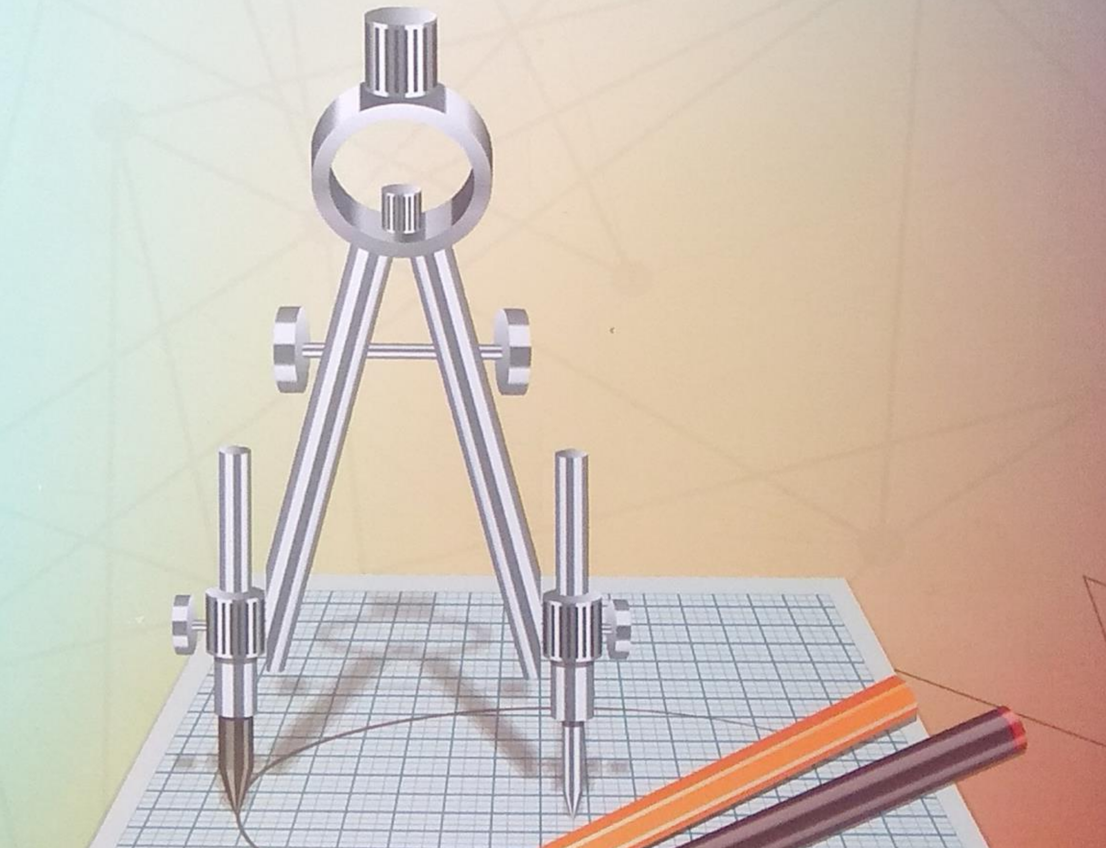
Shamshiyev Abdivali
Jo`rayev Tursunboy Fayziyevich
Tursunova Zulayho Omonullayevna
G'iyosova Zebo Toshbo'lovna

GEOMETRIYA

geometrik yasash metodlari



O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

JIZZAX DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

SHAMSHIYEV A., JO`RAYEV T. F., TURSUNOVA Z. O., G`IYOSOVA Z. T.

GEOMETRIYA

geometrik yasash metodlari

O`QUV QO`LLANMA

O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 5110100-"Matematika o`qitish metodikasi" va "Matematika va informatika" bakalavriat ta'lim yo`nalishlari talabalari uchun o`quv qo`llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent
"Innovatsiya-Ziyo"
2021

UDK : 517.1
BBK: 22.143
A 85

A. Shamshiyev
Geometriya (geometrik yasash metodlari) / T. F. Jo`rayev, Z. O. Tursunova, Z. T. G`iyosova / o`quv qo`llanma/. – Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo", 2021, 124 b.

Mazkur o`quv qo`llanmada «5110100 – Matematika o`qitish metodikasi» va "Matematika va informatika" ta'lim yo`nalishi uchun «Geometriya» fanining geometrik yasash metodlari bo`limining mavzulari bo`yicha nazariy ma'lumotlar, misol va masalalarni yechish namunalari va mustaqil ishlash uchun masalalar o`rin olgan.

Taqrizchilar:
H. Ro'zimurodov
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
E. Qurbonov
fizika-matematika fanlari nomzodi, katta o`qituvchi

O`quv qo`llanma O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta maxsus ta'lim vazirligining 2021-yil 1-martdagi 110-sonli buyrug`iga asosan 110-005-ro`yxatga olish raqamiga muvofiq nashrga ruxsat etilgan.

ISBN 978-9943-7274-9-6

KIRISH

Maktab o`quvchilarining, kollej va litsey tinglovchilari va talabalarining geometrik figura va uning tuzilishi bo`laklari elementlari orasidagi bog`lanishi, xossalari haqidagi tasavvurlarini aniqlashda, kengaytirishda va rivojlantirishda va ijodiy yondashishda ularning mantiqiy fikrlash, konstruktorlik qobiliyatlarini o`stirishda geometrik yasashga doir masalalar katta ahamiyat kasb etadi.

O`rganuvchi va tahsil oluvchida bu jihatlarni kengaytirish qobilyatlarini o`stirish, tarbiyalash rivojlangan texnika asrida va ma`lumotlarning intensiv texnologiyasi tadbig`i davrida mustaqil davlatimizning yetuk ijodkorlarini raqobatga tayyorlash zamonamizning asosiy vazifalaridan biridir. Bu holatga geometrik figura va uni birorta uskuna, asbob, qurollar yordamida yasashning muhim ahamiyati mavjuddir. Kishilik jamiyati paydo bo`lishidagi o`zaro munosabatlar, tabiatga bo`lgan munosabatlar o`rab turgan turli narsa va jihozlardan unumli va samarali foydalanish geometrik figuralarni hosil qilishga, yasashga olib keldi. Bu jarayon yasash qurollarini va qurollarning imkoniyat darajasini aniqlab berdi.

Matematika faning qurilishi strukturasi, qolaversa geometriya asoslari mantiqiy qonuniyatlari geometrik figurani yasashga doir masalalarni ham belgilab berdi. Ma`lumki, geometrik figura nuqtalarning birorta bo`sh bo`lmagan to`plamidir. Figuralarning ta`rifidan ko`rinmoqdaki, u turli-tuman bo`lib asosan tekis va tekis bo`lmagan bo`lib, uni fazoning birorta tekisligida va uning ustida qurishga, yasashga to`g`ri keladi. Geometrik figurani yasashga doir masalalar figura tuzilishi, xususiyatlari va masalaning talablaridan kelib chiqib, qurollarni ishlatish imkoniyati darajasini hisobga olib hamda konstruktiv masalani hal qilishda obyektiv va subyektiv qonuniyatlarni hisobga olishga to`g`ri keladi. Bu aytilganlardan kelib chiqib yasashga doir geometrik masala, uni yasash, yasash qurollari majmuasi va uning ishlatilish (foydalanish) imkoniyatlari, geometriyaning aksiomatik qurilishi va hokazolarni hisobga olgan holda quyidagi talab qonuniyatlar qatoriga ega bo`lamiz.

a) qurollar majmuasi va uning vazifalari;

b) yasashga doir masalalarning qo`yilishi;

d) yasash postulatlari;

e) yasalgan (tayyor) figuralar majmuasi;

j) yasalishi (qurilishi) lozim bo`lgan figura.

Biz asosan sirkul va chizg`ich qurollari yordamida tekis figuralarni (Fazoning birorta tekisligidagi figuralarni) yasashni maqsad qilib olib kiritilgan a) – j) shartlar asosida bajarishni ko`zda tutdik. Maskur metodik qo`llanmani yozishga jazm qilishimizga ustozimiz R.K.Otajonovning “Geometrik yasash metodlari” (Toshkent – 1971) qo`llanmasidan, asperantlik yillarida muloqotda bo`lgan A.S.Atanasyan ustozning geometriya I qism darsliklari hamda ustozlarimiz N.Dadajonov, R.Yunusmetov, T.Abdullayevlarning geometriya II qism darsliklaridan, ko’p yillar geometric yasashlarga doir olib borilgan tajriba va sinov darslaridan keng foydalandik va maskur metodik qo`llanma quyidagicha tarkibiy - tuzilishga ega bo`ldi.

1.Sirkul va chizg’ich yordamida geometrik masalalar yasashga doir masalalar ko`lami;

2. Sirkul va chizg’ich yordamida yasashning metodlari (uslublari);

3. Sirkul va chizg’ich yordamida yechilmaydigan ba`zi masalalar;

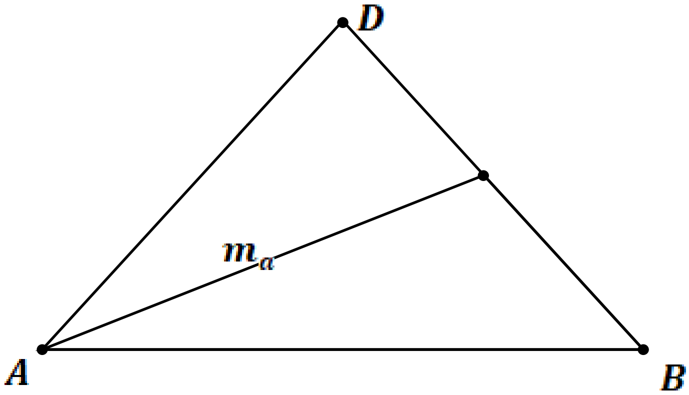
4. Aralash masalalar.

Maskur qo`llanmani yozishimizga jazm qilishimizda Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universiteti “Matematika o`qitish metodikasi” va “Umumiy matematika” kafedralari hamda Jizzax Davlat pedagogika instituti “Matematika o’qitish metodikasi” kafedrasi o`qituvchilari salohiyatidan foydalandik. Matnni o`qib chiqib qimmatli masalahatlarini bergan E.Q.Qurbonovga va qo`llanmaning masalalarini yechishda, mantlarni terishda, chizmalarni chizishda mehnatini ayamagan iqtidorli talabamiz M.Boboqulovaga o`z minnatdorchiligimizni bildiramiz. Hamda qo`llanmani o`qib sifatini yaxshilash, kamchiliklarini bartaraf qilish uchun maslahatlarini ayamaydigan barcha o`quvchilarga oldindan minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Shartli belgilashlar

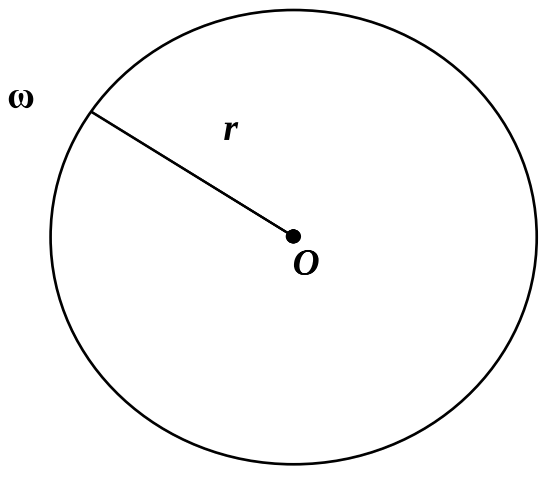
Biz uchburchakning chiziqli elementlari deb 17 ta chiziqli elementni olamiz: tomonlari (a,b,c), medianalari (m_a,m_b,m_c), balandliklari (h_a,h_c,h_b), bissektrissalari (l_a,l_b,l_c), ichki chizilgan aylanasining radiusi (r), tashqi chizilgan aylananing radiusi (R), tashqi – ichki chizilgan aylanasining radiusi (r_a,r_b,r_c). Chiziqli element sifatida uchburchakning boshqa elementlari (masalan: perimetri, o`rta chizig`i va hokazolar) ham olinishi mumkin.

1.Uchlari A, B va D nuqtalarda bo`lgan ΔABD da quyidagi belgilashlarni kiritaylik.



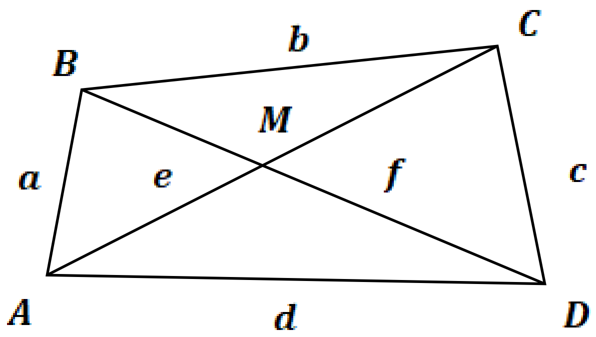
m_a - A uchidan tushirilgan mediana uzunligi;
b_a – A uchining bissektrissa uzunligi;
h_a – A uchidan tushirilgan balandlik uzunligi;
$\angle$A – A uchidagi burchak kattaligi;
$[AB]$-kesma yoki shu kesma uzunligi.

2. $\omega(O,r)$- tekislikda markazi O nuqtada, radiusi r ga teng bo`lgan ayalana.

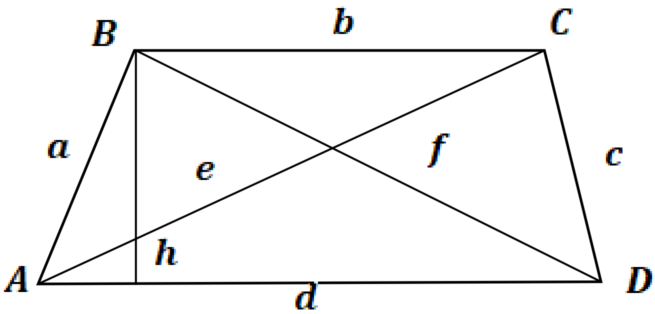


3. EF – tekislikda E va F nuqtalardan o`tgan to`g`ri chiziq, agar boshqasi aytilmagan bo`lsa.

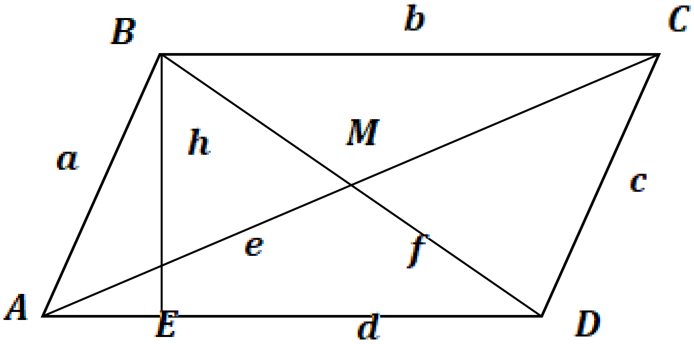
4.To`rtburchak



5.Trapetsiya



6.Parallelogramm



I BOB. SIRKUL VA CHIZG’ICH YORDAMIDA YASALADIGAN MASALALAR

1.1-§. Sirkul va chizg’ich yordamida yasashga doir masalalar haqida tushuncha va yasash postulatlari.

Bizga o’rta maktabdan yasashga doir masalalarni yechishning turli usullari ma’lum. Maktabda yasaladigan figuralarni asosan sirkul va chizg’ich yordamida bajarilishi talab qilinadi. Akademik litseylar uchun o’quv dasturda o’quvchilar sirkul va chizg’ich yordamida tipik yasashga doir masalalarni hal qilish talab qilinadi. Jumladan, berilgan tomonlariga ko’ra uchburchak yasash, berilgan burchakka teng burchak yasash; burchak bissektrisani yasash; kesmani teng ikkiga bo’lish; perpendikulyar to’g’ri chiziq yasash va h.k.

O’quvchilarning fazoviy tasavvurlarini kengaytirishda ijodiy va konstruktorlik qobiliyatlarini rivojlantirishda hamda ularni mantiqiy fikrlashga o’rgatishda yasashga doir masalalarni yechishning ahamiyati juda kattadir.

Bizga ma’lumki, nuqtalarning har qanday to’plami figura deb ataladi. Ma’lum talablarga javob beruvchi figurani bir yoki bir nechta yasash qurollari yordamida yasashni talab etgan masala konstruktiv (yasashga doir) masala deyiladi.

Konstruktiv geometriyada geometrik figurani yasash deganda uning barcha elementlarini topishni tushunamiz. Geometriyaning yasashga doir asosiy talablari aksiomalar orqali ifoda qilinadi.

Maktablar, kollejlar va litseylar kursida geometrik yasashlar muhim o`rin egallaydi. Geometrik figuralarni yasashga doir masalalar turli metodlar orqali bajariladi. Avvalo yasashga doir masalalarni yechishda masalaning berilishi (qo`yilishi) shartlari, masalaning yechilishi bosqichlari, yasash uskunalariga e`tibor qaratiladi.

Fazoda biror tekislikni tanlab olamiz va bu tekislikka asosiy tekislik deb ataymiz. Qaralayotgan hamma geometrik figuralar shu tekislikda joylashgan deb olinadi. Asosiy tekislikning nuqtalari, to`g`ri chiziqlari va aylanalari yasashga doir masalalarda muhim o`rin egallagani sababli ularga ham asosiy figuralar deb ataymiz. Bu asosiy figuralardan tashqari bizni kesma, nur, yarim tekislik, ko`pburchaklar va aylana yoylari kabi sodda geometrik figuralar qiziqtiradi, bu sodda geometrik figuralar nuqtalarning berilishi bilan to`la aniqlanadi.

Ixtiyoriy yasashga doir masala berilgan figuralar yordamida u yoki bu shartni qanoatlantiruvchi (izlangan) figurani yasash talab qilinadi. Umumiy holatda yasashga doir masalaning qo`yilishini aniqlash maqsadida quyidagi kelishuv qoidalarini o`rnatishga to`g`ri keladi. Masalani aniq qo`yishda va ma`lum qoidalar asosida yechishda ma`lum bir asosiy figuralar to`plami Ω ajratiladi. Ω to`plam elementlari nuqta, to`g`ri chiziq va aylanadan iborat bo`lib, Ω ning elementlari yasalgan deb yuritiladi. Ω dagi har bir turli chiziq, nuqta va aylana bitta yaxlit obyekt sifatida qabul qilinadi. Masalan: ɣ aylana yasalgan bo`lsa, u holda uning har bir nuqtasi qolaversa, markazi yasalgan deb hisoblanavermaydi. Lekin bu aylananing ma`lim bir nuqtalari alohida erkin bir figura sifatida yasalgan deb olishimiz vaholanki, bu holatlar masalaga aytilgan bo`ladi yoki yasash jarayonida vujudga keladi.

Bunday holatlar ya`ni yasashga doir masalani asosiy figurasi quyidagi ikki shartni qanoatlantirishi kerak.

a) yasashga doir masala shartida berilgan nuqta, to`g`ri chiziq va aylana Ω to`plamga tegishli deb hisoblanadi, ya`ni bu figuralar yasalgan deb hisoblanadi. Hamda masalada berilgan asosiy figuralar to`plami Ω to`plami chekli to`plamdir;

b) kamida bitta yasalgan to`g`ri chiziq mavjuddir. Ixtiyoriy yasalgan to`g`ri chiziqda yoki aylanada kamida ikkita yasalgan nuqta mavjuddir.

Endi biz ba`zi bir amallar (yasashlar) yordamida Ω ga yangi nuqta, to`g`ri chiziq va aylanalar kiritamiz. Bu har bir amalni yasashning qadamlari deb yuritamiz.

Yasash postulatlarini keltiramiz, ya`ni biz yasashni qaysi qadamlarini bajarilgan deb hisoblashimiz mumkin.

P_1. Yasalgan ikki nuqtadan o`tgan to`g`ri chiziq yasalgandir.

P_2.Markazi yasalgan nuqtada, radiusi uchlari yasalgan nuqtalardan iborat bo`lgan kesma uzunligidan iborat aylana yasalgandir.

P_3.Ikki parallel bo`lmagan yasalgan to`g`ri chiziqlarning kesishish nuqtasi yasalgandir.

P_4.Yasalgan to`g`ri chiziqning va aylananing kesish nuqtalari yasalgandir.

P_5.Ikki yasalgan kesishuvchi aylananing kesish nuqtalari yasalgandir.

Endi biz umumiy ko`rinishda sirkul va chizg`ich yodamida yasashga doir masalaning qo`yilishi ta`rifini keltiramiz. Bizga $F_1, F_2, ..., F_n$ chekli sondagi asosiy yasalgan figuralar berilgan bo`lib yasash lozim bo`lgan izlanayotgan F figurani ta`riflovchi asosiy xossalari ifodalangan bo`lsa, $P_1 - P_5$ postulatlarni chekli sonda qo`llab F asosiy figurani yasash talab qilinadi. Ta`kidlaymizki, bu ta`rifda chekli sondagi amallar bajarilish juda muhimdir.

Biz Yevklid tekisligiga taalluqli yasashga doir masalalar bilan shug'ullanamiz. Tekislikda yasashga doir masalalarni yechishda odatda yasash qurollaridan sirkul va chizg'ich ishlatiladi. Yasashga doir masalalarni chizg'ich va sirkul yordamida yechishda chizma praktikasida qo'llaniladigan chizg'ich va sirkul emas, balki abstrakt chizg'ich va sirkul e'tiborga olingan. Bu qurollarning konstruktiv imkoniyatlari quyidagi ikki aksioma bilan ifoda qilinadi:

1.Yasash uskunalari bular sirkul va chizg`ichdir. Chizg`ich birliklarga ajratilmagan bo`lib, uning yordamida faqat ikki yasalgan nuqtadan o`tgan to`g`ri chiziqni o`tkazish mumkin.

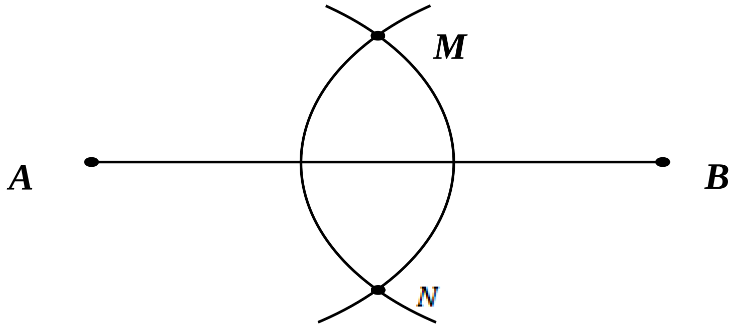
2.Sirkul yordamida markazi yasalgan nuqtada va radiusi yasalgan kesma uzunligiga teng bo`lgan aylanani chizish mumkin.

Izoh: Eslatamizki, yasashga doir masalalarni yechishda ba`zida yasalgan figuralar to`g`ri chiziq, aylana, nurga va kesmaga tegishi yoki tegisli bo`lmagan nuqtalarni ixtiyoriy olishga to`g`ri keladi. Bu oraliq yordamchi yasalgan nuqtalarni tanlab olish shart tufayli bajariladi. Bu tegishli va tegishli bo`lmagan nutqalarni olish mumkinligini P_1-P_5 yasash postulatlari yordamida quyidagicha asoslaymiz.

1-masala

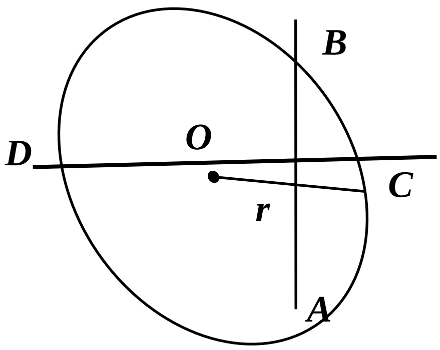
To`g`ri chiziqqa tegishli bo`lmagan birorta nuqtani yasang.

Yechish: Berigan (yasalgan) to`g`ri chiziqda ixtiyoriy ikki yasalgan A va B nuqtalarni olamiz. So`ngra $\omega(A,r)$ va $\omega(B,r)$ aylanalarni yasaymiz. Bu aylanalar M va N nuqtalarda kesishadi. $P_5$ bo`yicha bu nuqtalar yasalgan deb hisoblanadi. Bu yerda $r > \frac{AB}{2}$



2-masala Berilgan aylana markazini yasang

Yechish : Aytaylik ω yasalgan aylana bo`lsin. Bu aylananing ixtiyoriy yasalgan A va B nuqtalarini olamiz va AB kesma o`rta perpendikulari *m* ni o`tkazamiz. Bu o`rta maktabdan ma`lum. Aytaylik C va D nuqtalar *m* bilan $\omega$ ni kesishgan nuqtalari bo`lsin (bu nuqtalar P_4 bo`yicha yasalgandir). CD kesmaning o`rtasi O nuqta ω aylananing markazidir.



Biz bundan keyin aylananing markazi yasalgan deb hisoblaymiz.

1.2-§. Bevosita yechiladigan masalalar.

Kontruktiv masalalarni yechishda ularni ko’p uchrab turadigan eng sodda masalalarga keltirib yechiladi. Bunday masalalarni odatda elementar masalalar yoki asosiy geometrik yasashlar deb ataladi. Ularning quyidagi ro’yxati albatta shartlidir.

1.Berilgan kesmani o`rtasini topish.

Berilgan: AB kesma.

Topish kerak: O nuqta – AB kesma o`rtasi.

Reja:

1^0. $\omega_1(A,r)$, bu yerda $r \succ \frac{AB}{2}$;

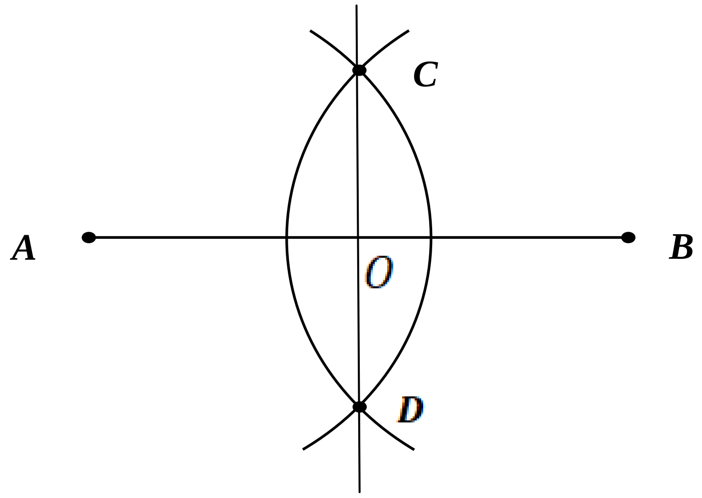
2^0. $\omega_2(B,r)$.

3^0. $\omega_1 \cap \omega_2 = \{C,D\}$

4^0. $CD \cap AB = \{O\}$

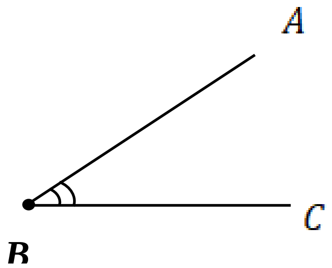
5^0. O - nuqta biz izlayotgan nuqta.

Yasash:



2. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish (yoki burchak bissektrisasini topish).

Berilgan: $\angle$ABC.



Yasash kerak: $\angle$ABC burchakning BD – bissektrisani.

Reja:

1^0. $\omega_1(B,r)$.

2^0. $\omega_1 \cap BA = \{K\}$

3^0. $\omega_1 \cap BC = \{L\}$

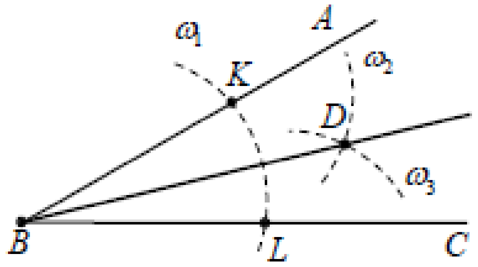
4^0. $\omega_2(K,r_1)$.

5^0. $\omega_3(L,r_1)$.

6^0. $\omega_2 \cap \omega_3 = \{D\}$

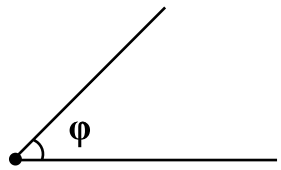
7^0. B va D nuqtalarni tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan BD – bissektrisa hosil bo`ladi.

Yasash:



3. Berilgan burchakka teng burchak yasash.

Berilgan: $\angle$AOB=φ.



Yasash kerak: $\angle$AOB= $\angle$NMK

Reja:

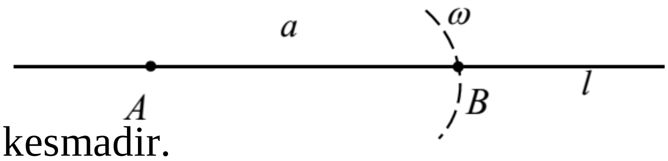
1^0. $\forall$ M$\in l$ – to`g`ri chiziq

2^0. ω_1(M,OC).

3^0. $\omega_1 \cap l$=K.

4^0. $\omega_2(K, CD)$.

1. $A \in l$ - ixtiyoriy.
2. $\omega(A, a)$.
3. $\omega \cap l \equiv B$.
4. AB– yasash talab etilgan kesmadir.

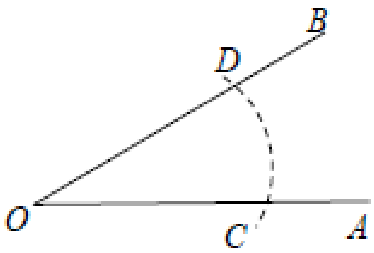


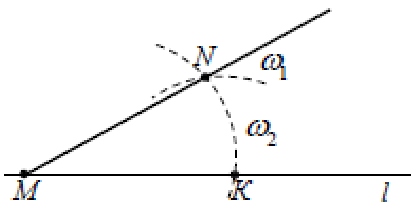
5^0. $\omega_1 \cap \omega_2 = N$

6^0. M va N larni tutashtiramiz.

7^0. Izlangan burchak $\angle$KMN.

Yasash:





4. Berilgan nuqtadan berilgan to’g’ri chiziqqa parallel to’g’ri chiziq o’tkazish.

Berilgan: a – to`g`ri chiziq va A$\notin a$ nuqta.

Yasash kerak: A nuqtadan o`tuvchi va *a* ga parallel *c* to`g`ri chiziq.

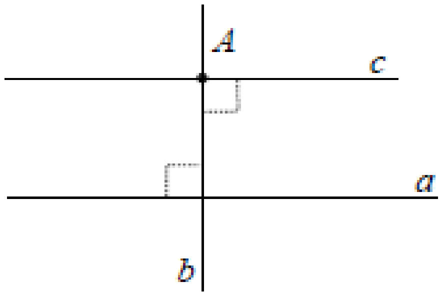
Reja:

1^0. $A \in b, b \perp a.$

2^0. $A \in c, c \perp b.$

3^0. *c* – izlangan to`g`ri chiziq.

Yasash:



5. Berilgan to’g’ri chiziqqa berilgan nuqtadan perpendikulyar o’tkazish (2 xol).

1-hol.

Berilgan: *a* – to`g`ri chiziq va $A \in a$.

Reja:

1^0. $\omega_1(A, r)$. r>0

2^0. $\omega_1 \cap a = \{B, C\}.$

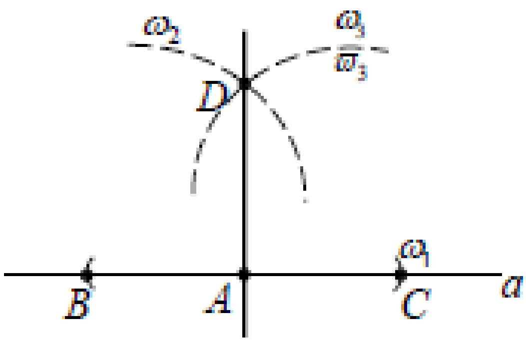
3^0. $\omega_2(B, r_1), r_1 \succ \frac{BC}{2};$

4^0. $\omega_3(C, r_1).$

5^0. $\omega_2 \cap \omega_3 = D.$

6^0. AD - biz izlayotgan to`g`ri chiziq.

Yasash:



2-hol.

Berilgan: *a* – to`g`ri chiziq va $A \notin a$.

Reja:

$1^0. \omega_1(A,r).$

$2^0. \omega_1 \cap a = \{B,C\}.$

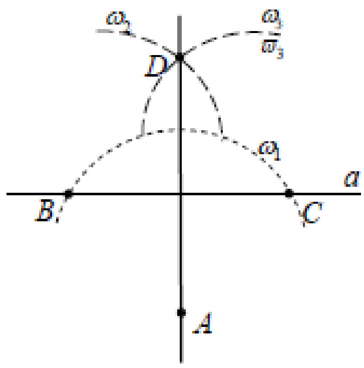
$3^0. \omega_2(B,r_1), r_1 \succ \frac{BC}{2};$

$4^0. \omega_3(C,r_1).$

$5^0. \omega_2 \cap \omega_3 = D.$

6^0. AD - biz izlayotgan to`g`ri chiziq.

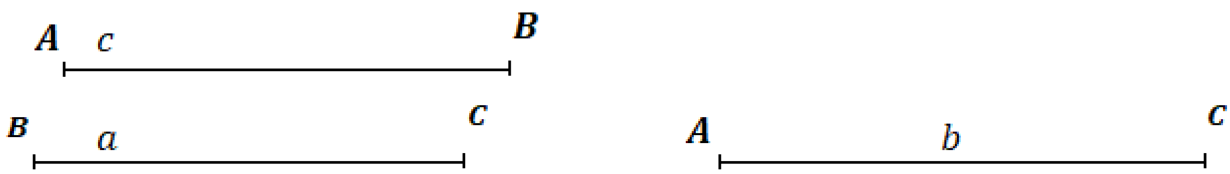
Yasash:



6. Uchta tomoni berilgan uchburchak yasash.

Berilgan: *a*=BC, *b*=AC, *c*=AB – uchburchak tomonlari.

Yasash kerak: ΔABC.



Reja;

$1^0. \forall$ A $\in l$ – to`g`ri chiziq.

$2^0. \omega_1(A,b).$

$3^0. \omega_1 \cap l = C.$

$4^0. \omega_2(A,c).$

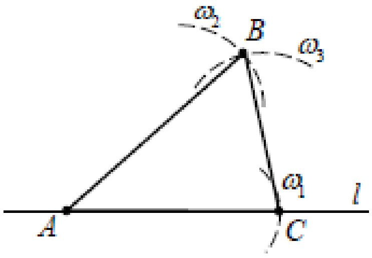
$5^0. \omega_3(C,a).$

$6^0. \omega_2 \cap \omega_3 = \{B\}.$

7^0. ΔABC - biz izlagan uchburchak.

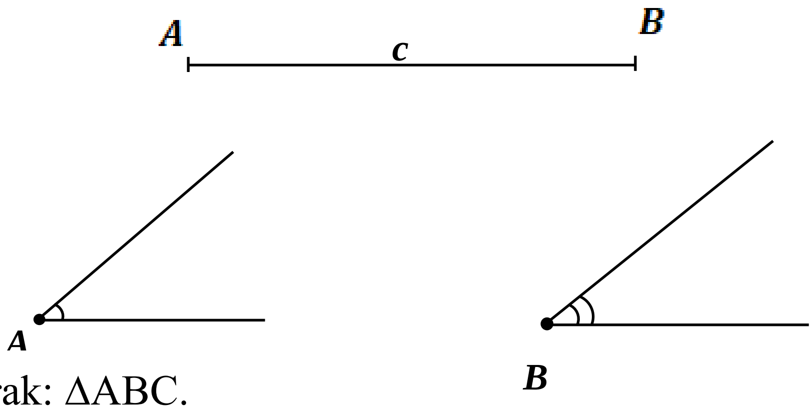
Izoh: a+b>c, a+c>b, b+c>a shartlarning birortasi o`rinli bo`lsa masala yechimga ega.

Yasash:



7. Bir tomoni va unga yopishgan 2 burchagi bo'yicha uchburchak yasash.

Berilgan: *c*=AB kesma va $\angle$A va $\angle$B.



Yasash kerak: ΔABC.

Reja:

1^0. $\forall$ A$\in l$ – to`g`ri chiziq.

2^0. $\omega(A,c)$.

3^0. $\omega \cap l = \{B\}$.

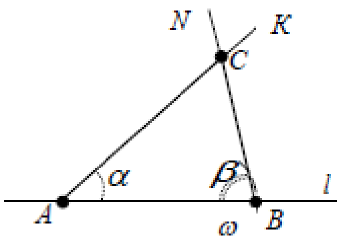
4^0. $\angle$BAK=$\angle$A.

5^0. $\angle$ABN=$\angle$B.

6^0. AK$\cap$BN=C.

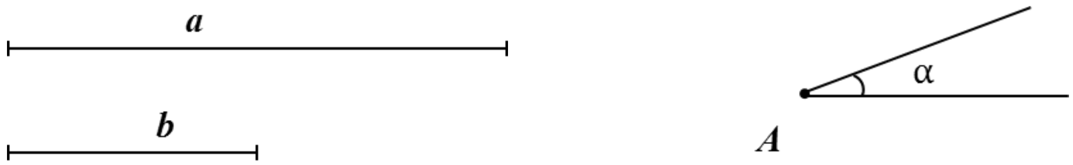
7^0. ΔABC - biz izlagan uchburchak.

Yasash:



8. Ikki tomoni va ular orasidagi burchak berilgan uchburchak yasash.

Berilgan: b, a va $\angle$A.



Yasash kerak: ΔABC.

Reja:

1^0. $\forall A \in l$ – to`g`ri chiziq.

2^0. A nuqtadan $\angle A = \angle KAN$ ni qo`yamiz.

3^0. $\omega_1(A,b)$.

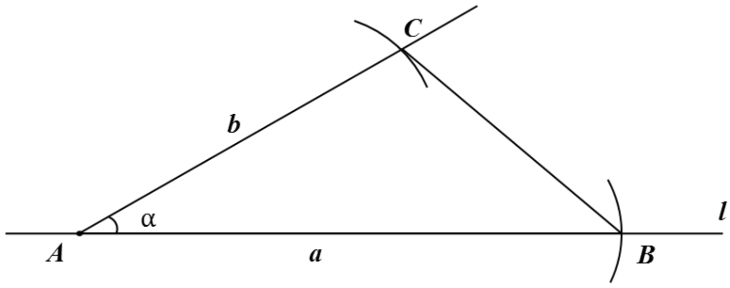
4^0. $\omega_2(A,c)$.

5^0. $\omega_1 \cap AK = \{C\}$.

6^0. $\omega_2 \cap AN = \{B\}$.

7^0. B va C nuqtalarni tutashtirib, izlanayotgan ΔABC ni hosil qilamiz.

Yasash :



9.Berilgan nurni uchidan (boshidan) unga perpendikulyar chiqarish.

Reja:

1^0.Berilgan: OA – nur . O – nurning uchi.

2^0. $w(o,r)$.

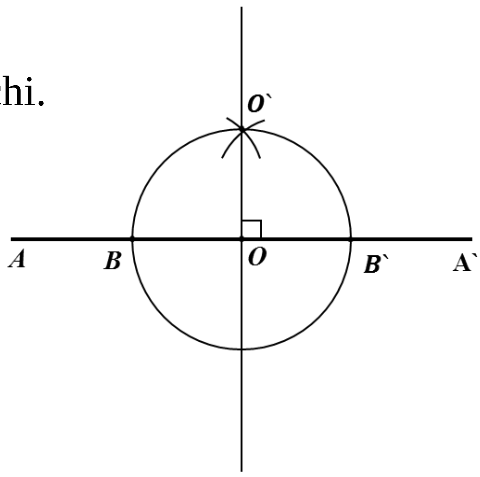
3^0.O nuqtada o`ng tomonga OA` nur chiqaramiz.

4^0. $\omega \cap A`A = \{B`, B\}$.

5^0. $\omega_1(B`, r_1)$.

6^0. $\omega_2(B, r_1)$. $r_1 > \frac{r}{2}$.

7^0. $\omega_1 \cap \omega_2 = \{O_1\}$.

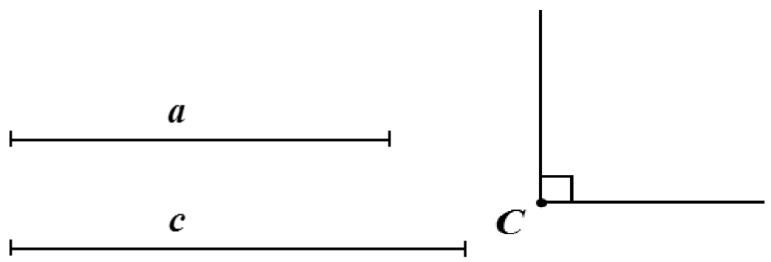


$8^0. OO_1 \perp OA$

Yasash:

10. Gipotenuzasi va bir kateti bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasash.

Berilgan: a va c, $\angle C=90^0$.



Yasash kerak: To`g`ri burchakli - ΔABC.

Reja:

$1^0. \forall C \in l$.

2^0. C dan l to`g`ri chiziqqa l_1 perpendikular chiqaramiz.

$3^0. \omega(C,a)$.

$4^0. \omega \cap l_1 = \{B\}$

$5^0. \omega_1(B,c)$.

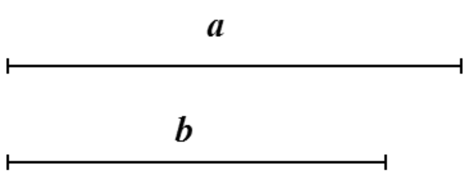
$6^0. \omega_1 \cap l = \{A\}$.

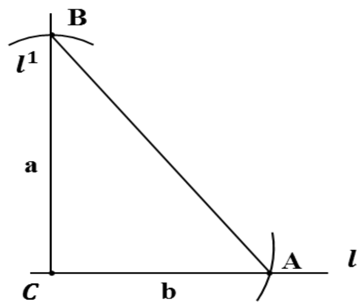
7^0. ΔABC - izlangan to`g`ri burchakli uchburchak

Yasash:

11. Ikki kateti bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasang va h.k.

Berilgan: a va b, $\angle C=90^0$.



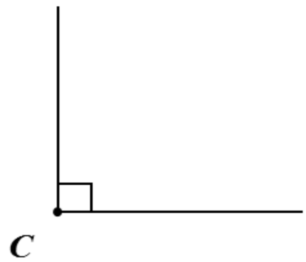


Yasash kerak: To`g`ri burchakli - ΔABC.

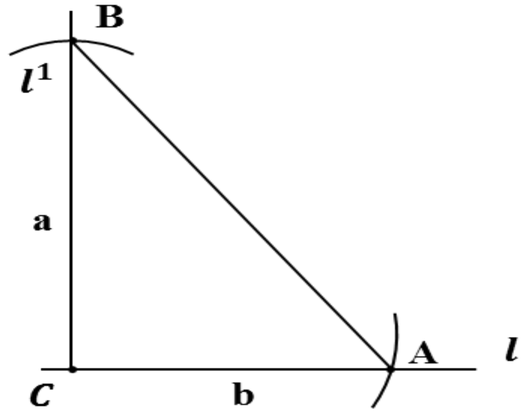
Reja:

$1^0. \forall C \in l$.

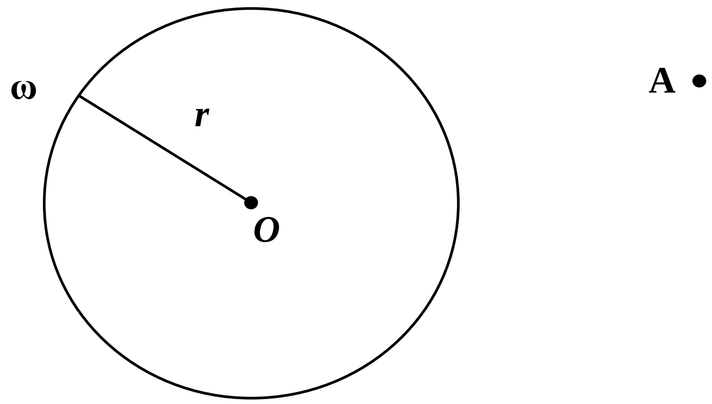
2^0. C dan l to`g`ri chiziqqa l_1 perpendikular chiqaramiz (5-masala 2-hol).



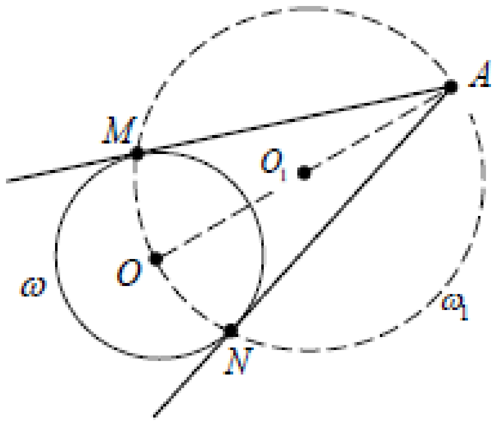
3^{0}. $\omega(C,a)$.
4^{0}. $\omega \cap l_1 = \{B\}$
5^{0}. $\omega_1(C,b)$.
6^{0}. $\omega_1 \cap l = \{A\}$.
7^{0}. ΔABC - izlangan to`g`ri burchakli uchburchak
Yasash:



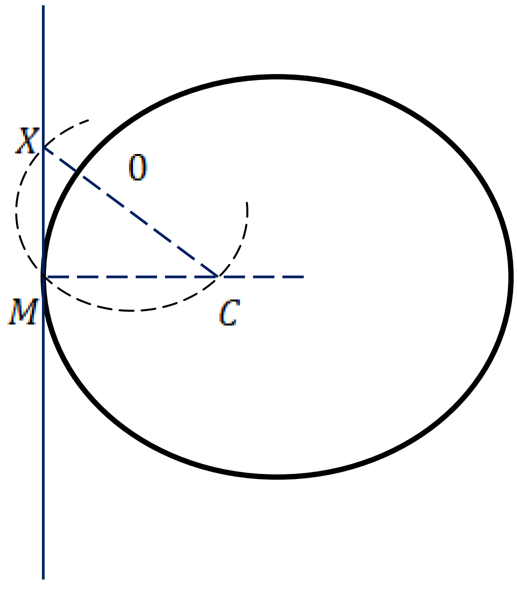
12. Berilgan nuqtadan aylanaga urinma o'tkazish.
1-hol. Berilgan: A nuqta va $\omega(O,r)$.



Reja :
1^{0}. O va A nuqtalarni tutashtiramiz.
2^{0}.O_1 – OA kesmaning o`rtasini topamiz.
3^{0}. $\omega_1(O_1, OO_1)$.
4^{0}. $\omega \cap \omega_1 = \{M, N\}$
5^{0}. MAva NA biz izlayotgan urinmalardir.
Yasash:



2-hol. Berilgan nuqta aylana ustida yotadi. Berilgan M nuqtaning shu aylanada yotishi shu M nuqtani urinish nuqtasi ekanligini ko`rsatadi. Bu xolda izanuvchi urinma berilgan aylananing OM radiusiga M nuqtadan perpendikulyar bo`ladi. Demak berilgan M nuqtani O markaz bilan tutashtirib, bu radiusga uning M uchidan perpendikulyar o`tkazsak, izlanuvchi urinma hosil bo`ladi.



1.3-§. Nuqta, kesma, to`g`ri chiziq va burchaklar yasashga doir masalalar

Yasashga doir masala, unga qo`yiladigan talablar, postulatlar, keltirilgan bevosita yechiladigan masalalar va figura elementlarini - xossalarini qo`llagan holda quyidagi masalalar yechishga tavsiya qilinadi.

1.3.1. Berilgan uch nuqtaning ikkitasidan o`tkazilgan to`g`ri chiziqqa parallel qilib uchinchi nuqtadan to`g`ri chiziq o`tkazing.

1.3.2. Berilgan to`g`ri chiziqda shunday nuqta topingki, uni to`g`ri chiziq tashqarisida berilgan nuqta bilan tutashtiruvchi kesma va shu to`g`ri chiziq bilan berilgan kattalikdagi burchak hosil qilsin.

1.3.3. Faqat sirkuldan foydalanib, berilgan kesmani davom ettirmasdan uning davomida yotuvchi nuqtani toping.

1.3.4. Ma`lum uzunlikdagi kesmani berilgan burchak tomonlari orasiga burchakning tomonlarini kesib o`tuvchi ma`lum to`g`ri chiziqqa parallel ( yoki bu kesma burchakning bir tomoni bilan ma`lum burchak tashkil etadigan) qilib joylashtiring.

1.3.5. Berilgan burchak tomonlari orasiga ma`lum uzunlikdagi kesma uchlarini burchak tomonlaridan teng kesmalar ajratadigan qilib joylashtiring.

1.3.6. Berilgan nuqtadan berilgan burchak tomonlaridan teng kesmalar ajratadigan to`g`ri chiziq o`tkazing.

1.3.7. Berilgan burchakning uchidan uning tashqarisida yotuvchi hamda burchak tomonlari bilan teng burchaklar hosil qiluvchi to`g`ri chiziq o`tkazing.

1.3.8. Burchak va nuqta berilgan. Shu berilgan nuqtadan shunday to`g`ri chiziq o`tkazingki, uning berilgan burchak tomonlari orasidagi kesmasi burchakning bir tomonida shu to`g`ri chiziq ajratgan kesmaga teng bo`lsin.

1.3.9. Berilgan nuqtadan berilgan ikki parallel to`g`ri chiziq orasidagi kesmasi ma`lum uzunlikda bo`lgan to`g`ri chiziq o`tkazing.

1.3.10. Berilgan burchak tomonlarini ma`lum uzunlikdagi kesmalar hosil qilib kesib o`tkazuvchi to`g`ri chiziq o`tkazing.

1.3.11. Uchburchakning asosiga parallel qilib uchburchak yon tomonlarini kesganda, bir yon tomonining pastki kesmasi ikkinchisining ustki kesmasiga teng bo`lgan to`g`ri chiziq o`tkazing.

1.3.12. To`g`ri burchakni teng uchga bo`ling.

1.3.13. Sirkul va chizg`ich yordamida quyidagi burchaklarni yasang:

15^0, 22^0, $30'$, 60^0, 75^0, 105^0, $112^0 30'$, 120^0, 135^0, 150^0.

1.3.14. O`rta perpendikulyar tushunchasidan foydalanmay, berilgan to`g`ri chiziqqa uning berilgan nuqtasidan perpendikulyar chiqaring.

1.3.15. Uchi chizmada ko`rsatilmagan burchakning bissektrisasini toping.

1.3.16. Berilgan A nuqtadan shunday to`g`ri chiziq o`tkazingki, berilgan B va C nuqtalardan u to`g`ri chiziqqacha masofalar teng bo`lsin.

1.3.17. Berilgan A nuqtadan shunday to`g`ri chiziq o`tkazingki, berilgan B va C nuqtalardan bu to`g`ri chiziqqa o`tkazilgan perpendikulyarlar orasidagi masofa berilgan kesmaga teng bo`lsin.

1.3.18. Berilgan ikki nuqtaning har biridan bittadan shunday to`g`ri chiziq o`tkazingki, ularning berilgan to`g`ri chiziq bilan kesishuvidan teng tomonli uchburchak hosil bo`lsin.

1.3.19. Burchak ichidagi nuqtadan shunday to`g`ri chiziq o`tkazingki, uning burchak tomonlari orasida qolgan kesmasi shu nuqtada teng ikkiga bo`linsin.

1.3.20. Berilgan aylanaga shunday ikki urinma o`tkazingki, ular o`zaro berilgan burchak ostida kesishsin.

1.3.21. Aylana ichida berilgan nuqtadan shunday vatar o`tkazingki, u vatar shu aylanada teng ikkiga bo`linsin.

1.4-§. Yasashga doir masalalar yechishdagi bosqichlar.

Odatda, yasashga doir masalalarni hal qilishda masala yechimini osonlashtirish va to'la yechimini ta'minlash maqsadida yuritiladigan muhokama quyidagi 4 ta bosqichdan iborat:

1. Analiz – tayyorgarlik va masalani o`rganish bosqichi;
2. Yasash – amaliy bosqichi;
3. Isbotlash – sinash bosqichi (yechimni asoslash);
4. Tekshirish – ijodiy bosqich.

1. <u>Analiz.</u>

Bu masala yechishning dastlabki tayyorlov bosqichidir. Bu bosqichning asosiy vazifasi masalani yechilishi oldindan ma'lum bo'lgan masalalarga ajratish va masalaning yechilish tartibini aniqlashdan iborat. Bunda, masala yechildi deb faraz qilib, izlanayotgan figura masala talabiga mumkin qadar to'laroq javob beradigan qilib qo'lda taxminan chizib qo'yiladi. So'ngra kerakli geometrik faktlardan foydalanib, so'ralgan va berilgan figura orasidagi bog'lanishlar aniqlanadi va figuraning qaysi elementini qay tartibda yasash mumkinligini belgilanadi. Bunda berilgan va izlanayotgan figuralar orasidagi bog'lanishlarni topishni osonlashtirish maqsadida yordamchi figuradan foydalaniladi. Yordamchi figura shunday bo'lish kerakki, uni berilganlarga asosan yasash va undan izlanayotgan figuraga to'ldirish mumkin bo'lsin. Shu asnoda qo'shimcha figurani va izlanayotgan figurani yasash rejasi tuziladi.Bu ketma – ket yasash jarayoni.

2. Yasash.

Masalada so'ralgan figurani yasash uchun kerak bo'lgan asosiy yasashlar $P_1 - P_5$ postulatlarni hisobga olib ketma-ketligi analiz bosqichida tuzilgan reja asosida, qadam va qadam chizg'ich va sirkul yordamida figura yasaladi.

3. Isbotlash.

Bunda yasalgan figura masalada izlangan figura ekanligi isbot qilinadi, ya'ni uni masalada berilgan barcha shartlarga javob berishi isbotlanadi. Isbotlash bosqichida yasashda bajarilgan amallarga va geometriyaning tegishli teoremalariga asoslanadi. Ko`pgina hollarda isbotlash yasash jarayonidan kelib chiqadi.

4. Tekshirish.

Bu bosqichda quyidagi savollarga javob topish kerak:

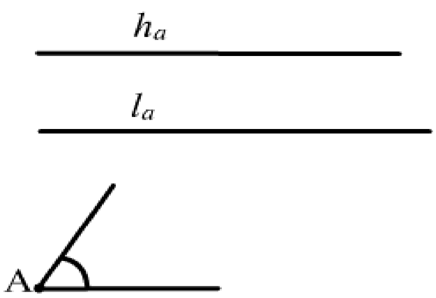
1)masalada berilgan elementlarni ixtiyoriy tanlab olinganda ham masala yechimga ega bo'ladimi, agar ega bo'lmasa, u holda qanday shart bilan tanlab olinganda masala yagona yechimga ega bo'ladi, qanday hollarda masala yechimga ega bo'lmaydi?

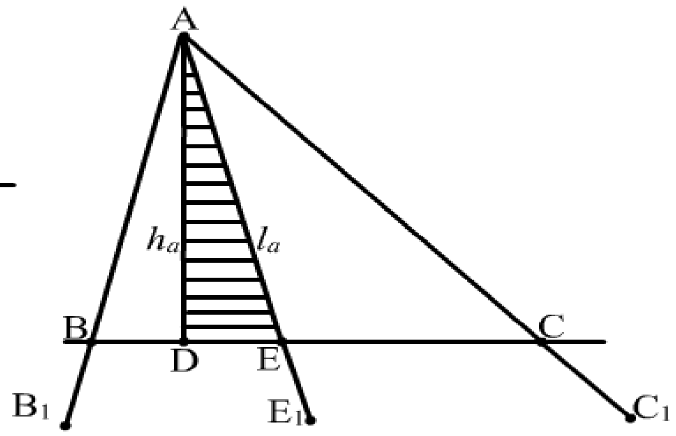
2)berilgan elementlar imkoniyati boricha tanlab olinganda masala nechta yechimga ega bo'ladi?

Yasashga doir masalalarni bosqichlarga ajratib yechish to'g'ri va yagona yechimni topish garovidir. Lekin, har qanday masalani yechishda ham bu to'rtta bosqichga qat'iy rioya qilish shart emas. Masalaning sodda yoki murakkabligiga qarab, bu bosqichlarning ba'zilariga to'xtalmasdan keyingi bosqichiga o'tib ketish mumkin.

Misol tariqasida quyidagi masalalarni bosqichlab yechib ko'raylik.

1-masala. Bir burchagi va shu burchak uchidan chiqqan balandligi hamda bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.





Berilgan.

1-rasm

1. Analiz.

Izlanayotgan ABC uchburchakni yasaldi deb uni taxminan chizib qo'yamiz. $AD=h_a$, $AE=l_a$ bo'lsin. $\angle BAC = \angle A$. (1-rasm)

ΔABC ni yasash uchun uning A, B, C uchlarini yasash kifoya.

Chizmaga ko'ra ΔABC ning A uchi undagi to'g'ri burchakli ΔADE ning A uchidan iborat. B va C uchlari esa DE to'g'ri chiziqning berilgan $\angle A$ tomonlari bilan kesishish nuqtalaridan iborat.

Berilgan AD kateti va AE gipotenuzasi bo'yicha bevosita yechiladgan masalalarga tayanib ΔADE yasash mumkin. Masalaning shartiga ko'ra, AE kesma berilgan $\angle A$ ning bissektrisasi ekanligidan foydalanib AB_1 va AC_1 nuqtalarni AE ga nisbatan vaziyatini aniqlash mumkin: $\angle EAB = \angle EAC = \frac{1}{2}\angle A$.

Masalada berilganlarga ko'ra, ΔADE ni yasash va undan izlanayotgan ΔABC ga o'tish mumkin bo'lgani uchun to'g'ri burchakli ΔADE yordamchi figuradir.

Reja:

1. ΔADE -yasaladi
2. A nuqtadan AE to'g'ri chiziqdan o`ngda $\frac{\angle A}{2}$ qo'yiladi va C nuqta topiladi.
3. A nuqtada AE to'g'ri chiziqdan chapdan $\frac{1}{2}\angle A$ qo'yiladi va B nuqta topiladi.

2. Yasash.

Analiz bosqichida aytilganlar bo'yicha ΔABC ni yasaymiz.

1^0. ΔADE ni yasaymiz.

2^0. AE nurga A uchidan chapga $\frac{1}{2}A$ ni qo'yamiz. $(AB_1)\cap(ED)=B$ ni topamiz.

3^0. AE nurni ikkinchi tomoniga $\angle EAC_1 = \frac{1}{2}\angle A$ ni yasaymiz. $(AC_1)\cap(DE)=C$ ni topamiz. Natijada ΔABC hosil bo'ladi.

3. Isbotlash.

Yasashga ko'ra ΔABC da:

$\angle A = \angle BAE + \angle EAC; AD \perp DE = h_a$, $AE=l_a$, $\angle BAE = \angle EAC$ bo'lgani uchun AE – bissektrisadir.

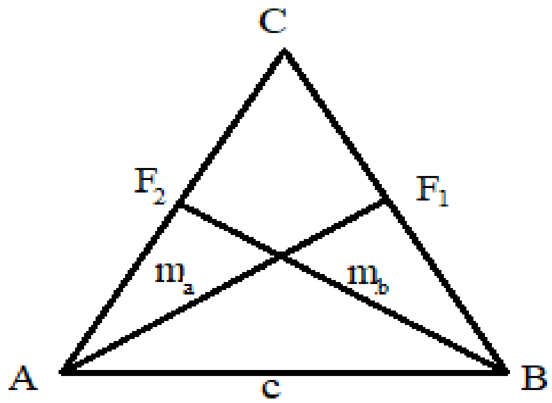
4. Tekshirish.

ΔABC mavjud bo'lishi uchun: ΔDAE mavjud bo'lishi kerak. Bunda $\frac{1}{2}A\angle 90^0 \Rightarrow A\angle 180^0$, $h_a < l_A$ ekanligi kelib chiqadi. Ushbu shartlar bajarilsa masala yagona yechimga, aks holda masala yechimga ega bo'lmaydi.

2-masala. Asosi c va ikki yon tomoniga tushirilgan medianalari m_a, m_b berilgan uchburchak yasang.

Berilgan: $AB=c$, $AF_1= m_a$, $BF_2= m_b$

Yasash kerak: ΔABC (c, m_a, m_b)



2-rasm

1.Analiz. Aytaylik izlanayotgan ΔABC yasalganbo'lsin. Bu holda 2-rasmga ko`ra quyidagilarni belgilab olamiz.

$AP=\frac{2}{3}m_a$, $BP=\frac{2}{3}m_b$, $AC=c$, u holda APB uchburchak yordamchi.

Reja:

1. ΔAPB-yasaladi
2. AP davomida $\frac{1}{3}m_a = PF_1$ qo'yiladi va F_1 nuqta topiladi.

3. BP davomida $\frac{1}{3}m_a = PF_2$ qo'yiladi va F_2 nuqta topiladi.

4. AF_2 va BF_1 larning kesisish nuqtasi C nuqta topiladi.

2. Yasash.

ΔAPB ni uchta tomoni (c, $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$) bo'yicha yasaymiz. AP davomida $\frac{1}{3}m_a$ $=PF_1$ ni qo'yib $AF_1= m_a$, BP davomiga $\frac{1}{3}m_b$ $=PF_2$ kesmani qo'yib, $BF_2=m_b$ kesmani yasaymiz. $AF_2 \cap BF_1 = C$ kelib chiqadi.

3. Isbot.

$AB=c$, $AP : PF_1 = BP : PF_2 = 2:1$. Shu sababli AF_1,BF_2 medianalardir.

4. Tekshirish.

ΔAPB ni yasash uchun $\frac{2}{3}(m_a + m_b) > c$ bo'lishi shart.

Bosqichlab yechishga doir masalalar

1.4.1. Bir tomoni va shu tomonga o`tkazilgan medianasi, shu tomon uchidagi bir burchagi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.2. Bir burchagi va shu burchakka yopishgan tomonlariga o`tkazilgan balandliklari bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.3. Ikki tomoni va uchinchi tomonga o`tkazilgan balandligi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.4. Bir tomoni va shu tomonga tushirilgan balandligi va medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.5. Ikki uchidan chiqqan balandliklari va ularning biridan o`tkazilgan medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.6. Uchala medinasi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.7. Bir tomoni va shu tomonga yopishgan bir burchagi va unga tushirilgan balandligi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.8. Bir tomoni va shu tomonga tushirilgan balandligi, bu tomon uchdan chiqqan medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.9. Ikki burchagi va ulardan birining bissektrissasi bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.10. Asosi, asosiga va bir yon tomoniga tushirilgan balandliklari bo`yicha uchburchak yasang.

1.4.11. Ikki tomoni va diagonali bo`yicha parallellogramm yasang.

1.4.12. Bir tomoni va ikki diagonali bo`yicha parallellogramm yasang.

1.4.13. Bir burchagi va shu burchak uchidan chiqqan diagonali bo`yicha romb yasang.

1.4.14. Ikki diagonali diagonali bo`yicha romb yasang.

1.4.15. Asoslari va yon tomonlari bo`yicha trapetsiya yasang.

II BOB. SIRKUL VA CHIZG'ICH YORLAMIDA YASASH METODLARI

Yasashga doir masalalarni yechishning turli metodlari mavjud bo'lib, quyidagilari asosiylaridir

1. Geometrik o'rinlar metodi.
2. To`g`rilash metodi.
3. Geometrik almashtirishlar metodi.
4. Algebraik metod.

2.1-§. Geometrik o`rinlar metodi va unga doir masalalar

Agar birorta to`plamning (figuraning) nuqtalari bitta $\alpha$ shartni qanoarlantirsa, bu nuqtalarga geometrik o`rin deyiladi. Bu nuqtalar to`plamini nuqtalarini yasash uslubi geometrik o`rin metodi deb yuritiladi.

Geometrik o'rinlar metodida masala quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi nuqtani topishga keltiriladi: birinchi α_1 shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni F_1 figuradan; ikkinchi α_2 shartni bajaruvchi nuqtalarning geometrik o'rni F_2 figuradan iborat bo'lsin. Har ikki α_1 va α_2 shartni qanoatlantiradigan nuqtalar $F_1 \cap F_2$ kesishmaga tegishli bo'ladi.

Yuqoridagi α_i shartni qanoatlantiruvchi F_i figuralar to`g`ri chiziq, aylana yoki ularning birorta bo`lagidan iborat bo`lishi kerak. $P_1 - P_5$ shartlarni qanoatlantiruvchi figura nuqtalari yasalgan hisoblanadi.

Tekislikning ma'lum talablarga javob beruvchi biror yoki bir nechta nuqtasini topishga doir masalalar yoki shunday nuqtalarni topishga keltirib yechiladigan masalalar geometrik o'rinlar metodi bilan yechiladi. Shu sababli bu metodga kesishmalar metodi deb ham yuritiladi.

Bu metod bilan masala yechish uchun o'rta maktabda ma'lum bo'lgan quyidagi asosiy geometrik o'rinlarni puxta bilish zarur.

1. Tekislikning biror O nuqtasidan ma'lum *r* uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni markazi shu O nuqtadan radiusi *r* bilan chizilgan aylana bo'ladi.

2. Berilgan to’g’ri chiziqdan ma’lum masofada yotgan naqtalarning geometrik o’rni shu to’g’ri chiziqdan ikki tarafda unga parallel va berilgan masofada joylashgan ikki to’g’ri chiziqdir.

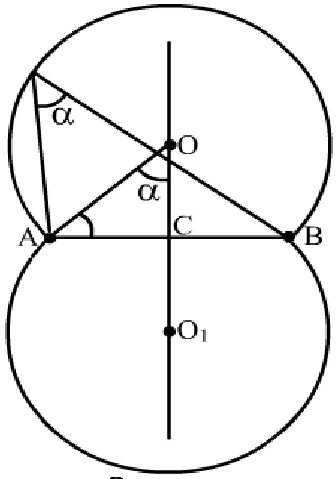
3. Kesma uchlaridan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o’rni shu kesmaning o’rta perpendikulyari bo’ladi.

4. Burchak tekisligida burchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o’rni shu burchakning bissektrisasidir.

5. O’zaro parallel ikki to’g’ri chiziqdan teng uzoqlikdagi bir nuqtasidan ikinchisiga tushirilgan perpendikular hosil qilgan nuqtalarning geometrik o’rni bu to’g’ri chiziqlarning istalgan ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma o’rtasidan shu to’g’ri chiziqlarga parallel qilib o’tkazilgan to’g’ri chiziqdir. Boshqacha qilib aytganda bu to`g`ri chiziq berilgan to`g`ri chiziqning simmetriya o`qidir.

6. Berilgan *AB* kesma berilgan burchak (90^0) ostida ko’rinadigan nuqtalarning geometrik o’rni berilgan kesmani diametr qilib chizilgan aylanadan iboratdir (bu geometrik o’ringa *A, B* nuqtalar kirmaydi).

7. Tekislikning berilgan kesma [*AB*] berilgan α ($\alpha \neq 180°, \alpha \neq 90°$) burchak ostida ko’rinuvchi nuqtalarning geometrik o’rni - berilgan burchakni sig’diruvchi ikkita teng segmentning berilgan kesma bilan tortilib turuvchi yoylaridan iboratdir (geometrik o’ringa *A,B* nuqtalar kirmaydi).



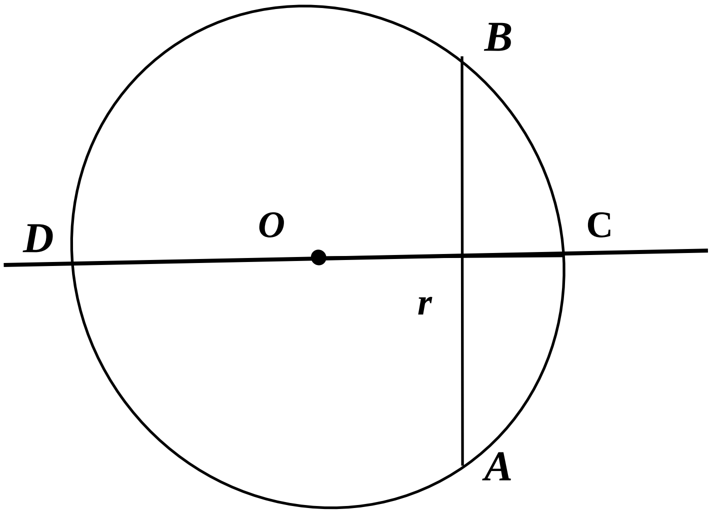
3-rasm

Bundan keyingi geometrik o’rinlar asosiy geometrik o’rinlardan biriga keltiriladi yoki ularning bir nechtasidan foydalanib topiladi.

Geometrik o’rinlar metodi bilan yechiladigan masalalarga misol tariqasida qiyidagi masalani ko’raylik.

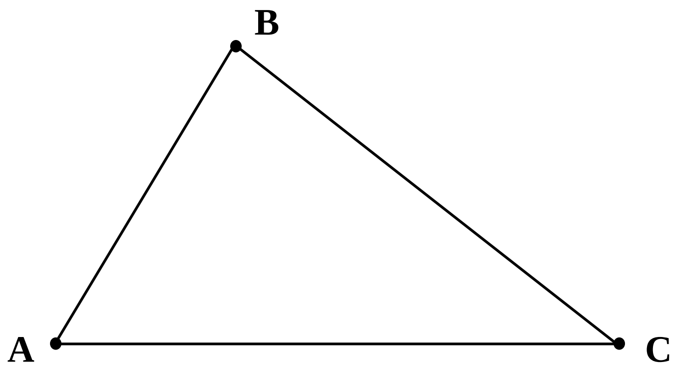
1-masala: Aylanada shunday nuqta topilsinki, u berilgan ikki nuqtadan teng masofada yotsin.

Agar bizga *A,B* nuqtalar va ω aylana berilgan bo’lsa, izlanayotgan nuqta [AB] kesmaning o’rta perpendikulyari bilan aylana kesishgan nuqtasidan iborat bo’ladi. Ya`ni D va C nuqtalar.



2-masala: Uchburchakning bir tomonida shunday nuqta topingki, u nuqta uchburchakning qolgan ikki tomonidan teng uzoqlikda joylashgan bo`lsin.

Berilgan: ΔABC.



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz. Izlanayotgan nuqta shu nuqta yotgan tomonning qarshisida yotgan burchak bissektrisasida yotadi. Bu nuqtani AC yotgan tomondan izlaylik.

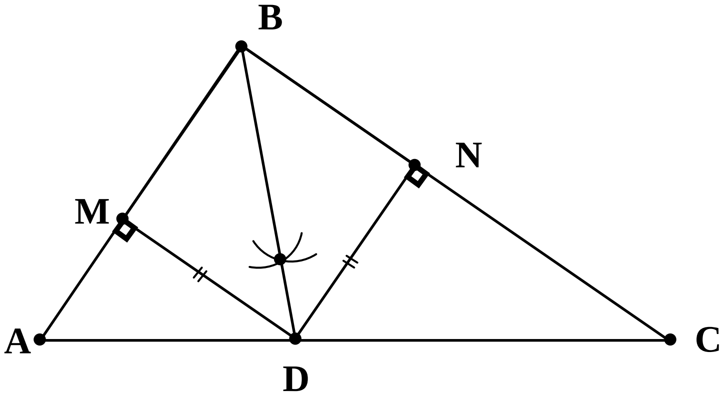
Reja:

1^0. ΔABC ning B uchidan l_b bissektrisa o`tkazamiz.

2^0. $l_b \cap AC = \{D\}$.

3^0. D nuqta izlanayotgan nuqtadir

Yasash:

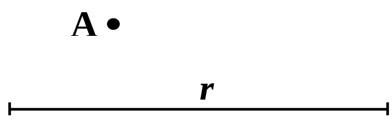


Isbotlash: Burchak bissektrisasidagi ixtiyoriy nuqtadan uning tomonlarigacha bo`lgan nuqtalar teng ekanligidan DM=DN.

Tekshirish: Masala har doim yechimga ega.

3-masala. Berilgan radius bo`yicha berilgan nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizing.

Berilgan: l – to`g`ri chiziq, r – radius, A – nuqta.



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz. Agar A nuqta l to`g`ri chiziqqa tegishli bo`lsa, u holda A bu oson. Ya`ni A nuqtadan $l_1 \perp l, A \in l_1$ to`g`ri chiziq o`tkazamiz va A nuqtadan r radiusli aylana chizamiz. $\omega(A,r) \cap l_1 = \{O, O_1\}$. $\omega_1(O,r), \omega_2(O_1,r)$ aylanalar biz izlagan aylanalardir.

Faraz qilaylik , $A \notin l$ bo`lsin. Unda biz izlayotgan nuqtalarning geometrik o`rni l to`g`ri chiziqdan va A nuqtadan r masofada yotuvchi nuqtalar bo`ladi. (agar ular mavjud bo`lsa).

Reja: 1^0. $\forall B \in l$ nuqtadan $l \perp l_1$ to`g`ri chiziq chiqaramiz.

2^0. $\omega(B,r)$ aylana chizamiz. $\omega(B,r) \cap l_1 = \{O, O_1\}$.

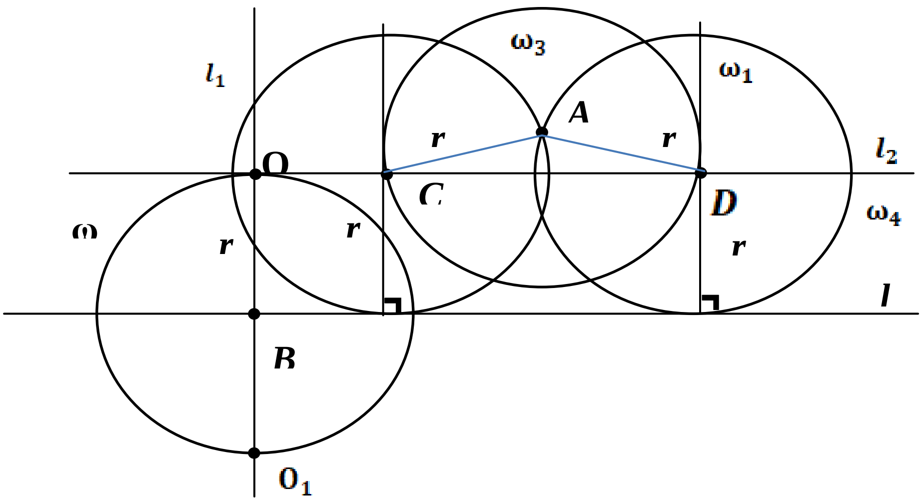
3^0. O nuqtadan $l_2 \parallel l$ to`g`ri chiziq o`tkazamiz.

4^0. $\omega_1(A,r)$ aylana chizamiz.

5^0. $\omega_1 \cap l_2 = \{C, D\}$

6^0. $\omega_3(C,r), \omega_4(D,r)$ aylanalar chizmiz. Bu biz izlayotgan figuralardir.

Yasash:

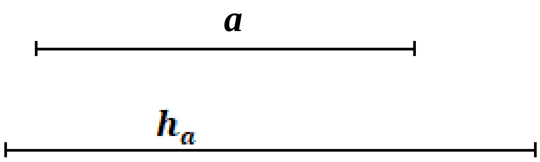


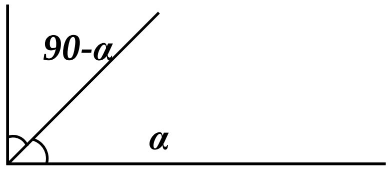
Isbotlash: Yasashga ko`ra $CA = r = DA$, C va D nuqtalardan *l* to`g`ri chiziqqacha bo`lgan eng qisqa masofalar ham *r* ga teng.

Tekshirish: Agar A va *l* to`g`ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa 2r dan katta bo`lsa, masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega. Agar A va *l* to`g`ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa *2r* ga teng bo`lsa masala bitta yechimga ega. A va *l* to`g`ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa 2r dan kichik bo`lsa masala ikkita yechimga ega.

4-masala. Asosi, uchidagi burchagi va shu uchidan tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

Berilgan: a – asos, α - burchak, h_a - balandlik.





Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni taxminan chizib olamiz.

Reja:

1^0. $\forall A \in l$

2^0.A nuqtadan a kesmani qo`yamiz. Hosil bo`ladi B nuqta.

3^0. A va B nuqtalardan $90^\circ - \alpha$ burchakni qo`yamiz. Bu burchak nurlari O nuqtada kesishsin.

4^0. $\omega(O, OA)$ aylana chizamiz.

5^0.AB kesmaning ixtoyoriy nuqtasidan (masalan A nuqtadan) *l* ga l_1 perpendikular chiqaramiz.

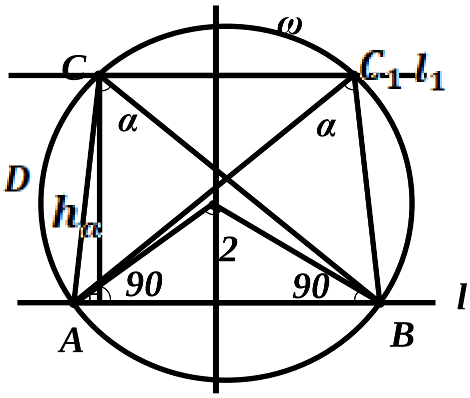
6^0. l_1 to`g`ri chiziqqa A nuqtadan h_a balandlikni qo`yamiz. Hosil bo`ladi D nuqta.

7^0. D nuqtadan $l_1 \| l$ to`g`ri chiziqni o`tkazamiz.

8^0. $\omega \cap l_1 = \{C, C_1\}$

9^0. $\triangle ABC(\triangle ABC_1)$ biz izlagan figuradir.

Yasash:



Isbotlash: Yasashga ko`ra AB=a, $\angle ACB = \alpha$.

Tekshirish: $\alpha = \{0^\circ, 180^\circ\}$ da masala yechimga ega emas. Agar l_1 to`g`ri chiziq ω aylanaga urinma bo`lib qolsa, masala yagona yechimga ega bo`ladi. Qolgan barcha hollarda ikkita yechimga ega. Ya`ni $l_1 \cap \omega = \{C, C_1\}$ . bu yerdagi C va $C_1$ nuqtalar biz izlagan uchburchakning uchinchi nuqtasi bo`ladi.

Savol va masalalar

2.1.1.

1) geometrik figura bilan geometrik o`rin orasida qanday farq bor? Bularning ta`riflarini ayting va bulardan qaysi biri ikkinchisining xususiy holi ekanligini ko`rsating va misollar keltiring;

2) asosiy geometrik o`rinlarni so`zlab bering;

3) ma`lum hossaga ega bo`lgan nuqtalarning tekislikdagi geometrik o`rinini topishda ishlatiladigan usul nimadan iborat? Bunga misol keltiring?

4) to`g`ri chiziqqa uning ma`lum nuqtasidan o`tkazilgan perpendikulyar qanday nuqtalarning geometrik o`rni bo`ladi?

5) aylananing markazi orqali o`tgan kesuvchi qanday nuqtalarning geometrik o`rni bo`ladi?

6) aylanaga uning berilgan nuqtasida ichki tomondan urinuvchi ikkinchi aylana qanday nuqtalarning geometrik o`rni bo`ladi?

7) aylananing berilgan nuqtasi bilan shu aylana markazini tutashtiruvchi radiusni diametr qilib chizilgan aylana qanday geometrik o`rin bo`ladi?

8) aylana ichida berilgan nuqta bilan shu aylana markazini tutashtiruvchi kesmani diametr qilib chizilgan aylana qanday geometrik o`rin bo`ladi?

9) burchakning uchidan chiqqan va shu burchakning ichki soxasida joylashgan nur qanday geometrik o`rin bo`ladi?

10) berilgan aylanaga konsentrik bo`lgan ikkinchi aylana qanday geometrik o`rin bo`ladi?

11) to`g`ri burchakning uchidan ma`lum radius bilan chizilgan aylananing shu burchak ichidagi yoyi qanday nuqtalarning geometrik o`rni bo`ladi?

12) berilgan A va B nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani diametr qilib chizilgan aylana qanday geometrik o`rin bo`ladi?

13) aylanaga uning tashqarisida yotgan nuqtadan o`tkazilgan kesuvchilardan hosil bo`lgan vatarlar o`rtalari to`plami qanday figura bo`ladi?

14) berilgan ikki nuqtagacha bo`lgan masofalari kvadratlarining yig`indisi (yoki ayirmasi) berilgan kesmaning kvadratiga teng geometrik o`rin qanday figura bo`ladi?

15) berilgan nuqtani aylananing turli nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalarni bir xil nisbatda bo`luvchi geometrik o`rin qanday figura bo`ladi?

16) apolloniy aylanasi qanday nuqtalarning to`plami va uning hususiy ko`rinishi nimadan iborat;

17) A va B yorug`lik manbailari bilan teng yoritilgan tekislik va fazo nuqtalarining geometrik o`rinlari qanday figuralar bo`ladi?

18) ikki aylananing radikal o`qi (yoki uning tashqi qismlari) qanday nuqtalarning to`plami bo`ladi?

19) berilgan ikki aylana radikal o`qini buning shu aylanalardan birining markazidan bo`lgan masofasi yordamida yasang.

20) teng yonli uchburchakda shunday nuqtalarning geometrik o`rnini topingki, ularning har biridan uchburchak yon tomonlarigacha bo`lgan masofalari yig`indisi yon tomonga tushirilgan balandlikka teng bo`lsin;

21) teng yonli uchburchakda shunday nuqtalarning geometrik o`rnini topingki, ularning har biridan uchburchak yon tomonlarigacha bo`lgan masofalari ayirmasi yon tomonga tushirilgan balandlikka teng bo`lsin;

22) teng tomonli uchburchakda shunday nuqtalarning geometrik o`rnini topingki, ularning har biridan uchburchak tomonlarigacha bo`lgan masofalar yig`indisi uning balandligiga teng bo`lsin.

2.1.2. Tekislikda shunday nuqta topingki, undan tekislikda berilgan to`g`ri chiziqning AB, BC va CD kesmalari bir xil burchak ostida ko`rinsin.

2.1.3. Berilgan to`g`ri chiziqda quyidagi talablardan birini qanoatlantiruvchi nuqtani toping.

1) berilgan nuqtadan berilgan masofada yotsin.

2) berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlashgan bo`lsin.

3) shu to`g`ri chiziq bilan kesishuvchi ikkinchi to`g`ri chiziqdan berilgan masofada yotsin.

4) kesishuvchi ikki to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda bo`lsin.

5) parallel ikki to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda bo`lsin.

6) u nuqtadan berilgan kesma to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

7) u nuqtadan berilgan kesma berilgan α burchak ostida ko`rinsin.

2.1.4. 3-masalada berilgan to`g`ri chiziq o`rniga aylana olib, bu aylanada yotuvchi va 1) - 7) shartlarni ayrim-ayrim qanoatlantiruvchi nuqtalarni toping.

2.1.5. Berilgan uchburchak tomonlarida yoki ularning davomlarida 3-masaladagi yetti talabning har biriga ayrim-ayrim javob beruvchi nuqtalarni toping.

2.1.6. Uchburchakning bir tomonida shunday nuqta topingki, u nuqta uchburchakning qolgan ikki tomonidan teng uzoqlikda joylashgan bo`lsin.

2.1.7. Uchburchakning yon tomonida (yoki uning davomida) shunday nuqta topingki, u uchburchak asosining ikki uchidan teng uzoqlikda yotsin (uchburchak teng yonli bo`lganda u nuqta qayerda bo`ladi?).

2.1.8. Teng yonli uchburchakning bir yon tomonidan (yoki uning davomida) shunday nuqta topingki, u ikkinchi yon tomon uchlaridan teng uzoqlashgan bo`lsin (uchburchakning o`tkir, to`g`ri, o`tmas burchakli qilib olib, masala tekshirilsin).

2.1.9. Uchburchakning yon tomonlarida uning asosidan ma`lum (bir xil) masofada yotuvchi nuqtalarni toping.

2.1.10. Berilgan ikki nuqtadan o`tuvchi shunday aylana chizingki, uning markazi berilgan to`g`ri chiziqda yotsin.

2.1.11. Uchburchakning yon tomonlarida yoki uning davomlarida shunday nuqta topingki, bu nuqtadan uchburchakning asosi to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

2.1.12. Uchidagi burchagi va tomoniga tushirilgan balandligi berilgan teng yonli uchburchak yasang.

2.1.13. Shunday nuqta topingki, u berilgan A nuqtadan *a* masofada, B nuqtadan *b* masofada yotsin. AB kesma bilan a+b kesmani solishtirib, masalani tekshiring.

2.1.14. Shunday nuqta topingki, u berilgan ikki parallel to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotsin va quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin:

1) berilgan uchinchi to`g`ri chiziqdan ma`lum masofada yotsin.

2) kesishuvchi ma`lum ikki to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotsin.

3) boshqa ikki parallel to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotsin.

4) berilgan kesma o`sha nuqtadan to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

2.1.15. Shunday nuqta topingki, u kesishuvchi ikki to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotsin va quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin:

1) berilgan nuqtadan berilgan masofada yotsin.

2) berilgan uchinchi to`g`ri chiziqdan berilgan masofada yotsin.

3) berilgan ikki parallel to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotsin.

4) berilgan boshqa kesishuvchi ikki to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotsin.

5) u nuqtadan berilgan kesma to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

6) berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikda yotsin.

7) u nuqtadan berilgan kesma berilgan burchak ostida ko`rinsin.

2.1.16. Shunday nuqta topingki, u nuqtadan berilgan kesma to`g`ri burchak ostida ko`rinsing va quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin:

1) ikkinchi berilgan kesma ham to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

2) ikkinchi berilgan kesma berilgan burchak ostida ko`rinsin.

3) oldingi masaladagi 4) - 7) shartlardan har biri ham ayrim-ayrim qaralsin.

2.1.17. Shunday nuqta topingki, u nuqtadan berilgan aylanaga o`tkazilgan urinma berilgan kesmaga teng bo`lishi bilan birga, u nuqta 15-masaladagi yetti talabdan har biriga ayrim-ayrim javob bersin.

2.1.18. Shunday nuqta topingki, u nuqtadan berilgan aylana berilgan burchak ostida, berilgan kesma esa to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

2.1.19. Shunday nuqta topingki, u nuqtadan berilgan aylana bilan berilgan kesma ma`lum burchak ostida ko`rinsin.

2.1.20 . Shunday nuqta topingki, u nuqtadan ma`lum radius bilan chizilgan aylana berilgan aylanani ortogonal kessin va u nuqta berilgan nuqtadan berilgan masofada yotsin.

2.1.21. Uchburchakning ichidan shunday nuqta topingki, undan uchburchakning tomonlari teng burchaklar ostida ko`rinsin.

2.1.22. Uchburchakning uchala uchidan teng uzoqlikdagi nuqta topilsin (qanday shart mavjud bo`lganda, bu nuqta uchburchakning ichida, bir tomonida yoki uchburchak tashqarisida yotadi?).

2.1.23. Uchburchakning uchala tomonidan teng uzoqlikdagi nuqta topilsin.

2.1.24. Uchburchak bir burchagining bissektrisasida shunday nuqta topingki, u qolgan ikki burchagining uchlaridan teng uzoqlikda yotsin.

2.1.25. Berilgan uchburchak ichidan shunday nuqta topingki, u nuqta uchburchakning ikki tomonidan mos ravishda m va n masofalarda yotsin.

2.1.26. Shunday nuqta topingki, u nuqtadan berilgan aylana berilgan burchak ostida ko`rinib, bu nuqtani markaz qilib ma`lum radius bilan chizilgan aylana ikkinchi berilgan aylanani ortogonal kessin.

2.1.27. Shunday nuqta topingki, u berilgan aylananing ma`lum nuqtasidan chiqqan vatarni teng ikkiga bo`lsin va shu nuqtadan berilgan ikkinchi aylana to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

2.1.28. Shunday nuqta topingki, u nuqta berilgan aylana ichidagi ma`lum nuqtadan o`tuvchi vatarni teng ikkiga bo`lsin va berilgan nuqtadan masofada yotsin.

2.1.29. Shunday nuqta topingki, u nuqta berilgan aylana tashqarisidagi ma`lum nuqtadan shu aylanaga o`tkazilgan kesuvchining ichki kesmasini (ya`ni vatarini) teng ikkiga bo`lsin va kesishuvchi ikki to`g`ri chiziqdan teng uzoqlikda yotsin.

2.1.30. Shunday nuqta topingki, u berilgan aylananing ma`lum nuqtasidan chiqqan vatarni 3:5 nisbatda bo`lsin va bu nuqtadan berilgan ikkinchi aylana to`g`ri burchak ostida ko`rinsin.

2.1.31. Shunday nuqta topingki, uning berilgan burchak tomonlarigacha masofalari $m{:}n$ nisbatda bo`lib, bu nuqtadan berilgan kesma berilgan burchak ostida ko`rinsin.

2.1.32. Shunday nuqta topingki, bu nuqtaning berilgan burchak tomonlarigacha masofalari nisbati *m:n* bo`lib, uning ikkinchi berilgan burchak tomonlarigacha masofalari nisbati *a:b* bo’lsin.

2.1.33. Shunday nuqta topingki, u nuqtaning berilgan ikki nuqtagacha masofalari kvadratlarining yig`indisi berilgan kesmaning kvadratiga teng bo’lib, o’sha nuqtadan berilgan aylana berilgan burchak ostida ko’rinsin.

2.1.34. Shunday nuqta topingki, u nuqtadan berilgan aylanaga o’tkazilgan urinmaning uzunligi berilgan kesmaga teng bo’lib, yana shu nuqtaning berilgan ikki nuqtagacha masofalari kvadratlarining yig’indisi ikkinchi berilgan kesma kvadratiga teng bo’lsin.

2.1.35. Shunday nuqta topingki, u nuqtaning berilgan ikki nuqtagacha masofalari kvadratlarining ayirmasi berilgan kesma kvadratiga teng bo’lib, yana o’sha nuqtani markaz qilib berilgan radius bilan chizilgan aylana berilgan ay-lanani ortogonal kessin.

2.1.36. Shunday nuqta topingki, u nuqtaning berilgan ikki nuqtagacha masofalari kvadratlarining ayirmasi berilgan kesma kvadratiga teng va o’sha nuqtadan ikkinchi berilgan ikki nuqtagacha bo’lgan masofalar kvadratlarining ayirmasi ikkinchi bir kesma kvadratiga teng bo’lsin.

2.1.37. Shunday nuqta topingki, u nuqtaning berilgan ikki nuqtani berilgan aylananing nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesmani *m:n* nisbatda bo’lsin va quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin:

1) izlanuvchi nuqtadan berilgan berilgan boshqa aylana 45^0 li burchak ostida ko’rinsin.

2) izlanuvchi nuqtaning kesishuvchi ikki to’g’ri chiziqqacha masofalari *m:n* bo’lsin.

3) izlanuvchi nuqtadan berilgan ikki nuqta orasidagi kesma ma’lum burchak ostida ko`rinsin.

2.1.38. Shunday nuqta topingki, u nuqtalardan berilgan ikki nuqtagacha bo’lgan masofalarninng nisbati *m:n* bo’lsin va u nuqta quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin.

1) izlanuvchi nuqta berilgan uchinchi nuqta bilan berilgan aylana nuqtasini tutashtiruvchi kesmani *a:b* nisbatda bo’lsin.

2) izlanuvchi nuqtadan ikkinchi berilgan kesmaning uchlarigacha bo’lgan masofalar nisbati berilgan *c:d* songa teng bo’lsin.

3) izlanuvchi nuqtadan berilgan ikki nuqta orasidagi kesma ma’lum burchak ostida ko’rinsin.

4) izlanuvchi nuqtani markaz qilib ma’lum radius bilan chizilgan aylana berilgan aylanani ortogonal kessin.

5) izlanuvchi nuqtadan berilgan aylana 60° burchak ostida ko’rinsin.

2.1.39. Shunday nuqta topingki, u nuqtadan berilgan ikki aylana teng burchak ostida ko’rinsin va quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin:

1) izlanuvchi nuqtadan berilgan uchinchi aylanaga o’tkazilgan urinma ma’lum kesmaga teng bo’lsin.

2) izlanuvchi nuqtadan berilgan ikki aylana markazlari orasidagi kesma
75^0 burchak ostida ko’rinsin.

3) izlanuvchi nuqtadan berilgan ikki nuqtagacha bo’lgan masofalar nisbati berilgan songa teng bo`lsin.

4) izlanuvchi nuqtadan berilgan ikki teng aylanaga o’tkazilgan urinmalar o’zaro teng bo’lsin.

5) izlanuvchi nuqtadan berilgan ikki aylana markazlarigacha bo’lgan masofalar kvadratlarining ayirmasi berilgan *a* kesma kvadratiga teng bo’lsin.

2.1.40. Shunday nuqta topingki, bu nuqtadan berilgan ikki aylanaga o’tkazilgan urinmalar o’zaro teng bo’lishi bilan birga, bu nuqta quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin:

1) izlanuvchi nuqtadan berilgan aylanalarning biri 90° burchak ostida ko’rinsin.

2) izlanuvchi nuqtadan berilgan ikki aylana teng burchak ostida ko’rinsin.

2.1.41. Shunday nuqta topingki, u nuqtada berilgan to’g’ri chiziqning ketma-ket joylashgan uchta kesmasi teng burchaklar ostida ko’rinsin (Apolloniy aylanasini ishlatamiz) kesmalardan ikkitasi yoki uchalasi teng bo’lgan hollarni ham qarang.

2.1.42. Aylana va unda ikki nuqta berilgan. Bu aylananing shunday uchinchi nuqtasini topingki, u nuqtadan oldingi ikki nuqtagacha bo’lgan masofalar berilgan nisbatda bo’lsin.

2.1.43. Asosi uning qarshisidagi uchining berilgan nuqtadan uzoqligi ma’lum bo’lgan teng yonli uchburchak yasang.

2.1.44. Berilgan to’g’ri chiziqqa urinuvchi ma’lum radiusli aylana chizingki, uning markazi quyidagi shartlardan birini qanoatlantirsin.:

1) berilgan nuqtadan berilgan masofada yotsin.

2) berilgan ikkinchi to’g’ri chiziqdan berilgan masofada yotsin.

3) berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikda yotsin.

4) berilgan ikki parallel to’g’ri chiziqdan teng masofada yotsin.

5) kesishuvchi ikki to’g’ri chiziqdan teng masofada yotsin.

6) izlanuvchi markazdan berilgan kesma berilgan burchak ostida ko’rinsin.

2.1.45. Ma’lum R radiusli va berilgan *M* nuqtadan o’tuvchi hamda markazi oldingi masaladagi oltita talabdan birini qanoatlantiruvchi aylana chizing.

2.1.46. Berilgan to’g’ri chiziqqa uning ma’lum nuqtasida urinuvchi va ularning markazlari 44-masaladagi oltita shartdan birini qanoatlantiruvchi aylanalar chizing.

2.1.47. Berilgan aylanaga uning ma’lum nuqtasida urinuvchi, markazi 44-masaladagi oltita shartdan birini qanoatlantiruvchi aylana chizing.

2.1.48. Berilgan parallel ikki to’g’ri chiziqqa urinib, quyidagi shartlardan birini qanoatlantiruvchi aylana chizing:

1) berilgan nuqtadan o`tsin.

2) berilgan uchinchi to’g’ri chiziqqa urinsin.

3) berilgan aylanaga urinsin.

2.1.49. Uchta teng aylanaga ichki (yoki tashqi) urinuvchi aylana chizing.

2.1.50. Qarama-qarshi ikki uchi ma’lum ikki nuqtada bo’lib, uchinchi uchi berilgan aylanada yotuvchi romb yasang.

2.1.51. Ma’lum radiusli va berilgan *A* nuqtadan o`tuvchi hamda berilgan *B* nuqtadan unga o’tkazilgan urinma ma’lum *a* kesmaga teng bo’lgan aylana chizing.

2.1.52. Ma’lum *r* radiusli va berilgan *O* nuqtadan o’tib, berilgan ikkinchi O_1 nuqtadan ma`lum *a* burchak ostida ko’rinuvchi aylana chizing.

2.1.53. Markazi berilgan shunday aylana chizingki, berilgan ikkinchi nuqtadan unga o`tkazilgan urinma ma’lum uzunlikda bo’lsin.

2.1.54. Bir burchagi va qolgan burchaklarining uchlaridan tushirilgan ikki balandligi berilgan uchburchak yasang.

2.1.55. Asosi va ikki balandligi berilgan parallelogramm yasang.

2.1.56. Berilgan radius bilan berilgan to'g'ri chiziqning ma'lum nuqtasida urinuvchi aylana chizing.

2.1.57. Berilgan radius bilan shunday aylana chizingki, u kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa urinsin.

2.1.58. Berilgan *A* nuqtadan utib, berilgan to'g'ri chiziqning ma'lum B nuqtasida urinuvchi aylana chizing.

2.1.59. Berilgan burchakning tomonlariga urinuvchi shunday aylana chizingki, u burchakning bir tomoniga oldindan berilgan nuqtada urinsin.

2.1.60. O'zaro kesishib uchburchak hosil qiladigan uchta to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizing.

2.1.61. Berilgan radius bilan berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi aylana chizing.

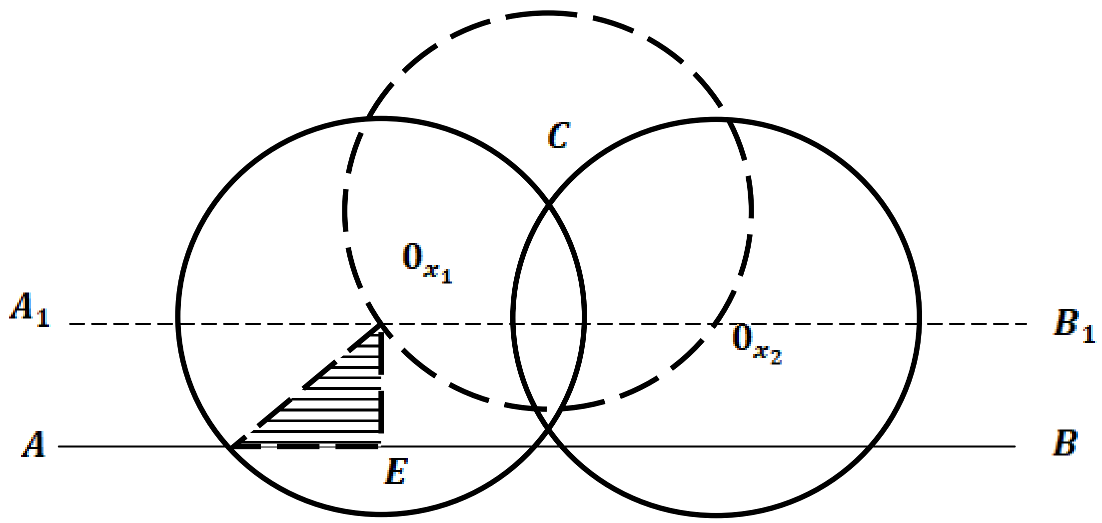
2.1.62. Berilgan radius bilan berilgan nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizing.

2.1.63. Berilgan radius bilan berilgan ikki aylanaga urinuvchi aylana chizing.

2.1.64. Berilgan radius bilan berilgan nuqtadan o`tib, kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqdan teng vatarlar ajratuvchi aylana chizing.

2.1.65. Berilgan radius bilan berilgan aylanaga urinib, kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqdan teng vatarlar ajratuvchi aylana chizing.

2.1.66. Berilgan radius bilan berilgan nuqtadan o`tib, berilgan to'g'ri chiziqdan ma'lum uzunlikdagi vatar ajratuvchi (4-rasmga qarang) aylana chizing.



4-rasm

2.1.67. Berilgan radius bilan berilgan aylanaga urinib, berilgan to'g'ri chiziqdan ma'lum uzunlikdagi vatar ajratuvchi aylana chizing.

2.1.68. Berilgan radius bilan kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqning biriga urinib, ikkinchisidan ma'lum uzunlikdagi vatar ajratuvchi aylana chizing.

2.1.69. Berilgan radius bilan shunday aylana chizingki uning markazi berilgan burchakning bir tomonida yotib burchakning ikkinchi tomonidan ma'lum uzunlikdagi vatar ajratsin.

2.1.70. Berilgan radius bilan shundan aylana chizingki, u kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqning biridan *a* uzunlikdagi va ikkinchisida *b* uzunlikdagi vatar ajratsin.

2.1.71. Berilgan radius bilan shunday aylana chizingki, u berilgan bir to`gri chiziqqa urinib, boshqa ikkita to`gri chiziqdan teng vatar ajratsin.

2.1.72. Berilgan to'g'ri chiziqqa va berilgan aylanaga uning ma'lum nuqtasida urinuvchi aylana chizing.

2.1.73. Ikki aylanaga (ulardan biriga berilgan nuqtada) urinuvchi aylana chizing. Bunda quyidagi uch holni qarang:

1) izlanuvchi aylana berilgan aylanalardan tashqarida;

2) berilgan aylanalardan biri izlangan aylana ichida bo'lib, ikkinchisi uning tashqarisida;

3) berilgan aylanalarning ikkalasi ham izlangan aylana ichida.

2.1.74. Berilgan sektorni chegaralovchi ikki radiusga va sektor yoyiga urinuvchi ichki aylana chizing.

2.1.75. Berilgan aylana ichiga teng radiusli shunday uchta aylana chizingki, ularning har biri qolgan ikkitasiga va berilgan aylanaga urinisin.

2.1.76. Asosi, unga tushirilgan balandligi va tashqi chizilgan aylanasining radiusi berilgan uchburchak yasang.

2.1.77. Asosi, uchidagi burchagi va shu uchidan tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

2.1.78. Bir burchagi va ikki diagonali berilgan parallelogramm yasang.

2.1.79. Asosi uchidagi burchagi va asosi bilan unga o'tkazilgan bissektrisa-sining kesishgan nuqtasi berilgan uchburchak yasang.

2.1.80. Ikki tomoni va diagonallari orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

2.1.81. *a* asosi, uchidagi *A* burchagi va yon tomoni berilgan uchburchak yasang.

2.1.82. Asosi uchidagi burchagi va yon tomoniga tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

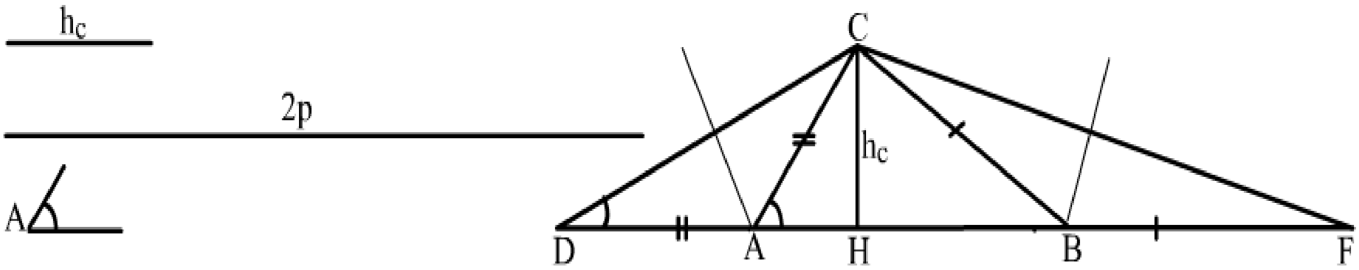
2.2-§. To`g`rilash metodi va unga doir masalalar

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan kesmalarning, masalan siniq chiziq bo'g'inlarining algebraik yig'indisiga teng kesma yasash, kesmalarni to'g'rilash deb ataladi. To'g'rilashdan foydalanib masala yechish – yasashda to'g'rilash metodi deyiladi.

Yasashga doir masaladagi ma'lum elementlar qatorida izlanayotgan figura chiziqli noma'lum elementlarining yig'indisi yoki ayirmasi berilgan bo'lsa, bunday masala to'g'rilash metodi bilan oson yechiladi.

1.Masala: Balandligi, perimetri va asosiga yopishgan bitta burchagi berilgan uchburchak yasang.

Berilgan:



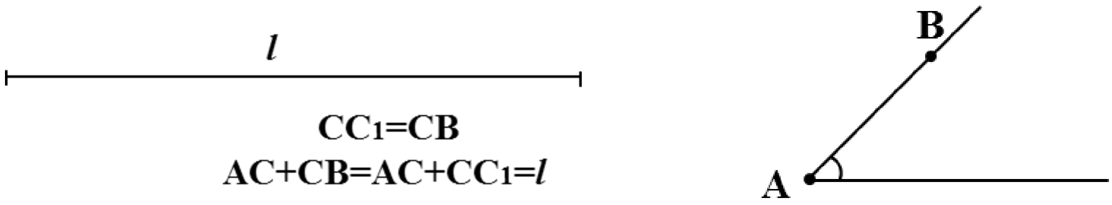
5-rasm

U holda ΔCDF $(\angle D, 2p, hc)$ yordamchi figura bo'ladi. Undan izlangan ΔABC ga o'tish uchun *DC* va *CF* ning o'rta perpendikulyarlarini o'tkazib *A* va *B* nuqtalarni topamiz. Masala $h < \frac{a+b+c}{2}, h_c < P.$ bo'lishi shart.

CA=AD, *CB=BF* deb olsak, *DF=2p*, *CH=*h_c, $\angle CDA = \frac{\angle A}{2}$;

2-masala. A burchak va uning bir tomonida B berilgan; bu burchakning ikkinchi tomonida shunday C nuqta topingki, $|AC|+|CB|$ yig`indi berilgan $l$ kesmaga teng bo`lsin.

Berilgan: l – kesma, $\angle$A va uning bir tomonida B nuqta.



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz va quyidagi rejani tuzamiz.

Reja:

1^0. $\forall A \in l_1$ nuqtadan $\angle$A ni qo`yamiz.

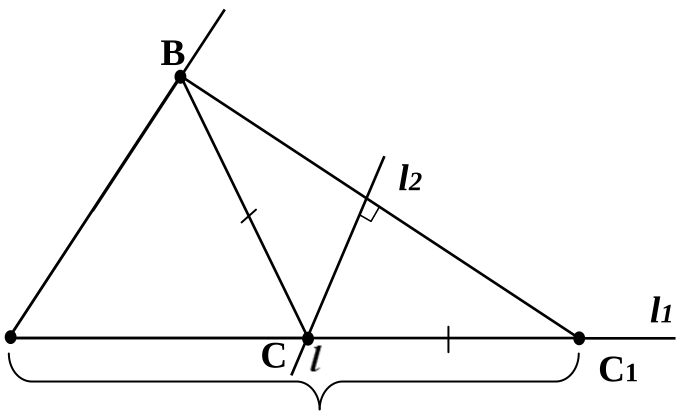
2^0. $\angle$A burchakning B nuqta yotmagan tomoniga |AC|+|CB| kesmani qo`yib, C_1 nuqtani hosil qilamiz.

3^0. B va C_1 nuqtalarni tutashtirib, BC_1 kesmaning o`rta perpendikulari $l_2$ ni o`tkazamiz.

4^0. $l_1 \cap l_2 = \{C\}$ va B , C nuqtalarni tutashtiramiz.

5^0. C nuqta biz izlayotgan nuqta.

Yasash:

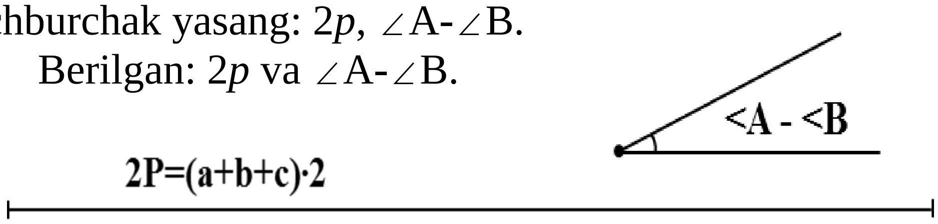


Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle$BAC=$\angle$A, $\Delta BCC_1$ dan $BC_1$ ning o`rta perpendikulari ham balandlik, ham mediana ekanligidan bu uchburchak teng yonli va $BC=CC_1$. $AC+CC_1=AC+BC$.

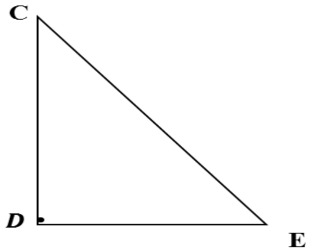
Tekshirish: Masala har doim yechimga ega.

<u>3-masala.</u> Quyidagi elementlarga ko`ra to`g`ri burchakli uchburchak yasang: 2*p*, $\angle$A-$\angle$B.

Berilgan: 2*p* va $\angle$A-$\angle$B.



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



1^0. $\forall A \in l$ nuqtadan 2p kesmani qo`yib, B nuqtani hosil qilamiz.

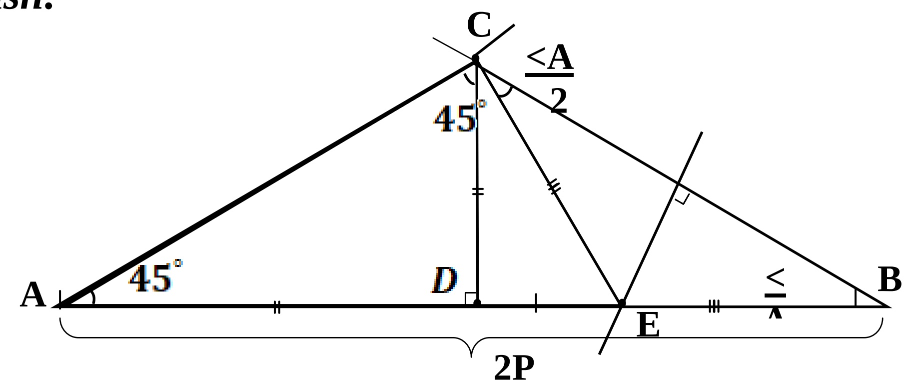
2^0. A nuqtadan 45^0, B nuqtadan $\frac{90° + \angle A - \angle B}{4}$ burchakni qo`yamiz, natijada ularning nurlari kesishishidan C nuqta hosil bo`ladi.

3^0. C nuqtadan AB kesmaga perpendikular tushiramiz va D nuqtani hosil qilamiz.

4^0. BC kesmaning o`rta perpendikularini o`tkazib, uning AB kesma bilan kesishishidan hosil bo`lgan E nuqtani topamiz.

5^0. D, C, E nuqtalarni ketma – ket tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan ΔDCE hosil bo`ladi.

Yasash:



Isbotlash: Yasashga ko`ra AD=DC, CE=EB, AD+DE+EB=2p=DC+CE+DE.

Tekshirish: $\angle A - \angle B > 90^0$ da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

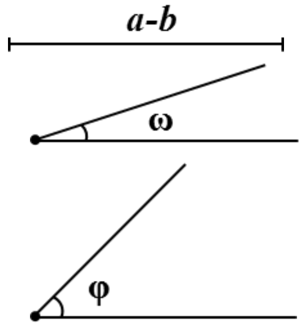
4-masala. Ikki tomonining ayirmasi va shu tomonlar qarshisidagi burchaklarining yig`indisi va ayirmasi berilgan uchburchak yasang.

Berilgan: a-b, $\alpha + \beta = \varphi$, $\alpha - \beta = \omega$.

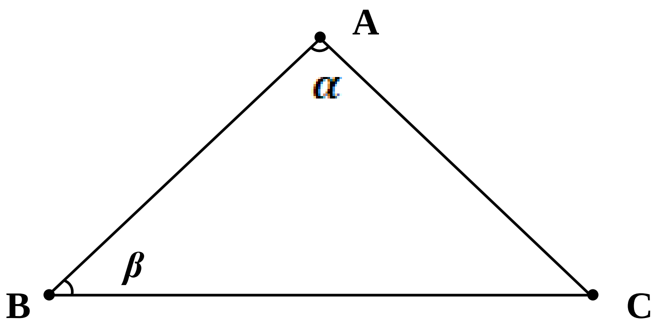
$$\begin{cases} \alpha + \beta = \varphi \\ \alpha - \beta = \omega \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\varphi + \omega}{2}$$

$$\beta = \frac{\varphi - \omega}{2}$$



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

1^0. $\forall B \in l$ nuqtadan a-b kesmani qo`yib, D nuqtani hosil qilamiz.

2^0. B nuqtadan $\beta = \frac{\varphi - \omega}{2}$ burchakni qo`yamiz.

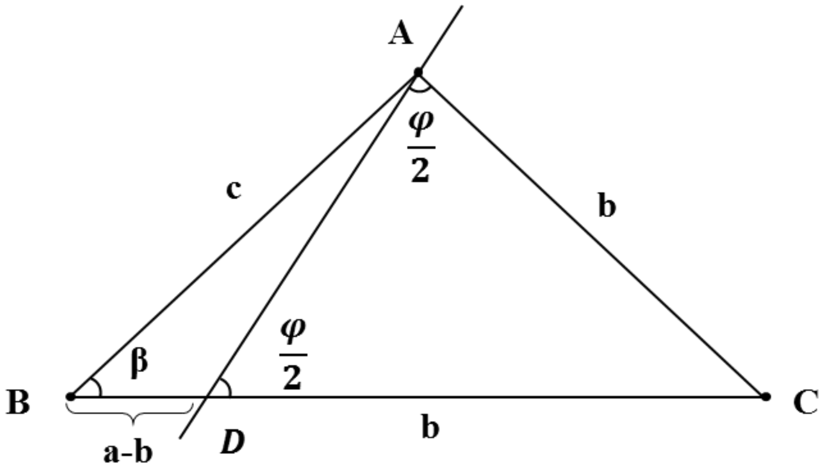
3^0.D nuqtadan $\frac{\varphi}{2}$ burchakni qo`yamiz.

4^0. Bu burchak nurlari kesishishidan hosil bo`lgan nuqta – A.

5^0. A nuqtadan $\frac{\varphi}{2}$ burchakni qo`yamiz, bu burchak nuri l to`g`ri chiziq bilan C nuqtada kesishadi.

6^0. A, B, C nuqtalarni ketma – ket tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan ΔABC hosil bo`ladi.

Yasash:



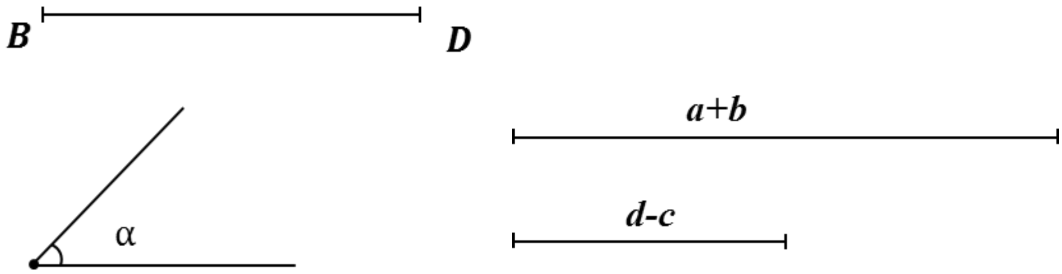
Isbotlash: Yasashga ko`ra.

Tekshirish: $\alpha+\beta\geq180^{\circ}$ da yechimga ega emas.

<u>**5 -masala.**</u> |AB|+|AD|, |BC|-|CD|, |BD|, $\angle$BDC ma`lum trapetsiya yasang.

Bu yerda |AB|=a, |BC|=d, |CD|=c, |AD|=b, |BD|=f, $\angle$BDC=α kabi belgilash kiritaylik.

Berilgan: |AB|+|AD|=a+b, |BC|-|CD|=d-c, |BD|=f, $\angle$BDC=α



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.

Reja: 1^0. $\forall D\in l$ nuqtadan *f* kesmani qo`yib, B ni hosil qilamiz.

2^0. D nuqtadan α ni qo`yamiz va bu burchakning B nuqta yotmagan nurida *c-d* kesmani qo`yib, M ni hosil qilamiz.

3^0. B va M nuqtalarni tutashtirib, BM kesma va α ning ikkinchi nuri hosil qilgan φ burchakni BM kesmaning B uchidan qo`yamiz, natijada C nuqta hosil bo`ladi.

4^0. D nuqtadan BC kesmaga parallel to`g`ri chiziq o`tkazamiz va D nuqtada a+b kesmani qo`yib, A` ni hosil qilamiz.

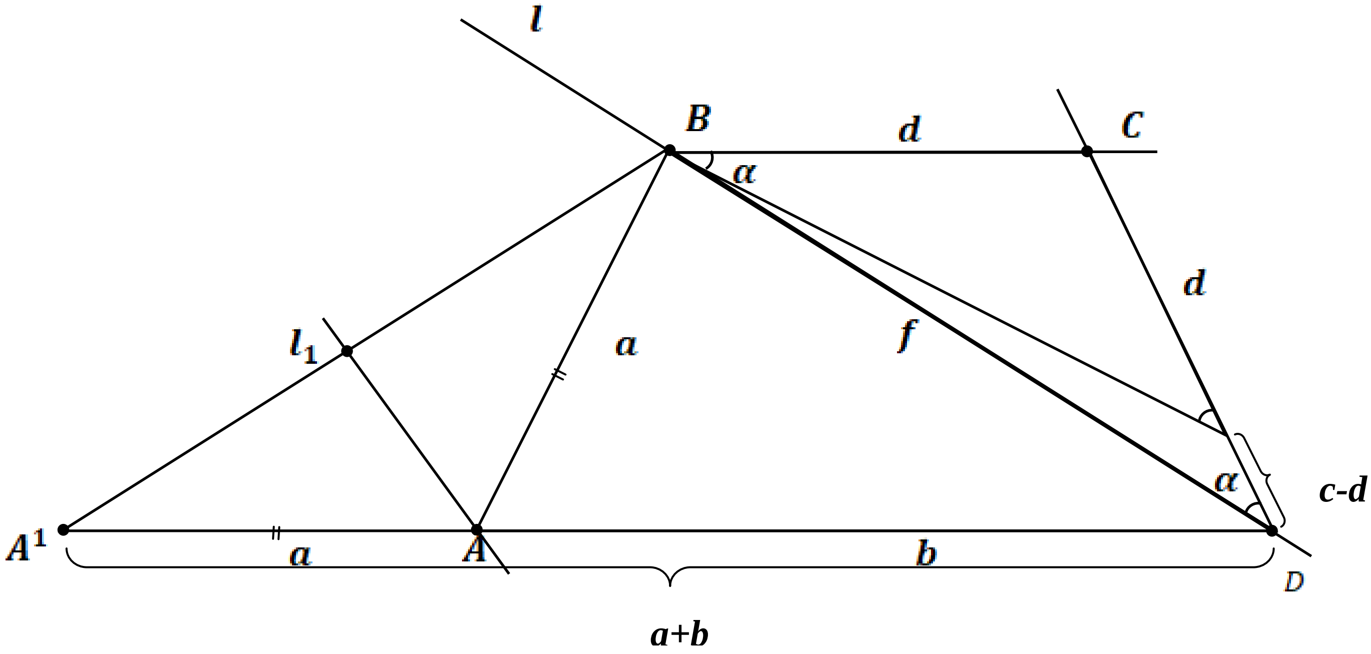
5^0. A` va B nuqtalarni tutashtiramiz.

6^0. A`B kesmaning $l_1$ o`rta perpendikularini o`tkazamiz.

7^0. $l_1 \cap A\grave{}D = \{A\}$.

8^0. A va B nuqtalarni tutashtiramiz, natijada izlanayotgan ABCD trapetsiya hosil bo`ladi.

Yasash:



Isbotlash: Yasashga ko`ra.

Tekshirish: $\angle$BDC=0^0, 180^0 da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda masala yechimga ega.

To`g`rilash metodiga doir masalalar

2.2.1. Bir kateti va qolgan ikki tomonining ayirmasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

2.2.2. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va qolgan ikki tomonining yig`indisi berilgan uchburchak yasang.

2.2.3. Bir kateti va qolgan ikki tomonining yig`indisi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

2.2.4. Asosi, uning qarshisidagi burchagi va qolgan ikki tomonining yig`indisi berilgan uchburchak yasang.

2.2.5. Gipotenuzasi va katetlarining yig`indisi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

2.2.6. A burchak va uning bir tomonida B berilgan; bu burchakning ikkinchi tomonida shunday C nuqta topingki, |AC|+|CB| yig`indi berilgan *l* kesmaga teng bo`lsin.

2.2.7. 1) Asosi, uning qarshisidagi burchagi va qolgan ikki tomonining ayirmasi berilgan uchburchak yasang.

2) Gipotenuzasi va katetlarining ayirmasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

2.2.8. Bir tomoni, qolgan ikki tomonining yig`indisi va shu tomonlardan biriga o`tkazilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

2.2.9. Perimetri va ikki burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.2.10. Perimetri, balandligi va asosidagi bir burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.2.11. 1) Ikki tomonining yig`indisi va ayirmasi hamda uchinchi tomoniga o`tkazilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

2) Katetlarining yig`indisi va ayirmasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

2.2.12. Quyidagi elementlardan foydalanib, to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

1) $a+b$, $\angle$A
2) $b+c$, $\angle$A
3) 2p, $\angle$A
4) 2p, $\angle$A-$\angle$B
5) $c-a$, $\angle$B
6) $a-h_c$, $\angle$A
7) $a-h_c$, $\angle$B

13. Quyidagi elementlardan foydalanib, uchburchak yasang.

1) a, $b+h_a$, $\angle$C
2) c, $b+h_a$, $\angle$C
3) $\angle$B, $\angle$C, $b+h_a$

2.2.14. Ikki tomonining yig`indisi va ikki burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.2.15. Ikki tomonining ayirmasi va ikki burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.2.16. Ikki tomonining ayirmasi va shu tomonlar qarshisidagi burchaklarining yig`indisi va ayirmasi berilgan uchburchak yasang.

2.2.17. Ikki qo`shni tomonining yig`indisi va diagonali berilgan to`gri to`rtburchak yasang.

2.2.18. Ikki qo`shni tomonining ayirmasi va diagonali berilgan to`gri to`rtburchak yasang.

2.2.19. Bir tomoni va unga qo`shni bo`lgan ikkinchi tomoni bilan diagonalining yig`indisi berilgan to`gri to`rtburchak yasang.

1) bir tomoni, diognali bilan ikkinchi qo`shni tomonining ayirmasi berilgan to`gri to`rtburchak yasang.

2) bir tomoni bilan diognalining yig`indisi berilgan kvadrat yasang.

3) diagonali bilan bir tomonining ayirmasi berilgan kvadrat yasang.

4) diagonallarining yig`indisi va diagonali bilan bir tomoni orasidagi burchagi berilgan romb yasang.

5) diagonallarining ayirmasi va diagonali bilan bir tomoni orasidagi burchagi berilgan romb yasang.

6) diagonali bilan tomonining yig`indisi va bir burchagi berilgan romb yasang.

7) diagonali bilan tomonining ayirmasi va bir burchagi berilgan romb yasang.

8) bir tomoni bilan diagonallarining yig`indisi berilgan romb yasang.

9) bir tomoni bilan diagonallarining ayirmasi berilgan romb yasang.

10) bir tomoni, diagonallarining yig`indisi va diagonallari orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

11) bir tomoni, diagonallarining ayirmasi va diagonallari orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

12) bir tomoni va unga qo`shni bo`lgan ikkinchi tomoni bilan bir diagonalining yig`indisi va bir burchagi berilgan parallelogramm yasang.

13) bir tomoni va unga qo`shni bo`lgan ikkinchi tomoni bilan bir diagonalining ayirmasi va bir burchagi berilgan parallelogramm yasang.

2.2.20. Perimetri, bir diagonali va shu diagonali bilan bir tomoni orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

2.2.21. Perimetri, bir diagonali va bir burchagi berilgan parallelogramm yasang.

2.2.22. |AB|+|AD|, |BC|-|CD|, |BD|, ∠BDC ma`lum trapetsiya yasang.

2.3-§. Geometrik almashtirishlar metodi.

Geometrik almashtirishlardan foydalanib, geometrik masalalarni yechish mumkin. Bu metod bilan masala yechishni analiz bosqichida, berilgan va izlangan figuralardan tashqari, berilgan figuraning yoki uning biror qismini u yoki bu geometrik almashtirishlar natijasida hosil qilingan figuralar ham qaraladi. Bu figura qaysi geometrik almashtirishni qo'llab hosil qilingan bo'lsa, yasashga doir masala o'sha metod bilan yechilgan deb ataladi. Jumladan, simmetriya metodi, parallel ko'chirish metodi, gomotetiya metodi, inversiya metodi va h.k. Masalan quyidagi ko'rinishdagi masalalar

1. *MN* to'g'ri chiziqning bir tarafida *A* va *B* nuqtalar joylashgan. *MN* to'g'ri chiziqda shunday X nuqta topingki, bu nuqtadan *A*,*B* nuqtalargacha bo'lgan masofalarning yig'indisi eng kichik bo'lsin (simmetriya metodi).
2. Asoslari va diognallari bo'yicha trapetsiya yasang (parallel ko'chirish metodi).
3. *A* va *B* burchaklari va *C* uchidan chiqqan bissektrisasi b_c bo'yicha uchburchak yasang (gomotetiya).
4. Berilgan *M* markazdan shunday aylana chizingki, uning berilgan to`g`ri chiziqlar bilan kesishuvidan hosil bo`lgan vatarlarning yig`indisi berilgan kesmaga teng bo`lsin.(burish)

2.3.1. O`q simmetriya metodiga doir masalalar.

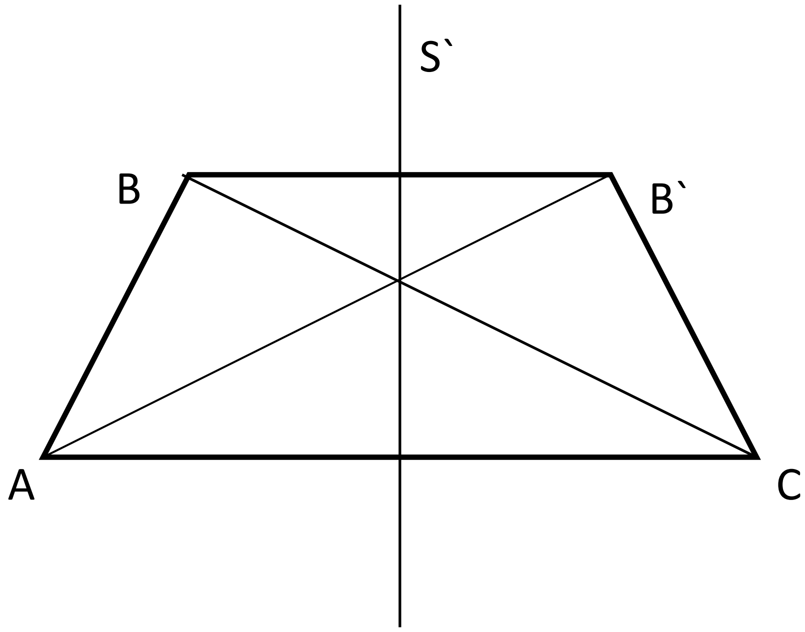
1-masala. *Ikki tomoni va shu tomonlar qarshishidagi burchaklarining ayirmasi berilgan uchburchak yasang.*

Analiz. Izlanuvchi uchburchak –rasdagi ABC uchburchak bo`lib, uning $BC = a, AB = c$ tomonlari va ular qarshisidagi burchaklarning ayirmasi $\varphi$ berilgan bo`lsin.

Berilgan φ burchakni yasash uchun ABC uchburchakni uning AC tomon o`rta perpendikulyariga ($s$ o`qqa) nisbatan simmetrik almashtiraylik.

Yasash. $AB'C$ va ABB' uchburchaklarda: $\angle BAB' = \angle A - \angle C = \varphi$ bo`ladi. $\varphi$ ga teng burchakli $ABB'$ uchburchakda $AB' = BC = a,\ \ AB = c$ tomonlari va ular orasidagi $\varphi$ burchak ma`lum. Demak, bu uchburchakni (yordamchi uchburchakni) yasash mumkin.

I kkinchidan, ABB' uchburchakdab izlanuvchi ABC uchburchakka o`tish mumkin. Xaqiqatdan, $ABB'$ uchburchakni, uning $BB'$ tomonining $s$ o`rta perpendikulariga nisbatan simmetrik almashtirsak, bundan $\Delta CB'B$ hosil bo`ladi. Shuning uchun ABC uchburchakning C uchi ham aniqlanadi.



Demak, masalada berilganlar bo`yicha izlanuvchi uchburchakni yasash uchun avval berilgan $a$ va $c$ tomonlar va ular orasidagi $\varphi$ burchak bo`yicha ABB' uchburchakni yasab, so`ngra $BB'$ tomonning o`rta perpendikulariga nisbatan A nuqtani C nuqtaga simmetrik almashtirish kerak. ABC uchburchak izlanuvchi uchburchak bo`ladi.

2-masala. MN to`g`ri chiziqning bir tarafida A va B nuqtalar joylashgan. MN to`g`ri chiziqda shunday X nuqta topingki, bu nuqta uchun $\angle AXM = \angle BXN$ tenglik o`rinli bo`lsin.

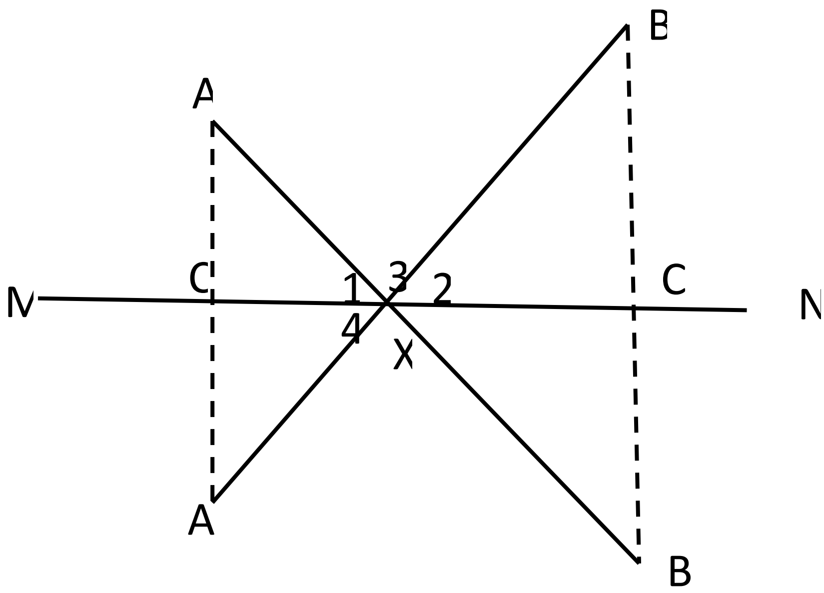
Analiz. Izlanuvchi X nuqtani topildi deb faraz qilib, uni MN to`g`ri chiziqda taxminan belgilab olaylik. X nuqtani A va B nuqtalar bilan tutashtirib, qo`yilgan talabni bajaramiz.

Qilingan farazga ko`ra X nuqta quyidagi shartga javob beradi:

$\angle AXM = \angle BXN = \angle 1 = \angle 2$

BX kesmani davomiga $XA' = XA$ kesmani qo`yib, uning A uchini berilgan A nuqta bilan tutashtiraylik.

BA' va MN to`g`ri chiziqlarning kesishuvidan hosil bo`lgan vertical burchaklar o`zaro tengdir: $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 4$



Isbot. Yasalishiga ko`ra, $AX = A'X'$ bo`lib, CX umumiy tomon va $\angle 1 = \angle 4$ tenglikka asosan:

$\Delta ACX = \Delta A'CX$ va bundan $AA' \perp MN$, $AC = A'C$ shartlar bajariladi.

2.3.1.1. Berilgan to’rt tomoni bo’yicha *AC* diagonali *A* burchagini teng ikkiga bo’ladigan *ABCD* to’rtburchak yasang.

2.3.1.2. Burchak va uning ichida bir nuqta berilgan. Bir uchi berilgan nuqtada qolgan ikki uchi burchak tomonlarida yotuvchi va perimetri eng kichik uchburchak yasang.

2.3.1.3. Berilgan uchburchakka bir uchi ma’lum nuqtada bo`lgan eng kichik perimetrli ichki uchburchak chizing.

2.3.1.4. Bissektrisalari yotgan to’g’ri chiziqlar va bitta tomonining bir nuqtasi berilgan uchburchak yasang.

2.3.1.5. Ikki qo'shni tomoni va shu tomonlarning umumiy bo'lmagan uchlaridagi ikki burchagi berilgan hamda aylanaga tashqi chizilgan to'rtburchak yasang.

2.3.1.6. Berilgan *M* nuqtadan utib, berilgan *a* va *b to'g'*ri chiziqlarga urinuvchi aylana chizing va quyidagi savollarga javob bering:

1) berilgan to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lsa, masala qanday yechiladi?

2) berilgan nuqta bissektrisada yotsa, masala qanday yechiladi?

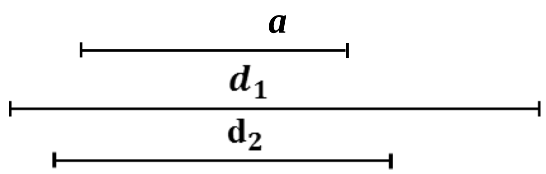
2.3.1.7. Berilgan *ABC* uchburchakning *A* uchidan o'tuvchi L to'g'ri chiziqda shunday X nuqta topingki, bu nuqtadan uchburchakning *AB* va *AC* tomonlari bir xil burchak ostida ko'rinsin.

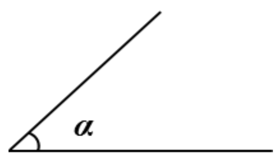
2.3.1.8. ABC uchburchakning BC tomonida *D* nuqta berilgan. Shu uchburchakka shunday *DXY* ichki uchburchak chizingki; uning *DX* va *XY* tomonlari AB tomon bilan teng burchaklar tashkil qilsin hamda uning *DY* va *XY* tomonlari AC tomon bilan teng burchaklar hosil qilsin.

2.3.2. Parallel ko`chirish metodiga doir masalalar

Masala. Asosi, ikki diagonali va diagonallari orasidagi burchagi berilgan trapetsiya yasang.

Berilgan: a –asosi, d_1, d_2-diognallari va ular orasidagi α burchagi.





Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.

Reja :

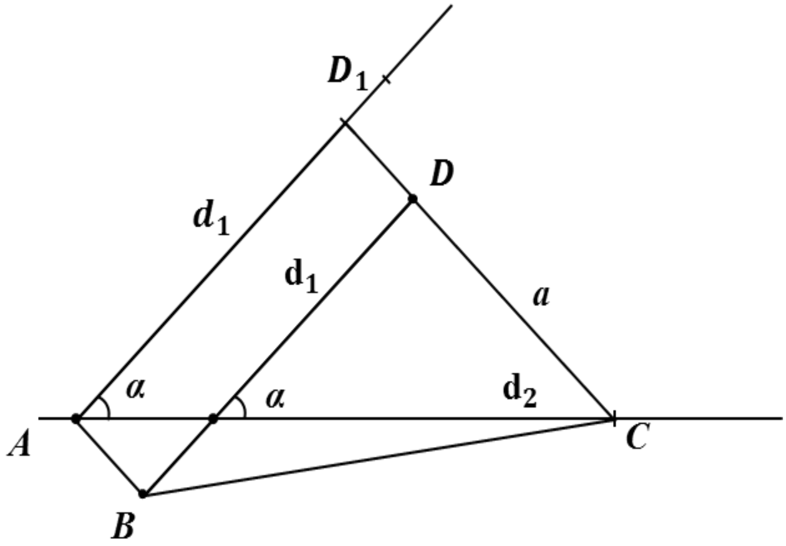
1^0. $\forall A \in l$ nutqadan α burchakni qo`yamiz.

2^0. α burchak nurlaridan mos ravishda d_1 va d_2 kesmalarni qo`yamiz. Hosil bo`ladi D_1 va C nuqtalar.

3^0. D_1 va C nuqtalarni tutashtirib, C nuqtadan *a* asosni qo`yamiz. Hosil bo`ladi D nuqta AD_1 kesmani DD_1 qadar parallel ko`chiramiz. Hosil bo`ladi B nuqta.

4^0. ABCD trapetsiya biz izlayotgan trapetsiyadir.

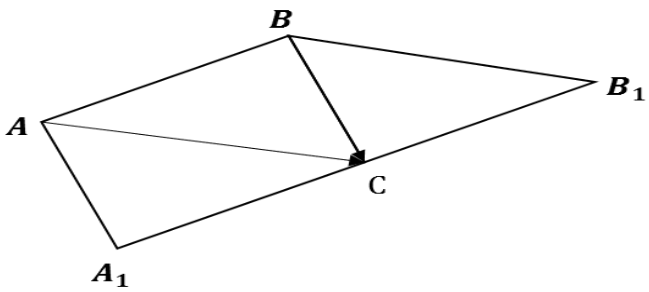
Yasash:



Isbotlash: Yasashga ko\`ra BD=d_1, AC=d_2, DC=a

Tekshirish: Masala $0^0 < \alpha < 180^0$ da yagona yechimga ega.

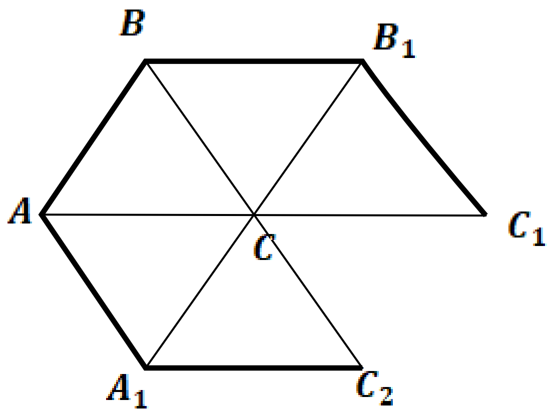
2.3.2.1. Berilgan *ABC* uchburchakning har bir tomonini uning qolgan ikki tomoniga parallel ko\`chirishdan hosil bo\`lgan figurani o\`rganing (6-rasmda faqat *AB* tomonini *BC* va *AC*



6-rasm

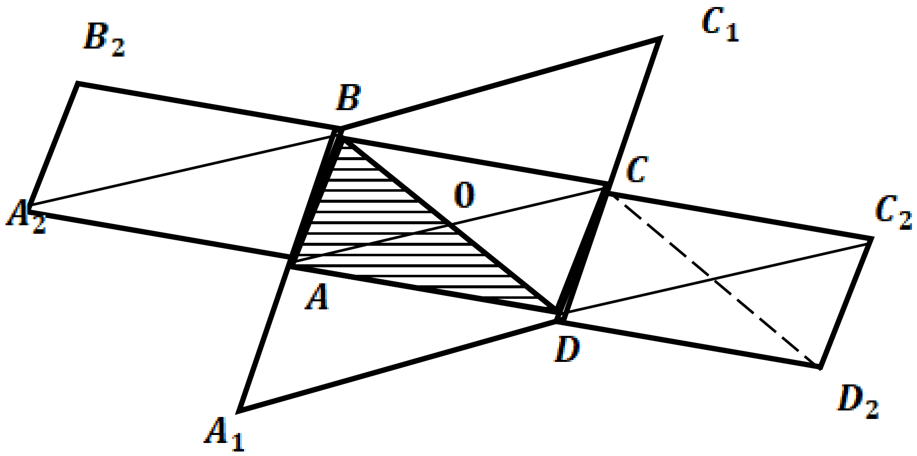
vektorlar bo\`yicha parallel ko\`chirish ko\`rsatilgan).

2.3.2.2. Berilgan *ABC* uchburchakni uning har bir tomoniga parallel ko\`chiring. (7-rasmda *ABC* uchburchakni *AC* va *VC* vektorlar bo\`yicha parallel ko\`chirish ko\`rsatilgan.)



7-rasm

2.3.2.3. Parallelogrammning har bir diagonalini uning har ikki tomoni bo`yicha parallel har ikki yo`nalishda ko`chirib, hosil bo`lgan figuralarni o`rganing (8-rasmda faqat *AC* diagonalining ko`chirilishi ko`rsatilgan).



8-rasm

2.3.2.4. To`gri burchakli *ABC* uchburchakning bitta chiziqli elementni boshqa chiziqli elementlariga parallel ko`chiring:

a) *a* katetini uning *b* katetiga parallel ko`chiring;

b) b katetini *a* katetiga parallel ko`chiring;

v) *c* gipotenuzasini *a* va katetlarga parallel ko`chiring;

g) *a* va b katetlarini *c* gipotenuzaga parallel ko`chiring;

d) *a* va b katetlarini *c* gipotenuzaga o`tkazilgan medinanaga parallel
ko`chiring.

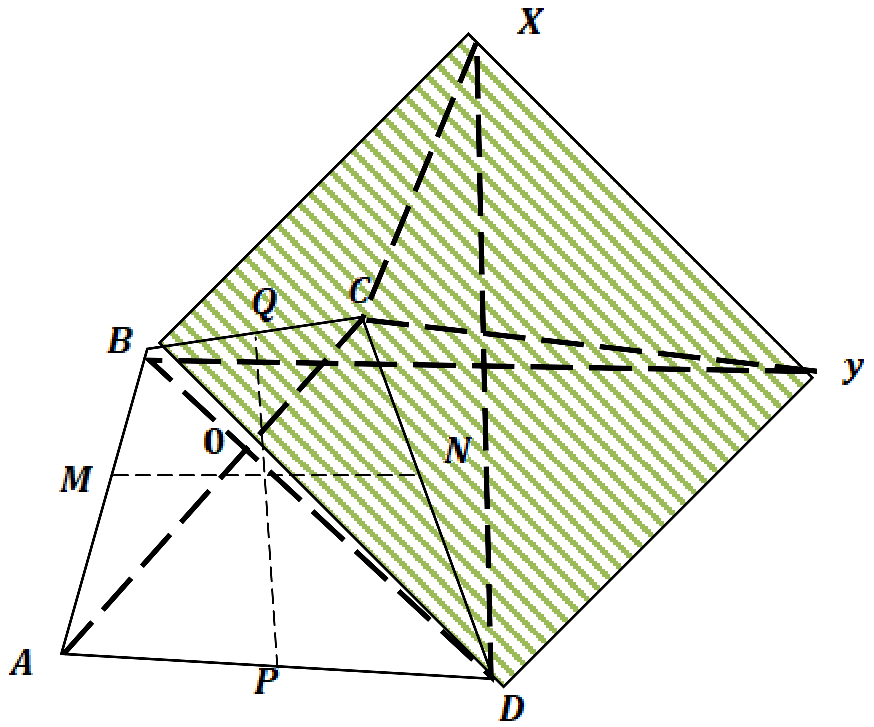
2.3.2.5. Ixtiyoriy *ABC* uchburchakning *AC* tomoni *CB* vektor qadar parallel ko`chirilib, *BD* holatga keltirilgan (9-rasm) . So`ngra *BA* tomoni davomida *AE* ≡ *AB* kesma olinib, uning E uchi *C* va *D* nuqtalar bilan tutashtirilgan quyidagilarni isbot qiling.

1) *CDE* uchburchakning tomonlari *ABC* uchburchakning mos medianalaridan ikki marta katta.

2) *CDE* uchburchakning yuzi *ABC* uchburchakning yuzidan uch marta katta.

3) *CDE* uchburchakning burchaklari *ABC* uchburchak medianalari orasi-dagi burchaklarga teng.

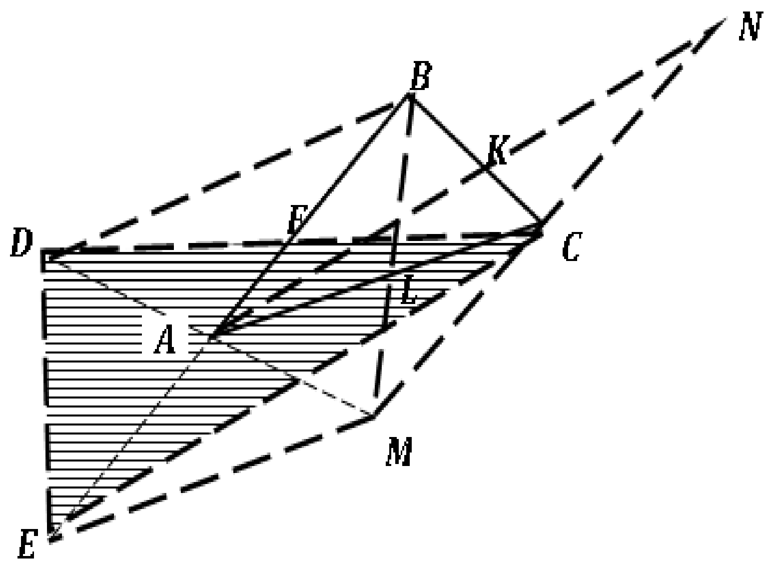
4) *AD, AC va EA* kesmalar *CDE* uchburchak medianalarining ⅔ qismga teng.



9-rasm

2.3.2.6. Ixtiyoriy *ABCD* to`rtburchakning *AB* va *AD* tomonlari *AC* vektor bo`yicha parallel ko`chirilib, C*X* va CY holatlarga keltirilgan. Xosil bo`lgan *BXYD* parallelogrammning quyidagi xossalarga ega ekanligini isbot qiling (10- rasm).

1) *BXYD* parallelogrammning tomonlari va burchaklari *ABCD* to`rt-burchakning diagonallariga va ular orasidagi burchaklarga mos ravishda teng.



10-rasm

2) *BCX, XCY* va *YCD* burchaklar *ABCD* to`rtburchakning *B, A* va *D* burchaklariga mos ravishda teng.

3) *XCD* va *BCY* burchaklar *ABCD* to`rtburchakning *AB* va *CD* hamda *BC* va *AD* qarama-qarshi tomonlari orasidagi burchaklarga mos ravishda teng.

4) qaralayotgan parallelogrammning yuzi to`rtburchakning yuzidan ikki marta katta.

5) to`rtburchakning *C* uchidan parallelogrammning to`rtala uchigacha bo`lgan masofalar to`rtburchakning tomonlariga mos ravishda teng.

6) parallelogrammning diagonallar to`rtburchak qarama-qarshi tomon-
larining o`rtalarini tutashtiruvchi kesmalardan mos ravishda ikki marta katta; bu diagonallar orasidagi burchak esa o`sha kesmalar orasidagi bur-
chakka teng.

2.3.2.7. Berilgan *a* va *b* to`gri chiziqlar orasiga berilgan *l* uzunlikdagi *AB* kesmani berilgan c to`gri chiziqqa parallel qilib joylashtiring.

2.3.2.8. O'zaro parallel *a* va *b* to`gri chiziqlar va ular orasidagi mintaqadan ikki tarafda *A* va *B* nuqtalar berilgan. *B* dan *A* ga boradigan shunday eng qisqa yo`l topingki, bu yo`lning *a* va *b* to`gri chiziqlar oralig`idagi bo`lagi berilgan *c* to`gri chiziqqa parallel bo`lsin.

2.3.2.9. Berilgan *M* nuqtadan berilgan $a \parallel b$ va $c \parallel d$ to`gri chiziqlarga uning har ikki parallellar orasidagi kesmalari bir-biriga teng bo`lgan kesuvchi o`tkazing.

2.3.2.10. Bir uchi berilgan bir aylanada va ikkinchi uchi berilgan ikkinchi aylanada yotuvchi, berilgan nuqtada teng ikkiga bo`linuvchi kesma chizing.

2.3.2.11. Asosi, balandligi va bir diagonali berilgan parallelogram yasang.

2.3.2.12. Bir tomoni va ikki diagonali berilgan parallelogramm yasang.

2.3.2.13. 1) asosi, unga yopishgan bir burchagi va ikki yon tomoni berilgan trapetsiya yasang.

2) ikki asosi va diagonali berilgan teng yonli trapetsiya yasang.

2.3.2.14. Asoslarining ayirmasi, yon tomonlari va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

2.3.2.15. Asoslarining ayirmasi, bir yon tomoni, bir burchagi va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

2.3.2.16. Asoslarinnng ayirmasi, asosidagi ikkita burchagi va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

2.3.2.17. Asoslarining ayirmasi, yon tomonlarining yig`indisi, bir burchagi va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

2.3.2.18. Asosi, ikki diagonali va diagonallari orasidagi burchagi berilgan trapetsiya yasang.

2.3.2.19.

1) ikki asosi, bir diagonali va diagonallari orasidagi burchagi berilgan trapetsiya yasang.

2) ikki asosi, diagonali va shu diagonalning katta asos bilan hosil qilgan burchagi berilgan trapetsiya yasang.

2.3.2.20. Uchta medianasi berilgan uchburchak yasang.

2.3.2.21. Ikki medianasi va ular orasidagi burchagi berilgan uchburchak

2.3.2.22. Ikki medianasi va ulardan biri bilan uchinchi mediana orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.3.2.23. Ikki medianasi va uchinchi tomoniga tushirilgan balandligi
bo`yicha uchburchak yasang.

2.3.3.Nuqta atrofida aylantirish (burish) metodi va unga doir masalalar

Tekislikning biror o nuqtasi atrofida yo`nalishi va kattaligi berilgan φ burchak miqdorida burish deb, bu tekislikning har bir M' nuqtasi uchun $\begin{cases} OM' = OM \\ \angle MOM' = \varphi \end{cases}$ talablarga javob beruvchi M’ nuqtani mos keltirishga aytiladi.

Ta`rifda berilgan O nuqta burish markazi, φ esa burish burchagi deb ataladi. M’ nuqta M nuqtaning obrazi, M nuqta M’ nuqtaning proobrazi deyiladi.

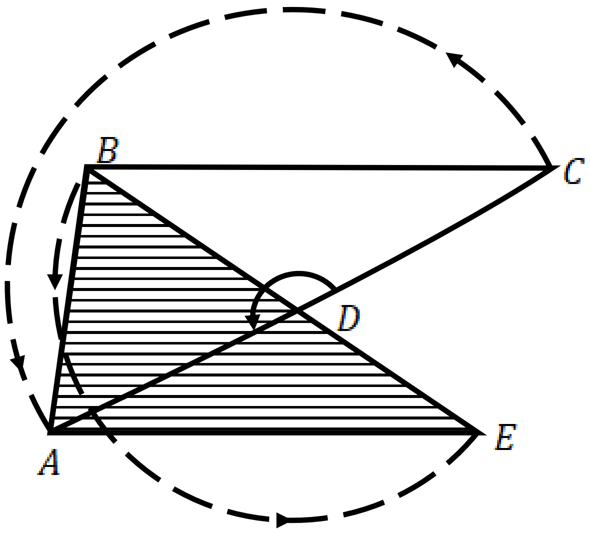
Burishning asosiy xossalari:

1. Burish harakatdir.
2. Burish har bir kesmani o`ziga teng bo`lgan ikkinchi bir kesmaga o`tkazadi.
3. Burish to`g`ri chiziqni yana to`g`ri chiziqqa o`tkazadi.
4. Burishda har bir aylana unga teng bo`lgan aylanaga o`tadi.

Nuqta atrofida aylantirish (burish) metodiga doir masalalar

1-masala: *Ikki tomoni va uchinchi tomoniga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.*

Analiz. ABC – uchburchak izlangan uchburchak (11-rasm), AB, BC uning berilgan tomonlari va BD berilgan medianasi bo`lsin.



11-rasm

CD tomonli BCD uchburchakka D nuqta atrofida $180°$ga aylantirsak, AD va DC kesmalarning tengligidan uning CD tomoni AD kesma ustiga tushadi. Bu holda BCD uchburchakning B uchi E nuqtaga va C uchi esa A nuqtaga tushib, o`zi $AED$ uchburchak vaziyatiga keladi. $DE$ kesma $[BD]$ning davomi bo`ladi. Hosil bo`lgan $ABE$ uchburchak yordamchi figura bo`ladi.

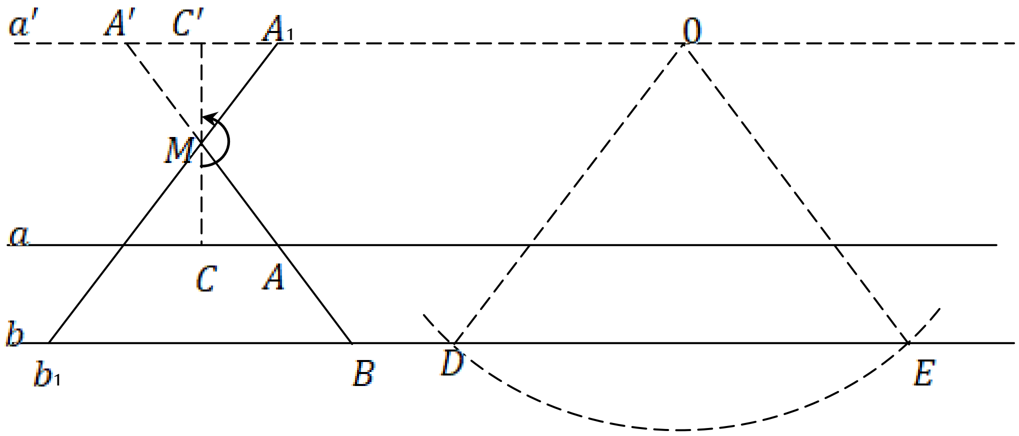
Haqiqatdan ham:

1)Masalada berilgan $|AB|$ va $|AE|=|BC|$ hamda $|BE|=|BD|+|DE|=2|BD|$ elementlar bo`yicha ABE uchburchakni yasash mumkin.

2)ABE uchburchakdan ABC uchburchakka o`tish mumkin: $BE$ tomonning o`rtasi D nuqtani topib, uni A bilan tutashtirishdab hosil bo`lgan $ADE$ uchburchakni $D$ nuqta atrofida $180°$ga aylantirib, uni $BDC$ uchburchak holiga keltiramiz. $ABC$ – uchburchak izlangan uchburchak bo`ladi.

<u>2−masala:</u> *O`zaro parallel bo`lgan a va b to`g`ri chiziqlar va ular orasida yotmagan M nuqta berilgan. M nuqta va a, b to`g`ri chiziqlarga shunday kesuvchi o`tkazingki, undagi $|MA| + |MB|$ kesmalar yig`indisi berilgan l kesmaga teng bo`lsin.*

Analiz. Izlangan kesuvchi topildi deb uni tahminan chizib olamiz. (12-rasm). Berilgan a to`g`ri chiziqni berilgan M nuqta atrofida $180°$ga aylantirib, uni a' vaziyatga keltiraylik. Bundan A nuqta A' nuqtaga almashib, MA kesma $|MA'|$ keladi. Bu holda $|MA| + |MB| = |MA'| + |MB| = |A'B| = l$ bo`ladi. Ma`lum uzunlikdagi $A'B$ kesmani $a'//b$ to`g`ri chiziqlar orasiga joylaymiz.



12-rasm

a' to`g`ri chiziqning ixtiyoriy O nuqtasidan l radius bilan yoy chizib, bu yoyning b to`g`ri chiziq bilan kesishgan D va E nuqtalarini O nuqtalari bilan tutashtirsak, $|OD| = |OE| = |A_1B_1| = |A'B| = l$ bo`ladi. Demak, M nuqtadan $OD$ va $OE$ kesmalarga mos ravishda parallel qilib o`tkazilgan A_1B_1 va $A'B$ to`g`ri chiziqlar izlangan kesuvchilar bo`ladi.

2.3.3.1. Berilgan kesmani quyida berilgan *O* nuqta atrofida 45°,— 90°, 135°,— 180°, 270° burchak miqdorida aylantiring. Bunda:

a) *O* nuqta kesmaning o`rtasida;

b)*O* nuqta kesmaning o`rta perpendikulyarida;

v)*O* nuqta kesmaning bir uchida;

g)*O* nuqtani tekislikning ixtiyoriy joyida olib, topshiriqni bajaring.

2.3.3.2. Bir-biriga teng *AB* va *A'B'* kesmalardan birini ikkinchisiga o`tkaza oluvchi aylantirish markazi *O* va aylantirish burchagi $\acute{\alpha}$ ni toping.

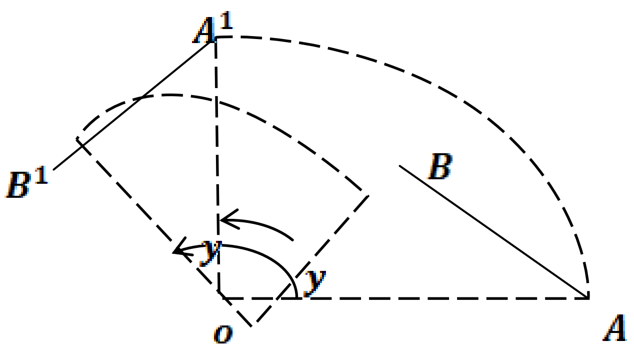
Bunda quyidagi hollarni ayrim qarang.

1)$|AB| \parallel |A'B'|$ (13-rasm). Bu holda *AA'* va *BB'* kesmalardan har

birining o`rta perpendikulyarini chizib, ularning kesishgan nuqtasi *O* ga e'tibor qiling va $\angle AOA' \equiv \angle \mathrm{BOB}'$ bo`lishini isbotlang.

2) *[AB]=[A'B']* bo`lib, bu kesmalarning bir xil va teskari yo`nalishdagi hollarini ayrim qarang;

3) *AB* va *A'B'* kesmalar bir to`gri chiziqda yotib, ularning bir xil va teskari yo`nalishdagi hollarini ayrim tekshiring.



13-rasm

2.3.3.3. Chiziqni aylantirish haqidagi topishiriqlarni bajaring.

1) berilgan l to`g`ri chiziqni unda yotmagan bior O nurta atrofida 45^0,90^0,-180^0, -270^0,360^0 burchak kattaligida aylantiring. Bu burchaklardan qaysilari uchun l to`g`ri chiziq unga parallel bo`lgan to`g`ri chiziqqa almashadi.

2) aylantirishda parallel to`g`ri chiziqlarning obrazlari dam o`zaro parallel bo`lishini isbot qiling;

3)$\acute{\alpha}$ burchak ostida kesishuvchi ikki to`g`ri chiziq obrazlari ham shu
burchak ostida kesishishini isbotlang;

4)to`g`ri chiziqni o`z nuqtasi atrofida burib burchaklar kattaligida aylantirib ko`ring.

2.3.3.4. 1)Berilgan ko`pburchakni biror *M* nuqta atrofida ixtiyoriy *u* burchak kattaligida aylantiring. *u* = 180° bo`lgan holdagi aylantirish qanday almashtirishga teng kuchli bo`ladi?

2.3.3.4. 2) Ixtiyoriy muntazam *p* burchakni uning markazi atrofida

$\acute{\alpha}_1=\frac{360^\circ}{n}$; $\acute{\alpha}_2=\frac{2\cdot 360^\circ}{n}$; … ;$\acute{\alpha}_{n-1}=\frac{(n-1)\cdot 360^\circ}{n}$; $\acute{\alpha}_{n-1}=\frac{n\cdot 360^\circ}{n}$; burchaklar kattaligida aylantiring va bunday aylantirishlar to`plami gruppa bo`lishini isbotlang.

2.3.3.5. Berilgan aylanani ixtiyoriy nuqta atrofida biror burchak kattaligida aylantiring va bunday aylantirish markazini quyidagi nuqtalarda oling:

1) aylana tashqarisida;

2) aylana ichidagi markazdan boshqa biror nuqtada;

3) aylanada

4) aylana markazida

2.3.3.6. Berilgan ikkita teng aylanada birini ikkinchisiga o`tkazuvchi nechta aylantirish bor? Bunday aylantirishlardan bir nechtasini markazini va burchagini toping.

2.3.3.7. Uchidagi *A* burchagi ma'lum bo`lgan shunday teng yonli *ABC* uchburchak chizingki, uning *A* uchi berilgan nuqtada *B* uchi berilgan bitta aylana, *C* uchi esa berilgan ikkinchi aylanada yotsin.

2.3.3.8. Shunday kvadrat yasangki, uning uchlari berilgan parallelogram-tomonlarida (yoki ba'zilarining davomida) yotsin.

2.3.3.9.

1) berilgan *M* markazdan shunday aylana chizingki, uning berilgan to`g`ri chiziqlar bilan kesishuvidan hosil bo`lgan vatarlarning yig`indisi berilgan kesmaga teng bo`lsin.

2) berilgan (0, r) aylanaga uning *A* nuqtasi orqali urinma o`tkazing

3) muntazam n (n = 3, 4, 5, . . .) burchakni o`zining markazi atrofida i burchakka aylantirilsa u o`ziga ustma-ust tushadi?

4) berilgan teng tomonli uchburchakni:

a) markazi atrofida 60° ga va — 60° ga buring;

b) bir uchi atrofida 60° ga buring;

c) bir uchi atrofida 180° ga buring;

d) bir balandligining asosi atrofida 180° ga va —180° ga buring. bir hol uchun berilgan uchburchak bilan uning aksining birlashmasi va kesishmasini yozib ko`rsating.

5) teng yonli uchburchakni: buning asosining o`rta nuqtasi atrofida $180^0$ ga burib, hosil bo`lgan birlashmaning qanday figura ekanligini tushuntiring.

6) teng tomonli uchburchakni uning og`irlik markazi O (medianalarining kesishish nuqtasi) atrofida 60^0 ga buring va

a) berilgan uchburchak bilan uning aksining kesishmasi va birlashmasini ko`rsating.

b) hosil bo`lgan figuraning uchlaridan o`tuvchi aylana chizib yuqorida bajarilgan burishda bu aylanani qanday figuraga akslanganini tushuntiring.

c) berilgan uchburchakda yotgan har bir MN kesma uning aksi bo`lgan M`N` kesmaga tengligi va $\angle$MON=$\angle$M`O`N`=60^0 ekanligini tekshirib ko`rsating.

d) berilgan ikkita t_1 va t_2 aylanada shunday ikki nuqta topingki, ular berilgan A nuqtadan teng masofada yotsin va o`sha A nuqtadan $\alpha$ burchak ostida ko`rinsin.

2.3.4. Gomotetiya. Gomotetiya metodiga doir masalalar

**Ta`rif:** $S$ nuqta va $k \neq 0$ son berilgan bo`lsa S nuqtadan boshqa har qandey M nuqtaga quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi M' mos qo`yuvchi akslantirish gomotetik akslantirish yoki gomotetiya deyiladi:

1) M' nuqta SM to`g`ri chiziqda yotado;

2) $SM' : SM = |k|$ yoki $SM' = |k|SM$;

3) k musbat bo`lganda, $M'$ va $M$ nuqtalar $S$ nuqtadan bir tarafda yotadi. $k$ manfiy bo`lganda esa, M' va M nuqtalar S nuqtadan turli taraflarda yotadi. M' nuqta M nuqtaga gomotetik mos nuqta deb ataladi.

Bunda S nuqta - gomotetiya markazi, k esa gomotetiya koeffitsienti deb ataladi.

Gomotetiya markazi – S nuqta o`z – o`ziga akslanadi deb qabul qilinadi.

M nuqtani S markazga nisbatan berilgan $k \neq 0$ koeffitsient bo`yicha gomotetik akslantirib, $M'$ nuqtani hosil qilish – gomotetiya (yoki o`xshash akslantirish) deyiladi va u qisqacha quyidagicha yoziladi:

$H_S^k(M) = M'$

$k > 0$ bo`lgan holdagi gomotetik akslantirish to`g`ri gomotetiya deyilib, bu holda $S$ markaz to`g`ri gomotetiya markazi (yoki tashqi o`xshashlik markazi) deyiladi. $k < 0$ bo`lgan holdagi gomotetik akslantirish teskari gomotetiya deyilib, bu holda $S$ markaz teskari gomotetiya markazi (yoki ichki o`xshashlik markazi) deyiladi.

**Ta`rif:** $F$ figurani tashkil etuvchi hamma nuqtalarni berilgan $S$ markaz va $k \neq 0$ koeffitsient bilan gomotetik akslantirishdan hosil bo`lgan nuqtalar to`plami $F$ figuraga gomotetik (perspektiv o`xshash) figura deyiladi va F' bilan belgilanadi.

Demak $H_S^k(F) = F'$

Gomotetiya metodiga doir masalalar

2.3.4.1. Berilgan M nuqdadan o`tib, *a* to`g`ri chiziqqa urinuvchi va markazi berilgan *b* to`g`ri chiziqda yotuvchi aylana chizing.

2.3.4.2. Berilgan M nuqtadan o`tib, berilgan *a* to`g`ri chiziqqa urinuvchi va berilgan *b* to`g`ri chiziqda *l* uzunlikda vatar ajratuvchi aylana chizing.

2.3.4.3. Berilgan M nuqtadan o`tib, *a* to`g`ri chiziqda urinuvchi shunday aylana chizingki, uning berilgan *b* to`g`ri chiziqdan ajratgan vatari yoyining balandligi ma`lum *h* kesmaga teng bo`lsin.

2.3.4.4. Berilgan *a* va *b* to`g`ri chiziqlarga va shu to`g`ri chiziqlar orasidagi burchakning bissektrisasida berilgan M nuqtadan o`tuvchi aylana chizing.

2.3.4.5. *a* va *b* to`g`ri chiziqlar hamda ularga urinuvchi A aylana berilgan. Shu uchala figuraga urinuvchi aylana chizing.

2.3.4.6. Berilgan *a* to`g`ri chiziqqa va A aylanaga urinuvchi va markazi berilgan b to`g`ri chiziqda yotuvchi aylana chizing.

2.3.4.7. Berilgan *a* to`g`ri chiziqqa va A aylanaga urinuvchi, berilgan *b* to`g`ri chiziq bilan kesishib hosil qilgan vatari yoyining balandligi berilgan *h* kesmaga teng bo`lgan aylana chizing.

2.3.4.8. Berilgan *a* to`g`ri chiziqqa va A aylanaga urinuvchi, berilgan *b* to`g`ri chiziqdan berilgan k masofada yotuvchi aylana chizing.

2.3.4.9.

1) perimetri va uchta tomonining nisbatlari berilgan uchburchak yasang.

2) tashqi va ichki chizilgan aylanalari radiuslarining ayirmasi va ikki tomoni nisbati bilan ular orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.3.4.10. Tashqi va ichki chizilgan uchala aylanalar radiuslarining yig`indisi va ikki burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.3.4.11. Uchala bissektrisasining yig`indisi va ikki tomonining nisbati, ulardan kattasi qarshisidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.3.4.12. Bir tomoniga o`tkazilgan balandligi, medianasi va bissektrisasinnng yig`indisi, ikki tomonining nisbati va bu tomonlardan kattasi qarshisidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

2.3.4.13. Bir tomoniga o`tkazilgan medianasi bilan balandligining ayirmasi va uchta tomonining nisbatlari berilgan uchburchak yasang.

2.3.4.14. Berilgan uchburchakka ichki chizilgan shunday to`g`ri to`rtburchak yasangki, uning perimetri berilgan kesmaga teng bo`lsin.

2.3.4.15. Berilgan uchburchakka ichki chizilgan shunday parallelogramm yasangki, uning ikki qo`shni tomonining nisbati berilgan nisbatga teng bo`lib, uning bir uchi uchburchakning asosida berilgan nuqtada yotsin (bunda uchburchakning asosi deb, ichki chizilgan parallelogrammning ikki uchi joylashgan tomonini aytamiz).

2.3.4.16. Berilgan uchburchakka ichki chizilgan shunday uchburchak yasangki, u berilgan ikkinchi bir uchburchakka o`xshash bo`lsin.

2.3.4.17. Berilgan uchburchakka ichki chizilgan shunday parallelogramm yasangki, u berilgan parallelogrammga o`xshash bo`lsin.

2.3.4.18.Berilgan teng yonli uchburchakka ichki chizilgan shunday to`g`ri to`rtburchak yasangki, uning perimetri to`g`ri to`rtburchakdan tashqarida hosil bo`lgan kichik teng yonli uchburchakning perimetridan ikki marta katta bo`lsin.

2.3.4.19. Berilgan aylanaga ichki chizilgan shunday uchburchak yasangki, u berilgan uchburchakka o`xshash bo`lsin.

2.3.4.20. Berilgan aylanaga ichki chizilgan shunday teng yonli uchburchak
yasangki, uning asosi bilan balandligining yig`indisi (yoki ayirmasi) berilgan kesmaga teng bo`lsin.

2.3.4.21. Berilgan sektorga ichki chizilgan shunday kvadrat yasangki, uning tomoni sektor radiusida yotsin.

2.3.4.23. Berilgan segmentga ichki chizilgan shunday to`gri to`rtburchak yasangki, u berilgan to`gri to`rtburchakka o`xshash bo`lsin.

2.3.4.24. Berilgan yarim doiraga ichki chizilgan shunday to`gri to`rtburchak yasangki, uning perimetri berilgan kesmaga teng bo`lsin.

2.3.4.25. Berilgan yarim doiraga ichki chizilgan shunday to`g`ri to`rtburchak, yasangki, uning ikki qo`shni tomonining ayirmasi berilgan kesmaga teng bo`lsin.

2.3.5. O`xshash almashtirish metodi va unga doir misollar

Uchburchakni yasashga doir birinchi xil masalalar:

Bunday masalalar xili jami 17 ta bo`lib , ular berilgan ikkita burchagi va berilgan bitta chiziqli elementi bo`yicha uchburchak yasashdan iboratdir.

Bu masalarni qisqacha bunday yozib ko`rsatish mumkin: (A,B,a), (A,B,c), (A,B,b), (A,B,h_a), (A,B,h_c), (A,B,h_b), (A,B,m_a), (A,B,m_c), (A,B,m_b), (A,B,b_a), (A,B,b_c), (A,B,b_b), (A,B,r), (A,B,R), (A,B,r_b), (A,B,r_a), (A,B,r_c).

Bu masalalarning ba`zilari kitobning bundan oldingi betlarida yechilgan Shuning uchun bulardan oldingi uchtasiga to`xtalmay, 11-masala yechib ko`rsatamiz. Qolganlarni kitobxonga yordamchi figurani ishlatish yo`li bilan mustaqil yechishni tavsiya qilamiz. Bu masalani o`xshashlik metodi bilan yechilishini ko`raylik.

<u>1-masala.</u> *A,B, va b_c bo`yicha uchburchak yasash.*

Analiz: Masalada berlgan shartlardan A va B burchaklar izlangan

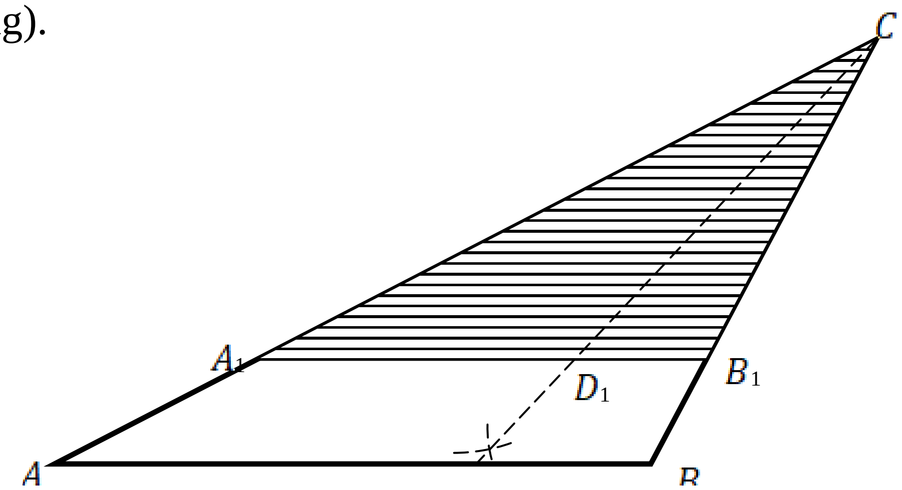
ABC uchburchakning shaklini, b_c bissektrissa esa bu uchburchakning kattaligini aniqlaydi.

Demak, berilgan masala quyidagi ikki yordamchi masalaga ajraladi.

1) A va B burchaklari berilgan uchburchak yasash.

2) ABC uchburchakka o`xshash, uning C uchidan chiqqan bissektrissasi berilgan b_c kesmaga teng uchburchak yasash.

Yasash: A_1 va B_1 burchaklari A av B burchalariga mos ravishda teng bo`lgan yordamchi A_1CB_1 uchburchak yasaymiz (14-rasmga qarang).



D

14-rasm

Birinchi yordamchi masala aniqmas masaladir. Shuning uchun bunda yasaladigan uchburchak ixtiyoriy kattalikda, ammo izlangan uchburchakka o`xshash bo`ladi. Demak, birinchi yordamchi masalani yechish bilan izlangan uchburchakning shakligina aniqlanadi.

Ikkinchi yordamchi masalani yechish uchun yasalgan A_1CB_1 uchburchakni biror nuqtaga nisbatan ma`lum koeffisient bilan o`xshash almashtiramiz.

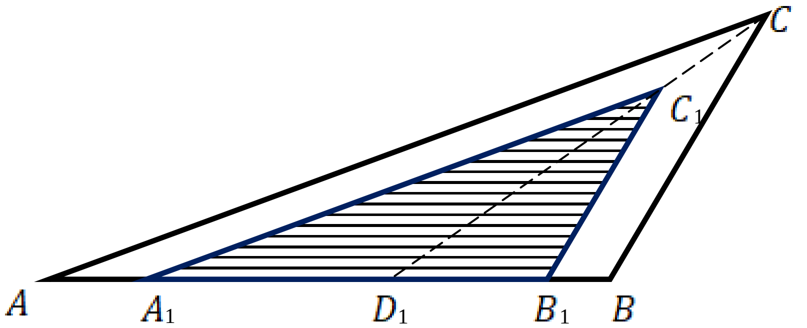
Bu ishni quyidagi yo`llar bilan bajarish mumkin:

Birinchi xil akslantirish. Yasalgan uchburchakda masalada berilgan b_c kesma mos $CD_1=b_c$ bissektrisa chizib, uning C uchini gomotetiya markazi deb qabul qilamiz.

Mos kesmalarning nisbatini ya`ni $k=b_c:b`_c$ ni o`xshashlik koeffisienti sifatida qabul qilib, A_1CB_1 uchburchakni C markazga nisbatan k koeffisient bilan almashtiramiz. Buni quyidagicha bajarish mumkin: CD_1 bissektrisa ustiga uning C uchidan boshlab, berilgan

$CD=b_c$ bissektrisani qo`yamiz. Markazi c da joylashgan va $D_1$ nuqtani D ga almashtiruvchi almashtirish gomotetiya bizga kerak almashtirish bo`ladi. D nuqtada A_1B_1 tomonga parallel qilib to`g`ri chiziq o`tkazamiz. Bu chiziq yordamchi uchburchakning $CA_1$ va $CB_1$ tomonlari bilan kesishib, $A_1$ va $B_1$ nuqtalarga mos bo`lgan A va B nuqtalarni beradi; bundan izlangan ABC uchburchak hosil bo`ladi.

Ikkinchi xil akslantirish: 15-rasmda yasalgan yordamchi $A_1B_1C_1$ uchburchakdagi $C_1D_1=b`_c$ bissektrisaning ikkinchi uchi bo`lgan D_1 nuqtani gomotetiya markazi deb qabul qilib, yordamchi uchburchakni shu markazga nisbatan birinchi holda aytilgan k koeffisient bilan almashtiramiz. Bu ishni quyidagicha bajarish mumkin: D_1C_1 bissektrisaning ustiga uning D_1 uchidan boshlab, berilgan bissektrisaga teng bo`lgan $D_1C$ kesmani qo`yamiz. Markazi D_1da joylashgan va C_1 nuqtani C nuqtaga almashtiruvchi gomotetiya bizga kerak almashtirish bo`ladi. C nuqtadan $C_1A_1$ va $C_1B_1$ tomonlarga parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz. Bu chiziqlar A_1B_1 tomon bilan kesishib, A_1 va B_1 nuqtalarga mos bo`lgan A va B nuqtlarni hosil qiladi. Bundan izlangan ABC uchburchak hosil bo`ladi.

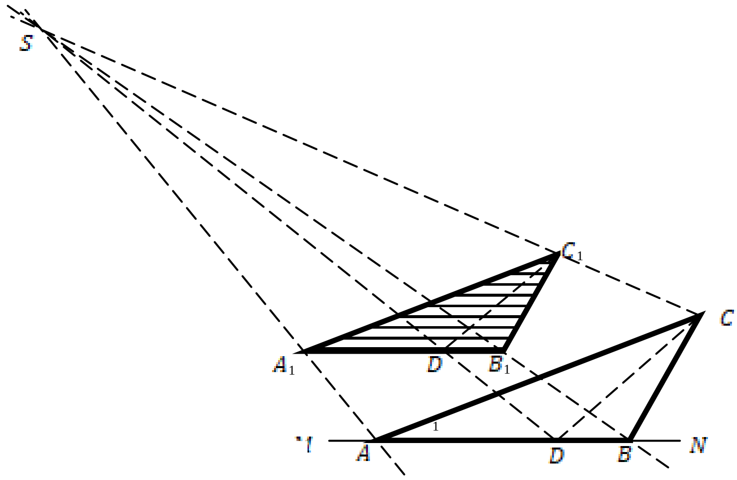


15-rasm

Uchinchi xil akslantirish: Yordamchi $A_1B_1C_1$ uchburchakni yasagandan so`ng uni ma`lum *k* koeffisient bilan tekislikning ixtiyoriy C nuqtasiga nisbatan almashtirib, izlangan ABC uchburchakni topish mumkin.

Bu quyidagicha bajariladi: S nuqtadan va yordamchi ucburchakning bir uchidan, masalan, A_1 uchdan SA_1 to`g`ri chiziq o`tkazib, $A_1$ nuqtaga mos bo`lgan A nuqta topiladi.

Buning uchun SA kesmani ma`lum $b_c$, $b`_c$ va SA_1 kesmalarga to`rtinchi proporsional kesma ($SA=SA`*b_c:b`_c$) sifatida topib, uni $SA_1$ nurga S nuqtadan boshlab qo`yiladi; so`ngra nurlar va parallellar o`tkazish orqali uchburchakning B va C uchlari topiladi. Bundan ABC uchburchak hosil bo`ldi.



16-rasm

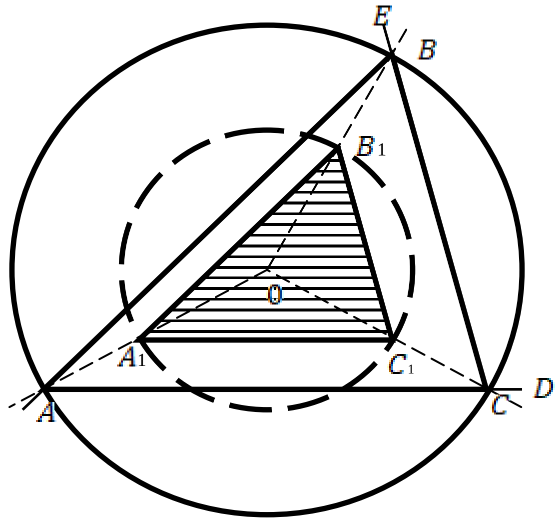
Isbot: Uchta yo`l bilan topilgan ABC uchburchak masalaning talabiga javob beradi, chunki uning A va B burchaklari yasalishiga ko`ra berilgan ikki burchakka teng bo`lib, uning C uchidan chiqqan bissektrisasi berlgan b_c kesmaga tengdir.

2-masala. *A,C va R bo`yicha uchburchak yasang*.

Masalaning analizi oldingi masaladagi kabi bajariladi. Shuning uchun faqat yasashgagina to`xtalamiz.

Berilgan ikki burchagi bo`yicha ixtiyoriy kattalikdagi yordamchi $A_1B_1C_1$ uchburchak yasab, bu uchburchakka tashqi chizilgan aylananing O markazi va $R_1= OA_1$ radiusi topiladi.

So`ngra yordamchi uchburchakni $k=R:R_1$ koeffisent bilan biror qulayroq nuqtaga nisbatan almashtirib, izlangan uchburchak topiladi.



17-rasm

Uchburchak yasashga doir ikkinchi xil masalalar

Shakli uchta tomonining berilgan nisbatlari orqali, kattaligi esa asosiy chiziqli elementlaridan biri orqali aniqlanuvchi ucburchak yasashni talab qilgan masalalar – uchburchak yasashga doir birinchi tipdagi masalarning uchinchi xilini tashkil qiladi.

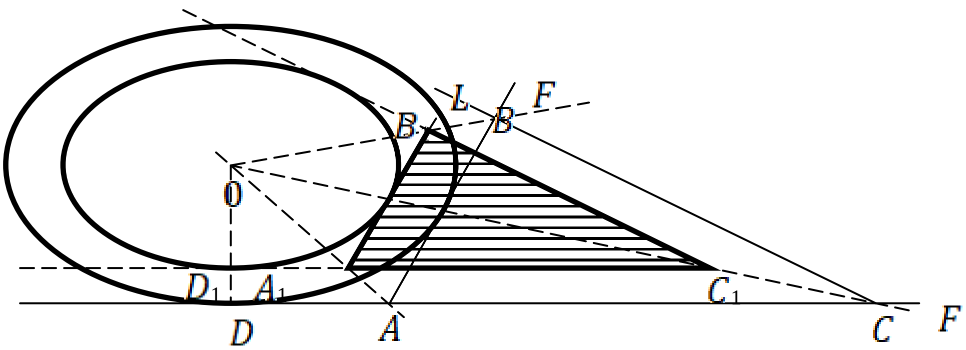
<u>3-masala.</u> *Uchta tomonining nisbatlari va tashqi – ichki chizilgan aylanasining radiusi bo`yicha uchburchak yasang.*

Analiz: Bu masalani yechish quyidagi ikki yordamchi masalani yechishdan iborat.

1)uchta tomoning nisbatlari bo`yicha uchburchak yasash;

2)uchburchakka tashqi va ichki chizilgan aylana radiusi berilgan radiusga teng va topilgan uchburchakka o`xshash uchburchak yasash.

Yasash: berilgan nisbatlarning hadlari m,n,p sonlar va r_c berilgan bo`lsin; ixtiyoriy q kesma olib mq, nq, pq kesmalar topiladi va shu uchala kesmaga teng bo`lgan $A_1B_1C_1$ uchburchak yasaladi. (18-rasm)



18-rasm

Yordamchi masalalarning ikkinchisini yechish uchun avval topilgan yordamchi uchburchakka mos ravishda tashqi-ichki chizilgan aylana chizib olinadi. So`ngra yordamchi uchburchakni ma`lum $k=r_c:r`_c$ koeffisient bilan biror qulayroq nuqtaga nisbatan o`xshash almashtiriladi. Chizilgan yordamchi aylananing O markazini o`xshashlik markazi deb olib, yordamchi uchburchakni almashtiraylik:

$OD_1 = r`_c$ radiusning ustiga berilgan $OD = r_c$ radiusni qo`yib, D nuqtadan $DE//A_1C_1$ to`g`ri chiziq o`tkazamiz. Bu chiziqning $OA_1$ va $OC_1$ nurlar bilan kesishgan A va C nuqtalari izlangan uchburchakning ikki uchi bo`ladi. A nuqtadan $AF//A_1B_1$ to`g`ri chiziq o`tkazib, uning $OB_1$ nur bilan kesishgan B nuqtasini topamiz. ABC uchburchak izlangan uchburchak bo`ladi.

Uchburchak yasashga doir uchinchi xil masalalar.

Shakli ikki tomonining nisbati va bu tomonlardan kattasi qarshisidagi burchagi orqali, kattaligi esa chiziqli elementlaridan biri orqali aniqlanadigan uchburchaklar yasashni talab qilgan masalalar – birinchi tipdagi to`rtinchi xil masalalarni tashkil qiladi.

4-masala. *Ikki tomonining nisbati, ulardan kattasi qarshisidagi burchagi va tashqi chizilgan aylananing radiusi berilgan uchburchak yasash.*

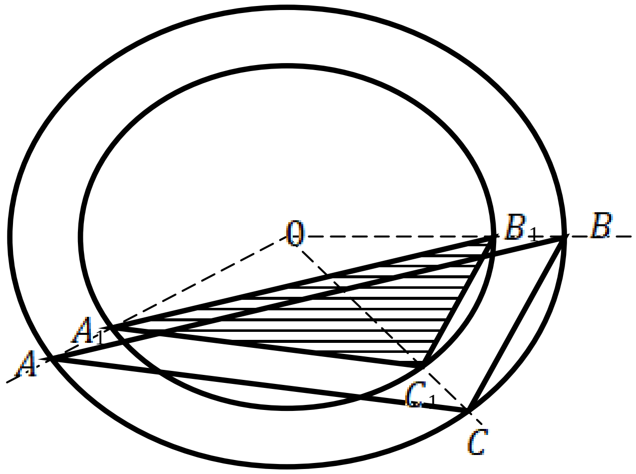
b:c=m:n<1; C burchak va R kesma berilgan.

Analiz. Berilgan masala quyidagi ikki yordamchi masalaga ajratib yechiladi.

1) ikki tomonining nisbati va shu tomonlardan kattas qarshisidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

2) topilgan uchburchakka o`xshash va tashqi chizilgan aylanasining radiusi berilgan kesmaga teng bo`lgan uchburchak yasash.

Yasash. Agar *m, n* - berilgan nisbatning hadlari bo`lsa, ixtiyoriy q kesma olib, *mq* va *nq* kesmalarni topamiz. So`ng ikki tomoni mq va nq kesmalardan va ularning kattasi nq qarshisidagi C va C_1 burchaklar tengligidan foydalanib, $A_1B_1C_1$ uchburchak yasaymiz. Bu uchburchak izlangan uchburchakka o`xshash bo`ladi (19-rasm).



19-rasm

Ikkinchi yordamchi masalani yechishda avval yordamchi $A_1B_1C_1$ uchburchakka tashqi aylana chizib, uning $OA_1=R_1$ radiusini belgilaymiz. So`ngra bu uchburchakni $k=R:R_1$ koeffisient bilan biror qulayroq markazga nisbatan gomotetik almashtiramiz.

Gomotetiya markazi qilib yordamchi uchburchakka tashqi chizilgan aylananing O markazini olsak, bu markazdan berilgan R radius bilan chizilgan aylanani OA_1, OB_1 va OC_1 nurlar bilan kesishtirib, mos ravishda A, B, C nutalarni hosil qilamiz. ABC uchburchak izlangan uchburchak bo`ladi.

Parallelogrammlar (o`xshash almashtirishlar vositasida) yasashga doir birinchi tipdagi masalalar.

Shakli ikki qo`shni tomoning nisbati va bir burchagi orqali yoki diogonallarning nisbati va ular orasidagi burchagi orqali, yoki asosi bilan unga tushirilgan balandligining nisbati va bir burchagi orqali, kattaligi esa biror chiziqli elementi orqali aniqlanuvchi parallelogram yasashni talab qilgan masalalar parallelogramm yasashga doir masalalarning birinchi tipini tashkil qiladi.

5-masala. Ikki qo`shni tomoning nisbati, bir burchagi va bir dioganali berilgan parallelogramm yasang.

*AD:*AB=*m:n*; A burchak va AC=*l* dioganal berilgan.

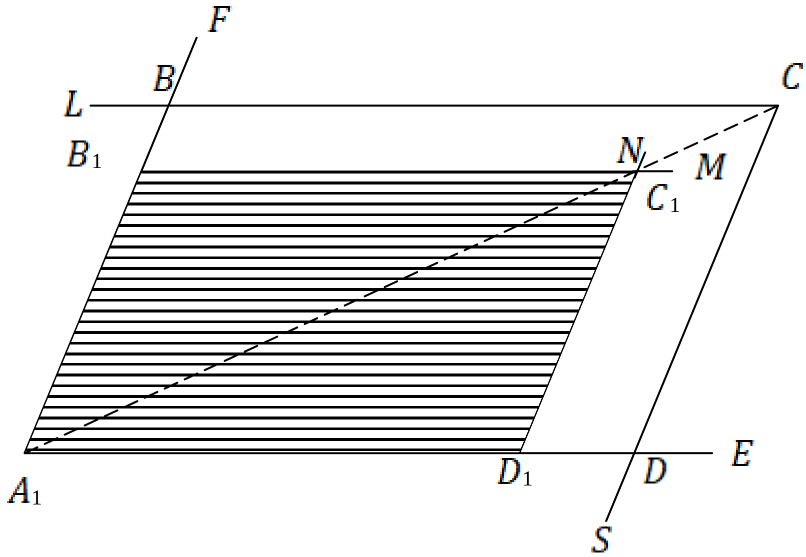
Analiz. Berilgan masala quyidagi ikki yordamchi masalaga ajratib yechiladi.

*1)*ikki qo`shni tomonining nisbati va bir burchagi berilgan parallelogram yasash;

*2)*dioganali berilgan *l* kesmaga teng, topilgan parallelogrammga o`xshash parallelogamm yasash.

Yasash. Berilgan A burchakka teng qilib burchak EA_1F ni yasab, uning bir tomonida, masalan, A_1E tomonida A_1D_1=mq kesmani va A_1F tomonida esa $A_1B_1=nq$ kesmani ajratamiz (bundagi q ni ixtiyoriy uzulikdagi kesma deb va berilgan nisbatning hadlarini esa m va n sonlar bilan berilgan deb faraz qildik). So`ngra $B_1M//A_1E$ va $D_1N//A_1F$ to`g`ri chiziqlar o`tkazib, ularning kesishuvidan C_1 nuqtani hosil qilamiz. Yasalishiga ko`ra, $A_1B_1C_1D_1$ figura – parallelogramm va u izlangan parallelogrammga o`xshash bo`ladi

Shuning bilan izlangan parallelogrammning shakli aniqlangan deb hisoblanadi.



20-rasm

Yordamchi masalalardan ikkinchisini yechish uchun topilgan yordamchi $A_1B_1C_1D_1$ parallellogramning *l* diogonaliga mos bo`lgan $A_1C_1=l_1$ diogonalini belgilab, bu parallelogramni $k=l:l_1$ keoffisient bilan qulayroq markazga nisbatan almashtiramiz: $A_1C_1$ diogonalning $A_1$ uchni markazi deb olib, $A_1C_1$ ning ustiga $A_1C=l$ kesmani qo`yamiz. So`ngra $CL//A_1E$ va $CS//A_1F$ to`g`ri chiziqlarni o`tkazsak, ularning A_1E va A_1F to`g`ri chiziqlar bilan keshishuvidan mos ravishda D va B nuqtalar hosil bo`ladi.

ABCD – izlangan parallelogramm bo`ladi.

Ikkinchi tipdagi masalalar

Shakli o`xshashlikning asosiy alomatlardan biri bilan, kattaligi esa bir necha chiziqli elementlarining berilgan algebraik yig`indisi orqali aniqlanuvchi figura yasashni talab qilgan masalalar ikkinchi tipdagi masalalarni tashkil qiladi. Bu tipdagi masalalarni yechishda ishlatiladigan metodlardan faqat bittasini ko`rib o`tamiz. Bu metod quyidagilardan iborat:

1.Izlangan F figurani shaklini aniqlovchi shartlardan foydalanib, unga o`xshash F` yordamchi figura yasash.

2.Yasalgan yordamchi figurada, berilgan *l* kesmaga mos *l*` kesma topish (buning uchun odatda *l*` kesmani tashkil etuvchi kesmalardan birortasiga qolganlari algebraik qo`shiladi).

Shuni ham qayd qilib o`tish kerakki, izlanuvchi F figura yordamchi F` figuraga o`xshash bo`lgani uchun, bu figuralardagi har qanday mos chiziqli elementlarning bir-biriga nisbati /*k*/ ga tengdir. Jumladan, $l`:l=/k/$ bo`ladi. Masalan uchburchak uchun $l=a+k_b-m_c$ bo`lsin. $a`:a=h`_b:h_b=m`_c:m_c=/k/$ tengliklardan $a`=/k/a$, $h`_b=/k/h_b$ va $m`_c=/k/m_c$ kelib chiqadi. Bundan $l`=/k/a+/k/h_b-/k/m_c=/k/(a+h_b-m_c)=/k/l$ hosil bo`lib, $l`:l=/k/$ ekanini ko`ramiz.

3.Yordamchi figura tekisligida ixtiyoriy bir M nuqta olib, undan *l*` kesmaga parallel to`g`ri chiziq o`tkaziladi va bu chiziqqa uning *M* nuqtasidan boshlab, berilgan *l* kesma qo`yiladi.

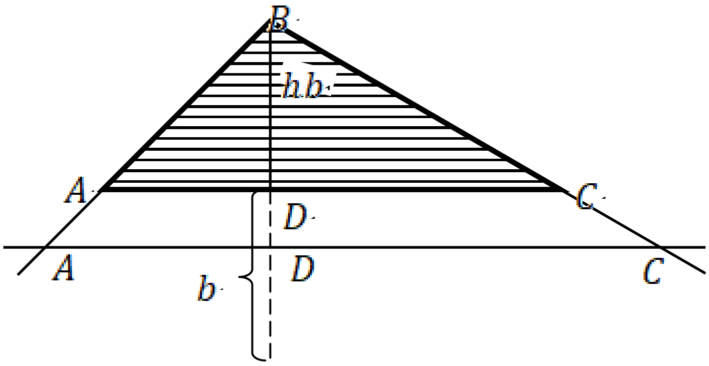
So`ngra, $l=l`$ parallel kesmalar uchlarida ikki to`g`ri chiziq o`tkazib, ularning kesishgan S nuqtasi o`xshashlik markazi deb qabul qilinadi (biz *l*` teng emas *l* deb faraz qilamiz).

4.Topilgan yordamchi fugura S markazga nisbatan $k=l:l`$ koeffisient bilan gomotetik almashtiriladi. Natijada izlangan fugura hosil bo`ladi. Aytilganlarni quyidagi masalaga tadbiq qilaylik.

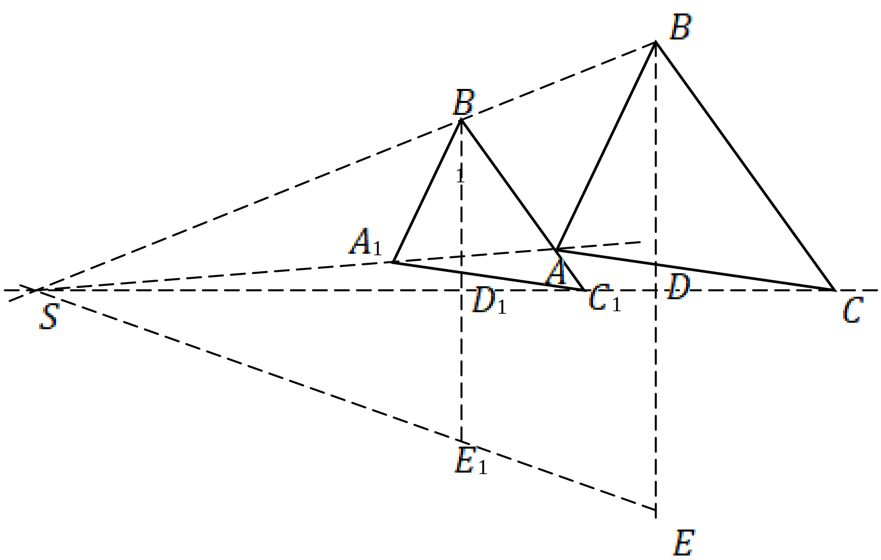
6-masala. *Tomonlarining nisbati va bir asosi bilan unga o`tkazilgan balandligining yig`indisi berilgan uchburchak yasang.*

$a:b:c=m:n:p$ va $l=b+h_b$ berilgan.

Yasash. Tomonlarining berilgan nisbatidan foydalanib, yordamchi $A_1B_1C_1$ uchburchak yasab, $B_1D_1=h`_b$ balandligi davomiga $D_1E_1=A_1C_1=b_1$ asosini qo`yamiz(21-rasm). Bunda berilgan chiziqli elementga mos bo`lgan $B_1E_1=l_1$ kesma hosil bo`ladi. Ixtoyoriy B nuqtadan B_1E_1 kesmaga // va berilgan *l* kesmaga teng qilib BE kesma o`tkazib, B va $B_1$ hamda E va $E_1$ nuqtalardan to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz (22-rasm), ularning kesishgan nuqtasini gomotetiya markazi deb olamiz.



21-rasm



22-rasm

Yordamchi uchburchakni S markazga nisbatan $k=l:l_1$ koeffisient bilan almashtirib, izlangan ABC uchburchakni hosil qilamiz.

2.4.-§. Inversiya metodi va unga doir savol va masalalar.

R^2 tekisligida $\omega(o,r)$ aylana va $E_0=R^2\backslash 0$ ni olaylik. E_0 to`plamning ixtiyoriy $M\in E_0$ ga shunday $M`\in E_0$ nuqtasini mos qo`yaylikki, natijada $M`\in OM$ bo`lib, $OM \bullet OM`=r^2$ shartni qanoatlantirsin ya`ni $F:E_0\to E_0$ , $f(M)=M`$, $M_1\neq M_2$ $M`_1\neq M`_2$ bo`ladi. f almashtirishda $\omega(o,r)$ aylanaga nisbatan inversiya deyiladi.

O nuqta inversiya markazi, $\omega(o,r)$ aylana inversiya markazi, r^2- inversiya darajasi deb yuritiladi ma`lum bo`lmoqdaki, $M \in w(o,r)$ bo`lsa $f(M) = M$ bo`ladi. Ya`ni inversiya aylanasi nuqtalari invariantdir.

Inversiya so'zi lotincha inversion so'zidan olinib, buning ma'nosi teskarisini ag'darish yoki o'rinlarini almashtirish demakdir. Inversiya- muhim geometrik shakllardan biri bo'lib, u boshqa metodlar yordamida yechilishi qiyin bo'lgan konstruktiv masalalarni osonroq masalaga keltirib yechishga imkon beradi. Inversiya geometriyaning boshqa ko'pgina sohalarida va ba'zi bir mexanizmlarning, masalan, turli inversorlarning tuzilishi va ishlatilishini nazariy asoslashda ishlatiladi.

Inversion almashtirishning konstruktiv masalalar yechishga tadbiqi.

Bu metodda izlangan figura bilan masalada berilganlar orasidagi bog'lanishni bevosita aniqlamay, oldin ularga inversion mos figuralar orasidagi munosabat topiladi, so`ngra izlangan figuraga o'tiladi. Bu ish quyidagi tartibda bajariladi:

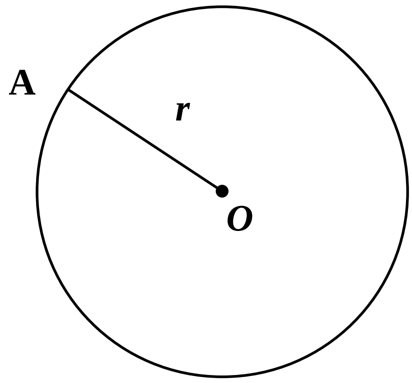
1. Masalada izlangan figura topildi deb, taxminan chizib qo'yiladi.
2. Mo'ljallab shunday bir nuqtani inversiya markazi deb qabul qilinadiki, bu nuqtani markaz qilib chizilgan aylanaga nisbatan berilgan va so'ralganlarni inversion almashtirganda masala yechishning osonroq yo'li topilsin, ya'ni masalada berilgan va so'ralganlar orasidagi munosabatga qaraganda ularga inversion mos figuralar orasidagi munosabat soddaroq bo'lsin.

Bu shartni qanoatlantiradigan inversiya aylanasi chizib, masalada berilgan va so'ralganlar bu aylanaga nisbatan inversion almashtiriladi.

3. Chizilgan inversion figuralar orasidagi munosabatni o'rganib, so'ralgan figuraga mos figurani yasash mumkinligi aniqlanadi, ya'ni berilgan masalaga nisbatan osonroq bo'lgan yordamchi masalani yechish yo'li belgilanadi. Shu bilan yechishning analiz bosqichi tugaydi.

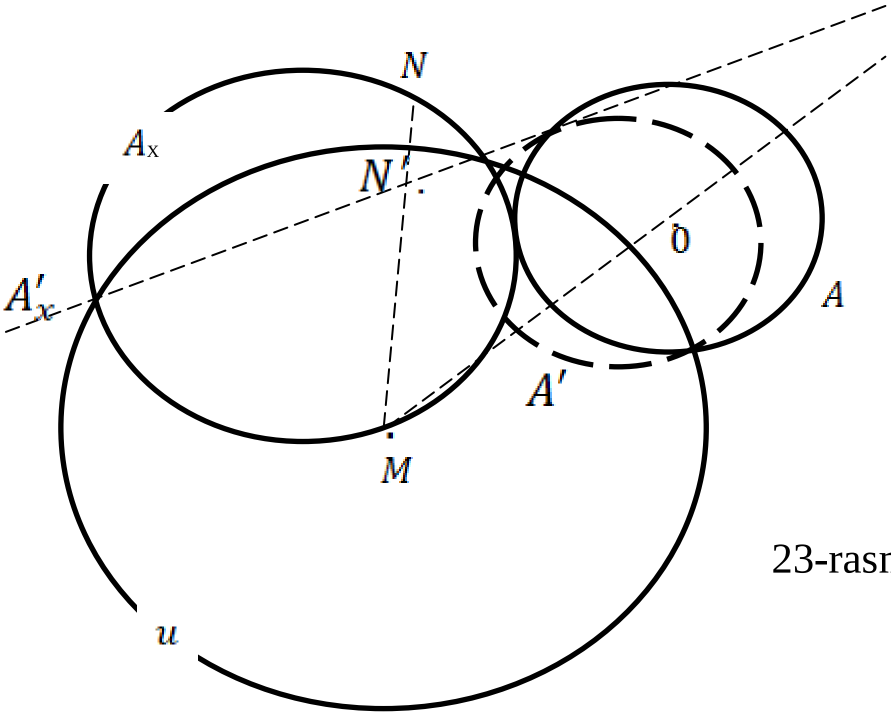
Analizning 3- qadamida aytilgan ishlarni bajarib(yasash bosqichida), so'ralgan figuraga mos figura yasaladi. Keyin tanlangan aylanaga nisbatan inversion almashtirish bajarib, izlangan figura topiladi.

1-masala. *Berilgan ikki nuqtadan o'tib, berilgan aylanaga urinuvchi aylana chizing.*



A n a l i z. Izlangan aylana 23-rasmdagi M va N nuqtalardan o'tuvchi va berilgan A(O, R) aylanaga urinuvchi A_x aylana deb faraz qilaylik. Berilgan nuqtalardan birortasini, masalan, M nuqtani inversiya markazi deb qabul qilib, shu markazdan ixtiyoriy radius bilan inversiya aylanasi *u* ni chizib qo'yamiz.

u aylanaga nisbatan *N* nuqta, A va A_x aylanalarni inversion almashtirib, ularga mos bo'lgan N' nuqta, A' aylana va A_x' to'g'ri chiziqni hosil qilamiz. Farazimizga binoan izlangan A_x aylana berilgan nuqtalardan o'tib, A aylanaga uringanligi uchun A_x' tog'ri chiziq ham N' nuqtadan o'tib, A' aylanaga urinadi. Demak A_x' tog'ri chiziqni: "ma'lum N' nuqtadan ma'lum A' aylanaga urinma o'tkazing" degan yordamchi masalani yechib topamiz; so'ngra, topilgan A_x' ni u ga nisbatan inversion almashtirib, A_x aylanani topamiz. Demak, A_x' tog'ri chiziq yordamchi figura bo'ladi, chunki uni berilganlarga tayanib chizish va undan izlangan A_x figuraga o'tish mumkin.



23-rasm

Y a s a sh. 1. Berilgan nuqtalardan bittasini, masalan, M nuqtani inversiya markazi deb qabul qilib, bu markazdan ixtiyoriy radius bilan u inversiya aylanasini chizamiz.

2. Berilgan N nuqta va A aylanani u inversiya aylanasiga nisbatan inversion almashtirib, N' nuqta va A' aylaanaani hosil qilamiz.

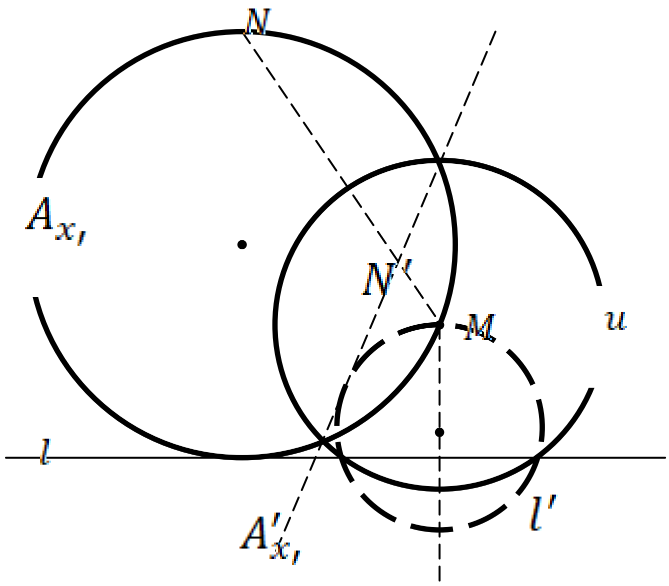
3. N' nuqtadan A' aylanaga A'_{x_1} va A'_{x_2}urinmalarni o'tkazamiz (umumiy holda ikkita urinma mavjud, chizmada faqat bitta urinma ko'rsatildi).

4. Topilgan urinmalarni u inversiya aylanasiga nisbatan almashtirib, so'ralgan A_{x_1} va A_{x_2} aylanalarga ega bo'lamiz.

<u>2-masala</u>. *Berilgan ikki nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizilsin.*

So'ralgan aylana 24-rasmdagi A_{x_1} aylana deb faraz qilaylik va u berilgan M va N nuqtalardan o'tib, berilgan l to'g'ri chiziqqa urinsin. Berilgan nuqtalardan bittasini, masalan,

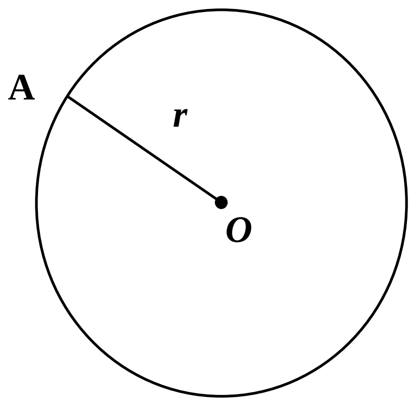
M nuqtani inversiya markazi deb qabul qilib, bu markazdan ixtiyoriy radius bilan inversiya aylanasi u ni chizib qo'yamiz.



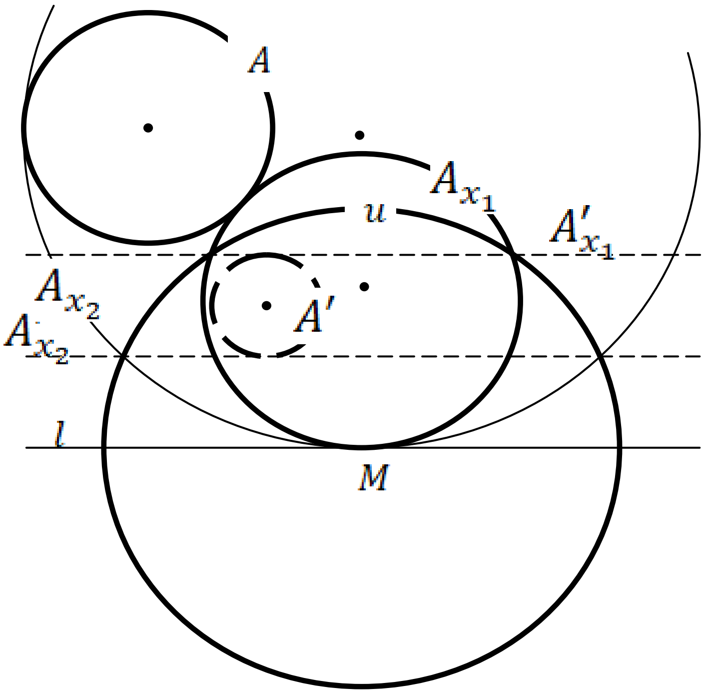
24-rasm

aylanaga nisbatan A_{x_1} , N, l figuralarni inversion almashtirib, ularga mos bo'lgan A'_{x_1} to'g'ri chiziq, N' nuqta va l' aylanani hosil qilamiz. Farazimizga ko'ra, A_{x_1}aylana nuqtadan o'tib, l to'gri chiziqqa uringani uchun, A'_x to'g'ri chiziq ham N' nuqtadan o'tib l' aylanaga urinadi. Demak, A'_{x_1} to'g'ri chiziqni topish mumkin ekan; buning uchun N' nuqtadan l' aylanaga A'_{x_1} va A'_{x_2}urinmalarni o'tkazamiz. Topilgan urinmalarni inversion almashtirib, so'ralgan A'_{x_1} va A'_{x_2}aylanalarni hosil qilamiz (analiz chizmasida bu aylanalardan bittasi ko'rsatilgan) .

<u>3-masala</u>**.** *Berilgan aylanaga urinib, berilgan to'g'ri chiziqqa berilgan nuqtada urinuvchi aylana chizing.*



A n a l i z. So'ralgan aylana -rasmda berilgan A aylanaga va l to'g'ri chiziqqa uning M nuqtasiga urinuvchi A_{x_1} aylanadan iborat deb faraz qilaylik. (25-rasm).



25-rasm

Berilgan M nuqta ni inversiya markazi deb va markazi M da bo'lgan u

aylanani inversiya aylanasi deb qabul qilib, unga nisbatan l to'g'ri chiziqni, A va A_{x_1} aylanalarni inversion almashtirsak, tartib bilan ularga inversion mos l to'g'ri chiziqni o'zi A' aylana va A'_{x_1} to'g'ri chiziq hosil bo'ladi.

Bu inversion almashgan figuralar orasidagi munosabatni o'rganish shuni ko'rsatadi: yasalishiga ko'ra, A_{x_1} aylana bilan l to'g'ri chiziq inversiya markazida o'zaro uringani uchun A_{x_1} aylanaga inversion mos A'_{x_1} to'g'ri chiziq l to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. A'_{x_1} va A aylanalar o'zaro uringani uchun ularga inversion mos A'_{x_1} to'g'ri chiziq bilan A' aylana ham o'zaro urinadi. A'_{x_1} to'g'ri chiziqning A' aylanaga urinib, l to'g'ri chiziqqa parallel bo'lishidan uni aniqlash mumkin. Uni "berilgan A' aylanaga urinuvchi va berilgan l to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazing" degan yordamchi masalani yechib topamiz.

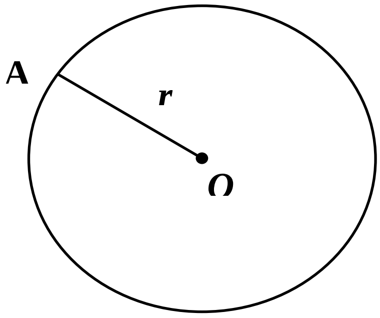
Berilgan masalaga nisbatan ancha oson bo'lgan bu masalani yechib topilgan urinmani inversion almashtirib izlangan aylanani hosil qilamiz.

Y a s a sh. 1. Berilgan M nuqtani markaz qilib ixtiyoriy radius bilan chizilgan u aylanani inversiya aylanasi deb qabul qilib unga nisbatan l to'g'ri chiziq va A aylanani almashtiramiz. Bundan l to'g'ri chiziqning o'zi va A' aylana hosil bo'ladi.

2. l to'g'ri chiziqqa parallel qilib, A' aylanaga A'_{x_1} va A'_{x_2} urinmalar o'tkazamiz.

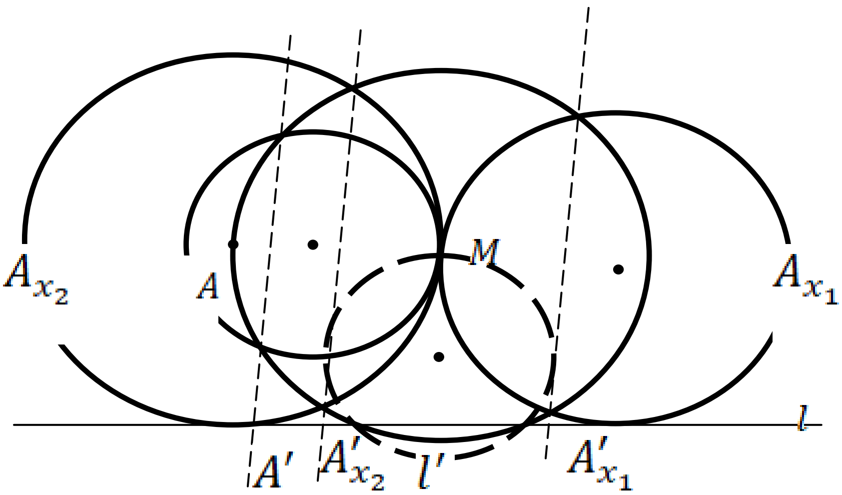
3. Chizilgan urinmalarni inversion almashtirsak, izlangan A_{x_1} va A_{x_2} aylanalar hosil bo'ladi.

<u>4-masala</u>. *Berilgan aylanaga ma'lum nuqtadan va berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizing.*



A n a l i z. So'ralgan aylana -rasmdagi A_{x_1} (26-rasm) aylana deb faraz qilamiz. U berilgan A aylanaga M nuqtada va beilgan l to'g'ri chiziqqa urinsin. M markazdan ixtiyoriy radius bilan chizilgan aylanani inversiya aylanasi deb qabul qilib, unga nisbatan A aylana, l to'g'ri chiziq va so'ralgan A_{x_1} aylanani almashtiramiz; bu almashtirishda ularga mos bo'lgan A' to'g'ri chiziq, l' aylana va $A'_{x_1}$to'g'ri chiziq hosil bo'ladi.

Endi bu obrazlar orasidagi munosabatlarni o'rganaylik: A va A_{x_1} aylanalar M markazda o'zaro uringani uchun ularga inversion mos bo'lgan A' va A'_{x_1} to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi.



26-rasm

A_{x_1} aylana l tog'ri chiziqqa uringani uchun ularga inversion mos bo'lgan A'_{x_1} va l' obrazlar ham o'zaro urinadi. Demak, so'ralgan aylanaga inversion mos bo'lgan A'_{x_1} tog'richiziq quyidagi xossaga egadir. A'_{x_1} to'g'ri chiziq A' tog'richiziqqa parallel bo'lib, l' aylanaga urinadi. Bu ikki xossa $A'_{x_1}$to'g'ri chiziqni aniqlay oladiva bundan so'ralgan A'_{x_1} aylanaga o'tish ham mumkin. Shuning uchun A'_{x_1} to'g'ri chiziq yordamchi figura bo'lib, uni ma'lum A' to'g'ri chiziqqa parallel qilib ma'lum l' aylanaga urinma o'tkazing degan yordamchi masalani yechib topiladi.

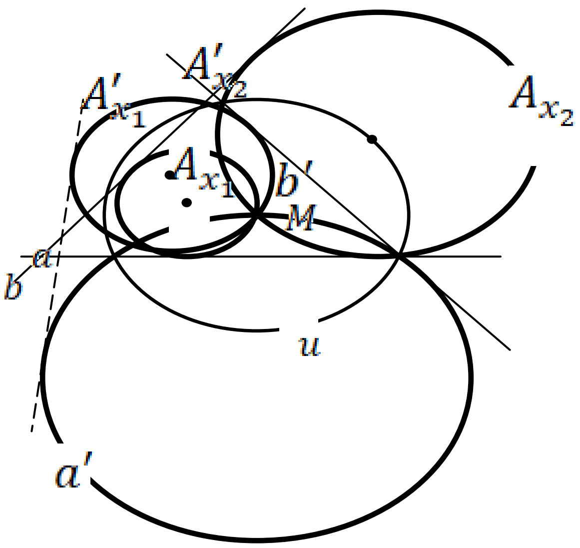
Bu yordamchi masalani yechishda ikkita A'_{x_1} va A'_{x_2} urinma hosil bo'ladi.

Bu urinmalarni u aylanaga nisbatan inversion almashtirib so'ralgan A_{x_1} va A_{x_2} aylanalarga ega bo'lamiz.

<u>5-masala</u>. *Berilgan nuqtadan o'tib va berilgan ikki to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizing.*

A n a l i z. Izlangan aylana 27-rasmdagi berilgan M nuqtadan o'tib, a va b to'g'ri chiziqlarga urinuvchi A_{x_1}aylana deb o'ylaylik.

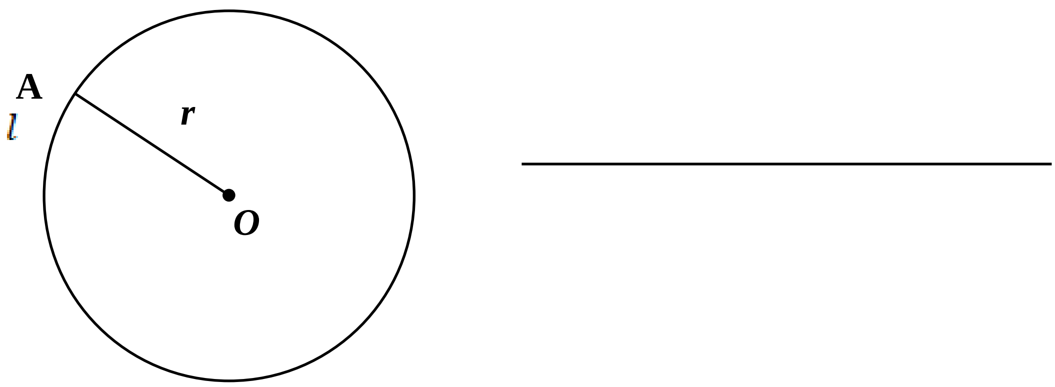
M markazdan ixtiyoriy radius bilan chizilgan u aylanaga nisbatan a va b to'g'ri chiziqlarni va A_{x_1} aylanani inversion almashtiraylik. A va b to'g'richiziqlar mos ravishda a' va b' aylanalarga A_{x_1} aylana esa bularga urinuvchi $A'_{x_1}$to'g'ri chiziqqa almashsin.



27-rasm

Demak, masalani yechish uchun avval a va b to’g’ri chiziqlarni M markazli ixtiyoriy u aylanaga nisbatan inversion almashtirib, bundan hosil bo’lgan a’ va b’ aylanalarga umumiy urinmalar o’tkaziladi, so’ngra topilgan umumiy urinmalarni u aylanaga nisbatan inversion almashtirib, izlangan aylanalar hosil qilinadi.

<u>6-masala</u>. *Berilgan to’g’ri chiziqqa va aylanaga urinib, berilgan nuqtadan o’tuvchi aylana chizing.*



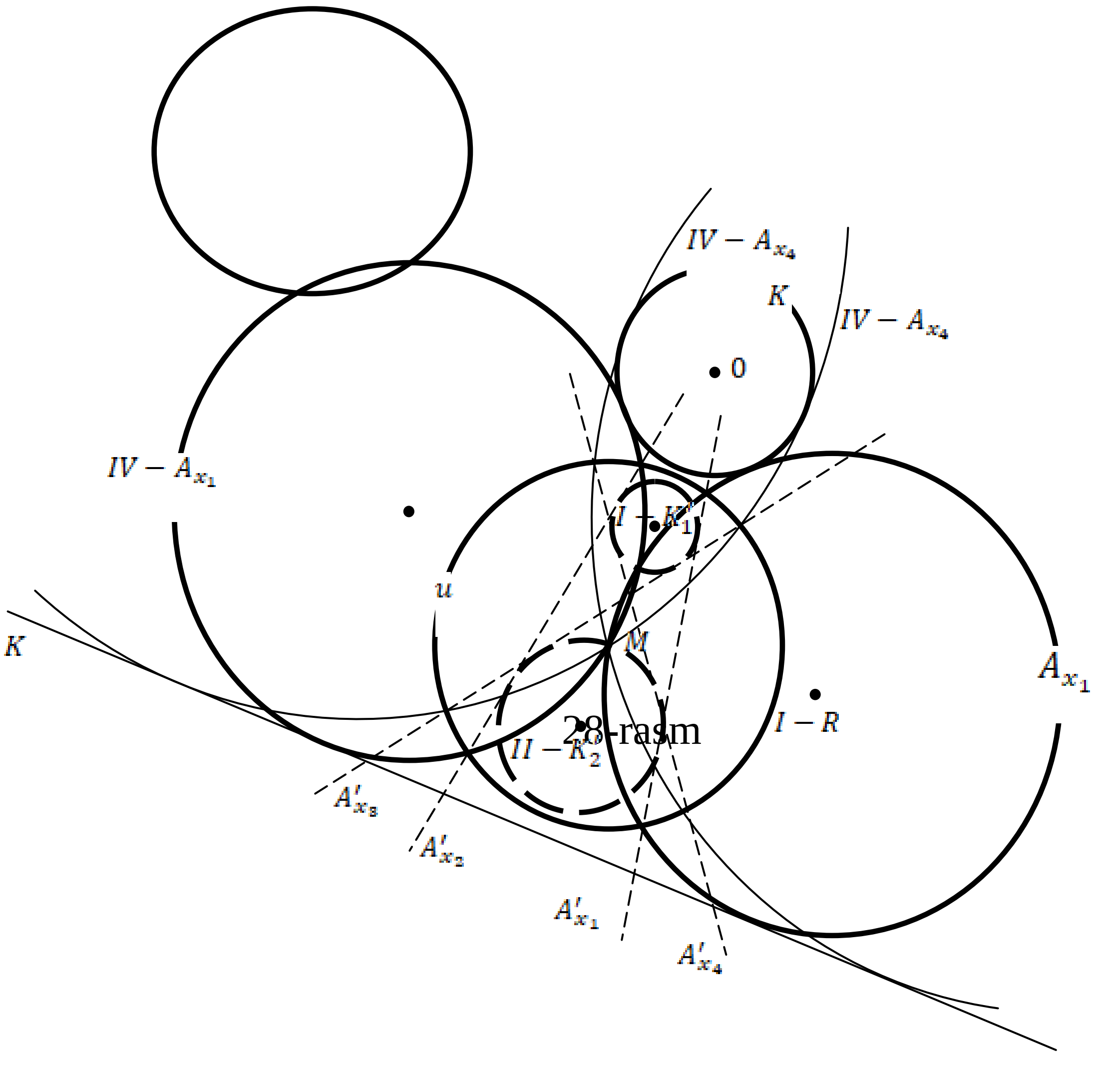
Yechish. 1. So’ralgan aylana 28-rasmdagi A_{x_1} aylana deb faraz qilamiz, u berilgan K_2 to’g’ri chiziqqa va berilgan $K_1(O_1, R)$ aylanaga urinib, berilgan M nuqtadan o’tsin. Markaziberilgan M nuqtada bo’lgan va ixtiyoriy radius bilan chizilgan u aylanani inversiya aylanasi deb qabul qilaylik.

2. *u* aylanaga nisbatan A_{x_1} va K_1 aylanalar va K_2 to’g’ri chiziqni inversion almashtirib, ularga mos bo’lgan $A'_{x_1}$to’g’ri chiziq, K'_1 va

K'_2aylanalarni hosil qilmiz. Farazimiz bo'yicha A_{x_1} aylana K_1 aylana va K_2 to'g'ri chiziqqa uringani uchun $A'_{x_1}$to'g'ri chiziq, K'_1 va K'_2aylanalarga umumiy urinma bo'ladi. Demak so'ralgan figurani inversion mos figura $A'_{x_1}$to'g'ri chiziqni berilgan ikki aylanaga umumiy urinma o'tkazing degan yordamchi masalani yechish orqali topish mumkin.

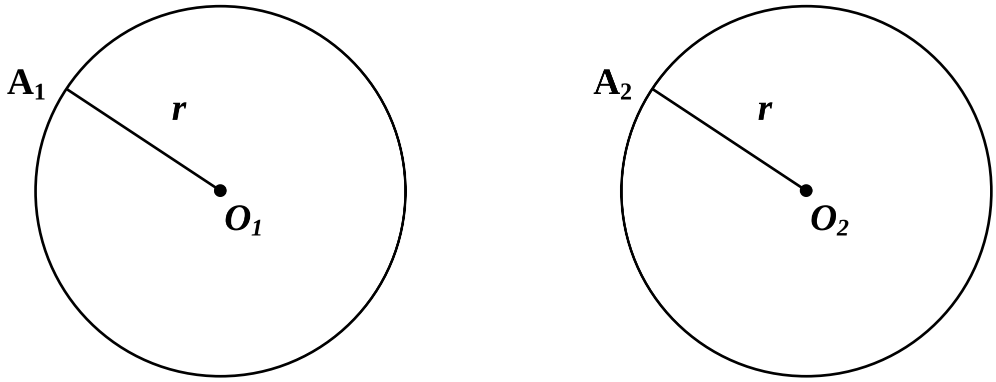
3. Ikki K'_1 va K'_2aylanalar umumiy urinmalar o'tkazamiz; bunda umuman ikkita A'_{x_1} va A'_{x_2}tashqi urinma va ikkita A'_{x_3} va A'_{x_4}ichki urinma hosil bo'ladi.

4. Topilgan umumiy urinmalarni inversion almashtirsak, so'ralgan A_{x_1} ,A_{x_2} ,A_{x_3} ,A_{x_4} aylanalar hosil bo'ladi.



28-rasm

***<u>7-masala</u>**. Berilgan ikki aylanaga urinib, berilgan nuqtadan o'tuvchi aylana chizing.*



29-rasm

Yechish. 1. So’ralgan aylana A_{x_1} aylana bo’lib, u berilgan $A_1(O_1,r_1)$ va $A_2(O_2,r_2)$ aylanalarga urinib, berilgan M nuqtadan o’tsin. Berilgan M markazdan ixtiyoriy radius bilan chizilgan u aylanani inversiya aylanasi deb qabul qilamiz.

2. A_1, A_2 *va* A_{x_1} aylanalarni u aylanaga nisbatan inversion almashtirib, ularga mos bo’lgan A'_1, A'_2aylanalar va A'_{x_1} to’g’ri chiziqni hosil qilamiz. A_{x_1} aylana va A_1, A_2 aylanalarga uringani uchun A'_{x_1} to’g’ri chiziq ham A'_1, A'_2 aylanalarga urinadi. Shuning uchun A'_{x_1} to’g’ri chiziqni keyingi ikki aylanaga umumiy urinma sifatida yasash mumkin.

3. A'_1, A'_2aylanalarga umumiy urinmalar o’tkazamiz.

4. Chizilgan umumiy urinmalarni inversion almashtirib, so’ralgan $A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}$ va $A_{x'}$ aylanalarga ega bo’lamiz (29-rasmda umumiy urinmalardan A'_{x_1} ga tegishli A_{x_1} aylanagina ko’rsatilgan).

Inversiya metodiga doir savol va masalalar.

2.4.1. Qanday akslantirish inversion akslantirish deyiladi? Inversion akslantirishning involusion xossaga ega bo`lishini tushuntirib bering.

2.4.2. Ikkita *A* va *A'* nuqda berilsa, ularni nechta usul bilan bir-biriga inversion mos deb qarash mumkin?

2.4.3. Nima uchun inversion akslantirish teskari radiusli akslantirish deyiladi?

2.4.4. Elliptik va giperbolik inversiyalar orasidagi bog`lanishni
(ya`ni biridan ikkinchisiga o`tish yo`lini) aytib bering.

2.4.5. Inversiya markaziga inversion mos nuqda (Evklid geometriyasida) mavjudmi?

2.4.6. Inversiya aylanasi to`g`ri chiziqqa „aylanganida" inversiya qanday akslantirishga o`tadi?

2.4.7. Inversiya aylanasida, undan tashqarida yoki ichkarida yotuvchi nuqtaga inversion mos nuqda qanday topiladi?

2.4.8. Inversiya markazidan o`tuvchi to`g`ri chiziqqa inversion figura
nima bo`ladi?

2.4.9.

1) o`zaro inversion nuqtalar ikki juftining xossasini aytib bering.
2) o`zaro ortogonal aylanalarning ta'rifini bering.

2.4.10. Qanday kesmalar antiparallel deyiladi?

2.4.11. Inversiya aylanasi bilan kesishuvchi, urinuvchi va undan tashqarida yotgan to`g`ri chiziqning inversiyasi nimalardan iborat bo`lishini tushuntiring.

2.4.12. Inversiya markazidan o`tmaydigan ikkita parallel to`g`ri chiziq inversion akslantirishda qanday figuralarga akslanadi?

2.4.13. Inversiya markazidan o`tmaydigan va o`zaro kesishuvchi ikkita
to`g`ri chiziq inversion akslantirishda qanday figuralarga akslanadi? Nima uchun bundagi proobrazlar bir nuqtada va ularning obrazlari ikki
nuqtada kesishadi?

2.4.14. Inversiya aylanasiga tashki chizilgan muntazam uchburchak, to`rtburchak, beshburchak va oltiburchakning inversiyalari qanday chiziladi?

2.4.15. Inversiya aylanasiga ichki chizilgan muntazam uchburchak, to`rtburchak va oltiburchakning inversiyalari qanday chiziladi?

2.4.16. Inversiya markazidan o`tmaydigan aylananing inversiyasi qanday figura bo`ladi va u qanday chiziladi?

2.4.17. Inversiya markazidan o`tuvchi va inversiya aylanasi bilan kesishgan aylananing inversiyasi qanday chiziladi?

2.4.18. Inversiya aylanasiga ichki yoki tashqi tomondan urinuvchi aylanalarning inversiyalari qanday chiziladi?

2.4.19. Aylanaga inversion mos figura aylana bo`lgan hollarda inversiya markazining inversion aylanalarga qanday o`xshashlik markazi bo`lishini aytib bering.

2.4.20. Qanday akslantirishlar konform akslantirish deyiladi? Inversion akslantirish konform bo`ladimi?

2.4.21.O`zaro urinuvchi ikki aylanani markazi ularning urinish nuqtasida bo`lgan aylanaga nisbatan inversion akslantirganda o`zaro parallel to`g`ri chiziqlar hosil bo`lishini isbot qiling.

2.4.22. O`zaro urinuvchi aylana va to`g`ri chiziqni, markazi ularning urinish nuqtasida bo`lgan aylanaga nisbatan inversion akslantirganda o`zaro parallel to`g`ri chiziqlar hosil bo`lishini isbot qiling.

2.4.23. Umumiy bir nuqtada uchrashuvchi uchta aylanani, markazi ularning umumiy nuqtasida bo`lgan aylanaga nisbatan inversion akslantirib ko`ring. Bunda uchala aylana umumiy bir nuqtada o`zaro kesishgan va umumiy bir nuqtada o`zaro uringan hollarni ayrim qarang.

2.4.24. Berilgan A_1 va A_2 aylanalari bir-biriga inversion akslantiruvchi *A* inversiya aylanasini chizing.

2.4.25. Bir nuqtada kesishuvchi uchta aylanaga urinuvchi aylana yasang.

2.4.26. Uchta *M, N, K* nuqtalar berilgan. O`zaro teng bo`lgan shunday ikki aylana chizingki, ularning bittasi *M* nuqtadan, ikkinchisi N nuqtadan o`tib, ikkalasi K nuqtada urinsin.

2.5-§.Algeraik metodiga doir savol va masalalar.

Bayon qilingan geometrik metodlar bir talay konstruktiv masalalar yechish yo`llarini ko`rsatsada, bazan ulardan foydalanish ishni g`oyat murakkablashtiradi, ayrim hollarda ulardan butunlay foydalanib bo`lmaydi. Bu kamchilikni yo`qotish yo`lidagi urinishlar natijasida algebraik metod vujudga kelgan.

Bu metodning boshqa metodlardan afzalligi shundaki, geometrik metodlarda faqat geometrik nazariyadangina foydalanilsa, algebraik metodda geometrik nazariyalar bilan birga algebra qoidalari ham keng miqyosda ishlatiladi.

Geometrik nazariya bilan algebra qoidalarini birga ishlatish, ya`ni algebrani geometriyaga tadbiq etish, algebraik tushunchalar bilan geometrik tushunchalar orasidagi bog`lanishga asoslanadi. Shuning uchun algebraik metodni o`rganishni ana shu bog`lanish haqida bir ikki so`z aytishdan boshlaymiz.

Algebrada biror bir musbat sonni ifodalovchi a harfiga geometriyada biror bir birlik bilan o`lchangan kesmaning uzunlig deb qarash mumkin. Shunday qilib, a harfi bir vaqtda ham sonni, ham kesmani uzunligini bildirishi mumkin.

Biror uzunlik birligi bilan o`lchangan $a, b, c, \dots, l$ kesmalar berilgan va o`sha birlik blan o`lchaganda uzunligi

$$x=f(a, b, c, \dots, l)$$

bo`lgan kesmani ma`lum asboblar yordamida yasash kerak bo`lsin. Biz bu masalani, qisqacha $f(a, b, c, \dots, l)$ ifodani yasash algebraic metod deb ataymiz.

Bir jinslilik tushunchasi va uni geometrik yasashlardagi o`rni

Ta`rif: Agar $F(x, y, \dots, t)$ funksiya har qanday k son uchun

$$F(kx, ky, \dots, kt)=k^m F(x, y, \dots, t) \qquad (1)$$

Shartni qanoatlantirsa, $F(x, y, \dots, t)$ funksiya m o`lchovli bir jinsli funksiya deb ataladi. $m=1$ bo`lganda (1)

$$F(kx, ky, \dots, kt)=k F(x, y, \dots, t) \qquad (2)$$

munosabat ko`rinishga keladi. Bundan quyidagi xulosani chiqara olamiz : agar biror $F(x, y, \dots, t)$ funksiyaning hamma argumentlarini bir xil $k$ songa ko`patirsak, funsiyaning qiymati ham k marta ortadi.

Kesmalar o`lchangan uzunlik birligi $q$ dan yangi o`lchov birligi $q`=q:k$ ga o`tsak, har bir kesmani o`lchashdan chiqqan son k marta ortadi. Bu holda (2) munosabatdagi $F(kx, ky, \dots, kt)$ yangi birlik bilan o`lchangan dastlabki $F(x, y, \dots, t)$ ifoda qiladi.

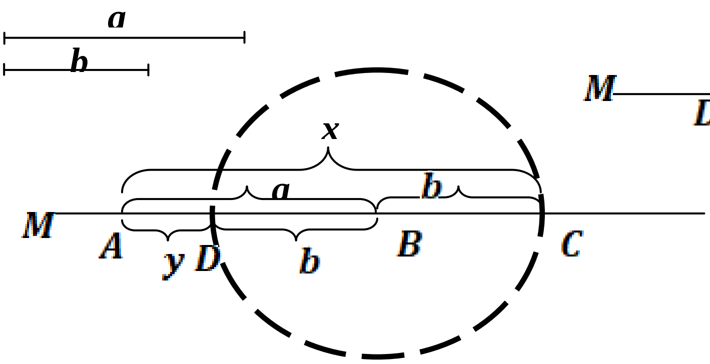
Algebraik metodga doir elementar masalalar

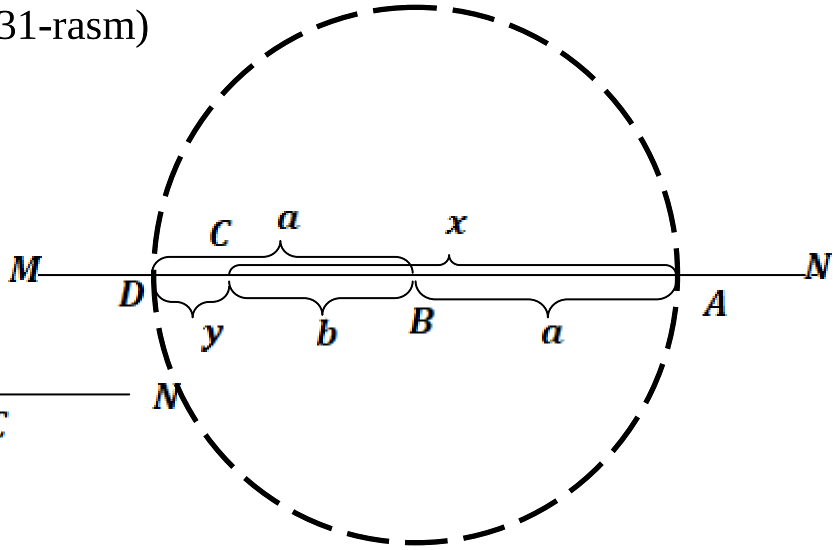
<u>1-masala</u>. Berilgan ikki kesmaning yig`indisi va ayirmasini toping.

Berilgan a va b kesmalar bo`yicha $x=a+b$ va $y=a-b$ $(a>b)$ kesmalarni yasaymiz.

$x=a+b=|AB|+|BC|=|AC|$;

$y=a-b$=|AB|-|BD|=|AD|. (30-rasm)
$x=a+b$=|AB|+|BC|=|AC|;
$y=a-b$=|BD|-|BC|=|CD|. (31-rasm)





30- rasm   31-rasm

2-masala. Berilgan a va b kesmalarga o`rta proporsional bo`lgan uchinchi kesmani yasang ya`ni shunday x kesma topingki, u quyidagi uzliksiz proporsiyani qanoatlantirsin.

a:x=x:b

Reja:

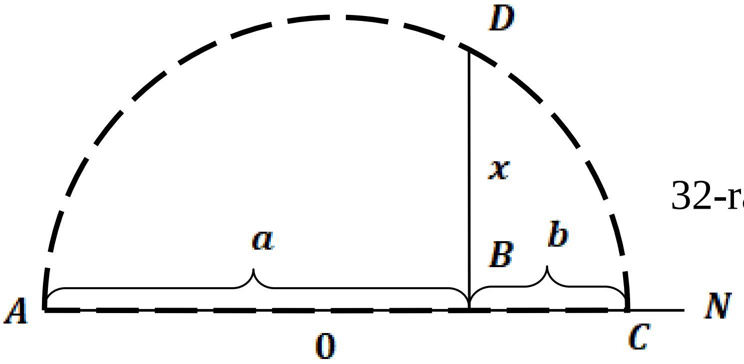
1^0. $\forall A \in l$ nuqtadan a va b kesmalarni ketma-ket qo`yamiz, natijada C nuqta hosil bo`ladi. (32-rasm)

2^0. AC ni diametr qilib $\omega\left(\frac{AC}{2},\frac{AC}{2}\right)$ aylana chizamiz.

3^0. a kesmaning oxiri va b kesmaning boshi bo`lgan B nuqtadan AC ga l_1 perpendikular chiqaramiz.

4^0. $\omega \cap l_1 = \{D\}$

5^0. BD kesma biz izlayotgan kesma.



32-rasm

3-masala. Berilgan kesmani berilgan ichki va tashqi nisbatda bo`ling.

Berilgan AB kesmani $\frac{AX}{XB}=\frac{m}{n}$ tenglikni qanoatlantiruvchi X nuqtani topish AB kesmani m/n nisbatda ichki bo`lish deyiladi.

AB kesmaning davomida $\frac{AY}{YB}=\frac{m}{n}$ tenglikni qanoatlantiruvchi Y nuqtasini topish AB kesmani tashqi nisbatda bo`lish deyiladi.

Bu masalani quyidagi ikki yo`l bilan yechiladi. Quyidagi ikki holda ham m>n bo`lsin.

B i r i n c h i y o ` l.

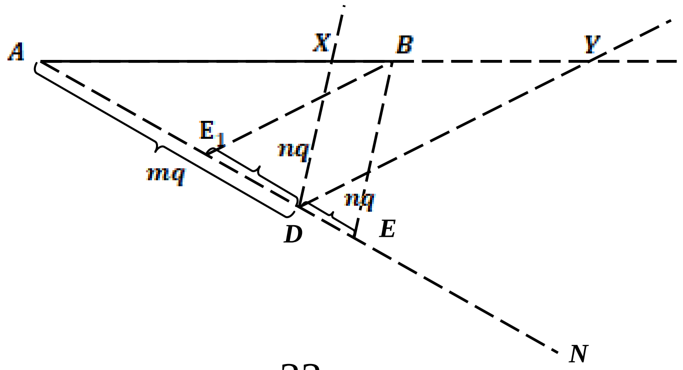
1^0. $\forall A\in l$ nuqtadan AB kesmani qo`yamiz. (33-rasm)

2^0. A nuqtadan AB bilan ixtiyoriy α $(0^\circ<\alpha<180^\circ)$ burchak tashkil qiluvchi biror AN nur qo`yamiz.

3^0. AN nurga AD=*mq (q* ixtiyoriy uzunlikdagi kesma) qo`yamiz.

4^0. D nuqtaning ikki tomoniga AN nur bo`ylab $DE=DE_1$=mq kesmalarni qo`yamiz va B, E shuningdek B, E_1 nuqtalarni tutashtiramiz.

5^0. D nuqtadan BE va BE_1 ga parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz, natijada X va Y nuqtalar hosil bo`ladi. Bu nuqtalar izlangan nuqtalardir.



33-rasm

I k k i n c h i y o ` l.

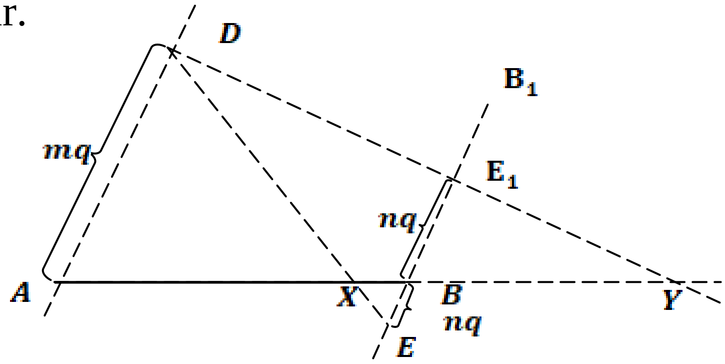
1^0. $\forall A\in l$ nuqtadan AB kesmani qo`yamiz. (34-rasm)

2^0. A va B uchlaridan o`zaro parallel $AA_1$ va $BB_1$ to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz.

3^0. A nuqtadan AA_1 to`g`ri chiziqqa |AD|=mq, B nuqtadan BB_1 to`g`ri chiziqqa $|BE|=|BE_1|$=nq kesmalarni qo`yamiz.

4^0. D nuqtani E va E_1 nuqtalar bilan tutashtiramiz.

5^0. AB kesma bilan DE kesmaning kesishgan X nuqtasi va AB kesmaning davomi bilan DE_1 kesmaning davomi kesishgan Y nuqta izlangan nuqtalardir.



34-rasm

4-masala. $x=\sqrt{a^2+b^2}$ kesmani yasang.

1^0. $\forall A \in l$ nuqtadan *a* kesmani qo`yib, B ni hosil qilamiz.

2^0. A nuqtadan *l* to`g`ri chiziqqa l_1 perpendikular chiqaramiz.

3^0. A nuqtadan l_1 ga b kesmani qo`yamiz va C nuqtani hosil qilamiz.

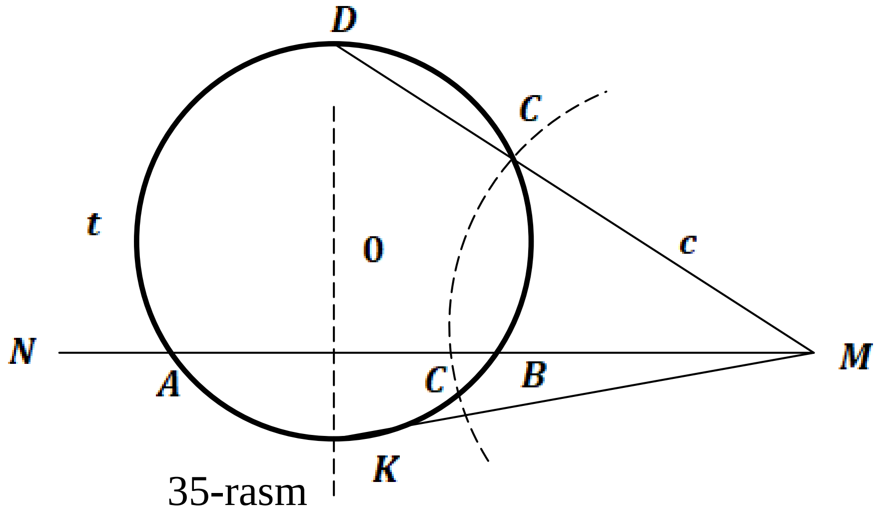
4^0. B va C nuqtalarni tutashtiramiz. BC kesma izlanayotgan *x* kesmadir.

5-masala. Berilgan a, b, c kesmalarga proporsional to`rtinchi kesma yasang.

x:a=b:c

1^0. Ixtiyoriy MN nurda MA=a, MB=b kesmalarni ajratib A va B nuqtalardan o`tuvchi $\omega(M,c)$ aylana bilan ixtiyoriy C (va C_1) nuqtada kesishuvchi biror *t* (35-chizma) aylanani chizamiz.

2^0. MC to`g`ri chiziqning t aylanasi bilan ikkinchi marta kesishuvidan hosil bo`lgan nuqtasi D bo`lsa, MD izlangan kesma bo`ladi.



35-rasm

Bu masalalarga tayanib, qolgan masalalar yechiladi.
Algebraik metodga doir ba`zi masalarni ko`ramiz.

6-masala: $x = \sqrt[4]{abcd}$ kesmani yasang.

Yasash rejasi:

1^0. $y = \sqrt{ab}$ kesmani yasaymiz.

2^0. $z = \sqrt{cd}$ kesmani yasaymiz.

3^0. $x = \sqrt{yz}$ kesma izlangan kesma bo`ladi.

Algebraik metodga doir masalalar

2.5.1. Quyidagi ifodalarni yasang:

1) $x = \frac{3ab}{c}$;

2) $x = \frac{ab}{c+d}$;

3) $x = \frac{a^2}{b}$;

4) $x = \frac{a^2 - b^2}{c+d}$;

5) $x = \frac{abc}{dl}$;

6) $x = \frac{abcd}{lks}$;

7) $x = a\sqrt{3}(x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2}$ yoki $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a \cdot a}$ ko`rinishiga keltirib oinadi)

8) $x = a\sqrt{7}$;

9) $x = \sqrt{3a^2 + 4b^2}$ (avval $y = a\sqrt{3}$ va $z = 2b$ ni yasab, so`ngra $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ yasaladi).

10) $x = \sqrt{a^2 + lc}$ (avval $u = \sqrt{lc}$ ni yasab, so`ngra $x = \sqrt{a^2 + y^2}$ yasaladi).

11) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (avval $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ ni yasab, so`ngra $x = \sqrt{y^2 + c^2}$ yasaladi).

12) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}$;

13) $x = \sqrt{\frac{abc}{d}}$ (avval $y = \frac{ab}{d}$ ni yasab, so`ngra $y = \sqrt{cy}$ ni yasang).

14) $x = \sqrt{\frac{abcde}{kls}}$;

15) $x = \sqrt{\frac{abc}{d} - l^2}$

16) $x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$;

17) $x = \sqrt[4]{abcd}$;

18) $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$; (avval man bu ko`rinishda yozib olinadi; $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} =$

$\sqrt[4]{a^2(a^2+\frac{b^4}{a^2})}=\sqrt{a\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}}$; so`ngra $y=\frac{b^2}{a}$; $z=\sqrt{a^2+y^2}$ va $x=\sqrt{az}$ ifodalar tartib bilan yasaladi).

19) $x=a\sqrt[8]{2}$ ($x=a\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=\sqrt{a^2\sqrt{\sqrt{2}}}=\sqrt{a\sqrt{a\cdot a\sqrt{2}}}$ ko`rinishida yozib olib,

$y=a\sqrt{2}; z=\sqrt{ay}; x=\sqrt{az}.$ lar yasaladi).

20) $x=\frac{a^3+b^2\sqrt{c^2+dl}}{a^2\sqrt{c^2+de}}$;

2.5.2. Tanlab olingan birlik kesma asosida quyidagi kesmalarni yasang.

1) $x=\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4};\sqrt{5};\sqrt{6};\sqrt{7};\sqrt{8};\sqrt{10};\sqrt{11};\sqrt{12};\frac{3}{5}\sqrt{6};$

$\frac{1}{2}\sqrt{5};\sqrt{13};\sqrt{15};\sqrt{17};\sqrt{19};\sqrt{21};\sqrt{30};\sqrt{34}.$

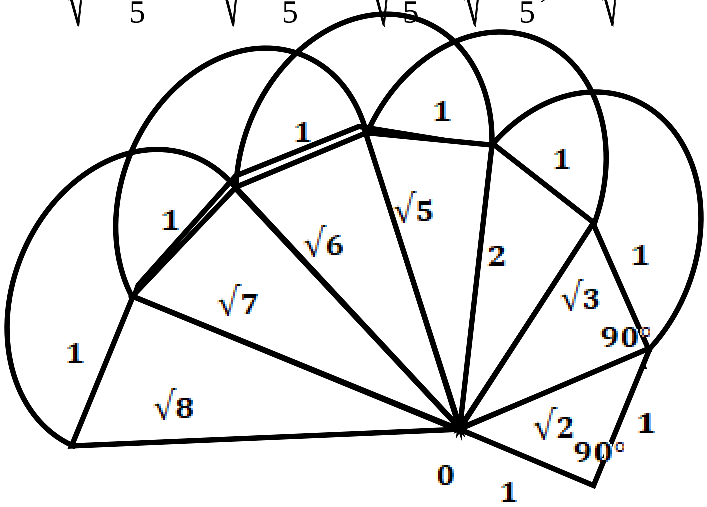
2) $x=\sqrt{n}$;(*n*- ixtiyoriy natural son 36-rasm)

3) $x=a\sqrt{2};\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{a}{\sqrt{3}};\frac{a}{\sqrt{7}}.x=\frac{a}{\sqrt{5}}+\frac{a}{\sqrt{3}}+\frac{a}{\sqrt{8}}+\frac{a}{\sqrt{6}}.$

4) $x=a\sqrt{n}.$ (*n*- ixtiyoriy natural son)

5) $x=\sqrt{ab+cb+lk}$; $x=\sqrt{\frac{ab+cd}{5}}=\sqrt{\frac{y^2+z^2}{5}}=\sqrt{\frac{u^2}{5}}=\sqrt{u\cdot\frac{u}{5}}; x=\sqrt{\frac{ab+cd-de+kl}{7}};$

36-rasm



6) $x=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $x=\dfrac{a^2\sqrt{a^2-b^2}}{bc}$; $x=\sqrt{\dfrac{ab\sqrt{ab^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

7) $x=\dfrac{a^2b}{cd}$; $x=\dfrac{a\sqrt{(b+e)(b+d)}}{b}$; $x=\dfrac{\sqrt{a^4-b^4}}{c}$; $x=\dfrac{a^4\sqrt{a^4+b^4}}{b}$.

8) $x=a\sqrt[16]{2}$; $x=a\sqrt[32]{2}$; $x=a\sqrt[64]{3}$

9) $x=\sqrt[4]{a^2bc}$; $x=\sqrt[8]{a^4b^2cd}=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{cd}}}$; $x=\sqrt[16]{a^8b^4d^2e}$.

10) $x=\dfrac{3a^2b^2c}{4d^2l^2k}$; $x=\dfrac{4a^3-5a^2b+b^2c}{a^2-5ab+b^2}$; $x=\dfrac{a^4-2a^3b+2ab^2c-b^2cd}{2ab^2-3b^3-4bc^2+c^2d}$.

2.5.3. Quyida ifodalar bilan berilgan kesmalarni yasang:

1) $x=\dfrac{a^2}{c}$; $x=\dfrac{(a+b)^2}{c}$.

2) $x=\dfrac{abc}{dp}$; $x=\dfrac{abc}{de}$; $x=\dfrac{a^2b}{cd}$; $x=\dfrac{a^3}{b^2}$;

3) $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$; $x=\dfrac{a^2-b^2}{a}$;

4) $x=\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$; $x=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $x=\dfrac{ab}{a+b}$.

5) $x=\sqrt{ab-c^2}$; $x=\sqrt{\dfrac{a^2c}{b}-d^2}$; $x=\sqrt{9a^2-4b^2}$.

6) $x=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$; $x=\dfrac{ab^2}{e\sqrt{4a^2-9b^2}}$;

7) $x=a\sqrt{5}$; $x=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$; $x=a\sqrt{5}-a\sqrt{3}+\dfrac{a^2}{b(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$.

8) $x=2\sqrt[4]{abcd}+3\sqrt[4]{a^2bc}$; $x=\sqrt[4]{a^3b+a^2cd}+\sqrt{a^2b^2-b^2cd}\ (a^2\succ cd)$.

9) $x=a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-b^2}$; $x=a(\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5})$.

10) $x=\sqrt{\dfrac{a^3-b^3}{a+b}}; x=\sqrt{\dfrac{a^4-b^4}{a^2+b^2}}; x=\sqrt[4]{a^4+b^4}+\sqrt{a^2+ab}.$

11) $x=a\sqrt{m}+b\sqrt{n}$; (bu yerda *m* va *n* – musbat butun sonlar)

12) $x=\dfrac{a^2\sqrt{2}+b^2\sqrt{3}}{a-b}; x=\dfrac{(b^2\sqrt{5}+c^2\sqrt{2})d}{b^2-cd}.$

13) $x=a\sqrt{3-\sqrt{5}}; x=\sqrt[8]{a^8+b^8}.$

2.5.4. Quyidagi tenglamalardan har birining ildizlarini yasang:

$x^2+bc+c^2=0; x^2-bc-c^2=0.$

2.5.5. Quyidagilardan qaysilari bir jinsli?

1) $x=\dfrac{ab}{c}+\sqrt{ab}+2\sqrt{a^2+b^2}+2b.$

2) $x=ab+\sqrt{ab}+\dfrac{a^2+b^2}{c}+3a\sqrt{b}.$

3) $x=\sqrt{\dfrac{abc}{e}}+d^2+\sqrt{ab-3a}.$

4) $x=a^2b+2c^3+b^2\sqrt{ab}+2abc.$

5) $x=ab+c^2+2a.$

6) $x=a+\dfrac{bc}{d}+3.$

7) $x=2+\dfrac{a}{b}.$

8) $x=\dfrac{a^3+b^2}{a-b}+\dfrac{a^2b^3+c^5}{a^2\sqrt{ab+c^2}}+\sqrt{a^4-b^4}.$

2.5.6. Quyidagi ifodalarni bir o`lchovli bir jinsli ko`rinishga keltiring (birlik kesma berilgan).

1) $x=ab.$

2) $x=a^2.$

3) x=5.

4) $x=a^{-1}.$

5) $x=abc.$

6) $x=a^{-2}.$

7) $x=ab^{-2}.$

8) $x=\sqrt{a}.$

9) $x=\sqrt{5}.$

10) $x=a\sqrt{b}.$

11) $x=\dfrac{a}{\sqrt{b}}.$

12) $x=\frac{a}{a+\sqrt{b}}.$

2.5.7. Quyidagi ifodalar bilan berilgan kesmalarni yasang (bir jinsli bo`lmaganlarini avval birlik kesma yordami bilan bir jinsliga keltirib oling).

1) $x=\frac{a+b}{2}-ab.$

2) $x=a+2.$

3) $x=R\sqrt{3};$

4) $x=R\sqrt{2}.$

5) $x=R(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$

6) $x=a^{-3}$

7) $x=a^2\sqrt{a}.$

8) $x=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}.$

9) $x=R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

10) $x=a+bc.$

11) $x=R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

12) $x=a\sqrt{bc}.$

13) $x=\sqrt{a+5}.$

14) $x=2\sqrt{R^2-r^2}.$

15) $m_a=\sqrt{\frac{2(a+b^2)-a^2}{2}}.$

16) $x=a+\frac{b}{c}.$

2.5.8. Yig`indisi *a* va o`rta proporsional qiymati bo`lgan *x* va *y* kesmalarni yasang.

2.5.9. Berilgan h_b va h_c balandliklari bo`yicha teng yonli uchburchak yasang. (Avval uchburchakning asosi aniqlab olinadi.)

2.5.10. Berilgan uchburchakka shunday ichki to`g`ri to`rtburchak chizingki, uning tomonlarining nisbati berilgan *m : n* songa teng bo`lsin.

2.5.11. Ikki tomoni va ular orasidagi burchakning bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

2.5.12. Berilgan *m* kesmaga nisbati $a^2:b^2$ kabi bo`lgan *x* kesma yasalsin (*a* va *b* berilgan kesmalar).

2.5.13. Berilgan aylana tashqarisida shunday nuqta topilsinki, bu nuqtadan aylanaga o`tkazilgan urinma shu nuqtadan va aylana markazidan o`tkazilgan kesuvchidan ikki marta qisqa bo`lsin.

2.5.14. Berilgan aylana tashqarisida yotgan nuqtadan shunday kesuvchi o`tkazingki, u kesuvchi shu aylana bilan ma’lum nisbatda bo`linsin.

2.5.15. Berilgan uchburchakning yuzini asosga parallel to`g`ri chiziq bilan o`rta va chet nisbatda bo`ling.

2.5.16. Berilgan uchburchak o`zining asosiga perpendikulyar to`g`ri chiziqlar bilan uchta tengdosh bo`lakka bo`linsin.

2.5.17. Berilgan doirani konsentrik aylanalar bilan 2, 3, … . tengdosh bo`laklarga bo`ling.

2.5.18.Berilgan to`g`ri turtburchakni unga tengdosh bo`lgan va asosi berilgan kesmaga teng to`g`ri to`rtburchakka akslantiring.

III BOB. SIRKUL VA CHIZG'ICH YORDAMIDA YECHILADIGAN MASALALAR KRITERIYASI VA YECHILMAYDIGAN YASASHGA DOIR MASALALAR

Algebra kursi ma`lumotlari va algebraic metodni qo`llab berilgan masalani Sirkul va chizg'ich yordamida birorta yechimi mavjudligigni yoki mavjud emasligini aniqlash bu bobning asosiy vazifalaridan biridir. Bu muammoni yechishga kirishamiz.

3.1-§. Sirkul va chizg'ich yordamida yechiladigan yasashga doir masalalar kriteriyasi

1.Geometrik figuralarni yasash nazariyasining muhim muammolaridan biri : Berilgan ma`lumot elementlari asosida u yoki bu geometrik shaklni-figurani sirkul va chizg`ich yordamida yasash mumkinmi? - degan savolga javob beradigan mezonning o`rnatilishidir. Shu bilan birga ta`kidlash joizki, agar yasaladigan shakl-figura mavjud bo`lsa , shunda uni yasash mumkinligi xususida masala qo`yiladi. Masalan, biz quyidagi misolni qarasak. To`g`ri chiziqda uchta *M*,*N* va *D* nuqtalar berilgan. Tomonlari *MN*,*NP* va *MP* kesmalarga teng bo`lgan uchburchakni yasang. Bunday uchburchak mavjud emas shu sababli, bu masala umuman yechimga ega emas.

Misol sifatida, boshqa bir misolni ko`raylik. Ikkita o`zaro kesishadigan to`g`ri chiziqlar ***a*** va ***b*** va shu chiziqlarda yotmagan ***A*** nuqta berilgan. A nuqtadan shunday to`g`ri chiziq o`tkazingki uning a va b to`g`ri chiziqlar bilan ajratgan kesmasi berilgan kesmaga teng bo`lsin. Masala shartlarini qoniqtiradigan $\underline{\boldsymbol{p}}$ kesmaga ayrim chegaralanishlarida yasalishi lozim to`g`ri chiziq mavjudligini ko`rsatish mumkin. Biroq, ko`rinishidan oson tuyilgan bu masala sirkul va chizg`ich yodamida yechilmaydi.

2.Ma`lum bir o`lchov birligida $\underline{\boldsymbol{x}}$ kesmaning uzunligi ***a, b, … l*** kesmalar uzunligi bilan bog`liq berilgan formula:

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\ldots}\, \underline{l}) \qquad (1)$$

yordamida ifodalangan bo`lsa.

Har doim ham ***x*** kesmani sirkul va chizg`ich yordamida yasash mumkinmi? –degan savol tug`iladi.

Bu savolga quyidagi ikkita teorema javob beradi,

TEOREMA 1. Agar ***x*** kesmaning uzunligi berilgan kesmalar uzunliklarining arifmetik operatsiyalari (qo`shish, ayirish, bo`lish,ko`paytirish) va kvadrat ildizdan chiqarish yordamida ifodalansa, bu ***x*** kesmani sirkul va chizg`ich yordamida yasash mumkin.

Teoremaning tasdig`i ko`rinib turibdi. ***x*** kesmaning yasalishini har doim yordamchi kesmalarning tugallangan to`plami ***y, z,*** …, ga olib kelsa bo`ladi.

TEOREMA 2 . Agar ***x*** kesmani berilgan kesmalar bilan sirkul va chizg`ich yordamida yasash mumkin bo`lsa, ***x*** kesmaning uzunligini berilgan kesmalar uzunliklarining arifmetik operatsiyalari va kvadrat ildizdan chiqarish yordamida ifodalash mumkin.

3.2-§.Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan yasashga doir ba`zi masalalar

Yasashga doir masalalarni boshqa yasash asboblari vositasida yechish.

Shu vaqtgacha yechilgan yasashga doir masalalarda keltirilgan ifodalarda berilgan kesmalarning ratsional funksiyalari, yo faqat ularning kvadrat ildizlarini o'z ichiga olgan ifodalar ekanligini ko'rdik. Bu hol tasodifiy emas. Masalaning sirkul va chizg'ich vositasida yechilish belgisi (alomati) quyida berilmoqda:

Teorema. Ma'lum $a,b,c,\ldots$kesmalar orqali ifodalangan $x = f(a,b,c,\ldots)$ kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkin bo'lishi uchun bu ifoda berilgan kesmalardan iborat argumentlarga nisbatan ratsional va birinchi darajali bir jinsli funksiya bo'lishi yoki ratsional amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari) bilan birga faqat kvadrat ildizlarni o'z ichiga olgan funksiya bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning zururiy shartini isboti o'zidan-o'zi ko'rinib turibdi. Chunki, algebraik metod bilan yechiladigan barcha masalalar maktabda ko'rilgan 1-7 masalalarga keltirib yechiladi.

Yechimga ega bo'lmagan yasashga doir masalalarga ko'plab misollar keltirish mumkin. Masalan, kvadrat bo'lmagan to'g'ri to'rtburchakka ichki aylana chizish, aylana ichida yotgan nuqtadan shu aylanaga urinma o'tkazish mumkin emas va h.k.

Berilgan elementlari soni talabdan ko'p bo'lgan yasashga doir masalalarni yechimga ega bo'lgan masalalari kiradi. Masalan, birilgan ikki burchagi bo'yicha uchburchak yasash yoki berilgan 4 ta nuqtadan aylana o'tkazish va sh.k.

Amaliyotda yechimi mavjud, lekin tanlab olingan yoki berilgan yasash asboblari bilan yechib bo'lmaydigan masalalar katta ahamiyatga ega. Bu holda berilgan masalani berilgan yasash vositalari bilan yechish mumkin emasligi ko'rsatib bilishimiz lozim bo'ladi. Bu – qiyin masalalar qatoriga kiradi. Qadimdan juda ko'p olimlar sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydigan masalalar bilan shug'ullanishganliklari bizga ma'lum.

1. «Uzunligi $2\pi R$ ga teng bo'lgan kesmani yasang».Aylanani to'g'rilash. R=1 bo'lsa, $\overline{X} = 2\pi$ yasashga keltiriladi. Bizga ma'lumki, taxminan $\pi \approx \frac{22}{7}$ ni yasash mumkin (Arximed). Lekin 1882 yilda π ni transendent son ekanligini F.Medemonn tomonidan isbot qilingan.

2. «Yuzi berilgan doiraning yuziga teng bo'lgan kvadrat yasang».Doira kvadraturasi. $X^2 = \pi R^2 = \left(\sqrt{2\pi R \cdot \frac{R}{2}}\right)^2$, $X = \sqrt{2\pi R \cdot \frac{R}{2}}$ dan $2\pi R$ kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasab bo'lmaydi. (1-masala).

3. «Xajmi berilgan kubni hajmidan 2 barobar katta bo'lgan kubning qirrasini yasang».Kubni ikkilantirish. $x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$ agar a=1 bo'lsa, $x^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 2 = 0$ Algebradan ma'lumki, bu tenglama haqiqiy sonlardan iborat ildizga ega emas. Lekin ushbu masalani ikkinchi tartibli egri chiziqlardan foydalanib yechish mumkin. $y^2 = x, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1+b^2}{4}$

$x^2 - x + y^2 - by = 0$ $\qquad C(\frac{1}{2}, \frac{b}{2}).$

$y^4 - y^2 + y^2 - by = 0$

$y(y^3 - b) = 0 \qquad y_1 = 0, \ x_1 = 0 \qquad O(0,0)$

$y^3 - b = 0 \quad y = \sqrt[3]{b}$ b=2 bo'lsa $C(\frac{1}{2}, 1)$

$r = OC \qquad AB = \sqrt[3]{2} = x$

4. «Berilgan α burchakni teng 3 ga bo'ling»

Burchakni teng 3 ga bo'lish. Faraz qilaylik $\varphi=\frac{\alpha}{3}\Rightarrow\alpha=3\varphi$ $\cos\alpha=\cos3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$. Agar $\cos\alpha=\frac{a}{2};\ \cos\varphi=\frac{x}{2}$ desak, $x^3-3x-a=0$ (5.1) tenglamaga ega bo'lamiz. Xususiy holda $a=0$ bo'lsa, $(\alpha=90^0)$ $x^3-3x=0$ tenglama hosil bo'ladi. $x(x^2-3)=0,\ x_1=0,\ x_2=\sqrt{3}$. Masala yechimga ega. Ya'ni, sirkul va chizg'ich yordamida $\varphi=30^0$ ni yasay olamiz. Umuman, ixtiyoriy burchakni $\frac{\pi}{2^n}$ teng bo'lakka bo'lish mumkin ($n\in N$). Agar $a=1$ bo'lsa, $(\alpha=\frac{\pi}{3})$ bo'lib $x^3-3x-1=0$ tenglamagan ega bo'lamiz.

Algebradan ma'lumki bu tenglik keltirilmaydi. Ya'ni 60^0 ni sirkul va chizg'ich yordamida teng 3 ga bo'lib bo'lmaydi. R.Otajonov [1] kitobida, ushbu masalani sirkul va ikkita nuqtasi belgilangan chizg'ich yordamida yechish mumkinligi ko'rsatilgan. (316-bet).

5.Muntazam ko'pburchaklarni yasash to'g'risida**.**

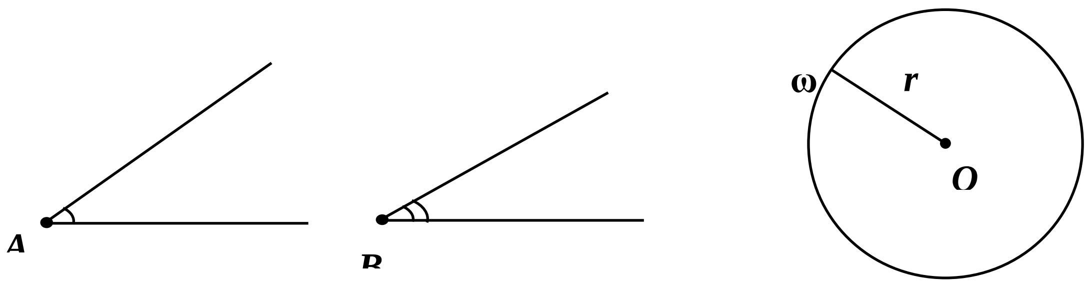
Ushbu muammo nemis matematigi K.Gauss tomonidan 1796 yilda hal qilingan. *n*-tomoni muntazam ko'pburchakning sirkul va chizg'ich yordamida yasashning zarur va yetarli sharti $n=2^m\cdot P_1P_2\ldots P_S$ ko'rinishida yozish mumkin. ekanligidadir. Bu yerda $P_1,P_2,\ldots,P_S$ lar turli $2^{2^k}+1$ ko'rinishidagi tub sonlardir. Agar *n* tub son bo'lsa, uning ko'rinishi $2^{2^k}+1$ ko'rinishda bo'lishi zarur (Hozirgacha bunday sonlar chekli sonda yoki cheksiz ekanligi isbot qilimagan!). Misol tariqasida, aylanani 7 yoki 9 ta teng bo'lakka bo'lib bo'lmaydi, boshqacha qilib aytganda yirkul va chizg'ich yordamida muntazam 7 yoki 9 burchak yasab bo'lmaydi. Sababi $7=2^2+3,\ 9=3^2$. Xuddi shunday 1^0 burchakni yasab bo'lmaydi.

IV BOB. SODDA GEOMETRIK FIGURALARNI YASASHGA DOIR MASALALAR

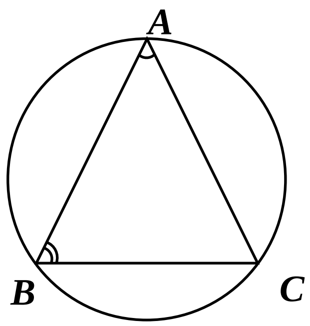
4.1-§. Uchburchak yasashga doir masalalar

1-masala. Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni berilgan ikki burchagi bo`yicha yasang.

Berilgan: $\angle A$, $\angle B$, $\omega(o,r)$.



Analiz: Izlanayotgan uchburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

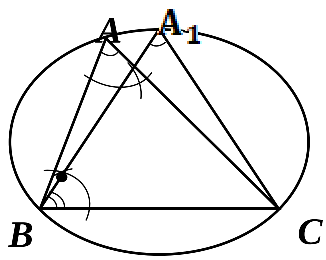
1^0. $\forall A \in \omega$ (o,r) – bu nuqtadan $\angle A$ ni qo`yamiz va $\angle A \cap \omega$ $(o,r)=\{B,C\}$.

2^0. B va C nuqtalarni tutashtiramiz va B nuqtadan bitta nuri BC da yotgan $\angle B$ ni qo`yamiz.

3^0. $\angle B \cap \omega$ $(o,r)=\{A_1,C\}$ va A_1C kesma hosil qilamiz.

4^0. Hosil bo`lgan ΔA_1BC biz izlayotgan figuradir.

Yasash:.

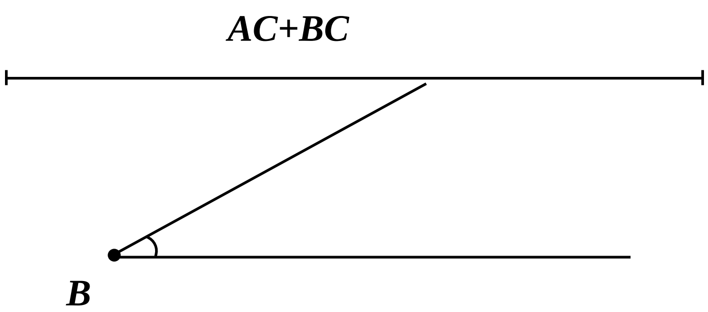


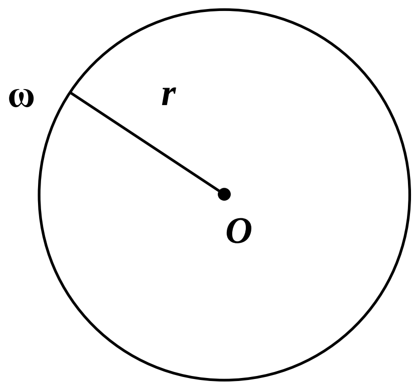
Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle A=\angle BAC$, aylananing bitta vatariga tiralgan bir tomondagi burchaklar tengligidan BC vatarga tiralgan $\angle A_1=\angle A=\angle BAC$. $\angle B=\angle A_1BC$.

Tekshirish: $\angle A, \angle B=0^0$, 180^0 da va $\angle A + \angle B \geq 180^0$ da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda masala yechimga ega.

<u>2-masala.</u> Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni, ikki tomonining yig`indisi va ulardan birining qarshisidagi burchagi bo`yisha yasang.

Berilgan: ω (o,*r*), AC+BC, $\angle B$.





Analiz: Izlanayotgan uchburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.

Reja:

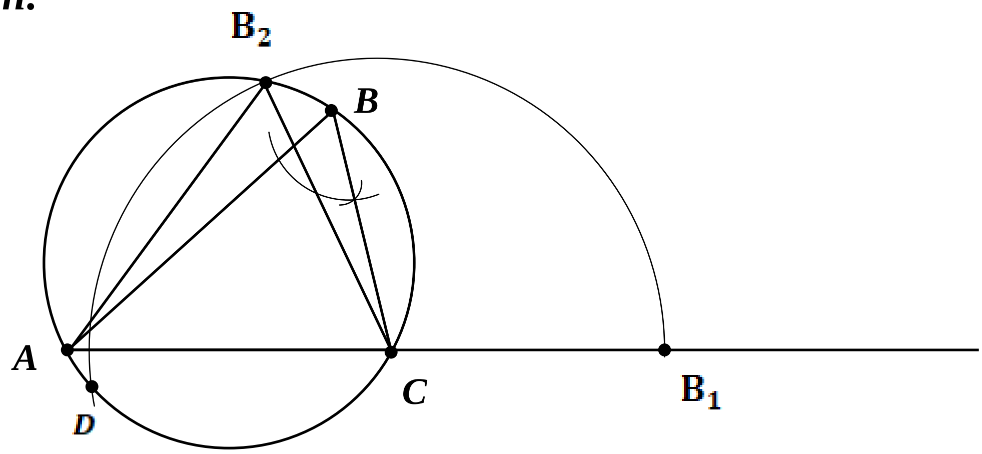
1^0. $\forall B \in \omega$ (o,*r*) nuqtadan $\angle B$ ni qo`yamiz va $\angle B \cap \omega$ (o,*r*)={A,C}. AC kesmani hosil qilamiz.

2^0. A nuqtadan AC kesma orqali o`tuvchi to`g`ri chiziqqa AC+BC kesmani qo`yamiz va AB_1=AC+BC.

3^0. C nuqtadan ω_2(C,C B_1) aylana chizamiz $\omega \cap \omega_2 = \{B_2, D\}$.

4^0. $\angle AB_2C = \angle B$ va $\Delta\, AB_2C$ biz izlayotgan figura.

Yasash:

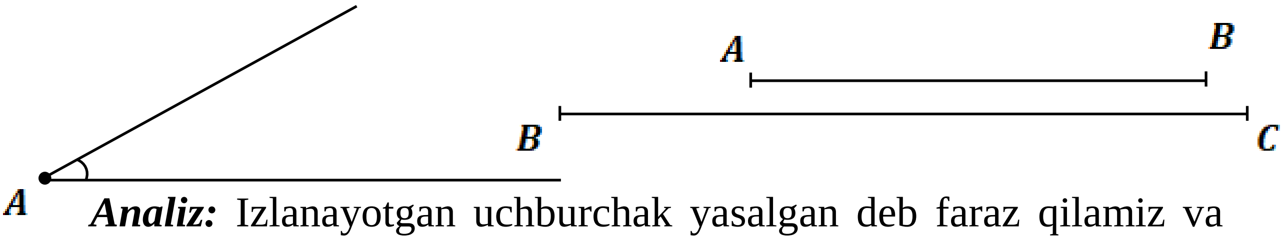


Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle ABC=\angle B$. Aylananing bitta vatariga tiralgan bir tomondagi burchaklar tengligidan AC vatarga tiralgan $\angle AB_2C=\angle B$. $CB_1=CB_2$, $AC+CB_2=AC+BC$.

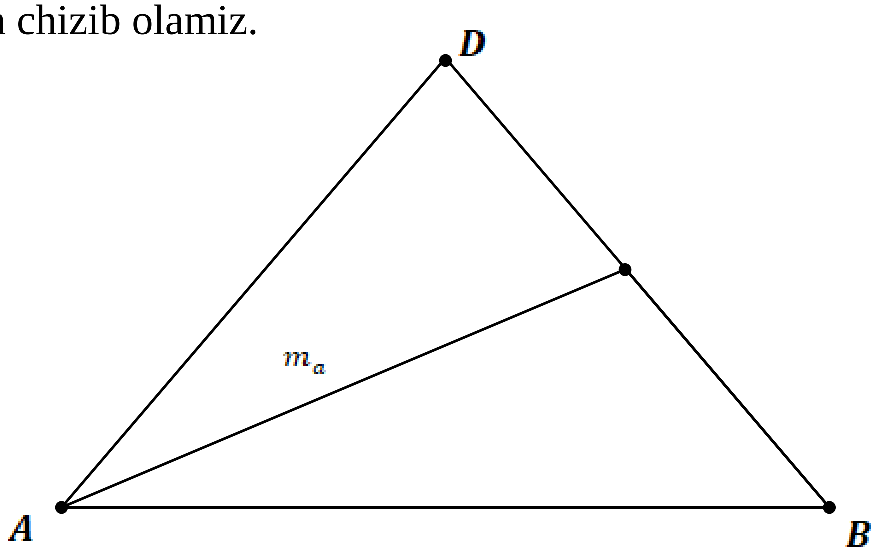
Tekshirish: $\angle B=0^0$, 180^0 da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

3-masala. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu burchagi uchidan o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

Berilgan: $\angle A$, AB, m_a – BC=*a* tomonga o`tkazilgan medianasi.



Analiz: Izlanayotgan uchburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

1^0. $\forall A \in l$. *va* A nuqtadan *a* kesmani qo`yamiz, B nuqtani hosil qilamiz.

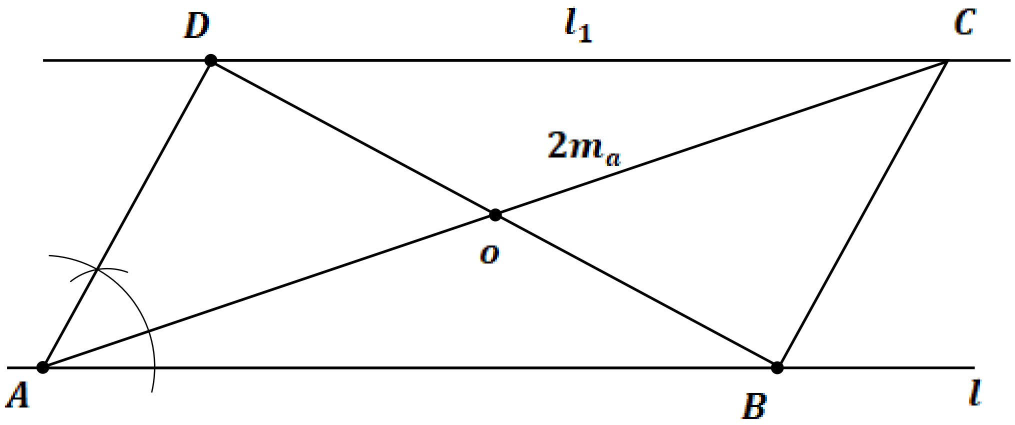
2^0. A va B nuqtalardan $\angle A$ burchakni qo`yamiz.

3^0. $\omega(A, 2m_a)$ aylana chizamiz va $\omega \cap BC = \{C\}$.

4^0. C nuqtadan AB ga parallel l_1 to`g`ri chiziq o`tkazamiz va $l_1 \cap AD = \{D\}$

5^0. D va B nuqtalarni tutashtiramiz va biz izlanayotgan ΔABD ni hosil qilamiz.

Yasash:

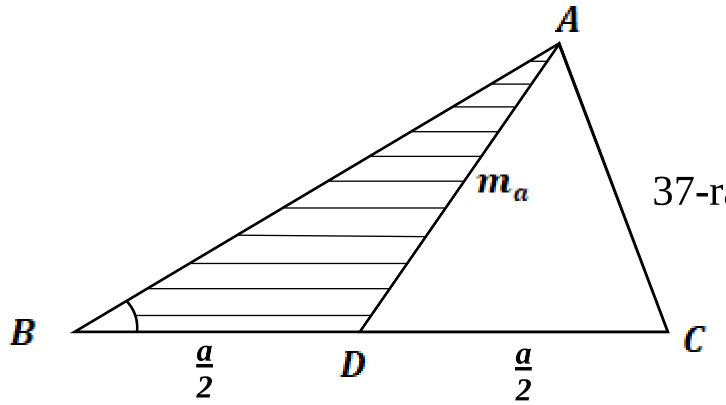


Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle DAB = \angle A$, $AO = m_a$, parallelogrammning diagonallari kesishigan nuqtada teng ikkiga bo`linishidan DO=OB.

Tekshirish: $\angle A = 0^0$, 180^0 da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

4.1.1. Berilgan balanligi bo`yicha teng tomonli uchburchak yasang.

4.1.2. Bir tomoni, shu tomoniga o`tkazilgan medianasi va shu tomon yonidagi bir burchagi bo`yicha uchburchak yasang. (37-rasm)



37-rasm

4.1.3. Bir kateti va ikkinchi katetiga o`tkazilgan medianasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

4.1.4. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu tomonning uchidan chiqqan medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.5. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va ikkinchi burchagining bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.6. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu burchagining bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.7. Bir burchagi, shu burchak uchidan chiqqan balandligi va bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.8. Bir tomoni, shu tomonga yopishgan burchagi uchidan o`tkazilgan balandligi bilan bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.9. Bir tomoni, unga o`tkazilgan medianasi va bu mediana bilan ikkinchi tomoni orasidagi burchagi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.10. Ikki tomoni, ulardan biri bilan shu tomonga o`tkazilgan medianasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

4.1.11. Ikki burchagi va ulardan birining bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.12. Ikki burchagi va uchinchi burchagi uchidan tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

4.1.13. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va asosiga tushirilgan balandligining asosda hosil qilgan kesmalaridan biri berilgan uchburchak yasang.

4.1.14. Balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri, shu kesmaga mos tomoni va shu tomon qarshisidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

4.1.15. Asosiga tushirilgan balandlikning asosda hosil qilgan kesmalari va asosga tushirilgan medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.16. Asosga tushirilgan balandlik va shu balandlikning asosda hosil qilgan kesmalari bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.17. Asosi, unga tushirilgan balandligi va asosidagi burchaklardan biri (yoki bir yon tomoni) berilgan uchburchak yasang.

4.1.18. Asosi, unga tushirilgan balandligi va medianasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.19. Asosi, asosiga va bir yon tomoniga tushirilgan balandliklari berilgan uchburchak yasang.

4.1.20. Asosi, uchidagi burchagi va yon tomoniga tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

4.1.21. Asosi va yon tomonlariga tushirilgan balandliklari bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.22. Asosiga tushirilgan balandligi, uchidagi burchagi va bir yon tomoni bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.23. Balandligi, asosiga yopishgan bir burchagi va bir yon tomoni bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.24. Asosiga o`tkazilgan balandligi va medianasi, bir yon tomoni (yoki balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri) berilgan uchburchak yasang.

4.1.25. Ikki tomoni va ularning biriga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.26. Uchidagi burchagi, uning bissektrisasi va yon tomoniga tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

4.1.27. Asosi, unga yopishgan burchagi va ichki chizilgan aylanasining radiusi berilgan uchburchak yasang.

4.1.28. Ikki tomoni va uchinchi tomoniga tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

4.1.29. Balandligi, uning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri va shu kesmaga mos yon tomoniga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.30. Balandligi, uning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri va shu kesmaga yopishgan burchagining bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.31. Balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri va shu kesmaga yopishgan burchagi va shu burchakning bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.32. Balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri, shu kesmaga yopishgan burchagi va bu burchak uchidan chiqqan yon tomoni bilan unga o`tkazilgan mediana orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

4.1.33. Bir tomonining bir uchidagi burchagi, uning ikkinchi uchidan o`tkazilgan balandligi va shu tomon bilan unga o`tkazilgan medianasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

4.1.34. Uchidagi burchagi, bir yon tomoniga o`tkazilgan balandligi va ikkinchi yon tomoniga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.35. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va asosi bilan unga o`tkazilgan medianasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

4.1.36. Bir burchagining bissektrisasi, shu burchagi uchidan o`tkazilgan balandligi va bir yon tomoni (yoki bir burchagi) berilgan uchburchak yasang.

4.1.37. Balandligi, uning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri va uchinchi burchagining bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.38. Ikki tomoniga o`tkazilgan medianalari, ular orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

4.1.39. Ikki tomoniga o`tkazilgan medianalari bilan shu tomonlardan biri berilgan uchburchak yasang.

4.1.40. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu burchagi uchidan o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.41. Ikki tomoni va uchinchi tomoniga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.42. Berilgan uchta medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

4.1.43. Bir katetiga o`tkazilgan medianasi va gipotenuzasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

4.1.44. Berilgan kesmani parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazish usulidan boshqa usul bilan teng uchga bo`ling.

4.1.45. Asosi, balandligi va bir yon tomoniga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

4.1.46. Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni berilgan ikki burchagi bo`yicha yasang.

4.1.47. Berilgan aylanaga tashqi chizilgan uchburchakni berilgan ikki burchagi bo`yicha yasang.

4.1.48. Tashqi chizilgan aylanasining radiusi, uchidagi burchagi va balandligi berilgan uchburchak yasang.

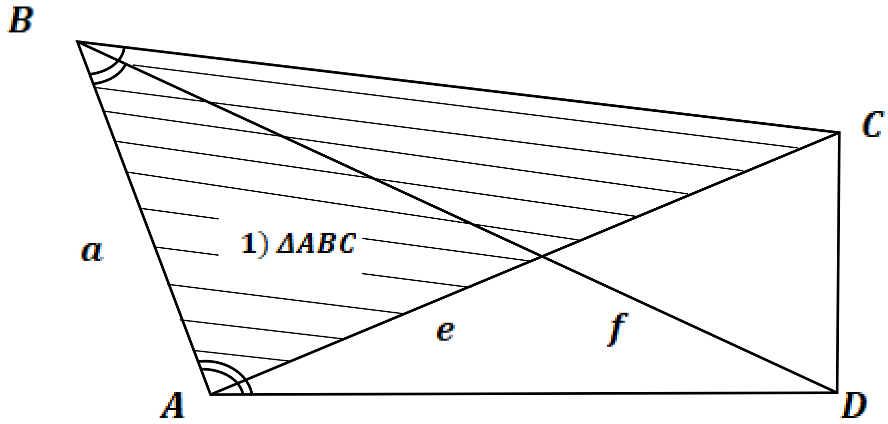
4.1.49. Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni, ikki tomonining yig`indisi va ulardan birining qarshisidagi burchagi bo`yisha yasang.

4.1.50. Berilgan aylanaga tashqi chizilgan teng yonli to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

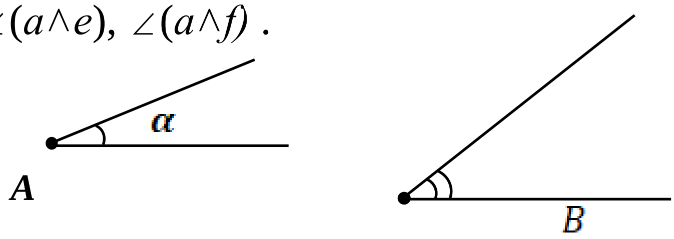
4.2-§. To`rtburchak yasashga doir masalalar

1-masala. a, $\angle A$, $\angle B$, $\angle(a\wedge e)$, $\angle(a\wedge f)$ elementlarga ko`ra to`rtburchak yasang.

Analiz: Izlanayotgan to`rtburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Berilgan: a, $\angle A$, $\angle B$, $\angle(a\wedge e)$, $\angle(a\wedge f)$.



Reja:

1^0. $\forall A\in l$ nuqtadan a kesmani qo`yamiz, natijada $B$ nuqta hosil bo`ladi.

2^0. A nuqtadan $\angle A$ ni va B nuqtadan $\angle B$ ni qo`yamiz. $\angle A=\angle BAD$, $\angle B=\angle ABC$.

3^0. A nuqtadan $\angle(a\wedge e)$ ni qo`yamiz va bu yerda $\angle(a\wedge e)=\angle BAC$.

4^0. B nuqtadan $\angle(a\wedge f)$ ni qo`yamiz va bu yerda $\angle(a\wedge f)=\angle ABD$.

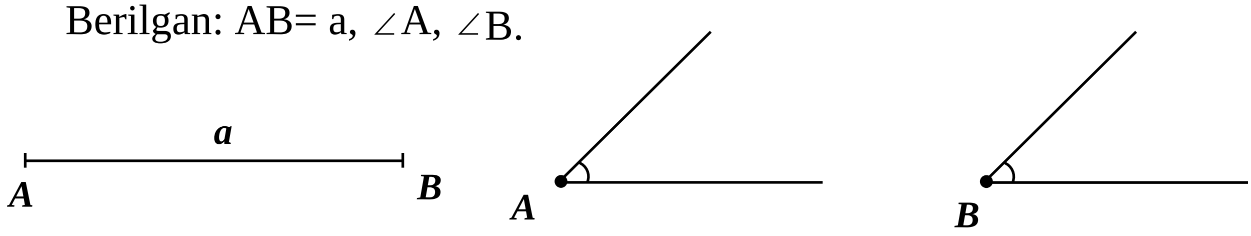
5^0. Hosil bo`lgan D va C nuqtalarni tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan ABCD to`rburchak hosil bo`ladi.

Isbotlash: Yasashga ko`ra.

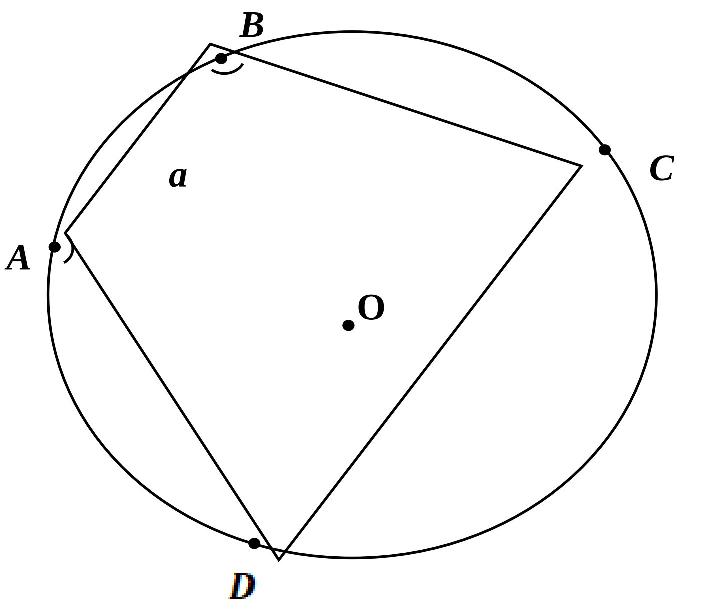
Tekshirish: $\angle A$, $\angle B$, $\angle(a\wedge e)$, $\angle(a\wedge f)=0^0, 180^0$ *da*, $\angle A+\angle(a\wedge f)\geq 180^0$ *da*, $\angle B+\angle(a\wedge e)\geq 180^0$ *da*, $\angle(a\wedge f)+\angle(a\wedge e)\geq 180^0$ *da* yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

2-masala. Ma`lum aylanaga bir tomoni va undagi ikki burchagi bo`yicha ichki chizilgan to`rtburchak yasang.

Berilgan: AB= a, $\angle$A, $\angle$B.



Analiz: Izlanayotgan to`rtburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni taxminan chizib olamiz.



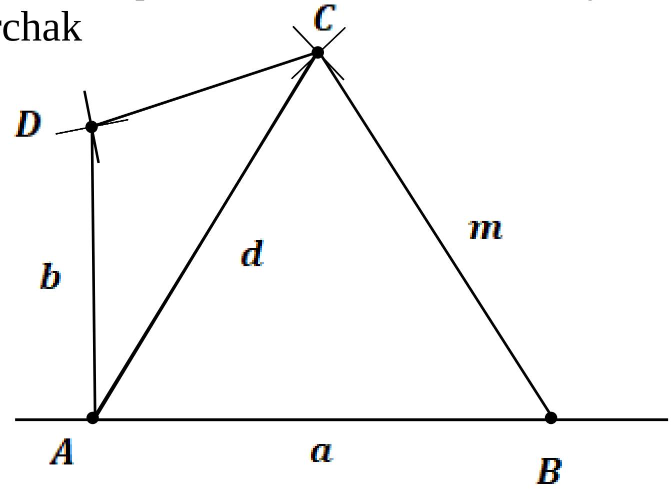
Reja: 1^0. $\forall$ A$\in \omega(O,r)$ nuqtadan $\omega_1(A,a)$ aylana chizamiz, natijada $\omega_1 \cap \omega = \{B\}$ hosil bo`ladi.

2^0. A nuqtadan $\angle$A ni va B nuqtadan $\angle$B ni qo`yamiz.

3^0. $\angle A \cap \omega(O,r) = \{B,D\}, \angle B \cap \omega(O,r) = \{A,C\}$.

4^0. Hosil bo`lgan D va C nuqtalarni tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan ABCD to`rtburchak hosil bo`ladi.

Yasash:

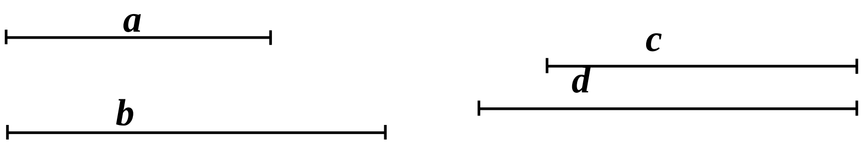


Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle BAD=\angle A$, $\angle ABC=\angle B$, $AB=a$.

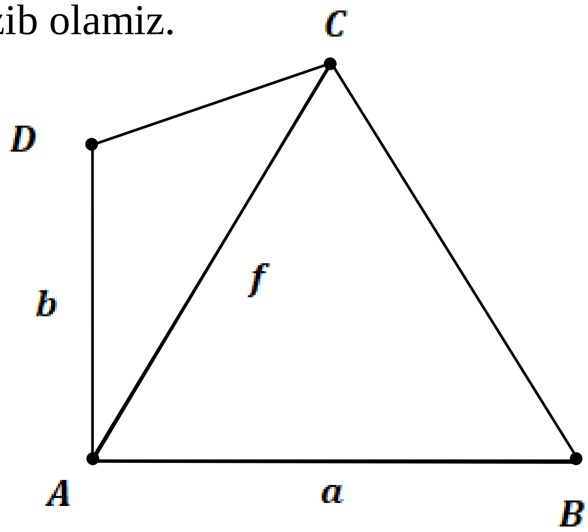
Tekshirish: $\angle A$, $\angle B=0^0,180^0$ da yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

<u>3-masala.</u> Uchta tomoni va bir diagonali bo`yicha shunday to`rtburchak yasangki, unga ichki aylana chizish mumkin bo`lsin.

Berilgan: *a,b,c va d*-diagonal.



Analiz: Izlanayotgan to`rtburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

1^0. $\forall A\in l$ – nuqtadan *a* kesmani qo`yamiz natijada B nuqta hosil bo`ladi.

2^0. B nuqtadan $\omega(B,m)$. (Bu yerda $m=a+c-b$)

3^0. A nuqtadan $\omega_1(A,d)$ aylana chizamiz va $\omega_1\cap\omega=\{C\}$.

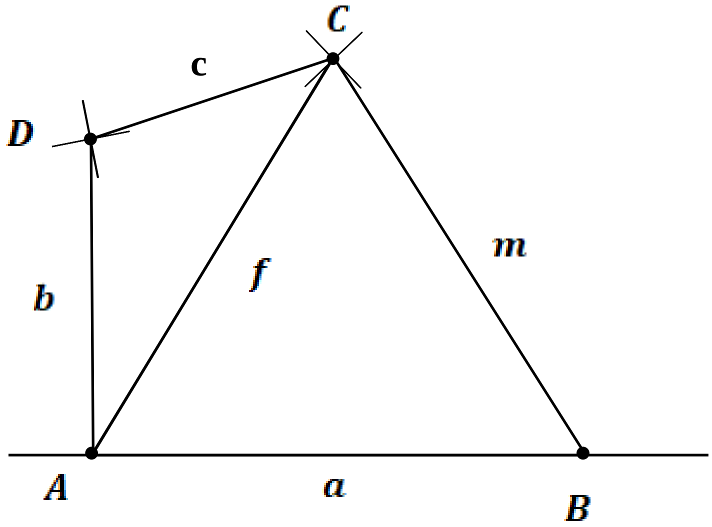
4^0. C nuqtadan $\omega_2(C,c)$ aylana chizamiz.

5^0. A nuqtadan $\omega_3(A,b)$ aylana chizamiz.

6^0. $\omega_2\cap\omega_3=\{D\}$

7^0. Hosil bo`lgan A,B,C nuqtalarni ketma-ket tutashtiramiz.

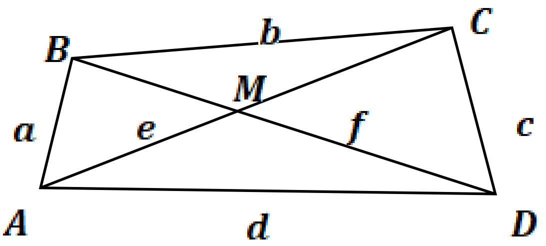
Yasash:



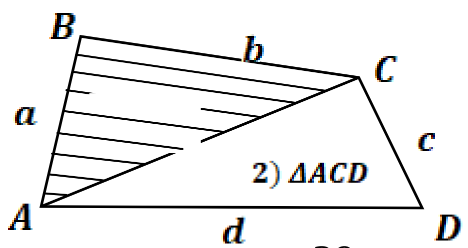
Isbotlash: Yasashga ko`ra AB=*a*, AD=*b*, DC=*c*, AC=*d*, *m*=*a*+*b*-*c*. Bundan *a*+*c*=*b*+*m* ekamlogi kelib chiqadi va bu ABCD to`rtburchakka ichki aylana chizish mumkin.

Tekshirish: Masala har doim yechimga ega.

Qavariq to`rtburchaklarni yasash uchun kamida uning beshta elementi ma`lum bo`lishi va ulardan kamida ikkitasi chiziqli element bo`lishi shart. To`rtburchak elementlarini quyidagicha (38-rasm) belgilaymiz: |AB|=*a*, |BC|=*b*, |CD|=*c* va |DA|=*d*, uning diagonallarini |AC|=*e*, |BD|=*f*, burchaklarini ∠A, ∠B, ∠C, ∠D, diagonallari orasidagi burchakni - (*e*^*f*). Analiz chizmasida yordamchi figurani shtrixlab ko`rsatamiz.



38-rasm

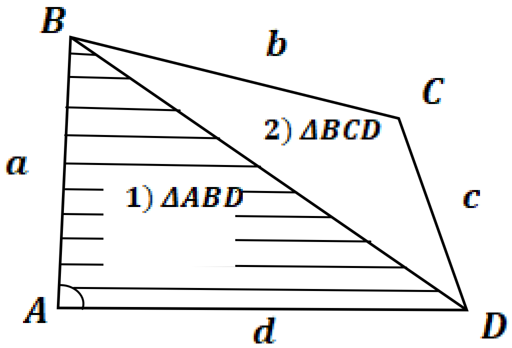


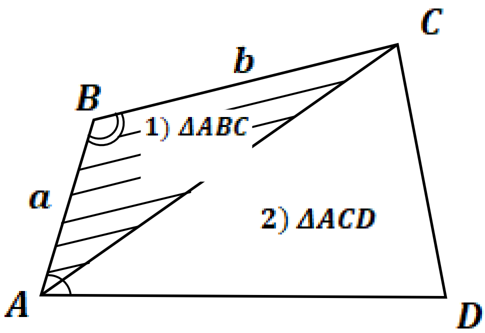
39-rasm

4.2.1. Quyidagi elementlardan foydalanib, to`rtburchak yasang.

1) *a*, *b*, *c*, *d* va *eb* (39-rasm)

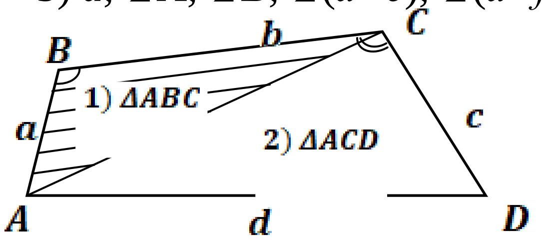
2) *a*, *b*, *c*, *d* va bir burchagi (40-rasm) 3) *a*, *b*, ∠A, ∠B, ∠C (41-rasm)



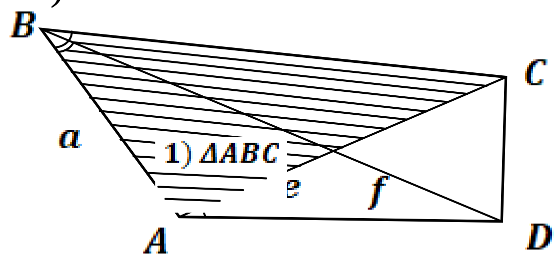


4) $a, b, c, \angle B, \angle C$ (42-rasm)

5) $a, \angle A, \angle B, \angle(a \wedge e), \angle(a \wedge f)$ (43-rasm)



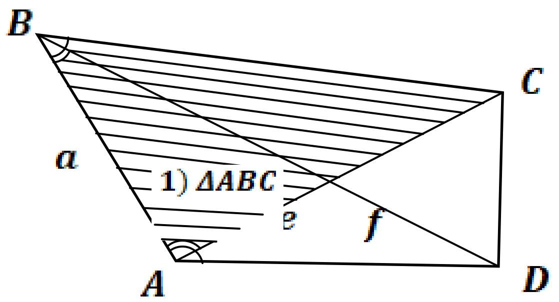
42-rasm



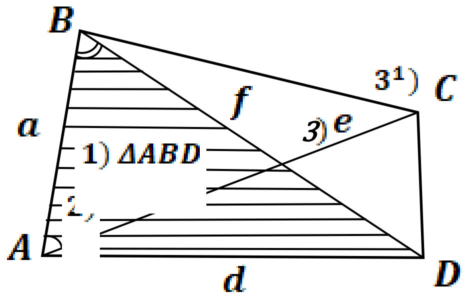
43-rasm

6) $c, d, \angle A, \angle B, \angle C$ (44-rasm)

7) $a, d, e, \angle(a \wedge e), \angle(a \wedge f)$ (45-rasm)



44-rasm

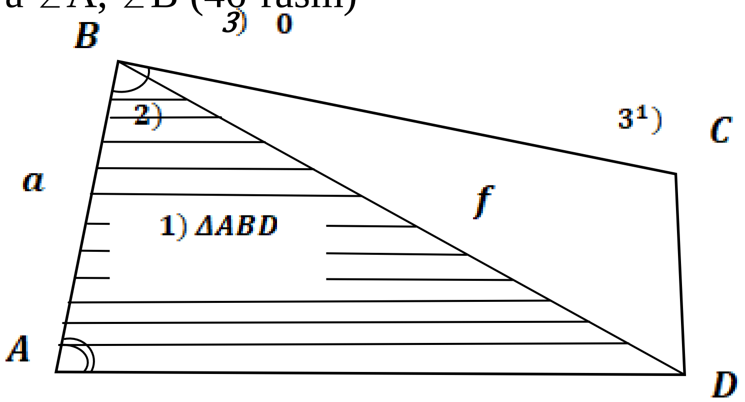


45-rasm

8) a, b, c, e va f (tomonlardan istalgan uchtasini olish mumkin)

9) a, b, c (yoki d), f va $\angle B$

10) a, b, f va $\angle A, \angle B$ (46-rasm)



46-rasm

11) $a, b, c, \angle B$ (yoki $\angle C$), $\angle A$ (yoki $\angle D$)

12) $a, e, \angle A, \angle B, \angle C$

13) $a, b, c, e, \angle C$

14) $a, b, c, e, \angle D$

15) $a, b, e, f, \angle(e \wedge f)$

16) $a, b, e, f, \angle A$

17) $a, b, c, e, \angle A$

18) $a, b, c, \angle B, \angle D$

19) $a, b, f, \angle B, \angle(e \wedge f)$

20) $a, c, e, \angle B, \angle(e \wedge f)$

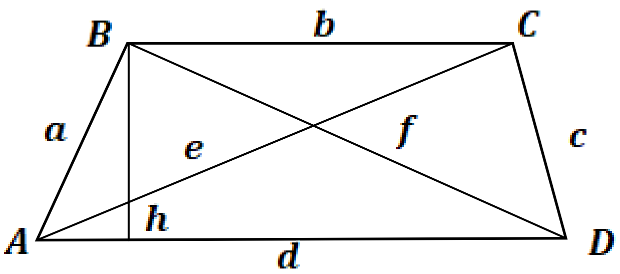
21) $a, b, \angle A, \angle B, \angle(e \wedge f)$

4.2.2. Ma`lum aylanaga bir tomoni va undagi ikki burchagi bo`yicha ichki chizilgan to`rtburchak yasang.

4.2.3. Uchta tomoni va bir diagonali bo`yicha shunday to`rtburchak yasangki, unga ichki aylana chizish mumkin bo`lsin.

4.3-§. Trapetsiya yasashga doir masalalar

Har xil tomonli trapetsiya yasash uchun kamida uning to`rtta elementi berilgan va bularning ikkitasi trapetsiya burchaklari bo`lib, ular bir-biriga bog`liq bo`lmasigi lozim. Trapetsiya elementlarini ham to`rtburchak elementlari kabi (47-rasm) va uning balandligini – *h*, o`rta chizig`ini esa – *m* harflari bilan belgilaymiz.



47-rasm

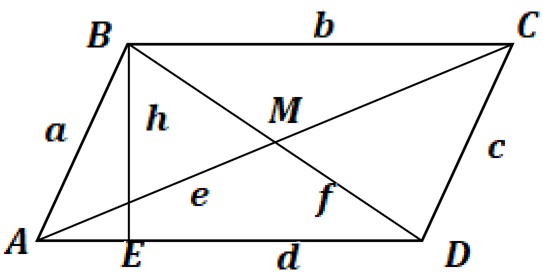
Quyidagi elementlardan foydalanib, trapetsiya yasang.

1) *a, b, c, e*
2) *a, c, d, e*
3) *a, c, d, h*
4) *a, e, f, h*
5) *a, b, c, h*
6) *a, b, e, h*
7) *a, c, d* va $\angle$A
8) *a, b, c* va $\angle$B
9) *d, e, f, h*
10) *d, h,* $\angle$A, $\angle$D
11) *d, b,* $\angle$A, $\angle$D
12) *a, b,* $\angle$A, $\angle$D

4.4-§. Parallelogramm yasashga doir masalalar

Parallelogramm yasash uchun kamida uning uchta elementi ma`lum bo`lishi va bulardan kamida ikkitasi chiziqli element bo`lishi shart.

Parallelogramm elementlarini ham trapetsiya elementlari (48-rasm) kabi belgilaymiz.



48-rasm

4.4.1. Quyidagi elementlardan foydalanib, parallelogramm yasang.

1) a, b, e
2) a, b va $\angle A$
3) a, e, f
4) f, d va $\angle(f \wedge d)$
5) a, d, h
6) e, f, h
7) f, d, h
8) a, e, h
9) a, f va $\angle A$
10) a, d va $\angle(f \wedge d)$
11) e, f va $\angle(f \wedge d)$
12) e, f va $\angle(c \wedge e)$

Paralleogramning hususiy ko`rinishlari bo`lgan to`g`ri to`rtburchak va romb yasash uchun ularni aniqlovchi ikkita mustaqil geometik obraz berilgan bo`lishi (bulardan kamida bittasi chiziqli element bo`lishi) kerak. Bu figuralar ta`rifini e`tiborga olganda, ularni aniqlovchi shartlarni ham, parallelogrammdagi singari, uchta deb hisoblash mumkin, chunki rombda uning tomonlarining tengligi, to`g`ri to`rtburchakda burchaklarining to`g`riligi ma`lum uchinchi elementlardandir.

4. 4.2 Quyidagi elementlardan foydalanib, to`g`ri to`rtburchak yasang.

1) a va b
2) a va e
3) e va $\angle(e \wedge f)$
4) a va $\angle(a \wedge f)$
5) a va $\angle(f \wedge d)$
6) a va $\angle(e \wedge f)$
7) Oldiga borib bo`lmaydigan ikki jism orasidagi masofani parallelogramm xossasidan foydalanib o`lchash usulini ko`rsating.

4.4.3. Quyidagi elementlardan foydalanib, romb yasang.

1) a va $\angle A$
2) e va $\angle A$
3) f va $\angle A$
4) e va f
5) e va h
6) h va $\angle A$
7) a va h
8) a va $\angle(a \wedge h)$
9) a va e
10) e va $\angle B$

Kvadratning yasalishi uchun uning bitta chiziqli elementi berilishi yetarli.

4.4.4. Diagonali (yoki bitta tomoni) berilgan kvadrat yasang.

4.5-§. Ko`pburchak yasashga doir masalalar

4.5.1. Quyidagi elementlardan foydalanib (umumiy ko`rinishdagi) n burchak yasang.

1) Hamma tomonlari va bir burchagi uchidan chiqqan hamma diognallari berilgan;

2) Hamma tomonlari va n-3 ta ketma-ket yotgan burchaklari berilgan.

4.5.2. n-1 ta tomon va n-2 ta ketma-ket yotgan burchaklari berilgan n burchak yasang.

Bunda quyidagi hollar qaralsin:

1) Noma`lum ikki burchak noma`lum tomonga yopishgan hol;

2) Noma`lum ikki burchagidan biri noma`lum tomonga yopishgan hol;

3) Noma`lum ikki burchakdan hech qaysisi noma`lum tomonga yopishmagan hol.

4.5.3. n-1 ta burchagi bilan n-2 ta ketma-ket yotgan tomonlari berilgan n burchak yasang.

Bunda quyidagi hollar qaralsin:

1) Noma`lum burchak noma`lum ikki tomon orasida yotgan hol;

2) Noma`lum burchak noma`lum ikki tomondan biriga yopishgan hol;

3) Noma`lum burchak noma`lum ikki tomonning hech qaysisiga yopishmagan hol.

4.5.4. n ta tomoni va n-3 ta ixtiyoriy burchaklari berilgan n burchak yasang.

4.5.5. Quyidagi elementlardan foydalanib muntazam ko`pburchaklar yasang:

1) Berilgan tomoni bo`yicha muntazam oltiburchak yasang;

2) Berilgan kichik diagonali bo`yicha muntazam oltiburchak yasang;

3) Berilgan tomoni bo`yicha muntazam sakkizburchak yasang.

4.6-§. Mustaqil yechishga doir ba’zi aralash masalalar

A1. Doira ichida berilgan nuqtadan shunday vatar o`tkazingki, u vatar shu nuqtada teng ikkiga bo`linsin.

A2. Aylana ichida berilgan nuqtadan berilgan uzunlikda vatar o`tkazing.

A3. Berilgan nuqtadan berilgan aylanaga shunday kesuvchi o`tkazingki, aylana ichida qolgan qismi berilgan kesmaga teng bo`lsin.

A4. Doira ichida berilgan nuqtadan shunday vatar o`tkazingki, bu vatarning nuqtadan ikki tarafda yotgan bo`laklarining ayirmasi berilgan kesmaga teng bo`lsin.

A5.Shunday to`g`ri chiziq o`tkazingki, berilgan ikki nuqtadan unga o`tkazilgan perpendikulyarlar berilgan kesmalarga teng bo`lsin.

A6. Berilgan doirada shunday vatar o`tkazingki, uni shu doiraning berilgan vatari teng ikkiga bo`lsin va u vatarlar berilgan burchakka teng burchak tashkil etsin.

A7. Gipotenuzasi va katetlarining ayirmasi berilgan to`gri burchakli uchburchak yasang.

A8. *A* burchak va uning bir tomonida *B* nuqta berilgan; burchakning ikkinchi tomonida shunday *C* nuqta topingki, $|CA| + |CB|$ yig`indi berilgan *l* kesmaga teng bo`lsin.

A9. *XY* to`gri chiziqdan bir tarafda joylashgan *A* va *B* nuqtalar berilgan. Berilgan *I* uzunlikdagi *MN* kesmani bu to`gri chiziqqa shunday joylashtirish kerakki, $|MA| + |MN| + |NB|$ *s*iniq chiziqning uzunligi eng kichik bo`lsin

A10. Aylana tashqarisida berilgan nuqtadan bu aylanaga shunday kesuvchi o`tkazingki, uning tashqi qismi ichki qismiga teng bo`lsin.

A11. O`zaro kesishuvchi ikki aylananing kesishish nuqtalaridan biri orqali shunday kesuvchi o`tkazingki, bundan hosil bo`lgan ikki vatarning yig`indisi berilgan kesmaga teng bo`lsin.

A12. Aylana va unda *A, B* va *C* nuqtalar berilgan. Bu aylanaga shunday uchburchak ichki chizingki, uning bissektrisalari davom ettirilganda aylana bilan *A, B va C* nuqtalarda kesishsin.

A13. Bundan oldingi masaladagi bissektrisalar o`rniga balandliklarni oling.

A14. Aylana va undan *N*, *B* va *M* nuqtalar berilgan; aylanaga shunday ichki uchburchak chizingki, uning bir uchidan chiquvchi balandlik, bissektrisasi va medianasi (davom ettirilganda) mos ravishda *N*, *B* va *M* nuqtalarda aylana bilan kesishsin.

A15. Aylanada *A* va *B* nuqtalar berilgan. Bu nuqtalardan yig`indisi ma’lum bo`lgan ikki parallel vatar o`tkazing.

A16. Quyidagilarga asoslanib, to`rtburchak yasang:

1) a, c, $\angle$B, $\angle(a,e)$, $\angle(e,d)$

2) a, e, d va $\angle$A, $\angle$C

3) a, b, c, e va $\angle$D

4) a, b, e va $\angle(d,f)$, $\angle(c,f)$

5) a, b, d, f $\angle(e, f)$

6) a, b, c, e, f.

A17. Quyida berilganlar bo`yicha parallelogramm yasang:

1) a, h_a, f

2) e, h, f

3) $\angle$A, h_1, h_2

4) $\angle$A, e, f.

A18. Berilgan m to`g`ri chiziqqa parallel qilib shunday kesma chizingki, u berilgan a kesmaga teng bo`lib, uning bir uchi berilgan aylanada va ikkinchi uchi boshqa bir berilgan to`g`ri chiziqda yotsin.

A19. Berilgan to`rtburchakka ichki chizilgan parallelogramm yasang.

A20. Berilgan kvadratning bo`lagiga tengdosh kvadrat yasang.

A21. Asosiga o`tkazilgan medianasi, balandligi va asosidagi bir burchagi berilgan uchburchak yasang.

A22. Ikki diagonali, ular orasidagi burchagi va yana bir burchagi berilgan trapetsiya yasang.

A23. Berilgan uchburchakka tashqi chizilgan shunday uchburchak yasangki, u berilgan ikkinchi uchburchakka o`xshash bo`lsin.

A24. Ikki qo`shni tomonlarining ayirmasi ma'lum va berilgan kvadratga tengdosh bo`lgan to`g`ri to`rtburchak yasang.

A25. Asosi, balandligi va diagonallari orasidagi burchagi berilgan parallelogramm yasang.

A26. Yon tomonlari, bir burchagi va asoslaridan (yoki diagonallaridan) bittasi berilgan trapetsiya yasang.

A27. Uchala balandligining yig`inidisi va ularning nisbatlari berilgan uchburchak yasang.

A28. Ikki konsentrik aylana orasidagi halqaga tengdosh bo`lgan doira
yasang.

A29. Asosi, unga o`tkazilgan mediana bilan yon tomonlari orasidagi burchaklari berilgan uchburchak yasang.

A30. Ikki diagonali, bir tomoni va o`rta chizig`i berilgan trapetsiya yasang.

A31. Ikki tomoniga o`tkazilgan medianalarining uchinchi tomonga tushirilgan balandligiga nisbatlari va perimetri berilgan uchburchak yasang.

A32. Berilgan ikki uchburchakdan biriga o`xshash va ikkinchisiga tengdosh uchburchak yasang.

A33. Asosiga yopishgan ikki burchagi, balandligi va bir diagonali berilgan trapetsiya yasang.

A34. Ikki diagonali, ular orasidagi burchagi va bir yon tomoni berilgan trapetsiya yasang.

A35. Ikki tomonga o`tkazilgan medianalarining uchinchi tomonga nisbatlari va medianalaridan biri berilgan uchburchak yasang.

A36. Berilgan uchburchakka tengdosh bo`lgan teng tomonli uchburchak yasang.

A37. Asosi, balandligi va yon tomoniga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

A38. Ikki diagonali, ular orasidagi burchagi va ikki qo`shini tomonlarining yig`indisi yoki ayirmasi bo`yicha trapetsiya yasang.

A39. Ikki medianasinnng nisbati, shu medianalari orasidagi burchagi vad balandligi berilgan uchburchak yasang.

A40. Berilgan doiraga yuzi m^2 ga teng bo`lgan ichki to`g`ri to`rtburchak chizing.

A41. Uchidagi burchagi, balandligi va asosiga o`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

A42. Ikki diagonali, ular orasidagi burchagi va bir yon tomoni berilgan trapetsiya yasang.

A43. To`rt tomoni va diagonallarining o`rtalarini tutashtiruvchi kesmasi bo`yicha to`rtburchak yasang.

A44. Asosining unga o`tkazilgan bissektrisaga nisbati, asosi qarshisidagi burchagi va bir tomoni berilgan uchburchak yasang.

A45. Ikki diagonali va bir burchagi berilgan parallelogramm yasang.

A46. Uchta tomoni va balandligi berilgan trapetsiya yasang.

A47. Ikki tomonga tushirilgan balandliklarining uchinchi tomoni hosil qilgan burchaklari va ichki chizilgan aylanasining radiusi berilgan uchburchak yasang.

A48. Ikki diagonali, ikki qo`shni tomoni va qolgan ikki tomoni orasidagi burchagi berilgan to`rtburchak yasang.

A49. Uchta tomoni va noma’lum tomoniga yopishgan ikki burchagi berilgan trapetsiya yasang.

A50. Ikki qo`shni tomonining nisbati, bir burchagi va perimetri berilgan
parallelogramm yasang.

A51. Berilgan rombga ichki chizilgan doira yasang.

A52. Berilgan to`g`ri chiziqqa uning berilgan nuqtasida urinib, berilgan aylana bilan ortogonal kesishuvchi aylana chizing.

A53. Diagonallarining nisbati, ular orasidagi burchagi va diagonallarining yig`indisi berilgan parallelogramm yasang.

A54. Teng tomonli uchburchakka ichki chizilgan shunday uchta doira chizingki, ularning har biri qolgan ikkitasiga urinishi bilan birga uchburchakning ikki tomoniga ham urinsin.

A55. Ikki qo`shni tomonining nisbati, ular orasidagi burchagi va balandligi berilgan teng yonli trapetsiya yasang.

A56. Asosi, uchidagi burchagi va shu uchidan chiqqan balandligi bilan bissektrisasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

A57. Ikki qo`shni tomonining bir diagonaliga nisbatlari va shu ikki tomonining yig`inidisi berilgan teng yonli trapetsiya yasang.

A58. Ikki *a va b* to`g`ri chiziq va *M* nuqta berilgan. *M* nuqtadan shunday kesuvchi o`tkazingki, uning *a* va *b* to`g`ri chiziqlar bilan kesishuvidan mos ravishda hosil bo`lgan *A* va *B* nuqtalar quyidagi talabga javob bersin:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}.$$

A59. Quyidagilar bo`yicha parallelogramm yasang:

a) ikki tomonining nisbati, bir burchagi va bir diagonali;

b) balandligi, diagonallarining nisbati va ular orasidagi burchagi;

v) tomoni, diagonallarining nisbati va ular orasidagi burchagi;

g) bir burchagi, tomoni va ikkinchi tomonining shu tomoniga tushirilgan balandligiga nisbati.

A60. A, B, C nurlar berilgan. Shunday aylana chizingki, uning markazi *B* da yotib, o`zi *A* nurga urinsin va *C* nurdan berilgan *a* uzunlikdagi vatar ajratsin.

A61. Uchta K_1 K_2, K_3 aylana berilgan. Shunday uchburchak yasangki, uning uchlari berilgan aylanalarda yotib, tomonlari esa markazlar chiziqlariga parallel bo`lsin.

A62. Berilgan *A* va B nuqtalar orqali o`tuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan *a* to`g`ri chiziq bilan kesishganda hosil bo`lgan vatar yoyining balandligi berilgan *h* kesmaga teng bo`lsin.

A63. Berilgan ikki nuqtadan o`tuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan *a* to`g`ri chiziqdan berilgan *h* masofada yotsin.

A64. Berilgan *M* nuqtadan o`tib, berilgan *A* aylanaga urinuvchi shunday aylana chizingki, uning berilgan *a* to`g`ri chiziq bilan kesishishi natijasida hosil bo`lgan yoyining balandligi berilgan *h* kesmaga teng bo`lsin.

A65. Berilgan *M* nuqtadan o`tib, berilgan *A* aylanaga urinuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan *a* to`g`ri chiziqdan berilgan *h* masofada yotsin.

A66. Berilgan *M* nuqtadan o`tib, berilgan *a* to`g`ri chiziqqa urinuvchi shunday aylana chizingki, u berilgan *A* aylanadan berilgan *k* masofada yotsin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati.

1. R.K.Otajonov "Geometrik yasash metodlari" Toshkent "O`qituvchi" – 1971.

2. N.Dodajonov, R.Yunusmetov, T.Abdullayev "Gometriya" II qism Toshkent "O`qituvchi" – 1988.

3. X.Nazarov, X. Ochilova, E.Podgornova "Geometriyadan masalalar to`plami" Toshkent "O`qituvchi" – 1993.

4. L.S.Atanasyan, V.T.Bazilev "Geometriya" Chast I Moskva "Prosvisheniya" – 1986.

5. 4. *Kirichenko V. A.* Postroeniya tsirkulem i lineykoy i teoriya Galua // Letnyaya shkola «Sovremennaya matematika». — Dubna, 2005.

6. *5. Prasolov V. V.* Tri klassicheskie zadachi na postroenie. Udvoenie kuba, trisektsiya ugla, kvadratura kruga. — M.: Nauka, 1992. — 80 s. — (Populyarnыe lektsii po matematike).

7. *6. Geyler V. A.* Nerazreshimыe zadachi na postroenie // SOJ. — 1999. — № 12. — S. 115—118.

8. 11. Azad, H., and Laradji, A., "Some impossible constructions in elementary geometry", *Mathematical Gazette* 88, November 2004, 548–551.

9. 1. Martin, George E., Geometric Constructions, New York: Springer-Verlag New York, Inc. 1998.

10. Pogorelov A.V. Geometriya "Nauka", 1983.

11. Bazыlev V.T. Dunichev K.I. Ivanitskaya V.P. Geometriya Chast I. Moskva, "Prosvisheniya" – 1974. Chast II.

12. L.S.Atanasyan, V.A.Atanasyan, "Sbornik zadach po geometrii" Moskva, "Prosvisheniya" – 1973.

Mundarija

KIRISH.. 3

I BOB. SIRKUL VA CHIZG'ICH YORDAMIDA YASALADIGAN MASALALAR 7

1.1-§. Sirkul va chizg'ich yordamida yasashga doir masalalar haqida tushuncha va yasash postulatlari. 7

1.2-§. Bevosita yechiladigan masalalar. 10

1.3-§. Nuqta, kesma, to`g`ri chiziq va burchaklar yasashga doir masalalar 19

1.4-§. Yasashga doir masalalar yechishdagi bosqichlar. 21

II BOB. SIRKUL VA CHIZG'ICH YORLAMIDA YASASH METODLARI 27

2.1-§. Geometrik o`rinlar metodi va unga doir masalalar 27

2.2-§. To`g`rilash metodi va unga doir masalalar 42

2.3-§. Geometrik almashtirishlar metodi. 50

2.3.1. O`q simmetriya metodiga doir masalalar. 50

2.3.2. Parallel ko`chirish metodiga doir masalalar 53

2.3.3.Nuqta atrofida aylantirish (burish) metodi va unga doir masalalar 58

2.3.4. Gomotetiya. Gomotetiya metodiga doir masalalar 63

2.3.5. O`xshash almashtirish metodi va unga doir misollar 66

2.4.-§. Inversiya metodi va unga doir savol va masalalar. 75

2.5-§.Algeraik metodiga doir savol va masalalar. 87

III BOB. SIRKUL VA CHIZG'ICH YORDAMIDA YECHILADIGAN MASALALAR KRITERIYASI VA YECHILMAYDIGAN YASASHGA DOIR MASALALAR 98

3.1-§. Sirkul va chizg'ich yordamida yechiladigan yasashga doir masalalar kriteriyasi 98

3.2-§.Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan yasashga doir ba`zi masalalar 99

IV BOB. SODDA GEOMETRIK FIGURALARNI YASASHGA DOIR MASALALAR 102

4.1-§. Uchburchak yasashga doir masalalar 102

4.2-§. To`rtburchak yasashga doir masalalar 109

4.3-§. Trapetsiya yasashga doir masalalar 114

4.4-§. Parallelogramm yasashga doir masalalar 114

4.5-§. Ko`pburchak yasashga doir masalalar 115

4.6-§. Mustaqil yechishga doir ba'zi aralash masalalar 116

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati. 122

Shamshiyev Abdivali
Jo`rayev Tursunboy Fayziyevich
Tursunova Zulayho Omonullayevna
G`iyosova Zebo Toshbo`lovna

GEOMETRIYA

geometrik yasash metodlari

o`quv qo`llanma

Toshkent - "Innovatsiya-Ziyo" - 2020

Muharrir: Xolsaidov F. B.

Nashriyot litsenziyasi AI №023, 27.10.2018.
Bosishga 14.06.2021. da ruxsat etildi. Bichimi 60x84.
"Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.

Shartli bosma tabog'i 8. Nashr bosma tabog'i 7,75.
Adadi 100 nusxa.

"Innovatsiya-Ziyo" MCHJ matbaa bo'limida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, Farhod ko'chasi, 6-a uy.
+99893 552-11-21

ISBN 978-9943-7274-9-6