

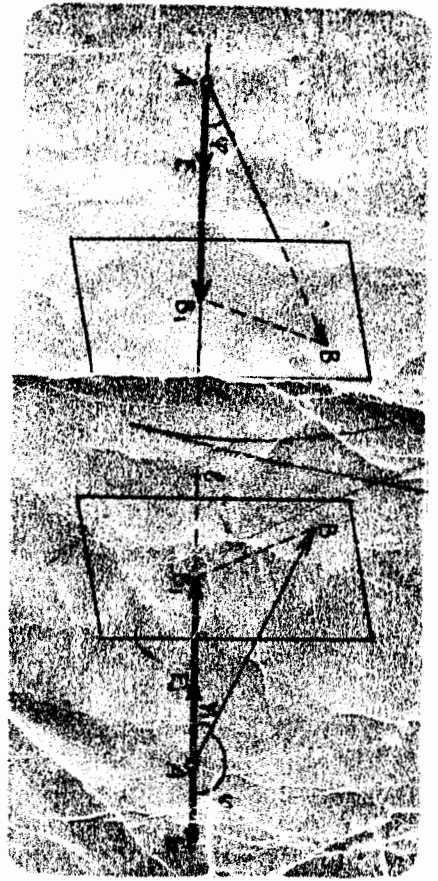
22.151973

1965

Н.Д. ДОДАЖОНОВ, М.Ш. ЖҮРА

ГЕОМЕТРИЯ

1-КИСМ

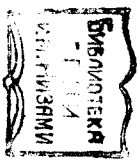


Тақризчилар: физика-математика фанлари номзоди,
доцент Т. А. Абдуллаев
физика-математика фанлари номзоди,
доцент Х. Х. Назаров

Махсус муҳаррир — профессор М. А. Собиров

Мазкур қўлланма геометрия курсининг векторлар алгебраси элементлари, координаталар методи, асимптотишлар назарияси, n ўлчовли аффин ва Евклид фазолари, квадратик формалар ва квадратикалар, кўпёқлар назарияси каби бўлимларини ўз ичига олади. Назарий материални баён этиш мисоллар ва масалаларни таҳлил этиш билан қўшиб олиб берилган.

Қўлланма педагогика институтлари ва университетлари талабалари учун мўлжалланган. Ундан яна кечки ва сиртқи бўлим талабалари, шунингдек, лицей мактабларининг ўқувчилари ҳам фойдаланишилари мумкин.



У-5248

1602050000—171 154—96
Д 353 (04)—96

ISBN 5—645—02603—9

© «Ўқитувчи» нашриёти, 1982 й.
© «Ўқитувчи» нашриёти, қайта
ишланган, 1996 й.

Ўзбекистон Республикаси

СўЗ БОШИ

Маълумки, педагогика институтларида математика фани ўрта мактаб сингари 1970 йилдан бошлаб жорий этилган дастур асосида ўқитиб келинмоқда. Бу дастурга мувофиқ, илгари мустақил фанлар сифатида ўрганилиб келинган «Аналитик геометрия», «Проектив геометрия», «Дифференциал геометрия», «Геометрия асослари», «Элементар геометрия» каби фанлар умумий мазмунини сақлаган ҳолда бирлаштирилиб ва уларга қўшимча «Квадратик формалар назарияси», «Топология элементлари» киритилиб, «Геометрия» номи билан атага бошланди. Бундан мақсад бу фанлар материалига ягона нуқтаи назардан қараб, уни ҳозирги замон математикаси тилида баён этишдир.

Ўқувчига ҳавола қилинаётган бу қўлланма педагогика институтларининг «Математика ва информатика», «Математика ва физика» мутахассисликларига мўлжалланган геометрия курсининг биринчи ва иккинчи семестрларда ўрганиладиган материалларини ўз ичига олган.

Қўлланмага муаллифларнинг Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика институтининг математика факультетида кўп йиллар давомида ўқиган марбузалари асос қилиб олинди.

Мазкур китоб икки бўлимдан иборат бўлиб, биринчи бўлимнинг I, II, IV бўбларида ва иккинчи бўлимнинг I—II бўбларида анъанавий аналитик геометрия курси материалли баён этилган. Биринчи бўлимнинг III бўби текисликдаги асимптотишларга, иккинчи бўлимнинг IV бўби n ўлчовли аффин ва евклид фазолари назариясига, V бўби квадратик формалар ва квадратикаларга, ниҳоят, VI бўби кўпёқлар назариясига бағишлангандир. Вектор фазо ва кўп ўлчовли аффин ва евклид фазолари аксиоматик асосда киритилди.

Қўлланмани ёзишда ўрта мактабни эски ва янги дастур бўйича ўқиб тулгатган ўқувчилар назарда тутилди, шунинг учун бу китобдан кечки ва сиртқи бўлим талабалари ҳам фойдаланишилари мумкин.

Бу китобнинг яратилишида фаол қатнашган Низомий номи-

АССОСИЙ БЕЛГИЛАШЛАР

$\{x, y, z, \dots\}$ — элементлари x, y, z, \dots дан иборат тўплам.

\in — тегишлилик белгиси: $x \in X, X$ тўпламнинг элементи x .

\notin — тегишли эмас.

\equiv — конгруэнт: $AB \equiv CD$ — AB кесма CD кесмага конгруэнт.

\neq — конгруэнт эмас.

\subset — қисм (қисм тўплам): $X \subset Y, X$ тўплам Y тўпламнинг қисми (X тўплам Y тўпламнинг қисми тўплами).

$\not\subset$ — қисми эмас.

\cup — бирлашма: $X \cup Y, X$ ва Y тўпламларнинг бирлашмаси.

\cap — ҳар қандай: $\forall x \in X \rightarrow X$ тўпламнинг ҳар қандай (ихтиёрий) x элементи.

\cap — кесилма: $X \cap Y$ — X ва Y тўпламларнинг кесилмаси.

\emptyset — бўш тўплам.

$\{x | f(x) = y\}$ — шундай x элементлар тўпламики, улар учун $f(x) = y$

$\alpha \Rightarrow \beta$ — α дан β келиб чиқади.

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ — α дан β, β дан α келиб чиқади.

\parallel — параллеллик белгиси: $a \parallel b$ — a тўғри чизиқ b тўғри чизиққа параллел.

\exists — мавжудки, $\exists x \in X$ — X тўпламга тегишли шундай x элемент мавжудки,

$X \setminus Y$ — X тўпламдан Y тўплам чиқарилган.

SX — X тўпламнинг тўлдирувчиси.

Δ — исботнинг туғалганлигини билдирувчи белги.

I БУЛИМ
ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ
ТЕКИСЛИКДАГИ ГЕОМЕТРИЯ

I Б О В. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Таърифлар, белгилашлар

Мактабда ўрганилган геометрия курсидан нуқталарнинг ҳар қандай тўплами *фигура* (шакл) деб аталиши, умумматематик тушунчалар бўлмиш сон, тўплам, тегишлилик билан бир қаторда таърифсиз қабул қилинадиган «нуқта», «тўғри чизиқ», «текислик», «масофа» тушунчалари *ассоций тушунчалар* деб аталиши маълум.

Ассоций тушунчалардан фойдаланиб «орасида», «кесма», «нур», «синиқ чизиқ», «ярим текислик», «бурчак» тушунчаларига таъриф берамиз.

Аввало ушбу белгилашларни киритаялик. Нуқталарни лотин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, \dots билан, тўғри чизиқларни шу алфавитнинг кичик ҳарфлари a, b, c, \dots ёки иккита қатга ҳарф AB, CD, \dots билан, текисликларни эса грек алфавитининг бош ҳарфлари Π, Σ, Ω ёки учта қатга ҳарф ABC, EFG, \dots билан белгилаймиз. Икки A, B нуқта орасидаги масофани $r(A, B)$ ёки $|AB|$ билан белгилаймиз.

Тўғри чизиқдаги турли учта A, B, C нуқта учун

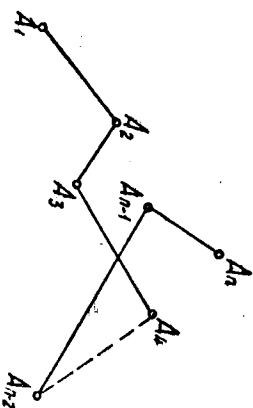
$$r(A, C) = r(A, B) + r(B, C)$$

муносабат бажарилса, B нуқта A ва C нуқталар орасида ётади дейилади.

A, B нуқталардан ва улар орасида ётган барча нуқталардан иборат тўплам *кесма* деб аталиб, AB билан белгиланади. A ва B нуқталар AB кесманинг *учлари*, улар орасидаги масофа AB кесманинг *узунлиги* дейилади.

Тўғри чизиқнинг берилган нуқтасидан бир томонда ётган барча нуқталари тўплами *нур* деб аталади. Берилган нуқта *нурнинг бошланғич нуқтаси* дейилади.

AB нурда A унинг бошланғич нуқтаси, B эса шу нурдаги бирорта нуқта.



1-чизма

Битта тўғри чизикнинг умумий бошланғич нуқтага эга бўлган AB , AC нурлари қарам-қарши нурлар деб аталади.

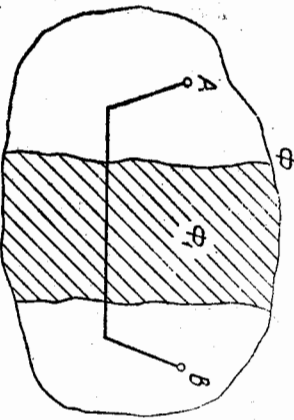
Мажму тартибда олинган чекли сондаги A_1, A_2, \dots, A_n нуқталар берилган бўлсин (1-чизма) ва бу нуқталарнинг кетма-кет келган ҳар учтаси бир тўғри чизикда ётмасин, у ҳолда $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ кесмаларнинг бирлашмаси A_1, A_n нуқталарни туташтирувчи синиқ чизик деб аталиб, A_1, A_n нуқталар унинг *уялари* дейилади. Синиқ чизикни ташкил этувчи ҳар бир кесма унинг бўйи дейилади.

Барча бўғинлари билан текисликка тегишли бўлган синиқ чизик яси синиқ чизик дейилади.

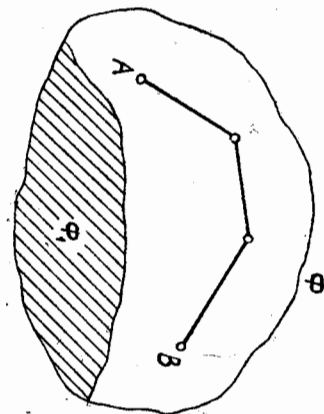
Φ фигурани олайлик. Бу фигуранинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирган ва ўзи шу фигурага тегишли бўлган синиқ чизик мавжуд дейлик, $\Phi_1 = \Phi \setminus \Phi_1$ фигурани қараймиз.

Бунда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

- 1) шундай $A, B \in \Phi_2$ нуқталар мавжудки, уларни Φ_1 фигура билан кесилмайдиган синиқ чизик орқали туташтириб бўлмайди (2-чизма);



2-чизма



3-чизма

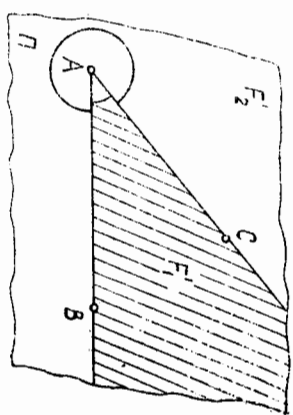
- 2) ҳар қандай $A, B \in \Phi_2$ нуқталарни Φ га тегишли бўлиб, Φ_1 фигура билан кесилмайдиган синиқ чизик билан туташтириши мумкин (3-чизма).

Биринчи ҳолда Φ_1 фигура Φ_2 фигурани икки қисмга ажратмайди, иккинчи ҳолда эса ажратмайди деймиз.

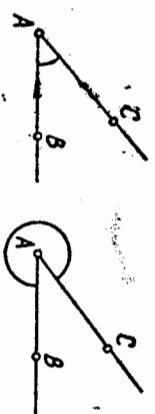
Масалан, a тўғри чизикда олинган ҳар бир A нуқта $a \setminus \{A\}$ фигурани иккига қисмга ажратади, чунки $a \setminus \{A\}$ фигурага тегишли шундай B, C нуқталар ҳар вақт топилдики, уларни туташтирувчи кесма A нуқтадан ўтади ва a тўғри чизикқа тегишли бўлади.

Ҳар бир қисмининг A нуқта билан бирлашмаси боши A нуқтада бўлган нур бўлади. Шу каби $a \subset \Pi$ тўғри чизикнинг $\Pi \setminus a$ фигурани иккига қисмга ажратилиши кўрсатилди. Бунда ҳар бир қисм *очиқ ярим текислик*, *очиқ ярим текисликнинг* a тўғри чизик билан бирлашмаси *ёпиқ ярим текислик* дейилади.

Π текисликда бошланғич нуқтаси умумий бўлган ҳар хил (қарам-қарши бўлмаган) AB ва AC нурларни олайлик (4-чизма). F орқали бу икки нурнинг бирлашмасини белгилаймиз. У ҳолда F фигура $F = \Pi \setminus F$ фигурани F_1 ва F_2 қисмларга ажратади. Бу қисмлардан ҳар бирининг F фигура билан бирлашмаси *бурчак* деб аталади. AB ва AC нурлар бурчакнинг *томонлари*, A бурчакнинг *уши*, F_i фигура F_i ($i = 1, 2$) бурчакнинг *ички соҳаси* дейилади.



4-чизма



5-чизма

Бошланғич нуқтаси умумий бўлган икки нур томонлари умумий бўлган икки бурчакни аниқлайди. Икки бурчакдан қайси бирини қараётган бўлсак, шу бурчак, одатда, 5-чизмада кўрсатилгандек, *ёй* билан белгилаб қўйилади.

Томонлари AB, AC нурлардан иборат бурчак $\angle BAC$ билан белгиланади. AB нурни A нуқта атрофида AC нур устига тушгунча буришдан ҳосил қилинган бурчакни ўлчайилган сон $\angle BAC$ нинг катталиги (миқдори) дейилади.

$\angle BAC$ нинг катталиги VA нурни AC нур устига тушгунча буриш соат миллининг ҳаракати йўналишига тексари бўлган ҳолда мусбат, соат миғли ҳаракати йўналиши бўйича бўлган ҳолда эса манфий деб ҳисобланади.

Бир текисликка тегишли AB, CD тўғри чизиклар кесилмаса ёки устма-уст тушса, улар *параллел тўғри чизиклар* дейилади.

Агар AB, CD тўғри чизиклар параллел бўлса, бу тўғри чизикларда ётган AB, CD кесмалар (ёки AB, CD нурлар) *параллел* дейилади. Хусусан, битта тўғри чизикда ётган иккига кесма (ёки икки-та нур) *параллел* бўлади.

Π, Σ текисликлар кесилмаса ёки устма-уст тушса, улар *параллел* деб аталади.

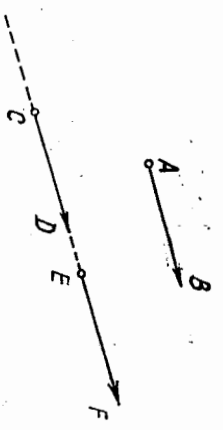
a тўғри чизик Π текислик билан умумий нуқтага эга бўлмаса ёки шу текисликка тегишли бўлса, a тўғри чизик Π текисликка *параллел* деб аталади.

Икки нур бир тўғри чизикда ётиб, улардан бири иккинчисига тегишли бўлса, улар *бир хил йўналишли*, акс ҳолда *қарам-қарши йўналишли* дейилади.

1-тарриф. Узунликлари тенг ва бир хил йўналишда барча кесма-лар тўплами *озоо вектор* ёки қисқача *вектор* деб аталади.

Векторларни устига «→» белги қўйилган кичик лотин ҳарфлари $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}$ билан белгилаймиз. Фазодаги барча векторлар тўпламини V билан белгилаймиз. Юқордаги таврифдан векторнинг узунликлари тенг ва бир хил йўналишли кесмалар синфидан иборат эканлиги равшан. Бу синфга тегишли ҳар бир йўналган кес-ма синфни тўлиқ аниқлайди.

Шунинг учун, агар $\vec{AB} \in \alpha$ бўлса, α векторни $\alpha = \vec{AB}$ кў-ринишда белгилаш мумкин. Табиийки, биргина векторнинг ўзини чексиз кўп усул билан белгилаш мумкин: $\alpha = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$ (8-чизма).



8-чизма

\vec{AB} векторда A унинг боши, B эса охири дейилади. Йўналган \vec{AB} кесманинг узунлиги \vec{AB} векторнинг *узунлиги* (ёки *модули*) дейилади ва $|\vec{AB}|$ кўринишда белгиланади. Бундан

$$|\vec{AB}| = \rho(A, B).$$

2-тарриф. Узунлиги бирга тенг бўлган вектор *бирдик вектор* ёки *орт* дейилади.

3-тарриф. Боши билан охири устма-уст тушган вектор *ноль вектор* дейилади. Ноль вектор O кўринишда белгиланади ва унинг узунлиги нолга тенг деб ҳисобланади.

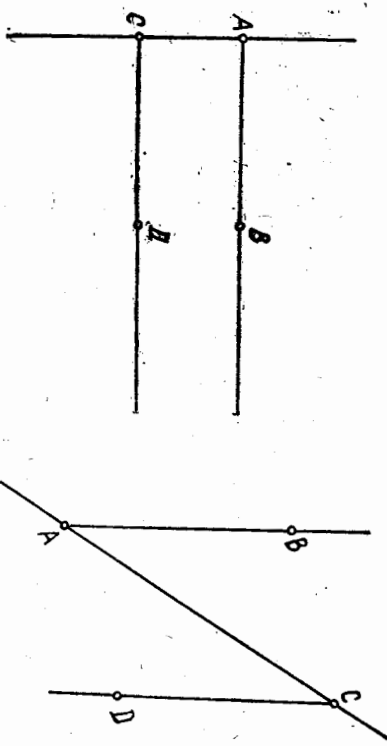
Ноль бўлмаган ҳар қандай вектор таяин бир йўналишни аниқ-лайди. Ноль вектор йўналишга эга эмас.

4-тарриф. Агар $\vec{AB} \in \alpha$, $\vec{CD} \in \beta$ йўналган кесмалар бир хил (қарама-қарши) йўналишда бўлса, $\alpha = \vec{AB}$ ва $\beta = \vec{CD}$ векторлар *бир хил* (*қарама-қарши*) *йўналишда* деб аталади.

\vec{AB} ва \vec{CD} векторларнинг бир хил йўналишли эканини $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ кўринишда белгилаймиз.

Икки векторнинг тенглиги, яъни $\vec{a} = \vec{b}$ ёзуви \vec{a}, \vec{b} вектор-ларнинг битта вектор эканини, лекин турлича белгиланганини бил-диради:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \end{pmatrix}.$$



6-чизма

7-чизма

Бир тўғри чизикда ётмайдиган икки нур параллел бўлиб, улар бу нурларнинг бошланғич нукталарини туташтирувчи тўғри чизик билан ажратилган битта ярим текисликда ётса (6-чизма), улар *бир хил йўналишли*, турли ярим текисликларда ётса (7-чизма), *қарама-қарши йўналишли* дейилади. Бир хил йўналишни \parallel билан, қарама-қарши йўналишни \nrightarrow билан белгилаймиз.

Нурларнинг бир хил йўналганлиги қуйидаги хоссаларга эга:

- 1) $\vec{AB} \parallel \vec{AB}$ (рефлексивлик хоссаси);
- 2) $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow \vec{CD} \parallel \vec{AB}$ (симметриклик хоссаси);
- 3) $\vec{AB} \nrightarrow \vec{CD}$ ва $\vec{CD} \nrightarrow \vec{EF} \Rightarrow \vec{AB} \nrightarrow \vec{EF}$ (транзитивлик хоссаси).

Бу хоссаларнинг ўринлиги юқоридаги таврифлардан бевосита келиб чикади.

2-§. Йўналган кесмалар ҳақида тушуنча

1-тарриф. Берилган кесманинг учларидан қайси бири биринчи ва қайсиниси иккинчилиги аниқланган бўлса, бундай кесма *йўнал-ган кесма* дейилади. Йўналган кесманинг биринчи учи унинг *боши*, иккинчи учи эса *охири* дейилади.

Боши A ва охири B нуктада бўлган йўналган кесмани \vec{AB} би-лан белгилаймиз.

Шунинг тавжидлаймизки, оддий \vec{AB} кесманинг учлари тенг хўжук-ли бўлиб, улар тартибнинг аҳамияти йўқдир. Шунинг учун $\vec{AB} = \vec{BA}$ деб ёзиш мумкин. Йўналган кесмаларда эса бош ва охи-рининг ўринлари алмаштирилгани билан уларнинг йўналиши ўзгара-ди. Йўналган \vec{AB} кесманинг *узунлиги* деб, \vec{AB} кесманинг узунли-гига айтилади ва у $|\vec{AB}|$ ёки AB билан белгиланади.

2-тарриф. Агар \vec{AB} ва \vec{CD} нурлар бир хил (қарама-қарши) йўналишда бўлса, \vec{AB}, \vec{CD} йўналган кесмалар *бир хил* (*қарама-қарши*) *йўналишда* дейилади.

5-таъриф. Агар \vec{a} векторни ҳосил қилувчи йўналган кесмалардан бири d тўғри чизиққа (II текисликка) параллел бўлса, у ҳолда \vec{a} вектор d тўғри чизиққа (II текисликка) *параллел* деб аталади. \vec{a} векторнинг d тўғри чизиққа (II текисликка) параллеллиги $\vec{a} \parallel d$ ($a \parallel \Pi$) кўринишида белгиланади.



9-чизма

6-таъриф. Битта тўғри чизиққа параллел бўлган икки вектор *коллинеар векторлар* деб аталади. \vec{a} ва \vec{b} векторларнинг коллинеарлиги $\vec{a} \parallel \vec{b}$ кўринишида белгиланади. Ноль бўлмаган коллинеар векторлар ё бир хил йўналдишли, ёки қарама-қарши йўналдишли бўлиб, ноль вектор ҳар қандай векторга коллинеар деб ҳисобланади.

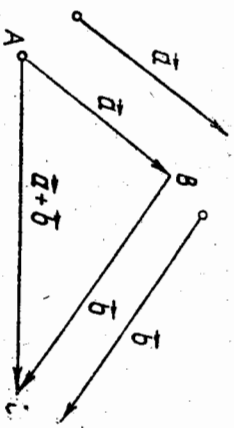
9-чизмада тасвирланган \vec{AE} , \vec{BC} векторлар бир хил йўналдишли, \vec{AB} , \vec{DE} векторлар эса қарама-қарши йўналдишлидир.

4-§. Векторлар устида чизиқли амаллар

Векторлар устида бажариладиган кўйидаги амаллар *чизиқли амаллар* деб аталади.

1. Векторларни қўшиш.
2. Векторларни анириш.
3. Векторларни сонга кўпайтириш.

Векторларни қўшиш. Таъриф. Иккита \vec{a} , \vec{b} векторнинг *йиғиндиси* деб исаталган A нуктадан \vec{a} векторни қўйиб, унинг охири B га \vec{b} векторни қўйганда боши \vec{a} векторнинг боши A да, охири \vec{b} векторнинг охири C да бўлган \vec{AC} векторга айталади



(10-чизма). \vec{a} , \vec{b} векторларнинг йиғиндиси $\vec{a} + \vec{b}$ билан белгиланади. Векторларни қўшиш таърифидан исаталган A , B ва C уч нукта учун

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (*)$$

тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади. (*) тенглик *векторларини*

10-чизма

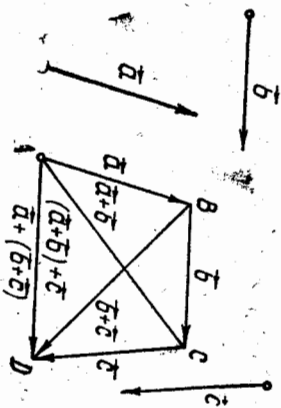
*қўшишнинг учбурчак қоида*си деғилди. Икки коллинеар векторни қўшиш ҳам шу қоида бўйича бажарилади.

Векторларни қўшиш амали кўйидаги хоссаларга эга:

1°. Қўшишнинг гуруҳланиш (ассоциативлик) хоссаси. Ҳар қандай \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} векторлар учун

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

муносабат ўринли.



11-чизма

Исбот. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидадан (11-чизма):

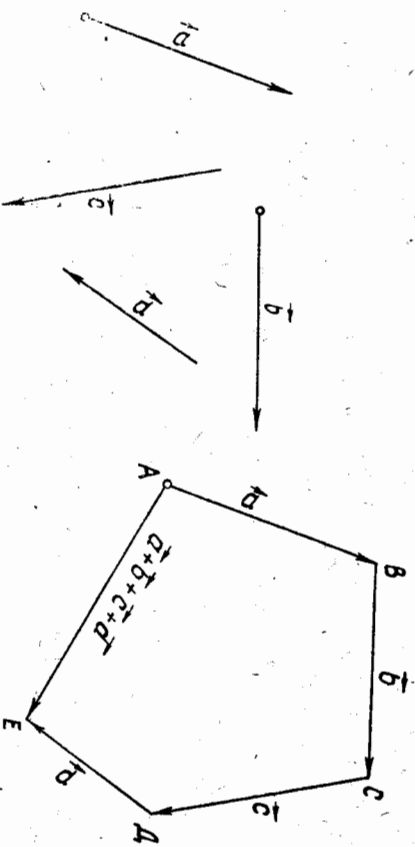
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC},$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{AC} + \vec{CD} \text{ ва } \vec{b} + \vec{c} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{BD},$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD},$$

бундан $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ экани келиб чиқади.

Қўшилувчи векторларнинг сон иккитадан ортиқ бўлганда уларни қўшиш ушбу қоида асосида бажарилади: берилган \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , ... \vec{l} векторларнинг йиғиндисини ҳосил қилиш учун \vec{a} векторнинг охирига \vec{b} векторнинг бошини қўйиш, кейин \vec{b} векторнинг охирига \vec{c} векторнинг бошини қўйиш ва бу ишни \vec{l} вектор устида бажарилганча давом эттириш керак. У вақтда $\vec{a} + \vec{b} + \dots + \vec{l}$ йиғинди вектор боши \vec{a} векторнинг бошидан, охири эса \vec{l} векторнинг охиридан иборат вектор бўлади.

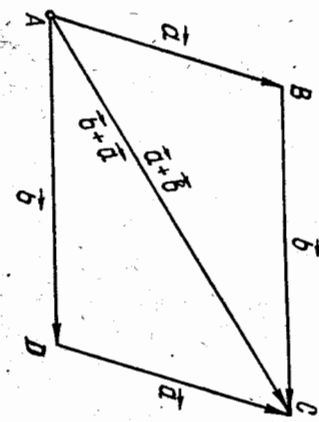


12-чизма

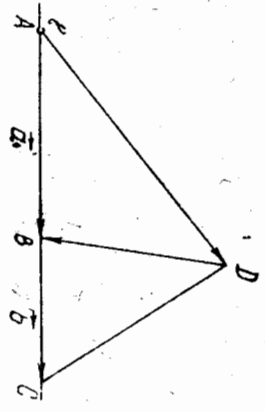
Масалан, 12-чизмадаги \vec{AE} вектор берилган a, b, c, d векторларни қўшишдан ҳосил бўлган.

2°. Қўшишнинг ўрин алмаштириш (коммутативлик) хоссаси. Ҳар қандай иккита a ва b вектор учун $a + b = b + a$ тенглик ўринлидир.

Исбот. $a = \vec{AB}$ ва $b = \vec{BC}$ бўлсин. Икки ҳол бўлиши мумкин: 1) a, b векторлар коллинеар эмас. Бу ҳолда A, B, C нукталар битта тўғри чизиқда ётмайди (13-чизма).



13-чизма



14-чизма

ABC учбурчакни $ABCD$ параллелограммга тўлдирсак, векторларни қўшишнинг учбурчак қоида сига кўра $a + b = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, $b + a = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}$; бу икки тенгликдан эса $a + b = b + a$.

2) $a \parallel b$ бўлсин. Бу ҳолда A, B, C нукталар битта l тўғри чизиқда ётади (14-чизма).

$D \notin l$ нуктани олайлик, у ҳолда $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$.

1) ҳолга кўра $\vec{AD} + \vec{DC} = \vec{DC} + \vec{AD}$. Лекин $\vec{DC} = \vec{DV} + \vec{VC}$, $\vec{AD} = \vec{AV} + \vec{VD}$ бўлгани учун

$$\vec{AC} = \vec{DV} + \vec{VC} + \vec{AV} + \vec{VD} = \vec{VC} + \vec{AV} \quad (1)$$

Иккинчи томондан,

$$\vec{AC} = \vec{AV} + \vec{VC} \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгликлардан $a + b = b + a$ тенгликка эга бўламиз. ▲

3°. Ҳар қандай a векторга ноль векторни қўшилса, a вектор ҳосил бўлади, яъни

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Учбурчак қоида сига кўра иситилган $a = \vec{AB}$ вектор учун $\vec{AB} + \vec{BV} = \vec{AV}$ тенглик эки $a + 0 = a$ тенглик ўринли. ▲

4°. Ҳар қандай a вектор учун шундай a' вектор мавжудки, унинг учун

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}. \quad (3)$$

Исбот. $a = \vec{OA}$ бўлсин. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоида сига кўра $\vec{OA} + \vec{AO} = \vec{OO} = \vec{0}$, бундан $\vec{AO} = \vec{a}'$. ▲

(3) тенгликни қаноатлантирувчи a' вектор a векторга қарш қарши вектор дейилади ва $-a$ билан белгиланади.

5-§. Векторларни айирishi

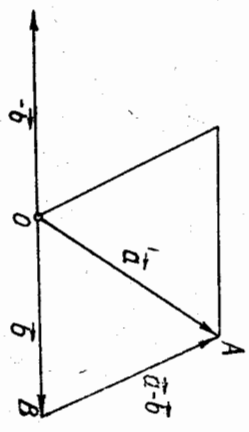
Таъриф. a, b векторларнинг айирмаси деб, a вектор билан b векторга қарш қарши $-b$ векторнинг йиғиндисига айтилади.

Бу таърифдан кўринадики,

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

учун $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ векторни яшаш керак экан. Агар a, b векторлар битта O нуктага қўйилган бўлса (15-чизма) ҳамда $a = \vec{OA}$ ва $b = \vec{OB}$ деб белгиланган бўлса, у ҳолда

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}.$$

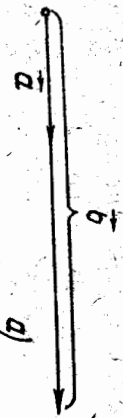


15-чизма

Бу ҳолда a ва b векторларнинг айирмасини топиш учун боши B нуктада, охири эса A нуктада бўлган \vec{BA} векторни яшаш етарли бўлади. Бу қоиладан кўринадики, айирма вектор доимо мавжуддир.

6-§. Векторни сонга кўпайтириш

Таъриф. $\alpha \neq 0$ векторнинг $\alpha \in R$ сонга кўпайтмаси деб, шундай b векторга айтиладики, $\alpha > 0$ бўлганда b нинг йўналиши a нинг йўналиши билан бир хил, $\alpha < 0$ да b нинг йўналиши a нинг йўналишига тесқари бўлиб, b векторнинг узунлиги эса a векторнинг узунлиги билан $|\alpha|$ сон модулининг кўпайтмасига тенг. Бу кўпайтма αa шаклида белгиланади (сон кўпайтувчи чап томонда ёзилган).



Бу таърифдан Бевосита куйидаги хулосалар келиб чиқарилади:

- а) $\forall a$ вектор учун $0 \cdot a = 0$;
- б) $\forall a \in R$ учун $a \cdot 0 = 0$;
- в) $\forall a$ вектор учун $1 \cdot a = a$, $(-1) \cdot a = -a$;
- г) a ва $a \cdot a$ векторлар ўзаро коллинеардир;

16-чизма

сонига кўпайтирилган: $b = 3a$. 16-б чизмада c вектор $-\frac{1}{2}$ сонига кўпайтирилган: $b = -\frac{1}{2}c$.

Шуни таъкидлаш керакки, бирор $a \neq 0$ векторни ўзининг узунлигига тескари $\frac{1}{|a|}$ сонга кўпайтирилса, шу вектор йўналишидаги бирлик вектор (орт) ҳосил бўлади, яъни $\frac{1}{|a|}a = a_0$ ($|a_0| = 1$).

Теорема. Агар $a \parallel b$ ($a \neq 0$) бўлса, λ ҳолда шундай α сон мавжудки, $b = \alpha a$ (4)

бўлади.

Исбот. $a \parallel b$ бўлгани учун куйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

- 1) $a \parallel b$ бўлса, $\frac{1}{|a|}a = \frac{1}{|b|}b$ бўлиб, бундан $b = \frac{|b|}{|a|}a$, бу ҳолда $\alpha = \frac{|b|}{|a|}$ бўлади;
- 2) $a \perp b$ бўлса, $\frac{1}{|a|}a = -\frac{1}{|b|}b$ бўлиб, бундан $b = -\frac{|b|}{|a|}a$,
- 3) $b = 0$ бўлганда $b = 0 \cdot a$; бундан $\alpha = 0$.

Демак, векторни сонга кўпайтириш таърифидан ва бу теоремадан бундай хулоса чиқарамиз: $a \parallel b \Leftrightarrow b = \lambda a$. Шундай қилиб (4) муносабат a, b векторлар коллинеарлигининг зарурий ва етарли шартидир.

Векторни сонга кўпайтириш қуйидаги хоссаларга эга:
1°. Γ уруҳ даниш хоссаси. Ихтиёрий a вектор ва ҳар қандай $\alpha, \beta \in R$ сонлар учун

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \quad (5)$$

муносабат ўринлидир.

Исбот. $\overline{AB} \in \alpha(\beta a)$ ва $\overline{CD} \in (\alpha\beta)a$ йўналган кесмаларни ола-миз. $|\overline{AB}| = |\alpha\beta a|$ ҳамда AB ва \overline{CD} бир хил йўналишли кесмалар эканини кўрсатамиз:

$$|\overline{AB}| = |\alpha(\beta a)| = |\alpha||\beta a| = |\alpha||\beta||a|$$

$$|\overline{CD}| = |(\alpha\beta)a| = |\alpha\beta||a| = |\alpha||\beta||a|$$

бундан кўринадики, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Энди $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ эканини кўрсатиш керак. Бу ерда куйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

- 1) $\alpha > 0, \beta > 0$ бўлсин. Векторни сонга кўпайтириш таърифига кўра $a \parallel \beta a$ ва $\alpha(\beta a) = \overline{AB} \parallel a$ бўлади. Иккинчи томондан, $\alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta > 0$, бундан эса $(\alpha\beta)a = \overline{CD} \parallel a$.

Бу икки муносабатдан: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, демак, \overline{AB} ва \overline{CD} йўналган кесмалар бир хил йўналишли;

- 2) $\alpha > 0, \beta < 0$ бўлсин, бу ҳолда $a \perp \beta a$, $\alpha(\beta a) \perp \beta a \Rightarrow \overline{AB} \perp a$. Шу билан бирга $\alpha > 0, \beta < 0 \Rightarrow \alpha\beta < 0$, бундан эса $(\alpha\beta)a \perp a$ ёки $\overline{CD} \perp a$, бундан ва $\overline{AB} \perp a$ дан $\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$;
- 3) $\alpha < 0, \beta > 0$; $\alpha < 0, \beta < 0$ ва α ҳамда β нинг бири нолга тенг бўлган ҳолларда ҳам $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ ва $\overline{AB}, \overline{CD}$ бир хил йўналишли бўлиб, (5) муносабатнинг бу ҳолларда ҳам ўринли эканини кўрсатишни ўқувчига ҳавола этамиз.

- 2°. Ҳар қандай a вектор ва ихтиёрий $\alpha, \beta \in R$ сонлар учун

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad (6)$$

муносабат ўринли.

Исбот. $a \neq 0$ ва $\alpha\beta(\alpha + \beta) \neq 0$ бўлсин ($a = 0$ ёки $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ ларнинг бири ноль бўлганда шу параграфдаги б) хулосага кўра (6) муносабатнинг ўринли экани равшан). Йўналган $\overline{OA} \in a$ кесмани ола-миз. Бу ерда куйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

- 1) $\alpha > 0, \beta > 0$ ($\alpha < 0, \beta < 0$), бу ҳолда $\alpha + \beta > 0$ ($\alpha + \beta < 0$).

Йўналган $\alpha \overline{OA} \in \alpha a$, $\beta \overline{OA} \in \beta a$ кесмаларни қараймиз. У ҳолда $(\alpha + \beta) \overline{OA} \in (\alpha + \beta)a$ бўлиб, $\alpha \overline{OA}, \beta \overline{OA}$ ва $(\alpha + \beta) \overline{OA}$ кесмалар бир хил йўналишли, шу билан бирга

$$|(\alpha + \beta) \overline{OA}| = |\alpha \overline{OA}| + |\beta \overline{OA}|$$

(Чунки $|a + b| = |a| + |b|$), бундан (6) муносабатнинг ўринлиги келиб чиқади.

2) $\alpha > 0, \beta < 0$ ва $|a| < |\beta|$ бўлсин (яъни $a + b$ нинг ипораси a нинг ипорасига тескари). Бу ҳолда $-a$ билан $a + b$ нинг ипоралари бир хил бўлиб, 1) ҳолга кўра

$$(-\alpha)a + (\alpha + \beta)a = [(-\alpha) + \alpha + \beta]a = \beta a,$$

бу тенгликнинг иккада томонига a векторни кўшсак, (6) муносабат келиб чиқади. Агар $\alpha < 0, \beta > 0, |a| > |\beta|$, яъни $a + b < 0$ бўлсин десак, у ҳолда $(-\alpha) + (-\beta) > 0$ бўлиб, бунинг ипораси β нинг ипораси билан бир хил ва 1) ҳолга кўра

$$[(-\alpha) + (-\beta)]a + \beta a = [(-\alpha) + (-\beta) + \beta]a = (-\alpha)a,$$

бундан

$$[(-\alpha) + (-\beta)]a = (-\alpha)a + (-\beta)a$$

тенгликни ёза оламиз, унинг иккада томонини -1 га кўпайтирсак, (6) муносабатга эга бўламиз. \blacktriangle

3°. Ҳар қандай a, b векторлар ва ихтиёрый $\alpha \in \mathcal{R}$ учун

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad (7)$$

муносабат ўринлидир.

Исбот. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $a \parallel b$. Бу ҳолда юқоридаги теоремага асосан шундай $\lambda \in \mathcal{R}$ сон мавжудки, $a = \lambda b$.

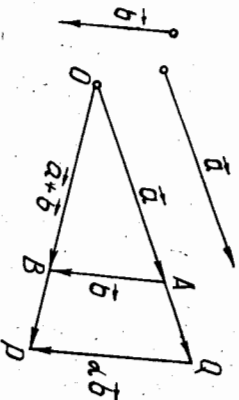
2°-хоссага кўра (7) тенгликнинг чап томони

$$\alpha(a + b) = \alpha(\lambda b + b) = \alpha(\lambda + 1)b \quad (8)$$

кўринишга, унинг ўнг томони эса

$$\alpha a + \alpha b = \alpha \lambda b + \alpha b = \alpha(\lambda + 1)b \quad (9)$$

кўринишга келади. (8) ва (9) ни таққослаб, (7) нинг ўринли эканлига ишонч ҳосил қиламиз.



17-чизма

2) $a \nparallel b$ (a ва b векторлар коллинеар эмас) ва $\alpha > 0$ бўл-

син. Бирор O нуқтага $\vec{a} = \vec{OA}$ векторни, унинг охири A га $\vec{b} = \vec{AB}$ векторни кўйиб, $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ векторни ҳосил қиламиз (17-чизма).

$$\alpha a = \vec{OQ}, \alpha(a + b) = \vec{OP} \quad (10)$$

бўлсин. Векторларни кўшишнинг учбурчак қондасига кўра

$$\vec{OQ} + \vec{QP} = \vec{OP} \quad (11)$$

OAB ва OQR учбурчакларда O учдаги бурчак умумий ва $\frac{|OQ|}{|OB|} = \frac{|OQ|}{|OA|}$

$\frac{|OP|}{|OB|} = \alpha$ бўлгани учун $\triangle OAB \sim \triangle OQR$, бундан

$$|\vec{QR}| = \alpha |\vec{AB}|, \vec{QR} \parallel \vec{AB}, \alpha > 0 \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{QR},$$

у ҳолда

$$\vec{QR} = \alpha \vec{AB} = \alpha b. \quad (12)$$

$$(10), (11), (12) \Rightarrow \alpha a + \alpha b = \alpha(a + b).$$

$\alpha < 0$ бўлган ҳол ҳам шу каби исбот қилинади. \blacktriangle

Шундай қилиб, барча овоз векторлар тўғрисида V да аниқланган векторларни кўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амаллари кўйидаги хоссаларни қановатлантираб экан:

1. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (кўшишнинг ассоциативлиги).

2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (кўшишнинг коммутативлиги).

3. $\forall a \in V$ учун $\exists 0 \in V \mid 0 + a = a + 0 = a$ (ноль векторнинг мавжудлиги).

4. $\forall a \in V$ учун $\exists (-a) \in V \mid a + (-a) = (-a) + a = 0$ (қарама-қарши векторнинг мавжудлиги).

5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ (векторни сонга кўпайтиришнинг сонларга нисбатан ассоциативлиги).

6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (векторни сонга кўпайтиришнинг сонларни кўшишга нисбатан дистрибутивлиги).

7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (векторларни кўшишга нисбатан сонга кўпайтиришнинг дистрибутивлиги).

8. $1 \cdot a = a$.

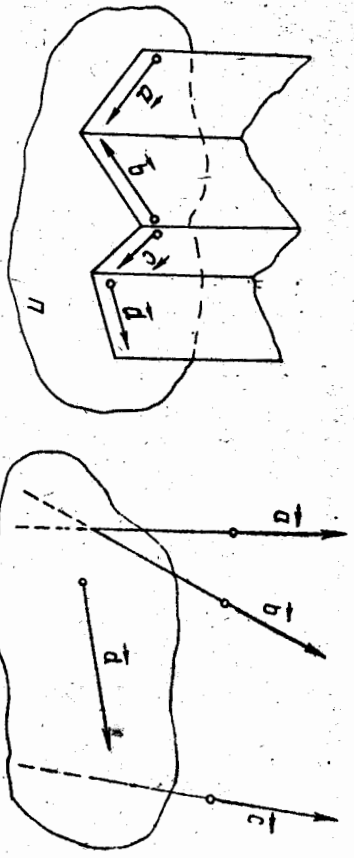
Бу саккиз хоссани қановатлантирувчи векторлар тўғрисида V вектор фазо деб аталади.

V вектор фазонинг бирор a тўғри чизикқа параллел бўлган барча векторлари тўғрисида V_1 билан белгилайлик. Равшанки, V_1 нинг ихтиёрый икки вектори ўзаро коллинеардир (18-чизма).

V вектор фазонинг бирор Π текисликка параллел бўлган барча векторлари тўғрисида V_2 билан белгилаймиз



18-чизма



19-чизма

20-чизма

ва, уларни *компланлар векторлар* деб атаймиз (19-чизма), 20-чизмадаги векторлар компланар эмас.

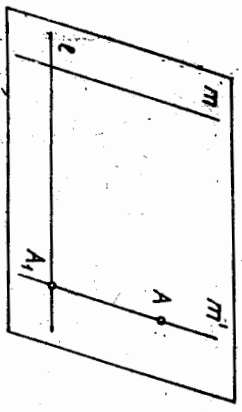
$\vec{a}, \vec{b} \in V_1$ бўлсин, γ ҳолда $\vec{a} + \vec{b} \in V_1$, $\alpha \vec{a} \in V_1$ ($\alpha \in R$) бўлади. Шу билан бирга 1—8-хоссадар бажарилади (чунки бу хоссадар V нинг ҳар қандай вектори учун бажарилади). Демак, V_1 вектор фазодир. Худди шу каби V_2 ҳам вектор фазодир.

7-§. Векторнинг ўқдаги проекцияси

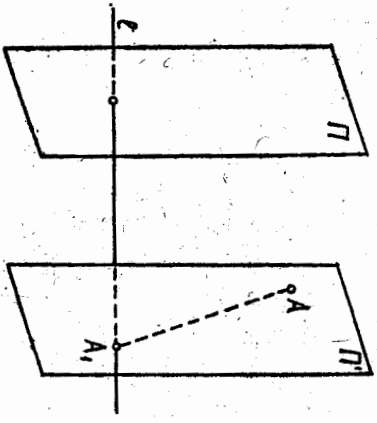
II текисликда ўзаро параллел бўлмаган l, m тўғри чиқиқлар берилган бўлсин.

1-таъриф. II текисликдаги ихтиёрий A нуқтанинг l тўғри чиқиқдаги m тўғри чиқиққа *параллел проекцияси* деб, A нуқтадан m тўғри чиқиққа параллел қилиб ўтказилган m' тўғри чиқиқ билан кесилган A_1 нуқтасига айтилади (21-чизма) ва уни $pr_l A = A_1$ билан белгиланади.

$A \in l$ бўлган ҳолда $pr_l A = A$.



21-чизма



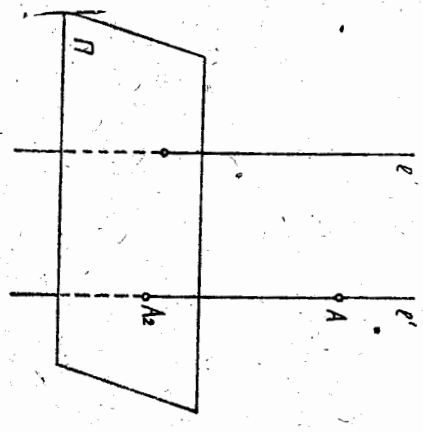
22-чизма

Фазода ихтиёрий A нуқта, l тўғри чиқиқ ва 6γ тўғри чиқиққа параллел бўлмаган Π текислик берилган бўлсин.

2-таъриф. Фазодаги ихтиёрий A нуқтанинг l тўғри чиқиқдаги Π текисликка *параллел проекцияси* деб, A нуқтадан Π текисликка параллел қилиб ўтказилган Π' текислиكنинг l тўғри чиқиқ билан кесилган A_1 нуқтасига айтилади ва 1-таърифтайдек белгиланади (22-чизма).

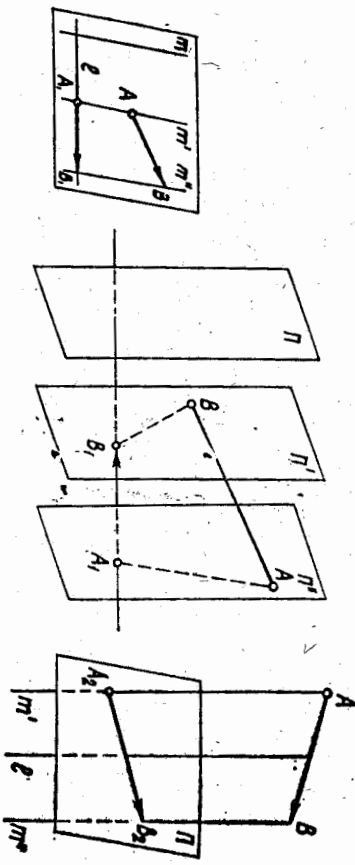
3-таъриф. Фазодаги ихтиёрий A нуқтанинг Π текисликдаги l тўғри чиқиққа *параллел проекцияси* деб, A нуқтадан l тўғри чиқиққа параллел қилиб ўтказилган l' тўғри чиқиқнинг Π текислик билан кесилган A_2 нуқтасига айтилади (23-чизма) ва уни $pr_{\Pi} A = A_2$ билан белгиланади.

$A \in \Pi$ бўлган ҳолда $pr_{\Pi} A = A$. Хусусий ҳолда $m \perp l$ ёки $\Pi \perp l$ бўлса, тегишли проекциялар *ортгоннал проекциялар* дейлади.



23-чизма

\vec{AB} вектор берилган бўлсин, унинг боши ва охирини l тўғри чиқиққа (Π текисликка, юқоридаги тартубда параллел проекциялар $\vec{A_1B_1}$ ёки $\vec{A_2B_2}$ векторларни ҳосил қиламиз (24-чизма). $\vec{A_1B_1}$ вектор \vec{AB} векторнинг l тўғри чиқиқдаги m тўғри чиқиққа (Π текисликка) *параллел векторли проекцияси* дейлади. $\vec{A_2B_2}$ вектор \vec{AB} векторнинг Π текисликдаги l тўғри чиқиққа *параллел векторли проекцияси* дейлади ва 6γ проекциялар қуйдагича белгиланади:



24-чизма

$$\text{пр}_l \vec{AB} = \vec{A_1B_1}, \quad \text{пр}_\Pi \vec{AB} = \vec{A_2B_2}.$$

Бирор a тўғри чизикни олайлик. Бу тўғри чизикда иккита ўз-ара қарама-қарши йўналиш мавжуд бўлиб, улардан бирини мусбат, бунга қарама-қарши йўналишни эса манфий деб олинлади.

4-таъриф. Мусбат йў-

налиши аниқланган тўғри чизик l деб аталади.

Ушбу тўғри чизикка қоллинеар бўлган бирор вектор билан ҳам аниқлаш мумкин. Хусусий ҳолда бу вектор сифатида бирлик вектор олинди (25-чизма).

25-чизма



\vec{AB} вектор проекцияланган l тўғри чизикда e бирлик векторни оламиз. У ҳолда \vec{AB} векторнинг ўқдаги проекцияси $A_1B_1 \parallel e$ бўлиб, $A_1B_1 = \lambda e$ $\lambda \in \mathbb{R}$ бўлади. λ оқини \vec{AB} векторнинг l ўқдаги m тўғри чизикка (П текисликка) параллел скаляр проекцияси (кўч-қача проекцияси) деб аталади ва

$$\lambda = \text{пр}_l \vec{AB}$$

кўринишда белгиланади.

Демак, векторнинг ўқдаги вектор проекцияси унинг шу ўқдаги скаляр проекциясини ўқнинг бирлик векторига кўпайтирилганига тенг, яъни

$$\text{пр}_l \vec{AB} = (\text{пр}_l \vec{AB}) e,$$

чунки ҳар қандай вектор учун $a = |a| e$, бунда $e \uparrow a$.

Базан $\lambda = \text{пр}_l \vec{AB}$ сон \vec{AB} векторнинг e вектор билан аниқланган йўналишдаги m тўғри чизикка ёки Π текисликка параллел проекцияси ҳам дейилади.

Агар A_1B_1 ва e векторлар бир хил йўналишли бўлса, $\lambda = \text{пр}_l \vec{AB}$ сон мусбат, акс ҳолда эса манфий бўлади.

Энди икки вектор орасидagi бурчак тушуничасини киритамиз. a, b нолидан фарқли икки вектор бўлсин. Йўналган $\vec{OA} \in a, \vec{OB} \in b$ кесмаларни оламиз. Бу кесмалар ётган OA ва OB нурилар иккита бурчакни аниқлайди (1-§). Бу бурчакларнинг ёиқ бурчакдан кичиги a ва b векторлар орасидagi бурчак деб аталади ва унинг миқдори (a, b) кўринишда белгиланади. Равшанки, a, b векторлар орасидagi бурчак O нуктанинг танланishiга боғлиқ эмас. $(a, b) = \frac{\pi}{2}$ да a, b векторлар перпендикуляр дейилади. a, b

векторларнинг перпендикулярлиги $a \perp b$ кўринишда белгиланади.

5-таъриф. l ўқ билан a вектор орасидagi бурчак деб, l ўқнинг бирлик вектори e билан a вектор орасидagi бурчакка айтилади.

Теорема. $a \neq 0$ векторнинг l ўқдаги ортогонал проекцияси \vec{a} вектор узунлигини унинг l ўқ билан ташкил этган бурчакни косинусига кўпайтмасига тенг, яъни

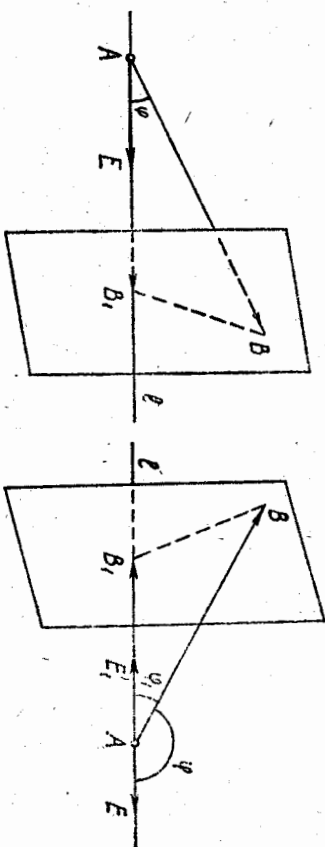
$$\text{пр}_l a = |a| \cos \varphi, \quad \text{бунда } \varphi = (\vec{e}, a).$$

Исбот. $a = \vec{AB}$ векторни қараймиз. Умумийликни бузмаслик учун \vec{AB} векторнинг боши $A \in l$ деб оламиз. B_1 нукта B нуктанинг l ўқдаги ортогонал проекцияси, $\vec{AE} = e$ эса l ўқнинг бирлик вектори бўлсин. Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) φ ўткир бурчак: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (26-чизма). Бу ҳолда \vec{AB}_1 ва e векторлар бир хил йўналишли бўлиб,

$$\text{пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}_1|$$

бўлади. Тўғри бурчакли \vec{AB}_1B , учбурчакда



26-чизма

27-чизма

$$|\vec{AB}_1| = |\vec{AB}| \cos \varphi,$$

бундан

$$\text{пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi$$

жани келиб чиқади.

б) $\varphi > \frac{\pi}{2}$ (27-чизма). Бу ҳолда \vec{AB}_1 ва e векторлар қарама-қарши йўналишли бўлиб,

$$\text{пр, } \vec{AB} = -|\vec{AB}_1|.$$

Тўғри бурчакли ABV_1 учбурчакда $|\vec{AB}_1| = |\vec{AB}| \cos \varphi_1$, бунда $\varphi_1 = \pi - \varphi$, $\cos \varphi_1 = -\cos \varphi$ бўлгани учун бу ҳолда ҳам $\text{пр, } \vec{AB} = -|\vec{AB}| \cos \varphi$. ▲

Эслатма. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, \vec{AB} векторнинг l ўқдаги проекцияси битта нуқтадан иборат бўлиб, бу ҳолда

$$\text{пр, } \vec{AB} = |\vec{AA}| = 0.$$

Векторнинг ўқдаги проекцияси қуйидаги ҳоссаларга эга (хоссаларни исботлашда l тўғри чизикқа m тўғри чизик бўйича ёки l тўғри чизикқа Π текислик бўйича параллел проекциялашнинг бири билан чекланамиз).

1°. Агар a вектор проекциялаш йўналиши m тўғри чизикқа (Π текисликка) параллел бўлса, унинг l тўғри чизикдаги проекцияси ноғла тенг бўлади, чунки бу ҳолда векторнинг боши билан охири-нинг проекциялари устма-уст тушади.

2°. $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ бўлган ҳолда $\text{пр, } \vec{AB} = \text{пр, } \vec{A'B'}$ бўлади.

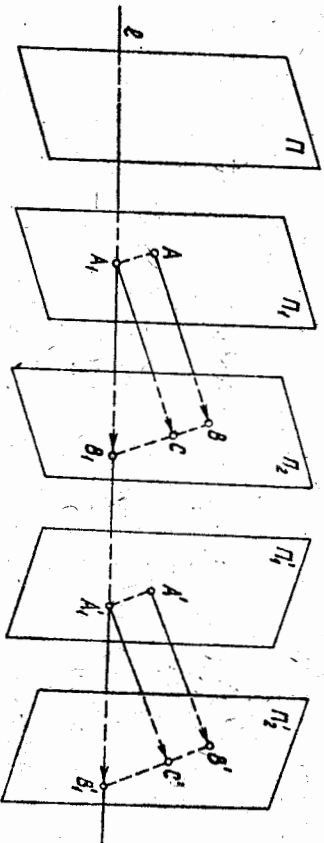
Исбот.

$$\vec{\text{пр, } \vec{AB}} = \vec{A_1B_1}, \quad (13)$$

ва

$$\vec{\text{пр, } \vec{A'B'}} = \vec{A'_1B'_1} \quad (14)$$

бўлсин. A_1 нуқтага $\vec{A_1C} = \vec{AB}$ векторни, A'_1 нуқтага $\vec{A'_1C'} = \vec{A'B'}$ векторни қўямиз (28-чизма). $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ бўлгани учун $|\vec{A_1C}| =$



28-чизма

$|\vec{A_1C}|$ ва $|\vec{A'_1C'}|$, бундан $A_1C \parallel A'_1C'$ тўртбурчакнинг параллелограмм экани келиб чиқади.

$A_1C \parallel A'_1C'$ тўртбурчак параллелограмм, $V_1C \parallel \Pi$ ва $V'_1C' \parallel \Pi$ бўлгани учун $V_1C \parallel V'_1C'$ тўртбурчак ҳам параллелограммдир. У ҳолда

$$\vec{A_1V_1} + \vec{V_1A'_1} = \vec{C_1C'} = \vec{V'_1A'_1} + \vec{A'_1V'_1} \Rightarrow \vec{A_1V_1} = \vec{A'_1V'_1},$$

бундан, (13) ва (14) ни эътиборга олсак,

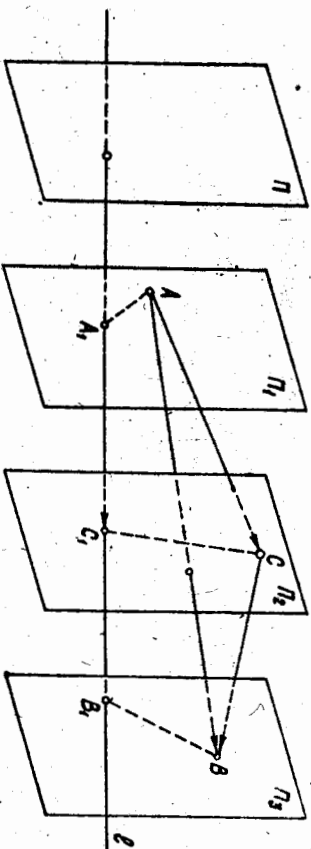
$$\vec{\text{пр, } \vec{AB}} = \vec{\text{пр, } \vec{A'B'}}. \quad \blacktriangle$$

3°. Иккита (ёки иккитадан кўп) вектор йиғиндисининг проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг.

Исбот.

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} \text{ ва } \vec{\text{пр, } \vec{AC}} = \vec{A_1C_1}, \text{ пр, } \vec{CB} = \vec{C_1B_1},$$

$$\vec{\text{пр, } \vec{AB}} = \vec{A_1B_1}. \quad (15)$$



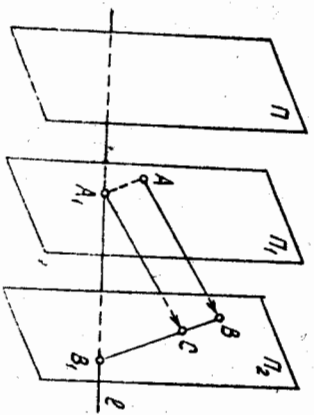
29-чизма

бўлсин (29-чизма). Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидаига қўра $\vec{A_1B_1} = \vec{A_1C_1} + \vec{C_1B_1}$. У ҳолда (15) га асосан $\vec{\text{пр, } \vec{AB}} = \vec{\text{пр, } \vec{AC}} + \vec{\text{пр, } \vec{CB}}$ ёки $\vec{\text{пр, } (\vec{AC} + \vec{CB})} = \vec{\text{пр, } \vec{AC}} + \vec{\text{пр, } \vec{CB}}$. ▲

4°. $\vec{\text{пр, } (\lambda \vec{AB})} = \lambda \vec{\text{пр, } \vec{AB}}$.

Исбот. $\vec{\text{пр, } \vec{AB}} = \vec{A_1B_1}$ бўлсин (30-чизма).

A_1 нуқтага $\vec{A_1C} = \vec{AB}$ векторни қўйсак, $\vec{AB} = \vec{A_1C} = \vec{A_1V_1} + \vec{V_1C}$ бўлади, у ҳолда $\lambda \vec{AB} = \lambda \vec{A_1V_1} + \lambda \vec{V_1C}$. 3°-хоссага қўра



30-чизма

$$\begin{aligned} \vec{pr}_1(\lambda \vec{AB}) &= \vec{pr}_1(\lambda \vec{A_1B_1}) + \vec{pr}_1(\lambda \vec{V_1C}) \\ &= \lambda \vec{pr}_1(\vec{A_1B_1}) + \lambda \vec{pr}_1(\vec{V_1C}) \\ &= \lambda \vec{pr}_1(\vec{AB}) \end{aligned}$$

$$\vec{pr}_1(\lambda \vec{AB}) = \lambda \vec{pr}_1(\vec{AB}) \quad \blacktriangleleft$$

3°-ва 4°-хоссаглари кетма-кет татаблиқ қилиш йўли билан
 $\vec{pr}_1(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n) = \lambda_1 \vec{pr}_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{pr}_1 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{pr}_1 \vec{a}_n$ нинг ўринли эканини кўрсатиш мумкин.

8-§. Векторнинг чизикли боғлиқлиги

1-таъриф. Ихтиёрий $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси ва $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин, у ҳолда

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \quad (16)$$

вектор $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ векторларнинг чизикли комбинацияси деб аталади, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар бу чизикли комбинациянинг коэф-фициентлари дейилади.

Хусусий ҳолда, икки векторнинг йиғиндисы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, икки векторнинг айирмаси $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ ва векторнинг сонга кўпайтмаси $\lambda \vec{a}$ ҳам чизикли комбинациядир.

2-таъриф. Агар камда бири нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ сонлар мавжуд бўлиб, чизикли комбинация ноль вектор, яъни

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (17)$$

бўлса, у ҳолда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизикли боғлиқ ва (17) муносабат $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонларнинг барибаси нолга тенг бўлган ҳолда бажарилса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ вектор чизикли эркили деб аталади.

1-теорема. Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системасининг бир вектори ноль вектор бўлса, у ҳолда бу векторлар системаси чизикли боғлиқ бўлади.

Исбот. $\alpha_k = 0$ бўлсин, у ҳолда $\alpha_k \neq 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ сонлар учун (17) муносабат ўринли бўлади.

Демак, 2-таърифта асосан $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар чизикли боғлиқ. \blacktriangleleft

Бу теоремадан кўйндаги натижа келиб чиқади: чизикли эркили векторлар системаси ноль векторни ўз ичига олмайди.

2-теорема. Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизикли боғлиқ бўлса, системанинг камда битта вектори унинг қолган векторлари орқали чизикли ифодаланмайди.

Исбот. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизикли боғлиқ бўлсин, у ҳолда 2-таърифта кўра камда биттаси нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ сонлар мавжуд бўлиб, (17) муносабат ўринли бўлади. Аниқлик учун $\alpha_k \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (17) муносабатни α_k га ҳадма-ҳад бўлиб, \vec{a}_k векторни топсак,

$$\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \vec{a}_n$$

тенгликка эга бўламиз. \blacktriangleleft Иккита вектор чизикли боғлиқ бўлиши учун 3-теорема. Иккита вектор чизикли боғлиқ бўлиши учун уларнинг қолмишар бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурийлиги. \vec{a}_1, \vec{a}_2 векторлар чизикли боғлиқ бўлсин, у ҳолда камда бири нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0} \quad (18)$$

бўлади. Аниқлик учун $\alpha_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (18) муносабатдан $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2$, $\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ белгилашни киритсак, $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ бўлади, бундан 6-§ даги теоремага асосан $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ экани келиб чиқади.

Етарлилиги. $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ бўлсин, у ҳолда шундай $\lambda \in R$ сон мавжудки, $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ ёки $(-1) \vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 = \vec{0}$, шу параграфдаги 2-таърифта кўра \vec{a}_1, \vec{a}_2 векторлар чизикли боғлиқ. \blacktriangleleft

Бу теоремадан кўйндаги хулосага келамиз. Юқорида биз V нинг бир тўғри чизикка параллел бўлган барча векторлари тўғлигини V_1 деб белгилаган эдик, 3-теоремани эътиборга олсак, V_1 нинг ҳар бир ки вектори чизикли боғлиқ бўлиб, унинг нолдан фарқли ҳар бир вектори чизикли эркилдир.

4-теорема. Уч вектор чизикли боғлиқ бўлиши учун уларнинг қолмишар бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурийлиги. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ векторлар чизикли боғлиқ

Бўлсин, у ҳолда кампада бири нолдан фарқли $a_1, a_2, a_3 \in R$ ҳақиқий сонлар мавжуд бўлиб,

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = 0 \quad (19)$$

тенглик бажарилади. Айтайлик, $a_3 \neq 0$ бўлсин, (19) муносабатни a_3 га ҳадма-ҳад бўлиб, a_3 векторни топамиз: $a_3 = -\frac{a_1}{a_3} a_1 - \frac{a_2}{a_3} a_2$.

Бу тенгликда $-\frac{a_1}{a_3} = \lambda, -\frac{a_2}{a_3} = \mu$ белгилашларни қиритиб, $a_3 = \lambda a_1 + \mu a_2$ муносабатни ҳосил қилиш мумкин.

$\overline{AB} \in a_1$ ва $\overline{AC} \in a_2$ йўналган кесмаларни қараймиз. Агар A, B, C нуқтага бир тўғри чизикда ётса, a_1 ва a_2 векторлар қоллинеар бўлади.

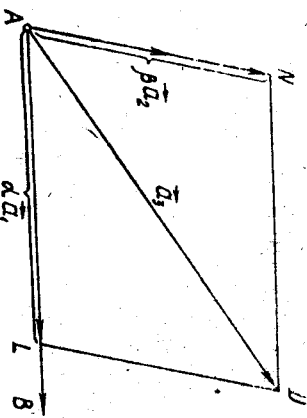
Демак, бу ҳолда a_1, a_2, a_3 векторлар компланар, A, B, C нуқтага бир тўғри чизикда ётмаган ҳолда улар орқали битта Π текислик ўтади. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидадан $\lambda a_1 + \mu a_2$ вектор a_1, a_2 векторлар билан бир текисликда ётади, бундан a_1, a_2, a_3 векторларнинг компланарлиги келиб чиқади.

Етардлиги a_1, a_2, a_3 векторлар компланар бўлсин. Бу векторларнинг ҳар бирини бирор $A \in \Pi$ нуқтадан бошлаб кўйсак, $\overline{AB} = a_1, \overline{AC} = a_2, \overline{AD} = a_3$ векторлар ҳосил бўлади. Агар бу векторларнинг иккитаси, масалан, a_1, a_2 қоллинеар бўлса, 3-теоремага қўра улар чизикли боғлиқ, яъни кампада бири нолдан фарқли $\alpha, \beta \in R$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\alpha a_1 + \beta a_2 = 0$$

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + 0 \cdot a_3 = 0$$

муносабатни ёзиш мумкин, бу муносабатдан a_1, a_2, a_3 векторларнинг чизикли боғлиқлиги келиб чиқади.



a_1, a_2 векторлар қоллинеар бўлмасин (31-чизма). a_3 векторни a_1, a_2 векторлар йўналдишларига параллел проекцияласак, $a_3 = \overline{AL} + \overline{AN}$, лекин $\overline{AL} \parallel a_1, \overline{AN} \parallel a_2$, шунинг учун $\overline{AL} = \alpha a_1$ ва $\overline{AN} = \beta a_2$ бўлиб,

$$a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2 \quad (20)$$

31-чизма

бу ерда $\alpha = \text{pr}_{a_1} \beta, \beta = \text{pr}_{a_2} a_3$. (20) тенгликдан $(-1)a_3 + \alpha a_1 + \beta a_2 = 0 \Rightarrow a_1, a_2, a_3$ векторлар чизикли боғлиқ. \blacktriangle Бу теоремадан қуйидаги натижага келамиз. V_2 вектор фазонинг ҳар икки ноқоллинеар вектори чизикли эркин, ҳар қандай уч вектори чизикли боғлиқ.

5-теорема. Ҳар қандай тўртта a, b, c, d вектор чизикли боғлиқдир.

Исбот. a, b, c векторлар компланар бўлса, 4-теоремага қўра улар чизикли боғлиқ, у ҳолда шундай $\alpha, \beta, \gamma \in R$ сонлар мавжудки,

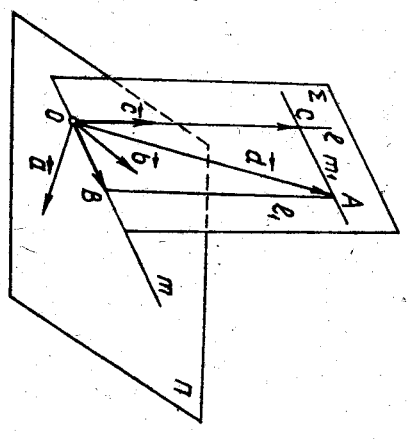
$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \quad (21)$$

бунда α, β, γ сонларнинг кампада бири нолдан фарқли. (21) ни ушбу

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + 0 \cdot d = 0 \quad (22)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (22) муносабатдан a, b, c, d векторларнинг чизикли боғлиқлиги келиб чиқади.

a, b, c векторлар компланар бўлмасин. Бу векторларни бирор O нуқтага қўямиз (32-чизма). a ва b векторлар орқали ўтган текисликни Π билан, c ва d векторлар орқали ўтган текисликни Σ билан белгилаймиз. $\Pi \cap \Sigma = m$ тўғри чизик, l эса c вектор ётган тўғри чизик бўлсин. Σ текисликда d векторнинг охири A нуқтадан $l_1 \parallel l$ ва $m_1 \parallel m$ тўғри чизикларни ўтказамиз. $l_1 \cap m = B$ ва $m_1 \cap l = C$ бўлсин. У ҳолда



32-чизма

$$d = \overline{OB} + \overline{OC}. \quad (23)$$

$$\overline{OC} \parallel c \text{ бўлгани учун } \overline{OC} = \lambda_3 c, \lambda_3 \in R. \quad (24)$$

\overline{OB}, a, b векторлар битта Π текисликда ётгани учун 3-теоремага қўра шундай $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ сонлар топилдики,

$$\overline{OB} = \lambda_1 a + \lambda_2 b. \quad (25)$$

(23) — (25) муносабатлардан

ёки

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$$

$$(-1)\vec{d} + \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0},$$

бундан $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторларнинг чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади. \blacktriangle

Натижа. Биз 6-§ да киритган V вектор фазода чизиқли эркин векторлар сони учтадан орттиқ эмас.

9-§. Вектор фазонинг базиси ва ўлчови ҳақида тушунча

1-таъриф. Вектор фазонинг маълум тартибда олинган e_1, e_2, \dots, e_n векторлари системаси чизиқли эркин бўлиб, шу фазонинг ҳар бир вектори e_1, e_2, \dots, e_n лар орқали чизиқли ифодаланса, бу векторлар системаси вектор фазонинг *базиси* дейилади ва $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ орқали белгиланади.

2-таъриф. Агар базиснинг ҳар бир вектори бирлик вектор бўлиб, уларнинг ҳар иккитаси ўзаро перпендикуляр бўлса, бундай *базис ортономалланган* дейилади. Базиснинг векторлари сони вектор фазонинг *ўлчови* деб аталади.

V вектор фазода қопланар бўлмаган учта $\vec{OA} = \vec{e}_1, \vec{OB} = \vec{e}_2, \vec{OC} = \vec{e}_3$ векторни оламиз. 4-теоремага кўра улар чизиқли эркин ва ҳар қандай $a \in V$ вектор бу e_1, e_2, e_3 векторларнинг чизиқли қомбинацияси бўлади. U ҳолда базис таърифта кўра маълум тартибда олинган (e_1, e_2, e_3) векторлар системаси V вектор фазонинг базиси бўлади. V да қопланар бўлмаган векторлар учлигини чексиз кўп усул билан таялаб олиш мумкин. Бундан V фазода чексиз кўп базис мавжудлиги келиб чиқади.

(e_1, e_2, e_3) базис векторларининг сони учта бўлгани учун V вектор фазо уч ўлчовли бўлади, яъни уни V_3 билан белгиланади. V_2 вектор фазога тегишли қоллинеар бўлмаган e_1, e_2 векторларни олесак, улар 3-теоремага кўра чизиқли эркин. Ҳар қандай $a \in V_2$ вектор бу e_1, e_2 векторлар билан чизиқли боғлиқ (4-теоремага кўра). Бундан кўринадики, V_2 фазода тартибланган ноқоллинеар ҳар икки вектор базисни аниқлайди. V_2 икки ўлчовли вектор фазо экан.

V_1 вектор фазонинг $\forall e \neq 0$ вектори чизиқли эркин, чунки $\lambda e = 0$ тенглик фақат $\lambda = 0$ бўлгандагина бажарилади. V_1 фазонинг ҳар қандай вектори e векторга қоллинеар бўлгани учун у билан чизиқли боғлиқ. Демак, V_1 вектор фазода ноль бўлмаган ҳар қандай вектор базисни аниқлайди.

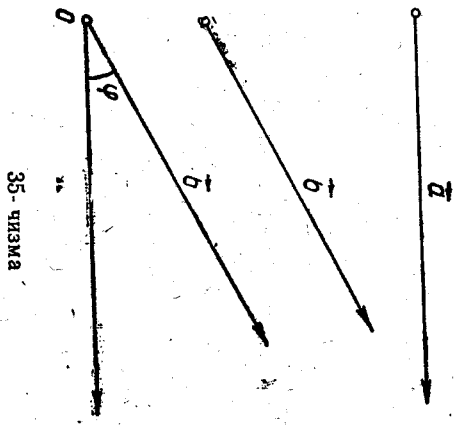
Ҳ.ч.ш. $\vec{a} + \vec{b}$ вектор координатлари $(3 + (-1), -2 + 0, 1 + (-2)) = (2, -2, -1)$;
 $\vec{b} - \vec{c}$ вектор координатлари $(-1 - 1, 0 - 2, -2 - 0) = (-2, -2, -2)$; $3\vec{a}(3 \cdot 3, 3 \cdot (-2), 3 \cdot 1)$, $3\vec{a}(9, -6, 3)$;
 $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ вектор координатлари $(3 + \frac{1}{2} \cdot (-1) - 3 \cdot 1, -2 + \frac{1}{2} \cdot 0 - 3 \cdot 2, 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) - 3 \cdot 0) = (-\frac{1}{2}, -8, 0)$.

9 12-§. Икки векторни скаляр кўпайтириш

\vec{a} ва \vec{b} векторлар V_2 вектор фазонинг иккитерий икки вектори бўлсин. Бу векторларни бирор O нуқтага кўямиз (35-чизма).

Таъриф. \vec{a}, \vec{b} векторларнинг узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинусини кўпайтиришдан ҳосил қилинган сон бу *векторларнинг скаляр кўпайтмаси* деб аталади. \vec{a}, \vec{b} векторларнинг скаляр кўпайтмаси $a \cdot b$ ёки $(a \cdot b)$ кўринишда белгиланади.

Демак, таърифта кўра $a \cdot b = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ (29)



Масалан, \vec{a} ва \vec{b} векторларнинг узунликлари $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ бўлиб, бу векторлар орасидаги бурчак 120° бўлса, у ҳолда \vec{a} ва \vec{b} векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot 4 \left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

Натижа. Ноль векторнинг ҳар қандай векторга скаляр кўпайтмаси нолга тенг.

Икки векторни скаляр кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга.

1°. Скаляр кўпайтириш ўрин алмаштириш қонунига бўйсунлади:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Исбот. Таърифта кўра

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle a, b)$$

ва

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a});$$

косинус жупфт функция эканлигини эйтиборга олсак, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{b}, \vec{a})$ бундан $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. ▲

2°. Хар қандай векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмиси бу вектор узунлигининг квадратыга тенг:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2. \quad (30)$$

Исбот. Скаляр кўпайтма таърифидан,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2. \quad \blacktriangle$$

▲▲ ифода \vec{a}^2 билан белгиланади ва \vec{a} векторнинг скаляр квадрати деб аталади.

У ҳолда (30) тенгликдан \vec{a} векторнинг узунлиги:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (31)$$

3°. Икки векторнинг скаляр кўпайтмиси уларнинг бирининг узунлиги билан иккинчисининг биринчиси йўналишига ўширилган проекцияси кўпайтмасига тенг, яъни

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} \quad (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0). \quad (32)$$

Исбот.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a})$$

$\xrightarrow{\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}}$ $\xrightarrow{\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}}$

(бу ерда ортогонал проекция кўзда тутилган). ▲

4°. Скаляр кўпайтмиш скаляр кўпайтгувчига нисбатан гуруҳла-ниш қонунига бўйсунеди, яъни

$$(m \vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad \text{бу ерда } m \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Исбот. Юқоридаги 1°, 3°-хоссалар ва 6-§ даги 4°-хоссага кўра

$$\begin{aligned} (m \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot (m \vec{a}) = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} (m \vec{a}) = |\vec{b}| m \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \\ &= m |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

5°. Кўпайтгувчи векторлар перпендикуляр бўлса, скаляр кўпайт-ма нолга тенг:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (34)$$

$$\text{Исбот. } \vec{a} \perp \vec{b}. \text{ Бу ҳолда } (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad \blacktriangle$$

6°. Скаляр кўпайтмиш тақсимот қонунига бўйсунеди, яъни хар қандай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар учун

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad (35)$$

Исбот. (35) муносабатнинг $\vec{c} = \vec{0}$ ҳол учун ўринли эканлиги равшан. $\vec{c} \neq \vec{0}$ бўлсин. Юқоридаги 1°, 3°-хоссаларга кўра

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= c(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \text{пр}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| (\text{пр}_{\vec{c}} \vec{a} + \\ &+ \text{пр}_{\vec{c}} \vec{b}) = c \vec{a} + c \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

7°. Ортонормаланган $B = (e_1, e_2, e_3)$ базис учун

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{ да } i, j = 1, 2, 3.$$

Исбот. Скаляр кўпайтма таърифидан

$$e_i \cdot e_j = |e_i| |e_j| \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Хусусий ҳолда $e_i \cdot e_i = |e_i|^2 = 1$. ▲

13-§. Скаляр кўпайтманинг координатлардаги ифодаси

Уз вектор фазода ортонормаланган (e_1, e_2, e_3) базисни олайлик. \vec{a}, \vec{b} векторлар бу базисга нисбатан (x_1, y_1, z_1) ва (x_2, y_2, z_2) коор-динатларга эга бўлсин:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3, \\ \vec{b} &= x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

12-§ даги 4°, 6°-хоссаларга асосан

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \cdot (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3) = \\ &= x_1 x_2 \vec{e}_1^2 + y_1 y_2 \vec{e}_2^2 + z_1 z_2 \vec{e}_3^2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2) \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \\ &+ (z_1 y_2 + y_1 z_2) \vec{e}_2 \vec{e}_3 + (x_1 z_2 + z_1 x_2) \vec{e}_1 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Муносабатни ёза оламиз, бундан 12-§ даги 7-хоссани эйтиборга ол-сак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (36)$$

Демак, координатлари билан берилган икки векторнинг скаляр

Кўпайтмаса бу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

Натижалар. 1. $\vec{a}(x, y, z)$ векторнинг узунлиги унинг координаталари квадратларининг йиғиндисидан олtingan арфиметик квадрат илдизига тенг:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (37)$$

Ҳақиқатан, $\vec{a} = b \Rightarrow x_1 = x_2 = x, y_1 = y_2 = y, z_1 = z_2 = z$, у ҳолда (36) формулага асосан

$$|\vec{a}\vec{a}| = x^2 + y^2 + z^2$$

ёна

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}\vec{a}|} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. Икки \vec{a}, \vec{b} вектор орасидаги бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a}\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(бу формула скаляр кўпайтма таърифидан бевосита келиб чиқади).

Координаталари билан берилган $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторлар учун

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (38)$$

3. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторларнинг перпендикулярлик шарти қуйидагича бўлади:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Ҳақиқатан $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$. (36) дан

1-мисол. $\vec{a}(1, 3, 2), \vec{b}(3, 1, -3), \vec{c}(2, 0, -2)$ векторларнинг қайси жуфти перпендикуляр?

Еч иш. Аввало, равшанки, берилган векторлар ноль вектор эмас, чунки $|\vec{a}| = \sqrt{14}, |\vec{b}| = \sqrt{19}, |\vec{c}| = \sqrt{8}$.

Энди $\vec{a}\vec{b}, \vec{a}\vec{c}, \vec{b}\vec{c}$ скаляр кўпайтмаларни текшираемиз: $\vec{a}\vec{b} = 3 + 3 - 6 = 0, \vec{a}\vec{c} = 2 + 0 - 4 = -2, \vec{b}\vec{c} = 6 + 0 + 6 = 12$, бундан $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2-мисол. $\vec{a}(1, -1, 0), \vec{b}(1, -2, 2)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

Еч иш. \vec{a}, \vec{b} векторларнинг координаталарини икки вектор орасидаги бурчакни топиш формуласи (38) га қўямиз:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1 + 2 + 0}{\sqrt{1 + 1 + 0} \cdot \sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бундан

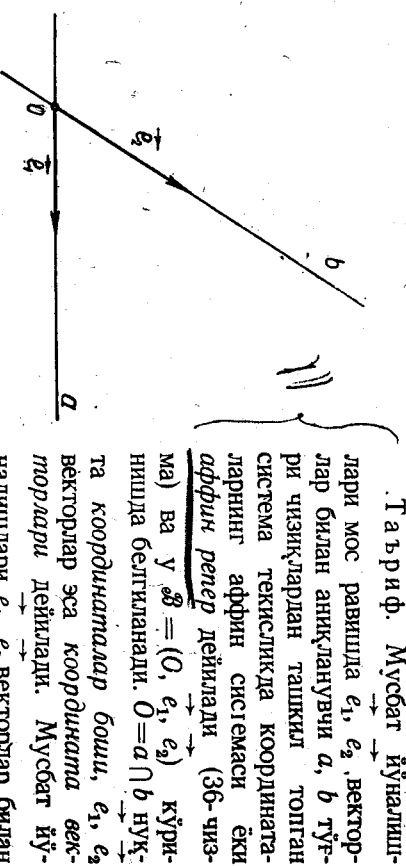
$$(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

II Б. В. ТЕКИСЛИКДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ

Текисликдаги нуктанинг ўрнини маълум сонлар ёрдамида аниқлашга имкон берадиган усул кўрсатилган бўлса, текисликда координаталар системаси берилган деб айтаміз. Текисликда координаталарнинг турли системалари мавжуд бўлиб, улардан биз соддасини қирғатаміз.

14-§. Текисликда координаталарнинг аффин системаси

Текисликда бирор O нуктадан қўйилган ноқолинеар ихтиёрий икки e_1, e_2 вектор берилган бўлсин. Бу векторлар системаси (e_1, e_2) базисни аниқлайди. Текисликда e_1, e_2 векторлар орқали ўтувчи a, b ($a \cap b = O$) тўғри чизикларни оламіз.



Таъриф. Мусбат йўналишлари мос равишда e_1, e_2 векторлар билан аниқланувчи a, b тўғри чизиклардан ташкил топган система текисликда координаталарнинг аффин системаси ёки аффин репер дейилади. (36-чизма) ва $y \cdot \mathcal{B} = (O, e_1, e_2)$ кўринишда белгиланади. $O = a \cap b$ нукта координаталар боши, e_1, e_2 векторлар эса координаталар векторлари дейилади. Мусбат йўналишлари e_1, e_2 векторлар билан аниқланган a, b тўғри чизиклар мос равишда абсциссалар ва ординаталар ўқлари деб аталади.

36-чизма

Уларни Ox, Oy билан белгилайміз.

Демак, аффин репер O нукта ва e_1, e_2 базис векторларининг берилishi билан тўлиқ аниқланади.

Текисликда (O, e_1, e_2) аффин репер берилган бўлсин. Шу текисликнинг M нуктаси учун OM вектор M нуктанинг радиус-вектори дейилади. $OM \in V_2$, шунинг учун I бооб, 9-§ га асосан ҳамisha шундай $x, y \in R$ сонлар топиладики,

$$\overrightarrow{OM} = x e_1 + y e_2$$

Таъриф. OM радиус-векторнинг x, y координаталари M нуктанинг (O, e_1, e_2) аффин репердаги координаталари дейилади; биз $M(x, y)$ белгиланишини ишлатаміз. Бунда x сон M нуктанинг абсциссаси ёки биринчи координатаси, y сон эса M нуктанинг ординатаси ёки иккинчи координатаси дейилади.

Хуллас, текисликда координаталарнинг аффин системаси берилса, ундаги исалган M нуктага унинг координаталари бўлишип бир жуфт ҳақиқий x, y сон мос келади ва, аксинча, маълум тартибда олинган бир жуфт ҳақиқий x, y сонга текисликда координаталари шу сонлардан ноорат тайин битта M нукта мос келади.

Ҳақиқатан, танланган (O, e_1, e_2) аффин репернинг абсциссалар ўқида координаталар бошидан бошлаб $OM_1 = x e_1$ векторни, ординаталар ўқида эса $OM_2 = y e_2$ векторни қўйиб (қўйилдиган векторларнинг йўналишлари x, y сонларнинг ишоралари билан аниқланади) (37-чизма), ҳосил қилинган M_1, M_2 нукталардан мос равишда Oy ва Ox ўқларга параллел тўғри чизиклар ўтказсак, уларнинг кесилган нуктаси изланган M нукта бўлади, чунки $OM = OM_1 + OM_2 = x e_1 + y e_2$. Шундай қилиб, (O, e_1, e_2) репера нисбатан

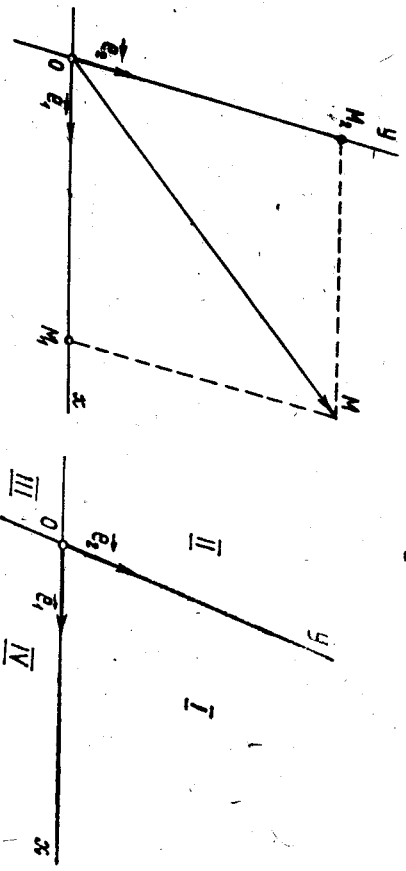
$$M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x e_1 + y e_2 \quad (1)$$

M нуктанинг абсциссаси $x = 0$ бўлса, (1) дан $\overrightarrow{OM} = y e_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM} \parallel e_2 \Rightarrow M$ нукта Oy ўқда ётади. Худди шунингдек, M нуктанинг ординатаси $y = 0$ бўлса, M нукта абсциссалар ўқда ётади.

Шундай қилиб, абсциссалар ўқида ётган нуктанинг координаталари $x, 0$ ва ординаталар ўқида ётган нуктанинг координаталари $0, y$ бўлади. Координаталар бошининг координаталари $0, 0$. Координаталар бутун текисликни 38-чизмада белгиланганидек туртта координат чоракларга ажратади.

$M(x, y)$ нукта координаталар ўқларида ётмаса, унинг қайси чоракда ётишини x, y нинг ишораларига қараб 38-чизма бўйича аниқлаш мумкин.

Ҳақиқатан, M нукта $x > 0, y > 0$ бўлган ҳолда биринчи чоракка, $x < 0, y > 0$ бўлган ҳолда иккинчи чоракка, $x < 0, y < 0$ бўлган



37-чизма

38-чизма

ҳолда учинчи чорракка, $x > 0$, $y < 0$ бўлган ҳолда тўртинчи чорракка тегишли бўлади.

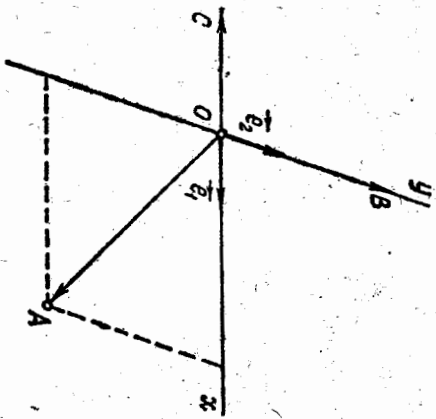
Векторнинг боши ва охирининг координаталари бирор аффи реперга нисбатан маълум бўлса, бу векторнинг шу базисдаги координаталарини топишни кўрайлик. Бу ҳолда $\vec{OA} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{OB} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ ва $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2$. Бундан

$$\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

яъни векторнинг координаталари шу вектор охирининг координаталаридан мос равишда бошининг координаталарини айириш билан ҳосил қилинади.

1-мисол. Берилган $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперда $A(3, -3)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 0)$ нуқталарни ясанг.

Е чиш. $A(3, -3)$ нуқтани яшаш учун $\vec{OA} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ векторни ясаймиз. Бунинг учун O нуқтадан бошлаб \vec{e}_1 га қоллиннеар $3\vec{e}_1$ век-



39-чизма

торни, \vec{e}_2 га қоллиннеар $-3\vec{e}_2$ векторни ясаймиз. Сўнгра бу векторларнинг йиғиндисини топсак, \vec{OA} вектор ҳосил қилиниб, изага наётган A нуқтани топамиз. Худди шунга ўхшаш, $B(0, 3)$ нуқтани яшаш учун $\vec{OB} = 0\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ векторни ясаймиз. $C(-2, 0)$ нуқтани яшаш учун $\vec{OC} = -2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = -2\vec{e}_1$ векторни ясаймиз (39-чизма).

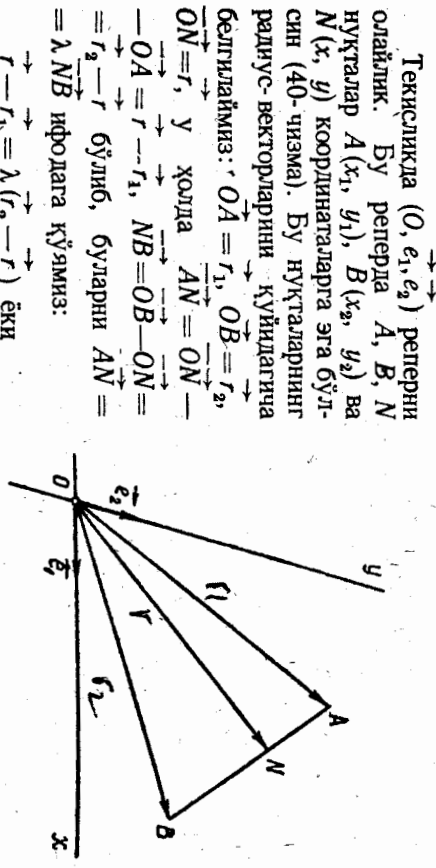
2-мисол. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперда $A(1, -2)$, $\vec{AB}(-1, 3)$; B нуқтанинг координаталарини топинг. Е чиш. Шу реперда $\vec{B}(x, y)$ десак ҳамда $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ ни эътиборга олсак, y ҳолда $\vec{OA}(1, -2)$. Демак, $-1 = x - 1$, $3 = y + 2 \Rightarrow x = 0$, $y = 1$; $B(0, 1)$.

15-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиши

A, B — текисликдаги турли икки нуқта, N эса AB тўғри чизиқнинг ихтибарий нуқтаси бўлсин. \vec{AN}, \vec{NB} векторлар қоллиннеар бўлгани учун шундай λ сон мавжуд бўладики,

$$\vec{AN} = \lambda \vec{NB}. \quad (*)$$

λ тар N нуқта AB кесмада ётса, яъни кесмани ички равишда бўлса, \vec{AN}, \vec{NB} векторлар бир хил йўналтишни бўлиб, $\lambda > 0$ ва N нуқта AB кесмада ётмасдан, лекин AB тўғри чизиқда ётса, \vec{AN}, \vec{NB} векторлар қарама-қарши йўналтишни бўлиб, $\lambda < 0$. Биз N нуқта бу ҳолда AB кесмани *ташқи равишда бўлади*, деб айтаемиз. λ сон урта A, B, N нуқтанинг *оддий нисбати* деб аталади. Биз уни $(\vec{AB}, N) = \lambda$ билан белгилаймиз, $(*)$ дан $\lambda = (\vec{AB}, N) = \frac{\vec{AN}}{\vec{AB}}$.



40-чизма

Текисликда $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперни олайлик. Бу реперда A, B, N нуқталар $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $N(x, y)$ координаталарга эга бўлсин (40-чизма). Бу нуқталарнинг радиус-векторларини куйидагича белгилаймиз: $\vec{OA} = \vec{r}_1$, $\vec{OB} = \vec{r}_2$, $\vec{ON} = \vec{r}$, y ҳолда $\vec{AN} = \vec{ON} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{NB} = \vec{OB} - \vec{ON} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ бўлиб, буларни $\vec{AN} = \lambda \vec{NB}$ ифодага кўямиз:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}) \text{ ёки } (1 + \lambda)\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2$$

бундан $1 + \lambda \neq 0$ фарзда $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda}$

муносабатга эга бўламиз. Бу ифода бўлувчи N нуқтанинг радиус-векторини аниқлайди. (2) ни координаталарда ёзайлик. $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ бўлгани учун (2) дан

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \frac{(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2) + \lambda(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)}{1 + \lambda}$$

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \vec{e}_1 + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \vec{e}_2. \end{aligned}$$

\vec{e}_1, \vec{e}_2 векторларнинг чизикли эркинлигидан (\vec{e}_1, \vec{e}_2 векторлар олдидаги коэффицентларни нолга тенглаштирамиз):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Бу формулалар орқали берилган кесмани берилган λ нисбатда бўлган нуктанинг координаталарини топиш мумкин. Бу ерда албатта $\lambda \neq -1$; $\lambda = -1$, яъни $1 + \lambda = 0$ бўлган ҳолни биз ҳозирча қарамаймиз. $\lambda = 1$ бўлганда N нукта AB кесманинг ўртаси бўлиб, бу ҳолда унинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Мисол. Аффин координаталар системасида учлари $A(1, 2)$, $B(0, 5)$, $C(-2, 3)$ нукталардан иборат учбурчак медианаларининг кесилиш нуктасини топиш.

Ечиш. Мазлумки, учбурчакнинг бирор учидан ўтказилган медиана ана шу уч қаршиқисмати томонни тенг иккига бўлади. Учбурчакнинг медианалари битта нуктада кесилади ва шу нуктада уларнинг ҳар бири (медиана ўтказилган учдан бошлаб ҳисоблаганда) $2:1$ каби нисбатда бўлинади, шу хоссаларга кўра AD медиана учун D нуктанинг координаталари қуйидагича топилади:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - 2}{2} = -1; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4, \quad D(-1, 4).$$

Медианаларнинг кесилиш нуктаси O учун $\lambda = 2:1 = 2$ бўлиб, изланаётган O нуктанинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{1 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = -\frac{1}{3};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{10}{3}.$$

Демак, $O\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

16-§. Текисликда Декарт координаталарнинг тўғри бурчакли системаси. Икки нукта орасидаги масофа

1-таъриф. Аффин репер (O, e_1, e_2) нинг координата векторлари e_1, e_2 орthonормалланган базисни ташкил этсин, яъни $e_1 \perp e_2$, $|e_1| = |e_2| = 1$ бўлсин. Бу ҳолда биз координаталарнинг тўғри бурчакли системаси, қиссача, *Декарт репери* берилди деб айтамыз. Бундай репери (O, i, j) кўринишда белгилаймиз. Бу ерда $i^2 = j^2 = 1$, $i \cdot j = 0$. Бу ҳолда координата ўқлари перпендикулярдир. Декарт репери аффин репернинг хусусий ҳоли бўлгани учун аффин репера нисбатан ўринли мулоҳазалар Декарт реперда ҳам ўз кучини сақлайди.

Аmmo Декарт репердаги айрим мулоҳазалар аффин реперда донмо ўринли бўлавермайди.

Таъриф. M_1, M_2 нукталар орасидаги масофа деб, $\overline{M_1 M_2}$ (ёки M_2, M_1) векторнинг узунлигига айтилади.

Демак, таърифта кўра

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1 M_2}|.$$

Энди координаталари билан берилган икки нукта орасидаги масофани ҳисоблаш формуласини топайлик. Текисликда (O, i, j) Декарт репери берилган бўлиб, бу реперга нисбатан M_1, M_2 нукталар ушбу координаталарга эга бўлсин: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, у ҳолда $\overline{M_1 M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$, $OM_2(x_2, y_2)$, $OM_1(x_1, y_1)$ бўлиб, OM_2 ва OM_1 векторларнинг айрмаси бўлган $M_1 M_2$ вектор ушбу координаталарга эгалдр:

$$\overline{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (4)$$

1606. 13-§ даги 1-натижага асосан,

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Демак, берилган $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нукталар орасидаги масофа ушбу формула бўйича топилади:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (5)$$

1-мисол. $M_1(-1, 0)$, $M_2(2, 3)$ нукталар орасидаги масофани ҳисобланг.

Ечиш. Берилган M_1, M_2 нукталар орасидаги масофа (5) формулага асосан:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}.$$

2-мисол. Учлари $A(3, 2)$, $B(6, 5)$, $C(1, 10)$ нукталарда бўлган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини исботланг.

$$Ечиш. \rho(A, B) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$\rho(B, C) = \sqrt{(1 - 6)^2 + (10 - 5)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$\rho(A, C) = \sqrt{(1 - 3)^2 + (10 - 2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 8^2} = 2\sqrt{17};$$

$$(3\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = 18 + 50 = 68,$$

$$(2\sqrt{17})^2 = 68 \text{ бўлгани учун}$$

$$\rho^2(A, B) + \rho^2(B, C) = \rho^2(A, C).$$

Пифагор теоремасига асосан $\triangle ABC$ тўғри бурчакли учбурчакли учбурчакдир.

1417-§. Текисликнинг ориентацияси

(e_1, e_2) , (e'_1, e'_2) — V_2 вектор фазонинг икки базиси бўлсин. Иккинчи базис векторларини биринчи базис векторлари бўйича ёйиб ёзамиз.

$$e'_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad e'_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2,$$

\vec{e}_1, \vec{e}_2 векторларнинг бу базисга нисбатан координаталаридан $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ жадвални (иккинчи тартибли квадрат матрицани) тузамиз. Бу жадвал Биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси деб аталади.

a_1, a_2, b_1, b_2 сонлар $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ матрицанинг элементларидир. Бу матрица иккита сатр ва иккита устунга эга: a_1, b_1 сонлар биринчи сатрни, a_2, b_2 сонлар эса иккинчи сатрни; a_1, a_2 сонлар биринчи устунни, b_1, b_2 сонлар эса иккинчи устунни ташкил қилади. $a_1 b_2 - a_2 b_1$ сон $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ матрицанинг *детерминанти* дейилади. Уни $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ёки $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ кўринишида белгилаймиз. Агар матрицанинг барча сатрлари чизикли эрқали бўлса, у айнимаган матрица, сатрлари орасида чизикли боғланиш мавжуд бўлса, айнимаган матрица дейилади. Алгебра ва сонлар назарияси, кўрсатилган маълумки, квадрат матрица детерминантининг нолга тенг бўлиши унинг айниган бўлишининг зарурий ва етарли шартидир.

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ айнимаган матрицадир, чунки $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлган ҳолда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ бўлиб, бундан $a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2$. Демак, $\vec{e}_1 = \lambda \vec{e}_2$. Бу эса (\vec{e}_1, \vec{e}_2) базис векторларининг коллинеарлигидан дарак беради.

V_2 вектор фазонинг барча базислари тўлқинини Ω билан белгилайлик. $B_1, B_2 \in \Omega$ базисларни оламиз. Тарриф. Агар B_1 базисдан B_2 базисга ўтиш матрицасининг детерминанти мусбат (манфий) сон бўлса, у ҳолда B_1, B_2 базислар бир хил (*ҳар хил*) исми дейилади.

Киритилган бир хил исмили тушунчаси куйидаги хоссаларга эга:
 1. $\forall B \in \Omega$ учун $B \sim B$. Бу ерда \sim белги бир исмлилик белгиси.
 2. $B_1 \sim B_2 \Rightarrow B_2 \sim B_1$.
 3. $(B_1 \sim B_2, B_2 \sim B_3) \Rightarrow B_1 \sim B_3$.

Исбот. 1. $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базис векторларининг яна шу базис векторлари бўйича ёйилмаси $\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2, \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$ га кўра B дан B га ўтиш матрицаси $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлиб, унинг детерминанти $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Демак, $B \sim B$.

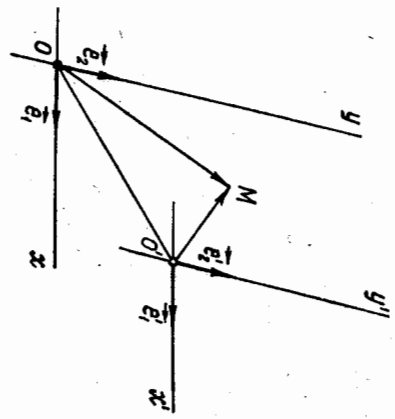
2. $B_1 \sim B_2$ бўлсин. Агар $B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базисдан $B_2 = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ базисга ўтиш матрицаси $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ бўлса, шартга кўра унинг детерминанти $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0$. Энди B_2 дан B_1 базисга ўтиш матрицаси детерминантини толайлик, бунинг учун $\vec{e}'_1 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \vec{e}'_2 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$ системани \vec{e}_1, \vec{e}_2 га нисбатан ечамиз:

42

Текишликда иккита $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ аффин репер берилган бўлсин (43-чизма). Қулайлик учун уларнинг биринчисини эски репер, иккинчисини янги репер деб атаймиз. Бундан ташқари, янги репернинг эски реперга нисбатан вазияти берилган бўлсин, яъни

$$O'(\vec{c}_1, \vec{c}_2), \vec{e}'_1 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \vec{e}'_2 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2, \quad (6)$$

$$OO' = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2, \quad (7)$$



43-чизма

$\vec{e}'_1 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \vec{e}'_2 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$ (7)
 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Текишликда ихтиёрий M нуқтани оламиз. Бу нуқтанинг эски ва янги реперларга нисбатан координаталарини мос равишда x, y ва x', y' орқали белгилаймиз. У ҳолда $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \vec{O'M} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$. Векторларни қушиш тарифи ва (6), (7) муносабатлардан фойдалансак,

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + x' \vec{e}'_1 + y' \vec{e}'_2 =$$

$$= c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + x' (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) + y' (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2)$$

$$\text{ёки}$$

$$x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = (a_1 x' + b_1 y' + c_1) \vec{e}_1 + (a_2 x' + b_2 y' + c_2) \vec{e}_2.$$

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1, y = a_2 x' + b_2 y' + c_2. \quad (8)$$

M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари x, y , унинг янги системага нисбатан координаталари x', y' орқали шу (8) кўринишида ифодаланади.

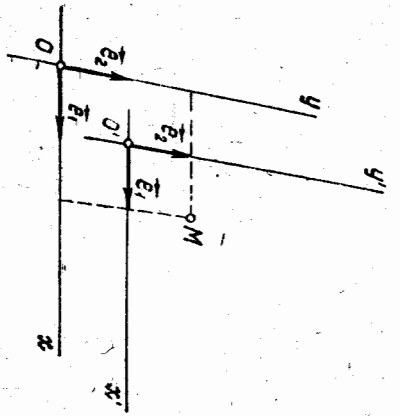
(8) формулалар бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтиш формуллари дейилади. Бу формулаларда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ шарт билан боғланган олгита коэффициент катнашган. Куйидаги икки хусусий ҳолни қараймиз:

1. $O \neq O', \vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2$ бўлсин (44-чизма). У ҳолда $a_1 = b_2 = 1, a_2 = b_1 = 0$ бўлиб, (8) формулалар

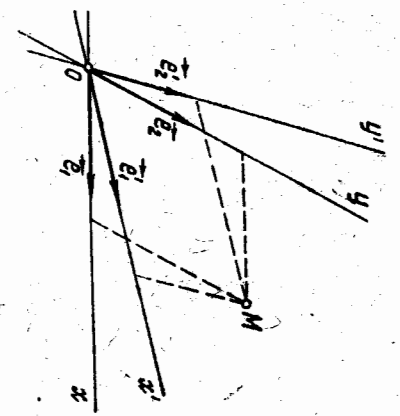
$$x = x' + c_1, y = y' + c_2 \quad (9)$$

кўринишни олади.

(9) формулалар координаталар системасини параллел кўчириш формуллари деб аталади.



44-чизма



45-чизма

2. $O = O'$ ва базис векторлар туринча бўлсин (45-чизма). У ҳолда $a_1 = a_2 = 0$ бўлиб, (8) дан

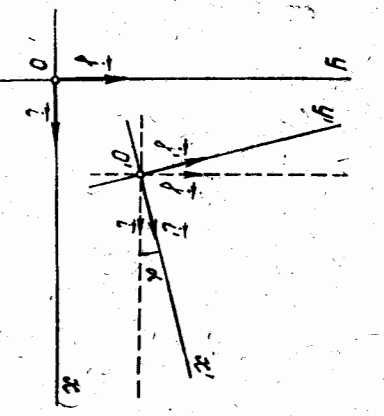
$$x = a_1 x' + b_1 y', \quad y = a_2 x' + b_2 y'. \quad (10)$$

16. 19-§. Декарт координаталари системасини алмаштириш

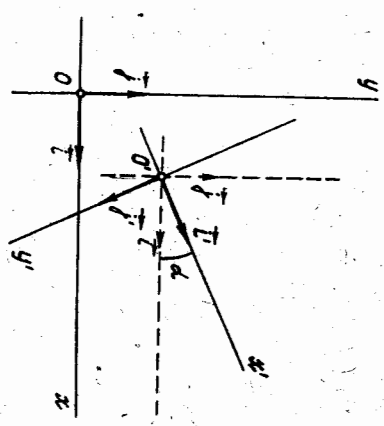
Тежисликда $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ва $\mathcal{B}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ Декарт реперлари берилган бўлсин. Бу ҳолда (8) формулалардаги a_1, a_2 лар \vec{i}' векторнинг, b_1, b_2 лар эса \vec{j}' векторнинг $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ реперга нисбатан координаталари бўлади, яъни

$$\vec{i}' = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}, \quad \vec{j}' = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}. \quad (11)$$

$(\vec{i}, \vec{j}) = \alpha$ бўлсин. Агар \mathcal{B} ва \mathcal{B}' Декарт реперлари бир хил ориентацияли бўлса, у ҳолда (46-чизма)



46-чизма



47-чизма

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{i}, \vec{j}')} &= 90^\circ + \alpha, \quad \widehat{(\vec{i}', \vec{j})} = 90^\circ - \alpha, \quad \widehat{(\vec{j}, \vec{j}')} = \alpha. & (12) \\ \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ Декарт реперлари қарама-қарши ориентацияли бўлса} & (47\text{-чизма}), \text{ у ҳолда} \end{aligned}$$

$$\widehat{(\vec{i}, \vec{j}')} = 270^\circ + \alpha, \quad \widehat{(\vec{i}', \vec{j})} = 90^\circ - \alpha, \quad \widehat{(\vec{j}, \vec{j}')} = 180^\circ + \alpha. \quad (13)$$

(11) тенгликларни навбат билан \vec{i}, \vec{j} векторларга скаляр кўпайтгарсак,

$$a_1 = \vec{i}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{i}', \vec{i}), \quad a_2 = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{i}', \vec{j}),$$

$$b_1 = \vec{j}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{j}', \vec{i}), \quad b_2 = \vec{j}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{j}', \vec{j}).$$

(12) ва (13) муносабатларни ҳисобга олсак, \vec{i}', \vec{j}' векторларнинг \mathcal{B} реперга нисбатан координаталари, агар $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса,

$$\vec{i}' (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \vec{j}' (-\sin \alpha, \cos \alpha);$$

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли бўлганда эса

$$\vec{i}' (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \vec{j}' (\sin \alpha, -\cos \alpha).$$

У ҳолда (8) формулалар куйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + c_2, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + c_2, \end{cases} \quad (15)$$

(14) ва (15) формулаларни битта

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - \varepsilon y' \sin \alpha + c_1, \\ y &= x' \sin \alpha + \varepsilon y' \cos \alpha + c_2 \end{aligned} \quad (16)$$

кўринишдаги ёзувга бирлаштириш мумкин, бу ерда $\varepsilon = \pm 1$. Шундан қилиб, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар Декарт реперлари бўлганида уларнинг биридан иккинчисига ўтиш (16) формулалар билан ифодаланади. Бу ерда, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса, $\varepsilon = +1$, акс ҳолда эса $\varepsilon = -1$.

Мисол. Иккита аффин репер $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{B}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$

берилган бўлиб, бунда $O'(1, 2)$, $\vec{e}'_1(-1, 1)$, $\vec{e}'_2(2, -1)$ бўлсин, M нуқтанинг \mathcal{B} реперга нисбатан координаталари $x = 2$, $y = 1$ эканлини билган ҳолда бу нуқтанинг \mathcal{B}' реперга нисбатан координаталари x', y' ни топинг.

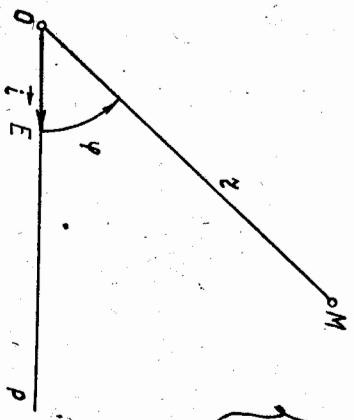
Е қ и ш. Берилган $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 2$. Бу қийматларни (8) формулаларга қўйсак,

$$\begin{aligned} x &= -x' + 2y' + 1, \quad y = x' - y' + 2. \end{aligned}$$

$x = 2, y = 1$ эканини хисобга олсак, $2 = -x' + 2y' + 1, 1 = x' + y' + 2$ эки $-x' + 2y' = 1, x' - y' = -1$, бу системани ечиб, $x' = -1, y' = 0$ ни топамиз. Демак, M нуктанинг \mathcal{R} реперга нисбатан координаталари $x' = -1, y' = 0$.

20-§. Кутб координаталар системаси

Кўп тадқиқотларда ва эгри чизмаларнинг муҳим синфларини (масалан, спиралларни) ўрганишда кутб координаталар системаси деб аталувчи системани қўлланиш мақсадга мувофиқдир. Бу параграфда шу система билан танишамиз.



48-чизма

Ориентацияли текисликда бирор O нукта OP нур ва OP нурда ётувчи $OE = i$ бирлик векторни белгилаймиз (48-чизма). Ҳосил қилинган геометрик образ **кутб координаталар системаси** дейилади. Уни (O, i) кўринишда белгилаймиз. O нукта **кутб боши**, OP нур эса **кутб ўқи** дейилади. M нуктанинг текисликдаги вазияти маълум тартибда олинган икки сон: бири OE бирлик кесма ёрдамида ўлчанган $r = |OM| \geq 0$ масофа, иккинчиси OP нур OM нурининг устига тушиши

учун бурилиши керак бўлган $\varphi = (i, OM)$ бурчак билан тўла аниқланади.

Кутб ўқини OM нур устига тушгунга қадар буриш мусбат йўналишда, яъни соат иғли йўналишига тескари йўналишда бажарилса, φ мусбат деб, акс ҳолда φ ни манфий деб ҳисобланади.

r ни M нуктанинг **кутб радиуси**, φ ни M нуктанинг **кутб бурчиси** дейлиб, уларни M нуктанинг **кутб координаталари** дейилади ва $M(r, \varphi)$ кўринишда белгиланади.

O нукта учун $r = 0$ бўлиб, φ аниқланмаган ҳисобланади. Агар $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ярим сегментда ўзгарса, текисликнинг ҳар бир нуктаси кутб координаталари билан тавминланади.

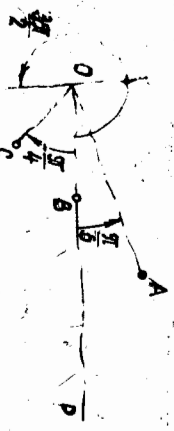
Масалан, A, B, C, D нукталар 49-чизмада ушбу кутб координаталарига эга:

$$A\left(2, \frac{\pi}{6}\right), B(1, 0), C\left(\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}\right), D\left(3, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Равшанки, сонларнинг ҳар қандай (r, φ) жуфти учун текисликнинг битта нуктаси мавжуд бўлиб, сонларнинг бу жуфти шу нукта учун кутб координаталар бўлади. Аммо бир нуктанинг ўзига чексиз кўп сонлар жуфтлigni мос келади. Чунончи, M нуктанинг координаталари

$r = a > 0, \varphi = \alpha$ бўлса, $r = a, \varphi = \alpha \pm 2\pi k$ (бу ерда $k = 0, 1, 2, \dots$) жуфтликлар ҳам шу M нуктанинг координаталари бўлади, чунки OM нур OP кутб ўқини α бурчак қадар бурилишидан ҳосил бўлади деб фарз қилсак, у ҳолда OP нурни $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ қадар бурилишидан ҳам ўша нурнинг ўзини ҳосил қилиш мумкин.

M нуктанинг кутб бурчати қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари орасидан $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ тенгсизликни қабул қилиш мумкин. M нуктанинг кутб бурчати ажратилади ва у **бош қиймат** деб аталади. Кутб бурчачининг бош қиймати сифатида OP нурни OM нурининг устига тушириш учун уни буриш керак бўлган бурчак олинади. OM нур OP нурга қарама-қарши йўналган бўлса, 180° га икки йўналишда буриш мумкин, бу вақтда кутб бурчачининг бош қиймати учун $\varphi = \pi$ қабул қилинади.



49-чизма

21-§. Нуктанинг кутб ва декарт координаталари ўрнатиши

Текисликда (O, i) кутб координаталар системаси берилган бўлсин. Координаталар боши кутб боши билан, абсолютлар ўқининг мусбат қисми кутб ўқи билан устма-уст тушадиган мусбат ориентацияли (O, i, j) декарт реперини киритамиз (50-чизма).

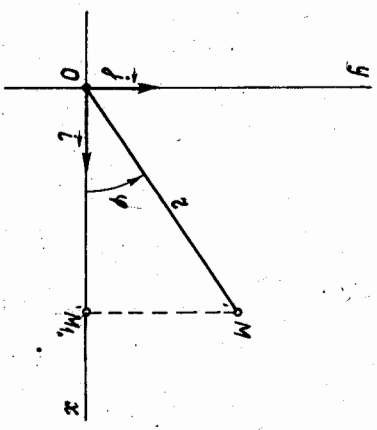
M нуктанинг кутб координаталари r, φ , декарт координаталари эса x, y бўлсин.

OM, M тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi. \quad (17)$$

M нуктанинг кутб координаталари r, φ маълум бўлса, (17) формулалар бўйича унинг декарт координаталари ҳисобланади.

Ўз навбатида M нуктанинг кутб координаталари r, φ ни унинг декарт координаталари x, y орқали топиш мумкин. OM, M учбурчакдан:



50-чизма

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (18)$$

(17) M нуктанинг кутб координаталаридан декарт координаталарига, (18) M нуктанинг декарт координаталаридан кутб координаталарига ўттиш формулаларидир.

Шуни эслатиб ўтмишким, M нуктанинг декарт координаталаридан кутб координаталарига ўттишда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ формула кутб бурчанинг бош қийматини тўла аниқламайди, чунки бунинг учун яна φ миқдор мусобат ёки манфий эканлигини ҳам билиш керак. Одатда бу M нуктанинг қайси чоракда жойлашишига қараб аниқланади. Масалан, (18) формулада $x = 3, y = 3$ бўлса, $\operatorname{tg} \varphi = 1$ бўлиб, $\varphi = 45^\circ$. Лекин $x = -3, y = -3$ бўлганда ҳам $\operatorname{tg} \varphi = 1$ бўлиб, энди φ бурчак 45° эмас, балки 135° бўлиши керак, чунки $(-3, -3)$ нукта учинчи чоракда жойлашган. φ бурчакнинг қиймати ва ишорасини $\cos \varphi, \sin \varphi$ га қараб аниқлаш қулайроқ.

Мисол. Кутб координаталари билан берилган $M_1(r_1, \varphi_1), M_2(r_2, \varphi_2)$ нукталар орасидаги масофани ҳисоблаш формуласини келтириб чиқаринг.

Ечинш M_1, M_2 нукталарнинг декарт координаталари $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ бўлсин. Декарт координаталаридан кутб координаталарига ўттиш формулаларига кўра

$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin \varphi_1, \\ x_2 = r_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = r_2 \sin \varphi_2.$$

У ҳолда

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ = \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2} = \\ = \sqrt{r_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + r_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) - 2r_1 r_2 (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1)} = \\ \rho(M_1, M_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

19 22-§. Координаталарни боғловчи тенглама ва тенгсизликларнинг геометрик маъноси

Текисликда бирор (O, e_1, e_2) аффин репер олиниб, x, y ўзгарувчиларнинг камида бирини ўз ичига олган $F(x, y)$ ифода берилган бўлсин. Агар $x = x_0, y = y_0$ сонлар учун $F(x_0, y_0)$ ифода маънога эга бўлса, у ҳолда x_0, y_0 сонлар $F(x, y)$ ифоданинг аниқланиш соҳасига тегишли дейилади. Бундай сонларнинг ҳар бир жупи F берилган реперда тайин битта нуктани аниқлайди. Барча бундай нукталар тўплами текисликдаги бирор геометрик фигурадан иборат. Бу фигура

бўлув текисликдан ёки унинг бирор қисмидан, баъзан бўш тўпламдан иборат бўлиши мумкин.

Масалан, $F(x, y) = \frac{y}{x} - 1$ ифода $y \neq 0$ бўлгандагина маънога эга бўлиб, унинг аниқланиш соҳаси текисликнинг Ox ўқда ётмаган барча нукталарни тўпламидан иборат фигура бўлади. $F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - 1$ ифода x, y нинг ҳар қандай қийматларида ҳақиқий соҳада маънога эга бўлмайди. Демак, бу ифода билан аниқланган фигура бўш тўплам. $F(x, y) = x + y$ ифода x, y нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматларида маънога эга бўлиб, тегишли фигура бу тўв текисликдан иборат.

Энди

$$F(x, y) = 0 \quad (F(x, y) \geq 0) \quad (19)$$

кўринишдаги тенгламани (тенгсизликни) қараймиз.

Агар икки $x = x_0, y = y_0$ сон (19) тенгламадаги (тенгсизликдаги) ўзгарувчиларнинг ўрнига қўйилганда уни тўғри тенгликка (тенгсизликка) айлантурса, бу сонлар (19) тенгламанинг (тенгсизликнинг) ечими дейилади.

Масалан, $x = 4, y = -5$ сонлар $3x + 2y - 2 = 0$ тенгламанинг ечимидир, чунки шу сонлар тенгламанинг чап қисмига қўйилса, у нолга айланади:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) - 2 = 12 - 12 = 0, \text{ демак, } 0 = 0.$$

$x = 5, y = 7$ сонлар эса бу тенгламанинг ечими бўла олмайдди, чунки уларни тенгламага қўйилганда унинг чап қисми нолга тенг бўлмайди.

Шу сингари $x = 4, y = -5$ сонлар $3x + 2y > 1$ тенгсизликнинг ечими бўлади, чунки бу сонларни тенгсизликка қўйсак,

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) > 1, \quad 2 > 1,$$

$x = 4, y = -6$ сонлар эса $3x + 2y > 1$ тенгсизликнинг ечими бўла омайди, чунки бу сонларни тенгсизликка қўйганда $0 > 1$ ҳосил қилинади.

(19) тенгламанинг (тенгсизликнинг) барча ечимлари тўғлами текисликда бирор фигурани аниқлайди. Энди фигуранинг тенгламаси (фигуранинг аниқловчи тенгсизлик) тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Агар F фигурара тегишли ҳар бир нуктанинг координаталари $F(x, y) = 0$ тенгламани ($F(x, y) \geq 0$ тенгсизликни) қаноатлантириб, F га тегишли бўлмаган бирорта ҳам нуктанинг координаталари уни қаноатлантирмаса, бу тенглама (тенгсизлик) *фигуранинг тенгламаси (фигуранинг аниқловчи тенгсизлики)* деб аталади.

Агар фигуранинг тенгламаси (уни аниқловчи тенгсизлик) маълум бўлса, текисликнинг ҳар қандай нуктасини шу фигурага тегишли ёки тегишли эмаслиги масаласини ҳал қилиш мумкин. Бунинг учун сингалаётган нуктанинг координаталарини тенгламадаги (тенгсизликдаги) ўзгарувчиларнинг ўрнига қўйилганда, бу координаталар тенгламани (уни аниқловчи тенгсизликни) қаноатлантирса, нукта фигурара тегишли, қаноатлантирмаса, нукта фигурара тегишли бўлмайди.

Геометрияда асосан икки масала қаралади:

1. Фигурани аниқловчи тенглама (тенгсизлик) берилди, шу тенглама (тенгсизлик) бўйича унинг ҳосеалари ўрнанилади ва аксинча.
2. Мажлум шартларни қаноатлантирувчи нуқталардан иборат фигура берилди, бу фигуранинг тенгламасини (уни аниқловчи тенгсизликни) тузиш талаб қилинади.

Нуқтадар тўпламини тенгламалар ва тенгсизликлар ёрдамида аниқлашга доир мисоллар кўрамиз. Аввало тенгламалари бўйича фигураларни аниқлашга доир мисоллар келтирайлик.

1. $F(x, y) = x - y = 0$. Ҳақиқатан ҳам маънавий равишда $x = y$ бўлиши керак. Бу тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами координатлар босиқлиги бўлиб, $x = y$ бўлиши керак. Бу тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами $x - y = 0$ тенглама биринчи ва учинчи чорак координат бурчакларининг биссектрисасини аниқлаш (солиштириш, 28-§).

2. Шунга ўхшаш, $F(x, y) = x + y = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар танланган декарт реперда иккинчи ва тўртинчи чоракда координат ўқларидан бир хил масофада ётади. Демак, $x + y = 0$ тенглама билан иккинчи ва тўртинчи чорак координат бурчакларининг биссектрисаси аниқланади.

3. $x^2 - y^2 = 0$ тенгламани

$$(x - y)(x + y) = 0 \quad (20)$$

кўринишда ёзамиз.

$$x^2 - y^2 = 0 \iff x - y = 0, x + y = 0. \quad (21)$$

(21) тенгламалардан бирини қаноатлантирувчи координатлар (20) тенгламани, шу билан $x^2 - y^2 = 0$ тенгламани ҳам қаноатлантиради. Шундай қилиб, $x^2 - y^2 = 0$ тенглама координатлар босиқлиги тўғрисида икки тўғри чизикни аниқлайди.

4. $x^2 + y^2 = 0$ тенглама берилган. x, y нинг ҳар қандай қийматларида x^2, y^2 сонлар манфий бўлмайди. Шунинг учун бу тенглама фақат $x = 0, y = 0$ бўлгандагина нолга айланади. Демак, координатлар аффили реперда $x^2 + y^2 = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами биттагина $O(0, 0)$ нуқтадан иборат экан.

5. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ тенглама берилган. x^2, y^2 манфий бўлмагани учун x ва y ларнинг ҳар қандай қийматларида $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Демак, координатлари $x^2 + y^2 + 1 = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи битта ҳам нуқта йўқ, яъни координатлари бу тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами бўш.

6. $y - |x| = 0$ тенглама берилган. Бу тенглама $y \geq 0$ муносабатга тенг кунди. Текисликда танланган аффили реперда координатлари $y \geq 0$ муносабатни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами Ox ўқ билан чегараланган ва Oy ўқнинг мусбат қисмини ўз ичига олган ярам текисликни ташкил этади. Демак, $y - |x| = 0$ тенгла-

ма билан биринчи ва иккинчи

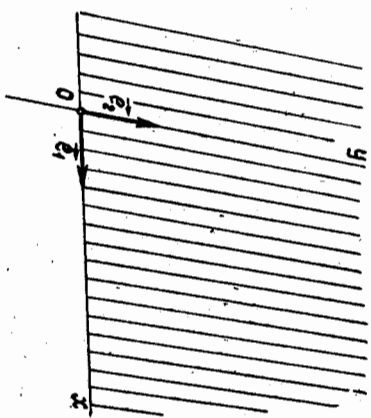
чорак координат бурчакларида ётган нуқталар тўплами аниқланади (51-чизма).

7. Текисликда кўтб координатлардаги тенгламалари билан аниқланган чизикларга мисол сифатида

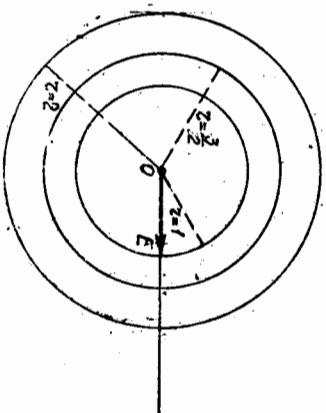
- а) $r = a$ ($a = \text{const}$),
- б) $\varphi = \alpha$ ($\alpha = \text{const}$),

тенгламалар билан аниқланувчи фигураларни қараймиз.

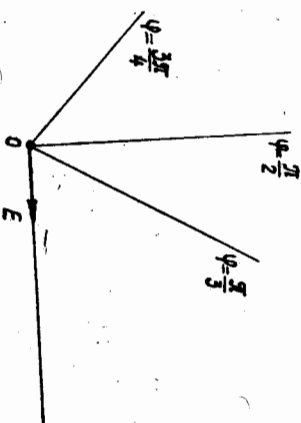
$r = a$ тенглама билан аниқланувчи фигуранинг ҳар бир нуқтаси кўтб босиқдан a масофада жойлашган (кўтб бурчати эса ихтиёрий). Бизга маълумки, бундай фигура маркази кўтб босиқда ва радиуси a га тенг айланадан иборатдир (52-чизма).



51-чизма



52-чизма



53-чизма

Шунга ўхшаш $\varphi = \alpha$ ($\alpha = \text{const}$) тенглама учун кўтб босиқда бўлган ва кўтб ўқи билан α бурчак ҳосил қилган нурни аниқлайди (бунда r —ихтиёрий) (53-чизма).

Энди берилган тенгсизлик билан аниқланган фигураларга доир мисоллар келтирайлик.

1. $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ тенгсизлик билан аниқланувчи фигуранинг топини.

Е чиш. $x^2 + y^2 = 4$ тенглама маркази координатлар босиқда ва радиуси 2 га тенг айланани аниқлайди. Бундан ташқари, текисликнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидан координатлар босиқгача бўлган масофанинг квадрати $\rho^2(O, M) = x^2 + y^2$, шу сабабли тенгсизлик текисликнинг шундай нуқталари тўпламини ифодалайдики, бу нуқталарнинг ҳар бирдан координатлар босиқгача бўлган масофа 2

Бирдикдан катта эмас. Бундай нүкталар тўғлами маркази координатлар бошида ва радиуси 2 бирдикка тенг доирадир.

2. $y \geq 0$ тенгсизлик билан аниқланувчи фигурани топинг. Бу тенгсизлик билан аниқланувчи фигура нүкталарининг ординатлари манфий эмас. Бундай нүкталар тўғлами I ва II чораклар нүкталаридан иборат. Бу эса абсциссалар ўқи билан чегараланган ва ординатлар ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликдир.

Баъзан биргина тенглама ёки тўғсизлик билан аниқланган фигураларнинггина эмас, балки (бир реперда) тенгламалар системаси билан, ёки тенглама ва тенгсизликлар системаси билан, ёки фақат тенгсизликлар системаси билан аниқланган фигураларни қарашга тўғри келади.

Масалан,

$$F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0$$

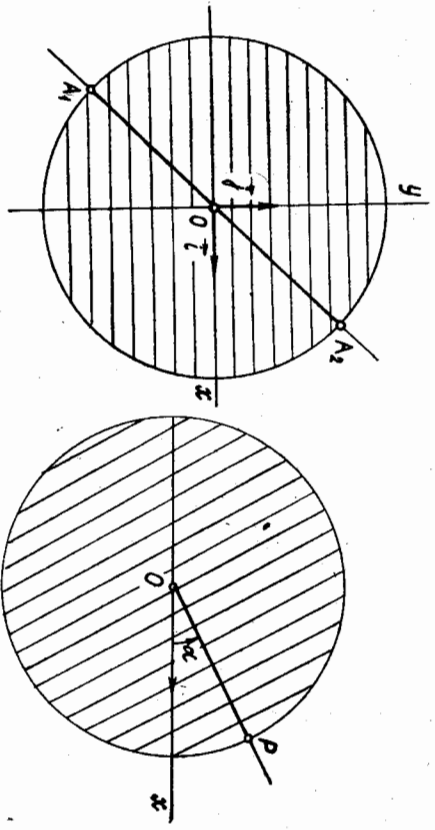
система билан аниқланган фигура бу системанинг ҳар бир тенгламаси билан аниқланувчи фигураларнинг кесилишидан иборат.

1. $x^2 + y^2 - 4 \leq 0, x - y = 0$ система билан аниқланувчи фигурани топинг.

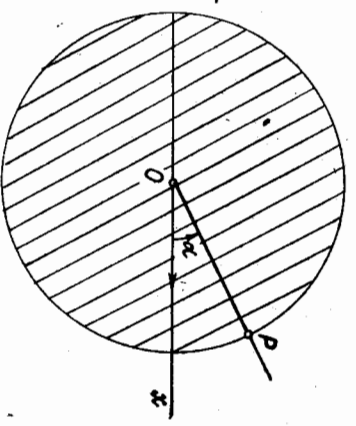
Бу система битта тенглама ва битта тенгсизликдан ташкил топган. Бундаги биринчи тенгсизлик 7-мисолга асосан $O(0, 0)$ марказли ва радиуси 2 га тенг доирани аниқлайди. Систепадаги иккинчи тенглама эса I ва II чораклар координата бурчакларининг биссектрисасини аниқлайди. Бу икки фигуранинг кесилиши $A_1 A_2$ кесмадан иборат (54-чизма).

2. $r - a \leq 0, \varphi = \alpha$ система билан аниқланувчи фигурани топинг.

Систепадаги биринчи тенгсизлик маркази кўтб бошида ва a радиусли доирадан иборат. Систепадаги иккинчи тенглама кўтб ўқи



54-чизма

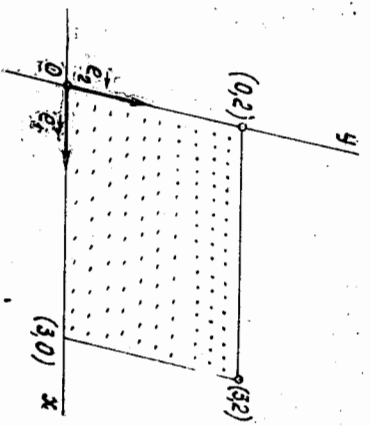


55-чизма

билан α бурчак ташкил этувчи нурни аниқлайди. Бу икки фигуранинг кесилиши OP кесмадан иборат (55-чизма).

3. $x \geq 0, y \geq 0, 3 - x \geq 0, 2 - y \geq 0$ система билан аниқланувчи фигурани топинг.

Бу система тўрт тенгсизликдан ташкил топган. Аффин реперда системедати биринчи тенгсизлик Oy ўқ билан чегараланган ва Ox ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликни, иккинчи тенгсизлик эса Ox ўқ билан чегараланган ва Oy ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликни аниқлайди. Систепадаги учинчи тенгсизлик $x = 3$ тўғри чизиқ билан чегараланган иккинчи ярим текисликнинг координатлар боши O ни ўз ичига олганни аниқлайди.



56-чизма

Систепадаги тўртинчи тенгсизлик эса $y = 2$ тўғри чизиқ билан чегараланган иккита ярим текисликнинг координатлар бошини ўз ичига олганни аниқлайди. Бу тўрт фигуранинг кесилиши маси учлари $(0, 0), (3, 0), (0, 2), (3, 2)$ нүкталарда бўлган тўртбурчакдир (56-чизма).

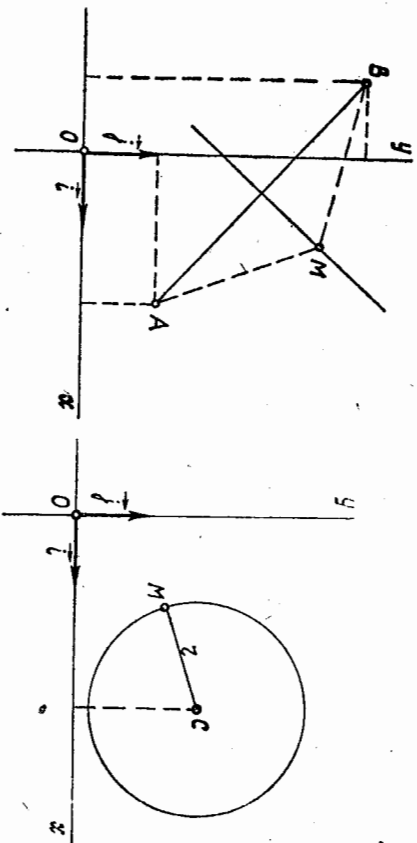
Фигураларнинг тенгламаларини (тенгсизлигини) келтириб чиқаришга доир баъзи мисоллар. Юқорида тенглама ёки тенгсизликка кура фигурани аниқлайди. Бу ерда аксинча, маълум хоссаларга асосланиб фигура тенгламасини хосил қилишга ҳаракат қиламиз. Бу масала умумий ҳолда қуйидагича ҳал қилинади: Берилган фигура ихтиёрий нүктасининг координатларини бирор реперга нисбатан x, y билан белгилаб, уларни боғловчи шундай математик ифода хосил қиламизки, бу ифода шу фигуранинг тегишли ҳар қандай нүктанинг координатларини қуйидагича белгилаб, берилган фигуранинг тегишли бўлмаган бирор аҳам нүктанинг координатларини қуйидагича белгилайди. Одатда бундай ифода тенглама ёки тенгсизликдан иборат бўлади. Хосил қилинган тенглама ёки тенгсизлик шу *фигуранинг аналитик ифодаси* деб аталади.

Қуйида декарт реперига нисбатан бир нечта фигуранинг тенгламаларини тузимиз.

1. Текисликнинг шу текисликда берилган $A(2, 1), B(-1, 4)$ нүкталардан тенг масофада ётган нүкталарни тўғламанинг тенгламасини тузинг.

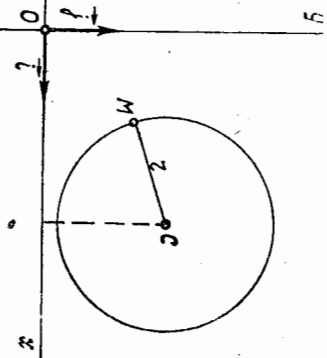
Ечиш. Текисликнинг A, B нүкталаридан тенг масофада ётган барча нүкталарни тўғлами тўғри чизиқ бўлиб, у AB кесманинг ўрта перпендикуляридан иборат (57-а чизма).

$M(x, y)$ бу тўғри чизиқнинг ихтиёрий нүктаси бўлсин. У ҳолда



57-а чизма

57-б чизма



$\rho(M, A) = \rho(M, B)$. Бу шартни координаталарда ифодалаймиз. Икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$$

ёки

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 6y + 12 = 0 \text{ ёки } x - y + 2 = 0,$$

бу тенглама изланган тенгламадир.

2. Текисликда берилган $C(a, b)$ нуктадан берилган r масофада ётган барча нукталар тўғлимининг тенгламасини тузинг.

Еч иш. Бундай нукталар тўғлими маркази C нуктада, радиуси эса r га тенг айлананинг тегишли бўлмаси (57-б чизма).

$M(x, y)$ айлананинг ихтиёрий нуктаси бўлсин. У ҳолда $\rho(C, M) = r$, яъни

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r. \quad (22)$$

(22) берилган айлананинг тенгламасидир, чунки уни фақат шу айланада ётган нукталарнинг координаталарига қаноатлангирди, агар M нукта айлананинг тегишли бўлмаса, $\rho(C, M) < r$ бўлиб, (22) шарт бажарилмайди.

(22) тенгликнинг иккага қисмини квадратга кўтариб, ушбу айлана тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (23)$$

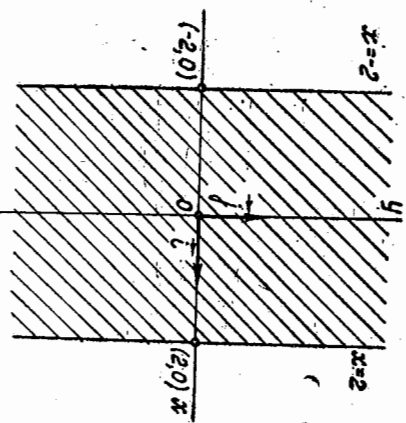
Хусусан, айлананинг маркази координаталар бошида, яъни $a = b = 0$ бўлса, (23) тенглама куйидаги содда кўринишни олади:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3. Текисликда ординаталар ўқига параллел ва абсциссалар ўқи-

дан икки бирлик кесма кесиб ўтган тўғри чизиклар орасида ҳосил бўлган фигуранинг аналитик ифодасини ёзинг (58-а чизма).

Еч иш. Бундай фигура *полоса* дейилади. Қаралаётган полюса иккита ярим текисликнинг кесилмасидан ташкил топган. Бу ярим текисликларнинг иккаласи ҳам координаталар бошини ўз ичига олган бўлиб, уларнинг бири $x = 2$ тўғри чизик билан, иккинчиси эса $x = -2$ тўғри чизик билан чегараланган. Ҳосил бўлган полюса 58-а чизмада штрихларб кўрсатилган. Чизмадан кўриниб турирдики, полюса ихтиёрий $M(x, y)$ нуктасининг абсциссаси



58-а чизма

$$|x| \leq 2$$

шартни қаноатлантиради. (24) шарт ушбу

$$-2 \leq x \leq 2 \quad (25)$$

тенгсизликка тенг кучли. (25) шарт фақатгина полюсанинг нукталари учун бажарилгандан у полюсанинг аналитик ифодасидир.

23-§. Алгебраик чизик ва унинг тартиби

Т а р т и ф. Текисликдаги бирор аффин реперда $F(x, y) = 0$ тенгламанинг чап томони x, y га нисбатан алгебраик кўпхад, яъни $a_i, x^i y^j$ кўринишидаги ҳадларнинг алгебраик йиғиндисидан иборат бўлса, бу тенглама билан аниқланувчи нукталар тўғлими *алгебраик чизик*, тенглама эса *алгебраик тенглама* дейилади.

i, j манфий бўлмаган бутун сонлар бўлиб, $i + j$ сон $a_i, x^i y^j$ ҳаднинг *даражаси* дейилади. i, j даражалар йиғиндисининг максимал қиймати $F(x, y)$ кўпхаднинг *даражаси*, шу билан бир вақтда $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ҳам *даражаси* дейилади. Масалан,

$$F(x, y) = Ax + By + C = 0$$

биринчи даражали алгебраик тенглама,

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

иккинчи даражали алгебраик тенгламадир. Алгебраик бўлмаган барча чизиклар *трансцендент чизиклар* дейилади.

Алгебраик бўлмаган чизикларга мисоллар сифатида ушбу тенгламаларнинг графикаларини кўрсатиш мумкин:

$$y - \sin x = 0, y - \lg x = 0, y - \lg x = 0, y - a^x = 0.$$

Т а ь р и ф. Бирор аффин реперда n - даражали алгебраик тенглама билан аниқлангандагидан фигурга n - тартибли алгебраик чизик деб аталади.¹

Биз текисликдаги биринчи ва иккинчи тартибли алгебраик чизикларни текшириш билан чеklangамиз.

Т е о р е м а. Бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтишда чизикнинг алгебраиклиги ва унинг тартиби ўзгармайди.

И с б о т. Текисликдаги бирор $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин реперда бирор l чизик n - даражали $F(x, y) = 0$ алгебраик тенглама билан аниқланган бўлсин. $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ янги аффин реперни оламиз. Бу реперлар орасидаги боғланиш II боб, II- § дан бизга маълум:

$$\begin{cases} x = a_1x' + b_1y' + c_1, & \text{бу ерда } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \\ y = a_2x' + b_2y' + c_2, \end{cases} \quad (26)$$

l чизикнинг янги координаталардаги тенгламасини ҳосил қилиш учун унинг тенгламасидаги эски ўзгаришларнинг (26) формулалар бўйича алмаштирамиз. Натيجада $F(x, y) = 0$ тенгламадаги ҳар бир $a_i/x', y'$ ҳаднинг ўрнида

$$a_i(a_1x' + b_1y' + c_1)(a_2x' + b_2y' + c_2)^i$$

кўринишдаги ҳад ҳосил бўлади. Барча шундай ҳадларда қавсларни очиб ихчамласак, $\Phi(x', y') = 0$ кўринишдаги алгебраик тенглама ҳосил бўлади. $\Phi(x', y') = 0$ тенгламанинг ҳар бир ҳади $b_{st}(x')^s (y')^t$ кўринишдаги ҳадлардан иборат бўлиб, ҳар бир бундай ҳаднинг даража кўрсаткичи $s + t \leq i + j$. Агар $\Phi(x', y')$ кўпхаднинг даражасини m билан белгиласак, натижада $m \leq n$ га эга бўламиз.

Энди m нинг n дан кичик бўла олмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $m < n$ бўлсин. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ шартда (26) алмаштиришга тескари алмаштириш мавжуд:

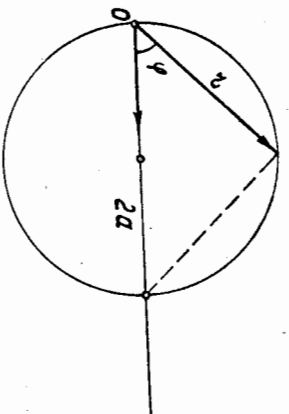
$$\begin{cases} x' = \frac{b_2}{\Delta} x - \frac{b_1}{\Delta} y + \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \\ y' = -\frac{a_2}{\Delta} x + \frac{a_1}{\Delta} y - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \end{cases} \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \quad (27)$$

(27) дан x', y' нинг қийматларини $\Phi(x', y') = 0$ тенгламанинг чап томонига қўйсак, яна $F(x, y) = 0$ тенгламага қайтамиз. Юқоридаги мулоҳазани такрорласак, ҳосил бўлган $F(x, y)$ кўпхаднинг даражаси $n \leq m$ бўлади. Бир вақтда ҳам $m < n$, ҳам $n \leq m$ ноз бера олмайдим. Демак, $\Phi(x', y')$ кўпхаднинг даражаси $m = n$.

Хуллас, алгебраик чизикнинг тартиби ва унинг алгебраиклиги

¹ Давобятда бу тарздаги таъриф *директ* (тўғри) таъриф деб юритилган (русча — корректное определение).

аффин (ёки декарт) координаталар системасининг танланлишига боғлиқ эмас. Шунинг учун чизикларнинг алгебраик ва трансцендент чизикларга бўлинишида фақат аффин координаталар системаси (декарт координаталар системаси) кўзда тутилган. Кўтб координаталар системасида чизикларни бу тарихда синфларга ажратиб бўлмайди. Чунончи маркази кўтбда ва радиуси a га тенг айлана тенгламаси $r - a = 0$ дан иборат бўлиб, u, r га нисбатан биринчи даражали, яъни алгебраик тенгламадир. Шу айлана учун кўтб айлананинг ўзида олinsa, айлана $r - 2a \cos \varphi = 0$ тенглама билан, яъни трансцендент тенглама билан ифода қилинади (58-б чизма).



58-б чизма

24-§. Тўғри чизикнинг турли тенгламалари

Т а ь р и ф. Тўғри чизикқа параллел ҳар қандай вектор унинг йўналтирувчи вектори дейилади.

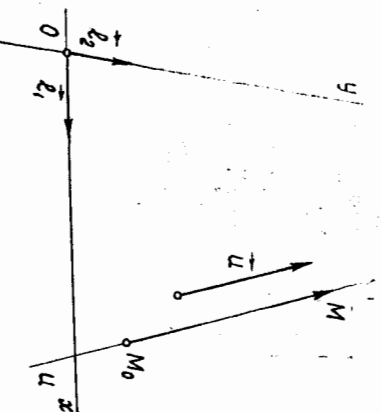
Қуйида биз тўғри чизикнинг берилгиш усулларига қараб унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз.

1. Тўғри чизикнинг параметрик тенгламалари. Текисликда u тўғри чизикнинг вазияти бирор $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин репера нисбатан шу тўғри чизикқа тегишли $M_0(x_0, y_0)$ нўқта ва йўналтирувчи $\vec{u}(a_1, a_2)$ вектор билан тўла аниқланади (59-чизма). Бу маълумотларга асосланиб, u тўғри чизикнинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. M орқали u тўғри чизикнинг ихтиёрий нўқтасини белгилаймиз. У ҳолда \vec{M}_0M векторни йўналтирувчи вектор сифатида олиш мумкин.

Демак, шундай t сон топиладик (I боб, б-§, (4) формула):

$$\vec{M}_0M = t\vec{u} \quad (28)$$

бўлади. Аксинча, бирор M нўқта учун (23) муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\vec{M}_0M \parallel u$. Демак, (28) муносабат фақат u тўғри чизикқа тегишли M нўқталар учунгина бажарилади. M, M_0 нўқталарнинг радиус-векторларини мос равишда \vec{r}, \vec{r}_0 билан белгиласак, яъни $\vec{r} = \vec{OM}, \vec{r}_0 = \vec{OM}_0$ бўлса, у ҳолда $\vec{M}_0M = \vec{r} - \vec{r}_0$ (28) тенгликдан



59-чизма

$$\vec{r} = r_0 + tu. \quad (29)$$

Бу тенглама u тўғри чизикнинг *векторли тенгламаси* деб аталади. t га турли хил қийматлар бериб, u га тенгшли нукталарнинг радиус-векторларини ҳосил қиламиз; (29) тенгламага кирган t ўзгаришчи параметр деб аталади.

Энди (29) ни координаталарда ёзайлик. M нуктанинг координаталарини x, y билан, M_0 нуктанинг координаталарини x_0, y_0 билан белгиласак, натижада ушбу тенгламалар ҳосил қилинади:

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t. \quad (30)$$

Бу тенгламалар тўғри чизикнинг *параметрик тенгламалари* деб аталади.

Агар u тўғри чизик координата ўқларидан бирортасига ҳам параллел бўлмаса, яъни $a_1 a_2 \neq 0$ шарт бажарилса, (30) дан ушбу

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (31)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан

$$a_2 x - a_1 y + (-a_2 x_0 + a_1 y_0) = 0. \quad (32)$$

Бу ерда шартта кўра a_1, a_2 лардан камида биттаси нолдан фарқли, шу сабабли (32) биринчи даражали тенгламалар. Шунинг билан ушбу муҳим ҳулосага келдик: ҳар қандай тўғри чизик биринчи тартибли алгебраик чизикдир.

2. Икки нуктадан ўтгувчи тўғри чизик тенгламаси.

Ҳар қандай тўғри чизикнинг вазияти унинг иккита ҳар хил нуктаси билан аниқланади. (O, e_1, e_2) аффин реперда u тўғри чизикнинг $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ нукталари маълум бўлсин. Шу тўғри чизикнинг тенгламасини келтириб чиқарайлик. Қаралаётган тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори сифатида $u = M_1 M_2$ ($x_2 - x_1, y_2 - y_1$) векторни қабул қилиш мумкин, шунинг учун (31) га асосан u тўғри чизик ушбу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (33)$$

тенглама билан ифодаланади. Бу берилган икки нуктадан ўтган тўғри чизикнинг тенгламасидир.

3. Тўғри чизикнинг кесмалари бўйича тенгламаси. u тўғри чизик Ox ўқни $A(a, 0)$ нуктада, Oy ўқни эса $B(0, b)$ нуктада кессин ва координаталар бошидан ўтмасин, яъни $a \neq 0, b \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда икки нуктадан ўтган тўғри чизикнинг тенгламаси (33) куйидаги кўринишни олади:

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (34)$$

(34) да a, b сонлар тўғри чизикнинг координата ўқларидан ажратган кесмаларидир. Шунинг ҳисоби олиб, (34) тўғри чизикнинг кесмалари бўйича тенгламаси деб аталади.

1-мисол. Ҳақикатининг координаталари $A(-3, 2), B(2, 4)$ ва $C(5, -4)$ бўлган ABC учбурчак берилган. Унинг B учидан чиққан медианаси тенгламасини тузинг.

Ечиш. B_1 нукта AC томоннинг ўрғаси бўлсин. У ҳолда 15-§ даги (3) формулага кўра $B_1(1, -1)$. B ва B_1 нукталарининг координаталарини (33) тенгламага кўйсак (бунда $M_1 = B, M_2 = B_1$),

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 4}{-1 - 4} \quad \text{ёки} \quad 5x - y - 6 = 0.$$

Бу BV_1 медиананинг тенгламаси.

2-мисол. Абсциссалар ўқидан 2 бирлик, ординаталар ўқидан -3 бирлик кесмалар ажратган тўғри чизик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилишга кўра $a = 2, b = -3$, у ҳолда (34) тенглама $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ ёки $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ кўринишида бўлиб, бу изланган тўғри чизикнинг тенгламасидир.

3. Тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси. Аввало тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти тушуничасини киргатамиз.

Тарриф. u вектор e_1, e_2 базисда a_1, a_2 координаталарга эга ва $a_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда $\frac{a_2}{a_1} = k$ сон u векторининг бурчак коэффициенти дейилади.

Теорема. Коллинеар векторларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг.

Исбот. Ҳақиқатан, $u \parallel v$ векторлар берилган бўлиб, улар e_1, e_2 базисга нисбатан $u(a_1, a_2), v(b_1, b_2)$ ($a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$) координаталарга эга бўлсин ҳамда k_1, k_2 мос равишда бу векторларнинг бурчак коэффициентлари бўлсин. Таррифга кўра

$$k_1 = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{ва} \quad k_2 = \frac{b_2}{b_1}.$$

$u \parallel v$ бўлгани учун шундай t сон мавжудки, $u = tv$ ёки $a_1 = tb_1, a_2 = tb_2 \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$ ёки $k_2 = k_1$. \blacktriangle

Ҳулоса. Битта тўғри чизикка параллел барча векторларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг. k сон тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти дейилади.

Энди тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламасини келтириб чиқарайлик.

Битта нуктаси ва бурчак коэффициенти тўғри чизикнинг текисликдаги вазиятини тўла аниқлайди. Oy ўққа параллел тўғри чизиклар учун бурчак коэффициент мавжуд эмас. Энди Oy ўққа параллел бўлмаган u тўғри чизик $M_0(x_0, y_0)$ нуктадан ўтсин ва k га тенг бурчак коэффициентга эга бўлсин. u нинг тенгламасини тузаямиз.

(32) га асосан $a_1 \neq 0$ шартда $y - y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0)$, аммо $k =$

$$= \frac{a_2}{a_1}, \quad \text{демак,}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (35)$$

$$y = kx + b,$$

$$b = y_0 - kx_0 \quad (36)$$

(36) тенглама *тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти* менгламаси дейилади.
 Мисол. $P(2, -3)$ нуктадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти $\frac{3}{4}$ бўлган тўғри чизик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилганларга асосан $x_0 = 2, y_0 = -3, k = \frac{3}{4}$ бўлиб, буларни (35) тенгламага қўямиз:

$$y - (-3) = \frac{3}{4}(x - 2) \text{ ёки } 3x - 4y - 18 = 0.$$

4. Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизикнинг юқорида келтирилган (30) — (34), (36) тенгламаларининг ҳар бирини олиб солиштирсак, улар умумий кўринишдаги

$$Ax + By + C = 0 \quad (37)$$

икки номбўлғумли биринчи даражали тенгламанинг хусусий ҳоллари эканини кўрамиз.

Энди қуйидагича савол туғилади: аксинча, (37) кўринишдаги тенглама тўғри чизикни ифода этадими?

Теорема. x, y ўзгаришчиларга *нисбатан биринчи даражали* $Ax + By + C = 0$ (бу ерда $A^2 + B^2 \neq 0$) *алгебраик тенглама аффи* *ренера нисбатан тўғри чизикни аниқлайди.*
 Искот. Бу ерда ҳолни текширамиз.
 а) $V \neq 0$. Берилган тенгламани

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди бу тенгламани юқоридagi $y = kx + b$ тенглама билан солиштирсак, $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ ни ҳосил

қиламиз. Демак, $Ax + By + C = 0$ тенглама $V \neq 0$ шартда $y = kx + b$ кўринишда олади, унинг эса тўғри чизикни ифодалишини биланмиз. Шундай қилиб, умумий кўринишдаги $Ax + By + C = 0$ тенглама ҳам $V \neq 0$ да бирор тўғри чизикни ифода қилади.

б) $V = 0$. Бу ҳолда $A^2 + B^2 \neq 0$ муносабатга кўра $A \neq 0$ бўлиб, $Ax + By + C = 0$ тенглама $x = -\frac{C}{A}$ кўринишда олади. Бундай

тенглама *Оу* ўққа параллел тўғри чизикни аниқлайди. Демак, иккала ҳол учун ҳам теорема кучга эга. ▲
 Тўғри чизикнинг умумий тенгламаси

$$Ax + By + C = 0 \quad (37)$$

Берилган бўлсин, буйда $k = -\frac{A}{B} = \frac{a_2}{a_1}$, демак, тўғри чизикнинг

ўн йўналтирувчи векторининг координаталари сифатида $-B, A$ сонларни қабул қилиш мумкин, яъни умумий тенгламаси билан берилган тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори сифатида $\vec{u}(-B, A)$ векторни олиш мумкин.

Мисол. Ҳчларининг координаталари $L(-3, -1), M(2, 3), N(2, 1)$ бўлган LMN учбурчак берилган. Учбурчакнинг L учидан MM томонига параллел бўлиб ўтган тўғри чизик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланган тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори учун MN векторни олиш мумкин, унинг координаталари $\vec{MN}(0, -2) \Rightarrow \Rightarrow A = -2, B = 0$. Тўғри чизикнинг $L(-3, -1)$ нуктадан ўтганини эътиборга оламиз. $-2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + C = 0, C = -6$: A, B, C нинг топилган қийматларини (37) га қўямиз: $x + 3 = 0$ ёки $x = -3$. Бу изланаётган тенгламалар.

$$Ax + By + C = 0$$

умумий тенгламасини текширамиз.

1. $C = 0$. Бу ҳолда тенглама қуйидаги кўринишда олади: $Ax + By = 0$. Бу тўғри чизик координаталар бошидан ўтади, чунки уни $(0, 0)$ қанотлантиради. Аксинча, тўғри чизик координаталар бошидан ўтса, у ҳолда

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$2. A = 0.$$

$$By + C = 0. \quad (38)$$

Бу тўғри чизикнинг йўналтирувчи $\vec{u}(-B, 0) \Rightarrow \vec{u} = -Be_1$ вектори e_1 векторга қоллинеар, демак, у Ox ўққа параллел. $V \neq 0$ бўлганда (38) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = by, \text{ бу ерда } b = -\frac{C}{A}.$$

Шундай қилиб, $y = b$ тенглама Ox ўққа параллел ва ординаталар ўқини $(0, -\frac{C}{B})$ нуктада кесиб ўтадиган тўғри чизикни аниқлайди.

Агар $A = 0, C = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$ (чунки $B \neq 0$), $y = 0$ эса Ox ўқининг тенгламасидир, чунки бу тенглама билан аниқланувчи тўғри чизик Ox ўққа параллел ва Oy ўқдан $b = 0$ кесма ажратлади.

3. $V = 0$. Бунда 2) ҳолдагича ўхшаш тўғри чизик Oy ўққа параллел жойлашсади ва бу ҳолда $C = 0$ бўлса ($Ax = 0 \Rightarrow x = 0$), тўғри чизик Oy ўқининг ўзини ифода қилади.

25-§. Тўғри чизиқни тенгламасига кўра ясаш

Куйида биз бирор аффин реперга нисбатан тенгламаси билан берилган тўғри чизиқни ясашнинг бир неча усуллари билан танишамиз.

1. Тўғри чизиқ ўзининг икки нуқтасининг берилиши билан тўлиқ аниқлангани учун у бирор $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперга нисбатан қандай кўри-нишдаги тенгламаси билан берилмасин, уни ясаш учун икки нуқтаси-ни ясаш kifoyadir.

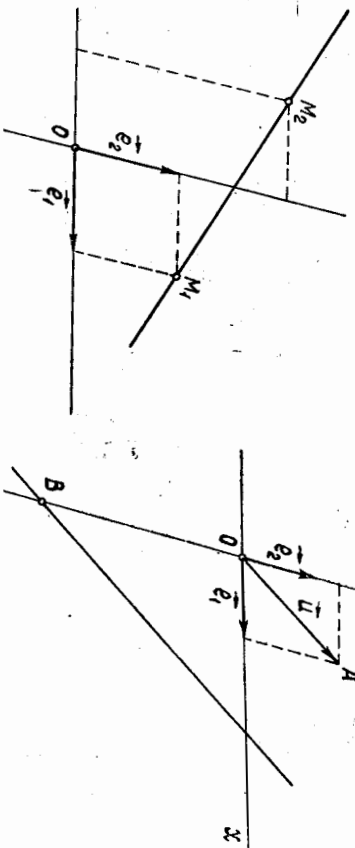
Мисол. $x + 2y - 3 = 0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқ-ни ясанг.

Тўғри чизиқнинг икки нуқтасини топиш учун берилган тенглама-даги x ўзгартувчига ихтиёрий икки қийматни бериб, тенгламадан бу қийматларга y нинг мос қийматларини топамиз:

$$x = 1 \text{ да } 1 + 2y - 3 = 0 \text{ дан } y = 1, \\ x = -1 \text{ да } -1 + 2y - 3 = 0 \text{ дан } y = 2.$$

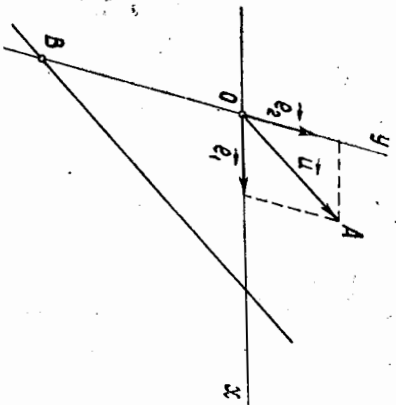
Топишган $M_1(1, 1), M_2(-1, 2)$ нуқталарни ясаб, уларни туташтири-сак, издалаётган M_1M_2 тўғри чизиқ ҳосил бўлади (60-чизма).

2. Тўғри чизиқ $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперда $y = kx + b$ кўринишдаги тенглама билан берилган бўлса, уни қуйидагича ясаш мумкин. Ор-динаталар ўқида $(0, b)$ нуқтани ясаймиз ҳамда $(1, k)$ векторни ясаб, $(0, b)$ нуқтадан u векторга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз.



60-чизма

61-чизма



Мисол. $y = 2x - 3$ тенглама билан аниқланувчи тўғри чизиқни ясанг.

$(0, -3)$ нуқтани ясаймиз. 61-чизмада бу B нуқтадир. Сўнгра шу чизмада $u = e_1 + 2e_2$ векторни ясаймиз. Чизмада бу OA век-тордир. Энди B нуқтадан OA векторга параллел тўғри чизиқ ўт-казамиз.

3. Агар тўғри чизиқ

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + at \end{cases}$$

параметрик тенгламалари билан берилса, бу тўғри чизиқ ҳам 2-ҳол-даги сингари (x_0, y_0) нуқтадан ўтиб (a_1, a_2) векторга параллел тўғри чизиқ каби ясаллади.

23

26-§. $Ax + By + C$ учхад ишорасининг геометрик маъноси

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперда ушбу $Ax + By + C = \delta$ учхадни қараймиз.

$$Ax + By + C = 0 \quad (39)$$

тенглама йўналтирувчи вектори $\vec{n} (-B, A)$ бўлган бирор u тўғри чизиқни аниқлайди. Бу тўғри чизиқ текислиқни иккита қисмга ажра-тади. Уларнинг бирини Φ_1 , иккинчисини Φ_2 билан белгилаймиз. Бу қисмларнинг ҳар бирини *очиқ ярим текислик* деб атаёмиз.

Теорема. $M_1(x_1, y_1)$ ва $M(x_2, y_2)$ нуқталар (39) тўғри чизиқ билан ажратилган турли *очиқ ярим текисликларга* тегишли бў-лиши учун $\delta_{M_1} = Ax_1 + By_1 + C$ ва $\delta_{M_2} = Ax_2 + By_2 + C$ сонлар *ишораларининг ҳар хил бўлиши зарур ва етарли*.

ИСОТ. Зарурийлиги. M_1, M_2 нуқталар тўғри чизиқ билан ажратилган турли *очиқ ярим текисликка* тегишли бўлсин. У ҳолда M_1, M_2 кесма u тўғри чизиқни бирор M_0 нуқтада кесиб, M_0 нуқта M_1, M_2 кесмани бирор λ нисбатда ($\lambda > 0$, чунки M_0 —кесманинг ички нуқтаси) бўлади, яъни

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Лекин

$$M_0 \in u \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Бу тенгликка x_0, y_0 нинг қийматларини қўйсак,

$$A \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \right) + B \left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right) + C = 0.$$

Бундан

$$A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(1 + \lambda) = 0$$

ёки

$$Ax_1 + By_1 + C + \lambda(Ax_2 + By_2 + C) = 0.$$

Юқоридаги белгилашимизга асосан $\delta_{M_1} + \lambda \delta_{M_2} = 0$ бўлиб, бундан

$\lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}}$, $\lambda > 0$ бўлгани сабабли бу шарҳнинг бажарилиши учун $\delta_{M_1}, \delta_{M_2}$ лар ҳар хил ишорали бўлиши керак.

Етарлилиги. $\delta_{M_1}, \delta_{M_2}$ ҳар хил ишорали бўлсин, у ҳолда $M_1 \notin u$ ва $M_2 \notin u$. M_1, M_2 тўғри чизиқ u тўғри чизиқни бирор M_0 нуқтада

кесин, бу ҳолда M_0 нукта M_1, M_2 кесмани бирор λ нисбатда бўлади.

Исботнинг биринчи қисмида бажарилган ишни таққорласак,

$$\lambda = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} = \frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}}$$

$\delta_{M_1}, \delta_{M_2}$ сонлар ҳар хил ишорали бўлгани учун $\lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}} > 0$.

Демак, M_1, M_2 ва u тўғри чизикларнинг кесилган M_0 нуктаси M_1, M_2 нукталар орасида ётади, бундан эса M_1, M_2 нукталарнинг турли очик ярим текисликка тегишлилиги келиб чиқади.

Бу теоремадан қуйидаги натижани келтириб чиқарамиз: $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ нукталар учун $\delta_{M_1} = Ax_1 + By_1 + C$ ва $\delta_{M_2} = Ax_2 + By_2 + C$ сонлар бир хил ишорали бўлса, бу нукталар (39) тўғри чизик билан ажратилган Φ_1, Φ_2 очик ярим текисликларнинг фақат бирига тегишли бўлади.

Хулоса. Текисликнинг координатлари $Ax + By + C > 0$ тенгсизликини қаноатлантирувчи барча нукталари тўплами (39) тўғри чизик билан ажратилган Φ_1, Φ_2 очик ярим текисликларнинг биридан ва $Ax + By + C < 0$ тенгсизликини қаноатлантирувчи нукталари тўплами эса очик ярим текисликларнинг иккинчисидан иборат экан.

Мисол. $u: x - 3y + 1 = 0$ тўғри чизик учлари $M_1(0, -1), M_2(1, 2)$ нукталар бўлган M_1, M_2 кесмани кесадими?

Еч иш. M_1, M_2 нукталарнинг координатларини $\delta = x - 3y + 1$ ифодага қўямиз:

$$M_1 \text{ нукта учун } \delta_{M_1} = 0 - 3 \cdot (-1) + 1 = 4 > 0;$$

$$M_2 \text{ нукта учун } \delta_{M_2} = 1 - 3 \cdot 2 + 1 = -4 < 0.$$

Бундан кўринадики, $M_1 \in \Phi_1, M_2 \in \Phi_2$, демак, тўғри чизик M_1, M_2 кесмани кесиб ўтади.

27-§. Текисликда икки тўғри чизикнинг ўзаро жойлашиши

Тенгламалари аффи системада берилган u_1, u_2 тўғри чизикларни оғайлик:

$$u_1: Ax + By + C_1 = 0$$

$$u_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

$u_1(-B_1, A_1), u_2(-B_2, A_2)$ векторлар мос равишда бу тўғри чизикларнинг йўналтирувчи векторларидир. u_1, u_2 тўғри чизикларнинг ўзаро жойлашувиди ушбу ҳоллар юз бериши мумкин.

1. u_1, u_2 тўғри чизиклар кесишди (62-а чизма). У ҳолда $u_1 \nparallel u_2$

$\nparallel u_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Бундай тўғри чизикларнинг кесилган нуктасини топиш учун берилган тенгламалар системасини ечиш керак.

2. u_1, u_2 тўғри чизиклар параллел ($62-б$ чизма) $\Rightarrow u_1 \parallel u_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Аксинча, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2 \Rightarrow u_1 = \lambda u_2$, бу эса u_1, u_2 нинг параллеллигини аниқлатади.

Агар $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ бўлса, u_1, u_2 тўғри чизиклар уст-ма-уст тушади (мустақил исботланган).

Мисол. $u_1: x + 3y - 2 = 0$ ва $u_2: 2x + y + 5 = 0$ тўғри чизикларнинг кесилишини исботланган ва уларнинг кесилган нуктасини топинг.

Еч иш. Бу тенгламаларда: $A_1 = 1, B_1 = 3, C_1 = -2, A_2 = 2, B_2 = 1, C_2 = 5; \frac{1}{2} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-2}{5}$

$\neq \frac{3}{1}$; берилган тўғри чизиклар кесишди. Шу кесилган нуктани топиш учун ушбу тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$$

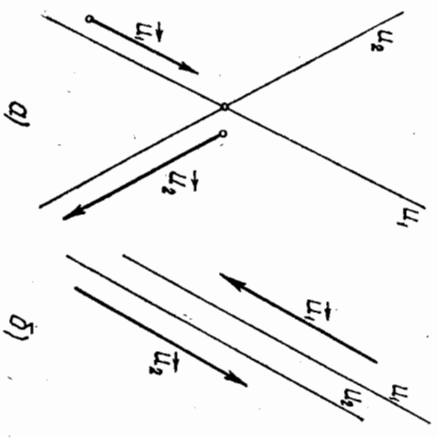
Бу системадан кесилиш нуктасини топамиз: $(\frac{13}{5}, -\frac{1}{5})$.

28-§. Тўғри чизиклар Дастаси

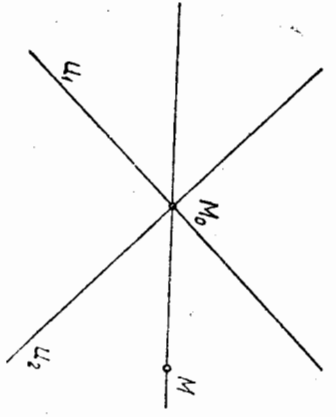
Текисликдаги тўғри чизиклар битта нуктадан ўтса ёки битта тўғри чизикқа параллел бўлса, улар дастани ташкил қилади, деймиз. Шу нукта *даста маркази* дейилади. Бу дасталарни айрим-айрим қўриб чиқамиз.

1. Кесилувчи тўғри чизиклар дастаси (63-чизма) даста марказининг ёки дастага тегишли икки тўғри чизикнинг берилиши билан тўлиқ аниқланади. Даста марказини M_0 деб белгиласак, $M \neq M_0$ нукта орқали дастанинг фақат битта M_0, M тўғри чизиги ўтади.

Энди бу дастанинг тенгламаси билан танишамиз. $y - y_0 = k(x - x_0)$ тенглама (x_0, y_0) нуктадан ўтувчи ва буручак коэффициентини k бўлган тўғри чизикни



62-чизма



63-чизма

аниқлайди. k ни параметр ва (x_0, y_0) ни марказ деб қарасак, бу тенглама тўғри чизиклар дастасини ифодалайди.

Энди дастанинг унга тегишли иккита кесилувчи тўғри чизик билан аниқлашни масаласини қарайлик.

Дастанинг M_0 нуқтада кесилувчи иккита (турли) u_1, u_2 тўғри чизиклари берилган бўлсин:

$$u_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (40)$$

$$u_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (41)$$

Бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\forall \alpha, \beta \in R$ сонларни олиб, (40) ва (41) тенгламалардан ушбу тенгламани тўзайлик:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (42)$$

Бу тенглама M_0 нуқтадан ўтувчи тўғри чизикни аниқлайди. Ҳақиқатан, (42) тенгламани қуйидагича ёзайлик:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \quad (43)$$

Бу тенгликда x, y ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларнинг қамда бири нолдан фарқли, чунки

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0$$

бўлсин десак (масалан, $\alpha \neq 0$ бўлганда), уни

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad (44)$$

қўринишда ёзиш мумкин. (44) дан $\left| \frac{A_1}{A_2} \frac{B_1}{B_2} \right| = 0 \Rightarrow u_1 \parallel u_2$, бу зидликка олиб келди: шартга асосан $u_1 \cap u_2 = M_0$. Демак, (43) тенглама α, β нинг бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар бир қийматида тўғри чизикни аниқлайди.

$$M_0 \in u_1, M_0 \in u_2 \Rightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \Rightarrow \alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Бундан қўринишдаки, (43) тенглама билан аниқланган тўғри чизик M_0 нуқтадан ўтади.

Агар $M_1 \neq M_0$ нуқта берилса, α, β га тегишли қийматлар бериш йўли билан дастанинг шу нуқтадан ўтадиган тўғри чизикни аниқлаш мумкинлигини кўрсатамиз.

Дастага тегишли тўғри чизикнинг M_1 нуқтадан ўтиш шarti:

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \quad (44')$$

$M_1 \neq M_0$ бўлгани учун $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1, A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$ ифодаларнинг қамда бири нолдан фарқли, масалан, $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (44') дан

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1} \beta. \quad (45)$$

(45) ни қанотланттирувчи α, β да дастанинг M_1 нуқтадан ўтувчи

тўғри чизикни аниқланади. Шундан қилиб, (42) тенглама бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар қандай α, β да дастани ифодалайди.

Мисол. Маркази координатлар бошида бўлган дастанинг $A(-1, 2)$ нуқтадан ўтган тўғри чизикни топинг.

Еч иш. $M_0(x_0, y_0)$ марказли дастанинг тенгламасини ушбу $y - y_0 = k(x - x_0)$ кўришда ёзамиз, бу ерда даста $y - 0 = k(x - 0)$ ёки $y = kx$ тенглама билан ифодаланади. Дастанинг $A(-1, 2)$ нуқтадан ўтган тўғри чизикни учун $2 = k \cdot (-1)$, бундан $k = -2$. Демак, $y = kx$ дастанинг $A(-1, 2)$ нуқтадан ўтган тўғри чизикга $y = -2x$ тенглама мос келади.

2. Параллел тўғри чизиклар дастаси (64-чизма). Текширишдаги параллел тўғри чизиклар дастаси даста тўғри чизиклари та параллел бўлган бирор u_0 векторнинг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

Параллел тўғри чизиклар дастасини ифодаловчи тенгламани қарайлик. Параллел тўғри чизиклар дастаси $u_0(-B_0, A_0)$ вектор билан аниқланган бўлсин. У ҳолда $A_0x + B_0y + C = 0$ тенглама дастани ифодалайди. Бу ерда C ҳар қандай қийматларни қабул қила олади. Ҳақиқатан, C нинг ҳар бир қийматида бу тенглама билан аниқланган тўғри чизик $u_0(-B_0, A_0)$ векторга параллел бўлгани сабабидан дастага тегишли.

Мисол. Иўналиши $u_0(1, -2)$ вектор билан аниқланган, параллел тўғри чизиклар дастасига тегишли ва координатлар бошидан ўтувчи тўғри чизикни топинг.

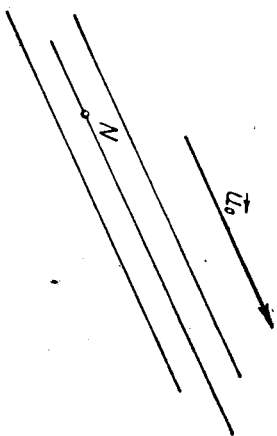
Еч иш. $u_0(1, -2) \Rightarrow B_0 = -1, A_0 = -2; A_0x + B_0y + C = 0$ дан $2x + y - C = 0$ тенглама ҳосил қилинади. Энди бу дастанинг координатлар бошидан ўтувчи тўғри чизикни топамиз: $2 \cdot 0 + 0 - C = 0 \Rightarrow C = 0$. Изланаётган тўғри чизик: $2x + y = 0$.

§ 29-§. Декарт репериди тўғри чизик ва у билан боғлиқ бўлган метрик масалалар

Ҳозирга қадар текширишда координатларнинг аффин системасини қараб, бу системادا тўғри чизикнинг турли тенгламалари ва тўғри чизик билан боғлиқ айрим масалалар билан танишдик.

Энди декарт репери (декарт координатларининг тўғри бурчакли системаси) олинган бўлсин. Бу системادا тўғри чизикка тааллуқли кўпгина метрик масалалар ҳал қилинади.

Таъриф. Кесма узунлиги ва бурчак катталигини ҳисоблаш билан боғлиқ бўлган масалалар метрик масалалар дейилади.



64-чизма

Таъриф. Тўғри чизикнинг йўналтирувчи векторига перпендикуляр ҳар қандай вектор бу тўғри чизикнинг *нормал вектори* дейлади.

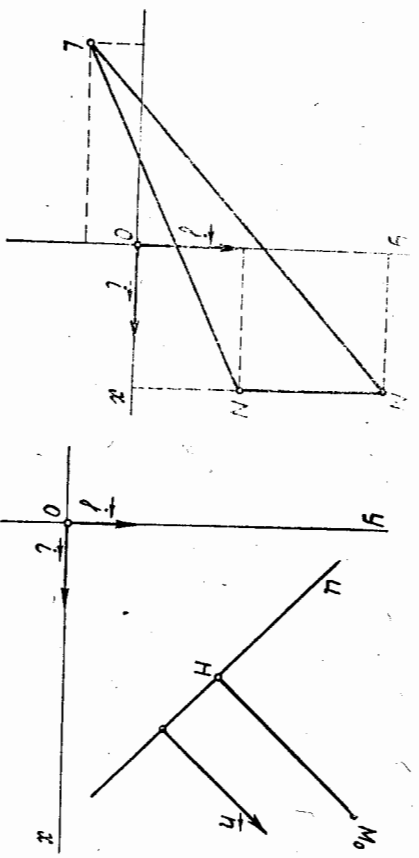
(O, i, j) декарт реперини оламиз. Тўғри чизик $Ax + By + C = 0$ умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. $u(-B, A)$ унинг йўналтирувчи вектори, u ҳолда $n(A, B)$ вектор u тўғри чизикнинг нормал вектори бўлади. Ҳақиқатан, u, n векторларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$u \cdot n = -B \cdot A + A \cdot B = 0 \Rightarrow n \perp u.$$

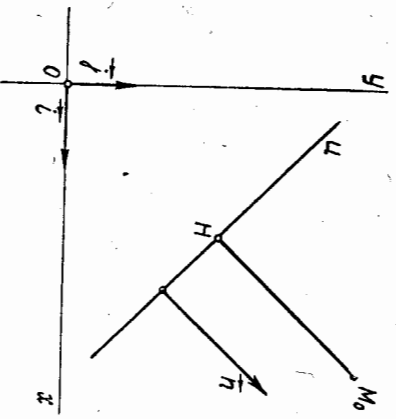
Демак, тўғри чизикнинг умумий тенгламасидаги A, B сонлар шу тартибда олинса, улар шу тенглама билан аниқланадиган тўғри чизик нормал векторининг координаталарини билдиради.

Мисол. Учбурчакнинг координаталари $L(-2, 5), M(2, 2, 5)$ ва $N(2, 1)$ бўлган LMN учбурчакнинг L учидан MN томонига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизик тенгламасини тузинг. Ечиш. Йазланаётган тўғри чизикнинг нормал вектори учун $n = \vec{MN}$ векторни олтиш мумкин, унинг координаталари $n = \vec{MN}(0, -1, 5)$. Нормал вектори $n(0, -1, 5)$ бўлган тўғри чизикнинг тенгламаси $0 \cdot x + (-1, 5)y + C = 0$, бу тўғри чизик L учдан ўтгани учун $0 \cdot (-2, 5) + (-1, 5) \cdot (-0, 5) + C = 0$, бундан $C = -\frac{3}{4}$. Йазланаётган тенглама $0 \cdot x + (-1, 5)y - \frac{3}{4} = 0$ ёки $2y + 1 = 0$ кўринишда бўлади (65-чизма).

Нуктадан тўғри чизикқача бўлган масофа. (O, i, j) декарт репериди



65-чизма



66-чизма

$$u: Ax + By + C = 0 \tag{46}$$

тўғри чизик ва $M_0(x_0, y_0)$ нукта берилган бўлсин. M_0 нуктадан тўғри чизикқа перпендикуляр ўтказамиз. Уларнинг кесилган нуктасини H билан белгилаймиз (66-чизма). H нукта бу перпендикулярнинг *ассоси* дейилади. \vec{HM}_0 векторнинг узунлигини M_0 нуктадан t тўғри чизикқача бўлган *масофа* дейилади ва $r(M_0, u)$ кўринишда белгиланади.

Агар $M_0 \in u$ бўлса, $M_0 = H$ бўлиб, $r(M_0, u) = 0$ бўлади. $M_0 \notin u$ бўлсин, у ҳолда $r(M_0, u) = |\vec{HM}_0| = |\vec{n}| \cdot \cos(\angle A, B)$ вектор u тўғри чизикнинг нормал вектори бўлгани учун \vec{HM}_0 ва \vec{n} векторлар коллинеар бўлади, у ҳолда бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$\vec{HM}_0 \cdot \vec{n} = |\vec{HM}_0| |\vec{n}| \cos(\angle A, B) = \pm r(M_0, u) |\vec{n}|$$

$\vec{HM}_0 \uparrow \uparrow \vec{n}$ бўлса, $(\vec{HM}_0, \vec{n}) = 0^\circ$ бўлиб $\cos(\angle A, B) = +1$ бўлади. $\vec{HM}_0 \uparrow \uparrow \vec{n}$ бўлса, $(\vec{HM}_0, \vec{n}) = 180^\circ$ бўлиб, $\cos(\angle A, B) = -1$ бўлади, бу ердан

$$r(M_0, u) = \frac{|\vec{HM}_0 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

H нуктанинг координаталари x_1, y_1 бўлсин. У ҳолда $\vec{HM}_0(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ бўлиб, $H \in u$ эканини ҳисобга олсак, скаляр кўпайтма

$$\vec{HM}_0 \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C$$

бўлади.

Шу билан бирга $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ эканини назарда тутсак,

$$r(M_0, u) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{47}$$

(47) берилган M_0 нуктадан берилган u тўғри чизикқача бўлган масофани ҳисоблаш формуласидир.

Мисол. Учбурчакнинг бир учи (5, -3) дан, *ассоси* (0, -1) ва (3, 3) нукталарни туташтирувчи кесмадан *иборат*. Унинг бағланлигини толинг.

Ечиш. Учбурчакнинг *ассоси* (0, -1) ва (3, 3) нукталардан ўтувчи тўғри чизик бўлгани учун унинг тенгламаси

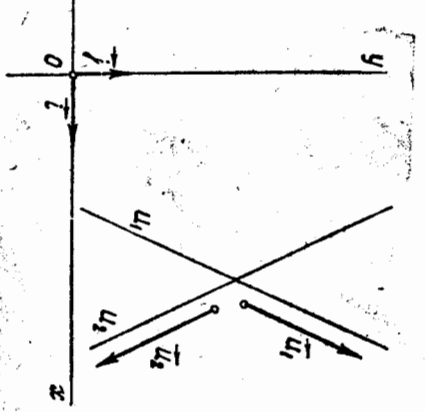
$$\frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y + 1}{3 + 1} \text{ ёки } 4x - 3y - 3 = 0.$$

Учбурчакнинг h бағланлиги эса (5, -3) нуктадан бу тўғри чизикқача бўлган масофадир. У ҳолда (47) формула бўйича:

$$h = \frac{|4 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) - 3|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{26}{5}$$

30-§. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак

Таъриф. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак деб бу тўғри чизикларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтылади. Берилган u_1, u_2 тўғри чизиклар орасидаги бурчакни (u_1, u_2) кўринишда белгилаймиз. Декарт репериди u_1, u_2 тўғри чизиклар



67-чизма

$u_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$
 $u_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$
 умумий тенгламалари билан аниқланган бўлсин (67-чизма).
 $u_1(-B_1, A_1)$ вектор u_1 тўғри чизикнинг, $u_2(-B_2, A_2)$ вектор u_2 тўғри чизикнинг йўналтирувчи векторидир, у ҳолда таърифта кўра u_1, u_2 тўғри чизиклар орасидаги бурчак ушбу формуладан аниқланади:

$$\cos(u_1, u_2) = \cos(u_1, u_2) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Хусусий ҳолда

$$u_1 \perp u_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (48)$$

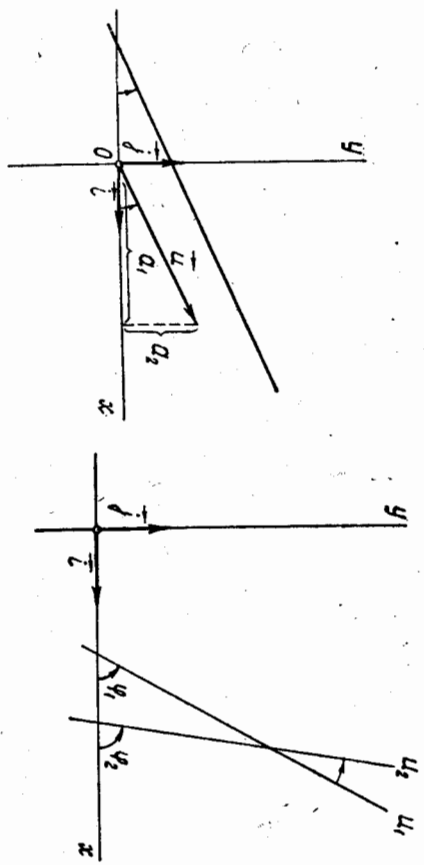
(48) тенглик икки тўғри чизикнинг перпендикулярлик шартидир. Декарт репериди Ou ўққа параллел бўлмаган u_1, u_2 тўғри чизиклар бурчак коэффициентини тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$u_1: y = k_1 x + b_1, \quad u_2: y = k_2 x + b_2.$$

Бу тўғри чизиклар орасидаги бурчакни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Тўғри чизик декарт репериди қаралганда унинг $u(a_1, a_2)$ йўналтирувчи векторининг бурчак коэффициенти

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg}(u, i)$$

бўлади (68-чизма). (u, i) бурчак тўғри чизикнинг Ox ўққа оғиш



68-чизма

бурчаги дейилади. u_1, u_2 тўғри чизикларнинг Ox ўққа оғиш бурчаклари мос равишда Φ_1, Φ_2 бўлсин (69-чизма), у ҳолда

$$k_1 = \operatorname{tg} \Phi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \Phi_2 \quad \text{ва} \quad (u_1, u_2) = \Phi_2 - \Phi_1$$

бўлади. Икки бурчак айирмасининг тангенс формуласига кўра

$$\operatorname{tg}(u_1, u_2) = \operatorname{tg}(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{\operatorname{tg} \Phi_2 - \operatorname{tg} \Phi_1}{1 + \operatorname{tg} \Phi_1 \operatorname{tg} \Phi_2}$$

тг $\Phi_1, \operatorname{tg} \Phi_2$ ни k_1, k_2 билан алмаштириб, ушбу формулага эга бўламиз:

$$\operatorname{tg}(u_1, u_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (48)$$

(48) икки тўғри чизик бурчак коэффициентли тенгламалари билан берилганда улар орасидаги бурчакни ҳисоблаш формуласидир.

u_1, u_2 тўғри чизиклар перпендикуляр бўлган ҳолда $\Phi_2 = \Phi_1 + \frac{\pi}{2}$ дейиш мумкин $\Leftrightarrow \operatorname{tg} \Phi_2 = -\operatorname{ctg} \Phi_1$ ёки

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \quad k_1 k_2 = -1. \quad (49)$$

(49) тенглик u_1, u_2 тўғри чизикларнинг перпендикулярлик шартидир. u_1, u_2 тўғри чизиклар параллел бўлган ҳолда $\Phi_2 - \Phi_1 = 0$ экан $k_2 = k_1 = 0$, бундан

$$k_1 = k_2. \quad (50)$$

(50) тенглик u_1, u_2 тўғри чизикларнинг параллеллик шартидир. Эслатма. Икки тўғри чизикнинг кесилишидан тўртта бурчак ҳосил бўлади. Бу бурчакларнинг ҳар бирини берилган икки тўғри чизик орасидаги бурчак сифатида одиш мумкин. Бу тўртта бурчакнинг бирини топсак, қолган учта бурчак ҳам аниқланади. Мисол. u_1, u_2 тўғри чизиклар

69-чизма

31-§. Тўпламларни акслантириш ва алмаштириш

Бўш бўлмаган икки X, Y тўплам берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар X тўпламнинг ҳар бир x элементга бирор f қоида билан Y тўпламнинг аниқ y элементи мос кўйилган бўлса, Y ҳолда X тўпламнинг Y тўпламга акслантирилиши берилган дейлади.

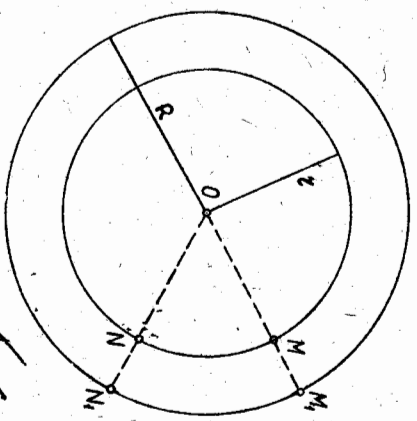
f қоида X тўпламини Y тўпламга акслантиради деган жумлани $f: X \rightarrow Y$ ёки $X \xrightarrow{f} Y$ кўринишида ёзамиз.

Агар $x \in X$ элемент f акслантиришида $y \in Y$ элементга мос келса, уни $y = f(x)$ каби ёзилади, y ни x элементнинг f акслантиришидаги образи (акси), x ни эса y элементнинг прообрази (асли) дейлади. X тўплам барча элементларининг образлари тўплами $\{f(x) | x \in X\}$ ни $f(X)$ кўринишида белгиланади ва f акслантиришидаги X тўпламининг образи дейлади.

Мисол. Умумий O марказли иккита концентрик айланани қараймиз. r радиусли айлананинг нуқталари тўплами X, R радиусли айлананинг нуқталари тўплами Y бўлсин.

X тўпламининг ҳар бир M нуқтасига Y тўпламининг OM нурда ётган M_1 нуқтасини мос келтирайлик. Натижادا биринчи айлананинг иккинчи айланага акслантирилиши ҳосил бўлади: $M_1 = f(M), N_1 = f(N)$ ва ҳоказо (70-чизма).

Бу ерда f қоида O нуқтадан чиқарилган нурнинг биринчи айлана билан кесилган нуқтасини унинг иккинчи айлана билан кесилиш нуқтасига мос келтиришдан иборат.



70-чизма

[Handwritten signature]

$u_1: x + 7y - 5 = 0$ ва $u_2: 3x - 4y + 20 = 0$

тенгламалари билан берилган. Улар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. u_1 тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти $k_1 = -\frac{1}{7}$, u_2 тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти $k_2 = \frac{3}{4}$. (48) формула бўйича

$$\operatorname{tg}(\widehat{u_1, u_2}) = \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4}(-\frac{1}{7})} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = 1.$$

$(u_1, u_2) = 45^\circ.$

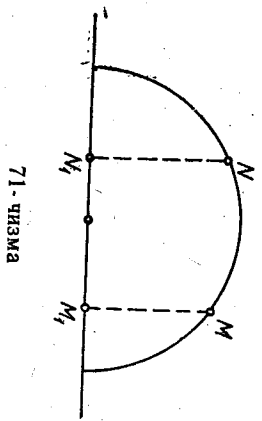
Тўғри чизиклар умумий тенгламалари билан берилган ҳолда

Энди (48) дан $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$.

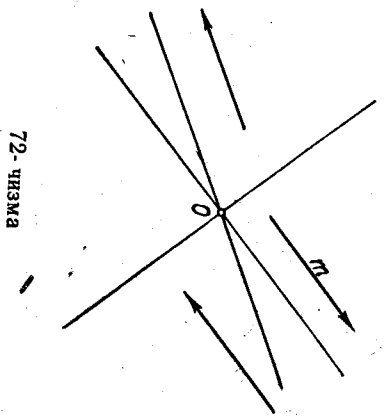
Бундан

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|}.$$

$u_1 \perp u_2 \Rightarrow A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$



71-чизма



72-чизма

1 тўри чизикдаги ортогонал проекциясини топилдир. Натижادا Х тўгламининг У тўгламга акслантирилиши ҳосил қилинади. Бу акслантиришда $M_1 = f(M)$, $N_1 = f(N)$ ва ҳоказо бўлиб,

$$M \neq N \Rightarrow f(M) \neq f(N).$$

II. Агар f акслантиришдаги образлар тўглами У тўгламдан иборат, яъни $f(X) = Y$ бўлса, у ҳолда $f: X \rightarrow Y$ акслантириш сюръектив акслантириш дейилади.

Мисол. Х текисликдаги барча векторлар тўглами, У эса O марказли дасга бўлсин (72-чизма).

$X_1 = X \setminus \{0\}$ тўгламининг ҳар бир \vec{m} векторига У тўгламининг l m тўғри чизигини мос келтирамыз. Бу билан X_1 тўглами У тўгламга $f: X_1 \rightarrow Y$ акслантирилиши ҳосил бўлиб, бу акслантиришда $f(X_1) = Y$. Демак, f акслантириш сюръектив, лекин у инъектив эмас, чунки ҳар қандай $\vec{m} \neq \vec{n}$, $\vec{m} = \lambda \vec{n}$ векторлар учун $f(\vec{m}) = f(\vec{n})$.

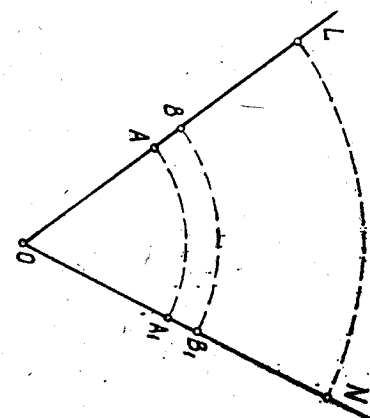
III. Бир вақтнинг ўзида ҳам инъектив, ҳам сюръектив бўлган $f: X \rightarrow Y$ акслантириш биектив эки ўзаро бир қийматли акслантириш дейилади. Акслантириш биектив бўлганда У тўгламининг ҳар бир элементи битта прообразга эга. Биектив акслантиришга мисоллар келтирамыз:

1-мисол. Текисликда координатларнинг аффин системасини қиритиб билан текисликнинг барча нуқталари тўгламини барча тартибланган ҳақиқий сонлар жуфтлари (x, y) тўгламига ва аксинча тартибланган барча ҳақиқий сонлар жуфтлари тўгламини текисликнинг барча нуқталари тўгламига акслантирилади. Бунда f қоида координатларнинг аффин системасини қиритиш қоидадир.

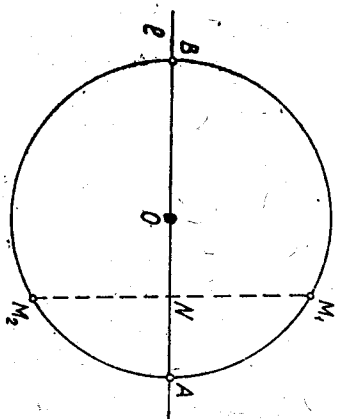
Х — текисликдаги барча нуқталар тўглами, У — маълум тартибда олинган барча ҳақиқий сонлар жуфтлари тўглами (ёки аксинча) бўлсин десек, бу акслантиришда ҳар бир $M \in X$ нуқтага бир жуфт битта $M \in X$ нуқта мос келади.

2-мисол. Бирор $\angle LON$ берилган бўлсин. Унинг OL ва ON то-

монларининг нуқталари орасида қуйидаги мосликни ўрнатайлик: OL томонидаги ҳар бир M нуқтага O марказли ва OM радиусли ёйнинг ON томони билан кесилган M_1 нуқтаси мос келсин (73-чизма), 73-чизмадан кўринадики, $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$ ва ҳоказо. Бунда бурчакнинг O учи ўзи-ўзига мос деб ҳисоблаймыз. Бу билан OL нурининг ON нурга ўзаро бир қийматли акслантирилиши ҳосил қилинади.



73-чизма



74-чизма

Инъектив ҳам, сюръектив ҳам бўлмаган акслантиришга ушбу мисолни келтириш мумкин.

Мисол. Х тўглам O марказли айлананинг барча нуқталари тўглами, У эса O нуқтадан ўтувчи l тўғри чизикнинг барча нуқталари тўглами бўлсин. Х тўгламининг ҳар бир M нуқтасига унинг l тўғри чизикдаги ортогонал проекциясини мос қўйсак, бу билан $f: X \rightarrow Y$ акслантириш ҳосил бўлади (74-чизма).

Бу ерда f қоида айлананинг ҳар бир нуқтасининг l тўғри чизикдаги ортогонал проекциясини топилдир. f акслантириш инъектив эмас, чунки $M_1, M_2 (M_1 \neq M_2)$ нуқталар учун $f(M_1) = f(M_2) = N$. Шу билан бирга f акслантириш сюръектив ҳам эмас, чунки

$$f(X) \neq Y, f(X) = AB \subset l.$$

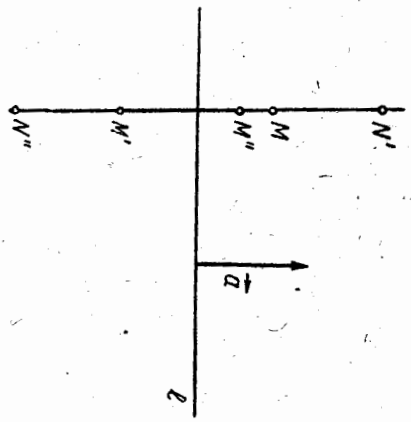
2-тарриф. Х тўглами У тўгламга бирор $f: X \rightarrow Y$ биектив акслантириш берилган ва ҳар қандай $x \in X$ элемент учун $y = f(x)$ бўлсин. У ҳолда $f^{-1}(y) = x$ қонуният билан бажарилган $f^{-1}: Y \rightarrow X$ акслантириш f учун текари акслантириш дейилади. Х тўглами У тўгламга f акслантириш биектив бўлганда унга текари f^{-1} акслантириш мавжуд ва айни вақтда биектив ҳам бўлади. Ҳақиқатан, $f: X \rightarrow Y$ биектив акслантириш бўлганда у бир вақтда ҳам инъектив, ҳам сюръектив бўлади. f^{-1} инъектив, яъни $x_1 \neq x_2$ учун $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлганидан $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, бу ерда $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. f^{-1} сюръектив, яъни $f(X) = Y$ бўлганидан ҳар қандай $y \in Y$ учун $f^{-1}(y)$ прообразлар тўглами бўш эмас. Демак, f акслантиришга текари f^{-1} акслантириш мавжуд ва у биективдир.

3-таъриф. $X \neq \emptyset$ тўплами ўз-ўзига ҳар қандай $f: X \rightarrow X$ биектив аксиантириш X тўпламда алмаштириш дейилади, f аксиантириш X тўпламининг бирор алмаштириши бўлса, унга теъкари f^{-1} аксиантириш, яъни ҳар бир $x' \in X$ элементни унинг асли $x \in X$ га ўтказадиган аксиантириш ҳам X тўпламда алмаштириш бўлади. Уни f алмаштиришга теъкари алмаштириш дейилади.

Агар бирор $x \in X$ элемент учун (мас ҳолда X тўпламининг Φ қисм тўплами учун) f алмаштиришда $f(x) = x$ ($f(\Phi) = \Phi$) бўлса, x элемент (Φ қисм тўплам) f алмаштиришда қўзғалмас элемент ёки инвариант элемент дейилади. Юқоридати биектив аксиантиришнинг 2-мисолида O нуқта қўзғалмасдир.

4-таъриф. Агар ҳар қандай $x \in X$ элемент учун $f(x) = x$ бўлса, у ҳолда $f: X \rightarrow X$ алмаштириш айнан алмаштириш дейилади. Бундан кейин X тўпламининг айнан алмаштиришлари E_0 билан белгиланади.

5-таъриф. f_1, f_2 дар X тўпламининг ихтиёрий икки алмаштириши бўлсин, f_1 алмаштириш ҳар бир $x \in X$ элементни $f_1(x) = x'$ элементга, f_2 алмаштириш эса x' элементни $f_2(x') = x''$ элементга ўтказсин. Уларни кетма-кет бажарилса, яъни x элемент устида f_1 алмаштиришни ва ҳосил қилинган образ x' устида f_2 алмаштириш бажарилса, натижада x ни x'' элементга ўтказувчи f_3 алмаштириш ҳосил бўлади. f_3 алмаштириш f_1, f_2 алмаштиришнинг қўлайтмаси (ёки композицияси) дейилади ва $f_3 = f_2 f_1$ кўринишда ёзилади (бунда аввал f_1 сўнгра f_2 бажарилди).



75-чизма

Шундай қилиб, f_1, f_2 алмаштиришларнинг қўлайтмаси барча $x \in X$ учун $f_3(x) = (f_2(f_1(x)))$ тенглик ўринли бўладиган $f_3: X \rightarrow X$ алмаштиришдан иборат. Умуман $f_2 f_1$ ва $f_1 f_2$ турли алмаштиришлардир, яъни $f_2 f_1 \neq f_1 f_2$.

Мисол. Фараз қилайлик, f_1 текисликни l тўғри чизикқа нисбатан симметрик алмаштириш, f_2 эса шу текисликни l тўғри чизикқа перпендикуляр бўлган a вектор қадар параллел кўчириш бўлсин¹.
 M — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Аввал $f_2 f_1$ алмаштиришни бажарамиз. Текисликнинг l тўғри чизикқа нисбатан симметрик алмаштириши M нуқтани M' нуқтага ўтказди. Текисликни a вектор қадар параллел кўчириш f_2 параллел

¹ Параллел кўчириш ва симметрик алмаштириш ҳақидаги материалот ўқувчинга ўрта мактаб геометрия курсидан маълум бўлиб, бу тушунчалар 35-§ да маълум қаралади.

лел кўчириш M' нуқтани M'' нуқтага ўтказди (75-чизма). Бу алмаштиришларнинг қўлайтмаси $f_3 f_1$ алмаштириш M нуқтани M'' нуқтага ўтказди.

Энди $f_1 f_2$ алмаштиришни бажарамиз. Текисликни a вектор қадар f_2 параллел кўчириш M нуқтани N' нуқтага ўтказди. l тўғри чизикқа нисбатан f_1 симметрик алмаштириш эса N' нуқтани N'' нуқтага ўтказди, уларнинг қўлайтмаси, яъни текисликни $f_1 f_2$ алмаштириш M нуқтани N'' нуқтага ўтказди. $M' \neq N''$. Демак, бу мисолда $f_2 f_1 \neq f_1 f_2$.

Теорема. Алмаштиришларни қўлайтириш ассоциативлик қонунига бўйғунди, яъни X тўпламининг ихтиёрий учта f_1, f_2, f_3 алмаштириш учун ҳар вақт $f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1$.

Исбот. X тўпламининг ихтиёрий элементи x бўлсин. f алмаштиришдаги x нинг образи y , f_2 алмаштиришдаги y нинг образи z , f_3 алмаштиришдаги z нинг образи t бўлсин. У ҳолда алмаштиришларни қўлайтириш тарйифига кўра $f_3 f_1$ алмаштириш x элементни t элементга ўтказди, $f_3 f_2$ алмаштириш y элементни t элементга ўтказди. Шунга кўра

$$(f_3(f_2 f_1))(x) = f_3(z) = t, ((f_3 f_2) f_1)(x) = (f_3 f_2)(y) = t,$$

бундан эса

$$f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1. \quad \blacktriangle$$

f ихтиёрий алмаштириш бўлсин. Унга теъкари f^{-1} алмаштириш ва E_0 айнан алмаштириш учун

$$f E_0 = E_0 f = f \text{ ва } f f^{-1} = f^{-1} f = E_0$$

тенгликлар ўринли бўлади (буни текширишни ўқувчига ҳавола қилинамиз).

32-§. Алмаштиришлар группаси.

Алмаштиришлар группасининг қисм группалари

X тўпламдаги f_1, f_2, f_3, \dots алмаштиришлар тўпламининг Γ байдн белгиллик.

1-таъриф. Агар Γ тўпламдан олинган ихтиёрий икки f_1 ва f_2 алмаштиришнинг $f_2 f_1$ қўлайтмаси тўпламга тегишли бўлса ва ундаги ҳар бир f алмаштиришга теъкари f^{-1} алмаштириш ҳам Γ тўпламга тегишли бўлса, Γ тўплам *группа* дейилади.

Γ нинг ҳар қандай икки f_1, f_2 алмаштириш учун $f_2 f_1 = f_1 f_2$ бўлса, Γ группа *коммутатив группа* ёки *Абель группа* дейилади.

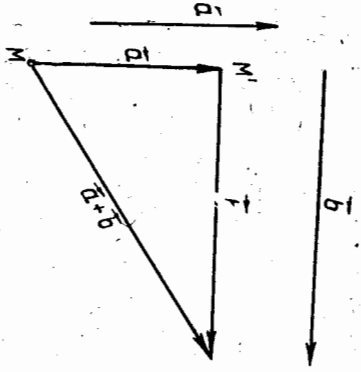
1-мисол. Фараз қилайлик, бирор текисликдаги барча параллел кўчиришлар тўплами P бўлсин, $f_1, f_2 \in P$ алмаштиришларни олайлик. f_1 алмаштириш a вектор қадар параллел кўчириш, f_2 алмаштириш эса b вектор қадар параллел кўчириш бўлсин. Текисликнинг ихтиёрий M нуқтасини f_1 алмаштириш шундай M' нуқтага ўтказдики, бунда $M M' = a$ бўлади, f_2 алмаштириш эса M' нуқтани шун-

дей M'' нүктәгә үткәздикки, $\vec{M'M''} = \vec{b}$ булди. f_1, f_2 алмаштиришларнинг $f_2 f_1$ күпайтмәси M нүктәни M'' нүктәгә үткәздди. Векторларни күшиш қондәсигә кўра

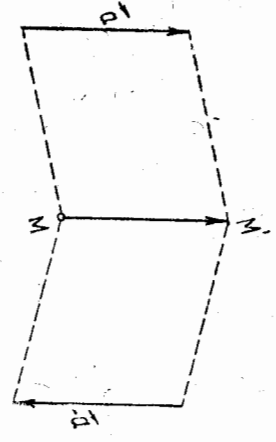
$$\vec{MM''} = \vec{MM'} + \vec{M'M''} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c},$$

$$\vec{MM''} = \vec{c} \quad (76\text{-чизма}).$$

Бинобарин, f_1, f_2 параллел күчиритиләрнинг күпайтмәси $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ вектор қадар параллел күчиритидир.



76-чизма



77-чизма

Энди f_1 параллел күчиритилгә текеари алмаштиришни бажарайдик. f_1 алмаштириш a вектор қадар параллел күчиритиш булгани учун унга текеари алмаштириш — a вектор қадар параллел күчиритидир (77-чизма). Шундай қилиб,

$$f_2 f_1 \in P \Rightarrow f_1 f_2 \in P \text{ ва } f_1 \in P \Rightarrow f^{-1} \in P.$$

Демак, P группа экан. Шу билан биргә P коммутатив группадир, чунки $f_2 f_1$ алмаштириш $a + b$ вектор қадар параллел күчиритидир, $f_1 f_2$ эса $b + a$ вектор қадар параллел күчиритиш. $a + b = b + a$ булганидан

$$f_2 f_1 = f_1 f_2.$$

Энди Γ бирор алмаштиришлар группәси, Γ' эса Γ тулгамининг қисм тулғамы булсин.

2-таъриф. Агар 1) Γ' нинг ихтиерий икки алмаштиришнинг күпайтмәси Γ' га тегишли, 2) Γ' нинг ҳәр бир алмаштиришигә текеари алмаштириш яна Γ' га тегишли булса, Γ' ни Γ группанинги қисм группәси дейляди. Бошқача айтганда, Γ группанинги Γ' қисм

тулғамы Γ' нинг қисм группәси булиши учун унинг ўзи группани тәшкил этиши керәк.

2-мисол. Текисликдаги бәрәчә векторлар қадар параллел күчиритиләр тулғамини P билан белгиләйлик. (P нинг коммутатив группә тәшкил этиши бизгә маълум.) Бу текисликда бирор l тўғри чизикка параллел векторлар қадар бәрәчә параллел күчиритиләр тулғамы эса P' булсин. Равәнәкки, $P' \subset P$, шу билан биргә P' группә тәшкил қилди. (P' нинг группә тәшкил қилиши худди P нинг группә тәшкил қилиши синтари кўрсатилди.)

Демак, P' группә P группанинги қисм группәсидир.

33-§. Текисликдаги ҳарәкатлар ва уларнинг хоссалари

Текисликдаги турли алмаштиришлар билан танишамыз. Таъриф. Текисликнинг ҳәр қандай икки нүктәси орасидаги масофәни үзгәртирмәйилган алмаштириш *ҳарәкат* ёки *силжитиш* дейляди.

Харәкатни F орқали белгиләймиз. F текисликдаги ҳарәкат булса, таърифга кўра текисликнинг ҳәр қандай M, N нүктәләри учун

$$\rho(M, N) = \rho(F(M), F(N)).$$

Текисликдаги ҳарәкат ушбу хоссаларга эгә. 1°. Харәкатда бир тўғри чизикда ётган уч нүктә яна бир тўғри чизикда ётган уч нүктәгә, бир тўғри чизикда ётмаган уч нүктә яна бир тўғри чизикда ётмаган уч нүктәгә ўтди.

Исбот. A, B, C бир тўғри чизикнинг уч нүктәси, шу билан биргә V нүктә A ва C нүктәлар орасида ётсин. U ҳолда I бооб, 1 -§ даги таърифга кўра

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C).$$

Текисликдаги F ҳарәкатда A', B', C' нүктәлар мос рәвишда A, B, C нүктәләрининг образлари булсин, десәк, ҳарәкатда ҳәр қандай икки нүктә орасидаги масофа үзгәрмәгани учун:

$$\rho(A', B') = \rho(A, B), \rho(B', C') = \rho(B, C), \rho(A', C') = \rho(A, C),$$

шунга кўра $\rho(A', B') + \rho(B', C') = \rho(A', C') \Rightarrow B'$ нүктә A' ва C' нүктәлар орасида ётди. Демак, A', B', C' нүктәлар битта тўғри чизикка тегишли.

Энди A, B, C нүктәлар битта тўғри чизикда ётмасин $\Rightarrow \rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, C)$. U ҳолда уларнинг A', B', C' образлари ҳам битта тўғри чизикда ётмайди. Аксинчә, агар A', B', C' нүктәлар битта тўғри чизикда ётди ва B' нүктә A', C' нүктәлар орасида ётсин десәк, $\rho(A', B') + \rho(B', C') = \rho(A', C')$ тенглик ўринли булди. Харәкатда ҳәр қандай икки нүктә орасидаги масофа сақлангани учун $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$, бу эса A, B, C нүктәләрининг бир тўғри чизикда ётмаслиғига эид. ▲

2°. Харакатда тўғри чизикдаги ҳар қандай уч нуктанинг олдий нисбати сакланиди.
Исбот. A, B, C бир тўғри чизикнинг уч нуктаси бўлсин. Бу уч нуктанинг олдий нисбати:

$$\lambda = (AC, B) = \frac{AB}{BC} \quad (\text{II 606, 15-}\S).$$

B нукта A, C нукталар орасида ётганда бу нисбат $\frac{\rho(\overrightarrow{AB})}{\rho(\overrightarrow{BC})}$ сонга ва B нукталар AC кесмага тегишли бўлмаган ҳолда $-\frac{\rho(A, B)}{\rho(B, C)}$ сонга тенг.

F харакат бўлгани учун $\rho(A, B) = \rho(F(A), F(B))$ ва $\rho(B, C) = \rho(F(B), F(C))$, бундан $(AC, B) = (F(A)F(C), F(B))$.

3°. Харакатда нурнинг образи нурдан иборат.

Исбот. Уч O нукта бўлган $l = OA$ нурни оламиз. F харакатда $O' = F(O), A' = F(A)$ бўлсин. $F(l) = O'A'$ нур эканини кўрсаталар орасида, ёки B нукта O ва A нукталар орасида ётди. 1°. Хоссага кўра A' нукта O' ва $F(B)$ нукталар орасида ёки $F(B)$ нукта O' ва A' нукталар орасида ётди.

Бундан $F(B)$ нинг $O'A'$ кесмага тегишли экани келиб чиқади. Аксинча, $O'A'$ нурга тегишли $C'(C' \neq A')$ нуктани оламиз. l нурда $OC = O'C'$ тенгликни қаноатлантирувчи C нуктани аёраймиз. 1°. Хоссага кўра $F(C)$ нукта $O'A'$ нурга тегишли ва F харакат бўлгани учун

$$OF(C) = OC = O'C' \Rightarrow C' = F(C).$$

Шундай қилиб, $BC \Rightarrow F(B) \in O'A'$ нурга ва $C' \in O'A' \Rightarrow C' = F(C), C \in l$.

Демак, $F(l) = O'A'$ нур. \blacktriangle

4°. Харакатда тўғри чизикнинг образи яна тўғри чизикдир.

Исбот. Бирор a тўғри чизикда A, B нукталарни белгилаймиз. a тўғри чизик AB ва BA нурларнинг бирлашмаси бўлсин. 3°. Хоссага асосан F харакат AB нурни $A'B'$ нурга ва BA нурни $B'A'$ нурга ўтказди десак, бу ҳолда $F(a) = A'B' \cup B'A' = a'$ тўғри чизик ҳосил қилинади. \blacktriangle

5°. Харакатда параллел тўғри чизикларнинг образлари ҳам параллел тўғри чизиклардан иборат.

Исбот. Текисликдаги икки l_1, l_2 тўғри чизик учун $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ бўлсин. F харакат биектив аксианттириш бўлгани учун

$$F(l_1) \cap F(l_2) = \emptyset \Rightarrow F(l_1) \parallel F(l_2). \quad \blacktriangle$$

6°. Харакатда бурчакнинг образи бурчак бўлади ва унинг катталиги сакланади.

Исбот. Ихтиёрий $\angle LON$ берилган бўлсин. OL ва ON нурлар унинг томонлари. F харакатда $O' = F(O), N' = F(N), L' = F(L)$ бўлсин. 3°. хоссага кўра ON ва OL нурларнинг образлари мос ра-

вида $O'N'$ ва $O'L'$ нурлар бўлиб, бундан $\angle L'O'N' = F(\angle LON)$. OL ва ON нурларда мос равишда A, B нукталарни оламиз. $A' = F(A), B' = F(B)$ бўлсин, у ҳолда уч томони бўйича $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$ бўлиб $\Rightarrow \angle AOB = \angle A'O'B'$, демак, $(LON) = (L'O'N')$. \blacktriangle

Бу хоссадан ҳар қандай F харакатда ушбу ҳолларнинг бажарилиши келиб чиқади:

а) $l_1 \perp l_2 \Rightarrow F(l_1) \perp F(l_2)$;

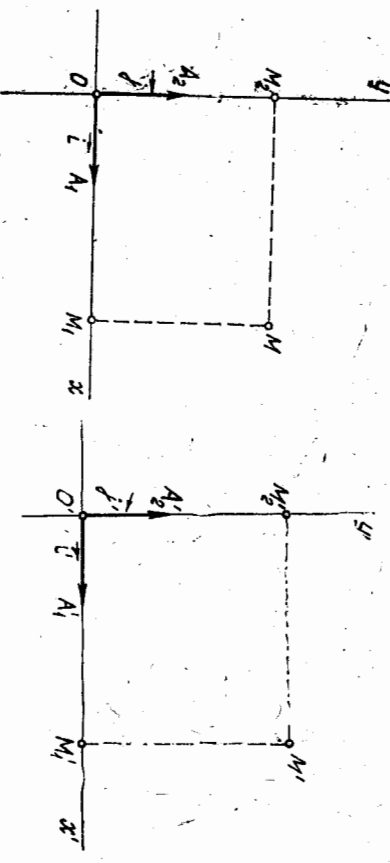
б) M_1 нукта M нуктанинг l тўғри чизикдаги ортогонал проекция бўлса, $F(M_1)$ нукта $F(M)$ нуктанинг $F(l)$ тўғри чизикдаги ортогонал проекцияси бўлади.

Таъриф. Агар икки фигурадан бирини иккинчисига ўтказадиган харакат мавжуд бўлса, бу фигуралар *конгруент* дейилади.

Харакат таърифи ва унинг хоссаларига кўра конгруент фигуралар текисликда тулган ўринлари билангина бир-биридан фарқ қиладилар, холос.

1-теорема. Текисликдаги ҳар қандай F харакат декарт реперни \mathfrak{B} ни яна декарт реперни \mathfrak{B}' га ўтказди ва $M' = F(M)$ нуктанинг \mathfrak{B}' репердаги координатлари M нуктанинг \mathfrak{B} репердаги мос координатлари билан бир хил бўлади.

Исбот. $\mathfrak{B} = (O, A_1, A_2)$ текисликдаги бирор декарт реperi (78-чизма), F эса текисликдаги харакат ва $O' = F(O), A'_1 = F(A_1), A'_2 = F(A_2)$ бўлсин. 1°. хоссага кўра, O', A'_1, A'_2 нукталар битта



78-чизма

79-чизма

тўғри чизикда ётмайди. 6°. хоссага кўра $(A'_2O'A'_1) = 90^\circ$. Демак, \mathfrak{B}' репернинг F харакатдаги образи $\mathfrak{B}'(O', A'_1, A'_2)$ декарт репердир (79-чизма).

Текисликнинг ихтиёрий M нуктасини оламиз. x, y бу нуктанинг \mathfrak{B} реперга нисбатан координатлари бўлсин, яъни

$$x = \frac{OM_1}{OA_1} = -\frac{M_1O}{OA_1}, \quad y = \frac{OM_2}{OA_2} = -\frac{M_2O}{OA_2}.$$

F ҳаракатда

$$M' = F(M), M'_1 = F(M_1), M'_2 = F(M_2)$$

бўлсин; 2° хоссага кўра $(M_1 A_1, O) = (M'_1 A'_1, O')$, ва $(M_2 A_2, O) = (M'_2 A'_2, O')$, лекин

$$-(M'_1 A'_1, O') = \frac{\vec{O'M'_1}}{O'A'_1} = x', \quad -(M'_2 A'_2, O') = \frac{\vec{O'M'_2}}{O'A'_2} = y'$$

булардан:

$$x = x', \quad y = y'. \quad \blacktriangle$$

Энди теккари теоремага ўтайлик.

2-теорема. Текисликни бирор f алмаштиришда $M' = f(M)$ нуктанинг \mathcal{D} декарт реперига нисбатан координатлари M нуктанинг \mathcal{D} декарт реперига нисбатан координатлари билан бир хил бўлса, f алмаштириш ҳаракатдан иборат бўлади ва $\mathcal{D}' = f(\mathcal{D})$.

Исбот. Текисликда \mathcal{D} , \mathcal{D}' декарт реперларини оламиз. Текисликдаги шундай f алмаштиришни қараймизки, M нукта \mathcal{D} реперга нисбатан қандай координатларга эга бўлса, унинг f алмаштиришдаги M' образи \mathcal{D}' реперга нисбатан худди шундай координатларга эга дейлик; бундан ташқари, M_1, M_2 — текисликнинг турли икки нуктаси, M'_1, M'_2 — бу нукталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин, f алмаштиришни танлашимизга кўра \mathcal{D} реперга нисбатан $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2) \Rightarrow \mathcal{D}'$ реперга нисбатан $M'_1(x'_1, y'_1)$ ва $M'_2(x'_2, y'_2)$. \mathcal{D}' декарт реперларида $\rho(M_1, M_2)$, $\rho(M'_1, M'_2)$ масофаларни ҳисоблаймиз:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$\rho(M'_1, M'_2) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2},$$

булардан $\rho(M_1, M_2) = \rho(M'_1, M'_2)$. Демак, f ҳаракат экан, яъни $f = F$. \mathcal{D} реперда $O(0, 0)$, $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$, \mathcal{D}' реперда эса $O'(0, 0)$, $A'_1(1, 0)$, $A'_2(0, 1)$, яъни

$$O' = f(O), \quad A'_1 = f(A_1), \quad A'_2 = f(A_2) \Rightarrow \mathcal{D}' = f(\mathcal{D}). \quad \blacktriangle$$

1-теоремадан бундай ҳулоса келиб чиқади: текисликдаги ҳаракат бир жуфт декарт реперининг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

33-34-§. Ҳаракатнинг аналитик ифодаси

Текисликда ихтиёрий иккита (O, \vec{i}, \vec{j}) , (O', \vec{i}', \vec{j}') декарт реперини қараймиз. Улар текисликдаги F ҳаракатни аниқлайди ва

$F(\vec{\beta}) = \vec{\beta}'$. Фараз қилайлик, $(\vec{i}, \vec{j}) = \alpha$ бўлсин. M текисликнинг ихтиёрий нуктаси, M' эса унинг F ҳаракатдаги образи бўлсин. M нуктанинг \mathcal{D} реперга нисбатан координатларини x, y билан белгилай-

миз. У ҳолда, 33-§ дати 2-теоремага кўра, $M' = F(M)$ нукта \mathcal{D}' реперда шу x, y координатларга эга бўлади. M' нуктанинг \mathcal{D} реперга нисбатан координатларини x', y' орқали белгилаймиз.

Маълумки (II боб, 19-§), $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ реперлар декарт реперлари бўлгани учун текисликнинг ихтиёрий M нуктасининг \mathcal{D} реперга нисбатан координатлари x, y , унинг \mathcal{D}' реперга нисбатан координатлари x', y' орқали

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - e y' \sin \alpha + c_1, \\ y = x' \sin \alpha + e y' \cos \alpha + c_2 \end{cases} \quad (1)$$

формулалар билан ифодаланар эди. Бу ерда $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса, $e = +1$, акс ҳолда $e = -1$. (1) формулаларни қаралётган ҳолда M' нуктанинг координатлари учун ёзамиз:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - e y \sin \alpha + c_1, \\ y' = x \sin \alpha + e y \cos \alpha + c_2. \end{cases} \quad (2)$$

(2) формулалардаги x, y бир вақтда M' нуктанинг F ҳаракатдаги асли M нинг \mathcal{D} реперга нисбатан координатлари эди. Шунга кўра (2) формулалар F ҳаракатда битта \mathcal{D} реперга нисбатан $M' = F(M)$ нуктанинг координатларини M нуктанинг координатлари орқали ифодасини беради.

Аксинча, текисликдаги бирор f алмаштиришда M ва $M' = F(M)$ нукталарнинг битта (O, \vec{i}, \vec{j}) реперга нисбатан координатлари (2) формулалар билан белгиланган бўлсин; f нинг ҳаракат эканини кўрсатамиз.

Бунинг учун текисликда ихтиёрий икки M, N нуктани оламиз. M, N' бу нукталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин; f нинг ҳаракат эканини кўрсатиш учун

$$\rho(M', N') = \rho(M, N)$$

бўлишини кўрсатиш етарлиқ. Бу реперга нисбатан

$$M(x'_M, y'_M), \quad N(x'_N, y'_N), \quad M(x_M, y_M), \quad N(x_N, y_N)$$

$$\text{бўлсин. У ҳолда } \rho(M', N') = \sqrt{(x'_N - x'_M)^2 + (y'_N - y'_M)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_N \cos \alpha - e y_N \sin \alpha + c_1 - x_M \cos \alpha + e y_M \sin \alpha - c_1)^2 + (x_N \sin \alpha + e y_N \cos \alpha + c_2 - x_M \sin \alpha - e y_M \cos \alpha - c_2)^2} = \sqrt{(x_N + x_M)^2 \cos^2 \alpha +$$

$$+ e^2 (y_N - y_M)^2 \sin^2 \alpha - 2e (x_N - x_M) (y_N - y_M) \sin \alpha \cos \alpha + (x'_N - x'_M)^2 \times$$

$$\times \sin^2 \alpha + e^2 (y_N - y_M)^2 \cos^2 \alpha + 2e (x'_N - x'_M) (y'_N - y'_M) \cos \alpha \sin \alpha =$$

$$= \sqrt{(x_N - x_M)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (y_N - y_M)^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} =$$

$$= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \rho(M, N) \Rightarrow f \text{ ҳаракатдир. Демак, (2)}$$

формулалар ҳаракатнинг аналитик ифодасидир.

(2) формулаларда c_1, c_2 сонлар O нуктанинг \mathcal{D} реперга нисбатан координатлари.

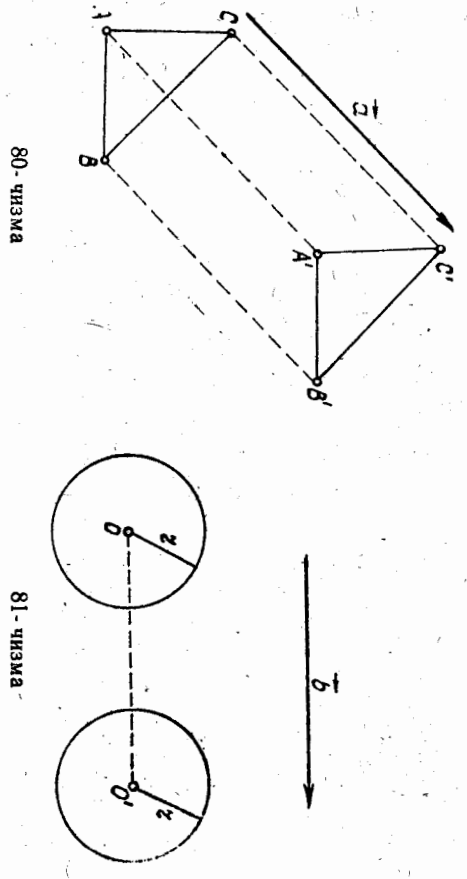
Тариф. Ҳаракатни аниқлайдиган \mathcal{B} , $\mathcal{B}' = F(\mathcal{B})$ декарт реперлари бир хил ориентацияли бўлса, ҳаракат биринчи тур, қарама-қарши ориентацияли бўлса, иккинчи тур ҳаракат дейилади.

35-§. Ҳаракатнинг асосий турлари

1. Параллел кўчириш. Текисликда $a \neq 0$ вектор берилган бўлсин.

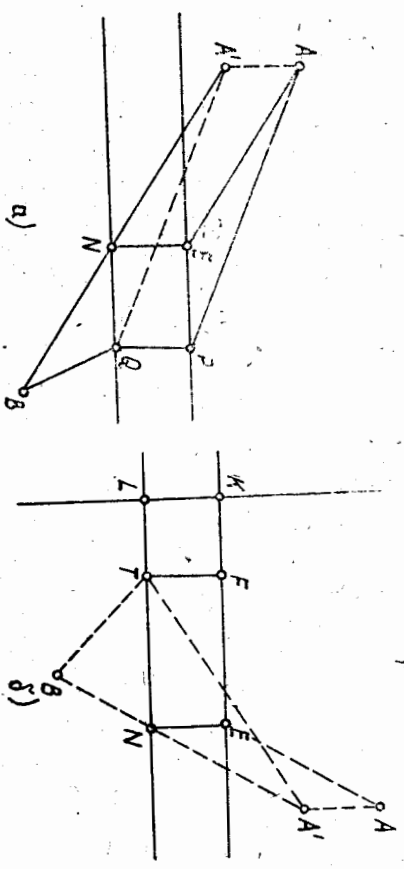
Тариф. Текисликнинг ҳар бир M нуктасига $\overrightarrow{MM'} = a$ шарт билан аниқланувчи M' нуктасини мос келтириш текисликда a вектор қадар параллел кўчириш дейилади. Уни T_a кўринишида белги-ланади, a ни кўчириш вектори дейилади. Текисликда a вектор қадар параллел кўчириш текисликнинг ҳар бир M нуктасига биргина M' нуктасини мос келтиради. Шунга кўра параллел кўчириш текисликдаги аймақтиришидир. Тарифга кўра текисликда a вектор қадар параллел кўчириш T_a да текисликнинг барча нукталари a вектор йўналишида $|a|$ масофага сиқийди.

$$\Delta A'B'C' = T_a(\Delta ABC).$$



Параллел кўчиришда айлананинг образини ҳосил қилиш учун унинг марказини кўчириш вектори қадар параллел кўчирилади (81-чизма).
Параллел кўчириш ҳаракатдир. Ҳақиқатан, M, N текисликнинг иккинчи нуктаси ва M', N' бу нукталарнинг T_a даги образлари бўлсин. $\overrightarrow{MM'} = a, \overrightarrow{NN'} = a$ бўлиб, бунда $\overrightarrow{MM'} =$

$\overrightarrow{NN'} \Rightarrow MM'N'M'$ тўртбurchак параллелограмм. У ҳолда $\rho(M, N) = \rho(M', N')$. Бундан параллел кўчиришнинг ҳаракатдан иборатлиги ва унинг I тур ҳаракат эканлиги тўғрисида ҳулоса чиқарамиз.
Масала. Аҳоли яшайдиган A ва B пунктлар қирғоқлари параллел бўлган каналнинг икки томонда жойлашган (82-а чизма), A ва B пунктларни энг қисқа йўл орқали туташтириш учун қайси ерга кўприк қуриш керак?



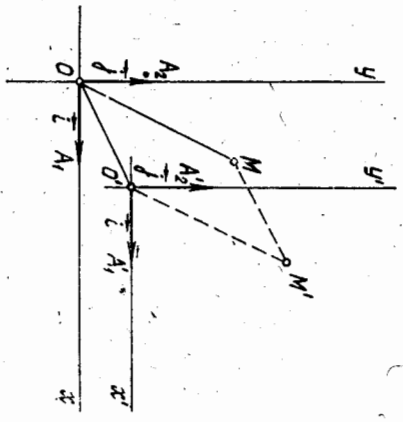
Ечиш. $APQV$ чизик A ва B пунктларни туташтирувчи бирор йўл бўлсин. AP кесмани PQ вектор қадар параллел кўчирсак, у $A'Q$ кесмага ўтиб, $A'Q = AP$ ва $AA' = PQ$ дан

$$AP + PQ + QV = AA' + A'Q + QV$$

бўлади. Бундан кўринадики, $APQV$ йўл энг қисқа бўлиши учун $A'QV$ синиқ чизикнинг узунлиги энг қисқа бўлиши керак. Бу (икки нукта орасидаги энг қисқа масофа уларни туташтирувчи кесма узунлигидан иборат бўлишини эътиборга оلسак), $A'QV$ синиқ чизик A' ва V ни туташтирувчи кесмага айланганда, яъни $Q = N$ бўлса бажарилади. Бу ерда N нукта A'B кесма билан каналнинг V пунктга яқин қирғоғининг кесилган нуктаси. Юқорида қилинган таҳлил бўйича изланган нуктани толайлик. Канал қирғоқларига перпендикуляр ўтказиб, канал кенглиги KL ни толамиз (82-б чизма). K ўтказилган перпендикулярнинг A пунктга яқин қирғоғи билан, L эса B га яқин қирғоғи билан кесилган нуктаси. A нуктани KL қадар параллел кўчирсак, A' ҳосил бўлади. A'B кесмани ўтказиб, унинг каналнинг V пунктга яқин қирғоғи билан кесилган N нуктасини толамиз. N дан каналнинг иккинчи қирғоғига туширилган перпендикулярнинг асоси E кўприк қуриш учун изланган нукта бўлади.
Ҳақиқатан, каналнинг A пунктга яқин қирғоғида $\overrightarrow{VF} \neq E$ нуктани оلسак, $AFVB$ (T нукта F дан иккинчи қирғоққа туширилган пер-

пендикулярнинг асоси, йўлнинг $AENB$ дан узун эканини кўриш мумкин:

$$AE + EN + NB = EN + A'N + NB = EN + A'B < EN + A'T + TB = AF + FT + TB$$



83-чизма

Харакатнинг аналитик ифодаси (34-§ даги (2) формула), (O, i, j, k) декарт реперлари учун (83-чизма) $\alpha = 0, \varepsilon = +1$ бўлган

$$\begin{cases} x' = x + c_1, \\ y' = y + c_2 \end{cases}$$

кўринишни олади. Бу формуларда $(c_1, c_2), (x', y'), (x, y)$ дар O', M', M нукталарининг (O, i, j) реперга нисбатан мос координатларидир. $T \rightarrow$ куйидаги хоссаларга эга.

1°. $a = 0$ вектор қадар параллел кўчириш $T \rightarrow$ текисликда

ги ҳар бир нуктани ўзини-ўзига алмаштиради, демак, у айнан алмаштиради.

2°. $T \rightarrow$ да тўғри чиқиқ ўзига параллел тўғри чиқиққа ўтади.

Хусусий ҳолда $a \rightarrow$ векторга параллел бўлган тўғри чиқиқ ўз-ўзига ўтади.

Исбот. $l \parallel a \rightarrow$ бўлсин. Ихтиёрий $M \in l$ нуктани оламиз. Бу нуктанинг $T \rightarrow$ даги образи $MM' = a \rightarrow$ шартни қаноатлантиргани

учун $M' \in l$ бўлади. Бундан $a \rightarrow$ вектор қадар параллел кўчиришда

$\forall l \parallel a \rightarrow$ тўғри чиқиқнинг образи унинг ўзи бўлади.

$l \nparallel a \rightarrow$ бўлсин. $M, N \in l$ нукталарни оламиз. M', N' бу нукталарнинг $T \rightarrow$ даги образлари бўлсин. У ҳолда $MM' = NN' = a \rightarrow$ бўлиб $\Rightarrow MM'N'N$ тўртбurchак параллелограммдир. Демак,

$$\overrightarrow{M'N'} = l' \parallel l. \blacktriangle$$

Текисликда параллел кўчириш кўчириш векторининг ёки бир жуфт мос нукталарнинг берилиши билан аниқланади. Агар параллел кўчириш бир жуфт мос A, A' нукталар билан берилган бўлса, у ҳолда AA' векторни параллел кўчириш вектори сифатида қабул қиламиз. Текисликда барча параллел кўчиришлар тўғлами группа ташкил этади (буни 32-§ даги 1-миқодда кўрдик).

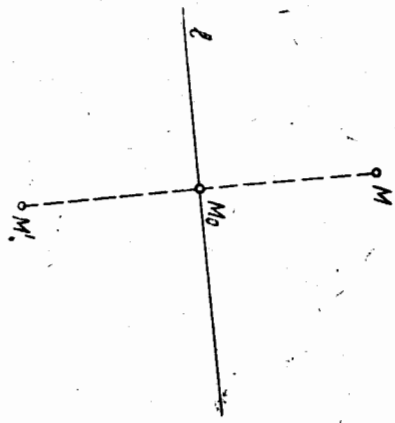
2. Тўғри чиқиққа нисбатан симметрик алмаштириш. Текисликда бирор тўғри чиқиқ берилган бўлсин.

1-таъриф. Текисликдаги M, M' нукталар учун MM' кесма l га перпендикуляр бўлиб, MM' кесманинг ўртаси бу нукта-чиқиқда ётса, у ҳолда MM' нисбатан l дар l нўғри чиқиққа нисбатан симметрик деб аталади.

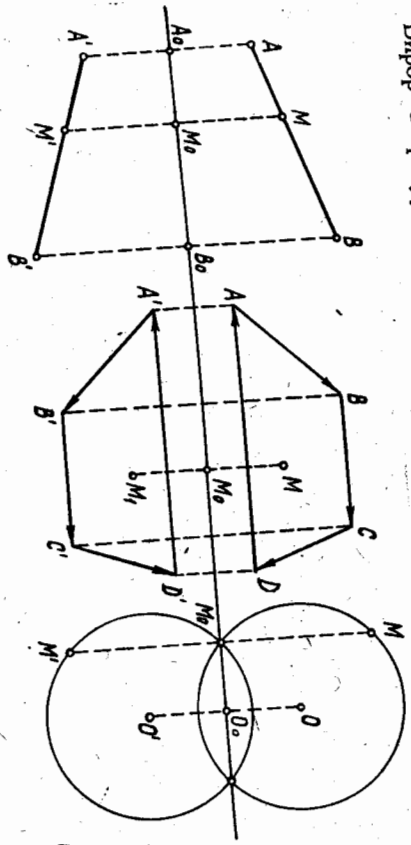
Бу таърифга қура текисликда берилган ихтиёрин M нуктага шу текисликдаги бирор l тўғри чиқиққа нисбатан симметрик бўлган M' нукта куйидагича топилди (84-чизма): 1) M нуктадан l тўғри чиқиққа перпендикуляр ўтказамиз, унинг l тўғри чиқиқда ўзун-дан кесилган нуктаси M_0 бўлсин; 2) бу перпендикулярда $(M' \neq M_0)$ кесма узунлигига тенг M_0M' кесмани ажратамиз ($M' \neq M_0$). M' нукта l тўғри чиқиққа нисбатан M нуктага симметрик нукта бўлади.

2-таъриф. Текисликнинг ҳар бир M нуктасига l тўғри чиқиққа нисбатан симметрик бўлган M' нуктасини мос келтирувчи алмаштириш текисликда l тўғри чиқиққа нисбатан симметрик S_l кўчириш текисликда l тўғри чиқиққа деб аталади. l ўқли симметрия S_l Хар рилш ёки l ўқли симметрия деб аталади. l тўғри чиқиқ симметрия ўқи дейилади. Хар ринишда белгиланади. l тўғри чиқиқ нисбатан ўз-ўзига симметрик бир $M \in l$ нукта l тўғри чиқиққа нисбатан ўз-ўзига симметрик ҳисобланади.

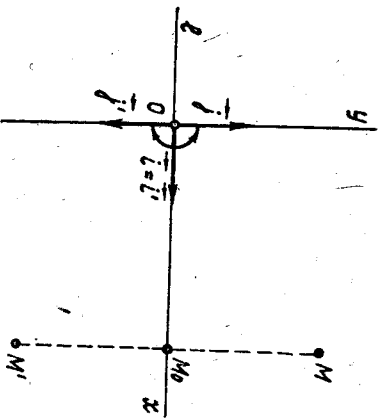
l ўқли S_l симметрияда M' нуктанинг M нукта учун образ эканини $S_l(M) = M'$ кўринишида белгилаймиз. Бирор Φ фигурани ташкил этувчи барча нукталарга l тўғри чиқиқ



84-чизма



85-чизма



86-чизма

Ўзққа нисбатан симметрик нуқта-лардан тўзилган Φ фигура l тўғри чизққа нисбатан Φ фигурага *симметрик* дейилади ва $S_1(\Phi) = \Phi'$ кўринишда ёзилди. Масалан, 85-чизмада S_1 да AB кесмага симметрик фигура $A'B'$ кесма: $S_1(AB) = A'B'$, $ABCD$ трапецияга симметрик фигура $A'B'C'D'$ трапеция, (O, r) айланага симметрик фигура (O', r) айлана экани тасвирланган.

l ўқли симметрия ҳаракатдир. Бунни кўрсатиш учун иккига шундай (O, i, j) , (O, i', j') декарт

реперни танлаймики, $O \in l, i \parallel l, i' \perp l$ ва $j' = -j$ бўлсин (86-чизма). Тек-сликда l тўғри чизққа нисбатан симметрик алмаштиришда $S_1(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$ бўлади. M — тек-сликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' унинг S_1 даги образи, яъни $S_1(M) = M'$ бўлсин. M нуқтаининг \mathcal{A} реперга нисбатан координатларини x, y билан белгилаймиз. l ўқли симметрия таърифида ва реперларнинг танланишига кўра $M' = S_1(M)$ нуқта \mathcal{A}' реперга нисбатан шу x, y координатларга эга бўлади. 33-§ даги 2-теоремага кўра $l = Ox$ ўқли симметрия ҳаракатдан иборат экан, шу билан бирга y иккинчи тур ҳаракатдир, чунки уни аниқланаётган $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли. $M' = S_1(M)$ нуқтаининг \mathcal{A}' реперга нисбатан координатларини x', y' билан белгиласак, MM' кесма Ox ўққа перпендикуляр ва унинг ўртаси M_0 нуқта Ox ўққа тенгшиди бўлгани учун $M_0M' = -M_0M = -y \cdot j$. Бундан ушбу формулага эга бўламиз:

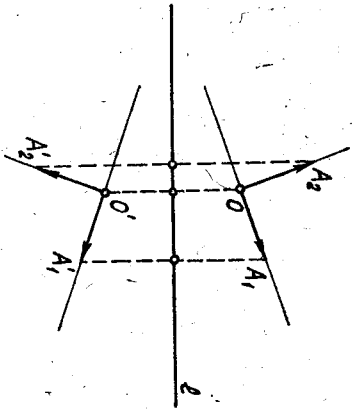
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Бу тек-сликда Ox ўқли симметрия формуласидир. Худди шу тартибда тек-сликда Oy ўқли симметрия

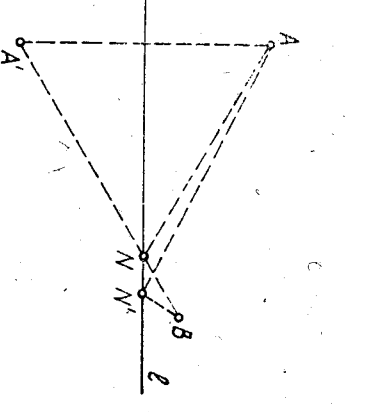
$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

формулалар билан ифодаланганини кўрсатилади.

Юқорида S_1 нинг ҳаракат эканини кўрсатишда $O \in l$ шартини кўйган эдик. Аслда $O \notin l$ бўлганда ҳам S_1 нинг ҳаракат эканини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, тек-сликда (O, A_1, A_2) декарт реперини оламиз, $O \notin l$ бўлсин (87-чизма). Тек-сликда l тўғри чизққа нисбатан симметрик алмаштиришни қарайлик. $S_1(O) = O', S_1(A_1) = A'_1, S_1(A_2) = A'_2$ бўлсин.



87-чизма



88-чизма

Бу ҳолда 1-таърифта кўра

$$\begin{aligned} r(O, A_1) &= r(O', A'_1) \quad r(O, A_2) = r(O', A'_2) \quad \text{ва} \\ r(A_1, A_2) &= r(A'_1, A'_2) \end{aligned} \quad (3)$$

муносабатларга эга бўламиз.

$$(3) \Rightarrow \triangle OA_1A_2 \equiv \triangle O'A'_1A'_2 \Rightarrow \angle A_1OA_2 = 90^\circ. \quad (4)$$

(3), (4) муносабатлардан кўринадикки, S_1 алмаштириш (O, A_1, A_2) , (O', A'_1, A'_2) декарт реперлари билан аниқланувчи ҳаракат экан. Шу билан бирга y иккинчи тур ҳаракат, чунки бу реперлар қарама-қарши ориентациялидир.

Мисол. l тўғри чизқудан бир томонда A ва B нуқталар берилган (88-чизма). l тўғри чизққа шундай N нуқта топилгки, $r(A, N) + r(N, B)$ миқдор энг кичик бўлсин.

Еч.иш. A нуқтани l тўғри чизққа нисбатан симметрик алмаштирамиз. $S_1(A) = A'$ бўлсин. $A'B \cap l = N$ нуқтани топамиз.

$r(A, N) + r(N, B)$ йининди энг кичик бўлади. Ҳақиқатан, ихтиёрий $l \ni N' \neq N$ нуқтани олайлик.

$$\begin{aligned} r(A, N) + r(N, B) &= r(A', N) + r(N, B) = r(A', B) < r(A', N') + \\ &+ r(N', B) \neq r(A, N') + r(N', B). \end{aligned}$$

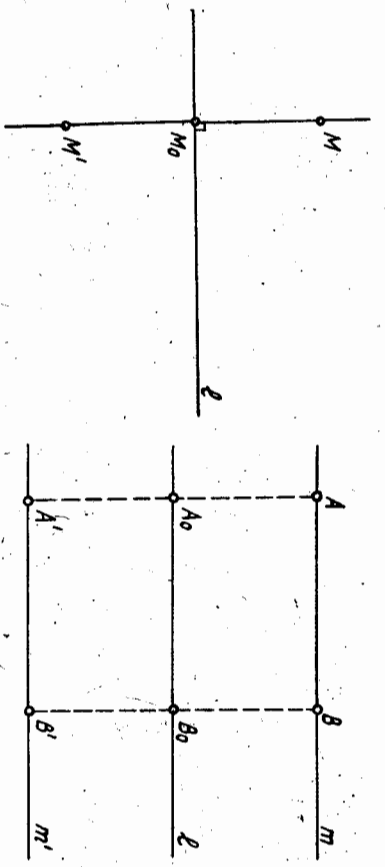
l ўқли симметрия қуйидаги хоссадаларга эга:

1°. l тўғри чизқ ўз-ўзига симметрик, чунки 2-таърифта кўра унинг ҳар бир нуқтаси ўз-ўзига симметрик.

2°. l тўғри чизққа перпендикуляр ҳар қандай тўғри чизқ ўз-ўзига симметрикдир.

Ҳақиқатан, $a \perp l$ бўлсин (89-чизма). Ихтиёрий $M \in a$ нуқтани оламиз. S_1 да унга мос келган M' нуқта учун MM' кесма l га

* Учбурчак икки томонининг йининдиси унинг учинчи томонидан катта.



89-чизма

90-чизма

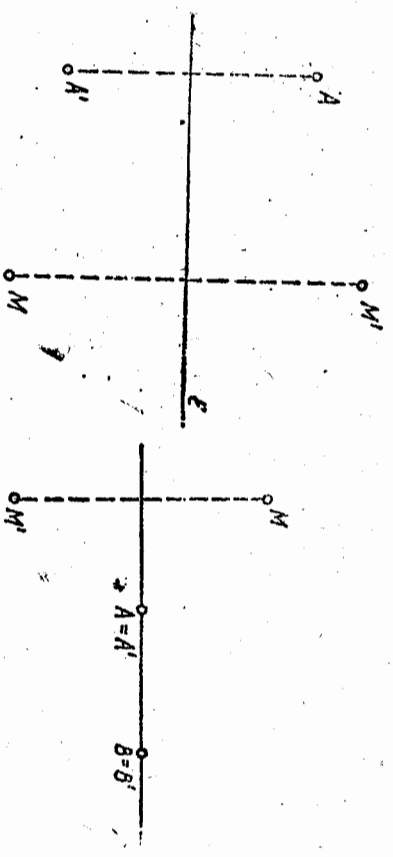
перпендикуляр ва M_0 нукта MM' кесманинг ўртаси. Бундан $M' \in a$.

a тўғри чизик ихтиёрий M нуктасининг M' образи a тўғри чизикка тегишли бўлгани учун a тўғри чизик ўз-ўзига ўтади.

3°. Симметрия ўқига параллел тўғри чизикнинг образи шу ўқка параллел тўғри чизик бўлади, яъни $m \parallel l \Rightarrow m' = S_l(m) \parallel l$. Ҳақиқатан, m тўғри чизикда $A \neq B$ нукталарни оламиз. A', B' бу нукталарнинг S_l даги образлари бўлсин (90-чизма).

У ҳолда AA' ҳамда BB' кесмалар l тўғри чизикка перпендикуляр ва $AA_0 = A_0A', BV_0 = B_0V'$. Шу билан бирга $m \parallel l$. Буглардан

Тўғри чизикка нисбатан симметрия симметрия ўқи ёки бир жуфт мос нуктани бериш билан бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан, текисликдаги бирор l тўғри чизик симметрия ўқи учун қабул қилинса, 1-таррифга кўра текисликнинг ҳар бир M нуктасига l ўққа нисбатан симметрик бўлган ягона M' нукта топилади. Агар тўғри чизик-



91-чизма

92-чизма

қа нисбатан симметрик алмаштириш бир жуфт A, A' мос нукталар билан берилган бўлса, AA' кесманинг ўртаси A_0 дан AA' кесмага перпендикуляр қилиб ўтказилган l тўғри чизик симметрия ўқи бўлади (91-чизма).

Агар ўқли симметрия ўзи-ўзига аксланадиган икки $A \rightarrow A, B \rightarrow B$ нукталар билан берилган бўлса, у ҳолда AB тўғри чизик симметрия ўқи бўлади (92-чизма).

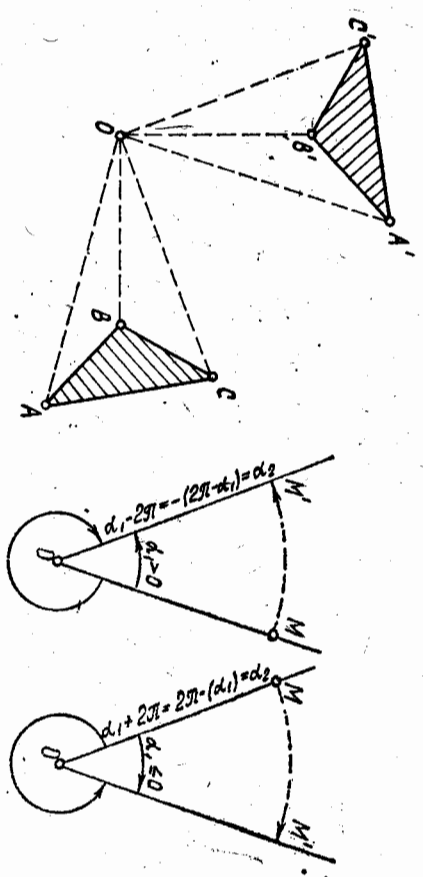
3. Буриш. Ориентацияли текисликда O нукта ва (ориентацияли) ABC бурчакни белгилаб қўйايлик: $(\widehat{ABC}) = \alpha$.

Тарриф. Текисликдаги ҳар бир M нуктага унинг $1) \rho(O, M) = \rho(O, M')$,

2) $(\widehat{OMM'}) = \alpha$ ва MOM' бурчак ABC бурчак билан бир хил ориентацияли бўлиш шартларини қаноатлантирадиган M' нуктасини мос келтирувчи алмаштириш текисликда O нукта атрофида берилган α бурчакка буриш дейилади. O нукта буриш маркази, α буриш бурчаги дейилади.

Текисликда O нукта атрофида α бурчакка буриш R_α^O билан белгиланади. 93-чизмадаги $A'B'C'$ учбурчак берилган $\triangle ABC$ ни текисликда O нукта атрофида $\alpha = 90^\circ$ бурчакка буришдаги, яъни R_{90}^O даги образидир.

R_{90}^O ва R_α^O текисликда O нукта атрофида мос равишда α_1, α_2 бурчакларга буришлар бўлиб, бунда

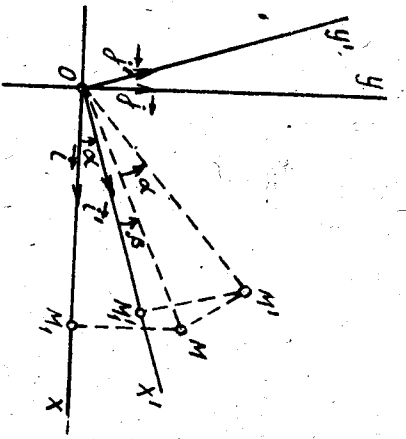


93-чизма

94-чизма

$$\alpha_2 = \begin{cases} \alpha_1 - 2\pi, & \text{агар } \alpha_1 > 0, \\ \alpha_1 + 2\pi, & \text{агар } \alpha_1 \leq 0 \end{cases}$$

бўлсин (94-чизма). У ҳолда R_α^O буриш ҳар қандай M нуктани M' нуктага ўтказса, $R_{\alpha_2}^O$ буриш ҳам M нуктани шу M' нуктага ўтказадил, бундан $R_{\alpha_2}^O = R_\alpha^O$.



95-чизма

$(O, \vec{i}, \vec{j}), (O, \vec{i}', \vec{j}')$ декарт реперини олампиз. $\vec{r}(i, i') = \alpha$ бўлсин (95-чизма).

Текисликда O нуқта атрофида α бурчакка R_0^{α} бурши реперни \mathcal{R}' реперга ўтказди (чунки реперлар бир хил ориентрланган ва $(i, i') = \alpha$).

M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' бу нуқтани R_0^{α} буришдаги образи бўлсин. Буриш таърифига кўра

$$(M_1 \widehat{OM}) = (M_1 \widehat{O} M') = \alpha + \beta,$$

у ҳолда

$$\Delta M_1 O M \equiv \Delta M_1 O M' \Rightarrow O M_1 = O M_1' \text{ ва } M_1 M = M_1 M'.$$

Демак, M нуқтанинг \mathcal{R}' реперга нисбатан координатлари билан унинг образи M' нинг \mathcal{R}' реперга нисбатан координатлари бир хил. 37-§ даги 2-теоремага кўра R_0^{α} буриш биринчи тур ҳаракатдир. Буришда буриш марказига инвариант нуқта бўлади.

Буришнинг аналитик ифодаси билан танишамиз. Текисликда R_0^{α} буриш натижасида ундати (O, \vec{i}, \vec{j}) репер (O, \vec{i}', \vec{j}') реперга ўтиб (бу ерда $(\vec{i}, \vec{i}') = \alpha$), \mathcal{R}' реперга нисбатан x, y координатларга эга бўлган $\forall M$ нуқтанинг M' образи \mathcal{R}' реперга нисбатан шу x, y координатларга эгаллиги кўришдан эди. M' нуқтанинг \mathcal{R}' реперга нисбатан координатлари x', y' бўлсин. Буриш маркази O инвариант, яъни $O = O'$ ва $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлгани учун 34-§ даги ҳаракат формуллари

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + c_1, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + c_2 \end{cases} \quad (5)$$

ушбу

Демак, O нуқта атрофида R_0^{α} буришнинг α_1 бурчакни ҳар вақт шундай танлаш мумкинки, $|\alpha_1| \leq \pi$ бўлади. Шундай қилиб, буриш бурчати $0 < \alpha \leq \pi$ оралиқда олинади. $\alpha = 0^\circ$ бурчакка буриш R_0^0 текисликнинг барча нуқталарини ўз ўрнида қолдиради. Демак, текисликда R_0^0 буриш айнан алмаштириш экан.

Текисликда буришдан иборат алмаштириш ҳаракатдир. Дарҳақиқат, координатлар боши умумий O нуқта бўлган бир хил ориентацияли иккита

декарт реперини олампиз. $\vec{r}(i, i') = \alpha$ бўлсин (95-чизма). Текисликда O нуқта атрофида α бурчакка R_0^{α} бурши реперни \mathcal{R}' реперга ўтказди (чунки реперлар бир хил ориентрланган ва $(i, i') = \alpha$).

$$\alpha = 90^\circ, 180^\circ, -90^\circ, -180^\circ.$$

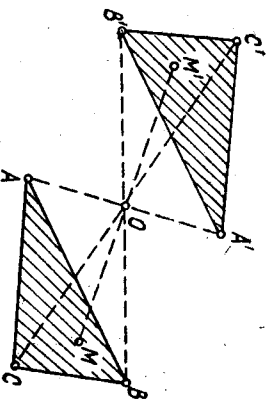
Тенг томонли учбурчак бағандликларининг кесилган O нуқтасини буриш маркази, соат иғли йўналиши бўйича ва унга қарама-қарши йўналишда 120° бурчакни буриш бурчати деб қабул қилсак, тенг томонли учбурчак ўз-ўзига ўтади. Демак, тенг томонли учбурчакни ўз-ўзига ўтказадиган 2 та буриш мавжуд: бири O нуқта атрофида $\alpha = 120^\circ$ бурчакка, иккинчиси шу нуқта атрофида $\alpha = -120^\circ$ бурчакка буришидир.

Таъриф. Текисликда O нуқтаси атрофида $\alpha = 180^\circ$ га буриш O марказли симметрия деб аталади. O нуқта симметрия маркази дейилади. O марказли симметрия Z_0 ёки R_0^{180} билан белгиланади.

$\forall M$ нуқтаса O марказга нисбатан симметрия M' нуқтани ясаш учун OM тўғри чизиқни ўтказиб, бу тўғри чизиққа O нуқтадан иккинчи томонда $OM' \equiv OM$ кесма қўйилади.

Ихтиёрий Φ фигуранинг O марказли марказий симметриядаги образини топиш учун унинг ҳар бир нуқтаси юқоридаги қоида бўйича алмаштирилади. 96-чизмада текисликдаги O марказли марказий симметрия R_0^{180} да берилган ABC учбурчакнинг $A'B'C'$ учбурчакка ўтиши тасвирланган (96-чизма).

Марказий симметрия 180° га



96-чизма

буриш бўлгани учун у ҳам биринчи тур ҳаракат ва (5) буриш формулларида кўра декарт реперда

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y \end{cases} \quad (6)$$

формуллалар билан аниқланади.

(6) да x, y лар M нуқтанинг x', y' эса бу нуқтанинг R_{180}^O да қазий симметрия битта реперга нисбатан координаталарида. Мар-у, симметрия тарифи ва симметрия нуқталарни ясаш қонидисдан, ши билан ягона равишда аниқланади, деган хулоса чиқарамиз. Агар марказий симметрия бир жуфт мос A, A' нуқталар билан берилган бўлса, AA' кесمانнинг ўртасини симметрия маркази сифати-да қабул қиламиз.

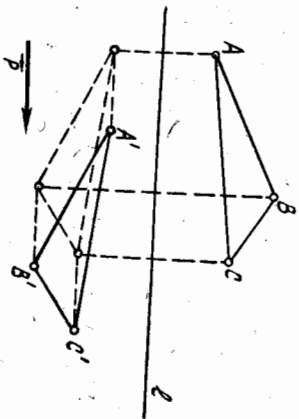
4. Сирпанувчи симметрия. S_1 текисликдаги ўқли сим- метрия, $T_{\vec{p}}$ эса $p \neq 0, p \parallel l$ вектор қадар параллел кўчириш бўл- син.

Тариф. $f = T_{\vec{p}} S_1$ алмаштириш текисликнинг сирпанувчи сим- метрияси дейилади.

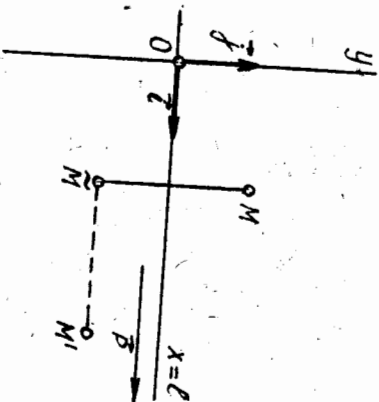
Текислик νM нуқтасининг $f = T_{\vec{p}} S_1$ сирпанувчи симметрияда- ги образи қуйидагича топилади: аввал M нуқтанинг S_1 даги образи M_1 ни топамиз, сўнгра M_1 нуқтанинг $T_{\vec{p}}$ даги образи M' ни топа- миз. M' изланган нуқта, яъни $f(M) = M'$ бўлади.

97-чизмадаги AVC' учбурчак ABC учбурчакнинг $f = T_{\vec{p}} S_1$ сирпанувчи симметриядаги образидир.

Текисликда l тўғри чизик ва $p \neq 0$ векторни белгилаймиз. Бунда $p \parallel l$ бўлсин. Декарт реперини $O \in l$ ва $i \parallel l$ шартларда оламиз (98-чизма). Текисликнинг ихтиёрий M нуқтаси x, y координаталарга



97-чизма



98-чизма

эга бўлсин. \tilde{M} нуқта M нуқтанинг S_1 даги образи, M' эса \tilde{M} нуқ- танинг $T_{\vec{p}}$ даги образи бўлсин, яъни $S_1(M) = \tilde{M}, T_{\vec{p}}(\tilde{M}) = M'$. M, M' нуқталар \vec{p} реперда ушбу координаталарга эга бўлсин: $\tilde{M}(x, y), M'(x', y'), p \parallel l = Ox$ бўлгани учун $p = x_0 i \Rightarrow (O, i, j)$ да $p(x_0, 0)$. Тўғри чизикқа нисбатан симметрия алмаштириш ва параллел кўчириш формулларида кўра $S_1, T_{\vec{p}}$ алмаштиришлар ушбу формуллалар билан ифодаланади:

$$S_1: \begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = -y \end{cases} \quad (a), \quad T_{\vec{p}}: \begin{cases} x' = \tilde{x} + x_0 \\ y' = \tilde{y} \end{cases} \quad (6)$$

булардан

$$f: \begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = -y \end{cases} \quad (7)$$

(7) формуллалар сирпанувчи симметриянинг аналитик ифодаси бўлиб, улар битта реперда $M' = f(M)$ нуқтанинг координаталарини M нуқ- танинг координаталари орқали ифодалайди. Сирпанувчи симметрия тарифи чизикқа нисбатан симметрия алмаштириш билан параллел кў- чиришнинг қўлайтмасидан иборат бўлгани сабабли бу икки алмашти- рилиш учун умумий бўлган хоссалар сирпанувчи симметриянинг ҳам хоссалари бўлади.

Бу хоссалардан айримларини келтирамиз.

1. Сирпанувчи симметрияда тўғри чизикнинг образи унинг ўзи- дир:

$$f(l) = l.$$

2. l га параллел бўлган m тўғри чизикнинг образи ҳам l га па- раллел, яъни $m \parallel l \Rightarrow f(m) \parallel l$.

3. l га перпендикуляр бўлган m тўғри чизикнинг образи ҳам l га перпендикуляр, яъни $m \perp l \Rightarrow f(m) \perp l$.

S_1 ва $T_{\vec{p}}$ ҳаракат бўлгани учун уларнинг қўлайтмаси f ҳам ҳа- ракатдир. Шу билан бирга сирпанувчи симметриянинг (7) аналитик ифодасидан кўринадики ($e = -1$), у иккинчи тур ҳаракатдир.

32.36-§. Ҳаракатлар таснифи (классификацияси)

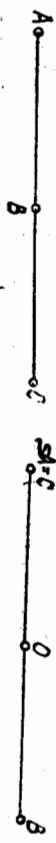
Бу параграфда ҳар қандай ҳаракат юқорида кўрилган беш тур- нинг биридан иборат эканини кўрсатамиз.

1-теорема. Ҳар қандай биринчи тур ҳаракат ϵ параллел кўчириш ёки буриш, ёхуд марказий симметриядир.

Исбот. F текисликдаги бирор биринчи тур ҳаракат бўлсин. A шу текисликдаги бирор нуқта, F ҳаракат A нуқтани B нуқтага, B нуқтани эса C нуқтага ўтказсин. U ҳолда AB кесма BC кесмага ўтди ва $p(A, B) = p(B, C)$. Бунда қуйидаги уч ҳол бўлиши мум- кин:

1) $\overline{AB}, \overline{BC}$ кесмалар бир хил йўналишда (99-чизма). Текисликда

\vec{AB} вектор қадар параллелді күчиріш $T_{\vec{AB}}$ ни бажарамиз: $\vec{AB} = \vec{BC}$ бұлғани учун $T_{\vec{AB}}$ хам A нүктәни B га, B нүктәни эса C нүктәга ұтказәди. Шу билән бирга $T_{\vec{AB}}$ биринчи тур ҳаракатдир. Бундан $F = T_{\vec{AB}}$. Шундай қилиб, \vec{AB}, \vec{BC} кесмалар бир хил йўналғишли бұлғанида F ҳаракат параллелді күчиріш экан.

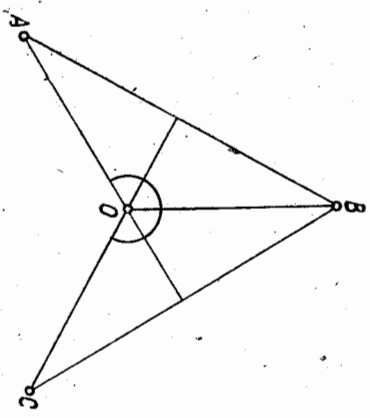


99- чизма

100- чизма

2) \vec{AB}, \vec{BC} кесмалар қарама-қарши йўналғишли (100-чизма). Бу ҳолда $\rho(A, B) = \rho(B, C) \Rightarrow C = A$. O нүктә AB кесманинг ўртәси бұлғин.

Текисликда O нүктәга нисбатән симметрияни бажарсақ, A нүктә B нүктәга, B нүктә эса $C = A$ нүктәга ұтәди. O марказли симметрия биринчи тур ҳаракат. Бундан кўринадики, F ҳаракат ва у O марказли симметрия экан.



101- чизма

3) \vec{AB}, \vec{BC} кесмалар битта тўғри чизикда ётмайди (101-чизма). \vec{AB}, \vec{BC} кесмаларнинг ўрта перпендикулярларини ўтказамиз. Уларнинг кесилган нүктәси O бұлғин. У ҳолда $AO = BO = CO$. Бу муносабат ва $AB = BC$ тенгликтән $\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COB \Rightarrow \Rightarrow (\widehat{AOB}) = (\widehat{BOC})$. Текисликда O нүктә апрофида $\alpha = (\widehat{AOB})$ бурчакка бурамиз. Бу R_0^α да $R_0^\alpha(A) = B, R_0^\alpha(B) = C$. Шу билән бирга R_0^α биринчи тур ҳаракат хам. Бундан $\Rightarrow F = R_0^\alpha$. Демак, бу

ҳолда F буришдир. \blacktriangle 2-теорема. Ҳар қандай иккинчи тур ҳаракат ёки тўғри чизикка нисбатән симметрия алмаштириш, ёки сирпанувчи симметрия бұлғиди.

Исбот. F текисликда бирор иккинчи тур ҳаракат бўлиб, у текисликнинг ҳар қандай A нүктәсини B нүктәга, B нүктәсини эса C нүктәга ұтказәди. Бунда кўнидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

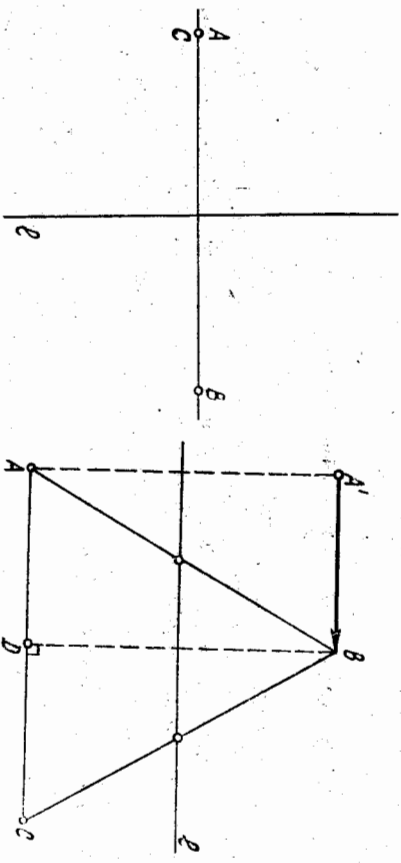
1) \vec{AB}, \vec{BC} кесмалар бир хил йўналғишли (102-чизма). Ушбу алмаштиришни бажарайлик: аввало текисликда $AB = l$ тўғри чизикка нисбатән симметрия алмаштиришни бажарамиз, бунда $S_1(A) = A,$

$S_1(B) = B, S_1(C) = C$. Сўнгра A B C

102- чизма

\vec{AB} вектор қадар параллелді күчирәмиз. Бу алмаштириш A нүктәни B га, B нүктәни C га ұтказәди. Бу икки алмаштиришнинг кўпайтмәси $T_{\vec{AB}} S_1$ сирпанувчи симметрия бўлади, у иккинчи тур ҳаракатдир. Демак, бу ҳолда F сирпанувчи симметриядан иборат.

2) \vec{AB}, \vec{BC} кесмалар қарама-қарши йўналғишли (103-чизма) $\rho(A, B) = \rho(B, C)$ бұлғани учун C нүктә A нүктә устига тушәди. AB кесманинг ўрта перпендикулярини l ни ўтказамиз. Текисликда l тўғри чизикка нисбатән симметрия алмаштиришни бажарсақ, A нүктә B га, B нүктә $C (= A)$ нүктәга ұтәди. Шу билән бирга S_1 — иккинчи тур ҳаракат. Демак, бу ҳолда $F = S_1$ алмаштириш l ўқли симметриядир.



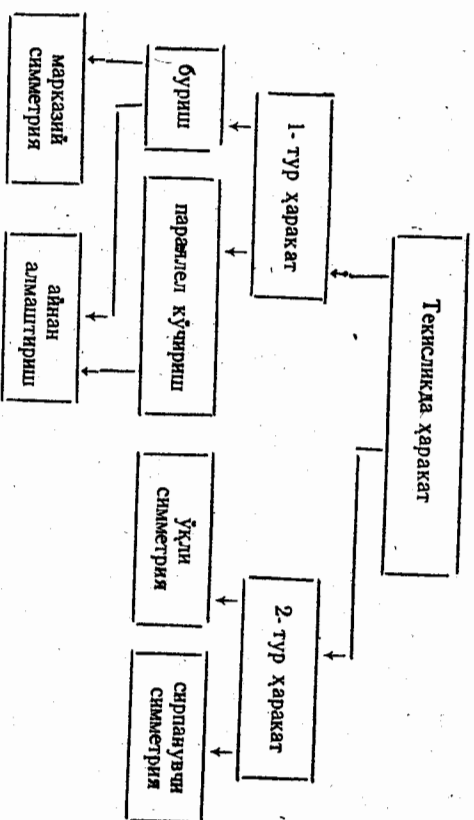
103- чизма

104- чизма

3) \vec{AB}, \vec{BC} кесмалар бир тўғри чизикда ётмайди (104-чизма). Бу кесмаларнинг ўртәлари орқали l тўғри чизикни ўтказамиз. D нүктә AC кесманинг ўртәси бўлғин. $AB = BC \Rightarrow VD$ кесма AC кесмага перпендикуляр.

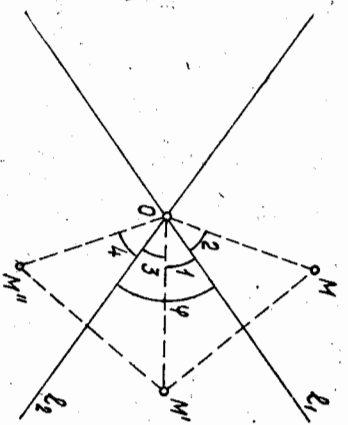
Текисликда l тўғри чизикка нисбатән симметрия алмаштиришни бажарсақ, у A нүктәни A' нүктәга ұтказәди. B нүктәни эса D нүктәга ұтказәди, чунки l тўғри чизик $\triangle ABD$ нинг AB томони ўртәсидән ұтәди ва AD томонига параллел. $\vec{A'B} (= \vec{AD})$ вектор қадар параллел күчиріш A' нүктәни B нүктәга, D нүктәни C нүктәга ұтказәди. Бу икки алмаштиришни кўпайтирсақ, сирпанувчи симметрия хосил бўлиб, у A нүктәни B га, B нүктәни эса C нүктәга ұтказәди. Демак, бу ҳолда F сирпанувчи симметриядир.

Шундай қилиб, текисликда ҳаракатларнинг ушбу таснифи хосил қилинади.



37-§. Ҳаракатни ўқли симметриялар кўпайтмасига ёйиш

1-теорема. Агар иккита ўқли симметриянинг l_1 ва l_2 ўқлари O нуқтада кесшиб φ бурчак ҳосил қилса, уларнинг кўпайтмаси O нуқта атрофида 2φ бурчакка буршиш бўлади ва, аксинча, текисликни O нуқта атрофида φ бурчакка буршиш ўқлари O нуқтада кесшиб, ўзаро $\frac{\varphi}{2}$ бурчак ҳосил қилувчи иккита ўқли симметрия кўпайтмасига ажралади.



105-чизма

$= \rho(O, M')$. Шунингдек, $\widehat{1} = 2$ ва $\widehat{3} = 4$, лекин $\widehat{1} + \widehat{3} = \varphi \Rightarrow \widehat{2} + \widehat{4} = \varphi$. Шундай қилиб, M нуқтани M'' нуқтага ўтказувчи S_{l_2}, S_{l_1} алмаштириш учун кўпайтмасига икки шарт бажарилган:

$\rho(O, M) = \rho(O, M''), (\widehat{MOM'') = 2\varphi$.

Демак, S_{l_2}, S_{l_1} алмаштириш текисликда O нуқта атрофида 2φ бурчакка буршишдан иборат.

Ақинча R_α текисликда O нуқта атрофида α бурчакка буршиш бўлсин. O нуқта орқали дундай икки l_1, l_2 тўғри чизикни ўтказамизки, улар орасидаги бурчак $(l_1, l_2) = \frac{\alpha}{2}$ бўлсин. Текисликни аввал l_1 тўғри чизикка нисбатан, сўнг l_2 тўғри чизикка нисбатан симметрик алмаштиришга дуч келтирамиз. Теореманинг биринчи қисмига кўра бу ўқли симметрияларнинг кўпайтмаси $S_{l_2} \cdot S_{l_1}$ алмаштириш текисликда O нуқта атрофида $2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha$ бурчакка буршиш бўлади, бундан $\Rightarrow R_\alpha^0 = S_{l_2} \cdot S_{l_1}$.

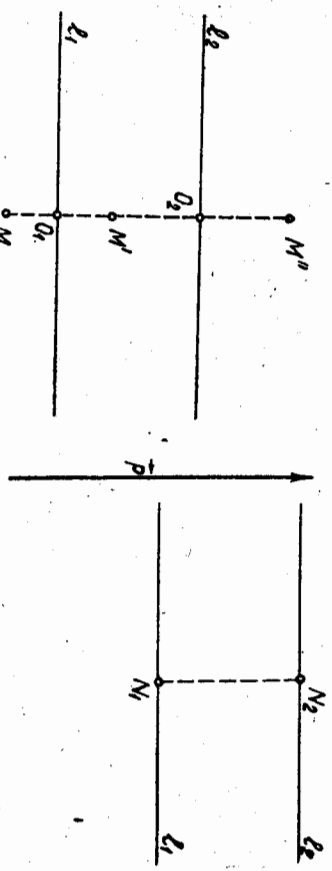
2-теорема. Агар иккита ўқли симметриянинг ўқлари l_1, l_2 параллел бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси узунлиги $2\rho(l_1, l_2)$ бўлган ва бу ўқларга перпендикуляр $\vec{p} \neq 0$ вектор қадар параллел кўчириндиур ва аксинча текисликни $\vec{p} = 0$ вектор қадар параллел кўчириндиур, ўқлари параллел ва ўқлари орасидаги масофа $\frac{|\vec{p}|}{2}$ бўлган иккита ўқли симметрия кўпайтмасига ажралади.

Исбот. $l_1 \parallel l_2$ тўғри чизиклар текисликда ихтиёрий M нуқта оламиз. Текисликда аввал l_1 тўғри чизикка нисбатан, сўнг l_2 тўғри чизикка нисбатан симметрик алмаштиришни бажарайлик.

$S_{l_2}(M) = M', S_{l_1}(M') = M''$

бўлсин (106-чизма). S_{l_2}, S_{l_1} ни кетма-кет бажарамиз. Натijasвий S_{l_2}, S_{l_1} алмаштириш M нуқтани M'' нуқтага ўтказди.

Ўқли симметрия тарбиғига кўра $\rho(O_1, M) = \rho(O_1, M'), \rho(O_2, M') = \rho(O_2, M'')$. Бу ерда O_1 нуқта MM' кесманнинг, O_2 нуқта эса $M'M''$ кесманнинг ўртаси:



106-чизма

107-чизма

$$\rho(M, M') = \rho(M, O_1) + \rho(O_1, O_2) + \rho(O_2, M') = \rho(O_1, M') + \rho(O_1, O_2) + \rho(M', O_2) = 2\rho(O_1, O_2). \quad (8)$$

М нукта l_1, l_2 тўғри чиқиқлар билан чегараланган полосога тегишли бўлганда ҳам (8) тенгиликнинг бажарилишга ишонч ҳосил қилиш мумкин. (8) дан кўриниб турибдики, текисликда S_1, S_2 алмаштириш уни $2\rho(O_1, O_2)$ узунликдаги вектор қадар параллел кўчирилдан ноборат.

Аксинча, T_p текисликда p вектор қадар параллел кўчириш бўлсин. Текисликда шундай N_1, N_2 нукталарни оламанки, $\overrightarrow{N_1 N_2} = \frac{1}{2} p$ бўлсин. N_1, N_2 нукталар орқали N_1, N_2 тўғри чиқиққа перпендикуляр l_1, l_2 тўғри чиқиқларни ўтказамиз (107-чизма). У ҳолда $l_1 \parallel l_2$ ва $\rho(l_1, l_2) = \frac{1}{2} |p|$ бўлади, S_1, S_2 ни бажарсак, теореманинг биринчи қисмига кўра S_1, S_2 алмаштириш текисликда p вектор йўналишида $2\left(\frac{1}{2}|p|\right) = |p|$ масофа қадар параллел кўчириш бўлади. Демак, $T_p = S_1, S_2$. \blacktriangle

38-§. Текисликда ҳаракатлар гуруҳлари ва унинг қисм гуруҳлари

D орқали текисликда барча ҳаракатлар тўғриваликни белгилайлик. F_1, F_2 шу D тўғриваликдан олинган ҳар қандай икки ҳаракат бўлсин. F_1 ҳаракат текисликдаги ҳар қандай M, N нукталарни M', N' нукталарга ўтказсин, F_2 ҳаракат эса M', N' нукталарни M'', N'' нукталарга ўтказсин. У ҳолда ҳаракат таърифига кўра

$$\rho(M, N) = \rho(M', N'), \quad \rho(M', N') = \rho(M'', N''). \quad (9)$$

F_1, F_2 алмаштиришларни қўлайтурсак (яъни кетма-кет бажарсак), текисликда $F_2 F_1$ алмаштириш ҳосил бўлади. Бу алмаштиришда $F_1(M) = M', F_1(N) = N'$ ва (9) га кўра $\rho(M, N) = \rho(M'', N'') \Rightarrow \rho(M', N') = \rho(M'', N'')$ ва (9) га кўра $\rho(M, N) = \rho(M', N')$ алмаштириш M', N' нукталарни M, N нукталарга ўтказди ва $\rho(M, N) = \rho(M', N') \Rightarrow \rho(M', N') = \rho(M, N)$ га кўра F_1^{-1} ҳаракат бўлади.

- Шундай қилиб
- 1) $F_1, F_2 \in D \Rightarrow F_2 F_1 \in D$.
 - 2) $F_1 \in D \Rightarrow F_1^{-1} \in D$.

Бундан кўриндики, текисликдаги барча ҳаракатлар тўғривалик гуруҳи ташкил этади, бу гуруҳнинг қисм гуруҳлари билан танишамиз. D_1 орқали текисликдаги барча биринчи тур ҳаракатлар тўғриваликни белгилаймиз. D_1 тўғривалик D тўғриваликнинг қисм тўғривалики бўлади. $\forall F_1, F_2 \in D_1$ алмаштиришларни оламанки, F_1 текисликдаги бирор \mathcal{B} декарт реперини у билан бир хил

ориентацияли \mathcal{B}' декарт реперига ўтказди (биринчи тур ҳаракат таърифига кўра). F_2 эса \mathcal{B}' ни у билан бир хил ориентацияли \mathcal{B}'' реперга ўтказди. F_1 ва F_2 нинг қўлайтурса ҳаракат бўлиб, у \mathcal{B} реперни \mathcal{B}'' реперга ўтказди ва $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$ реперлар бир хил ориентациялидир. Бундан $\Rightarrow F_2 F_1$ — биринчи тур ҳаракат, $F_1: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}' \Rightarrow F_1^{-1}: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ ва $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$ реперлар бир хил ориентацияли, бундан F_1^{-1} нинг биринчи тур ҳаракатлиги ойдин бўлади. Шундай қилиб

- 1) $F_1, F_2 \in D_1 \Rightarrow F_2 F_1 \in D_1$,
- 2) $F_1 \in D_1 \Rightarrow F_1^{-1} \in D_1$.

Демак, D_1 гуруҳи ташкил этади. Қисм гуруҳи таърифига кўра (32-§ D_1 гуруҳи D гуруҳининг қисм гуруҳисидир. Энди D_2 текисликдаги барча иккинчи тур ҳаракатлар тўғривалик бўлсин. Иккита $F_1, F_2 \in D_2$ алмаштириш оламанки, \mathcal{B} текисликдаги бирор декарт реперни, $F_1: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ ва $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли бўлсин. $F_2: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''$ ва $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$ реперлар қарама-қарши ориентациялига эга. F_1, F_2 алмаштиришларни қўлайтурсак, $F_2 F_1$ алмаштириш ҳосил бўлиб, $F_2 F_1: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''$ ва $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$ реперлар бир хил ориентацияли бўлади. Шунинг учун $F_2 F_1$ — биринчи тур ҳаракат. Хуллас, D_2 тўғривалик гуруҳи ташкил этмайди.

$D_1(M_0)$ орқали текисликни M_0 нукта атрофида барча буришлар тўғриваликни белгилаймиз. Ҳар бир буриш биринчи тур ҳаракат бўлгани учун $D_1(M_0)$ тўғривалик D_1 учун қисм тўғриваликдир. $\forall f_1, f_2 \in D_1(M_0)$ буришларни оламанки, f_1 алмаштириш M_0 нукта атрофида α бурчакка, f_2 эса β бурчакка буриш бўлсин, яъни $f_1 = R_{M_0}^\alpha, f_2 = R_{M_0}^\beta$. Текисликнинг ихтиёрий M нуктасини $R_{M_0}^\alpha$ буриш M' нуктага ўтказсин. $R_{M_0}^\beta$ буриш эса M' нуктани M'' нуктага ўтказсин. У ҳолда $R_{M_0}^\beta R_{M_0}^\alpha$ алмаштириш M нуктани M'' нуктага ўтказди ва у M_0 нукта атрофида $\beta + \alpha$ бурчакка буриш бўлади. $\forall R_{M_0}^\alpha$ буришга текарри f^{-1} алмаштириш M_0 нукта атрофида $-\alpha$ бурчакка буриш бўлади. Шундай қилиб,

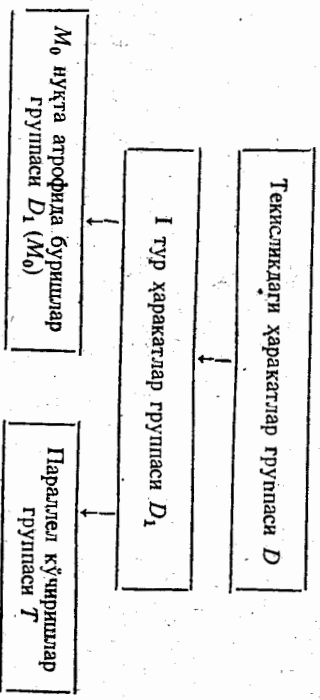
- 1) $R_{M_0}^\alpha, R_{M_0}^\beta \in D_1(M_0) \Rightarrow R_{M_0}^\beta R_{M_0}^\alpha \in D_1(M_0)$;
- 2) $R_{M_0}^\alpha \in D_1(M_0) \Rightarrow f^{-1} = R_{M_0}^{-\alpha} \in D_1(M_0)$.

Демак, $D_1(M_0)$ тўғривалик гуруҳи ташкил этади, у D_1 гуруҳи учун қисм гуруҳисидир. T текисликдаги барча параллел кўчиришлар тўғривалик бўлсин. Ҳар бир параллел кўчириш биринчи тур ҳаракат бўлгани учун (39-§) T тўғривалик D_1 тўғриваликнинг қисм тўғриваликидир. f_1, f_2 дар T тўғриваликнинг ҳар қандай икки алмаштириши ва $f_1 \rightarrow f_2$ текисликда p вектор қадар параллел кўчириш, f_2 эса текисликда q вектор қадар параллел кўчириш, яъни $f_1 = T_p^{-1}, f_2 = T_q$ бўлсин. Ихтиёрий M нуктани оламанки:

$$\left. \begin{aligned} T \rightarrow M \rightarrow M' &\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = p, \\ T \rightarrow M' \rightarrow M'' &\Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = q. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

У ҳолда $T \rightarrow T \rightarrow M \rightarrow M''$ ва (10) га кўра $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = p + q \Rightarrow T \rightarrow T \rightarrow M \rightarrow M''$ алмаштириш текисликда $p + q$ вектор қадар параллел кўчирилади. $\forall f_1$ га тескари алмаштириш $f_1^{-1}: M' \rightarrow M$ ва $\overrightarrow{MM'} = p \Rightarrow M'M = -p \Rightarrow f_1^{-1}$ алмаштириш текисликда $-p$ вектор қадар параллел кўчириш экан.

Шундай қилиб, 1) $f_1, f_2 \in T \Rightarrow f_2 f_1 \in T$; 2) $f_1 \in T \Rightarrow f_1^{-1} \in T$. Демак, T гурӯҳи бўлиб, у D_1 гурӯҳининг қисм гурӯҳисидир. Шундай қилиб, биз ҳаракатлар гурӯҳиси ва унинг қисм гурӯҳи тарининг ушбу схемасини ҳосил қиламиз:



Б бирор алмаштиришлар гурӯҳиси, Φ текисликдаги бирор фигура бўлсин. Φ фигурани G гурӯҳининг барча алмаштиришларида ўзгармай қоладиган хоссаларини G гурӯҳининг *инвариант хоссалари* ёки *инвариантлари* дейилади. G_0 тўғрив G гурӯҳининг қисм гурӯҳиси бўлса, G гурӯҳининг барча инвариантлари G_0 нинг ҳам инвариантлари бўлади. Лекин G_0 қисм гурӯҳининг ўзига хос шундай инвариантлари бўладими, улар энди G гурӯҳининг инвариантлари бўлмайди. Оқорида баён этилган ҳаракатлар гурӯҳиси ва унинг қисм гурӯҳи тарининг инвариантлари бидан танишамиз.

Ҳаракатлар гурӯҳиси D нинг асосий инварианти икки нукта орасидаги масофадир.

Фигуранинг кесма, нуқра, тўғри чизик, бурчак бўлиши, тўғри чизикдаги уч нуқтанинг олдий нисбати, тўғри чизикларнинг параллеллиги, бурчак ва юз катталиклари ҳаракатнинг инвариантларидир.

D гурӯҳининг барча инвариантлари унинг D_1 қисм гурӯҳисининг (биринчи тур ҳаракатлар гурӯҳисининг) ҳам инвариантлари бўлади. Бундан ташқари, D_1 гурӯҳида бурчакнинг ориентацияси сақланади. Демак, D_1 гурӯҳининг ўзига хос инварианти бурчак ориентациясидир.

$D_1(M_0)$ ва T гурӯҳилар D_1 гурӯҳининг қисм гурӯҳилари бўлгани учун D_1 гурӯҳининг барча инвариантлари $D_1(M_0)$ гурӯҳининг, шунингдек, T гурӯҳининг ҳам инвариантлари бўлади.

$D_1(M_0)$ гурӯҳининг ўзига хос инварианти (M_0 нукта ўз-ўзига ўтгани учун) M нуқтанинг M_0 марказгача бўлган масофаси $\rho(M_0, M)$ дир. T гурӯҳининг ўзига хос инварианти йўналишдир (чунки ҳар қандай параллел кўчириш нурини ўзи билан бир хил йўналишли нуқрага ўтказди).

39-§. Геометрик фигураларнинг симметрия гурӯҳилари

Φ текисликдаги бирор фигура бўлсин. D_Φ орқали Φ фигурани ўз-ўзига ўтказадиган текисликдаги барча ҳаракатлар тўғривини белгилаямиз. Масалан, Φ фигура тенг ёшли ABC учбурчак (бунда $AB = BC, AC \neq AB$) ва BD тўғри чизик унинг симметрия ўқи бўлсин. Текисликда айнан алмаштириш ва BD ўқли симметрия ΔABC ни ўз-ўзига ўтказди. Демак, $D_{\Delta ABC}$ иккита элементдан ташқил топган: бири E_0 айнан алмаштириш, иккинчиси BD ўқли симметрия. $\forall f_1, f_2 \in D_\Phi$ ни олайлик. $f_1(\Phi) = \Phi, f_2(\Phi) = \Phi$ бўлгани учун $f_2 f_1(\Phi) = \Phi$ дейиш мумкин. $f_1(\Phi) = \Phi$, бундан $f_1^{-1}(\Phi) = \Phi$.

Шундай қилиб, 1) $f_1, f_2 \in D_\Phi \Rightarrow f_2 f_1 \in D_\Phi$; 2) $f_1 \in D_\Phi \Rightarrow f_1^{-1} \in D_\Phi$. Демак, D_Φ гурӯҳи ташқил қилади.

Агар D_Φ гурӯҳи E_0 айнан алмаштиришдан фарқли элементга эга бўлса, у ҳолда D_Φ ни Φ фигура *симметрияларининг гурӯҳиси* дейилади. Агар D_Φ фақатгина E_0 айнан алмаштиришдан иборат, яъни $D_\Phi = \{E_0\}$ бўлса, у ҳолда Φ фигура *симметрияларга эга эмас* дейилади. Масалан, Φ фигура турли томонли ABC учбурчак бўлсин, текисликда айнан алмаштиришгана ΔABC ни ўз-ўзига ўтказди. Демак, ихтиёрый ΔABC симметрия элементларига эга эмас.

Агар бирор l ўқли симметрия Φ фигура инвариант, яъни $S_l(\Phi) = \Phi$ бўлса, l тўғри чизик Φ *фигураининг симметрия ўқи* дейилади, бу ҳолда Φ фигурани l тўғри чизикқа нисбатан *симметрия* деб айтамыз. Масалан, ромбнинг диагоналлари унинг симметрия ўқлари бўлади, чунки бу диагоналларнинг ҳар бирига нисбатан симметрия алмаштириши бажарса, ромб ўз-ўзига ўтади.

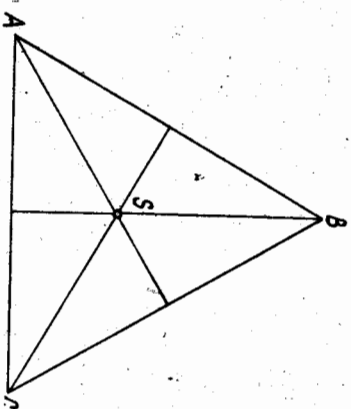
Агар бирор M_0 нуктага нисбатан симметрия алмаштиришни қарасак ва унинг натижасида Φ фигура инвариант бўлса, M_0 нукта Φ *фигураининг симметрия маркази* дейилади, бу ҳолда Φ фигурани M_0 нуктага нисбатан *симметрия* деб айтамыз. Масалан, параллелограмм диагоналлариининг кесилиши M_0 нуктаси унинг симметрия марказидир.

Агар текисликда S нукта апрофида $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ бурчакка буришда

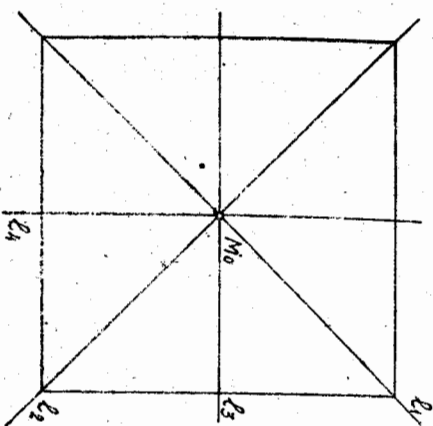
Φ фигура инвариант бўлса, S нукта Φ фигуранинг n -*тартибли буриш маркази* дейилади, бу ерда n — бирдан катта ҳар қандай натурал сон. Масалан, тўғри тўртбурчак диагоналлариининг кесилиши

M_0 нуктаси унинг 2-тартибли буриш марказидир, чунки M_0 нукта атрофида $\alpha = \frac{2\pi}{2} = \pi$ бурчакка буришда тўғри тўртбурчак инвариант бўлади. Φ фигура мунтазам кўпбурчак бўлганда буриш маркази S унинг марказидан иборатдир. Φ фигуранинг симметрия ўқи, симметрия маркази ва n -тартибли буриш маркази унинг *симметрия элементлари* дейилади.

Мисоллар. 1) Φ мунтазам учбурчакнинг (108-чизма) симметрия элементлари учта симметрия ўқи AS , BS , CS ва учинчи тартибли буриш маркази S дан иборат ($\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$), бу ерда S — мунтазам учбурчакнинг маркази: симметрия группаси: $D_\Phi = \{E_0, AS, BS, CS, S\}$.



108-чизма



109-чизма

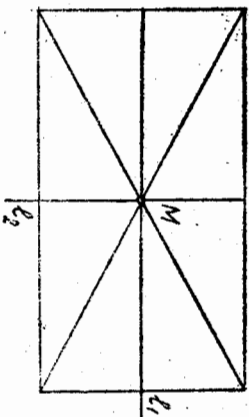
2) Φ квадратнинг (109-чизма) симметрия элементлари тўртта симметрия ўқи l_1, l_2, l_3, l_4 , симметрия маркази M_0 ва иккинчи, тўртинчи тартибли буриш маркази $S = M_0$ дан иборат ($\alpha_1 = \frac{2\pi}{2} = 180^\circ, \alpha_2 = \frac{2\pi}{4} = 90^\circ$). Унинг симметрия группаси $D_\Phi = \{E_0, l_1,$

$l_2, l_3, l_4, M_0, S\}$.

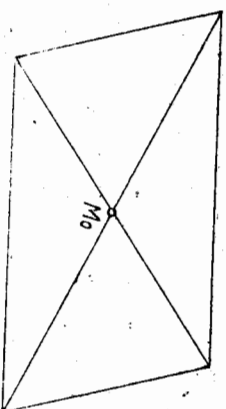
Вазифа. Тенг ёнли трапеция, ромб ва мунтазам олти бурчакнинг симметрия элементлари топилсин.

3) Φ тўғри тўртбурчакнинг (110-чизма) симметрия элементлари симметрия маркази M_0 , иккита симметрия ўқи l_1, l_2 ва иккинчи тартибли буриш маркази $M_0 = S$ дир. Унинг симметрия группаси $D_\Phi = \{E_0, M_0, l_1, l_2, S\}$ бўлади.

4) Φ параллелограмм бўлганда (111-чизма) унинг симметрия элементлари иккита марказ: бирини симметрия маркази M_0 , иккинчиси



110-чизма



111-чизма

иккинчи тартибли буриш маркази $M_0 = S$ дан иборат бўлиб, $D_\Phi = \{E_0, M_0, S\}$.

32 40-§. Ҳишалик алмаштириши, гомотетия

$k > 0$ сон берилган бўлсин.
1-тарриф. Текисликнинг ҳар қандай икки M, N нуктасига

$$\rho(M', N') = k\rho(M, N) \quad (11)$$

шартли қаноатлантирувчи M', N' нукталарини мос келтирадиган алмаштириш текисликда $k > 0$ коэффициентли *ҳишалик алмаштириши* дейилади ва ρ^k кўринишда белгилавади. k сон *ҳишалик коэффициенти* дейилади.

Текисликда ρ ҳишалик алмаштириши барча масофаларни $k > 0$ марта (қадар) ўзгартиради.

2-тарриф. Агар Φ фигурани унинг исгалган икки нуктаси орасидати масофани $k > 0$ сон марта ўзгартирадиган қилиб Φ' фигурага биектив акслантириш мавжуд бўлса, Φ' фигура Φ фигурага k коэффициентли *ҳиш* дейилади.

1-гаврифданок, ρ ҳишалик алмаштириши ҳар қандай берилган фигурани ўзига ρ ҳишалик фигурага ўтказиши равшан.

Агар ρ ҳишалик коэффициенти $k = 1$ бўлса, текисликда ҳаракат ҳосил қилинади. Демак, ҳаракат ρ ҳишалик алмаштиришининг хусусий ҳолидир.

ρ ҳишалик алмаштиришига яна бир мисол сифатида гомотетия билан танишамиз. Текисликда S нукта ва $k \neq 0$ сон берилган бўлсин.

3-тарриф. Текисликнинг ҳар бир M нуктасига

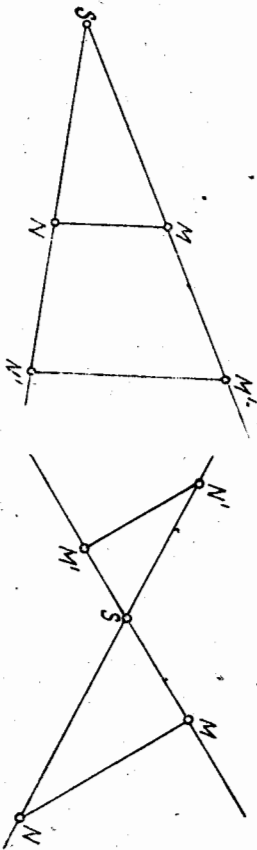
$$\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM} \quad (12)$$

шартли қаноатлантирувчи M' нуктани мос келтирадиган алмаштириш текисликда k коэффициентли ва S маркази гомотетия алмаштириши, *қисқача гомотетия* деб аталади. S нукта гомотетия маркази, k сон гомотетия коэффициентли дейилади. S марказини ва k коэффициентли гомотетия H_S^k билан белгиланади.

Гомотетия маркази S ўзига-ўзига мос ҳисобланади. $k = 1$ коэф-

фицентгли гомотетия текисликда айнан алмаштириш бўлади, chunkki $k = 1$ да $\vec{SM'} = \vec{SM}$, бундан $M' = M$.

Агар $k > 0$ бўлса, \vec{SM} , $\vec{SM'}$ векторлар бир хил йўналишли бўлиб, мос M , M' нукталар гомотетия марказидан бир томонда ётади (112-чизма).



112-чизма

113-чизма

$k < 0$ бўлган ҳолда \vec{SM} , $\vec{SM'}$ векторлар қарама-қарши йўналишли ва мос M , M' нукталар гомотетия марказидан турли томонда ётади (113-чизма).

114-чизмада берилган M нуктани S марказга нисбатан $k = 2$ коэффициент бўйича гомотетик алмаштиришдан ҳосил бўлган M_1 нукта $SM_1 = 2 \cdot SM$ талабга жавоб беради ва SM тўғри чизиқда M нукта билан S дан бир томонда ётади. M_2 нукта M нуктани S марказдан $k = -\frac{1}{2}$ коэффициент билан гомотетик алмаштиришдан ҳосил бўлган, у $SM_2 = -\frac{1}{2} SM$ талабга жавоб беради ва SM тўғри чизиқда M нукта билан S дан турли томонда ётади.



114-чизма

Берилган фигурани ташқил этувчи барча нукталарни берилган S марказ ва берилган $k \neq 0$ коэффициент билан гомотетик алмаштиришдан ҳосил бўлган нукталар тўплами берилган фигурaga *гомотетик фигура* дейилади.

115-чизмада S марказли ва $k = -2$ коэффициентли H_S^{-2} гомотетияда берилган $ABCD$ трапецияга гомотетик $A'B'C'D'$ трапеция ясалган.

Гомотетиянинг ўхшаш алмаштириш эканини кўрсатамиз. $H_S^k (k \neq 0)$ гомотетия M нуктани M' га, N нуктани N' нуктага ўтказсин, яъни

$$\vec{SM'} = k \vec{SM}, \quad \vec{SN'} = k \vec{SN}. \quad (13)$$

Векторларни қўлишининг учбурчак қойдасига ва (13) га кўра

$$\begin{aligned} \vec{M'N'} &= \vec{SN'} - \vec{SM'} = k \vec{SN} - k \vec{SM} = k(\vec{SN} - \vec{SM}) = k \vec{MN}, \\ \end{aligned} \quad (14)$$

бундан $|\vec{M'N'}| = |k| |\vec{MN}|$, бу тенгликдан H_S^k гомотетиянинг $|k|$ коэффициентли ўхшаш алмаштириш экани келиб чиқади.

Гомотетия қўлидаги ҳоссазларга эга.

1°. Гомотетия тўғри чизиқдаги уч нуктанинг олдий нисбатини сақлайди.

Исот. H_S^k гомотетия MN тўғри чизиққа тегишли L' нуктани L нуктага ўтказсин, яъни $H_S^k(L) = L'$ бўлсин. У ҳолда (14) муносабат сингари

$$\vec{N'L'} = k \vec{NL} \quad (15)$$

ни ҳосил қиламиз, бунда (14), (15) муносабатлардан $\frac{\vec{M'N'}}{\vec{N'L'}} = \frac{\vec{MN}}{\vec{NL}}$, бундан эса $(M'L', N') = (ML, N)$.

Бу ҳоссадан қуйидаги натижалар келиб чиқади: гомотетия кесмани кесмага, нурни нулга, тўғри чизиқни тўғри чизиққа алмаштиради.

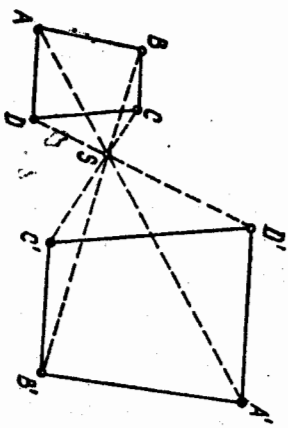
2°. Гомотетияда тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа ўтаради. Хусусий ҳолда гомотетия марказидан ўтувчи тўғри чизиқ ўз-ўзига ўтади.

Исот. H_S^k гомотетияда акслантирибётган l тўғри чизиқ, гомотетия марказидан ўтсин. Гомотетия таърифига кўра l тўғри чизиқда этувчи ихтиёрий M нуктага гомотетик M' нукта шу l тўғри чизиқда ётади. Иккинчи томондан, l тўғри чизиқда этувчи ихтиёрий M' нукта учун шу l тўғри чизиқда шундай M нукта топилмадики, $H_S^k(M) = M'$ бўлади, демак, бу ҳолда $H_S^k(l) = l$.

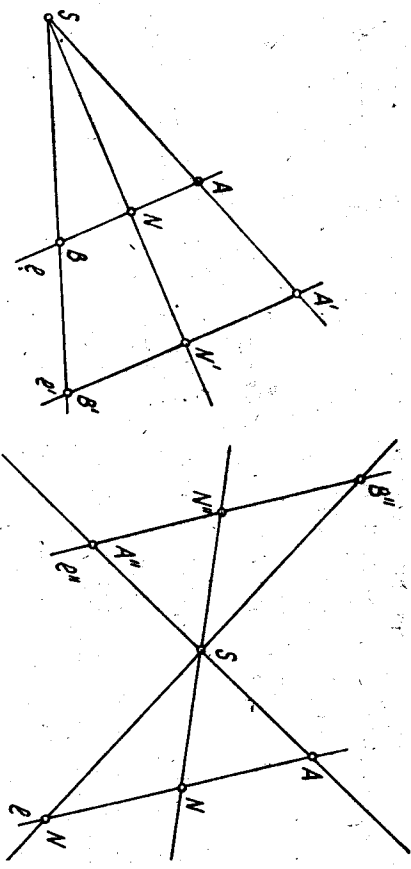
Энди берилган l тўғри чизиқ гомотетия марказидан ўтмасин ва $k > 0$ бўлсин (116-а чизма). Берилган l тўғри чизиқнинг ихтиёрий A, B нукталарини олиб, уларга гомотетик нукталарни A', B' билан белгилаймиз. Гомотетия таърифидан: $\vec{SA'} = k \vec{SA}$ ва $\vec{SB'} = k \vec{SB}$.

Буглардан фойдаланиб, $\vec{A'B'} = k \vec{AB}$ тенгликни ёза оламиз. У ҳолда $\vec{A'B'} \parallel \vec{AB}$, бундан $A'B'$ ва AB тўғри чизиқларнинг параллеллиги келиб чиқади.

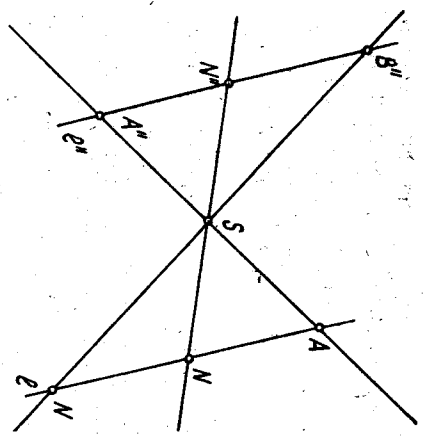
$A'B'$ тўғри чизиқнинг $AB = l$ тўғри чизиқ учун образ эканини кўрсатамиз (116-а чизма).



115-чизма



116-а чизма



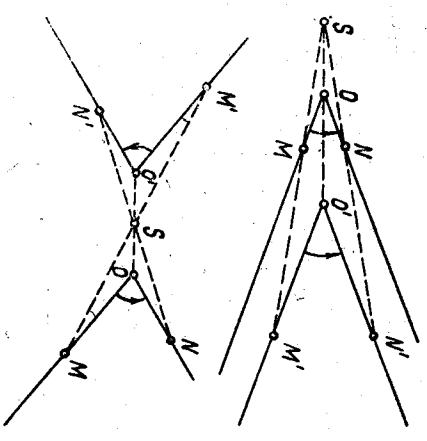
116-б чизма

Бунинг учун AB тўғри чизикқа тегишли ҳар қандай N нуқтани оламиз. N' бу нуқтанинг H_S^k даги образи бўлсин, яъни $\vec{SN}' = k\vec{SN}$, у ҳолда $\vec{A'N'} = k\vec{AN} \Rightarrow \vec{A'N'} \parallel \vec{AN}$, лекин $\vec{AN} \parallel \vec{AB}$,

$$\vec{AB} \parallel \vec{A'B'} \Rightarrow \vec{A'N'} \parallel \vec{A'B'} \Rightarrow N' \in A'B'$$

Демак, $l' = A'B'$ тўғри чизик $AB = l$ тўғри чизикнинг образи экан. \blacktriangle

Берилган тўғри чизик гомотетия марказидан ўтмаса ва $k < 0$ бўлса, l тўғри чизикқа гомотетик фигура унга параллел l' тўғри чизик бўлади (116-б чизма). Бунинг ўриндлilги ҳам айнан юқоридagi каби кўрсатилади.



117-чизма

3°. Гомотетик алмаштиришда бурчакнинг катталиги ўзгармайди.

Исбот. $k > 0$ бўлганда алмашинувчи нур билан унинг образи бир хил йўналишда, $k < 0$ бўлганда улар қарама-қарши йўналишда бўлади. Бундан иккага ҳолда ҳам ҳар қандай MON бурчак ўзинга конгруэнт ва у билан бир хил ориентацияли $M'O'N'$ бурчакка ўтади деган хулоса чиқарамиз (117-чизма).

4°. Гомотетияда тўғри чизикларнинг параллеллиги сақланлади.

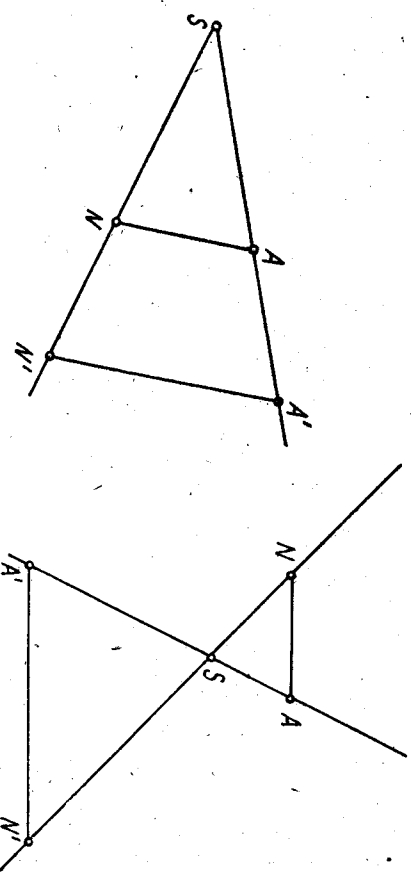
Исбот. Агар $l \parallel m$ бўлса, $l' \parallel l$, $m' \parallel m$ бўлгани учун $l' \parallel m'$ бўлади. \blacktriangle

5°. Гомотетик алмаштиришда кесманинг узунлиги $|k|$ марта ўзгаради.

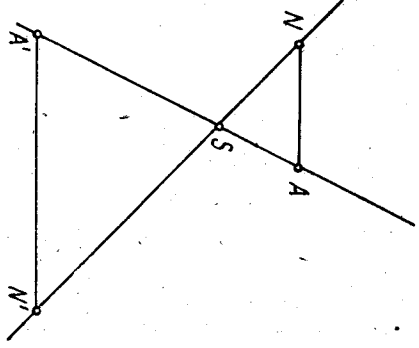
$$\vec{SA'} = k\vec{SA}, \vec{SB'} = k\vec{SB},$$

бу тенгликлардан $\vec{A'B'} = k\vec{AB}$ муносабатни ёза оламиз. Бундан $k > 0$ бўлганда $A'B' = kAB$, $k < 0$ бўлганда $A'B' = |k|AB$. Демак, H_S^k да $\angle AB$ кесманинг узунлиги (яъни A, B нуқталар орасидаги масофа) $|k|$ марта ўзгаради.

Гомотетия унинг маркази ва коэффициентининг берилиши ёки гомотетия маркази ва бир жупф мос нуқталарнинг берилиши билан ягона равишда аниқланади.



118-а чизма



118-б чизма

Гомотетиянинг маркази билан коэффициентни берилса, текисликнинг ҳар бир M нуқтасига гомотетик M' нуқта 3-таъриф асосида топиллади. Агар гомотетия S —гомотетия маркази ва бир жупф мос нуқталар билан берилса (118-а, б чизма), $\forall N$ нуқтага гомотетик N' нуқта куйидагича топиллади: гомотетия таърифига кўра S, A, A' нуқталар битта тўғри чизикда ётади. AN тўғри чизикни ўтказамиз. A' нуқтадан $A'N' \parallel AN$ тўғри чизикни ўтказамиз.

$\perp SN = N'$ изланган нуқта бўлади, чунки $SA' \parallel SA$ бўлгани учун $\frac{SA'}{SA} = k$ бўлган десак, $\triangle SAN \sim \triangle SA'N'$ бўлганидан $\frac{SN'}{SN} = k$.

41-§. Ҷишашлик алмаштириши — гомотетия билан
харакатнинг кўпайтмаси

Теорема. $k > 0$ коэффициентли Ҷишашлик алмаштириши коэффициентли гомотетия билан ҳаракатнинг кўпайтмасидан иборат.

Исбот. P^k текисликни $k > 0$ коэффициентли Ҷишаш алмаштириши, M', N' нуқталар текислигининг M, N нуқталарини бу Ҷишаш алмаштиришдаги образлари бўлсин, яъни

$$P^k(M) = M', \quad P^k(N) = N', \quad \text{у ҳолда} \\ \rho(M', N') = k\rho(M, N). \quad (16)$$

Текисликда бирор S нуқтани оламиз ҳамда шу текисликда S марказли ва k коэффициентли H_S^k гомотетик алмаштиришини бажарамиз. Бу алмаштиришда $H_S^k(M) = M'', H_S^k(N) = N''$ бўлсин. Гомотетия таърифидан, $\overrightarrow{M''N''} = k\overrightarrow{MN}$, бундан

$$\rho(M'', N'') = k\rho(M, N). \quad (17)$$

(16), (17) муносабатлардан

$$\rho(M'N') = \rho(M'', N''). \quad (18)$$

H_S^k гомотетик алмаштиришга текари f^{-1} алмаштириш текислигини S марказли ва $\frac{1}{k}$ коэффициентли $H_S^{\frac{1}{k}}$ гомотетик алмаштириш бўлиб,

$$H_S^{\frac{1}{k}}(M'') = M, \quad H_S^{\frac{1}{k}}(N'') = N.$$

Аввало $H_S^{\frac{1}{k}}$ алмаштиришини, сўнгра P^k алмаштиришини бажарайлик:

$$P^k(H_S^{\frac{1}{k}}(M'')) = P^k(M) = M', \quad P^k(H_S^{\frac{1}{k}}(N'')) = P^k(N) = N',$$

шу билан бирга $\rho(M'', N'') = \rho(M', N')$, бундан $P^k H_S^{\frac{1}{k}}$ кўпайтма билан ифодаланган алмаштиришнинг ҳаракат эканлини кўрамиз, яъни

$$P^k H_S^{\frac{1}{k}} = F \Rightarrow P^k = FH_S^{\frac{1}{k}}. \quad \blacktriangle$$

Бу теоремага асосан ҳаракат ва гомотетия учун умумий бўлган хоссалярни Ҷишашлик алмаштиришнинг хоссаляри дёб қабул қилиши мумкин.

Бу хоссалярнинг баъзиларини келтирамиз:
1. Ҷишашлик алмаштиришда тўғри чизикдаги уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади.

Бундан Ҷишашлик алмаштиришда кесма кесмага, нур нурга, тўғри чизик тўғри чизикка, бурчак бурчакка, ярим текислик ярим текисликка ўтди деган натижани ҳосил қиламиз.

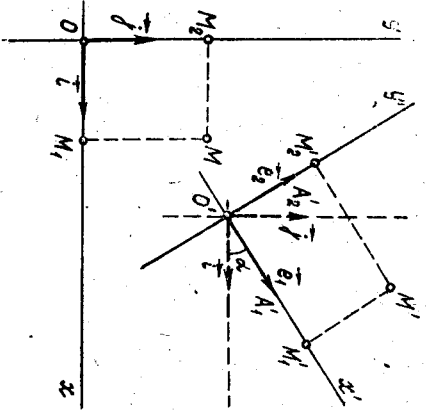
2° Ҷишашлик алмаштириши бурчакни унинг ўзига конгруэнт бурчакка ўтказди.
3° Ҷишашлик алмаштиришда параллел тўғри чизикларнинг образлари ҳам параллел бўлади.

42-§. Ҷишашлик алмаштиришининг аналитик ифодаси

Текисликда $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперини оламиз. Текисликни $k > 0$ коэффициентли P^k Ҷишашлик алмаштириши бу реперни шундай $\mathcal{B}' = (O', e_1, e_2)$ реперга ўтказдики (119-чизма), бунда

$e_1 \perp e_2$ ва $|e_1| = |e_2| = k$ бўлади (Ҷишашлик алмаштириши таърифи ва 45-§ даги 2°-хоссага асосан). M — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' эса унинг P^k даги образи бўлсин. M нуқта биринчи реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлганда унинг M' образи иккинчи реперга нисбатан шу x, y координаталарга эга бўлади. Ҳақиқатан, фараз қилайлик, M' нуқта \mathcal{B}' реперга нисбатан x', y' координаталарга эга бўлсин. M, M' $\parallel OA_1$ ва $MM_1 \parallel OA_1$ тўғри чизикларни ўтказамиз, бунда M_1 нуқта OA_1 тўғри чизикка тегишли, y ҳолда

$$x = \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = -\frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OA_1}}, \quad y = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OA_2}} = -\frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OA_2}}.$$



119-чизма

$P^k(M_1) = M'_1, P^k(M_2) = M'_2$ бўлсин. Ҷишашлик алмаштиришда нуқтанинг тўғри чизикда ётishi ва тўғри чизикларнинг параллеллиги сақлангани учун:

M_1 нуқта $O'A_1$ тўғри чизикка тегишли, N_2 нуқта $O'A_2$ тўғри чизикка тегишли ва $M_1M'_1 \parallel O'A_2, M_2M'_2 \parallel O'A_2 \Rightarrow x^* = \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{O'A_1}} = -\frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{O'A_1}}$.

$$y^* = \frac{\overrightarrow{O'M_2}}{\overrightarrow{O'A_2}} = -\frac{\overrightarrow{O'M_2}}{\overrightarrow{O'A_2}}.$$

Ҷишашлик алмаштиришда тўғри чизикдаги уч нуқтанинг оддий нисбати сақлангани учун $(M'_1A_1, O) = (M_1A_1, O), (M'_2A_2, O) = (M_2A_2, O) \Rightarrow x^* = x, y^* = y$. Демак, \mathcal{B}' реперда $M' = P^k(M)$ нуқта ўша x, y координаталарга эга. $(\vec{i}, \vec{e}_1) = \alpha$ ва \mathcal{B}' реперга нисбатан $M'(x', y')$,

$O'(x_0, y_0)$ бўлсин. U ҳолда i, j бажсга нисбатан $e_1(k \cos \alpha, k \sin \alpha)$, $e_2(-k \sin \alpha, k \cos \alpha)$ (11) бооб, 19-§ га қаралсин:

$$\vec{OM}' = x' \vec{i} = y' \vec{j}, \vec{OO}' = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}. \quad (19)$$

Бу ерда $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$ реперлар бир хил (қарама-қарши) ориентацияда бўлганда $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) бўлади ва (19) тенгликларни ҳисобга олиб, $\vec{OM}' = \vec{OO}' + \vec{O'M}'$ ва $\vec{O'M}' = x' e_1 + y' e_2$ дан $x' \vec{i} + y' \vec{j} = [x_0 + k(x \cos \alpha - \varepsilon y \sin \alpha)] \vec{i} + [y_0 + k(x \sin \alpha + \varepsilon y \cos \alpha)] \vec{j}$ экн.

$$\begin{cases} x' = k(x \cos \alpha - \varepsilon y \sin \alpha) + x_0 \\ y' = k(x \sin \alpha + \varepsilon y \cos \alpha) + y_0 \end{cases} \quad (20)$$

муносабатларга эга бўлмайиз.

Битта \mathcal{J}' реперда M' нуқтанинг x', y' координаталари M нуқтанинг x, y координаталари орқали (20) формулалар бўйича ифодаланади. (20) формулалар ўхшашлик алмаштиришининг аналитик ифодасидир.

43-§. Ўхшашлик алмаштиришлари группаси ва унинг қисм группалари

P орқали текисликнинг барча ўхшашлик алмаштиришлари тўпламини белгилайлик. $\forall R^k, R^k \in P$ ўхшашлик алмаштиришларни оламиз. M, N' текисликнинг ихтиёрий икки нуқтаси бўлсин. R^k ўхшашлик алмаштириши бу нуқталарни M', N' нуқталарга, R^k ўхшашлик алмаштириши M', N' нуқталарни M'', N'' нуқталарга ўтказсин. U ҳолда ўхшашлик алмаштириши таърифига кўра

$$r(M', N') = k_1 r(M, N) \text{ ва } r(M'', N'') = k_2 r(M', N'). \quad (21)$$

Текисликда R^k, R^k алмаштириш M, N нуқталарни M'', N'' нуқталарга ўтказиши билан бирга (21) га кўра

$$r(M'', N'') = k_2 k_1 r(M, N) \quad (22)$$

шартни ҳам қановатлантиради. (22) муносабатдан R^k, R^k нинг $k_2 k_1$ коэффициентли ўхшашлик алмаштириши деган натижага келамиз.

Текисликда ҳар қандай R^k ўхшашлик алмаштиришига тесқари f^{-1} алмаштириш M', N' нуқталарни M, N нуқталарга ўтказсади ва (21) дан

$$r(M, N) = \frac{1}{k_1} r(M', N'),$$

бундан f^{-1} алмаштириши $\frac{1}{k_1}$ коэффициентли ўхшашлик алмаштириши экани келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$1) R^k, R^k \in P \Rightarrow R^k, R^k \in P, \quad 2) R^k \in P \Rightarrow f^{-1} = R^k \in P.$$

Демак, P группадир, биз уни текисликнинг ўхшашлик алмаштиришлари *группаси* деб атаёмиз.

Ҳар бир ўхшашлик алмаштириши бурчакни ўзига конгруэнт бурчакка ўтказгани учун бурчак катталиги P группанинг асосий инвариантидир.

Энди P группанинг қисм группалари билан танишамиз.

1. Ҳар қандай ҳаракат ўхшашлик алмаштиришининг хусусий ҳоли ($k = 1$ бўлган ҳол) бўлгани учун текисликдаги ҳаракатлар группаси ўхшашлик алмаштиришлари группаси P нинг қисм группасидир.

Агар ўхшашлик алмаштириши бурчак ориентациясини сақласа (қарама-қаршисига ўзгартирса), U биринчи тур (иккинчи тур) ўхшашлик алмаштириши дейилади.

41-§ даги теоремага кўра R^k ўхшашлик алмаштириши қуйидагича ёйиладн:

$$R^k = F \cdot H^k_s$$

Ҳомотетияда бурчак ориентацияси сақланади. Демак, ўхшашлик алмаштиришининг тури унинг ёйилмасидиҳи F ҳаракатнинг турига боғлиқ. F ҳаракат биринчи (иккинчи) тур бўлса, R^k ўхшашлик алмаштириши ҳам биринчи (иккинчи) тур бўлади.

2. R_0 текисликда барча биринчи тур ўхшашлик алмаштиришлари тўғлами бўлсин. $\forall R_1, R_2 \in P$ ни оламиз.

$\angle MON$ текисликдаги ихтиёрий бурчак бўлсин

$$R_1(\angle MON) = \angle M'O'N' \Rightarrow \angle MON \equiv \angle M'O'N' \quad (23)$$

ва улар бир хил ориентацияли, энди

$$R_2(\angle M'O'N') = \angle M''O''N'' \Rightarrow \angle M'O'N' = \angle M''O''N'', \quad (24)$$

булар ҳам бир хил ориентацияли бўлади.

$R_2 R_1$ алмаштириш $\angle MON$ ни $\angle M''O''N''$ га ўтказади. (23), (24) га кўра $\angle MON \equiv \angle M''O''N''$, шу билан бирга улар бир хил ориентацияли бўлади. Бундан $R_2 R_1$ нинг биринчи тур ўхшашлик алмаштириши экан деган хулоса чиқади.

Шу каби ҳар қандай R_1 ўхшашлик алмаштиришига тесқари R_1^{-1} алмаштиришининг ўхшашлик алмаштириши эканига ишонч ҳосил қилиши мумкин.

Шундай қилиб, 1) $R_1, R_2 \in P_0 \Rightarrow R_2 R_1 \in P_0$, 2) $R_1 \in P_0 \Rightarrow R_1^{-1} \in P_0$. Демак, P_0 группа бўлиб, P группанинг қисм группаси. Ориентацияли бурчак катталиги бу группанинг асосий инвариантидир.

3. $H(S)$ текисликда S марказли барча ҳомотетиялар тўғлами бўлсин. H^k_s, H^k_s дар $H(S)$ тўғламнинг моҳ равишда k_1, k_2 коэффициентли икки ҳомотетия, M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. H^k_s ҳомотетия M нуқтани M' нуқтага, H^k_s ҳомотетия M' нуқтани M'' нуқтага ўтказсин. U ҳолда

$$\vec{SM}' = k_1 \vec{SM} \quad (25)$$

$$\vec{SM}'' = k_2 \vec{SM}'. \quad (26)$$

H_s^k, H_s^k гомотетияларнинг кўпайтмасидан иборат H_s^k, H_s^k алмаштириш M нуктани M'' нуктага ўтказди ва (25), (26) тенгликларга кўра

$$\overrightarrow{SM''} = k_2 k_1 \overrightarrow{SM}.$$

Бундан H_s^k, H_s^k алмаштиришнинг $k_2 k_1$ коэффициентли гомотетия эканини кўрамиз.

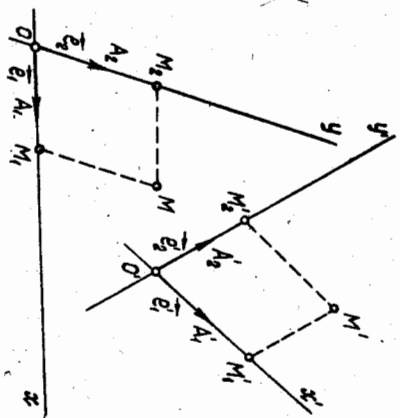
Шунингдек, текисликни H_s^k гомотетияга тексари f^{-1} алмаштириш M' нуктани M нуктага ўтказиши билан бирга $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{k_1} \overrightarrow{SM'}$ шартни ҳам қаноатлантиргани учун $y = \frac{1}{k_1}$ коэффициентли H_s^k гомотетиядир.

Шундай қилиб, 1) $H_s^k, H_s^k \in N(S) \rightarrow H_s^k, H_s^k \in N(S)$.

2) $\forall H_s^k \in N(S) \Rightarrow f^{-1} = H_s^k \in N(S)$. Демак, $N(S)$ гурппа бўлиб, у P гурппанинг қисм гурппасидир. Ориентацияли бурчакнинг катталиги бу гурппанинг асосий инвариантдир.

44-§. Аффин алмаштириш

Текисликда ихтиёрий нукта $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2)$, $\mathcal{B}' = (O', e_1', e_2')$ аффин реперни оламиз. Текисликнинг ихтиёрий M нуктаси \mathcal{B} реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлсин (120-чизма)



120-чизма

Т а ь р и ф. Текисликнинг \mathcal{B} реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлган M нуктасига \mathcal{B}' реперга нисбатан шу x, y координатали M' нуктасини мос келтирадиган алмаштириш текисликда аффин алмаштириш дейилади. Уни \mathcal{A} кўринишда белгилаймиз.

\mathcal{A} текисликда аффин алмаштириш бўлса, $\mathcal{A}: M(x, y) \rightarrow M'(x, y)$ бўлади. \mathcal{B} реперга нисбатан унинг координаталар боши O ва координата векторларининг охири A_1, A_2 нукталар ушбу координаталарга эга: $O(0, 0), A_1(1, 0), A_2(0, 1)$. Шу каби \mathcal{B}' реперда $O'(0, 0), A_1'(1, 0), A_2'(0, 1)$ бўлгани учун текисликда \mathcal{A} аффин алмаштириш O, A_1, A_2 нукталарни мос ҳолда O', A_1', A_2' нукталарга ўтказди: $\mathcal{A}(O) = O', \mathcal{A}(A_1) = A_1', \mathcal{A}(A_2) = A_2'$, яъни $\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$.

Текисликда бир жуфт $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ аффин реперни бериш билан \mathcal{B} ни

\mathcal{B}' га ўтказувчи \mathcal{A} алмаштиришга эга бўлди. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади. Текисликда аффин алмаштириш бир жуфт аффин репернинг берилиши билан тўлиқ аниқланади. Хусусий ҳолда \mathcal{B} декарт реperi, \mathcal{B}' эса шундай реперки, бунда $e_1 \perp e_2$ ва $|e_1| = |e_2| = k$ бўлса, бу $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар билан аниқланган $\mathcal{A}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ аффин алмаштириш k коэффициентли ўхшаш алмаштириш бўлади (42-§). Демак, ўхшаш алмаштириш аффин алмаштиришнинг хусусий ҳолидир.

\mathcal{A} аффин алмаштиришнинг хоссалари. Текисликда \mathcal{B} аффин алмаштириш $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2)$, $\mathcal{B}' = (O', e_1', e_2')$ аффин реперлар билан берилган бўлсин.

Аффин алмаштиришнинг қатор хоссаларини кўрайлик. 1°. \mathcal{A} алмаштиришда тўғри чиқикнинг образи тўғри чиқик бўлади.

Исбот. Текисликда бирор l тўғри чиқикни қараймиз. l тўғри чиқик \mathcal{B} реперда $Ax + By + C = 0$ тенглама билан аниқланган бўлсин. $\forall M \in l$ нуктанинг \mathcal{B} реперга нисбатан координаталари x, y бўлсин. Текисликда аффин алмаштириш M нуктани шундай M' нуктага ўтказадикки, \mathcal{B}' реперга нисбатан $M'(x', y')$ бўлади. \mathcal{B} реперда барча $M'(x, y)$ нукталарнинг координаталари $Ax + By + C = 0$ тенгламани қаноатлантиради. Бу тенглама тўғри чиқикни аниқлайди. Демак, l тўғри чиқикнинг образи l' — тўғри чиқикдир. ▲

2°. Аффин алмаштиришда параллел тўғри чиқикларнинг образлари параллел тўғри чиқиклар бўлади.

Исбот. l_1, l_2 тўғри чиқиклар

$$l_1: Ax + By + C_1 = 0, \quad (27)$$

$$l_2: Ax + By + C_2 = 0 \quad (28)$$

тенгламалар билан аниқланган ва $l_1 \parallel l_2$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

шарт бажарилди. l_1, l_2 тўғри чиқикларнинг текисликда \mathcal{A} аффин алмаштиришдаги l_1', l_2' образлари 1°. хоссага асосан мос равишда шу (27), (28) тенгламалар билан ифодаланганлидан улар учун ҳам параллеллик шarti бажарилди. Демак, $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_1' \parallel l_2'$. ▲

Бу хоссадан ушбу натижага эга бўламиз: текисликдаги аффин алмаштиришда кесилувчи тўғри чиқиклар кесилувчи тўғри чиқикларга ўтади. Шу билан бирга, тўғри чиқикларнинг кесилган нуктаси улар образларининг кесилган нуктасига ўтади.

3°. Аффин алмаштиришда тўғри чиқикдаги уч нуктанинг олдий нисбати сақланади.

Исбот. M_1, M_2, M_3 лар l тўғри чиқикнинг турли учта нуктаси бўлсин ва M_3 нукта йўналган $\overrightarrow{M_1 M_2}$ кесмени

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3) = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_3 M_2} \quad (*)$$

нисбатда бўлсин. Агар M_1, M_2, M_3 нуқталар \mathcal{B} реперада $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$ координаталарга эга бўлса, аффин алмаштириш таърифига кўра уларнинг M'_1, M'_2, M'_3 образлари \mathcal{B}' реперада $M'_1(x'_1, y'_1), M'_2(x'_2, y'_2), M'_3(x'_3, y'_3)$ координаталарга эга бўлади. У ҳолда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= (x_2 - x_1) \vec{e}_1 + (y_2 - y_1) \vec{e}_2, \\ \overrightarrow{M'_1 M'_2} &= (x'_2 - x'_1) \vec{e}'_1 + (y'_2 - y'_1) \vec{e}'_2, \\ \overrightarrow{M_2 M_3} &= (x_3 - x_2) \vec{e}_1 + (y_3 - y_2) \vec{e}_2, \\ \overrightarrow{M'_2 M'_3} &= (x'_3 - x'_2) \vec{e}'_1 + (y'_3 - y'_2) \vec{e}'_2. \end{aligned} \quad (30)$$

(30) тенгликлар ва (*) дан кўринадики, $\overrightarrow{M'_1 M'_2} = \lambda \overrightarrow{M_1 M_2} \Rightarrow M'_1 M'_2 = \lambda M_1 M_2$, яъни аффин алмаштириш тўғри чизикдаги уч нуқтанинг олдий нисбатини сақлайди, бу нисбат аффин алмаштиришнинг асосий инварианти бўлади. ▲

Бу ҳоссадан аффин алмаштиришда кесма кесмага, нур нурга, бурчак бурчакка, ярим текислик ярим текисликка ўтади деган натижа келиб чиқади. Шундай қилиб, \mathcal{B} текисликда \mathcal{B}' аффин реперлар билан аниқланган аффин алмаштириш бўлса, у $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ҳоссаларга эга бўлади. Энди бунинг тежариксини исботлаймиз.

Теорема. Агар текисликдаги бирор f алмаштиришда уч нуқтанинг *сдвий нисбати сақланса*, у аффин алмаштириш бўлади.

Исбот. Текисликда f алмаштириш тўғри чизикдаги уч нуқтанинг олдий нисбатини сақлагани учун бу алмаштиришда кесма кесмага, нур нурга, тўғри чизик тўғри чизикка, бир тўғри чизикда ётмаган уч нуқта бир тўғри чизикда ётмаган уч нуқтага ўтади, шу билан бирга f натижасида ўзаро параллел тўғри чизикларнинг образлари ҳам параллел бўлади.

Шунга кўра агар текисликда бирор $\mathcal{B} = (O, A_1, A_2)$ аффин реперни олсак ва текисликнинг ихтиёрий M нуқтаси бу репера нисбатан x, y координаталарга эга бўлса, яъни

$$\begin{aligned} x &= \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = \frac{\overrightarrow{M_1 O}}{\overrightarrow{OA_1}} = -\frac{\overrightarrow{M_1 O}}{\overrightarrow{OA_1}} = -(M_1 A_1, O), \quad y = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OA_2}} \\ &= -\frac{\overrightarrow{M_2 P}}{\overrightarrow{OA_2}} = -(M_2 A_2, O) \end{aligned}$$

бўлса, у ҳолда

$$f: \begin{cases} \mathcal{B} = (O, A_1, A_2) \rightarrow \mathcal{B}' = (O'_1 A'_1, A'_2), \quad M \rightarrow M', \\ M_1 \in OA_1 \rightarrow M'_1 \in O'_1 A'_1, \quad M_2 \in OA_2 \rightarrow M'_2 \in O'_1 A'_2, \\ M_1 M \parallel OA_2 \rightarrow M'_1 M' \parallel O'_1 A'_2, \quad M_2 M \parallel OA_1 \rightarrow M'_2 M' \parallel O'_1 A'_1 \end{cases}$$

бўлади (бу ерда $OA_1, O'A'_1, OA_2, O'A'_2, M_1 M, M'_1 M', M_2 M, M'_2 M'$ лар тўғри чизиклардир). M' нуқтанинг \mathcal{B}' репера нисбатан координаталари x', y' бўлсин десак, у ҳолда

$$x' = \frac{\overrightarrow{O'M'_1}}{\overrightarrow{O'A'_1}} = -(M'_1 A'_1, O') = -\frac{\overrightarrow{O'M_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = x.$$

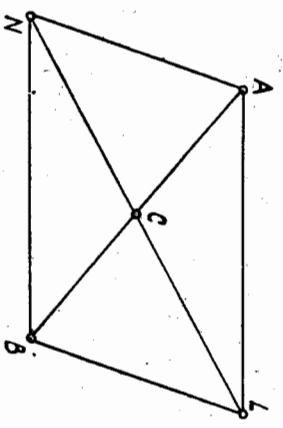
Худди шунингдек, $y' = y$ эканини кўрсатиш мумкин. Демак, M нуқта \mathcal{B} реперада x, y координаталарга эга бўлса, $M' = f(M)$ нуқта \mathcal{B}' реперада шу x, y координаталарга эга бўлипти. Бундан f нинг аффин алмаштириш экани кўринади. ▲

1-лемма. Текисликда тўғри чизикчи тўғри чизикка ўтказадиган ҳар қандай f алмаштиришда параллел тўғри чизикларнинг образлари параллел тўғри чизиклар бўлади.

Исбот. $a \parallel b (a \neq b)$ ва $f(a) = a', f(b) = b'$ бўлсин. У ҳолда, $a' \parallel b'$, акс ҳолда $a' \cap b' = M'$ десак, f текисликда ўзаро бир қийматли акслантириш бўлгани учун $f(M) = M'$ ва $a \cap b = M$ бўлади, бу эса фарзга зиддир. Демак, $f: a \parallel b \rightarrow a' \parallel b'$. ▲

2-лемма. Текисликда тўғри чизикчи тўғри чизикка ўтказадиган ҳар қандай f алмаштириш кесмининг ўртасини шу кесма образининг ўртасига ўтказайди.

Исбот. AB кесма берилган ва C нуқта унинг ўртаси бўлсин. $f: A \rightarrow A', B \rightarrow B'$ кесма. Диагонали AB кесмадан иборат бўлган ихтиёрий $ALVN$ параллелограмм ясаймиз (121-чизма).



121-чизма

Бу параллелограммнинг иккинчи LN диагонали AB кесманинг ўртаси C дан ўтади, яъни $AB \cap LN = C$. 1-леммага кўра ҳосил қилинган параллелограммнинг образи иккита қарама-қарши учи A', B' нуқталар бўлган $A'L'V'N'$ параллелограммдир; бу параллелограмм диагоналларининг кесилган нуқтаси C нуқтанинг образи C' бўлади, чунки $AB \cap LN = C \Rightarrow A'B' \cup L'N' = C'$ ва икки тўғри чизик биттадан ортқк бўлмаган нуқтада кесилгани учун $f(C) = C'$. Демак, C' нуқта $A'B'$ кесманинг ўртаси. ▲

Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади. Агар C_1, C_2, \dots, C_{n-1} нуқталар AB кесmani n та тенг бўлакка бўлса, у ҳолда уларнинг f алмаштиришдаги $C'_1, C'_2, \dots, C'_{n-1}$ образлари $A'B'$ кесmani n та тенг бўлакка бўлади, бу ерда $A' = f(A), B' = f(B)$.

Теорема. Тўғри чизикчи тўғри чизикка ўтказадиган ҳар қандай f алмаштириш аффин алмаштиришдир.

Исбот. f алмаштириш текисликдаги U тўғри чизикни l тўғри чизикка ўтказсин. f нинг аффин алмаштириш эканини кўрсатиш учун бу алмаштиришда уч нуктанинг олдий нисбати сақланишини кўрсатиш kiffoя. A, B, C лар тўғри чизикнинг турли учта нуктаси. A', B', C' эса мос равишда бу нукталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин, у ҳолда $A', B', C' \in l$. C нукта AB йўналган кесмани $\lambda = \frac{AC}{CB}$ нисбатда бўлсин (теоремани C нукта A ва B нукталар орасида ётган ҳол учун исботлаймиз). Фараз қилайлик. $\lambda = \frac{AC}{CB}$ рационал бўлсин, яъни $\lambda = \frac{p}{q}$, бу ерда p, q — бутун мусбаъ сонлар. AB кесмани $D_1, D_2, \dots, D_{p+q-1}$ нукталар билан $p + q$ та тенг бўлакка бўламиз, $\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q}$ бўлгани учун D_p нукта C

нукта устига тушадди. $D'_1, D'_2, \dots, D'_{p+q-1}$ нукталар $D_1, D_2, \dots, D_{p+q-1}$ нукталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин. У ҳолда 1-леммадан келиб чиққан натижага кўра $D'_1, D'_2, \dots, D'_{p+q-1}$ нукталар $A'B'$ кесмани $p + q$ та тенг бўлакка бўлади:

$$\overrightarrow{AD'_1} = \overrightarrow{D'_1D'_2} = \dots = \overrightarrow{D'_{p-1}D'_p} = \overrightarrow{D'_pD'_{p+1}} = \dots = \overrightarrow{D'_{p+q-1}D'_p}.$$

Шундай қилиб, $\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q} = \frac{A'C'}{C'B'}$ ёки $(AB, C) = (A'B', C'), \lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$ сон иррационал бўлган ҳол ҳам шу тартибда исботланади ([14] га қарайсн).

Бир жуфт $(A_1, A_2, A_3), (A'_1, A'_2, A'_3)$ нукталар учлигини қарайлик. Ҳар бир учликнинг нукталари бир тўғри чизикда ётмасин. Координатлар боши A_1 нукта ва бирлик векторлари $e_1 = \overrightarrow{A_1A_2}, e_2 = \overrightarrow{A_1A_3}$ бўлган \mathcal{B} нукта ва бирлик векторлари $e'_1 = \overrightarrow{A'_1A'_2}, e'_2 = \overrightarrow{A'_1A'_3}$ бўлган $\mathcal{B}' = (A'_1, e'_1, e'_2)$ реперни қараймиз. Бу реперлар билан улардан бирини иккинчисига ўтказувчи биргина аффин алмаштириш аниқланишини биз билгимиз. Ҳар бир учликнинг нукталари бир тўғри чизикда ётмагани учун улар учбурчакларни аниқлайди. Демак, текисликда иккинчи A_1, A_2, A_3 ва A'_1, A'_2, A'_3 учбурчаклар берилса, улардан бирини иккинчисига ўтказувчи аффин алмаштириш мавжуд. Таъриф. Агар текисликдаги икки фигурадан бирини иккинчисига ўтказадиган аффин алмаштириш мавжуд бўлса, бу фигуралар аффин эквивалент фигуралар дейилади.

Бу таърифга кўра текисликда берилган ҳар қандай икки учбурчак бир-бирга аффин эквивалент, шунингдек, берилган ҳар қандай икки параллелограмм аффин эквивалентдир. Энди ихтиёрий $ABCD$ тўртбурчакни қараймиз. E унинг AC, BD диагоналлариинг кесилган нуктаси бўлсин. Аффин алмаштириш $ABCD$ тўртбурчакни шундай $A'B'C'D'$ тўртбурчакка ўтказадикки, E нукта AC ва BD кесмаларни қандай нисбатда бўлса, унинг E' образи $A'C'$ ва $B'D'$ кесмаларни ҳам худди шундай нисбатда бўлади, яъни (3-хоссага кўра)

$$(AC, E) = (A'C', E'), (BD, E) = (B'D', E'). \quad (31)$$

Аксинча, иккита $ABCD, A'B'C'D'$ тўртбурчак учун (31) бажарибса, улардан бирини иккинчисига ўтказадиган аффин алмаштириш мавжуд (теоремага қаранг). Демак, ихтиёрий иккита $ABCD, A'B'C'D'$ тўртбурчак аффин эквивалент бўлиши учун (31) шартнинг бажарилиши зарур ва етарли, бунда E, E' мос равишда бу тўртбурчаклар диагоналлариинг кесилган нукталари.

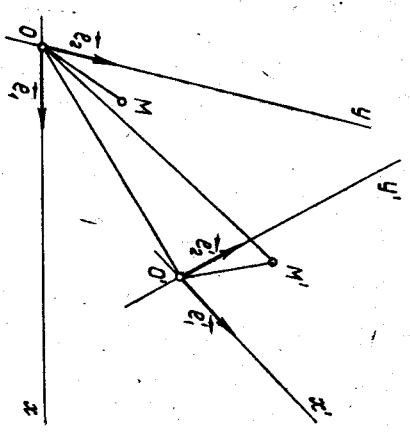
45-§. Аффин алмаштиришнинг аналитик ифодаси

Текисликда ихтиёрий иккита $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2), \mathcal{B}' = (O', e'_1, e'_2)$ аффин реперни қараймиз (22-чизма). Улар текисликда бирор $\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ алмаштиришни аниқлайди.

\mathcal{B} реперга нисбатан M нуктанинг координатларини x, y билан, унинг $M' = \mathcal{A}(M)$ образининг координатларини эса x', y' билан белгилаймиз. Аффин алмаштириш таърифига кўра M' нукта \mathcal{B}' реперга нисбатан x', y' координатларга эга.

\mathcal{B}' реперининг e'_1, e'_2 координата векторлари \mathcal{B} реперга нисбатан $e_1(a_1, a_2), e_2(b_1, b_2)$ координатларга эга, яъни

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2, \end{cases} \quad (32)$$



122-чизма

c_1, c_2 эса O' координатлар бошининг \mathcal{B} реперга нисбатан координатлари бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{OM'} = x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2, \overrightarrow{O'M'} = x \vec{e}'_1 + y \vec{e}'_2, \overrightarrow{OO'} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2. \quad (33)$$

Лекин

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}. \quad (34)$$

(32), (33) тенгликларни эътиборга олсак, (34) тенгликдан ушбу муносабатни ҳосил қиламиз:

$$x' \vec{e}_1 + y' \vec{e}_2 = (a_1 x + b_1 y + c_1) \vec{e}_1 + (a_2 x + b_2 y + c_2) \vec{e}_2$$

бундан

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2. \end{cases} \quad (35)$$

\vec{e}'_1, \vec{e}'_2 векторлар коллинеар бўлмагани учун (35) формулаларда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (36)$$

Шундай қилиб, текисликдаги \mathcal{A} алмаштиришда \mathcal{B} реперга нисбатан $M' = \mathcal{A}(M)$ нуқтанинг координаталари M нуқтанинг координаталари орқали (36) шарт бажарилганда (35) формулалар бўйича ифодаланади.

Аксинча, текисликни бирор f алмаштириш (35) формулалар билан аниқланган ва унда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлсин. Бу алмаштиришнинг

аффин алмаштириш эканлини кўрсатамиз. Шу мақсадда \mathcal{B} реперга нисбатан $Ax + By + C = 0$ тенглама билан аниқланган (бунда A, B нинг камида бири нолдан фарқли) бирор l тўғри чизикни олаемиз.

f алмаштириш l тўғри чизикни l' фигурата ўтказаяди, l' фигуранинг тўғри чизик эканлини кўрсатсак, мақсадга эришган бўламиз (35) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = x' - c_1, \\ a_2 x + b_2 y = y' - c_2, \end{cases}$$

бу ерда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлгани учун бу система биргаликда, уни ечиб, x, y ни топамиз:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} x' - \frac{b_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} y' - \frac{b_1 c_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y &= -\frac{a_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} x' + \frac{a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} y' + \frac{c_1 a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (37)$$

(37) дан x ва y нинг қийматларини $Ax + By + C = 0$ га қўйиб ихчамласак,

$$\frac{(Ab_2 - Ba_2)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} x' + \frac{(Ba_1 - Ab_1)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} y' + \frac{A \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + \frac{B \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + C = 0$$

ёки

$$(Ab_2 - Ba_2) x' + (Ba_1 - Ab_1) y' + \left(A \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) = 0. \quad (38)$$

(38) да $Ab_2 - Ba_2, Ba_1 - Ab_1$ сонларнинг камида бири нолдан фарқли, чунки акс ҳолда

$$Ab_2 - Ba_2 = 0, Ba_1 - Ab_1 = 0$$

тенгликлардан $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ бўлгани учун $A = B = 0$ келиб чиқади. Бу эса қилинган фаразга зид, чунки $A^2 + B^2 \neq 0$. Шундай қилиб (38) тенглама (\vec{u} зарувчи x, y ларга нисбатан биринчи даражали бўлгани учун) тўғри чизикнинг тенгламасидир. Демак, l' фигурата — тўғри чизик.

Биз қуйидаги фактни исботлашга муваффақ бўлдик: ҳар қандай аффин алмаштириш координаталарда (35) чизикли формулалар бўйича ифодаланади, бунда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (*)$$

ва, аксинча (35) чизикли формулалар (*) шартда ҳар вақт текисликдаги аффин алмаштиришни ифодалайди.

Аффин алмаштиришга мисоллар.

1. Текисликда шундай иккита $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $\mathcal{B}' = (O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$

аффин реперларни қарайлик, бунда $\vec{e}'_1 = k \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = k \vec{e}_2$ бўлсин. Бу икки аффин репер бирор \mathcal{A} аффин алмаштиришни аниқлайди, яъни $\mathcal{A}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$; бу вақтда $\forall M$ ва $M' = \mathcal{A}(M)$ нуқталар учун

$$\vec{OM} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2, \quad \vec{OM}' = x \vec{e}'_1 + y \vec{e}'_2 = kx \vec{e}_1 + ky \vec{e}_2 = k \vec{OM}.$$

Ҳар қандай M, M' мос нуқталар жупфи учун $\vec{OM}' = k \vec{OM}$ шартни қаноатлантирадиган алмаштириш текисликда O марказли ва k коэффициентли гомотетия эди (40-§, 3-таъриф). Демак, гомотетия аффин алмаштиришидир.

2. \mathcal{A} алмаштириш $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $\mathcal{B}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ аффин реперлар билан аниқланган бўлсин. \vec{u} ҳолда ҳар қандай M нуқта ва унинг \mathcal{A} алмаштиришдаги M' образи учун

$$\vec{OM} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2, \quad \vec{O'M}' = x \vec{e}'_1 + y \vec{e}'_2 \Rightarrow \vec{OM} = \vec{O'M}'.$$

Лекин

$$\vec{MM}' = \vec{MO} + \vec{OO}' + \vec{O'M}' = \vec{OO}'.$$

Ҳар қандай M, M' мос нуқталар жупфи учун $\vec{MM}' = \vec{OO}'$ шартни қаноатлантирадиган алмаштириш текисликда \vec{OO}' вектор қадар-

46-§. Текисликдаги аффин алмаштиришлар группаси ва унинг қисм группалари

А орқали текисликнинг барча аффин алмаштиришлари туپламини белгилыймиз. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ эса A туپладан олинган ихтиёрый икки аффин алмаштириш бўлсин. $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2)$ текисликдаги бирор аффин репер, M текисликнинг ихтиёрый нуқтаси бўлиб, унинг \mathcal{B} реперга нисбатан координаталари x, y бўлсин. \mathcal{A}_1 алмаштириш \mathcal{B} ни $\mathcal{B}' = (O', e', e_2)$ аффин реперга, M нуқтани M' нуқтага ўтказсин, \mathcal{A}_2 эса \mathcal{B}' реперни $\mathcal{B}'' = (O'', e_1', e_2')$ аффин реперга, M' нуқтани M'' нуқтага ўтказсин, у ҳолда аффин алмаштиришнинг таърифига кўра

$$M(x, y)_{\mathcal{B}} \Rightarrow M'(x, y)_{\mathcal{B}'}, M'(x, y)_{\mathcal{B}'} \Rightarrow M''(x, y)_{\mathcal{B}''}. \quad (40)$$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ алмаштиришларнинг $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$ кўнайтмаси ҳам текисликдаги алмаштиришдир. $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1: M \rightarrow M'', \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''$ ва (40) га асосан $M(x, y)_{\mathcal{B}} \Rightarrow M''(x, y)_{\mathcal{B}''}$ бундан $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$ нинг аффин алмаштириш эканлиги кўринади.

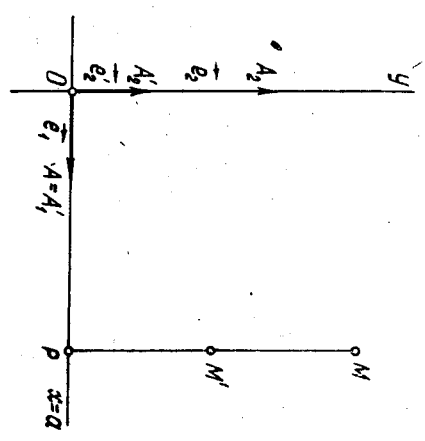
Текисликдаги $\forall \mathcal{A}_1$ аффин алмаштириш \mathcal{B} реперни \mathcal{B}' реперга, $\forall M(x, y)_{\mathcal{B}}$ нуқтани $M'(x, y)_{\mathcal{B}'}$ нуқтага ўтказганда унга тескари f^{-1} алмаштириш \mathcal{B}' реперни \mathcal{B} реперга ва $M'(x, y)_{\mathcal{B}'}$ нуқтани $M(x, y)_{\mathcal{B}}$ нуқтага ўтказди. Бундан f^{-1} нинг аффин алмаштириш эканлиги келиб чиқди. Шундай қилиб, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in A \Rightarrow \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1 \in A$ ва $\mathcal{A}_1 \in A \Rightarrow f^{-1} = \mathcal{A}_1^{-1} \in A$. Группа таърифига кўра A туپлам группаси дейлади. Бу группанинг асосий инварианти туғри чизикдаги уч нуқтанинг олдий нисбатидир. Текисликдаги ўхшаш алмаштиришлар группаси P аффин алмаштиришлар группасининг қисм группасидир (43-§).

47-§. Инверсия, унинг аналитик ифодаси ва хоссаляри

Биз юқорда кўриб ўтган барча алмаштиришлар (аффин алмаштириш ва унинг хусусий ҳоллари, ўхшаш алмаштириш, ҳаракат) чизикли алмаштиришлардир, чунки бу алмаштиришларда туғри чизикнинг образи туғри чизик эди. Булардан талқари, шундай алмаштиришлар ҳам борки, уларда туғри чизикнинг образи ҳар вақт туғри чизик бўлавермайди. Бундай алмаштиришларга мисол сфердаги инверсия билан танишамиз.

Текисликда O марказли ва r радиусли (O, γ) айланани оламиз. Таъриф. (O, γ) айлана ётган текисликнинг O дан бошққа¹ ҳар бир M нуқтасига OM нурда ётувчи ва

¹ $O=M$ бўлганда \vec{OO} ноль векторнинг ҳар қандай векторга кўнайтмаси ноль вектор бўлиб, (41) шартин қаноғлантирувчи ҳеч қандай M нуқта маъжуд бўлмайди.



123-чизма

$$\vec{OM} = x e_1 + y e_2, \vec{OM}' = x e_1' + y e_2' = x e_1 + y e_2 \quad (39)$$

муносабатларни ёза оламиз. (39) муносабатлардан кўринадики, \mathcal{B} реперда M, M' нуқталар ушбу координаталарга эга: $M(x, y), M'(x, y)$. Бундан эса $Ox = a$ туғри чизикнинг нуқталари \mathcal{A} алмаштиришда қўзғалмас деган хулоса келиб чиқди.

$$\vec{MM}' = \vec{OM}' - \vec{OM} = (\lambda - 1) y e_2 \Rightarrow \vec{MM}' \parallel e_2 \Rightarrow \vec{MM}' \perp Ox.$$

MM' туғри чизик билан $Ox = a$ туғри чизикнинг кесилган нуқтасини P билан белгилыйлик.

\mathcal{B} реперда $P(x, 0)$ бўлади, у ҳолда $\vec{MP} = -y e_2, \vec{PM}' = \lambda y e_2$, бу икки тенгликдан

$$\vec{MP} = -\frac{1}{\lambda} \vec{PM}', \text{ ёки } \vec{PM}' = \lambda \vec{MP}$$

муносабатга эга бўламиз. Шундай қилиб, қаралаётган \mathcal{A} аффин алмаштириш ушбу хоссалярга эга:

- 1) $Ox = a$ туғри чизикнинг ҳар бир нуқтаси қўзғалмас;
- 2) Ox га тегишли бўлмаган ҳар бир M нуқтага мос M' нуқта учун ушбу икки шарт бажарилди:
 - а) $MM' \perp Ox = a$;
 - б) ҳар бир $P = MM' \cap Ox$ нуқта MM' кесмени бир хил $(-\frac{1}{\lambda})$ нисбатда бўлади.

Шундай хоссалярга эга бўлган аффин алмаштиришни $\lambda < 1$ бўлганда текисликни $Ox = a$ туғри чизикка қиспиш, $\lambda > 1$ бўлганда текисликни $Ox = a$ туғри чизикдан қўзиш деб аталади. Бунда λ қиспиш ёки қўзиш коэффициентидир.

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}' = r^2 \quad (41)$$

шарти қаноатлантирувчи M' нуктани мос келтирилган алмаштириш *инверсион алмаштириш* ёки *инверсия* дейилади. (O, r) айлана *инверсия айланаси*, унинг O маркази *инверсия маркази*, радиуси эса *инверсия радиуси* дейилади. (O, r) айланaga нисбатан инверсияни u_0 кўринишда белгиланади.

Инверсия таврифта кўра мос M, M' нукталар битта OM нурда ётгани учун

$$\overrightarrow{OM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{OM}' \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}' = |\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OM}'|.$$

Шунга кўра (41) шартни $OM \cdot OM' = r^2$ кўринишда ёзиш ҳам мумкин.

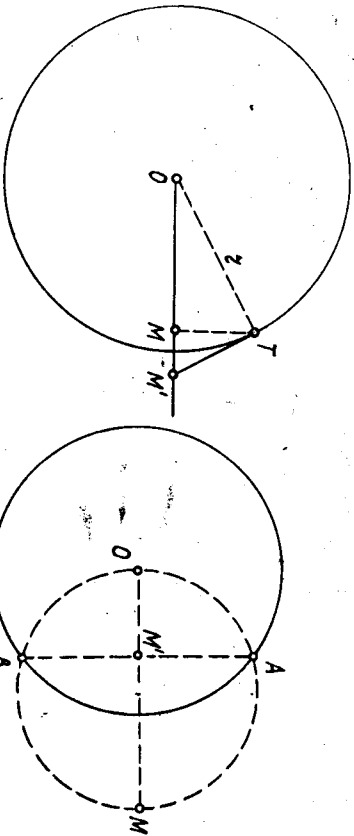
Х бирор тўтлаб G_x унинг бирор алмаштиришлар тўплами бўлсин $f \in G_x$ ни олайлик. $f \neq E_0$ бўлсин. Бу шартда $ff = E_0$ бўлса, f *инволюцион алмаштириш* дейилади. Юқорида кўрилган алмаштиришлардан ўққа нисбатан симметрия, марказий симметрия инволюцион алмаштириш мисолларидир.

Инверсия ҳам инволюцион алмаштиришдир. Ҳақиқатан, (O, r) айланaga нисбатан u_0 инверсия M нуктани M' нуктага ўтказсин. Таврифта кўра 1) M' нукта OM нурга тегишли, 2) $OM \cdot OM' = r^2$. Шу айланaga нисбатан иккинчи марта u_0 инверсия M' нуктани M'' нуктага ўтказсин дейлик, у ҳолда 1) M'' нукта OM' нурга тегишли, 2) $OM' \cdot OM'' = r^2$ бўлиб,

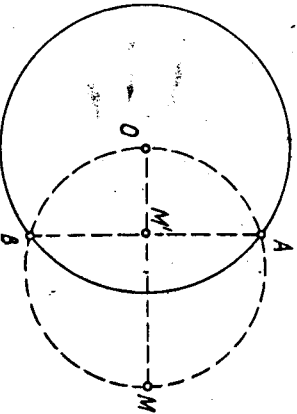
$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}' \Rightarrow M'' = M \Rightarrow u_0 \cdot u_0 : M \Rightarrow M.$$

Демак, икки қарра инверсия айнан алмаштириш демакдир.

Нуктага инверсион нуктани топиш. 1. Берилган M нукта (O, r) инверсия айланаси билан аниқланган доирата тегишли бўлсин (124-чизма). M нукта орқали OM нурга перпендикуляр қилиб l тўғри чизикни ўтказамиз. $l \cap (O, r) = T$ бўлсин. T нуктада



124-чизма



125-чизма

(O, r) айланaga l урингани ўтказамиз. Унинг OM нур билан кесилган нуктаси M' бўлсин. M' нукта M га инверсион мос нукта бўлади, яъни $M' = u_0(M)$, чунки 1) M' нукта OM нурга тегишли; 2) тўғри бурчакли OTM, OTM' учбурчаклар ўхшаш бўлгани учун

$$\frac{OM}{OT} = \frac{OT}{OM'} \Rightarrow OM \cdot OM' = |OT|^2 = r^2.$$

2. Берилган M нукта (O, r) инверсия айланасига нисбатан ташқи нукта бўлсин (II 606, 22-§ га қаралсин). Унга инверсион нукта кўйилгача топилади. OM кесмени диаметр қилиб, ёрдамчи айлана чизилади (125-чизма). Икки айлананинг кесилган A, B нукталарини туташтирувчи AB вагаринг OM нур билан кесилган нуктаси M' изланган нукта бўлади. Ҳақиқатан, M' нукта OM нурга тегишли ва OA билан OB тегишли $\triangle OAM$ тўғри бурчакли ҳамда AB ва OM тўғри чизиклар перпендикуляр бўлгани учун $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.

3. Агар берилган M нукта инверсия айланасида ётса, унга мос нукта шу нуктанинг ўзи бўлади, чунки $M \in (O, r) \Rightarrow OM = r$, у ҳолда (41) га асосан $OM' = r$ ва M' нукта OM нурга тегишли эканлига кўра $M' = M$. Демак, инверсия айланасининг ҳар бир нуктаси бу инверсияда инвариант нукта бўлади.

Инверсиянинг аналитик ифодаси. Координатлар боши инверсия айланасининг маркази сифатида бўлган ҳолни қарайлик.

M текислиқнинг ихтиёрий нуктаси, M' эса унинг u_0 даги образи бўлсин. $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ реперга нисбатан $M(x, y), M'(x', y')$ дейлик. x', y' координатларни x, y орқали ифодалайлик. $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}'$ векторлар коллинеар бўлгани учун

$$\overrightarrow{OM}' = \lambda \overrightarrow{OM} \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (42)$$

$$(41) \Rightarrow \lambda OM^2 = r^2 \Rightarrow \lambda = \frac{r^2}{OM^2} \Rightarrow \overrightarrow{OM}' = \frac{r^2}{OM^2} \cdot \overrightarrow{OM}; \quad (43)$$

$$(43) \Rightarrow x' \vec{i} + y' \vec{j} = \frac{r^2}{x^2 + y^2} (x \vec{i} + y \vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} r^2, \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} r^2 \end{cases} \quad (44)$$

(44) инверсион алмаштириш формуласидир.

Инверсиянинг хоссадари. 1°. Текислик нукталарини инверсион алмаштиришда: а) инверсия айланасининг нукталари ўзи ўзига ўтади; б) инверсия айланаси ташқарисидagi нукталар инверсия айланаси ичидagi нукталарга, инверсия айланаси ичидagi (марказдан бошқа) нукталар инверсия айланаси ташқарисидagi нукталарга ўтади.

Исбот. Агар M нукта инверсия айланасидан ташқарида ётса, у ҳолда $OM > r$ бўлиб

$$OM \cdot OM' = r^2 \quad (45)$$

муносабат ўринли бўлиши учун $OM' < r$ бўлиши, яъни M' нукта (O, r) айлана ичда ётиши шарт. Агар M нукта инверсия айланаси ичда ётса, $OM < r$ бўлиб, (45) муносабатга кура $OM' > r$ бўлиши, яъни M' нукта (O, r) айлана ташқарисда ётиши шарт. ▲

2°. Инверсия марказидан ўтувчи тўғри чизиққа инверсион мос фигура шу тўғри чизиқнинг ўзидир.
Исбот. 1 тўғри чизиқ инверсия маркази O дан ўтсин. Ҳ $M \in l$ нуктага инверсион M' нукта учун $M' \in OM$ (OM —нур) шарт бажарилигани сабабли $M' \in l$ бўлади $\Rightarrow l$ тўғри чизиқ ўз-ўзига ўтади. ▲
3°. Инверсия марказидан ўтмайдиغان тўғри чизиққа мос фигура инверсия марказидан ўтувчи айлана бўлади.
Исбот. 1 тўғри чизиқ инверсия марказидан ўтмасин ва

$$Ax + By + C = 0 \quad (C \neq 0) \quad (46)$$

тенглама билан аниқланган бўлсин. Инверсиянинг (44) аналитик ифодасидан x, y ни x', y' орқали ифодалаймиз:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{r^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{r^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{r^4}{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{r^4}{x'^2 + y'^2}$$

Бундан

$$x = \frac{(x^2 + y^2) \cdot x'}{r^2} = \frac{r^4 \cdot x'}{(x'^2 + y'^2) r^2} = \frac{r^2}{x'^2 + y'^2} x';$$

$$y = \frac{(x^2 + y^2) y'}{r^2} = \frac{r^4 \cdot y'}{(x'^2 + y'^2) r^2} = \frac{r^2}{x'^2 + y'^2} y'. \quad (47)$$

(46) даги x, y ўрнига (47) дан $x = \frac{r^2}{x'^2 + y'^2} x', y = \frac{r^2}{x'^2 + y'^2} y'$ қий-маглрни қўйиб, ихчамлашсак, қуйидагичини ҳосил қиламиз:

$$C(x'^2 + y'^2) + r^2(Ax' + By') = 0$$

ёки

$$\left(x' + \frac{Ar}{2C}\right)^2 + \left(y' + \frac{Br}{2C}\right)^2 = \left(\frac{r^2 \sqrt{A^2 + B^2}}{2C}\right)^2$$

Бу тенглама маркази $\left(-\frac{Ar}{2C}, -\frac{Br}{2C}\right)$ нуктада радиуси $\frac{r^2 \sqrt{A^2 + B^2}}{2C}$

га тенг айланани ифодалайди, фақат ундан O нуктани чиқариш керак. Шундай қилиб, инверсия маркази O дан ўтмаган тўғри чизиққа инверсион мос фигура инверсия марказидан ўтувчи (O нуктасиз) айлана экан. ▲

Инверсиянинг инволюцион хоссатга эгаллиги сабабли инверсия маркази O дан ўтувчи (O нуктасиз) айлананинг образи O нуктадан ўтмайдиغان тўғри чизиқдан иборат.

4°. Инверсия марказидан ўтмайдиغان айлананинг образи O нуктадан ўтмайдиغان тўғри чизиқдан ўтмайдиغان айланадир.
Исбот. (O', R) айланани қараймиз, унинг тенгламаси

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (48)$$

бўлсин. Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad (49)$$

$$a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - R^2.$$

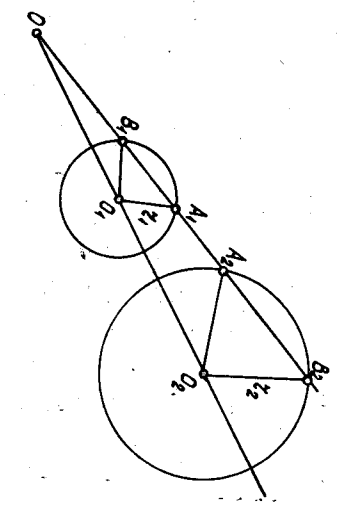
(49) айлана O нуктадан ўтмасин, яъни $c \neq 0$ бўлсин. (49) айлананинг u_0^2 даги образини топиш учун x, y нинг (47) дан аниқланган қиймагларини (49) га қўйсак,

$$\left(\frac{r^2 x'}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{r^2 y'}{x^2 + y^2}\right)^2 + a \left(\frac{r^2}{x^2 + y^2} x'\right) + b \left(\frac{r^2}{x^2 + y^2} y'\right) + c = 0 \Rightarrow c(x'^2 + y'^2) + r^2(ax' + by') + r^4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 + \frac{r^2}{c}(ax' + by') + \frac{r^4}{c} = 0.$$

Бу тенглама билан O нуктадан ўтмайдиغان айлана аниқланади. Демак, инверсия марказидан ўтмайдиغان айлана инверсия марказидан ўтмайдиغان айланани алмаштиради. ▲

5°. (O_2, r_2) айлана (O_1, r_1) айлананинг u_0^2 инверсиядаги образи бўлсин.



126-чизма

$A_1 \in (O_1, r_1)$ нуктани оламиз, $OA_1 \cap (O_1, r_1) = \{A_1, B_1\}$ бўлсин (126-чизма). Агар $u_0^2(A_1) = A_2, u_0^2(B_1) = B_2$ бўлса, у ҳолда $\{A_2, B_2\} = OA_1 \cap (O_2, r_2)$ бўлиб, O_1A_1 тўғри чизиқ O_2B_2 тўғри чизиққа ва O_1B_1 тўғри чизиқ O_2A_2 тўғри чизиққа параллел бўлади. $u_0^2(A_1) = A_2, u_0^2(B_1) = B_2$ бўлсин, у ҳолда $OA_1 \cdot OA_2 = r_1^2, OB_1 \cdot OB_2 = r_1^2$. Бундан

$$\vec{OA_1} \cdot \vec{OA_2} = \vec{OB_1} \cdot \vec{OB_2} = r_1^2. \quad (50)$$

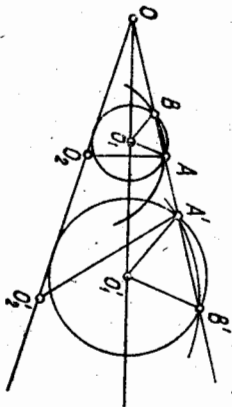
A_1, A_2, B_1, B_2 нукталар битта тўғри чизиқда ётгани учун $\vec{OB_2} \parallel \vec{OA_1}$ ва $\vec{OA_2} \parallel \vec{OB_1} \Rightarrow \vec{OB_2} = \lambda \vec{OA_1}$ ва $\vec{OA_2} = \mu \vec{OB_1}$, у ҳолда (50) дан $\mu \vec{OA_1} \cdot \vec{OB_1} = \lambda \vec{OA_1} \cdot \vec{OB_1}$, бундан $\lambda = \mu$ га эга бўлаемиз. $\vec{OB_2} = \lambda \vec{OA_1}, \vec{OA_2} = \lambda \vec{OB_1}$ тенгликлардан кўринадики, O марказли ва λ коэффициентли H_0^A гомотеция ҳам (O_1, r_1) айланани (O_2, r_2) айлананига ўтказди. Бунда $H_0^A(A_1) = B_2, H_0^A(B_1) = A_2, H_0^A(O_1) = O_2$ бўлади. Гомотецияда тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа ўтгани учун

$$O_1A_1 \parallel O_2B_2, O_1B_1 \parallel O_2A_2. \quad (51)$$

(51) муносабат бир жуфт инверсион мос айланаларга тегишли ва бир тўғри чизикда ётган икки жуфт мос нуқталар учун ўринли бўлган асосий хоссалар.

6°. Берилган икки чизик орасидаги бурчак¹ уларга инверсион мос чизиклар орасидаги бурчакка конгруэнт бўлади.

Бу хоссани қаралаётган чизиклар айланалар ёки тўғри чизиклар бўлган ҳол учун исботлаймиз.



127-чизма

Исбот. Инверсия маркази O дан ўтмаган $(O_1, r_1), (O_2, r_2)$ айланаларни қарайлик. $и_0$ инверсияда $(O_1, r_1), (O_2, r_2)$ айланаларнинг образлари мос равишда $(O'_1, r'_1), (O'_2, r'_2)$ айланалар бўлсин. Агар $A \in (O_1, r_1) \cap (O_2, r_2)$ ва $A' \in (O_1, r'_1) \cap (O_2, r'_2)$ бўлди (127-чизма).

Агар OA тўғри чизик (O_1, r_1) айлана билан A, B нуқталарда кесилса, 5° хоссага кўра O_1B ва O'_1A' тўғри чизиклар параллел бўлади. Бундан $\triangle OBO_1 \sim \triangle OA'O'_1$, у ҳолда

$$\angle OBO_1 \equiv \angle OA'O'_1. \quad (52)$$

$\triangle BO_1A$ тенг ёнли $\Rightarrow \angle ABO_1 \equiv \angle BAO_1$, у ҳолда

$$\angle OBO_1 \equiv \angle OA'A'. \quad (53)$$

(52), (53) дан

$$\angle O_1AA' \equiv \angle O'_1A'A. \quad (54)$$

ва бу бурчаклар қарама-қарши йўналган.

Худди шу каби O_2B ва O'_2A' тўғри чизиклар параллел бўлганидан

$$\angle O_2AA' \equiv \angle O'_2A'A \quad (55)$$

эканини келтириб чиқариш мумкин, бу бурчаклар ҳам қарама-қарши йўналган. (54), (55) тенгликлардан $\angle O_1AO_2 \equiv \angle O'_1A'O'_2$ ва улар қарама-қарши йўналган.

IV БОВ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛАР

23-§ да алгебраик чизик ва унинг тартиби тўғрисида тушунча келтирилган эди. 24—30-§ ларда биринчи тартибли алгебраик чизикнинг хоссаларини унинг тенгламасига асосланиб текширдик. Бу бобда иккинчи тартибли алгебраик чизикларнинг геометрик хоссаларини ўрганишга ўтамиз¹. Айрим «айниган ҳолларни» (икки тўғри чизикка айланмиб кетиш, мавҳум чизиклар ва ҳ.к.) назарга олмасак, Бу чизикларнинг тағайин қилинган (эллипс, гипербола, парабола). Даноқ очилган эди (Менехм, Аполлоний ва бошқалар, эрмиздан олдинги IV—III асрлар). Бу чизиклар астрономия, механика фанлари ва техникада кенг қўлланилади.

48-§. Эллипс

1. Тарриф. Каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтадан фокуслар деб аталувчи берилган икки F_1, F_2 нуқтагача бўлган масофалари йингилди берилган PQ кесма узунлигига тенг узунлиги фокуслар орасидаги масофадан катта².

Берилган кесманинг узунлигини $2a$ ($a > 0$) билан, фокуслар орасидаги масофани $2c$ ($c > 0$) билан белгилайлик. Таррифга кўра³ $a > c$. Эллипсдаги иккинчи M нуқтанинг F_1 ва F_2 фокуслардан масофаларининг фокал радиуслари дейилади ва мос равишда r_1, r_2 билан белгиланади, яъни

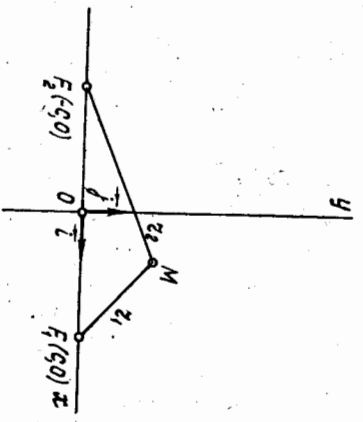
$$r_1 = \rho(F_1, M) \text{ ва } r_2 = \rho(F_2, M).$$

Эллипснинг таррифига кўра r_1, r_2 фокал радиусларнинг йингилдиси ўзармас бўлиб, берилган кесма узунлигига тенг, яъни

$$\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a \quad (1)$$

(1) тенглик эллипсга тегишли иккинчи нуқта учун ўринли бўлиб, уни координаталарда ифодалайлик.

Декарт реперини тенглама-



128-чизма

¹ Текисликдаги элементар аналитик геометрияда асосан 1-ва 2-тартибли алгебраик чизиклар ўрганилади, ҳолос.

² Берилган кесманинг узунлиги $(PQ = 2a)$ фокуслар орасидаги масофадан катта бўлмаган ҳолда эллипс мавжуд бўлмайди, чунки учбурчак қондасига кўра $\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) > \rho(F_1, F_2)$ ҳолда эллипс кесмага айланади.

³ $a = c$ ҳолда эллипс кесмага айланади.

нинг содда бўлишига имкон берадиган қилиб танлаймиз: абсолютсизлар ўқини фокуслар орқали F_2 дан F_1 га йўналтириб ўтказамиз. F_1, F_2 кесمانинг ўрта перпендикулярини 128-чизмада кўрсатилган йўналишда ординаталар ўқи деб оламиз. Танланган бу (O, i, j) реперда F_1 ва F_2 нуқталарнинг координаталари мос равишда $(c, 0)$ ва $(-c, 0)$ бўлади.

Эллипсдаги ихтиёрий M нуқтанинг координаталарини x, y билан белгиласак, икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

r_1, r_2 нинг (2) муносабатларидаги қийматларини (1) тенгликка қўйиб, ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3)$$

(3) тенглама танланган реперга нисбатан эллипснинг тенгламасидир. Чунки $M(x, y)$ нуқтанинг координаталари бу тенгламани фақат M нуқта эллипсга тегишли бўлган ҳолдагина қаноатлантиради.

(3) тенгламани *каноник тенглама* деб атагувчи кўринишга келтирамиз.

(3) тенгламанинг биринчи ҳаддини ўнг томонга ўтказиб, ҳосил бўлган тенгламанинг иккага томонини квадратга оширсак,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Бундан

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ёки

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Ҳосил қилинган тенгламанинг иккага томонини яна квадратга оширамиз:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

бундан

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (4)$$

$a > c \Rightarrow a^2 > c^2$, демак, $a^2 - c^2 > 0$, бу мусобат сонни b^2 деб олайлик:

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad (5)$$

у ҳолда (4) тенглик қуйидаги кўринишда ёзилди:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \quad (6)$$

(6) ни a^2b^2 га бўлиб, ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Энди (7) тенглама ҳақиқатан ҳам эллипсни ифодалашини нисбат қиламиз, чунки эллипс тенгламаси (3) кўринишда олинган эди. (7) тенглама (3) тенгламани икки марта радиқаллардан кўтқариш билан ҳосил қилинди. Демак, (7) тенглама (3) тенгламанинг натижаси, бошқача айтганда, координаталари (3) ни қаноатлантирадиган ҳар бир нуқта (7) тенгламани ҳам қаноатлантиради. Лекин (3) тенглама (7) тенгламанинг натижаси экани равшан эмас. (3) тенглама (7) тенгламанинг натижаси эканини кўрсатамиз.

$M_1(x_1, y_1)$ (7) тенгламани қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқта бўлсин, яъни

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

M_1 нуқта учун $r_1 + r_2 = 2a$ тенгликнинг бажарилишини кўрсатамиз.

M_1 нуқтанинг фокал радиуслари,

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad (9)$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}. \quad (10)$$

(8) тенгликдан $y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$, бу қийматни (9) ва (10) тенгликларга қўйиб,

$$r_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1^2 - 2cx_1 + (b^2 + c^2)}.$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1^2 + 2cx_1 + (b^2 + c^2)}$$

тенгликларга эга бўламиз. (5) муносабатдан $c^2 = a^2 - b^2$ ва $a^2 = a^2 - b^2 + c^2$, шунинг учун юқоридаги тенгликлар ушбу кўринишга олади:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{a} x_1 - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a} x_1 - a\right| = \left|a - \frac{c}{a} x_1\right|,$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{c}{a} x_1 + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a} x_1 + a\right| = \left|a + \frac{c}{a} x_1\right|. \quad (11)$$

Юқоридаги сабабларга кўра $0 < \frac{c}{a} < 1$, (8) тенгликдан $\Rightarrow |x_1| \leq a$.

У ҳолда $\frac{c}{a} |x_1| < a$, шунинг учун $a - \frac{c}{a} x_1 > 0$ ва $a + \frac{c}{a} x_1 > 0$. Буларни эътиборга олсак, (11) тенгликлар ушбу кўринишга олади:

$$r_1 = a - \frac{c}{a} x_1; \quad r_2 = a + \frac{c}{a} x_1. \quad (12)$$

(12) тенгликларни ҳадлаб қўшсак,

$$r_1 + r_2 = 2a$$

га эга бўламиз. Демак, координаталари (7) тенгламани қановатлантирадиган ҳар қандай $M_1(x_1, y_1)$ нукта эллипсга тегишли.

(7) тенглама эллипснинг каноник тенгламаси дейилади.

(12) тенгликлардан ушбу ҳулоса келиб чиқди: эллипснинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуктасининг r_1, r_2 фокал радиуслари бу нуктанинг эллипсга оққали

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x \text{ ва } r_2 = a + \frac{c}{a}x \quad (13)$$

кўринишда чиқиқди ифодаланади.

Агар хусусий ҳолда $a = b$ бўлса, эллипснинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 = a^2$$

кўринишга олади. Бу тенглама маркази координаталар бошида ва радиуси a га тенг айланани ифодалайди. Демак, айлана эллипснинг хусусий ҳоли. $a = b$ бўлганда $b^2 = a^2 - c^2$ дан $c = 0$. $c \neq 0$ бўлганда $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a > b$.

Мисол. Ҳар бир нуктасидан $F_1(4, 0), F_2(-4, 0)$ нукталаргача бўлган масофалар йигиндисининг 10 га тенг нукталар тўпламининг тенгламасини топинг.

Ечиш. Изланаётган нукталар тўплами берилишига кўра эллипсдир ва $2a = 10 \Rightarrow a = 5, c = 4, b^2 = a^2 - c^2$ муносабатдан $b^2 = 9, b = 3$. Демак, изланаётган эллипснинг каноник тенгламаси куйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7) \text{ каноник}$$

2. Эллипс шакли. Эллипснинг

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7) \text{ каноник}$$

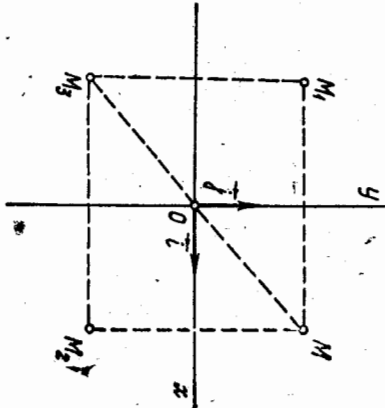
1. (7) тенгламадан кўринадики, эллипс иккинчи тартибли чизиқ. 2. Эллипс чегараланган чизиқ (агар фигуранинг барча нукталари бирор доирага тегишли бўлса, уни чегараланган фигурга деб аталади).

(7) тенгламадан кўриниб турибдики, унинг чап томонидаги ифода доимо мусбат бўлиб, ҳар бир ҳад куйидаги шартни қановатлантириши керак: $\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Бундан $|x| \leq a, |y| \leq b$.

Демак, (7) тенглама билан аниқланган эллипснинг барча нукталари томонлари $2a, 2b$ бўлган тўғри тўртбurchак ичига жойлашган.

3. (7) тенглама билан аниқланган эллипс координаталар ўқларига нисбатан симметрикдир. Ҳақиқатан, $M(x, y)$ шу эллипс-



нинг бирор нуктаси бўлса, яъни x, y сонлар (7) тенгламани қановатлантирса, у вақтда (7) тенгламада узгарувчи x, y нинг фақат квадратлари қатъийлигини учун бу тенгламани $M_1(-x, y), M_2(x, -y)$ ва $M_3(-x, -y)$ нукталарнинг координаталари ҳам қановатлантиради. M_1 нукта Oy ўққа нисбатан, M_2 нукта Ox ўққа нисбатан M нуктага симметрикдир (129-чизма). Шунинг учун координата ўқлари эллипснинг симметрия ўқларидир. Симметрия ўқларининг кесишган нуктаси $O(0, 0)$ эллипснинг маркази дейилади, фокуслар эган ўқи унинг фокал ўқи дейилади.

4. Эллипснинг координата ўқлари билан кесишган нукталарини толамиз. Масалан, Ox ўқ билан кесишган нукталарини топиш учун ушбу тенгламаларни биргаликда ечамиз:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases} \quad (14)$$

(14) системанинг иккинчи тенгламасидан $y = 0$ ни биринчи тенгламасига қўйсак, $x = \pm a$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, эллипс Ox ўқни $A_1(a, 0)$ ва $A_2(-a, 0)$ нукталарда кесди. Шу сингари эллипснинг Oy ўқ билан кесишган $B_1(0, b)$ ва $B_2(0, -b)$ нукталари топилади. Эллипснинг координата ўқлари билан кесишган нукталарини унинг y ва x дейилади. Эллипснинг тўртта учи бор, улар:

$$A_1, A_2, B_1, B_2.$$

A_1A_2 кесма ва унинг узунлиги $2a$ эллипснинг катта ўқи, OA_1 кесма ва унинг узунлиги a эса эллипснинг катта ярим ўқи дейилади. B_1B_2 кесма ва унинг узунлиги $2b$ эллипснинг кичик ўқи, OB_1 кесма ва унинг узунлиги b эса эллипснинг кичик ярим ўқи дейилади.

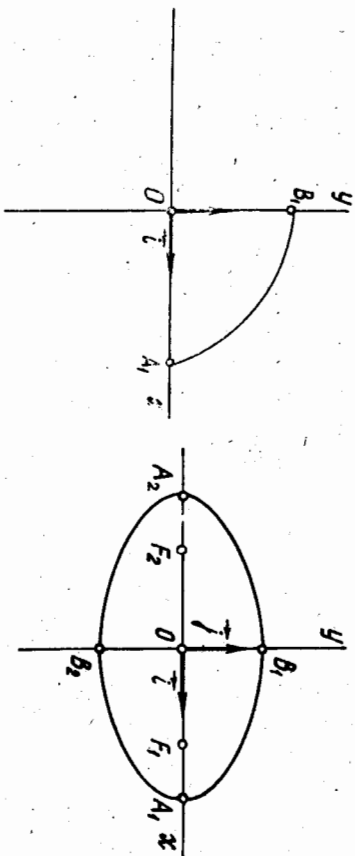
5. Энди (7) тенгламани y га нисбатан ечайлик:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (15)$$

Эллипс координата ўқларининг ҳар бирига нисбатан симметрик бўлгани учун унинг биринчи координата чоракда ётган қисмининггина текшириш етарли. Биринчи чоракдаги нукталар учун $x \geq 0, y \geq 0$ бўлиб, эллипснинг бу чоракдаги қисми учун

$$y = + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (16)$$

Бундан (16) функциянинг монотон камаювчи эканлиги ва $a^2 - x^2 \geq 0$ бўлиши, яъни $a^2 \geq x^2$ ёки $|x| \leq a$ бўлиши бевосита кўринади. Демак, фақат биринчи чоракда ш ш қўраётганимиз учун $x \leq a$. Юқоридаги ҳолларни эътиборга олсак, эллипснинг биринчи чоракдаги қисмини 130-чижда кўрсатишган B_1A_1 ёй деб тасаввур қилиш мумкин. Эллипснинг координата ўқларига нисбатан симметриклигидан фойдаланиб, унинг биринчи чоракда ҳосил қилинган қисми бўйича шаклини 131-чижадагидек тасаввур қилиш мумкин (131-чизма).



130-чизма

• 131-чизма

Эслагатма. Агар эллипснинг фокуслари ординаталар ўқида жойлашиб қолса, унинг каноник тенгламаси ҳам (7) кўринишида бўлади, бу ерда $b > a$.

3. Экцентриситет. Тарриф. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофанинг катта ўқининг узунлигига нисбати *эксцентриситет* дейилади ва эксцентриситет e ҳарфи билан белгиланади.

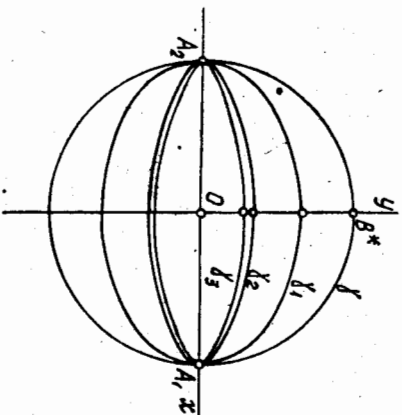
Тарифга кўра $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ ҳамда $c < a \Rightarrow 0 < e < 1$.

Эллипснинг эксцентриситети унинг шаклини аниқлашда муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, (5) дан $c^2 = a^2 - b^2$, шунинг учун

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

бундан

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$



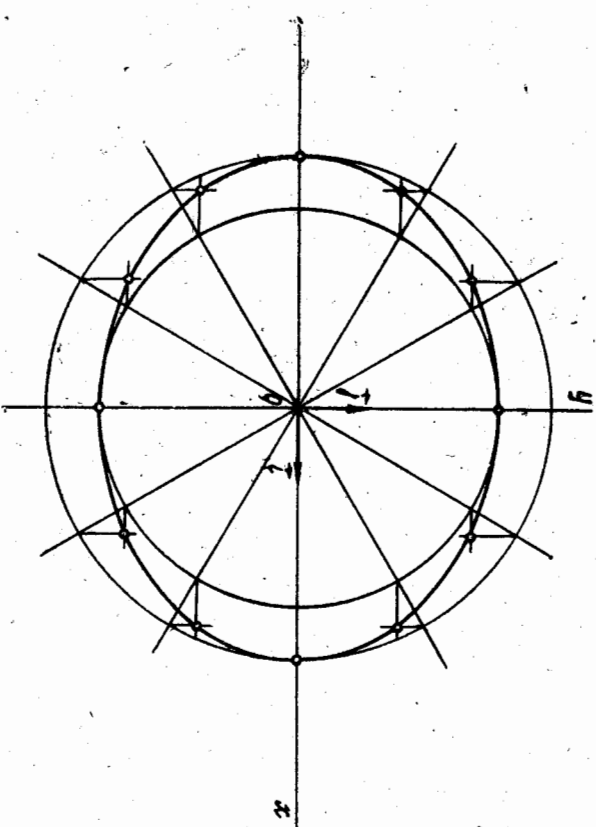
132-чизма

Эксцентриситет $e \rightarrow 1$ да (лекин $e < 1$) $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ бўлиб (бу ерда a ўзгармайди деб фарз қилнади), b кичиклашади ва эллипс Ox ўқига қисила боради, аксинча $e \rightarrow 0$ бўлса, $\frac{b}{a} \rightarrow 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b \rightarrow a$. Бу ҳолда эллипс айланата қарай боради. 132-чизмада γ айлана ва $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ эллипслар тасвирланган бўлиб, e_1, e_2, e_3 бу эллипсларнинг эксцентриситетлари: $e_1 > e_2 > e_3$.
Мисол. 1) $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$; 2) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; \text{ бу ерда } a_1 = 5, b_1 = 4, c_1 = \sqrt{25 - 16} = 3, e_1 = \frac{3}{5}, 9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a_2 = 5, b_2 = 3, c_2 = \sqrt{25 - 9} = 4;$$

$$e_2 = \frac{4}{5}, e_2 > e_1 \Rightarrow \text{биринчи эллипс иккинчисига нисбатан ўзининг}$$



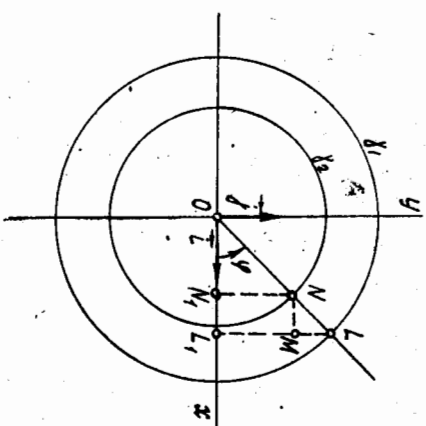
катта ўқига сиқилган, яъни чуқурроқ.

4. Эллипснинг фокал радиуслари. (7) эллипсдаги $M(x, y)$ нүктанинг фокал радиуслари (12) формулалар орқали ифодаланар эди.

$\frac{c}{a} = e$ эканини эътиборга олсак, бу формулалар куйидаги кўринишни олади:

$$r_1 = a - ex; r_2 = a + ex. \quad (17)$$

5. Эллипснинг яшаш, параметрик тенгламалар. Каноник тенгламаси билан берилган эллипснинг яшашни кўрсатай-



133-чизма

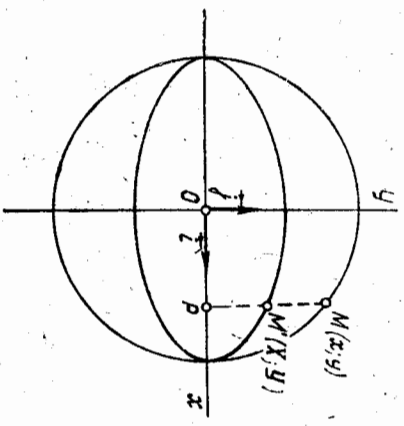
Марказлари координаталар бошида ва $a > b$ радиусли иккита γ_1, γ_2 айлана чизамиз (133-чизма). Координаталар бошидан иккинчи нур чикарайдик, унинг абсциссалар ўқига оғиш бурчати φ бўлиб, γ_1, γ_2 айланалар билан кесилган нуқталари L, N бўлсин.

L, N нуқталардан Oy ўққа параллел l, m тўғри чизиқларни ўтказамиз. $l \cap Ox = L_1, m \cap Ox = N_1$ бўлсин. N нуқтадан Ox ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, унинг l тўғри чизиқ билан кесилган M нуқтаси эллипснинг нуқтаси бўлади. Ҳақиқатан, M нуқтанинг координаталарини x, y десак, ушбу муносабатни ҳосил қиламиз:

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi \quad \frac{x}{a} = \cos \varphi, \frac{y}{b} = \sin \varphi,$$

бу тенгликларнинг ҳар иккала томонини квадратга оширамиз ва ҳаёлаб қўшсак, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow M$ нуқта эллипснинг нуқтасидир. O дан чиқарилган ҳар бир нур эллипсдаги нуқтани беради. $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi, \varphi = \frac{3}{2}\pi$ қийматларга эллипснинг учлари мос келади. φ нинг $0 < \varphi < \pi$ оралиқдаги қийматларида эллипснинг Ox ўқи билан четаралangan юқори ярим текисликдаги нуқталари, φ нинг $\pi < \varphi < 2\pi$ қийматларида эса, қуйи ярим текисликдаги нуқталари ҳосил бўлади. Фақат эллипс устида ётган $M(x, y)$ нуқталарнинг координаталарини

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (A)$$



тенгламалар системасини қановатлантирган учун бу система эллипсни аниқлайди. (A) тенгламалар эллипснинг параметрик тенгламалари дейлади. Бу тенгламалар эллипсни юқорида кўрсатилган усулда яшаш учун асос вазифасини бажаради.

6. Эллипс-айлананинг аффин образи. Теорема. Ҳар қандай эллипс билан айлананинг диаметрга қисми алмаштиришдаги образи деб қараши мумкин.

Исбот. Текисликдаги бирор (O, i, j) декарт реперига нисбатан маркази координаталар бошида ва радиуси a бўлган бирор айланани қараймиз (134-чизма):

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (18)$$

Текисликни $k = \frac{b}{a}$ коэффициент билан Ox ўққа қиспи алмаштириш-

ни бажарайлик (45-§). Натижда текисликнинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтаси шундай $M'(X, Y)$ нуқтага ўтдики, улар учун

$$\vec{PM}' = k \vec{PM} \quad (19)$$

бўлади, бунда MM' тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр ва $P = MM' \cap Ox, M, M', P$ нуқталар бир хил абсциссага эга ва $P \in Ox$ бўлгани учун (19) муносабат координаталарда ушбу кўринишда бўлади:

$$(X - x) i + (Y - 0) j = k[(x - x) i + (y - 0) j]$$

ёки

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{k} y \end{cases} \quad (1^*)$$

Текисликни $k = \frac{b}{a}$ коэффициент билан Ox ўққа қиспида (18) айланана мос келган чизиқнинг тенгламасини топиш учун (1^*) дан x, y нинг қийматларини (18) га қўямиз:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{k^2 a^2} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Бу тенглама ярим ўқлари a, b бўлган эллипсни ифодалайди. \Rightarrow айланани диаметрга қиспи алмаштиришда айлана эллипсга алмашияди. Тўғри чизиққа қиспи аффин алмаштириш бўлгани учун ҳар қандай эллипс билан айлананинг аффин образи деб қараш мумкин. \blacktriangle Мисол. $x^2 + y^2 = 16$ айланани Ox ўққа қиспи натijasида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипс ҳосил бўлган. Қиспи коэффициентини топинг. Е қиш. Эллипс тенгламасидан: $a = 4, b = 3, k = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$.

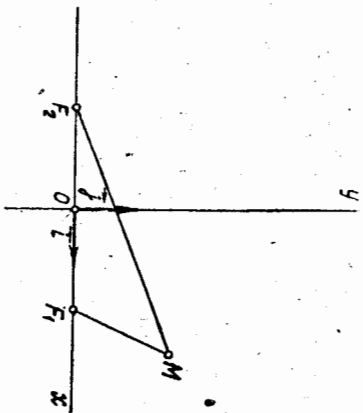
37 49-§. Гипербола

1. Тарриф. каноник тенглама. Текисликда ҳар бир нуқтасидан фокуслар деб атагувчи берилган икки F_1, F_2 нуқтагача бўлган масофалар айрмасининг абсолют қиймати берилган кесма узунлигига тенг бўлган барча нуқталар тўғрисида гипербола деб аталади.

Гипербола таррифидаги берилган кесма узунлигини $2a (a > 0)$ билан, фокуслари орасидаги масофани $2c (c > 0)$ билан белгилыймиз. Албатта

$$2a < 2c. \quad (1^*)$$

1. Учбурчак қондасига кўра икки айрмаси учунчи томондан кичик. Биз $a = 0$ ва $a = c$ дан иборат «айнган» ҳолларни қарамаймиз.



135-чизма

Гиперболадаги M нукта-
нинг F_1, F_2 гача масофалари
унинг *фокал радиуслари* де-
йилади ва r_1, r_2 билан белги-
ланади, яъни

$$r_1 = r(F_1, M), \quad r_2 = r(F_2, M).$$

Гиперболанинг таърифига
биноан

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (20)$$

(20) тенглик фақат гипербола-
да ётган M нукталар учунги-
на ўринли. Бу тенгликни ко-
ординаталарда ёзамиз. Бунинг
учун Декарт реперини эллипс

билан иш кўрганмишдек қилиб танлаймиз (135-чизма).
Фокуслар орасидаги масофа $r(F_1, F_2) = 2c$ бўлгани учун олин-
ган реперга нисбатан $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$. Шу реперга нисбатан
гиперболадаги ихтиёрий M нуктанинг координаталарини x, y билан
белгилайлик: $M(x, y)$. У ҳолда

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (21)$$

бўлиб, (20) ва (21) дан

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

ёки

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (22)$$

Гиперболани ифодаловчи (22) тенгламани соддароқ кўринишга кел-
тирайлик. (22) дан:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Бу тенгликнинг иккага томонини квадратга кўтариб, соддалаштира-
миз:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Бу тенгламани яна квадратга кўтариб, сўнгра соддалаштирсак,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (23)$$

$a^2 < c^2 \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$; бу айрмани b^2 билан белгилаймиз:

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (24)$$

У ҳолда (23) муносабатдан ушбу содда тенгламага келамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (25)$$

Демак, гипербола иккинчи тартибли чизикдир. (25) тенглама гипер-
болани ифодаловчи (22) тенгламанинг натижаси, шунга кўра коор-

динаталари (22) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир $M(x, y)$
нукта (25) тенгламани ҳам қаноатлантирилади.

Энди бунинг тескарисини исбот қилайлик. $M_1(x_1, y_1)$ (25) нук-
тани қаноатлантирувчи ихтиёрий нукта бўлсин, яъни

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (26)$$

M_1 нуктанинг F_1, F_2 фокуслардан масофалари:

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}. \quad (27)$$

(26) тенгликдан $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$. Бу қийматни (27) тенгликларга
қўйиб, $b^2 = c^2 - a^2$ муносабатни эътиборга олсак,

$$r_1 = \pm \left(\frac{c}{a}x_1 - a \right), \quad (28)$$

$$r_2 = \pm \left(\frac{c}{a}x_1 + a \right) \quad (29)$$

тенгликларга эътибор қиламиз, r_1, r_2 мусбат сонлар, шунга кўра қавслар
олдидаги ишораларни шундай танлаш керакки, (28) ва (29) тенглик-
ларнинг ўнг томонлари ҳам мусбат бўлсин. (26) дан $\Rightarrow |x_1| \geq a$. Бун-
дан ташқари, $c > a \Rightarrow \frac{c}{a} > 1$. У ҳолда, агар $x_1 \geq a$ бўлса, $\frac{c}{a}x_1 -$
 $- a > 0$ ва $\frac{c}{a}x_1 + a > 0$ бўлиб, (28) ва (29) тенгликлардаги қавс-
ларни + ишора билан оламиз, яъни

$$r_1 = \frac{c}{a}x_1 - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x_1 + a. \quad (30)$$

Бундан $r_1 - r_2 = \frac{c}{a}x_1 - a - \frac{c}{a}x_1 - a = -2a$; $x_1 \leq -a$ бўлса,
 $\frac{c}{a}x_1 - a < 0$ ва $\frac{c}{a}x_1 + a < 0$ бўлиб, (28), (29) тенгликлардаги қавс-
ларни — ишора билан оламиз, яъни

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x_1;$$

булардан

$$r_1 - r_2 = a - \frac{c}{a}x_1 + a + \frac{c}{a}x_1 = 2a. \quad (31)$$

Демак, (25) тенгламадан (22) тенглама келиб чиқади. Шундай қи-
либ (25) тенглама гиперболанинг тенгламасидир. (25) тенглама ги-
перболанинг *каноник тенгламаси* дейилади.

(30) ва (31) тенгламалардан қуйидаги натижа келиб чиқади: гипер-
боладаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуктанинг r_1, r_2 фокал радиуслари
унинг x абсциссаси орқали

$$x > 0 \text{ бўлганда } \Gamma_1 = \frac{c}{a}x - a, \Gamma_2 = \frac{c}{a}x + a, \quad (32)$$

$$x < 0 \text{ бўлганда } \Gamma_1 = a - \frac{c}{a}x, \Gamma_2 = -a - \frac{c}{a}x \quad (33)$$

кўринишларда чиқиқли ифодаланган.
 Мисол. Гиперболанинг $F_1(10, 0), F_2(-10, 0)$ фокусларини ва нуқталаридан бири $A(12, 3\sqrt{5})$ ни билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

Е чиш. Бу ерда

$$\Gamma_1 = \rho(F_1, A) = \sqrt{4 + 45} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\Gamma_2 = \rho(F_2, A) = \sqrt{484 + 45} = \sqrt{529} = 23.$$

$$|7 - 23| = 2a \Rightarrow a = 8.$$

Гипербола учун $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow b = 6$. Демак,

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

2. Гипербола шакли. Гиперболанинг

тенгламасига асосланиб унинг шаклини аниқлаймиз.

Эллипс тенгламаси устида олиб борилган муҳожамаларни такрорлаб гиперболанинг координаталар боши, координатда ўқларига нисбатан симметриклиги аниқланади.

Гипербола Ox ўқини $A_1(a, 0)$ ва $A_2(-a, 0)$ нуқталарда кеседи.

(25) тенглама билан аниқланган гипербола Oy ўқ билан кесилмайди.

Ҳақиқатан (25) тенгламата $x = 0$ ни кўйсак, $-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Равшанки, бу тенглик ҳақиқий сонлар соҳасида ўринли бўлмайди.

A_1, A_2 нуқталар *гиперболанинг учлари* дейилади. Шундай қилиб, гиперболанинг иккита учи бор экан. Гиперболанинг учлари орасидаги масофа унинг *ҳақиқий ўқи* дейилади.

Ординаталар ўқида O дан b масофада турувчи $B_1(0, b)$ ва $B_2(0, -b)$ нуқталарни белгилаймиз. $B_1B_2 = 2b$ ни гиперболанинг *маёҳуи* ўқи дейилади.

Агар $M(x, y)$ нуқта гиперболада ётса, унинг учун (25) тенгламадан: $|x| \geq a$. Демак, $x = \pm a$ тўғри чиқиқлар билан чегараланган маддан: $|x| \geq a$ погосада гиперболанинг нуқталари йўқ.

— $a < x < a$ погосада гиперболанинг нуқталари нисбатан ечанамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (34)$$

Бу тенгламадан кўринадики, x миқдор a дан $+\infty$ гача ортганда ва $-\infty$ дан $-\infty$ гача камайганда y миқдор $-\infty < y < +\infty$ оралиқ-

даги қийматларни қабул қилади. Демак, гипербола икки қисмдан иборат бўлиб, улар *гиперболанинг тармоқлари* дейилади.

Гиперболанинг бир (унг) тармоғи $x \geq a$ ярим текисликда, иккинчи (чан) тармоғи $x \leq -a$ ярим текисликда жойлашган.

Эслатмэ. Агар гиперболанинг фокуслари ординаталар ўқида жойлашган бўлса, унинг каноник тенгламаси $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ кўринишда бўлади.

3. Гипербола асимптоталари. Гиперболанинг шаклини яна ҳам аниқроқ тасаввур қилиш мақсадида текис (ясси) чиқиқининг *асимптотаси* тушуночасини киритамиз.

Тарриф. Агар $M \in \Gamma$ нуқта шу Γ чиқиқ бўйлаб ҳаракатланиб борганида унинг u тўғри чиқиққача бўлган масофаси нолга интибса, тўғри чиқиқ Γ чиқиқнинг *асимптотаси* дейилади.

Теорема. $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чиқиқлар $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг асимптоталаридир.

Исбот. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун гиперболанинг биринчи чоракдаги қисминингга олиш етарли. Шу мақсадда $x \geq a$ да гиперболанинг биринчи чоракдаги қисмини аниқлайдиган

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (35)$$

тенглама билан

$$y = \frac{b}{a}x \quad (36)$$

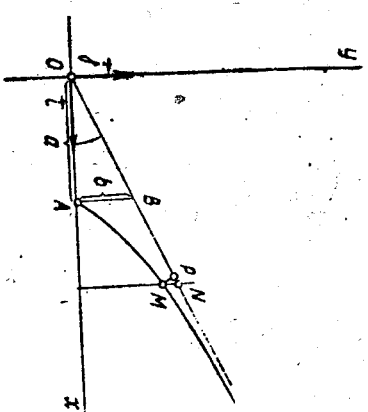
тенгламани солиштирамиз. $y = \frac{b}{a}x$ тўғри чиқиқ координаталар бошидан ўтади ва бурчак коэф-

фициенти $k = \frac{b}{a}$. 136-чизмада тўғри чиқиқнинг биринчи чоракдаги бўлган тасвирланган бўлиб, унда $OA = a, AB = b$. Гипербо-

да ва $y = \frac{b}{a}x$ тўғри чиқиқда мос равишда жойлашган бир хил асос-писсалли $M(x, y), N(x, y)$ нуқталарни қараймиз. Бу икки нуқтанинг мос ординаталари:

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, Y = \frac{b}{a}x$$

136-чизма



1 Барча нуқталари бирта текисликда ётган чиқиқ текис (ясси) чиқиқ деб аталади.

бўлади. MN кесмнинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y \Rightarrow Y > y$$

ёки $Y - y > 0$, демак, $r(M, N) = Y - y$. Лекин

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ёки

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Гиперболагаги M нуктадан (36) тўғри чизикқа туширилган перпендикулярнинг асоси P бўлсин, у ҳолда

$$r(M, P) < r(M, N) \Rightarrow r(M, P) < \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ ифодани тежширайлик. Унинг махражи чексиз ортти борувчи икки мүсбат қўшилувчининг йнғиндисидан иборат бўлиб, сурати эса ўзгармас ab миқдордир, демак,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

У ҳолда

$$r(M, P) < r(M, N) \text{ дан } r(M, P) \rightarrow 0.$$

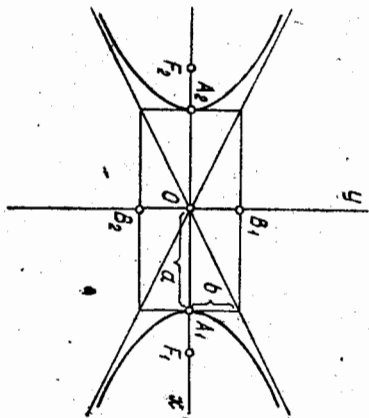
Демак, гиперболагаги M нукта гипербола бўйича ҳаракатланиб, унинг учидан етарлича узоклашса, M нуктадан (36) тўғри чизиккача бўлган масофа нолга интилади. Юқоридиги таърифта кўра гипербола-нинг қаралаётган қисми учун (36) тўғри чизик асимптота бўлади.

Гипербола-нинг координата ўқларига нисбатан симметрик-лигидан $y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чизик ҳам гипербола-нинг асимптотасидир. Шундай қилиб,

$$l = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x \quad (37)$$

тенгламалар билан аниқланадиган тўғри чизиклар гипербола-нинг асимптоталаридир (137-чизма).

Мисол. Асимптоталари $2x - y = 0$, $2x + y = 0$ тенгламалар билан берилган ва фокуслари марказдан 5 бирлик масофада бўлган гипербола-нинг каноник тенгламасини тузинг.



137-чизма

Е ч и ш. Берилган тенгламаларни $y = 2x$, $y = -2x$ кўринишда ёзиб олсак ҳамда (37) тенгламалар билан солиштирсак, $\frac{b}{a} = 2$ ёки

$b = 2a$ бўлади. Фокуслар марказдан 5 бирлик масофада бўлгани учун $c = 5$ бўлиб, $b^2 = c^2 - a^2$ тенгликдан фойдалансак, $4a^2 = 25 - a^2$. Бундан $a^2 = 5$, $a = \sqrt{5}$, у ҳолда $b = 2\sqrt{5}$. Шунларга асосан гипербола-нинг изланаётган тенгламаси:

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

4. Тенг томонли гипербола. Ярим ўқлари тенг бўлган гипербола *менг томонли* деб аталади.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ тенгламада } a = b \text{ бўлганда:}$$

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (38)$$

Тенг томонли гипербола асимптоталарининг тенгламалари $y = x$, $y = -x$ кўринишда бўлиб, улар ўзаро перпендикуляр. ($k_1 k_2 = -1$). Бу асимптоталарни янги координата ўқлари сифатида қабул қилсак, тенг томонли гипербола тенгламаси ўра мактаб курсида кўрилаган кичям $xu = a$ кўриниши олади.

Ҳақиқатан, Ox ўқ учун $y = -x$ асимптотани, Oy ўқ учун эса

$y = x$ асимптотани олсак, у ҳолда $\varphi = (\vec{i}, \vec{i}') = -45^\circ$.

Эски x, y координаталардан янги координаталарга ўтиш форму-ларидан (11 606, 19-§):

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Энди x, y координаталардан x', y' га ўтсак, тенг томонли ги-пербола-нинг янги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x'y' = \frac{a^2}{2} \text{ ёки } y' = \frac{a^2}{2x'}.$$

Мисол. $xu = 2$ гипербола тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Е ч и ш. Координаталар ёлини қўзғатмаган ҳолда координата ўқларини $+45^\circ$ бурувчака бурамиз:

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

x, y нинг бу қийматларини $xu = 2$ тенгламага қўямиз:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 2.$$

Солдлаштиригандан сўнг, ушбу каноник тенглама ҳосил бўлади:

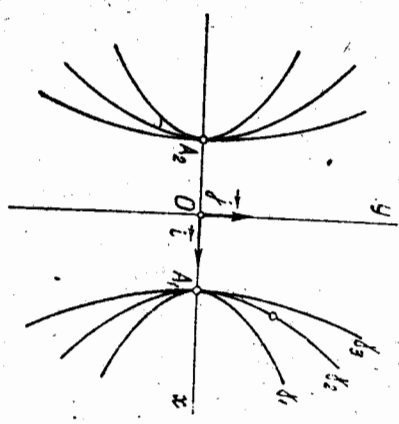
$$x'^2 - y'^2 = 4.$$

5. Экцентриситет. Гиперболадинг фокуслари ораcидати масофани ҳақиқий ўқининг узунлигига нисбати гиперболадинг *эксцентриситети* дейилади.
Экцентриситетни эллипсдагидек e ҳарфи билан белгиласак.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Гиперболада $c > a \Rightarrow e > 1$.

Экцентриситет гипербола шаклини аниқлашда муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, $e = \frac{c}{a}$ дан $c = ea$, бунни $b^2 = c^2 - a^2$ га қўйсак, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ ёки $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ бўлиб, бундан қўринади-



138-чизма

ки, экцентриситет e қанчаллик кичик, яъни $e \rightarrow 1$ бўлса, $\frac{b}{a}$ шунчаллик кичик, яъни $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ бўлади. (Бу ерда a ўзгармайдиган деб фараз қилинади) ва гипербола ўзининг ҳақиқий ўқига сиккилган бўлади, аксинча, e катталашиб борса, $\frac{b}{a}$ ҳам катталашиб, гипербола тармоқлари кенгайиб боради. 138-чизмада $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ гипербодалар тасвирланган бўлиб, уларнинг e_1, e_2, e_3 экцентриситетлари учун $e_1 < e_2 < e_3$.

Мисол. Тенг томонли гиперболадинг экцентриситетини ҳисобланг.
Еч иш. Тенг томонли гиперболада $a = b$ бўлгани учун $b^2 = c^2 - a^2$ дан $c^2 = 2a^2$, бундан $c = \sqrt{2}a$. У ҳолда экцентриситет:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}.$$

6. Гиперболадинг фокал радиуслари. (25) гиперболадаги иккитерий $M(x, y)$ нуқтанинг фокал радиуслари $x > 0$ бўлганда (32) формулалар орқали ва $x < 0$ да (33) формулалар орқали ифодавланар эди. $\frac{c}{a} = e$ эканини эътиборга олсак, бу формулалар ушбу кўринишни олади:

$$x > 0 \text{ бўлганда } r_1 = ex - a, r_2 = ex + a, \quad (39)$$

$$x < 0 \text{ бўлганда } r_1 = a - ex, r_2 = -a - ex. \quad (40)$$

7. Гипербола ни ясаш. Декарт репериди

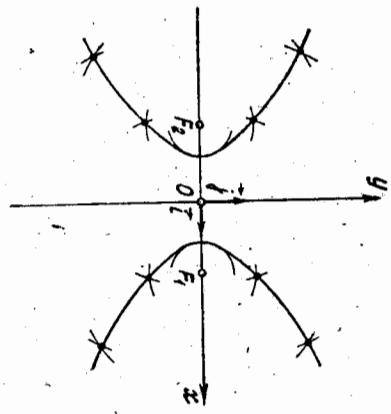
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Тенгламаси бўйича гипербола ни ясаш масаласини қарайлик. Аввало бу тенглама бўйича унинг $A_1(a, 0), A_2(-a, 0)$ учларини ва $c^2 - a^2 = b^2$ муносабатдан фойдаланиб $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ фокусни кузларини топамиз. F_1 фокусни марказ қилиб, иккитерий r_1 радиусли $S(F_1, r_1)$ айлана, F_2 фокусни марказ қилиб, $r_2 = r_1 + 2a$ радиусли $S(F_2, r_2)$ айлана чизамиз. Бу икки айлананинг кесилган нуқталари гиперболада ётади, чунки бу нуқталар учун

$$|r_2 - r_1| = |r_1 + 2a - r_1| = 2a.$$

Марказларнинг ўринлари алмаштирилса, гиперболадинг яна икки нуқтаси ҳосил бўлади. Шундай қилиб, r_1 нинг ҳар бир янги қиймати бўйича гиперболадинг тўртта нуқтасини ясаш мумкин.

Шу усулда етарлича нуқталарни ясаб, уларни туташтирсак, гиперболадинг шакли 139-чизмадагидек тахмин қилинади.

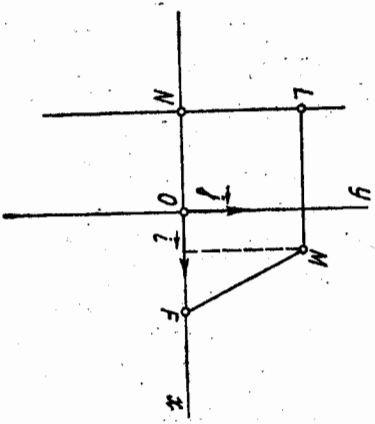


139-чизма

§ 50. Парабола

1. Таръирифи. Каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтасидан берилган нуқтатгача ва берилган тўғри чизиккача бўлган масофалари ўзаро тенг бўлган барча нуқталар тўғрисида *парабола* деб аталади. Берилган нуқта берилган тўғри чизикда ётмайди деб олинганда, берилган нуқта *парабола*нинг фокуси, берилган тўғри чизик оса *парабола*нинг директрисси дейилади.

Параболадинг фокуси ва директриссини мос равишда F ва d билан, фокусдан директриссатгача бўлган масофани p билан белгилеймиз. Таръидан фойдаланиб, парабола тенгламасини келтириб чиқарайлик: бунинг учун Декарт реперини қуйидагича танлаймиз: абсциссалар ўқи деб F нуқтадан ўтувчи ва d тўғри чизикка перпендикуляр бўлган тўғри чизикни қабул қиламиз, унинг мубоат



140-чизма

йўналиши 140-чизмада кўрсатилгандек бўлиб, абсолютсалар ўқининг d тўғри чизиқ билан кесилган нуқтаси N бўлсин. Ординаталар ўқини FN кесمانнинг ўртасидан ўтказамиз. Танланган реперда директриса тенгламаси $x = -\frac{p}{2}$, F фокус эса $+\frac{p}{2}$, 0 координаталарга эга бўлади.

Параболанинг ихтиёрий нуқтаси $M(x, y)$ бўлсин. M нуқтадан директрисага туширилган перпендикулярнинг асосини L билан белгилайлик. У ҳолда параболанинг таърифига кўра

$$\rho(F, M) = \rho(L, M). \quad (41)$$

(41) тенгликни координаталарда ифодалайлик. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\rho(F, M) = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

$$\rho(L, M) = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - d)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Бу қийматларни (41) муносабатга қўямиз:

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (42)$$

(42) тенглама параболанинг танланган репера, нисбатан тенгламасинир, chunkи уни фақат параболда ётган нуқталарнинг координаталарига қаноатлантиради.

(42) тенгламани солдароқ кўриништа келтирамиз. Бунинг учун унинг иккага томонини квадратга кўтариб, ихчамлаймиз:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \\ &= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

бундан

$$y^2 = 2px. \quad (43)$$

(43) тенгламани (42) тенгламанинг натижаси сифатида келтириб чиқардик.

Энди ўз навбатида (42) тенгламани (43) тенгламанинг натижаси сифатида келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун координаталари (43) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир нуқта параболда тегишли эканини кўрсатиш kifов. $M_1(x_1, y_1)$ нуқтанинг координаталари (43) тенгламани қаноатлантирсин, яъни $y_1^2 = 2px_1$ сонли тенглик бажарилсин. Шу билан бирга $x = -\frac{p}{2}$ тенгламага

эга бўлган d тўғри чизиқ ва $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ нуқта берилган бўлсин. M_1 нуқтанинг F ва d дан бир хил масофада туришини кўрсатишимиз керак.

$$\rho(F, M_1) = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2}.$$

ва

$$\rho(L, M_1) = \left|x_1 + \frac{p}{2}\right|.$$

Бу тенгликларга $y_1^2 = 2px_1$ ни қўйсак,

$$\begin{aligned} \rho(F, M_1) &= \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = \\ &= \left|x_1 + \frac{p}{2}\right| = \rho(L, M_1). \end{aligned}$$

Бундан $\Rightarrow M_1$ нуқта параболда тегишли. Демак, (43) параболга тенгламаси бўлиб, у қаноатлик тенглама дейилади.

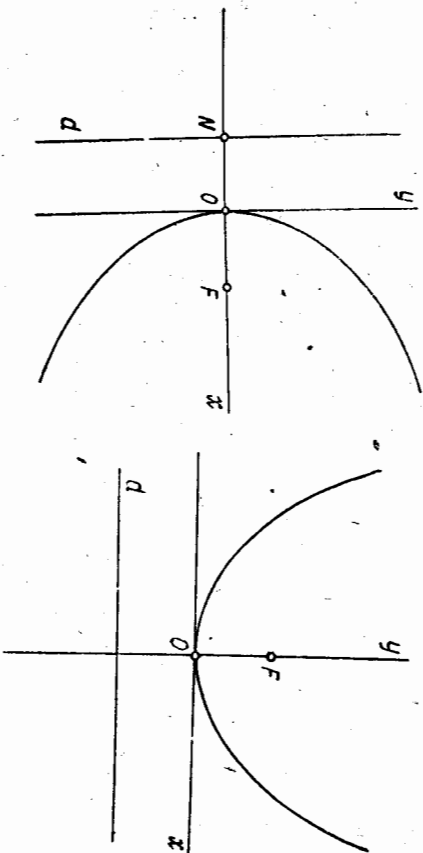
2. Парабола шакли. Параболанинг шаклини унинг (43) тенгламасига кўра текширамиз.

$y^2 \geq 0$ ва $p > 0$ бўлгани учун $y^2 = 2px$ тенгламада $x \geq 0$ бўлиши керак. Бундан (43) параболанинг барча нуқталари ўнг ярим тексикда жойлашганлиги келиб чиқади;

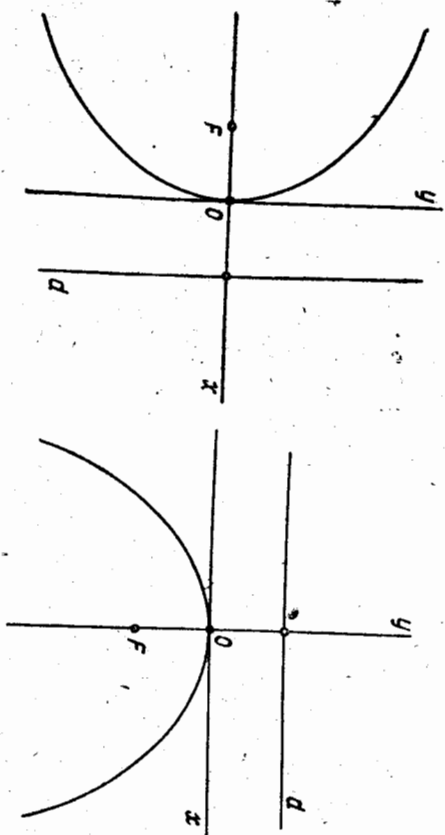
$x = 0$ да (43) $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ параболга координаталар бошидан ўтади. Координаталар боши параболанинг учи дейилади;

x нинг ҳар бир $x > 0$ қийматида y нинг ишоралари қарама-қарши, ammo абсолют миқдорлари тенг бўлган икки қиймати мос келади. Бундан параболанинг Ox ўққа нисбатан симметрик жойлашганлиги аниқланади. Ox ўқ параболанинг симметрия ўқи дейилади. У шу билан бир вақтда параболанинг фокал ўқи ҳамдир.

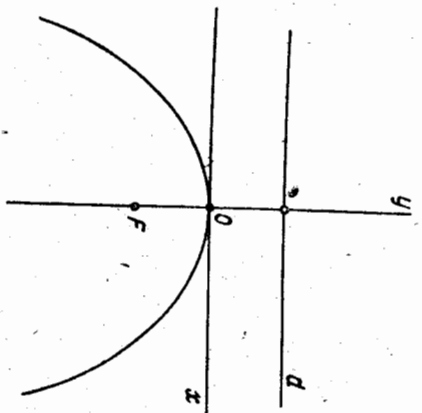
(43) $\Rightarrow y = \pm \sqrt{2px}$. Бу тенгламадан кўринадики, x ортиб борса, $|y|$ ҳам ортиб боради, яъни $x \rightarrow +\infty$ да $|y| \rightarrow +\infty$. Кўрсатилган бу ҳоссаларга асосланиб параболанинг шаклини 141-чизмадагидек тахмин қилиш мумкин.



Параболанинг тенгламасини ҳосил қилиш учун Декарт реперини махсус танлади, яъни Ox ўқни фокус орқали директрисага перпендикуляр қилиб ўтказдик. Агар Декарт реперини бошқача усулда танласак, албатта, параболанинг тенгламаси ҳам (43) кўринишдан фарқли бўлади. Масалан, агар парабола координатлар системасига нисбатан $x^2 = 2py$ кўринишда бўлади. 143 ва 144-чиқмада тасвирланган параболанинг тенгламалари мос равишда $y^2 = -2px$, $x^2 = -2ry$ кўринишда бўлади.



143-чиқма



144-чиқма

Мисол. $y^2 = 4x$ параболда фокал радиусининг узунлиги 26 бўлган нуктани топинг.

Ечиш. Изланган $M(x, y)$ нукта учун $r(F, M) = 26$. $y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$, u ҳолда

$$F(1, 0); 26 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4x}$$

ёки $676 = x^2 + 2x + 1$, бундан $x^2 + 2x - 675 = 0$.

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 675} = -1 \pm 26, x_1 = 25, x_2 = -27.$$

$x_2 = -27$ илдиз ярмайди, чунки $y^2 = 4x$ параболдаги барча нукталарнинг абсциссалари мусбат бўлиши керак. $x_1 = 25$ ни $y^2 = 4x$ га қўйиб, y ни толамиз:

$$y_1 = +10, y_2 = -10.$$

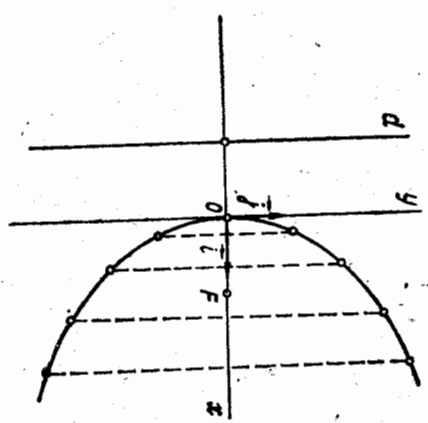
Шундай қилиб, изланетган нукталар иккита экан:

$$M_1(25, 10), M_2(25, -10).$$

3. Парабола ни яшаш. Парабола Декарт реперда $y^2 = 2px$ тенглама билан берилган бўлсин. Аввало параболанинг фокусини ва директрисасини яшаймиз, бунинг учун Ox ўқда координатлар боши-

дан ўнгда ва чапда узунлиги $\frac{p}{2}$

га тенг бўлган OF ва OK кесмаларни оламиз. K нукта орқали Ox ўққа перпендикуляр қилиб d тўғри чизқини ўтказамиз. F нукта параболанинг фокуси, d эса директрисаси бўлади (145-чиқма). Фокусдан бошлаб параболанинг симметрия ўқига перпендикуляр ва ҳар бири олдингисидан $\frac{p}{2}$ ма-



145-чиқма

софада турувчи тўғри чизқиларни ўтказамиз. Ўтказилган тўғри чизқиларнинг ҳар биридан директрисага бўлган масофани радиус қилиб, F марказли айлана чизамиз. Бу айлана тегишли тўғри чизқини парабола ўқига симметрик бўлган икки нуктада кеседи. Булар параболанинг нукталаридир. Бу жараёнини кераклича давом эттириб, параболанинг кераклича нукталарига эга бўламиз. Уларни туташтириб параболанинг графигини ҳосил қиламиз.

4. $y = ax^2 + bx + c$ тенглама билан берилган парабола.

Теорема. Ушбу

$$y = ax^2 + bx + c \quad (44)$$

тенглама симметрия ўқи оординатлар ўқига параллел ва u чизқини $O' \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ нуктада бўлган параболанинг тенгламасидир.

Исбот. (44) тенгламанинг ўнг томонидан тўла квадрат ажратамиз.

$$y = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Бундан

$$\left| y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right. \quad (45)$$

Декарт реперининг координатлар бошини $O' \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ нуктага

$$\begin{cases} x = x' - \frac{b}{2a}, \\ y = y' + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

формула бўйича параллел кўчиремиз. Янги реперда (45) тенглама куйидаги кўринишни олади:

$$y' = ax^2 \text{ ёки } x'^2 = \frac{1}{a} y' \quad (46)$$

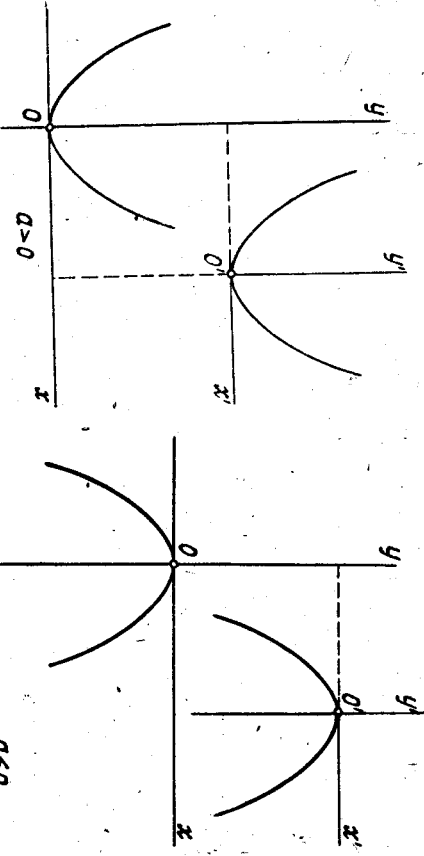
Ушбу $p = \frac{1}{2|a|}$ белгилашни киритиш билан

$$x'^2 = 2py' \quad (47)$$

тенгламага эга бўламиз. (47) тенглама симметрия ўқи $O'y'$, ўқ ва учи $O'(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ нуктада бўлган параболани ифодалайди.

Бу ерда $O'y' \parallel Oy$. ▲

Шундай қилиб, $y = ax^2 + bx + c$ параболани ясаш учун $x'^2 = \frac{1}{a} y'$ параболани ясаб, унинг учини $O'(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ нуктага устига тушунча параллел кўчириш керак.



146-а чизма

146-б чизма

146-а ва б чизмада a параметр мусбат ва манфий бўлган ҳоллар учун $y = ax^2 + bx + c$ параболга тасвирланган.

Мисол. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ параболга тенгламасини каноник кўринишга келтиринг ва янги координаталар бошининг координаталарини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани куйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1 \text{ ёки } y-1 = \frac{1}{2}(x+2)^2;$$

координаталар бошини $O'(-2, 1)$ нуктага

$$\begin{cases} x = x' - 2, \\ y = y' + 1. \end{cases}$$

формула бўйича параллел кўчиремиз. Янги реперда параболга тенглама маси $y' = \frac{1}{2}x'^2$ ёки $x'^2 = 2y'$ каноник кўринишни олади. $O'(-2, 1)$ нукта янги координаталар боши.

§ 51-Эллипс ва гиперболанинг директрисалари

Таъриф. Эллипс (гипербола) нинг берилган F фокусига мос директрисаси деб, унинг фокал ўқига перпендикуляр ва марказидан шу F фокусга ётган томонда $\frac{a}{e}$ масофада турувчи тўғри чизиқни айтади. Бу ерда a — эллипс (гипербола) нинг катта, (ҳақиқий) яриж ўқи, e — эксцентриситети.

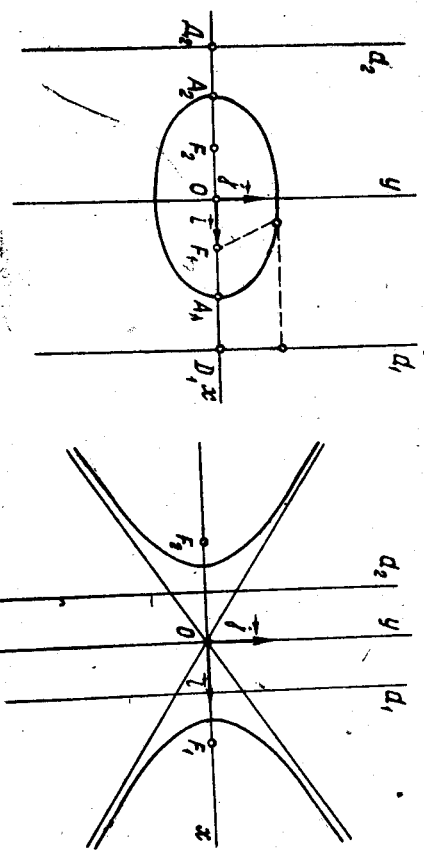
Директрисаларни d_1, d_2 билан белгилаймиз ҳамда уларни F_1, F_2 фокусларга мос директрисалар деб атаймиз. Директриса таърифига кўра эллипс (гипербола) нинг тенгламаси каноник кўринишни оладиган қилиб махсус танланган декарт реперда $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ фокусларга мос директрисалари

$$d_1: x - \frac{a}{e} = 0,$$

$$d_2: x + \frac{a}{e} = 0$$

тенгламаларга эга бўлади. Эллипс учун $e < 1 \Rightarrow \frac{a}{e} > a$, гипербола учун $e > 1 \Rightarrow \frac{a}{e} < a$. Демак, эллипснинг ҳам, гиперболанинг ҳам

директрисалари, уларни кесмайди (147-чизма). Эллипс (гипербола) директрисаларининг аҳамияти куйидаги теорема билан белгиланади.



147-чизма

Теорема. Эллипс (гипербола) текисликдаги шундай нукта-лар тўғрисида, бу нукталарнинг ҳар бирини фокусгача бўлган масофани ўша нуктадан шу фокусга мос директрисагача бўлган масофага нисбатан ўзгармас миқдор бўлиб, эллипс (гипербола) нинг эксцентриситети e га тенг.

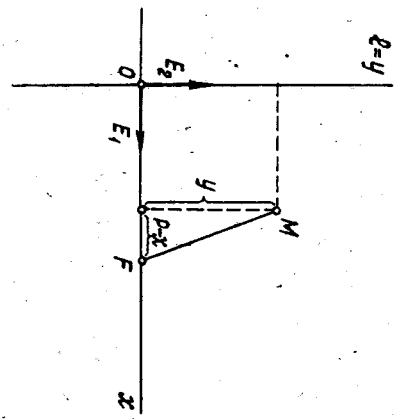
Исбот. Бирор эллипс (гипербола) берилган (147-чизмага қараган) ва F_1 ўнини фокус, d_1 шу фокусга мос директриса бўлсин:

$$F_1(c, 0), d_1: x - \frac{a}{e} = 0.$$

$M(x, y)$ эллипс (гипербола) нинг иккунчи нуктаси бўлсин. Бу нуктадан F_1 фокусгача бўлган масофа $\rho(F_1, M) = |a - ex|$ (148-§, (17) формула, 49-§, (39), (40) формулалар). Шу нуктадан d_1 директрисагача бўлган масофа

$$\begin{aligned} \rho(d_1, M) &= \left| x - \frac{a}{e} \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\rho(F_1, M)}{\rho(d_1, M)} &= \frac{|a - ex|}{\left| \frac{a}{e} - x \right|} = \frac{|a - ex|}{e} = e. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Эллипс ва гиперболанинг координати теорема билан ифода қилинган ҳоссабини бу чизиқларни бошқача таърифлашга асос қилиб олиш мумкин. Ҳақиқатан, текисликда шундай нукталар тўғрисида кўра-мизки, бу нукталарнинг ҳар бирини бирор F нуктагача ва бирор l тўғри чизиққача бўлган масофалар нисбатан ўзгармас e га тенг бўл-син. Бундай нукталар тўғрисида $e < 1$ бўлган ҳолда эллипс, $e > 1$ бўлган ҳолда гипербола ва $e = 1$ бўлганда парабола бўлишини кўра-самиз. Декарт реперини қуйи-дагича танлаймиз. F нуктадан l тўғри чизиққа ўтказилган перпендикулярни Ox ўқ, l тўғри чи-зиқни эса Oy ўқ деб қабул қи-ламиз (148-чизма). $\vec{OE}_1 = \vec{i}$,



148-чизма

$\vec{OE}_2 = \vec{j}$ координата векторлари бўлсин, бунда $E_1 \in OF$. $M(x, y)$ текширилган нукталар тўғрисида иккунчи нуктаси бўлсин. U ҳолда бу нукта учун

$$\frac{\rho(F, M)}{\rho(l, M)} = e. \quad (48)$$

(O, \vec{i}, \vec{j}) репернинг танланishi кўра $\rho(l, M) = x$. Агар $\rho(l, F) = p$ бўлсин десак, $\Rightarrow \rho(F, M) = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$. U ҳолда (48) $\Rightarrow \sqrt{(p-x)^2 + y^2} = ex$ ёки $x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 e^2 \Rightarrow x^2(1 - e^2) -$

$$-2px + p^2 + y^2 = 0. \quad (49)$$

а) $e = 1$ бўлса, $1 - e^2 = 0$ бўлиб, (49) тенглама қуйидаги кўри-нишни олади:

$$y^2 = 2p \left(x - \frac{p}{2} \right).$$

$O \left(\frac{p}{2}, 0 \right)$ нуктага параллел кўчи-райлик. Ушбу

$$x = \frac{p}{2} + X, y = Y$$

формулалар бўйича (O, \vec{i}, \vec{j}) декарт реперидан (O', \vec{i}', \vec{j}') декарт ре-перига ўтайлик, U ҳолда текширилган нукталар тўғрисидаги тенг-ламаси e^2 реперда $Y^2 = 2pX$ кўринишга келиб, бу параболанинг каноник тенгламасидир. Қаралаётган нукталар тўғрисида $e = 1$ да па-рабола экан.

б) $e \neq 1$ бўлса, $1 - e^2 \neq 0$, бу ҳолда (49) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$(1 - e^2) \left[x^2 - \frac{2p}{1 - e^2} x + \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \right] - \frac{p^2}{1 - e^2} + p^2 + y^2 = 0,$$

$$(1 - e^2) \left(x - \frac{p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{p^2 e^2}{1 - e^2}.$$

бундан O координаталар бошини $x = \frac{p}{1 - e^2} + X, y = Y$, формулалар бўйи-ча $O' \left(\frac{p}{1 - e^2}, 0 \right)$ нуктага параллел кўчирсак, янги реперда қара-лаётган нукталар тўғрисида учун ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$(1 - e^2) X^2 + Y^2 = \frac{p^2 e^2}{1 - e^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{X^2}{\frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2 e^2}{1 - e^2}} = 1. \quad (50)$$

$e < 1$ бўлганда $1 - e^2 > 0$ ва (50) тенглама

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

кўринишни олади, бунда $a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2}, (-b)^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2}$.

Бу ҳолда қаралаётган нукталар тўғрисида эллипсдир. $e > 1$ бўлганда $1 - e^2 < 0$ бўлиб, (50) тенглама

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

кўринишни олади, бунда $a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2}, (-b)^2 = \frac{e^2 p^2}{1 - e^2}$.

Бу ҳолда қараяётган нуқталар тўплами гиперболодир.

1-мисол. $x = \pm 8$ тўғри чизиқлар кичик ўқи 8 га тенг бўлган эллипснинг директрисаларидир. Шу эллипснинг тенгламасини тузинг.

Еч иш. Эллипснинг директрисалари $x = \pm \frac{a}{e}$ тенгламалар билан ифодаланади. Масала шартига кўра $\pm \frac{a}{e} = \pm 8$, бундан $\frac{a}{e} = 8$,

деки $e = \frac{c}{a}$, у ҳолда $\frac{a^2}{c} = 8$ ёки $a^2 = 8c$, кичик ўқ $2b = 8 \Rightarrow b = 4$.

Эллипс учун $b^2 = a^2 - c^2$, a , b нинг қийматларини бу тенгликка кўйсак, $16 = 8c - c^2$ ёки $c^2 - 8c + 16 = 0$, $c_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4$. $a^2 = 8c = 8 \cdot 4 = 32$, $a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Эллипснинг тенгламаси: $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$.

2-мисол. Директрисалари $x = \pm 3\sqrt{2}$ тенгламалар билан берилган ва асимптоталари орасидagi бурчак тўғри бурчак бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

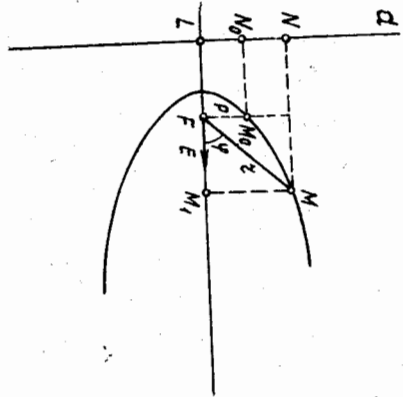
Еч иш. Асимптоталарнинг ўзаро перпендикулярлигидан гиперболанинг тенг томонли экани, яъни $x^2 - y^2 = a^2$ тенглама билан ифодаланishi келиб чиқади. Гиперболанинг директрисалари $x = \pm \frac{a}{e}$ тенгламалар билан ифодаланади. Масала шартидан $\frac{a}{e} = 3\sqrt{2}$, $e = \frac{c}{a}$ ни ҳисобга олсак, $\frac{a^2}{c} = 3\sqrt{2}$, бундан $a^2 = 3\sqrt{2}c$; $b^2 = c^2 - a^2$ тенгликка кўра $a = b$ бўлгани учун $6\sqrt{2}c = c^2$ ёки $c = 6\sqrt{2}$ га эга бўламиз. У ҳолда $a^2 = 3\sqrt{2}c = 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 36$, $a = 6$; гипербола тенгламаси: $x^2 - y^2 = 36$.

52-§. Иккинчи тартibli чизикларнинг кутб координаталардаги тенгламалари

Биз бу ерда иккинчи тартibli чизиклар (эллипс, гипербола ва парабола) нинг олдинги парабрафда баён этилган хоссааларидан фойдаланиб, махус танланган кутб координаталардаги тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бизга айтилган чизиклардан биротаси: эллипс, гипербола ёки парабола берилган бўлсин (атар берилган чизик тиребола бўлса, унинг унл тармоғини қараймиз, чунки келтириб чиқариладиган кутб тенглама биз қараяётган ҳолда гиперболанинг фақат битта тармоғини аниқлайди).

Берилган чизикни γ билан белгилаймиз. F бу γ изиқнинг фокуси, d шу фокусга мос директрисаси бўлсин (149-чизма). (γ чизик

гипербола бўлганда F ва d учун қараяётган тармоғига яқин фокус ва директрисаси олинди). Кутб координаталар системасини қуйидагича киритамиз. $FL \perp d$ тўғри чизикни ўтказамиз, $\vec{FE} = i$, $L = FL \cap d$ бўлсин, бунда E нуқта FL тўғри чизикда ва F нуқтадан L нуқтагача етмаган томонда етади. F нуқтани кутб, FE нурни кутб ўқи деб қабул қиламиз. M_0 нуқта F нуқтада кутб ўқиға ўтказилган перпендикулярнинг γ билан кесилган нуқтаси бўлсин. $\rho(M_0, F)$ масофани ρ билан белгилаймиз ва γ чизикнинг фокал параметри деб атаёмиз. Танланган кутб билан γ чизикнинг ихтиёрий M нуқтасининг координаталарини r , φ билан белгилаймиз: $r = \rho(F, M)$, $\varphi = (\vec{EF}, M)$. γ чизикнинг 51-§ даги асосий хоссаига кўра



149-чизма

$$\frac{\rho(F, M)}{\rho(d, M_0)} = e.$$

$$\rho(F, M_0) = e \Rightarrow \rho(d, M_0) = \frac{\rho(F, M_0)}{e} = \frac{\rho}{e}. \quad (51)$$

Агар $\varphi > \frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) - r \cos(180^\circ - \varphi) = \frac{\rho}{e} + r \cos \varphi.$$

Агар $\varphi < \frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) + \rho(F, M_1) = \frac{\rho}{e} + r \cos \varphi.$$

(M_1 нуқта M нуқтадан кутб ўқиға туширилган перпендикулярнинг асоси.)
Демак, иккалага ҳолда ҳам

$$\rho(d, M) = \frac{\rho}{e} + r \cos \varphi.$$

$$\rho(d, M) \text{ нинг бу қийматини (51) га кўйсак,}$$

$$\frac{\rho}{e} + r \cos \varphi = e$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (52)$$

(52) тенглама φ чизикнинг *кутб координаталардаги теңламасы* дур.

Бу тенглама:

а) $e < 1$ бўлса, эллипсни аниқлайди. φ бу ҳолда $0 \leq \varphi < \pi$ оралиқдаги барча қийматларни қабул қилади;

б) $e = 1$ бўлса, параболини аниқлайди, φ бу ҳолда $0 < \varphi < \pi$ оралиқдаги барча қийматларни қабул қилади. $\varphi = 0$ қийматга параболнинг ҳеч бир нуқтаси мос келмайди;

в) $e > 1$ бўлса, гиперболани (Биз қарастган тармонини) аниқлайди.

Бу ҳолда φ нинг қайси оралиқда ўзгаришини текшираемиз. $2\varphi_0$ — асимптоталар орасидаги тармоқ жойлашган бурчак бўлсин, φ ҳолда

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{e^2 - 1} \Rightarrow \frac{\sin^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} = e^2 - 1 \Rightarrow e^2 \cos^2 \varphi_0 = 1$$

$$\text{ёки } \cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{e^2}; \quad \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \text{ бўлганидан } \cos \varphi_0 = \frac{1}{e}.$$

(52) тенгламада $r > 0$ учун $1 - e \cos \varphi > 0$ ёки $\cos \varphi < \frac{1}{e} = \cos \varphi_0$

бўлиши керак. Бундан гиперболанинг қаралаётган тармонидати нуқтага учун $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$ тенгсизликлар сажжариллади, деган натижа келиб чиқади. (52) тенгламадаги $r = \rho(M_0, F)$ сон *фокал параметр* дейилади. Парабола учун бу r фокал параметр унинг кانونик тенгламасидаги p дан иборат. Эллипс (гипербола) учун p нинг маъносини, яъни ярим ўқлар орқали ифодасини топайлик. F, M_0 тўғри чизик эллипс (гипербола) нинг фокал ўқига перпендикуляр бўлгани учун M_0, F нуқталар бир хил абсциссага эга. $M_0(x_0, y_0)$ координаталарга эга бўлсин десак, $x_0 = -c$ (гипербола бўлса, $x_0 = +c$). M_0 эллипс (гипербола) га тегишли бўлгани учун

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \right) \text{ ва } p = \rho(M_0, F) =$$

$$= \sqrt{(-c + c)^2 + y_0^2} = |y_0|$$

ни ҳисобга олсак, $\frac{c}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$, бундан

$$p^2 = b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = b^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

Демак, эллипс (гипербола) да фокал параметр $p = \frac{b^2}{a}$ га тенг.

Мисол. $r = \frac{25}{13 - 12 \cos \varphi}$ чизикнинг декарт реперига нисбатан кانونик тенгламасини ёзинг.

¹ Аналитик геометриядан муфассалроқ ёзилган китобларда гиперболанинг иккага тармонини ифодаловчи тенглама келтирилади; бу тенгламанинг кўриниши (52) дан кам фарқ қилади (масалан, (5) га қаран).

Ечиш. Берилган тенгламани (52) $r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$ кўриништа келтириш учун ўнг томонининг сурат ва маҳражани 13 га бўламиз:

$$r = \frac{\frac{25}{13}}{1 - \frac{12}{13} \cos \varphi}$$

Бунни (52) билан таққосласак, кўраемизки, $e = \frac{12}{13} < 1$, демак, эгри

чизик эллипсдур. Унинг кانونик тенгламасини ёзамиз. Тенгламадан $p = \frac{25}{13}$, лекин $p = \frac{b^2}{a}$ эди, бундан $\frac{b^2}{a} = \frac{25}{13}$, $b^2 = \frac{25}{13} a$; $e = \frac{c}{a} =$

$$= \frac{12}{13} \Rightarrow c = \frac{12}{13} a. \text{ } b, a \text{ нинг бу қийматларини } b^2 = a^2 - c^2 \text{ тенгликка қўйсак, } \frac{25}{13} \cdot a = a^2 - \frac{144}{169} a^2, \text{ бундан } \frac{25}{13} a \text{ ёки } a =$$

$$= 13, b^2 = \frac{25}{13} a = \frac{25}{13} \cdot 13 = 25, b = 5 \text{ Берилган эллипсининг кانونик тенгламаси}$$

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

53-§. Иккинчи тартибли чизикларнинг умумий тенгламаси

Тежисликда бирор аффин (ёки декарт) реперда координаталари

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (53)$$

тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами иккинчи тартибли чизик деб аталishi маълум¹ (23-§). Бунда $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ коэффициентлар ҳақиқий сонлар бўлиб, a_{11}, a_{12}, a_{22} лардан камда биттаси нолдан фарқлидур (бу шартни бундан буюн $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ кўринишида ёзамиз).

Биз 48—50-§ ларда учта чизик: эллипс, гипербола ва парабола ни ўргандик, бу чизиклар ҳам иккинчи тартибли чизиклардур, чунки (53) тенгламада $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{00} = -1$ бўлиб, қолган барча коэффициентлар ноль бўлса, у эллипсининг кانونик тенгламаси, шу шартларда яна $a_{22} = -\frac{1}{b^2}$ бўлса, (53) тенглама гиперболанинг кانونик тенгламаси, $a_{10} = p$, $a_{22} = 1$ бўлиб, қолган коэффициентлар ноль бўлса, (53) тенглама парабола нинг кانونик тенгламасидур.

¹ Иккинчи тартибли чизикларнинг умумий назарисини декарт реперда қараймиз.

Куйидаги табиий савот туғилади: текисликда кўрилган бу чизиклардан бошқа яна иккинчи тартибли чизиклар борми? Бу саволга куйида жавоб беришга ҳаракат қиламиз. Аввало шунни таъкидлаймиз: 23-§ дан бизга маълумки, чизикнинг тартиби координаталар системасининг олиншига боғлиқ эмас. Бундан фойдаланиб, координаталар системасини тегилишча танлаш ҳисобида барча иккинчи тартибли чизикларни тула геометрик тавсифлаб чиқамиз. Иккинчи тартибли γ чизик $\mathcal{C} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперда (53) умумий тенгламаси билан ифода қилинган бўлсин. Шундай реперни танлаймизки, унга нисбатан γ чизикнинг (53) тенгламаси мумкин қадар содда — «каноник» кўринишга эга бўлсин, яъни

1) ўзгарувчи координаталар кўпайтмаси қатнашган ҳад бўлмаган;
2) биринчи даражали ҳадлар сонинг оз бўлсин (иложи бўлса, улар бутундай қатнашмасин);
3) мумкин бўлса, овоз ҳад қатнашмасин.

Агар (53) тенгламада $a_{12} \neq 0$ бўлса, соддаштиришни куйидагича бажарамиз. \mathcal{C} репернинг ўқларини O нуқта атрофида ихтиёрий α бурчакка буриб, янги $\mathcal{C}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ декарт реперини ҳосил қиламиз. \mathcal{C}' репердан \mathcal{C} реперга ўтиш формуллари (19-§)

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (54)$$

дан x, y ни (53) га қўйсақ ва ўхшаш ҳадларини ихчамласак, γ чизикнинг (53) тенгламаси \mathcal{C}' реперда ушбу кўринишни олади:

$$a'_{11} x'^2 + 2a'_{12} x' y' + a'_{22} y'^2 + 2a'_{10} x' + 2a'_{20} y' + a'_{00} = 0, \quad (55)$$

бунда:

$$a'_{11} = a_{11} \cos^2 \alpha + 2a_{12} \cos \alpha \sin \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha,$$

$$a'_{12} = -a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} \cos^2 \alpha - a_{12} \sin^2 \alpha + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (56)$$

$$a'_{22} = a_{11} \sin^2 \alpha - 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha,$$

$$a'_{10} = a_{10} \cos \alpha + a_{20} \sin \alpha, \quad a'_{20} = -a_{10} \sin \alpha + a_{20} \cos \alpha, \quad a'_{00} = a_{00}.$$

(56) белгилашлардан кўринадики, (55) тенгламадаги $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}$ коэффициентлар (53) тенгламадаги a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларга ва α бурчакка боғлиқ, шу билан бирга $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}$ нинг камида бири нолдан фарқли, чуқки

$$\begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha & \sin^2 \alpha \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha & \cos^2 \alpha \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha & \sin^2 \alpha & 1 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha - \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos 2\alpha (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \sin^2 2\alpha = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1 \neq 0.$$

α бурчакнинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уни шундай танлаб оламизки, алмаштирилган (55) тенгламадаги a'_{12} коэффициент нолга тенг бўлсин, яъни

$$a'_{12} = -a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} \cos^2 \alpha - a_{12} \sin^2 \alpha + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha = - (a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) \sin \alpha + (a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

ёки

$$\frac{a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha}{\sin \alpha} \quad (57)$$

(57) муносабатни бирор λ га тенглаб, уни куйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = 0, \\ a_{21} \cos \alpha + (a_{22} - \lambda) \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (58)$$

Бу система бир жинсли, шунинг учун унинг детерминантни нолга тенг, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ёки} \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (59)$$

бўлгандагина система нолдан фарқли ечимга эга бўлади.

(59) тенглама γ чизикнинг *характеристик тенгламаси* дейилади. (59) тенгламанинг ildizlari.

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{D}}{2}$$

$a_{12} \neq 0$ бўлгани учун унинг дискриминанти:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0.$$

Демак, (59) тенгламанинг λ_1, λ_2 ildizlari турли ва ҳақиқийдир. (57) дан

$$\begin{cases} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = \lambda \cos \alpha, \\ a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha = \lambda \sin \alpha \end{cases} \quad (60)$$

тенгликларни ёза оламиз. Уларнинг ҳар бирини $\cos \alpha \neq 0$ га бўлиб $(\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ ва $a'_{12} = -(a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha) \sin \alpha + (a_{21} \cos \alpha +$

$+ a_{22} \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$, (яъни a_{12} азайдан 0 га тенг экан) ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{11}}{\lambda - a_{22}} \quad (61)$$

(61) муносабатга навбат билан (59) характерстик тенгламанинг λ_1, λ_2 илгизлирини кўямиз:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \quad (62)$$

Биет теоремасига кўра (59) дан

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \quad (63)$$

(63) ва (62) формулалардан ушбуга эга бўламиз:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{11}^2}{a_{12}^2} = -1 \Rightarrow |\alpha_2 - \alpha_1| = \frac{\pi}{2}$$

Шунга кўра $\operatorname{tg} \alpha$ Ox' ўқининг \mathcal{B} даги бурчак коэффициентига бўлганда $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right)$ Oy' ўқининг шу репердаги бурчак коэффициентига бўлади. У ҳолда Ox' ўқининг i' бирлик векторининг координаталари бўлмиш $\cos \alpha_1, \sin \alpha_1$,

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}$$

формулалардан, Oy' ўқининг j' бирлик векторининг координаталари $\cos \alpha_2, \sin \alpha_2$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 &= \sin \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha_1, \quad \cos \alpha_2 = \\ &= \cos \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha_1 \end{aligned}$$

тенгликлардан аниқланади. $\lambda = \lambda_1$ бўлганда (60) дан

$$\begin{aligned} a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1 &= \lambda_1 \cos \alpha_1, \\ a_{21} \cos \alpha_1 + a_{22} \sin \alpha_1 &= \lambda_1 \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

У ҳолда

$$a'_{11} = (a_{11} \cos \alpha_1 + a_{12} \sin \alpha_1) \cos \alpha_1 + (a_{21} \cos \alpha_1 + a_{22} \sin \alpha_1) \sin \alpha_1 = \lambda_1$$

• $+ a_{22} \sin \alpha_1$ $\sin \alpha_1 = \lambda_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_1 + \lambda_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_1 = \lambda_1$.
(56) муносабатда 1- ва 3- тенгликларни ҳадлаб кўшсак, $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + a_{22} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$ ёки $(a'_{11} + a'_{22}) = a_{11} + a_{22}$.

(63) дан $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ ва $a'_{11} = \lambda_1$ эканлини ҳисобга олсак, $a'_{22} = \lambda_2$ келиб чиқади. Шундай қилиб, координаталар системасини (62) формуладан аниқланувчи $\alpha = \alpha_1$ бурчакка (бу ерда α_1 янги Ox' ўқининг эски Ox ўқка оғиш бурчак) буриш билан $\mathcal{B} = (O, i, j)$ репердан шундай $\mathcal{B}' = (O, i', j')$ реперга ўтиш мумкинлики, унга нисбатан (53) тенглама соддалашиб, ушбу кўриништа эга бўлади:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10} x' + 2a'_{20} y' + a_{00} = 0 \quad (64)$$

Агар Ox' ўқининг бурчак коэффициентини учун $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$ ни қабул қилинса, у ҳолда $a'_{11} = \lambda_2$, $a'_{22} = \lambda_1$ эканлини айнан юқоридаги каби кўрсатиш мумкин. Шунга айтиш лозимки, агар (53) тенгламада $a_{12} = 0$ бўлса, координаталар системасини буриш билан алмаштиришга ҳожаат қолмайди.

Энди $\mathcal{B}' = (O, i', j')$ репердан шундай реперга ўтгамизки, унга нисбатан χ физикнинг (64) тенгламасида биринчи даражали ҳадлар катнашмасин. Бу ишни координаталар бошини кўчириб билан бажариш мумкин.

(64) тенгламада λ_1, λ_2 коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли, чунки агар $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ бўлса, (64) тенглама биринчи даражали тенгламага айланади. Демак, бу ерда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

$$1. \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 (\lambda_1 \lambda_2 \neq 0)$$

Бу ҳолда $\lambda_1 \lambda_2 = a'_{11} a'_{22} - a_{12}^2 \Rightarrow a'_{11} a'_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. (64) тенгламанинг чап томонидаги ҳадларни x', y' га нисбатан тўлиқ квадратга келтирамиз:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(x'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{10}}{\lambda_1} x' + \frac{a_{10}^2}{\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a_{20}^2}{\lambda_2^2} \right) - \\ - \frac{a_{10}^2}{\lambda_1} - \frac{a_{20}^2}{\lambda_2} + a_{00} = 0, \end{aligned}$$

бундан

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + a_{00}'' = 0, \quad (65)$$

$$\text{бу ерда } a_{00}'' = a_{00} - \frac{a_{10}^2}{\lambda_1} - \frac{a_{20}^2}{\lambda_2}.$$

Энди (O, i', j') ни u қуйидаги формула билан аниқланадиган параллел кўчирини бажарайлик:

$$\begin{cases} X = x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}. \end{cases} \quad (*)$$

У ҳолда янги (O', i', j') репер ҳосил бўлиб, физикнинг тенгламаси соддалашади:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_{00}'' = 0. \quad 1$$

2. $\lambda_1 = 0 (\lambda_2 \neq 0)$, $a'_{10} \neq 0$ ёки $\lambda_2 = 0 (\lambda_1 \neq 0)$, $a'_{20} \neq 0$.
Бу ҳоллардан бирини кўрсатиш етарли; чунки

$$\begin{cases} x = y', \\ y = x'. \end{cases}$$

алмаштириш ёрдамида уларнинг бирини иккинчисига келтириш мумкин.

Биринчи ҳолни қараймиз:

$\lambda_1 = 0$ ($\lambda_2 \neq 0$) ни ҳисобга олиб, (64) тенгламанинг чап томонидани ҳақларни y' га нисбатан тўлиқ квадратга келтираймиз:

$$\lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2} \right) + 2a'_{10} \left(x' + \frac{a'_{00}}{2a'_{10}} - \frac{a'^2_{20}}{2a'_{10}\lambda_2} \right) = 0,$$

ёки

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + 2a'_{10} (x' + a') = 0,$$

бунда $a' = \frac{a'_{00}}{2a'_{10}} - \frac{a'^2_{20}}{2a'_{10}\lambda_2}$ белгилашни киритдик.

Ушбу

$$\begin{cases} X = x' + a', \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

формулалар бўйича координаталар системасини алмаштираймиз, яъни координаталар боши O ни O' $\left(-a', \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)$ нуқтага кўчирармиз. Y ҳолида ҳосил бўлган (O', \vec{i}', \vec{j}') реперга нисбатан физикнинг тенгламаси ушбу содда кўринишни қабул қилади:

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{10} X = 0. \quad \text{II}$$

3. $\lambda_1 = 0$, $a'_{10} = 0$ ёки $\lambda_2 = 0$, $a'_{20} = 0$.

Бу ҳоллар ҳам бир-бирига ўхшаш бўлиб, шунинг учун уларнинг бирини қараш етарли.

Биринчи ҳолни қараймиз. $\lambda_1 = 0$, $a'_{10} = 0$ да (64) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{20} y' + a'_{00} = 0, \quad (66)$$

бу ерда $\lambda_2 \neq 0$ бўлгани учун (66) ни кўйилатича ёзиш мумкин:

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} + a'_{00} = 0$$

ёки

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + a'_{00} = 0,$$

бунда

$$a''_{00} = a'_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}$$

$$\text{Ушбу } \begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases} \text{ формулалар бўйича } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

репердан $(\vec{O}', \vec{i}', \vec{j}')$ реперга ўтамиз, яъни координаталар боши O ни $O' \left(0, \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)$ нуқтага кўчирармиз. Янги реперда Y чизиқнинг содда тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0. \quad \text{III}$$

Хулоса. Агар иккинчи тартибли Y чизиқ бирор декарт реперда (53) тенглама билан берилган бўлса, янги декарт реперини тегширича танлаш билан Y нинг тенгламасини I, II, III тенгламаларнинг бирига келтириш мумкин.

54-§ Иккинчи тартибли чизиқларнинг таснифи (классификацияси)

Юқорида қаралган I, II, III кўринишдаги тенгламаларни муфассалроқ текшираймиз.

I. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a''_{00} = 0$.

I тенгламада $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, лекин $a''_{00} = 0$ — ихтиёр. Кўйилгани

иikki ҳол бўлиши мумкин:

$$a) \ a''_{00} \neq 0. \quad \text{I дан:}$$

$$-\frac{\lambda_1}{a''_{00}} x^2 - \frac{\lambda_2}{a''_{00}} y^2 = 1 \text{ ёки } \frac{x^2}{\frac{a''_{00}}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{a''_{00}}{\lambda_2}} = 1. \quad (67)$$

Агар λ_1, λ_2 бир хил ишорали, a''_{00} эса улар билан қарама-қарши ишорали бўлса, Y ҳолда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} > 0$, $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$.

Энди $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} = a^2$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = b^2$ белгилашни киритсак, (67) дан

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ни, яъни эллипснинг каноник тенгламаси ҳосил қилинади.

Агар $\lambda_1, \lambda_2, a''_{00}$ нинг учаласи ҳам бир хил ишорали бўлса, Y

ҳолда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} < 0$, $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$, бу ерда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} = -a^2$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -b^2$

белгилашни киритсак, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ тенгламага эга бўлармиз. Бу

тенгламани қаноглиантирувчи битта ҳам ҳақиқий нуқта мавжуд эмас,

легин бу тенглама эллипс тенгламасига ўхшаштаги сабабли, у мавжум эллипсни аниқлайди, деб айтилади. Агар λ_1, λ_2 қарама-қарши ишорали ва $a''_{00} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1}$ ва $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2}$ лар қарама-қарши ишорали бўлади. $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} > 0$, лекин $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$ бўлиб, уларни мос равишда a^2 ва $-b^2$ деб белгиласак, (67) тенглама $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишда бўлиб, бу гиперболанинг каноник тенгламасидир; худди шунга ўхшаш: $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} < 0$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$ бўлса, уларни ҳам мос равишда $-a^2$ ва b^2 деб белгиласак, (67) тенглама ушбу кўринишни олади: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; бу ҳам гиперболанинг каноник тенгламасидир.

б) $a''_{00} = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} = 0. \quad (68)$$

λ_1, λ_2 қарама-қарши ишорали бўлса, тегишли белгилашни киритиш билан (68) ни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ ёки } \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0. \quad (69)$$

(69) $\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, бу тенгламалар координаталар бошида кесилувчи иккита ҳақиқий тўғри чизикни аниқлайди. Агар λ_1, λ_2 бир хил ишорали, масалан, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{\lambda_1} = -a^2, \frac{1}{\lambda_2} = -b^2$ белгилашни киритиш билан (68) ни куйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ ёки } \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0, \frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0,$$

бу тенгламаларнинг ҳар бири биринчи даражали бўлгани учун улар тўғри чизикни аниқлайди, лекин бу икки тўғри чизик фақат битта ҳақиқий нуктага эгадир (координаталар боши). Шунинг учун уларни битта ҳақиқий нуктада кесилувчи иккита мавжум тўғри чизик тенгламаси деб айтиш мумкин. Шундан қилиб, иккинчи тартibli у чизикнинг (59) харақтеристик тенгламасининг илдизлари $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ бўлса, куйидаги беш тур чизик ҳосил бўлади: эллипс, мавжум эллипс, гипербола, кесилувчи мавжум икки тўғри чизик, кесилувчи ҳақиқий икки тўғри чизик.

$$2. \lambda_2 y^2 + 2a_1' x = 0 \quad (11)$$

тенглама билан берилган иккинчи тартibli чизикларга ўтаммиз. II тенгламада $\lambda_2 \neq 0, a_1' \neq 0$ бўлгани учун уни куйидагича ёзиб оламиз: $y^2 = -2 \cdot \frac{a_1'}{\lambda_2} x; r = -\frac{a_1'}{\lambda_2}$ белгилашни киритсак, $y^2 = 2rx$, бу параболанинг каноник тенгламасидир.

3. $\lambda_2 y^2 + a''_{00} = 0$

тенглама билан берилган иккинчи тартibli чизикларни таснифлашга ўтаммиз. Бу тенгламада $\lambda_2 \neq 0, a''_{00} \neq 0$ ҳар қандай сон. Куйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

а) $a''_{00} \neq 0, \lambda_2$ билан a''_{00} ҳар хил ишорали бўлса, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$ бўлади. Тенгламани $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -a^2$ фараз қилиб,

$$y^2 = a^2 \text{ ёки } (y-a)(y+a) = 0$$

га келтирамиз. Бу тенглама эса ўзаро параллел икки тўғри чизикни аниқлайди. λ_2 билан a''_{00} бир хил ишорали, яъни $\lambda_2 > 0, a''_{00} > 0 (\lambda_2 < 0, a''_{00} < 0)$ бўлган ҳолда

$$\text{III} \Rightarrow y^2 = -a^2 \text{ ёки } (y-ia)(y+ia) = 0,$$

бу тенглама иккита мавжум параллел тўғри чизикни аниқлайди, деб қўрилади.

б) $a''_{00} = 0$. У ҳолда III $\Rightarrow \lambda_2 y^2 = 0$ ва $\lambda_2 \neq 0$ бўлгани учун $y^2 = 0$ ёки $y = 0, y = 0 \Rightarrow$ икки қарра олинган тўғри чизик ҳосил қилинади. Шундай қилиб, III тенглама билан берилган иккинчи тартibli чизик куйидаги уч турга бўлинади: ҳақиқий параллел икки тўғри чизик, мавжум параллел икки тўғри чизик, устма-уст тушувчи икки тўғри чизик.

I, II, III тенгламалар билан берилган иккинчи тартibli чизик куйидаги тўққизга турга бўлинади:

Каноник тенгламалар	Чизикларнинг номлари
1	2
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллипс
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мавжум эллипс
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	гипербола
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	кесилувчи икки тўғри чизик
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	нукта (координаталар бошида кесилувчи мавжум икки тўғри чизик)
6. $y^2 = 2rx$	парабола

1	2
7. $y^2 - a^2 = 0$	тури параллел икки тўғри чизик
8. $y^2 + a^2 = 0$	мавжум параллел икки тўғри чизик
9. $y^2 = 0$	устма-уст тушган икки тўғри чизик

55-§. Иккинчи тартибли чизикни унинг тенгламаси бўйича яшаш

Иккинчи тартибли чизик (O, i, j) декарт репериди (53) умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. Уни яшаш учун тенгламасини олдинги параграфда баён қилинган усуллар бўйича соддалаштирамиз:

1) (53) тенгламада $a_{12} \neq 0$ бўлса, чизикнинг

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

характеристик тенгламасини тузимиз ва унинг илдизлари λ_1, λ_2 ни топамиз.

2) $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$ формула бўйича $\operatorname{tg} \alpha_1$ ни, сўнггра

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}$$

ни ҳисоблаймиз. Бу билан реперни α_1 бурчакка буришдан ҳосил қилинадиган (O, i', j') репернинг i', j' координата векторлари аниқланади:

$$i' = i \cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1, \quad j' = -i \sin \alpha_1 + j \cos \alpha_1.$$

3) Янги реперда чизикнинг тенгламаси

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0 \quad (64)$$

кўринишда бўлиб, бунда a'_{10}, a'_{20} коэффициентлар ушбу формулалардан топилади:

$$a'_{10} = a_{10} \cos \alpha_1 + a_{20} \sin \alpha_1, \quad a'_{20} = -a_{10} \sin \alpha_1 + a_{20} \cos \alpha_1.$$

4) \mathcal{R}' репернинг координаталар боши O ни 53-§ даги (*) формуладан топиладиган O' нуқтага кўчириш билан \mathcal{R}' репердан \mathcal{R}'' реперга ўтамиз. \mathcal{R}'' реперда чизикнинг тенгламаси каноник кўринишга келади. Агар (53) тенгламада $a_{12} = 0$ бўлса, соддалаштириш координаталар бошини кўчиришдан иборат, холос. Бу ишларни мисолларда кўрамиз.

1-мисол. Чизикнинг ушбу $x^2 + bxy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ тенгламасини каноник кўринишга келтириб, чизмасини яшанг.

Еч иш. Бу ерда: $a_{11} = 1, a_{12} = 3, a_{22} = 1, a_{10} = 3, a_{20} = 1, a_{00} = -1, a_{12} = 3 \neq 0$. Берилган тенгламани каноник ҳолда ёзиш учун куйидаги ишларни бажарамиз:

1) характеристик тенгламани тузимиз: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0, \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2;$

2) $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{4 - 1}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ,$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) (O, i', j') реперни, $\alpha_1 = 45^\circ$ бурчакка буришдан (O, i'', j'') репер ҳосил бўлади, унинг координата векторлари:

$$i'' = \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j, \quad j'' = -\frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j.$$

4) $a'_{10} = a_{10} \cos \alpha_1 + a_{20} \sin \alpha_1, a'_{20} = -a_{10} \sin \alpha_1 + a_{20} \cos \alpha_1$ формулалар бўйича a'_{10}, a'_{20} коэффициентларни топамиз:

$$a'_{10} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, \quad a'_{20} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

\mathcal{R}'' реперда чизикнинг тенгламаси:

$$4x''^2 - 2y''^2 + 4\sqrt{2}x'' - 2\sqrt{2}y'' - 1 = 0.$$

5) Бу тенгламани координаталар боши O ни кўчириш билан соддалаштирамиз. Бунинг учун тенгламанинг чап томонидagi ҳадлардан x'', y'' га нисбатан тўла квадратлар ажратамиз:

$$\begin{aligned} & \left(4x''^2 + \frac{4\sqrt{2}}{4}x'' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(y''^2 + \frac{2\sqrt{2}}{2}y'' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - \\ & + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0, \end{aligned}$$

$$4\left(x''^2 + \sqrt{2}x'' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 2\left(y''^2 + \sqrt{2}y'' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 2 + 1 - 1 = 0, \quad 4\left(x'' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(y'' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 = 0;$$

$$\begin{cases} X = x'' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y = y'' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = X + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ y'' = Y + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}.$$

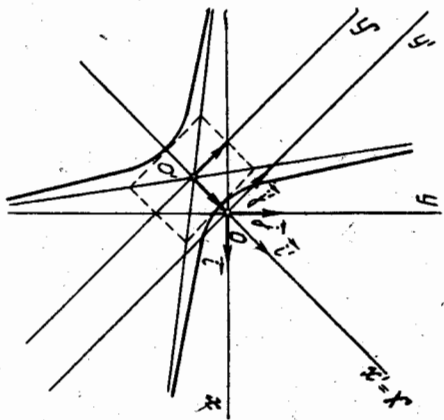
Чизикнинг тенгламаси каноник кўринишга келади:

$$4X^2 - 2Y^2 = 2 \text{ ёки } \frac{4X^2}{2} - \frac{2Y^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{1} = 1.$$

Бу ерда $a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = 1$; гиперболанинг каноник тенгламаси ҳосил қилинди. 150-чизмада бу гипербола ясалган.

2-мисол. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$. Еч иш. Бу ерда: $a_{11} = 4, a_{12} = -2, a_{22} = 1, a_{10} = -1, a_{20} = -7, a_{00} = 7$.

1) характеристик тенглама $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, илдизлари:



150-чизма

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5;$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3) (O, \vec{i}, \vec{j}) реперни $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2$ дан аниқланидиган α_1 бурчакка буришдан ҳосил бўлган (O, \vec{i}', \vec{j}') репернинг координата векторлари:

$$\vec{i}' = \frac{\sqrt{5}}{5} \vec{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \vec{j}, \vec{j}' = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \vec{i} + \frac{\sqrt{5}}{5} \vec{j};$$

$$4) a'_{10} = -3\sqrt{5}, a_{20} = -\sqrt{5}.$$

28' реперда чизиқнинг тенгламаси:

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0;$$

5) энди координаталар бошини кўчирамиз. Бу тенгламанинг чап томонидаги ҳадлардан y' га нисбатан тўла квадрат ажратамиз:

$$5 \left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 - 6\sqrt{5} \left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} X = x' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ Y = y' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = X + \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ y' = Y + \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

Чизиқнинг O ни $O' \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$ нуқтага кўчиришдан ҳосил бўлган (O', \vec{i}', \vec{j}') репердаги тенгламаси: $5Y^2 - 6\sqrt{5}X = 0$ ёки $Y^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}X$.

Бу тенглама 151-чизмада тасвирланган параболани ифодалайди.

3-мисол. $9x^2 + 16y^2 - 24xy + 30x - 40y - 25 = 0$.

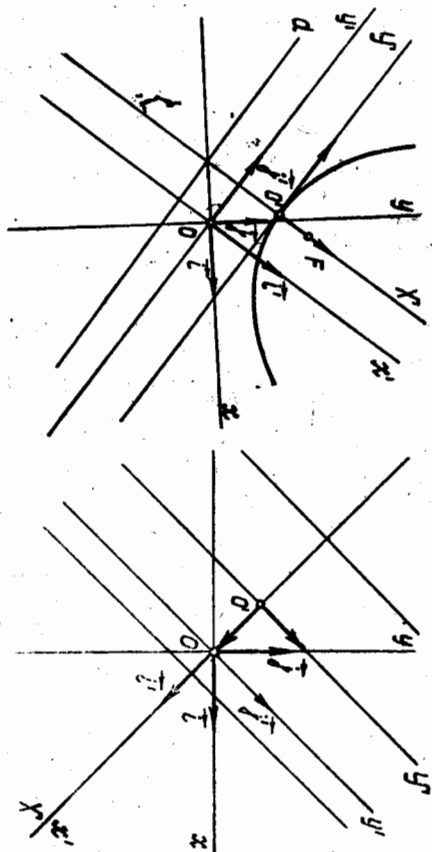
Еч иш. Бу ерда: $a_{11} = 9, a_{12} = -12, a_{22} = 16, a_{10} = 15, a_{20} = -20, a_{00} = -25$.

1) чизиқнинг харақтеристик тенгламаси:

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 25, \lambda_2 = 0;$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sin \alpha_1 = -\frac{4}{5}, \cos \alpha_1 = \frac{3}{5};$$

3) (O, \vec{i}', \vec{j}') репернинг координата векторлари, $\vec{i}' = \frac{3}{5} \vec{i} -$



151-чизма

$$-\frac{4}{5} \vec{j}, \vec{j}' = \frac{4}{5} \vec{i} + \frac{3}{5} \vec{j};$$

4) $a'_{10} = 25, a'_{20} = 0$ чизиқнинг тенгламаси $x'^2 + 2x' - 1 = 0$ кўринишида бўлади. Бундан

$$(x' + 1)^2 - 2 = 0;$$

5) координаталар боши O ни $\begin{cases} x' = X - 1, \\ y' = Y \end{cases}$ формулалар бўйича

$O' (-1, 0)$ нуқтага кўчирсак, чизиқ тенгламаси $X^2 - 2 = 0$ кўриниши олади. Бу тенглама ордinatалар ўқига параллел икки тўғри чизиқни аниқлайди (152-чизма).

56-§. Иккинчи тартибли чизиқ маркази

Биз 48-§ да чизиқнинг симметрия маркази тушунчаси билан танишган эдик. Энди шу тушунчага асосланиб иккинчи тартибли чизиқнинг маркази тушунчасини киритамиз.

Табрифта *маркази* деб аталади. Чизиқнинг симметрия маркази шу чизиқнинг маркази деб аталади.

Табрифта кўра M_0 чизиқнинг маркази бўлса, $\forall M \in \gamma$ нуқтага M_0 га нисбатан симметриялик M' нуқта ҳам γ га тегишли бўлади. Иккинчи тартибли чизиқ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (53)$$

умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. Аввало қандай шарт бажарилганда координаталар боши марказ бўлишини аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, $O(0, 0)$ нуқта чизиқнинг маркази бўлсин, у ҳолда марказ таърифта кўра $M(x, y) \in \gamma \Rightarrow M'(-x, -y) \in \gamma$ (чунки бу нуқталар O га нисбатан симметрияликдир), яъни

$$a_{11}(-x)^2 + 2a_{12}(-x)(-y) + a_{22}(-y)^2 + 2a_{10}(-x) +$$

$$+ 2a_{20}(-y) + a_{00} = 0$$

ёки

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_{10}x - 2a_{20}y + a_{00} = 0. \quad (70)$$

Демак, координаталар боши чизикнинг маркази бўлса, унинг тенг-дамасида 1-даражали ҳадлар иштирок этмайди:

$$a_{10} = 0, \quad a_{20} = 0.$$

Аксинча чизикнинг (53) тенгламасида биринчи даражали ҳадлар иштирок этмаса ($a_{10} = a_{20} = 0$), x , y ни $-x$, $-y$ га алмаштиришда тенглама ўзгармайди, демак, $M(x, y) \in \gamma \Rightarrow M'(-x, -y) \in \gamma$. M, M' нукталар $O(0, 0)$ нуктага нисбатан симметрик. Бундан координаталар боши чизикнинг марказидир.

Шундай қилиб, координаталар боши иккинчи тартibli чизикнинг маркази бўлиши учун бу чизикнинг тенгламасида x , y ларга нисбатан биринчи даражали ҳадлар иштирок қилмаслиги зарур ва етарли. Энди чизикнинг марказини қандай қилиб топиш йўлини кўрсатамиз. $M_0(x_0, y_0)$ нукта чизикнинг маркази бўлсин. Координаталар боши $O(0, 0)$ ни M_0 нуктага кўчирамиз:

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases} \quad (71)$$

Бунинг учун (71) дан x , y ни (53) га қўямиз:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})X + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})Y + F(x_0, y_0) = 0,$$

бу ерда

$$F(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}. \quad (72)$$

Юқорида келтирилган зарурий ва етарли шартга кўра M_0 нукта чизикнинг маркази бўлиши учун қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \quad (73)$$

Демак, чизик марказининг мавжудлиги масаласи (73) система-нинг ечинини топиш масаласига келтирилади. Бу система коэффи-циентларидан ушбу детерминантларни тузамиз:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} \\ -a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} \\ a_{21} & -a_{20} \end{vmatrix}.$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

$$1. \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0.$$

(73) система биргина (x_0, y_0) ечимга эга ва шунга мос ҳолда

биргина марказ мавжуд. Бундай чизикни *марказли чизик* деб атай-миз. Чизик марказининг координаталари

$$x_0 = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\delta_2}{\delta}$$

формуладан топилади.

2. $\delta = 0$ ва δ_1, δ_2 нинг камида бири нолдан фарқли.

(73) система битта ҳам ечимга эга эмас, чизик — марказсиз.

3. $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{10}}{a_{20}} \Rightarrow$ (73) система биринчи даражали битта тенгламага келади. Унинг ечимлари чексиз кўп \Rightarrow чизик чексиз кўп марказларга, аниқроғи, марказлар тўғри чизигига эгадир.

Эслатма: (73) системани чизик тенгламасидан x, y га нисба-тан хусусий ҳосилда олиш йўли билан тузиш мумкин. Ҳақиқатан, (53) тенгламадан x га нисбатан ҳосилда олсак,

$$2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{10}$$

ва y га нисбатан ҳосилда олсак,

$$2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{20}.$$

Декарт координаталар системасини тегишлича танлаш йўли билан иккинчи тартibli чизикнинг (53) тенгламасини қуйидаги кўри-нишларнинг бирита келтирилган элик (53-§).

I. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0$, ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$),

II. $\lambda_2 Y^2 + 2a'_{10}X = 0$, ($\lambda_2 \neq 0, a'_{10} \neq 0$),

III. $\lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0$, ($\lambda_2 \neq 0$).

I тенглама учун $\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Демак, фақат эллипс, мавҳум эллипс, гипербола, кесилмаган ҳақикий иккита тўғри чи-зик, кесилмаган мавҳум иккита тўғри чизик марказли чизиклардир.

II тенглама учун $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} -a'_{10} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = -a'_{10} \lambda_2 \neq$

$\neq 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a'_{10} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ парабола марказсиз чизик экан.

III тенглама учун $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_2 =$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Бундан кўринадики, иккинчи тартibli чизик иккита параллел тўғри чизикларга ажралганда марказлар чизигига эгадир, холос.

Мисол. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ чизикнинг марказини топинг.

Еч иш. Бу ерда $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{22} = 1, a_{10} = 1, a_{20} = 1, a_{00} =$
 \parallel 4. Берилган эгри чизик марказининг координаталари ушбу

$$x + y + 1 = 0, x + y + 1 = 0$$

тенгламалар системасининг ечимлари бўлади. Бу системанинг иккита тенгламаси бир хил, демак, система битта тенгламага кезлади, унинг ечимлари чексиз кўп \Rightarrow берилган чизик марказлар тўғри чизигига эга бўлиб, унинг тенгламаси $x + y + 1 = 0$.

57-§. Иккинчи тартибли чизикнинг тўғри чизик билан кесилиши

Декарт реперда

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (53)$$

иккинчи тартибли чизик ва

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \quad (74)$$

тўғри чизик берилган бўлсин. Бу эгри чизикнинг шу тўғри чизик билан кесилиш масаласига ўтмиш. (53) ва (74) дан:

$$a_{11}(x_0 + a_1 t)^2 + 2a_{12}(x_0 + a_1 t)(y_0 + a_2 t) + a_{22}(y_0 + a_2 t)^2 + 2a_{10}(x_0 + a_1 t) + 2a_{20}(y_0 + a_2 t) + a_{00} = 0$$

ёки

$$P^2 + 2Qt + R = 0. \quad (75)$$

Бу ерда куйидаги белгилашлар киритилган:

$$P = a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2;$$

$$Q = a_{11}a_1x_0 + a_{12}a_1y_0 + a_{22}a_2x_0 + a_{20}a_1 + a_{00}a_1 + a_{00}a_2 = a_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{20}) + a_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}); \quad (76)$$

$$R = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}.$$

(75) тенгламани ечиб, t нинг топилган қийматларини (74) га куйиб, чизик билан тўғри чизикнинг кесилган нуқталари топиллади. Куйидаги ҳолларни текширайлик.

1. $P \neq 0$. Бу ҳолда (75) тенглама иккита илдизга эга.

$$t_{1,2} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - RP}}{P}$$

Бу ернинг ўзида учта ҳол бўлиши мумкин:

а) $D = Q^2 - RP > 0$: (75) тенглама иккита ҳақиқий турли илдизга эга — чизик билан тўғри чизик иккита ҳақиқий турли нуқталарда кесилди.

б) $D = Q^2 - RP < 0$: (75) тенглама иккита кўшма комплекс илдизга эга, шунинг учун (53) чизик билан (74) тўғри чизик иккита кўшма комплекс нуқталарда кесилди, демак, тўғри чизик билан (53) чизик умумий ҳақиқий нуқталарга эга бўлмайди.

в) $D = Q^2 - RP = 0$: (75) тенглама устма-уст тушган иккита ил-

дизга эга — чизик билан тўғри чизик устма-уст тушган иккита нуқтада кесилди. Бу вақтда u тўғри чизик γ чизикка *уринма* деб аталади.

$$2. P = 0. \text{ Бу ҳолда (75) тенглама } 2Qt + R = 0 \quad (77)$$

кўринишни олади.

Ўз навбатида куйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) $Q \neq 0, R = 0$ — ихтиёрий сон. (77) тенглама ягона илдизга эга:

$$t = -\frac{R}{2Q};$$

чизик билан тўғри чизик битта нуқтада кесилди.

б) $Q = 0, R \neq 0$: (77) тенглама ечимга эга эмас. Чизик тўғри чизик билан битта ҳам умумий ҳақиқий ёки мавҳум нуқтага эга эмас.

в) $Q = 0, R = 0$, бу ҳолда t нинг ҳар қандай қиймати (77) тенгламани қаноатлантиради \Rightarrow чизик ва тўғри чизик чексиз кўп умумий нуқталарга эга, яъни (74) тўғри чизик барча нуқталари билан (53) чизикка тегишли: $u \subset \gamma$. Шундай қилиб, (75) тенгламада $P = 0$ бўлса, γ чизик u тўғри чизик билан фақат битта умумий нуқтага эга ёки битта ҳам умумий нуқтага эга эмас, ёки $u \subset \gamma$.

Мисол. $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ чизикнинг $u: \begin{cases} x = t, \\ y = 5t - 5 \end{cases}$

тўғри чизик билан кесилиш нуқталарини топилган.

Е чиш. Бу ерда $a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{22} = -3, a_{10} = -2, a_{20} = -3, a_{00} = 3, M_0(0, -5), u(1, 5) \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 5, P^2 + 2Qt + R = 0$ нинг коэффициентлари: $P = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = -3, 25 = -84, Q = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot (-5) - 2) + 5 \cdot (-1 \cdot 0 - 3 \cdot (-5) - 3) = 3 + 60 = 63, R = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot (-5)^2 - 4 \cdot 0 - 6 \cdot (-5) + 3 = -75 + 27 = -42$. Тенгламанинг дискриминанти: $D = Q^2 - RP = (63)^2 - (-84) \cdot (-42) = 3969 - 3528 = 441 > 0 \Rightarrow$ тўғри чизик γ ни иккита ҳақиқий нуқтада кесди: шу нуқталарни топайлик:

$$t_{1,2} = \frac{-63 \pm \sqrt{441}}{-84} = \frac{-63 \pm 21}{-84}, \quad t_1 = \frac{-63 + 21}{-84} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{-63 - 21}{-84} = \frac{84}{84} = 1.$$

t нинг қийматларини тўғри чизик тенгламаларига куйиб, $M_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right), M_2(1, 0)$ нуқталарни ҳосил қиламиз.

58-§. Асимптотик йўналишлар. Уринма ва асимптоталар

Ноль бўлмаган ҳар бир u (a_1, a_2) вектор бирор йўналишини аниқлайди. u векторга параллел бўлган барча тўғри чизикларни қарайлик.

Тариф. Агар \vec{u} векторга параллел ҳар бир \vec{v} тўғри чизик \vec{v} иккинчи тартибли чизикни биттадан ортқ. бўлмаган нуқтада кесса ёки $u \in \vec{v}$ бўлса, \vec{u} вектор аниқлайдиган йўналиш иккинчи тартибли чизикка нисбатан *асимптотик йўналиш*, \vec{v} вектор эса *асимптотик ўқнашлининг вектори* дейилади.

Бу тариф ва 57-§ даги 2-қолга асосан \vec{u} (a_1, a_2) вектор аниқлаган йўналишнинг \vec{v} чизикка нисбатан асимптотик йўналиш бўлиши учун $R = 0$ бўлиши, буни оқиб ёзсак,

$$a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 = 0 \quad (78)$$

тенгликнинг ўрнини бўлиши зарур ва етарли. (73) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзсак ($a_1 \neq 0$):

$$a_{22} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{a_2}{a_1} \right) + a_{11} = 0. \quad (79)$$

(79) тенгламада $\frac{a_2}{a_1}$ нисбат \vec{u} векторнинг йўналишини, демек, асимптотик йўналишни аниқлайди. (79) дан

$$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

1) $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$; (79) тенглама иккита турли ҳақиқий илдиэга эга. δ чизик иккита асимптотик йўналишга эга.

2) $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$; (79) тенгламанинг иккала илдиэи тенг. \vec{u} чизик битта асимптотик йўналишга эга.

3) $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$; (79) тенглама ҳақиқий илдиэларга эга эмас, \vec{u} чизик асимптотик йўналишга эга эмас.

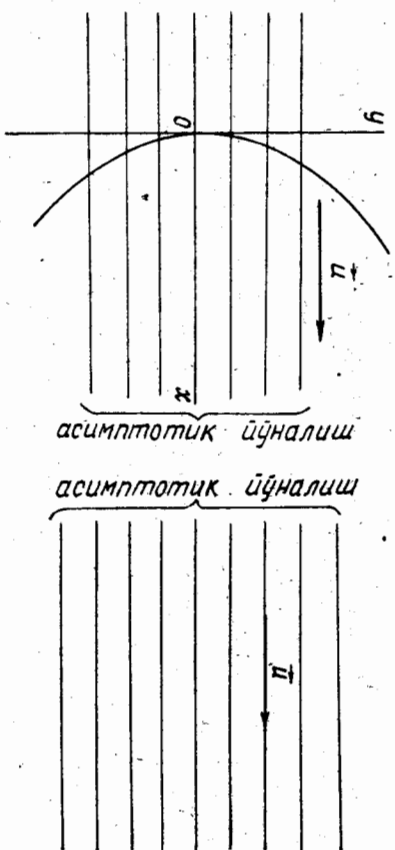
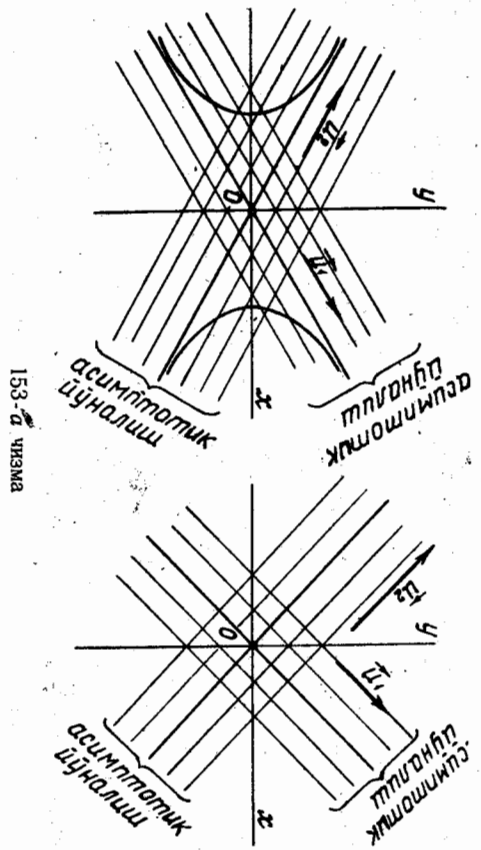
Юқорида олиб борилган муҳокамада таяниб, қуйидаги ҳулосага келамиз: гипербола ва ҳақиқий кесилувчи икки тўғри чизик иккита асимптотик йўналишга эга (153-а чизма). Иккита ҳақиқий ёки иккита мавҳум параллел тўғри чизик, устма-уст тушган икки тўғри чизик, парабола битта асимптотик йўналишга эга (153-б чизма).

Мисол. $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$ чизик берилган. Асимптотик йўналишларнинг векторларини топиш.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = 4, a_{12} = -\frac{5}{2}, a_{22} = 1, a_{10} = -\frac{3}{2}, a_{20} = 0, a_{30} = 7$; асимптотик йўналиш (a_1, a_2) векторининг бурчак коэффициентини $\frac{a_2}{a_1}$:

$$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{1} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Бундан:



153-б чизма

$$k_1 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4; \quad k_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_2 = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = 1.$$

Демек, берилган чизик иккита асимптотик йўналишга эга.

Иккинчи тартибли чизикка уринма. Биз 57-§ нинг 1-бандида чизикнинг уринмеси тушуничасини киритган эдик. Шунга асосланиб, уринма тенгламасини чиқарайлик.

Агар декарт репериди \vec{u} чизик (53) тенгламаси билан \vec{v} тўғри чизик эса (74) параметрик тенгламалари билан берилган бўлса, қуйилган масала мазмунига асосан \vec{u} тўғри чизик \vec{v} нинг M_0 нуқтасида¹ уринма бўлиши учун $t_1 = t_2 \Rightarrow M_0 = M$ бўлиши керак, бу эса (75) да $Q = 0, R = 0$ бўлганда юз беради. Q нинг ифодасидан:

$$Q = a_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + a_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) = 0 \Rightarrow$$

¹ M_0 нуқта \vec{u} учун марказ эмас деб фарз қилинади.

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}} \quad (75) \text{ дан} \quad (**)$$

$$x - x_0 = a_1 t, \quad y - y_0 = a_2 t. \quad (**)$$

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = -\frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}};$$

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})(y - y_0) = 0.$$

$$B \text{ унни} \quad R = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = 0$$

эжанини эвтиборга олиб, куйидагыча ёзиш мумкин:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0.$$

(80) γ чизикнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуктасидаги уринмасининг *тенгламасидир*, чунки x, y олдидаги коэффициентлар нолдан фаркли (M_0 — чизик маркази эмас).²

Эллипс, гиперболола ва параболага уринма. Эллипс, гиперболола ва параболаннг ҳар бир M_0 нуктасида тайин битта уринма мавжуд.

$$a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ эллипсга } M_0(x_0, y_0) \text{ нуктасида уринма. Бу ерда:}$$

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad a_{10} = 0, \quad a_{20} = 0, \quad a_{00} = -1.$$

γ ҳолда (80) тенглама куйидаги кўринишни олади:

$$\left(\frac{1}{a^2}x_0 + 0 \cdot y_0 + 0\right)x + \left(0 \cdot x_0 + \frac{1}{b^2}y_0 + 0\right)y + (0 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 - 1) = 0$$

ёки

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Бу тенглама эллипснинг $M_0(x_0, y_0)$ нуктасидаги уринмасининг тенгламасидир.

$$b) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ гипербололага } M_0(x_0, y_0) \text{ нуктасида уринма. Айни эллипсдаги } \gamma \text{ ҳислаш, гиперболаннг } M_0(x_0, y_0) \text{ нуктасидаги уринмаси}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \text{ тенглама билан ифодалангани (буни мустақил кўрсатинг).}$$

¹ M_0 нукта γ учун марказ эмас деб фарз қилинган, демек касрнинг сурат ва махражи бир вақтда нолга тенг эмас.

² M_0 нукта чизик маркази бўлса, уринма тушунчаси бу ҳолда маъносини йўқотган.

$$b) \quad y^2 = 2rx \text{ параболага } M_0(x_0, y_0) \text{ нуктасида уринма.}$$

$$y^2 = 2rx \text{ парабола учун } a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{10} = -r, \quad a_{20} = 0, \quad a_{00} = 0. \quad \gamma \text{ ҳолда (80) тенглама}$$

$$(0 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 - r)x + (0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 0)y + (-r x_0 + 0 \cdot y_0 + 0) = 0 \text{ ёки } y y_0 = r(x + x_0)$$

кўриништа келиб, γ параболаннг $M_0(x_0, y_0)$ нуктасидаги уринмасининг тенгламаси бўлади.

Мисол. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизикнинг а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга, б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболога, в) $y^2 = 2rx$ параболага уринма

бўлишлиги учун тегишли шартларни аниқланг.

Е ч и ш. а) тўғри чизик тенгламаси билан эллипс тенгламасини биргаликда ечимиз. Тўғри чизик тенгламасидан $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ни

эллипс тенгламасига қўйсак,

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{A^2}{B^2}x^2 + 2\frac{AC}{B^2}x + \frac{C^2}{B^2}\right) - a^2b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2})x^2 + 2a^2 \frac{AC}{B^2}x + a^2 \frac{C^2}{B^2} - a^2b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\frac{2AC}{B^2} \pm \sqrt{\frac{4A^2C^2}{B^4} - \left(b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2}\right)\left(\frac{a^2C^2}{B^2} - a^2b^2\right)}}{b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2}}$$

Агар

$$\frac{4A^2C^2}{B^4} - \left(b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2}\right)\left(\frac{a^2C^2}{B^2} - a^2b^2\right) = 0 \quad (81)$$

бўлса, γ ҳолда $x_1 = x_2$ бўлиб, берилган тўғри чизик эллипсга уринди. (81) дан

$$-b^2C^2 + b^4 + a^2b^2 \frac{A^2}{B^2} = 0,$$

бунинг иккала томонини b^2 га бўлсак, $\Rightarrow b^2 + a^2 \frac{A^2}{B^2} - C^2 = 0$ ёки

$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$, бу берилган тўғри чизикнинг эллипсга уриниш шартидир.

б) айнан оқоридиги каби ишни бажариш билан берилган тўғри чизикнинг $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболога уриниш шarti

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$$

эжанига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

в) берилган тўғри чизик тенгламасидан топишган $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

— $\frac{C}{B}$ ни $y^2 = 2px$ парабола тенгласига кўйсак, $\frac{A^2}{B^2}x^2 + 2\left(\frac{AC}{B^2} - p\right)x + \frac{C^2}{B^2} = 0$ квадрат тенгламага эга бўламиз. Унинг илдизлари:

$$x_{1,2} = \frac{\left(\frac{AC}{B^2} \pm \sqrt{\left(\frac{AC}{B^2}\right)^2 - \frac{A^2}{B^2} \cdot \frac{C^2}{B^2}}\right)}{\frac{A^2}{B^2}}$$

Бу ерда ҳам, агар

$$\left(\frac{AC}{B^2}\right)^2 - \frac{A^2}{B^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} = 0 \quad (82)$$

бўлса, $x_1 = x_2$ бўлиб, берилган тўғри чизиқ параболага уринади. (82) дан $p\left(\frac{AC}{B^2} - p\right) = 0$, $p \neq 0$ бўлгани учун $p = \frac{AC}{B^2} = 0$, бундан ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$p = -\frac{2AC}{B^2} \text{ ёки } pB^2 = 2AC.$$

Бу берилган тўғри чизиқнинг параболага уриниш шартидир. Асимптота. (Этри) чизиқнинг асимптотасига юқорида таъриф берилган эди (49-§).

Бу таъриф бўйича асимптотани γ чизиқнинг чексиз узоклашган нуқтасидати (яъни $M_1 = M_{2\infty}$ нуқтадаги) уринмаси деб қараш мумкин. Бунни эътиборга олсак:

1) (75) тенгламанинг t_1, t_2 илдизлари бир-бирита тенг ($t_1 = t_2$) ва $t_1 = t_2 = \infty$ бўлган ҳолда квадрат тенглама $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ нинг олдинги иккита P, Q коэффициентни нолга тенг бўлиши керак; ҳақиқатан, (75) да $t = \frac{1}{\gamma}$ десак, $\Rightarrow P + 2Q\gamma + R\gamma^2 = 0$; бу ерда

$P = 0 \Rightarrow t_1 \rightarrow \infty$ ва $Q = 0 \Rightarrow t_2 \rightarrow \infty$. Иўналдининг иккинчи тартиб-лин γ чизиққа нисбатан асимптотик бўлиш шarti $P = 0$ эди. Бундан \Rightarrow ҳар қандай асимптота асимптотик йўналдишга эга.

Бу муҳокамадаги гиперболага татабик қилсак, гиперболанинг юқорида қаралган иккита асимптотаси $y = \pm \frac{b}{a}x$ ни ҳосил қиламиз, парабола учун эса асимптоталарнинг йўқлигини кўрамай.

59-§. Иккинчи тартибли чизиқнинг диаметрлари

\rightarrow u (u_1, u_2) вектор (53) чизиққа нисбатан асимптотик бўлмаган йўналдининг вектори бўлсин. u (u_1, u_2) векторга параллел бўлган барча тўғри чизиқларни қараймиз. Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бири (53) чизиқ билан иккита (турли ҳақиқий, устма-уст тушган ёки кўшма комплекс) нуқтада кесилиб, u векторга параллел ватарни

ҳосил қилади. Ҳосил қилинган ҳар бир ватарнинг ўртаси ҳақиқий нуқта¹ бўлади.

\rightarrow u векторга параллел бўлган барча ватарлар ўрагаларининг тўп-ламини $D_u \rightarrow$ билан белгилаймиз ва унинг тенгламасини тузаймиз. Шу мақсадда $D_u \rightarrow$ тўпламнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасини олаймиз. M нуқтадан u (u_1, u_2) векторга параллел битта u тўғри чизиқ ўтади. M нуқтани бу тўғри чизиқнинг бошланғич нуқтаси десак, унинг параметрик тенгламалари

$$\begin{cases} X = x + u_1 t, \\ Y = y + u_2 t \end{cases} \quad (83)$$

кўринишда бўлади. $M_1(X_1, Y_1), M_2(X_2, Y_2)$ орқали (83) тўғри чизиқнинг γ чизиқ билан кесилган нуқталарини белгилаймиз:

$$\begin{cases} X_1 = x + u_1 t_1, & \begin{cases} X_2 = x + u_1 t_2, \\ Y_1 = y + u_2 t_1, & \begin{cases} Y_2 = y + u_2 t_2. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (84)$$

бу ерда t_1, t_2 (83) билан (53) тенгламаларни бирликлда ечишдан ҳосил бўлган

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (85)$$

квадрат тенгламанинг илдизларидир. $M(x, y)$ нуқта M_1, M_2 кесма-нинг ўртаси бўлгани учун

$$x = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}.$$

(84) га асосан:

$$x = x + \frac{t_1 + t_2}{2} u_1, \quad y = y + \frac{t_1 + t_2}{2} u_2$$

ёки

$$\frac{t_1 + t_2}{2} u_1 = 0, \quad \frac{t_1 + t_2}{2} u_2 = 0.$$

Бу муносабатларда u_1, u_2 нинг камида бири нолдан фарқли, чунки $u \neq 0$, у ҳолда $t_1 + t_2 = 0$ бўлади.

Иккинчи томондан, t_1, t_2 (85) квадрат тенгламанинг илдизлари, бу ҳолда Виет теоремасига кўра

$$t_1 + t_2 = Q \Rightarrow Q = 0,$$

яъни

$$u_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + u_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0. \quad (86)$$

Шундай қилиб, $D_u \rightarrow$ тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси $M(x, y)$ нинг

¹ Агар M_1 ва M_2 нуқталар кўшма комплекс, яъни $M_1(a+bi, c+di), M_2(a-bi, c-di)$ бўлса, у ҳолда уларнинг ўртаси ҳақиқий $M(a, c)$ нуқта бўлади.

координаталары (86) ни қаноатлантиради. Шундай қилиб, (86) $D \rightarrow$ түптамнинг тенгламаси экан. Энди (86) тенгламасига кўра $D \rightarrow$ түптамнинг тўғри чизик эканини кўрсатамиз. (86) ни қуйидагича шакли ўзгартириб есаемиз.

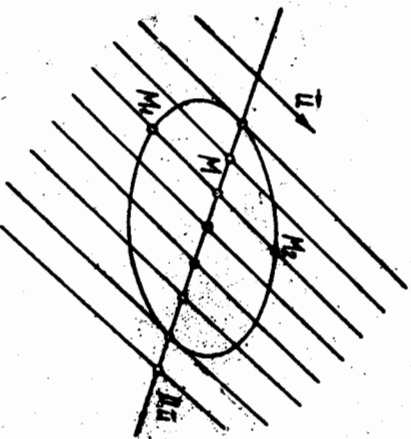
$$(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)x + (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)y + (a_{10}u_1 + a_{20}u_2) = 0. \quad (87)$$

(87) да ўзгарувчи координаталар стандартга коэффициентлардан камдан бири ноғдан фарқли, акс ҳолда

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = 0, \quad a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = 0$$

дан

$$P = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 = (a_{11}u_1 + a_{12}u_2)u_1 + (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)u_2 = 0$$



154-чизма

бўлиб, бу эйдикдир (чунки u — асимптотик йўналишнинг вектори). Бундан u векторга параллел барча ватарларнинг ўрталари түптами тўғри чизик экан деган хулоса келиб чикади (154-чизма). Бу тўғри чизикни берилган (u_1, u_2) йўналишнинг ватарларига (ёки u йўналишга) *қўшма диаметр* дейилади. (86) ёки (87) тенглама бу диаметرنинг тенгламасидир. Параллел ватарларнинг йўналиши билан бу ватарларга қўшма бўлган диаметрнинг йўналишини берилган (53) чизикка нисбатан *қўшма йўналишлар* дейилади.

Маълумки, иккинчи тартибли u чизикнинг маркази

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан аниқланар эди. Бу система билан (86) диаметр тенгламасидан u чизикнинг маркази диаметрга тегишли деган хулосага келамиз. Демак, марказли чизикнинг барча диаметрлари унинг марказидан ўтади.

Агар u чизик марказлар тўғри чизигига эга бўлса, u u нинг *диаметри ҳам бўлади*, бу ҳолда u чизик ягона диаметрга эга бўлади. Марказиз чизик биргина бўлиб, u ҳам параболдир.

Параболнинг диаметрларини текшираемиз. Парабола $y^2 = 2px$ тенглама билан берилган бўлсин. (86) тенглама бу параболга учун ушбу кўринишни олади:

$$u_1(0 \cdot x + 0 \cdot y - 2p) + u_2(0 \cdot x + 1 \cdot y + 0) = 0$$

ёки $-2pu_1 + u_2y = 0, \quad (88)$

бу ерда $u_2 \neq 0$, агар $u_2 = 0$ бўлса, (88) дан $2pu_1 = 0, p \neq 0$ бўлганидан $u_1 = 0$ бўлади, бу мумкин эмас, чунки

$$u(u_1, u_2) \neq 0$$

тенгламанинг иккала қисмини u_2 га бўлиб, ушбуга эга бўламиз:

$$y + b = 0. \quad (89)$$

бу ерда $b = -2p \frac{u_1}{u_2}$ белгилашни киргиздик. (89) тенглама i векторга параллел тўғри чизиклар дастасини аниқлайди. i вектор 58-§ га кўра асимптотик йўналишнинг вектори ҳамдир.

Демак, парабол битта асимптотик йўналишга эга бўлиб, бу йўналишдаги ҳар бир тўғри чизик параболнинг диаметри бўлади. Демак, параболнинг барча диаметрлари ўзаро параллелдир.

Мисол. $\frac{x_2}{16} + \frac{y_2^2}{12} = 1$ эллипси $3x + 2y - 6 = 0$ тўғри чизик икки M_1, M_2 нуқтада кесиб ўтади. M_1, M_2 ватарнинг ўртасидан ўтувчи диаметрнинг толиғи.

Ечиш. Берилган эллипснинг маркази координаталар бошида.

Демак, изланаётган диаметр координаталар бошидан ўтади. Ватарнинг ўртасини топиш учун эллипс билан тўғри чизикнинг кесилган нуқталарини толамиз: $3x + 2y - 6 = 0, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ дан

$$\frac{x^2}{16} + \left(\frac{-3}{2}x + 3\right)^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4\left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9\right) = 48 \Rightarrow 12x^2 - 36x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2};$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2};$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \text{ дан } y_1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) + 3,$$

$$y_2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) + 3.$$

M_1, M_2 ватарнинг ўртасини M_0 десак, унинг x_0, y_0 координаталари қуйидагича ҳисобланади:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + \sqrt{13} + 3 - \sqrt{13}}{4} = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-\frac{9}{2} + 6}{2} = \frac{3}{4}.$$

Изланган диаметр O ва M_0 нукталардан ўтгани учун унинг тенгламаси:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

Кўшма диаметрлар \vec{D}_v иккинчи тартибли марказли чизик, унинг асимптотик бўлмаган u (u_1, u_2) йўналишта кўшма диаметри D_v бўлсин. У ҳолда D_v (87) тенглама билан ифодаланади, γ чизикнинг D_v диаметрга параллел вагларларини ўтказамиз. Барча бундай вагларлар ўртасининг тўглами бирор v (v_1, v_2) йўналишта кўшма иккинчи бир D_v диаметри беради, у D_v диаметрга кўшма деб аталади. D_v v йўналишта кўшма ва D_v га параллел барча вагларнинг ўртаси бўлганидан D_v тўғри чизикнинг a ($-(u_1 a_{12} + u_2 a_{22})$, $(u_1 a_{11} + u_2 a_{22})$) йўналтирувчи вектори v векторга коллинеар бўлади. Бундан ушбунни эса оламиз:

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ -(u_1 a_{12} + u_2 a_{22}) & u_1 a_{11} + u_2 a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (1 \text{ боёб, } 8\text{-}\S)$$

эки $v_1(u_1 a_{11} + u_2 a_{22}) + v_2(u_1 a_{12} + u_2 a_{22}) = 0.$ (90)

(90) тенглик D_v диаметрининг D_v диаметрга кўшма бўлишлик шартидир. Энди D_v диаметрга кўшма бўлган диаметрни излаймиз. D_v бўлсин. D_v бирор асимптотик бўлмаган w (w_1, w_2) йўналишга кўшма. У ҳолда D_v тўғри чизик (87) га асосан \vec{b} ($-(v_1 a_{12} + v_2 a_{22})$, $(v_1 a_{11} + v_2 a_{22})$) йўналтирувчи векторга эга ва $w \parallel \vec{b}$ бўлади \Rightarrow

$$\Rightarrow w_1(v_1 a_{11} + v_2 a_{12}) + w_2(v_1 a_{12} + v_2 a_{22}) = 0. \quad (91)$$

(90) дан $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{u_1 a_{11} + u_2 a_{12}}{u_1 a_{12} + u_2 a_{22}}$ ни топиб, уни (91) га кўйсак,

$$w_1 \left(a_{11} - a_{12} \frac{u_1 a_{11} + u_2 a_{12}}{u_1 a_{12} + u_2 a_{22}} \right) + w_2 \left(a_{12} - a_{22} \frac{u_1 a_{11} + u_2 a_{12}}{u_1 a_{12} + u_2 a_{22}} \right) = 0.$$

Бундан

$$w_1(a_{11}u_1 a_{12} + a_{11}u_2 a_{22} - a_{12}u_1 a_{11} - a_{12}u_2 a_{22}) + w_2(a_{12}u_1 a_{12} + a_{12}u_2 a_{22} - a_{22}u_1 a_{11} - a_{22}u_2 a_{12}) = 0$$

эки $(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)(w_1 u_2 - w_2 u_1) = 0.$ (92)

$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ (чунки γ чизик марказли) бўлганидан (92) дан,

$$w_1 u_2 - w_2 u_1 = 0 \Rightarrow \frac{w_2}{w_1} = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow D_v = D_v.$$

Демак, марказли γ чизикнинг икки диаметрдан бири иккинчисига кўшма бўлса, иккинчиси ҳам биринчисига кўшма бўлади. Шу сабабдан бундай диаметрлар ўзаро кўшма диаметрлар деб аталади. Шундай қилиб, иккинчи тартибли γ чизикнинг ўзаро кўшма диаметрлари унинг шундай икки диаметри бўладикки, уларнинг ҳар бири иккинчисига параллел вагларларнинг ўртасидан ўтади.

(90) муносабат икки диаметрининг ўзаро кўшма бўлишлик шартидир. (90) муносабатни бошқача

$$a_{11} u_1 v_1 + a_{12} v_1 u_2 + a_{21} u_1 v_2 + a_{22} v_2 u_2 = 0$$

кўринишда ёзиш ҳам мумкин.

Агар γ марказсиз эки марказлар тўғри чизикга эга чизик бўлса, унга нисбатан барча асимптотик бўлмаган йўналишларининг ҳар бирига кўшмаси биринча асимптотик йўналиш бўлади.

Параболанинг барча диаметрлари ўзаро параллел, параллел икки тўғри чизикка ажралган γ чизик эса биринча диаметрга эга бўлгани, учун парабола ҳам, параллел икки тўғри чизик ҳам ўзаро кўшма диаметрларга эга эмас.

Мисол. Ушбу $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$ чизикнинг шундай иккита кўшма диаметрини топиб керакки, уларнинг бири ординаталар ўқига параллел бўлсин.

Е чиш. Бу ерда $a_{11} = 5, a_{12} = 2, a_{22} = 8, a_{10} = -16, a_{20} = -28, a_{30} = 80$. Мос равишда u (u_1, u_2), v (v_1, v_2) йўналишларга кўшма бўлган D_v ва D_v диаметрларни қараймиз. (87) тенгламага кўра бу диаметрлар ушбу тенгламаларга эга бўлади:

$$D_v: (5u_1 + 2u_2)x + (2u_1 + 8u_2)y - (16u_1 + 28u_2) = 0,$$

$$D_v: (5v_1 + 2v_2)x + (2v_1 + 8v_2)y - (16v_1 + 28v_2) = 0.$$

D_v, D_v диаметрларнинг бири, масалан, D_v диаметр Oy ўқига параллел бўлсин ва D_v, D_v ўзаро кўшма бўлсин. Бу шартлар куйидаги кўринишда ифодаланади:

$$2v_1 + 8v_2 = 0, \quad (*)$$

чунки $D_v \parallel Oy$ бўлгани учун унинг йўналтирувчи вектори $-(2v_1 + 8v_2)$, $5v_1 + 2v_2$ нинг биринчи координатаси нолга тенг бўлади.

$$5u_1 v_1 + 2v_1 v_2 + 2u_1 v_2 + 8v_2 v_2 = 0 \quad (**)$$

(бу D_v ва D_v диаметрларнинг кўшмалик шarti). (*) дан $v_1 = -4v_2$, буни (**) га кўйсак,

$$-20u_1 v_2 - 8v_2 v_2 + 2u_1 v_2 + 8v_2 v_2 = 0 \Rightarrow 18u_1 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 \neq 0,$$

акс ҳолда $v_1 = 0$ бўлиб, $v = 0$, бу эса мумкин эмас. У ҳолда $u_1 =$

$= 0, u \neq 0$ бўлгани учун $u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \neq 0$. Топишган бу қийматлар D_1, D_2 нинг тенгламаларига қўйсак,

$$D_1: (5 \cdot 0 + 2u_2)x + (2 \cdot 0 + 8u_2)y - (16 \cdot 0 + 28u_2) = 0 \Rightarrow x + 4y - 14 = 0,$$

$$D_2: (-20v_2 + 2v_2)x + (-8v_2 + 8v_2)y - (-64v_2 + 28v_2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0.$$

60-§. Иккинчи тартибли чизикнинг бош йўналишлари ва симметрия ўқлари

1-тартиф. $u(u_1, u_2), v(v_1, v_2)$ векторлар билан аниқланган икки йўналиш ва иккинчи тартибли чизик учун ушбу

$$u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0$$

шарт бажарилса, u, v йўналишлар γ га нисбатан ўзаро қўшма йўналишлар деб аталади.

2-тартиф. Бир вақтда қўшма ва ўзаро перпендикуляр бўлган йўналишлар, иккинчи тартибли чизикнинг бош йўналишлари дейилади.

Теорема * Иккинчи тартибли ҳар қандай чизик бир жупт ҳақиқий бош йўналишга эга.

Исбот. $u(u_1, u_2), v(v_1, v_2)$ иккинчи тартибли чизикнинг бош йўналишлари бўлса, ушбу шартлар бажарилди:

$$1) u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0.$$

Бунди қуйидагича эзиш мумкин:

$$a_{11} + a_{12} \frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1} (a_{21} + a_{22} \frac{v_2}{v_1}) = 0$$

ёки

$$a_{11} + a_{12} \left(\frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1} \right) + a_{22} \frac{u_2 v_2}{u_1 v_1} = 0 \quad (93)$$

(бу u ва v йўналишларнинг ўзаро қўшмалик шарт).

$\frac{u_2}{u_1}, \frac{v_2}{v_1}$ сонлар u, v йўналишларнинг бурчак коэффициентлари бўлиб, уларни қуйидагича белгилаймиз:

$$k = \frac{u_2}{u_1}, \quad k^* = \frac{v_2}{v_1},$$

У ҳолда (93) шарт

$$a_{11} + a_{12}(k + k^*) + a_{22}kk^* = 0 \quad (94)$$

қўринишни олади.

$$2) \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} = -1 \text{ ёки } kk^* = -1 \quad (95)$$

(бу u, v йўналишларнинг ўзаро перпендикулярлик шарт).

$$(95), (94) \text{ дан } k + k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} \text{ муносабатга эга бўламиз, бундан}$$

$$k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k. \quad (96)$$

(96) тенгликни ҳисобга олганда (94) дан

$$a_{22} + a_{22}k \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k \right) = 0 \Rightarrow a_{22} \left[1 + \frac{k(a_{22} - a_{11} - a_{12}k)}{a_{12}} \right] = 0 \Rightarrow a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \quad (97)$$

ёки

$$k^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}k - 1 = 0. \quad (98)$$

(97) ёки (98) тенгламалардан γ чизикнинг бош йўналишлари аниқланади. (97) дан

$$k_{1,2} = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \quad (99)$$

Равшанки, (99) да дискриминант $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$. Бундан (97) тенгламанинг k_1, k_2 илдизлари ҳақиқий, шу билан бирга Виет теоремасига кўра (98) дар $k_1k_2 = -1 \Rightarrow$ (дискриминант нолидан катта бўлганда) k_1, k_2 бурчак коэффициентли бош йўналишлар ўзаро перпендикуляр.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли ҳар қандай γ чизик бир жупт ҳақиқий бош йўналишларга эга. Агар $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 = 0$ бўлса, $k_1 = k_2$, лекин дискриминант

$$a_{12} = 0, a_{22} - a_{11} = 0 \quad (100)$$

бўлгандагина нолга тенг бўлади. Бу ҳолда (97) тенгламани k бурчак коэффициентининг ҳар қандай қиймати қаноатлантиради. Демак, бу ҳолда k бурчак коэффициент ихтиёрий бўлади. (100) шартга эътибор берсак, $a_{11} = 0$ бўлган ҳолда $\Rightarrow a_{22} = 0$, бу эса мумкин эмас, чунки a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларнинг камидан бири нолидан фарқли эди.

Демак, $a_{11} \neq 0$ да (100) муносабатдан $a_{11} = a_{22}$. γ чизикнинг тенгламасини $a_{11} = a_{22}$ га бўлиб, ушбу

$$x^2 + y^2 + 2b_{10}x + 2b_{20}y + b_{00} = 0 \quad (101)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу ерда

$$b_{10} = \frac{a_{10}}{a_{11}}, \quad b_{20} = \frac{a_{20}}{a_{11}}, \quad b_{00} = \frac{a_{00}}{a_{11}}.$$

(101) тенгламадан

$$(x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}$$

ёки

$$(x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = \sqrt{b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}^2} \quad (102)$$

Бу ерда куйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}^2 > 0$. Бу ҳолда (102) тенглама маркази $(-b_{10}, -b_{20})$ нуктада ва радиуси $r = \sqrt{b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}^2}$ бўлган айлана ни аниқлайди.

2) $b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}^2 = 0$. Бу ҳолда (102) \Rightarrow

$$\Rightarrow (x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = 0, \quad (103)$$

Бу тенгламани биргина $(-b_{10}, -b_{20})$ нукта қаноатлантиради. (103) тенглама ҳақиқий $(-b_{10}, -b_{20})$ нуктада кесилувчи мавҳум икки тўғри чизикни аниқлайди.

3) $b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}^2 < 0$. Бу ҳолда (102) тенгламани текисликдаги бирорта ҳақиқий нуктанинг координатлари қаноатлантирмайди — тенглама бу ҳолда мавҳум айланани аниқлайди деймиз.

Демак, бош йўналиш аниқ бўлмаса, яъни k ихтиёрий бўлса, иккинчи тартибли чизик ҳақиқий айлана ёки мавҳум айлана, ёки кесилувчи мавҳум икки тўғри чизикдан иборат.

Шундай қилиб, айлана (ҳақиқий, мавҳум, кесилувчи мавҳум икки тўғри чизик) дан фарқли ҳар қандай иккинчи тартибли чизик бир жуфт бош йўналишга эга, айлана учун эса ўзаро перпендикуляр бўлган барча йўналишлар жуфти бош йўналишлардир.

Бош йўналишларга оид маълумотни характеристик тенглама ёрдамида ҳам ҳосил қилиш мумкин. (94) ва (95) тенгламалардан k^* ни аниқлаймиз. (94) дан

$$k^* = -\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{12} + a_{22}k}.$$

(95) дан $k^* = -\frac{1}{k}$, бу икки тенгликдан,

$$\frac{a_{11} + a_{12}k}{a_{12} + a_{22}k} = -\frac{1}{k}$$

ёки $a_{11} + a_{12}k = \frac{a_{12} + a_{22}k}{k} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12}k = \lambda, \\ a_{12} + a_{22}k = \lambda k \end{cases}$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) + a_{12}k = 0, \\ a_{12} + (a_{22} - \lambda)k = 0. \end{cases} \quad (104)$$

(104) системанинг биринчи тенгламасидан $k = -\frac{a_{11} - \lambda}{a_{12}}$, иккинчи тенгламасидан $k = -\frac{a_{12}}{a_{22} - \lambda}$. Бу икки тенгликдан

$$\frac{a_{11} - \lambda}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22} - \lambda} \quad \text{ёки} \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Бу γ чизикнинг характеристик тенгламаси бўлиб, унинг дискриминанти $D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2 \geq 0$. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин.

1) $D = 0 \Leftrightarrow a_{11} - a_{22} = 0, a_{12} = 0$, бундан $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$, бу ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}$ бўлиб, (104) системада k ҳар қандай қийматни қабул қила олади. Маълумки, бу ҳолда γ чизик айлана бўлади ва ўзаро перпендикуляр бўлган ҳар икки йўналиш бу айланани нисбатан бош йўналишлардир.

2) $D > 0 \Rightarrow$ характеристик тенгламага турли ҳақиқий λ_1, λ_2 ил-диэларга эга. Бу ҳолда бир жуфт бош йўналиш мавҳуд бўлиб, улар (104) системанинг бирдаги λ нинг ўрнига λ_1, λ_2 ни қўйиш билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, яъни чизик марказли бўлса, унга нисбатан бир жуфт бош йўналиш мавҳуд. γ парабolik типли чизик бўлганда $D = 0$ билан бирга характеристик тенглама илдиэларнинг бири нолга тенгдир. Лекин тенгламанинг иккинчи илдиэи нолга тенг бўла олмайди, акс ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22} = 0$ ва $a_{12} = 0$ бўлиб, чизик тенгламасида ўзаро-чиқарга нисбатан иккинчи даражали ҳадлар қатнашмай қолган. (104) да $\lambda = 0$ десак, парабolik типли чизик учун:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

k нинг бу қиймати γ чизикка нисбатан асимптотик йўналишни аниқлар эди. Шундай қилиб, парабolik типли чизиклар учун асимптотик йўналиш бош йўналишнинг биридир. Иккинчи бош йўналиш эса асимптотик йўналишга перпендикуляр бўлади ва у $kk^* = -1$ шартдан аниқланади, яъни

$$k^* = -\frac{1}{k} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Иккинчи тартибли чизикнинг бош йўналишга эга бўлган диаметри унинг ўқи дейилади. Демак, иккинчи тартибли чизикнинг ўқи унинг симметрия ўқидир. Хуллас, айланадан бошқа ҳар қандай марказли чизик бир жуфт ўққа эга, айлана эса чексиз кўп жуфт ўқларга эга. Иккинчи тартибли чизикнинг ўқи унинг бош йўналишга эга бўлган диаметри бўлгани учун 59-§ даги (86) тенгламага кўра марказли чизикнинг ўқи ушбу

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0 \quad (105)$$

$$\text{тенглама билан аниқланади} \quad \left(\text{бу ерда} \quad k = \frac{u_2}{u_1} \right). \quad (105) \text{ тенгламадаги } k$$

тенгламадан топилади ((98) формулага қаранг).

Параболанинг барча диаметрлари ўзаро параллел, шунинг учун уларнинг ҳаммаси бош йўналишга эга. Лекин бу диаметрларнинг биттасигина ўзига перпендикуляр бўлган йўналишга кўшма, бинюба-рин, парабола биргана ўққа эга, у ҳам бўлса унинг симметрия ўқи-

дир. Параболлик чизиклар учун ҳам уларнинг ўқи (105) тенгламадан аниқланади, фақат k бу ерда $k = \frac{a_{12}}{a_{21}} = \frac{a_{22}}{a_{11}}$ тенгликдан топилди.

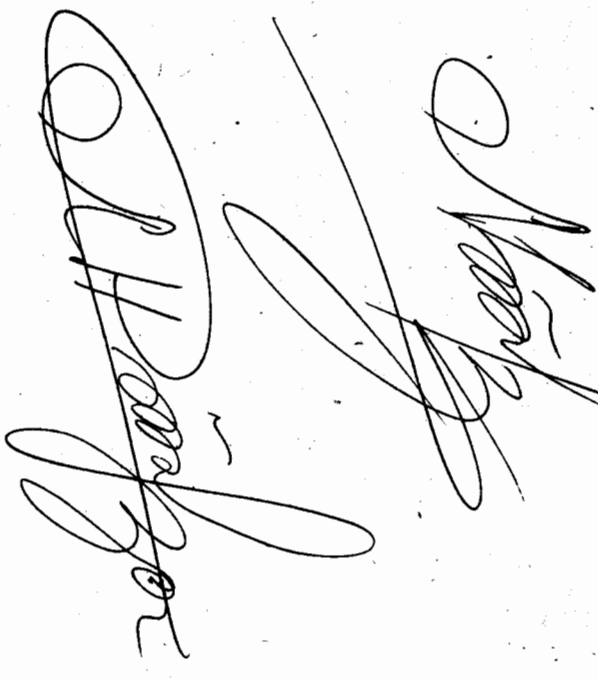
Мисол. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ чизикнинг ўқлари-
ни тошинг.
Аввало берилган чизик марказли ёки марказсиз эканини текши-
ралик. Бунинг учун

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ни тузамиз (56-§ га қаранг). Берилган чизик тенгламасидан $a_{11} = 3$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 3$, $a_{10} = 3$, $a_{20} = -1$, $a_{00} = -5$ бўлиб, $\delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0$.

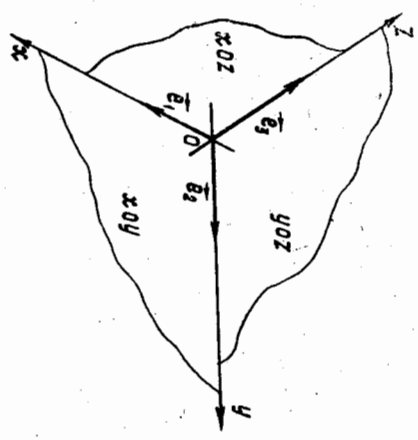
Демак, чизик марказли, у ҳолда унинг ўқи (105) га кўра $(3x + y + 3) + k(x + 3y - 1) = 0$

тенгламадан аниқланади. Тенгламадаги k ушбу $k^2 - 1 = 0$ нинг ил-
диэдрдир. Бундан $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. k нинг ўрнига $k_1 = 1$, $k_2 =$
 $= -1$ ни қўйиш билан берилган чизик ўқларининг $2x + 2y + 1 =$
 $= 0$, $x - y + 2 = 0$ тенгламалари ҳосил бўлади.



1 БОБ. ФАЗОДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ.
ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТИМАСИ
§1. ФАЗОДА КООРДИНАТАЛАРНИНГ АФФИН СИСТЕМАСИ

Координаталар системаси текисликда қандай қилинган бўл-
са, фазода ҳам шу усулда қилинади. Аниқроғи, координаталар-
нинг аффин системаси (аффин репер) бирор O нукта ва шу нукта-
дан қўйилган маълум тартибда олинган учта ноком планар e_1 ,
 e_2 , e_3 векторлар системасидан иборат, бу системани $\mathcal{A}(O, e_1, e_2, e_3)$ кўринишида белгилаймиз. O нуктадан ўтиб, e_1, e_2, e_3 век-
торлар билан аниқланадиган
туғри чизиклар мос равишда
 Ox, Oy, Oz деб белгилаб, улар
координата ўқлари, биринчи-
си абсциссалар ўқи, иккинчи-
си ординаталар ўқи ва, ниҳо-
ят, учинчиси аппликаталар
ўқи деб аталади. Бу ўқлар-
нинг ҳар икkitаси билан аниқ-
ланадиган учта текислик xOy ,
 xOz , yOz деб белгилаб, улар
координата текисликлари деб
аталади (155-чизма).

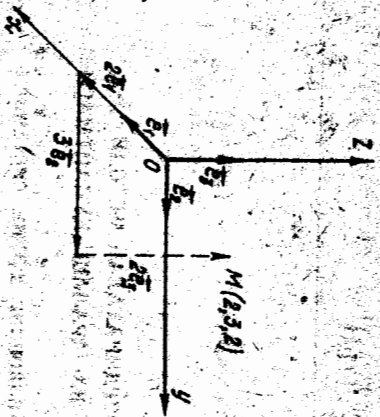


155-чизма

\mathcal{A} система берилганда, фа-
зодаги ҳар бир M нуктага
аниқ бир OM векторни дони-
мос келтириш мумкин, яъни
боши координаталар бошида,
охирги эса берилган M нуктада бўлган векторни мос келтирилади.
 OM векторнинг координаталари (x, y, z) бўлса, у ҳолда бу уч-
та x, y, z сон M нуктанинг аффин репердаги координаталари бў-
лади:

$$\overrightarrow{OM}(x, y, z) \Leftrightarrow M(x, y, z). \quad (1)$$

Демак, фазо нукталари тўплами билан маълум тартибда олинган ҳа-
қиқий сонлар ўчликлари тўплами орасида биектив мослик мажбур.
Берилган нуктанинг координаталарини топиш учун шу нукта ра-



ДНУС-векторининг координаталарини топиш кифоя ва аксинча. Масалан, 156-чизмада координаталари (2; 3; 2) бўлган нуктани яшаш усули кўрсатилган.

Ушундан, $M(a, b, c)$ нуктани яшаш учун, яъни

$$\vec{OM} = ae_1 + be_2 + ce_3 \quad (2)$$

векторнинг охиричи топиш учун кўндалар қовилдан фойдаланилади. Координаталар бошидан Ox ўш бўйича ae_1 , вектор, унинг охиридан Oy ўнқа

параллел ҳолда be_2 вектор қўйилади, сўнгра унинг охиридан ce_3 вектор қўйилад, шу векторнинг охири изланган нукта бўлади.

Учга координатга тежислиги биргалликда фазони сиккиз қисмга ажратили, уларнинг ҳар бири *октантлар* деб аталаш. Кўндалаги жалвада октантлар ва ундаги нукта координаталарининг шифоелари берилган.

Октантлар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
координаталар								
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	+	-	-	-

№2-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиши

Бирор аффин реперда $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ($M_1 \neq M_2$) нукталар ва бирор ҳажкий λ ($\lambda \neq -1$) сон берилган бўлсин.

$$M, M_1, M_2 \text{ нукта учун} \quad \vec{MM}_1 = \lambda \vec{MM}_2 \quad (3)$$

шарт бажарилса, M нукта M_1, M_2 кесмани λ нисбатда бўлади дейилад.

M_1, M_2 нукталарнинг координаталари орқали M нуктанинг x, y, z координаталарини топишжк. (2) га асосан

$$\vec{M_1M} = \vec{OM} - \vec{OM_1} = (x - x_1)e_1 + (y - y_1)e_2 + (z - z_1)e_3,$$

$$\vec{M_2M} = (x - x_2)e_1 + (y - y_2)e_2 + (z - z_2)e_3.$$

$$\vec{MM}_2 = \vec{OM}_2 - \vec{OM} = (x_2 - x)e_1 + (y_2 - y)e_2 + (z_2 - z)e_3,$$

$$\vec{MM}_1(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

Бу ифодаларни (3) га қўйиб ва e_1, e_2, e_3 нинг чиқиқли эркилигини эътиборга олсак,

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Булардан

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

Берилган кесмани берилган нисбатда бўлувчи нуктанинг координаталарини топиш формуллари шулардир. M нукта M_1, M_2 кесманинг ўртаси бўлса, (4) формуллалар қўйидаги кўндаларни олади:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

Бу формуллалар кесма ўртасининг координаталарини топиш формуллалардир.

Нисол. $\mathcal{B}(O, e_1, e_2, e_3)$ аффин реперда $A(2, 3, -1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(1, 1, 1)$ нукталарни ясаб, ABC учбурчак оғирлик марказининг (меданаларининг кесилган нуктаси) координаталарини топиш.

$$A(2, 3, -1) \Rightarrow \vec{OA}(2, 3, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{OA} = 2e_1 + 3e_2 - e_3,$$

$$B(3, 0, -1) \Rightarrow \vec{OB}(3, 0, -1) \Rightarrow$$

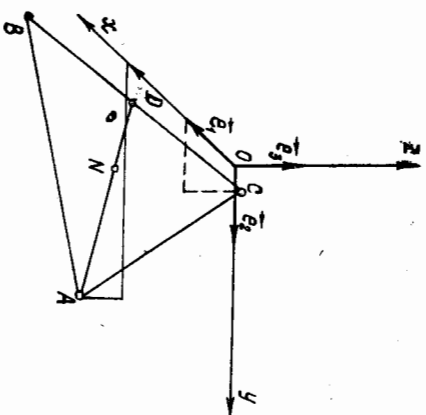
$$\Rightarrow \vec{OB} = 3e_1 - e_3,$$

$$C(1, 1, 1) \Rightarrow \vec{OC}(1, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{OC} = e_1 + e_2 + e_3.$$

A, B, C нукталарни яшаш натижада 157-чизмадаги ABC учбурчак ҳосил қилинади. BC кесманинг ўртаси D нинг координаталарини топишжк:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},$$



$$z = \frac{-1+1}{2} = 0, D\left(2, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Медианаларнинг кесилган нуқтаси AD ни A дан бошлаб $\lambda = 2:1$ нисбатда бўлгани учун изланган N нуқта AD кесмани $\lambda = 2:1$ нисбатда бўлади, яъни

$$x = \frac{2+2 \cdot 2}{1+2} = 2, y = \frac{3+2 \cdot \frac{1}{2}}{1+2} = \frac{4}{3}, z = \frac{-1+2 \cdot 0}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

$$N\left(2, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

13-§. Тўғри бурчакли декарт координаталар системаси

Аффин системанинг хусусий ҳолидидан бири тўғри бурчакли декарт системасидир.

Аффин системاداги базис векторлар ортонормаланган бўлса, яъни уларнинг ҳар иккигаси ўзаро перпендикуляр бўлиб, ҳар бири бирлик вектор бўлса, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ декарт репери ҳосил қилинади, бу ерда

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad (6)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0. \quad (7)$$

Бу реперда метрик характеристикаги масалаларни ечиш анча қулай, вектор-

а) $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ векторнинг узунлигини ҳисоблайлик. Векторнинг узунлиги 1 бўлиб, 1-боб, 13-§ га асосан

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (8)$$

б) Икки $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторнинг скаляр кўпайтмаси 1 бўлиб, 1-боб, 13-§ га асосан

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (9)$$

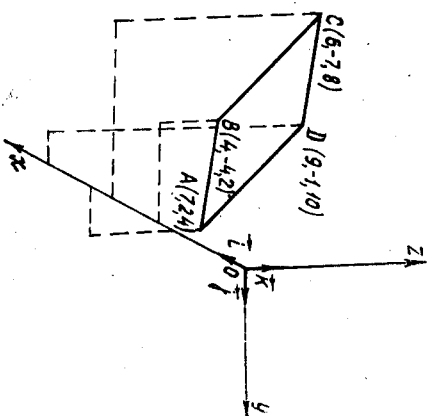
в) Шу икки вектор орасидаги бурчакнинг косинуси:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (10)$$

$M_1(x, y, z)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган бўлса, улар орасида-

ги $\rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2|$ масофани топиш мумкин:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (11)$$



158-чизма

Мисол. $\vec{a}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперда учлари $A(7, 2, 4)$, $B(4, -4, 2)$, $C(6, -7, 8)$, $D(9, -1, 10)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканлигини исботланг.

Ечиш. Аввало \vec{AB}, \vec{DC} векторларнинг координаталарини толайлик:

$$\vec{AB}(-3, -6, -2),$$

$$\vec{DC}(-3, -6, -2),$$

булардан кўринадики, $\vec{AB} = \vec{DC}$, демак, $ABCD$ тўртбур-

чак параллелограмм экан, унинг квадрат эканлигини кўрсатиш учун диагоналлари ўзаро тенг ва перпендикуляр эканлигини исботлаш керак (158-чизма). Ҳақиқатан ҳам, $\rho(A, C)$ ва $\rho(D, B)$ ни (11) формула бўйича ҳисобласак,

$$\rho(A, C) = \sqrt{(6-7)^2 + (-7-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98},$$

$$\rho(D, B) = \sqrt{(4-9)^2 + (-4+1)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98},$$

бундан $\rho(A, C) = \rho(D, B)$

$\vec{AC}(-1, -9, 4)$, $\vec{DB}(-5, -3, -8)$ бўлгани учун (9) га асосан:

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} = (-1)(-5) + (-9)(-3) + 4(-8) = 5 + 27 - 32 = 0,$$

демак,

$$\vec{AC} \perp \vec{DB}.$$

4-§. Фазода координаталарнинг бошқа системалари

Фазода юқорида кўрилган аффин ва декарт системалари билан бир қаторда бошқа системалар ҳам мавжуд бўлиб, улардан баъзиларини кўриб чиқамиз.

1. Цилиндрлик координаталар. Бу система куйидагича

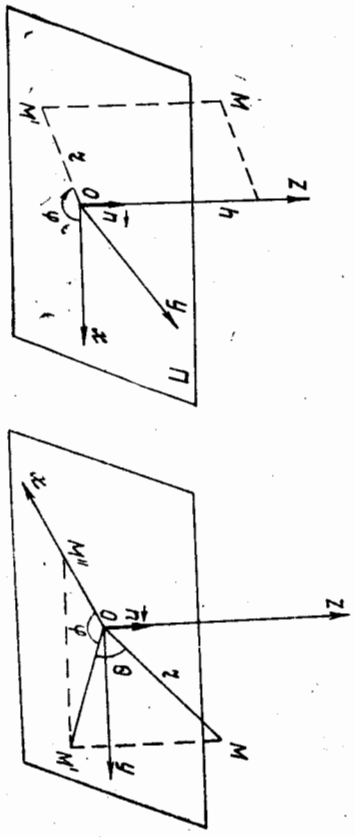
ҳосил қилинади. Фазодаги бирор Π текислик ва ундан тайин бир O нуқта олинади. Π га тегишли ва учи шу O да бўлган l нуқра белги-ланади ҳамда l нуқранинг йўналишини аниқловчи i бирлик вектор олинади (яъни Π да координатларнинг кутб системаси киритилади). l бирлик вектор Π нинг O дан қўйилган нормал вектори бўлса, l нинг учидан қараганда Π ни шу вектор атрофида буришдаги ҳаракатнинг йўналиши соат миғли ҳаракатига тескари бўлса, буриш бурчигини мусбат деб олинади. Бу вақтда фазодаги ҳар бир нуқтанинг ўзинини юқоридagi берилганларга нисбатан учта сон билан тулиқ аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан, M фазодаги бирор нуқта бўлса, унинг Π даги ортогонал проекциясигини M' деб белгиласак, $MM' \parallel l$, де-

мак, $MM' = h$. M' нуқтанинг Π даги кутб системасига нисбатан координатларини r, φ десак, (r, φ, h) сонлар M нуқтанинг цилиндрик координатлари деб аталади.

Декарт системасини 159-чизмада кўрсатилгандек қилиб танлаб олинса, M нуқтанинг декарт координатлари x, y, z ни шу нуқта-нинг цилиндрик координатлари r, φ, h орқали ифодалаш мумкин:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h. \quad (12)$$

2. Сферик координатлар. Π текисликда кутб координатлари системаси киритилади, $n \perp \Pi$ бирлик вектор қўйилади. Фазодаги ҳар бир M нуқтанинг ўзинини учта r, φ, θ сон билан аниқ-



159-чизма

160-чизма

лаш мумкин, бунда $r = |OM|$, φ — бу M нуқтанинг Π текисликдаги ортогонал проекцияси M' нинг кутб бурчига, θ — бу OM , OM' векторлар орасидаги бурчак, бу уч сон M нуқтанинг сферик координатлари дейилади ва (r, φ, θ) кўринишда ёзилади. Биз $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ деб фарз қиламиз, бундан ташқари, xOy координатлар текислигидан «юқори» турган нуқталар учун $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ва «қуйи»

грам фазога тегишли нуқталар учун $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0$ олинади (160-чизма).

Координатларнинг декарт системаси 160-чизмадагидек танлаб олинса, сферик ва декарт координатларини боғловчи ушбу формулаларни топиш мумкин:

$$\begin{aligned} x &= |OM'| \cos \varphi = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y &= |OM'| \sin \varphi = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z &= |MM'| = r \sin \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Цилиндрик ва сферик координатлар асосан механика, математик физика фанларида кўпроқ ишлатилади. Биз улардан чизиклар ва сиртлар назариясида фойдаланамиз.

§5. Аффин координатларни аниқлаш

Фазодаги бирор нуқтанинг тайин бир системاداги координатларидан бошқа системاداги координатларига ўтишга туғри келади. Биз шу масалани иккита аффин репер учун ҳал қиламиз. $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{B}' = (O', e'_1, e'_2, e'_3)$ аффин реперлар берилган бўлсин.

1 ҳол. Реперларнинг бошлари ҳар хил бўлиб, баазис векторлари мос равишда коллинкар бўлсин, яъни $O \neq O', e_1 \parallel e'_1, e_2 \parallel e'_2, e_3 \parallel e'_3$ ҳамда O' нинг \mathcal{B} га нисбатан координатлари a, b, c бўлсин (161-а чизма). У ҳолда фазодаги ихтиёрий M нуқтанинг \mathcal{B} ва \mathcal{B}' га нисбатан координатлари мос равишда x, y, z ва x', y', z' бўлса, шулар орасидаги боғланишни излаймиз:

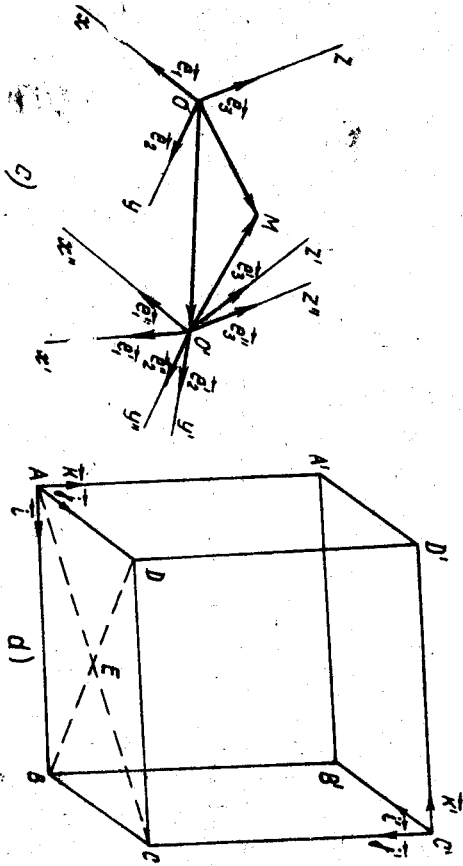
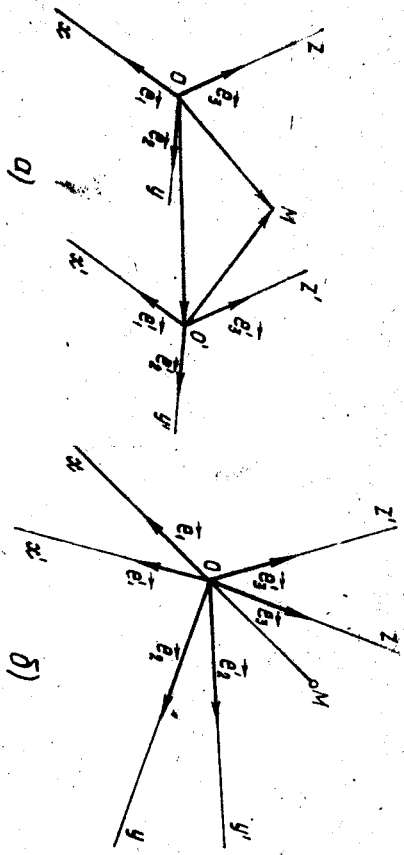
$$\begin{aligned} M(x, y, z) &\Rightarrow OM(x, y, z) \Rightarrow OM = xe_1 + ye_2 + ze_3 \\ M(x', y', z') &\Rightarrow O'M(x', y', z') \Rightarrow O'M = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3 \\ OO'(a, b, c) &\Rightarrow OO' = ae_1 + be_2 + ce_3 \end{aligned}$$

Декан $OM = OO' + O'M$ бўлгани учун

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = ae_1 + be_2 + ce_3 + x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3.$$

Бундан ташқари, баазис векторлар мос равишда коллинкар бўлгани учун

$$e'_1 = \lambda_1 e_1, \quad e'_2 = \lambda_2 e_2, \quad e'_3 = \lambda_3 e_3,$$



161-чизма

демак,

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (\lambda_1 x' + a)\vec{e}_1 + (\lambda_2 y' + b)\vec{e}_2 + (\lambda_3 z' + c)\vec{e}_3. \quad (14)$$

Бундан

$$x = \lambda_1 x' + a, \quad y = \lambda_2 y' + b, \quad z = \lambda_3 z' + c. \quad (15)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ бўлса, яъни базис векторлар мос равишда ўзаро тенг бўлса, (15) куйидаги кўринишни олади:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \quad (16)$$

Бу формулалар баъзан координаталар системасини параллел қўйиш формуллари деб юритилади.

II ҳол. Реперларнинг бошлари бир хил, базис векторларнинг йўналишлари эса ҳар хил бўлсин, у ҳолда (161-б чизма)

$$0 = 0', \quad \vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

бўлсин. Энди

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (17)$$

матрицани тузимиз. Бу матрицани бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси деб атайдимиз, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базис векторлар бўлгани учун (17) матрицанинг детерминанти нолдан фарқлидир.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (18)$$

Акс ҳолда, детерминантнинг бир сатри қолган икки сатрнинг физикли комбинациясидан иборат бўлиб, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ҳам физикли бослиқ бўлар эди.

Фазода иккитерий M нуқтанинг \mathcal{A} ва \mathcal{B} реперларга нисбатан координаталарини мос равишда x, y, z ва x', y', z' деб олсак,

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \\ \vec{OM} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3,$$

яъни

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3.$$

Энди бу тенгликка $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ нинг қийматларини куйиб, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ га нисбатан группаласак,

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\vec{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\vec{e}_2 + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\vec{e}_3,$$

бундан

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases} \quad (19)$$

Ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (20)$$

матрица алмаштириши матрицаси деб аталади. (20) ва (17) матрицалар ўзаро транспонирланган матрицалардир. Бу матрицалар квадрат матрицалар бўлгани учун уларнинг учинчи тартибли детерминантлари ўзаро тенг бўлиб, (18) га асосан (20) нинг детерминанти нолдан фарқлидир, демак, (19) ни x', y', z' га нисбатан ечсак,

$$\begin{cases} x' = a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z, \\ y' = a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{23}z, \\ z' = a'_{31}x + a'_{32}y + a'_{33}z \end{cases} \quad (21)$$

Хосил бўлиб, бунда

$$a'_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A}; \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

A_{ki} эса A матрица a_{ki} элементининг адъюнктивидир, яъни алгебраик тўлдирувчиси дир.

III ҳо л. Реперлар фазода ихтиёрий вазиятга жойлашган. \mathcal{B} репер берилган бўлиб, шу системага нисбатан \mathcal{B}' репер элементларининг координаталари қуйидагича бўлсин:

$$O'(a, b, c), \begin{matrix} \vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3, \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (*)$$

\mathcal{B} дан \mathcal{B}' га ўтиш учун биз яна шундай учинчи $\mathcal{B}''(O'', \vec{e}''_1, \vec{e}''_2,$

$\vec{e}''_3)$ аффин реперни қараймизки, у \mathcal{B} ни OO'' вектор қадар параллел қўйиришдан ҳосил бўлсин. У ҳолда фазодаги ихтиёрий M нуктанинг координаталарини бу системадага нисбатан мос равишда x, y, z, x'', y'', z'' ва $x' y' z'$ деб белгиласак (161-с чизма), \mathcal{B} билан \mathcal{B}'' орасидаги боғланиш (16) га асосан

$$x = x'' + a, \quad y = y'' + b, \quad z = z'' + c, \quad (22)$$

\mathcal{B}'' билан \mathcal{B}' орасидаги боғланиш эса (21) га асосан

$$\begin{cases} x'' = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y'' = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z'' = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{cases}$$

буни (22) га қўйсак, нэланаётган қуйидаги ифода ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{cases} \quad (23)$$

(23) ни x', y', z' га (*) шарт ўринди бўлгани учун) нисбатан ҳам ечиш мумкин, демак, M нуктанинг \mathcal{B} га нисбатан координаталари маълум бўлса, шу нуктанинг координаталарини \mathcal{B}' га нисбатан ҳам топиш мумкин.

Бир аффин системадан иккинчи аффин системата ўтиш 12 та параметрга боғлиқдир, чунки (23) га шу алмаштиришни аниқлайдиган ўшбу 12 та параметр кирди: $a, b, c, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$.

Агар $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ декарт реперлари бўлса, уларни алмаштириш 12 та параметрга эмас, баъки энг кўпи билан 6 та параметрга боғлиқ бўлиб қолади. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{e}_1 = i, \vec{e}_2 = j, \vec{e}_3 = k$ ва $\vec{e}'_1 = i', \vec{e}'_2 = j', \vec{e}'_3 = k'$ бўлса, (6) ва (7) ни эътиборга олсак,

$$\begin{cases} a'_{11} + a'_{21} + a'_{31} = 1, & a_{11}a'_{12} + a_{21}a'_{22} + a_{31}a'_{32} = 0, \\ a'_{12} + a'_{22} + a'_{32} = 1, & a_{11}a'_{13} + a_{21}a'_{23} + a_{31}a'_{33} = 0, \\ a'_{13} + a'_{23} + a'_{33} = 1, & a_{12}a'_{13} + a_{22}a'_{23} + a_{32}a'_{33} = 0. \end{cases} \quad (24) \quad (25)$$

Демак, (23) даги 12 та параметр (24) ва (25) даги 6 та шартни қановатлантириши керак, у ҳолда жами 6 та ихтиёрий параметр қолади. «Алгебра ва сонлар назарияси» курсидан маълумки, (20) кўринишидаги квадрат матрицанинг элементлари (24) ва (25) шартларининг барчасини қановатлантирса, бундай матрица ортогонал матрица деб аталади. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: Бир декарт реперидан иккинчи декарт реперига ўтиш матрицаси ортогонал матрицадан иборат.

1-мисол. Янги аффин репернинг боши эски реперга нисбатан $O'(0, 3, -1)$ нуктада, базис векторлар $\vec{e}'_1(1, 3, 0), \vec{e}'_2(0, -3, 1), \vec{e}'_3(1, 1, -2)$ бўлса, бу реперларни алмаштириш формулаларини ёзинг.

Е ч и ш. Берилишига кўра:

$$\begin{cases} a = 0, \quad b = 3, \quad c = -1, \\ a_{11} = 1, \quad a_{21} = 3, \quad a_{31} = 0, \\ a_{12} = 0, \quad a_{22} = -3, \quad a_{32} = 1, \\ a_{13} = 1, \quad a_{23} = 1, \quad a_{33} = -2. \end{cases}$$

Бу қийматларни (23) га қўйсак,

$$\begin{cases} x = x' + z', \\ y = 3x' - 3y' + z' + 3, \\ z = y' - 2z' - 1. \end{cases} \quad (26)$$

Энди эски базисдан янги базисга ўтиш формуласини топиш учун бу системани x', y', z' га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{8}z, \\ y' = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + 1, \\ z' = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{3}{8}z. \end{cases}$$

2- мисол. Кирраси a га тенг бўлган $ABCD, A'B'C'D'$ куб берилган. $\mathcal{B}(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ва $\mathcal{B}'(C', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ декарт реперлари 161-д чизмада кўрсатиладиган аниқланган. Шу реперларни алмаштириш формулаларини ёнинг ҳақида E нуқтанинг координаталарини иккада реперда аниқланган.

Ечиш. Аввало C' нуқтанинг \mathcal{B} реперга нисбатан координаталарини топайлик.

$$\vec{AB} = a\vec{i}, \vec{BC} = a\vec{j}, \vec{CC}' = a\vec{k},$$

$$\vec{AC}' = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC}' = a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}, \quad C'(a, a, a).$$

Эндя $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ нинг координаталарини топайлик, чизмадан $\vec{i}' = -\vec{j}, \vec{j}' = -\vec{k}, \vec{k}' = -\vec{i} \Rightarrow \vec{i}'(0, -1, 0), \vec{j}'(0, 0, -1), \vec{k}'(-1, 0, 0)$. $e'_1 = \vec{i}', e'_2 = \vec{j}', e'_3 = \vec{k}'$ десак, (23) формула куйидаги кўринишни олади:

$$x = -z' + a, \quad y = -x' + a, \quad z = -y' + a. \quad (\Delta)$$

Бу келганга формуладир.

$$\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{FE} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ реперда } E\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right).$$

E нинг \mathcal{B}' репердаги координаталарини топиш учун E нинг \mathcal{B} даги координаталарини (Δ) даги x, y, z нинг ўрнига кўямиз:

$$\frac{a}{2} = -z' + a, \quad x' = \frac{a}{2},$$

$$\frac{a}{2} = -x' + a, \quad \text{ёки } y' = a,$$

$$0 = -y' + a, \quad x' = \frac{a}{2},$$

булардан

$$E\left(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2}\right).$$

6-§. Фазода ориентация

Фазода икки аффин репер берилган бўлиб, улар орасидаги боғланиш (23) формулалар билан аниқланган бўлиши.

Таъриф. (23) формулалардаги ўтиш матрицасининг детерминанти мусбат бўлса, у ҳолда $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар бир исмли деб аталади, акс ҳолда, яъни детерминант манфий бўлса, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ҳар хил исмли реперлар деб аталади.

5-§ даги 2-мисолда олинган $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ реперлар ҳар хил исмлидир, чунки (Δ) нинг ўтиш матрицасининг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Худди шу параграфдан 1-мисолда топиладиган (\square) алмаштириш ўтиш матрицасининг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

бўлгани учун бу реперлар бир исмлидир.

Бундан кўринадики, фазодаги барча аффин реперларни бир исмлилик тушунчасига асосланиб икки синфга ажратиш мумкин, бу синфларнинг бирита тегишли барча реперлар ўзаро бир исмли бўлиб, ҳар хил синфга тегишли икки репер бир исмли бўлмайди. Шу синфларнинг ҳар бири ориентация деб аталади, ундаги реперлар ориентацияга репер деб қоритилади, баъзан бу синфларни бир-биридан фарқлаш учун «ўнг» ориентация ёки «chap» ориентация деб ҳам қоритилади. Репернинг ориентацияси маълум бўлган фазо ориентацияга фазо деб аталади.

7-§. Координаталарни боғловчи тенглама ва тенгсизликларнинг геометрик таъкини

Биз 1 бўлимда икки ўзгарувчилли биринчи ва иккинчи даражали тенглама ва тенгсизликнинг геометрик маъноси билан танишиб ўтганмиз. Шу тушунчаларни энди фазо учун умумлаштирамиз.

Фазо қилайлик, фазода бирор $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, e_3)$ аффин репер берилган бўлиб, $F(x, y, z)$ ифода ҳам берилган бўлиши (бу ифодада x, y, z ўзгарувчилардан камда биттаси иштирок этсин).

x_0, y_0, z_0 сонлар учун $F(x_0, y_0, z_0)$ ифода ҳақиқий сондан иборат бўлса, x_0, y_0, z_0 сонлар $F(x, y, z)$ ифоданинг аниқланган соҳасига тегишли дейилади, бу сонлар училиги эса берилган реперда фазодаги таъин битта нуқтани аниқлайди. Демак, $F(x, y, z)$ ифода аниқланган соҳасининг геометрик маъноси фазодаги бирор геометрик фигурадан иборат, жумладан, бу фигура бутун фазодан, фазонинг бир қисмидан, бўш тўпламдан ва x, y, z лардан иборат бўлиши мумкин.

1-мисол. $F(x, y, z) = x^2 + 2y - z$. Бу ифода x, y, z нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматларида маънога эга, демак, унинг аниқланган соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлиб, у фазодаги барча нуқталар тўпламидир.

2-мисол. $F(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z$ ифода маънога эга бўлиши учун $x \neq 0, y \neq 0$ шарт бажарилиши керак, демак, бу ифоданинг аниқланган соҳаси фазодаги xOz, yOz координата текисликларидан бошқа барча нуқталар тўпламининг таъкили қилади.

3-мисол. $F(x, y, z) = \sqrt{-x^2 - y^2 - z^4}$ ифода фақатгина $x = y = z = 0$ учун ҳақиқий қийматга эга бўлиб, унинг фазодаги тасвири биттагина нуқтадан иборат.

Энди.

$$F(x, y, z) = 0 \quad (26)$$

Куринишдаги тенгламани кўрайлик, бу тенгламани қаноатлантирувчи барча сонлар ўзлиги унинг ечимлари дейлиб, фазода бирор нуқта-лар тўпламини аниқлайди (шунга таъкидлаш зарурки: агар x, y, z нинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларида (26) тенглама қаноатлантирилса, у айнантидан иборат бўлиб қолади). Бундай тўпламини биз ҳозирча сирт деб атайлик (бу сиртнинг қониқарли таърифи эмас, албатта, сиртнинг қатъий математик таърифини топо-логийда берилади).

Энди сирт тенгламасининг таърифини берайлик.

Таъриф. Агар Φ сиртга тегишли ҳар бир нуқтанинг координатлари $F(x, y, z) = 0$ тенгламани қаноатлантириб, Φ га тегишли бўлмаган бирорта ҳам нуқтанинг координатлари уни қаноатлантир-мас, яъни $\forall(x_0, y_0, z_0) \in \Phi \Leftrightarrow F(x_0, y_0, z_0)$ бўлса, бу тенглама Φ сиртининг тенгламаси деб атайлади.

Бу таърифдан кўринадики, сиртнинг тенгламаси берилган бўлса, фазодаги ҳар бир нуқта шу сиртга тегишли ёки тегишли эмасми деган саволга ягона жавоб топилади. Буни аниқлаш учун нуқта-нинг координатларини тенгламадаги ўзгарувчилар ўрнига мос ра-вишда қўйиб ҳисоблаш керак, агар тенглик ўринли бўлса, нуқта шу сиртга тегишли, акс ҳолда эса тегишли эмас.

1-мисол. Фазода $F(x, y, z) = x = 0$ тенглама билан аниқ-ланувчи нуқталар тўпламини (сиртни) толайлик. Тенгламанинг бе-рилишидан кўриниб турибдики (y ва z лар илтибор этмагани учун ихтиёрий сонлар деб олш мумкин), налганган нуқталар тўп-ламанинг ҳар бир нуқтаси учун унинг биринчи координатаси, яъни абсиссаси нолга тенгдир. Фазодаги бундай нуқталар тўплами yOz координаталар текислигидан иборатдир, демак, берилган тенглама билан аниқланган сирт (yOz текислигидан иборат экан.

2-мисол. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ тенглама бўш тўпламини ифодалайди, чунки фазода координаталари бу тенгламани қаноатлан-тирувчи бирорта ҳам нуқта йўқ.

3-мисол. $F(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$ тенглама маркази (a, b, c) нуқтада ва радиуси r га тенг сферани аниқлайди.

Энди $F(x, y, z) > 0$ (< 0) ифодани текширайлик. Бу ифода ҳам $F(x, y, z)$ функция аниқланиш соҳасининг шундай қисмини аниқлай-дики, унинг барча нуқталарида ва фақат шу нуқталарда юқоридagi тенгсизлик ўринли бўлади. Буни мисолларда кўрайлик.

4-мисол. $F(x, y, z) = z > 0$. Бу тенгсизлик шундай нуқталар тўпламини аниқлайдики, у нуқталарининг ҳар бирининг аппликатаси мусбат сондан иборат. Равшанки, бундай нуқталар тўплами (xOy) ко-ординаталар текислиги билан chegarланиб, аппликаталар ўқининг

мусбат қисмини ўз ичига олувчи ярим фазодир, xOy текислик нуқ-талари бунга қирмайди.

5. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 < 0$. Фазода бу тенгсизлик би-лан аниқланувчи нуқталар тўплами радиуси 1 бирликка тенг, маркази координаталар бошида бўлган сфера билан chegarланиган ва шу сфера марказини ўз ичига олувчи фазо қисмидир.

Бизан биргина тенглама ёки тенгсизлик билан аниқланган шаклгина эмас, балки тенгламалар системаси билан, ёки тенглама ва тенгсизликлар системаси билан, ёки фақат тенгсизликлар система-си билан аниқланган шакллари текширишга тўғри келади, ма-салан,

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

система билан аниқланган шакл ҳар бир тенглама билан аниқ-ланган шакллар кесилмасидан иборат шаклни аниқлайди, бун-дай шаклни биз ҳозирча чизиқ деб атайлик (чизиқнинг ҳам қатъий таърифи топологияда берилади); демак, фазодаги чизиқ умумий ҳол-да икки сиртнинг кесилмаси деб қаралади.

6-мисол.

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x = 0, \\ F_2(x, y, z) = y = 0. \end{cases}$$

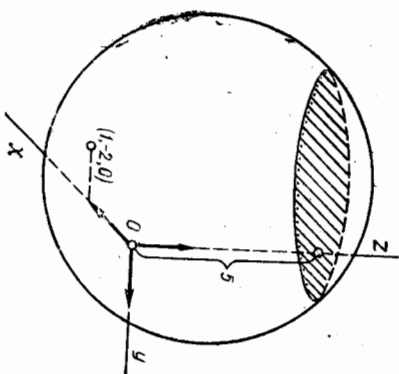
Бу система билан аниқланган чизиқ аппликаталар чизиндир, чунки биринчи тенглама yOz текислигини, иккинчи тенглама эса xOz текислигини аниқлаб, уларнинг \perp кесилмаси $yOz \cap xOz = Oz$ ни аниқ-лайди.

7-мисол.

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = z = 5, \\ F_2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

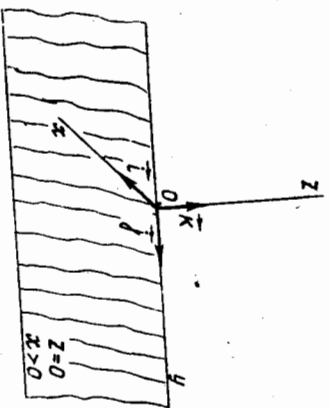
Тенгламалар системасининг биринчи тенгламаси аппликатаси фақат 5 га тенг бўлган нуқталарни аниқлайди: бундай нуқталар тўплами Oz ўқ-нинг мусбат қисмини координаталар бошидан 5 бирлик масофада кесиб ўтиб, xOy текисликка параллел те-кисликдир (162-чизма).

Иккинчи тенглама эса маркази $(1, -2, 0)$ нуқтада ва радиуси 6 бирлик бўлган сферани аниқлайди. Демак, бу фигураларнинг кесилма-си $z = 5$ текисликдаги $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 11$ тенглама билан аниқланувчи айланалардир.



$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = z = 0, \\ F_2(x, y, z) = x \geq 0. \end{cases}$$

Бундаги биринчи тенглама xOy текислигини, иккинчи тенгсизлик эса yOz текислик билан аниқланувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олувчи ярим фазодир. Бу ярим фазонинг xOy текислик билан кесилиши Oy тўғри қизиқ билан аниқланувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликдир (163-чизма).



163-чизма

№8-§. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси ва унинг хоссалари.
Учбўрачакнинг юзи

Биз I бўлимда векторлар устда бажариладиган чизиқли амаллар (кўпиш, айириш, векторни сонга кўпайтириш) ва икки векторнинг скаляр кўпайтмаси тушунчалари билан иш кўрган эдик. Биз энди икки вектор устда бажариладиган янги амални—вектор кўпайтмани таърифлаймиз.

Таъриф. a ва b векторларнинг **вектор кўпайтмаси** деб куйидаги учта шартни қаноатлантирадиган p векторга айтилади:

1. $|p| = |a| |b| \sin(\alpha, \beta)$.

2. $p \perp a, p \perp b$.

3. a, b, p , векторлар умумий бошга келтирилиб, p нинг учидан a, b векторлар ётган текисликка қаралганда a вектордан b вектор томонга қараб энг қисқа йўл билан бурилиш соат мили ҳаракатига тексари бўлсин. a ва b векторларнинг вектор кўпайтмасини $[a, b]$ билан белгилаймиз: $p = [a, b]$.

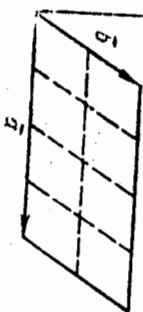
Аввало бу таърифда келтирилган уч шартдан ҳар бирининг геометрик маъносини аниқлайлик.

1-шарт p векторнинг узунлиги a ва b векторларга қурилган параллелограмм юзи неча квадрат бирлик бўлса, шунча узунлик бирлигига тенглигини билдиради (164-чизма) (чунки $|a| |b| \sin(\alpha, \beta)$ векторларга қурилган параллелограмм юзидир).

2-шарт вектор кўпайтма a ва b векторлар билан аниқланадиган текисликка перпендикуляр эканлигини билдиради.

Ниҳоят, 3-шарт вектор кўпайтманинг йўналишини аниқлайди. Одатда $a, b, [ab]$ векторлар учлигини **ўнг учлик** деб аташ қабул

$\vec{p} = [a, b]$



164-чизма



165-чизма

қилинган (физикадан ўнг қўл қойдасини эсланг). У ҳолда $a, b, [a, b]$ векторлар учлиги чап учликдир (физикадан чап қўл қойдасини эсланг, 165-чизма).

Вектор кўпайтма бир қатор хоссаларга эга бўлиб, биз шу хоссалар билан баътафсил танишиб чиқамиз.

1°. Кўпайтувчи векторлардан камиди биттаси ноль вектор ёки $a \parallel b$ бўлса, у ҳолда $[a, b] = 0$.

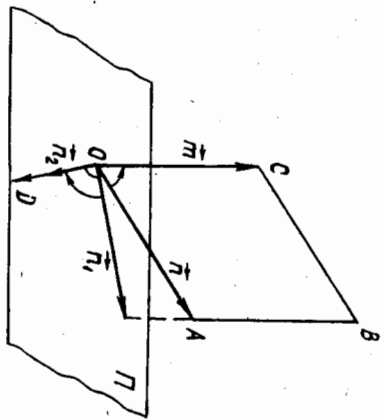
Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $a \parallel b$ бўлса, $(a, b) = 0^\circ$ ёки 180° бўлиб, биринчи шартга асосан $|p| = 0$ бўлади, модули нолга тенг вектор эса албатта ноль вектордир.

2°. $[a, b] = -[b, a]$, яъни вектор кўпайтма антикоммутативдир. Исбот. Ҳақиқатан, вектор кўпайтма таърифининг 1 ва 2-шартлари асосан $[a, b]$ ва $[b, a]$ векторларнинг узунликлари тенг ва иккаласи ҳам битта текисликка перпендикуляр, йўналишлари эса учинчи шартга асосан $[a, b]$ вектор учидан қаралганда a дан b вектор томонга қараб энг қисқа йўл билан бурилиш соат мили ҳаракатига тексари бўлса, b дан a вектор томонга қараб қисқа йўл билан бурилиш эса соат мили ҳаракати бўлича бўлиб қолади, демак, йўналиш аввалгига ўхшаш бўлиши учун $[b, a]$ вектор $[a, b]$ га нисбатан қарама-қарш йўналган бўлиши керак.

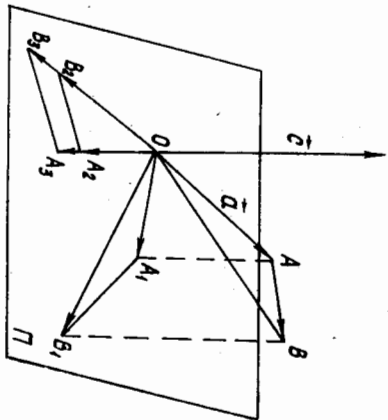
3°. $[(a + b), c] = [a, c] + [b, c]$, яъни вектор кўпайтма кўпиш амалига нисбатан тақсимот қонунига бўйсунлади.

Исбот. Бу хоссани исбот қилиш учун вектор кўпайтмани топшининг бошқачароқ усулини кўрайлик (166-чизма)

Узаро коллинеар бўлмаган m ва n векторларни олайлик. Бу векторларнинг бошларини бир O нуқтага келтириб, O нуқтадан m век-



166-чизма



167-чизма

торга перпендикуляр бўлган Π текислиқни ўтказиб, n векторнинг Π текислиқдаги ортогонал проекцияси n_1 ни ҳосил қиламиз, сўнгра n_1 ни O нукта атрофида 90° га шундай бурамизки, m нинг учидан қаратганимизда буришнинг йўналиши соат милгининг ҳаракати билан бир хил бўлсин, нэгажада n_2 вектор ҳосил бўлади, у ҳолда

$$\begin{aligned} |m n_1| &= |m| |n_1|, \\ |m n_2| &= |m| |n_2|. \end{aligned} \quad (*)$$

чунки: 1) $|m| |n_2| = |m| |n_1|$, бу эса m, n га қурилган параллелограммнинг қозини аниқлайди;

$$2) (|m| n_2) \perp n, \quad (|m| n_2) \perp m;$$

3) m, n ва $|m| n_2$ векторлар учлиги ўнг учлиқни ҳосил қилади.

Энди 3° -хоссани исботлашга ўтайлик. a, b, c векторлар берилган бўлсин. c нинг бошини O деб белгилаб, шу нуктадан c га перпендикуляр Π текислиқни ўтказайлик, a нинг бошини ҳам O нуктага келтириб $a + b = \overrightarrow{OB}$ ни (167-чизма) ясаб ва $\triangle OAB$ ни Π текислиқка ортогонал проекциялаб, $\triangle OA_1B_1$ ни ҳосил қилайлик. $\triangle O A_1 B_1$ ни Π да O нукта атрофида 90° га шундай бурайликки, бу буриш йўналиши c нинг учидан қаралганда соат милги ҳаракати бўйича бўлсин, натижада $\triangle O A_2 B_2$ ҳосил бўлади. Шу учбурчакнинг ҳар бир томонини $|c|$ га кўпайтириб, $\triangle O A_2 B_2$ га ўхшаш $\triangle O A_3 B_3$ ни ҳосил қиламиз. Юқорида исбот қилинган (*) га асосан:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O A_3} &= |c| \overrightarrow{O A_2} = [a \cdot c], \\ \overrightarrow{O A_3} &= |c| \overrightarrow{O A_2} = [a \cdot c]. \end{aligned}$$

$\overrightarrow{A_3 B_3} = |c| \overrightarrow{A_2 B_2} = |b \cdot c| \overrightarrow{OB_3} = |c| \overrightarrow{OB_2} = [(a + b) \cdot c].$ (***)

Бундан ташқари, бу чизмадан

$$\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{O A_3} + \overrightarrow{A_3 B_3} \quad (***)$$

$$[(a + b) \cdot c] = [ac] + [bc]$$

га эга бўламиз. ▽

Натижа. $[c(a + b)] = [ca] + [cb]$. Бунга кўрсатиш учун исбот қилинган 3° -хоссага 2° -хоссани татбиқ қилиш kifойядир.

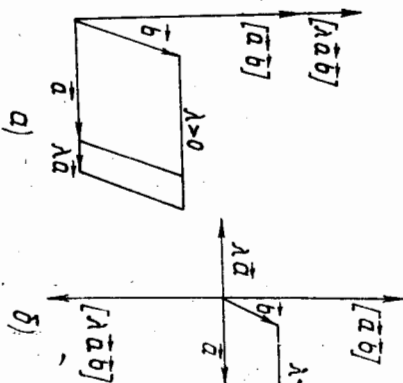
4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ учун $[\lambda a b] = \lambda [a b]$, яъни вектор кўпайтма скаляр кўпайтувчиға нисбатан груҳлаш қонунига бўйсунлади.

Исбот. $[\lambda a b]$ ва $\lambda [a b]$ векторларнинг модуллари тенгдир, йўналишлари эса $\lambda > 0$ бўлганда

$[a b]$ вектор билан бир хил, $\lambda < 0$

да эса $[a b]$ нинг йўналишига қарама-қаршидир (168-а, б чизма).

Эслатма. 3° -хосса икки



168-чизма

қўшилувчи вектор учунгина эмас, балки исбатланган сондаги қўшилувчилар учун ҳам ўринлидир, бундан ташқари, вектор кўпайтманинг ҳар бир вектори бир неча векторларнинг чизикли комбинациясидан иборат бўлса, уларни алгебрадаги кўпхадни кўпхадга кўпайтириш қондаси бўйича очиш мумкин, бунда фақат векторлар тартибининг сақланишига эътибор бериш керак.

Энди декарт репердаги базис векторларнинг вектор кўпайтмасини толайлик.

$$\begin{aligned} [i \cdot i] &= 0, [j \cdot j] = 0, [k \cdot k] = 0, \\ [i \cdot j] &= 0, [j \cdot i] = 0, [k \cdot i] = 0, [i \cdot k] = 0. \end{aligned}$$

$[i \cdot j] = |i| |j| \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ ҳамда $i \perp k, j \perp k$ эканини эътиборга олсак, $[i \cdot j] = k$. Шунга ўхшаш $[k \cdot i] = j, [j \cdot k] = i$ ҳам ўринли. 2° га асосан

$$\begin{aligned} [j \cdot i] &= -k, [k \cdot j] = -i, [i \cdot k] = -j. \end{aligned}$$

Энди декарт реперда координаталари билан берилган $a(x_1, y_1, z_1)$,

\vec{b} (x_2, y_2, z_2) векторлар вектор кўпайтмасининг координаталарини то-
пайлик:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Вектор кўпайтманинг хоссаларини ҳамда базис векторларининг вектор кўпайтмаларини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} [\vec{a} \vec{b}] &= [x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}] = \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} = \end{aligned}$$

демак,

$$[\vec{a} \vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (27)$$

\vec{a} ва \vec{b} векторлар вектор кўпайтмасининг модули томонлари шу век-
торлардан иборат параллелограмм юзига тенг бўлганлиги учун унинг
ярмаси шу \vec{a} ва \vec{b} векторларга қурилган учбурчакнинг юзига тенг
бўлади, демак, учбурчак юзи

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\vec{a} \vec{b}]|. \quad (28)$$

Бу формулани координаталарда ёзмадан, мисоллар кўра қолайлик.
1-мисол. $A(1, -1, 2), B(2, 1, -1), C(1, 0, 3)$ нукталар берил-
ган. ABC учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Е чиш. \vec{AB} ва \vec{AC} нинг координаталарини ҳисоблайлик, (27) га
ассосан

$$\vec{AB}(1, 2, -3),$$

$$\vec{AC}(0, 1, 1), \quad |[\vec{AB} \vec{AC}]| = \begin{vmatrix} |2 & -3| & |1 & -3| & |1 & 2| \\ |1 & 1| & |0 & 1| & |0 & 1| \end{vmatrix},$$

$$|[\vec{AB} \vec{AC}]| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{27}.$$

$$(28) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{27} \text{ кв. бирлик.}$$

2-мисол. Учбурчакнинг учлари $A(5, -6, 2), B(1, 3, -1),$
 $C(1, -1, 2)$ нукталарда. Унинг A учидан чиққан баландлигининг
узунлигини толинг.
Е чиш. Аввалги мисолдагидек ҳисобласак,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 25 \text{ кв. бирлик.}$$

Энди BC томоннинг узунлигини ҳисоблайлик:

$$\rho(BC) = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Агар A учдан чиққан баландлиқни h десак,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h |BC| = \frac{1}{2} h \cdot 5.$$

У ҳолда $\frac{1}{2} h \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 25$, бундан $h = 5$ узунлик бирлиги.

3-мисол. m, n бирлик векторлар бўлиб, улар орасидagi бурчак
 30° га тенг. $\vec{a} = m - 2n, \vec{b} = 2m + 3n$ векторларга қурилган парал-
лелограммининг юзини ҳисобланг.

$$\begin{aligned} \text{Е чиш. } [\vec{a} \vec{b}] &= [m - 2n \quad 2m + 3n] = [m \quad 2m] + [-2n \quad 2m] + \\ &+ [m \quad 3n] + [-2n \quad 3n] = 0 - 4[n \quad m] + 0 = 4[m \quad n] + \\ &+ 3[m \quad n] = 7[m \quad n]. \end{aligned}$$

$$|[\vec{a} \vec{b}]| = |7[m \quad n]| = 7|m \quad n| \sin 30^\circ = 7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ кв. бирлик.}$$

4-мисол Ихтиёрий \vec{a} ва \vec{b} векторлар учун ушбу айнинг ис-
ботлансин:

$$|[\vec{a} \vec{b}]|^2 + (\vec{a} \vec{b})^2 = a^2 b^2.$$

Исбот $(\vec{a} \vec{b}) = \varphi$ десак,

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad |[\vec{a} \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi,$$

бу икки тенгликни квадратга кўтариб, ҳадлаб қўшсак,

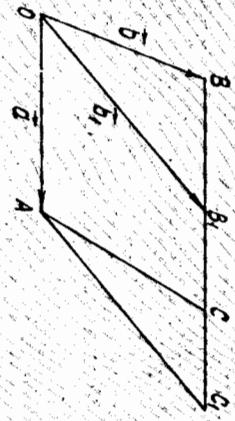
$$|[\vec{a} \vec{b}]|^2 + (\vec{a} \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = a^2 b^2. \quad \blacktriangle$$

5-мисол. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ бўлса, $[\vec{a} \vec{b}] = [\vec{b} \vec{c}] = [\vec{c} \vec{a}]$ исботлан-
син.

Исбот. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ни аввал \vec{b} га, сўнгга \vec{c} га вектор кўпай-
тирайлик: $[(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \vec{b}] = 0$ ёки $[\vec{a} \vec{b}] + [\vec{c} \vec{b}] = 0, [(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \vec{c}] = 0,$
ёки $[\vec{a} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c}] = 0$, булардан $[\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{c} \vec{b}] = [\vec{b} \vec{c}], [\vec{b} \vec{c}] =$
 $= -[\vec{a} \vec{c}] = [\vec{c} \vec{a}],$ демак,

$$[\vec{a} \vec{b}] = [\vec{b} \vec{c}] = [\vec{c} \vec{a}]. \quad \blacktriangle$$

Эрдатма $[a, x] = p$ векторди тенглама ечимга эгами деган савол туғиледи, яъни a, p лар берилса, юқоридиги шартни қанақатлан-тиривчи x вектор маъжудми?



169-чизма

Бундан учун a векторни ва кхтирий b векторни олайлик (169-чизма). Бу икки векторнинг бошларини битта O нуқтага келтириб, b нинг охири B дан a га параллел туғри чизик ўтказиб, унда ихтирий V_1 нуқтани олсак, $b_1 = OV_1$ вектор ҳосил бўлади.

Ди, у ҳолда $[a, b]$ ва $[a, b_1]$ векторларнинг йўналишлари бир хил бўлиб, модуллари тенг (чунки $OACB$ ва $OACV_1$ параллелограммларнинг асослари ва баландликлари тенг бўлгани учун уларнинг юзлари ҳам тенг).

Демак, $[a, b] = [a, b_1]$ бўлиб, V_1 нуқталарнинг чексиз кўпчилигидан b_1 вектор хоҳланганча кўпдир. Бу эса берилган тенгламанинг чексиз кўп ечимлари борлигини билдиради. Бундан ташқари, векторлар ўстида бўлиш амалининг ўринли эмаслигига яна бир бор ишонч ҳосил қилдик. $[a, x] = p$ кўринишдаги тенглама фазода туғри чизикни, $a, x = p$ тенглама эса текисликни аниқлайди, бу ерда a, p ва a, p маъжудм. Буларнинг ноботига биз тўхтаммаймиз.

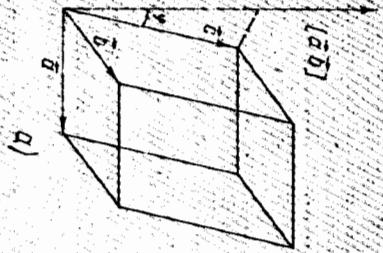
§9. §. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси.

Тетраэдрнинг ҳажми. Уч векторнинг координаларлик шарти

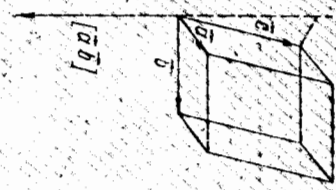
Учта a, b, c вектор берилган бўлсин. Таъриф. Биринчи икки векторнинг вектор кўпайтмасидан иборат векторни учинчи векторга скаляр кўпайтиришдан ҳосил қилинган сон шу уч векторнинг *аралаш кўпайтмаси* деб аталади, яъни $[a, b]c$, бу кўпайтма (a, b, c) кўринишда белгиланади.

Аввало аралаш кўпайтманинг геометрик маъноси билан танишайлик. a, b, c бир O нуқтадан кўйилган бўлиб, қомалганар бўлмасин ҳамда унг учлиқни ҳосил қилсин.

Қиррадарни шу берилган векторлардан иборат параллелепипедни ясаesak, $|[a, b]c|$ маъжудор шу параллелепипед асосининг юзигани билди-



170-чизма



ради, таърифга асосан $[a, b]c = |[a, b]||c| \cos \varphi$, $\varphi = (a, b, c)$ бўлиб, $|c| \cos \varphi$ маъжудор c нинг $[a, b]$ вектор йўналишидаги туғри чизикдаги проекцияси тенг бўлиб, параллелепипеднинг баландлигидир. $|c| \cos \varphi = h$ (170-а чизма). У ҳолда

$$[a, b]c = S_{ac} \cdot h = V, \quad (*)$$

бу сон эса параллелепипеднинг ҳажмини аниқлайди.

a, b, c лар чап учлиқдан иборат бўлса, $[a, b]$ вектор билан c орасидаги бурчак $\varphi \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi \leq 0$ (170-б чизма). У ҳолда $[a, b]c = -V$. Демак,

$$|[a, b]c| = V. \quad (29)$$

Биз кўйилганни нобот қилдик: уч векторнинг аралаш кўпайтмасидан иборат соннинг абсолют қиймати қирралари шу векторлардан иборат параллелепипед ҳажмига тенг.

Энди аралаш кўпайтманинг хоссалари билан танишайлик.

$$1^\circ. (a, b, c) = (b, c, a).$$

Ҳақиқатан ҳам, бу уч векторга қурилган параллелепипед ҳажмининг абсолют қийматлари тенг, ундан ташқари, a, b, c учлиқ бирдан b, c, a учлиқнинг ориентациялари бир хил. Шунинг сингари

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b).$$

2°. $(a, b, c) = -(b, a, c)$, чунки $(a, b, c) = [a, b]c = -[b, a]c = -(b, a, c)$. Демак, $(a, b, c) = -(b, a, c)$, $(b, c, a) = -(c, b, a)$, $(c, a, b) = -(a, c, b)$.

$$3^\circ. ((\vec{a} + \vec{b})c d) = (\vec{a}c d) + (\vec{b}c d), \text{ чунки } ((\vec{a} + \vec{b})c d) = [\vec{a} + \vec{b}c]d = [\vec{a}c]d + [\vec{b}c]d = (\vec{a}c d) + (\vec{b}c d).$$

$$4^\circ. \forall \lambda \in R \text{ учун } (\lambda \vec{a} \vec{b} c) = \lambda (\vec{a} \vec{b} c), \text{ чунки } (\lambda \vec{a} \vec{b} c) = [\lambda \vec{a} \vec{b}]c = \lambda [\vec{a} \vec{b}]c = \lambda (\vec{a} \vec{b} c).$$

5°. a, b, c компланар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, чунки уларга қурилган параллелепипед текисликда жойлашиб қолади, бундай параллелепипеднинг баъландлиги нолга тенгличудан ҳажми ҳам нолга тенг: аксинча $(\vec{a} \vec{b} c) = 0 \Rightarrow a, b, c$ векторлар компланар. Ҳақиқатан ҳам $(\vec{a} \vec{b} c) = 0 \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}]c = 0$ ёки $[\vec{a} \vec{b}] \perp c$. Лекин вектор кўпайтманинг таърифига асосан $[\vec{a} \vec{b}] \perp a, [\vec{a} \vec{b}] \perp b$, бундан $[\vec{a} \vec{b}]$ векторнинг a, b, c нинг ҳар бирига перпендикулярлиги келиб чиқади, демак, a, b, c компланар. ▲

Энди координатлари билан берилган учта векторнинг аралаш кўпайтмасини топилайлик: $a = x_1 i + y_1 j + z_1 k, b = x_2 i + y_2 j + z_2 k, c = x_3 i + y_3 j + z_3 k$.

$$[\vec{a} \vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k.$$

$[\vec{a} \vec{b}]$ билан c векторнинг скаляр кўпайтмаси мос координатлари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг:

$$[\vec{a} \vec{b}]c = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_3 \\ y_2 & z_2 & x_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & y_3 \\ x_2 & z_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_3 \\ x_2 & y_2 & x_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$$(\vec{a} \vec{b} c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Бу формуланинг татбиқи сифатида учларнинг координатлари бўйича тетраэдр ҳажминини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарайлик.

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$$

нуқтадар тетраэдрнинг учлари бўлсин.

$$\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\vec{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\vec{AD}(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Тетраэдрнинг ҳажми тетраэдрнинг бир учидан чиққан учта қир-расига қурилган параллелепипед ҳажмининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг бўлгани учун ҳамда (30) формулага асосан

$$V_{\text{тет}} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD})| = \frac{1}{6} \text{под} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (31)$$

(31) формулани баъзан ундан кўра қулайроқ қуйидагича ҳолда ёзиш маъқулдир:

$$V_{\text{тет}} = \frac{1}{6} \text{под} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \quad (32)$$

(31) ёки (32) формула изланган формуладир. Энди қатор мисоллар кўрайлик.

1. a, b, c — ихтиёрий векторлар ва α, β, γ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлса, $\alpha a - \beta b, \gamma b - \alpha c, \beta c - \gamma a$ векторларнинг компланар эканлиги исботлансин.

Исбот. Шу учта векторнинг $(\alpha a - \beta b, \gamma b - \alpha c, \beta c - \gamma a)$ аралаш кўпайтмасини ҳисоблайлик. Бунинг учун юқорида келтирилган 1° — 5° хоссаларни назарда тутсак,

$$\begin{aligned} (\alpha a - \beta b, \gamma b - \alpha c, \beta c - \gamma a) &= (\alpha a (\gamma b - \alpha c) (\beta c - \gamma a) - (\beta b (\gamma b - \alpha c) (\beta c - \gamma a)) - \\ &- \gamma a)) = (\alpha a \gamma b \beta c - \gamma a) - (\alpha a \alpha c \beta c - \gamma a) - (\beta b \gamma b \beta c - \gamma a) + \\ &+ (\beta b \alpha c \beta c - \gamma a) = \alpha \gamma \beta (a b c) - \alpha \gamma \gamma (a b a) - \alpha \alpha \beta (a c c) + \\ &+ \alpha \alpha \gamma (a c a) - \beta \gamma \beta (b b c) + \beta \gamma \gamma (b b a) + \beta \alpha \beta (b c c) - \\ &- \beta \alpha \gamma (b c a) = \alpha \beta \gamma (a b c) - \alpha \beta \gamma (a b c) = 0. \end{aligned}$$

Аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлгани учун 5° га асосан ўлар компланардир.

2. $\vec{AB}(2, 0, 0), \vec{AC}(3, 4, 0), \vec{AD}(3, 4, 2)$ векторларга қурилган тетраэдр берилган. Қуйидагилар топилин: а) тетраэдрнинг ҳажми, б) \vec{ABC} ёқининг юзи, в) D учдан туширилган баъландлик, г) \vec{AB} ва \vec{BC} қирлар орасидаги φ_1 бурчак косинуси, д) \vec{ABC} ва \vec{ADC} ёқлар орасидаги φ_2 бурчак косинуси.

(2, -3, -5) (1) $\vec{r} = \delta$, $6x - 3y - 5z + 8 = 0$
 Генераторлар \perp $\vec{r} = \delta$ $\vec{r} = \delta$

Ечиш. а) (31) формулага асосан

$$V_{\text{тет.}} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}.$$

б) 8-§ даги (28) га асосан

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{r}_{AB} \vec{r}_{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2} = 4.$$

в) Тетраэдрнинг ҳажми асосининг юзи билан асосга туширилган баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг: $V_{\text{тет.}} = \frac{1}{3} S_{\text{ос.}} \cdot h$;

а), б) ларни ҳисобга олсак, $\frac{3}{2} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot h \Rightarrow h = 2.$

г) AB, BC қирралар орасидаги бурчак косинуси \vec{AB}, \vec{BC} векторлар орасидаги бурчак косинусига тенг бўлгани учун

$$\cos \varphi_1 = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}| |\vec{BC}|} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

д) ABC ва ADC ёқлар орасидаги φ_2 бурчак шу ёқларга перпендикуляр векторлар орасидаги бурчакка тенг. ABC ёққа перпендикуляр вектор

$$\vec{r}_1 = [\vec{r}_{AB} \vec{r}_{AC}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow r_1(0, 0, 8).$$

ADC ёққа перпендикуляр вектор $\vec{r}_2 = [\vec{r}_{AC} \vec{r}_{AD}] = (8, -6, 0)$, демак,

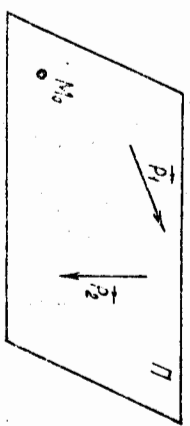
$$\cos \varphi_2 = \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2|} = \frac{0 \cdot 8 + 0 \cdot (-6) + 8 \cdot 0}{\sqrt{8^2} \cdot \sqrt{100}} = 0 \Rightarrow \text{ёқлар ўзаро перпендикуляр}.$$

II БОБ. ТЕКИСЛИК ВА ФАЗОДАГИ ТУҒРИ ЧИЗИК

Биз I бобда сирт тенгламаси тушунчасини киритиб, унга доир мисоллар кўрдик. Фазодаги энг содда сиртлардан бири текисликдир. Нуқта ва туғри чизик билан бир қаторда текислик геометриянинг таърифланмайдиган асосий тушунчалари ҳисобланади. Биз текислиكنинг фазодаги вазиятини тўлиқ аниқловчи баъзи миқдорлар ёрдамида, унинг турли қўринишли тенгламалари билан иш кўриб, текисликка оид қатор масалаларни қараб чиқамиз. Фазодаги туғри чизик эса икки текислиكنинг кесилган чизиги деб қаралади.

§ 10-§. Текислиكنинг аффин репердаги турли тенгламалари

1. Нокोलлинеар икки \vec{r}_1, \vec{r}_2 вектор ва оитта M_0 нуқта II текислиكنинг вазиятини тўла аниқлайди. $\forall M \in \Pi$ нуқтани олайлик. У



ҳолда M_0M вектор r_1, r_2 векторлар билан қопланар бўлади, демак, бу векторлар чизикли боғлиқ бўлиб, бундан уларнинг координаталаридан тузилган учинчи тартиблии детерминант нолга тенг бўлиши келтиб чиқади (171-чизма), шунини координаталарда ёзайлик.

171-чизма

$$M_0(x_0, y_0, z_0), r_1(a_1, b_1, c_1), r_2(a_2, b_2, c_2) \quad (1)$$

бўлсин. M нинг координаталарини x, y, z деб белгиласак, $M_0M(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ бўлиб, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Аксинча, (2) шарт bajarилса, M нуқта амбатта II текисликка тегишли бўлади. Демак, (2) II нинг тенгламаси. Бу тенглама берилган нуқтадан ўтди, берилган (ноколлинеар) икки векторга параллел бўлган текислиكنинг тенгламаси деб қоринилади.

Бундан ташқари, M_0M, r_1, r_2 векторлар бир текисликда ётгани учун улар чизикли боғлиқдир, яъни

$$M_0M = \alpha r_1 + \beta r_2, \quad \alpha, \beta \in R, \quad (3)$$

бу ерда α, β сонлар параметрлардир. (3) дан

$$\begin{aligned} x - x_0 &= u_1 + u_2, & x &= a_1 u + a_2 v + x_0, \\ y - y_0 &= u b_1 + v b_2, & y &= b_1 u + b_2 v + y_0, \\ z - z_0 &= u c_1 + v c_2, & z &= c_1 u + c_2 v + z_0. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) текисликнинг параметрик тенгламалари деб аталади (и ва v га истаган қийметлар бериб, текисликнинг шу параметрларга мос нуқталарини топиш мумкин).

Энди (2) тенгламани қуйидагича ёзайлик:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (5)$$

бундан

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

$$(5) \Rightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0, \text{ бунда } -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$$

десақ,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$$

тенглама ҳосил бўлади. (2) \Leftrightarrow (7) бўлгани учун (7) ҳам текисликнинг тенгламасидир. (6) да A, B, C ларнинг қамда биттаси нолдан фарқли ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), акс ҳолда $A = B = C = 0$ бўлса, (6) дан $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$, бу эса r_1, r_2 ларнинг берилишига яқин. Шундай қилиб, текислик аффин репера (7) чизикли тенглама билан ифодаланган. Бу ҳулосанинг теккариси ҳам ўринлидир, яъни (7) кўринишдаги ҳар қандай чизикли тенглама фазодаги бирор аффин реперга нисбатан текисликни аниқлайди.

Ҳақиқатан, $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) тенглама бирор аффин реперда бирор нуқталар тўпламини аниқласин. Уч ўзгарувчинини боғлаган бу тенгламанинг ечими чексиз кўпдир, уларнинг бири (x_0, y_0, z_0) бўлса, у ҳолда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, бундан ва (7) дан $\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — текислик тенгламасидир.

(7) тенглама текисликнинг умумий тенгламаси деб аталади.

2. Бир тўғри чизикда ётмаган учта нуқта текисликнинг вазиятини тўла аниқлайди. Шу марҳумотларга кўра унинг тенгламасини тўзайлик. Берилган нуқталар $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ бўлсин. Биз $M_0 = M_1, r_1 = \overrightarrow{M_1 M_2}, r_2 = \overrightarrow{M_1 M_3}$ десақ, ҳамда $M_1 M_2 (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), M_1 M_3 (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ ни эътиборга олсак, (2) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Уч нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламаси шундир.

Агар текислик координатлар бошидан ўтмаса, у Ox, Oy, Oz ўқларини учта $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$ нуқтада кесадн, бу ерда a, b, c текисликнинг шу ўқлардан ажратган кесмаларидир. Бунга (8) кўринишли тенгламани татбиқ қиламиз:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

бундан

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (9)$$

бу тенглама текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалари бўйича тенгламаси деб аталади.

Биз бу параграфда текисликнинг 6 хил кўринишдаги (2), (3), (4), (7), (8), (9) тенгламаларини кўрдик.

1-мисол. Текислик $A(2, 0, 3)$ нуқтадан ўтиб, $r_1(1, 0, 1), r_2(2, 1, 3)$ векторларга параллел бўлсин. Шу текисликнинг параметрик ва умумий тенгламаларини тузинг.

Еч иш. Берилганларни (4) кўринишдаги параметрик тенглама билан солиштирсак, $x_0 = 2, y_0 = 0, z_0 = 3, a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1, a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = 3$; буларни (4) га қўямиз:

$$x = u + 2v + 2, y = v, z = u + 3v + 3.$$

Энди текисликнинг (2) кўринишдаги тенгламасини ёзайлик:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 0 & z - 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Бундан

$$(2 - 3) + 2y - (x - 2) - 3y = 0$$

$$\text{ёки } x + y - z + 1 = 0.$$

2-мисол. ABCD тетраэдр берилган. A учни координатлар боши ҳамда $e_1 =$

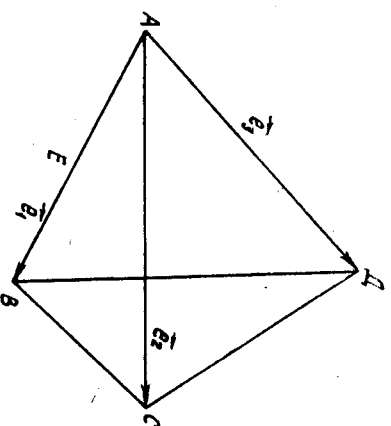
$$= \overrightarrow{AB}, e_2 = \overrightarrow{AC}, e_3 = \overrightarrow{AD} \text{ деб олнб, } VDC \text{ ва } EDC \text{ текисликлар тенгламаларини тузинг}$$

(бунда E нуқта AV қирраининг ўртаси) (172-чизма).

Еч иш. Берилишига кўра $V = (0, e_1, e_2, e_3) = (A, AB, AC, AD)$ бўлиб, тетраэдрнинг учлари ва E нуқта бу реперга нисбатан қуйидаги координатларга эга:

$$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1), E\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

у ҳолда VCD текисликнинг тенгламаси (8) га асосан



172-чизма

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1) + z + y = 0 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

Шунинг сингари EDC нинг тенгламасини тузамиз:
 $2x + y + z - 1 = 0.$

3-мисол. Текислик (2) ёки (7) тенглама билан, \vec{r} вектор (α, β, γ) координаталари билан берилган бўлса, \vec{r} векторнинг текисликка параллеллик шартини топинг.

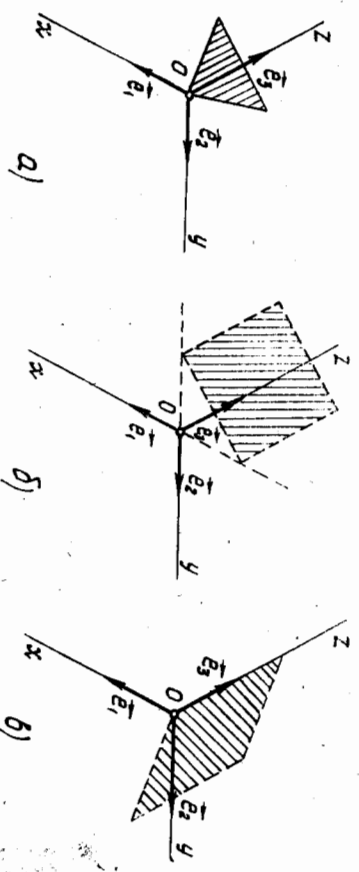
Еч иш: $\vec{r} \parallel \Pi \Rightarrow (\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$

Бу детерминантни биринчи йўл элементлари бўйича ёйсак ва (6) ни эътиборга олсак,
 $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$ (10)
 Бу изланган шартдир.

11-§. Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш

Биз аввалги параграфда $Ax + By + Cz + D = 0$ тенгламани текисликнинг умумий тенгламаси деб атадик ҳамда A, B, C, D параметрларнинг тайин қийматларида бу тенглама тайин текисликни кифо-далатини кўрдик.

Энди баъзи хусусий ҳолларни кўриб чиқайлик.
 1) $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ — текислик координаталар бошидан ўтди (173-а чизма).
 2) $C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$ — бу текислик (10) га асосан $\vec{e}_3(0,$



173-чизма

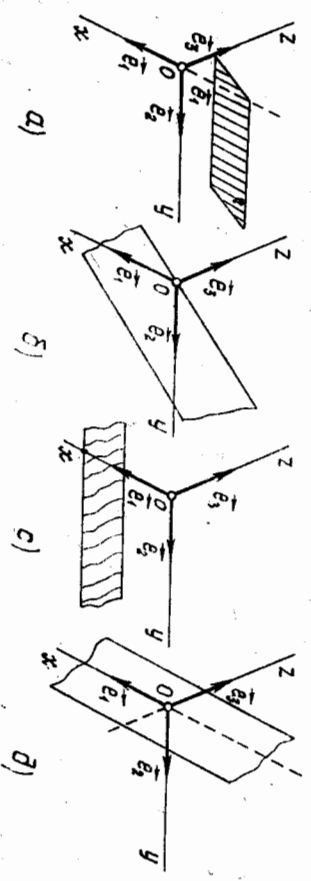
0, 1) векторга параллел бўлади, демак, Oz ўққа ҳам параллел (173-б чизма).

Шунга ўхшаш (7) да $V = 0$ (ёки $A = 0$) бўлса, текислик Oy ўқ-ка (ёки Ox ўққа) параллелдир. Бундан куйидати умумий ҳулоса келиб чиқади: текисликнинг умумий тенгламасида қайси ўзгарувчи қат-лаб бўлса, бу тенглама билан аниқланган текислик шу ўзгарувчи билан бир номли координаталар ўқига параллелдир.

3) $C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0, O \in \Pi$ ва $\Pi \parallel Oz \Rightarrow$ текислик Oz ўқдан ўтди (173-в чизма).

1-мисол. Бирор аффин реперга нисбатан куйидаги текисликларнинг вазиятини аниқланг:

- а) $x - z + 1 = 0$; б) $x + 2y + 3z = 0$;
 - в) $x - z = 0$; г) $2y - z = 0$.
- Еч иш. а) $x - z + 1 = 0$, бу ерда $V = 0$, яъни 2-ҳол: текислик Oy ўққа параллел (174-а чизма).
 б) $x + 2y + 3z = 0$, бу ерда $D = 0 \Rightarrow$ текислик координаталар бошидан ўтди (174-б чизма).



174-чизма

в) $x - z = 0$, бу ерда $V = C = 0$ текислик yOz текисликка параллел бўлиб, абсциссалар ўқини мусбат йўналишидан 2 бирлик кесма кесиб ўтди (174-с чизм.1).

г) $2y - z = 0$, бу ҳолда $A = D = 0$ бўлиб, текислик Ox ўқдан ўтди (174-д чизма).

Эслатма. Агар текислик тенгламаси берилиб, унинг бирор репердаги тасвирини чизиб талаб қилинса, умумий ҳолда куйидагича қиладилар: тенгламада уч номаларум бўлгани учун улардан икки-санига ихтиёрий қийматлар бериш билан унинг чексиз кўп ечим-репернаталари шу сонлардан иборат (бу уч нуқта бир тўғри чизикда ётмайдиган қилиб олинди) учта нуқта ясаймиз.

Текислик тасвирини чизишда кўпинча унинг координата ўқлари билан кесилган нуқталарини топиш қулайдир, бунинг учун ўзгарув-

чилярнинг иккигасига ноль қийматлар бериб, учинчи ўзгарувчинини берилган тенгламадан топилади ($D \neq 0$ шартда).

12-§. $Ax + By + Cz + D$ шорасининг геометрик маъноси

$Ax + By + Cz + D = \delta$ бўлсин. $\delta = 0$ бўлган ҳолда тенглама бирор II текислиқни аниқлайди. Табиийки, II га тегишли бўлмаган ҳар қандай нукта учун $\delta \neq 0$. Марълумки, II текислик фазони икки қисмга ажратди, буларнинг бирини Φ_1 , иккинчисини Φ_2 деб белгилайлик.

Теорема. $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Phi_1, M_2(x_2, y_2, z_2) \in \Phi_2$ бўлса, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = \delta_{M_1}, Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = \delta_{M_2}$ сонларининг асосот. Ҳақиқатан, бу вақтда M_1, M_2 кесма II текислик билан бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада кесишиб, бу нукта M_1, M_2 кесмани бирор λ нисбатда ($\lambda > 0$, чунки $M_0 \in (M_1, M_2)$) бўлади, яъни

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Лекин $M_0 \in \Pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Бу тенгликка x_0, y_0, z_0 ни қўямиз:

$$A \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \right) + B \left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right) + C \left(\frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right) + D = 0,$$

бундан $A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(z_1 + \lambda z_2) + D(1 + \lambda) = 0$ ёки

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) = 0.$$

Юқоридаги белгилашимизга асосан:

$$\delta_{M_1} + \lambda \delta_{M_2} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}}.$$

Шартта $\lambda > 0 \Rightarrow \delta_{M_1}$ ва δ_{M_2} сонлар ҳар хил шоралидир. ▲

Бундан қуйилати хулосага келамиз: Φ_1 нинг бирор нуктаси учун $\delta > 0$ (ёки $\delta < 0$) бўлса, унинг қолган барча нукталари учун ҳам $\delta > 0$ (ёки $\delta < 0$); Φ_2 учун ҳам шуларни айтиш мумкин.

Демак, текислик фазони икки ярим фазога ажратиб, шу текислик тенгламасидаги ўзгарувчилар ўрнига ярим фазолардан бирига тегишли барча нукталарнинг координаталарини қўйганимизда ҳосил бўладиган сонларнинг шоралари бир хилдир.

Мисол. $3x - y + 4z + 1 = 0$ тенглама билан аниқланган текислик учлари $M_1(1, 2, 1), M_2(-1, 2, -5), M_3(1, \sqrt{2}, 5)$ нукталарда бўлган ўзбурчакнинг томонларидан қайси бирини кесадир? Е ч и ш.

$$\delta_{M_1} = 3 \cdot 1 - 2 + 4 \cdot 1 + 1 = 6 > 0,$$

$$\delta_{M_2} = 3 \cdot (-1) - 2 + 4 \cdot (-5) + 1 = -24 < 0.$$

$$\delta_{M_3} = 3 \cdot 1 - \sqrt{2} + 4 \cdot 5 + 1 = 24 - \sqrt{2} > 0.$$

Бундан қўрнаники, $M_3 \in \Phi_1, M_1 \in \Phi_1, M_2 \in \Phi_2$ бўлиб, берилган текислик M_1, M_2, M_3 ўзбурчакнинг M_1, M_2, M_3 томонлари билан кесилди.

13-§. Декарт реперда текисликка доир баъзи масалалар

Биз 10-§ да текисликнинг аффин репердаги тенгламаларини қўриб ўтдик. Декарт репер аффин репернинг хусусий ҳоли бўлгани учун аффин реперда чиқарилган тенгламалар декарт реперда ҳам ўз кучини сақлайди, лекин декарт реперда текисликка доир метрик ҳаётхатлар масалаларни ечиш мумкин.

1. $Ax + By + Cz + D = 0$ тенглама аффин реперда текислиқнинг умумий тенгламасидир, шу тенгламани декарт реперда қарасак, A, B, C параметрларнинг муҳим геометрик хосаси аён бўлади. Ҳақиқатан, берилган тенгламага эквивалент бўлган ушбу тенгламани олдидик:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Энди $\vec{n}(A, B, C)$ ва $\vec{M}_0 M(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ деб олинса, охириги векторнинг чап томони \vec{n} ва $\vec{M}_0 M$ векторларнинг скаляр қўлаймаси ифода қилиди. Демак,

$$\vec{n} \cdot \vec{M}_0 M = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{M}_0 M \in \Pi \Rightarrow \vec{n} \perp \Pi.$$

Хуллас A, B, C сонлар берилган текисликка перпендикуляр векторни аниқлайди. Шу вектор текислиқнинг нормал вектори деб аталади. Биз

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{11}$$

тенгламани берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан ўтиб, берилган $\vec{n}(A, B, C)$ векторга перпендикуляр текислиқнинг тенгламаси деб аташга ҳақликимиз.

Эслатма. Текислиқнинг $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ тенгламасини вектор қўрғинида ёзсак,

$$\vec{r} - \vec{r}_0 \cdot \vec{n} = 0, \text{ (бу ерда } \vec{r}(x, y, z), \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0), \vec{n}(A, B, C))$$

ва уни ушбу $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0, \vec{r}_0 \cdot \vec{n} = p, \vec{r} \cdot \vec{n} = p$ ($p = \text{const}$)

шаклга келтирсак, векторлар алгебрасида «бўлиш» амалининг мавжуд эмаслигига ишона ҳосил қиламиз. (қ. [1], 329-бет). Ҳақиқатан

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p \quad (*)$$

Тенгламада \vec{n} вектор ва p скаляр маълум, \vec{r} вектор эса номарълум хисобланса, бу тенгламанинг \vec{r} га нисбатан ечими чексиз кўп — кутбдан куйилган радиус-вектор охирилари тўглами текисликни «тўлдирди», ечим ягона эмас, демак, $ax = p$ кўринишли тенглама ечимга эга эмас (қ. [1], 388-бет).

2. Энди берилган нуқтадан берилган текисликкача бўлган масофани топиш масаласини қарайлик.

Таъриф. Берилган M_1 нуқтадан берилган Π текисликкача бўлган масофа деб, шу нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр тўғри чиққининг текислик билан кесилган нуқтаси орасидаги масофага айтилади.

Π текислик умумий тенглама билан берилган бўлиб, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$ бўлсин. M_1 дан Π га перпендикуляр тушириб, унинг асосини $M_0(x_0, y_0, z_0)$ десак, $M_0 \in \Pi$ бўлгани учун

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (12)$$

У ҳолда $\vec{n}(A, B, C)$ вектор Π нинг нормал векторидир.

$$\vec{n} \parallel \vec{M_0M_1}, \text{ демак, } \vec{M_0M_1} \cdot \vec{n} = |\vec{M_0M_1}| |\vec{n}| \cos(\vec{M_0M_1}, \vec{n}) =$$

$$= \rho(M_1, \Pi) |\vec{n}| (\pm 1),$$

бундан:

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|\vec{M_0M_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \quad (13)$$

$\vec{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$; (13) дан

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (14)$$

(12) га асосан

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (15)$$

Бу изланган формулалар. Хусусий ҳолда, координаталар бошидан текисликкача бўлган масофа:

$$\rho(0, \Pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (16)$$

1- мисол. $M_1(1, -2, 2)$ нуқтадан $2x + y + 2z - 7 = 0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

Ечиш. (16) формулага асосан:

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) + 2 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1.$$

2- мисол. $SABC$ пирамиданинг S учи декарт реперининг бошида, ён ёқлари эса координата текисликларидадан иборат. $SA:SB:SC = 1:3:2$ шартни бажариб, пирамиданинг бағандлиги $SH = 6$ бўлса, ABC текислигининг тенгмасини тузинг (A, B, C учларининг координаталари мубоат).
Ечиш.

$$SA:SB:SC = 1:3:2 \Rightarrow SA = \lambda, SB = 3\lambda, SC = 2\lambda \quad (17)$$

десак, шартга кўра $\lambda > 0$. ABC текислигини тенгласи (9) га асосан:

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{3\lambda} + \frac{z}{2\lambda} = 1 \text{ ёки } x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z - \lambda = 0.$$

Энди λ ни топайлик. Пирамиданинг SH бағандлиги координаталар бошидан ABC текисликкача бўлган масофага тенг. (15) дан:

$$\rho(0, ABC) = SH = \frac{|- \lambda|}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{2})^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{13}{6}}} = \frac{6\lambda}{7};$$

$$SH = 6 \Rightarrow \frac{6\lambda}{7} = 6 \Rightarrow \lambda = 7.$$

Изланган тенглама:

$$x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z - 7 = 0.$$

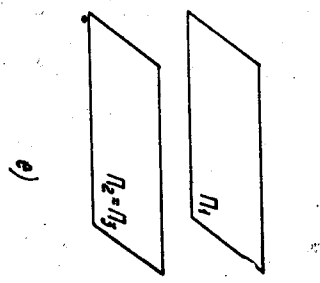
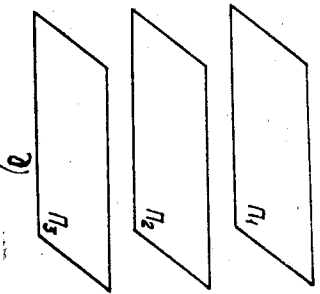
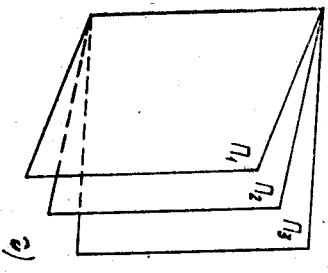
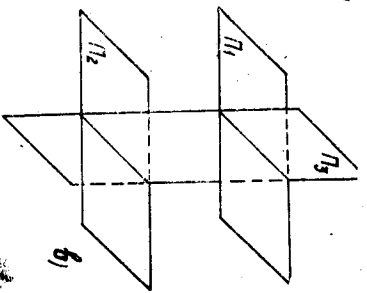
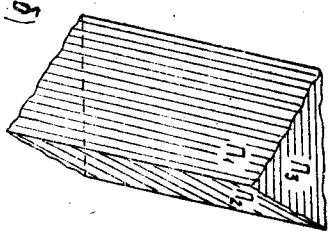
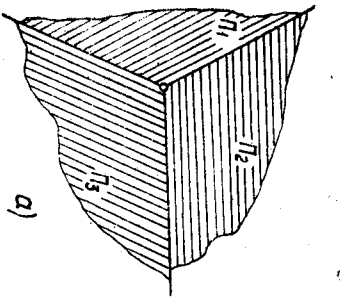
14- §. Текисликларнинг ўзаро вазияти

1. Икки текислиكنинг ўзаро вазияти. Бирор $\mathcal{B}(O, e_1, e_2, e_3)$ аффин реперга нисбатан Π_1, Π_2 текисликлар умумий тенгламалари билан берилган бўлсин.

$$\begin{aligned} \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Икки текислик ё тўғри чиққ орқали кесилиди, ёки улар ўзаро параллел бўлиб, умумий нуқтага эга эмас, ёки устма-уст тушади. Бу ҳолнинг қай бири ноз беришини билиш учун Π_1, Π_2 га тегишли тенгламалар системасини текшираемиз. Аввало куйидаги матрицаларни тузиб оламиз:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$



177-чиъама

5. $r = 1, r^* = 1$. Бу вақтда берилган тенгламалар системаси чек-сиз куп ечимга эга бўлиб, у система фақат битта чизиқли эркли тенгламалар иборат бўлиб қолади, демак, Π_1, Π_2, Π_3 текисликларнинг учаласи устма-уст тушиб қолади.

1-мисол. Декарт реперда $\Pi_1: 2x + 5y + 4z + 15 = 0$ ва $\Pi_2: 6x - 3z + 2 = 0$ текисликлар берилган. Бу текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг ҳамда улар орасидаги бурчакни ҳисобланг. Е ч и ш. Берилган тенгламаларнинг коэффициентларидан қуйидаги матрицалар тузамиз:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 15 \\ 6 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -30 \Rightarrow r = 2 \text{ ва } r^* = 2.$$

Демак, берилган текисликлар кесишади.

Энди (20) формула бўйича шу текисликлар орасидаги бурчакни толайлик: $n_1(2, 5, 4), n_2(6, 0, -3)$;

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{12 - 12}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow \Pi_1 \perp \Pi_2.$$

2-мисол. Аффин реперда берилган

$$\begin{aligned} \Pi_1: 2x - y + z - 4 &= 0, \\ \Pi_2: x + y - z - 2 &= 0, \\ \Pi_3: 2x - y + 3z - 6 &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг ҳамда уларнинг кесилиш ни топинг.

Е ч и ш.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

матрицаларни тузиб, уларнинг рангларини ҳисоблайлик:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow r = 3,$$

демак, $r^* = 3$. Юқорида қўрилган 1-ҳолга асосан бу текисликлар битта нуктада кесишади. Шу нуктани толайлик, унинг учун (*) системани ечимиз. Систепадаги биринчи ва иккинчи тенгламаларни қўш-сик,

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

у ҳолда иккинчи ва учинчи тенгламаларга $x = 2$ ни қўйсак,

$$\begin{aligned} y - z &= 0, \\ -y + 3z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Бундан $2z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = 1$. Текисликлар (2, 1, 1) нуктада кесишади.

3-мисол. Аффин реперда берилган

$$\begin{aligned} \Pi_1: x + y - z + 1 &= 0, \\ \Pi_2: x + y - z &= 0, \\ \Pi_3: -x - y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг. Е ч и ш.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицаларнинг рангларини ҳисобласак,

$$r = 1, \quad r^* = 2.$$

Бундан қўриладики, бу текисликлардан иккигаси, аниқроғи Π_1, Π_2 устма-уст тушади, лекин $\Pi_1 \parallel \Pi_2, \Pi_2 \parallel \Pi_3, (\Pi_1 \cap \Pi_2) \neq \emptyset, \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$.

Бирор аффин реперда кесилувчи иккита текислик берилган бўлсин:

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

бунда $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ матрицанинг ранги 2 га тенг. Мавлумки, икки текисликнинг кесилмаси тўғри чизикдан иборат, уни $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \mu$ деб олайлик. Π_1 нинг тенгламасини λ га ($\lambda \neq 0$), Π_2 нинг тенгламасини μ га ($\mu \neq 0$) кўпайтириб, қўшсак,

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

ёки

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0. \quad (22)$$

Бунда x, y, z нинг коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқлидир, акс ҳолда $\lambda A_1 + \mu A_2 = 0, \lambda B_1 + \mu B_2 = 0, \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ бўлса, булардан

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = -(\mu : \lambda) \quad (23)$$

бўлиб, M матрицанинг ранги 2 дан кичик бўлар эди, бу эса фарзга зиддир. Демак, (22) чизикли тенглама бирор Π' текислиқни аниқлайди. Шуниси диққатга сазоворки, μ тўғри чизикнинг ҳар бир нуқтасининг координатлари берилган системани қаноятлангиргани учун μ у координатлар (22) ни ҳам қаноятлангирлади. λ ва μ га ҳар хил қийматлар бериш билан (22) тенглама орқали аниқланган ва μ тўғри чизикни ўз ичига олувчи текисликлар ҳосил бўлади. Бундай текисликлар тўғлами μ *ўқми текисликлар дастаси* ва (22) эса *даста тенгламаси* дейилади. Равшанки, фазода μ га тегишли бўлмаган нуқта берилса, бу нуқтадан μ ўқли дастага тегишли битта текислик ўтади.

Бирор Π текисликка параллел бўлган фазодаги барча текисликлар тўғлами ҳам *текисликлар дастаси* дейилади. Бундай дастанинг берилиши учун шу дастага тегишли тайин битта текисликнинг берилиши kifойдир. Ҳақиқатан ҳам, $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ шундай дастага тегишли тайин бир текислик бўлса, μ ҳолда $Ax + By + Cz + \lambda = 0$ тенглама шу дастанинг тенгламаси бўлади. λ га турли қийматлар бериш билан Π га параллел текисликлар топилади. Хусусий ҳолда $\lambda = D$ бўлганда Π текислиқнинг ўзи ҳосил бўлади. Фазодаги ихтиёрий нуқтадан дастага тегишли фақат битта текислик ўтади.

Энди текисликлар боғлами тушуночасига тўғталамиз.

Т а ь р и ф Фазодаги тайин M_0 нуқтадан ўтган барча текисликлар тўғлами *текисликлар боғлами* деб аталади. M_0 нуқта *боғламининг маркази* деб аталади.

Марказининг берилиши билан боғлам тўла аниқланади. Марказ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ берилган бўлса, боғлам тенгламасини тузайлик. $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ текислиқни M_0 нуқтадан ўтказсак,

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \text{ бўлади, бу аиниятни } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ тенгламадан ҳадлаб айирсак,}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (24)$$

Бу тенглама M_0 нуқтадан ўтган текислиқни ifодалайди, A, B, C га ҳар хил қийматлар (албатта учаласи бир вақтда ноль бўлмаган) бераверсак, боғламга тегишли текисликлар ҳосил қилинади. Шунинг учун (24) ни маркази M_0 нуқтадаги боғлам тенгламаси деб айтиш мумкин.

Боғлам марказидан ўтмайдинган ихтиёрий тўғри чизик орқали шу боғламга тегишли фақат битта текислик ўтади. Боғламини битта нуқтада кесилган учта текислик ҳам аниқлаб бера олади, чунки бундай ҳолда боғлам маркази мавлум (берилган учта текислиқнинг кесилган нуқтаси).

Т а ь р и ф. Фазодаги тайин μ тўғри чизикка параллел бўлган барча текисликлар тўғлами *текисликларнинг марказсиз боғлами*, тўғри чизик эса *боғлам йўналишдир* дейилади.

Марказсиз боғламини йўналтирувчи тўғри чизик тўла аниқлайди. Масалан, μ берилса, унга айқаш бўлган тўғри чизик орқали шу боғламга тегишли фақат битта текислик ўтади. Бу боғламининг асосий хоссаларидан бири шунки, μ га параллел бўлмаган ҳар бир тўғри чизик орқали боғламга тегишли фақат битта текислик ўтади (чунки μ билан бу тўғри чизик ўзаро айқаш тўғри чизиклар бўлиб, уларнинг бири орқали иккинчисига параллел фақат битта текислик ўтади). μ тўғри чизикнинг йўналтирувчи $\vec{\mu}$ вектори ҳам марказсиз текисликлар боғламини тўла аниқлайди.

1-мисол. $4x - y + 3z - 1 = 0, x + 5y - z + 2 = 0$ текисликлар аниқлаган марказли даста берилган, бу дастанинг (1, 1, 1) нуқтадан ўтувчи текислиқини топинг.

Е ч и ш. Даста тенгламасини ёзамиз:

$$\lambda(4x - y + 3z - 1) + \mu(x + 5y - z + 2) = 0. \quad (25)$$

Шарпта кўра

$$\lambda(4 - 1 + 3 \cdot 1 - 1) + \mu(1 + 5 \cdot 1 - 1 + 2) = 0 \text{ ёки } \lambda = -\frac{7}{5} \mu.$$

Булардан:

$$-\frac{7}{5} \mu(4x - y + 3z - 1) + \mu(x + 5y - z + 2) = 0;$$

$$-7(4x - y + 3z - 1) + 5(x + 5y - z + 2) = 0$$

ёки

$$-23x + 32y - 26z + 17 = 0.$$

2-мисол. $x + 4y - 2z + 5 = 0$ текислик билан аниқланган марказсиз даста берилган. Шу дастага тегишли ва (2, -1, 3) нуқтадан ўтувчи текислиқни топинг.

Е ч и ш. Дастанинг тенгламасини ёзамиз: $Ax + By + Cz + \lambda = 0.$

Текисликларнинг параллеллик шартига асосан бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин: $x + 4y - 2z + \lambda = 0$. Бу текислик (2, -1, 3) нуқтадан ўтади: $2 + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 8$. Изланган текислик: $x + 4y - 2z + 8 = 0$.

3-мисол. Текисликларнинг марказли боғлами битта нуқтада кесилмайдиган

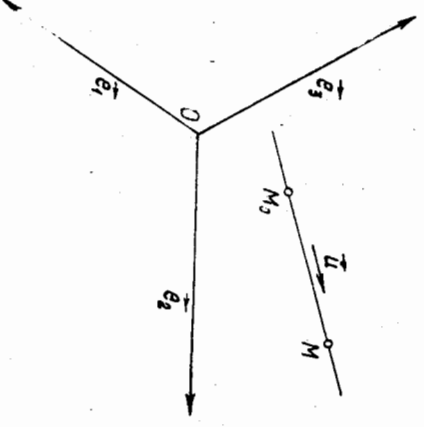
$$\begin{aligned} x + y - z + 2 &= 0, \\ 4x - 3y + z - 1 &= 0, \\ 2x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

текисликлар ёрдамида берилган. Шу боғламга тегишли ҳамда xOz текисликка параллел текисликни топинг.

Ечиш. Боғлам маркази берилган учта текисликнинг кесилган нуқтаси бўлади: (1, 3, 6).

Энди (1, 3, 6) нуқтадан ўтиб, $y = 0$ текисликка параллел текислик тенгламасини $Ax + By + Cz + D = 0$ кўринишида кўраймиз. Бу текислик $y = 0$ текисликка параллел бўлгани учун $A = C = 0$, $B = 1$ бўлиб, $y + D = 0$; бу текислик шартга кўра (1, 3, 6) нуқтадан ўтади, яъни $3 + D = 0$, $D = -3$. Изланган текислик: $y - 3 = 0$.

16-§. Фазодаги тўғри чизик



1. Фазодаги тўғри чизик ўзининг нуқтаси ва шу чизикка параллел бирор $u \neq 0$ вектор билан тўғра аниқланади (178-чизма).

(O, e_1, e_2, e_3) реперда $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $u(l, m, n)$ бўлсин. Тўғри чизикнинг ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтасини олайлик:

$$\vec{M_0M} \parallel u \Rightarrow \vec{M_0M} = tu \quad (t \in R). \quad (26)$$

$\vec{OM_0} = \vec{r_0}$, $\vec{OM} = \vec{r}$ десак ҳамда $\vec{M_0M} = \vec{OM} - \vec{OM_0}$ ни

$$\vec{r} = \vec{r_0} + tu. \quad (27)$$

(27) тенглама тўғри чизикнинг векторли тенгламаси деб аталади, t га ҳар қил қийматлар бериш билан тўғри чизикга тегишли нуқтанинг радиус-вектори топиллади.

178-чизма

$\vec{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ва (26) дан $x - x_0 = t \cdot l$, $x = x_0 + t \cdot l$, $y - y_0 = t \cdot m$, ёки $y = y_0 + t \cdot m$, $z - z_0 = t \cdot n$, $z = z_0 + t \cdot n$.

Бу (28) тенгламалар системаси тўғри чизикнинг параметрик тенгламалари деб юритиллади. M_0 — берилган нуқта, u эса u нинг йўналишувектори деб аталади.

Агар $l \cdot m \cdot n \neq 0$ бўлса, у ҳолда (28) $\Rightarrow t = \frac{x - x_0}{l}$, $t = \frac{y - y_0}{m}$, $t = \frac{z - z_0}{n}$, булардан

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (29)$$

Бу тенгламалар тўғри чизикнинг каноник тенгламалари деб аталди.

2. Тўғри чизикнинг икки нуқтаси унинг фазодаги вазиятини тўғра аниқлайди: фараз эгайлик, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталардан u тўғри чизик ўтсин ($M_1 \neq M_2$). Олдинги банддаги M_0 нуқта урнига M_1 ва $u = \vec{M_1M_2}$ олинса, (29) га асосан:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (30)$$

Берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизикнинг тенгламалари (30) дир.

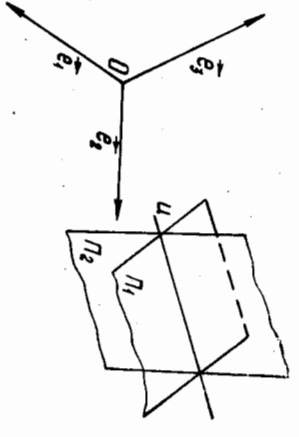
3. Фазодаги ҳар бир тўғри чизикни икки текисликнинг кесилиши чизиги деб қараш мумкин. Шунга мувофиқ.

$$\begin{aligned} \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

тенгламалар системаси $\Pi_1 \cap \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot V_1 : C_1 \neq A_2 \cdot V_2 : C_2$ шарт бажарилганда тўғри чизикни аниқлайди (179-чизма).

Тўғри чизикнинг юқорида кўрилган (27) — (30) тенгламаларининг беришдан қолганларига ўтиш мумкин. Декян у (31) кўринишдаги тенгламалари билан берилса, каноник кўринишига бевосита ўтиш мумкин эканлиги очиқдан-очиқ равшан эмас. Биз ҳозир шу масалага тўхталамиз. Каноник тенгламаларни ёзиш учун тўғри чизикнинг битта нуқтаси ва йўналишувектори билдириш керак.

(31) уч номаълумли икки тенглама, демак, ўзгарувчилардан бирита, масалан, z га $z = z_0$ қиймат бериб ва ҳосил қилинган икки номаълумли иккита тенгламани



179-чизма

ечиб, $x = x_0$, $y = y_0$ қийматларни топамиз (бунда биз $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ деб фараз қилдик). Натжада (x_0, y_0, z_0) нукта (31) тўғри чизикка тегишли бўлади, у ҳолда (31) ни қуйидагича ёзиб оلسак бўлади.

$$\begin{aligned} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) &= 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Бу системадан қуйидагиларни топамиз:

$$x - x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t, \quad y - y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t, \quad z - z_0 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t.$$

Булардан

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (32)$$

Агар (31) тенгламаларни декарт репериди қарасак, $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ вектор Π_1 текислигининг $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ вектор Π_2 текислигининг нормал вектори бўлади. (32) тенгламалардаги махражларда турган ифодалар Π_1 , Π_2 текисликлар нормал векторларининг вектор кўпайтмасининг мос координаталаридан иборат, яъни $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

1-мисол. $M_0(1, 0, -4)$ нуктадан ўтказилган ва $u(1, -3, 2)$ векторга параллел тўғри чизикнинг параметрик ва каноник тенгламаларини ёзиб, унинг учта нуктасини топинг.

Ечиш. Бу ерда $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = -4$ ва $l = 1$, $m = -3$, $n = 2$, тегишли тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, & \frac{x-1}{1} &= \frac{y}{-3} = \frac{z+4}{2}, \\ y &= -3t, \\ z &= -4 + 2t. \end{aligned}$$

Энди шу тўғри чизикнинг M_0 дан ташқари яна икки нуктасини топиш учун t га иккита қиймат берамиз:

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow x = 2, y = -3, z = -2, & M_1(2, -3, -2), \\ t = -1 &\Rightarrow x = 0, y = 3, z = -6, & M_2(0, 3, -6). \end{aligned}$$

2-мисол.

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ x + y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизикнинг каноник тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. Бу тўғри чизикнинг бирор нуктасини топамиз, $z = 0$ деб фараз қилиш билан ҳосил қилинган

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

системадан $x = 2$, $y = 0 \Rightarrow M_0(2, 0, 0)$.

Энди йўналтирувчи векторнинг координаталарини топамиз. Бу ерда

$$A_1 = 2, B_1 = -1, C_1 = 1, A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = 5 \Rightarrow \Rightarrow l = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6, m = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9, n = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Бу қийматларни (32) га қўямиз:

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y}{-9} = \frac{z}{3} = \frac{u}{2} = \frac{v}{-1}.$$

17-§. Икки тўғри чизикнинг ўзаро вазияти. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак. Тўғри чизиклар боғлами

Фазода u_1, u_2 тўғри чизиклар бирор аффин реперда ушбу параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + l_1 t, & x &= x_2 + l_2 t, \\ u_1: y &= y_1 + m_1 t, & u_2: y &= y_2 + m_2 t, \\ z &= z_1 + n_1 t, & z &= z_2 + n_2 t, \end{aligned}$$

бу ерда $u_1(l_1, m_1, n_1), u_2(l_2, m_2, n_2)$. Фазода икки тўғри чизик ўзаро параллел, кесилувчи ва айқаш бўлиши мумкин. Шу ҳолатларни айрим-айрим кўрайлик.

$$1. u_1 \parallel u_2 \Rightarrow u_1 \parallel u_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (33)$$

2. $u_1 \cap u_2 \neq \emptyset$, яъни u_1, u_2 тўғри чизиклар кесилсин. Бу ҳолда бу икки тўғри чизик бир текисликка тегишли бўлиб, $u_1, u_2, M_1 M_2$ векторлар компланар, яъни $(u_1, u_2, M_1 M_2) = 0$ ёки

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

(34) тенглик u_1, u_2 тўғри чизикларнинг бир текисликка тегишлилик шартидир.

Агар (34) шарт бажарилми, (33) бажарилмаса, u_1, u_2 лар битта нуктада кесилсин.

3. u_1 ва u_2 кесилмаса ҳамда параллел бўлмаса, улар айқаш, демак, айқаш икки тўғри чизик учун

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (35)$$

u_1, u_2 тўғри чизикларнинг декарт репериди қарасак, метрик харақтерли баъзи масалаларни ҳал қилиш мумкин.

4. Фазодаги икки тўғри чизик орасидаги бурчак. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак деб, бу тўғри чизикларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтилади.

Параметрик тенгламалари билан берилган u_1, u_2 тўғри чизиклар

учун $u_1(l_1, m_1, n_1), u_2(l_2, m_2, n_2)$ бу тўғри чизикларнинг йўналтирувчи векторларидир, демак,

$$\cos(u_1, u_2) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (36)$$

Бурчакнинг косинуси маълум бўлса, бу бурчакни топши осондир.

$$(u_1, u_2) = \frac{\pi}{2} \text{ бўлса, } u_1 \perp u_2 \text{ бўлиб, } (36) \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (37)$$

Бу шарт икки тўғри чизикнинг перпендикулярлик шартидир.

5. Фазодаги айқаш икки u_1, u_2 тўғри чизикнинг умумий перпендикулярини топши масаласини қарайлик. Икки айқаш тўғри чизик битта умумий перпендикулярга эгалдр.

u_1, u_2 тўғри чизикларнинг тенгламалари параметрик кўринишда берилган бўлсин, у ҳолда уларнинг умумий перпендикулярининг йўналтирувчи вектори $u = [u_1, u_2]$ вектордан иборат, u вектор ва u_1 тўғри чизик билан аниқланган текисликни Π_1 билан, u вектор ва u_2 тўғри чизик билан аниқланган текисликни Π_2 билан белгиласан, бу текисликларнинг қосишмасидан ҳосил қилинган тўғри чизик изланган тўғри чизикдир.

Аниқ мисолда бу тенгламалар содда кўринишда бўлади. Шунинг учун биз бу ерда кўриниши анча мураккаб тенгламага келтир-маймиз.

1-мисол. Куйидаги тўғри чизикларнинг ўзаро вазиётини аниқ-ланг:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t, & x &= 6 + 3t, \\ u_1: y &= 7 + t, & u_2: y &= -1 - 2t, \\ z &= 3 + 4t, & z &= -2 + t. \end{aligned}$$

Ечиш. u_1 тўғри чизикда: $M_1(1, 7, 3), u_1(2, 1, 4)$; u_2 тўғри чизикда: $M_2(6, -1, -2), u_2(3, -2, 1)$. Энди (34) шартни текши-рамай:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & 2 & 1 & 4 \\ (u_1 u_2, M_1 M_2) & = & \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} & = & 20 - 96 + 5 + 40 + 16 + 15 = 0, \end{array}$$

демак, бу тўғри чизиклар бир текисликка тегишли.

2-мисол. Ушбу икки тўғри чизик орасидаги бурчакни топинг (декарт реперда).

$$\begin{aligned} u_1: y + 1 &= 0, & u_2: x &= 0, \\ x + 2z - 1 &= 0, & z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ечиш. Бу тўғри чизикларнинг йўналтирувчи векторларини топа-миз:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ u_1 \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) & \rightarrow & u_1 \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right), \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, u_1(2, 0, -1), u_2 \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right), u_2(0, -1, 0),$$

демак, $u_2 = -j$.

$$(36) \text{ га асосан } \cos \varphi = \cos(u_1, u_2) = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow u_1 \perp u_2.$$

$$3\text{-мисол. } u_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}; u_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

айқаш тўғри чизиклар умумий перпендикулярининг тенгламасини ту-зинг.

Ечиш. $u_1(4, 1, -1), u_2(2, -2, -3)$ векторларнинг вектор кўпайтмаси $u = [u_1, u_2]$ изланган тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори бўлади:

$$\rightarrow u \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & -3 & 2 & -2 \end{array} \right|, u(-5, 10, -10).$$

$\rightarrow u, M_1(2, -1, 1)$ орқали аниқланувчи текислик тенгламаси (2) га асосан

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} x-2 & y+1 & z-1 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 10 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \text{ ёки } y + z = 0.$$

$\rightarrow u_2, u, M_2(-4, 2, -2)$ билан аниқланувчи текислик тенгламаси эса

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} x+4 & y-2 & z+2 & 2 & -2 & -3 \\ -5 & 10 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \text{ ёки } 10x + 7y + 2z + 30 = 0.$$

демак, изланган тўғри чизик тенгламаси:

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ 10x + 7y + 2z + 30 = 0. \end{cases}$$

Энди тўғри чизиклар боғлами ҳақида фикр қоригамиз.

Таъриф. Фазодаги таян M_0 нуктадан ўтган барча тўғри чи-зиклар тўплами M_0 марказли тўғри чизиклар боғлами деб аталади. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ марказли боғлам ушбу

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$$

параметрик тенгламалар билан ифодаланadi, бу ерда l, m, n боғ-ламдаги ҳар бир тўғри чизик учун таян қийматларга эга.

Фазода M_0 нуктадан фарқли бирор M нукта берилса, шу M нуктадан боғламга тегишли фақат битта тўғри чизик ўтади.

Таъриф. Агар фазода таян u тўғри чизик берилган бўлса, унга параллел барча тўғри чизиклар тўплами параллел тўғри чи-зиклар боғлами деб аталади.

18-§. Фазода тўғри чизик билан текислиكنинг ўзаро вазияти

Декарт реперда u тўғри чизик параметрик тенгламалари билан, Π текислик умумий тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$x = x_0 + lt$$

$$u: y = y_0 + mt, \quad (38) \quad \vec{u}(l, m, n),$$

$$z = z_0 + nt,$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad (39) \quad \vec{n}(A, B, C).$$

Аввало, тўғри чизик билан текислиكنинг кесишиш нуқтасини топиш масаласига тўхтайдик: бунинг учун берилган тенгламалар-ни система деб қараш керак. (38) ва (39) дан

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(A + Bm + Cn) = 0. \quad (40)$$

$A + Bm + Cn \neq 0$ шартда

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A + Bm + Cn} \quad (41)$$

бўлади. t нинг бу қийматини (38) га қўйсақ, изланган нуқта топилди. Лекин

$$A + Bm + Cn = 0 \quad (41')$$

шарт бажарилса, яъни $u \perp n$ бўлса, u тўғри чизик Π га параллел бўлади. Аксинча, $u \parallel \Pi \Rightarrow u \perp n \Rightarrow u \cdot n = 0$.

Демак, $u \cdot n = A + Bm + Cn = 0$ шарт тўғри чизик билан текислиكنинг параллеллигини бйқлдирди.

$$u \perp \Pi \Rightarrow u \parallel n \Rightarrow \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \quad (42)$$

бу (42) шарт тўғри чизикнинг текисликка перпендикулярлигини бйқлдирди.

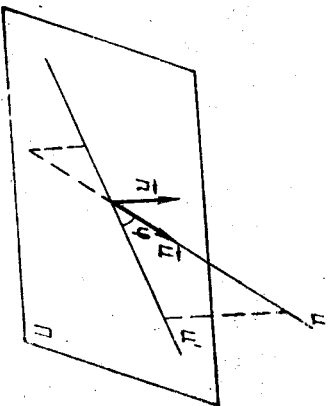
$u \in \Pi$ бўлган ҳол учун тўғри чизик билан текислик ўзаро вазиятининг хусусий ҳолидир. Бу вақтда (41') шарт бажарилиб, ундан ташқари $M_0 \in \Pi$ бўлиши лозим, яъни

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (43)$$

Демак, $u \subset \Pi \Leftrightarrow (41'), (43)$.

Энди тўғри чизик билан текислик орасидаги бурчакни топиш формуласини берамиз.

Тарриф. Тўғри чизик билан текислик орасидаги бурчак деб, тўғри чизик билан унинг шу текисликдаги ортогонал про-екцияси орасидаги бурчакка ай-тилади (180-чизма). Биз $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ деб фарз қилмиз.



180-чизма

180-чизмадан кўриладики, φ нинг ўрнига (n, u) бурчакни қабул қилиш мумкин. Бу бурчак $\frac{\pi}{2} - \varphi$ га ёки $\frac{\pi}{2} + \varphi$ га тенг. Демак, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi$, шунинг учун

$$\sin \varphi = |\cos(n, u)| = \frac{|A + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (44)$$

1-мисол. Ушбу

$$x = 1 + 2t,$$

$$y = 3t,$$

$$z = -2 + t$$

тўғри чизик билан $2x - y + z + 1 = 0$ текислиكنинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечнш. Тўғри чизик тенгламаларидаги x, y, z нинг қийматларини текислик тенгламасига қўймиз:

$$2(1 + 2t) - 3t + (-2 + t) + 1 = 0 \text{ ёки } t = -\frac{1}{2}.$$

У ҳолда $x = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$;

изланган нуқта $\left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

2-мисол. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизик билан $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

Ечнш. $u(1, -2, 2)$, $n(4, 2, 2)$,

$$\sin \varphi = \frac{|14 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{9} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

3-мисол. $P(7, 9, 7)$ нуқтадан $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ тўғри чизик-

кача бўлган масофани топинг.

Ечнш. Нуқтадан тўғри чизиккача бўлган масофани топиш учун биз формула берганимиз йўқ, бундай масала қуйидагича осон ҳал қилинади:

а) берилган нуқтадан ўткб, берилган тўғри чизикка перпендикуляр текислик тенгламаси тузилади;

б) шу текислик билан берилган тўғри чизикнинг кесишган нуқтаси топилади;

в) бу топилган нуқта билан берилган нуқта орасидаги масофа топилади.

Шу йўсинда масалани ечингга киришмиз.

а) $P(7, 9, 7)$ нүктәдән $\vec{u}(4, 3, 2)$ векторга перпендикуляр текислиكنинг тенгләмәсини тупламиз: $4(x-7) + 3(y-9) + 2(z-7) = 0$ ёки

$$4x + 3y + 2z - 69 = 0, \quad (*)$$

б) берилган тугри чизик тенгләмәсини параметрик кўринишда ёзамиз: $x = 2 + 4t, y = 1 + 3t, z = 2t$ ва буларни $(*)$ тенгләмәгә кўямиз:

$$4(2 + 4t) + 3(1 + 3t) + 2 \cdot 2t - 69 = 0,$$

$$29t - 58 = 0,$$

$$t = 2$$

$$x = 2 + 4 \cdot 2 = 10,$$

$$y = 1 + 3 \cdot 2 = 7,$$

$$z = 2 \cdot 2 = 4$$

лиكنинг кесипшан нүктәсидир.

$$P(P, Q) = \sqrt{(10-7)^2 + (7-9)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9 + 4 + 9} = 22.$$

III Б.О.Б. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР ВА УЛАРНИ КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ БУЙИЧА УРГАНИШ

19-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг тугри чизик ва текислик билан кесилиши

Биз I бобда сирт тенгләмәси хәқидаги тушунча билан танишкан эдик.

Тарриф. Бирор аффин реперда иккинчи тартибли алгебраик тенгләмә билан аниқланадиган нүктәлар тупламы иккинчи тартибли сирт деб аталади:

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_4x + 2a_5y + 2a_6z + a_4 = 0, \quad (1)$$

бунда

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Аввало, бу сиртнинг бирор и тугри чизик билан кесилиши масаләсини кўриб чикайлик. Фараз қилайлик, и тугри чизик S сирт қарадәтган аффин реперда куйидаги параметрик тенгләмәлар билан берилган бўлсин:

$$x = x_0 + lt,$$

$$y = y_0 + mt, \quad (3)$$

$$z = z_0 + nt.$$

S билан и нинг кесипмәсини топиш учун уларнинг тенгләмәларини биргәликдә ечиш керәк. Шунинг учун (3) даги x, y, z нинг қиймәтларини (1) га кўямиз:

$$a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + a_{33}(z_0 + nt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) + 2a_{13}(x_0 + lt)(z_0 + nt) + 2a_{23}(y_0 + mt)(z_0 + nt) + a_{44} = 0.$$

Кәвәсләрни очиб, ухшаш хәдләрни ихчәмләсәк, t га нисбәтән ушбу квадрат тенгләмә хәсиги бўладик:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (4)$$

бунда:

$$P = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}ml + 2a_{13}nl,$$

$$Q = l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}) + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 +$$

$$+ a_{23}z_0 + a_{24}) + n(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}), \quad (5)$$

$$R = a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 +$$

$$+ 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}.$$

(5) дан кўриниб турибдики, P коэффицент и тугри чизикнинг

(x_0, y_0, z_0) нуктасига боғлиқ бўлмагандан, и нинг фақат йўналтирувчи векторлигига боғлиқдир.

Т а в р и ф. Йўналтирувчи векторлари $P = 0$ шартни қаноатланттиридан барча тўғри чизиқлар берилган сиртга нисбатан *асимптотик йўналишга эга бўлган тўғри чизиқлар* дейилади, йўналтирувчи векторларини эса *асимптотик йўналишда векторлар* дейилади.

Агар и тўғри чизиқ S сиртга нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлмаса (яъни $P \neq 0$ бўлса), у ҳолда (4) квадрат тенглама иккита t_1, t_2 илдизга эга бўлади, бунда t_1, t_2 иккитга турли ҳақиқий сон бўлса, тўғри чизиқ сирт билан иккитга умумий нуктага эгадир.

t_1, t_2 қўшма комплекс сонлар бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ сирт билан иккитга махсум умумий нуктага эга, $t_1 = t_2$ да тўғри чизиқ сирт билан устма-уст тушадиган иккитга умумий нуктага эга бўлиб, бу вақтда тўғри чизиқ сиртга *уринди* дейилади.

Агар и тўғри чизиқ S сиртга нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлса (яъни $P = 0$ бўлса), у ҳолда (4) дан

$$2Qt + R = 0 \quad (6)$$

бўлиб, бу ерда турли ҳоллар юз бериши мумкин.

а) $Q \neq 0, (6) \Rightarrow t = -\frac{R}{2Q}$ бўлиб, и тўғри чизиқ S сирт билан

битта нуктада кесинади.

б) $Q = 0$, лекин $R \neq 0$ бўлса, (6) тенглама маънога эга эмас, бу ҳол S сирт билан и тўғри чизикнинг кесилмаслигини билдиради.

в) $Q = 0, R = 0$ бўлса, (6) тенглама t нинг ҳар қандай қийматида ўринли, бу эса и тўғри чизикнинг ҳамма нукталари S га тегишли, яъни тўғри чизик S сиртнинг таркибиде эканлигини билдиради (бундай тўғри чизик S сиртнинг *ясовачиси* деб аталади). Энди $P \neq 0$ бўлиб, $t_1 = t_2$ ҳолга қайтайлик, бу ҳолда и тўғри чизик S сиртга уринма деб аталган эди. Бу вақтда и тўғри чизикнинг (x_0, y_0, z_0) нуктаси сиртда шу уриниш нуктасини олсак, бу нукта S га ҳам тегишли бўлгани учун (5) дан $R = 0$. У ҳолда (4) дан

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \text{ ёки } t(Pt + 2Q) = 0.$$

Бу тенгламанинг битта илдизи $t_1 = 0$, иккинчиси эса $t_2 = -\frac{2Q}{P}$ дир.

Равшанки, $t_1 = t_2 = 0$ бўлиши учун $Q = 0$ бўлиши зарур ва етарлидир, яъни

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})m + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})n = 0. \quad (7)$$

Бу тенглик и тўғри чизик S сиртга нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлмаганда унинг S сиртга (x_0, y_0, z_0) нуктада уриниши учун йўналтирувчи и вектор координатларини қаноатлантириши керак бўлган шартдир. Равшанки, (7) ни қаноатлантирувчи l, m, n лар чексиз кўпдир (чунки уч номалгумли битта тенгламадир), демак M_0 нуктада сиртга уринувчи чексиз кўп тўғри чизиклар мавжуд. Бу уринмаглардан бирита тегишли ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуктани ол-

сак, $M_0 M(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ вектор шу уринманинг йўналтирувчи вектори бўлади, у ҳолда унинг координатлари (7) шартни қаноатлантириши керак:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})(y - y_0) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})(z - z_0) = 0. \quad (8)$$

Уринма тегишмаслиги

Шундай қилиб, сиртнинг M_0 нуктасига ўтказилган ҳар бир уринма тўғри чизикдаги ихтиёрий нуктанинг координатлари (8) ни қаноатлантириши керак. (8) тенглама x, y, z га нисбатан чизикли тенглама бўлгани учун у M_0 нуктадан ўтувчи бирор текисликни аниқлайди, худди шу текислик S сиртнинг M_0 нуктасига ўтказилган *уринма текислиги* деб аталади. Демак, иккинчи тартибли сиртнинг бирор нуктасига ўтказилган барча уринма тўғри чизиклар тўғрисида бир текисликка тегишли бўлиб, бу текислик сиртнинг шу нуктасига ўтказилган уринма текисликдан иборат. Шундай қилиб, (8) тенглама иккинчи тартибли сиртнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасига ўтказилган уринма текислик тенгламасидир.

Агар (8) даги $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$ нинг коэффициентлари бир вақтда нолга тенг, яъни

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

бўлса, уринма текислик ноаниқдир.

Бу (9) шартларни қаноатлантирувчи (x_0, y_0, z_0) нукта сиртнинг *махсум нуктаси* деб аталади. Демак, сиртнинг махсум нуктасида унинг уринма текислиги аниқланмаган бўлади.

Энди иккинчи тартибли сирт билан текисликиннг кесилиш масаласига ўтайлик.

S иккинчи тартибли сирт ва Π текислик берилган бўлсин. Аффин реперни шундай танлаб оламизки, $\Pi = xOy$ бўлсин, у ҳолда шу реперда Π текислик

$$z = 0 \quad (10)$$

тенглама билан аниқланади. S сиртнинг тенгламаси эса шу реперда умумий ҳолда, яъни (1) кўринишда бўлсин. (1) ва (10) тенгламаларни биргаликда ечсак,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{44} = 0. \quad (11)$$

S сиртга ва Π текисликка тегишли бўлган барча нукталар (11) тенгламани қаноатлантиради.

Қуйдаги ҳоллар юз бериши мумкин. 1) $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, бу вақтда умуман олганда (11) тенглама $z = 0$ текисликда иккинчи тартибли чизикни аниқлайди.

2) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, бу ерда: а) a_{14}, a_{24} дан камда биттаси нолдан фарқли бўлса, (11) тенглама $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{44} = 0$

кўринишда бўлиб, $z = 0$ текисликда тўғри чизикни аниқтайди, демак, бу ҳолда S сирт билан Π текислик тўғри чизик бўйича кесилди:

$$6) a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0 \Rightarrow (1) \text{ тенглама } z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2 + 2a_{34}) = 0 \text{ кўринишда бўлиб, } yz = 0, 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \text{ текисликларга ажралиб кетади (равшанки, бу вақтда берилган } \Pi \text{ текислик шу сирт таркибига бўлади);}$$

$$c) a_{14} = a_{24} = 0, a_{34} \neq 0 \Rightarrow (1) \text{ тенгламадан } a_{44} = 0 \text{ келиб чиқиб, эйдик рўй беради, бу эса } S \text{ сирт билан } \Pi \text{ текислик бирорта ҳам умумий нуқтага эга эмаслигини билдиреди.}$$

Шундай қилиб, иккинчи тартибли сиртнинг текислик билан кесими:

а) иккинчи тартибли чизикдан:

б) битта тўғри чизикдан:

с) текисликдан (бу вақтда сирт иккита текисликка ажралиб, берилган текислик шу текисликлардан бири бўлади);

д) бўш тўпламдан (яъни сирт билан текислик битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмайди) иборат экан.

$$1\text{-мисол. } x^2 - xy + zy - 5z = 0 \text{ сирт билан } \frac{x-10}{7} = \frac{y-5}{3} =$$

$$= \frac{z}{-1} \text{ тўғри чизикнинг кесилган нуқталарини топинг.}$$

Еч иш. Берилган тўғри чизик тенгламасини параметрик кўринишда ёзамиз: $x = 10 + 7t$, $y = 5 + 3t$, $z = -t$, буларни берилган сирт тенгламасига қўйсақ, $(10 + 7t)^2 - (10 + 7t)(5 + 3t) - t(5 + 3t) + 5t = 0$. Бу тенгламани содда-лаштирсақ,

$$t^2 + 3t + 2 = 0,$$

бу квадрат тенгламанинг илдизлари: $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Бу қий-магларни тўғри чизикнинг параметрик тенгламаларидаги t нинг ўрнига қўйсақ,

$$t_1 = -1 \text{ да } x = 10 + 7(-1) = 3, y = 5 + 3(-1) = 2,$$

$$z = -(-1) = 1;$$

$$t_2 = -2 \text{ да } x = 10 + 7(-2) = -4, y = 5 + 3(-2) = -1,$$

$$z = -(-2) = 2.$$

Демак, изланган нуқталар: (3, 2, 1) ва (-4, -1, 2).

2-мисол. $x^2 - y^2 - 2x + z - 3 = 0$ сиртнинг (1, 1, 5) нуқта-сидаги уринма текислик тенгламасини ёзинг.

Еч иш: Бу ерда: $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$,

$$a_{23} = 0, a_{14} = -1, a_{24} = 0, a_{34} = \frac{1}{2}, a_{44} = -3,$$

$$x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 5.$$

Буларни (8) га қўйсақ,

$$-(y-1) + \frac{1}{2}(z-5) = 0 \text{ ёки } 2y - z + 3 = 0,$$

бу изланган уринма текислик тенгламасидир.

3-мисол. $x^2 + 3y^2 - 4xz - 2yz + z - 6 = 0$ сиртнинг $z = 0$ те-кислик билан кесимини топинг.

Еч иш: $z = 0$ ни берилган сирт тенгламасига қўйсақ,

$$x^2 + 3y^2 - 6 = 0.$$

Буни соддароқ ҳолга келтирамыз:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

демак, кесимда ярим ўқларни $\sqrt{6}$ ва $\sqrt{2}$ бўлган эллипс ҳосил қилинади.

20-§. Сферик сирт

1) Бобда сирт тенгламаси тушуنчасини берганимизда сфера таъри-фини бериб, унинг қуйидаги каноник тенгламасини декарт реперига келтириб чиқарган эдик:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \quad (12)$$

бунда (a, b, c) — сфера маркази, R — сфера радиуси.

(12) ни қуйидагича ёзамиз:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0. \quad (12')$$

Бундан: 1) сферанинг иккинчи тартибли сирт эканлигини кўрамыз,

2) (12') да x, y, z қўлайтмалар қатнашган ҳадлар йўқлигини, 3) x^2, y^2, z^2 олдидagi коэффициентларнинг 1 га тенглигини кўриб турибмыз.

Энди (1) да $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ ва $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ деб фараз қилинса,

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + a_{11}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (13)$$

тенглама сферани ифода қиладими деган саволга жавоб излайлик. $a_{11} \neq 0$ га бўлиб юбориб,

$$\frac{2a_{14}}{a_{11}} = A, \frac{2a_{24}}{a_{11}} = B, \frac{2a_{34}}{a_{11}} = C, \frac{a_{44}}{a_{11}} = D$$

белгилашларни киритсақ,

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \quad (14)$$

Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + z^2 + Cz + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2 + D = 0,$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 + D - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} - \frac{C^2}{4} = 0$$

ёки

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 - 4D), \quad (15)$$

Куйидаги ҳолларни қараб чиқайлик:

а) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$; бу ҳолда

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}\right)^2,$$

бу тенглама эса маркази $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ нуктада ва радиуси

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D} \text{ га тенг сфера тенгламасидир.}$$

б) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$, бу ҳолда (15) тенглама

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = 0$$

кўринишда бўлиб, уни қановатлантирувчи фақат битта $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ нукта мавжуддир.

в) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$. Бундан кўринадики, фазода (15) ни қановатлантирувчи битта ҳам нукта мавжуд эмас. Умумийликни буз-маслик учун бу вақтда (15) тенглама маъхул сферани аниқлайди деймиз.

Демак, (14) тенглама фақатгина $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ шарда сферани аниқлайди.

1-мисол. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z - 5 = 0$ сферанинг маркази ва радиусини топинг.

Е ч и ш. Тенгламадан:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + z - \frac{5}{2} = 0,$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 + z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{2} = 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 0.$$

Демак, сферанинг маркази $\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ нуктада, радиуси эса 2 га тенг.

2-мисол. $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ сферанинг $M(3, \sqrt{2}, 1)$ нук-тасида унга ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзинг.

Е ч и ш. (8) тенгламага $a_j (j = 1, 2, 3, 4)$ нинг қийматларини қўйиб, уринма текислик тенгламасини ёзиш ҳам мумкин эди, лекин биз бу ерда бошқача йўл тутамиз. Бу ерда, сфера маркази $O'(2, 0, 0)$ нуктада, радиуси эса 2 га тенг. Сферанинг M нуктада ўтказил-ган уринма текислиги сфера радиусига перпендикулярлиги с/бабли \vec{MO}' вектор уринма текислигининг нормал вектори бўлади. Аммо

$\vec{MO}'(-1, -\sqrt{2}, -1)$ демак, изланган текислик тенгламаси (11) 606, 13-§: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

$$-1(x-3) - \sqrt{2}(y-1) - 1(z-1) = 0$$

$$x + \sqrt{2}y + z - 6 = 0.$$

21-§. Иккинчи тартибли цилиндрлик сиртлар

Бирор Π текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ҳамда шу текис-ликка параллел бўлмаган u тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Таъриф. u тўғри чизиққа параллел ҳамда L чизиқ билан ке-сипувчи фазодаги барча тўғри чизиқлар тўғлама иккинчи тартиб-ли цилиндрлик сирт деб аталади.

Таърифта қатнашяётган L чизиқ шу цилиндрлик сиртнинг йўнал-тирувчиси, тўғри чизиқлар эса унинг ясочилари дейилади.

Таърифдан фойдаланиб, афтин реперда S цилиндрлик сирт тенг-ламасини келтириб чиқарайлик. Содаллик учун, йўналтирувчи чизиқ-ни xOy текисликда оламиз:

$$L: F(x, y) = 0. \quad (16)$$

u тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{u}(l, m, n)$ (181-чиз-

ма). Иктиёрий $M(x, y, z) \in S$ нуктани оламиз. Шу M нуктадан ўт-ган ясовчининг xOy текислик билан кесилган нуктаси $N(x_1, y_1, 0)$

бўлсин. У ҳолда $\vec{MN}(x_1 - x, y_1 - y, -z)$ ва $\vec{MN} \parallel u$, яъни $\vec{MN} =$

λu . Бундан: $x_1 - x = \lambda l, y_1 - y = \lambda m, -z = \lambda n$ ($n \neq 0$, чунки $u \nparallel xOy$). $-z = \lambda n$ дан λ ни топиб, олдинги икки тенглаikka қўя-

миз:

$$x_1 = x - \frac{1}{n}z, y_1 = y - \frac{m}{n}z. \quad (17)$$

$$\text{Аммо } N \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0,$$

$$\text{демак, } F\left(x - \frac{1}{n}z, y - \frac{m}{n}z\right) = 0. \quad (18)$$

Шундай қилиб, (18) тенг-

лама цилиндрлик сиртнинг тенг-

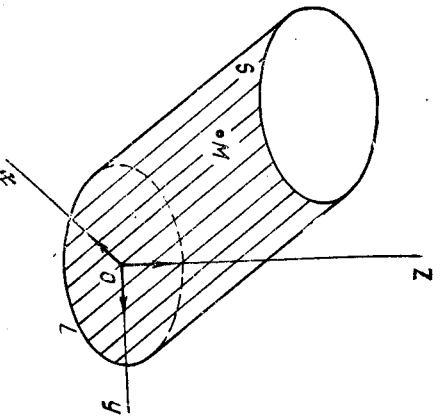
ламасидир.

Демак, йўналтирувчиси $F(x, y) = 0$ кўринишдаги тенглама

билан берилган, ясовчилари

эса (l, m, n) векторга парал-

лел цилиндрлик сирт тенглама-



181-чизма

сини ҳосил қилиш учун (16) даги x, y, z ўрнига мос равишда $x = \frac{l}{n}, z = \frac{m}{n} z$ ифодаларни қўйиш керак экан. $u \parallel Oz$ дан иборат хусусий ҳолда $u \parallel e_3 \Rightarrow u(0, 0, n)$ ва (18) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$F(x, y) = 0. \quad (19)$$

Ажойиб ҳулосага келим: ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган цилиндр сирт тенгламаси йўналтирувчи тенгламасининг ўзгачасидир.

Масалан, xOy текисликда эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламаси билан берилган бўлса, бу тенглама фазода ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндр сиртдан иборат.

Иккинчи тартибли цилиндр сирт $\mathcal{D} = (0, e_1, e_2, e_3)$ аффин реперда берилган бўлсин: равишанки, бу тенглама иккинчи даражалидир, сиртнинг ясовчиларига параллел бўлмаган Π текислик билан кесимини текширайлик.

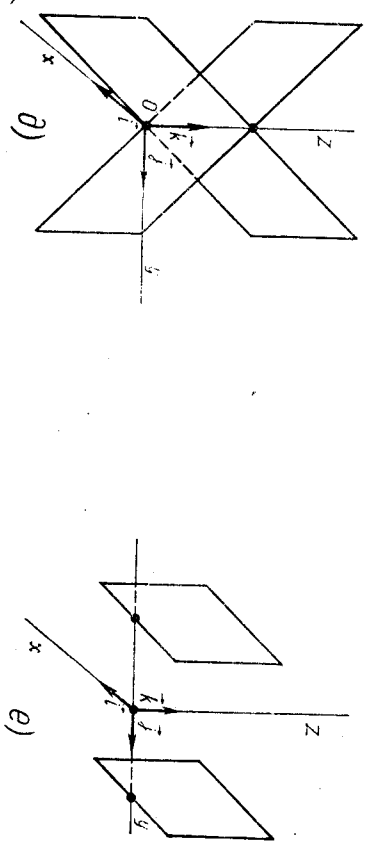
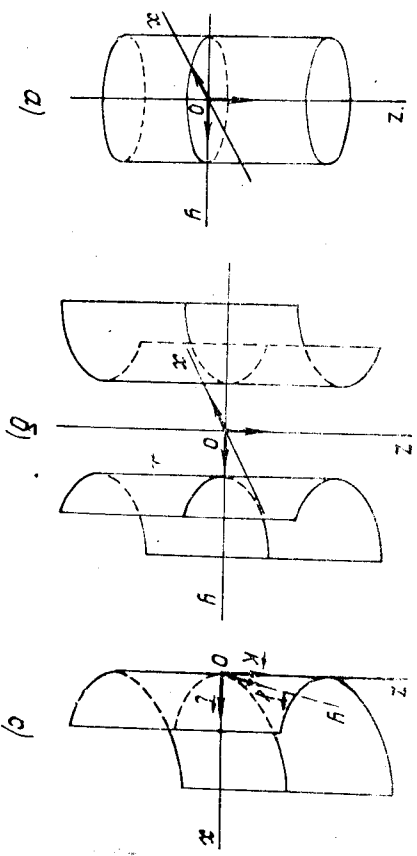
Янги $\mathcal{D}' = (O', e'_1, e'_2, e'_3)$ аффин реперни шундай танлаб оламизки, O нуқта билан e_1, e_2 баэис векторлар Π да жойлашсин, e_3 эса u га параллел бўлсин. U ҳолда \mathcal{D}' дан \mathcal{D}' га ўтишда тенгламанинг даражаси сақлангани учун S сирт \mathcal{D}' да ҳам иккинчи тартибли цилиндр сиртни аниқлайди, лекин бу тенгламада учинчи ўзгаришчи z' қатнашмайди ($O'z' \parallel u$ бўлгани учун).

Унинг \mathcal{D}' репердаги тенгламасини умумий ҳолда куйдлагича ёзиш мумкин:

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0. \quad (20)$$

Демак, S билан Π нинг кесилишмасдан ҳосил бўлган геометрик образ умумий ҳолда (20) тенглама билан аниқланади. Бу (20) тенглама эса Π текисликдаги иккинчи тартибли чизикнинг умумий тенгламасидир, шу иккинчи тартибли чизикнинг турита қараб иккинчи тартибли цилиндрни синфларга ажратиш мумкин. Бундан ташқари, (20) билан аниқланган чизикни S нинг йўналтирувчиси сифатида қабул қилсак ҳам бўлади. Демак, иккинчи тартибли цилиндрнинг йўналтирувчилари: эллипс, гипербола, парабола, иккита кесилувчи тўғри чизик, иккита ўзаро параллел (устма-уст тушмаган) тўғри чизиклардан иборат бўлиши мумкин. Йўналтирувчилари шу чизиклардан иборат иккинчи тартибли цилиндр сиртлар мос равишда эллиптик цилиндр, гиперболлик цилиндр, параболлик цилиндр, иккита кесилувчи текислик, иккита ўзаро параллел текислик (устма-уст тушмаган) деб юрutiлади (охирги иккитаси баъзан айнидан цилиндр деб ҳам юрutiлади). Бу цилиндрларнинг тенгламасини декарт реперда (каноник ҳолга келтириб) ёзамиз:

$$\text{Эллиптик цилиндр } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (182-a \text{ чизма}).$$



182-чизма

Гиперболлик цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (182-б чизма).

Параболлик цилиндр $y^2 = -2px$ (182-в чизма).

Икки кесилувчи текислик $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (182-д чизма).

Икки параллел текислик $x^2 - a^2 = 0$ ($a \neq 0$) (182-е чизма).

Мисол. Йўналтирувчиси (xOy) текисликда $x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$ тенглама билан аниқланувчи, ясовчилари $(1, 0, 1)$ векторга параллел цилиндр сирт тенгламасини ёзинг.

Еч иш. Берилганларга асосан: $F(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0, u = (1, 0, 1), l = 1, m = 0, n = 1$. U ҳолда бу сирт тенгламаси:

$$F(x-z, y) = (x-z)^2 + 2(x-z)y - 3y^2 - (x-z) = 0.$$

Энди иккинчи тартибли сирт

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

умумий тенглама билан берилган бўлса, қандай шарт бажарилганда бу тенглама ясовчилари \vec{l}, m, n векторга параллел иккинчи тартибда цилиндрик сиртни аниқлаш масаласига тўхталайлик.

12-§ да иккинчи тартибли сирт билан тўғри чизикнинг кесилиши масаласини тўлиқ кўриб чиққан эдик, бу масаланинг ҳал қилиниши $R^2 + 2Qt + R = 0$ квадрат тенгламага боғлиқ бўлиб, уни биз муфассал текширган эдик.

(1) сиртнинг ясовчилари \vec{l}, m, n векторга параллел бўлсин. $M(x_1, y_1, z_1)$ фазодаги ихтиёрий нукта бўлсин, M нуктадан ўттиб l га параллел тўғри чизик \vec{e} (1) сирт таркибда бўлади, ёки у билан битта ҳам умумий нуктага эга бўлмайди. У ҳолда 19-§ даги 6) ёки с) ҳолга асосан $Q = 0$ ёки

$$x_1(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + y_1(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) + z_1(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) + (a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n) = 0$$

бўлади. M нукта ҳар қандай бўлганда ҳам шу шарт доимо бажарилиши учун

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n &= 0, & a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n &= 0, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n &= 0, & a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

бўлиши лозим. Аксинча l, m, n лар (21) ни қаноатлантирсин, у ҳолда l, m, n векторга параллел бўлган тўғри чизик (1) нинг ясовчиси эканлигини исботлаймиз.

Ҳақиқатан ҳам, (1) сиртнинг ихтиёрий $M(x_1, y_1, z_1)$ нуктасини олайлик, у нуктада l га параллел қилиб ўтказилган l' тўғри чизик (6) нинг ясовчиси эканини кўрсатайлик, l' нинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлсин:

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt$$

Бу қийматларини (1) га қўйсак ҳамда (21) ни ва 5) и эътиборга олсак, $P = Q = 0$ бўлади. M нукта (6) га тегишли бўлгани учун (9) дан $R = 0$ эканлиги келиб чиқади, демак, 19-§ даги с) ҳолга асосан l' тўғри чизик (1) нинг ясовчиси экан.

Қуйидаги муҳим хулосага келдик: (1) тенглама билан аниқланувчи сирт ясовчилари \vec{l}, m, n векторга параллел бўлган цилиндрик сирт бўлиши учун (21) шартларининг барчаси бажарилиши зарур ва етарли экан.

Мисол. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$ тенглама билан аниқланган сиртнинг цилиндрик сирт эканлигини исботланг.

Ечиш. (6) билан солиштирсак: $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = 2, a_{12} = 1, a_{24} = 2, a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = a_{44} = 0$. (21) системани тузаямиз:

$$l + m = 0, \quad l + m = 0, \Rightarrow n = 0, \quad l = -m, \quad l = 1 \text{ десак, } m = -1,$$

$$n = 0, \quad 2n = 0,$$

→ демак, $l(1, -1, 0)$ вектор берилган сирт ясовчилари учун йўналтирувчи вектор бўлар экан.

22-§. Иккинчи тартибли конус сиртлар. Конус кесимлари

Бирор Π текисликда L иккинчи тартибли чизик ва бу текисликка тегишли бўлмаган M_0 нукта берилган бўлсин.

Тарриф. Фазодаги M_0 нуктадан ўттиб, L ни кесиб ўтувчи барча тўғри чизиклар тўпламини *иккинчи тартибли конус сирт* (ёки *конус*) деб аталади. M_0 конус *учи*, L чизик эса конус *ўйналтирувчиси*, конусни ҳосил қилувчи тўғри чизиклар унинг *ясовчилари* деб аталади.

Конус ясовчилари маркази конус учидан бўлган тўғри чизиклар боғламга тегишлидир.

Энди конус тенгламасини келтириб чиқарайлик. Аффин реперни шундай танлаб оламизки, конуснинг ўйналтирувчиси ётган текислик $\Pi = xOy$ текисликдан иборат бўлиб, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нукта эса фазонинг xOy да ётмаган ихтиёрий нуктаси бўлсин (183-чизма).

$$L: F(x, y) = 0. \quad (22)$$

Конуснинг ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуктасини олайлик, у ҳолда M_0, M тўғри чизик конуснинг ясовчиси бўлиб, L билан (яъни xOy текислик билан) кесилган нуктаси $M_1(x_1, y_1, 0)$ бўлсин. M_0, M, M_1 нукталар бир тўғри чизикда ётгани учун $\vec{M_0M_1} \parallel \vec{M_0M}$ ёки $\vec{M_0M_1} = \lambda \vec{M_0M} \Rightarrow$

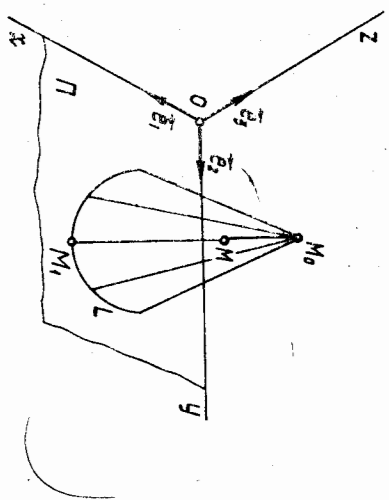
$$x_1 - x_0 = \lambda(x - x_0), \quad y_1 - y_0 = \lambda(y - y_0), \quad 0 - z_0 = \lambda(z - z_0)$$

$$x_1 = x_0 + \lambda(x - x_0), \quad y_1 = y_0 + \lambda(y - y_0), \quad z_0 + \lambda(z - z_0) = 0.$$

Сўнгги тенгликдан λ ни топиб, аввалги икки тенгликка қўямиз:

$$x_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0, \quad y_1 = y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0. \quad (23)$$

$$M_1 \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0 \quad \text{дицалар}$$



183-чизма

$$F\left(x_0 + \frac{x-x_0}{z_0-z} z_0, y_0 + \frac{y-y_0}{z_0-z} z_0\right) = 0. \quad (24)$$

Равшанки, конусга тегишли бarchа нукталарнинг координатлари (24) ни қаноатлантиради, конусга тегишли бўлмаган ҳеч қандай нуктанинг координатлари (24) ни қаноатлантирмайди, демак, (24) ифода конус тенгламасидир.

Конуснинг учи координатлар бошидан иборат бўлган ҳолни текширайлик. Буннинг учун аввало алгебрадан функциянинг бир жинслилиги тушунарчасини эслайлик: агар исталган t учун $F(xt, yt, zt) = t^k F(x, y, z)$ шарт бажарилса, $F(x, y, z)$ функция k - даражали бир жинсли функция деб аталар эди, масалан, $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ функция иккинчи даражали бир жинсли функциядир:

$$F(tx, ty, tz) = (tx)^2 - (ty)^2 + (tz)^2 = t^2(x^2 - y^2 + z^2) = t^2 F(x, y, z). \quad (25)$$

$$F(x, y, z) = 0$$

бир жинсли тенглама бўлиб, бирор S сиртини аниқласин ҳамда $M_1(x_1, y_1, z_1) \in S$ бўлсин, OM_1 тўғри чизиқни ўтказамиз, унинг параметрик тенгламалари:

$$x = tx_1, y = ty_1, z = tz_1. \quad (26)$$

OM_1 нинг иккитёрий $M(x, y, z)$ нуктасини олайлик, (26) га асосан $M(tx_1, ty_1, tz_1)$.

Энди M нуктанинг координатларини (25) га қўйиб, $F(x, y, z)$ нинг бир жинсли эканини эътиборга олайлик:

$$F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z) = 0; \text{ демак, } OM_1 \subset S.$$

Хулоса. (25) кўринишдаги бир жинсли тенглама учи координатлар бошида бўлган конуснинг тенгламасидан иборат.

Агар

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

бўлса, конуснинг учи сифатда, соддалик учун, $M_0(0, 0, 1)$ ни олсак, (24) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x(1-z) + 2a_{23}y(1-z) + a_{33}(1-z)^2 = 0. \quad (27)$$

Энди (1) кўринишдаги тенглама қайси шартларда конусни аниқлаши мумкин деган саволга ўтайлик.

S конуснинг учи $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада дейлик. Иккитёрий l ва m, n векторни олиб (бу вектор асимптотик йўналишга эга бўлма-син), M нуктадан l ва параллел m ва n тўғри чизиқ ўтказайлик, унинг параметрик тенгламалари:

$$X = x_0 + lt, Y = y_0 + mt, Z = z_0 + nt, \quad (28)$$

бу ердан (1) нинг кесилиш нуктасини изласак, (4) тенглама ҳосил миз: $M_0 \in S$ бўлса, (5) $\Rightarrow R = 0$. U ҳолда

$$(4) \Rightarrow Pr^2 + Ql = 0. \quad (29)$$

Конуснинг таърифига асосан l ва n тўғри чизиқ S га тўлиқ тегишли ёки фақат битта M умумий нуктага эга, бу деган сўз (29) тенглама чексиз кўп ечимга эга ёки фақат битта $l = 0$ га эгадир, (29) дан кўриниб турибдики, бу шартлар бажарилши учун $Q = 0$ бўлиши керак, буни ёйиб ёзсак,

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})m + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})n = 0. \quad (30)$$

Бу шарт асимптотик йўналишга эга бўлмаган ҳар қандай l ва вектор учун бажарилганлигидан:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$M_0 \in S$ ни ҳамда (31) ни эътиборга олсак,

$$(1) \Rightarrow a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = 0. \quad (32)$$

Демак, (1) тенглама конусни ифодалаганда конус учининг координатлари (31), (32) шартларни қаноатлантириши керак.

Аксинча, (1) тенглама берилган бўлса ҳамда бирор M_0 нукта учун (31), (32) шартлар бажарилса, берилган тенглама учун M_0 нуктадаги конусни ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам, M_0 нинг координатларини (1) га қўйиб ҳисобласак ҳамда (31), (32) ни эътиборга олсак, $M_0 \in S$ эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Энди M_0 нуктадан иккитёрий (28) тўғри чизиқни ўтказиб, U билан S нинг кесилган нуктасини топишга ҳаракат қилсак, (4) тенгламада $Q = R = 0$ бўлиб, $R^2 = 0$. Бундан l ва n тўғри чизиқ S билан фақат битта M_0 нуктада кесилди ёки бу тўғри чизиқ S га тўлиқ тегишли деган хулоса чикади, демак, S конусдир.

Хуллас, S сирт учун M_0 нуктада бўлган конусдан иборат бўлиши учун M_0 нинг координатлари (31), (32) шартларни қаноатлантириши зарур ва етарли.

(31), (32) дан қуйидаги матрицаларни тузамиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Маълумки, (31), (32) дати тенгламаларнинг биргаликда бўлиши учун бу матрицалар рангларининг тенг бўлиши етарли ва зарурдир. Шунинг учун (1) тенглама конусни ифодалаши учун (33) матрицалар рангларининг тенг бўлиши kifov.

Агар (1) тенглама конусни ифодалагаса, U ҳолда (33) матрицалар рангларининг энг катгаси 3 га тенг, демак, конус учун

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

шарт бажарилмиши керак.

Энди декарт репериди берилган конуснинг баъзи текисликлар билан кесимини текширайлик. Бу реперда иккинчи тартибли конуснинг энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\text{ёки} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0) \quad (35)$$

куринишда бўлади, ҳақиқатан ҳам, бу тенглама иккинчи даражали бир жинсли тенглама бўлгани учун у юқорида чиқарилган хулосага асосан учи координатлар бошида бўлган конусни аниқлайди. Шуниси диққатга сазоворки, (35) конусни танлаб олинган баъзи текисликлар билан кессак, кесимда иккинчи тартибли чизикларнинг ҳамма турини ҳосил қилиш мумкин.

1. $z = h (h > 0)$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$ ёки $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{h}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{h}\right)^2} = 1$ эллипс ҳосил бўлади.

2. $y = h (h > 0)$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}$ ёки $-\frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{c}{b}\right)^2} = 1$

гипербола ҳосил бўлади.

3. $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h (h > 0)$ текислик билан кесимини текширайлик, бунинг учун

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h \end{cases}$$

системани ечамиз. Биринчи тенгламани қуйидагича ёзиб, $\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \times$

$$\times \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{иккинчи тенгламани ҳисобга олсак,} \quad \frac{y^2}{b^2} = -h \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right).$$

Энди бунга иккинчи тенгламадан z ни топиб қўй-

сак, $y^2 = -b^2 h \left(\frac{2x}{a} - h\right)$ тенглама ҳосил бўлиб, у параболали аниқ-
лайди.

4. $y = 0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ тенгла-

ма билан аниқланувчи кесилувчи иккита тўғри чизик ҳосил бў-
лади.

5. $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{y^2}{b^2} = 0$ ёки $y^2 = 0$

$= 0$ тенглама билан аниқланувчи устма-уст тушган иккита тўғри чизик ҳосил бўлади. Бу хулосалар иккинчи тартибли чизикларнинг конус кесимлари деб аталиши босқидир.

1-мисол. Декарт репериди йўналтирувчиси $ХОУ$ текислидаги $x^2 - 2y^2 = 1$ гиперболадан иборат, учи $(-1, 2, 1)$ нуқтадаги конус тенгламасини тузинг.

Е чиш. $F(x, y) = x^2 - 2y^2 - 1 = 0, x_0 = -1, y_0 = 2, z_0 = 1.$

(14) га асосан x ни $\frac{x+1}{1-2} - 1 = \frac{x+2}{1-2}$ билан, y ни $\frac{y-2}{1-2} + 2 = \frac{y-2z}{1-2}$ билан алмаштираш, $\left(\frac{x+2}{1-2}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2z}{1-2}\right)^2 - 1 = 0$ бў-

либ, уни соддалаштирсак, конус тенгламаси ҳосил қилинади:

$$x^2 - 2y^2 - 8z^2 + 8yz + 2xz + 2z - 1 = 0.$$

2-мисол. Аффин реперда берилган

$$x^2 - 5z^2 + 3xy + 2yz - 7x - 6y - 2z + 10 = 0$$

сиртинг конус эканлигини исботланг ва учининг координатларини топинг.

Е чиш. Бу ерда $a_{11} = 1, a_{22} = 0, a_{33} = -5, a_{12} = \frac{3}{2}, a_{13} =$

$$= 0, a_{23} = 1, a_{14} = -\frac{7}{2}, a_{24} = -3, a_{34} = -1, a_{44} = 10.$$

Бу қий-

магларни (31) ва (32) га қўямиз:

$$\left. \begin{aligned} x_0 + \frac{3}{2} y_0 - \frac{7}{2} z_0 &= 0, \\ \frac{3}{2} x_0 + z_0 - 3 &= 0, \\ y_0 - 5z_0 - 1 &= 0, \\ -\frac{7}{2} x_0 - 3y_0 - z_0 + 10 &= 0, \end{aligned} \right\} (*)$$

бу системадан (33) матрицаларни тузиб, рангларини ҳисобласак, ик-
каласиники ҳам 3 га тенг, демак, сирт конусдир, (*) тенгламалар

системаси биргалликда, шу системани ечсак, $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 0$ бўлиб, $(2, 1, 0)$ нуқта конус учидир.

23-§. Айланма сиртлар

II текисликда бирор l чизик ва u тўғри чизик берилган бўлсин. Таъриф. L чизикнинг u тўғри чизик атрофида айланishiдан ҳосил бўлган Φ фигура **айланма сирт** деб аталади (яъни L ни u атрофида 2π бурчакка буришдан ҳосил бўлган фигура). Бунда L ни u даъима сиртнинг **меридиани** **эллипти** деб аталади. Равшанки, L нинг ҳар бир нуқтаси u атрофида айланishiда бирор айланани ҳосил қилиб, бу айлананинг маркази u тўғри чизикда бўлади.

Энди айланма сиртнинг тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланайлик. Бу ишларни декарт реперда кўриб, Π ни бирор координаталар текислиги деб, u тўғри чизикни эса координаталар ўқларидан бири (яъни Π да ётган икки координаталар ўқидан бири) деб оламиз.

Масалан, $\Pi = yOz$ ва $u = Oz$ ҳамда

$$L: F(y, z) = 0 \quad (36)$$

бўлсин. L чизикнинг Oz ўқ атрофида айланishiдан 184-чизмада-гидек Φ сирт ҳосил қилинган дейлик. $M(x, y, z)$ шу сиртга тегишли иктиврий нуқта бўлсин. M нуқтадан Oz га перпендикуляр текислик ўтказсак, кесимда маркази $O_1 \in Oz$ нуқтада бўлган бирор айлана ҳосил қилинади, унинг координаталари $(0, 0, z)$. Кесим айланадан иборат бўлгани учун

$$r(O_1, M) = r(O_1, M_1). \quad (37)$$

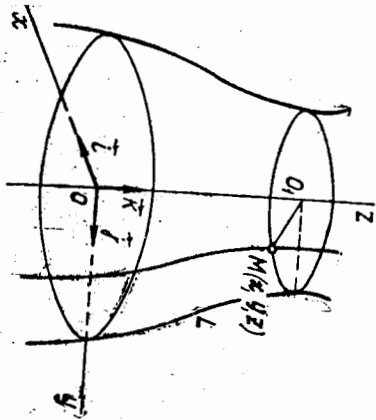
$$r(O_1, M) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$r(O_1, M_1) = \sqrt{(0-0)^2 + (y_1-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{y_1^2} = |y_1|,$$

буларни (37) га қўйсак, $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ёки $y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Энди $M_1 \in L \Rightarrow F(y_1, z) = 0$ ёки

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (38)$$



184-чизма

Демак, Φ га тегишли ҳар бир нуқтанинг координаталари (38) ни қанаъатлантиради. Лекин $M \in \Phi$ бўлса, (37) шарт бажарилмайди, демак, (38) ҳам ўринли эмас. Шунинг учун (38) ни Φ нинг тенгламаси дея оламиз. Шу (38) тенгламага асосланиб, L нинг бошқа координаталар атрофида айланishiдан ҳосил қилинган айланма сирт тенгламасини оsonгина ёшиш мумкин: масалан, L нинг Oy ўқ атрофида айланishiдан ҳосил эрилган сирт тенгламаси:

$$F(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

L чизик xOy да олинса, унинг тенгламасини $F(x, y) = 0$ кўринишда олесак, L нинг Ox ўқ атрофида айланishiдан $F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ сирт, Oy ўқ атрофида айланishiдан эса $F(\pm \sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ сирт ҳосил бўлади.

Мисол тариқасида yOz текисликда жойлашган қуйидаги чизикларнинг Oz ўқ атрофида айланishiдан ҳосил қилинган айланма сиртларнинг тенгламаларини ёзайлик: 1) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипс; 2) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболода; 3) $y^2 = 2pz$ параболода.

(33) га асосан: 1) эллипсни Oz ўқ атрофида айланттирсак:

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

сирт ҳосил қилиб, u айланма эллипсоид деб аталади.

2) гиперболоани Oz ўқ атрофида айланттириш натижасида

$$\frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

сирт ҳосил қилиниб, u айланма гиперболоид деб аталади;

3) параболоани Oz ўқ атрофида айланттирсак,

$$(\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2pz \quad \text{ёки} \quad x^2 + y^2 = 2pz$$

сирт ҳосил қилиниб, u айланма параболоид деб аталади.

Шунинг таъкидлашмизки, цилиндрик ва конус сиртларнинг йўналтирилганлари иккинчи тартибли чизик бўлса, шу сиртларнинг ўзлари ҳам иккинчи тартибли сирт бўлар эди, лекин иккинчи тартибли ҳар қандай чизикнинг бирор ўқ атрофида айланishiдан доимо иккинчи тартибли айланма сирт ҳосил бўлавермайди. Масалан, юқоридаги $y^2 = 2pz$ параболоани Oz атрофида айланттиришдан ҳосил қилинган сирт тенгламаси $y^2 = 2p(\pm \sqrt{x^2 + z^2})$, ёки $p > 0$ бўлган ҳолда $y^2 = 2pr \sqrt{x^2 + y^2}$ ва $p < 0$ бўлган ҳолда эса $y^2 = -2pr \sqrt{x^2 + y^2}$, бу эса иккинчи тартибли сирт эмас.

Юқорида биз сиртнинг таърифта асосланиб, унинг тенгламаларини чиқариш билан шуғулландик, энди танлаб олинган реперда

Тенгламалари билан берилган иккинчи тартибли сиртнинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини текшириш билан шуғулланамиз.

24-§. Эллипсоид

Т а ь р и ф. Танлаб олинган декарт репериди

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (39)$$

Тенгламани қанотланттурувчи фазодаги бarcha нуқталар тўплами *эллипсоид* дейилади.

(39) тенглама бўйича эллипсоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

1. (39) тенглама иккинчи тартибли алгебраик тенглама бўлгани учун эллипсоид иккинчи тартибли сиртдир.

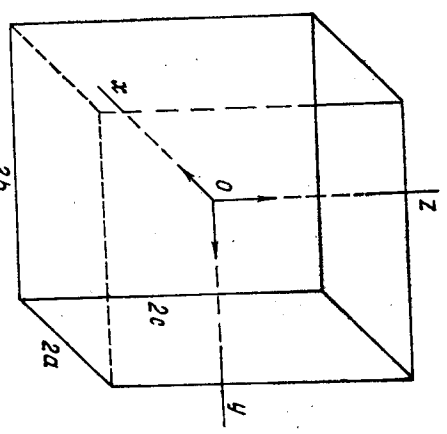
2. (39) тенгламанинг чап томонига назар ташласак, учта мусбат соннинг йиғиндис 1 га тенгдир, демек,

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (40)$$

$$x^2 \leq a^2, y^2 \leq b^2, z^2 \leq c^2,$$

$$\text{булардан: } -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c. \quad (41)$$

Эллипсоид четараланган сирт бўлиб, кирралари $2a$, $2b$ $2c$ ҳамда симметрия маркази координаталар бошидаги тўғри бурчакли параллелепипед ичига жойлашган фигурадир (185-чизма).



185-чизма

Қўшиқувчилардан биттаси 1 га тенг бўлса, қолган иккитаси ноль бўлиши керак: $\frac{x^2}{a^2} = 1, \frac{y^2}{b^2} = 0, \frac{z^2}{c^2} = 0$, бундан $x = \pm a$,

$y = 0, z = 0$ ва эллипсоид Ox ни $A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0)$ нуқталарда кесиб ўтади.

Худди шунга ўхшаш, бу эллипсоид Oy ни $B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0)$ нуқталарда, Oz ни эса $C_1(0, 0, c), C_2(0, 0, -c)$ нуқталарда кесиб ўтади. Бу $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ нуқталар *эллипсоиднинг учлари* деб аталади.

4. Энди эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесилиш текширайлик:

а) YOz текислик билан кесилиш:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

xOy даги эллипсоид.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

xOz даги эллипсоид.

б) xOz текислик билан кесилиши:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

yOz даги яна эллипсоид.

▲ Хулоса. (39) эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесилиши эллипсоидлардан иборат.

5. Энди эллипсоиднинг координата текисликларига параллел текисликлари билан кесилиш текширайлик.

xOy текисликка параллел бўлган $[z = h]$ ($h \in R$) текислик билан кесилиши қарайлик:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad (*)$$

бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин.

а) $-c < h < c \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$ бўлиб,

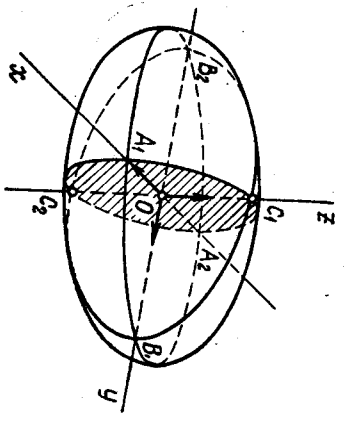
$$(*) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1,$$

махраждаги мусбат сонларни a'^2, b'^2 деб белгиласак, $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$, бу эса маркази $(0, 0, h)$ нуқтада ва ўзи $z = h$ текисликда ётган эллипсоид.

б) $h = c$ ёки $h = -c$ бўлса, $(*) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ бўлиб, бу шартни фақатгина $x = 0, y = 0$ қанотланттиради, демек, $[z = c]$ текислик бу ҳолда сирт билан $(0, 0, c)$ нуқтада кесилади.

в) $h > c$ ёки $h < -c \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$ бўлиб, $(*)$ нинг ўнг томони да манфий сон ҳосил бўлади, чап томони эса доимо мусбат, демек, $z = h$ текислик эллипсоид билан бу ҳолда кесилмайди.

Худди шунга ўхшаш, $x = h$ ёки $y = h$ текисликлари билан (39) сиртнинг кесилиши аниқлашни ўқувчиға ҳавола қиламиз.



186-чизма

6. Эллипсоида тегишли (x_1, y_1, z_1) нукта билан бир вақтда $(-x_1, -y_1, -z_1)$ нукта ҳам унга тегишли: бундан кўринадими, эллипсоид координаталар бошига нисбатан симметрия жойлашган (координата текисликларига нисбатан ҳам симметрия жойлашганлигини кўрсатинг).

Бу маълумотлар эллипсоиднинг (186-чизма) тузилшиндан дарак беради.

Хусусий $a = b \neq c$ ҳолда

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

айланма эллипсоид ҳосил бўлади.

$$a = b = c \text{ да } x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

бўлиб, маркази координаталар бошидаги ва радиуси a га тенг сферани аниқланади.

$a \neq b \neq c$ шартда эллипсоид u, v, w дейилади.

Мисол. Декарт реперда ўқлари координата ўқларида жойлашган ҳамда $M(2, 0, 1)$ нуктадан ўтиб, xOy текислик билан $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ эллипс бўйича кесилувчи эллипсоид тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланган тенглама

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (**)$$

кўринишда бўлиб, a, b, c ни топиш кифоя, $(**)$ ни $z = 0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ҳосил бўлади, уни берилган $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ эллипс билан солиштирсак,

$$a^2 = 8, b^2 = 1. \quad (***)$$

$$M(2, 0, 1) \in (**); \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{8} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 2,$$

изланган тенглама:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

25-§. Гиперболиндлар

Гиперболиндлар икки хил бўлади. Бирор II текисликда гиперболани олиб, уни давхум ўқи атрофида айлантурсак, ҳосил қилинган сирт *бир паллади айланма гиперболоид* деб аталади, лекин шу тв-пербоидни ҳақиқий ўқ атрофида айлантурсак, ҳосил қилинган сирт

икки паллади айланма гиперболоид деб аталади. Бу сиртлар гиперболоидларнинг хусусий ҳолидир, биз куйида шу сиртлар билан айрим-айрим танишамиз.

1. Декард реперда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (42)$$

тенгламани қановатлантирувчи фазодати барча нукталар тўплами *бир паллади гиперболоид* деб аталади.

Бир паллади гиперболоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларни аниқлайлик.

1. Эллипсоид сингари бир паллади гиперболоид ҳам иккинчи тартибли сиртдир.

2. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ билан бир вақтда $M'_1(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$ ҳам гиперболоидга тегишли, демак, бир паллади гиперболоид нукталари координаталар бошига, координата текисликларига нисбатан симметрия жойлашган.

а) Ox ўқ ($y = 0, z = 0$) билан кесимини текширайлик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0);$$

б) Шунинг сингари Oy ўқ ($x = 0, z = 0$) билан $B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0);$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b \Rightarrow B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0);$$

в) Oz ўқ билан ($x = 0, y = 0$) кесилмайди, ҳақиқатан,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ҳақиқий соҳада бу тенгликнинг бўлиши мумкин эмас.

Шунинг учун Oz ўқ бир паллади гиперболоиднинг *мавҳум ўқи* деб аталади. Юқорида ҳосил қилинган A_1, A_2, B_1, B_2 нукталар бир паллади гиперболоиднинг *учлари* дейилади.

3. Энди координата текисликлари билан кесимини текширайлик.

а) xOy : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \begin{cases} z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

кесим — эллипс.

6) $xOz: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$

кесим — гипербола.

в) $yOz: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$

кесим — гипербола.

4. xOy текисликка параллел $z = h$ текислик билан кесимни аниқлайлик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

$$z = h$$

эки

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1;$$

Бу тенглама $z = h$ текисликда эллипсни аниқлайди, $|h|$ сон катта-дашган сари эллипснинг ярим ўқлари ҳам катталашиб, фақат $h = 0$ учун эллипс энг кичик ўқли бўлади.

5. xOz текисликка параллел $y = h$ текислик билан кесимини текширайлик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

$$y = h$$

Бу ерда қуйидаги ҳолатлар ноз бериши мумкин:

а) $h = b$ бўлса, (*) $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

эки

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

бўлиб, кесим иккита кесилувчи тўғри чизиқдан иборат.

б) $-b < h < b$ бўлса, $1 - \frac{h^2}{b^2} > 0$ бўлиб, (*) қуйидаги кўри-

нишни олади:

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1,$$

бу эса $y = h$ текисликда мавҳум ўқи Oz га параллел гиперболани аниқлайди.

с) $|h| > b$ бўлса, $1 - \frac{h^2}{b^2} < 0$ бўлиб, (*) тенглама қуйидаги кўришни олади:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)$$

бундан

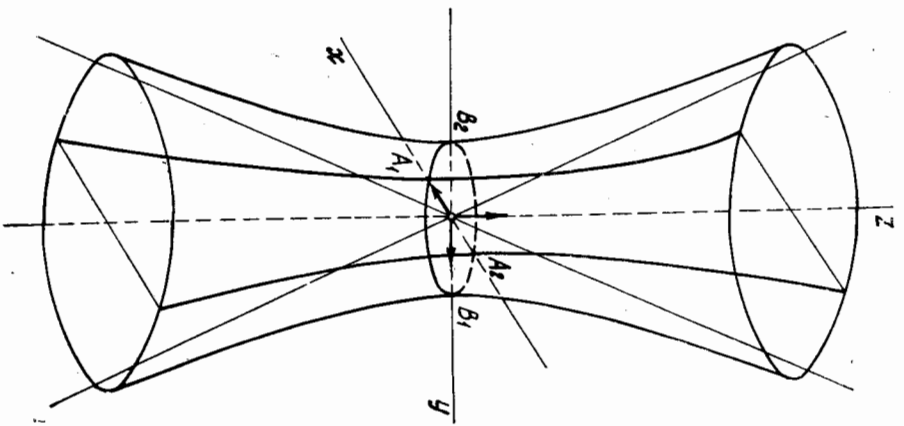
$$-\frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} = 1,$$

бу тенглама $y = h$ текисликда гипербола тенгламаси бўлиб, мавҳум ўқи Ox ўқка параллелдир.

Худди шу ҳолатлар гиперболоидни $x = h$ текислик билан кесганда ҳам содир бўлади (буни ўзингиз текшириб кўрини).

Шу марҳумотларга асосан, бир таллаги гиперболоиднинг шакли намён бўлади (187-чизма).

187-чизма



71. $a = b$ да (42) тенглама $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ га келтирилади, бу эса бир таллаги айланма гиперболоидни аниқлайди:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (43)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (44)$$

дамалар ҳам бир таллаги гиперболоид бўлиб, улар мавҳум ўқ билангина фарқ қилади ((43) учун мавҳум ўқ Oy , (44) учун ўқ Ox дир). Фазонинг

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (45)$$

тенгламани қанотланттирувчи барча нуқталари тўғлами икки палла-ли гиперболоид деб аталади.

(45) тенглама бўйича бу сиртнинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

Оқордаги бир паллаги гиперболоид тенгламасини текширишдаги баъзи ҳоғларни бу ерда муфассал кўрмаймиз, чунки улар бевосита такрорланади:

1) икки паллаги гиперболоид иккинчи тартибли сиртдир;
2) икки паллаги гиперболоид координаталар бошига ва координата текисликларига нисбатан симметрик жойлашган;

3) факатгина Ox ўқ билан $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$ нуқталарда кесишиб, бошқа координата ўқлари билан кесилмайди, демак, uOz текислиги билан ҳам кесилмайди, демак, Oy , Oz мавҳум ўқлар ҳисобланади. Бундан кўриниб турибдики, икки паллаги гиперболоид икки қисмдан иборат бўлиб, улар uOz текисликка нисбатан симметрик жойлашгандир.

4) (45) нинг uOz текисликка параллел $x = h$ текислик билан кесимини текширайлик:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \left. \begin{aligned} x = h \\ x = h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1. \quad (*)$$

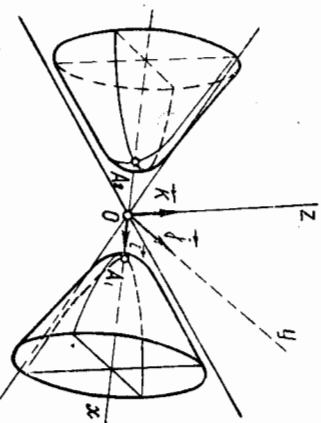
$$|h| > a \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} - 1 > 0; \quad (*) \text{ тенглама } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1 = 1 - \frac{2^2}{\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)} = 1$$

кўринишни олиб, $x = h$ текисликда эллипсни аниқлайди.

$h = a$ да кесим фақат битта $A_1(a, 0, 0)$ ёки $A_2(-a, 0, 0)$ нуқтадан иборат.

Бошқа координата текисликлари ва бу текисликларга параллел текисликлар билан кесимлари ҳам гиперболоиддан иборат.

Икки паллаги гиперболоиднинг шакли 188-чижада кўрсатилган. $b = c$ шартда (45) тенглама $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ кўринишни олади ва $u \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



188-чижада

гиперболоиднинг ($u = 0$ текисликда) Ox ўқ атрофида айланнишдан ҳосил қилинади, у айланма икки паллали гиперболоиддир. (45) тенглама $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ёки $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ кўринишда бўлса, булар ҳам икки паллали гиперболоид бўлиб, биринчиси учун Ox , Oy ўқлар, иккинчиси учун Ox , Oz ўқлар мавҳум ўқлар бўлади.

Мисол. Декарт репериди $M_1(0, 0, 3)$ ва $M_2(0, 0, -3)$ нуқталар берилган. Фазодаги шундай нуқталар тўғламини топингки, уларнинг ҳар биридан M_1 , M_2 нуқталарга ба бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати 4 га тенг бўлсин.

Еч иш. Фараз қилайлик, $M(x, y, z)$ нуқта сураган хоссага эга бўлган нуқта бўлсин, яъни $|r(M_1, M) - r(M_2, M)| = 4$, масала шартини координаталарда ёзамиз:

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} \right| = 4$$

ёки

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} = \pm 4,$$

бундан

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 \pm \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} + 16$$

ёки

$$\mp 8\sqrt{x^2 + y^2 + (z+3)^2} = 16 + 12z.$$

Яна бир марта квадратга кўтариб соддалаштирсак,

$$-\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

бу тенглама икки паллали гиперболоидни аниқлайди.

26-§. Параболоидлар

Энди иккинчи тартибли сиртларнинг яна бир синфи — параболоидлар билан танишамиз. Бу сиртлар ҳам икки турдан иборат бўлиб, уларни айрим-айрим кўриб чиқамиз.

1. Декарт репериди

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, q > 0) \quad (46)$$

тенгламани қанотланттирувчи фазодаги барча нуқталар тўғлами эллиптик параболоид деб аталади.

Бу параболоиднинг ҳам шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини (46) тенгламани текшириш йўли билан аниқлаймиз.

1. Эллиптик параболоид ҳам иккинчи тартибли сирт, ундан ташқари, бу сирт координаталар бошидан ўтади.

2. Координата ўқлари билан кесилган нуқталарини топайлик:

$$a) \left. \begin{aligned} Ox: \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ y = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} = 0, x = 0 \Rightarrow (0, 0, 0);$$

$$6) \left. \begin{aligned} Oy: \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ x = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{q} = 0, y = 0 \Rightarrow (0, 0, 0);$$

$$c) \left. \begin{aligned} Oz: \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2z = 0, z = 0 \Rightarrow (0, 0, 0).$$

▲ Демак, эллиптик параболои 1 координата ўқлари билан фақат координаталар бошидагина кесишади.
 3. Координата текисликлари ва уларга параллел текисликлар билан кесими-ни текширайлик:
 а) xOy билан кесилиш чизиғи:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \left. \begin{aligned} x = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{q} = 0 \Rightarrow (0, 0, 0);$$

б) xOz билан кесилиш чизиғи:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \left. \begin{aligned} y = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} = 2z \Rightarrow x^2 = 2pz,$$

бу тенглама xOz текислигида симметрия ўқи Oz дан иборат параболодир;
 с) yOz билан кесилиш чизиғи:

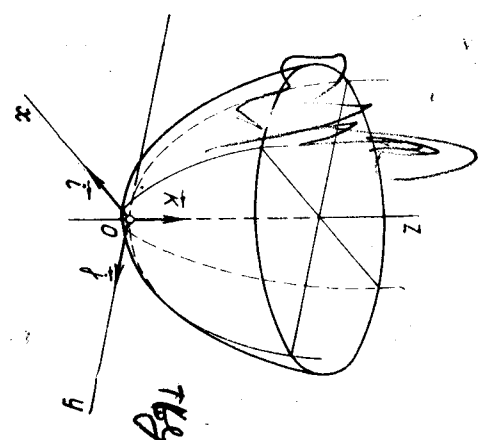
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \left. \begin{aligned} x = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{q} = 2z \Rightarrow y^2 = 2qz,$$

бу ҳам симметрия ўқи Oz дан иборат yOz текислигидаги параболодир;
 д) $z = h$ текислик билан кесилиш чизиғи:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \left. \begin{aligned} z = h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h. \quad (*)$$

$h = 0 \Rightarrow z = 0$; а) ҳолга қайтдик. $h < 0$ бўлса, p ва q шартга асосан мусбат, шунинг учун, $(*)$ тенглик ўринли бўлмайди. $h > 0$

да $(*) \Rightarrow \frac{x^2}{p \cdot 2h} + \frac{y^2}{q \cdot 2h} = 1$ бўлиб, бу тенглама $z = h$ текислигидаги эллипсни билдиради.
 Бундан ташқари, x, y ўзгаришлари (46) тенгламада жуфт даражада қатнашганлиги учун эллиптик параболоид xOz, yOz текисликларга нисбатан симметрия жойлашади.
 Бу текисликларнинг кесими-сидан ҳосил бўлган Э ўғри чизиқ эллиптик параболоиднинг Э деб аталади.



189-чизма

Эллиптик параболоид 189-чизмада тасвирланган. $p = q$ да тенглама $x^2 + y^2 = 2pz$ кўринишда бўлиб, айланма параболоид бўлади. Ўқлари Ox ёки Oy дан иборат эллиптик параболоиднинг тенгламалари мос равишда ушбу тенгламалар билан ифодаланади:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y.$$

II. Декарт реперда

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (47)$$

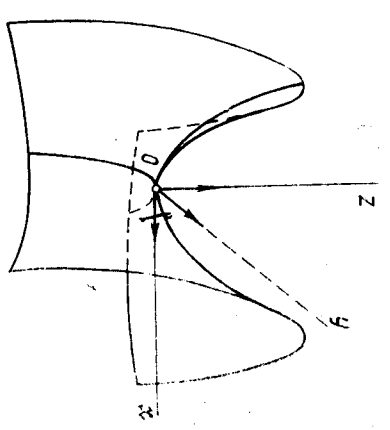
тенгламани канониклантирувчи фазо нуқталари тўплами гиперболик параболоид деб аталади, тенгламаси бўйича гиперболик параболоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлаш мумкин. Қуйида биз баъзи хулосаларининга берамиз, уларнинг ўринли эканлигини ўзингиз текшириб кўринг.

1. Гиперболик параболоид иккинчи тартибли сирт бўлиб, координаталар бошидан ўтади.
 2. Координата ўқлари билан фақат координаталар бошида кесишади.

3. а) xOy текислик билан кесилганда кесимда иккита кесилувчи тўғри чизиқ ҳосил қилинади;

б) xOz текислик билан кесилганда кесимда симметрия ўқи Oz дан иборат $x^2 = 2pz$ параболога ҳосил бўлади;

с) yOz текислик билан кесилганда кесимда симметрия ўқи Oz дан иборат $y^2 = -2qz$ параболога ҳосил бўлади.



190-чизма

4. $z = h$ текислик билан кесилганда кесимда

$$a) h > 0 \text{ шартда } \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \text{ гиперболга.}$$

$$б) h < 0 \text{ да } -\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \text{ гиперболга ҳосил қилинади.}$$

5. Бошқа координатага текисликларига параллел текисликлар билан кесилганда кесимда доимо парабола ҳосил бўлади.

Шу мазгумотларга асосланиб гиперболлик параболоидни 190-чи-мадагидек сирт кўринишида тасаввур қилиш мумкин, баъзан бу сирт-ни «эгарсимон» сирт деб ҳам юритилади.

27-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизикли ясовчилари

Биз юқорда иккинчи тартибли сиртларнинг турли синфлари билан танишидик. Унда сиртлар бир-биридан тенгламалари ёки таърифлари билан фарқ қилар эди. Энди бу сиртларни биз бошқа нуқтадан назардан икки синфга ажратамиз: улардан биринга иккинчи тартибли шундай сиртларни киритамизки, улар ўз таркибига тўғри чизикларни тўлиқ олсин, бундай сиртлар *тўғри чизикли сиртлар* дейилади; иккинчи тартибли цилиндр ва конуслар битта ҳам тўғри чизик бўлма-олади. Иккинчи синфга эса таркибидда битта ҳам тўғри чизик бўлмаган иккинчи тартибли сиртларни киритамиз, равшанки, эллипсоид чегараланган сирт бўлгани учун унинг таркибидда тўғри чизик йўқ, демак, эллипсоид иккинчи синфга киради. Сиртлар таркибидаги тўғри чизиклар шу сиртларнинг *ясовчилари* деб аталади. Таркибидда чексиз кўп тўғри чизиклар мавжуд бўлган сиртлар (конус ва цилиндрдан бошқа) яна борми деган саволга жавоб излаймиз.

Бунинг учун гиперболлик параболоидни текшириб кўрайлик:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0. \quad (48)$$

Шу сиртга тегишли тайин $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтани олайлик. M_0 нуқтадан ўтиб (48) гиперболоид таркибидда бўлган тўғри чизикларни излайлик, бунинг учун M_0 нуқтадан ўтган тўғри чизикнинг параметрик тенгламаларини ёзайлик:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt, \end{aligned} \quad (49)$$

бунда l, m, n йўналтирувчи векторнинг координаталари бўлиб, шуларни ва M_0 ни бериб билан u тўғри чизикнинг вазияти аниқ бўлади; бу йўналтирувчи векторнинг йўналиши ҳағтоқи, $l:m:n$ нисбатлар билан ҳам тўлиқ аниқланади. Шу нисбатни излайлик.

(48), (49) дан:

1. Биз фақат 2-тартибли сиртлар билан иш кўраётганимизни эслатиб ўтамиз. Масала умумий ҳолда дифференциал геометрия кўрсаткичлари кўрсаткичлари билан адабиётда баён қилинади (қ. мас. М. А. Соболев, А. Е. Юсупов, Дифференциал геометрия курси, 2-нашри, 1959 й., Т., 74-§, 99-§).

$$\frac{(x_0 + l)^2}{p} - \frac{(y_0 + m)^2}{q} = 2(z_0 + n)$$

ёки

$$\begin{aligned} \left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 l}{p} - \frac{y_0 m}{q} - n\right)t + \\ + \left(\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} - 2z_0\right) = 0. \end{aligned}$$

M_0 гиперболоидга тегишли бўлгани учун унинг қавс ичидан ифода нолага тенгдир, шунга эътиборга оلسак,

$$\left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 l}{p} - \frac{y_0 m}{q} - n\right)t = 0. \quad (50)$$

Агар u тўғри чизик гиперболлик параболоид таркибидда бўлса, у ҳолда (50) тенглик t нинг ҳар қандай қийматида ўринли бўлиши керак, демак,

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0, \\ \frac{x_0 l}{p} - \frac{y_0 m}{q} - n = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Аксинча, (51) бажарилса, $u \in (48)$, демак, (51) шартлар тўғри чизикнинг гиперболлик параболоидга тўлиқ тегишли бўлиши учун зарурий ва етарли шартлар экан.

$$\begin{aligned} (51) \text{ нинг биринчисидан: } m = \pm \sqrt{\frac{q}{p}} l \text{ ёки } m_1 = \sqrt{\frac{q}{p}} l_1, \quad m_2 = \\ = -\sqrt{\frac{q}{p}} l_2, \text{ булардан:} \end{aligned}$$

$$l_1 : m_1 = \sqrt{p} : \sqrt{q}; \quad l_2 : m_2 = \sqrt{p} : -\sqrt{q}. \quad (52)$$

(52) нинг ҳар бирини (51) нинг иккинчисини билан биргаликда ечилса,

$$l_1 : m_1 : n_1 = \sqrt{p} : \sqrt{q} : \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right), \quad (53)$$

$$l_2 : m_2 : n_2 = \sqrt{p} : \sqrt{q} : \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right).$$

Бундан кўринадики, параболоиднинг M_0 нуқтасидан йўналиши (53) тенгликлар билан аниқланадиган иккита тўғри чизик ўтиб, улар гиперболлик параболоиднинг ясовчилари ролини ўйнайди.

Энди $u_1(l_1, m_1, n_1)$ векторга параллел бўлган ясовчи билан

$$\Pi_1 : \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} = 0 \quad (54)$$

текисликнинг ўзаро вазиятини текширайлик. Бу текисликнинг нор-

مال вектори $n_1 \left(\frac{1}{\sqrt{p}}, -\frac{1}{\sqrt{q}}, 0\right)$ бўлгани учун (53) нинг биринчи-

$$\text{Экин эвѳторга олсак, } \sqrt{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} + (-\sqrt{q}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot 0 =$$

$$= 0 \Rightarrow u_1 \cdot n_1 = 0 \Rightarrow u_1 \text{ ясовчи (54) текисликка параллелдир.}$$

Худди шунга ўхшаш, $u_2 (l_2, m_2, n_2)$ векторга параллел бўлган

$$u_2 \text{ ясовчи } \Pi_2: \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \text{ текисликка параллел бўлади.}$$

Гиперболлик параболоиднинг барча ясовчиларини икки оилгага шундай ажратамизки, биринчи оилгага факатгина Π_1 текисликка параллел бўлганлар кирди, иккинчи оилгага Π_2 текисликка параллел бўлганлар кирди. (Шуни эслаганимизки, бу икки оилгага кирмаган ясовчилар қолмайди, чунки биз координата гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан факатгина иккита ясовчи утишини ва бу ясовчилардан бири Π_1 га, иккинчиси Π_2 га параллел эканлигини исботладик.) У ҳолда

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

тўғри чизиқ биринчи оилгага,

тўғри чизиқ эса иккинчи оилгага тегишли бўлади. Шунини ҳам диққатга сазоворки, бир оиланинг битта тўғри чизиғи факатгина бир нуқтасидан иккинчи оиланинг битта тўғри чизиғи ўтади.

Энди гиперболлик параболоиднинг ясовчиларидан ҳар хил оилгага тегишли икки ясовчининг доимо кесилишлгини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, (48) нинг $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтасидан ўтиб, $u_1(l_1, m_1, n_1)$ векторга параллел бўлган u_1 ясовчининг тенгламаси ((53) га асосан)

$$u_1: \frac{x-x_1}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_1}{\sqrt{q}} = \frac{z-z_1}{\sqrt{r}}$$

(48) нинг $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтасидан ўтиб, $u_2(l_2, m_2, n_2)$ векторга параллел бўлган u_2 ясовчининг тенгламаси

$$u_2: \frac{x-x_2}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_2}{\sqrt{q}} = \frac{z-z_2}{\sqrt{r}}$$

Бўлиб, u_1 биринчи оилгага, u_2 иккинчи оилгага тегишлидир.

Булардан кўринадики, $u_1 \nparallel u_2$ (чунки мос координаталари пропорционал эмас). Энди бу икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётишлик шартини текширайлик (II боб, 17-§, (34)):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \sqrt{r} \\ \sqrt{p} & -\sqrt{q} & \sqrt{r} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \left(\sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{r}{p}} + \right.$$

$$\begin{aligned} &+ x_1 \sqrt{\frac{q}{p}} - y_1) - (y_2 - y_1) \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \sqrt{\frac{r}{q}} - x_1 + \sqrt{\frac{p}{q}} y_1 \right) + \\ &+ (z_2 - z_1) (-2\sqrt{pq}) = (x_2^2 - x_1^2) \sqrt{\frac{q}{p}} - (y_2^2 - y_1^2) \sqrt{\frac{p}{q}} - \\ &- 2\sqrt{pq} (z_2 - z_1) = \sqrt{pq} \left[\frac{x_2^2 - x_1^2}{p} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{q} - 2z_2 + 2z_1 \right] = \\ &= \sqrt{pq} \left[\frac{x_2^2}{p} - \frac{y_2^2}{q} - 2z_2 - \left(\frac{x_1^2}{p} - \frac{y_1^2}{q} - 2z_1 \right) \right] = \\ &= \sqrt{pq} (0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Кавс ичидagi ifodalар нолга тенгдир, чунки M_1, M_2 нуқталар гиперболлик параболоидга тегишлидир. Демак, u_1, u_2 бир текисликда ётади ва кесишади.

Гиперболлик параболоиднинг бир оилгага тегишли икки ясовчиси ўзаро айқаш жойлашгандир.

Ҳақиқатан ҳам, бир оилгага, аниқроғи, биринчи оилгага тегишли икки u_1, u_1' ясовчининг олсак, уларнинг ҳар бири Π_1 текисликка параллелдир ҳамда $u_1 \cap u_1' = \emptyset$ (агар улар кесшиб қолса, икки оилгага тегишли бўлиб қолади, бу эса u, u_1' нинг олиншига зиддир), лекин улар $u_1 \nparallel u_1',$ агар u, u_1' бўлиб қолса, иккинчи оилгага тегишли барча ясовчилар бу икки чиизикни кесиб, шу тўғри чиизиклардан ўтган текисликка жойлашиб қолади, бунинг бўлиши мумкин эмас. Демак, u, u_1' лар ўзаро айқаш жойлашган.

Агар гиперболлик параболоид (48) кўринишдаги тенглама билан аниқланса, унинг биринчи оилгага тегишли тўғри чиизикларини $\lambda^2 + v^2 \neq 0$ шартда)

$$\lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2vz, \quad (55)$$

$$v \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = \lambda$$

кўринишда излаш қўлайдир, λ ва v га ҳар хил қийматлар бериш билан шу оилгага тегишли ясовчилар топилади. (55) тенгламанинг тўғри чиизикни аниқлаш равшан, агар иккада тенгламанинг чап томонини чап томонига, ўнг томонини ўнг томонига қўпайтурсак ва $\lambda \cdot v$ га бўлиб юборсак, (48) ҳосил бўлади, демак, (55) ни қаноатлантирувчи нуқталар (48) га ҳам тегишли экан.

Иккинчи оилга ясовчиларини эса ушбу кўринишда излаш мумкин:

$$\lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2\sqrt{z},$$

$$\sqrt{\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}} = \lambda. \quad (56)$$

Энди бир паллагли гиперболюидни олайлик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (57)$$

Бу сиртнинг тўғри чизикли ясовчиларининг мавжудлигини исботлаш ва уларни топиш масаласини муфассал текширмасдан, биз бу ишда қуйидагиларнинг ўринли эканини таъкидлаймиз, ҳолос.

1. Бир паллагли гиперболюиднинг ҳар бир нуқтасидан унинг факат иккита ясовчиси ўтади.

2. Бир паллагли гиперболюиднинг тўғри чизикли ясовчилари ҳам икки оилга ажралиб, биринчи оилга тегишли тўғри чизиклар

$$\lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \nu \left(1 + \frac{y}{b} \right),$$

$$\nu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \lambda \left(1 - \frac{y}{b} \right) (\lambda^2 + \nu^2 \neq 0) \quad (58)$$

тенгламалар билан, иккинчи оилга тегишли тўғри чизиклар эса

$$\lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \nu \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

$$\nu \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \lambda \left(1 + \frac{y}{b} \right) \quad (59)$$

тенгламалар билан аниқланади ва λ , ν га турли қийматлар бериб, турли тўғри чизикли ясовчиларни ҳосил қилиш мумкин.

3. Бир паллагли гиперболюиднинг бир оилга тегишли икки ясовчиси ўзаро айкашди.

4. Бир паллагли гиперболюиднинг ҳар хил оилга тегишли икки ясовчиси ўзаро кесишади.

Биз юқоридида эллипсоиднинг тўғри чизикли ясовчиларининг йўқлигини кўрсатган эдик, шунга ўхшаш, икки паллагли гиперболюид ҳам тўғри чизикли ясовчиларга эга бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, икки паллагли гиперболюидни $x = h$ ($h^2 > a^2$) текислик билан кесилганда, равшанки, кесимда яинмаган иккинчи тартибли чизик ҳосил бўлиб, бунинг таркибиди тўғри чизик йўқдир, демак, икки паллагли гиперболюидни y Oz текисликка параллел тўғри чизикли ясовчиси йўқ, атар y Oz га параллел бўлмаган тўғри чизикли ясовчи бор бўлса, у тўғри чизик бу текислик билан кесишади, кесимда ҳосил бўлган нуқта тўғри чизикка тегишли бўлиб, икки паллагли гиперболюидга тегишли эмас. Демак, икки паллагли гиперболюид тўғри чизикли ясовчиларга эга эмас.

Худди шу усул билан эллиптик параболюид учун ҳам ясовчиларнинг мавжуд эмаслигини кўрсатиш мумкин.

28-§. Иккинчи тартибли сиртнинг уринма текислиги

Иккинчи тартибли сиртлар тенгламаси

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

кўринишда берилганда унинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасига ўтказилган уринма текислигининг тенгламаси

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})(y - y_0) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})(z - z_0) = 0$$

кўринишда бўлишини кўрсатган эдик. Агар (1) нинг чап томонини $F(x, y, z)$ деб белгилаб, (1) дан аввал x бўйича (y ва z ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнгра y бўйича (бунда x ва z ни ўзгармас ҳисоблаб), ниҳоят z бўйича (x, y ни ўзгармас деб олиб) ҳосиллар олсак,

$$F'_x(x, y, z) = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z + 2a_{14} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}),$$

$$F'_y(x, y, z) = 2a_{21}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z + 2a_{24} = 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}),$$

$$F'_z(x, y, z) = 2a_{31}x + 2a_{32}y + 2a_{33}z + 2a_{34} = 2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}).$$

Бу функцияларнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадаги қийматларини топсак,

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}),$$

$$F'_y(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}),$$

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}),$$

булардан

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = \frac{1}{2}F'_x(x_0, y_0, z_0),$$

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = \frac{1}{2}F'_y(x_0, y_0, z_0),$$

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = \frac{1}{2}F'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Буларнинг қийматини (8) га қўйсак,

$$\frac{1}{2}F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

ёки қисқароқ ёзсак,

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0. \quad (61)$$

Бу тенглама иккинчи тартибли сиртга ўтказилган уринма текисликнинг энг қулай кўринишдаги тенгламасидир.

Шуни таъкидлаймизки, F'_x, F'_y, F'_z нинг учтаиси бир вақтда нолга тенг бўлиши мумкин эмас, акс ҳолда M нукта сирт учун махсус нукта бўлиб қолади.

(61) дан фойдаланиб, каноник тенгламалари билан берилган иккинчи тартибли сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзайлик.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасига ўтказилган уринма текислиги тенгламасини ёзайлик.

Бу ерда

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$F'_x = \frac{2}{a^2}x, F'_y = \frac{2}{b^2}y, F'_z = \frac{2}{c^2}z.$$

Демак,

$$F'_{x_0} = \frac{2}{a^2}x_0, F'_{y_0} = \frac{2}{b^2}y_0, F'_{z_0} = \frac{2}{c^2}z_0;$$

буларни (61) га қўйсак ва M_0 нуктанинг эллипсоида тегишли эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{2}{a^2}x_0(x-x_0) + \frac{2}{b^2}y_0(y-y_0) + \frac{2}{c^2}z_0(z-z_0) = 0,$$

бундан

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1. \quad (62)$$

б) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ гиперболоид параболоиднинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасида ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзайлик. Бу ерда

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0,$$

$F'_x = \frac{2}{p}x, F'_y = -\frac{2}{q}y, F'_z = -2$, буларнинг M_0 нуктадаги қийматлари

$$F'_{x_0} = \frac{2}{p}x_0, F'_{y_0} = -\frac{2}{q}y_0, F'_{z_0} = -2.$$

Буларни (61) га қўйсак,

$$\frac{2}{p}x_0(x-x_0) + \left(-\frac{2}{q}y_0\right)(y-y_0) + (-2)(z-z_0) = 0.$$

M_0 нинг шу сиртга тегишлилигини ҳисобга олсак, изланган тенглама қуйидагича бўлади:

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} = z + z_0. \quad (63)$$

с) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ цилиндрлик сиртга унинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасида ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзайлик.

$F'_x = \frac{2}{a^2}x, F'_y = \frac{2}{b^2}y, F'_z = 0$; буларнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктадаги қийматлари $F'_{x_0} = \frac{2}{a^2}x_0, F'_{y_0} = \frac{2}{b^2}y_0, F'_{z_0} = 0$ бўлиб, буни (61) га қўйсак,

$$\frac{2}{a^2}x_0(x-x_0) + \frac{2}{b^2}y_0(y-y_0) + 0(z-z_0) = 0$$

ёки

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (64)$$

Худди шунга ўхшаш формулаларни бошқа сиртлар учун мустақил келтириб чиқариш маъқулли сифатида ўқувчига ҳавола этилади.

29-§. Вектор фазо

Ўқувчига «Алгебра ва сонлар назарияси» курсидан вектор (чизиқ-ли) фазо тушунчаси маълум. Шу тушунчанинг муҳимлигини эътиборга олиб, уни қисқача такрорлаб ўтамиз.

Элементлари вектор деб аталган (бу ерда вектор сўзи кенг маънодадир, хусусий ҳолда геометрия курсининг I бўлимида кўрилган вектор ҳам бўлиши мумкин) бўш бўлмаган V тўғлам берилган бўлсин. Бу тўғламнинг элементларини устига стрелка кўйилган кичик лотин ҳарфлари a, b, \dots, x, y, \dots билан белгилайлик. Бундан ташқари, ҳақиқий сонлар тўғлами R берилган бўлиб, V ва R элементларини боғловчи маълум муносабатлар ўрнатилган бўлсин, жумладан:

I. V нинг ихтиёрий икки \vec{a}, \vec{b} вектори учун уларнинг *ийлгинди*-си деб аталган, шу тўғламнинг элементидан иборат учинчи бир вектор мос келтирилган бўлсин, бу векторни $\vec{a} + \vec{b}$ кўринишда ёзайлик.

II. V нинг ихтиёрий \vec{a} вектори ва ихтиёрий k ҳақиқий сон учун V нинг шундай бир элементи мос келтирилган бўлсинки, бу элемент \vec{a} векторни k сонга *кўпайтиришдан* ҳосил қилинган дейлиб, уни $k\vec{a}$ кўринишда ёзайлик. Киририлган бу икки амал куйидаги 8 та аксиомани қаноатлантирсин.

- I₁. Векторларни кўпиш коммутативлик қонунига бўйсунлади, яъни $\vec{a} + \vec{b} \in V$ учун $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- I₂. Векторларни кўпиш гуруҳланиш қонунига бўйсунлади, яъни $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ учун $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- I₃. V да ноль вектор деган $\vec{0}$ элемент мавжуд бўлиб, $\forall \vec{a} \in V$ учун $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

I₄. V нинг ихтиёрий \vec{a} вектори учун V да шундай \vec{a}' вектор мавжуд бўлиб, $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$. Бундай \vec{a}' вектор одатда \vec{a} векторга *қарама-қарши вектор* деб аталади ва $-\vec{a}$ билан белгиланади. Бу тўғта аксиома *векторларни кўпиш аксиомалари* деб аталади.

- II₁. $\forall k \in R$ ва $\vec{a}, \vec{b} \in V$ учун $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- II₂. $\forall k, t \in R$ ва $\vec{a} \in V$ учун $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$.
- II₃. $\forall k, t \in R, \vec{a} \in V$ учун $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$.
- II₄. $\forall \vec{a} \in V$ учун $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Бу тўғта аксиома *векторни сонга кўпайтириш аксиомалари* деб аталади.

Т а р и ф. Элементлари шу саккиз аксиома шартларини қаноатлантирувчи V тўғлам *вектор (ёки чизиқли) фазо* деб аталади.

Векторларни кўпиш ва векторни сонга кўпайтириш амаллари биргаликда *чизиқли амаллар* деб аталади.

Бу саккиз аксиома геометрия курсининг Г. Вейль аксиомалари бўйича баён қилишдаги биринчи ва иккинчи гуруҳ аксиомаларидир (бу аксиомалар системаси билан IV бўлимда баъфсизл танишамиз). Юқорида келтирилган аксиомалардан бевосита куйидаги икки на-тижа келиб чиқади:

1-натижа. I₃ аксиома шартини қаноатлантирувчи $\vec{0}$ элемент V да ягонадир.

Исбот. V да $\vec{0}$ дан фарқли ва шу аксиома шартини қаноатлантирувчи $\vec{0}'$ элемент мавжуд деб фарз қилсак,

$$\forall \vec{a} \in V \text{ учун } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \vec{a} + \vec{0}' = \vec{a}, \text{ хусусий ҳолда, } \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}, \vec{0}' + \vec{0} = \vec{0}'.$$

I₁ га асосан, коммутативлик қонунининг ўринлигидан, $\vec{0} = \vec{0}'$. ▲
2-натижа. I₄ аксиомадаги ҳар бир \vec{a} векторга қарама-қарши \vec{a}' вектор V да ягонадир.

Исбот. \vec{a} векторга қарама-қарши \vec{a}' вектордан фарқли яна битта \vec{a}'' вектор мавжуд деб қарасак, яъни

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}, \vec{a} + \vec{a}'' = \vec{0}$$

десак, бу тенгликлардан биринчисининг иккага томонига \vec{a}'' ни кўпиб, I₁, I₂ ни эътиборга олсак, $(\vec{a}' + \vec{a}) + \vec{a}'' = \vec{0} + \vec{a}''$. Лекин $\vec{a} + \vec{a}'' = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{0}' = \vec{0} + \vec{a}''$ ёки $\vec{a}' = \vec{a}''$. ▲
Вектор фазога мисоллар келтирамиз.

1. Биринчи бўлимда кўриб ўтилган геометрик векторлар тўғлами чизиқли фазо ҳосил қилади, чунки бу векторлар учун юқоридаги 8 та аксиоманинг ҳаммаси бажарилади.

2. Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган n та усун ва m та сатрдан ҳосил қилинган барча матрицалар тўғлами (кўпиш амали деб матрицаларни кўпишни, векторни сонга кўпайтириш амали деб матрицани сонга кўпайтиришни олсак) ҳам вектор фазо ҳосил қилади, бунда вектор сўзи $m \cdot n$ та элементли матрицани билдиради. (Бу тўғламнинг вектор фазо экани «Алгебра ва сонлар назарияси» курсида исбот қилинади.)

Эслатма. Юқорида биз векторни сонга кўпайтиришда фақат ҳақиқий сонлар тўғлами билан чегараландик, шунинг учун бу вектор фазо *ҳақиқий сонлар майдони устидаги вектор фазо* деб аталади. Биз бундан буюн фақат шундай чизиқли фазонини кўзда тутамиз ва уни қисқача *вектор фазо* деб атайверамиз.

Агар II₁₋₄ шартлар комплекс сонлар учун ҳам бажарилиши талаб қилинса, у ҳолда V *комплекс сонлар майдони устидаги вектор фазо* деб юритилади.

Тариф. $V' \subseteq V$ бўлиб, V да аниқланган векторларни қўйиш ва векторни сонга кўпайтириш амалига нисбатан V' ҳам вектор фазо ҳосил қилса, у ҳолда V' ни V нинг қисм фазоси деб аталади, ма- салан, фақат битта ноль векторга эга бўлган тўпلام ҳар қандай вектор фазонинг қисм фазосидир.

Қуйидаги содда теоремани мустақил исботланг,
Т е о р е м а. V вектор фазонинг иккита қисм фазосининг кесиш- маси ҳам вектор фазо бўлади.

Энди вектор фазодаги векторлар учун чиқиқли эркилик тушун-часини киритайлик. a_1, a_2, \dots, a_n векторлар V нинг элементлари бўлсин.

Т а р и ф. Камида биттаси нолдан фарқли ҳақиқий k_1, k_2, \dots, k_n сонлар мавжуд бўлиб,

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0 \quad (1)$$

тенглик бажарилса, a_1, a_2, \dots, a_n векторлар системаси *чиқиқли боғлиқ* дейилди: агар (1) тенглик фақат $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ бўлгандагина бажарилса, берилган векторлар системаси *чиқиқли эрки* дейилди.

Бу тарифдан кўриналики, V вектор фазода камида битта вектор бўлса, ҳар қандай $k \neq 0$ сон учун ҳам $ka \in V$.

Энди вектор фазонинг ўлчовини аниқловчи қуйидаги аксиомалар- ни киритайлик.

III₁. V вектор фазода n та чиқиқли эрки вектор мавжуд.

III₂. V вектор фазодаги ҳар қандай $n+1$ та вектор системаси чиқиқли боғлиқдир.

Келтирилган 10 та аксиома (I₁₋₄, II₁₋₄, III₁₋₂) шартларини қано- атлантирувчи вектор фазо n ўлчовли вектор фазо дейилди ва у V_n билан белгиланди.

$n = 1$ га мос хусусий ҳолда бир ўлчовли V_1 вектор фазо ҳосил бўлади (бунга мисол тариқасида бир тўғри чиқиққа параллел барча геометрик векторлар тўпلامини олиш мумкин), $n = 2$ да икки ўл- човли V_2 вектор фазо ҳосил бўлади (мисол тариқасида бир текис- ликка параллел барча геометрик векторлар тўпلامини кўрсатиш мум- кин), $n = 3$ да уч ўлчовли V_3 вектор фазо ҳосил бўлади (бунга мисол тариқасида фазодаги барча геометрик векторлар тўпلامини олиш мумкин).

Лекин III₁₋₂ аксиомалар шартларини қаноатлантирувчи n сон мавжуд бўлмаса (аъбатта I₁₋₄, II₁₋₄ нинг барча шартлари қаноат- ланганда), у ҳолда бундай вектор фазо *чексиз ўлчовли вектор фазо* деб кортиллади. Бу ҳолда чексиз ўлчовли вектор фазода етарлича кўп векторлардан ташкил топган чиқиқли эрки векторлар система- сини ҳосил қилиш мумкин. Чексиз ўлчовли вектор фазо тушунчаси айниқса функционал анализ бўлимида кенг ўрганилади.

Биз бундан буён чекли ўлчовли вектор фазо билан иш кўрамиз.

Векторнинг координатлари. Тариф. n ўлчовли век- тор фазонинг ихтиёрий n та чиқиқли эрки векторлари системаси шу фазонинг *базиси* дейилди. Бундан буён биз базис векторларни e_1, e_2, \dots, e_n деб белгиләб, уни $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ кўринишда ёзамиз, шунга тавқийлаймизки, базис векторлар орасида ноль вектор йўқдир, чунки $e_i = 0$ бўлиб қолса, хусусий ҳолда $k_1 = k_2 = \dots = k_{i-1} = k_{i+1} = \dots = k_n = 0, k_i \neq 0$ сонлар учун

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_i e_i + \dots + k_n e_n = 0$$

бўлиб, e_1, e_2, \dots, e_n чиқиқли боғлиқ бўлиб қолади.

Т е о р е м а. V_n нинг ихтиёрий a вектори шу фазонинг базис векторлари орқали биргина кўринишда ифодаланади.

Исбот. e_1, e_2, \dots, e_n лар V_n нинг базиси бўлсин, у ҳолда a, e_1, e_2, \dots, e_n векторлар системаси III₂ аксиомага асосан чиқиқ- ли боғлиқ, демак, шундай k, k_1, k_2, \dots, k_n ($k^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2 \neq 0$) сонлар мавжудки, улар учун

$$ka + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0 \quad (2)$$

бунда $k \neq 0$, чунки $k = 0$ бўлса, e_1, e_2, \dots, e_n чиқиқли боғланган бўлар эди, бу эса базис тушунчасига зиддир. (2) нинг иккала қисмини $\frac{1}{k}$ га кўпайтириб $\left(\frac{1}{k} \cdot 0 = 0\right)$ ни ҳисобга олиб, иккинчи қўшилгучидан бошлаб барча ҳадларни ўнг томонга ўтказасак,

$$a = -\frac{k_1}{k} e_1 - \frac{k_2}{k} e_2 - \dots - \frac{k_n}{k} e_n.$$

Бунда $-\frac{k_1}{k} = x_1, -\frac{k_2}{k} = x_2, \dots, -\frac{k_n}{k} = x_n$ — белгилашларни киритиб, сўнгги ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (3)$$

Бундан берилган a векторнинг базис векторлар орқали ифодалани- ши кўришиб турибди.

Энди (3) ёйилманинг ягона эканлигини кўрсатамиз. Фараз қи- лайлик, a вектор e_1, e_2, \dots, e_n базис векторлар орқали иккинчи кўринишда ифодалансин:

$$a = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n. \quad (4)$$

У ҳолда (3) дан (4) ни ҳадлаб айирсак, (1₁ га асосан $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ҳамда Π_2 га асосан):

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + \dots + (x_n - y_n)\vec{e}_n = \vec{0}. \quad (5)$$

Лекин базис векторлар чизқили эркинлиги сабабдан:

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_2 - y_2 = 0, \dots, \quad x_n - y_n = 0$$

ёки $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \dots, \quad x_n = y_n$. Бу эса (3) ёйилманинг ягоналигини тасдиқлайди.

Т а ʼ р и ф. (3) ёйилмадаги x_1, x_2, \dots, x_n сонлар \vec{a} векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги координатлари деб аталади ва у $\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўринишида белгиланади. Демак,

$$\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

Хусусий ҳолда

$$\vec{a} = \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_1(1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{a} = \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_2(0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\vec{a} = \vec{e}_n \Rightarrow \vec{e}_n(0, 0, \dots, 0, 1),$$

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0}(0, 0, \dots, 0, 0).$$

Т е о р е м а. Бир базисга нисбатан берилган векторларни кўшишдан ҳосил қилинган векторнинг координатлари қўшилувчи векторлар мос координатларининг йиғиндисига тенг, векторни сонга кўпайтиришда эса унинг барча координатлари шу сонга кўпайтирилади.

И с б о т. $\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{b}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ векторлар ёйилмалари

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{b} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n.$$

Бундан:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + \dots + (x_n + y_n)\vec{e}_n,$$

ва

$$(\vec{a} + \vec{b})(x_1 + y_1)(x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (6)$$

Энди $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ ифоданинг иккала қисмини k га кўпайтирамиз:

$$k\vec{a} = kx_1\vec{e}_1 + kx_2\vec{e}_2 + \dots + kx_n\vec{e}_n$$

$$k\vec{a}(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) \quad (7) \blacktriangle$$

Э с л а т м а. Қўшилувчи векторлар сони иккитадан ортиқ бўлса ҳам теорема ўз кучини сақлайди. Буни машқ сифатида исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

У н да бирор $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ базисга нисбатан

$$\vec{b}_1(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}), \vec{b}_2(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}), \dots,$$

$$\vec{b}_m(b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mn})$$

векторлар берилган бўлсин. Қуйидаги матрицани тузайлик:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Т е о р е м а. Берилган $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m$ векторлардан олинган чиққил эркин векторлар сони (8) матрицанинг рангига тенгдир.

И с б о т. Фараз қилайлик, берилган векторлар чизқили боғлиқ бўлсин, у ҳолда шундай k_1, k_2, \dots, k_m сонлар мавжудки,

$$k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2 + \dots + k_m\vec{b}_m = \vec{0}, \quad k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2 \neq 0, \quad (*)$$

бу тенгликни координатларда ёзайлик:

$$k_1(b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 + \dots + b_{1n}\vec{e}_n) + k_2(b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 + \dots$$

$$+ b_{2n}\vec{e}_n) + \dots + k_m(b_{m1}\vec{e}_1 + b_{m2}\vec{e}_2 + \dots + b_{mn}\vec{e}_n) = \vec{0}$$

$$\text{ёки } (k_1b_{11} + k_2b_{21} + \dots + k_m b_{m1})\vec{e}_1 + (k_1b_{12} + k_2b_{22} + \dots$$

$$+ k_m b_{m2})\vec{e}_2 + \dots + (k_1b_{1n} + k_2b_{2n} + \dots + k_m b_{mn})\vec{e}_n = \vec{0}.$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис векторлар бўлгани учун

$$k_1b_{11} + k_2b_{21} + \dots + k_m b_{m1} = 0,$$

$$k_1b_{12} + k_2b_{22} + \dots + k_m b_{m2} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_1b_{1n} + k_2b_{2n} + \dots + k_m b_{mn} = 0;$$

бу тенгликларнинг барчасини қўшайлик:

$$k_1(b_{11} + b_{12} + \dots + b_{1n}) + k_2(b_{21} + b_{22} + \dots + b_{2n}) + \dots + k_n(b_{n1} + b_{n2} + \dots + b_{nn}) = 0 \quad (**)$$

Бу эса B матрица сарфларининг чизикли боғлиқлигини кўрсатади. Аксинча, (***) ҳам ўринлидир.

Демак, берилган векторлар системасидаги чизикли эркили векторларнинг максимал сони B матрицанинг чизикли эркили сарфлари сонларининг энг каттасига тенг. ▲

Агар $m = n$, яъни берилган векторлар сони фазо ўлчовига тенг бўлса, B матрица квадрат матрица бўлиб, ноқоридидаги теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. n ўлчовли вектор фазода берилган n та векторнинг чизикли боғлиқ бўлиши учун уларнинг координаталаридан тuzилган n -тартибли детерминантнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Энди бир базисдан иккинчи базисга ўттиш масаласига тўхталайлик. $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ лар V_n нинг икки базиси бўлсин. $a \in V_n$ нинг шу базислардаги координаталари мос равишда

$$\begin{aligned} a &\rightarrow x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, & a &\rightarrow x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + \dots + x'_n \vec{e}'_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Бундан ташқари, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ лардан ҳар бирининг B базисдаги координаталари маълум бўлсин:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &\rightarrow c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 + \dots + c_{n1} \vec{e}_n, \\ \vec{e}_2 &\rightarrow c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 + \dots + c_{n2} \vec{e}_n, \\ &\dots \\ \vec{e}_n &\rightarrow c_{1n} \vec{e}_1 + c_{2n} \vec{e}_2 + \dots + c_{nn} \vec{e}_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Бунда

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

акс ҳолда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторлар чизикли боғлиқ бўлар эди. Бу қийматларни (8) нинг иккинчисига қўямиз:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow x_1(c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 + \dots + c_{n1} \vec{e}_n) + x'_2(c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 + \dots + c_{n2} \vec{e}_n) + \dots + x'_n(c_{1n} \vec{e}_1 + c_{2n} \vec{e}_2 + \dots + c_{nn} \vec{e}_n). \end{aligned}$$

Бундан

$$\begin{aligned} a &\rightarrow (c_{11} x'_1 + c_{12} x'_2 + \dots + c_{1n} x'_n) \vec{e}_1 + (c_{21} x'_1 + c_{22} x'_2 + \dots + c_{2n} x'_n) \vec{e}_2 + \dots + (c_{n1} x'_1 + c_{n2} x'_2 + \dots + c_{nn} x'_n) \vec{e}_n. \end{aligned} \quad (8)$$

дан:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} x'_1 + c_{12} x'_2 + \dots + c_{1n} x'_n, \\ x_2 &= c_{21} x'_1 + c_{22} x'_2 + \dots + c_{2n} x'_n, \\ &\dots \\ x_n &= c_{n1} x'_1 + c_{n2} x'_2 + \dots + c_{nn} x'_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Бу формулалар a нинг B базисдаги координаталарини шу векторнинг B' базисдаги координаталари билан боғлашни учун (10) ифодалар вектор координаталарини алмаштириш формуллари дейлади.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Бу айнимаган матрицалар, чунки унинг детерминанти (9) дан кўрииб турибдики) нолдан фарқли. Бу матрицани (9) нинг матрицаси

$$C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

билан солиштирсак, (11) матрица C^* нинг транспонирланишидан ҳосил бўлганлиги ошкор бўлади.

1-мисол. Қуйида берилган тўртта векторнинг V_4 вектор фазо учун базис бўлишини исботланг: $a_1(2, 3, 4, -3)$, $a_2(5, 4, 9, -2)$, $a_3(1, 0, 0, 0)$, $a_4(3, 5, 5, 3)$.

Ечиш. Берилган векторлар системасининг V_4 учун базис бўлишини кўрсатиш учун уларнинг чизикли эркили эканлигини кўрсатиш кифойдир. Ҳақиқатан,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \\ 4 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 98 \neq 0,$$

демак, берилган векторлар чизикли эркили.

2-мисол. Элементлари иккинчи тартибли квадрат матрицалардан iborat вектор фазо берилган. Бу фазода $a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

$\vec{a}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ векторларнинг базис ҳосил қилишнинг кўрсаткичи ва
 $\vec{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ векторларнинг шу базисдаги координаталарини топиш.
 Ечиш. Берилган векторларнинг базис эканлигини кўрсатиш учун
 уларнинг

$$\vec{k}_1 \vec{a}_1 + \vec{k}_2 \vec{a}_2 + \vec{k}_3 \vec{a}_3 + \vec{k}_4 \vec{a}_4 \quad (**)$$

чиққли комбинацияси фақат $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ шартдагина
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрица ҳосил бўлишини кўрсатиш керак. (*) ни берилганлар

орқали ёзсак ва уни $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрицага тенглаштирсак,

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлиб, матрицаларни қўшиш ва матрицани сонга кўпайтириш қолида
 дарига асосан:

$$\begin{pmatrix} k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 & 2k_1 + 3k_2 + k_3 + 2k_4 \\ k_1 + k_2 + k_3 - k_4 & k_1 - 2k_3 - 6k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Бундан

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 + 2k_4 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 - k_4 = 0, \\ k_1 - 2k_3 - 6k_4 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

система ҳосил бўлади. Бу система бир жинсли бўлгани учун $k_1 =$
 $= k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Бу ечимдан бошқа ечининг мавжуд эмаслиги-
 ни кўрсатайлик. Бунинг учун (**) системанинг асосий детерминантини
 ҳисоблайлик:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Алгебрадан маълумки, бир жинсли система нолдан фарқли ечим-
 га эга бўлиши учун унинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиши
 зарур ва етарlidir. Мисолимизда бу детерминант -1 га тенг. Де-
 мак, (**) система фақат ноль ечимга эгадир. Бундан кўринадиги (*)
 чинқли комбинация фақатгина $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ шартда ноль
 матрица ҳосил қилади, бундан $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ векторларнинг базис век-
 торлар эканлиги келиб чиқади. Энди шу базисда $\vec{x} \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ вектор-
 нинг координаталарини топайлик.
 Фараз қилайлик,

$\vec{x} (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 + x_4 \vec{a}_4$
 бўлсин. Берилганларни эътиборга олсак,

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Бунни ҳам (**) га ўхшаш система қилиб ёзайлик:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases} \quad (***)$$

Кramer формулаларига асосан:

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 0.$$

Демак,

$$\vec{x} (3, 1, 1, 0).$$

3- мисол. V_3 вектор фазода янги базиснинг координаталари эс-
 ки базисга нисбатан $\vec{e}'_1(1, 2, 3), \vec{e}'_2(1, 0, 2), \vec{e}'_3(-1, 4, -3)$ бўлса, шу
 фазодаги векторнинг эски ва янги базисдаги координаталарини боп-
 ловчи муносабатларни топиш.

Ечиш. \vec{x} векторнинг эски ва янги базисдаги координаталарини
 мос равишда x_1, x_2, x_3 ва x'_1, x'_2, x'_3 десак, у ҳолда изланган боғла-
 ниш (10) формулага асосан:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 - x'_3, \\ x_2 = 2x'_1 + 4x'_2, \\ x_3 = 3x'_1 + 2x'_2 - 3x'_3. \end{cases}$$

30- §. Аффин фазо ва аффин координаталар системаси

V_n вектор фазо ва элементлари нуқталар деб аталган (бу эле-
 ментларни биз бош лотин ҳарфлари билан белгилаймиз) $\Omega = \{A, B, \dots\}$ тўғлам берилган бўлсин. Ω тўғлам билан V_n тўғлам ор-
 сида шундай мослик ўрнатамизки, Ω дан маълум тартибда олинган
 икки M, N нукта учун V_n даги аниқ битта \vec{a} вектор мос келсин,
 бунни $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ деб белгилаймиз. Лекин шунга тавқидлаш зарурки,
 V_n даги ҳар бир векторга Ω да нуқталарнинг тартибланган турли
 жуфтлари мос келиши мумкин. Масалан, $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KL}$, бун-
 да M, N, P, Q, K, L ларнинг бarchаси Ω га тегишлидир.
 $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ ёзувини куйидагича ифodalayмиз: \vec{a} векторни M нукта-
 дан кўйиш билан N нукта ҳосил қилинади.

Юқорида келтирилган Ω билан V_n орасидаги мосликнинг қуйидаги икки аксиомаи қаноатлантириши талаб қилинади.

IV. $\forall M \in \Omega$ ва $\forall a \in V_n$ учун ягона шундай $N \in \Omega$ мавжудки, унинг учун $a = \overrightarrow{MN}$.

IV₂. $\forall A, B, C \in \Omega$ учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Бу икки аксиома баъзан *векторни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомадари* деб юритилади.

Тарриф. Элементлари юқоридagi I₁₋₄, II₁₋₄, III₁₋₂, IV₁₋₂ аксиомадари қаноатлантирувчи бўш бўлмаган тўғлам n ўлчовли ҳақиқий *аффин фазо* деб аталади. Уни A_n орқали белгилаймиз. Агар V_n вектор фазо комплехс вектор фазо бўлса, у ҳолда A_n ҳам комплехс *аффин фазо* деб аталади.

Демак, n ўлчовли аффин фазони символлик равишда қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин экан: $A_n = V_n \cup \Omega$.

V_n вектор фазо A_n нинг *элитувиси* дейилади.

Хусусий ҳолда, $n = 2$ бўлса, A_2 икки ўлчовли аффин фазо бўлиб, V_2 нинг элиментларини олддаги геометрик векторлар деб олсак, I бўлимда қаралган аффин текислик ҳосил бўлади.

Юқорда келтирилган жами 12 та аксиома Вейль киритган (1918 йил) аксиомадларнинг бир қисмидир.

A_n нинг барча хоссаларини исботлашда биз фақат юқоридagi 12 та аксиомага ва улардан келиб чиққан натижаларгагина суянамиз (декин V_n хоссаларининг қўлчилиги «Алгебра ва сонлар назарияси» кўрсатмада таълиқланган учун улардан керак ҳолларда исботсиз фойдаланаверамиз).

Мисол тариқасида қуйидаги теоремаларни исботлайлик, I-теорема. Ω нинг *ултима-уст тушган икки нуқта*сига V_n нинг *ноль вектори мос келади*, яъни $\overrightarrow{AA} = 0$.

Исбот. $\forall A \in \Omega$ бўлсин. A, A нуқталарга V_n дан бирор a мос келсин: $\forall b \in V_n$ ни олсак, IV₁ га асосан, шундай B нуқта мавжудки, $\overrightarrow{AB} = b$, энди IV₂ ни таъбиқ қилсак $a + b + \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = b$. Бундан I₃ га асосан $a = 0$. Δ

2-теорема. $\overrightarrow{AB} = a \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -a$. Исбот. $\overrightarrow{BA} = b$ десак, IV₂ га асосан $a + b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$, бундан $b = -a$.

3-теорема. $\overrightarrow{CA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Исбот. IV₂ га асосан $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{A'B'}$ (*)

Деким $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = -k\overrightarrow{OA} +$

$+k \cdot \overrightarrow{OB} = k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k \cdot \overrightarrow{AB}$, бундан ва (*) дан: $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. \blacktriangle

Энди аффин координаталар системаси тушунчасини киритайлик, A_n да ихтиёрий бир O нуқтани олайлик, V_n нинг бирор (e_1, e_2, \dots, e_n) базисининг барча векторлари O нуқтадан қўйилган бўлсин, натижада O нуқта ва $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ базис векторлардан ташкил топган $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ тўғлам ҳосил бўлади. Бу тўғлам *аффин координаталар системаси* деб аталиб, уни $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ билан белгилаймиз. O нуқта *координаталар боши*, e_1, e_2, \dots, e_n координаталар векторлари деб аталади.

Аффин координаталар системаси дейиш ўрнига бундан буён қисқа *аффин репер* деймиз. Демак, аффин репер икки турдаги объектдан — нуқта ва векторлардан ташкил топган системалар. A_n нинг ихтиёрий M нуқтасини олсак ва аффин репер $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ маълум бўлса, \overrightarrow{OM} вектор ҳосил қилиниб, бу вектор M нуқтанинг *радиус-вектори* деб аталади.

У ҳолда $OM \in V_n$ бўлгани учун унинг (e_1, e_2, \dots, e_n) базисдаги координаталарини x_1, x_2, \dots, x_n десак,

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (12)$$

Тарриф. M нуқта радиус-векторининг координаталари шу нуқтанинг *аффин координаталари* деб аталади: $u = M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кўринишда белгиланади, демак, (12) $\Leftrightarrow M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Хусусий ҳолда $OM_1 = e_1, OM_2 = e_2, \dots, OM_n = e_n$ бўлса, 29 § га асосан $M_1(1, 0, 0, \dots, 0), M_2(0, 1, \dots, 0), \dots, M_n(0, 0, \dots, 1)$, A_n даги \mathcal{B} аффин реперга нисбатан $M(x_1, x_2, \dots, x_n), N(y_1,$

$y_2, \dots, y_n)$ нуқталар берилган бўлсин. MN векторнинг координаталарини $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ эки $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ га асосан базис векторлар орқали ифодалайлик:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = \\ &= (y_1 - x_1) e_1 + (y_2 - x_2) e_2 + \dots + (y_n - x_n) e_n, \end{aligned}$$

бундан:

$\vec{C}_0 C_2, \vec{C}_0 C_3, \vec{C}_0 C_4$) ни олиб, ихтиёрлий нуктанинг координаталарини алмаштириш формулаларини ёзинг.

Е чи ш. Аввало янги базис векторларининг \vec{e}_1 га нисбатан координаталарини топайлик. (13) га асосан $\vec{C}_0 C_1(-1, 1, 2, -2)$, $\vec{C}_0 C_2(1, 0, 0, 0)$, $\vec{C}_0 C_3(-1, 2, 1, -2)$, $\vec{C}_0 C_4(1, 0, 0, -1)$. У ҳолда бу қийматларни (15) га қўйсак (ҳамда $O' = C_0$, $e'_1 = \vec{C}_0 C_1$, $e'_2 = \vec{C}_0 C_2$, $e'_3 = \vec{C}_0 C_3$, $e'_4 = \vec{C}_0 C_4$ деб олсак),

$$\begin{aligned} x_1 &= -x'_1 + x'_2 - 2x'_3 + 1, & x_2 &= x'_1 + 2x'_3, \\ x_3 &= 2x'_1 + x'_3 - 2x'_4, & x_4 &= -2x'_1 - 2x'_3 - x'_4 \end{aligned}$$

бу изланган формулалардир.

2-мисол. Қуйида берилган формулалар системаси A_3 да бирор нуктанинг аффин координаталарини алмаштириш формулалари вазифасини бажарадими: $x_1 = x'_1 + 2x'_2 - x'_3 - 1$, $x_2 = 2x'_1 + x'_2 + x'_3$, $x_3 = x'_1 - 3x'_2 + 1$?

Е чи ш. Бу формулалар нукта координаталарини алмаштириш формулалари вазифасини бажариши учун $\Delta \neq 0$ бўлиши керак; ҳақиқатан ҳам, бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Энди берилган формулаларни (15) билан таққослаб қуйидагиларни толамиз:

$$O'(-1, 0, 1), \vec{e}'_1(1, 2, 1), \vec{e}'_2(2, 1, -3), \vec{e}'_3(-1, 1, 0).$$

31-§ n ўлчовли аффин фазоларнинг изоморфлиги

Аввало икки вектор фазонинг изоморфлиги тушунчасига таяриб берамиз.

Фазас қилайлик, V, V' вектор фазолар берилган бўлсин. Таяриф. $\varphi: V \rightarrow V'$ акслантириш ўзаро бир қийматли бўлиб, қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, у *чиқиқли изоморф акслантириш* деб аталади:

1. $\forall a, b \in V$ учун $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ бўлса, яъни V даги икки ихтиёрлий вектор йиғиндисига V' да шу векторларга мос келган векторларнинг йиғиндисига мос келсин.

2. $\forall \lambda \in V$ учун ва $\forall \lambda \in R$ учун $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ бўлса, яъни V даги a векторни бирор λ сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган векторнинг образи a га V' дан мос келган векторнинг λ сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган вектордан иборат бўлсин.

Бу таярифдан қуйидаги натижа келиб чиқади: V билан V' изоморф бўлса, V даги чиқиқли эркин векторларга V' да мос келган векторлар ҳам чиқиқли эркин бўлади, хусусий ҳолда V нинг ноль векторида V' нинг ҳам ноль вектори мос келади.

Теорема. *Икки вектор фазонинг изоморф бўлиши учун уларнинг ўлчовлари тенг бўлиши зарур ва зарурдир.*

Исбот. Етарлилиги. V, V' вектор фазоларнинг ўлчовлари бир хил бўлсин, яъни $V = V_n, V' = V'_n$. Бу фазоларнинг изоморф эканлигини исботлаймиз. V_n нинг базиси $B = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$, V'_n нинг базиси $B' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ бўлсин. $\forall a \in V_n$ бўлса, у ҳолда a нинг B базисдаги координаталарини x_1, x_2, \dots, x_n дейлик:

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Шу a векторга V'_n да шундай a' векторни мос келтираймизки, унинг B' даги координаталари x_1, x_2, \dots, x_n бўлсин, бу мослиқни φ деб белгилайлик, у ҳолда

$$a' = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n$$

Топилган бу мослиқимиз ўзаро бир қийматлидир, чунки ҳар бир вектор ягона усулда базис векторлар бўйича ифоделанади. Энди координатли икки шартнинг бажарилишини текшираймиз.

$$\begin{aligned} \forall a, b \in V_n \Rightarrow \\ a &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ b &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n \end{aligned}$$

\forall векторларга V'_n да мос келган $\varphi(a) = a', \varphi(b) = b'$ векторлар B' да қуйидагича ёйилмага эга бўлади:

$$a' = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n, \quad b' = y_1 e'_1 + y_2 e'_2 + \dots + y_n e'_n$$

$$a + b = (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + \dots + (x_n + y_n) e_n$$

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= \varphi(a) + \varphi(b) = (x_1 + y_1) e'_1 + (x_2 + y_2) e'_2 + \dots + \\ &+ (x_n + y_n) e'_n = \varphi(a + b); \end{aligned}$$

Шунинг учун, биринчи шарт бажарилди.

$$\lambda \cdot \varphi(a) = \lambda a' = \lambda(x_1 e_1' + x_2 e_2' + \dots + x_n e_n') = \lambda x_1 e_1' + \lambda x_2 e_2' + \dots + \lambda x_n e_n' = \varphi(\lambda a),$$

демак, V_n, V'_n изоморф.

Заруррийлик. $\xi: V \rightarrow V'$ акслантириш изоморф мосликдан иборат бўлса, уларнинг ўлчовлари тенг эканлигини кўрсатайлик. Фазаз V_n нинг ўлчови n бўлгани учун унда n та чизикли эркин вектор мавжуддир, юқоридаги нагжжага асосан шу векторларнинг образлари ҳам чизикли эркин бўлади, демак, V'_n нинг ҳам ўлчови n бўлади. Хуллас, бир хил ўлчовли барча вектор фазолар ўзаро изоморфдир, яъни бирор вектор фазога тааллуқли дарво (ёки тас-лади) шу фазога изоморф барча фазолар учун ҳам ўринли бў-лади.

Т а ь р и ф. Элтувчи вектор фазолари ўзаро изоморф бў-ган икки аффин фазо **изоморф** деб аталади. Бу таврифдан кўринадики, икки аффин фазо ўзаро изоморф днр. Бундан эса бир хил ўлчовли бўлиши зарур ва етарли-ўзаро изоморфлиги келиб чиқади.

32-§. k ўлчовли текислик

Аффин фазода M_0, M_1, \dots, M_m нуқталар системаси берилган бўлсин.

Т а ь р и ф. Агар $\overrightarrow{M_0 M_1}, \overrightarrow{M_0 M_2}, \dots, \overrightarrow{M_0 M_m}$ векторлар система-си чизикли эркин бўлса, берилган нуқталар системаси **чизикли эркин** дейилади, акс ҳолда берилган нуқталар системаси **чизикли борлиқ** дейилади.

Бу таврифдан кўринадики, берилган нуқталар системаси чизикли эркин бўлса, унинг ҳар қандай қисми ҳам чизикли эркин бўлади, бундан ташқари, III аксиомага асосан A_n да $n+1$ та чизикли эркин нуқталар мавжуд бўлиб, сони $n+1$ тадан кўп бўлган ҳар қандай нуқталар системаси чизикли борлиқ бўлиши келиб чиқади.

Хусусий ҳолда икки нуқтадан ташкил топган нуқталар сис-темасининг чизикли эркин бўлиши учун, равшанки, улар турли нуқталар системасининг чизикли эркин бўлиши учун уларнинг бир тўғри чизикда ётмаслиги зарур ва етарлидир.

A_n n ўлчовли аффин фазо, унинг элтувчиси V_n вектор фазо ҳам-да A_n нинг қисм фазоси A_k бўлиб, унинг элтувчиси $V_k \subset V_n$ бўлсин.

Т а ь р и ф. A_n фазодаги $\overrightarrow{P N} \in V_k$ шартни қановлантирувчи барча N нуқталар тўплами k ўлчовли текислик деб аталади ва Π_k деб белгиланади.

Бу таврифдан кўринадики, $V_k \subset \Pi_k$ бўлиб, $P \in \Pi_k$ днр, чунки $N = P$ бўлса, $\overrightarrow{P N} = \overrightarrow{P P} = 0$ бўлиб, V_k қисм фазо бўлгани учун $0 \in \Pi_k$ днр. P нуқта Π_k нинг бошланғич нуқтаси, V_k эса элтувчиси дейилади.

Хусусий ҳолларда: 1) $k = 0$ бўлса, у ҳолда Π_0 текислик битта P нуқтадан иборат, демак, A_n даги ҳар бир нуқта ноль ўлчовли текисликдир; 2) $k = 1$ бўлса, Π_1 бир ўлчовли текислик бўлиб, биз уни тўғри чизик деб атаганмиз; 3) $k = 2$ бўлса, Π_2 икки ўлчовли текислик бўлиб, уни биз бевосита текислик деб атаганмиз; 4) $k = n-1$ бўлса, Π_{n-1} текисликини, махус ном билан, яъни **супер-текислик** деб қоритилади.

Текислик таврифидан кўринадики, $k = n$ бўлган ҳолда A_n ҳам n ўлчовли текислик экан.

1-теорема. Π_k текисликда ($k+1$) та нуқтадан иборат ка-мда битта чизикли эркин нуқталар системаси мавжуддир.

Исбот. Агар $a \in V_k$ ($a \neq 0$) бўлса, $\overrightarrow{P M_0} = a$ билан аниқланувчи M_0 нуқта Π_k текислигининг нуқтаси бўлади. V_k нинг e_1, e_2, \dots, e_k

базис векторларини олиб, $\overrightarrow{M_0 M_1} = e_1, \overrightarrow{M_0 M_2} = e_2, \dots, \overrightarrow{M_0 M_k} = e_k$ десак, ҳосил бўлган $M_0, M_1, M_2, \dots, M_k$ нуқталар системаси (e_1, e_2, \dots, e_k базис векторлар чизикли эркин) чизикли эркин бў-лади. \blacktriangle

2-теорема. Π_k нинг таврифидан P нуқта алоҳида ажра-тилган нуқта бўлмагандан, балки Π_k даги барча нуқталарнинг ҳар бири ҳам шундай хоссага эгадир (бошқача айтганда, P нуқта Π_k нинг қаерида олинишига борлиқ эмас).

Исбот. P дан фарқли $Q \in \Pi_k$ ни олайлик. Агар $N \in \Pi_k$ бўлган-дагина $\overrightarrow{Q N} \in V_k$ эканини кўрсатсак, теоремани исботлаган бўламиз.

Ҳақиқатан ҳам $\overrightarrow{Q N} \in V_k$ бўлсин, у ҳолда $\overrightarrow{P Q} \in V_k$ бўлиб (текислик таврифига кўра), $\overrightarrow{IV_2}$ га асосан $\overrightarrow{P Q} + \overrightarrow{Q N} = \overrightarrow{P N} \in V_k$ бўлади, демак, $N \in \Pi_k$, аксинча $N \in \Pi_k$ бўлса, $\overrightarrow{P N} \in V_k \rightarrow \overrightarrow{Q N} \in V_k$ \blacktriangle

3-теорема. Аффин фазодаги ҳар қандай k ўлчовли Π_k те-кислик уз ичунда k ўлчовли A_k аффин фазодир.

Исбот. Π_k нинг аффин фазо эканини кўрсатиш учун IV_1, IV_2 аксиомалар шартларининг қановланишини кўрсатиш кифоятдир. $\forall M_i, N \in \Pi_k$ ни олайлик, у ҳолда

$PM \in V_k, PN \in V_k \Rightarrow MN = MP + P\vec{N} = P\vec{N} - PM \in V_k$. Демак, P_k да маълум тартибда олинган икки M, N нуктатга V_k да аниқ битта вектор мос келади (IV_1 нинг шарти бажарилди). IV_2 нинг шарти A_n учун бажарилгани сабабли P_k учун ҳам бажарилади. \blacktriangle

4-теорема. A_n да P нукта ва e_1, e_2, \dots, e_k ($k \leq n$) чизикли эркин векторлар фақат битта P_k текисликни аниқлайди.

Исбот. Базиc векторлари e_1, e_2, \dots, e_k дан иборат V_k қисм вектор фазони қарайлик, бу вақтда текислик таърифига асосан P нукта ва V_k бирор текисликни аниқлайди. Шу текисликнинг янона эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, P нуктани ва e_1, e_2, \dots, e_k векторларни ўз ичига олган бошқа P'_k текислик мавжуд бўлсин, унинг бошланғич нуктаси P ва элтувчиси V_k бўлсин. Аввало шунини пайқаймизки, V_k ва V'_k нинг иккаласи ҳам чизикли эркин e_1, e_2, \dots, e_k векторларни ўз ичига олгани учун улар устма-уст тушади. Бундан ташқари, $P \in V'_k$ бўлгани учун 3-теоремага асосан $P'_k = P_k$. \blacktriangle

Бу теоремадан қуйидagi икки натижа келиб чикади.

1-натижа. A_n даги $(k+1)$ та чизикли эркин нукталар системаси фақат битта k ўлчовли текисликни аниқлайди.

2-натижа. A_n даги ҳар қандай n та чизикли эркин нукталар системаси фақат битта гипертексисликни аниқлайди.

Энди k ўлчовли текисликнинг аналитик ифодасини, яъни тенгламаларини келтириб чиқариш билан шугулланайлик.

A_n да бирор $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ аффин репер берилган бўлсин. 5-теоремага асосан P_k текислик битта нукта ва k та чизикли эркин вектор билан тўлиқ аниқланади. P_k ни аниқловчи нукта P ва чизикли эркин векторлар P_1, P_2, \dots, P_k бўлсин. U ҳолда P_k нинг ихтиёрий нуктаси N ни олсак, PN вектор ҳосил бўлиб, бу вектор P_k нинг элтувчиси V_k га тегишли бўлади, демак, ундаги P_1, P_2, \dots, P_k чизикли эркин векторлар орқали ифодаланади.

$$PN = t_1 P_1 + t_2 P_2 + \dots + t_k P_k, \quad (18)$$

бунда $t_1, t_2, \dots, t_k \in R$. U ҳолда $ON = OP + PN$ ўринли бўлгани учун

$$ON = OP + t_1 P_1 + t_2 P_2 + \dots + t_k P_k. \quad (19)$$

Равшанки, бу тенглик фақатгина $N \in P_k$ бўлганда ўринлидир. Шунинг учун (19) ни P_k нинг векторли тенгламаси деб аташ мумкин. Агар B базисда ON (x_1, x_2, \dots, x_n), OP (a_1, a_2, \dots, a_n) ва

P_1 ($u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}$), P_2 ($u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2}$), \dots , P_k ($u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk}$) бўлса, буларнинг e_1, e_2, \dots, e_n базис векторлар орқали ифодасини (19) га қўямиз:

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n + t_1 (u_{11} e_1 + u_{21} e_2 + \dots + u_{n1} e_n) + t_2 (u_{12} e_1 + u_{22} e_2 + \dots + u_{n2} e_n) + \dots + t_k (u_{1k} e_1 + u_{2k} e_2 + \dots + u_{nk} e_n).$$

Бу ифодалат қавсларни очиб ва e_1, e_2, \dots, e_n га нисбатан гурӯҳлаб, бу векторларнинг чизикли эркинлигини ҳисобга олсак,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11} + t_2 u_{12} + \dots + t_k u_{1k}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21} + t_2 u_{22} + \dots + t_k u_{2k}, \\ &\dots \\ x_n &= a_n + t_1 u_{n1} + t_2 u_{n2} + \dots + t_k u_{nk} \end{aligned} \quad (20)$$

Бу изланган тенгламалардир. (20) дан кўринадики, P_k нинг ихтиёрий нуктаси бўлган N нинг координатлари t_1, t_2, \dots, t_k параметрларга ихтиёрий қийматлар бериш билан P_k га тегишли нукталарни топиш мумкин. Шунинг учун (20) ни P_k нинг параметрик тенгламалари деб аталади. Хусусан ҳолда $k=1$ бўлса, P_1 тўғри чиқадган (яъни бир ўлчовли текислик) иборат бўлиб, унинг A_n даги параметрик тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21}, \\ &\dots \\ x_n &= a_n + t_1 u_{n1}. \end{aligned} \quad (21)$$

$u_{11} u_{21} \dots u_{n1} \neq 0$ шартда (21) нинг ҳар биридан t_1 ни топиб уларни тенглаштираёқ,

$$\frac{x_1 - a_1}{u_{11}} = \frac{x_2 - a_2}{u_{21}} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_{n1}}. \quad (22)$$

Булар A_n даги P_1 тўғри чизикнинг каноник тенгламалари деб аталади. Бунда P нукта P_1 нинг бошланғич нуктаси, P_1 вектор эса унинг йўналтирувчиси дейилади.

$k=2$ да P_2 икки ўлчовли текислик бўлиб, унинг параметрик тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11} + t_2 u_{12}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21} + t_2 u_{22}, \\ &\dots \\ x_n &= a_n + t_1 u_{n1} + t_2 u_{n2}. \end{aligned} \quad (23)$$

$n = 3$ да A_3 даги одий текислигининг параметрик тенгламалари ҳосил бўлади.

Энди (20) системага яна қайтиб келайлик. Бу системада t_1, t_2, \dots, t_k лар параметрлар ҳисобланиб, уларнинг сони k дигр (равшанди, $k < n$), лекин тенгламалар сони n тадир. R_1, R_2, \dots, R_k векторлар чизикли эркин бўлгани учун (20) даги t_1, t_2, \dots, t_k ларнинг коэффициентларидан тузилган матрицанинг ранги k га тенг бўлади, у ҳолда (20) даги биринчи k тенгликдаги t_1, t_2, \dots, t_k ларнинг коэффициентларидан тузилган детерминантни нолдан фарқли деб олсак, шу системадан t_1, t_2, \dots, t_k ларни топиш мумкин, бу топилган қийматларни (20) даги қолган $(n-k)$ та тенгламадаги t_1, t_2, \dots, t_k урнига қўйсак, параметрлар қатнашмаган тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} x_{k+1} + u'_{11} x_1 + u'_{12} x_2 + \dots + u'_{1k} x_k + a'_k &= 0, \\ x_{k+2} + u'_{21} x_1 + u'_{22} x_2 + \dots + u'_{2k} x_k + a_{k+1} &= 0, \\ \dots \\ x_n + u_{n-k,1} x_1 + u_{n-k,2} x_2 + \dots + u_{n-k,k} x_k + a_n &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

(2) системадати ҳар бир тенглама чизикли эркин бўлгани учун ундан ҳосил қилинган (24) системадати тенгламалар ҳам чизикли эркин бўлиб, биргаликда бўлади, бу система ҳам P_k нинг тенгламаларидир. Демак, қуйидаги теоремани исботлайлик.

5-теорема. A_n да k ўлчовли текислиқнинг ҳар бири биргаликдаги чизикли эркин $(n-k)$ та тенглама системаси билан аниқланади. Бу теореманинг тескариси ҳам ўринлидир.

6-теорема. A_n даги бирор афтин реперга нисбатан берилган $(n-k)$ та чизикли эркин (биринчи дарajasли) тенглама системаси биргаликда бўлса, A_n даги бу системани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўлиқами k ўлчовли текислиқни аниқлайди. Исбот. Фараз қилайлик, қуйидаги $(n-k)$ та чизикли эркин, биринчи дарajasли тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \dots + u_{1n} x_n + a_1 &= 0, \\ u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + \dots + u_{2n} x_n + a_2 &= 0, \\ \dots \\ u_{n-k,1} x_1 + u_{n-k,2} x_2 + \dots + u_{n-k,n} x_n + a_{n-k} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Бу система чизикли эркин ва биргаликда бўлгани учун x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчилар олдидати коэффициентлардан тузилган

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-k,1} & u_{n-k,2} & \dots & u_{n-k,n} \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги $n-k$ га тенгдир, демак, шу матрицанинг $(n-k)$ -тартибли детерминантларидан камидати биттаси нолдан фарқли, умумийлиқни бўжаслик учун шу детерминант

бўлсин. У ҳолда берилган системани $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ га нисбатан ёзсак,

$$\begin{vmatrix} u_{1,k+1} & u_{1,k+2} & \dots & u_{1n} \\ u_{2,k+1} & u_{2,k+2} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n-k,k+1} & u_{n-k,k+2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

A_n да x_1, x_2, \dots, x_k ни параметрлар деб қабул қилсак, яъни уларни $x_1 = t_1, x_2 = t_2, \dots, x_k = t_k$ деб белгиласак, сўнгги системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 \\ x_2 &= t_2 \\ \dots \\ x_k &= t_k \\ x_{k+1} &= u'_{11} t_1 + u'_{12} t_2 + \dots + u'_{1k} t_k + a'_{k+1}, \\ x_{k+2} &= u'_{21} t_1 + u'_{22} t_2 + \dots + u'_{2k} t_k + a_{k+2}, \\ \dots \\ x_n &= u_{n-k,1} t_1 + u_{n-k,2} t_2 + \dots + u_{n-k,k} t_k + a_n. \end{aligned} \quad (26)$$

(26) ни (20) билан таққослаб кўрсак, (26) системанинг ҳуқуқий ҳоли эканини кўрёмиз. Шунинг учун (26) система бирор $(n-k)$ ўлчовли текислиқнинг параметрик тенгламаларидир. Бу система берилган системага эквивалентлиги учун у ҳам шу текислиқнинг тенгламалари ҳисобланади. (25) тенгламалар системаси $(n-k)$ ўлчовли текислиқнинг умумий тенгламалари деб аталади.

Ҳуқуқий ҳолда, $k = n-1$ бўлса, исботланган 6-теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Гипертекислиқнинг умумий тенгламаси битта айни-маган чизикли тенгламадан иборат (айнимаган чизикли тенглама — ўзгарувчиларнинг олдидати коэффициентларидан камидати биттаси нолдан фарқли бўлган тенгламалардир).

Демак, A_n да k та чизикли тенглама системаси берилган бўлса, улардан ҳар бирини шу фазодаги гипертекислик деб қарасак, у ҳолда берилган тенгламалар системаси (агар система биргаликда бўлса) k та гипертекислик кесилмасидан ҳосил бўлган текислиқни аниқлайди. (Бунга мисол тарқасидда A_3 да икки текислиқнинг кесилмасидан туғри чизик ҳосил бўлишини эслаш kifойдир.)

Мисол. (O, e_1, e_2, e_3, e_4) репер берилган. Координата текислиқларининг тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. O нуқта ва e_1 вектор билан аниқланадиган бир ўлчовли координата текислиги (яъни координаталар туғри чизиги) (21) га асосан

$$P_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \text{ текислик тенгламаси эса (25) га асосан}$$

$$x_3 = 0, x_4 = 0.$$

$\Pi_3 = (0, e_1, e_2, e_3)$ текислик тенгламаси (шу фазо учун гипер-текислик)

$$x_4 = 0.$$

Қолган текисликларнинг тенгламаларини ёзишни машқ сифатида ўқувчига ҳавола қилинади.

33-§. Икки текисликнинг ўзаро вазияти

1-тарриф. A_n даги икки текислик камда битта умумий нуктага эга бўлса, улар *кесилуви текисликлар* деб аталади.

Демак, икки текислик кесилса, кесимда нукта — ноль ўлчовли текислик, тўғри чизиқ — бир ўлчовли текислик, икки ўлчовли текислик ва ҳ.к. дар ҳосил бўлиши мумкин.

2-тарриф. Икки текисликнинг элгувчи вектор фазоларидан бири иккинчисининг қисми бўлса, бу текисликлар ўзаро параллел деб аталади (бу таррифни A_3 даги икки тўғри чизиқнинг параллелиги, икки текисликнинг параллелиги таррифлари билан таққосланг).

3-тарриф. Агар A_n да Π_k, Π_s текисликлар кесилмаса ҳамда параллел бўлмаса, улар *айқаш текисликлар* деб аталади (A_3 даги икки айқаш тўғри чизиқ таррифини эсланг).

1-теорема. A_n даги Π_k, Π_s текисликлар ўзаро параллел бўлиб, умумий нуктага эга бўлса, улардан бири иккинчисига тегишлидир.

Исбот. Аниқлик учун $k \leq s$ бўлсин, у ҳолда параллеликнинг тарйфига асосан бу текисликларнинг элгувчи вектор фазолари учун $V_k \subset V_s$ ўринли бўлади. Бу вақтда $\Pi_k \subset \Pi_s$ эканини кўрсатайлик.

$\Pi_k \cap \Pi_s = P$ нукта бўлсин. $M \in \Pi_k$ бўлса, равшанки, $\overrightarrow{RM} \in V_k$; бундан $V_k \subset V_s$; демак, $\overrightarrow{RM} \in V_s$ ва $M \in \Pi_s$. Хуллас, Π_k нинг ик-тиёрй нуктаси Π_s нинг ҳам нуктасидир, шундай қилиб $\Pi_k \subset \Pi_s$.

Натижа. Ўлчовлари тенг икки текислик параллел бўлиб, камда битта умумий нуктага эга бўлса, улар устма-уст тушади.

Энди умумий тенгламалари билан берилган икки текисликнинг кесилиш шартини излайлик. Π_k, Π_s текисликларнинг умумий тенгламалари:

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n + a_1 = 0,$$

$$u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n + a_2 = 0,$$

$$\Pi_k: \dots$$

$$u_{k1}x_1 + u_{k2}x_2 + \dots + u_{kn}x_n + a_k = 0$$

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n + b_1 &= 0, \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n + b_2 &= 0, \\ \Pi_s: \dots & \\ u_{s1}x_1 + u_{s2}x_2 + \dots + u_{sn}x_n + b_s &= 0. \end{aligned}$$

Бу икки системани бирлаштириб, жами $k+s$ та тенгламадан иборат Σ системани ҳосил қилиб оламиз. Агар $\Pi_k \cap \Pi_s \neq \emptyset$ бўлса, Σ система ечимга эга бўлиши керак, демак, шу системаларга ўзгаришлар олдиданги коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги r кенгайтирилган матрицанинг ранги r^* га тенг ва аксинча. Равшанки, кесимда ҳосил қилинадиган текисликнинг ўлчови $n-r$ га тенг.

Демак, умумий тенгламалари билан берилган икки текисликнинг кесилиши учун уларнинг тенгламаларидан бирлаштириб тузилган тенгламалар системасида $r = r^*$ бўлиши зарур ва етарли экан.

Умуман, A_n даги икки Π_k ва Π_s текисликнинг ўзаро вазиятини қуйидаги жадвал орқали аниқлаш мумкин (бунда $V = V_k \cap V_s$, $\Pi = \Pi_k \cap \Pi_s$):

$\dim V$	$\Pi = \emptyset$	$\Pi \neq \emptyset$
0	Π_k ва Π_s айқаш	Π_k ва Π_s битта умумий нуктага эга.
$0 < r < \min(k, s)^*$	$\Pi_k \not\parallel \Pi_s$	Π_k ва Π_s нинг кесими r ўлчовли текислик
$\min(k, s)$	$\Pi_k \parallel \Pi_s$	$k < s$ бўлса, $\Pi_k \subset \Pi_s$ $k > s$ бўлса, $\Pi_k \supset \Pi_s$

Мисол. Π_2, Π_2' текисликлар мос равишда қуйидаги тенгламалар билан берилган:

$$\Pi_2: \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 - t_2, \\ x_2 &= 1 - t_1, \\ x_3 &= t_1 + t_2, \\ x_4 &= t_2 - t_1. \end{aligned}$$

Шу текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг.

Е чиш. Π_2 нинг тенгламаларини умумий кўринишда ёзамиз, яъни иккинчи ва учинчи тенгламадан t_1, t_2 ни топиб, биринчи ва тўртинчи тенгламаларга қўямиз:

$$\Pi_2': \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Π_2 билан Π_2' тенгламаларини бирлаштириб ёзсак,

* $\min(k, s)$ белгиси k, s сонларининг кичигини англатади.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

система ҳосил бўлади. Бу системанинг матрицаларини ёзамиз:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Мнинг ранги $r = 4$, у ҳолда M^* нинг ҳам ранги $r^* = 4$. Демак, (Σ) система ягона ечимга эга, бу эса Π_2, Π_2' текисликларнинг фақат битта нуқтада кесилишидан дараж беради. (Σ) системани ечсак, $x_1 = 6, x_2 = -4, x_3 = 4, x_4 = -6$ бўлиб, изланган нуқта $(6, -4, 4, -6)$.

34-§. Аффин алмаштиришлар

Текисликдаги аффин алмаштиришлар билан I бўлимининг III бо-
 бда танишган эдик, энди n ўлчовли аффин фазодаги алмаштириш-
 лар билан танишайлик.

A_n да икки $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ ва $\mathcal{B}' = (O, e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ репер берилган бўлсин. Бу реперлар ёрдамида A_n нинг нуқта-
 лари орасида шундай f мослик ўрнатамизки, ихтиёрий $M \in A_n$ нуқ-
 та \mathcal{B} реперда қандай координаталарга эга бўлса, унинг образи $M' =$
 $= f(M)$ нуқта \mathcal{B}' реперда худди шундай координаталарга эга бўл-
 син, равшанки, бу мослик ўзаро бир қийматли бўлиб, A_n ни ўз-ўзи-
 га ўтказеди, демак, f бирор алмаштиришдир.

1-таъриф. Юқоридагича аниқланган f алмаштириш A_n ни *аф-
 фин алмаштириш* деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, аффин алмаштириш бир жуфт аффин
 реперларнинг берилиши билан тўла аниқланади.

Энди аффин алмаштиришнинг қатор хоссалари билан танишай-
 лик.

1°. f аффин алмаштиришда $\vec{a} \in A_n$ вектор шу фазонинг бирор
 $f(\vec{a}) = \vec{a}'$ векторга алмашади, чунки IV_1 га асосан $\vec{a} = MN$ де-
 сак, M, N нуқталарнинг образлари $f(M) = M', f(N) = N'$ бўлиб,
 бу нуқталар ҳам A_n га тегишли бўлгани учун уларга мос келган
 \vec{a}' вектор $f(\vec{a})$ бўлади.

Хусусий ҳолда ноль вектор яна ноль векторга алмашади.

2°. f аффин алмаштиришда \vec{a} векторнинг координаталари \mathcal{B} да
 қандай бўлса, унга мос келган \vec{a}' векторнинг ҳам координаталари
 \mathcal{B}' да худди шу сонлардан иборат бўлади.

Бу хосса f нинг таърифи ва 1° дан бевосита келиб чиқади.
 3°. f аффин алмаштиришда икки векторнинг йиғиндисига мос
 келган вектор қўшилиувчи векторларга мос келган векторлар йиғин-
 дисидан иборат, яъни $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow f(\vec{c}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$.

Бу хоссанинг ўзингли эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун коор-
 динаталари билан берилган векторларни қўшиш қондасини эсласак
 ва f нинг таърифини эътиборга олсак, кифоядир.

4°. $k\vec{a}$ векторга мос келган вектор $kf(\vec{a}) = k\vec{a}'$ вектордир.

Бу икки 3°, 4°-хоссадан f алмаштиришда $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots +$
 $+ \lambda_n \vec{a}_n$ векторга $\lambda_1 \vec{a}'_1 + \lambda_2 \vec{a}'_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}'_n$ векторнинг мос келиши
 келиб чиқади, яъни f да векторларнинг чиққли комбинацияси сақ-
 ланади, демак, чиққли эркин векторга яна чиққли эркин векторлар
 мос келади. Бу хоссаларни ва 4-§ даги икки аффин фазонинг изо-
 морфлиги таърифини эътиборга олсак, аффин алмаштиришнинг қуй-
 дати иккинчи таърифи келиб чиқади.

2-таъриф. A_n фазонинг ўз-ўзига изоморф аксланиши A_n даги
аффин алмаштириш деб аталади.

3-таъриф. MN кесмани P нуқта λ нисбатда бўлса (яъни
 $\vec{MP} = \lambda \vec{PN}$ бўлса), у ҳолда λ сон M, N, P нуқталарнинг *обдий
 нисбати* деб аталиб, уни одаглагидек $\lambda = (MN, P)$ кўринишда бел-
 тиланади.

Демак, $\vec{MP} = \lambda \vec{PN} \Leftrightarrow \lambda = (MN, P)$, у ҳолда 4-хоссани эъти-
 борга олсак, аффин алмаштиришда нуқта берилган кесмани қандай
 нисбатда бўлса, унинг образи ҳам берилган кесма образини шу нис-
 батда бўлади, деган хулосага келамиз, демак, аффин алмаштиришда
 уч нуқтанинг обдий нисбати сақланади.

5°. f аффин алмаштиришда k ўлчовли Π_k текислик яна k ўлчов-
 ли Π_k текисликка алмашади, яъни текислигининг ўлчови f учун ил-
 вариантдир.

Ҳақиқатан ҳам, Π_k нинг умумий тенгламаси \mathcal{B} реперда (25) кў-
 ринишда бўлса, f аффин алмаштиришда M нуқтага мос келган M'
 нуқтанинг координаталари бир хил бўлгани учун $M \in (25) \Rightarrow M' \in$
 $\in (25)$, демак, Π_k текислик \mathcal{B}' га нисбатан қандай тенгламалар би-
 лан аниқланса, унинг аффин образи ҳам \mathcal{B}' реперда худди шу тенг-
 ламалар билан аниқланади. Бу эса текислигининг ўлчови аффин ал-
 маштиришда ўзгармаслигини билдиради.

Хусусий ҳолда $k = 1$ бўлса, аффин алмаштиришда тўғри чиққ
 яна тўғри чиққка алмашинади. Бу хоссани биз I бўлим III боабда
 аффин алмаштиришнинг таърифига эквивалент эканлигини кўрсатган
 эдик.

6°. f аффин алмаштиришда параллел текисликлар яна параллел
 текисликларга ўтади.

Бу хосса аффин алмаштиришнинг ўзаро бир қийматли эканлиги-
 дан келиб чиқади (буни тўлиқ исботлашни ўқувчига топширамиз).

$$f, g \in A \rightarrow g \cdot f \in A.$$

2. f аффин алмаштириш \mathcal{A} , \mathcal{A}' билан аниқланса, \mathcal{A}' , \mathcal{A} билан аниқланган аффин алмаштириш f нинг тежкариси f^{-1} , яъни

$$f \in A \Rightarrow f^{-1} \in A.$$

Демак, A тўғлиам группа ташкил қилади, у қисқача *аффин группа* деб аталади.

Энди алмаштиришлар группасининг инвариантга тушунчасини кинританга. G бирор алмаштириш группаси бўлиб, F ихтиёрий фигура бўлсин. G нинг исгалган алмаштиришида F фигура бирор F' фигурага алмашганда F нинг F' учун ҳам ўринли бўлиб қоладиган хоссагари F нинг G группата нисбатан инвариантлари деб аталади. У ҳолда аффин группанинг инвариантлари олдинги параграфдаги хоссагарини эътиборга олсак қуйидагилар бўлади:

1. Ҳар қандай аффин алмаштиришда k ўлчовли текислик яна k ўлчовли текисликка ўтгани учун текисликнинг ўлчови A га нисбатан инвариантдир.

2. Ҳар қандай аффин алмаштиришда уч нуктанинг оддий нисбати A га нисбатан инвариантдир.

3. Аффин алмаштиришда параллел текисликлар яна параллел текисликларга ўтгани учун параллеллик муносабати A га нисбатан инвариантдир.

Бу тушунчаларга асосланиб аффин геометрия нимади ўрганади деган саволга жавоб бериш мумкин.

Аффин геометрия n ўлчовли аффин фазо фигураларининг шундай хоссагарини ўрганадики, бу хоссагар аффин группата нисбатан инвариант бўлади (ёки геометриянинг аффин алмаштиришда фигураларнинг шу алмаштириш группасига нисбатан ўзгармай қоладиган хоссагарини ўрганадиган бўлими аффин геометрия деб аталади).

Энди аффин группанинг баъзи қисм группалари билан танишайлик.

а) Параллел кўчириш. A_n да бирор u вектор берилган бўлсин.

Тарриф. A_n нинг ҳар бир M нуктасига

$$\vec{MM'} = \vec{u} \quad (28)$$

шартни қаноатлантирувчи $M' \in A_n$ нукта мос келтирилган бўлса, бу мослик алмаштиришдан иборат бўлиб, у A_n ни u вектор қадар параллел кўчириш деб аталади.

A_n ни параллел кўчириш аффин алмаштиришдир. Ҳақиқатан,

$$\mathcal{A} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n), u = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n), M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

$$\vec{MM'} = (x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots, x'_n - x_n)$$

учун (28) га асосан:

$$\begin{aligned} u_1 &= x'_1 - x_1, & x'_1 &= x_1 + u_1, \\ u_2 &= x'_2 - x_2, & x'_2 &= x_2 + u_2, \\ &\dots & \dots & \\ u_n &= x'_n - x_n, & x'_n &= x_n + u_n. \end{aligned} \quad (29)$$

Бу формулаларни (27) билан таққосласак, $c_1 = u_1, c_2 = u_2, \dots, c_n = u_n, c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = 1, c_{ij} = 0 (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$.

(16) шарт бу ҳолда:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Демак, (29) формулалар билан аниқланган алмаштириш (яъни параллел кўчириш) аффин алмаштиришдан иборатдир.

$u = 0$ бўлган ҳолда $M = M'$, бу эса A_n нинг ҳар бир нуктасини O вектор қадар параллел кўчирилганда шу нукта ўз ўзинга ўтганини аниглаб, айнан алмаштириш ҳосил қилинади, демак, айнан алмаштириш параллел кўчиришнинг хусусий ҳолидир.

Энди A_n ни барча параллел кўчиришлар тўғлиам группата ташкил этишини кўрсатайлик.

1. A_n ни u вектор қадар параллел кўчириб, сўнггра v вектор қадар параллел кўчирсак, нақижда $u + v$ вектор билан аниқланган параллел кўчириш ҳосил бўлади, демак, икки параллел кўчиришнинг композицияси яна параллел кўчиришдан иборат.

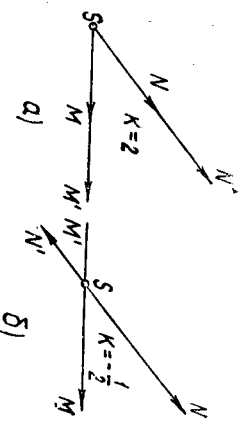
2. u вектор қадар параллел кўчириш берилган бўлса, $-u$ вектор билан аниқланадиган параллел кўчириш унга тежқари параллел кўчиришдир (чунки $u + (-u) = 0$).

Демак, A_n ни барча параллел кўчиришлар тўғлиам группата ташкил этиб, у A_n нинг қисм группасидан иборат.

б) Гомотетия. A_n нинг таърифига S нуктаси ва тайин $k \neq 0$ сон берилган бўлсин.

Тарриф. A_n нинг ҳар бир M нуктасига

$$\vec{SM'} = kS\vec{M} \quad (30)$$



шартни қаноатлантирувчи $M' \in A_n$ нукта мос келтирилган бўлса, A_n да S марказли ва k коэффициентли *гомотетия* берилган деб аталади (бунда S нукта ўз-ўзига ўтади деб олинлади) M, M' нукталар *ўзaro гомотетик* дейлади.

S, M нукталар ва k сон берилса, (30) ни қаноатлантирувчи M' нукта ягоналиги учун *гомотетия* — алмаштиришдан иборатлигига ишона ҳосил қиламиз (191-д, б чизмалар). Энди шу алмаштиришни, яъни *гомотетия*нинг аффин алмаштириш эканлигини кўрсатамиз.

$\mathcal{A} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ реперга нисбатан $S(s_1, s_2, \dots, s_n), M(x_1, x_2, \dots, x_n), M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ бўлсин. У ҳолда $SM(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Ss_1, \dots, Ss_n$ бўлиб, (30) га асосан

$$\begin{aligned} x'_1 - s_1 &= k(x_1 - s_1), \\ x'_2 - s_2 &= k(x_2 - s_2), \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n - s_n &= k(x_n - s_n). \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} x'_1 &= kx_1 - ks_1 + s_1, \\ x'_2 &= kx_2 - ks_2 + s_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n &= kx_n - ks_n + s_n. \end{aligned} \quad (31)$$

Буларни (27) билан таққосласак, $c_1 = s_1 - ks_1, c_2 = s_2 - ks_2, \dots, c_n = s_n - ks_n$ ва $c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = k, c_{ij} (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$, демак,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{vmatrix} = k^n \neq 0$$

ва (31) формулалар билан аниқланган алмаштириш, яъни *гомотетия* аффин алмаштиришдир.

Хусусий ҳолда $S = O \Rightarrow s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0$ бўлиб, (31) кўйидаги кўринишни олади:

$$x'_1 = kx_1, x'_2 = kx_2, \dots, x'_n = kx_n.$$

Энди бйтта S марказли барча *гомотетия*лар тўплами *группа* ташкил этилиши кўрсатамиз.

1. k_1, k_2 коэффициентли S марказли *гомотетия*лар композицияси $k_1 \cdot k_2$ коэффициентли ва S



192-чизма

марказли *гомотетия*дир (192-чизма), чунки k_1 коэффициент ва M

нукта учун $\overrightarrow{SM'} = k_1 \overrightarrow{SM}$, k_2 коэффициент ва M' нукта учун $\overrightarrow{SM''} = k_2 \overrightarrow{SM'}$ бўлиб, бундан $\overrightarrow{SM''} = \frac{1}{k_2} \overrightarrow{SM'}$, уни аввалги тенг-

ликка кўряк, $\frac{1}{k_2} \overrightarrow{SM''} = k_1 \overrightarrow{SM}$ ёки $\overrightarrow{SM''} = (k_1 \cdot k_2) \overrightarrow{SM}$ бўлади, бу эса $k_1 \cdot k_2$ коэффициентли ва S марказли *гомотетия*ни билдиради.

2. k_1 коэффициентли S марказли *гомотетия*га тескари *гомотетия* $\frac{1}{k_1}$ коэффициентли ва ўша S марказли *гомотетия*дир, чунки $k = k_1 \times \frac{1}{k_1} = 1$ бўлиб, (30) $\Rightarrow \overrightarrow{SM'} = \overrightarrow{SM}$, $M' = M$, бу эса айнан алмаштиришдир.

Демак, бир марказли барча *гомотетия*лар тўплами *группа*ни ташкил этиб, бу *группа* A нинг қисм *группас*дан иборатдир.

Мисол. A нинг аффин алмаштириши кўйидаги формулалар билан берилган:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2, \\ x'_2 = x_2 - 3x_3 - 1, \\ x'_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3. \end{cases}$$

1) $P(3, -1, 2), Q(-1, 4, 0), T(0, 0, 0)$ нукталар образларини топинг.

2) Шу аффин алмаштиришнинг кўзгалмас (ўз ўрнида қолдиган) нукталар борми?

3) $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ текислигининг образи қандай текислик?

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$ тўғри чизикнинг образини топинг.

Е чиш. 1) Берилган формулалардаги x_1, x_2, x_3 дар ўрнига P, Q, T нукталарнинг координатларини кўйиб, x'_1, x'_2, x'_3 ларни толамиз. P нинг образи:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2 = -3 + 2 = -1, \\ x'_2 = x_2 - 3x_3 - 1 = -1 - 3 \cdot 2 - 1 = -8, \\ x'_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3 = 3 - 1 + 3 \cdot 2 + 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow P'(-1, -8, 11).$$

Шунга ўхшаш, Q, T нинг образлари $Q'(3, 3, 6), T'(-1, -1, 3)$:

2) аффин алмаштиришда ўз-ўзига ўтадиган кўзгалмас нукталар учун: $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3$, шунинг учун улар ушбу

$$\begin{cases} x_1 = -x_1 + 2, \\ x_2 = x_2 - 3x_3 - 1, \\ x_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3 \end{cases}$$

системанинг ечимидир. Бу системадан ушбу кўзгалмас нукта топилди:

$$\left(1; -\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}\right);$$

3) текислигининг образини топиш учун берилган системани x_1, x_2, x_3 га нисбатан ечиб, уларнинг қийматларини $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ тенгламага қўямиз. Берилган системадан:

$$x_1 = -x_1' + 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' + x_3') - 2,$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(x_1' - x_2' + x_3' - 6).$$

Топилган бу қийматларни берилган текислик тенгламасига қўйиб уни соддалаштирсак,

$$-4x_1' + x_2' + 2x_3' = 9;$$

4) Берилган тўғри чизикнинг образини топиш учун ҳам x_1, x_2, x_3 нинг координда топилган қийматларини берилган тенгламаларга қўямиз:

$$11x_1' + 7x_2' + 5x_3' = 18,$$

$$7x_1' - x_2' + x_3' = 12.$$

36-§. n ўлчовли векторли ежкнид фазоси

Биз $I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}$ аксиомалар ёрдамида n ўлчовли вектор фазо тушунчасини киритган эдик ҳамда чизикли амалларга асослашиб, шу фазо хоссалярини ўргангандик, лекин бу фазода векторнинг узунлиги, икки вектор орасидати бурчак, икки векторнинг перпендикулярлиги каби тушунчалар киритилмаган эди. Шунинг учун $I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}$ аксиомалар қаторига янги аксиомалар киритиш билан янги вектор фазоларни ҳосил қиламиз, шулардан бири векторли евклид фазосидир.

Таръриф. V_n вектор фазонинг ихтиёрий икки a, b вектори учун уларнинг *скаляр кўпайтмасы* деб аталган ҳақиқий сон мос келтирилган бўлиб (кўпайтмани $a \cdot b$ билан белгилаймиз), қуйидаги тўртта аксиома бажарилса, бундай фазо n ўлчовли *векторли евклид фазоси* деб аталади (унинг V_E билан белгилаймиз):

- $V_1. \vec{a}, \vec{b} \in V_n$ учун $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- $V_2. \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_n$ учун $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
- $V_3. \vec{a}, \vec{b} \in V_n$ ва $\forall k \in R$ учун $k \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$,
- $V_4. \forall \vec{a} \neq 0 \in V_n$ учун $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$.

Бу аксиомаларни одатда векторларнинг *скаляр кўпайтириши аксиомалари* деб юритилади.

Аввало координдаги аксиомалардан келиб чиқадиган баъзи натижаларни кўрайлик.

1-натижа. V_2 аксиомадаги ассоциативлик қонуни икки қўшилувчи вектор учун ўринли бўлса, у исталган сондаги қўшилувчилар учун ўринлидир, $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} + \dots + \vec{a}_m \cdot \vec{b}$ (ифодадаги барча векторлар V_E га тегишли).

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_m = \vec{b}_1$ десак, V_2 га асосан $(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{b}_1 \cdot \vec{b}$, бу ифоданинг иккинчи қўшилувчисидати \vec{b}_1 ни $\vec{a}_2 + \vec{b}_2$ деб олсак, бунда $\vec{b}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \dots + \vec{a}_m$, у ҳолда V_2 ни яна татбиқ қилсак, $(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b} + \vec{b}_2 \cdot \vec{b}$; энди шу ишни учинчи қўшилувчи учун такрорлаймиз ва ҳ.к. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ нинг сони чекли бўлгани учун маълум қадамдан сўнг изланган тенглик ҳосил бўлади.

2-натижа. 0 векторнинг ҳар қандай вектор билан скаляр кўпайтмаси нолга тенгдир, чунки V_3 га асосан $(0 \cdot \vec{a}) = (0 \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}) = 0(\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$.

3-натижа. $\vec{a} \cdot \vec{a}$ скаляр кўпайтма фақат $\vec{a} = 0$ бўлгандагина нолга тенгдир, бу бевосита V_4 аксиома ва 2-натижадан келиб чиқади.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \Rightarrow \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \text{ҳақиқий сондир.}$$

Таръриф. $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ҳақиқий сонни \vec{a} векторнинг *модули* (узунлиги) дейилади ва уни $|\vec{a}|$ кўринишда белгиланади. Хусусий ҳолда $|\vec{a}| = 1$ бўлса, бундай \vec{a} вектор *бирлик вектор* деб аталади, бундан ташқари, нолг векторнинг модули нолга тенглиги ҳам равшандир.

$$4\text{-натижа. } \vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow |\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|, \text{ чунки}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\lambda \vec{a} \cdot \lambda \vec{a}} = \sqrt{\lambda \vec{a} \cdot \lambda \vec{a}} = \sqrt{\lambda \lambda (\vec{a} \cdot \vec{a})} = \sqrt{\lambda^2 \vec{a} \cdot \vec{a}} = |\lambda| |\vec{a}|.$$

Теорема. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_E$ учун

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (32)$$

ғридлир (Коши — Буняковский тенгсизлиги).

Исбот. $\vec{a}, \vec{b} \in V_E$ берилган бўлсин. $\vec{a} - \lambda \vec{b}$ кўринишдаги векторни текширайлик. $|\vec{a} - \lambda \vec{b}| \geq 0$ дан. $(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \geq 0$. Бу тенгсизлиkning чап томонига V_{-1} аксиомаларни ва координда келтирилган натижаларни татбиқ қилиб, $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2, \vec{b} \cdot \vec{b} = b^2$ десак,

ёки

$$a^2 - 2\lambda(a \cdot b) + (\lambda b)^2 \geq 0$$

$$b^2 \lambda^2 - 2(a \cdot b)\lambda + a^2 \geq 0, \quad (33)$$

бундан кўринадики, λ га нисбатан квадрат учрад λ нинг ҳар қандай қийматида манфий эмас, у ҳолда бу учраднинг дискриминанти мусбат бўлиши мумкин эмас, яъни $(a \cdot b)^2 - a^2 b^2 \leq 0$, бундан $(a \cdot b)^2 \leq a^2 b^2$ ёки $|a \cdot b| \leq |a| |b|$.

Шунинг таъкидлашмига зарурки, (32) тенгсизликдаги тенглик белгиси a, b коллинеар бўлгандагина ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} a = \lambda b &\Rightarrow |a \cdot b| = |\lambda b \cdot b| = |\lambda (b \cdot b)| = |\lambda| |b|^2 = \\ &= |\lambda| |b|^2 = |\lambda b| |b| = |a| |b|, \end{aligned} \quad (34)$$

якс ҳолда $a = \lambda b \neq 0$ бўлса, (33) нинг чап томонидаги λ га нисбатан квадрат учраднинг дискриминанти манфий бўлади, яъни қатъий тенгсизлик рўй беради.

Коши — Буняковский тенгсизлигини $a \neq 0$ ва $b \neq 0$ векторлар учун қўйидагича ёзиб олайлик: $-1 \leq \frac{a \cdot b}{|a| |b|} \leq 1$. Бундан қасрни бирор φ бурчакнинг косинуси деб олиш мумкин, яъни

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}. \quad (35)$$

Тарриф. (35) тенглик билан аниқланадиган бурчакларнинг энг кичинги a, b векторлар орасидаги бурчак деб аталади.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ да a, b векторлар ортогонал деб аталади. (35) дан кўриниб турибдики, ноль бўлмаган икки вектор ортогонал бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли экан.

(35) да $\varphi = 0$ ёки $\varphi = \pi$ бўлса, $a \cdot b = |a| |b|$; (34) га асосан $a = \lambda b$ ёки $a \parallel b$,

$$(35) \Rightarrow a \cdot b = |a| |b| \cos \varphi. \quad (36)$$

Демак, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси шу векторлар модуллари билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг. Энди V_E нинг базиси масаласига тухта лэйлик.

Тарриф. V_E даги e_1, e_2, \dots, e_n базис векторларнинг ҳар бири бирлик вектор бўлиб, уларнинг исталган иккитаси ўзаро ортогонал бўлса, бундай векторлар системаси ортонормаланган базис (ёки де-

карт базиси) деб аталади, уни ҳам одатдагидек $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ деб белгилейлик.

Демак, ортонормаланган базис учун

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & \text{агар } i = j \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } i \neq j \text{ бўлса,} \end{cases} \quad (37)$$

бунда $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Энди ортонормаланган базисда координаталари билан берилган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси, векторнинг узунлиги, икки вектор орасидаги бурчакни ҳисоблаш формулаларини топайлик. Фараз қилейлик, бирор декарт базисда

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ b(y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n. \end{aligned}$$

У ҳолда скаляр кўпайтманинг хоссаларини ва (37) ни назарда тут- сак,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) \cdot (y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n) = \\ &= x_1 y_1 (e_1 \cdot e_1) + x_1 y_2 (e_1 \cdot e_2) + \dots + x_1 y_n (e_1 \cdot e_n) + x_2 y_1 (e_2 \cdot e_1) + \\ &+ x_2 y_2 (e_2 \cdot e_2) + \dots + x_2 y_n (e_2 \cdot e_n) + \dots + x_n y_1 (e_n \cdot e_1) + \\ &+ x_n y_2 (e_n \cdot e_2) + \dots + x_n y_n (e_n \cdot e_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n, \end{aligned}$$

$$a \cdot b = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (38)$$

Демак, V_E да икки векторнинг скаляр кўпайтмаси шу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

$a = b \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n \Rightarrow a \cdot a = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ёки

$$|a|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (39)$$

вектор узунлигининг таърифига кўра

Демак, векторнинг узунлиги унинг координаталари йиғиндисидан олинган арифметик квадрат илдиэга тенг.

(38) ва (39) ни эътиборга олсак, икки вектор орасидаги бурчакни ҳисоблаш (аниқроғи, шу бурчакнинг косинусини топиш) формуласи топилади. (35) дан:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}}. \quad (40)$$

Коши — Буняковский тенгсизлиги эса кўйидаги кўринишни олади:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2). \quad (41)$$

1-мисол. Тўрт ўлчовли векторли евклид фазосидаги декарт базисида $\vec{a}(3, 2, 1, 1)$, $\vec{b}(4, -2, -1, 1)$ берилган. Кўйидагиларни топинг. а) шу векторларнинг узунликлар; б) \vec{a} \vec{b} скаляр кўпайтма; в) векторлар орасидаги бурчак.

Еч иш. а) (39) га асосан

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{15},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{22};$$

б) (38) га асосан

$$\vec{a} \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 12 - 4 - 1 + 1 = 8;$$

$$\text{в) (40) га асосан } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{22}} = \frac{8}{\sqrt{330}};$$

$$\varphi = \arccos \frac{8}{\sqrt{330}}.$$

2-мисол. $\vec{a}(1, 3, 2, -1)$, $\vec{b}(5, 1, -4, 0)$, $\vec{c}(0, 4, 1, 14)$ векторларнинг ортогонал системани ҳосил қилишини исботланг.

Исбот. Умуман, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системасида ихтиёрий икки вектор ўзaro ортогонал бўлса, бундай векторлар системаси ортогонал система деб аталади. Бу ерда аҳвол шундай, ҳақиқатан,

$$\vec{a} \vec{b} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 = 8 - 8 = 0,$$

$$\vec{a} \vec{c} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 14 = 14 - 14 = 0.$$

$$\vec{b} \vec{c} = 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 14 = 4 - 4 = 0.$$

37-§. n ўлчовли евклид фазоси

Таъриф. Элтувчики V_E бўлган (n ўлчовли векторли евклид фазоси) n ўлчовли аффин фазо n ўлчовли евклид фазоси деб аталади ва E_n билан белгиланади.

Демак, элементлари нуқта ва вектор деб аталган бўш бўлмаган тўғлам I_{1-4} , II_{1-4} , III_{1-4} , IV_{1-4} , V_{1-4} аксиомаларни қаноатлантирса, у тўғлам n ўлчовли евклид фазоси бўлади.

Таърифдан кўринадики, n ўлчовли аффин фазонинг барча таъриф ва теоремалари E_n да ҳам ўз кучини сақлайди.

E_n даги нуқтанинг координатларини 30-§ дагидек таърифласак ҳамда декарт реперини $\mathcal{D} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ деб олсак $(e_1, e_2, \dots,$

\vec{e}_n ортонормаланган базис), у ҳолда уч ўлчовли евклид фазоси сингари E_n да қатор масалаларни ҳал қилиш мумкин. Бирор декарт репериди $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ни олайлик.

Таъриф. E_n даги A, B нуқталар аниқлаган \vec{AB} вектор узунлиги шу икки нуқта орасидаги масофа деб аталади ва $\rho(A, B)$ билан белгиланади.

Таърифга асосан $\rho(A, B) = |\vec{AB}|$. 30-§ даги (13) ни эсласак, $\vec{AB}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$, (39) формуладан:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Бу формула E_n даги икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидир.

Теорема. E_n даги ихтиёрий учта A, B, C нуқта учун

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$$

ўринлидир.

Ҳақиқатан, IV_2 аксиомага асосан $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. Бу тенгликнинг икки томонидаги векторларни ўз-ўзига скаляр кўпайтирамиз:

$$\vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} + \vec{BC})$$

$$\vec{AC}^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2.$$

ёки

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + |\vec{BC}|^2.$$

Лекин $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \leq |\vec{AB}| |\vec{BC}|$ (чунки $\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$ ҳолда тенгсизлик равшан, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0$ ҳолда эса Коши — Буняковский тенгсизлиги асосида). У ҳолда

$$|\vec{AC}|^2 \leq |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AB}| |\vec{BC}| + |\vec{BC}|^2,$$

$$|\vec{AC}|^2 \leq |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2,$$

бундан

$$|\vec{AC}| \leq |\vec{AB}| + |\vec{BC}|$$

ёки

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C). \quad (42)$$

Бу ердаги тенгликнинг ўринлиги бўлиши учун B нуқта A ёки C билан устма-уст тушиши, ёки B нуқта A билан C нинг орасида ётиши лозим (буни мустақил исботланг).

Табиники, k ўлчовли текислик таврифи ва хоссалари A_n да кандай бўлса, E_n да шундай сақланиб қолади, бундан ташқари, бу фазода шу хоссалар ёнига янги хоссалар қўшилиди. Бу хоссалар метрик харақатерга эга бўлиб, уларнинг барчасини биз бу ерда келтирмаймиз (икки текислик орасидаги масса, тўғри чизик билан текислик орасидаги бурчак ва ҳ. к.). Мисол тариқасида қуйидаги масалани кўриб чиқайлик.

Декарт реперда берилган нуқтадан берилган гипертетикликкача масса ҳисоблансин.

Тавриф. E_n да нуқтадан гипертетикликкача масса деб, шу нуқтадан гипертетикликка туширилган перпендикуляр тўғри чизикнинг бу текислик билан кесилган нуқтасигача бўлган массага айтадилар.

Шуни таъкидлаётимизки, гипертетиклик ўзига перпендикуляр тўғри чизик билан фақат битта нуқтада кесилиди, чунки гипертетиклик битта чизикли тенглама билан, тўғри чизик эса $(n-1)$ та чизикли тенглама билан аниқланиб, уларнинг умумий нуқталарини топиш учун жами n та чизикли тенгламани (бу система албатта биргалликда) ечилиди. Умумий ҳолда n та тенгламада n та номанъълум бўлгани учун тегишли системани ечиб, изланган нуқта топилади.

$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта ва

$$\Pi_{n-1}: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0 \quad (43)$$

гипертетиклик берилган бўлсин. $\rho(M_0, \Pi_{n-1})$ ни излаймиз.

M_0 нуқтадан Π_{n-1} га перпендикуляр тўғри чизик ўтказиб, унинг Π_{n-1} билан кесилган нуқтасини N_0 деб белгилайлик, у ҳолда $\overrightarrow{M_0N_0}$ вектор ҳосил бўлади, N_0 нинг координаталари x'_1, x'_2, \dots, x'_n бўлсин.

$$N_0 \in \Pi_{n-1} \Rightarrow a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_nx'_n + a_0 = 0. \quad (44)$$

Бу айтилган (43) тенгламадан ҳадлаб айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_1(x_1 - x'_1) + a_2(x_2 - x'_2) + \dots + a_n(x_n - x'_n) = 0, \quad (45)$$

Бу тенгликнинг чап томонини ўзаро перпендикуляр $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ га $N_0P(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots, x_n - x'_n)$ векторнинг скаляр қўлайтмаси деб қараш мумкин, бу ерда $N_0 \in \Pi_{n-1}$, $P \in \Pi_{n-1} \Rightarrow$

$a \perp \Pi_{n-1}$, чунки P нуқта Π_{n-1} нинг ихтиёрий нуқтасидир. Демак, Π_{n-1} нинг (43) тенгламасидаги ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар шу текисликка ортогонал векторнинг координаталаридан иборат, демак, $a \parallel M_0N_0$. У ҳолда

$$\overrightarrow{M_0N_0} \cdot a = |M_0N_0| |a| \cos \varphi = \pm |M_0N_0| |a| \quad (\varphi = 0 \text{ ёки } \pi),$$

бундан

$$|\overrightarrow{M_0N_0} \cdot a| = \rho(M_0, \Pi_{n-1}) |a|,$$

$$\rho(M_0, \Pi_{n-1}) = \frac{|\overrightarrow{M_0N_0} \cdot a|}{|a|}.$$

Бу формулани координаталарда ёзиш учун

$$\overrightarrow{M_0N_0} \cdot a = a_1(x_1^0 - x_1^0) + a_2(x_2^0 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n^0 - x_n^0) = a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \dots + a_nx_n^0 - (a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \dots + a_nx_n^0)$$

ни эътиборга олсак, $\overrightarrow{M_0N_0} \cdot a = -(a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \dots + a_nx_n^0) - a_0$

$$\rho(M_0, \Pi_{n-1}) = \frac{|a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \dots + a_nx_n^0 + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}. \quad (46)$$

Бу формула E_3 даги нуқтадан текисликкача массани топиш формуласининг умумлашган ҳолидир.

Энди E_n даги бир декарт реперининг иккинчи декарт репери билан қандай боғланганлигини кўрайлик.

Бу боғланиш умумий ҳолда 30-§ даги (15) формуладан аниқланади. У формуладаги иккинчи аффин репернинг базис векторларини биринчи аффин реперга нисбатан координаталари бўлган $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{nn}$ сонлар энди реперлар декарт реперлардан иборат бўлганда маълум шартларни қановатлантириши керак. Ҳақиқатан ҳам, энди e_1, e_2, \dots, e_n лар бирлик векторлардан иборат:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + \dots + c_{1n}^2 &= 1, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + \dots + c_{2n}^2 &= 1, \\ &\dots \\ c_{n1}^2 + c_{n2}^2 + \dots + c_{nn}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (47)$$

Ундан ташқари, бу базис векторларнинг ихтиёрий икkitаси ўзаро перпендикуляр:

$$\begin{aligned} c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + \dots + c_{1n}c_{2n} &= 0, \\ c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + \dots + c_{1n}c_{3n} &= 0, \\ &\dots \\ c_{11}c_{n1} + c_{12}c_{n2} + \dots + c_{1n}c_{nn} &= 0, \\ &\dots \\ c_{n-1,1}c_{n1} + c_{n-1,2}c_{n2} + \dots + c_{n-1,n}c_{nn} &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

(47) да n та тенглама, (48) да эса $\frac{n}{2}(n-1)$ та тенглама бўлиб, умумий жами $n + \frac{n}{2}(n-1) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ та тенгламани қад-

ноглантириши керак экан. 30-§ даги (15) формулага диққат билан назар ташласак, ундаги барча $c_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ нинг сони $n^2 + n = n(n+1)$ тадир; бу c_{ij} коэффициентларни параметрлар деб атасак, куйидаги хулосаларга келамиз:

1. A_n да бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтиш $n(n+1)$ та параметрнинг берилиши билан тўла аниқланади (бу параметрлар албатта 30-§ даги (16) шартни қаноатлантириши керак).

2. E_n да бир декарт реперидан иккинчи декарт реперига ўтиш $\frac{n(n+1)}{2}$ та параметрнинг берилиши билан аниқланади, чунки c_{ij} лар

жоридаги $\frac{n(n+1)}{2}$ та шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$n(n+1) - \frac{n^2+n}{2} = n^2 + n - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Хусусий ҳолда $n = 2$ бўлса, текисликдаги икки аффин реперни бевловчи формулалар

$$\begin{vmatrix} x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

билан аниқланиб, жами 6 та $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{20}$ параметрга боғлиқдир (чунки $n(n+1) = 2(2+1) = 2 \cdot 3 = 6$). Декарт реперлари орасидаги боғланиш эса $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = 3$ та параметр-

ларга боғлиқ (улар c_{10}, c_{20} ва буриш бурчаги α).

1-мисол. E_5 да $A(4, 3, 4, 5), B(-2, -2, 2, 5, 4)$ нуқталар берилган. Шу нуқтага орасидаги масофани топинг.

Е ч и ш. (41) формулага асосан

$$\begin{aligned} \rho(A, B) &= \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-3)^2 + (2-3)^2 + (5-4)^2 + (4-5)^2} \\ &= \sqrt{36 + 25 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{64} = 8. \end{aligned}$$

2-мисол. E_5 да $A(3, -2, 1, 4, 1)$ ва $B(2, 4, -3, 1, 2)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган нуқталар тўпламини топинг.

Е ч и ш. Изланган нуқталардан бирини $N(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ десак, куйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\rho(A, N) = \rho(B, N).$$

Буни координатларда ёзсак,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1-3)^2 + (x_2+2)^2 + (x_3-1)^2 + (x_4-4)^2 + (x_5-1)^2} &= \\ = \sqrt{(x_1-2)^2 + (x_2-4)^2 + (x_3+3)^2 + (x_4-1)^2 + (x_5-2)^2}. \end{aligned}$$

Иккала қисмини квадратга кўтариб, қавсларни очиб, ихчамлаб чиқсак,

$$x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{3}{2} = 0,$$

бу чиққили тенглама E_5 да тўрт ўлчовли текисликни, яъни гипертекисликни аниқлайди. Демак, изланган нуқталар тўплами гипертекисликдан иборат.

3-мисол. $M(1, 4, -5, 3, 2)$ нуқтадан $\Pi_4: 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 3 = 0$ гипертекисликкача бўлган масофани ҳисобланг.

Е ч и ш. (46) формулага асосан

$$\rho(M, \Pi_4) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 + 2(-5) - 3 + 2 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{16}} = \frac{15}{4}.$$

38-§. Ҳаракат

E_n да иккита $\vec{\mathcal{A}} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $\vec{\mathcal{A}}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ декарт репери берилган бўлсин.

E_n нинг ҳар бир M нуқтасини шу фазонинг шундай M' нуқтасига аксиантпрамикки, $\vec{\mathcal{A}}$ реперда M нуқта қандай координатларга эга бўлса, $\vec{\mathcal{A}}'$ реперда M' нуқта шундай координатларга эга бўлсин. Бу ерда E_n нуқталари яна шу фазо нуқталарида мос кўйилиб, бундай мослик ўзаро бир қиймагидир. Демак, E_n да алмаштириш хосли қилинди, у E_n нинг *ҳаракати* (силжиши) деб аталади. E_n даги ҳаракат иккита декарт репернинг берилиши билан тўла аниқланади. Бу таърифни аффин алмаштиришнинг таърифи билан тан таққосласак, ҳаракат аффин алмаштиришнинг хусусий ҳоли экани аён бўлади. Шу сабабли фигуранинг барча аффин хоссалари ҳаракатда сақланиб қолади.

Ундан ташқари ҳаракат яна куйидаги хоссага эга:

Ҳаракатда икки нуқта орасидаги масофа сақланади. Ҳақиқатан, $\vec{\mathcal{A}}$ репердаги $M(x_1, x_2, \dots, x_n), N(y_1, y_2, \dots, y_n)$ нуқталарга ҳаракат натижасида $\vec{\mathcal{A}}'$ реперда мос келган $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $N'(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ у ҳолда $\rho(M, N) = \rho(M', N')$.

Масофа ҳаракатнинг асосий инварианти ҳисобланиб, баъзан ҳаракат шу инвариант орқали таърифланади. Фикримизнинг тасдиғи учун куйидаги теоремани кўрайлик.

Теорема. E_n нинг бирор f алмаштирашда икки нуқтаси *исботдаги масофа сақланса, бу алмаштираш ҳаракатдир.*

Исбот. E_n да ихтибарий учта O, A, B нуқтани олайлик, у ҳолда Π_4 аксиомага асосан

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} \quad (49)$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}.$$

Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонида турган векторларни ўз-ўзи-

$$\begin{aligned} \text{га скаляр кўпайтирайлик: } \vec{AB} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OB} - \vec{OA})(\vec{OB} - \vec{OA}) \Rightarrow \vec{AB}^2 = \\ &= \vec{OB}^2 - 2(\vec{OB} \cdot \vec{OA}) + \vec{OA}^2 \Rightarrow 2(\vec{OA} \cdot \vec{OB}) = \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - \vec{AB}^2. \end{aligned} \quad (50)$$

$f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ бўлсин, у ҳолда O' , A' , B' нукта-лар учун ҳам IV_2 ни татабик қилиб ва (49) сингари тенглик ёзиб, тенгликча ихчамласак,

$$2(\vec{O'A'} \cdot \vec{O'B'}) = \vec{O'A'}^2 + \vec{O'B'}^2 - \vec{A'B'}^2. \quad (51)$$

Лекин теорема шартига кўра $\rho(O, A) = \rho(O', A')$, $\rho(O, B) = \rho(O', B')$, $\rho(A, B) = \rho(A', B')$ бўлгани учун (50) билан (51) нинг ўнг томонларини таққосласак, улар ўзаро тенглир, демек, чап томонла-ри ҳам тенг бўлади:

$$(\vec{O'A'} \cdot \vec{O'B'}) = (\vec{OA} \cdot \vec{OB}). \quad (52)$$

E_n да бирор $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ декарт реперини олайлик, у ҳолда $\vec{OA}_1 = e_1$, $\vec{OA}_2 = e_2, \dots, \vec{OA}_n = e_n$ десак, \mathcal{B} реперни қуйи-дагича ёшиш мумкин: $\mathcal{B}' = (O, A_1, A_2, \dots, A_n)$. Шу реперни f бўйи-ча алмаштирсак, $f(O) = O'$, $f(A_1) = A'_1, \dots, f(A_n) = A'_n$ бўлгани учун бу нукталар системаси ҳам бирор $\mathcal{B}'' = (O', A'_1, \dots, A'_n)$ ре-перни аниқлайди. Бу репер ҳам декарт реперидан иборатдир, чунки 1) алмаштиришга асосан $\rho(O, A_i) = \rho(O', A'_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) яъни бирлик вектор образи яна бирлик вектордир;

2) (52) шартга асосан ўзаро перпендикуляр векторлар яна пер-пендикуляр векторга ўтади.

E_n даги ихтиёрий M нуктани олайлик, унинг \mathcal{B} декарт реperi-даги координаталари x_1, x_2, \dots, x_n бўлсин. M нуктага f алмаш-тиришда мос келган M' нуктанинг шу репердаги координаталари y_1, y_2, \dots, y_n бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} \vec{OM} \cdot \vec{OA}_1 &= |\vec{OM}| |\vec{OA}_1| \cos \varphi = |\vec{OM}| \cdot |e_1| \cos \varphi = \\ &= |\vec{OM}| \cos \varphi = |\vec{OM}'| = x_1 \end{aligned}$$

(бунда $\varphi = (\vec{OM}, \vec{OA}_1)$, \vec{OM}' вектор \vec{OM} нинг Ox ўқдаги проекция-си) бўлгани учун

$$x_1 = \vec{OM} \cdot \vec{OA}_1, \quad (53)$$

шунга ўхшаш

$$\begin{aligned} x_2 &= \vec{OM} \cdot \vec{OA}_2, \\ x_3 &= \vec{OM} \cdot \vec{OA}_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$x_n = \vec{OM} \cdot \vec{OA}_n,$$

$$y_1 = \vec{O'M'} \cdot \vec{O'A}'_1,$$

$$y_2 = \vec{O'M'} \cdot \vec{O'A}'_2,$$

$$\dots$$

$$y_n = \vec{O'M'} \cdot \vec{O'A}'_n.$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ харакатдан иборат.}$$

$$(52) - (54) \Rightarrow \dots$$

Харакатнинг координаталардаги ифодасини топиш учун харакат аффин алмаштиришнинг хусусий ҳолидан иборатлигини эслаш керак. Демак, харакатнинг аналитик ифодаси 34-§ даги (27) формулалар кўринишида бўлиб, унинг характерини аниқловчи c_{ij} сонлар кўшим-ча шартларни қаноатлантириши керак, бу шартлар эса 37-§ даги (47), (48) дир.

«Алгебра ва сонлар назарияси» курсидан маълумки, квадрат мат-рицанинг элементлари (47), (48) шартларни қаноатлантирса, бундай матрица ортогонал матрица деб аталади, унинг детерминанти ± 1 га тенг, яъни 34-§ даги (27) нинг детерминанти $\Delta = \pm 1$.

Агар харакатнинг аналитик ифодасида $\Delta = +1$ бўлса, бундай харакат *биринчи тур харакат* деб аталади, бу тур харакатда иккита мос репер бир хил ориентацияли бўлади. $\Delta = -1$ ҳолда бундай харакат *иккинчи тур харакат* дейлиб, ундаги мос реперлар ҳар хил ориентацияли.

E_n нинг барча харакатлари тўғрисида E билан белгилайлик ҳамда $\forall f, g \in E$ ни олайлик, харакатда икки нукта орасидаги масофа ўзгармаганлиги учун кетма-кет бажарилган икки f, g харакат натижасида ҳам икки нукта орасидаги масофа ўзгармайди, демак, $E \cdot f$ «кўпайтма» харакат бўлиб, E га тенглидир. f да икки нукта орасидаги масофа ўзгармагани учун унга текари f^{-1} да ҳам масо-фа ўзгармайди, демак, $f^{-1} \in E$. Хуллас, E_n нинг барча харакатлари тўғрисида E гурппа ҳосил қилади, у E_n нинг *харакатлар гурппаси* деб аталади. Харакат аффин алмаштиришнинг хусусий ҳоли экан-лигиндан харакатлар гурппаси аффин гурппанинг қисм гурппаси бўлади. Демак, A нинг барча инвариантлари E учун ҳам инвариант бўлади, лекин бунинг текариси дуню тўғри бўлавермайди; масалан, E_n нинг инвариантларидан бири икки нукта орасидаги масофадир, бу эса A да инвариант эмас, шу нуктаи назардан E_n даги фигура гео-

метрик хоссадар нуктага назаридан E_n даги фигураларга нисбатан бой-рокдир.

Энди Евклид геометриясига куйидагича таъриф бериш мумкин. Энди E_n геометрияси геометриянинг ҳаракат натижасида фигуранинг ўзармай қолган хоссадарини ўрганадиган бир бўлимидир. Урта мактаб геометрия курсида икки ва уч ўлчовли (E_2, E_3) евклид фазолари геометрияси ўрганилади.

n ўлчовли ($n > 3$) евклид геометриясида ҳам ўрта мактаб геометрия курсида қаралган баъзи тушунчаларни умумлаштириш мумкин. Масалан, конгруэнглик тушунчаси E_n да куйидагича киритилди: F, F' фигуралардан бирини иккинчисига ўтказувчи ҳаракат мавжуд бўлса, бу фигуралар конгруэнт деб аталади, ёки оддий сферани умумлаштириб, E_n да *ширсфера* киритилди: E_n нинг марказ деб аталган C нуктадан берилган r масофада ётган барча нукталари тўплами *ширсфера* деб аталади ва x, k .

Энди ҳаракатлар группасининг баъзи қисм гуруппалари билан танишайлик.

1. I турдаги барча ҳаракатлар тўпламини E_1 деб белгиласак, бу тўплам группани ҳосил қилади, чунки I) E_1 нинг ҳар бир алмаштиришида репер ориентацияси (демак, фазо ориентацияси) ўзгарма-тилгили учун унга тегишли икки ҳаракатнинг композицияси натижа-сида ҳам ориентация ўзгармайди; 2) E_1 нинг ҳар бир ҳаракатига текари ҳаракат ҳам ориентацияни ўзгартирмайди, демак, E_1 ҳам E нинг қисм группасидир.

2. E_1 даги барча параллел кўчиришлар тўламини олайлик. (параллел кўчиришнинг таърифи 35-§ да берилган бўлиб, у таъриф бу ерда ҳам ўринлидир); бу тўпламнинг группани ҳосил қилишини 35-§ дан биз билганиз. Аввало параллел кўчиришнинг ҳаракат экан-лигини исботлайлик. M, N нукталар M', N' нукталарни u вектор бўйича параллел кўчиришдан ($\overrightarrow{MM'} = u, \overrightarrow{NN'} = u$) ҳосил қилинган бўлса, $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{M'N'}| \Rightarrow \rho(M, N) = \rho(M', N')$. Демак, параллел кўчириш ҳаракатдир. У ҳолда бундай ҳаракатларнинг тўплами ҳам E нинг қисмидир.

3. E нинг шундай ҳаракатлари тўламини қараймики, бу ҳаракатлар натижасида E нинг бирор O нуктаси ўз-ўзига ўтсин, бундай хоссага эга бўлган ҳаракатларни E_n ни O нукта атрофида *буриш* дейилади, бу тўламини E_0 деб белгиласак, E_0 нинг группаси қилишини кўрсатиш осондир (буни кўрсатишни ўқувчинга ҳа-вола қиламиз); демак, E_0 ҳам E нинг қисм группасидир.

39-§. E_3 нинг ҳаракатлари ҳақида қисқача маълумот

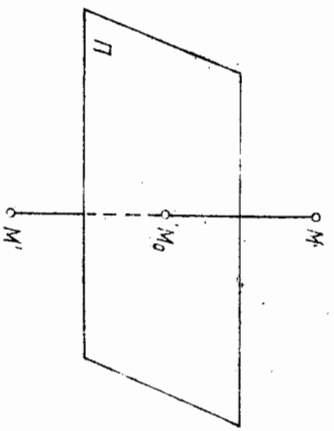
1. Текисликка нисбатан симметрия. E_3 даги ихтиёрий бир Π текислигини олайлик.
Таъриф. E_3 даги икки M, M' нукта куйидаги икки шартни

қаноатлантирса, бу нукталар Π текислигига нисбатан *симметрик* дейилади (193-чизма).

а) $MM' \perp \Pi$;
б) $MM' \cap \Pi = M_0$ бўлиб, $\rho(M, M_0) = \rho(M', M_0)$ бўлсин.

Бу таърифдан кўринадики, Π текислик берилган бўлиб, $\forall M \in E_3$ нукта учун Π га нисбатан симметрик нуктани топиш учун M дан Π га перпендикуляр тушириб ва унинг Π билан кесилган M_0 нуктасини топиб сўнгра (M, M_0) түғри чизиқда $\rho(M, M_0) = \rho(M', M_0)$ шартни қаноатлантирувчи M' нуктани топиш керак. $M \in \Pi$ ҳолда M ни ўз-ўзига симметрик деб олинади.

193-чизма



Бирор F фигура берилиб, унга Π текислигига нисбатан симметрик фигураларга симметрик нукталарни топиш керак, лекин баъзан фигураларни аниқлайдиган чекли сондаги нукталарнинг образларини топиш билан чекланиш мумкин (чунки шу нукталар F га симметрик фигурани тўла аниқлайди). Масалан, учбурчакка Π га нисбатан симметрик фигурани топиш учун шу учбурчакнинг учта учига Π га нисбатан симметрик бўлган учта нуктани топиш kiffoйдир. Π га нисбатан нисбатан E_3 даги симметрия E_3 нукталарини яна шу фазо эканлиги сабабли уни симметрик алмаштириш (текислигига нисбатан симметрия) деб атаймиз.

Шу алмаштиришнинг аналитик ifodalisini топайлик. $\mathcal{B} = (O, e_1, e_2, e_3)$ декарт реперини анъанани бузмаслик учун $\mathcal{B} = (O, i, j, k)$ деб олиб, Π текислигини бирор координаталар текислиги билан устма-уст тушсин десак, масалан, $xOy = \Pi$ бўлса, бу ҳолда $M(x, y, z)$ ва $M'(x', y', z')$ нукталар Π текислигига нисбатан симметрик бўлиши учун:

$$x = x', y = y', z = -z'. \tag{55}$$

(55) ifода танлаб олинган декарт реперидagi симметрик алмаштиришнинг аналитик ifodasidir; ($\Pi = xOz$ ҳолда (55) формула $x = x', y = -y', z = z'$ ва $\Pi = yOz$ бўлса, $x = -x', y = y', z = z'$). Симметрия алмаштиришнинг ҳаракат эканлигини кўрсатайлик. $M(x_1, y_1, z_1), N(x_2, y_2, z_2)$ нукталарни Π текислигига нисбатан симметрия алмаштиришга дуч келтирилса, (55) га асосан, $M'(x_1, y_1, -z_1), N'(x_2, y_2, -z_2)$ уч ҳолда

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$\rho(M', N') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}.$$

Бу ифодавларнинг ўнг томонлари тенг:

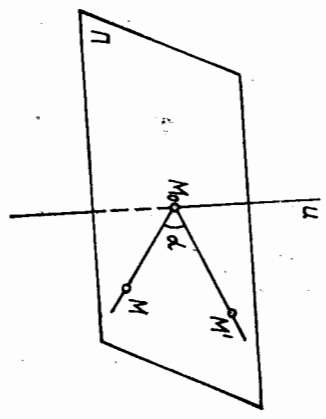
$$\rho(M, N) = \rho(M', N').$$

Демак, бундай алмаштиришда икки нуқта орасидаги масофа ўзгармай қолади, бу эса симметрия алмаштиришининг ҳаракатдан иборат эканлигини билдиради. Равшанки, юқоридаги алмаштиришда $\mathcal{S} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ декарт реперни $\mathcal{S}' = (O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ декарт реперига ўтади. Бу реперлар ҳар хил ориентирланган бўлгани учун ($\Delta = -1$) алмаштириш иккинчи тур ҳаракатга кирadi.

Фазодаги барча текисликларга нисбатан симметрия алмаштиришлари тўғрисидаги группани ҳосил қилмайди, чунки кесилувчи икки текисликнинг ҳар бирига нисбатан шундай алмаштиришлар композицияси бирор текисликка нисбатан симметрик алмаштириш бўлмайди, лекин бир текисликка параллел барча текисликларга нисбатан симметрия алмаштиришлари тўғрисидаги группани ҳосил қилади (исботланг); ҳатто битта текисликка нисбатан шундай алмаштиришлар ҳам группани ҳосил қилади; ҳақиқатан ҳам, f_{Π} бирор Π текисликка нисбатан симметрия алмаштириши бўлиб, айнан алмаштиришни f_{θ} деб белгиласак, $\Phi = \{f_{\Pi}, f_{\theta}\}$ тўғрисида группани ҳосил қилади. Чунки бу ҳолда $f_{\Pi} \circ f_{\theta} = f_{\theta} \circ f_{\Pi} = f_{\Pi}^{-1}$ бўлиб (Π га нисбатан алмаштиришга тескари алмаштириш ҳам шу f_{Π}^{-1} га нисбатан алмаштиришидир), $f_{\Pi}^{-1} \in \Phi$ ва $f_{\Pi} \circ f_{\theta} = f_{\theta} \circ f_{\Pi} = f_{\Pi}^{-1} \in \Phi$.

2. Тўғри чизик атрофида буриш. E_3 да бирор Π тўғри чизик ва таяин α бурчак берилган бўлсин. Тарриф. E_3 даги M, M' нуқталардан ўтиб, Π тўғри чизикка перпендикуляр бўлган Π текисликда $(\Pi \cap \Pi) = M_0 \angle MM_0M' = \alpha$ ва $\rho(M, M_0) = \rho(M', M_0)$ бўлса, M' нуқта M нуқтани Π тўғри чизик атрофида α бурчакка буришдан ҳосил қилинган дейилади (194-чизма).

Π тўғри чизикдаги нуқталар ўз-ўзига мос ҳисобланadi. Бу тавридан берилган нуқтани берилган тўғри чизик атрофида α бурчакка буришдан ҳосил қилинган нуқтани топши қойдаси келиб чиқади. M берилган нуқта бўлса, M' ни топши учун M дан ўтувчи ва Π текислигига перпендикуляр бўлган Π текислигини ўтказиб, унинг Π билан кесилган M_0 нуқтаси топилadi, сўнгра шу те-
 M ни α бурчакка буриш керак (1 бўлим, 35-§ га асосан). F фигурани α бурчак тўғри чизик атрофида α бурчак тўғри чизикдан ҳосил бўлган фигурани топши учун унинг барча нуқталарини Π тўғри чизик атрофида α бурчакка буриш керак; ҳуқуқий ҳолда F фигура тўғри чизикдан иборат бўлса, уни Π тўғри чизик атрофида буриш учун унинг иккига нуқтасининг



194-чизма

образини топши кифойдир, уч-бурчакни Π тўғри чизик атрофида буриш учун унинг ўрта учи-нинг образини топши етарлидир ва х. к.

Тўғри чизик атрофида буриш E_3 ни ўз-ўзига бир қийматли акслантирган учун $U \in E_3$ ни алмаштиришидир, $\alpha = \pi$ ҳолга мос буриш Π тўғри чизикка нисбатан симметрия деб аталади. Агар Π тўғри чизик сифатида Oz ни қабул қилсак (195-чизма) ва $\mathcal{S} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперни Oz атрофида α бурчакка буриш, $\mathcal{S}' = (O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ репер ҳосил бўлиб, улар орасидаги боғланишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{56}$$

Олинги икки боғланиш бизга маълум.

(56) формулалар ердандаги тўғри чизик атрофида буришнинг ҳаракат эканлигини кўрсатади. Агар $M(x_1, y_1, z_1), N(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган бўлиб, бу нуқталарни Π тўғри чизик атрофида α бурчакка буришдан ҳосил қилинган нуқталар (56) га асосан

$$\begin{aligned} M'(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha, z_1), \\ N'(x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha, x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, z_2) \end{aligned}$$

бўлади, у ҳолда:

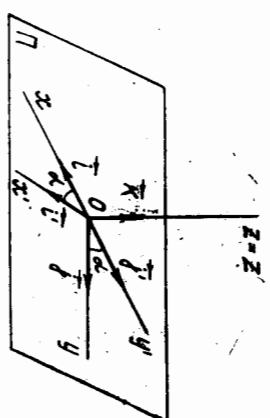
$$\begin{aligned} \rho(M, N) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ \rho(M', N') &= \{(x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha - x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)^2 + (x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha)^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{1/2} = \{(x_2 - x_1) \cos \alpha - (y_2 - y_1) \sin \alpha\}^2 + \{(x_2 - x_1) \sin \alpha + (y_2 - y_1) \cos \alpha\}^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{1/2} \\ &= \{(x_2 - x_1)^2 \cos^2 \alpha - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \sin \alpha \cos \alpha + (y_2 - y_1)^2 \sin^2 \alpha + (x_2 - x_1)^2 \sin^2 \alpha + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \sin \alpha \cos \alpha + (y_2 - y_1)^2 \cos^2 \alpha + (z_2 - z_1)^2\}^{1/2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

Демак, $\rho(M, N) = \rho(M', N')$. Юқоридаги $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлгани учун тўғри чизик атрофида буриш 1-тур ҳаракат деган ҳуқуққа эга.

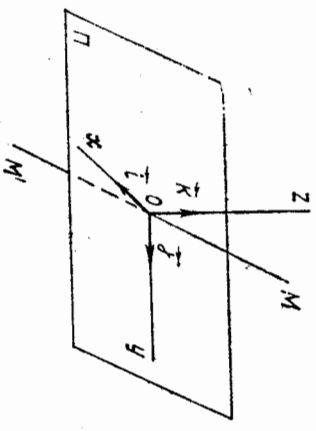
Битта тўғри чизик атрофидаги барча буришлар тўғрисидаги группани ҳосил қилади (буни мустақил исботланг).

3. Нуқтага нисбатан симметрия. E_3 да таяин S нуқта берилган бўлсин.

Тарриф. E_3 даги M, M' нуқталар учун S нуқта MM' ни чизикка тегишли бўлиб, $\rho(S, M) = \rho(S, M')$ бўлса, M' нуқталар S нуқтага нисбатан симметрик дейилади. Бу



195-чизма



196-чизма

таърифдан кўринадикки, икки нуқтанинг S га нисбатан симметрия бўлиши учун S нуқта учдари шу нуқтадаги кесمانинг ўртаси бўлиши керак, бундан нуқта берилган бўлса, унга симметрия нуқтани ясаш усули келиб чиқади:

S нуқта ўз-ўзига симметрия деб ҳисобланиб, уни *симметрия маркази* қилиб олинади (196-чизма).

Бу акслантириш ҳам E_3 нуқталарини ўз-ўзига бир қийматли алмаштиришдан ташқари, акслантириш учун нуқтага нисбатан симметрия алмаштиришдан иборатлиги келиб чиқади. $\mathcal{B} = (O, i, j, k)$ реперни шундай танлаб олайликки, $S = 0$ бўлса, $M(x, y, z)$ нуқта учун O га нисбатан симметрия нуқта $M'(-x, -y, -z)$ бўлади, чунки MM' кесма ўрта нуқтасининг координаталари:

$$\frac{x + (-x)}{2} = 0, \quad \frac{y + (-y)}{2} = 0, \quad \frac{z + (-z)}{2} = 0.$$

Демак, юқоридаги реперда O нуқтага нисбатан симметриянинг аналитик ифодаси куйидагича бўлади:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z. \quad (57)$$

Декан M нуқтадан M' нуқтага ўтишни куйидагича ҳам бажариш мумкин: $M \rightarrow M'' \rightarrow M'$, бунда M'' нуқта M' нинг xOy текисликка нисбатан симметрияси бўлиб, M'' ни Oz атрофида $\alpha = \pi$ бурчакка буриш билан M' ҳосил қилинади.

Демак, марказий симметрия текисликка нисбатан симметрия билан тўғри чизик атрофида $\alpha = \pi$ бурчакка буришнинг композицияси дан иборат экан, бундан эса нуқтага нисбатан симметрия иккинчи тур ҳаракат эканлиги келиб чиқади.

E_3 даги ҳаракатлардан бири параллел кўчиришдан иборат ҳўлга тўхталмаймиз, чунки текисликда кўрилган параллел кўчиришнинг таърифи ва хоссаглари E_3 да ҳам тўла сақланади.

Параллел кўчириш, текисликка нисбатан симметрия, тўғри чизик атрофида буришларни асосий ҳаракатлар деб атайлик. Буларнинг ҳар хил композицияларидан E_3 нинг турли ҳаракатларини ҳосил қилиш мумкин.

Масалан,

1. Тўғри чизик атрофида буриш билан шу тўғри чизикка параллел вектор қадар параллел кўчиришнинг композицияси ҳам ҳаракат бўлиб, у *винт бўйича ҳаракат* деб аталади; равшанки, у биринчи тур ҳаракат бўлади.

2. Π текисликка нисбатан симметрия билан Π га перпендикуляр тўғри чизик атрофида $\alpha = \pi$ бурчакка буришнинг композицияси *бу-*

риш симметрияси деб аталган ҳаракатдан иборат бўлади, равшанки, бу иккинчи тур ҳаракатдир.

3. Π текисликка нисбатан симметрия билан a вектор ($a \parallel \Pi$) қадар параллел кўчиришнинг композицияси *сирпачиқчи симметрия* деб аталган ҳаракатдир, бу ҳам иккинчи тур ҳаракат бўлади.

40-§. Ҳхшашлик алмаштириш. Ҳхшашликлар группаси

f алмаштириш E_n нинг алмаштиришларидан бири бўлсин.

Таъриф. Агар $\forall A, B \in E_n$ учун ҳамда $k > 0$ сон учун $f(A), f(B) = k \cdot r(A, B)$ шарт бажарилса, f алмаштириш E_n нинг *ҳхшашлик алмаштириши* деб аталади.

$k > 1$ да икки нуқта орасидаги масофа Ҳхшаш алмаштиришда ортади, $k < 1$ да камаydi, $k = 1$ да f ҳаракатдан иборат. F, F' фигурадан бири иккинчисидан Ҳхшашлик алмаштириши натижасида ҳосил қилинса, улар *ҳхшаш фигуралар* дейилади.

Ҳхшашлик алмаштиришининг яна бир хусусий ҳоли гомотетиядир (35-§).

Гомотетияда бир-бирига гомотетик нуқталар билан гомотетия маркази S бир тўғри чизикда ётади. k коэффициентлиги S марказли гомотетияни H_S^k билан белгиласак, бир-бирига гомотетик A, A' нуқталарни $H_S^k(A) = A'$ кўринишда ёзиш мумкин:

$$\forall M, N \in E_n \text{ ҳамда } H_S^k(M) = M', \quad H_S^k(N) = N' \text{ десак, } \Rightarrow \Rightarrow \vec{SM}' = k\vec{SM}, \quad \vec{SN}' = k\vec{SN}, \text{ булардан:}$$

$$\vec{M'N}' = \vec{M'S} + \vec{SN}' = \vec{SN}' - \vec{SM}' = k(\vec{SN} - \vec{SM}) = k \cdot \vec{MN}. \quad (58)$$

MN тўғри чизикдаги бироқ P нуқтани олсак, $H_S^k(P) = P'$ нуқтадан учун (58) га асосан

$$\vec{M'P}' = k\vec{MP}, \quad (59)$$

декан $\vec{MP} \parallel \vec{M'P}' \Rightarrow \vec{MP} = \lambda \vec{M'P}'$ ёки $\lambda = (MN; P)$, демак,

$\vec{M'P}' = \lambda \vec{M'N}'$ ёки $\lambda = (M'N'; P')$. Бу мулоҳазалар уч нуқта олдиди нисбатининг гомотетияда сақланишини кўрсатади. $(MN; P) = (M'N'; P')$ дан эса гомотетияда кесма образи кесма, нур образи нур, тўғри чизик образи тўғри чизик, ярим текислик образи ярим текислик деган ҳўлоса келиб чиқади.

Йўналтирувчи вектори MN дан иборат u тўғри чизикнинг образи

учун $H_S^k(u) = u'$; (58) га асосан $\vec{M'N}' \parallel \vec{MN} \Rightarrow$ гомотетияда тўғри чизикнинг образи ўзига параллел тўғри чизикдир.

Бундан ташқари, гомотетияда m ўлчовли текисликнинг образи яна m ўлчовли текислик, бурчак образи шу бурчакка конгруэнт бурчак эканини исботлаш мумкин (буни мустақил машқ сифатида исботлан).

Декарт репериди учун гомотетия маркази координаталар бошидан иборат бўлса ($S=0$), мос $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ нукталар координаталарини боғловчи муносабат куйидагича бўлади:

$$x'_1 = kx_1, x'_2 = kx_2, \dots, x'_n = kx_n.$$

1-теорема. k коэффициентли гомотетия $|k|$ коэффициентли ўхшашлик алмаштиришидир.

Исбот. Декарт репериди олинган $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ нукталарга гомотетияда мос келган нукталар $A'(kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$, $B'(ky_1, ky_2, \dots, ky_n)$ дан иборат. У ҳолда

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2},$$

$$\rho(A', B') = \sqrt{(ky_1 - kx_1)^2 + (ky_2 - kx_2)^2 + \dots + (ky_n - kx_n)^2} = |k| \rho(A, B).$$

демак, $\rho(A', B') = |k| \rho(A, B)$.

2-теорема. Ҳар қандай ўхшашлик алмаштириши гомотетия билан ҳаракатнинг композициясидан иборатдир.

Исбот. Айтайлик, f алмаштириш E_n нинг k коэффициентли ўхшашлик алмаштириши бўлсин ($k > 0$). E_n да ихтиёрий S марказли ва k коэффициентли N_S^k гомотетияни қарайлик. $\forall A, B, \in E_n$ учун $\rho(f(A), f(B)) = \rho(A', B') = k\rho(A, B)$. $N_S^k(A) = A'$, $N_S^k(B) = B' \Rightarrow A'V' = kAB$, булардан $|A'V'| = k|AB| \Rightarrow \rho(A', B') = k\rho(A, B) \Rightarrow \rho(A', B') = \rho(A', B')$, демак, $A'V' \equiv A'V'$, у ҳолда шундай d ҳаракат мавжудки, у $A'V'$ ни $A'V'$ га ўтказди; $f = dN_S^k$. \blacktriangle

Бу теоремадан муҳим натижаларни чиқариш мумкин. 1-натижа. Коэффициенти нолдан фарқли гомотетия билан ҳаракат композицияси ўхшашлик алмаштиришидир. 2-натижа. Ўхшаш икки фигура учун шундай учинчи фигура мавжудки, у биринчи фигурга гомотетик бўлиб, иккинчисига конгруэнтдир. 3-натижа. Ўхшаш алмаштиришда уч нуктанинг олдий нисбати сақланади, демак, ўхшаш алмаштириш аффин алмаштиришининг хусусий ҳолидир. 4-натижа. Ўхшашлик алмаштиришда бурчак катталиги сақланади (чунки гомотетия билан ҳаракатда бурчак катталиги сақланади).

5-натижа. Ўхшашлик алмаштиришда текисликнинг ўлчови ақланади.

Энди ўхшашлик алмаштиришининг координаталардаги ифодасини кўрайлик. E_n даги декарт репериди f ўхшашлик алмаштириши текширайлик, у ҳолда юқоридagi мулоҳазаларга асосан $f = d \cdot N_S^k$. Бу реперга нисбатан $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(A) = A'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ бўлсин. Гомотетия маркази координаталар боши деб қабул қилинса,

$$N_S^k(A) = A'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

бундан $x'_1 = kx_1, x'_2 = kx_2, \dots, x'_n = kx_n$.

d ҳаракат A' ни A' га ўтказгани учун бу нукталар координаталарини боғловчи муносабатлар:

$$\begin{aligned} x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + c_{10} \\ x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + c_{20} \\ &\dots \\ x'_n &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + c_{n0} \end{aligned} \quad (60)$$

бўлиб, c_{ij} лар (47) ва (48) шартларни қаноатлантириши керак. Натикада:

$$\begin{aligned} x'_1 &= k(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n) + c_{10} \\ x'_2 &= k(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n) + c_{20} \\ &\dots \\ x'_n &= k(c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n) + c_{n0}. \end{aligned} \quad (61)$$

Булар изланган формулалардир.

3-теорема. E_n нинг барча ўхшаш алмаштиришларининг Φ тўлиқми группани ҳосил қилади.

Исбот. $\forall f_1, f_2 \in \Phi$ деб оلسак, улар мос равишда k_1, k_2 коэффициентли ўхшашлик алмаштиришлар бўлсин, $\forall A, B \in E_n$ учун f_1 да $\rho(A', B') = k_1\rho(A, B)$; f_2 да $\rho(A'', B'') = k_2\rho(A', B')$, $f_1 f_2$ да эса $\rho(A'', B'') = k_2\rho(A', B') = k_2[k_1\rho(A, B)] = k_2k_1\rho(A, B)$, бундан $f_1 f_2$ алмаштириш $k_1 k_2$ коэффициентли ўхшашлик алмаштиришидир; f_1 ўхшашлик алмаштириш k_1 коэффициентли бўлса, $\frac{1}{k_1}$ коэффициентли ўхшашлик алмаштириш f_1^{-1} бўлади, чунки f_1 да $\rho(A', B') = k_1\rho(A, B)$ бўлиб, f_1^{-1} да $\rho(A, B) = k_1 \frac{1}{k_1} \rho(A, B) = \rho(A, B)$, бу эса f_1^{-1} алмаштиришининг айнан алмаштириш эканлигини билдиради. Φ тўлиқлам E_n нинг ўхшашлик группаси деб аталади.

Ҳар бир ўхшашлик алмаштириш бирор аффин алмаштиришининг тусусий ҳоли бўлгани учун куйидаги натижага келамиз.

Ўхшашлик группаси аффин группанинг қисм группасидир. Демак, аффин группанинг барча инвариантлари Φ учун ҳам инвариант ролини бажаради, лекин бунга қўшимча равишда Φ нинг N_S^k хос инвариантлари ҳам мавжуддир, масалан, Φ даги ҳар бир алмаштиришда бурчак ўзига конгруэнт бурчакка ўтади.

41-§. Чизикли формалар

V вектор фазо, R ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, $\varphi: V \rightarrow R$ акслантириш аниқланган, яъни V нинг ҳар бир x вектори учун R дан таяин битта сон мос келтирилган бўлсин. U ҳолда V да *вектор аргументли скаляр функция берилган дейилади*. Уни $\varphi = \varphi(x)$ деб белгилаймиз. Масалан, $\varphi(x) = |x|$, бу ерда V нинг ҳар бир векторига унинг модулини мос келтирилиб, вектор аргументли скаляр функция ҳосил қилинган, бу функциянинг аниқланиш соҳаси векторли евклид фазоси бўлиб, қийметлар соҳаси номанфий ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

Т.а.р.и.ф. Агар вектор аргументли $\varphi(x)$ скаляр функция куйидаги икки шартни қаноатлантирса, у *чизикли функция* дейилади.

- $\forall x, y \in V$ учун $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
- $\forall x \in V$ ва $\forall \lambda \in R$ учун $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$.

$$\begin{aligned} \text{пр}_i(x+y) &= \text{пр}_i x + \text{пр}_i y, \\ \text{пр}_i(\lambda x) &= \lambda \text{пр}_i x. \end{aligned}$$

Векторнинг ўқдаги проекцияси чизикли функциядир.

2-мисол. V да a эркин вектор, x, y эса ўзгарувчи векторлар бўлса, ax, ay скаляр кўпайтмалар чизикли функция бўлади, чунки скаляр кўпайтманинг хоссасига асосан:

$$\begin{aligned} a \cdot (x+y) &= ax + ay, \\ a(\lambda x) &= \lambda(ax). \end{aligned}$$

V_n да $\varphi(x)$ чизикли функция берилган деб фарз қилайлик. Шу фазодаги таяин $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ базисда ҳар бир вектор аниқ координаталарга эга, яъни

$$x(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

U ҳолда $\varphi(x)$ чизикли бўлгани учун

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = \varphi(x_1 e_1) + \varphi(x_2 e_2) + \\ &+ \dots + \varphi(x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + \dots + x_n \varphi(e_n). \end{aligned} \quad (1)$$

e_1, e_2, \dots, e_n лар V_n нинг векторлари булгани учун $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ ҳақиқий сонлардан иборат, уларни мос равишда $a_1,$

a_2, \dots, a_n деб белгилайлик. U ҳолда (1) тенглик куйидаги кўринишда ёзилади:

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (2)$$

демак, $\varphi(x)$ функция x нинг бирор базисга нисбатан координаталари орқали (2) кўринишда биринчи даражали бир жинсли кўпхад шаклда ифодаланади.

Т.а.р.и.ф. Биринчи даражали бир жинсли кўпхад *чизикли форма* деб аталади (базан *биринчи даражали форма* деб ҳам юритилади).

(2) ифода чизикли формалар.

Чизикли форманинг муҳим геометрик хоссалари бор.

$$1^\circ. \varphi(x) = \text{const} \Rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c \quad (3)$$

бўлсин, n номальумли чизикли тенглама n ўлчовли Евклид фазосида гипертрекисликни ифодалайди.

2°. $\varphi(x) = c$ даги c га турли қийметлар бера бориб, параллел гипертрекисликлар ҳосил қиламиз.

Бичизикли форма. $\varphi: V \times V \rightarrow R$ акслантириш берилган бўлсин (бунда $V \times V$ ифода V фазонинг ўз-ўзига декарт кўпайтмаси), яъни V нинг иктиёрий икки x, y векторига табиий битта ҳақиқий сон мос келтирилган бўлсин, бу вақтда V да икки вектор аргументли скаляр функция аниқланади. Уни $\varphi = \varphi(x, y)$ деб белгилаймиз.

1-мисол. $\varphi(x, y) = x \cdot y$; V_n даги иктиёрий икки векторга уларнинг скаляр кўпайтмасидан ҳосил қилинган сонни мос келтирсак, икки вектор аргументли скаляр функция ҳосил қилинади.

2-мисол. V_3 да a эркин вектор берилган бўлсин, V_3 нинг иктиёрий x, y векторлари орқали аниқланадиган $[x, y]$ вектор билан a нинг скаляр кўпайтмаси (аралаш кўпайтма) икки вектор аргументли скаляр функция $\varphi(x, y) = (a, x y)$ бўлади.

Т.а.р.и.ф. Икки вектор аргументли $\varphi(x, y)$ скаляр функция ҳар бир аргументига нисбатан чизикли бўлса, у *бичизикли функция* деб аталади, яъни $\forall x, y, z \in V_n$ ва $\forall \lambda \in R$ учун куйидаги шартлар бажарилади:

- $\varphi(x+y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$,
- $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$,
- $\varphi(x, y+z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$,
- $\varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$.

1-мисол. V_n даги икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бичи-

зиқли функцияга нисол бўла олади, чунки икки векторнинг скаляр кўпайтмаси юқоридаги шартларга бўйсунлади.

$$\begin{aligned} & 2\text{-мисол. } \varphi(\vec{x}), \psi(\vec{y}) \text{ чиизқили формалар бўлса, } \varphi(\vec{x})\psi(\vec{y}) = \\ & = f(\vec{x}, \vec{y}) \text{ ифода бичизқили функция бўлади, ҳақиқатан ҳам,} \\ & 1. f(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x} + \vec{z}) \cdot \psi(\vec{y}) = \varphi(\vec{x})\psi(\vec{y}) + \varphi(\vec{z})\psi(\vec{y}) = \\ & = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{z}, \vec{y}). \end{aligned}$$

$$2. f(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\lambda\vec{x})\psi(\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x})\psi(\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}),$$

бу ерда (4) даги 3- ва 4- шартларнинг бажарилишини ҳам кўрса-тиш мумкин.

Энди икки вектор аргументли скаляр функциянинг координата-лардаги ифодасини толайлик. V_n даги $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ баазис-да $x \in V_n, y \in V_n$ векторлар мос равишда $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ координаталарга эга дейлик ҳамда (4) шартларни эътибор-га олсак:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, \vec{y}) &= \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n) = \\ &= x_1y_1\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + x_1y_2\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \dots + x_1y_n\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_n) + \\ &+ x_2y_1\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + x_2y_2\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \dots + x_ny_n\varphi(\vec{e}_n, \vec{e}_n); \\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \text{ лар } V_n \text{ нинг векторлари бўлгани учун } \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2), \\ \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_3), \dots, \varphi(\vec{e}_n, \vec{e}_n) &\text{ — тайин сонлардан иборат, уларни } a_{ij} = \\ &= \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j), (i, j = 1, 2, \dots, n) \text{ деб белгилайлик, натижада} \\ \varphi(\vec{x}, \vec{y}) &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n; \text{ ёки кичикачароқ} \end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j. \quad (5)$$

(5) нинг ўнг томонидаги иккинчи даражали (x_i, y_j) — ўзгарувчи-лар) кўпхад бичизқили формалар, a_{ij} эса шу форманинг берилган баазисдаги коэффициентларидир; шу коэффициентлардан куйидаги квадрат матрицани тузамиз:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Бу матрица бичизқили форманинг матрицаси деб аталади. Де-мак, V_n да ҳар бир бичизқили формага тайин баазисда n -тартибли аниқ квадрат матрица туғри келади. Хусусий ҳолда V_n даги орто-нормаланган баазисда $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ бўлиб, унинг матрицаси:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Таръриф. Агар $\forall x, y \in V_n$ векторлар учун $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ шарт ўринли бўлса, φ ни *симметрик бичизқили форма* деб ата-лади, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = -\varphi(\vec{y}, \vec{x})$ ҳолда эса *антисимметрик бичизқили форма* дейлади. Симметрик бичизқили форма учун $a_{ij} = a_{ji}$ (чунки $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \varphi(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$), антисимметрик бичизқили форма учун $a_{ij} = -a_{ji}$; $i = j$ ҳолда $a_{ii} = -a_{ii}$ ёки $a_{ii} = 0$). Демак, симмет-рик бичизқили форманинг матрицаси ҳам симметриклир, антисимметрик бичизқили форма матрицасининг бош диагоналидаги элементлари но-лга тенг, (6) матрицанинг ранги (5) бичизқили форманинг ранги деб юртылади.

42-§. Квадратик формалар

Симметрик бичизқили $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ форма берилган бўлсин.

Таръриф. Симметрик бичизқили $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ формадан $x = y$ ҳол-да ҳосил қилинган $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ форма *квадратик форма* деб аталади. $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ ни бичизқили форманинг *квадратик формаси* деб юртылади; $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ бу ҳолда $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ учун *кутубий форма* дейлади.

Мисол. Иккита x_1, x_2 ўзгарувчили квадратик форманинг ум-умий кўриниши

$$\varphi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

учун x_1, x_2 ўзгарувчили квадратик форманинг умумий кўриниши эса $\varphi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$.

Теорема. Бичизқили *кутубий форма* ўзининг *квадратик фор-маси билан тўлиқ аниқланади*.

Исбот. $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x})$ деб белгилаб, $F(\vec{x} + \vec{y})$ ифодани тек-ширайлик, бунда ҳам $y \in V$, белгиланишига асосан, $F(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})$; бичизқили форманинг хоссаглари ва симметрик-лигини ҳисобга олсак,

$$\vec{\varphi}(x+y, x+y) = \vec{\varphi}(x, x) + \vec{\varphi}(y, y) + \vec{\varphi}(y, x) + \vec{\varphi}(x, y) = F(x) +$$

$$+ 2\vec{\varphi}(x, y) + F(y),$$

бундан $\vec{\varphi}(x, y) = \frac{1}{2}[F(x+y) - F(x) - F(y)]$; бу изланган ифода-
дир. ▲

Энди квадратлик форманинг координатлардаги ифодасини кўрай-
лик.

(5) ни симметрик бичиққили форма деб олсак ҳамда $x = y$ шарт-
ни эътиборга олсак,

$$\vec{\varphi}(x, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2. \quad (7)$$

(7) квадратик форманинг матрицаси деб, унинг кутбнй формасининг
(6) матрицесига айтқилади, (6) матрицанинг ранги (7) квадратик фор-
манинг ранги деб аталади. Агар бирор базисда (бундай базиснинг
мавжудлигини кейинроқ кўрсатамиз) барча $a_{ii} = 0$ ($i \neq j$) бўлса,

(7) квадратик форма куйидаги кўринишини олади:

$$\vec{\varphi}(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2. \quad (8)$$

(8) каноник кўринишдаги квадратик форма деб аталади. У ҳолда
каноник кўринишдаги квадратик форманинг матрицаси ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишни олади.

Биз биринчи бўлимда иккинчи таргуболи чиққининг умумий тенг-
ламасини соддалаштиришида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad (*)$$

учҳадни координатлар системасини буриш билан $A'x'^2 + B'y'^2$ кў-
ринишга келтирган эдик, шунинг билан (*) кўринишдаги квадратик
формани каноник кўринишга келтирган эканмиз. Квадратик формани
каноник кўринишга келтириш мўҳим назарий ва амалий аҳамиятта
молик масалалардан биридир.

Бу масалани ҳал қилишда бир неча усуллар мавжуд бўлиб, биз
улардан бирини куйида кўриб ўтатимиз.

1-теорема. Агар (7) квадратик формада бирорта ҳам ўз-
гарувчининг квадратли қатнашмаса, уни чиқққли алмаштиришлар
ёрдамида камда битта ўзгарувчининг квадратли қатнашган квад-
ратик формага келтириши мўмкин.

Исбот. Теорема шартга асосан (7) да $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} =$
 $= 0$, у ҳолда (7) квадратик форма куйидаги кўринишини олади:

$$\vec{\varphi}(x, x) = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1, n}x_{n-1}x_n, \quad (9)$$

бу ерда a_{ij} ($i \neq j$) лардан камда биттаси нолдан фарқли, умумият-
лиқни буэмаслик учун $a_{12} \neq 0$ бўлсин дейлик. У ҳолда куйидаги
чиқққли алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_3 &= y_3, \\ &\dots \\ x_n &= y_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Бу чиқққли алмаштириш аиниматандир, чунки унинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(10), (9) дан

$$\vec{\varphi}(x, x) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 + \dots + 2a_{n-1, n}y_{n-1}y_n.$$

Бу квадратик форманинг биринчи икки ҳади изланган кўринишдадир.

Бу ҳадлар йўқолиб кетмайди, чунки қолган ҳадларда бунга ўхшаш
ҳадлар йўқ (қолган ҳадлар бир-бирдан камда битта y_i билан фарқ
қилади). ▲

Мисол. $\varphi = 2x_1x_2 - x_2x_3$ ни ўзгарувчиларнинг квадратлари қат-
нашган ҳолга келтиринг.

Е ч и ш. Куйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_2, \\ x_3 &= y_1 - y_2. \end{aligned}$$

бу чиқққли алмаштиришнинг детерминанти аиниматан, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

У ҳолда

$$\varphi = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - y_2(y_1 - y_2) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - y_2y_1 + y_2y_2.$$

2-теорема. Агар (7) квадратик формада бирор ўзгарув-
чининг квадратли ва ундан бошқа шу ўзгарувчи иштирок этган
ҳадлар мавжуд бўлса, чиқққли алмаштириш ёрдамида улар-

нинг барчасини билта ўзгарувчининг квадрати қатнашган квадратик формага келтириш мумкин.

Исбот. (7) да $a_{11} \neq 0$ бўлган ҳамда қолган ҳақларда x_1 иштирок этсин (агар бошқа ҳақларда x_1 иштирок этмаса, у ҳолда (7) шу ўзгарувчига нисбатан каноник кўринишига келтирилган бўлади, бу ҳолда теореманинг исботи равшан бўлиб, қолган ўзгарувчилар учун исботлаш керак). Энди (7) ни куйиндаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\varphi(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \psi(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (11)$$

бунда $\psi(x_2, x_3, \dots, x_n)$ ифода x_1 қатнашмаган квадратик форма-дир. Куйидаги чизқили алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = x_2 \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad (12)$$

бу чизқили алмаштиришнинг детерминанти a_{11} га тенг бўлиб, шартга асосан у нолдан фарқлидир.

$$\begin{aligned} \text{У ҳолда (12) } \Rightarrow \frac{1}{a_{11}} y_1^2 &= \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 = \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + f(x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (13)$$

Бунда $f(x_2, x_3, \dots, x_n)$ ифода x_1 ни ўз ичига олмаган квадратик форма-дир. (11) дан (13) ни ҳақлаб айирсак, $\varphi(x, x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 = \psi(x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_2, x_3, \dots, x_n)$; бу тенгликнинг ўнг

томонидаги ифода ҳам квадратик форма-дир, уни $\alpha(y_2, y_3, \dots, y_n)$ деб белгилаймиз:

$$\varphi(x, x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \alpha(y_2, y_3, \dots, y_n). \quad (14)$$

Мисол. $\varphi = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$ квадратик формага иккинчи теоремани талбиқ қилайлик ($a_{11} = 1 \neq 0$, бу ерда x_1 ўзгарувчи учинчи ва тўртинчи ҳақда иштирок этмоқда).

x_1 қатнашган ҳақларни гуруҳлаймиз:

$$\varphi = x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2.$$

Куйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} y_3 &= x_3; \\ y_2 &= x_2, \\ y_1 &= x_1 - 2x_2 - 2x_3, \end{aligned}$$

тегишли детерминант:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$\begin{aligned} y_1^2 &= x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3, \\ \varphi - y_1^2 &= -x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_2x_3 = -y_2^2 - 4y_3^2 - 8y_2y_3 \end{aligned}$$

$$\varphi = y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2 - 8y_2y_3.$$

Эки

3-теорема. Чизқили алмаштириш ёрдамида ҳар қандай квадратик формани каноник кўринишга келтириш мумкин. Исбот. Бу теоремани исботлаш учун математик индукция

методидан фойдаланамиз. $n = 1$ да (14) ифода $\varphi(x, x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2$ кў-

ринишда бўлиб, бу бир ўзгарувчилик квадратик форманинг каноник кўринишидир. Энди $(n - 1)$ та ўзгарувчи учун квадратик форма каноник кўринишга келтирилган деб, уни n та ўзгарувчи учун каноник кўринишга келтириш мумкинлигини исботлаймиз. (14) даги $\alpha(y_2, y_3, \dots, y_n)$ да $(n - 1)$ та ўзгарувчи бўлгани учун шундай

$$\begin{aligned} z_2 &= b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n, \\ z_3 &= b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + \dots + b_{3n}y_n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (15)$$

$$z_n = b_{n2}y_2 + b_{n3}y_3 + \dots + b_{nn}y_n$$

айнимаган чизқили алмаштириш мавжудки, у $\alpha(y_2, y_3, \dots, y_n)$ ни куйидагича ёзиш имконини беради:

$$\alpha(y_2, y_3, \dots, y_n) = c_{22}z_2^2 + c_{33}z_3^2 + \dots + c_{nn}z_n^2. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n, \\ &\dots \dots \dots \\ z_n &= b_{n2}y_2 + b_{n3}y_3 + \dots + b_{nn}y_n. \end{aligned} \quad (17)$$

x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчиларни аввал (12) бўйича y_1, y_2, \dots

y_n га, буларни эса ўз йўлида (17) бўйича z_1, z_2, \dots, z_n га ал-
маштрисак, (7) кўйидаги кўринишни олади:

$$\varphi(x, x) \rightarrow \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + c_{22} z_2^2 + c_{33} z_3^2 + \dots + c_m z_m^2$$

бу изланган формадир. ▲

Квадратик формани каноник кўринишга келтириш мумкин-
лигини юқорида келтирилган 3 та теорема тасдиқлайди. Бу
теоремани исботлаш усули француз математиги Лагранж то-
монидан тақлиф қилингани учун уни квадратик формани Лаг-
ранж усули билан каноник кўринишга келтириш дейилади.
Демак, Лагранж усулининг моҳияти куйидагича: агар n та
ўзгарувчили квадратик формада бирорта ҳам ўзгарувчининг
кватрати қатнашмаса, биринчи теоремага асосан тайин чи-
зиқли алмаштиришни танлаб олиб, камида битта ўзгарувчининг
кватрати қатнашган форматга келтирилади, сўнгра иккинчи
теоремани татбиқ қилиб, (14) кўринишга келтирилади, бунда
ҳосил қилинган $(n-1)$ та ўзгарувчили $\alpha(y_2, y_3, \dots, y_n)$ квадра-
тик форма учун шу иш яна такрорланади ва Ҳ. қ.

Баъзи ҳолларда квадратик формани каноник кўринишга
келтиришда «тўлиқ квадратларга келтириш усули» деган усул-
дан ҳам фойдаланилади.

Масалан, $\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$ ни каноник кўри-
нишга келтириш талаб қилинган бўлсин. Берилган квадратик форма-
ни куйидагича ёзиб олайлик:

$$\begin{aligned} \varphi &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2 \cdot 2x_2x_3 + (2x_3)^2 + 4x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2 \end{aligned}$$

Куйидагича чизикли алмаштиришни оламиз:

$$\begin{aligned} y_3 &= x_3; \\ y_2 &= x_2 + 2x_3, \\ y_1 &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

бунинг детерминанги

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

у ҳолда $\varphi = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$.

Эслатма. Битта квадратик формани Лагранж усули ва
тўлиқ квадратлар усули билан каноник кўринишга келтириш
нимизда жавоблар ҳар хил бўлиши мумкин, бунга таажжубла-
ниш керак эмас, чунки улар турли базисларда ифодаланиши
мумкин.

43-§. Нормал кўринишдаги квадратик форма. Инерция қонуни.
Мусбат аниқланган квадратик форма

Фараз қилайлик, $\varphi(x, x)$ квадратик форма каноник кўринишга
келтирилган бўлсин, яъни

$$\varphi(x, x) \rightarrow a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2. \quad (18)$$

Квадратик формани каноник кўринишга келтиришимизда унинг мат-
рицаси ҳам ўзгаради, лекин бундай ўзгаришда «Алгебра ва сонлар
назарияси» курсидан маълумки, матрицанинг ранги ўзгармайди, яъни
rang $M = \text{rang } M_1$.

Бунда M берилган квадратик форма матрицаси, M_1 эса шу квадра-
тик форманинг каноник ҳолга келтирилгандаги матрицаси (бу, ал-
батта диагональ кўринишдаги матрица).

Агар M нинг ранги r бўлса ($r \leq n$), M_1 нинг ҳам ранги r бў-
либ, M_1 нинг диагональда нолдан фарқли r та элемент бўлади.
Ўзгарувчилар ўринларини (агар шу талаб қилинса) алмаштириш би-
дан M_1 ни куйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_{rr} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Энди $\varphi(x, x)$ куйидаги каноник кўринишни олади:

$$\varphi(x, x) \rightarrow a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{rr}x_r^2. \quad (19)$$

Бу квадратик формадаги a_{ii} коэффициентлар мусбат ва манфий
ҳақиқий сонлардан иборат бўлиши мумкин. Фараз қилайлик, шу
коэффициентлардан k таси мусбат, қолганлари манфий бўлсин, яъни

$$\varphi(x, x) \rightarrow b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{kk}x_k^2 - b_{k+1, k+1}x_{k+1}^2 - \dots - b_{rr}x_r^2,$$

бунда $b_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots, r$.

Куйидаги чизикли алмаштиришни бажарамиз:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}} y_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{b_{22}}} y_2, \quad \dots, \quad x_r = \frac{1}{\sqrt{b_{rr}}} y_r.$$

Натижада

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2. \quad (20)$$

Квадратик форманинг бундай кўриниши унинг *нормал кўриниши*
дейилади. (20) дегн мусбат ҳадлар ва манфий ҳадлар сони мос ра-
вида шу форманинг *мусбат* ва *манфий индекслари* деб аталади.

Куйидаги теорема ўринлидир (бу теорема ҳақиқий квадратик формалар учун инерция қонунини деб ҳам юртыталади).

Теорема. Квадратик формани қайси усул билан каноник кўринишга келтиришдан қатъий назар, унинг мусбат ва манфий индекслари ўзгармасдир, яъни бу индекслар квадратик форманинг қайси базисда олиншига боғлиқ эмас.

Исбот. Фараз қилайлик, Φ бирор базисда (20) кўринишда, бошқа базисда эса

$$\Phi = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - z_{n+1}^2 - \dots - z_r^2 \quad (21)$$

бўлсин. $k = m$ эканини исботласак, мақсадга эришамиз. Фараз қилайлик, $k \neq m$ аниқроғи $k > m$ бўлсин. Ҳазарувчиларни алмаштириш формуллари куйидагича:

$$\begin{aligned} z_1 &= R_{11}y_1 + R_{12}y_2 + \dots + R_{1n}y_n \\ z_2 &= R_{21}y_1 + R_{22}y_2 + \dots + R_{2n}y_n \\ &\dots \\ z_n &= R_{n1}y_1 + R_{n2}y_2 + \dots + R_{nn}y_n \end{aligned} \quad (22)$$

Бўлиб, бу айниматан алмаштиришдан иборат дейлик, (22) нинг қий-магларини (21) га қўйсак, табиийки, (20) ни ҳосил қиламиз, яъни z_1, z_2, \dots, z_n лар (22) бўйича ифодаланганда куйидаги айтият ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - z_{n+1}^2 - \dots - z_r^2 = \\ = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Куйидаги ёрдамчи бир жинсли тенгламалар системасини тузая-миз:

$$\begin{aligned} R_{11}y_1 + R_{12}y_2 + \dots + R_{1k}y_k &= 0, \\ R_{21}y_1 + R_{22}y_2 + \dots + R_{2k}y_k &= 0, \\ &\dots \\ R_{m1}y_1 + R_{m2}y_2 + \dots + R_{mk}y_k &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

$k > m$ бўлгани учун бу системада тенгламалар сони номарълум-лар сонидан камдир, демак, бу система ноъй бўлмаган ечимга эга. Улардан бири y_1, y_2, \dots, y_k бўлсин. Бу ечимларни (23) ай-тиятга қўйсак ҳамда улар ёнига

$$\begin{aligned} y_{k+1} = 0, y_{k+2} = 0, \dots, y_n = 0, \\ z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_m = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

системани қўйсак, у ҳолда (23) — (25) дан куйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2 = -z_{m+1}^2 - z_{m+2}^2 - \dots - z_r^2. \quad (26)$$

Лекин (26) тенглик ўринли эмас, чунки унинг чап қисми қатъий мусбат, ўнг томони эса манфий ёки нолдир. Шунга

ўхшаш, $k < m$ нинг ҳам юз бермаслигини исботлаш мумкин (исботланг).

Демак, $m = k$. ▲

Шуни таъкидлаймизки, квадратик форманинг каноник кў-риниши ҳар хил базисда умуман ҳар хил кўринишда бўлади, лекин шу квадратик форманинг нормал кўриниши барча базис-ларда бир хилдир.

Мисол. $\Phi = x_1^2 + 18x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 30x_2x_3$ квадратик формани нормал ҳолга келтиринг.

Е ч и ш. Аввало Φ ни каноник кўринишга келтирамиз. Бу-нинг учун берилган формани диққат билан кўздан кечирсак, x_1 ўзгарувчининг квадрати ва ундан ташқари бошқа ҳалларда ҳам x_1 қатнашмоқда, у ҳолда 2-теоремата асосланиб иш кўра-миз: x_1 қатнашган ҳалларнинг барчасини тўплаб ёзамиз:

$$\Phi = (x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3) + 18x_2^2 + 9x_3^2 - 30x_2x_3;$$

куйидаги айниматан чиққли алмаштиришни оламиз:

$$y_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = x_3.$$

Бундан

$$y_1^2 = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 12x_2x_3;$$

бу ерда $a_{11} = 1$ бўлгани учун

$$\Phi - y_1^2 = 9x_2^2 + 5x_3^2 - 18x_2x_3.$$

Демак,

$$\Phi = y_1^2 + 9y_2^2 + 5y_3^2 - 18y_2y_3.$$

Энди $\alpha = 9y_2^2 + 5y_3^2 - 18y_2y_3$ формани каноник кўринишга келти-рамиз:

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = 9y_2 - 9y_3, \quad z_3 = y_3$$

десақ,

$$z_2^2 = 81(y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2).$$

У ҳолда

$$\alpha - \frac{1}{9} z_2^2 = 9y_2^2 - 18y_2y_3 + 5y_3^2 - 9y_2^2 + 18y_2y_3 -$$

$$- 9y_3^2 = -4z_3^2, \quad \alpha = \frac{1}{9} z_2^2 - 4z_3^2$$

ва $\Phi = z_1^2 + \frac{1}{9} z_2^2 - 4z_3^2$. Куйидаги чиққли алмаштиришни бажарай-миз:

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = 3z_2, \quad u_3 = \frac{1}{2} z_3;$$

Берилган квадратик форма куйидаги нормал кўринишни олади:

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

Равшанки, бу форманинг мусбат индекси 2 га, манфий индекси эса 1 га тенгдир.

Нормал кўринишга келтирилган квадратик форма барча ҳадларининг сони r шу форманинг ранги деб аталади.

Квадратик форма мусбат ҳадлари сонидан (уни k билан белгилайлик) манфий ҳадлари сонининг (уни l билан белгилайлик) айирмаси шу *квадратик форманинг сигнатураси* деб аталади. Бундан кўриниб турибдики, квадратик формани қайси усул билан каноник кўринишга келтирилганда ҳам сигнатура ўзгармас экан. φ нинг сигнатурасини s билан белгиласак, таърифга асосан $k-l = s$, лекин $k+l = r$ бўлгани учун

$$k = \frac{1}{2}(r+s), \quad l = \frac{1}{2}(r-s)$$

бўлади. Бу тенгламалардан кўринадикки, k, l, s, r дан икkitаси берилса, қолган икkitасини топиш мумкин.

Мисол. $\varphi = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ да $k = 3, l = 1, r = 4, s = 2$ дир.

Таъриф. $x \neq 0$ ҳолдаги барча x векторлар учун $\varphi(x, x)$ квадратик форма доимо мусбат бўлса, бу квадратик форма *мусбат аниқланган* деб аталади.

Масалан, а) $\varphi(x, x) = 3x_1^2 + 4x_2^2$ квадратик форма мусбат аниқлангандир, чунки x_1 ва x_2 нинг бир вақтда ноль бўлмаган барча қийметларида (яъни $x \neq 0$ да) $\varphi(x, x) > 0$.

б) $\varphi(x, x) = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$ квадратик формани олайлик. Уни $\varphi(x, x) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2$ кўринишда ёзсак, $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$ шартни қаноатлантирувчи барча x_1, x_2 учун $\varphi(x, x) = 0$ бўлади, демак, бу форма мусбат аниқланган эмас.

Теорема. n та ўзгарувчида квадратик форманинг мусбат аниқланган бўлиши учун бу форма мусбат ҳадларининг сони n га тенг бўлиши зарур ва етарлидир (бунда $n = \dim V$).
Исбот. Фараз қилайлик, квадратик форма

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n, \\ u_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ u_n &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n \end{aligned} \quad \text{бунда} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\varphi = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{nn}y_n^2 \quad (27)$$

каноник кўринишга келтирилган бўлсин.

Зарурий шарт. φ мусбат аниқланган бўлсин, у ҳолда барча b_{ii} ларнинг мусбат эканлигини исботлаймиз. y_1, y_2, \dots, y_n ўзгарувчиларнинг $y_1 = 1, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$ ($x \neq 0$) қийметларида

$\varphi = b_{11}$, бундан ташқари $\varphi > 0 \Rightarrow b_{11} > 0$; $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, \dots, y_n = 0$ қийметларида $\varphi = b_{22}$, $\varphi > 0 \Rightarrow b_{22} > 0$ ва х.к. Худди шунга ўхшаш, $b_{33} > 0, b_{44} > 0, \dots, b_{nn} > 0$; бу эса (27) да мусбат ҳадлар сонининг n га тенглигини билдиради.

Етарли шарт. (27) да мусбат ҳадлар сони n га бўлсин, яъни $b_{11} > 0, b_{22} > 0, \dots, b_{nn} > 0$. У ҳолда y_1, y_2, \dots, y_n нинг барчаси нолга тенг бўлмаган ҳама қийметларида (яъни $x \neq 0$ да) $\varphi > 0$. ▲

Мисол. $\varphi = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ квадратик форма мусбат аниқланганми?

Еч иш. φ ни куйидагича ёзиб олиб, каноник кўринишга келтирамиз:

$$\varphi = x_1^2 - 2 \cdot 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2.$$

$y_1 = x_1 - 2x_2, y_2 = x_2$ десак, $\varphi = y_1^2 + y_2^2$, бу эса φ нинг мусбат аниқланганлигини билдиради ($n = 2, k = 2$).

44-§. Аффин фазодаги квадратикалар. Квадрика тенгламасини каноник кўринишга келтириш

A_n бу n ўлчовли аффин фазо бўлсин.

Таъриф. A_n даги бирор $\mathcal{A} = (0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ реперда куйидаги иккинчи тартибли алгебраник тенгламани қаноатлантирувчи A_n нинг барча нуқталари туپлами *квадрика* (ёки иккинчи тартибли сирт) деб аталади (уни Q билан белгилайлик):

$$Q: a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \dots + 2a_{nn}x_n + a_0 = 0, \quad (28)$$

бунда $a_{ii} = a_{ii}$ бўлиб, булардан камда биттаси нолдан фарқли. $n = 2$ бўлган ҳолда Q нинг тенгламаси:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{11}x_1 + 2a_{22}x_2 + a_0 = 0;$$

бу ерда $x_1 = x, x_2 = y$ десак, $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{11}x + 2a_{22}y + a_0 = 0$ тенглама ҳосил қилинб, у аффин текисликда иккинчи тартибли чизикнинг тенгламасидир. Демак, аффин текисликда квадратика иккинчи тартибли чизикдир. $n = 3$ да (28) тенглама уч ўзгарувчида бўлиб, $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ десак,

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{11}x + \\ + 2a_{22}y + 2a_{33}z + a_0 = 0 \end{aligned}$$

кўринишда бўлади. Бу эса уч ўлчовли аффин фазодаги иккинчи тартибли сиртнинг тенгламасидир.

$$(28) \text{ тенгламани қисқароқ кўйидагича ёзиб олайлик:}$$

$$\Phi_2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \Phi_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad \text{бўлиб, } \Phi_2 \text{ квадратик форма,}$$

Φ_1 эса чизикли формалар.

Шунинг ҳам таъкидлаймизки, A даги квадратика тушунчаси координатлар системасини алмаштиришга нисбатан инвариантдир, бир реперда берилган иккинчи даражали тенглама бошқа реперда ёзилганда ҳам иккинчи даражали тенгламадан иборат бўлади (чунки бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтишда тенгламанинг даражаси ошмайди ва камайди).

Энди (29) тенгламани соддалаштириш билан шугулланайлик. Бу тенгламанинг чап томонидаги ифода биринчи кўшилдвичи Φ_2 квадратик формадан иборатлиги сабабли, уни алоҳида ёзиб олган, 43-§ да кўрсатилган усул билан каноник кўринишга келтирамиз; фараз қилайлик, u кўйидаги кўринишга келсин:

$$\Phi_2 = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_k y_k^2, \quad k \leq n, \quad b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k \neq 0. \quad (30)$$

u ҳолда шу (30) квадратик форма ёзилган реперда (29) ни ёзайлик:

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_k y_k^2 + 2c_1 y_1 + 2c_2 y_2 + \dots + 2c_n y_n + a_0 = 0 \quad (31)$$

равшанки, янги реперга ўтилганда Φ_1 чизикли форманинг ҳам коэффицентлари ўзгаради, уларни биз c_1, c_2, \dots, c_n деб белгилайдик.

(31) даги ҳақларни гурӯҳлаб, тўла квадратга келтирамиз:

$$b_1 \left(y_1^2 + 2 \frac{c_1}{b_1} y_1 + \frac{c_1^2}{b_1^2} - \frac{c_1^2}{b_1^2} \right) + b_2 \left(y_2^2 + 2 \frac{c_2}{b_2} y_2 + \frac{c_2^2}{b_2^2} - \frac{c_2^2}{b_2^2} \right) + \dots + b_k \left(y_k^2 + 2 \frac{c_k}{b_k} y_k + \frac{c_k^2}{b_k^2} - \frac{c_k^2}{b_k^2} \right) + 2c_{k+1} y_{k+1} + \dots + 2c_n y_n + a_0 = 0$$

ёки

$$b_1 \left(y_1 + \frac{c_1}{b_1} \right)^2 + b_2 \left(y_2 + \frac{c_2}{b_2} \right)^2 + \dots + b_k \left(y_k + \frac{c_k}{b_k} \right)^2 + 2c_{k+1} y_{k+1} + \dots + 2c_n y_n + a_0 - \left(\frac{c_1^2}{b_1^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2} + \dots + \frac{c_k^2}{b_k^2} \right) = 0.$$

Энди кўйидаги формулалар орқали янги реперга ўтамиз:

$$z_1 = y_1 + \frac{c_1}{b_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{c_2}{b_2}, \quad \dots, \quad z_k = y_k + \frac{c_k}{b_k}, \quad z_{k+1} = y_{k+1}, \quad \dots, \quad z_n = y_n$$

$$\text{ҳамда } a = -a_0 + \left(\frac{c_1^2}{b_1^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2} + \dots + \frac{c_k^2}{b_k^2} \right) \text{ белгилашни киритамиз;}$$

натижда:

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_k z_k^2 + 2c_{k+1} z_{k+1} + \dots + 2c_n z_n = a. \quad (32)$$

Агар $k = n$ бўлса, бу (32) тенглама

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_n z_n^2 = a \quad (33)$$

кўринишга олади. Кўйидаги ҳолларни кўриб чикайлик.

1-ҳол. (32) да $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_n = 0$ ва $a \neq 0$ бўлса,

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_k z_k^2 = a. \quad (34)$$

Чап томондаги каноник кўринишдаги квадратик формани нормал кўринишга келтирамиз, бунинг учун ўзгарувчиларни кўйидагича алмаштирамиз:

$$z_1 = \sqrt{\left| \frac{a}{b_1} \right|} u_1, \quad z_2 = \sqrt{\left| \frac{a}{b_2} \right|} u_2, \quad \dots, \quad z_k = \sqrt{\left| \frac{a}{b_k} \right|} u_k, \quad z_{k+1} = u_{k+1}, \quad \dots, \quad z_n = u_n;$$

буларни (34) га қўйсак,

$$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 1, \quad (35)$$

бунда e_1, e_2, \dots, e_k лар ёки $+1$ ёки -1 дир, аниқроғи $\frac{a}{b_i} > 0$ бўлса, $e_i = 1$, $\frac{a}{b_i} < 0$ бўлса, $e_i = -1$.

2-ҳол. $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_n = 0$ ва $a = 0$ бўлса, (32) қўйидаги кўринишга олади:

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_k z_k^2 = 0.$$

Ўзгарувчиларни кўйидагича алмаштирамиз:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{|b_1|}} u_1, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{|b_2|}} u_2, \quad \dots, \quad z_k = \frac{1}{\sqrt{|b_k|}} u_k.$$

u ҳолда

$$e_1 u_1 + e_2 u_2 + \dots + e_k u_k = 0, \quad (36)$$

ҳамда $b_i > 0$ бўлса, $e_i = 1$ ва $b_i < 0$ бўлса, $e_i = -1$.

3-ҳол. $k < n$ бўлиб, $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ лардан камида битта-нолдан фарқли, аниқроғи $c_{k+1} \neq 0$ бўлсин. Ўзгарувчиларни кўйидагича алмаштирамиз:

$$z_1 = v_1, z_2 = v_2, \dots, z_k = v_k, \frac{a}{2} - c_{k+1} z_{k+1} - \dots - c_n z_n =$$

$$= v_{k+1}, z_{k+2} = v_{k+2}, \dots, z_n = v_n.$$

У ҳолда (32) куйидаги кўринишни олади:

$$b_1 v_1^2 + b_2 v_2^2 + \dots + b_k v_k^2 = 2v_{k+1} \quad (37)$$

ёки

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{|b_1|}} u_1, v_2 = \frac{1}{\sqrt{|b_2|}} u_2, \dots, v_k = \frac{1}{\sqrt{|b_k|}} u_k,$$

$$v_{k+1} = u_{k+1}, \dots, v_n = u_n$$

десақ,

$$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 2u_{k+1} \quad (38)$$

бўлади, бунда ҳам e_i лар ± 1 ёки -1 . (35), (36) ва (38) кўринишдаги тенгламалар квадратиканинг *нормал кўринишдаги тенгламалари* деб аталади. Хулоса қилиб шунга айтиш мумкинки, (28) кўринишдаги ҳар қандай тенгламани янги реперга ўтиш йўли билан куйидаги уч кўринишдан бирига келтириш мумкин экан:

- I. $e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 1, k \leq n, e_i = \pm 1.$
- II. $e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 0, k \leq n, e_i = \pm 1. \quad (39)$
- III. $e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 2u_{k+1}, k < n, e_i = \pm 1.$

Мисол. $8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_2 = 0$ квадратиканинг тенгламасини каноник кўринишга келтирнг.

Е чи ш. $\Phi_2 = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2, \Phi_1 = 3x_2, a = 0.$ Φ_2 ни каноник кўринишга келтирамиз. $y_1 = 8x_1 - 2x_2, y_2 = x_2$ десақ, $y_1^2 = 64x_1^2 - 32x_1x_2 + 4x_2^2$ бўлиб,

$$\Phi_2 - \frac{1}{a_1} y_1^2 = \frac{9}{2} x_2^2 \quad \text{ёки} \quad \Phi_2 = \frac{1}{8} y_1^2 + \frac{9}{2} y_2^2.$$

У ҳолда берилган тенглама куйидаги кўринишни олади:

$$\frac{1}{8} y_1^2 + \frac{9}{2} y_2^2 + 6y_2 = 0$$

ёки тўлиқ квадратга келтирсақ,

$$\frac{1}{8} y_1^2 + \frac{9}{2} \left(y_2 + \frac{2}{3} \right)^2 - 2 = 0.$$

$$y_1 = u_1, y_2 = u_2 - \frac{2}{3} \text{ алмаштиришдан сўнг } \frac{u_1^2}{16} + \frac{u_2^2}{4} = 1. A_2 \text{ даги}$$

эллипс тенгламаси ҳосил қилинди.

45-§. Квадриканинг маркази

Кесманинг ўрта нуқтаси аффин алмаштиришда шу кесма образининг ўрта нуқтасига ўтади, шунга асосланиб A_n да квадриканинг симметрия маркази тушунчасини киритиш мумкин.

Т а р и ф. Квадриканинг ҳар бир нуқтасига унинг бирор S нуқтага нисбатан симметрия нуқтаси мавжуд бўлса, S нуқта квадриканинг *симметрия маркази* деб аталади.

Масалан, A_3 даги реперда каноник тенгламаси билан берилган эллипсоид, бир ва икки паллагли гиперболоидлар учун координаталар боши симметрия марказидир. Двалдрика (35) тенглама билан берилса, унинг симметрия маркази координаталар бошида бўлса, унинг тенгламаси шу реперда (35) лар бошидан иборат ва, аксинча, квадриканинг маркази координишда бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $M(u_1, u_2, \dots, u_n) \in (35) \Rightarrow$

$$\Rightarrow M'(-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \in (35).$$

MM' кесманинг ўрта нуқтаси $O(0, 0, \dots, 0)$ дир, чунки кесманинг учлари унинг ўрта нуқтасига нисбатан симметрик жойлашган. Бундан, тенгламалари $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_k = 0$ дан иборат ($n - k$) ўлчовли текисликнинг барча нуқталари (35) тенглама билан аниқлангандаги квадриканинг симметрия маркази бўлади деган хулоса чиқарамиз. Хусусий ҳолда $k = n$ бўлса, симметрия марказлари тўплами ноль ўлчовли текислик бўлиб, фақат битта нуқтадан, у ҳам бўлса, координаталар бошидан иборат. У вақтда квадрика фақат битта симметрия марказига эга бўлиб, у марказли квадрика деб аталади.

Энди квадриканинг тенгламаси (29) кўринишда берилган бўлса, бу квадрика марказининг мавжудлиги масаласига тўхталайлик.

Квадрика

$$\Phi_2 + a = 0 \quad (40)$$

кўринишдаги (бунда Φ_2 ифода n ўзгарувчилик квадратик форма) тенглама билан берилса, унинг симметрия маркази координаталар бошидан иборат.

Энди (29) кўринишга мос ҳолни кўрайлик. Фараз қилайлик, $S(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта (29) квадриканинг симметрия маркази бўлади. Репер бошини шу нуқтага кўчирамиз, баэис векторларнинг йўлакшини эса саклаб қоламиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + x_1^0 \\ x_2 &= y_2 + x_2^0 \\ &\dots \\ x_n &= y_n + x_n^0. \end{aligned} \quad (41)$$

бу ҳолда (44) тенглама билан аниқланган квадратика $n-t$ индексли гиперболоид деб аталади ($n=2$ ҳол ноз бера, $e_1=1$, $e_2=-1$ ёки $e_1=-1$, $e_2=1$ да квадратика текисликдаги гиперболоидни ифода қилади, $n=3$ да e_1, e_2, e_3 дан биттаси -1 га тенг бўлса, квадратика бир *наилли гиперболоидни*, e_1, e_2, e_3 дан иккитаси -1 га тенг бўлса, квадратика икки *наилли гиперболоидни* аниқлайди).

$$\text{Энди } k < n \text{ бўлган ҳолни кўрайлик.} \quad (46)$$

$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 1$.

Мавлўмки, бу кўринишдаги тенглама симметрия марказлари ($n-1$) ўлчовли координата текислигидан иборат бўлган сиртга ифода қилади, бундай квадратика A_n да *цилиндрик сирт* деб аталади.

$$1\text{-х ол. } e_1 = e_2 = \dots = e_k = 1.$$

(46) тенглама

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2 = 1 \quad (47)$$

кўринишни олади ва k ўлчовли текисликдаги эллипсоидни аниқлаб, A_n фазода эса асоси шу эллипсоиддан, ясовчилари ($n-k$) ўлчовли текисликдан иборат *эллиптик цилиндрни* беради. $n=3$, $k=2$ да эса A_3 да ясовчлари бирор координата ўқига параллел эллиптик цилиндрни аниқлайди.

2-х ол. $e_1 = e_2 = \dots = e_k = -1$ учун $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2 = -1$; бу тенглама бирорта ҳам ҳақиқий нуқтага эга бўлмаган квадратикани аниқлаб, уни *маъхум цилиндр* дейилади.

3-х ол. $e_1 = e_2 = \dots = e_t = 1$, $e_{t+1} = e_{t+2} = \dots = e_k = -1$ учун

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_t^2 - u_{t+1}^2 - \dots - u_k^2 = 1. \quad (48)$$

Бу тенглама k ўлчовли текисликда ($k-t$) индексли гиперболоидни аниқлаб, унинг ҳар бир нуқтасидан ($n-k$) ўлчовли текислик ўтади. Бундай квадратикани A_n да ($k-t$) индексли *гиперболик цилиндр* деб аталади; унинг ясовчилари ($n-k$) ўлчовли текисликдан иборат.

$$\text{II. } e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 0. \quad (49)$$

Бу тенглама билан аниқланган квадратиканинг симметрия маркази координаталар бошида бўлиб, бу нуқта квадратикага тегишлидир.

$k=n$ бўлсин.

1-х ол. $e_1 = e_2 = \dots = e_n$ бўлса, (49) $\rightarrow u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 0$ тенглама билан аниқланган квадратика мавхум конус деб аталади, бу конус фақат битта ҳақиқий нуқтага эга бўлади (координаталар боши O).

2-х ол. e_1, e_2, \dots, e_n нинг барчаси бир хил ишорали бўлмаса, квадратика конус деб аталади, демак, конус марказли сиртдир.

Унинг маркази конуснинг учи деб аталади. Шуниси қизиқки, бу конустга тегишли бирор T нуқтани олсак, OT тўғри чизикнинг (O — конуснинг маркази) барча нуқталари ҳам конустга тегишли бўлади; бу тўғри чизик конуснинг ясовчиси деб аталади.

$$\text{Энди } k < n \text{ ҳолни текширайлик.} \quad (49) \text{ тенглама}$$

$$1\text{-х ол. } e_1 = e_2 = \dots = e_k; \quad (49) \text{ тенглама}$$

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_k^2 = 0 \quad (50)$$

кўринишни олади; бу тенглама билан аниқланган квадратика ҳам *маъхум конус* деб юритилади.

Лекин бу тенгламани A_n да қарасак, бу квадратика ($n-k$) ўлчовли текисликнинг барча нуқталарини ўз ичига олади (чунки $N(O, 0, 0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_n)$ кўринишдаги барча нуқталарнинг координаталари (50) тенгламани қанатлангиряди). Бундай конус учи ($n-k$) ўлчовли текисликдан иборат *маъхум конус* деб аталади.

2-х ол. e_1, e_2, \dots, e_k нинг барчаси бир хил ишорали бўлмаса (масалан, t таси $+1$ бўлса), у ҳолда (49) тенглама билан аниқланган квадратикани ($k-t$) индексли, *учи* ($n-k$) ўлчовли текисликдан иборат конус деб аталади.

$$\text{Ниҳоят, (39) даги учинчи тенгламани текширайлик:}$$

$$e_1 u_1^2 + e_2 u_2^2 + \dots + e_k u_k^2 = 2u_{k+1}.$$

$$k = n-1. \quad 1\text{-х ол. } e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1}; \quad (51) \text{ тенглама билан}$$

аниқланган квадратика *эллиптик параболоид* деб аталади ($n=3$ бўлса, (51) тенглама $u_1^2 + u_2^2 = 2u_3$ кўринишда бўлиб, A_3 даги эллиптик параболоидни ифода қилади).

2-х ол. e_1, e_2, \dots, e_{n-1} нинг барчаси бир хил ишорали бўлмаса (масалан, t таси $+1$ бўлса), у ҳолда (51) тенглама билан аниқланган квадратика ($k-t$) индексли *гиперболик параболоид* деб аталади.

$k \leq n-2$. У ҳолда (51) тенглама O нуқта ва e_1, e_2, \dots, e_{k+1} векторлар билан аниқланган текисликда бирор параболоидни аниқлайди. A_n да қарасак, бу квадратикага ($n-k-1$) ўлчовли текислик қиради, аниқроғи N нуқта параболоидга тегишли бўлса, у

қолда бошлари шу нуқтадаги e_{k+2}, \dots, e_n векторлар билан аниқланувчи текислик шу параболоид таркибиди бўлади. Бу ҳолда (51) квадратика ясовчилари ($n-k-1$) ўлчовли текисликдан иборат *маъхум конус* деб аталади. Бу квадратиканинг индекси ($n-t$) бўлса, у мос равишда ($n-t$) индексли *параболик цилиндр* деб аталади.

Мисол. A_3 да $u_1^2 + u_2^2 + 4u_1 u_3 - 4u_2 = 0$ тенглама билан аниқланувчи квадратиканинг турини топинг.

Ечиш. Аввал бу квадратиканинг симметрия маркази бор-
кўнглигини аниқлайлик. Бунинг учун берилган тенгламадан
аввал u_1 , кейин u_2 , nihoyat u_3 бўйича ҳосилда олайлик:

$$\begin{aligned} 2u_1 + 4u_3 &= 0, \\ 2u_2 - 4 &= 0; \\ 4u_1 &= 0; \end{aligned}$$

Бу система ягона ечимга эга: $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$. Марказ (0, 2, 0) нуқтада. Энди репер бошини шу марказга келтирайлик, бунинг учун кўйидагича чиққли алмаштиришни бажариш керак:

$$u_1 = u_1, \quad u_2 = u_2 + 2, \quad u_3 = u_3;$$

буларни берилган тенгламага кўйсак,

$$\begin{aligned} u_1^2 + (u_2 + 2)^2 + 4u_1u_3 - 4(u_2 + 2) &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 + 4u_2 + 4 + 4u_1u_3 - 4u_2 - 8 &= 0, \\ u_1^2 + u_2^2 + 4u_1u_3 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Энди $\Phi_2 = u_1^2 + u_2^2 + 4u_1u_3$ квадратик формани Лагранж усули билан каноник кўринишга келтирамиз. Ушбу

$$x_1 = u_1 + 2u_3, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = u_3$$

алмаштиришни бажариб, $\Phi_2 - x_1^2$ ни ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} \Phi_2 - x_1^2 &= u_1^2 + 4u_1u_3 + u_2^2 - (u_1 + 2u_3)^2 = u_1^2 + 4u_1u_3 + u_2^2 - u_1^2 - \\ &- 4u_1u_3 - 4u_3^2 = u_2^2 - 4x_3^2, \quad \text{ёки } \Phi_2 = x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2. \end{aligned}$$

У ҳолда берилган тенглама кўйидагича бўлади: $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 - 4 = 0$, ёки $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 = 4$, ёки $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_3^2}{1} = 1$, бу эса,

A_3 даги бир паллали гиперболоиддир.

47-§ Ортогонал алмаштириш йўли билан квадратик формани каноник кўринишга келтириш

Аввалги параграфларда n ўлчовли аффин фазода квадратик формани каноник кўринишга, ҳатто нормал кўринишга келтиришни кўриб, унинг n ўлчовли аффин фазодаги квадратик калар учун татабқиқини аниқладик. Энди квадратик формани n ўлчовли (E_n) Евклид фазосида қарасак, унинг A_n даги хоссалари сақланиб, бу хоссалар қаторига янги метрик харақтер-даги хоссалари қўшилади.

Аввал, баъзи янги тушуначаларни киритайлик (бу тушуначалар «Алгебра ва сонлар назарияси» курсида батафсил ўрганилгани сабабли улар ҳақидаги баъзи теоремаларни исботсиз келтирамиз).

1. Хос векторлар ва харақтеристик сонлар.

Кўйидаги чиққли алмаштиришларни кўрайлик:

$$\begin{aligned} x'_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ x'_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ &\dots \\ x'_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (52)$$

Бу чиққли алмаштиришларнинг матрицаси

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad (53)$$

айнимаган бўлсин.

Агар (52) нинг чап томонидаги x'_1, x'_2, \dots, x'_n ни бирор x' векторнинг \mathcal{B} реперга nisbatan координаталари десак, худди шунга ўхшаш, ўнг томонидаги x_1, x_2, \dots, x_n ни ҳам шу \mathcal{B} реперга nisbatan бирор x векторнинг координаталари деб қараш мумкин, у ҳолда (52) алмаштириш ҳар бир $x \neq 0$ векторга аниқ битта $x' \neq 0$ векторни мос келтиради, бунга кўйидагича ёзайлик:

$$x' = \Phi(x). \quad (54)$$

Бу вақтда Φ чиққли оператор деб ҳам кортилади.

Тарриф. Агар (52) чиққли алмаштиришда $x \neq 0$ вектор унга мос $x' \neq 0$ векторни боғловчи

$$x' = \lambda x \quad (55)$$

муносабат (бунда $\lambda \in \mathbb{R}$) ўринли бўлса, x вектор Φ чиққли операторнинг хос вектори деб аталади, λ сон эса Φ чиққли операторнинг x векторга мос келган хос қиймати деб аталади. Агар (55) ўринли бўлса, $x'_i = \lambda x_i, x'_2 = \lambda x_2, \dots, x'_n = \lambda x_n$ бўлиб, бу қийматларни (52) га кўйсак,

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n, \\ \lambda x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ &\dots \\ \lambda x_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} (b_{11} - \lambda)x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= 0, \\ b_{21}x_1 + (b_{22} - \lambda)x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= 0, \\ \dots & \dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + (b_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Мавлўмки, бу бир жинсли тенгламалар системаси ноль бўлмаган ечимга эга бўлиши учун унинг бош детерминанти нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (58)$$

Демак, чизикли операторнинг исталган хос қиймати (яъни λ) (58) тенгламани қаноатлантириши керак ва, аксинча, λ нинг (58) тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай ҳақиқий қиймати φ нинг хос қиймати бўлади: (58) нинг чап томонидаги детерминантни ёйиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаб чиқсак, λ та нисбатан n -даражали кўпхад ҳосил қилинади. Бу кўпхад ҳа-
рактаристик қўйхад, (58) эса характeристик тенглама деб ата-
лади.

Қуйидаги теоремалар ўринлидир.
1-теорема. *Бошқа бирор базисга ўтганда чизикли опе-
раторнинг матрицаси албатта ўзгаради, лекин характeристик
қўйхаднинг коэффициентлари ва илдизлари ўзгармайди.*
2-теорема. *Тайин бир хос қийматга мос келувчи хос век-
торларнинг ҳар қандай чизикли комбинацияси шў хос қий-
матга мос келувчи хос вектор бўлади.*

Агар e_1, e_2, \dots, e_n базис векторлар бирор чизикли оператор-
нинг хос векторлари бўлиб, уларга мос келган хос қийматлар мос
равншида $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ бўлса, (52) тенглама қуйидаги кўринишни
олади:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \lambda_1 x_1, \\ x'_2 &= \lambda_2 x_2, \\ x'_n &= \lambda_n x_n \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

У ҳолда бу алмаштиришнинг матрицаси диагонал кўринишда
бўлади:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (60)$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ичида бир-бирита тенглами бўлиши мумкин, чунки

характeристик тенглама каррели илдизга эга бўлган ҳол ҳам мўз бе-
рилиши мумкин).

2. Симметрик оператор ва унинг матрицаси. φ чи-
зикли оператор берилган бўлсин.

Таъриф. E_n даги ихтиёрий x, y векторлар учун

$$\varphi(x) \cdot y = x \cdot \varphi(y) \quad (61)$$

ўринли бўлса, φ ни симметрик оператор деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, скаляр кўпайтмада симметрик
оператор белгисини бир кўпайтувчидан иккинчи кўпайтувчига
ўтказиш мумкин.

3-теорема. *Чизикли симметрик оператор ҳар қандай
экарт базисда симметрик матрицага эгадир.*

Исбот. Чизикли симметрик операторнинг бирор $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$
декарт базисидagi матрицаси (53) кўринишда бўлсин. У ҳолда
(1) даги x ва y нинг ўрнига e_1, e_2, \dots, e_n ни қўйсак,

$$\varphi(e_i) \cdot e_j = e_i \cdot \varphi(e_j) \quad (62)$$

унда $i, j = 1, 2, \dots, n$, (62) нинг чап томонини ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} \varphi(e_i) \cdot e_j &= e'_i \cdot e'_j = (b_{i1}e_1 + b_{i2}e_2 + \dots + b_{in}e_n) \cdot e_j = b_{i1}(e_1 \cdot e_j) + \\ &+ b_{i2}(e_2 \cdot e_j) + \dots + b_{in}(e_n \cdot e_j) = b_{ij}, \end{aligned}$$

унда $e_i \cdot e_j = 0$ ($i \neq j$) эътиборга олинади. Энди (62) нинг ўнг томо-
нини ҳисоблайлик:

$$\begin{aligned} e_i \cdot \varphi(e_j) &= (e_i \cdot e_j) = e_i \cdot (b_{j1}e_1 + b_{j2}e_2 + \dots + b_{jn}e_n) = \\ &= b_{j1}(e_i \cdot e_1) + b_{j2}(e_i \cdot e_2) + \dots + b_{jn}(e_i \cdot e_n) = b_{ji}. \end{aligned}$$

(62) га асосан $b_{ij} = b_{ji}$, бу эса (53) нинг симметрик матрица эка-
рини билдиреди.

Бу теоремага тесқари теорема ҳам ўринли, яъни:

4-теорема. *Агар чизикли оператор бирор декарт базисда
симметрик матрицага эга бўлса, у чизикли симметрик опера-
тор бўлади.*

Исбот. (53) да $b_{ij} = b_{ji}$ бўлсин, у ҳолда ихтиёрий $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($x \neq 0, y \neq 0$) векторлар учун $\varphi(x) \cdot y = x' \cdot y =$
 $= (x'_1e_1 + x'_2e_2 + \dots + x'_ne_n) \cdot (y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n) = x'_1y_1 + x'_2y_2 + \dots +$
 $+ x'_ny_n = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n)y_1 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots +$

$$+ b_{2n} x_{2n}) y_2 + \dots + (b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \dots + b_{nn} x_n) y^n =$$

$$= \sum_{i=1}^n b_{1i} x_i y_1 + \sum_{i=1}^n b_{2i} x_i y_2 + \dots + \sum_{i=1}^n b_{ni} x_i y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i y_i. \quad (63)$$

Худди шунга ўхшаш, $(x \cdot \varphi(y))$ ни ҳисобласак,

$$\begin{aligned} x \varphi(y) &= \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i y_i \\ \varphi(y) &= \sum_{i=1}^n b_{ii} y_i \end{aligned} \quad (64)$$

$$(63), (64) \Rightarrow x \varphi(y) = \varphi(x) y,$$

бу эса таърифга асосан φ нинг чизикли симметрик оператор эканлигини билдиради:

5-теорема. *Чизикли симметрик операторнинг хараكتеристик тенгламаси фақат ҳақиқий илдизга эгадир.*

Исбот. λ_0 хараكتеристик тенгламанинг илдизи бўлсин, $\lambda_0 \in R$ эканини исботлаймиз. λ_0 ни (57) даги λ ўрнига қўйсак, (58) детерминант нолга тенг бўлгани учун (57) система ноль бўлмаган ечимга эгадир, бу ечимларни $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ деб белгиласак, (56) система қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} b_{11} \bar{v}_1 + b_{12} \bar{v}_2 + \dots + b_{1n} \bar{v}_n &= \lambda_0 \bar{v}_1, \\ b_{21} \bar{v}_1 + b_{22} \bar{v}_2 + \dots + b_{2n} \bar{v}_n &= \lambda_0 \bar{v}_2, \\ &\dots \\ b_{n1} \bar{v}_1 + b_{n2} \bar{v}_2 + \dots + b_{nn} \bar{v}_n &= \lambda_0 \bar{v}_n \end{aligned} \quad (65)$$

(бунда албатта барча $b_{ij} \in R$) (65) нинг ҳар бирини мос равишда $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ сонларга (бунда \bar{v}_i сон \bar{v}_j нинг қўшмаси-дир, яъни $\bar{v}_i = a + ib$ бўлса, $\bar{v}_i = a - ib$, равшанки, \bar{v}_i ҳақиқий сон бўлса, $\bar{v}_i = \bar{v}_i$) кўпайтириб, чап томонларини ва ўнг томонларини ҳадлаб қўшсак,

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} \bar{v}_i \bar{v}_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \bar{v}_i. \quad (66)$$

$$\bar{v}_i \bar{v}_i > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \bar{v}_i > 0, \text{ у ҳолда } \lambda_0 \text{ нинг ҳақиқий сон эканини}$$

кўрсатиш учун (66) даги чап томоннинг ҳақиқий сон эканини кўрсатиш kifойадир.

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{v}_i \bar{v}_j, \text{ бўлсин; } b_{ii} = b_{ii}, \bar{v}_i = \bar{v}_i, \text{ эканини ҳисобга олсак,}$$

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \bar{v}_i \bar{v}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji} \bar{v}_j \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji} \bar{v}_j \bar{v}_i.$$

Илгирининг аниқлашувчи i ва j нинг ўринларини алмаштириш билан илгиринди ўзгармаганлиги учун $\bar{S} = S$, бу эса, S нинг ҳақиқий сон эканлигини билдиради. У ҳолда (66), тенгликнинг ўрниги бўлиши учун λ_0 ҳақиқий сон бўлиши керак. ▲

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади: ҳар қандай чизикли симметрик оператор камда битта хос қийматга эга. Ҳақиқатан ҳам, (58) тенглама алгебраик тенгламадир, лемак, унинг камда битта илдизи мавжуд, юқоридagi 5-теоремага асосан у илдиз λ_0 ҳақиқий сондан иборат. Бу сон берилган симметрик операторнинг хос қиймати дур.

6-теорема. *Чизикли симметрик операторнинг ҳар хил хос қийматларида мос келган хос векторлари ўзаро ортогонал-дир.*

Исбот. λ, μ сонлар берилган φ чизикли симметрик операторнинг ҳар хил қийматлари бўлиб, улар билан аниқла-

$$\begin{aligned} \text{найдган хос векторлар мос равишда } x, y \text{ бўлсин: } \varphi(x) &= \lambda x, \varphi(y) = \\ &= \mu y; \text{ бу операторнинг симметриклигидан } \varphi(x) y = x \varphi(y), \text{ лекин} \\ \varphi(x) y &= \lambda x y = \lambda(x y), \quad x \cdot \varphi(y) = x \cdot \mu y = \mu(x y) \Rightarrow \lambda(x y) = \\ &= \mu(x y) \Rightarrow (\lambda - \mu)(x y) = 0 \text{ ва } \lambda \neq \mu \Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow x \perp y. \end{aligned}$$

7-теорема. E_n фазодаги ҳар қандай чизикли симметрик опера-тор учун шундай декарт базиси мавжудки, бу базиснинг ҳар бир вектори шу операторнинг хос векторидан иборат.

Исбот. $n = 1$ бўлсин, (52) тенглама $x_1' = b_{11} x_1$ кўринишда бў-либ, $x \neq 0$ вектор ўзининг образи $\varphi(x)$ билан фақат b_{11} сонли кўпайтувчи билан фарқ қилади, демак, бу вектор чизикли оператор-нинг хос вектори экан; $b_{11} = \frac{1}{|x|} \int_{|x|}^1 \dots \int_{|x|}^1 x = e_1$ бирдик век-тор бўлиб, бир ўлчовли фазонинг базисидир.

Энди математик индукция методини қўлаймиз, яъни теорема E_{n-1} фазо учун ўринли бўлиб, уни E_n учун ўринли эканини кўрсата-миз. φ оператор E_n нинг симметрик оператори бўлсин. 5-теорема-га асосан у ҳақиқий λ хос қийматга эга, шу λ га мос келувчи хос вектор z бўлсин, у ҳолда $\frac{1}{|z|} \int_{|z|}^1 \dots \int_{|z|}^1 z = e_1$ вектор бирдик вектордир.

Бу вектор z дан фақат сонли кўпайтувчи билангина фарқ қилгани учун у λ га мос келган хос вектор бўлади, яъни

$$\varphi(e_1) = \lambda e_1. \quad (67)$$

E_n даги e_1 га ортогонал барча векторлар тўғлами $(n-1)$

ўлчовли қисм фазони ҳосил қилади. Бу фазонинг ўзи ҳам ўз кўндалда евклид фазосидир, чунки E_n да аниқланган скаляр

кўпайтма E_{n-1} учун ҳам ўз кучини сақлаб, скаляр кўпайт-
 манинг барча хоссалари E_{n-1} учун ҳам сақланади. E_{n-1}
 нинг ихтиёрий a векторини олайлик. У ҳолда $a e_1 = 0$ бўлиб, φ
 нинг симметриялигини ва (67) ни эътиборга олсак, $e_1 \cdot \varphi(a) =$
 $= \varphi(e_1) a = \lambda e_1 \cdot a = \lambda (e_1 \cdot a) = \lambda \cdot 0 = 0$. Бундан $\varphi(a)$ векторнинг
 ҳам E_{n-1} га тегишли эканлиги кўринади.

Демак, φ оператор E_{n-1} нинг ҳар бир векторига шу фазонинг
 векторини мос келтиради. φ ни татиқлаш натижасида E_{n-1} да хо-
 сил қилинадиган янги операторни φ_1 десак, ҳамда E_n даги ихтиё-
 рий икки вектор учун (61) шарт ўринли экани сабабли бу шарт
 E_{n-1} фазодаги икки вектор учун ҳам ўринлидир, чунки φ_1 ҳам сим-
 метрик оператор бўлади. Фаразга асосан теорема E_{n-1} да ўринли
 бўлганлиги учун шу фазода декарт базис мавжуддир. Бу базиснинг
 ҳар бир вектори φ_1 нинг хос векторларидир; буларни e_2, e_3, \dots, e_n
 десак, бу векторларнинг ҳар бири e_1 га ортогоналдир. Демак, e_1
 e_2, \dots, e_n лар E_n даги декарт базис бўлиб, чизикли сим-
 метрик операторнинг хос векторларидан иборат. ▲

Натижа. Чизикли симметрик операторнинг матричасини
 декарт базисини танлаб олиш йўли билан диагонал кўринишга
 келтириш мумкин.

Т а ʼ р и ф. Ортогонал матрица ёрдамида бажариладиган
 чизикли алмаштириш ортогонал алмаштириш дейилди.

Куйида биз ортогонал алмаштириш ёрдамида квадратик
 формани каноник кўринишга келтиришни кўрсатамиз. Лекин
 ортогонал алмаштириш ёрдамида квадратик формани нормал
 кўринишга доимо келтириб бўлавермайди.

8-теорема. Бирор декарт базисига нисбатан квадратик
 форма ва чизикли оператор бир хил матрицага эга бўлса, улар
 бошқа ҳар қандай декарт базисда ҳам бир хил матрицага
 эга бўлади.

И с б о т. Ушбу

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (68)$$

квадратик форма билан чизикли f операторнинг матрицалари бирор
 декарт базисда бир хил бўлган дейлик: $b_{ij} = c_{ij}$.

f оператор x ни шундай x' га акслантирадимики, шу векторларнинг
 координаталари куйидагича боғлангандир:

$$\begin{aligned} x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ x'_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n. \end{aligned} \quad (69)$$

У ҳолда (68) квадратик формани куйидагича ёзиш мумкин:

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i x'_i = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \dots + x_n x'_n = x x'. \quad (70)$$

Энди бирор декарт базисга ўтайлик: x, x' ларнинг шу базисга
 нисбатан координаталари $y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ бўлсин,
 уларни боғловчи формулалар

$$\begin{aligned} y'_1 &= d_{11}y_1 + d_{12}y_2 + \dots + d_{1n}y_n \\ y'_2 &= d_{21}y_1 + d_{22}y_2 + \dots + d_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y'_n &= d_{n1}y_1 + d_{n2}y_2 + \dots + d_{nn}y_n \end{aligned} \quad (71)$$

бўлсин. У ҳолда x, x' нинг шу базисга нисбатан скаляр кўпайтма-
 сини ҳисобласак, $x \cdot x' = y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + \dots + y_n y'_n$ ва (71) ни эъти-
 борга олсак,

$$\begin{aligned} x \cdot x' &= y_1 (d_{11}y_1 + d_{12}y_2 + \dots + d_{1n}y_n) + y_2 (d_{21}y_1 + d_{22}y_2 + \dots + d_{2n}y_n) + \dots + d_{nn}y_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} y_i y_j. \end{aligned}$$

(70) га асосан

$$\varphi(x, x) = x \cdot x' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} y_i y_j. \quad (72)$$

(71) билан (72) ни солиштириб, квадратик форма билан чи-
 зикли оператор матрицаларининг бир хил эканлигини кўрамиз.
 9-теорема. Ҳар қандай квадратик форманинг узғарувчи-
 ларини ортогонал алмаштириш ёрдамида бу формани каноник
 кўринишга келтириш мумкин.

И с б о т. (68) квадратик форма берилган бўлсин. Бирор
 декарт базисда (68) квадратик форма симметрик матрицага
 эга бўлсин. Биз худди шу матрицага чизикли операторни кў-
 райлик. Бу чизикли операторнинг характеристик тенглемаси
 (58) га асосан

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (73)$$

Бу тенгламанинг илдизларини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ десак, 7-теорема-
 дан чиққан натижага асосан шундай декарт базис мавжуддир, унда

юқоридagi оператор матрицаси диагонал кўринишга келди ва унинг диагонал элементлари $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ бўлади. У ҳолда квадратик форма кўйидаги кўринишни олади:

$$\varphi(x, x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (74)$$

(бунда λ_i дар неча каррали илдиз бўлса, улар (74) да шунча марта қатнашадди).

У ҳолда янги базис векторлари эски базис векторлари орқали

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= d_{11} \vec{e}_1 + d_{12} \vec{e}_2 + \dots + d_{1n} \vec{e}_n, \\ \vec{e}'_2 &= d_{21} \vec{e}_1 + d_{22} \vec{e}_2 + \dots + d_{2n} \vec{e}_n, \\ &\dots \\ \vec{e}'_n &= d_{n1} \vec{e}_1 + d_{n2} \vec{e}_2 + \dots + d_{nn} \vec{e}_n \end{aligned}$$

кўринишда ифодаланиб, ўтиш матрицаси ортогоналдир. Демак, квадратик формани каноник кўринишда ёзиш учун (58) хара- теристик тенгламани тузиб, унинг илдизларини топиш кифой. Энди янги декарт базисини топиш ва квадратик формани каноник кўринишга келтирадиган ортогонал алмаштиришни излаш усулини кўрсатамиз.

λ_k харақтеристик тенгламанинг бир каррали илдизи бўлсин. Бу λ_k ни (57) даги λ нинг ўрнига қўйиб, $c_{ij} = b_{ij}$ эканини назарда тутсак,

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda_k) x_1 + c_{12} x_2 + \dots + c_{1n} x_n &= 0, \\ c_{21} x_1 + (c_{22} - \lambda_k) x_2 + \dots + c_{2n} x_n &= 0, \\ &\dots \\ c_{n1} x_1 + c_{n2} x_2 + \dots + (c_{nn} - \lambda_k) x_n &= 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Бундан λ_k га мос келувчи хос векторнинг координаталарини топамиз (яъни (75) системани x_1, x_2, \dots, x_n га нисбатан ечиб, ноль бўл- маган ечимларини топамиз); топилган векторни модульга бўлиш на- тижасида бирлик вектор ҳосил қиламиз.

Энди λ_k сон харақтеристик тенгламанинг m ($m > 1$) каррали ил- дизи бўлсин. Бу вақтда ҳам λ_k нинг қийматини (57) даги λ нинг ўрнига қўйсак, (75) га ўхшаш система ҳосил бўлади. Бу система- нинг m та ечимини шундай танлаб оламизки, координаталари шу ечимлардан иборат m та векторнинг ҳар бири бирлик вектор бўлиб, ўзаро ортогонал бўлсин. Равшанки, бу векторлар m ўлчовли век- торли евклид фазосининг базиси бўлади, шу векторларни E_n нинг ҳам базис векторлари сифатида қабул қиламиз. Шунга ўхшаш му- ҳокамани ҳар бир λ_k учун юритамиз. Барча λ_k ларнинг сони n та бўлгани учун (карралиги ва карралик сони билан олинади) жами n та ўзаро ортогонал ва бирлик вектордан иборат декарт базиси ҳо- сил қилинади.

1- мисол. $5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2$ квадратик формани каноник кўри-

нишга келтириш ва янги базис билан эски базисни боғловчи муно- сабатларни топиш:

Е чиш. (57) харақтеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & -4 \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0.$$

Бу тенгламани ечасак, $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -3$.

Изланган квадратик форма: $7y_1^2 - 3y_2^2$. Энди янги базис билан эски базисни боғловчи муносабатни аниқлайлик, $\lambda_1 = 7$ га мос келган хос векторни топайлик, бунинг учун бу қийматни кўйидаги системадаги λ нинг ўрнига қўямиз:

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda) x_1 + c_{12} x_2 = 0, & \Rightarrow (5 - 7) x_1 - 4x_2 = 0, \\ c_{21} x_1 + (c_{22} - \lambda) x_2 = 0, & \Rightarrow -4x_1 + (-1 - 7)x_2 = 0, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 = 0, \end{cases}$$

бундан $x_1 + 2x_2 = 0$ нинг ноль бўлмаган ечимларидан бирини, ма- салан, $x_1 = -2, x_2 = 1$ ни олсак, у ҳолда $(-2, 1)$ векторнинг мо- дули $\sqrt{5}$ бўлиб, бирлик вектор: $\vec{e}'_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Шунга ўхшаш,

$\lambda_2 = -3$ га мос келган вектор $\vec{e}'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ бўлади.

Демак, янги базис векторлари эски базис векторлари орқали

$$\vec{e}'_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_2$$

кўринишда ифодаланади. Равшанки, ўтиш матрицаси

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ортогоналдир (текшириб кўринг). У ҳолда ортогонал алмаш- тириш формуласи:

$$x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2.$$

Бу қийматларни беришдан квадратик формага қўйиб, юқорида топилган каноник кўринишдаги квадратик форма ҳосил қила- миз.

2- мисол. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ квадратик формани

каноник кўринишга келтириш.

Е чиш. Бу ерда: $b_{11} = 1, b_{22} = 0, b_{33} = 1, b_{12} = 2, b_{13} = 1, b_{23} = 1, b_{32} = 2, b_{21} = 1, b_{31} = 1, b_{33} = 1$,

(57) харақтеристик тенглама:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = 0.$$

Бу тенглама илдизлари $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$; квадратик форма $4y_1^2 - 2y_2^2$ каноник кўриништа келади.

48-§. Уч ўлچовли евклид фазосидаги квадратикалар

46-§ да n ўлچовли аффин фазодаги квадратикалар таснифи билан муфассал танилди. Уч ўлچовли аффин фазода 17 хил квадратикнинг борлигини ошкор қилиш осондир. (39) даги тенгламаларда k ни 1, 2, 3 сонлар деб олинса 17 та ҳар хил тенглама ҳосил қиламиз.

Шу квадратикаларни уч ўлچовли евклид фазосида қарасак, Декарт реперини қўлай танлаб олиш йўли билан уларнинг тенгламаларини куйидаги жадвалда кўрсатилгандек қилиб ёзиш мумкин (ўзгарувчиларни u_1, u_2, u_3 билан эмао, баъли эскича белгилашимизга мос равишда x, y, z деб оламиз).

№	Квадриканинг содда тенгламаси	Квадриканинг номи
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	эллипсоид
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	мавҳум эллипсоид
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	бир паллали гиперболоид
4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	икки паллали гиперболоид
5	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	мавҳум конус
6	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	учи координаталар бошида бўлган конус
7	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллиптик цилиндр
8	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мавҳум цилиндр
9	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	гиперболоик цилиндр
10	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	О _z ўқ бўйича кесилувчи 2 та мавҳум текислик

№	Квадриканинг содда тенгламаси	Квадриканинг номи
11	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	иккита кесилувчи текислик
12	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	икки ўзаро параллел текислик
13	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	икки мавҳум ўзаро параллел текислик
14	$x^2 = 0$	устма-уст тушган икки текислик
15	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	эллиптик параболоид
16	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	гиперболоик параболоид
17	$\frac{x^2}{a^2} = 2z$	параболоик цилиндр

Бу квадратикаларнинг кўпчилиги билан биз III бўлда танишиб ўтганмиз.

49-§. Тўғламлар назарисининг баръи тушунчалари

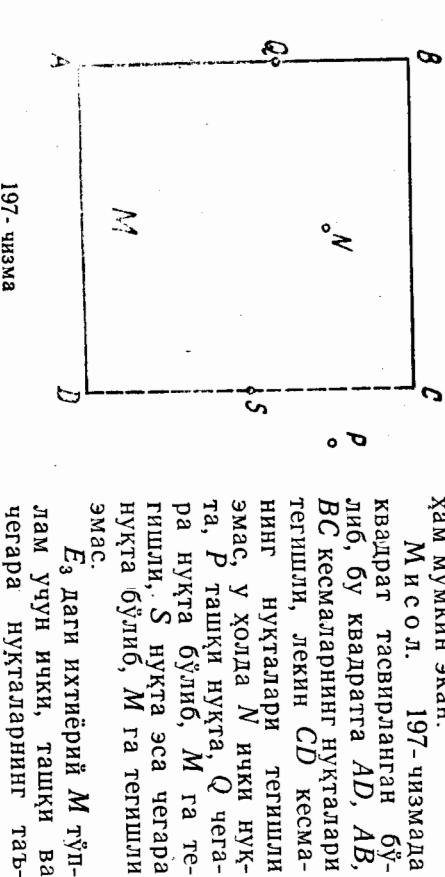
E_3 (уч ўлчовли Евклид фазоси) да маркази O нуктада ва радиуси r га тенг шарни (O, r) билан белгилайлик, шу шарни чегараловчи сфера шарга тегишли бўлмаса, у одатда *очиқ шар* деб аталади. Бу тушунчани E_2 да қарасак, *очиқ доира* E_1 да эса *очиқ кесма*, яъни интервал ҳосил бўлади.

Т а ʼ р и ф. (O, r) *очиқ шар* O нуктанинг атрофи деб аталади. Демак, E_2 да (тексликда) O нуктанинг атрофи маркази шу нуктадаги *очиқ доирадан*, E_1 да эса ўрта нуктаси O даги *очиқ кесмадан* иборат.

Бирор M тўғлам берилган бўлсин.
Т а ʼ р и ф. Агар X нукта ўзининг бирор атрофи билан M тўғламга тўлиқ тегишли, яъни шундай $r > 0$ сон мавжуд бўлиб, $(X, r) \subset M$ бўлса, у ҳолда X нукта M нинг *ички нуктаси* деб аталади. M нинг барча *ички нукталари* тўғлами M нинг *ичи* деб аталади ва у $\text{int } M$ билан белгиланади.

Т а ʼ р и ф. Агар X нуктанинг (X, r) атрофи мавжуд бўлиб, у M тўғлам билан умумий нуктага эга бўлмаса, у ҳолда X нукта M нинг *ташқи нуктаси* деб аталади. M нинг барча ташқи нукталари тўғлами $\text{ext } M$ билан белгиланади ва у M нинг *ташқариси* деб аталади.

Т а ʼ р и ф. X нуктанинг ҳар қандай атрофи бир вақтда ҳам M га тегишли, ҳам M га тегишли бўлмаган нукталарни ўз ичига олса, у ҳолда X нукта M нинг *чегара нуктаси* дейилади; M нинг барча чегара нукталари тўғлами ∂M билан белгиланади ва M нинг *чегараси* дейилади. Бу таърифлардан кўринадики, M тўғламнинг *ички нуктаси* албатта M га тегишли, *ринадики*, M тўғламнинг *ички нуктаси* албатта M га тегишли, M тўғламнинг *ички нуктаси* эмас. Чегара нуктаси M га тегишли ҳам бўлиши мумкин, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин экан.



М и с о л. 197-чизмада квадрат тасвирланган бўлиб, бу квадратга AD, AB, BC кесмаларнинг нукталари тегишли, лекин CD кесманинг нукталари тегишли эмас, у ҳолда N *ички нукта*, P ташқи нукта, Q чегара нукта бўлиб, M га тегишли, S нукта эса чегара нукта бўлиб, M га тегишли эмас.
 E_3 даги ихтиёрий M тўғлам учун *ички*, ташқи ва чегара нукталарнинг таъ-

рифидан бевосита кўйидаги муносабатларнинг ўринлилиги келиб чиқади (SM билан E_3 тўғламнинг M га тегишли бўлмаган барча нукталари тўғлами белгиланган, баръан, у M нинг тўлдирувчиси дейилади):

1. $\partial M = \partial(\text{ext } M) = \partial SM.$
2. $\text{int } M \cup \text{ext } M \cup \partial M = E_3$
3. $\text{int } M \cap \text{ext } M = \emptyset$
4. $\text{ext } M \cap \partial M = \emptyset.$
5. $\text{int } M \cap \partial M = \emptyset$

Т а ʼ р и ф. M тўғлам учун $\text{int } M = M$ бўлса, бу тўғлам *очиқ* деб аталади.

Очиқ шар, шунингдек *томонларининг нукталари* кирмаган *учбурчак* ва ҳ. к. дар *очиқ тўғлам* мисолидир.

Таърифдан ҳар қандай M тўғлам учун $\text{int } M$ нинг *очиқ тўғлам*лиги кўринади.

Т а ʼ р и ф. Агар M тўғламга унинг барча чегара нукталарини киритсак, ҳосил қилинган тўғлам M нинг *ёпиғи* деб аталади, у M билан белгиланади, демак, $\bar{M} = \partial M \cup M.$

Т а ʼ р и ф. Ўзининг *ёпиғи* билан *устма-уст* тушган тўғлам *ёпиқ тўғлам* деб аталади (яъни $M = \bar{M}$ бўлса).

Очиқ M тўғлам учун $\text{ext } M \cup \partial M$ *ёпиқ тўғлам* бўлади, бу тўғлам SM дир.

Демак, *очиқ тўғламнинг тўлдирувчиси* *ёпиқ тўғлам*дир.

Ихтиёрий M тўғлам учун $\text{int } M \cup \text{ext } M$ тўғлам *очиқ* бўлади. Ҳақиқатан ҳам, шу тўғламни N билан белгиласак, $x \in N$ бўлса, $x \in \text{int } M$ ёки $x \in \text{ext } M$. $\text{ext } M$ ва $\text{int } M$ тўғламларнинг ҳар бири *очиқ* бўлгани учун x ўзининг бирор атрофи билан шу тўғламларнинг би-рыга тегишли бўлади, у ҳолда шу атроф N га ҳам тегишли, демак, M *очиқ тўғлам*дир. Шунга ўхшаш, *исалган сондаги* *очиқ тўғламларнинг* *бирлашмаси* ҳам *очиқ тўғлам* эканлигини кўрсатиш мумкин. У ҳолда (1) даги муносабатларнинг *иккинчиси*га асосан

$$\partial M = E_3 \setminus (\text{ext } M \cup \text{int } M)$$

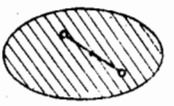
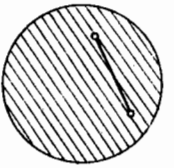
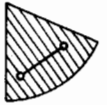
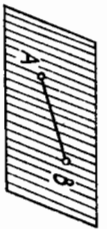
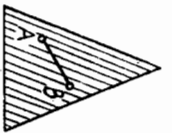
ва $\text{ext } M \cup \text{int } M$ нинг *очиқ тўғлам* эканлигидан ∂M *ёпиқ тўғлам* деган хулоса чиқади. Демак, ҳар қандай тўғламнинг чегараси *ёпиқ тўғлам*дир.

50-§. Кавариқ фигуралар

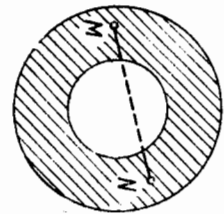
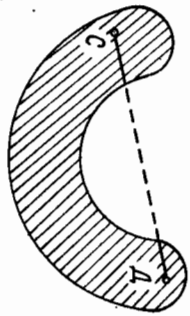
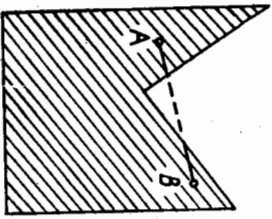
Нукталардан ташкил топган ҳар қандай тўғламнинг фигура деб аталishiни эслатиб ўтаемиз.

Т а ʼ р и ф. F фигуранинг ихтиёрий *ички* A, B нуктасини туташтирувчи AB кесманинг барча нукталари F га тегишли бўлса, F *кавариқ фигура* деб аталади. Буш тўғлам ва битта нукта ҳам кавариқ деб олинади.

198-чизмада тасвирланган фигуралар кавариқ, лекин 199-



198-чизма



199-чизма

чизмадаги фигуралар эса каварик эмас, фазовий фигуралардан шар, пирамида, доиравий цилиндр ва ҳ.к. каварик фигураларга мисолдир.

Бу фигураларнинг четаралари ўзига тегишли ёки тегишли бўлмаслиги мумкин. Бундан ташқари, шундай каварик фигуралар борки, улар ё тўғри чизикка, ёки текисликка тегишли бўлади; биринчи ҳолда *бир ўлчовли*, иккинчи ҳолда *икки ўлчовли каварик фигура* берилган деймиз. Барча нуктаси бир текисликда жойлашмаган каварик фигура уч ўлчовли каварик фигурадир.

Бир ўлчовли каварик фигуралар учтадир, улар кесма, нур ва тўғри чизикнинг ўзидир (бир ўлчовли бошқа каварик фигураларнинг мавжуд эмаслигини биз исботламаймиз).

Каварик фигуралар қатор хоссаларга эга.

1. Каварик яси фигура учун $A \in \text{int } F$ ва $B \in \text{int } F$ бўлса, AB кесма-нинг барча нукталари ҳам $\text{int } F$ га тегишлидир. **Исбот.** F яси каварик фигура бўлсин. A, B нукталар F нинг ички нукталари бўлгани учун шундай γ_A, γ_B сонлар топилдики, $(A, \gamma_A), (B, \gamma_B)$ доиралар F га тўла тегишли бўлади. F нинг қаварик эканлигидан бу доиралар ва уларга ўтказилган ташқи умумий уринма-лар орасида ҳосил қилинган F_0 фигура ҳам каварик ва $F_0 \subset F$ (200-чизмада штрихланган соҳа). AB кесманинг иккитерий нуктаси C бўлсин, у ҳолда γ_A, γ_B сонлардан кичикини γ_C деб олсак, (C, γ_C) доира F_0 га тегишли ва $F_0 \subset F$ бўлгани учун $(C, \gamma_C) \subset F$, демак, $C \in \text{int } F$. ▲

2. F — каварик фигура ва $A \in \partial F, B \in \text{int } F$ бўлса, AB кесманинг A дан бошқа барча нукталари F нинг ички нуктасидир. 3. F каварик фигура ва $A \in \partial F, B \in \partial F$ бўлса, $AB \subset \partial F$ ёки AB кесманинг учларидан бошқа барча нукталари F нинг ички нуктаси бўлади. Бу икки хосса ҳам 1° га ўқ-шаш исботланади.

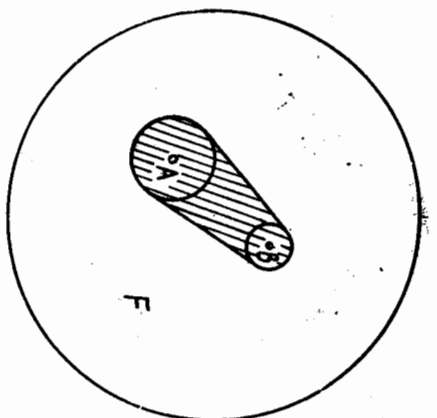
4. F каварик фигуранинг ички нуктасидан ўтган и тўғри чизик F нинг иккитадан ортқч чегара нуктасини ўз ичига олмайди.

Исбот. $M_0 \in \text{int } F, M_0 \in \text{int } F$ бўлсин. Фараз қилайлик, и тўғри чизикда F нинг иккитадан ортқч, аниқроғи, учта нуктаси бўлсин, уларни A, B, C билан белгилайлик. Бу уч нуктанинг камида иккитаси, масалан, A, B лар M_0 нинг бир томонида ва A, B нинг биттаси, масалан, B нукта A билан M_0 орасида ётади; демак, 2° га асосан B нукта F нинг ички нуктасидир. Бу эса B ни чегара нукта деган фарзидингизга эйдир. 5. Агар и тўғри чизик каварик F фигуранинг битта ҳам ички нуктасидан ўтмаса, F фигура и тўғри чизик билан аниқланган ёпиқ ярим текисликлардан фақат бирига тегишлидир.

Исбот. $A \in \text{int } F, A \in \text{int } F$ бўлсин. A нукта ва и тўғри чизик билан аниқланган ярим текисликини $[u, A)$ деб белгилайлик, $F \subset [u, A)$ эканлини исботлаймиз. Агар F га тегишли, лекин $[u, A)$ ярим текисликка тегишли бўлмаган B нукта мавжуд деб фараз қилсак, AB кесманинг барча нукталари 1° ёки 2° га асосан F нинг ички нукталари бўлади ҳамда AB кесма и тўғри чизикни кесиб, кесимда ҳосил эрилган нукта F нинг ички нуктаси бўлади. Бу эса шартга эид. Демак, F нинг барча нукталари $[u, A)$ га тегишлидир.

1-теорема. *Исталган сондаги каварик фигураларнинг кесиммаси ҳам каварик фигура бўлади.* **Исбот.** (F_α) — исталган сондаги каварик фигуралар тўплами берилган бўлсин. Бу фигураларнинг барчасининг кесиммасини F деб белгилайлик ($F = \bigcap_\alpha F_\alpha$). Агар F тўғлам бўш ёки битта нуктадан иборат бўлса, таърифага асосан бу фигуралар каварикдир. Энди F камида иккита A, B нуктага эга бўлсин дейлик: $A \in \bigcap_\alpha F_\alpha, B \in \bigcap_\alpha F_\alpha$, у ҳолда бу A, B нукталар F_α нинг ҳар бирга тегишлидир. F_α нинг кавариклигидан AB кесма $\subset F_\alpha$, демак, AB кесма $\subset \bigcap_\alpha F_\alpha$ бўлиб, F каварикдир.

Иккитерий F фигура берилган бўлсин. **Таъриф.** F фигурани ўз ичига олгувчи барча каварик фигура-



200-чизма

ларнинг кесилмасидан ҳосил этилган фигура F нинг қавариқ қобили деб аталади ва $K(F)$ деб белгиланади.

Бу таврифдан кўриниб турибдики, F қавариқ фигура учун $K(F) = F$, лекин қавариқ бўлмаган F учун $F \subset K(F)$ дир. F_1 қавариқ фигура учун $F \subset F_1$ бўлса, таврифдан равшанки, $F \subset K(F) \subset F_1$. Шу маънода, фигуранинг қавариқ қобили шу фигурани ўз ичига олувчи энг кичик қавариқ фигурадир.

Мисол. Битта нуктадан иборат F фигура учун $K(F) = F$. Иккита A, B нуктадан иборат фигура учун $K(F) = AB$ кесма; бир тўғри чизиқда ётмаган учта A, B, C нуктадан иборат F фигура учун $K(F)$ фигура учлари A, B, C нукталарда бўлган учбурчакдан ва бир текисликда ётмаган тўртта A, B, C, D нуктадаги фигура учун эса $K(F)$ учлари шу нукталардаги тетраэдрдан иборат.

2-теорема. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow K(F_1) \subset K(F_2)$.
 Бу теоремани исботлаш учун қавариқ фигура ва қавариқ қобили таврифларини эслаш kifoy (мустақил исботланг).

3-теорема. *Икхитрий икки F_1, F_2 фигура учун*

$$K(F_1 \cup F_2) = K(K(F_1) \cup F_2).$$

Исбот. $F_1 \cup F_2 \subset K(F_1) \cup F_2$ (*) бўлгани учун 2-теоремага

$$K(F_1 \subset F_2) K(K(F_1) \cup F_2). \quad (**)$$

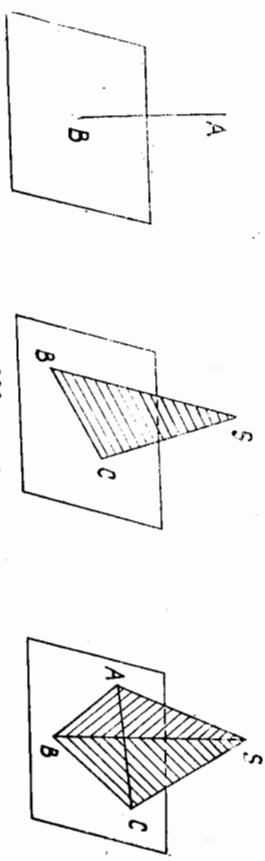
Лекин $K(F_1 \cup F_2)$ фигура $K(F_1)$ билан F_2 ни ўз ичига олувчи қавариқ фигура бўлгани учун 2-теоремага асосан

$$K(K(F_1) \cup F_2) \subset K(F_1 \cup F_2). \quad (***)$$

$$(**), (***) \text{ дан } K(F_1 \cup F_2) = K(K(F_1) \cup F_2). \blacktriangle$$

F — текисликдаги қавариқ тўпلام ва A — шу текисликка тегишли бўлмаган нукта бўлсин. F нинг ҳар бир N нуктасини A билан туталтиришдан AN кесмалар тўпلامини ҳосил қиламиз. Шу тўпلامни қисқача $K(F, A)$ деб белгилаб, уни A учли ва F асосли қобили деб атайمиз.

Агар F битта B нуктадан иборат бўлса, $K(B, A) = AB$ кесма, $F = BC$ бўлса, $K(F, A) = \triangle ABC$. $F = \triangle BCD$ ҳолда $K(F, A)$ фи-



201-чизма

тура $ABCD$ учбурчакдан иборат бўлади (201-чизма).
 4-теорема. A нукта ва қавариқ фигура учун қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$K(F, A) = K(F \cup A).$$

Исбот. $A \in F$ бўлган ҳолда $K(F, A) = F$ бўлиб, теорема ўринли. $A \notin F$ ҳолни қарайлик. Равшанки, $A \cup F$ фигурани ўз ичига олувчи ҳар қандай қавариқ фигура $K(F, A)$ ни ҳам ўз ичига олади. У ҳолда теореманинг ўринлигини кўрсатиш учун $K(F, A)$ нинг қавариқ эканини кўрсатиш керак.

$\forall M, N \in K(F, A)$ ни олайлик, у ҳолда M нукта AB кесмага, N эса тегишли ҳамда $B, C \in F$ бўлиб, F қавариқ фигура бўлгани учун кесма $BC \subset F$. Бундан кесма $MN \subset \triangle ABC$ бўлиб, $\triangle ABC \subset K(F, A)$, демак, кесма $MN \subset K(F, A)$ ва $K(F, A)$ — қавариқ (202-шакл). \blacktriangle

Биз юқорида қавариқ фигураларнинг баъзи хоссалари билан танишиб ўтдик. Энди қавариқ фигурани ҳосил қилиш масаласига тўхталайлик.

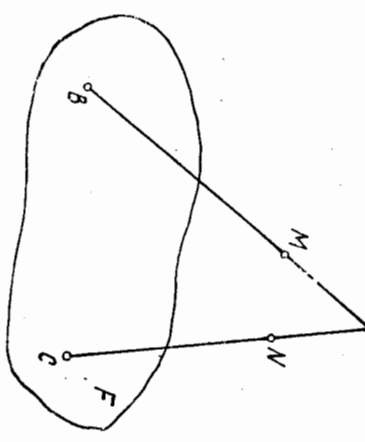
Одатда, биз ўрганилган қавариқ фигуралар қуйидаги икки усулнинг бири орқали ҳосил қилинади.

I усул. 1-теоремага асосан қавариқ фигураларнинг кесилмаси ҳам қавариқ фигура бўлгани учун текисликда қавариқ фигураларнинг соддаси сифатида яримтекисликлар олинади. Уларнинг кесилмасидан ҳосил қилинган қавариқ фигуралар текширилади, фазода эса яримфазозларнинг кесилмасидан ҳосил этилган фигуралар қаралади.

II усул. Қавариқ фигуралар шу фигурага нисбатан соддароқ бўлган фигураларнинг қавариқ қобили сифатида ҳосил қилинади. Кўпинча, бу содда фигуралар сифатида чекли сондаги нукталар ёки чекли сондаги нурлар, ёки чекли сондаги нурлар ва нурлар қаралади. Чекли сондаги нукталарнинг қавариқ қобилини қараш текисликда чегараланган кўпбурчак тушунчасига, фазода эса чегараланган қавариқ кўпёк тушунчасига олиб келади. Чекли сондаги нурларнинг қавариқ қобилини қараш кўпёкли бурчак тушунчасига олиб келади.

51-§. Қавариқ кўпбурчаклар

Тайин Π текислик ва шу текисликда F қавариқ фигура берилган бўлсин, $u \subset \Pi$ тўғри чизиқ F нинг ички нуктасидан ўтмасин. У ҳолда $F \cap u = dF \cap u$. Демак, u тўғри чизиқ dF билан кесилмасидиги, битта умумий нуктага эга бўлиши ёки умумий кесмага эга



202-чизма

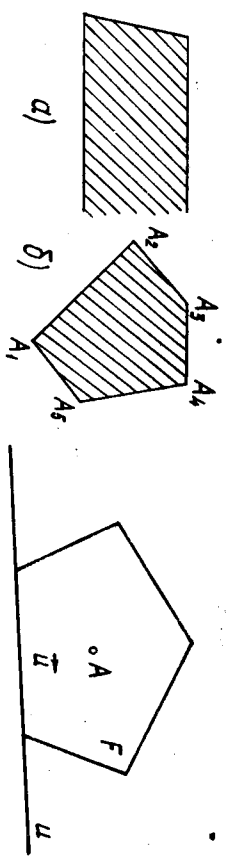
бўлиши ёки умумий нуқта, няхоят умумий шу тўғри чизикка эга бўлиши мумкин.

Таъриф. F қавариқ фигуранинг ∂F чегараси чекли сондаги кесма ва нурларнинг бирлашмасидан иборат бўлса, F қавариқ кўпбурчак деб аталади. Бунда ∂F да бир вақтда кесма ва нурларнинг бўлиши таълаб қилинмайди; агар ∂F нинг таркибда камида битта нур бўлса, F чексиз қавариқ кўпбурчак ва ∂F нинг таркибда фақат кесмаларгина қатнашса, у чегараланган қавариқ кўпбурчак деб аталади.

203-а чизмада чексиз қавариқ кўпбурчак, 203-б чизмада чегараланган қавариқ кўпбурчак тасвирланган.

Чакларнинг томонлари, бу томонларнинг умумий учлари кўп- ∂F нинг таркибига кирган кесмалар ва нурлар шу кўпбур-
бурчакнинг учлари деб аталади.

Кўпбурчак одатда учларини белгилловчи нуқталар ёрдамида ёзилди, масалан, 203-б чизмадаги бешбурчак $A_1A_2A_3A_4A_5$ деб ёзилди. Ҳарфлар тартиби кўпбурчак чегараси орқали маълум йўналишда (масалан, соғат иили ҳаракати йўналиши-
да) олинди.



203-чизма

204-чизма

5-теорема. Қавариқ кўпбурчак ўзининг бир томони орқали ўтган тўғри чизик билан аниқлангандаги ярим текисликлардан фақат бирига тегишли бўлади.

Исбот. F бирор қавариқ кўпбурчак бўлсин, унинг ихтиёрий томони \bar{u} бўлиб, шу томон орқали ўтган тўғри чизикни u деб белгилайлик (204-чизма). Фараз қилайлик, қавариқ кўпбурчак u тўғри чизик билан аниқланган Π_1, Π_2 ярим текисликларнинг бирига эмас, балки иккаласига ҳам тегишли бўлсин. F нинг бирор ички нуқтасини A деб белгилайлик. Ички нуқтанинг таврифта асосан унинг шундай (A, τ_A) атрофи мавжудки, $(A, \tau_A) \subset \text{int} F$ бўлиб, $(A, \tau_A) \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$. (A, τ_A) доира u нинг бир томонида бўлсин. Фаразга кўра u нинг икки томонида F нинг нуқталари ётгани учун A тегишли бўлмаган яримтекисликда F нинг бирор B нуқтасини оламиз, $B \in \text{int} F$ ёки $B \in \partial F$ бўлиши мумкин. Қайси ҳол қоз беришдан қатъи назар AB кесمانинг A учи ички нуқта бўлгани учун юқоридagi 1-ёки 2-хоссаларга асосан AB нинг барча нуқталари $(B \in \partial F$ бўлса, B дан бошқа) F нинг ички нуқтасидир, AB кесма u тўғри чизикни

бирор N нуқтада кесиб, бу нуқта бир вақтда u га ва $\text{int} F$ га тегишли бўлади. Ички нуқта чегара нуқта бўла олмагани учун зиддик ҳосил қилинди. \blacktriangle

6-теорема. Қавариқ кўпбурчак ҳар бир томонидан ўтган тўғри чизик билан аниқлангандаги ва шу кўпбурчакни ўз ичига олувчи барча яримтекисликлар кесиммасидан иборатдир, яъни кўпбурчакнинг томони n та бўлса ҳамда ҳар бир Π_{u_i} ярим текислик F ни ўз ичига олма, u ҳолда

$$F = \bigcap_{i=1}^n \Pi_{u_i}$$

Исбот. Равшанки,

$$F \subset \bigcap_{i=1}^n \Pi_{u_i} \quad (*)$$

Фараз қилайлик, шундай V нуқта мавжуд бўлсинки, $u \in \bigcap_{i=1}^n \Pi_{u_i}$ ва $V \notin F$ бўлсин. $A \in \text{int} F$ ни олайлик. u ҳолда AV кесма ∂F ни бирор N нуқтада кесди, $\partial F = \bigcap_{i=1}^n \Pi_{u_i}$, демек, N нуқта u_i нинг бирортасига тегишли ҳамда A, V нуқталар Π_{u_i} томонинг икки томонида жойлашиб қолади, бу эса V нуқта Π_{u_i} яримтекисликка тегишли эмаслигини билдиреди, ҳуллас $V \notin \bigcap_{i=1}^n \Pi_{u_i}$, бу эса фаразга зиддир.

7-теорема. Чегараланган қавариқ кўпбурчак шу кўпбурчакнинг қавариқ қобиғидан иборатдир.

Исбот. F чегараланган қавариқ кўпбурчак ва унинг учлари A_1, \dots, A_n бўлсин. $n=3$ бўлса, теорема равшан, чунки бу ярим 50-§ да мисол тарихида кўранмиз.

$k=n-1$ учун теорема ўринли деб олиб, $k=n$ учун исботлайлик. F нинг A_2A_n диагоналинини ўтказамиз (қавариқ кўпбурчакнинг k о кўшнни бўлмаган икки учидан ўтган тўғри чизик унинг диаго-
нал деб аталади). u ҳолда $F = \Delta A_1A_2A_n \cup F'$ (бунда F' фигура A_2, A_3, \dots, A_n нуқталарда бўлган қавариқ кўпбурчак) бўлиб, индукция методига асосан

$$K(A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = F'$$

оремага асосан

$$K(\Delta A_1A_2A_n \cup F') = K(K(\Delta A_1A_2A_n) \cup F') = K(A_1 \cup F') = \Delta A_1A_2A_n \cup F' = F. \blacktriangle$$

8-теорема. A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) бир текисликда бўлиб, *яъни*: 1) бир тўғри чизикда ётса, *яъни* уларнинг каварик қобили кесма, 2) бир тўғри чизикда ётмаса, *яъни* уларнинг каварик қобили каварик кўйбурчак бўлади.

Исбот. Агар берилган нуқталар бир тўғри чизикда ётса, қобилининг таърифига асосан теорема равшан.

Теореманинг иккинчи қисmini исботлайлик. A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 3$) нуқталар бир тўғри чизикда ётмасин. $n = 3$ бўлган ҳолда A_1, A_2, A_3 нуқталарнинг каварик қобили учбурчакдир. Теоремани $n - 1$ та нуқта учун ўринли деб олиб, n та нуқта учун исботлаймиз.

$K(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})$ ва $K(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ ни мос равишда F_{n-1}, F_n билан белгилайлик. У ҳолда $K(F_{n-1}) = F_{n-1}$, шунинг учун

$$F_n = K(K(F_{n-1}) \cup A_n) = K(F_{n-1} \cup A_n).$$

4-теоремага асосан $K(F_{n-1} \cup A_n) = KF(F_{n-1}, A_n)$, бундан A_1, A_2, \dots, A_n — бир текисликда олингани учун $K(F_{n-1}, A_n)$ конус қаварик кўйбурчакдан иборат. A_n нуқта A_1, A_2, \dots, A_{n-1} нуқталарнинг қаварик қобилига тегишли бўлмаса, A_n шу конуснинг учини, яъни кўйбурчакнинг учини бўлади (ақс ҳолда, албатта A_n нуқта кўйбурчак учини бўлмайди). ▲

Энди кўйбурчакнинг ички бурчати тушуничасини киритайлик. Учлари A_1, A_2, \dots, A_n нуқталарда бўлган кўйбурчакни F билан белгилайлик. Равшанки, бу учларнинг ихтиёрий учтаси бир тўғри чизикда ётмайди. F нинг ихтиёрий бир учини, масалан, A_1 ни олайлик ҳамда учини A_1 нуқтада бўлган $n - 1$ та A_1A_2, \dots, A_1A_n нуқраларни ўтказайлик. Бу нуқралар ҳар хил бўлиб, иккитаси бир тўғри чизикда ётмайди. A_1A_i, A_1A_k ($i \neq k, i, k = 2, 3, \dots, n$) нуқралардан ҳосил бўлган бурчакларнинг ёниқ бурчакдан кичик бўлгани $\angle A_1A_iA_k$ деб белгиласак, i, k лар 2, 3, \dots, n қийматларини қабул қилгани учун A_1 нуқтада бўлган $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ та бурчак ҳосил қиламиз.

Бу бурчаклардан энг каттасини (яъни қолган бурчакларнинг барчасини ўз ичига олувчи бурчакни) $\angle A_2A_1A_n$ билан белгилайлик, у ҳолда бу бурчак кўйидаги икки хоссага эга:

1°. Бу бурчакнинг ҳар бир томони F нинг A_1 дан бошқа яна битта учидан ўтади.

2°. $F \subset \angle A_2A_1A_n$, чунки бу бурчак ёниқ бурчакдан кичик бўлиб, уни иккита ёниқ ярим текисликнинг кесиммаси деб қарасак, бу яримтекисликларнинг ҳар бирида A_1, A_2, \dots, A_n нуқталар борлиги учун бу нуқталарнинг қаварик қобили ҳам (яъни F кўйбурчак) шу кесимда бўлади.

Таъриф. Юқоридаги икки хоссага эга бўлган бурчак F кўйбурчакнинг A учиданги ички бурчаси деб аталади.

Демак, қаварик n бурчакда n та ички бурчак бор экан. Урта мактаб геометрия курсидан маълумки, ҳар қандай қаварик n бурчак барча ички бурчакларининг йениндиси $2d$ ($n - 2$) га тенгдир.

Агар кўйбурчакнинг барча томонлари ўзаро конгруэнт ва бурчаклари ҳам ўзаро конгруэнт бўлса, у мунтазам кўйбурчак деб аталади.

Масалан, тенг томонли учбурчак мунтазам учбурчакдир, квадрат мунтазам тўртбурчакдир, лекин ромб мунтазам тўртбурчак эмас, чунки томонлари ўзаро конгруэнт бўлгани билан бурчаклари ўзаро конгруэнт эмас.

52-§ Қаварик кўнёклар

E_3 да барча нуқталари бир текисликка тегишли бўлмаган қаварик M тўғлам берилган бўлсин; равшанки, бу тўғламнинг бир текисликда ётмаган камида тўртта нуқтаси мавжуддир. У ҳолда M тўғлам учлари шу нуқталарда бўлган тетраэдрни ўз ичига тўла олади, демак, M тўғлам E_3 га нисбатан ички нуқталарга эгадир.

Таъриф. E_3 га нисбатан ички нуқталарга эга бўлган ёниқ қаварик тўғлам қаварик жисм деб аталади.

Шар, шар сегменти, призма ва х. к. қаварик жисмга мисол бўла олади.

M қаварик жисм кўйидаги хоссаларга эга.

1. $A \in \text{int } M, B \in \text{int } M \Rightarrow [AB] \subset \text{int } M$ (AB — кесма),

2. $A \in \partial M, B \in \text{int } M \Rightarrow AB$ кесманинг A дан фарқли барча нуқталари M нинг ички нуқталари бўлади.

3. $A \in \partial M, B \in \partial M \Rightarrow [AB] \subset \partial M$ ёки AB кесманинг A, B дан бошқа барча нуқталари M нинг ички нуқталари бўлади.

4. Агар u тўғри чизик M нинг бирорта ички нуқтасидан ўтса, у M нинг кўпи билан иккита чегара нуқтасидан ўтади.

5. Агар Π текисликда M нинг ички нуқтаси бўлмаса, M нинг барча нуқтаси Π билан аниқланадиган иккита ёниқ ярим фазодан бирига тўла тегишли бўлади.

Бу хоссаларнинг исботи 50-§ даги қаварик фигура хоссаларининг исботидан фарқ қилмайди. Шунинг учун биз бу ерда бу хоссаларни исботламаймиз.

Таъриф. Агар M қаварик жисмнинг чегараси (яъни ∂M) чекли соддага қаварик кўйбурчаклар бирлашмасидан иборат бўлса, у қаварик кўнёк деб аталади.

Агар ∂M нинг таркибидан камида битта нур бўлса, бундай кўнёк чексиз қаварик кўнёк деб аталади.

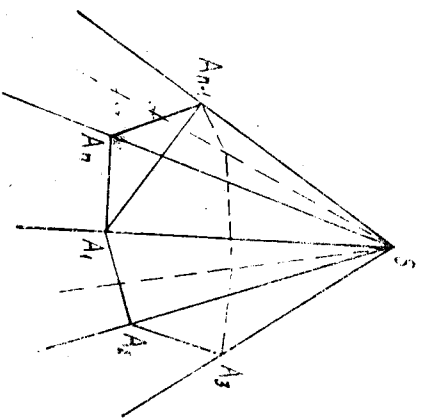
Агар ∂M фақат чегараланган кўйбурчаклардан иборат бўлса, M чегараланган қаварик кўнёк деб аталади. ∂M ни ташкил қилувчи қаварик кўйбурчакларнинг ҳам бири M нинг ёни деб аталади. Екларнинг умумий томонлари қаварик кўнёкнинг

билан аниқланадиган ярим текисликда учи S нүқтада ва бир томони SC нурда бўлган шундай \widehat{CSD} бурчак мавжудки, у бурчак \widehat{CSB} бурчакка конгруэнт. D нүктани шундай оламизки, $SB \equiv SD$ бўлсин. У ҳолда $AC < AB + BC$ ва $AC = AD + DC$ бўлгани учун $AD < AB$. $\triangle ASD$ билан $\triangle ASB$ ни таққосласак, $\widehat{ASD} < \widehat{ASB}$, бу тенгсизликнинг иккага қисмига конгруэнт $\angle CSB$, $\angle CSD$ бурчакларнинг миқдорларини қўшамиз:

$$\widehat{ASD} + \widehat{CSD} < \widehat{ASB} + \widehat{CSB} \text{ ёки} \\ \widehat{ASC} < \widehat{ASB} + \widehat{CSB} \blacktriangleleft.$$

Теорема. Қаварик кўп ёкли бурчакнинг барча яси бурчаклари миқдорларининг шунинчиси $4d$ дан кичик.

Исбот. n ёқли $SA_1A_2 \dots A_n$ бурчакни қўрайлик (207-чи-ма). $A_1A_2 \dots A_n$ кўпбурчакнинг ҳар бир учини тайин уч ёқли бурчакнинг учи деб олиш мумкин, масалан, A_1 ни $A_1A_2SA_n$ уч ёқли бурчакнинг учи деб, A_2 ни $A_2A_3SA_1$ уч ёқли бурчакнинг учи деб ва ҳ. к. олиш мумкин. Шу уч ёқли бурчакларнинг ҳар бирига аввалги теоремани татбиқ қиламиз.



207-чи-ма

$$\widehat{A_2A_1A_n} < \widehat{A_2A_1S} + \widehat{A_nA_1S}, \\ \widehat{A_1A_2A_3} < \widehat{A_1A_2S} + \widehat{A_3A_2S}, \\ \dots \\ \widehat{A_{n-1}A_nA_1} < \widehat{A_{n-1}A_nS} + \widehat{A_1A_nS}.$$

Бу тенгсизликларнинг барчасини чап ва ўнг қисмларини мос равишда қўшсак, чап қисмида $A_1A_2 \dots A_n$ n бурчак икки бурчакларнинг йиғиндиси ҳосил бўлиб, у $2d$ ($n-2$) та тенгдир, ўнг томонда эса $\triangle A_1SA_2, \triangle A_2SA_3, \dots, \triangle A_nSA_1$ учбурчакларнинг барча ички бурчаклари йиғиндиси билан шу учбурчакларнинг S учидagi бурчаклари йиғиндисининг айрмаси ҳосил қилинади:

$$2d(n-2) < 2d \cdot n - \Omega, \quad (*)$$

бунда Ω — берилган n ёқли бурчакнинг учидagi яси бурчакларининг йиғиндиси. У ҳолда $(*)$ дан $\Omega < 4d$. \blacktriangleleft

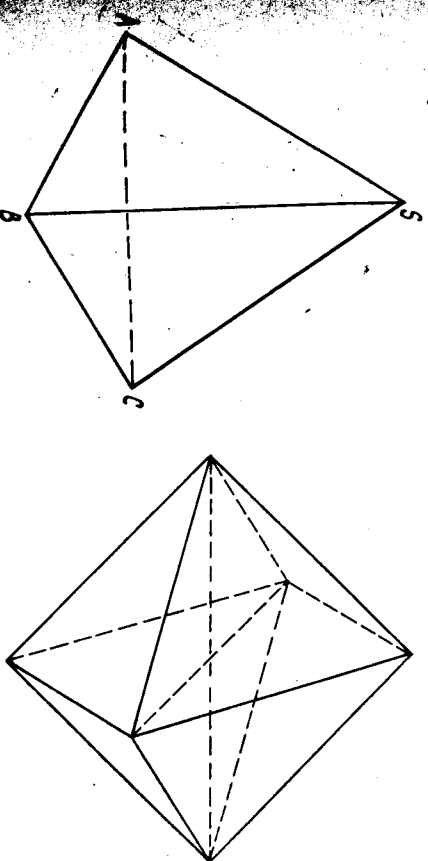
Тарриф. Қаварик кўпёқнинг бирор A учини олайлик. У ҳолда A нүктани шундай кўп ёкли бурчакнинг учи деб қараш мумкинки, унинг ёқлари M нинг шу нүқтадан чиққан ёқлари, қирралари эса M нинг шу нүқтадан чиққан қирралари дан иборатдир. Бу кўп ёкли бурчак M нинг A учидagi кўп ёкли бурчаги деб аталади.

Бу таърифдан қаварик кўпёқ учларининг сони унинг кўп ёкли бурчаклари сонига тенг деган ҳулоса чиқади. Масалан, параллелепипеднинг 8 та уч ёкли бурчаги (8 та учи), тўртбурчакли пирамиданинг эса 4 та уч ёкли бурчаги ва битта тўрт ёкли бурчаги (5 та учи) бордир.

54-§. Мунгазам кўпёқлар

Кўпёқнинг барча ёқлари конгруэнт мунгазам кўпбурчаклардан иборат бўлиб, ҳамма кўп ёкли бурчаклари ҳам конгруэнт бўлса, у мунгазам кўпёқ деб аталади.

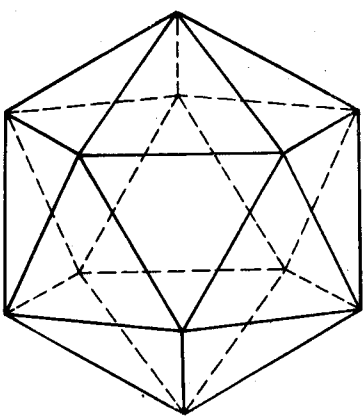
Равшанки, кўпёқнинг ҳар бир учидан камида учта ёни ўт танлиги учун 53-§ даги иккинчи теоремата асосан шу учдagi барча яси бурчакларнинг йиғиндиси $4d$ дан кичикдир. Мунгазам кўпёқнинг ёқлари мунгазам учбурчаклардан иборат бўлса, унинг ҳар бир учидан учта ёқ ўтиши (чунки $3 \cdot 60^\circ < 4d$), тўртта ёқ ўтиши (чунки $4 \cdot 60^\circ < 4d$), бешта ёқ ўтиши (чунки $5 \cdot 60^\circ < 4d$) мумкин. Лекин бир учдан олтига ва нудан кўп ёқ ўтиши мумкин эмас (чунки бу ҳолда $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ = 4d$ бўлиб, бу эса юқоридagi теоремата зиддир). Демак, ёқлари мунгазам учбурчакдан иборат фақатгина уч хил мунгазам кўпёқ мавжуд бўлиши мумкин. Булар куйдагилардир:



208-чи-ма

209-чи-ма

1. Мунгазам тўртёқ, одатда мунгазам тетраэдр деб юрнтилади, унинг 4 та ёғи, 4 та учи ва 6 та қирраси бор (208-чи-ма).
2. Мунгазам саккизёқ, баъзан октаэдр деб аталиб, унинг 8 та учи ва 12 қирраси бор (209-чи-ма).



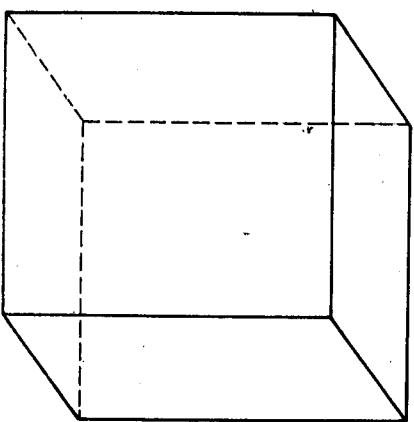
210-чизма

3. Мунтазам *йишрмаёқ*, *икосаэдр* деб аталиб, унинг 20 та ёғи, 12 та учи ва 30 та кираси бор (210-чизма).

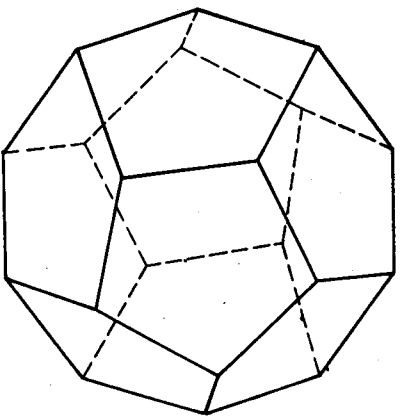
Энди ёқлари мунтазам тўртбурчакдан, яъни квадратдан иборат мунтазам кўпёкни кўрайлик. Бундай мунтазам кўпёkning ҳар бир учидан фақат учта ёқ чиқиши мумкин (чунки $3 \cdot 90^\circ < 4d$). Лекин бир учдан тўртта ва ундан ортиқ ёқ чиқиши мумкин эмас (чунки $4 \cdot 90^\circ = 4d$ бўлиб, бу эса иккинчи теоремага зиддир). Демак, ёқлари мунта-

зам тўртбурчакдан иборат мунтазам кўпёқ фақат бир тур бўлиб, кубдан иборат, куб баъзан *гексаэдр* деб юритилади. Куб 6 та ёққа, 8 та учга ва 12 та кирага эга (211-чизма).

Ёқлари мунтазам бешбурчаклардан иборат мунтазам кўпёкларнинг ҳам тури биттадир (чунки мунтазам бешбурчакнинг битта бурчаги 108° бўлиб, $4 \cdot 108^\circ > 4d$ бўлади), уни баъзан *додекаэдр* деб аталиб, 12 та ёқдан, 20 та учдан ва 30 та кирадан иборатдир (212-чизма).



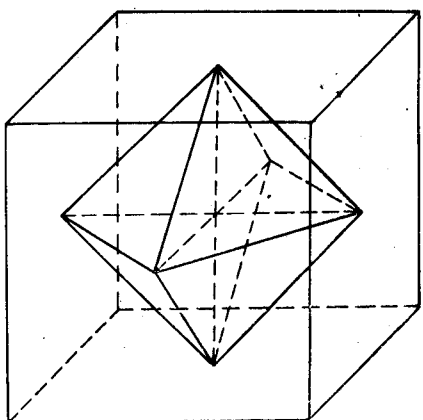
211-чизма



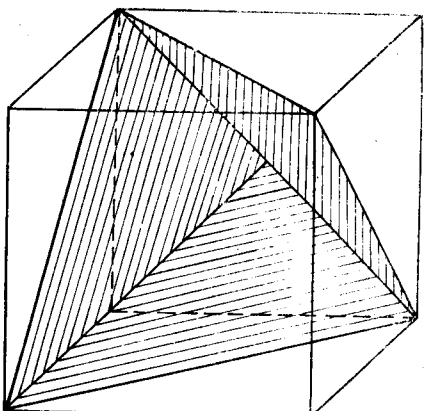
212-чизма

Демак, мунтазам кўпёkning ёқлари фақатгина мунтазам учбурчак, мунтазам тўртбурчак, мунтазам бешбурчаклардангина иборат бўлиб, улар 5 турга бўлинади. Бунинг қатъий математик исботини кейинги параграфда берамиз.

Куйида биз шу мунтазам кўпёклар тасвирини ясаш усулини кўрсатамиз. Шуниси диққатга сазоворки, агар кубнинг



213-чизма



214-чизма

(гексаэдрнинг) тасвири маълум бўлса (биз кубнинг тасвирини ясашни биламиз), унинг ёрдамида қолган 4 та мунтазам кўпёқ тасвирини ҳосил қилиш ҳам мумкин.

1. Куб ёқларининг марказлари мунтазам октаэдрнинг учлари ролини ўтайди (213-чизма).

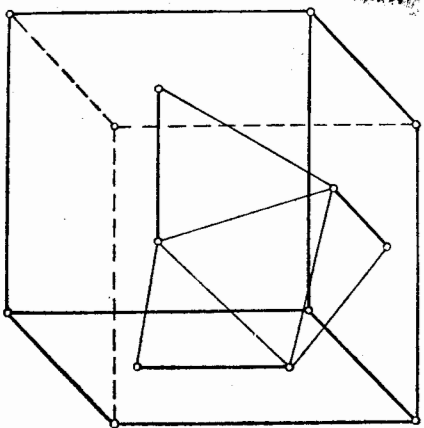
2. Агар кубнинг бир учидан чиққан учта ёғининг шу учдан чиққан учта диагонални ўтказсак, шу диагоналлarning учлари мунтазам тетраэдр учларининг тасвири бўлади (214-чизма).

3. Кубнинг бир учидан чиққан учта ёғини олайлик ҳамда шу ёқлардан ҳар бирининг шундай ўрта чизиқларини ўтказайликки, улар ўзаро перпендикуляр бўлсин (улар ўзаро айкаш), бу ўрта чизиқлар куб ёқларининг марказидан ўтганлиги учун бу чизиқларнинг ҳар бирида шундай a кесма танлаб оламизки, бу кесманинг ўрта нуқтаси куб ёғининг марказида бўлсин; бу кесма учлари эса шундай жойлашганки, ҳар бир учдан кўшни ёқда жойлашган худди шундай кесманинг яқин учига ҳам бўлган масофа ҳам a кесма узунлигига тенг бўлсин, натижада, кубнинг уч ёғида жами 6 та нуқта ҳосил қиламиз. Шу нуқталарнинг ҳар бирини кубнинг қолган ёқларидан ҳам шундай 6 та нуқта ҳосил бўлади, куб ёқларида жами 12 та нуқта ҳосил қиламиз. Шу нуқталарнинг ҳар бирини ўнгла яқин 6 та нуқта билан туташтириб, $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ та кесма ҳосил қиламиз. Бу кесма-

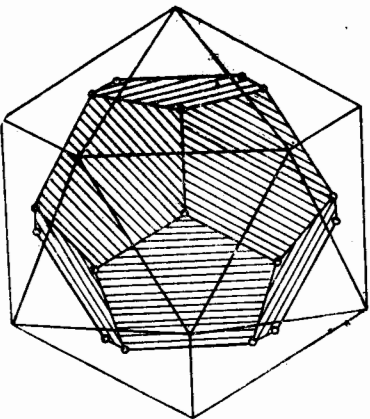
ларнинг ҳар бири икосаэдр кирақларининг тасвири бўлади (215-чизма).

4. Юқорида ҳосил қилинган икосаэдр ҳар бир ёғининг маркази маркази бирор додекаэдрнинг учларидан иборат бўлади (216-чизма).

Тасвирида ҳосил қилинган кўпёқ ҳақиқатан ҳам мунтазам икк эканини биз қатъий исботламадик, уларнинг исботи унча мураккаб бўлмагдан, куйидаги битта мулоҳазага асослан-



215- чизма



216- чизма

гандир: бирор ўқни танлаб олиб, шу ўқ атрофида буриш билан ёқни ихтиёрий ёқ билан, кўп ёқли бурчакни ихтиёрий кўп ёқли бурчак билан устма-уст тушириш мумкин. Мунтазам кўпёк моделини шу тасвирда кўрсатилган усулдан фойдаланиб ясаш мумкин.

Агар кўпёкнинг барча учлари бирор сферада ётса, у ҳолда бу сфера шу кўпёкка *ташқи чизилган* дейилади, агар кўпёкнинг барча ёқлари бирор сферага уринса, бу сфера шу кўпёкка *ички чизилган* деб аталади.

Мунтазам кўпёклар учун куйидаги ўринли: ҳар қандай мунтазам кўпёкка доимо ички ва ташқи сфералар чизиш мумкин.

Бу фикрнинг ўринли эканлигини кўрсатиш ўқувчига топширилади.

55- § Эйлер теоремаси

Юқорида келтирилган беш турдаги мунтазам кўпёк куйидаги умумий хоссага эга: ҳар бир мунтазам кўпёкда учлар билан ёқлар сонларининг йиғиндиси қирралар сонидан иккита ортқандир. Ҳақиқатан ҳам ҳар бир мунтазам кўпёк ёқлари сонини f , учлари сонини l , қирралари сонини k билан белгиласак,

$$\begin{aligned} \text{тетраэдр учун: } f &= 4, l = 4, k = 6, \\ \text{октаэдр учун: } f &= 8, l = 6, k = 12, \\ \text{гексаэдр учун } f &= 6, l = 8, k = 12, \\ \text{икосаэдр учун: } f &= 20, l = 12, k = 30, \\ \text{додекаэдр учун: } f &= 12, l = 20, k = 30, \\ \text{буларнинг ҳаммаси учун: } f + l - k &= 2. \end{aligned}$$

Бу хосса фақат мунтазам кўпёклар учун ўринли бўлмасдан, куйидаги теорема бу хоссанинг кенг синфдаги кўпёклар учун ҳам ўринли эканини тасдиқлайди.

Теорема (Эйлер теоремаси). Ҳар қандай қаварик кўпёкнинг ёқлари билан учлари сонининг йиғиндиси қирралари сонидан иккита ортқандир.

Изобот. Бирор M қаварик кўпёк берилган бўлиб, унинг ёқлари сонини f , учлари сонини l , қирралари сонини k бўлган. Бу ҳолда: $f + l - k = d$ десак, $q = 2$ эканини исботлаймиз.

Кўпёкнинг барча ёқлари бирлашмасини S билан белгилаб, уни *кўпёк сирти* деб атайлик. S дан битта ёқнинг ички қисминини чиқариб таштайлик, у ҳолда қолган сиртни S_1 десак, бу сиртдаги ёқлар сонини f_1 аввалги сиртга нисбатан битта камайиб, учлар сонини l_1 , қирралар сонини k_1 ўзгармай қолди, демак,

$$S_1 \text{ учун } f_1 + l_1 - k_1 = q - 1.$$

Бу вақтда икки ҳол юз бериши мумкин:

1-ҳол. S_1 нинг барча ёқлари фақат учбурчаклардан иборат бўлиши мумкин. Фақат битта ёққа тегишли қиррани (уч-нини) *чегаравий қирра* (*уч*) деб атайлик. Чегаравий қирра ёки уч бўлган ёқни ҳам *чегаравий ёқ* деб атайлик. Бундан кўринадики, қаварик кўпёкнинг сирти чегаравий ёққа, чегаравий қиррага ва чегаравий учга эга эмас. Масалан, параллелепипед сиртида чегаравий қирра ва чегаравий уч йўқ, лекин бир ёқнинг ичини чиқариб ташласак, қолган сиртда 4 та чегаравий қирра бўлади.

Қаварик кўпёкнинг сирти камида битта чегаравий бўлмаган қиррага эгалигидан чегаравий ёқ учбурчакдан иборат бўлганда унда битта ёки иккита чегаравий қирра ва биттадан ортқ бўлмаган чегаравий уч бўлиши мумкин. Равшанки, ёқ учбурчакдан иборат бўлганда у чегаравий учга эга бўлиши учун албатта иккита чегаравий қиррага эга бўлиши керак.

S_1 сиртдан чегаравий элементларга эга бўлган битта ёқнинг ичини чегаравий элементлари билан чиқариб ташлаймиз, қолган сиртни S_2 билан, унинг ёқлари, қирралари ва учлари сонинини мос равишда f_2 , l_2 , k_2 билан белгилиб, $f_2 + l_2 - k_2$ ни ҳисоблайлик. Агар чиқариб ташланган ёқ битта чегаравий қиррага эга бўлса (бу вақтда чегаравий уч бўлмайди), $f_2 + l_2 - k_2 = (f - 1) + l_1 - (k_1 - 1) = f_1 + l_1 - k_1 = q - 1$, агар чиқариб ташланган ёқ иккита чегаравий қиррага эга (албатта бу вақтда битта чегаравий уч ҳам шу ёққа тегишлидир) бўлса,

$$f_2 + l_2 - k_2 = (f_1 - 1) + (l_1 - 1) - (k_1 - 2) = f_1 + l_1 - k_1 = q - 1.$$

Демак, чегаравий қиррага эга бўлган бир ёқнинг ичини чегаравий элементлари билан чиқариб ташласак, $f_1 + l_1 - k_1$ йфода ўзгармайди. Худди шунга ўхшаш, S_2 дан чегаравий элементга эга бўлган бир ёқнинг ичини чегара элементлари билан чиқариб ташласак ҳам,

$$f_3 + l_3 - k_3 = q - 1.$$

Шу ишни давом эттириб, охири битта учбурчак (S кўпёкнинг сиртининг битта ёғи) қолгунча давом эттирамиз, равшанки, уч-

бурчак учун $f + l - k = 1$ дир. Ёқларни биттадан камайтиришда $f_1 + l_1 - k_1$ нифода доимо $q - 1$ га тенг бўлиб қолади учун $q - 1 = 1$ ёки $q = 2$. Шунинг исбот этиш талаб қилинган эди.

2-хўл. S_1 сиртининг ёқлари орасида томони учтадан кўп бўлган ёқ бўлиши мумкин. Бу ёқнинг шундай диагоналинини ўтказамизки, натижада бу ёқда камида битта учбурчак ҳосил бўлсин, агар шу диагоналинини S_1 нинг қирраси деб, ҳосил қилинган учбурчакни ҳам бир ёқ деб оلسак, S_1 да қирра ва ёқлар сони биттадан ортиб, учлар сони ўзгармайди, демек $f_1 + l_1 - k_1$ нифода ҳам ўзгармайди.

Учбурчакли бўлмаган ёқларни учбурчакли ёқларга келтирилиши билан $f_1 + l_1 - k_1$ нифода ўзгармас экан (бир неча ёқнинг бир текисликда жойлашиб қолиши аҳамиятсиздир). У ҳолда S_1 нинг барча ёқлари учбурчаклардан иборат бўлиб, 1-хўлга келтирилади.

Натижа. Мунтазам кўпёқларнинг кўпи билан беш турри мавжуддир.

АДАБИЁТ

1. Азларов Т. А. ва бошқ. Математикадан қўлланма. I қ. «Ўқитувчи», Т., 1979 й.
2. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. «Наука», М., 1968 г.
3. Атанасян Л. С. Геометрия, часть I. «Просвещение», М., 1973 г.
4. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия, «Просвещение», М., 1966 г.
5. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иванецкая В. П. Геометрия, часть I, «Просвещение», М., 1974 г.
6. Бакельман И. Я. Аналитик геометрия ва чизикли алгебра. «Ўқитувчи», Т., 1978 й.
7. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иванецкая В. П. Аналитическая геометрия. «Просвещение», М., 1970 г.
8. Беклеминев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, «Наука», М., изд. 4. 1980.
9. Васильева М. В. Методические рекомендации и указания по геометрии, часть I, II. МГПИ, М., 1979 г.
10. Вернер А. Л. Аффинная и евклидова геометрии, вып. 1, 2. Д., 1977 г.
12. Ефимов Н. В. Аналитик геометрия қисқа курси. «Ўқитувчи», Т., 1966 й.
13. Ефимов Н. В. Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. «Наука», М., 1970 г.
14. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. Изд-во МГУ, М., 1961 г.
15. Парнасский И. В., Парнасская О. Е. Многомерные пространства: квадратичные формы и квадрики. «Просвещение», М., 1978 г.
16. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. «Наука», М., 1978 г.

МУНДАРИЖА

Сўз боши 3

1 БУЛИМ. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ. ТЕКИСЛИКДАГИ ГЕОМЕТРИЯ

1.606. Векторлар алгебраси элементлари

1-§. Тарифлар, белгилашлар	5
2-§. Инанган кесмалар ҳақида тушуنча	8
3-§. Вектор	9
4-§. Векторлар устида чизикли амаллар	10
5-§. Векторларни айриши	13
6-§. Векторни сонга кўпайтириши	13
7-§. Векторнинг ўқдаги проекцияси	18
8-§. Векторларнинг чизикли боғлиқлиги	24
9-§. Вектор фазонинг базиси ва ўлчови ҳақида тушунча	28
10-§. Векторнинг берилган базисга нисбатан координаталари	29
11-§. Координаталари билан берилган векторлар устида амаллар	30
12-§. Икки векторни скаляр кўпайтириши	31
13-§. Скаляр кўпайтманинг координаталардаги нифодаси	33

II 606. Текисликда координаталар методи

14-§. Текисликда координаталарнинг аффин системаси	36
15-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиши	38
16-§. Текисликда декарт координаталарнинг тўғри бурчакли системаси. Икки нукта орасидаги масофа	40
17-§. Текисликнинг ориентацияси	41
18-§. Аффин координаталар системасини алмаштириши	44
19-§. Декарт координаталари системасини алмаштириши	46
20-§. Кўтб координаталар системаси	48
21-§. Нуқтанинг кўтб ва декарт координаталари орасидаги боғланиш	49
22-§. Координаталарни боғловчи тенглама ва тенгсизликларнинг геометрик маъноси	50
23-§. Алгебраик чизик ва унинг тартиби	57
24-§. Тўғри чизикнинг тўғри тенгламалари	59
25-§. Тўғри чизикни тенгламасига кўра ясаи	64
26-§. $Ax + By + C$ учхал ишорасининг геометрик маъноси	65
27-§. Текисликда икки тўғри чизикнинг ўзаро жойлашиши	66
28-§. Тўғри чизиклар дастаси	67
29-§. Декарт перпендида тўғри чизик ва у билан боғлиқ бўлган метрик масалалар	69
30-§. Икки тўғри чизик орасидаги бурчак	72

III 606. Текисликдаги алмаштиришлар

31-§. Тўғричаларни акслантириши ва алмаштириши	75
32-§. Алмаштиришлар группаси. Алмаштиришлар группасининг қисм группалари	79
33-§. Текисликдаги ҳаракатлар ва уларнинг хоссалари	81
34-§. Текисликнинг аналитик нифодаси	84
35-§. Адратнинг асосий турлари	86

36-§	Харакатлар таснифи	97
37-§	Харакатни ўқли симметриялар кўпайтмасига ёйиш	100
38-§	Текисликда ҳаракатлар гуруҳлари ва унинг қисм гуруҳлари	102
39-§	Геометрик фигураларнинг симметрия гуруҳлари	105
40-§	Ухшаллик алмаштириши — гомотетия билан ҳаракатнинг кўпайт-маси	107
41-§	Ухшаллик алмаштиришининг аналитик ифодаси	112
42-§	Ухшаллик алмаштиришининг аналитик ифодаси	113
43-§	Ухшаллик алмаштиришлари гуруҳлари ва унинг қисм гуруҳлари	114
44-§	Аффин алмаштириш	116
45-§	Аффин алмаштиришнинг аналитик ифодаси	121
46-§	Текисликдаги аффин алмаштиришлар гуруҳлари ва унинг қисм гуруҳлари	125
47-§	Инверсия, унинг аналитик ифодаси ва хоссалари	125

IV 6 o 6. Иккинчи тартибли чизиклар

48-§	Эллипс	131
49-§	Гипербола	139
50-§	Парабола	147
51-§	Эллипс ва гиперболанинг директрисалари	153
52-§	Иккинчи тартибли чизикларнинг кўтб координатлардаги тен-ламалари	156
53-§	Иккинчи тартибли чизикларнинг умумий тенгламаси	159
54-§	Иккинчи тартибли чизикларнинг таснифи	165
55-§	Иккинчи тартибли чизикни унинг тенгламаси бўйича ясаш	168
56-§	Иккинчи тартибли чизик жаркази	171
57-§	Иккинчи тартибли чизикнинг тўғри чизик билан кесимиши	174
58-§	Асимптотик йўналишлар, Уринма ва асимптоталар	175
59-§	Иккинчи тартибли чизикнинг диаметрлари	180
60-§	Иккинчи тартибли чизикнинг бош йўналишлари ва симметрия ўқлари	186

II ВУЛИМ. ФАЗОДАГИ ГЕОМЕТРИЯ

I 6 o 6. Фазода координатлар методи. Векторларнинг вектор ва арағаш кўпайтмаси

1-§	Фазода координатларнинг аффин системаси	191
2-§	Кемани берилган нисбатда бўлиш	192
3-§	Тўғри бурчакли декарт координатлар системаси	194
4-§	Фазодаги координатларнинг бошқа системалари	195
5-§	Аффин координатларни алмаштириш	197
6-§	Фазода ориентация	202
7-§	Координатларни боғловчи тенглама ва тенгсизликларнинг геомет-рик тақлини	203
8-§	Икки векторнинг вектор кўпайтмаси ва унинг хоссалари. Учбу-чакнинг кози	206
9-§	Уч векторнинг арағаш кўпайтмаси. Тетраэдрнинг ҳажми. Уч век-торнинг компланарлик шарты	212

II 6 o 6. Текислик ва фазодаги тўғри чизик

10-§	Текисликнинг аффин репердаги тўғри тенгламалари	217
11-§	Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш	220
12-§	$Ax + By + Cz + D$ ишорасининг геометрик маъноси	222
13-§	Декарт реперда текисликка доир баъзи масалалар	223
14-§	Текисликларнинг ўзаро вазияти	225
15-§	Текисликлар дастаси ва боғлани	230
16-§	Фазодаги тўғри чизик	232
17-§	Икки тўғри чизикнинг ўзаро вазияти, икки тўғри чизик орасидаги бурчак, тўғри чизиклар боғлани	235
18-§	Фазода текислик билан тўғри чизикнинг ўзаро вазияти	238

III 6 o 6. Иккинчи тартибли сиртлар ва уларни қаноник тенгламалари бўйича ўрганиш

19-§	Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизик ва текислик билан кесилиши	241
20-§	Сферик сирт	245
21-§	Иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар	247
22-§	Иккинчи тартибли конус сиртлар. Конус кесимлари	251
23-§	Айланма сиртлар	256
24-§	Эллипсоид	258
25-§	Гиперболоидлар	260
26-§	Параболоидлар	265
27-§	Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизикли ясовчилари	268
28-§	Иккинчи тартибли сиртнинг уринма текислиги	273

IV 6 o 6. n ўлчовли аффин ва евклид фазолари

29-§	Вектор фазо	276
30-§	Аффин фазо ва аффин координатлар системаси	285
31-§	n ўлчовли аффин фазоларнинг изоморфлиги	290
32-§	n ўлчовли текислик	292
33-§	Икки текисликнинг ўзаро вазияти	298
34-§	Аффин алмаштиришлар	300
35-§	Аффин алмаштиришлар гуруҳлари ва унинг қисм гуруҳлари	303
36-§	n ўлчовли векторли евклид фазоси	308
37-§	n ўлчовли евклид фазоси	312
38-§	Харакат	317
39-§	Евклид ҳаракатлари ҳақида қисқача маълумот	320
40-§	Ухшаллик алмаштириши. Ухшалликлар гуруҳлари	325

V 6 o 6. Квадратик формалар ва квадратиклар

41-§	Чизикли формалар	328
42-§	Квадратик формалар	331
43-§	Нормал кўрinishдаги квадратик форма. Инерция қонۇни. Мусбат аниқланган квадратик форма	337
44-§	Аффин фазодаги квадратиклар. Квадратика тенгламасини қаноник кўрinishга келтириш	341
45-§	Квадратикнинг маркази	345
46-§	Квадратикнинг таснифи	347
47-§	Ортоганал алмаштириш йўли билан квадратик формани қаноник ҳолга келтириш	350
48-§	Уч ўлчовли евклид фазосидаги квадратиклар	360

VI 6 o 6. Каварик кўпеклар

49-§	Тўғричақлар назариясининг баъзи тушунчалари	362
50-§	Каварик фигуралар	363
51-§	Каварик кўпбуручаклар	367
52-§	Каварик кўпеклар	371
53-§	Каварик кўпекнинг кўп ёкли бурчаклари	372
54-§	Мунтазам кўпеклар	375
55-§	Эйлер теоремаси	378
56-§	Абсолют	380

Додажонов Н. Д., Жўраева М. Ш.
 Геометрия: Пел. ин-глари ва ун-глари математика
 ва физ.-мат. фак-лари талабалари учун ўқув. кўлл/
 (Махсус муҳаррир М. А. Собиров). 1-қ. — Қайта ишланган
 2-нашири. — Т.: Ўқитувчи, 1996—384 б.

1. Муаллифдош.

Soyfullova

ББК 22.151я73

ДОДАЖОНОВ НОРМАТ,
 ЖўРАЕВА МАҲФУЗА

ГЕОМЕТРИЯ

1 КИСМ

Педагогика институтлари ва университетлари
 талабалари учун ўқув кўлланима
 Қайта ишланган иккинчи нашири

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Таҳририят муdiri М. Пулатов
 Муҳаррирлар: Н. Ғолимов, Э. Хўсенов
 Расмлар муҳаррири С. Соли
 Техмуҳаррир Т. Рашидиқова
 Мусаххач Ш. Тулганов

ИБ № 6775

Териниша берилди 21.11.94. Бошига руҳхат эгилди 17.05.96. Ўқувчи 60×90^{1/4}/
 Литерагуруна гарн. Керли 10 шпонача. Юзори босма усулда босилди. Шарт-
 ли б. д. 24,0. Шартли кр.-отт. 24,25. Нашр. д. 20,3. 3000 нусхада босилди.
 Буюртма № 2818.

«Ўқитувчи» нашири. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-171-94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот кўмитасининг Тошполлиграфкомит-
 нати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30, 1996.