ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Л. П. СТОЙЛОВА

МАТЕМАТИКА

ACADEMA

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Л. П. СТОЙЛОВА

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по специальности
«Педагогика и методика начального образования»

Москва
ACADEMA
2002

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я73
С811

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор *А. Г. Мордкович*;
доктор педагогических наук, профессор *Г. Г. Левитас*

Стойлова Л.П.
С811 Математика: Учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 424 с.
ISBN 5-7695-0456-0

В учебнике изложены научные основы начального курса математики. Профессионально-педагогическая направленность книги обеспечивается за счет тщательного отбора теоретического материала и методических подходов к его изложению. Теоретическая часть дополнена тренировочными упражнениями и заданиями для самостоятельной работы.

Книга может быть использована также студентами педагогических колледжей и училищ.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я73

ISBN 5-7695-0456-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот учебник предназначен студентам факультетов и отделений начальных классов педагогических вузов, колледжей и училищ и может быть использован учителями начальных классов.

Переход начальной школы на вариативные программы и учебные пособия по математике, возможность выбора и конструирования собственной методики обучения, задачи всестороннего развития младших школьников средствами предмета – все это требует от учителя хорошей математической подготовки и, прежде всего, знания научных основ начального курса математики: различных подходов к определению понятия натурального числа и действий над ними, понятия величины и ее измерения, элементов алгебры и геометрии. В данном учебнике излагаются эти научные основы.

В главе «Натуральные числа и нуль» представлена аксиоматическая теория натурального числа, раскрыт теоретико-множественный смысл числа, описаны натуральное число как мера величины, способы записи числа; дана краткая справка об истории возникновения и развития понятия числа.

Глава «Элементы алгебры» начинается с изучения общих понятий современной алгебры – соответствия, отношения, алгебраической операции, рассматриваются понятия выражения, уравнения, неравенства.

В главе «Геометрические фигуры и величины» рассматриваются свойства геометрических фигур, их преобразования, этапы решения несложных задач на построение, содержатся определения и свойства геометрических величин. Кратко изложена история возникновения и развития геометрии.

Объединяющую роль играет глава «Элементы логики», в которой описаны особенности математических понятий, предложений и доказательств, знание которых поможет в усвоении данного курса и позволит учителю видеть (и реализовать на практике) единство подходов к методике изучения разных по содержанию понятий и предложений, но имеющих одинаковую логическую структуру. В этой главе описан теоретико-множественный язык, используемый в дальнейшем во всем учебнике. Кроме того, первая глава содержит параграф «Текстовые задачи и процесс их решения», раскрывающий этапы решения задач и приемы их осуществления, моделирование в процессе решения задач, – материал, знание которого необходимо учителю при работе по любой программе и учебнику. С этой же целью в главу включены «Комбинаторные задачи и их решение», «Алгоритмы».

Главной особенностью данного учебника является его профессиональная направленность – он предназначен будущим и работающим учителям начальных классов. Эта направленность заложена и в отборе материала, и в уровне его изложения. Автор пытался сделать его максимально доступным, понимая, что учитель начальных классов наряду с математикой, как правило, обучает русскому языку, чтению, природоведению и т.д. В связи с этим во многих случаях пришлось многие темы дать сжато, опустить доказательства некоторых теорем. Профессионально направлена и представленная в учебнике система упражнений: с ее помощью устанавливается связь изучаемого материала с начальным курсом математики.

Предлагаемый материал разбит на главы, главы – на параграфы, параграфы – на пункты. Каждая глава начинается с объяснения ее значимости в профессиональной подготовке учителя начальных классов, а в параграфах поставленная задача конкретизируется, что поможет в создании положительной мотивации у изучающих этот курс. Каждый параграф заканчивается краткими выводами, включающими перечень изученных в нем основных понятий, закономерностей, фактов. Каждый пункт завершается упражнениями, с помощью которых можно проверить уровень усвоения материала.

В связи с тем что учебник адресован как студентам педагогических вузов, так и студентам педагогических колледжей и училищ, а содержание их математической подготовки определяется соответствующими образовательными стандартами, то в средних педагогических учебных заведениях, обеспечивающих базовый уровень профессиональной подготовки учителей начальных классов, материал учебника должен использоваться выборочно. Например, студенты педучилищ могут изучать по данному учебнику элементы логики и алгебры, свойства геометрических фигур и величины. Глава «Натуральные числа и нуль» может представлять для них определенные сложности и поэтому вопросы, связанные с различными подходами к определению натурального числа и действий над числами, лучше изучать по книге: *Стойлова Л.П., Пышкало А.М.* Основы начального курса математики (М.: Просвещение, 1988). В педколледжах, ведущих интегрированную подготовку повышенного уровня, курс математики должен изучаться, по мнению автора, в том же объеме, что и в вузах, если, конечно, в учебном плане будет предусмотрено достаточное число часов и достигнуто согласие между колледжем и вузом при сквозной двухступенчатой подготовке учителя.

При подготовке данной книги автор использовал учебники математики для начальных классов, как традиционные, написанные

М.И.Моро, М.А.Бантовой и другими, так и вариативные, авторами которых являются Г.Г.Микулина, Н.Б.Истомина, В.В.Давыдов, С.Ф.Горбов, Э.И.Александрова и другие. Отражены в пособии и результаты научных исследований Т.В.Смолеусовой, Г.В.Хамер, Л.П.Ануфриевой. Кроме того, использовались учебники для V–VI классов, изданные под редакцией Г.В.Дорофеева, книги по логике И.Л.Никольской, статьи Л.М.Фридмана, работы А.Г.Мордковича и учебные пособия по математике для студентов педвузов и педучилищ, написанные в соавторстве с Н.Я.Виленкиным, А.М.Пышкало, Н.Н.Лавровой.

Автор благодарен руководству Московского городского педагогического университета, создавшего условия, при которых стало возможным написание этого учебника.

Автор

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ

Изучая математику в школе, колледже, вузе, необходимо усвоить определенную систему понятий, предложений и доказательств, но чтобы овладеть этой системой и затем успешно применять приобретенные знания и умения, обучая младших школьников и решая задачу их развития средствами математики, нужно сначала понять, каковы особенности математических понятий, как устроены их определения, предложения, выражающие свойства понятий, и доказательства. Такие знания нужны учителю начальных классов еще и потому, что он первым вводит детей в мир математических знаний, и от того, как грамотно и успешно он это делает, зависит и отношение ребенка к изучению математики в дальнейшем.

Изучение этого материала связано с овладением теоретико-множественным языком, который будет использоваться не только при рассмотрении логической структуры математических понятий, предложений и доказательств, но и при построении всего курса.

§1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

В конце XIX века в математической науке возникла необходимость уточнить смысл таких ведущих понятий, как функция, непрерывность и т.д. Для этого нужно было строго определить, что такое натуральное число. Поиски ответа на эти сложные вопросы способствовали развитию новых математических идей, поэтому в конце XIX – начале XX столетий происходил пересмотр старых представлений буквально во всех областях математических знаний. В результате в конце XIX века возникла новая область математики – теория множеств, одним из создателей которой был немецкий математик Георг Кантор. За небольшой срок теория множеств стала фундаментом всей математики.

В предлагаемом курсе мы познакомимся с некоторыми основными понятиями теории множеств. Знания в этой области нужны учителю начальных классов, во-первых, для понимания содержания начального курса математики, независимо от того, явно или неявно в нем используются теоретико-множественные понятия; во-вторых, для освоения таких важных с профессиональной точки зрения понятий, как взаимно однозначное соответствие, отношение, число, геометрическая фигура.

1. Понятие множества и элемента множества

В математике часто рассматриваются те или иные группы объектов как единое целое: натуральные числа, треугольники, квадраты и т.д. Все эти различные совокупности называют **множествами**.

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Его можно пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве натуральных чисел, о множестве треугольников.

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике этого не требуется. Здесь можно рассматривать множество, состоящее из одного объекта, и множество, не содержащее ни одного объекта.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots, Z$.

Множество, не содержащее ни одного объекта, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Объекты, из которых образовано множество, называются **элементами**.

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: $a, b, c, \ldots, z$.

В математике нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что 5 – число натуральное, а 0,75 не является натуральным числом. Другими словами, мы утверждаем, что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел, а число 0,75 ему не принадлежит. Чтобы записать эти утверждения, вводятся символы $\in$ и $\notin$. Предложение «Объект a принадлежит множеству A» можно записать, используя символы: $a \in A$. Предложение «Объект a не принадлежит множеству A» можно записать так: $a \notin A$.

Например, если A – множество однозначных чисел, то утверждение «Число 3 – однозначное» можно записать в таком виде: $3 \in A$. Запись $12 \notin A$ означает, что «Число 12 не является однозначным», или «Число 12 не принадлежит множеству A», или «Множество A не содержит числа 12».

Заметим, что в геометрии, которая возникла значительно раньше теории множеств, если точка является элементом какого-либо множества, то ее обозначают заглавной буквой. Например, если X – множество точек отрезка AB, то предложение «Точка P лежит на отрезке AB» можно записать: $P \in X$ или $P \in AB$.

Множества бывают **конечные и бесконечные**. Эти понятия мы принимаем без определения. Поясним их на примерах. Так, конечными являются множество дней недели, множество месяцев в году, а бесконечными – множество точек на прямой, множество натуральных чисел.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

N – множество натуральных чисел; $(0; +\infty)$

Z – множество целых чисел; $(-\infty; +\infty)$ $-1; -2; 0 \ldots; 3, 5$

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Упражнения

1. Назовите три элемента множества:

а) учебных предметов, изучаемых в начальной школе;

б) четных натуральных чисел;

в) четырехугольников.

2. Запишите, используя символы:

а) Число 14 – натуральное;

б) Число –7 не является натуральным;

в) Число 0 – рациональное;

г) $\sqrt{7}$ – число действительное.

3. Прочитайте следующие высказывания и укажите среди них верные:

а) $100 \in \mathbf{N}$;	г) $5{,}36 \in \mathbf{Q}$;	ж) $-7{,}3 \in \mathbf{R}$;
б) $-8 \in \mathbf{Z}$;	д) $102 \notin \mathbf{R}$;	з) $\frac{3}{4} \in \mathbf{N}$;
в) $-12 \notin N$;	е) $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$;	и) $0 \in \mathbf{N}$.

4. P – множество натуральных чисел, больших 7 и меньше 14. Выясните, какие из чисел 13, 10, 5, 7, 14 ему принадлежат, а какие не принадлежат. Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$.

5. Даны числа: 0; 7; –3,8; –17; 325; $\sqrt{5}$. Установите, какие из них:

а) натуральные; б) целые;

в) рациональные; г) действительные.

6. M – множество точек окружности, изображенной на рисунке 1. Прочитайте следующие предложения и укажите среди них верные:

а) $A \in M$; б) $O \in M$;

в) $B \in M$; г) $C \notin M$.

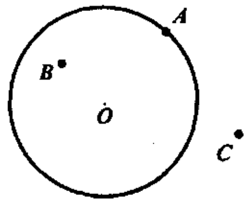


Рис. 1

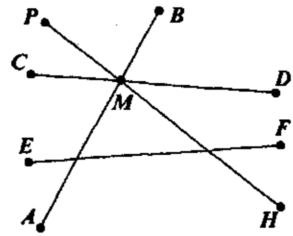


Рис. 2

7. Как изменить условие задачи 6, чтобы все утверждения а) – г) были верными?

8. Запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$, какие из отрезков AB, CD, EF и PH проходят через точку M, а какие через нее не проходят (рис. 2).

9. A – множество решений уравнения $x^2+1=0$. Верно ли, что A – пустое множество? Приведите пример уравнения, множество решений которого состоит из:

а) одного элемента;

б) двух элементов;

в) трех элементов.

10. Запишите множество букв в слове «математика» и множество цифр в записи числа 5125353.

2. Способы задания множеств

Понятие множества мы используем без определения. Но как узнать, является та или иная совокупность множеством или не является?

Считают, что множество определяется своими элементами, т.е. *множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.*

Множество можно задать, *перечислив все его элементы*. Например, если мы скажем, что множество A состоит из чисел 3, 4, 5 и 6, то мы зададим это множество, поскольку все его элементы окажутся перечисленными. При этом возможна запись, в которой перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки: $A = \{3, 4, 5, 6\}$.

Однако если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множества: *указывают характеристическое свойство его элементов.*

Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Рассмотрим, например, множество A двузначных чисел: свойство, которым обладает каждый элемент данного множества, – «быть двузначным числом». Это характеристическое свойство дает возможность решать вопрос о том, принадлежит какой-либо объект множеству A или не принадлежит. Так, число 45 содержится в множестве A, поскольку оно двузначное, а число 145 множеству A не принадлежит, так как оно не является двузначным.

Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными соседними сторонами и как множество ромбов с прямым углом.

В тех случаях, когда характеристическое свойство элементов множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись множества. Например, множество A натуральных чисел, меньших 7, можно задать так:

$$A = \{x \mid x \in \mathrm{N} \text{ и } x < 7\}.$$

При такой записи буквой x обозначается элемент множества A. Для этих целей можно использовать и другие буквы латинского алфавита.

Итак, для того чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать их характеристическое свойство. Второй способ более общий: он позволяет задавать и конечные, и бесконечные множества.

Очень важно умение переходить от одного способа задания множества к другому. Этому обучаются уже младшие школьники, выполняя упражнения такого характера.

Задача 1. Запишите числа, которые больше, чем 65 и меньше, чем 75.

Решение. Множество чисел задано при помощи характеристического свойства «быть больше 65 и меньше 75». Требуется перечислить элементы этого множества: 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Задача 2. Укажите характеристическое свойство элементов множества $A = \{12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92\}$.

Решение. Перечислены все элементы множества A. Их характеристическое свойство: «быть двузначным и оканчиваться цифрой 2».

Упражнения

1. Запишите с помощью знака равенства и фигурных скобок предложения:

а) X – множество чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5;

б) Y – множество букв *a, b, c*.

2. Запишите, используя символы, множество P, если оно состоит из натуральных чисел:

а) больших 100, но меньших 200; б) меньших 150.

3. Перечислите элементы следующих множеств:

A – множество нечетных однозначных чисел;

B – множество натуральных чисел меньших или равных 20;

C – множество двузначных чисел, делящихся на 10.

4. Укажите характеристическое свойство элементов множества:

а) {а, е, ё, и, о, у, э, ю, я, ы};

б) $\{78, 76, 74, 72, 70\}$;

в) $\{111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999\}$.

5. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства, если x – действительное число:

а) $x > 5$; б) $x \leq -3{,}8$;

в) $-4{,}5 \leq x \leq 4$; г) $2{,}7 \leq x \leq 9$.

6. Задайте при помощи характеристического свойства множества, выделенные штриховкой на координатной прямой (рис. 3).

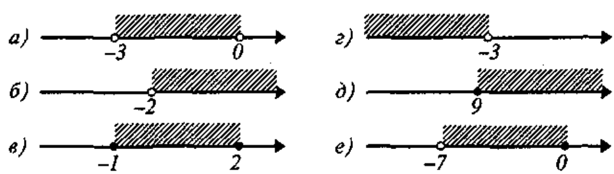


Рис. 3

7. D – множество двузначных чисел, запись которых оканчивается цифрой 1. Принадлежат ли этому множеству числа 31; 321; 61; 12? Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$.

8. Множество C состоит из квадрата, круга и треугольника. Принадлежат ли этому множеству диагональ квадрата и центр круга?

9. Покажите, что, выполняя задание: «Увеличь каждое нечетное однозначное число в 2 раза», учащиеся встречаются с двумя способами задания множества.

10. Покажите, что, выполняя задание: «Какое число лишнее в ряду: 470, 720, 330, 400, 510, 640?», учащиеся, по существу, пользуются понятиями характеристического свойства элементов множества и принадлежности элемента множеству.

11. Приведите примеры трех заданий из учебников математики для начальных классов, при выполнении которых осуществляется переход от одного способа задания множества к другому.

3. Отношения между множествами

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними. Например, нам известно, что все натуральные числа являются целыми. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями, позволяет посмотреть на них с единой точки зрения.

Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно A и B, то говорят, что эти множества *пересекаются*.

Например, если $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, k, m\}$, $C = \{x, y, z\}$, то можно утверждать, что множества A и B пересекаются, так как имеют общие элементы b и d, а множества A и C, B и C не пересекаются, поскольку не имеют общих элементов.

Рассмотрим теперь множества $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, d, e\}$. Они пересекаются, и, кроме того, каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что множество B включается в множество A или что множество B является подмножеством множества A и пишут $B \subset A$.

Определение. ***Множество B является подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является также элементом множества A. Пустое множество считают подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя.***

Из определения следует, что если $B \subset A$, то множество B может быть пустым, и тогда $\varnothing \subset A$, и, кроме того, множество B может совпадать с A, и тогда $A \subset A$. Поэтому среди всех подмножеств заданного множества A должно быть обязательно пустое множество и само множество A, их называют несобственными.

Образуем, например, все подмножества множества $A = \{2, 3, 4\}$. Среди них будут одноэлементные подмножества: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, двухэлементные: $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, а также само множество A и пустое множество $\varnothing$. Таким образом, данное трехэлементное множество A имеет 8 подмножеств.

Доказано, что если множество A содержит n элементов, то у него 2^n различных подмножеств.

Рассмотрим теперь множества $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, a, d, b, e\}$. Они пересекаются, и каждый элемент множества A является элементом множества B, т.е. $A \subset B$, и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е. $B \subset A$. В этом случае говорят, что множества A и B равны и пишут $A = B$.

Определение. ***Множества A и B называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$.***

Из определения следует, что *равные множества состоят из одних и тех же элементов и что порядок записи элементов множества не существен*.

$B \subset A$ $A \subset B$

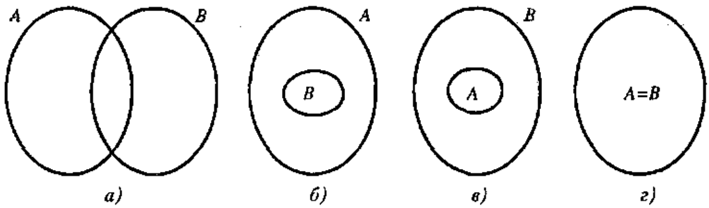


Рис. 4

Отношения между множествами наглядно представляют при помощи особых чертежей, называемых кругами Эйлера[1]. Для этого множества представляют в виде кругов, овалов или любых других геометрических фигур. В том случае, если множества A и B имеют общие элементы, но ни одно из них не является подмножеством другого, их изображают так, как показано на рис. 4, а. Если множество B является подмножеством A, то круг, изображающий множество B, целиком находится в круге, изображающем множество A (рис. 4, б). Если $A \subset B$, то множества A и B изображают так, как на рисунке 4, в. Равные множества представляют в виде одного круга (рис. 4, г).

Если множества A и B не пересекаются, то их изображают в виде двух фигур, не имеющих общих точек (рис. 5).

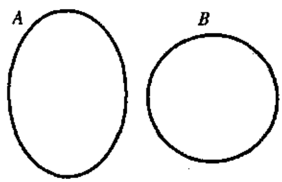


Рис. 5

Понятие подмножества является обобщением понятия части и целого, которые осваивают младшие школьники, выполняя разные задания. Например: «Назови среди данных чисел четные», «Среди данных четырехугольников найди прямоугольники».

Упражнения

1. Даны два множества: $X = \{2, 4, 6\}$ и $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Верно ли что:

а) множества X и Y пересекаются;

б) множество X является подмножеством множества Y;

в) множество $P = \{4, 0, 6, 8, 2\}$ равно множеству Y?

2. Известно, что элемент a содержится в множестве A и в множестве B. Следует ли из этого, что:

а) $A \subset B$; б) $B \subset A$; в) $A = B$?

---

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) – член Петербургской академии наук. Л.Эйлер родился в Швейцарии. В 1727 году по приглашению Петербургской академии наук приехал в Россию, где вырос в крупнейшего математика. Огромно научное наследие Эйлера, в списке его трудов более 800 названий.

3. Из множества $K = \{216, 546, 153, 171, 234\}$ выпишите числа, которые:

а) делятся на 3; б) делятся на 9;

в) не делятся на 4; г) не делятся на 5.

Есть ли среди полученных подмножеств такое, которое равно множеству K?

4. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами C и D, если:

а) C – множество двузначных чисел,
$D = \{3, 43, 34, 56, 103\}$;

б) C – множество двузначных чисел,
D – множество четных натуральных чисел;

в) C – множество двузначных чисел,
D – множество трехзначных чисел;

г) C – множество двузначных чисел,
D – множество натуральных чисел, не меньших 10.

5. Отношения между множествами всех выпуклых четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов изображены на рисунке 6. Покажите каждое из множеств.

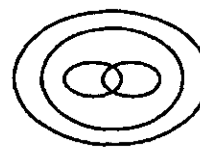


Рис. 6

6. Дано множество $P = \{3, 5, 7, 9\}$. Образуйте всевозможные его подмножества. Сколько их должно быть?

7. Какое из данных множеств является подмножеством другого:

а) A – множество натуральных чисел, кратных 2,
B – множество натуральных чисел, кратных 6,
C – множество натуральных чисел, кратных 3.

б) A – множество треугольников,
B – множество прямоугольных треугольников,
C – множество остроугольных треугольников.

8. О каких теоретико-множественных понятиях идет речь в следующих заданиях, выполняемых учащимися начальных классов:

а) Запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа.

б) Из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся на 5.

в) Запиши три числа, которые при делении на 7 дают в остатке 4.

4. Пересечение множеств

Из элементов двух и более множеств можно образовывать новые множества. Пусть даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество C, в которое включим общие элементы множеств

A и B, т.е. $C = \{6, 8\}$. Так полученное множество C называют **пересечением множеств** A и B.

Определение. ***Пересечением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B.***

Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$. Таким образом, по определению, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Если изобразить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то пересечением данных множеств является заштрихованная область (рис. 7).

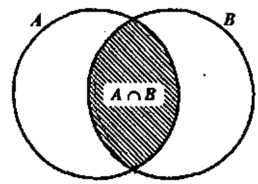


Рис. 7

В том случае, когда множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто и пишут: $A \cap B = \varnothing$.

Выясним, как находить пересечение множеств в конкретных случаях.

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A \cap B$, достаточно перечислить элементы, которые одновременно принадлежат множеству A и множеству B, т.е. их общие элементы.

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами своих элементов?

Из определения пересечения следует, что характеристическое свойство множества $A \cap B$ составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

Найдем, например, пересечение множества A – четных натуральных чисел и множества B – двузначных чисел. Характеристическое свойство элементов множества A – «быть четным натуральным числом», а характеристическое свойство элементов множества B – «быть двузначным числом». Тогда, согласно определению, элементы пересечения данных множеств должны обладать свойством «быть четными натуральными и двузначными числами». Таким образом, множество $A \cap B$ состоит из четных двузначных чисел (союз «и» в данном случае можно опустить). Полученное множество не пусто. Например, $24 \in A \cap B$, поскольку число 24 четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят пересечение множества A и его подмножества B. Легко видеть, что тогда $A \cap B = B$ и, следовательно, характеристическое свойство элементов множества $A \cap B$ будет таким, как и свойство элементов множества B.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения: а) $5 \in A \cap B$; б) $7 \notin A \cap B$.

2. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cap B$?

3. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?

4. Найдите пересечение множеств A и B, если:

а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$;

б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$;

в) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.

5. Из каких элементов состоит пересечение множества букв в слове «математика» и множества букв в слове «геометрия»?

6. M – множество однозначных чисел, P – множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит пересечение данных множеств? Содержатся ли в нем числа –7 и 9?

7. A – множество точек окружности, B – множество точек прямой l. Из скольких элементов может состоять пересечение данных множеств? Может ли оно быть пустым?

8. Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: а) был треугольник; б) был отрезок; в) была точка.

9. Используя координатную прямую, найдите пересечение множеств решений неравенств, в которых x – действительное число:

а) $x > -2$ и $x > 0$; в) $x \geq 5$ и $x < -7{,}5$;

б) $x > -3{,}7$ и $x \leq 4$; г) $-2 < x < 4$ и $x \geq -1$;

д) $-7 \leq x \leq 5$ и $-6 \leq x \leq 2$.

10. Начертите две фигуры, принадлежащие пересечению множеств C и D, если:

а) C – множество ромбов,
D – множество прямоугольников,

б) C – множество равнобедренных треугольников,
D – множество прямоугольных треугольников.

5. Объединение множеств

Пусть даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество D, в которое включим элементы, принадлежащие хотя бы одному из данных множеств, т.е. множеству A или множеству B: $D = \{2, 4, 6, 8, 5, 7, 9\}$. Так полученное множество D называют **объединением множеств** A и B.

Определение. ***Объединением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B.***

Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$. Таким образом, по определению, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Если изобразить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то объединение данных множеств изобразится заштрихованной областью (рис. 8).

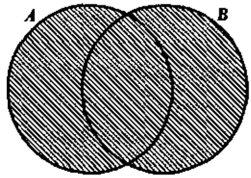


Рис. 8

Выясним, как находить объединение множеств в конкретных случаях.

Если элементы множеств A и B перечислены, то, чтобы найти $A \cup B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B.

А как быть, если множества заданы характеристическими свойствами их элементов? Из определения объединения следует, что характеристическое свойство элементов множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств элементов множеств A и B с помощью союза «или». Найдем, например, объединение множества A – четных натуральных чисел и множества B – двузначных чисел. Так как свойство элементов множества A – «быть четным натуральным числом», а свойство элементов множества B – «быть двузначным числом», то в объединение данных множеств войдут числа, характеристическое свойство которых – «быть четным натуральным или двузначным числом». Такие числа образуют бесконечное множество, но сформулированное характеристическое свойство позволяет однозначно определять, содержится тот или иной элемент в объединении множеств A и B или не содержится. Например, в $A \cup B$ есть число 8, поскольку оно четное; есть число 36 – оно четное и двузначное.

Рассмотрим теперь случай, когда находят объединение множества A и его подмножества B. Легко видеть, что тогда $A \cup B = A$ и, следовательно, характеристическое свойство элементов множества $A \cup B$ будет таким, как и свойство элементов множества A.

Умение вычленять множества в текстовых задачах и операции, которые над ними выполняются, – важный этап в их решении. Например, чтобы правильно выбрать действие, с помощью которого решается задача: «В букете 3 ромашки и 4 колокольчика. Сколько всего цветков в букете?», надо понять, что в задаче рассматриваются два множества – множество ромашек в букете (в нем 3 элемента) и множество колокольчиков в этом букете (в нем 4 элемента) ; эти множества объединены в одно и требуется найти число элементов в этом объединении.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения: а) $5 \in A \cup B$; б) $7 \notin A \cup B$.

2. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cup B$?

3. Известно, что $x \in A \cup B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?

4. Найдите объединение множеств A и B, если:

а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$.

б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$.

в) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.

5. Из каких элементов состоит объединение множества букв в слове «математика» и множества букв в слове «геометрия»?

6. M – множество однозначных чисел, P – множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит объединение данных множеств? Содержатся ли в нем числа –7 и 9?

7. Используя координатную прямую, найдите объединение множеств решений неравенств, в которых x – действительное число:

а) $x > -2$ и $x > 0$; в) $x \geq 5$ и $x < -7{,}5$;

б) $x > -3{,}7$ и $x \leq 4$; г) $-2 < x < 4$ и $x \geq -1$;

д) $-7 \leq x \leq 5$ и $-6 \leq x \leq 2$.

8. Школьникам предложено начертить две фигуры, принадлежащие объединению множеств C и D, если:

а) C – множество ромбов,
D – множество прямоугольников;

б) C – множество равнобедренных треугольников,
D – множество прямоугольных треугольников.

Выполняя задание а), учащийся К. начертил квадрат и прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см. Прав ли он?

Учащийся Р., выполняя задание б), начертил равносторонний треугольник и прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 3 см. Верно ли он выполнил задание?

9. Назовите все множества, о которых идет речь в задаче:

а) У школы посадили 4 липы и 3 березы. Сколько всего деревьев посадили у школы?

б) У Коли было 6 книг. В день рождения ему подарили еще 4 книги. Сколько книг стало у Коли?

6. Свойства пересечения и объединения множеств

Из школьного курса математики известно, что операция, при помощи которой находят сумму чисел, называется сложением. Над числами выполняют и другие операции, например умножение, вычитание, деление; при этом результат умножения чисел называют произведением, деления – частным, т.е. для операций над числами и результатов этих операций существуют разные термины. Для рассмотренных операций над множествами ситуация иная: операции, при помощи которых находят пересечение и объединение множеств, называются соответственно пересечением и объединением.

Из школьного курса математики нам также известно, что операции над числами обладают рядом свойств. Например, сложение действительных чисел обладает переместительным и сочетательным свойствами: для любых действительных чисел a и b справедливо равенство $a + b = b + a$, а для любых чисел a, b и c – равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Аналогичными свойствами обладает умножение действительных чисел. Кроме того, для сложения и умножения выполняется распределительное свойство: для любых действительных чисел a, b и c справедливо равенство: $(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Выясним, обладают ли «похожими» свойствами пересечение и объединение множеств.

Если обратиться к определениям пересечения и объединения множеств, то можно увидеть, что в них не фиксируется порядок оперирования множествами. Например, выполняя объединение, можно к элементам одного множества присоединить элементы другого, а можно поступить наоборот: к элементам второго множества присоединить элементы первого. (При этом надо только помнить, что в новом множестве не должно быть повторяющихся элементов.) Аналогичная ситуация и в случае, когда выполняется пересечение множеств. Это означает, что пересечение и объединение множеств обладают переместительным, или, как говорят в математике, *коммутативным* свойством: для любых множеств A и B выполняются равенства: $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.

Пересечение и объединение множеств обладают также сочетательным, или *ассоциативным*, свойством: для любых множеств A, B и C выполняются равенства:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{и} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Заметим, что назначение скобок в этих записях то же, что и в записях операций над числами.

Свойство ассоциативности для пересечения и объединения множеств не столь очевидно, как свойство коммутативности, и поэтому нуждается в доказательстве. Но прежде можно эти свойства проиллюстрировать при помощи кругов Эйлера. Рассмотрим, например, ассоциативное свойство пересечения множеств. Изобразим множества A, B и C в виде трех попарно пересекающихся кругов (рис. 9).

В выражении $(A \cap B) \cap C$ скобки определяют следующий порядок действий: сначала выполняется пересечение множеств A и B – оно показано на рисунке 9, а вертикальной штриховкой, а затем находят пересечение полученного множества и множества C. Если выделить множество C горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, будет изображать множество $(A \cap B) \cap C$.

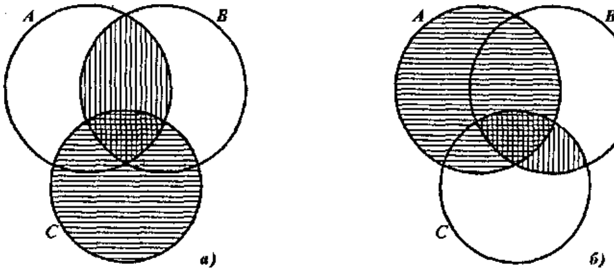


Рис. 9

Представим теперь наглядно множество $A \cap (B \cap C)$. В соответствии с указанным порядком действий сначала надо найти пересечение множеств B и C – на рисунке 9,б оно показано вертикальной штриховкой, а затем выполнить пересечение множества A с полученным множеством. Если отметить множество A горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, и будет изображать множество $A \cap (B \cap C)$.

Видим, что области, представляющие на рисунке 9 множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$, одинаковы, что и подтверждает справедливость свойства ассоциативности для пересечения множеств.

Аналогично можно проиллюстрировать свойство ассоциативности и для объединения множеств.

В чем важность ассоциативного свойства пересечения и объединения множеств? Во-первых, можно находить пересечение и объединение трех множеств, зная, как это делать для двух. Во-вторых, на основании этого свойства в выражениях $A \cap (B \cap C)$, $(A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C)$, $(A \cup B) \cup C$ можно опускать скобки и писать $A \cap B \cap C$ или $A \cup B \cup C$, что облегчает запись.

Рассмотрим строгое доказательство свойства ассоциативности одной из операций над множествами, например объединения, т.е. докажем, что для любых множеств A, B и C справедливо равенство $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Чтобы доказать равенство двух множеств, надо убедиться в том, что каждый элемент множества $(A \cup B) \cup C$ содержится в множестве $A \cup (B \cup C)$, и наоборот.

1. Пусть x – любой элемент множества $(A \cup B) \cup C$. Тогда, по определению объединения, $x \in A \cup B$ или $x \in C$.

Если $x \in A \cup B$, то, по определению объединения, $x \in A$ или $x \in B$. В том случае, когда $x \in A$, то, также по определению объединения, $x \in A \cup (B \cup C)$.

Если $x \in B$, то имеем, что $x \in B \cup C$, а значит, $x \in A \cup (B \cup C)$. Случай, когда $x \in A$ и $x \in B$, сводится к рассмотренным. Таким образом, из того, что $x \in A \cup B$, следует, что $x \in A \cup (B \cup C)$.

Если $x \in C$, то, по определению объединения, $x \in B \cup C$, и следовательно, $x \in A \cup (B \cup C)$.

Случай, когда $x \in A \cup B$ и $x \in C$, сводится к рассмотренным выше.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества $(A \cup B) \cup C$ содержится и в множестве $A \cup (B \cup C)$, т.е. $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$.

2. Пусть y – любой элемент множества $A \cup (B \cup C)$. Тогда, по определению объединения, $y \in A$ или $y \in B \cup C$.

Если $y \in A$, то, по определению объединения, $y \in A \cup B$ и, следовательно, $y \in A \cup (B \cup C)$.

Если $y \in B \cup C$, то $y \in B$ или $y \in C$. В том случае, когда $y \in B$, то $y \in A \cup B$ и, значит, $y \in (A \cup B) \cup C$. Когда же $y \in C$, то $y \in (A \cup B) \cup C$. Случай, когда $y \in B$ и $y \in C$, сводится к уже рассмотренным.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества $A \cup (B \cup C)$ содержится в множестве $(A \cup B) \cup C$, т.е. $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$.

Согласно определению равных множеств заключаем, что $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и ассоциативное свойство пересечения множеств.

Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в распределительных, или *дистрибутивных*, свойствах этих операций. Таких свойств два:

1. Пересечение дистрибутивно относительно объединения множеств, т.е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

2. Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т.е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Заметим, что если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение. В связи со сказанным запись дистрибутивного свойства пересечения относительно объединения можно упростить, опустив скобки в правой части равенства.

Убедиться в справедливости сформулированных свойств можно путем доказательства, которое аналогично доказательству свойства ассоциативности объединения.

Проиллюстрировать свойства дистрибутивности можно, используя круги Эйлера.

Если провести аналогию с действиями над числами, то можно увидеть, что дистрибутивное свойство пересечения относительно объединения сопоставимо с распределительным свойством умножения относительно сложения при условии, что в качестве операции, аналогичной пересечению, рассматривать умножение, а для объединения – сложение. Но для дистрибутивного свойства объединения множеств относительно пересечения аналогичного свойства над числами нет.

Действительно, наличие такого свойства означало бы, что для всех чисел выполняется равенство $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$, что невозможно. Подмеченное отличие говорит о том, что наряду с тем, что пересечение и объединение множеств обладают рядом свойств, аналогичных свойствам сложения и умножения чисел, операции над множествами обладают свойствами, которых нет у операций над числами.

Завершая рассмотрение свойств пересечения и объединения множеств, отметим еще следующее.

Понятие пересечения и объединения множеств можно обобщить на любое конечное число множеств:

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ и } x \in A_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x \in A_n\}$,

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } x \in A_n\}$.

Аналогично можно поступить и по отношению к рассмотренным свойствам данных операций.

Упражнения

1. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что

а) $x \in B \cap A$; б) $x \in A \cup B$; в) $x \in B \cup A$?

2. Определите порядок выполнения действий в следующих выражениях:

а) $A \cup B \cup C$; в) $A \cap B \cup C \cap D$;
б) $A \cap B \cap C$; г) $A \cup B \cap C \cup D$.

3. Постройте три круга, представляющие попарно пересекающиеся множества A, B и C, и отметьте штриховкой области, изображающие множества:

а) $A \cap B \cap C$; в) $(A \cap B) \cup C$; д) $A \cup B \cap C$;
б) $A \cup B \cup C$; г) $(A \cup B) \cap C$; е) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Для каждого случая сделайте отдельный рисунок.

4. Проиллюстрируйте, используя круги Эйлера, следующие свойства:

а) ассоциативности пересечения множеств;

б) дистрибутивности пересечения относительно объединения множеств;

в) дистрибутивности объединения относительно пересечения множеств.

5. Среди следующих выражений найдите такие, которые представляют собой равные множества:

а) $P \cap M \cap K$; в) $P \cap M \cup P \cap K$; д) $P \cup (M \cap K)$;
б) $P \cap (M \cup K)$; г) $(P \cap M) \cap K$; е) $(M \cup P) \cap (P \cup K)$.

6. Даны множества: A – натуральных чисел, кратных 2; B – натуральных чисел, кратных 3; C – натуральных чисел, кратных 5.

а) Изобразите при помощи кругов Эйлера данные множества и отметьте штриховкой область, изображающую множество $A \cap B \cup C$.

б) Сформулируйте характеристическое свойство элементов этого множества и назовите 3 элемента, которые ему принадлежат.

в) Верно ли, что $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

7. Даны множества: X – двузначных чисел, Y – четных натуральных чисел, P – натуральных чисел, кратных 4.

а) Укажите характеристическое свойство элементов каждого из множеств A и B, если $A = X \cap Y \cap P$, $B = X \cap (Y \cap P)$.

б) Изобразите множества X, Y и P при помощи кругов Эйлера и покажите области, представляющие множества A и B (для каждого случая выполните отдельный рисунок).

в) Верно ли, что $24 \in A$, а $23 \in B$?

8. A – множество треугольников, B – множество ромбов, C – множество многоугольников, имеющих угол $60°$. Укажите характеристическое свойство элементов множества $X = A \cap C \cup B \cap C$ и начертите две фигуры, принадлежащие множеству X.

9. Докажите, что для любого множества A верны равенства:

а) $A \cap \varnothing = \varnothing$; в) $A \cap A = A$;

б) $A \cup \varnothing = A$; г) $A \cup A = A$.

10. Верно ли, что если $A \subset B$, то

а) $A \cap B = A$; б) $A \cup B = B$?

7. Вычитание множеств. Дополнение множества

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называют разностью и определяют следующим образом.

Определение. ***Разностью множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.***

Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$. Тогда, по определению, имеем: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Если представить множества A и B при помощи кругов Эйлера, то разность $A \setminus B$ изобразится заштрихованной областью (рис. 10).

В школьном курсе математики чаще всего приходится выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность множеств $A \setminus B$ называют *дополнением множества B до множества A*, и обозначают символом B'_A, а наглядно изображают так, как представлено на рисунке 11.

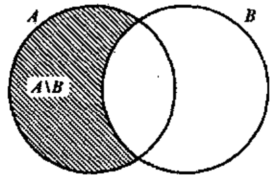


Рис. 10

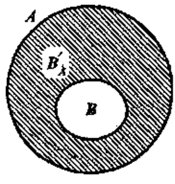


Рис. 11

Определение. ***Пусть B ⊂ A. Дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее все элементы множества A, которые не принадлежат множеству B.***

Как уже было сказано, в случае когда $B \subset A$, $A \setminus B = B'_A$.

Из определения следует, что $B'_A = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Выясним, как находить дополнение подмножества на конкретных примерах.

Если элементы множеств A и B перечислены и $B \subset A$, то, чтобы найти дополнение множества B до множества A, достаточно перечислить элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B. Так, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а $B = \{2, 4\}$, то $B'_A = \{1, 3, 5\}$.

В том случае, когда указаны характеристические свойства элементов множеств A и B и известно, что $B \subset A$, то множество B'_A задают также с помощью характеристического свойства, общий вид которого «$x \in A$ и $x \notin B$». Так, если A – множество четных чисел, а B – множество чисел, кратных 4, то B'_A – это множество, содержащее такие четные числа, которые не делятся на 4. Например, $22 \in B'_A$, так как $22 \in A$ (т.е. оно четное) и $22 \notin B$ (т.е. оно не кратно 4).

Вычитание – это третья операция над множествами, с которыми мы уже познакомились. Нам известно, что пересечение множеств более сильная операция, чем объединение. А как быть с вычитанием? Например, каков порядок выполнения действий в выражении $A \setminus B \cap C$? Условились считать, что пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Поэтому порядок выполнения действий в выражении $A \setminus B \cap C$ такой: сначала находят пересечение множеств B и C, а затем полученное множество вычитают из множества A.

Что касается объединения и вычитания множеств, то их считают равноправными. Например, в выражении $A \setminus B \cup C$ надо сначала выполнить вычитание (из A вычесть B), а затем полученное множество объединить с множеством C.

Вычитание множеств обладает рядом свойств. В частности, можно доказать, что для любых множеств A, B и C справедливы следующие равенства:

1) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;
2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие высказывания:

а) $5 \in A \setminus B$; б) $7 \notin A \setminus B$.

2. Известно, что $x \in A \setminus B$. Следует ли из этого, что:

а) $x \in A$; б) $x \in B$?

3. Найдите разность множеств A и B, если

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;
б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \varnothing$;
в) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$;
г) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{6, 2, 3, 4, 5, 1\}$.

4. В каких случаях, выполняя упражнение 3, вы находили дополнение множества B до множества A?

5. Даны множества: A – натуральных чисел, кратных 3, B – натуральных чисел, кратных 9.

а) Сформулируйте характеристическое свойство элементов множества B'_A.
б) Верно ли, что $123 \in B'_A$, а $333 \notin B'_A$?

6. Найдите дополнение множества Y до множества X, если:

а) X – множество точек прямой AB, Y – множество точек отрезка AB;
б) X – множество точек квадрата, Y – множество точек круга, вписанного в этот квадрат;
в) X – множество прямоугольников, Y – множество квадратов.

7. Из каких чисел состоит дополнение:

а) множества натуральных чисел до множества целых;
б) множества целых чисел до множества рациональных;
в) множества рациональных чисел до множества действительных.

8. Постройте три круга, изображающие три попарно пересекающихся множества A, B и C, и выделите каким-либо образом области, представляющие множества:

а) $A \cup B \setminus C$; в) $A \setminus C \cup B \setminus C$; д) $A \setminus (B \cup C)$;
б) $A \setminus B \cap C$; г) $A \setminus B \cup C$; е) $(A \setminus B) \cap C$.

Для каждого случая выполните отдельный рисунок.

9. Проиллюстрируйте при помощи кругов Эйлера, что для любых множеств A, B и С верны равенства:

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; г) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

10. A – множество натуральных чисел, кратных 7, B – множество натуральных чисел, кратных 3, C – множество четных натуральных чисел. Из каких чисел состоят множества:

а) $(A \cap B) \setminus C$; в) $A \cap C \setminus B$;

б) $(A \cup B) \setminus C$; г) $C \cup B \setminus A$?

11. О какой операции и над какими множествами идет речь в следующих задачах:

а) У Коли 10 книг, 2 книги он подарил товарищу. Сколько книг осталось у Коли?

б) В зале было 100 стульев. После того как вынесли несколько стульев, в зале осталось 86 стульев. Сколько стульев вынесли из зала?

8. Понятие разбиения множества на классы

Понятия множества и операций над множествами позволяют уточнить наше представление о классификации – действии распределения объектов по классам.

Классификацию мы выполняем достаточно часто. Так, натуральные числа представляем как два класса – четные и нечетные. Углы на плоскости разбиваем на три класса: прямые, острые и тупые.

Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество X разбито на классы $X_1, X_2, ..., X_n, ...$, если:

1) ***подмножества $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ попарно не пересекаются;***

2) ***объединение подмножеств $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ совпадает с множеством X.***

Если не выполнено хотя бы одно из условий, классификацию считают неправильной. Например, если из множества X треугольников выделить подмножества равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников, то разбиения мы не получим, поскольку подмножества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются (все равносторонние треугольники являются равнобедренными). В данном случае не выполнено первое условие разбиения множества на классы.

Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множеств.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают различными свойствами. Положим, что нас интересуют числа, обладающие свойством «быть кратным 3». Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогда про остальные натуральные числа можно сказать, что они не кратны 3, т.е. получаем еще одно подмножество

Рис. 12

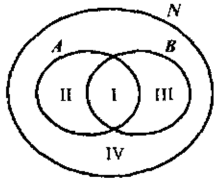


Рис. 13

множества натуральных чисел (рис. 12). Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством натуральных чисел, то имеем разбиение этого множества на два класса.

Вообще, если на множестве X задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый – это класс объектов, обладающих этим свойством, а второй – дополнение первого класса до множества X. Во втором классе содержатся такие объекты множества X, которые заданным свойством не обладают. Такую классификацию называют *дихотомической*.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда для элементов множества заданы два свойства. Например, такие свойства натуральных чисел, как «быть кратным 3» и «быть кратным 5». При помощи этих свойств из множества N натуральных чисел можно выделить два подмножества: A – подмножество чисел, кратных 3, и B – подмножество чисел, кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого (рис. 13). Проанализируем получившийся рисунок. Конечно, разбиения множества натуральных чисел на подмножества A и B не произошло. Но круг, изображающий множество N, можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей – на рисунке они пронумерованы. Каждая область изображает некоторое подмножество множества N. Подмножество I состоит из чисел, кратных 3 и 5; подмножество II – из чисел, кратных 3 и не кратных 5; подмножество III – из чисел, кратных 5 и не кратных 3; подмножество IV – из чисел, не кратных 3 и не кратных 5. Объединение этих четырех подмножеств есть множество N.

Таким образом, выделение двух свойств привело к разбиению множества N натуральных чисел на четыре класса.

Не следует думать, что задание двух свойств элементов множества всегда приводит к разбиению этого множества на четыре класса. Например, при помощи таких двух свойств «быть кратным 3» и «быть кратным 6» множество натуральных чисел разбивается на три класса (рис. 14): I – класс чисел, кратных 6; II – класс чисел, кратных 3, но не кратных 6; III – класс чисел, не кратных 3.

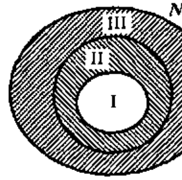


Рис. 14

1. Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделили подмножества X_1, X_2 и X_3. В каком из следующих случаев множество X оказалось разбитым на классы:

а) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{9\}$;

б) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{10, 11, 12\}$;

в) $X_1 = \{3, 6, 9, 12\}$, $X_2 = \{1, 5, 7, 11\}$, $X_3 = \{2, 10\}$?

2. Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделим подмножества:

а) A – четных чисел, B – нечетных чисел;

б) A – чисел, кратных 2; B – чисел, кратных 3; C – чисел, кратных 4;

в) A – нечетных однозначных чисел; B – четных двузначных чисел.

В каком случае произошло разбиение множества X на классы?

3. Из множества треугольников выделили подмножества треугольников:

а) прямоугольные, равнобедренные, равносторонние;

б) остроугольные, тупоугольные, прямоугольные;

в) равносторонние, прямоугольные, тупоугольные.

В каком случае произошло разбиение множества треугольников на классы?

4. На какие классы разбивается множество точек плоскости при помощи: а) окружности; б) круга; в) прямой?

5. Перечертите комбинации фигур, приведенные на рисунке 15, и на каждой из них выделите (различными видами штриховки) непересекающиеся области.

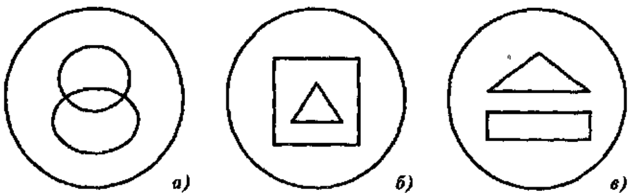


Рис. 15

6. На множестве натуральных чисел рассматривается свойство «быть кратным 7». Сколько классов разбиения множества **N** оно определяет? Назовите по два элемента из каждого класса.

7. Из множества четырехугольников выделили подмножество фигур с попарно параллельными сторонами. На какие классы разбивается множество четырехугольников с помощью свойства «иметь попарно параллельные стороны»? Начертите по два четырехугольника из каждого класса.

8. Изобразите при помощи кругов Эйлера множество **N** натуральных чисел и его подмножества: четных чисел и чисел, кратных 7. Можно ли утверждать, что множество **N** разбито:

а) на два класса: четных чисел и чисел, кратных 7;

б) на четыре класса: четных чисел, кратных 7; четных чисел, не кратных 7; нечетных чисел, кратных 7; нечетных чисел, не кратных 7?

9. На множестве четырехугольников рассматриваются два свойства: «быть прямоугольником» и «быть квадратом». На какие классы разобьется множество четырехугольников при помощи этих свойств? Начертите по два четырехугольника из каждого класса.

10. Изменится ли ответ в упражнении 9, если на множестве четырехугольников рассмотреть свойства:

а) «быть прямоугольником» и «быть ромбом»;

б) «быть прямоугольником» и «быть трапецией»?

11. На рисунке 16 изображены множество X – студентов группы, A – множество спортсменов этой группы, B – множество отличников этой группы.

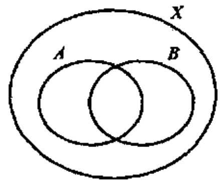


Рис. 16

а) Укажите классы разбиения множества X, полученные с помощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.

б) Сколько получилось бы классов разбиения, если бы ни один отличник группы не был спортсменом?

Выполните соответствующий рисунок и назовите классы разбиения.

12. Покажите, что решение нижеприведенных задач связано с разбиением заданного множества на классы:

а) 18 редисок связали в пучки по 6 редисок в каждом. Сколько получилось пучков?

б) 18 карандашей раздали 6 ученикам поровну. Сколько карандашей у каждого?

13. О каких множествах и операциях над ними идет речь в задачах:

а) С одной грядки сняли 25 кочанов капусты, а с другой – 15 кочанов. Всю эту капусту разложили в корзины, по 8 кочанов в каждую. Сколько потребовалось корзин?

б) Для школьного сада привезли 24 саженца яблонь. На одном участке посадили 6 саженцев, а на другом – остальные, в 3 ряда поровну. Сколько саженцев посадили в каждом ряду?

9. Декартово произведение множеств

Используя две цифры, например, 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33 и 55. Несмотря на то что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, эти числа различные. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов. В рассмотренном примере мы имели дело с упорядоченными парами.

Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b, принято записывать, используя круглые скобки: $(a; b)$. Элемент a называют *первой координатой (компонентой) пары*, а элемент b – *второй координатой (компонентой) пары.*

Пары $(a; b)$ и $(c; d)$ равны в том и только в том случае, когда $a = c$ и $b = d$.

В упорядоченной паре $(a; b)$ может быть, что $a = b$. Так, запись чисел 33 и 55 можно рассматривать как упорядоченные пары $(3; 3)$ и $(5; 5)$.

Упорядоченные пары можно образовывать как из элементов одного множества, так и двух множеств. Пусть, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$. Образуем упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству A, а вторая – множеству B. Если мы перечислим все такие пары, то получим множество:

$$\{(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3; 3), (3; 5)\}.$$

Видим, что имея два множества A и B, мы получили новое множество, элементами которого являются упорядоченные пары чисел. Это множество называют декартовым произведением множеств A и B.

Определение. ***Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.***

Декартово произведение множеств A и B обозначают $A \times B$. Используя это обозначение, определение декартова произведения можно записать так:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Задача 1. Найдите декартово произведение множеств A и B, если:

а) $A = \{m; p\}$, $B = \{e, f, k\}$;

б) $A = B = \{3, 5\}$.

Решение. а) Действуем согласно определению – образуем все пары, первая компонента которых выбирается из A, а вторая – из B:

$$A \times B = \{(m; e), (m; f), (m; k), (p; e), (p; f), (p; k)\}.$$

б) Декартово произведение равных множеств находят, образуя всевозможные пары из элементов данного множества:

$$A \times A = \{(3; 3), (3; 5), (5; 3), (5; 5)\}.$$

Выясним, какими свойствами обладает операция нахождения декартова произведения. Так как декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$ состоят из различных элементов, то операция нахождения декартова произведения множеств свойством коммутативности не обладает.

Аналогично рассуждая, можно доказать, что для этой операции не выполняется и свойство ассоциативности. Но она дистрибутивна относительно объединения и вычитания множеств, т.е. для любых множеств A, B и C выполняются равенства:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$
$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Задача 2. Проверьте справедливость свойства дистрибутивности декартова произведения относительно объединения, если:

$$A = \{3; 4; 5\}, B = \{5; 7\}, C = \{7; 8\}.$$

Решение. Найдем объединение множеств A и B: $A \cup B = \{3, 4, 5, 7\}$. Далее перечислим элементы множества $(A \cup B) \times C$, используя определение декартова произведения: $(A \cup B) \times C = \{(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)\}$.

Чтобы найти элементы множества $(A \times C) \cup (B \times C)$, перечислим сначала элементы множеств $A \times C$ и $B \times C$:

$$A \times C = \{(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8)\}$$
$$B \times C = \{(5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)\}.$$

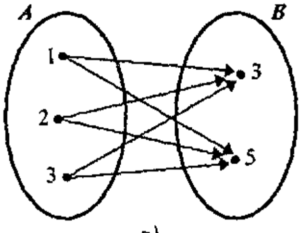
Найдем объединение полученных декартовых произведений:

$$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)\}.$$

Видим, что множества $(A \cup B) \times C$ и $(A \times C) \cup (B \times C)$ состоят из одних и тех же элементов, следовательно, для данных множеств A, B и C справедливо равенство $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Выясним теперь, как можно наглядно представлять декартово произведение множеств.

Если множества A и B конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств при помощи графа или таблицы. Например, декартово произведение множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$ можно представить так, как показано на рисунке 17, а, б.



а)

B / A	3	5
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,3)
3	(3,3)	(3,3)

б)

Рис. 17

Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каж-

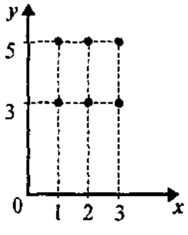


Рис. 18

дая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости. Например, декартово произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$ на координатной плоскости будет выглядеть так, как показано на рисунке 18.

Заметим, что элементы множества A мы изобразили на оси Ox, а элементы множества B – на оси Oy.

Такой способ наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

Задача 3. Изобразите на координатной плоскости декартово произведение $A \times B$, если:

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$; б) $A = [1, 3]$, $B = [3, 5]$;

в) $A = \mathbf{R}$, $B = [3, 5]$; г) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$.

Решение. а) Так как множество A состоит из трех элементов, а множество B содержит все действительные числа от 3 до 5, включая и сами эти числа, то декартово произведение $A \times B$ будет состоять из бесконечного множества пар, первая компонента которых либо 1, либо 2, либо 3, а вторая – любое действительное число из промежутка [3, 5]. Такое множество пар действительных чисел на координатной плоскости изобразится тремя отрезками (рис. 19).

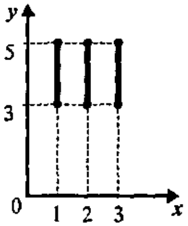


Рис. 19

б) В этом случае бесконечны оба множества A и B. Поэтому первой координатой пары, принадлежащей множеству $A \times B$, может быть любое число из промежутка [1, 3], и, следовательно, точки, изображающие элементы декартова произведения данных множеств A и B, образуют квадрат (рис. 20). Чтобы подчеркнуть, что элементы декартова произведения изображаются и точками, лежащими внутри квадрата, этот квадрат можно заштриховать.

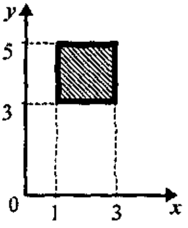


Рис. 20

в) Этот случай отличается от предыдущего тем, что множество A состоит из всех действительных чисел, т.е. абсцисса точек, изображающих элементы множества $A \times B$, принимает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка [3, 5]. Множество таких точек образует полосу (рис. 21).

г) Декартово произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ состоит из всевозможных действительных чисел. Точки, изображающие эти пары, сплошь заполняют координатную плоскость. Таким образом, декартово произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ содержит столько же элементов, сколько точек находится на координатной плоскости.

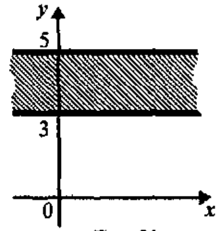


Рис. 21

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и т.д. элементов. Например, запись числа 367 – это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «математика» – это упорядоченный набор из 10 элементов.

Упорядоченные наборы часто называют *кортежами* и различают по длине. *Длина кортежа* – это число элементов, из которых он состоит. Например, (3; 6; 7) – это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) – это кортеж длины 10.

Рассматривают в математике и декартово произведение трех, четырех и вообще n множеств.

Определение. ***Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество всех кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2, ..., n-я – множеству A_n.***

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначают так: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Задача 4. Даны множества: $A_1 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_3 = \{6, 7\}$. Найти $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Решение. Элементами множества $A_1 \times A_2 \times A_3$ будут кортежи длины 3 такие, что первая их компонента принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2, третья – множеству A_3.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 4, 7),$$
$$(2, 5, 6), (2, 5, 7), (3, 3, 6), (3, 3, 7),$$
$$(3, 4, 6), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (3, 5, 7)\}.$$

Упражнения

1. Дано уравнение $2x - 3 = y$. Запишите несколько решений данного уравнения. Что представляет собой каждое решение? Является ли пара (4, 5) решением данного уравнения? А пара (5, 4)?

2. Элементами множеств A и B являются пары чисел:

$A = \{(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3), (5, 0)\}$,

$B = \{(1, 9), (2, 7), (3, 6), (4, 7), (5, 0)\}$.

Найдите пересечение и объединение данных множеств.

3. Перечислите элементы декартова произведения $A \times B$, если:

а) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, k, l\}$;

б) $A = B = \{a, b, c\}$;

в) $A = \{a, b, c\}$, $B = \varnothing$.

4. Запишите различные двузначные числа, используя цифры 3, 4 и 5. Сколько среди них таких, запись которых начинается с цифры 3? Как связано решение данной задачи с понятием декартова произведения множеств?

5. Даны два множества: $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4\}$. Перечислите элементы множеств $A \times B$ и $B \times A$. Верно ли, что:

а) Множества $A \times B$ и $B \times A$ содержат одинаковое число элементов;

б) Множества $A \times B$ и $B \times A$ равны?

6. Проверьте справедливость равенства $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ для множеств $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 9\}$, $C = \{0, 1\}$.

Выполняется ли для них равенство $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$?

7. Сколько букв в слове «барабан»? Сколько различных букв в этом слове?

Сформулируйте эту задачу, используя понятия множества и кортежа.

8. Чем отличается множество цифр в записи числа 56576 от кортежа цифр в его записи?

9. Изобразите на координатной плоскости точки: (–1, 0), (–1, 4), (3, 0), (3, 4) и последовательно их соедините. Какая фигура получилась?

10. Какую фигуру образуют точки, если их абсциссы принадлежат множеству [–2, 2], а ординаты – множеству [–3, 3]?

11. Изобразите в прямоугольной системе координат множество $A \times B$, если:

а) $A = [-2, 2]$, $B = \{2, 3, 4\}$;

б) $A = [-2, 2]$, $B = (2, 4)$;

в) $A = \mathbf{R}$, $B = [2, 4]$.

12. Определите, декартово произведение каких множеств X и Y изображено на рисунке 22.

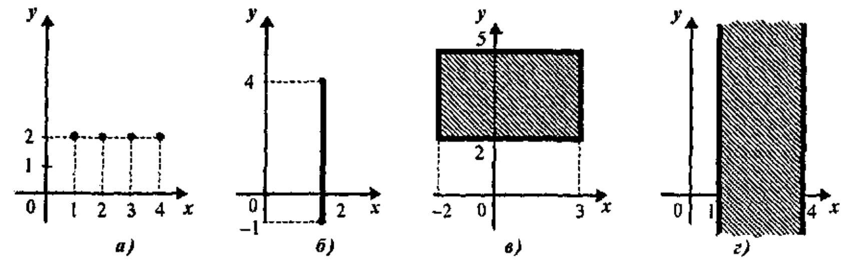


Рис. 22

10. Число элементов в объединении и разности конечных множеств

Нам известно, как находят объединение двух конечных непересекающихся множеств. Например, если $A = \{x, y, z\}$, а $B = \{k, l, m, p\}$, то $A \cup B = \{x, y, z, k, l, m, p\}$. Чтобы ответить на вопрос: «Сколько элементов в полученном множестве?», достаточно пересчитать их.

А как определять число элементов в объединении конечных множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов?

Условимся предложение «Множество A содержит a элементов» записывать в таком виде: $n(A) = a$. Например, если $A = \{x, y, z\}$, то утверждение «Множество A содержит три элемента» можно записать так: $n(A) = 3$.

Можно доказать, что если в множестве A содержится a элементов, в множестве B – b элементов и множества A и B не пересекаются, то в объединении множеств A и B содержится $a + b$ элементов, т.е.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b. \quad (1)$$

Это правило нахождения числа элементов в объединении двух конечных непересекающихся множеств, его можно обобщить на случай t попарно непересекающихся множеств, т.е. если множества $A_1, A_2, ..., A_t$ попарно не пересекаются, то $n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_t) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_t)$.

Пусть, например, $A = \{x, y, z\}$, $B = \{k, l, m, p\}$, $C = \{q, s\}$. Найдем число элементов в объединении данных множеств.

Пересчитав элементы данных множеств, получаем, что $n(A) = 3$, $n(B) = 4$, $n(C) = 2$. Видим, что $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, т.е. данные множества попарно не пересекаются. Тогда, согласно правилу нахождения числа элементов в объединении конечных множеств, получаем:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 3 + 4 + 2 = 9.$$

Таким образом, в объединении заданных трех множеств содержится 9 элементов.

Нетрудно убедиться в том, что если $B \subset A$, то $n(B'_A) = n(A) - n(B)$, т.е. число элементов дополнения подмножества B до данного конечного множества A равно разности численностей этих множеств.

Пусть, например, $A = \{x, y, z, p, t\}$, а $B = \{x, p, t\}$. Найдем число элементов в дополнении подмножества B до множества A.

Пересчитав элементы множеств A и B, получаем, что $n(A) = 5$, $n(B) = 3$. Тогда $n(B'_A) = n(A) - n(B) = 5 - 3 = 2$. Таким образом, в дополнении множества B до множества A содержится два элемента.

Формула (1) позволяет находить число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств. А если множества A и B имеют общие элементы, то как найти число элементов в их объединении?

Пусть, например, $A = \{x, y, z\}$, а $B = \{x, z, p, s, k\}$. Тогда $A \cup B$ = $= \{x, y, z, p, s, k\}$, т.е. если $n(A) = 3$, а $n(B) = 5$ и $A \cap B \neq \varnothing$, то $n(A \cup B) = 6$. Нетрудно видеть, что в данном случае $n(A \cap B) = 2$ и, значит, общи элементы множеств A и B в объединении этих множеств записан только один раз.

В общем виде правило подсчета элементов в объединении двух конеч ных множеств может быть представлено в виде формулы:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \qquad (2)$$

Полученные формулы для подсчета числа элементов в объедине нии двух и более множеств можно использовать для решения тексто вых задач следующего вида.

Задача 1. Из 40 студентов курса 32 изучают английский язык, 21 – немецкий язык, а 15 – английский и немецкий языки. Сколько студен тов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение. Пусть A – множество студентов курса, изучающих анг лийский язык, B – множество студентов курса, изучающих немецки язык, C – множество всех студентов курса. По условию задачи: $n(A) = 32$, $n(B) = 21$, $n(A \cap B) = 15$, $n(C) = 40$. Требуется найти число сту дентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1 способ.

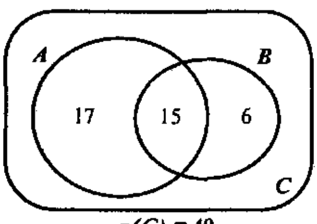
1) Найдем число элементов в объединении данных множеств A и B. Для этого воспользуемся формулой (2):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 32 + 21 - 15 = 38.$$

2) Найдем число студентов курса, которые не изучают ни англий ский, ни немецкий языки: $40 - 38 = 2$.

2 способ.

1) Изобразим данные множества при помощи кругов Эйлера и опре делим число элементов в каждом из непе ресекающихся подмножеств (рис. 23). Так как в пересечении множеств A и B содер жится 15 элементов, то студентов, изу чающих *только* английский язык, будет 17 ($32 - 15 = 17$), а студентов, изучающих *только* немецкий, – 6 ($21 - 15 = 6$). Тогда $n(A \cup B) = 17 + 15 + 6 = 38$, и, следова тельно, число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки, будет $40 - 38 = 2$.



$n(C) = 40$

Рис. 23

Упражнения

1. Из 32 школьников 12 занимаются в волейбольной секции, 15 – в баскетбольной, 8 человек занимаются и в той, и в другой секции.

Сколько школьников не занимаются ни в волейбольной, ни в баскетбольной секции?

2. В третьем классе дети коллекционируют марки и монеты. Марки коллекционируют 8 человек, монеты – 5 человек. Всего коллекционеров 11. Объясните, как это может быть. Сколько человек коллекционируют только марки? ... только монеты?

3. Из 38 учащихся класса 24 занимаются в хоре и 15 в лыжной секции. Сколько учащихся занимается и в хоре, и в лыжной секции, если в классе нет учащихся, не посещающих занятий хора или лыжной секции?

4. В группе туристов, состоящей из 100 человек, 10 человек не знали ни немецкий, ни французский языки, 75 знали немецкий, 83 знали французский. Сколько туристов знали два языка?

5. Катя положила в коробку 4 зеленых круга, 6 треугольников и 3 красных многоугольника. Всего в коробке оказалось 11 фигурок. Сколько среди них красных треугольников?

6. В делегации 6 человек, знающих французский или немецкий язык. Трое из них говорят только на французском, двое – только на немецком. Сколько человек говорят на двух языках – французском и немецком?

7. Правильно ли представлено на рисунке 24 условие следующей задачи: «Из 100 человек английский язык изучают 28, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5. Все три языка изучают три студента. Сколько студентов изучает только один язык? Сколько студентов не изучает ни одного языка?

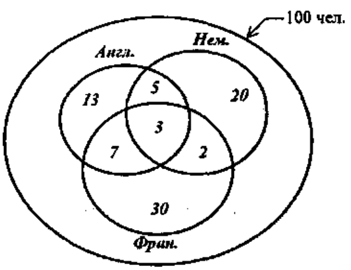


Рис. 24

8. Решите задачу из задания 7.

9. В школе 70 учеников. Из них 27 ходит в драмкружок, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов. 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не ходят в драмкружок?

10. Даны 40 чисел. Из них 10 чисел кратны 3, 15 чисел кратны 2, 20 чисел не кратны ни 2, ни 3. Сколько среди данных 40 чисел, кратных 6?

11. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги *A*, *B* и *C*. Результаты опроса оказались таковы: книгу *A* читали 25 учащихся, книгу *B* – 22, книгу *C* – также 22. Книгу *A* или *B* читали 33 ученика, *A* или *C* – 32, *B* или *C* – 31; все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих трех книг?

11. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств

Нам известно, как находят декартово произведение конечных множеств. Например, если $A = \{x, y, z\}$, $B = \{m, p\}$, то $A \times B = \{(x, m), (x, p), (y, m), (y, p), (z, m), (z, p)\}$. Чтобы ответить на вопрос: «Сколько элементов в полученном множестве?», достаточно пересчитать их. А как определить число элементов в декартовом произведении множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов?

Можно доказать, что если в множестве A содержится a элементов, а в множестве B – b элементов, то в декартовом произведении множеств A и B содержится $a \cdot b$ элементов, т.е.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = a \cdot b.$$

Правило распространяется на случай t множеств, т.е. $n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_t)$.

Например, если в множестве A содержится 3 элемента, в множестве B – 4 элемента, в множестве C – 5 элементов, то в их декартовом произведении будет содержаться $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ упорядоченных наборов из трех элементов.

Полученные формулы можно использовать при решении задач.

Задача 1. У Маши 3 различных юбки и 4 различных кофты. Сколько различных комплектов, состоящих из юбки и кофты, она может составить?

Решение. Пусть A – множество юбок у Маши, B – множество кофт у нее. Тогда, по условию задачи, $n(A) = 3$, $n(B) = 4$. Требуется найти число возможных пар, образованных из элементов множеств A и B, т.е. $n(A \times B)$. Но согласно правилу $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 4 = 12$. Таким образом, из 3 юбок и 4 кофт Маша может составить 12 различных комплектов.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 5, 4 и 7?

Решение. Запись любого двузначного числа состоит из двух цифр и представляет собой упорядоченную пару. В данном случае эти пары образуются из элементов множества $A = \{5, 4, 7\}$. В задаче требуется узнать число таких пар, т.е. число элементов в декартовом произведении $A \times A$. Согласно правилу $n(A \times A) = n(A) \cdot n(A) = 3 \cdot 3 = 9$. Значит, двузначных чисел, записанных с помощью цифр 5, 4 и 7, будет 9.

Часто при решении задач, аналогичных рассмотренным выше, требуется не только ответить на вопрос о том, сколько существует возможных вариантов ее решения, но и осуществить перебор этих вариантов. Например, в задаче 2 можно предложить записать все двузначные числа, используя цифры 5, 4 и 7.

Существует единый подход к осуществлению такого перебора – строится схема, называемая деревом возможных вариантов. Так, для задачи 2 она будет иметь вид (рис. 25):

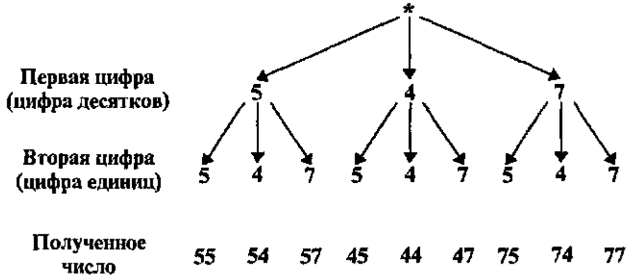


Рис. 25

Эта схема действительно похожа на дерево, правда, растет оно вниз и у него нет ствола. То, что дерево растет как бы «вверх ногами», удобно при построении схем такого вида. Знак * изображает корень дерева, ветвями которого являются различные варианты решения задачи. Чтобы получить двузначное число, надо сначала выбрать цифру десятков – для этого есть три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому из * проведены три отрезка и на их концах поставлены цифры 5, 4 и 7. Затем надо выбрать цифру единиц, а для этого также есть три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому от цифр 5, 4 и 7 проведено по три отрезка, на концах которых опять стоят цифры 5, 4 или 7. Чтобы прочитать полученные варианты, надо пройти по всем ветвям построенного дерева сверху вниз.

Упражнения

1. Множество A содержит 7 элементов. Сколько элементов в множестве B, если декартово произведение $A \times B$ состоит из: а) 42 элементов; б) 7 элементов; в) $A \times B = \varnothing$.

2. Сколько различных наборов можно составить из книги и блокнота, если имеется 20 видов различных книг и 15 видов различных блокнотов?

3. Решите нижеприведенные задачи методом перебора всех возможных вариантов, а затем покажите, что решение этих задач связано с определением числа элементов декартова произведения множеств:

а) В костюмерной танцевального кружка имеются белые и розовые кофты, а также синие, черные и коричневые юбки. Сколько можно из них составить различных костюмов?

б) Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 5 и 7?

в) На вершину горы ведут две дороги. Сколькими способами можно подняться и спуститься с нее?

4. Решите следующие задачи, построив дерево возможных вариантов:

а) У продавца имеется три вида мороженого: клубничное, сливочное и ореховое. Наташа и Катя решили купить по одной порции. Сколько существует вариантов такой покупки?

б) В понедельник в первом классе должно быть три урока: математика, чтение и физкультура. Сколько различных вариантов расписания можно составить на этот день?

в) Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трех городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?

12. Основные выводы § 1

Изучая материал данного параграфа, мы познакомились с *понятиями*:

множество;
элемент множества;
характеристическое свойство элементов множества;
подмножество;
равные множества;
пересечение множеств;
объединение множеств;
вычитание множеств;
дополнение подмножества;
декартово произведение множеств.

Мы пополнили наш математический язык *обозначениями*:

$a \in A, b \notin A$ (для записи предложений «a принадлежит множеству A» и «b не принадлежит множеству A»);

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ (для задания множества путем перечисления всех его элементов);

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ и $x \leq 4\}$ (для задания множества путем указания характеристического свойства его элементов);

$A \subset B$ (для записи предложения «A – подмножество B»);

$A = B$ (для записи предложения «Множества A и B равны»);

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ (для записи определения пересечения множеств A и B);

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ (для записи определения объединения множеств A и B);

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ (для записи определения разности множеств A и B);

$B'_A = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ (для записи определения дополнения множества B до множества A);

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ и $x \in B\}$ (для записи определения декартова произведения множеств A и B).

Мы познакомились с операциями над множествами: объединением, пересечением, вычитанием, декартовым произведением и *свойствами этих операций*:

коммутативностью пересечения и объединения ($A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ для любых множеств A и B);

ассоциативностью пересечения и объединения ($(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ для любых множеств A, B и C);

дистрибутивностью пересечения относительно объединения $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ для любых множеств A, B и C);

дистрибутивностью объединения относительно пересечения $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ для любых множеств A, B и C);

дистрибутивностью декартова произведения относительно объединения и вычитания множеств ($(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ и $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ для любых множеств A, B и C).

Мы познакомились с *правилами*:

разбиения множества на классы;

нахождения числа элементов в объединении и декартовом произведении конечных множеств:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B);$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B), \text{ если } A \cap B = \varnothing;$$

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляют в виде четырех групп. В первую включаются понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, сложение, слагаемое, больше и др. Во вторую входят алгебраические понятия: выражение, равенство, уравнение и др. Третью составляют геометрические понятия: прямая, отрезок, треугольник и т.д. Четвертую группу образуют понятия, связанные с величинами и их измерением.

Как же изучать такое обилие самых разных понятий?

Прежде всего, надо иметь представление о понятии как логической категории и особенностях математических понятий.

В логике понятия рассматривают как форму мысли, отражающую объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах. Языковой формой понятия является слово или группа слов.

Составить понятие об объекте – это значит уметь отличить его от других сходных с ним объектов. Математические понятия обладают рядом особенностей. Главная заключается в том, что математические объекты, о которых необходимо составить понятие, в реальности не существуют. Математические объекты созданы умом человека. Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления. Например, в геометрии изучают форму и размеры предметов, не принимая во внимание другие их свойства: цвет, массу, твердость и т.д. От всего этого отвлекаются, абстрагируются. Поэтому в геометрии вместо слова «предмет» говорят «геометрическая фигура».

Результатом абстрагирования являются и такие математические понятия, как «число» и «величина».

Вообще математические объекты существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык.

К сказанному можно добавить, что, изучая пространственные формы и количественные отношения материального мира, математика не только пользуется различными приемами абстрагирования, но и само абстрагирование выступает как многоступенчатый процесс. В математике рассматривают не только понятия, появившиеся при изучении реальных предметов, но и понятия, возникшие на основе первых. Например, общее понятие функции как соответствия является обобщением понятий конкретных функций, т.е. абстракцией от абстракций.

Чтобы овладеть общими подходами к изучению понятий в начальном курсе математики, учителю необходимы знания об объеме и содержании понятия, об отношениях между понятиями и о видах определений понятий.

13. Объем и содержание понятия. Отношения между понятиями

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали. Можно указать и другие его свойства.

Среди свойств объекта различают существенные и несущественные. Свойство считают существенным для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать. Например, для квадрата существенными являются все свойства, названные выше. Несущественно для квадрата $ABCD$ свойство «сторона AD горизонтальна». Если квадрат повернуть, то сторона AD окажется расположенной по-другому (рис. 26). Поэтому, чтобы понимать, что представляет собой данный математический объект, надо знать его существенные свойства.

Когда говорят о математическом нятии, то обычно имеют в виду ножество объектов, обозначаемых ним термином (словом или группой в). Так, говоря о квадрате, имеют виду все геометрические фигуры, ющиеся квадратами. Считают, что ожество всех квадратов составляет ъем понятия «квадрат».

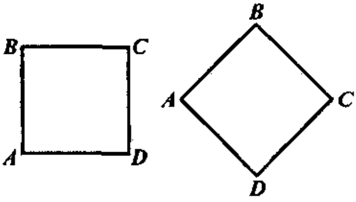


Рис. 26

Вообще объем понятия – это множество всех объектов, обозначае- х одним термином.

Любое понятие имеет не только объем, но и содержание.

Содержание понятия – это множество всех существенных свойств ъекта, отраженных в этом понятии.

Рассмотрим, например, понятие «прямоугольник».

Объем понятия – это множество различных прямоугольников, а в о содержание входят такие свойства прямоугольников, как «иметь тыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», меть равные диагонали» и т.д.

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимо- язь: если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содер- ние, и наоборот. Так, например, объем понятия «квадрат» является стью объема понятия «прямоугольник», а в содержании понятия вадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «пря- оугольник» («все стороны равны», «диагонали взаимно перпендику- ярны» и др.).

Любое понятие нельзя усвоить, не осознав его взаимосвязи с дру- ими понятиями. Поэтому важно знать, в каких отношениях могут ходиться понятия, и уметь устанавливать эти связи.

Отношения между понятиями тесно связаны с отношениями между х объемами, т.е. множествами.

Условимся понятия обозначать строчными буквами латинского фавита: $a, b, c, ..., z$.

Пусть заданы два понятия a и b. Объемы их обозначим соответст- нно A и B.

Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то говорят, что понятие a – *видовое по отноше- ю к понятию* b, а понятие b – *родовое по отношению к понятию* a.

Например, если a – «прямоугольник», b – «четырехугольник», то их ъемы A и B находятся в отношении включения ($A \subset B$ и $A \neq B$), по- ольку всякий прямоугольник является четырехугольником. Поэтому жно утверждать, что понятие «прямоугольник» – видовое по отно- нию к понятию «четырехугольник», а понятие «четырехугольник» – довое по отношению к понятию «прямоугольник».

Если $A = B$, то говорят, что *понятия a и b тождественны.*

Например, тождественны понятия «равносторонний треугольник» и «равноугольный треугольник», так как их объемы совпадают.

Рассмотрим подробнее отношение рода и вида между понятиями. Во-первых, *понятия рода и вида относительны*: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» – родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

Во-вторых, для *данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий*. Так, для понятия «прямоугольник» родовыми являются понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «многоугольник». Среди них можно указать ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим является понятие «параллелограмм».

В-третьих, *видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия*. Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику.

Так как объем понятия – множество, удобно, устанавливая отношения между объемами понятий, изображать их при помощи кругов Эйлера.

Установим, например, отношения между следующими парами понятий a и b, если:

1) a – «прямоугольник», b – «ромб»;

2) a – «многоугольник», b – «параллелограмм»;

3) a – «прямая», b – «отрезок».

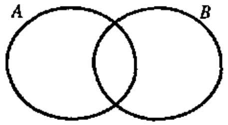


Рис. 27

В случае 1) объемы понятий пересекаются, но не одно множество не является подмножеством другого (рис. 27). Следовательно, можно утверждать, что данные понятия a и b не находятся в отношении рода и вида.

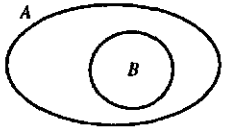


Рис. 28

В случае 2) объемы данных понятий находятся в отношении включения, но не совпадают – всякий параллелограмм является многоугольником, но не наоборот (рис. 28). Следовательно, можно утверждать, что понятие «параллелограмм» – видовое по отношению к понятию «многоугольник», а понятие «многоугольник» – родовое по отношению к понятию «параллелограмм».

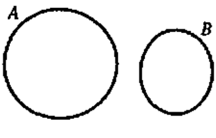


Рис. 29

В случае 3) объемы понятий не пересекаются, так как ни про один отрезок нельзя сказать, что он является прямой, и ни одна прямая не может быть названа отрезком (рис. 29). Следовательно, данные понятия не находятся в отношении рода и вида.

О понятиях «прямая» и «отрезок» можно сказать, что они находятся *в отношении целого и части*: отрезок – часть прямой, а не ее вид. И если видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия, то часть не обязательно обладает всеми свойствами целого. Например, отрезок не обладает таким свойством прямой, как ее бесконечность.

Упражнения

1. Начертите три геометрические фигуры, принадлежащие объему понятия:

а) параллелограмм; б) трапеция; в) окружность.

2. Назовите пять существенных свойств понятия:

а) треугольник; б) круг.

3. Каков объем понятия:

а) однозначное число; б) натуральное число; в) луч?

4. Назовите несколько свойств, общих для прямоугольника и квадрата. Какое из следующих утверждений верное:

а) Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику.

б) Всякое свойство прямоугольника присуще квадрату?

5. Находятся ли в отношении рода и вида следующие пары понятий:

а) многоугольник и треугольник;

б) угол и острый угол;

в) луч и прямая;

г) ромб и квадрат;

д) круг и окружность?

6. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между объемами понятий a, b и c, если:

а) a – «четырехугольник»,
b – «трапеция»,
c – «прямоугольник»;

б) a – «натуральное число, кратное 3»,
b – «натуральное число, кратное 4»,
c – «натуральное число»;

в) a – «треугольник»,
b – «равнобедренный треугольник»,
c – «равносторонний треугольник».

7. Приведите примеры понятий, отношения между объемами которых изображены на рисунке 30.

8. Среди понятий, изучаемых в начальном курсе математики, есть такие, как «четное чис-

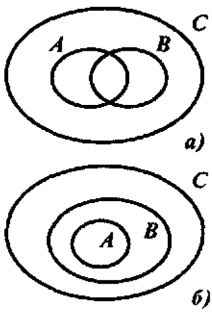


Рис. 30

ло», «треугольник», «многоугольник», «число», «трехзначное число», «прямой угол», «сумма», «слагаемое», «выражение». Есть ли среди них понятия, находящиеся в отношении:

а) рода и вида; б) целого и части?

9. Какие свойства понятий «прямоугольник» и «сложение» изучают в начальном курсе математики?

14. Определение понятий

Появление в математике новых понятий, а значит, и новых терминов, обозначающих эти понятия, предполагает их определение.

Определением обычно называют предложение, разъясняющее суть нового термина (или обозначения). Как правило, делают это на основе ранее введенных понятий. Например, прямоугольник можно определить так: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые». В этом определении есть две части – определяемое понятие (прямоугольник) и определяющее понятие (четырехугольник, у которого все углы прямые). Если обозначить через a первое понятие, а через b – второе, то данное определение можно представить в таком виде:

$$a \text{ есть (по определению) } b.$$

Слова «есть (по определению)» обычно заменяют символом $\underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow}$, и тогда определение выглядит так:

$$a \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} b$$

Читают: «a равносильно b по определению». Можно прочитать эту запись еще и так: «a тогда и только тогда, когда b».

Определения, имеющие такую структуру, называются *явными*. Рассмотрим их подробнее.

Обратимся опять к определению прямоугольника, вернее, к его второй части – определяющему понятию. В нем можно выделить:

1) понятие «четырехугольник», которое является родовым по отношению к понятию «прямоугольник»,

2) свойство «иметь все углы прямые», которое позволяет выделить из всевозможных четырехугольников один вид – прямоугольники; поэтому его называют видовым отличием.

Вообще видовое отличие – это свойства (одно или несколько), которые позволяют выделять определяемые объекты из объема родового понятия.

Итоги нашего анализа можно представить в виде схемы

$$\boxed{\text{Определяемое понятие}} \underset{опр.}{\Leftrightarrow} \underbrace{\boxed{\text{Родовое понятие}} + \boxed{\text{Видовое отличие}}}_{\text{Определяющее понятие}} \qquad (1)$$

Заметим, что в наглядном представлении структуры определения через род и видовое отличие мы допустили некоторые неточности. Во-первых, слова «родовое понятие» означают, что речь идет о родовом понятии по отношению к определяемому. Во-вторых, не совсем ясно, что означает знак «+», который, как известно, используется для обозначения сложения чисел. Смысл этого знака станет понятным немного позже, когда мы рассмотрим математический смысл союза «и». А сейчас познакомимся с еще одной возможностью наглядного представления определения через род и видовое отличие. Если определяемое понятие обозначить буквой a, определяющее буквой b, родовое понятие (по отношению к определяемому) – буквой c, а видовое отличие – буквой P, то определение через род и видовое отличие можно представить так:

$$a \underset{опр.}{\Leftrightarrow} \underbrace{c+P}_{b}. \qquad (2)$$

Почему видовое отличие обозначено заглавной буквой, мы узнаем несколько позже, в § 3.

Нам известно, что любое понятие имеет объем. Если понятие a определено через род и видовое отличие (2), то о его объеме – множестве A – можно сказать, что в нем содержатся такие объекты, которые принадлежат множеству C (объему родового понятия c) и обладают свойством P:

$$A = \{x \mid x \in C \text{ и } P(x)\}.$$

Например, если дано определение: «Острым углом называется угол, который меньше прямого», – то объем понятия «острый угол» – это подмножество множества всех углов плоскости, которые обладают свойством «быть меньше прямого».

Так как определение понятия через род и видовое отличие является по существу условным соглашением о введении нового термина для замены какой-либо совокупности известных терминов, то об определении нельзя сказать, верное оно или неверное; его не доказывают и не опровергают. Но, формулируя определения, придерживаются ряда правил. Назовем основные.

1. Определение должно быть соразмерным. Это означает, что объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать. Это правило вытекает из того, что определяемое и определяющее понятия взаимозаменяемы.

Например, несоразмерно такое определение квадрата: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны». Действительно, объем определяемого понятия – множество квадратов. Объем определяющего понятия – множество четырехугольников, все стороны которых равны, а это множество ромбов. Но не всякий ромб есть квадрат, т.е. объемы определяемого и определяющего понятия не совпадают, и, следовательно, данное определение несоразмерно.

2. В определении (или их системе) не должно быть порочного круга. Это означает, что нельзя определять понятие через само себя (в определяющем не должно содержаться определяемого термина) или определять его через другое, которое, в свою очередь, определять через него.

Например, содержат порочный круг определения: «Равные треугольники – это треугольники, которые равны», «Касательная к окружности – это прямая, которая касается окружности».

Так как в математике рассматривают не просто отдельные понятия, а их систему, то данное правило запрещает порочный круг и в системе определений. В соответствии с ним нельзя определять понятие *a*, выбрав в качестве родового понятия *c*, а понятие *c* – через понятие *a*.

Например, если определить окружность как границу круга, а круг как часть плоскости, ограниченную окружностью, то мы будем иметь порочный круг в определениях данных понятий.

3. Определение должно быть ясным. Это на первый взгляд очевидное правило, но означает оно многое. Прежде всего, требуется, чтобы значения терминов, входящих в определяющее понятие, были известны к моменту введения определения нового понятия.

Например, нельзя определять прямоугольник как параллелограмм с прямым углом, если понятие «параллелограмм» еще не рассмотрено.

К условиям ясности определения относят также рекомендацию включать в видовое отличие лишь столько свойств, сколько необходимо и достаточно для выделения определяемых объектов из объема родового понятия.

Рассмотрим, например, такое определение прямоугольника: «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и противоположные стороны равны».

Нетрудно убедиться в том, что это определение соразмерное и в нем нет порочного круга. Но можно доказать, что свойство «в прямоугольнике противоположные стороны равны» вытекает из свойства «в прямоугольнике все углы прямые». В этом случае считают, что в данном определении прямоугольника второе свойство избыточное.

Таким образом, чтобы определение было ясным, желательно, что-оно не содержало избыточных свойств в определяющей части, т.е. их свойств, которые могут быть выведены из других, включенных это определение. Однако иногда для простоты изложения это пра-о нарушают.

Для обеспечения ясности определения важно также наличие понятия, ового по отношению к определяемому. Пропуск родового понятия ает определение несоразмерным. Неприемлемо, например, такое еделение квадрата: «Квадрат – это когда все стороны равны».

К сказанному следует добавить, что, формулируя определение, на-стремиться в определяющем указывать не просто родовое по от-шению к определяемому понятие, а ближайшее. Это часто позволя-кратить количество свойств, включаемых в видовое отличие.

Например, если для определения квадрата в качестве родового вы-ть понятие «четырехугольник», то тогда надо будет включать в овое отличие два свойства: «иметь все прямые углы» и «иметь все ные стороны». В результате получим определение: «Квадратом ывается четырехугольник, у которого все углы прямые и все сто-ны равны».

Если же в качестве родового выбрать ближайшее для квадрата ро-ое понятие – прямоугольник, то получим более короткое опреде-ние квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого стороны равны».

4. Одно и то же понятие определить через род и видовое отличие, блюдая сформулированные выше правила, **можно по-разному**. Так, дрaт можно определить как:

а) прямоугольник, у которого соседние стороны равны;

б) прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны;

в) ромб, у которого есть прямой угол;

г) параллелограмм, у которого все стороны равны, а углы прямые.

Различные определения одного и того же понятия возможны пото-, что из большого числа свойств, входящих в содержание понятия, в еделение включаются только некоторые. И когда из возможных еделений выбирают одно, исходят из того, какое из них проще и сообразнее для дальнейшего построения теории.

Если же одному и тому же понятию даются, например, два разных еделения, то необходимо доказывать их равносильность, т.е. убеж-ться в том, что из свойств, включенных в одно определение, выте-ют свойства, включенные в другое, и наоборот.

Завершая рассмотрение определений понятий через род и видовое личие, назовем ту последовательность действий, которую мы должны блюдать, если хотим воспроизвести определение знакомого понятия или построить определение нового:

1. Назвать определяемое понятие (термин).

2. Указать ближайшее родовое (по отношению к определяемом понятие.

3. Перечислить свойства, выделяющие определяемые объекты объема родового, т. е. сформулировать видовое отличие.

4. Проверить, выполнены ли правила определения понят (соразмерно ли оно, нет ли порочного круга и т.д.).

При изучении математики в начальных классах определения чер род и видовое отличие используют редко. Связано это как с особенн стями курса, так и с возможностями детей. Но понятий в начальн курсе математики очень много – об этом мы говорили в самом нача параграфа. Как же их определяют?

При изучении математики в начальной школе чаще всего испол зуют так называемые *неявные* определения. В их структуре нельзя выд лить определяемое и определяющее. Среди них различают *контекст альные* и *остенсивные*.

В *контекстуальных* определениях содержание нового понятия ра крывается через отрывок текста, через контекст, через анализ ко кретной ситуации, описывающей смысл вводимого понятия. Посре ством контекста устанавливается связь определяемого понятия с дру гими, известными, и тем самым косвенно раскрывается его содержа ние. Примером контекстуального определения может быть определе ние уравнения и его решения, приведенное в учебнике математики дл II класса (Моро М.И., Бантова М.А. Математика: Учеб. для 2 класс трехлетней начальной школы. – М.: Просвещение, 1987. – С. 196) Здесь после записи $\square + 6 = 15$ и перечня чисел 0, 5, 9, 10 идет текст: «К какому числу надо прибавить 6, чтобы получилось 15? Обозначим неизвестное число латинской буквой x (икс):

$$x + 6 = 15 \text{ – это уравнение.}$$

Решить уравнение – значит найти неизвестное число. В данном уравнении неизвестное число равно 9, так как $9 + 6 = 15$.

Объясни, почему числа 0, 5 и 10 не подходят».

Из приведенного текста следует, что уравнение – это равенство, в котором есть неизвестное число. Оно может быть обозначено буквой x и это число надо найти. Кроме того, из этого текста следует, что решение уравнения – это число, которое при подстановке вместо x обращает уравнение в верное равенство.

Остенсивные определения – это определения путем показа. Они используются для введения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами обозначают. Например, таким способом можно определить в начальной школе понятия равенства и неравенства:

$2 \cdot 7 > 2 \cdot 6$	$9 \cdot 3 = 27$
$78 - 9 < 78$	$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$
$37 + 6 > 37$	$17 - 5 = 8 + 4$
Это неравенства.	Это равенства.

Остенсивные определения, как и контекстуальные, характеризуются ...торой незавершенностью. Действительно, определение посредст... показа не выделяет числовые равенства (неравенства) из других ...ложений, в нем не указываются свойства, характерные для данных ...тий. Они только связывают термины с определяемыми объекта... Поэтому после контекстуального или остенсивного определения ...тия необходимо дальнейшее изучение свойств так определенных ...ктов.

Упражнения

1. Переформулируйте следующие определения, используя слова «...гда и только тогда, когда»:

а) Четным называется число, которое делится на 2.

б) Множество A называется подмножеством множества B, если каж... элемент множества A принадлежит множеству B.

в) Множества A и B называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

г) Треугольником называется фигура, которая состоит их трех то..., не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их ...зков.

2. В следующих определениях выделите определяемое и определяю... понятия, родовое понятие (по отношению к определяемому) и ви... отличие:

а) Параллелограммом называется четырехугольник, у которого ...тивоположные стороны попарно параллельны.

б) Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, на...ается его средней линией.

3. Назовите все свойства, которые содержатся в видовом отличии ...дого из следующих определений:

а) Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла ...лящий угол пополам.

б) Прямые называются параллельными, если они лежат в одной ...скости и не пересекаются.

4. Соразмерны ли следующие определения:

а) Остроугольным треугольником называется треугольник, у кото...го есть острый угол.

б) Прямоугольным треугольником называется треугольник, у ко...рого есть прямой угол.

5. Учащийся определил прямой угол как угол, стороны которо взаимно перпендикулярны, а взаимно перпендикулярные прямые к прямые, образующие при пересечении прямые углы. Какую ошиб допустил учащийся?

6. Есть ли логические ошибки в следующих определениях? Ес можете, исправьте их.

а) Прямоугольником называется четырехугольник, у которого пр тивоположные стороны равны.

б) Биссектрисой угла называется прямая, делящая угол пополам.

в) Сложением называется действие, при котором числа складыв ются.

г) Равносторонним треугольником называется треугольник, у к торого равны все стороны и все углы.

д) Параллелограммом называется многоугольник, у которого пр тивоположные стороны попарно параллельны.

7. Дайте определение: тупоугольного треугольника, равнобед ренного треугольника, трапеции. Какие понятия вы выбрали в кач стве родового в каждом случае? Какие свойства включили в видово отличие?

8. Сформулируйте определение прямоугольника, используя в кач стве родового понятия «четырехугольник». Пользуясь этим определе нием, объясните, почему фигуры F_1, F_3 и F_4, изображенные на рисунк 31, можно назвать прямоугольниками, а фигуру F_2 – нет.

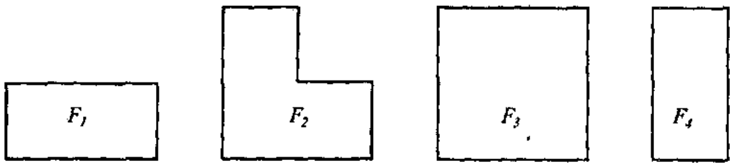


Рис. 31

9. Понятие «противоположные стороны прямоугольника» в на чальном курсе математики можно определить так: «Красным цвето обозначены две противоположные стороны прямоугольника, а сини цветом – две другие противоположные стороны» (все это показано н рисунке).

Какой способ определения понятия использован?

10. Выясните, каким способом определяются в различных учебниках по математике для начальных классов понятия:

а) выражение;
б) сумма;
в) слагаемое;
г) четное число;
д) однозначное число;
е) умножение.

15. Основные выводы § 2

Изучив материал этого параграфа, мы уточнили свои представле... о математических *понятиях*:

- это понятия об идеальных объектах;
- каждое математическое понятие имеет название (термин), объем ...держание;
- математические понятия могут находиться в отношении рода и ви... ...ли их объемы находятся в отношении включения, но не совпадают;
- математические понятия могут быть тождественными, если их ...мы совпадают;
- понятиям дают определения; они могут быть явными и неявны... к неявным относят контекстуальные и остенсивные определения; ...и явных чаще всего используются определения через род и видо... отличие;
- при воспроизведении или конструировании определений через ... и видовое отличие необходимо соблюдать ряд *правил*: определе... должно быть соразмерным, в нем не должно быть порочного кру... ...но должно быть ясным.

... МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Изучая реальные процессы, математика описывает их, используя ... естественный словесный язык, так и свой символический. Описа... строится при помощи предложений. Но чтобы математические ...ния были достоверными, правильно отражали окружающую нас ...льность, эти предложения должны быть истинными.

Но как узнать, истинное или ложное знание заключено в том или ...ом математическом предложении? На этот и другие вопросы, с ним ...нные, мы попытаемся ответить в данном параграфе. А сейчас ...ко заметим, что каждое математическое предложение характери... ...тся содержанием и логической формой (структурой), причем со... ...жание неразрывно связано с формой, и нельзя осмыслить первое, ...понимая второго. В связи с этим изучение математических предло... ...ний в главе «Элементы логики» будет в основном связано с раскры... ...м логической структуры математических предложений.

16. Высказывания и высказывательные формы

Относительно понятий и отношений между ними можно высказы... ...ть различные суждения. Языковой формой суждений являются повествовательные предложения. Например, в начальном курсе математи[ки] можно встретить такие предложения:

1) число 12 – четное;

2) $2 + 5 > 8$;

3) $x + 5 = 8$;

4) В числе 15 один десяток и 5 единиц;

5) От перестановки множителей произведение не изменяется;

6) Некоторые числа делятся на 3.

Видим, что предложения, используемые в математике, могут бы[ть] записаны как на естественном (русском) языке, так и на математиче[-] ском, с использованием символов. Далее, о предложениях 1, 4, 5 и [6] можно сказать, что они несут верную информацию, а предложение 2 [–] ложную. Относительно предложения $x + 5 = 8$ вообще нельзя сказат[ь:] истинное оно или ложное. Взгляд на предложение с позиции – исти[на] или ложь оно нам сообщает – привел к понятию высказывания.

Определение. ***Высказыванием в математике называют предложе[-] ние, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно и[ли] ложно.***

Например, предложения 1, 2, 4, 5 и 6, приведенные выше, есть вы[-] сказывания, причем предложения 1, 4, 5 и 6 – истинные, а 2 – ложное.

Высказывания принято обозначать прописными буквами латин[-] ского алфавита: $A, B, C, ..., Z$. Если высказывание A истинно, то запи[-] сывают: A – «и», если же высказывание A – ложно, то пишут: A – «л».

«Истина» и «ложь» называются *значениями истинности высказыва[-] ния*. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновре[-] менно тем и другим оно не может.

Предложение $x + 5 = 8$ не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать: истинно оно или ложно. Однако при подстановке конкретных значений переменной x оно обращается в высказыва[-] ние: истинное или ложное. Например, если $x = 2$, то $2 + 5 = 8$ – лож[-] ное высказывание, а при $x = 3$ оно обращается в истинное высказы[-] вание $3 + 5 = 8$. Предложение $x + 5 = 8$ называется *высказывательной формой*. Оно порождает множество высказываний одной и той же формы.

По числу переменных, входящих в высказывательную форму, раз[-] личают одноместные, двухместные и т.д. высказывательные формы и обозначают: $A(x)$, $A(x, y)$ и т.д. Например, $x + 5 = 8$ – одноместная высказывательная форма, а предложение «Прямая x параллельна пря[-] мой y» – двухместная.

Следует иметь в виду, что в высказывательной форме переменные могут содержаться неявно. Например, в предложениях: «число чет[-] ное», «две прямые пересекаются» переменных нет, но они подразуме[-] ваются: «Число x – четное», «Две прямые x и y пересекаются».

Задание высказывательной формы, как правило, предполагает и указание того множества, из которого выбираются значения переменной (переменных), входящей в высказывательную форму. Это множество называется *областью определения* высказывательной формы. Например, неравенство $x > 5$ можно рассматривать на множестве натуральных чисел, а можно считать, что значение переменной x выбирается из множества действительных чисел. Тогда в первом случае областью определения неравенства $x > 5$ будет множество натуральных чисел, а во втором – множество действительных чисел.

Сформулируем определение одноместной высказывательной формы (понятие высказывательной формы, содержащей две и более переменных, определяется аналогично).

Определение. ***Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве X, называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X.***

Среди всех возможных значений переменной нас в первую очередь интересуют те, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание. Множество таких значений переменных называется *множеством истинности* высказывательной формы. Например, множеством истинности высказывательной формы $x > 5$, заданной на множестве действительных чисел, будет промежуток $(5; \infty)$. Множество истинности высказывательной формы $x + 5 = 8$, заданной на множестве целых неотрицательных чисел, состоит из одного числа 3.

Условимся обозначать множество истинности высказывательной формы буквой T. Тогда, согласно определению, всегда $T \subset X$.

Предложения (высказывания и высказывательные формы), которые мы рассматривали, были простыми, но можно привести примеры предложений, языковой формой которых будут сложные предложения. Например: «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны». Естественно возникает вопрос: как определить значение истинности таких высказываний и находить множество истинности таких высказывательных форм?

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо познакомиться с некоторыми логическими понятиями.

В логике считают, что из двух данных предложений можно образовать новые предложения, используя для этого союзы «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда» и др. С помощью частицы «не» или словосочетания «неверно, что» можно из данного предложения получить новое.

Слова «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда», а также частицу «не» (слова «неверно, что») называют *логическими связками*. Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют *составными*. Предложения, не явл щиеся составными, называют *элементарными*.

Приведем примеры составных предложений:

1) Число 28 четное и делится на 7.

Это предложение образовано из двух элементарных: «число 28 ч ное», «число 28 делится на 7» с помощью логической связки «и».

2) Число x меньше или равно 8.

Это предложение образовано из двух элементарных: «число меньше 8», «число x равно 8» с помощью логической связки «или».

3) Число 14 не делится на 4.

Это составное высказывание образовано из предложения «число делится на 4» с помощью частицы «не».

Вы, наверное, уже обратили внимание на то, что все три предлож ния, являясь с логической точки зрения составными, по своей грамм тической структуре – простые. Не всегда, но так бывает: прост предложение по своей логической структуре может быть составным.

А как определять значение истинности составного высказыв ния? Например, истинно или ложно высказывание: «число 28 дели ся на 7 и на 9»? Элементарное высказывание «число 28 делится на 7 входящее в составное, истинное – это известно из начального кур математики. Второе элементарное высказывание «число 28 делит на 9» – ложное (и это нам известно). А каким будет в этом случ значение истинности составного высказывания, образованного и этих высказываний с помощью союза «и»? Ответить на этот вопр можно, если знать смысл этого союза. Но так как составные выск зывания образуются с помощью и других логических связок, то во никает необходимость в уточнении их смысла.

Кроме того, уточнение смысла используемых в математике связо обусловлено их неоднозначным толкованием в обыденной речи, ч может привести к неоднозначному ответу при нахождении значени истинности составных высказываний.

Итак, значение истинности элементарного высказывания опреде ляют, исходя из его содержания с опорой на известные знания. Чтоб определить значение истинности составного высказывания, надо знат смысл логических связок, с помощью которых оно образовано из эле ментарных, и уметь выявлять логическую структуру высказывания.

Для выявления логической структуры составного предложени нужно установить:

1) из каких элементарных предложений образовано данное состав ное предложение;

2) с помощью каких логических связок оно образовано.

Выявим, например, логическую структуру предложения «Если уг лы вертикальные, то они равны». Оно состоит из двух элементарных

...жений: предложения A – «углы вертикальные» и предложения B – ... равны». Соединены они в одно составное предложение с помо... логической связки «если ..., то ...». Говорят, что данное составное ...ожение имеет логическую структуру (форму): «если A, то B».

Упражнения

1. Среди следующих предложений, рассматриваемых в начальном ... математики, укажите высказывания и определите их значение ...ности:

а) $(12 - 7) \cdot (6 + 3) = 45$;
б) $(15 + 12) : 3 > 10$;
в) в любом прямоугольнике противоположные стороны равны;
г) $(12 - x) \cdot 4 = 24$;
д) среди четырехугольников есть такие, у которых все стороны ...ы;
е) число z – двузначное;
ж) произведение чисел 4070 и 8 меньше, чем сумма чисел 18396 и ...4;
з) число 6 является корнем уравнения $(12 - x) \cdot 4 = 24$.

2. Какие предложения из упражнения 1 являются высказывательн... формами? Подставьте в них значение переменной так, чтобы ...чилось:

а) истинное высказывание; б) ложное высказывание.

3. Можно ли считать высказывательными формами следующие ...ии:

а) $x^2 - 2x$; в) $7 \cdot 4 + 2 = 30$;
б) $4x + 2y$; г) $7 \cdot 4 + 2 < 30$?

4. Найдите множество истинности высказывательной формы ...– $10 < 0$, заданной на множестве X, если

а) $X = \mathbf{R}$; б) $X = \mathbf{N}$ в) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5. Изобразите на координатной прямой множество истинности каж... из предложений при условии, что все они заданы на множестве $\mathbf{R}$:

а) $x > 2$; в) $2 < x < 6$; д) $2 < x \le 6$;
б) $x \le 3$; г) $2 \le x < 6$; е) $2 \le x \le 6$.

Как можно записать, используя общепринятые символы, множест... истинности каждого из данных предложений?

6. Изобразите на координатной плоскости множества истинно... следующих предложений при условии, что $x, y \in \mathbf{R}$:

а) $x = y$; в) $x = 2$; д) $y = 2x + 3$;
б) $y = 2x$; г) $y = 2$; е) $y = 2x - 3$.

7. В следующих составных предложениях выделите составляющие ...ментарные предложения и логические связки:

а) В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса BD являе медианой и высотой.

б) $x \geq 7$.

в) Если запись числа оканчивается цифрой 0, то число делится на

г) Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, ко да все его углы равны.

д) Неверно, что число 17 делится на 3.

е) Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

8. Какова логическая структура (форма) следующих предложени

а) Средняя линия треугольника параллельна основанию и рав его половине.

б) Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.

в) Треугольник ABC не является равносторонним.

9. Приведите примеры математических предложений, имеющих л гическую структуру вида:

а) A и B; б) A или B; в) если A, то B.

10. Покажите, что выполнение учащимися начальных классов сл дующих заданий связано с понятием высказывательной формы, облас ее определения и множества истинности:

а) Из ряда чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 выпиши те, которые делятся на

б) Назови все числа, меньшие 7 (имеются в виду только целые н отрицательные числа).

17. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний[1]

Выясним смысл, который имеет в математике союз «и». Пусть A B – произвольные высказывания. Образуем из них с помощью сою «и» составное высказывание. Полученное высказывание называю *конъюнкцией* и обозначают $A \wedge B$ (читают: «A и B»).

Определение. ***Конъюнкцией высказываний A и B называется выск зывание $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания истинн и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.***

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблиц называемой *таблицей истинности*.

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

[1] Конъюнкция – от лат. *conjunctio* – «единение».
Дизъюнкция – от лат. *disjunctio* – «разделение».

пользуя данное определение, найдем значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 и на 9», которое, как было установлено ..., состоит из двух элементарных высказываний, соединенных ...м «и», т.е. является конъюнкцией. Так как первое высказывание ...но, а второе ложно, то, согласно определению конъюнкции, высказывание «число 28 делится на 7 и на 9» будет ложным.

...метим, что данное определение конъюнкции не расходится с общепринятым пониманием союза «и». Действительно, если мы знаем, ...ждое из предложений «сегодня идет снег» и «сегодня холодно» ...но, то мы будем считать истинным и предложение «сегодня идет ... и холодно». Если же одно из этих предложений или оба будут ...ыми, то и все предложение «сегодня идет снег и холодно» мы ... считать ложным.

...метим также, что в обыденной речи конъюнкция может выра...ся не только с помощью союза «и», но и другими, например, «а», ..., «однако», «не только..., но и ...». Например: «Число 15 делится ...лько на 3, но и на 5».

...ясним теперь, какой смысл имеет в математике союз «или».

...усть A и B – произвольные высказывания. Образуем из них с по...ью союза «или» составное высказывание. Полученное высказывание называют *дизъюнкцией* и обозначают $A \vee B$ (читают: «A или B»).

Определение. ***Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.***

Таблица истинности дизъюнкции имеет вид:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

...спользуя данное определение, найдем значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 или на 9». Так как это предложение ...ется дизъюнкцией двух высказываний, одно из которых истинно, ...согласно определению, оно истинно.

Из определения дизъюнкции следует, что в математике союз ...» используется как неразделительный, т.е. допускается возмож...ть одновременного выполнения обоих условий. Так, высказывание «15 кратно 3 или 5», согласно определению, считается истин...м, поскольку оба высказывания «15 кратно 3» и «15 кратно 5» ...инны.

Образование составного высказывания с помощью логичес связки называется *логической операцией*. Операция, соответствую союзу «и», называется *конъюнкцией*; операция, соответствующая с зу «или», – *дизъюнкцией*. Заметим, что названия логических опера и их результаты (составные предложения) называются одинаково.

Определения конъюнкции и дизъюнкции можно обобщить на t ставляющих их высказываний.

Конъюнкцией t высказываний *называется предложение вида* $A_1 \wedge A$ $\wedge \ldots \wedge A_t$, *которое истинно тогда и только тогда, когда истинны составляющие его высказывания.*

Дизъюнкцией t высказываний *называется предложение вида* $A_1 \vee A$ $\vee \ldots \vee A_t$, *которое ложно тогда и только тогда, когда ложны все сост ляющие его высказывания.*

Упражнения

1. Известно, что высказывание A истинно. Можно ли, зная ли это, определить значение истинности высказывания:

а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$?

2. Известно, что высказывание A – ложно. Можно ли, зная ли это, определить значение истинности высказывания:

а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$?

3. Определите значение истинности каждого высказывания:

а) число 6 делится на 2 и на 3;

б) число 123 делится на 3 и на 9;

в) при делении 42 на 5 в остатке получится 2 или 5;

г) треугольник ABC (рис. 32) прямоугольный и равносторонний;

д) один из углов треугольника ABC (рис. 32) равен 60°.

е) $3 \leq 7$; ж) $3 \geq 7$.

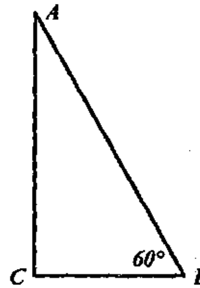


Рис. 32

4. Каждое из следующих предложений замените конъюнкцией либо дизъюнкцией, имеющей тот же смысл:

а) число 7 принадлежит хотя бы одному из множеств A и B;

б) квадратное уравнение имеет не более двух корней;

в) каждое слагаемое суммы $x + y + z$ делится на 3;

г) по крайней мере одно из натуральных чисел n, $n - 1$, $n + 1$ четно.

5. A – множество четных натуральных чисел, B – множество нат ральных чисел, меньших 20. Установите, какие из следующих выск зываний истинны:

а) $5 \in A$ или $5 \in B$;
б) $5 \in A$ и $5 \in B$;
в) $8 \in A$ или $8 \in B$;
г) $8 \in A$ и $8 \in B$;
д) $44 \in A$ или $44 \in B$;
е) $44 \in A$ и $44 \in B$;
ж) $51 \in A$ или $51 \in B$;
з) $51 \in A$ и $51 \in B$.

18. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм

математике рассматривают не только конъюнкцию и дизъюнк- высказываний, но и выполняют соответствующие операции над зывательными формами.

нъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, за- ых на множестве X, обозначают $A(x) \wedge B(x)$. С появлением этого ожения возникает вопрос, как найти его множество истинности, множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$. Дру- словами, при каких значениях x из области определения X вы- ывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказыва- Очевидно, что это возможно при тех и только тех значениях x, которых обращаются в истинное высказывание обе высказыва- ые формы $A(x)$ и $B(x)$. Если обозначить T_A – множество истинно- предложения $A(x)$, T_B – множество истинности предложения $B(x)$, ожество истинности их конъюнкции $T_{A \wedge B}$, то, по всей видимости, $T_A \cap T_B$.

окажем это равенство.

. Пусть a – произвольный элемент множества X и известно, что $T_{A \wedge B}$. По определению множества истинности это означает, что вы- ывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказыва- при $x = a$, т.е. высказывание $A(a) \wedge B(a)$ истинно. Так как данное азывание конъюнкция, то, по определению конъюнкции, получаем, каждое из высказываний $A(a)$ и $B(a)$ также истинно. Это означает, $\in T_A$ и $a \in T_B$. Следовательно, по определению пересечения мно- , $a \in T_A \cap T_B$. Таким образом, мы показали, что $T_{A \wedge B} \subset T_A \cap T_B$.

. Докажем обратное утверждение. Пусть a – произвольный эле- множества X и известно, что $a \in T_A \cap T_B$. По определению пересе- множеств это означает, что $a \in T_A$ и $a \in T_B$, откуда получаем, что и $B(a)$ – истинные высказывания, поэтому конъюнкция высказы- $A(a) \wedge B(a)$ также будет истинна. А это означает, что элемент инадлежит множеству истинности высказывательной формы $\wedge B(x)$, т.е. $a \in T_{A \wedge B}$. Таким образом, мы доказали, что $T_A \cap T_B \subset T_{A \wedge B}$.

з 1 и 2 в силу определения равных множеств вытекает справед- ть равенства $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$, что и требовалось доказать.

аметим, что полученное правило справедливо и для высказыва- ых форм, содержащих более одной переменной.

Приведем пример использования этого правила. Найдем мно ство истинности конъюнкции двух неравенств $2x > 10$ и $4 + x <$ т.е. множество истинности предложения $2x > 10 \wedge 4 + x < 12$. Пу T_1 – множество решений неравенства $2x > 10$, а T_2 – множество ре ний неравенства $4 + x < 12$. Тогда $T_1 = (5, +\infty)$, $T_2 = (-\infty, 8)$. Что найти те значения x, при которых истинны оба неравенства, на найти пересечение их множеств решений: $T_1 \cap T_2 = (5, 8)$.

Видим, что выполнение этого задания свелось к решению систе неравенств. Вообще с точки зрения логики любая система неравен есть конъюнкция неравенств, так же как и система уравнений е конъюнкция уравнений.

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, данных на множестве X, обозначают $A(x) \vee B(x)$. Это предложение бу обращаться в истинное высказывание при тех и только тех значения из области определения X, при которых обращается в истинное выс зывание хотя бы одна из высказывательных форм, т.е. $T_{A \vee B} = T_A \cup T$

Доказательство этого равенства проводится аналогично рассмо ренному выше.

Приведем пример использования этого правила. Решим, наприме уравнение $(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$. Известно, что произведение равно нул тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нул Это означает, что данное уравнение равносильно дизъюнкции: $x - 2 = 0$ $\vee\ x + 5 = 0$ и поэтому множество его решений может быть найде как объединение множеств решений первого и второго уравнени т.е. $\{2\} \cup \{-5\} = \{-5, 2\}$.

Заметим, что дизъюнкцию уравнений (неравенств) называют так *совокупностью*. Решить совокупность уравнений (неравенств) – э значит найти те значения переменных, при которых истинно хотя б одно из уравнений (неравенств), входящих в нее.

Рассматривая конъюнкцию и дизъюнкцию высказывательных фор мы установили их тесную связь с пересечением и объединением множес

С другой стороны, характеристические свойства элементов перес чения и объединения множеств A и B представляют собой соответс венно конъюнкцию и дизъюнкцию характеристических свойств да ных множеств:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, причем ка дое свойство представляет собой высказывательную форму.

Упражнения

1. Покажите, что, выполняя следующие задания, мы находим множе ство истинности конъюнкции и дизъюнкции высказывательных форм

а) Даны числа: 31, 53, 409, 348, 20, 3094, 233, 33, 271, 143, 3, 333, 14, 30 Выпишите все числа, в записи которых:

1) три цифры и есть цифра 3;
2) три цифры или есть цифра 3.

...ряда 25, 12, 17, 5, 15, 36 выпишите числа:
1) двузначные или меньшие 17;
2) двузначные и меньшие 17.

...ряда 72, 312, 522, 483, 1137 выпишите те числа, которые:
1) делятся на 3 и 9;
2) делятся на 3 или на 9.

...полните следующие задания и дайте обоснование предложен...там:

Постройте по два треугольника, принадлежащих множеству A, ...но состоит из:
1) прямоугольных и равнобедренных треугольников;
2) прямоугольных или равнобедренных треугольников.

Постройте два четырехугольника, у которых:
1) диагонали равны и есть прямой угол;
2) диагонали равны или есть прямой угол.

...пишите три числа, которые:
1) делятся на 4 и больше 12;
2) делятся на 4 или больше 12.

...шите следующие системы неравенств и объясните, что пред...ет собой любая система неравенств и множество ее решений с ...зрения логики:

а) $\begin{cases} 3x-5>10; \\ x+8<2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+3<11; \\ 3x-7>8. \end{cases}$

...шите уравнение $(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-7)=0$, $x \in \mathbf{R}$. Использова...ли вами понятие дизъюнкции высказывательных форм?

...место многоточия вставьте «и» либо «или»:
$x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ ... $x \in B$.
$x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ ... $x \in B$.

Пусть A – множество ромбов, B – множество прямоугольников. ...зывается четырехугольник, являющийся одновременно ромбом и ...угольником? Как можно выразить множество K таких четырех...ников через множества A и B?

19. Решение задач на распознавание объектов

...введением понятия конъюнкции и дизъюнкции высказатель...форм появились условия для рассмотрения вопросов, связанных с ...нием определенного вида задач, так называемых задач на распо...ние объектов.

...задачах на распознавание требуется ответить на вопрос: принад...ит тот или иной объект объему данного понятия или не принадле-

жит. Примером такой задачи может быть следующая: «Устано
какие из фигур на рисунке 33 являются квадратами, а какие нет».

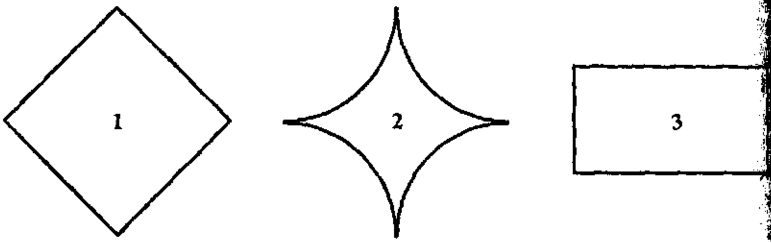


Рис. 33

Решают такие задачи, используя определение соответствую понятия. При этом важно понимать, что если понятие a определ через родовое понятие c и видовое отличие P, то его объем A мо представить в таком виде: $A = \{x \mid x \in C \text{ и } P(x)\}$. Эта запись показыв что характеристическое свойство элементов, принадлежащих объ понятия a, представляет собой *конъюнкцию двух свойств*:

1) принадлежности объекта x объему C родового понятия ($x \in$
2) свойства $P(x)$.

Это означает, что объект x будет принадлежать объему поняти тогда и только тогда, когда он (этот объект) содержится в объ родового понятия и обладает свойством P. Поэтому распознава производится по следующему правилу:

1. Проверяем, принадлежит ли объект x объему родового понят т.е. истинно ли высказывание $x \in C$.
2. Если окажется, что $x \notin C$, то проверку прекращаем и делаем в вод, что объект x не принадлежит объему понятия a, т.е. $x \notin A$.
3. Если $x \in C$, то продолжаем проверку и выясняем, обладает объект x свойством P.
4. Если объект x обладает свойством P, то делаем вывод о е принадлежности объему понятия a, т.е. утверждаем, что $x \in A$.
5. Если окажется, что объект x не обладает свойством P, то дела вывод, что объект x не принадлежит объему понятия a, т.е. $x \notin A$.

Выясним, например, какие из фигур на рисунке 33 являются ква ратами. Будем пользоваться таким определением: «Квадратом назы ется прямоугольник, у которого соседние стороны равны». Из него с дует, что для того, чтобы фигура была квадратом, она должна облада двумя свойствами: «быть прямоугольником» и «иметь равные сосе ние стороны».

Фигура 1 является квадратом, так как это прямоугольник, соседн стороны которого равны.

игура 2 не является квадратом, так как это не прямоугольник.
игура 3 – прямоугольник, но соседние стороны в нем не равны. ательно, ее нельзя назвать квадратом.

ы рассмотрели самый простой случай решения задачи на распо- ание, когда видовое отличие в определении понятия состояло о из одного свойства. Но нередки и такие определения, в кото- идовое отличие состоит из нескольких свойств, связанных между союзами «и», «или».

ли видовое отличие представляет собой конъюнкцию свойств, $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$, то распознавание проводится по следующему илу: проверяют поочередно наличие у объекта каждого из тв $P_1, P_2, \ldots, P_n$; если окажется, что он не обладает каким-либо из свойств, то проверку прекращают и делают вывод о том, что т не обладает свойством P; если же окажется, что все свойства $\ldots, P_n$ присущи данному объекту, то заключают, что объект ает свойством P.

ясним, например, в каком случае луч BD является биссектрисой ABC (рис. 34). Воспользуемся таким определением биссектрисы «Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла ящий этот угол пополам». Из него следует, что для того, чтобы луч биссектрисой угла, он должен обладать двумя свойствами: «выхо- из вершины угла» и «делить этот угол пополам».

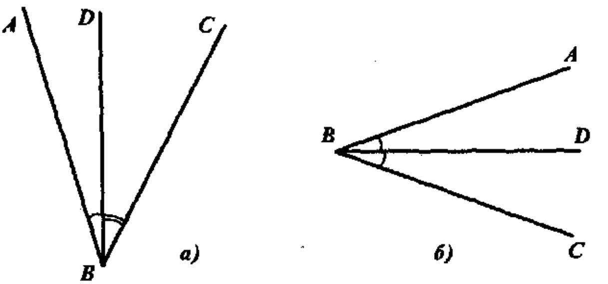


Рис. 34

уч BD на рисунке 34, а не является биссектрисой угла ABC, по- ку он не делит данный угол пополам.

уч BD на рисунке 34, б биссектриса угла ABC, так как он выходит шины этого угла и делит его пополам.

ли видовое отличие представляет собой дизъюнкцию свойств $\vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$, проверка проводится до тех пор, пока не будет лено, что хотя бы одно из свойств присуще данному объекту, вании чего заключают, что он обладает свойством P. Если же тся, что объект не обладает ни одним из свойств $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то дят к выводу, что он не обладает свойством P.

Упражнения

1. Дайте определение квадрата через понятие «прямоугольни Пользуясь данным определением, укажите условия, при которых гура будет являться квадратом.

2. Выявите логическую структуру следующих определений:

а) Параллельные прямые – это две прямые, принадлежащие пл кости и непересекающиеся или совпадающие.

б) Трапецией называется четырехугольник, у которого две сто ны параллельны, а две другие не параллельны.

3. Установите, в каком из случаев (рис. 35) отрезок PQ явля диаметром круга. Каким определением диаметра удобнее воспол ваться при решении данной задачи:

а) Диаметр круга – это хорда, проходящая через его центр.

б) Диаметр круга – это отрезок, соединяющий две точки окружно и проходящий через центр.

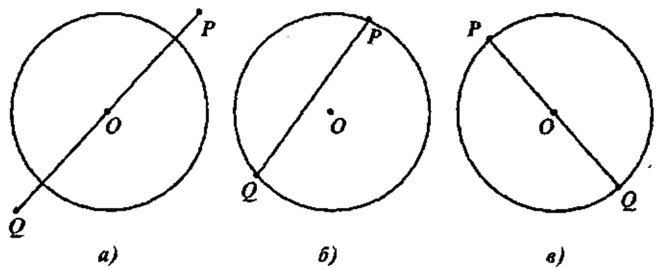


Рис. 35

4. Установите, в каком из рассматриваемых случаев отрезок М будет средней линией треугольника ABC (рис. 36).

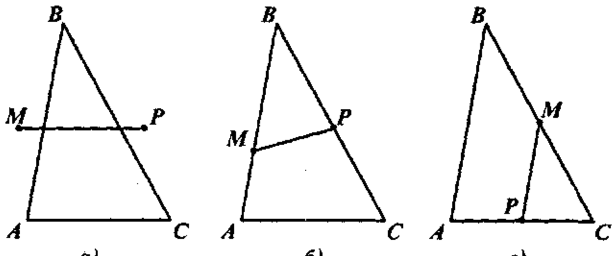


Рис. 36

5. Каким образом вы будете решать следующие задачи, предлаг мые младшим школьникам:

Найди среди записей уравнения и реши их устно:
$ + 7 = 15$, $17 - x = 9$, $17 - x$, $x + 12 = 12$.
Назови уравнения, в которых неизвестное число равно 8:
$x \cdot 2 = 20$; $6 \cdot x = 48$; $x:2 = 5$; $40:x = 5$.

20. Высказывания с кванторами

...раграфе, который мы изучаем, рассматриваются различные ви... ...матических предложений. Мы выяснили, что среди них выделя... ...казывания и высказывательные формы, которые могут быть эле... ...ными и составными. Мы узнали также, как устанавливают зна... ...истинности таких высказываний и как находят множество истин... высказывательных форм. Но мы, конечно, не исчерпали все много... ...формулировок математических предложений и, значит, не зна... ...их правил обращения с ними. Например, почему можно одну и ту ...му о равенстве вертикальных углов формулировать по-разному:
...ртикальные углы равны.
...ли углы вертикальные, то они равны.
...ля того чтобы углы были равны, достаточно, чтобы они были ...альными.
Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, чтобы ...ли равны.

...почему истинность предложения «сумма трех любых последо... ...ных натуральных чисел делится на 3» надо доказывать, а чтобы ...ться в истинности предложения «некоторые натуральные числа ...на 3», достаточно привести конкретный пример?

...бы ответить на эти вопросы, необходимо более глубокое изу... математических предложений и, прежде всего, высказываний с ...рами.

...ормулировках математических предложений часто встречают... «каждый», «все», «некоторые», «хотя бы один». Например, ...о противоположных сторон прямоугольника формулируется ...*любом* прямоугольнике противоположные стороны равны», а о ...натуральных чисел мы говорили, что «*некоторые* натураль... ...ла кратны 5». Выясним, каков смысл этих слов и как они ис... ...ются в математике.

...задана высказывательная форма, то, чтобы превратить ее в вы... ...ние, достаточно вместо каждой из переменных, входящих в фор... ...ставить ее значение. Например, если на множестве N натуральных ...дана высказывательная форма $A(x)$ – «число x кратно 5», то, под... ...нее вместо x число 20, мы получим истинное высказывание «чис... ...ратно 5». Если же в эту высказывательную форму подставить вме... число 17, мы получим ложное высказывание «число 17 кратно 5».

Однако существуют и другие способы получения высказывани[…] высказывательных форм.

Если перед высказывательной формой «число x кратно 5» поста[…] слово «всякое», то получится предложение «всякое число x кратн[…] Относительно этого предложения можно задать вопрос, истинн[…] или ложно. Значит, предложение «всякое число x кратно 5» ($x \in$ […] высказывание, причем ложное.

Выражение «для всякого x» в логике называется *квантором об[…] сти* по переменной x (переменная может быть обозначена и др[…] буквой) и обозначается символом $\forall x$.

Запись $(\forall x)\ A(x)$ означает: «для всякого значения x предлож[…] $A(x)$ – истинное высказывание». Иногда эту запись дополняют обо[…] чением множества X, на котором задана высказывательная форма […] и тогда предложение $(\forall x \in X)\ A(x)$ можно читать:

а) для всякого x из множества X истинно $A(x)$;

б) всякий элемент из множества X обладает свойством A.

Выражение «существует x такое, что ...» в логике называется *к[…] тором существования* по переменной x (переменная может быть […] значена и другой буквой) и обозначается символом $\exists x$.

Запись $(\exists x)\ A(x)$ означает: «существует такое значение x, что A[…] истинное высказывание». Иногда эту запись дополняют обозначен[…] множества X, на котором задана высказывательная форма $A($[…] тогда предложение $(\exists x \in X)\ A(x)$ можно читать:

а) существует такое x из множества X, что истинно $A(x)$;

б) хотя бы один элемент x из множества X обладает свойством […]

Заметим, что в математике наряду со словом «всякий» употре[…] ют слова «каждый», «любой», а вместо слова «существует» испол[…] ют слова «некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Обратим внимание на особенность употребления в математике […] ва «некоторый». В обычной речи, говоря «некоторые», имеют в […] «по меньшей мере один, но не все», в математике же слово «некото[…] означает «по меньшей мере один, но, может быть, и все».

Итак, если задана одноместная высказывательная форма $A(x$[…] чтобы превратить ее в высказывание, достаточно связать кванто[…] общности или существования содержащуюся в ней переменную. Е[…] же высказывательная форма содержит несколько переменных, то […] ревести ее в высказывание можно, если связать квантором каж[…] переменную. Например, если дана высказывательная форма «$x >$[…] то для получения высказывания надо связать квантором обе пере[…] ные: например, $(\forall x)\ (\exists y)\ \ x > y$ или $(\exists x)\ (\exists y)\ \ x > y$.

Однако важно уметь не только переходить от высказыватель[…] формы к высказыванию с помощью кванторов, но и распознавать […] сказывания, содержащие кванторы, и выявлять их логическую стру[…]

ло в том, что кванторы содержатся в формулировках определе-
орем и других математических предложений, хотя часто только
умеваются. Например, в формулировке теоремы «Вертикальные
равны» квантора в явном виде нет, но предполагается, что данное
дение справедливо для всех вертикальных углов. Записывая
утативное свойство сложения в виде $a + b = b + a$, подразумевают,
о справедливо для любых чисел a и b.

дача 1. Выявить логическую структуру следующих высказываний:
Некоторые нечетные числа делятся на 5.
Произведение двух любых последовательных натуральных чисел
о 2.
В прямоугольнике диагонали равны.

шение. а) В этом предложении имеется *квантор существования*,
ражен словом «некоторые», и высказывательная форма «нечет-
исла делятся на 5», заданная на множестве X нечетных чисел.
ачим высказывательную форму символом $A(x)$, тогда логиче-
труктура данного предложения такова: $(\exists x \in X)\ A(x)$. Если пред-
ие $A(x)$ записать, используя символы: «$x \vdots 5$», то исходное выска-
ие можно представить в таком виде: $(\exists x \in X)\ x \vdots 5$, где X – мно-
о нечетных чисел.

В данном предложении имеется *квантор общности*, он представ-
ловом «любой», и высказывательная форма «произведение двух
довательных натуральных чисел кратно 2», заданная на множе-
N натуральных чисел. Обозначим ее $A(x)$. Тогда логическая струк-
данного высказывания такова: $(\forall x \in \mathbf{N})\ A(x)$. И если $A(x)$ пред-
ть в виде $x(x + 1) \vdots 2$, то заданное предложение можно записать
$(\forall x \in \mathbf{N})\ x(x + 1) \vdots 2$.

В заданном высказывании квантора в явном виде нет, но подразу-
тся, что свойством «иметь равные диагонали» обладают *любые* пря-
льники, следовательно, этот квантор общности можно включить
нное высказывание, не изменив его сути: «в любом прямоуголь-
диагонали равны». Тогда его структура такова: $(\forall x \in X)\ A(x)$,
– множество прямоугольников, $A(x)$ – высказывательная форма
моугольнике диагонали равны».

сним теперь, как устанавливают значения истинности выска-
ий, содержащих кванторы.

смотрим сначала высказывание с квантором общности, т.е. вы-
ание вида $(\forall x \in X)\ A(x)$. В нем утверждается, что для любого x
ества X истинно $A(x)$, поэтому, чтобы убедиться в истинности
высказывания, надо показать, что множество истинности T_A
ывательной формы $A(x)$ совпадает с множеством X $(T_A = X)$.
убедиться в ложности высказывания $(\forall x \in X)\ A(x)$, достаточно
ть, что $T_A \neq X$, т.е. показать, что существует такое значение $x \in X$,

при котором высказывательная форма обращается в ложное выска вание.

Задача 2. Установить, истинны или ложны следующие выска вания:

а) Для каждого x из множества $\{0, 1, 4\}$ значение выражен $(4-x):(2x+1)$ есть число целое.

б) Произведение двух любых последовательных натуральных чи кратно 2.

в) Всякое натуральное число делится на 5.

Решение. а) Если мы хотим убедиться в истинности данного выс зывания, то надо показать, что при подстановке каждого числа из мно ства $\{0, 1, 4\}$ в выражение $(4-x):(2x+1)$ получается целое число. Имее

если $x = 0$, то $(4-0):(2\cdot 0+1) = 4:1 = 4$;

если $x = 1$, то $(4-1):(2\cdot 1+1) = 3:3 = 1$;

если $x = 4$, то $(4-4):(2\cdot 4+1) = 0:9 = 0$.

Действительно, значение выражения $(4-x):(2x+1)$ при всех з данных значениях x есть число целое. Установили мы это путем пе бора всех возможных случаев.

б) Воспользуемся результатом задачи 1 (случай б) и представим да ное высказывание в таком виде: $(\forall x \in \mathbf{N})\ x(x+1) \vdots 2$.

Мы не знаем, истинно оно или ложно, поэтому рассмотрим н сколько случаев. Если $x = 1$, то произведение $1\cdot 2$ кратно 2, так как н 2 делится второй множитель. Если $x = 2$, то произведение $2\cdot 3$ то кратно 2, так как на 2 делится первый множитель. Если $x = 7$, то и этом случае $7\cdot 8$ кратно 2, поскольку второй множитель 8 делится на Исходя из рассмотренных случаев, можно предположить, что данн высказывание истинное, но убедиться в этом путем перебора (как первом предложении) нельзя, поскольку невозможно перебрать в натуральные значения x. Будем рассуждать. Из двух последовател ных натуральных чисел одно обязательно четное. Но если в произв дении один из множителей делится на 2, то, как известно, и все прои ведение делится на 2. Следовательно, при любом натуральном x пр изведение $x(x+1)$ делится на 2.

в) Высказывание «всякое натуральное число делится на 5» – ложно Убедиться в этом можно, назвав натуральное число, которое не д лится на 5, например число 12.

В математике говорят, что в ложности данного высказывания м убедились, приведя *контрпример*.

Вообще *истинность высказывания с квантором общности устана ливается путем доказательства. Показать ложность таких высказы ваний можно, приведя контрпример.*

Заметим, что доказательство истинности высказываний, содерж щих квантор общности, можно выполнять различными методами. Р

…дачу 2, мы использовали перебор всех возможных случаев и рас…ния. Эти и другие методы доказательства будут рассматриваться … позже, в § 4.

…ясним, как устанавливается значение истинности высказываний, …жащих квантор существования. В высказывании $(\exists x \in X)\ A(x)$ …ждается, что в множестве X есть такой элемент x, которой обла… свойством A. Поэтому оно будет истинно, если множество ис…ости высказывательной формы $A(x)$ не пусто ($T_A \neq \varnothing$). Для того …ы показать это, достаточно найти такое значение переменной x, … котором высказывательная форма $A(x)$ обращается в истинное …зывание, т.е. привести пример.

…ысказывание $(\exists x \in X)\ A(x)$ ложно в том случае, когда $T_A = \varnothing$. …иться в этом можно лишь путем доказательства.

…дача 3. Установить, истинны или ложны следующие высказы…:

…) Среди треугольников есть прямоугольные.

…) Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторон….

…шение. а) Данное высказывание содержит квантор существова…, который выражен словом «есть». Чтобы убедиться в истинности …го высказывания, достаточно привести пример. В данном случае …оугольный треугольник можно начертить.

…) В этом случае квантор существования выражен словом «некото…». Если считать данное высказывание истинным, то надо привести …мер, т.е. попытаться начертить треугольник, который был бы …временно прямоугольным и равносторонним. Из того, что это не …тся начертить, еще не следует вывод о ложности данного выска…ния. В этом надо убедиться путем доказательства.

…йствительно, если треугольник прямоугольный, то в нем один … равен 90°, а в равностороннем все углы 60°. Следовательно, ни … прямоугольный треугольник не может быть равносторонним. …ому данное высказывание ложное.

…обще *истинность высказывания с квантором существования уста…ется при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в лож… такого высказывания, необходимо провести доказательство.*

…метим, что убедиться в ложности высказывания – это значит *оп…нуть* его.

Упражнения

… В высказывании «всякий прямоугольник является четырехуголь…» выделите квантор и высказывательную форму. Переформули… данное высказывание, заменив слово «всякий» его синонимом.

2. В высказывании «хотя бы одно из чисел первого десятка сост... ное» выделите квантор и высказывательную форму. Переформу... руйте данное высказывание, заменив квантор «хотя бы одно» его ... нонимом.

3. Прочтите следующие записи, заменив символические обозна... ния кванторов общности и существования их словесными выра... ниями:

а) $(\forall x \in \mathbf{R})\ x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;

б) $(\exists y \in \mathbf{R})\ 5 + y = 5$;

в) $(\forall y \in \mathbf{R})\ y + 3 > 0$;

г) $(\exists x \in \mathbf{N})\ x + 3 < 0$.

4. Запишите следующие предложения, используя символическ... обозначения кванторов:

а) Существует такое натуральное число x, что $x + 5 = 9$.

б) Каково бы ни было число x, $x + 0 = x$.

в) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет хотя бы один корень.

5. Запишите, используя символы, следующие высказывания и о... ределите их значения истинности:

а) Всякое число, умноженное на нуль, есть нуль.

б) Произведение любого числа и единицы равно этому числу.

в) При делении нуля на любое другое число получается нуль.

г) Квадрат любого числа неотрицателен.

6. Укажите способы установления значения истинности выска... ваний, содержащих кванторы, заполнив таблицу:

Структура высказывания / Значение истинности	$(\forall x \in X)\ A(x)$	$(\exists x \in X)\ A(x)$
и		
л		

7. Установите, какие из нижеприведенных высказываний истинн... а какие ложны:

а) Во всяком четырехугольнике диагонали равны.

б) Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найт...

в) При делении на 5 некоторых натуральных чисел в остатке пол... чается 7.

г) Любое однозначное число является решением неравенства $x + 2 >$ ...

8. Докажите или опровергните следующие высказывания:

а) Существуют уравнения, множество решений которых пусто.

...кое целое число является натуральным.
...умма любых двух четных чисел есть число четное.
...отя бы одно натуральное число является решением уравнения
...
...анные ниже высказывания взяты из учебников математики для
...ых классов. Выясните, какие из них содержат (в явном или не-
...виде) квантор и как следует устанавливать их значение истинно-
...зать только способ и обосновать его выбор):
...т перестановки слагаемых сумма не изменяется.
...ва соседних слагаемых можно заменять их суммой.
...Площадь прямоугольника равна произведению его длины на
...у.
...уществуют четные числа.
...екоторые числа делятся на 4.
...реди многоугольников есть треугольники.

21. Отрицание высказываний и высказывательных форм

...ть предложение A – высказывание. Если перед сказуемым данно-
...дложения поставить частицу «не» либо перед всем предложением
...ить слова «неверно, что», то получится новое предложение, кото-
...ывается *отрицанием* данного и обозначается $\overline{A}$ (читают: «не A»
...еверно, что A»).

...пределение. ***Отрицанием высказывания A называется высказыва-***
...е $\overline{A}$, которое ложно, когда высказывание A истинно, и истинно,
...гда высказывание A – ложно.

...блица истинности отрицания имеет вид:

A	$\overline{A}$
и	л
л	и

...данного определения следует, что предложение и его отрицание
...ут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.
...строим, например, отрицание ложного высказывания «число 28
...я на 9»:
...Число 28 не делится на 9.
...Неверно, что число 28 делится на 9.
...казывания, которое мы получили, истинные. Значит, отрица-
...жного предложения построено правильно.
...ссмотрим теперь правила построения отрицания конъюнкции и
...нкции высказываний. Если перед всем составным высказывани-

ем поставим слова «неверно, что», то, безусловно, получим его [illegible] цание. А как быть с частицей «не»? Можно ли ее поставить пере[illegible] зуемым составного предложения и получить его отрицание? Воз[illegible] например, высказывание «число 28 делится на 9 и на 4». Оно ло[illegible] так как представляет собой конъюнкцию двух высказываний, од[illegible] которых ложно. Поставив перед сказуемым этого высказывания ча[illegible] «не», получим конъюнкцию «число 28 не делится на 9 и на 4», в ко[illegible] одно из предложений «число 28 не делится на 4» – ложное и, зн[illegible] ложно построенное с помощью частицы «не» предложение. По[illegible] оно не является отрицанием высказывания «число 28 делится на 9 и н[illegible]

Можно доказать, что отрицанием конъюнкции двух выска[illegible] ний A и B является дизъюнкция их отрицаний. Для этого надо[illegible] диться в том, что значения истинности высказываний вида $\overline{A \wedge}$[illegible] $\overline{A} \vee \overline{B}$ совпадают при любых значениях истинности высказываний A[illegible] Сделать это можно при помощи таблицы истинности:

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee$[illegible]
и	и	и	л	л	л	л
и	л	л	и	л	и	и
л	и	л	и	и	л	и
л	л	л	и	и	и	и

Про высказывания вида $\overline{A \wedge B}$ и $\overline{A} \vee \overline{B}$ говорят, что они ра[illegible] **сильны**, и пишут $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

Аналогично можно доказать, что имеет место равносильн[illegible] $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Эти равносильности носят название законов де Моргана.

Из них вытекает следующее правило построения отрицания ко[illegible] юнкции и дизъюнкции: *чтобы построить отрицание конъюнк[illegible] (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющи[illegible] высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»).*

Задача 1. Построить отрицание высказывания «число 28 дел[illegible] на 9 или на 6».

Решение (два способа).

1) Поставим перед данным высказыванием слова «неверно, ч[illegible] Получим высказывание «неверно, что число 28 делится на 9 или на[illegible] которое является отрицанием исходного.

2) Воспользуемся законом де Моргана: заменим высказывания «чи[illegible] 28 делится на 9» и «число 28 делится на 6» их отрицаниями, а союз «и[illegible] поменяем на союз «и». Получим высказывание «число 28 не делитс[illegible] 9 и не делится на 6», которое также является отрицанием исходного.

мы выяснили, как строить отрицание конъюнкции и дизъ- высказываний. А как быть с высказываниями, которые со- ванторы? Достаточно ли для отрицания таких предложений ть перед сказуемым частицу «не»? Например, будет ли отри- высказывания «всякий прямоугольный треугольник является дренным» предложение «всякий прямоугольный треугольник тся равнобедренным»? Видим, что не будет, так как оба выска- ложны. Таким образом, строить отрицания высказываний с ми при помощи частицы «не» перед сказуемым нельзя.

ется другой путь – перед всем предложением ставим слова о, что». Тогда отрицанием высказывания «всякий прямоуголь- угольник является равнобедренным» будет предложение «не- что всякий прямоугольный треугольник является равнобед- », но это предложение имеет тот же смысл, что и предложение рые прямоугольные треугольники не являются равнобедрен-

цанием высказывания «некоторые прямоугольные треуголь- ляются равнобедренными» является высказывание «неверно, оторые прямоугольные треугольники являются равнобедрен- , которое имеет тот же смысл, что и предложение «все прямо- ые треугольники не являются равнобедренными».

бще если дано предложение $(\forall x)\ A(x)$, то его отрицанием будут жения $\overline{(\forall x)\, A(x)}$ и $(\exists x)\,\overline{A(x)}$, имеющие один и тот же смысл (и то же значение истинности).

и дано предложение $(\exists x)\ A(x)$, то его отрицанием будут предло- $\overline{(\exists x)\, A(x)}$ и $(\forall x)\,\overline{A(x)}$, также имеющие один и тот же смысл (и то же значение истинности).

лучаем две равносильности:

$$\overline{(\forall x)\, A(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\,\overline{A(x)};$$

$$\overline{(\exists x)\, A(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\,\overline{A(x)}.$$

них вытекает правило: *для того чтобы построить отрицание вания, начинающегося с квантора общности (существования), очно заменить его квантором существования (общности) и ить отрицание предложения, стоящего после квантора.*

ача 2. Построить отрицание высказывания «некоторые одно- ые числа делятся на 10».

шение. Сделать это можно двумя способами.

Поставим перед высказыванием слова «неверно, что». Получим ывание «неверно, что некоторые однозначные числа делятся на оторое является отрицанием данного.

2) Заменим квантор существования (он выражен словом «некоторые» на квантор общности «все» и построим отрицание предложения, стоящего после слова «некоторые», поставив частицу «не» перед сказуемым. Получим высказывание «все однозначные числа не делятся на 10».

Последнее, о чем пойдет речь, – это отрицание высказывательных форм.

Пусть на множестве X задана высказывательная форма $A(x)$. Ее отрицание обозначим $\overline{A(x)}$ (читают: «не $A(x)$» или «неверно, что $A(x)$»). Предложение $\overline{A(x)}$ будет обращаться в истинное высказывание лишь при тех значениях x из множества X, при которых $A(x)$ – ложно. Таким образом, $T_{\overline{A}} = T'_A$, где $T_{\overline{A}}$ – множество истинности предложения $\overline{A(x)}$, а T'_A – дополнение множества T_A до множества X.

Доказательство этого равенства мы опускаем.

Пусть, например, на множестве натуральных чисел задана высказывательная форма $A(x)$ – «число x кратно 5». Тогда ее отрицанием будет предложение «число x не кратно 5» (или «неверно, что число x кратно 5»), истинное при всех значениях x, которые не кратны 5.

Упражнения

1. Сформулируйте отрицания следующих предложений:

а) Число 123 делится на 9.

б) При делении числа 32 на 5 в остатке получится 7.

в) $3 + 2 < 4$.

г) Треугольник ABC – прямоугольный.

2. Сформулируйте, используя законы де Моргана, отрицания следующих утверждений:

а) Четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник или параллелограмм.

б) Число 12 – четное и делится на 3.

3. Какие из нижеприведенных предложений являются отрицанием высказывания «Все натуральные числа кратны 5»; свой выбор обоснуйте:

а) Все натуральные числа не кратны 5.

б) Существуют натуральные числа, не кратные 5.

в) Существуют натуральные числа, кратные 5.

г) Неверно, что все натуральные числа кратны 5.

д) Не все натуральные числа кратны 5.

4. Постройте двумя способами отрицание высказывания:

а) Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику.

б) Некоторые простые числа являются четными.

5. Определите, являются данные предложения отрицаниями друг друга, или нет; объясните – почему:

а) Число 12 – четное. Число 12 – нечетное.

б) Все простые числа нечетны. Все простые числа четны.

в) Все простые числа нечетны. Существуют четные простые числа.

г) Некоторые углы острые. Некоторые углы тупые.

6. Переформулируйте данные предложения так, чтобы они не содержали слов «неверно, что», но имели тот же смысл:

а) Неверно, что число 9 – четное или простое.

б) Неверно, что треугольник ABC – равнобедренный и прямоугольный.

в) Неверно, что каждый четырехугольник является прямоугольником.

г) Неверно, что хотя бы в одном прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны.

7. Сформулируйте предложения, которые начинаются словами «неверно, что» и имеют тот же смысл, что и данные:

а) Прямые AB и CD не параллельны и не пересекаются.

б) Стороны четырехугольника $ABCD$ не параллельны *или* не равны.

в) Существуют уравнения, не имеющие действительных корней.

г) Все прямоугольники не имеют равных смежных сторон.

8. Постройте отрицания следующих высказываний и выясните, что истинно – данное высказывание или его отрицание:

а) Произведение чисел 4070 и 8 меньше, чем сумма чисел 18396 и 14174.

б) Частное чисел 25842 и 6 меньше разности чисел 14150 и 9833.

в) Среди различных прямоугольников есть такие, площади которых равны.

г) Среди чисел есть такие, которые делятся на 5 и на 7.

д) Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти.

22. Отношения следования и равносильности между предложениями

Рассмотрим две высказывательные формы: «число x кратно 4» и «число x кратно 2», заданные на множестве N натуральных чисел.

Как связаны между собой эти два предложения?

Можно сказать так: из того, что число x кратно 4, следует, что x кратно 2. Это мы можем утверждать, потому что знаем – при всех значениях x, при которых истинно предложение «число x кратно 4», будет истинно и предложение «число x кратно 2». В этом случае говорят, что данные предложения находятся в отношении логического следования.

Определение. ***Высказывательная форма $B(x)$ следует из высказывательной формы $A(x)$, если $B(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых $A(x)$ истинна.***

Если A и B – высказывания, тогда говорят, что из A следует B, если всякий раз, когда A истинно, истинно и B.

Для обозначения отношения логического следования используется знак $\Rightarrow$. Соединяя две высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ таким знаком, мы получаем высказывание $A(x) \Rightarrow B(x)$, прочитать которое можно по разному:

1) Из $A(x)$ следует $B(x)$.

2) Всякое $A(x)$ есть $B(x)$.

3) Если $A(x)$, то $B(x)$.

4) $B(x)$ есть следствие $A(x)$.

5) $A(x)$ есть достаточное условие для $B(x)$.

6) $B(x)$ есть необходимое условие для $A(x)$.

Например, утверждение о том, что из предложения «число x кратно 4», следует предложение «число x кратно 2», можно сформулировать еще так:

– Всякое число, которое кратно 4, кратно и 2.

– Если число кратно 4, то оно кратно и 2.

– Кратность числа 2 есть следствие кратности его 4.

– Кратность числа 4 есть достаточное условие для его кратности 2.

– Кратность числа 2 есть необходимое условие для его кратности 4.

Последние два предложения часто формулируют в следующей форме:

– Для того чтобы число было кратно 2, достаточно, чтобы оно было кратно 4.

– Для того чтобы число было кратно 4, необходимо, чтобы оно было кратно 2.

Так как одно и то же утверждение «из $A(x)$ следует $B(x)$» можно прочитать по-разному, надо уметь переходить от одной его формулировки к другой, не меняя смысла.

Задача 1. Данные предложения переформулируйте, используя различные способы прочтения утверждения $A(x) \Rightarrow B(x)$:

а) Всякий квадрат является прямоугольником.

б) Для того чтобы число делилось на 5, достаточно, чтобы его запись оканчивалась нулем.

Решение. а) В данном высказывании можно выделить два предложения: $A(x)$ – «четырехугольник – квадрат» и $B(x)$ – «четырехугольник – прямоугольник». Они находятся в отношении следования:

$A(x) \Rightarrow B(x)$, которое выражено предложением со словом «всякий». Данное высказывание можно переформулировать:

1) Из того, что четырехугольник – квадрат, следует, что он прямоугольник.
2) Если четырехугольник – квадрат, то он прямоугольник.
3) Четырехугольник является прямоугольником – это следствие того, что четырехугольник – квадрат.
4) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы он был квадратом.
5) Для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы он был прямоугольником.

б) В данном высказывании так же, как и в а), можно выделить два предложения: $P(x)$ – «число делится на 5» и $K(x)$ – «запись числа оканчивается нулем», причем второе является достаточным условием для первого. Поэтому имеет место следование: $K(x) \Rightarrow P(x)$, которое можно сформулировать так:

1) Из того, что запись числа оканчивается нулем, следует, что число делится на 5.
2) Всякое число, запись которого оканчивается нулем, делится на 5.
3) Если запись числа оканчивается нулем, то оно делится на 5.
4) Делимость числа на 5 – это следствие того, что его запись оканчивается нулем.
5) Для того чтобы запись числа оканчивалась нулем, необходимо, чтобы оно делилось на 5.

Как и любое высказывание, предложение $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть истинным либо ложным. Но так как оно может быть сформулировано в виде «всякое $A(x)$ есть $B(x)$», то его истинность устанавливается путем доказательства, а с помощью контрпримера – что оно ложно.

Задача 2. Определите значение истинности высказывания:

а) Если запись числа оканчивается цифрой 6, то число делится на 2.

б) Для того чтобы число делилось на 5, необходимо, чтобы его запись оканчивалась нулем.

Решение. а) По всей видимости это высказывание истинное. Действительно, всякое число, запись которого оканчивается цифрой 6 – четное, а всякое четное число делится на 2. Следовательно, число, запись которого оканчивается цифрой 6, делится на 2.

Мы убедились в истинности данного высказывания путем доказательства.

б) Если сформулировать данное высказывание в виде «из того, что число делится на 5, следует, что его запись оканчивается нулем», то сразу можно сказать, что оно ложное. И убедиться в этом можно при помощи контрпримера. Так, число 35 делится на 5, но его запись не оканчивается нулем.

С теоретико-множественной точки зрения высказывание $A(x) \Rightarrow B(x)$ означает, что если T_A – множество истинности высказывательной формы $A(x)$, а T_B – множество истинности высказывательной формы $B(x)$, то $T_A \subset T_B$. Справедливо и обратное утверждение.

Этим фактом удобно пользоваться при установлении значения истинности высказывания $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Задача 3. Доказать, что из уравнения $3x(x-2)=0$ следует уравнение $3x(x-2)(x+3)=0$, если уравнения заданы на множестве Z целых чисел.

Решение. Множество решений первого уравнения – $T_1 = \{0, 2\}$, множество решений второго – $T_2 = \{0, 2, -3\}$. Видим, что $T_1 \subset T_2$. Следовательно, из уравнения $3x(x-2)=0$ следует уравнение $3x(x-2)(x+3)=0$.

Рассмотрим две высказывательные формы $A(x)$ – «число делится на 3» и $B(x)$ – «сумма цифр в записи числа делится на 3». Из школьного курса математики известно, что если число делится на 3, то сумма цифр в записи этого числа разделится на 3, и наоборот. В этом случае говорят, что предложения $A(x)$ и $B(x)$ *равносильны*.

Определение. ***Предложения $A(x)$ и $B(x)$ равносильны, если из предложения $A(x)$ следует предложение $B(x)$, а из предложения $B(x)$ следует предложение $A(x)$.***

Для обозначения отношения равносильности используется знак $\Leftrightarrow$. Соединяя две высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ таким знаком; мы получаем высказывание $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, прочитать которое можно по-разному:

1) $A(x)$ равносильно $B(x)$.

2) $A(x)$ тогда и только тогда, когда $B(x)$.

3) $A(x)$ – необходимое и достаточное условие для $B(x)$.

4) $B(x)$ – необходимое и достаточное условие для $A(x)$.

Например, утверждение о том, что предложение «число делится на 3» и «сумма цифр в записи числа делится на 3» равносильны, можно сформулировать еще так:

– Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр в его записи делится на 3.

– Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр в его записи делилась на 3.

С теоретико-множественной точки зрения высказывание $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ означает, что если T_A – множество истинности высказывательной формы $A(x)$, а T_B – множество истинности высказывательной формы $B(x)$, то $T_A = T_B$.

Задача 4. Доказать, что уравнения $3x(x-2)=0$ и $3x(x-2)(x+3)=0$ равносильны на множестве целых неотрицательных чисел.

Решение. Множество решений первого уравнения – $T_1 = \{0, 2\}$, множество решений второго, заданного на множестве целых неотрицательных чисел, $T_2 = \{0, 2\}$. Число –3 (см. задачу 3) множеству T_2 не принадлежит, потому что оно не является целым неотрицательным. Имеем, что $T_1 = T_2$, следовательно, данные уравнения на множестве целых неотрицательных чисел равносильны.

Заметим, что мы рассматриваем понятия логического следования и равносильности для одноместных высказывательных форм. Для предложений, содержащих две и более переменных, эти понятия определяются аналогично.

Отметим также, что знак $\Leftrightarrow$ мы использовали раньше, в частности, рассматривая логическую структуру явных определений понятий. Мы установили, что ее можно представить в виде $a \underset{опр.}{\Leftrightarrow} b$. Употребление знака $\Leftrightarrow$ здесь не случайно. Дело в том, что определение, как говорят в математике, порождает два равносильных предложения, которые затем используются наряду с другими в доказательствах. Например, определение «квадратом называется прямоугольник, имеющий равные соседние стороны» порождает равносильные предложения: «если прямоугольник является квадратом, то в нем соседние стороны равны» и «если в прямоугольнике соседние стороны равны, то прямоугольник является квадратом». Использовать в доказательствах можно любое из этих двух.

Знак $\Leftrightarrow$ мы также использовали в записи правил построения отрицания высказываний. Например, $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$. В этом случае речь идет о равносильности высказываний определенной формы. При этом считают, что предложения равносильны, если они одновременно истинны, либо одновременно ложны. Другими словами, если их значения истинности совпадают при одинаковых наборах значений высказываний A и B.

Упражнения

1. Следует ли предложение $B(x)$ – «Число x четное» из предложения $A(x)$, если:

а) $A(x)$ – «Число x делится на 6»;
б) $A(x)$ – «Число x делится на 7»;
в) $A(x)$ – «Число x делится на 2».

Предложения $A(x)$ и $B(x)$ заданы на множестве натуральных чисел.

2. Установите, находятся ли данные пары предложений в отношении следования:

а) Треугольник ABC – равносторонний.
Треугольник ABC – равнобедренный.
б) Четырехугольник $ABCD$ – квадрат.
Четырехугольник $ABCD$ – ромб.
в) $x \vdots 3$ и $x \vdots 6$.
г) $a > 2$ и $a > 5$.

3. Полученные в упражнении 2 утверждения о следовании сформулируйте шестью различными способами.

4. Сформулируйте следующие высказывания в виде «если ..., то ...»:

а) A – достаточное условие для B;

б) A – необходимое условие для B;

в) B – достаточное условие для A;

г) B – необходимое условие для A.

5. Среди следующих предложений укажите истинные; ответы обоснуйте:

а) Число a – натуральное, следовательно, и $15a$ – натуральное число.

б) Число $15a$ – натуральное, следовательно, a – натуральное число.

в) Если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник.

г) Если в четырехугольнике диагонали равны, то этот четырехугольник – прямоугольник.

д) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы все его углы были равны.

е) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы все его углы были равны.

6. Для ложных высказываний из упражнения 5 постройте различными способами отрицание.

7. Равносильны ли следующие предложения $A(x)$ и $B(x)$, если:

а) $A(x)$ – «число делится на 9»,
$B(x)$ – «сумма цифр в записи числа делится на 9».

б) $A(x)$ – «каждое слагаемое суммы делится на 4»,
$B(x)$ – «сумма делится на 4».

8. Докажите, что предложение «в прямоугольнике F диагонали взаимно перпендикулярны» и «прямоугольник F – квадрат» равносильны. Утверждения о равносильности сформулируйте тремя различными способами.

9. Вставьте слова «и» либо «или» так, чтобы следующие высказывания были истинными:

а) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ldots b = 0$;

б) $a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \ldots b \neq 0$;

в) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ldots x \in B$;

г) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \ldots x \notin B$.

10. Какие из следующих предложений можно переформулировать, употребив слова «необходимо» либо «достаточно»:

а) Если в четырехугольнике все углы равны, то четырехугольник является прямоугольником.

б) Сумма двух четных чисел есть число четное.

в) Всякое число, которое делится на 3 и на 5, делится на 15.

11. Какие из нижеприведенных высказываний истинные:

а) Для того чтобы число делилось на 3, достаточно, чтобы оно делилось на 6.

б) Для того чтобы число делилось на 3, необходимо, чтобы оно делилось на 6.

в) Для того чтобы число делилось на 100, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 10.

г) Для того чтобы число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 5.

12. Вместо многоточия вставьте слова «необходимо» либо «достаточно», либо «необходимо и достаточно», чтобы данные предложения были истинными:

а) Для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 2, ... , чтобы каждое слагаемое делилось на 2.

б) Для того чтобы каждое слагаемое делилось на 2, ... , чтобы сумма этих слагаемых делилась на 2.

в) Для того чтобы число делилось на 45, ... , чтобы оно делилось на 5 и на 9.

г) Для того чтобы угол был острым, ... , чтобы он был меньше прямого.

13. В начальном курсе математики синонимом слова «необходимо» является слово «нужно» («надо»), и синонимом слова «достаточно» – слово «можно». Зная это, вставьте вместо многоточия слова: «нужно» либо «можно», так чтобы высказывания были истинными; ответы обоснуйте:

а) Для того чтобы умножить сумму натуральных чисел на 5, ... каждое слагаемое умножить на 5.

б) Для того чтобы найти неизвестное слагаемое, ... из суммы вычесть другое слагаемое.

в) Для того чтобы вычесть число из суммы, ... вычесть его из одного из слагаемых.

г) Для того чтобы число было четным, ... чтобы оно делилось на 2.

23. Структура теоремы. Виды теорем

Понятие логического следования позволяет уточнить ряд вопросов, связанных с предложениями, которые в математике называют *теоремами.*

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

С логической точки зрения теорема представляет собой высказывание вида $A \Rightarrow B$, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными. Предложение A называют *условием* теоремы, а предложение B – ее *заключением.*

Например, условием теоремы «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» является предложение «четырехугольник – прямоугольник», а заключением – предложение «в таком четырехугольнике диагонали равны».

В рассмотренном примере теорема была сформулирована с помощью слов «если ..., то ...». Но, как нам известно, утверждение $A \Rightarrow B$ можно сформулировать и по-другому. Например, рассмотренную теорему можно сформулировать так: «во всяком прямоугольнике диагонали равны» или «для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны». Есть и другие способы, но удобнее теорему формулировать в виде «если ..., то ...», поскольку сразу видно ее условие (что дано) и заключение (что надо доказать).

В математике кроме теорем используются предложения, называемые *правилами* и *формулами*. Выясним, чем они отличаются от теоремы.

Рассмотрим, например, такую теорему из школьного курса алгебры: «если a – любое число и n, k – натуральные числа, то справедливо равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$». Условие данной теоремы – это предложение «a – любое число» и «n, k – натуральные числа». Заключение – это равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, справедливость которого надо доказать, исходя из данного условия.

Для того чтобы этой теоремой было удобнее пользоваться на практике, при выполнении различных преобразований ее формулируют в виде правила: «при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются» или записывают только формулу $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, опуская все условия, указанные в теореме. Такие упрощения позволяют быстрее запоминать правила и формулы. Эту особенность математического языка широко используют в начальном курсе обучения математике, но при этом формулируют различные утверждения сразу в виде правил или формул, опуская точные формулировки теорем (и, следовательно, опуская, по сути дела, условие теоремы). Но учитель, конечно, должен уметь разворачивать изучаемые в начальной школе правила (формулы) и формулировать соответствующие им теоремы. Иначе возможны ошибки как содержательного, так и логического характера. Рассмотрим, например, изучаемое в начальном курсе математики правило деления суммы на число: «для того чтобы разделить сумму на число, можно разделить на это число каждое из слагаемых и полученные результаты сложить». К этой словесной формулировке правила иногда добавляют формулу: $(a + b):c = a:c + b:c$.

Так как этот материал изучают в начальной школе, то надо отчетливо понимать, что числа a, b и c могут быть только целыми неотрицательными, причем $c \neq 0$. Кроме того, воспользоваться правой частью этого равенства можно при условии, что a кратно c и b кратно c.

Таким образом, теорема, лежащая в основе правила деления суммы на число, может быть сформулирована следующим образом: «Если a, b и c – целые неотрицательные числа ($c \neq 0$) и a кратно c и b кратно c, то разделить сумму $a + b$ на число c можно, разделив на это число каждое из слагаемых».

Если воспользоваться символами, то условие и заключение этой теоремы можно записать так:

условие: $a, b, c \in Z_0, c \neq 0; a \vdots c, b \vdots c$

заключение: $(a + b):c = a:c + b:c$.

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если B, то A», которое называют обратным данному. Однако не всегда это предложение является теоремой. Рассмотрим, например, теорему: «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны». Построим предложение, обратное данному: «если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником». Это высказывание ложное, в чем можно убедиться, приведя контрпример: в равнобедренной трапеции диагонали равны, но трапеция не является прямоугольником.

Рассмотрим теперь теорему «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Обратное ей предложение таково: «если в треугольнике углы при основании равны, то этот треугольник – равнобедренный». Оно, как известно, истинное и поэтому является теоремой. Ее называют *теоремой, обратной данной.*

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если не A, то не B», которое называют противоположным данному. Но не всегда это предложение является теоремой. Например, предложение, противоположное теореме «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны», будет ложным: «если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны».

В том случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют *теоремой, противоположной данной.*

Таким образом, если для теоремы $A \Rightarrow B$ сформулировать обратное или противоположное предложения, то их надо доказывать (и тогда их можно называть соответственно обратной и противоположной теоремами) или опровергать.

Для всякой теоремы вида «если A, то B» можно сформулировать предложение «если не B, то не A», которое называют обратным противоположному. Например, для теоремы «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» предложение, обратное противоположному, будет таким: «если в четырехугольнике диагонали не равны, то он (четырехугольник) не является прямоугольником». Это, как известно, предложение истинное и, следовательно, является теоремой. Ее называют *обратно противоположной* данной.

Вообще для какой бы теоремы мы ни формулировали предложение, обратное противоположному, оно всегда будет теоремой, потому что имеется следующая равносильность

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

Эту равносильность называют *законом контрапозиции*. Мы принимаем его без доказательства. Согласно этому закону, предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой, и, значит, вместо данной теоремы можно доказывать теорему, обратно противоположную данной.

Кроме того, из закона контрапозиции следует, что предложение, обратное данному, и предложение, противоположное данному, одновременно истинны либо одновременно ложны. Поэтому, рассматривая их, достаточно доказать (или опровергнуть) какое-нибудь одно; тем самым будет доказано (опровергнуто) и второе.

Заметим, что если для данной теоремы $A \Rightarrow B$ существует обратная $B \Rightarrow A$, то их можно соединить в одну $A \Leftrightarrow B$, и тогда в формулировке будут использоваться слова «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда, когда». Например, соединив теоремы «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны» и «если в треугольнике углы при основании равны, то треугольник – равнобедренный» в одну, получим теорему: «треугольник будет равнобедренным тогда и только тогда, когда в нем углы при основании равны».

Можно сформулировать ее иначе: «для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы в нем углы при основании были равны».

С другой стороны, если теорема имеет вид равносильности $A \Leftrightarrow B$, то это значит, что она состоит из двух взаимно обратных теорем $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ и, следовательно, ее доказательство сводится к доказательству двух указанных теорем.

Заметим также, что если условие или заключение данной теоремы представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию, то, чтобы получить предложение, противоположное данному, нужно учитывать правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции. Например, дана теорема «если число делится на 3 и 4, то оно делится на 12». Предложение, противоположное данному, можно сформулировать так: «если число не делится на 12, то оно не делится на 3 или не делится на 4».

Упражнения

1. Выделите условие и заключение в каждой из следующих теорем:

а) Если углы смежные, то их сумма равна 180°.

б) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

в) Равенство треугольников есть достаточное условие их равновеликости.

г) Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого.

2. Сформулируйте предложения, обратные следующим теоремам. Какие из них являются теоремами?

а) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

б) Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

в) Если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма – четное число.

3. Сформулируйте предложения, противоположные теоремам, приведенным в упражнении 2. Какие из этих предложений – теоремы?

4. Для каждой теоремы из упражнения 2 сформулируйте теорему, равносильную ей согласно закону контрапозиции.

5. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратное, противоположное и обратно противоположное утверждения и установите, какие из них будут теоремами:

а) Если прямоугольник является квадратом, то его диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы пополам.

б) Всякий параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник или квадрат.

6. Пользуясь законом контрапозиции, докажите следующие теоремы:

а) Если $p \cdot q$ – нечетное число, то p и q нечетны ($p, q \in \mathbf{N}$).

б) Если $m^2 + n^2 \neq 0$, то $m \neq 0$ или $n \neq 0$.

7. Покажите, что следующие теоремы являются конъюнкцией двух теорем:

а) На 5 делятся те и только те числа, запись которых оканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

б) Две прямые плоскости параллельны тогда и только тогда, когда они перпендикулярны одной и той же прямой.

в) Для того чтобы в прямоугольном треугольнике катет составлял половину гипотенузы, необходимо и достаточно, чтобы угол, лежащий против этого катета, был равен 30°.

8. Нижеприведенные правила взяты из учебников для начальных классов. Установите, какие теоремы сформулированы в виде этих правил:

а) Если к разности прибавить вычитаемое, то получится уменьшаемое.

б) Если произведение двух чисел разделить на один из множителей, то получим другой множитель.

в) При делении любого числа на единицу в частном получится то число, которое делили.

24. Основные выводы § 3

При изучении материала данного параграфа мы познакомились с *понятиями*, с помощью которых уточнили смысл употребляемых в математике союзов «и», «или», частицы «не», слов «всякий», «существует», «следовательно» и «равносильно». Это понятия:

- высказывание;
- значение истинности высказывания;
- высказывательная форма;
- область определения высказывательной формы;
- множество истинности высказывательной формы;
- элементарные высказывания;
- логические связки;
- составные высказывания;
- конъюнкция высказываний и высказывательных форм;
- дизъюнкция высказываний и высказывательных форм;
- квантор общности;
- квантор существования;
- отрицание высказываний и высказывательных форм;
- отношение логического следования между предложениями;
- отношение равносильности между предложениями.

Рассмотрели *правила*:

- определения значения истинности составного высказывания;
- нахождения множества истинности составных высказывательных форм: $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$, $T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$, $T_{\overline{A}} = T'_A$;
- построения отрицания предложений различной структуры, в частности,

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}; \qquad \overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$\overline{(\forall x)\, A(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\, \overline{A(x)}; \qquad \overline{(\exists x)\, A(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\, \overline{A(x)}.$$

Выяснили, как использовать определения понятий при решении задач на распознавание объектов; какова логическая структура теоремы и теорем, обратной, противоположной и обратно противоположной данной. Установили, что различные виды теорем связаны законом контрапозиции $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$.

Выяснили, в чем отличие теоремы от правила.

§4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Бóльшую часть знаний об окружающей нас действительности мы получаем с помощью рассуждений. Выводы в них будут истинными, если они являются результатами правильных рассуждений, а такими считают рассуждения, построенные по правилам логики.

Рассуждения лежат в основе доказательства, без которого трудно представить математику. Но тех представлений о доказательстве, которые возникли у вас в процессе конкретных доказательств, конечно, недостаточно, чтобы обучать доказательству младших школьников. Учителю нужны более глубокие знания о тех правилах, в соответствии с которыми строятся правильные рассуждения, нужны знания о структуре и способах доказательства, о взаимосвязи индукции и дедукции.

Эти вопросы и будут рассмотрены в данном параграфе.

25. Умозаключения и их виды

В логике вместо термина «рассуждения» чаще используется (как его синоним) слово «умозаключение», им и будем пользоваться.

Умозаключение – *это способ получения нового знания на основе некоторого имеющегося.* При этом мы не обращаемся к исследованию предметов и явлений самой действительности, а открываем такие связи и отношения между ними, которые невозможно увидеть непосредственно.

Умозаключение состоит из *посылок* и *заключения.*

Посылки – *это высказывания, содержащие исходное знание.*

Заключение – *это высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходного.* В умозаключении из посылок выводится заключение.

Рассмотрим примеры умозаключений, которые выполняют младшие школьники, изучая математику.

Пример 1. Ученику предлагается объяснить, почему число 23 можно представить в виде суммы 20 + 3. Он рассуждает: «Число 23 – двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, 23 = 20 + 3».

Первое и второе предложения в этом умозаключении посылки, причем одна посылка общего характера – это высказывание «любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых», а другая – частная, она характеризует только число 23 – оно двузначное. Заключение – это предложение, которое стоит после слова «следовательно», – также носит частный характер, так как в нем речь идет о конкретном числе 23.

Пример 2. Один из приемов ознакомления младших школьников с переместительным свойством умножения заключается в следующем.

Используя различные средства наглядности, школьники вместе с учителем устанавливают, что, например, $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$, $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$. А затем на основе полученных равенств делают вывод: для всех натуральных чисел a и b верно равенство $a \cdot b = b \cdot a$.

В данном умозаключении посылками являются первые три равенства, в них утверждается, что для конкретных натуральных чисел выполняется такое свойство. Заключением в данном примере является утверждение общего характера – переместительное свойство умножения натуральных чисел.

Пример 3. При обучении делению на однозначное число используется такой прием. Сначала выясняется: чтобы найти значение выражения 12:4, следует узнать, на какое число надо умножить делитель 4, чтобы получить делимое, т.е. 12. Известно, что $4 \cdot 3 = 12$. Значит, $12:4 = 3$.

Затем учащимся предлагается, рассуждая так же, найти, например, частное 8:4. И они сначала находят число, на которое надо умножить 4, чтобы получить 8. Получают число 2 и делают вывод – $8:4 = 2$.

Далее, используя тот же способ рассуждений, находят частные 9:3, 20:5 и др.

Видим, что умозаключения бывают разные. В примере 1 заключение логически следует из посылок, и мы не сомневаемся в его истинности. Такие умозаключения называют в логике *дедуктивными*.

Определение. ***Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования.***

Если посылки дедуктивного умозаключения обозначить буквами A_1, A_2, ... , A_n, а заключение – буквой B, то схематично само умозаключение можно представить так: $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B$. Часто используют такую запись: $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$. В ней черта заменяет слово «следовательно».

Дедуктивным является умозаключение, которое рассмотрено в примере 1.

Более подробно такие умозаключения мы рассмотрим позже, в пункте 26, а пока заметим, что в дедуктивном умозаключении всегда, когда истинны посылки, истинно и заключение.

Умозаключение, которое рассмотрено в примере 2, отлично от первого. В нем приведены три посылки частного характера, которые показывают, что *некоторые* натуральные числа обладают свойством: от перестановки множителей произведение не изменяется. И на этой основе сделан вывод, что этим свойством обладают *все* натуральные числа. Такие умозаключения называют *неполной индукцией*.

Определение. ***Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.***

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением, поскольку, рассуждая по такой схеме, можно прийти к ложному выводу.

Рассмотрим, например, такие выражения: $3 + 5$ и $3 \cdot 5$; $2 + 7$ и $2 \cdot 7$; $4 + 8$ и $4 \cdot 8$. Видим, что $3 + 5 < 3 \cdot 5$, $2 + 7 < 2 \cdot 7$, $4 + 8 < 4 \cdot 8$, т.е. для некоторых натуральных чисел можно утверждать, что сумма меньше их произведения. И на основании того, что некоторые числа обладают указанным свойством, можно сделать вывод о том, что этим свойством обладают все натуральные числа, т.е. $(\forall a, b \in \mathbf{N})\ a + b < a \cdot b$.

Но это утверждение ложно, в чем можно убедиться с помощью контрпримера: числа 1 и 2 – натуральные, но сумма $1 + 2$ не меньше, чем произведение $1 \cdot 2$.

Вообще к выводам, полученным с помощью неполной индукции, надо относиться критически, так как они носят характер предположения, гипотезы и нуждаются в дальнейшей проверке: их надо либо доказать, либо опровергнуть.

Несмотря на то, что неполная индукция не всегда приводит к истинным выводам, роль таких умозаключений в процессе познания велика. Многие общие положения и, в частности, научные законы были открыты с помощью умозаключений, называемых неполной индукцией.

Третий пример – это пример рассуждения по аналогии.

Слово «аналогия» в переводе с греческого означает «соответствие, сходство».

Вообще *под аналогией* понимают *умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.*

Заметим, что в этом описании сути понятия «аналогия» термин «объект» используется в широком смысле: им может быть реальный предмет, модель, рисунок, числовое или буквенное выражение, задача и т.д. В качестве признаков могут выступать свойства объектов, отношения между ними, способы деятельности и т.д.

Аналогия помогает открывать новые знания, способы деятельности или использовать усвоенные способы деятельности в измененных условиях.

Вывод по аналогии носит характер предположения, гипотезы и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Например, ученик установил, что число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3. Затем, действуя по аналогии, сделал вывод: число делится на 8, если оно делится на 2 и на 4. Чтобы убедиться в ложности полученного вывода, достаточно привести контрпример: число 12 делится на 2 и на 4, но не делится на 8.

Широко используется аналогия в обучении математике младших школьников. Это происходит при изучении свойств объектов, отношений между ними и действий с ними. Приведем несколько примеров.

Аналогию можно использовать для «открытия» новых свойств изучаемых объектов. Например, если при изучении классов установлено, что в классе единиц три разряда – единицы, десятки, сотни, а в классе тысяч также три разряда – единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч, то вывод о числе разрядов в классе миллионов и их названии дети могут сделать самостоятельно, по аналогии.

Аналогия может быть использована для установления отношений между данными объектами. Например, учащиеся установили, что $4 \cdot (3+7) > 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6$, так как $4 \cdot (3+7) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7$, а $4 \cdot 7 > 4 \cdot 6$. Рассматривая затем выражения $3 \cdot (8 + 9)$ и $3 \cdot 8 + 3 \cdot 7$, учащиеся могут по аналогии сделать вывод о том, что $3 \cdot (8 + 9) > 3 \cdot 8 + 3 \cdot 7$. Проверить его правильность можно либо путем рассуждений, аналогичных тем, что проводились при выполнении первого задания, либо при помощи вычислений.

Аналогия может быть использована и для выводов о способе действия на основе изучения другого способа. Так, после рассмотрения способа умножения двузначного числа на однозначное на примере умножения 27 на 3 ($27 \cdot 3 = (20+7) \cdot 3 = 20 \cdot 3+7 \cdot 3 = 81$) детям предлагается умножить 721 на 4. Действуя по аналогии, они устанавливают, что $712 \cdot 4 = (700 + 10 + 2) \cdot 4 = 2800 + 40 + 8 = 2848$. Далее по аналогии устанавливают, как умножить 6288 на 3.

Следующим шагом может быть обобщение, т.е. получение правила умножения многозначного числа на однозначное, т.е. использование неполной индукции.

Упражнения

1. Объясните, почему приведенные ниже высказывания считают истинными:

а) $7 > 5$;	в) $(4 + 6):2 = 4:2 + 6:2$;
б) $7 + 3 > 7 + 1$;	г) $(6 \cdot 4):2 = (6:2) \cdot 4$.

Сформулируйте правила, которыми вы воспользовались. Содержат ли они квантор общности?

2. Известно, что если в треугольнике углы при основании равны, то он – равнобедренный. Следует ли из этого, что:

а) треугольник с двумя углами по 40° – равнобедренный;

б) треугольник с двумя сторонами по 4 см – равнобедренный?

3. Даны два утверждения: $A(x)$ – «число x четное» и $B(x)$ – «запись числа x оканчивается цифрой 4». Находятся ли они в отношении следования?

4. Известно, что запись числа оканчивается цифрой 8. Следует ли из этого, что данное число делится на:

а) 2; б) 4?

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам. Верно ли, что $ABCD$:

а) ромб; б) квадрат; в) прямоугольник?

6. В четырехугольнике $ABCD$ все стороны равны. Достаточно ли этого для того, чтобы утверждать, что $ABCD$:

а) квадрат; б) ромб?

7. В четырехугольнике $ABCD$ два угла прямые. Достаточно ли этого для того, чтобы утверждать, что $ABCD$ – прямоугольник?

8. Выскажите предположение, рассмотрев несколько частных случаев:

а) К однозначному числу приписали такую же цифру. Во сколько раз увеличилось число?

б) Имеются два числа, ни одно из которых не делится на 3. Может ли (и при каком условии) сумма этих чисел разделиться на 3?

в) Верно ли, что квадрат четного числа есть число, кратное 4?

9. Около вершин треугольника поставьте какие-нибудь числа. Возле каждой стороны – число, равное сумме чисел, стоящих у прилегающих к ней вершин. Что можно сказать о суммах, образованных числом, стоящим около стороны, и числом, стоящим около противолежащей ей вершины?

Надо ли доказывать сделанный вами вывод?

10. Сравните значение выражений $(a + 6)(7 - a)$ и $a(a - 1)$ при $a = -3, 0, 2$. Верно ли, что при любом целом a значение первого выражения больше, чем второго?

11. Даны верные равенства: $74 - 47 = 27$; $52 - 25 = 27$; $63 - 36 = 27$. Верно ли, что разность любого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 27?

12. Зная, что равенство $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ верно для любых натуральных чисел a, b и c, ученик решил, что верным будет и равенство: $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$ для любых натуральных чисел a, b и c. Прав ли он?

13. Выяснив, что $(12+4):2 = 12:2+4:2$, ученик решил аналогично действовать при нахождении значения выражения $(12 \cdot 4):2$, и записал: $(12 \cdot 4):2 = (12:2) \cdot (12:4)$. Прав ли он?

14. Известно, что если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Верны ли следующие высказывания, сформулированные по аналогии с данными:

а) Если число делится на 10, то оно делится на 2 и на 5.

б) Если число делится на 12, то оно делится на 2 и на 6.

в) Если число делится на 14, то оно делится на 2 и на 7.

15. Учителю необходимо подвести учащихся к выводу о том, что «при сложении числа с нулем получается то число, которое складывали с нулем». Какой метод рассуждений вы выберете?

26. Схемы дедуктивных умозаключений

Рассмотрим подробнее дедуктивные (правильные) умозаключения. Согласно определению (п. 25), в дедуктивном умозаключении посылки и заключение находятся в отношении логического следования. Это означает, что в нем всегда из истинных посылок следует истинное заключение. Но как строить такие умозаключения и проверять их правильность?

В логике считают, что правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. И в логике предлагаются такие правила, соблюдая которые, можно строить дедуктивные умозаключения. Эти правила называют *правилами вывода* или *схемами дедуктивных (правильных) умозаключений*. Правил много, но наиболее часто используются следующие:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ A(a)}{B(a)} \text{ – правило заключения;}$$

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}} \text{ – правило отрицания;}$$

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)} \text{ – правило силлогизма.}$$

Выясним, что обозначают все знаки, использованные в записи этих правил; как их применять на практике.

Рассмотрим, например, правило заключения. В нем обозначены две посылки $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $A(a)$. Первую называют общей посылкой, это может быть теорема, определение и, вообще, предложение вида $A(x) \Rightarrow B(x)$. Вторую посылку $A(a)$ называют частной, она получается из условия $A(x)$ при $x = a$. Предложение $B(a)$ – это заключение, оно получается из $B(x)$ при $x = a$. Посылки отделены от заключения чертой, которая заменяет слово «следовательно».

Приведем пример умозаключения, выполненного по правилу заключения:

Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Запись числа 135 оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5.

В качестве общей посылки в этом умозаключении выступает утверждение вида «если $A(x)$, то $B(x)$», где $A(x)$ – это «запись числа x оканчивается цифрой 5», а $B(x)$ – «число x делится на 5». Частная посылка представляет собой высказывание, которое получилось из условия общей посылки при $x = 135$ (т.е. это $A(135)$). Заключение является высказыванием, полученным из $B(x)$ при $x = 135$ (т.е. это $B(135)$).

Приведем теперь пример умозаключения, выполненного по правилу отрицания:

Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5.

Видим, что в этом умозаключении общая посылка такая же, как и в предыдущем, а частная представляет собой отрицание высказывания «число 177 делится на 5» (т.е. это $\overline{B(177)}$). Заключение – это отрицание предложения «*Запись числа 177 не оканчивается* цифрой 5» (т.е. $\overline{A(177)}$).

И наконец, рассмотрим пример умозаключения, построенного по правилу силлогизма.

Если число x кратно 12, то оно кратно 6. Если число x кратно 6, то оно кратно 3. Следовательно, если число x кратно 12, то оно кратно 3.

В этом умозаключении две посылки вида «если $A(x)$, то $B(x)$» и «если $B(x)$, то $C(x)$», где $A(x)$ – это предложение «x кратно 12», $B(x)$ – предложение «x кратно 6» и $C(x)$ – предложение «x кратно 3». Заключение представляет собой высказывание «если $A(x)$, то $C(x)$».

Конечно, возникает вопрос, почему умозаключения, выполненные по правилам заключения, отрицания и силлогизма, будут дедуктивными (правильными)? Дело в том, что, выполняя рассуждения по этим правилам, мы всегда будем получать истинное заключение, что и требуется в дедуктивном умозаключении. Убедиться в этом можно, если воспользоваться кругами Эйлера.

В логике существуют различные способы проверки правильности умозаключений. Мы рассмотрим тот, который предполагает использование кругов Эйлера. Сначала данное умозаключение можно записать на теоретико-множественном языке, затем посылки изобразить на кругах Эйлера, считая их истинными. После этого надо выяснить, *всегда* ли при таких посылках истинно заключение. Если оказывается, что всегда, то говорят, что данное умозаключение правильное, дедуктивное. Если же возможен рисунок, из которого видно, что заключение может быть ложным, то говорят, что всякое умозаключение, выполненное по такой схеме, является недуктивным, неправильным.

Покажем, что умозаключение, выполненное по правилу заключения, является дедуктивным. Сначала запишем это правило на теоретико-множественном языке.

Посылка $A(x) \Rightarrow B(x)$ может быть записана в виде $T_A \subset T_B$, где T_A и T_B – множества истинности высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$.

Частная посылка $A(a)$ означает, что $a \in T_A$, а заключение $B(a)$ показывает, что $a \in T_B$.

Все умозаключение, построенное по правилу заключения, запишется на теоретико-множественном языке так:

$$\frac{T_A \subset T_B,\, a \in T_A}{a \in T_B}.$$

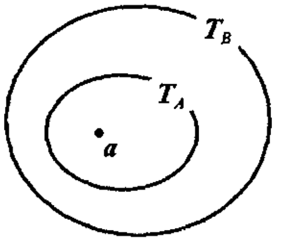


Рис. 37

Изобразив на кругах Эйлера множества T_A и T_B, и обозначив элемент $a \in T_A$, мы увидим, что $a \in T_B$ (рис. 37), т.е. $a \in T_A \Rightarrow a \in T_B$.

Аналогичным образом можно проверить и другие правила дедуктивных умозаключений. Кроме того, такой способ проверки правильности умозаключений можно использовать и в тех случаях, когда умозаключение выполнено по схеме, отличной от рассмотренных.

Задача. Правильно ли следующее умозаключение: «если запись числа оканчивается цифрой 5, то число делится на 5. Число 125 делится на 5. Следовательно, запись числа 125 оканчивается цифрой 5».

Решение. Это умозаключение выполнено по схеме

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\, B(125)}{A(125)},$$

которую в общем виде можно представить так:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\, B(a)}{A(a)}.$$

Но такой схемы среди названных выше нет. Является ли она правилом дедуктивного умозаключения?

Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся кругами Эйлера. На теоретико-множественном языке полученное правило можно записать так:

$$\frac{T_A \subset T_B,\, a \in T_B}{a \in T_A}.$$

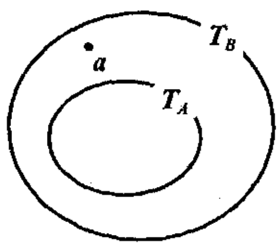


Рис. 38

Изобразим на кругах Эйлера множества T_A и T_B и обозначим элемент a, принадлежащий множеству T_B. Но оказывается, что он может содержаться в множестве T_A, а может и не принадлежать ему (рис. 38).

В логике считают, что такая схема не является правилом дедуктивного умозаключения, так как она не гарантирует истинности заключения. И вообще при анализе умозаключения нельзя отождествлять правильность умозаключения с истинностью полученного заключения: заключение может быть истинным, а само умозаключение не быть дедуктивным, правильным.

Возвращаясь к вопросу нашей задачи, скажем, что данное в ней умозаключение не является правильным, так как выполнено по схеме, не гарантирующей истинности заключения.

Как же надо действовать, чтобы установить, правильно ли умозаключение или нет? Для этого есть два пути. *Первый* – это показать, что данное умозаключение выполнено по одному из известных правил вывода. *Второй* – сформулировать данное умозаключение на теоретико-множественном языке и воспользоваться кругами Эйлера так, как описано выше.

Полезно запомнить и не путать с правилом заключения такую схему:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ B(a)}{A(a)},$$

а с правилом отрицания схему:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ \overline{A(a)}}{\overline{B(a)}}.$$

Эти схемы не гарантируют истинности заключения и, следовательно, не являются правилами дедуктивных умозаключений.

Заметим, что полное дедуктивное умозаключение по приведенным трем правилам требует указания двух посылок. Однако в процессе рассуждений эти правила иногда сокращают, опуская одну из посылок. Например, объясняя, почему $6 < 8$, ученик говорит, что «6 при счете называют раньше, чем 8, значит, $6 < 8$». Является ли это умозаключение дедуктивным? Если «да», то по какому правилу оно выполнено?

В объяснении ученика пропущена общая посылка: «если число a при счете называют раньше числа b, то a меньше b». Если ее восстановить, то умозаключение ученика примет вид:

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ A(a)}{B(a)},$$

а это правило заключения.

Заметим еще, что, выполняя умозаключения, можно менять очередность посылок и можно начинать с заключения, а потом воспроизводить посылки.

Заметим также, что если общие посылки в рассмотренных правилах дедуктивных умозаключений содержат более одной переменной, то это не нарушает смысла этих правил.

Упражнения

1. В каждом из следующих умозаключений выделите посылки и заключение:

а) Если число натуральное, то оно целое; если число целое, то оно рациональное, следовательно, если число натуральное, то оно рациональное.

б) Если число натуральное, то оно целое; число 138 – натуральное, следовательно, оно целое.

в) Всякое натуральное число целое; число 138 – целое, следовательно, оно натуральное.

г) Всякое натуральное число целое; число 0,2 не является целым, следовательно, оно не является и натуральным.

2. Проанализируйте схему каждого умозаключения из упражнения 1. Есть ли среди них умозаключения, не являющиеся дедуктивными?

3. Используя правило заключения, закончите умозаключение так, чтобы оно было дедуктивным:

а) Если четырехугольник – прямоугольник, то в нем диагонали равны. Четырехугольник $ABCD$...

б) Равные треугольники имеют равные площади. Треугольники ABC и KLM...

в) Для того чтобы ромб был квадратом, достаточно, чтобы в нем был прямой угол. Ромб $ABCD$...

4. Используя правило отрицания, закончите умозаключения из упражнения 3 так, чтобы они были дедуктивными.

5. Восстановите общую посылку в умозаключении:

а) Число 12 – натуральное, следовательно, оно положительное.

б) Число 15 – нечетное, следовательно, оно не делится на 2.

6. Постройте дедуктивное умозаключение, доказывающее, что

а) 130 делится на 10,

б) 137 не делится на 10.

в) Четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник.

г) Четырехугольник $ABCD$ не является прямоугольником.

7. Используя круги Эйлера, проверьте, правильны ли следующие умозаключения:

а) Всякий квадрат является прямоугольником; четырехугольник $ABCD$ не квадрат, следовательно, он не является прямоугольником.

б) Некоторые прямоугольники – квадраты; все квадраты – правильные многоугольники, следовательно, некоторые прямоугольники являются правильными многоугольниками.

8. Сравнивая выражения 36–7 и 36–4, ученик рассуждал так: «36–7 меньше 36–4, так как 7 больше 4». Восстановите его рассуждение полностью. Назовите посылки и заключение.

27. Способы математического доказательства

В обыденной жизни часто, когда говорят о доказательстве, имеют в виду просто проверку высказанного утверждения. В математике проверка и доказательство – это разные вещи, хотя и связанные между собой. Пусть, например, требуется доказать, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он – прямоугольник.

Если мы возьмем какой-либо четырехугольник, у которого три угла прямые, и, измерив четвертый, убедимся в том, что он действительно прямой, то эта проверка сделает данное утверждение более правдоподобным, но еще не доказанным.

Чтобы доказать данное утверждение, рассмотрим произвольный четырехугольник, в котором три угла прямые. Так как в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°, то и в данном она составляет 360°. Сумма трех прямых углов равна 270° $(90°\cdot 3 = 270°)$, и, значит, четвертый имеет величину 90° $(360° - 270° = 90°)$. Если все углы четырехугольника прямые, он – прямоугольник. Следовательно, данный четырехугольник будет прямоугольником. Что и требовалось доказать.

Заметим, что сущность проведенного доказательства состоит в построении такой последовательности истинных утверждений (теорем, аксиом, определений), из которых логически следует утверждение, которое нужно было доказать.

Вообще *доказать какое-либо утверждение – это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.*

В логике считают, что если рассматриваемое утверждение логически следует из уже доказанных утверждений, то оно обоснованно и также истинно, как и последние.

Таким образом, основой математического доказательства является дедуктивный вывод. А само доказательство – это цепочка умозаключений, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.

Например, в приведенном выше доказательстве можно выделить следующие умозаключения:

1. В любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°; данная фигура – выпуклый четырехугольник, следовательно, сумма углов в нем 360°.

2. Если известна сумма всех углов четырехугольника и сумма трех из них, то вычитанием можно найти величину четвертого; сумма всех углов данного четырехугольника равна 360°, сумма трех 270° $(90°\cdot 3 = 270°)$, то величина четвертого $360° - 270° = 90°$.

3. Если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник; в данном четырехугольнике все углы прямые, следовательно, он прямоугольник.

Все приведенные умозаключения выполнены по правилу заключения и, следовательно, являются дедуктивными.

Самое простое доказательство состоит из одного умозаключения. Таким, например, является доказательство утверждения о том, что $6 < 8$ (см. п. 26).

Итак, говоря о структуре математического доказательства, мы должны понимать, что она, прежде всего, включает в себя утверждение, которое доказывается, и систему истинных утверждений, с помощью которых ведут доказательство.

Следует еще заметить, что математическое доказательство – это не просто набор умозаключений, это умозаключения, расположенные в определенном порядке.

По способу ведения (т.е. по форме) различают *прямые* и *косвенные* доказательства. Рассмотренное ранее доказательство было прямым – в нем, основываясь на некотором истинном предложении и с учетом условия теоремы, строилась цепочка дедуктивных умозаключений, которая приводила к истинному заключению.

Примером косвенного доказательства является доказательство *методом от противного*. Сущность его состоит в следующем. Пусть требуется доказать теорему $A \Rightarrow B$. При доказательстве методом от противного допускают, что заключение теоремы (B) ложно, а, следовательно, его отрицание истинно. Присоединив предложение $\overline{B}$ к совокупности истинных посылок, используемых в процессе доказательства (среди которых находится и условие A), строят цепочку дедуктивных умозаключений до тех пор, пока не получится утверждение, противоречащее одной из посылок и, в частности, условию A. Как только такое противоречие устанавливают, процесс доказательства заканчивают и говорят, что полученное противоречие доказывает истинность теоремы $A \Rightarrow B$.

Задача 1. Доказать, что если $a + 3 > 10$, то $a \neq 7$.

Решение. Предположим, что заключение данного утверждения ложно, тогда истинным будет его отрицание, т.е. предложение $a = 7$. Подставим это значение a в неравенство $a + 3 > 10$. Получим предложение $7 + 3 > 10$ или $10 > 10$, которое ложно. Пришли к противоречию с определением отношения «больше» для чисел. Следовательно, наше предположение неверное, и поэтому, если $a + 3 > 10$, то $a \neq 7$.

Задача 2. Доказать, что если x^2 – четное число, то x – четно.

Решение. Предположим, что заключение данного утверждения ложно, тогда истинным будет его отрицание, т.е. предложение: «x – число нечетное». Любое нечетное число можно представить в виде $x = 2n + 1$, где $n \in Z_0$. Тогда $x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1$, где $k = 2n^2+2n$. Но это число нечетное. Пришли к противоречию с тем, что дано. Следовательно, наше предположение неверное, и поэтому если x^2 – четное число, то x тоже четное число.

Завершая обсуждение вопросов, связанных с математическим доказательством, выясним, как связаны между собой неполная индукция с дедуктивным выводом.

Ранее было отмечено, что выводы, которые мы получаем с помощью неполной индукции (или аналогии) носят характер предположения и поэтому их надо либо доказывать, либо опровергать. Поскольку выводы, о которых идет речь, носят, как правило, характер обобщения, то они формулируются в виде предложений, содержащих квантор общности. И следовательно, чтобы их опровергнуть, надо привести контрпример, а чтобы убедиться в истинности – доказать. Причем имеется в виду дедуктивный вывод. Таким образом, в процессе познания неполная индукция и математическое доказательство оказываются тесно связанными.

Проиллюстрируем это, решив следующую задачу.

Задача 3. Даны четыре последовательных натуральных числа. Верно ли, что произведение средних чисел этой последовательности больше произведения крайних на 2?

Решение. Попытаемся сначала высказать предположение относительно ответа на вопрос задачи. Для этого рассмотрим несколько конкретных случаев. Пусть 1, 2, 3, 4 составляют данную последовательность. Образуем произведение средних чисел и произведение крайних и сравним их: $2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2$. Возьмем еще одну последовательность, например, 5, 6, 7, 8, опять образуем произведения средних и крайних чисел и сравним их: $6 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = 2$. Рассмотренные случаи позволяют предположить, что утверждение «Произведение средних чисел заданной последовательности всегда больше произведения крайних на 2» истинно. Это предположение является по существу выводом в умозаключении, называемом неполной индукцией.

Но истинность предложения с квантором общности надо доказывать.

Обозначим четыре последовательных натуральных числа так: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Образуем произведения средних и крайних чисел, получим $(n + 1)(n + 2)$ и $n(n + 3)$. Выполним преобразования этих выражений: $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$; $n(n + 3) = n^2 + 3n$.

Видим, что действительно первое произведение больше второго на 2. Что и требовалось доказать.

Итак, по форме различают прямые и косвенные доказательства. Но в математике существуют еще и особые методы доказательства. Среди них – полная и математическая индукция. Метод математической индукции рассматривается в п. 67, а о полной индукции речь пойдет сейчас.

Полная индукция – это такой метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях.

Задача 4. Доказать, что каждое составное натуральное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел.

Решение. Вспомним определение простого и составного числа. Простым называется такое натуральное число, которое делится только на 1 и на себя. Числа 2, 13, 5, 17 – простые. Числа, которые имеют более двух делителей, называются составными. Число 1 не является ни простым, ни составным.

В данной задаче рассматривается множество чисел, которые больше 4, но меньше 20. Составными в нем будут числа: 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Каждое из них можно представить в виде суммы двух простых чисел: $6 = 3 + 3$; $8 = 5 + 3$; $9 = 7 + 2$; $10 = 5+5$ (или $7 + 3$); $12 = 5 + 7$; $14 = 11 + 3$ (или $7 + 7$); $15 = 13 + 2$; $16 = 13 + 3$ (или $11 + 5$), $18 = 13 + 5$ (или $11 + 7$). Так как данное утверждение истинно во всех частных случаях, то оно доказано.

В связи с тем что в нашем распоряжении появились два понятия: «полная индукция» (как метод доказательства) и «неполная индукция» (как один из видов умозаключений), то, чтобы избежать ошибок в их употреблении, посмотрим, как они используются при решении задач.

Задача 5. Верно ли, что если натуральное число n не кратно 3, то значение выражения $n^2 + 2$ кратно 3?

Решение. Попытаемся сначала однозначно определиться с ответом на вопрос задачи. Для этого возьмем несколько чисел, не кратных 3, и найдем соответствующие значения выражения $n^2 + 2$.

Если $n = 1$, то $1^2 + 2 = 3$, $3 \vdots 3$,
если $n = 2$, то $2^2 + 2 = 6$, $6 \vdots 3$,
если $n = 4$, то $4^2 + 2 = 18$, $18 \vdots 3$.

На основе рассмотренных случаев можно предположить, что утверждение «если натуральное число n не кратно 3, то значение выражения $n^2 + 2$ кратно 3» истинно. Это вывод, который мы получили на основе неполной индукции. Но его надо доказывать.

Если натуральное число n не кратно 3, то при делении его на 3 в остатке получается 1 либо 2 и, соответственно, число n имеет вид $3q + 1$ ($q \in Z_0$) либо $3q + 2$ ($q \in Z_0$).

Если $n = 3q + 1$, то $n^2 + 2 = (3q + 1)^2 + 2 = 9q^2 + 6q + 3$. В выражении $9q^2 + 6q + 3$ каждое слагаемое делится на 3, следовательно, на 3 делится и вся сумма, т.е. значение выражения $n^2 + 2$.

При $n = 3q + 2$ картина аналогична, т.е. значение выражения $n^2 + 2$ и в этом случае делится на 3.

Полученные результаты позволяют заключить, что при любом натуральном n, которое не кратно 3, значение выражения $n^2 + 2$ делится на 3.

Метод доказательства в данной задаче – *полная индукция*. Но применяется она иначе, чем в задаче 4. Дело в том, что отношению «иметь один и тот же остаток при делении на 3» соответствует разбиение множества натуральных чисел на 3 класса – это множество чисел, кратных 3, множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1, и множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2. Следовательно, все натуральные числа, не кратные 3, разбиваются на 2 класса, в первом содержатся числа вида $3q + 1$, а во втором – числа вида $3q + 2$. Нами доказано, что при любом n из этих двух классов значение выражения $n^2 + 2$ кратно 3.

Упражнения

1. Докажите, что если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

2. Докажите, что значением выражения $(x - 4)(2x + 1)$ будет целое число, если x принимает значения $-1, 0, 1, 4$.

3. Разность двух углов равна $10°$. Докажите, что эти углы не могут быть вертикальными.

4. Докажите, что если $x^2 + 3x + 1 < 0$, то $x < 0$.

5. Как изменится сумма двух чисел, если каждое слагаемое увеличить в три раза?

6. Каким числом может быть сумма двух нечетных чисел? Рассмотрите несколько частных случаев и выскажите предположение. Каким образом можно доказать его истинность?

7. Разделите каждое из чисел 3^2, 5^2 и 7^2 на 4. Чему в каждом из этих случаев равен остаток? Какое предположение можно высказать на основе полученных результатов? Сколько нечетных чисел нужно возвести в квадрат и разделить на 4, чтобы гарантировать истинность высказанного предположения?

8. Даны четыре последовательных нечетных числа. Верно ли, что произведение крайних чисел меньше произведения средних на 8?

9. Верно ли, что:

а) разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8;

б) произведение двух последовательных четных чисел кратно 8;

в) разность между квадратом натурального числа, не делящегося на 3, и единицей делится на 3?

10. Покажите, что обосновывая решение следующих задач, младшие школьники могут использовать полную индукцию:

а) Дан ряд чисел: 3545, 3550, 3555, 3560, 3565. Можно ли утверждать, что каждое число этого ряда делится на 5?

б) Можно ли утверждать, что значения всех нижеприведенных выражений одинаковы:

326 326 : 326;   236 236 : 236;   626 626 : 626.

в) Можно ли утверждать, что значения выражений в столбике одинаковы:

56 : 5

7·8 : (32 : 4)

(65–9) : (24 : 3)?

28. Основные выводы § 4

Для того чтобы разобраться с особенностями математического доказательства, нам пришлось познакомиться с *понятиями*:

– умозаключение,
– посылка и заключение,
– дедуктивные (правильные) умозаключения,
– неполная индукция,
– аналогия,
– прямое доказательство,
– косвенное доказательство,
– полная индукция.

Мы выяснили, что *неполная индукция* и *аналогия* тесно *связаны с дедукцией*: выводы, полученные с помощью неполной индукции и аналогии, надо либо доказывать, либо опровергать. С другой стороны, дедукция не возникает на пустом месте, а является результатом предварительного индуктивного изучения материала.

Дедуктивные умозаключения позволяют из уже имеющегося знания получать новые истины, и притом с помощью рассуждения, без обращения к опыту, интуиции и т.д.

Мы выяснили, что *математическое доказательство – это цепочка дедуктивных умозаключений*, выполняемых по определенным правилам. Познакомились с простейшими из них: *правилом заключения, правилом отрицания, правилом силлогизма*. Узнали, что проверять правильность умозаключения можно с помощью кругов Эйлера.

§5. ТЕКСТОВАЯ ЗАДАЧА И ПРОЦЕСС ЕЕ РЕШЕНИЯ

Кроме различных понятий, предложений, доказательств в любом математическом курсе есть задачи. В обучении математике младших школьников преобладают такие, которые называют арифметическими, текстовыми, сюжетными. Эти задачи сформулированы на естественном языке (поэтому их называют *текстовыми*); в них обычно описывается количественная сторона каких-то явлений, событий (поэтому их часто называют *арифметическими* или *сюжетными*); они представляют собой задачи на разыскание искомого и сводятся к вычислению неизвестного значения некоторой величины (поэтому их иногда называют *вычислительными*).

В данном пособии мы будем применять термин «текстовые задачи», поскольку он чаще других используется в методике обучения математике младших школьников.

Решению текстовых задач при начальном обучении уделяется огромное внимание. Связано это с тем, что такие задачи часто являются не только средством формирования многих математических понятий, но и главное – средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, а также средством развития мышления детей.

Существуют различные методические подходы к обучению детей решению текстовых задач. Но какую бы методику обучения ни выбрал учитель, ему надо знать, как устроены такие задачи, и уметь их решать различными методами и способами.

29. Структура текстовой задачи

Как было сказано выше, любая текстовая задача представляет собой описание какого-либо явления (ситуации, процесса). С этой точки зрения текстовая задача есть словесная модель явления (ситуации, процесса). И, как во всякой модели, в текстовой задаче описывается не все явление в целом, а лишь некоторые его стороны, главным образом, его количественные характеристики. Рассмотрим, например, такую задачу: «Автомобиль выехал из пункта А со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч вслед за ним выехал второй автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от А второй автомобиль догонит первый?»

В задаче описывается движение двух автомобилей. Как известно, любое движение характеризуется тремя величинами: пройденным расстоянием, скоростью и временем движения. В данной задаче известны скорости первого и второго автомобилей (60 км/ч и 90 км/ч), известно, что они прошли одно и то же расстояние от пункта А до места встречи, количественную характеристику которого и надо найти. Кроме того, известно, что первый автомобиль был в пути на 2 ч больше, чем второй.

Обобщая, можно сказать, что текстовая задача есть описание на естественном языке некоторого явления (ситуации, процесса) с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этого явления, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между компонентами или определить вид этого отношения.

Рассмотрим еще одну задачу из начального курса математики:

«Свитер, шапку и шарф связали из 1 кг 200 г шерсти. На шарф потребовалась на 100 г шерсти больше, чем на шапку, и на 400 г меньше, чем на свитер. Сколько шерсти израсходовали на каждую вещь?»

В задаче речь идет о расходовании шерсти на свитер, шапку и шарф. Относительно этих объектов имеются определенные *утверждения* и *требования*.

Утверждения:

1. Свитер, шапка и шарф связаны из 1200 г шерсти.
2. На шарф израсходовали на 100 г больше, чем на шапку.
3. На шарф израсходовали на 400 г меньше, чем на свитер.

Требования:

1. Сколько шерсти израсходовали на свитер?
2. Сколько шерсти израсходовали на шапку?
3. Сколько шерсти израсходовали на шарф?

Утверждения задачи называют *условиями* (или условием, как в начальной школе). В задаче обычно не одно условие, а несколько элементарных условий. Они представляют собой количественные или качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними. Требований в задаче может быть несколько. Они могут быть сформулированы как в вопросительной, так и утвердительной форме. Условия и требования взаимосвязаны.

Систему взаимосвязанных условий и требований называют высказывательной моделью задачи.

Таким образом, чтобы понять, какова структура задачи, надо выявить ее условия и требования, отбросив все лишнее, второстепенное, не влияющее на ее структуру. Иными словами, надо построить высказывательную модель задачи.

Чтобы получить эту модель, надо текст задачи развернуть (сделать это можно письменно или устно), так как текст задачи, как правило, дается в сокращенном, свернутом виде. Для этого можно перефразировать задачу, построить ее графическую модель, ввести какие-либо обозначения и т.д.

Кроме того, вычленение условий задачи можно производить с разной глубиной. Глубина анализа условий и требований задачи зависит главным образом от того, знакомы ли мы с видом задач, к которому принадлежит заданная, и знаем ли мы способ решения таких задач.

Пример 1. Сформулируйте условия и требования задачи:

Две девочки одновременно побежали навстречу друг другу по спортивной дорожке, длина которой 420 м. Когда они встретились, первая пробежала на 60 м больше, чем вторая. С какой скоростью бежала каждая девочка, если они встретились через 30 с?

В задаче речь идет о движении двух девочек навстречу друг другу. Как известно, движение характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем.

Условия задачи:

1. Две девочки бегут навстречу друг другу.
2. Движение они начали одновременно.
3. Расстояние, которое они пробежали, – 420 м.
4. Одна девочка пробежала на 60 м больше, чем другая.
5. Девочки встретились через 30 с.
6. Скорость движения одной девочки больше скорости движения другой.

Требования задачи:

1. С какой скоростью бежала 1-я девочка?
2. С какой скоростью бежала 2-я девочка?

По отношению между условиями и требованиями различают:

а) *определенные задачи* – в них заданных условий столько, сколько необходимо и достаточно для выполнения требований;

б) *недоопределенные задачи* – в них условий недостаточно для получения ответа;

в) *переопределенные задачи* – в них имеются лишние условия.

В начальной школе недоопределенные задачи считают задачами с недостающими данными, а переопределенные – задачами с избыточными данными.

Например, задача «Возле дома росло 5 яблонь, 2 вишни и 3 березы. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?» является переопределенной, так как содержит лишнее условие.

Задача «Из зала вынесли сначала 12 стульев, потом еще 5. Сколько стульев осталось в зале?» является недоопределенной – в ней условий недостаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос.

Уточним теперь смысл термина «решение задачи». Так сложилось, что этим термином обозначают разные понятия:

1) решением задачи называют результат, т.е. ответ на требование задачи;

2) решением задачи называют *процесс нахождения* этого результата, причем этот процесс рассматривают двояко: и как метод нахождения результата (например, говорят о решении задачи арифметическим способом) и как последовательность тех действий, которые выполняет решающий, применяя тот или иной метод (т.е. в данном случае под решением задачи понимается вся деятельность человека, решающего задачу).

1. В следующих задачах выделите условия и требования:

а) Два автобуса отправились одновременно из города в село, расстояние до которого 72 км. Первый автобус прибыл в село на 15 мин раньше второго. С какой скоростью шел каждый автобус, если скорость одного из них на 4 км/ч больше скорости другого?

б) Сумма двух чисел равна 199. Найдите эти числа, если одно из них больше другого на 61.

2. Задачи из упражнения 1 сформулируйте таким образом, чтобы предложение, содержащее требование, не содержало условий.

3. В задачах из упражнения 1 повелительную форму требований замените вопросительной, вопросительную – повелительной.

4. Решите задачи из упражнения 1.

5. Даны условия задачи: «Собрали 42 кг огурцов и $\frac{5}{7}$ всех огурцов засолили».

Из нижеследуемого списка выберите требования к данному условию и решите полученную задачу:

а) Сколько килограммов огурцов осталось незасоленными?

б) Сколько килограммов помидор осталось незасоленными?

в) Что больше – масса огурцов, которые посолили или масса огурцов, которые остались незасоленными?

6. Сформулируйте возможные требования к условию задачи:

а) Купили 12 м ткани и третью часть ткани израсходовали на платье.

б) Из деревни вышел пешеход, а через 2 ч вслед за ним выехал велосипедист. Скорость велосипедиста 10 км/ч, а скорость пешехода 5 км/ч.

7. Какие данные необходимы для ответа на следующее требование задачи:

а) Какая часть урока использована на решение задачи?

б) Сколько платьев сшили из купленной ткани?

в) Найдите периметр прямоугольника.

8. Ученику была предложена задача: «Велосипедист ехал 2 часа с некоторой скоростью. После того как он проедет 60 км с такой же скоростью, его путь станет равным 48 км. С какой скоростью ехал велосипедист?» Он решил ее так:

1) 60 – 48 = 12 (км)

2) 12 : 2 = 6 (км/ч)

Ответ: 6 км/ч – скорость велосипедиста.

Согласны ли вы с таким решением данной задачи?

9. Можете ли вы дать ответ на требование следующей задачи:

а) За 3 м ткани заплатили 60000 р. Во второй раз купили 6 м ткани. Сколько денег заплатили за ткань, купленную во второй раз?

б) Два мотоциклиста едут навстречу друг другу. Скорость одного из них 62 км/ч, а скорость другого 54 км/ч. Через сколько часов мотоциклисты встретятся?

В случае если нельзя ответить на требование задачи, дополните ее условие и решите задачу.

10. Есть ли среди нижеприведенных задачи с лишними данными:

а) Объем комнаты равен 72 м^3. Высота комнаты 3 м. Найдите площадь пола комнаты, если ее длина 6 м.

б) Для посадки леса выделили участок, площадь которого 300 га. Дубы посадили на $\frac{7}{10}$ участка, а сосны на $\frac{3}{10}$ участка. Сколько гектаров занято дубами и соснами?

В случае если в задаче есть лишние данные, то исключите их и решите задачу.

30. Методы и способы решения текстовых задач

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический.

Решить задачу *арифметическим методом* – это значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами.

Одну и ту же задачу можно решить различными *арифметическими способами*. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений, выполняемых в процессе решения задачи.

Решим, например, различными арифметическими способами такую задачу: «Сшили 3 платья, расходуя на каждое по 4 м ткани. Сколько кофт можно было сшить из этой ткани, если расходовать на одну кофту 2 м?»

1 способ

1) $4 \cdot 3 = 12$ (м) – столько было ткани;

2) $12 : 2 = 6$ (кофт) – столько кофт можно сшить из 12 м ткани.

2 способ

1) $4 : 2 = 2$ (раза) – во столько раз больше идет ткани на платье, чем на кофту;

2) $3 \cdot 2 = 6$ (кофт) – столько кофт можно сшить.

Решить задачу *алгебраическим методом* – это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений.

Если для одной и той же задачи можно составить различные уравнения (системы уравнений), то это означает, что данную задачу можно решить различными *алгебраическими способами*.

Например, задачу о массе шерсти, израсходованной на свитер, шапку и шарф (с. 106), можно решить тремя различными способами.

1 способ

Обозначим через x (г) массу шерсти, израсходованной на шапку. Тогда на шарф будет израсходовано $(x + 100)$ г, а на свитер $((x + 100) + 400)$ г. Так как на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение

$$x + (x + 100) + ((x + 100) + 400) = 1200.$$

Выполнив преобразования, получим, что $x = 200$. Таким образом, на шапку было израсходовано 200 г, на шарф – 300 г, так как $200 + 100 = 300$, на свитер – 700 г, так как $(200 + 100) + 400 = 700$.

2 способ

Обозначим через x (г) массу шерсти, израсходованной на шарф. Тогда на шапку будет израсходовано $(x - 100)$ г, а на свитер – $(x + 400)$ г. Поскольку на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение:

$$x + (x - 100) + (x + 400) = 1200.$$

Выполнив преобразования, получим, что $x = 300$. Таким образом, если на шарф израсходовали 300 г, то на шапку 200 г $(300 - 100 = 200)$, а на свитер 700 г $(300 + 400 = 700)$.

3 способ

Обозначим через x (г) массу шерсти, израсходованной на свитер. Тогда на шарф будет израсходовано $(x - 400)$ г, а на шапку $(x - 400 - 100)$ г. Поскольку на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение:

$$x + (x - 400) + (x - 500) = 1200.$$

Выполнив преобразования, получим, что $x = 700$. Таким образом, если на свитер израсходовано 700 г, то на шарф пошло 300 г $(700 - 400 = 300)$, а на шапку – 200 г $(700 - 400 - 100 = 200)$.

Упражнения

1. Решите различными алгебраическими способами задачу о девочках, которые бегут навстречу друг другу (с. 107).

2. Ниже приведены два арифметических способа решений этой же задачи. Дайте пояснения к каждому действию.

1 способ	2 способ
1) $420 - 60 = 360$ (м)	1) $420 + 60 = 480$ (м)
2) $360:2 = 180$ (м)	2) $480:2 = 240$ (м)

3) 180:30 = 6 (м/с)	3) 240:30 = 8 (м/с)
4) 180 + 60 = 240 (м)	4) 240 – 60 = 180 (м)
5) 240:30 = 8 (м/с)	5) 180:30 = 6 (м/с)

3. Решите различными арифметическими способами задачи:

а) Ученик затратил на подготовку уроков 1 ч 50 мин. Занятия русским языком заняли на 15 мин больше, чем географией, и на 20 мин меньше, чем математикой. Сколько времени ушло на подготовку каждого предмета отдельно?

б) Расстояние между двумя городами по железной дороге 720 км. Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу и встречаются через 10 ч. Скорость одного поезда на 8 км/ч больше скорости второго поезда. Найдите скорость каждого поезда.

в) Боковая сторона равнобедренного треугольника на 10 см больше основания. Периметр треугольника равен 26 см. Найдите основание треугольника.

31. Этапы решения задачи и приемы их выполнения

Решение любой задачи – процесс сложной умственной деятельности. Чтобы овладеть им, надо знать основные этапы решения задачи и некоторые приемы их выполнения.

Деятельность по решению задачи арифметическим методом включает следующие основные этапы:

1. Анализ задачи.
2. Поиск плана решения задачи.
3. Осуществление плана решения задачи.
4. Проверка решения задачи.

В реальном процессе решения задачи названные этапы не имеют четких границ и не всегда выполняются одинаково полно. Все зависит от уровня знаний и умений решающего. Например, если после прочтения задачи вы обнаружили, что она известного вам вида и вы знаете, как ее решать, то, конечно, поиск плана не вычленяется в отдельный этап. Однако полное, логически завершенное решение обязательно содержит все указанные этапы, а знание приемов их выполнения делает процесс решения любой задачи осознанным и целенаправленным, а значит, и более успешным.

1. Анализ задачи

Основное назначение этого этапа – понять в целом ситуацию, описанную в задаче; выделить условия и требования; назвать известные и искомые объекты, выделить все отношения (зависимости) между ними.

Производя анализ задачи, вычленяя ее условия, мы должны соотносить этот анализ с требованиями задачи. Другими словами, *анализ задачи всегда направлен на ее требования.*

Известно несколько приемов, которые можно использовать при анализе задачи.

Разобраться в содержании задачи, вычленить условия и требования можно, если *задать специальные вопросы и ответить на них*:

О чем задача, т.е. о каком процессе (явлении, ситуации) идет речь в задаче, какими величинами характеризуется этот процесс?

Что требуется найти в задаче?

Что обозначают те или иные слова в тексте задачи?

Что в задаче известно о названных величинах?

Что неизвестно?

Что является искомым?

Рассмотрим, например, задачу: «По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. Вначале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч, то второй нагоняет первого. С начала движения и до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака со скоростью 8 км/ч. От идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается обратно и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние пробежит за все это время собака?»

Воспользуемся указанным приемом.

1) О чем эта задача?

– Задача о движении двух мальчиков и собаки. Оно характеризуется для каждого из участников движения скоростью, временем и пройденным расстоянием.

2) Что требуется найти в задаче?

– В задаче требуется найти расстояние, которое пробежит собака за все время от начала движения, пока мальчики не окажутся рядом, т.е. второй не догонит первого.

3) Что в задаче известно о движении каждого из его участников?

– В задаче известно, что: а) мальчики идут в одном направлении; б) до начала движения расстояние между мальчиками было 2 км; в) скорость первого мальчика, идущего впереди, 4 км/ч; г) скорость второго мальчика, идущего позади, 5 км/ч; д) скорость, с которой бежит собака, 8 км/ч; е) время движения, когда расстояние между мальчиками было 2 км, до момента встречи.

4) Что в задаче неизвестно?

– В задаче неизвестно время, за которое второй мальчик догонит первого, т.е. неизвестно время движения всех его участников. Неизвестно также, с какой скоростью происходит сближение мальчиков. И неизвестно расстояние, которое пробежала собака, – это требуется узнать в задаче.

5) Что является искомым: число, значение величины, вид некоторого отношения?

– Искомым является значение величины – расстояния, которое пробежала собака за время от начала движения мальчиков до момента встречи.

Большую помощь в осмыслении задачи оказывает другой прием – *перефразировка текста задачи.* Он заключается в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим, сохраняющим все отношения, связи, качественные характеристики, но более явно их выражающим. Это достигается в результате отбрасывания несущественной, излишней информации, замены описания некоторых понятий соответствующими терминами и, наоборот, замены некоторых терминов описанием содержания соответствующих понятий; преобразование текста задачи в форму, удобную для поиска плана решения.

Особенно эффективно использование данного приема в сочетании с разбиением текста на смысловые части.

Результатом перефразировки должно быть выделение основных ситуаций.

Поскольку в задаче, рассмотренной выше, речь идет о движении, ее можно перефразировать следующим образом:

«Скорость одного мальчика 4 км/ч, а скорость догоняющего его второго мальчика 5 км/ч (это первая часть). Расстояние, на которое мальчики сблизились, 2 км (вторая часть). Время движения мальчиков – это время, в течение которого второй мальчик догонит первого, т.е. в течение которого второй мальчик пройдет на 2 км больше, чем первый (третья часть). Скорость, с которой бежит собака, 8 км/ч. Время движения собаки равно времени движения мальчиков до встречи (четвертая часть). Требуется определить расстояние, которое пробежала собака».

Перефразированный текст часто бывает полезно записать в таблице.

Например, рассматриваемую задачу можно записать с помощью таблицы такого вида:

Скорость	Время	Расстояние
1-й мальчик 4 км/ч 2-й мальчик 5 км/ч Собака 8 км/ч	? ? Одинаковое ?	? ? На 2 км больше 1-го мальчика ?

Построением схематического чертежа может быть завершен анализ задачи о массе шерсти, израсходованной на шапку, шарф и свитер. Для этого условимся массу шерсти, израсходованной на шапку, изобразить в виде отрезка произвольной длины. Тогда массу шерсти, израсходованной на шарф и свитер, можно изобразить так, как показано на рисунке 39.

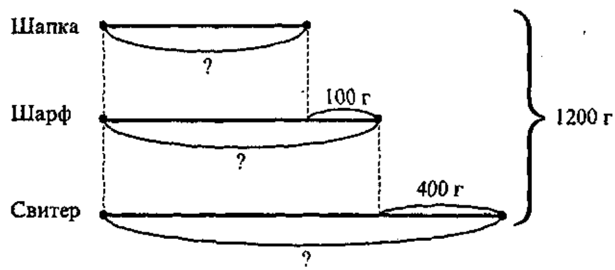


Рис. 39

И таблица, и схематический чертеж являются *вспомогательными моделями задачи*. Они служат формой фиксации анализа текстовой задачи и являются основным средством поиска плана ее решения.

После построения вспомогательной модели необходимо проверить:

1) все ли объекты задачи и их величины показаны на модели;

2) все ли отношения между ними отражены;

3) все ли числовые данные приведены;

4) есть ли вопрос (требование) и правильно ли он указывает искомое?

2. Поиск и составление плана решения задачи

Назначение этого этапа: установить связь между данными и искомыми объектами, наметить последовательность действий.

План решения задачи – это лишь идея решения, его замысел. Может случиться, что найденная идея неверна. Тогда надо вновь возвращаться к анализу задачи и начинать все сначала.

Как искать план решения текстовой задачи? Односложного ответа на этот вопрос нет. Поиск плана решения задачи является трудным процессом, который точно не определен. Можно только указать некоторые приемы, которые позволят осуществлять этот этап. Одним из наиболее известных приемов поиска плана решения задачи арифметическим способом является *разбор задачи по тексту или по ее вспомогательной модели.*

Разбор задачи проводится в виде цепочки рассуждений, которая может начинаться как от данных задачи, так и от ее вопросов.

При разборе задачи от данных к вопросу решающий выделяет в тексте задачи два данных и на основе знания связи между ними (такие знания должны быть получены при анализе задачи) определить, какое неизвестное может быть найдено по этим данным и с помощью какого арифметического действия. Затем, считая это неизвестное данным, решающий вновь выделяет два взаимосвязанных данных, определяет неизвестное, которое может быть найдено по ним и с помощью какого действия и т.д., пока не будет выяснено, какое действие приводит к получению искомого в задаче объекта.

Проведем такой разбор по тексту задачи:

«На поезде, который шел со скоростью 56 км/ч, турист проехал 6 ч. После этого ему осталось проехать в 4 раза больше, чем проехал. Каков весь путь туриста?»

Рассуждения ведем от данных к вопросу: известно, что 6 ч турист проехал на поезде, который шел со скоростью 56 км/ч; по этим данным можно узнать расстояние, которое проехал турист за 6 ч, – для этого достаточно скорость умножить на время. Зная пройденную часть расстояния и то, что оставшееся расстояние в 4 раза больше, можно найти, чему оно равно. Для этого пройденное расстояние нужно умножить на 4 (увеличить в 4 раза). Зная, сколько километров турист проехал и сколько ему осталось ехать, можем найти весь путь, выполнив сложение найденных отрезков пути. Итак, первым действием будем находить расстояние, которое турист проехал на поезде; вторым действием – расстояние, которое ему осталось проехать; третьим – весь путь.

При разборе задачи от вопроса к данным нужно обратить внимание на вопрос задачи и установить (на основе информации, полученной при анализе задачи), что достаточно узнать для ответа на этот вопрос. Для чего нужно обратиться к условиям и выяснить, есть ли для этого необходимые данные. Если таких данных нет или есть только одно данное, то установить, что нужно знать, чтобы найти недостающее данное (недостающие данные), и т.д. Потом составляется план решения задачи. Рассуждения при этом проводятся в обратном порядке.

Проведем такой разбор той же задачи о движении туриста, строя цепочку рассуждений от вопроса к данным: «В задаче требуется узнать весь путь туриста. Мы установили, что путь состоит из двух частей. Значит, для выполнения требования задачи достаточно знать, сколько километров турист проехал и сколько километров ему осталось проехать. И то, и другое неизвестно. Чтобы найти пройденный путь, достаточно знать время и скорость, с которой ехал турист. Это в задаче известно. Умножив скорость на время, узнаем путь, который турист проехал. Оставшийся путь можно найти, увеличив пройденный путь в 4 раза (умножив на 4). Итак, вначале можно узнать пройденный путь, затем оставшийся, после чего сложением найти весь путь».

Поиск плана решения задачи может проводиться по вспомогательной модели, выполненной при анализе задачи.

Покажем, как можно осуществить поиск плана решения задачи о массе шерсти, израсходованной на шарф, шапку и свитер, по схематическому чертежу (рис. 39).

По чертежу видно, на сколько больше израсходовали на свит[...] чем, например, на шарф; если из всей массы шерсти вычесть 400 г, мы узнаем, сколько бы всего израсходовали шерсти, если бы на сви[...] израсходовали столько же, сколько на шарф. Далее, если к этой ма[...] шерсти прибавить 100 г, то мы узнаем, сколько бы всего израсходо[...] ли шерсти, если бы на шапку израсходовали столько же, сколько [...] шарф. Разделив полученное число на 3, найдем массу шерсти, изр[...] ходованную на шарф. Вычтя из полученного результата 100 г, а зат[...] прибавив к нему 400 г, найдем массу шерсти, использованную [...] шапку и на свитер.

Заметим, что поиск плана решения данной задачи по схемати[...] скому чертежу может быть проведен иначе (сделайте это самосто[...] тельно), – в результате мы получим различные арифметические способ[...] ее решения.

3. Осуществление плана решения задачи

Назначение данного этапа – найти ответ на требование задач[...] выполнив все действия в соответствии с планом.

Для текстовых задач, решаемых арифметическим способом, испол[...] зуются следующие приемы:

– запись по действиям (с пояснением, без пояснения, с вопросами);

– запись в виде выражения.

Приведем примеры различных записей плана решения задачи: «Н[...] поезде, скорость которого 56 км/ч, турист проехал 6 ч. После этог[...] ему осталось проехать в 4 раза больше, чем он проехал. Каков вес[...] путь туриста?»

1. Запись решения по действиям с пояснением к каждому выпол[...] ненному действию.

1) $56 \cdot 6 = 336$ (км) – турист проехал за 6 ч
2) $336 \cdot 4 = 1344$ (км) – осталось проехать туристу
3) $336 + 1344 = 1680$ (км) – должен был проехать турист.

Если пояснения даются в устной форме (или совсем не даются), т[...] запись будет следующей:

1) $56 \cdot 6 = 336$ (км)
2) $336 \cdot 4 = 1344$ (км)
3) $336 + 1344 = 1680$ (км)

2. Запись решения по действиям с вопросами:

1) Сколько километров проехал турист на поезде?
   $56 \cdot 6 = 336$ (км)
2) Сколько километров осталось проехать туристу?
   $336 \cdot 4 = 1344$ (км)
3) Сколько километров турист должен был проехать?
   $336 + 1344 = 1680$ (км)

3. Запись решения в виде выражения.

Запись решения в этой форме осуществляется поэтапно. Сначала записываются отдельные шаги в соответствии с планом, затем составляется выражение и находится его значение. Так как обычно это значение записывают, поставив после числового выражения знак равенства, то запись становится числовым равенством, в левой части которого – выражение, составленное по условию задачи, а в правой – его значение, оно-то и позволяет сделать вывод о выполнении требований задачи.

Так, для рассматриваемой задачи эта форма записи имеет вид:

$56 \cdot 6$ (км) – расстояние, которое проехал турист на поезде за 6 ч

$56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) – расстояние, которое осталось проехать туристу

$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4$ (км) – путь, который должен проехать турист

$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1680$ (км)

Пояснения к действиям можно не записывать, а давать их в устной форме. Тогда запись решения задачи примет вид:

$56 \cdot 6 + 56 \cdot 6 \cdot 4 = 1680$ (км)

4. Проверка решения задачи

Назначение данного этапа – установить правильность или ошибочность выполненного решения.

Известно несколько приемов, помогающих установить, верно ли решена задача. Рассмотрим основные.

1. Установление соответствия между результатом и условиями задачи.

Для этого найденный результат вводится в текст задачи и на основе рассуждений устанавливается, не возникает ли при этом противоречия.

Проверим, используя данный прием, правильность решения задачи о движении туриста.

Мы установили, что турист должен был всего проехать 1680 км. Пусть теперь этот результат будет одним из данных задачи. Далее, как известно, за 6 ч турист проедет 336 км ($56 \cdot 6 = 336$) и ему останется проехать $1680 - 336 = 1344$ (км). Согласно условию задачи это расстояние должно быть в 4 раза больше того, которое турист проехал на поезде за 6 ч. Проверим это, разделив 1344 на 336. Действительно, $1344 : 336 = 4$. Следовательно, если найденный результат подставить в условие задачи, то противоречий с другими данными, а именно отношением «быть больше в 4 раза», не возникает. Значит, задача решена верно.

Заметим, что при использовании данного приема проверяются все отношения, имеющиеся в задаче, и если устанавливается, что противоречия не возникает, то делают вывод о том, что задача решена верно.

2. Решение задачи другим способом.

Пусть при решении задачи каким-то способом получен некоторый результат. Если ее решение другим способом приводит к тому же результату, то можно сделать вывод о том, что задача была решена верно.

Заметим, что если задача решена первоначально арифметическим способом, то правильность ее решения можно проверить, решив задачу алгебраическим методом.

Не следует также думать, что без проверки нет решения текстовой задачи. Правильность решения обеспечивается прежде всего четкими и логичными рассуждениями на всех других этапах работы над задачей.

5. Моделирование в процессе решения текстовых задач

Рассматривая процесс решения текстовой задачи, мы неоднократно использовали термин «модель», «моделирование». Это не случайно. Во всех науках модели выступают как мощное орудие познания. Реальные объекты и процессы бывают столь многогранны и сложны, что лучшим способом их изучения часто является построение и исследование модели, отображающей лишь какую-то грань реальности и потому более простую, чем эта реальность.

Ранее мы установили, что текстовая задача – это словесная модель некоторого явления (ситуации, процесса). Чтобы решить такую задачу, надо перевести ее на язык математических действий, т.е. построить ее математическую модель.

Вообще, *математическая модель* – *это описание какого-либо реального процесса на математическом языке.*

Математической моделью текстовой задачи является **выражение** (либо запись по действиям), если задача решается арифметическим методом, и **уравнение** (либо система уравнений), если задача решается алгебраическим методом.

В процессе решения задачи четко выделяются три этапа математического моделирования:

I этап – это перевод условий задачи на математический язык; при этом выделяются необходимые для решения данные и искомые и математическими способами описываются связи между ними;

II этап – внутримодельное решение (т.е. нахождение значения выражения, выполнение действий, решение уравнения);

III этап – интерпретация, т.е. перевод полученного решения на тот язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Проиллюстрируем сказанное на примере решения алгебраическим методом следующей задачи: «В одном вагоне электропоезда было пассажиров в 2 раза больше, чем в другом. Когда из первого вагона вышли 3 человека, а во второй вагон вошли 7 человек, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Сколько пассажиров было в каждом вагоне первоначально?»

Обозначим через x первоначальное число пассажиров во втором вагоне. Тогда число пассажиров в первом вагоне – $2x$. Когда из первого вагона вышли 3 человека, в нем осталось $2x - 3$ пассажира. Во второй вагон вошли 7 человек, значит, в нем стало $x + 7$ пассажиров. Так как в обоих вагонах пассажиров стало поровну, то можно записать, что $2x - 3 = x + 7$. Получили уравнение – это математическая модель данной задачи.

Следующий этап – решение полученного уравнения вне зависимости от того, что в нем обозначает переменная x: переносим в левую часть члены уравнения, содержащие x, а в правую – не содержащие x, причем у переносимых членов знаки меняем на противоположные: $2x - x = 7 + 3$. Приводим подобные члены и получаем, что $x = 10$.

Последний, третий этап – используем полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи: во втором вагоне было первоначально 10 человек, а в первом – 20 $(10 \cdot 2 = 20)$.

Наибольшую сложность в процессе решения текстовой задачи представляет перевод текста с естественного языка на математический, т.е. I этап математического моделирования. Чтобы облегчить эту процедуру, строят вспомогательные модели – схемы, таблицы и др. Тогда процесс решения задачи можно рассматривать как переход от одной модели к другой: от словесной модели реальной ситуации, представленной в задаче, к вспомогательной (схемы, таблицы, рисунки и т.д.); от нее – к математической, на которой и происходит решение задачи.

Такой подход к процессу решения задачи разделяют и психологи. Они считают, что процесс решения задачи есть сложный процесс поиска системы моделей и определенной последовательности перехода от одного уровня моделирования к другому, более обобщенному, что решение задачи человеком есть процесс ее переформулирования. При этом используется такая операция мышления, как анализ через синтез, когда объект в процессе мышления включается во все новые связи и в силу этого выступает во все новых качествах. Главным средством переформулирования является моделирование.

Прием моделирования заключается в том, что для исследования какого-либо объекта (в нашем случае текстовой задачи) выбирают (или строят) другой объект, в каком-то отношении подобный тому, который исследуют. Построенный новый объект изучают, с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результат переносят на первоначальный объект.

Модели бывают разные, и поскольку в литературе нет единообразия в их названиях, уточним терминологию, которую будем использовать в дальнейшем.

Все модели можно разделить на схематизированные и знаковые по видам средств, используемых для их построения.

Схематизированные модели, в свою очередь, делятся на вещественные и графические в зависимости от того, какое действие они обеспечивают. Вещественные (или предметные) модели текстовых задач обеспечивают физическое действие с предметами. Они могут строиться из каких-либо предметов (пуговиц, спичек, бумажных полосок и т.д.), они могут быть представлены разного рода инсценировками сюжета задач. К этому виду моделей причисляют и мысленное воссоздание реальной ситуации, описанной в задаче, в виде представлений.

Графические модели используются, как правило, для обобщенного, схематического воссоздания ситуации задачи. К графическим следует отнести следующие виды моделей:

1) рисунок;
2) условный рисунок;
3) чертеж;
4) схематичный чертеж (или просто схема).

Разъясним суть этих моделей на примере задачи: «Лида нарисовала 4 домика, а Вова на 3 домика больше. Сколько домиков нарисовал Вова?»

Рисунок в качестве графической модели этой задачи имеет вид (рис. 40).

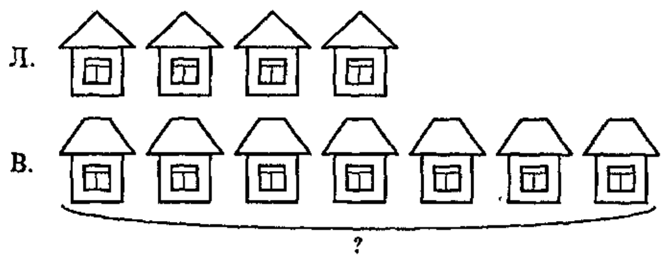


Рис. 40

Условный рисунок может быть таким, как на рисунке 41.

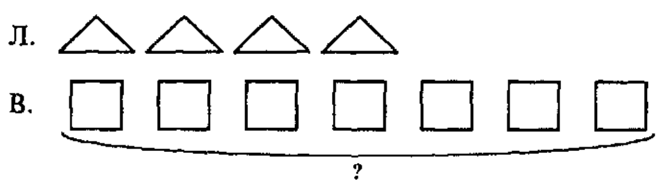


Рис. 41

Чертеж как графическая модель выполняется при помощи чертежных инструментов с соблюдением заданных отношений (рис. 42).

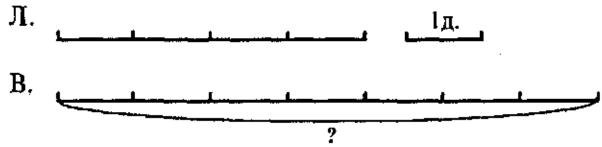


Рис. 42

Схематический чертеж (схема) может выполняться от руки, на нем указываются все данные и искомые (рис. 43).

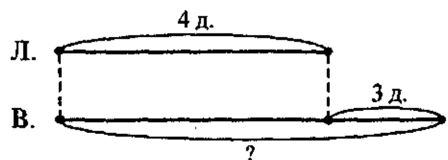


Рис. 43

Знаковые модели могут быть выполнены как на естественном, так и на математическом языке. К знаковым моделям, выполненным на естественном языке, можно отнести краткую запись задачи, таблицы. Например, краткая запись задачи о домиках Лиды и Вовы может быть такой:

Л. – 4 д.

В. – ?, *на 3 д. больше, чем*

Таблица как вид знаковой модели используется главным образом тогда, когда в задаче имеется несколько взаимосвязанных величин, каждая из которых задана одним или несколькими значениями. Пример такой таблицы см. на с. 113.

Знаковыми моделями текстовых задач, выполненными на математическом языке, являются: выражение, уравнение, система уравнений, запись решения задачи по действиям. Поскольку на этих моделях происходит решение задачи, их называют *решающими моделями*. Остальные модели, все схематизированные и знаковые, выполненные на естественном языке, – это *вспомогательные модели*, которые обеспечивают переход от текста задачи к математической модели.

Не следует думать, что всякая краткая запись или чертеж, выполненные для данной задачи, являются ее моделями. Так как модель – это своеобразная копия задачи, то на ней должны быть представлены *ве ее объекты, все отношения между ними, указаны требования.*

Для большинства текстовых задач приходится строить различны вспомогательные модели. С одной стороны, эти модели представляю собой результат анализа задачи, но с другой – построение таких мо делей организует и направляет детальный и глубокий анализ задачи.

Рассмотрим процесс решения арифметическим методом текстово задачи о пассажирах в двух вагонах.

Предварительный анализ задачи позволяет выделить ее объекты – это пассажиры в двух вагонах поезда. О них известно, что:

1) В первом вагоне в 2 раза больше пассажиров, чем во втором.
2) Из первого вагона вышли 3 пассажира.
3) Во второй вошли 7 пассажиров.
4) В первом и втором вагонах пассажиров стало поровну.

В задаче два требования:

1) Сколько пассажиров было первоначально в первом вагоне?
2) Сколько пассажиров было первоначально во втором вагоне?

Построим графическую модель данной задачи в виде схематического чертежа (рис. 44).

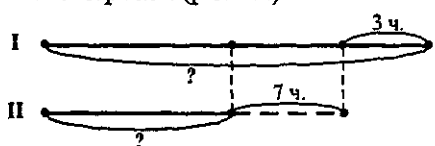


Рис. 44

По схеме сразу видно, что математическая модель данной задачи имеет вид:

$7 + 3$ – это число пассажиров во II вагоне, а $(7 + 3)\cdot 2$ – это число пассажиров в I вагоне.

Произведя вычисления, получаем ответ на вопрос задачи: во II вагоне было 10 пассажиров, а в I – 20 пассажиров.

Упражнения

1. Используя материал данного параграфа, заполните следующую таблицу при условии, что решение задачи (РЗ) выполняется арифметическим методом.

Название этапа РЗ	Цель этапа	Приемы выполнения этапа
Анализ задачи		
Поиск плана решения		
Осуществление плана решения		
Проверка		

2. *Выполните анализ нижеприведенных задач, используя различные приемы:*

а) Ученик купил тетрадей в клетку в 3 раза больше, чем тетрадей в линейку, причем их было на 18 больше, чем тетрадей в линейку. Сколько всего тетрадей купил ученик?

б) В трех классах всего 83 учащихся. В первом классе на 4 ученика больше, чем во втором, и на 3 меньше, чем в третьем. Сколько учеников в каждом классе?

в) Мальчики полили 8 яблонь и 4 сливы, принеся 140 ведер воды. Сколько ведер воды вылили под яблони, а сколько под сливы, если на полив одной яблони уходит воды в 3 раза больше, чем на полив одной сливы?

3. Выполните поиск плана решения арифметическим методом задачи а) из упражнения 2 по модели, а поиск плана решения задачи в) по тексту.

4. Запишите решение задачи из упражнения 2 по действиям с пояснением.

5. Какие из задач упражнения 2 вы можете решить различными арифметическими способами?

6. Каким образом можно проверить правильность найденного результата для задачи а) из упражнения 2?

7. Решите арифметическим методом задачи, выделяя этапы решения и приемы их выполнения:

а) Ручка в два раза дороже карандаша, а резинка в три раза дешевле карандаша. Ручка, карандаш и резинка стоят вместе 4000 р. Сколько стоит резинка?

б) Сын на 24 года младше мамы, а папа на 3 года старше мамы. Сколько лет папе, если сыну 10 лет?

в) Один кусок проволоки на 54 м длиннее другого. После того как от каждого из кусков отрезали по 12 м, второй кусок оказался в 4 раза короче первого. Найдите первоначальную длину каждого куска проволоки.

8. Дана задача: «Два велосипедиста одновременно выехали навстречу друг другу из двух поселков, расстояние между которыми 76 км. Через 2 ч они встретились. Какова скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость одного из них на 3 км/ч меньше другого?»

Сравните разные способы ее решения.

1 способ	2 способ
1) $76:2 = 38$ (км/ч)	1) $3 \cdot 2 = 6$ (км)
2) $38 - 3 = 35$ (км/ч)	2) $76 - 6 = 70$ (км)
3) $35:2 = 17{,}5$ (км/ч)	3) $70:2 = 35$ (км)
4) $17{,}5 + 3 = 20{,}5$ (км/ч)	4) $35:2 = 17{,}5$ (км/ч)
	5) $17{,}5 + 3 = 20{,}5$ (км/ч)

При каком способе рассуждения проще?

32. Решение задач «на части»

Само название вида задач говорит о том, что рассматриваемые в них величины состоят из частей. В некоторых из них части представлены явно, в других эти части надо суметь выделить, приняв подходящую величину за 1 часть и определив, из скольких таких частей состоят другие величины, о которых идет речь в задаче.

При решении таких задач арифметическим методом чаще всего используют вспомогательные модели, выполненные с помощью отрезков или прямоугольников.

Задача 1. Для варки варенья из вишни на 2 части ягод берут 3 части сахара. Сколько сахара надо взять на 10 кг ягод?

Решение. В задаче речь идет о массе ягод и массе сахара, необходимых для варки варенья. Известно, что всего ягод 10 кг и что на 2 части ягод надо брать 3 части сахара. Требуется найти массу сахара, чтобы сварить варенье из 10 кг ягод.

Изобразим при помощи отрезка данную массу ягод (рис. 45). Тогда половина этого отрезка представляет собой массу ягод, которая при-

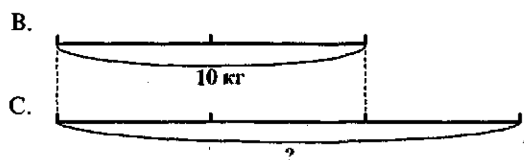


Рис. 45

ходится на 1 часть. Сахара, по условию задачи, надо 3 таких части. Запишем решение по действиям с пояснением:

1) $10:2 = 5$ (кг) – столько килограммов ягод приходится на каждую часть;

2) $5 \cdot 3 = 15$ (кг) – столько надо взять сахара.

Вспомогательную модель к данной задаче можно было выполнить при помощи прямоугольников (рис. 46).

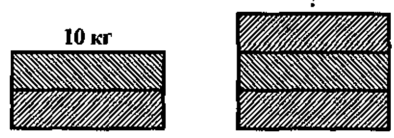


Рис. 46

Задача 2. В первой пачке было на 10 тетрадей больше, чем во второй. Всего было 70 тетрадей. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

Решение. В задаче рассматриваются две пачки тетрадей. Всего тетрадей 70. В одной пачке тетрадей на 10 больше, чем во второй. Требуется узнать, сколько тетрадей было в каждой пачке.

Изобразим при помощи отрезка количество тетрадей во второй пачке. Тогда тетради в первой пачке можно представить в виде отрезка, который больше второго (рис. 47). По чертежу видно, что если тетради

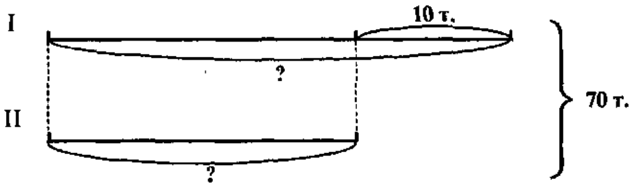


Рис. 47

во второй пачке составляют 1 часть всех тетрадей, то тетради в первой составляют также 1 часть и еще 10 тетрадей.

Если эти 10 тетрадей убрать из первой пачки, то в пачках тетрадей станет поровну – столько, сколько во второй пачке.

Запишем решение задачи по действиям с пояснением.

1) $70-10 = 60$ (тетр.) – столько тетрадей приходится на 2 равные части, или столько было бы тетрадей в двух пачках, если бы их было поровну – столько, сколько во второй пачке.

2) $60:2 = 30$ (тетр.) – столько тетрадей приходится на 1 часть, или столько тетрадей было во второй пачке.

3) $30+10 = 40$ (тетр.) – столько тетрадей было в первой пачке.

Вспомогательная модель подсказывает и второй способ решения данной задачи. Если за 1 часть принять тетради в первой пачке, то чтобы во второй стало столько же, надо к ней добавить 10 тетрадей. И тогда решение будет таким:

1) $70+10 = 80$ (тетр.)

2) $80:2 = 40$ (тетр.)

3) $40-10 = 30$ (тетр.)

Существует и третий арифметический способ решения данной задачи. Разделим 10 тетрадей пополам и одну половину оставим к первой пачке, а другую добавим во вторую. Тогда тетрадей в пачках станет поровну и можно, разделив 70 на 2 равные части, узнать, сколько тетрадей в каждой такой пачке, а затем их первоначальное количество в каждой пачке.

1) $10:2 = 5$ (тетр.) – столько тетрадей надо переложить из первой пачки во вторую, чтобы в них тетрадей стало поровну.

2) $70:2 = 35$ (тетр.) – столько тетрадей в каждой пачке, если из первой переложить во вторую 5 тетрадей.

3) 35+5 = 40 (тетр.) – столько тетрадей в первой пачке.

4) 35–5 = 30 (тетр.) – столько тетрадей во второй пачке.

Задача 3. Сумма двух чисел 96, а разность 18. Найдите эти числа.

Решение. В этой задаче требуется найти два числа по их сумме и разности. Так как разность искомых чисел равна 18, то одно число больше другого на 18. Получаем задачу, аналогичную задаче 2: «Одно число больше другого на 18. Сумма чисел равна 96. Найти эти числа». Решить ее можно тремя арифметическими способами.

Задача 4. В двух кусках ткани одинаковое количество материи. После того как от одного куска отрезали 18 м, а от другого 25 м, в первом куске осталось вдвое больше ткани, чем во втором. Сколько метров ткани было в каждом куске первоначально?

Решение. Объекты задачи – два куска ткани одинаковой длины. От первого отрезали 18 м, от второго – 25 м. После этого в первом осталось вдвое больше ткани, чем во втором. Требование задачи – найти первоначальное количество метров ткани в каждом куске.

Изобразим куски ткани при помощи отрезков одинаковой длины, а затем покажем на них то количество ткани, которое отрезали и которое осталось. Если количество ткани, которое осталось во втором куске, – это 1 часть, то количество оставшейся ткани в первом куске – это 2 таких части. По чертежу (рис. 48) видно, что на 1 часть приходится количество ткани, которое легко найти. Запишем найденное решение по действиям:

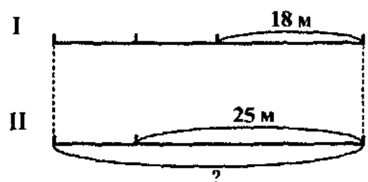


Рис. 48

1) 25–18 = 7 (м) – на столько больше ткани отрезали от второго куска, или количество ткани, которое осталось во втором куске

2) 7+25 = 32 (м) – столько ткани было первоначально во втором куске (и, следовательно, в первом) куске.

Упражнения

1. Изобразите при помощи отрезков ситуации:

а) купили p кг яблок, а груш на t кг больше;

б) купили p кг яблок, а груш в 2 раза больше.

Какими могут быть требования к данным ситуациям? Для каждого случая постройте модель и обозначьте на ней требования.

2. Требуется смешать 3 части песка и 2 части цемента. Сколько цемента и песка в отдельности надо взять, чтобы получить 30 кг смеси?

15-3=12

3. Установите соответствие между вспомогательными моделями (рис. 49) и следующими задачами; используя модели, решите задачи:

а) В двух пакетах было 15 яблок. Когда из одного пакета взяли 3 яблока, в нем осталось в 2 раза меньше яблок, чем в другом. Сколько яблок было в каждом пакете?

б) В трех пакетах лежит 20 яблок, причем в одном пакете их в 2 раза меньше, чем в каждом из двух других. Сколько яблок в каждом пакете?

в) У двух мальчиков было 8 яблок. Когда один съел одно яблоко, а другой – 3 яблока, у них осталось яблок поровну. Сколько яблок было у каждого?

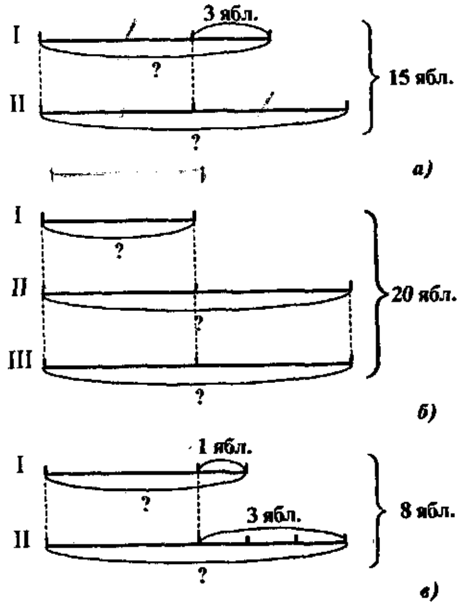


Рис. 49

4. Решите следующие задачи, построив на этапе анализа вспомогательные модели; решение запишите по действиям с пояснением:

а) Мама дала трем девочкам 12 конфет и предложила разделить их так, чтобы младшая получила в 3 раза, а средняя в 2 раза больше старшей. Сколько конфет достанется каждой?

б) На двух тарелках лежало 9 яблок. Когда с одной тарелки взяли одно яблоко, то на этой тарелке осталось яблок в 3 раза больше, чем на другой. Сколько яблок было на каждой тарелке?

в) У моего брата было в 6 раз больше орехов, чем у меня. После того как он отдал 10 орехов сестре, у нас орехов стало поровну. Сколько орехов было у меня и у брата первоначально?

г) Полсотни яблок разложили в корзину и два пакета. В корзину положили на 14 яблок больше, чем в каждый пакет. Сколько яблок в корзине и в пакете?

д) Школьник прочитал 18 страниц за три дня. Если бы он в первый день прочитал на одну страницу больше, а во второй день на 4 страницы меньше, то каждый день он читал бы поровну. По сколько страниц читал школьник каждый день?

5. Постройте вспомогательные модели и с их помощью найдите решения следующих задач:

а) На одной полке на 6 книг больше, чем на другой. Сколько книг нужно переложить с одной полки на другую, чтобы книг стало поровну?

б) Если с одной полки переложить на другую 6 книг, то на обеих полках книг будет поровну. На сколько книг на одной полке больше, чем на другой?

в) На одной полке на 6 книг больше, чем на другой. На сколько книг будет больше на одной полке, чем на другой, если с первой полки переложили на другую 10 книг?

г) На первой полке на 6 книг больше, чем на второй. На сколько книг будет на первой полке больше, если со второй полки переложить на первую 10 книг?

6. Поиск плана решения проведите по вспомогательной модели; решение запишите по действиям; выполните проверку найденного решения:

а) В двух бидонах 28 л краски. Если из одного взять 3 л, а в другой добавить 2 л, то в первом станет на 7 л краски больше, чем во втором. Сколько краски в каждом бидоне?

б) На складе в три раза больше муки, чем в магазине. Если со склада взять 850 т муки, а магазином будет продано 50 т муки, то и на складе, и в магазине муки останется поровну. Сколько муки на складе и сколько в магазине?

в) У Наташи на 15 открыток больше, чем у Сережи. Детям подарили еще по 6 открыток. У Наташи стало в 2 раза больше открыток, чем у Сережи. Сколько открыток было у каждого первоначально?

7. Решите различными арифметическими способами:

а) В двух книжных шкафах было 1536 книг. Когда из одного взяли 156 книг, а из другого в три раза больше, то книг в шкафу стало поровну. Сколько книг было в каждом шкафу первоначально?

б) Площадь земли, засеянная пшеницей, в 6 раз больше площади, засеянной ячменем, а площадь, засеянная рожью, в 3 раза меньше площади, засеянной пшеницей. Сколько гектаров земли засеяно каждой культурой, если пшеницей засеяно на 480 га больше, чем рожью?

33. Решение задач на движение

Движение является темой для самых разнообразных задач, в том числе и для задач на части. Но наряду с этим существует и самостоятельный тип задач на движение. Он объединяет такие задачи, которые решаются на основании зависимости между тремя величинами, характеризующими движение: скоростью, расстоянием и временем. Во всех случаях речь идет о равномерном прямолинейном движении.

Итак, движение, рассматриваемое в текстовых задачах, характеризуют три величины: пройденный путь (s), скорость (v), время (t); основное отношение (зависимость) между ними: $s = vt$.

Рассмотрим особенности решения основных видов задач на движение.

Задачи на встречное движение двух тел

Пусть движение первого тела характеризуется величинами s_1, v_1, t_1; движение второго – s_2, v_2, t_2. Такое движение можно представить на схематическом чертеже (рис. 50):

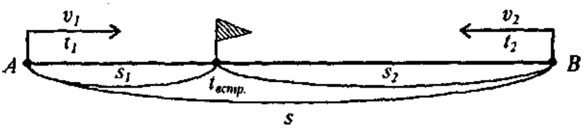


Рис. 50

Если два объекта начинают движение одновременно навстречу друг другу, то каждое из них с момента выхода и до встречи затрачивает одинаковое время, т. е. $t_1 = t_2 = t_{встр.}$.

Расстояние, на которое сближаются движущиеся объекты за единицу времени, называется скоростью сближения, т. е. $v_{сбл.} = v_1 + v_2$.

Все расстояние, пройденное движущимися телами при встречном движении, может быть подсчитано по формуле: $s = v_{сбл.} \cdot t_{встр.}$.

Задача 1. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 18 км. Скорость одного из них 5 км/ч, а другого – 4 км/ч. Через сколько часов они встретились?

Решение. В задаче рассматривается движение навстречу друг другу двух пешеходов. Один идет со скоростью 5 км/ч, а другой – 4 км/ч. Путь, который они должны пройти, 18 км. Требуется найти время, через которое они встретятся, начав движение одновременно. Вспомогательные модели, если они нужны, могут быть разными – схематический чертеж (рис. 51) *или таблица*.

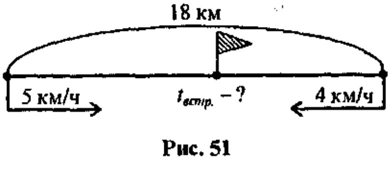


Рис. 51

	s	v	t
I	? } 18 км	5 км/ч	? } одинаковое
II	?	4 км/ч	?

Поиск плана решения в данном случае удобно вести, рассуждая от данных к вопросу. Так как скорости пешеходов известны, можно найти их скорость сближения. Зная скорость сближения пешеходов и все расстояние, которое им надо пройти, можем найти время, через которое пешеходы встретятся. Запишем решение задачи по действиям:

1) 5 + 4 = 9 (км/ч)

2) 18 : 9 = 2 (ч)

Таким образом, пешеходы встретятся через 2 ч от начала движения.

Задача 2. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 600 км, и через 5 ч встретились. Один их них ехал быстрее другого на 16 км/ч. Определите скорости автомобилей.

Решение. В задаче рассматривается движение навстречу друг другу двух автомобилей. Известно, что движение они начали одновременно и встретились через 5 часов. Скорости автомобилей различны – один ехал быстрее другого на 16 км/ч. Путь, который проехали автомобили – 600 км. Требуется определить скорости движения.

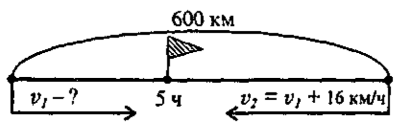


Рис. 52

	s	v	t
I	? } 600 км	?	5 ч
II	?	? на 16 км/ч больше	5 ч

Вспомогательные модели, если они нужны, могут быть различными: схематический чертеж (рис. 52) или таблица.

Поиск плана решения задачи будем вести, рассуждая от данных к вопросу. Так как известно все расстояние и время встречи, можно найти скорость сближения автомобилей. Затем, зная, что скорость одного на 16 км/ч больше скорости другого, можно найти скорости автомобилей. При этом можно воспользоваться вспомогательной моделью, приведенной на рисунке 53.

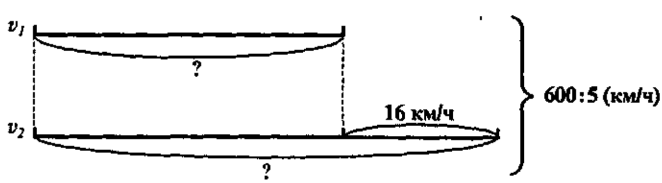


Рис. 53

Запишем решение задачи по действиям с пояснением:

1) 600 : 5 = 120 (км/ч) – это скорость сближения автомобилей.

2) 120 – 16 = 104 (км/ч) – это скорость сближения, если бы скорости автомобилей были одинаковыми и равными скорости первого.

3) 104 : 2 = 52 (км/ч) – скорость первого автомобиля.

4) 52 + 16 = 68 (км/ч) – скорость второго автомобиля.

Есть и другие арифметические способы решения данной задачи, вот два из них.

1) $600:5 = 120$ (км/ч)	1) $16 \cdot 5 = 80$ (км)
2) $120 + 16 = 136$ (км/ч)	2) $600 - 80 = 520$ (км)
3) $136:2 = 68$ (км/ч)	3) $520:2 = 260$ (км)
4) $68 - 16 = 52$ (км/ч)	4) $260:5 = 52$ (км/ч)
	5) $52 + 16 = 68$ (км/ч)

Дайте устные пояснения к выполненным действиям и попытайтесь найти другие способы решения данной задачи.

Задачи на движение двух тел в одном направлении

Среди них следует различать два типа задач:

1) движение начинается одновременно из разных пунктов;

2) движение начинается в разное время из одного пункта.

Рассмотрим случай, когда движение двух тел начинается одновременно в одном направлении из разных пунктов, лежащих на одной прямой. Пусть движение первого тела характеризуется величинами s_1, v_1, t_1, а движение второго – s_2, v_2, t_2.

Такое движение можно представить на схематическом чертеже (рис. 54):

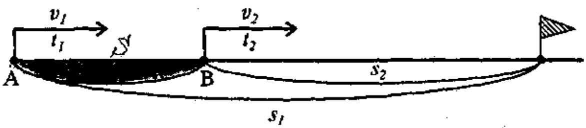


Рис. 54

Если при движении в одном направлении первое тело догоняет второе, то $v_1 > v_2$. Кроме того, за единицу времени первый объект приближается к другому на расстояние $v_1 - v_2$. Это расстояние называют скоростью сближения: $v_{сбл.} = v_1 - v_2$.

Расстояние s, представляющее длину отрезка AB, находят по формулам:

$$s = s_1 - s_2 \quad \text{и} \quad s = v_{сбл.} \cdot t_{встр.}.$$

Задача 3. Из двух пунктов, удаленных друг от друга на 30 км, выехали одновременно в одном направлении два мотоциклиста. Скорость одного – 40 км/ч, другого – 50 км/ч. Через сколько часов второй мотоциклист догонит первого?

Решение. В задаче рассматривается движение двух мотоциклистов. Выехали они одновременно из разных пунктов, находящихся на расстоянии 30 км. Скорость одного 40 км/ч, другого – 50 км/ч. Требуется узнать, через сколько часов второй мотоциклист догонит первого.

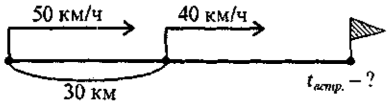


Рис. 55

	s	v	t
I	? на 30 км больше	50 км/ч	? одинаковое
II	?	40 км/ч	?

Вспомогательные модели, есл они нужны, могут быть разными схематический чертеж (рис. 55) ил таблица.

Сравнение скоростей мотоцик листов говорит о том, что в тече ние часа первый мотоциклист при ближается ко второму на 10 км Расстояние, которое ему надо пройти до встречи со вторым, на 30 км больше, чем расстояние, ко торое за такое же время пройдет второй мотоциклист. Поэтому первому потребуется столько времени, сколько раз 10 км укладываются в 30 км. Запишем решение задачи по действиям:

1) 50 – 40 = 10 (км/ч) – скорость сближения мотоциклистов

2) 30 : 10 = 3 (ч) – за это время первый мотоциклист догонит второго.

Наглядно этот процесс представлен на рисунке 56, где единичный отрезок изображает расстояние, равное 10 км.

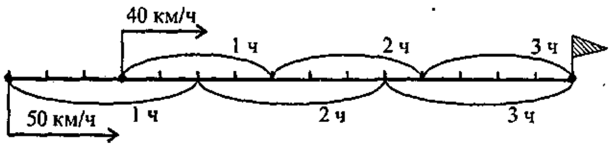


Рис. 56

Задача 4. Всадник выезжает из пункта А и едет со скоростью 12 км/ч; в это же время из пункта В, отстоящего от А на 24 км, вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Оба движутся в одном направлении. На каком расстоянии от В всадник догонит пешехода?

Решение. В задаче рассматривается движение в одном направлении всадника и пешехода. Движение началось одновременно из разных пунктов, расстояние между которыми 24 км, и с разной скоростью: у всадника – 12 км/ч, у пешехода – 4 км/ч. Требуется узнать расстояние от пункта, из которого вышел пешеход, до момента встречи всадника и пешехода.

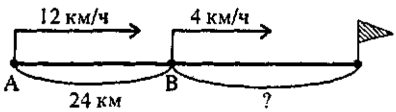


Рис. 57

Вспомогательные модели: схематический чертеж (рис. 57) или таблица.

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти время, которое будет находиться в пути пешеход или всадник, – время их движения до встречи одинаковое. Как найти это время, подробно рассказано в предыдущей задаче. Поэтому, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо выполнить следующие действия:

	s	v	t
В.	? на 24 км больше	12 км/ч	? одинаковое
П.	?	4 км/ч	? одинаковое

1) 12 – 4 = 8 (км/ч) – скорость сближения всадника и пешехода.

2) 24:8 = 3 (ч) – время, через которое всадник догонит пешехода

3) 4·3 = 12 (км) – расстояние от В, на котором всадник догонит пешехода.

Задача 5. В 7 ч из Москвы со скоростью 60 км/ч вышел поезд. В 13 ч следующего дня в том же направлении вылетел самолет со скоростью 780 км/ч. Через какое время самолет догонит поезд?

Решение. В данной задаче рассматривается движение поезда и самолета в одном направлении из одного пункта, но начинается оно в разное время. Известны скорости поезда и самолета, а также время начала их движения. Требуется найти время, через которое самолет догонит поезд.

Из условия задачи следует, что к моменту вылета самолета поезд прошел определенное расстояние. И если его найти, то данная задача становится аналогичной задаче 3, рассмотренной выше.

Чтобы найти расстояние, которое прошел поезд до момента вылета самолета, надо подсчитать, сколько времени находился в пути поезд. Умножив время на скорость поезда, получим расстояние, пройденное поездом до момента вылета самолета. А дальше как в задаче 3.

1) 24 – 7 = 17 (ч) – столько времени был в пути поезд в тот день, когда он вышел из Москвы.

2) 17 + 13 = 30 (ч) – столько времени был в пути поезд до момента вылета самолета.

3) 60·30 = 1800 (км) – путь, пройденный поездом до момента вылета самолета.

4) 780 – 60 = 720 (км/ч) – скорость сближения самолета и поезда.

5) 1800:720 = $2\frac{1}{2}$ (ч) – время, через которое самолет догонит поезд.

Задачи на движение двух тел в противоположных направлениях

В таких задачах два тела могут начинать движение в противоположных направлениях из одной точки: а) одновременно; б) в разное время. А могут начинать свое движение из двух разных точек, находящихся на заданном расстоянии, и в разное время.

Общим теоретическим положением для них будет следующее: $v_{удал.} = v_1 + v_2$, где v_1 и v_2 соответственно скорости первого и второго тел, а $v_{удал.}$ – это скорость удаления, т.е. расстояние, на которое удаляются друг от друга движущиеся тела за единицу времени.

Задача 6. Два поезда отошли одновременно от одной станции в противоположных направлениях. Их скорости 60 км/ч и 70 км/ч. На каком расстоянии друг от друга будут эти поезда через 3 часа после выхода?

Решение. В задаче рассматривается движение двух поездов. Они выходят одновременно от одной станции и идут в противоположных направлениях. Известны скорости поездов (60 км/ч и 70 км/ч) и время их движения (3 ч). Требуется найти расстояние, на котором они будут находиться друг от друга через указанное время.

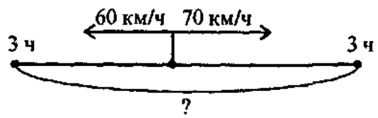


Рис. 58

	s	v	t
I	? } ?	60 км/ч	3 ч
II	?	70 км/ч	3 ч

Вспомогательные модели, если они нужны, могут быть такими: схематический чертеж (рис. 58) или таблица.

Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно найти расстояния, пройденные первым и вторым поездом за 3 ч, и полученные результаты сложить:

1) $60 \cdot 3 = 180$ (км)
2) $70 \cdot 3 = 210$ (км)
3) $180 + 210 = 390$ (км)

Можно решить эту задачу другим способом, воспользовавшись понятием скорости удаления:

1) $60 + 70 = 130$ (км/ч) – скорость удаления поездов
2) $130 \cdot 3 = 390$ (км) – расстояние между поездами через 3 ч.

Задача 7. От станции А отправился поезд со скоростью 60 км/ч. Через 2 ч с этой же станции в противоположном направлении вышел другой поезд со скоростью 70 км/ч. Какое расстояние будет между поездами через 3 ч после выхода второго поезда?

Решение. Эта задача отличается от задачи 6 тем, что движение поездов начинается в разное время. Вспомогательная модель задачи представлена на рис. 59. Решить ее можно двумя арифметическими способами.

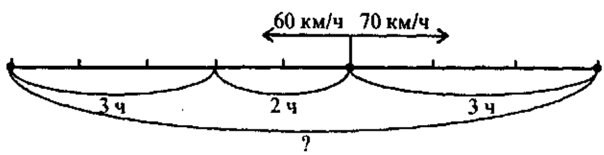


Рис. 59

1 способ

1) 2+3 = 5 (ч) – столько времени в пути был первый поезд.
2) 60·5 = 300 (км) – расстояние, которое за 5 ч прошел этот поезд.
3) 70·3 = 210 (км) – расстояние, которое прошел второй поезд.
4) 300+210 = 510 (км) – расстояние между поездами.

2 способ

1) 60+70 = 130 (км/ч) – скорость удаления поездов.
2) 130·3 = 390 (км) – расстояние, на которое удалились поезда за 3 ч.
3) 60·2 = 120 (км) – расстояние, пройденное первым поездом за 2 ч.
4) 390+120 = 510 (км) – расстояние между поездами.

Задачи на движение по реке

При решении таких задач различают: собственную скорость движущегося тела, скорость течения реки, скорость движения тела по течению и скорость движения тела против течения. Зависимость между ними выражается формулами:

$$v_{по\ теч.} = v_{соб.} + v_{теч.р.};$$

$$v_{пр.теч.} = v_{соб.} - v_{теч.р.};$$

$$v_{соб.} = \frac{v_{по\ теч.} + v_{пр.теч.}}{2}.$$

Задача 8. Расстояние 360 км катер проходит за 15 ч, если двигается против течения реки, и за 12 ч, если двигается по течению. Сколько времени потребуется катеру, чтобы проплыть 135 км по озеру?

Решение. В данном случае удобно все данные, неизвестные и искомое, записать в таблицу.

	s	v	t
по течению	360 км	?	12 ч
против течения	360 км	?	15 ч
по реке	135 км	?	?

Таблица подсказывает последовательность действий: найти сначала скорость движения катера по течению и против течения, затем, используя формулы, – собственную скорость катера и, наконец, время, за которое он проплывет 135 км по озеру:

1) 360:12 = 30 (км/ч) – скорость катера по течению реки.
2) 360:15 = 24 (км/ч) – скорость катера против течения реки.
3) 24+30 = 54 (км/ч) – удвоенная собственная скорость катера.
4) 54:2 = 27 (км/ч) – собственная скорость катера
5) 135:27 = 5 (ч) – время, за которое проплывет катер 135 км.

Решение задач, связанных с различными процессами (работа, наполнение бассейнов и др.)

Задача 9. Двум рабочим дано задание изготовить 120 деталей. Один рабочий изготавливает 7 деталей в час, а другой – 5 деталей в час. За сколько часов рабочие выполнят задание, работая вместе?

Решение. В задаче рассматривается процесс выполнения двумя рабочими задания по изготовлению 120 деталей. Известно, что один рабочий делает в час 7 деталей, а другой – 5. Требуется узнать время, за которое рабочие сделают 120 деталей, работая вместе. Чтобы найти ответ на это требование, надо знать, что процесс, о котором идет речь в задаче, характеризуется тремя величинами:

– общим количеством произведенных деталей – это результат процесса; обозначим его буквой K;

– количеством изготовленных деталей за единицу времени (это производительность труда или скорость протекания процесса); обозначим его буквой k;

– временем выполнения задания (это время протекания процесса); обозначим его буквой t.

Зависимость между данными величинами выражается формулой $K = kt$.

Чтобы найти ответ на вопрос задачи, т.е. время t, надо найти количество деталей, изготавливаемых рабочими за 1 ч при совместной работе, а затем разделить 120 деталей на полученную производительность. Таким образом, будем иметь:

$k = 7 + 5 = 12$ (деталей в час);

$t = 120 : 12 = 10$ (ч).

Задача 10. В одном резервуаре 380 м^3 воды, а в другом – 1500 м^3. В первый резервуар каждый час поступает 80 м^3 воды, а из второго каждый час выкачивают по 60 м^3 воды. Через сколько часов в резервуарах воды станет поровну?

Решение. В данной задаче рассматривается процесс заполнения водой одного резервуара и выкачивания воды из другого. Этот процесс характеризуется следующими величинами:

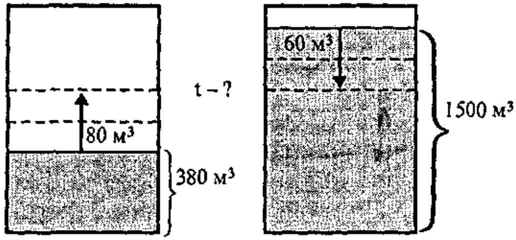


Рис. 60

– объемом воды в резервуарах; обозначим его буквой V;

– скоростью поступления (выкачивания) воды; обозначим ее буквой v;

– временем протекания процесса; обозначим его буквой t.

Зависимость между названными величинами выражается формулой $V = vt$.

Процесс, описанный в данной задаче, аналогичен движению двух объектов навстречу друг другу. Это можно наглядно представить, построив вспомогательную модель (рис. 60).

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти скорость «сближения» уровней воды в резервуарах и объем воды, при котором происходит выравнивание этих уровней, а затем разделить этот объем на скорость «сближения». Запишем решение задачи по действиям:

1) $80+60 = 140$ (м³);

2) $1500-380 = 1120$ (м³);

3) $1120:140 = 8$ (ч).

Чтобы убедиться в правильности полученного ответа, выполним проверку.

За 8 ч в первый резервуар поступит 640 м³ ($80 \cdot 8 = 640$), а из второго выкачают 480 м³ ($60 \cdot 8 = 480$). Тогда в первом воды будет 1020 м³ ($380+640 = 1020$), и во втором – столько же ($1500-480 = 1020$), что удовлетворяет условию задачи.

Упражнения

1. С противоположных концов катка длиной 180 м бегут навстречу друг другу два мальчика. Через сколько секунд они встретятся, если начнут бег одновременно и если один пробегает 9 м в секунду, а другой 6 м в секунду?

Объясните, используя условия данной задачи, смысл следующих выражений:

а) $9+6$; б) $180:9$; в) $180:6$; г) $180:(9+6)$.

Какое из этих выражений является решающей моделью данной задачи?

2. Запишите решение задачи в виде выражения:

а) Самолет пролетел за 2 ч a км. Сколько километров он пролетит за 5 ч?

б) Из двух городов, расстояние между которыми 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали легковой автомобиль и грузовик и встретились через t ч. Скорость легкового автомобиля v км/ч. Найдите скорость грузовика.

в) Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали автомобиль и мотоцикл и встретились через t ч. Найдите расстояние между городами, если скорость автомобиля v_1 км/ч, а скорость мотоцикла v_2 км/ч.

3. Два пассажира метро, начавшие одновременно один спуск, а другой подъем на движущихся лестницах метро, поравнялись через 30 с. Вычислите длину лестницы, если скорость ее движения 1 м/с.

Решите задачу двумя арифметическими способами.

4. Расстояние между городами А и В 520 км. В 8 ч из А в В выех… автобус со скоростью 56 км/ч, а в 11 ч того же дня из В в А выех… грузовой автомобиль со скоростью 32 км/ч. На каком расстоянии … А встретятся машины?

Решение задачи запишите по действиям и в виде выражения.

5. Из двух городов, расстояние между которыми 960 км, выш… одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 8… после выхода. Найдите скорость каждого поезда, если один проходи… в час на 16 км больше другого.

Объясните, используя условия данной задачи, смысл следующи… выражений:

а) $16\cdot 8$;
б) $960-16\cdot 8$;
в) $(960-16\cdot 8):2$;
г) $(960-16\cdot 8):2:8$;
д) $(960-16\cdot 8):2:8+16$;
е) $(960-16\cdot 8):8$;
ж) $(960-16\cdot 8):8:2$.

Запишите решение данной задачи по действиям.

Дайте пояснения к каждому действию такого решения данной задачи:

1) $960:8 = 120$ (км/ч);
2) $120-16 = 104$ (км/ч);
3) $104:2 = 52$ (км/ч);
4) $52+16 = 68$ (км/ч).

6. Решите нижеприведенные задачи арифметическим методом; решение запишите по действиям с пояснениями.

а) Из А в В выехал мотоциклист, проезжавший в час 48 км. Через 45 мин из В в А выехал другой мотоциклист, скорость которого была 50 км/ч. Зная, что расстояние АВ равно 330 км, найдите, на каком расстоянии от В мотоциклисты встретятся.

б) Из двух городов, расстояние между которыми 484 км, выехали одновременно навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Через 4 ч расстояние между ними оказалось 292 км. Определите скорость велосипедиста и мотоциклиста, если скорость мотоциклиста в 3 раза больше скорости велосипедиста.

7. Установите, достаточно ли данных для ответа на требование задачи:

а) Из двух сел, расстояние между которыми 36 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились. Скорость одного пешехода 4 км/ч. С какой скоростью шел другой пешеход?

б) Расстояние между станциями 780 км. Одновременно навстречу друг другу с этих станций вышли два поезда и через 6 ч встретились. Найдите скорость каждого поезда, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

В случае если нельзя ответить на требование задачи, дополните ее условие недостающими данными и решите задачу.

8. Есть ли среди нижеприведенных задачи с лишними данными:

а) Расстояние между плотом и катером, которые движутся по реке навстречу друг другу, 52 км. Скорость плота 4 км/ч, а скорость катера 9 км/ч. Как изменится расстояние между ними через час?

б) Почтальон живет на расстоянии 24 км от почтового отделения. Путь от дома до почты он проехал за 3 ч на велосипеде со скоростью 8 км/ч, а обратный путь по той же дороге он проехал со скоростью 6 км/ч. На какой путь почтальон потратил меньше времени и на сколько часов?

В случае если в задаче есть лишние данные, то исключите их и решите получившуюся задачу.

9. Два теплохода отправились одновременно от пристани в одном и том же направлении. Скорость одного теплохода 25 км/ч, другого – 20 км/ч. Первый пришел к конечной остановке на 4 ч раньше, чем второй. Найдите расстояние между пристанью и конечной остановкой.

Постройте вспомогательную модель задачи, используя таблицу.

Объясните, используя условие данной задачи, смысл следующих выражений:

а) $20 \cdot 4$; б) $25-20$; в) $(20 \cdot 4):(25-20)$.

Есть ли среди этих выражений решающая модель задачи? Запишите решение задачи в виде выражения и найдите его значение.

Выполните проверку, решив задачу алгебраическим методом.

10. Решите следующие задачи арифметическим методом; решение запишите по действиям и выполните проверку:

а) Из двух городов, расстояние между которыми 260 км, одновременно выехали два поезда в одном направлении. Скорость шедшего впереди поезда 50 км/ч, а второго – 70 км/ч. Через какое время один поезд догонит другой?

б) Из пункта А выехал автобус со скоростью 40 км/ч и через 12 мин нагнал пешехода, который вышел из пункта В одновременно с началом движения автобуса из пункта А. Скорость пешехода 5 км/ч. Каково расстояние между пунктами А и В?

в) Скорость одного конькобежца на 2 м/с больше скорости другого. Если второй начнет движение на 20 с раньше первого, то первый, стартуя с того же места, что и второй, догонит его через 80 с. Определите скорости спортсменов.

11. Два самолета вылетели одновременно из одного города в два различных пункта. Кто из них долетит до места назначения быстрее, если первому из них нужно пролететь вдвое большее расстояние, но зато он летит в два раза быстрее, чем второй?

12. Решите задачи арифметическим методом, установив предварительно, о каких процессах в них идет речь, какие величины рассматриваются и в каких зависимостях они находятся:

а) Длина прямоугольного поля 1536 м, а ширина 625 м. Один тракторист может вспахать это поле за 16 дней, а другой за 12 дней. Какую площадь вспашут оба тракториста, работая вместе в течение 5 дней?

б) В мастерской было два куска ткани: один длиной 104 м, другой – 84 м. Из всей ткани сшили одинаковые платья, причем из первого куска получилось на 5 платьев больше, чем из второго. Сколько всего платьев сшили из этой ткани ?

в) Один экскаватор вынимает на 60 м^3 в час больше земли, чем другой. Оба экскаватора вынули вместе 10320 м^3 земли, причем первый работал 20 ч, а второй – 18 ч. С какой производительностью работал каждый экскаватор?

г) Два человека чистили картофель. Один очищал в минуту 2 картофелины, а второй – 3 картофелины. Вместе они очистили 400 штук. Сколько времени работал каждый, если второй проработал на 25 мин больше первого?

д) Бассейн вмещает 2700 м^3 воды и наполняется тремя трубами. Первая и вторая трубы вместе могут наполнить бассейн за 12 ч, а первая и третья наполняют его вместе за 15 ч. За сколько часов каждая труба в отдельности наполняет бассейн, если третья труба действует вдвое медленнее второй?

13. От двух пристаней, расстояние между которыми по реке 640 км, вышли одновременно навстречу друг другу два теплохода. Собственная скорость теплоходов одинакова. Скорость течения реки 2 км/ч. Теплоход, идущий по течению, за 9 ч проходит 198 км. Через сколько часов теплоходы встретятся?

Объясните, используя условия данной задачи, смысл следующих выражений:

а) $198:9$
б) $198:9-2$
в) $198:9-2-2$
г) $198:9+(198:9-4)$
д) $640:(198:9+(198:9-4))$

Есть ли среди этих выражений решающая модель данной задачи?

Запишите решение данной задачи по действиям с пояснениями и выполните проверку.

14. Решите следующие задачи арифметическим методом; решение запишите по действиям с пояснением:

а) На путь по течению реки моторная лодка затратила 6 ч, а на обратный путь – 10 ч. Скорость лодки в стоячей воде 16 км/ч. Какова скорость течения реки?

б) Собственная скорость моторной лодки в 8 раз больше скорости течения реки. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки, если, двигаясь по течению, лодка за 4 ч проплыла 108 км.

в) На школьных соревнованиях по плаванию один ученик проплыл некоторое расстояние по течению реки за 24 с и то же расстояние против течения за 40 с. Определите собственную скорость пловца, считая ее постоянной от начала и до конца заплыва, если скорость течения реки равна 0,25 м/с.

15. Есть ли среди следующих задач задачи с недостающими или избыточными данными:

а) Турист проехал поездом и на лошади 288 км, причем на лошади он проехал 48 км. Поездом он ехал 4 ч, а на лошади – 3 ч. С какой скоростью ехал турист на лошади, если скорость поезда 60 км/ч?

б) Турист проехал поездом и на лошади 288 км. Поездом он ехал 4 ч, а на лошади – 3 ч. С какой скоростью ехал турист на лошади?

в) Турист проехал поездом и на лошади 288 км. Поездом он ехал 4 ч, а на лошади – 3 ч. С какой скоростью ехал турист на лошади, если поезд шел со скоростью 60 км/ч?

34. Основные выводы § 5

Установили, что любая текстовая задача состоит из взаимосвязанных условий и требований.

Основными методами решения таких задач являются арифметический и алгебраический, а процесс решения задачи включает следующие основные этапы:

1) *анализ*;
2) поиск плана решения;
3) осуществление плана решения;
4) проверка найденного решения.

Рассмотрены некоторые *приемы* выполнения этих этапов. Главный прием – это моделирование. Прежде всего, решить текстовую задачу – это значит построить ее математическую модель (выражение или уравнение). Но чтобы облегчить поиск математической модели, нужны модели вспомогательные. Они могут быть графическими (рисунок, *условный рисунок*, чертеж, схематический чертеж), знаковыми (краткая запись, таблица) и др.

§6. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ

В обыденной жизни нам нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор всех возможных вариантов или подсчитывать их число. Задачи, требующие такого решения, называются *комбинаторными*.

С теоретико-множественной точки зрения решение комбинаторных задач связано с выбором из некоторого множества подмножеств, обладающих определенными свойствами, и упорядочением множеств. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой.*

Комбинаторика возникла в XVI веке и первоначально в ней рассматривались комбинаторные задачи, связанные в основном с азартными играми. В процессе изучения таких задач были выработаны некоторые общие подходы к их решению, получены формулы для подсчета числа различных комбинаций.

В настоящее время комбинаторика является одним из важных разделов математической науки. Ее методы широко используются для решения практических и теоретических задач. Установлены связи комбинаторики с другими разделами математики.

В начальном обучении математике роль комбинаторных задач постоянно возрастает, поскольку в них заложены большие возможности не только для развития мышления учащихся, но и для подготовки учащихся к решению проблем, возникающих в повседневной жизни.

Комбинаторные задачи в начальном курсе математики решаются, как правило, методом перебора. Для облегчения этого процесса нередко используются таблицы и графы. В связи с этим учителю начальных классов необходимы определенные умения и навыки решения комбинаторных задач. Прежде всего, он должен, решая несложные комбинаторные задачи, уметь грамотно осуществлять перебор возможных вариантов и при этом быть уверенным в том, что перебор осуществлен правильно. Учителю надо знать общие правила комбинаторики (в частности, правила суммы и произведения), некоторые виды комбинаций, число которых может быть подсчитано с помощью формул. Поэтому предложенный в данном пособии путь освоения способов решения комбинаторных задач состоит из нескольких этапов: сначала они решаются методом перебора и для записи возможных вариантов используются различные способы; затем появляются правила суммы и произведения и процесс решения комбинаторных задач несколько формализуется, и, наконец, рассматриваются некоторые виды комбинаций, а их число подсчитывается по формулам.

35. Правила суммы и произведения

В комбинаторике, которая возникла раньше теории множеств, правило нахождения числа элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств (см. п. 10) называют *правилом суммы* и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами (не такими, как a), то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m+k$ способами.

Задача 1. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин – четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе «либо яблоко, либо апельсин», то его, согласно правилу суммы, можно осуществить $5+4=9$ способами.

Правило нахождения числа элементов декартова произведения двух множеств (см. п. 11) называют в комбинаторике *правилом произведения* и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то пару (a, b) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Правило суммы и произведения, сформулированные для двух объектов, можно обобщить и на случай t объектов.

Задача 2. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать пару плодов, состоящую из яблока и апельсина?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин – четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе пары (яблоко, апельсин), то ее, согласно правилу произведения, можно выбрать $5 \cdot 4 = 20$ способами.

Задача 3. Сколько всего двузначных чисел можно составить из цифр 7, 4 и 5 при условии, что они в записи числа не повторяются?

Решение. Чтобы записать двузначное число, надо выбрать цифру десятков и цифру единиц. Согласно условию на месте десятков в записи числа может быть любая из цифр 7, 4 и 5. Другим словами, выбрать цифру десятков можно тремя способами. После того как цифра десятков определена, для выбора цифры единиц остаются две возможности, поскольку цифры в записи числа не должны повторяться. Так как любое двузначное число – это упорядоченная пара, состоящая из цифры десятков и цифры единиц, то ее выбор, согласно правилу произведения, можно осуществить $3 \cdot 2 = 6$ способами.

Задача 4. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 7, 4 и 5?

Решение. В данной задаче рассматриваются трехзначные числа, так как цифры в записи этих чисел могут повторяться, то цифру сотен, цифру десятков и цифру единиц можно выбрать тремя способами каждую. Поскольку запись трехзначного числа представляет собой упорядоченный набор из трех элементов, то, согласно правилу произведения, его выбор можно осуществить 27 способами, так как $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Задача 5. Сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и 3?

Решение. Запись четырехзначного числа представляет собой упорядоченный набор (кортеж) из четырех цифр. Первую цифру – цифру тысяч можно выбрать только одним способом, так как запись числа не может начинаться с нуля. Цифрой сотен может быть либо ноль, либо три, т.е. имеется два способа выбора. Столько же способов выбора имеется для цифры десятков и цифры единиц.

Итак, цифру тысяч можно выбрать одним способом, цифру сотен – двумя, цифру десятков – двумя, цифру единиц – двумя. Чтобы узнать, сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и 3, согласно правилу произведения, способы выбора каждой цифры надо перемножить: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Таким образом, имеем 8 четырехзначных чисел.

Задача 6. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 3, 6, 7 и 9, если каждая из них может быть использована в записи только один раз?

Решение. Так как запись числа не может начинаться с нуля, то цифру сотен можно выбрать пятью способами; выбор цифры десятков можно осуществить также пятью способами, поскольку цифры в записи числа не должны повторяться, а одна из шести данных цифр будет уже использована для записи сотен; после выбора двух цифр (для записи сотен и десятков) выбрать цифру единиц из данных шести можно четырьмя способами. Отсюда, по правилу произведения, получаем, что всего трехзначных чисел (из данных шести цифр) можно образовать 100: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

Упражнения

1. Школьники из Волгограда собрались на каникулы поехать в Москву, посетив по дороге Нижний Новгород. Из Волгограда в Нижний Новгород можно отправиться на теплоходе или поезде, а из Нижнего Новгорода в Москву – на самолете, теплоходе или автобусе. Сколькими различными способами могут ребята осуществить свое путешествие? Назовите все возможные варианты этого путешествия.

2. Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя цифры 3, 4, 5 и 6? Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя при записи числа каждую из указанных цифр только один раз? Запишите эти числа.

3. Девять школьников, сдавая экзамен по математике, русскому и английскому языку, получили отметки «4» и «5». Можно ли утверждать, что по крайней мере двое из них получили по каждому предмету одинаковые отметки?

4. Сколько трехзначных чисел можно составить из трех различных, не равных нулю цифр? Зависит ли результат от того, какие цифры взяты? Укажите какой-нибудь способ перебора трехзначных чисел, при котором ни одно число не может быть пропущено.

5. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись? Изменится ли решение этой задачи, если вместо цифры 4 будет дана цифра 0?

6. Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить, используя для записи цифры 1, 2, 3 и 4? Какова разность между самым большим и самым маленьким из них?

7. Сколько пятизначных чисел, первые (слева) три цифры которых 2, 3 и 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5? Изменится ли ответ в этой задаче, если цифры в записи числа не будут повторяться?

8. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4 составляют всевозможные пятизначные числа, причем так, что в записи каждого числа содержатся все данные цифры. Сколько можно составить таких чисел? Чему будет равна разность между наибольшим и наименьшим из полученных чисел?

9. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, можно записать, используя цифры 7, 4 и 5? Сколько среди них четных? Нечетных? Кратных 5?

36. Размещения и сочетания

Правила суммы и произведения – это общие правила решения комбинаторных задач. Кроме них в комбинаторике пользуются формулами для подсчета числа отдельных видов комбинаций, которые встречаются наиболее часто. Рассмотрим некоторые из них и прежде всего те, знание которых необходимо учителю начальных классов.

Используя цифры 7, 4 и 5, мы образовывали различные двузначные числа: 77, 74, 75, 47, 44, 45, 57, 54, 55. В записи этих чисел цифры повторяются.

С теоретико-множественной точки зрения запись любого двузначного числа – это кортеж длины 2. Записывая различные двузначные числа с помощью цифр 7, 4 и 5, мы по сути дела образовывали из данных трех цифр различные кортежи длины 2 с повторяющимися элементами. В комбинаторике такие кортежи называют *размещениями* с повторениями из трех элементов по два элемента.

Дадим определение размещения в общем виде.

Определение. ***Размещение с повторениями из k элементов по m элементов – это кортеж, составленный из m элементов k-элементного множества.***

Из определения следует, что два размещения из k элементов по m элементов отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Например, два двузначных числа из перечисленных выше (а это размещения из трех элементов по два) отличаются друг от друга либо составом элементов (74 и 75), либо порядком их расположения (74 и 47).

Относительно размещений часто возникает вопрос: «Сколько всевозможных размещений по m элементов каждое можно образовать из

k элементов данного множества?» Например, сколько всевозможных двузначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5?

Число всевозможных размещений с повторениями из k элементов по m элементов обозначают $\tilde{A}_k^m$ и подсчитывают по формуле $\boxed{\tilde{A}_k^m = k^m}$.

Выведем эту формулу.

Пусть в множестве X содержится k элементов. Будем образовывать из них различные кортежи по m элементов. Такие кортежи образуют множество $X \times X \times \ldots \times X$, содержащее m множителей. По правилу произведения

$$n(X \times X \times \ldots \times X) = \underbrace{n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots \cdot n(X)}_{m \text{ множителей}} = \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{m \text{ множителей}} = k^m.$$

Следовательно, $\tilde{A}_k^m = k^m$.

Пользуясь этой формулой, легко подсчитать, сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5. Так как речь идет о размещениях с повторениями из трех элементов по два, то $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Нередко встречаются задачи, в которых требуется подсчитать число кортежей длины m, образованных из k элементов некоторого множества, но при условии, что элементы в кортеже не повторяются. Такие кортежи называются размещениями без повторений из k элементов по m элементов.

Определение. ***Размещение без повторений из k элементов по m элементов – это кортеж, составленный из m неповторяющихся элементов множества, в котором k элементов.***

Число всевозможных размещений без повторений из k элементов по m элементов обозначают A_k^m и подсчитывают по формуле

$$A_k^m = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1).$$

Выведем эту формулу.

Пусть в множестве X содержится k элементов. Будем образовывать из них различные размещения без повторений из m элементов. Тогда выбор первого элемента таких кортежей можно осуществить k способами; если первый элемент выбран, то выбор второго элемента можно осуществить $k-1$ способом (так как после выбора первого элемента кортежа в множестве X остается $k-1$ элемент). Третий элемент размещения можно выбрать $k-2$ способами и т.д., m-й элемент можно выбрать $k-(m-1)$ способами. Но выбор упорядоченного набора из m элементов можно осуществить $k(k-1)$ ... $(k-m+1)$ способами. Значит, $A_k^m = \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1)}_{m \text{ множителей}}$.

Например, число двузначных чисел, записанных с помощью цифр 7, 4 и 5 так, что цифры в записи числа не повторяются, есть число размещений без повторений из трех элементов по два: $A_3^2 = 3\cdot(3-1) = 3\cdot 2 = 6$.

Задача 1. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5, так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение. В задаче рассматриваются размещения без повторений из трех элементов по три, и их число можно подсчитать по формуле:

$$A_3^3 = 3\cdot(3-1)\cdot(3-2) = 3\cdot 2\cdot 1 = 6.$$

Эти числа таковы: 745, 754, 475, 457, 547, 574.

Заметим, что в данном случае разные числа получаются в результате перестановки цифр. Поэтому размещения из k элементов по k элементов называют *перестановками из k элементов без повторений*.

Число перестановок без повторений из k элементов обозначают P_k и подсчитывают по формуле $\boxed{P_k = k!,}$ где $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k$ и $k!$ читают «k факториал». Считают, что $1! = 1$, $0! = 1$. Например, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$; $7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040$.

Из элементов множества $X = \{7, 4, 5\}$ можно образовывать не только кортежи различной длины, но и различные подмножества, например двухэлементные. В комбинаторике их называют сочетаниями без повторений из трех элементов по два элемента.

Определение. ***Сочетание без повторения из k элементов по m элементов – это m-элементное подмножество множества, содержащего k элементов.***

Два сочетания из k элементов по m элементов отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всевозможных сочетаний без повторений из k элементов по m элементов обозначают C_k^m. Как находить это число?

Обратимся сначала к примеру. Образуем различные двухэлементные подмножества из элементов множества $X = \{7, 4, 5\}$. Их будет три: $\{7, 4\}$, $\{7, 5\}$, $\{4, 5\}$. Из элементов каждого такого подмножества можно образовать $2!$ кортежей длины 2:

$$\begin{matrix} (7,4) & (7,5) & (4,5) \\ (4,7) & (5,7) & (5,4) \end{matrix}$$

Все полученные кортежи являются размещениями без повторения из трех элементов по два и их число равно $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$. Но, с другой стороны, это число равно произведению $2!\cdot C_3^2$. Значит, $A_3^2 = 2!\cdot C_3^2$, откуда $C_3^2 = \dfrac{A_3^2}{2!}$.

Докажем справедливость этой зависимости в общем виде, т.е., ч

$$C_k^m = \frac{A_k^m}{m!}.$$

Пусть в множестве X содержится k элементов. Образуем из них с четания без повторений по m элементов. Они будут представлять с бой m-элементные подмножества множества X. Всего таких подмн жеств будет C_k^m.

Из элементов каждого m-элементного подмножества можно образ вать $m!$ перестановок, т.е. кортежей длины m. В итоге получим $m!C_k^m$ кортежей длины m, образованных из k элементов множества X. Их чи ло равно A_k^m. Таким образом, $A_k^m = m! \cdot C_k^m$, откуда $C_k^m = \frac{A_k^m}{m!}$.

Конечно, применение формул облегчает подсчет числа возможны вариантов решений той или иной комбинаторной задачи. Однако чтобы воспользоваться формулой, необходимо определить вид соеди нений (комбинаций), о которых идет речь в задаче, что бывает сде лать не очень просто.

Выясним, например, о каких комбинациях идет речь в следующи задачах:

1) Сколько всего двузначных чисел?

2) Сколько всего двузначных чисел, в записи которых цифры не повторяются?

3) На прямой взяли десять точек. Сколько всего получилось отрез ков, концами которых являются эти точки?

В первой задаче двузначные числа образуются из 10 цифр, причем цифры в записи числа могут повторяться (в задаче нет условия о том, что цифры в записи числа не повторяются). Используя теоретико-множественную терминологию, можно сказать, что в ней речь идет об упорядоченных наборах (кортежах) из 10 элементов по 2 с повторениями. В комбинаторике такие кортежи называются размещениями с повторениями из 10-ти элементов по 2. Их число можно найти по формуле $\tilde{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$. Но среди этих кортежей есть такие, у которых на первом месте стоит цифра 0 и которые не могут рассматриваться как запись двузначного числа. Таких кортежей 10, их надо вычесть из 100. Таким образом, двузначных чисел всего 90.

Конечно, эту задачу можно было решить проще, применив правило произведения: первую цифру из записи двузначного числа можно выбрать девятью способами, вторую десятью, а упорядоченную пару – $9 \cdot 10 = 90$ способами.

Во второй задаче также рассматриваются кортежи длины 2, образованные из 10 элементов (цифр), но элементы в них не повторяются. Такие кортежи в комбинаторике называются размещениями без повторений из 10-ти элементов по 2. Их число можно найти по формуле $A_{10}^2 = 10 \cdot (10-1) = 90$, но из этого числа надо вычесть кортежи, у которых на первом месте стоит цифра 0, и они не могут представлять запись двузначного числа. Таких кортежей 9. Поэтому двузначных чисел, в записи которых цифры не повторяются, 90 – 9 = 81.

Другой характер имеют комбинации, о которых идет речь в третьей задаче. Действительно, если для записи чисел в первых двух задачах важен порядок следования цифр (так, 23 и 32 – это различные числа), то в третьей задаче он роли не играет (отрезок AB и отрезок BA – это один и тот же отрезок). Комбинации в этой задаче являются двухэлементными подмножествами, образованными из 10-ти данных элементов (точек). Такие подмножества в комбинаторике называются сочетаниями без повторений из 10 элементов по 2. Их число можно найти по формуле: $C_{10}^2 = \frac{A_{10}^2}{2!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$.

Упражнения

1. Заполните следующую таблицу

Виды комбинаций		Формула
На «языке» комбинаторики	На теоретико-множественном «языке»	
Размещения с повторениями из k элементов по m элементов	Кортежи длины m с повтор. элементами, взятыми из множества, в котором k элементов	$\tilde{A}_k^m = k^m$
Размещения без повторений из k элементов по m элементов		
Перестановки без повторений из k элементов		
Сочетания без повторений из k элементов по m элементов		

2. Покажите, что в нижеприведенных задачах рассматриваются размещения из k элементов по m; определите значения k и m и найдите число размещений:

а) Из 20 учащихся класса надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?

б) В классе изучаются 7 предметов. В среду 4 урока, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на среду?

в) В соревновании участвуют 10 человек. Сколькими способами могут распределиться между ними места?

г) Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 3, 4, 5 и 6?

3. Покажите, что в следующих задачах рассматриваются сочетания из k элементов по m, определите значения k и m и найдите число C_k^m для каждой задачи:

а) Сколькими способами можно выбрать из 6 человек комиссию, состоящую из трех человек?

б) Сколькими способами можно выбрать 4 краски из 10 различных красок?

4. Два человека обменялись своими фотокарточками. Сколько было всего фотокарточек?

5. Два человека пожали друг другу руки. Сколько было рукопожатий? А если 15 человек пожали друг другу руки, то сколько будет рукопожатий?

6. Сколькими способами можно расставить на полке 3 различные книги? Переставить три различные буквы, три различные цифры?

7. 15 человек сыграли друг с другом по одной партии в шахматы. Сколько было сыграно партий?

8. На плоскости отметили 7 точек. Каждые две точки соединили отрезком. Сколько получилось отрезков?

9. Решите следующие задачи, используя формулы. Ответ проверьте с помощью перебора всех возможных вариантов:

а) Сколько словарей необходимо переводчику, чтобы он мог переводить непосредственно с любого из четырех языков – русского, английского, немецкого и французского – на любой другой из этих языков?

б) Государственные флаги некоторых стран состоят из трех горизонтальных полос разного цвета. Сколько различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосами можно составить?

в) Мальчик выбрал в библиотеке 5 книг. По правилам библиотеки одновременно можно взять только 2 книги. Сколько у мальчика вариантов выбора двух книг из пяти?

г) Четыре друга собрались на футбольный матч. Но им удалось купить только три билета. Из скольких вариантов им надо выбрать тройку счастливцев? Как осуществить выбор, чтобы у всех ребят были равные шансы попасть на матч?

д) В классе три человека хорошо поют, двое других играют на гитаре, а еще один умеет показывать фокусы. Сколькими способами можно составить концертную бригаду из певца, гитариста и фокусника?

е) Задача Леонарда Эйлера. Трое господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

ж) Имеется ткань двух цветов: голубая и зеленая, и требуется обить диван, кресло и стул. Сколько существует различных вариантов обивки этой мебели?

10. Ниже приведены комбинаторные задачи для учащихся начальных классов. Решите их методом перебора и используя формулы комбинаторики. Выбор формул обоснуйте.

а) Аня, Боря, Вера и Гена – лучшие лыжники школы. На соревнования надо выбрать из них троих. Сколькими способами можно это сделать?

б) Круг разделили на две части и решили раскрасить их карандашами разных цветов. Сколькими способами можно это сделать, если имеются красный, зеленый и синий карандаши?

в) При изготовлении авторучки корпус и колпачок могут иметь одинаковый или разный цвет. На фабрике есть пластмасса четырех цветов: белого, красного, синего и зеленого. Какие отличающиеся по цвету ручки можно изготовить?

г) На прямой взяли 4 точки. Сколько всего получилось отрезков, концами которых являются эти точки?

д) За свои рисунки ученик получил две положительные отметки. Какими они могут быть?

е) В соревнованиях участвуют 5 футбольных команд. Каждая команда играет один раз с каждой из остальных команд. Сколько матчей будет сыграно?

37. Основные выводы § 6

Изучив материал этого параграфа, установили, что решение комбинаторных задач предполагает усвоение следующих *понятий*:

– способ выбора объекта;

– дерево возможных вариантов;

– размещение из m элементов по k элементов (с повторением и без повторений);

– сочетание из m элементов по k элементов (без повторений).

В основе решения комбинаторных задач лежат различные *правила*:

– правило суммы;

– правило произведения;

– правила подсчета числа различных размещений из m элементов по k элементов (с повторениями и без повторений): $\widetilde{A}_k^m = k^m$ и $A_k^m = \underbrace{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)}_{m\ \text{множителей}}$;

– правило подсчета числа сочетаний из m элементов по k элементов (без повторений): $C_k^m = \dfrac{A_k^m}{m!}$;

– правило подсчета числа перестановок из k элементов без повторений: $P = k!$

§7. АЛГОРИТМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Большинство действий, совершаемых человеком, выполняются по определенным правилам. Их эффективность во многом зависит от того, насколько он представляет, что делать в каждый момент времени, в какой последовательности, каким должен быть итог его действий. Другими словами, результат деятельности человека непосредственно зависит от того, насколько он представляет алгоритмическую сущность своих действий.

Кроме того, применение в производстве и быту различных автоматов, компьютеров требует от человека строгого соблюдения определенной последовательности действий при их использовании, что, в свою очередь, невозможно без предварительного составления алгоритмов.

Таким образом, осмысление и разработка алгоритмов выполняемых действий становится существенным компонентом деятельности человека, составной частью его культуры мышления и поведения. Алгоритм – одно из фундаментальных понятий, которое используется в различных областях знания, но изучается оно в математике и информатике. Его освоение начинается уже в начальной школе на уроках математики, где ученики овладевают алгоритмами арифметических действий, знакомятся с правилами вычитания числа из суммы, суммы из числа и др.

Вообще формирование алгоритмического мышления у младших школьников в настоящее время является одной из важнейших задач учителя, и поэтому ему требуются определенные знания об алгоритмах, а также некоторые умения в их построении.

38. Понятие алгоритма

Происхождение термина «алгоритм» связано с математикой. История его возникновения такова. В IX веке в Багдаде жил ученый ал(аль)-Хорезми (полное имя – Мухаммед бен Муса ал-Хорезми, т.е. Мухаммед сын Мусы из Хорезма), математик, астроном, географ. В одном из своих трудов он описал десятичную систему счисления и впервые сформулировал правила выполнения арифметических действий над целыми числами и обыкновенными дробями. Арабский оригинал этой книги был утерян, но остался латинский перевод XII в., по которому Западная Европа ознакомилась с десятичной системой счисления и правилами выполнения арифметических действий.

Ал-Хорезми стремился к тому, чтобы сформулированные им правила были понятными. Достичь этого в IX в., когда еще не была разработана математическая символика (знаки операций, скобки, буквенные обозначения и т.д.), было трудно. Однако ему удалось выработать четкий стиль строгого словесного предписания, который не давал читателю возможность уклониться от предписанного или пропустить какие-нибудь действия.

Правила в книгах ал-Хорезми в латинском переводе начинались словами «Алгоризми сказал». В других латинских переводах автор именовался как Алгоритмус. Со временем было забыто, что Алгоризми (Алгоритмус) – это автор правил, и эти правила стали называть алгоритмами. Многие столетия разрабатывались алгоритмы для решения все новых и новых классов задач, но само понятие алгоритма не имело точного математического определения.

В настоящее время понятие алгоритма уточнено, и сделано это в XX веке в рамках науки, называемой теорией алгоритмов.

В нашем курсе мы будем использовать интуитивно-содержательную трактовку понятия «алгоритм», в соответствии с которой будем рассматривать **алгоритм как программу действий для решения задач определенного типа.**

Чтобы какую-либо программу действий можно было назвать алгоритмом, она должна удовлетворять ряду требований. Эти требования называют *свойствами алгоритма.*

1. Каждая программа, задающая алгоритм, должна состоять из конечного числа шагов, а каждый шаг должен быть точно и однозначно определен. Это свойство алгоритмов называется свойством *определенности* (или *детерминированности*).

Согласно этому свойству в алгоритмах не может быть таких, например, предписаний, как «сложить x с одним из данных чисел a или b», «привести два-три примера истинных и ложных высказываний» и т.д.

2. Шаги в алгоритме должны идти в определенный последовательности. Это означает, что в любом алгоритме для каждого шага (кроме последнего) можно указать единственный непосредственно следующий за ним шаг, т.е. такой, что между ними нет других шагов. Это свойство *дискретности* алгоритмов.

Дискретная структура алгоритмов хорошо видна в алгоритмах выполнения арифметических действий. Например, алгоритм нахождения суммы 34 + 23 формулируется так:

1) Пишу десятки под десятками, а единицы под единицами.

2) Складываю единицы: 4 + 3 = 7, пишу 7 под единицами.

3) Складываю десятки: 3 + 2 = 5, пишу 5 под десятками.

4) Читаю ответ: сумма равна 57.

3. Каждый шаг программы, задающей алгоритм, должен состоять из выполнимых действий. Это означает, что предусмотренные действия были выполнимы теми исполнителями, которым она адресована. Так, например, задание «решить уравнение $x + 9 = 17$» один ученик уверенно выполняет и получает искомое значение переменной x, так как владеет всеми действиями, необходимыми для решения простейших уравнений:

1) прочитай уравнение;

2) вспомни правило, как найти значение неизвестного;

3) реши уравнение;

4) сделай проверку;

5) запиши ответ.

Другой не справляется с заданием или получает неверный ответ, так как не владеет хотя бы одним из действий, которые требуются для выполнения данного задания.

Как видно из примера, под словом «действие» понимаются не только математические операции, но оно имеет и более широкий смысл.

Кроме того, в алгоритмах недопустимы также ситуации, когда после выполнения очередного действия исполнителю неясно, какое из них должно выполняться на следующем этапе.

Все сказанное характеризует свойство алгоритма, называемое *свойством понятности*.

4. Программа, задающая алгоритм, должна быть направлена на получение определенного результата. Получение результата за конечное число шагов составляет *свойство результативности* алгоритма.

5. Программа, задающая алгоритм, должна быть применима к любой задаче рассматриваемого типа. Другими словами, каждый алгоритм предназначен для решения не одной-единственной, а любой из некоторого бесконечного класса однотипных задач. Например, алгоритм решения линейного уравнения первой степени применяется для решения всех уравнений вида $ax+b = 0$. В этом состоит *свойство массовости* алгоритма.

Задачи, для которых может быть составлен алгоритм, и в результате выполнения этого алгоритма получен ответ на вопрос (даже если ответ, что задача не имеет решения), называются *алгоритмически разрешимыми*.

Алгоритмы могут предназначаться как исполнителю-человеку, так и исполнителю-машине. И в связи с этим между ними могут быть различия. Действия, понятные человеку, могут быть не понятны машине (например, действие «вспомни правило»), и наоборот. Предписания для человека могут содержать желательные, но не обязательные действия, или их можно поменять местами. Например, чтобы определить значение истинности конъюнкции двух высказываний A и B, нужно:

1) определить значение истинности высказывания A;
2) определить значение истинности высказывания B;
3) определить значение истинности высказывания $A \wedge B$.

Так как операция конъюнкции коммутативна, т.е. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, то пункты 1) и 2) можно поменять местами. Такой выбор последовательности шагов осуществляет исполнитель-человек, но не машина. Если свойства детерминированности и дискретности сохраняются с некоторой степенью точности, т.е. в программе возможна перестановка шагов или она содержит желательные, но не обязательные шаги, то мы имеем не алгоритм, а *алгоритмическое предписание*. Однако, несмотря на различия между этими понятиями, часто алгоритмические предписания называются алгоритмами.

Известны различные способы записи алгоритмов: словесная запись, формульная, табличная, на языке блок-схем или алгоритмическом языке.

Словесная запись – это форма представления алгоритмических предписаний. Она допускает употребление естественного языка и математической символики, что делает предписание понятным и доступным для усвоения. Форму словесной записи имеют многие «бытовые» алгоритмические предписания, часто применяемые в повседневной жизни: как испечь пирог, как пользоваться электроприбором, как получить книгу в библиотеке и т.д. Вообще в этой форме могут быть описаны любые предписания, в том числе и математические. Например, алгоритмическое предписание нахождения середины отрезка AB может иметь вид:

1) поставить ножку циркуля в точку A;
2) установить раствор циркуля, равный длине отрезка AB;
3) провести окружность;
4) поставить ножку циркуля в точку B;
5) провести окружность;
6) отметить точки пересечения окружностей;
7) через отмеченные точки провести прямую;
8) отметить точку пересечения прямой с отрезком AB.

Алгоритмы, используемые для вычислений, могут быть записаны в *формульной* (т.е. с помощью формулы) или *табличной* (т.е. с помощью таблицы) формах. Например, для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) удобнее применять не словесную запись, а формулу:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Запись алгоритма, используемого для вычислений, в форме таблицы удобно использовать, когда требуется найти не одно, а несколько значений одного и того же выражения для различных значений переменных, входящих в данное выражение.

Рассмотрим алгоритмическое предписание решения следующей задачи: «В одном куске 72 м ткани, а в другом в y раз больше. Сколько метров ткани во втором куске? Составь выражение и найди его значение, если $y = 2, 4, 8$».

Словесная запись алгоритма решения данной задачи такова:

1) составить выражение;
2) найти его значение для $y = 2$;
3) найти его значение для $y = 4$;
4) найти его значение для $y = 8$.

Если же оформить предписание в виде таблицы, то запись будет иметь вид:

Значение переменной	y	2	4	8
Значение выражения	$72 \cdot y$			

Алгоритмы можно записывать на языке *бло́к-схем*. Такое их представление, состоящее из блоков и стрелок, выполняется следующим образом:

1) каждый шаг записывается в форме определенной геометрической фигуры (блока);

2) блок, соответствующий команде, предусматривающей выполнение некоторого действия, в результате которого образуется какой-то новый промежуточный или конечный результат, изображается в виде прямоугольника. Внутри него записывается выполняемое действие. Такие блоки называются *арифметическими*, или, в более общем виде, *перерабатывающими информацию*, так как не всегда выполняемые действия являются арифметическими;

3) блок, соответствующий команде, предусматривающей проверку некоторого условия, изображается в виде ромба. Проверяемое логическое условие записывается внутри него. Выполнение данной коман-

ды не приводит к новому результату, а лишь определяет дальнейший ход процесса решения. Такие блоки называются *логическими*;

4) если за шагом A непосредственно следует шаг B, то от блока A к блоку B проводится стрелка. От каждого арифметического блока исходит только одна стрелка; от каждого логического – две стрелки: одна с пометкой «да» (или «+»), идущая к блоку, следующему за логическим блоком, если условие выполняется, другая – с пометкой «нет» (или «–»), идущая к блоку, следующему за логическим, если условие не выполняется;

5) начало и конец алгоритма изображаются блоками в виде овалов, внутри которых записываются соответственно слова «Начало» и «Конец».

В качестве примера такой записи рассмотрим алгоритмическое предписание для решения задачи: «Из ряда чисел 15, 16, 17, 18 выпиши значения x, при которых верно неравенство $x + 24 > 40$» (рис 61).

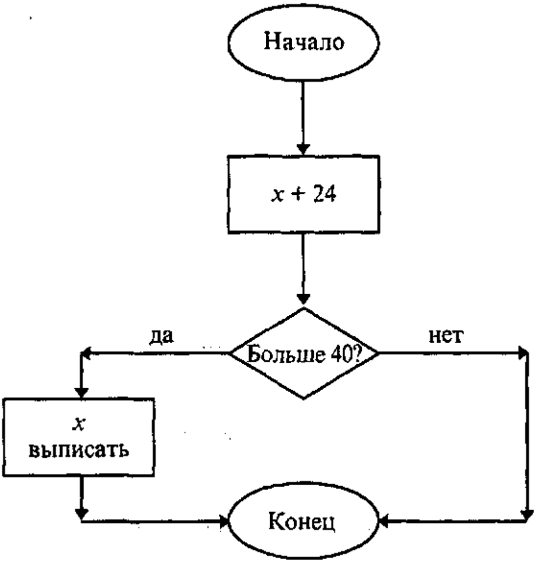


Рис. 61

В соответствии с этой схемой устанавливаем, что если $x = 15$, то $x + 24$ не больше 40, следовательно, при этом значении x неравенство $x + 24 > 40$ верным не будет. Аналогично для $x = 16$. Если же $x = 17$, то $x + 24$ будет больше 40, и, значит, при этом значении x неравенство $x + 24 > 40$ будет верным. Аналогично и для $x = 18$.

Видим, что блок-схема наглядно представляет логику решения задачи. Поэтому запись алгоритмов в виде блок-схем имеет широкое распространение.

Еще один способ – это запись на определенном *алгоритмическом языке.* Она используется в том случае, когда исполнитель данного алгоритма – машина, причем каждая машина имеет свой, только ей понятный язык: *фортран, паскаль, бейсик, лого* и др.

В зависимости от порядка выполнения действий различают следующие виды алгоритмических процессов: *линейные, разветвляющиеся, циклические.*

Если в алгоритме действия выполняются последовательно друг за другом, то он называется *линейным.* Если в алгоритме порядок действий зависит от некоторого условия, он называется *разветвляющимся.* Если в алгоритме некоторые действия могут выполняться многократно, то он называется *циклическим.*

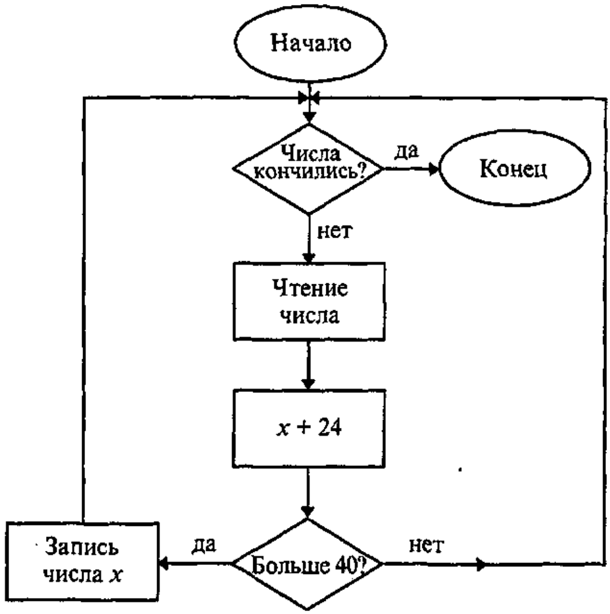


Рис. 62

Примером линейного алгоритмического предписания является ранее рассмотренное нами предписание нахождения середины отрезка. На рисунке 61 в виде блок-схемы представлен разветвляющийся алгоритм выбора из данных чисел тех, которые удовлетворяют неравенству $x + 24 > 40$. Так как в этом алгоритмическом предписании последовательность действий должна повториться для каждого из данных чисел, то его можно сделать циклическим. Для организации цикла необходимо осуществить перебор всех значений и предусмотреть выход из цикла (рис. 62).

Упражнения

1. Установите, для решения каких задач используются следующие алгоритмы:

Алгоритм А.

1) Пишу единицы под единицами, десятки под десятками, сотни под сотнями.

2) Складываю единицы: 4 + 2 = 6.

3) Складываю десятки: 6 + 4 = 10, десять десятков равны одной сотне. Пишу под десятками 0, а одну сотню запомню и прибавлю к сотням.

4) Складываю сотни: 2 + 5 = 7, да еще 1, получится 8. Пишу 8 под сотнями.

5) Читаю ответ: 806.

Алгоритм Б.

1) Отметь на листе бумаги точку *O*.

2) Установи раствор циркуля равным длине отрезка *AB*.

3) Поставь ножку циркуля в точку *O*.

4) Проведи окружность.

2. Объясните, почему следующая программа действий является алгоритмическим предписанием:

Собери портфель

1) Открой портфель.

2) Положи в портфель тетради.

3) Положи в портфель учебники.

4) Положи в портфель карандаш.

5) Положи в портфель ручку.

6) Закрой портфель.

3. Является ли следующая программа действий алгоритмом или алгоритмическим предписанием:

А. Измерение длины отрезка *AB*.

1) Совместить линейку с отрезком *AB*, совместив *O* с *A*.

2) Отметить число, соответствующее точке *B*.

3) Записать полученное значение.

Б. Построение биссектрисы угла (рис. 63).

1) Провести циркулем дугу окружности, пересекающую стороны данного угла, и с центром в вершине угла.

2) Обозначить точки пересечения дуги окружности со сторонами угла буквами *A* и *B*.

3) Провести окружность с центром в точке *A* и тем же радиусом.

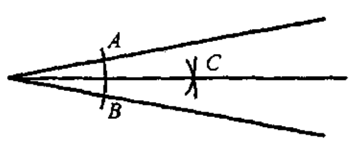


Рис. 63

Рис. 64

4) Провести окружность с центром в точке B и тем же радиусом.

5) Обозначить одну из точек пересечения окружностей буквой C.

6) Провести луч из вершины угла через точку C.

4. Составьте алгоритм вычисления по формуле:

а) $y=(5x-3)\cdot(2x+7)$;

б) $y=2\cdot(x+8)-1$.

5. По приведенному алгоритму восстановите формулу для вычисления значения y:

1) Умножить x на 4, обозначить результат R_1.

2) Сложить R_1 с числом 7, обозначить результат R_2.

3) Разделить R_2 на x, считать результат значением y.

6. Алгоритм получения кипятка задан при помощи блок-схемы (рис. 64). Какой вид будет иметь блок-схема этого алгоритма при условии, что:

а) в чайнике уже есть вода;

б) плита включена?

7. Составьте алгоритм вычисления в миллиметрах длины ломаной, состоящей из:

а) двух звеньев; б) пяти звеньев.

8. Составьте алгоритм построения отрезка длиной 5 см. Какие изменения произойдут в нем с изменением длины отрезка?

9. Составьте и запишите алгоритм построения на клетчатой бумаге квадрата со стороной 5 см. Какие изменения надо внести в него, чтобы построить квадрат: а) со стороной 5 см на нелинованной бумаге; б) со стороной любой длины?

39. Приемы построения алгоритмов

При изучении математики у школьников формируются такие действия, как действие планирования своей деятельности, оценка ее результата, поиска плана решения задачи, чтения учебных текстов, и другие. Если все эти действия проанализировать, то можно составить алгоритмические предписания по их выполнению, а затем использовать как ориентиры для разных видов деятельности. Например, алгоритмическое предписание анализа и поиска плана решения задачи может быть таким:

1. Прочитайте задачу и назовите процесс, о котором в ней идет речь.
2. Укажите величины, которые характеризуют этот процесс.
3. Выделите, что дано и что нужно найти в задаче.
4. Выясните, как связаны данные величины и те, которые требуется найти.
5. Подумайте, как на основании имеющихся у вас знаний о величинах, о которых идет речь, ответить на требования задачи.
6. Составьте план предполагаемого решения.

Кроме общих учебных действий при изучении математики формируются действия, связанные с освоением конкретного материала. Многие из них носят алгоритмический характер, поэтому для овладения ими целесообразно составлять предписания. В частности, к таким действиям относятся: усвоение нового определения понятия (правила, свойства, теоремы); распознавание принадлежности объекта объему данного понятия; нахождение значения переменной по формуле; решение однотипных задач и др.

Таким образом, обучение математике требует от учителя умения строить алгоритмические предписания. Какие приемы при этом можно использовать?

Для построения любого алгоритмического предписания прежде всего необходимо выделить четкую последовательность элементарных шагов, приводящих к требуемому результату. Каждый такой шаг представляет собой операцию, ранее сформировавшуюся у исполнителя. Когда алгоритм описывается словесно, – это отдельные указания, пункты. Если он формулируется на языке блок-схем, то это отдельные блоки. Непосредственное же построение алгоритма всегда происходит с применением некоторого приема. Это приемы пошаговой детализации, решение частных задач, приемы на основе определений, формул и др.

Все они могут быть разбиты на две группы. К первой относятся приемы, на основе которых построение алгоритма осуществляется путем «развития» его «вглубь» и выявления все более частных его особенностей. Ко второй группе относятся приемы, на основе которых построение осуществляется путем «восхождения» к алгоритму от решения частных задач.

Один из наиболее распространенных приемов первой группы – *прием пошаговой детализации* (или прием последовательного уточнения). Идея пошаговой детализации заключается в том, что на каждо этапе происходит уточнение уже имеющегося алгоритма. Поэтом при применении данного приема: 1) сначала алгоритм строится крупных блоках (т.е. выделяются наиболее существенные операции) 2) определяется последовательность их выполнения; 3) крупные блок уточняются до тех пор, пока каждая операция в алгоритме не стане понятной исполнителю.

Рассмотрим, например, как используется прием пошаговой детали зации при построении алгоритма решения простейших уравнений (т.е уравнений вида $5 + x = 8$; $8 - x = 7$; $5 \cdot x = 10$; $x : 4 = 5$).

1. Выделим наиболее существенные операции.

Для решения простейшего уравнения надо назвать неизвестны компонент, т.е. сначала прочитать уравнение. Затем нужно знать пра вило нахождения этого компонента. Далее, необходимо уметь решать уравнение. Потом провести доказательство, что полученное значени неизвестного – искомое, т.е. сделать проверку. И наконец, записать ответ.

2. Определим последовательность выделенных операций и запи шем алгоритм в крупных блоках:

1]. Прочитай уравнение.

2]. Вспомни правило, как найти значение неизвестного.

3]. Реши уравнение.

4]. Сделай проверку.

5]. Запиши ответ.

Если исполнитель (ученик) не владеет хотя бы одним из перечисленных действий, то он будет испытывать при решении уравнения определенные трудности. Поэтому непонятные ему действия должны быть уточнены. Так, например, чтобы прочитать уравнение, надо назвать арифметическое действие и компоненты. Значит, блок 1] можно детализировать:

1) Назови действие, которое указано в уравнении.

2) Вспомни, как называют компоненты этого действия.

3) Прочитай уравнение, используя название компонентов.

Если затруднения вызваны наличием в уравнении больших чисел, то можно использовать пример с аналогичным действием, что и в данном уравнении, но с небольшими числами. Поэтому алгоритм выбора действия (блок 2]) может иметь следующий вид:

1) Составь пример-помощник на действие, указанное в уравнении, с небольшими числами.

2) Установи в примере-помощнике, каким действием можно найти неизвестное число.

3) Вспомни правило нахождения неизвестного компонента.

Алгоритм решения уравнения, т.е. блок 3], можно также уточнить:

1) Примени правило и запомни выражение неизвестного компонента через известные.

2) Вычисли значение неизвестного.

Алгоритм проверки, т.е. блок 4] может иметь следующий вид:

1) Подставь в уравнение найденное значение неизвестного.

2) Вычисли значение левой и правой части уравнения.

3) Сравни эти значения.

Прием пошаговой детализации можно использовать при составлении алгоритмов решения различных задач, в частности при вычислении значений величин по формулам (см. п. 38), при решении задач на распознавание принадлежности объекта объему данного понятия (см. п. 19). Каждый шаг уточнения алгоритма, как правило, состоит из следующих этапов: анализ ситуации; построение более точного фрагмента; контроль правильности этого фрагмента и его связи с предшествующими.

Рассмотрим теперь прием построения алгоритмов, основанный на решении частных задач. Построение алгоритма с помощью этого приема предполагает:

1) тщательный анализ разнообразных частных задач определенного класса, приводящих к различным результатам;

2) выявление операций и последовательности их выполнения при решении частных задач данного класса;

3) выявление всех логических условий, влияющих на дальнейший ход процесса и приводящих, в конце концов, к разным результатам;

4) определение последовательности операций для всех возможных случаев, т.е. окончательное построение алгоритма.

Составим, например, алгоритм для класса задач «решить уравнение $ax = b$».

1) Тщательно анализируем разнообразные частные задачи, приводящие к различным результатам.

А.	$3x = 12$	$2x = -5$	$0{,}5x = 5$	$3x = 0$	$2x = 2$
	$x = 12:3$	$x = -5:2$	$x = 5:0{,}5$	$x = 0:3$	$x = 2:2$
	$x = 4$	$x = -2{,}5$	$x = 10$	$x = 0$	$x = 1$
Б	$0\cdot x = 5$	$0\cdot x = -12$	$0\cdot x = 1{,}12$	$0\cdot x = 3$	
		Решений нет			

В. $0\cdot x = 0$, x – любое действительное число.

2) Выявляем операции и последовательность их выполнения при решении частных задач.

А. Операция деления b на a.

Б, В не содержат операций.

3) Выявляем все логические условия, влияющие на дальнейший ход процесса и приводящие, в конце концов, к разным результатам.

А. Если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{b}{a}$ – решение уравнения.

Б. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то решений нет.

В. Если $a = 0$ и $b = 0$, то решений бесконечно много.

4) Построим окончательный алгоритм (рис. 65).

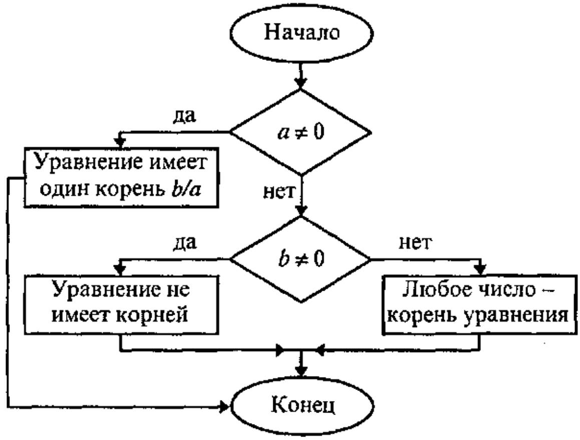


Рис. 65

Упражнения

1. Используя прием пошаговой детализации, составьте алгоритм выполнения задания: «Определите логическую структуру и значение истинности высказывания, запишите его, используя символы». Проверьте правильность составленного алгоритма для следующих высказываний:

а) 28 кратно 4 и меньше 31;

б) 28 кратно 4 или 9;

в) неверно, что 28 кратно 9.

2. Используя определение квадрата, составьте и запишите алгоритм, позволяющий среди различных геометрических фигур распознавать квадраты. Применяя его, выполните задание: «среди следующих фигур выделите квадраты» (рис. 31).

3. Используя задание: «лежат ли три точки на одной прямой, если известны расстояния между ними: а) 3, 5, 8; б) 1, 4, 2; в) 6, 4, 5; г) 7, 11, 4; д) 3, 8, 12; е) 3, 6, 3?», разделите все случаи на группы в зависимости от результата; обобщите полученные выводы и постройте алгоритм принадлежности трех точек одной прямой. Каким приемом построения алгоритма вы воспользуетесь?

Примечание: расстояния между точками измерены с помощью одной и той же единицы длины.

40. Основные выводы § 7

Изучив материал данного параграфа, мы уточнили смысл следующих *понятий*:

– алгоритм;

– алгоритмическое предписание;

– линейный, разветвляющийся и циклический алгоритм.

Нами рассмотрены *свойства алгоритмов* (определенности, дискретности, понятности, результативности, массовости), *способы их записи* (словесный, формульный, табличный, на языке блок-схем) и *приемы построения* (пошаговая детализация; прием, основанный на решении частных задач и др.).

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

Первоначально алгеброй называли учение о решении уравнений. За много столетий своего развития алгебра превратилась в науку, которая изучает операции и отношения на различных множествах. Поэтому не случайно уже в начальной школе дети знакомятся с такими алгебраическими понятиями, как выражение (числовое и с переменными), числовое равенство, числовое неравенство, уравнение. Они изучают различные свойства арифметических действий над числами, которые позволяют рационально выполнять вычисления. И конечно, в начальном курсе математики происходит их знакомство с различными зависимостями, отношениями, но чтобы использовать их в целях развития мыслительной деятельности детей, учитель должен овладеть некоторыми общими понятиями современной алгебры – понятием соответствия, отношения, алгебраической операции и др. Кроме того, усваивая математический язык, используемый в алгебре, учитель сможет глубже понять сущность математического моделирования реальных явлений и процессов.

§8. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОЖЕСТВАМИ

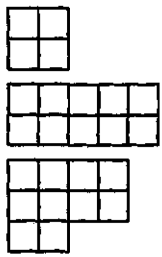
Изучая окружающий нас мир, математика рассматривает не только его объекты, но и главным образом связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями, отношениями, функциями. Например, при вычислении длин предметов устанавливаются соответствия между предметами и числами, которые являются значениями их длин; при решении задач на движение устанавливается зависимость между пройденным расстоянием и временем, если скорость движения постоянна.

Конкретные зависимости, соответствия, отношения между объектами в математике изучались с момента ее возникновения. Но вопрос о том, что общее имеют самые разные соответствия, какова сущность любого соответствия, был поставлен в конце XIX – начале XX века, и ответ на него был найден в рамках теории множеств.

В начальном курсе математики изучаются различные взаимосвязи между элементами одного, двух и более множеств. Поэтому учителю надо понимать их суть, что поможет ему обеспечить единство в методике изучения этих взаимосвязей.

41. Понятие соответствия. Способы задания соответствий

Рассмотрим три примера *соответствий*, изучаемых в начальном курсе математики.

I. Найти значение выражения:	II. Найти площадь фигуры:	III. Решить уравнение:
$в_1$) $(17 - 1):4$;	F_1 	y_1) $2 + x = 6$;
$в_2$) $(12 + 18):(6 - 6)$;	F_2	y_2) $x - 7 = 4$;
$в_3$) $2 \cdot 7 + 6$.	F_3	y_3) $2x = 8$.
	Рис. 66	

В первом случае мы устанавливаем соответствие между заданными выражениями и их числовыми значениями. Во втором выясняем, какое число соответствует каждой из данных фигур, характеризуя ее площадь. В третьем ищем число, которое является решением уравнения.

Что общее имеют эти соответствия?

Видим, что во всех случаях мы имеем два множества: в первом – это множество из трех числовых выражений и множество N натуральных чисел (ему принадлежат значения данных выражений); во втором – это множество из трех геометрических фигур и множество N натуральных чисел; в третьем – это множество из трех уравнений и множество N натуральных чисел.

Выполняя предложенные задания, мы устанавливаем связь (соответствие) между этими множествами. Ее можно представить наглядно, при помощи графов (рис. 67).

Можно задать эти соответствия, перечислив все пары элементов, находящихся в заданном соответствии:

I. $\{(в_1, 4), (в_3, 20)\}$;

II. $\{(F_1, 4), (F_2, 10), (F_3, 10)\}$;

III. $\{(y_1, 4), (y_2, 11), (y_3, 4)\}$.

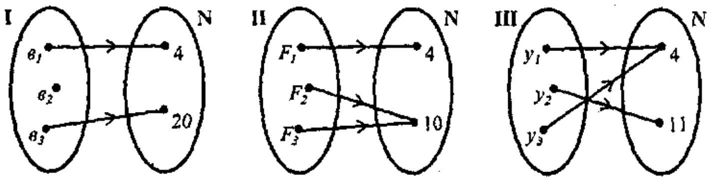


Рис. 67

Полученные множества показывают, что любое соответствие между двумя множествами X и Y можно рассматривать как *множество упорядоченных пар*, образованных из их элементов. А так как упорядоченные пары – это элементы декартова произведения, то приходим к следующему определению общего понятия соответствия.

Определение. ***Соответствием между множествами X и Y называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств.***

Соответствия принято обозначать буквами P, S, T, R и др. Если S – соответствие между элементами множеств X и Y, то, согласно определению, $\boxed{S \subset X \times Y}$.

Выясним теперь, как задают соответствия между двумя множествами. Поскольку соответствие – это подмножество, то его можно задавать как любое множество, т. е. либо *перечислив все пары элементов, находящихся в заданном соответствии*, либо *указав характеристическое свойство элементов этого подмножества*. Так, соответствие между множествами $X = \{1, 2, 4, 6\}$ и $Y = \{3, 5\}$ можно задать:

1) при помощи предложения с двумя переменными: $a < b$ при условии, что $a \in X$, $b \in Y$;

2) перечислив пары чисел, принадлежащих подмножеству декартова произведения $X \times Y$: $\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$. К этому способу задания относят также задание соответствия при помощи графа (рис. 68) и графика (рис. 69).

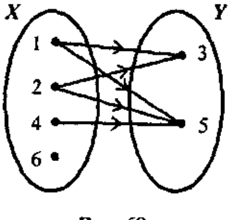


Рис. 68

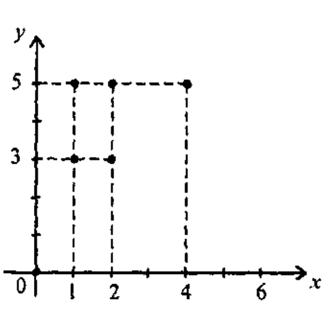
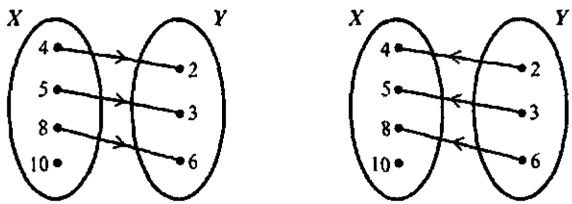


Рис. 69

Нередко, изучая соответствие между множествами X и Y, приходится рассматривать и соответствие, ему обратное. Пусть, например, S – соответствие «больше на 2» между множествами $X = \{4, 5, 8, 10\}$ и $Y = \{2, 3, 6\}$. Тогда $S = \{(4, 2), (5, 3), (8, 6)\}$ и его граф будет таким, как на рисунке 70, а.

Соответствие, обратное данному, – это соответствие «меньше на 2». Оно рассматривается между множествами Y и X, и чтобы его представить наглядно, достаточно на графе соответствия S направление стрелок поменять на противоположное (рис. 70, б). Если соответствие «меньше на 2» обозначить S^{-1}, то $S^{-1} = \{(2, 4), (3, 5), (6, 8)\}$.



а) *б)*

Рис. 70

Условимся предложение «элемент x находится в соответствии S с элементом y» записывать кратко так: xSy. Запись xSy можно рассматривать как обобщение записей конкретных соответствий: $x = 2y$; $x > 3y+1$ и др.

Воспользуемся введенной записью для определения понятия соответствия, обратного данному.

Определение. ***Пусть S – соответствие между множествами X и Y. Соответствие S^{-1} между множествами Y и X называется обратным данному, если $yS^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xSy.***

Соответствия S и S^{-1} называют *взаимно обратными*. Выясним особенности их графиков.

Построим график соответствия $S = \{(4, 2), (5, 3), (8, 6)\}$ (рис. 71, а). При построении графика соответствия $S^{-1} = \{(2, 4), (3, 5), (6, 8)\}$ мы должны первую компоненту выбирать из множества $Y = \{2, 3, 6\}$, а вторую – из множества $X = \{4, 5, 8, 10\}$. В результате график соответствия S^{-1} совпадет с графиком соответствия S. Чтобы различать графики соответствий S и S^{-1}, условились первую компоненту пары соответствия S^{-1} считать абсциссой, а вторую – ординатой. Например, если $(5, 3) \in S$, то $(3, 5) \in S^{-1}$. Точки с координатами $(5, 3)$ и $(3, 5)$, а в общем случае (x, y) и (y, x) симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Следовательно, *графики взаимно обратных соответствий S и S^{-1} симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.*

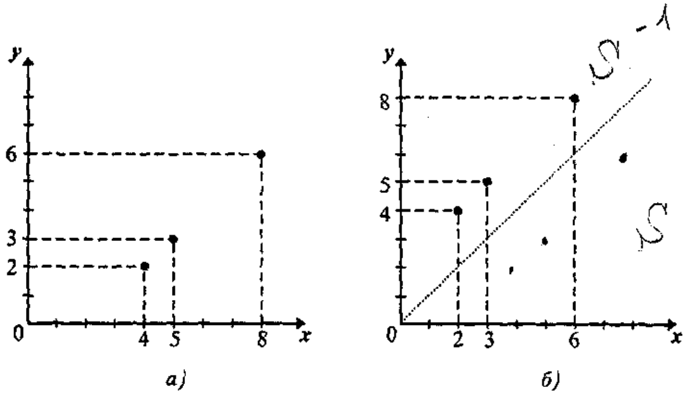


Рис. 71

Чтобы построить график соответствия S^{-1}, достаточно изобразит на координатной плоскости точки, симметричные точкам графика S относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Упражнения

1. Вычислив длины заданных отрезков, учащийся записал: $AB = 7$ см, $CD = 12$ см, $KL = 15$ см, $XY = 12$ см. Соответствие между какими множествами он установил? Задайте это соответствие при помощи предложения с двумя переменными и графа.

2. Даны множества: $X = \{2, 5\}$, $Y = \{3, 6\}$. Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подможе-

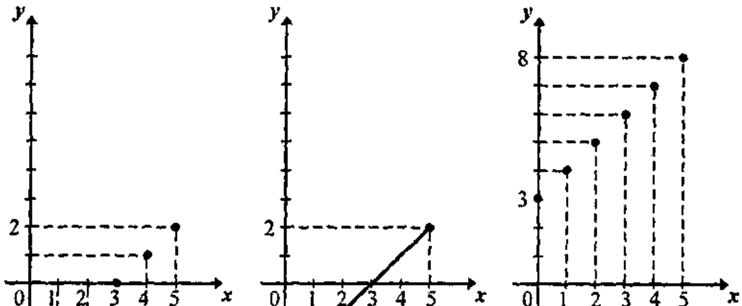


Рис. 72

ства полученного множества. Какое из подмножеств задает соответствие: а) «больше»; б) «меньше»; в) «меньше на 1»; г) «меньше в 3 раза»?

3. Соответствие «число x в два раза больше числа y» рассматривается между множествами X и Y. Каким будет его график, если:

а) $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \mathbf{N}$; б) $X = [2, 8]$, $Y = \mathbf{R}$;

в) $X = Y = \mathbf{R}$.

4. Между множествами $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y = \mathbf{Z}$ задано соответствие «$x - y = 3$», причем $x \in X$, $y \in Y$. Какая фигура на рисунке 72 является графиком этого соответствия?

5. Графиком соответствия P, заданного между множествами X и Y, являются все точки прямоугольника $ABCD$ (рис. 73). Назовите координаты трех точек, принадлежащих этому графику и задайте множества X и Y.

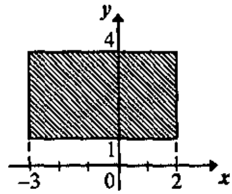


Рис. 73

6. Множества $X = \{1, 3, 4, 6\}$ и $Y = \{0, 1\}$ находятся в соответствии $S = \{(1, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1) (6, 1)\}$. Задайте соответствие S^{-1}, обратное соответствию S, и постройте на одном чертеже их графики.

7. Между множеством X – углов треугольника ABC и множеством Y – его сторон задано соответствие T – «угол x лежит против стороны y». Задайте соответствие T^{-1}, обратное соответствию T, при помощи: а) предложения с двумя переменными; б) графа.

8. Даны графики соответствий P и Q (рис. 74). Можно ли утверждать, что соответствия P и Q взаимно обратные?

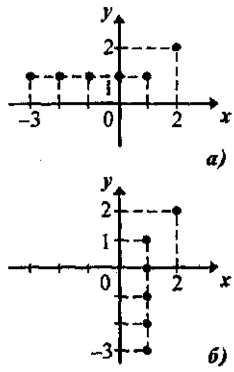


Рис. 74

9. Постройте графики соответствий, обратных данным (рис. 75).

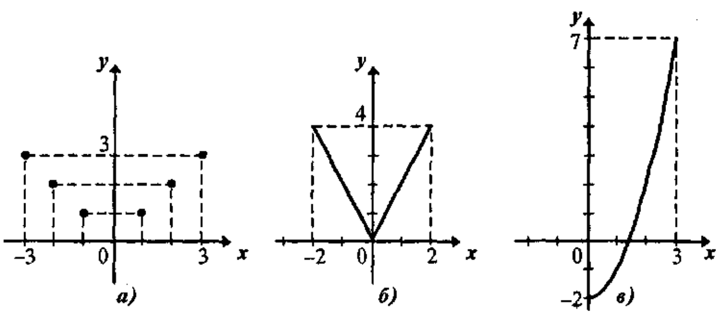


Рис. 75

42. Взаимно однозначные соответствия

В математике изучают различные виды соответствий. Это не случайно, поскольку взаимосвязи, существующие в окружающем нас мире, многообразны. Для учителя, обучающего математике младших школьников, особую значимость имеют взаимно однозначные соответствия.

Определение. ***Взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y называется такое соответствие, при котором каждому элементу множества X сопоставляется единственный элемент множества Y и каждый элемент множества Y соответствует только одному элементу множества X.***

Рассмотрим примеры взаимно однозначных соответствий.

Пример 1. Пусть X – множество кружков, Y – множество квадратов и соответствие между ними задано при помощи стрелок (рис. 76).

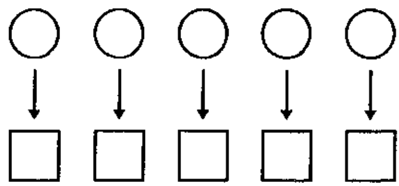


Рис. 76

Это соответствие взаимно однозначное, так как каждому кружку из множества X сопоставляется единственный квадрат из множества Y и каждый квадрат из Y соответствует только одному кружку из множества X.

Пример 2. Пусть X – множество действительных чисел, Y – множество точек координатной прямой. Соответствие между ними таково: действительному числу сопоставляется точка координатной прямой. Это соответствие взаимно однозначное, так как каждому действительному числу сопоставляется единственная точка координатной прямой и каждая точка на прямой соответствует только одному числу.

В математике взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y часто называют *взаимно однозначным отображением множества X на множество Y.*

Понятие взаимно однозначного соответствия позволяет определить *отношение равномощности множеств.*

Определение. ***Множества X и Y называются равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.***

Если множества X и Y равномощны, то пишут $X \sim Y$.

Нетрудно увидеть, что множества, которые были рассмотрены в примерах 1 и 2, равномощны.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Равномощные конечные множества называют еще *равночисленными*. В начальном обучении математике равночисленность выражается словами «столько же» и может использоваться при ознакомлении учащихся со многими другими понятиями. Например, чтобы ввести равенство чисел, сравнивают два множества, устанавливая между их элементами взаимно однозначное соответствие. Например, пишут, что 5 = 5, так как кружков столько же, сколько квадратов (рис. 76).

Понятие равночисленности множеств лежит и в основе определения отношений «больше на ...» и «меньше на ...». Например, чтобы утверждать, что 6 больше 4 на 2, сравнивают два множества, устанавливая взаимно однозначное соответствие между множеством X, в котором 4 элемента, и подмножеством Y_1 другого множества Y, в котором 6 элементов (рис. 77), и делают вывод: треугольников столько же, сколько кружков, и еще 2. Другими словами, треугольников на 2 больше, чем кружков.

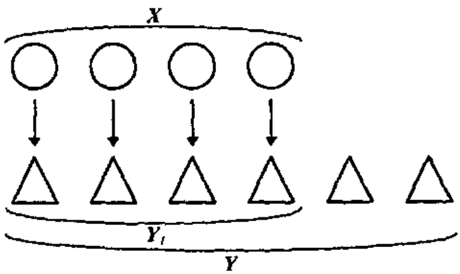


Рис. 77

Как уже было сказано, равномощными могут быть и бесконечные множества. Приведем примеры таких множеств.

Пример 3. Пусть X – множество точек отрезка AB, Y – множество точек отрезка CD, причем длины отрезков различны. Так как между данными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (рис. 78), то множества точек отрезка AB и CD равномощны.

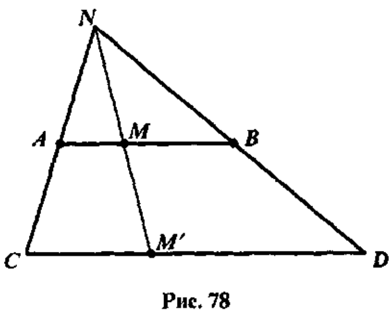


Рис. 78

Пример 4. Рассмотрим множество N натуральных чисел и множество Y – четных натуральных чисел. Они равномощны, так как между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{N}: & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ Y: & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

На первый взгляд кажется парадоксальным тот факт, что можно установить взаимно однозначные соответствия между множеством и его частью: для конечных множеств такая ситуация невозможна. Однако в математике доказано, что для бесконечного множества A всегда найдется такое его подмножество B, что между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. Иногда это утверждение считают определением бесконечного множества.

Если бесконечное множество равномощно множеству N натуральных чисел, его называют *счетным*. Любое бесконечное подмножество множества N счетно: чтобы пронумеровать его элементы, надо расположить элементы подмножества в порядке возрастания и нумеровать один за другим (т.е. так, как это сделано в примере 4). Так, счетно множество всех нечетных натуральных чисел, множество натуральных чисел, кратных 5 и др. Счетными являются также множества всех целых чисел, всех рациональных.

Существуют ли множества, отличные от счетных? Доказано, что бесконечным множеством, не равномощным множеству N натуральных чисел, является множество R всех действительных чисел.

Упражнения

1. Задайте при помощи графа три соответствия между множествами $X = \{a, b, c\}$ и $Y = \{2, 4, 6\}$ так, чтобы одно из них было взаимно однозначным.

2. X – множество прямоугольников (рис. 79), Y = N. Между элементами этих множеств установлено соответствие P: «прямоугольник x имеет площадь, равную y». Постройте граф соответствия P. Является ли оно взаимно однозначным?

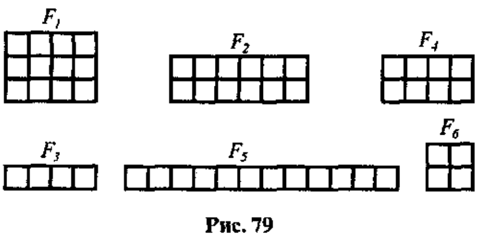


Рис. 79

3. Как можно изменить множества X и Y, данные в упражнении 2, чтобы соответствие P: «прямоугольник x имеет площадь, равную y», было взаимно однозначным?

4. Даны множества: $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 7\}$. Найдите $A \times B$ и $B \times A$. Верно ли, что найденные множества равномощны?

5. Докажите, что множество A счетно, если:

а) $A = \{9, 10, 11, 12, ...\}$;

б) $A = \{a \mid a = 3n, n \in \mathrm{N}\}$;

в) $A = \{a \mid a = n^2, n \in \mathrm{N}\}$.

6. Покажите, что, выполняя нижеприведенные задания, учащиеся начальных классов используют понятие равночисленности множеств:

а) Нарисуй на другой фигуре (рис. 80) столько же точек, сколько на первой (точки не пересчитывать).

б) Нарисуй, не считая, столько же квадратов и столько же отрезков, сколько на рисунке 81 треугольников.

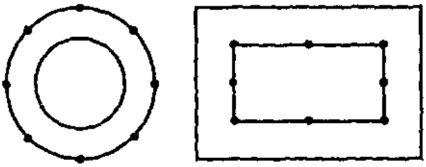


Рис. 80

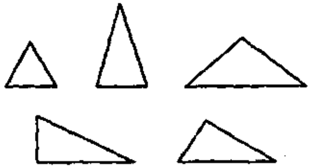


Рис. 81

в) У Димы было 28 марок, а у Коли на 7 марок больше. Сколько марок было у Коли?

г) У Маши 9 игрушек, а у Риты на 2 меньше. Сколько игрушек у Риты?

д) Для детского сада купили 4 зеленых мяча, а красных в 3 раза больше, чем зеленых. Сколько красных мячей купили детям?

е) Для детского сада купили 15 красных мячей, а зеленых в 3 раза меньше. Сколько зеленых мячей купили детям?

43. Основные выводы § 8

Изучая материал этого параграфа, мы установили, что любое соответствие S между двумя множествами X и Y есть подмножество декартова произведения этих множеств, т.е. $S \subset X \times Y$. Выяснили, что соответствия задают также, как и множества вообще. Познакомились с *новыми понятиями*:

– соответствие, обратное данному;

– взаимно однозначное соответствие;

– равномощные множества;

– счетное множество.

Установили, что графики взаимно обратных соответствий между числовыми множествами симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

§9. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Функция – одно из важнейших понятий математики, исходное понятие ведущей ее области – математического анализа. В школьном курсе математики основное внимание уделяется числовым функциям. Причиной этого является тесная связь математики с естественными науками, в частности с физикой, для которой числовые функции служат средством количественного описания различных зависимостей между величинами.

В начальном курсе математики понятие функции и все, что с ним связано, в явном виде не изучается, но идея функциональной зависимости буквально пронизывает его, а правильное понимание таких свойств реальных явлений, как взаимозависимость и изменяемость, является основой научного мировоззрения. Безусловно, все это требует от учителя начальных классов определенных знаний о функции и ее свойствах, и прежде всего таких, которые помогут ему осуществлять в начальной школе пропедевтику понятия функции.

44. Понятие функции. Способы задания функций

Выполним два задания для младших школьников.

1) Увеличь каждое нечетное однозначное число в 2 раза.

2) Заполни таблицу.

Уменьшаемое	5	5	5	5	5	5
Вычитаемое	0	1	2	3	4	5
Разность						

С какими математическими понятиями мы имеем дело, выполняя эти задания?

Прежде всего, в каждом задании есть два числовых множества, между которыми устанавливается соответствие. В первом – это множества $\{1, 3, 5, 7\}$ и $\{2, 6, 10, 14\}$, а во втором – это множество значений вычитаемого $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и множество значений разности $\{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$. В чем сходство устанавливаемых между этими множествами соответствий? И в первом, и во втором задании каждому числу из первого множества сопоставляется единственное число из второго. В математике такие соответствия называют *функциями*. В общем виде понятие числовой функции определяют так:

Определение. ***Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством $\mathbf{R}$ действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества $\mathbf{R}$.***

Множество X называют **области определения функции.**

Функции принято обозначать буквами f, g, h и др. Если f – функция, заданная на множестве X, то действительное число y, соответствующее числу x из множества X, часто обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$. Переменную x при этом называют **аргументом** (или независимой переменной) функции f. Множество чисел вида $f(x)$ для всех x из множества X называют **областью значений функции** f.

В рассмотренном выше первом примере функция задана на множестве $X = \{1, 3, 5, 7\}$ – это ее область определения. А область значений этой функции есть множество $\{2, 6, 10, 14\}$.

Из определения функции вытекает, что для задания функции необходимо указать, во-первых, числовое множество X, т.е. область определения функции, и, во-вторых, правило, по которому каждому числу из множества X соответствует единственное действительное число.

Часто функции задают с помощью формул, указывающих, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Например, формулы $y = 2x - 3$, $y = x^2$, $y = 3x$, где x – действительное число, задают функции, поскольку каждому действительному значению x можно, производя указанные в формуле действия, поставить в соответствие единственное значение y.

Заметим, что с помощью одной и той же формулы можно задать как угодно много функций, которые будут отличаться друг от друга областью определения. Например, функция $y = 2x - 3$, где $x \in \mathbf{R}$, отлична от функции $y = 2x - 3$, где $x \in \mathbf{N}$. Действительно, при $x = -5$ значение первой функции равно -13, а значение второй при $x = -5$ не определено.

Часто при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается. В таких случаях считают, что областью определения функции является область определения выражения $f(x)$. Например, если функция задана формулой $y = 2x - 3$, то ее областью определения считают множество $\mathbf{R}$ действительных чисел. Если функция задана формулой $y=\dfrac{6}{x-2}$, то ее область определения – есть множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, исключая число 2 (если $x = 2$, то знаменатель данной дроби обращается в нуль).

Числовые функции можно представлять наглядно на координатной плоскости. Пусть $y = f(x)$ – функция с областью определения X. Тогда ее *графиком* является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу x и ординату $f(x)$ для всех x из множества X.

Так, графиком функции $y = 2x - 3$, заданной на множестве $\mathbf{R}$, является прямая (рис. 82), а графиком функции $y = x^2$, заданной также на множестве $\mathbf{R}$, – парабола (рис. 83).

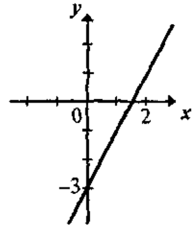


Рис. 82

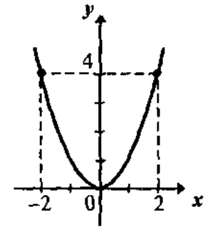
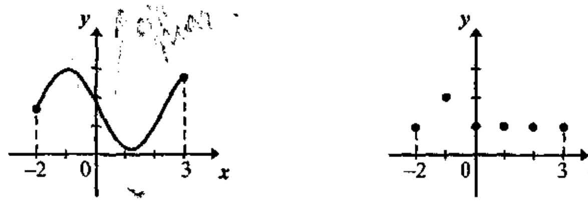


Рис. 83

Функции можно задавать при помощи графика. Например, графики, приведенные на рисунке 84, задают функции, одна из которых имеет в качестве области определения промежуток [–2, 3], а вторая – конечное множество {–2, –1, 0, 1, 2, 3}.



а) б)

Рис. 84

Не каждое множество точек на координатной плоскости представляет собой график некоторой функции. Так как при каждом значении аргумента из области определения функция должна иметь лишь одно значение, то любая прямая, параллельная оси ординат, или совсем не пересекает график функции, или пересекает его лишь в одной точке. Если же это условие не выполняется, то множество точек координатной плоскости график функции не задает. Например, кривая на рисунке 85 не является графиком функции – прямая AB, параллельная оси ординат, пересекает ее в двух точках.

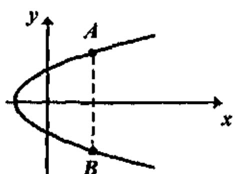


Рис. 85

Функции можно задавать при помощи таблицы. Например, таблица, приведенная ниже, описывает зависимость температуры воздуха от времени суток. Эта зависимость – функция, так как каждому значению времени t соответствует единственное значение температуры воздуха p:

t (в часах)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
p (в градусах Цельсия)	–3	–7	–5	0	2	4	2	1	–3

Числовые функции обладают многими свойствами. Мы рассмотрим одно из них – свойство монотонности, так как понимание этого свойства учителем важно при обучении математике младших школьников.

Определение. ***Функция f называется монотонной на некотором промежутке A, если она на этом промежутке возрастает или убывает.***

Определение. ***Функция f называется возрастающей на некотором промежутке A, если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие:***

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

График функции, возрастающей на промежутке A, обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика увеличиваются (рис. 86).

Определение. ***Функция f называется убывающей на некотором промежутке A, если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие:***

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

График функции, убывающей на промежутке A, обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика уменьшаются (рис. 87).

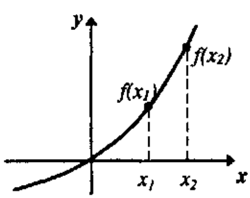


Рис. 86

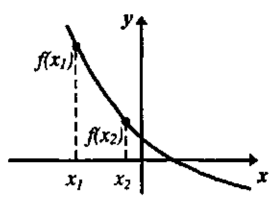


Рис. 87

Упражнения

1. Функции, приведенные в начале пункта, задайте при помощи формул и укажите для каждой область определения и множество значений.

2. Какие из следующих формул задают на множестве **R** действительных чисел функцию:

а) $y = 4x$; б) $y = \dfrac{4}{x}$; в) $x^2 + y^2 = 4$?

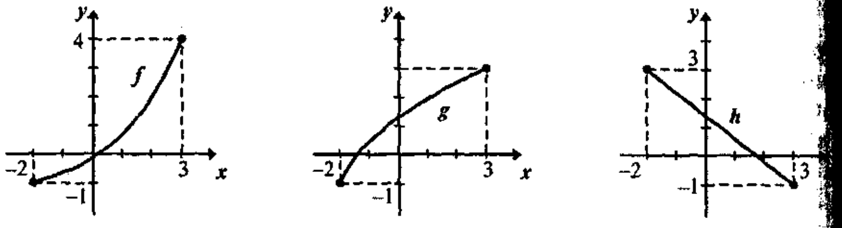


Рис. 88

3. На рисунке 88 изображены графики функций f, g, h. Укажите область определения и область значений каждой. Установите, возрастают они или убывают на данной области определения. Найдите для каждой функции наибольшее и наименьшее значение на всей области определения.

4. Постройте график функции $y = 5 - x$, если ее область определения X такова:

а) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
б) $X = [0; 5]$;
в) $X = \mathbf{R}$.

5. Постройте графики следующих функций при условии, что они заданы на множестве **R** действительных чисел:

а) $y = x$; б) $y = 3$; в) $x = 5$; г) $y = 0$.

6. Функция f задана при помощи таблицы:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

а) Укажите ее область определения и область значений.
б) Задайте функцию f при помощи формулы.
в) Постройте график функции f на координатной плоскости.
д) Докажите, что функция f возрастает на всей области определения.

7. Изучая математику в начальных классах, учащиеся выполняют задания:

а) $39 + a$. Вычисли сумму, если a принимает значения 0, 6, 15, 31, 46, 52.
б) $\square - 9$. Вычисли разность, поставив в окошко числа 10, 11, 12.
в) Составь все возможные примеры на сложение однозначных чисел с ответом 12.

Покажите, что в каждом из этих заданий устанавливается соответствие между двумя числовыми множествами и это соответствие — функция. Назовите в каждом случае область ее определения и область значений.

8. Докажите, что соответствие между значениями переменных x и y, рассматриваемое в задаче, является функцией; укажите область ее значений при условии, что $x < 5$; постройте график данной функции:

а) Катя купила 3 тетради, а Лена на x тетрадей больше. Сколько тетрадей (y) купили Лена и Катя вместе?

б) Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли два туриста. При встрече оказалось, что один прошел 3 км, а второй на x км больше. Каково расстояние (y км) между пунктами A и B?

9. Сравните функции, о которых идет речь в упражнении 8. Чем они похожи? В чем их различие? Какими будут графики данных функций?

10. У одного ученика было 2 тетради. В течение 6 дней он каждый день покупал по 3 новых тетради. Сколько тетрадей (y) у него будет через x дней?

Выразите y через x и покажите, что установленное соответствие – функция. Укажите ее область определения и область значений. Постройте график.

45. Прямая и обратная пропорциональности

Если t – время движения пешехода (в часах), s – пройденный путь (в километрах), и он движется равномерно со скоростью 4 км/ч, то зависимость между этими величинами можно выразить формулой $s = 4t$. Так как каждому значению t соответствует единственное значение s, то можно говорить о том, что с помощью формулы $s = 4t$ задана функция. Ее называют прямой пропорциональностью и определяют следующим образом.

Определение. ***Прямой пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы $y = kx$, где k – не равное нулю действительное число.***

Название функции $y = kx$ связано с тем, что в формуле $y = kx$ есть переменные x и y, которые могут быть значениями величин. А если отношение двух величин равно некоторому числу, отличному от нуля, их называют *прямо пропорциональными*. В нашем случае $\frac{y}{x} = k$ $(k \neq 0)$. Это число называют *коэффициентом пропорциональности*.

Функция $y = kx$ является математической моделью многих реальных ситуаций, рассматриваемых уже в начальном курсе математики. Одна из них описана выше Другой пример: если в одном пакете муки 2 кг, а куплено x таких пакетов, то всю массу купленной муки (обозначим ее через y) можно представить в виде формулы $y = 2x$, т.е. зависимость между количеством пакетов и всей массой купленной муки является прямой пропорциональностью с коэффициентом $k = 2$.

Напомним некоторые свойства прямой пропорциональности, которые изучаются в школьном курсе математики.

1. Областью определения функции $y = kx$ и областью ее значений является множество действительных чисел.

2. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно найти лишь одну точку, принадлежащую ему и не совпадающую с началом координат, а затем через эту точку и начало координат провести прямую.

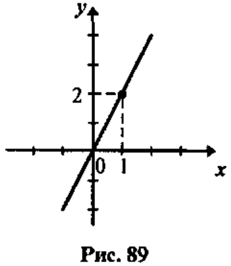


Рис. 89

Например, чтобы построить график функции $y = 2x$, достаточно иметь точку с координатами (1, 2), а затем через нее и начало координат провести прямую (рис. 89).

3. При $k > 0$ функция $y = kx$ возрастает на всей области определения; при $k < 0$ – убывает на всей области определения.

4. Если функция f – прямая пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) – пары соответственных значений переменных x и y, причем $x_2 \neq 0$, то $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Действительно, если функция f – прямая пропорциональность, то она может быть задана формулой $y = kx$, и тогда $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$. Так как при $x_2 \neq 0$ и $k \neq 0$, то $y_2 \neq 0$. Поэтому $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{kx_1}{kx_2} = \dfrac{x_1}{x_2}$, и значит $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то доказанное свойство прямой пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.*

Это свойство присуще только прямой пропорциональности, и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются прямо пропорциональные величины.

Задача 1. За 8 ч токарь изготовил 16 деталей. Сколько часов потребуется токарю на изготовление 48 деталей, если он будет работать с той же производительностью?

Решение. В задаче рассматриваются величины – время работы токаря, количество сделанных им деталей и производительность (т.е. количество деталей, изготавливаемых токарем за 1 ч), причем последняя величина постоянна, а две другие принимают различные значения. Кроме того, количество сделанных деталей и время работы – величины прямо пропорциональные, так как их отношение равно некоторому числу, не равному нулю, а именно – числу деталей, изготавливаемых токарем за 1 ч. Если количество сделанных деталей обозначить буквой y, время работы x, а производительность – k, то получим, что $\frac{y}{x}=k$ или $y = kx$, т.е. математической моделью ситуации, представленной в задаче, является прямая пропорциональность.

Решить задачу можно двумя арифметическими способами:

1 способ:	2 способ:
1) 16:8 = 2 (дет.)	1) 48:16 = 3 (раза)
2) 48:2 = 24 (ч)	2) 8·3 = 24 (ч)

Решая задачу первым способом, мы сначала нашли коэффициент пропорциональности k, он равен 2, а затем, зная, что $y = 2x$, нашли значение x при условии, что $y = 48$.

При решении задачи вторым способом мы воспользовались свойством прямой пропорциональности: во сколько раз увеличивается количество деталей, сделанных токарем, во столько же раз увеличивается и количество времени на их изготовление.

Перейдем теперь к рассмотрению функции, называемой обратной пропорциональностью.

Если t – время движения пешехода (в часах), v – его скорость (в км/ч) и он прошел 12 км, то зависимость между этими величинами можно выразить формулой $v \cdot t = 20$ или $v=\frac{20}{t}$. Так как каждому значению t ($t \neq 0$) соответствует единственное значение скорости v, то можно говорить о том, что с помощью формулы $v=\frac{20}{t}$ задана функция. Ее называют обратной пропорциональностью и определяют следующим образом.

Определение. ***Обратной пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы $y=\frac{k}{x}$, где k – не равное нулю действительное число.***

Название данной функции связано с тем, что в $y=\frac{k}{x}$ есть переменные x и y, которые могут быть значениями величин. А если произведение двух величин равно некоторому числу, отличному от нуля, то их называют обратно пропорциональными. В нашем случае $xy = k$ ($k \neq 0$). Это число k называют коэффициентом пропорциональности.

Функция $y=\frac{k}{x}$ является математической моделью многих реальных ситуаций, рассматриваемых уже в начальном курсе математики.

Одна из них описана перед определением обратной пропорциональности. Другой пример: если купили 12 кг муки и разложили ее в x банок по y кг в каждую, то зависимость между данными величинами можно представить в виде $x \cdot y = 12$, т.е. она является обратной пропорциональностью с коэффициентом $k = 12$.

Напомним некоторые свойства обратной пропорциональности, известные из школьного курса математики.

1. Областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ и областью ее значений y является множество действительных чисел, отличных от нуля.

2. Графиком обратной пропорциональности является гипербола.

3. При $k > 0$ ветви гиперболы расположены в 1-й и 3-й четвертях и функция $y=\frac{k}{x}$ является убывающей на всей области определения x (рис. 90). При $k < 0$ ветви гиперболы расположены во 2-й и 4-й четвертях и функция $y=\frac{k}{x}$ является возрастающей на всей области определения x (рис. 91).

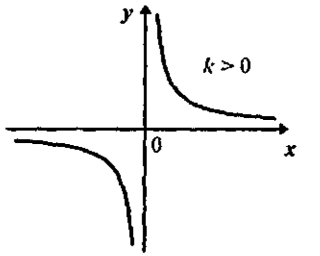


Рис. 90

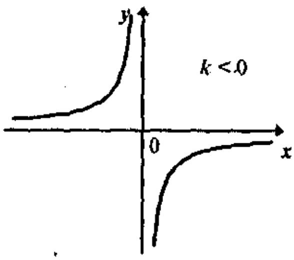


Рис. 91

4. Если функция f – обратная пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) – пары соответственных значений переменных x и y, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$.

Действительно, если функция f – обратная пропорциональность, то она может быть задана формулой $y=\frac{k}{x}$, и тогда $y_1=\frac{k}{x_1}$, $y_2=\frac{k}{x_2}$. Так как $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ и $k \neq 0$, то $\frac{y_2}{y_1}=\frac{k}{x_2}:\frac{k}{x_1}=\frac{k \cdot x_1}{x_2 \cdot k}=\frac{x_1}{x_2}$.

Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то это свойство обратной пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением (уменьшением) значения* *переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.*

Это свойство присуще только обратной пропорциональности, и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются обратно пропорциональные величины.

Задача 2. Велосипедист, двигаясь со скоростью 10 км/ч, проехал расстояние от A до B за 6 ч. Сколько времени потратит велосипедист на обратный путь, если будет ехать со скоростью 20 км/ч?

Решение. В задаче рассматриваются величины: скорость движения велосипедиста, время движения и расстояние от A до B, причем последняя величина постоянна, а две другие принимают различные значения. Кроме того, скорость и время движения – величины обратно пропорциональные, так как их произведение равно некоторому числу, а именно пройденному расстоянию. Если время движения велосипедиста обозначить буквой y, скорость – x, а расстояние AB – k, то получим, что $xy = k$ или $y = \frac{k}{x}$, т.е. математической моделью ситуации, представленной в задаче, является обратная пропорциональность.

Решить задачу можно двумя способами:

1 способ:	2 способ:
1) $10 \cdot 6 = 60$ (км)	1) $20:10 = 2$ (раза)
2) $60:20 = 3$ (ч)	2) $6:2 = 3$ (ч)

Решая задачу первым способом, мы сначала нашли коэффициент пропорциональности k, он равен 60, а затем, зная, что $y = \frac{60}{x}$, нашли значение y при условии, что $x = 20$.

При решении задачи вторым способом мы воспользовались свойством обратной пропорциональности: во сколько раз увеличивается скорость движения, во столько же раз уменьшается время на прохождение одного и того же расстояния.

Заметим, что при решении конкретных задач с обратно пропорциональными или прямо пропорциональными величинами накладываются некоторые ограничения на x и y, в частности, они могут рассматриваться не на всем множестве действительных чисел, а на его подмножествах.

Задача 3. Лена купила x карандашей, а Катя в 2 раза больше. Обозначьте число карандашей, купленных Катей, через y, выразите y через x и постройте график установленного соответствия при условии, что $x \leq 5$. Является ли это соответствие функцией? Какова ее область определения и область значений?

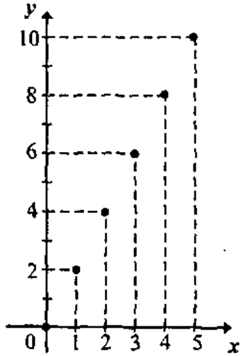


Рис. 92

Решение. Катя купила $y = 2x$ карандашей. При построении графика функции $y = 2x$ необходимо учесть, что переменная x обозначает количество карандашей и $x \leq 5$, значит, она может принимать только значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Это и будет область определения данной функции. Чтобы получить область значений данной функции, надо каждое значение x из области определения умножить на 2, т.е. это будет множество $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Следовательно, графиком функции $y = 2x$ с областью определения $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ будет множество точек, изображенных на рисунке 92. Все эти точки принадлежат прямой $y = 2x$.

Упражнения

1. Известно, что функция f является прямой пропорциональностью, задана на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и при x, равном 3, значение функции равно 12.

а) Задайте функцию f при помощи формулы и таблицы; постройте ее график.

б) Какие свойства функции f можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

в) Какие из названных свойств вы будете использовать, решая задачу: «В 3 пакета разложили поровну 12 кг муки. Сколько килограммов муки можно разложить в 6 таких пакетов?»

2. Известно, что функция f является обратной пропорциональностью, задана на множестве $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ и при x, равном 5, значение функции f равно 6.

а) Задайте функцию f при помощи формулы и таблицы; постройте ее график.

б) Какие свойства функции f можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

в) Какие из названных свойств вы будете использовать, решая задачу: «Муку разложили в 10 пакетов по 3 кг в каждый. Сколько получилось бы пакетов, если бы в каждый положили по 6 кг муки?»

3. Покажите, что зависимость между величинами, о которых идет речь в нижеприведенной задаче, может быть выражена формулой $y = kx$.

Из 24 м ткани сшили 8 одинаковых платьев. Сколько потребуется ткани на 16 таких же платьев?

4. Учитель, проводя с детьми анализ задачи (см. упр. 3), спрашивает: «Если на 8 платьев израсходовали 24 м ткани, то на 16 платьев израсходуют больше или меньше ткани?» Дети отвечают, что больше, так как 16 больше 8.

О каком свойстве и какой функции в этом случае идет речь?

5. Задайте при помощи формулы соответствие, которое рассматривается в задании:

а) Запиши несколько примеров на деление с результатом 10.

б) Составь все возможные примеры на сложение однозначных чисел с ответом 10.

Установите, являются ли эти соответствия функциями.

6. Одна сторона прямоугольника 3 см, а другая – x см. Какова площадь (y см^2) этого прямоугольника? Постройте график полученного соответствия при условии, что $x \leq 6$. Докажите, что это соответствие – функция.

7. Площадь прямоугольника с основанием x см равна 12 см^2. Какова высота (y см) этого прямоугольника?

Покажите, что соответствие между значениями переменных x и y является функцией и постройте ее график при условии, что $1 \leq x \leq 12$.

8. Учащимся дано задание заполнить таблицу

b	1	2	3	4	6	8	12	24
$24:b$								

Задает ли эта таблица функцию? Какую? Какое свойство этой функции можно проиллюстрировать при помощи данной таблицы?

9. Обоснуйте, используя определения прямой или обратной пропорциональности и их свойства, решение различными арифметическими способами следующих задач:

а) С участка собрали 6 мешков картофеля по 40 кг в каждом. Этот картофель разложили в ящики по 20 кг в каждый. Сколько ящиков потребовалось?

б) Из куска ткани длиной 24 м сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 32 таких же костюма?

10. Какие вспомогательные модели можно использовать на этапе поиска плана решения задач из упражнения 9, если рассматривать их в начальной школе, т.е. при условии, что дети не знают ни прямой, ни обратной пропорциональности?

11. Какие из нижеприведенных задач можно решить в начальной школе двумя способами:

а) Велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч и был в пути 2 ч. Сколько времени потребуется пешеходу, чтобы пройти это расстояние со скоростью 4 км/ч?

б) Из 100 кг свеклы при переработке получается 16 кг саха Сколько килограммов сахара получится из 3 т свеклы?

в) Два опытных участка имеют одинаковую площадь. Ширина п вого участка 30 м, ширина второго – 40 м. Найдите длину перво участка, если известно, что длина второго участка равна 75 м.

46. Основные выводы § 9

Рассмотрев материал данного параграфа, мы уточнили наши зн ния о таких *понятиях*, как:

– числовая функция;
– область определения функции;
– область значений функции;
– график функции;
– прямая пропорциональность;
– обратная пропорциональность.

Вспомнили, что числовую функцию можно задать с помощь формулы (она представляет собой уравнение с двумя переменными графика на координатной плоскости, таблицы.

Выяснили, что функции могут обладать *свойством монотонности*, т. возрастать или убывать на некотором промежутке.

Особо выделили свойства, присущие только прямой и обратно пропорциональности, поскольку их можно использовать при обуче нии младших школьников решению задач с пропорциональным величинами.

§ 10. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ

В математике изучают не только связи между элементами дву множеств, т.е. соответствия, но и связи между элементами одного множества. Называют их отношениями.

Отношения многообразны. Между понятиями – это отношения рода и вида, части и целого; между предложениями – отношения следования и равносильности; между числами – «больше», «меньше», «равно», «больше на ...», «меньше на ...», «следует» и др.

Если рассматривают отношения между двумя элементами, то их называют *бинарными*; отношения между тремя элементами – *тернарными*; отношения между n элементами – n-арными. Все названные выше отношения являются бинарными. Примером тернарного отношения может служить отношение между точками прямой – «точка x лежит между точками y и z».

Изучение отношений между объектами важно для познания как самих объектов, так и для познания реального мира в целом. В нашем курсе мы будем рассматривать в основном бинарные отношения, но чтобы увидеть общность методических подходов к изучению в начальном курсе математики конкретных отношений, понять важнейшие математические идеи, связанные с отношениями, учителю надо знать, какова математическая сущность любого отношения, какими свойствами они могут обладать, какие основные виды отношений изучает математика.

47. Понятие отношения на множестве

Чтобы определить общее понятие бинарного отношения на множестве, поступим так же, как и в случае с соответствиями, т.е. рассмотрим сначала конкретный пример. Пусть на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «меньше». Это означает, что для любых двух чисел из множества X можно сказать, какое из них меньше: $2 < 4$, $2 < 6$, $2 < 8$, $4 < 6$, $4 < 8$, $6 < 8$. Полученные неравенства можно записать иначе, в виде упорядоченных пар: (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8). Но все эти пары есть элементы декартова произведения $X \times X$, поэтому об отношении «меньше», заданном на множестве X, можно сказать, что оно является подмножеством множества $X \times X$.

Вообще бинарные отношения на множестве X определяют следующим способом:

Определение. ***Бинарным отношением на множестве X называется всякое подмножество декартова произведения X × X.***

Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только бинарные отношения, то слово «бинарные», как правило, будем опускать.

Условимся отношения обозначать буквами R, S, T, P и др.

Если R – отношения на множестве X, то, согласно определению, $R \subset X \times X$. С другой стороны, если задано некоторое подмножество множества $X \times X$, то оно определяет на множестве X некоторое отношение R.

Утверждение о том, что элементы x и y находятся в отношении R, можно записывать так: $(x, y) \in R$ или xRy. Последняя запись читается: «Элемент x находится в отношении R с элементом y».

Отношения задают так же, как соответствия. Отношение можно задать, перечислив пары элементов множества X, находящиеся в этом отношении. Формы представления таких пар могут быть различными – они аналогичны формам задания соответствий. Отличия касаются задания отношений при помощи графа.

Построим, например, граф отношений «меньше», заданного на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$. Для этого элементы множества X изобразим

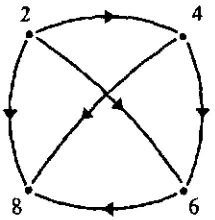


Рис. 93

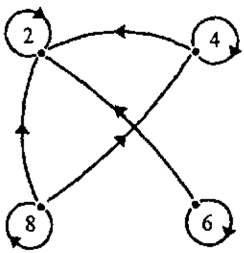


Рис. 94

точками (их называют вершинами графа), а отношение «меньше» – стрелкой (рис. 93).

На том же множестве X можно рассмотреть другое отношение – «кратно». Граф этого отношения будет в каждой вершине иметь петлю (стрелку, начало и конец которой совпадают), так как каждое число кратно самому себе (рис. 94).

Отношение можно задать при помощи предложения с двумя переменными. Так, например, заданы рассмотренные выше отношения «меньше» и «кратно», причем использована краткая форма предложений «число x меньше числа y» и «число x кратно числу y». Некоторые такие предложения можно записывать, используя символы. Например, отношения «меньше» и «кратно» можно было задать в таком виде: «$x < y$», «$x \vdots y$». Отношение «x больше y на 3» можно записать в виде равенства $x = y + 3$ (или $x - y = 3$).

Для отношения R, заданного на множестве X, всегда можно задать отношение R^{-1}, ему обратное, – оно определяется так же, как соответствие, обратное данному. Например, если R – отношение «x меньше y», то обратным ему будет отношение «y больше x».

Понятием отношения, обратного данному, часто пользуются при начальном обучении математике. Например, чтобы предупредить ошибку в выборе действия, с помощью которого решается задача: «У Пети 7 карандашей, что *на 2 меньше*, чем у Бори. Сколько карандашей у Бори?» – ее переформулируют: «У Пети 7 карандашей, а у Бори *на 2 больше*. Сколько карандашей у Бори?» Видим, что переформулировка свелась к замене отношения «меньше на 2» обратным ему отношением «больше на 2».

Упражнения

1. Приведите примеры отношений, существующих между:

а) натуральными числами;

б) прямыми на плоскости;

в) треугольниками;

г) множествами.

2. На множестве $X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ задано отношение R. Перечислите пары чисел, связанных этим отношением и постройте его граф, если:

а) R – «x больше y в 3 раза»;

б) R – «x больше y на 3».

3. Запишите в виде равенства предложение:

а) Число x меньше y на 2.

б) Число x меньше y в 2 раза.

4. Задает ли на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ какое-либо отношение следующее множество упорядоченных пар:

а) $\{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$; б) $\{(4, 2), (6, 4), (8, 6), (2, 1)\}$?

5. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ рассматриваются отношения «$x = y$», «$x \vdots y$» и «x больше y на 2». Какое из приведенных ниже подмножеств множества $X \times X$ задает данные отношения:

а) $\{(4, 2), (6, 2), (8, 2), (6, 4), (8, 4), (8, 6), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$;

б) $\{(4, 2), (6, 4), (8, 6)\}$;

в) $\{(2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8)\}$.

6. Отношение «$x \geq y$» рассматривается на множестве X. Каким будет его график на координатной плоскости, если:

а) $X = \{2, 4, 6, 8\}$;

б) X – множество натуральных чисел;

в) X – множество действительных чисел?

7. На множестве отрезков (рис. 95) задано отношение P: «отрезок x длиннее отрезка y». Постройте граф этого отношения и задайте различными способами отношение, обратное данному.

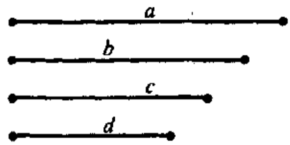


Рис. 95

8. Отношение S на множестве действительных чисел задано при помощи графика (рис. 96). Постройте график отношения, обратного данному.

9. Семья Волковых состоит из отца Михаила Петровича, матери Веры Ивановны и детей: Толи, Кати, Андрея и Оли. Между членами семьи существуют различные отношения родства: «быть матерью»; «быть дочерью»; «быть братом» и другие. Постройте графы указанных отношений и назовите другие, которые существуют между членами семьи Волковых. Есть ли среди них взаимно обратные?

10. На рисунке 97 дан граф отношения «быть братом» на множестве детей, живущих в одном доме (дети обозначены точками А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З). Кто из них является девочкой, а кто мальчиком?

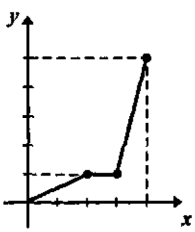


Рис. 96

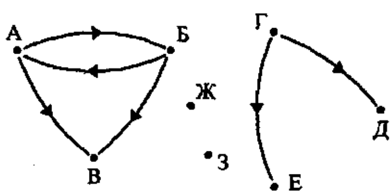


Рис. 97

11. Решите арифметическим методом задачу, предварительно выделив все отношения, которые в ней рассматриваются:

а) На одной полке было в 3 раза больше книг, чем на другой. Когда с первой полки сняли 8 книг, а на другую положили 5 книг, то на второй полке стало на 17 книг меньше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке?

б) На автобазе было на 46 грузовых машин больше, чем автобусов. Сколько грузовых машин было на автобазе, если их было в 3 раза больше, чем автобусов?

48. Свойства отношений

Мы установили, что бинарное отношение на множестве X представляет собой множество упорядоченных пар элементов, принадлежащих декартову произведению $X \times X$. Это математическая сущность всякого отношения. Но, как и любые другие понятия, отношения обладают свойствами. Их удалось выделить, изучая различные конкретные отношения. Свойств достаточно много, в нашем курсе мы будем изучать только некоторые.

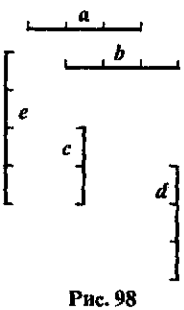
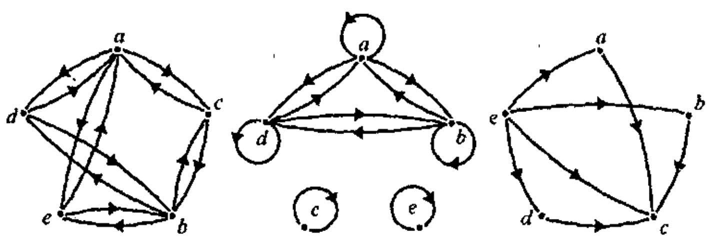


Рис. 98

Рассмотрим на множестве отрезков, представленных на рис. 98, отношения перпендикулярности, равенства и «длиннее». Построим графы этих отношений (рис. 99) и будем их сравнивать. Видим, что граф отношения равенства отличается от двух других наличием петель в каждой его вершине. Эти петли – результат того, что отношение равенства отрезков обладает свойством: любой отрезок равен самому себе. Говорят, что отношение равенства обладает свойством *рефлексивности* или просто, что оно *рефлексивно*.



Граф отношения перпендикулярности | Граф отношения равенства | Граф отношения «длиннее»

Рис. 99

Определение. ***Отношение R на множестве X называется рефлексивным, если о каждом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.***

Используя символы, это отношение можно записать в таком виде:

$$R \text{ рефлексивно на } X \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} xRx \text{ для любого } x \in X.$$

Если отношение R рефлексивно на множестве X, то в каждой вершине графа данного отношения имеется петля. Справедливо и обратное утверждение: граф, каждая вершина которого имеет петлю, задает отношения, обладающие свойством рефлексивности.

Примеры рефлексивных отношений:

– отношение «кратно» на множестве натуральных чисел (каждое натуральное число кратно самому себе);

– отношение подобия треугольников (каждый треугольник подобен самому себе).

Существуют отношения, которые свойством рефлексивности не обладают. Таким, например, является отношение перпендикулярности на множестве отрезков: нет ни одного отрезка, о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе. Поэтому на графе отношения перпендикулярности (рис. 99) нет ни одной петли. Не обладает свойством рефлексивности и отношение «длиннее» для отрезков.

Обратим теперь внимание на графы отношений перпендикулярности и равенства отрезков. Они «похожи» тем, что если есть одна стрелка, соединяющая пару элементов, то обязательно есть и другая, соединяющая те же элементы, но идущая в противоположном направлении. Эта особенность графа отражает те свойства, которыми обладают отношения параллельности и равенства отрезков:

– если один отрезок перпендикулярен другому отрезку, то этот «другой» перпендикулярен первому;

– если один отрезок равен другому отрезку, то этот «другой» равен первому.

Про отношения перпендикулярности и равенства отрезков говорят, что они обладают свойством *симметричности* или просто *симметричны*.

Определение. ***Отношение R на множестве X называется симметричным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x.***

Используя символы, это отношение можно записать в таком виде:

$$R \text{ симметрично на } X \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} (xRy \Rightarrow yRx).$$

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, граф содержит и стрелку, идущую от y к x. Справедливо и обратное утверждение. Граф, содержащий вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, и стрелку, идущую от y к x, является графом симметричного отношения.

В дополнение к рассмотренным двум примерам симметричных отношений присоединим еще такие:

– отношение параллельности на множестве прямых (если прямая x параллельна прямой y, то и прямая y параллельна прямой x);

– отношение подобия треугольников (если треугольник F подобен треугольнику P, то треугольник P подобен треугольнику F).

Существуют отношения, которые свойством симметричности не обладают. Таким, например, является отношение «длиннее» на множестве отрезков. Действительно, если отрезок x длиннее отрезка y, то отрезок y не может быть длиннее отрезка x. Про отношения «длиннее» говорят, что оно обладает свойством *антисимметричности* или просто *антисимметрично*.

Определение. ***Отношение R на множестве X называется антисимметричным, если для различных элементов x и y из множества X выполнено условие: из того, что x находится в отношении R с элементом y, следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится.***

Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$$R \text{ антисимметрично на } X \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} (xRy \wedge x \neq y \Rightarrow \overline{yRx}).$$

Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна. Справедливо и обратное утверждение: граф, вершины которого соединены только одной стрелкой, есть граф антисимметричного отношения.

Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков свойством антисимметричности, например, обладают:

– отношение «больше» для чисел (если x больше y, то y не может быть больше x);

– отношение «больше на 2» для чисел (если x больше y на 2, то y не может быть больше на 2 числа x).

Существуют отношения, не обладающие ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности. Рассмотрим, например, отношение «быть сестрой» на множестве детей одной семьи. Пусть в семье трое детей: Катя, Маша и Толя. Тогда граф отношения «быть сестрой» будет таким, как на ри-

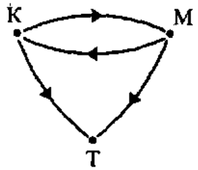


Рис. 100

сунке 100. Он показывает, что данное отношение не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

Обратим внимание еще раз на одну особенность графа отношения «длиннее» (рис. 99). На нем можно заметить: если стрелки проведены от e к a и от a к c, то есть стрелка от e к c; если стрелки приведены от e к b и от b к c, то есть стрелка и от e к c и т.д. Эта особенность графа отражает важное свойство отношения «длиннее»: если первый отрезок длиннее второго, а второй – длиннее третьего, то первый – длиннее третьего. Говорят, что это отношение обладает *свойством транзитивности* или просто *транзитивно*.

Определение. ***Отношение R на множестве X называется транзитивным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z.***

Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$$\boldsymbol{R} \textit{ транзитивно на } \boldsymbol{X} \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} (\boldsymbol{xRy} \wedge \boldsymbol{yRz} \Rightarrow \boldsymbol{xRz}).$$

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и y к z, содержит стрелку, идущую от x к z. Справедливо и обратное утверждение.

Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков свойством транзитивности обладает отношение равенства: если отрезок x равен отрезку y и отрезок y равен отрезку z, то отрезок x равен отрезку z. Это свойство отражено и на графе отношения равенства (рис. 99)

Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают. Таким отношением является, например, отношение перпендикулярности: если отрезок a перпендикулярен отрезку d, а отрезок d перпендикулярен отрезку b, то отрезки a и b не перпендикулярны!

Рассмотрим еще одно свойство отношений, которое называют *свойством связанности*, а отношение, обладающее им, называют *связанным*[1].

Определение. ***Отношение R на множестве X называется связанным, если для любых элементов x и y из множества X выполняется условие: из того, что x и y различны, следует, что либо x находится в отношении R с элементом y, либо элемент y находится в отношении R с элементом x.***

Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$$\boldsymbol{R} \textit{ связано на множестве } \boldsymbol{X} \underset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} (\boldsymbol{x \neq y} \Rightarrow \boldsymbol{xRy} \vee \boldsymbol{yRx}).$$

[1] Наряду с этим термином в математической литературе используют термины: *свойство связности, отношение связное.*

Например, свойством связанности обладают отношения «больше» для натуральных чисел: для любых различных чисел x и y можно утверждать, что либо $x > y$, либо $y > x$.

На графе связанного отношения любые две вершины соединены стрелкой. Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, которые свойством связанности не обладают. Таким отношением, например, является отношение делимости на множестве натуральных чисел: можно назвать такие числа x и y, что ни число x не является делителем числа y, ни число y не является делителем числа x.

Выделенные свойства позволяют анализировать различные отношения с общих позиций – наличия (или отсутствия) у них тех или иных свойств.

Так, если суммировать все сказанное об отношении равенства, заданном на множестве отрезков (рис. 99), то получается, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение «длиннее» на том же множестве отрезков антисимметрично и транзитивно, а отношение перпендикулярности – симметрично, но оно не обладает свойствами рефлексивности и транзитивности. Все эти отношения на заданном множестве отрезков связанными не являются.

Задача 1. Сформулировать свойства отношения R, заданного при помощи графа (рис. 101).

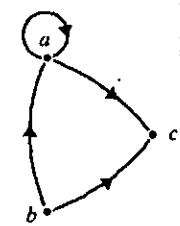


Рис. 101

Решение. Отношение R – антисимметрично, так как вершины графа соединяются только одной стрелкой.

Отношение R – транзитивно, так как с парой стрелок, идущих от b к a и от a к c, на графе есть стрелка, идущая от b к c.

Отношение R – связанно, так как любые две вершины соединены стрелкой.

Отношение R свойством рефлексивности не обладает, так как на графе есть вершины, в которых петли нет.

Задача 2. Сформулировать свойства отношения «больше в 2 раза», заданного на множестве натуральных чисел.

Решение. «Больше в 2 раза» – это краткая форма отношения «число x больше числа y в 2 раза». Это отношение антисимметрично, так как выполняется условие: из того, что число x больше числа y в 2 раза, следует, что число y не больше числа x в 2 раза.

Данное отношение не обладает свойством рефлексивности, потому что ни про одно число нельзя сказать, что оно больше самого себя в 2 раза.

Заданное отношение не транзитивно, так как из того, что число x больше числа y на 2, а число y больше числа z на 2, следует, что число x не может быть больше числа z на 2.

Это отношение на множестве натуральных чисел свойством связанности не обладает, так как существуют пары таких чисел x и y, что ни число x не больше числа y в два раза, ни число y не больше x в 2 раза. Например, это числа 7 и 3, 5 и 8 и др.

Упражнения

1. Докажите, что отношение R, заданное при помощи графа (рис. 102), рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

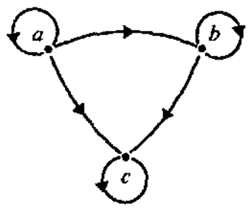


Рис. 102

2. Докажите, что отношение T, заданное при помощи графа (рис. 103), симметрично и транзитивно.

3. Сформулируйте условия, при которых отношение свойством рефлексивности не обладает, и докажите, что отношение T (см. упр. 2) не рефлексивно.

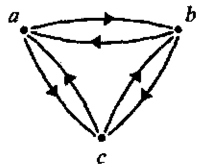


Рис. 103

4. Сформулируйте условия, при которых отношение не обладает свойством: а) симметричности; б) антисимметричности; в) транзитивности; г) связанности.

5. Докажите, что отношение P, граф которого изображен на рисунке 104, не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности, ни свойством транзитивности.

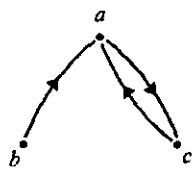


Рис. 104

6. Какими свойствами обладает отношение, граф которого изображен на рисунке 105? Является ли оно рефлексивным? Транзитивным?

7. Какие из следующих утверждений истинны:

а) Отношение «x больше y на 3» антисимметрично на множестве N, так как из того, что x больше y на 3, не следует, что y больше x на 3.

б) Отношение «x больше y на 3» антисимметрично, так как из того, что x больше y на 3, следует, что y не больше x на 3.

в) Отношение «x больше y на 3» антисимметрично, так как из того, что x больше y на 3, следует, что y меньше x на 3.

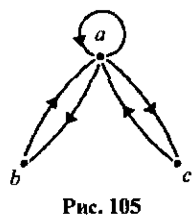


Рис. 105

8. На множестве отрезков задано отношение «короче». Верно ли, что оно антисимметрично и транзитивно? Рефлексивно ли оно?

9. Какими свойствами обладают следующие отношения, заданные на множестве натуральных чисел:

а) «меньше»; б) «меньше на 2»; в) «меньше в 2 раза»?

10. На множестве $X = \{a, b, c\}$ задано отношение $R = \{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (b, c), (c, b)\}$. Какими свойствами оно обладает?

11. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ заданы отношения «больше» и «кратно». В чём их сходство и различие?

12. Установите, какое отношение рассматривается в задаче; какие приемы анализа задачи можно использовать:

а) Школьники сделали к карнавалу 15 шапочек для мальчиков, а для девочек в 2 раза больше. Сколько всего карнавальных шапочек они сделали?

б) Второклассники вырезали для елки 26 звездочек, это в 2 раза меньше, чем снежинок. Сколько всего звездочек и снежинок вырезали второклассники?

49. Отношения эквивалентности и порядка

Рассмотрим на множестве дробей $X = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right\}$ отношение равенства. Это отношение:

– рефлексивно, так как всякая дробь равна сама себе;

– симметрично, так как из того, что дробь $\frac{m}{n}$ равна дроби $\frac{p}{q}$, следует, что дробь $\frac{p}{q}$ равна дроби $\frac{m}{n}$;

– транзитивно, так как из того, что дробь $\frac{m}{n}$ равна дроби $\frac{p}{q}$ и дробь $\frac{p}{q}$ равна дроби $\frac{r}{s}$, следует, что дробь $\frac{m}{n}$ равна дроби $\frac{r}{s}$.

Про отношение равенства дробей говорят, что оно является *отношением эквивалентности.*

Определение. ***Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно одновременно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.***

Примерами отношений эквивалентности могут служить отношения равенства геометрических фигур, отношение параллельности прямых (при условии, что совпадающие прямые считаются параллельными).

Почему в математике выделили этот вид отношений? Рассмотрим отношение равенства дробей, заданное на множестве

$X=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right\}$ (рис. 106). Видим, что множество разбилось на три подмножества: $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{6}\right\}$, $\left\{\frac{1}{4}\right\}$. Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X, т.е. имеем разбиение множества X на классы. Это не случайно.

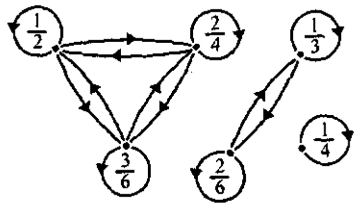


Рис. 106

Вообще, *если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).*

Так, мы установили, что отношению равенства на множестве дробей $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right\}$ соответствует разбиение этого множества на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из равных между собой дробей.

Верно и обратное утверждение: *если какое-либо отношение, заданное на множестве X, порождает разбиение этого множества на классы, то оно является отношением эквивалентности.*

Рассмотрим, например, на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3». Оно порождает разбиение множества X на классы: в один попадут все числа, при делении которых на 3 получается в остатке 0 (это числа 3, 6, 9), во второй – числа, при делении которых на 3 в остатке получается 1 (это числа 1, 4, 7, 10), и в третий – все числа, при делении которых на 3 в остатке получается 2 (это числа 2, 5, 8). Действительно, полученные подмножества не пересекаются и их объединение совпадает с множеством X. Следовательно, отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3», заданное на множестве X, является отношением эквивалентности. Заметим, что утверждение о взаимосвязи отношения эквивалентности и разбиения множества на классы нуждается в доказательстве. Мы его опускаем. Скажем только, что если отношение эквивалентности имеет название, то соответствующее название дается и классам. Например, если на множестве отрезков задается отношение равенства (а оно является отношением эквивалентности), то множество отрезков разбивается на классы равных отрезков (см. рис. 99). Отношению подобия соответствует разбиение множества треугольников на классы подобных треугольников.

Итак, имея отношение эквивалентности на некотором множестве, мы можем разбить это множество на классы. Но можно поступить и наоборот: сначала разбить множество на классы, а затем определить отношение эквивалентности, считая, что два элемента эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу рассматриваемого разбиения.

Принцип разбиения множества на классы при помощи некоторого отношения эквивалентности является важным принципом математики. Почему?

Во-первых, эквивалентный – это значит равносильный, взаимозаменяемый. Поэтому элементы одного класса эквивалентности взаимозаменяемы. Так, дроби, оказавшиеся в одном классе эквивалентности $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\right\}$, неразличимы с точки зрения отношения равенства, и дробь $\frac{3}{6}$ может быть заменена другой, например $\frac{1}{2}$. И эта замена не изменит результата вычислений.

Во-вторых, поскольку в классе эквивалентности оказываются элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения, то считают, что класс эквивалентности определяется любым своим представителем, т.е. произвольным элементом этого класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу. Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность отдельных представителей из классов эквивалентности. Например, отношение эквивалентности «иметь одинаковое число вершин», заданное на множестве многоугольников, порождает разбиение этого множества на классы треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т.д. Свойства, присущие некоторому классу, рассматриваются на одном его представителе.

В-третьих, разбиение множества на классы с помощью отношения эквивалентности используется для введения новых понятий. Например, понятие «пучок прямых» можно определить как то общее, что имеют параллельные между собой прямые.

Вообще любое понятие, которым оперирует человек, представляет собой некоторый класс эквивалентности. «Стол», «дом», «книга» – все эти понятия являются обобщенными представлениями о множестве конкретных предметов, имеющих одинаковое назначение.

Другим важным видом отношений являются *отношения порядка*.

Определение. ***Отношение R на множестве X называется отношением порядка, если оно одновременно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности.***

Примерами отношений порядка могут служить: отношение «меньше» на множестве натуральных чисел; отношение «короче» на множестве отрезков, поскольку они антисимметричны и транзитивны.

Если отношение порядка обладает еще свойством связанности, то говорят, что оно является отношением *линейного порядка.*

Например, отношение «меньше» на множестве натуральных чисел является отношением линейного порядка, так как обладает свойствами антисимметричности, транзитивности и связанности.

Определение. ***Множество X называется упорядоченным, если на нем задано отношение порядка.***

Так, множество N натуральных чисел можно упорядочить, если задать на нем отношение «меньше».

Если отношение порядка, заданное на множестве X, обладает свойством связанности, то говорят, что оно *линейно упорядочивает* множество X.

Например, множество натуральных чисел можно упорядочить и с помощью отношения «меньше», и с помощью отношения «кратно» – оба они являются отношениями порядка. Но отношение «меньше», в отличие от отношения «кратно», обладает еще и свойством связанности. Значит, отношение «меньше» упорядочивает множество натуральных чисел линейно.

Не следует думать, что все отношения делятся на отношения эквивалентности и отношения порядка. Существует огромное число отношений, не являющихся ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.

Упражнения

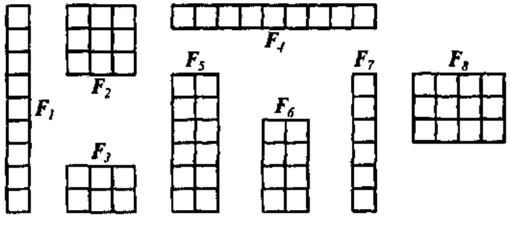


Рис. 107

1. На множестве X прямоугольников (рис. 107) задано отношение «иметь равные площади». Постройте граф отношения и докажите, что оно является отношением эквивалентности. Какие классы эквивалентности порождает это отношение на множестве X?

2. Объясните, почему отношение равенства отрезков является отношением эквивалентности, а отношение «короче» не является.

3. X – множество прямых плоскости. Какое из следующих отношений является отношением эквивалентности на этом множестве: а) «x параллельна y»; б) «x перпендикулярна y»; в) «x пересекает y»?

4. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задано отношени «иметь один и тот же остаток при делении на 4». Является ли оно о ношением эквивалентности?

5. Можно ли разбить множество $X = \{7-3; 2^2, 5\cdot 2; 60:6; 1+3; 0:4; 0\cdot 1$ $4:(10-10)\}$ на классы при помощи отношения «иметь равные значения»

6. На множестве $X = \{213, 37, 21, 87, 82\}$ задано отношение P «иметь в записи одинаковые цифры». Является ли P отношением эк вивалентности?

7. На множестве целых чисел от 0 до 999 задано отношение K «иметь в записи одно и то же число цифр». Покажите, что K – отно шение эквивалентности. На сколько классов эквивалентности разби вается данное множество при помощи отношения K? Назовите наи меньший и наибольший элементы каждого класса.

8. Сколько классов эквивалентности порождает на множестве на туральных чисел отношение «оканчиваться одной и той же циф рой»? Назовите по одному представителю каждого класса.

9. X – множество отрезков. Какие из следующих отношений яв ляются отношениями порядка на этом множестве: а) «x равно y» б) «x длиннее y»; в) «x длиннее y в 3 раза»?

10. Упорядочивают ли множество натуральных чисел отношения а) «больше в 2 раза»; б) «больше на 2»; в) «непосредственно следовать за»; г) «x – делитель y»?

11. Отношение T – «иметь одно и то же число делителей» задано на множестве $X = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$. Является ли T отношением эквивалентности? Отношением порядка?

12. Выясните, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны; свой ответ обоснуйте:

а) Отношение «x кратно y» на множестве натуральных чисел рефлективно и симметрично.

б) Отношение «x кратно y» на множестве натуральных чисел антисимметрично и транзитивно.

в) Отношение «x кратно y» на множестве натуральных чисел является отношением порядка.

13. Между множествами существуют отношения равенства, равномощности, «быть подмножеством». Какие из них являются отношениями эквивалентности, а какие отношениями порядка?

14. Решите задачи для младших школьников и укажите свойства отношений, которые были при этом использованы:

а) Мальчик составил пирамидку из трех колечек: желтого, красного и зеленого. В каком порядке он расположил колечки, если желтое больше зеленого, а красное меньше зеленого?

б) Четверо учащихся получили разные оценки за контрольную работу. Игорь получил оценку выше, чем Петр, Петр ниже, чем Максим, но выше, чем Кирилл. Кто получил самую низкую оценку?

50. Основные выводы § 10

Изучив материал данного параграфа, мы познакомились со следующими *понятиями*:

– бинарное отношение на множестве;

– отношение эквивалентности;

– отношение порядка.

Выяснили, что отношения на множестве задают так же, как и соответствия. Узнали, что отношения на множестве могут обладать *свойствами*:

– рефлексивности;

– симметричности;

– антисимметричности;

– транзитивности;

– связанности.

В зависимости от свойств отношения делят на отношения эквивалентности, отношения порядка и отношения, которые не являются ни отношениями эквивалентности, ни отношениями порядка.

Узнали, что существует *тесная взаимосвязь* между отношением эквивалентности на множестве X и разбиением этого множества на классы.

§ 11. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

В математике изучают не только отношения, но и различные операции. Например, сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение из корня – это операции над числами; пересечение, объединение, вычитание, декартово умножение – это операции над множествами; конъюнкция, дизъюнкция, отрицание – это операции над высказываниями и высказывательными формами. Операции над высказываниями и множествами появились в математике в XIX веке. Операции над высказываниями ввел английский математик Дж. Буль, а операции над множествами немецкий математик Г. Кантор. Оказалось, что операции над высказываниями и множествами обладают свойствами, аналогичными свойствам сложения и умножения чисел, но некоторые их свойства отличаются от свойств операций над числами.

Вообще в XIX веке в математике возникли разные ветви алгебры: обычных чисел, высказываний, множеств и другие. Каждая из них имела свои правила, но для некоторых видов алгебр эти правила были похожими. Стремление выяснить, что представляет собой любая операция, способствовало появлению общего понятия алгебраической операции.

Изучение свойств алгебраических операций привело математико выводу о том, что основная задача алгебры – изучение свойств операц рассматриваемых независимо от объектов, к которым они применя ся. И если первоначально алгебра была учением о решении уравнен то в XX веке она превратилась в науку об операциях и их свойствах.

Учитель начальных классов первым знакомит детей с различны операциями над числами и их свойствами. Иногда в начальном ку математики начинается изучение операций над множествами и пр ложениями. И естественно, чтобы грамотно обучать детей, видеть п спективу развития алгебраических понятий в дальнейшем обучен школьников математике, учителю необходимо знать, что такое алг раическая операция, какими свойствами она может обладать.

51. Понятие алгебраической операции

Рассмотрим, например, хорошо известное нам сложение натурал ных чисел. Выполняя эту операцию, мы, имея два числа, находи третье – сумму первых двух чисел. Так, складывая числа 5 и 9, получа число 14, которое так же, как и данные числа 5 и 9, является натурал ным числом.

Выполняя пересечение множеств, мы по двум данным множества находим новое, состоящее из общих элементов данных множеств.

Если рассмотреть вычитание натуральных чисел, то можно ск зать, что при его выполнении по двум заданным натуральным числа находят третье – разность, но не всегда эта разность является нату ральным числом. Но если рассмотреть вычитание целых чисел, т разность двух целых чисел всегда будет целым числом. И в этом вы читание целых чисел похоже на сложение натуральных чисел и пер сечение двух множеств.

Обобщая, можно сказать, что, выполняя ту или иную операцию, мы должны знать, на каком множестве она рассматривается. Далее, выполняя операцию, мы по двум элементам x и y из выбранного множества находим третий элемент z того же множества. Он единственный, и при этом ответ, вообще говоря, зависит от порядка этих элементов (как, например, при вычитании чисел). Другими словами, при выполнении операции упорядоченной паре элементов из множества X ставится в соответствие единственный элемент того же множества. И если такая ситуация складывается для всех пар элементов множества X, то операция называется *алгебраической*.

Определение. ***Алгебраической операцией на множестве X называется соответствие, при котором каждой паре элементов из множества X сопоставляется единственный элемент того же множества.***

$\cdot_{n} + {}^{n}N \; ② \; {}_{n} - {}^{n}Z \; ③ \; {}_{n} : {}^{n}2$

Примерами алгебраических операций могут служить:

– сложение на множестве натуральных чисел, поскольку сумма любых натуральных чисел является натуральным числом. Иначе говоря, при сложении каждой паре (x, y) натуральных чисел ставится в соответствие единственное натуральное число, обозначаемое $x + y$;

– вычитание на множестве целых чисел, так как разность любых целых чисел является целым числом или, говоря иначе, при вычитании каждой паре (x, y) целых чисел ставится в соответствие единственное целое число, обозначаемое $x - y$;

– деление на множестве рациональных чисел при условии, что исключается деление на нуль. Тогда частное любых рациональных чисел есть рациональное число, т.е. каждой паре (x, y) рациональных чисел ставится в соответствие единственное рациональное число.

С алгебраической операцией связано понятие *замкнутого множества*: если на множестве X задана алгебраическая операция, то говорят, что множество X замкнуто относительно этой операции.

Например, о множестве **N** натуральных чисел можно сказать, что оно замкнуто относительно сложения и умножения.

Существуют операции, которые не являются алгебраическими. Примером такой операции является вычитание на множестве натуральных чисел: $x - y$ будет натуральным числом лишь при условии, что $x > y$, т.е. в множестве натуральных чисел есть пары, которым нельзя поставить в соответствие натуральное число.

Вычитание на множестве натуральных чисел не является алгебраической операцией, но мы знаем, что если разность натуральных чисел существует, то это число единственное. Аналогичной особенностью обладает и деление натуральных чисел. Говорят, что вычитание и деление есть *частичные алгебраические операции* на множестве натуральных чисел.

Определение. ***Частичной алгебраической операцией на множестве X называется соответствие, при котором некоторым парам элементов из множества X сопоставляется единственный элемент того же множества.***

Задача. На множестве X натуральных чисел, кратных 3, заданы операции: сложение, умножение, вычитание и деление. Какие из них являются на этом множестве:

а) алгебраическими;

б) частичными алгебраическими?

Решение. Любое натуральное число, кратное 3, имеет вид $3n$, где $n \in \mathbf{N}$.

Пусть $3n$ и $3m$ – два натуральных числа из множества X, $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$. Тогда $3n + 3m = 3(n + m)$, причем $n + m$ – сумма двух натуральных чисел и, значит, число натуральное и единственное. Следовательно, складывая два любых натуральных числа, кратных 3, мы всегда получаем число, кратное 3, и это число единственное. Таким образом, сложение на данном множестве X есть алгебраическая операция.

Рассмотрим произведение двух чисел из множества X: $3n \cdot 3m = 9n \cdot m$, причем $n \cdot m$ – произведение двух натуральных чисел и, значит, число натуральное и единственное. Но $9 \vdots 3$, следовательно, умножая два любых натуральных числа, кратных 3, мы всегда получаем число, кратное 3, и это число единственное. Таким образом, умножение на данном множестве X есть алгебраическая операция.

Рассмотрим теперь разность двух чисел из множества X: $3n - 3m = 3(n - m)$, но разность $n - m$ существует на множестве натуральных чисел лишь при условии, что $n > m$. И если эта разность существует, то она единственна. Поэтому, если $n > m$, то разность $3n - 3m$ существует и является числом, кратным 3. Таким образом, вычитание на множестве X есть частичная алгебраическая операция.

Выполним деление чисел на множестве X: $3n : 3m = n : m$. Так как частное натуральных чисел n и m существует не всегда и, кроме того, если оно существует, то оно может быть не кратно 3. Значит, деление на множестве чисел, кратных 3, не является алгебраической операцией. Но поскольку для некоторых n и m их частное может быть кратно 3 (например, если $n = 24$, $m = 2$), то деление на множестве X является частичной алгебраической операцией.

Понятие алгебраической операции проходит через весь школьный курс математики. Начинается этот процесс в начальных классах, где происходит знакомство детей со сложением, которое сначала рассматривается на отрезке натурального ряда от 1 до 9 включительно, затем на отрезке от 1 до 100 и т.д. Алгебраической эта операция становится тогда, когда ее начинают рассматривать на всем множестве натуральных чисел. С умножением ситуация аналогичная.

Операции вычитания и деления в начальном обучении рассматриваются как частичные алгебраические операции на множестве натуральных чисел.

Упражнения

1. Сформулируйте условия, при которых операция, заданная на множестве X:

а) будет алгебраической; б) не будет алгебраической.

2. Объясните, почему сложение и умножение являются алгебраическими операциями на множестве **Z** целых чисел, а деление не является.

3. На множестве $X = \{-1, 0, 1\}$ заданы сложение, умножение и вычитание. Являются ли они алгебраическими на этом множестве?

4. Являются ли алгебраическими операции: сложение, умножение, деление и вычитание, заданные на множестве X, если:

а) X – множество четных натуральных чисел;

б) X – множество нечетных натуральных чисел;

в) X – множество натуральных чисел, кратных 5?

5. Среди следующих высказываний укажите истинные, ответ обоснуйте:

а) Множество **N** натуральных чисел замкнуто относительно умножения.

б) Множество **Q** рациональных чисел замкнуто относительно деления (деление на нуль не рассматривается).

в) Множество **Z** целых чисел замкнуто относительно вычитания и деления.

г) Множество **Z** целых чисел замкнуто относительно вычитания или деления.

6. Являются ли алгебраическими на множестве натуральных чисел следующие операции:

а) возведение в степень;

б) нахождение наибольшего общего делителя двух чисел;

в) нахождение наименьшего общего кратного двух чисел?

7. Дано множество $\{a, b, c\}$. Составьте множество X всех его подмножеств. На этом множестве X рассмотрите операции пересечения и объединения. Являются ли они алгебраическими?

8. В начальном курсе математики сложение рассматривают сначала на отрезке натуральных чисел от 1 до 9 (включительно), затем на отрезке от 1 до 100, затем от 1 до 1000. Является ли оно алгебраической операцией на этих множествах?

52. Свойства алгебраических операций

Известно, что сложение и умножение чисел обладает свойствами коммутативности, ассоциативности, умножение дистрибутивно относительно сложения. Аналогичными свойствами обладают объединение и пересечение множеств.

Рассмотрим свойства алгебраических операций, определив их в общем виде. При этом условимся алгебраические операции обозначать символами: $*$ (читается – «звездочка») и $\circ$ (читается – «кружок»).

Важнейшим свойством алгебраических операций является *свойство ассоциативности.*

Определение. ***Алгебраическая операция $*$, заданная на множестве X, называется ассоциативной, если для любых элементов x, y и z из множества X выполняется равенство***

$$(x*y)*z = x*(y*z).$$

Если операция $*$ обладает свойством ассоциативности, то мож[...] опускать скобки и писать $x*y*z$ вместо $(x*y)*z$ и $x*(y*z)$.

Например, ассоциативно сложение натуральных чисел: для любых н[а]туральных чисел x, y и z выполняется равенство $(x + y) + z = x + (y + [z)]$. Ассоциативно сложение рациональных и действительных чисел. П[о]этому сумму нескольких чисел можно записывать без скобок.

Существуют алгебраические операции, не обладающие свойств[ом] ассоциативности. Так, не является ассоциативным вычитание цел[ых] чисел: существуют целые числа x, y и z, для которых $(x - y) - z \neq x - (y - [z)]$. Например, $(12 - 7) - 3 \neq 12 - (7 - 3)$.

Ассоциативность алгебраической операции $*$ позволяет записыва[ть] без скобок все выражения, содержащие лишь эту операцию, но пер[е]ставлять входящие в это выражение элементы, вообще говоря, нельз[я]. Перестановка элементов возможна лишь в случае, когда операция коммутативна.

Определение. ***Алгебраическая операция $*$ на множестве X называ[ется] коммутативной, если для любых двух элементов x и y из мн[о]жества X выполняется равенство***

$$x*y = y*x.$$

Примерами коммутативных операций могут служить сложение [и] умножение натуральных чисел, поскольку для любых натуральны[х] чисел x и y выполняются равенства $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$. Эти равен[ств]ства справедливы не только для натуральных чисел, но и для любы[х] действительных чисел, следовательно, на множестве действительны[х] чисел сложение и умножение тоже коммутативны.

Существуют алгебраические операции, не обладающие свойство[м] коммутативности. Так, не является коммутативным вычитание целы[х] чисел: существуют целые числа x и y, для которых $x - y \neq y - x$. На[]пример, $12 - 7 \neq 7 - 12$.

Если на множестве X заданы две алгебраические операции $*$ и $\circ$, то они могут быть связаны друг с другом свойством дистрибутивности.

Определение. ***Алгебраическая операция $\circ$ называется дистрибу[]тивной относительно алгебраической операции $*$, если для любых элементов x, y и z из множества X выполняются равенства:***

$$1)\ (x*y)\circ z = (x\circ z)*(y\circ z) \quad \text{и} \quad 2)\ z\circ(x*y) = (z\circ x)*(z\circ y).$$

д. справ.   д. слева

Если выполняется только равенство 1), то операцию $\circ$ называют *дистрибутивной справа* относительно операции $*$; если же выполняет[]ся только равенство 2), то операцию $\circ$ называют *дистрибутивной слева* относительно операции $*$.

Выясним, в каких случаях различают дистрибутивность справа и слева.

Рассмотрим на множестве натуральных чисел две операции: возведение в степень (она соответствует операции $\circ$ в равенствах 1 и 2) и умножение (она соответствует операции $*$ в равенствах 1 и 2). Тогда, согласно равенству 1, имеем: $(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$. Как известно из алгебры, полученное равенство справедливо для любых натуральных чисел x, y и z, т.е. возведение в степень дистрибутивно справа относительно умножения. В соответствии с равенством 2, получаем $x^{yz} = x^y \cdot x^z$. Но это равенство выполняется не всегда, т.е. операция возведения в степень не является дистрибутивной слева относительно умножения. Такая ситуация является следствием того, что возведение в степень – операция, не обладающая свойством коммутативности.

Если взять сложение и умножение натуральных чисел, то, как известно, умножение дистрибутивно относительно сложения: для любых натуральных чисел x, y и z выполняются равенства

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \text{ и } z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y.$$

А так как умножение коммутативно, то не имеет значения, где писать множитель z – справа от суммы $x + y$ или слева от нее. Поэтому в школьном курсе математики не различают дистрибутивность слева и справа, а говорят просто о дистрибутивности умножения относительно сложения.

Выясним роль свойства дистрибутивности в преобразованиях выражений. Если операция $\circ$ дистрибутивна относительно операции $*$ и обе операции ассоциативны, то в любом выражении, содержащем лишь эти две операции, можно раскрыть все скобки, перед которыми (или за которыми) стоит знак $\circ$. Проиллюстрируем сказанное на примере преобразования выражения $(x + y) \cdot (z + p)$. Так как умножение дистрибутивно относительно сложения, то

$$(x+y) \cdot (z+p) = x \cdot (z+p) + y \cdot (z+p) = (x \cdot z + x \cdot p) + (y \cdot z + y \cdot p).$$

А поскольку сложение ассоциативно, то последнюю запись можно записать без скобок. Следовательно, $(x+y) \cdot (z+p) = x \cdot z + x \cdot p + y \cdot z + y \cdot p$.

Часто в множестве, на котором рассматривается алгебраическая операция, выделяются особые элементы, называемые в алгебре *нейтральными* и *поглощающими*.

Определение. ***Элемент е из множества X называется нейтральным относительно алгебраической операции $*$, если для любого элемента x из множества X выполняются равенства $x * e = e * x = x$.***

Доказано, что если нейтральный элемент относительно алгебраической операции существует, то он единственный.

Определение. ***Элемент p из множества X называется поглощающим относительно алгебраической операции *, если для любого элемента x из множества X выполняются равенства $x*p = p*x = p$.***

Если поглощающий элемент относительно алгебраической операции существует, то он единственный.

Так, в множестве $\mathbf{Z}_0$ целых неотрицательных чисел нуль является нейтральным элементом относительно сложения, поскольку для любого x из множества $\mathbf{Z}_0$ выполняются равенства $x + 0 = 0 + x = x$. Это же число нуль является поглощающим элементом относительно умножения: для любого x из множества $\mathbf{Z}_0$ верны равенства: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Как известно, вычитание чисел является операцией, обратной сложению. Но чтобы дать определение обратной операции в общем виде, надо определить понятие сократимой операции.

Определение. ***Алгебраическая операция *, заданная на множестве X, называется сократимой, если из условий $a*x = a*y$ и $x*a = y*a$ следует, что $x = y$.***

Например, сократимо сложение натуральных чисел: из равенств $a + x = a + y$ и $x + a = y + a$ следует, что $x = y$.

Определение. ***Пусть * – сократимая и коммутативная алгебраическая операция, заданная на множестве X. Тогда операция ∘ называется обратной для операции *, если $x \circ y = z$ тогда и только тогда, когда $y*z = x$.***

Тот факт, что вычитание на множестве целых чисел есть операция, обратная сложению, означает: $z = x - y$ тогда и только тогда, когда $y + z = x$.

Множество X с заданными на нем алгебраическими операциями принято называть алгеброй. В начальном курсе математики в основном изучают множество $\mathbf{Z}_0$ целых неотрицательных чисел, которое является объединением множества натуральных чисел и нуля: $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. На этом множестве рассматриваются алгебраические операции сложения и умножения. Используя язык современной математики, можно сказать, что в начальной школе изучают алгебру $(\mathbf{Z}_0, +, \cdot)$. Ее основные характеристики:

1) Сложение и умножение на множестве $\mathbf{Z}_0$ ассоциативно и коммутативно, а умножение дистрибутивно относительно сложения, т.е.:

$$(\forall\, x, y \in \mathbf{Z}_0)\ \ x + y = y + x;$$
$$(\forall\, x, y \in \mathbf{Z}_0)\ \ x \cdot y = y \cdot x;$$
$$(\forall\, x, y, z \in \mathbf{Z}_0)\ \ (x + y) + z = x + (y + z);$$
$$(\forall\, x, y, z \in \mathbf{Z}_0)\ \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$
$$(\forall\, x, y, z \in \mathbf{Z}_0)\ \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

2) Сложение и умножение сократимы (исключая сокращение произведения на нуль), т.е. для любых целых неотрицательных чисел x, y и a справедливы утверждения:

$$x + a = y + a \Rightarrow x = y;$$
$$x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y.$$

3) Нуль является нейтральным элементом относительно сложения и поглощающим относительно умножения:

$$(\forall x \in \mathbf{Z}_0)\ x + 0 = 0 + x = x;$$
$$(\forall x \in \mathbf{Z}_0)\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

Единица является нейтральным элементом относительно умножения:

$$(\forall x \in \mathbf{Z}_0)\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

4) *Сократимость сложения и умножения* целых неотрицательных чисел позволяет определить в $\mathbf{Z}_0$ частичные алгебраические операции вычитания и деления как обратные соответственно сложению и умножению (исключая деление на нуль):

$$x - y = z \Leftrightarrow y + z = x$$
$$x : y = z \Leftrightarrow y \cdot z = x.$$

5) Вычитание и деление обладают свойствами:

$$(a+b)-c=\begin{cases}(a-c)+b, & \text{если } a \ge c\\ a+(b-c), & \text{если } b \ge c\end{cases}$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b, \text{ если } a \ge b + c;$$

$$(a + b) : c = a : c + b : c, \text{ если } a \,\vdots\, c \text{ и } b \,\vdots\, c;$$

$$(a \cdot b) : c=\begin{cases}(a:c)\cdot b, & \text{если } a \,\vdots\, c\\ a\cdot(b:c), & \text{если } b \,\vdots\, c\end{cases}$$

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b, \text{ если } a \,\vdots\, b \text{ и } a \,\vdots\, c.$$

Названные характеристики алгебры ($\mathbf{Z}_0$, +, $\cdot$) присутствует (явно или неявно) в любом начальном курсе математики.

Упражнения

1. Запишите, используя символы, что сложение и умножение коммутативно и ассоциативно на множестве **Q** рациональных чисел, а умножение дистрибутивно относительно сложения и вычитания.

2. Коммутативны ли следующие алгебраические операции:

а) возведение в степень на множестве **N**;

б) деление на множестве **Q**;

в) нахождение наибольшего общего делителя натуральных чисел?

3. Сократимо ли вычитание и деление на множестве **Q** рациональных чисел?

4. Какое множество является поглощающим элементом отно-тельно пересечения множеств? Ответ обоснуйте.

5. Сформулируйте определение деления как операции, обрат умножению.

6. Выясните, как формулируются свойства сложения и умножени различных учебниках по математике для начальной школы.

7. Запишите все свойства действий, характеризующих алгеб (Z_0, +, ·).

53. Основные выводы § 11

Изучив материал данного параграфа, мы познакомились со сл дующими *понятиями*:

– алгебраическая операция на множестве;

– множество, замкнутое относительно алгебраической операци

– частичная алгебраическая операция;

– нейтральный элемент относительно алгебраической операции;

– поглощающий элемент относительно алгебраической операци

– обратная операция.

Мы выяснили, что алгебраические операции могут обладать *сво ствами*:

– коммутативности;

– ассоциативности;

– дистрибутивности (слева и справа);

– сократимости.

Установили, что в начальном курсе математики изучают алгебр (Z_0, +, ·).

§ 12. ВЫРАЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА

Наряду с изучением операций и их свойств в алгебре изучают таки понятия, как выражение, уравнение, неравенство. Первоначальное зна-комство с ними происходит в начальном курсе математики. Вводятся они, как правило, без строгих определений, чаще всего остенсивно, что требует от учителя не только большой аккуратности в употреблении терминов, обозначающих эти понятия, но и знания ряда их свойств. Поэтому главная задача, которую мы ставим, приступая к изучению материала данного параграфа, – это уточнить и углубить знания о вы-ражениях (числовых и с переменными), числовых равенствах и числовых неравенствах, уравнениях и неравенствах.

Изучение данных понятий связано с использованием математиче-ского языка, он относится к искусственным языкам, которые создаются и развиваются вместе с той или иной наукой. Как и любой другой, математический язык имеет свой алфавит. В нашем курсе он будет представлен частично в связи с необходимостью больше внимания уделить взаимосвязи алгебры с арифметикой. В этот алфавит входят:

1) цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; с их помощью по специальным правилам записываются числа;

2) знаки операций +, –, ·, :;

3) знаки отношений <, >, =, ⋮;

4) строчные буквы латинского алфавита, их применяют для обозначения чисел;

5) скобки (круглые, фигурные и др.), их называют техническими знаками.

Используя этот алфавит, в алгебре образуют слова, называя их выражениями, а из слов получаются предложения – числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

54. Выражения и их тождественные преобразования

Как известно, записи $3 + 7$, $24:8$, $3 \cdot 2 - 4$, $(25 + 3) \cdot 2 - 17$ называются *числовыми выражениями*. Они образуются из чисел, знаков действий и скобок. Если выполнить все действия, указанные в выражении, получим число, которое называется *значением числового выражения*. Так, значение числового выражения $3 \cdot 2 - 4$ равно 2.

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они *не имеют смысла*. Например, выражение $8:(4 - 4)$ смысла не имеет, поскольку его значение найти нельзя: $4 - 4 = 0$, а деление на нуль невозможно. Не имеет смысла и выражение $7 - 9$, если рассматривать его на множестве натуральных чисел, так как на этом множестве значения выражения $7 - 9$ найти нельзя.

Рассмотрим запись $2a + 3$. Она образована из чисел, знаков действий и буквы a. Если вместо a подставлять числа, то будут получаться различные числовые выражения:

если $a = 7$, то $2 \cdot 7 + 3$;
если $a = 0$, то $2 \cdot 0 + 3$;
если $a = -4$, то $2 \cdot (-4) + 3$.

В записи $2a + 3$ такая буква a называется *переменной*, а сама запись $2a + 3$ – *выражением с переменной*.

Переменную в математике, как правило, обозначают любой строчной буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например $\square$. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: $2 \cdot \square + 3$.

Каждому выражению с переменной соответствует множество чисел, при подстановке которых получается числовое выражение, имеющее смысл. Это множество называют *области определения выражени*[...]. Например, область определения выражения $5:(x-7)$ состоит из вс[...] действительных чисел, кроме числа 7, так как при $x = 7$ выражен[...] $5:(7-7)$ смысла не имеет.

В математике рассматривают выражения, содержащие одну, две [...] больше переменных. Например, $2a + 3$ – это выражение с одной пер[...]менной, а $(3x + 8y)\cdot z$ – это выражение с тремя переменными. Чтобы и[...] выражения с тремя переменными получить числовое выражение, на[...] вместо каждой переменной подставить числа, принадлежащие област[...] определения выражения.

Итак, мы выяснили, как образуются из алфавита математическог[...] языка числовые выражения и выражения с переменными. Если про[...]вести аналогию с русским языком, то выражения – это слова матема[...]тического языка.

Но используя алфавит математического языка, можно образовать [...] такие, например, записи: (3 + 2)) – ·12 или 3*x* – *y*:+)8, которые нельз[...] назвать ни числовым выражением, ни выражением с переменной. Эти примеры свидетельствуют о том, что описание – из каких зна[...]ков алфавита математического языка образуются выражения число[...]вые и с переменными, не является определением этих понятий. Да[...]дим определение числового выражения (выражение с переменным[...] определяется аналогично).

Определение. ***Если f и g – числовые выражения, то (f) + (g), (f) – (g), (f)·(g), (f):(g) – числовые выражения. Считают, что каждое число является числовым выражением.***

Если точно следовать этому определению, то пришлось бы писать слишком много скобок, например, (7) + (5) или (6):(2). Для сокращения записи условились не писать скобки, если несколько выражений складываются или вычитаются, причем эти операции выполняются слева направо. Точно так же не пишут скобок и тогда, когда перемножаются или делятся несколько чисел, причем эти операции выполняются по порядку слева направо. Например, пишут так: $37 - 12 + 62 - 17 + 13$ или $120:15\cdot 7:12$.

Кроме того, условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступени (сложение и вычитание). Поэтому выражение $(12\cdot 4:3) + (5\cdot 8:2\cdot 7)$ записывают так: $12\cdot 4:3 + 5\cdot 8:2\cdot 7$.

Задача. *Найти значение выражения* $3x(x-2) + 4(x-2)$ при $x = 6$.

Решение.

I способ. Подставим число 6 вместо переменной в данное выражение: $3\cdot 6\cdot(6-2) + 4\cdot(6-2)$. Чтобы найти значение полученного числового выражения, выполним все указанные действия:

$3\cdot 6\cdot(6-2)+4\cdot(6-2)=18\cdot 4+4\cdot 4=72+16=88.$

Следовательно, при $x = 6$ значение выражения $3x(x-2)+4(x-2)$ равно 88.

2 способ. Прежде чем подставлять число 6 в данное выражение, упростим его: $3x(x-2)+4(x-2)=(x-2)(3x+4)$. И затем, подставив в полученное выражение вместо x число 6, выполним действия: $(6-2)\cdot(3\cdot 6+4)=4\cdot(18+4)=4\cdot 22=88$.

Обратим внимание на следующее: и при первом способе решения задачи, и при втором мы одно выражение заменяли другим. Например, выражение $18\cdot 4+4\cdot 4$ заменяли выражением $72+16$, а выражение $3x(x-2)+4(x-2)$ – выражением $(x-2)(3x+4)$, причем эти замены привели к одному и тому же результату. В математике, описывая решение данной задачи, говорят, что мы выполняли *тождественные преобразования* выражений.

Определение. ***Два выражения называются тождественно равными, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.***

Примером тождественно равных выражений могут служить выражения $5(x+2)$ и $5x+10$, поскольку при любых действительных значениях x их значения равны.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называют *тождеством* на этом множестве.

Например, $5(x+2)=5x+10$ – тождество на множестве действительных чисел, потому что для всех действительных чисел значения выражения $5(x+2)$ и $5x+10$ совпадают. Используя обозначение квантора общности, это тождество можно записать так: $(\forall x \in \mathbf{R})$ $5(x+2)=5x+10$. Тождествами считают и верные числовые равенства.

Замена выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называется *тождественным преобразованием данного выражения на этом множестве.*

Так, заменив выражение $5(x+2)$ на тождественно равное ему выражение $5x+10$, мы выполнили тождественное преобразование первого выражения. Но как, имея два выражения, узнать, являются они тождественно равными или не являются? Находить соответствующие значения выражений, подставляя конкретные числа вместо переменных? Долго и не всегда возможно. Но тогда каковы те правила, которыми надо руководствоваться, выполняя тождественные преобразования выражений? Этих правил много, среди них – свойства алгебраических операций.

Приведем пример тождественных преобразований выражения.

Задача. Разложить на множители выражение $ax - bx + ab - b^2$.

Решение. Сгруппируем члены данного выражения по два (первы[й] со вторым, третий с четвертым): $ax - bx + ab - b^2 = (ax - bx) + (ab - b^2)$. Это преобразование возможно на основании свойства ассоциативност[и] сложения действительных чисел.

Вынесем в полученном выражении из каждой скобки общий мно[-]житель: $(ax - bx) + (ab - b^2) = x(a - b) + b(a - b)$ – это преобразовани[е] возможно на основании свойства дистрибутивности умножения отно[-]сительно вычитания действительных чисел.

В полученном выражении слагаемые имеют общий множител[ь], вынесем его за скобки: $x(a - b) + b(a - b) = (a - b)(x - b)$. Основой вы[-]полненного преобразования является свойство дистрибутивности ум[-]ножения относительно сложения.

Итак, $ax - bx + ab - b^2 = (a - b)(x - b)$.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тож[-]дественные преобразования числовых выражений. Теоретической осно[-]вой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычи[-]тания числа из суммы и др. Например, чтобы найти произведение $35 \cdot 4$, надо выполнить преобразования: $35 \cdot 4 = (30 + 5) \cdot 4 = 30 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 120 + 20 = 140$. В основе выполненных преобразований лежат: свой[-]ство дистрибутивности умножения относительно сложения; принцип записи чисел в десятичной системе счисления ($35 = 30 + 5$); правила умножения и сложения натуральных чисел.

Упражнения

1. Среди следующих записей укажите числовые выражения:

а) $42:5$; б) 27; в) $32+-):14$; г) $2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$;
д) $(17+13):10-15$; е) $142>71 \cdot 2$.

2. Какие из следующих выражений имеют смысл, если рассматривать их на множестве натуральных чисел:

а) $(135+67) \cdot 12$; б) $(135-217):2$; в) $362:4$?

3. Какие из нижеприведенных записей являются выражениями с переменными:

а) $8+0{,}3b$; б) $21-(4+y)$; в) $x+2y < 7$; г) $32:y+3 = 5y$?

4. Установите, какова область определения выражений, если рассматривать их на множестве действительных чисел:

а) $(3-y):64$; б) $64:(3-y)$; в) $(5+x):(x-12)$.

5. Известно, что выражение называется по своему последнему действию. Укажите порядок действий и дайте название каждому выражению:

Выражение	Название выражения
$(12\cdot 5 + 3:(2 + 7))\cdot 18$	[illegible]
$(23 - 7\cdot 6 - 4 + 15):(17 - 6)$	деление
$21 + (35\cdot 3:8 - 14:5)$	сложение
$19 - 8:4 + 5$	сложение

6. Вычислите значение выражения:

а) $((36:2 - 14)\cdot(42\cdot 2 - 14) + 20):2$;

б) $(72:12 - (18 - 15)):(24:3 - 2\cdot 4)$;

в) $(16{,}583:7{,}21 + 54{,}68\cdot 853{,}2 + 28{,}82\cdot 0{,}1):1{,}6 - 1{,}02$.

7. Выясните, являются ли выражения $3(4 - x)$ и $12 - 3x$ тождественно равными на множестве:

а) $\{1, 2, 3, 4\}$; б) действительных чисел.

8. Какие из следующих равенств являются тождествами на множестве действительных чисел:

а) $3p + 5m = 5m + 3p$; в) $3p\cdot 5m = 5m\cdot 3p$;

б) $3p - 5m = 5m - 3p$; г) $3p:5m = 5m:3p$?

9. Обоснуйте каждый шаг в преобразованиях следующих выражений:

а) $324\cdot 5 = (300+20+4)\cdot 5 = 300\cdot 5+20\cdot 5+4\cdot 5 =$
$= 500+100+20 = 1500+120 = 1620$;

б) $97\cdot 12 = (100-3)\cdot 12 = 100\cdot 12-3\cdot 12 = 1200-36 =$
$= 1100+(100-36) = 1164$;

в) $5(1-2x)+10x = 5-10x+10x = 5$.

10. Объясните, почему отношение «иметь одно и то же значение» на множестве числовых выражений является отношением эквивалентности. Какие следствия из этого факта используются при выполнении тождественных преобразований числовых выражений?

11. Упростите выражение путем тождественных преобразований:

а) $6(2ab-3)+2a(6b-5)$; б) $(12a-16b):4-(10a-4b)$.

12. Сравните значения выражений, не выполняя действий:

а) $(30+56)\cdot 5$ и $30\cdot 5+56\cdot 5$;

б) $(19+4)\cdot 7$ и $19\cdot 7+10\cdot 7$;

в) $(14-7)\cdot 6$ и $16\cdot 6-7\cdot 6$;

г) $(18-9)\cdot 7$ и $18\cdot 7-11\cdot 7$.

13. Решите задачу; решение запишите в виде выражения:

а) На туристическую базу прибыли в один день 150 туристов, на другой день 170. Чтобы пойти по маршрутам, 200 туристов разбились на группы, по 20 человек в каждой, а остальные по 15 человек в группе. Сколько получилось групп?

б) В мастерской за 5 дней сшили 2000 фартуков. Сколько фартуков сошьют за 8 дней, если будет шить в день на 50 фартуков больше?

в) Слесарь обработал 6 деталей. Первую деталь он обрабатывал 18 мин, а каждую следующую на 3 мин быстрее, чем предыдущую. Сколько минут потребовалось для обработки всех деталей?

55. Числовые равенства и неравенства

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение $f = g$, которое называют *числовым равенством.*

Возьмем, например, числовые выражения $3 + 2$ и $6 - 1$ и соединим их знаком равенства $3 + 2 = 6 - 1$. Оно истинное. Если же соединить знаком равенства $3 + 2$ и $7 - 3$, то получим ложное числовое равенство $3 + 2 = 7 - 3$. Таким образом, с логической точки зрения числовое равенство – это высказывание, истинное или ложное.

Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают.

Напомним некоторые свойства истинных числовых равенств.

1. Если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

2. Если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком «>» (или «<»). Получим предложение $f > g$ (или $f < g$), которое называют *числовым неравенством.*

Например, если соединить выражение $6 + 2$ и $13 - 7$ знаком «>», то получим истинное числовое неравенство $6 + 2 > 13 - 7$. Если соединить те же выражения знаком «<», получим ложное числовое неравенство $6 + 2 < 13 - 7$. Таким образом, с логической точки зрения числовое неравенство – это высказывание, истинное или ложное.

Числовые неравенства обладают рядом свойств. Рассмотрим некоторые.

1. Если к обеим частям истинного числового неравенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство.

2. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство.

3. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и отрицательное значение, а также поменяем знак неравенства на противоположный, то получим также истинное числовое неравенство.

Упражнения

1. Установите, какие из следующих числовых равенств и неравенств истинны:

а) $\left(5{,}05:\frac{1}{40}-2{,}8\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot 3+16\cdot 0{,}1875=602$;

б) $\left(\frac{1}{14}-\frac{2}{7}\right):(-3)-6\frac{1}{13}:\left(-6\frac{1}{13}\right)>\left(7-8\frac{4}{5}\right)\cdot 2\frac{7}{9}-15:\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\right)$;

в) $1{,}0905:0{,}025-6{,}84\cdot 3{,}07+2{,}38:100<4{,}8:(0{,}04\cdot 0{,}006)$.

2. Проверьте, истинны ли числовые равенства: $13\cdot 93=31\cdot 39$, $14\cdot 82=$ $=41\cdot 28$, $23\cdot 64=32\cdot 46$. Можно ли утверждать, что произведение любых двух натуральных чисел не изменится, если в каждом множителе переставить цифры?

3. Известно, что $x>y$ – истинное неравенство. Будут ли истинными следующие неравенства:

а) $2x>2y$; в) $2x-7<2y-7$;

б) $-\frac{x}{3}<-\frac{y}{3}$; г) $-2x-7<-2y-7$?

4. Известно, что $a<b$ – истинное неравенство. Поставьте вместо * знак «>» или «<» так, чтобы получилось истинное неравенство:

а) $-3{,}7a * -3{,}7b$; г) $-\frac{a}{3} * -\frac{b}{3}$;

б) $0{,}12a * 0{,}12b$; д) $-2(a+5) * -2(b+5)$;

в) $\frac{a}{7} * \frac{b}{7}$; е) $\frac{2}{7}(a-1) * \frac{2}{7}(b-1)$.

5. Дано неравенство $5>3$. Умножьте обе его части на 7; 0,1; 2,6; $\frac{3}{4}$. Можно ли на основании полученных результатов утверждать, что для любого положительного числа a неравенство $5a>3a$ истинно?

6. Выполните задания, которые предназначаются ученикам начальных классов, и сделайте вывод о том, как трактуются в начальном курсе математики понятия числового равенства и числового неравенства:

а) Запиши два верных равенства и два верных неравенства, используя выражения: $9\cdot 3$, $30-6$, $3\cdot 9$, $30-3$.

б) Расставь скобки так, чтобы равенства были верными: $4+2\cdot 3=18$; $31-10-3=24$; $54-12+8=34$.

в) Поставь вместо * знаки действий так, чтобы получились верные равенства: $3*6*2=9$; $9*3*6=18$.

7. Какие ответы учеников вы будете считать правильными при в[ы]полнении ими задания – сравнить выражения, не вычисляя их значени[я]:

а) $70 \cdot 32 + 9 \cdot 32 \ldots 79 \cdot 30 + 79 \cdot 2$;

б) $7 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \ldots (7 + 8) \cdot 4$;

в) $8500 : 1700 \ldots 8500 : 100 : 17$;

г) $24 \cdot 6080 \ldots (6000 + 80) \cdot 24$?

56. Уравнения с одной переменной

Возьмем два выражения с переменной: $4x$ и $5x + 2$. Соединив и[х] знаком равенства, получим предложение $4x = 5x + 2$. Оно содерж[ит] переменную и при подстановке значений переменной обращается в в[ы]сказывание. Например, при $x = -2$ предложение $4x = 5x + 2$ обращает[ся] в истинное числовое равенство $4 \cdot (-2) = 5 \cdot (-2) + 2$, а при $x = 1$ – в лож[]ное $4 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 2$. Поэтому предложение $4x = 5x + 2$ есть высказыв[а]тельная форма. Ее называют *уравнением с одной переменной.*

В общем виде уравнение с одной переменной можно определить так:

Определение. ***Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x [и] областью определения X. Тогда высказывательная форма вид[а] $f(x) = g(x)$ называется уравнением с одной переменной.***

Значение переменной x из множества X, при котором уравнени[е] обращается в истинное числовое равенство, называется *корнем урав[]нения* (или его решением). *Решить уравнение* – это значит найти мно[]жество его корней.

Так, корнем уравнения $4x = 5x + 2$, если рассматривать его на мно[]жестве **R** действительных чисел, является число -2. Других корней эт[о] уравнение не имеет. Значит множество его корней есть $\{-2\}$.

Пусть на множестве действительных чисел задано уравнени[е] $(x - 1)(x + 2) = 0$. Оно имеет два корня – числа 1 и -2. Следовательно множество корней данного уравнения таково: $\{-2, -1\}$.

Уравнение $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 2$, заданное на множестве действи[]тельных чисел, обращается в истинное числовое равенство при все[х] действительных значениях переменной x: если раскрыть скобки [в] левой части, то получим $6x + 2 = 6x + 2$. В этом случае говорят, чт[о] его корнем является любое действительное число, а множество[м] корней множество всех действительных чисел.

Уравнение $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 1$, заданное на множестве действи[]тельных чисел, не обращается в истинное числовое равенство ни пр[и] одном действительном значении x: после раскрытия скобок в лево[й] части получаем, что $6x + 2 = 6x + 1$, что невозможно ни при одном x. В этом случае говорят, что данное уравнение не имеет корней и чт[о] множество его корней пусто.

Чтобы решить какое-либо уравнение, его сначала преобразовывают, заменяя другим, более простым; полученное уравнение опять преобразовывают, заменяя более простым, и т.д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получают уравнение, корни которого можно найти известным способом. Но чтобы эти корни были корнями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получились уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называют *равносильными.*

Определение. ***Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются равносильными, если множества их корней совпадают.***

Например, уравнения $x^2 - 9 = 0$ и $(2x + 6)(x - 3) = 0$ равносильны, так как оба имеют своими корнями числа 3 и –3. Равносильны и уравнения $(3x + 1)\cdot 2 = 6x + 1$ и $x^2 + 1 = 0$, так как оба не имеют корней, т.е. множества их корней совпадают.

Определение. ***Замена уравнения равносильным ему уравнением называется равносильным преобразованием.***

Выясним теперь, какие преобразования позволяют получать равносильные уравнения.

Теорема 1. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнения $f(x) = g(x)$ (1) и $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ (2) равносильны.

Доказательство. Обозначим через T_1 – множество решений уравнения (1), а через T_2 – множество решений уравнения (2). Тогда уравнения (1) и (2) будут равносильны, если $T_1 = T_2$. Чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что любой корень из T_1 является корнем уравнения (2) и, наоборот, любой корень из T_2 является корнем уравнения (1).

Пусть число a – корень уравнения (1). Тогда $a \in T_1$, и при подстановке в уравнение (1) обращает его в истинное числовое равенство $f(a) = g(a)$, а выражение $h(x)$ обращает в числовое выражение $h(a)$, имеющее смысл на множестве X. Прибавим к обеим частям истинного равенства $f(a) = g(a)$ числовое выражение $h(a)$. Получим, согласно свойствам истинных числовых равенств, истинное числовое равенство $f(a) + h(a) = g(a) + h(a)$, которое свидетельствует о том, что число a является корнем уравнения (2).

Итак, доказано, что каждый корень уравнения (1) является корнем и уравнения (2), т.е. $T_1 \subset T_2$.

Пусть теперь a – корень уравнения (2). Тогда $a \in T_2$ и при подстановке в уравнение (2) обращает его в истинное числовое равенство $f(a) + h(a) = g(a) + h(a)$. Прибавим к обеим частям этого равенства числовое выражение $-h(a)$. Получим истинное числовое равенство $f(a) = g(a)$, которое свидетельствует о том, что число a – корень уравнения (1).

Итак, доказано, что каждый корень уравнения (2) является и кор-нем уравнения (1), т.е. $T_2 \subset T_1$.

Так как $T_1 \subset T_2$ и $T_2 \subset T_1$, то по определению равных множеств $T_1 = T_2$, а значит, уравнения (1) и (2) равносильны.

Данную теорему можно сформулировать иначе: **если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое уравнение, равносильное данному.**

Из этой теоремы вытекают следствия, которые используются при решении уравнений:

1. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.*

2. *Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2. Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, которое определено на том же множестве и не обращается в нуль ни при каких значениях x из множества X. Тогда уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ равносильны.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорему 2 можно сформулировать иначе: **если обе части уравнения с областью определения X умножить на одно и то же выражение, которое определено на том же множестве и не обращается на нем в нуль, то получим новое уравнение, равносильное данному.**

Из этой теоремы вытекает следствие: *если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.*

Решим уравнение $1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$, $x \in \mathbf{R}$, и обоснуем все преобразования, которые мы будем выполнять в процессе решения.

Преобразования	Обоснование преобразований
1. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, к общему знаменателю: $\frac{6-2x}{6} = \frac{x}{6}$	Выполнили тождественное преобразование выражения в левой части уравнения.
2. Отбросим общий знаменатель: $6 - 2x = x$.	Умножили на 6 обе части уравнения (теорема 2), получили уравнение, равносильное данному.

Преобразования	Обоснование преобразований
3. Выражение $-2x$ переносим в правую часть уравнения с противоположным знаком: $6 = x + 2x$.	Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному.
4. Приводим подобные члены в правой части уравнения: $6 = 3x$.	Выполнили тождественное преобразование выражения.
5. Разделим обе части уравнения на 3: $x = 2$.	Воспользовались следствием из теоремы 2, получили уравнение, равносильное предыдущему, а значит, и данному

Так как все преобразования, которые мы выполняли, решая данное уравнение, были равносильными, то можно утверждать, что 2 – корень этого уравнения.

Если же в процессе решения уравнения не выполняются условия теорем 1 и 2, то может произойти потеря корней или могут появиться посторонние корни. Поэтому важно, осуществляя преобразования уравнения с целью получения более простого, следить за тем, чтобы они приводили к уравнению, равносильному данному.

Рассмотрим, например, уравнение $x(x-1) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$. Разделим обе части на x, получим уравнение $x - 1 = 2$, откуда $x = 3$, т.е. данное уравнение имеет единственный корень – число 3. Но верно ли это? Нетрудно видеть, что если в данное уравнение вместо переменной x подставить 0, оно обратится в истинное числовое равенство $0\cdot(0-1) = 2\cdot 0$. А это означает, что 0 – корень данного уравнения, который мы потеряли, выполняя преобразования. Проанализируем их. Первое, что мы сделали, – это разделили обе части уравнения на x, т.е. умножили на выражение $\frac{1}{x}$, но при $x = 0$ оно не имеет смысла. Следовательно, мы не выполнили условие теоремы 2, что и привело к потере корня.

Чтобы убедиться в том, что множество корней данного уравнения состоит из двух чисел 0 и 3, приведем другое его решение. Перенесем выражение $2x$ из правой части в левую: $x(x-1) - 2x = 0$. Вынесем в левой части уравнения за скобки x и приведем подобные члены: $x(x-3) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы один из них равен нулю, поэтому $x = 0$ или $x - 3 = 0$. Отсюда получаем, что корни данного уравнения – 0 и 3.

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий. Например, решение уравнения $(x\cdot 9):24 = 3$ обосновывается следующим образом. Так как неизвестное находится в делимом, то чтобы найти делимое, надо делитель умножить на частное: $x \cdot 9 = 24 \cdot$ или $x \cdot 9 = 72$.

Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель: $x = 72:9$, или $x = 8$, следовательно, корнем данного уравнения является число 8.

Упражнения

1. Установите, какие из следующих записей являются уравнениями с одной переменной:

а) $(x-3) \cdot 5 = 12x$;
б) $(x-3) \cdot 5 = 12$;
в) $(x-3) \cdot 17 + 12$;
г) $3 + (12-7) \cdot 5 = 16$;
д) $(x-3) \cdot y = 12x$;
е) $x^2 - 2x + 5 = 0$.

2. Уравнение $2x^4 + 4x^2 - 6 = 0$ задано на множестве натуральных чисел. Объясните, почему число 1 является корнем этого уравнения, а 2 и -1 не являются его корнями.

3. В уравнении $(x + ...)(2x + 5) - (x - 3)(2x + 1) = 20$ одно число стерто и заменено точками. Найдите стертое число, если известно, что корнем этого уравнения является число 2.

4. Сформулируйте условия, при которых:

а) число 5 является корнем уравнения $f(x) = g(x)$;
б) число 7 не является корнем уравнения $f(x) = g(x)$.

5. Установите, какие из следующих пар уравнений равносильны на множестве действительных чисел:

а) $3 + 7x = -4$ и $2(3 + 7x) = -8$;
б) $3 + 7x = -4$ и $6 + 7x = -1$;
в) $3 + 7x = -4$ и $x + 2 = 0$.

6. Сформулируйте свойства отношения равносильности уравнений. Какие из них используются в процессе решения уравнения?

7. Решите уравнения (все они заданы на множестве действительных чисел) и обоснуйте все преобразования, выполняемые в процессе их упрощения:

а) $\dfrac{7x+4}{2} - x = \dfrac{3x-5}{2}$;
б) $x - \dfrac{3x-2}{5} = 3 - \dfrac{2x-5}{3}$;
в) $(2-x)2 - x(x + 1{,}5) = 4$.

8. Учащийся решил уравнение $5x + 15 = 3x + 9$ следующим образом: вынес за скобки в левой части число 5, а в правой число 3, получил уравнение $5(x + 3) = 3(x + 3)$, а затем разделил обе части на выражение $x + 3$. Получил равенство $5 = 3$ и сделал вывод – данное уравнение корней не имеет. Прав ли учащийся?

9. Решите уравнение $\frac{2}{2-x}-\frac{1}{2}=\frac{4}{(2-x)x}$; $x \in \mathbf{R}$. Является ли число 2 корнем этого уравнения?

10. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

а) $(x + 70)\cdot 4 = 328$; в) $(85x + 765):170 = 98$;

б) $560:(x + 9) = 56$; г) $(x - 13581):709 = 306$.

11. Решите задачи арифметическим и алгебраическим способами:

а) На первой полке на 16 книг больше, чем на второй. Если с каждой полки снять по 3 книги, то на первой полке книг будет в полтора раза больше, чем на второй. Сколько книг на каждой полке?

б) Весь путь от турбазы до станции, равный 26 км, велосипедист проехал за 1 ч 10 мин. Первые 40 мин этого времени он ехал с одной скоростью, а остальное время – со скоростью на 3 км/ч меньше. Найдите скорость велосипедиста на первом участке пути.

57. Неравенства с одной переменной

Предложения $2x+7 > 10-x$, $x^2+7x < 2$, $(x+2)(2x-3) > 0$ называют неравенствами с одной переменной.

В общем виде это понятие определяют так:

Определение. ***Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называется неравенством с одной переменной. Множество X называется областью его определения.***

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его *решением*. **Решить неравенство – это значит найти множество его решений.**

Так, решением неравенства $2x + 7 > 10 - x$, $x \in \mathbf{R}$ является число $x = 5$, так как $2\cdot 5 + 7 > 10 - 5$ – истинное числовое неравенство. А множество его решений – это промежуток $(1, \infty)$, который находят, выполняя преобразование неравенства: $2x + 7 > 10 - x \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$.

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Определение. ***Два неравенства называются равносильными, если их множества решений равны.***

Например, неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $(\frac{2}{3}, \infty)$.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны соответствующим теоремам о равносильности уравнений. При их доказательстве используются свойства истинных числовых неравенств.

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X, $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекают следствия, которые часто используют при решении неравенств:

1) Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число d, то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равносильное исходному.

2) Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d, то получим неравенство $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Теорема 5. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x их множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x) \cdot d < g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Решим неравенство $5x - 5 < 2x - 16$, $x \in \mathbf{R}$, и обоснуем все преобразования, которые мы будем выполнять в процессе решения.

Преобразования	Обоснование преобразований
1. Перенесем выражение $2x$ в левую часть, а число -5 в правую, поменяв их знаки на противоположные: $5x - 2x < 16 + 5$	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное исходному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x < 21$.	Выполнили тождественные преобразования выражений в левой и правой частях неравенства – они не нарушили равносильности неравенств: данного и исходного.

Преобразования	Обоснование преобразований
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x < 7$.	Воспользовались следствием из теоремы 4, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x < 7$ является промежуток $(-\infty, 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty, 7)$.

Упражнения

1. Установите, какие из следующих записей являются неравенствами с одной переменной:

а) $-12 - 7x < 3x + 8$;
б) $15(x + 2) > 4$;
в) $17 \cdot (13 + 8) < 14 - 9$;
г) $12x + 3(x - 2)$;
д) $17 - 12 \cdot 8$;
е) $2x^2 + 3x - 4 > 0$.

2. Является ли число 3 решением неравенства $6(2x + 7) < 15(x + 2)$, $x \in \mathbf{R}$? А число 4,25?

3. Равносильны ли на множестве действительных чисел следующие пары неравенств:

а) $-17x < -51$ и $x > 3$;

б) $\frac{3x-1}{4} > 0$ и $3x - 1 > 0$;

в) $6 - 5x > -4$ и $x < 2$?

4. Какие из следующих высказываний истинны:

а) $-7x < -28 \Rightarrow x > 4$;

б) $x < 6 \Rightarrow x < 5$;

в) $x < 6 \Rightarrow x < 20$?

5. Решите неравенство $3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2$ и обоснуйте все преобразования, которые будете при этом выполнять.

6. Докажите, что решением неравенства $2(x + 1) + 5 > 3 - (1 - 2x)$ является любое действительное число.

7. Докажите, что не существует действительного числа, которое являлось бы решением неравенства $3(2 - x) - 2 > 5 - 3x$.

8. Одна сторона треугольника равна 5 см, а другая 8 см. Какой может быть длина третьей стороны, если периметр треугольника:

а) меньше 22 см;

б) больше 17 см?

58. Основные выводы § 12

В данном параграфе мы определили следующие *понятия*:

– числовое выражение;
– значение числового выражения;
– выражение, не имеющее смысла;
– выражение с переменной (переменными);
– область определения выражения;
– тождественно равные выражения;
– тождество;
– тождественное преобразование выражения;
– числовое равенство;
– числовое неравенство;
– уравнение с одной переменной;
– корень уравнения;
– что значит решить уравнение;
– равносильные уравнения;
– неравенство с одной переменной;
– решение неравенства;
– что значит решить неравенство;
– равносильные неравенства.

Кроме того, мы рассмотрели теоремы о равносильности уравнений и неравенств, являющиеся основой их решения.

Знание определений всех названных выше понятий и теорем о равносильности уравнений и неравенств – необходимое условие методически грамотного изучения с младшими школьниками алгебраического материала.

Глава III. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И НУЛЬ

Для школьной математики натуральное число является тем понятием, с которого, как правило, начинается обучение. И уже в начальных классах учащиеся знакомятся с различными функциями натурального числа. Отвечая на вопрос: «Сколько машин изображено на рисунке?», – они имеют дело с числом как количественной характеристикой множества предметов. Производя счет предметов, используют натуральное число как характеристику порядка. В задачах, связанных с измерением величин, число выступает как значение величины при выбранной единице, т.е. как мера величины. Большое внимание уделяется в начальном курсе математики и еще одной роли числа – как компоненту вычислений. Таким образом, натуральное число имеет много функций, и многие из них должны быть поняты и усвоены уже младшими школьниками. Поэтому важной задачей учителя является овладение теми теориями, в которых обосновываются различные подходы к определению натурального числа и действий над числами.

В нашем курсе мы рассмотрим аксиоматическое определение системы натуральных чисел, отвечающее на вопрос, что представляет собой число как элемент натурального ряда; затем построим ее теоретико-множественную модель и выясним, что представляет собой натуральное число как мера величины, и, наконец, изучим способы записи чисел и алгоритмы действий над ними.

§13. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПОНЯТИЯ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

Числа возникли из потребности счета и измерения и претерпели длительный путь исторического развития.

Было время, когда люди не умели считать. Чтобы сравнить конечные множества, устанавливали взаимно однозначное соответствие между данными множествами или между одним из множеств и подмножеством другого множества, т.е. на этом этапе человек воспринимал численность предметов без их пересчета. Например, о численности группы из двух предметов он мог говорить: «Столько же, сколько рук у человека», о множестве из пяти предметов – «столько же, сколько пальцев на руке». При таком способе сравниваемые множества должны были быть одновременно обозримы.

В результате очень долгого периода развития человек пришел к следующему этапу создания натуральных чисел – для сравнения множеств стали применять множества-посредники: мелкие камешки, раковины, пальцы. Эти множества-посредники уже представляли собой зачатки понятия натурального числа, хотя и на этом этапе число не отделялось от сосчитываемых предметов: речь шла, например, о пяти камешках, пяти пальцах, а не о числе «пять» вообще. Названия множеств-посредников стали использовать для определения численности множеств, которые с ними сравнивались. Так, у некоторых племен численность множества, состоящего из пяти элементов, обозначалась словом «рука», а численность множества из 20 предметов – словами «весь человек».

Только после того как человек научился оперировать множествами-посредниками, установил то общее, что существует, например, между пятью пальцами и пятью яблоками, т.е. когда произошло отвлечение от природы элементов множеств-посредников, возникло представление о натуральном числе. На этом этапе при счете, например, яблок, не перечислялись уже «одно яблоко», «два яблока» и т.д., а проговаривались слова «один», «два» и т.д. Это был важнейший этап в развитии понятия числа. Историки считают, что произошло это в каменном веке, в эпоху первобытнообщинного строя, примерно в 10–5 тысячелетии до н.э.

Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их, а также выполнять над ними действия. Вообще натуральный ряд чисел возник не сразу, история его формирования длительная. Запас чисел, которые употребляли, ведя счет, увеличивался постепенно. Постепенно сложилось и представление о бесконечности множества натуральных чисел. Так, в работе «Псаммит» – исчисление песчинок – древнегреческий математик Архимед (III в. до н.э.) показал, что ряд чисел может быть продолжен бесконечно, и описал способ образования и словесного обозначения сколь угодно больших чисел.

Возникновение понятия натурального числа было важнейшим моментом в развитии математики. Появилась возможность изучать эти числа независимо от тех конкретных задач, в связи с которыми они возникли. Теоретическая наука, которая стала изучать числа и действия над ними, получила название «арифметика». Слово «арифметика» происходит от греческого *arithmos*, что значит «число». Следовательно, арифметика – это наука о числе.

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии и Египте. Накопленные в этих странах математические знания были развиты и продолжены учеными Древней Греции. В средние века большой вклад в развитие арифметики внесли математики Индии, стран арабского мира и Средней Азии, а начиная с XIII века – европейские ученые.

Термин «натуральное число» впервые употребил в V в. римский ученый А. Боэций, который известен как переводчик работ известных математиков прошлого на латинский язык и как автор книги «О введении в арифметику», которая до XVI века была образцом для всей европейской математики.

Во второй половине XIX века натуральные числа оказались фундаментом всей математической науки, от состояния которого зависела и прочность всего здания математики. В связи с этим появилась необходимость в строгом логическом обосновании понятия натурального числа, в систематизации того, что с ним связано. Так как математика XIX века перешла к аксиоматическому построению своих теорий, то была разработана аксиоматическая теория натурального числа. Большое влияние на исследование природы натурального числа оказала и созданная в XIX веке теория множеств. Конечно, в созданных теориях понятия натурального числа и действий над ними получили бóльшую абстрактность, но этим всегда сопровождается процесс обобщения и систематизации отдельных фактов.

§ 14. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Как уже было сказано, натуральные числа получаются при счете предметов и при измерении величин. Но если при измерении появляются числа, отличные от натуральных, то счет приводит только к числам натуральным. Чтобы вести счет, нужна последовательность числительных, которая начинается с единицы и которая позволяет осуществлять переход от одного числительного к другому и столько раз, сколько это необходимо. Иначе говоря, нужен отрезок натурального ряда. Поэтому, решая задачу обоснования системы натуральных чисел, в первую очередь надо было ответить на вопрос о том, что же представляет собой число как элемент натурального ряда. Ответ на него был дан в работах двух математиков – немца Грассмана и итальянца Пеано. Они предложили аксиоматику, в которой натуральное число обосновывалось как элемент неограниченно продолжающейся последовательности.

59. Об аксиоматическом способе построения теории

При аксиоматическом построении какой-либо математическ теории соблюдаются определенные правила:

– некоторые понятия теории выбираются в качестве **основных** принимаются без определения;

– каждому понятию теории, которое не содержится в списке осно ных, дается **определение**, в нем разъясняется его смысл с помощью о новных и предшествующих данному понятий;

– формулируются **аксиомы** – предложения, которые в данной те рии принимаются без доказательства; в них раскрываются свойств основных понятий;

– каждое предложение теории, которое не содержится в списке а сиом, должно быть доказано; такие предложения называют **теорема** и доказывают их на основе аксиом и теорем, предшествующих ра сматриваемой.

Если построение теории осуществляется аксиоматическим мето дом, т.е. по названным выше правилам, то говорят, что теория по строена *дедуктивно*.

При аксиоматическом построении теории по существу все утверж дения выводятся путем доказательства из аксиом. Поэтому к систем аксиом предъявляются особые требования. Прежде всего, она долж на быть непротиворечивой и независимой.

Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из нее нельз логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения.

Если система аксиом не обладает этим свойством, она не може быть пригодной для обоснования научной теории.

Непротиворечивая система аксиом называется *независимой*, если никакая из аксиом этой системы не является следствием других акси ом этой системы.

При аксиоматическом построении одной и той же теории можно использовать разные системы аксиом. Но они должны быть равносильными. Кроме того, при выборе той или иной системы аксиом математики учитывают, насколько просто и наглядно могут быть получены доказательства теорем в дальнейшем. Но если выбор аксиом условен, то сама наука или отдельная теория не зависят от каких-либо условий, – они являются отражением реального мира.

Аксиоматическое построение системы натуральных чисел осуществляется по сформулированным правилам. Изучая этот материал, мы должны увидеть, как из основных понятий и аксиом можно вывести всю арифметику натуральных чисел. Конечно, его изложение в нашем курсе будет не всегда строгим – некоторые доказательства мы опускаем в силу их большой сложности, но каждый такой случай будем оговаривать.

Упражнения

1. В чем суть аксиоматического способа построения теории?

2. Верно ли, что аксиома – это предложение, которое не требует доказательства?

3. Назовите основные понятия школьного курса планиметрии. Вспомните несколько аксиом из этого курса. Свойства каких понятий в них описываются?

4. Дайте определение прямоугольника, выбрав в качестве родового понятие параллелограмма. Назовите три понятия, которые в курсе геометрии должны предшествовать понятию «параллелограмм».

5. Какие предложения называют теоремами? Вспомните, какова логическая структура теоремы и что значит доказать теорему.

60. Основные понятия и аксиомы. Определение натурального числа

В качестве основного понятия при аксиоматическом построении арифметики натуральных чисел взято отношение «непосредственно следовать за», заданное на непустом множестве N. Известными также считаются понятие множества, элемента множества и другие теоретико-множественные понятия, а также правила логики.

Элемент, непосредственно следующий за элементом a, обозначают a'.

Суть отношения «непосредственно следовать за» раскрывается в следующих аксиомах.

Аксиома 1. В множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Будем называть его единицей и обозначать символом 1.

Аксиома 2. Для каждого элемента a из N существует единственный элемент a', непосредственно следующий за a.

Аксиома 3. Для каждого элемента a из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует a.

Аксиома 4. Всякое подмножество M множества N совпадает с N, если обладает свойствами: 1) 1 содержится в M; 2) из того, что a содержится в M, следует, что и a' содержится в M.

Сформулированные аксиомы часто называют аксиомами Пеано.

Используя отношение «непосредственно следовать за» и аксиомы 1–4, можно дать следующее определение натурального числа.

Определение. ***Множество N, для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1–4, называется множеством натуральных чисел, а его элементы – натуральными числами.***

В данном определении ничего не говорится о природе элементов множества N. Значит, она может быть какой угодно. Выбирая в качестве множества N некоторое конкретное множество, на котором за-но конкретное отношение «непосредственно следовать за», удов-творяющее аксиомам 1–4, мы получим *модель данной системы акси*. В математике доказано, что между всеми такими моделями мож установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отно-ние «непосредственно следовать за», и все такие модели будут от-чаться только природой элементов, их названием и обозначени Стандартной моделью системы аксиом Пеано является возникший процессе исторического развития общества ряд чисел:

1, 2, 3, 4, ...

Каждое число этого ряда имеет свое обозначение и название, кото-рое мы будем считать известными.

Рассматривая натуральный ряд чисел в качестве одной из модел аксиом 1–4, следует отметить, что они описывают процесс образов-ния этого ряда, причем происходит это при раскрытии в аксиома свойств отношения «непосредственно следовать за». Так, натурал-ный ряд начинается с числа 1 (аксиома 1); за каждым натуральны числом непосредственно следует единственное натуральное числ (аксиома 2); каждое натуральное число непосредственно следует н более чем за одним натуральным числом (аксиома 3); начиная от чи-ла 1 и переходя по порядку к непосредственно следующим друг з другом натуральным числам, получаем все множество этих чисе (аксиома 4). Заметим, что аксиома 4 в формализованном виде описыва-ет бесконечность натурального ряда, и на ней основано доказательст-во утверждений о натуральных числах.

Вообще моделью системы аксиом Пеано может быть любое счет-ное множество, например:

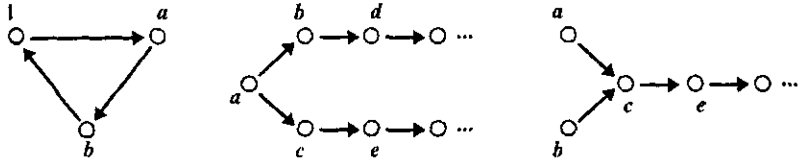
I,	II,	III,	IIII, ...
о,	оо,	ооо,	оооо, ...
один,	два,	три,	четыре, ...

Рассмотрим, например, последовательность множеств, в которой множество {оо} есть начальный элемент, а каждое последующее мно-жество получается из предыдущего приписыванием еще одного круж-ка (рис. 108, а). Тогда N есть множество, состоящее из множеств опи-санного вида, и оно является моделью системы аксиом Пеано. Дейст-вительно, в множестве N существует элемент {оо}, непосредственно не следующий ни за каким элемен-том данного множества, т.е. вы-полняется аксиома 1. Если счи-тать обведенные кружки за один элемент (рис. 108, б), то для каж-

а) { о о }, { о о о }, { о о о о }, ...

б) {(о о)}, {(о о) о }, {(о о) о о }, ...

Рис. 108



а) *б)* *в)*

Рис. 109

дого множества A рассматриваемой совокупности существует единственное множество, которое получается из A добавлением одного кружка, т.е. выполняется аксиома 2. Для каждого множества A существует не более одного множества, из которого образуется множество A добавлением одного кружка, т.е. выполняется аксиома 3. Если $M \subset N$ и известно, что множество A содержится в M, следует, что и множество, в котором на один кружок больше, чем в множестве A, также содержится в M, то $M = N$ (и значит, выполняется аксиома 4).

Заметим, что в определении натурального числа ни одну из аксиом опустить нельзя – для любой из них можно построить множество, в котором выполнены остальные три аксиомы, а данная аксиома не выполняется. Это положение наглядно подтверждается примерами, приведенными на рисунках 109 и 110. На рисунке 109,а изображено множество, в котором выполняются аксиомы 2 и 3, но не выполнена аксиома 1 (аксиома 4 не будет иметь смысла, так как в множестве нет элемента, непосредственно не следующего ни за каким другим). На рисунке 109,б показано множество, в котором выполнены аксиомы 1, 3 и 4, но за элементом *a* *непосредственно* следуют два элемента, а не один, как требуется в аксиоме 2. На рисунке 109,в изображено множество, в котором выполнены аксиомы 1, 2, 4, но элемент *c* непосредственно следует как за элементом *a*, так и за элементом *b*. На рисунке 110 показано множество, в котором выполнены аксиомы 1, 2, 3, но не выполняется аксиома 4 – множество точек, лежащих на луче, содержит 1 и вместе с каждым числом оно содержит непосредственно следующее за ним число, но оно не совпадает со всем множеством точек, показанных на рисунке.

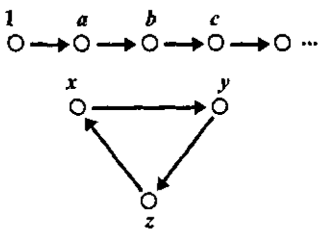


Рис. 110

То обстоятельство, что в аксиоматических теориях не говорят об «истинной» природе изучаемых понятий, делает на первый взгляд эти теории слишком абстрактными и формальными, – оказывается, что одним и тем же аксиомам удовлетворяют различные множества объектов и разные отнош между ними. Однако в этой кажущейся абстрактности и состоит аксиоматического метода: каждое утверждение, выведенное лог ским путем из данных аксиом, применимо к любым множествам о ектов, лишь бы в них были определены отношения, удовлетворяю аксиомам.

Итак, мы начали аксиоматическое построение системы натура ных чисел с выбора основного отношения «непосредственно сле вать за» и аксиом, в которых описаны его свойства. Дальнейшее строение теории предполагает рассмотрение известных свойств на ральных чисел и операций над ними. Они должны быть раскрыты определениях и теоремах, т.е. выведены чисто логическим путем отношения «непосредственно следовать за», и аксиом 1–4.

Первое понятие, которое мы введем после определения натурал ного числа, – это отношение «непосредственно предшествует», ко рое часто используют при рассмотрении свойств натурального ряда

Определение. ***Если натуральное число b непосредственно следу за натуральным числом a, то число a называется непосредстве но предшествующим (или предшествующим) числу b.***

Отношение «предшествует» обладает рядом свойств. Они форму лируются в виде теорем и доказываются с помощью аксиом 1–4.

Теорема 1. Единица не имеет предшествующего натурально числа.

Истинность данного утверждения вытекает сразу из аксиомы 1.

Теорема 2. Каждое натуральное число a, отличное от 1, име предшествующее число b, такое, что $b' = a$.

Доказательство. Обозначим через M множество натуральны чисел, состоящее из числа 1 и из всех чисел, имеющих предшеству щее. Если число a содержится в M, то и число a' также есть в M, по скольку предшествующим для a' является число a. Это значит, чт множество M содержит 1, и из того, что число a принадлежит множе ству M, следует, что и число a' принадлежит M. Тогда по аксиоме множество M совпадает с множеством всех натуральных чисел. Зна чит, все натуральные числа, кроме 1, имеют предшествующее число.

Отметим, что в силу аксиомы 3 числа, отличные от 1, имеют един ственное предшествующее число.

Аксиоматическое построение теории натуральных чисел не рас сматривается ни в начальной, ни в средней школе. Однако те свойств отношения «непосредственно следовать за», которые нашли отраже ние в аксиомах Пеано, являются предметом изучения в начально курсе математики. Уже в первом классе при рассмотрении чисел пер вого десятка выясняется, как может быть получено каждое число. Пр этом используются понятия «следует» и «предшествует». Каждое новое число выступает как продолжение изученного отрезка натурального ряда чисел. Учащиеся убеждаются в том, что за каждым числом идет следующее, и притом только одно, что натуральный ряд чисел бесконечен. И конечно, знание аксиоматической теории поможет учителю методически грамотно организовать усвоение детьми особенностей натурального ряда чисел.

Упражнения

1. Можно ли аксиому 3 сформулировать в таком виде: «Для каждого элемента a из N существует единственный элемент, за которым непосредственно следует a»?

2. Выделите условие и заключение в аксиоме 4, запишите их, используя символы $\in$, $\Rightarrow$.

3. Продолжите определение натурального числа: «Натуральным числом называется элемент множества N, ...».

61. Сложение

По правилам построения аксиоматической теории, определение сложения натуральных чисел нужно ввести, используя только отношение «непосредственно следовать за», и понятия «натуральное число» и «предшествующее число».

Предварим определение сложения следующими рассуждениями. Если к любому натуральному числу a прибавить 1, то получим число a', непосредственно следующее за a, т.е. $a+1 = a'$, и, следовательно, мы получим правило прибавления 1 к любому натуральному числу. Но как прибавлять к числу a натуральное число b, отличное от 1? Воспользуемся следующим фактом: если известно, что $2 + 3 = 5$, то сумма $2 + 4$ равна числу 6, которое непосредственно следует за числом 5. Происходит так потому, что в сумме $2 + 4$ второе слагаемое есть число, непосредственно следующее за числом 3. Таким образом, сумму $a + b'$ можно найти, если известна сумма $a + b$. Эти факты и положены в основу определения сложения натуральных чисел в аксиоматической теории. Кроме того, в нем используется понятие алгебраической операции.

Определение. ***Сложением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:***

1) $(\forall a \in N)\ a + 1 = a'$,

2) $(\forall a, b \in N)\ a + b' = (a + b)'$.

Число $a + b$ называется **суммой** чисел a и b, а сами числа a и b **слагаемыми.**

Как известно, сумма любых двух натуральных чисел представляет собой также натуральное число, и для любых натуральных чисел a и b сумма $a + b$ – единственна. Другими словами, сумма натуральных чисел существует и единственна. Особенностью определения является то, что заранее не известно, существует ли алгебраическая операция, обладающая указанными свойствами, а если существует, то единственна ли она? Поэтому при аксиоматическом построении теории натуральных чисел доказывают следующие утверждение:

Теорема 3. Сложение натуральных чисел существует и оно единственно.

Эта теорема состоит из двух утверждений (двух теорем):

1) сложение натуральных чисел существует;
2) сложение натуральных чисел единственно.

Как правило, существование и единственность связывают вместе, но они чаще всего не зависят друг от друга. Существование какого-либо объекта не подразумевает его единственность. (Например, если вы говорите, что у вас есть карандаш, то это не значит, что он только один.) Утверждение о единственности означает, что не может существовать двух объектов с заданными свойствами. Единственность часто доказывается методом от противного: предполагают, что имеется два объекта, удовлетворяющих данному условию, а затем выстраивают цепочку дедуктивных умозаключений, приводящую к противоречию.

Чтобы убедиться в истинности теоремы 3, сначала докажем, что если в множестве N существует операция, обладающая свойствами 1 и 2, то эта операция единственная; затем докажем, что операция сложения со свойствами 1 и 2 существует.

Доказательство единственности сложения. Допустим, что в множестве N существует две операции сложения, обладающие свойствами 1 и 2. Одну из них обозначим знаком $+$, а другую – знаком $\oplus$. Для этих операций имеем:

1) $a + 1 = a'$;	1) $a \oplus 1 = a'$;
2) $a + b' = (a + b)'$	2) $a \oplus b' = (a \oplus b)'$.

Докажем, что

$$(\forall a, b \in N)\, a + b = a \oplus b. \qquad (1)$$

Пусть число a выбрано произвольно , а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех и только тех чисел b, для которых равенство (1) истинно.

Нетрудно убедиться в том, что $1 \in M$. Действительно, из того, что $a + 1 = a' = a \oplus 1$ следует, что $a + 1 = a \oplus 1$.

Докажем теперь, что если $b \in M$, то $b' \in M$, т.е. если $a + b = a \oplus b$, то $a + b' = a \oplus b'$. Так как $a + b = a \oplus b$, то по аксиоме 2 $(a + b)' = (a \oplus b)'$, и тогда $a + b' = (a + b)' = (a \oplus b)' = a \oplus b'$. Поскольку множество M содержит 1 и вместе с каждым числом b содержит и число b', то по аксиоме 4, множество M совпадает с N, а значит, равенство (1) истинно для любого натурального числа b. Так как число a было выбрано произвольно, то равенство (1) верно при любых натуральных a и b, т.е. операции $+$ и $\oplus$ на множестве N могут отличаться друг от друга только обозначениями.

Доказательство существования сложения. Покажем, что алгебраическая операция, обладающая свойствами 1 и 2, указанными в определении сложения, существует.

Пусть M – множество тех и только тех чисел a, для которых можно определить $a + b$ так, чтобы были выполнены условия 1 и 2. Покажем, что $1 \in M$. Для этого при любом b положим

$$1 + b = b'. \tag{2}$$

Тогда:

1) $1 + 1 = 1'$ – по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a + 1 = a'$ при $a = 1$.

2) $1 + b' = (b')' = (1 + b)'$ – по правилу (2), т.е. выполняется равенство $a + b' = (a + b)'$ при $a = 1$.

Итак, 1 принадлежит множеству M.

Предположим, что a принадлежит M. Исходя из этого предположения, покажем, что и a' содержится в M, т.е. что можно определить сложение a' и любого числа b так, чтобы выполнялись условия 1 и 2. Для этого положим:

$$a' + b = (a + b)'. \tag{3}$$

Так как по предположению число $a + b$ определено, то по аксиоме 2, единственным образом определяется и число $(a + b)'$. Проверим, что при этом выполняются условия 1 и 2:

1) $a' + 1 = (a + 1)' = (a')'$. Таким образом, $a' + 1 = (a')'$.

2) $a' + b' = (a + b')' = ((a + b)')' = (a' + b)'$. Таким образом, $a' + b' = (a' + b)'$.

Итак, показали, что множество M содержит 1 и вместе с каждым числом a содержит число a'. По аксиоме 4, заключаем, что множество M есть множество натуральных чисел. Таким образом, существует правило, которое позволяет для любых натуральных чисел a и b однозначно найти такое натуральное число $a + b$, что выполняются свойства 1 и 2, сформулированные в определении сложения.

Покажем, как из определения сложения и теоремы 3 можно вывести хорошо известную всем таблицу сложения однозначных чисел.

Условимся о следующих обозначениях:

$1' = 2$; $2' = 3$; $3' = 4$; $4' = 5$ и т.д.

Составляем таблицу в такой последовательности: сначала к лю[illegible] му однозначному натуральному числу прибавляем единицу, зат[illegible] число два, потом – три и т.д.

$1 + 1 = 1'$ на основании свойства 1 определения сложения. Но $1'$ условились обозначать 2, следовательно, $1 + 1 = 2$.

Аналогично $2 + 1 = 2' = 3$; $3 + 1 = 3' = 4$ и т.д.

Рассмотрим теперь случаи, связанные с прибавлением к любо[illegible] однозначному натуральному числу числа 2.

$1 + 2 = 1 + 1'$ – воспользовались принятым обозначением. Но $1 + 1'$ $= (1 + 1)'$ согласно свойству 2 из определения сложения, $1 + 1$ – это 2, к[illegible] было установлено выше. Таким образом,

$1 + 2 = 1 + 1' = (1 + 1)' = 2' = 3$.

Аналогично $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = 3' = 4$; $3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)'$ $= 4' = 5$ и т.д.

Если продолжить этот процесс, получим всю таблицу сложен[illegible] однозначных чисел.

Следующий шаг в аксиоматическом построении системы на[illegible] ральных чисел – это доказательство свойств сложения, причем пе[illegible] вым рассматривается свойство ассоциативности, затем коммутати[illegible] ности и др.

Теорема 4. $(\forall a, b, c \in N)\ (a + b) + c = a + (b + c)$.

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбраны прои[illegible] вольно, а c принимает различные натуральные значения. Обознач[illegible] через M множество всех тех и только тех натуральных чисел c, для к[illegible] торых равенство $(a+b)+c = a+(b+c)$ верно.

Докажем сначала, что $1 \in M$, т.е. убедимся в справедливости раве[illegible] ства $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ Действительно, по определению сложени[illegible] имеем $(a + b) + 1 = (a + b)' = a + b' = a + (b + 1)$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то $c' \in M$, т.е. из равенств[illegible] $(a + b) + c = a + (b + c)$ следует равенство $(a + b) + c' = a + (b + c')$. Дей[illegible] ствительно, по определению сложения, имеем: $(a + b) + c' = ((a + b) + c)'$. Тогда на основании равенства $(a + b) + c = a + (b + c)$ можно записать: $((a + b) + c)' = (a + (b + c))'$. Откуда, по определению сложения, получаем: $(a + (b + c))' = a + (b + c)' = a + (b + c')$.

Таким образом, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что c содержится в M, следует, что и c' содержится в M. Следовательно, согласно аксиоме 4, $M = N$, т.е. равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ истинно для любого натурального числа c, а поскольку числа a и b выбирались произвольно, то оно истинно и для любых натуральных чисел a и b, что и требовалось доказать.

Теорема 5. $(\forall a, b \in N)\ a + b = b + a$.

Доказательство. Состоит их двух частей: сначала доказывают, что $(\forall a \in N)\ a + 1 = 1 + a$, а затем, что $(\forall a, b \in N)\ a + b = b + a$.

1. Докажем, что $(\forall a \in N)\ a + 1 = 1 + a$. Пусть M – множество всех тех и только тех чисел a, для которых равенство $a + 1 = 1 + a$ истинно.

Так как $1 + 1 = 1 + 1$ – истинное равенство, то 1 принадлежит множеству M.

Докажем теперь, что если $a \in M$, то $a' \in M$, т.е. из равенства $a + 1 = 1 + a$ следует равенство $a' + 1 = 1 + a'$. Действительно, $a' + 1 = (a + 1) + 1$ по первому свойству сложения. Далее, выражение $(a + 1) + 1$ можно преобразовать в выражение $(1 + a) + 1$, воспользовавшись равенством $a + 1 = 1 + a$. Затем, на основании ассоциативного закона, имеем: $(1 + a) + 1 = 1 + (a + 1)$. И наконец, по определению сложения, получаем: $1 + (a + 1) = 1 + a'$.

Таким образом, мы показали, что множество M содержит 1 и вместе с каждым числом a содержит и число a'. Следовательно, согласно аксиоме 4, $M = N$, т.е. равенство $a + 1 = 1 + a$ истинно для любого натурального a.

2. Докажем, что $(\forall a, b \in N)\ a + b = b + a$. Пусть a – произвольно выбранное натуральное число, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество всех тех и только тех натуральных чисел b, для которых равенство $a + b = b + a$ истинно.

Так как при $b = 1$ получаем равенство $a + 1 = 1 + a$, истинность которого доказана в пункте 1, то 1 содержится в M.

Докажем теперь, что если b принадлежит M, то и b' также принадлежит M, т.е. из равенства $a + b = b + a$ следует равенство $a + b' = b' + a$. Действительно, по определению сложения, имеем: $a + b' = (a + b)'$. Так как $a + b = b + a$, то $(a + b)' = (b + a)'$. Отсюда, по определению сложения: $(b + a)' = b + a' = b + (a + 1)$. На основании того, что $a + 1 = 1 + a$, получаем: $b + (a + 1) = b + (1 + a)$. Применив ассоциативное свойство и определение сложения, выполняем преобразования: $b + (1 + a) = (b + 1) + a = b' + a$.

Итак, мы доказали, что 1 содержится в множестве M и вместе с каждым числом b множество M содержит и число b', непосредственно следующее за b'. По аксиоме 4 получаем, что $M = N$, т.е. равенство $a + b = b + a$ истинно для любого натурального числа b, а также для любого натурального a, поскольку его выбор был произвольным.

Теорема 6. $(\forall a, b \in N)\ a + b \neq b$.

Доказательство. Пусть a – натуральное число, выбранное произвольно, а b принимает различные натуральные значения. Обозначим через M множество тех и только тех натуральных чисел b, для которых теорема 6 верна.

Докажем, что $1 \in M$. Действительно, так как $a + 1 = a'$ (по оп-делению сложения), а 1 не следует ни за каким числом (аксиома то $a + 1 \neq 1$.

Докажем теперь, что если $b \in M$, то $b' \in M$, т.е. из того, что $a + b$ следует, что $a + b' \neq b'$. Действительно, по определению сложения, $a + b' = (a + b)'$, но поскольку $a + b \neq b$, то $(a + b)' \neq b'$ и, значит, $a + b' \neq b'$.

По аксиоме 4 множества M и N совпадают, следовательно, для л-бых натуральных чисел $a + b \neq b$, что и требовалось доказать.

Подход к сложению, рассматриваемый при аксиоматическом п-строении системы натуральных чисел, является основой начально-обучения математике. Получение чисел путем прибавления 1 тесно св-зывается с принципом построения натурального ряда, а второе сво-ство сложения используется при вычислениях, например, в таких сл-чаях: $6 + 3 = (6 + 2) + 1 = 8 + 1 = 9$.

Все доказанные свойства изучаются в начальном курсе математи-и используются для преобразования выражений.

Упражнения

1. Верно ли, что каждое натуральное число получается из преды-дущего прибавлением единицы?

2. Используя определение сложения, найдите значение выражений:

а) $2 + 3$; б) $3 + 3$; в) $4 + 3$.

3. Какие преобразования выражений можно выполнять, использу-свойство ассоциативности сложения?

4. Выполните преобразование выражения, применив ассоциати-ное свойство сложения:

а) $(12 + 3) + 17$; б) $24 + (6 + 19)$; в) $27 + 13 + 18$.

5. Докажите, что $(\forall\, a, b \in N)\ a + b \neq a$.

6. Выясните, как формулируются в различных учебниках матема-тики для начальной школы:

а) коммутативное свойство сложения;

б) ассоциативное свойство сложения.

7. В одном из учебников для начальной школы рассматривается правило прибавления числа к сумме на конкретном примере $(4 + 3) + 2$ и предлагаются следующие пути нахождения результата:

а) $(4 + 3) + 2 = 7 + 2 = 9$;

б) $(4 + 3) + 2 = (4 + 2) + 3 = 6 + 3 = 9$;

в) $(4 + 3) + 2 = 4 + (2 + 3) = 4 + 5 = 9$.

Обоснуйте выполненные преобразования. Можно ли утверждать, что правило прибавления числа к сумме есть следствие ассоциативно-го свойства сложения?

8. Известно, что $a + b = 17$. Чему равно:

а) $a + (b + 3)$; б) $(a + 6) + b$; в) $(13 + b) + a$?

9. Опишите возможные способы вычисления значения выражения вида $a + b + c$. Дайте обоснование этим способам и проиллюстрируйте их на конкретных примерах.

62. Умножение

По правилам построения аксиоматической теории определить умножение натуральных чисел можно, используя отношение «непосредственно следовать за» и понятия, введенные ранее.

Предварим определение умножения следующими рассуждениями. Если любое натуральное число a умножить на 1, то получится a, т.е. имеет место равенство $a \cdot 1 = a$ и мы получаем правило умножения любого натурального числа на 1. Но как умножать число a на натуральное число b, отличное от 1? Воспользуемся следующим фактом: если известно, что $7 \cdot 5 = 35$, то для нахождения произведения $7 \cdot 6$ достаточно к 35 прибавить 7, так как $7 \cdot 6 = 7 \cdot (5 + 1) = 7 \cdot 5 + 7$. Таким образом, произведение $a \cdot b'$ можно найти, если известно произведение $a \cdot b$: $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Отмеченные факты и положены в основу определения умножения натуральных чисел. Кроме того, в нем используется понятие алгебраической операции.

Определение. ***Умножением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:***

1) $(\forall a \in N)\ a \cdot 1 = a$;

2) $(\forall a, b \in N)\ a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Число $a \cdot b$ называется **произведением** чисел a и b, а сами числа a и b – **множителями**.

Особенностью данного определения, так же как и определения сложения натуральных чисел, является то, что заранее неизвестно, существует ли алгебраическая операция, обладающая указанными свойствами, а если существует, то единственная ли она. В связи с этим возникает необходимость в доказательстве этого факта.

Теорема 7. Умножение натуральных чисел существует, и оно единственно.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Используя определение умножения, теорему 7 и таблицу сложения, можно вывести таблицу умножения однозначных чисел. Делаем это в такой последовательности: сначала рассматриваем умножение на 1, затем на 2 и т.д.

Легко видеть, что умножение на 1 выполняется по свойству 1 в ределении умножения: $1 \cdot 1 = 1$; $2 \cdot 1 = 2$; $3 \cdot 1 = 3$ и т.д.

Рассмотрим теперь случаи умножения на 2: $1 \cdot 2 = 1 \cdot 1' = 1 \cdot 1 +$ $= 1 + 1 = 2$ – переход от произведения $1 \cdot 2$ к произведению $1 \cdot 1'$ осу ствлен согласно принятым ранее обозначениям; переход от выра ния $1 \cdot 1'$ к выражению $1 \cdot 1 + 1$ – на основе второго свойства умноже произведение $1 \cdot 1$ заменено числом 1 в соответствии с уже получен результатом в таблице; и, наконец, значение выражения $1 + 1$ най в соответствии с таблицей сложения. Аналогично:

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4;$$

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6.$$

Если продолжить этот процесс, получим всю таблицу умноже однозначных чисел.

Как известно, умножение натуральных чисел коммутативно, ас циативно и дистрибутивно относительно сложения. При аксиома ческом построении теории удобно доказывать эти свойства, начина дистрибутивности.

Но в связи с тем, что свойство коммутативности будет доказ позже, необходимо рассматривать дистрибутивность справа и сл относительно сложения.

Теорема 8. $(\forall\, a, b, c \in N)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Доказательство. Пусть натуральные числа a и b выбра произвольно, а c принимает различные натуральные значения. О значим через M множество всех тех и только тех натуральных чисе для которых верно равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Докажем, что $1 \in M$, т.е. что равенство $(a + b) \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1$ ист но. Согласно свойству 1 из определения умножения имеем: $(a + b) \cdot 1$ $= a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$.

Докажем теперь, что если $c \in M$, то $c' \in M$, т.е. что из равенст $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ следует равенство $(a + b) \cdot c' = a \cdot c' + b \cdot c'$. По опр делению умножения, имеем: $(a + b) \cdot c' = (a + b) \cdot c + (a + b)$. Так к $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, то $(a + b) \cdot c + (a + b) = (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b)$. Исполь ассоциативное и коммутативное свойство сложения, выполняем пре разования: $(a \cdot c + b \cdot c) + (a + b) = (a \cdot c + b \cdot c + a) + b = (a \cdot c + a + b \cdot c) +$ $= ((a \cdot c + a) + b \cdot c) + b = (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b)$. И наконец, по определ нию умножения, получаем: $(a \cdot c + a) + (b \cdot c + b) = a \cdot c' + b \cdot c'$.

Итак, мы показали, что множество M содержит 1, и из того, что о содержит c, следует, что и c' содержится в M. По аксиоме 4 получае что $M = N$. Это означает, что равенство $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ верно д любых натуральных чисел c, а также для любых натуральных a и поскольку они были выбраны произвольно.

Теорема 9. $(\forall\, a, b, c \in N)\ \ a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c.$

Это свойство дистрибутивности слева относительно сложения. Доказывается оно аналогично тому, как это сделано для дистрибутивности справа.

Теорема 10. $(\forall\, a, b, c \in N)\ \ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c).$

Это свойство ассоциативности умножения. Его доказательство основывается на определении умножения и теоремах 4–9.

Теорема 11. $(\forall\, a, b \in N)\ \ a\cdot b = b\cdot a.$

Доказательство этой теоремы по форме аналогично доказательству коммутативного свойства сложения.

Поход к умножению, рассматриваемый в аксиоматической теории, является основой обучения умножению в начальной школе. Умножение на 1, как правило, определяется, а второе свойство умножения используется при составлении таблицы умножения однозначных чисел и вычислениях.

В начальном курсе изучаются все рассмотренные нами свойства умножения: и коммутативность, и ассоциативность, и дистрибутивность.

Упражнения

1. Используя определение умножения, найдите значения выражений:

а) $3\cdot 3$; б) $3\cdot 4$; в) $4\cdot 3$.

2. Запишите свойство дистрибутивности умножения слева относительно сложения и докажите его. Какие преобразования выражений возможны на его основе? Почему возникла необходимость в рассмотрении дистрибутивности умножения слева и справа относительно сложения?

3. Докажите свойство ассоциативности умножения натуральных чисел. Какие преобразования выражений возможны на его основе? Изучается ли это свойство в начальной школе?

4. Докажите свойство коммутативности умножения. Приведите примеры его использования в начальном курсе математики.

5. Какие свойства умножения могут быть использованы при нахождении значения выражения:

а) $5\cdot(10 + 4)$; 1·7 б) $125\cdot 15\cdot 6$; 7, 9 в) $(8\cdot 379)\cdot 125$?

6. Известно, что $37\cdot 3 = 111$. Используя это равенство, вычислите:

а) $37\cdot 18$; б) $185\cdot 12$.

Все выполненные преобразования обоснуйте.

7. Определите значение выражения, не выполняя письменных вычислений. Ответ обоснуйте:

а) $8962\cdot 8 + 8962\cdot 2$; б) $63402\cdot 3 + 63402\cdot 97$; в) $849 + 849\cdot 9$.

8. Какие свойства умножения будут использовать учащиеся начальных классов, выполняя следующие задания:

Можно ли, не вычисляя, сказать, значения каких выражений будут одинаковыми:

а) $3 \cdot 7 + 3 \cdot 5$; б) $7 \cdot (5 + 3)$; в) $(7 + 5) \cdot 3$?

Верны ли равенства:

а) $18 \cdot 5 \cdot 2 = 18 \cdot (5 \cdot 2)$; в) $5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = (6 + 7) \cdot 5$;

б) $(3 \cdot 10) \cdot 17 = 3 \cdot 10 \cdot 17$; г) $8 \cdot (7 + 9) = 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8$?

Можно ли, не выполняя вычислений, сравнить значения выражений:

а) $70 \cdot 32 + 9 \cdot 32 \ldots 79 \cdot 30 + 79 \cdot 2$;

б) $87 \cdot 70 + 87 \cdot 8 \ldots 80 \cdot 78 + 7 \cdot 78$?

63. Упорядоченность множества натуральных чисел

Как известно, множество натуральных чисел можно упорядочить при помощи отношения «меньше». Но правила построения аксиоматической теории требуют, чтобы это отношение было не только определено, но и сделано это на основе уже определенных в данной теории понятий. Сделать это можно, определив отношение «меньше» через сложение.

Определение. ***Число а меньше числа b ($a < b$) тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число с, что $a + c = b$.***

При этих условиях говорят также, что число b больше a и пишут $b > a$.

Теорема 12. Для любых натуральных чисел a и b имеет место одно и только одно из трех отношений: $a = b$, $a > b$, $a < b$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем. Из этой теоремы вытекает, что если $a \neq b$, то либо $a < b$, либо $a > b$, т.е. отношение «меньше» обладает свойством связанности.

Теорема 13. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Доказательство. Эта теорема выражает свойство транзитивности отношения «меньше».

Так как $a < b$ и $b < c$, то, по определению отношения «меньше», найдутся такие натуральные числа k и l, что $b = a + k$ и $c = b + l$. Но тогда $c = (a + k) + l$ и на основании свойства ассоциативности сложения получаем: $c = a + (k + l)$. Поскольку $k + l$ – натуральное число, то, согласно определению «меньше», $a < c$.

Теорема 14. Если $a < b$, то неверно, что $b < a$.

Доказательство. Эта теорема выражает свойство антисимметричности отношения «меньше».

Докажем сначала, что ни для одного натурального числа a не выполняется отношение $a < a$. Предположим противное, т.е. что $a < a$ имеет место. Тогда, по определению отношения «меньше», найдется такое натуральное число c, что $a + c = a$, а это противоречит теореме 6.

Докажем теперь, что если $a < b$, то неверно, что $b < a$. Предположим противное, т.е. что если $a < b$, то $b < a$ выполняется. Но из этих двух неравенств по теореме 12 имеем $a < a$, что невозможно.

Так как определенное нами отношение «меньше» антисимметрично и транзитивно и обладает свойством связанности, то оно является отношением линейного порядка, а множество натуральных чисел – *линейно упорядоченным множеством.*

Из определения «меньше» и его свойств можно вывести известные свойства множества натуральных чисел.

Теорема 15. Из всех натуральных чисел единица является наименьшим числом, т.е. $1 < a$ для любого натурального числа $a \neq 1$.

Доказательство. Пусть a – любое натуральное число. Тогда возможны два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$. Если $a \neq 1$, то существует натуральное число b, за которым следует a: $a = b' = b + 1 = 1 + b$, т.е., по определению отношения «меньше», $1 < a$. Следовательно, любое натуральное число равно 1 либо больше 1. Или, единица является наименьшим натуральным числом.

Отношение «меньше» связано со сложением и умножением чисел свойствами монотонности.

Теорема 16.

1) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ и $ac = bc$;

2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ и $ac < bc$;

3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ и $ac > bc$.

Доказательство. 1) Справедливость этого утверждения вытекает из единственности сложения и умножения.

2) Если $a < b$, то существует такое натуральное число k, что $a + k = b$. Тогда $b + c = (a + k) + c = a + (k + c) = a + (c + k) = (a + c) + k$. Равенство $b + c = (a + c) + k$ означает, что $a + c < b + c$. Точно так же доказывается, что $a < b \Rightarrow ac < bc$.

3) Доказывается аналогично.

Теорема 17 (обратная теореме 16).

1) $a + c = b + c$ или $ac = bc \Rightarrow a = b$;

2) $a + c < b + c$ или $ac < bc \Rightarrow a < b$;

3) $a + c > b + c$ или $ac > bc \Rightarrow a > b$.

Доказательство. Докажем, например, что из $ac < bc$ следует $a < b$. Предположим противное, т.е. что заключение теоремы не выполняется. Тогда не может быть, что $a = b$, так как тогда бы выполня-

лось равенство $ac = bc$ (теорема 16); не может быть и $a > b$, так к
тогда бы $ac > bc$ (теорема 16). Поэтому, согласно теореме 12, $a < b$.

Из теорем 16 и 17 можно вывести известные правила почленно
сложения и умножения неравенств. Мы их опускаем.

Теорема 18. Для любых натуральных чисел a и b существует т
кое натуральное число n, что $nb > a$.

Доказательство. Для любого a найдется такое число n, что $n >$
Для этого достаточно взять $n = a + 1$. Перемножая почленно нераве
ства $n > a$ и $b \geq 1$, получаем $nb > a$.

Из рассмотренных свойств отношения «меньше» вытекают важны
особенности множества натуральных чисел, которые мы приводим бе
доказательства.

1. Ни для одного натурального числа a не существует такого нат
рального числа n, что $a < n < a + 1$. Это свойство называется *свойство*
дискретности множества натуральных чисел, а числа a и $a + 1$ назы
вают *соседними*.

2. Любое непустое подмножество натуральных чисел содержит
наименьшее число.

3. Если M – непустое подмножество множества натуральных чисе
и существует такое число b, что для всех чисел x из M выполняется не
равенство $x < b$, то в множестве M есть наибольшее число.

Проиллюстрируем свойства 2 и 3 на примере. Пусть M – множество
двузначных чисел. Так как M есть подмножество натуральных чисел и
для всех чисел этого множества выполняется неравенство $x < 100$, то в
множестве M есть наибольшее число 99. Наименьшее число, содержа-
щееся в данном множестве M, – число 10.

Таким образом, отношение «меньше» позволило рассмотреть (и в
ряде случаев доказать) значительное число свойств множества нату-
ральных чисел. В частности, оно является линейно упорядоченным,
дискретным, в нем есть наименьшее число 1.

С отношением «меньше» («больше») для натуральных чисел млад-
шие школьники знакомятся в самом начале обучения. И часто, наряду
с его теоретико-множественной трактовкой, неявно используется оп-
ределение, данное нами в рамках аксиоматической теории. Например,
учащиеся могут объяснить, что $9 > 7$, так как 9 – это $7 + 2$. Нередко и
неявное использование свойств монотонности сложения и умножения.
Например, дети объясняют, что «$6 + 2 < 6 + 3$, так как $2 < 3$».

Упражнения

1. Почему множество натуральных чисел нельзя упорядочить при
помощи отношения «непосредственно следовать за»?

2. Сформулируйте определение отношения $a > b$ и докажите, что оно транзитивно и антисимметрично.

3. Докажите, что если a, b, c – натуральные числа, то:

а) $a < b \Rightarrow ac < bc$;

б) $a + c < b + c \Rightarrow a < b$.

4. Какие теоремы о монотонности сложения и умножения могут неявно использовать младшие школьники, выполняя задание «Сравни, не выполняя вычислений»:

а) $27 + 8$ ... $27 + 18$;

б) $27 \cdot 8$ ... $27 \cdot 18$.

5. Какие свойства множества натуральных чисел неявно используют младшие школьники, выполняя следующие задания:

а) Запиши числа, которые больше, чем 65, и меньше, чем 75.

б) Назови предыдущее и последующее числа по отношению к числу 300 (800, 609, 999).

в) Назови самое маленькое и самое большое трехзначное число.

64. Вычитание

При аксиоматическом построении теории натуральных чисел вычитание обычно определяется как операция, обратная сложению.

Определение. ***Вычитанием натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a - b = c$ тогда и только тогда, когда $b + c = a$.***

Число $a - b$ называется **разностью** чисел a и b, число a – **уменьшаемым**, а число b – **вычитаемым**.

Теорема 19. Разность натуральных чисел $a - b$ существует тогда и только тогда, когда $b < a$.

Доказательство. Пусть разность $a - b$ существует. Тогда, по определению разности, найдется такое натуральное число c, что $b + c = a$, а это значит, что $b < a$.

Если же $b < a$, то, по определению отношения «меньше», существует такое натуральное число c, что $b + c = a$. Тогда, по определению разности, $c = a - b$, т.е. разность $a - b$ существует.

Теорема 20. Если разность натуральных чисел a и b существует, то она единственна.

Доказательство. Предположим, что существует два различных значения разности чисел a и b: $a - b = c_1$ и $a - b = c_2$, причем $c_1 \neq c_2$. Тогда, по определению разности, имеем: $a = b + c_1$ и $a = b + c_2$. Отсюда следует, что $b + c_1 = b + c_2$, и на основании теоремы 17 заключаем, что $c_1 = c_2$. Пришли к противоречию с допущением, значит, оно неверное, а верна данная теорема.

Исходя из определения разности натуральных чисел и условия существования, можно обосновать известные правила вычитания числа из суммы и суммы из числа.

Теорема 21. Пусть a, b и c – натуральные числа.

а) Если $a > c$, то $(a + b) - c = (a - c) + b$.

б) Если $b > c$, то $(a + b) - c = a + (b - c)$.

в) Если $a > c$ и $b > c$, то можно использовать любую из данных формул.

Доказательство. В случае а) разность чисел a и c существует, так как $a > c$. Обозначим ее через x: $a - c = x$, откуда $a = c + x$. Если $(a + b) - c = y$, то, по определению разности, $a + b = c + y$. Подставим в это равенство вместо a выражение $c + x$: $(c + x) + b = c + y$. Воспользуемся свойством ассоциативности сложения: $c + (x + b) = c + y$. Преобразуем это равенство на основе свойства монотонности сложения, получим: $x + b = y$. Заменив в данном равенстве x на выражение $a - c$, будем иметь $(a - c) + b = y$. Таким образом, мы доказали, что если $a > c$, то $(a + b) - c = (a - c) + b$.

Аналогично проводится доказательство и в случае б).

Доказанную теорему можно сформулировать в виде правила, удобного для запоминания: **для того чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного слагаемого суммы и к полученному результату прибавить другое слагаемое.**

Теорема 22. Пусть a, b и c – натуральные числа. Если $a > b + c$, то $a - (b + c) = (a - b) - c$ или $a - (b + c) = (a - c) - b$.

Доказательство этой теории аналогично доказательству теоремы 21.

Теорему 22 можно сформулировать в виде правила: **для того чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим.**

В начальном обучении математике определение вычитания как действия, обратного сложению, в общем виде, как правило, не дается, но им постоянно пользуются, начиная с выполнения действий над однозначными числами. Учащиеся должны хорошо понимать, что вычитание связано со сложением, и использовать эту взаимосвязь при вычислениях. Вычитая, например, из числа 40 число 16, учащиеся рассуждают так: «Вычесть из 40 число 16 – это значит найти такое число, при сложении которого с числом 16 получается 40; таким числом будет 24, так как 24 + 16 = 40. Значит, 40 – 16 = 24».

Правила вычитания числа из суммы и суммы из числа в начальном курсе математики являются теоретической основой различных приемов вычислений. Например, значение выражения (40 + 16) – 10 можно найти, не только вычислив сумму в скобках, а затем вычесть из нее число 10, но и таким образом:

а) (40 + 16) – 10 = (40 – 10) + 16 = 30 + 16 = 46;

б) (40 + 16) – 10 = 40 + (16 – 10) = 40 + 6 = 46.

Упражнения

1. Верно ли, что каждое натуральное число получается из непосредственно следующего вычитанием единицы?

2. В чем особенность логической структуры теоремы 19? Можно ли ее переформулировать, используя слова «необходимо и достаточно»?

3. Докажите, что:

а) если $b > c$, то $(a + b) - c = a + (b - c)$;

б) если $a > b + c$, то $a - (b + c) = (a - b) - c$.

4. Можно ли, не выполняя вычислений, сказать, значения каких выражений будут равны:

а) $(50 + 16) - 14$;	г) $50 + (16 - 14)$;
б) $(50 - 14) + 16$;	д) $50 - (16 - 14)$;
в) $(50 - 14) - 16$;	е) $(50 + 14) - 16$.

а) $50 - (16 + 14)$;	г) $(50 - 14) + 16$;
б) $(50 - 16) + 14$;	д) $(50 - 14) - 16$;
в) $(50 - 16) - 14$;	е) $50 - 16 - 14$.

5. Какие свойства вычитания являются теоретической основой следующих приемов вычислений, изучаемых в начальном курсе математики:

а) $12 - 5$

$12 - 2 - 3 \qquad 12 - 5 = 7$

б) $16 - 7 = 16 - 6 - \square$;

в) $48 - 30 = (40 + 8) - 30 = 40 + 8 = 18$;

г) $48 - 3 = (40 + 8) - 3 = 40 + 5 = 45$.

6. Опишите возможные способы вычисления значения выражения вида $a - b - c$ и проиллюстрируйте их на конкретных примерах.

7. Докажите, что при $b < a$ и любых натуральных c верно равенство $(a - b)c = ac - bc$.

Указание. Доказательство основывается на аксиоме 4.

8. Определите значение выражения, не выполняя письменных вычислений. Ответы обоснуйте.

а) $7865 \cdot 6 - 7865 \cdot 5$; б) $957 \cdot 11 - 957$; в) $12 \cdot 36 - 7 \cdot 36$.

65. Деление

При аксиоматическом построении теории натуральных чисел деление обычно определяется как операция, обратная умножению.

Определение. ***Делением натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a:b = c$ тогда и только тогда, когда $b \cdot c = a$.***

Число $a:b$ называется **частным** чисел a и b, число a – **дели**... число b – **делителем**.

Как известно, деление на множестве натуральных чисел сущест... не всегда, и такого удобного признака существования частного, к... существует для разности, нет. Есть только необходимое условие су... ствования частного.

Теорема 23. Для того чтобы существовало частное двух н... ральных чисел a и b, необходимо, чтобы $b \leq a$.

Доказательство. Пусть частное натуральных чисел a и b су... ствует, т.е. есть такое натуральное число c, что $bc = a$. Так как... любого натурального числа 1 справедливо неравенство $1 \leq c$, то,... ножив обе его части на натуральное число b, получим $b \leq bc$. Но bc... следовательно, $b \leq a$.

Теорема 24. Если частное натуральных чисел a и b существует... оно единственно.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теор... о единственности разности натуральных чисел.

Исходя из определения частного натуральных чисел и условия... существования, можно обосновать известные правила деления сум... (разности, произведения) на число.

Теорема 25. Если числа a и b делятся на число c, то и их сум... $a + b$ делится на c, причем частное, получаемое при делении сум... $a + b$ на число c, равно сумме частных, получаемых при делении a н... и b на c, т.е. $(a + b):c = a:c + b:c$.

Доказательство. Так как число a делится на c, то существ... такое натуральное число $x = a:c$, что $a = cx$. Аналогично существу... такое натуральное число $y = b:c$, что $b = cy$. Но тогда $a + b = cx + c$... $= c(x + y)$. Это значит, что $a + b$ делится на c, причем частное, по... чаемое при делении суммы $a + b$ на число c, равно $x + y$, т.е. $a:c + b:$...

Доказанную теорему можно сформулировать в виде правила де... ния суммы на число: **для того чтобы разделить сумму на число, дост... точно разделить на это число каждое слагаемое и полученные резул... таты сложить.**

Теорема 26. Если натуральные числа a и b делятся на число c... $a > b$, то разность $a - b$ делится на c, причем частное, получаемое пр... делении разности на число c, равно разности частных, получаемы... при делении a на c и b на c, т.е. $(a - b):c = a:c - b:c$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказател... ству предыдущей теоремы.

Эту теорему можно сформулировать в виде правила деления ра... ности на число: **для того, чтобы разделить разность на число, дост... точно разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из перво... частного вычесть второе.**

Теорема 27. Если натуральное число a делится на натуральное число c, то для любого натурального числа b произведение ab делится на c. При этом частное, получаемое при делении произведения ab на число c, равно произведению частного, получаемого при делении a на c, и числа b: $(a \cdot b):c = (a:c) \cdot b$.

Доказательство. Так как a делится на c, то существует такое натуральное число x, что $a:c = x$, откуда $a = cx$. Умножив обе части этого равенства на b, получим $ab = (cx)b$. Поскольку умножение ассоциативно, то $(cx)b = c(xb)$. Отсюда $(ab):c = xb = (a:c)b$.

Теорему можно сформулировать в виде правила деления произведения на число: **для того чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из множителей и полученный результат умножить на второй множитель.**

В начальном обучении математике определение деления как операции, обратной умножению, в общем виде, как правило, не дается, но им постоянно пользуются, начиная с первых уроков ознакомления с делением. Учащиеся должны хорошо понимать, что деление связано с умножением, и использовать эту взаимосвязь при вычислениях. Выполняя деление, например, 48 на 16, учащиеся рассуждают так: «Разделить 48 на 16 – это значит найти такое число, при умножении которого на 16 получится 48; таким числом будет 3, так как $16 \cdot 3 = 48$. Следовательно, $48:16 = 3$».

Упражнения

1. Докажите, что:

а) если частное натуральных чисел a и b существует, то оно единственно;

б) если числа a и b делятся на c и $a > b$, то $(a - b):c = a:c - b:c$.

2. Можно ли утверждать, что все данные равенства верные:

а) $48:(2 \cdot 4) = 48:2:4$; б) $56:(2 \cdot 7) = 56:7:2$;
в) $850:170 = 850:10:17$.

Какое правило является обобщением данных случаев? Сформулируйте его и докажите.

3. Какие свойства деления являются теоретической основой для выполнения следующих заданий, предлагаемых школьникам начальных классов:

можно ли, не выполняя деления, сказать, значения каких выражений будут одинаковыми:

а) $(40 + 8):2$; в) $48:3$; д) $(20 + 28):2$;
б) $(30 + 16):3$; г) $(21 + 27):3$; е) $48:2$;

верны ли равенства:

а) $48:6:2 = 48:(6:2)$; б) $96:4:2 = 96:(4 \cdot 2)$;
в) $(40 - 28):4 = 10 - 7$?

4. Опишите возможные способы вычисления значения выражения вида:

а) $(a+b):c$; б) $a:b:c$; в) $(a\cdot b):c$.

Предложенные способы проиллюстрируйте на конкретных примерах.

5. Найдите значения выражения рациональным способом; свои действия обоснуйте:

а) $(7\cdot 63):7$; в) $(15\cdot 18):(5\cdot 6)$;

б) $(3\cdot 4\cdot 5):15$; г) $(12\cdot 21):14$.

6. Обоснуйте следующие приемы деления на двузначное число:

а) $954:18=(900+54):18=900:18+54:18=50+3=53$;

б) $882:18=(900-18):18=900:18-18:18=50-1=49$;

в) $480:32=480:(8\cdot 4)=480:8:4=60:4=15$;

г) $(560\cdot 32):16=560\cdot(32:16)=560\cdot 2=1120$.

7. Не выполняя деления уголком, найдите наиболее рациональным способом частное; выбранный способ обоснуйте:

а) $495:15$; в) $455:7$; д) $275:55$;

б) $425:85$; г) $225:9$; е) $455:65$.

66. Множество целых неотрицательных чисел

Присоединим к множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел еще один элемент, который называется нулем и обозначается 0. Полученное множество называется множеством целых неотрицательных чисел и обозначается $\mathbf{Z}_0$. Таким образом, $\mathbf{Z}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$.

Относительно числа 0 условимся, что оно меньше любого натурального числа, а арифметические операции в случае, когда одна из компонент равна нулю, определяются равенствами:

$(\forall a\in\mathbf{N})\ a+0=0+a=a$; $(\forall a\in\mathbf{N})\ a-0=a$;

$(\forall a\in\mathbf{N})\ a\cdot 0=0\cdot a=0$; $(\forall a\in\mathbf{N})\ 0:a=0$.

Кроме того, будем считать, что:

$0+0=0$; $0\cdot 0=0$; $0-0=0$; $a-a=0$.

Теорема 28. Деление на нуль невозможно.

Доказательство. Пусть даны целое неотрицательное число a и $b=0$.

Рассмотрим случай, когда $a\neq 0$. Предположим, что частное такого числа и нуля существует. Тогда, по определению деления, найдется такое целое неотрицательное число c, что $a=c\cdot 0$, откуда $a=0$. Пришли к противоречию с условием, значит, частное чисел $a\neq 0$ и $b=0$ не существует.

Пусть теперь $a=0$. Предположим опять, что частное $a=0$ и $b=0$ существуют, и тогда найдется такое целое неотрицательное число c, что выполняется равенство $0 = c \cdot 0$, истинное при любых значениях c. Таким образом, частным чисел $a = 0$ и $b = 0$ может быть любое целое неотрицательное число, т.е. результат деления определяется не единственным образом. Поэтому в математике считают, что деление нуля на нуль также невозможно.

Рассматривая деление на множестве целых неотрицательных чисел, мы имеем в виду деление нацело, т.е. такое, при котором частное является также целым неотрицательным числом. Но такое частное существует не всегда. Например, нельзя разделить на 9 число 31. Но существуют числа 3 и 4 такие, что $31 = 9 \cdot 3 + 4$. Говорят, что мы разделили число 31 на 9 с остатком 4, а число 3 называют неполным частным. В общем случае деление с остатком определяют так.

Определение. ***Пусть a – целое неотрицательное число, а b – число натуральное. Разделить a на b с остатком – это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что a = bq + r, причем 0 ≤ r < b.***

Из этого определения следует, что делить с остатком можно не только большее число на меньшее, но и меньшее на большее. Например, при делении числа 5 на 9 получаем, что неполное частное равно 0, а остаток – 5: $5 = 0 \cdot 9 + 5$. Вообще если $a < b$, то при делении a на b с остатком получаем $q = 0$ и $r = a$.

Если при делении a на b с остатком оказывается, что $r = 0$, то говорят, что имеем деление нацело. Вообще $r = 0$ тогда и только тогда, когда a делится на b.

В связи с этим новым действием возникают вопросы: если заданы числа a и b, всегда ли можно найти такие q и r, что будет выполняться равенство $a = bq + r$ и $0 \le r < b$? Если такая пара чисел q и r существует, то единственна ли она для заданных чисел a и b? Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 29. Для любого целого неотрицательного числа a и натурального b существуют целые неотрицательные числа q и r, такие, что $a = bq + r$, причем $0 \le r < b$. И эта пара чисел q и r единственная для заданных a и b.

Доказательство существования. Обозначим через M множество целых неотрицательных чисел, кратных b и не превосходящих a:

$$M = \{x \mid x \vdots b, x \le a\}.$$

Так как для всех чисел из этого множества выполняется неравенство $x < a + 1$, то в множестве M есть наибольшее число, которое обозначим через x_0. Это число имеет вид $x_0 = bq$, причем число $b(q + 1)$ уже не принадлежит множеству M и поэтому $b(q + 1) > a$. Итак, найдено число q, такое, что $bq \le a < bq + b$. Из этих неравенств следует, что $0 \le a - bq < b$. Если обозначить $a - bq$ через r, то имеем: $a - bq = r$, т.е. $a = bq + r$ и

$0 \le r < b$. Это означает, что q – неполное частное, а r – остаток пр
делении a на b.

Доказательство единственности. Предположим, чт
$a = bq + r$, где $0 \le r < b$ и $a = bq_1 + r_1$, где $0 \le r_1 < b$, причем, наприме
$r > r_1$. Тогда имеем: $bq + r = bq_1 + r_1$, и поэтому $r - r_1 = bq_1 - bq = b(q_1 -$
Поскольку $0 \le r_1 < r < b$, то $r - r_1 < b$. С другой стороны, $r - r_1 = b(q_1 -$
и потому делится на b. Пришли к противоречию, так как натурал
ное число, меньшее, чем b, не может делиться на b. Это противор
чие и доказывает, что другой пары чисел с требуемыми свойствам
не существует, следовательно, деление с остатком однозначно опр
делено.

В любом начальном курсе математики изучается деление с остатко
так как оно лежит в основе алгоритма деления многозначного числа н
многозначное. При этом часто используется запись: 9:2 = 4 (ост. 1)
Учащиеся запоминают, что если при делении получается остаток, то о
всегда меньше делителя.

Упражнения

1. Объясните, почему не существует значения выражения 7:0, проведя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве теоремы 28.

2. Разделите с остатком:

а) 37 на 5; б) 83 на 4; в) 12 на 15.

3. Какие остатки могут получаться при делении чисел на 4? Какой вид имеют числа, при делении которых на 4 в остатке получается:

а) 1; б) 3?

4. Известно, что при делении x на y получили неполное частное z и остаток 17. Известно также, что одно из чисел x, y и z равно 13. Какое?

5. На множестве $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 1 \le x \le 100\}$ задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 5». На какие классы разобьются числа множества A при помощи данного отношения? Почему это разбиение возможно? В каком классе окажется 27? 98? 100?

6. На сколько классов разбивается множество **N** при помощи отношения:

а) «иметь один и тот же остаток при делении на 2»;

б) «иметь один и тот же остаток при делении на 7»?

Почему возможно такое разбиение? Назовите по одному представителю из каждого класса разбиения множества **N** в случае б).

7. Одно число на 62 больше другого. При делении одного из них на другое с остатком в частном получается 5 и в остатке 6. Найдите эти числа.

67. Метод математической индукции

233

Метод доказательства, который основан на аксиоме 4 (с. 254) и который мы использовали при доказательстве свойств сложения и умножения, можно применять и для доказательства других утверждений о натуральных числах. Основой для этого служит следующая теорема.

Теорема 30. Если утверждение $A(n)$ с натуральной переменной n истинно для $n = 1$ и из того, что оно истинно для $n = k$ (k – произвольное натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n = k'$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Доказательство. Обозначим через M множество тех и только тех натуральных чисел, для которых утверждение $A(n)$ истинно. Тогда из условия теоремы имеем: 1) $1 \in M$; 2) $k \in M \Rightarrow k' \in M$. Отсюда, на основании аксиомы 4, заключаем, что $M = N$, т.е. утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Метод доказательства, основанный на этой теореме, называется **методом математической индукции**. Состоит оно из двух частей:

1) доказывают, что утверждение $A(n)$ истинно для $n = 1$, т.е. что истинно высказывание $A(1)$;

2) предполагают, что утверждение $A(n)$ истинно для $n = k$, и, исходя из этого предположения, доказывают, что утверждение $A(n)$ истинно и для $n = k + 1$, т.е. что истинно высказывание $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$.

Если $A(1) \wedge A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ – истинное высказывание, то делают вывод о том, что утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Доказательство методом математической индукции можно начинать не только с подтверждения истинности утверждения для $n = 1$, но и с любого натурального числа m. В этом случае утверждение $A(n)$ будет доказано для всех натуральных чисел $n \geq m$.

Приведем примеры доказательства утверждений методом математической индукции.

Пример 1. Докажем, что для любого натурального числа истинно равенство $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Равенство $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ представляет собой формулу, по которой можно находить сумму n первых последовательных нечетных натуральных чисел. Например, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 = 16$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2 = 36$; если эта сумма содержит 20 слагаемых указанного вида, то она равна $20^2 = 400$ и т.д. Доказав истинность данного равенства, получим возможность находить по формуле сумму любого числа слагаемых указанного вида.

1) Убедимся в истинности данного равенства для $n = 1$. При $n = 1$ левая часть равенства состоит из одного члена, равного 1, правая часть равна 1^2 (т.е. тоже 1). Так как $1 = 1$, то для $n = 1$ данное равенство истинно.

2) Предположим, что данное равенство истинно для $n = k$, т.е. что $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$. Исходя из этого предположения, докажем, что оно истинно и для $n = k + 1$, т.е. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (k + 1)^2$.

Рассмотрим левую часть последнего равенства. По предположению сумма первых k слагаемых равна k^2 и поэтому $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = k^2 + 2k + 1$. Выражение $k^2 + 2k + 1$ тождественно равно выражению $(k + 1)^2$. Следовательно, истинность данного равенства для $n = k + 1$ доказана.

Таким образом, данное равенство истинно для $n = 1$ и из истинности его для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$. Тем самым доказано, что данное равенство истинно для любого натурального числа.

Пример 2. Докажем, что для любого натурального числа истинно утверждение: $(8^n + 6)\vdots 7$.

1) Убедимся, что данное утверждение истинно для $n = 1$. Имеем $8^1 + 6 = 14$, но 14 кратно 7. Следовательно, для $n = 1$ данное утверждение истинно.

2) Предположим, что данное утверждение истинно для $n = k$, т.е. $(8^k + 6)\vdots 7$. Исходя из этого предположения, докажем, что оно истинно и для $n = k + 1$, т.е. $(8^{k+1} + 6)\vdots 7$.

Преобразуем выражение $8^{k+1} + 6$ к виду $8^k \cdot 8 + 6$. Если к нему прибавить, а затем вычесть произведение $8 \cdot 6$, то получим $8^k \cdot 8 + 6 + 8 \cdot 6 - 8 \cdot 6 = 8 \cdot (8^k + 6) - 42$. В полученном выражении уменьшаемое $8 \cdot (8^k + 6)$ кратно 7, так как $8^k + 6$ кратно 7 по предположению. Число 42 также делится на 7, следовательно, вся разность кратна 7.

Таким образом, данное утверждение истинно для $n = 1$ и из истинности его для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$. Тем самым доказано, что данное равенство истинно для любого натурального числа.

Упражнения

1. Опишите в общем виде процесс доказательства методом математической индукции. Из скольких этапов он состоит?

2. Используя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа n истинны утверждения:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

в) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + ... + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$;

г) $(n^3 + 3n)\vdots 6$;

д) $(4^n + 15n - 1)\vdots 9$;

е) $(6^{2n-1} + 1)\vdots 7$.

68. Количественные натуральные числа. Счет

Аксиоматическая теория описывает натуральное число как элемент бесконечного ряда, в котором числа располагаются в определенном порядке, существует первое число и т.д. Другими словами, в аксиоматике раскрывается порядковый смысл натурального числа. Но натуральные числа имеют и количественный смысл. Чтобы выяснить, как связаны между собой эти два смысла натурального числа, рассмотрим такие понятия, как отрезок натурального ряда, конечное множество, счет, и другие.

Определение. ***Отрезком N_a натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа a.***

Используя запись множества, для элементов которого указано характеристическое свойство, можно записать, что $N_a = \{x \mid x \in N$ и $x \le a\}$.

Например, отрезок N_7 – это множество натуральных чисел, не превосходящих числа 7, т.е. $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Отметим два важных свойства отрезков натурального ряда.

1) **Любой отрезок N_a содержит единицу.** Это свойство вытекает из определения отрезка N_a.

2) **Если число x содержится в отрезке N_a и $x \ne a$, то и непосредственно следующее за ним число $x+1$ также содержится в N_a.**

Действительно, если $x \in N_a$ и $x \ne a$, то $x < a$. Это означает, что существует такое натуральное число c, что $a = x + c$. Если $c = 1$, то $a = x + 1$, а значит, $x + 1$ содержится в N_a. Если же $c > 1$, то $c - 1$ – натуральное число и, следовательно, $a = x + c = (x + 1) + (c - 1)$. Но тогда $x + 1 < a$, т.е. $x + 1$ – натуральное число, принадлежащее отрезку N_a.

Определение. ***Множество A называется конечным, если оно равномощно некоторому отрезку N_a натурального ряда.***

Например, множество A вершин треугольника – конечное множество, так как оно равномощно отрезку $N_3 = \{1, 2, 3\}$, т.е. $A \sim N_3$.

Теорема 31. Всякое непустое конечное множество равномощно одному и только одному отрезку натурального ряда.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Определение. ***Если непустое конечное множество A равномощно отрезку N_a, то натуральное число a называют числом элементов множества A и пишут $n(A) = a$.***

Например, если A – множество вершин треугольника, то $n(A) = 3$.

Из данного определения и теоремы 31 получаем, что для любого непустого конечного множества A число $a = n(A)$ единственное.

Определение. ***Установление взаимно однозначного соответст... между элементами непустого конечного множества А и отрез... натурального ряда называется счетом элементов множества А***

Так как всякое непустое конечное множество равномощно тол... одному отрезку натурального ряда, то число элементов, т.е. резуль... счета не зависит от того, в каком порядке будут пересчитываться э... менты множества. Поэтому можно какому-либо элементу множест... A поставить в соответствие число 1 и больше этот элемент не рассм... ривать. Затем какому-либо из оставшихся элементов сопоставить ч... ло 2 и больше его не рассматривать. Продолжая это построение, п... следнему оставшемуся элементу мы поставим в соответствие число a

В процессе счета мы не только найдем число элементов множества... но и упорядочим его: элемент, которому соответствует число 1, – пе... вый; элемент, которому сопоставлено число 2, – второй, и т.д.

Таким образом, всякое натуральное число a можно рассматрива... как характеристику численности некоторого конечного множества ... Натуральное число a имеет при этом количественный смысл.

Упражнения

1. Можно ли назвать отрезком натурального ряда множество:

а) $\{1, 2, 3, 4\}$; в) $\{2, 3, 4, 5\}$;

б) $\{1, 3, 5, 7\}$; г) $\{1, 2, 4, 5\}$?

2. Докажите, что множество B конечное, если:

а) B – множество букв в слове «параллелограмм»;

б) B – множество учащихся в классе;

в) B – множество букв в учебнике математики.

3. Прочитайте записи: $n(A) = 5$; $n(A) = 7$. Приведите примеры мно... жеств, содержащих указанное число элементов.

4. Что значит сосчитать элементы конечного множества? Сформу... лируйте правила, которые должны соблюдать учащиеся при счет... предметов и которые вытекают из определения счета элементов ко... нечного множества.

69. Основные выводы § 14

В этом параграфе мы рассмотрели подход к построению системы на... туральных чисел, основанный на аксиоматике Пеано. При этом подход... натуральное число определяется как элемент множества, на которо... задано отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяюще... аксиомам Пеано. Несмотря на определенную абстрактность, при дан... ном подходе хорошо раскрывается суть натурального числа, он соот... ветствует историческому процессу развития понятия числа в практике.

Кроме понятия числа, мы *определили понятия* четырех арифметических действий, отношения «меньше», отрезка натурального ряда, конечного множества, числа элементов множества, счета.

Нами доказаны основные *свойства* сложения, умножения, вычитания и деления.

Мы установили, что всякое натуральное число, рассматриваемое в аксиоматической теории как порядковое, может иметь и количественный смысл, если является характеристикой численности некоторого конечного множества.

§15. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА, НУЛЯ И ОПЕРАЦИЙ НАД ЧИСЛАМИ

Введя понятие отрезка натурального ряда, мы выяснили, что счет элементов конечного множества приводит к числу количественному. Используя теоретико-множественные понятия, можно разъяснить смысл количественного натурального числа, не связывая его со счетом. Сделаем это в рамках так называемого теоретико-множественного подхода к числу. Учителю начальных классов знание этого подхода поможет понять, как построены те курсы начальной математики, которые основаны на теоретико-множественной модели системы натуральных чисел, используемой явно или неявно.

70. Теоретико-множественный смысл натурального числа, нуля и отношения «меньше»

Как было установлено ранее, количественное натуральное число a получается в результате счета элементов конечного множества A: $a = n(A)$. Это же число a может быть получено и при пересчете элементов другого множества, например, B. Но если $a = n(B)$, то множества A и B равномощны, поскольку содержат поровну элементов.

Так как любому непустому конечному множеству соответствует только одно натуральное число, то вся совокупность конечных множеств разбивается на классы равномощных множеств. В одном классе будут содержаться все одноэлементные множества, в другом – двухэлементные и т.д. Множества одного класса различны по своей природе, но все они содержат одинаковое число элементов. И это число можно рассматривать как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Таким образом, с теоретико-множественной точки зрения, **натуральное число – это общее свойство класса конечных равномощных множеств.**

Так как каждый класс равномощных конечных множеств однозначно определяется выбором какого-нибудь его представителя, то о натуральном числе «три» можно сказать, что это общее свойство класса множеств, равномощных, например, множеству сторон треугольника, а о натуральном числе «четыре», что это общее свойство класса множеств, равномощных, например, множеству вершин квадрата.

Число «нуль» с теоретико-множественных позиций рассматривается как число элементов пустого множества: $0 = n(\varnothing)$.

Итак, натуральное число a как характеристику количества можно рассматривать с двух позиций:

1) как число элементов в множестве A, получаемое при счете, т.е. $a = n(A)$, причем $A \sim \mathbf{N}_a$;

2) как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Установленная связь между конечными множествами и натуральными числами позволяет дать теоретико-множественное истолкование отношения «меньше».

В аксиоматической теории это отношение определено следующим образом:

$$a < b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbf{N})\ a + c = b.$$

Если $a < b$, то это означает, что отрезок натурального ряда $\mathbf{N}_a$ является собственным подмножеством отрезка $\mathbf{N}_b$, т.е. $\mathbf{N}_a \subset \mathbf{N}_b$ и $\mathbf{N}_a \neq \mathbf{N}_b$. Справедливо и обратное утверждение: если $\mathbf{N}_a$ – собственное подмножество $\mathbf{N}_b$, то $a < b$. Тем самым отношение «меньше» получает теоретико-множественное истолкование: $a < b$ в том и только в том случае, когда отрезок натурального ряда $\mathbf{N}_a$ является собственным подмножеством отрезка $\mathbf{N}_b$:

$$a < b \Leftrightarrow \mathbf{N}_a \subset \mathbf{N}_b \text{ и } \mathbf{N}_a \neq \mathbf{N}_b.$$

Так, справедливость неравенства $3 < 7$ вытекает из того, что $\{1, 2, 3\} \subset \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Если воспользоваться терминологией, принятой в школьном курсе математики, то последнее определение отношения «меньше» можно сформулировать так: «Число a меньше числа b, тогда и только тогда, когда при счете число a называют раньше числа b».

Данная трактовка отношения «меньше» позволяет сравнивать числа, опираясь на знание их места в натуральном ряду. Однако сравнение чисел (особенно небольших) часто выполняют иначе, используя связь чисел с конечными множествами. Например, если 3 – это число квадратов на рисунке

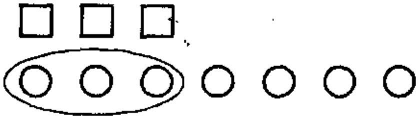


Рис. 111

111), а 7 – число кружков на этом рисунке, то 3 < 7, потому что во втором множестве можно выделить собственное подмножество, равномощное множеству квадратов. Этот способ установления отношения между числами 3 и 7 вытекает из трактовки отношения «меньше», данной выше: множество квадратов равномощно отрезку $\mathbf{N}_3$, а множество кружков – отрезку $\mathbf{N}_7$ и $\mathbf{N}_3 \subset \mathbf{N}_7$.

В общем виде рассмотренный подход к определению отношения «меньше» можно обосновать следующим образом: пусть $a = n(A)$, $b = n(B)$, и $a < b$. Тогда $A \sim \mathbf{N}_a$, $B \sim \mathbf{N}_b$ и $\mathbf{N}_a \subset \mathbf{N}_b$. Последнее отношение означает, что в множестве B можно выделить собственное подмножество B_1, равномощное множеству A:

$$a = n(A),\ b = n(B) \text{ и } a < b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ где } B_1 \subset B,\ B_1 \neq B,\ B_1 \neq \varnothing.$$

Свойства отношения «меньше» для натуральных чисел также получают теоретико-множественное истолкование: транзитивность и антисимметричность этого отношения связаны с тем, что транзитивно и антисимметрично отношение «быть подмножеством».

Теоретико-множественный смысл неравенства $0 < a$, истинного для любого натурального числа a, связан с тем, что пустое множество является подмножеством отрезка $\mathbf{N}_a$ (или любого такого множества A, для которого $a = n(A)$).

Заметим, что приведенные трактовки отношения «меньше» основываются на понятии подмножества конечного множества. Так как в реальной жизни мы, как правило, имеем дело с конечными множествами, то наш опыт говорит о том, что и любое подмножество конечного множества – конечно. Однако с математической точки зрения этот факт нуждается в доказательстве.

Теорема 1. Любое непустое подмножество конечного множества конечно.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

В связи с тем, что при определении числа, соответствующему множеству A, приходится прибегать к счету, а для этого нужен некоторый отрезок натурального ряда, то изучение математики в начальных классах начинается, как правило, с усвоения чисел первого десятка. Параллельно раскрывается смысл каждого из этих чисел, причем количественное натуральное число часто рассматривается как общее свойство класса конечных равномощных множеств. Например, когда учащиеся изучают число «три», они рассматривают множества, содержащие три элемента: три кубика, три карандаша и др. Так происходит при изучении всех чисел первого десятка, но число элементов в множестве каждый раз определяется путем пересчета, т.е. количественный и порядковый смысл числа, а также его запись выступают в тесной взаимосвязи.

Сравнение чисел в начальном курсе математики осуществляет различными способами – оно основано на всех рассмотренных нам подходах к трактовке отношения «меньше».

Упражнения

1. Почему на уроке, где изучается число «четыре», можно испол- зовать картинку с изображением четырех яблок, четырех тетрадей, можно воспользоваться и другими примерами четырехэлементны множеств?

2. Какой подход к определению отношения «меньше» используетс при ознакомлении младших школьников с неравенством $3 < 4$, есл выполняются следующие действия: возьмем три розовых кружка четыре синих и каждый розовый кружок наложим на синий; видим, чт синий кружок остался незакрытым, значит, розовых кружков меньш чем синих, поэтому можно записать: $3 < 4$.

3. Исходя из различных определений отношения «меньше», объяс- ните, почему $2 < 5$.

4. Как, используя теоретико-множественный подход к числу, объ- яснить, что $4 = 4$?

71. Теоретико-множественный смысл суммы

Сложение целых неотрицательных чисел связано с объединением ко- нечных непересекающихся множеств. Например, если множество A со- держит 5 элементов, а множество B – 4 элемента и пересечение множеств A и B пусто, то число элементов в их объединении равно сумме $5 + 4$.

Теорема 2. Пусть A и B – конечные множества, не имеющие общих элементов. Тогда их объединение тоже конечно, причем $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Доказательство. Докажем сначала, что если a и b – натуральные числа, то существует взаимно однозначное отображение отрезка нату- рального ряда N_b на множество X таких чисел, что $a + 1 \le x \le a + b$. Дей- ствительно, если поставить в соответствие числу $c \in N_b$ число $c + a$, то в силу монотонности сложения этим будет задано взаимно однозначное отображение отрезка N_b на множество X. Например, если $a = 3$, $b = 5$, то соответствие между множествами N_5 и $X = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ может быть установлено так: числу $c \in N_5$ сопоставим число $x = 3 + c$: числу 1 – чис- ло $3 + 1 = 4$, числу 2 – число $3 + 2 = 5$ и т.д., числу 5 – число $3 + 5 = 8$.

Пусть $n(A) = a$, $n(B) = b$. Тогда существуют взаимно однозначные отображения A на N_a и B на N_b. Но, согласно доказанному выше, отре- зок N_b можно взаимно однозначно отобразить на множество X таких чисел, что $a + 1 \le x \le a + b$. Тем самым множество B взаимно однозначно отображается на X. Отображая взаимно однозначно множество A на $\mathbf{N}_a$, множество B – на X, получаем взаимно однозначное отображение множества $A \cup B$ на отрезок $\mathbf{N}_{a+b}$. Поскольку нет элементов, одновременно принадлежащих A и B, то это отображение определено на всем множестве $A \cup B$. Значит, в множестве $A \cup B$ имеется $a + b$ элементов, что и требовалось доказать.

Из рассмотренной теоремы следует, что **с теоретико-множественных позиций сумма натуральных чисел a и b представляет собой число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств A и B таких, что $a = n(A)$, $b = n(B)$:**

$$a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B), \text{ если } A \cap B = \varnothing.$$

Выясним теперь, каков теоретико-множественный смысл равенства $a + 0 = a$. Если $a = n(A)$, $0 = n(\varnothing)$, то, согласно теореме 2, $a + 0 = n(A) + n(\varnothing) = n(A \cup \varnothing)$. Но, как известно, $A \cup \varnothing = A$, следовательно, $n(A \cup \varnothing) = n(A)$, откуда $a + 0 = a$.

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций известные свойства сложения. Так, коммутативность сложения связана с тем, что для любых множеств A и B выполняется равенство $A \cup B = B \cup A$. Действительно, если $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$, то $a + b = n(A \cup B) = n(B \cup A) = b + a$.

Аналогично можно показать, что ассоциативность сложения вытекает из равенства: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Действительно, если $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ и $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, то $(a + b) + c = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c)$. 3

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет обосновывать выбор действий при решении текстовых задач определенного вида. Выясним, например, почему следующая задача решается при помощи сложения: «Катя нашла 3 гриба, а Маша – 4. Сколько всего грибов нашли девочки?»

В задаче рассматриваются три множества: множество A грибов Кати, множество B грибов Маши и их объединение. Требуется узнать число элементов в этом объединении, а оно находится сложением. Так как $n(A) = 3$, $n(B) = 4$ и $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = 3 + 4$. Сумма $3 + 4$ – это математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: $3 + 4 = 7$. Следовательно, девочки нашли 7 грибов.

Упражнения

1. Каков теоретико-множественный смысл суммы:
   а) $3 + 5$; б) $0 + 4$; в) $0 + 0$.

2. Дайте теоретико-множественное истолкование суммы k слагаем
и, используя полученный вывод, объясните теоретико-множествен
смысл суммы:

а) $3 + 4 + 2$; б) $1 + 2 + 3 + 4$.

3. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются сложени

а) Дима сорвал 8 слив, Нина – 4. Сколько всего слив сорвали Ди
и Нина вместе?

б) Из коробки взяли 6 красных карандашей и 4 синих. Скол
всего карандашей взяли из коробки?

72. Теоретико-множественный смысл разности

В аксиоматической теории вычитание натуральных чисел было
ределено как операция, обратная сложению:

$$a - b = c \Leftrightarrow (\exists c \in \mathrm{N})\ b + c = a.$$

Вычитание целых неотрицательных чисел определяется аналогич
Выясним, каков смысл разности таких чисел, если $a = n(A)$, $b = n(B)$

Теорема 3. Пусть A – конечное множество и B – его собствен
подмножество. Тогда множество $A \setminus B$[1] тоже конечно, причем вып
няется равенство $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.

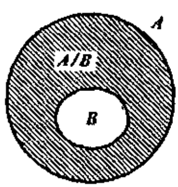


Рис. 112

Доказательство. Так как по условию B – с
ственное подмножество множества A, то с помощ
кругов Эйлера их можно представить так, как
рисунке 112. Разность $A \setminus B$ на этом рисунке
штрихована. Видим, что множества B и $A \setminus B$
пересекаются и их объединение равно A. Поэто
число элементов в множестве A можно найти
формуле $n(A) = n(B) + n(A \setminus B)$, откуда, по определе
нию вычитания как операции, обратной сложени
получаем, что $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.

Из рассмотренной теоремы следует, **что с теоретико-множеств
ных позиций разность натуральных чисел a и b представляет со
число элементов в дополнении множества B множества A, если $a = n($
$b = n(B)$ и $B \subset A$:**

$$\boldsymbol{a - b = n(A) - n(B) = n(A \setminus B), \text{ если } B \subset A.}$$

Аналогичное истолкование получает вычитание нуля, а та
вычитание a из a. Так как $A \setminus \varnothing = A$, $A \setminus A = \varnothing$, то $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

[1] Множество $A \setminus B$ в случае, когда $B \subset A$, можно обозначать символом B'_A, но из
тодических соображений мы отдали предпочтение обозначению разности в виде $A \setminus$

Взаимосвязь вычитания чисел и вычитания множеств позволяет обосновать выбор действия при решении текстовых задач. Выясним, например, почему следующая задача решается при помощи вычитания: «У школы росло 7 деревьев, из них 4 березы, остальные липы. Сколько лип росло у школы?»

В задаче рассматриваются три множества: множество A всех деревьев; множество B берез, оно является подмножеством множества A; и множество C лип – оно представляет собой *дополнение множества B до A*. В задаче требуется найти число элементов в этом дополнении. Так как по условию $n(A) = 7$, $n(B) = 4$ и $B \subset A$, то $n(C) = n(A \setminus B) = n(A) - n(B) = 7 - 4$. Разность $7 - 4$ – это математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи; $7 - 4 = 3$. Следовательно, у школы росло 3 липы.

Рассматриваемый подход к сложению и вычитанию целых неотрицательных чисел позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций правила вычитания числа из суммы и суммы из числа.

Выясним, например, теоретико-множественный смысл правила: «Если a, b, c – натуральные числа и $a > c$, то $(a + b) - c = (a - c) + b$».

Пусть A, B и C – такие множества, что $n(A) = a$, $n(B) = b$ и $A \cap B = \varnothing$, $C \subset A$ (рис. 113). Нетрудно доказать, что для данных множеств A, B и C имеет место равенство $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$. Но $n((A \cup B) \setminus C) = n(A \cup B) - n(C) = (a + b) - c$, а $n((A \setminus C) \cup B) = n(A \setminus C) + n(B) = (a - c) + b$. И следовательно, $(a + b) - c = (a - c) + b$, если $a \geq c$.

С теоретико-множественной позиции можно рассмотреть и смысл отношений «больше на» и «меньше на».

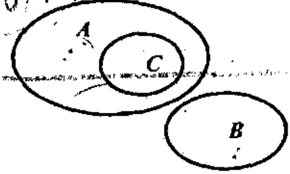


Рис. 113

В аксиоматической теории определение отношения «меньше на» («больше на») естественным образом вытекает из определения отношения «меньше». Действительно, из того, что $a < b$ тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число c, что $a + c = b$, имеем, что «a меньше b на c» или «b больше a на c».

Если $a = n(A)$, $b = n(B)$ и установлено, что $a < b$, то, исходя из теоретико-множественного смысла отношения «меньше», в множестве B можно выделить собственное подмножество B_1, равномощное множеству A, и непустое множество $B \setminus B_1$. Если число элементов в множестве $B \setminus B_1$ обозначить через c ($c \neq 0$), то в множестве B будет столько же элементов, сколько их в A, и еще c элементов: $n(B) = n(B_1) + n(B \setminus B_1)$ или $b = a + c$, что означает, что «a меньше b на c» (или «больше a на c»).

Итак, с теоретико-множественной точки зрения «a меньше b на c» (или «b больше a на c») означает, что если $a = n(A)$, $b = n(B)$, то *в множестве B содержится столько элементов, сколько их в A, и еще c элементов*.

Так как $c = n(B \setminus B_1)$, где $B_1 \subset B$, $n(B) = b$, $n(B_1) = a$, то, по опре-
лению разности, $c = a - b$. Следовательно, **чтобы узнать, на скол**
одно число меньше или больше другого, надо из большего числа в
честь меньшее.

Взаимосвязь действий над множествами с действиями над числам
теоретико-множественный смысл отношений «меньше на» и «боль
на» позволяют обосновывать выбор действий при решении задач
этими отношениями.

Рассмотрим, например, такую задачу: «На столе 5 чашек, а лож
на 2 больше. Сколько на столе ложек?» Легко видеть, что она реша
ся при помощи сложения. Почему?

В задаче речь идет о двух множествах: множестве чашек (A) и мн
жестве ложек (B). Известно, что в первом множестве 5 элементов, т.
$n(A) = 5$. Число элементов во втором множестве требуется найти п
условии, что в нем на 2 элемента больше, чем в первом. Отношен
«больше на 2» означает, что в множестве B элементов столько ж
сколько их в A, и еще 2 элемента (рис. 114). Применимо к тем множ
ствам, о которых идет речь в задаче, это означает, что ложек на сто
столько же, сколько чашек, и еще 2. Используя правило подсчет
элементов в объединении непересекающихся множеств, получае
$n(B) = n(B_1) + n(B \setminus B_1) = 5 + 2$. Так как $5 + 2 = 7$, то получим ответ н
вопрос задачи: на столе 7 ложек.

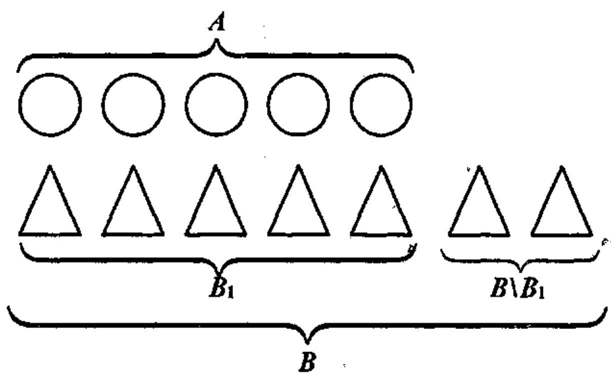


Рис. 114

Рассмотрим еще одну задачу: «На столе 5 чашек, а ложек на 2 меньше. Сколько на столе ложек?» Выясним, почему она решается при помощи вычитания.

В задаче речь идет о двух множествах: множестве чашек (A) и множестве ложек (B). Известно, что в первом множестве 5 элементов, т.е. $n(A) = 5$. Число элементов во втором множестве надо найти при условии, что в нем на 2 элемента меньше, чем в первом. Отношение «меньше на 2» означает, что в множестве B элементов столько же, сколько их в A, но без двух (рис. 115). Применимо к тем множествам, о которых идет речь в задаче, это означает, что ложек на столе столько же, сколько чашек, но без двух. Таким образом, $n(B) = n(A_1) = n(A) - n(A \setminus A_1) = 5 - 2$. Так как $5 - 2 = 3$, то получим ответ на вопрос задачи: на столе 3 ложки.

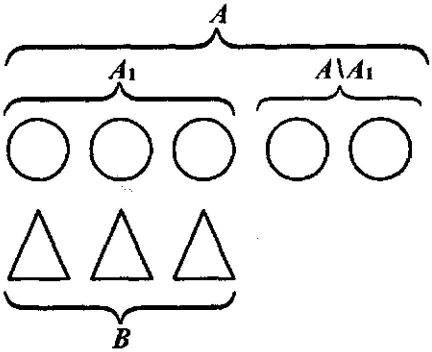


Рис. 115

Упражнения

1. Объясните с теоретико-множественной точки зрения смысл выражений:

а) $8 - 3$; б) $4 - 4$; в) $4 - 0$.

2. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи вычитания.

а) В корзине было 7 морковок, 3 из них отдали кроликам. Сколько морковок осталось?

б) На столе 8 чашек, их на 3 больше, чем стаканов. Сколько стаканов на столе?

в) На верхней полке шкафа 7 книг, а на нижней 4. На сколько книг больше на верхней полке, чем на нижней?

3. Обоснуйте выбор действий при решении задач.

а) На одной полке 5 книг, на другой на 3 больше. Сколько книг на двух полках?

б) Во дворе гуляли 6 мальчиков, а девочек на 2 меньше. Сколько всего детей гуляло во дворе?

4. Запишите, используя символы, правило вычитания суммы из числа и дайте его теоретико-множественное истолкование.

73. Теоретико-множественный смысл произведения

Определение умножения натуральных чисел в аксиоматической теории основывается на понятии отношения «непосредственно следовать за» и сложении. В школьном курсе математики используется другое определение умножения, оно связано со сложением одинаковых слагаемых. Покажем, что оно вытекает из первого.

Теорема 4. Если $b > 1$, то произведение чисел a и b равно сумме b слагаемых, каждое из которых равно a.

Доказательство. Обозначим сумму b слагаемых, каждое из которых равно a, через $a \circ b$. И, кроме того, положим, что $a \circ 1 = a$. Тогда выражение $a \circ (b + 1)$ будет означать, что рассматривается сумма $b + 1$ слагаемого, каждое из которых равно a, т.е. $a \circ (b + 1) = \underbrace{a+a+\ldots+a+a}_{b+1 \text{ слаг.}}$. Сумму $a + a + \ldots + a + a$ можно представить в виде выражения $\underbrace{(a+a+\ldots+a+a)}_{b \text{ слаг.}}+a$, которое равно $a \circ b + a$. Значит, операция $a \circ b$ обладает теми же свойствами, что и умножение, определенное в аксиоматической теории, а именно, $a \circ 1 = a$ и $a \circ (b + 1) = a \circ b + a$. В силу единственности умножения получаем, что $a \circ b = a \cdot b$.

Итак, если a и b – натуральные числа и $b > 1$, то произведение $a \cdot b$ можно рассматривать как сумму b слагаемых, каждое из которых равно a.

Умножение на 1 определяется так: $a \cdot 1 = a$.

Если умножение рассматривается на множестве целых неотрицательных чисел, то к этим двум случаем надо добавить третий – определение умножения на нуль: $a \cdot 0 = 0$.

Таким образом, получаем следующее определение умножения целых неотрицательных чисел.

Определение. ***Если a, b – целые неотрицательные числа, то произведением a·b называется число, удовлетворяющее следующим условиям:***

1) $a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a + a}_{b \text{ слаг.}}$, **если** $b > 1$;

2) $a \cdot b = a$, **если** $b = 1$;

3) $a \cdot b = 0$, **если** $b = 0$.

Случаю 1) этого определения можно дать теоретико-множественную трактовку. Если множества $A_1, A_2, \ldots, A_b$ имеют по a элементов каждое, причем никакие два из них не пересекаются, то их объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b$ содержит $a \cdot b$ элементов.

Таким образом, *с теоретико-множественных позиций $a \cdot b$ ($b > 1$) представляет собой число элементов в объединении b множеств, каж-*

дое из которых содержит по а элементов и никакие два из них не пересекаются.

$$a \cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b), \quad \text{если } n(A_1) = n(A_2) = ... = n(A_b) = a \text{ и } A_1, A_2, ..., A_b \text{ попарно не пересекаются.}$$

Взаимосвязь умножения натуральных чисел с объединением равночисленных *попарно непересекающихся* подмножеств позволяет обосновывать выбор действия умножения при решении текстовых задач.

Рассмотрим, например, такую задачу: «На одно пальто пришивают 4 пуговицы. Сколько пуговиц надо пришить на 3 таких пальто?» Выясним, почему она решается при помощи умножения.

В задаче речь идет о трех множествах, в каждом из которых 4 элемента. Требуется узнать число элементов в объединении этих трех множеств. Если $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 4$, то $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$. Произведение $4 \cdot 3$ является математической моделью данной задачи. Так как $4 \cdot 3 = 12$, то получаем ответ на вопрос: на 3 пальто надо пришить 12 пуговиц.

Можно дать другое теоретико-множественное истолкование произведения целых неотрицательных чисел. Оно связано с понятием декартова произведения множеств.

Теорема 5. Пусть A и B – конечные множества. Тогда их декартово произведение также является конечным множеством, причем выполняется равенство: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Доказательство. Пусть даны множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$, причем $k > 1$. Тогда множество $A \times B$ состоит из пар вида (a_i, b_j), где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$. Разобьем множество $A \times B$ на такие подмножества $A_1, A_2, ..., A_k$, что подмножество A_j состоит из пар вида $(a_1, b_j), (a_2, b_j), ..., (a_n, b_j)$. Число таких подмножеств равно k, т.е. числу элементов в множестве B. Каждое множество A_j состоит из n пар, и никакие два из этих множеств не содержат одну и ту же пару. Отсюда следует, что число элементов в декартовом произведении $A \times B$ равно сумме k слагаемых, каждое из которых равно n, т.е. произведению чисел n и k. Таким образом, равенство $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ доказано при $k > 1$. При $k = 1$ оно тоже верно, так как в этом случае B содержит один элемент, например, $B = \{b\}$, а тогда $A \times B$ состоит из пар вида $(a_1, b), (a_2, b), ... (a_n, b)$, число которых равно n. Поскольку $n(A) = n$, $n(B) = 1$, то и в этом случае имеем: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = n \cdot 1 = n$.

При $k = 0$ данное равенство также верно, поскольку $B = \varnothing$ и $n(A \times \varnothing) = n(A) \cdot n(\varnothing) = a \cdot 0 = 0$.

Из рассмотренной теоремы следует, что *с теоретико-множественной точки зрения произведение $a \cdot b$ целых неотрицательных чисел есть*

9

число элементов в декартовом произведении множеств A и B, так что $n(A) = a$, $n(B) = b$.

$$a \cdot b = n(A) \cdot n(B) = n(A \times B).$$

Этот подход к определению умножения позволяет раскрыть теоретико-множественный смысл свойств умножения. Например, смысл равенства $a \cdot b = b \cdot a$ состоит в том, что хотя множества $A \times B$ и $B \times A$ различны, они являются равномощными: каждой паре (a, b) из множества $A \times B$ можно поставить в соответствие единственную пару (b, a) из множества $B \times A$, и каждая пара из множества $B \times A$ сопоставляется только одной паре из множества $A \times B$. Значит, $n(A \times B) = n(B \times A)$, поэтому $a \cdot b = b \cdot a$.

Аналогично можно раскрыть теоретико-множественный смысл ассоциативного свойства умножения. Множества $A \times (B \times C)$ и $(A \times B) \times C$ различны, но они являются равномощными: каждой паре $(a, (b, c))$ из множества $A \times (B \times C)$ можно поставить в соответствие единственную пару $((a, b), c)$ из множества $(A \times B) \times C$, и каждая пара из множества $(A \times B) \times C$ сопоставляется единственной паре из множества $A \times (B \times C)$. Поэтому $n(A \times (B \times C)) = n((A \times B) \times C)$ и, следовательно, $a(bc) = (ab)c$.

Дистрибутивность умножения относительно сложения выводится из равенства $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, а дистрибутивность умножения относительно вычитания – из равенства $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

В начальных курсах математики произведение целых неотрицательных чисел чаще всего определяют через сумму. Случаи $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot 0 = 0$ принимаются по определению.

Упражнения

1. Используя определение произведения чисел через сумму, объясните, каков теоретико-множественный смысл произведения $2 \cdot 4$.

2. Раскройте теоретико-множественный смысл произведения $2 \cdot 4$, используя определение произведения чисел через декартово произведение множеств.

3. Докажите, что дистрибутивность умножения относительно сложения вытекает из равенства $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, а относительно вычитания – из равенства $(A \setminus B) \times C = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

4. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи умножения.

а) На каждую из трех тарелок положили по 2 яблока. Сколько всего яблок положили?

б) Школьники посадили в парке 4 ряда деревьев, по 5 штук в ряду. Сколько деревьев они посадили?

5. Используя теоретико-множественный смысл действий над числами, обоснуйте выбор действий при решении задач.

а) Первоклассники заняли в кинотеатре 3 ряда, второклассники – 4 ряда, а третьеклассники – 5 рядов. Сколько учеников начальных классов было в кинотеатре, если в каждом ряду они занимали по 9 мест?

б) В саду 8 рядов деревьев, по 9 в каждом. Из них 39 яблонь, 18 груш, остальные сливы. Сколько сливовых деревьев в саду?

6. Какие рассуждения учащихся вы будете считать правильными при выполнении ими следующих заданий.

а) Вера и Надя сажали тюльпаны. Вера посадила 8 рядов тюльпанов, по 9 в каждом, а Надя 9 рядов по 8 тюльпанов.

Можно ли, не выполняя вычислений, утверждать, что Вера посадила столько же тюльпанов, сколько Надя?

Пользуясь данным условием, объясните, что означают выражения: $72 + 72$; $72 : 2$; $8 \cdot 9 - 8$.

б) В гараже в 6 рядов стояло по 9 машин. Из каждого ряда выехало 8 машин. Сколько машин осталось в гараже?

Объясните, что означают выражения, составленные по условию данной задачи: $9 \cdot 6$; $8 \cdot 2$; $8 \cdot 6$; $9 - 8$; $(9 - 8) \cdot 2$; $(9 - 8) \cdot 6$.

74. Теоретико-множественный смысл частного натуральных чисел

В аксиоматической теории деление определяется как операция, обратная умножению, поэтому между делением и умножением устанавливается тесная взаимосвязь. Если $a \cdot b = c$, то, зная произведение c и один из множителей, можно при помощи деления найти другой множитель.

$$\begin{tikzcd} & a \cdot b = c \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ a = c : b & & b = c : a \end{tikzcd}$$

Выясним теоретико-множественный смысл полученных частных $c : b$ и $c : a$.

Произведение $a \cdot b = c$ с теоретико-множественной точки зрения представляет собой число элементов в объединении b попарно непересекающихся множеств, в каждом из которых содержится a элементов, т.е. $c = a \cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$, где $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b)$. Так как множества $A_1, A_2, \ldots, A_b$ попарно не пересекаются, а при их объединении получается множество – назовем его A, – в котором c элементов, то можно говорить о разбиении множества A на равночисленные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_b$. Тогда частное $c : a$ – это число подмножеств в разбиении множества A, а частное $c : b$ – число элементов в каждом подмножестве этого разбиения.

Мы установили, что с теоретико-множественной точки зрения деление чисел оказывается связанным с разбиением конечного множества на равночисленные попарно непересекающиеся подмножества и его помощью решаются две задачи: отыскание числа элементов в каждом подмножестве разбиения (деление на равные части) и отыскание числа таких подмножеств (деление по содержанию).

Таким образом, **если $a = n(A)$ и множество A разбито на попарно непересекающиеся равночисленные подмножества и если:**

b – число элементов в каждом подмножестве, то частное $a:b$ – это число таких подмножеств;

b – число подмножеств, то частное $a:b$ – это число элементов в каждом подмножестве.

Взаимосвязь деления натуральных чисел с разбиением конечных множеств на классы позволяет обосновывать выбор действия деления при решении задач, например, такого вида: «12 карандашей разложили в 3 коробки поровну. Сколько карандашей в каждой коробке?»

В задаче рассматривается множество, в котором 12 элементов. Это множество разбивается на 3 равночисленных подмножества. Требуется узнать число элементов в каждом таком подмножестве. Это число, как установлено выше, можно найти при помощи деления – 12:3. Вычислив значение этого выражения, получаем ответ на вопрос задачи: в каждой коробке по 4 карандаша.

Если дана задача: «В коробке 12 карандашей, их надо разложить в коробки, по 3 карандаша в каждую. Сколько коробок понадобится?», – то для решения выбор действия деления можно обосновать следующим образом. Множество из 12 элементов разбивается на подмножества, в каждом из которых по 3 элемента. Требуется узнать число таких подмножеств. Его можно найти при помощи деления – 12:3. Вычислив значение этого выражения, получаем ответ на вопрос задачи – понадобится 4 коробки.

Используя теоретико-множественный подход к действиям над целыми неотрицательными числами, можно дать теоретико-множественное истолкование правила деления суммы на число: если частные $a:c$ и $b:c$ существуют, то $(a + b):c = a:c + b:c$. Пусть $a = n(A)$ и $b = n(B)$, причем $A \cap B = \varnothing$. Если множества A и B можно разбить на равночисленные подмножества, состоящие из c элементов каждое, то и объединение этих множеств допускает такое же разбиение. Если при этом множество A состоит из $a:c$ подмножеств, а множество B – из $b:c$ подмножеств, то $A \cup B$ состоит из $a:c + b:c$ подмножеств. Это и значит, что $(a + b):c = a:c + b:c$.

Аналогично проводятся рассуждения и в случае, когда c рассматривается как число равночисленных подмножеств в разбиении множеств A и B.

С теоретико-множественной точки зрения можно рассмотреть и смысл отношений «больше в» и «меньше в», с которыми младшие школьники встречаются при решении текстовых задач.

В аксиоматической теории определение этих отношений вытекает из определения деления натуральных чисел: если $a:b = c$, то можно говорить, что «a больше b в c раз» или что «b меньше a в c раз». И чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, надо большее число разделить на меньшее.

Если же $a = n(A)$, $b = n(B)$ и известно, что «a меньше b в c раз», то поскольку $a < b$, то в множестве B можно выделить собственное подмножество, равномощное множеству A, но так как a меньше b в c раз, то множество B можно разбить на c подмножеств, равномощных множеству A.

Так как c – это число подмножеств в разбиении множества B, содержащего b элементов, а в каждом подмножестве – a элементов, то $c = b:a$. 18

Теоретико-множественным смыслом отношения «a больше (меньше) b в c раз» можно воспользоваться при обосновании выбора действий при решении задач. Рассмотрим, например, такую задачу: «На участке растут 3 ели, а берез в 2 раза больше. Сколько берез растут на участке?»

В задаче речь идет о двух множествах: множестве елей (A) и множестве берез (B). Известно, что $n(A) = 3$ и что в множестве B элементов в 2 раза больше, чем в множестве A. Требуется найти число элементов в множестве B, т.е. $n(B)$.

Так как в множестве B элементов в 2 раза больше, чем в множестве A, то множество B можно разбить на 2 подмножества, равномощных множеству A (рис. 116). Поскольку в каждом из подмножеств содержится по 3 элемента, то всего в множестве B будет 3 + 3 или $3 \cdot 2$ элементов. Выполнив вычисления, получаем ответ на вопрос задачи: на участке растет 6 берез.

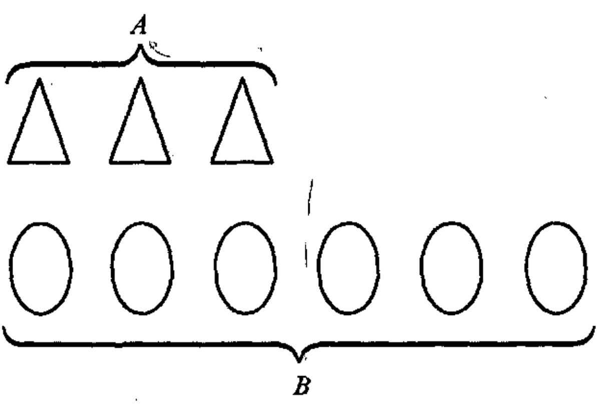


Рис. 116

19

Теоретико-множественное истолкование можно дать и делени остатком. Напомним, что разделить натуральное число a на н ральное число b с остатком – это значит найти такие натураль целые неотрицательные числа q и r, что $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$.

Пусть $a = n(A)$ и множество A разбито на множества $A_1, A_2, ..., A$ так, что множества $A_1, A_2,..., A_q$ равночисленны, а множество R держит меньше элементов, чем каждое из множеств $A_1, A_2,..., A_q$. То если $n(A_1) = n(A_2) = ... = n(A_q) = b$, а $n(R) = r$, то $a = bq + r$, где $0 \leq r$ причем число q равночисленных множеств является неполным ча ным при делении a на b, а число элементов в R – остатком при э делении.

Упражнения

1. Используя теоретико-множественный смысл частного, объясн смысл выражений:

а) 10:2; б) 5:1; в) 5:5.

2. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при мощи деления.

а) 15 редисок связали в пучки по 5 редисок в каждом. Сколько лучилось пучков?

б) 15 тетрадей раздали поровну 5 ученикам. Сколько тетрадей лучил каждый?

3. Назовите отношения, которые рассматриваются в задачах, шите задачи арифметическим методом, выбор действий обоснуйте.

а) Для украшения елки девочка вырезала 4 звездочки, а флажко 3 раза больше. Сколько флажков вырезала девочка?

б) У Коли в 4 раза больше открыток, чем у Вовы. А у Лены их 20 меньше, чем у Коли. Сколько открыток у Лены, если у Вовы их 7?

в) Миша поймал 48 окуней, Саша – на 6 меньше, чем Миша, а Кол в 7 раз меньше, чем Саша. Сколько окуней поймали все мальчики?

4. Какое правило является обобщением различных арифметическ способов решения задачи.

а) В коробке лежало 12 зеленых и 20 красных хлопушек. Все хл пушки раздали детям, по 4 каждому. Сколько ребят получили хл пушки?

б) В лапту играли 8 девочек и 6 мальчиков. Они разделились на команды. Сколько человек было в каждой команде?

5. Обоснуйте с теоретико-множественной позиции выбор действи при решении задачи.

В мастерской было 7 колес для велосипедов. При ремонте постав ли на каждый велосипед по 2 колеса. На сколько велосипедов пост вили колеса и сколько колес осталось в мастерской?

75. Основные выводы § 15

Изучая материал данного параграфа, установили, что натуральное число как характеристику количества можно рассматривать и как результат счета элементов конечного множества, и как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Число «нуль» с теоретико-множественных позиций – это число элементов пустого множества: $0 = n(\varnothing)$.

Если отношение «меньше» рассматривать с теоретико-множественной точки зрения, то:

1) $a < b \Leftrightarrow \mathbf{N}_a \subset \mathbf{N}_b$, где $\mathbf{N}_a = \{1, 2, ..., a\}$, $\mathbf{N}_b = \{1, 2, ..., b\}$;

2) $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$, где $B_1 \subset B$ и $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \varnothing$, $a = n(B)$, $b = n(B)$.

Так как количественные натуральные числа связаны с конечными множествами, то действия над числами оказались связанными с действиями над множествами:

сложение чисел – с объединением конечных непересекающихся множеств;
вычитание чисел – с дополнением подмножества;
умножение чисел – с объединением равночисленных попарно непересекающихся множеств;
деление чисел – с разбиением множества на попарно непересекающиеся подмножества.

Было установлено, что:

$a + b = n(A \cup B)$, где $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $A \cap B = \varnothing$;

$a - b = n(A \setminus B)$, где $a = n(A)$, $b = n(B)$ и $B \subset A$;

$a \cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$, где $n(A_1) = n(A_2) = ... = n(A_n) = a$ и множества $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно не пересекаются;

$$a : b = \begin{cases} 1) \text{ число элементов в каждом подмножестве разбиения множества } A, \text{ если } n(A) = a \text{ и } b \text{ – число подмножеств;} \\ 2) \text{ число подмножеств в разбиении множества } A, \text{ если } n(A) = a \text{ и } b \text{ – число элементов в каждом подмножестве.} \end{cases}$$

Так как действия над числами получили теоретико-множественную трактовку, то такую же трактовку оказалось возможным дать и их свойствам.

§ 16. НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО КАК МЕРА ВЕЛИЧИНЫ

Известно, что числа возникли из потребности счета и измерения, но если для счета достаточно натуральных чисел, то для измерения величин нужны и другие числа. Однако в качестве результата измерения величин будем рассматривать только натуральные числа. Определив смысл натурального числа как меры величины, мы выясним, какой смысл имеют арифметические действия над такими числами. Эт знания нужны учителю начальных классов не только для обосновани выбора действий при решении задач с величинами, но и для понима ния еще одного подхода к трактовке натурального числа, сущес вующего в начальном обучении математике.

Натуральное число мы будем рассматривать в связи с измерение положительных скалярных величин – длин, площадей, масс, времени др., поэтому прежде, чем говорить о взаимосвязи величин и натурал ных чисел, напомним некоторые факты, связанные с величиной и е измерением, тем более что понятие величины, наряду с числом, явля ется основным в начальном курсе математики.

76. Понятие положительной скалярной величины и ее измерения

Рассмотрим два высказывания, в которых используется слово «длина»

1) Многие окружающие нас предметы имеют длину.

2) Стол имеет длину.

В первом предложении утверждается, что длиной обладают объек ты некоторого класса. Во втором речь идет о том, что длиной облада ет конкретный объект из этого класса. Обобщая, можно сказать, чт термин «длина» употребляется для обозначения **свойства** либо класс объектов (предметы имеют длину), либо конкретного объекта из это го класса (стол имеет длину).

Но чем это свойство отличается от других свойств объектов этог класса? Так, например, стол может иметь не только длину, но и быт изготовленным из дерева или металла; столы могут иметь разную фор му. О длине можно сказать, что разные столы обладают этим свойством разной степени (один стол может быть длиннее или короче другого), чег не скажешь о форме – один стол не может быть «прямоугольнее» другого.

Таким образом, свойство «иметь длину» – особое свойство объектов оно проявляется тогда, когда объекты сравнивают по их протяженно сти (по длине). В процессе сравнения устанавливают, что либо два объ екта имеют одну и ту же длину, либо длина одного меньше (больше) длины другого.

Аналогично можно рассматривать и другие известные величины площадь, массу, время и т.д. Они представляют собой особые свойст ва окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравне нии предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.

Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, на зываются *величинами одного рода* или *однородными величинами*. На пример, длина стола и длина комнаты – это величины одного рода.

Напомним основные положения, связанные с однородными величинами.

1. Для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше», и для любых величин A и B справедливо одно и только одно из отношений: $A < B$, $A = B$, $A > B$.

Например, мы говорим, что длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше, чем длина любого катета этого треугольника, масса яблока меньше массы арбуза, а длины противоположных сторон прямоугольника равны.

2. Отношение «меньше» для однородных величин транзитивно: если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$.

Так, если площадь треугольника F_1 меньше площади треугольника F_2, и площадь треугольника F_2 меньше площади треугольника F_3, то площадь треугольника F_1 меньше площади треугольника F_3.

3. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода. Иными словами, для любых двух величин A и B однозначно определяется величина $C = A + B$, которую называют суммой величин A и B.

Сложение величин коммутативно и ассоциативно.

Например, если A – масса арбуза, а B – масса дыни, то $C = A + B$ – это масса арбуза и дыни. Очевидно, что $A + B = B + A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$.

4. Величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение.

Разностью величин A и B называется такая величина $C = A - B$, что $A = B + C$.

Разность величин A и B существует тогда и только тогда, когда $A > B$.

Например, если A – длина отрезка a, B – длина отреза b, то $C = A - B$ – это длина отрезка c (рис. 117).

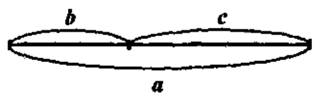


Рис. 117

5. Величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода. Более точно, для любой величины A и любого положительного действительного числа x существует единственная величина $B = x \cdot A$, которую называют произведением величины A на число x.

Например, если A – время, отводимое на один урок, то умножив A на число $x = 3$, получим величину $B = 3 \cdot A$ – время, за которое пройдет 3 урока.

6. Величины одного рода можно делить, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число.

Частным величин A и B называется такое положительное действительное число $x = A:B$, что $A = x \cdot B$.

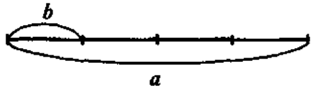


Рис. 118

Так, если A – длина отрезка a, B – длина отрезка b (рис. 118) и отрезок a состоит из 4 отрезков, равных b, то $A:B = 4$, поскольку $A = 4 \cdot B$.

Величины, как свойства объектов, обладают еще одной особенностью – их можно оценивать количественно. Для этого величину надо измерить. Чтобы осуществить измерение, из данного рода величин выбирают величину, которую называют единицей измерения. Мы будем обозначать ее буквой E.

16

Если задана величина A и выбрана единица величины E (того же рода), то **измерить величину A – это значит найти такое положительное действительное число x, что $A = x \cdot E$.**

Число x называется *численным значением величины A* при единице величины E. Оно показывает, во сколько раз величина A больше (или меньше) величины E, принятой за единицу измерения.

Если $A = x \cdot E$, то число x называют также *мерой величины A при единице E* и пишут $x = m_E(A)$.

Например, если A – длина отрезка a, E – длина отрезка b (рис. 118), то $A = 4 \cdot E$. Число 4 – это численное значение длины A при единице длины E, или, другими словами, число 4 – это мера длины A при единице длины E.

В практической деятельности при измерении величин люди пользуются стандартными единицами величин: так, длину измеряют в метрах, сантиметрах и т.д. Результат измерения записывают в таком виде: 2,7 кг; 13 см; 16 с. Исходя из понятия измерения, данного выше, эти записи можно рассматривать как произведение числа и единицы величины. Например, 2,7 кг = 2,7·кг; 13 см = 13·см; 16 с = 16·с.

Используя это представление, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой. Пусть, например, требуется выразить $\frac{5}{12}$ ч в минутах. Так как $\frac{5}{12}$ ч $= \frac{5}{12} \cdot$ ч и час = 60 мин, то $\frac{5}{12}$ ч $= \frac{5}{12} \cdot 60 \cdot$ мин $= \left(\frac{5}{12} \cdot 60\right)$ мин $= 25$ мин.

Величина, которая определяется одним численным значением, называется *скалярной величиной.*

Если при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют *положительной скалярной величиной.*

Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

1. Если величины A и B измерены при помощи единицы величины E, то отношения между величинами A и B будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$$A = B \Leftrightarrow m(A) = m(B);$$
$$A < B \Leftrightarrow m(A) < m(B);$$
$$A > B \Leftrightarrow m(A) > m(B).$$

Например, если массы двух тел таковы, что $A = 5$ кг, $B = 3$ кг, то можно утверждать, что $A > B$, поскольку $5 > 3$.

2. Если величины A и B измерены при помощи единицы величины E, то для нахождения численного значения суммы $A + B$ достаточно сложить численные значения величин A и B:

$$A + B = C \Rightarrow m(A + B) = m(A) + m(B).$$

Например, если $A = 5$ кг, $B = 3$ кг, то $A + B = 5$ кг $+ 3$ кг $= (5 + 3)$ кг $=$ $= 8$ кг.

3. Если величины A и B таковы, что $B = x \cdot A$, где x – положительное действительное число, и величина A измерена при помощи единицы величины E, то , чтобы найти численное значение величины B при единицы E, достаточно число x умножить на число $m(A)$:

$$B = x \cdot A \Rightarrow m(B) = x \cdot m(A).$$

Например, если масса B в 3 раза больше массы A и $A = 2$ кг, то 12
$B = 3A = 3 \cdot (2 \cdot \text{кг}) = (3 \cdot 2) \cdot \text{кг} = 6$ кг.

В математике при записи произведения величины A на число x принято число писать перед величиной, т.е. $x \cdot A$. Но разрешается писать и так: $A \cdot x$. Тогда численное значение величины A умножают на x, если находят значение величины $A \cdot x$.

Рассмотренные понятия – объект (предмет, явление, процесс), его величина, численное значение величины, единица величины – надо уметь вычленять в текстах и задачах. Например, математическое содержание предложения «Купили 3 килограмма яблок» можно описать следующим образом: в предложении рассматривается такой объект, как яблоки, и его свойство – масса; для измерения массы использовали единицу массы – килограмм; в результате измерения получили число 3 – численное значение массы яблок при единице массы – килограмм.

Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Например, для человека – это рост, масса, возраст и др. Процесс равномерного движения характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем, между которыми существует зависимость, выражаемая формулой $s = v \cdot t$.

Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют *величинами разного рода*, или *разнородными величинами*. Так, например, длина и масса – это разнородные величины.

Упражнения

1. О каких величинах идет речь в следующих предложениях:
а) Груши дороже яблок.
б) Книга тяжелее тетради.
в) Таня выше Светы.

2. Какие величины могут характеризовать следующие объекты:
а) карандаш; б) человек; в) озеро?

3. Имеются два куска проволоки. Каким образом можно сравни их длины, не прибегая к измерению? Какими могут быть результа сравнения?

4. Как можно сравнить массы двух предметов, не определяя мас каждого из них? Какими могут быть результаты сравнения?

5. На рисунке 119 изображены два прямоугольника, имеющие площади A и B. Постройте прямоугольник, площадь которого равна:

а) $A + B$; б) $3 \cdot A$;
в) $\frac{1}{2} \cdot B$; г) $B - A$.

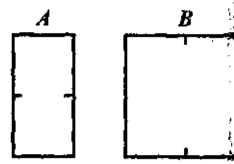


Рис. 119

6. Разбейте на классы тремя способами следующие величины:

A – высота дерева; M – площадь доски;
B – 16 кг; H – 13 с;
C – масса доски; K – 26 м;
D – 25 см; L – длина веревки;
E – возраст дерева; P – толщина доски.

7. Назовите стандартные единицы, с помощью которых можно и мерить величины, указанные в таблице. Запишите их:

Длина	Масса	Ширина	Объем	Время	Высота	Количество

8. О каких величинах идет речь в следующих предложениях:
а) В одной коробке 25 яблок, а в другой 30 яблок.
б) 15 яблок дороже, чем 8 груш.
в) В одном ящике 20 кг овощей, а в другом 12 кг овощей.

9. Какие из данных величин можно сравнить между собой:

1500 м;	2,5 км;	18 штук;	8 десятков;
3 ц;	1 км 500 м;	299 кг;	18 пар.

10. Сравните величины:

а) 56 мин и $\frac{7}{10}$ ч; б) $\frac{3}{50}$ м и $\frac{4}{5}$ дм;

в) 1,5 см и $\frac{3}{20}$ дм; г) $\frac{5}{4}$ кг и 1250 г.

11. Назовите объект, его величину, численное значение и единицу измерения величины в каждом из следующих предложений:

а) В коробке 8 кг яблок.

б) Глубина оврага 2 м.

в) Площадь садового участка 6 соток.

г) В сервизе 6 тарелок.

д) Рост девочки 1 м 20 см.

12. Назовите величины и объекты, о которых говорится в задаче:

а) За тетради заплатили *x* р., а за карандаши на *t* р. меньше. Сколько стоили карандаши?

б) Мешок картофеля тяжелее ящика с луком на 2 кг. Какова масса мешка картофеля, если масса ящика с луком *z* кг?

в) На первой полке стояло *x* книг. На второй на *y* книг больше, а на третьей на *z* книг меньше, чем на первой полке. Сколько книг стояло на трех полках?

13. Назовите величины, о которых говорится в задаче, и действия с ними, которые будут выполнены в процессе решения:

а) В ящике было 24 кг апельсинов. Сначала из него взяли 5 кг, а потом в 3 раза больше, чем в первый раз. Сколько апельсинов осталось в ящике?

б) Для вышивания первого узора нужно 24 м ниток, для второго в 6 раз меньше, а для третьего – на 16 м больше, чем для первого. Хватит ли 7 катушек для вышивания всех узоров, если в каждой катушке по 10 м ниток?

14. Решите задачи, предварительно установив в чем их сходство и различие:

а) Со склада отправили в столовую и в магазин 8 машин с овощами. Магазин получил 24 т овощей, а столовая – в 3 раза меньше. Сколько машин с овощами отправили в магазин и сколько в столовую, если масса овощей в каждой машине была одинаковой ?

б) Со склада отправили в столовую и в магазин несколько машин с овощами. Масса овощей в каждой машине была одинаковой. Магазин получил 24 т овощей, а столовая – в 3 раза меньше. Сколько машин с овощами отправили со склада, если в столовую отправили 2 машины?

77. Смысл натурального числа, полученного в результате измерения величины. Смысл суммы и разности

Выясняя смысл натурального числа как меры величины, все рассуждения будем вести на примере одной величины – длины отрезка.

Уточним сначала понятие «отрезок состоит из отрезков».

Определение. ***Считают, что отрезок x состоит из отрезков x_1, x_2, ..., x_n, если он является их объединением и никакие два из них не имеют общих внутренних точек, хотя и могут иметь общие концы.***

В этом же случае говорят, что отрезок x *разбит на отрезки* $x_1, x_2, ..., x_n$ и пишут $x = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$.

Пусть задан отрезок x, его длину обозначим X. Выберем из множества отрезков некоторый отрезок e, назовем его единичным отрезком, а длину обозначим буквой E.

Определение. ***Если отрезок x состоит из a отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку e, то число a называют численным значением длины X данного отрезка при единице длины E.***

Пишут: $X = a \cdot E$ или $a = m_E(X)$.

Например, отрезок x (рис. 120) состоит из 6 отрезков, равных отрезку e. Если длину единичного отрезка обозначить буквой E, а длину отрезка x – буквой X, то можно написать, что $X = 6E$ или $6 = m_E(X)$.

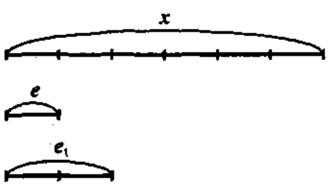


Рис. 120

Из данного определения получаем, что **натуральное число как результат измерения длины отрезка (или как мера длины отрезка) показывает, из скольких единичных отрезков состоит отрезок, длина которого измеряется.** При выбранной единице длины E это число единственное.

В связи с таким подходом к натуральному числу сделаем два замечания:

1. При переходе к другой единице длины численное значение длины заданного отрезка изменяется, хотя сам отрезок остается неизменным. Так, если в качестве единицы длины выбрать длину отрезка e_1 (рис. 120), то мера длины отрезка x будет равна числу 3. Записать это можно так: $X = 3 \cdot E_1$ или $m_{E_1}(X) = 3$.

2. Если отрезок x состоит из a отрезков, равных e, а отрезок y – из b отрезков, равных e, то $a = b$ тогда и только тогда, когда отрезки x и y равны.

Аналогично можно истолковать смысл натурального числа и в связи с измерением других величин. Так, в записи 3 см² число 3 означает, что фигура F состоит из трех единичных квадратов с площадью, равной квадратному сантиметру.

Выясним теперь, какой смысл имеют сумма и разность натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

Теорема. Если отрезок x состоит из отрезков y и z и длины отрезков y и z выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка x равна сумме мер длин его частей.

Доказательство. Обозначим длины отрезков x, y и z соответственно буквами X, Y и Z. Пусть $m(Y) = a$, $m(Z) = b$ при единице длины E. Тогда отрезок y разбивается на a частей, каждая из которых равна отрезку длины E, отрезок z разбивается на b таких частей. А потому весь отрезок x разбивается на $a + b$ таких частей. Значит, $m(X) = a + b = m(Y) + m(Z)$.

Из этой теоремы следует, что *сумму натуральных чисел a и b можно рассматривать как меру длины отрезка x, состоящего из отрезков y и z, мерами длин которых являются числа a и b.*

$$a + b = m_E(Y) + m_E(Z) = m_E(Y + Z).$$

Аналогичный смысл имеет сумма натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

Покажем, как используется данный подход к обоснованию выбора действия сложения при решении текстовых задач: «В саду собрали 7 кг смородины и 3 кг малины. Сколько всего килограммов ягод собрали?»

В задаче две величины – масса смородины и масса малины. Известны их численные значения. Требуется найти численное значение массы, которая получится, если данные массы сложить. Для этого, согласно рассмотренной теореме, надо сложить численные значения массы смородины и массы малины, т.е. получить выражение 7 + 3. Это математическая модель данной задачи. Вычислив значение выражения 7 + 3, получим ответ на вопрос задачи.

Теорема. Если отрезок x состоит из отрезков y и z и длины отрезков x и y выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка z равна разности мер длин отрезков x и y.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей.

Из этой теоремы следует, что *разность натуральных чисел a и b можно рассматривать как меру длины такого отрезка z, что $z \oplus y = x$, если мера длины отрезка x равна a, мера длины отрезка y равна b.*

$$a - b = m_E(X) - m_E(Y) = m_E(X - Y).$$

Аналогичный смысл имеет разность натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

Выясним, как используется данный подход к обоснованию выбора действия вычитания при решении текстовых задач, например, «Купили 7 кг картофеля и капусты. Сколько килограммов картофеля купили, если капусты было 3 кг?»

В задаче рассматривается масса овощей, известно ее численное значение. Эта масса складывается из массы картофеля и массы капусты, численное значение которой также известно. Требуется узнать численное значение массы картофеля. Так как массу картофеля можно получить, вычитая из всей массы купленных овощей массу капусты, то численное значение массы картофеля находят действием вычитания: 7 – 3. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи.

При помощи сложения или вычитания решаются также текстовые задачи, в которых величины связаны отношением «больше на» или «меньше на». Например: «Купили 3 кг моркови, а картофеля на 2 кг больше. Сколько килограммов картофеля купили?»

В задаче речь идет о двух величинах – массе моркови и массе картофеля. Численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что картофеля на 2 кг больше, чем моркови.

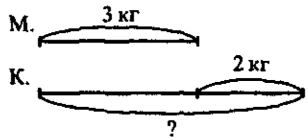


Рис. 121

Если построить вспомогательную модель задачи (рис. 121), то можно сразу увидеть, что картофеля купили столько же, сколько моркови, и еще 2 кг, т.е. масса картофеля складывается из двух масс (3 кг и 2 кг), и чтобы найти ее численное значение, надо сложить численные значения масс-слагаемых. Получаем выражение 3 + 2, значение которого и будет ответом на вопрос задачи.

Упражнения

1. Какой смысл имеет натуральное число 7, если оно получено в результате измерения:

а) длины отрезка;

б) площади фигуры;

в) массы тела?

2. Верно ли, что при увеличении единичного отрезка в k раз соответствующие численные значения длин отрезка уменьшаются во столько же раз?

3. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи сложения:

а) Когда из ящика взяли 4 кг яблок, то в нем осталось 6 кг. Сколько килограммов яблок было в ящике первоначально?

б) На пошив кофты израсходовали 2 м ткани, а на платье на 3 м больше. Сколько метров ткани израсходовали на платье?

4. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи вычитания:

а) От ленты длиной 5 м отрезали 2 м. Сколько метров ленты осталось?

б) С первого участка собрали 10 мешков картофеля, а со второго на 3 мешка меньше. Сколько мешков картофеля собрали со второго участка?

5. Обоснуйте выбор действий при решении следующих задач:

а) Мама купила 5 кг огурцов, 2 кг свеклы и помидоры. Сколько килограммов помидоров купила мама, если масса всех овощей 12 кг?

б) На одной полке 30 книг, на другой на 7 книг меньше. Сколько книг на двух полках?

в) От проволоки длиной 15 дм отрезали сначала 2 дм, а потом еще 4 дм. Сколько дециметров проволоки осталось?

г) За лето первоклассники собрали 8 кг лекарственных трав, второклассники на 4 кг больше первоклассников, а третьеклассники на 3 кг меньше второклассников. Сколько килограммов лекарственных трав собрали третьеклассники?

78. Смысл произведения и частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин

Рассматривая смысл суммы и разности натуральных чисел – мер величин, мы установили, что сложение таких чисел связано со сложением величин, а вычитание – с вычитанием величин. И естественно возникает вопрос: с каким действием над величинами связано умножение и деление натуральных чисел? Чтобы ответить на него, проанализируем задачу: «Купили 3 пакета муки по 2 кг в каждом. Сколько килограммов муки купили?»

В этой задаче речь идет о массе муки, которая сначала измерена пакетами, и известно численное значение этой массы при указанной единице массы. Требуется найти результат измерения той же массы муки, но уже при помощи другой единицы – килограмм при условии, что 1 пакет – это 2 кг муки.

Рассуждения, связанные с поиском численного значения массы муки при единице – килограмм, можно представить в таком виде:

$$3 \text{ пак.} = 3\cdot\text{пак.} = 3\cdot(2 \text{ кг}) = 3\cdot 2\cdot\text{кг} = (3\cdot 2) \text{ кг}.$$

Видим, что ответ на вопрос задачи находится умножением и что оно оказалось связанным с переходом (в процессе измерения массы) от одной единицы массы к другой, более мелкой.

Теорема. Если отрезок x состоит из a отрезков, длина котор[ы]
равна E, а отрезок длины E состоит из b отрезков, длина которых ра[в]на E_1, то мера длины отрезка x при единице длины E_1 равна $a \cdot b$.

Доказательство. По условию отрезок x состоит из a отрезко[в], равных e, а отрезок e – из b отрезков, равных e_1 (рис. 122, а). Обозна[]чим длину отрезка x буквой X, длину отрезка e – буквой E, длин[у] отрезка e_1 – буквой E_1. Так как по условию $x = \underbrace{e \oplus e \oplus \ldots \oplus e}_{a \text{ раз}}$,

$e = \underbrace{e_1 \oplus e_1 \oplus \ldots \oplus e_1}_{b \text{ раз}}$, то $X = a \cdot E$, $E = b \cdot E_1$. Нетрудно видеть, что числ[о]

частей отрезка x, равных e_1, будет равно $a \cdot b$, так как $x = \underbrace{e_1 \oplus e_1 \oplus \ldots \oplus e_1}_{a \cdot b \text{ раз}}$

Это означает, что мера длины отрезка x при единице длины E_1 равна $a \cdot b$.
Можно записать, что $X = a \cdot E = a \cdot (b \cdot E_1) = (a \cdot b) \cdot E_1$.

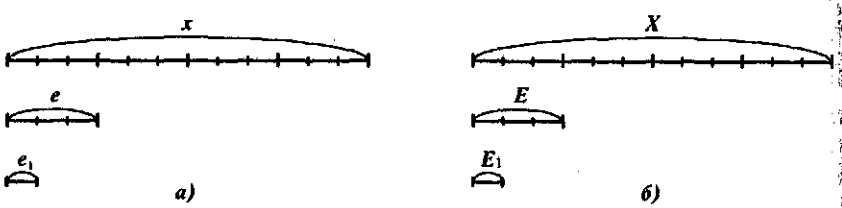


Рис. 122

Из этой теоремы следует, что умножение натуральных чисел связано с переходом в процессе измерения к новой единице длины: *если натуральное число a – мера длины отрезка x при единице длины E, натуральное число b – мера длины E при единице длины E_1, то произведение $a \cdot b$ – это мера длины отрезка x при единице длины E_1*:

$$a \cdot b = m_E(X) \cdot m_{E_1}(E) = m_{E_1}(X).$$

Аналогичный смысл имеет произведение натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин. И поэтому при построении вспомогательных моделей текстовых задач с величинами можно использовать отрезки (что, впрочем, мы делали и раньше). Кроме того, условимся, что в тех случаях, когда это не ведет к путанице, отрезок x и его длину X не различать. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Задача 1. Объяснить смысл произведения $4 \cdot 3$, если 4 и 3 – числа, полученные в результате измерения величин.

Решение. Пусть $4 = m_E(X)$, $3 = m_{E_1}(E)$, где X – измеряемая величина, E – первоначальная единица величины, а E_1 – новая единица величины. Тогда, согласно доказанной теореме, $4 \cdot 3 = m_{E_1}(X)$, т.е. $4 \cdot 3$ – это численное значение длины X при единице длины E_1. Рассмотрим рисунок 122, б. Пусть X – длина отрезка. Если E – первоначальная единица длины, то $X = 4 \cdot E$. Если E_1 – новая единица длины, такая, что $E = 3E_1$, то $X = 4 \cdot E = 4 \cdot (3 \cdot E_1) = (4 \cdot 3)E_1$.

Задача 2. Обосновать выбор действия при решении задачи.

«В одной коробке 6 ручек. Сколько ручек в трех таких коробках?»

Решение. В задаче речь идет о количестве ручек, которое сначала измерено коробками и известно численное значение этой величины при указанной единице. Требуется найти численное значение этой же величины при новой единице – ручка, причем известно, что коробка – это 6 ручек. Тогда 3 кор. = 3·кор. = 3·(6 руч.) = 3·(6·руч.) = (3·6) руч. Таким образом, задача решается при помощи действия умножения, поскольку в ней при измерении осуществляется переход от одной единицы величины (коробка) к другой – ручка.

Чтобы установить смысл частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин, рассмотрим задачу: «6 кг муки надо разложить в пакеты, по 2 кг в каждый. Сколько получится пакетов?»

В задаче рассматривается масса муки, которая сначала измерена при помощи единицы массы – килограмм, и известно численное значение этой массы при указанной единице массы. Требуется найти результат измерения этой же массы, но уже при помощи другой единицы – пакета, причем известно, что 1 пакет – это 2 кг.

Рассуждения, связанные с поиском численного значения массы муки при новой единице – пакет, можно представить в таком виде:

$$6\text{ кг} = 6 \cdot \text{кг} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\text{ пак.}\right) = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)\text{ пак.} = (6:2)\text{ пак.}$$

Видим, что ответ на вопрос задачи находится делением и что оно связано с переходом (в процессе измерения) от одной единицы массы к другой, более крупной.

Теорема. Если отрезок x состоит из a отрезков, длина которых равна E, а отрезок длины E_1 состоит из b отрезков длины E, то мера длины отрезка x при единице длины E_1 равна $a:b$.

Данная теорема доказывается аналогично рассмотренной выше.

Из этой теоремы следует, что деление натуральных чисел связано с переходом в процессе измерения к новой единице длины: *если натуральное число a – мера длины отрезка x при единице длины E, а натуральное число b – мера новой единицы длины E_1 при единице длины E, то частное $a:b$ – это мера длины отрезка x при единице длины E_1*:

$$a:b = m_E(X) : m_E(E_1) = m_{E_1}(X).$$

Аналогичный смысл имеет частное натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

Заметим, что такая трактовка частного возможна только для деле[...] по содержанию.

Задача 3. Обосновать выбор действия при решении задачи.

«Из 12 м ткани сшили платья, расходуя на каждое по 4 м. Скол[...] платьев сшили?»

Решение. В задаче рассматривается длина ткани, которая из[...]рена сначала при помощи единицы длины – метр, и известно числен[...] значение заданной величины. Требуется найти численное значение т[...] же длины при условии, что она измеряется новой единицей – плать[...] причем известно, что платье – это 4 м, откуда метр – это $\frac{1}{4}$ платья.

Рассуждения, связанные с поиском численного значения длины п[...] единице – платье, можно представить в таком виде:

$$12 \text{ м} = 12 \cdot \text{м} = 12 \cdot \left(\frac{1}{4} \text{ пл.}\right) = \left(12 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \text{пл.} = (12:4) \text{ пл.}$$

Таким образом, ответ на вопрос задачи находится при помощи д[...]ления, поскольку в задаче нужно перейти от одной единицы величин[...] (метр) к другой (платье), более крупной.

Итак, умножение и деление натуральных чисел – мер величи[...] оказалось связанным с переходом от одной единицы величины [...] другой в процессе измерения одной и той же величины.

Выбор действий умножения и деления при решении текстов[...] задач с величинами можно обосновывать иначе, используя понят[...] умножения и деления величины на натуральное число.

Напомним, что умножить величину A на натуральное число x – эт[...] значит получить такую величину B того же рода, что $B = x \cdot A$ или B [...] $= A \cdot x$, причем $B = \underbrace{A + A + \ldots + A}_{x \text{ слаг.}}$.

Чтобы найти численное значение величины B при единице вели[...]чины E, достаточно численное значение величины A, полученное пр[...] той же единице E, умножить на число x, т.е. если $B = A \cdot x$, то $m_E(B)$ [...] $= m_E(A) \cdot x$.

Рассмотрим, например, задачу: «Купили 3 пакета муки, по 2 кг [...] каждом. Сколько килограммов муки купили?» Чтобы ответить н[...] вопрос задачи, надо массу 2 кг повторить слагаемым три раза, т.е. массу 2 кг умножить на число 3. Численное значение полученной при этом величины находим, умножив численное значение массы муки в одном пакете на число 3. Произведение $2 \cdot 3$ будет математической моделью данной задачи. Вычислив его значение, будем иметь ответ на вопрос задачи.

Если $B = A \cdot x$, где x – натуральное число, B и A – величины одного рода, то с помощью деления решают две задачи:

– зная A и B, находят число x ($x = B:A$), причем $x = m_E(B):m_E(A)$; это деление по содержанию;

– зная B и x, находят A ($A = B:x$), причем $m_E(A) = m_E(B):x$; это деление на равные части.

С этих позиций выбор действия при решении задачи «6 кг муки разложили на пакеты по 2 кг в каждый. Сколько получилось пакетов?» можно обосновать так. В задаче надо узнать, сколько раз масса 2 кг укладывается в 6 кг, т.е. надо массу 6 кг разделить на массу 2 кг. В результате должно получиться число, которое находим, разделив численное значение одной величины на численное значение другой. Таким образом, получаем частное 6:2. Его значение и будет ответом на вопрос задачи.

Пользуясь описанным подходом к трактовке умножения и деления натуральных чисел, можно обосновывать выбор действия и при решении текстовых задач с отношениями «больше в» и «меньше в».

Задача 4. Обосновать выбор действия при решении задачи.

«Купили 3 кг моркови, а картофеля в 2 раза больше. Сколько килограммов картофеля купили?»

Решение. В задаче рассматриваются масса моркови и масса картофеля, причем численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что она в два раза больше первой.

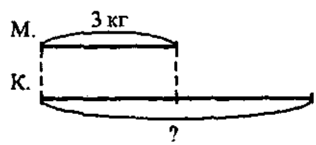


Рис. 123

Если воспользоваться вспомогательной моделью задачи (рис. 123), то можно сказать, что масса картофеля складывается из двух масс по 3 кг, и, следовательно, ее численное значение можно найти, умножив 3 на 2. Найдя значение выражения $3 \cdot 2$, получим ответ на вопрос задачи.

Упражнения

1. Объясните различными способами, почему следующие задачи решаются при помощи умножения:

а) В одной корзине 5 кг яблок. Сколько килограммов яблок в трех таких корзинах?

б) За один день Саша прочитывает 4 страницы книги. Сколько страниц в книге, если Саша прочитал ее за 6 дней.

2. Объясните различными способами, почему следующие задачи решаются при помощи деления:

а) 8 кг варенья надо разложить в банки по 2 кг в каждую. Сколько получится банок?

б) На садовом участке посадили 15 кустов смородины по 5 куст каждом ряду. Сколько было рядов?

3. Обоснуйте выбор действий при решении следующих задач:

а) С трех овец настригли 18 кг шерсти. Сколько шерсти можно лучить с 5 таких овец?

б) В пятиэтажном доме 80 квартир. На каждом этаже в подъезде 4 квартиры. Сколько подъездов в этом доме?

в) Когда из гаража выехали 18 машин, в нем осталось машин раза меньше, чем было. Сколько машин было в гараже?

79. Основные выводы § 16

При изучении материала данного параграфа мы установили, ч **объекты** (предметы, явления, процессы) могут обладать особыми св ствами, которые называются **величинами**. Чтобы свойство можно бы считать величиной, оно должно удовлетворять ряду условий, котор сформулированы в п. 76. Величины как свойства объектов проявляют при их сравнении, причем для каждой величины существует свой спос сравнения. Если выбрана **единица величины**, то величину мож измерить. В результате измерения получается число, которое называ **численным значением величины** или **мерой величины** при выбранн единице величины.

Кроме названных нами рассмотрены понятия:

– положительная скалярная величина;

– однородные величины;

– разнородные величины.

Установлено, что измерение величины позволяет переходить о сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами соответствующим действиям над числами, и наоборот.

Введены записи $X = a \cdot E$ и $a = m_E(X)$, в которых X – обознача величину, E – единицу величины, a – действительное число.

Если a – натуральное число, то запись $X = a \cdot E$ означает, чт $X = \underbrace{E + E + \ldots + E}_{a \text{ слаг.}}$.

Установлено, что действия над натуральными числами и действи над положительными скалярными величинами взаимосвязаны: сложе ние чисел – со сложением величин, вычитание чисел – с вычитанием величин, а умножение и деление чисел – с переходом в процессе изме рения от одной единицы величины к другой.

Кроме того, установлено, что обосновывать выбор действий умно жения и деления при решении текстовых задач можно, используя по нятие умножения величины на число.

§17. ЗАПИСЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И АЛГОРИТМЫ ДЕЙСТВИЙ НАД НИМИ

Человеку очень часто приходится иметь дело с числами, поэтому нужно уметь правильно называть и записывать любое число, производить действия над числами. Как правило, мы успешно справляемся с этим. Помогает здесь способ записи чисел, который в настоящее время используется повсеместно и носит название *десятичной системы счисления*.

Изучение этой системы начинается в начальных классах, и, конечно, учителю нужны определенные знания в этой области. Он должен знать различные способы записи чисел, алгоритмы арифметических действий и их обоснование. Предлагаемый материал дает тот минимум, без которого трудно разобраться с различными методическими подходами к обучению младших школьников способам записи чисел и выполнению над ними действий.

80. Позиционные и непозиционные системы счисления

Понятие числа возникло в глубокой древности. Тогда же возникла и необходимость в названии и записи чисел.

Язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними называют системой счисления.

Называть числа и вести счет люди научились еще до появления письменности. В этом им помогали, прежде всего, пальцы рук и ног. Издревле употреблялся еще такой вид инструментального счета, как деревянные палочки с зарубками, шнуры и веревки с узлами. Веревочные счеты с узелками употреблялись в России и во многих странах Европы.

Способ «записи» чисел при помощи зарубок или узлов был не слишком удобным, так как для записи больших чисел приходилось делать много зарубок или узлов, что затрудняло не только запись, но и сравнение чисел друг с другом, трудно было выполнять и действия над ними. Поэтому возникли иные, более экономичные записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Наряду с группами по 10 элементов встречались группы по 5, 12, 20 элементов. Так, счет двадцатками использовали люди племени майя. «Следы» такого счета сохранились в датском и некоторых других европейских языках. Иногда применялся счет пятќами, а также группами по 12 элементов. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц. Например, число 185 представлялось как 3 раза по 60 и еще 5. Записывалось такое число с помощью всего двух знаков, один из которых обозначал, сколько раз взято по 60, а другой – сколько взято единиц. Древневавилонская система используется до сих пор при измерении времени и углов в минутах и секундах.

Наибольшее распространение получила десятичная система зап чисел. Эта система, принятая сейчас почти всюду, основана на груп ровании десятками и берет свое начало от счета на пальцах. Десятич система счисления возникла в Индии в VI в. Однако вид индийск цифр значительно отличается от современной их записи. В течение м гих столетий, переходя от народа к народу, старинные индийские ци ры много раз изменялись, пока приняли современную форму.

Первыми заимствовали у индийцев цифры и десятичную сист счисления арабы. Распространению же этого способа записи чисе правил выполнения арифметических действий над числами спосо ствовала книга среднеазиатского ученого аль-Хорезми «Об инди ском счете», созданная им в начале IX в.

Европейцы познакомились с достижениями индо-арабской мат матики в XI в. Расширение торговли повлекло за собой значительн усложнение счета, появилась потребность в совершенствовании мет дов счета. Поэтому европейские математики обратились к труда греческих и арабских ученых, перевели их на латинский язык. С дес тичной системой счисления европейцы познакомились через перев книги аль-Хорезми. В 1202 г. выходит «Книга абака» Л. Фибоначч где также вводятся индийские цифры и нуль. С XIII в. начинаетс внедрение десятичной системы, и к XVI в. она стала повсеместно и пользоваться в странах Западной Европы.

Распространению десятичной системы в России способствовал книга первого русского выдающегося педагога-математика Л.Ф.Ма ницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», вышедшая 1703 г. на славянском языке. Она являлась энциклопедией матема тических знаний того времени. Все вычисления в ней проводятся пр помощи цифр индийской нумерации. В «Арифметике» выделен особое действие «нумерация, или счисление»: «Нумерация есть счис ление (называние) словами всех чисел, которые изображаемы быт могут десятью такими знаками: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девят значащих; последняя же 0 (которая цифрой или ничем именуется), если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей, то увеличивает в десять раз, как будет показано в дальнейшем». Однозначные числа в книге Л.Ф.Магницкого называются «перстами»; числа, составленные из единиц и нулей, – «суставами»; все остальные числа – «сочинениями». Таблица с названиями круглых чисел доведена Магницким до числа с 24 нулями. В «Арифметике» в стихотворной форме подчеркнуто: «Число есть бесконечно...»

Различают *позиционные* и *непозиционные системы счисления*. В позиционных системах один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Так, шестидесятеричная вавилонская и десятичная системы счисления являются позиционными.

Непозиционные системы характеризуются тем, что каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Примером такой системы может служить римская система, возникшая в средние века. В этой системе счисления имеются знаки для узловых чисел: единица обозначается – I, пять – V, пятьдесят – L, сто – C, пятьсот – D, тысяча – M. Все остальные числа получаются при помощи двух арифметических операций: сложения и вычитания. Вычитание производится тогда, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV – четыре, XC – девяносто. Запишем несколько чисел в римской нумерации.

193 – это сто (C) плюс девяносто, т.е. сто без десяти (XC), плюс три (III); следовательно, число 193 записывается как CXCIII.

564 – это пятьсот (D) плюс пятьдесят (L) плюс десять (X) плюс четыре, т.е. пять без одного (IV). Следовательно, 564 записывается как DLXIV.

2708 – это две тысячи (MM) плюс пятьсот (D) плюс сто (C) плюс сто (C) плюс пять (V) плюс три (III). Следовательно, число 2708 записывается так: MMDCCVIII.

Если число содержит несколько (немного) тысяч, то для его записи в римской нумерации пользуются повторением знака M. Вообще же числа четырех-, пяти- и шестизначные записывались с помощью буквы m (от лат. слова mille – тысяча), слева от которой записывали тысячи, а справа – сотни, десятки, единицы. Так, запись CXXXIIImDCCCXLII является записью числа 133842.

В России до XVII в. в основном употреблялась славянская нумерация, более стройная и удобная, чем римская, но тоже непозиционная. В ней числа изображались буквами славянского алфавита, над которыми для отличия ставили особый знак – титло.

Естественно, что такие системы записи чисел, как римская или славянская, были удобнее, чем зарубки на бирках, поскольку позволяли записывать большие числа. Однако выполнение действий над ними в таких системах было весьма сложным делом. Поэтому на смену им пришла десятичная система счисления.

Упражнения

1. Запишите в десятичной системе счисления: XXVII, XXI, XLIV, LXII, LXXVIII, XCV, CDXXIII, MCDVII, MCDXIX, MDCCCLXXI.

2. Запишите в римской системе счисления: 24, 117, 468, 1941, 1997, 2000.

81. Запись числа в десятичной системе счисления

Как известно, в десятичной системе счисления для записи чисел пользуется 10 знаков (цифр): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образую конечные последовательности, которые являются краткими запис чисел. Например, последовательность 3745 является краткой запис числа $3\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 4\cdot10 + 5$.

№24

Определение. ***Десятичной записью натурального числа x называет его представление в виде: $x = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0$, коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 и $a_n \neq 0$.***

Сумму $a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0$ в краткой форме приня записывать так: $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

Так как понятие числа и его записи нетождественны, то существ вание и единственность десятичной записи натурального числа на доказывать.

24

Теорема. Любое натуральное число x можно представить в вид

$$x = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0, \qquad (1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, такая запись единственна.

Доказательство существования записи числа x в виде (1). Среди последовательных чисел $1, 10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n, \ldots$ найде наибольшую степень, содержащуюся в x, т.е. такую, что $10^n \le x < 10^{n+1}$, что всегда можно сделать.

Разделим (с остатком) число x на 10^n. Если частное этих чисел обо значить через a_n, а остаток через x_n, то $x = a_n\cdot10^n + x_n$, где $a_n < 10$ $x_n < 10^n$. Далее, разделив x_n на 10^{n-1}, получим: $x_n = a_{n-1}\cdot10^{n-1} + x_{n-1}$, откуда $x = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + x_{n-1}$, где $a_{n-1} < 10$ и $x_{n-1} < 10^{n-1}$. Про должая деление, дойдем до равенства $x_2 = a_1\cdot10 + x_1$. Положив $x_1 = a_0$ будем иметь: $x = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot10 + a_0$, т.е. число x бу дет представлено в виде суммы степеней числа 10 с коэффициентам меньшими 10, что и означает возможность записи числа x в десятич ной системе счисления.

Доказательство единственности представлени числа x в виде (1). Число n в равенстве (1) однозначно определя ется условием $10^n \le x < 10^{n+1}$. После того как n определено, коэффици ент a_n находят из условия: $a_n\cdot10^n \le x < (a_n + 1)\cdot10^n$. Далее, аналогичны образом определяются коэффициенты $a_{n-1}, \ldots, a_0$.

Десятичная запись числа позволяет просто решать вопрос о том какое из них меньше.

Теорема. Пусть x и y – натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$
$$y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0.$$

Тогда число x меньше числа y, если выполнено одно из условий:

а) $n < m$;

б) $n = m$, но $a_n < b_n$;

в) $n = m$, $a_n = b_n, \ldots, a_k = b_k$, но $a_{k-1} < b_{k-1}$.

Доказательство. В случае а) имеем: так как $n < m$, то $10^{n+1} \le 10^m$, а поскольку $x < 10^{n+1}$ и $10^m \le y$, то $x < 10^{n+1} \le 10^m \le y$, т.е. $x < y$.

В случае б): если $n = m$, но $a_n < b_n$, то $a_n + 1 \le b_n$ и потому $(a_n + 1) \cdot 10^n \le$ $\le b_n \cdot 10^n$. А так как $x < (a_n + 1) \cdot 10^n$ и $b_n \cdot 10^n \le y$, то $x < (a_n + 1) \cdot 10^n <$ $< b_n \cdot 10^n \le y$, т.е. $x < y$.

Аналогично доказывается теорема и в случае в).

Например, если $x = 345$, а $y = 4678$, то $x < y$, так как первое число трехзначное, а второе – четырехзначное. Если $x = 345$, а $y = 467$, то $x < y$, так как в первом из двух трехзначных чисел меньше сотен. Если $x = 3456$, а $y = 3467$, то $x < y$, так как, несмотря на то что в каждом из четырехзначных чисел число тысяч и сотен одинаковое, десятков в числе x меньше, чем в числе y.

Если натуральное число x представлено в виде $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, то числа $1, 10, 10^2, \ldots, 10^n$ называют *разрядными единицами* соответственно первого, второго, ..., $n + 1$ разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т.е. отношение соседних разрядов равно 10 – основанию системы счисления.

Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют *первым классом*, или **классом единиц**. В первый класс входят единицы, десятки и сотни.

Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют *второй класс* – **класс тысяч**. В него входят единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Затем следует *третий класс* – **класс миллионов**, состоящий тоже из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т.е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие три разряда также образуют новый класс и т.д. Выделение классов единиц, тысяч, миллионов и т.д. создает удобства для записи и прочтения чисел.

В десятичной системе всем числам можно дать название (имя). Это достигается следующим образом: имеются названия первых десяти чисел, затем из них в соответствии с определением десятичной записи и путем прибавления еще немногих слов образуются названия последующих чисел. Так, числа второго десятка (они представляются в виде

$1 \cdot 10 + a_0$) образуются из соединения первых десяти названий и н сколько измененного слова десять («дцать»):

одиннадцать – один на десять,

двенадцать – два на десять и т.д.

Может быть, естественнее было бы говорить «два и десять», но наш предки предпочли говорить «два на десять», что и сохранилось в реч

Слово «двадцать» обозначает два десятка.

Числа третьего десятка (это числа вида $2 \cdot 10 + a_0$) получают пут прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка: дв дцать один, двадцать два и т.д.

Продолжая далее счет, получим название чисел четвертого, пят го, шестого, седьмого, восьмого, девятого и десятого десятков. На звания этих чисел образуются так же, как и в пределах третьего д сятка, только в трех случаях появляются новые слова: сорок (дл обозначения четырех десятков), девяносто (для обозначения девят десятков) и сто (для обозначения десяти десятков). Названия чисе второй сотни составляются из слова «сто» и названий чисел первог и последующих десятков. Таким путем образуются наименовани сто один, сто два, ..., сто двадцать и т.д. Отсчитав новую сотню будем иметь две сотни, которые для краткости называют «двести» Для получения чисел, больших двухсот, снова воспользуемся назва ниями чисел первого и последующих десятков, присоединяя их к слову «двести». Затем получим особые названия: триста, четыреста пятьсот и т.д. до тех пор пока не отсчитаем десять сотен, которы носят название **тысяча**.

Счет за пределами тысячи ведется так: прибавляя к тысяче по едини це (тысяча один, тысяча два и т.д.), получим две тысячи, три тысячи и т.д. Когда же отсчитаем тысячу тысяч, то это число получит особое наименование – **миллион**. Далее считаем миллионами до тех пор, пока не дойдем до тысячи миллионов. Полученное новое число – тысяча миллионов – носит особое название **миллиард, или биллион**. В вычислениях миллион принято записывать в виде 10^6, миллиард – 10^9. По аналогии можно получить записи еще больших чисел: **триллион** – 10^{12}, **квадриллион** – 10^{15} и т.д.

Таким образом, для того чтобы назвать все натуральные числа в пределах миллиарда, потребовалось только 16 различных слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сорок, девяносто, сто, тысяча, миллион, миллиард. Остальные названия чисел (в пределах миллиарда) образуются из основных.

Вопросы наименования и записи чисел рассматриваются в начальном курсе математики в разделе «Нумерация». При этом десятичной записью натурального числа считают его представление в виде суммы разрядных слагаемых. Например, 3000 + 700 + 40 + 5 есть сумма разрядных слагаемых числа 3745. Представление числа в виде таких сумм удобно для его наименования: три тысячи семьсот сорок пять.

Упражнения

1. Запишите число в виде суммы разрядных слагаемых:

а) 4725; б) 3370; в) 10255.

2. Какие числа представлены следующими суммами:

а) $6\cdot 10^3 + 5\cdot 10 + 8$; б) $7\cdot 10^3 + 1\cdot 10$;

в) $8\cdot 10^4 + 10^3 + 3\cdot 10 + 1$; г) $10^5 + 10^2$?

3. Напишите наибольшее трехзначное и десятизначное числа, в которых все цифры различны.

4. Решите арифметическим методом задачи из начального курса математики:

а) Сумма цифр двузначного числа равна 9, причем цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Найдите это число.

б) Сумма цифр двузначного числа равна наименьшему двузначному числу. Цифра десятков обозначает число в 4 раза меньшее, чем цифра единиц. Какое это двузначное число?

Какие некорректности допущены в формулировках данных задач? Следует ли их исправлять ?

5. Каждая цифра пятизначного числа на единицу больше предыдущей, а сумма его цифр равна 30. Какое это число?

6. Младшим школьникам предложена задача: «Запиши 5 четырехзначных чисел, используя цифры 2, 5, *0*, *6* (*одна и* та же цифра не должна повторяться в записи числа)». А сколько вообще всевозможных четырехзначных чисел можно записать, *используя* цифры 2, 5, 0 и 6 так, чтобы одна и та же цифра не повторялась в записи числа?

82. Алгоритм сложения

Сложение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия, но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все суммы, которые получаются при сложении однозначных чисел, записывают в особую таблицу, называемую таблицей сложения однозначных чисел, и запоминают.

Естественно, смысл сложения сохраняется и для многозначных чисел, но практическое выполнение сложения происходит по особым правилам. Сумму многозначных чисел обычно находят, выполняя сложение столбиком. Например,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 341 \\ 7238 \end{array} \\ \hline 7579 \end{array}$$

Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие тео[...] ческие положения лежат в его основе.

Представим слагаемые 341 и 7238 в виде суммы степеней деся[...] коэффициентами:

$$341 + 7238 = (3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 1) + (7\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 8).$$

Раскроем скобки в полученном выражении, поменяем местами и сг[...] пируем слагаемые так, чтобы единицы оказались рядом с единица[...] десятки с десятками и т.д. Все эти преобразования можно выпол[...] на основании соответствующих свойств сложения. Свойство ассо[...] тивности разрешает записать выражение без скобок:

$$3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 1 + 7\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 8.$$

На основании свойства коммутативности поменяем местами с[...] гаемые: $7\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 3\cdot 10 + 1 + 8$. Согласно свойс[...] ассоциативности, произведем группировку: $7\cdot 10^3 + (3\cdot 10^2 + 2\cdot 10$[...] $+ (4\cdot 10 + 3\cdot 10) + (1 + 8)$. Вынесем за скобки в первой выделен[...] группе число 10^2, а во второй – 10. Это можно сделать в соответст[...] со свойством дистрибутивности умножения относительно сложени[...]

$$7\cdot 10^3 + (3 + 2)\cdot 10^2 + (4 + 3)\cdot 10 + (1 + 8).$$

Итак, сложение данных чисел 341 и 7238 свелось к сложению од[...] значных чисел, изображенных цифрами соответствующих разряд[...] Эти суммы находим по таблице сложения: $7\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 7\cdot 10 +$[...] Полученное выражение есть десятичная запись числа 7579.

Видим, что в основе алгоритма сложения многозначных чисел [...] жат следующие теоретические факты:

– способ записи чисел в десятичной системе счисления;
– свойства коммутативности и ассоциативности сложения;
– дистрибутивность умножения относительно сложения;
– таблица сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что в случае сложения чисел «с переход[...] через десяток» теоретические основы алгоритма сложения будут теми [...] Рассмотрим, например, сумму 748 + 436.

Представим слагаемые в виде суммы степеней десяти с соответс[...] вующими коэффициентами: $(7\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 8) + (4\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 6)$[...] Воспользуемся свойствами сложения и дистрибутивностью умножен[...] относительно сложения и преобразуем полученное выражение к таком[...] виду: $(7 + 4)\cdot 10^2 + (4 + 3)\cdot 10 + (8 + 6)$. Видим, что в этом случае сложен[...] данных чисел также свелось к сложению однозначных чисел, но сумм[...] 7 + 4, 8 + 6 превышают 10 и поэтому последнее выражение не являетс[...] десятичной записью числа. Необходимо сделать так, чтобы коэффици[...] енты перед степенями 10 оказались меньше 10. Для этого выполним ря[...] преобразований. Сначала сумму 8 + 6 представим в виде $1\cdot 10 + 4$:

$$(7 + 4)\cdot 10^2 + (4 + 3)\cdot 10 + (1\cdot 10 + 4).$$

Затем воспользуемся свойствами сложения и умножения и приведем полученное выражение к виду: $(7 + 4)\cdot 10^2 + (4 + 3 + 1)\cdot 10 + 4$. Суть последнего преобразования такова: десяток, который получился при сложении единиц, прибавим к десяткам данных чисел. И наконец, записав сумму $7 + 4$ в виде $1\cdot 10 + 1$, получаем: $(1\cdot 10 + 1)\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 4$. Последнее выражение есть десятичная запись числа 1184. Следовательно, $748 + 436 = 1184$.

Выведем алгоритм сложения многозначных чисел в общем виде. Пусть даны числа: $x = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0$ и $y = b_n\cdot 10^n + b_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + b_0$, т.е. рассмотрим случай, когда количество цифр в записи чисел x и y одинаково. $x + y = (a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0) + (b_n\cdot 10^n + b_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + b_0) = (a_n + b_n)\cdot 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$ – преобразования выполнены на основе свойств ассоциативности и коммутативности сложения, а также дистрибутивности умножения относительно сложения. Сумму $(a_n + b_n)\cdot 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$, вообще говоря, нельзя рассматривать как десятичную запись числа $x + y$, так как коэффициенты перед степенями 10 могут быть больше 9. Лишь в случае, когда все суммы $a_k + b_k$ не превосходят 9, операцию сложения можно считать законченной. В противном случае выбираем наименьшее k, для которого $a_k + b_k \geq 10$. Если $a_k + b_k \geq 10$, то из того, что $0 \leq a_k \leq 9$ и $0 \leq b_k \leq 9$, следует неравенство $0 \leq a_k + b_k \leq 18$ и поэтому $a_k + b_k$ можно представить в виде $a_k + b_k = 10 + c_k$, где $0 \leq c_k \leq 9$. Но тогда $(a_k + b_k)\cdot 10^k = (10 + c_k)\cdot 10^k = 10^{k+1} + c_k\cdot 10^k$. В силу свойств сложения и умножения в $(a_n + b_n)\cdot 10^n + \ldots + (a_0 + b_0)$ слагаемые $(a_{k+1} + b_{k+1})\cdot 10^{k+1} + (a_k + b_k)\cdot 10^k$ могут быть заменены на $(a_{k+1} + b_{k+1} + 1)\cdot 10^{k+1} + c_k\cdot 10^k$. После этого рассматриваем коэффициенты $a_n + b_n, a_{n-1} + b_{n-1}, \ldots, a_{k+2} + b_{k+1}, a_{k+1} + b_{k+1} + 1$, выбираем наименьшее s, при котором коэффициент больше 9, и повторяем описанную процедуру. Через n шагов придем к выражению вида: $x + y = (c_n + 10)\cdot 10^n + \ldots + c_0$, где $c_n \neq 0$, или $x + y = 10^{n+1} + c_n\cdot 10^n + \ldots + c_0$, и где для всех n выполняется равенство $0 \leq c_n < 10$. Тем самым получена десятичная запись числа $x + y$.

В случае когда десятичные записи слагаемых имеют разное количество цифр, надо приписать к числу, имеющему меньшее количество цифр, несколько нулей впереди, уравняв количество цифр в обоих слагаемых. После этого применяется описанный выше процесс сложения.

В общем виде алгоритм сложения натуральных чисел, записанных в десятичной системе счисления, формулируют так:

1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находилось друг под другом.

2. Складывают единицы первого разряда. Если сумма меньше десяти, записывают ее в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду (десятков).

3. Если сумма единиц больше или равна десяти, то представля ее в виде $a_0 + b_0 = 1 \cdot 10 + c_0$, где c_0 – однозначное число; записыва c_0 в разряд единиц ответа и прибавляют 1 к десяткам первого сл гаемого, после чего переходят к разряду десятков.

4. Повторяют те же действия с десятками, потом с сотнями и т. Процесс заканчивается, когда оказываются сложенными цифры ста ших разрядов. При этом, если их сумма больше или равна десяти, приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль пер первым слагаемым на 1 и выполняем сложение $1 + 0 = 1$.

Заметим, что в этом алгоритме (как и в некоторых других) д краткости употребляется термин «цифра» вместо «однозначное числ изображаемое цифрой».

Упражнения

1. На примере сложения чисел 237 и 526 покажите, какие теоретич ские факты лежат в основе алгоритма сложения многозначных чисел.

2. При изучении алгоритма сложения трехзначных чисел в началь ной школе последовательно рассматриваются такие случаи сложени 231 + 342; 425 + 135; 237 + 526; 529 + 299. Каковы особенности кажд го из этих случаев?

3. Вычислите устно значение выражение; использованный прие обоснуйте:

а) 2746 + 7254 + 9876;	б) 7238 + 8978 + 2768;
в) (4729 + 8473) + 5271;	г) 4232 + 7419 + 5768 + 2591;
д) (357 + 768 + 589) + (332 + 211 + 643).	

4. Какие рассуждения школьников вы будете считать правильным при выполнении задания.

а) Можно ли утверждать, что значения сумм в каждом столбик одинаковы:

2459 + 121	53075 + 2306
2458 + 122	53076 + 2305
2457 + 123	53006 + 2375
2456 + 124	53306 + 2075

б) Можно ли записать значения этих сумм в порядке возрастания:

4583 + 321	4593 + 311	4573 + 331

83. Алгоритм вычитания

Вычитание однозначного числа b из однозначного или двузначного числа a, не превышающего 18, сводится к поиску такого числа c, что $b + c = a$, и происходит с учетом таблицы сложения однозначных чисел.

Если же числа a и b многозначные и $b < a$, то смысл действия вычитания остается тем же, что и для вычитания в пределах 20, но техника нахождения разности становится иной: разность многозначных чисел чаще всего находят, производя вычисления столбиком, по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические факты лежат в его основе.

Рассмотрим разность чисел 485 и 231. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим данную разность в таком виде: $485 - 231 = (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1)$. Чтобы вычесть из числа $4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$ сумму $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$, достаточно вычесть из него каждое слагаемое этой суммы одно за другим, и тогда:

$$(4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1) =$$
$$= (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 1.$$

Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть его из какого-либо одного слагаемого (большего или равного этому числу). Поэтому число $2 \cdot 10^2$ вычтем из слагаемого $4 \cdot 10^2$, число $3 \cdot 10$ – из слагаемого $8 \cdot 10$, а число 1 – из слагаемого 5, тогда:

$$(4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) - 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 1 =$$
$$= (4 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^2) + (8 \cdot 10 - 3 \cdot 10) + (5 - 1).$$

Воспользуемся дистрибутивностью умножения относительно вычитания и вынесем за скобки 10^2 и 10. Тогда выражение будет иметь вид: $(4 - 2) \cdot 10^2 + (8 - 3) \cdot 10 + (5 - 1)$. Видим, что вычитание трехзначного числа 231 из трехзначного числа 485 свелось к вычитанию однозначных чисел, изображенных цифрами соответствующих разрядов в записи заданных трехзначных чисел. Разности $4 - 2$, $8 - 3$ и $5 - 1$ находим по таблице сложения и получаем выражение: $2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$, которое является записью числа 254 в десятичной системе счисления. Таким образом, $485 - 231 = 254$. Выражение $(4 - 2) \cdot 10^2 + (8 - 3) \cdot 10 + (5 - 1)$ задает правило вычитания, которое обычно выполняется столбиком:

$$\begin{array}{r} _{-}485 \\ 231 \\ \hline 254 \end{array}$$

Видим, что вычитание многозначного числа из многозначного основывается на:

– способе записи числа в десятичной системе счисления;

– правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа;

– свойстве дистрибутивности умножения относительно вычитания;

– таблице сложения однозначных чисел.

Нетрудно убедиться в том, что если в каком-нибудь разряде уменьшаемого стоит однозначное число, меньше числа в том же разряде

вычитаемого, то в основе вычитания лежат те же теоретические ф
и таблица сложения однозначных чисел. Найдем, например, раз
чисел 760 – 326. Воспользуемся правилом записи чисел в десяти
системе счисления и представим эту разность в таком виде:

$$760 - 326 = (7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 0) - (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6).$$

Поскольку из числа 0 нельзя вычесть 6, то выполнить вычит
аналогичное тому, как было сделано в первом случае, невозмо
Поэтому возьмем из числа 760 один десяток и представим его в
10 единиц – десятичная система счисления позволяет это сдела
тогда будем иметь выражение: $(7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 10) - (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 +$
Если теперь воспользоваться правилами вычитания суммы из чис
числа из суммы, а также дистрибутивностью умножения относител
вычитания, то получим выражение $(7 - 3) \cdot 10^2 + (5 - 2) \cdot 10 + (10 - 6)$
$4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$. Последняя сумма есть запись числа 434 в десятич
системе счисления. Значит, $760 - 326 = 434$.

Рассмотрим процесс вычитания многозначного числа из мно
значного в общем виде.

Пусть даны два числа $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0$ и $y = b_n \cdot 1$
$+ b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_0$. Известно также, что $y < x$. Используя прав
вычитания числа из суммы и суммы из числа, дистрибутивность
ножения относительно вычитания, можно записать, что

$$x - y = (a_n - b_n) \cdot 10^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0). \quad (1$$

Эта формула задает алгоритм вычитания, но при условии, что
всех k выполняется условие $a_k \geq b_k$. Если же это условие не выполняет
то берем наименьшее k, для которого $a_k < b_k$. Пусть m – наименьш
индекс, такой, что $m > k$ и $a_m \neq 0$, а $a_{m-1} = \ldots = a_{k+1} = 0$. Имеет ме
равенство $a_m \cdot 10^m = (a_m - 1) \cdot 10^m + 9 \cdot 10^{m-1} + \ldots + 9 \cdot 10^{k+1} + 10 \cdot$
(например, если $m = 4$, $k = 1$, $a_m = 6$, то $6 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10$
$+ 10 \cdot 10$). Поэтому в равенстве (1) выражение $(a_m - b_m) \cdot 10^m + \ldots$
$+ (a_k - b_k) \cdot 10^k$ можно заменить на $(a_m - b_m - 1) \cdot 10^m + (9 - b_{m-1}) \cdot 10^{m-1} + \ldots$
$+ (9 - b_{k+1}) \cdot 10^{k+1} + (a_k + 10 - b_k) \cdot 10^k$. Из того, что $a_k < b_k < 10$, вытек
ет неравенство $0 < 10 + a_k - b_k < 10$, а из того, что $0 \leq b_s \leq 9$, вытекает н
равенство $0 \leq 9 - b_s < 10$, где $k + 1 \leq s \leq m - 1$. Поэтому в записи $x - y$
$= (a_n - b_n) \cdot 10^n + \ldots + (a_m - b_m - 1) \cdot 10^m + (9 - b_{m-1}) \cdot 10^{m-1} + \ldots + (9 - b_{k+1}) \cdot 10^{k+1}$
$+ (a_k + 10 - b_k) \cdot 10^k + \ldots + (a_0 - b_0)$ все коэффициенты с индексом, мен
шим m, неотрицательны и не превосходят 9. Применяя далее те же пр
образования к коэффициентам $a_n - b_n, \ldots, a_m - b_m - 1$, через n шагов пр
дем к записи разности $x - y$ в виде $x - y = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_0$, г
для всех k выполняется неравенство $0 < c_k < 10$. Если при этом ок
жется, что $c_n = 0$, то надо отбросить первые слагаемые, вплоть до пе
вого коэффициента, отличного от нуля.

Описанный процесс позволяет сформулировать в общем виде алгоритм вычитания чисел в десятичной системе счисления.

1. Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем ее из цифры уменьшаемого, записываем разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.

3. Если же цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т.е. $b_0 > a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10 + a_0$ число b_0 и записываем разность в разряде единиц искомого числа, далее переходим к следующему разряду.

4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, стоящие в разряде десятков, сотен и т.д. уменьшаемого, равны нулю, то берем первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем ее на 1, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц на 10: вычитаем b_0 из $10 + a_0$, записываем разность в разряде единиц искомого числа и переходим к следующему разряду.

5. В следующем разряде повторяем описанный процесс.

6. Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Упражнения

1. На примере нахождения разности чисел 469 и 246, 757 и 208 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма вычитания чисел столбиком.

2. Выполните вычитание, используя запись и объясняя каждый шаг алгоритма:

а) 84072 – 63894; в) 935204 – 326435;

б) 940235 – 32849; г) 653481 – 233694.

3. Сколько пятизначных чисел можно записать, используя цифры 1 и 0? Чему равна разность между наибольшим и наименьшим из этих пятизначных чисел?

4. Назовите способы проверки правильности вычитания многозначных чисел и дайте им обоснование.

5. Вычислите (устно) значение выражения, использованные приемы обоснуйте:

а) 2362 – (839 + 1362);

б) (1241 + 576) – 841;

в) (7929 + 5027 + 4843) – (2027 + 3843).

6. Докажите, что $a+(b-c)=\begin{cases}(a+b)-c, \text{ если } b\geq c\\(a-c)+b, \text{ если } a\geq c\end{cases}$

Используя это правило, вычислите значение выражения:

а) 6420 + (3580 – 1736);

б) 5480 + (6290 – 3480) .

7. Докажите, что $a-(b-c)=\begin{cases}(a-b)+c, \text{ если } b\geq c, a\geq b\\(a+c)-c, \text{ если } b\geq c, b\geq a+c\end{cases}$

Используя это правило, вычислите значение выражения:

а) 3720 – (1742 – 2678),

б) 2354 – (965 – 1246).

8. Докажите, что $(a-b)-c=\begin{cases}(a-c)-b, \text{ если } a\geq b, a\geq c\\a-(b+c), \text{ если } a\geq b+c\end{cases}$

Используя это правило, вычислите значение выражения:

а) (4317 – 1928) – 317;

б) (5243 – 1354) – 1646.

9. Не выполняя вычислений, найдите пары выражений, значен которых равны: 4080

а) 6387 – 1486 – 821; г) 6387 – 1486 + 821; 5722

б) 6387 – (1486 – 821); 5722 д) 6387 + 1486 – 821; 7052

в) 6387 – (1486 + 821); 4080 е) 6387 + (1486 – 821). 7052

10. Как изменится разность, если:

а) уменьшаемое уменьшить на 277, а вычитаемое увеличить на 13

б) к уменьшаемому и вычитаемому прибавить 198;

в) к уменьшаемому прибавить, а из вычитаемого вычесть 198?

11. Решить следующие задачи арифметическим методом, решен запишите в виде числового выражения; выбор действий обоснуйт используя соответствующую математическую теорию:

а) Первый овощной магазин получил с базы на 500 кг овощей бол ше, чем второй магазин. Первый магазин продал за день 1 т 300 кг ов щей, второй 1 т 100 кг. На сколько меньше овощей осталось к концу дн во втором магазине?

б) В двух мешках лежат яблоки; в первом мешке на 70 яблок бол ше, чем во втором. В каком мешке яблок будет меньше и на скольк если переложить из первого мешка во второй 45 яблок?

в) В первой библиотеке 6844 книги, что на 959 книг меньше, чем в второй, а в третьей на 2348 книг меньше, чем в первой и второй библи теках вместе. Сколько книг в третьей библиотеке?

84. Алгоритм умножения

Умножение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия. Но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все произведения однозначных чисел записывают в особую таблицу, называемую таблицей умножения однозначных чисел, и запоминают.

Естественно, что смысл умножения сохраняется и для многозначных чисел, но меняется техника вычислений. Произведение многозначных чисел, как правило, находят, выполняя умножение столбиком, по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возникает этот алгоритм, какие теоретические факты лежат в его основе.

Умножим, например, столбиком 428 на 263.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}428\\ 263\end{array}\\ \hline 1284\\ +\;2568\\ 856\\ \hline 112564\end{array}$$

Видим, что для получения ответа нам пришлось умножить 428 на 3, 6 и 2, т.е. умножить многозначное число на однозначное; но, умножив на 6, результат записали по-особому, поместив единицы числа 2568 под десятками числа 1284, так как умножали на 60 и получили число 25680, но нуль в конце записи опустили. Слагаемое 856 – это результат умножения на 2 сотни, т.е. число 85600. Кроме того, нам пришлось найти сумму многозначных чисел.

Итак, чтобы выполнять умножение многозначного числа на многозначное, необходимо уметь:

– умножать многозначное число на однозначное и на степень десяти;

– складывать многозначные числа.

Сначала рассмотрим умножение многозначного числа на однозначное. Умножим, например, 428 на 3. Согласно правилу записи чисел в десятичной системе счисления, 428 можно представить в виде $4\cdot10^2 + 2\cdot10 + 8$ и тогда $428\cdot3 = (4\cdot10^2 + 2\cdot10 + 8)\cdot3$. На основании дистрибутивности умножения относительно сложения раскроем скобки: $(4\cdot10^2)\cdot3 + (2\cdot10)\cdot3 + 8\cdot3$. Произведения в скобках могут быть найдены по таблице умножения однозначных чисел: $12\cdot10^2 + 6\cdot10 + 24$. Видим, что умножение многозначного числа на однозначное свелось к умножению однозначных чисел. Но чтобы получить окончательный результат, надо преобразовать выражение $12\cdot10^2 + 6\cdot10 + 24$ – коэффициенты перед степенями 10 должны быть меньше 10. Для этого представим число 12 в виде $1\cdot10 + 2$, а число 24 в виде $2\cdot10 + 4$. Затем в выражении $(1\cdot10 + 2)\cdot10^2 + 6\cdot10 + (2\cdot10 + 4)$ раскроем скобки: $1\cdot10^3+2\cdot10^2+6\cdot10+2\cdot10+4$. На основании ассоциативности сложения и дистрибутивности умножения относительно сложения сгруппируем слагаемые $6\cdot10$ и $2\cdot10$ и вынесем 10 за скобки: $1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + (6 + 2)\cdot10 + 4$. Сумма 6 + 2 есть сумма однозначных чисел и может быть найдена по таблице сложения: $1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 4$. Полученное выраж… есть десятичная запись числа 1284, т. е. $428\cdot 3 = 1284$.

Таким образом, умножение многозначного числа на однознач… основывается на:

– записи чисел в десятичной системе счисления;

– свойствах сложения и умножения;

– таблицах сложения и умножения однозначных чисел.

Выведем правило умножения многозначного числа на однозначн… общем виде. Пусть требуется умножить $x = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots$ … на однозначное число y:

$$x\cdot y = (a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0)\cdot y = (a_n\cdot y)\cdot 10^n + (a_{n-1}\cdot y)\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0 \ldots$$

причем преобразования выполнены на основании свойств умножен… После этого, используя таблицу умножения, заменяем все произв… ния $a_k\cdot y$, где $0 \le k \le n$, соответствующими значениями $a_k\cdot y = b_k\cdot 10$… и получаем: $x\cdot y = (b_n\cdot 10 + c_n)\cdot 10^n + (b_{n-1}\cdot 10 + c_{n-1})\cdot 10^{n-1} + \ldots$ $+ (b_1\cdot 10 + c_1)\cdot 10 + (b_0\cdot 10 + c_0) = b_n\cdot 10^{n+1} + (c_n + b_{n-1})\cdot 10^n + \ldots$ $+ (c_1 + b_0)\cdot 10 + c_0$. По таблице сложения заменяем суммы $c_k + b_{k-1}$, … $0 \le k \le n$ и $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, их значениями. Если, например, c_0 од… значно, то последняя цифра произведения равна c_0. Если же $c_0 = 10 +$ … то последняя цифра равна m_0, а к скобке $(c_1 + b_0)$ надо прибавит… Продолжая этот процесс, получим десятичную запись числа $x\cdot y$.

Описанный процесс позволяет сформулировать в общем виде … горитм умножения многозначного числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на однознач… число y.

1. Записываем второе число под первым.

2. Умножаем цифры разряда единиц числа x на число y. Если пр… изведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и пе… ходим к следующему разряду (десятков).

3. Если произведение цифр единиц числа x на число y больше и… равно 10, то представляем его в виде $10q_1 + c_0$, где c_0 – однозначн… число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 – пе… нос в следующий разряд.

4. Умножаем цифры разряда десятков на число y, прибавляем к п… лученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный… пп. 2 и 3.

5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умножен… цифра старшего разряда.

Как известно, умножение числа x на число вида 10^k сводится … приписыванию к десятичной записи данного числа k нулей. Покаже… это. Умножим число $x = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0$ на 10^k: $(a_n\cdot 10^n$ … $+ a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0)\cdot 10^k = a_n\cdot 10^{n+k} + a_{n-1}\cdot 10^{n+k-1} + \ldots + a_0\cdot 10^k$. Пол…

ченное выражение является суммой разрядных слагаемых числа $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \underbrace{0 \ldots 0}_{k \text{ нулей}}}$, так как равно $a_n \cdot 10^{n+k} + a_{n-1} \cdot 10^{n+k-1} + \ldots + a_0 \cdot 10^k +$ $+ 0 \cdot 10^{k-1} + 0 \cdot 10^{k-2} + \ldots + 0 \cdot 10 + 0$. Например, $347 \cdot 10^3 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 +$ $+ 7) \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 =$ $= 347\,000$.

Заметим еще, что умножение на число $y \cdot 10^k$, где y – однозначное число, сводится к умножению на однозначное число y и на число 10^k. Например, $52 \cdot 300 = 52 \cdot (3 \cdot 10^2) = (52 \cdot 3) \cdot 10^2 = 156 \cdot 10^2 = 15600$.

Рассмотрим теперь алгоритм умножения многозначного числа на многозначное. Обратимся сначала к примеру, с которого начинали, т.е. к произведению $428 \cdot 263$. Представим число 263 в виде суммы $2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3$ и запишем произведение $428 \cdot (2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3)$. Оно, согласно дистрибутивности умножения относительно сложения, равно $428 \cdot (2 \cdot 10^2) + 428 \cdot (6 \cdot 10) + 428 \cdot 3$. Отсюда, применив ассоциативное свойство умножения, получим: $(428 \cdot 2) \cdot 10^2 + (428 \cdot 6) \cdot 10 + 428 \cdot 3$. Видим, что умножение многозначного числа 428 на многозначное число 263 свелось к умножению многозначного числа 428 на однозначные числа 2, 6 и 3, а также на степени 10.

Рассмотрим умножение многозначного числа на многозначное в общем виде. Пусть x и y – многозначные числа, причем $y = b_m \cdot 10^m +$ $+ b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_0$. В силу дистрибутивности умножения относительно сложения, а также ассоциативности умножения можно записать: $x \cdot y = x \cdot (b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_0) = (x \cdot b_m) \cdot 10^m + (x \cdot b_{m-1}) \cdot 10^{m-1} +$ $+ \ldots + x \cdot b_0$. Последовательно умножая число x на однозначные числа $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$, а затем на $10^m, 10^{m-1}, \ldots, 1$, получаем слагаемые, сумма которых равна $x \cdot y$.

Сформулируем в общем виде алгоритм умножения числа $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на число $y = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0}$.

1. Записываем множитель x и под ним второй множитель y.

2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x \cdot b_0$ под числом y.

3. Умножаем число x на следующий разряд b_1 числа y и записываем произведение $x \cdot b_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x \cdot b_1$ на 10.

4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x \cdot b_k$.

5. Полученные $k + 1$ произведения складываем.

Изучение алгоритма умножения многозначных чисел в начальном курсе математики, как правило, проходит в соответствии с выделенными этапами. Различия имеются только в записи. Например, при обосновании случая умножения многозначного числа на однозначное пишут:

$428 \cdot 3 = (400 + 20 + 8) \cdot 3 = 400 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 1200 + 60 + 24 = 1$
Основой выполненных преобразований являются:

– представление первого множителя в виде суммы разрядных сл гаемых (т.е. запись числа в десятичной системе счисления);

– правило умножения суммы на число (или дистрибутивнос умножения относительно сложения);

– умножение «круглых» (т.е. оканчивающихся нулями) чисел однозначное число, что сводится к умножению однозначных чисе

Упражнения

1. На примере умножения числа 357 на 4 проиллюстрируйте тео тические основы алгоритма умножения многозначного числа на одн значное.

2. На примере умножения 452 на 186 проиллюстрируйте теорети ские основы алгоритма умножения многозначного числа на мно значное.

3. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при п мощи умножения чисел и решите их.

а) Земля при обращении вокруг Солнца за сутки проходит приме но 2 505 624 км. Какой путь проходит Земля за 365 дней?

б) В школу привезли 56 пачек книг, по 24 книги в каждой пачк Сколько всего книг привезли в школу?

4. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а зат найдите его значение:

а) На элеватор отвезли 472 т овса, ржи на 236 т больше, чем овса, пшеницы в 4 раза больше, чем овса и ржи вместе. Сколько тонн пш ницы отвезли на элеватор?

б) Столяр делает в день 18 рам, а его помощник на 4 рамы меньш Сколько рам они сделают за 24 дня, если каждый день будут работат вместе?

5. Как могут рассуждать учащиеся, выполняя следующее задани «Ширина земельного участка прямоугольной формы равна 24 м Это в 6 раз меньше его длины. Объясни, что обозначают выражени записанные по условию задачи, и вычисли их значения: $24 \cdot 6$ $24 \cdot (24 \cdot 6)$; $(24 + 24 \cdot 6) \cdot 6$; $24 \cdot 2$; $24 \cdot 2 + 24 \cdot 6 \cdot 2$».

6. Выполните умножение чисел, используя запись столбиком, объясняя каждый шаг алгоритма:

а) $984 \cdot 27$; в) $7040 \cdot 234$;
б) $8276 \cdot 73$; г) $4569 \cdot 357$.

7. Используя свойства умножения, найдите наиболее рационал ным способом значение выражения:

а) $8 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 25$; г) $124 \cdot 4 + 116 \cdot 4$;

б) $24\cdot(27\cdot125)$; д) $(3750-125)\cdot8$;
в) $(88+48)\cdot125$; е) $1779\cdot1243-779\cdot1243$.

8. Зная, что $650\cdot34=22100$, найдите произведение чисел, не выполняя умножения столбиком:

а) $650\cdot36$; б) $650\cdot32$; в) $649\cdot34$.

9. Найдите и обоснуйте приемы умножения 24 на 35 и, пользуясь ими, умножьте на 35 числа: 12, 18, 24, 32, 48, 64.

10. Вычислите рациональным способом значение выражения:

а) $(420-394)\cdot405-25\cdot405$;

б) $105\cdot209+(964-859)\cdot209\cdot400$.

11. Найдите значения выражений $13\cdot11$, $27\cdot11$, $35\cdot11$, $43\cdot11$, $54\cdot11$. Верно ли: чтобы найти результат умножения двузначного числа на 11 в случае, когда сумма цифр двузначного числа меньше 10, достаточно между цифрами данного числа написать число, равное сумме его цифр?

12. Найдите значение выражений $29\cdot11$, $37\cdot11$, $47\cdot11$, $85\cdot11$, $97\cdot11$. Верно ли: чтобы найти результат умножения двузначного числа на 11 в случае, когда сумма цифр двузначного числа больше или равна 10, достаточно между цифрой десятков, увеличенной на 1, и цифрой единиц написать число, равное разности между суммой его цифр и числом 10?

13. На множестве выражений, приведенных ниже, задано отношение «содержать в произведении цифру 0». Определяет ли оно разбиение этого множества на классы? Если да, то выполните его, не вычисляя произведений.

$2602\cdot3$	$1803\cdot6$	$17009\cdot4$
$2602\cdot7$	$1803\cdot2$	$17019\cdot4$
$26002\cdot8$	$18003\cdot7$	$17019\cdot7$.

85. Алгоритм деления

Когда речь идет о технике деления чисел, то этот процесс рассматривают как действие деления с остатком: разделить целое неотрицательное число a на натуральное число b – это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a=bq+r$, причем $0\le r<b$.

Выясним сначала, как осуществляется деление на однозначное число. Если на однозначное число делят однозначное или двузначное (не превышающее 89), то используется таблица умножения однозначных чисел. Например, частным чисел 54 и 9 будет число 6, так как $9\cdot6=54$. Если же надо разделить 51 на 9, то находят ближайшее к нему меньшее число, которое делится на 9 – это число 45, и, следовательно, неполным частным при делении 51 на 9 будет число 5. Чтобы найти остаток, надо из 51 вычесть 45: $51-45=6$. Таким образом, $51=9\cdot5+6$, т.е. при

делении 51 на 9 получается неполное частное 5 и остаток, равны
Записать это можно иначе, при помощи деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\,51 & \underline{9} \\ \underline{45} & 5 \\ 6 & \end{array}$$

Будем теперь делить трехзначное число на однозначное, напри 378 на 4. Разделить 378 на 4 – это значит найти такое неполное част q и остаток r, что $378 = 4q + r$, причем остаток r должен удовлетво условию $0 \le r < b$, а неполное частное q – условию $4q \le 378 < 4(q + 1)$.

Определим, сколько цифр будет содержаться в записи числа q. Од значным число q быть не может, так как тогда произведение $4q$ мо быть максимально равно 36 и, значит, не будут выполняться усло сформулированные выше для r и q. Если число q двузначное, т.е. е $10 < q < 100$, то тогда $40 < 4q < 400$ и, следовательно, $40 < 378 < 4$ что верно. Значит, частное чисел 378 и 4 – число двузначное.

Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последовател делитель 4 на 20, 30, 40 и т.д. Поскольку $4 \cdot 90 = 360$, а $4 \cdot 100 = 400$, $360 < 378 < 400$, то неполное частное заключено между числами 9 100, т.е. $q = 90 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенст $4 \cdot (90 + q_0) \le 378 < 4 \cdot (90q + q_0 + 1)$, откуда $360 + 4q_0 \le 378 < 360 + 4(q_0 +$ и $4q_0 \le 18 < 4(q_0 + 1)$. Число q_0 (цифра единиц частного), удовлет ряющее последнему неравенству, можно найти подбором, воспол вавшись таблицей умножения. Получаем, что $q_0 = 4$ и, следовательн неполное частное $q = 90 + 4 = 94$. Остаток находится вычитани $378 - 4 \cdot 94 = 2$.

Итак, при делении числа 378 на 4 получается неполное частное 94 остаток 2: $378 - 4 \cdot 94 + 2$.

Описанный процесс является основой деления уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\,378 & \underline{4} \\ \underline{36} & 94 \\ -\,18 & \\ \underline{16} & \\ 2 & \end{array}$$

Аналогично выполняется деление многозначного числа на мног значное. Разделим, например, 4316 на 52. Выполнить это деление – зн чит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $4316 = 52q +$ $0 \le r < 52$, а неполное частное должно удовлетворять неравенств $52q \le 4316 < 52(q + 1)$.

Определим число цифр в частном q. Очевидно, частное заключен между числами 10 и 100 (т.е. q – двузначное число), так как $520 < 4316$ < 5200. Чтобы найти цифру десятков частного, умножим последов тельно делитель 52 на 20, 30, 40, 50 и т.д. Поскольку $52 \cdot 80 = 4160$,

$52\cdot 90 = 4680$ и $4160 < 4316 < 4680$, то неполное частное заключено между числами 80 и 90, т.е. $q = 80 + q_0$. Но тогда должны выполняться неравенства:

$$52\cdot(80 + q_0) \leq 4316 < 52\cdot(80 + q_0 + 1),$$
$$4160 + 52q_0 \leq 4316 < 4160 + 52\cdot(q_0 + 1),$$
$$52q_0 \leq 156 < 52\cdot(q_0 + 1).$$

Число q_0 (цифру единиц частного), удовлетворяющее последнему неравенству, можно найти подбором: $156 = 52\cdot 3$, т.е. имеем случай, когда остаток равен 0. Следовательно, при делении 4316 на 52 получается частное 83.

Приведенные рассуждения лежат в основе деления уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-4316 & 52 \\ \cline{2-2}
\underline{416} & 83 \\
-156 & \\
\underline{156} & \\
0 &
\end{array}$$

Обобщением различных случаев деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b является следующий алгоритм деления уголком.

1. Если $a = b$, то частное $q = 1$, остаток $r = 0$.

2. Если $a > b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное q находим перебором, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как $a < 10b$. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел a и b.

3. Если $a > b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записываем делимое a и справа от него делитель b, который отделяем от a уголком и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

а) Выделяем в числе a столько старших разрядов, сколько разрядов в числе b или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовывали число d_1, больше или равное b. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и b, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записываем q_1 под уголком (ниже b).

б) Умножаем b на q_1 и записываем произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа bq_1 был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1.

в) Проводим черту под bq_1 и находим разность $r_1 = d_1 - bq_1$.

г) Записываем разность r_1 под числом bq_1, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравниваем полученное число d_2 с числом b.

д) Если полученное число d_2 больше или равно b, то относительно него поступаем согласно п. 1 или п. 2. Частное q_2 записываем после q_1.

е) Если полученное число d_2 меньше b, то приписываем еще сто[лько] следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое [чис]ло d_3, большее или равное b. В этом случае записываем после q_1 т[акое] же число нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пп. 1, 2. [Ча]стное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младш[его] разряда числа a окажется, что $d_3 < b$, то тогда частное чисел d_3 [и b] равно нулю, и этот нуль записывается последним разрядом к частно[му], а остаток $r = d_3$.

Упражнения

1. Не выполняя деления, определите число цифр частного чисел[:]

а) 486 и 7; в) 5792 и 27;

б) 7243 и 238; г) 43126 и 543.

2. На примере деления числа 867 на 3 проиллюстрируйте теорети[че]ские основы алгоритма деления трехзначного числа на однозначное[.]

3. Обоснуйте процесс деления уголком a на b, если

а) $a = 4066$, $b = 38$; б) $a = 4816$, $b = 112$.

4. Как, не вычисляя, можно установить, что деление выполнено [не]правильно, если:

а) $51054:127 = 42$; б) $405945:135 = 307$?

5. Не вычисляя значений выражений, поставьте знаки > или [<,] чтобы получились верные неравенства.

а) 1834:7 ... 783:9;

б) 8554:91 ... 7488:72;

в) 137532:146 ... 253242:198;

г) 7248:6 ... 758547:801.

6. Объясните, почему при делении p на k в частном получаются н[у]ли, если:

а) $p = 753$, $k = 5$; г) $p = 613$, $k = 3$;

б) $p = 1560$, $k = 6$; д) $p = 4086$, $k = 2$;

в) $p = 84800$, $k = 4$; е) $p = 4012$, $k = 4$.

7. Не производя деления, разбейте данное выражение на класс[ы] при помощи отношения «иметь в частном одно и тоже число цифр»:

а) 20700:300; г) 20300:700;

б) 5460:60; д) 14640:80;

в) 30720:40; е) 1500:300.

8. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи де[]ления чисел, и решите их.

а) В 125 коробок разложили поровну 3000 карандашей. Сколько карандашей в каждой коробке?

б) Расфасовали 12 кг 600 г конфет в коробки по 300 г в каждой. Сколько коробок конфет получилось?

9. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение.

а) Туристы совершили экскурсию по реке на катере, проплыв всего 66 км. Сначала 2 ч они плыли со скоростью 18 км/ч, а остальной путь – со скоростью 15 км/ч. Сколько всего часов находились в пути туристы?

б) Печенье упаковали в пачки по 250 г. Пачки сложили в ящик в 4 слоя. Каждый слой имеет 5 рядов по 6 пачек в каждом. Определите массу сложенного в ящик печенья.

10. Найдите значение первого выражения, а затем используйте его при вычислении значения второго.

а) $45120:(376\cdot 12)$, $45120:(376\cdot 3)$;

б) $241\cdot(1264:8)$, $241\cdot(1264:4)$.

11. Найдите двумя способами значение выражения.

а) $(297 + 405 + 567):27$;

б) $(240\cdot 23):48$;

в) $56\cdot(378:14)$;

г) $15120:(14\cdot 5\cdot 18)$.

12. Найдите значение выражения.

а) $8919:9 + 114240:21$;

б) $1190 - 35360:34 + 271$;

в) $8631 - (99 + 44352:63)$;

г) $48600\cdot(5045 - 2040):243 - (86043:43 + 504)\cdot 200$;

д) $4880\cdot(546 + 534):122 - 6390\cdot(8004 - 6924)\cdot 213$.

86. Позиционные системы счисления, отличные от десятичной

Основанием позиционной системы счисления может быть не только число 10, но и вообще любое натуральное число $p \geq 2$. Система счисления с основанием p называется p-ичной. Так, если $p = 2$, то – двоичной, если $p = 8$ – восьмеричной, если $p = 10$ – десятичной.

Для записи чисел в системе с основанием p необходимо p символов. Принято использовать знаки десятичной системы счисления: 0, 1, 2, ..., $p - 1$. Например, числа в троичной системе счисления записывают при помощи символов 0, 1, 2, а в пятеричной – при помощи символов 0, 1, 2, 3, 4.

Определение. ***Записью натурального числа x в системе счисления с основанием p называется его представление в виде: $x = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0$ (1), где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ принимают значения $0, 1, 2, ..., p - 1$ и $a_n \neq 0$.***

Теорема. Пусть $p \geq 2$ – заданное натуральное число. Тогда любое натуральное число x представимо, и притом единственным образом в виде (1).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теор
о существовании и единственности записи числа в десятичной сис
счисления.

Вместо представления в виде (1) число x записывают кра
$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_p$. Например, если $p=3$, то число $x=2\cdot 3^3+0\cdot 3^2+1\cdot 3$
можно записать в виде 2012_3, причем читать его следует так: «Два, но
один, два в троичной системе счисления».

Задача. Сосчитать число клеток в фигуре, изображенной на
сунке 124, в троичной и пятеричной системах счисления.

Решение. В троичной системе счисления для записи чисел испо
зуются цифры 0, 1 и 2, а любое число представляется
виде $a_n\cdot 3^n + a_{n-1}\cdot 3^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 3 + a_0$, где $a_n, a_{n-1},\ldots, a_1,$
принимают значения 0, 1, 2 и $a_n \neq 0$. Однозначные числ
этой системе – 0, 1, 2, а число 3 – основание системы сч
ления – записывается как 10.

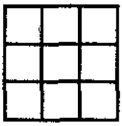


Рис. 124

При счете клеток в данной фигуре мы получим чис
запись и название которых в троичной системе счислен
таковы: 1 (один); 2 (два); 10 (один, ноль); 11 (один, один); 12 (один, дв
20 (два, ноль); 21 (два, один); 22 (два, два); 100 (один, ноль, ноль).

Таким образом, число клеток в фигуре на рисунке 124 в троичн
системе счисления запишется как 100_3.

В пятеричной системе счисления для записи чисел используются ци
ры 0, 1, 2, 3, 4, а любое число представляется в виде $a_n\cdot 5^n + a_{n-1}\cdot 5^{n-}$
$+ \ldots + a_1\cdot 5 + a_0$, где $a_n, a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4
$a_n \neq 0$.

Однозначные числа в этой системе – 0, 1, 2, 3, 4, а число 5 – осно
ние системы счисления – записывается как 10 .

При счете в пятеричной системе клеток фигуры на рисунке 124 м
получим числа: 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14. Таким образом, число эт
клеток в пятеричной системе счисления запишется как 14_5.

Сравнение чисел в системе счисления с основанием p ($p \neq 10$) в
полняется так же, как и в десятичной системе. Так, $2101_3 < 210$
поскольку при одинаковом числе разрядов и совпадении трех ци
старших разрядов число единиц в первом числе меньше числа едини
во втором.

Арифметические действия над числами в позиционных систем
счисления с основанием p ($p \neq 10$) выполняются по тем же правила
что и в десятичной системе счисления. Надо лишь иметь для системы
основанием p соответствующие таблицы сложения и умножения одн
значных чисел.

Составим, например, таблицу сложения однозначных чисел в трои
ной системе счисления. Однозначные числа в ней – это 0, 1, 2. Число
записывается 10. Число 4 имеет вид 11_3, так как $4 = 1\cdot 3 + 1 = 11_3$.

Полностью таблицу сложения однозначных чисел в троичной системе счисления можно представить в таком виде:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Используя эту таблицу, можно складывать любые числа в троичной системе счисления, причем многозначные числа можно складывать столбиком по правилам, аналогичным правилам сложения чисел в десятичной системе счисления. Например, $1221_3 + 122_3 = 2120_3$, так как

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}1221\\ 122\end{array}\\ \hline 2120\end{array}$$

Таблицей сложения однозначных чисел в троичной системе счисления можно пользоваться, выполняя вычитание: $2110_3 - 212_3 = 1121_3$.

Таблица умножения однозначных чисел в троичной системе счисления имеет вид:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

На основе этой таблицы и таблицы сложения выполняют умножение многозначных чисел по правилам, аналогичным правилам умножения чисел в десятичной системе счисления. Найдем, например, произведение $122_3 \cdot 22_3$:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}122\\ 22\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}1021\\ 1021\end{array}\\ \hline 12001\end{array}$$

Таким образом, $122_3 \cdot 22_3 = 12001_3$.

Таблицей умножения можно пользоваться, выполняя деление чисел в троичной системе счисления, в частности, деление чисел уголком. Разделим, например, число 10011_3 на 12_3:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,10011 & 12 \\
\underline{12} & \overline{122} \\
-\,111 & \\
\underline{101} & \\
-\,101 & \\
\underline{101} & \\
0 &
\end{array}
$$

Значит, $10011_3 : 12_3 = 122_3$.

Одно и то же натуральное число может быть записано в любо системе счисления с основанием $p \geq 2$. Так, число клеток в фигуре н рисунке 124 в десятичной системе счисления записывается знаком 9, троичной – 100, в пятеричной – 14.

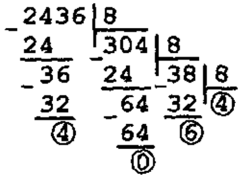
Чтобы из одной записи получить другую, достаточно научитьс переходить от записи в заданной системе к записи в десятичной, наоборот.

Пусть дана запись числа x в системе счисления с основанием p, т.е. $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_1 \cdot p + a_0$. Найдем запись этого числа в деся тичной системе счисления. Так как в записи числа x числа a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 и p представлены в десятичной системе счисления, то, выполни над ними действия по правилам, принятым в ней, получим десятич ную запись числа x. Найдем, например, десятичную запись числа 457_8. Для этого представим данное число в виде суммы вида: $4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 7$. Значение этого выражения в десятичной системе счисления равно 303. Следовательно, $457_8 = 303_{10}$.

Пусть теперь число x записано в десятичной системе. Найдем его запись в системе счисления с основанием p.

Число $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_1 \cdot p + a_0$ можно записать в виде $x = p \cdot (a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + ... + a_1) + a_0$. Так как $0 \leq a < p$, то из послед ней записи числа x видно, что a_0 – остаток, получаемый при делени числа x на p, а $a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + ... + a_1$ – неполное частное. Точно так же можно найти, что a_1 – остаток, получаемый при делении этого неполного частного на p. Таким образом, запись числа x в p-ичной системе находят так: число x делят (в десятичной системе) на p; остаток, полученный при делении, даст последнюю цифру a_0 в p-ичной записи числа x; неполное частное снова делим на p, новый остаток даст пред-последнюю цифру p-ичной записи числа x; продолжая деление, найдем все цифры p-ичной записи числа x.

Запишем число 2436 в восьмеричной системе счисления. Разделим 2436 на 8: $2436 = 304 \cdot 8 + 4$. При делении числа 304 на 8 получим: $304 = 38 \cdot 8 + 0$ и тогда $2436 = (38 \cdot 8 + 0) \cdot 8 + 4$ или $2436 = 38 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4$. Делим на 8 число 38: $38 = 4 \cdot 8 + 6$ и тогда $2436 = (4 \cdot 8 + 6) \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4$ или $2436 = 4 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8 + 4$, т.е. $2436 = 4604_8$. Описанный процесс можно представить и в таком виде:



Упражнения

1. Запишите число в виде суммы степеней основания с соответствующими коэффициентами:

а) 3024_5; б) 7610_8; в) 11101_2.

2. Сосчитайте число треугольников на рисунке 125 в пятеричной и восьмеричной системе счисления.

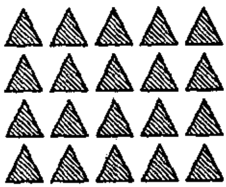


Рис. 125

3. Назовите наибольшее и наименьшее двузначные числа в системе счисления с основанием: 10, 8, 7, 5, 2.

4. Верно ли записаны числа в восьмеричной системе счисления: 347; 8025; 37952; 1110; 223?

5. Для числа x назовите предшествующее и непосредственно следующее за ним число, если:

а) $x = 34_5$; б) $x = 50_7$; в) $x = 12_3$.

6. Выполните действия над числами, записанными в восьмеричной системе счисления.

а) $4312 + 2767$; в) $72 \cdot 27$;

б) $6714 - 3505$; г) $5250 : 76$.

7. Запишите в десятичной системе числа: 12_3, 144_5, 201_9, 1011_2.

8. Запишите в порядке возрастания числа:

а) 11_7, 11_5, 11_2, 11_9;

б) 327_8, 1101_2, 513_6, 83_9, 2012_3.

9. Запишите в двоичной системе числа, запись которых дана в десятичной системе: 27, 125, 306.

10. Что меньше: $26543_8 - 325_7$ или $26543_7 - 325_8$?

87. Основные выводы § 17

При изучении материала данного параграфа мы выяснили, что десятичная запись натурального числа – это его представление в виде

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0},$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_n \neq 0$.

В таком виде можно записать любое натуральное число и эта запись единственная.

Десятичная запись натуральных чисел позволяет их сравниват выполнять, по определенным правилам (алгоритмам), над ними дей вия. Мы рассмотрели теоретические основы этих алгоритмов и сфо мулировали их в общем виде.

Натуральные числа можно записывать не только в десятичной сис ме счисления, но и вообще в позиционных системах с основанием $p \geq$ При этом записью числа x считается его представление в виде

$$x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0 = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_{\,p},$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения $0, 1, 2, \ldots, p-1$ и $a_n \neq 0$.

Действия над числами в позиционных системах счисления, отли ных от десятичной, выполняются по правилам, аналогичным прин тым в десятичной системе счисления.

§18. ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Как известно, вычитание и деление на множестве натуральных ч сел выполнимо не всегда. Вопрос о существовании разности нат ральных чисел a и b решается просто – достаточно установить (п записи чисел), что $b < a$. Для деления такого общего и простого пр знака нет. Поэтому в математической науке с давних пор пытали найти такие правила, которые позволили бы по записи числа a узн вать, делится оно на число b или нет, не выполняя непосредственно деления a на b. В результате этих поисков были открыты не тольк некоторые признаки делимости, но и другие важные свойства чисе познакомимся с некоторыми из них.

В начальных курсах математики делимость натуральных чисел, ка правило, не изучается, но многие факты из этого раздела математик неявно используются. Например, признак делимости суммы, разност и произведения на число тесно связаны с правилами деления суммы, разности и произведения на число, изучаемыми в начальных класса В ряде курсов изучаются признаки делимости чисел на 2, 3, 5 и другие.

Вообще знания о делимости натуральных чисел расширяют представления о множестве натуральных чисел, позволяют глубже усвоить материал, связанный с делением натуральных чисел, применять полученные ранее знания о способах доказательства, о свойствах отношений и др.

88. Отношение делимости и его свойства

Определение. ***Пусть даны натуральные числа a и b. Говорят, что число a делится на число b, если существует такое натуральное число q, что a = bq.***

В этом случае число b называют **делителем числа** a, а число a – **кратным числа** b.

Например, 24 делится на 8, так как существует такое $q = 3$, что $24 = 8 \cdot 3$. Можно сказать иначе: 8 – это делитель числа 24, а 24 есть кратное числа 8.

В том случае, когда a делится на b, пишут: $a \vdots b$. Эту запись часто читают и так: «a кратно b».

Заметим, что понятие «делитель данного числа» следует отличать от понятия «делитель», обозначающего то число, на которое делят. Например, если 18 делят на 5, то число 5 – делитель, но 5 не является делителем числа 18. Если 18 делят на 6, то в этом случае понятия «делитель» и «делитель данного числа» совпадают.

Из определения отношения делимости и равенства $a = 1 \cdot a$, справедливого для любого натурального a, вытекает, что 1 *является делителем любого натурального числа.*

Выясним, сколько вообще делителей может быть у натурального числа a. Сначала рассмотрим следующую теорему.

Теорема 1. Делитель b данного числа a не превышает этого числа, т.е. если $a \vdots b$, то $b \le a$.

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое $q \in N$, что $a = bq$ и, значит, $a - b = bq - b = b \cdot (q - 1)$. Поскольку $q \in N$, то $q \ge 1$. Тогда $b \cdot (q - 1) \ge 0$ и, следовательно, $b \le a$.

Из данной теоремы следует, что *множество делителей данного числа конечно.* Назовем, например, все делители числа 36. Они образуют конечное множество $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

В зависимости от числа делителей среди натуральных чисел различают простые и составные числа.

Определение. ***Простым числом называется такое натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя – единицу и само это число.***

Например, число 13 – простое, поскольку у него только два делителя: 1 и 13.

Определение. ***Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.***

Так число 4 составное, у него три делителя: 1, 2 и 4.

Число 1 не является ни простым, ни составным числом в связи с тем, что оно имеет только один делитель.

Чисел, кратных данному числу, можно назвать как угодно много, – их бесконечное множество. Так, числа, кратные 4, образуют бесконечный ряд: 4, 8, 12, 16, 20, 24, ..., и все они могут быть получены по формуле $a = 4q$, где q принимает значения 1, 2, 3, ...

Нам известно, что отношение делимости на множестве N облад
рядом свойств, в частности, оно рефлексивно, антисимметрично и тр
зитивно. Теперь, имея определение отношения делимости, мы мож
доказать эти и другие его свойства.

Теорема 2. Отношение делимости рефлексивно, т.е. любое на
ральное число делится само на себя.

Доказательство. Для любого натурального a справедливо р
венство $a = a \cdot 1$. Так как $1 \in \mathbf{N}$, то, по определению отношения дел
мости, $a \vdots a$.

Теорема 3. Отношение делимости антисимметрично, т.е. если a
и $a \neq b$, то $\overline{b \vdots a}$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $b \vdots a$. Но то
да $a \leq b$, согласно теореме, рассмотренной выше.

По условию $a \vdots b$ и $a \neq b$. Тогда, по той же теореме, $b \leq a$.

Неравенства $a \leq b$ и $b \leq a$ будут справедливы лишь тогда, когда $a =$
что противоречит условию теоремы. Следовательно, наше предп
ложение неверное и теорема доказана.

Теорема 4. Отношение делимости транзитивно, т.е. если $a \vdots b$
$b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое натурально
число q, что $a = bq$, а так как $b \vdots c$, то существует такое натурально
число p, что $b = cp$. Но тогда имеем: $a = bq = (cp)q = c(pq)$. Число pq
натуральное. Значит, по определению отношения делимости, $a \vdots c$.

Теорема 5 (признак делимости суммы). Если каждое из натурал
ных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ делится на натуральное число b, то и их сумм
$a_1 + a_2 + ... + a_n$ делится на это число.

Доказательство. Так как $a_1 \vdots b$, то существует такое натурал
ное число q_1, что $a_1 = bq_1$. Так как $a_2 \vdots b$, то существует такое нату
ральное число q_2, что $a_2 = bq_2$. Продолжая рассуждения, получим, что
если $a_n \vdots b$, то существует такое натуральное число q_n, что $a_n = bq_n$. Эти
равенства позволяют преобразовать сумму $a_1 + a_2 + ... + a_n$ в сумму
вида $bq_1 + bq_2 + ... + bq_n$. Вынесем за скобки общий множитель b, а
получившееся в скобках натуральное число $q_1 + q_2 + ... + q_n$ обозначим
буквой q. Тогда $a_1 + a_2 + ... + a_n = b(q_1 + q_2 + ... + q_n) = bq$, т.е. сумма $a_1 +$
$+ a_2 + ... + a_n$ оказалась представленной в виде произведения числа b
и некоторого натурального числа q. А это значит, что сумма $a_1 + a_2 +$
$+ ... + a_n$ делится на b, что и требовалось доказать.

Например, не производя вычислений, можно сказать, что сумма
175 + 360 + 915 делится на 5, так как на 5 делится каждое слагаемое
этой суммы.

Теорема 6 (признак делимости разности). Если числа a_1 и a_2 де-
лятся на b и $a_1 \geq a_2$, то их разность $a_1 - a_2$ делится на b.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству *признака делимости суммы.*

Теорема 7 (признак делимости произведения). Если число a делится на b, то произведение вида ax, где $x \in \mathbf{N}$, делится на b.

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое натуральное число q, что $a = bq$. Умножим обе части этого равенства на натуральное число x. Тогда $ax = (bq)x$, откуда на основании свойства ассоциативности умножения $(bq)x = b(qx)$ и, значит, $ax = b(qx)$, где qx – натуральное число. Согласно определению отношения делимости, $ax \vdots b$, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что *если один из множителей произведения делится на натуральное число b, то и все произведение делится на b.*

Например, произведение $24 \cdot 976 \cdot 305$ делится на 12, так как на 12 делится множитель 24.

Рассмотрим еще три теоремы, связанные с делимостью суммы и произведения, которые часто используются при решении задач на делимость.

Теорема 8. Если в сумме одно слагаемое не делится на число b, а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число b не делится.

Доказательство. Пусть $s = a_1 + a_2 + ... + a_n + c$ и известно, что $a_1 \vdots b, a_2 \vdots b, a_3 \vdots b, ..., a_n \vdots b$, но $\overline{c \vdots b}$. Докажем, что тогда $\overline{s \vdots b}$.

Предположим противное, т.е. пусть $s \vdots b$. Преобразуем сумму s к виду $c = s - (a_1 + a_2 + ... + a_n)$. Так как $s \vdots b$ по предположению, $(a_1 + a_2 + ... + a_n) \vdots b$ согласно признаку делимости суммы, то по теореме о делимости разности $c \vdots b$. Пришли к противоречию с тем, что дано. Следовательно, $\overline{s \vdots b}$.

Например, сумма $34 + 125 + 376 + 1024$ на 2 не делится, так как $34 \vdots 2, 376 \vdots 2, 124 \vdots 2$, но $\overline{125 \vdots 2}$.

Теорема 9. Если в произведении ab множитель a делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то ab делится на mn.

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы о делимости произведения.

Теорема 10. Если произведение ac делится на произведение bc, причем c – натуральное число, то и a делится на b.

Доказательство. Так как ac делится на bc, то существует такое натуральное число q, что $ac = (bc)q$, откуда $ac = (bq)c$ и, следовательно, $a = bq$, т.е. $a \vdots b$.

Упражнения

1. Объясните, почему число 15 является делителем числа 60 и не… ляется делителем числа 70.

2. Постройте граф отношения «быть делителем данного числ… заданного на множестве $X = \{2, 6, 12, 18, 24\}$. Как отражены на э… графе свойства данного отношения?

3. Известно, что число 24 – делитель числа 96, а число 96 – делит… числа 672. Докажите, что число 24 делитель числа 672, не выпол… деления.

4. Запишите множество делителей числа.

а) 24; б) 13; в) 1.

5. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задано от… шение «иметь одно и то же число делителей». Является ли оно от… шением эквивалентности?

6. Постройте умозаключение, доказывающее, что:

а) число 19 является простым;

б) число 22 является составным.

7. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) Если сумма двух слагаемых делится на некоторое число, то каждое слагаемое делится на это число.

б) Если одно из слагаемых суммы не делится на некоторое числ… то и сумма не делится на это число.

в) Если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то сумма не делится на это число.

г) Если одно из слагаемых суммы делится на некоторое число, другое не делится на это число, то и сумма не делится на это число.

8. Верно ли, что:

а) $a \vdots m$ и $b \vdots n \Rightarrow ab \vdots mn$;

б) $\overline{a \vdots n}$ и $\overline{b \vdots n} \Rightarrow \overline{ab \vdots n}$;

в) $ab \vdots n \Rightarrow a \vdots n$ или $b \vdots n$.

89. Признаки делимости

Рассмотренные в п. 88 свойства отношения делимости позволяю… доказать известные признаки делимости чисел, записанных в десятич… ной системе счисления, на 2, 3, 4, 5, 9.

Признаки делимости позволяют установить по записи числа де… лится ли оно на другое, не выполняя деления.

Теорема 11 (признак делимости на 2). Для того чтобы число x делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Доказательство. Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е. $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $a_n \neq 0$ и a_0 принимает значения 0, 2, 4, 6, 8. Докажем, что тогда $x \vdots 2$.

Так как $10 \vdots 2$, то $10^2 \vdots 2$, $10^3 \vdots 2$, ..., $10^n \vdots 2$ и, значит, $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + + ... + a_1 \cdot 10) \vdots 2$. По условию a_0 тоже делится на 2, и поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 2. Следовательно, согласно признаку делимости суммы, число x делится на 2.

Докажем обратное: если число x делится на 2, то его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Запишем равенство $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ в таком виде: $a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10)$. Но тогда, по теореме о делимости разности, $a_0 \vdots 2$, поскольку $x \vdots 2$ и $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10) \vdots 2$. Чтобы однозначное число a_0 делилось на 2, оно должно принимать значения 0, 2, 4, 6, 8.

Теорема 12 (признак делимости на 5). *Для того чтобы число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.*

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 2.

Теорема 13 (признак делимости на 4). *Для того чтобы число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x.*

Доказательство. Пусть число x записано в десятичной системе счисления, т.е. $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ и две последние цифры в этой записи образуют число, которое делится на 4. Докажем, что тогда $x \vdots 4$.

Так как $100 \vdots 4$, то $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2) \vdots 4$. По условию, $a_1 \cdot 10 + a_0$ (это и есть запись двузначного числа) также делится на 4. Поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 4. Следовательно, согласно признаку делимости суммы, и само число x делится на 4.

Докажем обратное, т.е. если число x делится на 4, то двузначное число, образованное последними цифрами его десятичной записи, тоже делится на 4.

Запишем равенство $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ в таком виде: $a_1 \cdot 10 + a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2)$. Так как $x \vdots 4$ и $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2) \vdots 4$, то по теореме о делимости разности $(a_1 \cdot 10 + a_0) \vdots 4$. Но выражение $a_1 \cdot 10 + a_0$ есть запись двузначного числа, образованного последними цифрами записи числа x.

Например, число 157872 делится на 4, так как последние две цифры его записи образуют число 72, которое делится на 4. Число 987641 делится на 4, так как последние две цифры в его записи образуют число 41, которое не делится на 4.

Теорема 14 (признак делимости на 9). Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

Доказательство. Докажем сначала, что числа вида $10^n -$ делятся на 9. Действительно, $10^n - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1}) - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-2}) - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 10) - 1 = 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9$. Каждое слагаемое полученной суммы делится на значит, и число $10^n - 1$ делится на 9.

Пусть число $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ и $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 9$. Докажем, что тогда $x \vdots 9$.

Преобразуем сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, прибавив вычтя из нее выражение $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ и записав результат таком виде: $x = (a_n \cdot 10^n - a_n) + (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1}) + \ldots + (a_1 \cdot 10^1 - a_1) + (a_0 - a_0) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1 \cdot (10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)$.

В последней сумме каждое слагаемое делится на 9:

$a_n \cdot (10^n - 1) \vdots 9$, так как $(10^n - 1) \vdots 9$,

$a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) \vdots 9$, так как $(10^{n-1} - 1) \vdots 9$ и т.д.

$a_1 \cdot (10 - 1) \vdots 9$, так как $(10 - 1) \vdots 9$,

$(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 9$ по условию.

Следовательно, $x \vdots 9$.

Докажем обратное, т.е. если $x \vdots 9$, то сумма цифр его десятичной записи делится на 9.

Равенство $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ запишем в таком виде: $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = x - (a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1 \cdot (10 - 1))$. Так как в правой части этого равенства и уменьшаемое, и вычитаемое кратны 9, то по теореме о делимости разности $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 9$, т.е. сумма цифр десятичной записи числа x делится на 9, что и требовалось доказать.

Например, число 34578 делится на 9, так как сумма его цифр, равная 27, делится на 9. Число 130542 не делится 9, так как сумма его цифр, равная 15, не делится на 9.

Теорема 15 (признак делимости на 3). Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилось на 3.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству признака делимости на 9.

Мы рассмотрели признаки делимости чисел на 2, 3, 4, 5, 9. Из школьного курса математики известен еще ряд других, например, на 10 и 25. Конечно, этого недостаточно, чтобы решать вопросы делимости. Существует общий признак делимости для чисел, записанных в любой позиционной системе счисления, открытый в XVII веке французским математиком Паскалем. Мы рассмотрим его для случая, когда основанием системы счисления является число 10.

Теорема 16 (признак делимости Паскаля). Число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \qquad (1)$$

делится на число b тогда и только тогда, когда на b делится сумма $a_n \cdot r_n + + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – остатки от деления на b разрядных единиц $10, 10^2, \ldots, 10^n$.

Доказательство. Разделим на b каждую из разрядных единиц числа x, получим: $10 = bq_1 + r_1$, $10^2 = bq_2 + r_2$, ..., $10^{n-1} = bq_{n-1} + r_{n-1}$, $10^n = bq_n + r_n$, где $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$ – частные, а $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ – остатки.

Подставим в равенство (1) вместо разрядных единиц соответствующие выражения и, используя свойства сложения и умножения, выполним преобразования: $x = a_n \cdot (b \cdot q_n + r_n) + a_{n-1} \cdot (b \cdot q_{n-1} + r_{n-1}) + \ldots + + a_1 \cdot (b \cdot q_1 + r_1) + a_0 = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1) \cdot b + (a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0)$. Если сумму $a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0$ обозначить буквой s, то будем иметь: $x = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1) \cdot b + s$. Разделим s на b: $s = bq + r$, где $0 \le r < b$. Тогда $x = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + + \ldots + a_1 \cdot q_1) \cdot b + (b \cdot q + r) = (a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1 + q) \cdot b + r$. Короче: $x = b \cdot Q + r$, где $Q = a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + \ldots + a_1 \cdot q_1 + q$ и $0 \le r < b$. Равенство $x = b \cdot Q + r$ означает, что r является остатком при делении x на b, причем r – число единственное согласно теореме о единственности частного и остатка при делении натуральных чисел. Таким образом, установлено, что при делении натурального числа $x = a_n \cdot 10^n + + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ на натуральное число b получается такой же остаток r, как и при делении на число b суммы s. Теорема доказана.

Используя этот признак, выведем, например, известный признак делимости на 3 в десятичной системе счисления.

Найдем остатки от деления разрядных единиц на 3:

$10 = 3 \cdot 3 + 1$ $(r_1 = 1)$;

$10^2 = 3 \cdot 33 + 1$ $(r_2 = 1)$;

$10^3 = 10^2 \cdot 10 = (3 \cdot 33 + 1) \cdot (3 \cdot 3 + 1) = 3q_3 + 1$ $(r_3 = 1)$.

На основании рассмотренных случаев можно предположить, что $(\forall n \in \mathrm{N})$ $10^n = 3q_n + 1$. Убедиться в истинности этого утверждения можно, если воспользоваться методом математической индукции.

Подставив полученные остатки в сумму, обозначенную при доказательстве признака делимости Паскаля буквой s, получим: $s = a_n \cdot 1 + + a_{n-1} \cdot 1 + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$. Согласно этому признаку, если данная сумма делится на 3, то и число x делится на 3. $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ – это сумма цифр в записи числа x. Получ утверждение: если сумма цифр в десятичной записи числа делится н то и само число делится на 3.

Докажем теперь, что если число x делится на 3, то сумма циф его десятичной записи делится на 3. Запишем равенство $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ в таком виде: $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = x - (a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1 \cdot (10 - 1))$. Так как в пра части этого равенства и уменьшаемое, и вычитаемое кратны 3, то основании признака делимости разности $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 3$, т сумма цифр десятичной записи числа x делится на 3. Таким образо доказано, что число делится на 3 тогда и только тогда, когда сум цифр его десятичной записи делится на 3.

Используя признак делимости Паскаля, можно доказать следующ признак делимости чисел на 11: *для того чтобы число делилось на необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой его циф стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четн местах, делилась на 11.* Обычно при нахождении разности из больше числа вычитают меньшее. Например, число 540309 делится на 11, т как $(4 + 3 + 9) - (5 + 0 + 0) = 11$, а $11 : 11$. Число 236 не делится на 1 поскольку $(2 + 6) - 3 = 5$, но 5 не кратно 11.

Упражнения

1. Выпишите из ряда чисел 132, 1050, 1114, 364, 12000 те, которые:

а) делятся на 2;

б) делятся на 4;

в) делятся на 2 и не делятся на 4;

г) делятся и на 2 и на 4.

2. Верно ли утверждение:

а) Для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4?

б) Для того чтобы число делилось на 2, достаточно, чтобы оно делилось на 4?

3. Из ряда чисел 72, 312, 522, 483, 1197 выпишите те, которые:

а) делятся на 3;

б) делятся на 9;

в) делятся на 3 и не делятся на 9;

г) делятся и на 3 и на 9.

Сделайте вывод о взаимосвязи делимости на 3 и на 9. Докажите его.

4. Докажите признаки делимости на 5 и на 3.

5. Сформулируйте признак делимости на 25 и докажите его.

6. Не выполняя сложения, установите, делится ли значение выражения на 4:

а) $284 + 1440 + 113$; в) $284 + 1441 + 113$;

б) $284 + 1440 + 792224$; г) $284 + 1441 + 113 + 164$.

7. Не выполняя вычитания, установите, делится ли разность на 9.

а) $360 - 144$; б) $946 - 540$; в) $30240 - 97$.

8. Верно ли, что для делимости числа x на 8 в десятичной системе счисления необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось трехзначное число, образованное последними тремя цифрами десятичной записи числа x?

90. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

Рассмотрим известные из школьного курса математики понятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя натуральных чисел, сформулируем их основные свойства, опустив все доказательства.

Определение. ***Общим кратным натуральных чисел a и b называется число, которое кратно каждому из данных чисел.***

Наименьшее число из всех общих кратных чисел a и b называется *наименьшим общим кратным* этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел a и b условимся обозначать $K(a, b)$.

Например, два числа 12 и 18 общими кратными являются: 36, 72, 108, 144, 180 и т.д. Число 36 – наименьшее общее кратное чисел 12 и 18. Можно записать: $K(12, 18) = 36$.

Для наименьшего общего кратного справедливы следующие утверждения:

1. Наименьшее общее кратное чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел a и b не меньше большего из данных чисел, т.е. если $a > b$, то $K(a, b) \geq a$.

3. Любое общее кратное чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное.

Определение. ***Общим делителем натуральных чисел a и b называется число, которое является делителем каждого из данных чисел.***

Наибольшее число из всех общих делителей чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* данных чисел.

Наибольший общий делитель чисел a и b условимся обозначать $D(a, b)$.

Например, для чисел 12 и 18 общими делителями являются числа: 1, 2, 3, 6. Число 6 – наибольший общий делитель чисел 12 и 18. Можно записать: $D(12, 18) = 6$.

Число 1 является общим делителем любых двух натуральных чи
a и b. Если у этих чисел нет иных общих делителей, то $D(a, b) =$
числа a и b называются *взаимно простыми*.

Например, числа 14 и 15 – взаимно простые, так как $D(14, 15) = 1$.

Для наибольшего общего делителя справедливы следующие утвер
дения:

1. Наибольший общий делитель чисел a и b всегда существует и
ляется единственным.

2. Наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит мен
шего из данных чисел, т.е. если $a < b$, то $D(a, b) \le a$.

3. Наибольший общий делитель чисел a и b делится на любой о
щий делитель этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел a и b и их наибольший общ
делитель взаимосвязаны: произведение наименьшего общего кратно
и наибольшего общего делителя чисел a и b равно произведению эт
чисел, т.е. $K(a, b) \cdot D(a, b) = a \cdot b$.

Из этого утверждения вытекают следующие следствия:

а) *Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел рав
произведению этих чисел*, т.е.

$$D(a, b) = 1 \ \Rightarrow \ K(a, b) = a \cdot b.$$

Например, чтобы найти наименьшее общее кратное чисел 14 и 1
достаточно их перемножить, так как $D(14, 15) = 1$.

б) *Для того чтобы натуральное число a делилось на произведен
взаимно простых чисел m и n, необходимо и достаточно, чтобы о
делилось и на m, и на n.*

Это утверждение представляет собой признак делимости на числ
которые можно представить в виде произведения двух взаимно пр
стых чисел.

Например, так как $6 = 2 \cdot 3$ и $D(2, 3) = 1$, то получаем признак д
лимости на 6: для того чтобы натуральное число делилось на 6, необ
ходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Заметим, что данный признак можно применять многократн
Сформулируем, например, признак делимости на 60: для того чтоб
число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось
на 4, и на 15. В свою очередь, число будет делиться на 15 тогда и тольк
тогда, когда оно делится и на 3, и на 5. Обобщая, получаем следующи
признак делимости на 60: для того чтобы число делилось на 60, необхо-
димо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, на 3 и на 5.

в) Частные, получаемые при делении двух данных чисел на их наи-
больший общий делитель, является взаимно простыми числами.

Этим свойством можно пользоваться при проверке правильност
найденного наибольшего общего делителя данных чисел. Например
проверим, является ли число 12 наибольшим общим делителем чисе

24 и 36. Для этого, согласно последнему утверждению, разделим 24 и 36 на 12. Получим соответственно числа 2 и 3, которые являются взаимно простыми. Следовательно, $D(24, 36) = 12$.

Упражнения

1. Даны числа 36 и 45.

а) Найдите все общие делители этих чисел.

б) Можно ли назвать все их общие кратные?

в) Найдите три трехзначных числа, которые являются общими кратными данных чисел.

г) Чему равны $D(36, 45)$ и $K(36, 45)$? Как проверить правильность полученных ответов?

2. Верны ли записи:

а) $D(32, 8) = 8$ и $K(32, 8) = 32$;

б) $D(17, 35) = 1$ и $K(17, 35) = 595$;

в) $D(255, 306) = 17$ и $K(255, 306) = 78030$.

3. Найдите $K(a, b)$, если известно, что:

а) $a = 47, b = 105$ и $D(47, 105) = 1$;

б) $a = 315, b = 385$ и $D(315, 385) = 35$.

4. Сформулируйте признаки делимости на 12,15,18,36,45,75.

5. Из множества чисел 1032, 2964, 5604, 8910, 7008 выпишите те, которые делятся на 12.

6. Делятся ли на 18 числа 1548 и 942?

7. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

8. Найдите цифры a и b числа $72a \cdot 3b$, если известно, что это число делится на 45.

9. Не выполняя умножения и деления уголком, установите, какие из следующих произведений делятся на 30:

а) $105 \cdot 20$; б) $47 \cdot 12 \cdot 5$; в) $85 \cdot 33 \cdot 7$.

10. Не выполняя сложения или вычитания, установите, значения каких выражений делятся на 36.

а) $72 + 180 + 252$; в) $180 + 252 + 100$;

б) $612 - 432$; г) $180 + 250 + 200$.

11. Докажите, что при любом натуральном n истинны утверждения:

а) $n(n + 1)(n + 2) \vdots 6$;

б) $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \vdots 12$.

91. Простые числа

Простые числа играют большую роль в математике – по существу они являются «кирпичами», из которых строятся составные числа.

Это утверждается в теореме, называемой основной теоремой ари тики натуральных чисел, которая приводится без доказательства.

Теорема. Любое составное число можно единственным обра представить в виде произведения простых множителей.

Например, запись $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ есть представление числа 110 в де произведения простых множителей или *разложение его на прос множители*.

Два разложения числа на простые множители считают один выми, если они отличаются друг от друга лишь порядком множи лей. Поэтому представление числа 110 в виде произведения $2 \cdot 5 \cdot 11$ и произведения $5 \cdot 2 \cdot 11$ есть, по существу, одно и то же разложение чи 110 на простые множители.

Раскладывая числа на простые множители, используют призн делимости на 2, 3, 5 и др. Напомним один из способов записи р ложения чисел на простые множители. Разложим, например, на м жители число 90. Число 90 делится на 2. Значит, 2 есть один из п стых множителей в разложении числа 90. Разделим 90 на 2. Числ запишем справа от знака равенства, а частное 45 – под числом Число 45 делим на простое число 3, получаем 15. Делим 15 на 3, по чаем 5. Число 5 – простое, при делении его на 5 получаем 1. Разло ние на множители закончено.

$$\begin{array}{r l} 90 & = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 45 & \\ 15 & \\ 5 & \\ 1 & \end{array}$$

При разложении числа на простые множители произведение оди ковых множителей представляют в виде степени: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $60 = 2^2 \cdot 3$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Такое разложение числа на простые множители называ *каноническим*.

В связи с возможностью представлять любое составное число в в де произведения простых множителей возникает необходимость опр делять, является данное число простым или составным. Эту зада умели решать еще древнегреческие математики, которым были и вестны многие свойства простых чисел. Так, Эратосфеном (III в. до н. был придуман способ получения простых чисел, не превышающи натурального числа a. Воспользуемся им для поиска всех просты чисел до 50.

Выпишем все натуральные числа от 1 до 50 и зачеркнем число 1 оно не является простым. Число 2 – простое, обведем его кружко После этого зачеркиваем каждое второе число, стоящее после 2, т. числа 4, 6, 8, ...

Первое незачеркнутое число 3 является простым, обведем его кружком. И вычеркнем каждое третье число, стоящее после 3, т.е. числа 9, 15, ... (числа 6, 12 и др. зачеркнуты раньше).

Первое незачеркнутое число 5 является простым, его также обведем кружком. Зачеркнем каждое пятое число после 5 и т.д. (рис. 126).

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Рис. 126

Те числа, которые останутся после четырех вычеркиваний (исключая числа 2, 3, 5 и 7), не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7. В арифметике доказано, что если натуральное число a, большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, квадрат которых не превосходит a, то a число простое. Поскольку $7^2 = 49$, а $49 < 50$, то все оставшиеся числа – простые.

Итак, простыми числами, не превосходящими 50, являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Описанный способ получения простых чисел называется решетом Эратосфена, так как позволяет отсеивать одно за другим составные числа.

С помощью метода, предложенного Эратосфеном, можно отыскивать все простые числа, не превосходящие заданного числа a. Но он не дает ответа на вопрос, конечно или нет множество простых чисел, – ведь могло бы оказаться, что все числа, начиная с некоторого, составные и множество простых чисел конечно. Решением этой проблемы занимался другой греческий математик – Евклид. Он доказал, что множество простых чисел бесконечно.

Действительно, предположим, что множество простых чисел конечное и исчерпывается числами 2, 3, 5, 7, ..., p, где p – самое большое простое число. Перемножим все простые числа и их произведение обозначим через a. Прибавим к этому числу 1. Каким будет полученное число $a + 1$ – простым или составным?

Простым число $a + 1$ быть не может, потому что оно больше самого большого простого числа, а по предположению таких простых чисел не существует. Но составным оно тоже быть не может: если $a + 1$ составное, то оно должно иметь хотя бы один простой делитель q. Так как число $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p$ также делится на это простое число q, то и разность $(a + 1) - a$, т.е. число 1, делится на q, что невозможно.

Итак, число a не является ни простым, ни составным, но этого т[...]
же не может быть – всякое число, отличное от 1, либо простое, ли[...]
составное. Следовательно, наше предположение о том, что множест[...] простых чисел конечное и есть самое большое простое число, невер[...] и значит, *множество простых чисел бесконечное*.

Упражнения

1. Из множества чисел 13, 27, 29, 51, 67 выпишите простые числа, составные разложите на простые множители.

2. Докажите, что число 819 не является простым числом.

3. Разложите на простые множители числа 124, 588, 2700, 3780.

4. Какое число имеет разложение:

а) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; б) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$?

92. Способы нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел

Рассмотрим сначала способ, основанный на разложении данн[...] чисел на простые множители.

Пусть даны два числа 3600 и 288. Представим их в каноническо[...] виде: $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Найдем наибольший общий делител[...] данных чисел. В его разложение должны войти все *общие простые мно[...]жители*, которые содержатся в разложениях чисел 3600 и 288, приче[...] каждый из них нужно взять с *наименьшим показателем*, с каким о[...] входит в оба разложения. Следовательно, $D(3600, 288) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

Вообще чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;

2) образуют произведение общих для всех данных чисел просты[...] множителей, каждый с наименьшим показателем, каким он входит в[...] все разложения данных чисел;

3) находят значение этого произведения – оно и будет наибольши[...] общим делителем данных чисел.

Найдем наименьшее общее кратное чисел 3600 и 288. В его разложение должны войти все простые множители, которые содержатс[...] *хотя бы в одном из разложений* чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять с *наибольшим показателем*, с каким он входит в оба разложения. Следовательно, $K(3600, 288) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 7200$.

Вообще чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;

2) образуют произведение всех простых множителей, находящихся в разложениях данных чисел, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находят значения этого произведения, оно и будет наименьшим общим кратным данных чисел.

Задача 1. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 60, 252 и 264.

Решение. Представим каждое число в каноническом виде: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

Чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел, образуем произведение общих для всех данных разложений простых множителей, каждый с наименьшим показателем, с каким он входит во все решения данных чисел: $D(60, 252, 264) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Наименьшее общее кратное чисел можно найти, образовав произведение всех простых множителей, находящихся в данных разложениях, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел, т.е. $K(60, 252, 264) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27\,720$.

Задача 2. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 48 и 245.

Решение. Представим каждое число в каноническом виде: $48 = 2^4 \cdot 3$, $245 = 5 \cdot 7^2$.

Так как разложения данных чисел не содержат общих простых множителей, то $D(48, 245) = 1$, а $K(48, 245) = 48 \cdot 245 = 10760$.

Отыскание наибольшего общего делителя двух натуральных чисел по их каноническому виду требует предварительного разложения чисел на простые множители. Это несложно сделать, если числа не велики, но для многозначных чисел найти их каноническое разложение бывает трудно. Существует способ отыскания наибольшего общего делителя, требующий лишь деления с остатком. Этот способ был предложен Евклидом, и его называют алгоритмом Евклида. Он основан на следующих трех утверждениях, доказательство которых мы опускаем:

1. Если a делится на b, то $D(a, b) = b$.

2. Если $a = bq + r$ и $r < b$, то множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел b и r.

3. Если $a = bq + r$ и $r < b$, то $D(a, b) = D(b, r)$.

Сформулируем теперь алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя натуральных чисел a и b.

Пусть $a > b$.

Если a делится на b, то $D(a, b) = b$.

Если при делении a на b, получается остаток r, то $a = bq + r$ и $D(a, b) = D(b, r)$ и задача свелась к отысканию наибольшего общего делителя чисел b и r.

Если b делится на r, то $D(b, r) = r$ и тогда $D(a, b) = r$.

Если при делении b на r получается остаток r_1, то $b = rq_1 + r_1$ и поэтому $D(r, r_1) = D(b, r) = D(a, b)$.

Продолжая описанный процесс, получаем все меньшие и меньш
остатки. В конце концов получим остаток, на который будет делит
предыдущий остаток. Этот наименьший, отличный от нуля, остато
будет наибольшим общим делителем чисел a и b.

Найдем при помощи алгоритма Евклида наибольший общий де
тель чисел 2585 и 7975. Процесс последовательного деления буд
записывать так:

```
        _7975|2585
         7755|3          7975 = 2585·3 + 220
     _2585|220
      220 |11            2585 = 220·11 + 165
      _385
       220
   _220|165
    165|1                220 = 165·1 + 55
 _165|55
  165|3                  165 = 55·3 + 0
    0
```

В последнем случае остаток равен нулю. Значит, $D(7975, 2585) = 5$

Упражнения

1. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кра
ное данных чисел, представив их в каноническом виде:

а) 948 и 624; б) 120, 540, 418.

2. Используя алгоритм Евклида, найдите наибольший общий дели
тель чисел.

а) 846 и 246; б) 585 и 1960; в) 15283 и 10013.

3. Верно ли, что: а) $D(448, 656) = 16$; б) $K(578, 8670) = 8670$?

4. Докажите, что числа 432 и 385 взаимно простые.

5. Найдите наибольший общий делитель всех пятизначных чисе
записанных при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в записи чисел не по
вторяются).

93. Основные выводы § 18

Изучая материал данного параграфа, мы определили следующи
понятия:

– делитель данного числа;

– простое число;

– составное число;

– общий делитель данных чисел;

– наибольший общий делитель данных чисел;

– взаимно простые числа;
– общее кратное данных чисел;
– наименьшее общее кратное данных чисел.

Рассмотрены, а в ряде случаев и доказаны **теоремы** о свойствах делимости и признаках делимости на 2, 3, 4, 5, 9. Кроме того, дан способ получения признаков делимости на те составные числа, которые можно представить в виде произведения взаимно простых чисел.

Рассмотрена основная теорема арифметики, в которой утверждается, что любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей.

Узнали, что наибольший общий делитель двух чисел можно находить двумя способами. Первый основан на разложении данных чисел на простые множители, а второй является алгоритмом Евклида.

Наименьшее общее кратное двух чисел можно находить, используя разложение данных чисел на простые множители, или, если известен наибольший общий делитель чисел a и b, то по формуле $K(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{D(a,b)}$.

§19. О РАСШИРЕНИИ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Большинство применений математики связано с измерением величин. Однако для этих целей натуральных чисел недостаточно: не всегда единица величины укладывается целое число раз в измеряемой величине. Чтобы в такой ситуации точно выразить результат измерения, необходимо расширить запас чисел, введя числа, отличные от натуральных. К этому выводу люди пришли еще в глубокой древности: измерение длин, площадей, масс и других величин привело сначала к возникновению дробных чисел – получили рациональные числа, а в V в до н.э. математиками школы Пифагора было установлено, что существуют отрезки, длину которых при выбранной единице длины нельзя выразить рациональным числом. Позднее, в связи с решением этой проблемы, появились числа иррациональные. Рациональные и иррациональные числа назвали действительными. Строгое определение действительного числа и обоснование его свойств было дано в XIX в.

Взаимосвязи между различными множествами чисел (**N**, **Z**, **Q** и **R**) можно изобразить наглядно при помощи кругов Эйлера (рис. 127).

Рис. 127

Действительные числа – не последние в ряду различных чи
Процесс, начавшийся с расширения множества натуральных чисел,
должается и сегодня – этого требует развитие различных наук и са
математики.

Знакомство учащихся с дробными числами происходит, как
вило, в начальных классах. Затем понятие дроби уточняется и рас
ряется в средней школе. В связи с этим учителю необходимо вла
понятием дроби и рационального числа, знать правила выполне
действий над рациональными числами, свойства этих действий.
это нужно не только для того, чтобы математически грамотно вв
понятие дроби и обучать младших школьников выполнять с ни
действия, но и, что не менее важно, видеть взаимосвязи множеств
циональных и действительных чисел с множеством натуральных
сел. Без их понимания нельзя решить проблему преемственност
обучении математике в начальных и последующих классах школы.

Отметим особенность изложения материала данного парагра
которая обусловлена как небольшим объемом курса математики
учителей начальных классов, так и его назначением: материал бу
представлен во многом конспективно, часто без строгих дока
тельств; более подробно будет изложен материал, связанный с рац
нальными числами.

Расширение множества **N** натуральных чисел будет происходит
такой последовательности: сначала строится множество $\mathbf{Q}_+$ поло
тельных рациональных чисел, затем показывается, как его мож
расширить до множества $\mathbf{R}_+$ положительных действительных чисел
наконец, очень кратко описывается расширение множества $\mathbf{R}_+$
множества **R** всех действительных чисел.

94. Понятие дроби

Пусть требуется измерить длину отрезка x с помощью единично
отрезка e (рис. 128). При измерении оказалось, что отрезок x сост
из трех отрезков, равных e, и отрезка, который короче отрезка e. В эт
случае длина отрезка x не может быть выражена натуральным число
Однако если отрезок e разбить на 4 равные части, то отрезок x ок
жется состоящим из 14 отрезк
равных четвертой части отр
ка e. И тогда, говоря о дли
отрезка x, мы должны указа
два числа 4 и 14: четвертая час
отрезка e укладывается в отр
ке точно 14 раз. Поэтому усл

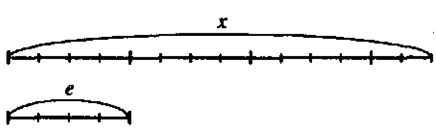


Рис. 128

вились длину отрезка x записывать в виде $\frac{14}{4}\cdot E$, где E – длина единичного отрезка e, а символ $\frac{14}{4}$ называть дробью.

В общем виде понятие дроби определяют так.

Пусть даны отрезок x и единичный отрезок e, длина которого E. Если отрезок x состоит из m отрезков, равных n-ой части отрезка e, то длина отрезка x может быть представлена в виде $\frac{m}{n}\cdot E$, где символ $\frac{m}{n}$ называют дробью (и читают «эм энных»).

В записи дроби $\frac{m}{n}$ числа m и n – натуральные, m называется числителем, n – знаменателем дроби.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Вернемся к рисунку 128, где показано, что четвертая часть отрезка e уложилась в отрезке x точно 14 раз. Очевидно, это не единственный вариант выбора такой части отрезка e, которая укладывается в отрезке x целое число раз. Можно взять восьмую часть отрезка e, тогда отрезок x будет состоять из 28 таких частей и его длина будет выражаться дробью $\frac{28}{8}$. Можно взять шестнадцатую часть отрезка e, тогда отрезок x будет состоять из 56 таких частей и его длина будет выражаться дробью $\frac{56}{16}$.

Вообще длина одного и того же отрезка x при заданном единичном отрезке e может выражаться различными дробями, причем, если длина выражена дробью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена и любой дробью вида $\frac{mk}{nk}$, где k – натуральное число.

Теорема. Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ выражали длину одного и того же отрезка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $mq = np$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Определение. ***Две дроби*** $\frac{m}{n}$ ***и*** $\frac{p}{q}$ ***называются равными, если*** mq =

Если дроби равны, то пишут $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

Например, $\frac{17}{3}=\frac{119}{21}$, так как $17\cdot 21 = 119\cdot 3 = 357$, а $\frac{17}{19}\neq\frac{23}{27}$, по-му что $17\cdot 27 = 459$, $19\cdot 23 = 437$ и $459\neq 437$.

Из сформулированных выше теоремы и определения следует, две дроби равны тогда и только тогда, когда они выражают дл одного и того же отрезка.

Нам известно, что отношение равенства дробей рефлексивно, с метрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентнос Теперь, используя определение равных дробей, это можно доказать

Теорема. Равенство дробей является отношением эквивалентнос

Доказательство. Действительно, равенство дробей рефлекс но: $\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$, так как равенство $mn = nm$ справедливо для любых на ральных чисел m и n. Равенство дробей симметрично: если $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$, так как из $mq = np$ следует, что $pn = qm$ ($m, n, p, q \in \mathrm{N}$). О транзитивно: если $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ и $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$, то $\frac{m}{n}=\frac{r}{s}$. В самом деле, так к $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, то $mq = np$, а так как $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$, то $ps = qr$. Умножив обе час равенства $mq = np$ на s, а равенства $ps = qr$ на n, получим $mqs = nps$ $nps = qrs$. Откуда $mqs = qrn$ или $ms = nr$. Последнее равенство означ ет, что $\frac{m}{n}=\frac{r}{s}$. Итак, равенство дробей рефлексивно, симметрично транзитивно, следовательно, оно является отношением эквивалентност

Из определения равных дробей вытекает *основное свойство дроб* Напомним его.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить н одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение др бей к общему знаменателю.

Сокращение дробей – это замена данной дроби другой, равно данной, но с меньшим числителем и знаменателем.

Если числитель и знаменатель дроби одновременно делятся тольк на единицу, то дробь называют *несократимой*. Например, $\frac{5}{17}$ – несо кратимая дробь, так как ее числитель и знаменатель делятся одновременно только на единицу, т.е. $D(5, 17) = 1$.

Приведение дробей к общему знаменателю – это замена данных дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели. Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а наименьшим общим знаменателем – их наименьшее кратное $K(n, q)$.

Задача. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{4}{35}$.

Решение. Разложим числа 15 и 35 на простые множители: $15 = 3\cdot5$, $35 = 5\cdot7$. Тогда $K(15, 35) = 3\cdot5\cdot7 = 105$. Поскольку $105 = 15\cdot7 = 35\cdot3$, то $\frac{8}{15} = \frac{8\cdot7}{15\cdot7} = \frac{56}{105}$, $\frac{4}{35} = \frac{4\cdot3}{35\cdot3} = \frac{12}{105}$.

Упражнения

1. Известно, что длина отрезка x при единичном отрезке e выражается дробью $\frac{8}{3}$. Как могла получиться такая дробь при измерении длины отрезка x? Существуют ли другие дроби, выражающие длину отрезка x при том же единичном отрезке e?

2. Выберите единицу длины и постройте отрезок, длина которого выражается дробью: а) $\frac{15}{4}$; б) $\frac{17}{3}$; в) $\frac{4}{7}$.

3. Как установить, равны ли дроби:

а) $\frac{17}{19}$ и $\frac{23}{27}$; б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{72}{108}$?

4. На множестве дробей $\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{9}{12}, \frac{3}{15}, \frac{5}{25}, \frac{12}{6}\right\}$ задано отношение равенства. Постройте граф этого отношения. Каковы особенности этого графа? С чем они связаны?

5. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю.

а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{102}$; б) $\frac{7}{16}$ и $\frac{5}{844}$; в) $\frac{15}{171}$ и $\frac{23}{270}$.

6. Найдите несократимую дробь, равную следующей:

а) $\frac{108}{144}$; б) $\frac{402}{455}$; в) $\frac{780}{2730}$;

г) $\frac{45\cdot56+45\cdot14}{70\cdot72}$; д) $\frac{38\cdot53-38\cdot25}{19\cdot42}$.

95. Положительные рациональные числа

Отношение равенства является отношением эквивалентности множестве дробей, поэтому оно порождает на нем классы экви лентности. В каждом таком классе содержатся равные между со дроби. Например, множество дробей $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$ – это о класс, множество дробей $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\right\}$ – это другой класс и т.

Дроби одного класса выражают длину одного и того же отрез Но длина отрезка должна представляться единственным числом. этому считают, что равные дроби – это различные записи одног того же положительного рационального числа.

Определение. ***Положительным рациональным числом называет класс равных дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому клас есть запись (представление) этого числа.***

Например, о дроби $\frac{9}{10}$ мы должны говорить, что она является писью некоторого рационального числа. Однако часто для кратко говорят: $\frac{9}{10}$ – это рациональное число.

Множество всех положительных рациональных чисел прин обозначать символом Q_+. Определим на этом множестве отношен равенства.

Определение. ***Если положительное рациональное число*** a ***пре ставлено дробью*** $\frac{m}{n}$, ***а положительное рациональное число*** b ***другой дробью*** $\frac{p}{q}$, ***то*** $a = b$ ***тогда и только тогда, когда*** $mq = n$

Из данного определения следует, что равные рациональные чис представляются равными дробями. Среди всех записей любого пол жительного рационального числа выделяют дробь, которая являет несократимой, и доказывают, что любое рациональное число пре ставимо единственным образом несократимой дробью (мы это док зательство опускаем). Для того чтобы рациональное число $\frac{m}{n}$ пре ставить несократимой дробью, достаточно числитель m и знаменате n разделить на их наибольший общий делитель.

Выясним теперь, как определяются арифметические действия с положительными рациональными числами.

Пусть при некотором единичном отрезке e длина отрезка x выражается дробью $\frac{m}{n}$, а длина отрезка y – дробью $\frac{p}{n}$, и пусть отрезок z состоит из отрезков x и y. Тогда n-ая часть отрезка e укладывается в отрезке z $m+p$ раз, т.е. длина отрезка z выражается дробью $\frac{m+p}{n}$. Поэтому полагают, что $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$.

> Определение. ***Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b – дробью $\frac{p}{n}$, то их суммой называется число $a + b$, которое представляется дробью $\frac{m+p}{n}$.***

Таким образом, по определению

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}. \qquad (1)$$

Можно доказать, что при замене дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, представляющих числа a и b, равными им дробями, дробь $\frac{m+p}{n}$ заменяется равной ей дробью. Поэтому сумма рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей.

В определении суммы рациональных чисел мы использовали их представления в виде дробей с одинаковыми знаменателями. Если же числа a и b представлены дробями с различными знаменателями, то сначала надо привести их к одному знаменателю, а затем применять правило (1).

Сложение положительных рациональных чисел коммутативно и ассоциативно,

$(\forall a, b \in \mathbf{Q}_+)\ a + b = b + a;$

$(\forall a, b, c \in \mathbf{Q}_+)\ (a + b) + c = a + (b + c).$

Докажем, например, коммутативность сложения. Представим числа a и b дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$. Тогда сумма $a + b$ представляется дробью $\frac{m+p}{n}$, а сумма $b + a$ – дробью $\frac{p+m}{n}$. Так как m, p, n – натуральные числа, то $m + p = p + m$ и, следовательно, $a + b = b + a$. Таким образом, коммутативность сложения положительных рациональных чисел [cut off] текает из коммутативности сложения натуральных чисел.

Прежде чем сформулировать определение умножения положит[cut off] ных рациональных чисел, рассмотрим следующую задачу: извес[cut off] что длина отрезка X выражается дробью $\frac{m}{n}$ при единице длины [cut off] длина единичного отрезка измерена при помощи единицы E_1 и в[cut off] жается дробью $\frac{p}{q}$. Как найти число, которым будет представл[cut off] длина отрезка X, если измерить ее при помощи единицы длины E_1?

Так как $X = \frac{m}{n} \cdot E$, то $n \cdot X = m \cdot E$, а из того, что $E = \frac{p}{q} \cdot E_1$ след[cut off] что $q \cdot E = p \cdot E_1$. Умножим первое полученное равенство на q, а втор[cut off] на m. Тогда $(nq) \cdot X = (mq) \cdot E$ и $(mq) \cdot E = (mp) \cdot E_1$, откуда $(nq) \cdot X = (mp)$[cut off] Это равенство показывает, что длина отрезка x при единице длин[cut off] выражается дробью $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$, а значит, $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$, т.е. умножение д[cut off] бей связано с переходом от одной единицы длины к другой при из[cut off] рении длины одного и того же отрезка.

Определение. ***Если положительное число а представлено дробью [cut off] а положительное рациональное число b – дробью $\frac{p}{q}$, то их произв[cut off] нием называется число ab, которое представляется дробью $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$***

Таким образом, по определению,

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m p}{n q}. \qquad (2)$$

Можно доказать, что при замене дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, представляющ[cut off] числа a и b, равными им дробями, дробь $\frac{mp}{nq}$ заменяется равной [cut off] дробью. Поэтому произведение чисел a и b не зависит от выбо[cut off] представляющих их дробей.

Умножение положительных рациональных чисел *коммутативн[cut off] ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения и вычитани[cut off]* Доказательство этих свойств основывается на определении умнож[cut off] ния и сложения положительных рациональных чисел, а также на соответствующих свойствах сложения и умножения натуральных чисел.

Определение сложения положительных рациональных чисел дает возможность определить отношение «меньше» на множестве Q_+.

Определение. ***Пусть a и b – положительные рациональные числа. Считают, что число b меньше числа a, если существует такое положительное рациональное число c, что a = b + c.***

В этом же случае считают, что число a больше числа b. Пишут $b < a$, $a > b$.

Так определенное отношение «меньше» обладает рядом свойств, которые мы приводим без доказательства.

1. Отношение «меньше» на множестве Q_+ антисимметрично и транзитивно, т.е. является отношением порядка, а множество Q_+ упорядоченным множеством.

2. Если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$ (т.е. дробями, имеющими одинаковые знаменатели), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $m < p$.

3. Если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ (т.е. дробями, имеющими разные знаменатели), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $mq < np$.

4. В множестве положительных рациональных чисел нет наименьшего числа.

5. Между любыми двумя различными числами a и b из Q_+ заключено бесконечно много чисел этого же множества. Это свойство называют свойством плотности множества Q_+.

6. В множестве положительных рациональных чисел нет наибольшего числа.

Вычитание положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная сложению, т.е. это такая операция, которая удовлетворяет условию: $a - b = c$ тогда и только тогда, когда $a = b + c$.

Разность $a - b$ положительных рациональных чисел существует тогда и только тогда, когда $b < a$. Если разность $a - b$ существует, то она единственна.

Используя определение и условие существования разности, можно получить правило вычитания положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, где $m < p$:

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}. \qquad (3)$$

Деление положительных рациональных чисел определяется как о[...]рация, обратная умножению, т.е. это такая операция, которая удов[...]творяет условию: $a:b = c$ тогда и только тогда, когда $a = bc$.

Из этого определения и правила нахождения произведения поло[...]тельных рациональных чисел можно получить правило деления по[...]жительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}. \qquad (4$$

Из этого правила следует, что частное положительных рациона[...]ных чисел всегда существует.

Упражнения

1. Рациональное число представлено дробью $\frac{12}{26}$. Может ли о[...] быть представлено дробью $\frac{84}{182}$? А дробью $\frac{42}{78}$?

2. Какие из следующих дробей несократимые:

а) $\frac{234}{357}$; б) $\frac{387}{504}$; в) $\frac{425}{537}$?

3. Докажите свойство ассоциативности сложения положительн[...] рациональных чисел. Какие преобразования выражений можно в[...]полнять на его основе?

4. Вычислите значения следующих выражений, записав их в ви[...] несократимых дробей; выполненные преобразования обоснуйте.

а) $\frac{1}{7}+\frac{2}{21}+\frac{3}{7}$; в) $\frac{31}{80}+\left(\frac{3}{16}+\frac{39}{80}\right)$;

б) $\frac{7}{10}+\frac{2}{15}+\frac{11}{30}$; г) $\left(\frac{1}{16}+\frac{5}{7}\right)+\frac{3}{16}$.

5. Запишите законы умножения положительных рациональных чи[...]сел и докажите их. Какие преобразования выражений можно выпо[...]нять на их основе?

6. Вычислите значения следующих выражений, записав их в ви[...] несократимых дробей; выполненные преобразования обоснуйте.

а) $\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}$; б) $\frac{17}{13}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{26}{51}$; в) $\left(\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{13}$.

7. Докажите, что отношение «меньше» на множестве Q_+ являетс[...] отношением порядка.

8. Сравните числа:

а) $\frac{7}{15}$ и $\frac{11}{15}$; б) $\frac{8}{9}$ и $\frac{8}{11}$; в) $\frac{9}{40}$ и $\frac{7}{30}$; г) $\frac{13}{24}$ и $\frac{17}{36}$.

9. Найдите три дроби, которые заключены между дробями $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$.

10. Найдите значения следующих выражений:

а) $\frac{73}{15}-\left(\frac{11}{15}+\frac{1}{5}\right)$; б) $\frac{22}{3}\cdot\frac{6}{11}-\frac{19}{21}\cdot\frac{7}{38}$; в) $\frac{3}{5}:\left(\frac{9}{10}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{9}\right)$.

11. Решите задачи арифметическим способом.

а) Прямоугольник разделили на 8 равных частей. Сначала закрасили $\frac{1}{2}$ прямоугольника, потом $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{8}$. Весь ли прямоугольник закрасили?

б) Мальчик отпил $\frac{1}{6}$ чашки черного кофе и долил молока, затем отпил $\frac{1}{3}$ чашки и опять долил молока, потом отпил еще $\frac{1}{2}$ чашки и снова долил молока. Наконец, он допил кофе с молоком. Чего больше выпил мальчик – кофе или молока?

в) Двум машинисткам было поручено перепечатать рукопись. Первая машинистка перепечатала $\frac{3}{7}$ всей рукописи, а вторая – $\frac{5}{14}$ всей рукописи. Сколько страниц в рукописи, если первая машинистка перепечатала на 7 страниц больше, чем вторая?

г) В первом вагоне в $1\frac{1}{2}$ раза больше груза, чем во втором. Если из первого вагона выгрузить $5\frac{4}{5}$ т, а во второй добавить $14\frac{1}{5}$ т, то груза в вагонах будет поровну. Сколько тонн груза в каждом вагоне?

96. Множество положительных рациональных чисел как расширение множества натуральных чисел

Чтобы множество Q_+ положительных рациональных чисел являлось расширением множества N натуральных чисел, необходимо выполнение ряда условий.

Первое условие – это существование между N и Q_+ отношения включения. Докажем, что $N \subset Q_+$.

Пусть длина отрезка x при единичном отрезке e выражается натуральным числом m. Разобьем единичный отрезок на n равных частей. Тогда n-ая часть единичного отрезка будет укладываться в отрезке x точно $m \cdot n$ раз, т.е. длина отрезка x будет выражена дробью $\frac{m \cdot n}{n}$. Значит, длина отрезка x выражается и натуральным числом m, и положительным рациональным числом $\frac{m \cdot n}{n}$. Но это должно быть одно и то же число. Поэтому целесообразно считать, что дроби вида $\frac{m \cdot n}{n}$ являются записями натурального числа m. Следовательно, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}_+$.

Так, например, натуральное число 6 можно представить в виде следующих дробей: $\frac{6}{1}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{30}{5}$, и т.д.

Отношение между множествами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Q}_+$ представлено на рисунке 129.

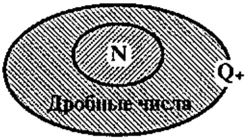


Рис. 129

Числа, которые дополняют множество натуральных чисел до множества положительных рациональных, называются *дробными.*

Второе условие, которое должно быть выполнено при расширении множества натуральных чисел, – это согласованность операций, т.е. результаты арифметических действий, произведенных по правилам, существующим для натуральных чисел, должны совпадать с результатами действий над ними, но выполненных по правилам, сформулированным для положительных рациональных чисел. Нетрудно убедиться в том, что и это условие выполняется.

Пусть a и b – натуральные числа, $a + b$ – их сумма, полученная по правилам сложения в $\mathbf{N}$. Вычислим сумму чисел a и b по правилу сложения в $\mathbf{Q}_+$. Так как $a = \frac{a}{1}$, $b = \frac{b}{1}$, то $a + b = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1} = a + b$.

Убедиться в том, что второе условие выполняется и для других операций, можно аналогично.

Третье условие, которое должно быть выполнено при расширении множества натуральных чисел – это выполнимость в $\mathbf{Q}_+$ операции, не всегда осуществимой в $\mathbf{N}$. И это условие соблюдено: деление, которое не всегда выполняется в множестве $\mathbf{N}$, в множестве $\mathbf{Q}_+$ выполняется всегда.

Сделаем еще несколько дополнений, раскрывающих взаимосвязи между натуральными и положительными рациональными числами.

1. Черту в записи дроби $\frac{m}{n}$ можно рассматривать как знак деления.

Действительно, возьмем два натуральных числа m и n и найдем их частное по правилу (4) деления положительных рациональных чисел:

$$m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m\cdot 1}{1\cdot n}=\frac{m}{n}.$$

Обратно, если дана дробь $\frac{m}{n}$, то ее можно рассматривать как частное натуральных чисел m и n: $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1}=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=m:n$.

2. Любую неправильную дробь можно представить либо в виде натурального числа, либо в виде смешанной дроби.

Пусть $\frac{m}{n}$ – неправильная дробь. Тогда $m > n$. Если m кратно n, то в этом случае дробь $\frac{m}{n}$ является записью натурального числа. Если число m не кратно n, то разделим m на n с остатком: $m = nq + r$, где $r < n$. Подставим $nq + r$ вместо m в запись $\frac{m}{n}$ и применим правило (1) сложения положительных рациональных чисел:

$$\frac{m}{n}=\frac{nq+r}{n}=\frac{nq}{n}+\frac{r}{n}=q+\frac{r}{n}.$$

Так как $r < n$, то дробь $\frac{r}{n}$ – правильная. Следовательно, неправильная дробь $\frac{m}{n}$ оказалась представленной в виде суммы натурального числа q и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Это действие называется выделением целой части из неправильной дроби. Например, $\frac{17}{5}=\frac{5\cdot 3+2}{5}=\frac{5\cdot 3}{5}+\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}$

Сумму натурального числа и правильной дроби принято записывать без знака сложения: т.е. вместо $3+\frac{2}{5}$ пишут $3\frac{2}{5}$ и называют такую запись *смешанной дробью*.

Справедливо также утверждение: всякую смешанную дробь можно записать в виде неправильной дроби. Например:

$$3\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5}{5}+\frac{2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}.$$

Упражнения

1. Какие из данных чисел являются дробными:

а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{145}{27}$; в) $\frac{17}{1}$; г) $\frac{34}{2}$?

2. Докажите, что вычитание, умножение и деление натуральны[х] чисел в множестве **N** и **Q+** согласованно.

3. Число 2 умножили на правильную дробь. Какое число получи[]лось – больше или меньше числа 2? А если 2 умножить на неправил[ь]ную дробь?

4. Может ли при умножении числа 3 на правильную дробь пол[у]читься число:

а) меньше 1; б) больше 1?

5. Решите арифметическим методом задачи.

а) В трех гаражах помещается 460 машин. Число машин в перво[м] гараже составляет $\frac{3}{4}$ числа машин, помещающихся во втором, а [в] третьем гараже в $1\frac{1}{2}$ раза больше машин, чем в первом. Сколько ма[]шин в каждом гараже?

б) Из двух пунктов, расстояние между которыми 25 км, вышли од[]новременно навстречу друг другу два пешехода. Один из них прохо[]дил в час на $\frac{3}{4}$ км больше другого. С какой скоростью шел каждый, если через 2 ч после выхода расстояние между ними стало $7\frac{1}{2}$ км?

97. Запись положительных рациональных чисел в виде десятичных дробей

В практической деятельности широко используются дроби, знаме[]натели которых являются степенями 10. Их называют *десятичными*.

Определение. ***Десятичной называется дробь вида*** $\frac{m}{10^n}$, ***где*** m ***и*** n ***– натуральные числа.***

Десятичные дроби принято записывать без знаменателя. Напри[]мер, дробь $\frac{367}{10^2}$ записывают в виде 3,67, а дробь $\frac{7}{10^3}$ – в виде 0,007.

Выясним, как образуется такая запись.

Пусть дана дробь $\frac{m}{10^n}$, где m, $n \in \mathbf{N}$. Представим ее числитель в следующем виде:

$$m = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Тогда, по правилам действий над степенями при $n < k$, получим:

$$\frac{m}{10^n} = \frac{a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0}{10^n} =$$

$$= a_k \cdot 10^{k-n} + a_{k-1} \cdot 10^{k-n-1} + \ldots + a_n + \frac{a_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}.$$

Сумма $a_k \cdot 10^{k-n} + \ldots + a_n$ является записью целого неотрицательного числа (обозначим его буквой A), а сумма $\frac{a_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}$ представляет дробную часть числа, ее принято записывать без знаменателя в виде $\overline{a_{n-1} \ldots a_0}$. Таким образом, дробь $\frac{m}{10^n}$ можно представить в следующем виде: $\overline{A,a_{n-1} \ldots a_0}$, т.е. при записи дроби $\frac{m}{10^n}$ последние n цифр десятичной записи числа m отделяют запятой. Если числитель содержит менее чем n десятичных знаков, то перед ним пишут столько нулей, чтобы получилась $n + 1$ цифра, после чего отделяют запятой n знаков, начиная с конца. Например,

$$\frac{47}{10^4} = \frac{00047}{10^4} = 0{,}0047.$$

Как известно, сравнение десятичных дробей и арифметические действия над ними легко выполнять, если дроби имеют один и тот же знаменатель.

В основе приведения десятичных дробей к общему знаменателю лежит следующее утверждение: если к десятичной дроби $\overline{A,a_{n-1} \ldots a_0}$ приписать справа любое число нулей, то получится десятичная дробь, равная данной.

Это свойство позволяет приводить десятичные дроби к общему знаменателю следующим образом: если у одной дроби после запятой стоит n цифр, а у другой p цифр, причем $n < p$, то для приведения их к общему знаменателю достаточно к первой дроби приписать справа $p - n$ нулей. Тогда у обеих дробей после запятой будет стоять поровну цифр, а это значит, что они имеют один и тот же знаменатель.

Пользуясь этим правилом, легко выполнять сравнение десятичных дробей, так как оно сводится к сравнению натуральных чисел: чтобы сравнить две десятичные дроби, надо уравнять в них число десятичных знаков после запятой, отбросить запятые и сравнить получивши-ся натуральные числа.

Например, $4{,}62517 > 4{,}623$, так как $4{,}623 = 4{,}62300$, а $4{,}62517 > 4{,}6230$, так как $462517 > 462300$.

Как известно, для дробей, имеющих одинаковые знаменатели, сложение и вычитание сводится к соответствующим операциям над их числителями. Это позволяет свести сложение и вычитание десятичных дробей к действиям над натуральными числами.

Например,

$$2{,}54+3{,}7126=2{,}5400+3{,}7126=\frac{25400}{10000}+\frac{37126}{10000}=\frac{625526}{10000}=6{,}2526.$$

Умножение и деление десятичных дробей не требует приведения их к общему знаменателю, но они также сводятся к соответствующим действиям над натуральными числами.

Среди десятичных дробей выделяют и часто используют дробь 0,01. Ее называют *процентом* и обозначают 1%. Запись p% обозначает $\frac{p}{100}$. Например, 25% – это дробь $\frac{25}{100}$, или 0,25.

Проценты были введены, когда не существовало десятичных дробей. Чтобы производить расчеты по займам, определяли прирост капитала из расчета 100 денежных единиц. Этот прирост и называли числом процентов (pro centum – на сто).

Простота сравнения и выполнения действий над десятичными дробями приводит к следующему вопросу: любую ли дробь вида $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbf{N}$) можно записать в виде конечной десятичной дроби, т.е. дроби, у которой после запятой стоит конечное число цифр? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы несократимая дробь $\frac{m}{n}$ была равна десятичной, необходимо и достаточно, чтобы в разложение ее знаменателя n на простые множители входили лишь простые числа 2 и 5.

Так, например, дробь $\frac{23}{80}$ можно записать в виде десятичной: она несократима и $80 = 2^4 \cdot 5$. Дробь $\frac{11}{15}$ несократима, но $15 = 3 \cdot 5$. Поскольку в разложение знаменателя этой дроби входит множитель, отличный от 2 и 5, то дробь $\frac{11}{15}$ нельзя записать в виде десятичной.

Дробь $\frac{1}{3}$ нельзя представить в виде конечной десятичной дроби. Но, деля 1 на 3, получаем, что $0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$. *Далее находим*, что $0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$; $0,333 < \frac{1}{3} < 0,334$ и т.д. Вообще для любого n имеем:

$$\underbrace{0,33...33}_{n\text{ цифр}} < \frac{1}{3} < \underbrace{0,33...34}_{n\text{ цифр}}$$

Вместо того чтобы писать бесконечное множество неравенств, говорят, что дроби $\frac{1}{3}$ соответствует *бесконечная десятичная дробь* 0,33...3... . Это означает, что если отбросить в бесконечной дроби все цифры, начиная с некоторой, то будем иметь число, меньшее $\frac{1}{3}$, а если в полученном числе увеличить последнюю цифру на 1, то будет число, большее $\frac{1}{3}$.

Любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной, приписав к ней справа последовательность нулей. Например, дробь 0,25 можно записать так: 0,25000...0... . Здесь для всех цифр, начиная с некоторой, получится число, не превосходящее 0,25 (например, если оставить лишь одну цифру после запятой, то получится 0,2, меньшее 0,25, а если оставить три цифры после запятой, то будет число 0,250, равное 0,25). Если же после отбрасывания увеличить последнюю цифру на 1, то имеем число, большее 0,25 (например, 0,3 *или* 0,251).

Бесконечные десятичные дроби, которые получаются при записи положительного рационального числа, обладают особенностью – они являются *периодическими*. Это значит, что, начиная с некоторой цифры, они образуются бесконечным повторением одной и той же группы цифр. Например, число $\frac{3}{11}$ выражается бесконечной десятичной дробью 0,272727...27..., а число $\frac{8}{55}$ – бесконечной десятичной дробью 0,1454545...45.... Для краткости первую из дробей пишут в виде 0,(27), а вторую – в виде 0,1(45). В скобки заключают повторяющуюся группу цифр, которую называют периодом этой дроби. Отметим, что вместо 0,(27) можно было написать и 0,2(72), но эта запись более длинная.

Приведенные рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема. Любое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью.

Доказательство. Пусть рациональное число представлено несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Чтобы преобразовать ее в десятичную, надо выполнить деление натурального числа m на натуральное число n. При этом будут остатки, меньшие n, т.е. числа вида 0, 1, 2, ... $n-1$. Если хотя бы один из остатков окажется равным нулю, то после деления получится конечная десятичная дробь (или, что то же самое, бесконечная десятичная дробь, заканчивающаяся последовательностью нулей). Если же все остатки отличны от нуля, то деление будет представлять собой бесконечный процесс, но количество различных остатков конечно, и поэтому, начиная с некоторого шага, какой-то остаток повторится, что приведет к повторению цифр в частном.

Упражнения

1. Запишите дроби $\frac{1234}{10}$, $\frac{6969}{10}$, $\frac{37}{10}$ в виде десятичных.

2. Запишите числа 7,11; 0,45; 13,745 в виде несократимых обыкновенных дробей.

3. Какими будут численные значения следующих величин, если в качестве единицы длины взять 1 м:

а) 23 см 2 мм; в) 90 дм 16 см 8 мм;
б) 5 м 17 дм; г) 1 км 120 м?

4. Выразите в килограммах:

а) 1,52 т; б) 0,38 т; в) 13,6 г; г) 426,5 г.

5. Выразите в квадратных сантиметрах:

а) 3,548 дм^2; б) 3,9 м^2; в) 635 мм^2.

6. Сформулируйте правила сложения и вычитания десятичных дробей; выполните действия:

а) $8{,}23 + 3{,}568$; б) $7{,}395 - 6{,}27$;
в) $12{,}364 + 17{,}729$; г) $15{,}36 - 9{,}68$.

7. Сформулируйте правило умножения двух десятичных дробей и объясните, почему в произведении запятой отделяют столько последних цифр, сколько их отделено в первом и втором множителях вместе.

8. Сформулируйте правило деления десятичных дробей; проиллюстрируйте его на примере деления числа 4,62 на 0,2.

9. Расстояние от Земли до Солнца 150 млн. км. Скорость света 300 тыс. км/с. За сколько минут луч Солнца достигнет Земли?

10. Вычислите наиболее простым способом:

а) $49{,}5 + 2{,}738 - 6{,}856 + (7{,}956 - 2{,}638)$;

б) $4{,}3 - 3{,}5 + 1{,}44:3{,}6 + 3{,}6:1{,}44\cdot(0{,}1 - 0{,}02)$.

11. Не выполняя вычислений, сравните следующие произведения:

а) $19{,}91\cdot 199{,}2$ *и* $1{,}991\cdot 1992$;

б) $1{,}992\cdot 199{,}3$ и $1{,}992\cdot 1993$.

12. Что больше: 35% от 40 или 40% от 35?

13. Увеличьте число:

а) 60 на 10%; б) 80 на 2,5%.

14. Число x увеличили на 45%. Во сколько раз увеличили число?

15. Число x увеличили в 2,4 раза. На сколько процентов увеличили число?

16. Туристы прошли 75% маршрута и им осталось пройти еще 5,5 км. Какова длина маршрута?

17. Какие из следующих чисел можно записать в виде конечных десятичных дробей:

а) $\dfrac{7}{352}$; б) $\dfrac{12}{56}$; в) $\dfrac{21}{75}$; г) $\dfrac{12}{96}$.

18. Следующие обыкновенные дроби запишите в виде десятичных:

а) $\dfrac{4}{35}$; б) $\dfrac{7}{24}$; в) $\dfrac{123}{82}$; г) $\dfrac{48}{15}$.

19. Решите задачи арифметическим методом.

а) Турист прошел в первый день $\dfrac{3}{8}$ всего маршрута, во второй день – 40% остатка, после чего ему осталось пройти на 6,5 км больше, чем он прошел во второй день? Какова длина маршрута?

б) На уборке улицы работают две машины. Первая из них может убрать всю улицу за 40 мин, второй для этого требуется 75% времени первой. Обе машины начали работу одновременно. После совместной работы в течение 0,25 часа вторая машина прекратила работу. За сколько времени после этого первая машина закончила уборку улицы?

20. Известно, что любое положительное рациональное число можно изобразить точкой на координатном луче. Исчерпывают ли точки с положительными рациональными координатами весь координатный луч?

98. Действительные числа

Одним из источников появления десятичных дробей является деление натуральных чисел, другим – измерение величин. Выясним, например, как могут получиться десятичные дроби при измерении длины отрезка.

Пусть x – отрезок, длину которого надо измерить, e – единичн отрезок. Длину отрезка x обозначим буквой X, а длину отрезка буквой E. Пусть отрезок x состоит из n отрезков, равных e, и отрезка

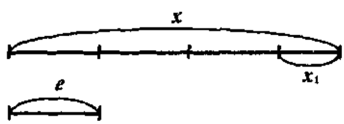


Рис. 130

который короче отрезка e (рис. 13 т.е. $n \cdot E < X < (n + 1) \cdot E$. Числа n и n есть приближенные значения длины о резка x при единице длины E с недо татком и с избытком с точностью до 1.

Чтобы получить ответ с больш точностью, возьмем отрезок e_1 – де тую часть отрезка e и будем уклад вать его в отрезке x_1. При этом возможны два случая.

1) Отрезок e_1 уложился в отрезке x_1 точно n раз. Тогда длина n о резка x выражается конечной десятичной дробью: $X = \left(n + \frac{n_1}{10}\right) \cdot E$ $= \overline{n,n_1} \cdot E$. Например, $X = 3{,}4 \cdot E$.

2) Отрезок x_1 оказывается состоящим из n отрезков, равных e_1, отрезка x_2, который короче отрезка e_1. Тогда $\overline{n,n_1} \cdot E < X < \overline{n,n_1n_1'} \cdot E$ где $\overline{n,n_1}$ и $\overline{n,n_1n_1'}$ – приближенные значения длины отрезка x с н достатком и с избытком с точностью до 0,1.

Ясно, что во втором случае процесс измерения длины отрезка можно продолжать, взяв новый единичный отрезок e_2 – сотую час отрезка e.

На практике этот процесс измерения длины отрезка на каком-т этапе закончится. И тогда результатом измерения длины отрезка бу дет либо натуральное число, либо конечная десятичная дробь. Есл же представить этот процесс измерения длины отрезка в идеале (как делают в математике), то возможны два исхода:

1) На k-том шагу процесс измерения окончится. Тогда длина от резка x выразится конечной десятичной дробью вида $\overline{n,n_1n_2 \ldots n_k}$.

2) Описанный процесс измерения длины отрезка x продолжается бесконечно. Тогда отчет о нем можно представить символом $\overline{n,n_1n_2 \ldots n_k \ldots}$, который называют бесконечной десятичной дробью.

Как убедиться в возможности второго исхода? Для этого достаточно произвести измерение длины такого отрезка, для которого известно, что его длина выражена, например, рациональным числом $5\frac{2}{3}$. Если бы оказалось, что в результате измерения длины такого отрезка получается конечная десятичная дробь, то это означало бы, что число $5\frac{2}{3}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби, что невозможно: $5\frac{2}{3} = 5{,}666\ldots$

Итак, при измерении длин отрезков могут получаться бесконечные десятичные дроби. Но всегда ли эти дроби периодические? Ответ на этот вопрос отрицателен: существуют отрезки, длины которых нельзя выразить бесконечной периодической дробью (т.е. положительным рациональным числом) при выбранной единице длины. Это было важнейшим открытием в математике, из которого следовало, что рациональных чисел недостаточно для измерения длин отрезков.

Теорема. Если единицей длины является длина стороны квадрата, то длина диагонали этого квадрата не может быть выражена положительным рациональным числом.

Доказательство. Пусть длина стороны квадрата выражается числом 1. Предположим противное тому, что надо доказать, т.е., что длина диагонали AC квадрата $ABCD$ выражается несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Тогда по теореме Пифагора, выполнялось бы равенство $1^2 + 1^2 = \frac{m^2}{n^2}$. Из него следует, что $m^2 = 2n^2$. Значит, m^2 – четное число, тогда и число m – четно (квадрат нечетного числа не может быть четным). Итак, $m = 2p$. Заменив в равенстве $m^2 = 2n^2$ число m на $2p$, получаем, что $4p^2 = 2n^2$, т.е. $2p^2 = n^2$. Отсюда следует, что n^2 четно, следовательно, n – четное число. Таким образом, числа m и n четны, значит, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2, что противоречит предположению о ее несократимости. Установленное противоречие доказывает, что если единицей длины является длина стороны квадрата, то длину диагонали этого квадрата нельзя выразить рациональным числом.

Из доказанной теоремы следует, что существуют отрезки, длины которых нельзя выразить положительным числом (при выбранной единице длины), или, другими словами, записать в виде бесконечной периодической дроби. И значит, получаемые при измерении длин отрезков бесконечные десятичные дроби могут быть непериодическими.

Считают, что бесконечные непериодические десятичные дроби являются записью новых чисел – *положительных иррациональных чисел*. Так как часто понятия числа и его записи отождествляют, то говорят, что бесконечные непериодические десятичные дроби – это и есть положительные иррациональные числа.

Мы пришли к понятию положительного иррационального числа через процесс измерения длин отрезков. Но иррациональные числа можно получить и при извлечении корней из некоторых рациональных чисел. Так, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{24}$ – это иррациональное числа. Иррациональными являются также lg 5, sin 31, числа $\pi = 3{,}14...$, $e = 2{,}7828...$ и другие.

Множество положительных иррациональных чисел обозначают символом $\mathbf{J}_+$.

Объединение двух множеств чисел: положительных рациональных и положительных иррациональных называют множеством положительных действительных чисел и обозначают символом $\mathbf{R}_+$. Таким образом, $\mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{J}_+ = \mathbf{R}_+$. При помощи кругов Эйлера эти множества изображены на рисунке 131.

Рис. 131

Любое положительное действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью – периодической (если оно является рациональным), либо непериодической (если оно является иррациональным).

Действия над положительными действительными числами сводятся к действиям над положительными рациональными числами.

Сложение и умножение положительных действительных чисел обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, а умножения дистрибутивно относительно сложения и вычитания.

С помощью положительных действительных чисел можно выразить результат измерения любой скалярной величины: длины, площади, массы и т.д. Но на практике часто нужно выразить числом не результат измерения величины, а ее изменение. Причем ее изменение может происходить различно – она может увеличиваться, уменьшаться или оставаться неизменной. Поэтому, чтобы выразить изменение величины, кроме положительных действительных чисел нужны иные числа, а для этого необходимо расширить множество $\mathbf{R}_+$, присоединив к нему число 0 (нуль) и отрицательные числа.

Объединение множества положительных действительных чисел с множеством отрицательных действительных чисел и нулем есть множество **R** *всех действительных чисел.*

Сравнение действительных чисел и действия над ними выполняются по правилам, известным нам из школьного курса математики.

Упражнения

1. Опишите процесс измерения длины отрезка, если отчет о нем представляется дробью:

а) 3,46; б) 3,(7); в) 3,2(6).

2. Седьмая часть единичного отрезка укладывается в отрезке a 13 раз. Конечной или бесконечной дробью будет представлена длина этого отрезка? Периодической или непериодической?

3. Дано множество: $\left\{7;\ 8\frac{3}{7};\ \sqrt{8};\ 35{,}91;\ -12{,}5;\ -\sqrt{37};\ 0;\ 0{,}123;\ 4136\right\}$.

Можно ли разбить его на два класса: рациональные и иррациональные?

4. Известно, что любое число можно изобразить точкой на координатной прямой. Исчерпывают ли точки с рациональными координатами всю координатную прямую? А точки с действительными координатами?

99. Основные выводы § 19

При изучении материала данного параграфа мы уточнили многие известные из школьного курса математики *понятия*, связав их с измерением длины отрезка. Это такие понятия, как:
- дробь (правильная и неправильная);
- равные дроби;
- несократимая дробь;
- положительное рациональное число;
- равенство положительных рациональных чисел;
- смешанная дробь;
- бесконечная периодическая десятичная дробь;
- бесконечная непериодическая десятичная дробь;
- иррациональное число;
- действительное число.

Мы выяснили, что отношение равенства дробей есть отношение эквивалентности и воспользовались этим, определяя понятие положительного рационального числа. Выяснили также, как связано с измерением длин отрезков сложение и умножение положительных рациональных чисел и получили формулы для нахождения их суммы и произведения.

Определение отношения «меньше» на множестве Q_+ позволило назвать его основные свойства: оно упорядоченное, плотное, в нем нет наименьшего и наибольшего числа.

Мы доказали, что множество Q_+ положительных рациональных чисел удовлетворяет всем тем условиям, которые позволяют его считать расширением множества **N** натуральных чисел.

Введя десятичные дроби, мы доказали, что любое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью.

Бесконечные непериодические дроби считают записями иррациональных чисел.

Если объединить множества положительных рациональных и рациональных чисел, то получаем множество положительных дей вительных чисел: $\mathbf{Q}_+ \cap \mathbf{J}_+ = \mathbf{R}_+$.

Если к положительным действительным числам присоединить рицательные действительные числа и нуль, то получаем множество всех действительных чисел.

Глава IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ВЕЛИЧИНЫ

В последние годы наметилась тенденция к включению значительного по объему геометрического материала в начальный курс математики. Но для того, чтобы учитель мог познакомить учащихся с различными геометрическими фигурами (как плоскости, так и пространства), мог научить их правильно изображать геометрические фигуры, ему нужна соответствующая математическая подготовка. Безусловно, нужны знания об истории возникновения и развития геометрии, так как ученик в процессе развития геометрических представлений проходит, в свернутом виде, основные этапы создания геометрической науки. Учитель должен быть знаком с ведущими идеями курса геометрии, знать основные свойства геометрических фигур, уметь их построить.

В освоении этого материала учителю поможет данная глава пособия. В ней с учетом подготовки, полученной студентами в школьном курсе математики, представлен геометрический материал, необходимый для обучения младших школьников элементам геометрии.

§20. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИИ

100. Возникновение геометрии

Геометрия зародилась в Древнем Египте как набор правил решения практических задач, возникавших в строительстве, при распределении земельных участков, измерении площадей, объемов и других величин. Свидетельством этому являются египетские пирамиды, построенные около 4800 лет назад, их строительство требовало достаточно сложных и точных геометрических расчетов. Но особенно важной была задача распределения земельных наделов. Этим занимались специальные люди – землемеры, которых греки называли гарпедонаптами, т.е. натягивателями веревок, так как при распределении земли использовались веревки. Но чтобы знать, где и как их натягивать, надо было иметь план полей. Так практическая задача распределения участков земли привела к возникновению науки о землемерии.

Обширные сведения о свойствах фигур, накопленные египтянами, были заимствованы греками. Произошло это в VII–V вв. до н.э. А так как особенно важной задачей было землемерие, то греки назвали науку о фигурах геометрией, так как с греческого «геос» – земля, а «метрио» – измеряю.

К сказанному можно добавить, что многие геометрические понятия возникли в результате многократных наблюдений реальных предметов той или иной формы, т.е. познавая окружающий мир, люди знакомились и с простейшими геометрическими формами. Овладению этим знанием способствовало изготовление орудий, имеющих сравнительно правильную геометрическую форму, строительство жилья, шитье одежды, изготовление посуды, украшений.

Огромное влияние на развитие геометрических представлений оказали систематические астрономические наблюдения. Они способствовали возникновению понятий шара, окружности, угла, угловой меры.

Развитие землемерия, обобщение накопленного опыта наблюдений привело к созданию практических правил измерения земельных участков, нахождения площадей и объемов простейших фигур, правил, необходимых для строительства, и др. Так, формулы для вычисления площадей земельных участков, имеющих форму треугольника, трапеции, встречаются у древних египтян, вавилонян. К XVII–XVI вв. до н.э. были установлены такие ее факты, как теорема Пифагора, найдено выражение для подсчета объема шара и многие другие. Но выступали они не как логически доказанные утверждения, а как выводы из опыта.

Таким образом, геометрия возникла как прикладная наука, как собрание правил, необходимых для решения практических задач: сравнения фигур, нахождения геометрических величин, простейших геометрических построений.

Практические правила постепенно приводились в систему. Кроме того, одни правила стали выводиться из других и обосновываться посредством рассуждений. Возникло доказательство, правила стали превращаться в теоремы, которые доказывались без прямых ссылок на опыт. Вообще совершенствование геометрических знаний шло по пути их отделения от опыта – в результате предметом геометрии стали не реальные, а идеальные фигуры, т.е. фигуры, являющиеся образами предметов, в которых абстрагируются от всего, кроме формы. Более того, эти фигуры стали дополняться свойствами, которыми реальные предметы не обладают. Например, понятие прямой, возникшее как отражение такого свойства реальных предметов, как протяженность, было дополнено представлением о ее бесконечности.

Получение новых геометрических утверждений при помощи рассуждений относится к VI в. до н.э. и связано с именем древнегреческого математика Фалеса. Считают, что им доказаны свойства равнобедренного треугольника, равенство вертикальных углов и ряд других фактов.

К III в. до н.э. геометрия становится дедуктивной наукой, одновременно решая многие практические задачи: дает точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами, позволяет различными способами сравнивать фигуры, по одним свойствам фигуры делать выводы о других ее свойствах и т.д.

Основные достижения в области математики были систематизированы около 300 лет до н.э. греческим ученым Евклидом и изложены в его знаменитом труде «Начала», состоящем из тринадцати книг. Это сочинение является первым дошедшим до нас строгим логическим построением геометрии.

Каждая книга «Начал» начинается с определений основных понятий. Так, в книге по геометрии 35 определений. Среди них определения точки, линии, прямой, поверхности.

Точка есть то, что не имеет частей.

Линия есть длина без ширины.

Прямая линия есть та, которая одинаково лежит относительно всех своих точек.

Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.

Кроме перечисленных даются определения плоского и прямого углов, перпендикуляра, тупого и острого углов, круга, окружности, треугольника и его видов, четырехугольника и его видов и др. Завершает этот список определение параллельных прямых: «Параллельные прямые суть те, которые лежат в одной плоскости и, будучи продолженными в обе стороны, нигде не встречаются».

За определениями следует пять постулатов следующего содержания. Требуется, чтобы:

1) от каждой точки до каждой другой можно было провести прямую;

2) ограниченную прямую можно было продолжить неопределенно;

3) из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;

4) все прямые углы были равны;

5) если две прямые при пересечении с третьей образуют с одной стороны внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекались бы при достаточном продолжении с этой стороны.

Затем формулировались аксиомы:

1) равные одному и тому же третьему также равны и между собой;

2) если к равным прибавить равные, то целые будут равны;

3) если от равных отнять равные, то полученные остатки бу[дут] равны;

4) совмещающиеся друг с другом равны;

5) целое больше своей части.

Видим, что начальные определения евклидовой геометрии – это оп[и]сания ее основных объектов: точки, прямой, плоскости, угла и т.д. П[о]стулаты выражают возможность основных построений. При этом пр[я]мая мыслится как непрерывная, неограниченно делимая, но не состоящ[ая] из точек, что соответствует наглядному представлению – прямую пр[о]водят по линейке, а не строят по точкам. Аксиомы, сформулированн[ые] Евклидом, относятся к величинам: длине отрезка, величине угла, пл[о]щади фигуры. У Евклида «равные» понимались как «равновеликие».

За постулатами и аксиомами, которые рассматривались как утв[ер]ждения, принимаемые без доказательств, формулировались теоремы [и] задачи на построение. Они располагались в строгой последовательн[о]сти так, что каждое последующее опирается на предыдущее, а также [на] постулаты и аксиомы.

Определения, постулаты, аксиомы и дальнейшие выводы в геоме[т]рии Евклида имели наглядный, опирающийся на практику смыс[л], хотя выражали его в идеализированном, абстрактном виде.

Таким образом, геометрия сложилась как наука о пространстве[н]ных формах и отношениях, рассматриваемых отвлеченно от их мат[е]матического содержания. В Древней Греции она сформировалась [в] абстрактную логическую систему, в основе которой лежат первон[а]чальные понятия и аксиомы, новые факты формулируются в ви[де] теорем и выводятся дедуктивным способом, а каждое новое понят[ие] вводится с помощью определения на основе ранее введенных понятий.

«Начала» Евклида оставили глубокий след в истории и в течен[ие] многих веков служили образцом научного изложения математики.

Упражнения

1. Площадь круга египтяне считали равной площади квадрат[а], сторона которого составляет $\frac{8}{9}$ диаметра. Чему при таких подсч[е]тах оказывается равным число π?

2. Древнегреческий математик Фалес доказал, что если в прям[о]угольном треугольнике ABC гипотенузу AC разделить точкой O п[о]полам, то $AO = BO$. Можете ли вы доказать это утверждение?

3. Узнав, что стороны треугольника равны 3, 4 и 5, ученик, с[о]славшись на теорему Пифагора, сделал заключение, что данный тр[е]угольник прямоугольный. Обоснованно ли его заключение?

4. В каждой нижеприведенной теореме выделите условие и заключение:

а) хорда, не проходящая через центр окружности, меньше диаметра этой окружности;

б) углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны между собой, если они оба острые или оба тупые;

в) для того чтобы два угла в сумме составляли 180°, достаточно, чтобы они были смежными.

5. Опровергните следующие утверждения:

а) если диагонали четырехугольника перпендикулярны между собой, то данный четырехугольник есть ромб;

б) если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого, то такие треугольники равны между собой.

6. Для каждой из приведенных ниже теорем сформулируйте обратное утверждение и установите, истинно ли оно:

а) сумма смежных углов равна 180°;

б) соответственные углы, получающиеся при пересечении двух параллельных прямых третьей, равны;

в) если в треугольнике один угол тупой или прямой, то два других – острые.

101. О геометрии Лобачевского и аксиоматике евклидовой геометрии

После III в. до н.э. геометрия развивалась медленно – требовались новые идеи и методы, необходимо было развитие понятия числа и алгебры. Первые шаги в этом направлении были сделаны в Греции (работы Диофанта, III в.), а затем в Индии, где были открыты десятичная система счисления, отрицательные и иррациональные числа.

В IX в. благодаря работам Мухаммеда аль-Хорезми дальнейшее развитие получила алгебра. Позже таджикский поэт и ученый Омар Хайям (конец XI – начало XII в.) дал определение числа как отношения любых величин. Через 600 лет это же определение было дано Ньютоном во «Всеобщей арифметике». В геометрии новые идеи и методы появились в XVII в. Они были обусловлены развитием алгебры и созданием математического анализа. Принадлежали эти идеи французскому философу и математику Рене Декарту. В своем сочинении «Геометрия» он впервые представил метод координат на плоскости, установив тем самым взаимосвязь геометрии с алгеброй.

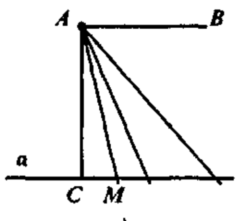
Важным направлением в развитии геометрии был поиск логически безупречного построения геометрии. Дело в том, что аксиоматически построенная теория должна удовлетворять определенным требованиям математической строгости. Они не абсолютны и в разные пер… истории были различными. Эти требования заставили обратить … бое внимание на пятый постулат геометрии Евклида – его тру… было принять очевидным, как остальные аксиомы и постулаты. … этому возникло стремление вывести его из остальных постулат… аксиом. Однако попытки, которые длились более двух тысяч лет, … ли безуспешными, хотя и сыграли положительную роль в разви… геометрии, так как были сформулированы и доказаны теоремы, … крывающие новые свойства геометрических фигур.

Переворот в геометрии произошел в начале XIX в., когда неско… ко ученых пришли к мысли о существовании геометрии, отличной … евклидовой. Первым, кто построил эту геометрию, был Н.И.Лоба… ский, профессор Казанского университета. Его рассуждения сводил… к следующему.

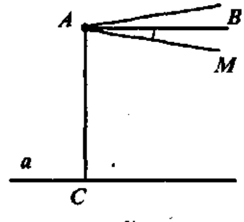
Рассмотрим в плоскости прямую a и проведем из точки A перп… дикуляр AC к прямой a и луч AB, перпендикулярный AC (рис. 13… Возьмем некоторую прямую AM, пересекающую прямую a в точке … При неограниченном удалении точки M по прямой a прямая AM … дет приближаться к некоторому предельному положению. Логиче… могут представиться две возможности:

а) луч AM совпадает с лучом AB;

б) луч AM составит с лучом AB некоторый острый угол.



а)



б)

Рис. 132

Случай а) соответствует аксиоме параллельности: AB – единствен… прямая, проходящая через A и не пересекающая a.

Допуская, что имеет место случай б), Лобачевский начал выводи… различные следствия из этого допущения, надеясь, что рано или позд… придет к противоречию, чем и завершится доказательство. Однак… доказав несколько десятков теорем, он так и не обнаружил логически… противоречий. И тогда Лобачевский высказал мысль: если замени… пятый постулат его отрицанием (т.е. принять, что через точку вне пр… мой можно провести более одной прямой, ей параллельной) и сохр… нить все остальные аксиомы евклидовой геометрии, то получим нову…

геометрию, которую он назвал «воображаемой», а позднее она была названа его именем – геометрией Лобачевского.

Все теоремы, доказываемые в евклидовой геометрии без использования пятого постулата, сохраняются и в геометрии Лобачевского. Например, вертикальные углы равны; углы при основании равнобедренного треугольника равны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр. Теоремы же, при доказательстве которых применяется пятый постулат, в геометрии Лобачевского видоизменяются, например сумма величин внутренних углов любого треугольника меньше 180°, не существует подобных треугольников: если углы двух треугольников соответственно равны, то эти треугольники равны. Так как в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов четырехугольника меньше 360°, то в ней не существует прямоугольников. Позже было доказано, что аксиоматика, предложенная им, независима и непротиворечива.

Открытие, сделанное Н.И.Лобачевским, сыграло огромную роль в развитии математики и физики. В его работах была не только полностью решена проблема независимости аксиомы параллельности от других аксиом евклидовой геометрии, но и было показано, что аксиомы могут подвергаться изменению, что привлекло внимание ученых к вопросам аксиоматики геометрии. Кроме того, было установлено, что *геометрия Лобачевского точно описывает* взаимосвязь пространства и времени, открытую А.Эйнштейном в теории относительности.

После открытия Н.И.Лобачевского стало ясно, что пятый постулат (аксиома параллельности) не может быть исключен из списка аксиом и постулатов, сформулированных Евклидом. Общая тенденция к повышению строгости построения математических теорий во второй половине XIX в. сказалась и в геометрии. Она выразилась в стремлении дополнить систему аксиом евклидовой геометрии, включив в нее все предложения, которые неявно использовались при доказательстве теорем.

Итог всем исследованиям в этой области подвел крупнейший немецкий математик Д.Гильберт. Произошло это в конце XIX столетия. В своей книге «Основания геометрии» он дает полный список аксиом евклидовой геометрии и доказывает непротиворечивость этой аксиоматики. Сформулированные им аксиомы относятся к точкам, прямым, плоскостям и отношениям между ними, которые выражаются словами «принадлежит», «лежать между», «конгруэнтен». Что такое точка, прямая и плоскость и каков конкретный смысл указанных отношений, Гильберт не уточняет. Все, что предполагается известным о них, выражено в аксиомах. Они разбиты на пять групп.

Первая группа – *аксиомы принадлежности.* В них устанавливаются отношения между точками, прямыми и плоскостями.

1. Через две точки проходит одна и только одна прямая.

2. На каждой прямой лежат по меньшей мере две точки.

3. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

В связи с данными тремя аксиомами сделаем одно замечание. И вестно, что на прямой бесконечное множество точек, но в аксиом отмечается, что их по меньшей мере две. Поэтому бесконечно множества точек на прямой надо будет доказывать, исходя из акси первой и последующих групп.

Для построения планиметрии ограничиваются указанными акси мами принадлежности. Для построения стереометрии к ним прис диняются следующие.

4. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проход одна и только одна плоскость.

5. Если две точки прямой принадлежат некоторой плоскости, т и все точки этой прямой принадлежат указанной плоскости.

6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют п крайней мере еще одну общую точку.

7. Существует по крайней мере 4 точки, не лежащие в одн плоскости.

Вторая группа – *аксиомы порядка*. Они определяют понятие «лежа между» и выражают свойства взаимного расположения точек на пр мой и плоскости.

1. Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит меж точками C и A.

2. Для любых двух точек прямой A и B существует на этой прям такая точка C, что точка B лежит между точками A и C.

3. Из трех точек на прямой не более чем одна лежит между дву другими.

4. Пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой, и прямая н проходит ни через одну из этих точек. Если при этом прямая a пере кает отрезок AB (то есть проходит через точку, лежащую между то ками A и B), то она пересекает один из отрезков BC или AC.

Аксиомы первых двух групп позволяют определить понятие отр ка, луча, угла. *Отрезок – это система двух точек A и B, принадлежащ прямой a. Точки, расположенные между A и B, называются точкам лежащими внутри отрезка AB, точки A и B называются концами о резка AB.*

Луч с началом O – это совокупность всех точек прямой, лежащих одной стороны от O.

Угол – это совокупность двух лучей с общим началом, лежащих н разных прямых.

Третья группа – *аксиомы равенства (конгруэнтности)*. Они опреде ляют равенство отрезков и углов.

1. На данной прямой по данную сторону от данной на ней точки можно отложить отрезок, равный данному, и притом единственным образом.

2. Два отрезка, порознь равные третьему, равны между собой.

3. Пусть на некоторой прямой точка B лежит между точками A и C и на некоторой другой или той же прямой точка B_1 лежит между двумя точками A_1 и C_1. Если при этом отрезок AB равен отрезку A_1B_1 и отрезок BC равен B_1C_1, то $AC = A_1C_1$.

4. По данную сторону от данного луча можно отложить данный угол и притом единственным образом.

5. Два угла, порознь равные третьему, равны между собой.

6. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, A_1, B_1, C_1 – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Четвертая группа состоит из *аксиомы непрерывности.*

1. Если все точки прямой произвольным образом разбить на два класса так, что каждая точка первого класса лежит левее каждой точки второго класса, тогда непременно либо в первом классе есть самая правая точка (и во втором нет самой левой), либо во втором классе есть самая левая точка (и в первом нет самой правой).

Образно говоря, в этой аксиоме утверждается, что прямая не имеет проколов, что она непрерывна. Действительно, если на числовой прямой выколоть только одну точку – нуль, то числа, соответствующие оставшимся точкам, разделятся на два класса: отрицательные и положительные. И в первом классе (среди отрицательных чисел) нет самого правого (самого большого), а во втором – самого левого.

Пятая группа состоит из единственной аксиомы – *аксиомы параллельности.*

1. В плоскости через точку вне данной прямой нельзя провести более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Совокупность всех теорем, выводимых из пяти групп аксиом, составляет евклидову геометрию.

Вообще в основу этой геометрии могут быть положены разные аксиоматики (система основных понятий и аксиом), но, несмотря на их различия, в геометрии изучают одни и те же фигуры и получают одни и те же их свойства. Аксиоматическое построение геометрии осуществляется по одним и тем же правилам:

1. Выделяются основные понятия геометрии, которые принимаются без определений.

2. Формулируются аксиомы, в которых раскрываются свойства основных понятий, нужные для построения геометрии, т.е. аксиомы по существу являются неявными определениями основных понятий (в остальном природа основных понятий безлична). Система аксиом должна удовлетворять ряду условий.

3. Дальнейшее построение геометрии ведется в соответствии со следующими требованиями:

а) всякое геометрическое понятие (термин), если оно не основное, определяется через основные или ранее определенные понятия;

б) всякое геометрическое предложение (теорема, признак, следствие) доказывается на основе аксиом или ранее доказанных теорем.

Чертежи при таком построении геометрии играют вспомогательную роль.

Упражнения

1. Проанализируйте аксиоматики, положенные в основу школьных учебников геометрии, ответив на следующие вопросы:

а) Какие понятия и отношения выбраны в качестве основных?

б) Какие группы аксиом выделены? Составьте список всех аксиом.

в) В чем сходство и различие школьной аксиоматики и аксиоматики Гильберта?

2. Верно ли, что:

а) Каждое понятие геометрии можно определить с помощью других, более простых понятий?

б) В геометрии существуют понятия, которые принимаются без определения?

в) Аксиома – это предложение, которое не требует доказательства?

102. Основные выводы § 20

Геометрия зародилась в Древнем Египте пять-шесть тысяч лет назад и первоначально была набором правил, которые помогали измерять длины, площади, объемы и решать другие практические задачи.

В Древней Греции геометрия стала теоретической наукой. В III в. до н.э. Евклид построил ее на аксиоматической основе. Эта форма оказалась настолько совершенной, что две тысячи лет работа Евклида «Начала» была основным руководством по геометрии, которую стали называть евклидовой.

Переворот в геометрии произошел в XIX в., когда Н.К.Лобачевский построил «воображаемую геометрию», в которой выполнялась аксиома: на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную. Она заменила пятый постулат Евклида. Эта замена и привела к новой геометрии – неевклидовой. Позже были созданы и другие геометрии. С появлением неевклидовых геометрий возникла проблема строгого логического обоснования самой евклидовой геометрии. Наибольшую известность в этой области получили работы немецкого математика

Д. Гильберта – ему удалось построить аксиоматику евклидовой геометрии, которая широко используется в настоящее время.

§21. СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Геометрическую фигуру определяют как любое множество точек.

Отрезок, прямая, круг, шар – геометрические фигуры.

Если все точки геометрической фигуры принадлежат одной плоскости, она называется плоской. Например, отрезок, прямоугольник – это плоские фигуры. Существуют фигуры, не являющиеся плоскими. Это, например, куб, шар, пирамида.

Так как понятие геометрической фигуры определено через понятие множества, то можно говорить о том, что одна фигура включена в другую (или содержится в другой), можно рассматривать объединение, пересечение и разность фигур.

Например, объединением двух лучей AB и MK (рис. 133) является прямая KB, а их пересечение есть отрезок AM.

Рис. 133

Различают выпуклые и невыпуклые фигуры. Фигура называется выпуклой, если она вместе с любыми двумя своими точками содержит также соединяющий их отрезок.

Фигура F_1, изображенная на рисунке 134, выпуклая, а фигура F_2 – невыпуклая.

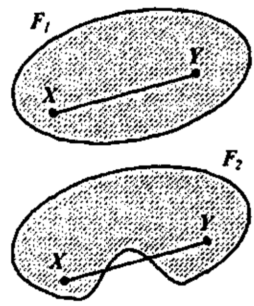


Рис. 134

Выпуклыми фигурами являются плоскость, прямая, луч, отрезок, точка. Нетрудно убедиться в том, что выпуклой фигурой является круг (рис. 135). Если продолжить отрезок XY до пересечения с окружностью, то получим хорду AB. Так как хорда содержится в круге, то отрезок XY тоже содержится в круге и, значит, круг – выпуклая фигура.

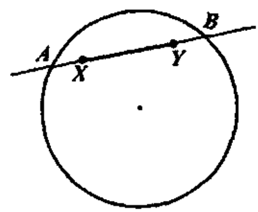


Рис. 135

Для многоугольников известно другое определение: многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону. Так как равносильность этого определения и данного выше для многоугольника доказана, то можно пользоваться и тем, и другим.

Мы вспомнили понятие геометрической фигуры, уточнили, какие фигуры называются плоскими, выпуклыми и невыпуклыми. Далее, основываясь на этих понятиях, рассмотрим другие геометрическ фигуры, изучаемые в школьном курсе планиметрии. Рассмотрим определения и основные свойства, принимая их без доказательст Знание этого материала и умение применять к решению несложн геометрических задач является той основой, на которой мож строить методику обучения младших школьников элементам ге метрии.

103. Углы

Напомним, что *угол* – это геометрическая фигура, которая состо из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются ст ронами угла, а их общее начало – его вершиной.

Угол обозначают по-разному: указывают либо его вершину, ли его стороны, либо три точки: вершину и две точки на сторонах угл $\angle A, \angle(k, l), \angle ABC$.

Угол называется *развернутым*, если его стороны лежат на одно прямой.

Угол, составляющий половину развернутого угла, называется *пр мым*. Угол, меньший прямого, называется *острым*. Угол, больший пр мого, но меньший развернутого, называется *тупым*.

Кроме понятия угла, данного выше, в геометрии рассматриваю понятие плоского угла. *Плоский угол* – это часть плоскости, огран ченная двумя различными лучами, исходящими из одной точки.

Существуют два плоских угла, образованных двумя лучами с о щим началом. Они называются дополн тельными. На рисунке 136 изображен два плоских угла со сторонами OA и O один из них заштрихован. Углы, котор рассматривают в планиметрии, не прево ходят развернутого.

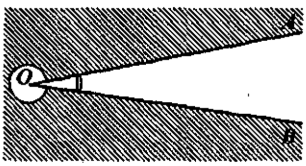


Рис. 136

Два угла называются *смежными*, если них одна сторона общая, а другие стор ны этих углов являются дополнительны полупрямыми.

Сумма смежных углов равна 180°.

Справедливость этого свойства вы кает из определения смежных углов.

Два угла называются *вертикальны* если стороны одного угла являются допо нительными полупрямыми сторон друго Углы AOD и COB, а также углы AOC DOB – вертикальные (рис. 137).

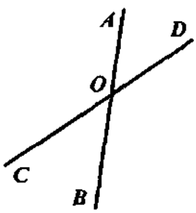


Рис. 137

Вертикальные углы равны.

Справедливость этого свойства вытекает из определения вертикальных углов и свойства смежных углов.

Упражнения

1. Назовите свойства угла, которые включены в его определение. Можете ли вы назвать другие свойства понятия «угол»?

2. Чем отличается развернутый угол от прямой линии? Как проверить: является ли данный угол развернутым?

3. Вспомните определение биссектрисы угла. Как, не используя чертежных инструментов, найти биссектрису угла, вырезанного из бумаги?

4. Какой угол образуют биссектрисы вертикальных углов? Ответ обоснуйте.

5. Могут ли вертикальные углы быть: а) прямыми; б) тупыми; в) один острый, другой тупой?

6. Дан угол. Сколько можно построить смежных с ним углов?

7. Найдите величину каждого из двух смежных углов, если:

а) один из них в 4 раза больше другого;

б) один из них на 20° меньше другого.

8. На какой угол повернется минутная стрелка часов в течение: а) часа; б) минуты; в) секунды?

104. Параллельные и перпендикулярные прямые

Определение. ***Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.***

Если прямая a параллельная прямой b, то пишут $a \parallel b$.

Рассмотрим некоторые свойства параллельных прямых, и прежде всего признаки параллельности.

Признаками называют теоремы, в которых устанавливается наличие какого-либо свойства объекта, находящегося в определенной ситуации. В частности, необходимость рассмотрения признаков параллельности прямых вызвана тем, что нередко в практике требуется решить вопрос о взаимном расположении двух прямых, но в то же время нельзя непосредственно воспользоваться определением.

Рассмотрим следующие признаки параллельности прямых:

1. Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.

2. Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Справедливо утверждение, обратное второму признаку параллельности прямых: если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма односторонних углов равна 180°.

Важное свойство параллельных прямых раскрывается в теореме, носящей имя древнегреческого математика Фалеса: если параллельные прямые, пересекающие стороны угла отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Определение. ***Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.***

Если прямая a перпендикулярна прямой b, то пишут $a \perp b$.

Основные свойства перпендикулярных прямых нашли отражение в двух теоремах:

1. Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую, и только одну.

2. Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.

Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий концом их точку пересечения. Конец этого отрезка называется основанием перпендикуляра.

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется расстоянием от точки до прямой.

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой.

Упражнения

1. Какие свойства параллельных прямых включены в их определение и в аксиому параллельных?

2. Как построить параллельные прямые с помощью линейки и чертежного треугольника? На каком признаке параллельности основано это построение?

3. Верны ли следующие утверждения:

а) Если две прямые пересечены третьей, то соответственные углы равны.

б) Если при пересечении двух параллельных прямых третьей накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

4. Внесите изменения в утверждения, данные в задании 3, чтобы они стали верными.

5. Как практически проверить, параллельны ли две данные прямые, начерченные на бумаге?

6. Укажите не менее трех свойств перпендикулярных прямых. Какое из них включено в определение? Какие свойства должны быть доказаны?

7. Докажите, что две прямые, лежащие в одной плоскости и перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, параллельны между собой.

8. Углы ABC и CBD – смежные, угол CBD равен $\frac{3}{8}d$. Определите угол между перпендикуляром, проведенным из точки B к прямой AD, и биссектрисой угла ABC.

105. Треугольники

Треугольник – одна из простейших геометрических фигур. Но его изучение породило целую науку – тригонометрию, которая возникла из практических потребностей при измерении земельных участков, составлении карт местности, конструировании различных механизмов.

Первые упоминания о треугольнике и его свойствах содержатся в египетских папирусах. Например, в них предлагается находить площадь равнобедренного треугольника как произведение половины основания на боковую сторону, хотя для любого равнобедренного треугольника с малым углом при вершине, противоположной основанию, такой способ дает приближенное значение площади.

Многие свойства треугольников были открыты и доказаны математиками Древней Греции. Среди них – знаменитая теорема Пифагора.

Рассмотрим основные понятия, связанные с треугольником.

Треугольником называется геометрическая фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.

Любой треугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из треугольника и его внутренней области, также называют треугольником (или плоским треугольником).

В любом треугольнике выделяют следующие элементы: стороны, углы, высоты, биссектрисы, медианы, средние линии.

Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AC.

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне.

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны. При этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

На практике и в теоретических построениях часто пользуются признаками равенства треугольников, обеспечивающими более быстрое решение вопроса об отношениях между ними. Таких признаков три.

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются боковыми, а третья сторона называется основанием треугольника.

Равнобедренные треугольники обладают рядом свойств, например:

В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Отметим еще несколько важных свойств треугольников.

1. *Сумма углов треугольника равна 180°.*

Из этого свойства следует, что в любом треугольнике хотя бы два угла острые.

2. *Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.*

3. *В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.*

Для прямоугольного треугольника с углом 30° справедливо следующее свойство: катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

Для прямоугольного треугольника верна теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Упражнения

1. Можно ли из палочек длиной 10 см, 6 см, 4 см сложить треугольник?

2. Как установить, равны два треугольника или нет?

3. Назовите свойства равнобедренного треугольника. Какие из них содержатся в определении, а какие надо доказывать?

4. Отвечают ли требованиям, предъявляемым к определениям понятий, следующие формулировки:

а) Треугольник, у которого две стороны и два угла равны, называется равнобедренным.

б) Средней линией треугольника называется прямая, проходящая через середины двух его сторон.

в) Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон и параллельный основанию.

5. Могут ли равносторонние треугольники быть: а) прямоугольными; б) тупоугольными? Ответ обоснуйте.

6. Установите вид треугольника (по углам), если один из его внутренних углов: а) равен сумме двух других; б) больше суммы двух других; в) меньше суммы двух других.

7. Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на два остроугольных?

8. Прямая p пересекает отрезок AB в точке O, являющейся его серединой. Докажите, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от прямой p.

9. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, являющейся серединой каждого. Докажите, что AC и BD параллельны.

10. Столяру нужно заделать отверстие треугольной формы. Какие он должен снять размеры, чтобы изготовить латку? Что он должен измерить, если отверстие имеет форму: а) прямоугольного треугольника; б) равностороннего треугольника?

106. Четырехугольники

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков, причем никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки – его сторонами.

Любой четырехугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из четырехугольника и его внутренней области, также называют четырехугольником (или плоским четырехугольником).

Вершины четырехугольника называют соседними, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются противолежащими. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются диагоналями.

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются соседними. Стороны, не имеющие общего конца, называются

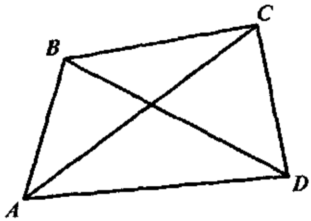


Рис. 138

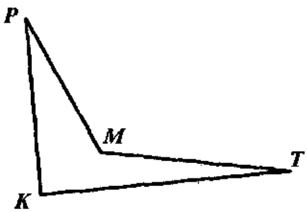


Рис. 139

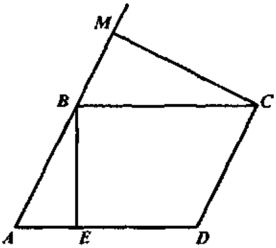


Рис. 140

противолежащими. У четырехугольника *ABCD* (рис. 138) вершины *A* и *B* – соседние, а вершины *A* и *C* – противолежащие; стороны *AB* и *BC* – соседние, *BC* и *AD* – противолежащие; отрезки *AC* и *BD* – диагонали данного четырехугольника.

Четырехугольники бывают выпуклые и невыпуклые. Так, четырехугольник *ABCD* (рис. 138) – выпуклый, а четырехугольник *KPMT* (рис. 139) невыпуклый. Среди выпуклых четырехугольников выделяют параллелограммы и трапеции.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Пусть *ABCD* – параллелограмм. Из вершины *B* на прямую *AD* опустим перпендикуляр *BE*. Тогда отрезок *BE* называется высотой параллелограмма, соответствующей сторонам *BC* и *AD* (рис. 140). Отрезок *CM* – высота параллелограмма *ABCD*, соответствующая сторонам *CD* и *AB*.

Чтобы упростить распознавание параллелограммов, рассматривают следующий признак: если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник – параллелограмм.

Ряд свойств параллелограмма, которые не содержатся в его определении, формулируют в виде теорем и доказывают. Среди них:

1. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

2. У параллелограмма противолежащие стороны и противолежащие углы раны.

Рассмотрим теперь определение трапеции и ее основное свойство.

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Эти параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции.

Средняя линия трапеции обладает следующим свойством: она параллельна основаниям и равна их полусумме.

Из множества параллелограммов выделяют прямоугольники и ромбы.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Исходя из этого определения, можно доказать, что диагонали прямоугольника равны.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Пользуясь этим определением, можно доказать, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.

Из множества прямоугольников выделяют квадраты.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Так как стороны квадрата равны, то он является также ромбом. Следовательно, квадрат обладает свойствами прямоугольника и ромба.

Упражнения

1. Назовите пять свойств параллелограмма. Какие из них содержатся в его определении, а какие надо доказывать?

2. Может ли диагональ параллелограмма равняться его стороне?

3. Постройте параллелограмм $ABCD$ и его высоты, выходящие из вершины C.

4. Обоснуйте следующий способ построения параллелограмма, предложенный младшим школьникам: «Проведи две пересекающиеся прямые. При помощи циркуля отложи на одной прямой от точки пересечения равные отрезки. Затем на другой прямой таким же образом отложи равные отрезки (не обязательно такой же длины, что и на первой прямой). Получится параллелограмм».

5. Назовите пять свойств прямоугольника. Какие из них содержатся в его определении, а какие надо доказывать? Докажите, что диагонали в прямоугольнике равны.

6. Докажите, что всякий параллелограмм, у которого диагонали равны, есть прямоугольник.

7. Мастерская изготовила пластины четырехугольной формы. Как проверить, будет ли пластина иметь форму прямоугольника, располагая лишь линейкой с делениями.

8. Мастеру надо изготовить щит, который должен полностью закрыть нишу прямоугольной формы. Какие он должен снять размеры, чтобы изготовить этот щит?

9. Докажите, что параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.

10. Докажите, что почтовый конверт склеивается из листа бумаги, имеющей форму ромба (припуски на склеивание не учитывать).

11. Паркетчик, проверяя, имеет ли выпиленный четырехугольник форму квадрата, убеждается, что диагонали равны и пересекаются под прямым углом. Достаточна ли такая проверка?

12. Столяру нужно изготовить подставку в форме четырехугольника. Какие размеры должен он иметь для выполнения заказа? Что должен измерить столяр, если подставка имеет форму: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба; г) квадрата?

13. Из приведенных ниже восьми свойств фигуры (рис. 141) выделите минимальное число таких, из которых следовали бы все остальные. Выделив исходные, докажите все остальные:

1) $ABCD$ – прямоугольник;
2) $AB = BC$;
3) $AC \perp BD$;
4) $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = \Delta DOA$;
5) $AC = BD$;
6) O – центр симметрии;
7) $AB = CD$;
8) $\Delta ABC = \Delta ADC$.

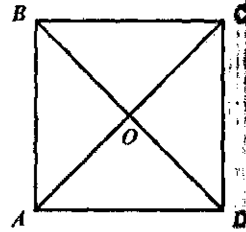


Рис. 141

14. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

15. Докажите, что отрезки прямых, соединяющих середины смежных сторон равнобедренной трапеции, образуют ромб.

16. Земельный участок, имеющий форму трапеции, отдан под спортивный городок. Какие размеры должен снять землемер, чтобы начертить план этого участка?

107. Многоугольники

Обобщением понятия треугольника и четырехугольника является понятие многоугольника. Определяется оно через понятие ломаной.

Ломаной $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются вершинами ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ – ее звеньями.

Если ломаная не имеет самопересечений, то она называется *простой*. Если ее концы совпадают, то она называется *замкнутой*. О ломаных, изображенных на рисунке 142, можно сказать, что: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – простая; $A_1A_2A_3$ – простая замкнутая; $A_1A_2A_3A_4$ – замкнутая ломаная, но она не является простой, так как имеет самопересечение.

Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.

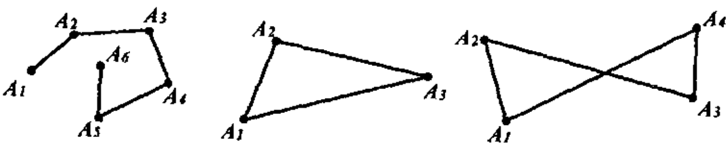


Рис. 142

Известно, что длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.

Многоугольником называется простая замкнутая ломаная, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой.

Вершины ломаной называются вершинами многоугольника, а ее звенья – его сторонами. Отрезки, соединяющие несоседние вершины, называются диагоналями.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая – внешней областью многоугольника (или плоским многоугольником).

Различают выпуклые и невыпуклые многоугольники.

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны и все углы равны.

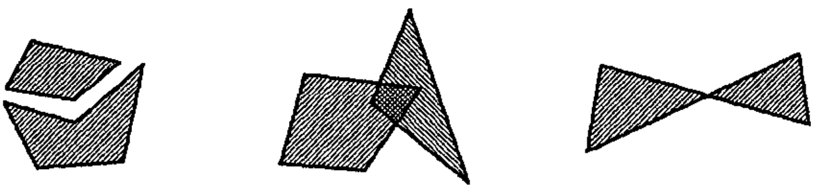
Правильным является равносторонний треугольник, правильным четырехугольником – квадрат.

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образуемый его сторонами, сходящимися в этой вершине.

Известно, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°\cdot(n-2)$.

В геометрии, кроме выпуклых и невыпуклых многоугольников, рассматривают еще многоугольные фигуры.

Многоугольной фигурой называется объединение конечного множества многоугольников (рис.143).



а) *б)* *в)*

Рис. 143

Многоугольники, из которых состоит многоугольная фигура, могут не иметь общих внутренних точек (рис. 143, а, в); могут иметь общие внутренние точки (рис. 143, б).

Говорят, что многоугольная фигура F состоит из многоугольных фигур, если она является их объединением, а сами фигуры не имеют общих внутренних точек. Например, о многоугольных фигурах, изображенных на рисунке 143,а,в, можно сказать, что они состоят из двух многоугольных фигур или что они разбиты (каждая) на две многоугольные фигуры.

Упражнения

1. Сформулируйте определение простой замкнутой ломаной и постройте такую фигуру.

2. Расстояние от пункта A до пункта B равно 3 км, а от пункта B до пункта C вдвое больше. Каково наибольшее и наименьшее расстояние от пункта A до пункта C?

3. Могут ли все углы выпуклого четырехугольника быть: а) тупыми; б) острыми; в) прямыми?

4. Сколько прямых углов может иметь: а) параллелограмм; б) трапеция?

5. Дан квадрат, разрезанный по диагонали на два треугольника. Сколько выпуклых многоугольников, отличных от квадрата, можно составить из этих треугольников?

6. Квадрат разрезан по своим диагоналям. Сколько выпуклых многоугольников, отличных от квадрата, можно составить из четырех образовавшихся треугольников?

7. Разрежьте по диагонали произвольный прямоугольник и из полученных треугольников составьте всевозможные выпуклые многоугольники.

8. Назовите свойства правильного многоугольника. Можете ли вы привести пример многоугольника, не являющегося правильным, но имеющего: а) все равные между собой углы; б) все равные стороны?

9. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его внутренних углов равна $40d$?

10. Можно ли сложить паркет из правильных: а) треугольников, б) пятиугольников; в) восьмиугольников; г) восьмиугольников и квадратов?

108. Окружность и круг

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называется *радиусом окружности.* Радиусом называется также расстояние от любой точки окружности до ее центра.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой.* Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром.*

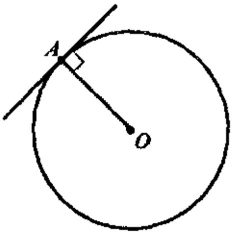


Рис. 144

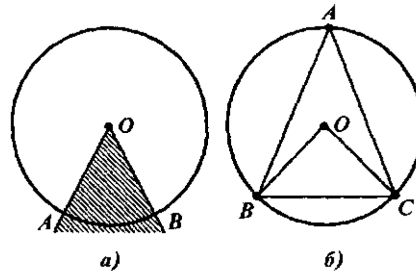


Рис. 145

Кругом называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром круга*, а данное расстояние – *радиусом круга*.

Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом.

Напомним некоторые свойства окружности и круга.

Говорят, что прямая и окружность касаются, если они имеют единственную общую точку. Такую прямую называют *касательной*, а общую точку прямой и окружности – *точкой касания*. Доказано, что если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания (рис.144). Справедливо и обратное утверждение.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется дугой окружности, соответствующей этому центральному углу. На рисунке 145, а штриховкой отмечен центральный угол, которому соответствует дуга AB.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее, называется вписанным в эту окружность. Угол BAC на рисунке 145, б вписан в окружность. Говорят также, что угол A опирается на хорду BC. Прямая BC разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той дуге, которая не содержит точку A, называется центральным, соответствующим данному вписанному углу.

Угол, вписанный в окружность, обладает следующим свойством: он равен половине соответствующего центрального угла.

Из этого утверждения следует, что вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B, принадлежащие окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой AB, равны (рис. 146).

В частности, углы, опирающиеся на диаметр, – прямые.

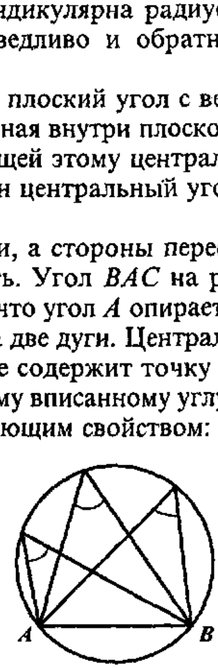


Рис. 146

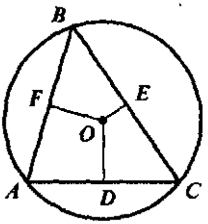


Рис. 147

Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все ее вершины.

Чтобы описать окружность около треугольника, надо найти ее центр. Правило его нахождения обосновывается следующей теоремой:

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к его сторонам, проведенных через середины этих сторон (рис. 147).

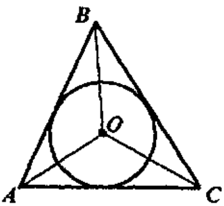


Рис. 148

Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

Правило нахождения центра такой окружности обосновывается следующей теоремой:

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис (рис. 148).

Из последних двух теорем следует, что биссектрисы треугольника пересекаются в центре вписанной окружности, а серединные перпендикуляры – в центре описанной.

Можно доказать, что медианы треугольника, так же как и его высоты, пересекаются в одной точке. Точку пересечения медиан называют центром тяжести треугольника, а точку пересечения высот – ортоцентром.

Таким образом, во всяком треугольнике существует четыре точки, их называют замечательными: центр тяжести, центры вписанной и описанной окружностей и ортоцентр, – в которых пересекаются соответствующие элементы этого треугольника – медианы, биссектрисы, серединные перпендикуляры и высоты.

В связи с тем, что во всякий треугольник можно вписать окружность и около всякого треугольника можно описать окружность, возникает вопрос: обладают ли аналогичным свойством четырехугольники? Оказывается, для того чтобы в четырехугольник можно было вписать или около него описать окружность, необходимо, чтобы он был правильным.

Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность, причем центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

Упражнения

1. Сколько окружностей можно провести через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки, не лежащие на одной прямой?

2. Как расположены центры окружностей одного и того же радиуса, проходящих через данную точку?

3. Как расположены центры окружностей, проходящих через две данные точки?

4. Окружность разделена в отношении 1:2:3, и точки деления соединены между собой отрезками. Определите углы полученного треугольника.

5. Докажите, что все углы, опирающиеся на диаметр окружности, прямые.

6. Угол между двумя радиусами равен 150°. Определите угол между касательными, проведенными через концы этих радиусов.

7. Как найти центр окружности, если он неизвестен?

8. В данной окружности проведены два диаметра и концы их попарно соединены хордами. Докажите, что получившийся четырехугольник – прямоугольник.

9. В каком месте открытого участка треугольной формы нужно поместить фонарь, чтобы все три угла были одинаково освещены?

10. В треугольной пластине нужно так просверлить отверстие, чтобы оно было равноудалено от ее сторон. Где находится центр этого отверстия?

11. Стекольщику надо вырезать стекло для окна круглой формы. Как и что он должен измерить, чтобы вырезать нужное стекло, располагая только рулеткой.

12. Острый угол между диагоналями прямоугольника 60°, меньшая его сторона 1,5 дм. Вычислите радиус окружности, описанной около этого прямоугольника.

13. Угол при вершине равнобедренного треугольника 120°, боковая его сторона 4 дм. Вычислите диаметр окружности, описанной около треугольника.

109. Основные выводы § 21

Изучая материал данного параграфа, *вспомнили* основные *понятия* планиметрии:

– отрезок, луч;

– угол (прямой, острый, тупой), смежные углы, вертикальные углы;

– параллельные прямые, перпендикулярные прямые;

– треугольник (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный, равнобедренный, равносторонний);

– четырехугольник (выпуклый, невыпуклый), параллелограмм, трапеция, прямоугольник, ромб, квадрат;

– многоугольник (выпуклый, невыпуклый), многоугольная фигура;

– окружность, касательная к окружности, круг.

Рассмотрели основные свойства этих понятий, приняв их без доказательств, которые можно либо выполнить самостоятельно, либо найти в любом школьном учебнике геометрии.

§22. ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Одной из важных задач геометрии является построение фигур с заданными свойствами при помощи чертежных инструментов. Мы будем рассматривать только такие построения, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки. Задачи на построение – это, пожалуй, самые древние математические задачи, они помогают лучше понять свойства геометрических фигур, способствуют развитию графических умений. Учителю начальных классов эти знания и умения необходимы, так как при изучении геометрического материала можно приобщать детей к построению фигур с помощью циркуля и линейки, но делать это надо грамотно, с учетом правил решения задач на построение в геометрии.

Существуют условия, которые надо соблюдать при построении фигур с помощью циркуля и линейки.

Циркуль – это инструмент, позволяющий построить:

а) окружность, если построены ее центр и отрезок, равный радиусу (или его концы);

б) любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены ее центр и концы этих дуг.

Линейка используется как инструмент, позволяющий построить:

а) отрезок, соединяющий две построенные точки;

б) прямую, проходящую через две построенные точки;

в) луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

С помощью циркуля и линейки можно также изобразить:

а) любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют;

б) точку, заведомо не принадлежащую какой-либо построенной фигуре;

в) точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре.

110. Элементарные задачи на построение

С помощью основных построений решаются некоторые задачи, достаточно простые и часто встречающиеся при решении других, более сложных. Такие задачи считаются элементарными и описания их решения, если они встречаются при решении более сложных, не дается. Выбор элементарных задач является условным.

Задача на построение считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

Рассмотрим некоторые элементарные задачи на построение.

1. Построить на данной прямой отрезок CD, равный данному отрезку AB.

Возможность такого построения вытекает из аксиомы откладывания отрезка. С помощью циркуля и линейки оно осуществляется следующим образом. Пусть даны прямая a и отрезок AB. Отмечаем на прямой точку C и строим с центром в точке C окружность радиусом, равным отрезку AB. Точку пересечения окружности с прямой a обозначаем D. Получаем отрезок CD, равный AB.

2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

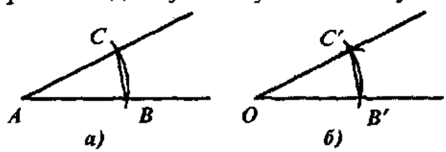


Рис. 149

Пусть даны угол A и полупрямая с начальной точкой O. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла (рис. 149, а). Точки пересечения окружности со сторонами угла обозначим B и C. Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O (рис. 149, б). Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B'. Опишем окружность с центром B' и радиусом BC. Точка C' пересечения построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

Построенный угол $B'OC'$ равен углу BAC, так как это соответствующие углы равных треугольников ABC и $B'OC'$.

3. Найти середину отрезка.

Пусть AB – данный отрезок. Построим две окружности одного радиуса с центрами A и B (рис. 150). Они пересекаются в точках C и C', лежащих в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Проведем прямую CC'. Она пересечет прямую AB в точке O. Эта точка и есть середина отрезка AB.

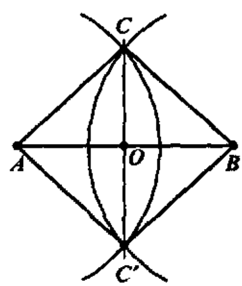


Рис. 150

Действительно, треугольники CAC' и CBC' равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство углов ACO и OCB. Значит, отрезок CO – биссектриса равнобедренного треугольника ACB и, следовательно, его медиана, т.е. точка O – середина отрезка AB.

4. Построить биссектрису данного угла.

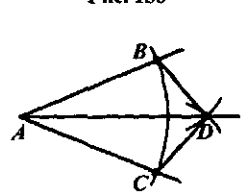


Рис. 151

Из вершины A данного угла как из центра описываем окружность произвольного радиуса (рис. 151). Пусть B и C – точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C описываем окружности одного радиуса. Пусть D – точка их пересечения, отличная от A. Тогда полупрямая AD и есть биссектриса угла A. Докажем это. Для этого рассмотрим треугольники ABD и ACD. Они равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство соответствующих углов DAB и DAC, т.е. луч AD делит угол BAC пополам и, следовательно, является биссектрисой.

5. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

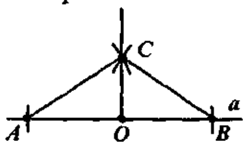


Рис. 152

Пусть даны точка O и прямая a. Возможны два случая:

1) точка O лежит на прямой a;

2) точка O не лежит на прямой a.

В первом случае построение выполняется так же, как и в задаче 4, потому что перпендикуляр из точки O, лежащей на прямой, – это биссектриса развернутого угла (рис. 152).

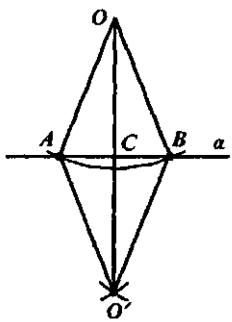


Рис. 153

Во втором случае из точки O как из центра проводим окружность, пересекающую прямую a (рис. 153), а затем из точек A и B тем же радиусом проводим еще две окружности. Пусть O' – точка их пересечения, лежащая в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка O. Прямая OO' и есть перпендикуляр к данной прямой a. Докажем это.

Обозначим через C точку пересечения прямых AB и OO'. Треугольники AOB и $AO'B$ равны по трем сторонам. Поэтому угол OAC равен углу $O'AC$ и, значит, треугольники OAC и $O'AC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда их углы ACO и ACO' равны. А так как углы смежные, то они прямые. Таким образом, OC есть перпендикуляр к прямой a.

6. Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

Пусть даны прямая a и точка A вне этой прямой (рис. 154). Возьмем на прямой a какую-нибудь точку B и соединим ее с точкой A.

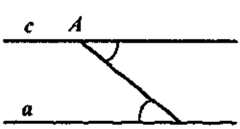


Рис. 154

Через точку A проведем прямую c, образующую с AB такой же угол, какой AB образует с данной прямой a, но на противоположной стороне от AB. Построенная прямая будет параллельна прямой a, что следует из равенства накрест лежащих углов, образованных при пересечении прямых a и c секущей AB.

Упражнения

1. Постройте с помощью циркуля и линейки сумму и разность двух данных: а) отрезков; б) углов.

2. Разделите данный угол на 4 равных части.

3. Дан треугольник ABC. Постройте другой, равный ему, треугольник ABD.

4. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

111. Этапы решения задачи на построение

Решение задачи на построение обычно включает четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

1. Анализ. На этом этапе осуществляется поиск решения задачи. Его конечная цель – установление последовательности, алгоритма, состоящего из основных или элементарных построений, приводящих к построению искомой фигуры. Как и решение геометрической задачи на вычисление и доказательство, поиск такого алгоритма сопровождается чертежом, иллюстрацией, помогающими установить связи и зависимости между данными и искомыми фигурами.

2. Построение. Этот этап решения представляет собой непосредственную реализацию на чертеже найденного *алгоритма* с помощью выбранных инструментов построения.

3. Доказательство. Его цель – доказательство того, что построенная на предыдущем этапе фигура действительно искомая, т.е. удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

4. Исследование. Этот этап решения состоит в выяснении того, всегда ли задача имеет решение; если не всегда, то при каких конкретных данных и сколько именно решений она имеет. При этом разными считаются решения, дающие неравные фигуры (или если и равные, то различно расположенные относительно фигуры, с которой связывалось построение).

Проиллюстрируем эти этапы на конкретном примере.

Задача. Построить параллелограмм по основанию a, высоте h и одной из диагоналей d.

Согласно условию, данными являются отрезки, представляющие основание, высоту и диагональ параллелограмма (рис. 155). Все эти фигуры считаются уже построенными, и поэтому объяснение не требуется.

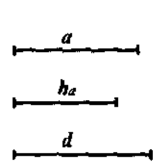


Рис. 155

1. Анализ. Выполним чертеж-иллюстрацию, считая, что искомый параллелограмм $ABCD$ уже построен (рис. 156). Отмечаем на чертеже данные элементы: $BC = a$, $BH = h_a$, $B = d$.

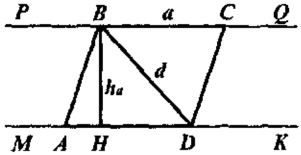


Рис. 156

Устанавливаем связи и зависимости между элементами параллелограмма. Отмечаем, что противоположные стороны AD и BC лежат на параллельных прямых, расстояние между которыми равно высоте h. Поэтому можно построить треугольник ABD и затем достроить его до параллелограмма $ABCD$. Получим следующий алгоритм построения искомой фигуры:

1) Строим параллельные прямые MK и PQ на расстоянии h друг от друга.

2) На прямой MK откладываем отрезок $AD = a$.

3) Из точки D, как из центра, радиусом d проводим окружность и находим точку B ее пересечения с прямой PQ.

4) На луче BQ откладываем отрезок $BC = a$.

5) Строим отрезки AB и CD.

2. Построение. Все этапы алгоритма построения выполняем циркулем и линейкой непосредственно на чертеже с использованием заданных элементов (рис. 157).

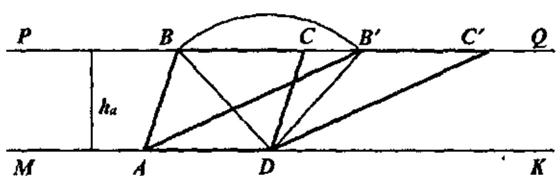


Рис. 157

3. Доказательство. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AD и BC параллельны, так как лежат на параллельных прямых MK и PQ. Эти же стороны равны по построению: $AD = BC = a$. Значит, $ABCD$ – параллелограмм, у которого $AD = a$, $BD = d$, а высота равна h_a, так как расстояние между параллельными прямыми MK и PQ равно h_a (по построению). Следовательно, $ABCD$ – искомый параллелограмм.

4. Исследование. Проверим возможность построения параллелограмма $ABCD$ непосредственно по шагам алгоритма построения.

1) Параллельные прямые MK и PQ на расстоянии h_a всегда можно построить, и притом единственным образом.

2) Построить отрезок AD = a на прямой MK также всегда можно, и притом единственным образом.

3) Окружность, проведенная из центра D радиусом d, будет иметь общие точки с прямой PQ только тогда, когда $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то получится одна общая точка B, если же $d > h_a$, то две общие точки B и B'.

4, 5) Эти построения всегда однозначно выполнимы.

Таким образом, решение возможно, если $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то задача имеет единственное решение, если же $d > h_a$, то два решения.

Упражнения

1. Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по известным трем сторонам. Всегда ли такое построение возможно?

2. Даны отрезок p, два угла α и β. Всегда ли можно построить треугольник, у которого сторона равна p, а прилежащие к ней углы равны α и β.

3. Постройте с помощью циркуля и линейки прямоугольник, у которого известны его стороны a и b.

4. Пользуясь только циркулем и линейкой, постройте:

а) прямоугольник по диагонали и одной из сторон;

б) квадрат со стороной p;

в) квадрат, диагональ которого задана.

5. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трех данных точках, не лежащих на одной прямой?

6. Постройте параллелограмм, если известны его диагонали и угол между ними.

7. Сколько параллелограммов можно построить, если известны две его соседние стороны? Ответ обоснуйте.

8. С помощью циркуля и линейки постройте ромб по:

а) известным диагоналям;

б) известной стороне и одному из углов при его вершине;

в) углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла;

г) стороне и диагонали.

9. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

10. По каким данным можно построить равнобедренный треугольник? Во всех возможных случаях выполните построения.

112. Основные выводы § 22

Рассмотрев материал данного параграфа, выяснили, что построение геометрических фигур с заданными свойствами при помощи циркуля и линейки осуществляется по определенным правилам. Прежде всего надо знать, какие построения можно выполнять с помощью линейки, не имеющей делений, и с помощью циркуля. Эти построения называют основными. Кроме того, надо уметь решать элементарные задачи на построение, т.е. уметь строить:

– отрезок, равный данному;

– угол, равный данному;

– середину отрезка;

– биссектрису данного угла;

– прямую, перпендикулярную данной прямой, и проходящую через данную точку;

– прямую, параллельную данной, и проходящую через данную точку.

Процесс решения более сложных задач на построение разбивается на 4 этапа и основывается на умении решать элементарные задачи.

§23. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

113. Понятие преобразования

Главной задачей геометрии является обоснование правил построения фигур с заданными свойствами. Но при построении используется понятие равенства фигур, определить которое можно через понятие преобразования.

Пусть задана некоторая фигура F и каждой точке фигуры F поставлена в соответствие единственная точка плоскости. Множество точек, сопоставленных точкам фигуры F, является некоторой фигурой F', вообще говоря, отличной от F. Говорят, что фигура F' получена преобразованием фигуры F. Можно сказать также, что фигура F' является образом фигуры F для данного преобразования, а фигура F – прообразом фигуры F'.

Если A' – точка фигуры F', соответствующая точке A фигуры F, то говорят, что A' – образ точки A, а точка A – прообраз точки A'.

Преобразования, изучаемые в геометрии, как правило, являются взаимно однозначными, т.е. такими, при которых разным точкам фигуры соответствуют разные образы. Простейший случай взаимно однозначного преобразования – это преобразование, при котором каждой точке A фигуры F ставится в соответствие эта же точка, т.е. образом фигуры F является сама эта фигура. Такое преобразование называется тождественным преобразованием.

Рассмотрим примеры преобразований фигур.

1. Симметрия относительно точки (центральная симметрия).

Пусть O – фиксированная точка и A – произвольная точка плоскости. Точка A' называется симметричной точке A относительно точки O, если точки A, O, A' лежат на одной прямой и $OA = OA'$ (рис. 158). Точка, симметричная точке O, есть сама эта точка.

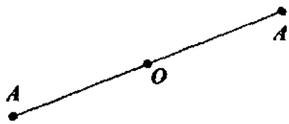


Рис. 158

Пусть F – данная фигура и O – фиксированная точка плоскости. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка A фигуры F переходит в точку A' фигуры F', симметричную A относительно точки O, называется преобразованием симметрии относительно точки O. На рисунке 159 выполнено преобразование треугольника ABC в симметричный ему относительно точки O треугольник $A'B'C'$.

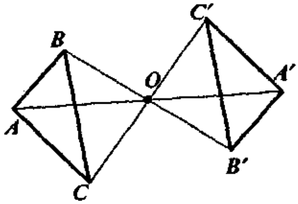


Рис. 159

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру в себя, то фигура называется центрально симметричной, а точка O – ее центром симметрии.

Например, центрально симметричными являются *параллелограмм* (центром симметрии в нем является точка пересечения диагоналей), окружность с центром в точке O.

2. Симметрия относительно прямой (осевая симметрия).

Пусть p – фиксированная прямая. Тогда A' называется симметричной точке A относительно прямой p, если прямая AA' перпендикулярна прямой p и $OA' = OA$, где O – точка пересечения прямых AA' и p (рис. 160).

Если точка A лежит на прямой p, то симметричная ей точка есть сама точка A. Точка, симметричная точке A', есть точка A.

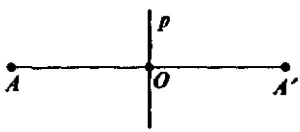


Рис. 160

Пусть F – данная фигура и p – фиксированная прямая. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка A фигуры F переходит в точку A' фигуры F', симметрично относительно прямой p, называется преобразованием симметрии относительно прямой p. При этом фигуры F и F' называются симметричными относительно прямой p. На рисунке 161 изображены треугольники ABC и $A'B'C'$, симметричные относительно прямой p.

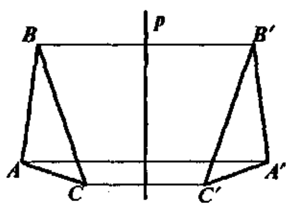


Рис. 161

Если преобразование симметрии относительно прямой p переводит фигуру F в себя, то фигура называется симметричной относительно прямой p, прямая p называется осью симметрии фигуры. Например, осями симметрии прямоугольника являются прямые, проходящие через точку пересечения его диагоналей параллельно сторонам.

3. Гомотетия. Пусть F – данная фигура и O – фиксированная точка (рис. 162). Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX', равный $k \cdot OX$, где k – положительное число. Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в такую точку X', что $OX' = k \cdot OX$, называется гомотетией относительно центра O. Число k называется коэффициентом гомотетии. Фигуры F и F' называются гомотетичными.

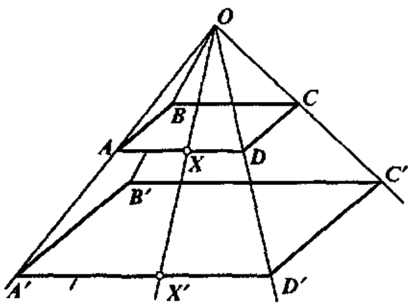


Рис. 162

На рисунке 162 четырехугольник $A'B'C'D'$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$. Центр гомотетии – точка O, а ее коэффициент равен 2.

Упражнения

1. Постройте на листе бумаги точку O и четырехугольник F. С помощью циркуля и линейки постройте фигуру F', симметричную данной относительно точки O.

2. Назовите три фигуры, имеющие центр симметрии. Сколько центров симметрии имеет: а) отрезок; б) квадрат?

3. Существуют ли фигуры, не имеющие центра симметрии?

4. Изобразите на листе бумаги прямую p и многоугольник F. С помощью циркуля и линейки постройте фигуру F', симметричную данной относительно прямой p.

5. Возьмите лист бумаги, проведите на нем прямую p и отметьте какую-нибудь точку A, не лежащую на этой прямой. Перегните лист бумаги по линии p, отметьте точку A', с которой совместится точка A, и снова разогните его. Докажите, что полученная точка A' и данная точка A симметричны относительно прямой p.

Верно ли обратное утверждение, т.е. совместятся ли точки A и A', симметричные относительно прямой p, при перегибании чертежа по этой прямой?

6. Назовите три фигуры, имеющие ось симметрии. Сколько осей имеет: а) отрезок; б) квадрат; в) равносторонний треугольник?

7. Существуют ли фигуры, не имеющие оси симметрии?

8. На листе бумаги постройте прямоугольник и ромб. Перегните лист и найдите все оси симметрии данных фигур. Как аналогичным способом найти оси симметрии и центр окружности?

9. На листе бумаги изобразите точки A, B и C. Не используя чертежных инструментов, путем перегибания этого листа найдите: а) центр описанной около треугольника ABC окружности; б) центр вписанной в треугольник ABC окружности.

10. На листе бумаги отмечены точки A и B. С помощью перегибания листа изобразите квадрат $ABCD$.

114. Движения и равенство фигур

Из различных преобразований фигур самыми важными являются такие, при которых сохраняются все их свойства: расстояние между точками, углы, параллельность отрезков, площади и т.д. Оказывается, что для этого достаточно потребовать только сохранения расстояния между точками данной фигуры. Тогда у фигуры, которая получается при преобразовании, сохраняются и все остальные геометрические свойства, так как они зависят от расстояний.

Определение. ***Преобразование фигуры F в фигуру F′, которое сохраняет расстояние между точками, называется движением фигуры F.***

Движение сопоставляет любым точкам A и B фигуры F такие точки A' и B' фигуры F', что $AB = A'B'$. В геометрии доказано, что преобразования симметрии относительно точки и прямой, являются движениями. Кроме того, движениями являются параллельный перенос фигуры, поворот фигуры вокруг точки на данный угол.

Движения фигур обладают рядом свойств, некоторые из которых мы сформулируем, не доказывая.

1. При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

2. Отрезок движением переводится в отрезок, луч переходит в луч, прямая – в прямую.

3. Треугольник движением переводится в треугольник.

4. Движение сохраняет величины углов.

5. Преобразование, обратное движению, также является движением.

В геометрии движения играют важную роль. Изменяя расположение фигур на плоскости, они не меняют ни их размеры, ни их формы. С точки зрения геометра, фигуры, отличающиеся лишь своим положением на плоскости, совершенно одинаковы, именно поэтому они называются равными (или конгруэнтными). Ни одно свойство геометрической фигуры не отличается от соответствующего свойства равной ей фигуры. Например, равные треугольники имеют не только соответственно равные стороны и углы, но и соответственно равные медианы, высоты, площади и т.д.

Определение. ***Фигура F равна фигуре F′, если фигуру F′ можно получить некоторым движением фигуры F.***

Используя понятие взаимно однозначного соответствия, это определение можно сформулировать так: *фигуры F и F′ называются равными, если между их точками существует такое взаимно однозначное соответствие, что отрезки, соединяющие соответственные точки, равны.*

Устанавливая равенство отрезков, углов, треугольников и других фигур, нет необходимости преобразовывать одну фигуру в другую. Достаточно сравнить те размеры фигур, которые их однозначно определяют. Например, у треугольников сравнить расстояния между вершинами, т.е. длины сторон.

Когда же рассматривают произвольные фигуры, необходимо определение их равенства через движение.

Нетрудно убедиться в том, что равенство фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. Поэтому это отношение порождает на множестве геометрических фигур классы эквивалентности, содержащие равные между собой фигуры. С позиций геометрии такие фигуры неразличимы и их можно принять за одну и ту же фигуру. Именно поэтому можно сказать, что задача построения прямоугольника по двум сторонам a и b имеет только одно решение.

Сказанное позволяет уточнить наше понимание предмета геометрии – она изучает свойства фигур, не зависящие от их расположения. Или, другими словами, геометрия изучает те свойства фигур, которые сохраняются при движениях.

Упражнения

1. Докажите, что отношение равенства фигур является отношением эквивалентности на множестве фигур.

2. Если между объектами A и B есть препятствие, то расстояние AB можно найти так: выбрать объект C, из которого видны A и B, и провести прямые AC и BC; затем построить $CA' = CA$, $CB' = CB$ (рис. 163). Тогда расстояние $A'B'$ будет равно искомому расстоянию AB. Докажите это различными способами.

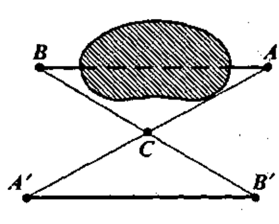


Рис. 163

3. Объясните, почему в результате движения: а) окружность переходит в окружность; б) квадрат переходит в квадрат; в) параллелограмм переходит в параллелограмм.

4. Докажите, что равны: а) две прямые, б) два круга равных радиусов; в) два квадрата с равными сторонами.

115. Основные выводы § 23

При изучении материала данного параграфа рассмотрели *понятия*:

– геометрическое преобразование фигуры;

– движение фигуры;

– равенство фигур.

Установили, что равенство любых фигур можно определить через понятие движения.

§24. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

При изучении элементов геометрии в начальной школе учащиеся часто знакомятся с пространственными фигурами: кубом, прямоугольным параллелепипедом, пирамидой, шаром, цилиндром, конусом. Эти фигуры являются важнейшими объектами геометрии в пространстве, *называемой стереометрией*. Чтобы облегчить изучение их свойств, пространственные тела изображают на плоскости, используя при этом правила параллельного проектирования. Поскольку ознакомление младших школьников с пространственными фигурами также связано с их изображением на плоскости, то учителю начальных классов надо знать эти правила и уметь правильно изображать на листе бумаги (на доске) куб, шар, пирамиду и другие геометрические тела.

116. Свойства параллельного проектирования

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем в пространстве произвольную точку X, не принадлежащую прямой a, и проведем через X прямую a', параллельную прямой a (рис. 164). Прямая a' пересекает плоскость в некоторой точке X', которая называется **параллельной проекцией точки X на плоскость α.**

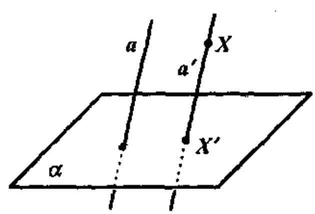


Рис. 164

Если точка X лежит на прямой a, то ее параллельной проекцией X' является точка, в которой прямая a пересекает плоскость α.

Если точка X принадлежит плоскости α, то точка X' совпадает с точкой X.

Таким образом, если заданы плоскость α и пересекающая ее прямая a, то каждой точке X пространства можно поставить в соответствие единственную точку X' – параллельную проекцию точки X на плоскость α (при проектировании параллельно прямой a). Плоскость α называется *плоскостью проекций*. О прямой a говорят, что она задает *направление проектирования* – при замене прямой a любой другой параллельной ей прямой результат проектирования не изменится. Все прямые, параллельные прямой a, задают одно и то же направление проектирования и называются вместе с прямой a проектирующими прямыми.

Проекцией фигуры F называется множество F' проекций всех ее точек. Отображение, сопоставляющее каждой точке X фигуры F ее параллельную проекцию – точку X' фигуры F', называется параллельным проектированием фигуры F (рис. 165).

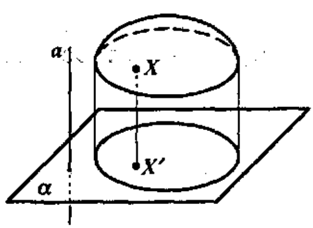


Рис. 165

Параллельной проекцией реального предмета является его тень, падающая на плоскую поверхность, при солнечном освещении, поскольку солнечные лучи можно считать параллельными.

Параллельное проектирование обладает рядом свойств, знание которых необходимо при изображении геометрических тел на плоскости. Сформулируем основные, опустив их доказательство.

Теорема. При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, и для лежащих на них отрезков выполняются следующие свойства:

1. Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок.

2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

3. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.

Из этой теоремы вытекает следствие: при параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.

При изображении геометрических тел на плоскости необходимо следить за тем, чтобы указанные свойства выполнялись. В остальном оно может быть произвольным. Так, углы и отношения длин непараллельных отрезков могут изменяться произвольно, т.е., например, треугольник при параллельном проектировании изображается произвольным треугольником. Но если треугольник равносторонний, то на проекции его медиана должна соединять вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

И еще одно требование необходимо соблюдать при изображении пространственных тел на плоскости – это способствовать созданию верного представления о них.

Упражнения

1. Верно ли, что при параллельном проектировании проекцией параллелограмма будет произвольный параллелограмм?

2. Каким будет при параллельном проектировании изображение прямоугольника? ромба? квадрата?

3. Как найти при параллельном проектировании проекцию точки пересечения высот равностороннего треугольника?

117. Многогранники и их изображение

Напомним определения многогранника и некоторых его видов.

Многогранник – это ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников. *Выпуклый многогранник* лежит по одну сторону от каждого из ограничивающих его многоугольников. Многоугольник на поверхности многогранника называется его *гранью*. Стороны граней называются *ребрами* многогранника, а вершины граней – *вершинами многогранника*.

Простейшие многогранники – это призма и пирамида. *Призмой* называется многогранник, у которого две грани, называемые основаниями призмы, равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основанию.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник.

Призма, у которой основание – параллелограмм, называется параллелепипедом.

Параллелепипед называется *прямоугольным*, если все его грани – прямоугольники.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, т.е. все грани которого – квадраты.

Изобразим, например, наклонную призму, основанием которой являются квадраты.

Построим сначала нижнее основание призмы (можно начинать и с верхнего). По правилам параллельного проектирования оно изобра-

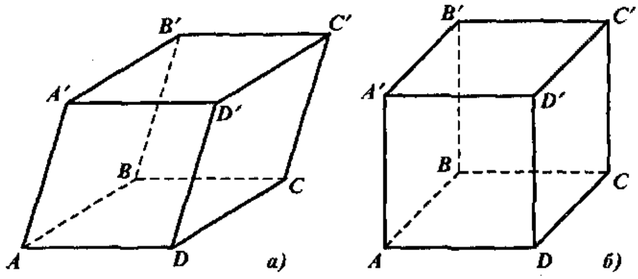


Рис. 166

зится произвольным параллелограммом $ABCD$ (рис. 166, а). Так как ребра призмы параллельны, строим параллельные прямые, проходящие через вершины построенного параллелограмма и откладываем на них равные отрезки AA', BB', CC', DD', длина которых произвольна. Соединив последовательно точки A', B', C', D', получим четырехугольник $A'B'C'D'$, изображающий верхнее основание призмы. Нетрудно доказать, что $A'B'C'D'$ – параллелограмм, равный параллелограмму $ABCD$ и, следовательно, мы имеем изображение призмы, основаниями которой являются равные квадраты, а остальные грани – параллелограммы.

Если нужно изобразить прямую призму, основаниями которой являются квадраты, то показать, что боковые ребра этой призмы перпендикулярны основанию, можно так, как это сделано на рисунке 166, б.

Кроме того, чертеж на рисунке 166, б можно считать изображением правильной призмы, так как ее основанием является квадрат – правильный четырехугольник, а также – прямоугольным параллелепипедом, поскольку все его грани – прямоугольники.

Выясним теперь, как изобразить на плоскости пирамиду.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (ее называют основанием) – какой-нибудь многоугольник, а остальные грани (их называют боковыми) – треугольники с общей вершиной.

Общую вершину боковых граней называют *вершиной* пирамиды. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также длина этого перпендикуляра называется *высотой* пирамиды.

Простейшей пирамидой является треугольная пирамида – тетраэдр. У нее наименьшее возможное число граней – всего четыре. Любая ее грань может считаться основанием, что и отличает тетраэдр от других пирамид.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник и высота проходит через центр этого многоугольника.

Чтобы изобразить правильную пирамиду, сначала чертят правильный многоугольник, лежащий в основании, и его центр – точку O. Затем проводят вертикальный отрезок OS, изображающий высоту пирамиды. Заметим, что вертикальность отрезка OS обеспечивает большую наглядность рисунка. И наконец, точку S соединяют со всеми вершинами основания.

Изобразим, например, правильную пирамиду, основанием которой является правильный шестиугольник.

Чтобы верно изобразить при параллельном проектировании правильный шестиугольник, надо обратить внимание на следующее. Пусть $ABCDEF$ – правильный шестиугольник. Тогда $BCEF$ – прямоугольник (рис. 167) и, значит, при параллельном проектировании он изобразится произвольным параллелограммом $B'C'E'F'$. Так как диагональ AD проходит через точку O – центр многоугольника $ABCDEF$ и параллельна отрезкам BC и EF и $AO = OD$, то при параллельном проектировании она изобразится произвольным отрезом $A'D'$, проходящим через точку O' параллельно $B'C'$ и $E'F'$ и, кроме того, $A'O' = O'D'$.

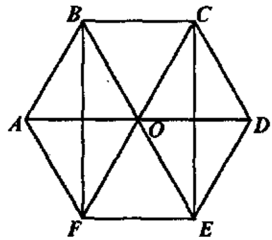


Рис. 167

Таким образом, последовательность построения основания шестиугольной пирамиды такова (рис. 168):

– изображают произвольный параллелограмм $B'C'E'F'$ и его диагонали; отмечают точку их пересечения O';

– через точку O' проводят прямую, параллельную $B'C'$ (или $E'F'$);

– на построенной прямой выбирают произвольную точку A' и отмечают точку D' такую, что $O'D' = A'O'$, и соединяют точку A' с точками B' и F', а точку D' с точками C' и E'.

Чтобы завершить построение пирамиды, проводят вертикальный отрезок $O'S$ (его длина выбирается произвольно) и соединяют точку S со всеми вершинами основания.

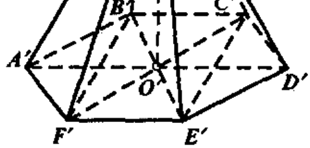


Рис. 168

Завершая рассмотрение многогранников, отметим еще их одно интересное свойство, установленное Л. Эйлером.

Пусть дан выпуклый многогранник и b – число его вершин, p – число ребер, r – число граней. Тогда $b - p + r = 2$ для любого выпуклого многогранника. Например, правильная шестиугольная пирамида имеет 7 вершин ($b = 7$), 12 ребер ($p = 12$) и 7 граней ($r = 7$). Тогда $b - p + r = 7 - 12 + 7 = 2$. На основании теоремы Эйлера можно

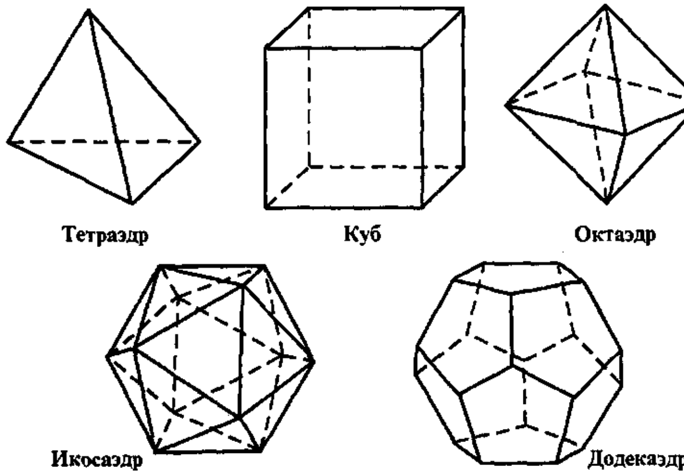


Рис. 169

заключить, что существует пять и только пять видов правильных многогранников, т.е. таких выпуклых многогранников, у которых все грани – равные друг другу правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Это – тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр (рис. 169).

Упражнения

1. Изобразите на листе бумаги:

а) прямую призму, основаниями которой являются правильные шестиугольники;

б) параллелепипед;

в) правильную пирамиду, основанием которой является квадрат.

2. Проверьте, выполняется ли теорема Эйлера для четырехугольной: а) призмы; б) пирамиды.

3. Выпуклый многогранник имеет 6 вершин и 8 граней. Найдите число ребер и изобразите этот многогранник.

4. Выпуклый многогранник имеет 8 вершин и 6 граней. Найдите число ребер и изобразите его.

118. Шар, цилиндр, конус и их изображение

Шар – одна из простейших фигур, обладающая разнообразными свойствами. Некоторые из них были известны еще древнегреческим математикам.

Поверхность шара называется *сферой.* Определяются сфера и шар аналогично тому, как определяются окружность и круг на плоскости.

Сферой называется множество точек пространства, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние. При этом данная точка называется *центром* сферы, а данное расстояние – ее *радиусом.*

Шаром называется множество точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем некоторого данного положительного расстояния. Данная точка – это *центр* шара, а данное расстояние – *радиус* шара.

Заметим, что радиусом шара и сферы называют не только расстояние, но также любой отрезок, соединяющий их центр с точкой на сфере.

Диаметр шара и сферы – это любой отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, а также длина этого отрезка.

Если шар пересечь плоскостью, проходящей через его центр, то пересечением будет круг, радиус которого совпадает с радиусом шара. Этот круг называют *большим кругом*, а его окружность – *большой окружностью* или *экватором.*

При параллельном проектировании шар изображается в виде круга того же радиуса. Чтобы сделать изображение шара более наглядным, рисуют проекцию какой-нибудь большой окружности, плоскость которой не перпендикулярна плоскости проекции. Эта проекция будет эллипсом. Центр шара изобразится центром этого эллипса (рис. 170). Теперь можно найти соответствующие полюсы N и S при условии, что отрезок, их соединяющий, перпендикулярен плоскости экватора. Для этого через точку O проводим прямую, перпендикулярную AB, и отмечаем точку C – пересечение этой прямой с эллипсом; затем через точку C проводим касательную к эллипсу, изображающему экватор. Доказано, что расстояние CM равно расстоянию от центра шара до каждого из полюсов. Поэтому, отложив отрезки ON и OS, равные CM, получим полюсы N и S.

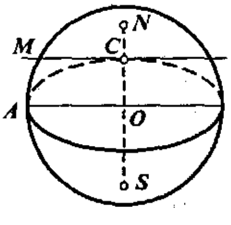


Рис. 170

Рассмотрим один из приемов построения эллипса: строят окружность с диаметром и проводят хорды, перпендикулярные диаметру (рис. 171). Половину каждой из хорд делят пополам и полученные точки соединяют плавной кривой. Эта кривая – эллипс, большой осью которого является отрезок AB, а центром – точка O.

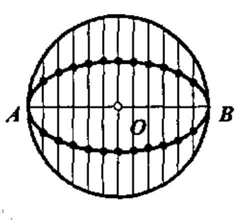


Рис. 171

Этот прием можно использовать, изображая на плоскости круговой цилиндр и круговой конус. Мы будем рассматривать только *прямой*

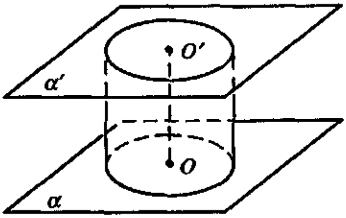


Рис. 172

круговой цилиндр – геометрическое тело, образованное заключенными между двумя параллельными плоскостями отрезками всех параллельных прямых, пересекающих круг в одной из плоскостей, и перпендикулярных плоскостям оснований (рис. 172).

Радиусом цилиндра называется радиус окружности его основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. Его *осью* называется прямая, проходящая через центры окружностей оснований.

Конусом называется тело, образованное всеми отрезками, соединяющими данную точку – его вершину – с точками некоторого круга – основания конуса.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются его *образующими*.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая его вершину с центром окружности основания, перпендикулярна основанию.

Высотой конуса называется расстояние от его вершины до основания.

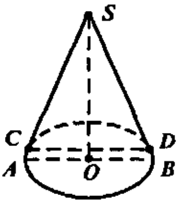


Рис. 173

Прямой круговой конус изображают так. Сначала строят эллипс – основание, затем находят центр основания – точку O и перпендикулярно проводят отрезок OS, который изображает высоту конуса. Из точки S проводят к эллипсу касательные (это делают на глаз, прикладывая линейку) и выделяют отрезки SC и SD этих прямых от точки S до точек касания C и D. Заметим, что отрезок CD не совпадает с диаметром основания конуса (рис. 173).

Упражнения

1. Какая ошибка допущена при изображении шара на рисунке 174?

2. Является ли параллельной проекцией шара изображение на рисунке 175?

3. Можно ли считать правильными изображения конуса на рисунке 176?

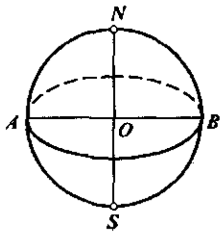


Рис. 174

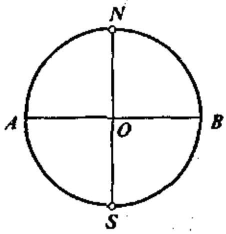


Рис. 175

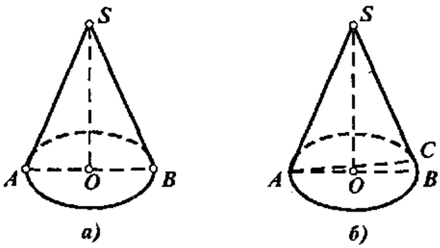


Рис. 176

119. Основные выводы § 24

Изучив материал данного параграфа, мы вспомнили определения таких геометрических фигур, как:

– многогранник (выпуклый многогранник);
– призма (прямая призма, правильная призма);
– параллелепипед (прямоугольный параллелепипед);
– куб;
– шар;
– сфера;
– прямой круговой цилиндр;
– прямой круговой конус.

Выяснили, что при изображении их на плоскости используются свойства параллельного проектирования и сформулировали эти свойства.

Узнали, что Л.Эйлером установлена зависимость между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, которая выражается формулой $b - p + r = 2$, где b – число вершин, p – число ребер, r – число граней.

§25. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Геометрические величины – это свойства геометрических фигур, характеризующих их форму и размеры. К ним относятся: длина, площадь, объем и величина угла. Это скалярные величины, так как они определяются своими численными значениями.

В геометрии прежде всего изучают то число, которое получается в результате измерения величины, т.е. меру величины при выбранной единице величины. Поэтому часто это число называют длиной, площадью, объемом. Относительно этого числа решают различные теоретические задачи, в частности, каким требованиям оно должно удовлетворять как мера величины, существует ли оно, каким образом его можно определить. Вообще правила измерения геометрических величин и их обоснование – важнейшая задача геометрии.

Вопросы, связанные с измерением геометрических величин, достаточно трудны, поэтому рассмотрим их в небольшом объеме, особо *выделив те, которые непосредственно* связаны с изучением величин в начальной школе.

120. Длина отрезка и ее измерение

Понятие длины отрезка и ее измерения были уже использованы неоднократно, в частности, когда рассматривали натуральное число как меру *величины*. В этом пункте мы только обобщим представления о длине отрезка как геометрической величине.

В геометрии длина – это величина, характеризующая протяженность отрезка, а также других линий (ломаной, кривой). В нашем курсе будет рассмотрено только понятие длины отрезка. При его определении будем использовать введенное в п. 77 понятие «отрезок состоит из отрезков».

Определение. ***Длиной отрезка называется положительная величина, обладающая следующими свойствами:***

1) равные отрезки имеют равные длины;

2) если отрезок состоит из двух отрезков, то его длина равна сумме длин его частей.

Эти свойства длины отрезка используются при ее измерении. Чтобы измерить длину отрезка, нужно иметь единицу длины. В геометрии такой единицей является длина произвольного отрезка.

Как показано в п. 98, результатом измерения длины отрезка является положительное действительное число – его называют *численным значением длины отрезка* при выбранной единице длины или *мерой длины* данного отрезка. Если обозначить длину отрезка буквой X, единицу длины – E, а получаемое при измерении действительное число – буквой a, то можно записать: $a = m_E(X)$ или $X = a \cdot E$.

Получаемое при измерении длины отрезка положительное действительное число должно удовлетворять ряду требований:

1. Если два отрезка равны, то численные значения их длин тоже равны.

2. Если отрезок x состоит из отрезков x_1 и x_2, то численное значение его длины равно сумме численных значений длин отрезков x_1 и x_2.

3. При замене единицы длины численное значение длины данного отрезка увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

4. Численное значение длины единичного отрезка равно единице.

Доказано, что положительное действительное число, являющееся мерой длины заданного отрезка, всегда существует и единственно. Доказано также, что для каждого положительного действительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Заметим, что часто, ради краткости речи, численное значение длины отрезка называют просто длиной. Например, в задании «Найдите длину данного отрезка» под словом «длина» подразумевается численное значение длины отрезка. Не менее часто допускают и другую вольность – говорят: «Измерь отрезок» вместо «Измерь длину отрезка».

Задача. Построить отрезок, длина которого $3{,}2E$. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины E увеличить в 3 раза?

Решение. Построим произвольный отрезок и будем считать его единичным. Затем построим прямую, отметим на ней точку A и отложим от нее 3 отрезка, длины которых равны E. Получим отрезок AB, длина которого $3E$ (рис. 177). Чтобы получить отрезок длиной $3{,}2E$, надо ввести новую единицу длины. Для этого единичный отрезок надо разбить либо на 10 равных частей, либо на 5, поскольку $0{,}2 = \frac{1}{5}$. Если от точки B отложить отрезок, равный $\frac{1}{5}$ единичного, то длина отрезка AC будет равна $3{,}2E$.

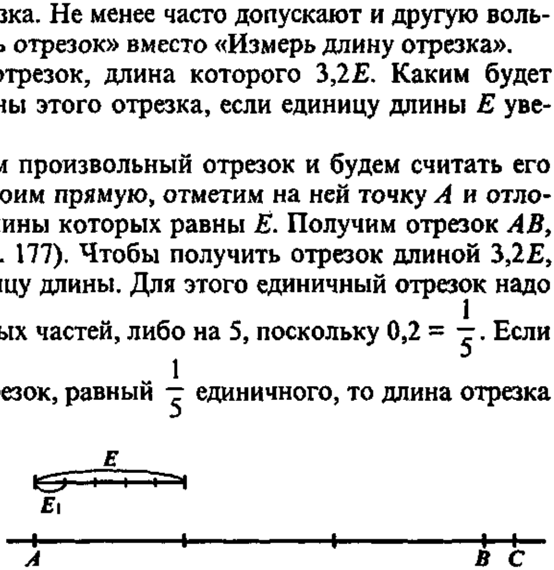


Рис. 177

Чтобы выполнить второе требование задачи, воспользуемся свойством 3, согласно которому при увеличении единицы длины в 3 раза численное значение длины данного отрезка уменьшается в 3 раза. Разделим 3,2 на 3, получим: $3{,}2:3 = = 3\frac{1}{5}:3 = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$. Таким образом, при единице длины $3E$ численное значение длины построенного отрезка AC будет равно $1\frac{1}{15}$.

Упражнения

1. Отметьте на прямой три равных отрезка: AB, BC и CD. Чему будет равна длина каждого из этих отрезков, если за единицу длины будет выбрана длина отрезка:

а) AB; б) AC; в) AD?

2. Численное значение длины отрезка, измеренной при помощи единицы E_1 равно 6, а измеренной при помощи единицы E_2 равно 4. В каком отношении находятся между собой единицы длины E_1 и E_2?

3. Из одного куска проволоки, не разрезая его, надо сделать каркас: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды; в) куба. Каждое ребро этих многогранников равно 1 см. Какова наименьшая длина такой проволоки?

4. Существуют ли на плоскости три точки A, B и C, такие, что:

а) AC = 15 см, AB = 8 см, BC = 7 см;

б) AC = 8 см, AB = 25 см, BC = 40 см;

в) AC = 14 см, AB = 30 см, BC = 40 см?

5. Постройте отрезок, длина которого 4,6E. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины E:

а) увеличить в два раза; б) уменьшить в 1,5 раза?

6. Длину стола измеряли сначала в сантиметрах, потом в дециметрах. В первом случае получили число на 108 больше, чем во втором. Чему равна длина стола?

121. Величина угла и ее измерение

Каждый угол имеет величину. Специального названия для нее в геометрии нет.

Определение. ***Величиной угла называется положительная величина, определенная для каждого угла так, что:***

1) равные углы имеют равные величины;

2) если угол состоит из двух углов, то его величина равна сумме величин его частей.

Эти свойства лежат в основе измерения величины угла. Оно аналогично измерению длины отрезка и состоит в сравнении измеряемой величины угла с величиной угла, принятой за единицу. Единичный угол, а если нужно и его доли, откладываются на угле, величина которого измеряется. В результате получается численное значение величины угла или мера величины угла при данной единице измерения.

Число, которое получается в результате измерения величины угла, должно удовлетворять ряду требований – они аналогичны требованиям, предъявляемым к числовому значению длины отрезка.

На практике за единицу величины угла принимают градус – $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Один градус записывают так: 1°. Величина прямого угла равна 90°, величина развернутого – 180°.

Градус делится на 60 минут, а минута на 60 секунд. Одну минуту обозначают 1′, одну секунду – 1″. Так, если мера величины угла равна 5 градусам 3 минутам и 12 секундам, то пишут 5° 3′ 12″. Если нужна большая точность в измерении величин углов, используют и доли секунды.

Заметим, что часто вместо «величина угла» говорят «угол». Например, вместо «величина угла равна 45 градусам» говорят, что «угол равен 45 градусам».

На практике величины углов измеряют с помощью транспортира. Для более точных измерений пользуются и другими приборами.

Упражнения

1. Углы α и β – смежные. Чему равен каждый из них, если: а) один из них больше другого на 60°; б) один из них больше другого в 3 раза?

2. Внутри прямого угла провели луч. Вычислите градусную меру каждого из полученных при этом углов, если: а) один из них больше другого на 89°; б) один из них в 90 раз больше другого; в) половина одного из них равна трети другого.

3. Измерьте величину угла между указательным и средним пальцами руки при максимальном отклонении друг от друга.

4. Пусть α и β – смежные углы. Запишите формулу, которая связывает между собой величины этих углов. Какой функцией является зависимость одной из этих величин от другой? Какова область ее определения и область значения? Каким будет график этой зависимости?

5. Два угла величиной 40° и 50° имеют общую сторону. Какой угол могут образовывать другие их стороны? Ответьте на тот же вопрос, если даны углы 140° и 150°.

6. Углы BAK и CAM – прямые. Угол CAK равен 10°. Найдите величину угла BAM. Решите задачу в общем виде для произвольного по величине угла CAK.

122. Понятие площади фигуры и ее измерение

Каждый человек представляет, что такое площадь комнаты, площадь участка земли, площадь поверхности, которую надо покрасить. Он также понимает, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что площадь квартиры складывается из площади комнат и площади других ее помещений.

Это обыденное представление о площади используется при ее определении в геометрии, где говорят о площади фигуры. Но геометрические фигуры устроены по-разному, и поэтому, когда говорят о площади, выделяют определенный класс фигур. Например, рассматривают площадь многоугольника, площадь произвольной плоской фигуры, площадь поверхности многогранника и др. В нашем курсе речь будет идти только о площади многоугольника и произвольной плоской фигуры.

Так же, как и при рассмотрении длины отрезка и величины угла, будем использовать понятие «состоять из», определяя его следующим об-

Рис. 178

разом: фигура F состоит (составлена) из фигур F_1 и F_2, если она является их объединением и у них нет общих внутренних точек. В этой же ситуации можно говорить, что фигура F разбита на фигуры F_1 и F_2. Например, о фигуре F, изображенной на рисунке 178, а, можно сказать, что она состоит из фигур F_1 и F_2, поскольку они не имеют общих внутренних точек. Фигуры F_1 и F_2 на рисунке 178, б имеют общие внутренние точки, поэтому нельзя утверждать, что фигура F состоит из фигур F_1 и F_2. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то пишут: $F = F_1 \oplus F_2$.

Определение. ***Площадью фигуры называется положительная величина, определенная для каждой фигуры так, что:***

1) ***равные фигуры имеют равные площади;***
2) ***если фигура состоит из двух частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.***

Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, такой единицей является площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку. Условимся площадь единичного квадрата обозначать буквой E, а число, которое получается в результате измерения площади фигуры – $S(F)$. Это число называют численным значением площади фигуры F при выбранной единице площади E. Оно должно удовлетворять условиям:

1. Число $S(F)$ – положительное.
2. Если фигуры равны, то равны численные значения их площадей.
3. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то численное значение площади фигуры равно сумме численных значений площадей фигур F_1 и F_2.
4. При замене единицы площади численное значение площади данной фигуры F увеличивается (уменьшается) во столько же раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.
5. Численное значение площади единичного квадрата принимается равным 1, т.е. $S(F) = 1$.
6. Если фигура F_1 является частью фигуры F_2, то численное значение площади фигуры F_1 не больше численного значения площади фигуры F_2, т.е. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow S(F_1) \leq S(F_2)$.

В геометрии доказано, что для многоугольников и произвольных плоских фигур такое число всегда существует и единственно для каждой фигуры.

Фигуры, у которых площади равны, называются *равновеликими*.

Упражнения

1. Площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2. Значит ли это, что фигура F составлена из фигур F_1 и F_2?

2. Два треугольника имеют равные площади. Следует ли из этого, что они равны?

3. Известно, что $S(F_1) > S(F_2)$. Следует ли отсюда, что $F_2 \subset F_1$.

4. Верно ли, что:

а) Численные значения площади одной и той же фигуры могут быть различными?

б) Численные значения неравных фигур могут быть равными?

в) Равновеликие фигуры равны?

5. Известно, что площадь фигуры 34,78 см². Каким будет численное значение площади этой фигуры, если измерить ее в квадратных дециметрах?

123. Площадь многоугольника

Формулы для вычисления площади прямоугольника, треугольника, параллелограмма были выведены давно. В геометрии их обосновывают, исходя из определения площади, при этом численное значение площади называют площадью, а численное значение длины отрезка – длиной.

Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению длин соседних его сторон.

Напомним, что слово «площадь» в этой формулировке означает численное значение площади, а слово «длина» – численное значение длины отрезка.

Доказательство. Если F – данный прямоугольник, а числа a, b – длины его сторон, то $S(F) = a \cdot b$. Докажем это.

Пусть a и b – натуральные числа. Тогда прямоугольник F можно разбить на единичные квадраты (рис. 179): $F = E \oplus E \oplus E \oplus \ldots \oplus E$. Всего их $a \cdot b$, так как имеем b рядов, в каждом из которых a квадратов. Отсюда $S(F) = \underbrace{S(E) + S(E) + \ldots + S(E)}_{a \cdot b \text{ слаг.}} = a \cdot b \cdot \underbrace{S(E)}_{1} = a \cdot b$.

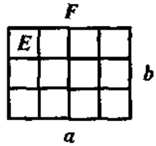


Рис. 179

Пусть теперь a и b – положительные рациональные числа: $a=\frac{m}{n}$, $b=\frac{p}{q}$, где m, n, p, q – натуральные числа.

Приведем данные дроби к общему знаменателю: $a=\frac{mq}{nq}$, $b=\frac{np}{nq}$. Разобьем сторону единичного квадрата E на nq равных частей. Если через точки деления провести прямые, параллельные сторонам, то квадрат E разделится на $(nq)^2$ более мелких квадратов. Обозначим площадь каждого такого квадрата E_1. Тогда $S(E) = (nq)^2 \cdot S(E_1)$, а поскольку $S(E) = 1$, то $S(E_1)=\frac{1}{(nq)^2}$.

Так как $a=\frac{mq}{nq}$, $b=\frac{np}{nq}$, то отрезок длиной $\frac{1}{nq}$ укладывается на стороне a точно mq раз, а на стороне b – точно np раз. Поэтому данный прямоугольник F будет состоять из $mq \cdot np$ квадратов E_1. Следовательно,

$$S(F)=mq\cdot np\cdot S(E_1)=mq\cdot np\cdot\frac{1}{(nq)^2}=\frac{mq}{nq}\cdot\frac{np}{nq}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=a\cdot b.$$

Таким образом доказано, что если длины сторон прямоугольника выражены положительными рациональными числами a и b, то площадь этого прямоугольника вычисляется по формуле $S(F) = a \cdot b$.

Случай, когда длины сторон прямоугольника выражаются положительными действительными числами, мы опускаем.

Из этой теоремы вытекает следствие: *площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.*

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, не являющийся прямоугольником (рис. 180). Опустим перпендикуляр CE из вершины C на прямую AD. Тогда $S(ABCE) = S(ABCD) + S(CDE)$.

Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямую AD. Тогда $S(ABCE) = S(BCEF) + S(ABF)$.

Так как треугольники ABF и CDE равны, то равны и их площади. Отсюда следует, что $S(ABCD) = S(BCEF)$, т.е. площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $BCEF$ и равна $BC \cdot BF$, а так как $BC = AD$, то $S(ABCD) = AD \cdot BF$.

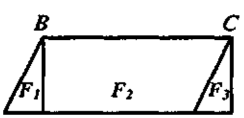


Рис. 180

Из этой теоремы вытекает следствие: *площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.*

Заметим, что слова «сторона» и «высота» в данных утверждениях обозначают численные значения длин соответствующих отрезков.

Теорема. Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Если периметр правильного многоугольника обозначить буквой P, радиус вписанной окружности – r, а площадь правильного многоугольника – S, то, согласно данной теореме, $S = \frac{1}{2} P \cdot r$.

Доказательство. Разобьем правильный n-угольник на n треугольников, соединяя отрезками вершины n-угольника с центром вписанной окружности (рис. 181). Эти треугольники равны. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2} a_n \cdot r$, где a_n – сторона правильного n-угольника. Тогда площадь многоугольника равна $\frac{1}{2} a_n \cdot r \cdot n$, но $a_n \cdot n = P$. Следовательно, $S = \frac{1}{2} P \cdot r$.

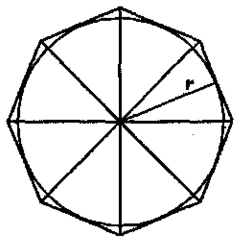


Рис. 181

Если F – произвольный многоугольник, то его площадь находят, разбивая многоугольник на треугольники (или другие фигуры, для которых известны правила вычисления площади). В связи с этим возникает вопрос: если один и тот же многоугольник поразному разбить на части и найти их площади, то будут ли полученные суммы площадей частей многоугольника одинаковыми? Доказано, что условиями, сформулированными в определении площади, площадь всякого многоугольника определена однозначно.

Кроме равенства и равновеликости фигур в геометрии рассматривают отношение равносоставленности. С ним связаны важные свойства фигур.

Многоугольники F_1 и F_2 называются *равносоставленными*, если их можно разбить на соответственно равные части.

Например, равносоставлены параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $FBCE$ (рис. 180), так как параллелограмм состоит из фигур F_1 и F_2, а прямоугольник – из фигур F_2 и F_3, причем $F_1 = F_3$.

Нетрудно убедиться в том, что равносоставленные фигуры равновелики.

Венгерским математиком Ф.Бойяи и немецким любителем математики П.Гервином была доказана теорема: *любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.* Другими словами, если два многоугольника имеют равные площади, то их всегда можно представить состоящими из попарно равных частей.

Теорема Бойяи–Гервина служит теоретической базой для решения задач на перекраивание фигур: одну разрезать на части и сложить из нее другую. Оказывается, что если данные фигуры многоугольные и имеют одинаковые площади, то задача непременно разрешима.

Доказательство теоремы Бойяи–Гервина достаточно сложное. Мы докажем только утверждение о том, что всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником, т.е. всякий треугольник можно перекроить в равновеликий ему прямоугольник.

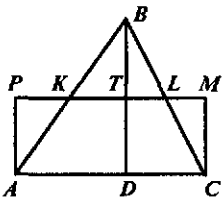


Рис. 182

Пусть дан треугольник ABC (рис. 182). Проведем в нем высоту BD и среднюю линию KL. Построим прямоугольник, одной стороной которого является AC, а другая лежит на прямой KL. Так как пары треугольников APK и KBT, а также CLM и TBL равны, то треугольник ABC и прямоугольник $APMC$ равносоставлены.

Упражнения

1. Воспроизведите доказательство теорем о площади прямоугольника и параллелограмма и покажите, какие свойства площади были при этом использованы.

2. Докажите, что площадь любого треугольника равна полóвине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.

3. Площадь прямоугольника равна 12 см , длины его сторон выражаются натуральными числами. Сколько различных прямоугольников можно построить согласно этим условиям?

4. Прямые a и b параллельны. Точка B движется по прямой b, занимая положение B_1, B_2, B_3 и т.д., а точки A и C остаются неподвижными. Равновелики ли треугольники AB_1C, AB_2C и т.д.?

5. Длины сторон параллелограмма 6 и 12 см, а высота его, проведенная к меньшей стороне, 10 см. Найдите высоту, проведенную к большей стороне параллелограмма.

6. Докажите, что всякая трапеция равносоставлена с прямоугольником, одна сторона которого равна средней линии трапеции, а другая ее высоте.

124. Площадь произвольной плоской фигуры и ее измерение

Мы выяснили, что вычисление площади многоугольника сводится по существу к вычислению площадей треугольников, на которые можно разбить этот многоугольник. А как находить площадь произвольной плоской фигуры ? И что представляет собой число, выражающее эту площадь ?

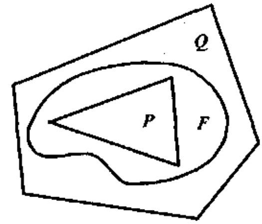


Рис. 183

Пусть F – произвольная плоская фигура. В геометрии считают, что она имеет площадь $S(F)$, если выполняются следующие условия: существуют многоугольные фигуры, которые содержат F (назовем их объемлющими); существуют многоугольные фигуры, которые содержатся в F (назовем их входящими); площади этих многоугольных фигур как угодно мало отличаются от $S(F)$. Поясним эти положения. На рисунке 183 показано, что фигура Q содержит фигуру F, т.е. Q – объемлющая фигура, а фигура P содержится в F, т.е. P – входящая фигура. На теоретико-множественном языке это означает, что $P \subset F \subset Q$ и, следовательно, можно записать, что $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$.

Если разность площадей объемлющей и входящей фигур может стать как угодно малой, то, как установлено в математике, существует единственное число $S(F)$, удовлетворяющее неравенству $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$ для любых многоугольных фигур P и Q. Данное число и считают площадью фигуры F.

Этими теоретическими положениями пользуются, например, когда выводят формулу площади круга. Для этого в круг F радиуса r вписывают правильный n-угольник P, а около окружности описывают правильный n-угольник Q. Если обозначить символами $S(Q)$ и $S(P)$ площади этих многоугольников, то будем иметь, что $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$, причем при возрастании числа сторон вписанных и описанных многоугольников площади $S(P)$ будут увеличиваться, оставаясь при этом меньше площади круга, а площади $S(Q)$ будут уменьшаться, но оставаться больше площади круга.

Площадь правильного n-угольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной в него окружности. При возрастании числа его сторон периметр стремится к длине окружности $2\pi r$, а площадь – к площади круга. Поэтому $S_{кр} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$.

Для приближенного измерения площадей плоских фигур можно использовать различные приборы, в частности, палетку.

Палетка – это прозрачная пластина, на которой нанесена сеть квадратов. Сторона квадрата принимается за 1, и чем меньше эта сторона, тем точнее можно измерить площадь фигуры.

Накладываем палетку на данную фигуру F. Квадраты, которые целиком лежат внутри фигуры F, образуют многоугольную фигуру P; квадраты, имеющие с фигурой F общие точки и целиком лежащие внутри фи-

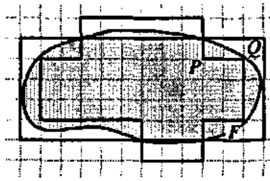


Рис. 184

гуры F, образуют многоугольную фигуру Q (рис. 184). Площади $S(P)$ и $S(Q)$ находят простым подсчетом квадратов. За приближенное значение площади фигуры F принимается среднее арифметическое найденных площадей:

$$S(F)=\frac{S(Q)+S(P)}{2}.$$

В начальном курсе математики учащиеся измеряют площади фигур с помощью палетки таким образом: подсчитывают число квадратов, которые лежат внутри фигуры F, и число квадратов, через которые проходит контур фигуры; затем второе число делят пополам и прибавляют к первому. Полученную сумму считают площадью фигуры F.

Нетрудно обосновать эти действия. Пусть m – число квадратов, которые поместились внутри фигуры F, а n – число квадратов, через которые проходит контур фигуры F. Тогда $S(P) = m$, а $S(Q) = m + n$.

И значит, $S(F)=\frac{m+(m+n)}{2}=\frac{2m+n}{2}=m+\frac{n}{2}$.

Палетка позволяет измерить площадь фигуры F с определенной точностью. Чтобы получить более точный результат, нужно взять палетку с более мелкими квадратами. Но можно поступить иначе: наложить одну и ту же палетку на фигуру по-разному и найти несколько приближенных значений площади фигуры F. Их среднее арифметическое может быть лучшим приближением к численному значению площади фигуры F.

Упражнения

1. На фигуру F наложили палетку и подсчитали, что внутри фигуры F содержится фигура, составленная из 28 единичных квадратов, а фигура F содержится внутри фигуры, состоящей из 35 единичных квадратов. Каково приближенное значение площади фигуры F?

2. Начертите круг радиуса 2 см на клетчатой бумаге и найдите его площадь, используя клетчатую бумагу как палетку, состоящую из квадратов со стороной, равной:

а) 1 см; б) 0,5 см.

Вычислите площадь этого круга по формуле, приняв $\pi = 3,14$. Сравните полученные результаты.

125. Основные выводы § 25

В данном параграфе мы уточнили ряд *понятий*, известных из школьного курса математики:

– длина отрезка; численное значение длины отрезка (мера длины отрезка);

– величина угла; численное значение величины угла (мера величины угла);

– площадь фигуры; численное значение площади фигуры (мера площади фигуры);

– площадь многоугольника и произвольной плоской фигуры;

– равновеликие и равносоставленные фигуры.

Вспомнили косвенные способы вычисления площадей прямоугольника, треугольника, параллелограмма, произвольного многоугольника, рассмотрели теоремы о взаимосвязи равновеликости и равносоставленности многоугольных фигур; обосновали способ измерения площади фигуры при помощи палетки.

Отметили, что длина, площадь, величина угла характеризуются одинаковыми свойствами, но заданы на разных классах фигур: длина – на множестве отрезков, площадь – на множестве многоугольных и криволинейных фигур, величина угла – на множестве углов.

Мы совсем не затронули вопросы, связанные с объемом фигур, считая, что понятие объема определяется аналогично тому, как это сделано для площади, и все выводы, сделанные для площади, переносятся на объем. Исключение составляет теорема Бойяи–Гервина, – для многогранников она не выполняется.

Содержание

Учебное издание

Стойлова Любовь Петровна

Математика

Учебное пособие

Редактор *Т. В. Панфилова*
Технический редактор *Р. Ю. Волкова*
Компьютерная верстка и рисунки: *Д. В. Поляченко*
Корректор *М. А. Суворова*

Диапозитивы предоставлены издательством

Подписано в печать с готовых диапозитивов 22.02.2002. Формат 60×90/16.
Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 26,5.
Тираж 30 000 экз. (3-й завод 20 001 – 30 000 экз.). Заказ №1477.

Лицензия ИД № 02025 от 13.06.2000. Издательский центр «Академия».
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.002682.05.01 от 18.05.2001.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 223. Тел./факс: (095) 334-8337, 330-1092.

Отпечатано на Саратовском полиграфическом комбинате.
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.