bo`sh to`plam emas, unda eng kichik a son mavjud. Shartga ko`ra quyidagi tub ko`paytuvchilarga egamiz.

$$a= r_1 ... r_m; \qquad a=q_1 ... q_n$$

U holda $\qquad r_1 ....r_m = q_1 ... q_n$ ....(1)

(1) tenglikni o`ng tomoni tub $q_1$ soniga bo`linadi, u holda chap tomoni ham q_1 soniga bo`linadi, ya`ni chap tomondagi ko`paytuvchilardan biri bo`linadi.

Agar r_1 q_1 ga bo`linadi desak, u holda $r_1 =q_1$ bo`ladi. (1) tenglikni ikkala tomonini r_1 ga qisqartiramiz.

U holda $c= r_2...r_m = q_2 ... q_n$ tenglikka ega bo`lamiz, bu yerda $c=a:r_1$; $r_1>1$ bo`lsa, u holda $c<a$ bo`ladi.

Farazimizga ko`ra $a$ eng kichik son va ikki xil tub ko`paytuvchilarga ega. Demak, c bitta tub ko`paytuvchilarga ega bo`lib, $c=r_2... r_m=q_1...q_n$ tub ko`paytuvchilar ajratmasi bir-biridan ko`paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bu esa tub ko`paytuvchilarga ajratish turlicha degan farazimizga zid.

Demak, tub ko`paytuvchilarga ajratish yagonadir.

Sonlarni tub ko`paytuvchilarga ajratishdagi yoyilmada tub sonlar tub sonlarni o`sish tartibida joylashtiriladi.

$2520= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

4. Evklid algoritmi. Sonlarni tub ko`paytuvchilarga ajratish usuli bilan ularning eng katta umumiy bo`luvchisini topish, ba'zan, qator qiyinchiliklarga olib keladi. Masalan 6815 sonini tub ko`paytuvchilarga ajratishda birinchi bo`luvchi 5 ni topib, 1363 sonini hosil qilamiz, bu sonning eng kichik bo`luvchisi 29 ga teng. Ammo 29 ni topish uchun 1363 sonining 2 ga, 3 ga, 5 ga, 7 ga, 11 ga, 13 ga, 17 ga, 19 ga, 23 ga, 29 ga bo`linish-bo`linmasligini tekshirishimiz kerak, bunda 1363 soni faqat 29 gagina butun son marta bo`linadi. Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo`luvchisini qiyinchiliklarsiz topish usuli mavjud.

Buning uchun ikki son umumiy bo`luvchisining bitta muhim xossasini eslaymiz. Masalan, 525 va 231 sonlarini olamiz va 525 ni 231 ga qoldiqli bo`lamiz: $525=231\cdot 2+63$.

525 va 231 sonlarining umumiy bo`luvchilari to`plamini A orqali, 231 va 63 sonlarining umumiy bo`luvchilari to`plamini B orqali belgilaymiz va A=B ni isbotlaymiz, boshqacha aytganda 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo`luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo`luvchisi ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, agar 525:d va 231:d bo`lsa, ayirmaning bo`linuvchanligi haqidagi teoremaga ko`ra 63:d ni hosil qilamiz. Agar $525=231\cdot 2+63$ tenglikni $63=525-231\cdot 2$ ko`rinishida yozsak, bunga oson ishonch hosil qilish mumkin. Shunday qilib, 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo`luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo`luvchisi bo`ladi, ya'ni $A\subset B$ aksincha, agar 231 va 63 sonlarining umumiy bo`luvchisi, ya'ni 231:t va 63:t bo`lsa, yig`indining bo`linuvchanligi haqidagi teoremaga ko`ra 525:t bo`ladi. Demak, 231 va 63 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo`luvchisi 525 va 231 sonlarining ham umumiy bo`luvchisi bo`lar ekan, ya'ni $B\subset A$.

Teng to`plamlar ta'rifiga ko`ra A=B. Ammo agar berilgan sonlar juftining umumiy bo`luvchilari to`plami bir xil bo`lsa, ularning eng katta umumiy bo`luvchisi ham teng bo`ladi, ya'ni D (525, 231)= D (231, 63).
Umuman, agar a va b – natural sonlar hamda $a=bq+r$ bo`lsa, $D(a,b)= D(b, r)$ bo`ladi, bunda $r<b$.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan xususiy holning isboti kabidir.

Bu xossaning muhimligi nimada? Bu xossa a va b sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisini topishda bu sonlarni kichik sonlarga almashtirishga imkon yaratadi, bu esa hisoblashlarni osonlashtiradi. Bunday almashtirishni bir necha bor bajarish mumkin. Masalan, 525 ni 231 ga qoldiqli bo`lib, qoldiqda 63 ni hosil qilamiz. Demak, D (525, 231)= D(231, 63). 231 ni 63 ga qoldiqli bo`lamiz: 231=63 3+42, ya'ni D(231, 63)=D (63, 42).

63 ni 42 ga qoldiqli bo`lamiz: 63=42 1+21. Demak, D(63,42)=D(42,21). 42 ni 21 ga qoldiqli bo`lganda qoldiqda 0 hosil qilamiz, ya'ni D(42, 21)=D (21,0) . 21 bilan 0 ning eng katta umumiy bo`luvchisi 21 ga teng. Demak, 21 soni 525 va 231 sonlarining eng katta umumiy bo`luvchisi bo`ladi, chunki D(525, 231)=D(231, 63)=D(63,42)=(42, 21)=D(21, 0)=21.

Biz bajargan hisoblashlar ko`pincha bunday yoziladi:

$525 = 231 \cdot 2 + 63$

$231 = 63 \cdot 3+42$

$63 = 42 \cdot 1 + 21$

$42 = 21 \cdot 2 + 0$

D(525,231)=21.

Eng katta umumiy bo`luvchini topishning ko`rilgan usuli qoldiqli bo`lishga asoslangan. Bu usulni birinchi marta qadimgi grek matematigi Evklid (eramizgacha III asr) yaratgan va shuning uchun u Evklid algoritmi nomi bilan yuritiladi. Evklid algoritmini umumiy ko`rinishda bunday ifodalash mumkin: a va b – natural sonlar hamda $a > b$ bo`lsin. $a$ soni $b$ soniga qoldiqli bo`linadi, keyin b soni qolgan qoldiqqa qoldiqli bo`linadi, so`ngra birinchi qoldiq ikkinchi qoldiqqa qoldiqli bo`linadi va hokazo, u holda oxirgi noldan farqli qoldiq $a$ va $b$ sonlarning eng katta umumiy bo`luvchisi bo`ladi.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sonlarni tub ko`paytuvchilarga ajratish yo`li bilan eng katta umumiy bo`luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topishni misollar yordamida tushuntirib bering.

2. Tub sonlarni aniqlashdagi Eratosfen g`alviri metodini tushuntiring.
3. Natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasini ifodalang va isbotlab bering.
4. Sonlarni eng katta umumiy bo`luvchisini topishni, Evklid algoritmini tushuntirib bering.

Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo`linuvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish algoritmiga doir topshiriqlar

Misol. 2346 va 646

Yechilishi. Ushbu sonlarning EKUB va EKUKni topish uchun Evklid algoritmidan foydalaniladi.

$$\begin{array}{r|l} -2346 & \underline{646} \\ \underline{1938} & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 646 & \underline{408} \\ \underline{408} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 408 & \underline{238} \\ \underline{238} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 238 & \underline{17} \\ \underline{170} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 170 & \underline{68} \\ \underline{136} & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 68 & \underline{34} \\ \underline{68} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Demak, oxirgi noldan farqli qoldiq 34 bo`lib, u berilgan sonlarning EKUBidir, ya'ni EKUB(2346, 646) = 34. $YEUB(2346, 646) = \frac{2346 \cdot 646}{34} = 44574$.

Bu misolni tub ko`paytuvchilarga ajratib ham yozish mumkin.

$2346 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23$

$646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$

$EKUB(2346, 646) = 2 \cdot 17 = 34$

$EKUK(2346, 646) = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 44574$

Sonlarning EKUB va EKUK ni toping.

1. 420 va 126.
2. 549493 va 122433
3. 67283 va 122433
4. 122433 va 221703
5. 476 va 1258
6. 1258 va 21114
7. 1515 va 600
8. 8104 va 5602
9. 5555 va 11110
10. 980 va 100
11. 5345 va 4856
12. 2165 va 3556
13. 5400 va 8400
14. 78999 va 80000
15. 71004 va 154452
16. 42628 va 33124
17. 795 va 2585
18. 6663 va 887
19. 875 va 1346
20. 23 va 1785
21. 75 va 1853
22. 28 va 947
23. 743 va 907
24. 109 va 1005
25. 827 va 953
26. 56 va 953
27. 419 va 854
28. 113 va 9881
29. 821 va 934
30. 1000 va 999

Testlar

1. N da qo`shish amalining xossalari qaysi qatorda to`g`ri ko`rsatilgan?

a) Kommutativlik ,assosiativlik.

b) Kommutativlik, assosiativlik,distributivlik.

d) O ni yutish qonuni,simmetrik elementga ega bo`lish.

e) Yig`indidan sonni va sondan yig`indini ayirish.

f) Kommutativlik, assosiativlik, monotonlik, qisqaruvchanlik

2. Yig`indining assosiativlik qonuni qaysi qatorda to`g`ri ifodalangan?

a) a+b=b+a

b) a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c

d) a(b+c)=ab+ac

e) a+c=b+c

f)a+b>b ^ a+b>a

3. (7+2)+(8+3)=(7+3)+(2+8)=20 misolning yechilishida qo`shishning qaysi qonunlaridan foydalanilgan?

a) Kommutativlik.

b) Assosiativlik.

d) monotonlik.

e) a va b qonunlar birga

f) v va b qonunlar birga

4. Natural sonni ta'riflash uchun foydalaniladigan tushunchalarni ko`rsating.

a) to`plamni sinflarga ajratish,teng quvvatligi

b) natural sonlar kesmasi

d) tartib va sanoq natural sonlar

e) o`zaro bir qiymatli moslik

5 Nomanfiy butun sonlar ayirmasi qaysi tushuncha orqali ta'riflanadi?

a) To`plamlar ayirmasi elementlar soni

b) Qism to`plam elementlari soni

d) To`ldiruvchi to`plam elementlari soni

e) Universal to`plam

f) Kesishmaydigan to`plamlar

6. No da ayirma qanday qoidalarga bo`sinadi?

a)ayirmaning monotonligi

b)yig`indidan sonni va sondan yigindini ayirish

d)ko`paytmaning ayirmaga nisbatan distributivligi

e)ayirmaning qisqaruvchanligi

f)a) va e) javoblar birga

7. Quyidagi ayirmani hisobashda ayirmaning qaysi qoidasidan foydalaniladi? 215-(83+37)

a) Yig`indidan sonni ayirish

b) Sondan yigindini ayirish

d) Ayirmaning mavjudligi sharti

e) Ko`paytmaning ayirmaga nisbatan distributivligi

f) Ayirmaning guruhlash qoidasi

8. 320 va 810 sonlarining bo`luvchilari nechta?

a)12 va 18 b)12 va 14 d)14 va 18 e)16 va 20 f) 14 va 20

9. 17827516 quyidagi sonlardan qaysi biriga qoldiqsiz bo`linadi?

a) 3 b)10 d) 4 e) 5 f) 9

10. Z raqamining qanday eng kichik qiymatlarida (147+3z2) son 3ga qoldiqsiz bo`linadi.

a) 7, b) 8, d) 9, e) 4, f) 5

11. Berilgan P=10189144, q=396715256 va r= 78901644 sonlardan qaysilari 8 ga qoldiqsiz bo`linadi?

a) hech qaysisi b) p va q d) p va r e) p f) r

12. Quyidagi sonli ketma-ketliklardan qaysilari tub sonlardan iborat?

1) 0,3,5,7,11 2) 1,3,5,7,13, v3) 3,5,7,9,11 4) 2,3,5,7,17

5) 3,5,17,19,3,8.1

a) 1;2 b) 2;4 d) 5 e) 3 f) 4

13. 246 * 013579 soni 9 ga bo`linish uchun yulduzchaning o`rniga qanday raqam qo`yilishi kerak?

a) 0 b) 4 d) 7 e) 8 f) 9

14. 36455478354 ni 2, 4,5,9,10 va 25 bo`lganda hosil bo`lgan qoldiqlar yig`indisini toping

a) 18 b) 16 d) 15 e) 14 f) 12

15. Yig`indi qanday raqam bilan tugaydi? $9^{1996}+9^{1997}$

a) 0 b) 1 d) 2 e) 14 f) 12

16. Ushbu 1x2x3x.....x50 ko`paytma nechta nol bilan tugaydi?

a) 8 b) 10 d) 9 e) 14 f) 12

17. 0,8 ga teskari bo`lgan songa qarama-qarshi sonni toping

a) -0,8 b) 1,25 d) -1,25 e) -12 f) 1,2

18. Ushbu m=0,55(57) : n=0,5(557) , l=0,555(7) sonlarni kamayish tartibida yozing

a) $l>m>n$ b) $l>n>m$ d) $m>n>l$ e) $n>l>m$ f) $n>m>l$

19. Sonlarni o`sish tartibida joylashtiring

a=3,6   b=3,91-0,25 va c=4,68:1,3

a) $b<a<c$ b) $a<c<b$ d) $c<b<a$ e) $a<b<c$ f) $c<a<b$

20. Qandaydir sonni 1995 ga bo`lganda qoldiq 1994 ga teng bo`lsa, shu sonni 5 ga bo`lgandagi qoldiqni toping

a) 4   b) 3   d) 2   e) 1   f) 0

21. Quyidagi mulohazalardan qaysilari to`g`ri ?

1) 12sm+2dm=14dm

2) 4dm 3mm+2dm1sm=6dm 4m

3) 10dm 5mm-4sm 7mm=958mm

4) 1m 12sm-2dm 5sm=9dm7sm

5) 11dm 5sm=5sm 6dm=6dm 8sm

a) 1   b) 2 d) 1;3 e) 3 f) 1;3

22. Pozistion va pozistion bo`lmagan sanoq sistemalari ustidagi qaysi mulohazalar to`g`ri ?

1) Rim sanoq sistemasi pozistion sistema

2) Rim sanoq sistemasida XX1V=24 bo`ladi

3) 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 -raqam deyiladi

4) 123=5

5) an an-1 an-2 a1 a0 =an x10n + an-1 x10n-1+ a1x10+a0

a) (1)   b) (2)   d) (3)   e) (4,5)   f)(2,3,4,5)

23. Bo`linish munosabatiga doir qaysi mulohaza noto`g`ri?

1 Har bir qo`shiluvchi biror songa bo`linsa, u holda yig`indi ham shu songa bo`linadi.

2 Ko`paytmaning biror songa bo`linishi uchun, ko`paytuvchilarning birortasi shu songa bo`linishi kifoya.

3 Ko`paytmaning biror songa bo`linishi uchun, ko`paytuvchilarning har biri shu songa bo`linishi shart.

4 Kamayuvchi va ayriluvchi biror songa bo`linsa, ayirma shu songa bo`linadi/

a) (1) b) (2) d) (3) e) (4) f) (1, 2)

24. 1998 yilni rim sanoq sistemasida yozing

a) I I M M e) M C M I I C

b) M D C D X C VIII d) M C M X C V I I I f) M I I D X C II

25. 203x-144x=402x x- ni toping

a) 5 b) 8 d) 10 e) -9 f) -8

26. EKUK (3600, 1500) ni toping

a) 100 b) 1800 d) 36000 e) 360 f) 1000

27. Qaysi javob tog`ri

a) 12km 1000m=12km 1000m e) 6km 120dm= 6120dm

b) 120dm 12sm=1m 32sm f) 23sm111dm=425dm

d) 32sm 50mm=325mm

28. EKUK (4598; 1476) ni toping

a) 8 b) 12 d) 2 e) 1 f) 3

29. 420 ning bo`luvchilari soni nechta

a) 5 b) 24 d) 23 e) 22 f) 12

30. 594 va 378 ning umumiy bo`luvchilari nechta?

a) 8 b) 7 d) 9 e) 5 f) 6

31. Qandaydir sonni 289 ga bo`lganda qoldiq 287 ga teng bo`lsa, shu sonni 17 ga bo`lgandagi qoldiqni toping

a) 15 b) 2 d) 5 e) 16 f) 0

32. Son o`qida 2 dan 4,7 birlik masofada joylashgan sonlarni aniqlang

a) -67;2,7 b)-6,7;-2,7 d) 6,7;2,7 e) -6,7 f) -2,7

33. Hisoblang 19,9 x18-19,9x16+30,1-30,1x16

a) 98 b) 100 d) 10 e) 110 f) 102

34. Hisoblang 13,5x5,8-8,3x4,2-5,8x8,3+4,2x13,5

a) 42 b) 52 d) 50 e) 48 f) 54

35. 0,5(6)+ 0,(8) ni hisoblang

a) 0,6(4) b) 1,3(6) d) 1,4(5) e) 1,36 f) 1,(36)

36. (0,(4)+0,(41)+0,(42)+0,(43)):0,(5)+0,(51)+0,(52)+0,(53) ni hisoblang a) 170 : 211 b) 83 : 103 d) 63:107 e) 66 :106 f) 27:46

37. O`nli sanoq sistemasida yozing MDCCCLXXI

a) 1871 b) 1971 d) 1951 e) 1921 f) 1931

38. Rim sonoq sistemasida yozing 2005, 137

a) MMIV, CXXVII b) MMVI, CXXXXVI d) MMV, CXXXVII

e) MMV, CXXVI f) MMVI, CXXXVI

39. 8 li sanoq sistemasida qo`nishni bajaring 1763+1577

a) 3714 b) 3641 d) 3879 e) 3562 f) 3342

40. 9 li sanoq sistemasida ko`paytirishni bajaring 876x21=

a) 16761 b) 13941 d) 14241 e) 17166 f) 20616

41. Sonlarni 6 lik sanoq sistemasidan 10 lik sanoq sistemasiga o`tkazing 535, 545, 214

a) 201,209,82 b) 235,247, 91 d) 235,209,82

e) 201.235,91 f) 201,209,91

42. Quyidagi ko`paytmalardan qaysilari 70 ga bo`linadi?

1) 105x20 2) 42x12x5 3) 85x33x4

a)1,3 b) 1,2 d) 1,2,3 e) 2,3 f) barchasi

43. Qanday son quyidagi yoyilmaga ega ?

1) 2x3x7x13 2) 2x3x5

a) 6552;70 b) 6552;60 d) 6732;60 e) 6832;60 f) 6932;60

44. 10va 8sonlarining EKUK ini toping.

a) 80 b) 10 d) 18 e) 40 f) 24

45. 840 va 264 ning umumiy bo`luvchilari nechta?

a) 9 b) 4 d) 6 e) 8 f) 7

46. Qaysi juftlik o`zaro tub sonlardan iborat?

a) (21;14) b) (21;10) d) (12;15) e) (10;15) f) (8;14)

47. 8 va 12 sonlari eng kichik umumiy karralisining natural bo`luvchilari nechta?

a) 6 b) 7 d)8 e) 9 f) 110

48. Quyidagi tasdiqlarning qaysilari to`g`ri?

1) Toq va juft sonlar doimo o`zaro tub

2) Ikkita juft son o`zaro tub bo`la olmaydi.

3) Ikkita turli tub sonlar doimo o`zaro tub

4) Ikkita ketma-ket natural sonlar doim o`zaro tub

5) 39 va 91 sonlari o`zaro tub

a) 1;3 b) 4;5 d) 2;3;5 e) 2;3;4 f) 3;4

49. Ikkita natural sonni 5 ga bo`lganda, mos ravishda 1 va 3 qoldiq hosil bo`ladi. Bu sonlar kvadratlarinig yig`indisini 5 ga bo`lganda qoldiq nechaga teng bo`ladi?

a) 4 b) 2 d) 3 e) 1 f) 0

50. Hisoblang. (3,21x5,95-4,44):(2,21x5,95+1,51)

a) 1 b) 2 d) 3 e) 4 f) 5

III BOB. SON TUSHUNCHASINI KEHGAYTIRISH

3.1. Butun sonlar

3.1.1. Nomanfiy butun sonlar. Manfiy sonlarning kiritilishi. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasi.

1. **Nomanfiy butun sonlar.** a va b natural sonlar va $a+b=c$ yig`indi berilgan bo`lsin. Bu yig`indi uchun 1) $c>a$ va $c>b$; 2) har bir qo`shiluvchi yig`indidan ikkinchi qo`shiluvchi ayirmasiga teng, ya'ni $b=c-a$ va $a=c-b$.

«0» soni bo`sh to`plamlar sinfining xarakteristikasi sifatida kiritilgan bo`lib, «$a$» natural son esa, bo`shmas to`plamlar sinfining xarakteristikasi bo`lganligi uchun, $a+0=a$ ekanligini tushunish qiyin emas. Yig`indida biror qo`shiluvchini topish qoidasini qo`shiluvchilardan biri nol bo`lgan holda qarab, $0=a-a$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, «0» sonini ikkita teng sonning ayirmasi deb qarash mumkin.

Nol sonini natural sonlar to`plamiga qo`shib, nomanfiy butun sonlar to`plami deb ataladigan yangi sonli to`plam hosil qilamiz. Bu kengaytirilgan to`plam N_0 bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi

$$N_0=\{0,1,2,3,4,...,n,...\}$$

Nol soni bilan amallar bajarish qoidalarini, ushbu tengliklar ko`rinishida yozish mumkin: $a+0=a$ (ta'rifga ko`ra), $0+a=a$;

$$a-0=a;\quad a\cdot 0=0,\quad 0\cdot a=0$$

$$\text{agar } a\neq 0 \text{ bo`lsa, } 0:a=0$$

Nolga bo`lishni alohida qaraymiz. Noldan farqli $a$ son berilgan bo`lsin, ya'ni $a\neq 0$ $a:0$ bo`linma mavjud bo`lsin deb faraz qilaylik; uni b orqali belgilaylik. U holda $a:0=b$ ga ega bo`lamiz, bundan esa quyidagi kelib chiqadi; $a=0\cdot b$ yoki $a=0$ bu esa shartga ziddir. Demak, $a:0$ bo`linmaning mavjudligi haqida qilgan farazimiz noto`g`ri. Shunday qilib, nolga bo`lish mumkin emas.

Nolni natural sonlar to`plamiga qo`shish natijasida son tushunchasini dastlabki kengaytirish amalga oshirildi.

2. **Manfiy sonlarning kiritilishi.** Nol sonini kiritilishi natijasida teng sonlarni

ayirish mumkin bo`ldi. Katta sonni kichik sondan ayirish mumkin bo`lishi uchun sonlar to`plamini yangi sonlar kiritish yo`li bilan kengaytirilgan.

To`g`ri chiziqni olib, unda yo`nalish, O boshlang`ich nuqta va masshtab birligini olamiz.

46-rasm

Boshlang`ich nuqtaga 0 sonini mos qo`yamiz. Boshlang`ich nuqtadan o`ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga 1,2,3, ... natural sonlarni mos qo`yamiz, boshlang`ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga –1, –2, –3 ... simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo`yamiz. Bu sonlar butun manfiy sonlar deb ataladi.

Sonlar belgilangan bu to`g`ri chiziq son o`qi deb ataladi. O`qning strelka bilan ko`rsatilgan yo`nalishi musbat yo`nalish, qarama-qarshi yo`nalishi esa manfiy yo`nalish deb ataladi. Natural sonlar son o`qida boshlang`ich nuqtadan musbat yo`nalishda qo`yiladi, shuning uchun ularni musbat butun sonlar deb ataladi

Nomanfiy butun sonlar to`plami bilan butun manfiy sonlar to`plamining birlashmasi yangi sonli to`plamni hosil qiladi, bu to`plam butun sonlar to`plami deb ataladi va Z simvoli bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi:

$$Z = \{...-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Yuqoridagi 46-rasm butun sonlar to`plamining geometrik ko`rinishini tashkil etadi. Chizmadan ko`rinadiki, har bir butun songa son o`qida aniq nuqta mos keladi, lekin son o`qining har bir nuqtasiga ham butun son mos kelavermaydi.

3. Natural sonlar to`plamini butun sonlar to`plamiga kengaytirilishini ikkinchi talqini. 0- simvoli bilan belgilanadigan nol soni va manfiy butun sonlar quyidagicha kiritiladi: a) istalgan n - natural son va 0- sonining yig`indisi n sondir.

$$n + 0 = n$$

b) istalgan n natural songa shunday yagona $-n$ - manfiy butun son mos keladiki, n va $-n$ sonlarning yig`indisi nolga teng.

$$n+(-n)=0$$

soni n songa qarama-qarshi son deb aytiladi. $-n$ soniga qarama-qarshi son n sonidir; $-(-n)=n$.

Natural sonlar to`plamiga yangi ob'yektlarni – nol sonini va manfiy butun sonlarni kiritish natijasida hosil bo`lgan to`plamga butun sonlar to`plami deyiladi. Butun sonlar to`plamidagi natural sonlar musbat butun sonlar deb ataladi. Barcha butun sonlar to`plami Z bilan belgilanadi. Butun sonlar to`plami tartiblangan to`plamdir, ya'ni istalgan ikkita m va n butun sonlar uchun quyidagi munosabatlardan biri va faqat biri o`rinlidir.

$$m=n \text{ yoki } m<n \text{ yoki } n<m$$

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Nomanfiy butun sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?
2. Manfiy sonlarning kiritilishini tushuntiring.
3. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasini tushuntiring.

3.1.2 Butun sonlar ustida amallar

Butun sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishdan oldin sonning moduli to`g`risida tushuncha beramiz. n sonining absolyut qiymati (yoki moduli) deb $|n|$ bilan belgilanadigan va ushbu qoida bo`yicha hisoblanadigan songa aytiladi:

n sonining absolyut qiymati musbat n sonlar uchun o`ziga, manfiy $n$ sonlar uchun musbat bo`lib n sonning qarama-qarshisi $-n$ ga, faqat $n=0$ bo`lgandagina nolga teng.

**1. Qo`shish.** Butun sonlarni qo`shishda quyidagi ikki holga e'tibor berish lozim.

a) qo`shiluvchilar bir xil ishorali;

b) qo`shiluvchilar turli ishorali.

1-ta'rif. Bir xil ishorali ikki butun sonning yig`indisi deb, shunday ishorali, moduli esa qo`shiluvchilar modullarining yig`indisiga teng bo`lgan butun songa aytiladi. Turli ishorali va turli modulli ikki butun sonning yig`indisi deb, moduli qo`shiluvchilar modullari ayirmasiga teng, ishorasi esa moduli katta bo`lgan qo`shiluvchi ishorasi bilan bir xil bo`lgan songa aytiladi.

Ikkita qarama-qarshi sonning yig`indisi nolga teng, ya'ni $a+(-a)=0$

Masalan,

(+8) + (+13)= +21, (–12) + (–11) = –23,

(+8) + (–13)= –5, (–8) + (+13) = +5, (8) + (–8) = 0.

Natural sonlar to`plamidagi qo`shish qonunlari (o`rin almashtirish, guruhlash) butun sonlar to`plami uchun ham o`rinli. Bundan tashqari butun sonlar to`plamida qo`shish monotonlik qonuniga bo`ysinadi.

Yig`indining monotonlik qonuni:

Agar $a>b$ bo`lsa, u holda $a+c>b+c$ ning saqlanishini misollarda tekshirib ko`ramiz. Haqiqatan, ham –7 > –9 tengsizlikdan quyidagilar kelib chiqadi:

(–7)+(11)>(–9)+(+11)

(–7)+0 > (–9)+0, (–7)+(–3) > (–9)+(–3)

Natural sonlar to`plamida yig`indi har bir qo`shiluvchidan doimo katta. Butun sonlar to`plamida yig`indi bu cheklanishdan xoli.

Ikkita butun sonning yig`indisi: a) har bir qo`shiluvchidan katta bo`lishi mumkin; b) bir qo`shiluvchidan katta va ikkinchisidan kichik bo`lishi mumkin. v) har bir qo`shiluvchidan kichik bo`lishi mumkin; g) qo`shiluvchilardan biriga teng bo`lishi mumkin.

2. Ko`paytirish.

2-ta'rif. Ikki butun sonning ko`paytmasi deb, moduli ko`paytuvchilar modullari ko`paytmasiga teng va ko`paytuvchilar bir xil ishorali bo`lsa, plus ishora bilan olingan, ko`paytuvchilar turli ishorali bo`lsa, minus ishora bilan olinadigan songa aytiladi; agar ko`paytuvchilardan biri nolga teng bo`lsa, ko`paytma nolga teng.

Masalan,

$(+3)\cdot(+8)=24$; $(-3)\cdot(-8)=24$; $(-3)\cdot(+8)=-24$; $(+3)\cdot(-8)=-24$.

Bulardan $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ kelib chiqadi, ya'ni ko`paytmaning moduli ko`paytuvchilar modullari ko`paytmasiga teng.

Butun sonlarni ko`paytirish uchun o`rin almashtirish, gruppalash va taqsimot qonunlari o`rinli. Bu qonunlarni o`rinli ekanligini bevosita misollar yordamida ko`rsatish mumkin.

$2\cdot3=3\cdot2$; $(-2)\cdot(3)=(3)\cdot(-2)$; $(-2)\cdot(-3)=(-3)\cdot(-2)$

$[(-5)\cdot(-4)]\cdot(+3)=(-5)\cdot[(-4)\cdot(+3)]$

$[(+5)\cdot(-4)]\cdot(-3)=(+5)\cdot[(-4)\cdot(-3)]$

Butun sonlar to`plamida monotonlik qonuni natural sonlar to`plamidagi monotonlik qonunidan kengaytirilgan shaklda bo`ladi, ya'ni agar $a>b$ va $m>0$ bo`lsa, u holda $am>bm$, agar $a>b$ va $m<0$ bo`lsa, u holda $am<bm$. Shunday qilib, natural sonlar uchun monotonlik qonuni butun sonlar uchun monotonlik qonunining xususiy holidir.

Natural sonlar to`plamidan butun sonlar to`plamiga o`tilganda ko`paytirishning ma'nosi o`zgaradi. Haqiqatan, $a$ natural sonni 6 ga ko`paytirish a sonni 6 marta orttirish demakdir.

Natural ko`rsatkichli darajaga ko`tarish amalining natural asos uchun ifodalangan ta'rifi istalgan butun asos uchun ham saqlanadi.

Masalan,

$(-4)^3=(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=-64$

$(-2)^6=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=64$

Ishoralar qoidasi:

$a>0$ va $a<0$ da $a^{2m}>0$;

$a>0$ da $a^{2m+1}>0$; $a<0$ da $a^{2m+1}<0$.

Butun sonlar to`plamida to`g`ri amallar (qo`shish, ko`paytirish va darajaga ko`tarish) doimo bir qiymatli bajariladi, bu tegishli qoidalardan bevosita kelib chiqadi.

3. Ayirish.

Ayirish amalining ta'rifi natural sonlar uchun ayirish amali qoidasiga o`xshash.

3-ta'rif. a va b butun sonlarning ayirmasi deb, shunday x butun songa aytiladiki, uni b songa qo`shganda $a$ soni hosil bo`ladi. Shu sababli, agar $a-b=x$ bo`lsa, u holda $x+b=a$.

Ayirish qoidasi ta'rifini ayirma ta'rifi, butun sonlarni qo`shish qoidasi va qo`shishning gruppalash qonuniga asoslanib keltirib chiqaramiz. a va b butun sonlar ayirmasini topish talab qilinayotgan bo`lsin. Izlanayotgan ayirmani x orqali belgilaymiz. Ayirma ta'rifiga ko`ra

$$x+b=a.$$

Bu tenglikning ikkala qismiga $-b$ ni qo`shib $x+b+(-b)=a+(-b)$ ni hosil qilamiz. Yig`indining gruppalash xossasini qo`llanib, quyidagini topamiz:

$$x+[b+(-b)]=a+(-b)$$

$b+(-b)=0$ bo`lganligi uchun $x=a+(-b)$ yoki $a-b=a+(-b)$ so`nggi tenglik butun sonlarni ayirish qoidasini ifodalaydi va bunday ta'riflanadi: bir butun sondan ikkinchi butun sonni ayirish uchun ayiriluvchiga qarama-qarshi sonni kamayuvchiga qo`shish kerak.

Bundan butun sonlarni ayirish qo`shishga keltirilishi kelib chiqadi. Butun sonlar to`plamida qo`shish bir qiymatli bajarilganligidan butun sonlar to`plamida ayirish amali ham bir qiymatli bajarilishi kelib chiqadi.

Shuni ta`kidlash kerakki, manfiy sonlar kiritilishi bilan kichik sondan katta sonni ayirish mumkin bo`ladi.

Masalan, $(+4)-(+7)=(+4)+(-7)=-3$

$(-4)-(+7)=(-4)+(-7)=-11$

4. Bo`lish.

Butun sonlar to`plamida bo`lish amali natural sonlar to`plamidagi kabi aniqlanadi. Butun sonlarni bo`lish qoidasini bo`linmaning ta'rifi va butun sonlarni ko`paytirish qoidasiga asoslanib keltirib chiqaramiz.

a butun sonni noldan farqli b butun songa bo`lishdan chiqadigan bo`linmani topish talab qilingan bo`lsin. Izlanayotgan bo`linmani x bilan belgilaymiz va bunday yozamiz: $a:b=x$. Natural sonlarni bo`lishdagi bo`linmaning ta'rifiga ko`ra $b\cdot x=a$. Bu tenglikdan ko`rish osonki, agar a va b turli ishorali bo`lsa, u holda $x$ bo`linma manfiy, a va b bir xil ishorali bo`lsa, $x$ bo`linma musbatdir. Bu tenglikning o`zidan yana $|b|\cdot|x|=|a|$ bo`lishi kelib chiqadi, bunda agar $|a|$ son $|b|$ ga karrali bo`lsa, $|x|=|a|:|b|$ bo`ladi. Shunday qilib, bir butun sonni noldan farqli ikkinchi butun songa bo`lish uchun, bo`linuvchining modulini bo`luvchining moduliga bo`lish hamda, agar bo`linuvchi va bo`luvchi bir xil ishorali bo`lsa, hosil bo`lgan bo`linmani «+» ishora bilan olish, agar bo`linuvchi va bo`luvchi turli ishorali bo`lsa, bo`linmani «–» ishora bilan olish yetarlidir; agar bo`linuvchi nolga teng bo`lsa, u holda bo`linma ham nolga teng.

Bundan kelib chiqadiki, butun sonlar to`plamida bo`linma faqat bo`linuvchining moduli bo`luvchining moduliga karrali bo`lganda mavjud ekan. Bu har qanday ixtiyoriy ikkita butun son uchun bo`lish amali bajarilmasligini ko`rsatadi. Bu esa sonli to`plamni yanada kengaytirishni, ya'ni yangi sonlarni kiritishni talab etadi.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Butun sonlarni qo`shish va ko`paytirish qoidalarini keltiring.
2. Butun sonlarni ayirish va bo`lish ta'riflarini keltirib tushuntirib bering.
3. Sonning moduli deganda nimani tushunasiz?

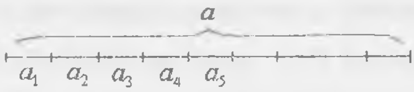
3.2. Musbat ratsional sonlar

3.2.1. Musbat ratsional sonlar to`plami

1. **Kesmalarni o`lchash.** Son tushanchasini kengaytirish mazmunini ochishdan oldin, o`lchanuvchi kattaliklar va o`lchov birliklari orasidagi

bog`lanishni aniqlash lozim. Buning uchun kesmalarni o`lchashni qaraymiz.

Aytaylik a kesma $a_1, a_2, ..., a_n$ kesmalar birlashmasidan tashkil topgan bo`lib, ularni hech bir ikkitasi ichki nuqtalarga ega bo`lmasin (kesmalar uchlari umumiy bo`lishi mumkin) (47-rasm).



47-rasm

U holda a kesmaga $a_1, a_2, ..., a_n$ kesmalarni yig`indisi deyiladi va quyidagi ko`rinishda yoziladi:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad \text{yoki} \quad a = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Biror e kesmani tanlab, uni birlik kesma yoki uzunlik o`lchov birligi deymiz. Agar $a$ kesmani har biri $e$ kesmaga kongruent (teng o`lchovli) bo`lgan $n$ ta bo`lakchaga ajratish mumkin bo`lsa, u holda $n$ soni $a$ kesmaning $e$ o`lchov biriligidagi qiymati deyiladi va $m_e(a)$ kabi belgilanadi.

Boshqacha aytganda, a kesma e kesmaga karrali deyiladi.

Agar e o`lchov birligi sifatida qabul qilingan bo`lsa, $m_e(a)$ o`rniga $m\ (a)$ yoziladi. $m(a) = n$ bo`lsa, uni $a \equiv n \cdot e$ ko`rinishida yozish mumkin, ya'ni a kesma e kesmaga kongruent n ta kesmadan tashkil topganini bildiradi.

Kesma o`lchovi ikkita hossaga ega – additivlik va multiplikativlik.

1) *Additivlik xossasi.*

Agar $a=b+c$ bo`lib, bunda $b$ va $c$ kesmalar uzunliklari natural sonlar bilan ifodalangan bo`lsa, u holda a kesma uzunligi kesmalar bo`laklari uzunliklari yig`indisiga teng bo`ladi:

$$m(a) = m(b) + m(c) \qquad (1)$$

bu additivlik hossasi. (Additivlik so`zi lotincha "addition" – so`zidan olingan bizningcha qo`shish degan ma'noni beradi.)

2) *Multiplikativlik xossasi.*

Uzunlik o`lchov birligini biridan ikkinchisiga o`tishning umumiy holini qaraylik. Aytaylik, e_1 e_2 dan n marta katta bo`lsin. ya'ni $e_1 \equiv ne_2$($n$ – natural son). Agar $a$ kesmani $e_1$ o`lchov birligida o`lchaganda biror $k$ soni hosil bo`lsa (ya'ni $a \equiv k \cdot e_1$), shu a kesmani e_2 o`lchov birligida o`lchasa kn soni hosil bo`ladi (ya'ni $a \equiv (kne_2)$. Haqiqatan ham, $a$ kesma $e_1$ kesmaga kongruent bo`lgan k ta kesmadan tashkil topadi. Bunda k ta kesmalarning har biri e_2 kesmaga kongrent. Demak a kesma e_2 kesmaga kongruent bo`lgan kn kesmadan tashkil topadi, ya'ni $a \equiv (kn)e_2$

Bulardan $a \equiv ke_1$ va $e_1 \equiv ne_2$ bo`lishidan $k(ne_2) = (kn)e_2$ ekanligi kelib chiqadi.

a kesmaning e_1 o`lchov birligidagi uzunligini $m_1(a)$, $e_2$ o`lchov birligidagi uzunligini $m_2(a)$ bilan belgilaymiz. U holda $m_1(a) = k$, $m_2(a) = kn$.

e_1 kesmaning e_2 o`lchov birligidagi uzunligini $n$ ga tengligini hisobga olsak (ya'ni $m_2(e_1) = n$; $m_2(a) = kn$) quyidagi munosabatga ega bo`lamiz.

$$m_2(a) = m_1(a)m_2(e_1) \tag{2}$$

(2) - dan quyidagi xossa kelib chiqadi.

Agar a kesma e_1 kesmaga karrali, e_1 kesma esa e_2 kesmaga karrali bo`lsa, u holda $a$ kesma $e_2$ kesmaga karrali bo`ladi va (2) tenglik bajariladi.

Bu xossaga multiplikativlik xossasi deyiladi (multiplikativ so`zi lotincha "multiplicatio" – so`zidan olingan bo`lib, ko`paytirish degan ma'noni beradi).

2.Kasr tushunchasini kiritilishi. Matematikaning amaliyotga ko`pgina tadbiqi ikkita asosiy masalaga, ya'ni kattaliklarni o`lchash va chekli to`plamlar elementlari sonini hisoblashga doir masalalarga olib keladi. To`plamlar elementlari sonini sanash natural sonlar bilan ifodalanadi.

Lekin hamma vaqt ham o`lchanadigan kattalikni butun son marta o`lchov birligi orqali ifodalab bo`lmagan. Bu esa natural sonlardan boshqa sonlarni ham kiritishga ya`ni sonlar tushunchasini kengaytirishga olib kelgan. Ma'lumki, matematika kursida natural, butun, ratsional, irratsional, haqiqiy va kompleks sonlar to`plamlari bilan ish ko`riladi. Sonlarning turli to`plamlari orasidagi o`zaro bog`lanishlari xususida to`xtalamiz.

Son tushunchasining kengayishi jarayonidagi dastlabki to`plam $N_0$ bo`ldi. Biz buni oldingi mavzuda ko`rib o`tdik. Juda qadim zamonlarda paydo bo`lgan natural son tushunchasi ko`p asrlar davomida kengaydi va umumlashtirildi. Kattaliklarni (miqdorlarni) yanada aniqroq o`lchashga bo`lgan talab musbat kasr sonlar tushunchasiga olib keldi. Manfiy sonlar tushunchasining paydo bo`lishi tenglamalarni echish va nazariy izlanishlar bilan bog`liq. Nol avval sonning yo`qligini bildirgan bo`lsa, manfiy sonlarning kiritilishi bilan butun sonlar to`plami Z da hamda ratsional sonlar to`plami Q da teng huquqli songa aylandi.

Bizning eramizgacha V asrda Pifagor maktabida musbat ratsional sonlar kesmalar uzunliklarini aniq o`lchash uchun yetarli emasligi aniqlangan va keyinroq bu muammo hal qilingandan keyin irratsional sonlar paydo bo`ldi, XVI asrda esa o`nli kasrlarning kiritilishi bilan haqiqiy sonlarga qadam qo`yildi. Haqiqiy sonning qat'iy ta'rifi, haqiqiy sonlar to`plami xossalarining asoslanishi XIX asrda berildi.

Haqiqiy sonlar tushunchasi kengayishi jarayonini davom ettirish mumkin va u davom etadi. O`quvchilarning kasr sonlar bilan dastlabki tanishuvi boshlang`ich sinflarda boshlanadi. Keyinchalik o`rta sinflarda kasr sonlar tushunchasi aniqlashtiriladi va kengaytiriladi. Shuning uchun boshlang`ich sinf o`qituvchisi kasr va ratsional sonlar ta'rifini, ratsional sonlar ustida amallar bajarish qoidasini va bu amallar qonunlarini bilishi zarur, shuningdek, ratsional va haqiqiy sonlar to`plamlari bilan natural sonlar to`plamining o`zaro bog`liqligini ko`ra bilishi kerak. Bu boshlang`ich va o`rta sinflarda matematikani ketma-ket o`rganish uchun zarurdir.

Kasrlarning paydo bo`lishi tarixi kattaliklarni o`lchash bilan bog`liq. Masalan, kesma uzunligini o`lchashda kasrlar qanday paydo bo`lishini aniqlaymiz.

a kesma olamiz. Uning uzunligini topish uchun kesma uzunligning birligi sifatida e ni olamiz. (48-rasm).

O`lchashda $a$ kesmaning uzunligi $4e$ dan katta, lekin $5e$ dan kichikligi topildi. Shuning uchun uni natural son bilan ($e$ uzunlik birligida) ifodalab bo`lmaydi.

Ammo e kesmani har biri e_1 ga teng bo`lgan to`rtta teng qismga bo`lsak, $e$ kesmanig uzunligi $4e_1$ bo`ladi. Agar dastlabki uzunlik birligi e ga qaytsak, unda a kesma e kesmaning to`rtdan bir qismiga teng kesmalarning 18 tasidan iborat bo`ladi,

48-rasm

ya'ni a kesmaning uzunligi haqida gapirar ekanmiz, ikkita natural son - 18 va 4 sonlari ustida amallar bajarishga majbur bo`lamiz. Bunday vaziyatda kesma uzunligini $\frac{18}{4}e$ ko`rinishida yozishga, $\frac{18}{4}$ belgini esa kasr deb aytishga kelishib olamiz.

Kasr tushunchasi umumiy ko`rinishda bunday ta'riflanadi: $a$ kesma va $e$ birlik kesma berilgan bo`lsa, bunda e kesma har biri e_1 ga teng bo`lgan $n$ ta kesma yig`indisi. Agar a kesma har biri e_1 ga teng m ta kesmadan tuzilgan bo`lsa, uning uzunligi $\frac{m}{n}e$ ko`rinishida bo`lishi mumkin. $\frac{m}{n}$ belgi kasr deyiladi, bunda $m$ va $n$ -natural sonlar, bu belgi bunday o`qiladi: «n dan m».

Tanlab olingan e_1 kesma e kesmaning to`rtdan bir qismidir. $a$ kesmaga butun son marta qo`yiladigan e kesmaning bunday ulushidan boshqa ulishini, ya'ni e kesmaning sakkizdan bir qismini ham tanlash mumkin, unda a kesma 36 ta shunday kesmadan iborat bo`lib, uning uzunligi $\frac{36}{8}e$ ga teng bo`ladi. e kesmaning o`n oltidan bir qismini olish mumkin, unda $a$ kesma 72 ta shunday kesmadan iborat bo`lib, uning uzunligi $\frac{72}{16}e$ bo`ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirsak, $a$ kesmaning uzunligi turli kasrlarning cheksiz to`plami bilan ifodalanishi mumkin: $\frac{18}{4}; \frac{36}{8}; \frac{72}{16}; \ldots$.

Umuman, agar e uzunlik birligida a kesmaning uzunligi $\frac{m}{n}$ kasr bilan ifodalansa, u ixtiyoriy $\frac{mk}{nk}$ kasr bilan ifodalanadi, bunda k -natural son.

Bundan ko`rinadiki, bir xil uzunlikdagi kasr berilgan o`lchov birligida turli xil ko`rinishdagi kasrlar bilan ifodalanishi mumkin.

Ta'rif. e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalovchi kasrlar teng kasrlar deyiladi.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng bo`lsa, bunday yoziladi: $\frac{p}{n}=\frac{t}{q}$.

Masalan, $\frac{18}{4}$ va $\frac{36}{8}$ kasrlar e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalaydi, demak, $\frac{18}{4}=\frac{36}{8}$.

Berilgan kasrlarning tengligi yoki teng emasligini quyidagi teorema aniqlab beradi.

Teorema. $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng bo`lishi uchun $pq=nt$ bo`lishi zarur va yetarlidir.

Isboti: 1) $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan $pq=nt$ ekanligini ko`rsatamiz.

Har qanday q natural son uchun $\frac{p}{n}=\frac{pq}{nq}$, har qanday n natural son uchun $\frac{t}{q}=\frac{tn}{qn}$ bo`lgani uchun, $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan $\frac{pq}{nq}=\frac{tn}{qn}$ tenglik kelib chiqadi. bundan o`z navbatida $pq=nt$ tenglik kelib chiqadi.

2) $pq=nt \Rightarrow \frac{p}{n}=\frac{t}{q}$ ni ko`rsatamiz. $pq=nt$ to`g`ri tenglikning ikkala qismini $nq$ natural songa bo`lsak, $\frac{pq}{nq}=\frac{nt}{nq}$ to`g`ri tenglikning hosil qilamiz.

Ammo $\frac{pq}{nq}=\frac{p}{n}, \frac{nt}{nq}=\frac{t}{q}$. Demak. $\frac{p}{n}=\frac{t}{q}$.

Yuqorida qaralgan faktlardan kasrning asosiy xossasi kelib chiqadi: agar berilgan kasrning surat va maxraji bir xil natural songa ko`paytirilsa, bo`linsa, berilgan kasrga teng kasr hosil bo`ladi. Kasrlarni qisqartirish va kasrlarni bir xil maxrajga keltirish shu xossaga asoslangan.

Kasrlarni qisqartirish – berilgan kasrni unga teng, lekin surati va maxraji undan kichik bo`lgan kasrga almashtirishdir.

Agar kasrning surat va maxraji uchun umumiy bo`luvchilarining eng kattasi 1 ga teng bo`lsa, kasr qisqarmas kasr deyiladi. Masalan $\frac{3}{4}$ – qisqarmas kasr.

Kasrni qisqartirish natijasida, odatda, unga teng qisqarmas kasrni hosil qilish uchun, berilgan kasrning surat va maxrajini ularning eng katta umumiy bo`luvchisiga bo`lish kerak.

Masalan, $\frac{35}{40}$ kasrni qisqartirish uchun $D(35{,}40)$ ni topamiz, $D(35{,}40)=5$. Endi 35 ni 5 ga va 40 ni 5 ga bo`lib, $\frac{35}{40}=\frac{7}{8}$ ni hosil qilamiz. $\frac{7}{8}$ - qisqarmas kasr.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar faqat va faqat bitta kesma uzunligini ifodalasa, ekvivalent kasrlar deyiladi.

O`z- o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. O`lchanuvchi kattaliklar va o`lchov birliklari orasidagi boglanishni aniqlashda kesmalarni o`lchashning mohiyatini tushuntirib bering.
2. Kesma o`lchovi xossalarini sanang va tushuntiring.
3. Son tushunchasini kengaytirish zarurligini aytib bering.
4. Kasrlarning paydo bo`lishini aytib bering va kasr tushunchasiga ta'rif bering.
5. Kasrlar teng bo`lishi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Kasrlarni qisqartirish deganda nimani tushunasiz?

3.2.2. Musbat ratsional sonlar.

Ma'lumki, bitta kesmaga cheksiz ko`p ekvivalent kasrlar mos keladi. Shuning uchun ekvivalent kasrlar to`plamiga musbat ratsional sonlar deyiladi. Boshqacha aytganda, agar sonni kasr ko`rinishida yozish mumkin bo`lsa, bunday songa musbat ratsional son deyiladi.

Umuman, musbat ratsional son – bu teng kasrlar to`plami, bu to`plamga tegishli har bir kasr shu sonning yozuvidir.

Masalan, $\left\{\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{20}{16}, \frac{40}{32}, \ldots\right\}$ to`plam biror ratsional sonni ifodalaydi. Bunda $\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{20}{16}$ va h.k. kasrlar esa shu sonning turli yozuvidir.

$\left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20}, \frac{24}{40}, \ldots, \frac{3n}{5n}\right\}$ to`plam boshqa musbat ratsional sonni aniqlaydi.

Yuqorida berilgan ta'rifiga ko`ra, biz $\frac{p}{n}$ yozuvga qarab, $\frac{p}{n}$ bu kasr yoki $\frac{p}{n}$ kasr ko`rinishidagi yozilgan musbat ratsional son deymiz. Ko`pincha qisqa bunday deyiladi: «musbat ratsional son $\frac{p}{n}$ berilgan». Bu degani musbat ratsional son va kasr tushunchasi aynan bir xil degani emas. Bular turli tushunchalardir, lekin jumla qisqa bo`lishi uchungina shunday deyiladi.

$\frac{7}{8}$ yozuv nimani anglatadi? Javoblar bunday bo`lishi mumkin: «Bu kasr», «Bu musbat ratsional sonning yozuvi».

$\frac{7}{8}$ -musbat ratsional son deyish mumkinmi? Mumkin, faqat gapni qisqartish maqsadida shunday deyish mumkin.

Biror musbat ratsional sonning barcha yozuvlari orasidan qisqarmas kasr ajratiladi, ya'ni surat va maxrajini eng katta umumiy bo`luvchisi 1 ga teng bo`lgan kasr ajratib olinadi. Masalan, ratsional sonni aniqlovchi $\left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{16}, \frac{24}{12}, \ldots\right\}$ kasrlar orasida $\frac{3}{4}$ kasr qisqarmas kasrdir. Bu esa quyidagi teoremaga olib keladi.

Teorema. Har qanday musbat ratsional son uchun shu sonning yozuvi bo`lgan bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjud.

Teorema isboti talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi.

Natural sonlar to`plamini musbat ratsional sonlar to`plamiga to`ldiruvchi sonlar kasr sonlar deyiladi.

O`z- o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Musbat ratsional kasrga ta'rif bering.
2. Har qanday musbat ratsional son uchun bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjudligi haqidagi teoremani isbotlab bering.

3.2.3. Musbat ratsional sonlar ustida amallar

Q_+ to`plamda qo`shish va ayirish amallarini qaraymiz.

1. **Qo`shish.** Qo`shish amalini aniqlash uchun dastlab quyidagi tasdiqni to`g`riligini ko`rsatamiz.

$a, b \in Q_+$ sonlarni bir xil maxrajga ega bo`lgan kasrlar shaklida ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, $a$ sonini $\frac{p}{n}$, $b$ sonini $\frac{t}{q}$ ko`rinishda berilgan bo`lsa, u holda bu kasrlarni bir xil maxrajga ega bo`lgan $\frac{pq}{nq}$ va $\frac{tn}{qn}$ kasrlar ko`rinishida ifodalash mumkin.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarni ularga ekvivalent bo`lgan bir xil maxrajli kasrlar bilan almashtirishga kasrlarni umumiy maxrajga keltirish deyiladi.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ ikki kasrning umumiy maxrajini topish n *ва* q sonlarning eng kichik umumiy karralisi $K(n,q)$ ni topish demakdir.

Agar $k = K(n;q)$ bo`lsa, u holda $k = nl = ql'$, bundan esa $\frac{p}{n}$ kasr $\frac{pl}{nl} = \frac{pl}{k}$ kasrlarga, $\frac{t}{q}$ kasr esa $\frac{tl'}{ql'} = \frac{tl'}{k}$ kasrlarga ekvivalent.

Misol. $\frac{11}{15}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni eng kichik umumiy maxrajini topish uchun $K(15;\ 6)$ni topamiz.

$K(15;6) = 30$. Eng kichik umumiy maxraj 30 soniga teng.

Demak, $\frac{11}{15}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni $\frac{11 \cdot 2}{15 \cdot 2}$ va $\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5}$ kasrlarga almashtiramiz, ya'ni $\frac{22}{30}$ va $\frac{25}{30}$ kasrlarni hosil qilamiz.

Aytaylik, a va b musbat ratsional sonlar mos ravishda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko`rinishida berilgan bo`lsin.

1-ta'rif. Agar $a, b \in Q_+$ musbat ratsional sonlar bo`lsa, u holda $a$ va $b$ sonlarning yig`indisi deb $\frac{p+t}{n}$ kasr bilan ifodalangan songa aytiladi.

$$\frac{p}{n} + \frac{t}{n} = \frac{p+t}{n} \qquad (1)$$

Agar a va b musbat ratsional sonlar turli maxrajli kasrlar bilan ifodalangan bo`lsa, bu kasrlar eng kichik umumiy maxrajga keltiriladi va (1) qoida bo`yicha qo`shiladi.

Masalan, $\frac{11}{15} + \frac{5}{6} = \frac{22}{30} + \frac{25}{30} = \frac{47}{30}$.

Endi musbat ratsional sonlarni kesmalar bo`yicha qo`shishni qaraymiz.

a, b, c kesmalar berilgan bo`lib, $c = a + b$ va tanlab olingan uzunlik birligi $e$ da $a = \frac{7}{3}e$, $b = \frac{9}{3}e$ bo`lsin (49-rasm).

49-rasm

U holda, c kesma uzunligi $\frac{16}{3}$ soni bilan ifodalanadi, chunki $c=a+b=\frac{7}{3}e+\frac{9}{3}e=7e_1+9e_1=(7+9)e_1=16e_1=\frac{16}{3}e$ sonni $\frac{7}{3}$ va $\frac{9}{3}$ sonlarining yig`indisi sifatida qarash mumkin.

Agar $a,b\in Q_+$ musbat ratsional sonlarni ifodalovchi kasrlarning ikkitasi yoki bittasi noto`g`ri kasr bo`lsa, (ya'ni $\frac{p}{n}$ noto`g`ri kasr bo`lsin $(p\geq n)$), u holda p n ga karrali bo`lsa, u holda $\frac{p}{n}$ - kasr natural sonning yozuvi bo`ladi.

Misol. $\frac{16}{4}=4$;

Agar p n ga karrali bo`lmasa, $p$ $ni$ $n$ ga qoldiqli bo`lamiz: $p=nq+r$, bunda $r<n$,]

$\frac{p}{n}$ kasrda p o`rniga $nq+r$ ni qo`yamiz va (1) qoidani qo`llaymiz

$$\frac{p}{n}=\frac{nq+r}{n}=\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}=q+\frac{r}{n}.$$

Bunga noto`g`ri kasrdan butun qismni ajratish deyiladi.

Qo`shishning xossalari:

1) Qo`shish amali kommutativlik xossasiga ega, ya'ni $a,b\in Q_+$ uchun

$$a+b=b+a$$

Haqiqatan ham, a va b musbat ratsional sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko`rinishida berilgan bo`lsa, u holda $a+b$ musbat ratsional soni $\frac{p+t}{n}$ kasr ko`rinishida, $b+a$ musbat ratsional soni esa $\frac{t+p}{n}$ ko`rinishida ifodalanadi, $p+t=t+p$ bo`lgani uchun $a+b=b+a$.

2) Qo`shish amali assotsiativ, ya'ni $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Haqiqatan ham a,b va c musbat ratsional sonlari mos ravishda $\frac{p}{n}$, $\frac{t}{n}$ *ва* $\frac{l}{n}$ kasrlar ko`rinishida berilgan bo`lsa. u holda $a+(b+c)$ soni $\frac{p+(t+l)}{n}$ kasr ko`rinishida, $(a+b)+c$ soni esa $\frac{(p+t)+l}{n}$ kasr ko`rinishida ifodalanadi.

$p+(t+l)=(p+t)+l$ (natural sonlar xossasiga ko`ra) bo`lganligi sababli $a+(b+c)=(a+b)+c$.

3) Qo`shish amali qisqaruvchan, ya'ni $a+c=b+c$ dan $a=b$ kelib chiqadi.

Natural sonlar to`plamidagi kabi $Q_+$ da ">" munosabati asimmetrik, tranzitiv va chiziqli. Kattalik munosabati quyidagicha: agar $a$ va $b$ sonlari teng maxrajli $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar bilan ifodalangan bo`lsa, u holda faqat va faqat $p>t$ bo`lganda $a>b$ bo`ladi. Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo`lsa, u holda faqat va faqat $pq>nt$ bo`lganda $a>b$ bo`ladi. Bundan $Q_+$ to`plamda tartib munosabati mavjudligi kelib chiqadi.

2. Ayirish. Aytaylik $a,b\in Q_+$ va $a>b$ bo`lsin. U holda qo`shish ta`rifiga asosan shunday $c\in Q_+$ mavjudki, $a=b+c$ tenglik o`rinli bo`ladi. Tenglik uchun $c$ sonini bir qiymatli aniqlanishini ko`rsatamiz. Haqiqatan ham, faraz qilaylik $a=b+d$ bo`lsin, bunda $d\in Q_+$.

U holda, $b+c=b+d$ tenglikga ega bo`lamiz. $Q_+$ to`plamda qisqaruvchanlik xossasiga ko`ra $c=d$ bo`ladi. Bu esa c sonining bir qiymatli aniqlanganini ko`rsatadi.

2-ta'rif. Agar Q_+ to`plamda $c$ soni mavjud bo`lib, $a=b+c$ tenglik o`rinli bo`lsa, u holda c soniga a va b sonlarining ayirmasi deyiladi va $a-b$ ko`rinishida belgilanadi.

Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasr ko`rinishida ifodalansa, $a-b$ ayirma $\frac{p-t}{n}$ kasr ko`rinishida bo`ladi.

Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasr ko`rinishida bo`lsa, $a-b$ ayirma $\frac{pq-tn}{nq}$ kasr ko`rinishida ifodalanadi. Bunda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar umumiy maxrajga keltiriladi.

Misol. $\frac{5}{12}-\frac{3}{20}=\frac{25-9}{60}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$.

3. Musbat ratsional sonlarni ko`paytirish va bo`lish. Aytaylik, a kesma, e_1 birlik kesma, e_1 kesma esa e_2 birlik kesma bilan o`lchangan bo`lsa, u holda $a\cong\frac{p}{n}e_1$, $e_1=\frac{t}{q}e_2$ bo`ladi, ya'ni $na\cong pe_1$; $qe_1\cong te_2$;

U holda $(nq)a\cong(pq)e_1$, $(pq)e_1\cong(pt)e_2$, shuning uchun $(nq)a\cong(pt)e_2$. Bu esa a kesmaning e_2 birlik kesmaga nisbatan uzunligi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanishini ko`rsatadi, boshqacha aytganda $m_2(a)$ son $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanadi, ya'ni $m_2(a)=\frac{pt}{nq}$.

Ammo shartga ko`ra, $m_1(a)=\frac{p}{n}$; $m_2(e_1)=\frac{t}{q}$.

Kesmalarni o`lchashni multiplikativlik xossasi $m_2(a)=m_1(a)\cdot m_2(e_1)$ bajarilishi talab qilinsa, $\frac{pt}{nq}=\frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q}$ tenglik bajarilishi lozim.

3-ta'rif. Agar musbat ratsional sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo`lsa, u holda ularning ko`paytmasi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalangan son bo`ladi.

$$\frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q}=\frac{pt}{nq}. \quad (2)$$

Kasrni kasrga ko`paytirish qoidasi maktabda quyidagicha ta'riflanadi: kasrni kasrga ko`paytirish natijasi shunday kasrga tengki, u kasrning surati ko`paytuvchi kasrlarning suratidagi sonlar ko`paytmasidan, maxraji esa ko`paytuvchi kasrlarning maxrajlari ko`paytmasidan iborat.

Musbat ratsional sonlarni ko`paytirish kommutativlik, assotsiativlik, qisqaruvchanlik xossalariga bo`ysinadi. Shuningdek, musbat ratsional sonlarni ko`paytirish qo`shishga nisbatan taqsimot qonuniga bo`ysinadi.

4-ta'rif. Ikki a va b ratsional sonning bo`linmasi deb, shunday $c$ songa aytiladiki, uning uchun $a=bc$ bo`ladi.

Biz a va b sonlarining bo`linmasi ta'rifini berdik. Agar $a=\frac{p}{n}, b=\frac{t}{q}$ bo`lsa, bo`linma qanday topiladi? $c=\frac{pq}{nt}$ son shu bo`linma ekanligini ko`rsatamiz. Bo`linma ta'rifiga ko`ra $a=bc=\frac{t}{q}\cdot\frac{pq}{nt}$.

Musbat ratsional sonlarning ko`paytirishning (2) qoidasini va ko`paytirish qonunlarini qo`llab, shakl almashtirishlar bajaramiz: $\frac{t}{q}\cdot\frac{pq}{nt}=\frac{t(pq)}{q(nt)}=\frac{(tq)p}{(tq)n}=\frac{p}{n}$.

Shunday qilib, ikki musbat ratsional sonning bo`linmasi: $\frac{p}{n}:\frac{t}{q}=\frac{pq}{nt}$ (3) formula bo`yicha topiladi.

Hosil bo`lgan formula ixtiyoriy musbat ratsional sonlar uchun bo`linma mavjudligini ko`rsatadi, ya'ni natural sonlar to`plamida har doim ham bajarib bo`lmaydigan bo`lish amallarini Q_+ to`plamda har doim bajarib bo`ladi.

Shuni eslatamizki, $\frac{p}{n}$ kasr yozuvidagi chiziq belgisini bo`lish amalining belgisi deb qarash mumkin. Haqiqatdan, ikkita $p$ va $n$ natural sonni olamiz va (3) qoida bo`yicha ularning bo`linmasini topamiz $p:n=\frac{p}{1}:\frac{n}{1}=\frac{p\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{p}{n}$. Aksincha, agar $\frac{p}{n}$ bo`lgani uchun har qanday musbat ratsional sonni ikki natural sonning bo`linmasi deb qarash mumkin. Shuni aytish kerakki, "ratsional son" termini lotincha "ratio" so`zdan kelib chiqqan bo`lib, tarjimasi "nisbat" (bo`linma) ni anglatadi.

O`z- o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Musbat ratsional sonlarni qo`shish va ayrishni misollar yordamida tushuntiring. Qo`shishning xossalarini sanab, tushuntirib bering.
2. Musbat ratsional sonlarni ko`paytirish va bo`lishni ta'riflang va misollar yordamida tushuntirib bering.

3.2.4. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurish

1. **Musbat ratsional sonlar to`plamining tartiblanganligi.** Agar ratsional sonlar teng kasrlar bilan ifodalangan bo`lsa, ular teng bo`ladi. Masalan, agar $a$ ratsional son $\frac{3}{4}$ $(a=\frac{3}{4})$ kasr bilan, $b$ ratsional son $\frac{6}{8}$ $(b=\frac{6}{8})$ kasr bilan ifodalangan bo`lsa, u holda $a=b$ bo`ladi, chunki $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

a va b ratsional sonlardan qaysi biri kichik (katta) ekanligini qanday bilish mumkin?

a va b - musbat ratsional sonlar bo`lsin.

Ta'rif. Agar shunday c ratsional son mavjud bo`lib, unda $a+c=b$ bo`lsa, a soni b sondan kichik $(a<b)$ yoki b soni a dan katta $(b>a)$ deb aytiladi.

Bu ta'rif musbat ratsional sonlar to`plamida ayirma mavjud bo`lishinig zarur va yetarli shartini ifodalashga imkon yaratadi.

a va b musbat ratsional sonlarning ayirmasi mavjud bo`lishi uchun $b<a$ bo`lishi zarur va yetarlidir.

Bu shartning isboti natural sonlar to`plamida ayirma mavjud bo`lishi haqidagi teoremaning isbotiga o`xshaydi.

"Kichik" munosabatining keltirib chiqarilgan ta'rifidan bu munosabatni o`rgatishning amaliy usullarini chiqarish mumkin.

Agar $a=\frac{m}{n}, b=\frac{p}{n}$ bo`lsa, $m<p$ bo`lganda va faqat shunda $a<b$ bo`ladi.

Agar $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{q}$ bo`lsa, $mq<np$ bo`lganda va faqat shunda $a<b$ bo`ladi.

Haqiqatdan ham, $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz: $\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}; \frac{p}{q}=\frac{pn}{qn}$. Natijada, berilgan kasrlarni taqqoslash, ularning suratlarini taqqoslashga keltiriladi: agar $mq>pn$ bo`lsa, $a>b$; agar $mq<pn$ bo`lsa, $a<b$.

Masalan. agar $a=\frac{7}{8}, b=\frac{11}{13}$ bo`lsa, $a>b$. chunki $7\cdot13=91, 8\cdot11=88$ va $7\cdot13>8\cdot11$. Bunday aniqlangan "kichik" munosabati tranzitiv va asimmetrik ekanligini, ya'ni "kichik" munosabati musbat ratsional sonlar to`plamida tartib munosabati ekanini, bu to`plamning o`zi tartiblangan to`plam ekanini ko`rsatish mumkin. Shuni eslatib o`tamizki, musbat ratsional sonlar to`plamidagi tartib munosabati natural sonlar to`plamidagi tartib munosabatidan farqli xossalarga ega. Ma'lumki, $N$ to`plam diskret – ikkita ketma-ket natural sonlar orasida boshqa natural sonlar yo`q.

Musbat ratsional sonlar to`plamida: 1) eng kichik son yo`q; 2) ixtiyoriy ikkita musbat ratsional sonning orasida Q_+ to`plamining cheksiz ko`p soni bor.

Q_+ to`plamda eng kichik son yo`qligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik a Q_+ to`plamdagi eng kichik son bo`lsin. a sonini $\frac{m}{n}$ kasr ko`rinishida ifodalash mumkin, u holda $\frac{m}{n+1}$ soni $\frac{m}{n}$ sonidan kichik bo`ladi, ya'ni $\frac{m}{n+1}<\frac{m}{n}$ chunki $(mn<mn+m)$. Demak, farazimiz noto`g`ri. Musbat ratsional sonlar to`plamida

eng kichik son yo`q.

Uchinchi xossani misolda ko`rsatamiz. $\frac{1}{3}$ dan katta va $\frac{2}{3}$ dan kichik ratsional son mavjudmi? Mavjud. Buning uchun berilgan sonlarning o`rta arifmetigini topish yetarli: $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}):2=\frac{1}{2}$. Shunday qilib, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{3}$ bilan $\frac{2}{3}$ ning orasida yotgan son yana topiladimi? Ha, uni topish uchun $\frac{1}{3}$ va $\frac{1}{2}$ sonlarning o`rta arifmetigini topish yetarli: $(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}):2=\frac{5}{12}$. Shunday qilib, $\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Bu jarayonni davom ettirish mumkin: $Q_+$ to`plamda olingan ixtiyoriy ikki son orasida shu to`plamda yotadigan cheksiz ko`p son bor. Q_+ to`plamning bu xossasi zichlik xossasi deyiladi.

4. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatikasi. Biz musbat ratsional sonlar va uning ustida bajariladigan amallarni geometrik nuqtai nazardan, ya`ni kesmalarni o`lchash masalalaridan kelib chiqib aniqladik.

Ammo musbat ratsional sonlar faqat kesmalarni uzunliklarini o`lchash uchun emas, balki massa, yuza, hajm va boshqalarni o`lchash uchun ham zarur. Bu esa musbat ratsional sonlar nazariyasini yaratishni talab qiladi. Buning uchun bu amallarni qonunlashtiruvchi aksiomalarni ko`rsatish yetarli.

Q_+ da qo`shish xossalarini va natural songa ko`paytirishni ($na=a+a+\ldots+a$; n marta) ifodalovchi aksiomalar sisitemasi yordamida Q_+ to`plamni aniqlaymiz. Bu aksiomalar sistemasi quyidagicha:

1. Q_+ to`plam N natural sonlar to`plamini o`z ichiga oladi.

2. Q_+ to`plamda qo`shish amali aniqlangan bo`lib, u $Q_+$ to`plamdagi ixtiyoriy bitta a va b sonlar uchun shu to`plamda $a$ va $b$ sonlarining yig`indisi deb ataluvchi $a+b$ sonini qo`yadi. N to`plam ostida qo`shish amali N to`plamda aniqlangan qo`shish amali bilan bir xil.

3. Q_+ da aniqlangan qo`shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan.

4. Ixtiyoriy $a\in Q_+$ son uchun shunday natural p va n sonlari topiladiki, bular

uchun $na = p$ o`rinli.

5. Ixtiyoriy natural p va n sonlari uchun shunday $a \in$ Q_+ soni topiladiki, bunda $na = p$.

6. Agar $na = nb$ bo`lsa, u holda $a = b$

Bu aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo`lib, $Q_+$ to`plamni va undagi qo`shish amalini aniqlaydi.

O`z- o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Musbat ratsional sonlar to`plamining tartiblanganganligini tushuntiring.
2. a va b musbat ratsional sonlari o`rtasida $a$ sonidan $b$ sonini kichik bo`lishi ta'rifini keltiring.
3. Musbat ratsional sonlar to`plamida eng kichik son yo`qligi va ikkita musbat ratsional sonlar o`rtasida cheksiz ko`p ratsonal sonlar mavjudligini isbotlang.
4. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurishni tushuntiring.

3.3. O`nli kasrlar

3.3.1. Musbat ratsional sonlarning o`nli kasr ko`rinishidagi yozuvi

Ma'lumki, kasr sonlarning paydo bo`lishi kattalikning bir birligidan ikkinchi birligiga o`tishdir, kasr maxraji berilgan kattalik birligi nechta ulushga bo`linishini ko`rsatadi. Hozirgi paytda deyarlik barcha mamlakatlarda xalqaro birliklar sistemasi ishlatiladi. Bu sistemada o`nli sanoq sistemasidan foydalanilganligi uchun kattaliklarning yangi birliklari berilganlarni 10, 100, 1000 va hakozo marta kamaytirish va ko`paytirish bilan hosil qilinadi. Masalan, 1 dm=10 sm; 1 sm=100 mm; 1 km=1000 m=10000 dm; 1 kg= 1000 g va h.k. Shuning uchun amalda maxraji 10 ning darajalari bo`lgan kasrlar ya'ni $\frac{m}{10^n}$ (bunda $m, n$-natural sonlar) katta ahamiyatga ega. Bunday kasrlarga o`nli kasrlar deyiladi. O`nli kasrlardan farqli ravishda $\frac{m}{n}$ ko`rinishdagi kasrlar oddiy kasrlar deyiladi.

Sonning o`nli kasr ko`rinishidagi yozuvining ma'nosini aniqlaymiz. $\frac{4362}{10^2}$ kasrni olamiz va quyidagi shakl almashtirishlar bajaramiz:

$$\frac{4362}{10^2}=\frac{4\cdot10^3+3\cdot10^2+6\cdot10+2}{10^2}=4\cdot10+3+\frac{6}{10}+\frac{2}{10^2}.$$

$4\cdot10+3$ yig`indi 43 sonining yozuvidir, $\frac{6}{10}+\frac{2}{10^2}$ yig`indi esa $\frac{4362}{10^2}$ sonining kasr qismining yozuvidir. Bunday kasr qismini maxrajsiz yozish qabul qilingan, bunda kasr qismi butun qismidan vergul bilan ajratiladi: $\frac{4362}{10^2}=43{,}62$.

Umumiy holda qaraylik. Kasr suratining o`nli sanoq sistemasidagi yozuvi $m=\overline{m_k...m_0}$ ko`rinishga, boshqacha yozganda $m=m_k\cdot10^k+...+m_0$ ko`rinishga ega bo`lsin. U holda daraja ustidagi amallarni bajarish qoidasiga ko`ra ($n\le k$ bo`lganda) quyidagiga ega bo`lamiz.

$$\frac{m}{10^n}=\frac{m_k\cdot10^k+...+m_n10^n+m_{n-1}10^{n-1}+...+m_0}{10^n}=$$
$$=m_k10^{k-n}+...+m_n+\frac{m_{n-1}}{10}+...+\frac{m_0}{10^n}\quad(1)$$

$m_k10^{k-n}+...+m_n$ - natural sonini M bilan belgilaymiz. (1) o`nli kasrni quyidagicha belgilash qabul qilingan: $M,m_{n-1}...m_0$. shunday qilib, $\frac{m}{10^n}$ kasrni yozishda, $m$ sonini o`nli yozuvdagi oxirgi n ta raqami vergul bilan ajratiladi. Masalan, $\frac{621}{10^2}=6{,}21$.

Ma'lumki, o`nli kasrlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarish oddiy kasrlarga karaganda osonroq. Masalan, $0{,}4563<0{,}4572$, chunki sonlarning o`nli va yuzli ulushlari teng bo`lgani bilan, birinchi sonning mingli ulushi ikkinchi sonnikidan kichik $(6<7)$.

O`nli kasrlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarish oson bo`lgani uchun quyidagi savol kelib chiqadi: $\frac{m}{n}(m, n \in N)$ ko`rinishdagi har qanday kasrni ham o`nli kasr ko`rinishida yozish mumkinmi?

Bunga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr chekli o`nli kasrga teng bo`lishi uchun bu kasr maxrajining tub ko`paytuvchilarga yoyilmasida faqat 2 va 5 sonlari bo`lishi zarur va yetarlidir. (Biz uni isbotsiz qabul qilamiz.)

Masalan, $\frac{17}{250}$ kasrni o`nli kasr ko`rinishida yozish mumkin, chunki u qisqarmas va maxrajining tub ko`paytuvchilarga yoyilmasi 2 va 5 sonlaridangina iborat: $250 = 2 \cdot 5^3$, $\frac{7}{15}$ kasrni o`nli kasr ko`rinishida yozib bo`lmaydi, uning maxrajining tub ko`paytuvchilarga yoyilmasida 3 soni bor: $15 = 3 \cdot 5$.

O`nli kasrlar orasida 0,01 kasr ajralib turadi va undan ko`p foydalaniladi, U protsent deb ataladi va 1% deb belgilanadi. Amalda kattaliklarning qismlari protsentlar bilan ifodalanadi. Masalan, tovarning narxi 20% arzonlashtirildi. Agar shakarqamish tarkibida 15% shakar bo`lsa, 10 t shakarqamishda qancha shakar bor? $0{,}15 \cdot 10\text{т} = 1{,}5\text{т}$. Demak, 10 t ning 15% i 1,5 t ni tashkil qilar ekan.

Endi o`nli kasrlar ustida amallarini bajarish algoritmlarini keltiramiz.

Ikkita o`nli kasrni qo`shish (ayirish) algoritmi:

1) ikkita o`nli kasrda verguldan keyingi o`nli belgilar sonini tenglashtirish kerak, agar o`nli kasrning bittasida o`nli belgilar soni kam bo`lsa, uning o`ng tomoniga bir qancha nollar yozish bilan tenglashtiriladi;

2) hosil qilingan o`nli kasrda vergullarni tashlab, hosil bo`lgan natural sonlar qo`shiladi (ayiriladi);

3) natijada hosil bo`lgan yig`indi (ayirma) sonida qo`shiluvchilarning (kamayuvchi va ayriluvchida) qaysi birida o`nli belgilar ko`p bo`lsa, shuncha o`nli belgini vergul bilan ajratish kerak.

Masalan, 3,12 va 2.1536 o`nli kasrlarni qo`shing va ayiring.

a) $3.12 + 2,1536 = 3,1200 + 2,1536 = 5,2736$.

b) $3,12 - 2,1536 = 3,1200 - 2,1536 = 0,9664$.

O`nli kasrlarni ko`paytirish algoritmi:

1) ikkita o`nli kasrdagi vergullar tashlab yuboriladi;

2) hosil bo`lgan ikkita natural son natural sonlarni ko`paytirish qoidasiga asosan ko`paytiriladi;

3) ko`paytmada hosil bo`lgan natural sonning o`ngidan chapiga qarab, ikkita o`nli kasrda verguldan keyin qancha raqam bo`lsa, shuncha raqam sanalib vergul qo`yiladi.

Masalan, $2,15 \cdot 3,17 = 6,8155$.

Ikki o`nli kasrni bo`lish algoritmi:

1) ikkita o`nli kasrning verguldan keyingi raqamlar soni tenglashtiriladi. agar bittasida raqamlar soni kam bo`lsa, o`nli kasr oxirgi raqamini ketiga nollar yozib to`ldiriladi;

2) hosil bo`lgan o`nli kasrlarning vergullari tashlab yuboriladi;

3) ikkita natural sonlarni bo`lish qoidasiga asosan bo`linadi.

Masalan, $40,625 : 12,5 = 40625 : 12500 = 3,25$

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. O`nli kasga ta'rif bering.
2. Musbat ratsional sonlarning o`nli kasr ko`rinishidagi yozuvini yozib ko`rsating.
3. Qisqarmas kasrni o`nli kasrga aylantirishda zaruriy va yetarli shartlar to`g`risidagi teoremani aytib isbotlab bering.
4. O`nli kasrlar ustida amallar bajarishning algoritmlarini aytib bering.

3.3.2. Cheksiz davriy o`nli kasrlar.

$\frac{1}{3}$ kasrni olib qaraylik, bu kasrni chekli o`nli kasr ko`rinishida yozib bo`lmaydi. 1 ni 3 ga bo`lish jarayoni cheksiz davom etadi. Shu sababli $\frac{1}{3}$ kasr cheksiz o`nli kasr hisoblanadi. Bundan tashqari 1 ni 3 ga bo`lganda, ya'ni $\frac{1}{3}=0,333...$ bo`linmada raqamlar takrorlanadi. Agar biz bo`linmada bir qancha raqamlarni tashlab yuborsak, u holda $\frac{1}{3}$ dan kichik songa ega bo`lamiz.

Har qanday chekli o`nli kasrni ham o`nli kasrni o`ng tomoniga nollar yozish bilan cheksiz o`nli kasr ko`rinishida yozish mumkin.

Masalan 0,16=0,1600...0...

Bulardan ko`rinadiki, har bir musbat ratsional sonni cheksiz o`nli kasr ko`rinishida yozish mumkin ekan.

Bunda hosil qilingan cheksiz o`nli kasrlarni davriy o`nli kasrlar deyiladi.

Masalan, $\frac{3}{11}$ soni 0,272727... 27..., $\frac{8}{55}$ soni 0,1454545...45... cheksiz davriy o`nli kasrlarni ifodalaydi. Bu davriy o`nli kasrlar qisqacha 0,(27), 0,1(45) ko`rinishida yoziladi, qavs ichidagi sonlar cheksiz davriy o`nli kasrdagi takrorlanuvchi bir xil raqamlar guruhini bildiradi va davr deb ataladi.

Davriy kasrlar ikki xil bo`ladi:

Sof davriy kasrlar – ularda vergul bilan davr orasida boshqa o`nli xonalar yo`q.

Masalan, 0,(3), 0,(27), 0,(85472), ...

Aralash davriy o`nli kasrlar – ularda vergul va davr orasida boshqa o`nli xonalar bor.

3,15(44), 0,1(45), ...

Quyidagicha savol tug`iladi. Har qanday qisqarmas $\frac{m}{n}$ kasrni davriy o`nli kasr ko`rinishida ifodalab bo`ladimi?

Teorema. Agar $\frac{m}{n}$ kasr qisqarmas va maxrajining yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub ko`paytuvchi bo`lsa, $\frac{m}{n}$ kasr cheksiz davriy o`nli kasr ko`rinishida ifodalanadi.

Isbot. Maxraj yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub ko`paytuvchi bo`lgani uchun m ni n ga bo`lish jarayoni cheksizdir. Bundan tashqari $m$ ni $n$ ga bo`lganda n dan kichik qoldiqlar ya'ni $1,2,3,...,n-1$ sonlar qoladi. Turli qoldiqlar to`plami chekli bo`lgani uchun, qaysidir qadamdan keyin biror qoldiq takrorlanadi, bu esa bo`linma xonalarining takrorlanishiga olib keladi. Demak, $\frac{m}{n}$ sonini ifodalovchi cheksiz o`nli kasr, albatta, davriy bo`lar ekan.

Isbotlangan teoremadan xulosa kelib chiqadi: ixtiyoriy musbat ratsional sonni chekli o`nli kasr orqali yoki cheksiz davriy o`nli kasr orqali ifodalash mumkin.

Agar chekli o`nli kasrni davri 0 ga teng cheksiz kasr deb hisoblash kelishilsa, buni qisqacha shunday yozish mumkin. Masalan, $7{,}82 = 7{,}82(0)$. Bunday kelishilish ixtiyoriy musbat ratsional sonni cheksiz davriy o`nli kasr ko`rinishida yozishga imkon beradi. Shuningdek, ixtiyoriy musbat cheksiz davriy o`nli kasrni biror musbat ratsional son shaklida ifodalash mumkin.

$\frac{m}{n}$ musbat ratsional sonni cheksiz davriy o`nli kasr ko`rinishida yozish uchun surat m ni maxraj n ga bo`lish kerak. Cheksiz davriy o`nli kasr oddiy kasr ko`rinishiga quyidagicha keltiriladi.

Cheksiz davriy o`nli kasr $0,(14)$ berilgan bo`lsin, ya'ni $0{,}141414....$. Unga mos ratsional sonni a orqali belgilaymiz, u holda $a = 0{,}141414....$ Bu tenglikning ikkala tomonini 100 ga ko`paytiramiz:

$100a = 14{,}1414...$ yoki $100a = 14 + 0{,}1414... = 14 + a$

$100a = 14 + a$ tenglamani echamiz: $a = \frac{14}{99}$. Bu kasr qisqarmas.

Umuman, sof davriy cheksiz o`nli kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrga teng, maxraji esa kasr davrida nechta raqam bo`lsa, shuncha to`qqizdan iborat.

Aralash davriy kasr 0,5(41), ya'ni 0,54141... berilgan bo`lsin. Unga mos ratsional sonni $a$ orqali belgilaymiz, u holda $a = 0{,}54141\ldots$. Bu tenglikning ikkala qismini 10 ga ko`paytirib, $10a = 5{,}4141\ldots$ sof davriy kasrni hosil qilamiz. Keyingi o`zgartirishlar yuqoridagidek bajariladi. $x = 5{,}4141\ldots$ deymiz. Bu tenglikni ikkala qismini 100 ga ko`paytiramiz: $100x = 541{,}4141\ldots$ yoki $100x = 541 + 0{,}4141\ldots$. Bu tenglikni ikkala qismiga 5 ni qo`shamiz: $100x + 5 = 541 + 5{,}4141\ldots$; $x = 5{,}4141$ bo`lgani uchun $100x + 5 = 541 + x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = \frac{541-5}{99}$.

x ning bu qiymatini $10a = 5{,}4141\ldots$ tenglikka qo`yamiz:

$$10a = \frac{541-5}{99}, \text{ bundan } a = \frac{541-5}{990} = \frac{536}{990}.$$

Umuman, butun qismi 0 bo`lgan aralash davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati ikkinchi davrgacha yozilgan sondan birinchi davrgacha yozilgan sonning ayirmasidan, maxraji esa davrda nechta raqam bo`lsa, shuncha to`qqizdan va birinchi davrgacha nechta raqam bo`lsa, shuncha noldan iborat.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Cheksiz davriy o`nli kasrlarni misollar yordamida tushuntiring.
2. Sof va aralash davriy o`nli kaslarni misollar yordamida tushuntiring.
3. Kasrni cheksiz davriy o`nli kasr ko`rinishida ifodalash shartlarini aytib bering.
4. Cheksiz davriy o`nli kasrni oddiy kasrga aylantirishni misollar yordamida tushuntiring.

3.4. Musbat haqiqiy sonlar

3.4.1. O`lchovdosh bo`lmagan kesmalar

Musbat ratsional sonlar yordamida u yoki bu kattaliklarni istalgan aniqlik darajasida o`lchash mumkin. Ammo bunday aniqlikda o`lchashni hamma vaqt ham bajarib bo`lmaydi.

Masalan, biror OA kesmani $\frac{1}{10^n}$ aniqlikda o`lchash talab qilinsin. Buni biz quyidagicha o`lchaymiz. OA kesmani O nuqtasidan A nuqtasiga qarab uzunligi $\frac{1}{10^n}$ bilan ifodalanuvchi kesmalarni joylashtirib chiqamiz. Ammo bunda quyidagi hollar bo`lishi mumkin. Boshqacha aytganda, shunday musbat $m$ soni mavjudki, buning uchun $\frac{m}{10^n}$ uzunlik $OA$ kesmadan kam, $\frac{m+1}{10^n}$ uzunlik $OA$ kesmadan ortiq bo`ladi.

Shunday qilib, OA kesma uzunligi $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ sonlari orasida bo`ladi. Xuddi shunday hol jismlarni o`lchashda ham ro`y beradi, ya'ni jism o`lchashda og`irlik $\frac{1}{10^n}$ gacha aniqlikda bo`lishi mumkin.

Bundan ko`rinadiki, $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ ratsional sonlari $OA$ kesmani uzunligini taqribiy, ya'ni ortig`i yoki kami bilan ifodalaydi. U OA kesmaning uzunligini aniq ifodalaydimi? Bu savolga ayrim hollarda ratsional sonlar bilan chegaralanib javob berib bo`lmaydi.

Shunday kesmalar mavjudki, ularni uzunliklarini ratsional sonlar yordamida ifodalab bo`lmaydi. Bunday kesmalarni mavjud bo`lishini quyidagi teoremada ko`rish mumkin.

Teorema. Kvadratning dioganali uning tomonlari bilan o`lchovdosh emas.

Isbot. Aytaylik, kvadratning tomoni 1 ga teng bo`lsin. Faraz qilaylik $ABCD$ kvadratning $AC$ dioganali uning tomoni bilan o`lchovdosh bo`lsin va uning uzunligi qisqarmas $\frac{p}{q}$ kasr bilan ifodalansin. U holda, Pifagor teoremasiga asosan, $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$ tenglikga ega bo`lamiz.

Boshqacha aytganda, $1^2+1^2=\frac{p^2}{q^2}$ tenglikga ega bo`lamiz, bundan esa $p^2=2q^2$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $p^2$ - juft son, u holda $p$ ham juft (chunki toq sonni kvadrati juft son bo`lmaydi). Shunday qilib, $p=2p_1$. Bundan esa $4p_1^2=2q^2$, bundan esa q^2 ni juft sonligi kelib chiqadi va q - juft son.

Demak, p va q lar juft son bo`lib, bizni $\frac{p}{q}$ kasr qisqarmas kasr degan farazimizga zid. Bu zidlik esa, kvadratning tomonini o`lchov birligi sifatida tanlasak, kvadrat diagonali uzunligini ratsional son orqali ifodalab bo`lmasligini, ya'ni kvadratning dioganali uning tomoni bilan o`lchovdosh emasligini ko`rsatadi.

Shu sababli ixtiyoriy kesmani o`lchash natijasini son bilan ifodalash uchun $Q_+$ musbat ratsional sonlar to`plamini yangi sonlar bilan to`ldirib kengaytirish kerak.

Bu holda hosil bo`lgan yangi sonlar to`plami musbat haqiqiy sonlar to`plami deyiladi va R_+ bilan belgilanadi.

Bundan ko`rinadiki, har bir musbat ratsional son $R_+$ ga tegishli bo`ladi, va ni $Q_+ \subset R_+$; R_+ da qo`shish va ko`paytirish amallari musbat ratsional sonlar to`plami $Q_+$ dagidek aniqlanib, $R_+$ da kesmalarni o`lchash ham additivlik va multiplikativlik xossalariga ega bo`ladi.

3.4.2. Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o`nli kasrlar

Biz ixtiyoriy kesmani o`lchash natijasini cheksiz o`nli kasrlar bilan ifodalanishini ko`rsatamiz (umuman, davriy bo`lmagan o`nli kasrlar ko`rinishida ifodalanishini). Aytaylik, bizga a kesma va e birlik kesma berilgan bo`lsin. U holda, $a$ kesma birlik $e$ kesmadan kichik yoki shunday bir $n$ soni topiladiki $n\cdot e \le a(n+1)e$ tengsizlik o`rinli bo`ladi, bu yerda $n$ - natural son (agar $a$ $e$ dan kichik bo`lsa, $n=0$ bo`ladi) bo`lib, bunga a kesma uzunligining butun qismi deyiladi.

Agar $a \cong ne$ bo`lsa, $a$ kesma uzunligi $n$ natural son bilan ifodalanadi. Aks holda $a \cong ne + a_1$, bu yerda $a_1 < e$. U holda 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlardan birisini qabul qiluvchi shunday $n_1$ soni topiladiki, $a_1$ kesma uchun [illegible] $\frac{n_1+1}{10}e$ tengsizlik o\`rinli bo\`ladi, bundan esa

[illegible] $(n + \frac{n_1+1}{10})e$. Demak, $(n,e_1) \le a < (n,1+0,1)e$. (Bu yerda

[illegible] o\`nli kasr, masalan, 5,4 bo\`lishi mumkin).

O\`lchashda yuqoridagidek jarayonni davom ettirib, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 [illegible] qabul qiluvchi $n_2, n_3, \ldots, n_k$ sonlariga ega bo\`lamiz. Bundan esa [illegible] ixtiyoriy k bo\`lagi $(n,n_1n_2\ldots n_k)e$ kesmadan katta [illegible] $n_k + \frac{1}{10^k})e$ kesmadan kichik bo\`ladi.

Bundan ko\`rinadiki, $a$ kesmani o\`lchash jarayonini cheksiz o\`nli kasrlar [illegible] mumkin.

Agar cheksiz o\`nli kasrda verguldan keyin bir qancha raqamlarni qoldirib, [illegible] yuborilsa $n,n_1\ldots n_k$ soni hosil bo\`ladi va u a kesma uzunligini kami [illegible], agar qoldirilgan raqamlarni oxirgisiga 1 qo\`shilsa, a kesma [illegible] bilan olinadi. Shu sababli biz a kesma uzunligi $n,n_1n_2\ldots n_k$ kasr bilan [illegible] deymiz, ya'ni $m(a) = n,n_1n_2\ldots n_k$.

Misol. $m(a) = 5{,}2753\ldots$

Ixtiyoriy n uchun quyidagi tengsizlik o\`rinliligi aniq

$$n,n_1n_2\ldots n_k \le m(a) < n,n_1n_2\ldots n_k + \frac{1}{10^k}$$

Kesmalarni o\`lchashda oxirgi raqamlari faqat cheksiz 9 liklardan iborat kasr [illegible], masalan, 0,399..9.. chunki istalgan x soni quyidagi tengsizliklarni [illegible]

$$0{,}3 \le x < 0{,}4$$
$$0{,}39 \le x < 0{,}40$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0{,}39\ldots9 \le x < 0{,}400\ldots0$$

Agar bu tengsizliklarni o\`rniga

3.4.4. R_+ da qo`shish, ko`paytirish, ayirish va bo`lish

R_+ to`plamdan $x = m, m_1 m_2 ... m_k ...$ va $y = n, n_1 n_2 ... n_k ...$ sonlari berilgan bo`lsin. U holda ixtiyoriy k soni uchun $x_k \le x < x'_k$, $y_k \le y < y'_k$ tengsizliklarga ega bo`lamiz. Tengsizliklardan $x + y$ soni $x_k + y_k$ sonidan kichik emasligi, $x'_k + y'_k$ sonidan katta emasligi ko`rinadi.

1-ta'rif. x va y musbat haqiqiy sonlarni yigindisi ya'ni $x + y$ deb, $\{x_k + y_k\}$ va $\{x'_k + y'_k\}$ to`plamlarni bo`luvchi songa aytiladi. Bunda x_k va y_k lar x va y sonlarini kami bilan, x'_k va y'_k lar esa x va y sonlarining ortigi bilan olingan taqribiy qiymatidir.

R_+ to`plamda qo`shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Agar $x < y$ bo`lsa, ixtiyoriy $z \in R_+$ uchun $x + z < y + z$ o`rinli, R_+ dagi ixtiyoriy x va y lar uchun $x = x + y$ tenglik bajarilmaydi.

R_+ da ko`paytirish amali ham yuqoridagiga o`xshash aniqlanadi.

2-ta'rif. Musbat haqiqiy x va y sonlarning ko`paytmasi deb, $\{x_k \cdot y_k\}$ va $\{x'_k \cdot y'_k\}$ to`plamlarni bo`luvchi songa aytiladi.

R_+ da ko`paytirish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Ko`paytirish amali qo`shish amaliga nisbatan distributiv. 1 soni ko`paytirish amaliga nisbatan neytral, ya'ni $a \in R_+$ bo`lsa, u holda $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

3-ta'rif. R_+ da ixtiyoriy ikkita a va b sonlari uchun $a > b$ shartda, shunday $c \in R_+$ topiladiki, $a = b + c$ bajariladi. Bunda c soniga a va b sonlarining ayirmasi deyiladi va $a - b$ ko`rinishda yoziladi.

R_+ to`plamda ayirish amali qo`shish amaliga teskari amal ekanligi o`z o`zidan ravshan. Agar $x > y$ bo`lsa,

$$(x + y) - y = x$$
$$(x - y) + y = x$$

Ta'rif. R_+ dagi ixtiyoriy ikkita x va y sonlari uchun, shunday $z \in R_+$ topiladiki, $x = yz$ o`rinli bo`ladi. Bu holda z soniga x ni y ga bo`linmasi deyiladi va $z = x : y$ ko`rinishida belgilanadi. R_+ da bo`lish amali ko`paytirish amaliga teskari amal bo`lgani uchun quyidagi tengliklar bajariladi:

$$(xy) : y = x$$

$$(x : y) \cdot y = x$$

3.4.5. Musbat haqiqiy sonlar to`plamining aksiomatikasi

Biz yuqorida musbat haqiqiy sonlarni cheksiz o`nli kasrlar shaklida ifodalash mumkinligini aytgan edik. Ammo, bu musbat haqiqiy sonlarning yozishning bir ko`rinishi xolos. Musbat haqiqiy sonlarni uning yozilishi shakliga bog`lamasdan, ularni qanoatlantiruvchi aksiomalarni shakllantirish lozim. Shunday aksiomalar sistemasidan biri qo`shish amali xossalariga asoslangan bo`lib, unda ta`riflanmaydigan tushuncha qilib 1 va qo`shish amali hisoblanadi. Bu tushunchalar quyidagi aksiomalar sistemasini qanoatlantirishi lozim:

1. $N \subset R_+$.

2. Qo`shish amali $R_+$ to`plamdagi ixtiyoriy $(a;b)$ juftlikka shu to`plamdagi $a+b$ sonini mos qo`yadi.

3. N to`plamda ixtiyoriy $a$ va $b$ lar uchun $R_+$ da qo`shish amali kommutativ:

$$a + b = b + a.$$

4. R_+ dagi ixtiyoriy a, b va c lar uchun R_+ da qo`shish amali assotsiativ:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

5. Agar $a, b \in R_+$, u holda $a + b \neq a$.

6. Agar $a, b \in R_+$ bo`lib $a < b$ bo`lsa, u xolda shunday $c \in R_+$ soni topiladiki $b = a + c$ tenglik o`rinli bo`ladi;

7. Ixtiyoriy $a \in R_+$ va ixtiyoriy natural n soni uchun, shunday yagona $b \in R_+$

soni topiladiki, a soni uchun $a=b+b+...+b$ (n marta) munosabat o'rinli bo`ladi.

1 - 7 aksiomalar R_+ to`plamda tartib munosabatini kiritishga yo`l qo`yadi. Boshqacha aytganla $R_+$ to`plamda shunday bir c soni topildiki, buning uchun faqat va faqat $b=a+c$ musbat o'rinli bo`lgandagina $a<b$ bo`ladi. Bundan tashqari uzluksizlik aksiomasi bajarilishi lozim.

8. Agar X sonlar to`plami $Y$ sonlar to`plamidan chapda yotsa (ya'ni ixtiyoriy $x\in X$, $y\in Y$ lar uchun $x\le y$), u holda X va Y to`plamlarni bo`luvchi $a\in R_+$ son mavjud (ya'ni $x\in X$ va $y\in Y$ sonlari uchun $x\le a\le y$ tengsizlik o`rinli).

Bu aksiomalar sistemasi yordamida R_+ to`plamdagi cheksiz o`nli kasr ko`rinishidagi ixtiyoriy son $R_+$ to`plamda qo`shish amalini aniqlashini isbot qilish mumkin.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. O`lchovdosh bo`lmagan kesmalarni o`lchash haqida tushuncha bering.
2. Kvadratning dioganali uning tamonlari bilan o`lchovdosh emasligi to`g`risidagi teoremani isbotlang.
3. Musbat haqiqiy sonlarga ta'rif bering.
4. Musbat haqiqiy sonlar to`plamining tartiblanganligini tushuntiring.
5. Musbat haqiqiy sonlar to`plamida arifmetik amallar bajarishini ta'riflarini keltiring.
6. Musbat haqiqiy sonlar to`plamining aksiomatikasini keltiring.

3.5. Haqiqiy sonlar to`plami

3.5.1. Musbat va manfiy sonlar

Musbat haqiqiy sonlar yordamida o`lchash natijasi bo`lgan ixtiyoriy skalyar miqdorlarni ifodalash mumkin: uzunlik, yuza, hajm, massa va x.k. Ammo amaliyotda bu kattaliklarni o`lchash natijasinigina emas, bu kattaliklar qanday o'zgarishini ko'rsatishga to'g'ri keladi. Kattaliklar esa o'z navbatida o'sishi yoki kamayishi yoki o'zgarmasdan qolishi mumkin. Shu sababli kattaliklarni o'zgarishini ko'rsatish uchun musbat haqiqiy sonlar to'plamini kengaytirishga, ya'ni boshqa sonlarni qo'shishga zaruriyat tug'ilgan. R_+ sonlar to'plamiga 0 (nol) va manfiy sonlar qo'shilib kengaytirilgan. Buning uchun R_+ to'plam olinib, bu to'plamning har bir x soniga $-x$ (minus x) deb ataluvchi yangi son mos qo'yiladi. Masalan, 3 soniga – 3, 7 va 8 sonlariga –7 va –8 va x.k.

$-x$ ko'rinishidagi (bunda $x \in R_+$) songa manfiy son deyilib, ularning to'plami R_- deb belgilangan.

R_+, R_- va $\{0\}$ to'plamlari birlashtirilib haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R bilan belgilanadi.

Shunday qilib, $R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$

Bunda R_+, R_- va $\{0\}$ to'plamlari o'zaro jufti-jufti bilan kesishmaydi, boshqacha aytganda bitta son ham musbat, ham manfiy, yoki musbat va nol bo'la olmaydi.

Agar kattalik dastlab x qiymatni qabul qilsa va (bunda $x, y \in R$) $x < y$ bo'lganda, kattalikni o'zgarishi musbat $y - x$ son bo'ladi.

Agar $x > y$ bo'lsa, kattalik o'zgarishi manfiy $-(x - y)$ soni bo'ladi. Musbat va manfiy sonlar qarama-qarshi yo'nalgan nurlar bilan tasvirlanadi, 0 soni esa sanoq boshi hisoblanadi. x va $-x$ sonlari koordinata to'g'ri chiziqida sanoq boshi deb tanlangan 0 nuqtaga nisbatan simmetrik joylashadi (50-rasm).

50-rasm

Koordinata to'g'ri chizig'ida sanoq boshidan x sonini ifodalovchi nuqtagacha bo'lgan masofa x sonining moduli deyiladi va $|x|$ bilan belgilanadi.

Shunday qilib,

$$|x| = \begin{cases} x & agar\ x > 0\ bo`lsa, \\ -x & agar\ x < 0\ bo`lsa, \\ 0 & agar\ x = 0\ bo`lsa. \end{cases}$$

Misol. $|8| = 8$; $|-7| = 7$; $|0| = 0$.

Aytaylik, $x \in R_+$ soni $a \in R$ soniga o`zgarganda $y \in R_+$ soniga o`tsin. U holda a haqiqiy songa musbat haqiqiy sonlar juftligi $(x;y)$ mos keladi. Masalan, 2 soniga (7;9) juftligi mos keladi, chunki 7 soni 9 soniga o`tadi. (9;7) juftligiga −2 soni mos keladi, chunki 9 soni 7 soniga o`tadi.

Bitta haqiqiy songa cheksiz juftliklar mos keladi. Masalan, 3 soniga (1;4), (3;6), $(\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$, ... va x.k. − 3 soniga esa (4;1), (6;3), $(3+\sqrt{2}; \sqrt{2})$, va x.k.

$(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ juftliklari bitta a soniga mos kelishi uchun faqat va faqat $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ munosabat o`rinli bo`lishi zarur. $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ munosabat bajarilsa, $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ juftliklar ekvivalent deyiladi. Bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Shu sababli R_+ to`plam ekvivalent juftliklar sinflariga bo`linadi.

Har bir $(x;y)$ juftlikni sonlar nurida boshi x va oxiri y bo`lgan yo`naltirilgan kesmalar bilan tasvirlash mumkin.

Ekvivalent juftliklarga bir xil uzunlik va bir xil yo`nalishga ega bo`lgan kesmalar mos keladi va ular ekvivalent kesmalar deyiladi. Bundan esa haqiqiy sonlar ekvivalent yo`naltirilgan kesmalar sinfini tavsirlaydi deyish mumkin.

3.5.2. Haqiqiy sonlar ustida amallar

**1. Haqiqiy sonlarni qo`shish va ayirish.** Aytaylik, biror $x \in R_+$ soni dastlab $a$ keyinchalik esa $b$ soniga o`zgartirilsin. a va b haqiqiy sonlarning yig`indisi deb natijaviy o`zgarishga aytiladi. Masalan, 15 sonini dastlab 3 keyinchalik 7 ga o`zgartirsak, 15 soni dastlab 18, keyinchalik esa 25 bo`ladi. Demak 15 sonini 25 qilish uchun 3+7=10 songa o`zgartirish kerak.

Qarama-qarshi haqiqiy sonlarning yig`indisi nolga teng. Umuman olganda haqiqiy sonlarni qo`shish qoidasi quyidagicha:

Bir xil ishoraga ega bo`lgan haqiqiy sonlarni qo`shganda shu ishorali haqiqiy son hosil bo`ladi va u sonning moduli qo`shiluvchi sonlar modullarining yig`indisiga teng. Qarama-qarshi ishorali haqiqiy sonlarni qo`shganda hosil bo`lgan sonning moduli, qo`shiluvchilar moduli kattasidan moduli kichigini ayirmasiga, ishorasi esa qo`shiluvchilardan qaysi birining moduli katta bo`lsa, shu sonning ishorasi bilan bir xil bo`ladi.

Haqiqiy songa nolni qo`shish bilan son o`zgarmaydi.

Haqiqiy sonlarni qo`shish kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalariga ega. Bu ta'riflardan $R$ to`plamda qo`shishga nisbatan nolning neytral element ekanligi ko`rinadi.

R to`plamda ayirish amali qo`shish amaliga teskari amal sanaladi. R to`plamda har bir $b$ songa qarama-qarshi $-b$ son mavjud bo`lib $b+(-b)=0$.

Geometrik nuqtai nazardan, ayirma b nuqtadan a nuqtaga boruvchi kesmaning uzunligiga teng, ya'ni $|a-b|$.

R to`plamda tartib munosabati o`rinli. Agar $a-b$ ayirma musbat bo`lsa, $a>b$ deyiladi.

$(a>b)$ munosabati to`plamda asimetrik va tranzitiv bo`lgani uchun, tartib munosabati qat'iy tartiblangan hisoblanadi.

Shu sababli R to`plamda $a=b$, $a>b$, $b>a$ munosabatlardan faqat biri o`rinli.

**3. Haqiqiy sonlar to`plamida ko`paytirish va bo`lish.** $x$ va $y$ sonlarni ko`paytmasi deb, shunday z soniga aytiladiki, bu sonning moduli ko`payyuvchilar modullarining ko`paytmasiga teng, ya'ni $|z|=|x|\cdot|y|$, ishorasi esa ko`paytuvchilar ishoralari bir xil bo`lsa, musbat, aks holda manfiy bo`ladi. Ixtiyoriy x soni uchun $x\cdot 0=0\cdot x=0$.

Ko`paytirish amali $R$ to`plamda kommutativ, assotsiativ va qo`shishga nisbatan distributiv xossalarga ega. Qisqaruvchanlik xossasiga ega emas, chunki $z\cdot x=z\cdot y$ dan $x=y$ deb xulosa chiqarib bo`lmaydi, agar $z=0$ bo`lsa, $x\neq y$ bo`lishi mumkin, ammo $z \neq 0$ bo`lsa, $zx = zy$ dan $x = y$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, ko`paytirish noldan farqli sonlar uchun qisqaruvch[illegible] xossasiga ega deyish mumkin.

Agar x soni noldan farqli son bo`lsa, u holda ixtiyoriy $y \in R$ soni [illegible] shunday $z$ soni topiladiki, $x = yz$ munosabat o`rinli bo`ladi. Bu yerda $z$ sonini [illegible] sonini $y$ soniga bo`linmasi deyiladi va $x : y$ ko`rinishda belgilanadi. Shunday qi[illegible] $R$ to`plamda noldan boshqa ixtiyoriy songa bo`lish aniqlangan.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Haqiqiy sonlarni qo`shish va ayrishini tushuntiring.
2. Haqiqiy sonlar to`plamida ko`paytirish va bo`lishni tushuntiring.
3. Haqiqiy sonlar ustidagi amallarning xossalarini aytib bering.

Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishga doir topshiriqlar

1. $\dfrac{(100\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}) \cdot 0,3}{0,2}$

2. $\left[\dfrac{(2,4 + 1\frac{5}{7}) \cdot 4,375}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} - \dfrac{(2,75 - 1\frac{5}{6}) \cdot 21}{8\frac{3}{20} - 045}\right] \; \frac{67}{200}$

3. $\dfrac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0,8 \cdot 0,25}$

4. $\left|\dfrac{(6 - 4\frac{1}{2}) : 0,03}{(3\frac{1}{20} - 2,65) \cdot 4 + \frac{2}{5}} - \dfrac{(0,3 - \frac{3}{20}) \cdot 1\frac{1}{2}}{(1,88 + 2\frac{3}{25}) \cdot \frac{1}{80}}\right|$ [illegible]

5. $\dfrac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0,0001 : 0,005}$

6. $26 : \left[\dfrac{3 : (0,2 - 0,1)}{2,5 \cdot (0,8 + 1,2)} + \dfrac{(34,06 - 33,81) \cdot 4}{6,84 : (28,57 - 25,1\ldots)}\right]$ [illegible]

7. $(\dfrac{0,012}{5} + \dfrac{0,04104}{5,4}) \cdot 4560 - 42\dfrac{1}{3}$

8. $\dfrac{(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}) : 2\frac{2}{3}}{0,04}$

9. $\dfrac{3 : \frac{2}{5} - 0.09 : (0,15 : 2\frac{1}{2})}{0,32 \cdot 6 + 0,03 - (5,3 - 3,88) + 0,67}$

10. $\dfrac{(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12}) : 18\frac{1}{6}}{0,002}$

11. $1\dfrac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35 + (0,4 : 2\dfrac{1}{2}) \cdot (4,2 - 1\dfrac{1}{40})$

13. $(10:2\frac{2}{3}+7,5:10)\cdot(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0,25+\frac{157}{360})$

15. $(\frac{0,216}{0,15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15})+(\frac{196}{225}-\frac{7,7}{24\frac{3}{4}})+0,695:1,39)$

17. $1,7:\dfrac{(4,5\cdot 1\frac{2}{3}+3,75)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}-(0,5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12})$

19. $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}+0,228:\left[\left(1,5291-\frac{14,53662}{3-0,095}\cdot 0,305\right):0,12\right]$

21. $\left\{\dfrac{8,8077}{20-[28,2:(13,333\cdot 0,3+0,0001)]\cdot 2,004}+4,9\right\}\cdot\frac{5}{32}$

23. $\dfrac{\left[(6,2:0,31-\frac{5}{6}\cdot 0,9)\cdot 0,2+0,15\right]:0,02}{(2+1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,1)\cdot\frac{1}{33}}$

25. $6:\frac{1}{3}-0,8:\dfrac{1,5}{\frac{3}{2}\cdot 0,4\cdot\frac{50}{1\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{1+2,2\cdot 10}}$

27. $\dfrac{(1,75:\frac{2}{3}-1,75\cdot 1\frac{1}{8}):\frac{7}{12}}{(\frac{17}{80}-0,0325):400}:(6,79:0,7+0,3)$

29. $\dfrac{4,5:\left[47,375-(26\frac{1}{3}-18\cdot 0,75)\cdot 2,4:0,88\right]}{17,81:1,37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}$

3.6. Sonlarni yaxlitlash qoidalari va taqribiy sonlar ustida amallar

3.6.1. Sonlarni yaxlitlash va ular ustida amallar

1. Taqribiy hisoblashlar. Har kimning ko`rish qobiliyati har xil, biror uzunlikni o`lchaganda o`lchov lentasining qattiq yoki bo`sh tortilishiga ko`ra o`lchash natijalari turlicha, bular esa miqdorlarning o`lchov natijalarning doimo taqribiy ekanligini ko`rsatadi. Sanash yo`li bilan hisoblash natijasi doimo taqribiy bo`lmaydi, ba'zan aniq, ba'zan taqribiy bo`ladi. Masalan, bir ko`ldagi baliqlar soni 173200 dona deyilsa, baliqlar soni bir donaga aniqlikda sanalmagani aniq ko`rinib turadi. Demak, baliqlarning soni taqribiy. Agar sinfdagi o`quvchilar soni 26 desak, bu aniq sanalgan deyiladi. Sonning yuqori xonalarida bir yoki bir necha raqam qoldirib, kichik xonalarini o`chirib, o`rniga nollar qo`yishni yaxlitlash deyiladi. Yuqoridagi ko`ldagi baliqlar soni yaxlitlashga misol bo`la oladi. Berilgan sonni berilgan aniqlikda yaxlitlash uchun, berilgan sonda o`chiriladigan raqamlardan eng katta xona birligi raqami 5 dan katta yoki 5 ga teng bo`lsa, undan oldingi xona raqamiga bir qo`shiladi va o`chirilgan raqamlar o`rniga nollar yoziladi. Agar u 5 dan kichik bo`lsa, raqamlar to`g`ridan-to`g`ri tashlanib, ularning o`rniga nollar yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni yuzgacha aniqlikda yozing:

1) $3254\underline{61} \approx 325500$

2) $2572\underline{40} \approx 257200$

Sonlarni yaxlitlagandan keyin hosil bo`lgan son berilgan sonning taqribiy qiymati hisoblanadi. Taqribiy natijani yozganda aniqlik sonning ohirgi raqamida ko`rsatiladi: uning ohirgi raqamidagina kichkina xatolik bo'lib, boshqa hamma raqamlar ishonchli bo`lishi kerak. Buning uchun ishonchli va ishonchsiz raqamlar tushunchasini kiritamiz.

Taqribiy sonning qaysi xonadagi raqami yarimdan kam xatolikka ega bo`lsa, u xona va undan yuqori xonalardagi hamma raqamlar ishonchli deyiladi; agar qaysi xona raqamining xatoligi yarimdan ortiq bo`lsa, u raqam va undan boshlab o`ng tomondagi hamma raqamlar ishonchsiz raqamlar deyiladi.

Misol. Tomorkaning perimetrini ruletka bilan 7 marta o`lchaganimizda quyidagi natijalarni berdi:

101,22*м*; 101,35*м*; 100,88*м*; 100,56*м*;

101,2*м*; 99,98*м*; 101,31*м*

Ularning arifmetik o`rtasi:

$$\frac{101{,}22м+101{,}35м+100{,}88м+100{,}56м+101.2м+101{,}18м+101{,}31м}{7}=$$

$$=\frac{707{,}7м}{7}=101{,}1м\approx 101м$$

Demak, 101*m* ning bosh raqami bo`lgan 10 ishonchli, keyingi raqami 1 esa ishonchsizdir. Bu yerda gap ishonchli va ishonchsiz raqamlar haqida borsa, ya'ni tomorqani necha marta o`lchasak ham bosh raqamlar esa o`zgarmaydi. Shu sababli bu ishonchli raqamlar, undan keyingi ikkita raqam esa ishonchsiz raqamlar bo`ladi. Masalan, 1 raqamini olib qaraylik. Bu raqamda birmuncha xatolik bor, bu xatolik 1 ga nisbatan 0,5 dan kam bo`lishi kerak. Ba'zi hollarda oxirgi raqamdagi xatolik 0,5 dan ortib ketsa, bu holda bundan bir xona yuqorigi raqam ham ishonchsiz bo`ladi.

Taqribiy sonlar ustida amallar quyidagicha bajariladi.

1. **Qo`shish.** Bir necha taqribiy sonlarni qo`shganda, bu qo`shiluvchilarning birortasida yo`q bo`lgan xonalarga qarab yig`indi natijasining o`ng tomonidan yaxlitlash qoidasiga asosan, mos tartibda xonalar olib tashlanadi va ularning o`rniga nollar yoziladi.

Misol. Shirkat xo`jaligining 3700 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) yeriga paxta, 260 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) yeriga pichan ekilgan. 58 ga yeri turar joydan iborat. Shirkat xo`jaligining umumiy yeri qancha?

$$\begin{array}{r} 3700 \\ +\ 260 \\ \underline{58} \\ 4018 \approx 4000 \text{ ga.} \end{array}$$

Demak, bu qo`shiluvchilardan eng ko`p aniqmas xonaga ega bo`lgani 3700, boshqalariniki unikidan kam. Shuning uchun natijaning oxirgi ikki xonasini yaxlitlab, nollar bilan almashtiramiz.

2. Ayirish. Taqribiy sonlarni ayirish ham taqribiy sonlarni qo`shishdek bajariladi. Masalan, shirkat xo`jaligining 2450 ga yeriga bug`doy ekilgan. Uning 836 gektari bahorda ekilgan, qolgani kuzda ekilgan. Kuzda qancha yeriga bug`doy ekilgan (2450 o`ngacha aniqlikda olingan)?

$$\begin{array}{r} -2450 \\ \underline{836} \\ 1614 \approx 1610(\text{ga}) \end{array}$$

**3. Ko`paytirish.** Taqribiy sonlarni ko`paytirganda ko`paytuvchilarning qaysi biri eng kam aniq raqamga ega bo`lsa, natijada o`shaning raqamlari soni saqlanadi. Natijani aniqroq hisoblash kerak bo`lsa, hisoblash davridagi natijalarda bir xona ortiq olish mumkin. Lekin oxirgi natijada olingan qo`shimcha xona tashlab yuboriladi.

Misol. Maktab sport zalining uzunligi 17 m 74 sm, eni esa 9 m 63 sm ga teng. Maktab sport zalining yuzini toping.

Yechish. 1774 sm × 963 sm = 1708362 (kv.sm) ≈ 170 0000 kv.sm = 170 kv.m

O`lchaganda lenta tarang yoki bo`sh bo`lib, uzunligi va enidagi birlik xonalari ishonchsiz bo`lishi mumkin. Shuning uchun bo`yidagi 177 raqami ishonchli, enidagi 96 raqami ishonchli deb, natijada ham yaxlitlash yo`li bilan 17 raqamini qoldirib, boshqa raqamlarni tashlab yuboramiz. Agar hisoblash natijasi bir necha amallar bilan kelib chiqadigan bo`lsa, uni aniqroq hisoblash uchun oraliqdagi amallar natijasida, yuqoridagi ko`rsatilgan qoidada aytilganidek bitta raqam ortiq olish kerak. Lekin bu raqam natijalarda hisobga olinmaydi. Masalan, yuqorida ko`rsatilgan zalning balandligi 9 m 26 sm bo`lsa, uning hajmini topish uchun asosining yuzi 1774 sm × 963 sm ≈ 1710000 kv.sm ni topamiz, bunda bitta raqamni, ya'ni 1 ni qo`shimcha qilib oldik. Endi uni balandligiga ko`paytiramiz. U uch raqamli bo`lib, bir qo`shimcha raqamni hisobga olmaymiz.

1710000 kv.sm×926sm=1583460000 kub sm ≈ 1600 000 000 kub sm = 1600 kub m

**4. Bo`lish.** Taqribiy sonlarni bo`lish amali taqribiy sonlarni ko`paytirishdek bajariladi. Bunda bo`luvchi va bo`linuvchilarning qaysi birida aniq raqami kam [illegible] bo`linmada shuncha aniq raqam soni saqlanadi.

Misol, aytaylik bo`luvchi va bo`linuvchilardan birining olti raqami, [illegible] uch raqami aniq bo`lsa, bo`linma uchta aniq raqamli qilib olinadi. [illegible] bo`linmadagi uch raqamdan keyingi qoldiq bo`luvchining [illegible] ortiq bo`lsa, u uchinchi raqamga bir qo`shish kerak, agar yarmidan kam [illegible] raqamni o`zgarishsiz qoldirish kerak.

Misol: $234564 : 310 \approx 757$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,234564 & 310 \\
\underline{2170} & \overline{756{,}65} \\
-\,1756 & \\
\underline{1550} & \\
-\,2064 & \\
\underline{1860} & \\
-\,2040 & \\
\underline{1860} & \\
-\,1800 & \\
\underline{1550} & \\
250 &
\end{array}
$$

[illegible] vaqtida bo`lishda ham ko`paytirishga o`xshash aniqroq [illegible] vaqtincha bo`linmada bir raqam qo`shimcha olish kerak. ([illegible] raqam oxirgi natijada e`tiborga olinmaydi). Taqribiy sonlarni ko`paytirish va bo`lishda komponentlarning biri aniq son, biri taqribiy son bo`lsa, [illegible] sonlarning aniq raqamiga qarab aniqlanadi. Aniq sonning raqamiga [illegible] Taqribiy sonlarni ko`paytirish va bo`lishda komponentlardan birining [illegible] natijaning bosh raqami 9,8,7 bo`lib kelsa, natijani yuqoridagi [illegible] bir raqam kam olib hisoblash kerak. Shu bilan birga ko`p raqamli sonni [illegible] songa bo`lish uchun, o`sha bo`luvchining aniq raqami qancha bo`lsa, [illegible] ham shuncha raqamgacha bo`lib, qolganlariga nollar qo`yamiz. [illegible] nol qo`yamiz, degan savol tug`iladi. Ma'lumki, bo`linmaning [illegible] bo`linuvchi bilan bo`luvchining raqamlari sonlarining ayirmasiga [illegible] bitta ortiq bo`ladi. Qaysi vaqtda teng bo`ladi? Qaysi vaqtda bitta [illegible]

[illegible] boshlashda bo`luvchi qancha raqamli bo`lsa, bo`linuvchining [illegible] raqami unga yetarli bo`lmasa, unda bo`linmaning raqam soni bo`linuvchi bilan bo`luvchining raqam sonlarining ayirmasidan bitta ortiq bo`ladi. Agar o`sha birinchi bo`lishda bo`luvchining raqami soniga mos (teng) bo`lgan bo`linuvchining bosh raqami soni etmasa, tag`in bir raqam qo`shiladigan bo`lsa, u holda bo`linmaning raqami soni bo`linuvi bilan bo`luvchining raqami sonlarining ayirmasiga teng bo`ladi.

3.6.2. Taqribiy sonlarning absolyut va nisbiy xatolari

Aniq son bilan taqribiy sonning farqini absolyut xato deyiladi.

Misol. $90{,}3 \approx 90$; bunda 90,3 - aniq son, 90 - taqribiy son, 90,3 - 90 = 0,3 - absolyut xato.

Absolyut xatoning aniq songa bo`lgan nisbatini nisbiy xato deyiladi. Berilgan misolda nisbiy xato $\frac{0{,}3}{90{,}3}$ ga teng.

Absolyut va nisbiy xatolar quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Bir necha taqribiy sonlar yig`indisining absolyut xatosi qo`shiluvchilar absolyut xatolarining yig`indisiga teng.

2-xossa. Ikki taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi bu sonlarning ikkalasi ham ortig`i bilan yoki ikkalasi ham kami bilan olingan bo`lsa, shu taqribiy sonlar absolyut xatolari ayirmasiga teng bo`ladi.

3-xossa. Biri kami bilan, ikkinchisi ortig`i bilan olingan ikkita taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi kamayuvchi va ayriluvchining absolyut xatolari yig`indisiga teng.

4-xossa. Ikki taqribiy son ko`paytmasining absolyut xatosi har qaysi son aniq qiymatini ikkinchi sonning absolyut xatosiga ko`paytirish natijalarining va ikkala son absolyut xatolari ko`paytmasining yig`indisiga teng.

5-xossa. Taqribiy sonni biror aniq songa bo`lishdan chiqqan bo`linmaning absolyut xatosi bo`linuvchining absolyut xatosini bo`luvchiga bo`lishdan chiqqan bo`linmaga teng.

6-xossa. Taqribiy sonlarni bo`lishda bo`linmaning nisbiy xatosi bo`linuvchi ...

bo`luvchining nisbiy xatolari yig`indisiga teng.

Xossalardan bittasini isbotini keltiramiz, (boshqa xossalarni isbotini talabalarni mustaqil bajarishiga qoldiramiz).

Ikkinchi xossani isboti:

a va b lar aniq sonlar, A va B lar mos ravishda ularning taqribiy qiymatlari, α va β lar mos ravishda taqribiy sonlarning absolyut xatolari bo`lsin. Agar $a$ - kamayuvchi, $b$ - ayriluvchi bo`lib, ikkalasi ham ortig`i yoki kami bilan olingan bo`lsa, Ikkinchi xossa shartiga ko`ra

$A-B$ ayirmaning absolyut xatosi, $\alpha-\beta$ ga (ortig`i bilan olinganda) yoki $\beta-\alpha$ ga teng (kami bilan olinganda) bo`lishini isbotlash kerak.

I hol. A va B ortig`i bilan olingan taqribiy sonlar bo`lsin, u holda:

$A = a+\alpha$

$B = b+\beta$

Qo`shish va ayirish xossalariga ko`ra:

$$A-B=(a+\alpha)-(b+\beta)=a+\alpha-b-\beta=(a-b)+(\alpha-\beta).$$

II hol. A va B kami bilan olingan taqribiy sonlar bo`lsin, u holda

$A = a-\alpha$

$B = b-\beta$

Qo`shish va ayirish xossalariga ko`ra:

$$A-B=(a-\alpha)-(b-\beta)=a-\alpha-b+\beta=(a-b)+(\beta-\alpha).$$

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sonlarni yaxlitlashni tushuntiring.
2. Taqribiy sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.
3. Taqribiy sonlarning absolut va nisbiy xatolariga ta'rif bering.
4. Absolyut va nisbiy xatolar xossalarini ayting .
5. Mikrokalkulyator tuzilishi va ishlash jarayoni to`g`risida gapirib bering.

6. Mikrokalkulyator yordamida misollar yechib ko`rsating.

Taqribiy sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishga doir topshiriqlar

1. Qiymatni hisoblang va o`ngacha, yuzgacha yaxlitlang.

a) 17+18= b) 689–17= d) 9x8= e) 9999:11=

8720+17541= 751–579= 17x7= 1718:17=

2. Sonlarni berilgan aniqlikda yaxlitlang, absolyut va nisbiy xatolar ni hisoblang.

44,732031 10^{-2}

54,00356 10^{-3}

1718,1629 10^{-1}

641,64264 10^{-3}

7589,4784912 10^{-4}

3. Sonlarni o`ngacha, yuzgacha, minggacha yaxlitlang, amallarni bajaring va natijada nechta aniq raqam borligini yozing.

175+455= 195 × 285= 121314:112=

675–792= 675 × 641= 194175:155=

97566612–8788= 64164260+1275=

17181620–253040= 15161718+252627=

4. Sonlarni 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} gacha yaxlitlang, amallarni bajaring va natijada nechta aniq raqam borligini yozing.

6,7532 + 7589,42215 b) 72,21048 – 44,73279

d) 27,1586 × 4,7891 e) 54,0573 : 16,491

5. Natijani 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} aniqlikda hisoblang.

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$, $\sqrt{3}:\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$, $\sqrt{5}:\sqrt{2}$

d) $\sqrt{11}+\sqrt{7}$, $\sqrt{11}-\sqrt{7}$, $\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}$, $\sqrt{11}:\sqrt{7}$

e) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$, $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$, $\sqrt{7}:\sqrt{3}$

3.7. Kompleks sonlar

3.7.1. Kompleks son va uning turli shakllari

1. **Kompleks son tushunchasi.** Ixtiyoriy ko`rinishdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to`plami yetarli emas. Haqiqatan ham, sonlar to`plamida diskriminanti manfiy bo`lgan kvadrat tenglama yechimga ega emas.

Masalan, $x^2+1=0$

Bu qiyinchilikdan qutulish maqsadida kompleks sonlar to`plami kiritiladi. Bu to`plamga haqiqiy sonlar to`plami to`plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to`plami C bilan belgilanadi. $D<0$; $x^2+1=0$ tenglama yechimi kompleks sonlar to`plamida bor deb, ya'ni $i=\sqrt{-1}$ bilan belgilanuvchi mavhum birlik kiritamiz. Bu mavhum birlik yuqoridagi tenglamani yechimi bo`ladi, ya'ni $i^2+1=0$; $i^2=-1$. Shunday qilib, biz haqiqiy sonlar to`plamini mavhum sonlar bilan to`ldiramiz. Haqiqiy $a$ sonini mavhum $bi$ soniga qo`shishdan $a+bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

Ta'rif. $z=a+bi$ ifodaga kompleks son deyiladi, bunda a, b haqiqiy sonlar, i esa mavhum birlik, $i^2=-1$.

a - kompleks sonining haqiqiy, bi - esa mavhum qismlari.

$Re(z)=a$ - kompleks sonining haqiqiy koeffitsiyenti,

$Im(z)=b$ - kompleks sonining mavhum koeffitsiyenti.

Masalan, $2+3i$, $-5+2i$, $8-i$, $-2-14i$ - kompleks sonlar.

$5i$, $-3i$, 0, 5, -3 - sonlar ham kompleks sonlar, chunki

$5i=0+5i$ $\quad 5=5+0i$ $\quad 0=0+0i$

$-3i=0+(-3)i$ $\quad -3=-3+0i$

Bundan kelib chiqadiki, barcha haqiqiy sonlar kompleks sonlar bo`ladi, ya'ni haqiqiy sonlar to`plami kompleks sonlar to`plamining qism to`plami bo`ladi.

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$$

$5i$, $-3i$ va h.k. mavhum sonlar, $2+3i$, $-5+2i$, $8-i$, $-2-14i$ sonlar esa [illegible] kompleks sonlar deyiladi.

$z=a+bi$ kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo`l...
$a=0$ va $b=0$ bo`lsa, u nolga teng bo`ladi

Agar a_1+b_1i va a_2+b_2i kompleks sonlarida $a_1=a_2$; $b_1=b_2$ bo`lsa, u ...
deyiladi.

Mavhum qismlar bilan farq qiluvchi $z=a+bi$ va $\bar{z}=a-bi$ komplek...
qo`shma deyiladi. Haqiqiy va mavhum qismlarning ishoralari bilan farq ...
ikkita $z_1=a+bi$ va $z_1=-a-bi$ kompleks sonlar qarama-qarshi komplek...
deyiladi.

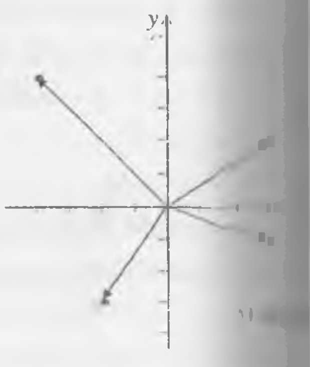
2. Kompleks sonning geometrik tasviri.

Dekart koordinatalar sistemasida abssissalar o`qiga $z=a+bi$ kompleks...
haqiqiy koeffitsiyenti a ni, ordinatalar o`qiga esa mavhum koeffitsiy...
joylashtirsak, tekislikda $(a;b)$ nuqtaga ega bo`lamiz. Shu nuqta $a+bi$ k...
sonni geometrik tasviri deb qabul qilinadi. Odatda bu z nuqta deyiladi. ...
qilib, tekislikning har bir bitta nuqtasi kompleks sonni ifodalaydi va, aksi...
bir kompleks songa tekislikning yagona nuqtasini mos qo`yish mumkin. B...
aytganda, tekislik nuqtalari bilan kompleks sonlar to`plami o`rtasida o`...
qiymatli moslik o`rnatiladi. $Ox$ o`qida kompleks sonni haqiqiy qismi joy...
uchun haqiqiy o`q, ordinatalari o`qida mavhum qismga tegishli son joy...
uchun mavhum o`q, $xOy$ tekisligini o`zi esa kompleks tekislik deyiladi.

Masalan, 51-rasmda quyidagi
z_1, z_2, z_3, z_4 kompleks sonlar ifodalangan:

$z_1=3+2i$, $z_2=-4+4i$,

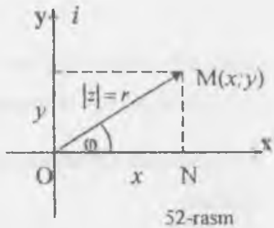
$z_3=-2-3i$, $z_4=3-i$.



2. Kompleks sonning trigonometrik shakli.

$z=x+yi$ ko`rinishdagi son algebraik ko`rinishdagi kompleks son deyiladi. Bu yerda (x,y) kompleks sonning koordinatalari deyiladi. Kompleks sonni boshqa usul bilan ham berish mumkin: kompleks soni tasvirlaydigan vektorning uzunligi va φ - burchak orqali (52-rasm).

[illegible] to'g'ri chizig'ida sanoq boshidan x [illegible] nuqtagacha bo`lgan masofa [illegible] sonning moduli deyiladi. Shunga [illegible] kompleks sonning moduli deb koordinata [illegible] sanoq boshidan z sonini ifodalovchi [illegible] to'lgan masofaga aytiladi.



52-rasm

[illegible] ONM uchburchakdan Pifagor teoremasiga asoslanib [illegible] formulani chiqarish mumkin:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

[illegible] uchburchakdan: $\quad x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi \qquad (2)$

[illegible] kompleks sonini tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi va [illegible] moduli, φ - burchakni esa z ning argumenti deyiladi.

[illegible] bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi\kappa$ qo`shiluvchi qadar aniqlikda [illegible] k - butun son.

[illegible] barcha qiymatlari orasidan $0 \le \varphi \le 2\pi\kappa$ tengsizliklarni [illegible] bittasini tanlaymiz. Bu qiymat bosh qiymat deyiladi va [illegible] belgilanadi: $\varphi = \arg z$.

[illegible] hisobga olib, kompleks sonni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (3)$$

[illegible] $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \ agar \ x > 0; y > 0 \ \text{bo`lsa} \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \ agar \ x < 0 \ \text{bo`lsa} \\ 2\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \ agar \ x > 0, y < 0 \ \text{bo`lsa} \end{cases}$

[illegible] kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi.

[illegible] kompleks sonning moduli 3 ga argumenti $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ ga teng bo`lsa, uning [illegible] qismlarini toping.

[illegible] $\qquad x = r\cos\varphi = 3\cos\dfrac{\pi}{4} = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$y = r\sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-misol. $z=i$ kompleks sonning argumentini toping. $x=0;\ y=1;\ r=1;\ \varphi=\frac{\pi}{2}$

3-misol. Qo`shma va qarama-qarshi kompleks sonlarni chizmada tasvirlang va izohlang.

Qo`shma kompleks sonlar bir xil modulga ega va absolyut qiymatlari bo`yicha teng argumentlarga ega bo`lib, haqiqiy o`qqa simmetrik bo`lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi. qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi.

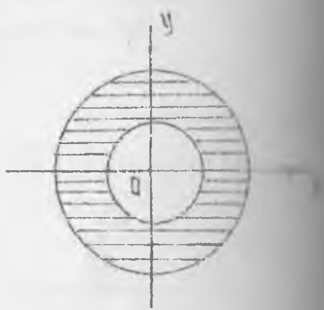
4-misol. $z=1-i$ kompleks sonini trigonometrik shaklda ifodalang

$$x = 1; y = -1; r = \sqrt{2}$$

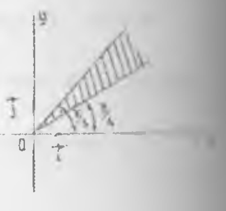
$$tg\varphi = -1; \varphi = 2\pi - arctg(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Shunday qilib, $z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$. Endi kompleks sonlar to`plamining ba`zi bir to`plam ostilarini ifodalovchi munosabatlarni geometrik nuqtai nazardan ko`rib o`taylik.

a) $|z| = 2$ bu munosabat kompleks tekisligida markazi koordinata boshida radiusi 2 ga teng bo`lgan aylananing nuqtalarini ifodalaydi.



b) $2 \le |z| \le 3$ munosabat esa markazi koordinatalar boshida joylashib ichki radiusi 2 va 3 ga teng bo`lgan konsentrik joylashgan aylanalar bilan chegaralangan xalqa ichidagi nuqtalar to`plamini ifodalaydi (53-rasm).



d) $arctgz = \frac{\pi}{6}$ munosabatga kompleks tekisligida 53-rasm

koordinata boshidan 30^0 burchak ostida chiquvchi nurdagi nuqtalar to`plami mos keladi.

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ munosabatga esa kompleks tekisligidagi koordinata boshidan 45^0 va 60^0 burchak ostida chiquvchi nurlar bilan chegaralangan nuqtalar to`plami hamda nurlar ustida yotuvchi nuqtalar to`plami kiradi (54-rasm). 54-rasm

O`z- o`zini nazorat qilish uchun savollar

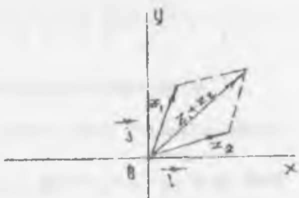
1. Kompleks songa ta`rif bering.
2. Kompleks sonini geometrik shaklida tasvirlang.
3. Kompleks sonini trigonometrik ko`rinishga keltiring (misollar yordamida ko`rsating).

3.7.2. Kompleks sonlar ustida amallar

**1. Qo`shish.** $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning yig`indisi deb, $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi. Kompleks sonlarni qo`shish vektorlarni qo`shish formulasidan vektorlar bilan ifodalangan kompleks sonlarni qo`shish qoidasi bo`yicha bajarilishi ko`rinadi. (55-rasm).

1-misol. $z_1=2+5i$ va $z_2=-1-3i$ kompleks sonlarni yig`indisini toping.

$$z_1+z_2=(2+5i)+(-1-3i)=(2-1)+i(5-3)=1+2i$$

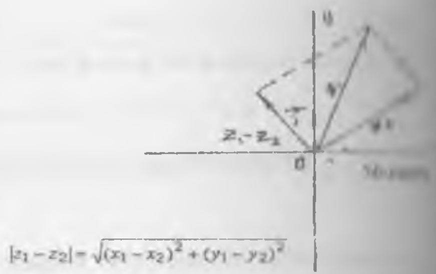


55-rasm

2. Ayirish. $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarni ayirmasi deb, shunday kompleks songa aytiladiki, unga ayriluvchi kompleks sonni qo`shganda kamayuvchi kompleks son hosil bo`ladi.

$$z_1-z_2=(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$$

Ikkita kompleks son ayirmasini moduli shu sonlarni kompleks sonlar tekisligida tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng (56-rasm).



2-misol. $z_1=6+5i$ va $z_2=4-2i$ kompleks sonlarni ayirmasini toping: $z_1=6+5i$ va $z_2=4-2i$;

$z_1-z_2=(6+5i)-(4-2i)=(6-4)+i(5+2)=2+7i$

**3. Kompleks sonlarni ko`paytirish.** $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning ko`paytmasi deb, $i^2=-1$ ekanligini hisobga olgan holda kompleks sonlarni ko`paytmasi ikkita ko`phad ko`paytmasi shaklida ko`paytirishdan hosil bo`lgan kompleks songa aytiladi.

$$z_1\cdot z_2=(a_1\cdot a_2-b_1\, b_2)+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)\, i$$

z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko`rinishda berilgan bo`lsa, ya'ni $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ va $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ u holda ularning ko`paytmasi $z_1\cdot z_1=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ bo`ladi.

3-misol. $z_1=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ va $z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ kompleks sonlar ko`paytmasini toping.

Yechish.

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}i$$

**4. Kompleks sonlarni bo`lish.** Kompleks sonlarni bo`lish amali ko`paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. Boshqacha aytganda $z\cdot z_2=z_1$ bo`lsa, z soni $z_1=x_1+iy_1$ uning $z_2=x_2+iy_2$ kompleks songa bo`linmasi deyiladi.

$z=\frac{z_1}{z_2}$ bo`linmasini topish uchun kasrning surat va maxrajini $z_2$ ning qo`shmasi $\bar{z}_2$ ga ko`paytiramiz.

[illegible] bundan $z = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_{21}^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$;

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko`rinishda berilgan bo`lsa, ya'ni

[illegible] va $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, u holda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

[illegible] qilib, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ ya'ni kompleks sonlarni

[illegible] moduli bo`luvchining moduliga bo`linadi, argumentlari [illegible]

[illegible] $z_1 = 5+4i$, $z_2 = 2-3i$

[illegible] $z_1 + z_2 = 5+4i+2-3i = 7+i$

[illegible] $= 3+7i$ $\quad \bar{z}_1 = 5-4i \qquad \bar{z}_2 = 2+3i$

[illegible] $= 10-15i+8i-12i^2 = 10-7i+12 = 22-7i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10+15i+8i+12i^2}{4+9} = \frac{-2+23i}{13}$$

[illegible]

[illegible] $\qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$

[illegible] $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

[illegible] $z_1 = \sqrt{3} + i$ ni $z_2 = -3-3i$ ga bo`ling.

[illegible] trigonometrik ko`rinishda bo`ling.

[illegible]

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{-3-3i} = \frac{(\sqrt{3}+i)\cdot(-3+3i)}{(-3-3i)\cdot(-3+3i)} = \frac{-3\sqrt{3}-3+(\sqrt{3}-3)i}{9+9} =$$

$$[illegible]\frac{[\ldots]}{18} = \frac{-\sqrt{3}-1}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{6}i$$

b) $z_1 = \sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$; $z_2 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})} = \frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4})] =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(-\frac{13\pi}{12}) + i\sin(-\frac{13\pi}{12})] = \frac{2}{3\sqrt{2}}(\cos\frac{13\pi}{12} - i\sin\frac{13\pi}{12}) =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\pi + \frac{\pi}{12}) - i\sin(\pi + \frac{\pi}{12})] = \frac{2}{3\sqrt{2}}(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}) =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot[-\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})] =$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot[(-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}) + i(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4})] = \text{[illegible]}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}) + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})] = -\frac{\sqrt{3}+1}{6} + i\frac{\sqrt{3}-1}{6}.$$

**5. Darajaga ko`tarish.** Kompleks sonlarni ko`paytirish qoidasidan d[illegible] ko`tarish qoidasi kelib chiqadi. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks son [illegible] $n-$natural bo`lganda $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Bu formulani Muavr [illegible] deyiladi. Muavr formulasini tadbiq [illegible] $i^{4\kappa} = 1$, $i^{4\kappa+1} = i$, $i^{4\kappa+2} = -1$, $i^{4\kappa+3} = -i$ bo`lishini e'tiborga olishimiz [illegible]

7-misol. $(-1+i)^5$ ni hisoblang.

$$z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$z^5 = (-1+i)^5 = (\sqrt{2})^5\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos 5\cdot\frac{3\pi}{4} + i\sin 5\cdot\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}(\cos 675^0 + i\sin 675^0) = 4\sqrt{2}[\cos(720^0 - 45^0) + i\sin(720^0 - 45^0)] =$$

$$= 4\sqrt{2}(\cos 45^\circ - i\sin 45^\circ) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - 4i = 4(1-i).$$

6. Kompleks sondan ildiz chiqarish. Ildiz chiqarish amali darajaga [illegible] teskari amal. Kompleks sonning n – darajali ildiz $\sqrt[n]{z}$ deb, shunday z^* - sonini aytiladiki, z^* ning n – darajasi z soniga tengdir, ya'ni $\left(z^*\right)^n = z$

Aytaylik, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ va $z^* = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ bo`lsin.

Muavr formulasiga asosan $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ bundan $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, ρ va θ ni topamiz.

Bu yerda k - istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$ - arifmetik ildiz. Demak,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right);$$ bu yerda $k = 0, 1 .. n-1$

Misol. $\sqrt[5]{1}$ ning ildizlarini toping.

Yechish: 1 sonni trigonometrik ko`rinishda yozamiz. $z = 1$ bo`lib, $1 = \cos 0 + i\sin 0$ bo`ladi.

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5},$$

$k = 0$, $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \cos 72^0 + i\sin 72^0 = 0{,}309 + 0{,}951i$

$k = 2$, $z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = \cos 144^0 + i\sin 144^0 = -0{,}809 + 0{,}587i$

$k = 3$, $z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = \cos 216^0 + i\sin 216^0 = -0{,}809 - 0{,}587i$

$k = 4$, $z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \cos 288^0 + i\sin 288^0 = -0{,}309 + 0{,}951i$

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.
2. Kompleks sonni darajaga ko`tarish va ildiz chiqarish formulalarini yozib bering.

Kompleks sonlar ustida amal bajarishga doir topshiriqlar

1. z_1, z_2 kompleks sonlar berilgan bo`lsa, kompleks sonlar ustida amallarni bajaring:

$$(z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ \overline{z_1},\ \overline{z_2},\ z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2})$$

1. $z_1=-3+2i$ $z_2=4-i$
2. $z_1=4+5i$ $z_2=4-5i$
3. $z_1=5+2i$ $z_2=-5-2i$
4. $z_1=-3+i$ $z_2=-2-3i$
5. $z_1=1,4-3i$ $z_2=2,6-4i$
6. $z_1=3+8i$ $z_2=-4-5i$
7. $z_1=5-2i$ $z_2=3+4i$
8. $z_1=-2+3i$ $z_2=5-2i$
9. $z_1=-3+4i$ $z_2=7-4i$
10. $z_1=2-4i$ $z_2=1+3i$
11. $z_1=5-3i$ $z_2=8-4i$
12. $z_1=-5+2i$ $z_2=8-9i$
13. $z_1=4-5i$ $z_2=42-3i$
14. $z_1=14+3i$ $z_2=21+3i$
15. $z_1=2+4i$ $z_2=7+4i$
16. $z_1=-6+2i$ $z_2=4-i$
17. $z_1=-3+2i$ $z_2=5-i$
18. $z_1=4+2i$ $z_2=4-3i$
19. $z_1=7+2i$ $z_2=5+i$
20. $z_1=-3+2i$ $z_2=1-i$

2. Kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

1. $z=1-i$ 2. $z=1-i$

3. $z=\sqrt{3}+i$ 4. $z=-1+\sqrt{3}\,i$

5. $z=-2$ 6. $z=i$

7. $z=1$ 8. $z=-i$

9. $z=1+i$ 10. $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. $z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$ 12. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

13. $z=2i$ 14. $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $z=-i$ 16. $z=-\sqrt{6}-\sqrt{6}i$

17. $z=-3-4i$ 18. $z=2+\sqrt{3}+i$

19. $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$ 20. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$

21. $z=3i$ 22. $z=3$

23. $z=\frac{\sqrt{33}}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$ 24. $z=-2\sqrt{3}i$

25. $z=-\sqrt{6}-\sqrt{6}i$ 26. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

27. $z=2\sqrt{2}+i$ 28. $z=1+2\sqrt{3}i$

29. $z=2\sqrt{2}+i$ 30. $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

Testlar

1. Hisoblang. $\dfrac{0.48\cdot 0.75+0.52:1\frac{1}{3}}{(0(3)+0(6)):0.012}$

a) 0,08 b) 0 008 d) 0,0009 e) 1 f) 0,09

2. Hisoblang. $\dfrac{0.2(4)\cdot 4\frac{1}{11}+2\frac{1}{4}:1\frac{4}{5}}{1{,}125+(2\frac{2}{3})^{-1}}$

a) 1 b) 1,5 d) 1,25 e)2,5 f) 2/3

3. Hisoblang. $\dfrac{0,(2)\cdot 0,625\cdot 4,5 = 1,8\cdot 0,175\cdot 0,(5)}{\frac{6}{7}\cdot 2\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{7}}$

a) 0,9 b) 0,7 d) 0,8 e) 0,6 f) 0,5

4. Hisoblang. 3,2(62) – 1,(15)

a) 2,2(47) b) 2,247 d) 2,(12) e) 2,(1) f)2,01

5. Quyidagi sonlardan qaysi biri 0,(2) ga teng.

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{18}$ d) 0,22 e) $\frac{2}{10}$ f) $\frac{2}{9}$

6. $(2,750\cdot 0,(36)-2,75:1\frac{1}{8})\cdot 2,7+1,8(3)\cdot 3,6$ ni hisoblang.

a) 1 b) 2,7 d) 3,2 e) 3 f)2

7. Quyidagi oddiy kasr ko\`rinishdagi berilgan sonlardan qaysilarini chekli o\`nli kasr ko\`rinishig keltirib bo\`lmaydi.

a) $\frac{35}{88}$ b) $\frac{4}{125}$ d) $\frac{34}{75}$ e) $\frac{11}{80}$

8. $\frac{13}{225}$ ni cheksiz davriy o\`nli kasrda yozing

a) 0,005(2) b) 0,5(2) d) 0,2(5)

e) 0,02(5) f) 0,05(7)

9. Davri 0 yoki 9 dan farqli bo\`lgan davriy o\`nli kasrlarni ko\`rsating?

1. $m=\frac{1}{0,333}$ n = 247,123123 p=0,63(8) $q=\frac{1}{0,(3)}$

a) n,p b) m,p d) p,m,q e)m,q f) hammasi

10. $\frac{0,07}{0,21}+\frac{0,4}{0,06}+\frac{0,9}{0,05}$ Ifodani qiymatini toping.

a) 25 b)20 d) 15 e)30 f)16

11. 0,2(18) ni oddiy kasr shaklida yozing.

a) $\frac{12}{55}$ b) $\frac{13}{55}$ d) $\frac{28}{99}$ e) $\frac{218}{900}$ f) $\frac{13}{45}$

12.Hisoblang. 0,5(6)+0,(8)

a) 0,6(4) b)1,3(6) d)1,4(5) e)1,36 f)1,(36)

13.Hisoblang. $(-1\frac{1}{2})^3$.

a) $6\frac{3}{4}$ b) $1\frac{1}{8}$ d) $-3\frac{3}{8}$ e) $-1\frac{1}{8}$ f) $-2\frac{1}{4}$

14. Hisoblang $5\frac{5}{7} : 2\frac{2}{5} \cdot 5\frac{1}{4} : 1\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}$

a) $7\frac{1}{7}$ b) $8\frac{1}{7}$ d) $6\frac{6}{7}$ e) $5\frac{5}{7}$ f) 4

15. Hisoblang . $\left(7\frac{1}{3} - 6\frac{7}{8}\right) : \frac{3}{4} + 8\frac{8}{9} \cdot 2\frac{1}{80}$

a) $17\frac{2}{3}$ b) $18\frac{1}{2}$ d) $21\frac{1}{2}$ e) $16\frac{1}{3}$ f) $17\frac{1}{2}$

16. Hisoblang $\left(\frac{1}{7}\right)^{0} + 6 \cdot 2^{-3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

a) 8 b) $7\frac{1}{7}$ d) 7 e) $-4\frac{4}{25}$ f) -7

17. Hisoblang $1\frac{1}{4} + \frac{5}{12} : \left(\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2} - \frac{7}{8}\right)$

a) $11\frac{1}{4}$ b) $-1\frac{1}{4}$ d) $9\frac{1}{4}$ e) $-8\frac{3}{4}$ f) $-9\frac{1}{4}$

18. Hisoblang $\left(5\frac{3}{4} - 4\frac{8}{9}\right) \cdot 2 + 67\frac{1}{2} : 2\frac{1}{7}$

a) $24\frac{1}{3}$ b) $33\frac{2}{9}$ d) $36\frac{1}{9}$ e) $31\frac{1}{3}$ f) $28\frac{2}{3}$

19. Hisoblang $\left(1992\frac{3}{5} - 1990\frac{2}{3}\right)\, 1\frac{1}{29}$

a) $-2\frac{14}{435}$ b) $\frac{14}{435}$ d) 2 e) -2 f) $2\frac{1}{58}$

20. $\frac{11}{25}$ va $4\frac{6}{11}$ sonlariga teskari sonlar ko`paytmasi nechaga teng?

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 d) $\frac{3}{4}$ e) 2 f) $\frac{1}{3}$

21. $1 + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \frac{1}{13.14} + \frac{1}{14.15} + \frac{1}{15.16}$ ni hisoblang.

a) $\frac{3}{80}$ b) 1,16 d) $1\frac{3}{40}$ e) $1\frac{7}{80}$ f) $1\frac{13}{80}$

22. $\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7\times 9} + \frac{2}{9.11} + \ldots + \frac{2}{73.75}$ ni hisoblang

a) $\frac{16}{75}$ b) $\frac{28}{75}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{14}{75}$ f) $\frac{2}{5}$

23. $5\frac{7}{12}$ son $11\frac{1}{6}$ ga ko`paygan bo`lsa u necha marta kupaygan

a) 3 b) 2 d) 2,5 e) 3,5 f) 1,75

24. Hisoblang $(1997\frac{3}{5} - 1996\frac{1}{6}) \times 1\frac{1}{29}$

a) $\frac{13}{29}$ b) $2\frac{1}{29}$ d) $\frac{13}{29}$ e) $3\frac{1}{29}$ f) $1\frac{14}{29}$

25. Hisoblang $19{,}9 \times 18 - 19{,}9 \times 16 + 30{,}1 \times 18 - 30{,}1 \times 16$

a) 98 b) 100 d) 10 e) 110 f) 102

26. Agar $\frac{29}{31} + \frac{38}{41} + \frac{47}{51} = a$ bo`lsa $\frac{2}{31} + \frac{3}{41} + \frac{4}{51}$ quyidagilardan qaysi biriga teng? a) $3-a$ b) $4-a$ d) $5-a$ e) $3-\frac{a}{2}$ f) $4-\frac{a}{2}$

27. Hisoblang $\frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} + \frac{1}{195}$

a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{17}{45}$ e) $\frac{11}{15}$ f) $\frac{2}{15}$

28. Hisoblang $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \ldots\frac{1}{13\cdot15}$

a) $\frac{11}{15}$ b) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{8}{15}$ e) $\frac{7}{15}$ f) $\frac{2}{5}$

29. Hisoblang . $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots\frac{1}{99\cdot100}$

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{100}$ e) $\frac{1}{99}$ f) $\frac{99}{100}$

30. Hisoblang $\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\frac{1}{182}$

a) $\frac{11}{42}$ b) $\frac{10}{33}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{12}{35}$ f) $\frac{15}{56}$

31. $\frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{65} + \frac{1}{99} + \ldots\frac{1}{255}$

a) $\frac{7}{51}$ b) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{2}{25}$ e) $\frac{3}{35}$ f) $\frac{7}{40}$

32. $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{17}$; $\frac{21}{23}$ sonlariga bo`lganda, butun son chiqadigan eng kichik

[illegible] sonni toping.

a) [illegible] b) 36 d) 42 e) 63 f) 34

[illegible] Hisoblang (1+i) –(2,5i=2).

a) [illegible] b)3+1,5i d)1,5i –3 e) –1 –3,5i f)1+3,5i

[illegible] Hisoblang $\frac{(2-3i)(3-2i)}{1+i}$.

a) [illegible] b) $\frac{13+13i}{2}$ d) $\frac{12+12i}{2}$ e) 6+8i f)2+3i

[illegible] Hisoblang $(3-2i)^2$.

a) [illegible] b)5 –12i d)3 –4i e) 7 –12i f)5 –13i

[illegible] Darajani hisoblang. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)\right]^7$

a) $2^7\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b) $2^7\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ d) [illegible]

e) $2^7\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right)$ f) $2^7\left(\cos\frac{\pi}{147}+i\sin\frac{\pi}{147}\right)$

[illegible] Hisoblang (3+5i)(2+3i).

a)[illegible]+19i b) –9+19i d)5+9i e)5+7i f)9 –8i

[illegible] Ayirmani toping (–5+2i) –(8 –9i).

a) [illegible]+11i b)12+11i d)13 –11i e) –13 –11i f)13+11i

IV BOB. ALGEBRA VA GEOMETRIYA ELEMENTLARI

4.1. Sonli ifoda va uning son qiymati. Sonli tenglik va tengsizliklar

4.1. 1. Sonli ifodalar. Ayrim masalalarni yechishda sonli ifodalarga duch kelamiz. Quyidagi masalani qaraylik.

Masala: A va B punktlar orasidagi masofa 1760 km A punktdan B punktga qarab soatiga 80 km/s tezlik bilan yuk avtomashinasi chiqdi. 2 soat o`tgandan keyin esa $B$ punktdan soatiga 120 km/s tezlik bilan yengil avtomashina A punkt tomon jo`nadi. Yengil avtomashina yo`lga chiqqandan necha soatdan keyin yuk avtomashinasi bilan uchrashishdi.

Masalani yechish uchun dastlab yuk avtomashinasini 2 soatda bosib o`tgan yo`lini hisoblaymiz. Buning uchun 80 ni 2 ga ko`paytiramiz. Bu amalni bajarmasdan uni 80x2 deb belgilaymiz.

Shundan keyin yuk avtomashinasi B punktdan qancha masofada ekanligini aniqlaymiz. 1760-80x2.

Keyinchalik yuk va yengil avtomashinalarning birgalikdagi tezligini topamiz. 80+120.

Eng oxirida ikkita avtomobilning uchrashishi uchun ketgan vaqtni hisoblaymiz.

$$(1760-80x2):(80+120)$$

Masalani yechish jarayonida biz yuqoridagi ko`rinishdagi sonli ifoda qiymatini sonli ifodada amallarni bajarish dasturiga asosan topamiz, ya'ni

$$(1760-80x2): (80+120)=(1760-160):200=1600:200=8$$

Demak, ikkita avtomashina 8 soatdan keyin uchrashadi. Bunda biz faqat sonlar bilan ish ko`rdik.

1-ta'rif. Sonlar, arifmetik amallar va qavslar ishtirok etuvchi yozuv sonli ifoda deyiladi.

Umumiy holda sonli ifoda quyidagicha aniqlanadi:

1) har bir son sonli ifodadir;

Agar A va B lar sonli ifodalar bo`lsa, u holda $(A)+(B)$, $(A)-(B)$, $(A)\cdot(B)$, $(A):(B)$ lar ham sonli ifodalar bo`ladi.

Sonli ifodada ko`rsatilgan har bir amalni ketma-ket bajarish natijasida hosil bo`lgan son sonli ifodaning qiymati deyiladi.

Agar yuqoridagi qoidaga amal qilsak, qavslar soni ko`payib ketadi. Shuning uchun har bir sonni qavsga olmaslikka kelishib olinadi.

Shuningdek bir qancha ifodalar qo`shilsa, ayirilsa, ko`paytirilsa yoki bo`linsa qavslar qo`yilmasdan amallar chapdan o`ngga qarab bajariladi. Masalan,

35-4+56-12-34 yoki 80:2·5·8:5.

Amallarni bajarishda avvalo ikkinchi bosqich (ko`paytirish va bo`lish), so`ngra birinchi bosqich (qo`shish va ayirish) amallar bajariladi.

Shuni hisobga olsak sonli ifodalar qiymatlarini hisoblashda quyidagi qoidaga amal qilinadi:

1) agar sonli ifoda qavslarsiz berilgan bo`lsa, sonli ifoda qo`shish amallarini va ayirish amallarini o`zida saqlovchi bo`laklarga ajratiladi. Bu bo`laklarni har birida ko`paytirish va bo`lish amallari chapdan o`ngga qarab bajarilib, bo`laklar qiymatlari hisoblanadi, keyinchalik hisoblangan qiymatlar o`rniga qo`yilib, sonli ifoda qiymati qo`shish va ayirish amallarini chapdan o`ngga hisoblab topiladi;

2) agar sonli ifoda o`zida qavsni saqlasa, u holda chap va o`ng qavs ichidagi ifoda 1) qoidaga asosan hisoblanadi va qavslarni o`rniga hisoblangan qiymat qo`yiladi. Keyingi hisoblashlar 1- qoida asosida hisoblanadi, aks holda yana 2- qoida qo`llaniladi.

Masalan,

1) $32\cdot 2-7\cdot 5+4:2-5\cdot 3+8:2$ ifoda berilsa,

$32\cdot 2-7\cdot 5+4:2-5\cdot 3+8:2=32\cdot 2+4:2+8:2-7\cdot 5-5\cdot 3=$

$=64+2+4-35-15=70-50=20;$

2) $(24:2+12\cdot 3)-(44:11+5)+12=(12+36)-(4+5)+12=$

$=48-9+12=48+12-9=60-9=51.$

Shuning bilan birga barcha sonli ifodalar qiymatga ega bo`lavermasligini qayd qilamiz. Masalan, 9: (3-3) va (8-8): (3-3) ifodalar qiymatga ega emas, chunki nolga bo`lish mumkin emas.

2-ta'rif. Sonlar va harflardan tuzilib amal ishoralari bilan birlashtirilgan ifoda harfiy ifoda deyiladi. Masalan, $\frac{2b}{a+c}-\frac{b-a}{2a+b}$; $7a+\frac{3}{4}b$ va hokazo.

Harfiy ifodada harflarning o`rniga qo`yish mumkin bo`lgan sonlar to`plami harfiy ifodaning aniqlanish sohasi deyiladi.

4.1. 2. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi

3-ta'rif. «Teng» (=) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tenglik deyiladi (agar ifoda sonlardan iborat bo`lsa sonli tenglik deyiladi).

Ikkita A va B sonli ifoda berilgan bo`lsin. Biz bu ifodalardan $A=B$ tenglikni hosil qilishimiz mumkin. Bular mulohazalar bo`lib, rost yoki yolg`on bo`lishi mumkin. $A=B$ tenglik faqat va faqat A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo`lib, bu qiymatlar teng bo`lsagina rost bo`ladi.

Masalan, 3+8=4+7 rost; 7:(3-3)=6 yolg`on, chunki 7: (3-3) son qiymatga ega emas.

Shuningdek natural sonlar to`plamida 2-5+11=2·4 yolg`on, chunki N to`plamda 2-5 ifoda aniqlangan emas.

Ammo sonlar to`plami kengaytirilgandan keyin, ya'ni manfiy sonlar to`plami kiritilgandan keyin yuqoridagi tenglik o`rinli, chunki tenglikning ikkala tomoni ham 8 ga teng qiymatga ega bo`ladi.

Sonli ifodalarning tenglik munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega, shu sababli ekvivalentlik munosabatidir.

Shuning uchun bir xil qiymatlarga ega bo`lgan sonli ifodalar to`plami ekvivalent sinflarga bo`linadi.

Masalan, 7+2, 6+3, 11-2, 18:2, 3·3 va hakozo – bularni barchasi 9 qiymatiga ega. Yuqoridagi ta'riflardan, agar A,B,C,D lar sonli ifodalar bo`lib, $A=B$ va $C=D$ tengliklar rost bo`lsa, u holda quyidagi tengliklar ham rost bo`ladi.

$$(A)+(C)=(B)+(D); \quad (A)-(C)=(B)-(D)$$
$$(A)\cdot(C)=(B)\cdot(D); \quad (A):(C)=(B):(D)$$

Ta'rif. «Katta» (>), «kichik»(<), «katta yoki teng» (≥), «kichik yoki teng» (≤) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tengsizlik deb ataladi. Agar A va B lar sonli ifodalar bo'lsa, $A<B$ tengsizlik, A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo'lib, A ifodaning sonli qiymati B ifodaning sonli qiymatidan kichik bo'lganda rost bo'ladi.

Masalan: (16-4):3<2+5 tengsizlik rost chunki (16-4):3 ning qiymati 4, 2+5 ning qiymati 7, shu sababli 4<7.

$A<B, C<D$ $(A,B,C,D-sonli\ ifodalar)$ ko'rinishidagi yozuvlarni mulohazalar deganimiz uchun ularni ustida kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya va boshqa mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Masalan, $A\leq B=(A<B)\vee(A=B)$. Bu munosabat $A<B; A=B$ mulohazalardan biri rost bo'lganda rost.

Masalan, $(12:3+5)\cdot 2\leq 25+13$ rost, chunki $(12:3+5)\cdot 2$ ifoda qiymati 18, 25+13 ifoda qiymati 38, 18<38 tengsizlik esa rost.

$A<B<C$ qo'shtengsizlik esa $A<B$ va $B<C$ tengsizliklar kon'yunksiyasini ifodalaydi. Bu kon'yunksiya ikkita tengsizlik rost bo'lganda rost.

Masalan, 5+12<441:21<2·17 rost, chunki 5+12 ning qiymati 17, 441:21 ning qiymati 21, 2·17 ning qiymati 34. Shunday qilib 17<21 va 21<34 bo'lgani uchun qo'sh tengsizlik rost. Biz endi tengsizlik tushunchasiga tartib munosabati orqali beramiz.

Bizga ma'lumki haqiqiy sonlar to'plamidagi kichik munosabati tartib munosabatiga misol bo'la oladi. Kichik munosabati «<» belgi bilan ifodalanadi. Bu munosabat qattiq chiziqli tartiblangan munosabat boshqacha aytganda, u asimmetrik va tranzitiv. Haqiqiy sonlar to'plamidagi ixtiyoriy x va y sonlari uchun $x<y$ yoki $y<x$ munosabatlardan faqat bittasi bajariladi.

Shuningdek $x<y$ munosabat faqat va faqat $y-x>0$ bo'lganda o'rinli bo'lishini isbotlash mumkin. Shu sababli $a>0$ va $b>0$ bo'lganda $a+b>0$ va $ab>0$ tengsizliklar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Tengsizlikni shu xossasidan qolgan xossalarini ham keltirib chiqarish mumkin

1. Tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil sonni qo`shsa x<y munosabat saqlanadi bu munosabatga qo`shishga nisbatan tartib munosabatining monotonligi deyiladi. Boshqacha aytganda, agar $x<y$ bo`lsa, u holda ixtiyoriy a soni uchun $x+a<y+a$ tengsizlik bajariladi. Haqiqatan ham $x<y$ tengsizlikdan $y-x>0$ kelib chiqadi. Ammo $(y+a)-(x+a)=y-x>0$ bo`lganidan $x+a<y+a$ bo`ladi.

2. Agar $x<y$ va $a<b$ bo`lsa, u holda $x+a<y+b$ bo`ladi. Haqiqatan ham bu holda $y-x>0$ va $b-a>0$ bo`lganidan

$(y+b)-(x+a)=(y-x)+(b-a)>0$ bo`ladi.

3. Tengsizlikni ikkala tomoni bir xil musbat songa ko`paytrilsa x<y munosabat saqlanadi, ya'ni x<y va $a>0$ munosabatdan $ax<ay$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham x<y tengsizlikdan $y-x>0$ kelib chiqadi. Ikkita musbat son ko`paytmasi musbat son bo`lishidan $a(y-x)>0$ bo`lishi ravshan.

$a(y-x)=ay-ax$ bo`lishidan $ax<ay$ kelib chiqadi.

4. Agar x,y,a,b - sonlari musbat sonlar bo`lsa, $x<y$ va $a<b$ tengsizliklardan $ax<by$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $x<y$ va a sonining musbatligidan $ax<ay$ ga ega bo`lamiz. Tengsizlik munosabatini tranzitivlik xossasidan esa $ax<ay$ *ва* $ay<by$ tengsizliklardan $ax<by$ ga ega bo`lamiz.

$y>x$ *ва* $x<y$ tengsizliklar ekvivalent bo`lganligidan bu ikkala tengsizlik bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg`on. Shu sababli «>» va «<» tengsizlik belgilari o`zaro teskari belgilar.

5. Tengsizlikda sonlarning ishoralarini o`zgartirsak, tengsizlik belgisi teskarisiga o`zgaradi, ya'ni $x<y$ bo`lsa , $-x>-y$ bo`ladi. Haqiqatan ham $x<y$ bo`lishi $y-x>0$ bo`lishini bildiradi. Ammo $y-x=(-x)-(-y)$; Shu sababli $(-x)-(-y)>0$, ya'ni $-y<-x$.

6. Tengsizlikni ikkala tomoni manfiy songa ko`paytirilsa, tengsizlik belgisi teskarisiga o`zgaradi, ya'ni $x < y$ va a manfiy son bo`lsa , u holda $ax > ay$ bo`ladi.

7. Agar $0 < x < y$ yoki $x < y < 0$ bo`lsa, u holda $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ bo`ladi.

Buni isbotlash uchun $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$ munosabatdan foydalanamiz. Shartga ko`ra x, y sonlari bir xil ishoralarga ega, shuning uchun xy- ham musbat son, shu sababli $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ham musbat, bundan esa $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

$x = y$ va $x < y$ munosabatlar bilan birgalikda $x \leq y, x \geq y$ munosabatlar ham qo`llaniladi $x \leq y$ tengsizlik $x < y$ tengsizlik va $x = y$ tenglik diz'yunksiyasini ifodalaydi. Ularni bittasi rost bo`lsa, diz'yunktsiya rost bo`ladi. $x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$. Masalan, $5 \leq 9$ rost, chunki $5 < 9$ rost.

$x < y < z$ tengsizlik. $x < y$ va $y < z$ tengsizliklar kon'yunksiyasi bo`lib, u holda tengsizlik rost bo`lganda rost bo`ladi. Masalan, $5 < 7 < 9$ rost, chunki $5 < 7$ va $7 < 9$ tengsizliklar rost, $3 < 7 < 6$ bu yolg`on, chunki $3 < 7$ tengsizlik rost bo`lsa ham, $7 < 6$ tengsizlik yolg`on.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Sonli, harfiy ifodalarga ta'rif bering, ularni aniqlanish sohasiga misollar keltiring.
2. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligiga ta'rif bering.
3. Sonli tengsizlik xossalarini aytib, tushuntiring.

4.2. O`zgaruvchili ifoda

O`zgaruvchili ifoda tushunchasi ham sonli ifoda tushunchasi kabi aniqlanadi, lekin unda sonlar bilan birga harflar ham ishlatiladi.

Agar x va y o`zgaruvchilarga ega bo`lgan ifoda berilgan bo`lsa, u holda

bir sonli (a, b) kortejga sonli ifoda mos keladi. U ifoda x ni a ga y ni

almashtirish natijasida hosil bo`ladi. Hosil bo`lgan ifoda qiymatga ega bo`lsa,

holda bu qiymat $x=a$ va $y=b$ bo`lganda ifodani qiymati deyiladi. O`zgaruvchili ifoda $A(x)$, $B(x;y)$ va hokazo ko`rinishda belgilanadi. Agar o`zgaruvchili $B(x;y)$ da $x=16$, $y=5$ sonlariga almashtirilsa, $B(16;5)$ sonli ifoda hosil bo`ladi.

O`zgaruvchili ifoda predikat hisoblanmaydi, chunki harflarni o`rniga qo`yganda mulohaza hosil bo`lmasdan, sonli ifoda hosil bo`ladi. Bu ifodaning qiymati rost yoki yolg`on bo`lmasdan, son kelib chiqadi.

x o'zgaruvchini o`zida saqlovchi ifodada $x$ ni o`rniga qo`yganda ifoda qiymatga ega bo`luvchi sonlar to`plami mavjud. Bu sonlar to`plamiga ifodani aniqlanish sohasi deyiladi. Masalan, $7:(x-5)$ ifodani aniqlanish sohasi sonidan boshqa barcha sonlardan iborat. Ayrim hollarda x faqat natural to`plamidan qiymatlar qabul qilishi mumkin, Masalan, guruhdagi to`plami. Shuningdek o`zgaruvchili ifoda o`zida bir qancha o'zgaruvchini aytaylik, ifoda x va y o'zgaruvchini o`zida saqlasin, u holda ifodaning aniqlanish sohasi $(a;b)$ juft sonlar to`plamidan iborat bo`lishi mumkin. Masalan: buni aniqlanish sohasi barcha sonlarning $(a;b)$ juftliklardan iborat bo`lib, faqat $a \neq b$.

O`zgaruvchili ifodada o'zgaruvchini faqat sonlar bilan emas, balki harfiy ifodalar bilan ham almashtirish mumkin. Masalan, $2x+3y$ ifodada $3a+2b$ $y$ ni $2a-4b$ bilan almashtirsak $2(3a+2b)+3(2a-4b)$ ko`rinishdagi ifodaga ega bo`lamiz.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ o`zgaruvchili ifoda ifodaga kiruvchi harflarni qabul qilishi mumkin bo`lgan qiymatlarida bir xil qiymatlar qabul qilsa, $A(x)$ va $B(x)$ lar aynan teng deyiladi.

Ta'rif. Agar o`zgaruvchilarning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy qiymatida ikki ifodaning mos qiymatlari teng bo`lsa, bu ikki ifoda aynan teng

[illegible]

Masalan, $(x+5)^2$ va $x^2+10x+25$ aynan teng.

$\frac{x^2}{x}$ va x aynan teng emas, chunki $x=0$ da birinchi 0 qiymatga, ikkinchisi esa son qiymatga ega bo`lmaydi. Ammo noldan farqli sonlar to`plamida u aynan teng. O`zgaruvchili ikkita ifodaning aynan tengligi tasdig`i mulohoza hisoblanadi, masalan $(x+5)^2$ va $x^2+10x+25$ ifodalarning aynan tengligini $(\forall x)((x+5)^2=x^2+10x+25)$ ko`rinishida yozish mumkin. Odatda qisqalik uchun [illegible] quyidagicha yoziladi $(x+5)^2=x^2+10x+25$.

O`zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida to`g`ri bo`lgan tenglik ayniyat deyiladi. [illegible] sonlarning ko`paytirish va qo`shish qonunlari, yig`indidan sonni ayirish, sondan yig`indini ayirish qoidalari, yig`indini songa bo`lish va boshqalar ayniyat hisoblanadi. Shuningdek, 0 va 1 lar bilan bajariladigan amallar qoidalari ham ayniyat hisoblanadi. Ifodaning ayniy shakl almashtirish deganda, umumiy qoidalarga tayanib, berilgan ifodani unga aynan teng bo`lgan boshqa ifodaga almashtirish tushuniladi.

Masalan,

$$\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)$$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)=\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x(x+y)+x^2+y^2-x(x-y)}{x^2-y^2}\right)=$$

$$\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2+xy+x^2+y^2-x^2+xy}{x^2-y^2}=\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=$$

$$\frac{(x-y)(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x+y};$$

Demak, $\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)=\frac{1}{x+y}$.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. O`zgaruvchili ifodani ta'riflang.
2. O`zgaruvchili ifoda qachon aynan teng bo`ladi?
3. Ayniy shakl almashtirishni misollar yordamida tushuntiring.

4.3. Bir o`zgaruvchili tenglamalar. Teng kuchli tenglamalar haqida teoremalar

**4.3.1. Bir o`zgaruvchili tenglamalar.** Bizga $x$ o`zgaruvchini ... saqlovchi, aniqlanish sohasi X to`plamdan iborat $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo`lsin.

1-ta'rif. $f_1(x)=f_2(x)$ bir o`rinli predikatga bir o`zgaruvchili tenglama deyiladi, bunda $x \in X$. Tenglamani yechish deganda x o'zgaruvchini tenglamani rost tenglikga aylantiruvchi qiymatini yoki boshqacha aytganda berilgan predikat rostlik to`plami $T$ ni topish tushuniladi. Demak, $f_1(x)=f_2(x)$ $x \in X$ predikat rostlik to`plamiga tenglamani yechimi, to`plamga kiruvchi sonlarga tenglamaning ildizlari deyiladi.

Misol. $(x-2)(x+3)=0$ tenglama ikkita 2 va –3 ildizlarga ega. Bu tenglama yechimlar to`plami $T=\{2;-3\}$.

Cheksiz ko`p yechimlar to`plamiga ega bo`lgan tenglamalar ham mavjud.

Masalan, $x=|x|$ tenglamaning yechimlar to`plami barcha nomanfiy sonlardan iborat.

X to`plamdan olingan biror $\delta$ qiymatda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ma'noga ega bo`lmasligi mumkin. Bu holda $f_1(x)=f_2(x)$ tenglik yolgon hisoblanadi va $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani ildizi bo`la olmaydi.

Masalan, $\frac{1}{x-3}+5=\frac{1}{x-7}+6$ tenglama uchun 3 va 7 sonlari ildiz bo`la olmaydi, chunki $x=3$ da $\frac{1}{x-3}$ kasr, $x=7$ da $\frac{1}{x-7}$ kasr ma'noga ega emas.

[illegible] uchun $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani yechishdan oldin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ [illegible] qiymatlarga ega bo`lgan A to`plamni topish kerak. Bu A to`plamga $x$ [illegible] qabul qilishi mumkin bo`lgan qiymatlar to`plami yoki tenglamani [illegible] sohasi deyiladi. Yuqoridagi tenglama uchun bunday soha 3 va 7 [illegible] tashqari barcha haqiqiy sonlar to`plami hisoblanadi va u quyidagicha [illegible]

$$A=]-\infty;3[\cup]3;7[\cup]7;+\infty[$$

[illegible] predikatni aniqlanish sohasi X to`plam chekli bo`lsa, u holda [illegible] topish uchun X to`plamdagi sonlarni birin-ketin qo`yish [illegible] ildizlarini topish mumkin. Agar X to`plam cheksiz bo`lsa, u [illegible] teng kuchliligidan foydalanamiz.

[illegible] Agar ikkita $f_1(x)=f_2(x)$, va $g_1(x)=g_2(x)$ tenglamaning [illegible] teng bo`lsa, bu ikki tenglama teng kuchli deyiladi.

[illegible] $(x-1)^2=9$ va $(x-2)(x+4)=0$ tenglamalar haqiqiy sonlar [illegible] kuchli, chunki birinchi va ikkinchi tenglamaning yechimlar [illegible] Bunda ikki tenglama ham bir xil aniqlanish sohasiga ega.

[illegible] aytganda $f_1(x)=f_2(x)$, $g_1(x)=g_2(x)$ predikatlar ekvivalent [illegible] teng kuchli bo`ladi.

[illegible] tenglamaning yechimlar to`plami $g_1(x)=g_2(x)$ [illegible] to`plamining to`plam ostisi bo`lsa, $g_1(x)=g_2(x)$ tenglama [illegible] tenglamaning natijasi deyiladi. Ikkita tenglama faqat va faqat biri-[illegible] holdagina teng kuchli bo`ladi.

[illegible] tenglama $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani [illegible] ildizlarga ega bo`lsa, bu ildizlar $f_1(x)=f_2(x)$ tenglama [illegible] bo`ladi.

[illegible] agar tenglamani yechishda uni natija bilan almashtirilsa [illegible] bilan emas), u holda natija tenglamaning barcha ildizlarini [illegible] ularni berilgan tenglamaga qo`yib tekshirish va chet ildizlarni tashlab yuborish kerak.

4.3.2. Teng kuchli tenglamalar haqida teoremalar.

1-teorema. $f_1(x)=f_2(x)$ (1) tenglama X to`plamda berilgan va F (x) ham shu to`plamda aniqlangan ifoda bo`lsin. U holda $f_1(x)=f_2(x)$ (1) va $f_1(x)+F(x)=f_2(x)+F(x)$ (2) tenglamalar X to`plamda teng kuchli bo`ladi.

Bu teoremani boshqacha ta'riflash mumkin ya`ni, aniqlanish sohasi X bo`lgan tenglamaning ikkala qismiga shu X to`plamda aniqlangan o`zgaruvchili bir xil ifoda qo`shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli bo`lgan yangi tenglama hosil bo`ladi.

Isbot. (1) tenglamaning yechimlari to`plamini $T_1$ bilan (2) tenglamaning yechimlar to`plamini T_2 bilan belgilaymiz.

Agar $T_1 = T_2$ bo`lsa, (1) va (2) tenglamalar teng kuchli bo`ladi. Aniq bunga ishonch hosil qilish uchun T_1 dagi istalgan ildiz (2) tenglamaning ham ildizi bo`lishini va aksincha, $T_2$ dagi istalgan ildiz (1) tenglama ildizi bo`lishini ko`rsatish lozim.

Aytaylik a soni (1) tenglamaning ildizi bo`lsin. U holda $a \in T_1$ va a (1) tenglamaga qo`yilganda uni $f_1(a)=f_2(a)$ to`g`ri sonli tenglikka, F (x) ifodani sonli ifoda F(a) ga aylantiradi. $f_1(a)=f_2(a)$ to`g`ri tenglikning ikkala qismiga F(a) sonli ifodani qo`shamiz. Natijada to`g`ri sonli tenglikning xossasiga ko`ra to`g`ri sonli tenglik hosil bo`ldi: $f_1(a) + F(a) = f_2(a) + F(a)$

Bu tenglikdan ko`rinib turibdiki, a soni (2) tenglamaning ham ildizi ekan.

Shunday qilib, (1) tenglamaning har bir ildizi (2) tenglamaning ham ildizi bo`lishi isbotlandi, ya'ni $T_1 = T_2$.

Tenglamalarni yechishda ko`pincha bu teoremaning o`zi emas, balki undan kelib chiqqadigan natijalar qo`llaniladi:

1. Agar tenglamaning ikkala qismiga ayni bir xil son qo`shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo`ladi.

[illegible] Agar tenglamaning birorta qo`shiluvchisini bir qismidan ikkinchi qismiga [illegible] qarama-qarshisiga o`zgartirib o`tkazilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo`ladi.

[illegible] teorema. $f_1(x)= f_2(x)$ tenglama X to`plamda berilgan hamda F (x) shu to`plamda aniqlangan va X to`plamdagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydigan ifoda bo`lsin. U holda $f_1(x) = f_2(x)$ va $f_1(x) \cdot F(x)= =f_2(x) \cdot F(x)$ tenglamalar X to`plamida teng kuchli bo`ladi (teorema isboti mustaqil ish [illegible] qoldiriladi).

[illegible] teoremadan tenglamaiarni yechishda ko`p qo`llaniladigan natija kelib chiqadi.

Natija. Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli ayni bir songa ko`paytirilsa berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo`ladi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

[illegible] Tenglamaga ta'rif bering. Tenglamani yechimi deganda nimani tushinasiz?
[illegible] Teng kuchli tenglamani misollar yordamida tushuntiring.
[illegible] Teng kuchli tenglamalar haqidagi teoremalarni ayting va isbotlang.

4.4. Bir o`zgaruvchili tengsizlik

Bizga x o`zgaruvchini o`zida saqlovchi aniqlanish sohasi X to`plamdan [illegible] $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo`lsin.

Ta'rif. $f_1(x) < f_2(x), \quad x \in X$ yoki $f_1(x) > f_2(x) \quad x \in X$ bir o`rinli [illegible] munosabatlarga bir o`zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Bunday tengsizliklarni yechish deganda x ni o`rniga qo`yganda tengsizlikni [illegible] tengsizlikka aylantiruvchi sonlar to`plami T ni topish tushuniladi. Bu sonlar to`plami tengsizlikni yechimlar to`plami deyiladi. Bir tengsizlikni har bir yechimi [illegible] tengsizlikni yechimi bo`lishi mumkin. U holda ikkinchi tengsizlik birinchi [illegible] natijasi deyiladi. Masalan, x>3 va x>6 tengsizliklarni olaylik.

Bundan 6 dan katta son 3 sonidan ham katta bo`ladi. Shuning uchun [illegible] x>6 tengsizlikning natijasi. Shu sababli berilgan tengsizlik natijasi [illegible] tengsizlikni yechimlar to`plami Q berilgan tengsizlik yechimlar to`plami [illegible] ichiga oladi ya'ni $T \subset Q$. Agar ikkita tengsizlik bir xil yechimlar to`plami [illegible] bo`lsa u tengsizliklar teng kuchli deyiladi. U holda bu tengsizliklar [illegible] natijasi bo`ladi.

Masalan, biror a soni 7 dan katta deyish bilan a+1 soni 8 dan katta [illegible] teng kuchli. Shuning uchun x>7 x+1>8 tengsizliklar teng kuchli [illegible] saqlovchi tengsizliklar predikatlar bo`lgani uchun, ularni kon'yunksiyasi [illegible] diz'yunksiyasi to`g`risida gapirish mumkin.

Masalan, a soni 3x-8>1 va 2x+5<15 tengsizliklarni qanoatlantirsa [illegible] tengsizliklarning $(3x-8>1) \wedge (2x+5<15)$ kon'yunksiyasini ham qanoatlantiradi [illegible] Bu a soni esa 4 sonidan iborat. Maktab kursida kon'yunksiya deb aytmasdan [illegible] quyidagi sistema ko`rinishida yozish qabul qilingan:

$$\begin{cases} 3x-8>1 \\ 2x+5<15 \end{cases}$$

Agar biror a sonida ikki va undan ortiq tengsizliklardan kamida [illegible] tengsizlik rost qiymatga ega bo`lsa, u tengsizliklar diz'yunksiyasi shu a sonida [illegible] qiymatga ega bo`ladi.

Masalan, - 2 soni $(2x>8) \vee (3x<-3)$ (1) tengsizliklar diz'yunksiyasi [illegible] yechimlar to`plamiga tegishli. Haqiqatan ham bu sonni birinchi tengsizlikka [illegible] qo`ysak, u holda $2\cdot(-2)>8$ degan yolg`on tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi [illegible] tengsizlikga qo`ysak, $3(-2)<-3$ degan rost tengsizlik hosil bo`ladi. Demak, [illegible] soni (1) tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to`plamiga tegishli.

Agar 0 sonini olsak, bu son tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar [illegible] to`plamiga tegishli emas, chunki 0 sonini (1) ga kiruvchi tengsizliklarga qo`ysak [illegible] $2\cdot 0>8$ va $3\cdot 0<-3$ degan yolg`on tengsizliklarga ega bo`lamiz. Qoidaga ko`ra [illegible] tengsizliklar yechimlar to`plami cheksiz, buni koordinatalar o`qida ko`rgazmali [illegible] tasvirlaydilar. Bunda yechimlar to`plami bir qancha juft-jufti bilan kesishmaydigan [illegible] nuqtalar, kesmalar, oraliqlar va nurlar orqali ifodalanadi.

[illegible] tengsizliklar uchun quyidagi teoremalar o`rinli (teoremalar isbotsiz [illegible]).

[illegible] Agar $F(x)$ ifoda ixtiyoriy $x \in X$ qiymatlarda aniqlangan bo`lsa, u [illegible] va $f_1(x)+F(x)<f_2(x)+F(x)$ tengsizliklar teng kuchli.

[illegible] Agar $F(x)$ ifoda barcha $x \in X$ larda aniqlangan hamda X sohada [illegible] u holda $f_1(x)<f_2(x)$ va $f_1(x)F(x)<f_2(x)F(x)$ tengsizliklar teng [illegible] aytganda, $F(x)$ manfiy bo`lmasa, u holda $f_1(x) \le f_2(x)$ va [illegible] tengsizliklar ham teng kuchli.

[illegible] quyidagi natijalar kelib chiqadi:

[illegible] Agar a soni musbat ya'ni a>0 bo`lsa, u holda $f_1(x)<f_2(x)$ va [illegible] tengsizliklar teng kuchlidir.

[illegible] Agar a<0 bo`lsa, $f_1(x)<f_2(x)$ va $af_1(x)>af_2(x)$ tengsizliklar teng [illegible] tengsizlik manfiy songa ko`paytirilsa, tengsizlik belgisi teskariga [illegible].

[illegible] $0<f_1(x)<f_2(x)$ va $0<\frac{1}{f_2(x)}<\frac{1}{f_1(x)}$ tengsizliklar bir-biriga teng [illegible]

[illegible] x+6 tengsizlik yechilsin.

[illegible] teoremaga asosan 3x –x>6+4 yoki 2x>10

[illegible] natijalariga ko`ra x>5.

[illegible] tengsizlik yechimlar to`plami]5;+∞[nurdan iborat.

[illegible] $(2x-3<5)\wedge(3x-5>1)$ tengsizliklar kon'yunksiyasi yechilsin.

[illegible] birinchi keyin ikkinchi tengsizlikni yechamiz.

$$2x-3<5 \Leftrightarrow 2x<8 \Leftrightarrow x<4$$
$$3x-5>1 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>2$$

[illegible] tengsizlik kon'yunksiyasini qanoatlantiruvchi sonlar ikkita tengsizlikni [illegible] kerak. Shu sababli kon'yunksiya yechimlar to`plami topilgan [illegible] to`plamining kesishmasidan iborat bo`ladi, ya'ni x<4 va x>2 nurlarning [illegible] iborat bo`ladi. Demak, yechimlar to`plami 2<x<4 sonlar [illegible] iborat.

$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)>0$ (*бунда* $a_1<a_2<...<a_n$) ko`rinishdagi tengsizliklarni yechish quyidagicha olib boriladi. $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)>0$ ko`paytma o`z ishorasini ko`paytuvchilardan biri ishorasini o`zgartirganda o`zgartiradi. Boshqacha aytganda $a_1, a_2, ... a_n$ nuqtalardan o`tishda o`zgartiradi. Bu nuqtalar sonlar o`qini $]-\infty;a_1[, ]a_1;a_2[, ... ]a_n;+\infty[$ oraliqlarga bo`ladi (57-rasm)

57-rasm

Har bir oraliqda ko`paytma o`zgarmas ishoraga ega. Shu sababli ko`paytmani har bir oraliqdagi bitta nuqtada ishorasini bilish yetarli. Shunday qilib barcha ko`paytmaning barcha oraliqlardagi ishoralarini aniqlaymiz. Ko`paytma musbat bo`lgan oraliqlarni birlashtiramiz. Bu birlashma $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)>0$ tengsizlikning yechimlar to`plami bo`ladi.

3-misol. $(x-2)(x+3)(x-7)(x+5)>0$ tengsizlikning yechimlar to`plami topilsin.

Yechish: 2, -3, 7, -5 nuqtalar sonlar o`qini $]-\infty;-5[, ]-5;-3[, ]-3;2[, ]2;7[, ]7;+\infty[$ oraliqlarga bo`ladi.

Oraliqlarda ko`paytma ishorasini aniqlaymiz. $]-\infty;-5[$ oraliqdagi ishorasini aniqlash uchun shu oraliqdan $-10$ sonini olib, ko`paytmadagi x o`rniga qo`yamiz, ya`ni (-10-2)(-10+3)(-10-7)(-10+5)>0 musbat, qolgan oraliqlardagi ishoralarini ham aniqlab sonlar o`qiga joylashtiramiz (58- rasm).

58- rasm

Musbat oraliqlar: $]-\infty;-5[,]-3;2[,]7;+\infty[$. Bu oraliqlarni birlashtirsak, u tengsizlikning yechimlar to`plami bo`ladi: $T=]-\infty;-5[\cup]-3;2[\cup]7;+\infty[$. Rasmdagi chiziqni ishoralar egrisi deyiladi.

O`z-o`zini tekshirish uchun savollar

1. Bir o`zgaruvchili tengsizlikni ta'riflang.
2. Tengsizliklar kon'yuksiyasi va diz'yunksiyasini misollar yordamida yechib ko'rsating.
3. Teng[illegible]
[illegible] tengligi, tengsizligini tushuntiring.
4. Teng kuchli tengsizliklar haqidagi teoremalarni aytib bering.
5. Bir o'zgaruvchili tengsizliklarni intervallar metodi bilan yechishni misol yordamida tushuntiring.

1.5. Geometriyaning rivojlanishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot

Geometriya tarixi qadimgi dunyoning uzoq o`tmishidan boshlanadi, lekin u qadimgi sharq mamlakatlarida paydo bo`lgan. Geometriyaning taraqqiyotini 4 ta davr bilan xarakterlash mumkin, lekin uning chegarasini biror ma'lum yillar bilan ajratib bo`lmaydi.

Birinchi davr —geometriyaning paydo bo`lish davri eramizdan oldingi V asrgacha bo`lgan davrni o`z ichiga oladi va qadimgi Misr, Vaviloniya va Gretsiyada yer o`lchash ishlarining taraqqiyoti bilan chambarchas bog`liqdir (geometriya so`zi ham grekcha: *γεω* — yer va *μετρεω* — o`lchayman so`zlaridan olingan bo`lib, lug`aviy ma'nosi yer o`lchash demakdir).

Grek tarixchisi Geradotning (tahminan miloddan avvalgi 465-425 y) yozib qoldirgan ma'lumotlariga ko`ra geometriyaga oid dastlabki ma'lumotlar Misrda paydo bo`la boshlagan. Aytishlaricha, shohlar misrliklarga dehqonchilik qilish uchun teng to`g`ri to`rtburchak shaklidagi yer maydonlarini taqsimlab berar va yer yuzlariga mos ravishda soliq undirishar ekan. Nil daryosining toshib ketishi natijasida buzilib ketgan maydonlar qaytadan o`lchanar va unga yarasha soliq miqdori qaytadan belgilanar ekan.

Yerlarni taqsimlash, soliq miqdorini belgilash, yuzlarni o`lchash, sug`orish inshootlarini qurish kabi bir qator ehtiyojiy zaruriyatlar Misrda geometriyaning shakllanishiga omil bo`lgan.

Antik Misr geometriyasi haqidagi ma'lumotlar Raynd va Moskva papiruslarida keltirilgan.

Papirus Misr daryolari bo`yida, bo`yi 3 m gacha yetadigan ko`p yillik o`simlik po`stloqlarini bir-biriga tekis yopishtirishdan hosil qilingan.

Papiruslarning birinchisini ingliz sayyohi va misrshunos Raynd 1858 yilda Nil daryosining o`ng qirg`og`ida joylashgan Luqsor qishlog`idan sotib olgan. Papirusning eni 30 sm, bo`yi 20 m bo`lib unda 80 masala berilgan. Papirus uni ko`chirib yozgan Axmes nomi bilan ham ataladi. Uni yozib qoldirishicha papirus miloddan avvalgi 2000-1800 yillarga tegishlidir. Papirusda keltirilgan 20 ta geometrik masaladan 8 tasi hajmni, 7 tasi yuzani va 5 tasi qiya piramida hajmini hisoblashga bag`ishlangan. Papirus matnini birinchi marta misrshunos Geydelberg universiteti olimi Avgust Eyzenlar (1805-1880) o`qishga muyassar bo`lgan va nemis tiliga tarjima qilgan va sharhlar keltirgan holda chop qilgan. Papirus bugungi kunda qisman Britaniya va Nyu-York davlat muzeylarida saqlanmoqda. Ikkinchi "Moskva" papirusini rus olimi, sharqshunos V.S.Golenishchev 1893 yilda Peterburg davlat Ermitajida saqlanayotganini aniqlagan. 1930 yilda mashhur sharqshunos B.A.To`rayev va V.V.Struve tomonidan nemis tiliga tarjima qilingan va nashr ettirilgan. Manbaning eni 8 sm bo'yi 5,44 m ni tashkil etib, u o'z ichiga 18 ta arifmetik, 7 ta geometrik masalani oladi. Papirus Moskva nafis san'at muzeyida saqlanmoqda.

Raynd va Moskva papiruslari qadimgi Misr yozuvida bitilgan. Misrliklar yozishda iyerogliflardan foydalanganlar. Iyerogliflar vazifasini hayvonlar, qushlar, hashoratlar, odamlar, anjomlarni ifoda qiluvchi rasmlar bajargan.

Qog'oz vazifasini o'tovchi papirus kashf qilingach iyerogliflar o'rnini ieratik yozuvlar egallagan. Raynd va Moskva papiruslari ieratik yozuvda bitilgan, faqat Raynd papirusining yakuni iyeroglif yozuvda bayon qilingan.

Papiruslar tahlili shuni ko`rsatadiki misrliklar kvadrat, teng yonli uchburchak, teng yonli trapetsiya, doira yuzasini, asosi kvadrat bo`lgan kesik [illegible] hajmini hisoblashni bilganlar. Ularni ekin maydonlari yuzini hisoblash, mahsulotlarni taqsimlash, omborlar, idishlar sig'imini o'lchashga tadbiq qila olganlar.

Shuningdek ular bir noma'lumli chiziqli tenglamani yechishni bilganlar. [illegible] papirusida shularga doir 15 masala, Moskva papirusida esa 3 masala keltirilgan.

Antik davr madaniyati o'choqlaridan yana biri ikki Frot va Dajla (Tigr va Evfrat) daryo oralig'i madaniyatidir. Bu madaniyat tarixda Shumer - Bobil madaniyati deb nom qozongan. Ikki daryo oralig'ida papirus o`smagani sababli bobilliklar yozuvlarni yumshoq loydan yasalgan taxtachalarga bambuk yoki suyak [illegible] yozganlar va ularni oftob, yoki olovda quritganlar.

Quritilgan taxtachalar papiruslarga qaraganda mustahkam bo'lganidan [illegible] "mixxatlar" da yozilgan matnlar papiruslarga qaraganda ko'proq yetib kelgan. Hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlari muzeylarida miloddan avvalgi III mingliklarga taaluqli bo'lgan 560 mingga yaqin sopol matnlar saqlanmoqda.

Bobilliklar shuningdek tenglamalar sistemasi va ikkinchi darajali tenglamalarni yecha olganlar. Bobil matematikasi Misr matematikasi kabi ko'proq amaliy ahamiyat kasb etgan bo'lsada, ular algebraik shakl almashtirishlar bajara olganlar va ularni tenglamalarni yechishga tadbiq qila bilganlar.

Bobil matematikasida abstraktlashtirish jarayoni misrliklarga qaraganda ancha yuqori bo'lgan. Matematikaning keyingi rivoji Yunoniston bilan bog`liqdir. Misr va Bobilliklar bilan o'rnatilgan aloqalar Yunonistonga madaniyat bilan bir qatorda to'plangan matematik tushunchalarni ham olib keladi. Yunonlar ularni o'zlashtiribgina qolmay, balki ularni asoslash, hulosalash va isbotlashga harakat qilganlar.

Eramizdan oldingi VII asrda geometrik ma'lumotlar grek tarixchilarning fikriga qaraganda, Misr va Vaviloniyadan Gretsiyaga o`tgan. Grek faylasuflari Misr va Vaviloniya donishmandlarining ishlari bilan tanisha boshlagan. Ana shu [illegible] boshlab geometriya taraqqiyotining ikkinchi davri - geometriyani fan sifatida sistemali bayon qilish davri boshlanadi, bunda barcha jumlalar isbot qilinar edi. Ular matematikani dunyoni bilish, borliqni anglash va unda insonning tutgan o'rnini aniqlash maqsadida o'rganganlar va rivojlantirganlar. Shuning uchun ta'kidlash kerak Yunonistonda dastlab shakllangan maktablar falsafiy yo'nalish kasb etgan. Bu maktablarda matematika falsafa bilan uzviy aloqadorlikda rivojlangan. Ana shunday maktablardan dastlabkisi Milet maktabidir. Maktabga yunon matematikasining otasi hisoblangan Miletlik savdogar Fales (640-556 e.o.) asos solgan, uning exrom balandligini soyasiga qarab o'lchay olganligi, dengizdagi kemadan qirg'oqqacha bo'lgan masofasini aniqlaganligi, sirkul asbobidan birinchi bo'lib foydalanganligi e'tirof etiladi. Shuningdek eramizdan avvalgi 585 yil 28 mayda bo'lib o'tgan quyosh tutilishini oldindan aytib berganligi tarixiy manbalarda qayd etilgan.

Yunon matematikasining rivojiga Pifagor va uning shogirdlari munosib hissa qo'shgan. Falsafiy yo'nalishdagi Pifagor maktabi yuqori mavqega ega bo'lgan. Pifogor va uning shogirdlari uchburchak ichki burchaklari yig'indisi, dunyoga Pifagor teoremasi nomi bilan mashhur bo'lgan teoremani isbot qilganlar, muntazam ko'pyoqlilar soni beshta ekanligi, o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar mavjud ekanligini aniqlaganlar.

Demokrit (330-275 e.o.) "Bo'linmas zarrachalar" metodini yaratadi, u dunyo bo'linmas zarrachalar-atomlardan tashkil topgan degan fikrni ilgari suradi. Uning fikricha har bir geometrik figura bir qancha elementar qismlardan iborat bo'lib, figura hajmi elementar figuralar hajmlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Platon maktabida yasashga doir geometrik masalalar yechilgan. Sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydigan kub hajmini ikkilantirish masalasini Platon tomonidan yaratilgan asbob yordamida yechganlar. Yasashga doir geometrik masalalarni bosqichlab yechish metodi, geometrik o'rin g'oyasi shu maktabda asoslangan va bir qancha egri chiziqlar yasalgan.

Evdoks (410-355 e.o.) Platon maktabi vakili bo'lib praporsiyalar nazariyasiga asos solgan. Pifagor izdoshlari yaratgan sonli nisbat tushunchasidan farqli o'laroq bu nazariyani u o'lchovdosh bo'lgan kesmalar bilan bir qatorda o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar uchun ham qo'llagan, natijada irratsional son asos solgan. Nisbatlar nazariyasi yordamida piramida, konus hisoblagan. Evdoksning shogirdi Menexm nomi esa konus kesimlar bilan bog'langandir. Buyuk faylasuf Aristotel mantiq ilmining rivojiga hissa qo'shadi. Faxrli ravishda Aristotel, formalogika fani va deduktiv asoschisi hisoblanadi.

Eramizdan oldingi III asrga kelib Yunonistonda shakllangan falsafiy namoyondalari Misr va Bobilliklar yaratgan matematik tushunchalar va tanqidiy o'rganish asosida ularni rivojlantirdilar, tushuncha va g'oyani ilmiy bayon etish yo'llarini isbotlash usullarini (tahlil, sintez, hulosa hukm chiqarish) yaratishga harakat qildilar va bu metodlarni mukammallashtirdilarki toki ular mavjud bo'lgan tushunchalarni tizimlashtirish bayon qilishni taqoza etdi.

Geometriyani deduktiv prinsipda qurishni grek olimi Yevklid o'z nisbatan qoniqarli hal qilib, 13 ta kitobdan iborat "Negizlar" nomli yaratdi. Yevklid hayoti haqida to'la ma'lumotlar bizgacha yetib kelmagan u eramizdan avvalgi 300 yillarda yashagan bo'lib, Ptolomey podshohlik davrida Aleksandriyada matematikadan dars bergan va shoh tomonidan qilingan muzeyni matematika bo'limini yaratgan.

Yevklid "Negizlar" kitobiga o'zidan oldin o'tgan olimlarning eng muhim kiritdi va geometriyada unga qanoatlanarli bo'lmagan qoidalarni isbotini berdi. "Negizlar "dagi ba'zi teoremalarni Yevklid o'zi kashf shubhasizdir. Lekin "Negizlar" kitobidagi mualifning asosiy xizmati u asrlar davomida yig'ilib kelgan geometrik bilimlarni hammasini bir sistemaga soldiki, bu sistema uzoq vaqtlargacha aniqlik va qat'iylik bo'lib keldi. Hech bir ilmiy kitob Yevklidning "Negizlar" kitobi singari ko'p umr ko'rgan emas.

Bu kitob avval juda ko'p marta qo'lda ko'chirilgan, so'ng dunyodagi hamma qayta-qayta nashr qilingan. Yevklidning bu asari 1482-1880 yillar orasida tillarda 460 marta nashr qilingan. Shulardan 155 tasi lotin, 142 tasu ingliz, nemis, 18 tasi fransuz, 27 tasu italiya, 14 tasi golland, 5 tasi rus, 2 tasi palyak, qolganlari esa boshqa tillarga tarjima qilingan.

"Negizlar"kitobining qisqacha mazmuni.

1-kitob 34 ta qoida, 48 ta teoremadan iborat bo'lib, uchburchaklarning tenglik shartlari, uchburchak tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlari, parallelogram va uchburchakning yuzlari hamda Pifagor teoremasi haqida so'z yuritiladi.

2-kitob 2 ta qoida va 14 ta teoremadan iborat bo'lib, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ va shu kabi ayniyatlar geometrik formada talqin qilinadi.

3-kitob aylanaga bag'ishlanadi. Bunda asosan aylanaga o'tkazilgan kesuvchi, urinma, markaziy burchaklar, ichki chizilgan burchaklar qaraladi.

4-kitobda aylanaga ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar qaralib, muntazam to'rtburchak, beshburchak, oltiburchak va o'nburchaklarni yasash ko'rsatiladi.

5-kitobda asosan trapetsiyalar nazariyasi qaraladi.

6-kitobda praporsiyalar nazariyasining tadbiqi sifatida uchburchaklar o'xshashligi nazariyasi va ko'pburchak yuzlarini topish beriladi.

7-9 kitoblar arifmetika va sonlar nazariyasiga bag'ishlangan.

10- kitobda irratsional miqdorlar nazariyasi qaraladi.

11-13 kitoblar stereometriyaga bag'ishlangan bo'lib, ularda ko'pyoqlar va muntazam ko'pyoqlilar haqida ma'lumotlar beriladi.

Yevklidning "Negizlar" asari matematika fanining tadrijiy taraqqiyoti uchun o'ta muhim ahamiyat kasb etadi. Yunon matematikasida o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar va irratsionallik tushunchalarning vujudga kelishi bilan vujudga kelgan qiyinchiliklarni to'g'ri bartaraf qila olmaslik, ya'ni irratsional son tushunchasi, sonli to'plamlarni kengaytirish va haqiqiy sonlar nazariyasini yaratish muammosini to'g'ri yecha olmaslik, ularning yechimini geometriyada to'g'rirog'i geometriya yasashlardan izlashga olib keladi.

Qadimgi quldorchilik tuzumining yemirilishi Gretsiyada geometriya taraqqiyotining to'xtalishiga olib keldi, lekin geometriya arab sharqi mamlakatlari [illegible] Hindistonda taraqqiy qila bordi.

Al-Xorazmiy matematika taraqqiyotida yana muhim o'rin tutgan algebraga [illegible] "Al-Kitob al-muxtasar fi xisob al-jabr va al-muqobala" nomli asarini yaratadi. [illegible] bilan algebraga asos soladi va algebrani aloxida fan darajasiga ko'taradi. [illegible] bu asari asosan uch bo'limdan iborat bo'lib, birinchi bo'limda al-[illegible] va al-muqobala (tiklash va qarama-qarshi qo'yish) yordamida birinchi va [illegible] darajali, bir noma'lumli tenglamalarni yechish, ratsional va irratsional [illegible] bilan amallar bajarish hamda tenglama yordamida sonli masalalarni [illegible] yo'llari beriladi. Ikkinchi bo'lim geometriyaga tegishli bo'lib, unda [illegible] o'lchash va o'lchashga doir masalalarga algebraning ba'zi bir [illegible] qo'llaniladi. Uchinchi bo'limida algebraning amaliy tadbiqi, ya'ni meros [illegible] doir masalalar beriladi.

[illegible] geometrik miqdorlarni son deb qarash bilan bu miqdorlar ustida [illegible] amallarni bajarishda son tushunchasini musbat xaqiqiy sonlargacha [illegible]

[illegible] geometriyaning asoschisi Evklidning asosiy geometrik tushunchalar [illegible] geometrik shakllarga bergan ta'riflarining ayrimlarini aniqlash va to'ldirish [illegible] ta'riflarga teng kuchli ta'riflar beradi.

[illegible] Xorazmiydan keyingi davrda Shark matematiklari algebra va [illegible] ayrim sohalarini juda tez rivojlantiradilar. Ular astronomiya va [illegible] oid masalalarni xal qilish kubik tenglamalarni yechimga keltirilishini [illegible] Kubik tenglamani yechish masalasini Umar Xayyom o'zining 1069-1071 [illegible] yozgan "Al-jabr va al-muqobila masalalarining isboti xakida" nomli [illegible] birinchi bo'lib xal qiladi. Kvadrat va kubik tenglamalarni 24 xil kanonik [illegible] tasnifini beradi.

[illegible] matematik Nasriddin Tusiy XIII asrda tekis va sferik [illegible] bir tizimga soladi va trigonometriyani alohida fan darajasiga [illegible] Nasriddin Tusiy geometriya va trigonometriyaning taraqqiyotida muhim [illegible] ega bo'lgan asarlar yozadi. U grek olimi Yevklidning "Negizlar" nomli [illegible] ko'shimchalar kiritish bilan "Taxrir Uxlidis" nomli asar yozgan.

Tusiy bu asarda Yevklidning fikrlarini rivojlantiradi va takomillashtiradi. Tusiyning eng muhim ko'shimchalaridan biri nisbatlar nazariyasidir. U nisbatlar nazariyasini ishlab chiqib, birinchi bo'lib, bir xil ismdagi miqdorlarning birining ikkinchisiga nisbati, ismsiz sonlar nisbati degan tushunchani fanga kiritadi va o'lchovsiz miqdorlarning nisbati son deb xisoblaydi. Tusiy "To'la to'rtburchaklar" (shakl ul kit'a) nomli trigonometriyaga doir asar yozib, sistemalashgan to'g'ri chiziqli va sfera trigonometriyani yaratadi hamda trigonometriyaning alohida darajasiga o'tishdagi muhim masalani to'la-to'kis hal qiladi.

Jamshid Koshiy Samarqandda Ulug'bek rasadxonasini qurish ishlariga faol qatnashadi, chuqur ilmiy ishlar olib boradi. "Vatar va sinus haqida risola" asarida bir gradusli burchakning sinusi aniqlanadi. "Aylana uzunligining diametrga nisbati" asari 1424 yilda Samarqandda fors-tojik tilida yozilgan.

Yevropada kapitalizmning paydo bo`lishi geometriya taraqqiyotining yangi uchinchi davriga olib keldi; XVII asrning birinchi yarmida Dekart va Fermaning analitik geometriya yaratishi shu davrga mansubdir.

Analitik geometriya koordinatalar metodiga tayanib geometrik shakllar xossalarini ularning algebraik tenglamalariga qarab tekshiradi. Differentsial hisob va geometrik shakllarning lokal xarakterdagi (berilgan nuqta atrofidagi) xossalarini tekshirish, munosabati bilan Eyler va Monj asarlarida XVIII asrda differentsial geometriya yaratildi. XVII asrning birinchi yarmida J. Dezarg va B. Paskal asarlarida proyektiv geometriya paydo bo`la boshladi, bu geometriya dastlab perspektivalarni tasvirlashni o`rganishda, undan keyin esa fazoning biror nuqtasidan bir tekislikni ikkinchi tekislikka proeksiyalashda shakllarning o`zgarmaydigan xossalarini o`rganishda paydo bo`ldi va nihoyat J. Ponsele asarlarida takomillashtirildi.

Geometriya taraqqiyotining to`rtinchi davri noyevklid geometriyalarning yaratilishi bilan nishonlanadi. Bu geometriyalardan birinchisi Lobachevskiy geometriyasi bo`lib uni Lobachevskiy geometriyani asoslashni tekshirishda, jumladan parallel to`g`ri chiziqlar haqidagi aksiomani tekshirishda yaratgan. [...]

...ning mazmunini N. I. Lobachevskiy birinchi marta 1826 y. da Qozon ...ning fizika-matematika fakulteti majlisida bayon qildi. Uning asari esa 1829 y. da e'lon qildi. Venger matematigi Yanosh Boyan shu masala haqidagi biroz ...ini 1832 y. da e'lon qildi. Lobachevskiy geometriyasining yaratilishidan ... matematikada, jumladan geometriyada aksiomatik metodning ahamiyati ... qoldi. Evklid geometriyasi (maktabda o'qitiladigan odatdagi ... geometriya) keyinchalik aksiomatik jihatdan asoslab berildi. Lobachevskiy geometriyasi, proyektiv geometriya, affin geometriya, ko'p ... (n o'lchovli) Evklid geometriyasi va boshqa geometriyalar ham ... asoslandi.

Hozirgi vaqtda geometriya ko'p xil geometriyalar va nazariyalarni o'z ichiga ... bo'lib, ular orasida aniq chegara yo'q. Shu bilan birga ayrim geometrik ... analiz (differentsial geometriya) bilan, to'plamlar nazariyasi (nuqtalar ... nazariyasi, topologiya) bilan qo'shilib ketgan. Har bir geometriya ... qanday fazoni tekshirishi bilan (Evklid, Lobachevskiy geometriyalari), qanday metodlardan foydalanishi bilan masalan, analitik geometriyada 2- tartibli egri chiziqlarning analitik nazariyasi,- yoki sintetik geometriyada 2-tartibli. egri chiziqlarning sintetik, sof geometrik nazariyasi, ... ob'yektlarni (shakllarni) yoki ularning xossalarini tekshirishi bilan ... ko'p yoqlilar va, ularniig xossalarini, egri chiziq va sirtlarni va h. k. larni ... bilan farq qiladi. Metrika masalalari (kesmalar uzunliklari, burchaklar va ... o'lchash) metrik geometriya tushunchasiga olib keladi. Intsidentsiya ... joylanishlik) masalalari holat geometriyasi, ya'ni proyektiv geometriya tushunchasiga olib keladi.

Geometriyani asoslash masalalari uning mantiqiy asoslarini, uning ... va tuzilishini o'rganuvchi elementar geometriya bo'limiga ... bu ilmiy fan geometriya asoslari deb ataladi.

Geometriyalarning har birini Kleynning taklifiga ko'ra uning o'rganadigan ... gruppasi orqali xarakterlash mumkin. Masalan, elementar geometriya Yevklid harakatlari gruppasi bilan, affin geometriya affin almashtirishlar gruppasi bilan, proyektiv geometriya barcha kollineatsiyalar (proyektiv almashtirishlar) gruppasi bilan xarakterlanadi.

4.6. Maktabda o`rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi

Boshlang`ich ta'lim umumiy o`rta ta'lim tizimida muhim bo`g`in hisoblanib mazmun va mohiyat jihatidan maktabgacha ta'lim jarayoni bilan ta'limning navbatdagi yuqori bosqichi bo`lgan o`rta ta'limni o`zaro bog`laydi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalar egallashi lozim bo`lgan matematik bilim ko`lami o`ziga xos xususiyatlarga ega bo`lib u ilk matematik tasavvurlar ko`rinishida shakllantiriladi va maktabgacha yoshdagi bolalarning rivojlanishiga qo`yilgan davlat talablari asosida belgilanadi.

Davlat talablarini amaliyotga joriy etish borasida ishlab chiqilgan tayanch dasturlarda ilk matematik tasavvurlarni shakllantirish asosan son va sanoqqa, miqdor, shakl, fazoviy tasavvur va vaqtga oid tasavvurlarni shakllantirish yo`nalishlarida olib borish tavsiya etiladi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalarda harakatli konkret va ko`rgazmali obrazli mantiqiy tafakkur vositasida uchburchak, to`rtburchak, kvadrat, aylana, doira, oval, ko`pburchak, kub, silindr, shar kabi geometrik figuralar ularning ba'zi bir xossa va xususiyatlari haqida tasavvurlar shakllantiriladi.

Boshlang`ich maktab matematika kursi arifmetika, algebra va geometrik materialni o`quvchilarni yosh xususiyatlarini hisobga olgan holda berilgan arifmetik negizida mutanosib mujassamlashuvi asosida o`rgatiladi. Maktabgacha ta'lim jarayonida tasavvurlar shaklida egallangan geometrik material boshlang`ich ta'lim jarayonida o`tkir, o`tmas, to`g`ri burchak, uchburchak, to`g`ri to`rtburchak, kvadrat, ko`pburchak, kesma uzunligi, yuza, perimetr, ko`pyoqli va uning elementlari, hajmiga oid tushunchalar qadar kengaytiriladi.

Boshlang`ich sinflarda tushuncha shaklida egallangan geometriyaga oid bilimlar yuqori sinflarda chuqurlashtiriladi, kengaytiriladi va aniqlashtiriladi. Yuqori sinflarda

...geometriyaning sistemali kursi o`rgatiladi. Sistemali kurs ikki qismdan iborat bo`lib ular «Planimetriya» va «Stereometriya» deb yuritiladi.

Planimetriya kursida bir tekislikka tegishli bo`lgan figuralarning xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlar, yuzalarni o`lchash masalalari o`rganiladi.

Barcha nuqtalari bilan bir tekislikka tegishli bo`lmagan figuralar xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlarni, hajmlarni o`lchash masalalari stereometriya kursida o`rganiladi.

Planimetriya va stereometriyaning sistemali kurslarini o`rganish asosan boshlang`ich tushunchalar, boshlang`ich munosabatlar, boshlang`ich tushunchalar hamda boshlang`ich munosabatlar orasidagi bog`lanishlarni ifodalovchi aksiomalar sistemasini keltirish orqali boshlanadi.

Geometriyaning bu tariqa bayon qilinishi fanda mazmunli aksiomatik bayon deb atalib uning ibtidosi Evklidga borib taqaladi. Evklid «Negizlar» asarining har bir kitobini deduktiv bayon asosida yaratgan bo`lib kitobda dastlab ta'riflar, postulatlar, aksiomalar so`ngra esa ta'rif, postulot va aksiomalar yordamida isbotlanadigan xossa va xususiyatlarni ifodalovchi teoremalarni keltirgan. Shu tariqa Evklid ilmiy asosli mantiqiy bayonning dastlabki namunasini birinchilar qatorida yaratdi. O`z davrining yetuk asari hisoblangan «Negizlar» olimlar tomonidan chuqur o`rganilishi natijasida qator kamchiliklar mavjudligi aniqlangan.

Evklid tomonidan berilgan ta'riflarni o`rganish ularda uchraydigan «uzunlik» «kenglik» kabi tushunchalarning o`zlari ta'rifga muhtoj ekanligi, kitoblarda berilgan ta'rif, aksioma va pastulotlar tegishli teorema va isbot talab qiluvchi mulohazalarni isbotlash uchun yetarli emasligi, hamda ular nuqta, to`g`ri chiziq va tekisliklar orasidagi munosabatlarni asoslash uchun yetarli emasligi aniqlangan.

Evklid sistemasini tanqidiy o`rgangan David Gilbert, birorta ilmiy nazariyani qurish uchun dastlab ta'riflanmaydigan boshlang`ich tushunchalar, so`ngra boshlang`ich tushunchalar orasidagi bog`lanishlarni izohlovchi boshlang`ich munosabatlar, boshlang`ich tushunchalar va boshlang`ich munosabatlar orasidagi bog`lanishlarni izohlovchi aksiomalar qabul qilish asosida mazkur ilmiy [illegible] oid faktlarni isbotlash lozim degan g`oyani ilgari suradi, g`oyaga asoslangan [illegible] fanda aksiomatik metod qabul qilingan. Mazkur g`oyani u 1899 yilda [illegible] «Geometriya asoslari» kitobida bayon qilgan.

D.Gilbert Ekvlid geometriyasini asoslash uchun boshlang`ich [illegible] sifatida «nuqta», «to`g`ri chiziq», «tekislik» ni boshlang`ich munosabatlar [illegible] «yotadi», «orasida yotadi», «tegishli» munosabatlarini, aksiomalar [illegible] guruh aksiomalarni qabul qiladi. Birinchi guruh tegishlilik aksiomalari [illegible] tarkibiga 8 ta aksioma, ikkinchi guruh tartib aksiomalari 4 ta, uchinchi [illegible] kongruentlik 5 ta, to`rtinchi guruh uzluksizlik 2 ta, beshinchi guruh parallellik 1 [illegible] aksiomadan iborat bo`lib jami 20 ta aksiomani tashkil qiladi.

Planimetriyaning tizimli kursi ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar [illegible] va «to`g`ri chiziq»ni, boshlangich munosabat sifatida "yotadi", [illegible] munosabatlarni, asosiy tushunchalar va asosiy munosabatlar orasidagi [illegible] mohiyati va xususiyatini ochib beruvchi 2 ta tegishlilik, 2 ta tartib, 3 ta o`lchash [illegible] kongruentlik, 1 ta parallellik aksiomalari vositasida bayon qilinadi.

Planimetriya kursida burchaklar, uchburchak, to`rtburchaklar, aylana [illegible] ularning xossalari, perimetri, yuzlari, geometrik figuralarning xossalari, [illegible] elementlari orasidagi o`zaro bog`lanishlar teorema sifatida isbotlanadi.

Stereometriya kursida ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar sifatida [illegible] "to`g`ri chiziq", "tekislik" tushunchalari olinadi. Asosiy tushunchalar [illegible] "tekislik" tushunchasining kiritilishi planimetriyada qabul qilingan [illegible] sistemasini kengaytirishni talab etadi. Shuning uchun fazoviy figuralar [illegible] xususiyatlarini o`rganish, teoremalarni isbot qilish maqsadida stereometriya [illegible] quyidagi aksiomalar qabul qilinadi. Maktab geometriya kursida bu [illegible] gruppa aksiomalar deb yuritiladi.

S_1 : tekislik qanday bo`lmasin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va [illegible] bo`lmagan nuqtalar mavjud.

S_2 : agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo`lsa ular [illegible] bo`ylab kesishadi.

S3. Agar ikkita turli to`g`ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo`lsa ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o`tkazish mumkin.

Planimetriya kursi aksiomalari faqat bitta tekislikda joylashgan nuqtalar va to`g`ri chiziqlar orasidagi munosabatlarni izohlagani va stereometriyada esa bunday tekisliklar ko`p sonli ekanligini inobatga olib planimetriya kursi aksiomalari quyidagi stereometriya kursiga moslashtirilgan holda qabul qilinadi. Bu aksiomalar quyidagilar:

I. To`g`ri chiziq qanday bo`lmasin, bu to`g`ri chiziqqa tegishli va tegishli bo`lmagan nuqtalar mavjud;

II. Istalgan ikki nuqtadan to`g`ri chiziq o`tkazish mumkin va faqat bitta;

III. To`g`ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi;

IV. Tekislikka tegishli to`g`ri chiziq teksilikni ikkita yarim tekislikka ajratadi;

V. Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Kesma uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan qismlari uzunliklarining yig`indisiga teng;

VI. Har bir burchak noldan katta tayin gradus o`lchovga ega. Yoyiq burchak 180° ga teng. Burchakning gradus o`lchovi o`zining tomonlari orasidan o`tuvchi har qanday nur yordamida ajratilishidan hosil qilingan burchaklarning gradus o`lchovlari yig`indisiga teng;

VII. Berilgan yarim to`g`ri chiziqqa uning boshlang`ich nuqtasidan berilgan uzunlikdagi yagona kesma qo`yish mumkin;

VIII. Tekislikka tegishli bo`lgan yarim to`g`ri chiziqdan berilgan yarim tekislikka 180° dan kichik bo`lgan berilgan gradus o`lchovli burchak qo`yish mumkin va faqat bitta;

IX. Uchburchak qanday bo`lmasin berilgan tekislikda undagi berilgan yarim to`g`ri chiziqqa nisbatan berilgan vaziyatda joylashgan shu uchburchakka teng uchburchak mavjud [illegible]

X. Tekislikda berilgan to`g`ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to`g`ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to`g`ri chiziq o`tkazib bo`lmaydi.

Yuqorida qayd qilingan I-V guruh aksiomalari va S_1, S_2, S_3 aksiomalar birgalikda streometriya aksomalar sistemasini tashkil qiladi

Maktab streometriya kursida to`g`ri chiziqlar va tekisliklarning parall... perpendikulyarligi, to`g`ri chiziq va tekislikning, to`g`ri chiziqlarning o... munosabatlari o`rganiladi.

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini kiritish orqali ikki nuqta orasi... masofa, vektor, koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar, to`g`ri ch... tenglamalari, to`g`ri chiziqlar va tekisliklar orasidagi burchak shuningdek ko`pyoqlilar ularning xossalari, yon va to`la sirtlari, hajmlari o`rganiladi.

4.7. Geometrik figuralar, ularning ta'rifi, hossalari va alomatlari

4.7.1. Uchburchaklar

Ta'rif. Bir to`g`ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta va uchlari ularning ik... ikkalasiga tegishli bo`lgan uchta kesmadan iborat geometrik shakl uchburchak deyiladi. A, B, C uchburchakuchlari, AB, BC, AC tomonlari $\angle BAC$, $\angle ABC$, ... ichki burchaklardir. $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$ (59-rasm).

Uchburchaklarni tomonlari va burchaklariga nisbatan klassifikatsiya... mumkin. Agar uchburchakning uchta tomoni o`zaro teng bo`lsa teng tomonli, ikki tomoni o`zaro teng bo`lsa teng yonli, uch tomoni o`zaro teng bo`lmasa turli tomonli uchburchak hisoblanadi. Agar uchburchakning ichki burchaklari o`tkir burchaklardan iborat bo`lsa o`tkir burchakli, bir burchagi o`tmas burchak bo`lsa o`tmas burchakli, bir burchagi to`g`ri burchak bo`lsa to`g`ri burchakli uchburchak deyiladi.

59-rasm

Har qanday uchburchak uchta tomoni, bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi yoki ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi bilan to`la aniqlanadi.

Uchta a, b, c tomonlariga ko`ra berilgan uchburchak mavjud bo`lishi uchun uning ixtiyoriy ikki tomonining yig`indisi uchinchi tomonidan katta bo`lishi shart

60-rasm

$a+b>c$; $a+c>b$; $c+b>a$ tengsizlik uchburchak tengsizligi deyiladi. Ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko`ra berilgan uchburchak mavjud bo`lishi uchun $\alpha<180^0$ tengsizlik, bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko`ra berilgan uchburchak mavjud bo`lishi uchun $\alpha+\beta<180^0$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarlidir.

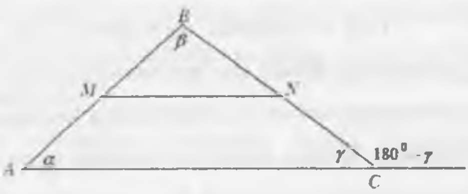
To`g`ri burchakli uchburchakda to`g`ri burchak qarshisida yotgan tomon gipotenuza, qolgan tomonlari katetlar deb ataladi. BC gipotenuza, AB va AC katetlar (60-rasm).

Ikkala kateti teng bo`lgan to`g`ri burchakli uchburchakka teng yonli to`g`ri burchakli uchburchak deyiladi va uning o`tkir burchaklari 45^0 ga teng bo`ladi.

$\angle ABC=45^0$, $\angle ACD=45^0$.

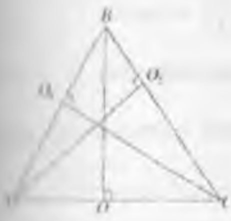
Uchburchakda teng tomonlar qarshisida teng burchaklar, teng burchaklar qarshisida teng tomonlar, katta burchak qarshisida katta tomon, kichik tomon qarshisida esa kichik burchak yotadi. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchaklari yig`indisi uning uchinchi burchagining qo`shni burchagiga tengdir (61-rasm).

$$\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma=180^0$$
$$\angle\alpha+\angle\beta=180^0-\angle\gamma$$

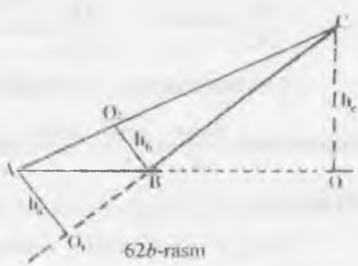


61-rasm

Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomoniga tushirilgan



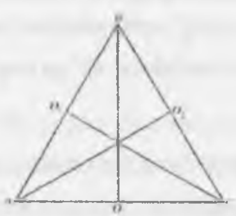
62a-rasm



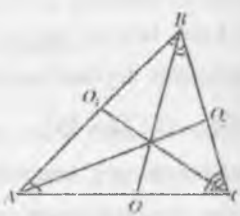
62b-rasm

perpendikulyar uchburchakning balandligi deyiladi. (62*a*, 62*b*-rasmlar). 62*a* va 62*b* rasmlarda o`tkir va o`tmas burchakri uchburchak balandliklari ko`rasatilgan. Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomonini teng ikkiga bo`luvchi kesma mediana deyiladi (63-rasm).

Uchburchakning bir uchidan chiqib shu burchakni teng ikkiga bo`luvchi kesma bissektrisa deyiladi (64-rasm). Uchburchakning ixtiyoriy ikkita tomoni o`rtalarini tutashtiruvchi kesma uchubrchakning o`rta chizig`i deyiladi. Uchburchakning o`rta chizig`i uning uchinchi tomoniga parallel bo`lib, parallel tomon uzunligining yarmiga teng bo`ladi.



63-rasm



64-rasm

Teng yonli uchburchakda asos qarshisidagi uchdan asosga tushirilgan balandlik mediana va bissektrisa vazifasini bajaradi.

To`g`ri burchakli uchburchak o`tkir burchagi qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning sinusi, o`tkir burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning kosinusi, o`tkir burchak qarsishidagi katetning yopishgan katetga nisbati shu burchak tangensi, yopishgan katetning qarshi yotgan katetga nisbati shu burchak katangensi deyiladi.

$$\frac{AC}{DC} = \sin\alpha\ , \quad \frac{AD}{DC} = \cos\alpha\ , \quad \frac{AC}{AD} = tg\alpha\ , \quad \frac{AD}{AC} = ctg\alpha\,.$$

Uchburchakning tomonlari qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$. Bu munosabat sinuslar teoremasi deb yuritiladi (63-rasm).

To`g`ri burchakli uchburchakda gipotenuzaning kvadrati katetlar kvadratlarining yig`indsiga teng $a^2=b^2+c^2$. Bu munosabat Pifagor teoremasi deb

...Yuqorida keltirilgan munosabatlar isbotini talabaga havola qilamiz.

Uchburchaklar tengligi va o`xshashligi alomatlari.

1-alomati.

Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi ...uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga mos ravishda ...bo`lsa bunday uchburchaklar tengdirlar.

2-alomati.

Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi ikkinchi ...uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagiga mos ravishda teng ...bunday uchburchaklar tengdirlar.

3-alomati.

Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta ...mos ravishda teng bo`lsa, bunday uchburchaklar tengdirlar.

Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi bir uchburchakning uchta ...mos ravishda proporsional bo`lsa bunday uchburchaklar o`xshashdirlar.

...bir uchburchakning ikki burchagi, ikkinchi bir uchburchakning ikki burchagiga ...teng bo`lsa bunday uchburchaklar o`xshashdirlar.

Agar bir uchburchakning ikki tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning ...proporsional bo`lib proporsional tomonlar orasidagi burchaklar teng ...bunday uchburchaklar o`xshashdirlar.

Uchburchakning medianalari uchburchak tomonlari orqali quyidagicha ...

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali quydigaicha ifodalanadi:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p-(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

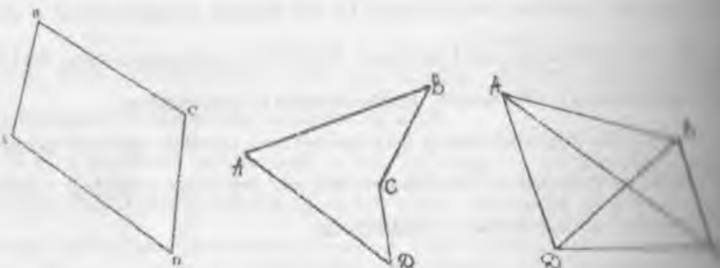
$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b},$$

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c},$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

4.7.2. To'rtburchaklar

Tekislikda hech bir uchtasi bir to`g`ri chiziqda yotmaydigan to`rtta [illegible] ularni har ikkalasini tutashtiruvchi, o`zaro kesishmaydigan to`rtta kesma[illegible] topgan geometrik shakl to`rtburchak deyiladi. *A, B, C, D* to`rtburchak [illegible] *BC, CD, AD* tomonlari, *AC, BD* diagonallar (65-rasm).

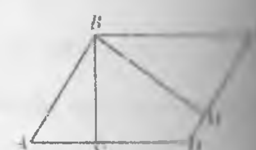


65-rasm

To`rtburchaklarning quyidagi turlari mavjud:

1. Parallelogramm. Tomonlari parallel to`g`ri chiziqlarda [illegible] to`rtburchak parallelogrammdir (66-rasm).

$AB \parallel CD \qquad |AB| = |CD| \qquad |AD| = |BC|$

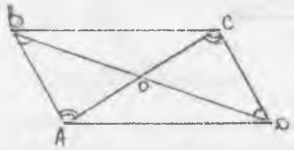


66-rasm

Parallellogramning bir uchidan chiqib qarshi otgan tomonga tushirilgan perpendikulyar uning balandligidir. *BN, BM* balandliklar.

Teorema. Parallelogramm diagonallari bir nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linadi (67-rasm).

Isbot. AC va BD diagonallari o`tkazamiz. Diagonallar bir nuqtada kesishadi.



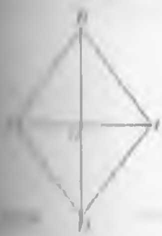
67-rasm

$(AC)\bigcap(BD)=\{0\}$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAO=\angle DCO\\ \angle CDO=\angle ABO\\ |AB|=|CD|\end{array}\right\}\Rightarrow$$ ga ko`ra $\Delta BOA=\Delta COD$ bundan $OB=OD$ $OC=OA$.

Xuddi shuningdek $\Delta BOC=\Delta AOD$ tengliligini ko`rsatish mumkin.

3. **Romb**



Hamma tomonlari teng bo`lgan parallelogramm rombdir (68-rasm).

AC rombning kichik diagonali, *BD* rombning katta diagonali. $\Delta ABC=\Delta ADC$ ΔABC teng yonli uchburchak bo`lganidan $OB\perp AC$, $AO=OC.$ $\Delta BAD=\Delta BCD$, ΔBCD teng yonli $BD\perp OC$, $OB=OD$ bundan esa quyidagi xossani

Xossa

kelib chiqishini ko`rish mumkin. Rombning diagonallari kesishish nuqtasida o`zaro perpendikulyar bo`ladi va teng ikkiga bo`linadi.

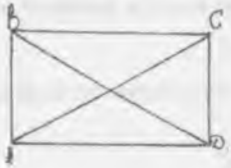
4. To`g`ri to`rtburchak

Hamma burchaklari to`g`ri burchak bo`lgan parallelogramm to`g`ri to`rtburchakdir (119-rasm).

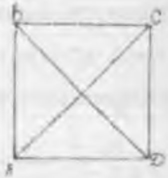
To`g`ri to`rt burchakning *AC* diagonali uni o`zaro teng ikkita *ABC* va *ADC* uchburchaklarga, *BD* diagonali esa *BAD* va *BCD* uchburchaklarga ajratadi.

Bu uchburchaklar ikkita tomoni va ular orasidagi burchagiga ko`ra tengdirlar.

Bu esa bizga to`g`ri to`rtburchakning diagonallari o`zaro tengdir degan xulosa chiqarishga asos bo`ladi.



69-rasm



70-rasm

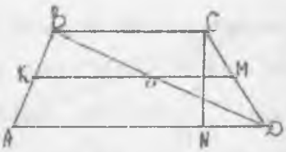
4. Kvadrat

Hamma tomonlari teng bo`lgan to`g`ri to`rt burchak kvadratdi [illegible] diagonallari ham to`g`ri burchak ostida kesishishini xossa sifatida isbotlash [illegible] (70-rasm).

Kvadratni hamma burchaklari teng romb sifatida ham qarash [illegible] Demak, kvadrat parallelogramm, romb, to`g`ri to`rt burchakka xos bo`lgan [illegible] xossalarga ega bo`ladi.

5. Trapetsiya

Ikki tomoni parallel qolgan ikki tomoni parallel bo`lmagan [illegible] trapetsiya deyiladi (71-rasm).



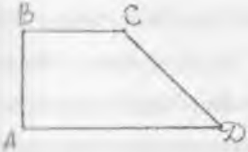
71-rasm

Trapetsiyaning parallel tomonlari uning asoslari (AD va BC). [illegible] tomonlaridir (AB va CD). Yon tomonlari o`rtalarini tutashtiruvchi [illegible] trapetsiyaning o`rta chizig`i deyiladi va asoslariga parallel bo`ladi. Trapetsiyaning [illegible] asosi uchidan ikkinchi asosiga tushirilgan perpendikulyar trapetsiyaning [illegible] (CN). Trapetsiyaning o`rta chizig`i asoslar yig`indisining yarmiga teng. [illegible] ham rasmdan:

$$KO = \frac{AO}{2},\ OM = \frac{BC}{2},\quad KO + OM = KM,$$

$$KM = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

72-rasmda teng yonli va to`g`ri burchakli trapetsiyalar tasvirlangan



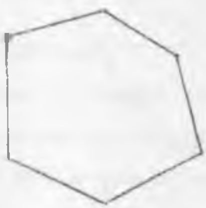
72a-rasm

72b-rasm

4.7.3. Ko'pburchak

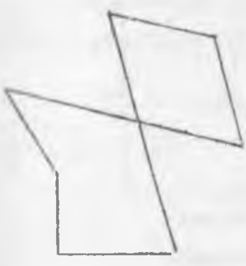
Birining oxiri bilan ikkinchisining boshi ustma- ust tushuvchi kesmalar [illegible] siniq chiziq deyiladi. Siniq chiziqni hosil qilayotgan kesmalar uning bo`g`inlari, oxiri va boshi bir nuqtada bo`lgan bo`g`inlar esa qo`shni bo`g`inlar [illegible]. Birinchi bo`g`inning boshi va so`ngi bo`g`inning oxiri ustma-ust tushgan [illegible] yopiq siniq chiziqdir.

Har ikkila bo`g`inni faqatgina bitta umumiy nuqtaga ega bo`lgan siniq chiziq [illegible] siniq chiziq sanaladi. 73-a, 73-b rasmlarda oddiy siniq chiziqlar, 73-a rasmda [illegible] siniq chiziq tasvirlangan. 73-d va 73-e rasmlarda oddiy bo`lmagan yopiq siniq [illegible] tasvirlangan.

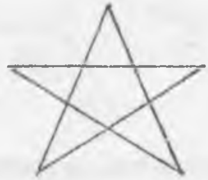


73a-rasm

73b-rasm



73d-rasm

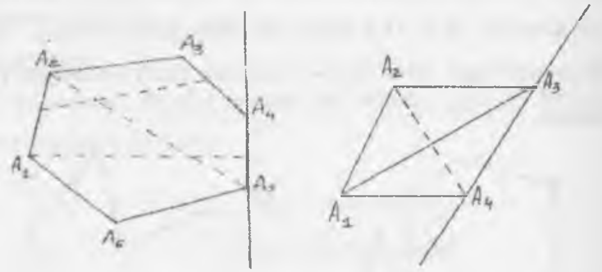


73e-rasm

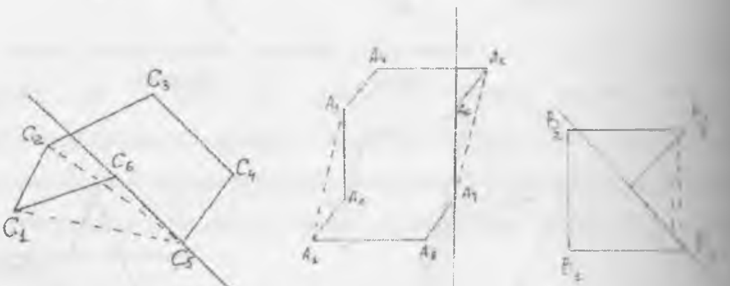
Biz 73-a va 73-b rasmlarda tasvirlangan oddiy siniq chiziqlarning xossa va [illegible] o'rganamiz. Oddiy yopiq siniq chiziq o`zi yotgan tekislikni ikkita

ichki va tashqi sohalarga ajratadi. Oddiy yopiq siniq chiziq o`zining ichki
bilan birgalikda ko`pburchak deyiladi. Ko`pburchakni chegaralab turgan
chiziqlar uning chegarasidir. Ko`pburchakni hosil qilayotgan bo`g`inlar
tomonlari, bo`g`inlarining kesishish nuqtalari esa uchlari hisoblanadi.

Ko`pburchakning tomonlari soni bilan uchlari soni teng, umumiy
ega bo`lgan tomonlar qo`shni tomonlar deyiladi. Ko`pburchaklar botiq va
ko`pburchaklarga bo`linadi. Agar ko`pburchakning har qanday ikkita
tutashtiruvchi kesma to`laligicha ko`pburchakka tegishli bo`lsa
ko`pburchakning ixtiyoriy tomoni orqali o`tgan to`g`ri chiziqdan ko`pburchak
barcha nuqtalari bir tarafida yotsa ko`pburchak qabariq ko`pburchaklar
(74a-rasm).



74a-rasm

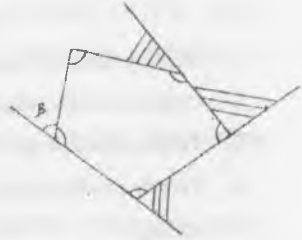


74b-rasm

74b- rasmda botiq ko`pburchaklar tasvirlangan.

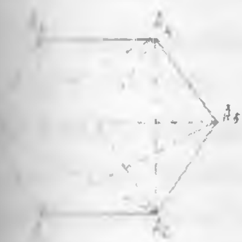
Ko`pburchakning qo`shni tomonlari bilan chegaralangan ichki
ichki burchagi ichki burchagiga qo`shni bo`lgan burchak esa tashqi burchak

(75-rasm). $\angle\alpha$ - ichki burchak $\angle\beta$ - tashqi burchak



75-rasm

Ko`pburchak o`zining burchaklari soni bilan nomlanadi. Agar ko`pburchakda burchaklar soni 3 bo`lsa uchburchak, 4 bo`lsa to`rtburchak va hakozo. Ko`pburchak ichki burchaklar yig`indisi $180^0(n-2)$ ga teng.

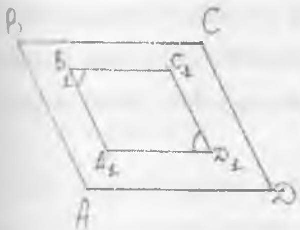


76-rasm

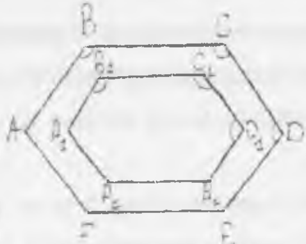
Ko`pburchak tomonlari uzunliklari yig`indisi perimetr deyiladi. Ko`pburchaklarning qo`shni bo`lmagan uchlarini tutashtiriuvchi kesma diagonaldir. Qavariq n-burchakning diagonallari soni $\frac{1}{2}n(n-3)$ ga teng. Hamma tomonlari, barcha ichki burchaklari teng bo`lgan ko`pburchak muntazam ko`pburchak deyiladi.

Muntazam ko`pburchak ichki burchagi $\frac{180^0(n-2)}{n}$ ga teng, n-ko`pburchak tomonlari soni (76-rasm).

Ko`pburchaklar o`xshashligi va tengligi quyidagicha ta'riflanadi: agar bir ko`pburchakning tomonlari va burchaklari mos ravishda ikkinchi ko'pburchakning tomonlari va burchaklariga teng bo'lsa bu ko'pburchaklar teng deyiladi. Agar bir ko`pburchakning tomonlari ikkinchi bir ko`pburchakning tomonlariga mos ravishda proporsional bo`lsa va proporsional tomonlar orasidagi burchaklar teng bo`lsa bunday ko`pburchaklar o`xshashdirlar (77a- 77b-rasmlar).



77a-rasm



77b-rasm

O`z o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Uchburchaklarni turlariga ta'rif berib, hossalarini ayting.
2. Uchburchaklar tengligi va o`xshashligi alomatlarini tushuntiring.
3. To`rtburchaklarga ta'rif bering, hossalarini ayting.
4. To`rtburchaklarning turlari va o`xshash ko`pburchaklar to`g`risida ma'lumot bering.

4.8. Matematik masalalar va ularni klassifikatsiyalash

Matematika kursida yechiladigan barcha masalalarni masalada berilgan ob`ektlarning xarakter va xususiyatlariga ko`ra, masalaning nazariy xarakteri, masalada qo`yilgan shartning xususiyatiga ko`ra shartli ravishda klassifikatsiyalash mumkin. O`z navbatida ob'ektlarning xarakter va xususiyatlariga ko`ra berilgan masalalarni amaliy va matematik masalaga bo`lish mumkin.

Agar masala shartidagi ob'ektlarning birortasi real predmetlardan iborat topgan bo`lsa, bunday masalaga amaliy masala deyiladi. Quyidagi masalani ko`rib chiqaylik.

Masala. Uzunligi 15 m ga teng bo`lgan telefon simi, yer sathidan 8 m balandlikda joylashgan simyog`ochdan uy oldidagi balandligi 20 m ga teng simyog`ochgacha tortilib mahkamlangan. Telefon simini tarang tortilgan hisoblab, uy bilan simyog`och orasidagi masofani toping.

Masala ob'ekti real predmetlardan iborat. Bular telefon simi, simyog`och va uy. Shuning uchun bu amaliy masaladir. Bu amaliy masalani matematik masalaga aylantirish uchun yoki masalani matematik ob'ektlar yordamida yechish uchun masala shartida berilgan real ob'ektlarni matematik o'ektlar bilan almashtirish kerak bo`ladi. Bu masalada tarang tortilgan ip, simyog`ochni, shartli ravishda kesma bilan almashtiramiz.

Masala: Agar uzunliklari 8 m va 20 m bo`lgan kesmalar ularni asoslarini birlashtiruvchi kesmaga perpendikular va kesmalar uchlari orasaidagi masofa 15 m bo`lsa, perpendikulyarlar asoslari orasidagi masofani toping. Matematika kursida [illegible] masalalar matematik masalalarga keltirilgan holda yechiladi. Demak, amaliy masalaning ob'ektlari real predmetlardan, matematik masalaning ob'ektlari esa matematik ob'ektlardan iborat bo`ladi.

Yechilish tartibi ma'lum qonun qoidalar asosida amalga oshiriladigan masalalar standart masalalar deb ataladi.

Ildiz chiqarish, darajaga ko`tarish, kvadrat tenglama ildizlarini topish, arifmetik, geometrik progressiyaning hadini hisoblash, geometrik figuralar yuzlarini [illegible], funksiyani differentsialini hisoblash, funksiya hosilasini, boshlang`ich funksiyani hisoblashga doir masalalar, oldindan ma'lum bo`lgan qoidalar, formulalar, teoremalar, ayniyatlar yordamida yechiladi.

Masala. Daryodan turistik bazagacha bo`lgan masofani turistlar 6 soatda [illegible] mo`ljalladi. Lekin 2 soat yurgach ular tezlikni 0,5 km/s kamaytirishgan. Natijada ular turistik bazaga 30 daqiqa kech qolib kirib kelishdi. Turistlarning [illegible] yalgi tezligini toping.

Masala matnli amaliy masaladir. Bunday masalalar uchun oldindan belgilangan yechish tartibi mavjud emas. Masalani yechishda qoida-so`z, qoida-ta'rif, qoida-ayniyat, qoida-teorema, qoida-formula, ya'ni standart masalalar yechish qoidalarining birortasiga bo`ysinmaydi. Bunday masalalarni yechish uchun tipik yo`l mavjud emas. Bunday masala tipik bo`lmagan nostandart masalalar jumlasiga kiradi.

Masalani yechish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz.

Turistlarning dastlabki tezligi x km/s bo`lsin. U holda daryodan turistik bazagacha bo`lgan masofa 6x km/s bo`ladi. Lekin ular 2 soatgina $x$ tezlik bilan qolgan 4 soatda $(x-0,5)$ km tezlik bilan yurishgan, 4 soat ($x$-0,5) km/s tezlik bilan yurib, [illegible] bazaga o`z vaqtida etib kela olmaganlar, ular turistik bazaga etib kelish uchun [illegible] soat yurishgan. Bundan esa quyidagi tenglamaga ega bo`lamiz:

$$6x = 2x + 4,5(x-0,5)$$
$$6x = 2x + 4,5x - 2,25$$
$$0,5x = 2,25$$
$$x = 2,25 : \frac{1}{2}$$
$$x = 4,5(km/s)$$

Demak, turistlar dastlab soatiga 4,5 km/s soat tezlik bilan yo`l ...

Nostandart masalalarni yechish jarayonida bir qancha stantadrt masalalarni ... lozim bo`ladi. Yuqoridagi masalada tuzilgan $6x=2x+4,5(x-0,5)$ tenglamani ... bir noma'lumli chiziqli tenglamani yechish usulidan foydalanildi. Nost... masalalarni, standart, tipik bo`lgan masalalarga keltirish orqali yechishda ... aytganimizdek umumiy qonun qoidalar yo`q, lekin bu degan so`z ... masalalarni yechishda biror metod yoki usul yo`q degani emas.

Nostandart masalalarni yechish jarayonida qoidali usullardan foy... imkoniyati bo`lmagani bilan ularni yechish zaruriyati yechishning qoidasiz ... izlab topish imkoniyatini yaratib beradi. Bunday «qoidasiz» usullar «evristik» ... yoki «evristik» qoidalar deb yuritiladi.

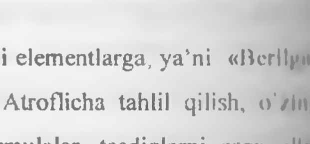
«Evristik» so`zi yunon so`zi bo`lib «Haqiqatni topish san'ati» demakdir.

Bunday masalalarni yechish jarayonida yechishga tomon qilingan ... qadam uchun qoidalarni yozish shart emas, lekin mazkur qoidalarni to`g`ri ... bilish malaka, ko`nikmalari shakllanishi uchun juda ko`p mashqlar bajarish ... bo`ladi.

Har qanday masalani yechish uchun uni elementlarga, ya'ni «Berilganlar» va «Izlanganlar» ga ajratish lozim bo`ladi. Atroflicha tahlil qilish, o`zingizga ma'lum bo`lgan tushunchalar, xulosalar, formulalar, tasdiqlarni esga olish ... ularni masala sharti bilan uyg`unlashtirish, ya'ni ularning umumiy holatlarini ... bog`liqlik jihatlarini aniqlash, shular orqali deduktiv xulosalar chiqarish ... masala yechimini izlash jarayonini vujudga keltiradi.

Masala. Asoslari 4 *sm* va 10 *sm* bo`lgan trapetsiyani o`rta chizig`ini ... bir diagonali ikkita kesmaga ajratadi. Kesmalar uzunliklarini toping. Masalani yechish uchun masala matnini bir necha karra o`qiymiz va masala sharti... berilgan rasmni chizamiz. Masalada berilganlar va topilishi lozim bo`lganlarni ajratamiz. Berilgan: *ABCD* – trapetsiya (78-rasm).

$AD \parallel BC;\ AK = KB;\ DZ = ZC;$



78-rasm

$AD = 10sm;\ BC = 4sm$

$KM = ?\quad MZ = ?$

Yechish: Ma'lumki trapetsiyaning o`rta chizig`i uning asoslariga parallel $KZ \parallel AD,\ KZ \parallel BC$. Trapetsiyaning AC diagonali uni ikkita ΔABC va ΔACD larga ajratadi. Uchburchak o`rta chizig`ining xossasiga ko`ra, $ABC$ uchburchakni o`rta chizig`i $KM = \frac{1}{2} BC$ ga, $ACD$ uchburchak o`rta chizig`i $MZ = \frac{1}{2} AD$ ga teng.

Demak, KM=2 sm, MZ=5 sm.

4.8.1. Geometrik masalalar va ularning turlari

Masalada qo`yilgan shartning xususiyati yoki mohiyatiga qarab geometrik masalalarni hisoblashga oid, isbotlashga oid va yasashga oid geometrik masalalarga ajratish mumkin.

Yasashga oid geometrik masalalarga ayrim to`xtalamiz.

Geometrik masalalar ham har qanday masala kabi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, ularni amaliyotga tadbiq eta bilish, geometrik figuralarning xossa va xususiyatlaridan o`rinli va maqsadli foydalana olishga oid malaka va ko`nikmalarni hosil qilishni maqsad qilib qo`yadi. Malaka va ko`nikmalar amaliy mashqlar bajarish jarayonida shakllantiriladi.

Hisoblashga oid masalalar geometriyaning har bir bo`limida mavjud bo`lib ular asosan egallangan nazariy bilimlar, ularni o`rganish jarayonida chiqarilgan xulosalar, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog`lanishlarni ifodalovchi xossa va xususiyaylardan foydalangan holda burchak, uzunlik, yuza, hajm kabi kattaliklarni topishni maqsad qiiib qo`yadi. Masalan, uchburchakning tomonlari va burchaklari, tomon uzunliklari, asosi va balandligiga ko`ra yuzasini hisoblash, asosining yuzi va balandligiga ko`ra hajmini topish kabi masalalarni hisoblashga oid masalalar tarkibiga kiritish mumkin.

Hisoblashga oid quyidagi masalani ko`raylik.

Masala. Uchburchakning asosi 26 ga, yon tomonlari 13 va 19 ga. Asosiga tushirilgan medianasini toping.

Ber.

AB=13 (bir)

BC=19 (bir)

AC=26 (bir)

T.k: BN=?

Uchburchak medianasini uning tomonlari orqali ifodalash formulasiga

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \qquad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 19^2 + 2 \cdot 13^2 - 26^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{384} = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6} \text{ (bir).}$$

Isbotlashga oid geometrik masalalar tarkibiga geometrik figuralarni xususiyatlarini, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog`lanishlarni jihatdan asoslashga bag`ishlangan masalalarni kiritish mumkun.

Isbotlashga oid geometrik masalalarni yechishda masalada berilgan topilishi so`ralganlarni, ya'ni masalaning sharti va xulosasini aniq mustahkam nazariy bilimga ega bo`lish, tafakkur amallaridan, tahlil metodlarini to`g`ri qo`llay bilish lozim bo`ladi.

Umuman matematika kursida isbotlashga oid masalalarni, teoremalarni isbotlash, ayniyatlarni isbotlash va tengsizlikni isbotlashga oid masalalarga mumkin.

O`rta maktab matematika kursidan ma'lumki deyarli barcha isbotlaniladi.

Tushunchalarning asosiy bo`lmagan va ta'riflarga kiritilmagan odatda isbotlanadi.

O`rta maktab geometriya kursida bunday masalalar tarkibiga quyidagi kiritish mumkin bo`ladi:

Sinuslar teoremasini isbotlash: $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$

Kosinuslar teoremasini isbotlash.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Uchburchak yuzini hisoblash formulalarini isbotlash:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - Geron formulasi (bu erda p–yarim perimetr);

$S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$ - medianalar orqali;

$S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$ - tomonlari va balandliklari orqali.

Uchburchak medianasini hisoblash, formulalarini keltirib chiqarish

$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$

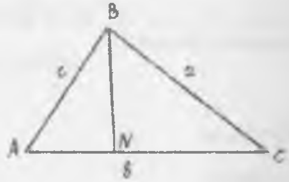
Uchburchak balandligini hisoblash formulalarini keltirib chiqarish.

$$\left.\begin{aligned} h_a&=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}\\ h_b&=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}\\ h_c&=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Isbotlashga doir quyidagi masalani qaraymiz.

Masala. Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali (1) formulalar bilan ifodalanishini isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik bizga ABC uchburchak berilgan bo`lib, uning tomonlari uzunliklari $AB=c$ $BC=a$ $AC=b$ bo`lsin. B uchdan b tomonga tushirilgan balandligi $BN = h_b$ bo`lsin. Agar $AN=x$ deb belgilasak $NC=b-x$ bo`ladi



80-rasm

80-rasmdan:

$$\Delta BNC \Rightarrow h_b^2 = a^2 - (b-x)^2 \quad (2) \qquad \Delta BNA \Rightarrow h_b^2 = c^2 - x^2 \quad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2 \text{ [illegible]}$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2bx - c^2 = 0 \Rightarrow 2bx = c^2 - a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} \Rightarrow \qquad x^2 = \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}$$

$$h_b^2 = c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2 - (c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2} = \frac{(2bc - c^2 + a^2 - b^2)(2bc + \text{[illegible]})}{4b^2}$$

$$2bc - c^2 + a^2 - b^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2 (a - b + c)(a + b \text{ [illegible]})$$

$$2bc + c^2 - a^2 + b^2 = (b+c)^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a)$$

$$a - b + c = 2p - 2b = 2(p-b); \quad a + b + c = 2p; \qquad b + c - a = \text{[illegible]}$$

$$a + c - b = 2(p-b).$$

$$h_b^2 = \frac{2p \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a)}{4b^2}$$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

1.8.2. Yasashga oid geometrik masalalar haqida tushuncha, yasash aksiomalari

Geometriyada har qanday figura nuqtaviy obraz yoki nuqtalar to`plami sifatida qaraladi. Barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo`lgan figura tekis, barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo`lmagan figuralar fazoviy figuralar deyiladi. Bir yoki bir nechta yasash qurollari vositasida ma'lum shartlarga javob beruvchi geometrik figura yasashni talab qiluvchi masalalar yasashga oid geometrik masalalar deb yuritiladi.

Geometriyaning figuralar yasash hamda yasashga oid masalalar yechish usullarini o`rganuvchi bo`limi konstruktiv geometriya deb ataladi.

Biz asosan tekislikda bajariladigan yasashga oid geometrik masalalar haqida to`xtalamiz. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalar antik Misr, Bobil, Yunon matematikasida alohida o`rin egallagan. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalarni bir qancha yasash asboblari vositasida yasash mumkin. Biz esa faqat chizg`ich va sirkul vositasida yasaladigan masalalarni ko`rib chiqamiz.

Shuning uchun geometriyaning bu qismi konstruktiv geometriya yoki sirkul va chizg`ich geometriyasi deb ham ataladi.

Tekislikda yasashga doir geometrik masalalarni yechish jarayonida yasashga oid quyidagi umumiy aksiomalardan foydalaniladi.

YaA$_1$. Har bir $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ figura yasalgandir.

YaA$_2$. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan bo`lsa $F_1 \cup F_2$ yasalgandir.

YaA$_3$. Agar $F_1 \cap F_2$ bo`lib $F_1$ va $F_2$ figuralar yasalgan bo`lsa $F_1 \cap F_2$ yasalgandir.

YaA$_4$. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan bo`lib $F_2 \subset F_1$, $F_1 \neq F_2$ bo`lsa, u holda $F_1 \setminus F_2$ yasalgandir.

YaA$_5$. Agar F_1 figura yasalgan bo`lsa unga tegishli nuqta yasalgandir.

YaA$_6$. Agar F figura yasalgan bo`lsa $(F \neq E)$ $F$ ga tegishli bo`lmagan nuqtani yasash mumkin (E Evklid fazosi nazarda tutiladi).

YaA$_7$. Agar A va B $(A \neq B)$ nuqtalar yasalgan bo`lsa $[AB)$ nurni yasash mumkin.

YaA$_3$ va YaA$_7$ ga asosan $[AB]$ kesmani yasash mumkin.

$[AB) \cap [BA) = [AB]$

YaA$_8$. Agar 0 nuqta va $[AB]$ kesma yasalgan bo`lsa markazi 0 nuqtada va radiusi AB kesmaga teng aylanani yasash mumkin.

$\{YaA_1, YaA_2, YaA_3, YaA_4, YaA_5, YaA_6, YaA_7, YaA_8\}$ yasash aksiomalari sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalari deb ataladi.

Mazkur yasash aksiomalari bizga sirkul va chizg`ich vositasida quyidagi oddiy yasashlarni bajarish imkoniyatini beradi.

OyA$_1$. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo`lsa $[AB)$ nurni yasash mumkin.

OyA$_2$. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo`lsa $[AB]$ kesmani yasash mumkin.

OyA$_3$. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo`lsa (AB) to`g`ri chiziqni yasash mumkin.

OyA$_4$. Agar 0 nuqta va aylana radiusiga teng $[AB] = r$ yasalgan bo`lsa $S(0, AB)$ aylanani yasash mumkin.

OyA$_5$. O`zaro parallel bo`lmagan ikkita to`g`ri chiziqning kesishish nuqtasini yasash mumkin.

OyA$_6$. Yasalgan $S(0,r)$ aylana va (AB) to`g`ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA$_7$. Yasalgan ikkita $S(0,r)$ va $S(0_1,r_1)$ aylanalarning kesishish nuqtalarini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA$_8$. Yasalgan F figuraga tegishli A nuqtani $A \in F$ yasash mumkin.

OyA$_9$. Yasalgan F figuraga tegishli bo`lmagan $A$ nuqtani yasash mumkin $A \notin F$ (bizga bu erda $F$ figuraning figura yasalgan tekislikka teng bo`lmasligi talab qilinadi).

Tekislikda birorta F figurani yasash uchun chekli sondagi oddiy yasashlarni chizg`ich va sirkul yordamida bajarish lozim bo`ladi. Agar lozim bo`lgan ...

... uchun qo`llaniladigan oddiy yasashlar soni ma'lum darajada chekli bo`lsa ... yasashlarni so`zsiz bajarish mumkin, agar talab qilingan oddiy yasashlar ... sonni tashkil qilsa bu yasashlarni bajarish ko`p vaqtni olishi bilan bir qatorda ... ham bo`ladi.

Shuning uchun talab qilingan figurani yasashni oddiy yasashlarga emas ... bir qancha oddiy yasashlar yordamida bajariladigan asosiy yasashlar deb ... yasashlarga keltirish maqsadga muvofiq bo`ladi.

Tekislikda yasashga oid masalalarni yechishda quyidagi asosiy yasashlardan foydalaniladi.

AyA_1. Berilgan uch tomoniga ko`ra uchburchak yasash.

AyA_2. Berilgan kesmani teng ikkiga bo`lish.

AyA_3. Berilgan burchakka kongruent bo`lgan burchak yasash.

AyA_4. Berilgan burchakni teng ikkiga bo`lish.

AyA_5. Berilgan nuqtadan berilgan to`g`ri chiziqqa perpendikulyar o`tkazish.

AyA_6. Berilgan bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko`ra uchburchak yasash.

AyA_7. Berilgan ikki tomoni va ular orasidagi bir burchakka ko`ra uchburchak yasash.

AyA_8. Berilgan nuqtadan berilgan to`g`ri chiziqqa parallel chiziq o`tkazish.

AyA_9. Berilgan gipotenuzasi va o`tkir burchagiga ko`ra to`g`ri burchakli uchburchak yasash.

AyA_{10}. Berilgan bir kateti va gipotenuzasiga ko`ra to`g`ri burchakli uchburchak yasash.

AyA_{11}. Aylana tashqarisida olingan nuqtadan aylanaga urinma o`tkazish.

Yuqorida qayd qilinganlarga asoslangan holda quyidagi masalalarni ...

1. «Berilgan kesmani teng ikkiga bo`lish» masalasi ya'ni $AyA_2$ ni yasaylik. ... qilaylik bizga $[AB]$ kesma berilsin. $[AB]$ kesmani o`rtasini topish kerak. ... uchun OyA_4 dan foydalanamiz. Kesmani A uchini markaz qilib taxminan ... o`rtasidan katta bo`lgan kesmani radius qilib $S(A,r)$ aylanani, so`ngra esa

$S(B,r)$ aylanani chizamiz. Aylanalar kesishish nuqtalari orqali [illegible]

kesma o'tkazamiz. O'tkazilgan kesma bilan berilgan $[AB]$ [illegible]

nuqtasi, $[AB]$ kesmani o'rtasi bo'ladi.

1. $[AB]$ yasaladi.

2. $S(A,r), \quad r > \dfrac{[AB]}{2}$.

3. $S_1(B,r), \quad r > \dfrac{[AB]}{2}$.

4. $S \cap S_1 = \{x_1, x_2\}$.

5. $[x_1, x_2]$.

6. $[x_1x_2] \cap [AB] = \{0\}$.

7. AO=OB.

81-rasm

O nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'ladi.

2) Berilgan burchakka kongruent bo'lgan burchak yasash [illegible]

1. $\angle BAC$ berilgan bo'lsin.

2. $[A_1C_1)$ yasaymiz.

3. $S(A,r)$, ni yasaymiz, bunda $r = Ax_1$.

4. $S(A,r) \cap \angle BAC = \{x_1, y_1\}$.

5. $S_1(A_1, r)$ ni yasaymiz bunda $r = Ax_1$.

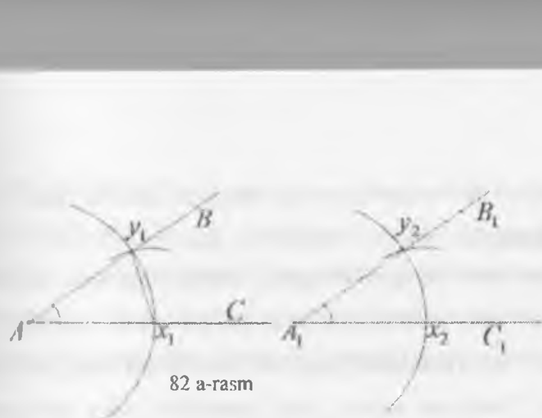
6. $S_1 \cap [A_1C_1) = \{x_2\}$ bunda $Ax_2 = Ax_1$.

7. $S_2(x_1, r_1)$ ni yasaymiz bunda $r_1 = [x_1y_1]$.

8. $S_3(x_2, r_1)$ ni yasaymiz.

9. $S_3 \cap S_1 = \{y_2\}$.

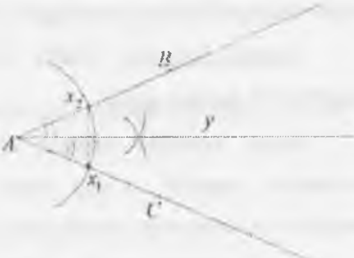
10. $\angle y_2A_1x_2 = \angle BAC$.



82 a-rasm

3) Berilgan burchakni teng ikkiga bo`lish masalasi.

1. $\angle BAC$ berilgan bo`lsin.
2. $\angle BAC$ yasaladi.
3. $S(A,r)$ aylana yasaladi, bunda $r<[AC]$.
4. $S(A,r)\cap\angle BAC=\{x_1x_2\}$.
5. $S_1(x_1,r_1)$ *va* $S_2(x_2,r_1)$ aylanalar yasaladi, bu yerda $r_1>\frac{[x_1x_2]}{2}$.
6. $S_1\cap S_2=\{y\}$.
7. $[Ay)$.
8. $\angle YAC=\angle YAB$.



82 b-rasm

[illegible] Yasashga oid geometrik masalalarni yechish bosqichlari

[illegible]larda yechishga oid masalalarni sirkul va chizg`ich yordamida [illegible] geometrik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko`ruvchi [illegible] geometrik o`rinlar, simmetriya, parallel ko`chirish, o`xshashlik yoki [illegible], inversiya hamda algebraik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib [illegible] algebraik metodlardan foydalaniladi.

Yasashga oid geometrik masalalarni yechish jarayoni qaysi metod bilan [illegible] bajarilishidan qat'iy nazar, u bir qancha bosqichlarda bajariladi va ular [illegible] yasashga oid masalalarni yechish bosqichlari deb yuritiladi. Bular tahlil, [illegible] isbot va tekshirish bosqichlari bo`lib, har bir bosqich masala yechish jarayonida ma'lum bir maqsadni amalga oshirishni nazarda tutadi.

Tahlil bosqichi: Masala yechishning eng muhim, ijodiy bosqichi ... bunda yasalishi lozim bo`lgan F figura, masala talablariga mumkin ... javob beradigan darajada taxminan chizib olinadi. Tahlil rasmsida ... berilganlar bor yoqligi aniqlanadi, agar ular rasmda aks etmagan bo`lsa ... chizib olinadi. Natijada asosiy ya'ni yasalishi lozim bo`lgan figura ... hamjihatlikda bo`lgan bir qancha yordamchi figuralar hosil bo`ladi. ... figuralarda masala shartida berilganlar bilan bir qatorda, izlangan ya'ni ... lozim bo`lgan asosiy figuraning nuqtalari ham joylashadi. Shu tariqa berilganlar ... izlanganlar orasidagi bog`lanishlarni o`rnatish natijasida asosiy figurani ... imkoniyatlari axtariladi va aniqlanadi. Yasash mumkin bo`lgan yordamchi ... orqali izlangan figurani yasashga o`tiladi.

Yasash bosqichi: Tahlil bosqichada aniqlanganlarni amaliy ... bajarilishini nazarda tutadi.

Bunda yasalishi mumkin bo`lgan yordamchi figuralar yasash ... yordamida yasaladi va ular orqali yasalishi lozim bo`lgan asosiy figura... nuqtalari va elementlari yasab olinadi.

Isbot bosqichi: Masala yechimining sinash bosqichi bo`lib tahlil bosqi... taxminan chizib olingan asosiy figura bilan yasash bosqichida yasalgan figura... masala shartlariga javob berishi isbotlanadi.

Tekshirish bosqichi: Masala yechishning yakunlash bosqichi hisobla... unda masala shartida berilganlarga asosan figura yasash mumkinmi, agar ... bo`lmasa berilganlarni qanday tanlash lozim qanday hollarda echim ... berilganlarga asoslanib nechta figura yasash mumkin, masala nechta yechim... ekanligi aniqlanadi.

Yasashga oid geometrik masalalar

1. Berilgan a, b, c tomonlari bo`yicha uchburchak yasang

   a) a=2 sm, b=3 sm, c=4 sm

   b) a=3 sm, b=4 sm, c=5 sm

c) a=4 sm, b=5 sm, c=6 sm

d) a=2 sm, b=4 sm, c=5 sm

Berilgan radiusi bo`yicha berilgan ikki nuqtadan o`tuvchi aylana yasang.

ABC uchburchak berilgan. Unga teng boshqa bir ABD uchburchak yasang.

Ikki tomoni va tashqi chizilgan aylananing radiusi bo`yicha uchburchak yasang.

Quyidagi ma`lumotlarga ko`ra ABC uchburchakni yasang:

1) Ikki tomoni va ular orasidagi burchakka ko`ra:

a) AB=5 sm, AC=6 sm, $\angle A = 40^0$

b) AB=3 sm, AC=5 sm, $\angle A = 70^0$

2) Bir tomoni va unga yopishgan burchaklari bo`yicha:

a) AB=6 sm, $\angle A = 30^0$, $\angle B = 50^0$

b) AB=4 sm, $\angle A = 45^0$, $\angle B = 60^0$

Ikki tomoni va bu tomonlardan kattasi qarshisida yotuvchi burchagi bo`yicha uchburchak yasang:

a) a=6 sm, b=4 sm, $\angle\alpha = 70^0$

b) a=4 sm, b=5 sm, $\angle\beta = 100^0$

O`z o`zini nazorat qilish uchun savollar

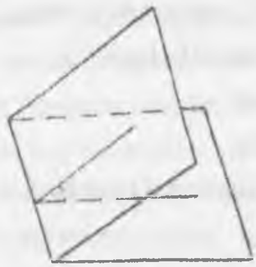
1. Matematik masalalarni tushuntirib, klassifikatsiyalab bering.
2. Sirkul va chizg`ich aksiomalarini aytib bering.
3. Yasash bosqichlarini masala tanlab yasashlarni bajarib tushuntiring.
4. Uchburchakning uchta tomoniga ko`ra qanday yasash mumkinligini tushuntiring.

4.9. Ko'pyoqlar

4.9.1 Ko`pyoqli burchaklar

Ikkita yarim tekislikdan va ularni chegaralab turgan umumiy to`g`ri chiziqdan tashkil topgan figura ikki yoqli burchak deyiladi (84-rasm). Yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning yoqlari, ularni chegaralovchi to`g`ri chiziq esa ikki yoqli burchakning qirrasi deyiladi. Ikki yoqli burchakning ... perpendikulyar tekislik o`tkazilsa, u yoqlarni ikkita yarim to`g`ri chiziqlar ... kesib o`tadi. Bu yarim to`g`ri chiziqlar tashkil qilgan burchak ... burchakning chiziqli burchagi deyiladi.

Uchta yassi burchakdan tashkil topgan figura uch yoqli burchak ... (85-rasm). (ab), (bc) va (ac) lar yassi burchaklar, (abc) esa uch yoqli ...



84-rasm

85-rasm

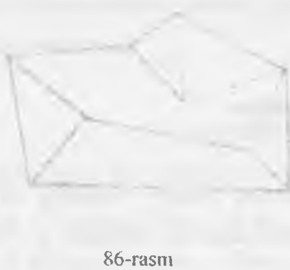
Yassi burchaklar uch yoqli burchakning yoqlari, ularning tomonlari ... yoqli burchakning qirralari, umumiy uch esa uch yoqli burchakning uchi deyiladi.

Uch yoqli burchak, uchta ikki yoqli burchakdan tashkil topgan.

Shunga o`xshash ko`p yoqli burchak ham yassi burchaklardan tuzilganligini qayd qilish mumkin.

4.9.2. Ko`pyoqlar

Sirti chekli miqdordagi yassi tekisliklardan iborat jism ko`pyoq deyiladi (86-rasm). Agar ko`pyoqning o`zi uning sirtidagi har bir ko`pburchak tekisligining bir ...



86-rasm

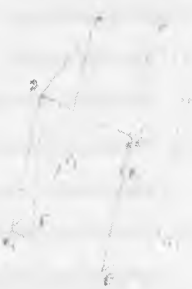
87-rasm

...yotsa, bunday ko`pyoq qavariq ko`pyoq deyiladi. Qavariq ko`pyoqning ... bilan bunday tekislikning umumiy qismi yoq deyiladi. Qavariq ko`pyoqning yoqlari qavariq ko`pburchaklardan iborat. Ko`pyoq yoqlarining tomonlari uning qirralari, uchlari esa ko`pyoqning uchlari deyiladi.

Bu ta'rifni biz kub misolida tushuntiramiz (87-rasm). Kub qavariq ko`pyoqdir. Uning sirti oltita kvadratdan tashkil topgan: $ABCD$, $B B_1 C_1 C$,... Bu kvadratlar kubning yoqlaridir. Bu kvadratlarning $AB$, $BC$, $B B_1$ ... tomonlari kubning qirralari bo`ladi. Kvadratlarning A, B, C, D, A_1, ... uchlari kubning uchlari bo`ladi.

Bizga ma'lum bo`lgan ko`pyoqlar: prizma, parallelepiped, piramidalardir.

1. **Prizma.** Ikki yog`ining mos tomonlari bir-biriga parallel bo`lgan teng ko`pburchakdan iborat bo`lib, boshqa yoqlari esa parallelogrammdan iborat bo`lgan ko`pyoq prizma deyiladi (88-rasm).



88-rasm

Prizma deb,ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan barcha parallel to'g'ri chiziqlar kesmalaridan tuzilgan ko`pyoqqa aytiladi.

Prizmaning asoslari ikki teng ko`pburchakdan iborat bo`lib ularning mos tomonlari paralleldir:

Prizmaning yon yoqlari parallelogrammdan iboratdir.

Yon qirralari asos tekisligiga og`ma bo`lgan prizma og`ma prizma deyiladi. Yon qirralari asosga perpendikulyar bo`lgan prizma to`g`ri prizma deb ataladi.

Asoslari muntazam n-burchaklar bo`lgan to`g`ri prizma muntazam deyiladi. Parallel tekisliklardagi uchlarning biridan ikkinchi tekislikka tushirilgan perpendikulyar prizmaning balandligi deyiladi.

$ABCDE$ va $A_1B_1C_1D_1E_1$-asoslar, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1- yon qirralar, D - balandlik.

1) Prizma hajmi $V=S_{as}\cdot H$, S_{as} - asos yuzasi, H - prizma balandligi, to`g`ri prizmaning hajmi $V=S_{yon}\ \ell$, ℓ-AA_1 yon qirra uzunligi.

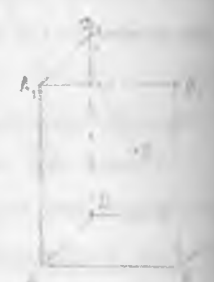
2) Prizma yon sirti $S_{yon}=P_l\cdot \ell$, P_l – perpendikulyar kesim perimetri, ℓ yon qirrasi.

To`g`ri prizmaning yon sirti, $S_{yon} = P_{as}\cdot \ell$, P_{as}- asos perimetri.

3) Prizmaning to`la sirti $S_{to`la}=S_{yon}+2S_{as}$, S_{as}- asos yuzasi.

2. Parallelepiped. Asosi parallelogramm bo`lgan prizma parallelepiped deyiladi (89-rasm). Yon qirralari asosga perpendikulyar bo`lgan parallelepiped to`g`ri deyiladi.

Asosi to`g`ri to`rtburchak bo`lgan to`g`ri parallellepiped to`g`ri burchakli deyiladi.



89-rasm

Kub - barcha qirralari teng bo`lgan to`g`ri burchakli parallelepiped.

Parallelepipedning xossalari:

1) Parallelepiped diagonalining o`rtasi uning simmetriya markazidir.
2) Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari juft-juft kongruent va parallelдir.
3) Parallelepipedning barcha diagonallari bir nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo`linadi.

To`g`ri burchakli parallelepipedning sirt yuzi yon sirtining yuzi bilan ikki asos yuzlarining yig`indisiga teng.

Yon sirtining yuzi esa asos perimetri bilan balandligining ko`paytmasiga tengdir.

To`g`ri burchakli parallelepipedning barcha diagonallari teng uzunlikda bo`ladi.

3. Piramida. Agar ko`pyoqli burchak uchidan o`tmaydigan biror tekislik bilan kesilsa, kesuvchi tekislik va ko`pyoqli burchak yoqlari bilan cheklangan jism piramida deyiladi (90-rasm).

Kesuvchi tekislikning ko`p yoqli burchak yoqlari orasidagi bo`lagi piramidaning asosi deyiladi.

90-rasm

$ABC...$ asos, SAB, SBC, ...- yon yoqlari, S- umumiy uch.

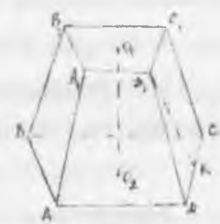
SA, SB, ... -yon qirralar; SK –balandlik (asosga tushirilgan perpendikulyar).

Piramidaning hajmi $V=\frac{1}{3}S_{as}\cdot H$, S_{as}-asos yuzasi, H-balandlik. Muntazam piramida

yon sirti $S_{yon}=\frac{1}{2}p\,h$, p-asos perimetri, h-apofema.

Asosga parallel tekislik piramidani ikki qismga ajratadi. U holda qismlardan biri piramida bo`ladi, ikkinchi qism esa kesik piramida deyiladi (91-rasm).

Kesik piramidada $ABCD$ va $A_1B_1C_1D_1$- asoslar, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 –yon qirralar, O_1O_2 -balandlik, D_1K-apofema.



91-rasm

Kesik piramida hajmi $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{SS_2})$ H-balandlik, S_1 va S_2 asoslarning yuzalari. Muntazam kesik piramida yon sirti $S_{yon}=\frac{1}{2}h(p_1+p_2)$, h-apofema, p_1 va p_2 asoslarning perimetrlari.

4.9.3. Muntazam ko`pyoqlar

Hamma yoqlari teng muntazam ko`pburchaklardan tashkil topgan ko`pyoqlar muntazam ko`pyoqlar deyiladi.

Ko`pyoqlarning uchlari - $U$, yoqlari - $Yo$, qirralari - $Q$ orasidagi bog`lanishni quyidagi Eyler teoremasi ifodalaydi.

Teorema. Muntazam ko`pyoq uchun quyidagi munosabat o`rinli:

$$U + Yo - Q = 2$$

Bunga muntazam ko`pyoq uchun Eyler xarakteristikasi deyiladi. (Eyler xarakteristikasi 2 ga teng).

Biz bu teorema isbotini xususiy holda muntazam ko`pyoqlarda ko`ramiz.

Muntazam ko`pyoqlarning 5 ta turi mavjud. Bular: tetraedr, kub, oktaedr, ikosaedr, dodekaedr.

Muntazan tetraedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo'lib, har bir uchida uchtadan qirra birlashadi. Tetraedr hamma qirralari teng bo`lgan uchburchakli piramidadan iborat. U 4 ta yoq, 6 ta qirra, 4 ta uchga ega (92-rasm).

Kubning hamma yoqlari kvadratlardan iborat, har bir uchida uchta qirra birlashadi. Kub qirralari teng bo`lgan to`g`ri burchakli parallelepiped.

U 6 ta yoq, 12 ta qirra, 8 ta uchga ega (93-rasm).

Oktaedrning yoqlari muntazam uchburchaklar bo`lib, tetraedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida to`rtta qirra birlashadi.

U 8 ta yoq, 12 ta qirra, 6 ta uchga ega (94-rasm).

Dodekaedrning yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat. Uning har bir uchida uchtadan qirra birlashadi.

U 12 ta yoq, 30 ta qirra, 20 ta uchga ega (95-rasm).

Ikosaedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo`lib, tetraedr va oktaedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida beshtadan qirra birlashadi.

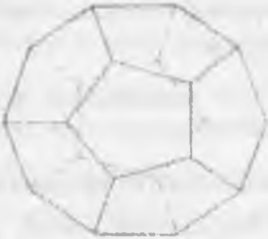
U 20 ta yoq, 30 ta qirra 12 ta uchga ega (96-rasm).

Eyler teoremasi yuqoridagi barcha muntazam ko`pyoqlar uchun o`rinli.

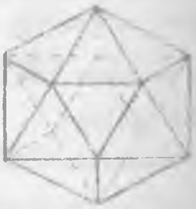
92-rasm

93-rasm

94-rasm



95-rasm



96-rasm

1.9.4. Muntazam ko`pyoqlar tarixi to`g`risida qisqacha ma'lumot

Evklidning «Negizlar» asarining 13 kitobida muntazam ko`pyoqlar haqida ... yozilgan. Ammo muntazam ko`pyoqlar haqidagi ma'lumotlar antik yunon matematiklarining ishlarida ham o`z aksini topgan. Yunon matematigi Prokl (412-485) ... muntazam ko`pyoqlarni Pifagor kashf qilganligini qayd qilgan. Ammo ... Pifagor muntazam ko`yoqlardan faqat geksaedr, tetraedr va dodekaedrnigina bilganligi, oktaedr va ikosaedr esa Tetet Afinskiy (e.o.IV) tomonidan kashf qilinganligi ma'lum bo`lgan.

Yunon faylasufi Platon esa tabiatning to`rtta unsuri yer, havo, suv va olovni muntazam ko`pyoqlilarga qiyos qilgan va yer shaklini dodekaedrga o`xshatgan. Keyinchalik esa Arximed tomonidan 13 ta yarimmuntazam ko`yoqlilar kashf qilingan.

Sevimli mashg`uloti muntazam ko`pyoqlilar bo`lgan Iogann Kepler Arximed ishlarini muntazam o`rgangan holda ikkita botiq, muntazam, yulduzsimon ko`pyoq mavjudligini kashf qiladi. Keyinchalik fransuz matematigi L.Puanso yana ikkita ... botiq yulduzsimon muntazam ko`pyoqli mavjudligini kashf qiladi va 1812 yilda Koshi yulduzsimon muntazam ko`pyoqlarning faqatgina to`rtta turi mavjudligini isbot qilgan.

Uyg`onish davri vakillari Leonardo da Vinchi, Luka Pocholilar ham muntazam va yarim muntazam ko`pyoqlar ustida ish olib borganlar va o`z ... natijalarini «Ilohiy nisbat haqida (1509)» degan asarda bayon etganlar.

Beruniy «Kitob at-tafkim» (1029-1034 yy) asarining geometriya bo`limida muntazam ko`pyoqlarni o`rganib ularni sfera ichiga joylashtirish mumkinligini aytib o`tgan va tetraedrni «noriy» ya'ni olovniki, oktaedrni «havoiy» ya'ni havoniki, kubni «arziy» ya'ni yerniki, ikosaedrni «moiy» ya'ni suvniki, dodekaedrni «falakiy» ya'ni osmonniki deb atagan.

Platon olam tuzilishi bilan muntazam ko`pyoqlar orasidagi bog`lanishlarni ... Platon olamni tashkil etgan «to`rtta element» «olov», «er», «havo», «suv» ... tetraedr, kub, oktaedr va dodekaedr shaklida bo`lishini ta'kidlagan.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Ko`p yoqli burchaklarga ta'rif bering.
2. Ko`pyoq deb qanday jismga aytiladi? Qavariq ko`pyoqqa ta'rif bering.
3. Prizma deb qanday ko`pyoqqa aytiladi?
4. Piramida deb qanday ko`pyoqqa aytiladi?
5. Muntazam ko`pyoqqa ta'rif bering va uning turlarini aytib, tushuntiring?

4.10. Aylanma jism va aylanma sirt haqida tushuncha

Biror to`g`ri chiziqni yoki egri chiziqni bir to`g`ri chiziq atrofida aylantirishdan aylanma sirt hosil bo`ladi.

Agar aylanma sirtni o`q deb ataluvchi to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan parallel ikkita tekislik bilan kessak aylanma sirt va doira bilan chegaralangan aylanma jism hosil bo`ladi (97- rasm).

97-rasm

OO_1 - aylanma jismning o`qi, jismning egri sirti aylanma sirt deyiladi.

Aylanma sirt parallel tekisliklar bilan kesilsa, kesim doiralardan bo`ladi.

1. Silindr. O`q atrofida unga parallel bo`lgan to`g`ri chiziq aylantirilsa, silindrik sirt hosil bo`ladi. U o`qqa perpendikulyar ikkita parallel tekislik bilan kesilsa ular orasida silindrik jism hosil bo`ladi (98-rasm).

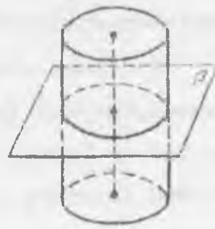
98-rasm

Doiralar silindrning asoslari deyiladi, doira aylanalari mos nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar silindrning yasovchilari deyiladi. Silindrning sirti asoslaridan va yon sirtidan tashkil topadi. Yon sirt yasovchilardan tuzilgan.

Silindrning yasovchilari asos tekisliklariga perpendikulyar bo`lsa, bunday silindr to`g`ri silindr deyiladi. To`g`ri silindrni to`g`ri to`rtburchakni aylantirish o`q vazifasini bajargan biror tomoni atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin.

Silindr asosining radiusi silindrning radiusi deyiladi. Silindr asosining tekisliklari orasidagi masofa silindrning balandligi deyiladi. Asoslarining markazlaridan o`tuvchi to`g`ri chiziq silindrning o`qi deyiladi. bu o`q yasovchilarga parallel bo`ladi. Silindrning o`qi orqali o`tuvchi kesim o`q kesim deyiladi. Silindrning yasovchisi orqali o`tib, bu yasovchi orqali o`tadigan o`q kesimga perpendikulyar tekislik silindrning *urinma tekisligi* deyiladi.

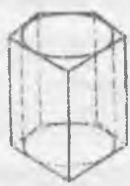
Teorema. Silindr o`qiga perpendikulyar tekislik uning yon sirtini asos aylanasiga teng aylana bo`yicha kesadi (99 rasm).



99-rasm

Silindrga *ichki chizilgan* prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga ichki chizilgan teng ko`pburchaklardan iborat. Uning yon qirralari silindrning yasovchilari bo`ladi (100- rasm).

100-rasm



101-rasm

Silindrga *tashqi chizilgan* prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga tashqi chizilgan teng ko`pburchaklardan iborat. Uning yon yoqlari tekisliklari silindrning yon sirtiga urinadi (101-rasm).

Konus. Konus (aniqrog`i doiraviy konus ) deb shunday jismga aytiladiki, u doira – konus asosidan. shu doira tekisligidagi yotgan nuqta-konusning uchidan va konusning uchini asosining hamma nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalardan iborat bo`ladi (102-rasm). Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar konusning yasovchilari bo`ladi. Konusning sirti asosidan va yon sirtidan iborat.

102-rasm 103-rasm

Konusning uchi bilan asos aylanasining markazini tutashtiruvchi [illegible] chiziq asos tekisligiga perpendikulyar bo`lsa, bunday konus *to`g`ri konus* [illegible]

To`g`ri konusni to`g`ri burchakli uchburchakni kateti atrofida [illegible] hosil qilingan jism deb qarash mumkin (103-rasm).

Konusning uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikulyar [illegible] balandligi deyiladi. To`g`ri konus balandligining asosi asos markazi bilan [illegible] ust tushadi. To`g'ri konusning balandligidan o'tuvchi to'g'ri chiziq [illegible] deyiladi. Konusning o'qi orqali o'tuvchi tekislik bilan kesimi *o'q kesim* [illegible] konusning yasovchisi orqali o'tuvchi va bu yasovchi orqali o'tkazilgan [illegible] kesimga perpendikulyar tekislik konusning *urinma tekisligi* deyiladi.

Teorema. Konusning o'qiga perpendikulyar tekislik konusni doira [illegible] kesadi, yon sirtini esa markazi konusning o'qida joylashgan aylana bo`yicha [illegible] o`tadi (teoremani isbot qilish talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi)

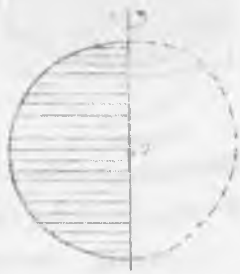
Konusning o`qiga perpendikulyar tekislik undan kichik konus [illegible] Qolgan qismi *kesik konus* deyiladi (104-rasm).

104-rasm 105-rasm 106-rasm

Asosi konus asosidagi aylanaga ichki chizilgan ko'pburchak bo`lib, [illegible] konusning uchida bo'lgan piramida konusga ichki chizilgan piramida deyiladi (105-rasm). Konusga ichki chizilgan piramidaning yon qirrasi konusning yasovchilari bo'ladi. Asosi konusning asosiga tahqi chizilgan ko'pbubrchak bo'lib, uchi esa konusning uchi bilan ustma-ust tushgan piramida konusga tashqi chizilgan piramida deyiladi. Tashqi chizilgan piramida yon yoqlarining tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo'ladi (106-rasm).

3. Shar.

Ta'rif. Fazoning berilgan nuqtasidan berilgan masofadan katta bo`lmagan masofada yotgan hamma nuqtalaridan iborat jism shar deyiladi. Berilgan nuqta sharning markazi, berilgan masofa esa sharning radiusi deyiladi. Sharning chegarasi shar sirti yoki sfera deb ataladi. Shunday qilib sharning markazidan radiusga teng masofa qadar uzoqlashgan hamma nuqtalari shar sirti yoki sfera deb ataladi.

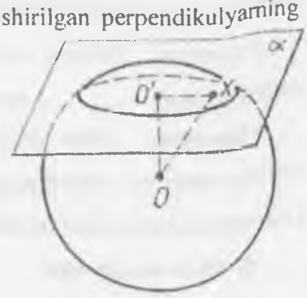


107-rasm

Shar sirtining ikki nuqtasini tutashtiruvchi va sharning markazidan o`tuvchi kesma diametr deyiladi. Istalgan diametrning uchlari (oxirlari) sharning diametral qarama-qarshi nuqtalari deyiladi.

Shar ham aylanma jism bo`lgani uchun uni yarim doirani o`zining diametri atrofida aylantirishdan ham hosil qilish mumkin (107-rasm).

1-teorema. Sharning har qanday tekislik bilan kesimi doiradir. Bu doiraning markazi sharning markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosidir.



108-rasm

Isbot. Aytaylik α - kesuvchi tekislik va O- sharning markazi bo`lsin (108-rasm). Sharning markazidan $\alpha$ tekislikka $OO'$ perpendikulyar tushiramiz. $O'$ bilan perpendikulyarning asosini belgilaymiz. $X$ – sharning $\alpha$ tekislikka tegishli ixtiyoriy nuqtasi bo`lsin. Pifagor teoremasiga ko`ra

$OX^2 = OO'^2 + O'O^2$ Ammo OX kesma sharning R radiusidan katta bo...

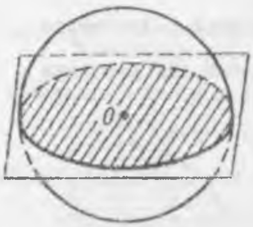
uchun $O'X \leq \sqrt{R^2 - OO'^2}$. Demak, X nuqta markazi O' nuqtada va ...

$R = \sqrt{R^2 - OO'^2}$ ga teng doiraga tegishli. Aksincha, bu doiraning istalgan X ...

sharga tegishli. Bu esa sharning α tekislik bilan kesimi markazi O' ...

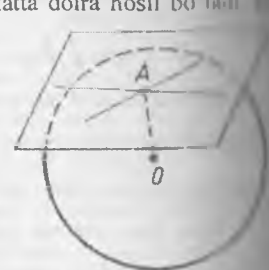
bo`lgan doira demakdir.

Teoremaning isbotidan sharning tekislik bilan kesimida hosil qil...



109-rasm

doiraning radiusini $R^1 = \sqrt{R^2 - OO^2}$ ... bo`yicha hisoblash mumkin degan xulosa chiqadi ... esa shar markazidan bir xil uzoqlikdagi tekisliklar ... kesilsa, teng doiralar hosil bo`lishini ko... α tekislik sharning markaziga qancha yaqin ... α tekislik kesimidagi doira shuncha katta bo... Sharning markazidan o`tgan tekislik kesimida eng katta doira hosil bo`ladi ... doiraning radiusi shar radiusiga teng (109-rasm).



110-rasm

Sharning markazidan o`tadigan tekislik diametral tekislik deyiladi.

2-teorema. Sharning istalgan diametral tekisligi uning simmetriya tekisligi bo`ladi. Sharning markazi uning simmetriya markazidir.

Shar sirtidagi A nuqtadan o`tib shu nuqtaga o`tkazilgan radiusga perpendikulyar tekislik urinma tekislik deyiladi. A ... urinish nuqtasi deyiladi (110-rasm)

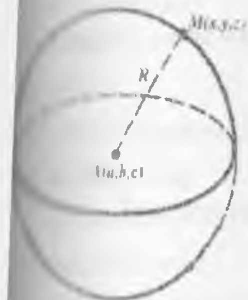
3-teorema. Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga – urinish nuqtasiga ega.

4-teorema. Shar sirtidagi istalgan nuqtadan cheksiz ko`p urinma o... ularning hammasi sharning urinma tekisligida yotadi.

(2-4 teoremalarni isboti talabalarga mustaqil ish qilib beriladi).

4. Sfera tenglamasi.

Sfera deb, fazoning berilgan nuqtasidan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar to`plamiga aytiladi. Sfera tenglamasini tuzamiz. $S$ feraning markazi $A(a, b, c)$ nuqtada, radiusi esa $R$ bo`lsin (111-rasm). Sferaning nuqtalari fazoning shunday nuqtalaridan, bu nuqtadan A nuqtagacha masofa R ga teng. Sferaning ixtiyoriy (x, y, z) nuqtasidan A nuqtagacha masofaning kvadrati



111-rasm

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ ga teng. Shuning uchun sferaning tenglamasi $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ko`rinishga ega. Sferaning markazi koordinatalar boshi bo`lsa, sferaning tenglamasi quyidagi ko`rinishda bo`ladi.

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Tekislik va sferaning kesishgan chizig`i aylanadan iborat bo`ladi. Buni isbot qilish ham mumkin.

O`z-o`zini nazorat qilish uchun savollar

1. Aylanma sirtga ta'rif bering.
2. Silindr va konusga ta'rif bering.
3. Sharga ta'rif bering.
4. Sfera tenglamasini keltirib chiqaring.

Geometriya elementlariga doir testlar

1. Qo'shni burchaklarning yigindisi necha gradusga teng?

a) 270 b) 180 d) 110 e) 360

2. Qanday burchak o`tmas burchakli uchburchak deyiladi?

a) bitta burchagi o`tmas bo`lgan;

b) ikkita burchagi o`tmas bo`lgan;

d) uchta burchagi o`tmas bo`lgan.

3. Burchak bissektrissasi nima?

a) Burchakni teng ikkiga bo`luvchi nur;

b) Burchakni 1:3 nisbatda bo`luvchi nur;

d) Burchakni 1:4 nisbatda bo`luvchi nur.

4. Uchinchi to`gri chiziqqa parallel bo`lgan 2 to`gri chiziq o`zaro ... bo`ladi

a) parallel;

b) perpendikulyar;

d) ayqash.

5. Uchburchak ichki burchaklarining yig`indisi necha gradusga teng?

a) 290° b) 90° d) 180° e) 100°

6. Uchburchakning tashqi burchagi ... ga teng.

a) o`ziga qo`shni bo`lmagan ichki burchaklar yig`indisiga teng;

b) o`ziga qo`shni burchakka;

d) 360° ga teng.

6. Agar to`rtburchakning diagonallari kesishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo`linsa, bu to`rtburchak ... bo`ladi.

a) ko`pburchak;

b) parallelogram;

d) trapetsiya;

e) teng yonli trapetsiya.

8. Ikkita qarama -qarshi tomonlarigina parallel bo`lgan to`rtburchak ... deyiladi

a) kvadrat;

b) to`g`ri to`rtburchak;

d) parallelogramm;

e) trapetsiya.

9. Aylana uzunligi ... ga teng.

a) πR;

b) $2\pi R$;

d) $2R$;

e) πR.

10. Kubning barcha qirralari yig`indisi 96 sm ga teng.Uning hajmini toping.

a) 256 b) 216 d) 384 e) 512

11. Bitta tekislikka perpendikulyar ikki to`gri chiziq o`zaro … bo`ladi.

a) perpendikulyar;

b) parallel;

d) ayqash.

12. Paralellopipedning qarama-qarshi tomonlari … .

a) paralel va teng;

b) perpendikulyar va teng;

d) teng va ayqash.

13. R (-3: 0) nuqtaning koordinata boshi atrofida 90° ga burganda hosil bo`ladigan nuqtaning koordinatalarini toping.

a) (1:0) b) (0:-3) d) (3:3) e) (0:3) f) (3: -3)

14. Har bir ichki burchagi 135° bo`lgan qavariq ko`pburchakning nechta tomoni bor ?

a) 5 b) 6 d) 8 e) 10 f) 12

15. To`rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 4 marta kattalashtirildi. Balandligi esa 4 marta kichiklashtirildi. Hosil bo`lgan piramida hajmininig dastlabki piramida hxajmiga nisbatini toping.

a) 1:16 b) 16:1 d) 1:1 e) 1:4 f) 4:1

16. Kub uchun nechta simmetriya tekisligi mavjud?

a) 8 b) 9 d) 7 e) 10 f) 6

17. Kvadratning yuzi … .

a) uning tomoni uzunligining kvadratiga teng,

b) uning tomoni uzunligining kubiga teng;

d) uning tomoni uzunliklari yigindisining yarmiga teng.

18. Agar to`gri to`rtburchakning yuzi 48 sm asosi 8 sm bo`lsa, uning bo`yini toping.

a) 9 b) 10 d) 6 e) 8

19. Agar uchburchakning asosi 9 sm balandligi 15 sm bo`lsa, yuzini toping.

a) 67 b) 67,5 d) 70 e) 70,5

21. Parallelogramning asosi 6 m va mos balandligi 7 sm bo`lsa uning yuzini toping.

a) 40 b) 45 d) 42 e) 36

22. Trapetsiyaning balandligi 5 m kichik asosi 6 sm va katta asosi kichik asosidan ikki yarim marta katta bo`lsa trapetsiyaning yuzini toping.

a) 37,2 b) 42 d) 35 e) 38

23. 3 ta tomoniga ko`ra uchburchakning yuzini toping.

$a=5$, $b=5$, $c=6$

a) 9 b) 11 d) 10 e) 12

24. Og`ma deb… .

a) R to`gri chiziqqa perpendikulyar kesmaga aytiladi;

b) R to`gri chiziqqa paralel bo`lgan kesmaga aytiladi;

d) R to`gri chiziqqa perpendikulyar har qanday chiziqqa aytiladi;

e) perpendikulyarning asosi bilan og`maning asosini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

27. ABS uchburchakda A uchidagi tashqi burchagi 120° ga, S uchidagi ichki burchak 80° ga teng. B uchidagi tashqi burchakni toping.

a)160° b) 150° d) 130° e) 120° f) 140°

28. Uchburchakning birligi tomoni k (x >7) sm, ikkinchi tomoni undan 4 sm qisqa, uchinchi tomoni esa birinchisidan 3 sm uzun. Shu uchburchakning perimetrini toping.

a) $3x$-1 b) $3x$+4 d) $3x$-3 e) $3x$+7 f) $3x$-4

29. Ikkita to`gri chiziqning kesishishidan hosil bo`lgan qushni burchaklar 6:7 nisbatda bo`lsa, shu burchaklarni toping.

a) 36°: 144° b) 75°: 105° d) 42°:138° e) 38° : 142° f) 85° : 95°

30. Bitta nuqtadan tekislikka og`ma va perpendikulyarniki 4 sm, og`maning tekislikdagi proeksiyasi necha sm?

a) 2 b) 3 d) 2,5 e)1 f) 3,5

V BOB. MIQDORLAR VA ULARNI O‘LCHASH

5.1. Miqdor tushunchasi

Matematikaning turmushga tadbiqi ko‘pchilik hollarda ikkita masalaga olib keladi: chekli to‘plam elementlarni sanash, miqdorlarni o‘lchash. Biz miqdorlarni o‘lchashga to‘xtalamiz. Bizga ma’lumki miqdorlar bilan o‘quvchilarni boshlang‘ich sinflarda tanishtiriladi va ular uzunlik, yuz, tezlik, narx, hajm kabi miqdorlar to‘g‘risida tassavvurlarga ega.

Miqdorlar aniq ob’ekt yoki hodisalarning mahsus xossalaridir.

Masalan, narsalarning oraliqqa ega bo‘lish xossasi uzunlik deyiladi. Narsa, kesmalar oraliqlari to‘g‘risida so`z ketganda uzunlik so‘zini ishlatamiz va bu miqdorlarni bir jinsli deymiz. Bir jinsli miqdorlar biror to‘plam elementlarini ayni bir xossasini ifodalaydi. Turli jinsli miqdorlar esa ob’ektlarning turli xossalarini ifodalaydi.

Masalan, uzunlik, yuz, massa-turli jins miqdorlar.

Miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

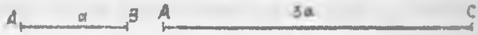
1. Har qanday bir jinsli ikki miqdor taqqoslangach, bir jinsli miqdorlar uchun «katta», «kichik» va «teng» munosabatlari o‘rinli. Bir jinsli a va b miqdorlar uchun quyidagi munosobatlardan biri o‘rinli $a>b$, $a<b$, $a=b$;

Masalan, uchburchak ikki tomoni uzunligining yig‘indisi, uchunchi tomoni uzunligidan katta, to‘g‘ri burchakli uchburchak istalgan katetining uzunligi gipotenuzasi uzunligidan kichik, parallelogramm qarama-qarshi tomonlari uzunliklari teng.

2. Bir jinsli miqdorlarni qo‘shish mumkin, qo‘shish natijasida yana bir jinsli miqdor hosil bo‘ladi. Boshqacha aytganda a va b bir jinsli miqdorlar uchun $a+b$ miqdor bir jinsli aniqlanadi va y a va b miqdorlarning yig‘indisi deyiladi. Masalan, a-AB kesmaning, b-BC kesmaning uzunligi bo‘lsa, u holda (112-rasm) AC kesmaning uzunligi AB va BC kesmalar uzunliklarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

112-rasm

3. Miqdor haqiqiy songa ko‘paytiriladi, natijada shu jinsli miqdor [illegible] bo‘ladi. Boshqacha aytganda, har qanday a miqdor va har qanday [illegible] haqiqiy son uchun yagona $b=x\cdot a$ miqdor mavjud: b miqdor a miqdorni [illegible] ko‘paytirish deyiladi. Masalan, AB kesmani a uzunligini $x=3$ ga ko‘paytir[illegible] yangi AC kesmaning 3 a uzunligi hosil bo‘ladi (113-rasm).



113-rasm

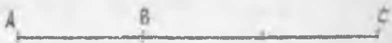
4. Bir jinsli miqdorlar ayiriladi, bu yerda miqdorlar ayirmasi [illegible] yig‘indisi orqali aniqlanadi: a va b miqdorlarning ayirmasi deb, [illegible] miqdorga aytiladiki, uning uchun $a=b+c$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, a-AC kesmaning, b-AB kesmaning uzunligi bo‘lsa, BC [illegible] uzunligi AC va AB kesmalar uzunliklarining ayirmasiga teng bo‘ladi (114-rasm).

114-rasm

5. Bir jinsli miqdorlar bo‘linadi, bunda bo‘linma bir jinsli miqdorlarni [illegible] ko‘paytmasi orqali aniqlanadi. Bir jinsli a va b miqdorlarning bo‘linmasi [illegible] shunday x nomanfiy haqiqiy songa aytiladiki, uning uchun $a=x\,b$ tenglik [illegible] bo‘ladi. x son a va b miqdorlarning nisbati deyiladi va $\frac{a}{b}=x$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, AC kesma uzunligining AB kesma uzunligiga nisbati 3 ga [illegible] (115-rasm)



115-rasm

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Miqdorlar deganda nimani tushunasiz?
2. Miqdorlar qanday xossalarga ega?
3. Bir jinsli, turli jinsli miqdorlarni tushuntiring.

5.2. Miqdorlarni o'lchash tushunchasi

Miqdorlarni taqqoslash bilan ularni teng emasligini aniqlashimiz mumkin. Ammo taqqoslash yo'li bilan aniq natijaga ega bo'linmaydi, shuning uchun miqdorlarni o'lchash zarur. Miqdorlarni o'lchash natijasida ma'lum sonli qiymatga ega bo'linadi.

1-ta'rif. Agar a miqdor berilgan va e miqdor birligi tanlab olingan bo'lsa, u holda a miqdorni o'lchash natijasida shunday x haqiqiy son topildiki, uning uchun $a = x \cdot e$ bo'ladi. Bu x soni a miqdorning e miqdor birligida sonli qiymati deyiladi. Bu son simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$x = m_e(a)$

Ta'rifga asosan istalgan miqdorni biror son bilan shu miqdor birligining ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin.

Masalan, 15 sm=15·1sm, 25 kg=25·1 kg. Miqdor va miqdorni songa ko'paytirish ta'rifidan foydalanib miqdorning bir birligidan boshqasiga o'tishni bajarish mumkin.

Masalan, $\frac{2}{3}$ kg ni grammlarda ifodalash mumkin. $\frac{2}{3}kg = \frac{2}{3} \cdot 1kg$ va 1kg=1000g bo'lgani uchun $\frac{2}{3}kg = \frac{2}{3} \cdot 1000g = \frac{2000}{3} = 666\frac{2}{3}g$ Shuning bilan birga miqdorlar ham har xil bo'lishini eslatib o'tish kifoya.

2-ta'rif. Bitta sonli qiymat bilan to'la aniqlanadigan miqdorlar skalyar miqdorlar deyiladi.

Bunga uzunlik, yuz, hajm, massa misol bo'laoladi.

3-ta'rif. Son qiymati va yo'nalishi bilan to'la aniqlanadigan miqdorlar vektor miqdorlar deyiladi.

Bunga tezlik, kuch, tezlanish, maydon kuchlanganligi kabilarni ko'rsatish mumkin.

Biz bundan keyin skalyar miqdorlarni qaraymiz. Skalyar miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar a va b miqdorlar e miqdor birligida o'lchangan bo'lsa, a va b

miqdorlar orasidagi munosabat ularni sonli qiymatlari orasidagi munosabat kabi bo'ladi.

$$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$$

$$a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$$

$$a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b)$$

Masalan. agar ikki kesma uzunligi AB=8sm, CD=5sm bo'lsa, u holda AB kesma uzunligini CD kesma uzunligidan katta deymiz, chunki 8>5:

2) Agar a va b miqdorlar e miqdor birligida o'lchangan bo'lsa, u holda $a+b$ yig'indining sonli qiymatini topish uchun a va b miqdorlarning sonli qiymatlarini qo'shish yetarli.

$$a+b=c \Leftrightarrow m_e(a+b) = m_e(a) + m_e(b)$$

Masalan, $a = 15m$, $b = 8m$ bo'lsa, $a + b = 15m + 8m = (8 + 15)m = 23m$

3) Agar a va b miqdorlar uchun $b=xa$ tenglik o'rinli bo'lsa (a kattalik e kattalik birligida o'lchangan, x-musbat haqiqiy son), u holda b miqdorning sonli qiymatini e birligida topish uchun x sonini $m_e(a)$ soniga ko'paytirish yetarli.

Masalan, agar b ning massasi a ning massasidan 5 marta katta, ya'ni $b=5a$ va a=2 kg bo'lsa, u holda $b = 5\ a = 5(2kg) = (5 \cdot 2)kg = 10kg$ bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Miqdorning sonli qiymatiga ta'rif bering.
2. Skalyar va vektor miqdorlarga ta'rif bering.
3. Miqdorlar yig'indisiga va miqdorni songa ko'paytirishga ta'rif berib, misollar yordamida tushuntiring.

5.3. Kesma uzunligi va uni o'lchash

Ta'rif. Kesma uzunligi deb, ixtiyoriy kesma uchun quyidagicha aniqlangan musbat miqdorga aytiladi:

a) teng kesmalar teng uzunlikka ega:

b) agar kesma chekli sondagi kesmalardan iborat bo'lsa, uning uzunligi bu kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng.

Kesma uzunligi quyidagi xossalarga ega:

1) Tanlab olingan uzunlik birligida har qanday kesmaning uzunligi musbat haqiqiy son bilan ifodalanadi va har bir musbat haqiqiy son uchun uzunligi shu son bilan ifodalangan kesma mavjud.

Haqiqatan bu xossani to'g'riligini isbotlash uchun kesmalar to'plamidan biror e kesma tanlab olamiz va uni uzunlik birligi uchun qabul qilamiz. a kesmada uning oxirlaridan biridan birin-ketin e ga teng kesmalar qo'yamiz. Agar e ga teng kesmalar n marta qo'yilgan bo'lsa va oxirgisining uchi a kesma uchi bilan ustma-ust tushsa, a kesma uzunligining qiymati n natural songa teng deyiladi va bunday yoziladi: $a=ne$. Agar e ga teng kesmalar n marta qo'yilganda yana e kesmadan kichik kesma ortib qolgan bo'lsa, bu kesmaga $e_1 = \frac{1}{10}e$ ga teng kesmalar qo'yamiz.

Agar ular to'laligicha n marta joylashsa, a=n, n_1e bo'ladi va a kesma uzunligining qiymati chekli o'nli kasr bo'ladi. Agar e_1 kesma n_1 marta qo'yilib, yana e_1 dan kichik kesma ortib qolsa, unga $e_2 = \frac{1}{100}e$ ga teng kesmalar qo'yiladi.

Agar bu jarayonni cheksiz marta davom ettirsak, a kesma uzunligining qiymati cheksiz o'nli kasr bo'ladi. Shunday qilib, tanlab olingan birlikda har qanday kesmaning uzunligi musbat haqiqiy son bilan ifodalanadi. Teskarisi ham to'g'ri agar musbat haqiqiy son n, n_1, n_2... berilgan bo'lsa, uning taqribiy qiymatini ma'lum aniqlikda olib va bu son yozuvidagi yasashlarni bajarsak, uzunligining son qiymati n, n_1,n_2 ... kasr bo'lgan kesma hosil qilamiz.

Bu bilan biz kesmalar uzunliklarining asosiy xossalaridan birini isbotladik. (Boshqa xossalarni isbotlashda kesmalar uzunliklari bir xil uzunlik birligi bilan o'lchanadi deb hisoblaymiz).

2) Agar ikkita kesma teng bo‘lsa ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo‘ladi, va aksincha: agar ikkita kesma uzunligining son qiymatlari teng bo‘lsa kesmalarning o‘zlari ham teng bo‘ladi: $a=b \Leftrightarrow m_e(a)=m_e(b)$ haqiqatan ham kesmalar teng bo‘lsa, ular uzunliklarini o‘lchashda e ga teng birlik kesmani va uning ulushini bir xil son marta qo‘yamiz, demak, teng kesmalar uzunliklarining son qiymati bir xil bo‘ladi.

Aksincha: agar ikkita kesma uzunliklarining son qiymatlari teng bo‘lsa, ular teng kesmalarni yasash jarayonini ifodalaydi.

3) Agar berilgan kesma bir nechta kesmaning yig‘indisi bo‘lsa, uning uzunligini son qiymati bu kesmalar uzunliklari son qiymatlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi: agar kesma uzunligining son qiymati bir nechta kesma uzunliklarining son qiymatlari yig‘indisiga teng bo‘lsa, kesmaning o‘zi ham kesmalar yig‘indisiga teng bo‘ladi:

$c=a+b \Leftrightarrow m_e(c)=m_e(a)+m_e(b)$ a va b - kesmalar uzunliklari.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{q}{n}$ - lar mos ravishda ularning son qiymatlari ya’ni $a=\frac{p}{n}e$, $b=\frac{q}{n}e$ bo‘lsin.

$a+b$ yig‘indining qiymatini hosil qilish uchun $\frac{1}{n}e$ ga teng p ta kesmani qo‘yamiz, keyin yana shunday kesmalardan q tasini qo‘yamiz. Natijada hosil bo‘lgan kesmalar yig‘indisining uzunligi $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$ son bilan ifodalanishini topamiz.

$$a+b=p\frac{1}{n}e+q\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=(\frac{p}{n}+\frac{q}{n})e$$

Aksincha, $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$ yig‘indi $\frac{1}{n}e$ qismni $p+q$ marta qo‘shishni bildiradi, ya’ni

$(p+q)\frac{1}{n}e=p\frac{1}{n}e+q\frac{1}{n}e=\frac{p}{n}e+\frac{q}{n}e=a+b$ kesmani hosil qilamiz.

Demak, agar kesmalar uzunliklarini son qiymatlari qo‘shilsa, ularga mos kesmalar ham qo‘shilar ekan.

6) Agar a va b kesmalar uzunliklari $b=xa$ munosabatni qanoatlantirsa (bunda x – musbat haqiqiy son), b kesmaning e birlikdagi uzunligini topish uchun x sonni e birlikda o'lchangan a kesmaning son qiymatiga ko'paytirish yetarli.

$b=xa \Leftrightarrow m_e(b)=x\cdot m_e(a)$ $b=xa$ va $a=\frac{p}{n}e$ bo'lsin.

U holda, $b=x\cdot\frac{p}{n}e=\left(x\cdot\frac{p}{n}\right)e$, ya'ni $m_e(b)=x\cdot m_e(a)$. $x\cdot\frac{p}{n}$ ko'paytma e kesmani $x\cdot\frac{p}{n}$ marta qo'shish kerakligini bildiradi, ya'ni $\left(x\cdot\frac{p}{n}\right)e=x\cdot\frac{p}{n}e=xa=b$.

7) Uzunlik birligini almashtirganda yangi uzunlik birligi eski uzunlik birligidan necha marta kichik (katta) bo'lsa, uzunlikning son qiymati shuncha marta ortadi (kamayadi). Ikkita uzunlik birligi e va e_1 mavjud bo'lsin va $e_1=ke$, ya'ni yangi uzunlik e birlikda $\frac{p}{n}$ qiymatiga ega bo'lsa, ya'ni $a=\frac{p}{n}e$ bo'lsa, shu a kesma uzunligi e_1 birlikdagi son qiymati k marta kamayadi: $a=\frac{p}{n}e=\frac{p}{n}\cdot\frac{1}{k}e_1=\frac{p}{nk}e_1$, $\frac{p}{nk}$ son esa $\frac{p}{n}$ sondan k marta kichik. Kesmalar uzunliklarining isbotlangan xossalaridan yana quyidagilar kelib chiqadi:

a) $a>b \Leftrightarrow m_e(a)>m_e(b)$

b) $c=a-b \Leftrightarrow m_e(c)=m_e(a)-m_e(b)$

v) $x=a:b \Leftrightarrow x=m_e(a):m_e(b)$

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Kesma uzunligi deb qanday miqdorga aytiladi?
2. Kesma uzunligi qanday xossalarga ega?
3. Uzunlik birligini almashtirganda kesma uzunligi son qiymatini o'zgarishini tushuntirib bering.

5.4. Figuraning yuzi va uni o'lchash

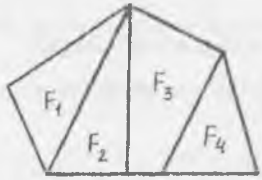
Har bir talaba maktabgacha ta'lim muassasasidan boshlab, figuraning yuzi haqida tushunchaga ega. Ular xonaning yuzi, yer uchastkasining yuzi, bo'yash lozim bo'lgan pol sirt yuzi va boshqalar haqida eshitganlar va biladilar. Hovli uchastkalari bir xil bo'lsa, ularning yuzalari tengligini; katta uchastkaning yuzi katta bo'lishini; uyning yuzi undagi xonalar yuzalarining yigindisiga tengligini bilamiz.

Geometrik figuralar turlicha tuzilganligi uchun yuz haqida gapirganda figuralaning alohida sinflari farq qilinadi.

Masalan, ko'pburchak va chegaralangan qavariq figuralar yuzi, doira yuzi yoki aylanma jismlarining sirtlari sinflarini qarash mumkin. Biz faqat ko'pburchak va chegaralangan yassi qavariq figuralar yuzlari haqida gapiramiz. Bunday figura boshqa figuralardan tuzilgan bo'lishi mumkin

116-rasmda tasivrlangan F figura F_1, F_2, F_3 va F_4 figuralardan tuzilgan. Bu figura F_1, F_2, F_3, F_4 figuraning birlashmasidan iborat va berilgan har qanday ikkita figura umumiy ichki nuqtaga ega emas.

Ta'rif. Figuraning yuzi deb har bir figura uchun quyidagicha aniqlangan nomanfiy miqdorga aytiladi:



116-rasm

117-rasm

1) teng figuralar teng yuzalarga ega;

2) agar figura chekli sondagi figuralardan tuzilgan bo'lsa, uning yuzi bu figuralar yuzalarining yig'indisiga teng.

Ta'rifdan ko'rinadiki, yuza ta'rifi kesma uzunligining ta'rifiga o'xshash. Yuz ham uzunlik tavsiflangan xossalar bilan tavsiflanganini, ammo ular ...

to'plamlarda: uzunlik-kesmalar to'plamida, yuz - yassi figuralar to'plamida berilganini ko'ramiz. F figuraning yuzini $S(F)$ bilan belgilashni shartlashib olamiz.

Figuraning yuzini o'lchash uchun yuz birligiga ega bo'lish kerak. Odatda yuz birligi uchun tomoni birlik kesma e ga, ya'ni uzunlik birligi uchun tanlanib olingan kesmaga teng bo'lgan kvadrat yuzi olinadi. Tomoni e bo'lgan kvadratning yuzi e^2 bilan belgilanadi.

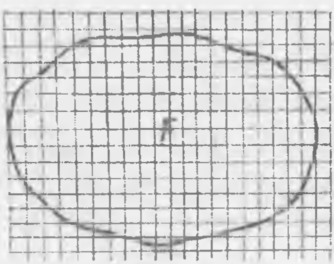
Masalan, birlik kvadrat tomonining uzunligi sm bo'lsa, uning yuzi sm^2 bo'ladi. Yuzni o'lchash berilgan figura yuzini birlik kvadrat yuzi e^2 bilan taqqoslashdan iborat. Bu taqqoslashning natijasi $S(F) = xe^2$ ni qanoatlantiruvchi x sondan iborat. x son tanlab olingan birlikda yuzning son qiymati deyiladi. Masalan, agar yuz birligi sm^2 bo'lsa, u holda 169-rasmda keltirilgan figuraning yuzi $4sm^2$ ga teng bo'ladi.

Figuralarning yuzlarini o'lchashning quyidagi usullarini ko'rib o'tamiz.

1. Yuzni paletka yordamida o'lchash (paletka – shaffof materialga chizilgan kvadratlar to'ri). Yuzi o'lchanayotgan F figura ustiga tomoni e bo'lgan kvadratlar to'ri tashlangan bo'lsin (170- rasm). U holda bu figuraga nisbatan kvadratlarning ikki turini ko'rsatish mumkin:

a) butunlay F figura ichida yotadigan kvadratlar

b) bir qismi F figura ichida, bir qismi uning tashqarisida yotadigan va figura konturi orqali o'tadigan kvadratlar.



118-rasm

Birinchi tur kvadratlar m ta, ikkinchi tur kvadratlar n ta bo'lsin. U holda,

F figuraning yuzi $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ shartni qanoatlant... $m - S(F)$ ning kami bilan olingan, $m+n$ ortig‘i bilan olingan taqribiy qiy...

Bundan ko‘rinadiki, paletka yordamida F figuraning yuzini katta aniq... o‘lchay olmaymiz. Aniqroq natija olish uchun paletka kvadratlarini may... qilish kerak, buning uchun dastlabki kvadratlarni maydaroq kvadratlarga bo‘l... kerak.

Masalan, tomoni $e_1 = \frac{1}{10}e$ bo‘lgan kvadratlar to‘rini yasash mumkin. Natija... figura yuzining kattaroq aniqlikdagi boshqa taqribiy qiymatini hosil qilamiz, ... jarayonni davom ettirish mumkin. Quyidagicha savol tug‘iladi: o‘lchashning ... bilan olingan har qanday taqribiy qiymatidan katta va ortig‘i bilan olingan ... qanday taqribiy qiymatidan kichik bo‘lgan hamda o‘lchanayotgan yuzning ... son qiymati bo‘la oladigan haqiqiy son mavjudmi? Matematikada yuzning ... olingan birligida har qanday yuz uchun bunday sonning mavjudligi va ... yagonaligi, yuz ta’rifida ko‘rsatilgan birinchi va ikkinchi ... qanoatlantirishi isbotlangan.

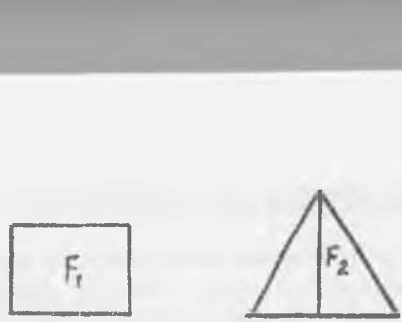
Paletka yordamida figuralarning yuzini o‘lchash usulini qo‘llash ... noqulay, chunki, u juda ko‘p vaqt talab qiladi, shuning uchun uncha ... bo‘lmagan figuralarning yuzigina paletka yordamida topiladi.

Figuralarning yuzi figuralarga tegishli bo‘lgan tomonlar, balandliklar ... boshqa kesmalarni o‘lchash bilan topila boshlandi.

Masalan, to‘g‘ri to‘rtburchak yuzining son qiymatini topish uchun ... tomonlari uzunliklarining son qiymatlari ko‘paytiriladi. Bu yuz ta’rifi va ... o‘lchash mohiyatidan yuzlarni taqqoslashning va ular ustida amallar bajarish... ma’lum qoidalari kelib chiqadi. Ulardan ba’zilarini ko‘rib chiqamiz.

a) Agar figuralar teng bo‘lsa, u holda ular yuzlarining son qiymatlari teng bo‘... (bir xil yuz birligida). Yuzlari teng bo‘lgan figuralar teng yuzli (tengdosh) fig... deyiladi.

Masalan, 1119-rasmdagi to‘g‘ri to‘rtburchak va uchburchak teng yuzli figural...



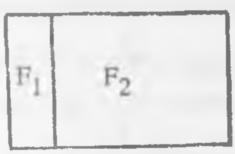
119-rasm

b) Agar F figura $F_1, F_2, \ldots, F_n$ figuralardan tuzilgan bo'lsa, F figura yuzining son qiymati $F_1, F_2, \ldots, F_n$ figuralar yuzlari son qiymatlari yig'indisiga teng bo'ladi (bir xil yuz birligida).

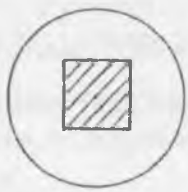
Masalan. 118-rasmda tasvirlangan F figuraning yuzini topaylik. Bu figurani ikkita F_1 va F_2 to'g'ri to'rtburchakdan tuzilgan deb qarash mumkin (ℓ to'g'ri chiziq F figurani bunday shaklga ajratgan). U holda

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) = 3sm \cdot 1sm + 3sm \cdot 4sm = 3sm^2 + 12sm^2 = (3+12)sm^2 = 15sm^2$$

c) Yuz birligini almashtirganda yangi birlik eski birliklardan qancha kichik (katta) bo'lsa, yuzining son qiymati shuncha marta ortadi (kamayadi).



120-rasm



121-rasm

Masalan, $5sm^2$ ni kvadrat detsimetrlarda ifodalaylik. Ma'lumki, $1sm^2 = 0{,}01dm^2$ demak,

$$5sm^2 = 5 \cdot 1sm^2 = 5 \cdot (0{,}01dm^2) = (5 \cdot 0{,}01)dm^2 = 0{,}05dm^2.$$

Boshlang'ich sinflarda o'quvchilar figuralarning yuzlari haqidagi dastlabki tushunchalar bilan tanishadilar. Figuraning yuzi haqidagi tasavvur figuralarni taqqoslash asosida vujudga keladi: kvadrat doira ichida yotgani uchun (173-rasm) uning yuzi doiraning yuzidan kichik, doiraning yuzi kvadratning yuzidan katta.

O'quvchilar figuralar yuzlarini paletka yordamida o'lchash bilan tanishadilar. Aytaylik, $m - F$ figura ichida butunlay yotgan kvadratlar soni, $n - F$

figura konturi o'tadigan kvadratlar soni bo'lsin. U holda $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$.

F figura yuzining taqribiy qiymatini topish uchun yuzning qiymatlarini qo'shish

va bu yig'indini teng 2 ga bo'lish yetarli: $S(F) \approx \dfrac{m+(m+n)}{2}e^2$.

Shakl almashtirishdan keyin topamiz:

$$S(F) \approx \frac{m+(m+n)}{2}e^2 = \frac{2m+n}{2}e^2 = (m+\frac{n}{2})e^2.$$

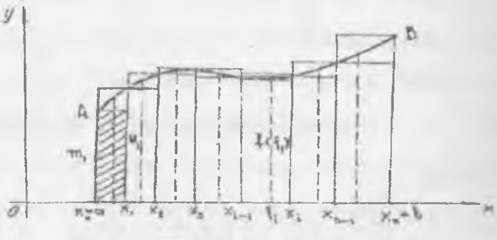
Oxirgi ifoda F figura yuzining taqribiy qiymati F figuraning ichida butunlay yotadigan kvadratlar soni bilan shu figura konturi o'tadigan kvadratlar soni yarmining yig'indisiga tengligini bildiradi.

2. Figuraning yuzlari aniq integral yordamida ham topiladi (bu usul boshlang'ich sinflarda qo'llanilmaydi).

Masalan, yuqoridan $y=f(x)$ funksiya grafigi, chapdan $x=a$ o'ngdan $x=b$ ordinatalar, pastdan (ox) abssissa o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli

trapetsiyaning yuzi $S=\int\limits_a^b f(x)dx$ aniq integral bilan hisoblanadi (bunda $y=f(x)$

funksiya musbat $[a,b]$ kesmada uzluksiz, 122-rasm).



122-rasm

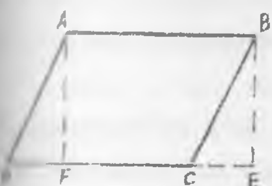
O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday miqdorga figuraning yuzi deyiladi?
2. Figuraning yuzini o'lchashning usullarini tushuntiring.
3. Figura yuzini paletka yordamida o'lchaganda yuzani hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

5.5. To'g'ri to'rtburchak va boshqa figuralarning yuzini topish

Yuzalarni o'lchash mavzusida to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S = ab$ formula bilan hisoblanishini ko'rsatgan edik. Endi ba'zi sodda figuralarning yuzlarini topishni ko'ramiz.

1. **Parallelogrammning yuzi.** $ABCD$ berilgan parallelogramm bo'lsin (123-rasm) Parallelogramm to'g'ri to'rtburchak bo'lmaganidan, uning burchaklaridan biri o'tkir burchak bo'ladi. Masalan. A yoki B o'tkir burchak bo'lsin. Aytaylik B o'tkir burchak bo'lsin. B uchidan DC to'g'ri chiziqqa BE perpendikulyar tushiramiz. U holda $ABED$ trapetsiyaning yuzi $ABCD$ paralellogramm bilan BCE uchburchak yuzining yig'indisiga teng bo'ladi. A uchidan DC to'g'ri chiziqqa AF perpendikulyar tushiramiz. U holda ABED trapetsiyaning yuzi ABEF to'g'ri to'rtburchakning yuzi bilan ADF uchburchak yuzining yig'indisiga teng bo'ladi.



123-rasm

To'g'ri burchakli ADF va BCE uchburchaklar teng, demak, ularning yuzlari teng. Bundan esa $ABCD$ parallelogrammning yuzi $ABEF$ to'rtburchakning yuziga, ya'ni $AB \cdot AF$ ga teng degan natija chiqadi. AF esa parallelogrammning balandligi.

$$S_{ABCD} = AB \times AF$$

Demak, parallelogrammning yuzi uning tomonini shu tomonga tushirilgan balandligiga ko'paytirilganiga teng.

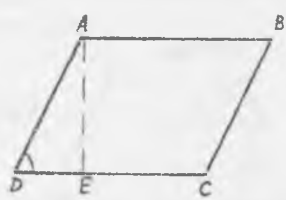
1-masala. Agar parallelogrammning tomonlari 2m va 3m, burchaklaridan biri esa 70° ga teng bo'lsa, uning yuzini toping (176-rasm).

Ber: AB=CD=3m

AD=BC=2m

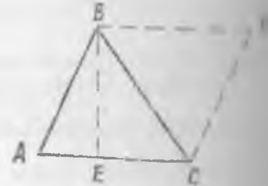
$\angle ADC = \angle ABC = 70^\circ$

T.k. S_{ABCD} =?



124-rasm

Yechish: ΔADE dan: $\dfrac{AE}{AD} = \sin 70^0$;



AE=2 sin 70^0;

$S_{ABCD} = DC \cdot AE = 3 \cdot 2 \cdot \sin 70^0 = 6 \cdot \sin 70^0 \approx$

$\approx 6 \cdot 0{,}9397 \approx 5{,}64m^2$

125-rasm

2. Uchburchakning yuzi.

ABC uchburchak berilgan (125-rasm) bo'lsin.

Bu uchburchakni rasmda ko'rsatilganidek *ABCD* parallelogramga to'ldiramiz. Parallelogramning yuzi *ABC* va *BDC* uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. Bu uchburchaklar teng bo'lgani uchun (125-rasm) parallelogramning yuzi *ABC* uchburchak yuzining ikkilanganiga teng.

Parallelogrammning *AC* tomoniga mos balandligi *ABC* uchburchakning *AC* tomoniga o'tkazilgan balandligiga teng. Demak, uchburchakning yuzi uning tomoni bilan shu tomonga tushirilgan balandligi ko'paytmasining yarmiga teng:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE$$

2-masala. Tomonlari 8 sm va 4 sm bo'lgan uchburchakning shu tomonlariga balandliklar o'tkazilgan. 8 sm li tomonga o'tkazilgan balandlik 3 sm ga teng. 4 sm li tomonga o'tkazilgan balandlik qanchaga teng? (126-rasm)

Ber: AC=8sm

AB=4sm $\qquad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE \ (1)$

BE=3sm

$\qquad S = \frac{1}{2} AB \cdot CF \qquad (2)$

126-rasm

T.K.: CF=?

Yechish:

$(1),\ (2) \Rightarrow \dfrac{AC \cdot BE}{2} = \dfrac{AB \cdot CF}{2}$

$$CF = \frac{AC \cdot BE}{AB} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6(sm)$$

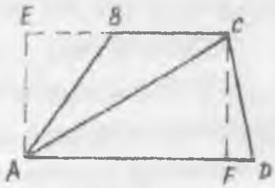
Uchburchak yuzini hisobiashning bu formulasidan tashqari quyidagi formulalari ham mavjud:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$ (bunda α - b va c tomonlar orasidagi burchak)

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (bunda a, b va c tomonlar, p-yarim perimetr)

3.Trapetsiyaning yuzi

ABCD berilgan trapetsiya bo'lsin (127-rasm). *AC* diagonalni o'tkazamiz. *AC* diagonal *ABCD* trapetsiyani ikkita *ABC* va *ACD* uchburchakka ajratadi. Trapetsiyaning yuzi shu uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. Uchburchaklarni mos ravishda *AE* va *CF* balandliklarini o'tkazamiz. U holda



127-rasm

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE \qquad S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CF$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot AE + \frac{1}{2} AD \cdot CF = \frac{(AD + BC)}{2} \cdot CF$$

Demak, trapetsiyaning yuzi, uning asoslari yig'indisi yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

1-masala. Teng yonli trapetsiyaning katta asosi 44 m yon tomoni 17 m va diagonali 39 m. Shu trapetsiyaning yuzini toping? (128-rasm)

Ber: AD=44 m

AB=CD=17 m

AC=39 m

T.K.: S_{ABCD} =?

128-rasm

Yechish: Belgilashlar kiritamiz.

ED=x; AE=44-x; CE=h

1) x ni topamiz: ΔACE va ΔCDElardan:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2; CD^2 = ED^2 + CE^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 39^2 = (44-x)^2 + h^2 \\ 17^2 = x^2 + h^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 39^2 - (44-x)^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow 88x = 704 \Rightarrow x = 8(m)$$

2) h ni topamiz: $h^2 = 17^2 - x^2 = 225 \Rightarrow h = 15(m)$

3) BC ni topamiz: $BC=AD-2ED$=44-16=28(m)

4) $$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{44+28}{2} \cdot 15 = 540(m^2);$$

Trapetsiyaning yuzini quyidagi formula bilan ham topish mumkin

$S = EF \cdot h$ (bunda EF - trapetsiyaning o‘rta chizig‘i, h-balandlik)

4.Rombning yuzi

ABCD berilgan romb bo‘lsin. (129-rasm). *AC* va *DB* diagonallarini o‘tkazamiz. *ABCD* rombni *ADB* va *DBC* uchburchaklarga ajratamiz. *ABCD* rombning yuzi *ADB* va *DBC* uchburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng. *AO* va *OC* bu uchburchaklarning balandliklari. U holda

129-rasm

$$S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} DB \cdot AO; \qquad S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} DB \cdot OC;$$

$$S_{ABCD} \frac{1}{2} DB \cdot AO + \frac{1}{2} DB \cdot OC = \frac{1}{2} DB(AO + OC) = \frac{1}{2} DB \cdot AC;$$

DB, *AC* rombning diagonallari. Demak, rombning yuzi uning diagonallari ko‘paytmasining yarmiga teng ekan.

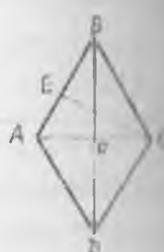
4-masala. Balandligi 10 sm, o‘tkir burchagi esa 30° ga teng bo‘lgan rombning yuzini toping. (130-rasm)

Berilgan: .

$\angle$ABC=30°

CE=h=10sm

T.k. S_{ABCD}=?



130-rasm

Yechish:

1) $\triangle ABEC$ dan $\frac{EC}{BC} = \sin 30^0$ $BC = \frac{EC}{\sin 30^0} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20sm$

Demak, $AB=BC=CD=DA=20$ sm

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot EC = \frac{1}{2} 20 \cdot 10 = 100 sm^2$

3) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 100 = 200 sm^2$

5.6. Jismning hajmi va uni o‘lchash

Biz turmushda shofyor mashinaga 65 kg suyuq gaz yoki 50 *l* benzin quygan yoki idishning hajmi 28 kub dm ga teng ekan degan gaplarni eshitamiz. Bu birliklar esa idishning hajmini bildiradi. Ikkita idish suyuqlik bilan to‘ldirilgan bo‘lsin (131-rasm). Ularning birinchisini m kg, ikkinchisini esa n kg suyuqlik bilan to‘ldirish mumkin.

Bunda $\frac{m}{n}$ soni birinchi idish ikkinchi idishdan necha marta katta ekanini ko‘rsatadi. Mana shu songa birinchi idishning hajmi deyiladi. Bunda ikkinchi idish o‘lchov birligi hisoblanadi.

131 – rasm

Hajm tushunchasining bu ta’rifdan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) har bir idish ma’lum musbat hajmga ega;

2) teng idishlarni hajmlari teng;

3) agar bir idish ikki qismga ajralsa, u idishning hajmi qismlar hajmlari yig‘indisiga teng.

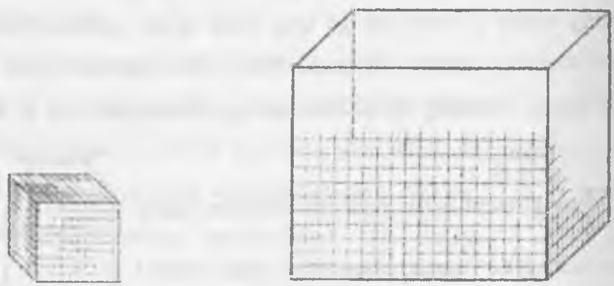
Bu ta’rifga ko‘ra jismni hajmini bilish uchun uni suyuqlik bilan to‘ldirish kerak bo‘ladi. Amaliyotda esa buni teskarisini qilishga to‘g‘ri keladi. Boshqacha aytganda, idishni suyuqlik bilan to‘ldirmasdan, uni to‘ldirish uchun zarur bo‘lgan suyuqlik miqdorini bilish talab qilinadi. Agar idish hajmi ma’lum bo‘lsa, idish hajmini birlik hajmini to‘ldirish uchun zarur bo‘lgan suyuqlik miqdoriga ko‘paytirib, suyuqlik miqdorini topgan bo‘lar edik. Berilgan jismning hajmi qanday topiladi? Agar jismni chekli miqdordagi tetroedrlarga, ya’ni uch burchakli muntazam piramidalarga ajratish mumkin bo‘lsa, bu jismni oddiy jism deb ataladi. Oddiy jismlarning hajmini hisoblashda, hajmning yuqoridagi xossalariga asoslaniladi, ya’ni:

1) har bir oddiy jism berilgan o‘lchov birligida ma’lum hajmga ega;

2) teng jismlarning hajmlari teng;

3) agar oddiy jism bir nechta oddiy jismga ajratilsa, bu jismning hajmi uning qismlari hajmlrining yig‘indisiga teng.

Oddiy jismlarni hajmlarini hisoblashni jumladan, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmini hisoblashdan boshlaymiz.



132 – rasm

132-rasmda hajm o‘lchovi birligi bo‘lgan kub va hajmi o‘lchanishi lozim bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped tasvirlangan. Kubning qirrasi uzunlik birligi bo‘lib hizmat qiladi. Avval parallelepipedning a, b, c qirralarining uzunliklari chekli o‘nli kasrlar bilan ifodalangan hamda verguldan keyingi xonalar soni n dan oshmagan holni qarab chiqamiz. Kubning bitta uchidan chiqqan qirralarini 10^n ta teng bo‘lakka ajratamiz va bo‘linish nuqtalaridan bu qirralarga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz.

Bunda kub qirralari $\frac{1}{10^n}$ ga teng bo‘lgan $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ ta kichik kubga ajraladi

Kichik kubning hajmini topamiz. Hajmning xossasiga ko‘ra katta kubning hajmi kichik kublar hajmlarning yig'indisiga teng. Katta kubning hajmi birga tengligi, kichik kublar soni esa 10^{3n} ga tengligi uchun kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga teng.

$$\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a\cdot 10^n \qquad \frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b\cdot 10^n \qquad \frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c\cdot 10^n$$

sonlar butun sonlar bo'lgani uchun parallelepipedning qirralarini $\frac{1}{10^n}$ ga teng bo'lgan butun sondagi qismlarga ajratamiz. a qirrada ular $a\cdot 10^n$ ta, b qirrada $b\cdot 10^n$ ta c qirrada $c\cdot 10^n$ ta bo'ladi. Qirralarga perpendikular tekisliklar o'tkazamiz. Bunda biz parallelepipedning tomoni $\frac{1}{10^n}$ bo'lgan kichik kublarga ajratamiz.

Ularning soni $a10^n \cdot b10^n \cdot c10^n = abc10^{3n}$ ga teng

Parallelepipedning hajmi undagi kichik kublar hajmlarining yig'indisiga teng. Kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga, ularning soni esa $abc10^{3n}$ ga tengligi uchun parallelepipedning hajmi $abc\cdot 10^{3n}\cdot\frac{1}{10^{3n}} = abc$ ga teng.

Endi a,b,c qirralardan kamida bittasi cheksiz o'nli kasr bilan ifodalanadigan holni qarab chiqamiz. A sonining n ta o'nli raqamiga kami bilan va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlarini a_1 ba a_2 bilan belgilaymiz, b va c sonlarning shunday aniqlikdagi taqribiy qiymatlarini mos ravishda b_1 va b_2, c_1 va c_2 bilan belgilaymiz. Qirralari a_1, b_1, c_1 bo'lgan parallelepipedning hajmi berilgan parallelepipednikidan kichik, chunki uni berilgan parallelepipedning ichiga joylashtirish mumkin. Isbotga ko'ra qirralari a_1, b_1, c_1 bo'lgan parallelepipedning hajmi esa $a_1 b_1 c_1$ ga teng, qirralari a_2, b_2, c_2 bo'lgan parallelepipedning hajmi $a_2 b_2 c_2$ ga teng. Shunday qilib, berilgan parallelepipedning hajmi $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$ va $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$ orasida yotadi. $a_1 b_1 c_1$ va $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$ miqdorlar esa a b c sonining oldindan berilgan aniqlikdagi taqribiy qiymati bo'lgani uchun, n yetarlicha katta bo'lganda $V=abc$ bo'ladi. Shunday qilib, to'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi $V=abc$ formula bo'yicha hisoblanadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Jismning hajmi deganda nimani tushunasiz?
2. Hajm tushunchasining xossalarini aytib bering.
3. To‘g‘ri burchakli parallelepiped hajmini o‘lchashni tushuntirib bering.

5.7. Jismning massasi va uni o‘lchash

Massa-asosiy fizik kattaliklardan biridir. Jismning massasi tushunchasi og‘irlik-kuch tushunchasi bilan chambarchas bog‘langan.
Og‘irlik kuchi ta’sirida jism Yerga tortiladi. Jismning og‘irligi jismning o‘zigagina bog‘liq emas. Shuning uchun u turli kengliklarda turlicha: masalan qutbda jism ekvatordagiga qaraganda 0,5% og‘ir. Og‘irlik kuchi bunday o‘zgaruvchanligiga qaramay quyidagi xususiyatga ega: har qanday sharoitda ham ikki jism og‘irligining nisbati bir xildir.

Jismning og‘irligini boshqa jism og‘irligi bilan taqqoslab o‘lchashda jismning yangi xossasi kelib chiqadi,bu xossa massa deb ataladi.

Faraz qilaylik, richagli tarozining bir pallasiga birorta a jism, ikkinchi pallasiga b jism qo‘yilgan bo‘lsin. Bunda quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:
1) tarozining ikkinchi pallasi tushib, birinchisi shunday ko‘tariladiki, ular baravar bo‘lib qoladilar, bu holda tarozi muvozanatda, *a* va *b* jismlar bir xil massaga ega deyiladi:
2) tarozining ikkinchi pallasi birinchi pallasidan balandligicha qoladi: bu holda a jismning massasi *b* jismning massasidan katta deyiladi:
3) tarozining ikkinchi pallasi tushdi, birinchi pallasi ko‘tarildi va ikkinchidan baland bo‘ladi: bu holda a jismning massasi b jismning massasidan kichik deyiladi.
Shuni eslatamizki, agar jism ekvatorda richagli tarozida o‘lchansa, keyin jism va tarozi toshlari qutbga olib borib o‘lchansa, o‘sha natijani beradi, chunki jism ham tarozi toshlari ham o‘z og‘irliklarini bir xil o‘zgartiradi. Shunday qilib, jismning massasi o‘zgarmaydi,u qayerda bo‘lmasin,uning massasi doim bir xil bo‘ladi.

Matematik nuqtai nazardan massa-quyidagi xossalarga ega bo'lgan musbat miqdor:

1) tarozida bir-birini muvozanatlovchi jismlarning massasi bir xil;

2) jismlar bir-birlari bilan birlashtirilsa, massalar qo'shiladi: birgalikda olingan bir nechta jismning massasi ular massalarining yigindisiga teng.

Bu ta'rifni uzunlik va yuz uchun berilgan ta'riflar bilan solishtirsak, massa ham uzunlik va yuz ega bo'lgan xossalarga ega bo'lishini, biroq u fizik jismlar to'plamida berilganligini ko'ramiz. Massalar tarozilar yordamida quyidagicha o'lchanadi: massasi birlik sifatida qabul qilinadigan e jism tanlab olinadi (bunda massaning ulushlarini ham olish mumkin). Tarozining bir pallasiga massasi o'lchanayotgan jism qo'yiladi, ikkinchi pallasiga massa birligi qilib olingan jismlar, ya'ni tarozi toshlari qo'yiladi. Bu toshlar tarozi pallalari muvozanatga kelguncha qo'yiladi. O'lchash natijasida berilgan jismning massasining qabul qilingan birligidagi son qiymatini jism massasining taqribiy qiymati deb qarash kerak (masalan, 3kg 125 g bo'lsa, 3125 soni).

Uzunlikdagiga o'xshash massalarni taqqoslash, ular ustida amallar bajarish massalarning son qiymatlarini taqqoslashga va ular ustida amallar bajarishga keltiriladi.

Massaning asosiy birligi-kilogramm. Bu asosiy birlikdan massaning boshqa birliklari: gramm, tonna va boshqalar hosil bo'ladi.

5.8. Vaqt oraliqlari va ularni o'lchash

Vaqt tushunchasi uzunlik va massa tushunchalariga nisbatan ancha murakkabdir. Kundalik hayotda vaqt bir voqeani ikkinchi voqeadan ajratib turadi. Matematika va fizikada vaqt skalyar kattalik (miqdor) sifatida qaraladi, chunki vaqt oraliqlari uzunlik, yuz, massalar xossalariga o'xshash xossalarga ega.

Vaqt oraliqlarini taqqoslash mumkin.

Masalan, bir xil yo'lga velosipedchi yengil avtamobilga qaraganda ko'proq vaqt sarflaydi.

Vaqt oraliqlarini qo'shish mumkin.

Masalan, oliygohlarda bitta ma'ruza o'qish uchun ketgan vaqt maktabdagi ikki darsga ketgan vaqtga teng. Vaqt oraliqlarini ayirish, musbat haqiqiy songa ko'paytirish mumkin. Vaqt oraliqlari o'lchanadi. Vaqt oralig'ini o'lchash uchun vaqt birligi qabul qilingan.

Xalqaro sistemada vaqt birligi qilib sekund olingan. Sekund bilan bir qatorda vaqtning boshqa birliklari; minut, soat, sutka, yil, hafta, oy, asr ishlatiladi. Yil va sutka birliklari tabiatdan olingan, soat, minut, sekund birliklarini kishilar o'ylab topgan. Yil-Yerning Quyosh atrofida aylanish vaqti. Sutka Yerning o'z o'qi atrofida aylanish vaqti.

Yil taxminan $365\frac{1}{4}$ sutkaga teng. Lekin, kishilarning bir yilgi hayoti sutkalarning butun sonlaridan tuzilgan. Shuning uchun har yilga 6 soatdan qo'shish o'rniga har to'rtinchi yilga butun sutka qo'shiladi. Bu yil 366 kundan iborat bo'lib, kabisa yili deyiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Jismning massasi deganda nimani tushunasiz?
2. Jismning massasi va og'irligi orasidagi farq nimada?
3. Jism massasi xossalarini aytib bering?
4. Massa qanday o'lchanadi?
5. Vaqt oraliqlari va ularni o'lchashni tushuntirib bering.

5.9. Birliklar sistemasining rivojlanish tarixi. Birliklarning xalqaro sistemasi

Kishilik jamiyatni rivojlantirish bosqichida har xil miqdorlarni o'lchash va o'lchash ishlarini aniqroq bajarish kerakligini bilganlar. Aniq o'lchashlarning asosi bo'lib esa birliklarning aniq namunalari (etalonlari) xizmat qiladi. Namunalarning aniqligi esa mamlakat fan texnika va sanoati rivojlanishini ko'rsatib, uning ilmiy texnik potensialini belgilaydi.

Miqdorlar o'lchov birliklarining rivojlanishi tarixi ham bir qancha davrni o'z ichiga oladi. Eng qadimgi davrda uzunlik birligi bo'lib, kishi tanasining qismlari olingan. Masalan, uzunlik o'lchovi birligi sifatida kaft (bosh bormoqsiz to'rtta barmoq kengligi), tirsak (tirsak uzunligi), fut (oyoq tagi kafti uzunligi), duym (katta barmoqning bir bo'lagi uzunligi, 1 duym=2sm 5,4mm) va boshqalar. Shu davrlarda yuz birligi sifatida quduq (bir quduq suvi bilan sug'oriladigan maydon), qo'sh yoki plug (qo'sh yoki plug bilan bir kunda ishlov berilgan o'rtacha maydon) va boshqalar olingan.

XIV-XVI asrlarda savdo-sotiqning rivojlanishi bilan miqdorlarning o'lchashning ob'ektiv birliklari vujudga kela boshladi. Masalan, Angliyada duym (uchta arpa donachasining uzunligi), fut (yonma-yon qo'yilgan 64 ta arpa donachasining kengligi).

Massa birligi sifatida grant (boshoq massasi) va karat (dukkaklii o'simlik turlaridan biri urug'ining massasi) qabul qilingan. Miqdorlar o'lchov birliklari rivojlanishining keyingi tarixida bir-biri bilan o'zaro bog'langan birliklar kiritildi. Masalan, Rossiyada uzunlik birligi qilib milya, chaqirim (versta), sarjin va gaz (arshin) kiritildi. 3 gaz 1 sarjinga, 500 sarjin 1 chaqirimga, 7 chaqirim 1 milyaga teng (1dengiz milyasi 1852 m ga teng, 1geografik milya 7420m). Ammo miqdorlar birliklari orasidagi bog'lanish ixtiyoriy bo'lib, turli mamlakatlarda turlicha, hatto mamlakat ichidagi oblastlar ham o'zlarining uzunlik, yuz, massa birliklariga ega bo'lgan.

Bu esa sanoat va qishloq-xo'jaligining rivojlanishiga to'siq bo'lgan, ilm-fan va savdo-sotiq rivojlanishiga halaqit bergan. XVIII asrga kelib Fransiyada birliklarning yangi sistemasi-Xalqaro sistemaning asosi bo'lgan sistema vujudga keldi.

Bu sistemada uzunlikning asosiy birligi qilib metr («metr» so'zi grekcha «metro» so'zidan olingan bo'lib, «o'lchov» ni bildiradi) -Parijdan o'tadigan Er meridiani uzunligining 40 milliondan bir qismi qabul qilingan. Bundan tashqari yuz, hajm, massa birliklari qabul qilingan. Tomonining uzunligi 10 m bo'lgan kvadratning yuzi 1 *ar*.qirrasining uzunligi 0,1 m bo'lgan kub hajmiga teng suyuqlik yoki sachrovchi jismlar hajmi 1 litr: qirrasining uzunligi 0,01 m bo'lgan kub ichidagi toza suv massasi-1 gramm deb qabul qilingan.

Shuning bilan qo'shimcha yordamida hosil bo'ladigan o'lcham karralari va ulushli birliklar: mega (10^6), kilo (10^3), gekto (10^2), deka (10^1), detsi (10^{-1}), santi (10^{-2}), milli (10^{-3}) kiritildi.

Massa birligi uchun 1^0S haroratdagi 1 dm^3 suvning massasi 1 kilogramm deb qabul qilindi. Yuqoridagi miqdorlarning hamma birliklari uzunlik birligi metr bilan bog'langani uchun miqdorlarning yangi sistemasi o'lchovlarning metrik sistemasi nomini oldi. Shu davrda metr va kilogrammning platina etaloni tayyorlandi: metrni oxirlarida shtrixlar qo'yilgan chizg'ich, kilogrammni esa silindrik tarozi toshi ifodalaydi. Bu etalonlar Fransiyaning milliy arxiviga saqlash uchun berilgan. Ammo tez orada bu sistemaga ham o'zgartirishlar kiritishga to'g'ri keldi. Bunga sabab meridian uzunligining etarlicha aniq hisoblanmagani sabab bo'ldi. O'lchovlarning metrik sistemasi darrov tan olinmadi. Rossiyada bu sistema 1899 yilda ishlatila boshladi.

XX asrning 50 yillariga kelib o'lchovlarning metrik sistemasini to'ldiruvchi va rivojlantiruvchi turli xil birliklar sistemasi vujudga keldi. Shu sababli yagona universal birlik sistemasini barpo qilish muammosi tug'ildi.

1960 yilda o'lchov va og'irliqlarning XI bosh konferensiyasi xalqaro birliklar sistemasi (SI) (ruscha talqini SI, "Xalqaro", "ES-I" deb o'qiladi) ni kiritishi bilan, bu muammo hal qilindi.

Butun dunyo uchun yagona hisoblangan bunday sistemaga bo'lgan talab yuqori bo'lgani uchun u qisqa vaqt ichida keng xalq ommasi orasida tan olindi va butun dunyoga tarqaldi. SI sistemada ettita asosiy birlik (metr, kilogramm, sekund, amper, kelven, mol va kandela) va 2 ta qo'shimcha birlik (radian va steradian) bor.

Ma'lumki, uzunlik birligi metr va massa birligi kilogramm o'lchovlarning metrik sistemasida ham bor edi. Ular yangi sistemaga qanday o'zgarishlar bilan kiritilgan? Metrning yangi ta'rifi kiritildi – u yassi elektromagnit to'lqinining vakuumda (havosiz bo'shliqda) sekundning $\frac{1}{299792458}$ qismida o'tgan yo'li sifatida qaraladi. Metrning bunday ta'riflanishiga o'lchashlarning aniqligiga bo'lgan talabning oshganligi va har qanday sharoitda ham o'zgarishsiz qoladigan miqdor birligiga ega bo'lishiga erishishdir.

Massa birligi kilogrammning ta'rifi o'zgarmadi, kilogramm – 1889 yilda platina va iridiy aralashmasidan tayyorlangan silindr massasi. Bu etalon Fransiyaning Sevre shaharida o'lchov va og'irliklarning xalqaro byurosida saqlanadi. Xalqaro sistemaning uchinchi asosiy birligi vaqt birligi – sekunddir. 1960 yilgacha sekund Quyosh sutkasining $\frac{1}{86400}$ qismiga teng deb olingan, ya'ni sekund yerning o'z o'qi atrofida aylanishi bo'yicha hisoblangan. Bunday hisoblashda bir sutkada 86400 sekund bo'ladi, bu 1440 minut yoki 24 soatni tashkil qiladi. 1960 yilda o'lchov va og'irliklarning Bosh konferensiyasi yerning Quyosh atrofida orbita bo'ylab harakatiga asoslanib, vaqtning yangi birligiga o'tish haqida qaror qabul qildi. Sekund yilning $\frac{1}{31556925{,}9747}$ qismi sifatida olindi. Amrno bu ham olimlarni qanoatlantirmadi. 1967 yilda sekundni boshqacha hisoblash taklif qilindi. "Sekund seziy-133 atomi asosiy holatining ikki o'ta nozik sathlar orasidagi o'tishga mos bo'lgan nurlanish davridan 9192631770 marta katta vaqtga teng" deb olindi.

Umuman olganda fan va texnikaning rivojlanishi muntazam ravishda miqdorlar birliklarining ta'riflariga tuzatishlar kiritib turadi.Amalda hamma uzunliklarni metr bilan, massalarni kilogramm bilan, vaqtni sekund bilan o'lchashga to'g'ri kelavermaydi.

Shuning uchun asosiy birliklardan ularga karrali va ulushli bo'lgan yangi birliklar hosil qilinadi. Karrali birliklar asosiy birliklardan 10, 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15},10^{18} marta katta, ulushli birliklar asosiy birliklarning 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9},10^{-12},10^{-15}, 10^{-18}, qismiga teng. Birliklarning yangi nomlari "metr", "gramm", "sekund" lar va jadvalda ko'rsatilgan old qo'shimchalarni qo'shish yordamida hosil qilinadi:

Old qo'shim -chalar	Old qo'shim-chalarning belgilanishi	Ko'paytuvchi	Old qo'shim chalar	Old qo'shimcha larning belgilanishi	Ko'pay-tuvchi
Mega	M	10^6	Santi	s	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Gekto	g	10^2	Mikro	mk	10^{-6}
Deka	da	10	Nano	n	10^{-9}
Detsi	d	10^{-1}			

Masalan, kilometr-karrali birlik, $1км = 10^3\ 1м = 1000м$; millimetr-ulushli birlik, $1mm = 10^{-3} \cdot 1m = 0{,}0001m$ .Umuman, uzunlik uchun karrali birlik kilometr (km), ulushli birliklar-santimetr (sm), millimetr (mm), mikrometr (mkm), nanometr (nm), massa uchun karrali birlik megogramm (mg), ulushli birliklar gramm (g), milligram (mg), miqrogramm (mkg), vaqt uchun karrali birlik kilosekund (ks), ulushli birliklar-millisekund (ms), mikrosekund (mks), nanosekund (ns). Uzunlik, massa va vaqt orqali aniqlanadigan miqdorlar hosilaviy miqdor deyiladi. Ularning birliklari asosiysi bilan mos tushishi kerak. Ba'zi bir hosilaviy miqdorlarni va ularning birliklarini aytib o'tamiz:

1. Yuz. Yuzning birliklari-kvadrat metr (m^2), kvadrat kilometr (km^2), kvadrat detsimetr (dm^2), kvadrat santimetr (sm^2), kvadrat millimetr (mm^2).
2. Hajm, sig'im. Hajm birliklari-kub metr (m^3), kub millimetr (mm^3), litr (l), gektolitr (gl), millilitr (ml). SI da litr kub detsimetrning o'ziga xos boshqacha nomi sifatida qaraladi, ya'ni $1l = 1dm^3$.
3. Tezlik. Tezlik birliklari-sekundiga metr (m/s), soatiga kilometr (km/soat), sekundiga santimetr (sm/s).

Mamlakatimizda ishlatiladigan miqdorlar birliklari, ular nomlari (atalishi), belgilanishi va qo'llanish qoidalari Davlat standarti tomonidan tayinlanadi. Bu standart esa birliklarning Halqaro sistemasiga asoslangan. Shuningdek, SI dagi birliklardan tashqari birliklar gruppasi mavjud. Xususan, massa uchun tonna (t) birligini; vaqt uchun minut (min), soat, sutka, hafta, oy, yil, asr; yuz uchun gektar (ga); temperatura uchun selsiy gradus (^{0}C) kabi birliklarini ishlatishga ruxsat berilgan. Ammo massa uchun sentner, yuz uchun ar birliklar Davlat standartiga binoan qo‘llanilmaydi. Miqdorlarning birliklari bilan bog‘liq bo‘lgan terminlarning to‘g‘ri qo‘llanilishi qoidalari ham Davlat standartida tasdiqlangan.

Shuning bilan birga ayrim adabiyotlarda uchraydigan ba’zi bir o‘lchov birliklarini talabalar bilib qo‘ysa, maqsadga muvofiq bo‘lar edi:

Miskol – 4,1 – 4,4 gr.	Qarich – 20 sm.
Qadoq – 400 gr.	Arshin – 71,1 sm.
Nimcha – 2 kg.	Gaz – 70 – 90 sm.
Dinor - 4,8 kg.	Chaqrim - 1.5 km.
Pud – 16 kg	Tosh – 7-8 km.
Botmon – 20 kg.	Farsax – 8,5 – 9,5 km.
Tutam – 8 sm.	

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Qadimgi o‘lchov birliklari to‘g‘risida (kaft, tirsak, fut. duym) gapirib bering.
2. XVIII asrda Fransiyada Xalqaro birliklar sistemasining vujudga kelishini so‘zlab bering.
3. 1960 yilda birliklar sistemasi SI ni qabul qilinishi va bu sistemada ettita asosiy birliklar haqida ma’lumotlar bering.
4. Asosiy va karrali birliklar qanday hosil qilinadi.
5. Hosilaviy miqdorlar va ularning birliklari to‘g‘risida nimalarni bilasiz?

GLOSSARIY

1. ***Absalyut kattalik*** - pilyus (+) va minus(-) ishorasiz olingan kattalik.
2. ***Aylana*** - hamma nuqtalari markazdan baravar uzoqlikda bo'lgan yopiq egri chiziq.
3. ***Ayniyat*** - $A=V$ ko'rinishidagi yozuv, undagi A va V ifodalar ularda qatnashgan o'zgaruvchilarning biror M to'plamdan olingan barcha qiymatlarida bir xil qiymatlar qabul qiladi.
4. ***Aksioma***(lar) - geometriyaning boshlang'ich dalillari, ular isbotsiz qabul qilinadi va bu fanning boshqa barcha natijalarini keltirib chiqarishga imkon beradi. Aksiomalardan keltirib chiqariladigan tasdiqlari teoremalar deb ataladi.
5. ***Algoritm*** - berilgan ma'lumotlardan izlanayotgan natijaga o'tish jarayonini ko'rsatib beruvchi aniq qoida (ko'rsatma). Qoida algoritm bo'lishi uchun quyidagi uchta xossaga ega bo'lishi zarur: aniqlik, ya'ni ixtiyoriylikka o'rin qoldirmaydigan hammaga tushunarli va tayinlilik xossasi; ommaviylik, ya'ni berilgan ma'lumotlar ma'lum chegaralarda o'zgarish imkoniyatiga ega bo'lish xossasi; samaradorlik, ya'ni izlanayotgan natijaga erishishga yo'nalganlik xossasi .
6. ***Birlik*** - natural qatorning birinchi soni, shuningdek o'nli sanoq sistema raqamlaridan biri.
7. ***Burchak*** - nuqta, to'g'ri chiziq, nur va kesmadan keyingi eng sodda geometrik figura . Agar tekislikdagi O nuqtadan ikki turli OA va OV nurchiqarilsa, u holda bu nurlar tekislikni ikki qismga ajratadi. Ularning har biri uchi O nuqtada, tomonlari OA va OV bo'lgan burchak deb ataladi.
8. ***Bo'linuvchanlik*** - sonlar nazariyasida o'rganiladigan asosiy tushunchalardan biri. Agar $a=bc$ bo'lib, c butun son mavjud bo'lsa, "a butun son b butun songa bo'linadi" deyiladi.
9. ***Grafik*** - funksiyaning grafigi uni tasvirlash usullaridan biri. U yoki bu funksiyani turlicha, masalan, gap bilan tavsiflash mumkin.

10. *Graf* - matematikada graf deb, ba'zilari o'zaro chiziqlar bilan tutashtirilgan chekli sondagi nuqtalar majmuiga aytiladi: bu nuqtalar grafning uchlari, tutashtiruvchi chiziqlar esa qirralari deyiladi.

11. ***Gruppa*** - matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, algebra, geometriya, fizika va boshqa fanlarda qo'llaniladi.

Dialektik bilish nazariyasi nuqtai nazaridan gruppa tushunchasi ikkinchi bosqich abstraktsiyasidir. Matematikaning birinchi bosqich abstraktsiyasiyalarini real dunyo ob'ektlari va jarayonlarining nusxalari deb atash mumkin, ya'ni ular uchun bizni o'rab turgan borliqda "prototiplar" topiladi.

12. ***Davriy kasr*** - cheksiz o'nli kasr, biror joydan boshlab, aniq bir raqamlar gruppasi davriy takrorlanadi. Masalan, *2,5131313*....... Odatda bunday kasrni qisqacha *2,5(13)* ko'rinishida yozishadi, ya'ni takrorlanadigan raqamlar gruppasini qavsga olib, "davrda 13" deyishadi.

13. ***Doira*** - tekistlikning aylana bilan o'ralgan yuzasi; to'garak.

14. Yevklid algoritmi-ikkita butun sonning eng katta umumiy bo'luvchisini topish, shuningdek ikkita o'lchovdosh kesmaning umumiy o'lchovini topish usuli.

15. ***Zaruriy va yetarli shartlar*** – matematik teoremalarning bir ko'rinishi, teoremalarni yozish va talqin qilish shaklidir.

16. ***Isbot*** - berilgan tasdiqning to'g'riligi aniqlanadigan mushohada (bir fikrdan ikkinchi fikrni keltirib chiqarish)lar zanjiri.

17. ***Kesma*** – asosiy geometrik figuralardan biri. To'g'ri chiziqning A va V nuqtalari orasidagi va shu nuqtalarni qo'shib hisoblagandagi qismi kesma deyiladi.

18. ***Ketma-ketlik*** – matematikaning asosiy tushunchalaridan biri. Ketma-ketlik sonlar, nuqtalar, funksiyalar, vektorlar va h.k. dan tuzilgan bo'lishi mumkin.

19. ***Kombinatorika*** - matematikaning berilgan ob'ektlardan u yoki bu shartlarni qanoatlantiruvchi nechta kombinatsiya tuzish mumkinligini o'rganuvchi bo'limi.

20. ***Kompleks sonlar*** - $a+bi$ ko'rinishidagi sonlarga aytiladi. Bu yerda a va b haqiqiy sonlar, i-alohida turdagi son bo'lib, uning kvadrati *1 ga* teng, ya'ni $i^2=-1$. Kompleks sonlar ustidagi amallar ko'phadlar ustidagi amallarni bajarish qoidalari bo'yicha o'tkaziladi, bunda i^2 har safar -1 ga almashtiriladi.

21. ***Koordinatalar*** - eramizdan 100 yildan ham avvalroq yunon olimi Gipparx yer sharini (tasavvurda) paralel va meridianlar bilan o'rab kenglik va uzunlik-hozir yaxshi ma'lum geografik koordinatalarni kiritishni va ularni sonlar bilan belgilab chiqishni taklif etgan.

22. ***Maydon*** – arifmetik amallarni aniqlagan elementlar to'plami.

23. ***Matematik induktsiya*** - xususiy xulosalardan umumiy xulosalarga o'tishdan iborat mulohazalar induktiv deb ataladi. Odatda, ma'lum bir xossa biror sondagi predmetlarda payqaladi, vaqti kelib umumiy faraz bayon qilinadi, so'ng u tajribada tekshirib ko'riladi. Tabiiy (ya'ni tabiatni o'rganuvchi) fanlarda tekshirish jarayonida shunday vaqt keladiki, farazni qabul qilish isbotlangan deb hisoblash uchun yetarli sanaladi.

24. ***Matematik mantiq*** - "Agar barcha qarg'a qora bo'lsa, qora bo'lmagan predmetlarning hech biri-qarg'a emas". Bu tasdiq hech bir shubhasiz to'g'ridir va buni tasdiqlash uchun qushlarning ishqibozi bo'lish aslo shart emas.

25. ***Matematika*** - eng ko'hna fanlardan biri. Unga qisqa ta'rif berish u qadar oson emas, uning mazmuni kishining matematik ma'lumotiga ko'ra juda keskin o'zgaradi.

26. ***Mukammal son*** - Qadimgi Yunonistonda son o'zidan boshqa bo'luvchilarning yig'indisiga teng bo'lsa, uni mukammal son deb atashgan. Masalan, $6=1+2+3$; $28=1+2+4+7+14$; $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$.

27. ***Nol*** - butun son, o'nlisanoq sistemasidagi raqamlardan biri "Nol" lotincha nullus - "hech qanday" degan ma'noni bildiradi. 0 kabi belgilanadi. Ko'p

xonali sonlarning yozilishida nol raqam sifatida ma'lum xonada birliklar yo'qligini belgilash uchun ishlatiladi.

28. ***Raqamlar*** - sonlar yozuvda ifodalanadigan shartli belgilar. Yog'och dasta va suyaklarga o'yilgan kirtiklarni keyinroq esa chizgilarni sonlarning birinchi yozuvlari deb hisoblash mumkin. Ammo katta sonlarni bu usulda tasvirlash noqulay edi, shu sababli ba'zi chiziqlar to'plami uchun maxsus belgilar (raqamlar) ishlatila boshlandi.

29. ***Sanoq sistemasi*** – sonlarni o'qish va arifmetik amallarni bajarish uchun qulay ko'rinishda yozish usuli.

30. ***Son*** – matematikaning asosiy tushunchalaridan biri; u hisob va o'lchash natijalarini ifodalashga imkon beradi.

31. ***Sonlar nazariyasi*** – matematikaning sonlar xossalarini o'rganuvchi bo'limi. Sonlar nazariyasini asosiy ob'ekti - natural son. Ularning sonlar nazariyasida qaraladigan bosh xossasi – bo'linuvchanlik. Sonlar nazariyasi masalalarining birinchi davrasi natural sonni ko'paytuvchilarga yoyishdan iborat.

32. ***Ta'rif*** – avvaldan ma'lum tushunchalar asosida yangi tushuncha kiritishga xizmat qiladigan matematik jumla. Ta'rifda odatda "deyiladi" (yoki "deb ataladi", "deb yuritiladi" va h.k.) so'zi ishtirok etadi.

33. ***Taqribiy hisoblashlar*** – biz o'z amaliy faoliyatimizda doim taqribiy kattaliklar, tengliklar va formulalar bilan ish tutamiz: nuqtalar bo'yicha grafik yasaymiz, sondan ildiz chiqaramiz, tenglama yechamiy va h.k.

34. ***Teorema*** – to'g'riligi mulohaza, isbot asosida ko'rsatilgan tasdiq. Ixtiyoriy uchburchak burchaklarining 180^0 ga tengligi teoremaga misol bo'la oladi.

35 ***To'plam*** – hozirgi zamon matematikasining deyarli barcha bo'limlarida qo'llaniladigan asosiy tushunchalardan biri.

36. ***Universal*** - (lot. universalis-umumiy, keng qamrovli ko'p tomonlama) ko'p yoki hamma narsani o'z ichiga qamrab olgan har taraflama.

37. ***Faktorial*** – butun manfiy bo'lmagan sonlar uchun aniqlangan, amalda tez-tez uchrab turadigan funksiya ana shunday deb ataladi. Funksiyaning nomi

inglizcha matematik termin *factor* – "ko'paytuvchi" dan olingan. U $n!$ kabi belgilanadi. Har qanday butun musbat n soni uchun $n!$ funksiya 1 dan n gacha hamma butun sonlarning ko'paytmasiga teng.

38. ***Funksiya*** – o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan asosiy matematik va umummilliy tushunchalardan biri.
39. ***Eng katta umumiy bo'luvchi*** – Berilgan sonlarning har biri bo'linadigan eng katta natural son shu sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi deyiladi.
40. ***Eng kichik umumiy bo'linuvchisi*** – Berilgan sonlarning har biriga bo'linuvchi eng kichik natural son shu sonlarning eng kichik umumiy bo'linuvchisi deyiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Karimov I.A. "Mamlakatni modernizatsiya qilish va kuchli fuqarolik jamiyati barpo etish-ustivor maqsadimiz". O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining 2010 yil 27 yanvar kuni bo'lib o'tgan qo'shma majlisidagi ma'ruzasi. Adolat gazetasi – Toshkent.: 2010 yil, 29 yanvar. №4 (761) 1-3 bet
2. "Barkamol avlod yili" davlat dasturi. O'zbekiston Respublikasi prezidentining Qarori. Adolat gazetasi – Toshkent.: 2010 yil , 29 yanvar. №4 (761), 1-2 bet
3. Karimov I.A.Yuksak ma'naviyat-engilmas kuch – Toshkent.: 2008.
4. Karimov I.A. "Yuksak malakali mutaxasislar - taraqiyot omili "- Toshkent.: O'zbekiston, 1995-24 bet
5. Karimov I. Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori.-T.: "Sharq" nashriyot - matbaa konserni. 1997.
6. Karimov I.A "O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida"- Toshkent.: O'zbekiston, 2011, 440 bet.
7. O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risidagi qonun" //Barkamol avlod - O'zbekiston taraqqiyotining poydevori.- Toshkent.: Sharq, 1997, 20-29 bet.
8. O'zbekiston Respublikasining "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi to'g'risida" gi qonun // Barkamol avlod- O'zbekiston taraqqiyotining poydevori.- Toshkent.: Sharq, 1997, 31-61 bet.
9. Abdullayeva B.S va b Oliy matematika asoslari - Toshkent. "Iqtisod-moliya", 2011, 392- b.
10. Abdullayeva B.S va b Boshlang'ich sinf o'quvchilariga geometrik materiallarni o'rgatish metodikasi -Toshkent:OOO "Jahon print", 2011,90 b.
11. Abdullayeva B.S va b Boshlang'ich sinflarda matematikadan sinfdan tashqari ishlarni tashkil etish-Toshkent.: OOO "Jahon print",2011,146- b.
12. Azizxodjayeva N.H "Pedagogik texnologiya va pedagogik maxorat"- Toshkent.: TDPU, 2003, 174 bet.

13. Azlarov T va boshqalar. «Matematikadan qo'llanma» I,II qism Toshkent, «O'qituvchi», 1990 y.
14. Axmedov M va boshqalar Matematika 1, Toshkent.: O'zinkomsentr, 2003, 160-bet.
15.Axmedov M va boshqalar 1-sinfda matematika darslari – Toshkent.: O'zinkomsentr, 2003, 96-bet.
16. Ahmedov M., Ibragimov P., Abdurahmonova N., Jumayev M. E. "Birinchi sinf matematika darsligi." – T.: "Sharq", 160-bet.
17. A'zamov A. "Yosh matematika qomusiy lug'at"- Toshkent.: Qomuslar bosh tahririyati, 1991, 478 bet.
18. Bikbayeva N.U va boshqalar "Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasi "- Toshkent.: O'qituvchi, 2007, 208 bet.
19. Bikbayeva N.U va boshqalar Matematika 2 – Toshkent.: O'qituvchi, 2010, 208 bet.
20. Bikbayeva N.U va boshqalar Matematika 3 – Toshkent.: O'qituvchi, 2010, 206 bet.
21.Boltayev J, Qodirov A "Boshlang'ich sinflarda matematikadan sinfdan tashqari ishlar " Toshkent, 2002, 52 bet.
22. Bikbayeva N.U, Yangabayeva E, K.Girfanova "Kichik yoshdagi maktab o'quvchilarini boshlang'ich matematik ta'limning Davlat ta'lim standartlari asosida o'qitish" Toshkent.: – 2008, "Turon - Iqbol", 8 bet.
23.Vilenkin N.Ya., va boshqalar «Matematika» M.1977.
24. Gmurman V.E. «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» Toshkent, «O'qituvchi», 1977 y.
25. Pogorelov A. B., «Geometriya», T. O'qituvchi, 1990
26. Jo'rayev T. va boshqalar «Oliy matematika asoslari» 1-qism, Toshkent, O'zbekiston,1995 y.
27. Jumayev M.E. va boshqalar. Matematika o'qitish metodikasi (kasb-hunar kollejlari o'quvchilari uchun o'quv qo'llanma) – T.: "Ilm-Ziyo", 2003, 240b

28. Jumayev M.E., „Matematika o'qitish metodikasidan praktikum"- Toshkent.: O'qituvchi, 2004, 328 bet.

29. Jumayev M.E., Tadjiyeva Z „Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasi" Toshkent.: Fan va texnologiya, 2005, 312 bet.

30. Jumayev M.E. Bolalarda matematika tushunchalarni shakllantirish nazariyasi.- T.: "Ilm-Ziyo", 2005, 240-bet

31. Jumayev M.E. va boshqalar 1-sinf daftari- Toshkent.: Sharq, 2006, 64 bet.

32. Jumayev M. „Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasidan labaratoriya mashg'ulotlari " Toshkent.: Yangi asr avlodi, 2006, 256- bet.

33. Jumayev M.E. "O'quchining ijodiy shaxs sifatida rivojlanishida bo'lajak boshlang'ich sinf o'qituvchilarining metodik – matematik tayyorgarligi" – Toshkent.: Fan, 2009, - 240 b.

34. Ibrahimov R.«Matematikadan masalalar to`plami» T., 1995.

35. Tadjiyeva Z.G'. Boshlang'ich sinf matematika darslarida tarixiy materiallardan foydalanish.-T.: "Uzkomsentr", 2003, 24- bet.

36. Tadjiyeva Z.G'. Boshlang'ich sinflarda fakul'tativ darslarni tashkil etish.-T.: 2005, 68- bet.

37. Tadjiyeva Z.G'. va boshqalar „Boshlang'ich sinf matematika ta'lim samaradorligini oshirishda tarixiy materiallardan foydalanish"-Toshkent.: Jahon Print, 2007, 100 bet.

38. Rajabov F va boshqalar «Oliy matematika» Toshkent, «Turon-Iqbol», 2007 y.

39. Rajabov F «Matematika» Toshkent "O`zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti" 2007

40. Siddiqov X O'rta Osiyo, Yaqin va O'rta Sharq olimlarining ishlarida geometriya. T., «FAN», 1981 y.

41. Stoylova L. va boshqalar „Boshlang'ich matematika kursi asoslari" – Toshkent.: O'qituvchi, 1991, 336 bet.

42. Masharipova S., Rajabov F. Oliy matematika asoslari. – Urganch.: 2010, - 391 b.

43. Mardonova G'.I. „Matematikadan test topshiriqlari 1-sinf"- Toshkent O'qituvchi, 2007, 48 bet.
44. Mardonova G'.I. „Matematikadan test topshiriqlari 2-sinf"- Toshkent O'qituvchi, 2007, 60 bet.
45. Mardonova G'.I. „Matematikadan test topshiriqlari 3-sinf"- Toshkent O'qituvchi, 2007, 64 bet.
46. Mardonova G'.I. „Matematikadan test topshiriqlari 4-sinf" -Toshkent O'qituvchi, 2007, 56 bet.
47. Nazarov R.N va boshqalar. "Algebra va sonlar nazariyasi" T. «O'qituvchi» I qism 1993 y. II-qism 1995 y.
48. Xamedova N.A va boshqalar Matematika–Toshkent.: Turon-Iqbol, 2007, 31 bet.
49. Xoliqov A "Pedagogik mahorat" – Toshkent.: Iqtisod – moliya, 2010, 350 b.
50. Xikmatov A., Turdiev T. "Matematik analiz", T. O'qituvchi. 1990 y.
51. Tolipov O' Pedagogik texnologiya. –Toshkent.: Fan, 2005, 205 bet.
52. Yunusmetov M., M. Jurayeva, Geometriya -1, Toshkent, «O'qituvchi» 1974y.

Adadi 500 nusxa. Hajmi 24,5 b/t. Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$
«Times New Roman» garniturasi. Ofset usulida bosildi.
Nizomiy nomidagi TDPU bosmaxonasida nashr qilindi.
Toshkent, Yusuf Xos Hojib 103.