Н. В. БОГОМОЛОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

Н. В. БОГОМОЛОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

РУСЧА ҚАЙТА ИШЛАНГАН ВА
ТЎЛДИРИЛГАН 2-НАШРИДАН ТАРЖИМА

[redacted] олий ва махсус ўрта таълим Министрлиги
махсус ўрта ўқув юртлари учун ўқув қўлланма
сифатида рухсат этган

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент—1976

Бу китоб техникумларда «Олий математика элементлари» программасининг барча бўлимлари бўйича масалалар ечишда қўлланма бўлиб ҳисобланади. Мумкин бўлган жойларда масалалар типлари бўйича синфларга бўлиб чиқилган. Ҳар қайси янги типга доир масала ечилиши билан ва шунга ўхшаш бир нечта масала машқ қилиш учун берилган.

Қўлланманинг асосий вазифаси техникумларнинг (биринчи навбатда сиртқи ва кечки бўлимларнинг) ўқувчиларига олий математикага доир масалаларни ечиш усулларини ўқитувчининг ёрдамисиз, мустақил ўрганишлари, уларни ечиш усуллари бўйича ҳосил қилинган малакаларни мустаҳкамлаш ва чуқурлаштиришда ёрдам беришдир.

Қўлланма техникумларнинг ўқувчиларига мўлжалланган бўлиб, у техникумларда дастлаб математикадан дарс бера бошлаган ўқитувчиларга синфда ишлаш учун, уй ишлари ва контрол топшириқлар учун машқлар танлашда ҳам фойдаси тегиши мумкин.

517
Б 80

Богомолов Н. В.
Олий математикадан амалий машғулотлар. [Махсус ўрта ўқув юртлари учун ўқув қўлланма сифатида рухсат этилган]. Т., «Ўқитувчи», 1976 (С).
496 б. расм.

Богомолов Н. В. Практические занятия по высшей математике.

517

Б $\frac{20203-44}{353.\ 06.\ 76}$ 155—76

СЎЗ БОШИ

Техникум ўқувчилари Олий математикадан масалалар ечишда кўпинча бир қатор қийинчиликларга дуч келадилар. Ўқувчиларга бу қийинчиликларни бартараф этишда ёрдам бериш, олинган назарий билимларни «Олий математика элементлари» курсининг барча бўлимларига доир масалалар ечишда татбиқ этишга ўргатиш мазкур қўлланманинг асосий вазифасидир.

Маълумки, кўпчилик ўқувчилар масалаларни мустақил ечишда уларни ечиш усуллари ва методлари бўйича доимий консультацияларга муҳтож бўладилар, чунки масалани ечиш йўлини топиш ўқитувчининг ёки тегишли қўлланманинг ёрдамисиз ўқувчига қийинчилик қилади. Масалалар ечиш бўйича ана шундай консультацияларни ўқувчи бу китобдан топиши мумкин.

Қўлланмада ечилишлари билан берилган масалалардан ташқари синфда бажариладиган ва уй вазифалари қилиб берилиши мумкин бўлган машқ қилиш учун масалалардан ҳам етарлича келтирилган.

Қўлланманинг ушбу нашри қайта ишланди ва тўлдирилди. «Ҳосила» боби жиддий қайта ишлаб чиқилди, унда материалнинг жойланиши ўзгартирилди ва янги масалалар қўшилди. Қўлланмага қуйидаги янги темалар киритилди: функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари, рационал касрларни интеграллаш, текис эгри чизиқ ёйининг узунлиги, айланиш сиртининг юзи, текис эгри чизиқ ёйининг ва текис фигуранинг оғирлик маркази. Барча темаларга «аралаш масалалар» ни ўз ичига олган параграфлар қўшилган. Бу параграфларда контрол ишлар учун икки вариантдан иборат тахминий машқлар келтирилган. Ана шу ўзгаришлар ва қўшимчалар туфайли масалаларнинг илгариги номерланишини сақлашнинг имкони бўлмади.

Ўз тақризи билан китобнинг мазмунини яхшилашга қаратилган фойдали маслаҳатлари учун Ленинград университетининг олий математика кафедраси мудири физика - математика фанлари доктори проф. Н. М. Матвеевга, Л[illegible]д топография техникумининг математика ўқитувчиси В. В. Дроздецкийга, Тўхтагул ГЭСининг (Қирғизистон [illegible]) эксковатор машинисти, ҳаваскор математик А. А. Ткаличевга, шунингдек, қўлланманинг сифатини яхшилашга қаратилган ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган барча шахсларга автор ўзининг чуқур миннатдорчилигини билдиради.

Автор.

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-БОБ

КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ

Бу бобдаги масалаларни ечишга киришаётган ўқувчи нуқтани унинг координаталари бўйича ясашни ва берилган нуқтанинг координаталарини топишни билиши керак. Масалалардаги «нуқтани топинг» деган сўз бу нуқтанинг координаталарини топишни билдиради.

1-§. Текисликдаги икки нуқта орасидаги масофа

Текисликда олинган $A(x_A;\ y_A)$ ва $B(x_B;\ y_B)$ нуқталар орасидаги масофа

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \tag{1.1}$$

формула бўйича ҳисобланади, бу ерда d — бу нуқталарни туташтирувчи кесманинг узунлиги.

Агар кесманинг учларидан бири координаталар боши билан устма-уст тушса, иккинчиси эса $M(x_M;\ y_M)$ координаталарга эга бўлса, (1.1) формула

$$OM = \sqrt{x^2_M + y^2_M} \tag{1.2}$$

кўринишга келади.

I. Икки нуқта орасидаги масофани бу нуқталарнинг берилган координаталари бўйича ҳисоблаш

1. $A(2;\ -5)$ ва $B(-4;\ 3)$ нуқталарни туташтирувчи кесманинг узунлигини топинг (1-расм).

Ечилиши. Масала шартида $x_A = 2$; $x_B = -4$; $y_A = -5$ ва $y_B = 3$ берилган. d ни топинг.

(1.1) формулани қўлланиб топамиз:

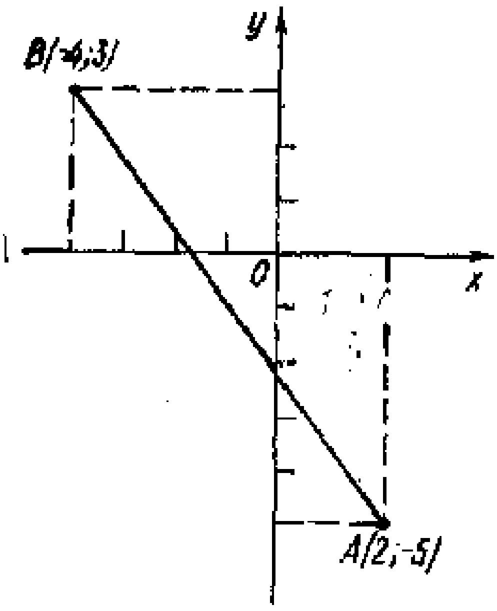
$$d = AB = \sqrt{[2-(-4)]^2+(-5-3)^2}=10.$$

2. 1) $A(-1;\ 2)$ ва $B(2;\ 6)$; 2) $M(2;\ -2)$ ва $N(-4;\ 1)$ нуқталарни туташтирувчи кесманинг узунлиги нимага тенг?

3. Координаталар бошини 1) $A(3;\ -4)$; 2) $M(-5;\ -12)$ нуқталар билан туташтирувчи кесманинг узунлигини топинг.

4. Учлари 1) $A(4;\ 0)$, $B(7;\ 4)$ ва $C(-4;\ 6)$;

2) $A(6;\ 7)$, $B(3;\ 3)$ ва $C(1;\ -5)$ нуқталардан иборат бўлган учбурчакнинг периметрини ҳисобланг.



1- расм.

II. Берилган учта нуқтадан тенг узоқлашган нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш

5. $A(7;\ -1)$, $B(-2;\ 2)$ ва $C(-1;\ -5)$ нуқталардан бир хил узоқлашган O_1 нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартидан $O_1A=O_1B=O_1C$ эканлиги келиб чиқади. Изланаётган O_1 нуқта $(a;\ b)$ координаталарга эга бўлсин. (1.1) формула бўйича топамиз:

$$O_1A=\sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2}\ ;$$
$$O_1B=\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}\ ;$$
$$O_1C=\sqrt{(a+1)^2+(b+5)^2}.$$

Ушбу тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases}\sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}\\ \sqrt{(a-7)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b+5)^2}.\end{cases}$$

Тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини квадратга кўтаргандан сўнг:

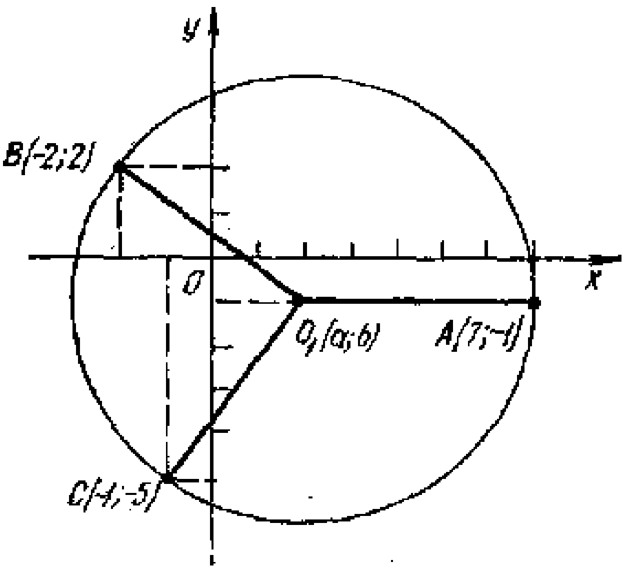
$$\begin{cases}(a-7)^2+(b+1)^2=(a+2)^2+(b-2)^2,\\ (a-7)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+(b+5)^2.\end{cases}$$

Соддалаштирсак,

$$\begin{cases}-3a+b+7=0,\\ -2a-b+3=0\end{cases}$$

система ҳосил бўлади, бу системани ечиб, $a = 2$; $b = -1$ ни топамиз.

$O_1(2; -1)$ нуқта бир нуқтада ётмайдиган берилган учта нуқтадан тенг узоқлашган. Бу нуқта берилган учта нуқта орқали ўтувчи айлананинг марказидир (2- расм).



2- расм.

6. $A(10;\ 7)$, $B(-4;\ -7)$ ва $C(12;\ -7)$ нуқталардан тенг узоқлашган O_1 нуқтанинг координаталарини топинг.

7. $A(-1;\ 9)$, $B(-8;\ 2)$, $C(9;\ 9)$ нуқталар орқали ўтувчи айлананинг марказини ва радиусининг узунлигини топинг.

III. Абсциссалар (ординаталар) ўқида ётувчи ва берилган нуқтадан берилган масофада ётувчи *нуқтанинг абсциссасини (ординатасини) ҳисоблаш*

8. $B(-5;\ 6)$ нуқтадан Ox ўқда ётувчи A нуқтагача бўлган масофа 10 га тенг. A нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартидан A нуқтанинг ординатаси 0 га тенглиги ва $AB = 10$ эканлиги келиб чиқади.

A нуқтанинг абсциссасини a билан белгилаб, $A(a;\ 0)$ деб ёзамиз. (1.1) формула бўйича топамиз:

$$AB = \sqrt{(a+5)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(a+5)^2 + 36}.$$

$\sqrt{(a+5)^2 + 36} = 10$ тенгламани ҳосил қиламиз. Уни соддалаштирсак,

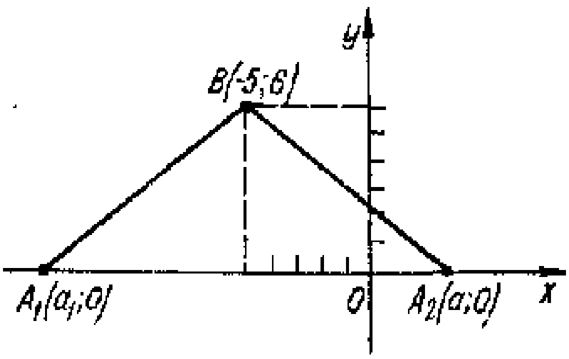
$$a^2 + 10a - 39 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари: $a_1 = -13$; $a_2 = 3$.

$A_1(-13;\ 0)$ ва $A_2(3;\ 0)$ нуқталарни ҳосил қиламиз.

Текшириш:

$$A_1B = \sqrt{(-13+5)^2 + (0-6)^2} = 10,$$
$$A_2B = \sqrt{(3+5)^2 + (0-6)^2} = 10.$$



3- расм.

Ҳар иккала нуқта масала шартини қаноатлантиради (3-расм).

9. M нуқта Ox ўқда ётади. M нуқтадан N (10; 5) нуқтагача бўлган масофа 13 га тенг. M нуқтани топинг.

10. B нуқта Oy ўқда ётади. B нуқтадан A (3; —1) нуқтагача бўлган масофа 5 га тенг. B нуқтани топинг.

IV. Абсциссалар (ординаталар) ўқида ётувчи ва берилган иккита нуқтадан тенг узоқлашган нуқтанинг абсциссасини (ординатасини) ҳисоблаш

11. Oy ўқда A (6; 12) ва B (—8; 10) нуқталардан тенг узоқлашган нуқтани топинг.

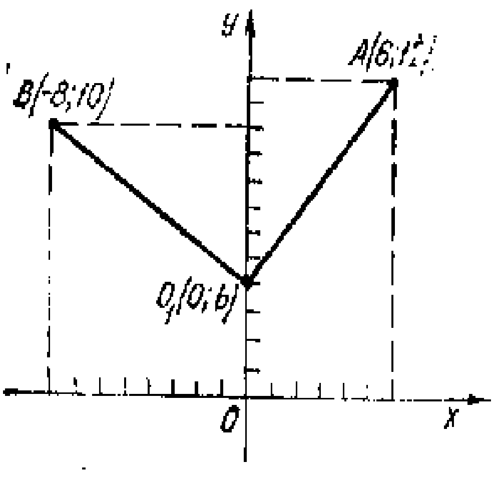
Ечилиши. Oy ўқда ётувчи изланаётган нуқтанинг координаталари $O_1(0;\ b)$ (Oy ўқда ётувчи нуқтанинг абсциссаси 0 га тенг) бўлсин.

Масала шартидан $O_1A = O_1B$ эканлиги келиб чиқади. (1.1) формула бўйича топамиз:

$$O_1A = \sqrt{(0-6)^2 + (b-12)^2} = \sqrt{36 + (b-12)^2};$$

$$O_1B = \sqrt{(0+8)^2 + (b-10)^2} = \sqrt{64 + (b-10)^2}.$$

Ушбу тенгламага эгамиз: $\sqrt{36 + (b-12)^2} = \sqrt{64 + (b-10)^2}$ ёки $36 + (b-12)^2 = 64 + (b-10)^2$. Соддалаштиришлардан сўнг, $b - 4 = 0$, $b = 4$ ни топамиз. Изланаётган нуқта $O_1(O;\ 4)$ (4-расм).



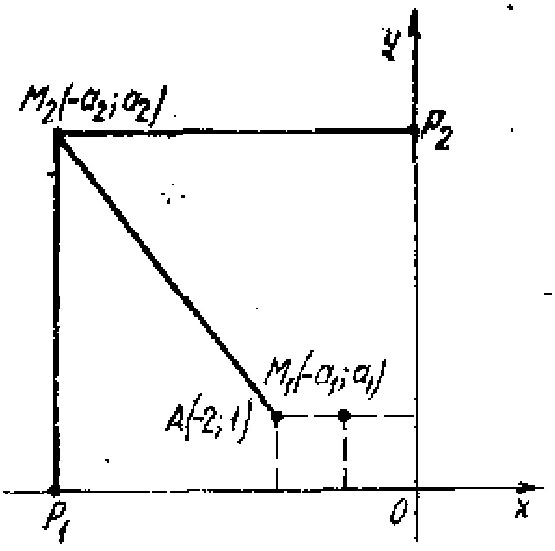
4- расм.

12. Oy ўқда 1) A (—4; 0) ва B (—3; —7); 2) A (—3; —1) ва B(6; 2) нуқталардан тенг узоқлашган нуқтанинг координаталарини ҳисобланг.

13. Ox ўқда 1) A (5; 13) ва B (—12; —4); 2) A (0; 6) ва B (2; —4) нуқталардан тенг узоқлашган нуқтани топинг.

V. Координата ўқларидан ва берилган нуқтадан тенг узоқлашган нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш

14. Координата ўқларидан ва $A(-2;\ 1)$ нуқтадан тенг узоқлашган M нуқтани топинг.



5- расм.

Ечилиши. Изланаётган M нуқта $A(-2;\ 1)$ нуқта каби иккинчи координата бурчагида ётади, чунки у A, P_1 ва P_2 нуқталардан тенг узоқлашган (5-расм), M нуқтадан координата ўқларигача бўлган масофалар тенг, демак, унинг координаталари $(-a;\ a)$ бўлади, бу ерда $a > 0$.

Масала шартидан $MA = MP_1 = MP_2$, $MP_1 = a$; $MP_2 = |-a|$, яъни $|-a| = a$ эканлиги келиб чиқади.

(1.1) формула бўйича топамиз:

$$MA = \sqrt{(-a+2)^2 + (a-1)^2}.$$

Ушбу тенгламани тузамиз:

$$\sqrt{(-a+2)^2 + (a-1)^2} = a.$$

Квадратга кўтариш ва соддалаштиришдан сўнг,

$$a^2 - 6a + 5 = 0$$

га эга бўламиз.

Тенгламани ечиб, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ ни топамиз.

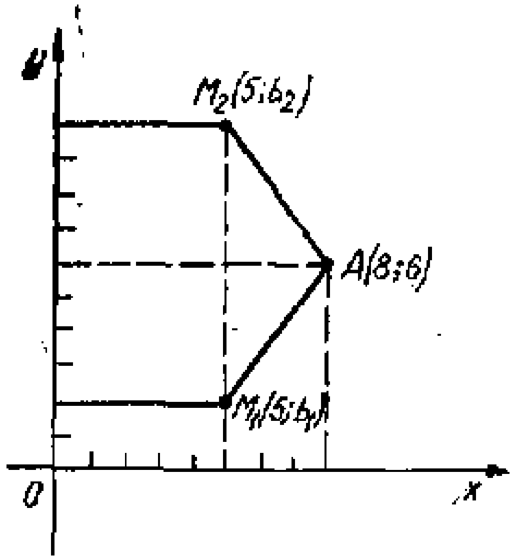
$M_1(-1;\ 1)$ ва $M_2(-5;\ 5)$ нуқталарни ҳосил қиламиз, бу нуқталар масала шартини қаноатлантиради.

15. Координата ўқларидан ва 1) $A(-8;\ -1)$; 2) $A(4;\ 2)$ нуқтадан тенг узоқлашган M нуқтанинг координаталарини ҳисобланг.

VI. Абсциссалар (ординаталар) ўқидан ва берилган нуқтадан бир хил масофага узоқлашган нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш

16. Ординаталар ўқигача ва $A(8;\ 6)$ нуқтагача бўлган масофаси 5 га тенг бўлган M нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартидан $MA = 5$ ва M нуқтанинг абсциссаси 5 га тенглиги келиб чиқади. M нуқтанинг орди-



6- расм.

натаси b га тенг бўлсин, у ҳолда $M(5;\ b)$ (6- расм). (1.1) формула бўйича қуйидагига эгамиз:

$$MA = \sqrt{(5-8)^2 + (b-6)^2}.$$

Ушбу тенгламани тузамиз:

$$\sqrt{(5-8)^2 + (b-6)^2} = 5$$

Уни соддалаштирсак,

$$b^2 - 12b + 20 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари: $b_1 = 2$ ва $b_2 = 10$. Демак, масала шартини қаноатлантирувчи иккита нуқтага эгамиз: $M_1(5;\ 2)$ ва $M_2(5;\ 10)$.

17. Абсциссалар ўқигача ва $A(1;\ 2)$ нуқтагача бўлган масофаси 10 га тенг бўлган M нуқтанинг координаталарини ҳисобланг.

18. Ординаталар ўқигача ва $M(1;\ 3)$ нуқтагача бўлган масофаси 13 га тенг бўлган A нуқтани топинг.

2- §. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Кесмани берилган нисбатда бўлувчи нуқтанинг координаталари ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \qquad (1.3)$$

бу ерда $(x_A;\ y_A)$ ва $(x_B;\ y_B)$ берилган AB кесма учларининг координаталари; $\lambda = \frac{AC}{CB}$ эса AB кесма $C(x_C;\ y_C)$ нуқта билан бўлинадиган нисбат.

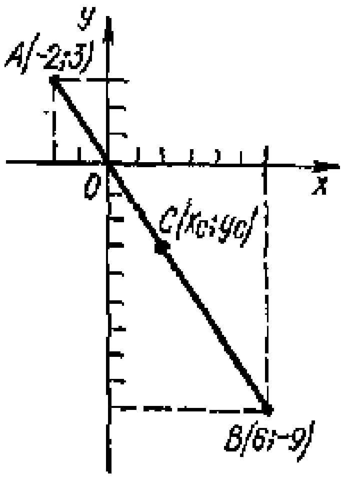
Агар C нуқта AB кесмани тенг иккига бўлса, у ҳолда $\lambda = 1$ *бўлиб, (1.3) формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:*

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}. \qquad (1.4)$$

Масалаларда λ одатда кесмалар узунликларининг нисбати каби берилишини, шу сабабли нисбатнинг олдинги ва кейинги ҳадлари кесмалар *узунликларини берилган ўлчов* бирлигида ифодаламаслигини назарда тутиш керак. Масалан, $AC = 12$ см; $CB = 16$ см:

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{12\ \text{см}}{16\ \text{см}} = \frac{3}{4}.$$

I. Кесма ўртасининг координаталарини унинг учларини координаталари бўйича ҳисоблаш



7- расм.

19. $A(-2;\ 3)$ ва $B(6;\ -9)$ нуқталар AB кесманинг учлари. AB кесманинг ўртаси бўлган C нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = -2$; $x_B = 6$; $y_A = 3$ ва $y_B = -9$. $C(x_C;\ y_C)$ ни топинг.

(1.4) формулани қўлланиб топамиз:

$$x_C = \frac{-2+6}{2} = 2, \quad y_C = \frac{3+(-9)}{2} = -3.$$

AB кесманинг ўртаси $C\ (2;\ -3)$ нуқта бўлади (7- расм).

20. 1) $A\ (5;\ -4)$ ва $B\ (-1;\ 2)$; 2) $A\ (6;\ -3)$ ва $(-2;\ -7)$ нуқталарни туташтирувчи кесманинг ўртаси бўлган C нуқтанинг координаталарини ҳисобланг.

II. Кесма учининг координаталарини унинг ўртаси ва иккинчи учининг координаталари бўйича ҳисоблаш

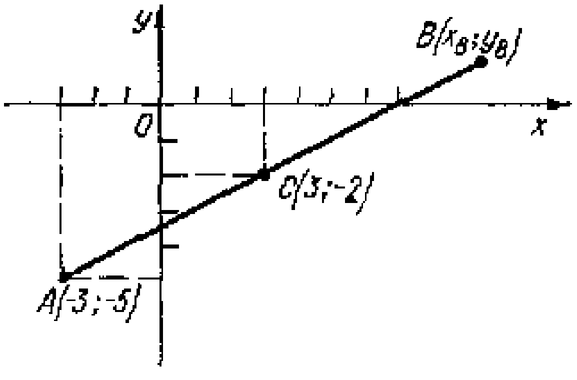
21. Кесманинг учи $A\ (-3;\ -5)$ нуқтадан, унинг ўртаси эса $C\ (3;\ -2)$ нуқтадан иборат. Кесманинг иккинчи учи —B нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = -3$; $y_A = -5$; $x_C = 3$ ва $y_C = -2$.

Бу қийматларни (1.4) формулага қўйиб, топамиз:

$$3 = \frac{-3+x_B}{3},$$

$$-2 = \frac{-5+y_B}{2}.$$



Биринчи тенгламани x_B га, иккинчисини y_B га нисбатан ечиб, $x_B = 9$; $y_B = 1$ ни топамиз, яъни изланаётган нуқта $B\ (9;1)$ бўлади (8- расм).

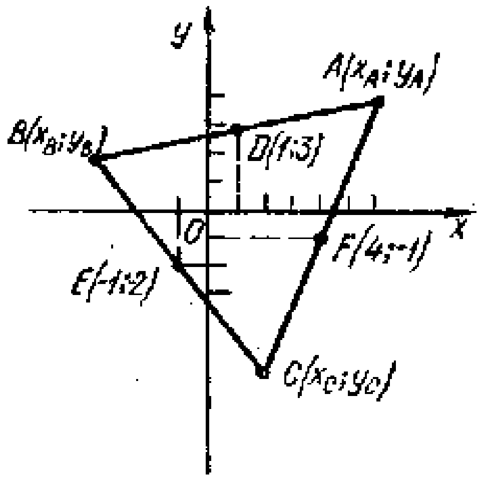
8- расм.

22. Кесманинг учи A (8; —5) нуқтадан, унинг ўртаси C (5;— 2) нуқтадан иборат. Кесманинг иккинчи учи — B нуқтани топинг.

23. Кесманинг учи B(— 3; — 2) ва унинг ўртаси C (—2; 3) бўйича кесманинг иккинчи учи — A нуқтани топинг.

III. Учбурчак учларининг координаталарини унинг томонлари ўрталарининг координаталари бўйича топиш

24. Учбурчак томонларининг ўрталари D (1; 3), E (—1;—2) ва F (4; —1) нуқталардан иборат. Учбурчакнинг учларини топинг.



9- расм.

Ечилиши. A, B ва C нуқталар учбурчакнинг учлари, D нуқта AB томонининг, E нуқта BC томонининг ва F нуқта AC томонининг ўртаси бўлсин (9- расм). A, B ва C нуқталарнинг координаталарини топиш талаб этилади.

Учбурчакнинг учларини мос равишда A $(x_A;\ y_A)$, B $(x_B;\ y_B)$. ва C $(x_C;\ \ y_C)$ билан белгилаб ва D, E ҳамда F нуқталарнинг координаталарини билган ҳолда (I.4) формулалар бўйича ушбу системаларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x_A + x_B}{2}, \\ -1 = \dfrac{x_B - x_C}{2}, \\ 4 = \dfrac{x_A + x_C}{2} \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} 3 = \dfrac{y_A + y_B}{2}, \\ -2 = \dfrac{y_B + y_C}{2}, \\ -1 = \dfrac{y_A + y_C}{2}. \end{cases}$$

Тенгламаларни бутун кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2, \\ x_B + x_C = -2, \\ x_A + x_C = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_A + y_B = 6, \\ y_B + y_C = -4, \\ y_A + y_C = -2. \end{cases}$$

Тенгламалар системасини ечиб (ҳисоблашларни мустақил бажаришни тавсия этамиз),

$$x_A = 6,\ x_B = -4,\ x_C = 2$$

ва

$$y_A = 4,\ y_B = 2,\quad y_C = -6.$$

ни ҳосил қиламиз.

Учбурчакнинг учлари $A(6;\ 4)$, $B(-4;\ 2)$ ва $C(2;\ -6)$ нуқталардан иборат.

25. Учбурчак томонлари ўрталарининг координаталари берилган: (2; 1), (0; —4) ва (—4; —1). Учбурчакнинг учларини топинг.

IV. Учларининг координаталари билан берилган кесмани берилган нисбатда бўлувчи нуқталарнинг координаталарини ҳисоблаш

26. C нуқта AB кесмани (A дан B га қараб) 3 : 5 каби нисбатда бўлади. Кесманинг учлари $A(2;\ 3)$ ва $B(10;\ 11)$ нуқталардан иборат. C нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = 2,\ x_B = 10;\ y_A = 3,\ y_B = 11;\ \lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{5}$. $C(x_C;\ y_C)$ ни топиш керак (10- расм).

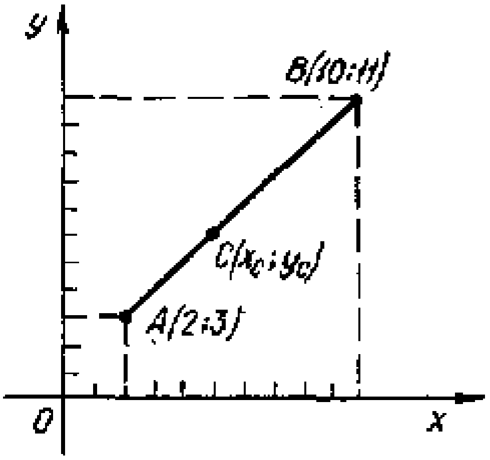
(1.3) формулалар бўйича топамиз:

$$x_C = \frac{2 + \frac{3}{5}\cdot 10}{1 + \frac{3}{5}} = 5,\ y_C = \frac{3 + \frac{3}{5}\cdot 11}{1 + \frac{3}{5}} = 6,\quad C(5,\ 6).$$

Текшириш:

$$AC = 3\sqrt{2},\ CB = 5\sqrt{2},\ \lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5}.$$

Изоҳ. Агар масала шартида кесманинг берилган нисбатда бўлинишини A дан B га қараб бажарилиши кўрсатилмаганда эди, у ҳолда масала иккита ечимга эга бўлар эди. Иккинчи ечим кесмани B дан A га қараб бўлиш билан топилар эди.



10- расм.

27. Учлари $A(-3;\ -2)$ ва $B(9;\ 6)$ бўлган кесма C нуқта билан (B дан A га қараб) 1 : 3 каби нисбатда бўлинади. C нуқтани топинг.

Изоҳ. Биринчи нуқта деб B олинади, шу сабабли (1.3) формулалар бу масала учун ушбу кўринишда бўлади:

$$x_C = \frac{x_B + \lambda x_A}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_B + \lambda y_A}{1+\lambda}.$$

28. Учлари A (3; —2) ва B (10; —9) бўлган кесма C нуқта билан 2 : 5 каби нисбатда бўлинади. C нуқтани топинг.

29. Учлари A (—11; 1) ва B (9; 11) бўлган кесма 2 : 3 : 5 каби нисбатда (A дан B га қараб) бўлинган. Бўлиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. A дан B га қараб бўлиниш нуқталарини C ва D билан белгилаймиз. Қуйидагилар масала шартида берилган: $x_A = -11$, $x_B = 9$, $y_A = 1$, $y_B = 11$ ва $AC : CD : DB = 2 : 3 : 5$. $C(x_C;\ y_C)$ ва $D(x_D;\ y_D)$ ларни топиш керак.

C нуқта AB кесмани

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{2}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

нисбатда бўлади.

(1.3) формулаларга асосан топамиз:

$$x_C = \frac{-11 + \frac{1}{4}\cdot 9}{1+\frac{1}{4}} = -7;$$

$$y_C = \frac{1 + \frac{1}{4}\cdot 11}{1+\frac{1}{4}} = 3; \quad C(-7;\ 3).$$

D нуқта AB кесманинг ўртаси. (1.4) формулаларни қўллаб топамиз:

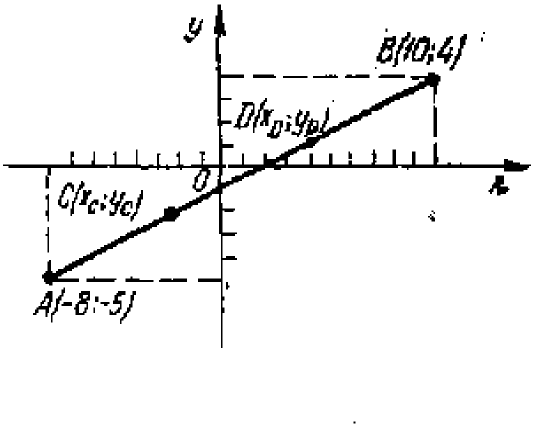
$$x_D = \frac{-11+9}{2} = -1; \quad y_D = \frac{1+11}{2} = 6; \quad D(-1;\ 6).$$

30. Учлари A(—5; —2) ва B(4; 2,5) бўлган кесма A дан B га қараб 3 : 4 : 2 каби нисбатда бўлинган. Бўлиш нуқталарини топинг.

V. Кесманинг бўлиниш нуқталари координаталарини унинг учларини координаталари ва бу кесма бўлинган бўлаклар сони бўйича топиш

31. Кесманинг учлари A (—8; —5) ва B (10; 4) нуқталардан иборат. Бу кесмани учта тенг бўлакка бўлувчи C ва D нуқталарни топинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = -8$, $x_B = 10$, $y_A = -5$, $y_B = 4$ ва $n = 3$. $C(x_C; y_C)$ ва $D(x_D; y_D)$ ни қидириш керак. Дастлаб AB кесмани $\lambda = \frac{1}{2}$ нисбатда бўлувчи C нуқтани топамиз. Бўлишни A дан B га қараб бажарамиз. (1.3) формулага кўра:



11- расм.

$$x_C = \frac{-8+\frac{1}{2}\cdot 10}{1+\frac{1}{2}} = -2, \quad y_C = \frac{-5+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}} = -2;$$

$$C\,(-2; -2).$$

CB кесмани бўлиш $1:1$ нисбатда бўлганлиги учун (1.4) формулалардан фойдаланамиз:

$$x_D = \frac{-2+10}{2} = 4, \quad y_D = \frac{-2+4}{2} = 1; \quad D\,(4;\ 1).$$

Бўлиниш нуқталари: $C\,(-2;\ -2)$ ва $D\,(4;\ 1)$.

Изоҳ. D нуқтани AB кесмани $2:1$ каби нисбатда бўлиб ҳам топиш мумкин эди, у ҳолда яна (1.3) формулаларни қўлланиш керак бўлар эди.

32. AB кесмани учта тенг бўлакка бўлувчи нуқталарни топинг. Кесманинг учлари: $A(3;\ -3)$ ва $B(-3;\ 9)$.

33. Кесманинг учлари $A\ (5;\ -6)$ ва $B(-5;\ 9)$ нуқталардан иборат. Бу кесмани бешта тенг бўлакка бўлувчи нуқталарнинг координаталарини топинг.

Ечилиши. A дан B га қараб кетма-кет бўлиш нуқталарини $C\,(x_C;\ y_C)$, $D(x_D;\ y_D)$, $E\,(x_E;\ y_E)$ ва $F\,(x_F;\ y_F)$ билан белгилаймиз. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = 5$, $x_B = -5$, $y_A = -6$, $y_B = 9$, $n = 5$. AB кесмани $\lambda = \frac{1}{4}$ нисбатда бўлувчи C нуқтани (1.3) формулалар бўйича топамиз.

$$x_C = \frac{5+\frac{1}{4}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{4}} = 3,$$

$$y_C = \frac{-6+\frac{1}{4}\cdot 9}{1+\frac{1}{4}} = -3;\ C(3;\ -3).$$

AB кесмани $\lambda = \frac{2}{3}$ нисбатда бўлувчи D нуқтани топамиз:

$$x_D = \frac{5+\frac{2}{3}\cdot(-5)}{1+\frac{2}{3}} = 1,\quad y_D = \frac{-6+\frac{2}{3}\cdot 9}{1+\frac{2}{3}} = 0;\ D(1;\ 0).$$

AB кесмани $\lambda = \frac{3}{2}$ нисбатда бўлувчи E нуқтани топамиз:

$$x_E = \frac{5+\frac{3}{2}\cdot(-5)}{1+\frac{3}{2}} = -1,\ y_E = \frac{-6+\frac{3}{2}\cdot 9}{1+\frac{3}{2}} = 3;\ E(-1;\ 3).$$

AB кесмани $\lambda = \frac{4}{1} = 4$ нисбатда бўлувчи F нуқтани топамиз:

$$x_F = \frac{5+4\cdot(-5)}{1+4} = -3,\ y_F = \frac{-6+4\cdot 9}{1+4} = 6;\qquad F(-3;\ 6).$$

Бўлиш нуқталари: $C(3;\ -3)$, $D(1;\ 0)$, $E(-1;\ 3)$ ва $F(-3;\ 6)$.

34. Кесманинг учлари $M(-7;\ -2)$ ва $N(13;\ 3)$ нуқталардан иборат.

Бу кесмани бешта тенг бўлакка бўлувчи нуқталарнинг координаталарини топинг.

VI. Кесма учининг координаталарини унинг иккинчи учини координаталари ва у берилган нуқта орқали бўлинадиган нисбат ёрдамида ҳисоблаш

35. $C(3;\ 5)$ нуқта AB кесмани $AC:CB = 3:4$ каби нисбатда бўлади.

Агар кесманинг охири $B(-1;\ 1)$ нуқта бўлса, унинг учи A нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартида $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{4}$, $x_C = 3$, $y_C = 5$, $x_B = -1$, $y_B = 1$ берилган. $A(x_A; y_A)$ ни топиш керак. Бу қийматларни (1.3) формулаларга қўямиз:

$$3 = \frac{x_A + \frac{3}{4}\cdot(-1)}{1+\frac{3}{4}}, \quad 5 = \frac{y_A + \frac{3}{4}\cdot 1}{1+\frac{3}{4}}.$$

Тенгламаларнинг биринчисини x_A га, иккинчисини y_A га нисбатан ечиб, $x_A = 6$, $y_A = 8$ ни топамиз. Кесманинг учи $A(6; 8)$ нуқта бўлади.

36. $C(-3; 1{,}5)$ нуқта AB кесмани $AC:CB = 3:2$ каби нисбатда бўлади. Агар кесманинг охири $B(7; -3{,}5)$ нуқта бўлса, унинг учи A нуқтани топинг.

37. $C(-2; 1)$ нуқта AB кесмани $AC:CB = 2:1$ каби нисбатда бўлади. Агар кесманинг боши $A(-10; 5)$ нуқта бўлса, унинг охири B нуқтани топинг.

VII. Кесманинг давомида ётувчи нуқтанинг координаталарини бу кесма учларининг координаталари ва берилган кесмани унинг изланаётган нуқтагача давоми бўлган кесмага нисбати бўйича топиш

38. AB кесма $A(-9; -3)$ ва $B(1; 2)$ нуқталар билан берилган. $AB:BC = 5:3$ бўлишлиги учун AB кесмани қандай C нуқтагача давом эттириш керак?

Ечилиши. Масала шартида қуйидаги берилган: $x_A = -9$, $x_B = 1$, $y_A = -3$, $y_B = 2$, $\lambda = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{3}$. $C(x_C; y_C)$ ни топиш керак.

AC кесмани берилган нисбатда бўлувчи $B(1; 2)$ нуқта учун (1.3) тенгламалар ушбу кўринишда ёзилади:

$$1 = \frac{-9+\frac{5}{3}x_C}{1+\frac{5}{3}}, \quad 2 = \frac{-3+\frac{5}{3}y_C}{1+\frac{5}{3}}.$$

Бу тенгламаларни x_C ва y_C га нисбатан ечиб, $x_C = 7$, $y_C = 5$; $C(7; 5)$ ни топамиз.

39. Кесма $A(-4; 7)$ ва $B(-3; 5)$ нуқталар билан берилган. AB кесманинг давомида шундай C нуқтани топингки, $AB:BC = 1:7$ бўлсин.

2—106

40. Кесма $A(-5; -2)$ ва $B(-1; 0)$ нуқталар билан берилган. $AB:BC=2:5$ бўлишлиги учун кесмани қандай C нуқтагача давом эттириш керак?

VIII. Кесманинг давомида ётувчи нуқтанинг координаталарини бу кесманинг учларини координаталари ва берилган кесма билан изланаётган нуқтагача давом эттирилган кесманинг нисбати бўйича топиш

41. Кесма $A(4; 6)$ ва $B(1; 3)$ нуқталар билан берилган. Узунлиги AB кесманинг узунлигидан уч марта катта бўлган AC кесма ҳосил қилиш учун AB кесмани A дан B га томон қандай C нуқтагача давом эттириш керак?

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган:

$$x_A=4,\ x_B=1,\ y_A=6,\ y_B=3,\ AC=3AB.\ C(x_C; y_C)$$

ни топиш керак.

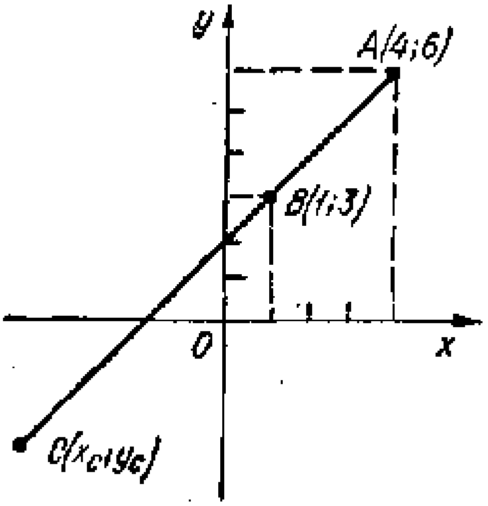
B нуқта AC кесмани

$$\lambda=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{AC-AB}=\frac{AB}{3AB-AB}=\frac{AB}{2AB}=\frac{1}{2}$$

нисбатда бўлади (12- расм).

(1.3) формулалар бўйича $B(1; 3)$ нуқта учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$1=\frac{4+\frac{1}{2}x_C}{1+\frac{1}{2}},\ 3=\frac{6+\frac{1}{2}y_C}{1+\frac{1}{2}}.$$



12- расм.

Биринчи тенгламани x_C га, иккинчисини y_C га нисбатан ечамиз:

$$x_C=-5,\ y_C=-3;\ C(-5; -3).$$

42. Кесма $A(-4; 7)$ ва $B(0; -1)$ нуқталар билан берилган. Узунлиги AB кесманинг узунлигидан бир ярим марта катта бўлган AC кесма ҳосил қилиш учун берилган кесмани A дан B га томон қандай C нуқтагача давом эттириш керак?

43. Кесма $M(-3; -6)$ ва $N(1; -3)$ нуқталар билан берилган. Узунлиги MN кесманинг узунлигидан беш марта катта бўлган MP кесма ҳосил қилиш учун берилган кесмани M дан N га томон қандай P нуқтагача давом эттириш керак?

IX. Кесма учининг координаталарини унинг иккинчи учининг координаталари, кесма бўлинган бўлаклар сони ва бўлиш нуқталаридан бирининг координаталари бўйича ҳисоблаш

44. AB кесма бешта тенг бўлакка бўлинган. Кесманинг бир учи $A(8 ;6)$ нуқтада, иккинчи бўлиш нуқтаси (A дан B га томон) $D(2; 4)$. B нуқтани топинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A=8$, $y_A=6$, $x_D=2$, $y_D=4$, D нуқта A дан B га қараб ҳисобланганда иккинчи бўлиш нуқтаси. $B(x_B; y_B)$ ни топиш керак. D нуқта кесмани (A дан B га қараб)

$$\lambda=\frac{AD}{DB}=\frac{2}{5-2}=\frac{2}{3}$$

нисбатда бўлади.

$D(2; 4)$ нуқта учун (1.3) формулаларни татбиқ этиб топамиз:

$$2=\frac{8+\frac{2}{3}x_B}{1+\frac{2}{3}},\ 4=\frac{6+\frac{2}{3}y_B}{1+\frac{2}{3}}.$$

Бу тенгламаларни x_B ва y_B га нисбатан ечиб,

$$x_B=-7,\ y_B=1;\ B(-7; 1)$$

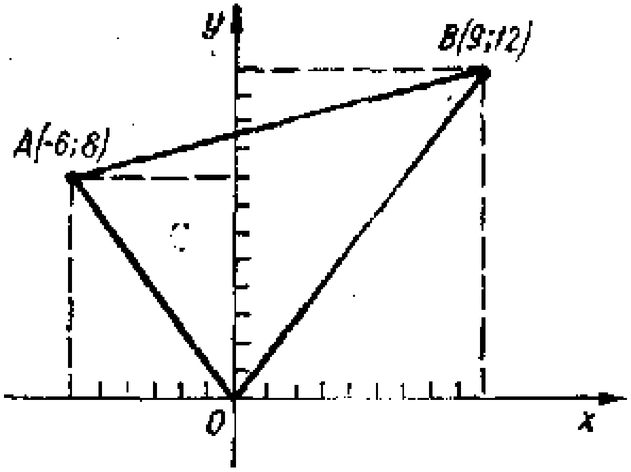
ни топамиз.

45. MN кесма учта тенг бўлакка бўлинган. Кесманинг бир учи $M(-3; -5)$ нуқта, унга энг яқин бўлган бўлиш нуқтаси $P(-2; -2)$. N нуқтани топинг.

46. AB кесма еттита тенг бўлакка бўлинган. Кесманинг учларидан бири $B(10; 5)$ нуқта, A нуқтага энг яқин нуқта бўлиш нуқтаси $C(-8; -1)$ дир. A нуқтани топинг.

X. Берилган иккита нуқта орасидаги кесмани бу нуқталардан координаталар бошигача бўлган масофалар қандай нисбатда бўлса, шундай нисбатда бўлувчи нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш

47. $A(-6; 8)$ ва $B(9; 12)$ нуқталар орасидаги кесмани бу нуқталардан координаталар бошигача бўлган масофалар қандай нисбатда бўлса, шундай нисбатда (A дан B га қараб) бўлинг.



13- расм.

Ечилиши. A ва B нуқталардан координаталар бошигача бўлган масофани топамиз (13- расм):

$$AO=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10,$$
$$BO=\sqrt{9^2+12^2}=15;$$
$$\lambda=\frac{AO}{BO}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

Изланаётган нуқта $M(x_M;\ y_M)$ бўлсин. (1.3) формулалар бўйича топамиз:

$$x_M=\frac{-6+\frac{2}{3}\cdot 9}{1+\frac{2}{3}}=0,\quad y_M=\frac{8+\frac{2}{3}\cdot 12}{1+\frac{2}{3}}=9{,}6;$$

$$M(0;\ 9{,}6).$$

48. $A(-16;\ 12)$ ва $B(6;\ -8)$ нуқталар орасидаги кесмани бу нуқталардан координаталар бошигача бўлган масофалар қандай нисбатда бўлса, шундай нисбатда (A дан B га қараб) бўлинг.

XI. Учбурчак медианалари кесишиш нуқтасининг координаталарини учбурчак учларининг координаталари бўйича топиш

49. Учбурчакнинг учлари берилган: $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$ ва $C(x_C;\ y_C)$. Бу учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечилиши. Геометрия курсидан маълумки, учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишиб, ҳар бир медиана бу нуқтада учбурчакнинг тегишли учидан ҳисоблангандa 2:1 каби нисбатда бўлинади.

BC томоннинг ўртаси бўлган D нуқтани (1.4) формулаларга кўра топамиз:

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2},\quad y_D=\frac{y_B+y_C}{2}.$$

Медианалар кесишадиган M нуқтани (1.3) формулалар бўйича топамиз, бунинг учун AD медианани (A дан D га қараб) $\lambda=2:1=2$ каби нисбатда бўламиз:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{x_A + 2 \cdot \frac{x_B + x_C}{2}}{1+2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};$$

$$x_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{y_A + 2 \cdot \frac{y_B + y_C}{2}}{1+2} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Учбурчак медианалари кесишиш нуқтасининг координаталари учбурчак учларининг бир хил исмли координаталарининг ўрта арифметигига тенг:

$$M\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

50. Агар учбурчакнинг учлари 1) $A(7; —4)$, $B(—1; 8)$ ва $C(12; —1)$; 2) $A(—4; 2)$, $B(2; 6)$ ва $C(0; —2)$ нуқталар бўлса, учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасини топинг.

XII. Бир текисликда ётган моддий нуқталар системаси оғирлик марказининг координаталарини ҳисоблаш

51. Учлари $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ ва $C(x_C; y_C)$ бўлган бир жинсли учбурчак пластинканинг оғирлик марказини топинг (пластинканинг қалинлигини ҳисобга олманг).

Ечилиши. Учбурчакнинг оғирлик маркази унинг медианалари кесишган нуқтададир. Бинобарин, оғирлик марказининг координаталари қуйидагича бўлади:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \text{ (49- масалага қаранг).}$$

Бир жинсли учбурчак пластинканинг оғирлик маркази учбурчак учларининг бир хил исмли координаталарининг ўрта арифметигига тенг.

52. Учлари $A(5; 4)$, $B(—3; 1)$ ва $C(4; —2)$ нуқталар бўлган учбурчак шаклидаги бир жинсли пластинканинг оғирлик марказини топинг (пластинканинг қалинлигини ҳисобга олманг).

53. Массалари m_A ва m_B бўлган $A(x_A; y_A)$ ва $B(x_B; y_B)$ моддий нуқталардан иборат системанинг массалар марказини топинг.

Ечилиши. Массаларнинг изланаётган маркази AB кесмада, уни массаларга тескари пропорционал бўлакларга бўлувчи N нуқтада ётади, яъни

$$\frac{AN}{NB}=\frac{m_B}{m_A}, \quad \lambda=\frac{AN}{NB}=\frac{m_B}{m_A}.$$

(1.3) формулалар бўйича N нуқтани топамиз:

$$x_N=\frac{x_A+\frac{m_B}{m_A}x_B}{1+\frac{m_B}{m_A}}=\frac{m_Ax_A+m_Bx_B}{m_A+m_B};$$

$$y_N=\frac{y_A+\frac{m_B}{m_A}y_b}{1+\frac{m_B}{m_A}}=\frac{m_Ay_A+m_By_B}{m_A+m_B}.$$

Агар оғирлик кучлари P_A ва P_B ҳамда уларнинг қўйилиш нуқталари $A(x_A;\ y_A)$ ва $B(x_B;\ y_B)$ берилган бўлса, у ҳолда оғирлик маркази (N нуқта) ҳам (1.3) формулалар бўйича топилади:

$$\lambda=\frac{AN}{NB}=\frac{P_B}{P_A};$$

$$x_N=\frac{x_A+\frac{P_B}{P_A}x_B}{1+\frac{P_B}{P_A}}=\frac{P_A\,x_A+P_Bx_B}{P_A+P_B};$$

$$y_N=\frac{y_A+\frac{P_B}{P_A}y_B}{1+\frac{P_B}{P_A}}=\frac{P_A\,y_A+P_By_B}{P_A+P_B}.$$

54. $A(-4;\ 0)$ нуқтада 9 кг масса, $B(4;\ 12)$ нуқтада 3 кг масса тўпланган. Бу системанинг массалар марказини топинг.

55. $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$ ва $C(x_C;\ y_C)$ нуқталарда m_A, m_B ва m_C массалар тўпланган. Бу системанинг массалар марказини топинг.

Ечилиши. Бу системанинг массалар маркази $N(x_N; \ y_N)$ нуқта бўлсин. Массалари m_A ва m_B бўлган $A(x_A; \ y_A)$ ва $B(x_B; \ y_B)$ нуқталар учун массалар маркази ушбу

$$M\left(\frac{m_Ax_A+m_Bx_B}{m_A+m_B}; \ \frac{m_Ay_A+m_By_B}{m_A+m_B}\right)$$

нуқта бўлади (53- масалага қаранг).

Массалари m_A+m_B ва m_a бўлган M ва C нуқталар системаси учун ҳам массалар маркази N нуқтани худди шундай топамиз:

$$\lambda=\frac{MN}{NC}=\frac{m_a}{m_A+m_B}.$$

(1.3) формулалар бўйича қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x_N=\frac{x_M+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{m_A x_A+m_B x_B+m_C x_C}{m_A+m_B+m_C};$$

$$y_N=\frac{y_M+\lambda x_a}{1+\lambda}=\frac{m_A y_A+m_B y_B+m_C y_C}{m_A+m_B+m_C}.$$

56. $A(-1; \ 3)$, $B(4; \ 3)$ ва $C(6; \ -5)$ нуқталарда мос равишда 2, 3 ва 5 кг массалар тўпланган. Бу системанинг массалар марказини топинг.

3- §. Аралаш масалалар

57. $A(-2; 3)$ нуқтага 1) координаталар бошига нисбатан; 2) Ox ўққа нисбатан; 3) Oy ўққа нисбатан; 4) биринчи ва учинчи координата бурчакларининг биссектрисаларига нисбатан симметрик бўлган нуқталарни топинг.

58. Учлари $A(-3; \ 1)$ ва $B(-1; \ 7)$ бўлган кесма берилган. Берилган кесмага 1) координаталар бошига нисбатан; 2) Ox ўққа нисбатан; 3) Oy ўққа нисбатан; 4) иккинчи ва тўртинчи координата бурчакларининг биссектрисаларига нисбатан симметрик бўлган кесманинг учларини топинг.

59. Учлари $A(3; 2)$, $B(7; 4)$ ва $C(1; 6)$ бўлган учбурчак берилган. Берилган учбурчакка 1) координаталар бошига нисбатан; 2) Ox ўққа нисбатан; 3) Oy ўққа нисбатан; 4) биринчи ва учинчи координата бурчакларининг биссектрисаларига нисбатан симметрик бўлган учбурчакнинг учларини топинг.

60. Учлари $A(-2; 4)$ ва $B(6; 12)$ бўлган кесма C нуқтада тенг иккига бўлинади. C нуқтани $D(7; -4)$ нуқта билан туташтирувчи кесманинг узунлигини топинг.

61. Учлари $A(-7; -1)$ ва $B(9; 7)$ бўлган кесма C нуқтада (A дан B га қараб) $5:3$ каби нисбатда бўлинади. C нуқта билан унга координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқтани туташтирувчи кесманинг узунлигини топинг.

62. AB кесма еттита тенг бўлакка бўлинган. Кесманинг бир учи $B(13; 4)$ нуқта. A дан B га қараб ҳисоблаганда тўртинчи бўлиниш нуқтаси $F(4; 1)$. A нуқтани топинг.

63. Биринчи ва учинчи координата бурчакларининг биссектрисаларида $A(7; 2)$ ва $B(2; -13)$ нуқталардан тенг узоқлашган нуқтани топинг.

64. $A(3; 2)$, $B(-2; 1)$ ва $C(1; -4)$ нуқталар параллелограммнинг учлари, бунда A ва C—унинг қарама-қарши учлари. Параллелограммнинг тўртинчи учи D нуқтани топинг.

65. Параллелограммнинг қарама-қарши учлари $A(-4; 2)$ ва $C(2; -3)$ ҳамда $B(0; 1)$ ва D нуқталардан иборат. D нуқтани топинг.

66. Параллелограммнинг қўшни учлари $A(-3; 1)$ ва $B(1; 3)$ нуқталардан иборат. Параллелограммнинг диагоналлари $M(1; -2)$ нуқтада кесишади. Унинг қолган иккита учини топинг.

67. Параллелограммнинг қўшни учлари $A(-3; 0)$ ва $B(0; 4)$ нуқталарда. Параллелограммнинг диагоналлари $M(-1; 0)$ нуқтада кесишади. Унинг қолган иккита учини топинг.

Контрол иш

I вариант

68. 1. Oy ўқда $A(6; -1)$ ва $B(-2; 3)$ нуқталардан тенг узоқлашган M нуқтани топинг.

2. Учлари $A(-5; -1)$ ва $B(5; 4)$ бўлган кесма (A дан B га қараб) $2:1:2$ каби нисбатда бўлинган. Бўлиш нуқталарини топинг.

3. C нуқта AB кесмани (A дан B га қараб) $1:4$ каби нисбатда бўлади. Агар кесманинг иккинчи учи $B(-6; -1)$ нуқта бўлса, унинг A учини топинг.

4. AB кесма $A(-3; -2)$ ва $B(5; 2)$ учлари билан берилган. $AB : BC = 4 : 3$ бўлиши учун AB кесмани қандай C нуқтагача давом эттириш керак?

5. Координата ўқларидан ва берилган $A(4; -2)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқтани топинг.

II вариант

69. 1. Шундай M нуқтани топингки, ундан абсциссалар ўқигача ва $A(-2; 4)$ нуқтагача бўлган масофа 10 га тенг бўлсин.

2. Учлари $A(7; -4)$ ва $B(-8; 1)$ бўлган кесмани C нуқта (A дан B га қараб) $1:4$ каби нисбатда бўлади. C нуқтани топинг.

3. Учлари $A(2; 1)$ ва $B(11; 4)$ бўлган кесмани учта тенг бўлакка бўлувчи нуқталарни топинг.

4. $C(-2; 1)$ нуқта AB кесмани $AC : CB = 2 : 3$ каби нисбатда бўлади. Агар кесманинг бир учи $A(-8; -1)$ нуқта бўлса, унинг иккинчи учи B нуқтани топинг.

5. Кесма $A(-10; 4)$ ва $B(5; -1)$ нуқталар билан берилган. $AB : BC = 5 : 1$ бўлиши учун AB ни қандай C нуқтагача давом эттириш керак?

2- БОБ
ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

4- §. Координата ўқларига параллел бўлган тўғри чизиқларнинг тенгламалари. Координата ўқларининг тенгламалари

Oy ўққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$x = a. \tag{2.1}$$

Бу тўғри чизиқнинг барча нуқталари *Oy* ўқдан *a* га тенг бўлган бир хил масофага узоқлашган.

Ox ўққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y = b. \tag{2.2}$$

Бу тўғри чизиқнинг барча нуқталари *Ox* ўқдан *b* га тенг бўлган бир хил масофага узоқлашган.

Агар $a > 0$ бўлса, тўғри чизиқ *Oy* ўқдан ўнгда жойлашган, агар $a < 0$ бўлса, тўғри чизиқ *Oy* ўқдан чапда жойлашган бўлади. Агар $a = 0$ бўлса, тўғри чизиқ *Oy* ўқ билан устма-уст тушади. Бу ҳолда *Oy* ўқнинг тенгламасига эга бўламиз:

$$x = 0. \tag{2.3}$$

Агар $b > 0$ бўлса, тўғри чизиқ *Ox* ўқдан юқорида, агар $b < 0$ бўлса, тўғри чизиқ *Ox* ўқдан пастда жойлашган бўлади. Агар $b = 0$ бўлса, тўғри чизиқ *Ox* ўқ билан устма-уст тушади. Бу ҳолда *Ox* ўқнинг тенгламасига эга бўламиз:

$$y = 0. \tag{2.4}$$

I. Абсциссалар (ординаталар) ўқига параллел бўлган тўғри чизиқни ясаш

70. Ушбу тўғри чизиқларни ясанг: 1) $x = 3$; 2) $x = -2$; 3) $x = 0$.

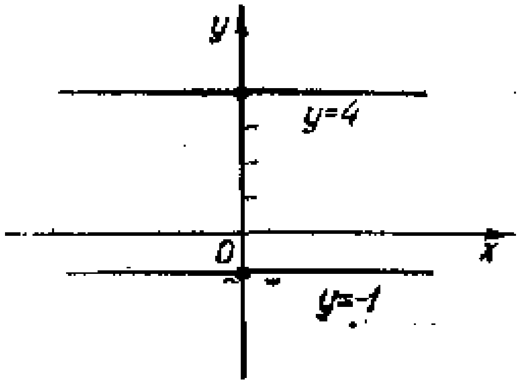
Ечилиши. *Ox* ўқда 1) $x = 3$; 2) $x = -2$ нуқталарни ясаймиз. Бу нуқталардан *Oy* ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз (14- расм). $x = 0$ тўғри чизиқ *Oy* ўқдан иборат.

71. Ушбу тўғри чизиқларни ясанг: 1) $x = 4$; 2) $x = -3$.

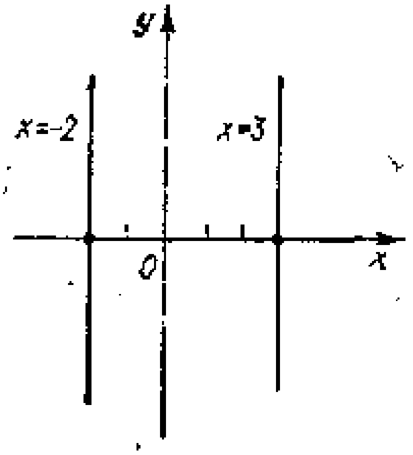
72. Ушбу тўғри чизиқларни ясанг: 1) $y = 4$; 2) $y = -1$; 3) $y = 0$.

Ечилиши. *Oy* ўқда 1) $y = 4$; 2) $y = -1$ нуқталарни ясаймиз. Бу нуқталардан *Ox* ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз (15- расм). $y = 0$ тўғри чизиқ *Ox* ўқдан иборат.

73. Ушбу тўғри чизиқларни ясанг: 1) $y = 2$; 2) $y = -4$.



14- расм.



15- расм.

II. Абсциссалар (ординаталар) ўқига параллел бўлган ва берилган нуқтадан ўтадиган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

74. *Ox* га параллел бўлган тўғри чизиқ $(-2; 3)$ нуқтадан ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. *Ox* ўққа параллел бўлган тўғри чизиқ $y = b$ кўринишга эга бўлади. Изланаётган тўғри чизиқ ўтадиган нуқтанинг ординатаси 3 га тенг; бинобарин, тўғри чизиқ тенгламаси $y = 3$ ёки $y - 3 = 0$ бўлади.

75. *Ox* ўққа параллел бўлган тўғри чизиқ $(3; -4)$ нуқтадан ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

76. *Oy* ўққа параллел бўлган тўғри чизиқ $(-6; 0)$ нуқтадан ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

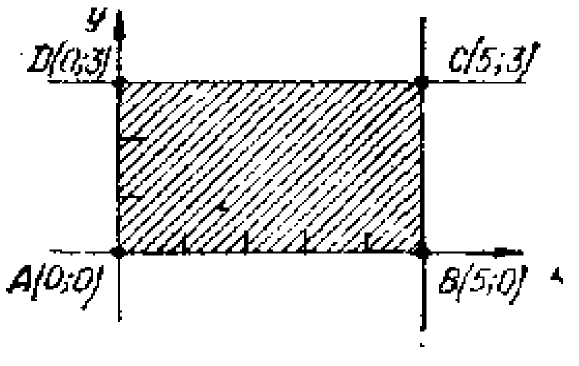
III. Координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар билан чегараланган фигурани ясаш

77. $x = -2$, $x = 0$, $y = -3$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигурани ясанг. Бу фигуранинг юзини ҳисобланг.

78. $x = -3$, $x = -2$, $y = -1$ ва $y = -5$ чизиқлар билан чегараланган фигурани ясанг. Бу фигуранинг юзини топинг.

IV. Координата ўқларига нисбатан вазияти ва ўлчамлари билан берилган фигурани чегараловчи чизиқларнинг тенгламаларини тузиш

79. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 3 ва 5 га тенг. Агар тўғри тўртбурчак биринчи координата бурчагида жойлашган бўлиб, унинг иккита томони координата ўқлари билан устма-уст тушса ва шу билан бирга катта томон Ox ўқ билан устма-уст тушса, унинг барча томонларининг тенгламаларини тузинг.



16- расм.

Ечилиши. Берилган тўғри тўртбурчакни ясаймиз (16- расм). Тўғри тўртбурчакнинг ясалишидан кўрамизки, унинг учлари ушбу координаталарга эга: $A(0;\ 0)$, $B(5;\ 0)$, $C(5;\ 3)$ ва $D(0;\ 3)$.

Энди томонларнинг тенгламаларини тузиш осон:

$$AB: y = 0 \ (Ox \text{ ўқ});$$
$$BC: x = 5 \ [B(5;\ 0) \text{ нуқтадан ўтади}];$$
$$CD: y = 3 \ [D(0;\ 3) \text{ нуқтадан ўтади}];$$
$$DA: x = 0 \ (Oy \text{ ўқ}).$$

80. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 3 ва 4 га тенг. Агар тўғри тўртбурчак учинчи координата бурчагида жойлашган бўлиб, унинг иккита томони координата ўқлари билан устма-уст тушса ва шу билан бирга томонларнинг кичиги Ox ўқ билан устма-уст тушса, берилган тўғри тўртбурчак томонларининг тенгламаларини тузинг.

81. Агар квадрат биринчи координата бурчагида жойлашган бўлиб, унинг иккита учи $A(2;\ 0)$ ва $B\ (5;\ 0)$ координаталарга эга бўлса, квадрат томонларининг тенгламаларини тузинг.

5-§. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга:

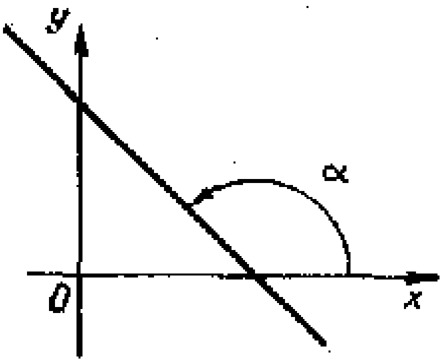
$$y = kx, \qquad (2.5)$$

Бу ерда k — бурчак коэффициент; x, y — юқоридаги тенглама билан ифодаланган тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасини координаталари — *ўзгарувчи координаталар.*

k бурчак коэффициент тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагини тангенсига тенг:

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2.6)$$

Тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчаги деб Ox ўқнинг мусбат йўналишини тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишадиган нуқта атрофида ўқ тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунча соат стрелкасининг ҳаракатига қарши йўналишда буриш керак бўладиган бурчакка айтилишини қайд қилиб ўтайлик (17- расм).



17- расм.

Агар тўғри чизиқ Ox ўққа параллел бўлса, у ҳолда унинг оғиш бурчаги 0° га тенг бўлади. Исталган тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчаги 0° ва 180° ($0° \leqslant \alpha < 180$) *орасидаги қийматларга эга бўлади.*

Агар $0° < \alpha < 90°$ (ўткир бурчак) бўлса, $k > 0$; агар $90° < \alpha < 180°$ (ўтмас бурчак) бўлса, $k < 0$ бўлади.

$\alpha = 90°$ да k бурчак коэффициент мавжуд бўлмайди, чунки tg 90° сон қийматга эга эмас. Демак, Ox ўққа перпендикуляр бўлган ҳар қандай ($x = a$) тўғри чизиқ бурчак *коэффициентга эга бўлмайди.*

Агар координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқда $A(x_A;\ y_A)$ нуқта олсак, у ҳолда

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_A}{x_A} \qquad (2.7)$$

бўлади.

α бурчак умумий ҳолда аркфункция орқали ёзилади:

$$\alpha = \operatorname{arctg} k. \qquad (2.8)$$

I ва III, II ва IV координата бурчакларининг биссектрисалари мос равишда

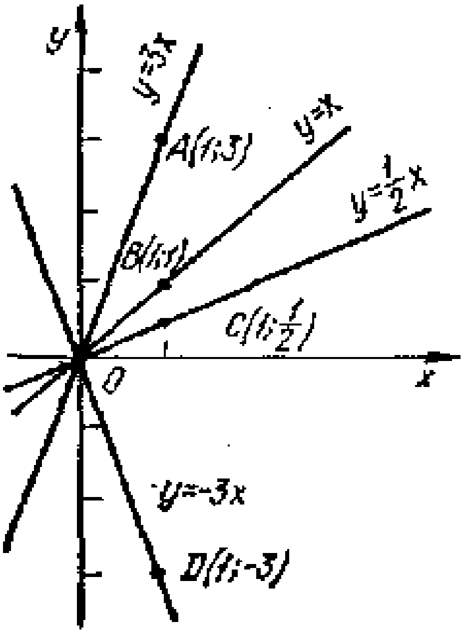
$$y = x \text{ ва } y = -x$$

тенгламаларга эга.

1. $y = kx$ тўғри чизиқни ясаш

82. Ушбу тўғри чизиқларни ясанг: 1) $y = 3x$; 2) $y = x$; 3) $y = \frac{1}{2}x$; 4) $y = -3x$.

Ечилиши. Текисликда тўғри чизиқнинг вазияти икки нуқта билан аниқланади, бироқ координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ учун бир нуқта (координаталар боши) ўзгармас. Шу сабабли тенгламадан битта нуқтани топиш ва уни координаталар боши билан туташтириш етарли.



18- расм.

$y = 3x$ тўғри чизиқни ясаймиз. $x = 1$ деб, $y = 3 \cdot 1 = 3$ ни аниқлаймиз. $A(1; 3)$ нуқтани координаталар боши билан туташтириб, изланаётган тўғри чизиқни ҳосил қиламиз. Қолган тўғри чизиқларни ҳам шунга ўхшаш ясаймиз:

$$y = x,\ B\ (1;\ 1);$$

$$y = \frac{1}{2}x,\ C\left(1;\ \frac{1}{2}\right);$$

$$y = -3x,\ D(1; -\ 3)$$(18- расм).

83. Тўғри чизиқларни ясанг: 1) $y = 2x$; 2) $y = -x$; 3) $y = -\frac{1}{3}x$; 4) $y = -4x$.

II. Берилган нуқталарнинг $y = kx$ тўғри чизиққа тегишлилигини текшириш

84. А (3; 6), $B(-1;\ -2)$ ва $C(4;\ 10)$ нуқталар $y = 2x$ тўғри чизиққа тегишли ёки тегишли эмаслигини текширинг.

Ечилиши. Агар берилган нуқтанинг координаталари берилган тенгламани қаноатлантирса, яъни тенгламани айниятга айлантирса, у ҳолда бу нуқта берилган тўғри чизиққа тегишли бўлади; агар берилган нуқтанинг координаталари тенгламани қаноатлантирмаса, нуқта тўғри чизиққа тегишли бўлмайди, яъни у тўғри чизиқдан ташқарида ётади.

$y = 2x$ тенгламага x ва y ўзгарувчилар ўрнига $A(3;\ 6)$ нуқтанинг координаталарини қўйиб, $6 = 2 \cdot 3$ айниятни ҳосил қиламиз, яъни $A(3;\ 6)$ нуқтанинг координаталари $y = 2x$

тенгламани қаноатлантиради, бинобарин, $A(3;\ 6)$ нуқта берилган тўғри чизиққа тегишлидир.

$B(-1;\ -2)$ ва $C(4;10)$ нуқталарнинг $y = 2x$ тўғри чизиққа тегишли эканлигини ҳам худди шундай текширамиз. $B(-1;\ -2)$ нуқта учун қуйидагига эгамиз: $-2 = 2\cdot(-1)$; $-2 = -2$. $B(-1;\ -2)$ нуқта $y = 2x$ тўғри чизиққа тегишли. $C(4;\ 10)$ нуқта учун: $10 \neq 2\cdot 4$. $C(4;\ 10)$ нуқта $y = 2x$ тўғри чизиққа тегишли эмас.

85. $A(9; -3)$, $B\left(-1; \frac{1}{3}\right)$ ва $C(8;\ 4)$ нуқталар $y = -\frac{1}{3}x$ тўғри чизиққа тегишли ёки тегишли эмаслигини текширинг.

III. $y = kx$ кўринишидаги тўғри чизиқнинг тенгламасини k нинг берилган қиймати бўйича тузиш

86. Агар координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти: 1) $k = 5$; 2) $k = -3$ га тенг бўлса, бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш учун битта параметр — бурчак коэффициент k ни билиш керак. Агар k берилган бўлса, у ҳолда изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қилиш учун k нинг сон қийматини $y = kx$ тенгламага қўйиш етарлидир.

Қуйидагиларга эгамиз: 1) $y = 5x$ ёки $5x - y = 0$;
2) $y = -3x$ ёки $3x + y = 0$.

87. Агар координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти: 1) $k = -1$; 2) $k = 4$ га тенг бўлса, бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

IV. $y = kx$ тўғри чизиқнинг Ox ўққа қиялик бурчагини берилган k бўйича ҳисоблаш

88. Қуйидаги тўғри чизиқлар Ox ўқ билан қандай бурчак ташкил этишини ҳисобланг:

1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $y = 3x$; 4) $y = -2x$; 5) $y = mx$.

Ечилиши. α бурчакни (2,6) муносабатдан топамиз:

1) $y = x$, $k = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$;
2) $y = -x$, $k = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = 135°$;
3) $y = 3x$, $k = 3$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\alpha = 71°34'$;
4) $y = -2x$, $k = -2$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

$\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$ муносабатдан: $\alpha_1 = 63^\circ 26'$, изланаётган бурчак $\alpha = 180^\circ - 63^\circ 26' = 116^\circ 34'$;

5) $y = mx$, $k = m$, $\operatorname{tg}\alpha = m$, $\alpha = \operatorname{arc}\operatorname{tg} m$.

89. Қуйидаги тўғри чизиқлар Ox ўқ билан қандай бурчак ташкил этишини ҳисобланг:

1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; 2) $y = -\sqrt{3}x$; 3) $y = 5x$; 4) $y = -3x$.

V. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини унинг Ox ўққа оғиш бурчаги α бўйича тузиш

90. Координаталар бошидан ўтувчи ва Ox ўқ билан: 1) 0°; 2) 30°; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 120°; 5) $\operatorname{arctg}(-3)$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. (2.6) муносабатдан k ни топамиз ва унинг қийматини (2.5) тенгламага келтириб қўямиз:

1) $k = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $y = 0$ — Ox ўқнинг тенгламаси;

2) $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ёки $\sqrt{3}x - 3y = 0$;

3) $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $y = x$ ёки $x - y = 0$;

4) $k = \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3x}$ ёки $\sqrt{3x} + y = 0$;

5) $k = \operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-3)] = -3$, $y = -3x$ ёки $3x + y = 0$.

91. Координаталар бошидан ўтувчи ва Ox ўқ билан: 1) 60°; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) 135°; 4) $\operatorname{arctg} 3$; 5) $\operatorname{arctg}(-5)$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

VI. Координаталар бошидан ва берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

92. Координаталар бошидан ва $A(-2; 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = -2$, $y_A = 3$. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш учун k ни билиш керак.

k ни (2.7) муносабатдан топамиз: $k = -\frac{3}{2}$; k нинг топилган қийматини (2.5) тенгламага қўйиб, $y = -\frac{3}{2}\ x$ ни ёки $3x + 2y = 0$ ни ҳосил қиламиз.

k ни (2.5) тенгламада x ва y ўзгарувчиларнинг ўрнига $A(-2;\ 3)$ нинг координаталарини қўйиб топиш ҳам мумкин: $3 = k(-2)$, бу ердан $k = -\frac{3}{2}$.

93. Координаталар бошидан ва 1) $A(3;\ -6)$; 2) $A(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

VII. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиққа тегишли нуқтанинг координаталарини бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти ва у нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа бўйича ҳисоблаш

94. Агар координаталар бошидан ва A нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $\frac{3}{4}$ га тенг бўлиб, A нуқта координаталар бошидан 10 бирлик масофада жойлашган бўлса, A нуқтанинг координаталарини топинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $k = \frac{3}{4}$, $d = OA = 10$. $A(x_A;\ y_A)$ ни топиш керак. (2.7) муносабатдан қуйидагини топамиз: $\frac{y_A}{x_A} = \frac{4}{3}$. (1.2) формула бўйича OA кесманинг узунлигини ифодалаймиз:

$$\sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 10.$$

Ушбу

$$\begin{cases} \frac{y_A}{x_A} = \frac{3}{4}, \\ \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 10 \end{cases}$$

системани ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x_A = \pm 8;\ y_A = \pm 6;\ A_1(8;\ 6),\ A_2(-8;\ -6).$$

95. P нуқта координаталар бошидан 5 узунлик бирлиги нарида жойлашган. Координаталар боши билан P нуқтани

туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $\frac{3}{4}$ га тенг. P нуқтани топинг.

96. Иккита томони координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан устма-уст тушадиган тўғри тўртбурчакнинг диагонали 20 узунлик бирлигига тенг. Диагоналнинг бурчак коэффициенти $\frac{4}{3}$ га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг учларини топинг.

6- §. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли ва бошланғич ординатали тенгламаси

Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли ва бошланғич ординатали тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$y = kx + b, \qquad (2.9)$$

бу ерда x ва y — тўғри чизиқнинг исталган нуқтасини координаталари — ўзгарувчи координаталар;

k — бурчак коэффициент, у тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагининг тангенсига тенг: $k = \operatorname{tg} \alpha$, b — бошланғич ордината — тўғри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтасининг ординатаси.

Агар $\alpha = 0$ бўлса, у ҳолда k ҳам нолга тенг бўлиб, тўғри чизиқ Ox ўққа параллел бўлади: ($y = b$). Агар $\alpha = 90°$ бўлса, k мавжуд бўлмай, тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр бўлади: ($x = a$).

Агар $b > 0$ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ Oy ўқни координаталар бошидан юқорироқда кесиб ўтади, агар $b < 0$ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ Oy ўқни координаталар бошидан пастда кесиб ўтади. $b = 0$ бўлганда координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси $y = kx$ га эга бўламиз.

1. $y = kx + b$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаш

97. $y = 3x - 6$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқтасини топинг.

Ечилиши. А нуқта тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси бўлсин. Берилган тенгламада $y = 0$ деб $x = 2$, $A(2;\ 0)$ ни топамиз.

B нуқта тўғри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси бўлсин: $x = 0$ бўлганда $y = -6$, $B(0;\ -6)$ бўлади. Шундай

қилиб, тўғри чизиқнинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишиш нуқталари $A(2;\ 0)$ ва $B(0;\ -6)$ бўлади.

98. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг: 1) $y = -2x + 4$; 2) $y = -x - 5$.

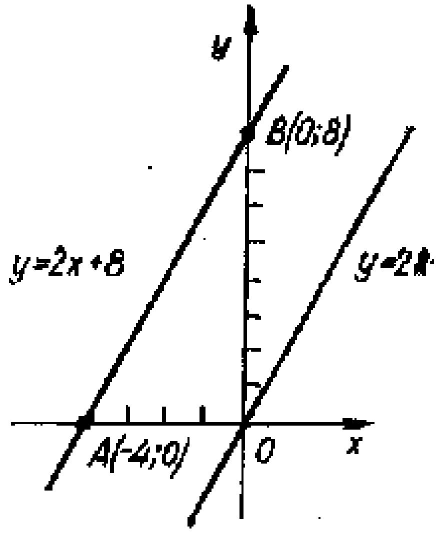
II. $y = kx + b$ тўғри чизиқни ясаш

99. $y = 2x + 8$ тўғри чизиқни ясанг.

Ечилиши. *1- усул.* $y = 2x$ тўғри чизиқни ясаймиз. $y = 2x + 8$ тўғри чизиқ $y = 2x$ тўғри чизиққа параллел бўлиб, координаталар бошидан 8 бирлик юқоридан ўтади (19- расм).

2- усул. (Тўғри чизиқни унинг икки нуқтаси бўйича ясаш.)

Тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз. Тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг ординатаси нолга тенг; берилган тенгламада $y = 0$ деб $x = -4$, $A(-4;0)$ ни топамиз. Тўғри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси нолга тенг; берилган тенгламада $x = 0$ деб $y = 8$, $B(-0;\ 8)$ ни топамиз. A ва B нуқталарни ясаймиз ва улар орқали изланаётган тўғри чизиқни ўтказамиз (19- расм).



19- расм.

Иккинчи усул амалий жиҳатдан анча қулай, шу сабабли $y = kx + b$ кўринишдаги тўғри чизиқларни ясашда одатда шу усулдан фойдаланилади.

100. Қуйидаги тўғри чизиқларни ясанг: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = 3x - 4$; 3) $y = -x + 2$; 4) $y = -5x - 10$.

III. Берилган нуқталарнинг $y = kx + b$ тўғри чизиққа тегишлилигини текшириш

101. $M(-1;\ -6)$, $N(3;\ 10)$, $P(-2;\ 3)$ нуқталар $y = 4x - 2$ тўғри чизиққа тегишлилигини текширинг.

102. $A(0,5;\ -1,5)$, $B\left(\frac{3}{4}; -1\frac{1}{4}\right)$ ва $C\ (0,5)$ нуқталар $y = x - 2$ тўғри чизиққа тегишлилигини текширинг.

IV. Тўғри чизиқ тенгламасини берилган бурчак коэффициент ва бошланғич ордината бўйича тузиш

103. Агар тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k = -3$, бошланғич ординатаси $b = 2$ бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш учун k ва b ларнинг сон қийматларини (2.9) тенгламага қўйиш кифоя:

$$y = -3x + 2$$

104. Агар тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k = \frac{2}{3}$, бошланғич ординатаси эса $b = -\frac{1}{2}$ бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

V. Тўғри чизиқнинг тенгламасини унинг Ox ўққа оғиш бурчаги ва бошланғич ординатаси бўйича тузиш

105. Бошланғич ординатаси $b = 3$, Ox ўққа оғиш бурчаги 1) $\alpha = 45°$; 2) $\alpha = 120°$; 3) $\alpha = \operatorname{arctg} 3$ бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида $b = 3$ берилган. k бурчак коэффициентни (2.6) формула бўйича топамиз:

$$1)\ k = \operatorname{tg} 45° = 1;\quad 2)\ k = \operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3};$$
$$3)\ k = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3) = 3.$$

k ва b ларнинг қийматларини (2.9) формулага қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$1)\ y = x + 3;\quad 2)\ y = -\sqrt{3}x + 3;\quad 3)\ y = 3x + 3.$$

106. Бошлангич ординатаси $b = -2$, Ox ўққа оғиш бурчаги эса 1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 135°$; 3) $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

VI. $y = kx + b$ тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагини ҳисоблаш

107. Тўғри чизиқнинг Ox оғиш бурчагини унинг тенгламаси бўйича ҳисобланг: 1) $y = 7x - 8$; 2) $y = -x + 1$; 3) $y = 0{,}41x - 2$; 4) $y = -2{,}9x + 3$.

VII. Берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган бошланғич ординатага эга бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

108. (3; 4) нуқтадан ўтувчи ва Oy ўқдан $b = 2$ кесма ажратувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. (2.9) кўринишдаги тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш учун k ни топиш керак. Тенгламага бошланғич ординатанинг қийматини ҳамда x ва y ўзгарувчиларнинг ўрнига берилган нуқтанинг координаталарини қўямиз: $4 = k \cdot 3 + 2$, бу ердан $k = \frac{2}{3}$. k ва b нинг қийматларини (2. 9) тенгламага қўйиб, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

109. $(-5; -2)$ нуқтадан ўтувчи ва $b = -12$ бошланғич ординатага эга бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

VIII. Берилган нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан берилган оғиш бурчагини ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

110. (2; 6) нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан arctg 5 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқнинг (2.9) кўринишдаги тенгламасини тузиш учун k ва b ни ҳисоблаш керак. k бурчак коэффициентни топамиз:

$$k = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5) = 5.$$

b ни ҳисоблаш учун (2.9) тенгламага k нинг топилган қийматини ҳамда x ва y ўзгарувчиларнинг ўрнига берилган нуқтанинг координаталарини қўямиз: $6 = 5 \cdot 2 + b$, бу ердан $b = -4$. Изланаётган тенглама $y = 5x - 4$.

111. $(5; -7)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан arctg (-2) бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

112. $(-1; -4)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан 135° ли бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

7- §. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.10}$$

бу ерда A, B ва C — ўзгармас коэффициентлар; x ва y — тўғри чизиқнинг исталган нуқтасини координаталари.

Тўғри чизиқ умумий тенгламасининг хусусий ҳоллари:

1) $C = 0$ бўлганда

$$Ax + By = 0 \tag{2.11}$$

ни, яъни координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз ($y = kx$ кўринишдаги тенглама, бу ерда $k = -\frac{A}{B}$);

2) $B = 0$ бўлганда

$$Ax + C = 0 \tag{2.12}$$

ни, яъни Oy ўққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз ($x = a$ кўринишдаги тенглама, бу ерда $a = -\frac{C}{A}$);

3) $A = 0$ бўлганда

$$By + C = 0 \tag{2.13}$$

ни, яъни Ox ўққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз ($y = b$ кўринишдаги тенглама, бу ерда $b = -\frac{C}{B}$);

4) $B = 0$ ва $C = 0$ бўлганда

$$Ax = 0 \text{ ёки } x = 0 \tag{2.14}$$

ни, яъни Oy ўқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз;

5) $A = 0$ ва $C = 0$ бўлганда

$$By = 0 \text{ ёки } y = 0 \tag{2.15}$$

ни, яъни Ox ўқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз.

I. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаш

113. $4x - 3y - 12 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

Ечилиши. A нуқта тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси бўлсин. Берилган тенгламада $y = 0$ деб $4x - 12 = 0$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $x = 3$, $A(3;\ 0)$.

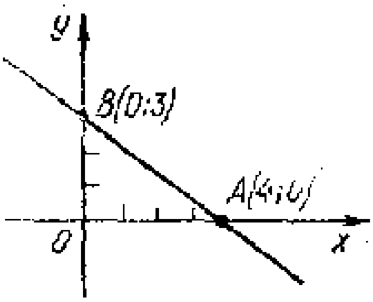
B нуқта тўғри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси бўлсин. $x = 0$ десак, $-3y - 12 = 0$ ҳосил бўлади, бу ердан $y = -4$, $B(0;\ -4)$. Тўғри чизиқнинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишиш нуқталари: $A(3;\ 0)$ ва $B(0;\ -4)$.

114. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг: 1) $5x + 4y + 20 = 0$; 2) $7x - 2y + 14 = 0$.

II. $Ax + By + C = 0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқни ясаш

115. $3x + 4y - 12 = 0$ *тўғри чизиқни ясанг.*

Ечилиши. Тўғри чизиқни ясаш учун унинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топамиз, $y = 0$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз: $3x - 12 = 0$, $x = 4$, $A(4; 0)$. $x = 0$ бўлганда $4y - 12 = 0$, $y = 3$, $B(0; 3)$. A ва B нуқталарни ясаймиз ва улар орқали изланаётган тўғри чизиқни ўтказамиз (20- расм).



20- расм.

116. Қуйидаги тўғри чизиқларни ясанг: 1) $2x - 5y + 10 = 0$; 2) $4x + 6y - 3 = 0$.

III. Берилган нуқталарнинг $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиққа тегишлилигини текшириш

117. $A(3; 14)$, $B(4; 13)$, $C(-3; 0)$, $D(6; 7)$ нуқталарнинг $7x - 3y + 21 = 0$ тўғри чизиққа тегишлилигини текширинг.

IV. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқни $y = kx + b$ кўринишга келтириш

118. $3x - 5y + 10 = 0$ тўғри чизиқни $y = kx + b$ кўринишга келтиринг.

Ечилиши. Берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$5y = 3x + 10, \quad y = \frac{3}{5}x + 2.$$

119. Қуйидаги тўғри чизиқларни $y = kx + b$ кўринишга келтиринг: 1) $3x + 5y + 1 = 0$; 2) $5x - 2y + 6 = 0$.

V. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагини ҳисоблаш

120. $3x + 2y + 6 = 0$ тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагини ҳисобланг.

Ечилиши. $3x + 2y + 6 = 0$ тенгламани y га нисбатан ечиб, $y = -\frac{3}{2}x - 3$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $k = -\frac{3}{2} = -1{,}5$, бироқ $k = \operatorname{tg}\alpha$; демак, $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$.

Жадвалдан $\alpha = 180^\circ - 56^\circ 19' = 123^\circ 41'$ эканлигини топамиз.

121. Ушбу тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагини топинг: 1) $3x + 5y + 20 = 0$; 2) $29x - 10y + 10 = 0$.

VI. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасига жойлашган кесмасининг узунлигини ҳисоблаш

122. $3x + 4y - 24 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасига жойлашган кесмасининг узунлигини ҳисобланг.

Ечилиши. Тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топамиз: $y = 0$, $x = 8$, $A(8;0)$ ва $x = 0$, $y = 6$, $B(0;\ 6)$. (1.1) формула бўйича AB кесманинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$AB = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

123. $4x + 3y - 36 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасига жойлашган кесмасининг узунлигини ҳисобланг.

VII. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқда ётувчи ва бу тўғри чизиқда ётмайдиган иккита нуқтадан тенг узоқлашган нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш

124. $2x + y - 6 = 0$ тўғри чизиқда $A(3;\ 5)$ ва $B\ (2;\ 6)$ нуқталардан тенг узоқлашган M нуқтани топинг.

Ечилиши. M нуқтанинг координаталарини $(x_M; y_M)$ билан белгилаймиз. (1.1) формула бўйича

$$MA = \sqrt{(x_M - 3)^2 + (y_M - 5)^2},$$

$$MB = \sqrt{(x_M - 2)^2 + (y_M - 6)^2},$$

бироқ $MA = MB$, у ҳолда

$$\sqrt{(x_M - 3)^2 + (y_M - 5)^2} = \sqrt{(x_M - 2)^2 + (y_M - 6)^2}.$$

Квадратга кўтаргандан ва соддалаштиргандан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_M - y_M + 3 = 0.$$

$M(x_M; y_M)$ нуқта $2x + y - 6 = 0$ тўғри чизиққа тегишли, демак, унинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради. Қуйидаги иккинчи тенгламага ҳам эгамиз:

$$2x_M + y_M - 6 = 0.$$

Ушбу

$$\begin{cases} x_M - y_M + 3 = 0, \\ 2x_M + y_M - 6 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_M = 1, \; y_M = 4; \; M(1;\ 4).$$

125. $x - 2y - 4 = 0$ тўғри чизиқда $A(5; -1)$ ва $B(2; -4)$ нуқталардан тенг узоқлашган M нуқтани топинг.

126. $3x + 4y + 20 = 0$ тўғри чизиқда $A(-8; -3)$ ва $B(-5; -6)$ нуқталардан тенг узоқлашган нуқтани топинг.

8-§. Тўғри чизиқнинг ўқлардаги кесмалар бўйича тенгламаси

Тўғри чизиқнинг ўқлардаги кесмалар бўйича тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (2.16)$$

бу ерда a — тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси; b — тўғри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтасининг ординатаси; x ва y — тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари.

I. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ тўғри чизиқни ясаш

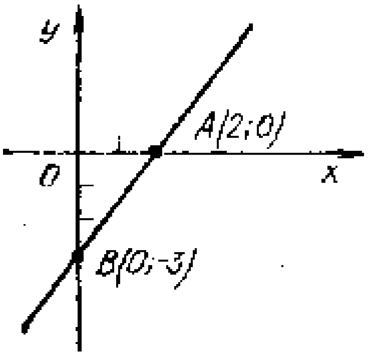
127. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ тўғри чизиқни ясанг.

Ечилиши. Берилган тенгламани қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 2.$$

$a = 2$ ва $b = -3$ га эгамиз.

$A(2; 0)$ ва $B(0; -3)$ нуқталарни ясаймиз. A ва B нуқталар орқали ўтказилган тўғри чизиқ изланаётган тўғри чизиқ бўлади (21- расм).



21- расм.

128. Қуйидаги тўғри чизиқларни ясанг:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$; 2) $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$;

3) $-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 4) $-\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1$.

II. Берилган нуқталарнинг $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиққа тегишлилигини текшириш

129. Қуйидаги нуқталарнинг $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1$ тўғри чизиққа тегишлилигини текширинг: 1) (4; 0); 2) (8; 2); 3) (5; 3) ва 4) (6; 1).

III. $Ax+By+C=0$ тўғри чизиқни $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ кўринишга келтириш

130. $3x-4y+2=0$ тўғри чизиқни $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ кўринишга келтиринг.

Ечилиши. Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз:

$$3x-4y=-2;\ \frac{3x}{-2}-\frac{4y}{-2}=1;\ \frac{x}{-\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1.$$

131. Қуйидаги тўғри чизиқларни $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ кўринишга келтиринг:

1) $x+y-3=0$; 2) $2x+3y+1=0$; 3) $2x+3y-6=0$; 4) $3x-4y+12=0$.

IV. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиқни $Ax+By+C=0$ кўринишга келтириш

132. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ тўғри чизиқни $Ax+By+C=0$ кўринишга келтиринг.

Ечилиши. Айтилган кўринишга келтириш берилган тенгламани бутун кўринишга келтиришдан иборат: $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$, $5x+4y=20$,

$$5x+4y-20=0.$$

133. Қуйидаги тўғри чизиқларни $Ax+By+C=0$ кўринишга келтиринг:

$$1)\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1; \quad 2)\ \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=-1; \quad 3)\ \frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}=1.$$

V. $y=kx+b$ тўғри чизиқни $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ кўринишга келтириш

134. $y=2x-5$ тўғри чизиқни $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ кўринишга келтиринг.

Ечилиши. Алмаштиришни қуйидагича бажариш мумкин:

$$2x+y=5, \quad \frac{2x}{5}-\frac{y}{5}=1, \quad \frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{-5}=1.$$

135. Қуйидаги тўғри чизиқларни $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ кўринишга келтиринг: 1) $y=x+1$; 2) $y=4x-2$; 3) $y=-x+3$.

VI. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиқни $y=kx+b$ кўринишга келтириш

136. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ тўғри чизиқни $y=kx+b$ кўринишга келтиринг.

Ечилиши. Масалани ечиш учун $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ тенгламани y га нисбатан ечамиз: $2x+3y=6$; $3y=-2x+6$;

$$y=-\frac{2}{3}x+2.$$

137. Қуйидаги тўғри чизиқларни $y=kx+b$ кўринишга келтиринг:

$$1)\ \frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1; \quad 2)\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1; \quad 3)\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$$

VII. Тўғри чизиқнинг $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ кўринишдаги тенгламасини унинг координата ўқларидан ажратган кесмалари бўйича тузиш

138. Тўғри чизиқ Ox ўқда 3 га, Oy ўқда 5 га тенг кесма ажратади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида $a=3$ ва $b=5$ берилган (2.16) формула бўйича $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ га эга бўламиз.

139. Агар тўғри чизиқ координата ўқларини 1) $A(-2;\ 0)$ ва $B(0;\ 3)$; 2) $A(3;\ 0)$ ва $B(0;\ -4)$ нуқталарда кесиб ўтса, тўғри чизиқнинг ўқлардаги кесмалар бўйича тенгламасини тузинг.

VIII. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиқнинг бу тўғри чизиқ координата ўқлари билан кесишган нуқталари орасидаги кесмасининг узунлигини ҳисоблаш

140. $\frac{x}{9}-\frac{y}{12}=1$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари орасида жойлашган кесмасининг узунлигини ҳисобланг.

Ечилиши. Масала шартидан $a=9$ ва $b=-12$ маълум, демак, тўғри чизиқ координата ўқларини $A(9;\ 0)$ ва $B(0;\ -12)$ нуқталарда кесиб ўтади. Бу нуқталар орасидаги масофани (1.1) формула бўйича топамиз:

$$AB=\sqrt{(9-0)^2+(0+12)^2}=15.$$

141. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари орасида жойлашган кесмаларининг узунлигини ҳисобланг.

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$, 2) $\frac{x}{12}-\frac{y}{16}=1$.

IX. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчагини ҳисоблаш

142. $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1$ тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини ҳисобланг.

Ечилиши. Берилган тенгламани $y=kx+b$ кўринишга келтирамиз:

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1,\ x-2y=4;\ 2y=x-4;\ y=\frac{1}{2}x-2;\ k=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha=26^\circ 34'.$$

143. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчагини ҳисобланг:

1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$.

9- §. Тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси. Берилган нуқтадан берилган йўналишда ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

Тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$y - y_A = k(x - x_A), \tag{2,17}$$

бу ерда k — бурчак коэффициент; $(x_A;\ y_A)$ тўғри чизиқлар ўтадиган нуқта (дастанинг маркази), x ва y — ўзгарувчи координаталар.

Агар k тайин сон қийматга эга бўлса, у ҳолда берилган нуқтадан берилган йўналишда ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз.

I. Берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасини тузиш

144. $A(3;\ -1)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. (2.17) тенгламага $A(3;\ -1)$ нуқтанинг координаталарини қўйиб, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y + 1 = k(x - 3) \text{ ёки } y - kx + 3k + 1 = 0.$$

145. $(-4;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасини тузинг.

II. Тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси бўйича шу дастанинг марказини топиш

146. Даста тенгламаси берилган: $y - 3 = k(x + 2)$. Бу тўғри чизиқлар дастасининг марказини топинг.

Ечилиши. Даста тенгламасидан: $x_A = -2$; $y_A = 3$, демак, тўғри чизиқлар $A(-2;\ 3)$ нуқтадан ўтади.

147. Ушбу тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар дастасининг марказини топинг:

1) $y + 4 = k(x + 1)$; 2) $y = k(x - 2)$.

III. Тўғри чизиқнинг тенгламасини у ўтадиган нуқтанинг берилган координаталари бўйича ва бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти бўйича тузиш

148. $A(5;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти 3 га тенг бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = 5$; $y_A = -1$; $k = 3$. Бу қийматларни (2.17) тенгламага қўйиб, топамиз: $y + 1 - 3(x - 5)$ ёки $3x - y - 16 = 0$.

149. $(-1;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти 1 га тенг бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

150. $(2;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $k = -2$ га эга бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

IV. Тўғри чизиқнинг тенгламасини у ўтадиган нуқтанинг координаталари ва бу тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан ҳосил қиладиган бурчаги бўйича тузиш

151. $(-3;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан $\operatorname{arctg} 2$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = -3$; $y_A = -2$. k ни топамиз: $k = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) = 2$.

Бу қийматларни (2.17) тенгламага қўйиб,

$$y + 2 = 2\ (x + 3) \text{ ёки } 2x - y + 4 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

152. $(4;\ -5)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан $\operatorname{arctg}(-3)$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

153. 1. $(2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан 45° ли бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

2. $(0;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан 135° ли бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

10- §. Берилган иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

Берилган $A(x_A;\ y_A)$ ва $B(x_B;\ y_B)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \qquad (2.18)$$

бу ерда x ва y — ўзгарувчи координаталар.

A ва B нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad (2.19)$$

муносабатдан топилади.

I. Иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

154. $A(2;\ -3)$ ва $B(-1;\ 4)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган $x_A = 2$; $x_B = -1$; $y_A = -3$ ва $y_B = 4$. Бу қийматларни (2.18) тенгламага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$y + 3 = \frac{4+3}{-1-2}(x-2) \text{ ёки } 7x + 3y - 5 = 0.$$

155. 1) $A(-1;\ -1)$ ва $B(-2;\ -2)$; 2) $A(3;\ 0)$ ва $B(0;\ 4)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

156. Учлари: 1) $A(-3;\ -2)$, $B(1;\ 5)$ ва $C(8;\ -4)$ 2) $(-1;\ -3)$, $(3;\ 5)$ ва $(4;\ 0)$ нуқталардан иборат бўлган учбурчакнинг томонлари тенгламаларини тузинг.

157. 1. Учбурчак ўзининг $A(-3;\ 4)$, $B(-4;\ -3)$ ва $C(8;\ 1)$ учлари билан берилган. AD медиананинг тенгламасини тузинг.

2. Учбурчак ўзининг $A(2;\ 5)$, $B(-6;\ -4)$ ва $C(6;\ -3)$ учлари билан берилган. BD медиананинг тенгламасини тузинг.

II. Берилган иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг *Ox* ўққа оғиш бурчагини топиш

158. $A(2;\ 3)$ ва $B(-3;\ 1)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг *Ox* ўққа оғиш бурчагини топинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $x_A = 2$, $x_B = -3$, $y_A = 3$ ва $y_B = 1$.

(2.19) формула бўйича k ни топамиз:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

бу ердан

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}4 = 21^\circ 48',$$

159. 1) $A(-3;\ -3)$ ва $B(2;\ 1)$; 2) $A(3;\ 1)$ ва $B(4;\ -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг *Ox* ўққа оғиш бурчагини топинг.

III. Берилган иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг координата ўқларидан ажратган кесмаларини ҳисоблаш

160. $A(6;\ 2)$ ва $B(-3;\ 8)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг координата ўқларидан ажратган кесмаларини топинг.

Ечилиши: (2.18) тенгламага $A(6;\ 2)$ ва $B(-3;\ 8)$ нуқталарнинг координаталарини қўйиб, Ox ва Oy ўқлардан изланаётган кесмаларни ажратувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y-2=\frac{8-2}{-3-6}(x-6).$$

Бу тенгламани ўқлардаги кесмалар бўйича тенглама (2.16) га келтирамиз: $y-2=-\frac{2}{3}(x-6)$, $y-2=-\frac{2}{3}x+4$, $\frac{2}{3}x+y=6$; $\frac{\frac{2}{3}x}{6}+\frac{y}{6}=1$, $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}=1$. Ўқларда ажратилган кесмалар: $a=9$ ва $b=6$.

161. Тўғри чизиқ $A(-1;\ -6)$ ва $B(7;\ 2)$ нуқталардан ўтади. Бу тўғри чизиқнинг Ox ва Oy ўқлардан ажратган кесмаларини топинг.

162. Нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қила бориб, $A(12;\ -1)$ ва $B\ (3;\ 2)$ вазиятлардан ўтди. У Oy ўқни қайси нуқтада кесиб ўтади?

IV. Берилган нуқтадан ўтувчи ва $Ox\ (Oy)$ ўқдан берилган кесма ажратувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

163. $(-5;\ 1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ Oy ўқда 6 га тенг кесма ажратади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Изланаётган тўғри чизиқ Oy ўқни $(0;\ 6)$ нуқтада кесади. Иккита нуқтага эга бўлдик: $A(-5;\ 1)$ ва $B(0;\ 6)$. Бу нуқталарнинг координаталарини (2.18) тенгламага қўйиб, изланаётган тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y-1=\frac{6-1}{0+5}(x+5)\ \text{ёки}\ x-y+6=0.$$

164. (—4; —1) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ Oy ўқни (0, 3) нуқтада кесиб ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

165. (—2; 4) нуқтадан ўтувчи тўгри чизиқ Ox ўқдан 2 га тенг кесма ажратади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

11- §. Иккита тўгри чизиқнинг кесишиши

Агар кесишувчи $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ тўғри чизиқлар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг кесишиш нуқтасининг координаталари берилган тенгламаларни ҳар бирини қаноатлантириши, яъни улар бу тенгламаларнинг умумий ечимлари бўлиши керак. Берилган тўгри чизиқлар кесишган нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш учун бу тўғри чизиқлар тенгламаларидан тузилган системани ечиш керак.

I. Берилган иккита тўгри чизиқнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини ҳисоблаш

166. $3x - 4y + 11 = 0$ ва $4x - y - 7 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечилиши. Ушбу

$$\begin{cases} 3x - 4y + 11 = 0, \\ 4x - y - 7 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, $x = 3$ ва $y = 5$ ни топамиз. Демак, бу тўгри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси (3; 5).

167. Қуйидаги тўгри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топинг: 1) $y = 3x$ ва $x + y + 4 = 0$; 2) $x - 2y - 8 = 0$ ва x [illegible] $y - 2 = 0$.

II. Учбурчак томонларининг тенгламаларига кўра унинг учлари координаталарини ҳисоблаш

168. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: $x + 3y - 3 = 0$, $3x - 11y - 29 = 0$ ва $3x - y + 11 = 0$. Бу учбурчакнинг учларини топинг.

Ечилиши. Учбурчак учларининг координаталарини ҳисоблаш учун қуйидаги учта тенгламалар системаларини ечиш керак:

$$1)\ \begin{cases} x + 3y - 3 = 0, \\ 3x - 11y - 29 = 0, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 3x - 11y - 29 = 0, \\ 3x - y + 11 = 0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 3x - y + 11 = 0, \\ x + 3y - 3 = 0. \end{cases}$$

Биринчи системанинг илдизлари $x = 6$, $y = -1$, иккинчиники $x = -5$, $y = -4$ ва учинчиники $x = -3$, $y = 2$. Демак, учбурчакнинг учлари қуйидаги нуқталардан иборат. (6; −1), (−5; −4) ва (−3; 2).

169. Агар учбурчакнинг томонлари ушбу 1) $4x + 3y + 20 = 0$, $6x - 7y - 16 = 0$ ва $x - 5y + 5 = 0$; 2) $7x + 3y - 25 = 0$, $2x - 7y - 15 = 0$ ва $9x - 4y + 15 = 0$ тенгламалар билан берилган бўлса, унинг учларини топинг.

12- §. Иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчак

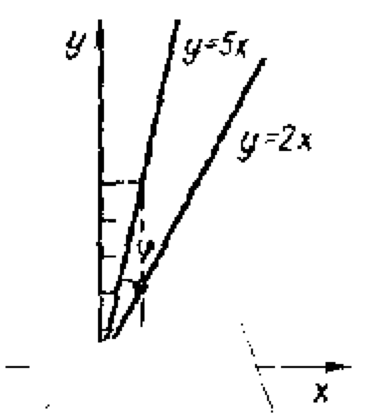
Бирор M нуқтада кесишувчи $y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}, \qquad (2.20)$$

бу ерда k_1 ва k_2 — берилган тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари.

I. Иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчакни бу тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари бўйича топиш

170. $y = 2x$ ва $y = 5x$ тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни топинг.



Ечилиши. Берилган тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари 2 ва 5 га тенг. Иккита тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни ҳисоблаш учун k_2 ва k_1 ларни $\operatorname{tg}\varphi > 0$ бўладиган қилиб (чунки ўткир бурчакнинг тангенси — мусбат сон) танлаш керак. Бунинг учун $k_2 = 5$ ва $k_1 = 2$ деб оламиз.

(2.20) формула бўйича:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5 - 2}{1 + 5\cdot 2} = \frac{3}{11} = 0{,}2727.$$

φ бурчакни жадвалдан топамиз:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{11} = 15°15' \ \text{(22- расм.)}$$

171. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни топинг: 1) $y = -x$ ва $y = 3x$; 2) $2x - 3y + 6 = 0$ ва $3x - y - 3 = 0$; 3) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ ва $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

172. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: 1) $3x - 2y - 1 = 0$; 2) $5x + 4y - 31 = 0$ ва 3) $x - 8y - 15 = 0$.

Бу учбурчакнинг ички бурчакларини топинг.

Ечилиши. Айтайлик, 1) $3x - 2y - 1 = 0$ ва 2) $5x + 4y - 31 = 0$ томонлар A бурчакни; 2) $5x + 4y - 31 = 0$ ва 3) $x - 8y - 15 = 0$ томонлар B бурчакни; 3) $x - 8y - 15 = 0$ ва 1) $3x - 2y - 1 = 0$ томонлар C бурчакни ташкил этсин.

Учбурчакни ясаш учун A, B ва C учларни топамиз, бунинг учун эса ушбу тенгламалар системаларини ечамиз:

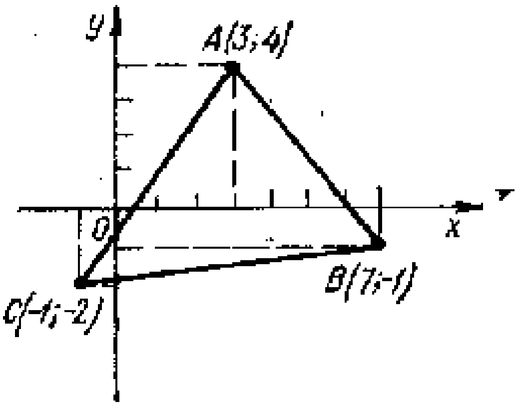
$$\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0, \\ 5x + 4y - 31 = 0, \end{cases}$$

$x = 3,\ y = 4,\ A(3;\ 4);$

$$\begin{cases} 5x + 4y - 31 = 0, \\ x - 8y - 15 = 0, \end{cases}$$

$x = 7,\ y = -1,\ B(7;\ -1);$

$$\begin{cases} x - 8y - 15 = 0, \\ 3x - 2y - 1 = 0, \end{cases}$$



23-расм.

$x = -1,\ y = -2,\ C(-1;\ -2)$ (23- расм).

Томонларнинг тенгламаларидан бурчак коэффициентларни топамиз:

AC томон: $3x - 2y - 1 = 0,\ k_{AC} = \frac{3}{2}$;

AB томон: $5x + 4y - 31 = 0,\ k_{AB} = -\frac{5}{4}$;

BC томон: $x - 8y - 15 = 0,\ k_{BC} = \frac{1}{8}$.

(2.20) формула бўйича A, B ва C бурчакларни топамиз:

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}k_{AC}} = \frac{-\frac{5}{4} - \frac{3}{2}}{1 + \left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}} = 3{,}143,$$

$$A = \operatorname{arctg} 3{,}143 = 72^\circ 21';$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC}\,k_{AB}} = \frac{\frac{1}{8} - \left(-\frac{5}{4}\right)}{1 + \frac{1}{8}\left(-\frac{5}{4}\right)} = 1{,}63,$$

$$B = \operatorname{arctg} 1{,}63 = 58°28';$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{k_{AC} - k_{BC}}{1 + k_{AC}\,k_{BC}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{8}} = 1{,}1579,$$

$$C = \operatorname{arctg} 1{,}1579 = 49°11'.$$

Текшириш: $72°21' + 58°28' + 49°11' = 180°$.

173. Агар учбурчакнинг томонлари ушбу 1) $7x + 4y + 9 = 0$, $x - 8y + 27 = 0$ ва $2x - y - 6 = 0$; 2) $6x - y + 13 = 0$, $3x + 7y - 1 = 0$ ва $3x - 8y - 31 = 0$ тенгламалар билан берилган бўлса, унинг ички бурчакларини топинг.

II. Ҳар бири иккита нуқта ёрдамида берилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни ҳисоблаш

174. Агар тўғри чизиқларнинг бири $A_1(4;\ 2)$ ва $B_1(1;\ -7)$ нуқталардан, иккинчиси эса $A_2(-1;\ 3)$ ва $B_2(8;\ 6)$ нуқталардан ўтса, бу тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни топинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузиб ўтирмасдан, (2.19) формула ёрдамида уларнинг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$k_{A_1B_1} = \frac{-7-2}{1-4} = 3, \quad k_{A_2B_2} = \frac{6-3}{8-(-1)} = \frac{1}{3}.$$

$$k_2 = k_{A_1B_1} = 3, \quad k_1 = k_{A_2B_2} = \frac{1}{3}$$

дейлик. (2.20) формула бўйича топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 3\cdot\frac{1}{3}} = 1{,}333, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 1{,}333 = 53°08'.$$

175. Агар тўғри чизиқларнинг бири $A_1(-6;\ 7)$ ва $B_1(2;\ -5)$ нуқталардан, иккинчиси эса $A_2(-5;\ 2)$ ва $B_2(1;\ 1)$ нуқталардан ўтса, бу тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни топинг.

176. Бири $A(3;\ 3)$ нуқтадан, иккинчиси эса $B(3;\ -2)$ нуқтадан ўтадиган ва умумий $M(-2;\ -1)$ нуқтага эга бўлган тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни топинг.

177. Учлари $A(-6;\ -1)$, $B(4;\ 6)$ ва $C(2;\ 1)$ бўлган учбурчак берилган. Бу учбурчакнинг ички бурчакларини топинг.

Ечилиши. (2.19) формула бўйича бу учбурчак томонларининг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-(-1)}{4-(-6)} = \frac{7}{10},$$

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-6}{2-4} = \frac{5}{2};$$

$$k_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-1-1}{-6-2} = \frac{1}{4}.$$

(2.20) формула бўйича учбурчакнинг бурчакларини топамиз:

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_{AB} - k_{CA}}{1 + k_{AB}k_{CA}} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{7}{10}\,\frac{1}{4}} = 0{,}383,$$

$$A = 20^\circ 57';$$

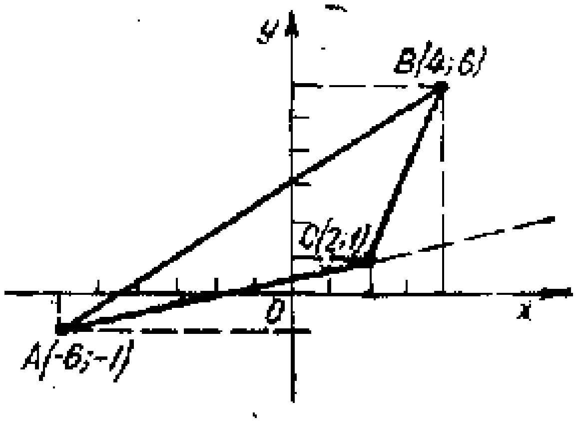
$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC}\,k_{AB}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{7}{10}}{1 + \frac{5}{2}\,\frac{7}{10}} = 0{,}6545,$$

$$B = 33^\circ 12';$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{k_{BC} - k_{CA}}{1 + k_{BC}k_{CA}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{5}{2}\,\frac{1}{4}} = 1{,}3846,$$

$$C = 54^\circ 10'.$$

Текшириш: $20^\circ 57' + 33^\circ 12' + 54^\circ 10' = 108^\circ 19'$. Агар учбурчакнинг бурчакларидан бири ўтмас бўлса, бу учбурчакнинг бурчаклари йиғиндиси 180° дан кичик бўлиши мумкин. Учбурчакни ясаш билан C бурчакнинг ўтмас эканлигига ишонч ҳосил қиламиз (24-расм).



24- расм.

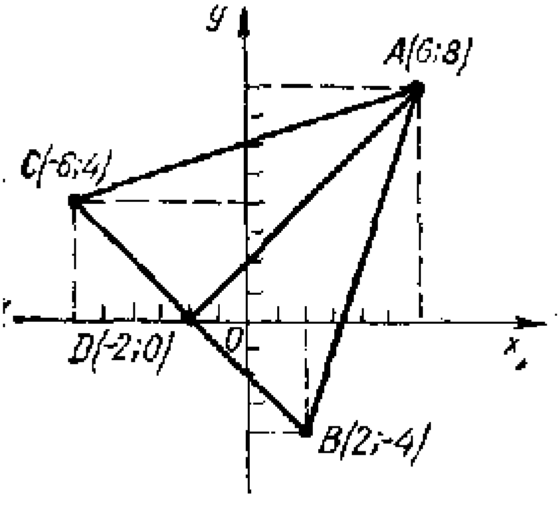
Ҳисоблашда учбурчакнинг ички бурчаги эмас, балки изланаётган бурчак билан қўшни бўлган ташқи бурчак топилган эди; изланаётган бурчак $C = 180° - 54°10' = 125°50'$ бўлади. Бу ҳолда учбурчакнинг бурчаклари йиғиндиси $180°$ га тенг бўлади: $20°57' + 33°12' + 125°50' = 179°59'$ (1' хатоликка ҳисоблашларда йўл қўйилган).

Учбурчакни ясамасдан туриб ҳам берилган учбурчакнинг бурчакларидан бири ўтмас эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин. Учбурчакнинг томонларини ҳисоблаймиз:

$$AB = \sqrt{(-6-4)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{149};$$
$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{29};$$
$$AC = \sqrt{(-6-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{68}.$$

Маълумки, ўтмас бурчакли учбурчакда катта томоннинг квадрати қолган иккита томон квадратларининг йиғиндисидан катта. Бу ерда $149 > 29 + 68$. AB томон ўтмас бурчак қаршисида ётади.

178. Агар учбурчакнинг учлари 1) $A(-6;\ -3)$, $B(6;\ 7)$ ва $C(2;\ -1)$; 2) $A(0;\ 4)$, $B(4;\ -2)$ ва $C(-4;\ -2)$ нуқталарда бўлса, унинг ички бурчакларини топинг.



25-расм.

179. Учлари $A(6;\ 8)$, $B(2;\ -4)$ ва $C(-6;\ 4)$ бўлган учбурчак берилган. AB томон билан A учдан ўтказилган медиана орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. Медиананинг бурчак коэффициентини топиш учун BC томонни тенг иккига бўлувчи D нуқтанинг координаталарини (1.4) формула бўйича топамиз (25- расм):

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2-6}{2} = -2,$$

$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+4}{2} = 0, \quad D(-2;\ 0).$$

(2.19) формула бўйича медиананинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{0-8}{-2-6} = 1.$$

AB томоннинг бурчак коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-8}{2-6} = 3.$$

(2.20) формула бўйича $\angle BAD = \varphi$ ни топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_{AB} - k_{AD}}{1 + k_{AB}k_{AD}} = \frac{3-1}{1+3\cdot 1} = 0{,}5;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}5 = 26^\circ 34'.$$

180. Учбурчакнинг учлари $A(-2;\ 2)$, $B(6;\ 4)$ ва $C(2;\ -6)$ нуқталардан иборат. *AC* томон билан *A* учдан ўтказилган медиана орасидаги бурчакни топинг.

III. Берилган иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ билан берилган тўғри чизиқ орасидаги бурчакни ҳисоблаш

181. $A(4;\ -3)$ ва $B(2;\ -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ билан $3x+2y+4=0$ тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини топамиз:

1) $3x+2y+4=0,\ y=-\frac{3}{2}x-2,\ k=-\frac{3}{2};$ 2) $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-(-3)}{2-4} = -\frac{1}{2}.$

$k_2 = -\frac{1}{2},\quad k_1 = -\frac{3}{2}$ деймиз.

(2.20) формула бўйича топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{4}{7},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{7} = 29^\circ 45'.$$

182. $A(1;\ 5)$ ва $B(-4;\ 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ билан $x+2y-4=0$ тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни топинг.

183. $A(-1;\ -3)$ ва $B(5;\ 1)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ билан $2x+y+8=0$ тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг.

IV. Берилган нуқтадан ва берилган тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини берилган нисбатда бўлувчи нуқталардан ўтувчи икки тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни ҳисоблаш

184. Координаталар бошидан ва $2x + y - 12 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини 1:2:3 нисбатда бўлувчи нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини ҳисоблаш учун $2x + y - 12 = 0$ тўғри чизиқда бу тўғри чизиқлар ўтадиган нуқталарни топиш керак. $2x + y - 12 = 0$ тўғри чизиқ Ox ўқни A нуқтада, Oy ўқни B нуқтада кесиб ўтсин Бу нуқталарни топамиз:

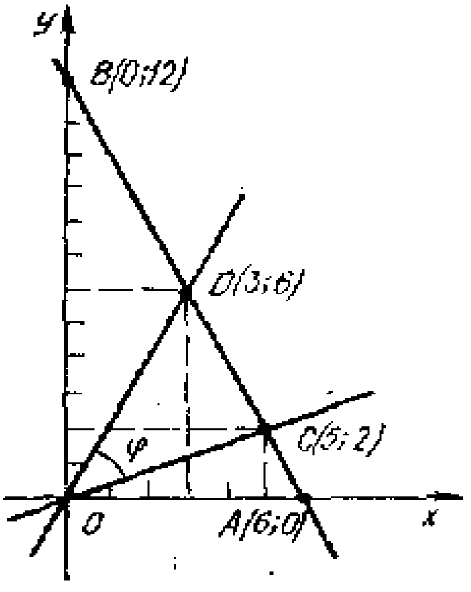
1) $y = 0,\ x = 6;\ A(6;\ 0)$;

2) $x = 0,\ y = 12;\ B(0;\ 12)$.

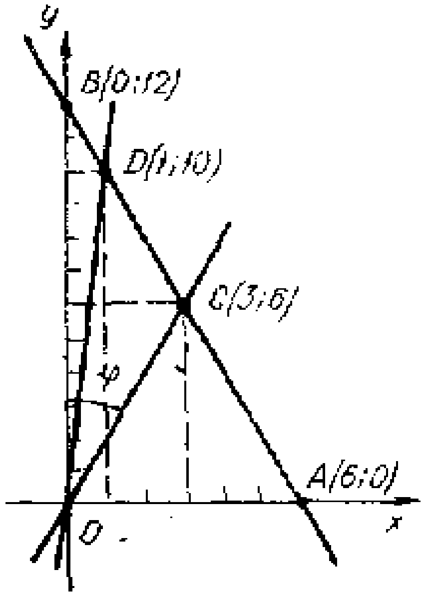
Энди тўғри чизиқнинг A ва B нуқталар орасидаги кесмасини 1:2:3 каби нисбатда бўлувчи C ва D нуқталарни топамиз (нуқталарни A, C, D, B кетма-кетликда оламиз). Масала шартида тўғри чизиқ кесмаси қандай йўналишда (A дан B га қарабми ёки B дан A га қарабми) бўлиниши айтилмаган, шу сабабли ҳар иккала йўналиш ҳам масала шартини қаноатлантиради, яъни масала иккита ечимга эга.

1- хил ечилиши. Бўлиш A дан B га қараб, яъни $AC:CD:DB = 1:2:3$ каби нисбатда бажарилмоқда (26- расм).

(1.3) формулалар бўйича C нуқтани топамиз:



26- расм.



27- расм.

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5};$$

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{6 + \frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}} = 5,$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{0 + \frac{1}{5}\cdot 12}{1+\frac{1}{5}} = 2, \; C(5;\ 2).$$

(1.4) формулалар бўйича AB кесманинг ўртаси бўлган D нуқтанинг координаталарини ҳисоблаймиз:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6+0}{2} = 3;$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+12}{2} = 6; \; D(3;\ 6).$$

OC ва OD тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини (2.7) формула бўйича топамиз:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_A}{x_A}; \quad k_{OC} = \frac{y_C}{x_C} = \frac{2}{5}, \quad k_{OD} = \frac{y_D}{x_D} = \frac{6}{3} = 2.$$

OC ва OD тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни (2.39) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_{OD} - k_{OC}}{1 + k_{OD}k_{OC}} = \frac{2 - \frac{2}{5}}{1 + 2\cdot\frac{2}{5}} = 0{,}8889;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}8889 = 41^\circ 38'.$$

2-хил ечилиши. Кесмани бўлиш B дан A га қараб, яъни $BD:DC:CA = 1:2:3$ каби нисбатда бажарилмоқда (27-расм).

D нуқтани топамиз:

$$\lambda = \frac{BD}{DA} = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5};$$

$$x_D = \frac{x_B + \lambda x_A}{1+\lambda} = \frac{0 + \frac{1}{5}\cdot 6}{1+\frac{1}{5}} = 1,$$

$$y_D = \frac{y_B + \lambda y_A}{1 + \lambda} = \frac{12 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = 10; \quad D(1;\ 10).$$

BA кесманинг ўртаси бўлган *C* нуқтани топамиз:

$$x_C = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

$$y_C = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{12 + 0}{2} = 6; \quad C(3;\ 6).$$

OD ва *OC* тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$k_{OD} = \frac{y_D}{x_D} = \frac{10}{1} = 10, \quad k_{OC} = \frac{y_D}{x_C} = \frac{6}{3} = 2.$$

OD ва *OC* тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни ҳисоблаймиз:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_{OD} - k_{OC}}{1 + k_{OD} k_{OC}} = \frac{10 - 2}{1 + 10 \cdot 2} = 0{,}381;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}381 = 20^\circ 51'.$$

185. Координаталар бошидан ва $x + 3y - 9 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини (унинг *Ox* ўқ билан кесишиш нуқтасидан *Oy* ўқ билан кесишиш нуқтаси томон йўналишда) 1:3:2 каби нисбатда бўлувчи нуқталардан ўтувчи икки тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни топинг.

186. $M(4;\ 3)$ нуқтадан ва $x + 2y - 6 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини унинг *Ox* ўқ билан кесишиш нуқтасидан *Oy* ўқ билан кесишиш нуқтаси томон йўналишда 3:1:2 каби нисбатда бўлувчи нуқталардан ўтувчи икки тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни топинг.

Ечилиши. $x + 2y - 6 = 0$ тўғри чизиқ *Ox* ўқни *A* нуқтада, *Oy* ўқни эса *B* нуқтада кесиб ўтсин. Бу нуқталарни топамиз:

1) $y = 0,\ x = 6,\ A(6;\ 0);$
2) $x = 0,\ y = 3,\ B(0;\ 3).$

Тўғри чизиқнинг *AB* кесмасини 3:1:2 каби нисбатда бўлувчи *C* ва *D* нуқталарни топамиз: *C* нуқта учун:

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{1 + 2} = 1.$$

(1.4) формулаларни қўллаиб, топамиз:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6+0}{2} = 3,$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2};\quad C\left(3;\ \frac{3}{2}\right).$$

D нуқта учун:

$$\lambda = \frac{AD}{DB} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

(1.3) формулалар бўйича:

$$x_D = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{6+2\cdot 0}{1+2} = 2.$$

$$y_D = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{0+2\cdot 3}{1+2} = 2;\ D(2;\ 2.)$$

MC ва *MD* тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини (2.19) формула бўйича топамиз:

$$k_{MC} = \frac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \frac{\frac{3}{2}-3}{3-4} = \frac{3}{2},\quad k_{DM} = \frac{2-3}{2-4} = \frac{1}{2}.$$

MC ва *MD* тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни ҳисоблаймиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_{MC} - k_{MD}}{1 + k_{MC}k_{MD}} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 0{,}5714,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}5714 = 29°45'.$$

187. $C(8;\ 7)$ нуқтадан ва $3x+2y-18=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини учта тенг бўлакка бўлувчи нуқталардан ўтувчи икки тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни топинг.

188. $M(-6;\ -8)$ нуқтадан ва $2x+y+10=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини (унинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасидан Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси томон йўналишда) 1:2:2 каби нисбатда бўлувчи нуқталардан ўтувчи икки тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни топинг.

V. Берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган тўғри чизиқ билан олдиндан берилган бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

189. A (2; 3) нуқтадан ўтувчи ва $2x - y - 1 = 0$ тўғри зиқ билан $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқни тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэфф циенти (2.20) формулада k_1 га ҳам, k_2 га ҳам тенг бўлиш мумкин, шу сабабли иккита ечимга эгамиз: 1) $k_1 =$ 2) $k_2 = 2$.

1) $k_1 = 2$. (2.20) формула бўйича: $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{k_2 - 2}{1 + 2}$ ёки $\frac{3}{4} = \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2}$. Бу тенгламани ечиб, $k_2 = -2$ ни ҳоси қиламиз.

Изланаётган тенглама ушбу кўринишга эга:

$$y - y_A = k(x - x_A).$$

Бунга A нуқтанинг координаталарини ва k_2 нинг қийма тини қўямиз:

$$y - 3 = -2(x - 2) \text{ ёки } 2x + y - 7 = 0.$$

$$2)\ k_2 = 2.\ \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{2 - k_1}{1 + 2k_1},\ k_1 = \frac{2}{11};$$

$$y - 3 = \frac{2}{11}(x - 2) \text{ ёки } 2x - 11y + 29 = 0.$$

190. (—2; 5) нуқтадан ўтувчи ва $3x - y + 4 = 0$ тўғр чизиқ билан $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

191. Координаталар бошидан ўтувчи ва $x - y + 1 = 0$ тўғри чизиқ билан 45° ли бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг. Бу тўғри чизиқнинг берилган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини топинг.

VI. Координаталар бошидан ўтувчи иккита тўғри чизиқнинг тенгламаларини уларнинг бурчак коэффициентларини нисбати ва бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчак бўйича тузиш

192. Координаталар бошидан ўтувчи иккита тўғри чизиқ ўзаро $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ бурчак ташкил этади. Бу тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини нисбати $\frac{2}{7}$ га тенг. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

Ечилиши. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқларнинг тенгламалари $y = kx$ кўринишга эга; уларнинг бурчак коэффициентларини топамиз.

Бу тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини k_1 ва k_2 билан белгилаймиз. Масала шартидан:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{2}{7}.$$

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, бу ердан $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$, бироқ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$, яъни $\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1} = \frac{1}{3}$.

k_1 ва k_2 ни ҳисоблаш учун қуйидаги системани ечамиз:

$$\begin{cases} \frac{k_1}{k_2} = \frac{2}{7}, \\ \frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Биринчи тенгламадан $k_2 = \frac{7}{2}k_1$ ни топамиз.

k_2 нинг қийматини иккинчи тенгламага қўйиб, $7k_1^2 - 15k_1 + 2 = 0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз, унинг илдизлари:

$$(k_1)_1 = 2 \text{ ва } (k_1)_2 = \frac{1}{7}.$$

k_1 нинг бу қийматларига k_2 нинг иккита қиймати мос келади:

$$(k_2)_1 = \frac{7}{2}\cdot 2 = 7 \text{ ва } (k_2)_2 = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{2}.$$

Иккита ечимга эгамиз: 1) $k_1 = 2$ ва $k_2 = 7$ ва 2) $k_1 = \frac{1}{7}$ ва $k_2 = \frac{1}{2}$.

Изланаётган тўғри чизиқлар мос равишда қуйидагилар бўлади: 1) $y = 2x$ ва $y = 7x$; 2) $y = \frac{1}{7}x$ ва $y = \frac{1}{2}x$, яъни масала иккита ечимга эга.

193. Координаталар бошидан ўтувчи икки тўғри чизиқ ўзаро $\operatorname{arctg}\frac{7}{9}$ бурчак ташкил этади. Бу тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини нисбати $\frac{9}{2}$ га тенг. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

VII. Учбурчак бурчагининг биссектрисаси тенгламасини бу учбурчакнинг берилган учлари бўйича тузиш

194. Учбурчакнинг учлари берилган: $A(2; -1)$, $B(-7; 3)$ ва $C(-1; -5)$. C бурчак биссектрисасининг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. C бурчак биссектрисасининг AB томон билан кесишиш нуқтаси M ни топамиз. Геометрия курсидан маълумки, учбурчак бурчагининг биссектрисаси бурчак қаршисидаги томонни бурчакка ёпишган томонларга пропорционал бўлакларга бўлади. Демак,

$$\lambda = \frac{BM}{MA} = \frac{CB}{CA}.$$

(1.1) формула бўйича топамиз:

$$CB = \sqrt{(-1+7)^2+(-5-3)^2} = 10,$$

$$CA = \sqrt{(-1-2)^2+(-5+1)^2} = 5,$$

у ҳолда

$$\lambda = \frac{10}{5} = 2.$$

(1.3) формулалар бўйича M нуқтанинг координаталарини ҳисоблаймиз:

$$x_M = \frac{-7+2\cdot 2}{1+2} = -1,\ y_M = \frac{3+2(-1)}{1+2} = \frac{1}{3},\ M\left(-1; \frac{1}{3}\right).$$

C ва M нуқталарнинг абсциссалари тенг, демак, C бурчакнинг биссектрисаси Oy ўққа параллел: $x = -1$ ёки $x + 1 = 0$.

195. Учбурчакнинг учлари берилган: $A(-6; -2)$, $B(4; 8)$ ва $C(2; -10)$.

A бурчак биссектрисасининг тенгламасини тузинг.

13- §. Иккита тўғри чизиқнинг параллеллик шарти

Агар $y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари тенг, яъни

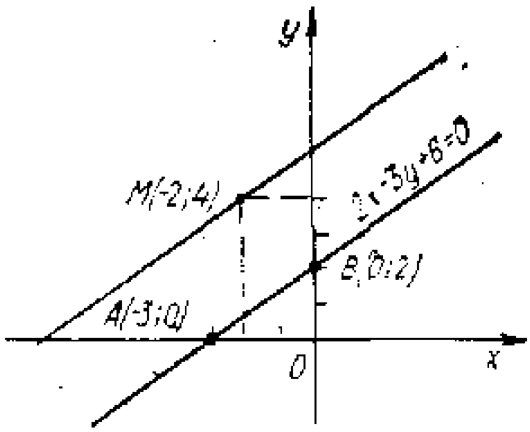
$$k_2 = k_1 \qquad (2.21)$$

бўлса, бу тўғри чизиқлар параллел бўлади.

1. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

196. $M(-2; 4)$ нуқтадан $2x - 3y + 6 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. $2x-3y+6=0$ тўғри чизиқни унинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари бўйича ясаймиз: 1) $y=0$, $x=-3$; $A(-3;\ 0)$; 2) $x=0$, $y=2$; $B)(0;2)$ $M(-2;\ 4)$ нуқтани ясаймиз (28-расм).



28- расм.

AB тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиш учун унинг тенгламасини y га нисбатан ечамиз: $y=\frac{2}{3}\times$ $\times x+2$, бу ердан бурчак коэффициент $k_{AB}=\frac{2}{3}$.

Изланаётган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентига тенг бўлади, чунки тўғри чизиқлар параллел, яъни $k_{MC}=k_{AB}=\frac{2}{3}$. Изланаётган тўғри чизиқ $M(-2;\ 4)$ нуқтадан ўтади ва $k_{MC}=\frac{2}{3}$ бурчак коэффициентга эга бўлади. Бу қийматларни берилган нуқтадан берилган йўналишда ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси (2.17) га қўйиб,

$$y-4=\frac{2}{3}(x+2) \text{ ёки } 2x-3y+16=0$$

ни ҳосил қиламиз.

197. $A(-3;\ 2)$ нуқтадан $5x-3y+21=0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

198. $A(-1;\ -4)$ нуқтадан $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ тўғри чизиққа параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

II. Берилган иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиққа параллел ва берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

199. $A(-2;\ 6)$ ва $B(3;\ -1)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиққа параллел ҳамда $M(-3;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

200. $(-3;\ 1)$ ва $(3;\ 2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиққа параллел ҳамда $(1;\ -4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

III. Берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан берилган тўғри чизиққа параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

201. $x+y-4=0$ ва $x-y=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан $x-4y+4=0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

202. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ ва $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан $x-2y-6=0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб ўтган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

14- §. Иккита тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шарти

Агар $y=k_1x+b_1$ ва $y=k_2x+b_2$ тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари катталиклари бўйича тескари, ишоралари бўйича қарама-қарши, яъни

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ ёки } k_1k_2 = -1 \qquad (2.22)$$

бўлса, бу тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлади.

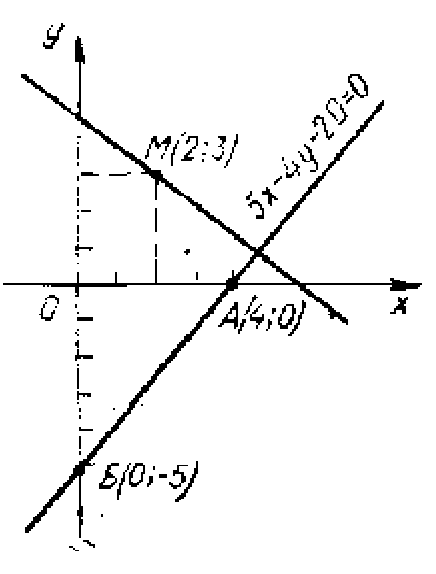
I. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

203. M (2; 3) нуқтадан $5x-4y-20=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. $5x-4y-20=0$ тўғри чизиқни унинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: 1) $y=0$, $x=4$; $A(4, 0)$ ва 2) $x=0$, $y=-5$; B $(0. -5)$ бўйича ясаймиз ва $M(2; 3)$ нуқтани ясаймиз (29- расм). AB тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти: $k_{AB}=\frac{5}{4}$. Изланаётган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини (2.22) формула бўйича топамиз:

$$k_{MC} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{4}{5}.$$

$k_{MC}=-\frac{4}{5}$ ни ва M нуқтанинг координаталарини (2.18) тенгламага қўйиб, $y-3=-\frac{4}{5}(x-2)$ ёки $4x+5y-23=0$ ни ҳосил қиламиз.



29- расм.

204. $M(4;\ -3)$ нуқтадан $5x-2y+10=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

205. $M(-4;\ 1)$ нуқтадан $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

206. Координаталар бошидан $2x+3y-12=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

II. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган ва берилган нуқтадан ўтадиган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

207. $(-2;\ 6)$ ва $(3;\ -3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган ва $(2;\ 4)$ нуқтадан ўтадиган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

208. Тўғри чизиқ $(-4;\ 1)$ ва $(2;\ -5)$ нуқталардан ўтади. Бу тўғри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси орқали унга перпендикуляр бўлган иккинчи бир тўғри чизиқ ўтади. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

209. Координаталар бошидан ўтувчи ва Ox ўқни $(2;\ 0)$ нуқтада, Oy ўқни $(0;\ -6)$ нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

III. Берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

210. $x+2y+4=0$ ва $3x-y-9=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан $x+y-7=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

211. Тўғри чизиқ Ox ўқни $(-2;\ 0)$ нуқтада, Oy ўқни $(0;\ -3)$ нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб, $x+y-5=0$ ва $x-y+3=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

IV. Берилган нуқталарни туташтирувчи кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

212. Тўғри чизиқ $A(-2;\ 1)$ ва $B(4;\ 4)$ нуқталарни туташтирувчи кесманинг ўртасидан бу кесмага перпендикуляр бўлиб ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Изланаётган тўғри чизиқ ўтадиган нуқтани топамиз. Бу нуқта AB кесманинг ўртасидир (уни C билан белгилаймиз):

$$x_C = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1,$$

$$y_C = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2};\ C\left(1;\ \frac{5}{2}\right).$$

Изланаётган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ҳисоблаш учун AB тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини (2.19) формула бўйича топамиз:

$$k_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{1}{2},$$

бу ердан изланаётган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k=-2$ эканлиги келиб чиқади.

(2.17) тенгламага $k=-2$ қийматни ва $C\left(1;\ \frac{5}{2}\right)$ нуқтанинг координаталарини қўйиб,

$$y-\frac{5}{2} = -2(x-1) \text{ ёки } 4x+2y-9=0$$

ни ҳосил қиламиз.

213. Тўғри чизиқ $(-1;\ 4)$ ва $(3;\ -2)$ нуқталарни туташтирувчи кесманинг ўртасидан бу кесмага перпендикуляр бўлиб ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

214. Тўғри чизиқ $3x-7y+21=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасига жойлашган кесмасининг ўртасидан бу кесмага перпендикуляр бўлиб ўтади. Бу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

V. Учбурчак баландликларининг тенгламаларини унинг учларини координаталари бўйича тузиш

215. Учлари $A(4;\ 2)$, $B(6;\ -5)$ ва $C(-5;\ 4)$ нуқталар бўлган учбурчак берилган. Учбурчак баландликларининг тенгламаларини тузинг.

Ечилиши. Учбурчакнинг баландликларини мос равишда AD, BE ва CF билан белгилаймиз (30- расм).

Учбурчак томонларининг бурчак коэффициентларини (2.19) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$1)\ k_{BC} = \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B} = \frac{4-(-5)}{-5-6} = -\frac{9}{11};$$

2) $k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-2}{-5-4} = -\frac{2}{9};$

3) $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5-2}{6-4} = -\frac{7}{2}.$

Учбурчак баландликларининг бурчак коэффициентларини (2.22) формула бўйича ҳисоблаймиз:

1) $k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{11}{9};$

2) $k_{BE} = -\frac{1}{k_{AC}} = \frac{9}{2};$

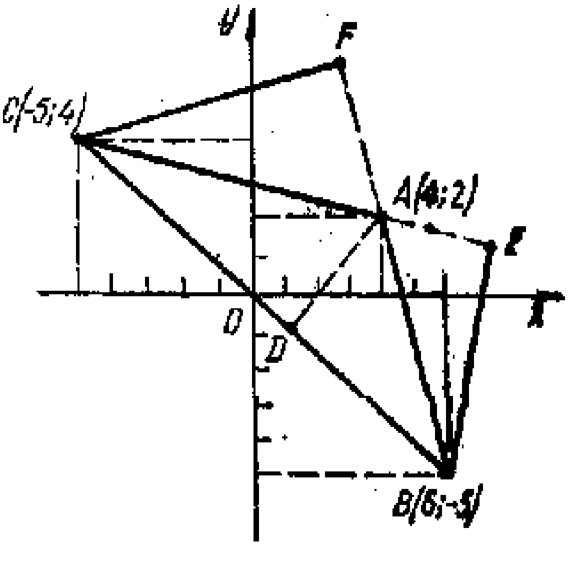
3) $k_{CF} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{2}{7}.$

Учбурчак баландликларининг тенгламаларини унинг берилган учларининг координаталари ва тегишли баландликларнинг бурчак коэффициентлари бўйича (2.17) формулага кўра ҳисоблаймиз:

$AD: y - y_A = k_{AD}(x - x_A),$

$y - 2 = \frac{11}{9}(x-4)$ ёки $11x - 9y - 26 = 0;$

$BE: y - y_B = k_{BE}(x - x_B),$



30- расм.

$y + 5 = \frac{9}{2}(x-6)$ ёки $9x - 2y - 64 = 0;$

$CF: y - y_C = k_{CF}(x - x_C),$

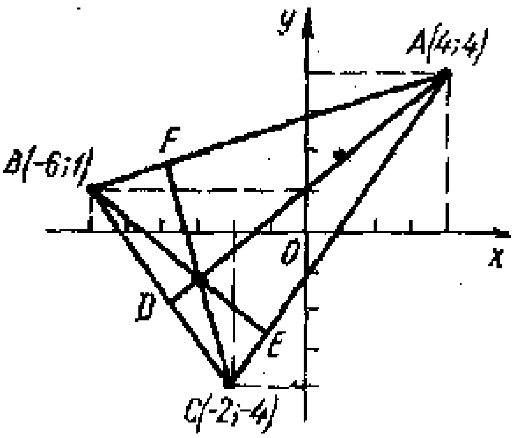
$y - 4 = \frac{2}{7}(x+5)$ ёки $2x - 7y + 38 = 0.$

216. Учлари 1) $A(-4; 2)$, $B(6; 5)$ ва $C(1; -4)$; 2) $(2; -3)$, $(7; 2)$ ва $(-8; -2)$ нуқталарда бўлган учбурчак баландликларининг тенгламаларини тузинг.

VI. Учбурчакнинг томонлари тенгламалари бўйича унинг баландликлари тенгламаларини тузиш

217. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: $8x - 10y + 28 = 0$, $5x + 4y + 26 = 0$ ва $4x - 3y - 4 = 0$. Учбурчак баландликларининг тенгламаларини тузинг.

Ечилиши. Айтайлик, биринчи тенглама AB томоннинг, иккинчи тенглама BC томоннинг ва учинчи тенглама CA томоннинг тенгламаси бўлсин. A, B ва C учлардан тегишли томонларга туширилган баландликларни AD, BE ва CF билан белгилайлик.



31- р см.

Ушбу тенгламалар системасини ечиб, учбурчак учларининг координаталарини топамиз:

$$\begin{cases}3x-10y+28=0,\\5x+4y+26=0;\end{cases}\quad B(-6;\ 1);$$

$$\begin{cases}3x-10y+28=0,\\4x-3y-4=0;\end{cases}\quad A(4;\ 4);$$

$$\begin{cases}5x+4y+26=0,\\4x-3y-4=0;\end{cases}$$

$C(-2;\ -4)$ (31-расм).

Томонлар тенгламаларидан уларнинг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$k_{AB}=\frac{3}{10},\ k_{BC}=-\frac{5}{4}\ \text{ва}\ k_{CA}=\frac{4}{3}.$$

Учбурчак баландликларининг бурчак коэффициентлари (2.22) формула бўйича қуйидагича бўлади:

$$k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{4}{5},$$

$$k_{BE}=-\frac{1}{k_{CA}}=-\frac{3}{4}\ \text{ва}\ k_{CF}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{10}{3}.$$

(2.17) формула бўйича учбурчак баландликларининг тенгламаларини тузамиз:

$$AD: y-y_A=k_{AD}(x-x_A),$$

$$y-4=\frac{4}{5}(x-4)\ \text{ёки}\ 4x-5y+4=0;$$

$$BE: y-y_B=k_{BE}(x-x_B),$$

$$y-1=-\frac{3}{4}(x+6)\ \text{ёки}\ 3x+4y+14=0;$$

$$CF: y-y_C=k_{CF}(x-x_C),$$

$$y+4=-\frac{10}{3}(x+2)\ \text{ёки}\ 10x+3y+32=0.$$

218. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган:
1) $11x+2y-21=0$, $8x-3y+7=0$ ва $3x+5y+21=0$;
2) $2x-y+5=0$; $x+y-5=0$ ва $x-2y-5=0$.
Учбурчак баландликларининг тенгламаларини тузинг.

VII. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофани ҳисоблаш

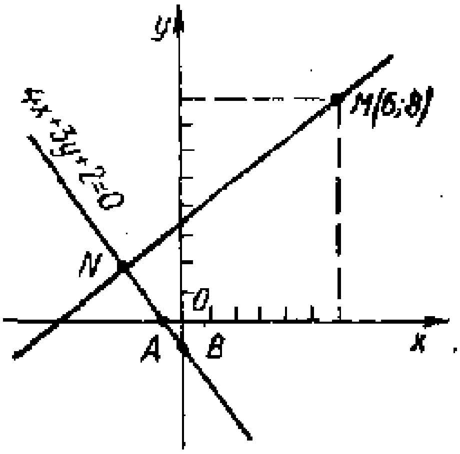
219. $M(6; 8)$ нуқтадан $4x+3y+2=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани ҳисобланг.

Ечилиши. *M нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофа M нуқтадан шу тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр кесмасининг узунлигига тенг* (32-расм).

Бу перпендикулярнинг тенгламасини тузамиз ва унинг берилган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини топамиз.

Берилган тўғри чизиқнинг (бу тўғри чизиқни AB дейлик) бурчак коэффициенти $k_{AB}=-\frac{4}{3}$ га тенг. MN перпендикулярнинг бурчак коэффициентини эса (2.22) формула бўйича топамиз:

$$k_{MN}=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{3}{4}.$$



32- расм.

Перпендикулярнинг тенгламасини (2.17) формула бўйича тузамиз:

$$y-8=\frac{3}{4}(x-6) \text{ ёки } 3x-4y+14=0.$$

N нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш учун ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases}4x+3y+2=0;\\3x-4y+14=0;\end{cases} \quad N(-2;\ 2).$$

MN масофани (1.1) формула бўйича топамиз:

$$MN=\sqrt{(6+2)^2+(8-2)^2}=10.$$

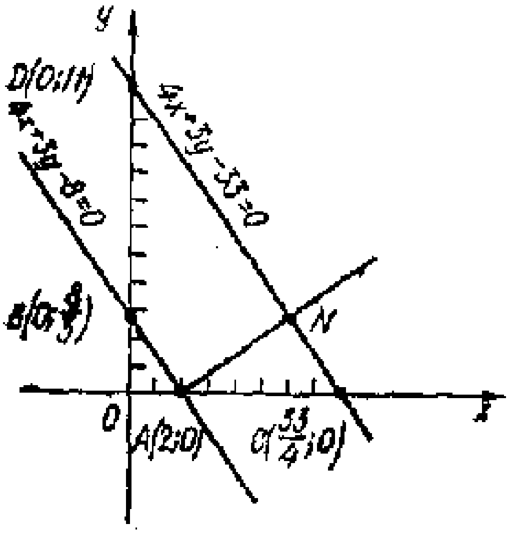
220. $M(-2; 4)$ нуқтадан $4x-3y-5=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

221. $(4; 6)$ нуқтадан $3x+4y+14=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

VIII. Иккита параллел тўғри чизиқ орасидаги масофани ҳисоблаш

222. $4x+3y-8=0$ ва $4x+3y-33=0$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқларнинг исталган биридаги ихтиёрий нуқта орқали унга иккинчи тўғри чизиқ билан кесишгунча перпендикуляр ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг берилган тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаб, бу нуқталар орасидаги масофани топамиз. Тўғри чизиқларни ясаймиз. $4x+3y-8=0$ тўғри чизиқ координата ўқлари билан $A(2; 0)$ ва $B\left(0; \frac{8}{3}\right)$ нуқталарда, $4x+3y-33=0$ тўғри чизиқ эса $C\left(\frac{33}{4}; 0\right)$ ва $D(0; 1)$ нуқталарда кесишади (33-расм). Ҳисоблашларни ечишнинг юқоридаги плани бўйича бажарамиз.



33- расм.

1. $4x+3y-8=0$ тўғри чизиқда унинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $A(2; 0)$ ни оламиз.

2. AB тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топамиз: $k_{AB}=-\frac{4}{3}$.

3. A нуқтадан ўтиб, AB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини (2.22) формула бўйича топамиз (бу перпендикулярни AN орқали белгилаймиз):

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{3}{4}.$$

4. Бу перпендикулярнинг тенгламасини (2.17) формула бўйича тузамиз:

$$y-0 = \frac{3}{4}(x-2) \text{ ёки } 3x-4y-6=0.$$

5. *CD* ва *AN* тўғри чизиқларнинг тенгламаларидан иборат системани ечиб, *AN* перпендикулярнинг *CD* тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини топамиз:

$$\begin{cases}4x+3y-33=0,\\ 3x-4y-6=0;\end{cases}\quad N(6;\ 3).$$

6. (1.1) формула бўйича *A* ва *N* нуқталар орасидаги масофани ҳисоблаймиз:

$$AN=\sqrt{(2-6)^2+(0-3)^2}=5.$$

Параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа 5 га тенг.

223. 1) $4x+3y+33=0$ ва $4x+3y-17=0$; 2) $12x+5y-101=0$ ва $12x+5y+68=0$. параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

15- §. Аралаш масалалар

224. k коэффициентнинг қандай қийматида $y=kx+9$ тўғри чизиқ $x-y+5=0$ ва $x+2y+2=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтади?

225. Тўғри чизиқ $M(2;5)$ нуқтадан Ox ўққа $\operatorname{arctg} 3$ бурчак остида ўтади. Бу тўғри чизиқда абсциссаси (-2) бўлган нуқтани топинг.

226. $x+2y-4=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини координаталар бошидан ўтувчи иккита тўғри чизиқ $1:2:1$ каби нисбатда бўлади. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

227. $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасини координаталар бошидан ўтувчи иккита тўғри чизиқ учта тенг бўлакка бўлади. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

228. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: $6x-5y+8=0$, $4x+y-38=0$ ва $x-3y-3=0$. Унинг медианалари тенгламаларини топинг.

229. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: $4x-5y+22=0$, $5x-2y+2=0$ ва $x+3y+14=0$. Бу учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасидан ва $(1;\ -3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

230. $2x+3y-18=0$ тўғри чизиқда шундай нуқтани топингки, у Oy ўқдан Ox ўққа қараганда уч баравар нарида бўлсин.

231. Координаталар бошидан ўтувчи ва Ox ўқ билан $y=\frac{1}{5}x$ тўғри чизиқ Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчакка қараганда икки марта катта бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

232. (8; 5) нуқтадан ўтувчи ва Ox ўқ билан $x-4y+4=0$ тўғри чизиқ Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчакка қараганда икки марта катта бурчак ҳосил қиладиган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

233. (—7; 8) нуқтадан ўтувчи ва $3x-5y+15=0$ тўғри чизиқ билан 45° ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини топинг.

234. $5x-4y-20=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталаридан унга ўтказилган иккита перпендикулярнинг тенгламаларини топинг.

235. Учбурчак учлари билан берилган: $A(-5; -2)$, $B(7; 6)$ ва $C(5; -4)$. Қуйидагиларни топинг: 1) AB томоннинг тенгламаси; 2) A учдан BC томонга ўтказилган медиананинг тенгламаси; 3) C учдан AB томонга ўтказилган баландликнинг тенгламаси; 4) B ва C бурчаклар; 5) бу учбурчакнинг оғирлик маркази.

236. $x-y-7=0$ ва $x-y+3=0$ параллел тўғри чизиқлар берилган. Бу тўғри чизиқларга параллел бўлиб, улар орасидаги масофани бошланғич ординатаси кичик бўлган тўғри чизиқдан бошланғич ординатаси катта бўлган тўғри чизиқ томон йўналишда 3 : 2 нисбатда бўлувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

237. $A(-4; 2)$ ва $B(8; 4)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиққа AB масофани (A дан B га қараб) 3 : 4 каби нисбатда бўлувчи нуқтада перпендикуляр ўтказилган. Перпендикулярнинг тенгламасини тузинг.

238. Ромбнинг иккита томонини тенгламаси $3x-10y+37=0$ ва $9x+2y-17=0$ ҳамда диагоналларидан бирининг тенгламаси $3x-2y-19=0$ берилган. Ромбнинг қолган иккита томонининг ва иккинчи диагоналининг тенгламаларини топинг.

239. Параллелограммнинг иккита томони тенгламаси $3x-2y+12=0$ ва $x-3y+11=0$ ҳамда унинг диагоналларини кесишиш нуқтаси (2; 2) берилган. Параллелограммнинг қолган иккита томонининг ва диагоналларининг тенгламаларини тузинг.

240. Параллелограммнинг бир учидан чиққан иккита томонининг тенгламаси $5x-3y+28=0$ ва $x-3y-4=0$ ҳамда

бу учга қарама-қарши учнинг координаталари (10; 6) берилган. Параллелограммнинг қолган иккита томонининг ва диагоналларининг тенгламаларини тузинг.

241. Квадратнинг иккита қарама-қарши учи $A(-1;\ 1)$ ва $C(5;\ 3)$ нуқталарда жойлашган. Бу квадрат томонларининг ва диагоналларининг тенгламаларини тузинг.

242. Агар тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчак гипотенузасининг тенгламаси $x-2y-3=0$ бўлиб, тўғри бурчакнинг учи $C(1;\ 6)$ нуқтада бўлса, бу учбурчак катетларининг тенгламаларини тузинг.

243. Ёруғлик нури $A(3;\ 10)$ нуқтадан чиқиб, $2x+y-6=0$ тўғри чизиқдан қайтади ва қайтгандан сўнг $B(7;\ 2)$ нуқтадан ўтади. Тушувчи ва қайтувчи нурларнинг тенгламаларини тузинг.

Кўрсатма. Нурнинг тушиш бурчаги унинг қайтиш бурчагига тенг.

Контрол иш

I вариант

244. Учбурчак учлари билан берилган: $A(-7;\ 3)$, $B(2;\ -1)$ ва $C(-1;\ -5)$. *Қуйидагиларни топинг*: 1) BC томонга параллел бўлган AN томоннинг тенгламаси; 2) AD медиананинг тенгламаси; 3) BF баландликнинг тенгламаси; 4) B бурчак; 5) CP биссектрисанинг тенгламаси.

II вариант

245. Учбурчак учлари билан берилган: $A(-8;\ -2)$, $B(2;\ 10)$ ва $C(4;\ 4)$. Қуйидагиларни топинг: 1) AC томонга параллел бўлган BN томоннинг тенгламаси; 2) CD медиананинг тенгламаси; 3) AE баландликнинг тенгламаси; 4) B бурчак; 5) бу учбурчакнинг оғирлик маркази.

3- БОБ

ТЕКИСЛИКДА НУҚТАЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК ЎРНИ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

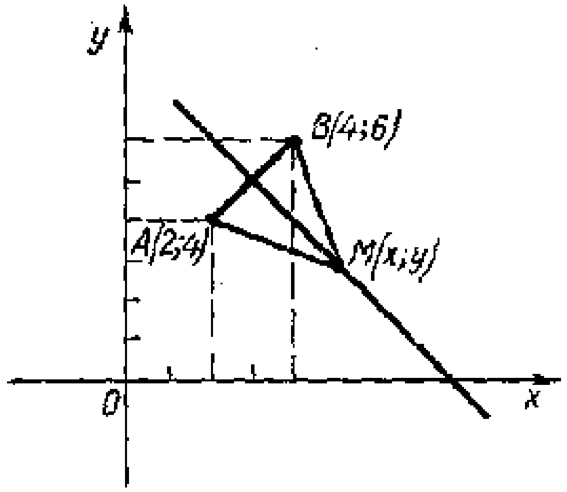
16- §. Текисликда нуқталарнинг геометрик ўрни

Текисликда бир хил хоссаларга эга бўлган ва бу хоссалари уларни текисликнинг бошқа нуқталаридан ажратиб турувчи нуқталар тўплами текисликда нуқталарнинг геометрик ўрни дейилади.

x ва y ўзгарувчили тенгламага текисликда нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида бирор чизиқ мос келиб, унинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради. Аксинча, текисликда нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборат чизиққа x ва y ўзгарувчили бирор тенглама мос келади.

Масала шартига кўра текисликдаги нуқталар геометрик ўрнининг тенгламасини тузиш учун x ва y ўзгарувчи катталиклар (геометрик ўрнининг ихтиёрий нуқтасининг координаталари) билан масалада берилган ўзгармас катталиклар (параметрлар) орасида муносабат ўрнатиш ва бу муносабатни тенглама қилиб ёзиш керак.

246. Текисликда $A(2;\ 4)$ ва $B(4;\ 6)$ нуқталардан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.



34- расм.

Ечилиши. Геометрия курсидан маълумки, берилган кесмага унинг ўртасидан ўтказилган перпендикуляр шу кесма учларидан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнидир. Бу хоссадан тенглама тузиш учун фойдаланамиз.

$M(x;\ y)$ нуқта шу нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлсин (34- расм), у ҳолда $MA=MB$. (1.1) формула бўйича:

$$MA=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \text{ ва } MB=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}$$

ёки

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}.$$

Бунинг чап ва ўнг қисмларини квадратга кўтаргандан ўнг,

$$(x—2)^2+(y—4)^2=(x—4)^2+(y—6)^2$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенгламани соддалаштириб,

$$x+y—8=0$$

ни ҳосил қиламиз.

Масала шартида кўрсатилган хоссага эга бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни

$$x+y—8=0$$

тўғри чизиқдан иборатдир.

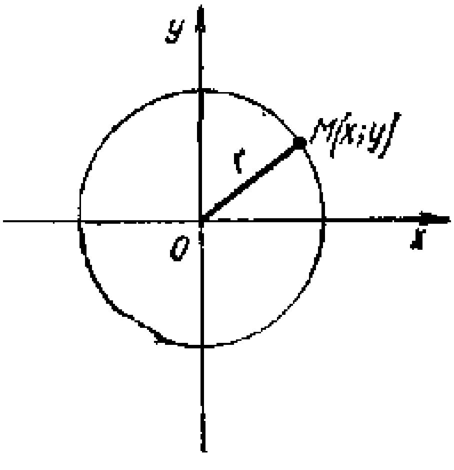
247. Текисликда $A(—4; 2)$ ва $B(6; —8)$ нуқталардан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

248. Текисликда координаталар бошидан r масофага узоқлашган нуқталарнинг геомётрик ўрнини топинг.

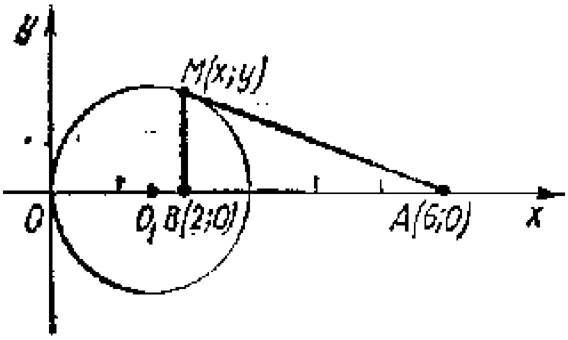
Ечилиши. Масала шартидан, изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий $M(x; y)$ нуқта учун $OM=r$ тенгликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади, бироқ

$$OM=\sqrt{x^2+y^2},\ \sqrt{x^2+y^2}=r,\ x^2+y^2=r^2.$$

Нуқталарнинг бу геометрик ўрни маркази координаталар бошида бўлган айланадир (35- расм).



35- расм.



36- расм.

249. Текисликдаги шундай нуқталарнинг геометрик ўр тенгламасини тузингки, уларнинг ҳар биридан $A(6; 0)$ ну тагача бўлган масофа улардан $B(2; 0)$ нуқтагача бўлган м софадан уч марта катта бўлсин.

Ечилиши. Масала шартидан, изланаётган геометр ўрнига тегишли исталган $M(x; y)$ нуқта учун $MA=3M$ тенглик ўринли эканлиги келиб чиқади (36- расм).

(1.1) формула бўйича топамиз:

$$MA=\sqrt{(x-6)^2+y^2} \text{ ва } MB=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

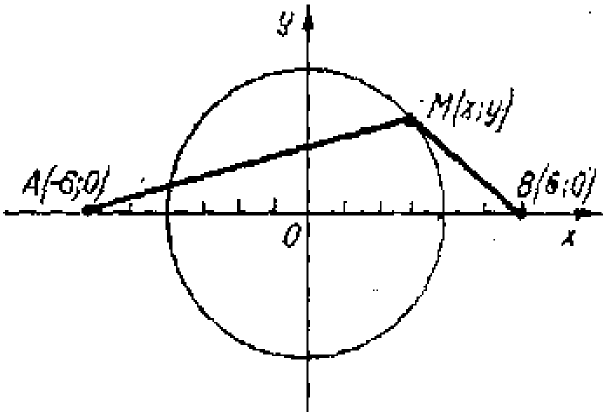
ёки

$$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=3\sqrt{(x-2)^2+y^2},$$
$$(x-6)^2+y^2=9(x-2)^2+9y^2.$$

Соддалаштиришлардан сўнг:

$$x^2+y^2-3x=0.$$

250. Текисликда шундай нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузингки, уларнинг ҳар биридан $A(12; 0)$ нуқтагача бўлган масофа улардан $B(3; 0)$ нуқтагача бўлган масофадан икки марта катта бўлсин.



37- расм.

251. Текисликда берилган $A(-6; 0)$ ва $B(6; 0)$ нуқталаргача бўлган масофалари квадратларининг йиғиндиси ўзгармас катталик 104 га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан, изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий $M(x; y)$ нуқта учун $MA^2+MB^2=104$ муносабатнинг ўринли эканлиги келиб чиқади (37- расм). (1.1) формула бўйича

$$MA=\sqrt{(x+6)^2+y^2},\ MB=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

ёки

$$(\sqrt{(x+6)^2+y^2})^2+\sqrt{(x-6)^2+y^2})^2=104;$$
$$(x+6)^2+y^2+(x-6)^2+y^2=104$$

га эга бўламиз.

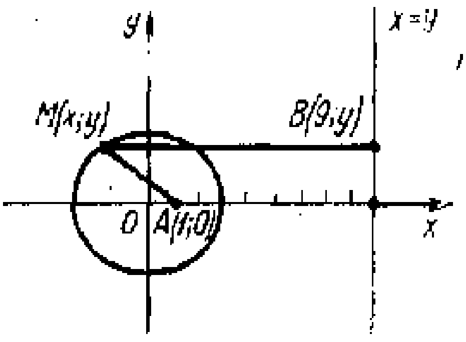
Соддалаштиришлардан сўнг,

$$x^2+y^2=16$$

ни ҳосил қиламиз.

252. Текисликда берилган $A\ (0\,;-2)$ ва $B\ (0\,;\,2)$ нуқталаргача бўлган масофалари квадратларининг йиғиндиси ўзгармас катталик 33 га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

253. Текисликда $A\ (1\,;\,0)$ нуқтагача ва $x=9$ тўғри чизиққача бўлган масофаларининг нисбати $\lambda=\frac{1}{3}$ га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.



38- расм.

Ечилиши. Масала шартидан, изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий $M\,(x\,;\,y)$ нуқта учун $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$ муносабатнинг ўринли эканлиги келиб чиқади (38-расм).

(1.1) формула бўйича:

$$MA=\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

$$MB=\sqrt{(x-9)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-9)^2}=|x-9|\cdot$$

MB нинг қийматини абсолют катталиги бўйича оламиз, чунки кесманинг узунлиги мусбат сондир:

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-9|}=\frac{1}{3}\,;\qquad 3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-9|.$$

Чап ва ўнг томонларни квадратга кўтарамиз:

$$9(x-1)^2+9y^2=|x-9|^2$$

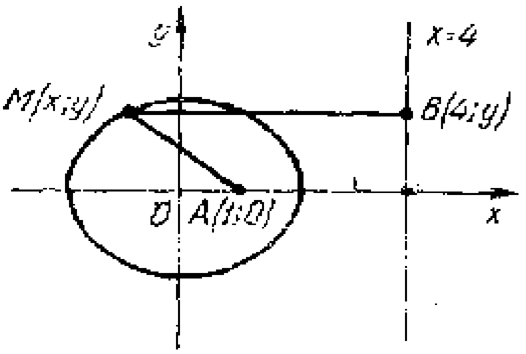
Соддалаштиришлардан сўнг,

$$8x^2+9y^2=72 \text{ ёки } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$$

ни ҳосил қиламиз.

254. Текисликда $A\ (3\ ;0)$ нуқтагача ва $x = 12$ тўғри чизиққача бўлган масофаларининг нисбати $\lambda = \frac{1}{2}$ га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини топинг.

255. Ўзининг текисликдаги ҳаракати давомида $A\ (1\ ;0)$ нуқтага $x = 4$ тўғри чизиққа нисбатан икки марта яқинда қоладиган M нуқтанинг ҳаракат траекторияси тенгламасини тузинг.



39- расм.

Ечилиши. Масала шартидан, изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий $M\ (x\ ;\ y)$ нуқта учун $2MA = MB$ тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади (39-расм).

(1.1) формула бўйича:

$$MA = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \text{ ва } MB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4| \text{ ёки } 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-4|.$$

Чап ва ўнг томонларни квадратга кўтарамиз:

$$4\ (x-1)^2 + 4y^2 = (x-4)^2.$$

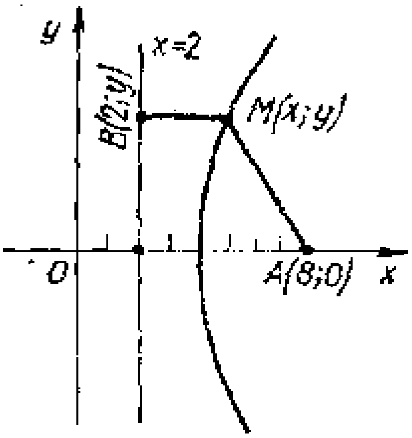
Соддалаштиришлардан сўнг,

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \text{ ёки } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

256. Ўзининг текислик бўйлаб ҳаракати давомида $y = 9$ тўғри чизиқдан $A\ (0;\ 1)$ нуқтага қараганда уч марта узоқда қоладиган M нуқтанинг траектория тенгламасини тузинг.

257. Текисликда шундай нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузингки, уларнинг ҳар бирідан $x = 2$ тўғри чизиққача бўлган масофа улардан $A\ (8\ ;\ 0)$ нуқтагача бўлган масофага қараганда икки марта яқин бўлсин.



40- расм.

Ечилиши. Масала шартидан, нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий $M(x\ ;\ y)$ нуқта учун $2\ MB = MA$ тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади (40- расм).

(1·1) формула бўйича:

$$MB = \sqrt{(x-2)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \text{ ва}$$

$$MA = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

ёки

$$2 \cdot |x-2| = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}.$$

Квадратга кўтаргандан ва соддалаштиргандан сўнг,

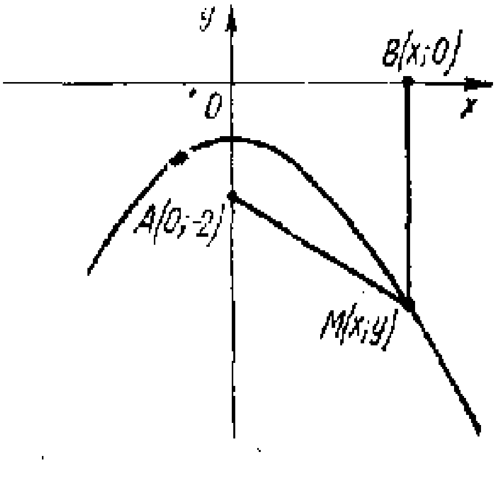
$$3x^2 - y^2 = 48 \text{ ёки } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

258. Ўзининг текислик бўйича ҳаракати давомида $x = 1$ чизиққа $A\ (9\,;\,0)$ нуқтага қараганда уч марта яқин қоладиган $M\ (x;\ y)$ нуқтанинг траектория тенгламасини тузинг.

259. Текисликда Ox ўқдан ва $A\ (0\,;\,-2)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан, нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий $M(x\,;\,y)$ нуқта учун $MA = MB$ тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади (41-расм).



41-расм.

(1·1) формула бўйича:

$$MA = \sqrt{x^2 + (y+2)^2}\ ;\ MB = |y| \text{ ёки}$$

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = |y|.$$

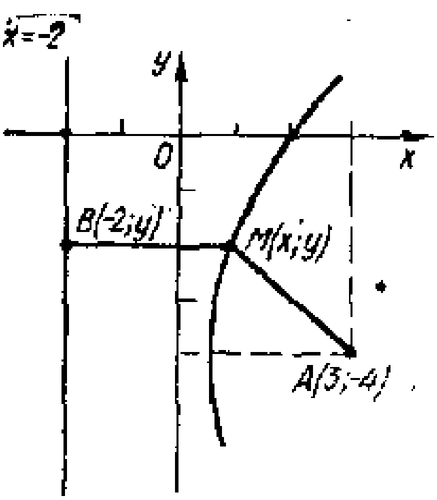
Чап ва ўнг томонларини квадратга кўтариб, сўнгра соддалаштириб,

$$x^2 + 4y + 4 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

260. Текисликда Oy ўқдан ва $A\ (3\,;\,0)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

261. Текисликда $y = 1$ тўғри чизиқ ва $A\ (0\,;\,-3)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини ёзинг.



42- расм.

262. Текисликда ҳар биридан $x = -2$ тўғри чизиққача бўлган масофа улардан $A(3; -4)$ нуқтагача бўлган масофага тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан, нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий $M(x; y)$ нуқта учун $MA = MB$ тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади (42- расм).

(1.1) формула бўйича:

$$MA = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} \text{ ва } MB =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + (y-y)^2} = |x+2| \text{ ёки}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = |x+2|.$$

Чап ва ўнг томонларини квадратга кўтариб ва соддалаштириб,

$$y^2 + 8y - 10x + 21 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

263. Текисликда ҳар бири $A(-2; 3)$ нуқтадан ва $x = 4$ тўғри чизиқдан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

264. Текисликда ҳар бири $y = -2$ тўғри чизиқдан ва $A(-3; 4)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини топинг.

265. Агар текисликда ҳаракатланаётган нуқтанинг ҳаракати давомида ундан $A(2; -1)$ нуқтагача бўлган масофанинг квадрати ҳар доим ундан Ox ўққача бўлган масофанинг квадратига тенг бўлса, нуқтанинг траектория тенгламасини тузинг.

266. Агар текисликда берилган нуқтанинг ҳаракати давомида ундан $A(-3; 4)$ нуқтагача бўлган масофанинг квадрати ҳар доим ундан Ox ўққача бўлган масофа квадратининг иккиланганига тенг бўлса, бу нуқтанинг ҳаракат траекторияси тенгламасини топинг.

Ечилиши. Масала шартидан, нуқта траекториясининг ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтаси учун $(MA)^2 = 2(MB)^2$ тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади.

(1.1) формула бўйича:

$$MA = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} \text{ ва } MB = |y|$$

ёки

$$\left(\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}\right)^2 = 2y^2,\ (x+3)^2+(y-4)^2 = 2y^2.$$

Соддалаштиргандан сўнг ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x^2 - y^2 + 6x - 8y + 25 = 0.$$

267. Агар текисликдаги нуқталарнинг геометрик ўрнининг ҳар бир нуқтасини абсциссаси бу нуқтанинг ординатаси ва бу нуқтани A (1; 0) нуқта билан туташтирувчи кесманинг узунлиги орасида ўрта пропорционал бўлса, бу нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

Ечилиши. a ва b сонларнинг ўрта пропорционали деб $m = \sqrt{ab}$ сонга айтилишини эслатиб ўтамиз.

Масала шартидан, геометрик ўринга тегишли бўлган ихтиёрий N $(x;\ y)$ нуқта учун ушбу тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади:

$$OB = \sqrt{BN \cdot AN},$$

$$OB = |x|,\quad BN = |y|,\quad AN = \sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Бу қийматларни биринчи тенгликка қўйиб топамиз:

$$|x| = \sqrt{|y|\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

Ифодани радикаллардан қутқариб, соддалаштиргандан сўнг, ушбуга эга бўламиз:

$$x^2 = |y|\sqrt{(x-1)^2+y^2};\ x^4 = y^2(x-1)^2+y^4$$

ёки

$$x^4 - y^4 = y^2(x-1)^2.$$

268. Агар геометрик ўрининг ҳар бир нуқтасини координаталар боши билан туташтирувчи кесма бу нуқтанинг абсциссаси ва ординатаси орасида ўрта пропорционал бўлса, текисликдаги бу нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

269. Текисликда шундай нуқталарнинг геометрик ўрнини топингки, бу геометрик ўрининг нуқтасини A (−1; −2) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти худди шу нуқтанинг ўзини B (−4; 2) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентидан уч марта катта бўлсин.

Ечилиши. Масала шартидан, изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий M $(x;\ y)$ нуқта учун $k_{MA} = 3k_{MB}$ тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади. (2·19) формула бўйича ёзамиз:

$$k_{MA} = \frac{y+2}{x+1};\quad k_{MB} = \frac{y-2}{x+4}.$$

k_{MA} ва k_{MB} нинг қийматини юқоридаги тенгликка қўйиб,

$$\frac{y+2}{x+1}=3\frac{y-2}{x+4}$$

ни ҳосил қиламиз.

Соддалаштиришлардан сўнг,

$$2xy-8x-y-14=0$$

га эга бўламиз.

270. Текисликда шундай нуқталарнинг геометрик ўрнини топингки, бу геометрик ўрннинг исталган нуқтасини A (2; 3) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти геометрик ўрннинг худди шу нуқтасини B (5; 1) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентидан икки марта кичик бўлсин.

17-§. Айлана

Айлана деб текисликда берилган нуқта (марказ)дан бир хил масофа (радиус)га узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

Маркази координаталар бошида ва радиуси r бўлган айлананинг тенгламаси

$$x^2+y^2=r^2 \tag{3.1}$$

бўлади.

Маркази O_1 $(a; b)$ нуқтада ва радиуси r бўлган айлананинг тенгламаси

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{3.2}$$

бўлади.

Айлананинг умумий кўринишдаги тенгламаси:

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0. \tag{3.3}$$

Умумий кўринишдаги айлананинг хусусий ҳоли:

$$x^2+y^2+Mx+Ny+P=0. \tag{3.4}$$

(3.1)—(3.4) тенгламаларда x ва y ўзгарувчи координаталар — айлананинг исталган нуқтасини координаталари. (3.3) ва (3.4) тенгламаларда A, B, C, D, M, N ва P — ўзгармас коэффициентлар.

Шуни назарда тутиш керакки, хусусий ҳолларда (3.3) шунингдек, (3.4) тенгламаларда айлананинг координата ўқларига нисбатан вазиятига қараб, B, C ёки D ва мос равишда M, N ва P коэффициентларнинг ҳар қайсиси алоҳида ёки иккитаси бир пайтда нолга тенг бўлиб қолиши мумкин.

Айлананинг (3·4) тенгламасида M ва N коэффициентлар билан айлана маркази O_1 $(a;\ b)$ нинг координаталари орасида ушбу содда

$$a=-\frac{M}{2};\quad b=-\frac{N}{2} \qquad (3\cdot5)$$

муносабат, шунингдек, M, N ва P билан айлана радиуси r ўртасида

$$r=\frac{\sqrt{M^2+N^2-4P}}{2} \qquad (3\cdot6)$$

муносабат мавжуд (305- масаланинг ечилишига қаранг).

I. Берилган нуқталарнинг айланага тегишлилигини текшириш

271. (2; 4), (7; 1) ва (0; 2) нуқталарнинг $x^2+y^2-2x-4y=0$ айланага тегишлилигини текшириб кўринг.

272. $(-4;\ 3)$ ва $(5;\ 0)$ нуқталарнинг $x^2+y^2-4x-2y-35=0$ айланага тегишлилигини текшириб кўринг.

II. Маркази берилган нуқтада бўлган ва радиуси берилган айлананинг тенгламасини тузиш

273. Маркази $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4}\right)$ нуқтада ва радиуси 2 га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг. Бу айланани ясанг.

Ечилиши. Масала шартидан:

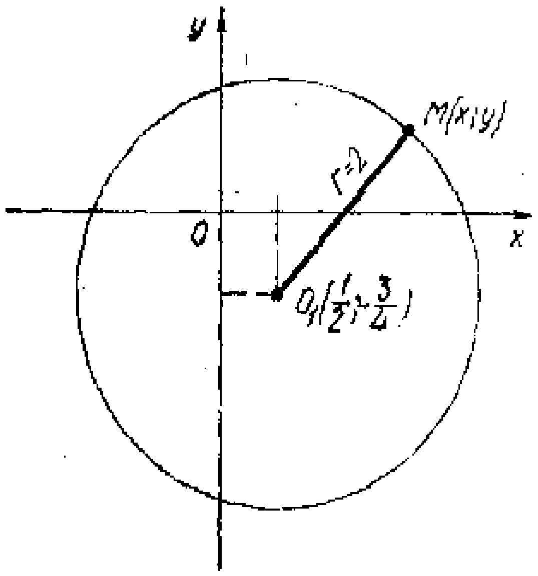
$$a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{3}{4} \text{ ва } r=2.$$

Бу қийматларни (3·2) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left[y-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]^2=2^2.$$

Квадратга кўтаргандан ва озод ҳадни чап томонга ўтказгандан сўнг айлананинг (3·3) кўринишдаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$16x^2+16y^2-16x+24y-51=0.$$



43- расм.

Айланани ясаш: 1) лананинг марказини, яъ $O_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ нуқтани яса миз: 2) O_1 марказдан 2 тенг радиус билан айла чизамиз (43- расм).

274. Маркази коордииа талар бошида ва радиус 3 га тенг бўлган айлананин тенгламасини тузинг.

275. Маркази $(-2; -5$ нуқтада ва радиуси 3 га тен бўлган айлананинг тенглама сини тузинг. Бу айланани ясанг.

III. Маркази берилган нуқтада бўлган ва берилган нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузиш

276. Маркази $(5; -7)$ нуқтада бўлган ва $(2; -3)$ нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан изланаётган айлананинг радиуси номаълум эканлигини кўрамиз. Уни икки усул билан топиш мумкин.

1- усул. Айлананинг (3.2) тенгламасига марказнинг $(5; -7)$ координаталарини ва берилган нуқтанинг $(2; -3)$ координаталарини x ва y ўзгарувчиларнинг ўрнига қўямиз:

$$(2-5)^2+[-3-(-7)]^2=r^2;\ 9+16=r^2,$$

бу ердан $r=5$.

2- усул. Радиусни айлана марказидан унинг бирорта берилган нуқтасигача бўлган масофа сифатида топамиз. (1.1) формула бўйича:

$$r=\sqrt{(2-5)^2+[-3-(-7)]^2}=5.$$

Энди (3.2) тенгламага марказнинг координаталарини ва радиуснинг қийматини қўямиз:

$$(x-5)^2+[y-(-7)]^2=5^2.$$

Соддалаштириб,

$$x^2+y^2-10x+14y+49=0$$

ни ҳосил қиламиз.

277. Маркази (— 1; 4) нуқтада бўлган ва (3; 5) нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

278 Маркази (—3; 0) нуқтада бўлган ва (2; 4) нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

IV. Айлананинг тенгламасини унинг диаметри учларининг координаталари бўйича тузиш

279. Диаметрининг учлари 1) (0; 3) ва (6; —7); 2) (—2; 3) ва (2; 5) координаталарга эга бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

V. Айлана тенгламасини координата ўқлари орасидаги кесмаси шу айлананинг диаметри бўлиб хизмат қиладиган тўғри чизиқнинг тенгламаси бўйича тузиш

280. Диаметри $4x + 3y - 24 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмасидан иборат бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

281. $5x - 4y + 40 = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасида жойлашган кесмаси айлана учун диаметр бўлиб хизмат қилади. Айлананинг тенгламасини тузинг.

VI. Маркази берилган нуқтада бўлган ва координаталар бошидан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузиш

282. Координаталар бошидан ўтадиган ва маркази 1) (—2; 3); 2) (3; —5) нуқтада бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

VII. Берилган айлананинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаш

283. $3x^2 + 3y^2 - 18x - 10y - 48 = 0$ айлананинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Айлана абсциссалар ўқи билан ординаталари нолга тенг бўлган нуқталарда кесишади. Берилган айлананинг тенгламасида y ни нолга тенглаб,

$$3x^2 - 18x - 48 = 0 \text{ ёки } x^2 - 6x - 16 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Квадрат тенгламани ечиб,

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 8$$

ни топамиз.

Демак, айлана абсциссалар ўқи билан (— 2; 0) ва (8; 0 нуқталарда кесишар экан.

Айлана ординаталар ўқи билан абсциссалари нолга тенг бўлган нуқталарда кесишади.

Айлана тенгламасида $x = 0$ деб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$3y^2 - 10y - 48 = 0.$$

Бу квадрат тенгламани ечиб,

$$y_1 = -\frac{8}{3}; \quad y_2 = 6$$

ни топамиз.

Демак, айлана ординаталар ўқи билан $\left(0; -\frac{8}{3}\right)$ ва (0; 6) нуқталарда кесишар экан.

284. $x^2 + y^2 + 4x + y - 12 = 0$ айлананинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

VIII. Берилган айлананинг берилган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаш

285. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 29 = 0$ айлана билан $x - y - 1 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Айлана ва тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг координаталарини топиш учун ушбу тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 29 = 0, \\ x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Бу системанинг илдизлари:

$$x_1 = -3, \ y_1 = -4 \text{ ва } x_2 = 5, \ y_2 = 4.$$

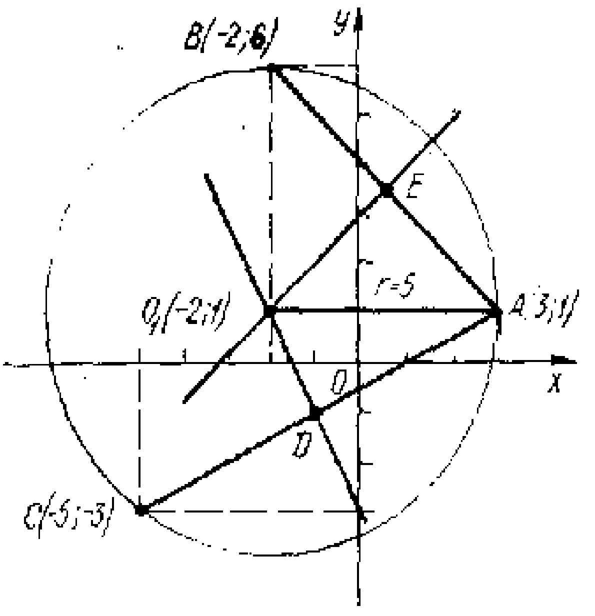
Айлана ва тўғри чизиқ (—3, — 4) ва (5 ; 4) нуқталарда кесишади.

286. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ айлана билан $4x + 3y - 19 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

IX. Берилган учта нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузиш

287. A (3; 1), B (—2; 6) ва C (—5; —3) нуқталардан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Геометрия курсидан маълумки, изланаётган айлананинг маркази берилган нуқталарни туташтирувчи исталган иккита кесманинг ўртасидан ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтасида ётади. Демак, айлана марказининг координаталарини топиш учун ҳар қайси перпендикулярнинг тенгламасини тузиш ва бу тенгламалардан иборат системани ечиш керак. Перпендикулярнинг тенгламасини тузиш учун эса перпендикуляр ўтадиган нуқтанинг координаталарини ва перпендикулярнинг бурчак коэффициентини билиш керак.



44- расм.

1-усул. 1. (1·4) формулалар бўйича AC ва AB кесмаларнинг ўрталари бўлган D ва E нуқталарининг координаталарини топамиз (44- расм):

$$x_D = \frac{3+(-5)}{2} = -1, \quad y_D = \frac{1+(-3)}{2} = -1; \; D(-1; -1);$$

$$x_E = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}; \quad y_E = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}; \quad E\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

2. (2·19) ва (2·22) формулалардан фойдаланиб, AC, DO_1, AB ва EO_1 тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1}{2}; \quad k_{DO_1} = -\frac{1}{k_{AC}} = -2;$$

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1; \quad k_{EO_1} = -\frac{1}{k_{AB}} = 1.$$

3. (2·17) формулани татбиқ этиб, DO_1 ва EO_1 перпендикулярларнинг тенгламаларини тузамиз:

$$y - (-1) = -2[x - (-1)], \quad 2x + y + 3 = 0;$$

$$y - \frac{7}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad x - y + 3 = 0.$$

4. DO_1 ва EO_1 перпендикулярларнинг тенгламаларидан тузилган системани ечиб, айлана маркази O_1 нинг координаталарини топамиз:

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ x - y + 3 = 0, \end{cases} x = -2,\ y = 1\ ;\ O_1\ (-2;\ 1).$$

5. (1·1) формуладан фойдаланиб, айлананинг AO_1 радиусини ва (3·2) формуладан фойдаланиб, унинг тенгламасини тузамиз:

$$r = O_1A = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-1)^2} = 5;$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

ёки

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0.$$

2- усул. Айлананинг маркази $O_1(a;b)$ нуқта бўлсин, битта айлананинг радиуслари бўлгани учун $O_1A = O_1B = O_1C$. (1·1) формула бўйича:

$$O_1A = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2};\ O_1B = \sqrt{(a+2)^2 + (b-6)^2};$$
$$O_1C = \sqrt{(a+5)^2 + (b+3)^2}.$$

Ушбу тенгламалар системасини тузамиз ҳамда уни a ва b номаълумларга нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-6)^8}, \\ \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+5)^2 + (b+3)^2}. \end{cases}$$

Соддалаштиришлардан сўнг қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a - b + 3 = 0, \\ 2a + b + 3 = 0. \end{cases}$$

Системани ечиб;

$$a = -2,\ b = 1;\ O_1\ (-2;\ 1)$$

ни топамиз.

Айлананинг радиуси 1- усулдагидек топилади, айлана тенгламаси аввалги кўринишда бўлади.

288. Қуйидаги нуқталардан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг: 1) (2; 8), (4; -6) ва (-12; -6); 2) $A(-2;-6)$, $B(-3;1)$ ва $C(4;2)$.

X. Томонлари берилган тўғри чизиқлардан иборат бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг тенгламасини тузиш

289. Томонлари ушбу тўғри чизиқлардан иборат бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг тенгламасини тузинг:
1) $x - y + 4 = 0$, $3x + y - 16 = 0$ ва $x + 2y - 2 = 0$;
2) $2x - y + 2 = 0$, $x - 3y - 14 = 0$ ва $x + y - 2 = 0$;
3) $4x - 3y - 17 = 0$, $7x + y - 61 = 0$ ва $x - 7y - 73 = 0$.

XI. Абсциссалар (ординаталар) ўқига берилган нуқтада уринадиган ва берилган радиусга эга бўлган айлананинг тенгламасини тузиш

290. Абсциссалар ўқига $A\ (3\,;0)$ нуқтада уринадиган ва радиуси 6 га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Айлананинг маркази $O_1\ (a\,;b)$ нуқтада бўлсин (45- расм). Уриниш нуқтасининг ва айлана марказининг абсциссаси бир хил: $a = 3$.

(3·2) тенгламага берилган қийматларни қўйиб, айлана марказининг ординатаси b ни топамиз:

$$(3-3)^2+(0-b)^2=6^2;\quad b=\pm 6,$$

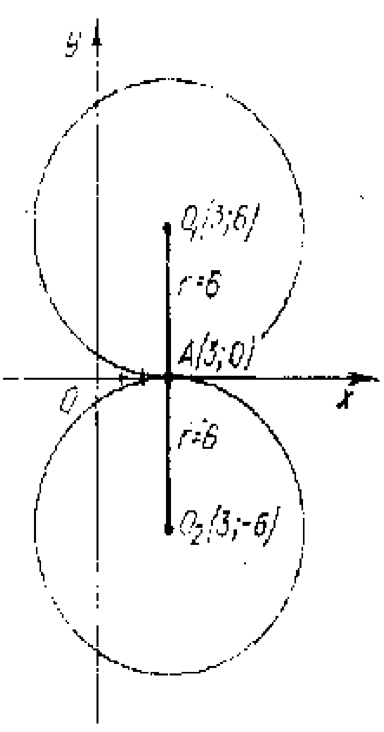
яъни иккита марказга эгамиз:

$$O_1\ (3;\ 6)\ \text{ва}\ O_2\ (3\,;-6).$$

Бу ердан берилган шартларни қаноатлантирувчи иккита айлана тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$(x-3)^2+(y-6)^2=6^2,$$
$$(x-3)^2+(y+6)^2=6^2$$

ёки



45- расм.

$$x^2+y^2-6x-12y+9=0,$$
$$x^2+y^2-6x+12y+9=0.$$

291. Ординаталар ўқига $A\ (0;\ 4)$ нуқтада уринадиган ва радиуси 5 га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

XII. Абсциссалар (ординаталар) ўқига уринадиган ва берилган иккита нуқтадан ўтадиган айлана тенгламасини тузиш

292. Ординаталар ўқига уринадиган ҳамда $A\ (4\,;5)$ ва $B\ (18;-9)$ нуқталардан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Изланаётган айлананинг маркази $O_1\ (a\,;b)$ нуқтада бўлсин (46- расм). Уриниш нуқтаси C га (унинг координаталари $C\ (0;\ b)$ бўлади) радиус ўтказамиз. Айлананинг радиуси:

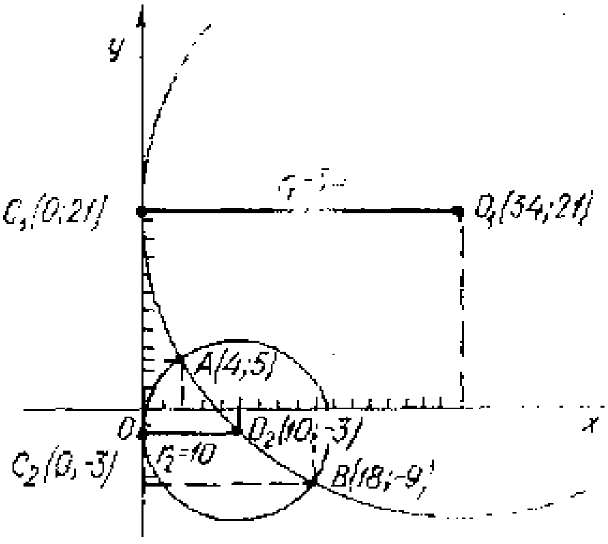
$$r=|a|.$$

(1.1) формулани қўлланиб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \sqrt{(a-4)^2+(b-5)^2}=|a|; \\ \sqrt{(a-18)^2+(b+9)^2}=|a|. \end{cases}$$

Квадратга кўтаргандан ва соддалаштиргандан сўнг, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} b^2-10b-8a+41=0, \\ b^2+18b-36a+405=0. \end{cases}$$



46- расм.

Системани ечиб, $b_1=21$, $b_2=-3$ ва $a_1=34$, $a_2=10$ ларни топамиз; демак, иккита марказ $O_1(34; 21)$ ва $O_2(10; -3)$ га ҳамда иккита радиус $r_1=34$ ва $r_2=10$ га эгамиз. Шундай қилиб, масала шартини ушбу иккита айлана қаноатлантиради: $(x-34)^2+(y-21)^2=34^2$ ва

$$(x-10)^2+(y+3)^2=10^2$$

ёки

$$x^2+y^2-68x-42y+441=0$$

ва

$$x^2+y^2-20x+6y+9=0.$$

293. Абсциссалар ўқига уринадиган ҳамда $A(7; 8)$ ва $B(6; 9)$ нуқталардан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

XIII. Координата ўқларига уринадиган ва берилган нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузиш

294. Координата ўқларига уринадиган ва $A(18; -4)$ нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

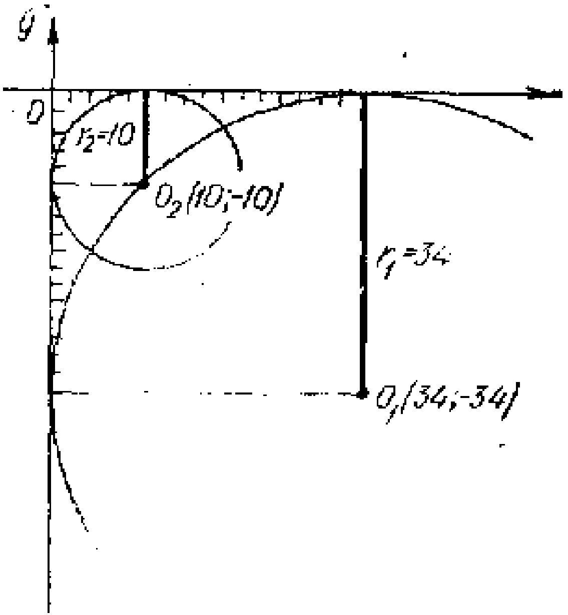
Ечилиши. Координата ўқларига уринадиган ва тўртинчи координата бурчагининг нуқтасидан ўтадиган айлананинг маркази $O_1(a; -a)$ координаталарга эга бўлади, бу ерда $a>0$. Айлананинг радиуси $r=a$ (47- расм).

(1·1) формула бўйича: $\sqrt{(a-18)^2+(-a+4)^2}=a$.

Квадратга кўтаргандан сўнг ва соддалаштиришлардан сўнг $a^2-44a+340=0$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $a_1=34$, $a_2=10$.

Иккита марказ $O_1(34; -34)$ ва $O_2(10; -10)$ га ҳамда иккита радиус $r_1=34$ ва $r_2=10$ га эгамиз.

Демак, масала шартини ушбу иккита айлана қаноатлантиради:



47- расм.

$$(x-34)^2+(y+34)^2=34^2,$$

$$(x-10)^2+(y+10)^2=10^2$$

ёки

$$x^2+y^2-68x+68y+1156=0,$$

$$x^2+y^2-20x+20y+100=0.$$

295. Координата ўқларига уринувчи ва $A(8; 9)$ нуқтадан ўтувчи айлананинг тенгламасини тузинг.

Кўрсатма. Айлана биринчи координата бурчагининг нуқтасидан ўтганлиги учун унинг марказининг координаталари $O_1(a; a)$ $(a > 0)$ бўлади.

XIV. Берилган иккита нуқтадан ўтадиган ва маркази абсциссалар (ординаталар) ўқида бўлган айлананинг тенгламасини тузиш

296. $A(8; 5)$ ва $B(-1; -4)$ нуқталардан ўтадиган ва *маркази абсциссалар ўқида бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.*

Ечилиши. *1-усул.* Айлананинг маркази $O_1(a; 0)$ нуқта бўлсин, у ҳолда $O_1A=O_1B$.

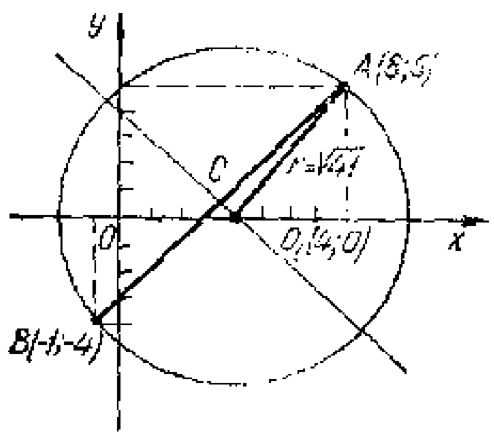
(1·1) формулани татбиқ этсак:

$$\sqrt{(a-8)^2+(0-5)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(0+4)^2}.$$

Бу ифодани соддалаштириб, топамиз:

$$18a=72,\ a=4,$$

яъни $O_1(4; 0)$.



48- расм.

Айлананинг радиуси $r = O_1A =$
$= \sqrt{(4-8)^2+(0-5)^2} =$
$= \sqrt{41}$

бўлади.

Айлана тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=(\sqrt{41})^2$$

ёки

$$x^2+y^2-8x-25=0.$$

2- усул. Ечиш плани: 1) *AB* кесманинг ўртаси бўлган *C* нуқтанинг координаталари топилади (48- расм); 2) *AB* ва CO_1 тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари ҳисобланади; 3) CO_1 тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилади; 4) CO_1 тўғри чизиқ билан абсциссалар ўқининг кесишиш нуқтасини координаталари топилади (тенгламалар системаси ечилади); 5) айлананинг радиуси топилади ва унинг тенгламаси тузилади:

1) $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{8+(-1)}{2}=\frac{7}{2}$, $y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=$
$=\frac{5+(-4)}{2}=\frac{1}{2}$; $C\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$;

2) $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-4-5}{-1-8}=1$, $k_{CO_1}=-\frac{1}{k_{AB}}=-1$;

3) $y-y_C=k_{CO_1}(x-x_C)$, $y-\frac{1}{2}=-1\left(x-\frac{7}{2}\right)$ ёки
$x+y-4=0$;

4) $\begin{cases} x+y-4=0, \\ y=0 \end{cases}$ (абсциссалар ўқининг тенгламаси); $x=4$,
$y=0$, $O_1(4;\ 0)$;

5) $r=O_1A=\sqrt{41}$; $(x-4)^2+(y-0)^2=(\sqrt{41})^2$ ёки x^2+
$+y^2-8x-25=0$.

297. $A(3\ ;\ 7)$ ва $B(5\ ;\ -1)$ нуқталардан ўтадиган ва маркази ординаталар ўқида бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

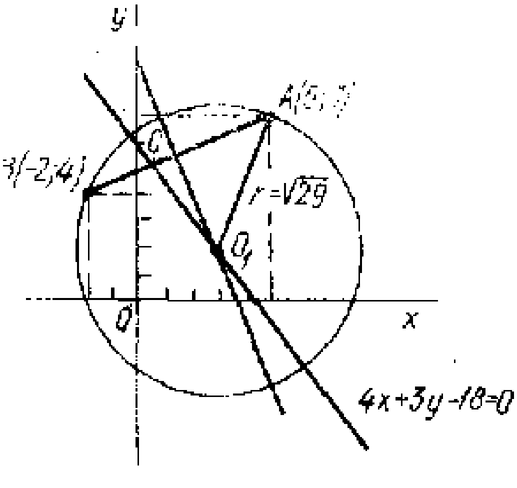
XV. Маркази берилган тўғри чизиқда бўлган ва берилган иккита нуқтадан ўтадиган айлананинг тенгламасини тузиш

298. $A(5;\ 7)$ ва $B(-2;\ 4)$ нуқталардан ўтувчи айлананинг маркази

$$4x + 3y - 18 = 0$$

тўғри чизиқда ётса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Геометрия курсидан маълумки, изланаётган айлананинг маркази AB ватарнинг ўртасидан ўтказилган CO_1 перпендикулярда ётади (49- расм). Масала шартидан бу айлананинг маркази берилган тўғри чизиқда ётиши келиб чиқади. Демак, айлананинг марказини топиш учун CO_1 перпендикуляр ва берилган тўғри чизиқ тенгламаларидан иборат системани ечиш кифоя.



49- расм.

I- усул. Ечиш плани: 1) AB кесманинг ўртаси бўлган C нуқтанинг координаталари топилади; 2) AB ва CO_1 тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари топилади; 3) CO_1нинг тенгламаси тузилади; 4) CO_1 тўғри чизиқ ва берилган тўғри чизиқ тенгламаларидан иборат система ечилади; 5) изланаётган айлананинг радиуси $r = O_1A$ ни топилади ва айлананинг тенгламаси тузилади.

1) $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{5 + (-2)}{2} = \dfrac{3}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{7 + 4}{2} = \dfrac{11}{2}$; $C\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{11}{2}\right)$;

2) $k_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{7 - 4}{5 - (-2)} = \dfrac{3}{7}$, $k_{CO_1} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -\dfrac{7}{3}$;

3) $y - y_C = k_{CO_1}(x - x_C)$, $y - \dfrac{11}{2} = -\dfrac{7}{3}\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$ ёки $7x + 3y - 27 = 0$;

4) $\begin{cases} 7x + 3y - 27 = 0, \\ 4x + 3y - 18 = 0, \end{cases}$ $x = 3$, $y = 2$; $O_1(3;\ 2)$;

5) $r = O_1A = \sqrt{(5-3)^2+(7-2)^2} = \sqrt{29}$; $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{29})^2$ ёки $x^2+y^2-6x-4y-16=0$.

2- усул. Изланаётган айлананинг маркази $O_1(a;b)$ нуқта бўлсин, O_1A ва O_1B бу айлананинг радиуслари; демак, $O_1A = O_1B$:

$$\sqrt{(a-5)^2+(b-7)^2} = \sqrt{(a+2)^2+(b-4)^2}.$$

Соддалаштиришлардан сўнг:

$$7a+3b-27=0.$$

Изланаётган айлананинг маркази $4x+3y-18=0$ тўғри чизиқда ётади, демак, айлана марказининг координаталари бу тенгламани қаноатлантириши керак:

$$4a+3b-18=0.$$

Қуйидаги

$$\begin{cases} 7a+3b-27=0, \\ 4a+3b-18=0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, $a=3$, $b=2$; $O_1(3;\ 2)$ ни ҳосил қиламиз.

Радиусни ҳисоблаш ва айлана тенгламасини тузиш биринчи усулдагидек бажарилади.

·299. $A(-8;\ 3)$ ва $B(2;\ 7)$ нуқталардан ўтувчи айлананинг маркази $x+4y+16=0$ тўғри чизиқда ётса, унинг тенгламасини тузинг.

300. $M(3;\ 2)$ ва $N(-1;\ -6)$ нуқталардан ўтувчи айлананинг маркази координаталар ўқини $A(2;\ 0)$ ва $B(0;\ -4)$ нуқталарда кесиб ўтувчи тўғри чизиқда ётса, айлананинг тенгламасини тузинг.

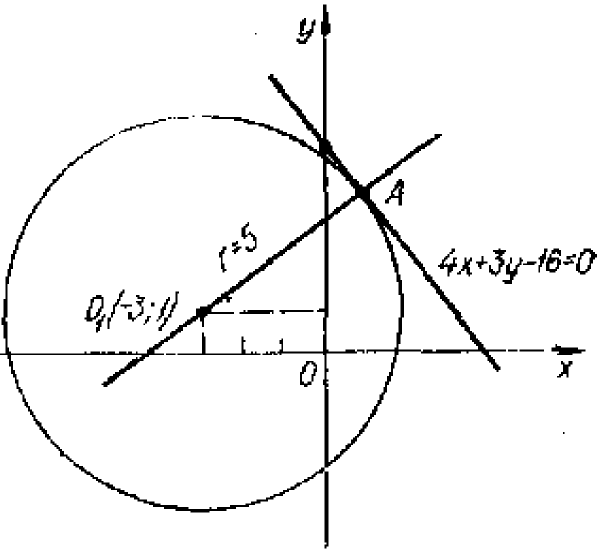
XVI. Маркази берилган нуқтада бўлган ва берилган тўғри чизиққа уринадиган айлананинг тенгламасини тузиш

301. Айлананинг маркази $O_1(-3;\ 1)$ нуқтада. Агар бу айлана $4x+3y-16=0$ тўғри чизиққа уринса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Айлананинг тенгламасини тузиш учун унинг радиусини топиш керак. Уриниш нуқтасига ўтказилган радиус уринмага перпендикулярдир. Демак, уринма тенгламасига кўра O_1A радиуснинг тенгламасини топишимиз мумкин, чунки айлананинг маркази O_1 берилган. Уринма ва

AO_1 радиус тенгламаларидан иборат системани ечиб, уринма нуқтаси A ни ва сўнгра радиусни топамиз.

Ечиш плани: 1) уринма ва O_1A радиуснинг бурчак коэффициентларини ҳисоблаш (50- расм); 2) O_1A радиуснинг тенгламасини тузиш; 3) уринма ва O_1A радиуснинг тенгламаларидан иборат системани ечиш (уринма нуқтаси A нинг координаталарини топиш); 4) радиусни топиш ва айлананинг тенгламасини тузиш.



50- расм.

1) $4x + 3y - 16 = 0$, $k = -\frac{4}{3}$; $k_{O_1A} = -\frac{1}{k} = \frac{3}{4}$,

2) $y - y_{O_1} = k_{O_1A}(x - x_{O_1})$, $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 3)$ ёки $3x - 4y + 13 = 0$;

3) $\begin{cases} 4x + 3y - 16 = 0, \\ 3x - 4y + 13 = 0, \end{cases}$ $x = 1$, $y = 4$; $A(1; 4)$;

4) $r = O_1A = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-4)^2} = 5$; $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5^2$ ёки $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$.

302. Айлананинг маркази $(-1; -4)$ нуқтада жойлашган. Агар бу айлана координата ўқларини A (2,25; 0) ва B (0; 3) нуқталарда кесиб ўтувчи тўғри чизиққа уринса, унинг тенгламасини тузинг.

XVII. Координаталар бошидан ўтувчи ва координата ўқларини берилган нуқталарда кесиб ўтувчи айлананинг тенгламасини тузиш

303. Координаталар бошидан ўтувчи ва координата ўқларини A (6; 0) ва B (0; 4) нуқталарда кесиб ўтувчи айлананинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. *1-усул.* Айлананинг тенгламасини тузиш учун унинг марказини ва радиусини топиш керак. Айлана маркази O_1 (a; b) нуқтада жойлашган бўлсин, у ҳолда $O_1A = O_1B$ (51- расм):

$$\sqrt{(a-6)^2+(b-0)^2}=\sqrt{(a-0)^2+(b-4)^2};$$

соддалаштиришлардан сўнг,

$$3a-2b-5=0$$

ни ҳосил қиламиз.

Иккинчи тенгламани тузамиз:

$$O_1O=O_1B;\quad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-0)^2+(b-4)^2}.$$

Соддалаштиришлардан сўнг,

$$b-2=0;\ b=2$$

ни топамиз.

Ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases}3a-2b-5=0,\\ b=2,\end{cases}$$

$$a=3,\ b=2;\ O_1\ (3;\ 2).$$

Айлананинг радиусини ҳисоблаймиз:

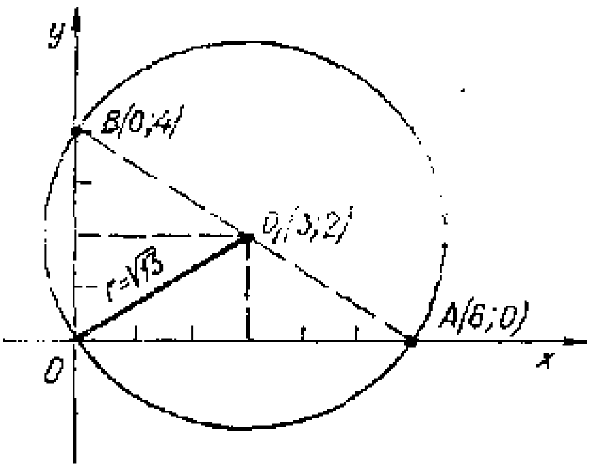
$$r=O_1A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}.$$

Айлана тенгламасини тузамиз:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{13})^2$$

ёки

$$x^2+y^2-6x-4y=0.$$



51- расм.

2- усул. Айлананинг маркази OA ва OB ватарларнинг ўрталаридан ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтасида ётади. Бу перпендикулярларнинг тенгламалари мос равишда $x=3$ ва $y=2$ бўлади (Oy ва Ox ўқларга параллел бўлган тўғри чизиқларнинг тенгламалари). Перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси O_1 (3; 2) — изланаётган айлананинг маркази бўлади.

Айлананинг радиуси ва тенгламаси 1- усулдагидек топилади.

304. Координаталар бошидан ўтадиган ва Ox, Oy ўқлардан мос равишда -4 ва -3 кесмалар ажратадиган айлананинг тенгламасини тузинг.

XVIII. Айлананинг берилган тенгламаси бўйича унинг радиусини ва марказининг координаталарини ҳисоблаш

305. $x^2+y^2+Mx+Ny+P=0$ айлананинг радиусини ва марказининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Берилган тенгламани қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$x^2+Mx+y^2+Ny=-P.$$

x^2+Mx ва y^2+Ny иккиҳадларни тўлиқ квадратга тўлдириб ёзамиз:

$$x^2+2\cdot\frac{M}{2}x+\left(\frac{M}{2}\right)^2+y^2+2\cdot\frac{N}{2}y+\left(\frac{N}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{M}{2}\right)^2+\left(\frac{N}{2}\right)^2-P$$

ёки
$$\left(x+\frac{M}{2}\right)^2+\left(y+\frac{N}{2}\right)^2=\frac{M^4+N^2-4P}{4}.$$

(3.2) кўринишдаги тенгламани ҳосил қилдик, бу ердан (3.5) ва (3.6) муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a=-\frac{M}{2}, \\ b=-\frac{N}{2}, \end{cases} \quad r=\frac{\sqrt{M^2+N^2-4P}}{2}.$$

Бу муносабатлардан келгусида фойдаланиб, (3.4) тенгламадан айлана марказининг координаталари $(a;\ b)$ ни ва r радиусни осонгина топишимиз мумкин.

306.
$$x^2+y^2-8x-10y-8=0$$

айлананинг марказн координаталарини ва радиусини топинг. Бу айланани ясанг.

Ечилиши. *1-усул.* Берилган тенгламани қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$x^2-8x+y^2-10y=8.$$

x^2-8x ва y^2-10y иккиҳадларни тўлиқ квадратга тўлдириб ёзсак:

$$x^2-2\cdot4x+4^2+y^2-2\cdot5y+5^2=8+4^2+5^2$$

ёки

$$(x-4)^2+(y-5)^2=49,$$

бу ердан $a=4$, $b=5$; $r=7$, яъни маркази (4; 5) нуқтада ва радиуси 7 га тенг бўлган айланага эгамиз.

2-усул. 305-масалада ҳосил қилинган (3.5) ва (3.6) муносабатлардан фойдаланамиз.

Берилган айлана учун қуйидагиларга эгамиз: $M=-8$, $N=-10$, $P=-8$, бу ердан $a=-\frac{-8}{2}=4$,

$$b=-\frac{-10}{2}=5,\ r=\frac{\sqrt{(-8)^2+(-10)^2-4(-8)}}{2}=\frac{\sqrt{196}}{2}=7.$$

Айланани ясаш: айлананинг маркази O_1 (4; 5) нуқтани ясаб, 7 га тенг радиус билан айлана чизамиз.

307.

1) $x^2+y^2+6x-10y+13=0$; 2) $x^2+y^2+12y-13=0$ айлананинг радиусини ва марказининг координаталарини топинг.

308.

$$4x^2+4y^2-4x+20y-23=0$$

айлананинг маркази координаталарини ва радиусини топинг.

Кўрсатма. Берилган тенгламани (3.4) кўринишга келтиринг.

309. Қуйидаги айланаларнинг маркази координаталарини ва радиусини топинг:

1) $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$; 2) $x^2+y^2-4x-10y+29=0$; 3) $x^2+y^2+6x+14y+81=0$.

XIX. Берилган иккита айлананинг марказлари орасидаги масофани ҳисоблаш

310. Қуйидаги айланаларнинг марказлари орасидаги масофани топинг:

1) $x^2+y^2-10x+16y+80=0$ ва $x^2+y^2+6x+4y-12=0$;

2) $x^2+y^2+4x-12y+36=0$, $x^2+y^2-8x+10y+5=0$.

XX. Берилган иккита айлананинг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш

311. Қуйидаги айланаларнинг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг:

1) $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ ва
$x^2+y^2+4x+12y+4=0$;
2) $x^2+y^2+4x-6y-23=0$ ва
$x^2+y^2-10x-14y+58=0$.

XXI. Берилган айлананинг Ox ўқ билан берилган бурчак ҳосил қилувчи диаметрининг тенгламасини тузиш

312. $x^2+y^2+6x-4y-12=0$ айланада диаметр Ox ўқ билан 60° ли бурчак ташкил этади. Диаметрнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Диаметрнинг тенгламасини тузиш учун у ўтадиган нуқтани ва бу диаметрнинг бурчак коэффициентини билиш керак. Бу нуқта айлананинг маркази O_1 $(a;\ b)$ бўлади.

(3.5) муносабатлардан қуйидагига эгамиз:

$$a=-\frac{M}{2}=-\frac{6}{2}=-3,\quad b=-\frac{N}{2}=-\frac{-4}{2}=2;$$

$$O_1\ (-3;\ 2).$$

Бурчак коэффициент $k=\operatorname{tg}\alpha$ муносабатдан топилади:

$$k=\operatorname{tg}\ 60^\circ=\sqrt{3}.$$

Диаметрнинг тенгламаси:

$$y-2=\sqrt{3}\,(x+3)\ \text{ёки}\ \sqrt{3}\,x-y+3\sqrt{3}+2=0.$$

313. $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ айлананинг диаметри Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 135° ли бурчак ташкил этади. Бу диаметрнинг тенгламасини тузинг.

XXII. Берилган айлананинг берилган ватарга перпендикуляр бўлган диаметрининг тенгламасини тузиш

314. $x^2+y^2-8x-2y+4=0$ айлана берилган. $x-5y-12=0$ ватарга перпендикуляр бўлган диаметрнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. *1-усул.* Айлананинг ватар билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топамиз. Бунинг учун қуйидаги тенгламалар системасини ечамиз:

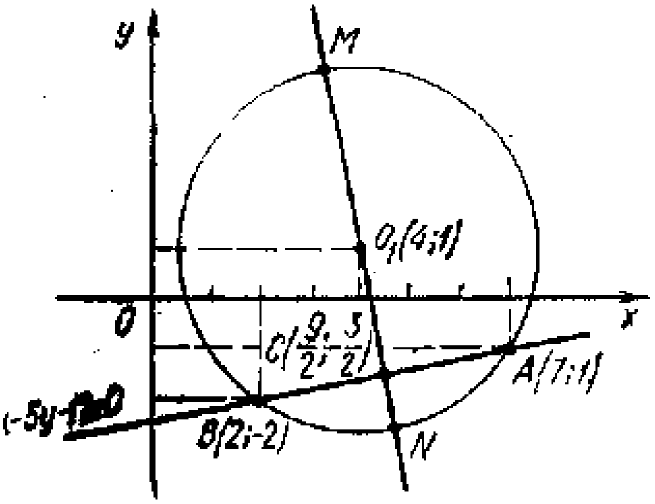
$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-2y+4=0, \\ x-5y-12=0. \end{cases}$$

Бу системанинг илдизлари:

$$x_1 = 7;\ y_1 = -1$$

ва

$$x_2 = 2;\ \ y_2 = -2.$$



52- расм.

Ватар айлана билан кесишган иккита нуқтага эгамиз: $A\ (7;\ -1)$ ва $B\ (2;\ -2)$ (52-расм).

Ватарга перпендикуляр бўлган диаметр ватарнинг ўртаси бўлган C нуқтадан ўтади. C нуқтанинг координаталарини топамиз:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2},\ \ y_C = \frac{y_A + y_B}{2} =$$

$$= \frac{-1+(-2)}{2} = -\frac{3}{2};$$

$$C\left(\frac{9}{2},\ -\frac{3}{2}\right).$$

AB ватар ва MN диаметрнинг бурчак коэффициентларини аниқлаймиз:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-(-1)}{2-7} = \frac{1}{5};$$

$$k_{MN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -5.$$

Диаметрнинг тенгламасини тузамиз:

$$y - y_C = k_{MN}(x - x_C), \qquad y - \left(-\frac{3}{2}\right) = -5\left(x - \frac{9}{2}\right)$$

ёки

$$5x + y - 21 = 0.$$

2-усул. (3.5) муносабатлардан айлана марказини топамиз:

$$a = -\frac{M}{2} = -\frac{-8}{2} = 4, \quad b = -\frac{N}{2} = -\frac{-2}{2} = 1; \quad O_1\ (4;\ 1).$$

AB ватар ва бу ватарга перпендикуляр бўлган *MN* диаметрнинг бурчак коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$x-5y-12=0, \quad y=\frac{1}{5}x-\frac{12}{5}, \; k_{AB}=\frac{1}{5};$$

$$k_{MN}=-\frac{1}{k_{AB}}=-5.$$

Диаметрнинг тенгламасини тузамиз:

$$y-y_{O_1}=k_{MN}(x-x_{O_1}), \quad y-1=-5(x-4)$$

ёки

$$5x+y-21=0.$$

315. $x^2+y^2+4x-6y=0$ айлана берилган. $2x-3y+13=0$ ватарга перпендикуляр бўлган диаметрнинг тенгламасини тузинг.

XXIII. Берилган айлананинг берилган нуқтасига ўтказилган радиусининг тенгламасини тузиш

316. $x^2+y^2-6x+2y-19=0$ айлананинг A $(5;-6)$ нуқтасига ўтказилган радиусининг тенгламасини тузинг.

317. $x^2+y^2-6x-9=0$ айлананинг $A(6;\ 3)$ нуқтасига ўтказилган радиусининг тенгламасини тузинг.

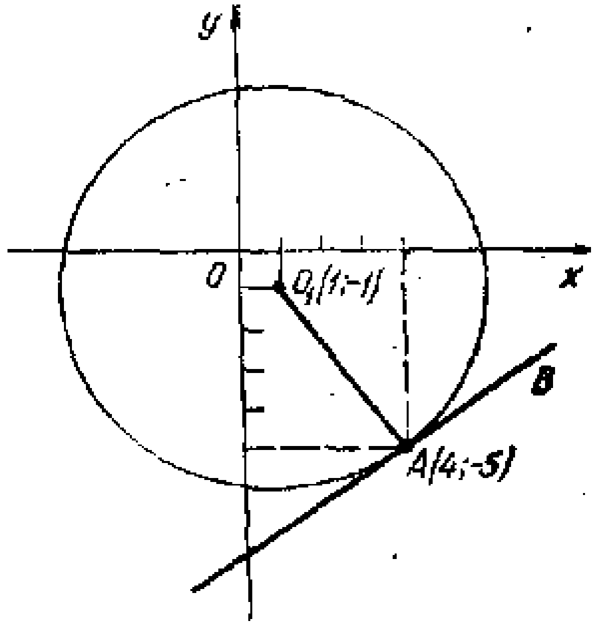
XXIV. Берилган айлананинг берилган нуқтасига ўтказилган уринманинг тенгламасини тузиш

318. $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ айлананинг A $(4;\ -5)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Уринма уриниш нуқтасига ўтказилган радиусга перпендикулярдир. Уринманинг тенгламасини тузиш учун унинг бурчак коэффициентини ва уриниш нуқтасини билиш керак. Уринманинг бурчак коэффициентини радиусининг бурчак коэффициентидан аниқлаймиз.

(3.5) муносабатлардан айлананинг маркази O_1 $(a;\ b)$ нуқтани аниқлаймиз:

$$a=-\frac{M}{2}=-\frac{-2}{2}=1,$$



53- расм.

$$b = -\frac{N}{2} = -\frac{2}{2} = -1;$$

$O_1(1;\ -1)$ (53-расм).

O_1A радиус ва AB уринманинг бурчак коэффициентларини топамиз:

$$k_{O_1A} = \frac{y_A - y_{O_1}}{x_A - x_{O_1}} = \frac{-5-(-1)}{4-1} = -\frac{4}{3};$$

$$k_{AB} = -\frac{1}{k_{O_1A}} = \frac{3}{4}.$$

Уринманинг тенгламасини тузамиз:

$$y - y_A = k_{AB}(x - x_A), \quad y - (-5) = \frac{3}{4}(x - 4)$$

ёки

$$3x - 4y - 32 = 0.$$

319. $x^2 + y^2 - 10y + 20 = 0$ айлананинг $A\ (-2;\ 0)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг тенгламасини тузинг.

XXV. Берилган иккита айлананинг умумий ватари тенгламасини тузиш

320. Ўзаро кесишувчи ушбу иккита

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$$

айлананинг умумий ватари тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Қуйидаги

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0, \\ x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, айланаларнинг кесишиш нуқталари A ва B нинг координаталарини топамиз:

Бу системанинг илдизлари: $x_1 = 3$, $y_1 = -4$ ва $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

Айланаларнинг кесишиш нуқталари: $A\,(3;\ -4)$ ва $B\ (2;\ 3)$.

AB ватарнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-4)}{2-3} = -7.$$

АВ ватарнинг тенгламасини тузамиз:

$$y - y_B = k_{AB}(x - x_B), \quad y - 3 = -7(x - 2)$$

ёки

$$7x + y - 17 = 0.$$

321. Ўзаро кесишувчи ушбу

$$x^2 + y^2 - 6y = 0, \quad x^2 + y^2 - 12x = 0$$

айланаларнинг умумий ватари тенгламасини тузинг.

XXVI. Берилган нуқтадан ўтувчи ва берилган айланага концентрик бўлган айлананинг тенгламасини тузиш

322. $A(4; -7)$ нуқтадан ўтувчи ва $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$ айланага концентрик бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Изланаётган айлананинг маркази берилган айлананинг маркази $O_1(a; b)$ билан умумий, радиуси эса O_1A га тенг.

(3.5) муносабатдан айлана марказининг координаталарини топамиз:

$$a = -\frac{M}{2} = -\frac{4}{2} = -2, \quad b = -\frac{N}{2} = -\frac{-2}{2} = 1;$$

$$O_1(-2; 1).$$

Айлананинг радиусини топамиз:

$$r = O_1A = \sqrt{(-2 - 4)^2 + [1 - (-7)]^2} = 10.$$

Айлана тенгламасини тузамиз:

$$[x - (-2)]^2 + (y - 1)^2 = 10^2 \text{ ёки } x^2 + y^2 + 4x - 2y - 95 = 0.$$

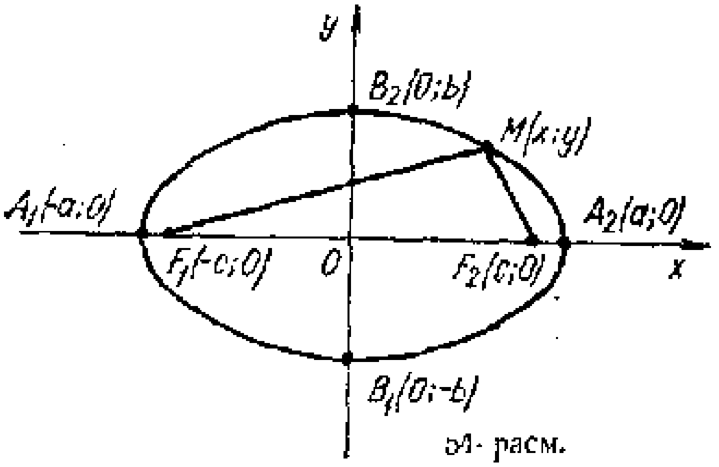
323. $A(5; 6)$ нуқтадан ўтувчи ва $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ айланага концентрик бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

18-§. Эллипс

Ҳар биридан фокуслар деб аталувчи берилган иккита нуқтагача бўлган масофалари йиғиндиси ўзгармас миқдор бўлган (ва фокуслар орасидаги масофадан катта бўлган) нуқталарнинг геометрик ўрни эллипс деб аталади.

Эллипснинг тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b), \qquad (3.7)$$



54- расм.

бу ерда a — катта ярим ўқнинг узунлиги; b — кичик ярим ўқнинг узунлиги (54- расм).

a, b ва c параметрлар орасидаги муносабат:

$$a^2 - b^2 = c^2, \qquad (3.8)$$

бу ерда c — фокуслар орасидаги масофанинг ярми.

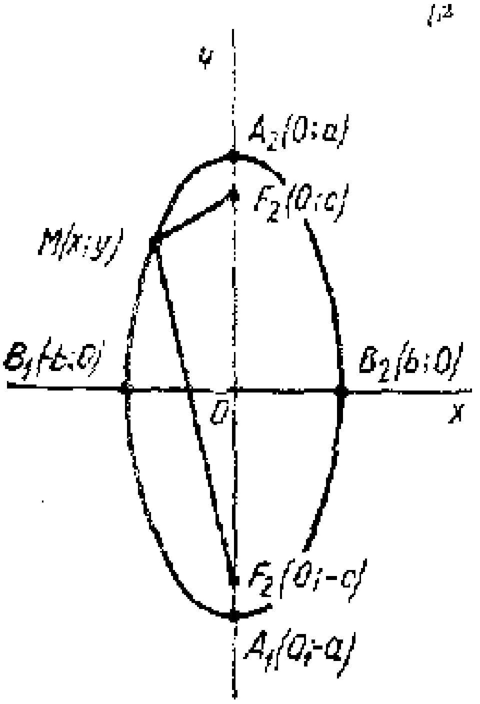
Эллипснинг эксцентриситети:

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1. \qquad (3.9)$$

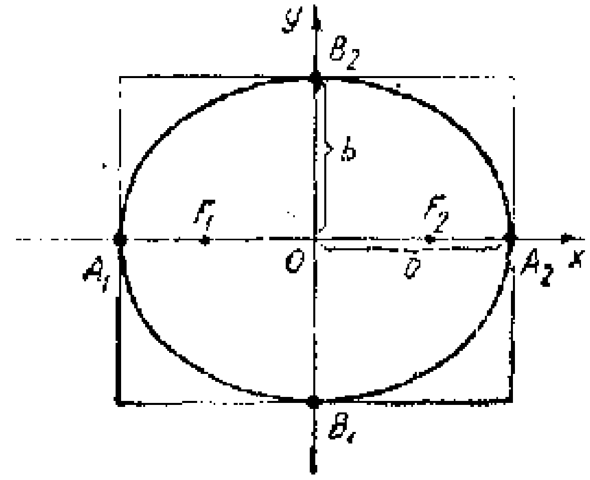
Агар эллипснинг фокуслари Oy ўқда $(0; \pm c)$ нуқталарда ётса (55- расм), у ҳолда унинг тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (a > b). \qquad (3.10)$$

(3.7) ва (3.10) формулаларда x ва y — ўзгарувчи координаталар — эллипснинг исталган нуқтасининг координаталари.



55- расм.



56- расм.

(3.7) эллипсда унинг қарама-қарши учларининг координаталари ($\pm a$; 0) ва (0; $\pm b$) бўйича бевосита катта ўқ узунлиги $2a$ ва кичик ўқ узунлиги $2b$ топилади ва, аксинча, эллипснинг катта ўқи узунлиги $2a$ ва кичик ўқи узунлиги $2b$ бўйича эллипснинг тегишли учлари ($\pm a$; 0) ва (0; $\pm b$) топилади.

Эллипс фокусларининг координаталари ($\pm c$; 0) бўйича фокуслар орасидаги масофа $2c$ ва фокуслар орасидаги масофа $2c$ бўйича фокусларнинг координаталари ($\pm c$; 0) топилади.

Эллипсни унинг $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ тенгламасига кўра ясаш қуйидаги схема бўйича бажарилади:

1. Эллипснинг a ва b ярим ўқлари топилади ҳамда $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$ ва $B_2(0;\ b)$ координатали нуқталар ясалади.

2. Бу нуқталар орқали Ox ва Oy ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказилади, маркази координаталар бошида ва томонлари $2a$ ва $2b$ бўлган тўғри тўртбурчак ҳосил қилинади.

3. Эллипсни тўғри тўртбурчакнинг ичида A_1, B_2, A_2 ва B_1 нуқталардан ўтадиган эгри чизиқ каби (қўлда) чизилади (56-*расм*).

Эллипсга доир барча масалаларда эллипснинг симметрия ўқлар координата ўқлари билан устма-уст тушади деб *фараз қилинади.*

I. Берилган нуқталарнинг берилган эллипсга *тегишлилигини текшириш*

324. 1) A (9; 4), B (12; 3) ва C(1; 6) нуқталарнинг $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ эллипсга тегишлилигини текширинг.

2) A ($\sqrt{10}$; 2) ва B (4; 1) нуқталарнинг $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипсга тегишлилигини текширинг.

II. Эллипснинг тенгламасини унинг ўқларини узунликлари бўйича тузиш

325. Агар фокуслари Ox ўқда бўлган эллипснинг ўқлари *$2a=12$ ва $2b=8$ берилган бўлса, унинг тенгламасини* тузинг.

Ечилиши. Эллипснинг тенгламасини тузиш учун *унинг параметрлари a ва b ни билиш керак. Масала* шартидан: $a = 6$ ва $b = 4$, a ва b нинг бу қийматлари эллипснинг (3.7) тенгламасига қўйиб,

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \text{ ёки } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

326. Агар фокуслари Ox ўқда бўлган эллипснинг ўқлар $2a=8$ ва $2b=6$ берилган бўлса, унинг тенгламасини тузин

327. Агар фокуслари Oy ўқда бўлган эллипснинг ўқлари $2a = 10$ ва $2b = 4$ берилган бўлса, унинг тенгламасин тузинг.

III. Эллипснинг тенгламасини унинг иккита карама-қарши учларининг координаталари (катта ёки кичик ўқларининг узунликлари) ва фокусларининг координаталари (фокуслари орасидаги масофа) бўйича тузиш

328. Агар эллипснинг иккита учи A_1 $(-6;\ 0)$ в $A_2(+6;\ 0)$ нуқталарда, фокуслари эса $(\pm 4;\ 0)$ координаталар билан берилган бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан $a = 6$ ва $c = 4$ эканлиги келиб чиқади. (3. 8) формула бўйича топамиз: $b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$. a ва b^2 нинг қийматларини (3.7) тенгламага қўйиб, изланаётган эллипс тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

329. Агар эллипснинг иккита учи A_1 $(-5;\ 0)$ ва $A_2(+5;\ 0)$ нуқталарда, фокуслари эса $(\pm 3;\ 0)$ координаталар билан берилган бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

330. Агар эллипснинг иккита учи B_1 $(0;\ -8)$ ва $B_2(0;\ +8)$ нуқталарда, фокуслари эса $(\pm 5;\ 0)$ координаталар билан берилган бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

331. Агар эллипснинг иккита учи $(-8;\ 0)$ ва $(8;\ 0)$ нуқталарда, фокуслари эса $(0;\ \pm 6)$ координаталар билан берилган бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан фокуслар Oy ўқда ётиши келиб чиқади. У ҳолда $b = 8$, $c = 6$.

(3.8) формула бўйича: $a^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. a^2 ва b нинг қийматларини (3.10) тенгламага қўйсак:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

332. Агар эллипснинг иккита учи $(0;\ \pm 4)$ нуқталарда жойлашган, фокуслари эса $(0;\ \pm 2)$ координаталар билан берилган бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

333. Агар эллипснинг фокуслари орасидаги масофа 6 га (фокуслар Ox ўқда ётади), катта ўқи 10 га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан: $a = 5$ ва $c = 3$. (3.8) формула бўйича: $b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. a ва b^2 нинг қийматларини (3.7) тенгламага қўйиб, изланаётган эллипснинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

334. Агар эллипснинг фокуслари орасидаги масофа 10 га (фокуслар Ox ўқда ётади), катта ўқи 12 га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

335. Агар эллипснинг фокусларини координаталари $(\pm 2;\ 0)$ бўлиб, кичик ўқи 8 га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

336. Фокуслари $(0;\ \pm\sqrt{5})$ нуқталарда ётган ва катта ўқи 6 га тенг бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Фокуслар Oy ўқда ётади, демак, $a = 3$. (3.8) формула бўйича:

$$b^2 = 3^2 - (\sqrt{5}\ )^2 = 4.$$

a ва b^2 нинг қийматларини (3.10) тенгламага қўйиб,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ни ҳосил қиламиз:

337. Фокуслари $(0;\ \pm\sqrt{3})$ нуқталарда ётган ва катта ўқи $4\sqrt{7}$ га тенг бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг.

IV. Эллипснинг тенгламасини унинг фокуслари координаталари (фокуслари орасидаги масофа) ва эксцентриситети бўйича тузиш

338. Фокуслари $(\pm 4;\ 0)$ нуқталарда ётган ва эксцентриситети $e = 0{,}8$ бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан $c = 4$, $e = \frac{c}{a} = 0{,}8$. c нинг қийматини иккинчи тенгликка қўйиб, $a = 5$ ни ҳосил қиламиз. (3.8) формула бўйича: $b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$. (3.7) тенглама бўйича ёзамиз:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

339. Фокуслари $(\pm\sqrt{3};\ 0)$ нуқталарда ётган ва эксцен риситети $e=\frac{1}{3}$ бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг.

340. Агар эллипснинг фокуслари Ox ўқда бўлиб, ула орасидаги масофа 12, эксцентриситети эса $e=0{,}6$ бўлса бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

V. Эллипснинг тенгламасини унинг иккита қарама-қарши учларининг координаталари (катта ёки кичик ўқининг узунлиги) ва эксцентриситети бўйича тузиш

341. Фокуслари Ox ўқда бўлган ва катта ўқи 14 га, e эксцентриситети эса $\frac{2}{3}$ га тенг бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан: 1) $a=7$; 2) $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$. a нинг қийматини иккинчи муносабатта қўйиб, $c=\frac{14}{3}$ ни топамиз. (3.8) формула бўйича b^2 ни топамиз: $b^2=7^2-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{245}{9}$. (3.7) тенглама бўйича:

$$\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{\frac{245}{9}}\ \text{ёки}\ \frac{x^2}{49}+\frac{9y^2}{245}=1.$$

342. Агар эллипснинг фокуслари Ox ўқда бўлиб, катта ўқи 10 га, e эксцентриситети эса 0,6 га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

343. Агар эллипснинг фокуслари Ox ўқда бўлиб, кичик ўқи 16 га, e эксцентриситети эса 0,6 га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

VI. Эллипснинг тенгламасини унинг ярим ўқларининг йиғиндиси (айирмаси) ва фокуслари орасидаги масофа бўйича тузиш

344. Агар фокуслари Ox ўқида бўлган эллипснинг ярим ўқларининг йиғиндиси 8 га, фокуслари орасидаги масофа эса 8 га тенг бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартига кўра қуйидагига эгамиз: 1) $a+b=8$; 2) $c=4$. (3.8) формулага c нинг қийматини қўямиз: $b^2=a^2-16$.

$a+b=8$ ва $a^2-b^2=16$ тенгламалардан иборат системани ечиб, $a=5$, $b=3$ ни топамиз. a ва b нинг топилган қийматларини (3.7) тенгламага қўйиб, изланаётган эллипснинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

345. Агар эллипснинг ярим ўқлари йиғиндиси 25 га тенг бўлса ва фокуслари (± 5; 0) координаталарга эга бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

346. Агар эллипснинг ярим ўқлари йиғиндиси 9 га тенг бўлса ва фокуслари (± 6; 0) координаталарга эга бўлса унинг тенгламасини тузинг.

VII. Эллипснинг тенгламасини унинг катта (кичик) ўқи узунлиги ва бу эллипс ўтадиган нуқтанинг координаталари бўйича тузиш

347. Агар эллипснинг фокуслари Ox ўқда бўлиб, эллипс $M(-6;\ 4)$ нуқтадан ўтса ва унинг кичик ўқи 10 га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартига кўра $2b=10$, бу ердан $b=5$. a ни ҳисоблаш учун эллипснинг (3.7) тенгламасида x ва y ўзгарувчиларнинг ўрнига $M(-6;\ 4)$ нуқтанинг координаталарини ва $b=5$ қийматни қўямиз, $a^2=100$ ҳосил бўлади.

a^2 ва b нинг қийматларини (3.7) тенгламага қўйиб, эллипснинг изланаётган тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1.$$

348. Агар эллипснинг фокуслари Ox ўқда бўлиб, у (12; —12) нуқтадан ўтса ва катта ўқи 40 га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

349. Фокуслари Ox ўқда бўлган эллипс (2; $2\sqrt{2}$) нуқтадан ўтади. Унинг кичик ўқи 6 га тенг. Бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

VIII. Берилган иккита нуқтадан ўтувчи эллипснинг тенгламасини тузиш

350. A ($\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$) ва B (3; $\sqrt{2}$) нуқталардан ўтувчи эллипснинг тенгламасини тузинг. Эллипснинг фокуслари Ox ўқда ётади.

Ечилиши. Эллипснинг тенгламасини тузиш учун a ва b параметрларни топиш керак. Эллипснинг (3.7) тенгламасига берилган нуқталарнинг координаталарини қўйиб, алмаштиришлардан сўнг ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3b^2 + 6a^2 = a^2 b^2, \\ 9b^2 + 2a^2 = a^2 b^2. \end{cases}$$

Бу системадан $a^2 = 12$ ва $b^2 = 8$ ни топамиз.

Эллипснинг (3.7) тенгламасидан фойдаланиб, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

351. $A(6;\ 4)$ ва $B(8;\ 3)$ нуқталардан ўтувчи эллипснинг тенгламасини тузинг. Эллипснинг фокуслари Ox ўқда ётади.

352. $(\sqrt{2};\ 2)$ ва $(2;\ \sqrt{3})$ нуқталардан ўтадиган эллипснинг тенгламасини тузинг. Эллипснинг фокуслари Ox ўқда ётади.

IX. Эллипс учларининг координаталарини (ўқларининг узунликларини) эллипснинг тенгламаси бўйича ҳисоблаш

353. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипс берилган. Эллипс учларининг координаталарини ва ўқларининг узунликларини топинг.

Ечилиши. Эллипс тенгламасидан: $a^2 = 49$, $a = \pm 7$; $b^2 = 16$, $b = \pm 4$. Бу ердан учларнинг координаталари: $A(\pm 7;\ 0)$ ва $B(0;\ \pm 4)$. Ўқларнинг узунликлари мос равишда $2a = 2 \cdot 7 = 14$ ва $2b = 2 \cdot 4 = 8$ га тенг.

354. Қуйидаги эллипсларнинг учлари координаталарини ва ўқларининг узунликларини топинг:

$$1)\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;\quad 2)\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

X. Эллипснинг фокуслари координаталарини (фокуслари орасидаги масофани) унинг тенгламаси бўйича ҳисоблаш

355. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ эллипс берилган. Эллипс фокусларининг координаталарини ва фокуслари орасидаги масофани топинг.

Ечилиши. Эллипс тенгламасидан $a^2 = 100$ ва $b^2 = 36$ га эгамиз. (3.8) формула бўйича:

$$c = \pm \sqrt{100 - 36} = \pm 8,$$

бу ердан фокусларнинг координаталари $F(\pm 8;\ 0)$ ва фокуслар орасидаги масофа $2c = 2 \cdot 8 = 16$.

!

356. Қуйидаги эллипсларнинг фокуслари координаталарини ва фокуслари орасидаги масофани топинг:

$$1)\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1; \qquad 2)\ \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{26}=1.$$

XI. Эллипснинг эксцентриситетини унинг тенгламаси бўйича топиш

357. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{51}=1$ эллипс берилган. Бу эллипснинг эксцентриситетини ҳисобланг.

Ечилиши. Эллипс тенгламасидан: $a^2=100$ ва $b^2=51$. (3.8) формуладан фойдаланиб, c ни топамиз: $c=\sqrt{100-51}=7$. Эксцентриситетни (3.9) формула бўйича топамиз: $e=\frac{7}{10}=0{,}7$.

358. Қуйидаги эллипсларнинг эксцентриситетини ҳисобланг:

$$1)\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1; \qquad 2)\ \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1.$$

XII. Берилган эллипснинг берилган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаш

359. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ эллипснинг $x+2y-14=0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Эллипс ва тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаш учун қуйидаги тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1;\\ x+2y-14=0.\end{cases}$$

Бу системанинг илдизлари $x_1=8$, $y_1=3$ ва $x_2=6$, $y_2=4$.

Эллипс ва тўғри чизиқ (8; 3) ва (6; 4) нуқталарда кесишади.

360. 1) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ эллипс ва $x+3y-21=0$ тўғри чизиқнинг; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс ва $3x+5y-21=0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

XIII. Берилган тўғри чизиқнинг берилган эллипс ичида жойлашган кесмасининг узунлигини ҳисоблаш

361. $x + 4y - 28 = 0$ тўғри чизиқнинг $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25} =$ эллипс ичида жойлашган кесмасининг узунлигини топин

Ечилиши. Тўғри чизиқнинг эллипс ичида жойлашга кесмасининг узунлигини ҳисоблаш учун тўғри чизиқ в эллипснинг кесишиш нуқталари координаталарини топамиз бунинг учун ушбу тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} x + 4y - 28 = 0; \\ \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25} = 1. \end{cases}$$

Бу системанинг илдизлари: $x_1 = 12$, $y_1 = 4$ ва $x_2 = 16$ $y_2 = 3$. Тўғри чизиқнинг эллипс билан кесишиш нуқталари $A(12;\ 4)$ ва $B(16;\ 3)$. (1.1) формула бўйича AB кесманинг узунлигини топамиз:

$$AB = \sqrt{(16-12)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{17}.$$

362. $x - 2y - 2 = 0$ тўғри чизиқнинг $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ эллипс ичида жойлашган кесмасининг узунлигини топинг.

19- §. Гипербола

Ҳар биридан фокуслар деб аталувчи иккита нуқтагача бўлган масофалари айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас ҳамда фокуслар орасидаги масофадан кичик ва нолга тенг бўлмаган катталик бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни гипербола деб аталади.

Гипербола тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.11)$$

бу ерда a — ҳақиқий ярим ўқнинг узунлиги; b — мавҳум ярим ўқнинг узунлиги (57-расм). a, b ва c параметрлар орасидаги муносабат:

$$b^2 = c^2 - a^2, \qquad (3.12)$$

бу ерда c — фокуслар орасидаги масофанинг ярми.

Гиперболанинг эксцентриситети:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1. \qquad (3.13)$$

Гипербола асимптоталарининг тенгламалари:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (3.14)$$

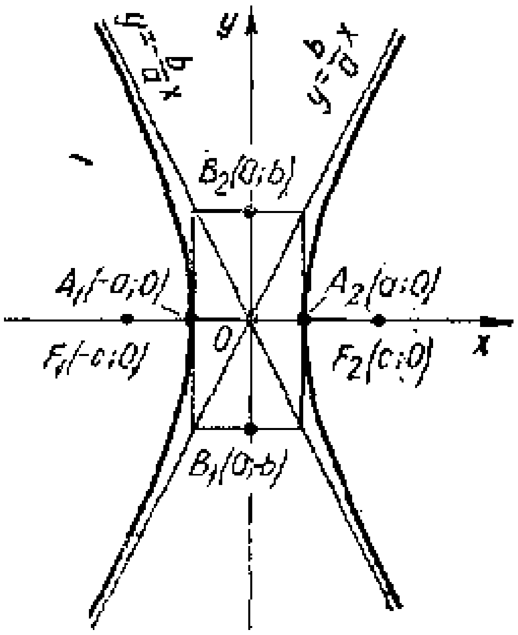
Тенг томонли гиперболанинг тенгламаси:

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (3.15)$$

Тенг томонли гипербола асимптоталарининг тенгламалари:

$$y = \pm x. \qquad (3.16)$$

(3.11) ва (3.15) формулаларда x ва y — ўзгарувчи координаталар — гиперболанинг исталган нуқтасининг координаталари. (3.14) ва (3.16) формулаларда x ва y — асимптотанинг исталган нуқтасининг координаталари.



57- расм.

Гиперболанинг ҳақиқий учларини координаталари $A_1(-a;\ 0)$ ва $A_2(a;\ 0)$ бўйича бевосита ҳақиқий ўқнинг узунлиги $2a$ топилади ва мавҳум учларнинг координаталари $B_1(0;\ -b)$ ва $B_2(0;\ b)$ бўйича мавҳум ўқнинг узунлиги $2b$ топилади. Аксинча, ҳақиқий ва мавҳум ўқларнинг узунликлари бўйича гиперболанинг ҳақиқий учлари $(\pm a;\ 0)$ ва мавҳум учлари $(0;\ \pm b)$ топилади.

Гипербола фокусларининг координаталари $(\pm c;\ 0)$ бўйича фокуслар орасидаги масофа $2c$ ва фокуслар орасидаги масофа $2c$ бўйича фокусларнинг координаталари $(\pm c;\ 0)$ топилади.

Фокуслари Oy ўқда жойлашган гипербола

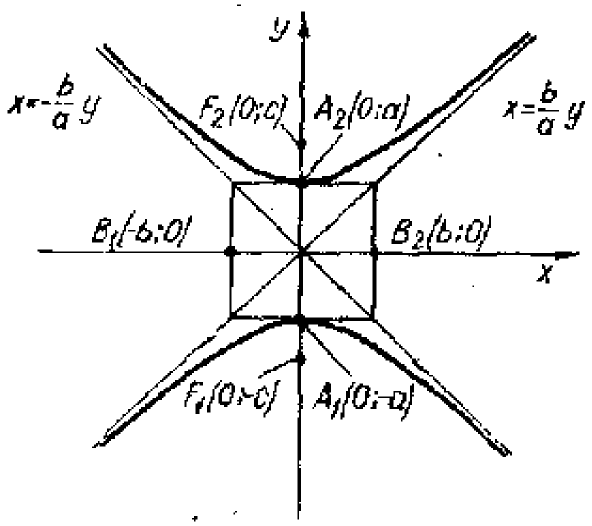
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \qquad (3.17)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда a — ҳақиқий ярим ўқ; b — мавҳум ярим ўқ (58- расм).

Фокуслари Oy ўқда бўлган гипербола асимптоталарининг тенгламалари ушбу

$$x = \pm \frac{b}{a} y \qquad (3.18)$$

кўринишни олади.



58- расм.

Фокуслари Oy ўқда бўлган гипербола учун (3.12) ва (3.13) формулалар ўзгаришсиз қолади.

(3.11) ва (3.17) тенгламалар билан ифодаланган гиперболалар қўшма дейилади. Фокуслари Oy ўқда бўлган тенг томонли гиперболанинг тенгламаси:

$$y^2 - x^2 = a^2. \qquad (3.19)$$

Гиперболани унинг $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламаси бўйича ясаш қуйидаги схема бўйича бажарилади:

1) гиперболанинг ярим ўқлари a ва b топилади ҳамда $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$ ва $B_2(0;\ b)$ координатали нуқталар ясалади;

2) бу нуқталардан Ox ва Oy ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказилиб, маркази координаталар бошида бўлган, $2a$ ва $2b$ томонли тўғри тўртбурчак ҳосил қилинади;

3) бу тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари чизилади ва уларнинг ҳар бирини иккала томонга давом эттирилиб (3.14) гиперболанинг асимптоталарини ҳосил қилинади;

4) гиперболанинг тармоғини $A_1(-a;\ 0)$ ва $A_2(a;\ 0)$ учлардан ўтувчи ва координаталар бошидан узоқлашган сари асимптоталарга яқинлашиб келувчи эгри чизиқ каби (қўлда) чизилади (57- расм).

Фокуслари Oy ўқда бўлган (3.17) гипербола ҳам шунга ўхшаш ясалади.

Гиперболага доир барча масалаларда гиперболанинг симметрия ўқи координата ўқлари билан устма-уст тушади деб фараз қилинади.

1. Берилган нуқталарнинг гиперболага тегишлилигини текшириш

863. 1) $A(5;6)$, $B(2\sqrt{5};\ 4)$ ва $C(3;\ 5)$ нуқталар $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ гиперболага; 2) $A(\sqrt{10};\ -2)$, $B(\sqrt{3};\ -5)$ ва $C(-3\sqrt{2};\ 6)$ нуқталар $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ гиперболага тегишлилигини текширинг.

II. Гиперболанинг тенгламасини унинг ўқлари узунликлари бўйича тузиш

364. Фокуслари Ox ўқда бўлиб, ҳақиқий ўқи 16 га, мавҳум ўқи эса 8 га тенг бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Гипербола тенгламасини тузиш учун a ва b параметрларни билиш керак. Масала шартидан: $2a = 16$, $a = 8$ ва $2b = 8$, $b = 4$. a ва b нинг бу қийматларини гиперболанинг (3.11) тенгламасига қўйиб,

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

365. Фокуслари Ox ўқда бўлиб, ҳақиқий ўқи 24 га, мавҳум ўқи эса 40 га тенг бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

III. Гипербола тенгламасини унинг ҳақиқий ўқи узунлиги (унинг иккита учи координаталари) ва фокуслари орасидаги масофа (фокусларининг координаталари) бўйича тузиш.

366. Агар гиперболанинг учлари A_1 $(-3;\ 0)$ ва A_2 $(3;\ 0)$ нуқталарда, фокуслари $(\pm 5;\ 0)$ нуқталарда бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан $a = 3$ ва $c = 5$ эканлиги келиб чиқади. (3.12) формула бўйича: $b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.

a ва b^2 нинг қийматларини (3.11) тенгламага қўйиб,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

367. Агар гиперболанинг учлари $A_1(-3;\ 0)$ ва $A_2(3;\ 0)$ нуқталарда, фокуслари $(\pm 3\sqrt{5};\ 0)$ нуқталарда бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

368. Агар гиперболанинг фокуслари Ox ўқда бўлиб, ҳақиқий ўқи 12 га, фокуслари орасидаги масофа эса 20 га тенг бўлса, бу гиперболанинг тенгламасини тузинг.

IV. Гиперболанинг тенгламасини унинг фокуслари координаталари (фокуслари орасидаги масофа) ва эксцентриситети бўйича тузиш

369. Гипербола тенгламасини унинг фокусларини координаталари $F(\pm 20;\ 0)$ ва эксцентриситети $e = \frac{5}{3}$ бўйича тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан: $c = 20$, $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$. c нинг қийматини иккинчи тенгликка қўйиб,

$\frac{20}{a} = \frac{5}{3}$ ни топамиз, бу ердан $a = 12$.

(3.12) формуладан: $b^2 = 20^2 - 12^2 = 256$. a ва b^2 нинг қийматларини (3.11) тенгламага қўйиб,

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

370. Гиперболанинг фокусларини координаталари ва эксцентриситети берилган:

1) $F(\pm 2\sqrt{2};\ 0)$, $e = 2$; 2) $F(\pm 3\sqrt{3};\ 0)$, $e = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Унинг тенгламасини тузинг.

V. Гиперболанинг тенгламасини унинг ҳақиқий ўқи (мавҳум ўқи) узунлиги ва эксцентриситети бўйича тузиш

371. Фокуслари Ox ўқда бўлиб, ҳақиқий ўқи 12 га, эксцентриситети $\frac{4}{3}$ га тенг бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан, $2a = 12$, бу ердан $a=6$ ва $e = \frac{4}{3}$. (3.13) формула бўйича c ни ҳисоблаймиз: $\frac{4}{3} = \frac{c}{6}$, $c = 8$. (3.12) формуладан фойдаланиб, $b^2 = 8^2 - 6^2 = 28$ ни топамиз. a ва b^2 нинг қийматларини (3.11) формулага қўйиб, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1.$$

372. Фокуслари Ox ўқда бўлиб, ҳақиқий ўқи 14 га, эксцентриситети $\frac{9}{7}$ га тенг бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

373. Фокуслари Ox ўқда бўлиб, мавҳум ўқи 8 га, эксцентриситети $\frac{5}{3}$ га тенг бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан: $2b = 8$, бу ердан $b = 4$ ва $e = \frac{5}{3}$. (3.13) формула бўйича a^2 ни топамиз:

$$\frac{5}{3} = \frac{\sqrt{a^2 + 4^2}}{a}; \quad 25a^2 = 9a^2 + 144,$$

бу ердан $a^2 = 9$. a^2 ва b нинг қийматларини (3.11) тенгламага қўйиб,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

374. Фокуслари Ox ўқда бўлиб, мавҳум ўқининг узунлиги 8 га, эксцентриситети эса $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ га тенг бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

VI. Гиперболанинг тенгламасини унинг ярим ўқлари йиғиндиси (айирмаси) ва фокуслари орасидаги масофа бўйича тузиш

375. Фокуслари Ox ўқда бўлган гиперболанинг ярим ўқлари (ҳақиқий ва мавҳум ўқларини) йиғиндиси 14 га ва фокуслари орасидаги масофа 20 га тенг бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида қуйидагилар берилган: $a + b = 14$ ва $2c = 20$, бу ердан $c = 10$. (3.12) формула бўйича: $10^2 = a^2 + b^2$. Қуйидаги тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{cases} a + b = 14, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Бу системанинг илдизлари: $a_1 = 6$; $b_1 = 8$ ва $a_2 = 8$, $b_2 = 6$. Демак, масала шартини қуйидаги иккита гипербола қаноатлантирар экан:

$$1)\ \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \text{ ва } 2)\ \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

376. Агар фокуслари Ox ўқда бўлган гиперболанинг: 1) ярим ўқларининг (ҳақиқий ва мавҳум ўқларининг) йиғиндиси 7 га ва фокуслари орасидаги масофа 10 га тенг бўлса; 2) ярим ўқларининг (ҳақиқий ва мавҳум ўқларининг) айирмаси 4 га ва фокуслари орасидаги масофа 40 га тенг бўлса, бу гиперболанинг тенгламасини тузинг.

VII. Гиперболанинг тенгламасини унинг ҳақиқий (мавҳум) ўқи узунлиги ва бу гипербола ўтадиган нуқтанинг координаталари бўйича тузиш

377. Фокуслари Ox ўқда бўлган гиперболанинг ҳақиқий ўқини узунлиги 8 га тенг бўлса ва у (8,6) нуқтадан ўтса, бу гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида $2a = 8$ берилган, бу ердан $a = 4$. (3.11) тенгламага $a = 4$ қийматни ва (8; 6) нуқтанинг координаталарини x ва y ўзгарувчиларнинг ўрнига қўямиз ва ҳосил бўлган тенгламадан b^2 ни топамиз:

$$\frac{8^2}{4^2} - \frac{6^2}{b^2} = 1 \text{ ёки } 4b^2 - 36 = b^2,$$

бу ердан $b^2 = 12$. (3.11) тенгламага a ва b^2 нинг топилган қийматларини қўйиб, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

378. Фокуслари Ox ўқда бўлган гиперболанинг ҳақиқий ўқини узунлиги 16 га тенг бўлса ва у (− 10; − 3) нуқтадан ўтса, бу гиперболанинг тенгламасини тузинг.

379. Фокуслари Ox ўқда бўлган гиперболанинг мавҳум ўқини узунлиги 12 га тенг бўлса ва у (20; 8) нуқтадан ўтса, бу гиперболанинг тенгламасини тузинг.

VIII. Берилган иккита нуқтадан ўтувчи гиперболанинг тенгламасини тузиш

380. Фокуслари Ox ўқда бўлган ва (6; 3) ва $(5\sqrt{2}; -4)$ нуқталардан ўтадиган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Гипербола тенгламасини тузиш учун a^2 ва b^2 ни топиш керак. Берилган нуқталарнинг координаталарини (3.11) тенгламага қўйиб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{6^2}{a^2} - \dfrac{3^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{(5\sqrt{2})^2}{a^2} - \dfrac{(-4)^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Системани ечиб, $a^2 = 18$ ва $b^2 = 9$ ни топамиз.

a^2 ва b^2 нинг қийматларини (3.11) тенгламага қўйиб, гиперболанинг изланаётган тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

381. Фокуслари Ox ўқда бўлган ва 1) $(-6; -\sqrt{7})$ ва $(6\sqrt{2}; 4)$; 2) $(-8; 2\sqrt{2})$ ва $(6; -1)$ нуқталардан ўтадиган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

IX. Гиперболанинг тенгламасини унинг асимптоталари ва фокусларининг координаталари бўйича ясаш

382. Агар гипербола фокусларининг координаталари $(\pm 8; 0)$ бўлиб, асимптоталари $y = \pm\sqrt{3}x$ тенглама билан берилган бўлса, бу гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида $c = 8$ ва $\frac{b}{a} = \pm\sqrt{3}$ берилган [(3.14) формула)]. Бу маълумотлар бўйича a ва b ни топамиз. (3.12) формула бўйича $64 = a^2 + b^2$ ни ёзамиз.

Ушбу тенгламалар системасига эгамиз:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 64, \\ \frac{b}{a} = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Бу системадан топилган $a^2 = 16$ ва $b^2 = 48$ ни (3.11) тенгламага қўйиб,

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

383. Гипербола фокусларининг координаталари ва асимптоталарининг тенгламалари бўйича гиперболанинг тенгламасини тузинг:

1) $F(\pm 5; 0)$, $y = \pm\frac{4}{3}x$; 2) $F(\pm 3; 0)$, $y = \pm\sqrt{2}\,x$.

X. Гиперболанинг тенгламасини унинг асимптоталари ва гипербола ўтадиган нуқтанинг координаталари бўйича тузиш

384. Агар гиперболанинг асимптоталари $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ тенгламалар билан берилган бўлиб, гиперболанинг ўзи $(6; -4)$ нуқтадан ўтадиган бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида $\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ берилган [(3.14) формула]. (3.11) тенгламада x ва y нинг ўрнига $(6; -4)$

координаталарни қўямиз ва қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \end{cases}$$

бу системадан $a^2 = 12$ ва $b^2 = 8$ ни топамиз.

a^2 ва b^2 нинг қийматларини (3.11) тенгламага қўйиб,

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$$

ни ҳосил қиламиз.

385. Гипербола асимптоталарининг тенгламалари ва гипербола ўтадиган нуқтанинг координаталари берилган:

$$1)\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ (9;\ 3\sqrt{2});\quad 2)\ y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(-4;\ -2);\quad 3)\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\quad (4\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}).$$

Гиперболанинг тенгламасини тузинг.

XI. Гиперболанинг тенгламаси бўйича унинг асимптоталари тенгламаларини тузиш

386. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1$ гипербола берилган. Унинг асимптоталари тенгламаларини тузинг.

Ечилиши. Гипербола тенгламасидан a ва b ни топамиз: $a = 12$, $b = 16$. a ва b нинг қийматларини асимптоталарнинг тенгламасига қўйиб, $y = \pm\frac{16}{12}x$ ёки $y = \pm\frac{4}{3}x$ ни ҳосил қиламиз.

387. Қуйидаги гиперболаларнинг асимптоталари тенгламаларини тузинг:

$$1)\ \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1,\qquad 2)\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

XII. Берилган нуқтадан ўтувчи тенг томонли гиперболанинг тенгламасини тузиш

388. $(-5;\ 4)$ нуқтадан ўтувчи ва фокуслари Ox ўқда бўлган тенг томонли гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Берилган нуқтанинг координаталарини тенг томонли гиперболанинг (3.15) тенгламасига қўйиб, $(-5)^2 - 4^2 = a^2$, $a^2 = 9$ ни ҳосил қиламиз. Гипербола тенгламаси $x^2 - y^2 = 9$.

389. $(8;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи ва фокуслари Ox ўқда бўлган тенг томонли гиперболанинг тенгламасини тузинг.

390. $(+\sqrt{3};\ -\sqrt{5})$ нуқтадан ўтувчи ва фокуслари Oy ўқда бўлган тенг томонли гиперболанинг тенгламасини тузинг.

XIII. Гипербола учларининг координаталарини (унинг ўқлари узунликларини) унинг тенгламаси бўйича ҳисоблаш

391. Гипербола тенгламаси берилган: $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1$. Унинг учлари координаталарини топинг.

Ечилиши. Гипербола тенгламасидан a ни топамиз: $a^2=81$, $a=\pm 9$. Гиперболанинг учлари $(-9;\ 0)$ ва $(9;\ 0)$ нуқталарда жойлашган.

392. Гипербола тенгламаси берилган: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{14}=1$. Бу гипербола учларининг координаталарини топинг.

393. Қуйидаги гиперболалар ўқларининг узунликларини топинг:

$$1)\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1; \qquad 2)\ \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{81}=1.$$

XIV. Гипербола фокусларининг координаталарини (фокуслари орасидаги масофани) гиперболанинг тенгламаси бўйича ҳисоблаш

394. Гипербола тенгламаси берилган: $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{49}=1$. Бу гипербола фокусларининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Гипербола тенгламасидан: $a^2=15$, $b^2=49$. (3.12) формула бўйича:

$$c^2=15+49=64,\quad c=\pm 8$$

ни топамиз.

Фокуслар $(-8;\ 0)$ ва $(8;\ 0)$ нуқталарда жойлашган.

395. Гипербола тенгламаси берилган: $\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{22}=1$. Бу гипербола фокусларининг координаталарини топинг.

396. Қуйидаги гиперболаларнинг фокуслари орасидаги масофани топинг:

$$1)\ \frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1; \qquad 2)\ \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1.$$

XV. Гиперболанинг эксцентриситетини унинг тенгламаси бўйича ҳисоблаш

397. Гипербола тенгламаси берилган: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$. Унинг эксцентриситетини топинг.

Ечилиши. Гипербола тенгламасидан: $a^2=25$, $b^2=11$. Эксцентриситет (3.13) формула бўйича ҳисобланади:

$$e=\frac{\sqrt{25+11}}{5}=\frac{6}{5}.$$

398. Қуйидаги гиперболаларнинг эксцентриситетини топинг:

$$1)\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1; \quad 2)\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1.$$

XVI. Фокуслари Oy ўқда бўлган гипербола

399. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=-1$ гиперболанинг учларини, фокусларини, эксцентриситетини ва асимптоталарини топинг.

Ечилиши. Берилган гипербола (3.17) кўринишга эга:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1,$$

яъни унинг фокуслари Oy ўқда ётади. Тенгламадан: $a^2=64$, $a=\pm 8$ ва $b^2=36$, $b=\pm 6$. Гиперболанинг учлари $A_1(0;\ -8)$ ва $A_2(0;\ 8)$ нуқталарда бўлади.

(3.12) формула бўйича: $c^2=64+36=100$, $c=\pm 10$; демак, фокуслар $F_1(0;\ -10)$ ва $F_2(0;\ 10)$ нуқталарда жойлашган.

Эксцентриситетни (3.13) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$e=\frac{5}{4}.$$

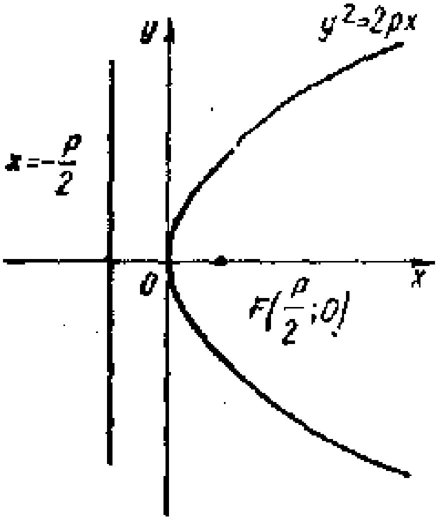
Гиперболанинг асимптоталарини (3.18) формула бўйича топамиз:

$$x=\pm\frac{3}{4}y.$$

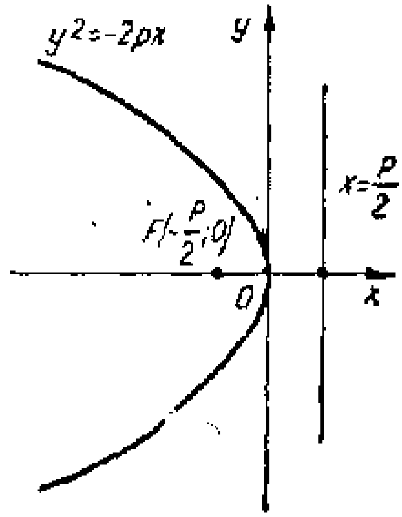
400. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ гиперболанинг учларини, фокусларини, эксцентриситетини ва асимптоталарини топинг.

25-§. Учи координаталар бошида бўлган парабола

Фокус деб аталувчи берилган нуқтадан ва директриса деб аталувчи берилган тўғри чизиқдан (фокус директрисада ётмайди) тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни парабола деб аталади.



59- расм.



60- расм.

Учи координаталар бошида, симметрия ўқи Ox ўқ бўлган ва тармоқлари ўнгга қараб йўналган параболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y^2=2px\,(p>0), \qquad (3.20)$$

бу ерда p — параболанинг параметри — фокусдан директрисагача бўлган масофа; x ва y — ўзгарувчи координаталар — параболанинг исталган нуқтасини координаталари.

Параболанинг директрисаси тенгламаси: $x=-\frac{p}{2}$ (59-расм). Учи координаталар бошида, симметрия ўқи Ox ўқ бўлган ва тармоқлари чапга қараб йўналган параболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y^2=-2px\,(p>0). \qquad (3.21)$$

Унинг директрисасининг тенгламаси:

$x=\frac{p}{2}$ (60- расм).

Учи координаталар бошида, симметрия ўқи бўлиб Oy ў хизмат қиладиган ва тармоқлари юқорига қараб йўналга параболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$x^2 = 2py \quad (p > 0). \qquad (3.22$$

Унинг директрисасининг тенгламаси:

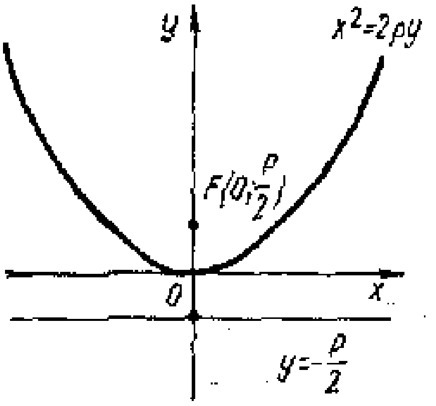
$$y = -\frac{p}{2} \text{ (61- расм).}$$

Учи координаталар бошида, симметрия ўқи бўлиб Oy ўқ хизмат қиладиган ва тармоқлари пастга қараб йўналган параболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

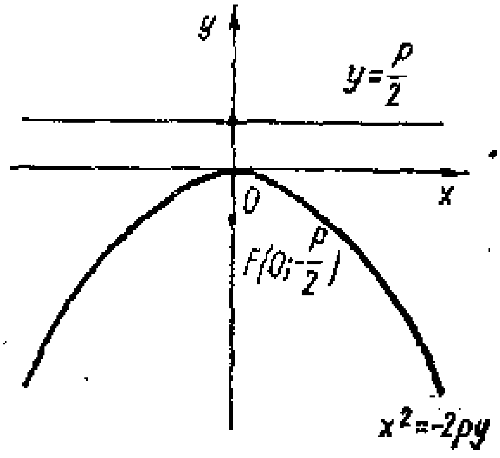
$$x^2 = -2py \quad (p > 0). \qquad (3.23)$$

Унинг директрисасининг тенгламаси:

$$y = \frac{p}{2} \text{ (62- расм).}$$



61- расм.



62- расм.

Бу параграфнинг барча масалаларида координата ўқларидан бири параболанинг симметрия ўқи деб фараз қилинади.

1. Берилган нуқталарнинг берилган параболага тегишлилигини текшириш

401. $A(1;\ -2)$, $B(4;\ 4)$ ва $C(1;\ 3)$ нуқталарнинг $y^2 = 4x$ параболага тегишлилигини текширинг.

402. $A(-3;\ -3)$, $B(3\sqrt{3};\ -9)$ ва $C(5;\ -8)$ нуқталарнинг $x^2 = -3y$ параболага тегишлилигини текширинг.

II. Учи координаталар бошида бўлган параболанинг тенгламасини унинг фокуслари координаталари бўйича тузиш

403. Агар учи координаталар бошида бўлган параболанинг фокуси $F(3;\ 0)$ нуқтада ётса, бу параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Параболанинг фокуси Ox нинг мусбат ярим ўқида ётибди, демак, параболанинг умумий кўринишдаги тенгламаси (3.20) тенглама билан берилади; унинг фокусининг координаталари $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. p ни топамиз: $\frac{p}{2}=3$, $p=6$. p нинг қийматини (3.20) тенгламага қўйиб, $y^2=2\cdot 6x=12x$, $y^2=12x$ ни ҳосил қиламиз.

404. Агар учи координаталар бошида бўлган параболанинг фокуси: 1) $F(5;\ 0)$; 2) $F(-4;\ 0)$; 3) $F(0;\ 2)$ ва 4) $F(0;\ -3)$ нуқтада ётса, бу параболанинг тенгламасини тузинг.

III. Учи координаталар бошида бўлган параболанинг тенгламасини унинг директрисаси тенгламаси бўйича тузиш

405. Агар учи координаталар бошида бўлган параболанинг директрисаси $x=-4$ тўғри чизиқдан иборат бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Директрисадан координаталар бошигача бўлган масофа $\frac{p}{2}$ га тенг, демак, $\frac{p}{2}=4$, $p=8$.

Бу параболанинг тенгламаси умумий кўринишда (3.20) тенглама билан берилади, чунки директрисанинг абсциссаси манфий.

(3.20) тенгламага p параметрининг қийматини қўйиб, параболанинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y^2=16x.$$

406. Агар учи координаталар бошида бўлган параболанинг директрисаси: 1) $x=-2$; 2) $x=3$; 3) $y=-4$; 4) $y=1$ тўғри чизиқлардан иборат бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

IV. Учи координаталар бошида, $Ox(Oy)$ ўққа нисбатан симметрик ва берилган нуқтадан ўтувчи параболанинг тенгламасини тузиш

407. Учи координаталар бошида, Ox ўққа нисбатан симметрик ва $A(1;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Изланаётган параболанинг симметрия ўқи бўлиб Oy ўқ хизмат қилади ва парабола $A(1; -2)$ нуқтадан, яъни тўртинчи чоракда ётувчи нуқтадан ўтади, демак, парабола умумий кўринишда (3.20) тенглама билан берилади. Бу тенгламага $A(1; -2)$ нуқтанинг координаталарини қўйиб, $(-2)^2 = 2p\cdot 1$, $p = 2$ ни топамиз, (3.20) тенгламага p нинг қийматини қўйгач, параболанинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y^2 = 4x.$$

408. Учи координаталар бошида, Ox ўққа нисбатан симметрик ва 1) $(5; -3)$; 2) $(-4; 2)$; 3) $(-2; 2)$ нуқтадан ўтувчи параболанинг тенгламасини тузинг.

409. Учи координаталар бошида, Oy ўққа нисбатан симметрик ва $A(4; 2)$ нуқтадан ўтувчи параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Параболанинг симметрия ўқи Oy ўқ бўлади, парабола эса $A\ (4; 2)$ нуқтадан ўтади, демак, изланаётган парабола умумий кўринишда (3.22) тенглама билан берилади. Бу тенгламага $A(4; 2)$ нуқтанинг координаталарини қўйиб, p ни топамиз: $p = 4$. (3.22) тенгламага p нинг қийматини қўйгандан сўнг, параболанинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x^2 = 8y.$$

410. Учи координаталар бошида, Oy ўққа нисбатан симметрик ва 1) $(2; -3)$; 2) $(-3; 1)$ нуқтадан ўтувчи параболанинг тенгламасини тузинг.

V. Координаталар бошидан ўтувчи параболанинг тенгламаси бўйича унинг директрисаси тенгламасини тузиш

411. Парабола тенгламаси берилган: $y^2 = 6x$. Унинг директрисаси тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Параболанинг $y^2 = 6x$ тенгламасидан: $2p = 6$, $p = 3$. $y^2 = 2px$ параболанинг директрисаси тенгламаси $x = -\frac{p}{2}$ кўринишга эга. Демак, директрисанинг тенгламаси $x = -\frac{3}{2}$ ёки $2x + 3 = 0$ бўлади.

412. 1) $y^2 = 8x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -10y$ параболанинг директрисаси тенгламасини тузинг.

VI. Координаталар бошидан ўтувчи параболанинг тенгламаси бўйича унинг фокуси координаталарини ҳисоблаш

413. Парабола тенгламаси берилган: $y^2=12x$. Унинг фокуслари координаталарини топинг.

Ечилиши. Координаталар бошидан фокусгача бўлган масофа $\frac{p}{2}$ га тенг. $y^2=12x$ парабола тенгламасидан: $2p = 12$, $p=6$ ва $\frac{p}{2}=3$. Демак, $F(3;\ 0)$.

414. Параболанинг қуйида берилган тенгламаси бўйича унинг фокуси координаталарини ҳисобланг: 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-4x$; 3) $x^2=14y$; 4) $x^2=-5y$.

VII. Учи координаталар бошида бўлган параболанинг директрисаси тенгламаси бўйича унинг фокуси координаталарини ҳисоблаш

415. Агар учи координаталар бошида бўлган парабола директрисасининг тенгламаси $x=-3$ бўлса, унинг фокуси координаталарини топинг.

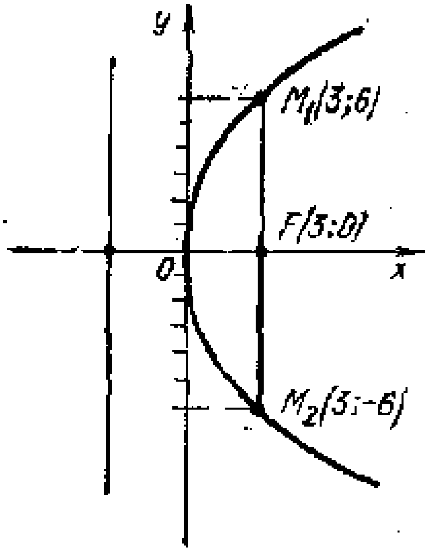
Ечилиши. Координаталар бошидан директрисагача бўлган масофа координаталар бошидан фокусгача бўлган масофага тенг ва у ҳам бўлса $\frac{p}{2}$ га тенг. Директрисанинг $x = -3$ тенгламасидан $\frac{p}{2}=3$ эканлиги келиб чиқади. Тенгламаси $x=-\frac{p}{2}$ бўлган директрисага фокуси мусбат абсцисса $F(3;\ 0)$ га эга бўлган $y^2=2px$ парабола мос келади.

416. Учи координаталар бошида бўлган параболанинг директрисаси 1) $x=2$; 2) $x=-5$; 3) $y=4$; 4) $y=-6$ тенглама билан берилган бўлса, парабола фокусининг координаталарини топинг.

VIII. Учи координаталар бошида бўлган параболанинг фокусидан унинг ўқига перпендикуляр бўлиб ўтувчи ватарнинг узунлигини ҳисоблаш

417. $y^2=12x$ парабола берилган. Параболанинг фокусидан унинг ўқига перпендикуляр бўлиб ўтувчи ватарнинг узунлигини топинг.

Ечилиши. Ватар параболанинг фокуси орқали ўтиб, парабола ўқига перпендикулярдир, шу сабабли ватарнинг парабола билан кесишиш нуқталарининг абсциссаси фокуснинг



63- расм.

абсциссаси билан умумий бўлад (63- расм). Парабола тенгламасида фокуснинг координаталарини топамиз:

$$y^2 = 12x;\ 2p = 12;\ \frac{p}{2} = 3,\ F(3;\ 0).$$

Ватарнинг парабола билан кесишиш нуқталарининг ординаталарини топиш учун парабола тенгламасига $x = 3$ қийматни (ватарнинг парабола билан кесишиш нуқталарининг абсциссаси) қўямиз: $y^2 = 12 \cdot 3 = 36$, бу ердан $y_{1,2} = \pm 6$. Демак, ватарнинг парабола билан кесишиш нуқталари M_1 (3; 6) ва M_2 (3; -6) экан. M_1M ватарнинг узунлиги $2FM_1 = 2 \cdot 6 = 12$ га тенг.

418. $y^2 = 20x$ парабола берилган. Параболанинг фокусидан ўтиб, унинг ўқига перпендикуляр бўлиб ўтган ватарнинг узунлигини топинг.

IX. Учи координаталар бошида бўлган параболанинг берилган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топиш

419. $y^2 = 16x$ параболанинг $4x - 3y + 8 = 0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Парабола ва тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топиш учун ушбу

$$\begin{cases} y^2 = 16x, \\ 4x - 3y + 8 = 0 \end{cases}$$

системани ечамиз. Бу системанинг илдизлари $x_1 = 1$; $y_1 = 4$ ва $x_2 = 4$; $y_2 = 8$. Демак, парабола ва тўғри чизиқ (1; 4) ва (4; 8) нуқталарда кесишади.

420. 1) $y^2 = 16x$ параболанинг $2x - y + 2 = 0$ тўғри чизиқ билан; 2) $y^2 = 4x$ параболанинг $2x - 3y + 4 = 0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини топинг.

X. Учлари координаталар бошида бўлган иккита параболанинг кесишиш нуқталарининг координаталарини ҳисоблаш

421. $y^2 = 9x$ ва $x^2 = 9y$ параболаларнинг кесишиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Берилган параболаларнинг кесишиш нуқталарини топиш учун ушбу

$$\begin{cases} y^2 = 9x, \\ x^2 = 9y \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз. Системани ечиб $x_1 = 0$; $y_1 = 0$ ва $x_2 = 9$; $y_2 = 9$ ни ҳосил қиламиз. Демак, параболалар (0; 0) ва (9; 9) нуқталарда кесишади.

422. $y = x^2$ ва $x = y^2$ параболаларнинг кесишиш нуқталарини топинг.

21-§. Учи ихтиёрий нуқтада бўлган парабола

Учи $(a; b)$ нуқтада, симметрия ўқи Ox ўққа параллел бўлган ва тармоқлари ўнгга йўналган параболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга (64-расм):

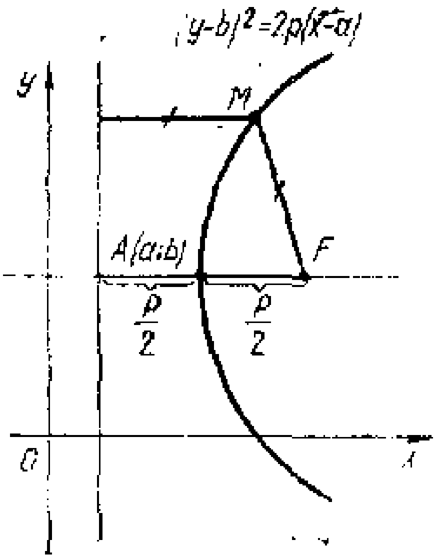
$$(y - b)^2 = 2p(x - a). \qquad (3.24)$$

Учи $(a; b)$ нуқтада, симметрия ўқи Ox ўққа параллел бўлган ва тармоқлари чап томонга йўналган параболанинг тенгламаси (65-расм):

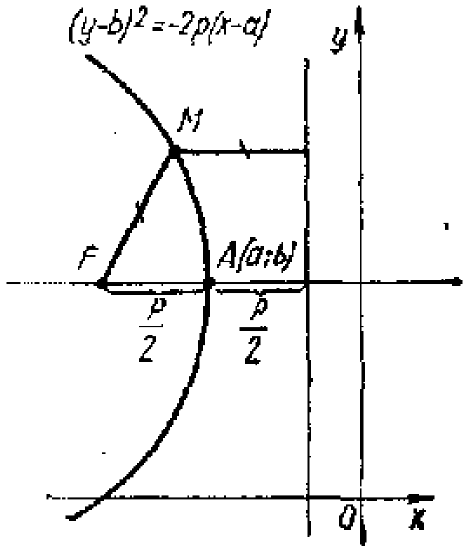
$$(y - b)^2 = -2p(x - a). \qquad (3.25)$$

Учи $(a; b)$ нуқтада, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган ва тармоқлари юқорига йўналган параболанинг тенгламаси (66-расм):

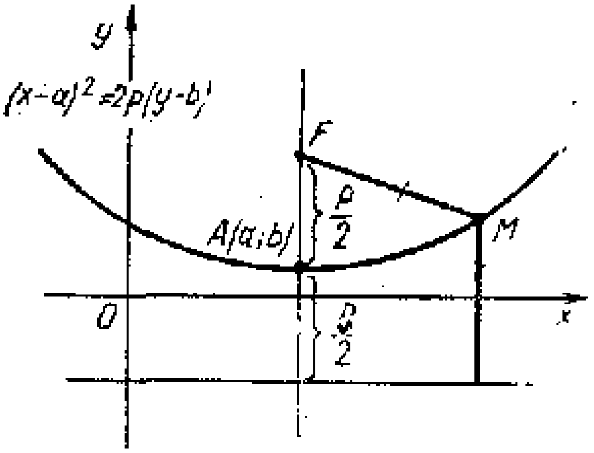
$$(x - a)^2 = 2p(y - b). \qquad (3.26)$$



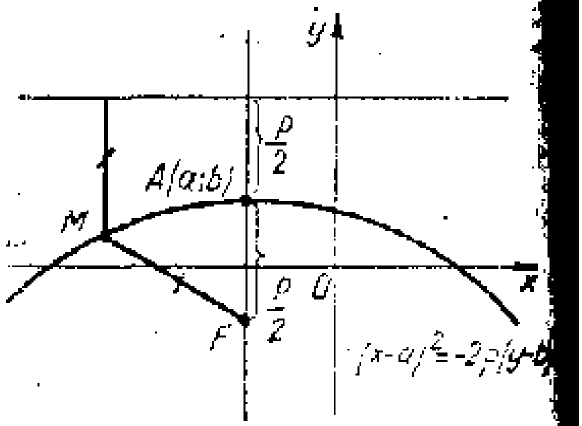
64- расм.



65- расм.



66- расм.



67- расм.

Учи $(a;\ b)$ нуқтада, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган ва тармоқлари пастга йўналган параболанинг тенгламаси (67- расм):

$$(x-a)^2=-2p(y-b). \qquad (3.27)$$

Юқоридаги тенгламаларнинг ҳар қайсисида параболанинг параметри $p>0$ — параболанинг фокусидан унинг директрисасигача бўлган масофа.

1. Учи $(a;\ b)$ нуқтада, симметрия ўқи Ox (Oy) ўққа параллел бўлган ва берилган нуқтадан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузиш

423. Учи $A(1;\ 2)$ нуқтада, симметрия ўқи Ox ўққа параллел бўлган ва $M(4;\ 8)$ нуқтадан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида (3.24) кўринишдаги парабола берилган, чунки $M(4;\ 8)$ нуқта парабола учидан ўнгда жойлашган, шунинг учун параболанинг тармоқлари ҳам ўнг томонга йўналган. p параметрни ҳисоблаш учун (3.24) тенгламага $A(1;\ 2)$ учнинг ва $M(4;\ 8)$ нуқтанинг координаталарини қўямиз: $(8-2)^2=2p(4-1)$, бу ердан $p=6$. (3.24) тенгламага p нинг топилган қийматини ва $A(1;\ 2)$ учнинг координаталарини қўйиб, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y^2-4y-12x+16=0.$$

424. Учи $A(-4;\ -2)$ нуқтада, симметрия ўқи Ox ўққа параллел бўлган ва $M(1;\ 3)$ нуқтадан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

425. Учи $A(2;\ 4)$ нуқтада, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган ва $M(-6;\ 8)$ нуқтадан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

426. Учи $A(-2;\ -4)$ нуқтада, симметрия ўқи Ox ўққа параллел бўлган ва координаталар бошидан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

427. Учи $A(5;\ -5)$ нуқтада, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган ва координаталар бошидан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

428. Учи $A(-2;\ 1)$ нуқтада, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган ва $M(5;\ -6)$ нуқтадан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида (3.27) кўринишдаги парабола берилган. $M(5;\ -6)$ нуқта парабола учидан пастда жойлашганлиги учун параболанинг тармоқлари ҳам пастга йўналган. p параметрни ҳисоблаш учун (3.27) тенгламага $A(-2;\ 1)$ учнинг ва $M(5;\ -6)$ нуқтанинг координаталарини қўямиз: $(5+2)^2=-2p(-6-1)$, бу ердан $p=\frac{7}{2}$. p нинг топилган қийматини ва $A(-2;\ 1)$ учнинг координаталарини (3.27) тенгламага қўйиб, изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x^2+4x+7y-3=0.$$

429. Учи $A(3;\ -1)$ нуқтада, симметрия ўқи Ox ўққа параллел бўлган ва $M(-3;\ -3)$ нуқтадан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

430. Учи $(3;\ 5)$ нуқтада, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган ва координаталар бошидан ўтадиган параболанинг тенгламасини тузинг.

11. Параболанинг тенгламасини унинг учи ва фокусининг координаталари бўйича тузиш

431. Агар параболанинг учи $A(2;\ 3)$ нуқтада ва фокуси $F(6;\ 3)$ нуқтада бўлса, бу параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масалада (3.24) кўринишдаги парабола берилган, чунки параболанинг ўқи Ox ўққа параллел (учнинг ва фокуснинг ординаталари тенг, демак, улар Ox га параллел бўлган тўғри чизиқда ётадилар) ва парабола тармоқлари ўнг томонга йўналган (унинг фокуси парабола учидан ўнгда жойлашган).

Парабола тенгламасини тузиш учун p параметрни топ миз. Параболанинг учидан фокусигача бўлган масофа $\frac{p}{2}$ г тенг.

Масала шартидан $\frac{p}{2}=|6-2|=4$ (фокус ва учнинг абсциссаларини айирмаси абсолют катталиги бўйича олинади, чунки параметр $p>0$), бу ердан $p=8$.

(3.24) тенгламага $A(2;\ 3)$ нуқтанинг координаталарини ва p нинг топилган қийматини қўйиб, параболанинг изланаётган тенгламасини ҳосил қиламиз: $y^2-6y-16x+41=0$.

432. Учи A нуқтада ва фокуси F нуқтада бўлган параболанинг тенгламасини тузинг:

1) $A\ (4;\ 6)$, $F(-2;\ 6)$; 2) $A(3;\ -2)$, $F(3;\ 0)$; 3) $A(-1;\ 1)$, $F(-1;\ -4)$.

III. Параболанинг тенгламасини унинг учи координаталари ва директрисаси тенгламаси бўйича тузиш

433. Учи $A(4;\ 6)$ нуқтада, директрисаси $x=-2$ бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида (3.24) кўринишдаги парабола берилган, чунки унинг директрисаси ($x=-2$) Ox ўққа перпендикуляр, ва демак, параболанинг ўқи Ox ўққа параллел ва унинг тармоқлари ўнг томонга йўналган (директриса учдан чапроқда жойлашган). Парабола тенгламасини тузиш учун p параметрни топамиз. Параболанинг учидан директрисагача бўлган масофа $\frac{p}{2}$ га тенг. Масала шартидан, $\frac{p}{2}$ директриса ва парабола учи абсциссаларининг абсолют қийматлари йиғиндисига тенглиги, яъни $\frac{p}{2}=|-2|+4=6$ эканлиги келиб чиқади, бу ердан $p=12$. (3.24) тенгламага $A(4;\ 6)$ нуқтанинг координаталари ва p нинг топилган қийматини қўйиб, параболанинг изланаётган тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y^2-12y-24x+132=0.$$

434. Учи $A(1;\ -3)$ нуқтада, директрисаси $x=5$ бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

Кўрсатма. $\frac{p}{2}$ катталик директриса ва учининг абсциссалари айирмасига тенг.

435. Учи $A(-2; 4)$ нуқтада ва директрисаси $y = -2$ бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

436. Учи $A(-3; 5)$ нуқтада ва директрисаси $y = 7$ бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

437. Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган ва учи $A(-2; 0)$ нуқтада, директрисаси эса Oy ўқдан иборат бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида (3.25) кўринишдаги парабола берилган, чунки учининг абсциссаси Oy ўқ билан устма-уст тушувчи директрисадан чапда ётади ва параболанинг тармоқлари чап томонга йўналган. $\frac{p}{2} = |-2| = 2$ (парабола учидан координаталар бошигача бўлган масофа), бу ердан $p = 4$. (3.25) тенгламага $A(-2; 0)$ учнинг координаталарини ва p параметрнинг топилган қийматини қўйиб

$$y^2 + 8x + 16 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

438. Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган ва учи $(3; 0)$ нуқтада, директрисаси эса Oy ўқдан иборат бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

439. Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган ва учи $A(-4; 0)$ нуқтада, директрисаси эса $x = 2$ тўғри чизиқдан иборат бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

440. Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган ва учи $A(0; 2)$ нуқтада, директрисаси эса Ox ўқдан иборат бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

441. Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган ва учи $A(0; -2)$ нуқтада, директрисаси эса $y = -5$ тўғри чизиқдан иборат бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

442. Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган ва учи $A(0; -3)$ нуқтада, директрисаси эса Ox ўқдан иборат бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

IV. Параболанинг тенгламасини унинг фокуси координаталари ва директрисасининг тенгламаси бўйича тузиш

443. Фокуси $F(4; 3)$ нуқтада бўлган, директрисаси эса $x = -2$ тенглама билан берилган параболанинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартида (3.24) кўринишдаги парабола берилган, чунки директриса Ox ўққа перпендикуляр ва, демак, параболанинг ўқи Ox ўққа параллел, тармоқлари эса ўнг томонга йўналган (директриса фокусдан чапда жойлашган) p параметрни топамиз. Фокусдан директрисагача бўлган масофа $p = |-2| + 4 = 6$ га тенг. Парабола учининг координаталарини топамиз. Фокусдан учгача (шунингдек, директрисадан учгача ҳам) бўлган масофа $\frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3$ га тенг, бироқ фокуснинг абсциссаси 4 га тенг, бинобарин, парабола учининг абсциссаси $a = 4 - 3 = 1$ бўлиб, ординатаси эса фокуснинг ординатаси билан бир хил (параболанинг ўқи Ox ўққа параллел): $b = 3$, $A(1;\ 3)$. p нинг топилган қийматини ва $A(1;\ 3)$ ни (3.24) тенгламага қўйиб, параболанинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y^2 - 6y - 12x + 21 = 0.$$

444. Фокуси $F(-6;\ -1)$ нуқтада бўлган, директрисаси эса $x = 2$ тенглама билан берилган параболанинг тенгламасини тузинг.

445. Фокуси координаталар бошида бўлган, директрисаси эса $x = -4$ тенглама билан берилган параболанинг тенгламасини тузинг.

446. Фокуси $(2;\ 2)$ нуқтада бўлган, директрисаси эса $y = -4$ тенглама билан берилган параболанинг тенгламасини тузинг.

447. Фокуси координаталар бошида бўлган, директрисаси эса $y = 4$ тенглама билан берилган параболанинг тенгламасини тузинг.

V. Парабола учининг координаталарини унинг тенгламаси бўйича ҳисоблаш

448. $y = Ax^2 + Bx + C$ тенглама билан берилган парабола учининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Берилган тенгламани $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ кўринишдаги тенгламага келтирамиз. $y = Ax^2 + Bx + C$ тенгламанинг иккала томонини A га бўламиз: $\frac{y}{A} = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}$.

Ўнг томонни тўлиқ квадратга тўлдирамиз, бунинг учун тенгламанинг чап ва ўнг томонига $\left(\frac{B}{2A}\right)^2$ ни қўшамиз ва $\frac{C}{A}$ озод ҳадни чап томонга ўтказамиз:

$$\frac{y}{A} - \frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2} = x^2 + 2x\frac{B}{2A} + \frac{B^2}{4A^2}.$$

Қуйидагича алмаштирамиз:

$$\frac{1}{A}\left(y-\frac{4AC-B^2}{4A}\right)=\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2.$$

$$\frac{4AC-B^2}{4A}=b,\ -\frac{B}{2A}=a\ \text{ва}\ \frac{1}{A}=2p,\quad \text{деб}\quad (3.26)$$

кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз.

$$y=Ax^2+Bx+C$$

кўринишдаги параболанинг учи $\left(\frac{B}{2A};\ -\frac{B^2-4AC}{4A}\right)$ нуқтада бўлади.

Бу муносабатлардан парабола учининг координаталарини ҳисоблашда фойдаланиш мумкин: масалан $y=3x^2-2x+4$ парабола учининг координаталари (бу ерда $A=3$, $B=-2$ ва $C=4$) қуйидагича бўлади:

$$a=-\frac{B}{2A}=\frac{1}{3},\ b=-\frac{B^2-4AC}{4A}=3\frac{2}{3};\quad A\ \frac{1}{3};\ 3\frac{2}{3}\Big).$$

449. Парабола тенгламаси берилган: $x^2-8x-4y+28=$ $=0$. Парабола учининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Бу тенгламани (3.26) кўринишга келтирамиз, *бунинг учун қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз:*

$$x^2-8x=4y-28;$$

$$x^2-2\cdot 4x+4^2=4y-28+4^2;\ (x-4)^2=4(y-3),$$

бу ердан

$$a=4,\ b=3,\ 2p=4;\ A(4;\ 3).$$

450. 1) $x^2-6x-6y-21=0$; 2) $x^2+8x+5y+21=0$

парабола учининг координаталарини топинг.

451. Парабола тенгламаси берилган: $y^2-6y-12x+$ $+33=0$. *Парабола учининг координаталарини топинг.*

Ечилиши. Бу тенгламани (3. 24) кўринишга келтирамиз, бунинг учун 449- масалада бажарилган алмаштиришларга ўхшаш алмаштиришларни бажарамиз:

$$y^2-6y-12x+33=0;\ y^2-2\cdot 3y+3^2=12x-33+3^2;$$
$$(y-3)^2=12(x-2),\ \text{бу ердан}\ a=2,\ b=3,\ 2p=12;\ A(2;\ 3).$$

452. Парабола тенгламаси берилган: $y^2+6y+3x+15=$ $=0$. Парабола учининг координаталарини топинг.

VI. Фокуснинг координаталарини парабола тенгламаси бўйича ҳисоблаш

453. $y^2+4y-24x+76=0$ парабола фокусининг ко динаталарини ҳисобланг.

Ечилиши. Парабола тенгламасини (3.24) кўриниш келтирамиз:

$$y^2+4y=24x-76;\ y^2+2\cdot 2y+2^2=24x-76+2^2;$$
$$(y+2)^2=24(x-3),$$

бу ердан

$$A(3;\ -2),\ 2p=24,\ p=12.$$

Параболанинг учидан фокусгача бўлган масофа $\frac{p}{2}=\frac{12}{2}=$ $=6$ га тенг. Фокуснинг абсциссаси $3+\frac{p}{2}=3+6=9$ га тенг.

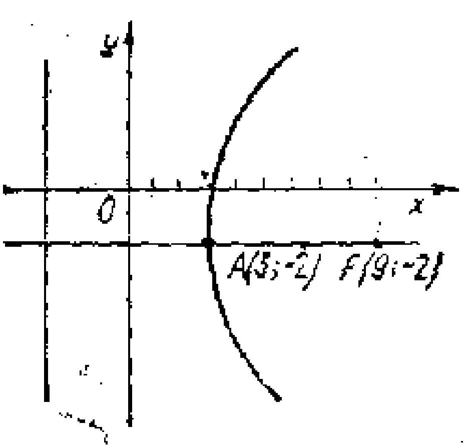
Фокус параболанинг учидан ўнгда жойлашган, чунки параболанинг тармоқлари ўнгга қараган; фокуснинг ординатаси эса учининг ординатасига тенг, чунки параболанинг ўқи Ox ўққа параллелдир (68- расм), у ҳолда $F(9;\ -2)$.

454. 1) $y^2-8y-8x-8=0$; 2) $y^2-12x-36=0$. Парабола фокусининг координаталарини ҳисобланг.

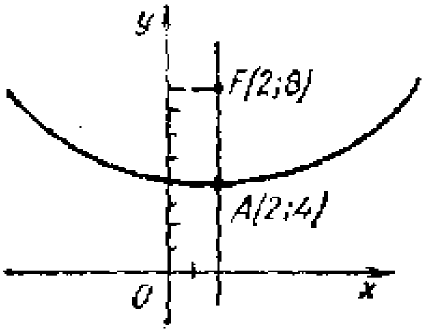
455. $x^2-4x-16y+68=0$ парабола фокусининг координаталарини ҳисобланг.

Ечилиши. Парабола тенгламасини (3.26) кўринишга келтирамиз:

$$x^2-4x=16y-68;\ x^2-2\cdot 2x+2^2=16y-68+2^2;$$
$$(x-2)^2=16(y-4),$$



68- расм.



69- расм.

у ердан

$$A(2;\ 4),\ 2p = 16,\ p = 8.$$

Параболанинг учидан фокусгача бўлган масофа $\frac{p}{2} = \frac{8}{2} = 4$ га, фокуснинг ординатаси $4 + \frac{p}{2} = 4 + 4 = 8$ га тенг.

Фокус параболанинг учидан юқорида ётади, чунки параболанинг тармоқлари юқорига қараган, фокуснинг абсциссаси эса учнинг абсциссасига тенг, чунки параболанинг ўқи Oy ўққа параллел (69- расм): $F(2;\ 8)$.

456. 1) $x^2 + 10x + 8y + 41 = 0$; 2) $x^2 - 6y - 9 = 0$ парабола фокусининг координаталарини ҳисобланг.

VII. Параболанинг симметрия ўқи тенгламасини парабола тенгламаси бўйича тузиш

457. $y^2 - 6y - 8x - 7 = 0$ парабола берилган. Парабола ўқининг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. $y^2 - 6y - 8x - 7 = 0$ параболанинг ўқи унинг учи орқали Ox ўққа параллел ҳолда ўтади. Парабола тенгламасини (3.24) кўринишга келтириб, парабола учининг координаталарини ҳисоблаймиз:

$$y^2 - 6y = 8x + 7;\quad y^2 - 2\cdot 3y + 3^2 = 8x + 7 + 3^2;$$
$$(y - 3)^2 = 8(x + 2),$$

бу ердан

$$a = -2,\ b = 3;\ A(-2;\ 3).$$

Параболанинг ўқи $A(-2;\ 3)$ нуқтадан ўтади, демак, унинг тенгламаси: $y = 3$.

458. 1) $y^2 - 10y - 10x + 5 = 0$; 2) $x^2 + 16x - 18y + 100 = 0$ парабола ўқининг тенгламасини тузинг.

VIII. Параболанинг директрисаси тенгламасини унинг тенгламаси бўйича тузиш

459. $y^2 - 4y - 20x + 24 = 0$ парабола берилган. Унинг директрисаси тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Параболанинг директрисаси унинг учидан $\frac{p}{2}$ масофада парабола ўқига перпендикуляр ҳолда ўтади. Парабола тенгламасидан p ни топамиз:

$$y^2 - 4y = 20x - 24;\quad y^2 - 2\cdot 2y + 4 = 20x - 24 + 4;$$
$$(y - 2)^2 = 20(x - 1).$$

бу ердан

$$a = 1,\ b = 2;\quad A(1; 2).$$

$$2p = 20,\ \frac{p}{2} = 5.$$

Параболанинг симметрия ўқи Ox ўққа параллел ва унинг тармоқлари ўнг томонга йўналган, демак, параболанинг директрисаси унинг учидан чапроқда ўтади. Бундан ташқари, у координаталар бошидан ҳам чапроқда ўтади, чунки параболанинг учидан Oy ўққача бўлган масофа 1 га, директрисагача бўлган масофа эса 5 га тенг. Директрисанинг абсциссаси $\frac{p}{2} - 1 = 5 - 1 = 4$ айирманинг манфий ишора билан олинганига тенг, шу сабабли директрисанинг тенгламаси $x = -4$ бўлади.

460. 1) $y^2 - 2y - 10x + 11 = 0$; 2) $y^2 + 8y + 8x + 32 = 0$; 3) $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$

параболанинг директрисаси тенгламасини тузинг.

IX. Параболани унинг тенгламаси бўйича ясаш

461. $x^2 - 2x - y - 8 = 0$ параболани ясанг.

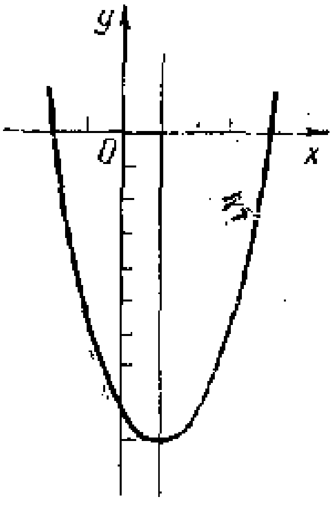
Ечилиши. *1- усул.* Тенгламани $y = Ax^2 + Bx + C$ кўринишга келтириб, $y = x^2 - 2x - 8$ ни ҳосил қиламиз.

448-масалада $y = Ax^2 + Bx + C$ параболани текширганда унинг учини координаталари учун $\left(-\frac{B}{2A};\ \frac{B^2 - 4AC}{4A}\right)$ ифода ҳосил қилинган эди. Улардан берилган парабола учининг координаталарини ҳисоблаш учун фойдаланамиз. $A = 1$, $B = -2$ ва $C = -8$ га эгамиз. Буларни юқоридаги ифодага қўямиз:

$$a = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1;$$

$$b = -\frac{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}{4\cdot 1} = -9.$$

Параболанинг учи (1; −9) нуқтада ётади. Параболанинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишиш нуқталарини топамиз: (−2; 0), (4; 0) ва (0; −8). Бир қатор характерли нуқталарни ҳосил қилдик: (−2; 0), (0; −8), (1; −9) ва (4; 0), бу нуқталар бўйича $x = 1$ ўққа нисбатан симметрик бўлган параболани ясаймиз (70- расм).



70- расм.

2- усул. $y = x^2 - 2x - 8$ тенгламани (3.26) кўринишдаги тенгламага келтириб, параболанинг учини топамиз:

$$x^2 - 2x = y + 8;\ x^2 - 2x + 1 = y + 8 + 1;$$
$$(x - 1)^2 = y + 9,$$

бундан

$$a = 1 \text{ ва } b = -9;\ A(1;\ -9).$$

Қўшимча нуқталар биринчи усулда кўрсатилгандек топилади.

3- усул (Бу усулдан парабола Ox ўқни кесиб ўтганда фойдаланилади). $y = 0$ деб $x^2 - 2x - 8 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз, унинг илдизлари $x_1 = -2$ ва $x_2 = 4$. Парабола учининг абсциссаси параболанинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталари абсциссаларининг ярим йиғиндисига тенг:

$$x_{уч} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1.$$

Учининг ординатасини топиш учун учнинг абсциссасини берилган тенгламага қўямиз: $y_{уч} = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$; $A(1; -9)$.

Қўшимча нуқталар биринчи усулдагидек топилади.

462. 1) $x^2 + 2x - y - 8 = 0$; 2) $x^2 + 8x + 4y = 0$; 3) $y^2 - 4x + 2y = 0$; 4) $x^2 - 6x - 6y - 3 = 0$ параболани ясанг (сўнгги параболанинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталарининг абсциссаларини 0,1 гача аниқликда тақрибий ҳисобланг).

22-§. Аралаш масалалар

463. $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$ ва $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ айланаларнинг марказлари орқали Ox ўқ билан кесишгунча тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини ҳисобланг.

464. $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 32 = 0$ айлананинг марказидан ва $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ эллипснинг фокусларидан ўтувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

465. $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 36 = 0$ айлананинг марказид $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипснинг катта ва кичик ўқлари қандай бу чак остида кўринишини аниқланг.

466. $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 40 = 0$ айланани $3x - y + 16 = 0$ тўғри чизиқ кесиб ўтади ва бу тўғри чизиқнинг айлан ичидаги кесмаси айланага ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг томони бўлиб хизмат қилади. Бу тўғри тўртбурчак томонларининг тенгламаларини тузинг.

467. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ эллипс билан $x^2 + y^2 = 5$ айлананинг кесишиш нуқталарини топинг.

468. $x^2 + y^2 = 4$ айланага мунтазам учбурчак ички чизилган бўлиб, унинг учларидан бири (0; 2) координаталарга эга. Учбурчакнинг қолган иккита учининг координаталарини топинг.

469. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ва $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$ эллипсларнинг фокусларини туташтирувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

470. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсга ички чизилган квадратнинг юзини ҳисобланг.

471. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ эллипсга ички чизилган ва иккита қарама-қарши томони бу эллипснинг фокусларидан ўтадиган тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

472. Учлари $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{8} = 1$ эллипснинг фокусларида, фокуслари эса бу эллипснинг учларида бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

473. $\frac{x^2}{25} - \frac{4y^2}{25} = 1$ гиперболанинг учидан унинг асимптотасигача бўлган масофани топинг.

474. $(5\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$ нуқтадан ўтувчи ва фокуслари тенг томонли $x^2 - y^2 = 18$ гиперболанинг фокусларида ётувчи эллипснинг тенгламасини тузинг.

475. Координаталар бошида умумий учга эга бўлган ҳамда фокуслари $F_1(3;\ 0)$ ва $F_2\left(0;\ \frac{3}{8}\right)$ нуқталарда бўлган иккита параболанинг кесишиш нуқталарини топинг.

476. $x^2 + y^2 = 20$ айлана $x^2 = 8y$ параболани кесиб ўтади. Уларнинг умумий ватари тенгламасини тузинг.

477. O нуқтадан жисм горизонтга ўткир бурчак остида отилган. У парабола ёйи чизиб, O нуқтадан 40 *м* нарига тушди. Агар жисм эришган максимал баландлик 25 *м* га тенг бўлса, параболик траекториянинг параметрини топинг (ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олманг).

Контрол иш

I вариант

478. 1. $x^2+y^2-4x+2y-24=0$ айлананинг $A(-3;\ 1)$ нуқтасидан ўтказилган радиуснинг тенгламасини тузинг.

2. Агар фокуслари Ox ўқда бўлган эллипснинг фокуслари орасидаги масофа 20 га, эксцентриситети эса $\frac{5}{6}$ га тенг бўлса, бу эллипснинг тенгламасини тузинг.

3. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{63}=1$ гипербола берилган. Унинг эксцентриситетини топинг.

4. $y^2-2y+16x+65=0$ парабола берилган. Парабола ўқининг тенгламасини тузинг.

5. $x^2+6x-12y-3=0$ парабола берилган. Унинг директрисаси тенгламасини тузинг.

II вариант

479. 1. $x^2+y^2-2x+4y-13=0$ айланага $A(-2;\ 1)$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини тузинг.

2. $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$ эллипс берилган. Унинг эксцентриситетини топинг.

3. Фокуслари Ox ўқда бўлган гиперболанинг тенгламасини фокуслар орасидаги масофа $2c=90$ ва асимптоталарнинг тенгламалари $y=\pm\frac{4}{3}x$ бўйича тузинг.

4. $x^2+6x+20y-51=0$ парабола берилган. Парабола ўқининг тенгламасини тузинг.

5. $y^2+8y+28x+72=0$ парабола берилган. Унинг директрисаси тенгламасини тузинг.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

4- БОБ

ЛИМИТЛАР

23- §. Лимитларни ҳисоблаш

1. Агар масала шартида берилган миқдор ҳар хил сонл қийматларни қабул қилса, бу миқдор ўзгарувчи миқдор дейилади.

2. Агар x ўзгарувчи абсолют қиймати бўйича ҳеч қачо бирор мусбат сон A дан катта бўлмаса, уни чегараланган дейилади: $|x| < A$.

3. Агар α ўзгарувчи миқдор ўзининг ўзгариши жараёнида авваладан берилган ҳар қандай кичик мусбат сон ε дан абсолют қиймати бўйича кичик бўлса ва бундан кейинги ўзгаришида ҳам ўша сондан кичиклигича қолса, α чексиз кичик миқдор дейилади: $|\alpha| < \varepsilon$.

4. Агар x ўзгарувчи миқдор ўзининг ўзгариши жараёнида авваладан берилган ҳар қандай мусбат сон N дан, бу сон қанчалик катта бўлмасин, катта бўлса, ва бундан кейинги ўзгаришида ҳам ўша сондан катталигича қолса, x чексиз катта миқдор дейилади: $|x| > N$.

5. Агар $x - a$ айирманинг абсолют қиймати x нинг ўзгариши жараёнида авваладан берилган ҳар қандай мусбат кичик сон ε дан кичик бўлса ва x нинг бундан кейинги ўзгаришида ҳам бу сондан кичиклигича қолса, a ўзгармас x нинг лимити дейилади.

Агар a ўзгармас x нинг лимити бўлса, x миқдор a га интилади дейилади ва бу $\lim x = a$ ёки $x \to a$ кўринишда ёзилади.

6. $x \to a$ да $f(x) \to b$ бўлса (шу билан бирга x миқдор a га тенг қийматни қабул қилмайди), b сон $f(x)$ функциянинг $x = a$ даги лимити дейилади.

Чексиз кичик миқдор, чексиз катта миқдор ва ўзгарувчининг лимити қуйидаги (7—10) муносабатлар билан боғланган, улар (3, 4, 5) таърифлардан келиб чиқади.

7. Чексиз кичик миқдорнинг лимити нолга тенг (агар α чексиз кичик миқдор бўлса, у ҳолда $\lim \alpha = 0$).

8. Ўзгарувчи билан унинг лимити орасидаги айирма чексиз кичикдир (агар $\lim x = a$ бўлса, $x - a = \alpha$).

9. Чексиз кичик миқдорга тескари бўлган миқдор чексиз

катта миқдор бўлади (агар α чексиз кичик миқдор бўлса,

чексиз катта миқдор бўлади, яъни агар $\alpha \to 0$ бўлса,

$\to \infty$).

10. Чексиз катта миқдорга тескари бўлган миқдор чексиз кичик миқдордир (агар x чексиз катта миқдор бўлса, чексиз кичик миқдордир, яъни агар $x \to \infty$ бўлса, $\frac{1}{x} \to 0$).

11. Чексиз кичик миқдорларнинг асосий хоссалари:

I. Исталган чекли сондаги чексиз кичик миқдорларнинг алгебраик йиғиндиси чексиз кичик миқдордир.

II. Чегараланган миқдорнинг чексиз кичик миқдорга кўпайтмаси чексиз кичик миқдордир.

12. Лимитлар ҳақидаги теоремалар:

I. Ўзгармаснинг лимити унинг ўзига тенг.

II. Лимитга эга бўлган чекли сондаги ўзгарувчи миқдорлар алгебраик йиғиндисининг лимити бу ўзгарувчилар лимитларининг йиғиндисига тенг:

$$\lim (u + v - w) = \lim u + \lim v - \lim w.$$

III. Лимитга эга бўлган чекли сондаги ўзгарувчи миқдорлар кўпайтмасининг лимити бу ўзгарувчилар лимитларининг кўпайтмасига тенг:

$$\lim (uv) = \lim u \lim v.$$

Натижалар:

1. Ўзгармас миқдорнинг лимитга эга бўлган ўзгарувчи миқдорга кўпайтмасининг лимити бу ўзгармасни ўзгарувчининг лимитига кўпайтирилганига тенг (ўзгармас кўпайтувчини лимит белгиси ташқарисига чиқариш мумкин):

$$\lim (au) = a \lim u.$$

2. Лимитга эга бўлган ўзгарувчи миқдорнинг бутун мусбат даражасининг лимити бу ўзгарувчи лимитининг шу даражасига тенг:

$$\lim u^n = (\lim u)^n.$$

3. Лимитга эга бўлган ўзгарувчи миқдорнинг бутун мусбат даражали илдизининг лимити бу ўзгарувчи лимитининг шу даражали илдизига тенг:

$$\lim \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{\lim u}.$$

IV. Лимитга эга бўлган иккита ўзгарувчи миқдор бўлинмасининг лимити агар бўлувчининг лимити нолга тенг бўл-

маса, бўлинувчи лимитининг бўлувчи лимитига бўлинга
тенг:

$$\lim\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\lim u}{\lim v}, \quad (\lim v \neq 0).$$

1. Функциянинг лимитини аргументнинг лимит қийматини функция ифодасига бевосита қўйиб топиш

Агар лимити аргументнинг бирор лимит қийматга инти ганда топиладиган функция учун лимитлар ҳақидаги теор маларни қўллаш мумкин бўлса, у ҳолда лимитни ҳисобла бу лимит қийматни функцияга қўйишга келтирилади.

480. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3-6x^2+x-5)$.

Ечилиши. II ва I теоремаларни ҳамда III теореманин 1 ва 2- натижаларини кетма-кет татбиқ қилиб, топамиз:

$$\lim_{x\to 2}(5x^3-6x^2+x-5)=[\lim(5x^3)-\lim(6x^2)+$$
$$+\lim x-5]_{x\to 2}=[5\lim x^3-6\lim x^2+\lim x-5]_{x\to 2}=$$
$$=[5(\lim x)^3-6(\lim x)^2+\lim x-5]_{x\to 2}=5\cdot 2^3-6\cdot 2^2+$$
$$+2-5=13.$$

Теоремалар ва натижаларни татбиқ этиш одатда хаёлда бажарилади, шу сабабли ечишнинг муфассал ёзуви тушириб қолдирилади. Аргументнинг лимит қиймати $x=2$ ни функция ифодасига келтириб қўйиш яна ўша натижага олиб келади ва ёзув жуда қисқа бўлади:

$$\lim_{x\to 2}(5x^3-6x^2+x-5)=5\cdot 2^3-6\cdot 2^2+2-5=13.$$

481. 1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3-$ $-5x^2+x-4)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2-8x+10)$.

482. $\lim\limits_{x\to 1}[(7x+2)(4x-3)(5x+1)]$.

Ечилиши. III, II ва I теоремаларни ҳамда III теореманинг 1- натижасини кетма-кет татбиқ этиб топамиз:

$$\lim_{x\to 1}[(7x+2)(4x-3)(5x+1)]=[(\lim 7x+2)(\lim 4x-3)\times$$
$$\times(\lim 5x+1)]_{x\to 1}=[(7\lim x+2)(4\lim x-3)\times$$
$$\times(5\lim x+1)]_{x\to 1}=(7\cdot 1+2)(4\cdot 1-3)(5\cdot 1+1)=54.$$

Бу мисолда ҳам ечишни хаёлда бажариш мумкин ва аргументнинг ўрнига унинг лимит қийматини қўйиб, ҳисоблаш мумкин:

$$\lim_{x\to1}[(7x+2)(4x-3)(5x+1)] =$$

$$= (7\cdot1+2)(4\cdot1-3)(5\cdot1+1) = 54.$$

483. 1) $\lim_{x\to2}[(x^2-1)(x-3)(x+5)]$; 2) $\lim_{x\to0}[(2x-4)\times$ $\times(x-1)(x+2)]$.

484. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$.

Ечилиши. IV теоремани татбиқ қилиш мумкинлигини текшириш учун аргументнинг лимит қийматида бўлувчи нолга тенг бўлмаслигига ишонч ҳосил қилиш керак. $x=2$ да бўлувчи $x-3=2-3=-1$. Демак, бўлинманинг лимити ҳақидаги теоремани татбиқ қилиш мумкин.

IV, II ва I теоремаларни ҳамда III теореманинг 2- натижасини кетма-кет татбиқ қилиб, топамиз:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+1}{x-3} = \left[\frac{\lim(x^2-x+1)}{\lim(x-3)}\right]_{x\to2} =$$

$$= \left[\frac{\lim x^2-\lim x+1}{\lim x-3}\right]_{x\to2} = \left[\frac{(\lim x)^2-\lim x+1}{\lim x-3}\right]_{x\to2} =$$

$$= \frac{2^2-2+1}{2-3} = -3.$$

Аргументнинг лимит қиймати $x=2$ ни бевосита функция ифодасига келтириб қўйиш ҳам шу натижага олиб келади:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+1}{x-3} = \frac{2^2-2+1}{2-3} = -3.$$

485. 1) $\lim_{x\to-1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; 2) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

II. Бўлувчининг лимити нолга тенг бўлганда функция лимитини ҳисоблаш

Функциянинг лимитини аргументнинг ўрнига унинг лимит қийматини бевосита қўйиш йўли билан топиш ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди, бироқ бундан функциянинг лимитини ҳисоблаб бўлмайди деган хулоса келиб чиқмайди. Бундай ҳолларда функцияни унга лимитлар ҳақидаги теоремаларни татбиқ этиб бўладиган қилиб ўзгартириш талаб этилади.

а) бўлувчининг лимити нолга тенг, бўлинувчининг ли
эса нолга тенг бўлмаган ҳол.

486. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{5}{4x-8}$.

Ечилиши. Бўлувчининг лимити нолга тенг:

$$\lim_{x\to 2}(4x-8)=4\cdot 2-8=0.$$

IV теоремани татбиқ қилиб бўлмайди, чунки нолга б
лиш мумкин эмас.

Агар $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)=0$ бўлса, у ҳолда $4x-8$ ифода че
сиз кичик миқдор, унга тескари бўлган $\frac{1}{4x-8}$ миқдор э
чексиз каттадир. Демак, $x\to 2$ да $\frac{1}{4x-8}\cdot 5$ кўпайтма чекс
катта миқдор бўлади, яъни $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}=\infty$.

487. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{5x^2+2x}$.

б) бўлувчи ва бўлинувчининг лимитлари нолга тенг бўл-
ган ҳол.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$.

Ечилиши. Суратнинг лимити $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-2x)=0$ ва мах-
ражнинг лимити $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-5x)=0$.

Функциянинг лимитини аргументнинг ўрнига унинг лимит қийматини бевосита қўйиб ҳисоблаш мумкин эмас, чунки $x\to 0$ да иккита чексиз кичик миқдорнинг нисбатига эга бўламиз $\left(\frac{0}{0}\right.$ нисбат маънога эга эмас$\left.\right)$.

Касрни нолга интилувчи умумий кўпайтувчига қисқартириш мумкин бўлиши, бинобарин IV теоремани татбиқ қилиш мумкин бўлиши учун сурат ва махражни кўпайтувчиларга ажратамиз. Шуни назарда тутиш керакки, бу ерда нолга қисқартириш кўзда тутилмайди, чунки нолга бўлиш мумкин эмас. Функция лимитининг таърифига кўра (6- пункт) x аргумент ўзининг лимит қийматига бу қийматни ҳеч қачон қабул қилмай интилади, шу сабабли лимитга ўтишдан олдин нолга интилувчи кўпайтувчига қисқартириш мумкин.

Қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=$$

$$=\left[\frac{3\lim x-2}{2\lim x-5}\right]_{x\to0}=\frac{3\cdot0-2}{2\cdot0-5}=\frac{2}{5}.$$

489. 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3+x}{x}$.

490. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{3x-9}$.

Ечилиши. Суратнинг лимити $\lim\limits_{x\to3}(x^2-5x+6)=3^2-5\cdot3+6=0$ ва махражнинг лимити $\lim\limits_{x\to3}(3x-9)=3\cdot3-9=0$.

Сурат — квадрат учҳаддир, уни $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ (бу ерда x_1 ва x_2 — учҳаднинг илдизлари) формула бўйича кўпайтувчиларга ажратамиз. Махражни ҳам кўпайтувчиларга ажратиб, касрни $x-3$ га қисқартирамиз. IV, II ва I теоремаларни татбиқ қилиб, топамиз:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{3x-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{3(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{3}=$$

$$=\left[\frac{\lim x-2}{3}\right]_{x\to3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}.$$

491. 1) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

492. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$.

Ечилиши. Суратнинг лимити $\lim\limits_{x\to2}(3x^2-8x+4)=3\cdot2^2-8\cdot2+4=0$ ва махражнинг лимити $\lim\limits_{x\to2}(5x^2-14x+8)=5\cdot2^2-14\cdot2+8=0$.

Сурат ва махражни чизиқли кўпайтувчиларга ажратамиз. Умумий кўпайтувчига қисқартиргандан сўнг IV, II ва I теоремаларни ҳамда III теореманинг 1- натижасини татбиқ қилиб топамиз:

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{5(x-2)\left(x-\frac{4}{5}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{3x-2}{5x-4}=$$

$$=\frac{3\cdot2-2}{5\cdot2-4}=\frac{2}{3}.$$

493. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$.

494. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^3-5x^2+2x+8}$.

Ечилиши. Суратнинг лимити $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-7x+6)=2^3-$ $-7\cdot 2+6=0$ ва махражнинг лимити $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-5x^2+2x+$ $+8)=2^3-5\cdot 2^2+2\cdot 2+8=0$.

Сурат ва махражи аргументнинг лимит қиймати $x=a$ да нолга айланадиган кўпҳадлардан иборат бўлган касрнинг лимитини ҳисоблаганда Безу теоремасидан фойдаланиш мумкин, бу теоремага кўра ҳар иккала кўпҳад $x-a$ га қолдиқсиз бўлинади. Сурат ва махражни $x-a$ иккиҳадга бўлиб (лимит қиймат $x=2$), IV, II ва I теоремаларни ҳамда III теореманинг I ва 2- натижаларини татбиқ қилиб, топамиз:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{x^3-5x^2+2x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\ (x^2+2x-3)}{(x-2)\ (x^2-3x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}=\left.\frac{(\lim x)^3+2\lim x-3}{(\lim x)^2-3\lim x-4}\right|_{x\to 2}=$$

$$=\frac{2^2+2\cdot 2-3}{2^2-3\cdot 2-4}=-\frac{5}{6}.$$

495. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-13x+12}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3-3x^2-13x+15}{x^3-3x^2-10x+24}$.

496. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

Ечилиши. Суратнинг лимити $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ ва махражнинг лимити $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)=\sqrt{5-0}-\sqrt{5+0}=0$.

Сурат ва махражни махражнинг қўшмаси бўлган $\sqrt{5-x}+$ $+\sqrt{5+x}$ кўпайтувчига кўпайтирамиз, сўнгра касрни x га қисқартирамиз. IV, II теоремаларни ва III теореманинг 3- натижасини татбиқ қилиб, топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{5-\lim x}+\sqrt{5+\lim x}}{-2}\right]_{x\to 0}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

497. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

498. 1) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Кўрсатма. Сурат ва махражни: 1) $(3+\sqrt{x})$ $(4+\sqrt{2x-2}$ *кўпайтмага кўпайтиринг, сўнгра касрни* $9-x$ *га қисқартиринг;* 2) $\left[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1\right]$ $(\sqrt{x}+1)$ га кўпайтиринг, сўнгра касрни $x-1$ га қисқартиринг.

499. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.

Ечилиши. Масала шартидан $x\to -2$ да функция иккита чексиз катта миқдорнинг айирмасидан иборат эканлиги келиб чиқади. Касрларни айириб, сурат ва махражи $x\to -2$ да нолга интилувчи касрни ҳосил қиламиз. Касрни $x+2$ га қисқартириб, IV, II ва I теоремаларни ҳамда III теореманинг 1 ва 2- натижаларини татбиқ этиб, топамиз:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+8}=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=$$
$$=\frac{-2-4}{(-2)^2-2(-2)+4}=-\frac{1}{2}.$$

500. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$.

501. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$.

Ечилиши. Суратнинг лимити $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos^2 x=\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\cos^2\frac{\pi}{2}=0$. ва махражнинг лимити $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}(1+\sin^3 x)=$ $=1+\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-\sin^3\frac{\pi}{2}=1-1=0.$

Сурат ва махражни кўпайтувчиларга ажратиб ва касрни $1 + \sin x$ га қисқартириб топамиз:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)\,(1-\sin x+\sin^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1-\sin x+\sin^2 x} = \frac{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

502. 1) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}$.

503. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{ctg} x}$

Кўрсатма. Сурат ва махражни $1+\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}$ га кўпайтиринг ва касрни $\operatorname{ctg} x$ га қисқартиринг.

504. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-1}$.

III. $x\to\infty$ да функциянинг лимитини ҳисоблаш

505. $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3-6x^2+5x-1)$.

Ечилиши. Биринчи учта қўшилувчи $x\to\infty$ да лимитга эга эмас, демак, II теоремани бевосита татбиқ қилиб бўлмайди. x^3 ни қавсдан ташқарига чиқарамиз ҳамда III, II теоремаларни ва III теореманинг 2- натижасини кетма-кет татбиқ қиламиз:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right] =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} x\right)^3 \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) = (\infty)^3(1-0+0-0) = \infty.$$

$\frac{6}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ ва $\frac{1}{x^3}$ ҳадлар $x \to \infty$ да чексиз кичик миқдорлардир [(10) муносабат], уларнинг лимитлари нолга тенг.

506. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2)$.

а) $\frac{1}{\infty}$, б) $\frac{\infty}{\infty}$, в) $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш.

$x\to\infty$ да бўлувчи чексиз катта миқдор, бўлинувчи эса ўзгармас миқдор бўлган ҳол.

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}$.

Ечилиши. $4x+1$ бўлувчи $x\to\infty$ да чексиз ўсади, яъни чексиз катта миқдордир, унга тескари бўлган миқдор $\frac{1}{4x+1}$ эса чексиз кичикдир.

Чексиз кичик миқдорнинг чегараланган миқдорга (ўзгармас — чекланган миқдорнинг хусусий ҳоли) кўпайтмаси $\frac{1}{4x+1}\cdot 5$ *чексиз кичик миқдордир ва унинг $x\to\infty$ даги лимити нолга тенг.* Демак, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}=0$.

508. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$.

б) $x\to\infty$ да бўлинувчи ва бўлувчи чексиз катта миқдорлар бўлган ҳол.

509. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$.

Ечилиши. $x\to\infty$ да бўлинувчи ва бўлувчи чексиз катта миқдорлар. Шу сабабли IV теоремани бевосита татбиқ этганда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги ифодани ҳосил қиламиз, бироқ $\frac{\infty}{\infty}$ нисбат ҳеч қандай сонни ифодаламайди ва аниқмаслик деб аталади. Бу функциянинг лимитини ҳисоблаш учун бўлинувчи ва бўлувчини x га қисқартириш керак:

$$\frac{2x+3}{5x+1}=\frac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{1}{x}}.$$

$\frac{3}{x}$ ва $\frac{1}{x}$ қўшилувчилар $x \to \infty$ да чексиз кичик миқд лар, демак, уларнинг лимитлари нолга тенг.

IV, II ва I теоремаларни татбиқ қилиб, топамиз:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5}.$$

510. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-8}{2x-2}$.

511. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$.

Ечилиши. Касрнинг сурат ва махражини x^3 га бўламиз:

$$\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x} = \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

$x \to \infty$ да $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{4}{x}$ ва $\frac{2}{x^2}$ қўшилувчилар чексиз кичик миқдорлар бўлади ва уларнинг лимитлари нолга тенг бўлади. Шундай қилиб:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{2-0+0}{1+0+0} = 2.$$

512. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$.

513. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$.

Ечилиши. Сурат ва махражни аргументнинг махраждаги энг юқори даражасига, яъни x^3 га бўламиз:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}{3-\frac{5}{x^3}}.$$

$x \to \infty$ да:

$$\lim \left(x - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = \infty \text{ ва } \lim_{x \to \infty} \left(3 - \frac{5}{x^3}\right) = 3.$$

Махраж чекланган миқдор, шунинг учун

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^4 - 5} = \infty.$$

514. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6 \cdot 2^x + 5}{2 \cdot 2^x - 3}$

Кўрсатма. Сурат ва махражи 2^x га бўлинг.

в) $x \to \infty$ да камаювчи ва айрилувчи чексиз катта миқдорлар бўлган ҳол.

515. $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x})$.

Ечилиши.

$$\lim_{x \to \infty}(x - \sqrt{x^2 - 4x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4x})\ (x + \sqrt{x^2 - 4x})}{x + \sqrt{x^2 - 4x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x + \sqrt{x^3 - 4x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{4}{2} = 2.$$

516. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$.

24- §. Чексиз кичик миқдорларни таққослаш. Эквивалент чексиз кичик миқдорлар.

$x \to 0$ да $\frac{\sin x}{x}$ нисбатнинг лимити

1. Иккита чексиз кичик миқдор α ва β ни бир-бири билан таққослаш учун улар нисбатининг лимити топилади. Агар бунда:

1) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ бўлса, у ҳолда α чексиз кичик миқдор β га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор дейилади;

2) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ бўлса, у ҳолда α чексиз миқдор β га нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдор дейилади;

3) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = a$ бўлса (a — ўзгармас, $a \neq 0$), у ҳолда α ва

β чексиз миқдорлар бир хил тартибли чексиз миқдорлар дейилади;

4) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ бўлса, у ҳолда α ва β чексиз миқдорлар эквивалент чексиз миқдорлар дейилади.

α ва β чексиз кичик миқдорларнинг эквивалентлиги ушбу тақрибий ифода орқали ёзилади:

$$\alpha \approx \beta.$$

2. Бу параграфдаги машқларни бажаришда лимитлар ҳақидаги теоремалар ва чексиз кичик миқдорларнинг асосий хоссаларидан ташқари яна қуйидагилардан ҳам фойдаланилади:

а) эквивалент чексиз кичик миқдорларнинг хоссаси. Агар $\alpha \approx \alpha_1$ ва $\beta \approx \beta_1$ бўлса, у ҳолда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1}, \qquad (4.1)$$

яъни иккита чексиз кичик миқдор нисбатининг лимитини ҳисоблашда уларнинг ҳар бирини (ёки бирортасини) унга эквивалент бўлган бошқа чексиз кичик миқдор билан алмаштириш мумкин;

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \qquad (4.2)$$

517. Қуйидаги чексиз кичик миқдорларни $x\ (x \to 0)$ чексиз кичик миқдор билан таққосланг: 1) x^2; 2) $\sqrt[3]{2x}$; 3) $8x$;

4) $\sin 3x$; 5) $\operatorname{tg} 2x$; 6) $\sin x \cos x$.

Ечилиши. Берилган ҳар бир чексиз миқдорни x чексиз кичик миқдор билан таққослаш учун уларнинг чексиз кичик миқдор x га нисбатининг лимитини топиш керак:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

бу ерда x^2 миқдор x чексиз миқдорга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир (1- ҳол);

$$2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{2x}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{2}{x^2}} = \infty,$$

бу ерда $\sqrt[3]{2x}$ миқдор x чексиз кичик миқдорга нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдордир (2- ҳол);

$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{8x}{x} = 8,$$

бу ерда $8x$ миқдор x билан бир хил тартибга эга бўлган чексиз кичик миқдордир (3- ҳол);

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

(4.2) формулани татбиқ қилиш учун сурат ва махражни 3 га кўпайтирамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3,$$

бу ерда $\sin 3x$ миқдор x билан бир хил тартибга эга бўлган чексиз кичик миқдордир (3- ҳол);

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2,$$

бу ерда $\operatorname{tg} 2x$ миқдор x билан бир хил тартибга эга бўлган чексиз кичик миқдордир (3- ҳол);

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1\cdot 1 = 1$, $\sin x\cos x$ ва x эквивалент чексиз кичик миқдорлар, чунки улар нисбатининг лимити 1 га тенг (4- ҳол).

518. Қуйидаги чексиз кичик миқдорларни чексиз кичик миқдор x ($x\to 0$) билан таққосланг: 1) x^2; 2) $\sqrt{6x}$; 3) $5x$; 4) $\sin\frac{x}{3}$; 5) $\operatorname{tg} x$.

519. $x\to 0$ да қуйидаги чексиз кичик миқдорларнинг эквивалентлигини исбот қилинг: 1) $\sin ax\approx ax$, 2) $\operatorname{tg} ax\approx ax$; 3) $\arcsin ax\approx ax$; 4) $\sqrt{6x+1}-1\approx 3x$; 5) $\sin x\approx\operatorname{tg} x$; 6) $\sin^2 x\approx x^2$.

Ечилиши. Агар иккита чексиз кичик миқдор нисбатининг лимити 1 га тенг бўлса, улар эквивалент бўлади.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = \lim\limits_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = 1$ [(4.2) формулага кўра];

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{ax} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax\cos ax} = \lim\limits_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos ax} = 1\cdot 1 = 1;$

3) $\arcsin ax = \alpha$ бўлсин, у ҳолда $\sin \alpha = ax$; агар $x \to$ бўлса, у ҳолда $\alpha \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin ax}{ax} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1;$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{6x+1}-1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{6x+1}-1)(\sqrt{6x+1}+1)}{3x(\sqrt{6x+1}+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x+1-1}{3x(\sqrt{6x+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{6x+1}+1} = \frac{2}{\sqrt{6 \cdot 0+1}+1} =$$

$$= \frac{2}{2} = 1;$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1;$$

6) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

520. $x \to 0$ да қуйидаги чексиз кичик миқдорларнинг эквивалентлигини исбот қилинг:

1) $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$; 2) $\operatorname{tg} \sqrt{x} \approx \sqrt{x}$; 3) $\operatorname{arctg} ax \approx ax$;

4) $\sqrt{4x+1} - 1 \approx 2x$; 5) $\operatorname{tg}^2 x \approx x^2$.

Лимитларни ҳисобланг.

521. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$.

Ечилиши. *1- усул.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \sin 4x}{4 \cdot 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 4x} = \frac{4}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}$$

$$= \frac{4}{3} 1 = \frac{4}{3}.$$

2-усул. 519- масалада $\sin ax \approx ax$ эканлиги кўрсатилган эди, у ҳолда $a=4$ да $\sin 4x \approx 4x$. (4.1) хоссага кўра

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

522. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{5\alpha}{\cos \alpha}$.

523. $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin^3 2z}{z^3}$.

Ечилиши. (4.1) хоссага кўра:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin^3 2z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin 2z}{z}\right)^3=\left(\lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z}{z}\right)^3=\left(\lim_{z\to 0}\frac{2z}{z}\right)^3=2^3=8.$$

524. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; $\lim\dfrac{\sin^3 3z}{z^3}$.

525. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$.

Ечилиши. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\sin x\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\sin x\right]=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\sin x=1^2\cdot 0=0.$$

526. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^4}$.

527. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}$.

Ечилиши. Косинуслар айирмасини кўпайтмага алмаштириб, топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos-\cos 3x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin x}{x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 2\cdot 0=0.$$

528. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$.

Ечилиши. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = -2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{x}\right)^2 =$$

$$= -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

530. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x}$.

531. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Ечилиши. (4.1) хоссани қўллаймиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

532. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$.

533. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg} x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Ечилиши. $x-\frac{\pi}{2}=y$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда $x=\frac{\pi}{2}+y$. Агар $x\to\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $y\to 0$.

Топамиз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{ctg} x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{y} = -\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y} =$$

$$= -\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = -1\cdot 1 = -1.$$

534. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

535. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}$.

Ечилиши. $\arcsin 3x = \alpha$ десак, $\sin \alpha = 3x$. Қуйидагича алмаштирамиз:

$$\frac{\arcsin 3x}{2x} = \frac{3 \arcsin 3x}{2 \cdot 3x} = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{2 \sin \alpha},$$

у ҳолда

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{2x} = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{3}{2} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{3}{2} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{2}.$$

536. 1) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\arcsin 2z}{2z}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{5x}$.

25- §. *e* сони. Натурал логарифмлар

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$

e иррационал сондир ($e = 2{,}718...$; e нинг аниқроқ қиймати: $e = 2{,}7182818$). Асоси e бўлган логарифмлар натурал логарифмлар деб аталади, улар учун ln белги киритилган.

2. Ўнли ва натурал логарифмлар қуйидаги муносабатлар билан боғланган:

$$\lg N = M \ln N; \tag{4.4}$$

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N, \tag{4.5}$$

бу ерда M — натурал логарифмлардан ўнли логарифмларга ўтиш модули:

$$M = \lg e = \lg 2{,}718 \approx 0{,}4343;$$

$$\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}303.$$

(4.4) ва (4.5) формулаларни ҳисоблашларга татбиқ қилиш учун уларга бошқача кўриниш бериш мумкин:

$$\lg N = 0{,}4343 \ln N; \tag{4.6}$$

$$\ln N = 2{,}303 \lg N. \tag{4.7}$$

537. 1) 7; 2) 0,12 сонларининг натурал логарифмларини топинг.

Ечилиши. (4.7) формула бўйича топамиз: 1) $\ln 7 = 2{,}303 \times \lg 7 = 2{,}303 \cdot 0{,}8451 = 1{,}946$; 2) $\ln 0{,}12 = 2{,}303 \lg 0{,}12 = 2{,}303 \cdot \overline{1}{,}0792 = 2{,}303 \cdot (-0{,}9208) = -2{,}121$.

538. Қуйидаги сонларнинг натурал логарифмларини топинг:

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 10; 5) 0,3; 6) 0,8; 7) 5,8; 8) 0,24; 9) 15,6.

539. Сонларнинг натурал логарифмлари: 1) 0,2624, 2) 2,1401 га кўра уларнинг ўнли логарифмларини топинг.

Ечилиши. (4.6) формула бўйича топамиз:

1) $\lg N = 0{,}4343 \times 0{,}2624 = 0{,}1140$; 2) $\lg N = 0{,}4343 \times 2{,}1401 = 0{,}9294$.

540. Сонларнинг натурал логарифмлари: 1) 2,0794; 2) 3,6889; 3) 1,959 га кўра уларнинг ўнли логарифмларини топинг.

541. Ўнли логарифмлар жадвалидан фойдаланиб ҳисобланг.

1) e^3; 2) $\sqrt{e}$; 3) e^{-3}.

Ечилиши.

$$1)\ \lg e^3 = 3 \lg e = 3 \cdot 0{,}4343 = 1{,}3029;\ e^3 = 20{,}08;$$

$$2)\ \lg \sqrt{e} = \frac{1}{2} \lg e = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4343 = 0{,}2171;\ \ \sqrt{e} = 1{,}648;$$

$$3)\ \lg e^{-3} = -3 \lg e = -3 \cdot 0{,}4343 = -1{,}3029 = \overline{2}{,}6971;\ e^3 = 0{,}04978.$$

542. Ўнли логарифмлар жадвалидан фойдаланиб ҳисобланг:

1) e^5; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) e^{-2}

543. Жадваллардан фойдаланмасдан ҳисобланг:

1) $\ln 100$; 2) $\ln 0{,}001$; 3) $\ln \sqrt{10}$.

Ечилиши. 1) $\ln 100 = \ln 10^2 = 2 \ln 10 = 2 \cdot 2{,}303 = 4{,}606$;

2) $\ln 0{,}001 = \ln 10^{-3} = -3 \ln 10 = -3 \cdot 2{,}303 = -6{,}909$;

$$3)\ \ln \sqrt{10} = \frac{1}{2} \ln 10 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}303 = 1{,}151.$$

544. Жадваллардан фойдаланмасдан ҳисобланг:

$\ln 1000$; 2) $\ln 0{,}01$; 3) $\ln \sqrt[3]{100}$.

Лимитларни ҳисобланг.

545. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$.

Ечилиши. Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз ва (4.3) формуладан фойдаланиб, лимитни топамиз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}.$$

546. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$.

547. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{5}{x}}$.

Ечилиши. Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз ва (4.3) формулани татбиқ қилиб, топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+2x\right)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2x}}\right)^{5\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot 2}=$$

$$=\lim_{\frac{1}{2x}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{1}{2x}}\right]^{10}=\left[\lim_{\frac{1}{2x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{1}{2x}}\right]^{10}=e^{10}.$$

548. 1) $\lim\limits_{z\to 0}\left(1+4z\right)^{\frac{3}{5z}}$; 2) $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-z}$.

549. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$.

Ечилиши. Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз ва (4.3) формулани татбиқ қилиб, лимитни топамиз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

550. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

26- §. Аралаш масалалар

Лимитларни ҳисобланг.

551. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$.

552. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+6x^2+15x+18}{x^3+5x^2+5x-3}$.

553. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z}{\sqrt{4+z}-\sqrt{4-z}}$.

554. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

555. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$.

556. $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 z}{\cos^2 z}$

557. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-1}{2\operatorname{tg} x}$.

558. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+a^2}{n^3+a^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

559. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

560. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4\cdot 3^x}{3+2\cdot 3^x}$.

561. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin^3 2t}{3t^2}$.

562. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{8x^2}$.

563. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z+\sin 3z}{2z}$.

564. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$.

565. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$,

566. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{2x}$.

568. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}$.

Контрол иш

I вариант

569. Лимитларни ҳисобланг: 1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}$.

II вариант

570. Лимитларни ҳисобланг: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-1}{3\operatorname{tg} x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-x^3+2x}{x^4-8x^3+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-x}$.

5-БОБ

ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

27- §. Функционал боғланиш символикаси

1. Агар x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлг ҳар бир қийматига y ўзгарувчининг аниқ қиймати мос ке са, y ўзгарувчи x нинг функцияси дейилади.

2. Ўзгарувчи y (функция) ва ўзгарувчи x (аргумент орасидаги функционал богланиш символик равишда

$$y = f(x)$$

тенглик орқали ёзилади, бу ерда f белги y ни ҳосил қилиш учун x устида бажариладиган амаллар тўпламини билдиради.

Функционал боғланиш яна жадвал ёки график усул билан ҳам берилиши мумкин.

3. Асосий элементар функциялар деб қуйидаги функцияларга айтилади: 1) $y = x^a$ даражали функция; 2) $y = a^x$, $a > 0$ кўрсаткичли функция, 3) $y = \log_a x$, $a > 0$ логарифмик функция; 4) $y = \sin x$, $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ тригонометрик функциялар; 5) $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ тескари тригонометрик функциялар.

Асосий элементар функциялардан чекли сондаги арифметик амаллар ва операциялар ёрдамида тузилган ва битта формула билан берилган функциялар элементар функциялар дейилади. Масалан:

$$y = 2\sqrt{x}\cos 3x, \quad y = \lg\frac{x + \sin x}{\lg\sqrt{x} - 1}$$

Аргументи устида чекли сондаги арифметик амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш ва рационал даражага кўтариш) бажариладиган функциялар алгебраик функциялар дейилади. Масалан:

$$y = x^2 - 2\sqrt[3]{x} + 1; \quad y = \frac{5x^3 - 1}{x + 2}$$

Алгебраик бўлмаган функциялар трансцендент функциялар дейилади. Масалан:

$$x = 3^x; \quad y = \log_3\sqrt{x}; \quad y = \operatorname{tg}^2 x; \quad y = \arcsin\sqrt{x - 1}$$

4. Функциянинг аргументнинг берилган сон қийматига мос келувчи қиймати бу функциянинг хусусий қиймати дейилади. Масалан, $y = f(x)$ функция $x = a$ да $y = f(a)$ қийматга эга.

Функциянинг хусусий қийматларини ҳисоблаш.

571. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ функция берилган. $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$ ни топинг.

Ечилиши. $f(0)$ ни ҳисоблаш учун берилган функцияда x аргументнинг ўрнига унинг $x = 0$ қийматини қўйиш керак. Демак,

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1.$$

Худди шунга ўхшаш:

$$f(1) = -1;\ f(-1) = -5 \text{ ва } f(2) = 1.$$

572. 1. $F(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 4$ функция берилган. $F(0)$, $F(-1)$ ва $F(2)$ ни топинг.

2. $s(t) = t^2 - 6t + 8$ функция берилган. $s(0)$, $s(2)$ ва $s(-1)$ ни топинг.

573. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ функция берилган. $f(1) = f(-1)$ эканлигини кўрсатинг.

2. $f(x) = x^4 + x^2 + 5$ функция берилган. $f(2) = f(-2)$ эканлигини кўрсатинг.

574. 1) $f(x) = x^3 + x$ функция берилган. $f(1) = -f(-1)$ эканлигини кўрсатинг.

2) $f(x) = x^5 + x^3$ функция берилган. $f(2) = -f(-2)$ эканлигини кўрсатинг.

575. 1. $f(x) = 1 - \sin^3 x$ функция берилган. 1) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, 3) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $f(0)$ ни топинг.

2. $f(x) = \cos^2 x$ функция берилган. 1) $f(0)$; 2) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $f(\pi)$ ни топинг.

28- §. Функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари

1. x аргументнинг $y = f(x)$ функция ҳақиқий қийматларга эга бўладиган барча ҳақиқий қийматлари тўплами (сон ўқининг барча нуқталари) тўплами $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш (мавжудлик) соҳаси дейилади.

2. Функциянинг ўзгариш соҳаси деб y қабул қилиши мумкин бўлган барча ҳақиқий сонлар тўпламига айтилади.

3. Функциянинг энг кўп учраб турадиган аниқланиш соҳалари — интервал ва кесма (ёпиқ интервал) дир.

$a < x < b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган барча ҳақиқий сонлар тўплами интервал деб аталади, у қисқача (a, b) символ билан белгиланади, a ва b нуқталар интервалга кирмайди.

$a \leqslant x \leqslant b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган барча ҳақиқий сонлар тўплами кесма (ёпиқ интервал) деб аталади, у қисқача $[a, b]$ символ билан белгиланади. a ва b нуқталар кесмага киради.

$a \leqslant x < b$ ва $a < x \leqslant b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча ҳақиқий сонлар тўпламлари ярим очиқ интерваллар дейилади ва мос равишда $[a, b)$ ва $(a, b]$ символлар билан белгиланади.

$-\infty < x < a$, $-\infty < x \leqslant a$, $a < x < +\infty$, $a \leqslant x < +\infty$ ва $-\infty < x < +\infty$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган барча ҳақиқий сонлар тўпламлари чексиз интерваллар деб аталади ва мос равишда $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $(a, +\infty)$ ва $(-\infty, +\infty)$ символлар билан белгиланади.

4. Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари 167-бетдаги 1-жадвалда келтирилган.

Функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг.

576. $y = x^2$.

Ечилиши. x га ҳеч қандай чекланишлар қўйилмайди, шу сабабли $y = x^2$ функция $(-\infty, +\infty)$ интервалда аниқланган.

577. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 - 1$; 3) $y = x^3 + 1$. $y = ax^2 + bx + c$ квадрат функцияни ҳар хил текширишларда $ax^2 + bx + c > 0$ ва $ax^2 + bx + c < 0$ кўринишдаги тенгсизликларни ечиш талаб этилади.

Бундай тенгсизликларнинг ечимлари 168-бетдаги 2-жадвалда келтирилган.

578. $y = \frac{1}{x}$.

Ечилиши. $x = 0$ да y сон қийматга эга бўлмайди (нолга бўлиш мумкин эмас). Барча қийматлар учун (0 дан ташқари) y ҳақиқий қийматларга эга, шунинг учун аниқланиш соҳаси $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ интерваллар бўлади.

579. $y = \frac{1}{2x - 6}$.

Ечилиши. Функция x нинг каср махражи нолга айланадиган қийматларидан бошқа барча қийматлари учун аниқланган. $2x - 6 = 0$ тенгламани ечиб, $x = 3$ да махраж нолга айланишини кўрамиз. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси 3 дан ташқари барча ҳақиқий сонлар экан, яъни $(-\infty, 3)$ ва $(3, +\infty)$ лардан иборат.

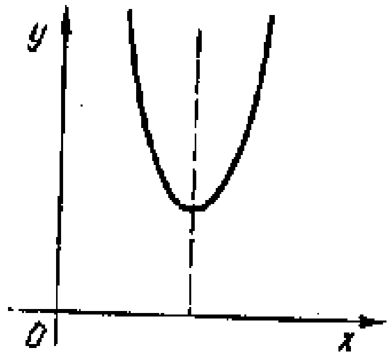
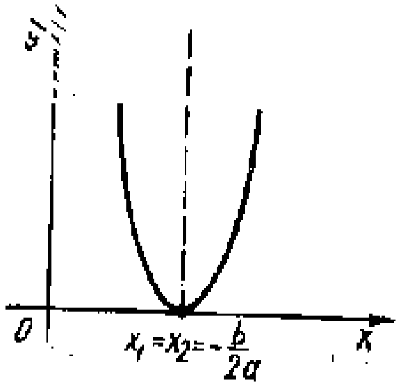
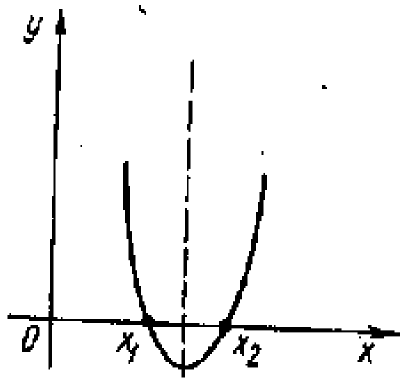
580. 1) $y = \frac{1}{4x - 2}$; 2) $y = \frac{x + 2}{2x - 8}$; 3) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

Асосий элементар функцияларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари

1-жадвал

№	Функция	Функциянинг аниқланиш соҳаси	Функциянинг ўзгариш соҳаси
1	$y = x^n$, n — натурал сон	$(-\infty, +\infty)$	n — жуфт бўлганда $[0, +\infty)$, n — тоқ бўлганда $(-\infty, +\infty)$
2	$y = \sqrt[2n]{x}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
3	$y = \sqrt[2n+1]{x}$	$(-\infty \ +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
4	$y = a^x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
5	$y = \lg x$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
6	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, +1]$
7	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, +1]$
8	$y = \mathrm{tg}\, x$	$\left((2n-1)\frac{\pi}{2},\ (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$	$(-\infty, +\infty)$
9	$y = \mathrm{ctg}\, x$	$(n\pi,\ (n+1)\pi)$ $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$	$(-\infty, +\infty)$
10	$y = \arcsin x$	$[-1, +1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$
11	$y = \arccos x$	$[-1, +1]$	$[0, \pi]$
12	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$
13	$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$

2- жа

№	$D=b^2-4ac$ дискриминантнинг қиймат	$y=ax^2+bx+c$ функциянинг графиги, бу ерда a, b ва c — ҳақиқий сонлар, $a>0$	x аргументнинг ҳақиқий қийматлари $ax^2+bx+c>0$ ($a>0$) тенгсизликни қаноатлантирадиган интерваллар	x аргу нинг кий матл ax^2+b $+c$ ($a>$ тенг лики ноатла радиг интерв лар
I.	$b^2-4ac<0$		$(-\infty, +\infty)$	Тенгсизл ечимлар эга эма
II.	$b^2-4ac=0$		$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ ва $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	Тенгсизл ечимларг эга эма
III.	$b^2-4ac>0$		$(-\infty, x_1)$ ва $(x_2, +\infty)$	(x_1, x_2)

581. $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Ечилиши. Функция аргументнинг касрнинг махражини нолга айлантирадиган қийматларидан бошқа барча қийматлари учун аниқланган. $x^2-5x+6=0$ тенгламани ечиб, $x_1=2$ ва $x_2=3$ ни топамиз. Аниқланиш соҳаси —$(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ ва $(3, +\infty)$ интерваллар.

582. 1) $y=\frac{1}{1-x^2}$; 2) $y=\frac{1}{x^2-x-12}$;

3) $y=\frac{4x-1}{3x^2-5x-2}$; 4) $y=\frac{x-1}{x^2-9x+20}$.

583. $y=\sqrt{x}$.

Ечилиши. Квадрат илдизлар манфий бўлмаган сонлар учун аниқланган. Шунинг учун $y=\sqrt{x}$ функция x нинг $0\leqslant x$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматлари учун аниқланган, яъни унинг аниқланиш соҳаси $[0, +\infty)$ ярим очиқ интервал.

584. $y=\sqrt{2x-4}$.

Ечилиши. $2x-4\geqslant 0$ тенгсизликни ечиб, $x\geqslant 2$ ни ҳосил қиламиз.

Аниқланиш соҳаси $[2, +\infty)$.

585. 1) $y=\sqrt{1-x}$; 2) $y=\sqrt{18-6x}$; 3) $y=\sqrt{3x-12}$

586. $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$.

Ечилиши. Ҳар бир қўшилувчининг аниқланиш соҳасини алоҳида-алоҳида топамиз. Бу соҳаларнинг умумий қисми функциянинг аниқланиш соҳаси бўлади.

Аниқланиш соҳаси $\sqrt{x}$ учун $x\geqslant 0$ ва $\sqrt{x-1}$ учун $x\geqslant 1$. У ҳолда $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ йиғинди учун аниқланиш соҳаси $x\geqslant 1$ ёки $[1, +\infty)$ бўлади.

587. 1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$; 2) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$.

588. $y=3\sqrt{5-x}-\frac{4}{\sqrt{x-3}}$.

Ечилиши. Аниқланиш соҳаси $\sqrt{5-x}$ учун $x\leqslant 5$ ва $\sqrt{x-3}$ учун $x\geqslant 0\cdot x-3\neq 0$, чунки нолга бўлиш мумкин эмас. Аниқланиш соҳаси — $(3, 5]$ ярим очиқ интервал.

589. $y=\sqrt{7-x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

590. $x=\sqrt{x^2-2x-8}$.

Ечилиши. x^2-2x-8 учҳад $x_1=-2$ ва $x_2=4$ и
дизларга эга.

$x^2-2x-8\geqslant 0$. Дискриминант $D>0$ (2-жадвал, III ҳол
Тенгсизликнинг ечимларидан функциянинг аниқланиш с
ҳаси $(-\infty,\ -2]$ ва $[4,\ +\infty)$ ярим очиқ интерваллар экан
лиги келиб чиқади.

591. 1) $y=\sqrt{x^2+8x+15}$; 2) $y=\sqrt{(2-x)\cdot(5+x)}$.

592. $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$.

Ечилиши. Функция x нинг $\dfrac{3x-2}{2x+6}\geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун аниқланган, бу тенгсизлик эса қуйидаги ҳолларда бажарилади:

$$1)\ \begin{cases}3x-2\geqslant 0,\\ 2x+6>0\end{cases}\quad \text{ва}\quad 2)\ \begin{cases}3x-2\leqslant 0,\\ 2x+6<0.\end{cases}$$

(1) системадан:

$$\begin{cases}x\geqslant\dfrac{2}{3},\\ x>-3,\ \text{бу ердан}\ x\geqslant\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

(2) системадан:

$$\begin{cases}x\leqslant\dfrac{2}{3},\\ x<-3,\ \text{бу ердан}\ x<-3.\end{cases}$$

Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty,\ -3)$. интервал ва $\left[\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$ ярим очиқ интервалдан иборат.

593. 1) $y=\sqrt{\dfrac{x-8}{12-x}}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{4x-8}{3-6x}}$.

594. $y=\ln\left(\dfrac{5x}{x-1}-2\right)$.

Ечилиши. Натурал (шунингдек, ўнли) логарифмлар фақат мусбат сонлар учун аниқланган. Қуйидаги тенгсизликларга эгамиз:

$$\frac{5x}{x-1}-2>0\ \text{ёки}\ \frac{5x-2x+2}{x-1}>0,\ \frac{3x+2}{x-1}>0.$$

Бу тенгсизликлар қуйидаги ҳолларда бажарилади:

$$1)\ \begin{cases}3x+2>0,\\ x-1>0\end{cases}\quad \text{ва}\ 2)\ \begin{cases}3x+2<0,\\ x-1<0.\end{cases}$$

(1) системадан:

$$\begin{cases} x > -\frac{2}{3}, \\ x > 1, \text{ бу ердан } x > 1. \end{cases}$$

(2) системадан:

$$\begin{cases} x < -\frac{2}{3}, \\ x < 1, \text{ бу ердан } x < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ва $(1, +\infty)$ интерваллар.

595. 1) $y = \ln\frac{5x-1}{3x-1}$; 2) $y = \lg(2x-3)$.

596. $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

Ечилиши. Функция x нинг касрни нолга айлантирадиган қийматларидан ташқари барча қийматлари учун аниқланган. $\sin x - \cos x = 0$ тенгламани ечамиз:

$$\sin x = \cos x;\ \frac{\sin x}{\cos x} = 1;\ \operatorname{tg} x = 1;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

бу ерда n — исталган бутун сон. Аниқланиш соҳаси — $\left(-\infty, \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$ ва $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n, +\infty\right)$, интерваллар.

597. 1) $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$, 2) $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$;

3) $y = \frac{1}{\sin^2 x - \sin x}$.

598. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x - \cos x}$.

Ечилиши. $\operatorname{ctg} x$ функция πk учун аниқланмаган. Каср $\frac{\pi}{4} + \pi n$ учун аниқланмаган (596-масалага қаранг). Демак, функция x нинг $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ва πk (бу ерда n ва k — исталган бутун сонлар) қийматларидан ташқари барча қийматлари учун аниқланган.

599. $y = \arcsin\frac{x-2}{3}$.

Ечилиши. Агар $-1 \leqslant \frac{x-2}{3} \leqslant 1$ тенгсизлик бажарилса, бу функция аниқланган бўлади.

Бу тенгсизликни ечиш учун унинг барча ҳадларини 3 га кўпайтирамиз: $-3 \leqslant x-2 \leqslant 3$.

Ушбу тенгсизликлар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} -3 \leqslant x-2, \\ x-2 \leqslant 3, \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} -1 \leqslant x, \\ x \leqslant 5, \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$$

Функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1, 5]$ кесма бўлади.

600. 1) $y = \arcsin \frac{x}{2}$; 2) $y = \arccos \frac{x-1}{5}$.

Функцияларнинг ўзгариш соҳасини топинг.

601. $y = x^2 - 3x - 10$.

Ечилиши. $x^2 - 3x - 10$ квадрат учҳаддан тўлиқ квадрат ажратиб, уни ўзгартирамиз:

$$y = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4}.$$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ ифода барча манфий бўлмаган қийматларни (чунки ҳар қандай сонинг квадрати мусбат сондир) қабул қилади. Шу сабабли берилган функциянинг ўзгариш соҳаси $-12\frac{1}{4}$ га тенг ёки ундан катта бўлган сонлар тўпламидан иборат бўлади, яъни y $\left[-12\frac{1}{4}, +\infty\right)$ ярим очиқ интервалдаги қийматларни қабул қилади.

602. 1) $y = x^2 - 6x + 8$; 2) $y = 2x^2 - 7x + 3$.

603. $y = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Ечилиши. Ёрдамчи бурчак киритиш йўли билан функцияни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$y = 3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x\right) =$$

$$= 3\left(\sin x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 3\left(\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x\right) =$$

$$= \frac{3\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right| \leqslant 1.$$

У ҳолда $-2\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{3}$, яъни функциянинг ўзгариш соҳаси $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ кесмадан иборат.

604. 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

29-§. Аргументнинг орттирмаси ва *функциянинг орттирмаси*

$y = f(x)$ функция учун x аргументнинг кетма-кет келадиган иккита қиймати (x_1 ва x_2) айирмаси аргументнинг орттирмаси дейилади ва Δx символ билан белгиланади:

$$x_2 - x_1 = \Delta x,$$

$y = f(x)$ функциянинг аргументнинг x_1 ва x_2 қийматларига тегишли $y_1 = f(x_1)$ ва $y_2 = f(x_2)$ қийматлари айирмаси функциянинг орттирмаси дейилади ва Δy символ билан белгиланади, яъни

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1.$$

Агар $x_2 > x_1$ бўлса, у ҳолда $\Delta x > 0$, агар $x_2 < x_1$ бўлса, у ҳолда $\Delta x < 0$. Мос равишда функция орттирмаси ҳам, агар $y_2 > y_1$ бўлса, $\Delta y > 0$ ва $y_2 < y_1$ бўлса, $\Delta y < 0$.

$y = f(x)$ функциянинг орттирмаси қуйидаги схема бўйича топилади. Айтайлик, x аргумент Δx орттирма олган бўлсин, у ҳолда аргументнинг орттирилган янги қиймати $x + \Delta x$ бўлади, функциянинг унга мос қиймати эса $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ бўлади. Функциянинг орттирмасини топиш учун функциянинг орттирилган янги қийматидан унинг дастлабки қийматини айириш керак:

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = f(x + \Delta y) \\ - \quad y = f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}.$$

I. Аргументнинг берилган иккита қиймати бўйича функциянинг орттирмасини ҳисоблаш

605. $y = x^2 + x + 1$ функция берилган. Агар аргумент ўз қийматини $x_1 = 2$ дан $x_2 = 2,5$ гача ўзгартирган бўлса, аргументнинг орттирмаси ва функциянинг орттирмасини топинг.

Ечилиши. 1. Аргументнинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5.$$

2. Функциянинг аргументнинг $x_1 = 2$ ва $x_2 = 2{,}5$ қийматларига мос бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1 = f(x_1) = f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7;$$
$$y_2 = f(x_2) = f(2{,}5) = (2{,}5)^2 + 2{,}5 + 1 = 9{,}75.$$

3. Функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = 9{,}75 - 7 = 2{,}75.$$

606. $y = x^2 - 2x + 4$ функция берилган. Агар аргумент ўз қийматини $x_1 = 3$ дан $x_2 = 3{,}5$ гача ўзгартирган бўлса, функциянинг орттирмасини топинг.

II. Агар функциянинг x аргументи Δx орттирма оладиган бўлса, функциянинг орттирмасини ҳисоблаш

607. $y = x^2 + 2x - 4$ функция берилган. $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}5$ бўлганда Δy орттирмани топинг.

Ечилиши. 1. Агар x аргумент Δx орттирма олган бўлса, функциянинг орттирилган янги қийматини топамиз:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 4 = x^2 + 2x\Delta x +$$
$$+ (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 4.$$

2. Функциянинг орттирмасини топамиз:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 4 \\ y = x^2 + 2x - 4 \end{array} \\ \hline \Delta y = 2x\Delta x + 2\Delta x + (\Delta x)^2 \end{array}$$

$$\Delta y = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 + (0{,}5)^2 = 3{,}25.$$

608. 1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^3 - 1$ функциялар берилган. $x = 3$ ва $\Delta x = 0{,}1$ бўлганда Δy орттирмани топинг.

609. $y = \frac{1}{x}$ функция берилган. $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}2$ бўлганда Δy орттирмани топинг.

Ечилиши.

$$1)\ y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\begin{array}{r} 2)\ - \begin{array}{r} y + \Delta y = \dfrac{1}{x + \Delta x} \\ y = \dfrac{1}{x} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{0{,}2}{1(1 + 0{,}2)} = -\frac{1}{6}.$$

610. 1) $y = -\frac{3}{x}$; 2) $y = \frac{1}{2x}$; 3) $y = \frac{1}{x} - x$ функциялар берилган. $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}8$ бўлганда Δy орттирмани топинг.

611. $y = \sqrt{x}$ функция берилган. $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}1$ бўлганда Δy орттирмани топинг.

Ечилиши.

$$1)\ y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x};$$

$$\begin{array}{rl} 2) & y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} \\ - & \quad\ \ y = \sqrt{x} \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{1 + 0{,}1} - \sqrt{1} = \sqrt{1{,}1} - 1 \approx 0{,}049.$$

612. 1) $y = \sqrt{2x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$ функциялар берилган. $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}2$ бўлганда Δy орттирмани топинг.

30-§. Функциянинг узлуксизлиги

Функциянинг нуқтада узлуксизлиги

I таъриф. Агар $y = f(x)$ функциянинг $x \to a$ даги лимити функциянинг $x = a$ даги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (5.1).$$

бўлса, $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада узлуксиз дейилади.

Бунда қуйидаги учта шарт бажарилиши керак:

1) функция a нуқтада аниқланган бўлиши керак;

2) функциянинг $\lim_{x \to a} f(x)$ лимити мавжуд бўлиши керак;

3) бу лимит $f(x)$ функциянинг $x = a$ даги қийматига тенг бўлиши керак.

II таъриф. Агар $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада аниқланган ва аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (5.2)$$

бўлса, $y = f(x)$ функция $x = a$ нуқтада узлуксиз дейилади.

Агар функциянинг $x = a$ нуқтадаги узлуксизлик шарти бузилган бўлса, у ҳолда функция бу нуқтада узилишга эга бўлади ва бу нуқтани функциянинг узилиш нуқтаси дейилади.

Элементар функциялар учун қуйидагилар ўринлидир:

1) элементар функциянинг узлуксизлик соҳаси у аниқланиш соҳаси билан бир хил бўлади, яъни элемен функция ўзининг бутун аниқланиш соҳасида узлуксиз

2) элементар функция бирор интервалнинг барча нуқ ларида эмас, балки айрим нуқталаридагина узилишга бўлиши мумкин;

3) элементар функция ўзи аниқланмаган нуқтадаги узилишга эга бўлиши мумкин.

Функциянинг интервалда ёки кесмада узлуксизлиги

Агар функция интервал ёки кесманинг барча нуқталари узлуксиз бўлса, у бу интервалда ёки кесмада узлуксиз дей лади.

1. Функциянинг унинг бутун аниқланиш соҳасида узлуксизлигини текшириш

613. $y = 3x$ функциянинг узлуксизлигини текширинг.

Ечилиши. $y = 3x$ функция x аргументнинг барча ҳ қиқий қийматлари учун аниқланган, яъни унинг аниқлани соҳаси бутун сон ўқи $(-\infty, +\infty)$ дан иборат. Унинг уз луксизлик соҳаси аниқланиш соҳаси билан бир хил эканли гини (5.2) таърифдан фойдаланиб осонгина исбот қили мумкин.

x аргументга Δx орттирма берамиз ва функциянинг Δy орттирмасини топамиз:

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = 3(x + \Delta x) = 3x + 3\Delta x \\ y = 3x \qquad\qquad\qquad \\ \hline \Delta y = 3\Delta x \qquad\qquad\quad \end{array}$$

$\Delta x \to 0$ да Δy нинг лимитини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 3\Delta x = 3 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 3 \cdot 0 = 0.$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ тенглик x нинг исталган чекли қийматида ўринли, шу сабабли $y = 3x$ функция x нинг исталган қийматида узлуксиздир.

614. 1) $y = -5x$; 2) $y = 4x - 3$ функцияларнинг узлуксизлигини текширинг.

*615. $y = 3x^2 - 2x$ функциянинг узлуксизлигини текширинг.

Ечилиши. Функция $(-\infty; +\infty)$ интервалда аниқланган, шу интервалнинг ўзида у узлуксиз ҳамдир.

(5.2) таърифга кўра $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$ ни топамиз:

$$\begin{array}{l} y + \Delta y = 3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) = 3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x \\ y + \Delta y = 3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x \\ \quad y = 3x^2 - 2x \\ \hline \Delta y = 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x. \end{array}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = [6x \lim \Delta x + 3(\lim \Delta x)^2 - 2 \lim \Delta x|_{\Delta x \to 0} =$$

$$= 6x \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 = 0.$$

$y = 3x^2 - 2x$ функция x нинг исталган чекли қийматида узлуксиздир.

616. Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини текширинг: 1) $v = 2t^2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $s = t^2 - t$; 4) $y = x - 3x^2$; 5) $y = x^3$; 6) $y = -x^4 - 1$; 7) $y = 2x^3$.

II. Функция берилган нуқтада (аргументнинг берилган қийматида) узлуксизлигини текшириш

617. $y = x^2 - 2$ функциянинг $x = 3$ да узлуксизлигини текширинг.

Ечилиши. Текширишда (5.1) таърифдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \to 3}(x^2 - 2) = (\lim_{x \to 3} x)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7;$$

$$f(3) = 3^2 - 2 = 7,$$

чунки

$$\lim_{x \to 3}(x^2 - 2) = f(3).$$

Функциянинг $x \to 3$ даги лимити функциянинг $x = 3$ даги қийматига тенг, бунда (5.1) таърифни қўллаш шартлари ҳам бажариляпти. Демак, $y = x^2 - 2$ функция $x = 3$ нуқтада узлуксиздир.

618. 1) $y = x^2 + 4x + 3$ функциянинг $x = 2$ нуқтада; 2) $y = x^3 - 5$ функциянинг $x = 1$ нуқтада узлуксизлигини текширинг.

619. $y = \sin 2x$ функциянинг $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтада узлуксизлигини текширинг.

Ечилиши. $y = \sin 2x$ функция $(-\infty; +\infty)$ интервалда аниқланган.

Текшириш учун (5.1) таърифдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin 2x = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sin \pi = 0;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sin \pi = 0.$$

(5.1) таърифнинг қўлланилишлик шартлари бажарилад демак, $y = \sin 2x$ функция $x = \frac{\pi}{2}$ нуқтада узлуксиз.

620. 1) $y = \cos x$ ва 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ функцияларнинг $x = \frac{\pi}{3}$ нуқтада узлуксизлигини текширинг.

III. Берилган функциянинг узилиш нуқтасини топиш

621. $y = \frac{2}{2 - x}$ функциянинг узилишини текширинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; 2)$ ва $(2; +\infty)$ интерваллардан иборат. Функция $x = 2$ нуқтада узилишга эга. Функциянинг аниқланиш ва узлуксизлик соҳалари бир хил.

622. Қуйидаги функцияларнинг узилишини текширинг: 1) $y = \frac{5}{2x - 1}$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$; 4) $y = \frac{3}{x^2 - 2x + 1}$.

6-БОБ

ҲОСИЛА

31-§. Функциянинг ўзгариш тезлиги

x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш кўринишида тасвирланиши мумкин бўлган турли хил физикавий жараёнлар умумий кўринишда

$$y = f(x)$$

функция билан ёзилади ва бу муносабат ўзгарувчи миқдор y нинг x ўзгарувчининг ўзгаришига боғлиқ ҳолда ўзгариш жараёнини ифодалайди.

Функциянинг ўзгариш тезлигини ҳисоблаш қуйидаги умумий қоида бўйича бажарилади:

I. x аргументни бирор Δx катталикка ўзгариши y функцияни Δy катталикка ўзгаришига олиб келади, яъни

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

II. Функциянинг аргументнинг Δx орттирмасига мос келган Δy орттирмаси топилади:

$$\begin{array}{r} -\,y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ y = f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \end{array}$$

III. y функциянинг аргумент қийматининг x дан $x + \Delta x$ гача ўзгариши оралиғи учун ўзгаришининг ўртача тезлиги

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

муносабат билан ифодаланади.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат аргумент орттирмаси бирлигига функция орттирмасининг нечта бирлиги тўғри келишини кўрсатади.

IV. x нинг берилган қийматида функция ўзгаришининг оний ёки ҳақиқий v тезлиги x аргументнинг x дан $x + \Delta x$ гача ўзгариш оралиғида ўртача тезлик $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нинг $\Delta x \to 0$ да интиладиган лимитидир, яъни

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

$y = kx + b$ чизиқли функция учун ўртача тезлик $v_{ўр} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ ва ҳақиқий тезлик $v = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ катталиги бўйича бир хил ва ҳақиқий тезликнинг сон қиймати k коэффициентга тенг.

I. Функция ўзгаришининг ўртача тезлигини ҳисоблаш

623. $y=3x^2-6$ функция ўзгаришининг x аргумент $x_1=3$ дан $x_2=3,5$ гача ўзгаргандаги ўртача тезлигини топинг.

Ечилиши. *1-усул.* 1. Аргументнинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3,5 - 3 = 0,5.$$

2. Функциянинг x_1 ва x_2 даги қийматларини аниқлаймиз:

$$y_1 = 3\cdot 3^2 - 6 = 21, \quad y_2 = 3\cdot(3,5)^2 - 6 = 30,75.$$

3. Функциянинг орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 30,75 - 21 = 9,75.$$

4. Функция ўзгаришининг ўртача тезлигини топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9,75}{0,5} = 19,5.$$

2-усул. 1. Функция ўзгаришининг ўртача тезлигини аргументнинг исталган қиймати учун умумий қоида бўйича ҳисоблаймиз:

$$\text{I. } y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 6 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6;$$

$$\begin{array}{rl} \text{II. } & y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 6; \\ - & y = 3x^2 - 6 \\ \hline & \Delta y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2. \end{array}$$

$$\text{III. } v_{ўр} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x.$$

2. Аргументнинг орттирмасини топамиз:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3,5 - 3 = 0,5.$$

3. $x=3$ ва $\Delta x = 0,5$ да $v_{ўр}$ ни аниқлаймиз:

$$v_{ўр} = 6\cdot 3 + 3\cdot 0,5 = 19,5.$$

624. 1. $y = 2x^2 + 5x$ функция ўзгаришининг x аргумент $x_1 = 2$ дан $x_2 = 3$ гача ўзгаргандаги ўртача тезлигини топинг.

2. Нуқтанинг ҳаракат қонуни $s = 4t^2 - 2$ формула билан берилган. $t_1 = 4$ дан $t_2 = 6$ гача бўлган вақт оралиғида нуқта ҳаракатининг ўртача тезлигини топинг.

II. Нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг берилган моментдаги тезлигини бу нуқтанинг ҳаракат тенгламаси бўйича ҳисоблаш

625. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати $s = 3t^2 - 2t + 5$ тенглама билан берилган, бу ерда t секунд ҳисобида ва s метр ҳисобида берилган.

Нуқта ҳаракатининг $t = 5$ сек моментдаги тезлигини топинг.

Ечилиши. 1. Нуқта ҳаракатининг ўртача тезлигини топамиз:

$$\text{I. } s + \Delta s = 3(t + \Delta t)^2 - 2(t + \Delta t) + 5 = \\ = 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2t - 2\Delta t + 5;$$

$$\text{II. } \begin{array}{r} -\begin{array}{l} s + \Delta s = 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2t - 2\Delta t + 5; \\ s = 3t^2 - 2t + 5 \end{array} \\ \hline \Delta s = 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t. \end{array}$$

$$\text{III. } \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2\Delta t}{\Delta t} = 6t + 3\Delta t - 2.$$

2. Нуқта ҳаракатининг вақтнинг t моментидаги ҳақиқий тезлигини топамиз:

$$\text{IV. } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (6t + 3\Delta t - 2) = 6t - 2.$$

3. Нуқта ҳаракатининг 5 сек охиридаги тезлигини топамиз:

$$v_{t=5} = 6 \cdot 5 - 2 = 28 \text{ (м/сек)}.$$

626. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати $s = 5t^2$ тенглама билан берилган (t сек ҳисобида, s м ҳисобида). Нуқта ҳаракатининг 10 сек охиридаги тезлигини топинг.

627. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати $s = 2t^2 - 8t - 10$ тенглама билан берилган (t сек ҳисобида, s м ҳисобида). Нуқта ҳаракатининг 8 сек охиридаги тезлигини топинг.

32- §. Ҳосила

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласи деб функция орттирмаси Δy ни аргументнинг мос орттирмаси Δx га нисбатининг $\Delta x \to 0$ даги лимитига айтилади.

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини белгилаш учун бир қатор белгилар мавжуд:

$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx} \text{ ёки } f'(x),\ \frac{df(x)}{dx}.$$

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш дифференциаллашнинг умумий қоидаси бўйича тўрт босқичда бажарилади.

I. x аргументга Δx орттирма берамиз ва функцияга x аргументнинг ўрнига $x + \Delta x$ орттирилган қийматни қўйиб, функциянинг орттирилган қийматини ҳосил қиламиз:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

II. Функциянинг орттирилган қийматидан унинг дастлабки қийматини айириб, функция орттирмасини ҳосил қиламиз:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

III. Функциянинг орттирмаси Δy ни аргументнинг орттирмаси Δx га бўламиз, яъни қуйидаги нисбатни тузамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

IV. Бу нисбатнинг $\Delta x \to 0$ даги лимитини топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Топилган лимит $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласидир. Ҳосилани топиш дифференциаллаш дейилади.

Ҳосилаларни дифференциаллашнинг умумий қоидаси бўйича топинг.

628. $y = 2x^2 - 3x$. Ҳосиланинг $x = 3$ даги хусусий қийматини топинг.

Ечилиши.

$$\text{I.}\quad y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x;$$

$$\text{II.}\quad \begin{array}{r} -\,y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x \\ y = 2x^2 - 3x \\ \hline \Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x. \end{array}$$

$$\text{III.}\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3;$$

$$\text{IV.}\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x - 3) = 4x - 3;\ y' = 4x - 3.$$

Ҳосиланинг $x = 3$ даги қийматини топамиз:

$$y'_{x=3} = 4 \cdot 3 - 3 = 9.$$

629. 1) $y = x^2 - x$. $y'_{x=0}$ ни топинг; 2) $y = x^2 - 5x + 4$. $y'_{x=1}$ ни топинг; 3) $s = t^3$. $s'_{t=2}$ ни топинг.

630. 1) $y = -\frac{3}{x}$. $y'_{x=3}$ ни топинг; 2) $y = \frac{1}{x^2}$. $y'_{x=-1}$ ни топинг.

631. $y = \sqrt{x}$. $y'_{x=4}$ ни топинг.

Ечилиши.

$$\text{I.} \qquad y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x};$$

$$\text{II.} \qquad \begin{array}{r} -\,y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} \\ y = \sqrt{x} \\ \hline \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}; \end{array}$$

$$\text{III.} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x};$$

$$\text{IV.}\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})\ (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x\ (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad y'_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

632. 1) $y = \sqrt{x - 1}$. $y'_{x=5}$ ни топинг; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. $y'_{x} = 4$ ни топинг; 3) $y = \sqrt[3]{x}$. $y'_{x} = 2\sqrt{2}$ ни топинг.

633. $y = \cos x$. $y'_{x = \frac{\pi}{4}}$ ни топинг.

Ечилиши.

$$\text{I.} \qquad y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\text{II.} \qquad \begin{array}{r} y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) \\ -\qquad y = \cos x \\ \hline \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x; \end{array}$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} =$$

$$= -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2};$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

$$\text{IV. } y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= -\sin x\cdot 1 = -\sin x;\ y'_{x=\frac{\pi}{4}} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

634. 1) $y=\sin x$. $y'_{x=\frac{\pi}{3}}$ ни топинг; 2) $y=\cos 2x$. $y'_{x=\frac{\pi}{2}}$ ни топинг.

635. $y=\mathrm{tg}\,x$. $y'_{x=\frac{\pi}{4}}$ ни топинг.

Ечилиши.

$$\text{I. } y+\Delta y = \mathrm{tg}(x+\Delta x);$$

$$\begin{array}{rl} \text{II. } & y+\Delta y = \mathrm{tg}(x+\Delta x) \\ & \underline{\qquad y = \mathrm{tg}\,x \qquad} \\ & \Delta y = \mathrm{tg}(x+\Delta x)-\mathrm{tg}\,x, \end{array}$$

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\cos(x+\Delta x)\cos x} = \frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cos x};$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\Delta x}{\Delta x\cos(x+\Delta x)\cos x} = \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x};$$

$$\text{IV. } y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{\cos(x+0)\cos x}\cdot 1 = \frac{1}{\cos^2 x};\ y'_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

636. $y=\mathrm{ctg}\,x$. $y'_{x=\frac{\pi}{6}}$ ни топинг.

33- §. Дифференциаллашнинг асосий қоидалари. Даражанинг ва илдизнинг ҳосилалари

Белгилашлар: C — ўзгармас, x — аргумент, u, v ва w — аргумент x нинг ҳосилага эга бўлган функциялари.

Дифференциаллашнинг асосий қоидалари

Функция алгебраик йиғиндисининг ҳосиласи:

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'. \tag{6.1}$$

Иккита функция кўпайтмасининг ҳосиласи:

$$(uv)'=u'v+v'u. \tag{6.2}$$

Учта функция кўпайтмасининг ҳосиласи:

$$(uvw)=u'vw+v'uw+w'uv. \tag{6.3}$$

Ўзгармаснинг функцияга кўпайтмасининг ҳосиласи:

$$(Cu)'=Cu'. \tag{6.4}$$

Бўлинманинг (касрнинг) ҳосиласи:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}. \tag{6.5}$$

(6.5) формуланинг хусусий ҳоллари:

$$\left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}u'; \tag{6.6}$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{C}{v^2}v'. \tag{6.7}$$

Агар y функция u нинг функцияси: $y=f(u)$ ва бундаги u ўз навбатида x нинг функцияси: $u=\varphi(x)$ бўлса, яъни y функция x га оралиқ аргумент u орқали боғлиқ бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция x нинг мураккаб функцияси (функциянинг функцияси) дейилади: $y=f[\varphi(x)]$.

Мураккаб функциянинг ҳосиласи унинг оралиқ аргумент бўйича ҳосиласини бу аргументнинг эркли ўзгарувчи бўйича ҳосиласига кўпайтирилганига тенг:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \text{ ёки } y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Бу муносабатдан фойдаланиб, $u=\varphi(x)$ бўлган мураккаб функцияларни дифференциаллаш учун формулалар ҳосил қилинган.

Ҳосилаларни топишда қуйидагиларни ёдда тутиш керак (таърифга кўра):

1) $a^0=1\ (a\neq 0)$;

2) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$;

3) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $(a > 0)$

ва даражалар ҳамда илдизлар билан амаллар бажаришда қуйидаги қоидаларни билиш керак:

4) $a^n a^m = a^{n+m}$;

5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;

6) $(a^n)^m = a^{nm}$;

7) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

8) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Бу ерда m ва n — ихтиёрий рационал сонлар.

Дифференциаллаш формулалари

$u = \varphi(x)$ шартда		$u = x$ шартда	
		$c' = 0$	(6.8)
		$x' = 1$	(6.9)
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$, бу ерда n — ихтиёрий ҳақиқий сон	(6.10)	$(x^n)' = nx^{n-1}$, бу ерда n — ихтиёрий ҳақиқий сон	(6.10а)
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u'$	(6.11)	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	(6.11а)
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$	(6.12)	$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	(6.12а)

1. Функцияларнинг ҳосилаларини $(x^n)' = nx^{n-1}$ формуладан фойдаланиб топиш

Функцияларнинг ҳосиласини топинг.

637. 1) $y = 3x^4$; 2) $y = 2x^{-5}$; 3) $y = 4x^{\frac{1}{3}}$; 4) $y = 5x^{-\frac{2}{5}}$; 5) $y = 5\sqrt[5]{x^3}$.

Ечилиши. 1) $y=3x^4$. (6.4) формулага кўра ўзгармас кўпайтувчи ҳосила белгиси ташқарисига чиқади ва (6.10а) формула бўйича:

$$y'=3\,(x^4)',\qquad y'=3\cdot 4x^{4-1}=12x^3;$$

2) $y=2x^{-5}$. (6.4) ва (6.10а) формулаларга кўра топамиз:

$$y'=2(-5)\,x^{-5-1}=-10x^{-6}=-\frac{10}{x^6};$$

3) $y=4x^{\frac{1}{3}}$. (6.4) ва (6.10а) формулаларга кўра топамиз:

$$y'=4\cdot\frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{4}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

4) $y=5x^{-\frac{2}{5}}$. (6.4) ва (6.10а) формулаларга кўра топамиз:

$$y'=5\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-\frac{2}{5}-1}=-2x^{-\frac{7}{5}};$$

5) илдизни каср кўрсаткич билан алмаштирамиз ва (6.4) ва (6.10а) формулалардан фойдаланамиз:

$$y=5\sqrt[5]{x^3}=5x^{\frac{3}{5}};$$

$$y'=5\cdot\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=5\cdot\frac{3}{5}\,x^{\frac{3}{5}-1}=3x^{-\frac{2}{5}}.$$

638. 1) $y=x^4$; 2) $y=2x^3$; 3) $y=3x^{-6}$; 4) $y=-3x^{-2}$; 5) $y=x^{\frac{7}{5}}$; 6) $y=4x^{\frac{3}{2}}$; 7) $y=5x^{-\frac{3}{5}}$; 8) $y=2\sqrt{x^3}$; 9) $y=\sqrt[4]{x^{-9}}$; 10) $y=\sqrt[-3]{x^2}$.

639. 1) $y=\dfrac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}$; 2) $y=3x^2\sqrt[3]{x}$; 3) $y=\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $y=2\sqrt{\dfrac{2}{x^{-3}}}$; 5) $f(\varphi)=\varphi^{-1}\sqrt{\varphi^{-1}}\;\sqrt[3]{\varphi^2}$; 6) $f(v)=\dfrac{\sqrt{v}\,\sqrt[3]{v}}{2\sqrt[3]{v^2}}$.

Ечилиши. Ҳосила олишдан аввал ҳар қайси функцияни $y = x^n$ (n — исталган рационал сон) кўринишга келтирамиз:

$$y = \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}.$$

(6.4) ва (6.10а) формулаларга кўра топамиз:

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}};$$

2) $y = 3x^2\sqrt[3]{x} = 3x^2x^{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{7}{3}}$. (6.4) ва (6.10а) формулаларга кўра топамиз:

$$y' = 3\left(x^{\frac{7}{3}}\right)' = 3\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = 7x^{\frac{4}{3}} = 7x\sqrt[3]{x};$$

3) $y = \frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x^{\frac{5}{3}}$. (6.4) ва (6.10а) формулаларга кўра топамиз:

$$y' = 2\left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = 2\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3}\sqrt[3]{x^2};$$

4) $y = 2\sqrt{\frac{2}{x^{-3}}} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^{-3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{x^{-\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{2x}^{\frac{3}{2}}.$

(6.4) ва (6.10а) формулаларга кўра:

$$y' = 2\sqrt{2}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = 2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} =$$

$$= 3\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}\sqrt{x} = 3\sqrt{2x};$$

5) $f(\varphi) = \varphi^{-1}\sqrt{\varphi^{-1}}\sqrt[3]{\varphi^2} = \varphi^{-1}\varphi^{-\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{2}{3}} = \varphi^{-1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} =$

$= \varphi^{-\frac{5}{6}}$. (6.10а) формулаларга кўра топамиз:

$$f'(\varphi) = -\frac{5}{6}\varphi^{-\frac{5}{6}-1} = -\frac{5}{6}\varphi^{-\frac{11}{6}};$$

$$6)\ f(v) = \frac{\sqrt{v}\,\sqrt[3]{v}}{2\sqrt[3]{v^2}} = \frac{v^{\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{3}}}{2v^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}}\,v^{\frac{1}{3}}\,v^{-\frac{2}{3}} =$$

$= \frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}v^{\frac{1}{6}}$. (6.4) ва (6.10а) формулаларга *кўра топамиз:*

$$f'(v) = \frac{1}{2}(v^{\frac{1}{6}})' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}v^{\frac{1}{6}-1} = \frac{1}{12}v^{-\frac{5}{6}}.$$

640. 1) $y = -\frac{1}{x^2}$; 2) $y = \frac{3}{x^{\frac{4}{3}}}$; 3) $y = \frac{3}{\sqrt{x^3}}$; 4) $y = 2x^3\sqrt[3]{x}$: 5) $y = \frac{x^4}{\sqrt{x}}$; 6) $y = \frac{2x^3}{\sqrt{x^5}}$; 7) $y = \frac{2\sqrt{x}}{x^3}$; 8) $y = \frac{6\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$; 9) $y = \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$; 10) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^{-2}}}$; 11) $f(x) = x^{-2}\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}$; 12) $s = \frac{\sqrt{t^3}\,\sqrt[3]{t^2}}{t\sqrt{t}}$.

641. 1) $f(x) = \frac{1}{x^4}\cdot f'(-1)$ ва $f'(2)$ ни топинг; 2) $y = x^3\sqrt[3]{x}\cdot y'_{x=1}$ ни топинг.

Ечилиши. 1) $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$ (6.10а) формулага кўра топамиз:

$$f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}.$$

$f'(-1)$ ва $f'(2)$ ни ҳисоблаш учун ҳосилада x нинг ўрнига —1 ва 2 қийматларни қўйиш керак:

$$f'(-1) = -\frac{4}{(-1)^5} = -\frac{4}{-1} = 4;$$

$$f'(2) = -\frac{4}{2^5} = -\frac{4}{32} = -\frac{1}{8};$$

2) $y = x^3\sqrt[3]{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{10}{3}}$.

(6.10а) формулага кўра топамиз:

$$y' = \frac{10}{3}x^{\frac{10}{3}-1} = \frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}};\quad y'_{x=1} = \frac{10}{3}\cdot 1^{\frac{7}{3}} = 3\frac{1}{3}.$$

642. 1) $f(x) = \frac{1}{x^3}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ни топинг; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}\cdot f'(-8)$ ни топинг; 3) $y = x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\cdot y'_{x=1}$ ни топинг.

II. Функциялар алгебраик йиғиндисининг ҳосиласи

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

643. $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$.

Ечилиши. (6.1), (6.4), (6.10а), (6.9) ва (6.8) формулаларни бирин-кетин татбиқ қилиб, топамиз:

$$y' = (4x^3)' - (2x^2)' + x' - 5';\quad y' = 4(x^3)' - 2(x^2)' + x' - 5';$$

$$y' = 4\cdot 3x^2 - 2\cdot 2x + 1;$$

Охирида:

$$y' = 12x^2 - 4x + 1.$$

Дифференциаллашда малака орта борган сари оралиқ амаллар одатда хаёлда бажарилади ва шунинг учун ана шунга ўхшаш мисолларда дифференциаллашнинг охирги натижасигина ёзилади.

644. 1) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + x - 1$. $f'(-1)$ ни топинг.

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$. $f'(3)$ ни топинг.

3) $f(t) = 0,5t^3 + 0,6t^2 + 0,8t + 8$. $f'(1)$ ни топинг.

645. $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4$.

Ечилиши. Радикалларни каср кўрсаткичлар билан алмаштирамиз ва манфий кўрсаткичлар киритамиз, сўнгра (6.1), (6.4), (6.10а) ва (6.8) формулалар бўйича дифференциаллаймиз:

$$y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4 =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-3} + 4;$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + 3(-2)x^{-2-1} -$$

$$-\frac{1}{5}(-3)x^{-3-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} - 6x^{-3} + \frac{3}{5}x^{-4} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{5x^4}.$$

646. 1) $y = -3x^{-5} + 15x^{-4} - 2x^{-3} + x^{-1} + 2;$

2) $y = 4x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 3x;$

3) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 8;$

4) $y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 1.$

III. Функциялар кўпайтмасининг ҳосиласи

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

647. $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1).$

Ечилиши. *1-усул.* (6.2), (6.1), (6.10 а), (6.8) ва (6.9) формулаларга кўра топамиз:

$$f'(x) = (x^3 - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)'(x^3 - 1);$$

$$f'(x) = 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)(x^3 - 1);$$

$$f'(x) = 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) =$$

$$= (x^2 + x + 1)[3x^2 + (2x + 1)(x - 1)] =$$

$$= (x^2 + x + 1)(3x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1) =$$

$$= (x^2 + x + 1)(5x^2 - x - 1)$$

Ёки бу учҳадларни кўпайтириб,

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1.$$

ни ҳосил қиламиз.

2-усул. Бу кўпайтувчиларнинг кўпайтмасини топамиз:

$$f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1.$$

(6,1), (6,10а), (6.9) ва (6.8) формулаларга кўра ҳосилани топамиз:

$$f'(x) = (x^5)' + (x^4)' + (x^3)' - (x^2)' - (x)' - 1' =$$

$$= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1.$$

Яна ўша натижа ҳосил қилинди.

648. 1) $f(x)=(2x+1)(x^2+3x-1)$; 2) $f(x)=(3x^2+1)\times$ $\times(2x^2+3)$; 3) $f(x)=(x^3+x^2+x+1)(x-1)$.

IV. Бўлинманинг ҳосиласи

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

649. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Ечилиши. (6.5), (6.1), (6.10а) ва (6.8) формулаларга кўра топамиз:

$$y'=\frac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^2+1)}{(x^2-1)^2};$$

$$y'=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2};\quad y'=\frac{2x(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2x(-2)}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

650. 1) $y=\frac{x-a}{x+a}$; 2) $y=\frac{x^2}{2-x^2}$; 3) $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;

4) $y=\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$.

V. Функцияларнинг ҳосилаларини $(u^n)'=nu^{n-1}u'$ (6.10) ва $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}u'$ (6.11) формулалардан фойдаланиб топиш

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

651. $y=(x^2-5x+8)^6$.

Ечилиши. $u=x^2-5x+8$ деб $y=u^6$ ни ҳосил қиламиз. (6.10) формулага кўра:

$$y'=6u^5u'=6(x^2-5x+8)^5(x^2-5x+8)'=$$

$$=6(x^2-5x+8)^5(2x-5).$$

Бундай муфассал ёзув дифференциаллаш техникасини ўзлаштириш процессидагина ёзилади. Малака ҳосил қилингандан сўнг оралиқ ҳисоблашлар хаёлда бажарилади.

Шуни эсда тутиш керакки, даражанинг ҳосиласи кўрсаткични асоснинг битта бирликка камайтирилган даражасига ва асоснинг ҳосиласига кўпайтмасига тенг.

652. 1) $y=(x^3-2x^2+5)^5$; 2) $f(x)=(x^3-1)^6$; 3) $f(x)=$ $=(ax^2+bx+c)^n$; 4) $y=(r^2-x^2)^4$.

653. $y=\frac{1}{(x^2-1)^4}$.

Ечилиши. *1- усул.* (6.11) ва (6.10) формулаларни кетма-кет татбиқ қилиб топамиз:

$$y' = -\frac{1}{[(x^2-1)^4]^2}[(x^2-1)^4]';$$

$$y' = -\frac{1}{(x^2-1)^8}\cdot 4(x^2-1)^3(x^2-1)';$$

$$y' = -\frac{1}{(x^2-1)^8}\cdot 4(x^2-1)^3\cdot 2x = -\frac{8x(x^2-1)^3}{(x^2-1)^8} = -\frac{8x}{(x^2-1)^5}.$$

2- усул. Манфий кўрсаткич киритамиз ва (6.10) формулани татбиқ қиламиз:

$$y = (x^2-1)^{-4};\ y' = -4(x^2-1)^{-4-1}(x^2-1)' =$$

$$= -4(x^2-1)^{-5}\cdot 2x = -\frac{8x}{(x^2-1)^5}.$$

Яна ўша натижани ҳосил қилдик.

654. 1) $y = \frac{1}{(1-x^3)^5}$; 2) $y = \frac{1}{(ax+b)^n}$;

655. $y = \frac{(x^3-1)^4}{(x^2+1)^3}$.

Ечилиши. Бўлинмани дифференциаллаш қоидасини, сўнгра мураккаб функциянинг ҳосиласи формуласини татбиқ қилиб топамиз:

$$y' = \frac{[(x^3-1)^4]'(x^2+1)^3 - [(x^2+1)^3]'(x^3-1)^4}{[(x^2+1)^3]^2} =$$

$$= \frac{4(x^3-1)^3\cdot 3x^2(x^2+1)^3 - 3(x^2+1)^2\cdot 2x(x^3-1)^4}{(x^2+1)^6} =$$

$$= \frac{2\cdot 3x(x^3-1)^3(x^2+1)^2[2x(x^2+1)-(x^3-1)]}{(x^2+1)^6} =$$

$$= \frac{6x(x^3-1)^3(x^2+1)^2(2x^3+2x-x^3+1)}{(x^2+1)^6} =$$

$$= \frac{6x(x^3-1)^3(x^2+1)^2(x^3+2x+1)}{(x^2+1)^6} =$$

$$= \frac{6x(x^3-1)^3(x^3+2x+1)}{(x^2+1)^4}.$$

656. $y = \frac{(x^4+1)^3}{(x^3+1)^2}$; 2) $y = \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^n$.

VI. Функцияларнинг ҳосиласини $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$ (6.12) формуладан фойдаланиб топиш

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

657. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Ечилиши. $u = 4 - x^2$ деб, $f(x) = \sqrt{u}$ ни ҳосил қи миз. (6.12) формулага кўра топамиз:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(4 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

Бирор функциядан олинган квадрат илдизнинг ҳосила бирни ана шу функциядан олинган илдизнинг иккилангани бўлинганини илдиз остидаги ифоданинг ҳосиласига кўпа тирилганига тенг эканлигини эсда сақлаш керак.

658. 1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$, 2) $f(t) = \sqrt{t^2 - t +}$
$f'(2)$ ни ҳисобланг; 3) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; 4) $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$
5) $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; 6) $y = \sqrt{2px}$.

659. $y = (x^2 + 6)\sqrt{x^2 - 3}$.

Ечилиши. Кўпайтманинг ҳосиласи формуласига кўр топамиз:

$$y' = (x^2 + 6)'\sqrt{x^2 - 3} + \left(\sqrt{x^2 - 3}\right)'(x^2 + 6).$$

Ҳар қайси қўшилувчининг ҳосиласини топамиз ва соддалаштирамиз:

$$y' = 2x\sqrt{x^2 - 3} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}}(x^2 + 6) =$$

$$= 2x\sqrt{x^2 - 3} + \frac{x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2x\left(\sqrt{x^2 - 3}\right)^2 + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} =$$

$$= \frac{2x(x^2 - 3) + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2x^3 - 6x + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

660. 1) $y = x\sqrt{x^2 - 1}$; 2) $s = t^2\sqrt{2t - 1}$;
3) $s = (t^2 + 1)\sqrt{t^2 - 1}$; 4) $y = (2x - 1)^2\sqrt{1 - 2x}$.

661. $y = \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

Ечилиши. *1-усул.* (6.11) ва (6.12) формулаларн бирин-кетин татбиқ қилиб топамиз:

$$y' = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^4 - 1}\right)^2}\left(\sqrt{x^4 - 1}\right)';$$

$$y' = -\frac{1}{x^4 - 1}\,\frac{1}{2\sqrt{x^4 - 1}}(x^4 - 1)' =$$

$$= -\frac{1}{x^4 - 1}\,\frac{1}{2\sqrt{x^4 - 1}}\cdot 4x^3.$$

Энди қуйидагича ўзгартирамиз:

$$y' = -\frac{1}{x^4-1}\,\frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}} = -\frac{2x^3\sqrt{x^4-1}}{(x^4-1)^2}.$$

2-*усул.* Илдизни каср кўрсаткич билан алмаштирамиз ва ҳосилани (6.10) формула бўйича топамиз:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = -\frac{1}{(x^4-1)^{\frac{1}{2}}} = (x^4-1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y' = -\frac{1}{2}(x^4-1)^{-\frac{3}{2}}(x^4-1)' = -\frac{1}{2}(x^4-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4x^3 =$$

$$= -\frac{2x^3}{(x^4-1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2x^3}{\sqrt{(x^4-1)^3}} = -\frac{2x^3}{(x^4-1)\sqrt{x^4-1}} =$$

$$= -\frac{2x^3\sqrt{x^4-1}}{(x^4-1)^2}.$$

662. 1) $y = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

) $y = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \sqrt{3x}.$

663. $y = \frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}.$

Ечилиши. Бўлинманинг ҳосиласи формуласига кўра:

$$y' = \frac{(1+2x)'\sqrt{1-2x} - (\sqrt{1-2x})'(1+2x)}{(\sqrt{1-2x})^2}.$$

Ҳосилаларни топамиз ва алмаштиришлар бажарамиз:

$$y' = \frac{2\sqrt{1-2x} - \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}(1+2x)}{1-2x} =$$

$$= \frac{2\sqrt{1-2x} + \frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}}{1-2x} = \frac{2(1-2x)+1+2x}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} =$$

$$= \frac{2-4x+1+2x}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} = \frac{3-2x}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} =$$

$$= \frac{(3-2x)\sqrt{1-2x}}{(1-2x)^2}.$$

664. 1) $y=\frac{3x}{\sqrt{x^3-1}}$; 2) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$; 3) $y=\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}$;

665. $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$.

Ечилиши. Куб илдизни каср кўрсаткич билан алмаштирамиз ва (6.10) формула бўйича даражанинг ҳосиласини топамиз:

$$y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}=(x^3+1)^{\frac{2}{3}};$$

$$y'=\frac{2}{3}(x^3+1)^{-\frac{1}{3}}(x^3+1)'=\frac{2}{3}(x^3+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3x^2=$$

$$=\frac{2x^2}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

666. 1) $y=\sqrt[3]{x^3-1}$; 2) $y=\sqrt[4]{(ax+b)^3}$; 3) $y=$ $=\sqrt{(2x-1)^3}$; 4) $f(t)=\sqrt[3]{t^2+t-1}$. $f'(1)$ ни ҳисобланг.

34- §. Ҳосиланинг физикавий татбиқлари

Нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилаётганда унинг берилган $t=t_1$ моментдаги v тезлиги s йўлдан t вақт бўйича олинган ва берилган $t=t_1$ момент учун ҳисобланган $\frac{ds}{dt}$ ҳосилага тенг.

Нуқтанинг берилган $t=t_1$ моментдаги a тезланиши v тезликдан t вақт бўйича олинган ва берилган $t=t_1$ момент учун ҳисобланган $\frac{dv}{dt}$ ҳосилага тенг.

Бу параграфдаги масалаларда s йўл метрларда (м), t вақт секундларда (сек), v тезлик секундига метр ҳисобида (м/сек) ва a тезланиш секунднинг квадратига метр ҳисобида (м/сек^2) ифодаланган.

667. Нуқта $s=2t^3+t^2-4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t=4$ сек моментдаги тезлик ва тезланишни топинг.

Ечилиши. 1. Нуқтанинг исталган t вақтдаги ҳаракат тезлигини топамиз:

$$v=\frac{ds}{dt}=6t^2+2t.$$

2. Нуқтанинг $t = 4$ сек моментдаги ҳаракат тезлигини топамиз:

$$v_{t=4} = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 104 \text{ м/сек}.$$

3. Нуқта ҳаракатининг исталган t вақтдаги тезланишини топамиз:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t + 2.$$

4. Нуқтанинг $t = 4$ сек моментдаги ҳаракат тезланишини топамиз:

$$a_{t=4} = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \text{ м/сек}^2.$$

668. Агар тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг ҳаракати 1) $s = t^3 + 5t^2 + 4$, $t = 2$; 2) $s = \sqrt{t}$, $t = 1$; 3) $s = t^2 + 11t + 30$, $t = 3$ *тенглама билан берилган бўлса*, вақтнинг кўрсатилган моментларида бу нуқтанинг тезлик ва тезланишини топинг.

669. Агар тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги 1) $v = t^2 + t - 1$, $t = 3$; 2) $v = t^2 + 5t + 1$, $t = 3$ тенглама билан берилган бўлса, нуқтанинг кўрсатилган моментдаги тезланишини топинг.

670. Нуқта $s = 6t - t^2$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Вақтнинг қайси моментида нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлади?

Ечилиши. 1. Нуқтанинг t вақтнинг исталган моментидаги ҳаракат тезлигини топамиз:

$$v = \frac{ds}{dt} = 6 - 2t.$$

2. $v = 0$ деб, t ни топамиз: $6 - 2t = 0$, $t = 3$ сек.

Учинчи секунд охирида нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлади.

671. Нуқта $s = t^3 - 8t + 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Вақтнинг қайси моментида нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлади?

672. *Тормозланиш пайтида маховик* t сек давомида $\varphi = 3 + 8t - t^2$ бурчакка бурилади. 1) вақтнинг $t = 3$ сек моментида маховик айланишининг бурчак тезлигини топинг; 2) t моментдаги бурчак тезланишни топинг; 3) маховик тўхтайдиган вақт моменти t ни топинг.

Ечилиши. 1. ω бурчак тезлик деб, φ бурчакнинг t вақт давомида ўзгариш тезлигига айтилади. Бурчак тезлик бурилиш бурчаги φ дан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 8 - 2t.$$

$t = 3$ секда бурчак тезликни топамиз:

$$\omega_{t=3} = 8 - 2\cdot 3 = 2 \text{ рад/сек.}$$

2. ε бурчак тезланиш ω бурчак тезликдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -2 \text{ рад/сек}^2.$$

3. $\omega = 0$ деб, t ни топамиз:

$$8 - 2t = 0,\ t = 4 \text{ сек.}$$

Тўртинчи секунднинг охирида бурчак тезлик нолга тенг бўлади.

673. Жисм ўқ атрофида $\varphi = 10t - t^2$ қонун бўйича айланмоқда. 1) айланишнинг $t = 2$ сек моментдаги бурчак тезлигини топинг; 2) t моментдаги бурчак тезланишини топинг; 3) айланиш тугайдиган моментни топинг.

674. Жисм температураси T нинг t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгариши $T = 0{,}2\,t^2$ тенглама билан берилган. Вақтнинг $t = 10$ сек моментида бу жисм қандай тезлик билан қизийди?

Ечилиши. Жисм қиздирилганда унинг T температураси t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгаради, яъни T вақтнинг функциясидир: $T = f(t)$. Жисмнинг қизиш тезлиги T температуранинг t вақт бўйича ҳосиласи $\frac{dT}{dt}$ дан иборатдир:

$$\frac{dT}{dt} = 0{,}4t;\quad \left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=10\text{сек}} = 0{,}4\cdot 10 = 4.$$

Вақтнинг $t = 10$ сек моментида жисм секундига тўрт градус тезлик билан қизийди.

675. Жисмнинг T температураси t вақтга боғлиқ ҳолда $T = 0{,}5\,t^2 - 2\,t$ қонун бўйича ўзгаради. Вақтнинг $t = 5$ сек моментида бу жисм қандай тезлик билан қизийди?

676. Массаси 10 кг бўлган жисм $s = 3t^2 + t + 4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан 4 сек ўтгандан кейинги кинетик энергияси $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ ни топинг.

Ечилиши. 1. Жисм ҳаракатининг вақтнинг t моментидаги тезлигини топамиз:

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t + 1.$$

2. Жисмнинг $t = 4$ сек даги тезлигини ҳисоблаймиз:

$$v_{t=4\text{ сек}} = 6\cdot 4 + 1 = 25 \text{ м/сек}.$$

3. 4 сек охирида жисмнинг кинетик энергиясини топамиз:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{10\cdot 25^2}{2} = 3125 \text{ (Ж)}.$$

677. Массаси 100 кг бўлган жисм $s = 5t^2 - 2$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг ҳаракат *бошлангандан 2 сек ўтгандаги кинетик энергияси* $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ *ни* топинг.

678. Ток кучи I вақт t га боғлиқ ҳолда $I = 0{,}4\,t^2$ (I амперларда, t секундларда) қонун бўйича ўзгаради. Саккизинчи секунд охирида ток кучи ўзгаришининг тезлигини топинг.

Ечилиши. Ток кучи ўзгаришининг тезлиги I токдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}8t,\ \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=8\text{ сек}} = 0\ 8\cdot 8 = 6{,}4 \text{ А/сек}.$$

679. I ток кучининг t вақтга боғлиқ ҳолда ўзгариши $I = 2t^2 - 5t$ тенглама билан берилган (I ампер ҳисобида, t секунд ҳисобида). 10 сек охирида ток кучининг ўзгариш тезлигини топинг.

35- §. Ҳосиланинг геометрияга татбиқи

Тенгламаси $y = f(x)$ бўлган эгри чизиқда $M(x_1, y_1)$ нуқта берилган бўлиб, унинг учун $y_1 = f(x_1)$ бўлсин (71- расм).

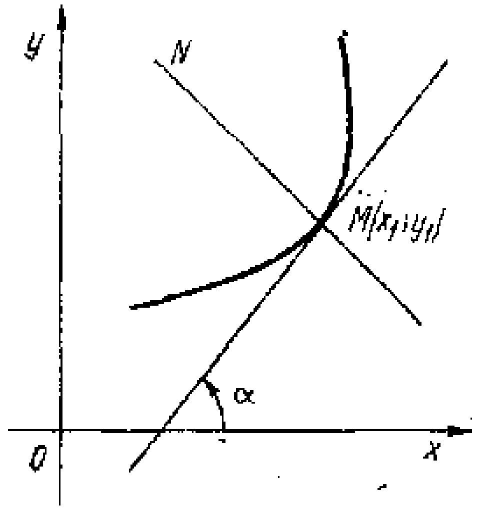
$y = f(x)$ функциянинг $x = x_1$ даги ҳосиласи берилган эгри чизиққа унинг $x = x_1$ абсциссали нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $k_{x=x_1} = y'_{x=x_1} = f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha$ га тенг. Бу ерда α — эгри чизиққа унинг $M(x_1; y_1)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги.

Берилган $y=f(x)$ эгри чизиқнинг $M(x_1;\ y_1)$ нуқтаси ўтказилган уринманинг тенгламаси қуйидаги кўриниш эга:

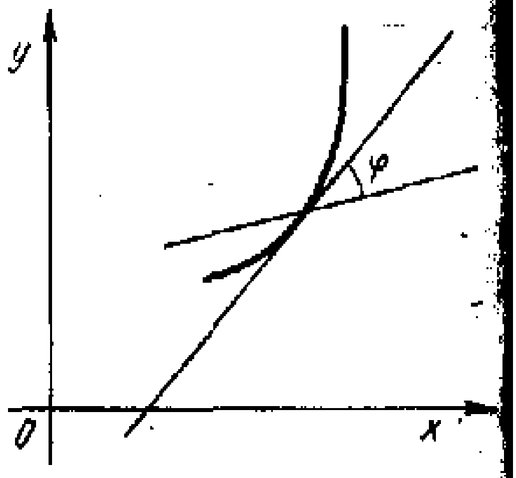
$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1). \qquad (6.13)$$

Бу тенглама берилган $M(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи в берилган k бурчак коэффициентли тўғри чизиқнинг тенгламасидан олинган, бу ерда

$$k_{x=x_1} = f'(x_1).$$



71- расм.



72- расм.

$y=f(x)$ эгри чизиққа унинг $M(x_1;\ y_1)$ нуқтасида ўтказилган нормаль деб уринмага унинг эгри чизиқ билан уриниш нуқтаси $M(x_1;\ y_1)$ да ўтказилган перпендикулярга айтилади.

MN нормалнинг (71- расм) тенгламаси қуйидагича бўлади:

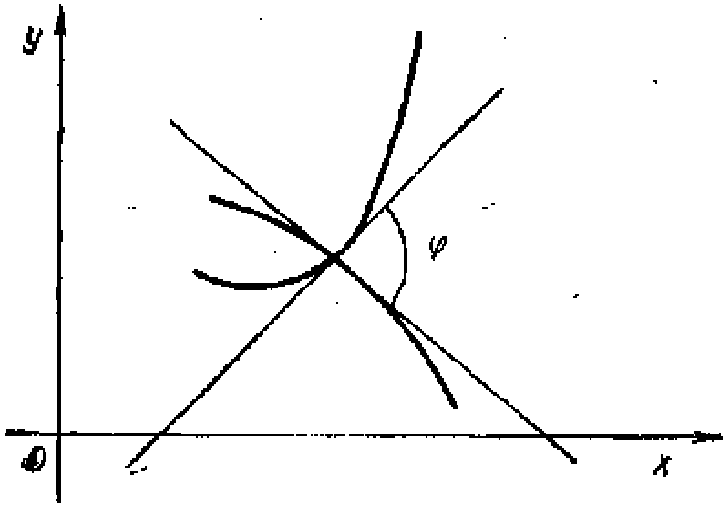
$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1). \qquad (6.14)$$

(6.14) тенглама (6.13) тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқнинг тенгламасидир: иккита тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартидан

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

га эгамиз, бу ерда $k_1 = f'(x_1)$ ва $k_2 = -\frac{1}{f'(x_1)}$.

Эгри чизиқнинг унинг ҳар бир нуқтасидаги йўналиши унга ана шу нуқтада ўтказилган уринманинг йўналиши билан аниқланади, шу сабабли эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги оғиш бурчагини топиш учун шу нуқтага ўтказил-



73- расм.

ган уринма билан Ox ўқ орасидаги бурчакни ҳисоблаш керак.

Ўзаро кесишувчи тўғри чизиқ ва эгри чизиқ орасидаги бурчак деб бу тўғри чизиқ ва уларнинг кесишган нуқтасидан ўтказилган уринма орасидаги бурчакка айтилади (72-расм).

Кесишувчи иккита эгри чизиқ орасидаги бурчак деб бу эгри чизиқларга уларнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади (73-расм).

I. Берилган эгри чизиққа берилган нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини ҳисоблаш

680. $y = 2x^2$ параболага абсциссаси бирга тенг бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

Ечилиши. $y = 2x^2$ параболага ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топиш учун $y = 2x^2$ функциянинг ҳосиласини топамиз ва ҳосилани $x = 1$ даги қийматини ҳисоблаймиз:

$$y' = 2(x^2)' = 4x; \quad y'_{x=1} = 4\cdot 1 = 4; \quad k = \operatorname{tg}\alpha = y'_{x=1} = 4.$$

681. $y = -x^2 + x$ параболага $x = -2$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

682. $y = x^2 - 3x + 2$ параболага $x = 3$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

II. Берилган эгри чизиқнинг берилган нуқтадаги оғиш бурчагини (уринманинг Ox ўққа оғиш бурчагини) ҳисоблаш

683. $y = x^2 - x + 1$ параболанинг $x = -1$ нуқтада Ox ўққа оғиш бурчагини топинг.

Ечилиши. Эгри чизиқнинг унинг берилган нуқтасидаги оғиш бурчагини топиш учун шу нуқтага ўтказилган уринманинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини топамиз:

1. $y = x^2 - x + 1$ функциянинг $x = -1$ нуқтадаги ҳосиласини топамиз:

$$y' = 2x - 1;\ y'_{x=-1} = 2(-1) - 1 = -3.$$

2. Уринманинг Ox ўққа оғиш бурчагини топамиз:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = y'_{x=-1} = -3;\ \operatorname{tg}\alpha = -3;\ \alpha = 108^\circ 26'.$$

684. $y = x^2 - 2x$ параболанинг $x = 2$ нуқтадаги оғиш бурчагини топинг.

685. $y = x^3$ эгри чизиққа $x = -2$ нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўққа оғиш бурчагини топинг.

III. Берилган эгри чизиққа берилган нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаларини тузиш

686. $y = 3x^2 - x$ параболага $x = -1$ нуқтада уринма ва нормаль ўтказилган. Уларнинг тенгламаларини тузинг.

Ечилиши. Уринманинг тенгламасини тузиш учун у ўтадиган M нуқтанинг ординатасини ва уринманинг бурчак коэффициентини топамиз.

1. Уриниш нуқтасининг ординатасини парабола тенгламасига $x = -1$ қийматни қўйиб топамиз:

$$y_{x=1} = 3\cdot(-1)^2 - (-1) = 4;\ M(-1;\ 4).$$

2. k бурчак коэффициентни ҳисоблаймиз:

$$k_{x=-1} = y'_{x=-1} = (3x^2 - x)'_{x=-1} = (6x - 1)_{x=-1} =$$
$$= 6\cdot(-1) - 1 = -7.$$

3. (6.13) тенгламага $M(-1;\ 4)$ нуқтанинг координаталарини ва $k = -7$ қийматни қўйиб, уринманинг тенгламасини тузамиз:

$$y - 4 = -7(x + 1),\ 7x + y + 3 = 0.$$

4. (6.14) тенгламага нормаль ўтадиган $M(-1;\ 4)$ уриниш нуқтасининг координаталарини ва бурчак коэффициентнинг

қиймати $k_{x=-1} = -7$ ни қўйиб, нормалнинг тенгламасини тузамиз:

$$y - 4 = -\frac{1}{-7}(x + 1) \text{ ёки } x - 7y + 29 = 0.$$

687. $y = x^2 - 7x + 10$ параболага $x = 4$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаларини тузинг.

688. $y = 2x^3$ эгри чизиққа $x = -1$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаларини тузинг.

IV. Берилган эгри чизиқнинг бирор нуқтасидан ўтказилган уринма *Ox* ўқ билан берилган бурчак ташкил этади. Ана шу нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш

689. Берилган $y = x^2 - x - 12$ параболада шундай нуқтанинг координаталарини топингки, параболага бу нуқтада ўтказилган уринма *Ox* ўқ билан 45° ли бурчак ташкил этсин.

Ечилиши. 1. Изланаётган нуқтада ўтказилган уринманинг *Ox* ўққа оғиш бурчагини топамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = (x^2 - x - 12)' = 2x - 1.$$

2. α бурчак шартга кўра 45° га тенг, демак, $\operatorname{tg} 45^\circ = 2x - 1$ ёки $1 = 2x - 1$, бу ердан $x = 1$.

3. Изланаётган нуқтанинг ординатасини топамиз:

$$y_{x=1} = (x^2 - x - 12)_{x=1} = 1^2 - 1 - 12 = -12;$$

$$M(1;\ -12).$$

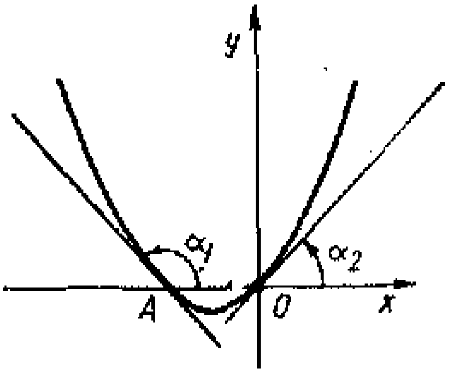
690. Берилган $y = x^2 + 3x - 10$ параболада шундай нуқтанинг координаталарини топинг-ки, параболага бу нуқтада ўтказилган уринма *Ox* ўқ билан 135° ли бурчак ташкил этсин.

V. Берилган эгри чизиқнинг *Ox* ўқ билан кесишишидан ҳосил бўлган бурчакни ҳисоблаш

691. *Ox* ўқ $y = x^2 + x$ параболани қандай бурчак остида кесиб ўтишини аниқланг.

Ечилиши. 1. $y = x^2 + x$ параболанинг *Ox* ўқ билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топамиз. Бунинг учун қуйидаги системани ечамиз:

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 0. \end{cases}$$



74- расм.

Бу системанинг илдизлар
$x_1 = -1$; $x_2 = 0$.

Парабола Ox ўқни $A(-$
0) ва $O(0;\ 0)$ нуқталарда ке
сиб ўтади (74- расм).

2. Параболага $A(-1;\ 0)$ в
$O(0,\ 0)$ нуқталарда ўтказилга
уринмаларнинг бурчак коэффи
циентларини топамиз:
$y' = (x^2+x)' = 2x+1$; $k_{x=-1} =$
$= 2\cdot(-1)+1 = -1$; $k_{x=0} =$
$= 2\cdot 0 + 1 = 1$.

3. Параболанинг Ox ўқ билан кесишган нуқталарида уринмалар Ox ўқ билан ҳосил қилган α_1 ва α_2 бурчакларни ҳисоблаймиз: $\operatorname{tg}\alpha_1 = -1$, $\alpha_1 = 135°$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = 45°$.

692. $y = x^2 + 2x - 8$ парабола Ox ўқни қандай бурчак остида кесиб ўтишини аниқланг.

VI. Параболанинг бирор нуқтасидан ўтказилган уринма берилган тўғри чизиққа параллел (перпендикуляр). Ана шу нуқтани топиш

693. $y = x^2 - 2x - 8$ параболада шундай M нуқтани топингки, бу нуқтадан параболага ўтказилган уринма $4x+y+4=0$ тўғри чизиққа параллел бўлсин.

Ечилиши. 1. $y = x^2 - 2x - 8$ параболага ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

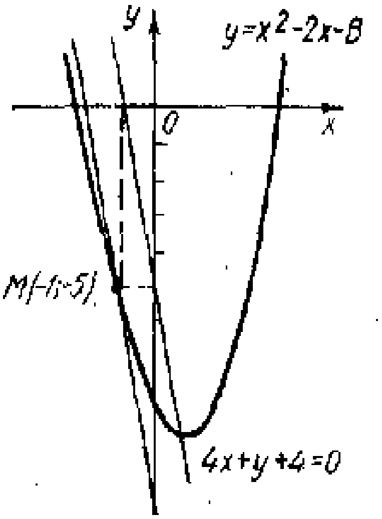
$$k = y' = (x^2 - 2x - 8)' = 2x - 2.$$

2. $4x + y + 4 = 0$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$y = -4x - 4;\ k = -4.$$

3. Параболага ўтказилган уринма ва $4x + y + 4 = 0$ тўғри чизиқ ўзаро параллел, демак, уларнинг бурчак коэффициентлари тенг: $2x - 2 = -4$, бу ердан уриниш нуқтасининг абсциссаси: $x = -1$. Уриниш нуқтаси M нинг ординатасини парабола тенгламасидан топамиз:

$$y_{x=-1} = (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 8 = -5;$$
$M(-1;\ -5)$. (75- расм).



75- расм.

694. $y = -x^2 + 7x - 10$ параболада шундай нуқтани топингки, бу нуқтадан параболага ўтказилган уринма $x + y - 1 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлсин.

695. $y = -x^2 + 4$ параболанинг қайси нуқтасидан ўтказилган уринма $x - 2y + 2 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади?

VII. Берилган тўғри чизиқ ва берилган эгри чизиқ кесишганда ҳосил бўладиган бурчакларни ҳисоблаш

696. $x^2 - 4y = 0$ парабола ва $x - 2y + 4 = 0$ тўғри чизиқ кесишганда ҳосил бўладиган ўткир бурчакларни ҳисобланг.

Ечилиши. 1. Парабола ва тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топамиз; бунинг учун

$$\begin{cases} x^2 - 4y = 0, \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз.

Бу системанинг илдизлари: $x_1 = -2$, $y_1 = 1$ ва $x_2 = 4$, $y_2 = 4$, демак, парабола ва тўғри чизиқ $A(-2;\ 1)$ ва $B(4;\ 4)$ нуқталарда кесишади (76-расм).

2. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$x - 2y + 4 = 0;\ y = \frac{1}{2}x + 2,\ k = \frac{1}{2}.$$

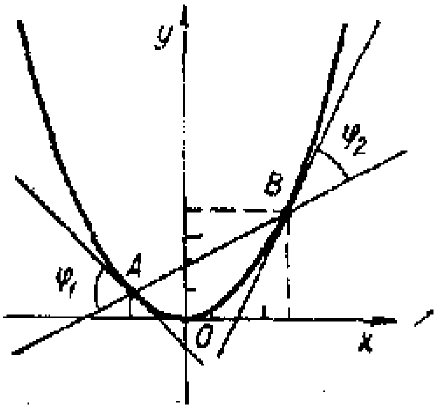
3. $A(-2;\ 1)$ ва $B(4;\ 4)$ нуқталардан ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентларини ҳисоблаймиз.

Параболанинг $x^2 - 4y = 0$ тенгламасини $y = \frac{1}{4}x^2$ кўринишда қайта ёзиб оламиз; $k = y' = \frac{1}{2}x$.

$A(-2;\ 1)$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $k_{x=-2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$;

$B(4;\ 4)$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $k_{x=4} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

4. Кесишувчи тўғри чизиқ ва эгри чизиқ орасидаги бурчак тўғри чизиқ билан унинг эгри чизиқ билан кесишган нуқтасидан эгри чизиққа ўтказилган уринма орасидаги бурчак деб аниқланади.



76- расм.

Шу сабабли, A нуқтадаги бурчакни бурчак коэффициентлари $k_1 = -1$ (A нуқтадан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти) ва $k_2 = \frac{1}{2}$ (тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти) бўлган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак каби топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)} = 3, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} 3.$$

Мос равишда B нуқтадаги бурчакни ҳам $k_1 = \frac{1}{2}$ ва $k_2 = 2$ бурчак коэффициентларга кўра топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

697. $y^2 - x = 0$ параболанинг $x + y - 6 = 0$ тўғри чизиқ билан кесишишидан ҳосил бўлган ўткир бурчакларни ҳисобланг.

VIII. Берилган иккита эгри чизиқ кесишганда ҳосил бўлган бурчакларни ҳисоблаш

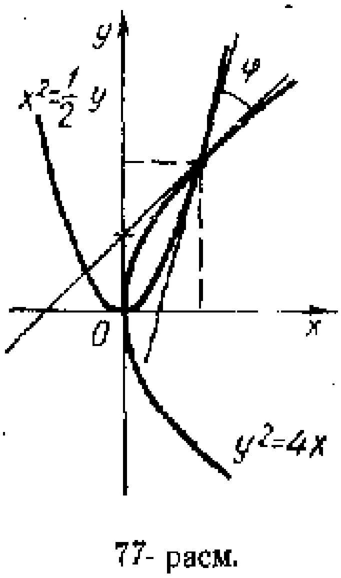
698. $y^2 = 4x$ ва $x^2 = \frac{1}{2}y$ параболанинг кесишишидан ҳосил бўлган ўткир бурчакларни ҳисобланг.

Ечилиши. 1. Параболаларнинг кесишиш нуқталарини топамиз, бунинг учун

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x^2 = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз.

Бу системанинг илдизлари: $x_1 = 0, y_1 = 0$ ва $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, демак, параболалар (0; 0) ва (1; 2) нуқталарда кесишади (77- расм).



77- расм.

2. Ўзаро кесишувчи иккита эгри чизиқ орасидаги бурчак уларнинг кесишган нуқтаси орқали бу эгри чизиқларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак каби аниқланади. Шу сабабли эгри чизиқларнинг кесишган

нуқтасидан ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентларини топамиз. (0, 0) нуқтада параболаларга уринмалар Ox ва Oy ўқлардан иборат бўлади, бинобарин, бу нуқтада параболалар тўғри бурчак остида кесишади. $y^2=4x$ параболага ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз; тенгламани $y=2\sqrt{x}$ кўринишда қайта ёзиб оламиз (радикал олдида мусбат ишора оламиз, чунки параболалар биринчи чоракда кесишяпти).

$$k=y'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$k_{x=1}=y'_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

$x^2=\frac{1}{2}y$ параболага ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз; парабола тенгламасини $y=2x^2$ кўринишда қайта ёзиб оламиз, сўнгра

$$k=y'=4x;\ k_{x=1}=y'_{x=1}=4\cdot1=4.$$

3. Уринмалар орасидаги φ бурчакни уларнинг бурчак коэффициентлари $k_1=1$ ва $k_2=4$ бўйича

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

формулага кўра топамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{4-1}{1+4\cdot1}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}0{,}6=30°58'.$$

699. $y=x^2$ ва $x=y^2$ параболаларнинг кесишишидан ҳосил бўлган ўткир бурчакларни ҳисобланг.

700. $y^2=4x$ ва $x^2=\frac{27}{2}y$ параболаларнинг кесишишидан ҳосил бўлган ўткир бурчакларни ҳисобланг.

36- §. Аралаш масалалар

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

701. 1) $y=\frac{x+1}{x-1}$; 2) $f(x)=\frac{x^3+1}{x}\cdot f'(1)$ ни топинг; 3) $y=\frac{x^3+1}{x^2+1}$; 4) $f(u)=\frac{1}{u^2+3u+2}\cdot f'(0)$ ни топинг.

702. 1) $s=\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}$; 2) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$. $f'(4)$ ни топинг. 4) $f(x)=\frac{4+\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}\cdot f'(1)$ни топинг.

703. 1) $f(t)=(t^m+t^n)^3$. $f'(1)$ ни топинг; 2) $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right.$
3) $y=\frac{3x^3}{(3x-1)^3}$; 4) $f(x)=(x^2-1)^2\sqrt{x^2+1}$. $f'(\sqrt{3})$ ни
пинг.

704. 1) $f(u)=\sqrt{2+\sqrt{2u}}$. $f'(2)$ ни топинг; 2) $f(x)$
$\sqrt{5x^2+2x+1}$. $f'(-1)$ ни топинг; 3) $y=\sqrt{\frac{1+ax}{1-ax}}$; 4) $f(z)$
$=\frac{\sqrt{4+z^2}}{z}$. $f'(\sqrt{5})$ ни топинг.

705. 1) $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{8+x^3}}$. $f'(1)$ ни топинг; 2) $f(x)$
$=\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}$. $f'(4)$ ни топинг; 3) $f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(\sqrt{3})$
ни топинг; 4) $z=\frac{u}{1-\sqrt{1-u^2}}$.

706. $y=x^2$ парабола ва $x-y+6=0$ тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган ўткир бурчакларни ҳисобланг.

Контрол иш

I вариант

707. Функцияларнинг ҳосилаларини аргументнинг берилган қийматида топинг (1 — 3):

1. $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt[3]{x^4}}+2x+6x^2\sqrt{x}$ $f'(1)$.

2. $f(x)=(x^3-2)\sqrt{x^2+1}$, $f'(\sqrt{3})$.

3. $f(z)=\frac{9z}{\sqrt{z^3+1}}$, $f'(2\sqrt{2})$.

4. Нуқта $s=2t^3-2t^2-4$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда (s м ҳисобида, t сек ҳисобида). Иккинчи секунд охирида нуқтанинг тезланишини топинг.

5. $y=x^2-6x+8$ параболага абсциссаси $x=4$ бўлган нуқтада ўтказилган нормалнинг тенгламасини тузинг.

II вариант

708. Функцияларнинг ҳосилаларини аргументнинг берилган қийматида топинг (1 — 3):

1. $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3x-2x^2\sqrt{x}$, $f'(1)$.

2. $f(u) = (u^2+3)\sqrt{u^2-1}$, $f'(\sqrt{2})$.

3. $f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$, $f'(\sqrt{3})$.

4. Нуқта $s = 2t^3 - 3t^2 + 4$ (бу ерда s м ҳисобида, t сек ҳисобида) қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Учинчи секунд охирида нуқтанинг тезланишини топинг.

5. $y = \dfrac{1}{2}x^2$ ва $x = \dfrac{1}{2}y^2$ параболаларнинг кесишишидан ҳосил бўлган ўткир бурчакни ҳисобланг.

37- §. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

Дифференциаллаш формулалари

$u = \varphi(x)$ шартда		$u = x$ шартда	
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	(6.15)	$(\sin x)' = \cos x$	(6.15а)
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	(6.16)	$(\cos x)' = -\sin x$	(6.16а)
$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\, u'$	(6.17)	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	(6.17а)
$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\, u'$	(6.18)	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	(6.18а)

I. Синуснинг ҳосиласи

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

709. $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ни топинг.

Ечилиши. (6.5), (6.1), (6.8) ва (6.15а) формулалар бўйича топамиз:

$$f'(x) = \frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1+\sin x)'(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 8-6\sqrt{2}.$$

710. 1) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x} \cdot f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ни топинг;

2) $y = x^2 + \sin x$; 3) $y = x \sin x$.

711. $y = \sin(2x^2 + 3)$.

Ечилиши. $2x^2 + 3 = u$ деб, $y = \sin u$ ни ҳосил қил
миз. (6.15) формула бўйича

$$y' = \cos u \cdot u' = \cos(2x^2 + 3)(2x^2 + 3)' =$$
$$= \cos(2x^2 + 3) \cdot 4x = 4x \cos(2x^2 + 3).$$

Синуснинг ҳосиласи шу аргумент косинусини аргумен
ҳосиласига кўпайтмасига тенг эканлигини эсда сақлаш кера

712. 1) $y = \sin 3x$; 2) $f(x) = \sin(4x - 1)$; 3) $s = \sin$
4) $f(\theta) = \sin\frac{\theta}{2}$. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$; 5) $s = \sin\frac{m}{t}$; 6) $y = \sin\sqrt{x}$

713. $y = \sin^3 mx$.

Ечилиши. $mx = u$ деб, $y = \sin^3 u$ ни ҳосил қиламиз.
Бу ерда $\sin^3 u$ ифода $y = (\sin u)^3$ ни билдиради, яъни дар
жани дифференциаллаш керак. (6.10) ва (6.15) формулаларни
бирин-кетин татбиқ қилиб топамиз:

$$y' = 3\sin^2 u (\sin u)';$$

$$y' = 3\sin^2 u \cos u \cdot u' = 3\sin^2 mx \cos mx (mx)';$$
$$y' = 3\sin^2 mx \cos mx \cdot m = 3m \sin^2 mx \cos mx.$$

714. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $t = \sin^3 5\varphi^2$; 3) $y = \sin^2 \frac{1}{x}$; 4) $y =$
$= \sin^3 \sqrt{x}$.

715. $y = \frac{1}{\sin^2 3x}$.

Ечилиши. *1-усул.* (6.11), (6.10) ва (6.15) формулаларни бирин-кетин татбиқ қилиб, топамиз:

$$y' = -\frac{1}{(\sin^2 3x)^2} (\sin^2 3x)';$$
$$y' = \frac{1}{\sin^4 3x} \cdot 2\sin 3x (\sin 3x)';$$
$$y' = -\frac{1}{\sin^4 3x} \cdot 2\sin 3x \cos 3x (3x)';$$
$$y' = -\frac{1}{\sin^4 3x} \cdot 2\sin 3x \cos 3x \cdot 3 - \frac{6\cos 3x}{\sin^3 3x}.$$

2-усул. Манфий кўрсаткич киритамиз:

$$y = \frac{1}{\sin^2 3x} = (\sin 3x)^{-2}.$$

(6.10) ва (6.15) формулалар бўйича топамиз:

$$y' = -2(\sin 3x)^{-3}(\sin 3x)';$$
$$y' = -2(\sin 3x)^{-3}\cos 3x(3x)';$$
$$y' = -2(\sin 3x)^{-3}\cos 3x\cdot 3 = -\frac{6\cos 3x}{\sin^3 3x}.$$

716. 1) $y=\frac{1}{\sin x}$; 2) $y=\frac{1}{\sin 3x}$; 3) $y=\frac{1}{\sin(x^3-1)}$;
4) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$; 5) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$; 6) $y=\frac{1}{\sin^3 2x}$.

717. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Ечилиши. (6.12) ва (6.15) формулаларга кўра топамиз:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}}(\sin 2x)';\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}}\cos 2x(2x)';$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}}\cos 2x\cdot 2 = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} = \operatorname{ctg} 2x\sqrt{\sin 2x}.$$

718. 1) $f(t)=\sqrt{\sin t}$; 2) $y=\sqrt{\sin x^2}$.

719. $y=\sqrt[3]{\sin^2 5x}$.

Ечилиши. Радикални каср кўрсаткич билан алмаштирамиз:

$$y=\sqrt[3]{\sin^2 5x} = (\sin 5x)^{2/3}.$$

(6.10) ва (6.15) формулалар бўйича:

$$y' = \frac{2}{3}(\sin 5x)^{-\frac{1}{3}}(\sin 5x)';\quad y'=\frac{2}{3}(\sin 5x)^{-\frac{1}{3}}\cos 5x(5x)';$$
$$y' = \frac{2}{3}(\sin 5x)^{-\frac{1}{3}}\cos 5x\cdot 5 = \frac{10\cos 5x}{3\sqrt[3]{\sin 5x}}.$$

720. 1) $y=\sqrt[3]{\sin 3x}$; 2) $y=\sqrt[3]{\sin\sqrt{x}}$.

721. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin 3x}}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin^3 x}}$; 3) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

722. 1) $s=4\sin 3t$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг $t=\frac{\pi}{9}$ моментдаги тезлигини топинг (s м ҳисобида, t сек ҳисобида);

2) $v=\sin 2t$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг $t=\frac{\pi}{6}$ моментдаги тезлигини топинг (s м ҳисобида, t сек ҳисобида).

723. $y = \sin x$ эгри чизиққа $x = \frac{\pi}{3}$ нуқтада ўтказилга уринманинг Ox ўққа оғиш бурчагини топинг.

Ечилиши. $y = \sin x$ функциянинг $x = \frac{\pi}{3}$ даги ҳосиласини топамиз:

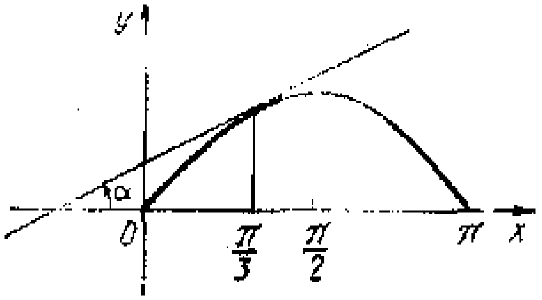
$$y' = \cos x,\ y'_{x=\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Уринманинг $x = \frac{\pi}{3}$ нуқтадаги оғиш бурчагининг тангенси $\frac{1}{2}$ га тенг, яъни $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, бу ердан $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ (78- расм)

724. $y = \sin x$ эгри чизиққа $x = \frac{2\pi}{3}$ нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўққа оғиш бурчагини топинг.

725. $y = \sin x\ \left((0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ эгри чизиққа ўтказилган уринма Ox ўқ билан $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ бурчак ташкил этади. Уриниш нуқтасининг координаталарини топинг.

726. $y = \sin x$ эгри чизиқ Ox ўқни $x = \pi$ нуқтада қандай бурчак остида кесиб ўтишини топинг.



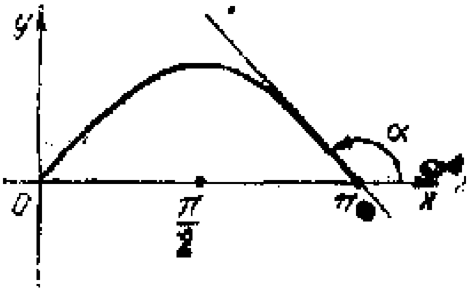
78- расм.

Ечилиши. 1. Синусоидага $x = \pi$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$\underset{x=\pi}{k} = (\sin x)'_{x=\pi} = (\cos x)_{x=\pi} = \cos\pi = -1.$$

2. Уринма $x = \pi$ нуқтада ҳосил қиладиган бурчакни топамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = -1,\ \alpha = \frac{3\pi}{4}$$ (79- расм).



79- расм.

727. $y = \sin x$ эгри чизиқ Ox ўқни $x = 0$ нуқтада қандай бурчак остида кесиб ўтишини топинг.

728. $y = \sin 3x$ эгри чизиққа $\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. 1. $y=\sin 3x$ эгри чизиққа $\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k=y'=3\cos 3x;\quad k_{x=\frac{\pi}{3}}=3\cos 3\cdot\frac{\pi}{3}=3\cos\pi=-3.$$

2. Уринманинг тенгламасини тузамиз:

$$y-0=-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right);\quad 3x+y-\pi=0.$$

3. Нормалнинг тенгламасини тузамиз:

$$y-0=-\frac{1}{-3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right);\quad 3x-9y-\pi=0.$$

729. $y=\sin\frac{1}{3}x$ эгри чизиққа $\left(\pi;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

II. Косинуснинг ҳосиласи

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

730. $f(x)=\frac{\cos x+1}{\cos x-1}\cdot f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ни топинг.

Ечилиши. (6.5), (6.1), (6.8) ва (6.16a) формулалар бўйича топамиз:

$$f'(x)=\frac{(\cos x+1)'(\cos x-1)-(\cos x-1)'(\cos x+1)}{(\cos x-1)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x(\cos x-1)-(-\sin x)(\cos x+1)}{(\cos x-1)^2}=\frac{2\sin x}{(\cos x-1)^2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\left(\cos\frac{\pi}{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=4\sqrt{3}.$$

731. 1) $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ни топинг; 2) $y=2\sin x-\cos x+3$; 3) $y=3\sin x+\cos x-x$; 4) $f(x)=2\sin x-2\cos x$. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ни топинг.

732. 1) $f(t)=\sin t\cos t$; 2) $f(x)=\sin x(1-\cos x)$; 3) $y=x\cos x$; 4) $f(x)=\cos x(1+\sin x)$.

733. $y=\cos(x^2-3)$.

Ечилиши. (6.16) формулага кўра:

$$y' = -\sin(x^2-3)(x^2-3)';$$
$$y' = -\sin(x^2-3)\cdot 2x = -2x\sin(x^2-3).$$

Косинуснинг ҳосиласи ўша аргументнинг минус ишор билан олинган синусини бу аргумент ҳосиласига кўпайтирилганига тенг эканлигини ёдда тутиш керак.

734. 1) $y = \cos x^3$; 2) $y = \cos\frac{1}{x^3}$; 3) $y = \cos\sqrt{2x}$.

735. 1) $y = \cos^3 x$; 2) $y = \cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $y = \cos^2\sqrt[3]{x}$.

736. 1) $y = \frac{1}{\cos 2x}$; 2) $y = \frac{1}{\cos\sqrt{3x}}$; 3) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$;

4) $y = \frac{1}{\cos^3(x^2-1)}$.

737. 1) $y = \sqrt{\cos 2x}$; 2) $y = \sqrt{\cos x^3}$; 3) $y = \sqrt{\cos\sqrt{2x}}$.

738. 1) $y = \sqrt[3]{\cos x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x^2}}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x^3}}$.

739. $y = (1+\sin 2x)\cos 2x$.

Ечилиши. Кўпайтмадан ҳосила олиш қоидаси бўйича топамиз:

$$y' = (1+\sin 2x)'\cos 2x + (\cos 2x)'(1+\sin 2x).$$

Сўнгра йиғиндини дифференциаллаш қоидасидан ҳамда (6.15) ва (6.16) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$y' = 2\cos 2x\cos 2x - 2\sin 2x(1+\sin 2x) = 2\cos^2 2x -$$
$$-2\sin 2x - 2\sin^2 2x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 2x) - 2\sin 2x =$$
$$= 2(\cos 4x - \sin 2x).$$

740. 1) $y = (1-\cos 2x)\sin 2x$; 2) $y = \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$; 3) $f(x) = \cos^3 x\cdot\sin x$. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ни топинг.

741. $s = -2\cos 2t$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг $t = \frac{\pi}{6}$ моментдаги тезлиги ва тезланишини топинг.

742. $y = \cos 3x$ эгри чизиққа $\left(\frac{\pi}{6};\ 0\right)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

III. Тангенснинг ҳосиласи

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

743. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x}$. $\quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ни топинг.

Ечилиши. (6.5), (6.17 а) ва (6.8) формулалар бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg} x - 1)}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}; \; f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}.$$

744. 1) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$; 2) $y = \operatorname{tg} x - x$; 3) $f(u) = u \operatorname{tg} u$; 4) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$. $f'(\pi)$ ни топинг.

745. $y = \operatorname{tg}(2x^2 + 1)$.

Ечилиши. (6.17) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{1}{\cos^2(2x^2 + 1)}(2x^2 + 1)';$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(2x^2 + 1)} \cdot 4x = \frac{4x}{\cos^2(2x^2 + 1)}.$$

746. 1) $y = \operatorname{tg}(ax + b)$; $\quad$ 2) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$; $\quad$ 3) $y = \operatorname{tg} x^2$; 4) $y = \operatorname{tg}\sqrt{2x}$.

747. 1) $y = \operatorname{tg}^2 3x$; 2) $y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$.

748. $y = \operatorname{tg} x \sin^2 x$.

Ечилиши. Кўпайтманинг ҳосиласини топиш формуласига кўра:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' \sin^2 x + (\sin^2 x)' \operatorname{tg} x.$$

(6.15) ва (6.17) формулалар бўйича:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \operatorname{tg} x.$$

Соддалаштирсак,

$$y' = \operatorname{tg}^2 x + 2 \sin x \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}^2 x + 2 \sin^2 x.$$

749. 1) $y = 3x - \operatorname{tg} 3x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x \sin x$. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ни топинг; 3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$.

750. 1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}}$. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ни топинг. 2) $y =$
$= \frac{1-\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}2x}$.

751. $y = \operatorname{tg} x$ эгри чизиққа $x = \frac{\pi}{3}$ нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўққа оғиш бурчагини топинг.

752. $y = \operatorname{tg} x$ эгри чизиқ Ox ўқни $x = \frac{\pi}{4}$ нуқтада қандай бурчак остида кесиб ўтишини топинг.

IV. Котангенснинг ҳосиласи

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

753. $y = \operatorname{ctg} x + x$.

Ечилиши. (6.1), (6.18 а) ва (6.9) формулаларга биноан топамиз:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} + 1 = \frac{-1+\sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x.$$

754. 1) $f(x) = \frac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ни топинг.

755. $y = \operatorname{ctg}(ax + b)$.

Ечилиши. (6.18) формула бўйича:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2(ax+b)}(ax+b)'; \quad y' = -\frac{a}{\sin^2(ax+b)}.$$

756. 1) $y = \operatorname{ctg} x^3$; 2) $y = \operatorname{ctg}\frac{x^2}{2}$; 3) $y = \operatorname{ctg}\frac{1}{x^3}$;
4) $y = \operatorname{ctg}\sqrt{2x}$.

757. 1) $y = \operatorname{ctg}^3 x$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} 2x}$; 3) $y = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\times$
$\times \operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}$.

758. 1) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$.

38-§. Логарифмик функцияларнинг ҳосилалари

Дифференциаллаш формулалари.

$u = \varphi(x)$ *шартда*		$u = x$ *шартда*	
$(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$	(6.19)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	(6.19a)
$(\lg u)' (0,4343 \ln u)' = \frac{0,4343}{u} u'$	(6.20)	$(\lg x)' = \frac{0,4343}{x}$	(6.20a)

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

759. $y = x + \ln x$; 2) $y = 5 \lg x$.

Ечилиши. 1. (6.1), (6.9) ва (6.19 а) формулаларга кўра топамиз:

$$y' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

2. (6.4) ва (6.20а) формулаларга мувофиқ дифференциаллаймиз:

$$y' = 5 \cdot \frac{0,4343}{x} = \frac{2,1715}{x}.$$

760. 1) $f(x) = 3 \ln x - x^2$. $f'(1)$ ни топинг; 2) $f(x) = \lg x + x^3$. $f'(-1)$ ни топинг; 3) $u = x^2 \ln x$; 4) $y = (1 - \ln x)x$; 5) $f(z) = z^3 - 3 \ln z$. $f'(3)$ ни топинг.

761. $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$.

Ечилиши. (6.5), (6.19 а) ва (6.8) формулаларга кўра топамиз:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(1 - \ln x) - (1 - \ln x)' \ln x}{(1 - \ln x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) + \frac{1}{x} \ln x}{(1 - \ln x)} = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}.$$

762. 1) $y = \frac{\ln x - 2}{\ln x}$; 2) $y = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$.

763. $y = \ln (ax^2 + b)$.

Ечилиши. (6.19) формулага кўра топамиз:

$$y' = \frac{1}{ax^2+b}(ax^2+b)';$$

$$y' = \frac{1}{ax^2+b}\cdot 2ax = \frac{2ax}{ax^2+b}.$$

Натурал логарифмнинг ҳосиласи логарифм белгиси остида турган ифодага тескари ифодани бу ифоданинг ҳосиласига кўпайтирилганига тенг эканлигини ёдда сақлаш керак.

764. 1) $y = \ln 3x$; 2) $y = \ln(2x^2-3)$.

765. $f(x) = \ln\frac{a-x}{a+x}$. $f'(2a)$ ни ҳисобланг.

Ечилиши. *1-усул.* (6.19) формулага кўра топамиз:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{a-x}{a+x}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)'.$$

Бўлинмани дифференциаллаш қоидасига кўра:

$$f'(x) = \frac{a+x}{a-x}\,\frac{(a-x)'(a+x)-(a+x)'(a-x)}{(a+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{a-x}\,\frac{-(a+x)-(a-x)}{a+x} = \frac{1}{a-x}\,\frac{-a-x-a+x}{a+x} =$$

$$= \frac{-2a}{a^2-x^2} = \frac{2a}{x^2-a^2};$$

$$f'(2a) = \frac{2a}{(2a)^2-a^2} = \frac{2a}{4a^2-a^2} = \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}.$$

2-усул. Касрни логарифмлаймиз:

$$f(x) = \ln(a-x) - \ln(a+x).$$

(6.1), (6.19), (6.8) ва (6.9) формулалар бўйича:

$$f'(x) = \frac{1}{a-x}(a-x)' - \frac{1}{a+x}(a+x)' =$$

$$= -\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x} = \frac{2a}{x^2-a^2}.$$

Ҳосила топишнинг иккинчи усули биринчи усулга қараганда анча соддадир, чунки касрнинг ҳосиласи формуласини татбиқ этишга ҳожат қолмайди.

Логарифмик функциянинг ҳосиласини топишни осонлаштириш учун дастлаб логарифм белгиси остида турган ифодани логарифмланади.

766. 1) $y = \ln\frac{x+1}{x-1}$; 2) $y = \ln\frac{2}{2+x}$.

767. $y = \lg(5x^2+1)$.

Ечилиши. (6.20) формулага кўра топамиз:

$$y' = \frac{0,4343}{5x^2+1}(5x^2+1)';$$

$$y' = \frac{0,4343}{5x^2+1}\cdot 10x = \frac{4,343x}{5x^2+1}.$$

768. 1) $y = \lg 10x$; 2) $y = \lg(2x+1)$.

769. $y = \ln\sqrt{2x}$.

Ечилиши. Квадрат илдизни логарифмлаймиз:

$$y = \frac{1}{2}\ln(2x) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln x.$$

(6.1), (6,8) ва (6.19 а) формулаларга кўра

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

ни ҳосил қиламиз.

770. 1) $y = \ln\sqrt{2x-1}$; 2) $y = \ln\sqrt{x^2-a^2}$; 3) $y = \lg\sqrt{x^2+4}$; 4) $y = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

771. 1) $y = \ln\sin x$; 2) $y = \ln\cos x$; 3) $y = \ln\operatorname{tg} x$; 4) $y = \ln\operatorname{ctg} x$; 5) $f(x) = \ln\sin\frac{x}{3}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ни ҳисобланг. (6) $y = \ln\cos^2 x$.

772. 1) $y = \ln\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}$; 2) $y = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$.

773. $y = \ln^2(x^2-1)$.

Ечилиши. (6.10) ва (6.19) формулаларга кўра:

$$y' = 2\ln(x^2-1)[\ln(x^2-1)]';$$

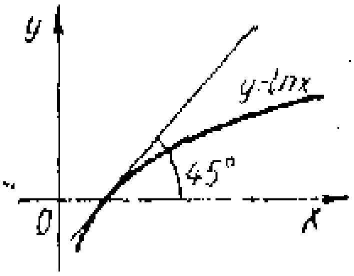
$$y' = 2\ln(x^2-1)\,\frac{1}{x^2-1}(x^2-1)';\ y' = 2\ln(x^2-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x =$$

$$= \frac{4x\ln(x^2-1)}{x^2-1}.$$

774. 1) $y = \ln^3 3x$; 2) $y = \ln^2(2x+1)$; 3) $y = \ln^2\sqrt{\sin x}$.

775. $y = \ln x$ эгри чизиқ Ox ўқни қандай бурчак остида кесиб ўтишини топинг.

Ечилиши. 1. $y = \ln x$ эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасини топамиз. Бу нуқтада $\ln x = 0$, бу ердан $x = 1$ (80-расм).



80-расм.

2. Уринманинг $x = 1$ нуқтадаги бурчак коэффициенти топамиз:

$$(\ln x)'_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=1} = \frac{1}{1} = 1.$$

3. $y = \ln x$ эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасида уринма ҳосил қилган бурчакни топамиз:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \alpha = 45^\circ.$$

776. $y = \lg x$ эгри чизиқ Ox ўқни қандай бурчак остида кесиб ўтишини аниқланг.

777. $y = \lg x$ эгри чизиқ билан $y = 1$ тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган ўткир бурчакни ҳисобланг.

39-§. Кўрсаткичли функцияларнинг ҳосилалари

Дифференциаллаш формулалари.

$u = \varphi(x)$ шартда		$u = x$ шартда	
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	(6.21)	$(a^x)' = a^x \ln a$	(6.21a)
$(e^u)' = e^u u'$	(6.22)	$(e^x)' = e^x$	(6.22a)

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

778. $y = 2 \cdot 5^x + 3e^x$.

Ечилиши. (6.1), (6.21a), (6.22a) ва (6.4) формулаларга кўра топамиз:

$$y' = 2 \cdot 5^x \ln 5 + 3e^x = 2 \ln 5 \cdot 5^x + 3e^x$$

779. 1) $f(x) = \ln x \cdot e^x$; 2) $f(x) = x^2 e^x$; 3) $f(x) = e^x - xe^x$; 4) $y = 3^x e^x$; 5) $y = \frac{e^x}{2^x}$; 6) $f(x) = 5 \ln x + e^x$. $f'(1)$ ни топинг.

780. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$. $f'(-1)$ ни топинг.

Ечилиши. *I-усул.* (6.5), (6.1), (6.22a) ва (6.9) формулаларга биноан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)'(e^x - 1) - (e^x - 1)'(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^2} = -\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2};$$

$$f'(-1) = -\frac{2e^{-1}}{(e^{-1}-1)^2} = -\frac{2e}{(1-e)^2}.$$

2-усул. Функцияни логарифмлаб логарифмнинг ҳосиласини топамиз:

$$\ln f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x-1);$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}.$$

$f'(x)$ ни топамиз:

$$f'(x) = f(x)\frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)} = \frac{e^x+1}{e^x-1}\,\frac{-2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)} = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

781. 1) $y = \frac{5-e^x}{e^x+2}$; 2) $y = \frac{1-e^x}{e^x}$.

782. $y = 3^{2x^2}$.

Ечилиши. (6.21) формулага кўра:

$$y' = 3^{2x^2}\ln 3\cdot(2x^2)'; \quad y' = 3^{2x^2}\ln 3\cdot 4x = 4x\cdot 3^{2x^2}\ln 3.$$

783. 1) $y = 5^{x^2}$; 2) $y = 2^{\sqrt{x}}$; 3) $y = 3^{\ln x}$; 4) $y = 2^{-\cos x}$.

784. $y = e^{2x}$.

Ечилиши. (6.22) формулага кўра:

$$y' = e^{2x}(2x)'; \quad y' = e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x}.$$

785. 1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = e^{\sqrt{x}}$; 3) $y = e^{\ln x}$; 4) $f(x) = e^{\sin x}$. $f'(\pi)$ ни топинг.

786. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Ечилиши. Бўлинманинг ҳосиласини топиш қоидасига кўра топамиз:

$$y' = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x})'(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Йиғиндидан ҳосила олиш қоидасига ва (6.22) формулага кўра:

$$y' = \frac{[e^x - e^{-x}(-x)'](e^x + e^{-x}) - [e^x + e^{-x}(-x)'](e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2};$$

$$y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{4e^0}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

787. 1) $y = 3\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{\frac{x}{3}}\right)$; 2) $y = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}}$.

788. $y = e^{\sqrt{3}x}$ эгри чизиқ Oy ўқни қандай бурчак остида кесиб ўтишини аниқланг.

40- §. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

Дифференциаллаш формулалари

$u = \varphi(x)$ шартда		$u = x$ шартда	
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ $\|u\| < 1$	(6.23)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\|x\| < 1$	(6.23a)
$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ $\|u\| < 1$	(6.24)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(6.24a)
$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2}u'$	(6.25)	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	(6,25a)
$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$	(6.26)	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	(6.26a)

1. Арксинус ва арккосинуснинг ҳосилалари

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

789. $f(x) = 5\arcsin x - 3\arccos x$. $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ни топинг.

Ечилиши. (6.1), (6.23a) ва (6.24a) формулаларни қўллаб, топамиз:

$$f'(x) = \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}};\ f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ = \frac{8}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = 16.$$

790. 1) $f(x) = 2\arcsin x + \arccos x$. $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ни топинг; 2) $f(x) = 5\arcsin x + 2\arccos x$. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ни топинг; 3) $y = x \times$ $\times (\arcsin x + \arccos x)$.

791. $y = \arcsin 2x$.

Ечилиши. (6.23) формулага кўра:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)';\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

792. 1) $y = \arcsin 3x$; 2) $y = \arccos \frac{x}{a}$; 3) $y = \arcsin x^2$; 4) $y = \arccos ax$.

793. $y = \arccos\sqrt{2x}$.

Ечилиши. (6.24) ва (6.12) формулаларга биноан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}(\sqrt{2x})';$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\frac{1}{2\sqrt{2x}}(2x)';$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\frac{1}{\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{(1-2x)}}.$$

794. 1) $y = \arcsin\sqrt{3x}$; 2) $y = \arccos\sqrt{x-1}$; 3) $y = \arcsin\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

II. Арктангенс ва арккотангенснинг ҳосилалари

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

795. $f(x) = 3\,\mathrm{arctg}\, x - 2\,\mathrm{arcctg}\, x$. $f'(2)$ ни топинг.

Ечилиши. (6.1), (6.25а) ва (6.26а) формулаларга биноан топамиз:

$$f'(x) = \frac{3}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{5}{1+x^2},\ f'(2) = \frac{5}{1+2^2} = 1$$

796. 1) $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$. $f'(\sqrt{3})$ ни топинг; 2) $y = x(\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x)$.

797. $y = \mathrm{arctg}\, 2x$.

Ечилиши. (6.25) формулага кўра:

$$y' = \frac{1}{1+(2x)^2}(2x)';\quad y' = \frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2}.$$

798. 1) $y = \operatorname{arctg} x^2$; 2) $y = \operatorname{arcctg} 3x$; 3) $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x}$; 4) $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}$.

799. $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{2x}$.

Ечилиши. $y' = -\frac{1}{1+(\sqrt{2x})^2}(\sqrt{2x})' = -\frac{1}{1+2x} \times$ $\times \frac{1}{2\sqrt{2x}}(2x)' = -\frac{1}{1+2x}\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2 = -\frac{1}{(1+2x)\cdot\sqrt{2x}}$.

800. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

801. 1) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$.

41-§. Ошкормас функциянинг ҳосиласи

x ва y ўзгарувчиларни ўз ичига олган тенглама билан берилган $F(x, y) = 0$ функция x нинг ошкормас функцияси дейилади.

Масалан, $xy + x - 1 = 0$, $xy + 1 = \cos y$ ва $\ln y = xy + x^2$ функциялар ошкормас функциялардир.

Баъзи ҳолларда $F(x, y) = 0$ тенгламани y га нисбатан ечиш мумкин, у ҳолда y функция x орқали ошкор ифодаланган бўлади. Масалан, биринчи мисолда $y = \frac{1-x}{x}$, яъни функциянинг $F(x, y) = 0$ ошкормас ҳолда берилишидан $y = f(x)$ ошкор ҳолда берилишига ўтдик.

Айрим ҳолларда (иккинчи ва учинчи мисоллардагига ўхшаш) бундай ўтишни амалга ошириб бўлмайди.

Функция ошкормас усулда берилганида y дан x бўйича ҳосила қуйидаги қоида бўйича топилади:

1) y ни x нинг функцияси деб қараб, $F(x, y) = 0$ функциянинг ҳосиласини топамиз;

2) ҳосил қилинган тенгламани y' га нисбатан ечиб, ошкормас функциянинг ҳосиласини $y' = f(x, y)$ кўринишида ҳосил қиламиз.

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

802. $3y + 5x^3 - 2 = 0$.

Ечилиши. Алгебраик йиғиндини дифференциаллаш қоидасига биноан:

$$(3y)' + (5x^3)' - (2)' = 0.$$

y ни x нинг функцияси деб қараб, x бўйича ҳосилани топамиз:

$$3y' + 15x^2 = 0.$$

Сўнгги тенгламани y' га нисбатан ечиб,

$$y' = -5x^2$$

ни ҳосил қиламиз.

803. 1) $2x^2 - 5y + x = 0$; 2) $2y - x - x^2 + 1 = 0$.

804. $y^2 - 5x + x^2 = 0$.

Ечилиши. y ни x нинг функцияси деб қараб, x ўзгарувчи бўйича ҳосилани топамиз:

$$(y^2)' - (5x)' + (x^2)' = 0; \; 2yy' - 5 + 2x = 0,$$

бу ердан

$$y' = \frac{5 - 2x}{2y}.$$

805. 1) $y^2 - x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $2y^2 - 3x^2 + x = 0$.

806. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ечилиши. y ни x нинг функцияси деб қараб, x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0; \; b^2x + a^2yy' = 0; \; y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

807. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $y^2 = 2px$.

808. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{24} = 1$ эллипсга $(-3; -4)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. y ни x нинг функцияси деб қараб, эллипс тенгламасини x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{2x}{27} + \frac{2yy'}{24} = 0, \; 8x + 9yy' = 0, \text{ бу ердан } y' = -\frac{8x}{9y}.$$

$(-3; -4)$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз: $k_{x=-3} = y'_{x=-3} = -\frac{8(-3)}{9(-4)} = -\frac{2}{3}$.

Бу нуқтада эллипсга ўтказилган уринманинг тенгламасини тузамиз (686-масалага қаранг):

$$y + 4 = -\frac{2}{3}(x + 3), \; 2x + 3y + 18 = 0.$$

$(-3;\ -4)$ нуқтада ўтказилган нормалнинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{ур}}} = -\frac{3}{2}.$$

Бу нуқтада эллипсга ўтказилган нормалнинг тенгламасини тузамиз:

$$y + 4 = \frac{3}{2}(x + 3),\ 3x - 2y + 1 = 0.$$

809. 1) $x^2 + y^2 = 25$ айланага $(-3;\ 4)$ нуқтада; 2) $x^2 + y^2 = 169$ айланага $(12;\ -5)$ нуқтада; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ эллипсга $(-8;\ 3)$ нуқтада; 4) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ гиперболага $(-5;\ 6)$ нуқтада; 5) $y^2 = 8x$ параболага $(2;\ -4)$ нуқтада; 6) $y^2 = 9x$ параболага $(1;\ 3)$ нуқтада; 7) $y^2 = 6x$ параболага $\left(\frac{3}{2};\ 3\right)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаларини тузинг.

810. $x^2 - 3xy - 4 = 0$.

Ечилиши. $(x^2)' - (3xy)' - (4)' = 0$; xy — ўзгарувчи миқдорларнинг кўпайтмаси, шу сабабли $(xy') = x'y + y'x$;

$$2x - 3(x'y + y'x) = 0;\ 2x - 3y - 3y'x = 0;$$

$$y' = \frac{2x - 3y}{3x}.$$

811. 1) $x^2 + xy + 1 = 0$; 2) $xy = 1$.

812. 1) $y^2 + y - x = 0$; 2) $y^2 + x^2 - x - y = 0$; 3) $xy^2 - x^2y = 2$.

813. 1) $(y + 1)^2 - 5x = 0$; 2) $(y - 1)^2 + x^2 = 0$; 3) $y^3 - x^2 = 0$.

814. $\sin y = xy^2$.

Ечилиши. $(\sin y)' = (xy^2)'$; $\cos y \cdot y' = x'y^2 + (y^2)'x$;

$\cos y \cdot y' = y^2 + 2yy'x$; $\cos y \cdot y' - 2xyy' = y^2$; $y' = \frac{y^2}{\cos y - 2xy}$

815. 1) $\cos^2 y = x^2$; 2) $\operatorname{tg} y = xy$.

816. 1) $\arcsin y = x$; 2) $\operatorname{arcctg} y = x^2$.

817. 1) $e^{2x+y} = xy$.

Ечилиши. $(e^{2x+y})' = (xy)'$; $e^{2x+y}(2x + y)' = y + xy'$;

$2e^{2x+y} + y'e^{2x+y} = y + xy'$; $y'e^{2x+y} - xy' = y - 2e^{2x+y}$;

$$y'(e^{2x+y} - x) = y - 2e^{2x+y};\quad y' = \frac{y - 2e^{2x+y}}{e^{2x+y} - x}.$$

818. 1) $e^y = x^3$; 2) $\ln y = x^2$; 3) $\ln e^y = x$.

42- §. Иккинчи тартибли ҳосила ва унинг механикадаги татбиқлари

Агар $y = f(x)$ функция $y' = f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳосиладан x бўйича олинган ҳосила (агар у мавжуд бўлса) иккинчи ҳосила ёки иккинчи тартибли ҳосила дейилади.

Иккинчи тартибли ҳосила учун қуйидагича белгилашлар мавжуд:

$$y''; \; y''_x; \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ёки } f''(x); \; \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилганда берилган $t = t_1$ моментдаги a тезланиш s йўлдан t вақт бўйича олинган ва берилган $t = t_1$ момент учун ҳисобланган иккинчи тартибли $\frac{d^2s}{dt^2}$ ҳосилага тенгдир.

Функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

819. $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 5.$

Ечилиши. $y' = 3x^2 - 4x + 4$. Биринчи тартибли ҳосилани функция деб қараб, иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$y'' = 6x - 4.$$

820. 1) $y = 5x^3 + 3x^2 - 7x + 1$; 2) $s = 4t^2 - 3t + 1.$

821. $y = \sqrt{x}.$

Ечилиши. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad y'' = -\frac{1}{(2\sqrt{x})^2}(2\sqrt{x})'$;

$$y'' = -\frac{1}{4x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

822. 1) $y = \sqrt{2x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

823. 1) $s = -\frac{1}{t}$; 2) $s = (2t^2 - 1)^2$; 3) $s = \frac{3t+1}{t}.$

824. $y = \sin^2 x.$

Ечилиши. $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$;

$$y'' = \cos 2x\,(2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x.$$

825. 1) $y = \cos x$; 2) $y = \operatorname{tg} x.$

826. 1) $s = e^{\cos t}$; 2) $s = e^{-\sin t}.$

827. $y = \ln \sqrt{x}.$

Ечилиши.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x};$$

$$y'' = -\frac{1}{(2x)^2}(2x)' = -\frac{1}{4x^2}\cdot 2 = -\frac{1}{2x^2}.$$

828. 1) $y = \ln x^2$; 2) $y = \ln\frac{1}{x}$.

829. 1) $v = t^3 - 2t$, $t = 2$; 2) $v = 2\sin\frac{t}{2}$, $t = \frac{2\pi}{3}$ қону бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг берилган t моментдаги тезланишини топинг.

Ечилиши.

$$1)\ a = \frac{dv}{dt} = 3t^2 - 2;\ a_{t=2} = 3\cdot 2^2 - 2 = 10;$$

$$2)\ a = \frac{dv}{dt} = 2\cos\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}\right)' = 2\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2} = \cos\frac{t}{2};$$

$$a_{t=\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3\cdot 2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

830. Қуйидаги қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг t вақтнинг берилган моментидаги тезланишини топинг:

1) $v = 6\sin\frac{t}{3}$, $t = \pi$; 2) $v = 4\cos\frac{t}{4}$, $t = \frac{2\pi}{3}$;

3) $v = t^3 - t^2 + 1$, $t = 3$; 4) $v = t^3 - 2t^2 + t$, $t = 2$.

831. $s = 2\sin\frac{\pi t}{3}$, $t = 1$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг t вақтнинг кўрсатилган моментидаги тезлиги ва тезланишини топинг.

Ечилиши.

$$v = \frac{ds}{dt} = 2\cos\frac{\pi t}{3}\left(\frac{\pi t}{3}\right)' = 2\cos\frac{\pi t}{3}\,\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi t}{3};$$

$$v_{t=1} = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3}\left(-\sin\frac{\pi t}{3}\right)\left(\frac{\pi t}{3}\right)' =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3};$$

$$a_{t=1} = -\frac{2\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}.$$

832. 1) $s = t^3 - t^2 - t$, $t = 1$; 2) $s = t^2 - 6t + 8$, $t = 3$; 3) $s = \sin\frac{\pi t}{4}$, $t = 1$; 4) $s = -\cos\frac{\pi t}{3}$, $t = 1$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг t вақтнинг кўрсатилган моментидаги тезлиги ва тезланишини топинг.

833. Нуқта $s = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 1$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Тезланиш нолга тенг бўлган моментни ва бу моментда жисмнинг тезлигини топинг.

Ечилиши. $v = \frac{ds}{dt} = -t^2 + 4t$; $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -2t + 4$.

Тезланишни нолга тенг деб, t ни топамиз.

$$-2t + 4 = 0, \quad t = 2,$$

яъни $t = 2$ бўлган моментда тезланиш нолга тенг бўлар экан.

$t = 2$ моментда жисмнинг тезлигини топамиз:

$$v_{t=2} = -2^2 + 4\cdot 2 = 4.$$

834. Жисм $s = -t^3 + 3t^2 - 8$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Тезланиш нолга тенг бўлган t моментни ва бу моментда жисмнинг тезлигини топинг.

835. Тик юқорига отилган жисмнинг учиш баландлиги $s = v_0t - 4,9t^2$ тенгламадан топилади, бу ерда t — жисм s (метр ҳисобида) баландликка эришиши учун кетган вақт (секунд ҳисобида), v_0 — бошланғич тезлик (м/сек). Агар $v_0 = 100$ м/сек бўлса, жисмнинг $t = 5$ сек моментдаги тезлиги ва тезланишини топинг (ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олманг). Неча секунддан сўнг жисм энг юқори нуқтага эришади ва бу ердан қанча масофада рўй беради?

Ечилиши. $s = 100t - 4,9t^2$; $v = \frac{ds}{dt} = 100 - 9,8t$;

$$v_{t=5} = 100 - 9,8\cdot 5 = 51 \text{ м/сек}; \quad a = \frac{dv}{dt} = -9,8 \text{ м/сек}^2.$$

Жисм энг юқори нуқтага тезлиги нолга тенг бўлганда эришади, шунинг учун $v = 0$ деб, t ни топамиз:

$$100 - 9,8t = 0, \quad t = 10,2 \text{ сек}.$$

t нинг топилган $t = 10,2$ сек қийматини ҳаракат тенгламасига қўйиб, жисм ҳаракатининг энг юқори нуқтасини топамиз:

$$s = 100\cdot 10,2 - 4,9(10,2)^2 = 510 \text{ м}.$$

836. Жисм ер сиртидан $v_0 = 50$ м/сек бошланғич тезли билан юқорига тик отилган: 1) $t = 3$ сек моментдаги кўтарилиш баландлигини; 2) $t = 3$ сек моментдаги тезлик ва тезланишни; 3) жисм кўтарилган энг юқори нуқтани ва бу нуқтага кўтарилиш учун кетган вақтни топинг.

837. Жисм $s = 3e^{-2t}$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = 0$ моментда жисм ҳаракатининг тезлиги ва тезланишини топинг.

Ечилиши.

$$v = \frac{ds}{dt} = 3e^{-2t}(-2t)' = 3e^{-2t}(-2) = -6e^{-2t};$$

$$v_{t=0} = -6e^{-2\cdot 0} = -6e^0 = -6; \quad a = \frac{dv}{dt} = -6e^{-2t}(-2) =$$

$$= 12e^{-2t}; \; a_{t=0} = 12e^{-2\cdot 0} = 12e^0 = 12.$$

838. Жисм $s = e^{-3t}$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = 0$ моментда жисм ҳаракатининг тезлиги ва тезланишини топинг.

839. Массаси m бўлган моддий нуқта F куч таъсири остида $s = t^3 + 3t^2$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = 3$ моментда ана шу кучни топинг.

Ечилиши. Маълумки, массаси m бўлган моддий нуқтага таъсир этадиган куч нуқтанинг массасини унинг тезланишига кўпайтирилганига тенг, яъни $F = ma$.

Нуқта ҳаракатининг тезланишини топамиз:

$$s' = 3t^2 + 6t; \; a = s'' = 6t + 6;$$

$$a_{t=3} = 6\cdot 3 + 6 = 24.$$

$a = 24$ қийматни куч тенгламасига қўйиб,

$$F = m\cdot 24 = 24m.$$

ни ҳосил қиламиз.

840. Массаси m бўлган моддий нуқта F куч таъсири остида $s = -\sin 3t$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = \frac{\pi}{6}$ моментда ана шу кучни топинг.

841. Массаси m бўлган моддий нуқта F куч таъсири остида $s = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ қонун бўйича содда гармоник тебранади. $t = 0$ моментда ана шу кучни топинг.

43- §. Аралаш масалалар

842. Функцияларнинг ҳосилаларини топинг: 1) $y = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x$; 2) $y = \cos(x+a)\sin(x-a)$; 3) $y = 2\sin^2 x \cos 2x$.

843. 1) $y = \sin 2x$ эгри чизиққа $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нуқтада; 2) $y = \cos 2x$ эгри чизиққа $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

844. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ эгри чизиқларнинг $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги кесишиш нуқтасида улар ҳосил қилган ўткир бурчакни топинг.

845. Функцияларнинг ҳосилаларини топинг: 1) $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 3x - 1}$; 2) $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$; 3) $y = \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg}^2 2x$.

846. $y = \operatorname{tg} x$ эгри чизиқ Ox ўқни қандай бурчак остида кесиб ўтишини топинг.

847. $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \operatorname{ctg} x$ эгри чизиқларнинг $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги кесишиш нуқтасида улар ҳосил қилган ўткир бурчакни топинг.

Функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

848. 1) $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$; 2) $y = \ln\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$; 3) $y = \ln\sqrt{\frac{1 + ax}{1 - ax}}$.

849. 1) $y = \ln\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$; 2) $y = \ln\sin^2(x - 1)$; 3) $u = \ln\operatorname{tg}^2 z^2$.

850. 1) $y = \ln\sqrt{x}\ln x^2$; 2) $y = \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$; 3) $y = \ln(\ln\sqrt{x^2 - 1})$.

851. 1) $s = \ln e^{\sin 2t}$; 2) $y = e^{\sin x}\cos x$; 3) $y = e^{\operatorname{tg} x}\cos^2 x$.

852. 1) $y = \arccos\sqrt{1 - x^2}$; 2) $u = \operatorname{arcctg}\frac{1+z}{1-z}$; 3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.

853. 1) $y = \arccos\sqrt{1 - e^{2x}}$; 2) $y = \arcsin\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; 3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1}$.

Контрол иш

I вариант

854. Ҳосилаларини аргументнинг берилган қийматида топинг: 1) $f(x) = \sin^2 \ln e^x$, $f'(0)$; 2) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$, $f'(\sqrt{6})$; 3) $f(x) = \arccos \sqrt{x}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$; 4) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ гиперболага $(-3;\ 2)$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини тузинг; 5) нуқта $s = -t^3 + 6t^2 + 5$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Нуқтанинг тезланиши нолга тенг бўлган t моментни топинг.

II вариант

855. Ҳосилаларини аргументнинг берилган қийматида топинг: 1) $f(x) = \ln \operatorname{tg}^2 2x$, $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$; 2) $f(x) = 2 \ln \sqrt{\sin 2x}$, $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$; 3) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{e^x}$, $f'(0)$. 4) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$ эллипсга $(-4;\ 3)$ нуқтада ўтказилган нормалнинг тенгламасини тузинг; 5) нуқта $s = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 8t + 1$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Нуқтанинг тезланиши 6 м/сек^2 бўладиган t вақт моментини топинг.

7- БОБ

ҲОСИЛАНИ ФУНКЦИЯЛАРНИ ТЕКШИРИШГА ТАТБИҚ ЭТИШ

44- §. Функциянинг ўсиши ва камайиши

Агар $y = f(x)$ функциянинг қийматлари (a, b) интервалда x ўсиши билан ўсиб борса, у ҳолда бу функция x нинг ўзгариш интервали (a, b) да ўсувчи функция дейилади. Агар $y = f(x)$ функциянинг қийматлари (a, b) интервалда x ўсиши билан камайиб борса, у ҳолда бу функция x нинг ўзгариш интервали (a, b) да камаювчи дейилади. Бу интерваллар *монотон ўзгариш интерваллари дейилади.*

Функциянинг ўсиш ва камайиш аломатлари

Агар берилган функциянинг ҳосиласи x нинг (a, b) интервалдаги барча қийматлари учун мусбат бўлса, у ҳолда функция бу интервалда ўсади.

Агар берилган функциянинг ҳосиласи x нинг (a, b) интервалдаги барча қийматлари учун манфий бўлса, у ҳолда функция бу интервалда камаювчи бўлади.

Функцияларнинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг.

856. $y = x^2 - 8x + 12$.

Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = 2x - 8.$$

Берилган функциянинг ҳосиласи камайиш интервалида манфий, ўсиш интервалида мусбат, шунинг учун қуйидаги тенгсизликларни ечамиз:

1) $2x - 8 < 0$, $2x < 8$, $x < 4$, яъни x ушбу $(-\infty; 4)$ интервалда ўзгаради; бу интервалда функция камаяди;

2) $2x - 8 > 0$, $x > 4$, яъни x ушбу $(4; +\infty)$ интервалда ўзгаради; бу интервалда функция ўсади (81- расм).

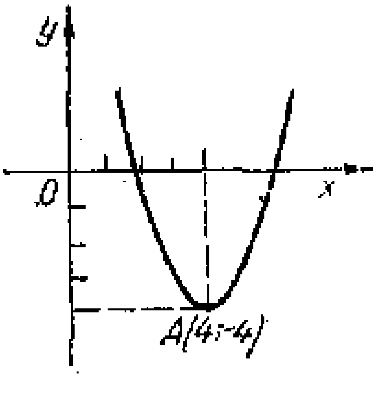
857. 1) $y = x^2 - 6x + 5$; 2) $y = 2x^2 - 4x + 5$; 3) $y = -x^2 + 4x + 1$.

858. $y = x^3 - 6x^2 + 4$.

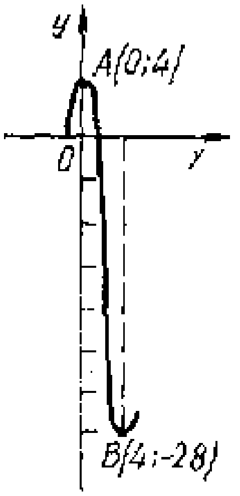
Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = 3x^2 - 12x$. Камайиш интервалини топиш учун $3x^2 - 12x < 0$ тенгсизликни ечамиз:

$$x^2 - 4x < 0.$$

$D = 16 > 0$ (168-бетдаги 2- жадвал, III ҳол). $x^2 - 4x = 0$ тенглама-



81- расм.



82- расм.

нинг илдизлари: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Тенгсизлик x нинг $(0,4)$ интервалдаги барча қийматлари учун тўғри. Демак, $(0,4)$ интервалда функция камаяди.

Ўсиш интервалини топамиз: $3x^2 - 12x > 0$, $x^2 - 4x > 0$.

Тенгсизлик $(-\infty; 4)$ ва $(4; +\infty)$ интерваллардаги барча ҳақиқий қийматлар учун ўринлидир. Бу интервалларда функция ўсади (82- расм).

859. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

2) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$.

860. $y = x^4 - 4x + 3$.

Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = 4x^3 - 4$.

Функциянинг камайиш интервалини топамиз: $4x^3 - 4 < 0$, $x^3 - 1 < 0$, $x^3 < 1$, $x < 1$, демак, камайиш интервали $(-\infty; 1)$.

Функциянинг ўсиш интервалини топамиз: $4x^3 - 4 > 0$, $x^3 - 1 > 0$, $x^3 > 1$, $x > 1$; ўсиш интервали $(1; +\infty)$.

861. 1) $y = x^4 - 32x + 40$; 2) $y = \frac{1}{4}x^4 + x - 1$.

862. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 15$.

Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12.$$

Функциянинг камайиш интервалини топамиз:

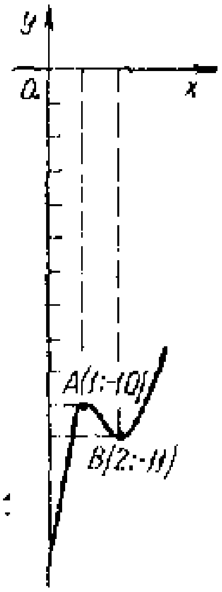
$$6x^2 - 18x + 12 < 0,\ x^2 - 3x + 2 < 0.$$

$D = 9 - 8 = 1 > 0$ (168- бетдаги 2- жадвал, III ҳол). $x^2 - 3x + 2 = 0$ тенгламанинг илдизлари: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Тенгсизлик x нинг $(1, 2)$ интервалдаги барча ҳақиқий қийматлари учун ўринлидир. Демак, функциянинг камайиш интервали $(1, 2)$ экан.

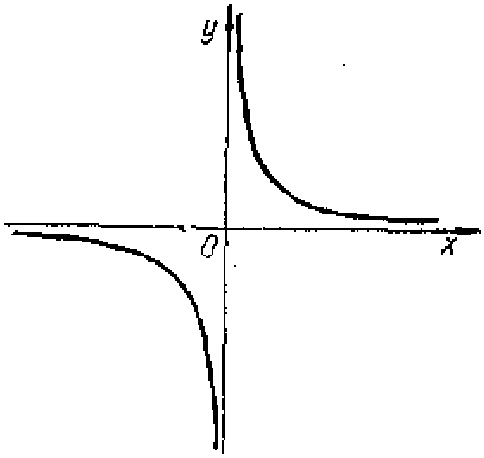
Функциянинг ўсиш интервалини топамиз: $x^2 - 3x + 2 > 0$. Тенгсизлик $(-\infty; 1)$ ва $(2; +\infty)$ интервалллардаги барча ҳақиқий қийматларда ўринли, демак, бу интервалларда функция ўсади (83- расм).

863. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 20$.

864. $y = \frac{1}{2x}$.



83- расм.



84- расм.

Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = -\frac{1}{2x^2}$. $y = \frac{1}{2x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси: $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$. $y' = -\frac{1}{2x^2}$ ҳосила функция аниқланиш соҳасининг ҳамма нуқталарида манфий бўлади, чунки x аргумент квадратда аниқланган. Демак, функция $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ интервалларда камаяди (84- расм).

865. $y = -\frac{1}{x}$.

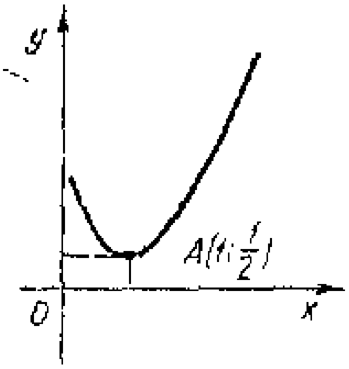
866. $y = \ln x$.

Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = \frac{1}{x}$. $y = \ln x$ функциянинг аниқланиш соҳаси: $(0; +\infty)$; бу соҳа учун ҳосила мусбат: $\frac{1}{x} > 0$, демак, $(0; +\infty)$ интервалда функция ўсади.

867. 1) $y = \ln x^2$; 2) $y = \ln\frac{1}{x}$.

868. $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$.

Ечилиши. $\ln x$ ҳаднинг аниқланиш соҳаси $(0; +\infty)$ интервалдан иборат, демак, $\frac{1}{2}x^2$ ҳаднинг аргументи фақат мусбат қийматлар қабул қилиши мумкин.



85- расм.

Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$; берилган функциянинг аниқланиш соҳаси барча мусбат сонлардан иборат бўлгани учун $y' = \frac{x^2 - 1}{x}$ ҳосила $x > 1$ бўлганда — мусбат. $0 < x < 1$ бўлганда эса манфий бўлади. Демак, функция $(0; 1)$ интервалда камаяди $(1; +\infty)$ интервалда эса ўсади (85- расм).

869. $y = \ln x - \frac{1}{3}x^2$.

870. $y = e^{-x}$.

Ечилиши. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = -e^{-x}$. Ҳосила исталган x да манфийдир, демак, функция $(-\infty; +\infty)$ интервалда камаяди.

871. 1) $y = e^{x^2}$; 2) $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

872. $y = \sqrt{x - x^2}$.

Ечилиши. Функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз: $x - x^2 \geqslant 0$ ёки

$$x^2 - x \leqslant 0.$$

$D > 0$ (168- бетдаги 2- жадвал, III ҳол). $x^2 - x = 0$ тенгламанинг илдизлари: $x_1 = 0$ ва $x_2 = 1$. Тенгсизлик (нолга тенглик) x нинг $[0; 1]$ ёпиқ интервалдаги барча ҳақиқий қийматлари учун ўринлидир.

Демак, функция $[0; 1]$ ёпиқ интервалда аниқланган.

Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

Функциянинг ўсиш интервалида ҳосила мусбат:

$$\frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} > 0.$$

Каср мусбат бўлиши учун сурат ва махраж бир хил ишорага эга бўлиши керак. $2\sqrt{x - x^2} > 0$, демак, сурат ҳам $1 - 2x > 0$. Қуйидагига эгамиз:

$$\begin{cases} 1 - 2x > 0, \\ 2\sqrt{x - x^2} > 0, \text{ бу ердан } -2x > -1, \; x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Функциянинг аниқланиш соҳаси [0; 1] эканлигини назарга олсак: $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Махраж $2\sqrt{x-x^2} > 0$, бироқ $x = 0$ ва $x = 1$ да у нолга айланади, функция [0; 1] интервалда аниқлангани учун эса x фақат $0 < x < 1$ қийматларни қабул қилиши мумкин.

Шундай қилиб, $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ ва $0 < x < 1$, бу ердан $0 < x < < \frac{1}{2}$.

Демак, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ интервалда функция ўсувчи экан.

Функциянинг камайиш интервалида

$$\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} < 0.$$

Каср манфий бўлиши учун сурат ва махражнинг ишоралари турлича бўлиши керак. $2\sqrt{x-x^2} > 0$, демак, сурат ҳам $1-2x < 0$ бўлиши керак, бу ердан $-2x < -1$ ёки $x > > \frac{1}{2}$. Функция [0; 1] интервалда аниқланганлигини назарда тутсак, функция $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ интервалда камаювчи эканлигини ҳосил қиламиз.

873. $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

45- §. Функциянинг максимум ва минимумини биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текшириш

Аргументнинг функция энг катта қийматга эга бўладиган қиймати функциянинг максимум нуқтаси дейилади.

Аргументнинг функция энг кичик қийматга эга бўладиган қиймати функциянинг минимум нуқтаси дейилади.

Функциянинг максимум нуқтаси функциянинг ўсишдан камайишга ўтишида чегаравий нуқта ҳисобланади, мос равишда функциянинг минимум нуқтаси унинг камайишдан ўсишга ўтишида чегаравий нуқта ҳисобланади.

Функциянинг максимуми ва минимуми терминлари битта терминга бирлаштирилиб, функциянинг экстремуми дейилади. Функция бир нечта экстремумга эга бўлиши мумкин, шу сабабли экстремум нуқталар унга қўшни бўлган нуқталарга нисбатан қаралади.

Агар a га етарлича яқин бўлган барча x нуқталарда $f(a) > f(x)$ тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция $x = a$ нуқтада максимумга эга бўлади.

Агар a га етарлича яқин бўлган барча x нуқталарда $f(a) < f(x)$ тенгсизлик бажарилса, $y = f(x)$ функция $x = a$ да минимумга эга бўлади.

$y = f(x)$ функция максимумининг етарли шарти

Агар
1) $f'(a) = 0$;
2) $x < a$ да $f'(x) > 0$;
3) $x > a$ да $f'(x) < 0$ бўлса,

$y = f(x)$ функция $x = a$ да максимумга эга бўлади.

$y = f(x)$ функция минимумининг етарли шарти

Агар
1) $f'(a) = 0$;
2) $x < a$ да $f'(x) < 0$;
3) $x > a$ да $f'(x) > 0$ бўлса,

$y = f(x)$ функция $x = a$ да минимумга эга бўлади.

$f'(a) = 0$ бўладиган $x = a$ нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси дейилади.

Агар функция ҳосилага эга бўлса унинг экстремумини стационар нуқталарда излаш керак.

$y = f(x)$ функциянинг максимум ва минимумини биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текшириш қоидаси.

I. Берилган функциянинг $y' = f'(x)$ ҳосиласи топилади.

II. Топилган ҳосила нолга тенгланади: $f'(x) = 0$; $f'(x) = 0$ тенглама ечилади, яъни унинг ҳақиқий илдизлари (стационар нуқталар) топилади: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

III. Топилган $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ илдизларни ортиб бориш тартибида жойлаштирилади. $f'(x)$ ҳосилани кўпайтувчиларга ёйилади ва унга x_1 илдиз ўрнига x_1 дан кичикроқ сон қўйилиб, ҳосиланинг ишораси топилади, сўнгра x_1 ўрнига x_1 дан каттароқ (лекин албатта x_2 дан кичик) сон қўйилиб, яна ҳосиланинг ишораси топилади.

Агар бунда:

1) ҳосила ишорасини (+) дан (−) га ўзгартирса, $y = f(x)$ функция $x = x_1$ да максимумга эга бўлади;

2) ҳосила ишорасини (−) дан (+) га ўзгартирса, $y = f(x)$ функция $x = x_1$ дан минимумга эга бўлади;

3) ҳосила ишораси ўзгармаса, функция $x = x_1$ да минимумга ҳам, максимумга ҳам эга бўлмайди.

Сўнгра $f'(x)$ ҳосиланинг ишораларини $x < x_2$ ва $x > x_2$ учун ва шу тартибда ҳар бир илдиз учун топилади.

IV. Функциянинг максимал ва минимал қийматлари топилади. Бунинг учун функциянинг қийматлари стационар нуқталарда (*максимум* ва *минимум нуқталарда*) ҳисобланади.

V. Эгри чизиқнинг графиги нуқталар (функциянинг максимум ва минимум нуқталари, эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишиш нуқталари) бўйича ясалади.

Функциянинг максимум ва минимумини текширинг.

874. $y = x^2 - 4x$.

Ечилиши. 1. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = 2x - 4$.

2. Ҳосилани нолга тенглаймиз: $2x - 4 = 0$ ва бу тенгламани ечиб, $x = 2$ стационар нуқтани топамиз.

3. Ҳосилани кўпайтувчиларга ажратамиз: $y' = 2x - 4 = 2(x - 2)$. $x < 2$ ни (2 дан кичикроқ) оламиз ва x нинг бу қийматини (масалан, 1,9 ни) $y' = 2(x - 2)$ ҳосилага хаёлда (оғзаки) қўямиз ва $x < 2$ да ҳосила ишорасини топамиз. Ҳосила манфий ишорага эга, уни қисқача бундай ёзамиз: $y'_{x<2} = (-)$.

Энди $x > 2$ ни (2 дан каттароқ) оламиз ва яна хаёлан x нинг бу қийматини (масалан, 2,1 ни) $y' = 2(x - 2)$ ҳосилага қўйиб, ҳосиланинг $x > 2$ даги ишорасини топамиз, ҳосила мусбат ишорага эга, уни бундай ёзамиз: $y'_{x>2} = (+)$. Ҳосила ишорасини $(-)$ дан $(+)$ га ўзгартиряпти, демак, функция $x = 2$ да минимумга эга.

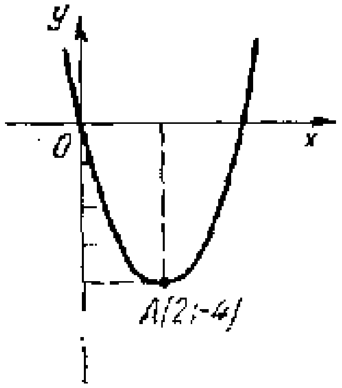
4. Функциянинг минимал қийматини топамиз; бунинг учун берилган функция ифодасига $x = 2$ қийматни қўямиз:
$y_{x=2} = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$.

5. $y = x^2 - 4x$ функциянинг графигини ясаймиз. Аргументнинг қийматлари ва функциянинг унга мос қийматлари жадвалини тузамиз:

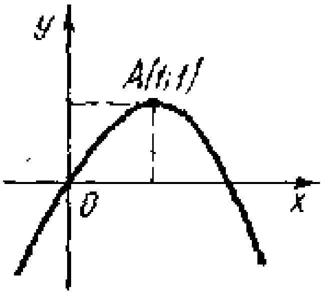
x	0	2	4
y	0	−4	0
		Функция минимуми	Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси

Бу нуқталарни ясаб, $y = x^2 - 4x$ параболани ҳосил қ ламиз (86- расм). Функциянинг минимум нуқтаси (2; — параболанинг учидир. Келгусида параболанинг учини квадра функциянинг максимуми ёки минимуми сифатида топишими мумкин.

875. 1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3x$.



86- расм.



87- расм.

876. $y = -x^2 + 2x$.

Ечилиши. 1. Ҳосилани топамиз: $y' = -2x + 2$.

2. Ҳосилани нолга тенглаймиз: $-2x + 2 = 0$ ва стационар нуқтани топамиз: $x = 1$.

3. Ҳосилани кўпайтувчиларга ажратамиз: $y' = -2(x - 1)$. $x < 1$ да ҳосила ишораси: $y'_{x<1} = (-)(-) = (+)$, [биринчи (—) ишора қавс олдидаги ишора, иккинчи (—) ишора $(x - 1)$ қавснинг ишораси].

$x > 1$ да ҳосила ишораси: $y'_{x>1} = (-)(+) = (-)$.

Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиради, демак, $x = 1$ да функция максимумга эга экан.

4. Функциянинг $x = 1$ даги максимал қийматини топамиз:

$$y_{x=1} = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1.$$

5. Жадвал тузамиз:

x	0	1	2
y	0	1	0
		функциянинг максимуми	Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси

$y = -x^2 + 2x$ параболани ясаймиз (87- расм).

877. 1) $y = -x^2 - x$; 2) $y = -x^2 + 4x$.

878. $y = x^2 - 8x + 12$.

Ечилиши. 1) $y' = 2x - 8$;

2) $2x - 8 = 0$; $x = 4$;

3) $y' = 2(x - 4)$, $y'_{x<4} = (-)$; $y'_{x>4} = (+)$.

Ҳосила ишорасини (—) дан (+) га ўзгартиряпти. Демак, функция $x = 4$ да минимумга эга;

4) Функциянинг минимал қийматини топамиз:

$$y_{x=4} = 4^2 - 8\cdot 4 + 12 = -4;$$

5) жадвал тузамиз:

x	0	2	4	6
y	12	0	—4	0
	Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси	Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси	Функциянинг минимуми	Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси

$y = x^2 - 8x + 12$ параболани ясаймиз (88- расм).

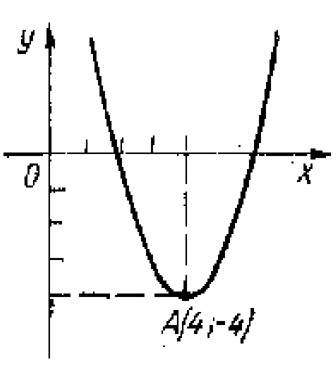
879. 1) $y = x^2 - 4x + 3$; 2) $y = x^2 - 10x + 9$.

880. $y = -x^2 + 5x - 6$.

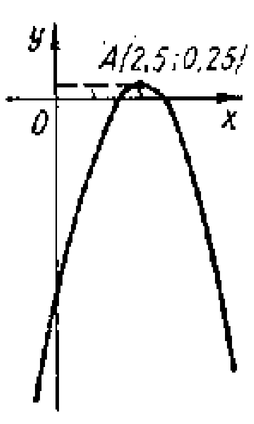
Ечилиши. 1) $y' = -2x + 5$;

2) $-2x + 5 = 0$; $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$;

3) $y' = -2(x - 2{,}5)$; $y'_{x<2,5} = (-)(-) = (+)$, $y'_{x>2,5} = (-)(+) = (-)$.



88- расм.



89- расм.

Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = 2,5$ да максимумга эга;

4) функциянинг максимал қийматини топамиз:

$$y_{x=2,5} = -(2,5)^2 + 5 \cdot 2,5 - 6 = 0,25;$$

5) жадвал тузамиз:

x	0	2	2,5	3
y	−6	0	0,25	0
	Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси	Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси	Функциянинг максимуми	Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси

$y = -x^2 + 5x - 6$ параболани ясаймиз (89- расм).

881. 1) $y = -x^2 + 2x + 3$; 2) $y = -x^2 - x + 6$.

882. $s = 2t^2 - 8t + 6$.

Ечилиши. 1) $s' = 4t - 8$; 2) $4t - 8 = 0$, $t = 2$;

3) $s' = 4(t - 2)$: $s'_{t<2} = (-)$; $s_{t>2} = (+)$.

Ҳосила ишорасини (—) дан (+) га ўзгартиряпти, демак, функция $t = 2$ да минимумга эга;

4) $s_{t=2} = 2^2 - 8 \cdot 2 + 6 = -2$;

5) жадвал тузамиз:

t	0	1	2	3
s	6	0	−2	0
	Os ўқ билан кесишиш нуқтаси	Ot ўқ билан кесишиш нуқтаси	Функциянинг минимуми	Ot ўқ билан кесишиш нуқтаси

t аргументнинг сон қийматларини Ot ўқ бўйлаб, функциянинг мос қийматларини Os ўқ бўйлаб қўйиб чиқиб, $s = 2t^2 - 8t + 6$ функциянинг графигини ҳосил қиламиз (90- расм).

883. 1) $s = 2t^2 - t - 1$; 2) $s = 2t^2 - 4t + 2$.

884. $y = \frac{1}{2}x^4$.

Ечилиши. 1) $y' = 2x^3$;

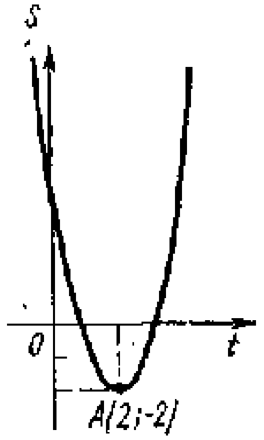
2) $2x^3 = 0$; $x = 0$.

3) $y'_{x<0} = (-)$, $y'_{x>0} = (+)$.

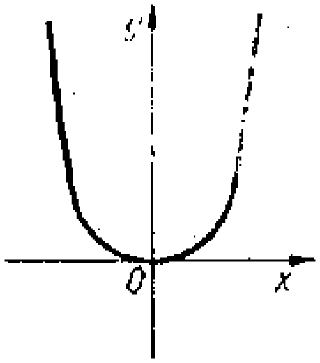
Ҳосила ишорасини (—) дан (+) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = 0$ да минимумга эга;

4) $y_{x=0} = \frac{1}{2}\cdot 0^4 = 0$;

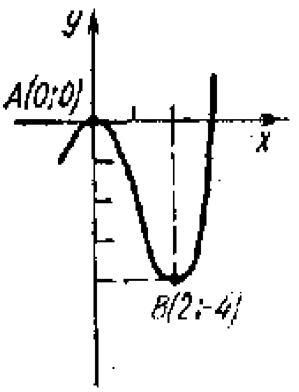
5) графикни ясаш учун (0; 0) нуқтадан ташқари яна $\left(\pm 1; \frac{1}{2}\right)$ ва $(\pm 2; 8)$ қўшимча нуқталарни ҳосил қиламиз. Ана шу нуқталар бўйича графикни ясаймиз (91- расм).



90- расм.



91- расм.



92- расм.

885. 1) $y = 2x^4 - x$; 2) $y = \frac{1}{4}x^4 + 8x$.

886. $y = x^3 - 3x^2$.

Ечилиши. 1) $y' = 3x^2 - 6x$; 2) $3x^2 - 6x = 0$; $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 3) $y' = 3x(x-2)$.

а) $x_1 = 0$ критик нуқтани текширамиз:

$y'_{x<0} = (-)\,(-) = (+)$; $y'_{x>0} = (+)\,(-) = (-)$.

Биринчи (—) ишора x кўпайтувчига тегишли, иккинчи (—) ишора $x - 2$ кўпайтувчига тегишли. Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти. Демак, функция $x = 0$ да максимумга эга.

б) $x_2 = 2$ критик нуқтани текширамиз:

$y'_{x<2} = (+)\,(-) = (-)$; $y'_{x>2} = (+)\,(+) = (+)$.

Ҳосила ишорасини (—) дан (+) га ўзгартиряпти, демак, $x = 2$ да функция минимумга эга;

4) $y_{x=0} = 0^3 - 3\cdot 0^2 = 0$; $y_{x=2} = 2^3 - 3\cdot 2^2 = -4$;

5) графикни (92- расм) ясаш учун баъзи бир нуқталарнинг координаталарини ҳисоблаймиз.

Графикнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз. $y = 0$ деб, $x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $x = 0$ ва $x = 3$, яъни (0; 0) ва (3; 0), нуқталарга эга бўлдик.

Ушбу жадвални тузамиз:

x	0	2	3
y	0	−4	0
	Функциянинг максимуми	Функциянинг минимуми	*Ox* ўқ билан кесишиш нуқтаси

887. 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

888. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$.

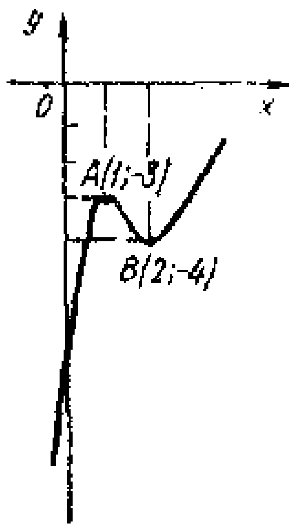
Ечилиши. 1). $y' = 6x^2 - 18x + 12$; 2) $6x^4 - 18x + 12 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; 3) $y' = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)\ (x - 2)$.

а) $x_1 = 1$ критик нуқтани текширамиз:

$$y'_{x<1} = (-)\ (-) = (+);\ y'_{x>1} = (+)\ (-) = (-).$$

Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти, демак. Функция $x = 1$ да максимумга эга.

б) $x_2 = 2$ критик нуқтани текширамиз:



93- расм.

$$y'_{x<2} = (+)\ (-) = (-);\ y'_{x>2} = \\ = (+)\ (+) = (+)$$

Ҳосила ишорасини (—) дан (+) га ўзгартиряпти, функция $x = 2$ да минимумга эга;

4) $y_{x=1} = 2\cdot1^3 - 9\cdot1^2 + 12\cdot1 - 8 = -3$;

$y_{x=2} = 2\cdot2^3 - 9\cdot2^2 + 12\cdot2 - 8 = -4$;

5) Ушбу нуқталар эгри чизиқ графигининг нуқталари бўлади;

x	0	1	2
y	-8	-3	-4
	Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси	Функциянинг максимуми	Функциянинг минимуми

889. 1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$; 2) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 2$.

46- §. Функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текшириш

$y = f(x)$ функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текшириш қоидаси

I. Берилган функциянинг $y' = f'(x)$ ҳосиласи топилади.

II. Топилган ҳосила нолга тенгланади: $f'(x) = 0$; $f'(x) = 0$ тенглама ечилади, яъни ҳақиқий илдизлар (стационар нуқталар) топилади.

III. Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи топилади.

IV. Иккинчи тартибли ҳосиланинг ишораси ҳар қайси стационар нуқтада топилади.

Агар бу нуқтада иккинчи тартибли ҳосила манфий бўлса, у ҳолда функция максимумга эга бўлади, агар ҳосила мусбат бўлса, *функция минимумга эга бўлади.*

Агар иккинчи тартибли ҳосила нолга тенг бўлса, у ҳолда текширишни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида ўтказиш керак.

V. *Функциянинг максимал ва минимал қийматлари топилади.* Бунинг учун стационар нуқталарда (максимум ва минимум нуқталарда) функциянинг *қийматлари ҳисобланади.*

VI. Эгри чизиқнинг топилган нуқталари (функциянинг максимум ва минимум нуқталари, эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқлари билан кесишиш нуқталари) бўйича функциянинг графиги чизилади (агар эгри чизиқ иккинчи даражадан юқори даражали тенглама билан берилган бўлса, эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталарини топиш қийин, чунки элементар алгебра курсида юқори тартибли тенгламаларни ечишнинг хусусий ҳолларигина кўрилади).

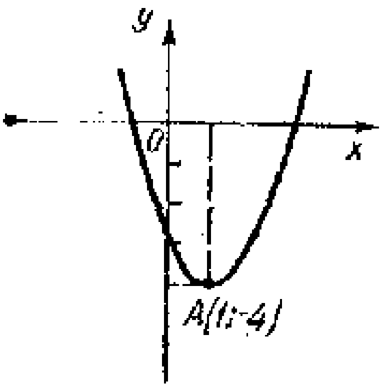
Иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида максимум ва минимумни текширинг.

890. $y = x^2 - 2x - 3$.

Ечилиши. 1. Биринчи тартибли ҳосилани топамиз. $y' = 2x - 2$.

2. Биринчи тартибли ҳосилани нолга тенглаб, стационар нуқтани топамиз: $2x - 2 = 0$, $x = 1$.

3. Иккинчи тартибли ҳосилани топамиз: $y'' = 2$.



94- расм.

4. Иккинчи тартибли ҳосила мусбат, демак, функция $x = 1$ стационар нуқтада минимумга эга (94- расм).

891. 1) $y = 2x^2$; 2) $y = 2x^2 - 2$; 3) $y = x^2 - 2x$; 4) $y = -x^2 + 4x$; 5) $y = 2x^2 - 5x + 2$; 6) $y = -x^2 + x + 6$.

892. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

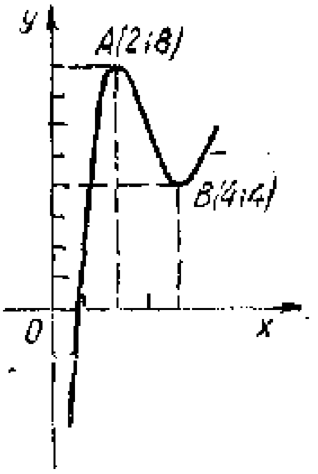
Ечилиши. 1) $y' = 3x^2 - 18x + 24$; 2) $3x^2 - 18x + 24 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; 3) $y'' = 6x - 18$; 4) иккинчи тартибли ҳосиланинг стационар нуқталардаги ишорасини топамиз: $y''_{x=2} = 6 \cdot 2 - 18 < 0$. $x = 2$ да функция максимумга эга. $y''_{x=4} = 6 \cdot 4 - 18 > 0$. $x = 4$ да функция минимумга эга; 5) функциянинг максимал ва минимал қийматларини топамиз:

$$y_{x=2} = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 12 = 8;$$
$$y_{x=4} = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 12 = 4;$$

6) жадвал тузамиз:

x	0	2	4
y	−12	8	4
	Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси	Функциянинг максимуми	Функциянинг минимуми

Функциянинг графигини ясаймиз (95- расм).



95- расм.

893. 1) $y = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x + 4$; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$; 3) $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 2$.

894. $y = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 6$.

Ечилиши. 1) $y' = 12x^3 - 48x^2 + 60x - 24$; 2) $12x^3 - 48x^2 + 60x - 24 = 0$; $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

Учинчи тартибли бу тенгламани ечиш учун чап томонни чизиқли кўпайтувчиларга ажратамиз, бунинг учун иккинчи ва учинчи ҳадни иккита қўшилувчининг йиғиндиси шаклида қуйидагича ифодалаб, тенглама ҳадларини группалаймиз:

$$x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + 2x - 2 = 0;\ (x^3 - x^2) - (3x^2 - 3x) + $$
$$+ (2x - 2) = 0;$$
$$x^2(x - 1) - 3x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 3x + 2) = 0.$$

Ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаб, стационар нуқталарни топамиз: $x - 1 = 0$, $x_1 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_2 = 1$, $x_3 = 2$;

3) $y'' = 36x^2 - 96x + 60$;

4) $x = 1$ стационар нуқтада иккинчи тартибли ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз:

$$y'_{x=1} = 36 \cdot 1 - 96 \cdot 1 + 60 = 0.$$

Иккинчи тартибли ҳосила нолга тенг, шунинг учун функция максимумга ёки минимумга эга эканлигини аниқлаш мумкин эмас. $x = 1$ стационар нуқтани биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз; биринчи тартибли ҳосилани кўпайтма кўринишида ифодалаймиз:

$$y' = (x - 1)(x - 1)(x - 2)$$

Биринчи тартибли ҳосилани аргументнинг бирдан кичикроқ ва каттароқ қийматлари учун текшириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y'_{x<1} = (-)(-)(-) = (-);\ y'_{x>1} = (+)(+)(-) = (-).$$

Ҳосила ишорасини ўзгартирмаяпти, демак, $x = 1$ да функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас.

$x = 2$ стационар нуқтани текширамиз;

$$y''_{x=2} = 36 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 60 > 0.$$

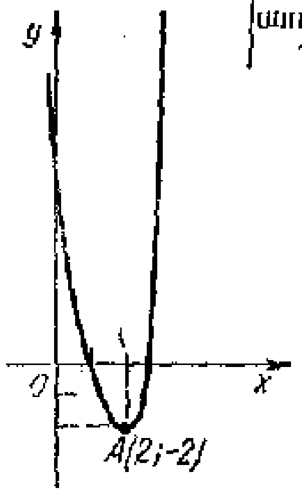
$x = 2$ да функция минимумга эга;

5) функциянинг минимал қийматини топамиз:

$$y_{x=2} = 3 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 6 = - 2;$$

6) жадвал тузамиз:

x	0	1	2	3
y	6	-1	-2	15
	Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси		Функциянинг минимуми	



96- расм.

Функция графигини тузамиз (96-расм).

895. $y = x^4 + 3x^2 - 4$.

896. $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Ечилиши. 1) $y' =$

$$= \frac{(x^2+1)'x - x'(x^2+1)}{x^2} = \frac{2x \cdot x - x^2 - 1}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2},$$

2) $\frac{x^2-1}{x^2} = 0$. Касрнинг сурати нолга тенг бўлса (махраж нолга тенг эмас), каср ҳам нолга тенг бўлади:

$$x^2 - 1 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1;$$

3) $y'' = \frac{1}{x^4} \cdot 2x = \frac{2}{x^3}$;

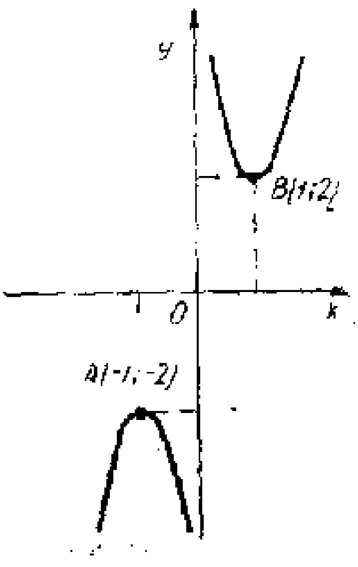
4) $y''_{x=-1} = -2 < 0$, демак, функция $x = -1$ да максимумга эга;

$y''_{x=1} = 2 > 0$, Демак; функция $x = 1$ да минимумга эга; .

5) функциянинг максимал ва минимал қийматларини топамиз:

$$y_{x=-1} = -2; \quad y_{x=1} = 2;$$

6) функциянинг графигини ясаймиз (97-расм) $x = 0$ нуқтада функция узилишга эга.



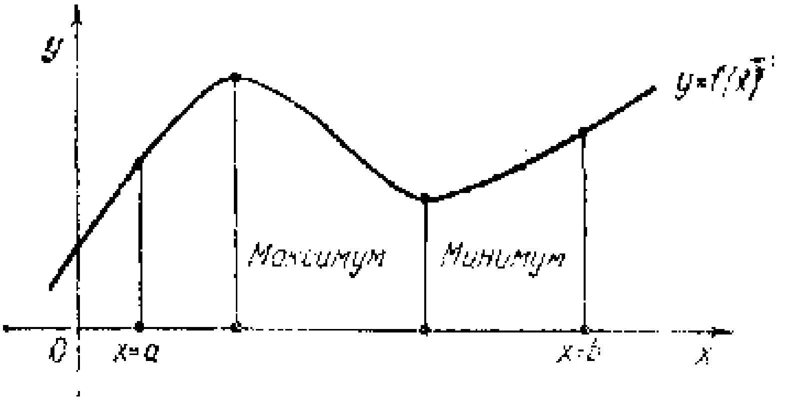
97- расм.

897. $y = \frac{3x}{x^2+1}$.

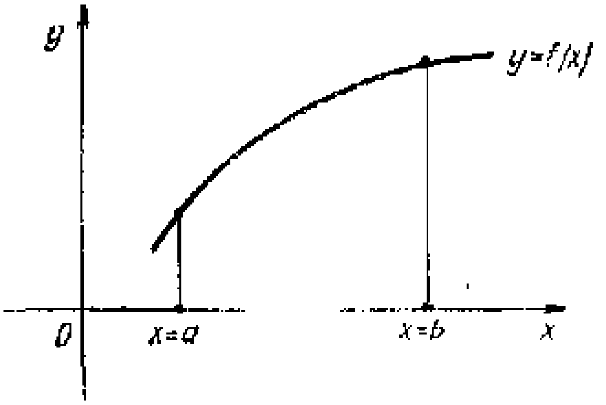
17-§. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари

Назарий масалаларда ва татбиқларда кўпинча x аргументнинг шундай қийматларини топишга тўғри келадики, бу қийматларга $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари мос келади.

Энг катта ва энг кичик қийматлар мос равишда максимум ва минимум бўлиши ҳам (98-расм), бўлмаслиги ҳам мумкин (99-расм).



98- расм.



99- расм.

Бундай ҳолда функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига $[a, b]$ кесманинг учларида, яъни $x = a$ ва $x = b$ нуқталарда эришади.

Агар $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлган функция ягона экстремумга эга бўлса, у ҳолда максимум бўлган ҳолда у энг катта қиймат, минимум бўлган ҳолда эса энг кичик қиймат бўлади.

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини т пишда қуйидаги қоидалар бўйича иш тутамиз:

1) стационар нуқталар топилади;

2) функциянинг стационар нуқталардаги ва кесма учл ридаги қийматлари топилади. Бу сонларнинг энг каттаси в энг кичиги мос равишда функциянинг кесмадаги энг катт ва энг кичик қиймати бўлади.

Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийма тини топинг.

898. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, [0, 3] кесмада.

Ечилиши. $f'(x) = 2x - 4$. Стационар нуқтани топамиз:

$$2x - 4 = 0,\quad x = 2,\quad f''(x) = 2,\quad f(2) = -1,$$

демак, минимум (2, — 1). Бу нуқта [0, 3] кесмага тегишли. Кесманинг учларини текширамиз: $f(0) = 3$, $f(3) = 0$. Функциянинг энг катта қиймати 3 га, энг кичик қиймати (— 1) га тенг (100- расм).

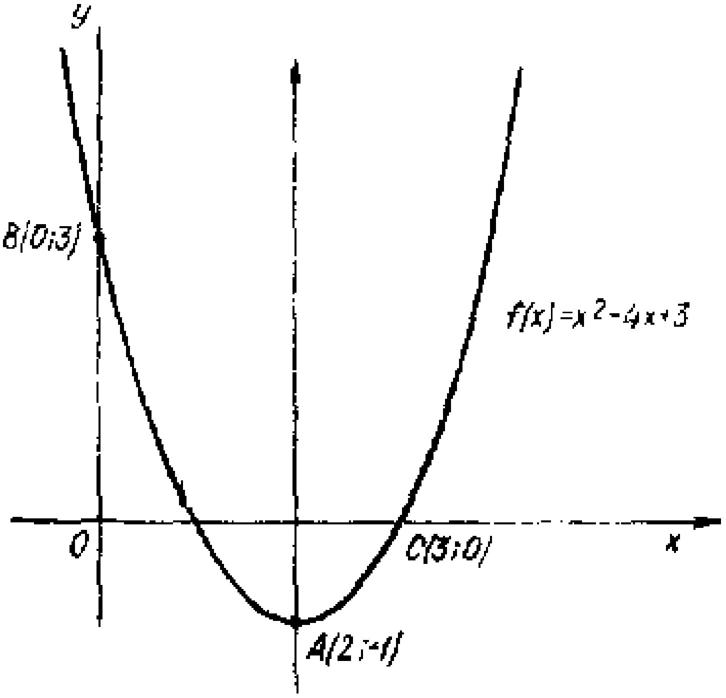
899. 1) $f(x) = x^2 - 6x + 13$, [0, 6] кесмада;

2) $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$, [— 2, 2] кесмада;

900. 1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, [1, 3] кесмада;

2) $f(x) = 6x^2 - x^3$ [— 1, 6] кесмада;

901. $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада.



100- расм.

Ечилиши.

Стационар нуқталарни топамиз:

$f'(x) = 2\cos x + 2\sin 2x = 0, \quad 2\cos x + 4\sin x\cos x = 0;$

$\cos x\,(1 + 2\sin x) = 0, \ \cos x = 0, \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$

$$k = 0, \pm 1; \pm 2; \ \ldots;$$

$1 + 2\sin x = 0, \ \sin x = -\frac{1}{2}$, x нинг қийматлари $[0, \frac{\pi}{2}]$ кесмадан ташқарида ётади ва шунинг учун уларни ҳисоблаб ўтирмаймиз.

Иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$$f''(x) = -2\sin x + 4\cos 2x;$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\pi = -2 - 4 = -6;$$

иккинчи тартибли ҳосила $x = \frac{\pi}{2}$ да манфий ва $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 2 + 1 = 3$, демак, *максимум* $\left(\frac{\pi}{2}; \ 3\right)$.

Функциянинг қийматини $x = 0$ нуқтада ҳисоблаймиз.

$$f(0) = 2\sin 0 - \cos 0 = -1.$$

Функциянинг энг катта қиймати 3 га, энг кичик қиймати (—1) га тенг.

902. $f(x) = \sin 2x, \ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада.

48-§. Миқдорларнинг энг катта ва энг кичик қийматларига доир масалалар

903. Иккита мусбат соннинг йиғиндиси a га тенг. Уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлганда бу сонларни топамиз.

Ечилиши. Қўшилувчиларнинг бири x бўлсин; у ҳолда иккинчи сон $a - x$ бўлади. Бу қўшилувчиларнинг кўпайтмаси ўзгарувчи миқдор; уни y орқали белгилаб, топамиз:

$$y = x(a - x) \text{ ёки } y = ax - x^2 \ (0 < x < a).$$

Бу функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $y' = a - 2x$; 2) $a - 2x = 0, \ x = \frac{a}{2}$; 3) $y'' = -2$.

Иккинчи тартибли ҳосила манфий, демак, $x=\frac{a}{2}$ да функция максимумга эга. a сонни тенг иккига бўлиш керак, шунда бу қўшилувчиларнинг кўпайтмаси энг катта бўлади.

904. 24 сонини кўпайтмаси энг катта бўлган иккита қўшилувчига ажратинг.

905. Иккита мусбат сонинг йиғиндиси a га тенг. Агар уларнинг кублари йиғиндиси энг кичик бўлса, бу сонларни топинг.

Ечилиши. Қўшилувчилардан бири x бўлсин, у ҳолда иккинчи қўшилувчи $a-x$ бўлади. Бу қўшилувчиларнинг кублари йиғиндиси ўзгарувчи миқдор; уни y орқали белгилаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y = x^3+(a-x)^3 \; (0 < x < a)$$

ёки

$$y = a^3-3a^2x+3ax^2.$$

Бу функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз: 1) $y' = -3a^2+6ax$;

$$2)\; -3a^2+6ax=0,\; x=\frac{a}{2};\; 3)\; y''=6a.$$

Иккинчи тартибли ҳосила мусбат, демак, $x=\frac{a}{2}$ да функция минимумга эга. a сонни тенг иккига бўлиш керак, шунда бу қўшилувчиларнинг кублари йиғиндиси энг кичик бўлади.

906. 6 сонини шундай иккита қўшилувчига ажратингки, уларнинг квадратлари йиғиндиси энг кичик бўлсин.

907. Иккита мусбат сонниг кўпайтмаси a га тенг. Уларнинг йиғиндиси энг кичик бўлганда бу сонларни топинг.

Ечилиши. Кўпайтувчиларнинг бири x га тенг бўлсин, у ҳолда иккинчи кўпайтувчи $\frac{a}{x}$ га тенг бўлади. Бу қўшилувчиларнинг йиғиндиси — ўзгарувчи миқдор; уни y билан белгилаймиз, у ҳолда

$$y = x+\left(\frac{a}{x}\right) \; (x > 0).$$

Бу функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз: 1) $y'=1-\frac{a}{x^2}$; 2) $1-\frac{a}{x^2}=$ $=0$, $x^2=a$, $x=\sqrt{a}$ (масала шартига кўра $x>0$);

3) $y'' = \frac{a}{x^4} \cdot 2x = \frac{2a}{x^3}$; 4) $y''_{x=\sqrt{a}} = \frac{2a}{(\sqrt{a})^3} > 0$, демак, функция $x = \sqrt{a}$ *да минимумга эга.*

Қўшилувчилар ўзаро тенг бўлганда йиғинди энг кичик бўлади.

908. 9 сонини шундай иккита мусбат кўпайтувчига ажратингки, уларнинг йиғиндиси энг кичик бўлсин.

909. *Берилган периметрли тўғри тўртбурчаклар ичидан* юзи энг катта бўлганини топинг.

Ечилиши. Тўғри тўртбурчакнинг периметри p га тенг бўлсин. Тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирини x билан белгилаймиз, у ҳолда иккинчи томон

$$\frac{p-2x}{2} = \frac{p}{2} - x$$

га *тенг бўлади.*

Тўғри тўртбурчакнинг юзи — ўзгарувчи миқдор. Уни y билан белгилаймиз, у ҳолда

$$y = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = \frac{p}{2}x - x^2 \left(0 < x < \frac{p}{2}\right).$$

Функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз: 1) $y' = \frac{p}{2} - 2x$;

$$2)\ \frac{p}{2} - 2x = 0,\ x = \frac{p}{4};\ 3)\ y'' = -2.$$

Иккинчи тартибли ҳосила манфий, демак, функция $x = \frac{p}{4}$ *да максимумга эга. Берилган периметрли барча тўғри* тўртбурчаклар ичида квадрат энг катта юзга эга бўлади.

910. *Узунлиги 50 см бўлган сим бўлагидан энг катта* юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак ясанг.

911. Берилган периметрли барча тўғри тўртбурчаклар ичидан диагонали энг кичик бўлганини топинг.

Ечилиши. Тўғри тўртбурчакнинг периметри $2p$ га ва бир томони x га тенг бўлсин, у ҳолда унинг иккинчи томони $\frac{2p-2x}{2}$ га тенг бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали — ўзгарувчи миқдор. Уни y билан белгилаймиз, у ҳолда Пифагор теоремасига кўра:

$$y^2 = x^2 + (p-x)^2 \text{ ёки } y^2 = 2x^2 - 2px + p^2$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$y = \sqrt{2x^2 - 2px + p^2} \quad (0 < x < p).$$

Функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ y' = \frac{4x - 2p}{2\sqrt{2x^2 - 2px + p^2}} = \frac{2x - p}{\sqrt{2x^2 - 2px + p^2}};\ 2)\ \frac{2x - p}{\sqrt{2x^2 - 2px + p^2}} = 0;$$

$$2x - p = 0;\quad x = \frac{p}{2}\ \text{(квадрат)};\ 3)\ y' = \frac{2\left(x - \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{2x^2 - 2px + p^2}}.$$

Ҳосиланинг махражи мусбат, шу сабабли ҳосиланинг фақат суратини текширамиз:

$$y'_{x < \frac{p}{2}} < 0 \quad \text{ва} \quad y'_{x > \frac{p}{2}} > 0.$$

Ҳосила ишорасини (—) дан (+) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = \frac{p}{2}$ да минимумга эга.

Берилган периметрли барча тўғри тўртбурчаклар ичидан энг кичик диагоналга эга бўлгани квадратдир.

912. Периметри 16 см бўлган тўғри тўртбурчакларнинг қайси бири энг кичик диагоналга эга бўлади?

913. Берилган юзга эга бўлган барча тўғри тўртбурчаклар ичида энг кичик периметрга эга бўлганини топинг.

Ечилиши. Тўғри тўртбурчакнинг юзи S, томонларидан бири x бўлсин, у ҳолда тўғри тўртбурчакнинг иккинчи томони $\frac{S}{x}$ бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг барча томонлари йиғиндиси — ўзгарувчи миқдор; уни p билан белгилаб,

$$p = 2x + \frac{2S}{x}$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ p' = 2 - \frac{2S}{x^2};\ 2)\ 2 - \frac{2S}{x^2} = 0,\ x = \sqrt{S};\ 3)\ p'' = \frac{2S}{x^4} \times$$

$$\times\, 2x = \frac{4S}{x^3};\ 4)\ p''_{x = \sqrt{S}} = \frac{4S}{(\sqrt{S})^3} > 0.$$

Иккинчи тартибли ҳосила мусбат, демак, функция $x = \sqrt{S}$ да минимумга эга. Берилган юзга эга бўлган барча тўғри тўртбурчаклар ичида квадрат энг кичик периметрга эга бўлади.

914. Қоғоз варағидан юзи 100 см^2 бўлган шундай тўғри тўртбурчак қирқиб олингки, бу тўғри тўртбурчакнинг периметри энг кичик бўлсин.

915. *R радиусли доирага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклар ичидан энг катта юзга эга бўлганини топинг.*

Ечилиши. Доирага ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали $2R$ га тенг; тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирини x билан белгилаймиз, у ҳолда иккинчи томон $\sqrt{(2R)^2-x^2}$ бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг томони — ўзгарувчи миқдор; уни y билан белгилаб,

$$y=x\sqrt{4R^2-x^2}\ (0<x<2R)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ y'=x'\sqrt{4R^2-x^2}+\left(\sqrt{4R^2-x^2}\right)'x=\sqrt{4R^2-x^2}-$$

$$-\frac{2x\cdot x}{2\sqrt{4R^2-x^2}}=\sqrt{4R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-x^2-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=$$

$$=\frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}};\ 2)\ \frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=0,\quad 4R^2-2x^2=0,\quad x=R\sqrt{2};$$

$$3)\ y'=\frac{2(2R^2-x^2)}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{2(R\sqrt{2}-x)(R\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4R^2-x^2}};\ y'_{x<R\sqrt{2}}=(+)\times$$

$$\times(+)=(+);\ y'_{x>R\sqrt{2}}=(-)(+)=(-).$$

Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти, демак, функция $x=R\sqrt{2}$ да максимумга эга.

Тўғри тўртбурчакнинг томонлари $x=R\sqrt{2}$ ва

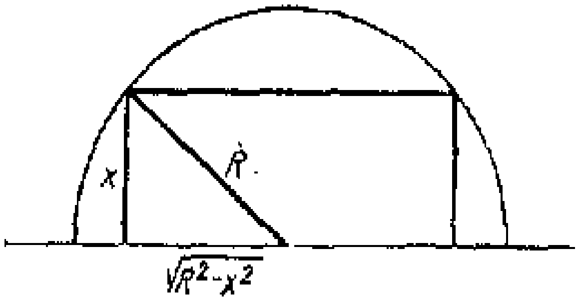
$$\sqrt{4R^2-(R\sqrt{2})^2}=\sqrt{4R^2-2R^2}=\sqrt{2R^2}=R\sqrt{2}.$$

га тенг.

Тўғри тўртбурчакнинг томонлари тенг, демак, доирага ички чизилган тўғри тўртбурчаклар ичида юзи энг катта бўлгани квадратдир.

916. R радиусли доирага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклар ичидан энг катта периметрга эга бўлганини топинг.

917. R радиусли ярим доирага энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчакни ички чизинг.



101-расм.

Ечилиши. Тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирини x билан белгилаймиз (101-расм). Иккинчи томонни x томон ва R радиус орқали Пифагор теоремасига кўра ифодалаймиз: $\sqrt{R^2-x^2}$

Томонлари x ва $2\sqrt{R^2-x^2}$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи — ўзгарувчи миқдор; уни y билан белгилаб,

$$y = x \cdot 2\sqrt{R^2-x^2} = 2x\sqrt{R^2-x^3} \quad (0 < x < R)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз: 1) $y' = 2\left[x'\sqrt{R^2-x^2} + \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)' x\right] =$

$$= 2\left(\sqrt{R^2-x^2} + \frac{-2x \cdot x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right) = 2\left(\frac{R^2-x^2-x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\right) = \frac{2(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}};$$

2) $y' = \dfrac{2(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}} = 0;\quad R^2-2x^2=0;\quad x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$; 3) $y' =$

$$= \frac{4\left(\frac{R^2}{2}-x^2\right)}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{4\left(\frac{R}{\sqrt{2}}-x\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+x\right)}{\sqrt{R^2-x^2}};\quad y'_{x<\frac{R}{\sqrt{2}}} = (+)(+) =$$

$$= (+);\ y'_{x>\frac{R}{\sqrt{2}}} = (-)(+) = (-).$$

Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ да максимумга эга. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари:

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ ва } 2\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}}.$$

Тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати: $\dfrac{R}{\sqrt{2}} : \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = 1:2.$

918. R радиусли ярим доирага энг катта периметрга эга бўлган тўғри тўртбурчакни ички чизинг.

919. *Маълумки, тўсиннинг сиқишга бўлган қаршилиги кесим юзига пропорционал. d диаметрли думалоқ ходадан кесим юзи тўғри тўртбурчак бўлган шундай тўсин қирқиб олиш керакки, унинг сиқишга бўлган қаршилиги энг катта бўлсин.*

Ечилиши. Агар тўғри тўртбурчакнинг томонларидан бирини x билан белгиласак, унинг иккинчи томони $\sqrt{d^2 - x^2}$ бўлади. Кесим юзи—ўзгарувчи миқдор: $x\sqrt{d^2-x^2}$, Тўсиннинг сиқишга бўлган қаршилигини p билан, ўзгармас бўлган пропорционаллик коэффициентини k билан белгилаб,

$$p = kx\sqrt{d^2 - x^2} \quad (0 < x < d)$$

ни ҳосил қиламиз.

Функцияни соддалаштириш учун $k=1$ деб оламиз, у ҳолда $p = x\sqrt{d^2 - x^2}$. Бу функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз.

$$1)\ p' = x'\sqrt{d^2-x^2} + \left(\sqrt{d^2-x^2}\right)'x = \sqrt{d^2-x^2} +$$

$$+\frac{(-2x)x}{2\sqrt{d^2-x^2}} = \frac{d^2-x^2-x^2}{\sqrt{d^4-x^2}} = \frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}};\ 2)\ p' = \frac{d^2-2x^2}{\sqrt{d^2-x^2}} = 0,$$

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}};\ 3)\ p' = \frac{2\left(\frac{d^2}{2} - x^2\right)}{\sqrt{d^2-x^2}} = \frac{2\left(\frac{d}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{d}{\sqrt{2}} + x\right)}{\sqrt{d^4-x^2}};$$

$$p'_{x<\frac{d}{\sqrt{2}}} = (+)\ (+) = (+); \quad p'_{x>\frac{d}{\sqrt{2}}} = (-)\ (+) = (-).$$

Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти, демак, функция $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ да максимумга эга.

Тўсин кесимининг ўлчамлари $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ ва $\sqrt{d^2-\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2} =$

$$= \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Тўсиннинг кесими томони $\frac{d\sqrt{2}}{2} = 0,707d$ бўлган квадратдан иборат.

920. *Маълумки, горизонтал тўсиннинг эгилишга қаршилиги кесим энини баландликнинг квадратига кўпайтмасига пропорционал. d диаметрли ходадан кесимида тўғри тўрт-*

бурчак бўлган шундай тўсин қирқиб олиш керакки, унинг эгилишга қаршилиги горизонтал ҳолатда энг катта бўлсин.

Ечилиши. Тўсиннинг эни x бўлсин, у ҳолда унинг баландлиги $\sqrt{d^2 - x^2}$ бўлади. Эгилишга қаршиликни p билан, пропорционаллик коэффициентини k билан белгилаб,

$$p = kx\left(\sqrt{d^2 - x^2}\right)^2 = kx\,(d^2 - x^2)$$

ни ҳосил қиламиз.

Ўзгармас коэффициентни $k=1$ деб оламиз, у ҳолда $p = x \times$ $\times (d^2 - x^2)$ ёки $p = d^2x - x^3$ $(0 < x < d)$.

Функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ p' = d^2 - 3x^2;\quad 2)\ d^2 - 3x^2 = 0,\ x = \frac{d}{\sqrt{3}};\quad 3)\ p'' = -6x.$$

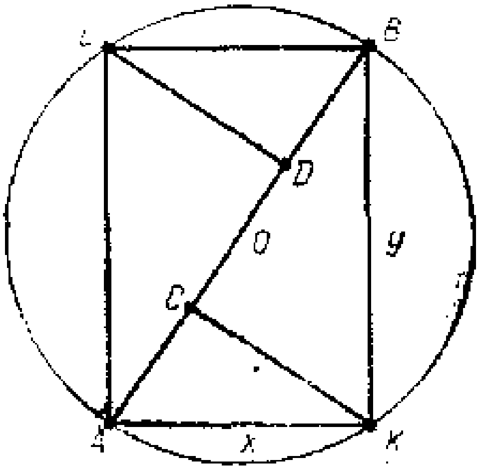
Иккинчи тартибли ҳосила манфий, демак, функция $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ да максимумга эга.

Кесимнинг ўлчамлари: $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ ва $\sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2} =$ $= \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \sqrt{\frac{2d^2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

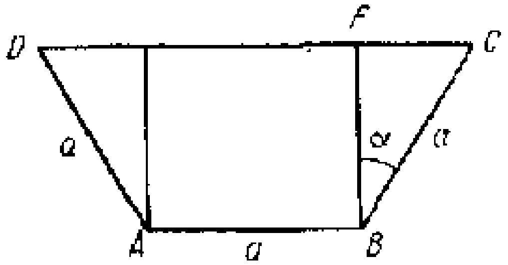
Томонларнинг нисбати: $d\sqrt{\frac{2}{3}} : \frac{d}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

Томонлари $\frac{d}{\sqrt{3}}$ ва $d\sqrt{\frac{2}{3}}$ бўлган тўғри тўртбурчакни ясалиши.

Доиранинг AB диаметрини учта тенг бўлакка бўламиз (102-расм). Бўлиниш нуқталари C ва D дан AB га (унинг турли томонларига) айлана би-



102- расм.



103- расм.

лан K ва L нуқталарда кесишгунча перпендикулярлар чиқарамиз. $AKBL$ тўғри тўртбурчак изланаётган тўғри тўртбурчак эканлигини исбот қиламиз. Тўғри бурчакли учбурчакдаги метрик муносабатлар ҳақидаги теоремага кўра қуйидагига эгамиз:

$$AK^2 = AC \cdot AB = \frac{1}{3} d \cdot d = \frac{1}{3} d^2; \quad AK = \frac{d}{\sqrt{3}};$$

$$BK^2 = BC \cdot BA = \frac{2}{3} d \cdot d = \frac{2}{3} d^2; \quad BK = d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

921. Очиқ тарновнинг кесими асоси ва ён томонлари a га тенг бўлган тенг ёнли трапеция шаклида (103-расм). Тарновнинг ўтказиш имконияти энг катта бўлганда тарнов деворининг ўтмас бурчак учидан ўтказилган баландликка оғиш бурчаги α нимага тенг?

Ечилиши. Тарновнинг кесим юзи S энг катта бўлганда унинг ўтказиш қобилияти ҳам энг катта бўлади деб ҳисоблаймиз:

$$S = \frac{AB + CD}{2} BF, \quad BF = a\cos\alpha, \quad FC = a\sin\alpha,$$

$$CD = a + 2a\sin\alpha, \text{ у ҳолда } S = \frac{a + a + 2a\sin\alpha}{2} a\cos\alpha =$$

$$= a^2(1 + \sin\alpha)\cos\alpha = a^2(\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) =$$

$$= a^2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

бу ерда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Бу функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз: 1) $S' = a^2(-\sin\alpha + \cos 2\alpha)$;

$$S' = a^2\left[\cos 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = a^2\, 2\sin\frac{2\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \times$$

$$\times \sin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\alpha}{2} = 2a^2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right);$$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = 0$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = 0$, бу ердан $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, би-

роқ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right) = 0$; $\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2} = 0$, бу ерда $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 3) $S'' = a^3(-\cos\alpha - 2\sin 2\alpha)$; $S''_{\alpha = \frac{\pi}{6}} < 0$, демак функция $\alpha = \frac{\pi}{2}$ да максимумга эга.

922. Очиқ тарновнинг кесими периметри a га тенг бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат. Тарновнинг эни ва баландлиги қандай нисбатда бўлганда унинг кесими энг катта юзга эга бўлади?

923. Асоси ва баландлигининг йиғиндиси a га тенг бўлган барча учбурчаклар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг.

Ечилиши. Учбурчакнинг асоси x бўлсин, у ҳолда баландлиги $a - x$ га тенг бўлади. Учбурчакнинг юзи — ўзгарувчи миқдор, уни y билан белгилаб,

$$y = \frac{1}{2}x(a - x) \text{ ёки } y = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 \; (0 < x < a)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

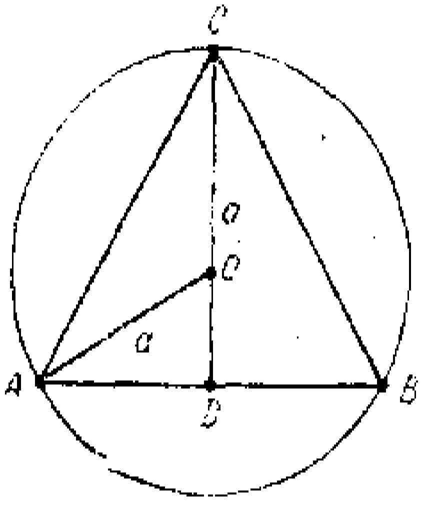
$$1) \; y' = \frac{1}{2}a - x; \; 2) \; \frac{1}{2}a - x = 0, \; x = \frac{a}{2}; \; 3) \; y'' = -1.$$

Иккинчи тартибли ҳосила манфий, демак, функция $x = \frac{a}{2}$ да максимумга эга. Учбурчакнинг асоси $\frac{a}{2}$ га, баландлиги $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ га тенг.

924. Гипотенузаси C бўлган барча тўғри бурчакли учбурчаклар ичидан юзи энг катта бўлганини топинг.

925. a радиусли доирага тенг ёнли учбурчак ички чизилган. Томонларнинг нисбати қандай бўлганда учбурчак энг катта юзга эга бўлади?

Ечилиши. Қуйидагича белгилашлар киритамиз (104- расм): $OC = OA = a$, $OD = x$, $S_{\Delta ABC} = y$, у ҳолда $AD = \sqrt{a^2 - x^2}$, $AB = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ ва $DC = x + a$, $y = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}(x + a)$ ёки $y = (x + a)\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$ $(0 < x < \alpha)$.



104- расм.

Ҳосил қилинган функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ y' = (x+a)'\sqrt{a^2-x^2} + \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'(x+a) =$$

$$\sqrt{a^2-x^2} + \frac{-2x(x+a)}{2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-x^2-x^2-ax}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{2x^2+ax-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$2)\ y' = -\frac{2x^2+ax-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0;\ 2x^2+ax-a^2 = 0.$$

Тенгламанинг илдизлари: $x_1 = -a$ ва $x_2 = \frac{a}{2}$; 3) $y' =$

$$= -\frac{2(x+a)\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Фақат $x = \frac{a}{2}$ критик нуқтани текширамиз, чунки $0 < x < a$:

$$y'_{x<\frac{a}{2}} = (-)(+)(-) = (+);\ y'_{x>\frac{a}{2}} = (-)(+)(+) = (-).$$

Биринчи (—) ишора каср олдидаги ишорадир.

$x = \frac{a}{2}$ да функция максимумга эга. $x = \frac{a}{2}$ бўлганда учбурчакнинг томонларини топамиз.

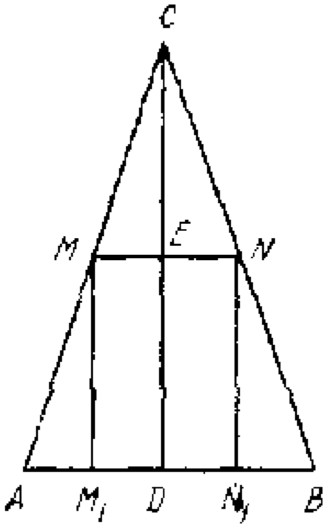
$$AB = 2\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3};\ AC = BC =$$

$$= \sqrt{(AD)^2+(DC)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}.$$

Учбурчак тенг томонли.

926. a радиусли доирага тўғри бурчакли учбурчак ички чизилган. Катетларнинг муносабати қандай бўлганда учбурчак энг катта юзга эга бўлади?

927. Асоси a ва баландлиги h бўлган учбурчакка энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак ички чизилган (тўғри тўртбурчакнинг асоси учбурчакнинг асосида ётади.). Бу тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.



105- расм.

Ечилиши. Қуйидагича белгилашлар киритамиз (105- расм):

$AB = a,\ CD = h,\ DE = x,\ EC = h - x.$

ABC ва MNC учбурчакларнинг ўхшашлигидан: $\frac{MN}{AB} = \frac{EC}{DC}$ ёки $\frac{MN}{a} = \frac{h-x}{h}$, бу ердан $MN = \frac{a}{h}(h-x)$. M_1MNN_1 тўғри тўртбурчакнинг юзи (уни y билан белгилаймиз):

$y = MN\cdot DE = \frac{a}{h}(h-x)\,x$ ёки $y = ax - \frac{a}{h}x^2$ $(0 < x < h)$.

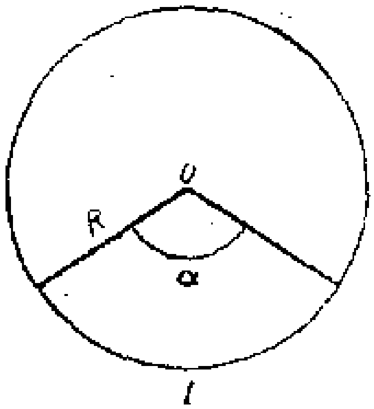
Бу функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $y' = a - \frac{2a}{h}x$; 2) $y' = a - \frac{2a}{h}x = 0$, $x = \frac{h}{2}$; 3) $y'' = -\frac{2a}{h}$.

$x = \frac{h}{2}$ да функция максимумга эга, чунки $y'' < 0$. Энг катта тўғри тўртбурчакнинг баландлиги $\frac{h}{2}$ ва асоси $MN = \frac{a}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{a}{h}\frac{h}{2} = \frac{a}{2}$. Тўғри тўртбурчакнинг баландлиги ва асоси мос равишда учбурчак баландлигининг ва асосининг ярмига тенг.

928. Тенг ёнли учбурчакка энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчакни ички чизинг.

929. Периметрлари p га тенг бўлган барча доиравий секторлар ичидан энг катта юзга эга бўлганини топинг.



106- расм.

Ечилиши. $p = 2R + l$ (106- расм), бироқ $l = \alpha R$, бу ерда α — ёй l нинг радиан ўлчови, у ҳолда $p = 2R + \alpha R$.

Секторнинг юзи: $S = l\frac{R}{2}$ ёки $S = \alpha R\frac{R}{2} = \frac{1}{2}R^2\alpha$, бироқ $\alpha = \frac{p - 2R}{R}$, у ҳолда

$$S = \frac{1}{2} R^2 \frac{p-2R}{R} = \frac{1}{2} R(p-2R) = \frac{1}{2} pR - R^2$$

$$(0 < 2R < p \text{ ёки } 0 < R < \frac{p}{2}).$$

Функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $S' = \frac{1}{2} p - 2R$; 2) $\frac{1}{2} p - 2R = 0$, $R = \frac{p}{4}$; 3) $S'' = -2$.

$R = \frac{p}{4}$ да функция максимумга эга. α ёйни ва S юзни ҳисоблаймиз:

$$\alpha = \frac{4R-2R}{R} = 2 \text{ (рад)}; \; S = \frac{1}{2} R^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{p^2}{16}\cdot 2 = \frac{p^2}{16} = R^2.$$

930. Берилган юзга эга бўлган барча доиравий секторлар ичидан энг кичик периметрга эга бўлганини топинг.

931. *Берилган S тўла сиртга эга бўлган* ва асоси квадрат бўлган барча тўғри параллелепипедлар ичидан энг катта ҳажмга эга бўлганини топинг.

Ечилиши. Параллелепипед асосининг томони x ва баландлиги y бўлсин, у ҳолда унинг тўла сирти:

$$S = 2x^2 + 4xy,$$

бу ердан

$$y = \frac{S-2x^2}{4x}.$$

Параллелепипеднинг ҳажми: $V = x^2y$ ёки $V = x^2\frac{S-2x^2}{4x} = \frac{x(S-2x^2)}{4}$; $V = \frac{1}{4} Sx - \frac{1}{2} x^3 \left(0 < 2x^2 < S,\; 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2}}\right)$.

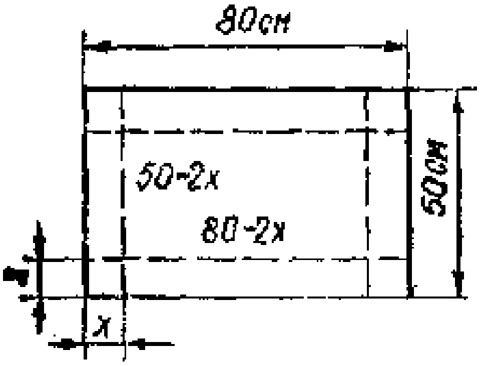
Функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $V' = \frac{1}{4} S - \frac{3}{2} x^2$; 2) $\frac{1}{4} S - \frac{3}{2} x^2 = 0$, $x = \sqrt{\frac{S}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{6S}$; 3) $V'' = -3x$; 4) $V''_{x=\frac{1}{6}\sqrt{6S}} < 0$.

Иккинчи тартибли ҳосила $x = \frac{1}{6}\sqrt{6S}$ да манфий, демак, аргументнинг бу қийматида функция максимумга эга. Параллелепипед асосининг томони: $x = \frac{1}{6}\sqrt{6S}$. Параллелепипеднинг баландлиги: $y = \frac{S - 2\left(\frac{1}{6}\sqrt{6S}\right)^2}{4 \cdot \frac{1}{6}\sqrt{6S}} = \frac{1}{6}\sqrt{6S}$.

Демак, энг катта ҳажмга куб эга бўлади.

932. Томонлари 80 *см* ва 50 *см* бўлган тўғри тўртбурчак тунуканинг учларидан тенг квадратлар қирқиб олиб ташлаб, сўнгра унинг четларини букиб, энг катта ҳажмга эга бўлган усти очиқ яшик ясаш керак. Қирқиб олиб ташланадиган квадратларнинг томони қандай бўлиши керак (107-расм)?



107-расм.

933. Ҳажми V га тенг бўлган ва асосида квадрат ётган барча тўғри параллелепипедлар ичидан энг кичик тўла сиртга эга бўлганини топинг.

Ечилиши. Параллелепипед асосининг томони x ва баландлиги y бўлсин, у ҳолда унинг ҳажми:

$$V = x^2y, \text{ бу ердан } y = \frac{V}{x^2}.$$

Параллелепипеднинг тўла сирти: $S = 2x^2 + 4xy$, ёки

$$S = 2x^2 + 4x\frac{V}{x^2}, \text{ ёки } S = 2x^2 + \frac{4V}{x} \quad (x > 0).$$

Функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ S' = 4x - \frac{4V}{x^2};\quad 2)\ 4x - \frac{4V}{x^2} = 0;\ x^3 = V,\ x = \sqrt[3]{V};$$

$$3)\ S' = \frac{4x^3 - 4V}{x^2} = \frac{4(x^3 - V)}{x^2} = \frac{4\left(x - \sqrt[3]{V}\right)\left(x^2 + x\sqrt[3]{V} + \sqrt[3]{V^2}\right)}{x^2};$$

$$S'_x < \sqrt[3]{V} = (-)(+) = (-);\quad S'_x > \sqrt[3]{V} = (+)(+) = (+).$$

Ҳосила ишорасини $(-)$ дан $(+)$ га ўзгартиряпти, демак, функция $x = \sqrt[3]{V}$ да минимумга эга.

Асоснинг томони. $x = \sqrt[3]{V}$. Баландлик:

$$y = \frac{V}{(\sqrt[3]{V^2})^2} = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \frac{V\sqrt[3]{V}}{V} = \sqrt[3]{V}.$$

Энг кичик сиртга куб эга бўлади.

934. Ҳажми V берилган, тўла сирти эса энг кичик бўлган, туби квадрат шаклидаги усти очиқ (қопқоқсиз) яшикнинг ўлчамларини топинг.

935. Берилган V ҳажмга эга бўлган барча цилиндрлар ичидан тўла сирти энг кичик бўлганини топинг.

Ечилиши. Цилиндрнинг ҳажми: $V = \pi R^2 H$, бу ердан $H = \frac{V}{\pi R^2}$. Тўла сирт: $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$; $S = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{V}{\pi R^2}$;

$$S = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R} \quad (R > 0).$$

Функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ S' = 4\pi R - \frac{2V}{R^2};\ 2)\ 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0;\ 4\pi R^3 - 2V = 0;$$

$$2\pi R^3 - V = 0;\ R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};\ 3)\ S' = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2} = \frac{4\pi\left(R^3 - \frac{V}{2\pi}\right)}{R^2} =$$

$$= \frac{4\pi\left(R - \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)\left(R^2 + R\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}\right)}{R^2};\ S'_{R < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} =$$

$$= (-)(+) = (-);\ S'_{R > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = (+)(+) = (+).$$

Ҳосила ишорасини (—) дан (+) га ўзгартиряпти, демак, функция $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ да минимумга эга.

Цилиндрнинг радиуси: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, баландлиги:

$$H = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R.$$

936. Берилган V ҳажмга эга бўлган (қопқоқсиз) цилиндр бакнинг сирти энг кичик бўлганда унинг асоси радиусини ва баландлигини топинг.

937. Ён сирти S бўлган барча конуслар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг.

Ечилиши. Конуснинг ҳажми: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, бироқ $H = \sqrt{l^2 - R^2}$. Конуснинг ён сирти формуласи $S = \pi Rl$ дан $l = \frac{S}{\pi R}$ ни топамиз, у ҳолда

$$H = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 R^2} - R^2} = \frac{1}{\pi R}\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}$$

$$\left(S^2 - \pi^2 R^4 > 0,\ R < \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right).$$

H нинг қийматини конус ҳажми формуласига қўйиб,

$$V = \frac{1}{3}\ \pi R^2\ \frac{1}{\pi R}\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4} = \frac{1}{3}\ R\ \sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $V' = \frac{1}{3}\left(\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4} - \frac{2\pi^2 R^4}{\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}}\right) = \frac{S^2 - 3\pi^2 R^4}{3\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}}$;

2) $S^2 - 3\pi^2 R^4 = 0,\ R^4 = \frac{S^2}{3\pi^2},\ R = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}};\ V'_{R < \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}} > 0$

ва $V'_{R > \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}} < 0.$

Демак, функция $R = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$ да максимумга эга. Қуйидагиларни топамиз:

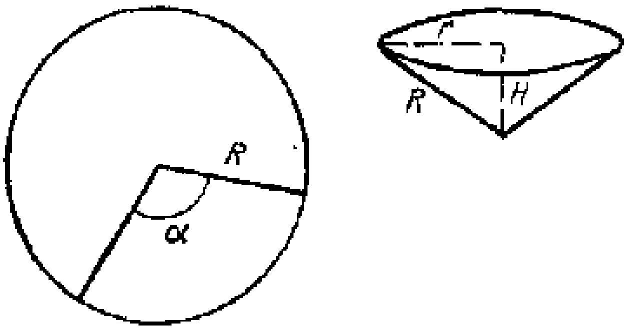
$$H_{\text{макс}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}}\sqrt{S^2 - \pi^2\frac{S^2}{\pi\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}}\ S\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}};$$

$$\frac{H_{\text{макс}}}{R_{\text{макс}}}=\frac{\sqrt{\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}}}{\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}}=\sqrt{2};\quad V_{\text{макс}}=\frac{S}{3}\sqrt{\frac{2S}{3\pi\sqrt{3}}}.$$

938. Ясовчиси l берилган барча конуслар ичида ҳажми энг катта бўлганини топинг.

939. R радиусли қоғоз доирадан сектор қирқиб олинган ва доиранинг қолган бўлагидан конус шаклида воронка



108- расм.

ясалган (108-расм). Воронканинг ҳажми энг катта бўлиши учун сектор қандай бурчакка эга бўлиши керак? Воронканинг асоси радиусини ва баландлигини топинг.

Ечилиши. Воронканинг баландлигини H билан белгилаймиз, у ҳолда воронка асосининг радиуси r қуйидагига тенг бўлади: $r=\sqrt{R^2-H^2}$. Воронканинг ҳажми:

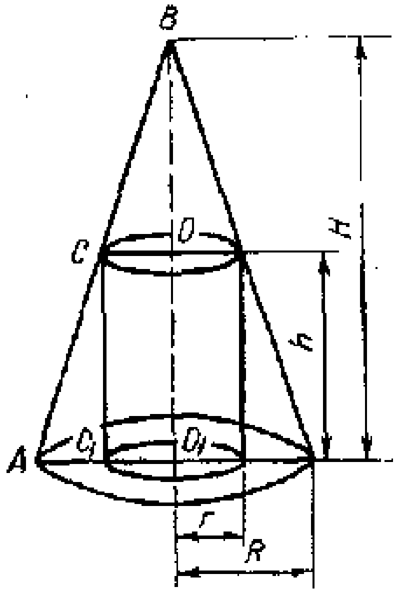
$$V=\frac{1}{3}\pi^2 rH=\frac{1}{3}\pi\,(R^2-H^2)\,H.$$

$V=\frac{1}{3}\pi\,(R^2H-H^3)$ функцияга эгамиз, бу ерда H аргумент $0<H<R$ да ўзгаради.

Функциянинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз: 1) $V'=\frac{1}{3}\pi(R^2-3H^2)$; 2) $\frac{1}{3}\pi\,(R^2-3H^2)=0$; $R^2-3H^2=0$; $H=\frac{R}{\sqrt{3}}$; 3) $V''=$ $=\frac{1}{3}\pi\,(-6H)=-2\pi H$; $V'_{H=\frac{R}{\sqrt{3}}}<0$, демак, $H=\frac{R}{3}$ да функция максимумга эга. Воронка асосининг радиуси:

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{3R^2 - R^2}{3}} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

940. Берилган конусга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ён сирти энг катта бўлганини топинг (конусда R ва H берилган).



109-расм.

Ечилиши. Изланаётган цилиндрда r —асоснинг радиуси, h — баландлик бўлсин (109-расм). ABO_1 ва CBO учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h},$$

бу ердан

$$r = \frac{R(H-h)}{H}.$$

r нинг қийматини цилиндрнинг ён сирти формуласи $S = 2\pi rh$ га қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S = 2\pi h\frac{R(H-h)}{H}$$

ёки

$$S = \frac{2\pi R}{H}(Hh - h^2) \quad (0 < h < H).$$

Функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ S' = \frac{2\pi R}{H}(H - 2h); \qquad 2)\ \frac{2\pi R}{H}(H - 2h) = 0,\ H - 2h = 0;$$

$$h = \frac{H}{2};\ 3)\ S'' = -\frac{4\pi R}{H}.$$

Иккинчи тартибли ҳосила манфий, демак, функция $h = \frac{H}{2}$ да максимумга эга.

Цилиндрнинг радиуси r ни топамиз:

$$r = \frac{R\left(H - \frac{H}{2}\right)}{H} = \frac{RH}{H\cdot 2} = \frac{R}{2}.$$

941. Берилган конусга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан тўла сирти энг катта бўлганини топинг (конусда R ва H берилган).

942. Берилган конусга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг (конусда R ва H берилган).

Ечилиши. Изланаётган цилиндрда r — асоснинг радиуси, h — баландлик бўлсин (109-расм). ABO_1 ва ACC_1 учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{R}{H}=\frac{R-r}{h}, \text{ бу ердан } h=\frac{H(R-r)}{R}.$$

h нинг қийматини цилиндр ҳажми формуласи $V=\pi r^2 h$ га қўйиб,

$$V=\pi r^2\frac{H(R-r)}{R}=\frac{\pi H}{R}(Rr^2-r^3)\ (0<r<R)$$

ни ҳосил қиламиз.

Функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз.

$$1)\ V'=\frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2);\ 2)\ \frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2)=0;$$

$$2Rr-3r^2=0;\ r(2R-3r)=0;\ r_1=0,\ r_2=\frac{2}{3}R;\ 3)\ V''=$$

$$=\frac{\pi H}{R}(2R-6r);\ V''_{r=\frac{2}{3}R}=-2\pi H.$$

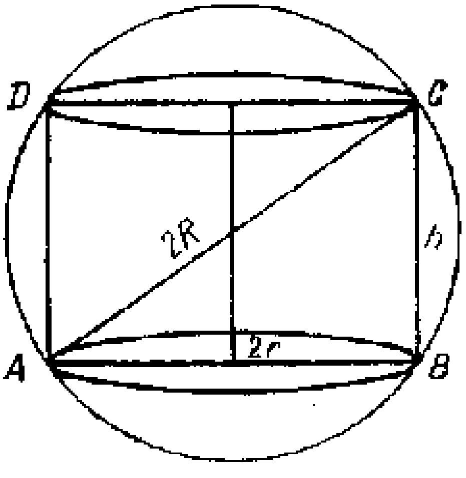
Иккинчи тартибли ҳосила манфий, демак, функция $r=\frac{2}{3}R$ да максимумга эга.

Цилиндрнинг баландлигини топамиз:

$$h=\frac{H\left(R-\frac{2}{3}R\right)}{R}=\frac{1}{3}H.$$

943. R радиусли шарга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг.

Ечилиши. Изланаётган цилиндрда r — асоснинг радиуси, h — баландлик бўлсин (110-расм). Цилиндрнинг ҳажми: $V=\pi r^2 h$. $\triangle ABC$ дан: $4r^2+h^2=4R^2$. Бу ердан



110-расм.

$$r^2 = \frac{4R^2 - h^2}{4} = R^2 + \frac{1}{4} h^2.$$

r^2 нинг бу қийматини цилиндр ҳажми формуласига қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$V = \pi h\left(R^2 - \frac{1}{4} h^2\right).$$

ёки

$$V = \pi\left(R^2 h - \frac{1}{4} h^3\right) \quad (0 < h < 2R).$$

Функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ V' = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4} h^2\right);\ 2)\ \pi\left(R^2 - \frac{3}{4} h^2\right) = 0;\ R^2 - \frac{3}{4} h^2 = 0;$$

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}};\ 3)\ V'' = -\frac{3}{2}\pi h.$$

Иккинчи тартибли ҳосила $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ да манфий, демак, функция максимумга эга.

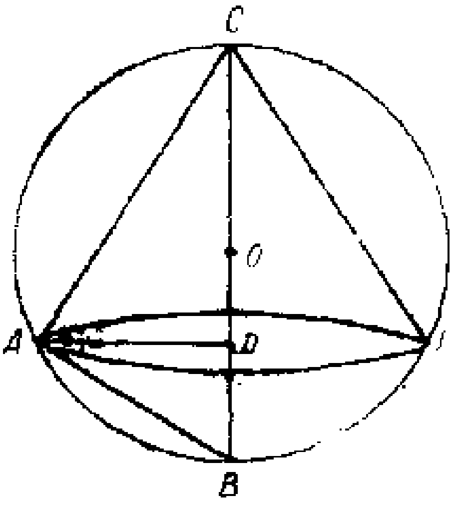
Цилиндрнинг радиуси r ни топамиз:

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4R^2}{3} = R^2 - \frac{1}{3} R^2 = \frac{2}{3} R^2;\ r = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

944. R радиусли шарга ички чизилган барча цилиндрлар ичидан ён сирти энг катта бўлганини топинг.

945. R радиусли шарга ички чизилган барча конуслар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг.

Ечилиши. Изланаётган конуснинг радиуси $AD = r$ ва баландлиги $DC = h$ бўлсин (111-расм). Конуснинг ҳажми: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. $\triangle BAC$ дан тўғри бурчакли учбурчакдаги метрик муносабатлар ҳақидаги теоремага кўра топамиз: $AD^2 = BD \cdot DC$ ёки $r^2 = (2R - h)h$. r^2 нинг қийматини конус ҳажми формуласига қўйиб, $V = \frac{1}{3}\pi(2R - h) \cdot h \cdot h = \frac{1}{3}\pi \times (2Rh^2 - h^3)$, $0 < h < 2R$ ни ҳосил қиламиз.



111- расм.

Бу функцияни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ V' = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2);\ \ 2)\ \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = 0;$$
$$4Rh - 3h^2 = 0;\ h(4R - 3h) = 0;\ h_1 = 0;\ 4R - 3h = 0;\ h_2 = $$
$$= \frac{4}{3}R;\ \ 3)\ V'' = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h) = \frac{2}{3}\pi(2R - 3h);\ V''_{h=\frac{4}{3}R} =$$
$$= \frac{2}{3}\pi\left(2R - 3\cdot\frac{4}{3}R\right) = \frac{2}{3}\pi(-2R) = -\frac{4\pi R}{3}.$$

Иккинчи тартибли ҳосила аргументнинг $h = \frac{4}{3}R$ қийматида манфий, демак, аргументнинг бу қийматида y максимумга эга.

$h = \frac{4}{3}R$ бўлганда r нинг қийматини топамиз:

$$r^2 = \left(2R - \frac{4}{3}R\right)\cdot\frac{4}{3}R = \frac{2R}{3}\cdot\frac{4}{3}R = \frac{8}{9}R^2,$$

бу ердан

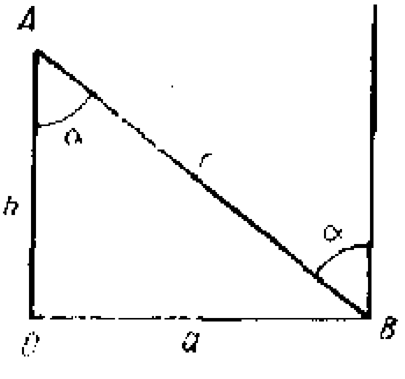
$$r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}.$$

Энг катта ҳажмга радиуси $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$ ва баландлиги $\frac{4}{3}R$ бўлган конус эга бўлади.

946. R радиусли шарга ички чизилган барча конуслар ичидан ён сирти энг катта бўлганини топинг.

947. Радиуси a га тенг бўлган доиравий майдончанинг чегараси максимал ёритилган бўлиши учун фонарни майдон ўртасида қандай h баландликка ўрнатиш керак?

Ечилиши. Физика курсидан маълумки, E ёритилганлик ёруғлик манбаигача бўлган масофа квадратига тескари пропорционал ва тушиш бурчагининг (сиртга ўтказилган нормаль билан ёруғлик оқими йўналиши орасидаги бурчак) косинусига тўғри пропорционал (112-расм):



112- расм.

$$E = k\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

бу ерда k коэффициент A нуқтага жойлаштирилган ёруғли манбаига боғлиқ. OAB учбурчакдан:

$$\cos\alpha = \frac{h}{r} \text{ ва } r = \sqrt{h^2 + a^2}.$$

h ни эркли ўзгарувчи деб ҳисоблаб,

$$E = k\frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}\,(h^2 + a^2)} = k\frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (h > 0)$$

ни ҳосил қиламиз.

Функцияни биринчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

$$1)\ E' = k\frac{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h \cdot h}{(h^2 + a^2)^3} =$$

$$= k\frac{(h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}(h^2 + a^2 - 3h^2)}{(h^2 + a^2)^3} = k\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2+a^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$2)\ a^2 - 2h^2 = 0;\ h = \frac{a}{\sqrt{2}};\ 3)\ E' = k\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - h\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + h\right)}{(h^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E'_{h < \frac{a}{\sqrt{2}}} = (+)\ (+) = (+);\ E'_{h > \frac{a}{\sqrt{2}}} = (-)\ (+) = (-).$$

Ҳосила ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти, демак, функция $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ да максимумга эга, яъни $h = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0{,}7a$ да B нуқтадаги ёритилганлик энг катта бўлади.

948. Жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракати $s = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$ тенглама билан берилган. Жисм ҳаракатининг максимал тезлигини топинг (s м ҳисобида, t сек ҳисобида берилган).

Ечилиши. Жисм ҳаракатининг тезлиги йўлдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг: $v = s' = -3t^2 + 18t - 24$. $v = -3t^2 + 18t - 24$ функцияга эгамиз. Унинг максимум ва минимумини иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширамиз:

1) $v' = -6t + 18$; 2) $-6t + 18 = 0$, $t = 3$; 3) $v'' = -6$.

Иккинчи тартибли ҳосила манфий, демак, энг катта тезликка $t=3$ сек бўлганда эришилади.

$t=3$ сек моментдаги тезликни топамиз:

$$v_{t=3}=-3\cdot 3^2+18\cdot 3-24=3 \text{ (м/сек)}.$$

949. Жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракат қонуни $s=-t^3+3t^2+9t+3$ тенглама билан берилган. Жисм ҳаракатининг максимал тезлигини топинг (s м ҳисобида, t сек ҳисобида берилган).

950. Юқорига тик отилган жисмнинг ҳаракат қонуни $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ тенглама билан берилган. Жисм кўтарилган энг юқори баландликни топинг.

Ечилиши. Юқорига тик отилган жисмнинг энг юқорига кўтарилган нуқтасидаги тезлиги нолга тенг бўлади, демак, $v=s'=v_0-gt=0$, бу ердан $t=\frac{v_0}{g}$.

Берилган функцияни текширамиз: 1) $s'=v_0-gt$; 2) $v_0-gt=0, t=\frac{v_0}{g}$; 3) $s'=g\left(\frac{v_0}{g}-t\right)$; $s_{t<\frac{v_0}{g}}=(+)$, $s'_{t>\frac{v_0}{g}}=(-)$.

Функция ишорасини (+) дан (—) га ўзгартиряпти, демак, у $t=\frac{v_0}{g}$ да максимал қийматга эга бўлади.

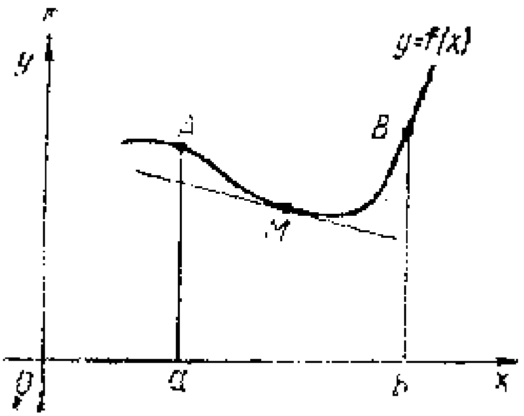
$t=\frac{v_0}{g}$ бўлганда s ни топамиз:

$$s=v_0\frac{v_0}{g}-\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2}=\frac{v_0^2}{2g}.$$

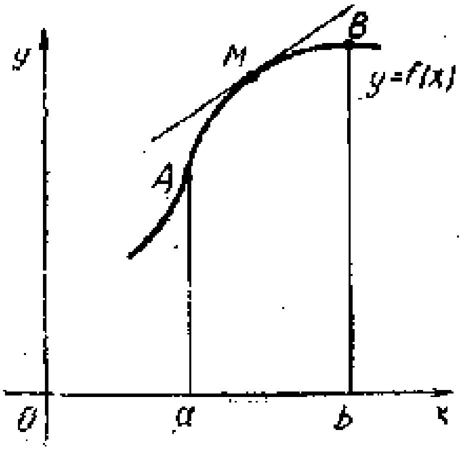
951. Юқорига тик отилган жисмнинг ҳаракат қонуни $s=19{,}6t-4{,}9t^2$ тенглама билан берилган. Жисм кўтарилган энг юқори баландликни топинг (s м ҳисобида, t сек ҳисобида берилган).

49-§. Эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлиги

Агар $y=f(x)$ эгри чизиқнинг (a, b) интервалдаги ёйи *бу интервалнинг исталган нуқтасидаги уринмасидан юқорида* ётса, бу ёйга ботиқ ёй дейилади (113-расм).



113-расм.



114-расм.

Агар $y=f(x)$ эгри чизиқнинг (a, b) интервалдаги ёйи бу интервалнинг исталган нуқтасидаги уринмасидан пастда ётса, бу ёйга қавариқ ёй дейилади.

Эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик аломатлари

Агар $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи x аргументнинг (a, b) интервалдаги қийматлари учун мусбат бўлса, эгри чизиқ бу интервалда ботиқ, манфий бўлса, қавариқ бўлади.

$y=f(x)$ эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлигини текшириш қоидаси

I. Берилган $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топилади:

$$y''=f''(x).$$

II. Иккинчи тартибли ҳосилани нолдан кичик деб фараз қилинади: $f''(x)<0$; $f''(x)<0$ тенгсизликни x га нисбатан ечиб, $y=f(x)$ эгри чизиқ қавариқ бўлган интервалларни топилади.

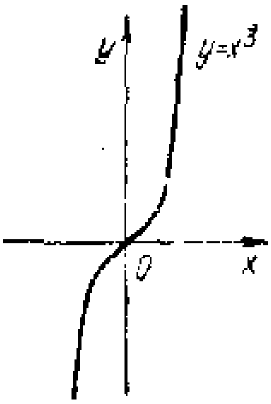
III. Иккинчи тартибли ҳосилани нолдан катта деб фараз қилинади; $f''(x)>0$; $f''(x)>0$ тенгсизликни x га нисбатан ечиб, эгри чизиқ ботиқ бўлган интервалларни топилади.

952. $y=x^3$ эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлигини текширинг.

Ечилиши. 1) $y'=3x^2$; $y''=6x$; 2) $6x<0$, $x<0$. $(-\infty; 0)$; бу интервалда $y=x^3$ эгри чизиқ қавариқ; 3) $6x>0$, $x>0$ $(0; +\infty)$; бу интервалда $y=x^3$ эгри чизиқ ботиқ (115-расм).

953. Қуйидаги эгри чизиқларнинг қавариқлиги ва ботиқлигини текширинг: 1) $y=2x^3$; 2) $y=x^2$; 3) $y=-x^3-1$; 4) $y=x^2+3x-1$.

954. $y=\frac{1}{x}$ эгри чизиқнинг $x=-2$ ва $x=1$ нуқталарда қавариқлиги ва ботиқлигини текширинг.



115- расм.

Ечилиши. 1) $y'=-\frac{1}{x^2}$; $y''=\frac{1}{x^4}\cdot 2x=\frac{2}{x^3}$;

2) иккинчи тартибли ҳосилага аргументнинг берилган қийматларини қўйиб, иккинчи тартибли ҳосиланинг ишорасини топамиз:

$$y''_{x=-2}=\frac{2}{(-2)^3}=-\frac{2}{8}<0;$$

демак, $x=-2$ нуқтада эгри чизиқ қавариқ;

$$y''_{x=1}=\frac{2}{13}>0,$$

у ҳолда $x=1$ нуқтада эгри чизиқ ботиқ.

955. 1) $y=-\frac{1}{x}$ эгри чизиқни $x_1=-1$ ва $x_2=1$ нуқталарда; 2) $y=\frac{1}{x^2}$ эгри чизиқни $x_1=-2$ ва $x_2=1$ нуқталарда қавариқлик ва ботиқлигини текширинг.

956. $y=x^4-2x^3+6x-4$ эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлик интервалларини топинг.

Ечилиши. Иккинчи тартибли ҳосилани топамиз:

$y'=4x^3-6x^2+6$, $y''=12x^2-12x$.

$12x^2-12x<0$ тенгсизликни ечамиз: $x^2-x<0$.

$D=1>0$ (168- бетдаги 2- жадвал, III ҳол). $x^2-x=0$ тенгламанинг илдизлари: $x_1=0$, $x_2=1$. Тенгсизлик x нинг $(0, 1)$ интервалдаги барча ҳақиқий қийматлари учун ўринли. Эгри чизиқ $(0, 1)$ интервалда қавариқ. $x^2-x>0$ тенгсизликни ечамиз. Тенгсизлик x нинг $(-\infty, 0)$ ва $(1, +\infty)$ интервалларадаги барча ҳақиқий қийматларида ўринли. Бу интервалларда эгри чизиқ ботиқ.

957. Қуйидаги эгри чизиқларнинг қавариқлик ва ботиқлик интервалларини топинг: 1) $y=x^3-6x^2+2x-6$; 2) $y=x^4-2x^3-12x^2+24x+8$.

50-§. Эгилиш нуқталари

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг қавариқлик ботиқликдан ажралган нуқтаси эгри чизиқнинг эгилиш нуқтаси дейилади.

$y = f(x)$ эгри чизиқнинг эгилиш нуқталарини топиш қоидаси

I. $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топилади:

$$y'' = f''(x).$$

II. Иккинчи тартибли ҳосилани нолга тенгланади ва $f''(x) = 0$ тенгламани ечилади.

III. Иккинчи тартибли ҳосиланинг топилган илдизлар билан чегараланган ҳар қайси интервалдаги ишораси топилади.

IV. Агар иккинчи тартибли ҳосиланинг берилган илдиз билан ажралган иккита қўшни интервалдаги ишоралари турлича бўлса, у ҳолда илдизнинг берилган қийматида эгилиш нуқтаси мавжуд; агар ишоралар бир хил бўлса, у ҳолда эгилиш нуқтаси мавжуд эмас.

V. Эгилиш нуқталарининг ординаталарини топилади, яъни илдизнинг эгилиш мавжуд бўлган қийматлари учун функция ҳисобланади.

958. $y = \frac{1}{3}x^3$ эгри чизиқнинг эгилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Эгилиш нуқталарини топиш қоидасига кўра:

1) $y' = x^2$; $y'' = 2x$;

2) $2x = 0$; $x = 0$;

3) $y''_{x<0} = (-)$; $y''_{x>0} = (+)$;

4) $x = 0$ нуқтада эгилиш нуқтаси мавжуд, чунки иккинчи тартибли ҳосила $x = 0$ илдиз билан ажратилган қўшни интервалларда турли ишораларга эга;

5) $y_{x=0} = \frac{1}{3} \cdot 0^3 = 0$. Эгилиш нуқтаси: (0; 0).

959. Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгилиш нуқталарини топинг:

1) $y = x^3 - x$; 2) $y = 6x^2 - x^3$; 3) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.

960. $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 100$ эгри чизиқнинг эгилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Эгилиш нуқталарини топиш қоидасига кўра:

1) $y' = 4x^3 - 30x^2 + 72x$; $y'' = 12x^2 - 60x + 72$;

2) $12x^2 - 60x + 72 = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

3) $y'' = 12(x-2)(x-3)$.

Иккинчи тартибли ҳосиланинг ишоралари $x = 2$ ва $x = 3$ илдизлар билан ажратилган $(-\infty;\ 2)$, $(2;\ 3)$ ва $(3;\ +\infty)$ интервалларда текширилади:

$$y''_{x<2} = (-)(-) = (+);\quad y''_{2<x<3} = (+)(-) = (-);$$

$$y''_{x>3} = (+)(+) = (+);$$

4) иккинчи тартибли ҳосиланинг ишораси $(-\infty;\ 2)$ интервалда — мусбат, $(2;\ 3)$ *интервалда — манфий* ва $(3;\ +\infty)$ интервалда — мусбат, яъни иккинчи тартибли ҳосиланинг $x = 2$ ва $x = 3$ илдизлар билан ажратилган қўшни интерваллардаги ишоралари турлича, демак, $x = 2$ ва $x = 3$ нуқталарда эгилиш нуқтаси мавжуд;

5) $y_{x=2} = 2^4 - 10 \cdot 2^3 + 36 \cdot 2^2 - 100 = -20$;

$y_{x=3} = 3^4 - 10 \cdot 3^3 + 36 \cdot 3^2 - 100 = 35$.

Эгилиш нуқталари: $(2;\ -20)$ ва $(3;\ 35)$.

961. *Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгилиш нуқталарини топинг:*

1) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$;

2) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$.

51-§. Функцияларнинг графикларини ясаш

Тўғри бурчакли координаталар системасида эгри чизиқларни чизиш қоидаси

I. *Функциянинг максимум ва минимумини биринчи ёки* иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текширилади. Максимум ва минимум нуқталарининг ординаталари топилади.

II. Функциянинг эгилиш нуқтаси текширилади. Эгилиш нуқтасининг ординаталари топилади.

III. Эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари (агар бу қийинчилик туғдирмаса) топилади ёки бир нечта қўшимча нуқтанинг координаталари топилади.

IV. Топилган нуқталар (уларнинг аргументлари ортиб *бориш тартибида) жадвалга ёзилади ва бу нуқталар ясалиб,* улар орқали силлиқ эгри чизиқ ўтказилади. Агар ординаталарнинг қийматлари жуда ҳам катта бўлса, у ҳолда масштабни эгри чизиқ танлаб олинган координата ўқлари системасига жойлаша оладиган қилиб кичрайтириш керак.

Функцияларнинг графикларини ясанг.

962. $y = x^2 + 4$.

Текшириш ва ясаш. Функцияни юқорида келтирилган қоида асосида текширамиз:

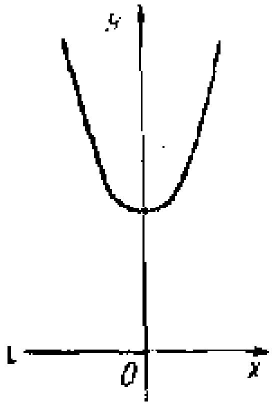
1) $y' = 2x$; $2x = 0$, $x = 0$; $y'_{x<0} = (-)$; $y'_{x>0} = (+)$.

Функция $x = 0$ да минимумга эга $y_{x=0} = 4$;

2) эгри чизиқнинг эгилиш нуқталари йўқ, чунки иккинчи тартибли ҳосила исталган x да мусбат;

3) эгри чизиқ Oy ўқ билан $A(0;\ 4)$ нуқтада кесишади, Ox ўқ билан кесишмайди;

4) парабола нуқталари жадвалини тузамиз:



116- расм.

x	-2	-1	0	1	2
y	8	5	4	5	8
			Функциянинг минимуми		

Бу нуқталар бўйича параболани ясаймиз (116- расм).

963. 1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = x^2 - 4$.

964. $y = -2x^2 + 4x$.

Текшириш ва ясаш. Функцияни текширамиз:

1) $y' = -4x + 4$; $-4x + 4 = 0$; $x = 1$; $y'' = -4$.

Функция $x = 1$ да максимумга эга:

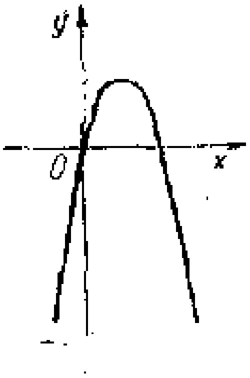
$$y_{x=1} = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 2;$$

2) эгри чизиқнинг эгилиш нуқталари йўқ, чунки иккинчи тартибли ҳосила исталган x да манфий;

3) эгри чизиқ Oy ўқ билан $(0;\ 0)$ нуқтада кесишади. Ox ўқ билан кесишиш нуқтасини топамиз: $y = 0$; $x(-2x + 4) = 0$, бу ердан $x_1 = 0$ ва $-2x + 4 = 0$, $x_2 = 2$. $(0;\ 0)$ ва $(2;\ 0)$ нуқталарга эгамиз;

4) парабола нуқталарининг жадвалини тузамиз:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-16	-6	0	2	0	-6
				Функциянинг максимуми		



117- расм.

Бу нуқталар бўйича параболани ясаймиз (117- расм).

965. 1) $x = 2x^2 - 8x$; 2) $y = -3x^2 + 12x$.

966. $y = 2x^2 - 12x + 10$.

Текшириш ва ясаш. 1) $y' = 4x - 12$; $4x - 12 = 0$; $x = 3$, $y'' = 4$.

Функция $x = 3$ да минимумга эга:

$$y_{x=3} = 2\cdot 3^2 - 12\cdot 3 + 10 = -8;$$

2) эгри чизиқнинг эгилиш нуқталари йўқ, чунки иккинчи тартибли ҳосила исталган x да мусбат;

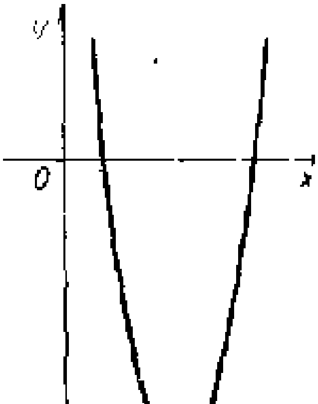
3) *Ox ўқ билан кесишиш нуқталарини* топамиз:

$$y = 0{,}2x^2 - 12x + 10 = 0;\quad x_1 = 1,\ x_2 = 5.$$

Oy ўқ билан кесишиш нуқталарини топамиз: $x = 0$, $y = 10$. Қуйидаги нуқталарга эгамиз: $(1;\ 0)$, $(5;\ 0)$ ва $(0;\ 10)$;

4) парабола нуқталари жадвалини тузамиз:

x	0	1	3	5	6
y	10	0	-8	0	10
			Функциянинг минимуми		



118- расм.

Бу нуқталар бўйича параболани ясаймиз (118- расм).

967. 1) $y = -x^2 + 2x + 15$; 2) $y = x^2 + 5x + 4$.

968. $y = \frac{1}{4}x^4$.

Текшириш ва ясаш. Функция жуфт, демак,

эгри чизиқ нуқталари Oy ўққа нисбатан симметрик жойлашган:

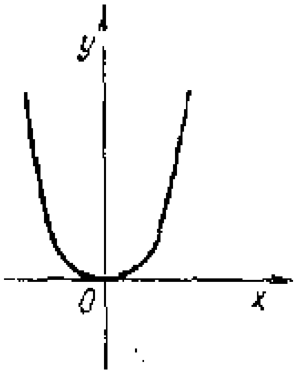
1) $y' = x^3$; $x^3 = 0$, $x = 0$; $y'_{x<0} = (-)$, $y'_{x>0} = (+)$.

Функция $x = 0$ да минимумга эга: $y_{x=0} = 0$;

2) $y'' = 3x^2$. Эгри чизиқнинг эгилиш нуқталари йўқ, чунки иккинчи тартибли ҳосила исталган x да мусбат;

3) эгри чизиқ координата ўқларини (0; 0) нуқтада кесиб ўтади;

4) эгри чизиқ нуқталарининг жадвалини тузамиз:



x	-2	-1	0	1	2
y	4	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	4
			Функциянинг минимуми		

119- расм.

Бу нуқталар бўйича эгри чизиқни ясаймиз (119-расм).

969. $y = \frac{1}{16}x^4 - 1$.

970. $y = x^3 - 3x$.

Текшириш ва ясаш. 1) $y' = 3x^2 - 3$; $3x^2 - 3 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $y'' = 6x$; $y''_{x=-1} = -6$.

Функция $x = -1$ да максимумга эга: $y_{x=-1} = (-1)^3 - 3(-1) = 2$, $y''_{x=1} = 6$. Функция $x = 1$ да минимумга эга: $y_{x=1} = 1^3 - 3\cdot 1 = -2$;

2) эгилиш нуқтасини топамиз: $y'' = 6x$; $6x = 0$, $x = 0$; $y''_{x<0} = (-)$; $y''_{x>0} = (+)$.

Эгри чизиқ (0; 0) нуқтада эгилишга эга;

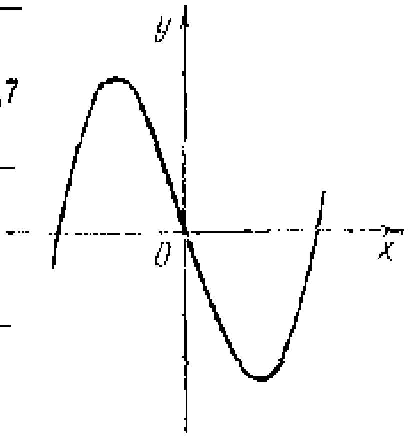
3) Эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасини топамиз:

$$y = 0,\ x^3 - 3x = 0;\ x(x^2 - 3) = 0;\ x_1 = 0,$$

$$x^2 = -\sqrt{3} \approx -1,7,\quad x_3 = \sqrt{3} \approx 1,7;$$

4) эгри чизиқ нуқталарининг жадвалини тузамиз:

x	$-\sqrt{3} \approx$ $\approx -1,7$	-1	0	1	$\sqrt{3} \approx 1,7$
y	0	$+2$	0	-2	0
		Функциянинг максимуми	Эгилиш нуқтаси	Функциянинг минимуми	



120- расм.

Бу нуқталар бўйича эгри чизиқни ясаймиз (120- расм).

971. 1) $y = 3x^3 - x$; 2) $y = -x^3 + x$; 3) $y = \frac{1}{3}x^3 - 9$.

972. $y = \frac{1}{5}x^5$.

Текшириш ва ясаш. Функция тоқ, демак, эгри чизиқнинг нуқталари координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган.

1) $y' = x^4$; $x^4 = 0$, $x = 0$; $y'_{x<0} = (+)$, $y'_{x>0} = (+)$.

Биринчи тартибли ҳосила ишорасини ўзгартирмаяпти, демак, функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас;

2) эгилиш нуқтасини топамиз:

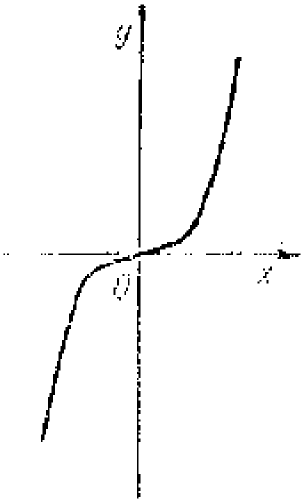
$y'' = 4x^3$, $4x^3 = 0$, $x = 0$; $y''_{x<0} = (-)$, $y''_{x>0} = (+)$.

Эгилиш нуқтаси: (0; 0);

3) эгри чизиқ Oy ўқни (0; 0) нуқтада кесиб ўтади;

4) эгри чизиқ нуқталари жадвалини тузамиз:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-6,4$	$0,2$	0	$0,2$	$6,4$
			Эгилиш нуқтаси		



121- расм.

Бу нуқталар бўйича эгри чизиқни ясаймиз (121- расм).

973. $y = \frac{1}{7}x^7$.

974. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Текшириш ва ясаш. 1) $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $3x^2 - 12x + 9 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; $y'' = 6x - 12$; $y''_{x=1} = (-)$.

Функция $x = 1$ да максимумга эга:

$$y_{x=1} = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1,$$

$$y''_{x=3} = (+).$$

Функция $x = 3$ да минимумга эга:

$$y_{x=3} = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = -3;$$

2) эгилиш нуқтасини топамиз:

$$y'' = 6x - 12;\ 6x - 12 = 0;\ x = 2;$$

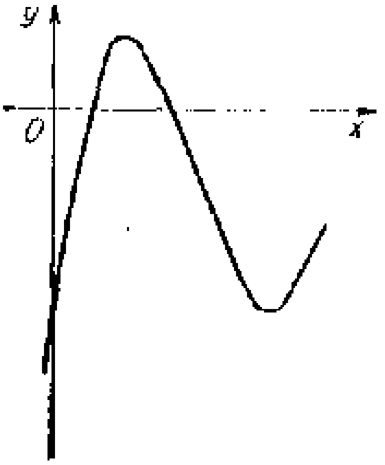
$y''_{x<2} = (-)$. $y''_{x>2} = (+)$; $y_{x=2} = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = -1$.

Эгилиш нуқтаси: (2; —1),

3) эгри чизиқ Oy ўқни (0; —3) нуқтада кесиб ўтади;

4) эгри чизиқнинг топилган нуқталари жадвалини тузамиз:

x	0	1	2	3
y	−3	1	−1	−3
		Функциянинг максимуми	Эгилиш нуқтаси	Функциянинг минимуми



122- расм.

Бу нуқталар бўйича эгри чизиқни ясаймиз (122- расм).

975. 1) $y = x^3 - x + 1$; 2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 18x - 6$; 3) $y = 2x^3 + x^2 + 2$; 4) $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$.

52- §. Аралаш масалалар

976. 5 ни шундай иккита қўшилувчига ажратингки уларнинг кублари йиғиндиси энг кичик бўлсин.

977. Иккита соннинг айирмаси a га тенг. Агар бу сонларнинг кўпайтмаси энг кичик бўлса, шу сонларни топинг.

978. Юзи 12 га, асоси 6 га тенг бўлган учбурчакнинг энг кичик периметрини ҳисобланг.

979. Агар туби квадрат, усти очиқ (қопқоқсиз) яшикнинг ён деворчалари ва туби юзларининг умумий сирти S га тенг бўлса, энг катта ҳажмга эга бўлган бу яшикнинг ўлчамларини топинг.

980. Сирти S берилган ҳолда энг катта ҳажмга эга бўлган цилиндрик бакнинг (қопқоқсиз) асоси радиусини ва баландлигини топинг.

981. Тўла сирти S берилган барча цилиндрлар ичидан ҳажми энг катта бўлганини топинг.

982. Эни 27 *м* ва 64 *м* бўлган иккита канал ўзаро тўғри бурчак ҳосил қилади. Бир каналдан иккинчисига ўта оладиган кема энг кўпи билан қандай узунликка эга бўлиши мумкин?

983. Очиқ доиравий цилиндрик тарнов эни a сантиметр бўлган тунукадан тайёрланмоқда α марказий бурчак қандай бўлганда тарновнинг ҳажми энг катта бўлади?

984. Дарёда A ва B пристанлар орасидаги масофа 144 *км* га тенг. C пристань A ва B пристанлар орасида бўлиб, B дан 81 *км* нарида жойлашган. Катер оқим бўйича A пристандан B гача сузиб бориб, C пристанга қайтиб келди. Агар катер ABC йўлни ўртача 35 км/соат тезлик билан энг қисқа вақт давомида ўтган бўлса, дарё оқимининг тезлиги қандай?

985. 1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$; 2) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$; 3) $y = x^3 - 6x^2 + 16$; 4) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$ функциялар учун а) ўсиш ва камайиш интервалларини; б) максимум ва минимумни; в) қавариқлик ва ботиқлик интервалларини; г) эгилиш нуқтасини топинг.

Контрол иш

I вариант

986. 1) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ функциянинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 2x - \frac{1}{3}$ функциянинг $[-2; 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

3) $y = x^3 + 3x^2$ эгри чизиқнинг қавариқлик ва ботиқлигини текширинг; 4) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ эгри чизиқнинг эгилиш нуқтасини текширинг.

5) Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонуни $S = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$ берилган. Бу нуқта ҳаракатининг максимал тезлигини топинг (t сек ҳисобида, s м ҳисобида).

II вариант

987. 1) $y = x^4 - 4x + 4$ функциянинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4$ функциянинг $[-4;\ 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

3) $y = x^3 - 12x^2 + 1$ эгри чизиқнинг қавариқлиги ва ботиқлигини текширинг; 4) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$ эгри чизиқнинг эгилиш нуқтасини текширинг.

5) Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонуни $S = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 5t + 3$ берилган. Бу нуқта ҳаракатининг максимал тезлигини топинг (t сек ҳисобида, s м ҳисобида берилган).

8-БОБ

ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

53-§. Функция дифференциалини ҳисоблаш

$y=f(x)$ функциянинг дифференциали ёки биринчи тартибли дифференциали деб бу функциянинг $f'(x)$ ҳосиласини x аргументнинг ихтиёрий Δx орттирмасига кўпайтмасига айтилади:

$$dy=f'(x)\,\Delta x.$$

Аргументнинг дифференциали аргумент орттирмасига тенг:

$$dx=\Delta x.$$

Шунинг учун функциянинг дифференциали:

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Биринчи тартибли дифференциалдан олинган дифференциал иккинчи тартибли дифференциал дейилади: $d^2y=f''(x)\,dx^2$, яъни $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали бу функция иккинчи тартибли ҳосиласи $f''(x)$ ни аргумент дифференциалининг квадратига кўпайтмасига тенг.

$y=f(x)$ функциянинг биринчи тартибли дифференциалини топиш учун функциянинг $f'(x)$ ҳосиласини аргументнинг dx дифференциалига кўпайтириш керак.

$y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топиш учун унинг $f''(x)$ иккинчи тартибли ҳосиласини аргумент дифференциалининг квадратига кўпайтириш керак.

Функцияларнинг биринчи тартибли дифференциалларини топинг.

988. 1) $y=(x^3-2)^4$; 2) $y=\sqrt{x^2-1}$; 3) $y=\ln\sin\sqrt{x}$; 4) $y=\arcsin\sqrt{2x}$.

Ечилиши. Функциянинг dy дифференциалини топиш учун бу функциянинг ҳосиласини топамиз ва уни аргументнинг дифференциалига кўпайтирамиз;

1) $dy=[(x^2-2)^4]'\,dx=4(x^3-2)^3\cdot 3x^2dx=12x^2(x^3-2)^3dx;$

2) $dy=(\sqrt{x^2-1})'dx=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,dx=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}};$

3) $dy=(\ln\sin\sqrt{x})'\,dx=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=$

$=\operatorname{ctg}\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}};$

4) $dy = (\arc \sin \sqrt{2x})' dx = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2dx$

$$= \frac{dx}{\sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{2x}} = \frac{dx}{\sqrt{2x(1-2x)}}.$$

989. 1) $y = (1-x^2)^5$; 2) $y = (ax^2+b)^3$; 3) $y = (ax^5+1)^{2n}$.

990. 1) $y = \sqrt{4-2x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^3-1}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

991. 1) $y = \ln \cos^2 x$; 2) $y = \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

992. 1) $y = \arc \cos x^2$; 2) $y = \arc \operatorname{ctg} \sqrt{2x}$; 3) $y = \arc \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$

Функцияларнинг иккинчи тартибли дифференциалларини топинг.

993. 1) $y = \ln \sin^2 2x$; 2) $y = e^{-x}$.

Ечилиши. Иккинчи тартибли дифференциални топиш учун берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топамиз ва уни аргумент дифференциалининг квадратига кўпайтирамиз.

$$1)\ y' = \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot 2\sin 2x \cos 2x \cdot 2 = \frac{4\cos 2x}{\sin 2x} = 4\operatorname{ctg} 2x;$$

$$y'' = -4 \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot 2 = -\frac{8}{\sin^2 2x};$$

$$d^2y = y''dx^2 = -\frac{8dx^2}{\sin^2 2x}.$$

2) $y' = -e^{-x}$; $y'' = e^{-x}$; $d^2y = y''dx^2 = e^{-x}dx^2$.

994. 1) $y = \ln \cos^2 x$; 2) $y = \ln \operatorname{tg} 2x$; 3) $y = \ln \sqrt{1-x^2}$.

995. 1) $y = e^{\operatorname{tg} x}$; 2) $y = a^{3x}$; 3) $y = e^{\sqrt{x}}$.

996. 1) $y = \arc \cos x$; 2) $y = \arc \operatorname{tg} x^2$; 3) $\arc \operatorname{ctg} x$.

54- §. Дифференциалнинг тақрибий ҳисоблашларда қўлланилиши

1. Абсолют ва нисбий хатолар

Турли хил ўлчашларда ёки бирор x катталикни тақрибан ҳисоблашда биз ўзимизга боғлиқ бўлмаган Δx (dx, чунки $\Delta x = dx$) хатога йўл қўямиз.

Фараз қилайлик, x — аргументнинг (ўлчанаётган катталикнинг) тақрибий қиймати бўлсин, Δx эса x ни ўлчашда йўл қўйилган абсолют хато бўлсин, у ҳолда $x + \Delta x$ ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати бўлади (Δx мусбат сон ҳам, манфий сон ҳам бўлиши мумкин).

У ҳолда x катталик $f(x)$ функциянинг тақрибий қийматини, $x + \Delta x$ эса $f(x + \Delta x)$ функциянинг ҳақиқий қийматини аниқлайди, булардан функциянинг абсолют хатоси қуйидагига тенглиги келиб чиқади:

$$|\Delta y| = |f(x + \Delta x) - f(x)|.$$

Δx нинг кичик қийматларида (нолга яқин қийматларида) Δy катталикни тақрибан dy дифференциал билан алмаштириш мумкин:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,dx = dy.$$

Функциянинг Δy орттирмасини унинг dy дифференциали билан алмаштиришнинг фойдали томони шундан иборатки, dy катталик Δx га чизиқли боғлиқ, Δy эса одатда Δx нинг анча мураккаб функцияси бўлади.

Бирор y катталик $y = f(x)$ тенгламадан топилади деб фараз қилайлик. x катталикни топишда йўл қўйиладиган Δx абсолют хато y катталикнинг Δy абсолют хатосини вужудга келтиради.

$\Delta y \approx dy$ деб олиб, ρ нисбий хато учун ифода ҳосил қиламиз:

$$\rho = \left|\frac{dy}{y}\right|.$$

Ўлчанаётган катталикнинг абсолют хатосини шу катталикнинг тақрибий қийматига нисбатининг абсолют катталиги нисбий хато дейилади.

Нисбий хато процентлар билан ифодаланади.

997. Радиуси $r = 125$ *см* бўлган доиранинг юзини ҳисоблашда қилинган нисбий хатоларни таққосланг, бунда: а) абсолют хатони доира юзининг орттирмасига тенг деб олинг; б) абсолют хатони доира юзининг дифференциалига тенг деб олинг.

Ечилиши. 1. Доира юзининг ΔS орттирмасини ва доиранинг юзи $S = \pi R^2$ ни ҳисоблашда қилинган нисбий хато $\frac{\Delta S}{S}$ ни ҳисоблаймиз. Доиранинг радиусини ҳисоблашдаги хато $|\pm 0,5$ *см*$|$ дан ортмайди деб ҳисоблаймиз.

$$\Delta S = \pi(R + \Delta R)^2 - \pi R^2 = \pi[2R\Delta R + (\Delta R^2)] =$$
$$= \pi(2\cdot 125\cdot 0,5 + 0,25) = 125,25\pi;$$
$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{125,25\pi}{\pi\cdot 125^2} = 0,008016 \approx 0,8\%.$$

2. Доиранинг юзини ҳисоблашдаги dS дифференциални ва $\frac{dS}{S}$ нисбий хатони топамиз:

$$dS = 2\pi R\Delta R = 2\pi\cdot 125\cdot 0{,}5 = 125\pi;$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\pi R\Delta R}{\pi R^2} = 2\cdot\frac{dR}{R}.$$

Доиранинг юзини ҳисоблашдаги нисбий хато радиусни ҳисоблашдаги нисбий хатонинг иккиланганига тенг:

$$\frac{dS}{S} = 2\cdot\frac{dR}{R} = 2\cdot\frac{0{,}5}{125} = 0{,}8\%.$$

Шундай қилиб, кўрамизки, иккинчи ҳолда ҳисоблаш анча содда ва ҳисоблаш аниқлигига зарар етказилмасдан бажарилган.

3. ΔS орттирмани dS дифференциал билан алмаштиришдаги яқинлашишнинг нисбий хатосини аниқлаймиз:

$$\Delta S - dS = 125{,}25\pi - 125\pi = 0{,}25\pi;$$

$$\frac{\Delta S - dS}{dS} = \frac{0{,}25\pi}{125\pi} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

Яқинлашишнинг нисбий хатоси бор-йўғи 0,2% ни ташкил этди.

998. $R = 50$ см ($\Delta R = 0{,}5$ см) бўлган айлананинг узунлигини ҳисоблашдаги нисбий хатони топинг.

999. $y = x^3$ тенглама билан берилган катталикни $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}01$ да ҳисоблашдаги нисбий хатони топинг.

II. Функция орттирмасининг тақрибий қийматини дифференциал ёрдамида ҳисоблаш

$y = f(x)$ функция берилган бўлсин; бу функциянинг орттирмаси:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

унинг дифференциали: $dy = f'(x)\,dx$. Аргумент орттирмаси Δx нинг етарлича кичик (нолга яқин) қийматларида

$$\Delta y \approx dy$$

деб оламиз. Шунинг учун функция орттирмасининг тақрибий қийматини топишда функциянинг дифференциалини излаймиз ва уни функция орттирмасига тенг деб қабул қиламиз.

1000. $y = 2x^3 + 5$ функция орттирмасининг $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}001$ бўлгандаги тақрибий қийматини топинг.

Ечилиши. $dy = 6x^2dx = 6\cdot 2^2\cdot 0{,}001 = 0{,}024$.

Яқинлашишнинг нисбий хатосини топамиз. Орттирманинг ҳақиқий қиймати:

$$\Delta y = 2(x+\Delta x)^3 + 5 - 2x^3 - 5 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 +$$
$$+ 2(\Delta x)^3 = 6\cdot 4\cdot 0{,}001 + 6\cdot 2\cdot 0{,}000001 +$$
$$+ 2\cdot 0{,}000000001 = 0{,}024012002;$$
$$\Delta y - dy = 0{,}024012 - 0{,}024 = 0{,}000012;$$
$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}000012}{0{,}024} = 0{,}0005 = 0{,}05\%.$$

Яқинлашиш хатоси жуда кичик бўлиб чиқди, бу эса Δx нинг жуда кичик қийматларида кўпол, катта Δy орттирмани ҳисоблашлар учун анча содда ва қулай бўлган dy дифференциал билан алмаштириш мақсадга мувофиқ эканини яна бир бор тасдиқлайди.

1001. Қуйидаги функциялар орттирмаларининг тақрибий қийматини топинг: 1) $y = 3x^2 + 5x + 1$, бунда $x = 3$ ва $\Delta x = 0{,}001$; 2) $y = x^3 + x - 1$, бунда $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}01$; 3) $y = \ln x$, бунда $x = 10$ ва $\Delta x = 0{,}01$.

1002. Агар R радиусли шарни қиздирилганда, унинг *радиуси ΔR катталикка узаядиган бўлса, шарнинг ҳажми* қанчага ортади?

Ечилиши. Шарнинг ҳажми $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ формула бўйича ҳисобланади. R аргументнинг ΔR орттирмасини жуда кичик деб фараз қилиб, $\Delta R \approx dR$ деб оламиз, у ҳолда ҳажм орттирмасини дифференциал билан алмаштирамиз: $\Delta V \approx dV$. Бинобарин, шар ҳажмининг орттирмасини ҳисоблаш учун $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ функциянинг дифференциалини топиш етарли: $dV = 4\pi R^2 dR$.

1003. Қирраси 10 см бўлган куб қиздирилганда унинг ҳажми қанча ортади? Бунда қирранинг узайиши 0,02 см.

III. Функциянинг тақрибий сон қийматини ҳисоблаш

$y = f(x)$ функция берилган бўлсин; бу функциянинг орттирмаси

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

унинг дифференциали $dy = f'(x)\,dx$. Етарлича кичик Δx да $\Delta y \approx dy$.

Функция орттирмасини унинг дифференциали билан алмаштириб,

$$f'(x)\,dx \approx f(x+\Delta x) - f(\lambda)$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx.$$

Бу формуладан фойдалангапда функциянинг сон қийматини ҳисоблаш анча соддалашади; геометрик жиҳатдан бу эгри чизиқ участкасини (бир қисмини) унинг урипма кесмаси билан алмаштиришга мос келади.

1004. $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$ функциянинг тақрибий қийматини $x = 2{,}01$ да топинг.

Ечилиши. $x = 2$ ва $\Delta x = 0{,}01$ деб оламиз. *Юқорида* келтирилган формула учун ҳар бир қўшилувчини алоҳида-алоҳида топамиз:

$$f(x) = f(2) = 5\cdot 2^3 - 2\cdot 2 + 3 = 39;$$

$$f'(x)\,\Delta x = f'(2)\cdot 0{,}01 = (5x^3 - 2x + 3)'\,\Delta x =$$

$$= (15x^2 - 2)\,\Delta x = (15\cdot 2^2 - 2)\cdot 0{,}01 = 0{,}58.$$

У ҳолда функциянинг тақрибий қиймати бундай бўлади:

$$f(2{,}01) = 39 + 0{,}58 = 39{,}58.$$

Функциянинг аниқ қийматини топамиз:

$$f(2{,}01) = 5\cdot(2{,}01)^3 - 2\cdot 2{,}01 + 3 = 39{,}583005.$$

Яқинлашиш хатосини ҳисоблаймиз:

$$\frac{39{,}583005 - 39{,}58}{39{,}58} \approx 0{,}008\,\%.$$

Яқинлашиш хатоси жуда кичик.

1005. Функциянинг тақрибий қийматларини топинг: 1) $f(x) = 2x^2 - x + 1$, бунда $x = 2{,}01$; 2) $f(x) = x^2 + 3x + 1$, бунда $x = 3{,}02$; 3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$, бунда $x = 1{,}1$.

IV. Хатоларни аниқ ҳисобга олиб бориш усули бўйича ҳисоблаш

Ҳисоблашларда кўпинча оралиқ ҳисоблашлар ва охирги натижани ҳисоблашда йўл қўйилган хатонинг чегараларини билиш зарурати туғилади. Тақрибий ҳисоблашларни олиб боришнинг бундай усули хатоларни аниқ ҳисобга олиб бориш усули дейилади. Бунинг учун алгебраик йиғинди, кўпайтма, даража, илдиз ва бўлинманинг нисбий хатоси чегараларини қандай ҳисобланишини билиш зарур.

1006. Кўпайтманинг нисбий хатоси унинг кўпайтувчилари нисбий хатоларининг йиғиндисидан ортиқ эмаслигини исботланг.

Исботи. $y = uv$ функция берилган бўлсин, бунда $u = f(x)$ ва $v = \varphi(x)$. Уни логарифмлаймиз ва дифференциал оламиз:

$$\ln y = \ln u + \ln v; \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

Аммо йиғиндининг абсолют қиймати қўшилувчилар абсолют қийматларининг йиғиндисидан ортиқ бўлмаганлиги, яъни

$$\left|\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$$

бўлгани учун

$$\left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$$

ёки

$$\rho(uv) = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$$

бўлади.

1007. Тўғри тўртбурчак майдонни ўлчанганда унинг бўйи $u = 60$ м, эни $v = 23$ м эканлиги маълум бўлди. Майдоннинг бўйини ўлчашда қилинган хато 0,3 м дан, *энини ўлчашда қилинган хато 0,2 м дан ортиқ* эмас. Тўғри тўртбурчакнинг юзи $60 \cdot 23 = 1380$ м^2 га тенг деб олганимизда йўл қўйилган хато қандай чегараларда ётади. Юзни ҳисоблашда йўл қўйилган нисбий хатони топинг.

Ечилиши. $|du| < 0{,}3$, $|dv| < 0{,}2$.

Энг ёмон шароитда $|du| = 0{,}3$, $|dv| = 0{,}2$. Кўпайтманинг абсолют хатосини топамиз:

$$d(uv) = duv + dvu = 0{,}3 \cdot 23 + 0{,}2 \cdot 60 = 18{,}9 \approx 19 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Бу сон майдоннинг юзини 1380 м^2 га тенг деб қабул қилганимизда йўл қўйишимиз мумкин бўлган абсолют хатонинг энг катта қиймати бўлади. Хатони катталашиш томонига қараб яхлитлаб ва уни 20 м^2 га тенг деб олиб, юзни ҳисоблашда йўл қўйилган хатолар ётадиган чегараларни топамиз. У $1380 + 20 = 1400$ (м^2) дан ортиқ бўлмайди ва $1380 - 20 = 1360$ (м^2) дан кам бўлмайди.

Нисбий хатони

$$\rho(uv) = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$$

формула бўйича ҳисоблаб топамиз:

$$\rho(uv) = \frac{0,3}{60} + \frac{0,2}{23} = \frac{1}{200} + \frac{2}{230} \approx 0,014 = 1,4\%.$$

Нисбий хато 1,4% дан ортиқ эмас.

1008. Параллелограммнинг юзини ўлчашда унинг асоси $a = 70$ см ($\Delta a = 0,4$ см) ва баландлиги $h = 48$ см ($\Delta h = 0,3$ см) эканлиги маълум бўлди. Параллелограммнинг юзини ҳисоблашда йўл қўйилган нисбий хатони топинг.

1009. Даражанинг нисбий хатоси асосининг нисбий хатосини даража кўрсаткичга кўпайтирилганига тенг эканлигини исботланг.

Исботи. $y = x^n$ функция берилган бўлсин. Уни логарифмлаймиз ва дифференциалини топамиз:

$$\ln y = n \ln x; \frac{dy}{y} = n\frac{dx}{x}.$$

Нисбий хато қуйидагича бўлади:

$$\rho(x^n) = n\frac{dx}{x}.$$

Хусусий ҳоллар:

1) $n = 2$, $\rho(x^2) = 2\frac{dx}{x}$; 2) $n = 3$, $\rho(x^3) = 3\frac{dx}{x}$.

1010. Кубнинг қирраси 12,5 см га тенг бўлса, унинг ҳажмини ҳисоблашда йўл қўйилган нисбий хатони топинг.

Ечилиши. $dx = 0,05$ деб оламиз.

$$\rho(x^3) = 3\frac{dx}{x} = 3\cdot\frac{0,05}{12,5} = \frac{15}{1250} \approx 0,012 = 1,2\%.$$

1011. Квадрат шаклидаги хонанинг юзини ўлчашда йўл қўйилган нисбий хатони топинг, бунда квадрат томонининг қийматини яхлитлаб, 6,4 м га тенг деб олинган (абсолют хатони 0,05 м га тенг деб оламиз).

1012. Илдизнинг нисбий хатоси илдиз остидаги сон нисбий хатосини илдизнинг даража кўрсаткичига бўлинганига тенг эканлигини исботланг.

Исботи. $y = \sqrt[n]{x}$ функция берилган бўлсин. Уни логарифмлаймиз ва дифференциалини топамиз:

$$\ln y = \frac{1}{n}\ln x; \frac{dy}{y} = \frac{1}{n}\frac{dx}{x}.$$

Нисбий хато

$$\rho(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\frac{dx}{x}$$

бўлади.

Хусусий ҳоллар: 1) $n = 2$, $\rho(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$; 2) $n = 3$, $\rho(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\frac{dx}{x}$.

1013. Агар квадратнинг юзи 37,7 $см^2$ га тенг бўлса, квадратнинг томонини ҳисоблашда йўл қўйиладиган нисбий хатони топинг.

Ечилиши. Квадратнинг томонини y билан, квадратнинг юзини x билан белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $y = \sqrt{x} = \sqrt{37{,}7}$; $dx = 0{,}05$;

$$\rho(\sqrt{37{,}7}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}05}{37{,}7} = \frac{0{,}05}{75{,}4} \approx 0{,}000664 \approx 0{,}1\%.$$

1014. Агар квадратнинг юзи 68,5 $см^2$ бўлса, квадратнинг томонини ҳисоблашда йўл қўйиладиган нисбий хатони топинг.

1015. Бўлинманинг нисбий хатоси бўлинувчи ва бўлувчи нисбий хатоларининг йиғиндисидан ортиқ эмаслигини исботланг.

Исботи.

$$y = \frac{u}{v}$$

функция берилган бўлсин, бу ерда $u = f(x)$ ва $v = \varphi(x)$. $y = \frac{u}{v}$ функцияни логарифмлаб ва уни дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\ln y = \ln u - \ln v, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

Айирманинг абсолют қиймати камаювчи ва айрилувчи абсолют қийматларининг йиғиндисидан ортиқ бўлмагани учун

$$\left|\frac{du}{y}\right| = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$$

бўлади. Бўлинманинг нисбий хатоси чегараси:

$$\rho\left(\frac{u}{v}\right) = \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

1016. Жисмнинг зичлигини топиш учун унинг массаси $m_1 = 484$ г ва у сиқиб чиқарган сув массаси $m_2 = 62$ г аниқланган. Абсолют хатолар $\Delta m_1 = 0{,}5$ г ва $\Delta m_2 = 0{,}4$ г. Жисмнинг зичлигини ҳисоблашдаги нисбий хатони топинг.

Ечилиши. $y = \frac{m_1}{m_2}$; $\left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{dm_1}{m_1}\right| + \left|\frac{dm_2}{m_2}\right| = \frac{0,5}{484} + \frac{0,4}{62} \approx 0,00103 + 0,00645 = 0,00748 \approx 0,7\%$.

1017. Иккита тақрибий сон 82,6 ва 64,8 берилган. Бу сонлар бўлинмасининг нисбий хатосини топинг.

V. Даражаларни тақрибий ҳисоблаш

$f(x) = x^n$ функцияда x кичик Δx орттирма оладиган бўлсин. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ функциянинг тақрибий қийматини функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш формуласи

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

ни қўллаб ҳисоблаймиз.

Қуйидагига эга бўламиз: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$; $f(x) = x^n$, $f'(x)\,\Delta x = nx^{n-1}\Delta x$,

бундан

$$(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\,\Delta x.$$

Бу формуланинг ҳисоблаш практикасида учрайдиган хусусий ҳоллари:

1) $\Delta x < 0$, $(x - \Delta x)^n \approx x^n - nx^{n-1}\,\Delta x$;

2) $n = 2$, $(x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2x\,\Delta x$;

3) $n = 3$, $(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2\,\Delta x$;

4) $n = 2$, ва $\Delta x < 0$, $(x - \Delta x)^2 \approx x^2 - 2x\,\Delta x$;

5) $n = 3$ ва $\Delta x < 0$, $(x - \Delta x)^3 \approx x^3 - 3x^2\,\Delta x$;

6) $x = 1$, $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$;

7) $x = 1$ ва $\Delta x < 0$, $(1 - \Delta x)^n \approx 1 - n\Delta x$;

8) $n = 2$ ва $x = 1$, $(1 + \Delta x)^2 \approx 1 + 2\,\Delta x$;

9) $n = 2$, $x = 1$ ва $\Delta x < 0$, $(1 - \Delta x)^2 \approx 1 - 2\,\Delta x$;

10) $n = 3$ ва $x = 1$, $(1 + \Delta x)^3 \approx 1 + 3\,\Delta x$;

11) $n = 3$, $x = 1$ ва $\Delta x < 0$, $(1 - \Delta x)^3 \approx 1 - 3\Delta x$.

Даражаларнинг тақрибий қийматларини топинг.

1018. $(4,012)^2$.

Ечилиши. 2-хусусий ҳолни қўлланиб, $x = 4$, $\Delta x = 0,012$ деб оламиз, у ҳолда $(4,012)^2 = (4 + 0,012)^2 \approx 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0,012 = 16,096 \approx 16,1$ (аниқ жавоб 16,096144).

Яқинлашишнинг нисбий хатоси

$$\frac{16,1 - 16,096}{16,1} \approx 0,025\%.$$

Яқинлашиш хатоси жуда кичик.

1019. 1) $(9{,}6)^2$ (4-ҳол); 2) $(1{,}012)^2$ (10- ҳол); 3) $(9{,}95)^2$ (5- ҳол; 4) $(1{,}005)^{10}$ (6- ҳол); 5) $(0{,}975)^4$ (7- ҳол).

VI. Илдизларни тақрибий ҳисоблаш

$f(x)=\sqrt[n]{x}$ функцияда x кичик Δx орттирма оладиган бўлсин. $f(x+\Delta x)=\sqrt[n]{x+\Delta x}$ функциянинг тақрибий қийматини функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш формуласи

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x,$$

ни қўлланиб ҳисоблаймиз.

Қуйидагига эга бўламиз: $f(x+\Delta x)=\sqrt[n]{x+\Delta x}$; $f(x)=\sqrt[n]{x}$; $f'(x)\,\Delta x=(x^{\frac{1}{n}})'\,\Delta x=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\,\Delta x=\frac{1}{n}\frac{\Delta x}{x^{1-\frac{1}{n}}}=$

$=\frac{1}{n}\frac{\Delta x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, бундан $\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}+\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Хусусий ҳоллар:

1) $\Delta x<0$, $\sqrt[n]{x-\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}-\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$;

2) $n=2$, $\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$.

3) $n=2$ ва $\Delta x<0$, $\sqrt{x-\Delta x}\approx\sqrt{x}-\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$;

4) $n=3$, $\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

5) $n=3$ ва $\Delta x<0$, $\sqrt[3]{x-\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}-\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

6) $x=1$, $\sqrt[n]{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{n}$;

7) $x=1$ ва $\Delta x<0$, $\sqrt[n]{1-\Delta x}\approx 1-\frac{\Delta x}{n}$;

8) $n=2$ ва $x=1$, $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{2}$;

9) $n=2$, $x=1$ ва $\Delta x<0$, $\sqrt{1-\Delta x}\approx 1-\frac{\Delta x}{2}$;

10) $n=3$ ва $x=1$, $\sqrt[3]{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{3}$;

11) $n = 3$, $x = 1$ ва $\Delta x < 0$, $\sqrt[3]{1 - \Delta x} \approx 1 - \frac{\Delta x}{3}$.

Илдизларнинг тақрибий қийматларини топинг:

1020. $\sqrt{1{,}006}$.

Ечилиши. 8-хусусий ҳолни қўллаииб, $\Delta x = 0{,}006$ деб оламиз, у ҳолда $1{,}006 = 1 + 0{,}006 = 1 + \frac{0{,}006}{2} = 1{,}003$.

1021. 1) $\sqrt[3]{1{,}006}$ (10-ҳол); 2) $\sqrt{25{,}16}$ (2-ҳол); 3) $\sqrt{24{,}84}$ (3-ҳол; $24{,}84 = 25 - 0{,}16$); 4) $\sqrt{101}$ (2-ҳол); 5) $\sqrt{99{,}5}$ (3-ҳол); 6) $\sqrt[10]{1{,}03}$ (6-ҳол).

VII. Тескари миқдорларни тақрибий ҳисоблаш

$f(x) = \frac{1}{x}$ функцияда x кичик Δx орттирма оладиган бўлсин. $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$ функциянинг тақрибий қийматини функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш формуласини қўллаб ҳисоблаймиз:

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x)\,\Delta x = -\frac{\Delta x}{x^2}.$$

бундан

$$\frac{1}{x + \Delta x} \approx \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2}.$$

Хусусий ҳоллар:

1) $\Delta x < 0$; $\frac{1}{x - \Delta x} \approx \frac{1}{x} + \frac{\Delta x}{x^2}$;

2) $x = 1$, $\frac{1}{1 + \Delta x} \approx 1 - \Delta x$;

3) $x = 1$ ва $\Delta x < 0$, $\frac{1}{1 - \Delta x} \approx 1 + \Delta x$.

Тескари миқдорларнинг тақрибий қийматларини топинг.

1022. $\frac{1}{1{,}004}$.

Ечилиши. 2-хусусий ҳолни қўллаб, $\Delta x = 0{,}004$ деб оламиз, у ҳолда $\frac{1}{1 + 0{,}004} = 1 - 0{,}004 = 0{,}996$.

1023. 1) $\frac{1}{0{,}99}$ [3-хусусий ҳол; $0{,}99 = 1 - 0{,}01$];

2) $\frac{1}{9{,}93}$ [1-хусусий ҳол; $9{,}93 = 10 - 0{,}07$].

1024. $\frac{1}{(1{,}004)^2}$.

Ечилиши. $\frac{1}{(1,004)^2} = (1,004)^{-2} = (1+0,004)^{-2} \approx 1 -$ $- 2\cdot 0,004 = 1 - 0,008 = 0,992.$

Бу ерда $(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$ формула қўлланган.

VIII. Кичик (нолга яқин) бурчакларнинг синус ва тангенсларини тақрибий ҳисоблаш

1. $f(x) = \sin x$ функция учун $x = 0$ аргумент кичик Δx орттирма олсин. Функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x) = \sin(0+\Delta x) = \sin \Delta x.$$

Функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш формуласини қўллаииб, қуйидагига эга бўламиз:

$$f(x+\Delta x) = \sin \Delta x;\ f(x) = \sin x = \sin 0 = 0;$$
$$f'(x)\,\Delta x = \cos x\,\Delta x = \cos 0\,\Delta x = \Delta x,$$

бундан

$$\sin \Delta x \approx 0 + \Delta x;\ \sin \Delta x \approx \Delta x.$$

Кичик бурчакнинг синуси тақрибан шу бурчакнинг ўзига тенг (бурчак радиан ўлчовида олинади).

2. $f(x) = \operatorname{tg} x$ функция учун $x = 0$ аргумент кичик Δx орттирма олсин. Функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(x+\Delta x) = \operatorname{tg}(x+\Delta x) = \operatorname{tg}(0+\Delta x) = \operatorname{tg}\Delta x.$$

Ушбу

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

формулани қўллаииб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x+\Delta x) = \operatorname{tg}\Delta x;\ f(x) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0;$$
$$f'(x)\,\Delta x = \frac{\Delta x}{\cos^2 x} = \frac{\Delta x}{\cos^2 0} = \Delta x,$$

бундан

$$\operatorname{tg}\Delta x \approx 0 + \Delta x,\ \operatorname{tg}\Delta x \approx \Delta x.$$

Кичик бурчакнинг тангенси тақрибан шу бурчакнинг ўзига тенг (бурчак радиан ўлчовида олинади).

1025. sin 12′ ни ҳисобланг.

Ечилиши. 12′ = 0,0035 радиан; sin 0,0035 = 0,0035. Синуснинг натурал қийматлари жадвалидан sin 12′ = = 0,0035 га эга бўламиз.

1026. Ҳисобланг: 1) sin 42′; 2) sin 2°06′.

1027. Ҳисобланг: 1) tg 1°12′; 2) tg 3°18′.

Эслатма. Бурчакларнинг синус ва тангенслари (радиан ўлчовида) 0 дан 3° гача 0,0001 аниқликда шу бурчакларнинг ўзига тенг.

IX. Ўнли логарифмларнинг жадвал айирмасини ҳисоблаш

Жадвал айирмаси Δy деб $y = \lg x$ ўнли логарифмнинг x сон битта ортгандаги орттирмасига айтилади.

$y = \lg x$ функция учун x кичик Δx орттирма оладиган бўлсин. $\Delta y \approx dx$ формула бўйича Δy нинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$dy = (\lg x)' \Delta x = \frac{0,4343 \Delta x}{x},$$

у ҳолда

$$\Delta y \approx 0,4343 \frac{\Delta x}{x},$$

яъни логарифмнинг абсолют хатоси x соннинг нисбий хатоси бўйича ҳисобланади $\left(\frac{\Delta x}{x} \text{ — нисбий хато}\right)$.

$\Delta x = 1$ деб фараз қиламиз; у ҳолда $\Delta y \approx \frac{0,4343}{x}$.

Бу формула бўйича жадвал айирмаларни ҳисоблаш мумкин.

1028. 544 соннинг ўнли логарифмини ҳисоблашда жадвал айирмасини топинг.

Ечилиши. $\Delta y \approx \frac{0,4343}{x} = \frac{0,4343}{544} = 0,0008.$

Брадис жадвали бўйича текширамиз:

$$\lg (544 + 1) = \lg\ 545 = 2,7364,$$
$$\lg\ 544 = 2,7356.$$

545 ва 544 сонларининг логарифмлари жадвал айирмалари 0,0008 га тенг бўлиб чиқди.

1029. x сонни унинг логарифми $y = \lg x$ бўйича ҳисоблагандаги нисбий хатони топинг.

Ечилиши. x соннинг $(\lg x)$ логарифми Δy хато билан ҳисобланган бўлсин, у ҳолда y бўйича x сонни топишда Δx хатога йўл қўйилади. x соннинг нисбий хатоси $\frac{\Delta x}{x}$ га тенг.

Логарифмнинг нисбий хатоси қуйидагига тенг:

$$\Delta x \approx 0,4343 \frac{\Delta x}{x},$$

бундан

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta y}{0,4343},$$

x сонни унинг логарифми бўйича ҳисоблангандаги нисбий хато x сонининг қийматига боғлиқ бўлмай, балки x сонининг логарифмини топишда қилинган хатогагина боғлиқ бўлади.

1030. 250 мм шкалали логарифмик линейкада ҳисоблаш аниқлигининг нисбий хатосини топинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, визирни бирор сон устига қўйганда ёки шкаладан ҳисоблаганда энг катта хато 0,1 мм бўлсин.

Сон логарифмининг абсолют хатосини топамиз. Узунлиги 250 мм бўлган логарифмик линейканинг бутун шкаласи логарифми бирга тенг бўлган ($\lg 10 = 1$) сонга мос келади. Бундан шкаланинг 0,1 мм қисмида сон логарифмининг абсолют хатоси 250 марта кам бўлади, яъни

$$\Delta y = \frac{0,1}{250} = 0,004, \text{ аммо } \Delta y = 0,4343\frac{\Delta x}{x},$$

у ҳолда

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta y}{0,4343} = \frac{0,004}{0,4343} \approx 0,00092 \approx 0,001 = 0,1\,\%.$$

Ҳисоблаш аниқлигининг нисбий хатоси (шкаланинг исталган қисмида) 0,1 % бўлади.

55-§. Аралаш масалалар

Функцияларнинг биринчи тартибли дифференциалларини топинг.

1031. 1) $y = e^x \sin x$; 2) $y = a^x e^x$; 3) $y = e^x \sqrt{2x}$.

1032. 1) $y = (e^x - e^{-x})^2$; 2) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$; 3) $y = \frac{e^x + 1}{e^x}$.

1033. 1) $y = \arcsin(\ln x)$; 2) $y = \operatorname{arctg}(\sin x)$; 3) $y = \operatorname{arcctg}(\ln 3x)$.

1034. Функция орттирмасининг тақрибий қийматини ҳисобланг:

1) $y = \sin 2x$, бунда $x = \frac{\pi}{6}$ ва $\Delta x = 0,02$; 2) $y = \ln x^3$ бунда $x = 20$ ва $\Delta x = 0,01$; 3) $y = \arcsin x$, бунда $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $\Delta x = 0,02$.

1035. Функциянинг тақрибий қийматини ҳисобланг: 1) $f(x)=x^3+x^2+x+1$, бунда $x=0{,}001$; 2) $f(x)=x^4-1$, бунда $x=-3{,}3$; 3) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, бунда $x=1{,}1$.

1036. Қуйидаги тенгламалар билан берилган катталикни ҳисоблашда йўл қўйиладиган нисбий хатони топинг: 1) $y=x^2$, бунда $x=10$ ва $\Delta x=0{,}01$; 2) $y=x^3$, бунда $x=3$ ва $\Delta x=0{,}02$.

1037. Функциянинг нисбий хатосини ҳисоблаш учун формула тузинг: 1) $y=\sin^2 3x$; 2) $y=\mathrm{tg}^2\, x$.

1038. Функциянинг нисбий хатосини ҳисоблаш формуласини тузинг: 1) $y=e^{\sin^2 x}$; 2) $y=3^{\sqrt{x}}$.

Контрол иш

I вариант

1039. 1. $x=\ln\cos^2 x$ функциянинг дифференциалини $x=\frac{\pi}{4}$ ва $dx=0{,}01$ да ҳисобланг.

2. $v=\frac{4}{3}\pi R^3$ функциянинг нисбий хатосини $R=300$ ва $dR=0{,}3$ да ҳисобланг.

3. $y=x^3-x^2$ функция орттирмасининг тақрибий қийматини $x=2$ ва $\Delta x=0{,}01$ да топинг.

4. $f(x)=x^3-x^2+x-3$ функциянинг тақрибий қийматини $x=0{,}03$ да топинг.

5. $\frac{1}{0{,}998}$ миқдорнинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

II вариант

1040. 1. $y=\ln \mathrm{tg}\, 2x$ функциянинг дифференциалини $x=\frac{\pi}{8}$ ва $dx=0{,}03$ да ҳисобланг.

2. $y=x^3$ функциянинг нисбий хатосини $x=750$ ва $dx=0{,}5$ да ҳисобланг.

3. $y=2\sqrt{x}+4$ функция орттирмасининг тақрибий қийматини $x=25$ ва $\Delta x=0{,}01$ да топинг.

4. $f(x)=3x^3-x^2+5x-1$ функциянинг тақрибий қийматини $x=3{,}02$ да топинг.

5. $(1{,}02)^7$ миқдорнинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

ИНТЕГРАЛ ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

9-БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

56-§. Интеграллашнинг асосий формулалари. Бевосита интеграллаш

Агар $F(x)$ функциянинг ҳосиласи $f(x)$ $[F'(x) = f(x)]$ га тенг бўлса ёки унинг дифференциали $f(x)\,dx$ $[dF(x) = f(x)\,dx]$ га тенг бўлса, $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

Бошланғич функцияни унинг берилган ҳосиласи $f(x)$ ёки дифференциали $f(x)\,dx$ бўйича топиш дифференциаллашга тескари амал бўлиб, интеграллаш дейилади.

$f(x)$ функция учун ёки $f(x)\,dx$ дифференциал учун бошланғич бўлган $F(x)+C$ функциялар тўплами аниқмас интеграл дейилади ва у агар

$$d[F(x)+C] = f(x)\,dx \text{ бўлса, } \int f(x)\,dx = F(x)+C$$

символ билан белгиланади, бунда $f(x)$— интеграл остидаги функция, $f(x)\,dx$ — интеграл остидаги ифода; C — аниқмас интегралнинг ихтиёрий ўзгармаси.

Аниқмас интегралнинг хоссалари

I. Функция дифференциалининг аниқмас интеграли шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

II. Аниқмас интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенг:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

III. Функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқмас интеграли шу функциялар аниқмас интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx.$$

IV. Интеграл остидаги ўзгармас кўпайтувчини аниқмас интеграл ишораси ташқарисига чиқариш мумкин:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

Интеграллашнинг асосий формулалари (жадвалий интеграллар):

$$\int du = u + C; \tag{9.1}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1); \tag{9.2}$$

$$\int u^{-1}du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C; \tag{9.3}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C; \tag{9.4}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C; \tag{9.5}$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \tag{9.6}$$

$$\int a^{ku} du = \frac{1}{k}\frac{a^{ku}}{\ln a} + C; \tag{9.7}$$

$$\int e^u du = e^u + C; \tag{9.8}$$

$$\int e^{ku} du = \frac{1}{k} e^{ku} + C; \tag{9.9}$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C; \tag{9.10}$$

$$\int \sin ku\,du = -\frac{1}{k}\cos ku + C; \tag{9.11}$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C; \tag{9.12}$$

$$\int \cos ku\,du = \frac{1}{k}\sin ku + C; \tag{9.13}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C; \tag{9.14}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 ku} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} ku + C; \tag{9.15}$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C; \tag{9.16}$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 ku} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} ku + C; \tag{9.17}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C; \tag{9.18}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C; \tag{9.19}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-b^2u^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b}{a} u + C; \tag{9.20}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C; \tag{9.21}$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C; \tag{9.22}$$

$$\int \frac{du}{a^2+b^2u^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} u + C. \tag{9.23}$$

Юқорида санаб ўтилган формулаларда a, b ва k ўзгармаслар, u эркли ўзгарувчи ёки эркли ўзгарувчининг исталган (дифференциалланувчи) функциясидир.

(9.3), (9.4) ва (9.5) формулалар қўлланилганда логарифм ишораси (белгиси) остидаги ифода манфий қийматга эга бўлиши мумкин бўлган ҳоллардагина абсолют қиймат белгиси ёзилади.

Бу формулаларнинг ҳар бирини текшириш осон, уларнинг ўнг томонини дифференциаллаб, интеграл ишораси остидаги ифодани ҳосил қиламиз.

Бевосита интеграллаш

Бевосита интеграллаш тегишли жадвалий интегрални қўллаш йўли билан амалга оширилади. Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) берилган интеграл тегишли жадвалий интеграл бўйича бевосита топилади;

2) берилган интеграл III ва IV хоссалар қўлланилгандан *кейин битта ёки бир нечта жадвалий интегралга келтирилади*;

3) берилган интеграл интеграл ишораси остидаги функция устида элементар айний алмаштиришлар бажарилгандан сўнг ва III ҳамда IV хоссалар қўлланилгандан сўнг битта ёки бир нечта жадвалий интегралга келтирилади.

(9.1) формула бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уни дифференциаллаш билан текширинг.

1041. $\int 5dx.$

Ечилиши. IV хоссага асосан ўзгармас кўпайтувчи 5 ни интеграл ишораси ташқарисига чиқарамиз ва (9.1) формулани қўллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$$

Текшириш. $d(5x + C) = 5dx$. Интеграл остидаги ифодани ҳосил қилдик, демак, интеграл тўғри олинган.

1042. 1) $\int 3du$; 2) $\int ad\varphi$; 3) $\int (m-1)dy$; 4) $\int d(x+3)$.

(9.2) формула бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1043. $\int x^3dx.$

Ечилиши. Интегрални $n = 3$ да бевосита (9.2) формуладан топамиз:

$$\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Текшириш: $d\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) = \frac{1}{4}\cdot 4x^3dx = x^3dx.$

Дифференциаллаб интеграл ишораси остидаги ифодани ҳосил қилдик; интеграл тўғри олинган.

1044. 1) $\int x^4dx$; 2) $\int x^{m-1}dx$; 3) $\int x^{1-n}dx$; 4) $\int u^{p+1}du$.

1045. $\int 6x^2dx.$

Ечилиши. IV хоссани ва (9. 2) формулани қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 2x^3 + C.$$

Текшириш: $d(2x^3+C)=2\cdot 3x^2dx=6x^2dx$.

1046. 1) $\int 2xdx$; 2) $\int 4t^3dt$; 3) $\int ax^2dx$; 4) $\int nx^{n-1}dx$.

1047. $\int 4(x^2-x+3)\,dx$.

Ечилиши. III ва IV хоссаларни ҳамда (9.2) ва (9.1) формулаларни қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int 4(x^2-x+3)\,dx=4\int x^2dx-4\int xdx+12\int dx=4\times$$

$$\times\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+12x+C=\frac{4}{3}x^3-2x^2+12x+C.$$

Интеграллаш ўзгармаси C учта интеграллаш ўзгармасининг алгебраик йиғиндисига тенг, чунки ҳар бир интегралнинг ўзини ихтиёрий ўзгармаси бор $(C_1-C_2+C_3=C)$.

Текшириш: $d\left(\frac{4}{3}x^3-2x^2+12x+C\right)=(4x^2-4x+$
$+12)\,dx=4(x^2-x+3)\,dx$.

1048. $\int(4u^3-6u^2-4u+3)\,du$; 2) $\int\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\right.$
$\left.+5\right)dx$; 3) $\int(4ax^3-6bx^2-4cx+e)\,dx$; 4) $\int 3(\varphi-2)\,d\varphi$.

1049. $\int 2(3x-1)^2\,dx$.

Ечилиши. $\int 2(3x-1)^2dx=\int(18x^2-12x+2)\,dx=$
$=18\int x^2dx-12\int xdx+2\int dx=6x^3-6x^2+2x+C$.

1050. $\int 3(2x^2-1)^2\,dx$.

1051. $\int x^3(1+5x)\,dx$.

Ечилиши. $\int x^3(1+5x)\,dx=\int x^3dx+5\int x^4dx=$
$=\frac{1}{4}x^4+x^5+C$.

1052. $\int x^4(x-1)\,dx$.

1053. $\int(2x-1)^3\,dx$.

Ечилиши. $\int(2x-1)^3dx=\int(8x^3-12x^2+6x-1)\,dx=$
$=8\int x^3dx-12\int x^2dx+6\int xdx-\int dx=2x^4-4x^3+3x^2-$
$-x+C$.

1054. $\int (x-2)^3\,dx.$

1055. $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}\,dx.$

Ечилиши. $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}\,dx = \int (x^2+3x+4)\,dx =$
$= \int x^2dx + 3\int xdx + 4\int dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C.$

1056. 1) $\int \frac{u^2-u}{3u}\,du$; 2) $\int \frac{2\varphi-3\varphi^3}{5\varphi}\,d\varphi.$

1057. $\int x^{-4}\,dx.$

Ечилиши. $\int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$

1058. 1) $\int (3x^{-4}+8x^{-5})\,dx$; 2) $\int (x^{-4}-x^{-3}-3x^{-2}+$
$+1)\,dx.$

1059. $\int \frac{dx}{x^3}.$

Ечилиши. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

1060. 1) $\int \frac{dt}{3t^2}$; 2) $\int \frac{du}{u^n}$; 3) $\int \frac{x^n dx}{x}.$

1061. $\int x^{\frac{2}{3}}dx.$

Ечилиши. $\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} +$
$+ C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$

1062. 1) $\int x^{\frac{3}{4}}dx$; 2) $\int \left(5u^{\frac{3}{2}} - 7u^{\frac{3}{4}}\right) du$; 3) $\int 5x\sqrt{x}\,dx$;
4) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$; 5) $\int x^{-\frac{2}{3}}dx.$

1063. $\int \frac{\left(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right)}{x}\,dx.$

Ечилиши. $\int \frac{\left(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right)}{x}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}-1} + x^{\frac{2}{3}-1} +\right.$
$\left. + x^{\frac{1}{2}-1}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx +$

$$+\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$$

1064. $\int \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{2}}\,dx.$

1065. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Ечилиши. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C.$

1066. 1) $\int\frac{du}{\sqrt[3]{u^2}}$; 2) $\int\frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}$; 3) $\int\frac{2dt}{3t\sqrt{t}}.$

1067. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{2x\sqrt[3]{x^2}}.$

Ечилиши. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{2x\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{xx^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}-1-\frac{2}{3}}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int x^{-\frac{7}{6}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{6}}}{-\frac{1}{6}}+C=-3x^{-\frac{1}{6}}+C.$$

1068. 1) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[8]{x^3}}$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int\left(\frac{3}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}}+\right.$ $\left.+\frac{4\sqrt[3]{t^2}}{t}\right)dt.$

(9.3). формула бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1069. $\int\frac{3dx}{x}.$

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.3) формула бўйича олинади:

$$\int\frac{3dx}{x}=3\int\frac{dx}{x}=3\ln|x|+C.$$

Текшириш: $d[3\ln|x|+C]=3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{3dx}{x}.$

1070. $\int\frac{a d\varphi}{\varphi}.$

1071. $\int \frac{dx}{1+x}$.

Ечилиши. Махражнинг дифференциали суратга тенг, шунинг учун (9.3) формула бўйича қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{d(1+x)}{1+x} = \ln|1+x| + C.$$

Текшириш: $d[\ln|1+x| + C] = \frac{1}{1+x}\,d(1+x) = \frac{dx}{1+x}$.

1072. 1) $\int \frac{2\,dx}{x+3}$; 2) $\int \frac{5\,du}{u-3}$; 3) $\int \frac{3\,d\varphi}{2-\varphi}$.

1073. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Ечилиши. Интеграл остидаги ифоданинг махражини дифференциаллаб,

$$d(x^2+1) = 2x\,dx$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2+1).$$

(9.3) формулани қўлланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}\,d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Абсолют қиймат белгисини ёзмаймиз, чунки x нинг исталган қийматида $x^2+1 > 0$.

1074. 1) $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$; 2) $\int \frac{x^2dx}{a^3-x^3}$.

1075. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Ечилиши. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} =$
$= -\ln|\cos x| + C$.

1076. $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x - 1}$.

Ечилиши. Интеграл остидаги ифоданинг махражини дифференциаллаймиз:

$$d(3\sin x - 1) = 3\cos x\,dx,$$

бундан

$$\cos x\,dx = \frac{1}{3}\,d(3\sin x - 1).$$

(9. 3) формулага кўра:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3\sin x - 1)}{3\sin x - 1} = \frac{1}{3}\ln|3\sin x - 1| + C.$$

1077. 1) $\int \frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$; 2) $\int \frac{\cos x\,dx}{3+2\sin x}$.

(9.4) формула бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1078. $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

Ечилиши. (9. 4) формула бўйича қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{dx}{x^2-4} = \int\frac{dx}{x^2-2^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

Текшириш: $d\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x+2}{x-2}\times$

$$\times\frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x+2-x+2}{x^2-4}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4\,dx}{x^2-4} = \frac{dx}{x^2-4}.$$

1079. 1) $\int \frac{dx}{x^2-9}$; 2) $\int \frac{du}{u^2-25}$.

(9.5) формула бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1080. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Ечилиши. (9. 5) формула бўйича қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln|x+\sqrt{x^2+4}| + C.$$

1081. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$.

(9.6) ва (9.7) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1082. $\int 2^x dx.$

Ечилиши. (9. 6) формула бўйича $a = 2$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Текшириш: $d\left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \ln 2\, dx = 2^x dx.$

1083. 1) $\int 5^x dx$; 2) $\int b^u du.$

1084. $\int 3^{5x} dx.$

Ечилиши. (9.7) формула бўйича $k = 5$ ва $a = 3$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int 3^{5x} dx = \frac{1}{5} \frac{3^{5x}}{\ln 3} + C.$$

1085. $\int 4^{2x} dx.$

1086. $\int 2^{x^2} x\, dx.$

Ечилиши. Интеграл остидаги ифоданинг даража кўрсаткичини дифференциаллаймиз:

$$d(x^2) = 2xdx,$$

бундан

$$x\, dx = \frac{1}{2} d(x^2).$$

(9.7) формулани қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int 2^{x^2} x\, dx = \int 2^{x^2} \cdot \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int 2^{x^2} d(x^2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C = \frac{2^{x^2-1}}{\ln 2} + C.$$

1087. $\int 5^{x^2} x^2 dx.$

(9.8) ва (9.9) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1088. $\int e^{\varphi} d\varphi.$

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.8) формула бўйича олинади:

$$\int e^{\varphi} d\varphi = e^{\varphi} + C.$$

1089. $\int (e^x + 2x)\,dx$.

1090. $\int e^{-2x}\,dx$.

Ечилиши. (9. 9) формула бўйича $k = -2$ да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int e^{-2x}\,dx = \frac{1}{-2}e^{-2x} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$$

1091. $\int e^{5x}\,dx$.

1092. $\int e^{-3x^2} x\,dx$.

Ечилиши. Интеграл остидаги ифоданинг даража кўрсаткичини дифференциаллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d(-3x^2) = -6x\,dx,$$

бундан

$$x\,dx = -\frac{1}{6}d(-3x^2).$$

(9.9) формулани қўллаиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int e^{-3x^2}x\,dx = \int e^{-3x^2}\left[-\frac{1}{6}d(-3x^2)\right] =$$

$$= -\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}\,d(-3x^2) = -\frac{1}{6}\,e^{-3x^2} + C.$$

1093. 1) $\int e^{-x^2}x\,dx$; 2) $\int x^{2x^2}x\,dx$.

(9.10) ва (9.11) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1094. $\int 3\sin x\,dx$.

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.10) формула бўйича олинади:

$$\int 3\sin x\,dx = 3\int \sin x\,dx = -3\cos x + C.$$

1095. 1) $\int (\sin x - 5)\,dx$; 2) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos x}$.

1096. $\int \sin 3x\,dx$.

Ечилиши. Интеграл (9.11) формула бўйича $k = 3$ да олинади:

$$\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

1097. $\int \sin 2x dx$.

1098. $\int \sin (ax + b) dx$.

Ечилиши. (9.10) формула бўйича интеграллаймиз:

$$d(ax + b) = adx, \text{ бундан } dx = \frac{1}{a} d(ax + b).$$

Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sin (ax + b) \frac{1}{a} d(ax + b) = \frac{1}{a} \int \sin (ax + b) d(ax + b) =$$
$$= -\frac{1}{a} \cos (ax + b) + C.$$

1099. 1) $\int \sin (x - 5) dx$; 2) $\int \sin x^2 \, x \, dx$.

(9.12) ва (9.13) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1100. $\int 2 \cos z \, dz$.

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.12) формула бўйича олинади:

$$\int 2 \cos z \, dz = 2 \int \cos z \, dz = 2 \sin z + C.$$

1101. $\int (4 - 3 \cos x) dx$.

1102. $\int \cos 4x \, dx$.

Ечилиши. Интеграл (9.13) формула бўйича $k = 4$ да олинади:

$$\int \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

1103. $\int \cos 3x \, dx$.

1104. $\int \cos (5x - 3) dx$.

Ечилиши. (9.12) формула бўйича интеграллаймиз:

$$d(5x - 3) = 5 dx, \text{ бундан } dx = \frac{1}{5} d(5x - 3).$$

Қуйидагига эга бўламиз: $\int \cos(5x-3)\,dx = \int \cos(5x - 3)\,\frac{1}{5}\,d(5x-3) = \frac{1}{5}\int \cos(5x-3)\,d(5x-3) = \frac{1}{5}\sin(5x-3)+C.$

1105. 1) $\int \cos(2-3x)\,dx$; 2) $\int \cos x^3 x^2\,dx$.

(9.14) ва (9.15) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1106. $\int \frac{5dy}{\cos^2 y}$.

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.14) формула бўйича олинади:

$$\int \frac{5dy}{\cos^2 y} = 5\int \frac{dy}{\cos^2 y} = 5\,\mathrm{tg}\,y + C.$$

1107. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x}$.

1108. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.

Ечилиши. Интеграл (9.15) формула бўйича $k=5$ да олинади:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5}\,\mathrm{tg}\,5x + C.$$

1109. $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$.

Ечилиши. (9.14) формула бўйича интеграллаймиз:

$$d(x^3) = 3x^2dx, \text{ бундан } x^2dx = \frac{1}{3}\,d(x^3).$$

Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,x^3 + C.$$

1110. 1) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$.

(9.16) ва (9.17) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1111. $\int \frac{dz}{2\sin^2 z}$.

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.16) формула бўйича олинади:

$$\int \frac{dz}{2\sin^2 z} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sin^2 z} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} z + C.$$

1112. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x}$.

1113. $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$.

Ечилиши. Интеграл (9.17) формула бўйича $k = 6$ да олинади:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 6x} = -\frac{1}{6}\operatorname{ctg} 6x + C.$$

1114. 1) $\int \frac{3\,dx}{\sin^2 3x}$; 2) $\int \frac{dz}{\sin^2 2z}$.

1115. $\int \frac{x dx}{\sin^2 (x^2+1)}$.

Ечилиши. (9.16) формула бўйича интеграллаймиз:

$$d(x^2+1) = 2x\,dx,$$

бундан

$$x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2+1).$$

Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2+1) + C.$$

1116. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x^2}$.

(9.18), (9.19) ва (9.20) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1117. $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.18) формула бўйича олинади:

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin x + C.$$

Текшириш: $d(2\arcsin x + C) = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1118. $\int \frac{dz}{3\sqrt{1-z^2}}$.

1119. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Ечилиши. Интеграл (9.19) формула бўйича $a = 3$ да олинади. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

1120. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; 2) $\int \frac{du}{\sqrt{3-u^2}}$.

1121. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$.

Ечилиши. Интеграл (9.20) формула бўйича $a = 3$, $b = 4$ да олинади:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{4}x + C.$$

1122. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; 3) $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{9-2\varphi^2}}$;

4) $\int \frac{dz}{\sqrt{3-z^2}}$; 5) $\int \frac{3dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; 6) $\int \frac{\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{5-3x^2}}$.

(9.21), (9.22) ва (9.23) формулалар бўйича интеграллаш

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1123. $\int \frac{dx}{2(1+x^2)}$.

Ечилиши. Интеграл бевосита (9.21) формула бўйича олинади:

$$\int \frac{dx}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1124. $\int \frac{adx}{1+x^2}$.

1125. $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

Ечилиши. Интеграл (9.22) формула бўйича $a = 3$ да олинади:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

1126. 1) $\int \frac{dx}{25+x^2}$; 2) $\int \frac{3dz}{9+z^2}$.

1127. $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

Ечилиши. Интеграл (9.23) формула бўйича $a = 5$ ва $b = 2$ да олинади:

$$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \frac{1}{5\cdot 2}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}x + C = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}x + C.$$

1128. 1) $\int \frac{dx}{16+25x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{4+x^2}$;

4) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

57- §. Аниқмас интегралнинг энг оддий татбиқлари

Функцияни берилган ҳосила ёки дифференциал бўйича излаш аниқмас масаладир, чунки $\int f(x)\,dx$ формула бир-биридан C ўзгармас қўшилувчи билан фарқ қилувчи $y = F(x) + C$ кўринишидаги бошланғич функциялар тўплами демакдир; агар бошланғич функцияга ҳеч қандай бошланғич шартлар қўйилмаган бўлса, C ҳар қандай сон қийматларни қабул қилиши мумкин. Бошланғич функциялар тўпламидан битта тайин функцияни ажратиб олиш учун бошлангич шартлар берилган бўлиши керак. Бошланғич шарт деганда, $y = F(x) + C$ бошланғич функция учун x ва y нинг хусусий қийматларини берилиши тушунилади, бу хусусий қийматлар бўйича C нинг шу бошланғич шартларни қаноатлантирувчи тайин қиймати топилади.

I. Бошланғич функцияни унинг берилган ҳосиласи бўйича ёки унинг берилган дифференциали бўйича ҳисоблаш

1129. Ҳосиласи $y' = 3x^2 - 6x + 2$ бўлган функцияни топинг.

Ечилиши. $y' = 3x^2 - 6x + 2$ ёки $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 2$, бундан $dy = (3x^2 - 6x + 2)\,dx$.

Бунинг чап ва ўнг томонларидан интеграл оламиз:

$\int dy = \int (3x^2 - 6x + 2)\,dx;\ y + C_1 = x^3 - 3x^2 + 2x + C_2.$ $C_2 - C_1 = C$ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x + C.$$

Биз ҳосиласи $y' = 3x^2 - 6x + 2$ бўлган функцияларнинг умумий ифодасини ҳосил қилдик.

Изоҳ. Бундан кейин шунга ўхшаш ифодаларни интеграллашда интеграллаш ўзгармасини фақат ўнг томонга ёзамиз.

1130. 1) ҳосиласи $y' = 4x^3 - 2x + 3$ бўлган функцияни топинг.

2) дифференциали $dy = (2x + 6)\,dx$ бўлган функцияни топинг.

II. Бошланғич функцияни унинг берилган ҳосиласи (ёки дифференциали) ҳамда аргумент ва функциянинг хусусий қийматлари бўйича ҳисоблаш

1131. Ҳосиласи $y' = 2x - 3$ бўлган ва $x = 2$ бўлганда 6 га тенг қиймат қабул қиладиган функцияни топинг.

Ечилиши. $y' = 2x - 3$ ёки $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$. Бундан $dy = (2x - 3)\,dx$.

Бунинг ўнг ва чап қисмларидан интеграл оламиз:

$$\int dy = \int (2x - 3)\,dx;\ y = x^2 - 3x + C.$$

Берилган $x = 2$ ва $y = 6$ қийматларда C ни топамиз. Функцияга бу қийматларни қўйиб, $6 = 2^2 - 3 \cdot 2 + C$ ни ҳосил қиламиз, бундан $C = 8$. Берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи функция $y = x^2 - 3x + 8$ кўринишни олади.

1132. Ҳосиласи $y' = 2x - 5$ бўлган ва $x = -3$ да 28 га тенг қийматни қабул қиладиган функцияни топинг.

1133. $x = 0$ да нолга айланадиган ва ҳосиласи $y' = 3x^2 - 4x + 5$ бўлган функцияни топинг.

1134. Ҳосиласи $y' = 3e^x + 2x$ бўлган ва $x = 0$ бўлганда 8 га тенг қиймат қабул қиладиган функцияни топинг.

1135. Агар $x = \frac{\pi}{2}$ бўлганда бошланғич функция 6 га тенг бўлса, $\int (\cos x - \sin x)$ ни топинг.

Ечилиши. $\int(\cos x - \sin x)\,dx = \int \cos x\,dx - \int \sin x\,dx =$ $= \sin x + \cos x + C$.

C ни берилган бошланғич шартларда топамиз:

$$6 = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} + C,$$

бундан $C = 5$, демак, бошланғич функция

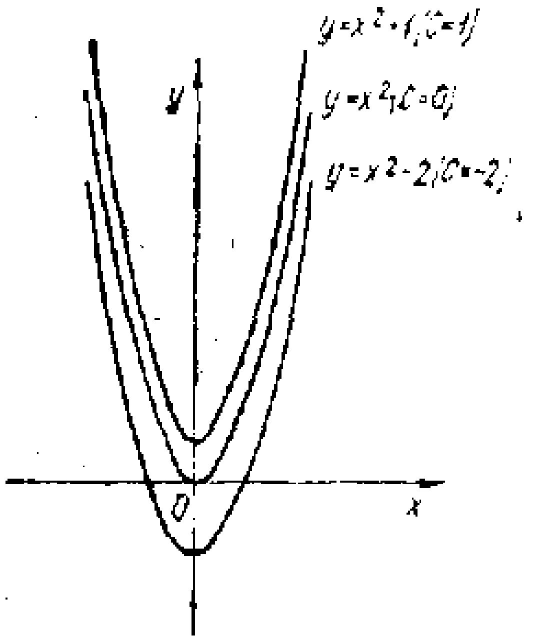
$$y = \sin x + \cos x + 5$$

бўлади.

1136. 1) $x = \pi$ да бошланғич функция 4 га тенг бўлса, $\int(\sin x + 3\cos x)\,dx$ ни топинг; 2) $x = 0$ да бошланғич функция 3 га тенг бўлса, $\int(\cos x - e^x + 2x)\,dx$ ни топинг; 3) $x = 0$ да бошланғич функция нолга тенг бўлса, $\int\left(\frac{3}{1+x^2} + 2\right)dx$ ни топинг; 4) $x = -1$ да бошланғич функция $\frac{1}{3}$ га тенг бўлса, $\int\left(\frac{1}{x^3} - x^2\right)dx$ ни топинг.

III. Чизиқнинг тенгламасини унинг ҳар бир нуқтасига ўтказилган уринманинг берилган бурчак коэффициенти бўйича тузиш

1137. Агар эгри чизиқнинг ҳар бир $(x; y)$ нуқтасидаги уринманинг бурчак коэффициенти $2x$ га тенг бўлса, эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.



123- расм.

Ечилиши. Масаланинг шартида $k = 2x$ берилган. $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ эканлиги маълум, демак $\frac{dy}{dx} = 2x$, $dy = 2x dx$. Интеграллаб

$$\int dy = \int 2x\,dx,\ y = x^2 + C$$

ни ҳосил қиламиз.

Биз ҳар бирининг исталган нуқтасидаги уринмасининг бурчак коэффициенти $2x$ га тенг бўлган эгри чизиқлар тўпламини (эгри чизиқлар оиласини) топдик. Бу эгри чизиқлар бир-биридан C ўзгармас сонга фарқ қилади. $C = 0$ бўлганда $y = x^2$ га, яъни учи координаталар бошида бўлган параболага, $C = 1$ да учи $(0;\ 1)$ нуқтада бўлган $y = x^2 + 1$ параболага $C = -2$ да учи $(0;\ -2)$ нуқтада бўлган $y = x^2 - 2$ параболага эга бўламиз ва ҳоказо (123- расм).

1138. Агар эгри чизиқнинг ҳар бир $(x;\ y)$ нуқтасидаги уринмасининг бурчак коэффициенти — $3x$ га тенг бўлса, эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.

1139. Агар эгри чизиқнинг ҳар бир $(x;\ y)$ нуқтасидаги уринмасининг бурчак коэффициенти $x + 2$ га тенг бўлса, *эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.*

1140. Агар чизиққа уринманинг исталган уриниш нуқтасидаги бурчак коэффициенти $\frac{y}{x}$ га тенг бўлса, чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масаланинг шартида $k = \frac{y}{x}$ берилган, аммо $k = \frac{dy}{dx}$, демак, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, бундан, ўзгарувчиларни ажратиб, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ ни ҳосил қиламиз. Интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},\quad \ln y = \ln x + \ln C.$$

Соддалаштириш қулай бўлиши учун ихтиёрий ўзгармасни $\ln C$ га тенг деб оламиз. Потенцирлаб, ушбуни ҳосил қиламиз: $y = Cx$ — бу координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси.

1141. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги уринмасининг бурчак коэффициенти: 1) $\left(-\frac{y}{x}\right)$; 2) $\frac{x}{y}$; 3) $\left(-\frac{x}{y}\right)$ га тенг бўлса, чизиқнинг тенгламасини тузинг.

IV. Берилган нуқтадан ўтувчи чизиқнинг тенгламасини уринманинг берилган бурчак коэффициенти бўйича тузиш

1142. Агар $A(2;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти чизиқнинг ҳар бир нуқтасида $2x - 4$ га тенг бўлса, чизиқнинг тенгламасини топинг.

Ечилиши. Масаланинг шартида $k = 2x - 4$ берилган, бироқ $k = \frac{dy}{dx}$ демак, $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ ёки $dy = (2x - 4)\,dx$. Интеграллаймиз:

$$\int dy = \int (2x - 4)\,dx; \quad y = x^2 - 4x + C.$$

Дастлабки берилганларни ўрнига қўйиб, C ни топамиз: $-1 = 2^2 - 4\cdot 2 + C$, $C = 3$. $y = x^2 - 4x + 3$ эгри чизиқ тенгламасини ҳосил қилдик. Топилган эгри чизиқ — параболадир.

1143. Координаталар бошидан ўтувчи ва исталган нуқтасидаги уринмасининг бурчак коэффициенти $\frac{x}{3}$ га тенг бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.

1144. Агар $M(1;\ 4)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти чизиқнинг ҳар бир нуқтасида $3x^2 - 2x$ га тенг бўлса, чизиқнинг тенгламасини топинг.

1145. Агар $A(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти чизиқнинг ҳар бир нуқтасида уриниш нуқтаси абсциссаси квадратининг учланганига тенг бўлса, эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

1146. $A(0;\ 1)$ нуқтадан ўтувчи ва ҳар бир нуқтасидаги уринмасининг бурчак коэффициенти уриниш нуқтасининг ординатаси y га тенг бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.

Ечилиши. $k = \frac{dy}{dx} = y$, $\frac{dy}{y} = dx$. Интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx, \quad \ln y = x + C.$$

Бошланғич шартлардан C ни топамиз: $\ln 1 = 0 + C$, $C = 0$, демак, $y = e^x$.

1147. Агар $A(0;\ e)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти чизиқнинг ҳар бир нуқтасида y га тенг бўлса, чизиқнинг тенгламасини топинг.

V. Жисмнинг берилган ҳаракат тезлиги тенгламаси бўйича унинг ҳаракат тенгламасини тузиш

1148. Жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракат тезлиги $v = 3t^2 - 2t$ тенглама билан берилган. s йўлнинг тенгламасини топинг.

Ечилиши. Маълумки, жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракати тезлиги s йўлдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг:

$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2t$, бундан, $ds = (3t^2 - 2t)dt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int (3t^2 - 2t)\,dt, \quad s = t^3 - t^2 + C.$$

1149. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат тезлиги $v = t^2 - 8t + 2$ тенглама билан берилган. Нуқтанинг ҳаракат тенгламасини топинг.

1150. Тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги $v = 4t - 3t^2$ қонун бўйича ўзгаради. Шу жисмнинг ҳаракат тенгламасини топинг.

VI. Жисмнинг ҳаракат тенгламасини унинг ҳаракат *тезлигининг берилган тенгламаси бўйича ва бошланғич* шартлар бўйича топиш

1151. Жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракат тезлиги $v = 3t^2 + 4$ тенглама билан берилган. Агар $t = 2$ сек вақт ичида жисм 20 м ўтган бўлса, s йўлнинг тенгламасини топинг.

Ечилиши. $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4$, бундан, $ds = (3t^2 + 4)\,dt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int (3t^2 + 4)\,dt, \quad s = t^3 + 4t + C.$$

Бошланғич шартлардан C ни топамиз: $20 = 2^3 + 4 \cdot 2 + C$, $C = 4$. Жисмнинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$s = t^3 + 4t + 4.$$

1152. Тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқта тезлигининг тенгламаси берилган: $v = 2t - 3$. Саноқ бошланган пайтда нуқта 6 м йўл ўтган бўлса, нуқтани ҳаракат тенгламасини топинг.

1153. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати тезлиги $v = 3t^2 + 4t - 1$ формула билан берилган. Агар бошланғич вақт моментида нуқта координаталар бошида турган бўлса, нуқтанинг ҳаракат тенгламасини топинг.

1154. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати тезлиги $v = 2\cos t$ формула билан берилган. Агар $t = \frac{\pi}{6}$ сек моментда нуқта саноқ бошидан $s = 4$ см масофада бўлса, унинг ҳаракат тенгламасини тузинг.

VII. Жисмнинг ҳаракат тенгламасини берилган тезланиш тенгламаси бўйича ва бошланғич шартлар бўйича тузиш

1155. Агар жисм ҳаракатнинг бошланғич моментида тинч ҳолатда бўлса, эркин тушаётган жисмнинг ўзгармас g тезланишда ҳаракатланиш қонунини топинг.

Ечилиши. Маълумки, тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган жисмнинг a тезланиши s йўлнинг t вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиласи ёки v тезликнинг t вақт бўйича олинган ҳосиласидир: $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, аммо $a = g$, демак, $\frac{dv}{dt} = g$, бундан $dv = g\,dt$. Интеграллаймиз:

$$\int dv = \int g\,dt, \quad v = gt + C_1.$$

Бошланғич шартлар $t = 0, v = 0$ га кўра, C_1 ни топамиз: $0 = g \cdot 0 + C_1$, $C_1 = 0$.

Ҳаракат тезлиги тенгламасига эга бўлдик: $v = gt$.

Энди жисмнинг ҳаракат қонунини топамиз: $v = \frac{ds}{dt}$, аммо $v = gt$, демак, $\frac{ds}{dt} = gt$ ёки $ds = gt\,dt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int gt\,dt, \quad s = \frac{gt^2}{2} + C_2.$$

Бошланғич шартлар $t = 0$, $s = 0$ га кўра C_2 ни топамиз:

$$0 = g \cdot \frac{0^2}{2} + C_2, \quad C_2 = 0.$$

Тушаётган жисмнинг ҳаракат тенгламасига эга бўлдик: $s = \frac{gt^2}{2}$.

1156. Жисм бошланғич v_0 тезлик билан вертикал равишда юқорига отилган. Шу жисмнинг ҳаракат тенгламасини топинг (ҳаво қаршилигини ҳисобга олманг).

Ечилиши. Вертикал бўйича юқорига томон йўналишни мусбат деб оламиз, у ҳолда пастга йўналган оғирлик кучининг тезланишини пастга томон йўналиш сифатида манфий деб оламиз. Ушбуга эга бўламиз: $a = \frac{dv}{dt} = -g$, бундан $dv = -gdt$. Интеграллаймиз:

$$\int dv = -\int g\,dt, \quad v = -gt + C_1.$$

Бошланғич шартлар $t = 0$, $v = v_0$ га кўра C_1 ни топамиз: $v_0 = -g\cdot 0 + C_1, C_1 = v_0$. Тезлик тенгламасига эга бўлдик.

$$v = -gt + v_0.$$

Жисмнинг ҳаракат қонунини топамиз: $v = \frac{ds}{dt}$, аммо $v = -gt + v_0$, у ҳолда $\frac{ds}{dt} = -gt + v_0$, бундан, $ds = (-gt + v_0)\,dt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int (-gt + v_0)\,dt,\quad s = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + C_2.$$

Бошланғич шартлар $t = 0$, $s = 0$ га кўра C_2 ни топамиз:

$$0 = -\frac{g\cdot 0}{2} + v_0\cdot 0 + C_2,\quad C_2 = 0.$$

Жисмнинг ҳаракат тенгламасига эга бўлдик:

$$s = -\frac{g^2}{2} + v_0t \text{ ёки } s = v_0t - \frac{gt^2}{2}.$$

1157. Жисм $a = 12t^2 + 6t$ тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Агар $t = 1$ сек моментда жисмнинг тезлиги $v = 8$ м/сек ва йўл $s = 6$м бўлса, шу жисмнинг ҳаракат қонунини топинг.

1158. Жисм $a = 24t^2 + 8$ тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Агар $t = 1$ сек моментда жисмнинг тезлиги $v = 10$ м/сек ва йўл $s = 12$ м бўлса, шу жисмнинг ҳаракат қонунини топинг.

1159. Жисм $a = 6t - 12$ тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. $t = 0$ вақт моментида (саноқ боши) бошланғич тезлик $v_0 = 9$ м/сек; саноқ бошидан бошлаб ҳисобланган масофа $s_0 = 10$ м. 1) тезлик ва йўл тенгламаларини топинг; 2) $t = 2$ сек моментдаги тезланиш, тезлик ва йўл катталигини топинг; 3) тезлик энг кичик бўлган моментни топинг.

Ечилиши. 1. Тезлик тенгламасини топамиз: $a = \frac{dv}{dt}$, аммо $a = 6t - 12$, у ҳолда $\frac{dv}{dt} = 6t - 12$ ёки $dv = (6t - 12)\,dt$. Интеграллаймиз:

$$\int dv = \int (6t - 12)\,dt,\quad v = 3t^2 - 12t + C_1,$$

Бошланғич шартлар $t = 0$, $v_0 = 9$ га кўра, C_1 ни топамиз: $9 = 3\cdot 0^2 - 12\cdot 0 + C_1$, $C_1 = 9$. Тезлик тенгламасига эга бўлдик: $v = 3t^2 - 12t + 9$.

Йўл тенгламасини топамиз: $v = \frac{ds}{dt}$, аммо $v = 3t^2 - 12t + 9$, у ҳолда $\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$ ёки $ds = (3t^2 - 12t + 9)\,dt$. Интеграллаймиз:

$$\int ds = \int (3t^2 - 12t + 9)\,dt, \quad s = t^3 - 6t^2 + 9t + C_2.$$

Бошланғич шартлар $t = 0$, $s_0 = 10$ га кўра, C_2 ни топамиз: $10 = 0^3 - 6\cdot 0^2 + 9\cdot 0 + C_2$, $C_2 = 10$. Йўл тенгламасига эга бўлдик: $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 10$.

2. $t = 2$ сек да a, v ва s ни топамиз: $a = 6\cdot 2 - 12 = 0$; $v = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 9 = -3$ м/сек; $s = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 + 10 = 12$ м.

3. Тезлик тенгламасининг максимум ва минимумини текширамиз:

$$v = 3t^2 - 12t + 9,\ v' = 6t - 12,\ 6t - 12 = 0,\ t = 2;$$
$$v'' = 6,\ v'' > 0.$$

Демак, $t = 2$ сек бўлганда тезлик энг кичик бўлади.

1160. Нуқта $a = -6t + 18$ тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда, $t = 0$ вақт моментида (саноқ боши) бошланғич тезлик $v_0 = 24$ м/сек, саноқ бошидан бошлаб ҳисобланган масофа $s_0 = 15$ м. 1) тезлик ва йўл тенгламаларини топинг; 2) $t = 2$ сек моментдаги тезланиш, тезлик ва йўлнинг катталигини топинг; 3) тезлик энг катта бўладиган моментни топинг.

58. §. Ўзгарувчини алмаштириш усули билан (ўрнига қўйиш усули билан) интеграллаш

Ўзгарувчини алмаштириш усули билан интеграллашнинг моҳияти $\int f(x)\,dx$ интегрални интеграллашнинг асосий формулаларидан бирортаси бўйича осон олинадиган $\int F(u)\,du$ интегралга алмаштиришдан иборат.

$\int f(x)\,dx$ интегрални топиш учун x ўзгарувчини $x = \varphi(u)$ ўрнига қўйиш ёрдамида янги u ўзгарувчи билан алмаштирамиз. $x = \varphi(u)$ тенгликни дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $dx = \varphi'(u)\,du$. Интеграл ишораси остидаги ифодада x ва dx ўрнига уларнинг u ва du орқали ифодаланган қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du = \int F(u)\,du.$$

Янги u ўзгарувчили интеграл топилгандан сўнг, у $u = \psi(x)$ ўрнига қўйиш йўли билан x ўзгарувчига келтирилади.

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1. $\int (Ax + B)^m dx$ кўринишдаги интеграллар (бунда $m \neq -1$)

Бу кўринишдаги интеграллар (9.2) формула бўйича топилади.

1161. $\int (3x + 2)^5\,dx$.

Ечилиши. $3x + 2 = u$ ўрнига қўйишни киритамиз. Дифференциаллаймиз: $3\,dx = du$, бундан $dx = \frac{1}{3}du$. Берилган интегралда $3x + 2$ ва dx ўрнига уларнинг қийматларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int (3x + 2)^5\,dx = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}\,\frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{18}\,u^6 + C.$$

u ни унинг x орқали ифодаси билан алмаштириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int (3x + 2)^5\,dx = \frac{1}{18}\,u^6 + C = \frac{1}{18}(3x + 2)^6 + C.$$

Текшириш:

$$d\left[\frac{1}{18}(3x + 2)^6 + C\right] = \frac{6}{18}(3x + 2)^5 \cdot 3\ \ dx = (3x + 2)^5 dx.$$

Интеграл остидаги ифодани ҳосил қилдик, демак, интеграл тўғри олинган.

1162. 1) $\int (7 - 2x)^3 dx$; 2) $\int (5t - 1)^4\,dt$; 3) $\int (ax+b)^m dx$.

1163. $\int \frac{dx}{(4x + 1)^4}$.

Ечилиши. $4x + 1 = u$ деймиз. Дифференциаллаймиз: $4dx = du$, бундан, $dx = \frac{1}{4}du$. Интегрални топамиз:

$$\int \frac{dx}{(4x + 1)^4} = \int (4x + 1)^{-4}\,dx = \frac{1}{4}\int u^{-4} du =$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{u^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{12\,u^3}+C=-\frac{1}{12\,(4x+1)^3}+C.$$

1164. 1) $\int\frac{dx}{(4-3x)^2}$; 2) $\int\frac{dz}{(5z+1)^3}$; 3) $\int\frac{dx}{(ax+b)^m}$.

1165. $\int\sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx.$

Ечилиши. $3x+1=u$ деймиз, бундан $3\,dx=du$, $dx=\frac{1}{3}du$. Интегрални топамиз:

$$\int\sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx=\int(3x+1)^{\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{3}\int u^{\frac{2}{3}}du=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot u^{\frac{5}{3}}+$$

$$+C=\frac{1}{5}u^{\frac{5}{3}}+C=\frac{1}{5}(3x+1)^{\frac{5}{3}}+C.$$

1166. 1) $\int\sqrt{(2x-1)}\,dx$; 2) $\int\sqrt[3]{(4-3t)^2}dt$;

3) $\int\sqrt[m]{(ax+b)^n}\,dx$

1167. $\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}$.

Ечилиши. $3x-1=u$ деймиз, бундан $3\,dx=du$, $dx=\frac{1}{3}du$. Интегрални топамиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}=\int(3x-1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}\int u^{-\frac{3}{2}}du=$$

$$=-\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{3\sqrt{3x-1}}+C.$$

1168. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$; 2) $\int\frac{dv}{(v-7)^3}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt[m]{(ax+b)^n}}$.

II. $\int(Ax^n+B)^m x^{n-1}dx$ кўринишдаги интеграллар, бунда n ва m — исталган рационал сонлар.

Бу кўринишдаги интеграллар (9.2) формула бўйича топилади.

1169. $\int(2x^3+1)^4x^2dx.$

Ечилиши. $2x^3+1=u$ деймиз, бундан $6x^2dx=du$, $x^2dx=\frac{1}{6}du$.

Интегрални топамиз:

$$\int(2x^3+1)^4x^2dx=\frac{1}{6}\int u^4\,du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}+C=\frac{1}{30}u^5+C=$$

$$=\frac{1}{30}(2x^3+1)^5+C.$$

1170. 1) $\int(x^2+3)^5x\,dx$; 2) $\int 4(x^4-1)^2x^3dx$;

3) $\int(ax^n+b)^m x^{n-1}\,dx$.

1171. $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$.

Ечилиши. $x^2+1=u$ деймиз, бундан $2x\,dx=du$, $x\,dx=\frac{1}{2}du$. Интегрални топамиз:

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}=\int(x^2+1)^{-3}x\,dx=\frac{1}{2}\int u^{-3}du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{-2}}{-2}+C=$$

$$=-\frac{1}{4u^2}+C=-\frac{1}{4(x^2+1)^2}+C.$$

1172. 1) $\int\frac{6z^2dz}{(1-2z^3)^4}$; 2) $\int\frac{x^3dx}{(5x^4+3)^5}$; 3) $\int\frac{x^{n-1}\,dx}{(ax^n+b)^m}$.

1173. $\int 3\sqrt{x^3-1}\,x^2\,dx$.

Ечилиши. $x^3-1=u$ деймиз, бундан $3x^2dx=du$. Интегрални топамиз:

$$\int 3\sqrt{x^3-1}\,x^2dx=\int 3(x^3-1)^{\frac{1}{2}}x^2\,dx=\int u^{\frac{1}{2}}du=$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x^3-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

1174. 1) $\int\sqrt{4x^3+1}\,x^2dx$; 2) $\int\sqrt[m]{ax^n+b}\,x^{n-1}\,dx$;

3) $\int\sqrt{2\sin x-1}\cos x\,dx$. $2\sin x-1=u$ ўрнига қўйиш:

4) $\int\sqrt{e^x+1}\,e^xdx$, $e^x+1=u$ ўрнига қўйиш;

5) $\int\sqrt{(x^4-1)^3}\,x^3dx$, $x^4-1=u$ ўрнига қўйиш;

1175. 1) $\int\sqrt{(3z^4+2)^3}\,z^3dz$; 2) $\int\sqrt[3]{(1-3x^2)^4}\,x\,dx$;

3) $\int\sqrt[m]{(ax^n+b)^p}\,x^{n-1}\,dx$.

1176. 1) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(5x^4+2)^2}}$; 3) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$;

4) $\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[m]{(ax^n+b)^p}}$; 5) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin x}}$; 6) $\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^3}$.

III. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ **кўринишдаги интеграллар,**

бунда $u = \varphi(x)$

1177. $\int \frac{x^2dx}{5x^3+1}$.

Ечилиши. $5x^3+1 = u$ деймиз, бундан $15x^2dx = du$, $x^2dx = \frac{1}{15}du$. Интегрални топамиз:

$$\int \frac{x^2dx}{5x^3+1} = \frac{1}{15}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{15}\ln|u| + C = \frac{1}{15}\ln|5x^3+1| + C.$$

1178. 1) $\int \frac{dx}{ax+b}$; 2) $\int \frac{z^2dz}{1+z^3}$; 3) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+1}$;

4) $\int \frac{\cos x\,dx}{2\sin x+1}$.

1179. $\int \operatorname{tg} kx\,dx$.

Ечилиши. $\int \operatorname{tg} kx\,dx = \int \frac{\sin kx\,dx}{\cos kx}$. $\cos kx = u$ деймиз, бундан $-k\sin kx\,dx = du$, $\sin kx\,dx = -\frac{1}{k}du$. Интегрални топамиз:

$$\int \operatorname{tg} kx\,dx = -\frac{1}{k}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{k}\ln|u| + C = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| + C.$$

1180. 1) $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ctg} kx\,dx$; 3) $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx$.

1181. $\int \frac{du}{\sin u}$.

Ечилиши. Тригонометриядан маълумки, $\sin u = \sin 2\cdot\frac{u}{2} = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$, у ҳолда

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}.$$

Махражни $\cos\frac{u}{2}$ га бўлиб ва кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}}.$$

$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = z$ деймиз, у ҳолда $\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,du = dz$ ёки $\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}} = 2dz$. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{du}{\sin u} = \int\frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$$

1182. $\int\frac{dx}{\sin 3x}$.

Ечилиши. $3x = u$ деймиз. У ҳолда $3\,dx = du$, $dx = \frac{1}{3}du$. Ушбу $\int\frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$ (1181-масалага қ.) интегралдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{dx}{\sin 3x} = \frac{1}{3}\int\frac{du}{\sin u} = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right| + C.$$

1183. 1) $\int\frac{dx}{\sin 2x}$; 2) $\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{3}}$.

1184. $\int\frac{du}{\cos u}$.

Ечилиши. $\int\frac{du}{\cos u} = \int\frac{du}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)}\cdot\frac{\pi}{2} + u = z$ деймиз, у ҳолда $du = dz$

$$\int\frac{du}{\cos u} = \int\frac{dz}{\sin z} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2} + u}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$$

1185. 1) $\int\frac{dx}{\cos 3x}$; 2) $\int\frac{dx}{\cos\frac{x}{2}}$; 3) $\int\frac{dt}{t(1 + \ln t)}$, $1 + \ln t = u$ ўрнига қўйиш.

IV. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ кўринишдаги интеграллар,

бунда $u = \varphi(x)$

1186. $\int 3^{5x^2} x\,dx$.

Ечилиши $5x^2 = u$ деймиз, бундан $10\,x\,dx = du$, $x\,dx = \frac{1}{10}du$. Интегрални топамиз:

$$\int 3^{5x^2} x\,dx = \frac{1}{10}\;3^u du = \frac{1}{10}\frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^{5x^2}}{10\ln 3} + C.$$

1187. 1) $\int a^{x^4} x^3 dx$; 2) $\int a^{2x} b^{2x} dx$.

V. $\int e^u du = e^u + C$ **кўринишдаги интеграллар,**

бунда $u = \varphi(x)$

1188. $\int e^{x^2+1} x\, dx$.

Ечилиши. $x^2 + 1 = u$ деймиз, бундан $2x\, dx = du$, $xdx = \frac{1}{2} du$. Интегрални топамиз:

$$\int e^{x^2+1} x\, dx = \frac{1}{2} e^u\, du = \frac{1}{2} \int e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C.$$

1189. 1) $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int xe^{-x^2} dx$; 3) $\int x^2 e^{x^3} dx$;

4) $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$; 5) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

VI. $\int \sin u du = -\cos u + C$ **кўринишдаги интеграллар,**

бунда $u = \varphi(x)$

1190. $\int \sin 3x^2 x dx$.

Ечилиши. $3x^2 = u$ деймиз бундан $6x\, dx = du. x\, dx = \frac{1}{6} du$. Интегрални топамиз:

$$\int \sin 3x^2\, x\, dx = \frac{1}{6} \int \sin u\, du = -\frac{1}{6} \cos u + C =$$

$$= -\frac{1}{6} \cos 3x^3 + C.$$

1191. 1) $\int \sin (t^2 - 1)\, t\, dt$; 2) $\int \sin \frac{z}{2} dz$.

VII. $\int \cos u\, du = \sin u + C$ **кўринишдаги интеграллар,**

бунда $u = \varphi(x)$

1192. $\int \cos x^3 x^2 dx$.

Ечилиши. $x^3 = u$ деймиз, бундан $3x^2 dx = du$, $x^2 dx = \frac{1}{3} du$. Интегрални топамиз:

$$\int \cos x^3 x^2\, dx = \frac{1}{3} \int \cos u\, du = \frac{1}{3} \sin u + C = \frac{1}{3} \sin x^3 + C.$$

1193. 1) $\int \frac{\cos \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int \cos (x^2 + 1)\, x\, dx$.

VIII. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ **кўринишдаги интеграллар,**

бунда $u = \varphi(x)$

1194. $\int \frac{3x\,dx}{\cos^2 2x^2}$.

Ечилиши. $2x^3 = u$ деймиз, бундан $4x\,dx = du$, $x\,dx = \frac{1}{4}du$. Интегрални топамиз:

$$\int \frac{3x\,dx}{\cos^2 2x^2} = \frac{3}{4}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{3}{4}\operatorname{tg} u + C = \frac{3}{4}\operatorname{tg} 2x^3 + C.$$

1195. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$.

IX. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

кўринишдаги интеграллар, бунда $u = \varphi(x)$

1196. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 2x^2}$.

Ечилиши. $2x^2 = u$ деймиз, бундан $4x\,dx = du$, $x\,dx = \frac{1}{4}du$. Интегрални топамиз:

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 2x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} u + C = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 2x^3 + C.$$

1197. 1) $\int \frac{x^2dx}{\sin^2 \frac{x^3}{a}}$; 2) $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)}$; 3) $\int \frac{dx}{x\sin^2 \ln x}$.

X. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

кўринишдаги интеграллар, бунда $u = \varphi(x)$

1198. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Ечилиши.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

$\frac{x}{a} = u$ деймиз, бундан $\frac{dx}{a} = du$, $dx = a du$. Интегрални топамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x}} = \frac{a}{a}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \arcsin u + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

1199. 1) $\int \frac{e^{\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{1 - e^{2\varphi}}}$; 2) $\int \frac{dz}{z\sqrt{1 - \ln^2 z}}$.

XI. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C$ кўринишдаги интеграллар,

бунда $u = \varphi(x)$

1200. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

Ечилиши. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

$\frac{x}{a} = u$ деймиз, бундан $\frac{dx}{a} = du$, $dx = a\, du$. Интегрални топамиз:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

1201. 1) $\int \frac{\sin x\, dx}{a^2 + \cos^2 x}$; 2) $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$; 3) $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$. $x^3 = u$ ўрнига қўйиш; 4) $\frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

59-§. Рационал касрларни интеграллаш

1202. $\int \frac{dx}{1 - x^2}$.

Ечилиши. Махражни кўпайтувчиларга ажратамиз: $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Интеграл остидаги функцияни ушбу кўринишда ифодалаймиз:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x}.$$

Тенгликни касрлардан қутқариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$1 = A(1 + x) + B(1 - x) \text{ ёки } 1 = (A - B)x + A + B.$$

Охирги тенглик $A-B=0$ ва $A+B=1$ бўлганда ўринли.

Ушбу

$$\begin{cases} A-B=0, \\ A+B=1 \end{cases}$$

системани ечиб, $A=\frac{1}{2}$ ва $B=\frac{1}{2}$ ни топамиз.

A ва B нинг қийматларини каср ифодасига қўйиб, бундай ёзамиз:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}.$$

Бу ерда қўлланилган усул номаълум коэффициентлар усули деб аталади. Интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}=-\frac{1}{2}\ln(1-x)+$$
$$+\frac{1}{2}\ln(1+x)+C=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

1203. 1) $\int\frac{dx}{x^2-4}$; 2) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$.

1204. $\int\frac{2x+1}{x^2-5x+4}dx$.

Ечилиши. $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$; $\frac{2x+1}{x^2-5x+4}=$
$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}$.

Тенгликни касрлардан қутқариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2x+1=A(x-4)+B(x-1)$$

ёки

$$2x+1=Ax-4A+Bx-B=(A+B)x-(4A+B).$$

Тенгликнинг иккала қисмидаги бир хил даражаларнинг коэффициентларини тенглаб, ушбу тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ 4A+B=-1. \end{cases}$$

Системани ечиб, $A=-1$ ва $B=3$ ни топамиз. A ва B нинг қийматларини юқоридаги ифодага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+4}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x-4}.$$

Интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{2x+1}{x^2-5x+4}dx=-\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x-4}=$$

$$=-\ln(x-1)+3\ln(x-4)+C=\ln\frac{(x-4)^3}{x-1}+C.$$

1205. 1) $\int\frac{3x-4}{x^2+x-6}dx$; 2) $\frac{3dx}{x^2+3x+2}$.

1206. $\int\frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx.$

Ечилиши. $x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)\times$ $\times(x-2)$;

$$\frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

Тенгликни касрлардан қутқариб, ёзамиз:

$$6x^2-13x+4=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$$

ёки

$$6x^2-13x+4=(A+B+C)x^2-(3A+2B+C)x+2A.$$

Тенгликнинг иккала қисмидаги x нинг бир хил даражаларининг коэффициентларини тенглаб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз;

$$\begin{cases} A+B+C=6, \\ 3A+2B+C=13, \\ 2A=4. \end{cases}$$

Системани ечиб, $A=2$, $B=3$, $C=1$ ни топамиз.

A, B ва C нинг қийматларини юқоридаги ифодага қўямиз:

$$\frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-2}.$$

Интеграллаб, ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx=2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=2\ln x+3\ln(x-1)+\ln(x-2)+\ln C=\ln[Cx^2(x-1)^3\times$$

$$\times(x-2)].$$

1207. 1) $\int \frac{7x-3}{x^3+2x^2-3x}\,dx$; 2) $\int \frac{6x-4}{x^3-4x}\,dx$.

60-§. Баъзи тригонометрик функцияларни интеграллаш

$\int \sin^{2n} x\,dx$ ёки $\int \cos^{2n} x\,dx$ кўринишдаги интегралларни n жуфт бўлганда ҳисоблаш учун уни $\int \left(\frac{1 \pm \cos x}{2}\right)^n dx$ кўринишда ифодалаш, қавсларни очиш, ва агар керак бўлса,

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

формуладан такрор фойдаланиш зарур.

$\int \sin ax \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \sin bx\,dx$ ва $\int \cos ax \cos bx\,dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда ушбу формулалар қўлланилади:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right],$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right],$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right].$$

Интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1208. $\int \cos^2 x\,dx$.

Ечилиши. $\cos^2 x$ ни $\frac{1+\cos 2x}{2}$ билан алмаштирамиз. У ҳолда

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

1209. $\int \sin^2 x\,dx$.

Кўрсатма. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ формуладан фойдаланинг.

1210. $\int \cos^4 x\,dx$.

Ечилиши.

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx.$$

Охирги интегралда $\cos^2 2x$ ни $\frac{1+\cos 4x}{2}$ билан алмаштирамиз, у ҳолда

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

1211. $\int \sin^4 x\, dx.$

1212. $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx.$

Ечилиши. $\mathrm{tg}^2 x$ ни $\frac{1}{\cos^2 x} - 1$ билан алмаштирамиз:

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

1213. $\int \mathrm{ctg}^2 x\, dx.$

Кўрсатма. $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ формуладан фойдаланинг.

1214. $\int \mathrm{tg}^4 x dx.$

Ечилиши. $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$$= \int \frac{\mathrm{tg}^2 x\, dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg}^2 x\, dx.$$

Биринчи интегрални ҳисоблаймиз. $\mathrm{tg}\, x = u$ деймиз, бундан $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$;

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + C.$$

1212-мисолни ечилишидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \mathrm{tg}^4 x\, dx = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\, x + x + C.$$

1215. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx.$

$\int \sin^{2n+1} x\, dx$ ва $\int \cos^{2n+1} x\, dx$ кўринишдаги (n — бутун мусбат сон) интегралларни ҳисоблашда биринчи интеграл учун ёрдамчи функция сифатида $\cos x$ ни, иккинчи интеграл учун эса $\sin x$ ни қабул қилиш керак.

1216. $\int \sin^3 x\,dx$.

Ечилиши. $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1 -$
$- \cos^2 x) \sin x\,dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx$.

Иккинчи интегрални ҳисоблаймиз. $\cos x = u$ деймиз, у ҳолда $-\sin x\,dx = du$:

$$\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

1217. $\int \cos^3 x\,dx$.

1218. $\int \sin^5 x\,dx$.

Ечилиши. $\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx =$
$= \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\,dx =$
$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x\,dx$.

$\cos x = u$ деймиз, бундан $-\sin x dx = du$, у ҳолда

$$-\int (1 - 2u^2 + u^4)\,du = -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C =$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

1219. $\int \cos^5 x\,dx$.

1220. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

Ечилиши. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \times$
$\times \operatorname{tg} x\,d x = \int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x} -$
$- \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x + C.$

1221. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

1222. 1) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$; 2) $\int \cos 4x \cos x\, dx$;

3) $\int \sin 7x \cos 3x\, dx$.

Ечилиши. 1) $\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\cos(5x - 3x) - \cos \times$

$$\times (5x + 3x)] = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x),$$

$$\int \sin 5x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C;$$

2) $\cos 4x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 5x)$,

$$\int \cos 4x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x + \cos 5x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) + C = \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{10}\sin 5x + C;$$

3) $\sin 7x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 10x)$,

$$\int \sin 7x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 10x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{10}\cos 10x\right) + C = -\frac{1}{8}\cos 4x -$$

$$-\frac{1}{80}\cos 10x + C.$$

1223. 1) $\int \sin 3x \sin x\, dx$; 2) $\int \cos 5x \cos 3x\, dx$;

3) $\int \sin 4x \cos 3x\, dx$.

61-§. Баъзи иррационал функцияларни тригонометрик ўрнига қўйишлар ёрдамида интеграллаш. Турли ўрнига қўйишлар

Баъзи бир интегралларни ҳисоблашда x аргументни янги u ўзгарувчили функция билан, яъни $x = f(u)$ билан алмаштириш зарур. Бундай ўрнига қўйишларга қуйидаги тригонометрик алмаштиришлар киради:

1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ қатнашган интегралларда $x = a \sin u$;

2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ қатнашган интегралларда $x = a \operatorname{tg} u$.

3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ қатнашган интегралларда $x = \frac{a}{\sin u}$ ёки $x = \frac{a}{\cos u}$.

Тегишли тригонометрик алмаштиришлардан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1224. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

Ечилиши. $x = a \sin u$ ўрнига қўйиш, бундан $dx = a \cos u\, du$. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}\, a \cos u\, du =$$
$$= a \int \sqrt{a^2(1 - \sin^2 u)} \cos u\, du = a^2 \int \sqrt{\cos^2 u} \cos u\, du =$$
$$= a^2 \int \cos^2 u\, du.$$

Тригонометриядан маълумки, $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$, у ҳолда

$$a^2 \int \cos^2 u\, du = \frac{a^2}{2} \int du + \frac{a^2}{2} \int \cos 2u\, du = \frac{a^2}{2} u + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2u +$$
$$+ C = \frac{a^2}{2}\left(u + \frac{1}{2} \sin 2u\right) + C.$$

Шартда берилган x аргументга ўтамиз. $x = a \sin u$ муносабатдан: $\sin u = \frac{x}{a}$, у ҳолда $u = \arcsin \frac{x}{a}$; $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$, аммо $\cos u = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, у ҳолда $\sin 2u = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Охирида ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C =$$
$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

1225. 1) $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$; 2) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

1226. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ечилиши. $x = a \operatorname{tg} u$ ўрнига қўйиш, бундан $dx = \frac{a\, du}{\cos^2 u}$. Интеграллаймиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = a \int \frac{du}{\cos^2 u \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 u}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 u \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \int \frac{du}{\cos^2 u \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}} =$$

$$= \int \frac{du}{\cos u} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(1184-мисолга қаранг).}$$

Шартда берилган x аргументга ўтамиз:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{u}{2}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{u}{2}+1}{1-\operatorname{tg}\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}+1}{1-\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}} = \frac{\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}-\sin\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{u}{2}+\cos\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{u}{2}\right)}{\left(\cos\frac{u}{2}-\sin\frac{u}{2}\right)\left(\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{u}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{u}{2}+2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}+\cos^2\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}-\sin^2\frac{u}{2}} = \frac{1+\sin 2\cdot\frac{u}{2}}{\cos 2\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{1+\sin u}{\cos u} = \frac{1}{\cos u}+\operatorname{tg} u, \text{ аммо } \operatorname{tg} u = \frac{x}{a},$$

$$\frac{1}{\cos u} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}.$$

Демак,

$$\frac{1}{\cos u}+\operatorname{tg} u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right).$$

У ҳолда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}+C =$$

$$= \ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)-\ln a+C = \ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)+C_1,$$

бунда $-\ln a + C = C_1$.

1227. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. $x=\mathrm{tg}\,u$ ўрнига қўйиш.

1228. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Ечилиши. $x=\frac{a}{\cos u}$ ўрнига қўйиш, бундан $dx=\frac{a\sin u\,du}{\cos^2 u}$. Интеграллаймиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=a\int\frac{\sin u\,du}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 u}-a^2\cdot\cos^2 u}}=$$

$$=\int\frac{\sin u\,du}{\frac{\sqrt{\sin^2 u}}{\cos u}\cos^2 u}=\int\frac{du}{\cos u}=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C$$ (1184-мисолга қ.).

Шартда берилган x аргументга ўтамиз:

$\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos u}+\mathrm{tg}\,u$ (1226-мисолга қ.), аммо $\cos u=\frac{a}{x}$; $\frac{1}{\cos^2 u}=1+\mathrm{tg}^2 u$,

$$\mathrm{tg}\,u=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}-1}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Демак, $\frac{1}{\cos u}+\mathrm{tg}\,u=\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{1}{u}(x+\sqrt{x^2-a^2})$, у ҳолда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C=$$

$=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\ln a+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1$, бунда $C_1=-\ln a+C$.

$x=\frac{a}{\sin u}$ ўрнига қўйиш $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=-\int\frac{du}{\sin u}=$ $=-\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2}+C$ интегрални беради (1181-мисолга қ.).

x ўзгарувчига ўтамиз:

$$-\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2}=-\ln\frac{1-\cos u}{\sin u}=\ln 1-\ln\frac{1-\cos u}{\sin u}=$$

$$= \ln \frac{1}{\frac{1-\cos u}{\sin u}} = \ln\frac{\sin u}{1-\cos u} = \ln\frac{\sin u(1+\cos u)}{(1-\cos u)(1+\cos u)} =$$

$$= \ln\frac{1+\cos u}{\sin u} = \ln\left(\frac{1}{\sin u}+\operatorname{ctg} u\right).$$

$x = \frac{a}{\sin u}$ ўрнига қўйишдан биринчи қўшилувчини x орқали ифодалаймиз:

$$\sin u = \frac{a}{x}, \quad \frac{1}{\sin u} = \frac{x}{a}.$$

Иккинчи қўшилувчини x орқали ифодалаймиз:

$$1+\operatorname{ctg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}, \quad \operatorname{ctg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u} - 1,$$

$$\operatorname{ctg} u = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 u}-1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},$$

у ҳолда

$$\ln\left(\frac{1}{\sin u}+\operatorname{ctg} u\right) = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Бу ифодани интегралга қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C_1.$$

1229. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Турли ўрнига қўйишлар

1230. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Ечилиши. $x=u^2$ ўрнига қўйиш, бундан $dx = 2u\,du$. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 2\int\frac{u\,du}{u+1}.$$

Суратга бирни қўшамиз ва бирни айирамиз ҳамда интегрални интеграллар йиғиндиси билан алмаштирамиз:

$$2\int\frac{u}{u+1}du = 2\int\frac{u+1-1}{u+1}du = 2\int du - 2\int\frac{du}{u+1} =$$

$$= 2u - 2\ln(u+1)+C = 2\sqrt{x}-2\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

1231. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.

1232. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Ечилиши. $x = \frac{1}{u}$ ўрнига қўйиш, бундан $dx = -\frac{dx}{u^2}$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{du}{u^2 \frac{1}{u}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{\frac{u^2+1}{u^2}}} =$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}.$$

Бундан кейинги ҳисоблашлар 1226-мисолдагидек бўлади:

$$-\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = -\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) + C.$$

Энг охирида $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C.$

1233. $\int x\sqrt{a-x}\,dx$.

Ечилиши. $a - x = u^2$ ёки $x = a - u^2$ ўрнига қўйиш, бундан $dx = -2u\,du$.

$$-2\int (a-u^2)\sqrt{a-(a-u^2)}\,u\,du = -2\int (a-u^2)\sqrt{u^2}u\,du =$$

$$= -2\int (a-u^2)\,u^2\,du = -2a\int u^2\,du + 2\int u^4\,du =$$

$$= -2a\frac{u^3}{3} + 2\cdot\frac{u^5}{5} + C = -\frac{2a}{3}(\sqrt{a-x})^3 +$$

$$+ \frac{2}{5}(\sqrt{a-x})^5 + C =$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{a-x}\left[3(\sqrt{a-x})^4 - 5a(\sqrt{a-x})^2\right] + C =$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{a-x}\left[3(a^2-2ax+x^2) - 5a(a-x)\right] + C =$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{a-x}\,(3a^2 - 6ax + 3x^2 - 5a^2 + 5ax) + C =$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{a-x}\,(3x^2 - ax - 2a^2) + C.$$

62- §. Бўлаклаб интеграллаш

Кўпайтма дифференциали тенглиги $d(uv) = u\,dv + v\,du$ нинг иккала қисмини интеграллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du; \quad uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

бундан

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (9.24)$$

$\int u\,dv$ интегрални ҳисоблаш $\int v\,du$ интегрални ҳисоблашга келтирилади (агар кейинги интеграл дастлабки интегралдан соддароқ бўлса).

Қуйидаги интегралларни топинг ва уларни дифференциаллаш билан текширинг.

1234. $\int x \sin x dx.$

Ечилиши. $u = x$, $dv = \sin x\,dx$ деймиз, у ҳолда $du = dx$:

$$\int dv = \int \sin x\,dx, \quad v = -\cos x.$$

Буларни (9.24) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

1235. $\int x \cos x\,dx.$

1236. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

Ечилиши. $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$ деймиз, у ҳолда $du = \frac{dx}{x}$,

$$\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x};\ v = -\frac{1}{x}.$$

(9.24) формулага қўйиб, ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\,\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}dx =$$
$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

1237. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$

1238. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$

Ечилиши. $u = \sqrt{x^2 - a^2}$, $dv = dx$ деймиз. Биринчи тенгликни дифференциаллаб топамиз:

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx.$$

Иккинчи тенгликни интеграллаб, $v = x$ ни ҳосил қиламиз, у ҳолда (9.24) формула бўйича:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx.$$

Охирги интегралда интеграл остидаги функциянинг суратига a^2 ни қўшамиз ва айирамиз ҳамда бу интегрални иккита интегралнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз:

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{(x^2-a^2)\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Биринчи интегралнинг махражини иррационалликдан қутқарамиз, иккинчи интегрални

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$$

формула бўйича оламиз.

Демак, $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}dx - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$. $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ ни ўнг томондан чап томонга ўтказамиз:

$$2\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$$

ёки охирида

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$$

1239. $\int\sqrt{x^2-b}\,dx$.

1240. $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

Ечилиши. $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $dv=dx$ деймиз, бундан

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \text{ ва } v=x.$$

(9.24) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx.$$

Охирги интегралда интеграл остидаги функциянинг суратига a^2 ни қўшамиз ва айирамиз ҳамда бу интегрални иккита интегралнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Биринчи интегралда махражни иррационалликдан қутқарамиз, иккинчи интегрални эса қуйидаги формула бўйича оламиз:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

Демак,

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+$$
$$+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ интегрални ўнг томондан чап томонга ўтказиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

ёки охирида

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$$

1241. $\int\sqrt{x^2+b}\,dx.$

63- §. Аралаш масалалар

1242. Ҳосиласи $y' = \sin 2x - xe^{3x^2}+1$ бўлган функцияни топинг.

1243. Агар $x=\frac{\pi}{2}$ бўлганда бошланғич функция 2 га тенг бўлса, $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x+e}$ ни топинг.

1244. Агар $A\left(\frac{\pi}{3};\ 2\right)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти чизиқнинг ҳар бир нуқтасида $\cos\frac{x}{2}$ га тенг бўлса, эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

1245. Тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги $v=\sin 2t$ формула билан берилган. Агар $t=\frac{\pi}{6}$ моментда нуқта саноқ бошидан 0,75 м масофада турган бўлса, нуқтанинг ҳаракат тенгламасини тузинг.

1246. Нуқта $a=(-6t+24)$ м/сек^2 тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Нуқтанинг $t=1$ сек вақт моментидаги тезлиги $v = 15$ м/сек ва ўтган йўли $s = 20$ м; 1) нуқтанинг тезлиги тенгламасини топинг; 2) нуқта ўтган йўл тенгламасини топинг; 3) $t = 3$ сек моментдаги тезланиш, тезлик ва йўлни топинг; 4) нуқтанинг тезлиги энг катта бўлган вақт моментини топинг.

Интегралларни топинг

1247. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

1248. $\int e^{\sin x} \cos x \sqrt{e^{\sin x}+1}\,dx$.

1249. $\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x}$.

1250. $\int \frac{\cos x\,dx}{9+\sin^2 x}$.

1251. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

1252. $\int \sin 5x \cos x\,dx$.

1253. $\int \frac{7x+13}{x^2+2x-3}\,dx$.

1254. $\int e^x \cos x\,dx$.

1255. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, ўрнига қўйиш: $x = \operatorname{tg} z$.

1256. $\int \frac{dx}{9\cos^2 x + 4\sin^2 x}$, ўрнига қўйиш: $\operatorname{tg} x = z$.

1257. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$, ўрнига қўйиш: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$.

1258. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

Контрол иш

I вариант

1259. Ушбу интегралларни топинг: 1) $\int \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{1}{e^x}\right) dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

4. $(-2;\ 8)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиққа уринманинг ҳар қандай уриниш нуқтасидаги бурчак коэффициенти $2x - 4$ га тенг бўлса, чизиқнинг тенгламасини тузинг.

5. Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат тезлигининг тенгламаси $v = 3t^2 + 6t - 4$. Агар нуқта $t = 2$ сек вақт ичида 8 м ўтган бўлса (t секунд ҳисобида, s метр ҳисобида), нуқтанинг ҳаракат тенгламасини топинг.

II вариант

1260. Интегралларни топинг: 1) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} - x^{\frac{1}{2}}}{x\sqrt{x}} dx$;

2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{3 - x^2}} + \frac{1}{e^x} \right) dx$; 3) $\int (4 \sin^2 x \cos x - \cos x)\, dx$.

4) $A\left(\frac{\pi}{3} : 1\right)$ нуқтадан ўтадиган эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти чизиқнинг ҳар бир нуқтасида $\sin x$ га тенг бўлса, чизиқнинг тенгламасини тузинг.

5. Нуқта $a = 6t + 6$ тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Агар $t = 0$ вақт моментида $s = 0$ ва $t = 3$ сек вақт моментида тезлик $v = 40$ м/сек бўлса, йўл тенгламасини топинг.

10- БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

64- §. Аниқ интеграл ва уни ҳисоблаш

Агар $F(x)+C$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда x аргументнинг $x=a$ дан $x=b$ гача ўзгаришида бошланғич функцияларнинг $F(b)-F(a)$ орттирмаси аниқ интеграл деб аталади ва $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ символи билан белгиланади, яъни

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a),$$

бунда a — аниқ интегралнинг қуйи чегараси ва b — юқори чегараси.

$f(x)$ функция x аргументнинг a дан b гача ўзгариш интервалида узлуксиз деб фараз қилинади.

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ аниқ интегрални ҳисоблаш қуйидагича бажарилади:

1) $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ аниқмас интеграл топилади;

2) $F(x)+C$ интегралнинг $x=b$ бўлгандаги қиймати топилади, яъни $F(b)$ ҳисобланади;

3) $F(x)+C$ интегралнинг $x=a$ бўлгандаги қиймати топилади, яъни $F(a)$ ҳисобланади;

4) $F(b)-F(a)$ айирма топилади.

Ҳисоблаш процесси қуйидаги формуладан кўриниб турибди:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Аниқ интегрални ҳисоблашда аниқ интегралнинг қуйидаги хоссалари қўлланилади:

1) интеграллаш чегараларининг ўрни алмаштирилганда аниқ интегралнинг ишораси қарама-қаршисига алмашади;

2) интеграл остидаги ифодадаги ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл ишораси ташқарисига чиқариш мумкин:

$$\int\limits_a^b Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

3) функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқ интеграли шу функциялар аниқ интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Аниқ интегралларни ҳисобланг.

1261. 1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_2^3 x\,dx$.

Ечилиши. 1) $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2-0^2) = \frac{1}{2}$;

2) $\int_2^3 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_2^3 = \frac{1}{2}(3^2-2^2) = \frac{1}{2}\cdot 5 = 2\frac{1}{2}$.

1262. 1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_0^2 x^2\,dx$; 3) $\int_0^2 4x^3\,dx$; 4) $\int_1^2 x^3\,dx$; 5) $\int_2^3 3x^2\,dx$.

1263. $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)\,dx$.

Ечилиши. $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_{-1}^2 =$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 2] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right] = 9.$$

1264. 1) $\int_{-2}^3 (4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$; 2) $\int_{-1}^0 (x^3+2x)\,dx$.

1265. 1) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4}$.

1266. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

Ечилиш. $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int\limits_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 =$

$= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = 5\,\frac{1}{3}.$

1267. 1) $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx$; 3) $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

5) $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; 6) $\int\limits_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$.

1268. 1) $\int\limits_1^2 \frac{2x^3+1}{x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}+x}{x}\,dx$.

1269. $\int\limits_{-1}^{1} e^x\,dx$.

Ечилиш. $\int\limits_{-1}^{1} e^x\,dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2-1}{e}$.

1270. 1) $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; 2) $\int\limits_1^2 e^x\,dx$.

1271. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$.

Ечилиш. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$

1272. $\int\limits_3^6 \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_2^8 \frac{dx}{x}$.

1273. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2}$.

Ечилиш. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln(x+2)\Big|_0^1 = \ln(1+2) - \ln(0+2) =$

$= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2} = 0{,}4055.$

1274. 1) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x-1}$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+3}$.

1275. $\int\limits_1^3 e^{2x}\,dx$.

Ечилиши. $\int\limits_1^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^{2\cdot 3} - e^{2\cdot 1}) =$

$= \frac{e^2}{2}(e - 1)$.

1276. $\int\limits_0^1 e^{3x}\,dx$.

1277. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Ечилиши. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 -$

$- \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

1278. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\,dx$.

1279. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx$.

Ечилиши. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\Big(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} -$

$- \sin 2\cdot 0\Big) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

1280. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$.

1281. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Ечилиши. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) =$

$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

1282. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\,dx}{\cos^2 x}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

1283. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

Ечилиши. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right) - \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) -$

$- \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) = 0$.

1284. 1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right) dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

1285. $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ечилиши. $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

1286. 1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1287. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

Ечилиши. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x \Big|_{0}^{1} = \mathrm{arctg}\, 1 - \mathrm{arctg}\, 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

1288. 1) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

1289. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Ечилиши. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} \Big|_{0}^{3} = \arcsin \frac{3}{3} - \arcsin \frac{0}{3} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$.

1290. 1) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$.

65- §. Аниқ интегрални ўзгарувчини алмаштириш усули (ўрнига қўйиш усули) билан ҳисоблаш

Аниқ интегрални ўзгарувчини алмаштириш усули (ўрнига қўйиш усули) билан ҳисоблашда $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интеграл $u=\psi(x)$ ёки $x=\varphi(x)$ ўрнига қўйиш воситаси билан янги u ўзгарувчили аниқ интегралга алмаштирилади. Бунда интеграллашнинг эски a ва b чегаралари мос равишда интеграллашнинг янги α ва β чегаралари билан алмаштирилади, бу янги чегаралар юқоридаги ўрнига қўйишлардан топилади.

Биринчи ўрнига қўйишдан янги интеграллаш чегаралари бевосита ҳисобланади:

$$\alpha=\psi(a),\ \beta=\psi(b).$$

Иккинчи ўрнига қўйишдан янги интеграллаш чегаралари $a=\varphi(\alpha)$ ва $b=\varphi(\beta)$ тенгламаларни α ва β га нисбатан ечиш йўли билан топилади. Шундай қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\varphi'(u)\,du=\int_\alpha^\beta F(u)\,du.$$

Аниқ интегралларни ҳисобланг.

I. $\int_a^b (Ax+B)^m dx$ **кўринишдаги интеграллар**, бунда $m\neq-1$

1291. $\int_2^3 (2x-1)^3\,dx.$

Ечилиши. $2x-1=u$ ўрнига қўйишни киритамиз. Дифференциаллаймиз: $2dx=du$, бундан $dx=\frac{1}{2}\,du$.

x ўзгарувчи ўрнига биз янги u ўзгарувчини киритдик, бу ўзгарувчи x ўзгарувчи билан ўрнига қўйиш тенглиги орқали боғланган. Шу муносабат билан u ўзгарувчининг ўзгариш чегаралари, яъни u ўзгарувчи бўйича интеграллаш чегаралари бошқа бўлади. Улар ўрнига қўйишдан x аргументни унинг 2 ва 3 қийматлари билан алмаштириш натижасида топилади. Интеграллашнинг қуйи чегарасини ҳисоблаш учун ўрнига қўйишга эски қуйи чегаранинг $x=2$ қийматини қўямиз:

$$u_қ=2\cdot2-1=3.$$

Интеграллашнинг юқори чегарасини ҳисоблаш учун ўрнига қўйишга эски юқори чегаранинг $x = 3$ қийматини қўямиз:

$$u_{ю} = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Берилган интегралда $2x - 1$ ва dx ни уларнинг янги u ўзгарувчи ва du орқали ифодалари билан алмаштириб ҳамда интеграллашнинг эски чегараларини мос равишда янгилари билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_2^3 (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_3^5 u^3 du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}u^4\Big|_3^5 =$$

$$= \frac{1}{8}(5^4 - 3^4) = 68.$$

1292. 1) $\int_4^5 (4-x)^3 dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$.

1293. $\int_1^2 \frac{5\,dx}{\sqrt{5x-1}}$.

Ечилиши. $5\int_1^2 (5x-1)^{-\frac{1}{2}} dx$. $5x - 1 = u$ деймиз, у ҳолда $5dx = du$, $dx = \frac{1}{5}du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз: $u_{қ} = 5 \cdot 1 - 1 = 4$, $u_{ю} = 5 \cdot 2 - 1 = 9$. Интегрални топамиз:

$$5\int_1^2 (5x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = 5 \cdot \frac{1}{5}\int_4^9 u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 =$$

$$= 2\left(9^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}}\right) = 2(3-2) = 2.$$

1294. $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}\,dx$; 2) $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}\,dx$.

II. $\int_a^b (Ax^n + B)^m x^{n-1}\,dx$ кўринишдаги интеграллар, бунда m ва n рационал сонлар

1295. $\int\limits_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx.$

Ечилиши. $2x^3+1=u$ деймиз, у ҳолда $6x^2dx=du$, $x^2dx=\frac{1}{6}du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз: $u_к=2\cdot 0^3+1=1$, $u_ю=2\cdot 1^3+1=3$. Интегрални топамиз.

$$\int\limits_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx=\frac{1}{6}\int\limits_1^3 u^4 du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}\Bigg|_1^3=\frac{1}{30}(3^5-1^5)=8\frac{1}{15}.$$

1296. 1) $\int\limits_{-1}^{2} (x^2-1)^3 x\,dx;$ 2) $\int\limits_0^2 \frac{4x\,dx}{(x^2-1)^3};$

3) $\int\limits_0^2 9\sqrt{x^3+1}\,x^2 dx;$ 4) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \frac{2}{3}\sqrt[3]{(x^4-8)^2}\,x^3 dx;$

5) $\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}.$

1297. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sqrt{3\sin x+1}\cos x\,dx.$

Ечилиши. $3\sin x+1=u$ деймиз, бундан $3\cos x\,dx=$ $=du$, $\cos x\,dx=\frac{1}{3}\,du$.

Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_к=3\sin 0+1=1,\quad u_ю=3\sin\frac{\pi}{2}+1=3\cdot 1+1=4.$$

Интегрални топамиз:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sqrt{3\sin x+1}\cos x\,dx=9\cdot\frac{1}{3}\int\limits_1^4\sqrt{u}\,du=3\int\limits_1^4 u^{\frac{1}{2}}du=$$

$$=3\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=2u^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=2\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=2(8-1)=14.$$

1298. $\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\,\sin x\,dx.$

III. $\int\limits_{a}^{b} \frac{du}{u}$ **кўринишдаги интеграллар, бунда** $u=\varphi(x)$

1299. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x}.$

Ечилиши. $3-\cos x = u$ деймиз, бундан $\sin x\,dx = du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_к = 3-\cos 0 = 3-1 = 2;\quad u_ю = 3-\cos\frac{\pi}{3} = 3-\frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Интегрални топамиз: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{3-\cos x} = \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} \frac{du}{u} = \ln u\Big|_{2}^{\frac{5}{2}} =$

$$= \ln\frac{6}{2} - \ln 2 = \ln\frac{5}{4} = 0{,}2231.$$

1300. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3x^2\,dx}{1+x^3}$.

IV. $\int\limits_{a}^{b} e^u du$ **кўринишдаги интеграллар, бунда** $u=\varphi(x)$

1301. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos x\,dx,$

Ечилиши. $\sin x = u$ деймиз, бундан $\cos x\,dx = du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз. $u_к = \sin 0 = 0$, $u_ю = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ Интегрални топамиз: $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} e^u du =$

$$= e^u\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} - e^0 = \sqrt{e} - 1.$$

1302. 1) $\int\limits_{0}^{-\frac{1}{2}} e^{-2x}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}x\,dx$.

V. $\int\limits_{a}^{b} \sin u\,du$ кўринишдаги интеграллар, бунда $u=\varphi(x)$

1303. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x\,dx$.

Ечилиши. $2x=u$ деймиз, бундан $2dx=du$, $dx=\frac{1}{2}du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_{қ}=2\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6},\quad u_{ю}=2\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

Интегрални топамиз:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

1304. 1) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$.

VI. $\int\limits_{a}^{b} \cos u\,du$ кўринишдаги интеграллар, бунда $u=\varphi(x)$

1305. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$.

Ечилиши. $2x-\frac{\pi}{6}=u$ деймиз, бундан $2dx=du$, $dx=$

$= \frac{1}{2}\,du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_{\text{қ}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \quad u_{\text{ю}} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Интегрални топамиз: $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u\,du =$

$$= \frac{1}{2}\sin u\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

1306. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \cos 3x\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos\frac{x}{4}\,dx$.

VII. $\int\limits_{a}^{b} \frac{du}{\cos^2 u}$ кўринишдаги интеграллар, бунда $u = \varphi(x)$

1307. $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

Ечилиши. $2x = u$ деймиз, бундан $2dx = du$, $dx = \frac{1}{2}\,du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_{\text{қ}} = 2\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \quad u_{\text{ю}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Интегрални топамиз: $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} u\,\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

1308. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

VIII. $\int\limits_{a}^{b} \frac{du}{\sin^2 u}$ **кўринишдаги интеграллар, бунда** $u = \varphi(x)$

1309. $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\sin^2 3x}$.

Ечилиши. $3x = u$ деб оламиз, бундан $3dx = du$, $dx = \frac{1}{3} du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_{қ} = 3 \cdot \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{6}, \quad u_{ю} = 3 \cdot \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}.$$

Интегрални топамиз: $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\sin^2 u} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$$= -\frac{1}{3}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

1310. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$.

IX. $\int\limits_{a}^{b} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$ кўринишдаги интеграллар, бунда $u = \varphi(x)$

1311. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$.

Ечилиши. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{3dx}{\sqrt{4\left(1-\frac{9}{4}x^2\right)}} = \frac{3}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}$.

$\frac{3x}{2}=u$ деймиз, бундан $dx=\frac{2}{3}du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_{\text{қ}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad u_{\text{ю}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Интегрални топамиз: $\frac{3}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-u^2}} =$

$$=\arcsin u\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

1312. $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; 2) $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{9-2x^2}}$.

X. $\int\limits_{a}^{b}\frac{du}{1+u^2}$ кўринишдаги интеграллар, бунда $u=\varphi(x)$

1313. $\int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{4+x^2}$.

Ечилиши. $\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$. $\frac{x}{2}=u$ деймиз, бундан $dx=2du$. Интеграллашнинг янги чегараларини ҳисоблаймиз:

$$u_{\text{қ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad u_{\text{ю}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

Интегрални топамиз: $\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot 2\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{du}{1+u^2}=$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u\,\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

1314. 1) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}}\frac{4dx}{9+16x^2}$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{6}}\frac{dx}{1+2x^2}$.

66- §. Аралаш масалалар

Интегралларни ҳисобланг.

1315. 1) $\int\limits_{0}^{5}\sqrt{3x+1}\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

1316. 1) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{32x\,dx}{(x^2+1)^5}$; 2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}6\sqrt{x^4+16}\,x^9\,dx$;

3) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{5x^4-1}}$; 4) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\sin z}\cos z\,dz$.

1317. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos t}$; 2) $\int\limits_{0}^{\sqrt[3]{2}}3e^{x^3}x^2dx$.

1318. 1) $\int\limits_{\frac{2\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\cos\frac{x}{2}dx$.

1319. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}}\frac{dx}{\sin^2 3x}$.

1320. 1) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$; 2) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

1321. 1) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3+4x^2}$; 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dx}{2+9x^2}$.

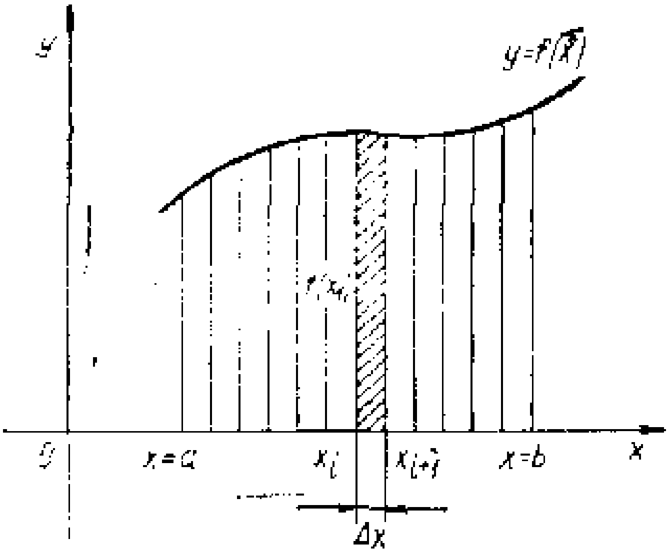
11- БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

67- §. Аниқ интегралнинг турли катталикларни ҳисоблашда қўлланиш схемаси

Турли геометрик ва физикавий катталикларни ҳисоблашда аниқ интеграл кенг қўлланилади.

u катталикни (миқдорни) Ox ўқ, $y = f(x)$ эгри чизиқ (бу эгри чизиқ берилиши ёки масаланинг шартидан топилиши мумкин), $x = a$ ҳамда $x = b (a \leqslant x \leqslant b)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган юз кўринишида тасаввур қилайлик (124-расм).



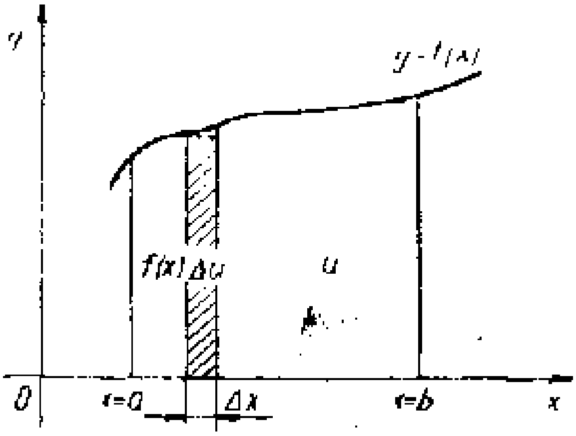
124- расм.

u ни аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш қуйидаги схема бўйича бажарилади (I схема):

1. u катталикни n та (n — катта сон) кичик Δu_i қўшилувчиларга бўламиз:

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i.$$

2. Ҳар бир Δu_i қўшилувчини $\Delta u_i = f(x_i)dx$ (бунда $\Delta x = \frac{b-a}{n}$) кўпайтма билан тақрибан ифодалаймиз.



125- расм.

3. u нинг тақрибий қийматини интеграл йиғинди билан тасвирлаймиз:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Агар масала шартидан бу тақрибий тенгликнинг хатоси $n \to \infty$ да нолга интилиши келиб чиқса, у ҳолда изланаётган u катталик аниқ интеграл билан ифодаланади:

$$u = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Юқоридаги келтирилган схема бошқа, амалда қўлланиш учун анча қулай бўлган схема билан алмаштирилиши мумкин (II схема):

1. u катталик x нинг кичик Δx катталикка ўзгаришига мос келувчи $\Delta u \approx f(x)\,\Delta x$ орттирма олсин; $f(x)$ функция берилган ёки x нинг масала шартидан аниқланадиган функцияси сифатида қаралади.

2. Δu орттирмани du дифференциал (Δu орттирманинг бош қисми) билан ва Δx ни dx дифференциал ($\Delta x = dx$) билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$du = f(x)\,dx.$$

3. Бу тенгликни $x = a$ дан $x = b$ гача интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

68- §. Фигураларнинг юзлари

Тўғри бурчакли координаталар системасида қаралаётган ҳар қандай ясси фигуранинг юзини Ox ўққа ёки Oy ўққа ёпишган эгри чизиқли трапециялар юзларидан тузиш мумкин.

$y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ ҳамда $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан (бунда $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \geqslant 0$) чегараланган (эгри чизиқли трапеция) фигуранинг S юзини топамиз (126-расм).

Ўзгарувчи S юзнинг дифференциали асоси dx ва баландлиги $f(x)$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзидир, яъни $dS = f(x)\,dx$ (II схема).

Бу тенгликни $x = a$ дан $x = b$ гача интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

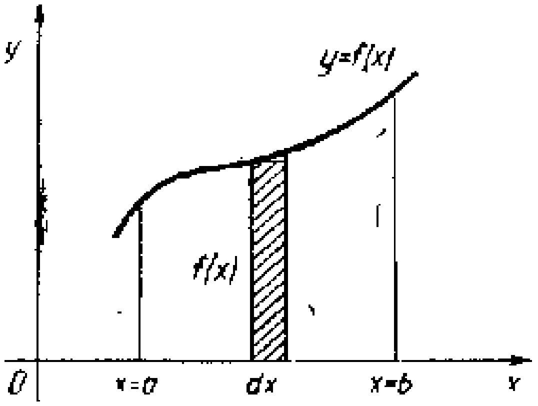
$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (11.1)$$

Агар эгри чизиқли трапеция Oy ўққа ёпишган (Oy ўқнинг ўнг томонида) бўлса (127- расм), у ҳолда ўзгарувчи S юзнинг дифференциали

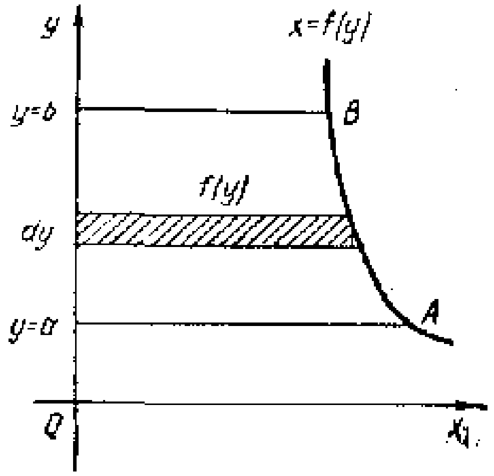
$$dS = f(y)\,dy$$

бўлади, бундан

$$S = \int_a^b f(y)\,dy. \qquad (11.2)$$

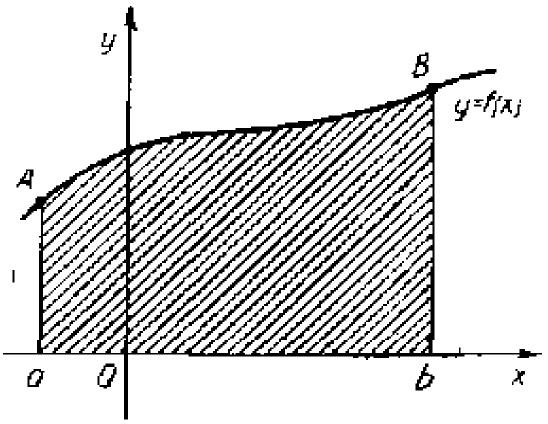


126- расм.



127- расм.

Фигураларнинг юзларини ҳисоблашда қуйидаги асосий ҳоллар бўлиши мумкин:

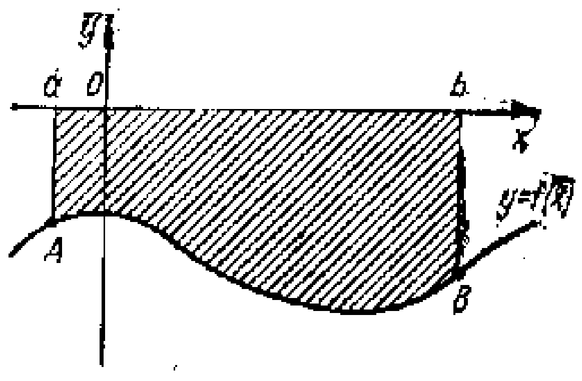


128- расм.

I. Фигура Ox ўқнинг юқорисида жойлашган ва Ox ўқ, $y = f(x)$ эгри чизиқ ҳамда $x = a$ ва $x = b$ ($a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \geqslant 0$) тўғри чизиқлар билан чегараланган (128- расм).

Бу фигуранинг S юзи (11.1) формула бўйича топилади:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ёки}$$



129- расм.

$S = \int_a^b y\,dx$; y эгри чизиқнинг тенгламасидан топилади.

II. Фигура Ox ўқнинг остида жойлашган ва Ox ўқ, $y=f(x)$ эгри чизиқ ҳамда $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар $(a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant 0)$ билан чегараланган (129- расм).

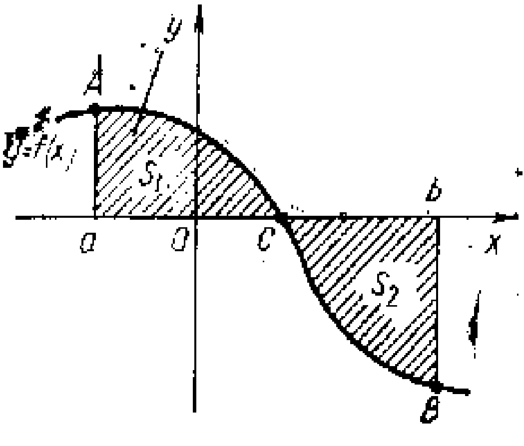
S юз $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ ёки $S = \left|\int_a^b y\,dx\right|$ формуладан топилади; y эгри чизиқнинг тенгламасидан топилади.

Агар $f(x) < 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграл манфий бўлади. Фигуранинг S юзи эса ўз табиатига кўра мусбат катталикдир, шунинг учун бу юзни ифодаловчи интеграл абсолют қиймати бўйича олинди.

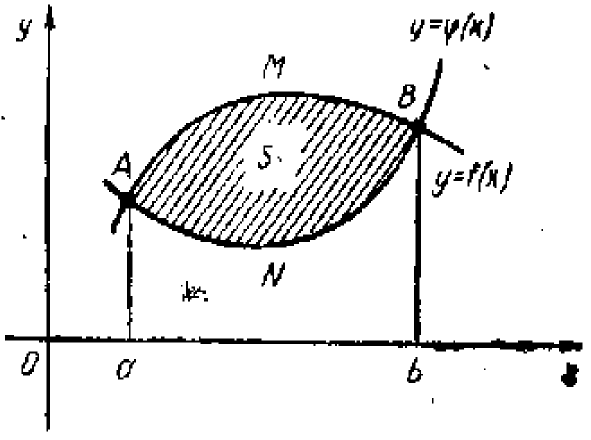
III. Фигура Ox ўқнинг устида ва остида жойлашган ҳолда Ox ўқ, $y=f(x)$ эгри чизиқ, $x=a$ ҳамда $x=b$ тўғри чизиқлар $(a \leqslant x \leqslant b)$ билан чегараланган (130- расм).

Бу ерда I ва II ҳоллар ўринли; $S_1 = AaC$ юз, $S_2 = CBb$ юз:

$$S_1 = \int_a^C f(x)\,dx, \quad S_2 = \left|\int_C^b f(x)\,dx\right|;$$



130- расм.



131- расм.

C эса $y=f(x)$ эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасининг абсциссаси сифатида топилади, бунинг учун ушбу тенгламалар системасини ечиш зарур:

$$\begin{cases} y=f(x), \\ y=0. \end{cases}$$

IV. S юз иккита кесишувчи $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ эгри чизиқлар билан чегараланган (131- расм); $S_1=aAMBb$ юз; $S_2=aANBb$ юз; $S=S_1-S_2$:

$$S_1=\int_a^b f(x)\,dx;\ S_2=\int_a^b \varphi(x)\,dx;\ S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Интеграллаш чегаралари a ва b ушбу

$$\begin{cases} y=f(x), \\ y=\varphi(x) \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимидан топилади.

Иккита кесишувчи эгри чизиқ билан чегараланган фигура II ёки III ҳолдагидек жойлашган бўлиши мумкин.

Oy ўққа ёпишган фигураларнинг юзлари ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади.

1. Ox ўқ, $y=f(x)$ $[f(x)\geqslant 0]$ чизиқ ҳамда $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

1322. $y=2x$, $y=0$ ва $x=3$.

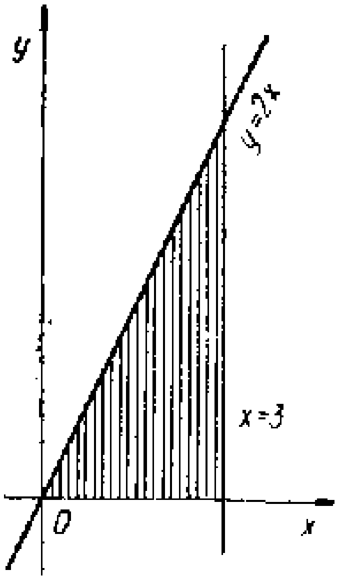
Ечилиши. Фигурани ясаймиз Масала шартидан кўриниб турибдики, фигура координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ $(y=2x)$, Ox ўқ $(y=0)$ ва $x=3$ ордината билан чегараланган (132- расм).

Юз (11.1) формула бўйича ҳисобланади. Қуйидагига эга бўламиз: $f(x)=2x$, $a=0$, $b=3$.

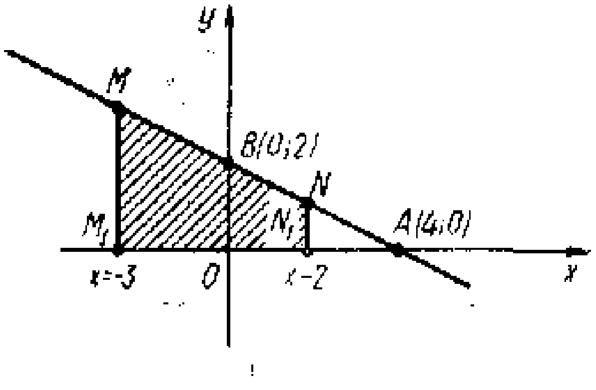
$$S=\int_0^3 2x\,dx=x^2\Big|_0^3=9 \text{ (кв. бирлик)}.$$

Берилган фигура асоси 3 ва баландлиги $y=2x=2\cdot3=$ $=6$ бўлган тўғри бурчакли учбурчак бўлади. Текшириш учун бу учбурчакнинг юзини одатдаги усул билан ҳисоблаймиз:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot3\cdot6=9 \text{ (кв. бирлик)}.$$



132- расм.



133- расм.

1323. 1) $y=x$, $y=0$ ва $x=4$; 2) $y=-3x$, $y=0$ ва $x=-2$.

1324. $x+2y-4=0$, $y=0$, $x=-3$ ва $x=2$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (133- расм). $x+2y-4=0$ тўғри чизиқни ясаймиз, $y=0$, $x=4$, $A(4;\ 0)$; $x=0$, $y=2$, $B(0;\ 2)$. y ни x орқали ошкор ифодалаймиз:

$$y=-\frac{1}{2}x+2.$$

Қуйидагига эга бўламиз: $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$, $a=-3$, $b=2$;

$$S=\int_{-3}^{2}\left(-\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(-\frac{x^2}{4}+2x\right)\Big|_{-3}^{2}=11,25 \text{ (кв. бирлик)}.$$

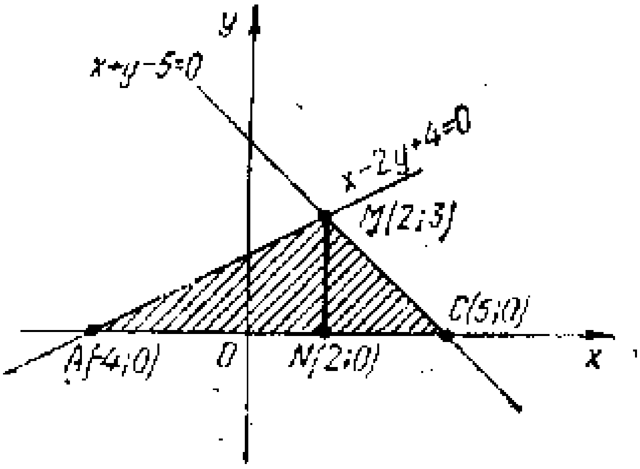
Текшириш. MM_1N_1N трапецияга эгамиз. Унинг асоси: $M_1M=f(-3)=-\frac{1}{2}(-3)+2=\frac{7}{2}$. Асоси $N_1N=f(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2+2=1$. Баландлиги $M_1N_1=|-3|+2=5$.

$$S_{\text{трапеция}}=\frac{\frac{7}{2}+1}{2}\cdot 5=11,25 \text{ (кв. бирлик)}.$$

1325. 1) $x-y+2=0$, $y=0$, $x=-1$ ва $x=2$; 2) $2x-3y+6=0$, $y=0$ ва $x=3$.

1326. $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$ ва $y=0$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (134- расм). $x-2y+4=0$ тўғри чизиқни ясаймиз; $y=0$, $x=-4$; $A(-4;\ 0)$; $x=0$; $y=2$, $B(0;\ 2)$. $x+y-5=0$ тўғри чизиқни ясаймиз; $y=0$, $x=5$, $C(5;\ 0)$; $x=0$, $y=5$, $D(0;\ 5)$.



134- расм.

Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини ушбу

$$\begin{cases} x-2y+4=0,\\ x+y-5=0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, топамиз: $x=2$, $y=3$, $M(2;3)$.

Изланаётган юзни ҳисоблаш учун AMC учбурчакни AMN ва NMC учбурчакларга бўламиз, чунки x ўзгарувчи A дан N гача ўзгарганда юз $x-2y+4=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган, x ўзгарувчи N дан C гача ўзгарганда эса $x+y-5=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган.

AMN учбурчак учун: $x-2y+4=0$; $y=\frac{1}{2}x+2$, $f(x)=\frac{1}{2}x+2$, $a=-4$ ва $b=2$. NMC учбурчак учун бундай ёзамиз: $x+y-5=0$, $y=-x+5$, $f(x)=-x+5$, $a=2$ ва $b=5$. Ҳар бир учбурчакнинг юзини ҳисоблаб чиқамиз:

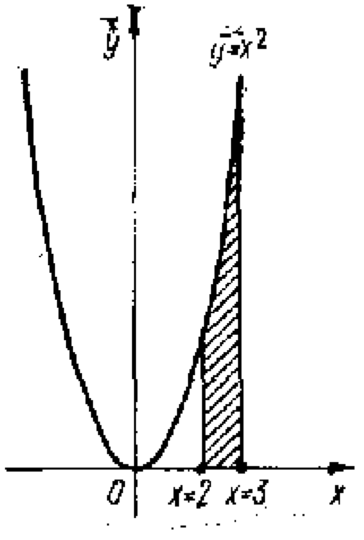
$$S_{\triangle AMN}=\int_{-4}^{2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)\Big|_{-4}^{2}=9 \text{ (кв. бирлик)};$$

$$S_{\triangle NMC}=\int_{2}^{5}(-x+5)dx=\left(-\frac{x^3}{2}+5x\right)\Big|_{2}^{5}=4{,}5 \text{ (кв. бирлик)};$$

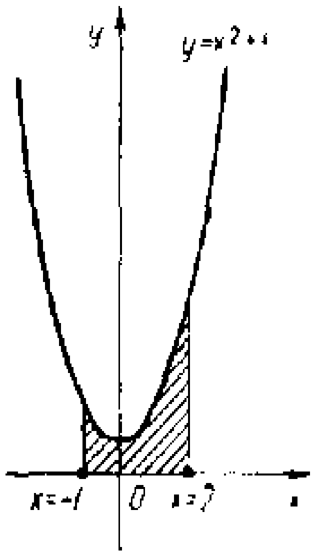
$$S=S_{\triangle AMN}+S_{\triangle NMC}=9+4{,}5=13{,}5 \text{ (кв. бирлик)}.$$

Текшириш: $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}AC\cdot NM=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=13{,}5$ (кв. бирлик);

1327. 1) $x-y+3=0$, $x+y-1=0$ ва $y=0$; 2) $x-2y+4=0$, $x+2y-8=0$, $y=0$, $x=-1$ ва $x=6$.
1328. $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ ва $x=3$.



135- расм.



136- расм.

Ечилиши. $y = x^2$ параболани нуқталар бўйича ясаймиз (135- расм):

x	0	$+1$	$+2$	$+3$
y	0	1	4	9

Фигура $y = x^2$ парабола, $x = 2$ ва $x = 3$ ординаталар ҳамда $Ox\,(y = 0)$ ўқ билан чегараланганлиги масала шартидан келиб чиқади. Бундай фигура эгри чизиқли трапеция деб аталади, чунки унинг ён томонларидан бири параболадир. Қуйидагига эга бўламиз: $f(x) = x^2$, $a = 2$ ва $b = 3$;

$$S = \int_2^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_2^3 = 6\frac{1}{3} \text{ (кв. бирлик).}$$

1329. 1) $y = x^2$, $y = 0$ ва $x = 3$; 2) $y = 3x^2$, $y = 0$, $x = -3$ ва $x = 2$.

1330. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$ ва $x = 2$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (136- расм).

Масаланинг шартидан $f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$ ва $b = 2$ эканлиги келиб чиқади:

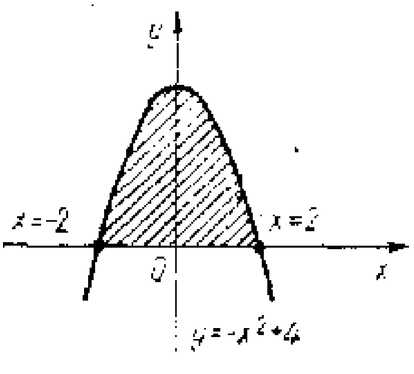
$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{2} = 6 \text{ (кв. бирлик).}$$

1331. 1) $y=\frac{1}{2}x^2+2$, $y=0$, $x=1$ ва $x=3$; 2) $y=3x^2+3$, $y=0$, $x=-2$ ва $x=0$.

1332. $y=-x^2+4$ ва $y=0$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (137-расм). Изланаётган юз $y=-x^2+4$ парабола ва Ox ўқ орасида ётади.

Параболанинг Ox ўқ билан кесишган нуқталарини топамиз. $y=0$ деб олиб, $x=\pm 2$ ни топамиз. Ушбуга эга бўламиз: $f(x)=-x^2+4$, $a=-2$ ва $b=2$;



137-расм.

$$\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-2}^{2}=10\frac{2}{3} \text{ (кв. бирлик).}$$

Парабола Oy ўққа нисбатан симметрик, шунинг учун парабола ва Ox ҳамда Oy ўқлар билан чегараланган юзни ҳисоблаш ва ҳосил қилинган натижани иккилантириш мумкин:

$$S_1=\int_{0}^{2}(-x^2+4)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{0}^{2}=5\frac{1}{3} \text{ (кв. бирлик),}$$

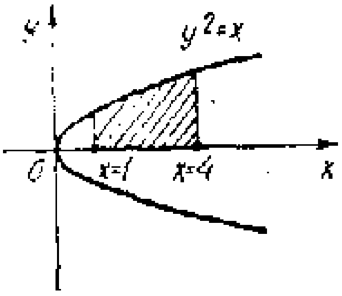
$$S=2S_1=2\cdot 5\frac{1}{3}=10\frac{2}{3} \text{ (кв. бирлик).}$$

1333. 1) $y=-\frac{1}{3}x^2+3$, $y=0$, $x=0$ ва $x=3$; 2) $y=-3x^2+8$, $y=0$, $x=0$ ва $x=2$.

1334. $y^2=x$, $y=0$, $x=1$ ва $x=4$ (юз параболанинг юқори тармоғи билан чегараланган).

Ечилиши. Фигурани ясаймиз. Парабола Ox ўққа нисбатан симметрик. Унинг юқори тармоғини ясаш учун (138-расм) жадвал тузамиз:

x	0	1	4
y	0	1	2



138-расм.

Қуйидагига эга бўламиз: $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$ ва $b=4$:

$$S=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^4=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}(8-1)=$$

$=4\frac{2}{3}$ (кв. бирлик).

1335. $y^2=x$, $y=0$, $x=0$ ва $x=3$ (юз параболанинг юқори тармоғи билан чегараланган).

1336. $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$, $y=0$.

Ечилиши. Параболани ясаш учун унинг учлари координаталарини ва координаталар ўқлари билан кесишган нуқталарини топамиз.

1) параболанинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталарини ҳисоблаймиз:

$y=0$, $-\frac{1}{4}x^2+x+3=0$, $x^2-4x-12=0$; $x_1=-2$, $x_2=6$.

2) параболанинг учини топамиз:

$x_{уч}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+6}{2}=2$; $y_{уч}=-\frac{1}{4}\cdot2^2+2+3=4$, $(2;\ 4)$;

3) параболанинг Oy ўқ билан кесишиш нуқталарини ҳисоблаймиз: $x=0$, $y=-\frac{1}{4}\cdot0+0+3=3$, $(0;\ 3)$.

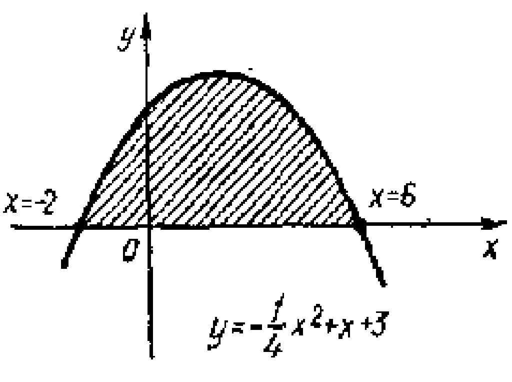
Ушбу

x	-2	0	2	6
y	0	3	4	0

нуқталар жадвалига эга бўламиз, бу нуқталар бўйича параболани ясаймиз.

Изланаётган юз $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ парабола билан Ox ўқ ($y=0$) орасида ётади (139-расм).

Қуйидагига эга бўламиз: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x+3$, $a=-2$ ва $b=6$:



139- расм.

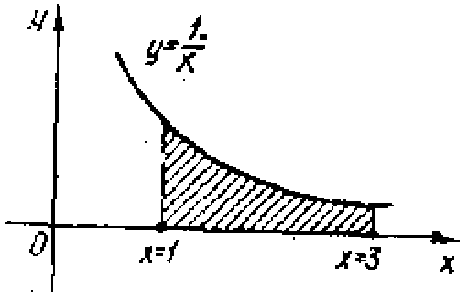
$$S = \int_{-2}^{6}\left(-\frac{1}{4}x^2 + x + 3\right)dx = -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + 3x\Big|_{-2}^{6} =$$

$= 21\frac{1}{3}$ (кв. бирлик).

1337. 1) $y = -x^2 - 2x + 8$, $y = 0$; 2) $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, $y = 0$; 3) $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = 0$, $x = 2$ ва $x = 3$.

1338. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ ва $x = 3$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз. Асимптоталарга келтирилган тенг томонли гиперболага эга бўламиз. Масаланинг шартига кўра I чоракда жойлашган тармоқни қараб чиқамиз (140- расм):



140- расм.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Қуйидагига эга бўламиз: $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ ва $b = 3$;

$$S = \int_{1}^{3}\frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_{1}^{3} = \ln 3 - \ln 1 = 1,0986 \text{ (кв. бирлик).}$$

1339. $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 2$ ва $x = 4$.

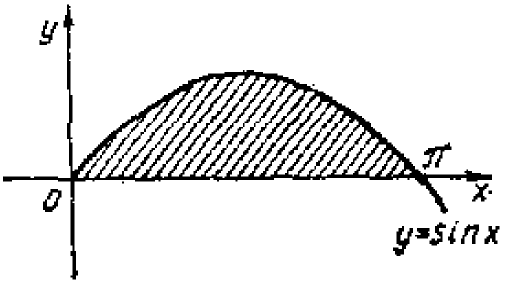
1340. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = \pi$.

Ечилиши. Изланаётган юз синусоиданинг ярим тўлқини ва Ox ўқ билан чегараланган (141- расм).

Қуйидагига эга бўламиз: $f(x) = \sin x$, $a = 0$ ва $b = \pi$,

$$S = \int_{0}^{\pi}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi} =$$

$= -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 =$
$= 2$ (кв. бирлик);



141- расм.

1341. 1) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = 0$ ва $x = \frac{\pi}{3}$; 3) $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{\pi}{3}$.

II. Ox ўқ, $y = f(x)$ $[f(x) < 0]$ чизиқ ҳамда $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисоблаш

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

1342. $y = -6x$, $y = 0$ ва $x = 4$.

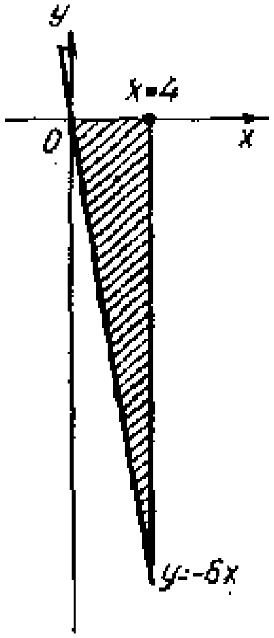
Ечилиши. Фигура Ox ўқнинг остида жойлашганлиги ясашдан кўриниб турибди (142- расм). Қуйидагига эгамиз: $f(x) = -6x$; $a = 0$ ва $b = 4$;

$$S = \left| -\int_0^4 6x\,dx \right| = \left| -3x^2 \Big|_0^4 \right| =$$

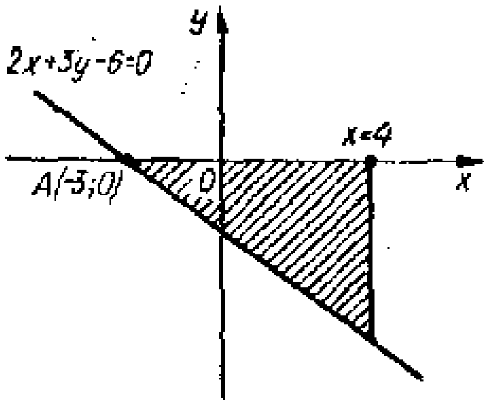
$$= \left| -48 \right| = 48 \text{ (кв. бирлик).}$$

1343. 1) $y = -3x$, $y = 0$ ва $x = 2$;
2) $y = 2x$, $y = 0$ ва $x = -3$.

1344. $2x + 3y + 6 = 0$, $y = 0$ ва $x = 4$.



142- расм.



143- расм.

Ечилиши. Фигура Ox ўқнинг остига жойлашган (143-расм). Қуйидагига эгамиз:

$$y=-\frac{2}{3}x-2,\qquad f(x)=-\frac{2}{3}x-2.$$

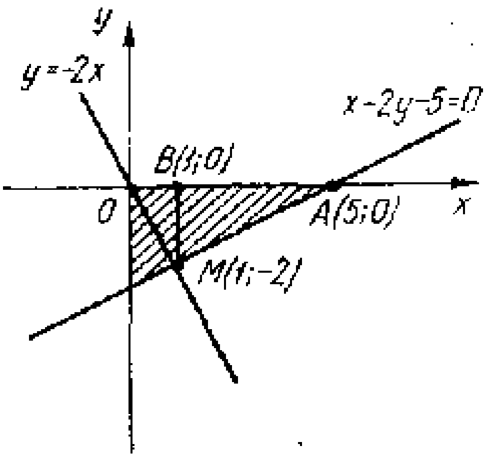
Тўғри чизиқ Ox ўқни $A(-3;\ 0)$ нуқтада кесиб ўтади, $a=-3$ ва $b=4$:

$$S=\int_{-3}^{4}\left(-\frac{2}{3}x-2\right)dx=\left(-\frac{1}{3}x^2-2x\right)\Big|_{-3}^{4}=$$

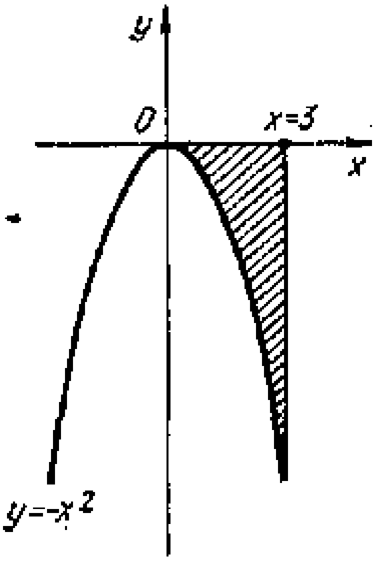
$$=\left|-16\frac{1}{3}\right|=16\frac{1}{3}\ \text{(кв. бирлик)}.$$

1345. $x-2y-6=0$, $y=0$, $x=1$ ва $x=5$.

1346. $x-2y-5=0$, $y=-2x$, $y=0$.



144- расм.



145- расм.

Ечилиши. Ясашни бажарамиз (144-расм): $x-2y-5=0$,

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2},\quad x=0,\quad y=-\frac{5}{2},\quad C\left(0;\ -\frac{5}{2}\right);$$

$$y=0,\quad x=5,\quad A(5;\ 0).$$

Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини ушбу

$$\begin{cases}x-2y-5=0\\ y=-2x\end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб топамиз: $x=1$; $y=-2$; $M(1;\ -2)$.

Изланаётган юзни ҳисоблаш учун OMA учбурчакни OMB ва BMA учбурчакларга ажратамиз:

$$S_{\triangle OMB} = \left| -\int_0^1 2x\,dx \right| = 1 \text{ (кв. бирлик)};$$

$$S_{\triangle BMA} = \left| \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) dx \right| = 4 \text{ (кв. бирлик)};$$

$$S = S_{\triangle OMB} + S_{\triangle BMA} = 1 + 4 = 5 \text{ (кв. бирлик)}.$$

1347. $y = -x$, $x - 2y - 6 = 0$ ва $y = 0$.

1348. $y = -x^2$, $y = 0$ ва $x = 3$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (145-расм):

$$S = \left| -\int_0^3 x^2\,dx \right| = 9 \text{ (кв. бирлик)}.$$

1349. 1) $y = -3x^2$, $y = 0$, $x = 1$ ва $x = 2$; 2) $y = -x^2 - 1$, $y = 0$, $x = -2$ ва $x = 1$; 3) $y = x^2 - 4$ ва $y = 0$.

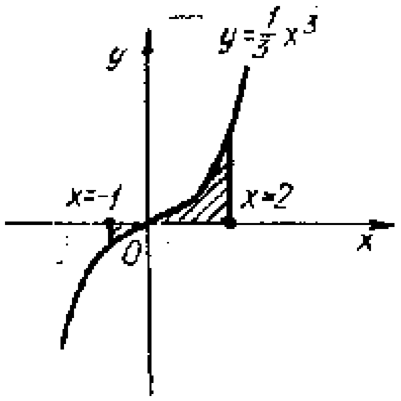
III. Ox ўқнинг устида ва Ox ўқнинг остида жойлашган ҳамда $y = f(x)$ чизиқ, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

1350. $y = \frac{1}{3}x^3$, $y = 0$, $x = -1$ ва $x = 2$.

Ечилиши. Фигурани ясаш учун ушбу жадвални тузамиз:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	9



146-расм.

Бу нуқталар бўйича эгри чизиқни (3-тартибли параболани) ясаймиз (146-расм):

$$S = \left| \int_{-1}^{0} \frac{1}{3}x^3\,dx \right| + \int_0^2 \frac{1}{3}x^3\,dx =$$

$$= \left| \frac{x^4}{12} \right|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{12}\Big|_0^2 = \left| -\frac{1}{12} \right| + \frac{16}{12} = \frac{1}{12} +$$

$$+ \frac{16}{12} = 1\frac{5}{12} \text{ (кв. бирлик)}.$$

1351. 1) $y = x^3$, $y = 0$, $x = -2$ ва $x = 2$; 2) $y = 4x^3$, $y = 0$, $x = -1$ ва $x = 2$.

1352. $y = x^3 - x$, $y = 0$. $x = -1$ ва $x = 1$.

Ечилиши. Фигура юзлари тенг бўлган иккита бўлакдан иборат эканлиги $y = x^3 - x$ функциянинг графигидан (147- расм) кўриниб турибди, шунинг учун Ox ўқдан юқоридаги фигуранинг юзини топиб, ҳосил бўлган натижани иккилантирамиз:

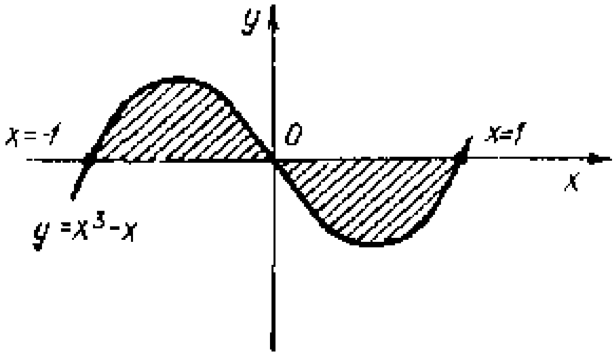
$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{(кв. бирлик)};$$

$$S = 2S_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ (кв. бирлик)}.$$

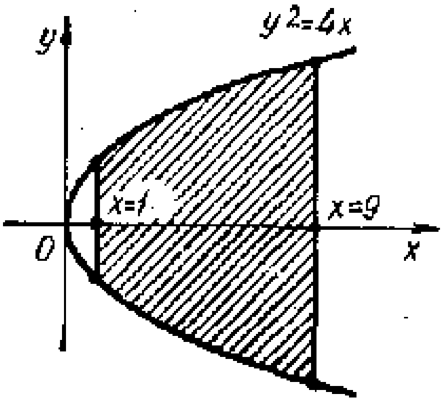
1353. $y = x^3 - 4x$, $y = 0$, $x = -2$ ва $x = 2$.

1354. $y^2 = 4x$, $x = 1$ ва $x = 9$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (148- расм).



147- расм.



148- расм.

Изланаётган юз иккита тенг бўлакдан иборат, шунинг учун Ox ўқнинг юқорисида жойлашган фигуранинг юзини топамиз: $y^2 = 4x$,

$$y = +2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}};$$

$$S_1 = \int_1^9 2x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{4}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3} \cdot 26 =$$

$$= 34\frac{2}{3} \text{ (кв. бирлик)}, \; S = 2S_1 = 2 \cdot 34\frac{2}{3} = 69\frac{1}{4} \text{ (кв. бирлик)}.$$

1355. $y^2 = 9x$ ва $x = 4$.

1356. $x^2 + y^2 = r^2$.

Ечилиши. r радиусли доира берилган. Айлана тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз: $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

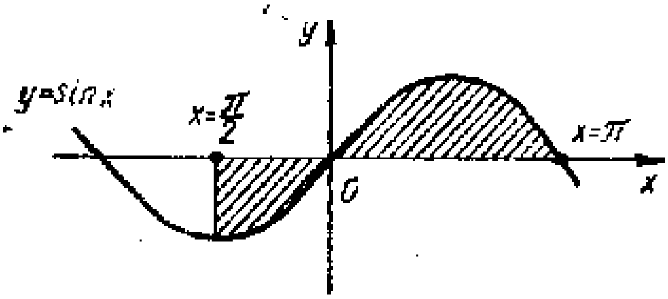
Интеграллаш чегараларини 0 дан r гача олиб, доиранинг тўртдан бир қисмининг юзини топамиз:

$$S_1=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Бу кўринишдаги интеграл 1224- мисолда ҳисобланган эди:

$$S_1=\left(\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}\right)\Big|_0^r=\frac{r^2}{2}\arcsin 1=$$

$$=\frac{r^2}{2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{r^2\pi}{4};\quad S=4S_1=4\cdot\frac{r^2\pi}{4}=\pi r^2.$$



149- расм.

1357. $x^2+y^2=9$.

1358. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Ечилиши. Эллипснинг тенгламасини y га нисбатан ечамиз:

$$y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2},$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Интеграллаш чегараларини 0 дан a гача олиб, эллипс юзининг тўртдан бир қисмини ҳисоблаймиз:

$$S_1=\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Ушбу $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$

формула бўйича интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$S_1=\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a=$$

$$=\frac{b}{a}\left[\left(\frac{a^2}{2}\arcsin 1+\frac{a}{2}\cdot 0\right)-\left(\frac{a^2}{2}\arcsin 0+0\right)\right]=$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{1}{4}\,ab\pi;$$

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{4}\,ab\pi=ab\pi\ \text{(кв. бирлик)}.$$

1359. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$

1360. $y = \sin x,\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{2}$ ва $x = \pi$.

Ечилиши. $S = \left| \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx \right| + \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx =$

$= \left| -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \cos x \Big|_{0}^{\pi} = \right| -\cos 0 \Big| + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) -$

$-\cos \pi + \cos 0 = \Big| -1 \Big| + 0 + 1 + 1 = 3$ (кв. бирлик) (149- расм).

1361. $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0$ ва $x = 2\pi$.

IV. Иккита кесишувчи $y = f(x)$ ва $y = \varphi(x)$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

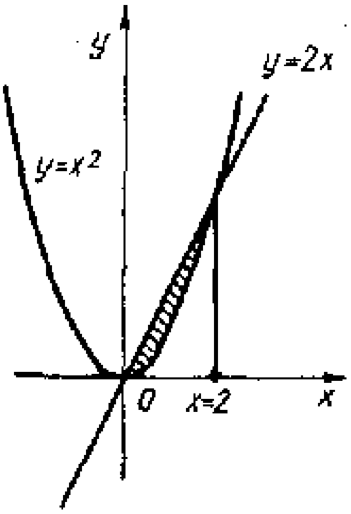
1362. $y = x^2$ ва $y = 2x$.

Ечилиши. Парабола ва тўғри чизиқни ясаймиз (150-расм).

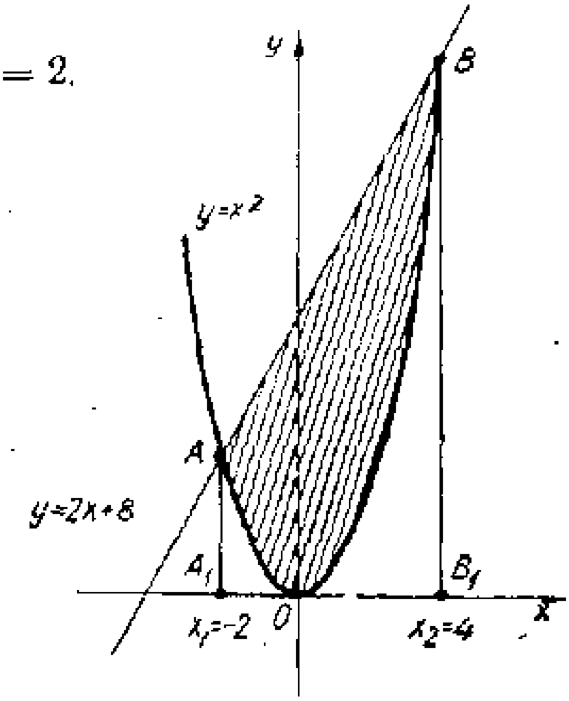
$y = x^2$ парабола билан $y = 2x$ тўғри чизиқ кесишган нуқталарни топамиз. Бунинг учун қуйидаги тенгламалар системасини x га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x, \end{cases} \quad x^2 - 2x = 0;$$

$$x(x-2) = 0;\ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$



150- расм.



151- расм.

Демак, интеграллаш чегаралари $a = x_1 = 0$ ва $b = x_2 = 2$ бўлади.

Изланаётган S юз S_1 ва S_2 юзларнинг айирмасидан иборат. Қуйидагига эга бўламиз:

$$S_1 = \int_0^2 2x\,dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^2 = 4 \text{ (кв. бирлик)};\quad S_2 = \int_0^2 x^2\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} \text{ (кв. бирлик)};\quad S = S_1 - S_2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{(кв. бирлик)}.$$

1363. $y = x^2$ ва $y = -3x$.

1364. $y = x^2$ ва $y = 2x + 8$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (151- расм). $y = x^2$ парабола билан $y = 2x + 8$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топиш учун қуйидаги тенгламалар системасини x га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + 8, \end{cases} \quad x^2 = 2x + 8,\ x^2 - 2x - 8 = 0,\ x_1 = -2,\ x_2 = 4.$$

Изланаётган S юз қуйидаги юзлар айирмасига тенг: $S_{A_1ABB_1} - S_{A_1AOBB_1}$. Интеграллаш чегаралари: $a = x_1 = -2$, $b = x_2 = 4$.

$$S_{A_1ABB_1} = \int_{-2}^{4} (2x + 8)\,dx = (x^2 + 8x)\Big|_{-2}^{4} = 60 \text{ (кв. бирлик)};$$

$$S_{A_1AOBB_1} = \int_{-2}^{4} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4} = 24 \text{ (кв. бирлик)};$$

$$S = 60 - 24 = 36 \text{ (кв. бирлик)}.$$

1365. 1) $y = x^2$ ва $y = x + 2$; 2) $y = x^2$ ва $y = 5x - 6$; 3) $y = x^2 + 2$ ва $y = 6$.

1366. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$ ва $y = x + 2$.

Ечилиши. Парабола ва тўғри чизиқни ясаймиз (152- расм). Бу чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топиш учун қуйидаги системани ечамиз:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10, \\ y = x + 2, \end{cases} \quad \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10 = x + 2;\ \frac{1}{2}x^2 - 5x + 8 = 0;$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0;\ x_1 = 2 \text{ ва } x_2 = 8.$$

Демак, $a = x_1 = 2$ ва $b = x_2 = 8$.

Изланаётган S юз $S_1 = S_{A_1ABB_1}$ ва $S_2 = S_{A_1ACBB_1}$ юзларнинг айирмасига, яъни $S = S_1 - S_2$ га тенг.

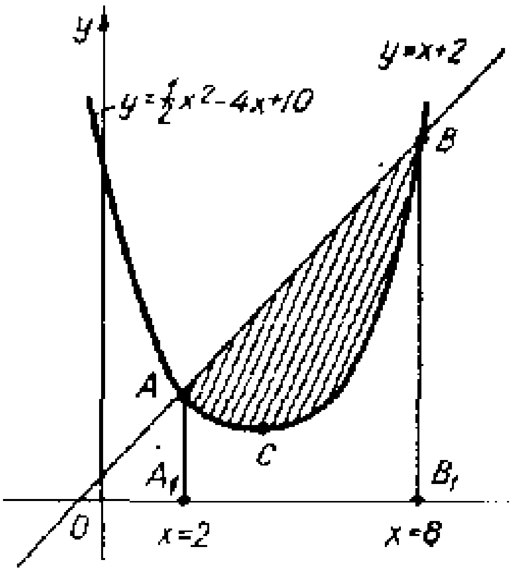
$$S_1 = \int_2^8 (x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^8 = 42 \text{ (кв. бирлик);}$$

$$S_2 = \int_2^8 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 10\right)dx = \left(\frac{x^3}{6} - 2x^2 + 10x\right)\Big|_2^8 =$$

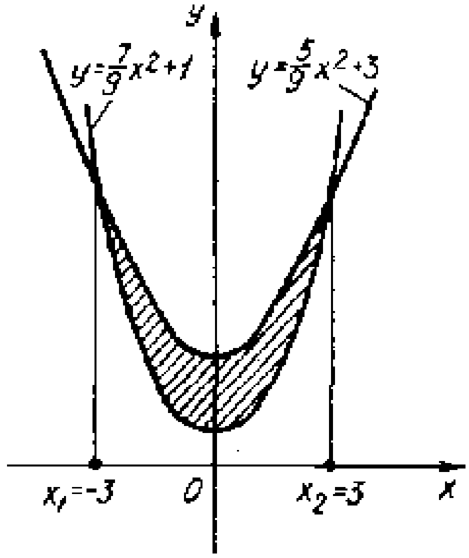
$$= 24 \text{ (кв. бирлик).}$$

$$S = S_1 - S_2 = 42 - 24 = 18 \text{ (кв. бирлик).}$$

1367. 1) $y = x^2 - 2x + 3$ ва $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, $y = -x + 10$; 3) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$, $y = x + 8$.



152- расм.



153- расм.

1368. $7x^2 - 9y + 9 = 0$; $5x^2 - 9y + 27 = 0$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз. Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз: $y = \frac{7}{9}x^2 + 1$ ва $y = \frac{5}{9}x^2 + 3$.

Биринчи параболанинг учи $A(0;\ 1)$ нуқтада, иккинчисининг учи эса $B(0;\ 3)$ нуқтада ётади.

Параболаларнинг кесишиш нуқталарини топиш учун ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases} y = \frac{7}{9}x^3 + 1, \\ y = \frac{5}{9}x^2 + 3, \end{cases} x_1 = 3,\ y_1 = 8;\ x_2 = -3,\ y_2 = 8.$$

Параболаларнинг учларини ва кесишиш нуқталарини билганимиздан кейин шу параболаларни ясаймиз (153- расм).

Фигура Oy ўққа нисбатан симметрик жойлашган, шунинг учун интеграллаш чегараларини 0 дан 3 гача олиб, фигура юзининг ярмини топамиз:

$$S_1 = \int_0^3 \left(\frac{5}{9}x^2 + 3\right)dx = \left(\frac{5x^3}{27} + 3x\right)\Big|_0^3 = 14 \text{ (кв. бирлик)};$$

$$S_2 = \int_0^3 \left(\frac{7}{9}x^2 - 1\right)dx = \left(\frac{7x^3}{27} + x\right)\Big|_9^3 = 10 \text{ (кв. бирлик)};$$

$S = S_1 - S_2 = 14 - 10 = 4$ (кв. бирлик), $2S = 2 \cdot 4 = 8$ (кв. бирлик).

1369. 1) $y = 2x^2 + 1, \quad y = x^2 + 10$; 2) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 9x - \frac{15}{2}, \ y = -x^2 + 6x - 5.$

69-§. Айланиш жисмларининг ҳажмлари

Айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx, \qquad (11.3)$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда $y = f(x)$ — графиги Ox ўқ атрофида айланувчи (154- расм) ва изланаётган жисмнинг сиртини ҳосил этувчи эгри чизиқ (тўғри чизиқ) бўлган функциядир; a ва b — интеграллаш чегаралари.

Агар y функция x орқали ошкор ифодаланмаган бўлса, у ҳолда y ни эгри чизиқнинг тенгламасидан топиш лозим.

Агар жисм Oy ўқ атрофида айлантирилса, у ҳолда

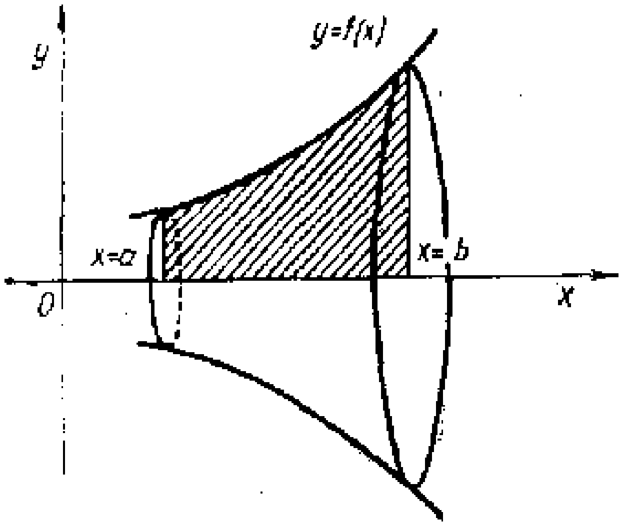
$$V = \pi \int_a^b x^2 dy, \qquad (11.4)$$

бунда $x = \varphi(y)$ графиги Oy ўқ атрофида айланувчи ва изланаётган айланиш жисмининг сиртини ҳосил этувчи эгри чизиқ (тўғри чизиқ) бўлган функция, a ва b — интеграллаш чегаралари.

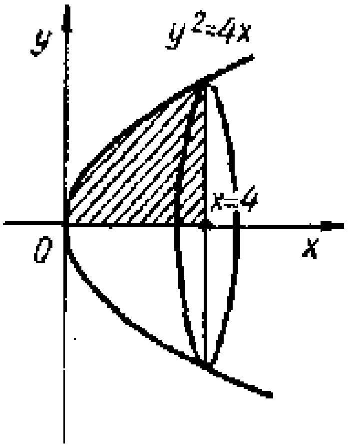
1. $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқ ва иккита ордината билан чегараланган юзнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган юзларнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмларини топинг.

1370. $y^2 = 4x$, $y = 0$ ва $x = 4$.



154- расм.



155- расм.

Ечилиши. Ясашни бажарамиз (155-расм). Айланиш жисми параболоиддир. Интеграллаш чегаралари $a = 0$ ва $b = 4$.

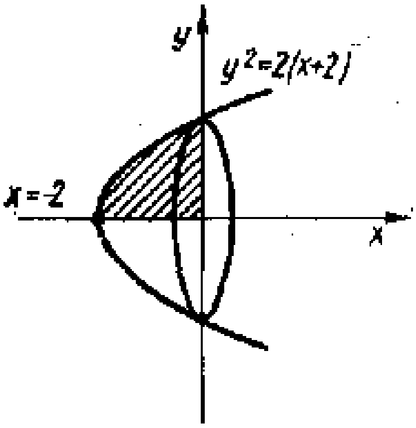
(11.3) формула бўйича жисмнинг ҳажмини ҳисоблаймиз:

$$V = \pi \int_0^4 4x\, dx = 2\pi x^2 \Big|_0^4 = 32\ \pi \text{ (куб бирлик).}$$

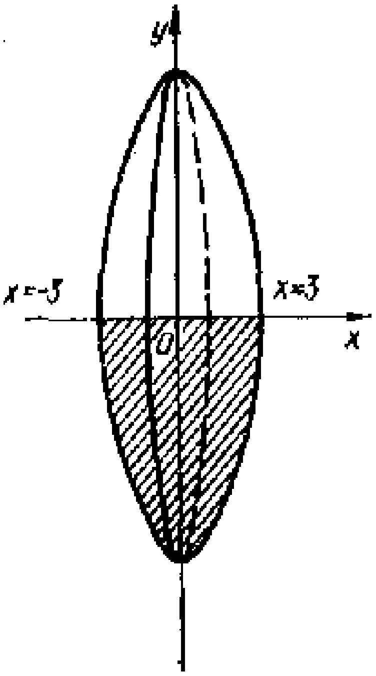
1371. 1) $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 1$ ва $x = 2$; 2) $y^2 = 2x$, $y = 0$, $x = 2$ ва $x = 4$; 3) $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 1$ ва $x = 3$; 4) $y^2 = 2(x + 2)$, $y = 0$ ва $x = 0$ (156-расм).

1372. $y = x^2 - 9$ ва $y = 0$.

Ечилиши. Ясашни бажарамиз (157-расм). Фигура Oy ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун интеграллаш чегараларини 0 дан 3 гача оламиз, сўнгра ҳосил қилинган натижани иккилантирамиз.



156- расм.



157- расм.

(11.3) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$V_1 = \pi \int_0^3 (x^2 - 9)^2 \, dx = \pi \int_0^3 (x^4 - 18x^2 + 81) \, dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x \right) \Big|_0^3 = 129{,}6\pi;$$

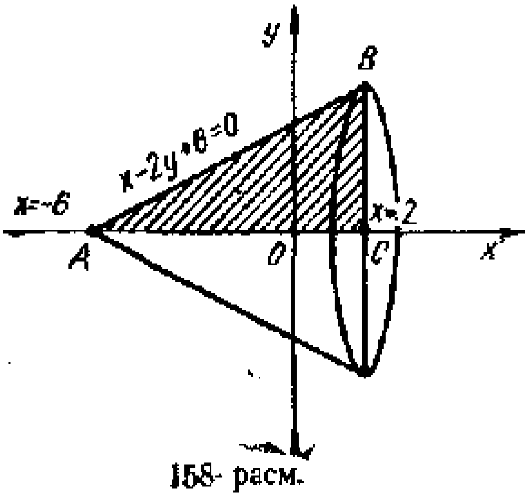
$$V = 2V_1 = 2 \cdot 129{,}6\pi = 259{,}2\pi \text{ (куб бирлик).}$$

1373. 1) $y = x^2 - 1$ ва $y = 0$; 2) $y = 3x - x^2$ ва $y = 0$; 3) $y = -x^2 - x$ ва $y = 0$.

1374. $x - 2y + 6 = 0$, $y = 0$ ва $x = 2$.

Ечилиши, Фигурани ясаймиз (158- расм). $x - 2y + 6 = 0$ тўғри чизиқ Ox ўқни $A(-6;\ 0)$ нуқтада кесиб ўтади.

Интеграллаш чегаралари $a = -6$ ва $b = 2$. ABC учбурчакнинг (бунда AB томон $y = \frac{1}{2}x + 3$ тенглама билан ифо-



158- расм.

даланади) айланишидан ҳосил бўлган конуснинг ҳажмини (11.3) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$V = \pi \int_{-6}^{2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 dx = \pi \int_{-6}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9\right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{2} + 9x\right)\Big|_{-6}^{2} = 42\frac{2}{3}\pi \text{ (куб бирлик).}$$

1375. $x + 2y - 4 = 0,\ y = 0,\ x = 0.$

1376. $x^2 + y^2 = r^2,\ y = 0.$

Ечилиши. Айланиш жисми — шар. Айлана билан Ox ўқнинг кесишиш нуқталарини ҳисоблаш учун ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ y = 0, \end{cases}$$

бундан

$$x_1 = -r \text{ ва } x_2 = r.$$

Интеграллаш чегараларини $a = 0$ дан $b = r$ гача олиш мумкин, чунки фигура Oy ўққа нисбатан симметрик, сўнгра ҳосил қилинган натижани иккилантириш керак:

$$V_1 = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \frac{2}{3}\pi r^3;$$

$$V = 2V_1 = 2\cdot\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (куб бирлик).}$$

1377. $x^2 + y^2 = 4,\ y = 0.$

1378. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y = 0.$

Ечилиши. Айланиш жисми — эллипсоид. Берилган эллипс Ox ўқни $x_1 = -a$ ва $x_2 = a$ нуқталарда кесади. Эллипснинг тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Эллипс Oy ўққа нисбатан симметрик, шунинг учун интеграллаш чегараларини 0 дан a гача олиш ва ҳосил қилинган натижани иккилантириш мумкин:

$$V_1 = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx = \pi \left(b^2x - \frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{2}{3}ab^2\pi;$$

$$V = 2V_1 = 3\cdot\frac{2}{3}ab^2\pi = \frac{4}{3}ab^2\pi \text{ (куб бирлик).}$$

1379. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x=0.$

Ечилиши. *Эллипс Oy ўқ атрофида айланади. Эллипс Oy* ўқ билан $y_1=-b$ ва $y_2=b$ нуқталарда кесишади. Интеграллаш чегараларини 0 дан b гача оламиз. Эллипс тенгламасидан:

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2);$$

$$V_1=\pi\int_0^b\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)\,dy=\pi\left(a^2y-\frac{a^2y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b=\frac{2}{3}a^2b\pi;$$

$$V=2V_1=2\cdot\frac{2}{3}a^2b\pi=\frac{4}{3}a^2b\pi\ \text{(куб бирлик).}$$

1380. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,\ y=0.$

1381. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0,\ x=a,\ x=2a.$

Ечилиши. Айланиш жисми — гиперболоид. Гипербола тенгламасидан:

$$y=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\ \text{(159- расм).}$$

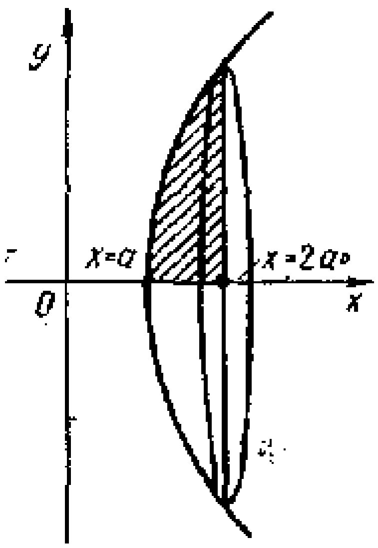
$$V=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{b^2x^3}{a^2}-b^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{b^2x^3}{3a^2}-b^2x\right)\Bigg|_a^{2a}=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{8ab^2}{3}-2ab^2\right)-\left(\frac{ab^2}{3}-ab^2\right)\right]=$$

$$=\pi\,\frac{8ab^2-6ab^2-ab^2+3ab^2}{3}=$$

$$=\frac{4\pi ab^2}{3}\ \text{(куб бирл.).}$$



159- расм.

1382. 1) $x^2-y^2=4,\ y=0,\ x=2,\ x=4;$ 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1,\ y=0,\ x=3,\ x=6.$

1383. $y=\sin x,\ x=0,\ x=\pi$ ва $y=0.$

Ечилиши. Интеграллаш чегаралари 0 дан π гача:

$$V=\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\pi\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\pi x-$$

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2x\,dx = \pi\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) = \pi\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\cdot 0\right) = \frac{1}{2}\pi^2 \text{ (куб бирл.)}$$

1384. $y = \cos x$, $y = 0$ $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ (1208-масалага қаранг).

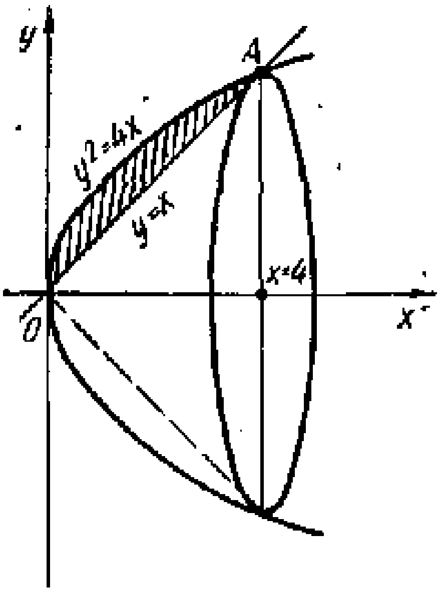
II. $y = f(x)$ эгри чизиқ ва $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган юзларнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмини ҳисобланг.

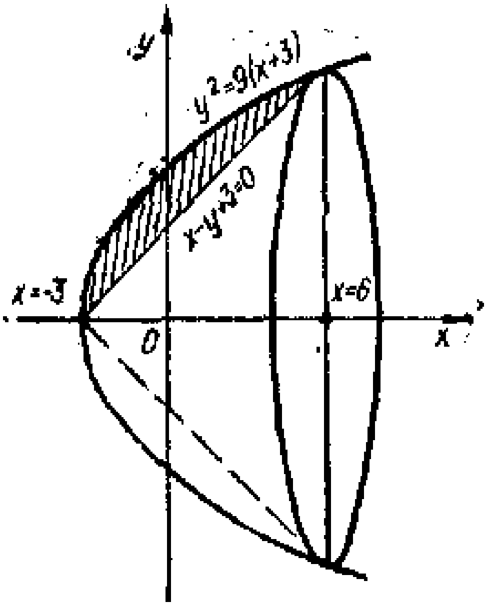
1385. $y^2 = 4x$ ва $y = x$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (160-расм). Ушбу

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x \end{cases}$$



160- расм.



161- расм.

системани ечиб, парабола билан тўғри чизиқ кесишган нуқталарни топамиз: $O(0;\ 0)$ ва $A(4;\ 4)$, демак, интеграллаш чегаралари $a = 0$, $b = 4$. Айланиш жисмининг ҳажми $y^2 = 4x$ эгри чизиқ ҳосил қилган параболоид ҳажми (V_1) билан $y = x$ тўғри чизиқ ҳосил қилган конус ҳажми (V_2) орасидаги айирмадан иборат:

$$V_1 = \pi \int_0^4 4x\,dx = \pi\, 2x^2 \Big|_0^4 = 32\pi;$$

$$V_2 = \pi \int_0^4 x^2\,dx = \pi\, \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64\,\pi}{3} = 21\frac{1}{3}\,\pi;$$

$$V = V_1 - V_2 = 32\pi - 21\frac{1}{3}\,\pi = 10\,\frac{2}{3}\,\pi \text{ (куб бирл.).}$$

1386. $y^2 = 9x$ ва $y = 3x$.

1387. $y^2 = 9(x+3)$ ва $x - y + 3 = 0$.

Ечилиши. Фигурани ясаймиз (161- расм). Интеграллаш чегараларини ҳисоблаб топиш учун ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases} y^2 = 9(x+3), \\ x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

Парабола билан тўғри чизиқ кесишган нуқталар: $A(-3;\ 0)$ ва $B(6;\ 9)$. Интеграллаш чегаралари $a = -3$ ва $b = 6$.

Изланаётган жисмнинг ҳажми $y^2 = 9(x+3)$ эгри чизиқ ҳосил қилган параболоид ҳажми (V_1) ва $y - x - 3 = 0$ тўғри чизиқ ҳосил қилган конус ҳажми (V_2) нинг айирмасига тенг:

$$V_1 = \pi \int_{-3}^{6} 9(x+3)\,dx = 9\pi\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-3}^{6} = 364{,}5\,\pi,$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^{6} (x+3)^2\,dx = \pi \int_{-3}^{6} (x^2 + 6x + 9)\,dx =$$

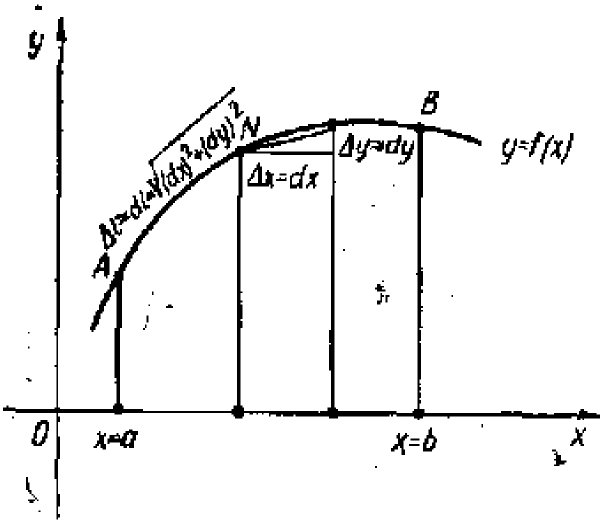
$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x\right)\Big|_{-3}^{6} = 243\,\pi;$$

$V = V_1 - V_2 = 364{,}5\pi - 243\,\pi = 121{,}5\ \pi$ (куб бирл.)

1388. $y^2 = 4(x+2)$ ва $x - y + 2 = 0$.

70- §. Ясси эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$y = f(x)$ ясси эгри чизиқнинг AN ёйининг узунлиги l бўлсин $[l = \varphi(x)]$ (162- расм). Бу ёй узун-



162- расм.

лигининг dl дифференциали қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (11.5)$$

AB ёйнинг узунлиги ушбу формула билан ҳисобланади:

$$L_{AB} = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \qquad (11.6)$$

бунда a ва b эркли ўзгарувчи x нинг A ва B нуқталардаги қийматлари.

Агар эгри чизиқ $x = F(y)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда

$$L_{AB} = \int_m^n \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy, \qquad (11.7)$$

бунда m ва n эркли ўзгарувчи y нинг A ва B нуқталардаги қиймати.

1389. $x^2 + y^2 = r^2$ айлананинг узунлигини топинг.

Ечилиши. Айлананинг тенгламасини дифференциаллаб (41-§. га қаранг), қуйидагини топамиз:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Интеграллаш чегараларини 0 дан r гача олиб, айлана ёйининг чораги узунлигини (11.6) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$L = \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = \int_0^r \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{y^2}}\,dx = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = \frac{\pi r}{2}.$$

Бундан айлананинг узунлиги: $C = 4L = 4\,\frac{\pi r}{2} = 2\pi r$.

1390. $y = \frac{1}{2}x^2$ параболанинг $O(0{,}0$; ва $A(\sqrt{x};\ \frac{3}{2})$ нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини топинг.

Ечилиши. Параболанинг тенгламасини дифференциаллаб, ушбуни ҳосил қиламиз: $\frac{dy}{dx} = x$. (11.6) формула бўйича ёйнинг узунлигини ҳисоблаймиз: $L = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}dx$. Интеграл қуйидаги формула бўйича ҳисоблаб топилади (1240-масалага қаранг):

$L = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^{\sqrt{3}} \approx 2,4$ (узун. бирл.).

1391. $y = x^2$ параболанинг $O(0;\ 0)$ ва $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{4}\right)$ нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

1392. $y^2 = 4x$ параболанинг $O(0;\ 0)$ ва $A\left(\frac{5}{4};\ \sqrt{5}\right)$ нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

Ечилиши. Ёйнинг узунлигини ҳисоблаш учун (11.7) формулани қўллаймиз, яъни y ўзгарувчини аргумент деб оламиз:

$$x = \frac{1}{4}y^2; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y;$$

$$L = \int\limits_0^{\sqrt{5}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}y\right)^2}dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{5}} \sqrt{4+y^2}dy.$$

Фараз қилайлик, $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4+2^2}dy$ бўлсин. Формулага кўра (1240-масалага қаранг):

$$I = \left[\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+4} + \frac{4}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+4}\right]_0^{\sqrt{5}} \approx 5,28;$$

$$L = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\cdot 5,28 = 2,64 \text{ (узун. бирл).}$$

1393. $y^2 = x$ параболанинг $O(0;\ 0)$ ва $(\frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

1394. $y^2 = x^3$ ярим кубик параболанинг $O(0;\ 0)$ ва $A\left(\frac{4}{3};\ \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини топинг.

Ечилиши. $y = x^{\frac{3}{2}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $L = \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$.

$1+\frac{9}{4}x = z$ алмаштириш, $dx = \frac{4}{9}dz$, $z_{\text{қ}} = 1+0 = 1$, $z_{\text{ю}} = 1+\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3} = 4$.

$$L = \frac{4}{9}\int\limits_1^4 z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\,z^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = 2\,\frac{2}{27}\ \text{(узун. бирл).}$$

1395. $9y^2 = 4x^3$ ярим кубик параболанинг $O(0;\ 0)$ ва $A(3;\ 2\sqrt{3})$ нуқталари орасидаги ёйининг узунлигини ҳисобланг.

1396. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ занжир чизиқ ёйининг $A(0;\ a)$ ва $B\left(a;\ \frac{a(e^2+1)}{2e}\right)$ нуқталар орасидаги узунлигини топинг.

Ечилиши. Занжир чизиқ формуласидан топамиз: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

(11.6) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L = \int\limits_0^a \sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^a \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{a}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)\ \text{(узун. бирл.)}$$

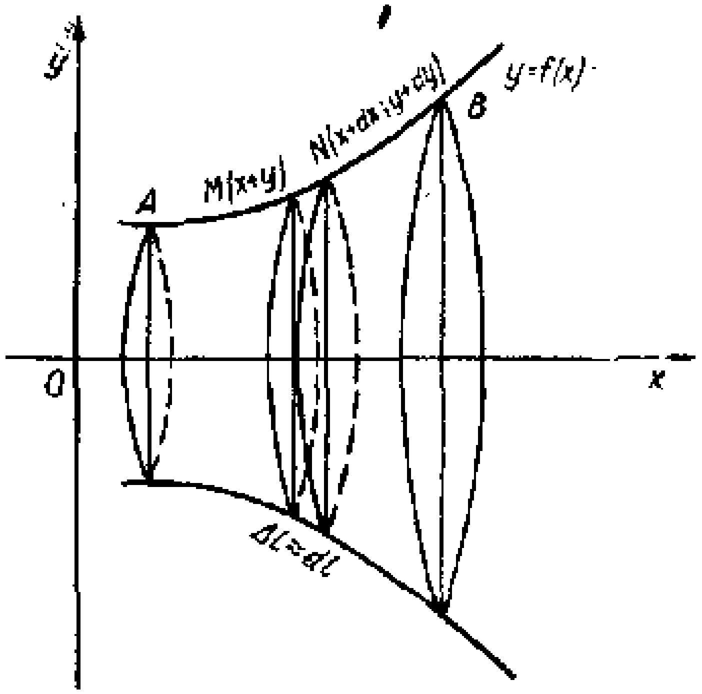
1397. $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ занжир чизиқнинг $A(0;\ 1)$ ва $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$ нуқталар орасидаги ёйининг узунлигини топинг.

71-§. Айланиш сиртининг юзи

$y=f(x)$ ясси эгри чизиқ AB ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан айланиш сирти ҳосил бўлади (163-расм).

Шу сирт юзининг dS дифференциали асосининг радиуслари y ва $y+dy$ ва ясовчиси dl бўлган доиравий кесик конуснинг ён сирти юзига тенг:

$$dS=\frac{2\pi y+2\pi(y+dy)}{2}\,dl=\pi(2y+dy)\,dl\approx 2\pi y\,dl$$



163- расм.

(dy қўшилувчини ҳисобга олмаймиз, чунки у $2y$ га қараганда кичик).

AB ёйнинг айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзи ушбу формула бўйича топилади:

$$S=\int_a^b dS=2\pi\int_a^b y\,dl=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \qquad (11.8)$$

бунда a ва b эркли ўзгарувчи x нинг A ва B нуқталардаги қиймати.

AB ёйининг Oy ўқ атрофида айланишидан қуйидагига эга бўламиз: $dS\approx 2\pi x\,dl$ бундан

$$S=2\pi\int_a^b x\,dl=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy, \qquad (11.9)$$

бунда a ва b эркли ўзгарувчи y нинг A ва B нуқталардаги қийматлари.

1398. $x^2+y^2=r^2$ айлананинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган шар сиртининг юзини топинг.

Ечилиши. Айлананинг $x^2+y^2=r^2$ тенгламасини дифференциаллаб, $2x+2y\frac{dy}{dx}=0, \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ ни ҳосил қиламиз.

Ёйнинг дифференциалини топамиз:

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}dx=$$

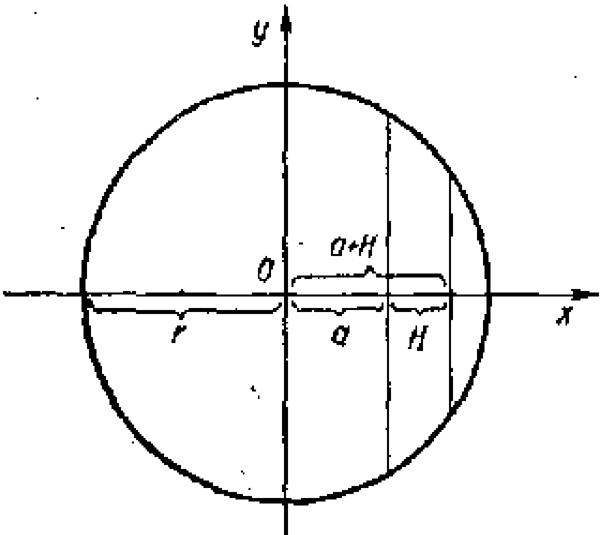
$$=\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}dx=\frac{r\,dx}{y}.$$

(11.8) формулага dl дифференциалнинг қийматини қўйиб ва интеграллаш чегараларини $-r$ дан r гача олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

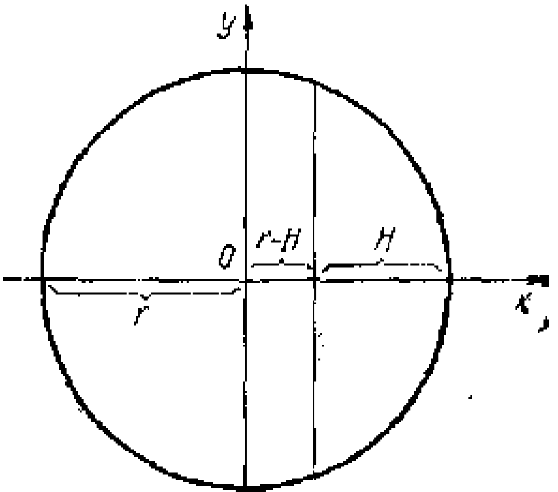
$$S=2\pi\int_{-r}^{r}y\cdot\frac{r\,dx}{y}=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=2\pi rx\Big|_{-r}^{r}=4\pi r^2.$$

1399. $x^2+y^2=r^2$ айлананинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган, баландлиги H бўлган шар камари сиртининг юзини топинг.

Ечилиши. 1398-масаладагидек, қуйидагига эга бўламиз: $dl=\frac{r\,dx}{y}$.



164- расм.



165- расм.

Интеграллаш чегараларини a дан $a+H$ гача оламиз (164-расм). (11.8) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S=2\pi\int_{a}^{a+H} y\cdot\frac{r\,dx}{y}=2\pi r\int_{a}^{a+H} dx=2\pi rx\Big|_{a}^{a+H}=2\pi rH.$$

1400. $x^2+y^2=r^2$ айлананинг Ox ўқ атрофида айланишидан ташкил топган, баландлиги H бўлган шар сегменти сиртининг юзини топинг.

Ечилиши. 1398-масаладагидек қуйидагига эга бўламиз: $dl=\frac{r\,dx}{y}$.

Интеграллаш чегараларини $r-H$ дан r гача оламиз (165-расм).

(11.8) формула бўйича қуйидагини топамиз.

$$S=2\pi\int_{r-H}^{r} y\cdot\frac{r\,dx}{y}=2\pi r\int_{r-H}^{r} dx=2\pi rx\Big|_{r-H}^{r}=2\pi rH.$$

1401. $x^2+y^2=16$ айлананинг Ox ўқ атрофида айланишидан ташкил топган ва $A(2;\ 2\sqrt{3})$ ҳамда $B(3;\ \sqrt{7})$ нуқталар орасида жойлашган шар камари сиртининг юзини топинг.

1402. $A(2;\ 4\sqrt{2})$ ва $B(4;\ 6)$ нуқталар орасига олинган $(x-4)^2+y^2=36$ айлана ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзини топинг.

Ечилиши. Айлана ёйининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган шар камарига эгамиз.

Айлана тенгламасини x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз:

$$2(x-4)+2y\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x-4}{y},\quad y\frac{dy}{dx}=-(x-4).$$

(11.8) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S=2\pi\int_{2}^{4} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{2}^{4}\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{2}^{4}\sqrt{36-(x-4)^2+(x-4)^2}\,dx=12\pi\int_{2}^{4} dx=$$

$$=12\pi x\Big|_{2}^{4}=24\pi\ \text{(кв. бирл).}$$

1403. $A(2\sqrt{6};\ 1)$ ва $B(4;\ 5)$ нуқталар билан чегараланган $x^2+(y-2)^2=25$ айлана ёйининг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзини ҳисобланг.

1404. $y^2=4x$ параболанинг $O(0,\ 0)$ ва $A(3;\ 2\sqrt{3})$ нуқталар *билан чегараланган ёйининг Ox ўқ атрофида айланиши*дан ҳосил бўлган сиртнинг юзини топинг.

Ечилиши. $y^2=4x$ тенгламадан: $y=2x^{\frac{1}{2}}$. Дифференциаллаб, топамиз: $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}$. (11.8) формула бўйича ҳисоблаймиз: $S=2\pi\int\limits_0^3 2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$. $x^{\frac{1}{2}}$ ни илдиз остига киритамиз: $S=4\pi\int\limits_0^3\sqrt{x+1}\,dx$,

$x+1=z$ деб оламиз, у ҳолда $dx=dz$, $z_қ=1$, $z_ю=4$:

$$S=4\pi\int\limits_1^4 z^{\frac{1}{2}}\,dz=4\pi\cdot\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{56\pi}{3}\ \text{(кв. бирл.)}$$

1405. $y^2=9x$ параболанинг $(0;\ 0)$ ва $(4;\ 6)$ нуқталар билан чегараланган ёйининг Ox атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

72-§. Аралаш масалалар

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

1406. 1) $y=x^2-8x+18$, $y=-2x+18$; 2) $y=-x^2+10x-16$, $y=x+2$.

1407. 1) $y=x^2$, $y=2-x^2$; 2) $y=x^2$, $x=y^2$.

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган юзларнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмини ҳисобланг.

1408. $y^2=4(x-2)$, $y=0$, $x=3$ ва $x=6$.

1409. $y=-x^2+5x$, $y=0$, $x=0$ ва $x=3$.

1410. $y^2=4(x+2)$ ва $x-y+2=0$.

1411. $x^2+y^2=25$ айлананинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган ва $A(-3;\ 4)$ ҳамда $B(4;\ 3)$ нуқталар орасига олинган шар камарининг юзини топинг.

Контрол иш

I вариант

1412. Интегралларни ҳисобланг: 1) $\int\limits_0^2 \frac{4x\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, 3) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{3+x^2}$.

4. $y=4-x^2$ ва $y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $y^2-x+1=0$, $x-2=0$ ва $y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

II вариант

1413. Интегралларни ҳисобланг: 1) $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; 3) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

4. $y=x^2-6x+9$ ва $3x-y-9=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5. $y=-x^2+2x$ ва $y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

73-§. Жисм ўтган йўл

Жисм текис ҳаракатланганда унинг t вақтда босиб ўтган йўли

$$s=vt \qquad (11.10)$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда v тезлик—ўзгармас катталик.

Нотекис ҳаракатда v тезлик ўзгарувчи катталик бўлиб, t вақтга боғлиқ бўлади, яъни $v=f(t)$.

Жисм нотекис ҳаракатланаётганда унинг $t_2 - t_1$ вақт мобайнида босиб ўтган йўли

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \qquad (11.11)$$

формула бўйича ҳисобланади.

1414. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (3t^2 + 2t - 1)$ м/сек тенглама билан берилган. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан 10 сек давомида ўтган йўлини топинг.

Ечилиши. Масала шартида ушбулар берилган: $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ сек, $f(t) = 3t^2 + 2t - 1$. (11.11) формулага кўра: $s = \int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1)\,dt = (t^3 + t^2 - t)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 - 10 = 1090$ (м).

1415. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (6t^2 + 4)$м/сек тенглама билан берилган. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан 5 сек давомида ўтган йўлини топинг.

1416. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (9t^2 - 8t)$ м/сек тенглама билан берилган. Жисмнинг тўртинчи секундда босиб ўтган йўлини топинг.

Ечилиши. Масала шартида ушбулар берилган: $t_1 = 3$ сек, $t_2 = 4$ сек, $f(t) = 9t^2 - 8t$. (11. 11) формулага кўра:

$$s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)\,dt = (3t^3 - 4t^2)\Big|_3^4 = 83 \text{ м.}$$

1417. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (2t + \frac{8}{t^2})$ м/сек тенглама билан берилган. Жисмнинг иккинчи секундда босиб ўтган йўлини топинг.

1418. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (12t - 3t^2)$ м/сек тенглама билан берилган. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан то тўхтагунига қадар босиб ўтган йўлини топинг.

Ечилиши. Жисмнинг ҳаракат бошланган ва тўхтаган пайтдаги тезлиги нолга тенг. Жисмнинг тўхташ моментини топамиз, бунинг учун тезликни нолга тенглаб, тенгламани t га нисбатан ечамиз:

$$12t - 3t^2 = 0,\ t(4 - t) = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 4 \text{ сек.}$$

(11.11) формула бўйича s ни ҳисоблаймиз:

$$s = \int_0^4 (12t - 3t^2)\,dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 32 \text{ м.}$$

1419. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (18t - 3t^2)$ м/сек тенглама билан берилган. Жисмнинг ҳаракат бошланишидан тўхтагунича ўтган йўлини топинг.

1420. Икки жисм бир пайтда бир нуқтадан тўғри чизиқ бўйлаб бир хил йўналишда ҳаракатлана бошлади. Бир жисм $v = (6t^2 + 2t)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланди, иккинчиси эса $v = (4t + 5)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланди. 5 секдан кейин улар орасидаги масофа қандай бўлади?

Ечилиши. Биринчи ва иккинчи жисм ўтган йўлни (11.11) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)\,dt = (2t^3 + t^2)\Big|_0^5 = 275 \text{ м},$$

$$s_2 = \int_0^5 (4t + 5)\,dt = (2t^2 + 5t)\Big|_0^5 = 75 \text{ м},$$

$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200 \text{ м}.$$

1421. Икки жисм бир пайтда бир нуқтадан тўғри чизиқ бўйлаб, бир томонга қараб ҳаракатлана бошлади. Биринчи жисм $v = 3t^2$ м/сек тезлик билан ҳаракатланмоқда, иккинчиси эса $v = (6t^2 - 10)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланмоқда. 10 секдан кейин улар орасидаги масофа қандай бўлади?

1422. Икки жисм тўғри чизиқ бўйлаб бир нуқтадан ҳаракатланмоқда. Биринчи жисм $v = (3t^2 - 6t)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланмоқда, иккинчиси эса $v = (10t + 20)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланмоқда. Улар қайси пайтда ва бошланғич нуқтадан қандай масофада учрашади?

Ечилиши. Масала шартида жисмлар бир нуқтадан ҳаракатлана бошлаганлиги берилган, шунинг учун уларнинг учрашгунларига қадар ўтган йўллари бир хил бўлади. Улардан ҳар бирининг босиб ўтган йўли тенгламасини топамиз:

$$s_1 = \int (3t^2 - 6t)\,dt = t^3 - 3t^2;$$

$$s_2 = \int (10t + 20)\,dt = 5t^2 + 20t.$$

$t = 0$, $s = 0$ бошланғич шартларда интеграллаш доимийси нолга тенг бўлади. Бу жисмлар $s_1 = s_2$ бўлганда учрашадилар, бундан $t^3 - 3t^2 = 5t^2 + 20t$ ёки

$$t^3 - 8t^2 - 20t = 0.$$

Шу тенгламани ечамиз:

$$t(t^2 - 8t - 20) = 0,$$

бундан $t_1 = 0$, $t_2 = -2$, $t_3 = 10$. $t = 10$ сек моментда шу жисмлар ҳаракат бошлангандан сўнг учрашади. Ҳар бир жисм босиб ўтган йўлни йўл тенгламасидан топамиз: $s_2 = s_1 = 10^3 - 3 \cdot 10^2 = 700$ (м).

1423. Икки жисм битта нуқтадан тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланмоқда. Биринчи жисм $v = (3t^2 + 4t)$ м/сек тезлик билан, иккинчиси $v = (6t + 12)$ м/сек тезлик билан ҳаракатланмоқда. Улар қайси пайтда ва бошланғич нуқтадан қандай масофада учрашади?

1424. Жисм ер сиртидан юқорига тик қилиб $v = (39{,}2 - 9{,}8t)$ м/сек тезлик билан отилган. Жисмнинг энг юқорига кўтарилиш баландлигини топинг.

Ечилиши. Жисм энг юқори кўтарилиш баландлигига $v = 0$ бўлган t моментда эришади, яъни $39{,}2 - 9{,}8t = 0$, бундан $t = 4$ сек. (11.11) формуладан ушбуни топамиз:

$$s = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)\,dt = (39{,}2t - 4{,}9t^2)\Big|_0^4 = 78{,}4 \text{ м.}$$

1425. Жисм ер сиртидан тик юқорига $v = (29{,}4 - 9{,}8t)$ м/сек тезлик билан отилган. Жисмнинг энг юқори кўтарилиш баландлигини топинг.

74- §. Куч бажарган иш

Агар жисмга F ўзгармас куч таъсир қилса ва жисм шу куч йўналишида силжиса, у ҳолда шу F кучнинг l йўл оралиғида бажарган иши

$$A = Fl \qquad (11.12)$$

бўлади, бу ерда F Ньютон (Н) ҳисобида, l метр (м) ҳисобида, А — Жоуль (Ж) ҳисобида ифодаланади.

Фараз қилайлик, жисм Ox бўйлаб $A(a)$ нуқтадан $B(b)$ $(b>a)$ нуқтагача F ўзгарувчи куч таъсири остида силжиётган бўлиб, бу куч Ox ўқ бўйича йўналган ва x нинг функцияси бўлсин:

Жисм $A(a)$ нуқтадан $B(b)$ нуқтагача силжиганда F куч бажарган A ишни ҳисоблаймиз. AB кесмани n та тенг бўлакка (қисмга) ажратамиз. $\frac{AB}{n} = \frac{b-a}{n} = \Delta x$ бўлсин. $f(x)$ кучнинг Δx участкада (қисмда) бажарган иши $f(x)\,\Delta x$ кўпайтма билан ифодаланади. Бу кўпайтмани элементар иш деб атаймиз. Ҳар бир Δx участкада $f(x)$ нинг қиймати турлича бўлади. Ҳар бир Δx участкадаги

$f(x)\,\Delta x$ элементар ишни ҳисоблаймиз ва ҳосил бўлган ҳамма катталикларни қўшамиз, натижада F кучнинг бажарган A ишини ифодаловчи $\sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x$ йиғиндини ҳосил қиламиз.

Агар участкалардан ҳар бирининг Δx узунлиги нолга интилади деб қабул қилсак, бундай кичик силжишда $f(x)$ кучни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин ва $f(x)\,\Delta x$ элементар иш ҳам нолга интилади. AB участкада ҳамма иш чексиз катта сондаги чексиз кичик қўшилувчиларнинг йиғиндиси интилган лимит билан ифодаланади, бундай кўринишдаги йиғиндининг лимити эса аниқ интегралдир:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x = \int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{11.13}$$

Эластик чўзилишда (сиқилишда) бажарилган ишни ҳисоблаш.

Узунлиги l бўлган эластик металл стержень F куч таъсирида чўзилаётган (сиқилаётган) бўлсин, натижада стерженнинг абсолют узайиши Δl га тенг бўлсин. Эластик чўзилишда (сиқилишда) бажарилган ишни ҳисобланг.

Стержень деформацияси эластик, шунинг учун Δl абсолют узайиш билан шу узайишни вужудга келтирган F куч орасида аналитик жиҳатдан Гук формуласи билан ифодаланадиган чизиқли боғланиш бор:

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}, \tag{11.14}$$

бунда F — куч (Н);

l — стерженнинг чўзилишига қадар узунлиги, м ларда;

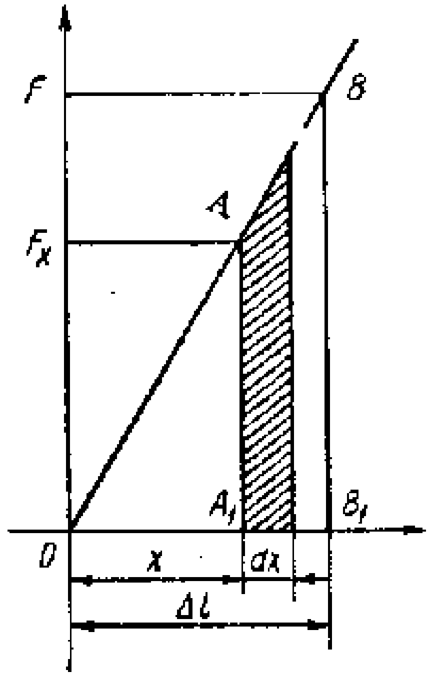
S — кўндаланг кесим юзи, м^2 ларда;

E — Юнг модули — ҳар бир материал учун ўзгармас, Н/м^2 ларда.

Элементар ишнинг катталиги асоси dx ва баландлиги F_x (166-расм) бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг:

$$dA = F_x\,dx \tag{11.15}$$

(dx жуда кичик бўлгани учун трапецияни тўғри тўртбурчак деб оламиз). x катталик



166- расм.

стерженнинг F_x куч таъсирида абсолют узайиши бўлсин. F_x кучни берилган F, Δl катталиклар ва x ўзгарувчи орқали ифодалаймиз.

OA_1A ва OB_1B учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{OA_1}{A_1A} = \frac{OB_1}{B_1B} \text{ ёки } \frac{x}{F_x} = \frac{\Delta l}{F},$$

бундан

$$F_x = \frac{F}{\Delta l}x. \tag{11.16}$$

F_x нинг (11.16) даги қийматини (11.15) тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$dA = \frac{F}{\Delta l}x\,dx. \tag{11.17}$$

(11.17) тенгликни интеграллаб A ишнинг катталигини топамиз:

$$A = \int\limits_0^{\Delta l} \frac{F}{\Delta l}x\,dx = \frac{F}{\Delta l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\Delta l} = \frac{F\Delta l}{2}; \quad A = \frac{F\Delta l}{2}. \tag{11.18}$$

Δl нинг (11.14) формуладаги қийматини (11.18) тенгликка қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$A = \frac{F^2 l}{2ES}. \tag{11.19}$$

Агар эластик стержень ўрнига цилиндрик винт пружинага эга бўлсак ва унинг чўзилишини (сиқилишини) текширсак, у ҳолда

$$A = \frac{F}{2}x, \tag{11.20}$$

бунда x — пружинанинг чўзилиш ёки сиқилиш катталиги (пружинанинг ўтириши) метрларда.

Гук қонунига асосан пружина учун

$$F = kx, \tag{11.21}$$

яъни пружинанинг сиқилиши унга таъсир этаётган кучга тўғри пропорционал.

Агар F ньютонларда, x метрларда олинган бўлса, у ҳолда k (пружинанинг қаттиқлиги) Н/м билан ифодаланади:

$$k = \frac{F}{x}. \tag{11.22}$$

F нинг (11.21) даги қийматини (11.20) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$A = \frac{kx^2}{2}. \tag{11.23}$$

Пружинани x_1 ва x_2 қадар сиқиш учун A_1 ва A_2 иш сарфланган бўлсин, у ҳолда (11.23) формула бўйича,

$$A_1 = \frac{kx_1^2}{2} \text{ ва } A_2 = \frac{kx_2^2}{2}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Биринчи тенгликни иккинчисига бўлиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{x_1^2}{x_2^2}, \qquad (11.24)$$

яъни пружинани сиқиш учун бажарилган ишларнинг нисбати шу пружинанинг сиқилиш квадратларининг нисбатига тенг.

1426. Винт пружинанинг x сиқилиши пружинага қўйилган F кучга пропорционал. Агар пружинани 0,01 м сиқиш учун 10 Н куч керак бўлса, пружинани 0,04 м сиқиш учун керак бўладиган F куч бажарган ишни ҳисобланг.

Ечилиши. *1-усул.* $F = 10$ Н бўлганда $x = 0{,}01$ м. (11.21) формула бўйича k ни топамиз: $10 = k\,0{,}01$, бундан $k = 1000$ Н/м. k нинг топилган қийматини (11.21) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз: $F = 1000x$, яъни $f(x) = 1000x$.

Интеграллаш чегараларини 0 дан 0,04 гача олиб (11.13) формула бўйича ишни ҳисоблаймиз:

$$A = \int_0^{0,04} 1000x\,dx = 1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,04} = 0{,}8 \text{ (Ж)}.$$

2-усул. Пружинанинг сиқилиши ва бу сиқилишни вужудга келтирувчи куч чизиқли боғланган. 10 Н куч 0,01 м сиқилишни келтириб чиқаради. F куч 0,04 м сиқилишни вужудга келтиради. Ушбу пропорцияга эгамиз.

$$\frac{10}{F} = \frac{0{,}01}{0{,}04},$$

бундан

$$F = \frac{10 \cdot 0{,}04}{0{,}01} = 40 \text{ (Н)}.$$

(11.20) формула бўйича пружинани сиқишда бажарилган ишни топамиз:

$$A = \frac{Fx}{2} = \frac{40 \cdot 0{,}04}{2} = 0{,}8 \text{ (Ж)}.$$

1427. Агар пружинани 0,01 м сиқиш учун 20 Н куч керак бўлса, пружинани 0,06 м га сиқиш учун бажариладиган ишни ҳисобланг.

1428. Пружина 60 Н куч таъсирида 0,02 м чўзилади. Бу куч пружинани 0,12 м чўзганда қанча иш бажаради?

Ечилиши: *1-усул.* $F_r = 60$ Н бўлганда $x = 0,02$ м. (11.21) формула бўйича k ни топамиз: $60 = k \cdot 0,02$, бундан $k = \frac{60}{0,02} = 3000$ (Н/м). k нинг топилган қийматини (11.21) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз: $F_r = 3000x$, яъни $f(x) = 3000x$. Интеграллаш чегараларини 0 дан 0,12 гача олиб, (11.13) формула бўйича ишни ҳисоблаймиз.

$$A = \int_0^{0,12} 3000x\,dx = 3000 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,12} = 1500 \cdot 0,0144 = 21,6 \text{ (Ж)}.$$

2-усул. 60 Н куч 0,02 м чўзилишни, F куч 0,12 м чўзилишни вужудга келтиради.

$$\frac{60}{F} = \frac{0,02}{0,12} \text{ пропорцияга эгамиз.}$$

бундан $F = \frac{60 \cdot 0,12}{0,12} = 360$ Н, (11.20) формула бўйича пружинани чўзишда бажарилган ишни топамиз:

$$A = \frac{Fx}{2} = \frac{360 \cdot 0,12}{2} = 21,6 \text{ (Ж)}.$$

1429. Пружина 100 Н куч таъсирида 0,02 м чўзилади. Куч пружинани 0,1 м чўзганда қанча иш бажаради?

1430. 80 Н куч пружинани 0,02 м чўзади. Пружинанинг дастлабки узунлиги 0,15 м. Пружинани 0,2 м гача чўзиш учун қанча иш бажариш керак.

Ечилиши. *1-усул.* (11.21) формула бўйича k ни топамиз: $80 = k \cdot 0,02$, бундан $k = \frac{80}{0,02} = 4000$ (Н/м). k нинг топилган қийматини (11.21) формулага қўйиб, $F = 4000\,x$ ни ҳосил қиламиз, яъни $f(x) = 4000x$.

Интеграллаш чегараларини 0 дан 0,05 гача олиб, (11.13) формулани қўлланамиз, чунки 0,2—0,15 = 0,05 м.

$$A = \int_0^{0,05} 4000x\,dx = 4000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 2000 \cdot 0,0025 = 5 \text{ (Ж)}.$$

2-усул. 80 Н куч пружинани 0,02 м чўзади, F куч пружинани 0,05 м чўзади, чунки $0{,}2-0{,}15=0{,}05$ (м). Қуйидаги пропорцияга эгамиз:

$$\frac{80}{F}=\frac{0{,}02}{0{,}05}.$$

Бундан

$$F=\frac{80\cdot 0{,}05}{0{,}02}=200\ (\text{Н}).$$

(11.20) формула бўйича топамиз:

$$A=\frac{200\cdot 0{,}05}{2}=5\ (\text{Ж}).$$

1431. 40 Н куч пружинани 0,01 м чўзади. Пружинанинг дастлабки узунлиги 0,18 м. Пружинани 0,24 м чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

1432. Пружинани 0,04 м сиқиш учун 20 Ж иш бажарилади. Пружинани 0,1 м сиқиш учун қанча иш бажариш зарур?

Ечилиши. *1-усул.* Пружинанинг 0,04 м сиқилиш узунлигига ва бажарилган ишга мувофиқ (11.13) формула бўйича топамиз:

$$20=\int_0^{0,04} kx\,dx=k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,04}=0{,}0008k,$$

бундан

$$k=\frac{20}{0{,}0008}=25000\ (\text{Н/м}).$$

Энди шу формуланинг ўзи бўйича A ни ҳисоблаймиз:

$$A=\int_0^{0,1} 25000\,x\,dx=25000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,1}=25000\cdot\frac{0{,}01}{2}=125\ (\text{Ж}).$$

2-усул. (11.20) формула бўйича топамиз:

$$F=\frac{2A}{x}=\frac{2{,}20}{0{,}04}=1000\ (\text{Н}).$$

1000 Н куч пружинани 0,04 м сиқади. F куч пружинани 0,1 м сиқади. Ушбу пропорцияни тузамиз:

$$\frac{1000}{F}=\frac{0{,}04}{0{,}1},$$

бундан

$$F = \frac{1000 \cdot 0,1}{0,1} = 2500 \text{ (Н)}.$$

(11.20) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$A = \frac{Fx}{2} = \frac{2500 \cdot 0,1}{2} = 125 \text{ (Ж)}$$

1433. Пружина 0,05 м сиқилганда 30 Ж иш бажарилади. Пружинани 0,08 м сиқиш учун қанча иш бажариш зарур?

1434. Пружинани 0,04 м чўзиш учун 20 Ж иш бажариш керак. 80 Ж иш бажариб пружинани қандай узунликка чўзиш мумкин?

Ечилиши. *1-усул.* Пружинанинг 0,04 м чўзилиш узунлигига қараб ва бажарилган 20 Ж ишга қараб (11.13) формула бўйича k ни топамиз:

$$20 = \int_0^{0,04} kx\,dx = k\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,04} = k\,\frac{0,0016}{2} = 0,0008\,k,$$

бундан

$$k = \frac{20}{0,0008} = 25000 \text{ (Н/м)},$$

k ва A га кўра x_1 ни топамиз:

$$A = \int_0^{x_1} kx\,dx,$$

бу ерда x_1 — пружинанинг 80 Ж иш бажарилганда чўзилган узунлиги:

$$80 = \int_0^{x_1} 25000\,x\,dx = 25000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_1} = 12500\,x_1^2$$

бундан

$$x_1^2 = \frac{80}{12500} = \frac{16}{2500}; \quad x_1 = \frac{4}{50} = 0,08 \text{ (м)}.$$

2-усул. Ушбулар берилган: $A_1 = 80$ Ж, $A_2 = 20$ Ж, $x_2 = 0,04$ м. (11.24) формулани қўлланамиз:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{x_1^2}{x_2^2}, \quad \frac{80}{20} = \frac{x_1^2}{(0,04)^2},$$

бундан

$$x_1 = \sqrt{\frac{80\cdot(0,04)^2}{2}} = 2\cdot 0,04 = 0,08 \text{ (м)}.$$

1435. Пружинани 0,02 м сиқиш учун 16 Ж иш бажариш зарур. 100 Ж иш бажариб, пружинани қандай узунликка сиқиш мумкин?

1436. Пружинанинг тинч ҳолатидаги узунлиги 0,2 м га тенг. 50 Н куч уни 0,01 м чўзади. Пружинани 0,22 м дан 0,32 м га чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

Ечилиши. (11.21) формула бўйича k ни топамиз: $50\,k = 0,01$, бундан $k = 5000$ Н/м. Интеграллаш чегаралари: $x_к = 0,22 - 0,2 = 0,02$ (м), $x_ю = 0,32 - 0,2 = 0,12$ (м).

(11.13) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A = \int\limits_{0,02}^{0,12} 5000\, x dx = 5000\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,02}^{0,12} = 2500\,(0,0144 - 0,0004) =$$

$$= 2500\cdot 0,014 = 35 \text{ (Ж)}.$$

1437. Пружинанинг тинч ҳолатидаги узунлиги 0,1 м га тенг. 20 Н куч уни 0,01 м чўзади. Пружинани 0,12 м узунликдан 0,14 м узунликка чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

1438. Цилиндрнинг ичига атмосфера ҳавоси қамалган, унинг ҳажми $V_1 = 0,4$ м^3. Цилиндр зичлиги камроқ муҳитда турибди, шунинг учун цилиндр ичидаги ҳаво кенгайиб поршенни итариб чиқаради. Ҳавонинг $V_2 = 0,8$ м^3 ҳажмгача кенгайишида бажарган ишини ҳисобланг (ҳаво температураси бир хил сақланади).

I схема бўйича ечилиши. Ёпиқ идишдаги газнинг ҳажми ва у ўзгармас температурада ҳосил қилган босими p Бойль—Мариотт формуласи билан боғланган:

$$pV = k = \text{const}. \qquad (1)$$

Поршенга бўлган босим кучи у итарилиб чиқа борган сари ўзгара боради.

Поршеннинг ҳаракат йўли x бўлсин. x йўлни n та тенг бўлакка бўлиб, $\frac{x}{n} = \Delta x$ ни ҳосил қиламиз.

Δx жуда кичик бўлгани учун Δx кесмаларнинг ҳар бирида ҳавонинг босимини ўзгармас ва Δx кесманинг биридан иккинчисига сакраб-сакраб ўзгаради деб ҳисоблаймиз. Баландлиги Δx ва поршень асосининг юзи S бўлган цилиндрнинг ҳажми

$$\Delta V = S\Delta x.$$

Δx кесмада босим кучи бажарган элементар иш тақрибан

$$\Delta A \approx pS\Delta x \qquad (2)$$

га тенг, бунда p — бирлик юзга тўғри келган ҳаво босими.

(1) формуладан: $p = \frac{k}{V}$, p нинг қийматини (2) тенгликка қўйиб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\Delta A \approx \frac{k}{V} S\Delta x = \frac{k}{V}\Delta V = k\frac{\Delta V}{V}.$$

Исталган Δx участкадаги ΔA элементар ишнинг ифодасини ҳосил қилдик; Δx участкаларнинг ҳар бирида ΔA нинг қиймати турлича бўлади.

ΔA элементар ишларни қўшиб, ҳавонинг босими V_1 дан V_2 гача ўзгарганда ҳаво босим кучи ишининг тақрибий катталигини ҳосил қиламиз:

$$A \approx \sum_{V=V_1}^{V_2} \Delta A = \sum_{V=V_1}^{V_2} k\frac{\Delta V}{V}.$$

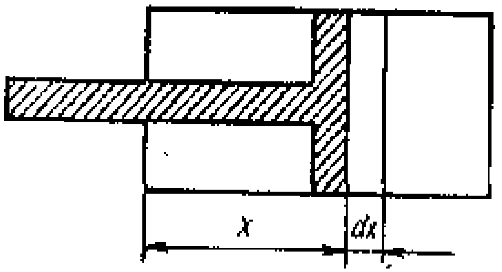
$n \to \infty$ $(\Delta V \to 0)$ бўлганда ушбуга эга бўламиз:

$$A = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{V=V_1}^{V_2} k\frac{\Delta V}{V} = k\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = k\ln V\Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= k(\ln V_2 - \ln V_1) = k\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (3)$$

k ни ҳисоблаш учун $pV = k$ (1) формулани қўлланамиз. Бошланғич моментда ҳавонинг ҳажми $V_1 = 0,4$ м³ ва унинг босими $p = 101325$ Н/м² ни нормал ҳисоблаб ва бу қийматни (1) формулага қўйиб ушбуни ҳосил қиламиз: $k = 101325 \cdot 0,4 = 40530$. k, V_1 ва V_2 нинг қийматларини (3) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$A = 40530 \ln\frac{0,8}{0,4} = 40530 \ln 2 = 40530 \cdot 0,6931 \approx 28091,3 \text{ (Ж)}.$$



167- расм.

II схема бўйича ечилиши. Поршеннинг ҳаракат йўли x га тенг бўлсин (167- расм). x кичик dx миқдорга ўзгарганда поршенга бўлган босим ўзгармас бўлади, деймиз, бунда V ҳажм ΔV миқдорга ўзгаради. Босим кучи Δx кесмада бажарган ΔA иш тақрибан қуйидагига тенг бўлади: $\Delta A \approx pSdx$, аммо $p = \frac{k}{V}$ ва $Sdx = \Delta V$, у ҳолда $\Delta A \approx \frac{k}{V} \Delta V = k \frac{\Delta V}{V}$.

ΔV ва ΔA орттирмаларни dV ва dA дифференциаллар билан алмаштириб (яъни орттирманинг бош қисмини олиб), бундай ёзамиз:

$$dA = k \frac{dV}{V}.$$

Бу тенгликни интеграллаб топамиз:

$$A = k \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Бундан кейинги ҳисоблашлар аввалги мисолдагидек бажарилади.

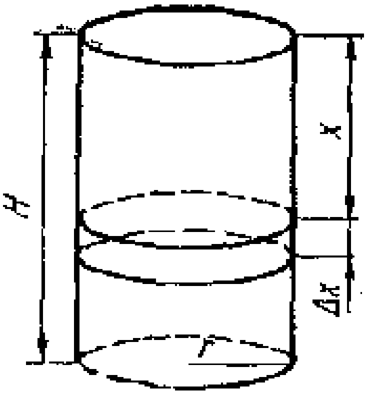
1439. Цилиндр шаклидаги идишда ҳажми 0,2 м^3 бўлган атмосфера ҳавоси бор. Шу ҳавони 0,05 м^3 ҳажмгача сиқиш учун қандай иш бажариш керак? Ҳаво температураси ўзгармас қилиб турилади.

75-§. Юк кўтаришда бажарилган иш

Юкни бирор баландликка кўтаришда бажарилган иш ньютон (Н) ҳисобида ифодаланган оғирлик кучининг метр (м) ҳисобида ифодаланган кўтарилиш баландлигига кўпайтирилганига тенг. Иш жоуль (Ж) ҳисобида ўлчанади.

1440. Асосининг радиуси 0,5 м ва баландлиги 2 м бўлган цилиндрик цистерна сув билан тўлдирилган. Цистернадан сувни тортиб чиқариш учун зарур бўладиган ишни ҳисобланг.

I схема бўйича ечилиши. Цистернадан сувни чиқариб ташлашда бажариладиган ишни ҳисоблашда сувнинг ҳаммаси бирданига кўтарилиб чиқмасдан, балки қисман кўтарилишини, яъни сувнинг кўтарилиш баландлиги ўзгарувчи бўлишлигини назарда тутиш керак.



168- расм.

Цилиндрнинг H баландлигини n та тенг бўлакка бўлиб, сувнинг элементар қатламининг $\frac{H}{n} = \Delta x$ қалинлигини ҳосил қиламиз. Қаралаётган қатлам x чуқурликда бўлсин (168- расм). Сув қатламининг ҳажмини ΔV билан белгилаймиз. Элементар ҳажм қуйидагича бўлади: $\Delta V = \pi r^2 \Delta x$. ΔV ҳажмдаги сув қатламининг ньютон ҳисобидаги Δp оғирлиги (сувнинг зичлиги 1000 кг/м³, шунинг учун 1 м³ ҳажмдаги сувнинг оғирлиги: 9,807·1000 = 9807 Н), қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta P = 9807\,\pi r^2 \Delta x.$$

Қаралаётган қатламдан сувни чиқариб ташлаш учун уни x баландликка кўтариш лозим. ΔV сувни x баландликка кўтаришда бажарилган иш:

$$\Delta A = \Delta P x = 9807\,\pi r^2 x \Delta x.$$

Сувнинг ҳар бир қатламини кўтаришдаги иш шу тенглик билан ифодаланади. x қатламларнинг ҳар бири учун x катталик 0 дан H гача чегарада ўз қийматларига эга бўлади. Элементар ΔA ишларни қўшиб, ҳамма сувни кўтаришда бажарилган ишнинг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$A \approx \sum_{0}^{A} 9807\ \pi r^2 x \Delta x.$$

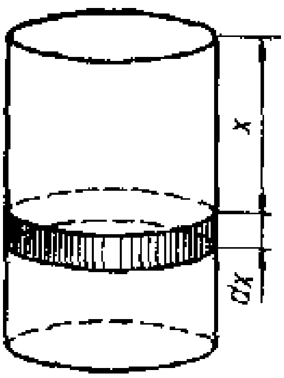
$n \to \infty$ бўлганда ($\Delta x \to 0$) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{0}^{H} 9807\,\pi r^2 x \Delta x = \int_{0}^{H} 9807\,\pi r^2 x\,dx =$$

$$= 9807\,\pi r^2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^H = 9807\pi r^2 \frac{H^2}{2} \approx 4903\pi r^2 H^2,$$

r ва H нинг сон қийматларини қўйиб, топамиз:

$$A = 4903\,\pi \cdot 0{,}25 \cdot 2^2 = 4903\pi\ (Ж).$$



169- расм.

II схема бўйича ечилиши. чуқурликда dx баландликдаги горизонтал қатлам ажратамиз (169- расм). P оғирликдаги сув қатламини кўтаришда бажариладиган A иш қатламни кўтариш баландлиги x га боғлиқ, яъни $A = Px$.

x чуқурликнинг жуда кичик dx миқдорга (катталикка) ўзгариши V ҳажмнинг $\Delta V = \pi r^2 \Delta x$ миқдорга ва P оғирликнинг $\Delta P = 9807\pi r^2 \Delta x$ миқдорга ўзгаришига сабаб бўлади, бунинг натижасида бажарилган A иш $dA = 9807\pi r^2 x\,dx$ миқдорга ўзгаради.

x нинг 0 дан H гача ўзгаришида бу тенгликни интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903\pi r^2 H^2 =$$

$$= 4903\pi \cdot 0{,}25 \cdot 2^2 = 4903\pi \text{ (Ж)}.$$

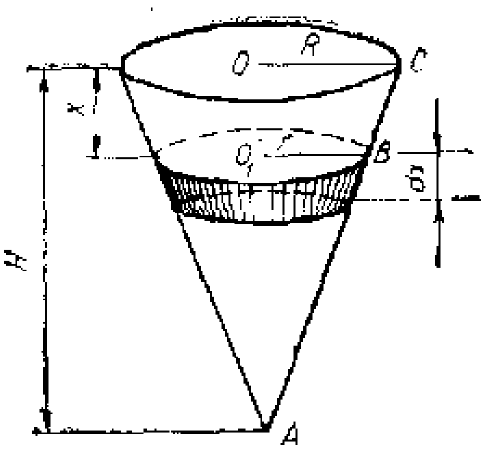
1441. Асосининг радиуси 2 м ва баландлиги 3 м бўлган цилиндрик резервуар сув билан тўлдирилган. Резервуардан сувни насос билан чиқариб ташлаш учун зарур бўлган ишни ҳисобланг.

1442. Учи пастга қараган конус шаклидаги резервуардаги сувни насос билан чиқариб ташлаш учун бажариш зарур бўлган ишни ҳисобланг. Резервуар сув билан тўлатилган. Конус асосининг радиуси $R = 1$ м, баландлиги 2 м.

II Схема бўйича ечилиши. x чуқурликда dx баландликдаги горизонтал қатлам ажратамиз (170- расм). P оғирликдаги сув қатламини кўтаришда бажарилган A иш сувни кўтариш баландлиги x га боғлиқ, x чуқурликнинг кичик dx катталикка (миқдорга) ўзгариши V ҳажмнинг

$$\Delta V = \pi r^2 dx \qquad (1)$$

катталикка ўзгаришига сабаб бўлади (элементар қатламни dx кичик бўлгани учун ци-



170- расм.

линдр деб оламиз, r — қатламнинг радиуси) r ни x ўзгарувчи ва R ҳамда H ўзгармаслар орқали ифодалаймиз. AOC ва AO_1B учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{r}{R}=\frac{H-x}{H},$$

бундан

$$r=\frac{R}{H}(H-x)=R-\frac{R}{H}x. \qquad (2)$$

r нинг ҳосил қилинган тенгликдаги қийматини (1) ифодага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta V=\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2dx.$$

ΔV ҳажмдаги сув қатламининг Δp оғирлиги (сувнинг зичлиги 1000 кг/м^3) қуйидагига тенг:

$$\Delta p=9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2dx.$$

P катталик ΔP катталикка ўзгарганда бажарилаётган A иш қуйидаги катталикка ўзгаради:

$$dA=9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2x\,dx. \qquad (3)$$

(3) тенгликни x нинг 0 дан H гача ўзгаришида интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A=\int_0^H 9807\pi\left(R-\frac{R}{H}x\right)^2x\,dx=\int_0^H 9807\pi R^2\left(x-\frac{2x^2}{H}+\frac{x^3}{H^2}\right)dx=$$

$$=9807\pi R^2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3H}+\frac{x^4}{4H^2}\right)\Big|_0^H=\frac{9807}{12}\pi R^2H^2.$$

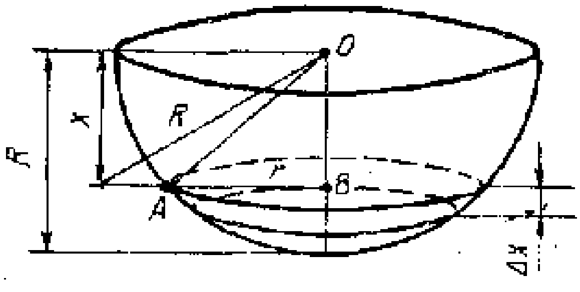
R ва H нинг сон қийматларини қўйиб, топамиз:

$$A=9807\pi\cdot1^2\cdot\frac{2^2}{12}=3269\pi\ (Ж).$$

1443. Баландлиги $H=1$ м, асосининг радиуси $R=2$ м бўлган конус шаклидаги чуқурдан (конуснинг учи чуқурнинг тубида) сувни чиқариб ташлаш учун керак бўлган ишни ҳисобланг.

1444. Радиуси R бўлган ярим шар шаклидаги қозон сув билан тўлдирилган. Шу қозондан сувни чиқариб ташлаш учун қандай иш бажариш керак?

I *схема бўйича ечилиши.* *Қозоннинг R баландлигини n та тенг бўлакка бўлиб,* элементар қатламнинг



171- расм.

қалинлигини ҳосил қил миз: $\frac{R}{n} = \Delta x$. Қаралаётга қатлам x чуқурликда ётга бўлсин (171- расм). Элемен тар қатламнинг радиуси r ни ΔOAB дан топамиз: $r^2 = R^2 - x^2$. Қатламни r радиусли цилиндр деб олиб, элементар ҳажмни ҳосил қиламиз:

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta x = \pi (R^2 - x^2) \Delta x.$$

ΔV ҳажмдаги сув қатламининг Δp оғирлиги (сувнинг зичлиги 1000 кг/м^3) бундай бўлади:

$$\Delta P = 9807\pi (R^2 - x^2)\, \Delta x$$

ΔV ҳажмдаги сув қатламини кўтаришда бажарилган элементар иш:

$$\Delta A = \Delta p x = 9807\, \pi (R^2 - x^2)\, x \Delta x$$

Ҳамма элементар ишлар йиғиндиси қуйидагига тенг:

$$A \approx \sum_{0}^{R} 9807\pi (R^2 - x^2)\, x \Delta x.$$

$n \to \infty$ бўлганда ($\Delta x \to 0$) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{0}^{R} 9807\pi\, (R^2 - x^2) x \Delta x = \int_{0}^{R} 9807\pi\, (R^2 - x^2)\, x\, dx =$$

$$= 9807\pi \left(\frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_{0}^{R} = 9807\pi \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \approx 2452\pi R^4 \text{ (Ж)}.$$

1445. Радиуси $R = 1$ м бўлган ярим шар шаклидаги қозонни тўлдириб турган сувни чиқариб ташлаш учун қандай иш бажариш кераклигини ҳисобланг.

76- §. Суюқликнинг босими

Горизонтал майдончага суюқликнинг берадиган босим кучи P нинг катталиги шу майдончанинг ботиш чуқурлиги x га боғлиқ, яъни майдончадан сув сиртигача бўлган масофага боғлиқ.

Горизонтал майдончага босим кучи ньютон ҳисобида ушбу формула билан ҳисобланади:

$$P = 9{,}807 \delta S x,$$

бунда δ — суюқликнинг зичлиги, кг/м^3 ҳисобида;

S — майдончанинг юзи, м^2 ҳисобида;

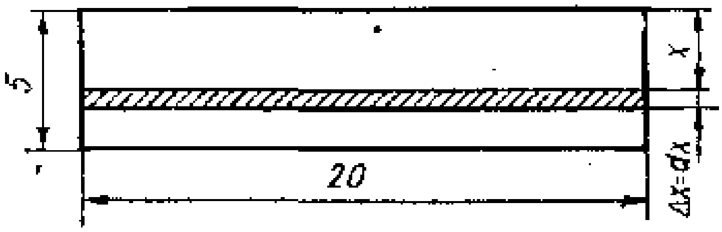
x — майдончанинг ботиш чуқурлиги, метр ҳисобида.

Агар сувнинг босим кучи таъсир қилаётган майдонча горизонтал бўлмаса, у ҳолда унга бериладиган босим турлича чуқурликларда турлича, демак, майдончага бўладиган босим кучи ботиш чуқурлигининг $P(x)$ функциясидир.

1446. Сувнинг, асоси 20 м ва баландлиги 5 м бўлган тўғри тўрт бурчакли вертикал шлюзга берган босим кучини ҳисобланг (сувнинг сатҳи шлюзнинг юқори кесиги билан бир хил баландликда).

I схема бўйича ечилиши. Шлюз деворини унинг H баландлиги бўйича n та горизонтал полоскаларга бўламиз (172-расм) ва x чуқурликда улардан бирини ажратамиз, $\frac{H}{n} = \Delta x$ бўлсин, у ҳолда полосканинг юзи:

$$\Delta S = 20\Delta x.$$



172- расм.

Паскаль қонунига кўра суюқликнинг босими ҳамма томонга бир хил куч билан босади, шунинг учун бутун полоскага бўлган босим кучи ΔP сув устунининг оғирлигига тенг бўлиб, бу сув устунининг асоси ўша полоскадан иборат, баландлиги x чуқурликка тенг. Δx жуда кичик бўлгани учун полосканинг барча нуқталари x чуқурликда турибди деб ҳисоблаймиз.

Сувнинг ΔS полоскага берган босим кучи ΔP ни (ньютон ҳисобида) топамиз:

$$\Delta P = 9{,}807\delta x\Delta S = 9807x\cdot 20\Delta x = 9807\cdot 20x\Delta x,$$

бунда $\delta = 1000$ кг/м^3 (сувнинг зичлиги).

Ҳар бир полоска унинг x чуқурлигига қараб турлича босим кучини ўзида сезади. Элементар ΔP босим кучларини қўшиб, шлюзга таъсир қилаётган P босим кучининг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$P \approx \sum_{0}^{5} 9807\cdot 20x\Delta x.$$

$n \to \infty$ бўлганда ($\Delta x \to 0$) ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{0}^{5} 9807\cdot 20x\Delta x = 9807\cdot 20\int_{0}^{5} x\,dx =$$

$$= 9807\cdot 10x^2\Big|_0^5 = 98070\cdot 25 = 2\,451\,750 = 2{,}45 \text{ (МН)}.$$

II схема бўйича ечилиши. x чуқурликда эни dx бўлган горизонтал полоска ажратамиз (172- расм). Сувнинг шлюз деворига берган P босим кучи x нинг функцияси бўлади. x чуқурликни жуда кичик ΔP катталикка ўзгариши P босим кучининг жуда кичик dP катталикка ўзгаришига сабаб бўлади. P ўзгарувчини дифференциаллаб, ΔP орттирманинг тақрибий қиймати dP ни (ΔP нинг бош қисмини) топамиз.

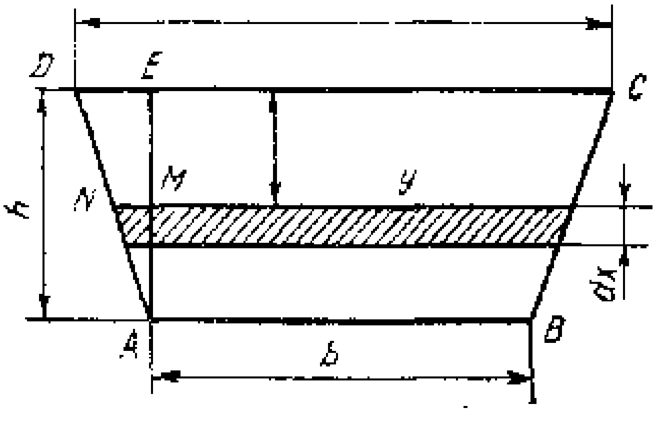
Сувнинг шу текисликка берган босим кучининг тақрибий катталиги I схемадагидек ифода қилинади:

$$\Delta P \approx dP = 9807\cdot 20x\,dx.$$

x нинг 0 дан 5 гача ўзгаришида dP ни интеграллаб, топамиз:

$$P = 9807\cdot 20\int_{0}^{5} x\,dx = 9807\cdot 10x^2\Bigg|_0^5 = 2{,}45, \qquad \text{(МН)}.$$

1447. Асоси 2 м ва баландлиги 4 м бўлган тўғри бурчакли вертикал деворга таъсир қиладиган сувнинг босим кучини ҳисобланг. Сувнинг сатҳи деворнинг устки кесиги билан устма-уст тушади.



173- расм.

1448. Устки асоси a ва остки асоси b ($a > b$), баландлиги h бўлган тенг ёнли трапеция шаклидаги вертикал тўғонга таъсир қилаётган сувнинг босим кучини ҳисобланг.

Ечилиши. Штрихланган полоска x чуқурликда жойлашган бўлиб (173-расм), y ва dx ўлчамларга эга бўлсин. Сувнинг шу полоскага бўлган босим кучи:

$$\Delta P \approx x\,y dx = dp$$

y ўзгарувчини x орқали ва трапециянинг a, b ва h ўлчамларини x орқали ифодалаймиз. ADE ва ANM учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{DE}{NM} = \frac{AE}{MA},$$

аммо

$$DE = \frac{a-b}{2},\ NM = \frac{y-b}{2},\ AE = h \text{ ва } MA = h - x.$$

Бу қийматларни пропорцияга қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{a-b}{y-b} = \frac{h}{h-x},$$

бундан

$$y = a - \frac{a-b}{h}x.$$

У ҳолда

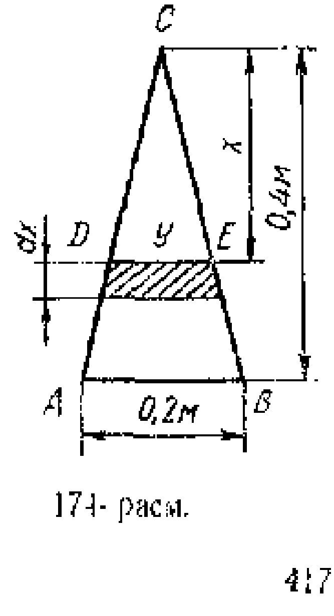
$$dP = x\left(a - \frac{a-b}{h}x\right)dx.$$

x нинг 0 дан h гача ўзгаришида dP ни интеграллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P = \int_0^h \left(ax + \frac{a-b}{h}x^2\right) dx = \left|\frac{ax^2}{3} - \frac{a-b}{3h}x^3\right|\Bigg|^h = \frac{h^2(a+2b)}{6}.$$

1449. Сувнинг тенг ёнли трапеция шаклига эга бўлган вертикал деворга бўлган босим кучини ҳисобланг. Трапеция шаклидаги деворнинг устки (юқори) асоси сув сатҳи билан бир хил бўлиб, унинг ўлчами 4,5 м, остки асоси эса 3 м, баландлиги 2 м.

1450. Асоси 0,2 м ва баландлиги 0,4 м бўлган уч бурчакли пластинка сувга вертикал равишда шундай ботирилганки, унинг учи сув сиртида (юзида) ётади, асоси эса унга параллел.



174- расм.

Сувнинг пластинкага берадиган босим кучини ҳисобланг.

II схема бўйича ечилиши. x чуқурликда эни dx бўлган горизонтал полоскани ажратамиз (174-расм). x чуқурликнинг кичик dx катталикка ўзгариши P босим кучини кичик dP катталикка ўзгаришига сабаб бўлади. Полосканинг юзини ҳисоблаймиз: $\Delta S = ydx\cdot ABC$ ва DEC учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{y}{0,2}=\frac{x}{0,4},$$

бундан

$$y=\frac{1}{2}x,$$

У ҳолда

$$\Delta S=\frac{1}{2}x\,dx.$$

Элементар босим кучи, Ньютон ҳисобида қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta P = 9,807\delta x\Delta S = 9807x\cdot\frac{1}{2}x\,dx = 4903,5\ x^2dx.$$

x нинг 0 дан 0,4 гача ўзгаришида, dP ни интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P = 4903,5\int_0^{0,4} x^2dx = 4903,5\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,4} = 1634,5(0,4)^3\approx 104,6\ (\text{Н}).$$

1451. Асоси 0,4 м ва баландлиги 0,6 м бўлган уч бурчакли пластинка сувга вертикал қилиб шундай ботирилганки, унинг асоси сув сиртида ётади. Сувнинг пластинкага бўлган босим кучини ҳисобланг.

1452. Цилиндрик стакан ёғ билан тўлдирилган. Агар стаканнинг баландлиги $h = 0,08$ м, асосининг радиуси $r = 0,04$ м бўлса, ёғнинг стаканнинг ён сиртига берган босим кучини ҳисобланг. Ёғнинг зичлиги 900 кг/м^3.

II схема бўйича ечилиши. x чуқурликда эни dx бўлган доиравий горизонтал полоскани ажратамиз. x чуқурлик кичик dx катталикка ўзгарса, P босим кучи ҳам кичик dP катталикка ўзгаради,

Доиравий полосканинг ΔS юзини ҳисоблаймиз:

$$\Delta S = 2\pi r\,dx = 2\pi\,0,04dx = 0,08\,\pi\,dx.$$

ΔS полоскага таъсир қилаётган элементар босим кучини ньютон ҳисобида топамиз:

$$dP = 9,807\delta x\Delta S = 9,807\cdot 900x\cdot 0,08\pi\,dx \approx 2220x\,dx.$$

x нинг 0 дан 0,08 гача ўзгаришида dP ни интеграллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P = 2220\int_{0}^{0,08} x\,dx = 1110x^2\Big|_{0}^{0,08} = 1110\cdot 0,0064 = 7,1(\text{Н}).$$

1453. Цилиндрик стакан симоб билан тўлдирилган. Агар стаканнинг баландлиги 0,1 м ва асосининг радиуси 0,04 м бўлса, симобнинг стаканнинг ён сиртига берган босим кучини ҳисобланг. Симобнинг зичлиги 13600 кг/м³.

77-§. Ясси эгри чизиқ ёйининг оғирлик маркази ва ясси фигуранинг оғирлик маркази

Ясси (бир жинсли) эгри чизиқ ёйи оғирлик марказининг координаталари ушбу формулалар бўйича топилади:

$$x_C = \frac{S_y}{l}; \tag{11.25}$$

$$y_C = \frac{S_x}{l}; \tag{11.26}$$

бу ерда x_C ва y_C—ёйнинг оғирлик маркази координаталари; S_x ва S_y—бу ёйнинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари; l — эгри чизиқ ёйининг узунлиги.

Ёйнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлари қуйидаги ифодалардан топилади:

$$S_x = \int_{A}^{B} y\,dl\,(\text{см}^2);, \tag{11.27}$$

$$S_y = \int_{A}^{B} x\,dl\,(\text{см}^2). \tag{11.28}$$

бу ерда dl — эгри чизиқнинг элементар ёйи (ёйнинг дифференциали); x ва y — элементар ёй оғирлик марказининг координаталари; A ва B—эркли ўзгарувчининг интеграллаш чегаралари (ораларида интеграллаш содир бўладиган нуқталар).

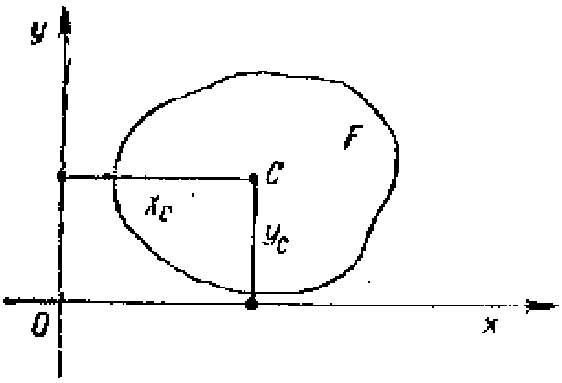
Ясси (бир жинсли) фигура оғирлик марказининг координаталари шунга ўхшаш қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \tag{11.29}$$

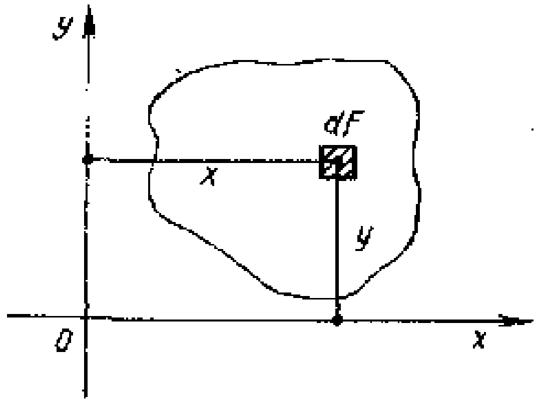
$$y_C = \frac{S_x}{F}, \tag{11.30}$$

бу ерда F — фигуранинг юзи (175-расм).

Фигура юзининг Ox ва Oy ўқига нисбатан статик моментлари ушбу формулалар бўйича топилади:



175-расм.



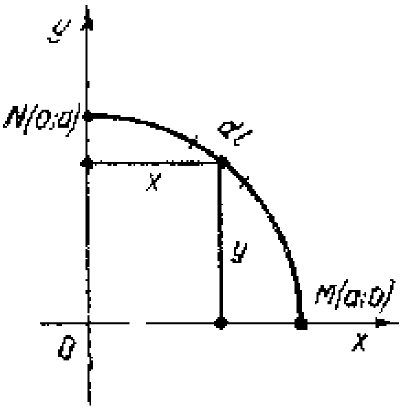
176-расм.

$$S_x = \int_A^B y dF \text{ (см}^3\text{)}; \qquad (11.31)$$

$$S_y = \int_A^B x dF \text{ (см}^3\text{)}. \qquad (11.32)$$

(11.31) ва (11.32) формулалардаги интеграл остидаги ифода dF элементар юзнинг dF юз оғирлик марказининг тегишли координатасига кўпайтмасидир (176-расм).

1. Ясси (бир жинсли) эгри чизиқ ёйининг оғирлик марказини ҳисоблаш



177-расм.

1454. $M(a;\ 0)$ ва $N(0;\ a)$ нуқталар билан чегараланган $x^2+y^2=a^2$ айлана ёйининг оғирлик марказини топинг.

Ечилиши. $(x;\ y)$ dl ёй оғирлик марказининг координаталари бўлсин (177-расм). Ёй дифференциали

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

муносабат билан ифодаланиши маълум.

Айлана тенгламасини дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \text{ бундан } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

у ҳолда

$$dl = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\,dx = \frac{a}{y}\,dx.$$

Интеграллаш чегараларини 0 дан a гача олиб, Ox ўққа нисбатан статик моментни (11.27) формула бўйича топамиз:

$$S_x = \int_0^a y\frac{a}{y}\,dx = a\int_0^a dx = ax\Big|_0^a = a^2.$$

Ёйнинг узунлиги айлана узунлигининг тўртдан бир қисмига тенг, шунинг учун $l = \frac{1}{4}\,2\pi a = \frac{\pi a}{2}$, у ҳолда (11.26) формула бўйича топамиз:

$$y_C = \frac{S_x}{l} = \frac{a}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}.$$

Шунга ўхшаш, фигуранинг симметриклиги туфайли, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_C = \frac{2a}{\pi}, \qquad C\left(\frac{2a}{\pi};\ \frac{2a}{\pi}\right).$$

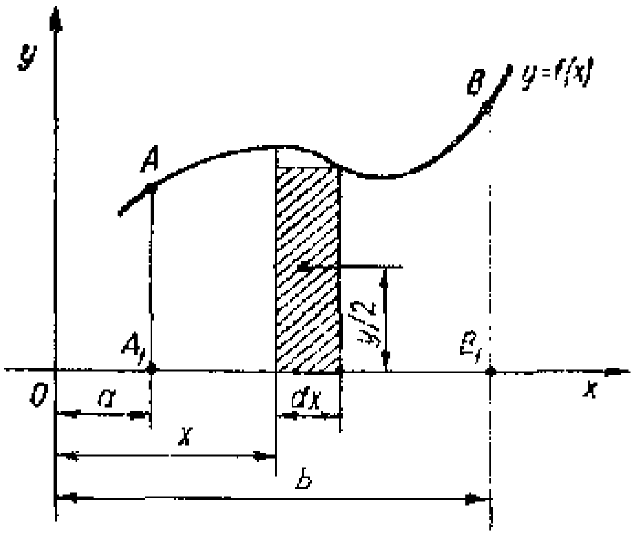
1455. Ox ўқнинг юқорисида жойлашган $x^2 + y^2 = a^2$ ярим айланаларнинг оғирлик марказини топинг.

II. Ясси фигуранинг оғирлик марказини ҳисоблаш

$y = f(x)$ эгри чизиқ ($y > 0$), Ox ўқ ва иккита ордината билан чегараланган ясси фигуранинг (178- расм) статик моментларини ҳамда оғирлик марказини ҳисоблаймиз.

A_1ABB_1 фигуранинг сирт зичлиги, яъни бирлик юзга мос келувчи масса ўзгармас бўлсин. Зичликни бирга тенг қилиб олиб, фигуранинг исталган қисмининг массасини унинг юзи орқали ўлчаймиз.

Шу фигуранинг S_x ва S_y статик моментларини ҳисоблаш учун уни Oy ўққа параллел полоскаларга бўламиз. Полоскалардан бирини ажратиб олиб, уни тақрибан тўғри тўртбурчакка тенг деб қабул қиламиз. Бу полосканинг массаси-



178- расм.

ни юзни ифодалаган сон билан ифода қиламиз. Элементар юз $dF = ydx$ бўлади, бунда y — эгри чизиқ нуқтасининг ординатаси.

dF элементар юзнинг dS_x ва dS_y статик моментларини ҳисоблаш учун биз полосканинг массаси унинг оғирлик марказида тўпланган деб фараз қиламиз (тўғри тўртбурчакнинг марказида). Тўғри тўртбурчакнинг оғирлик маркази $\left(x; \frac{y}{2}\right)$ нуқтада бўлади, бунда x — тўғри тўртбурчак билан Oy ўқ орасидаги масофа (аниқроғи бу масофа $x + \frac{dx}{2}$ бўлади, аммо $\frac{dx}{2}$ миқдор жуда кичик бўлгани учун ҳисобга олмаймиз) ва $\frac{y}{2}$ тўғри тўртбурчак баландлигининг ярми.

dF элементар юзнинг Ox ўққа нисбатан статик моменти юз оғирлик марказининг ординатаси билан элементар юзнинг катталигига кўпайтмасидан иборат:

$$dS_x = \frac{y}{2}y\,dx = \frac{y^2}{2}dx.$$

Элементар юзнинг Oy ўққа нисбатан статик моменти: $dS_y = xy\,dy$. Бу элементар статик моментларни йиғиб қўшамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S_x = \frac{1}{2}\int_A^B y^2dx;$$

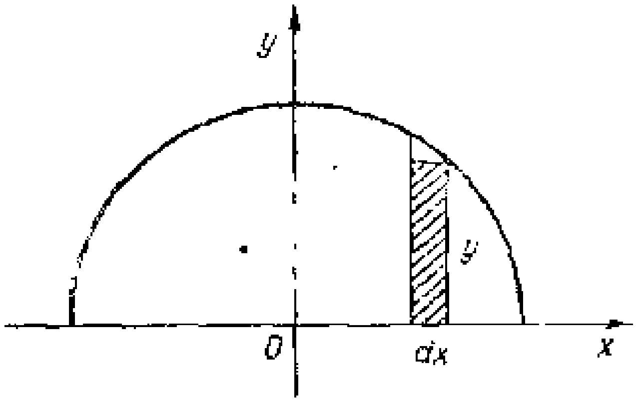
$$S_y=\int_A^B xy\,dy.$$

Оғирлик маркази мос ҳолда (11.29) ва (11.30) формулалардан топилади:

$$x_C=\frac{S_y}{F} \text{ ва } y_C=\frac{S_x}{F} \cdot$$

1456. *Ox* ўқдан юқорида жойлашган $x^2+y^2\leqslant a^2$ ярим доиранинг оғирлик марказини топинг.

Ечилиши. Фигуранинг симметриклиги сабабли оғирлик маркази *Oy* ўқда ётади, демак, $x_C=0$ (179-расм). Ярим доирани *Oy* ўқига параллел бўлган полоскаларга ажратамиз.



179- расм.

dF элементар юз $dF=y\,dx$, бунда y — айлана нуқтасининг ординатаси. Элементар юзнинг оғирлик маркази $\left(x;\ \frac{y}{2}\right)$ нуқтада бўлади.

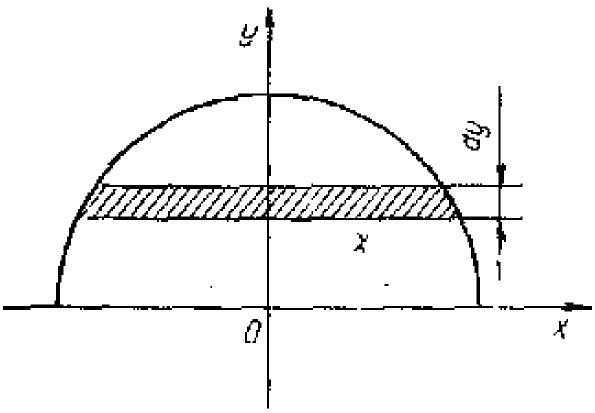
Ox ўққа нисбатан статик моментни (11.31) формуладан топамиз:

$$S_x=\int_{-a}^{a}\frac{y}{2}\,dF=\int_{-a}^{a}\frac{y}{2}\,y\,dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}y^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{2}{3}a^3.$$

Ярим доиранинг юзи $F=\frac{1}{2}\pi a^2$. (11.30) формула бўйича y_C ни топамиз:

$$y_C=\frac{S_x}{F}=\frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{4a}{3\pi},\ C\left(0;\ \frac{4a}{3\pi}\right).$$



180- расм.

Шу масаланинг ўзини юзни Ox ўқига параллел полосқаларга ажратиш йўли билан ҳам ечиш мумкин (180- расм).

dF элементар юз $dF = 2x dy$ бўлади, бунда x — айлана нуқтасининг абсциссаси.

Ox ўққа нисбатан статик моментни (11.31) формула бўйича топамиз:

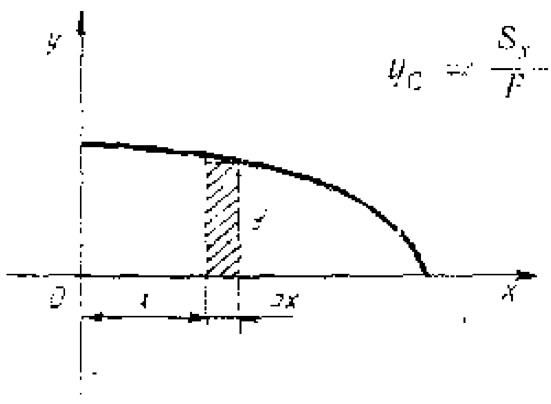
$$S_x = \int_0^a y\,dF = \int_0^a y2x\,dy.$$

$x^2 + y^2 = a^2$ ифодадан $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ ни ҳосил қиламиз, у ҳолда $S_x = 2\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,y dy$. Фараз қилайлик $a^2 - y^2 = z$, у ҳолда $-2y\,dy = dz$, $y\,dy = -\frac{1}{2}dz$. Янги интеграллаш чегараларини топамиз: $z_{қ} = a^2$, $z_{ю} = 0$.

$$S_x = -\int_{a^2}^{0} \sqrt{z}\,dz = \int_0^{a^2} z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a^2} = \frac{2}{3}a^3. \qquad (11.30)$$

Ярим доиранинг юзи $F = \frac{\pi a^2}{2}$ · (11.30) формула бўйича оғирлик маркази координаталарини топамиз:

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi},\ C\left(0;\ \frac{4a}{3\pi}\right).$$



181- расм.

1457. Биринчи чоракда жойлашган $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс юзининг тўртдан бирининг оғирлик марказини топинг.

Ечилиши. Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментларини (11.31) ва (11.32) формулалар бўйича ҳисоблаймиз (181- расм):

$$S_x = \frac{ab^2}{3} \quad \text{ва} \quad S_y = \frac{a^2b}{3}.$$

Эллипснинг тўртдан бир қисмининг юзи $F = \frac{1}{4} ab\pi$ га тенг (1358-масалага қаранг).

(11.29) ва (11.30) формулалар бўйича оғирлик марказининг координаталарини топамиз:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{4b}{3\pi}, \quad C\left(\frac{4a}{3\pi}; \quad \frac{4b}{3\pi}\right).$$

1458. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзнинг оғирлик марказини топинг: 1) $y^2 = 4x$, Ox ўқ, $x = 4$ тўғри чизиқ, 2) абсциссалар ўқи ва $y = 2x - x^2$ парабола.

78-§. Аралаш масалалар

1459. Нуқта ҳаракатининг тезлиги тенгламаси $v = (24t - 6t^2)$ м/сек берилган. Қуйидагиларни топинг: 1) нуқтанинг ҳаракат бошлангандан 3 сек вақт давомида ўтган йўлини; 2) нуқтанинг учинчи секундда ўтган йўлини; 3) нуқтанинг ҳаракат бошлангандан тўхтагунча ўтган йўлини топинг.

1460. Асосининг томони 3 м бўлган квадратдан иборат, баландлиги 2 м бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги резервуар (*идиш*) сув билан тўлдирилган. Резервуардан сувни чиқариб ташлаш учун зарур бўлган ишни ҳисобланг.

1461. Айланма параболоид (учи пастда) шаклидаги қозонга тўлатилган сувни чиқариб ташлаш учун зарур бўладиган ишни ҳисобланг. Қозоннинг чуқурлиги $H = 1$ м, асосининг радиуси $R = 2$ м.

1462. Асосининг томонлари 0,8 м ва 0,5 м, баландлиги 0,3 м бўлган аквариумнинг туби ва деворларига таъсир кўрсатаётган сувнинг босим кучини ҳисобланг. Аквариум сув билан лиммо-лим тўлдирилган.

Контрол иш.

I вариант

1463. 1. Нуқта ҳаракатининг тезлиги тенгламаси $v - (3t^2 - 2t - 3)$ м/сек берилган. Иккинчи секундда нуқта босиб ўтган йўлни топинг.

2. Агар пружинани 0,01 м сиқиш учун 10 Н куч керак бўлса, пружинани 0,06 м сиқишда бажарилган ишни ҳисобланг.

3. Пружинани 0,02 м сиқиш учун 40 Ж ли бажарилган бўлса, шу пружинани 0,04 м сиқишда бажариладиган ишни ҳисобланг.

4. Сув билан лиқ тўлатилган цилиндр шаклидаги резервуардан ($R = 2$ м, $H = 1$ м) сувни чиқариб ташлаш учун бажарилган ишни ҳисобланг.

1 м³ ҳажмдаги сувнинг оғирлиги тақрибан 9807 Н га тенг.

5. Асоси 5 м ва баландлиги 3 м бўлган учбурчак шаклидаги вертикал пластинкага сувнинг берадиган босим кучини ҳисобланг. Сувнинг сатҳи учбурчакнинг баландлиги билан бир хил.

II вариант

1464. 1. Нуқта ҳаракатининг тезлиги тенгламаси $v = (36t - 12t^2)$ м/сек берилган. Нуқтанинг ҳаракат бошланишидан то тўхтагунича ўтган йўлини топинг.

2. Пружинани 0,02 м чўзиш учун 40 Н куч керак бўлса, пружинани 0,05 м чўзишда бажариладиган ишни ҳисобланг.

3. Пружинани 0,03 м чўзиш учун 12 Ж иш бажариш зарур. 48 Ж иш бажариб пружинани қандай узунликка чўзиш мумкин?

4. Сув билан лиқ тўлдирилган тўғри тўртбурчакли параллелепипед шаклидаги (ўлчамлари: асоси 3 м×4 м, баландлиги 2 м) резервуардан сувни чиқариб ташлашда бажарилган ишни ҳисобланг (1 м^3 ҳажмдаги сувнинг оғирлиги тақрибан 9807 Н га тенг).

5. Асоси 6 м ва баландлиги 2 м бўлган учбурчак шаклидаги вертикал пластинкага сувнинг берадиган босим кучини ҳисобланг. Сувнинг сатҳи учбурчакнинг асоси билан бир хил.

12- Б О Б

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

79- §. Ўзгарувчилари ажраладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Эркли ўзгарувчи x ни, изланаётган y функцияни ва унинг ҳосилалари ёки дифференциалларини бир-бири билан боғловчи тенглама дифференциал тенглама дейилади.

Дифференциал тенглама символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$F(x,\ y,\ y') = 0,$$

$$F(x,\ y,\ y'') = 0,$$

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0.$$

Агар изланаётган функция битта эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлса, дифференциал тенглама оддий дифференциал тенглама дейилади.

Берилган тенгламага кирувчи энг юқори тартибли ҳосила (ёки дифференциал)нинг тартиби дифференциал *тенгламанинг тартиби* дейилади.

Дифференциал тенгламанинг (ҳосилалар ёки дифференциалларга нисбатан алгебраик) даражаси деб ундаги энг юқори тартибли ҳосила (ёки дифференциал) даражасига айтилади.

Дифференциал тенгламани айниятга айлантирадиган функция дифференциал тенгламанинг ечими ёки интеграли дейилади.

Дифференциал тенгламанинг умумий ечими ёки интеграли деб, шундай ечимга айтиладики, унга тенгламанинг тартиби қанча бўлса, шунча эркли ихтиёрий ўзгармаслар (доимийлар) киради.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламада битта ихтиёрий ўзгармас бор.

Дифференциал тенгламанинг умумий ечимидан ихтиёрий ўзгармасларнинг турли сон қийматларида ҳосил қилинган ечим дифференциал тенгламанинг хусусий ечими дейилади.

Ихтиёрий ўзгармасларнинг қийматлари аргумент ва функциянинг аниқ бошланғич қийматларида топилади.

Дифференциал тенглама хусусий ечимининг графиги интеграл эгри чизиқ дейилади.

Дифференциал тенгламанинг умумий ечимига ҳамма интеграл эгри чизиқларнинг тўплами (оиласи) мос келади.

Биринчидан юқори тартибли бўлмаган ҳосилалар (ёки дифференциаллар) кирувчи тенглама биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$$

кўринишдаги тенглама ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама дейилади.

Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ечиш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Ўзгарувчилар ажратилади:

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)\,dx.$$

2. Тенгламанинг иккала қисми интегралланади:

$$\int\frac{dx}{\varphi(y)}=\int f(x)\,dx.$$

Тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг ва уларнинг ечимларини текширинг.

1465. $x=2$ бўлганда $y=4$ бўлса, $dy=dx$.

Ечилиши.

$$dy=dx. \qquad (1)$$

1. Тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int dy=\int dx, \qquad y=x+C. \qquad (2)$$

2. Умумий ечимни текшириш. (2) тенгликнинг иккала қисмидан дифференциал олиб, (1) тенгламани ҳосил қиламиз: $dy=dx$.

3. Хусусий ечимни топамиз. Хусусий ечимда ихтиёрий ўзгармас C аниқ сон қийматга эга. Хусусий ечимни топиш учун (2) умумий ечимга $x=2$ ва $y=4$ қийматларни қўямиз:

$$4=2+C, \text{ бундан } C=2.$$

$C=2$ қийматни (2) тенгламага қўйиб, хусусий ечимни ҳосил қиламиз:

$$y=x+2. \qquad (3)$$

4. Хусусий ечимни текшириш. (3) тенгламанинг иккала қисмидан дифференциал олиб, (1) тенгламани ҳосил қиламиз:

$$dy=dx.$$

1466. 1) $t = 1$ бўлганда $s = 5$ бўлса, $ds = dt$; 2) $t = 2$ бўлганда $s = 4$ бўлса, $ds = (3t^2 - 2t)\,dt$.

1467. $3y^2dy = x^2dx$, бунда $x = 3$ бўлганда $y = 1$.

Ечилиши.

$$3y^2dy = x^2dx. \tag{1}$$

1. (1) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$3\int y^2dy = \int x^2dx, \quad y^3 = \frac{x^3}{3} + C. \tag{2}$$

2. Умумий ечимни текшириш. (2) тенгламанинг иккала қисмидан дифференциаллар олиб, (1) тенгламани ҳосил қиламиз: $3y^2dy = x^2dx$.

3. Хусусий ечимни топамиз. (2) тенгламага $x = 3$ ва $y = 1$ қийматларни қўямиз: $1^3 = \frac{3^3}{3} + C$, бундан $C = -8$.

$C = -8$ қийматни (2) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y^3 = \frac{x^3}{3} - 8.$$

4. Хусусий ечимни текшириш умумий ечимни текширишдагидек бажарилади: $3y^2dy = x^2dx$. Айният ҳосил қилдик.

1468. 1) $x = -2$ бўлганда $y = 4$ бўлса, $y\,dy = x\,dx$; 2) $x = 0$ бўлганда $y = 1$ бўлса, $3y^2dy = x\,dx$.

1465—1468-*тенгламалар ўзгарувчилари ажралган тенгламалар* деб аталади.

1469. $x = 2$ бўлганда $y = 6$ бўлса, $x\,dy = y\,dx$.

Ечилиши.

$$x\,dy = y\,dx. \tag{1}$$

1. Ўзгарувчиларни ажратамиз, бунинг учун (1) тенгламанинг иккала қисмини xy кўпайтмага бўламиз:

$$\frac{x\,dy}{xy} = \frac{y\,dx}{xy}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}. \tag{2}$$

2. (2) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \ \ln y = \ln x + \ln C. \tag{3}$$

Ихтиёрий ўзгармас C ҳар қандай қийматларни қабул қилиши мумкин, шунинг учун потенцирлашни осонлаштириш мақсадида C ўрнига $\ln C$ ёзилади.

(3) тенгликни потенцирлаб топамиз:

$$y = Cx. \tag{4}$$

3. Умумий ечимни текшириш. (4) тенгламанинг иккала қисмидан дифференциал олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$dy = Cdx. \tag{5}$$

(5) тенгликдаги dy нинг қийматини ва (4) тенгликдаги y нинг қийматини (1) тенгламага қўйиб, қуйидаги айниятни ҳосил қиламиз:

$$xC\,dx = Cx\,dx. \tag{6}$$

4. Хусусий ечимни топамиз. $x = 2$ ва $y = 6$ қийматларни (4) тенгламага қўямиз: $6 = C \cdot 2$, бундан $C = 3 \cdot C$ нинг топилган қийматини (4) тенгламага қўямиз:

$$y = 3x. \tag{7}$$

5. Хусусий ечимни текшириш. (7) ечимдан қуйидагига эга бўламиз.

$$dy = 3\,dx \tag{8}$$

(8) тенгликдаги dy нинг қийматини ва (7) тенгликдаги y нинг қийматини (1) тенгламага қўйиб, ушбу айниятни ҳосил қиламиз:

$$x \cdot 3\,dx = 3x\,dx.$$

1470. 1) $t = 3$ сек бўлганда $s = 18$ м бўлса, $t\,ds = s\,dt$; 2) $x = 4$ бўлганда $y = 1$ бўлса, $\sqrt{x}\,dy = \sqrt{y}\,dx$.

1471. $x = 1$ бўлганда $y = 9$ бўлса, $\frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{u}}$.

Ечилиши.

$$\frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{3\,dx}{\sqrt{y}}. \tag{1}$$

1. Ўзгарувчиларни ажратамиз, бунинг учун (1) тенгламанинг иккала қисмини $\sqrt{x}\sqrt{y}$ кўпайтмага кўпайтирамиз:

$$\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx \text{ ёки } y^{\frac{1}{2}}dy = 3\,x^{\frac{1}{2}}\,dx. \tag{2}$$

2. (2) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx; \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C. \tag{3}$$

(3) тенгламанинг иккала қисмини $\frac{3}{2}$ га кўпайтириб ва $\frac{3}{2}C = C_1$ деб фараз қилиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + C_1. \tag{4}$$

3. Умумий ечимни текшириш. (4) тенгламанинг иккала қисмидан дифференциал олиб, топамиз:

$$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\,dy = 3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

ёки

$$\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx,$$

ёки

$$\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}.$$

(1) тенгламани ҳосил қиламиз.

4. Хусусий ечимни топамиз. $x = 1$ ва $y = 9$ қийматларни (4) тенгламага қўямиз: $9^{\frac{3}{2}} = 3\cdot 1^{\frac{3}{2}} + C_1$, бундан $C_1 = 24$. C_1нинг қийматини (4) тенгламага қўйиб, топамиз:

$$y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + 24. \tag{5}$$

5. Хусусий ечимни текшириш. (5) тенгламани дифференциаллаб, 3-и дагидек (1) тенгламани ҳосил қиламиз.

1472. $x = 0$ бўлганда $y = 2$ бўлса, $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$. 2) $x = 0$ бўлганда $y = 4$ бўлса, $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$.

1473. $x = 2$ бўлганда $y = 3$ бўлса, $(x-1)\,dy = (y+1)\,dx$.
Ечилиши.

$$(x-1)\,dy = (y+1)\,dx. \tag{1}$$

1. Ўзгарувчиларни ажратамиз, бунинг учун (1) тенгламанинг иккала қисмини $(x-1)(y+1)$ кўпайтмага бўламиз:

$$\frac{(x-1)\,dy}{(x-1)(y+1)} = \frac{(y+1)\,dx}{(x-1)(y+1)} \quad \text{ёки} \quad \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}. \tag{2}$$

2. (2) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{dx}{x-1}; \tag{3}$$

ёки
$$\ln(y+1) = \ln(x-1) + \ln C \qquad (4)$$
$$\ln(y+1) = \ln[C(x-1)], \qquad (5)$$
бундан
$$y+1 = C(x-1) \text{ ёки } y = C(x-1) - 1. \qquad (6)$$

3. Умумий ечимни текшириш. (6) тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаймиз:
$$dy = Cdx. \qquad (7)$$

(7) тенгликдаги dy нинг қийматини ва (6) тенгликдаги y нинг қийматини (1) тенгламага қўйиб, ушбу айниятни ҳосил қиламиз:
$$(x-1)Cdx = [C(x-1) - 1 + 1]\,dx,$$
$$(x-1)Cdx = (x-1)Cdx. \qquad (8)$$

4. Хусусий ечимни топамиз. $x = 2$ ва $y = 3$ қийматларни (6) тенгламага қўямиз: $3 = C(2-1) - 1$, бундан $C = 4$. $C = 4$ қийматни (6) тенгламага қўйиб, топамиз:
$$y = 4(x-1) - 1 \text{ ёки } y = 4x - 5. \qquad (9)$$

5. Хусусий ечимни текшириш. (9) тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаб, 3-п дагидек айният ҳосил қиламиз.

1474. 1) $x = -2$ бўлганда $y = 3$ бўлса, $(1+y)\,dx = (1-x)\,dy$. 2) $x = 1$ бўлганда $y = 1$ бўлса, $(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0$.

1475. $t = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $s = 4$ бўлса, $s\,\mathrm{tg}\,t\,dt + ds = 0$.

Ечилиши.
$$s\,\mathrm{tg}\,t\,dt + ds = 0. \qquad (1)$$

1. Ўзгарувчиларни ажратамиз:
$$\mathrm{tg}\,t\,dt + \frac{ds}{s} = 0. \qquad (2)$$

2. (2) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:
$$\int \mathrm{tg}\,t\,dt + \int \frac{ds}{s} = \ln C; \qquad (3)$$
$$-\ln\cos t + \ln s = \ln C \qquad (4)$$
ёки
$$\ln s = \ln C + \ln\cos t, \quad s = C\cos t \qquad (5)$$

3. Умумий ечимни текшириш. (5) тенгламадан:

$$ds = -C\sin t\,dt. \qquad (6)$$

(5) тенгламадаги s нинг қийматини ва (6) тенгламадаги ds нинг қийматини (1) тенгламага қўямиз:

$$C\cos t\,\mathrm{tg}\,t\,dt - C\sin\,t\,dt = 0 \text{ ёки } C\cos t\frac{\sin t}{\cos t}dt - C\sin t\,dt = 0$$

$$\text{ёки } C\sin t\,dt - C\sin t\,dt = 0.$$

4. Хусусий ечимни топамиз. $t = \frac{\pi}{3}$ ва $s = 4$ қийматларни (5) тенгламага қўямиз: $4 = C\cos\frac{\pi}{3}$, бундан $C = 8$. $C = 8$ қийматни (5) тенгламага қўямиз:

$$s = 8\cos t. \qquad (7)$$

5. Хусусий ечимни текшириш. (7) тенгликдан:

$$ds = -8\sin t\,dt. \qquad (8)$$

(7) ва (8) тенгликлардан s ҳамда ds нинг қийматларини (1) тенгламага қўйиб, айният ҳосил қиламиз.

1476. $x = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $y = \pi$ бўлса, $\frac{dx}{\cos^2 x\cos y} = -\mathrm{ctg}\,x\sin y\,dy$. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

1477. $(x^2 - yx^2)\,dy + (y^2 + xy^2)\,dx = 0$.

Ечилиши. 1. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$x^2(1-y)\,dy + y^2(1+x)\,dx = 0, \quad \frac{x^2(1-y)\,dy}{x^2y^2} + \frac{y^2(1+x)\,dx}{x^2y^2} = 0,$$

$$\frac{(1-y)\,dy}{y^2} + \frac{(1+x)\,dx}{x^2} = 0.$$

2. Интеграллаймиз:

$$\int\frac{(1-y)\,dy}{y^2} + \int\frac{(1+x)\,dx}{x^2} = C, \quad \int\frac{dy}{y^2} - \int\frac{dy}{y} + \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x} = C, \quad \int y^{-2}dy - \int\frac{dy}{y} + \int x^{-2}dx + \int\frac{dx}{x} = C,$$

$$-\frac{1}{y} - \ln y - \frac{1}{x} + \ln x = C \text{ ёки } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \ln y - \ln x = C$$

$$\text{ёки } \frac{x+y}{xy} + \ln\frac{y}{x} = C.$$

1478. $xydx = (1 + x^2)dy.$

1479. $y^2dx + (x - 2)dy = 0.$

Ечилиши. 1. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{y^2dx}{y^2(x-2)} + \frac{(x-2)dy}{y^2(x-2)} = 0, \quad \frac{dx}{x-2} + \frac{dy}{y^2} = 0.$$

2. Интеграллаймиз:

$$\int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dy}{y^2} = C, \quad \int\frac{dx}{x-2} + \int y^{-2}dy = C,$$

$$\ln(x-2) - \frac{1}{y} = C, \quad \ln(x-2) = \frac{1}{y} + C.$$

$$e^{\frac{1}{y} + C} = x - 2, \quad e^{\frac{1}{y}}e^C = x - 2, \quad e^{\frac{1}{y}}C_1 = x - 2,$$

$$x = C_1e^{\frac{1}{y}} + 2.$$

1480. $x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0.$

1481. $\sqrt{1 - x^2}\,dy - \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0.$

Ечилиши. 1. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\,dy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}} - \frac{\sqrt{1-y^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

2. Интеграллаймиз:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C, \quad \arcsin y - \arcsin x = C.$$

Қуйидаги алмаштиришларни бажарамиз:

$$\sin(\arcsin y - \arcsin x) = \sin C = C_1;$$

$$\sin(\arcsin y)\cos(\arcsin x) - \cos(\arcsin y)\sin(\arcsin x) = C_1.$$

Ҳар қайси ҳадни ҳисоблаймиз:

1) $\sin(\arcsin y) = y;$
2) $\cos(\arcsin x).$

Фараз қилайлик, $\arcsin x = z$ бўлсин, у ҳолда $\sin z = x$, $\cos z = \sqrt{1 - x^2}$, демак, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2};$

3) $\cos(\arcsin y)$. Шунга ўхшаш, $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - y^2};$

4) $\sin(\arc\sin x) = x$, у ҳолда $\sin(\arc\sin y - \arccos x) =$
$= y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = C_1$.
Умумий ечим: $y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = C_1$.

1482. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}\,dy = 0$.

1483. Агар жисм $M(4;\ 0)$ нуқтадан Ox ўқ бўйлаб $v = 2t + 3t^2$ тезлик билан ҳаракатлана бошлаган бўлса, жисмнинг ҳаракатланиш тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқли ҳаракатда тезлик йўлдан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг. Йўлни x билан белгилаб, ушбуга эга бўламиз: $v = \frac{dx}{dt}$, у ҳолда $\frac{dx}{dt} = 2t + 3t^2$ ёки $dx = 2t\,dt + 3t^2dt$. Интеграллаб топамиз: $x = t^2 + t^3 + C$. Бошланғич шартлардан C ни топамиз. Масаланинг шартида $t = 0$ бўлганда $x = 4$ бўлиши берилган. Бу қийматларни умумий ечимга қўйиб, топамиз: $C = 4$.

Жисмнинг Ox ўқ бўйича тўғри чизиқли ҳаракат тенгламаси

$$x = t^2 + t^3 + 4$$

кўринишда бўлади.

1484. Агар Ox ўқ бўйлаб ҳаракатланаётган жисм $M(0;\ 6)$ нуқтадан $v = 4t - 6t^2$ тезлик билан ҳаракатлана бошлаган бўлса, унинг ҳаракат тенгламасини тузинг.

1485. $M(2;\ -3)$ нуқтадан ўтувчи ва $k = 4x - 3$ бурчак коэффициентли уринмага эга бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масаланинг шартида қуйидагилар берилган:

$$\frac{dy}{dx} = k = 4x - 3 \text{ ёки } dy = 4x\,dx - 3dx.$$

Интеграллаб, ушбуни ҳосил қиламиз: $y = 2x^2 - 3x + C$. $x = 2$ ва $y = -3$ бўлганда $C = -5$, у ҳолда $y = 2x^2 - 3x - 5$.

1486. $M(2;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи ва $k = \frac{1}{2y}$ бурчак коэффициентли уринмага эга бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

1487. Усти очиқ резервуардаги сувнинг дастлабки температураси 70°G эди, 10 минутдан сўнг сувнинг температураси 65°C бўлди, резервуарни ўраб турган муҳитнинг температураси 15°C. 1) Бошланғич моментдан 30 минут кейин резервуардаги сувнинг температурасини топинг; 2) қайси вақтда резервуардаги температура 20°C бўлишини топинг.

Ечилиши. 1. Сувнинг ўзгарувчи температурасини T билан белгилаб, сувнинг совиш қонуни функциясини вақтнинг функцияси сифатида белгилаймиз. Сувнинг совиш тезлиги t ва T ларни боғловчи функциянинг ўзгариш тезлигидир, яъни у $\frac{dT}{dt}$ ҳосила бўлади.

$\frac{dT}{dt}$ тезлик резервуардаги сув температураси билан резервуарни ўраб олган муҳит температураси орасидаги айирмага пропорционал, яъни $k\,(T - 15^\circ)$, бунда k — пропорционаллик коэффициенти. У ҳолда

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 15^\circ).$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dT}{T-15}\,k\,dt.$$

2. (2) тенгламани интеграллаймиз:

$$\int\frac{dT}{T-15} = \int k\,dt,\ \ln(T - 15^\circ) = kt + C$$

ёки

$$T - 15 = e^{kt + C} = e^{kt}e^{C} = e^{kt}C_1, \text{ бундан } T = C_1e^{kt} + 15. \quad (3)$$

Совиш қонунини ҳосил қилдик, бу ерда t — вақт ва T — сув температураси — чекли ўзгарувчилар.

3. Берилган бошланғич шартлар $t = 0, T = 70^\circ\text{C}$ да C ўзгармас миқдорни топамиз.

Қуйидагига эга бўламиз:

$$70^\circ = C_1e^{k\cdot 0} + 15^\circ \text{ ёки } 55^\circ = C_1e^0 = C_1\cdot 1 = C_1,\ C_1 = 55^\circ. \quad (4)$$

(4) тенгликдаги C_1 нинг қийматини (3) тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$T = 55^\circ e^{kt} + 15^\circ. \quad (5)$$

4. k ўзгармас миқдорни топамиз. Масаланинг шартида $t = 10$ минутдан сўнг $T = 65^\circ\text{C}$ бўлиши берилган. Бу қийматларни (5) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$65^\circ = 55^\circ e^{k\cdot 10} + 15$$

ёки

$$50^\circ = 55^\circ e^{10k},$$

ёки

$$\frac{10}{11} = e^{10k}. \qquad (6)$$

(6) тенгликни логарифмлаб, ёзамиз:

$$\lg 10 - \lg 11 = 10k \lg e,$$

бундан

$$k = \frac{1 - \lg 11}{10 \lg e} = \frac{1 - 1,0414}{10 \cdot 0,4343} = -\frac{0,0414}{4,343} = -0,009532. \qquad (7)$$

k нинг қийматини (5) тенгламага қўйиб t ва T ўзгарувчиларни боғловчи совиш қонунини ҳосил қиламиз:

$$T = 55^\circ e^{-0,009532t} + 15^\circ. \qquad (8)$$

5. Сувнинг бошлангич моментдан 30 минут кейинги температурасини топамиз. (8) тенгламага $t = 30$ минут қийматни қўямиз:

$$T = 55^\circ e^{-0,009532 \cdot 30} + 15^\circ,$$

бундан

$$T = 55^\circ e^{-0,286} + 15^\circ.$$

Ҳисоблаймиз:

$$x = 55 \cdot e^{-0,286}, \quad \lg x = \lg 55 - 0,286 \lg e = 1,7404 - 0,286 \times$$
$$\times 0,4343 = 1,7404 - 0,1242 = 1,6162, \quad x = 41,32 \approx 41,$$

У ҳолда

$$T = 41^\circ + 15^\circ = 56^\circ.$$

6. Қанча вақтдан кейин резервуардаги сувнинг температураси 20°C бўлишини топамиз. (8) тенгламага $T = 20^\circ$ қийматни қўямиз:

$$20^\circ = 55^\circ e^{-0,009532t} + 15^\circ \text{ ёки } 5^\circ = 55^\circ e^{-0,009532t},$$

бундан

$$e^{-0,009532t} = \frac{1}{11} \approx 0,0909 \text{ ёки } -0,009532t \lg e =$$
$$= \lg 0,0909 = \bar{2},9586,$$

$$t = -\frac{\bar{2},9586}{0,009532 \cdot 0,4343} = \frac{1,041}{0,009532 \cdot 0,4343} = 251 \text{ мин} =$$
$$= 4 \text{ соат } 11 \text{ мин}.$$

1488. Ҳавонинг температураси 20°С. Жисм 40 минут ичида 80°С дан 30°С гача совийди. Жисмнинг температураси дастлабки ўлчашдан 30 минут кейин қанча бўлади?

1489. Радийнинг емирилиш тезлиги берилган ҳар бир вақт моментида радийнинг дастлабки миқдорига пропорционал эканлиги тажрибада аниқланган. Бошлангич вақт моментида ($t = 0$) R_0 грамм радий бор эди. Радий миқдорини исталган t вақт моменти учун ҳисоблаш формуласини тузинг.

Ечилиши. 1. Радий емирилиш қонунининг функциясини тузамиз. Фараз қилайлик, пропорционаллик коэффициенти k маълум бўлсин ($k > 0$). t вақт моментида ҳали емирилмаган радий миқдорини R билан белгилаймиз. R ни t нинг функцияси сифатида топиш талаб қилинади. Радийнинг емирилиш тезлиги t ва R ни богловчи функциянинг ўзгариш тезлигидир, бу эса $\frac{dR}{dt}$ ҳосиладир. Масаланинг шартида

$$\frac{dR}{dt} = -kR \tag{1}$$

берилган.

Минус ишора R функциянинг камаювчи эканлигини кўрсатади, демак, $\frac{dR}{dt} < 0$, $kR > 0$, чунки $k > 0$ ва $R > 0$.

(1) тенгликдан:

$$\frac{dR}{R} = -k\,dt. \tag{2}$$

2. (2) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int \frac{dR}{R} = -\int k\,dt,$$

бундан

$$\ln R = -kt + \ln C \tag{3}$$

ёки

$$\ln R - \ln C = -kt,$$

бундан

$$\ln\frac{R}{C} = -kt. \tag{4}$$

(4) тенгликни потенцирлаймиз:

$$\frac{R}{C} = e^{-kt} \text{ ёки } R = Ce^{-kt}. \tag{5}$$

Радий емирилишининг умумий қонунини ҳосил қилдик, *бу ерда t — вақт ва R — шу вақт моментида ҳали емирилмаган* радий миқдори.

3. Берилган бошланғич шартлар $t = 0$ ва $R = R_0$ да ўзгармас миқдор C ни топамиз. Бу қийматларни (5) тенгламага қўйиб,

$$R_0 = Ce^{-k \cdot 0},\ C = R_0$$

ни ҳосил қиламиз.

У ҳолда изланаётган функция

$$R = R_0 e^{-kt}$$

бўлади.

1490. Радий ўзининг дастлабки миқдорига пропорционал тезлик билан емирилади. Ҳозирги моментда бор бўлган *миқдорининг ярмиси қанча вақтдан кейин емирилади.* Радий учун пропорционаллик коэффициенти $k = 0{,}00044$ эканлиги аниқланган (вақт ўлчов бирлиги — йил).

1491. Суюқликда айланаётган дискнинг бурчак тезлиги ишқаланиш ҳисобига секинлашади. Ишқаланиш бурчак тезликка пропорционал эканлиги аниқланган. 1) агар диск $t = 0$ бўлганда 12 рад/сек тезлик билан айланган бўлиб, $t = 10$ секда эса унинг тезлиги 8 рад/сек бўлган бўлса, диск $t = 120$ сек моментда қандай тезлик билан айланишини топинг; 2) вақтнинг қайси моментида уни 1 рад/сек тезлик билан айланишини топинг.

Ечилиши. 1. Дискнинг айланиш қонунини t вақтнинг функцияси сифатида тузамиз. ω — диск айланишининг бурчак тезлиги бўлсин, у ҳолда дискнинг айланиши ишқаланиш кучлари таъсири остида секинлашиши $\frac{d\omega}{dt}$ бўлади.

Масаланинг шартига кўра:

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega, \qquad (1)$$

бунда k — пропорционаллик коэффициенти. Ўзгарувчиларни бўламиз:

$$\frac{d\omega}{\omega} = k\,dt. \qquad (2)$$

2. (2) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int \frac{d\omega}{\omega} = k \int dt,\ \ln\omega = kt + C, \qquad (3)$$

бундан

$$\omega = e^{kt + C}, \ \omega = e^{kt}e^{C},$$

$$\omega = e^{kt}C_1 \text{ ёки } \omega = C_1e^{kt}. \qquad (4)$$

3. $t = 10$ сек ва $\omega = 12$ рад/сек бошланғич шартларда ўзгармас миқдор C_1 ни топамиз. Бу қийматларни (4) тенгламага қўйиб, C_1 ни топамиз:

$$12 = C_1e^{k\cdot 0}, \ 12 = C_1.$$

C_1 нинг қийматини (4) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\omega = 12e^{kt}. \qquad (5)$$

4. Дастлаб берилганлар $t = 10$ сек, $\omega = 8$ рад/сек га мувофиқ, k нинг сон қийматини топамиз. Бу қийматларни (5) тенгламага қўямиз:

$$8 = 12e^{k\cdot 10},$$

бундан

$$e^{10k} = \frac{2}{3}, \ 10k \lg e = \lg 2 - \lg 3.$$

$$k = \frac{\lg 2 - \lg 3}{10 \lg e} = -\frac{\lg 3 - \lg 2}{10 \lg e} = -\frac{0,4771 - 0,3010}{10\cdot 0,4343} = -0,0405.$$

k нинг қийматини (5) тенгламага қўямиз:

$$\omega = 12e^{-0,0405t}. \qquad (6)$$

5. Дискнинг $t = 120$ сек вақт моментидаги айланиш тезлигини топамиз. (6) тенгламага $t = 120$ сек қийматни қўямиз:

$$\omega = 12e^{-0,0405\cdot 120} = 12e^{-4,9} = 0,09 \text{ рад/сек}.$$

6. Диск 1 рад/сек тезлик билан айланадиган вақт моментини топамиз. (6) тенгламага $\omega = 1$ қийматни қўямиз ва t ни топамиз:

$$1 = 12e^{-0,0405t}, \text{ бундан } e^{-0,0405t} = \frac{1}{12};$$

$$-0,0405t \lg e = \lg 1 - \lg 12, \ t = \frac{\lg 12}{0,0405 \lg e} = 61 \text{ сек}.$$

1492. Суюқликда айланаётган дискка таъсир қилаётган секинлаштирувчи куч бурчак тезликка пропорционал. Агар диск $t = 0$ да 20 рад/сек тезлик билан, $t = 8$ да эса 16 рад/сек тезлик билан айланса, дискнинг 2 рад/сек тезлик билан айланадиган вақт моментини топинг.

80-§. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар

Ҳамма ҳадлари бир хил даражали бўлган $f(x;\ y)$ функция ўзгарувчиларнинг бир жинсли функцияси дейилади. Масалан:

1) $f\ (x;\ y) = 2x^2 - 5xy$ — иккинчи даражали бир жинсли функция;

2) $f\ (x;y) = x^2y + xy^2$ — учинчи даражали бир жинсли функция;

3) $f\ (x;\ y) = 2x + \sqrt{x^2 + y^2} - 3y$ — биринчи даражали бир жинсли функция.

$f\ (x, y)dx = \varphi(x, y)\,dy$ кўринишдаги тенглама бир жинсли тенглама дейилади, бу ерда $f\ (x, y)$ ва $\varphi(x, y)$ бир хил даражали бир жинсли функциялар.

Бир жинсли тенглама $y = vx$ ўрнига қўйиш воситасида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади. Қуйидаги бир жинсли тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

1493. $(x + y)\ dx - x\,dy = 0$.

Ечилиши. Ушбу

$$(x + y)\ dx - x\,dy = 0 \quad (1)$$

тенглама x ва y ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали бир жинсли тенглама.

1. Фараз қилайлик,

$$y = vx \quad (2)$$

бўлсин, бунда v ўзгарувчи x нинг янги функцияси.

2. Кўпайтманинг дифференциалини топамиз:

$$dy = x\,dv + v\,dx. \quad (3)$$

3. (2) ва (3) тенгликлардаги y ҳамда dy нинг қийматларини (1) тенгламага қўямиз:

$$(x + vx)\ dx - x\ (x\,dv + v\,dx) = 0. \quad (4)$$

4. (4) тенгламани соддалаштирамиз:

$$x\,dx + vx\,dx - x^2dv - xv\,dx = 0,\ x\,dx - x^2dv = 0.$$

x га қисқартирамиз:

$$dx - x\,dv = 0. \quad (5)$$

Ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил қилдик.

5. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dv = \frac{dx}{x}. \qquad (6)$$

6. (6) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int dv = \int \frac{dx}{x}, \quad v = \ln x + \ln C \text{ ёки } v = \ln (Cx) \qquad (7)$$

7. (7) ифодани (2) ўрнига қўйишга олиб бориб қўямиз:

$$y = x \ln (Cx). \qquad (8)$$

Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қилдик.

Текшириш. Умумий ечим (8) нинг дифференциалини топамиз:

$$dy = x\frac{1}{Cx} C\, dx + dx \ln (Cx) = dx + dx \ln(Cx). \qquad (9)$$

(1) тенгламага (8) умумий ечим ва унинг (9) дифференциалини қўямиз:

$$[x + x \ln (Cx)]\, dx - x\, [dx + dx \ln(Cx)] = 0,$$

$$x\, dx + x \ln(Cx)\, dx - x\, dx - x \ln(Cx)\, dx = 0.$$

Айният ҳосил қилдик.

1494. $(x + y)dx + x\, dy = 0.$

1495. $(x + y)dx + (y - x)\, dy = 0.$

Ечилиши. Ушбу

$$(x + y)\, dx + (y - x)\, dy = 0 \qquad (1)$$

тенглама биринчи даражали бир жинсли тенглама.

1. $$y = vx \qquad (2)$$

деб фараз қиламиз.

2. (2) тенгликнинг дифференциалини топамиз:

$$dy = v\, dx + x\, dv. \qquad (3)$$

3. (2) ва (3) тенгликлардаги y ҳамда dy нинг қийматларини (1) тенгламага қўямиз:

$$(x + vx)\, dx + (vx - x)\, (v\, dx + x\, dv) = 0. \qquad (4)$$

4. (4) тенгламани соддалаштирамиз:

$$x\, dx + vx\, dx + v^2x\, dx + x^2v\, dv - vx\, dx - x^2dv = 0;$$

$$x\, dx + v^2x\, dx + x^2v\, dv - x^2dv = 0;$$

$$x(1+v^2)\,dx + x^2(v-1)\,dv = 0. \tag{5}$$

Ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил қилдик.

5. Ўзгарувчиларни ажратамиз, бунинг учун тенгламанинг барча ҳадларини $x^2(1+v^2)$ кўпайтмага бўламиз:

$$\frac{dx}{x} + \frac{v-1}{1+v^2}\,dv = 0. \tag{6}$$

Тенгламанинг иккинчи ҳадини айирма шаклида ифодалаймиз:

$$\frac{dx}{x} + \frac{v\,dv}{1+v^2} - \frac{dv}{1+v^2} = 0. \tag{7}$$

6. (7) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{v\,dv}{1+v^2} - \int\frac{dv}{1+v^2} = C_1; \tag{8}$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+v^2) - \operatorname{arctg} v = C_1; \tag{9}$$

$$2\ln x + \ln(1+v^2) - 2\operatorname{arctg} v = 2C_1. \tag{10}$$

7. (1) пунктдан $v = \frac{y}{x}$; v нинг бу қийматини (10) тенгламага қўямиз ва $2C_1 = C$ деб оламиз:

$$2\ln x + \ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C;$$

$$\ln x^2 + \ln\frac{x^2+y^2}{x^2} - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$$

ёки

$$\ln(x^2+y^2) - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C.$$

1496. $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0.$

1497. $(2\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0.$

Ечилиши. Ушбу

$$(2\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0 \tag{1}$$

тенглама биринчи даражали бир жинсли тенглама.

1. Ўрнига қўйиш:

$$y = vx. \tag{2}$$

2. (2) функциянинг дифференциалини топамиз:

$$dy = v\,dx + x\,dv. \qquad (3)$$

3. (2) ва (3) тенгликлардаги y ҳамда dy нинг қийматларини (1) тенгламага қўямиз:

$$\left(2\sqrt{x\,vx} - x\right)(v\,dx + x\,dv) + vx\,dx = 0. \qquad (4)$$

4. (4) тенгламада соддалаштиришлар бажарамиз:

$$2x\sqrt{v}\,v dx + 2x^2\sqrt{v}\,dv - vx\,dx - x^2dv + vx\,dx = 0;$$

$$2v\sqrt{v}\,dx + x\left(2\sqrt{v} - 1\right)dv = 0. \qquad (5)$$

5. (5) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}v^{-\frac{2}{3}}\,dv = 0. \qquad (6)$$

6. (6) тенгламани интеграллаймиз:

$$\ln x + \ln v + \frac{1}{\sqrt{v}} = C_1, \ \ln y = C_1 - \sqrt{\frac{x}{y}} \qquad (7)$$

$$\text{ёки } y = e^{C_1}e^{-\sqrt{\frac{x}{y}}} \quad \text{ёки } ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = C.$$

1498. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0.$

1499. $x\cos\frac{y}{x}\,(y\,dx + x\,dy) - y\sin\frac{y}{x}\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$

Ечилиши. 1. Ўрнига қўйиш

$$y = vx. \qquad (1)$$

2. (1) функциянинг дифференциалини топамиз:

$$dy = v\,dx + x\,dv. \qquad (2)$$

3. (1) ва (2) тенгликлардаги y ҳамда dy нинг қийматларини берилган тенгламага қўямиз:

$$x\cos\frac{vx}{x}\,[vx\,dx + x\,(v\,dx + x\,dv)] -$$

$$- vx\sin\frac{vx}{x}\,[x\,(v\,dx + x\,dv) - vx\,dx] = 0. \qquad (3)$$

4. (3) тенгламани соддалаштирамиз:

$$x\cos v\,(2vx\,dx + x^2dv) - vx\sin v\,(x^2dv) = 0;$$

$$2vx^2\cos v\,dx + x^3\cos v\,dv - vx^3\sin v\,dv = 0;$$

$$2v\cos v\ \ x^2dx + x^3\,(\cos v - v\sin v)\,dv = 0. \qquad (4)$$

Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қилдик.

5. (4) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{2x^2dx}{x^3} + \frac{(\cos v - v\sin v)\,dv}{v\cos v} = 0; \qquad 2\,\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v} - \operatorname{tg} v\,dv = 0. \quad (5)$$

6. (5) тенгламани интеграллаймиз:

$$2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dv}{v} - \int\operatorname{tg} v\,dv = \ln C, \quad 2\ln x + \ln v + $$
$$+ \ln\cos v = \ln C. \quad (6)$$

7. (6) тенгламани потенцирлаймиз:

$$x^2v\cos v = C$$

ёки

$$x^2\,\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} = C, \text{ ёки } xy\cos\frac{y}{x} = C.$$

1500. $x\cos\frac{y}{x}\,dy - y\cos\frac{y}{x}\,dx + x\,dx = 0.$

Тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг.

1501. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{x^2}$, $x = 1$ да $y = -1$.

Ечилиши.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+x^2}{x^2}$ ёки $x^2dy = (xy + y^2)\,dx.$ (1)

2. Ўринга қўйиш:

$$y = vx. \quad (2)$$

3. (2) тенгликнинг дифференциалини топамиз:

$$dy = v\,dx + x\,dv. \quad (3)$$

4. (2) ва (3) тенгликлардаги y ҳамда dy нинг қийматларини (1) тенгламага қўямиз:

$$x^2\,(v\,dx + x\,dv) = (x\,vx + v^2x^2)\,dx; \quad (4)$$
$$x^2\,(v\,dx + x\,dv) = x^2\,(v + v^2)\,dx.$$

x^2 га қисқартирамиз ва соддалаштирамиз:

$$v\,dx + x\,dv = v\,dx + v^2dx; \quad x\,dv = v^2dx. \quad (5)$$

Ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил қилдик.

5. (5) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dv}{v^2}=\frac{dx}{x} \qquad (6)$$

6. (6) тенгламани интеграллаймиз:

$\int\frac{dv}{v^2}=\int\frac{dx}{x}, -\frac{1}{v}=\ln x+C;$ аммо $v=\frac{y}{x}$ бўлгани учун

$$-\frac{x}{y}=\ln x+C. \qquad (7)$$

7. Дастлаб берилган $x=1$ ва $y=-1$ лар бўйича C ўзгармасни топамиз:

$$-\frac{1}{1}=\ln 1+C,$$

бундан $C=1$, у ҳолда хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$-\frac{x}{y}=\ln x+1, \qquad (8)$$

$$\ln x=-\frac{x}{y}-1=-\frac{x+y}{y},\ x=e^{-\frac{x+y}{y}}. \qquad (9)$$

1502. $xy^2dy=(x^3+y^3)\,dx,$ $x=1$ да $y=3$.

81-§. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

Ушбу $\frac{dy}{dx}+f(x)y+\varphi(x)=0$ кўринишдаги тенгламалар биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар дейилади.

Хусусий ҳолда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ ўзгармас миқдорлар бўлиши мумкин.

Ўзгарувчилари ажралмайдиган бу тенглама $y=uz$ ўрнига қўйиш йўли билан (бу ерда u ва z лар x нинг янги функциялари) ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади.

Тенгламани ечиш учун u ва z ни топиш керак.

1503. $\frac{dy}{dx}-2y-3=0.$

Ечилиши.

$$1.\ \frac{dy}{dx}-2y-3=0. \qquad (1)$$

(1) тенгламада $f(x) = -2$ ва $\varphi(x) = -3$.

$$x = uz \tag{2}$$

деб фараз қиламиз, бунда u ва z лар x нинг янги функциялари. Бу функцияларни топиш ва уларни (2) тенгликка қўйиш зарур, натижада биз изланаётган y функцияни ҳосил қиламиз.

2. (2) тенгликни x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}. \tag{3}$$

3. (2) ва (3) тенгликлардаги y ҳамда $\frac{dy}{dx}$ ларнинг қийматларини (1) тенгламага қўямиз:

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - 2uz - 3 = 0. \tag{4}$$

Биринчи галда z функцияни топиш учун u функция *бўлган ҳадларни группалаймиз ва бу функцияни қавсдан* ташқарига чиқарамиз:

$$u\left(\frac{dz}{dx} - 2z\right) + z\frac{du}{dx} - 3 = 0. \tag{5}$$

Агар биринчи галда u функцияни топадиган бўлсак, у ҳолда z функцияни ўз ичига олган ҳадларни группалаймиз ва бу функцияни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - 2u\right) - 3 = 0. \tag{6}$$

Бу функциялардан қайси бирини биринчи бўлиб топишнинг фарқи йўқ.

4. Олдин u функцияни топамиз, у ҳолда (6) тенгликда қавс ичидаги ифодани нолга тенглаштирамиз:

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0. \tag{7}$$

5. (7) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{du}{u} - 2dx = 0. \tag{8}$$

6. (8) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int\frac{du}{u} = 2\int dx.$$

(8) тенгламанинг хусусий ечимларидан бирини топамиз, шунинг учун (8) тенгламанинг иккала қисмини интеграллашда ихтиёрий ўзгармас C ни нолга тенг деб оламиз, яъни

$$\ln u = 2x, \tag{9}$$

бундан

$$u = e^{2x}. \tag{10}$$

7. (7) шартда (6) тенглама

$$u\frac{dz}{dx} - 3 = 0 \tag{11}$$

кўринишни олади.

8. u нинг (10) тенгламадаги қийматини (11) тенгламага қўямиз:

$$e^{2x}\frac{dz}{dx} - 3 = 0. \tag{12}$$

9. (12) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dx = \frac{3dx}{e^{2x}}. \tag{13}$$

10. (13) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int dz = 3\int\frac{dx}{e^{2x}} = 3\int e^{-2x}dx,\ z = -\frac{3}{2}e^{-2x} + C. \tag{14}$$

11. (10) ва (14) тенгликлардаги u ҳамда z нинг қийматларини (2) тенгликка қўямиз:

$$y = e^{2x}\left(-\frac{3}{2}e^{-2x} + C\right) = -\frac{3}{2}e^{0} + Ce^{2x} = Ce^{2x} - \frac{3}{2}. \tag{15}$$

Текшириш. (15) тенгликдан $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = 2Ce^{2x}. \tag{16}$$

(16) тенгликдаги $\frac{du}{dx}$ нинг ва (15) тенгликдаги y нинг қийматларини (1) тенгламага қўямиз:

$$2Ce^{2x} - 2\left(Ce^{2x} - \frac{3}{2}\right) - 3 = 0;\ 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} + 3 - 3 = 0.$$

Айният ҳосил қилдик, демак, (15) тенглама (1) тенгламанинг ечимидир.

1504. $\frac{dy}{dx} - y - 1 = 0.$

1505. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$

Ечилиши.

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$ (1)

(1) тенгламада $f(x) = -\frac{2}{x+1}, \varphi(x) = -(x+1)^3.$

$$y = uz \qquad (2)$$

деб фараз қиламиз.

2. (2) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}. \qquad (3)$$

3. (2) ва (3) тенгликлардан y ва $\frac{dy}{dx}$ нинг қийматларини (1) тенгламага қўямиз:

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{x+1} = (x+1)^3 \qquad (4)$$

ёки

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3. \qquad (5)$$

4. $\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0.$ (6)

5. (6) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{du}{u} - \frac{2dx}{x+1} = 0 \text{ ёки } \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x+1}. \qquad (7)$$

6. (7) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dx}{x+1}, \ \ln u = 2\ln(x+1). \qquad (8)$$

Ихтиёрий ўзгармас C ни нолга тенг деб оламиз, яъни хусусий ечимлардан бирини топамиз:

$$u = (x+1)^2. \qquad (9)$$

7. (6) шартда (5) тенглама

$$u \frac{dz}{dx} = (x+1)^3 \qquad (10)$$

кўринишни олади.

8. (10) тенгламага u нинг (9) тенгламадаги қийматини қўямиз:

$$(x+1)^2 \frac{dz}{dx} = (x+1)^3 \text{ ёки } \frac{dz}{dx} = x+1. \qquad (11)$$

9. (11) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dz = (x+1)\,dx. \qquad (12)$$

10. (12) тенгламанинг иккала қисмини интеграллаймиз:

$$\int dz = \int (x+1)\,dx,\ z = \frac{(x+1)^2}{2} + C. \qquad (13)$$

11. u ҳамда z нинг (9) ва (13) тенгликлардаги қийматларини (2) тенгликка қўямиз:

$$y = (x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + C\right] = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2 \qquad (14)$$

Текшириш. (14) тенгликдан $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)^3 + 2C(x+1) \qquad (15)$$

(15) тенгликдан $\frac{dy}{dx}$ нинг қийматини ва (14) тенгликдан y нинг қийматини (1) тенгламага қўямиз:

$$2(x+1)^3 + 2C(x+1) - \frac{2}{x+1}\left[\frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2\right] = $$
$$= (x+1)^3;$$
$$2(x+1)^3 + 2C(x+1) - (x+1)^3 - 2C(x+1) = (x+1)^3;$$
$$(x+1)^3 = (x+1)^3.$$

Айният ҳосил қилдик.

1506. 1) $x\frac{dy}{dx} - x^2 + 2y = 0$,

2) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$.

Тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг.

1507. $\cos x\, dy + y \sin x\, dx = dx,\qquad x = 0$ да $y = 1.$

Ечилиши. 1. Ушбу

$$\cos x\, dy + y \sin x\, dx = dx \tag{1}$$

тенгламанинг барча ҳадларини $\cos x\, dx$ га бўламиз:

$$\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}. \tag{2}$$

(2) тенгламада $f(x) = \operatorname{tg} x,\ \varphi(x) = -\frac{1}{\cos x},$

$$y = uz \tag{3}$$

деб фараз қиламиз.

2. (3) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

3. y ҳамда $\frac{du}{dx}$ нинг (3) ва (4) тенгликлардаги қийматларини (2) тенгламага қўямиз:

$$u\,\frac{dz}{dx} + z\,\frac{du}{dx} + uz \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \tag{5}$$

ёки

$$u\,\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + u \operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{\cos x}. \tag{6}$$

4. $\frac{du}{dx} + u \operatorname{tg} x = 0.$

5. (7) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{du}{u} + \operatorname{tg} x\, dx,\quad \frac{du}{u} = -\operatorname{tg} x\, dx. \tag{8}$$

6. (8) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int \frac{du}{u} = -\int \operatorname{tg} x \cdot dx, \tag{9}$$

$$\ln u = \ln \cos x,\quad u = \cos x. \tag{10}$$

7. (6) тенглама (7) шартда

$$u\,\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos x} \tag{11}$$

кўринишни олади.

8. *u* нинг (10) тенгликдаги қийматини (11) тенгламага қўямиз:

$$\cos x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos x}. \tag{12}$$

9. (12) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dz = \frac{dx}{\cos^2 x}. \tag{13}$$

10. (13) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int dz = \int \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad z = \operatorname{tg} x + C. \tag{14}$$

11. *u* ҳамда *z* нинг (10) ва (14) тенгликлардаги қийматларини (3) тенгламага қўямиз:

$$y = \cos x\,(\operatorname{tg} x + C) = \sin x + C\cos x. \tag{15}$$

12. *Текшириш.* (15) тенгликдан $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - C\sin x. \tag{16}$$

(16) тенгликдан $\frac{dy}{dx}$ нинг қийматини ва (15) тенгликдан y нинг қийматини (2) тенгламага қўямиз:

$$\cos x - C\sin x + (\sin x + C\cos x)\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$$

$$\cos x - C\sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + C\sin x = \frac{1}{\cos x};$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Айният ҳосил қилдик.

13. $x = 0$ ва $y = 1$ бошланғич шартларни (15) умумий ечимга қўямиз: $1 = \sin 0 + C\cos 0$, бундан $C = 1$. Демак, хусусий ечим $y = \sin x + \cos x$ бўлади.

1508. 1) $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$, $x = 0$ да $y = 3$;

2) $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3$, $x = 1$ да $y = e$;

3) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$ да $y = 1$.

82- §. Иккинчи тартибли тўлиқсиз дифференциал тенгламалар

Иккинчи тартибли ҳосила ёки дифференциалга эга бўлган тенглама иккинчи тартибли дифференциал тенглама дейилади. Ушбу $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ y,\frac{dy}{dx}\right)$ кўринишдаги дифференциал тенглама иккинчи тартибли тўлиқ дифференциал тенглама дейилади.

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечимида иккита ихтиёрий ўзгармас бўлади.

Иккинчи тартибли тўлиқсиз дифференциал тенгламаларнинг қуйидаги беш хили бор:

I) $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$; II) $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(\frac{dy}{dx}\right)$;

III) $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ \frac{dy}{dx}\right)$; IV) $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$; V) $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$

I, II, III ҳолларнинг ечилишини кўриб чиқамиз.

I. $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш

Иккинчи тартибли ҳосиланинг таърифи бўйича:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{1}$$

у ҳолда

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=f(x), \tag{2}$$

бундан

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x)dx. \tag{3}$$

(3) тенгликнинг иккала қисмини интеграллаб,

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int f(x)\,dx \tag{4}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)\,dx=F(x)+C_1 \tag{5}$$

ёки

$$dy=F(x)\,dx+C_1dx. \tag{6}$$

(6) тенгликнинг иккала қисмини интеграллаб ушбу умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$y = \int F(x)\,dx + \int C_1\,dx = \psi(x) + C_1x + C_2 \qquad (7)$$

Хусусий ечимни топиш учун C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармасларнинг сонли қийматларини топиш керак, аммо бунинг учун бошланғич шартлар, яъни x ва y нинг сонли қийматлари берилган бўлиши керак. Тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг.

1509. $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, $x = 0$ да $y = 2$ ва $x = 1$ да $y = 3$.

Ечилиши. Шартга кўра $f(x) = 0$, чунки

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (1)$$

1. Иккинчи тартибли ҳосиланинг таърифига кўра:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ ёки } d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0\,dx. \qquad (2)$$

2. (2) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int 0\cdot dx;\quad \frac{dy}{dx} = C_1, \text{ бундан } dy = C_1\,dx. \qquad (3)$$

3. (3) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int dy = C_1\int dx;\quad y = C_1x + C_2. \qquad (4)$$

(1) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қилдик.

4. Берилган бошланғич шартлар бўйича, уларни (4) умумий ечимга қўйиб, хусусий ечимни топамиз. Биринчи даражали тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} 2 = C_1 0 + C_2, \\ 3 = C_1 1 + C_2 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 2 = C_2, \\ 3 = C_1 + C_2. \end{cases}$$

Бундан $C_1 = 1$ ва $C_2 = 2$. Хусусий ечим $y = x + 2$ кўринишда бўлади:

1510. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $x = 0$ да $y = 0$ ва $x = 1$ да $y = 1$.

1511. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$, $x = 0$ да $y = 0$ ва $x = 1$ да $y = 1$.

Ечилиши. Шартга кўра $f(x) = 4$, чунки $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$. (1)

1. $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4$ ёки $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4\,dx$. (2)

2. $\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4\int dx,\ \frac{dy}{dx} = 4x + C_1$, бундан
$dy = 4\,xdx + C_1dx.$ (3)

3. $\int dy = 4\int x\,dx + C_1\int dx,\ y = 2x^2 + C_1x + C_2$ (4)

Умумий ечимни ҳосил қилдик.

4. Берилган бошланғич шартларни (4) тенгламага қўйиб, хусусий ечимни топамиз:

$$\begin{cases} 0 = 2\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2, \\ 1 = 2\cdot 1^2 + C_1\cdot 1 + C_2, \end{cases}$$

бундан $C_1 = -1$ ва $C_2 = 0$.

Хусусий ечим $y = 2x^2 - x$ кўринишда бўлади.

1512. $\frac{d^2y}{dx^2} = 1$, бунда $x = 0$ да $y = 0$ ва $x = 2$ да $y = 3$.

1513. $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t$, бунда $t = 0$ да $s = 0$ ва $\frac{ds}{dt} = 10$.

Ечилиши. Шартга кўра $f(t) = 6t$, чунки $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t$ (1)

1. $\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = 6t$ ёки $d\left(\frac{ds}{dt}\right) = 6t\,dt.$ (2)

2. $\int d\left(\frac{ds}{dt}\right) = 6\int t\,dt$, бундан $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + C_1;$ (3)

$$ds = 3t^2dt + C_1dt. \quad (4)$$

3. $\int ds = 3\int t^2dt + C_1\int dt,$ (5)

$$s = t^3 + C_1t + C_2. \quad (6)$$

4. Бошда берилганларни (6) ва (3) тенгламаларга қўйиб, хусусий ечимни топамиз:

$$\begin{cases} 0 = 0^3 + C_10 + C_2, \\ 10 = 3\cdot 0^2 + C_1 \end{cases}$$

бундан $C_1 = 10$ ва $C_2 = 0$:

Хусусий ечим $s = t^3 + 10t$ кўринишда бўлади.

1514. 1) $\frac{d^2s}{dt^2} = 12t$, бунда $t = 0$ ва $\frac{ds}{dt} = 20$ да $s = 2$.

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$, бунда $x = 0$ ва $\frac{dy}{dx} = 2$ да $y = 0$.

$\frac{d^2s}{dt^2} = 18t + 2$, бунда $t = 0$ ва $\frac{ds}{dt} = 5$ да $s = 4$.

Ечилиши.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 18t + 2. \quad (1)$$

1. $\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = 18t + 2, \quad d\left(\frac{ds}{dt}\right) = 18t\,dt + 2dt$ (2)

2. $\int d\left(\frac{ds}{dt}\right) = 18\int t\,dt + 2\int dt;$ (3)

$$\frac{ds}{dt} = 9t^2 + 2t + C_1 \tag{4}$$

бундан

$$ds = 9t^2dt + 2t\,dt + C_1dt \tag{5}$$

3. $\int ds = 9\int t^2dt + 2\int t\,dt + C_1\int dt,$ (6)

$$s = 3t^3 + t^2 + C_1t + C_2 \tag{7}$$

Умумий ечимни ҳосил қилдик.

4. Бошда берилганларни (7) ва (4) тенгламаларга қўйиб, хусусий ечимни топамиз:

$$\begin{cases} 4 = 3\cdot0^3 + 0^2 + C_1\cdot0 + C_2 \\ 5 = 9\cdot0^2 + 2\cdot0 + C_1 \end{cases}$$

бундан $C_1 = 5$ ва $C_2 = 4$

$s = 3t^3 + t^2 + 5t + 4$ хусусий ечимга эга бўламиз.

1516. $\frac{d^2s}{dt^2} = t + 1$ бунда $t = 0$ да $s = 0$ ва $\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{3}$.

1517. Эркин тушаётган жисмнинг тезланиши:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\ (g \approx 9{,}8\ \text{м/сек}^2)$$

Агар $t = 0$, да $s = s_0$ ва $\frac{ds}{dt} = v_0$ бўлса, эркин тушаётган жисмнинг t сек даги ҳаракат қонунини топинг.

Ечилиши.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g. \tag{1}$$

1. $\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = g; \quad d\left(\frac{ds}{dt}\right) = g\,dt.$ (2)

2. $\int d\left(\frac{ds}{dt}\right) = g\int dt; \quad \frac{ds}{dt} = gt + C_1,$ (3)

бундан

$$ds = gt\,dt + C_1\,dt, \tag{4}$$

3. $\int ds = g\int t\,dt + C_1\int dt,$ (5)

$$s = \frac{gt^3}{2} + C_1t + C_2. \tag{6}$$

Умумий ечимни ҳосил қилдик.

4. Бошда берилганларни (5) ва (3) тенгламаларга қўйиб, хусусий ечимни топамиз:

$$\begin{cases} s_0 = \frac{g}{2}\cdot 0^2 + C_1 0 + C_2 \\ v_0 = g\cdot 0 + C_1 \end{cases}$$

бундан $C_1 = v_0$ ва $C_2 = s_0$,

$s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$ хусусий ечимга эга бўламиз.

1518. $\frac{d^2\theta}{d\omega^2} = \omega^2$ бунда $\omega = 0$ да $\theta = 0$ ва $\frac{d\theta}{d\omega} = 12$.

II. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ***кўринишдаги тенгламаларни ечиш***

Тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг.

1519. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}$, бунда $x = 0$ да $y = \frac{3}{2}$ ва $\frac{dy}{dx} = 1$.

Ечилиши. 1.

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad (1)$$

деб фараз қиламиз.

У ҳолда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}. \qquad (2)$$

2. (1) ва (2) тенгликлардаги $\frac{dy}{dx}$ ҳамда $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни берилган тенгламага қўямиз:

$$\frac{dz}{dx} = 2z \qquad (3)$$

Ўзгарувчилари ажраладиган биринчи тартибли тенглама ҳосил қилдик.

3. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dz}{z} = 2dx \qquad (4)$$

4. (4) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int\frac{dz}{z} = 2\int dx, \ \ln z = 2x + C_1, \text{ бундан } z = e^{2x+C_1}$$

5. (5) тенгликда (1) тенгликдан тескари алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+C_1}, \qquad (6)$$

бундан

$$dy = e^{2x+C_1}dx. \qquad (7)$$

6. (7) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int dy=\int e^{2x+C_1}dx,\quad y=\frac{1}{2}e^{2x+C_1}+C_2. \qquad (8)$$

Умумий ечимни ҳосил қилдик.

Бошда берилганларни (8) ва (6) тенгликларга қўйиб, хусусий ечимни топамиз:

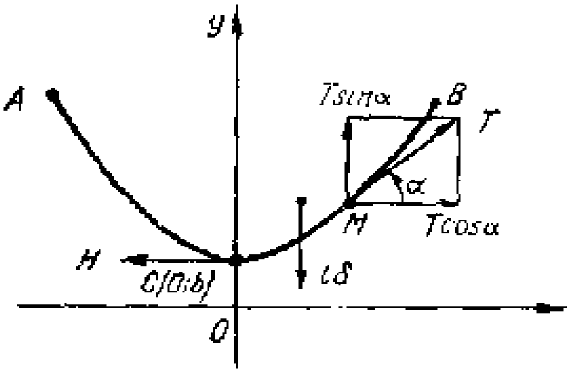
$$\begin{cases}\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e^{2\cdot 0+C_1}, \\ 1=e^{2\cdot 0+C_1}\end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases}\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e^{C_1}+C_2 \\ 1=e^{C_1},\end{cases}$$

бундан $C_1=0$ ва $C_2=1$.

$y=\frac{1}{2}e^{2x}+1$ хусусий ечимга эга бўламиз.

1520. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}$, бунда $y=2$ да $x=0$ ва $\frac{dy}{dx}=1$.

1521. Эгилувчан бир жинсли ипнинг икки учи A ва B нуқталарга боғланган (симлар, арқонлар, занжирлар шундай боғлаб қўйилади). Ўзининг оғирлик кучи таъсирида эгилган ип чизган эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг (182-расм).



182- расм.

Ечилиши. $C(0;\ b)$ нуқта ипнинг энг пастки нуқтаси бўлсин, M эса ипнинг исталган бир нуқтаси бўлсин. Ипнинг CM ўнг қисмининг мувозанатини кўриб чиқамиз. Ипнинг бу қисми қуйидаги учта кучнинг таъсирида мувозанатда бўлади:

1) M нуқтада уринма бўйича таъсир қилувчи T таранглик кучи; T куч Ox ўқ билан α бурчак ташкил қилади;

2) C нуқтада горизонтал равишда таъсир қилувчи H — тортилиш кучи;

3) вертикал равишда пастга йўналган ипнинг оғирлик кучи $l\delta$,

бунда l — CM ёйнинг узунлиги, δ — ипнинг чизиқли зичлиги.

H таранглик кучини иккита ташкил этувчи кучларга — горизонтал ва вертикал кучларга ажратамиз: $T\cos\alpha$ ва $T\sin\alpha$.

Мувозанат тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$T\sin\alpha = -l\delta,\ T\cos\alpha = -H. \tag{1}$$

Биринчи тенгликни иккинчисига бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\delta}{H}l, \tag{2}$$

аммо

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{H}{\delta} = a$ деб белгилаб,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}l \tag{3}$$

ни ҳосил қиламиз.

(3) тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{dl}{dx}, \tag{4}$$

аммо

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{5}$$

(5) тенгликдаги $\frac{dl}{dx}$ нинг қийматини (4) тенгликка қўйиб,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{6}$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз.

$\frac{dy}{dx} = z$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$.

(6) тенглама бундай кўринишни олади:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+z^2}. \tag{7}$$

Ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{a}\,dx. \tag{8}$$

(8) тенгламани интеграллаймиз:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{a}\int dx;\ \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \frac{1}{a}x + C_1. \tag{9}$$

$x = 0$ бўлганда $z = \frac{dy}{dx} = 0$ (C нуқтадаги ҳосила) эканини билган ҳолда хусусий ечимни топамиз. Бу қийматни (9 тенгламага қўямиз:

$$\ln\left(0+\sqrt{1+0^2}\right)=\frac{1}{a}\cdot 0+C_1,$$

бундан

$$C_1=\ln 1=0.$$

Хусусий ечим бундай бўлади:

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\frac{1}{a}x, \qquad (10)$$

ёки

$$e^{\frac{x}{a}}=z+\sqrt{1+z^2}, \qquad (11)$$

ёки

$$e^{\frac{x}{a}}-z=\sqrt{1+z^2}. \qquad (12)$$

(12) тенгликни квадратга кўтарамиз:

$$e^{\frac{2x}{a}}-2e^{\frac{x}{a}}z+z^2=1+z^2, \qquad (13)$$

ёки

$$e^{\frac{2x}{a}}-2e^{\frac{x}{a}}z=1 \text{ ёки } 2e^{\frac{x}{a}}z=e^{\frac{2x}{a}}-1 \qquad (14)$$

(14) тенгликни $e^{\frac{x}{a}}$ га бўламиз.

$$2z=e^{\frac{x}{a}}-\frac{1}{e^{\frac{x}{a}}}=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}} \qquad (15)$$

ёки

$$z=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right). \qquad (16)$$

$z=\frac{dy}{dx}$ тескари алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right). \qquad (17)$$

(17) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dy=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx. \qquad (18)$$

(18) тенгламани интеграллаймиз:

$$y = \frac{1}{2}\left(ae^{\frac{x}{a}} + ae^{-\frac{x}{a}}\right) + C_2 \text{ ёки } y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + C_2 \quad (19)$$

$x = 0$ да $y = b$ эканини билган ҳолда хусусий ечимни топамиз:

$b = \frac{a}{2}(e^0 + e^0) + C_2$ ёки $b = a + C_2$, бундан $C_2 = b - a$.

У ҳолда (19) тенглама

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + b - a \quad (20)$$

кўринишни олади.

Агар $b = a$ бўлса, у ҳолда занжир чизиқнинг (20) тенгламаси янада содда кўринишни олади:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

III. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш

1522. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x+2}\frac{dy}{dx}$, бунда $x = 2$ да $y = 2$ ва $\frac{dy}{dx} = 8$.

Ечилиши. 1.

$$\frac{dy}{dx} = z \quad (1)$$

деб фараз қиламиз, у ҳолда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \quad (2)$$

2. (2) ва (1) тенгликлардан $\frac{d^2y}{dx^2}$ ҳамда $\frac{dy}{dx}$ нинг қийматларини берилган тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+2}z. \quad (3)$$

3. (3) тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x+2} \quad (4)$$

4. (4) тенгламани интеграллаймиз:

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x+2}, \quad \ln z = \ln(x+2) + \ln C_1,$$

бундан

$$z = C_1(x+2). \tag{5}$$

5. (5) тенгламада (1) тенгликдан тескари алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{dy}{dx} = C_1(x+2). \tag{6}$$

6. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dy = C_1(x+2)\,dx. \tag{7}$$

7. (7) тенгликни интеграллаймиз:

$$y = C_1\frac{x^2}{2} + 2C_1x + C_2. \tag{8}$$

(6) ва (8) тенгламаларга бошланғич берилганларни қўйиб хусусий ечимни топамиз:

$$\begin{cases} 8 = C_1(2+2), \\ 2 = C_1\frac{2^2}{2} + 2C_1\cdot 2 + C_2, \end{cases}$$

бундан $C_1 = 2$ ва $C_2 = -10$.

$y = x^2 + 4x - 10$ хусусий ечимга эга бўламиз.

1523. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$, бунда $x = 2$ да $y = 6$ ва $\frac{dy}{dx} = 1$.

83-§. Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар

Ушбу

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x) \tag{1}$$

кўринишдаги тенглама ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама дейилади, бунда p ва q — ўзгармас миқдор; $f(x)$ эса x нинг узлуксиз функцияси

(1) тенгламанинг ўнг қисми нолга тенг бўлиши мумкин, яъни $f(x) = 0$, у ҳолда

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0. \tag{2}$$

(2) тенглама ўнг қисми бўлмаган иккинчи тартибли тенглама ёки чизиқли бир жинсли тенглама дейилади.

(2) тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = e^{rx} \tag{3}$$

кўринишда излаймиз бу ерда r — ўзгармас, уни топиш керак

(3) тенгликни дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx} \text{ ва } \frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}. \tag{4}$$

(3) ва (4) қийматларни (2) тенгламага қўйиб ва e^{rx} кўпайтувчига қисқартириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0,$$

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0,$$

$$r^2 + pr + q = 0. \qquad (5)$$

(5) тенглама (2) тенглама учун ёрдамчи ёки характеристик тенглама дейилади. (5) тенгламадан номаълум ўзгармас миқдорни топамиз:

Характеристик тенгламани тузиш учун (2) тенгламада, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ ва y ни (нолинчи тартибли ҳосила деб ҳисоблаб) r нинг ҳосила тартибига тенг даражаларига алмаштириш керак.

Характеристик тенгламани ечишда қуйидаги уч ҳол рўй бериши мумкин:

1) r_1 ва r_2 илдизлар — ҳақиқий ва ҳар хил $(r_1 \neq r_2)$;

2) r_1 ва r_2 илдизлар — ҳақиқий ва ўзаро тенг $(r_1 = r_2)$;

3) r_1 ва r_2 илдизлар — комплекс сонлар.

Бу ҳолларнинг ҳар бирига оид тенгламаларни қараб чиқамиз.

I ҳол. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил: $r_1 \neq r_2$. Иккита хусусий ечимга эга бўламиз:

$$y_1 = e^{r_1x} \text{ ва } y_2 = e^{r_2x}$$

Тенгламанинг умумий ечими бундай кўринишда бўлади:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \text{ ва } y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}.$$

Тенгламаларни ечинг.

1524. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0.$

Ечилиши. 1. Характеристик тенглама тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$r^2 - 7r + 10 = 0;\ r_1 = 2,\ r_2 = 5.$$

2. Тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз:

$$y_1 = e^{2x} \text{ ва } y_2 = e^{5x}.$$

3. Умумий ечимни тузамиз:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}.$$

1525. 1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$; 2) $y'' - 8y' + 15y = 0$,
3) $y'' + 5y' + 6 = 0$.

1526. $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}=0.$

Ечилиши.

1. $r^2-5r=0$ $r(r-5)=0$; $r_1=0$, $r_2=5$.
2. $y_1=e^{0\cdot x}$ ва $y_2=e^{5x}$.
3. $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1+C_2e^{5x}$.

1527. 1) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0.$

1528. $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=0.$

Ечилиши.

1. $r^2-9=0$; $r_1=-3$, $r_2=3$.
2. $y_1=e^{-3x}$ ва $y_2=e^{3x}$.
3. $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$.

1529. 1) $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=0$; 2) $y''-y=0$

1530. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0.$ Агар $x=0$ да $y=8$ ва $\frac{dy}{dx}=0$ бўлса, хусусий ечимни топинг.

Ечилиши.

1. $r^2-2r-3=0$; $r_1=-1$, $r_2=3$.
2. $y_1=e^{-x}$ ва $y_2=e^{3x}$.
3. $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{-x}+C_2y^{3x}$. (1)
4. (1) тенгликда $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx}=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x} \tag{2}$$

5. Бошланғич берилганларни (1) ва (2) тенгликларга қўямиз:

$$8=C_1e^{-1\cdot 0}+C^2e^{3\cdot 0}=C_1+C_2;$$
$$0=-C_1e^{-1\cdot 0}+3C_2e^{3\cdot 0}=-C_1+3C_2,$$

яъни

$$\begin{cases} 8=C_1+C_2, \\ 0=-C_1+3C_2. \end{cases}$$

бундан $C_1=6$ ва $C_2=2$.

6. Изланаётган хусусий ечим

$$y=6e^{-x}+2e^{3x}$$

бўлади.

1531. Хусусий ечимларни топинг:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$, бунда $x=0$ да $y=2$ ва $\frac{dy}{dx}=0$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-20=0$, *бунда* $x=0$ *да* $y=\frac{9}{5}$ *ва* $\frac{dy}{dx}=0$.

II ҳол. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ўзаро тенг $r_1=r_2$. Иккита хусусий ечимга эга бўламиз:

$$y_1=e^{r_1x} \text{ ва } y_2=xe^{r_1x}.$$

Умумий ечим бундай кўринишда бўлади:

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$$

Тенгламаларни ечинг.

1532. $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+16y=0$.

Ечилиши. 1. Характеристик тенглама тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$r^2-8r+16=0;\ r_1=r_2=4.$$

2. Тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз:

$$y_1=e^{4x},\ y_2=xe^{4x}.$$

3. Умумий ечимни тузамиз:

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}.$$

1533. 1) $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0$; 2) $y''+2y'+y=0$.

1534. $y''+8y'+16y=0$, бунда $x=0$ да $y=1$ ва $y'=1$.

Ечилиши. 1. Характеристик тенглама тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$r^2+8r+16=0,\ r_1=r_2=-4.$$

2. Тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз: $y_1=e^{-4x}$, $y_2=xe^{-4x}$.

3. Умумий ечимни тузамиз:

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}. \qquad (1)$$

4. (1) тенгликдан y' ни топамиз:

$$y'=-4C_1e^{-4x}+C_2e^{-4x}-4C_2xe^{-4x}. \qquad (2)$$

5. Берилган бошланғич шартларни (1) ва (2) тенгламаларга қўямиз:

$$\begin{cases} 1=C_1e^0+C_2\cdot 0\cdot e^0, \\ 1=-4C_1e^0+C_2e^0-4C_2\cdot 0\cdot e^0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} 1 = C_1, \\ 1 = -4C_1 + C_2, \end{cases}$$

бундан $C_1 = 1$ ва $C_2 = 5$.

C_1 ва C_2 нинг топилган қийматларини (1) тенгламага қўйиб, хусусий ечимни топамиз:

$$y = e^{-4x} + 5xe^{-4x}.$$

1535. $y'' - 10y' + 25 = 0$ бунда $x = 0$ да $y = 2$ ва $y' = 8$.

III ҳол. Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар. Иккита хусусий ечимга эга бўламиз:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx \text{ ва } y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Умумий ечим

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$$

кўринишда бўлади.

Тенгламаларни ечинг.

1536. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25 = 0.$

Ечилиши. 1. Характеристик тенглама тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$r^2 - 6r + 25 = 0; \quad r_1 = 3 + 4i, \quad r_2 = 3 - 4i;$$

бунда $a = 3$ ва $b = 4$.

2. Тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx = e^{3x}\cos 4x$$

ва

$$y_2 = e^{ax}\sin bx = e^{3x}\sin 4x.$$

3. Умумий ечимни тузамиз:

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx) = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x).$$

$$y = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_1\sin 4x).$$

1537. 1) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5 = 0$; 2) $y'' - 4y' + 7 = 0$.

1538. $y'' - 6y' + 13 = 0$, бунда $x = 0$ да $y = 1$ ва $y' = 5$.

Ечилиши. 1. Характеристик тенглама тузамиз ва унинг илдизларини топамиз: $r^2 - 6r + 13 = 0$; $r_1 = 3 + 2i$, $r_2 = 3 - 2i$, бу ерда $a = 3$ ва $b = 2$.

2. Тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз:

$$y_1 = e^{3x}\cos 2x \text{ ва } y_2 = e^{3x}\sin 2x.$$

3. Умумий ечимни тузамиз:

$$y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x). \qquad (1)$$

4. (1) тенгликдан y' ни топамиз:

$$\begin{aligned} y' &= 3e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{3x}(-2C_1\sin 2x + \\ &+ 2C_2\cos 2x) = e^{3x}(3C_1\cos 2x + 3C_2\sin 2x - 2C_1\sin 2x + \\ &+ 2C_2\cos 2x) = e^{3x}[(3C_1 + 2C_2)\cos 2x + \\ &+ (3C_2 - 2C_1)\sin 2x]\cdot \qquad (2). \end{aligned}$$

5. Берилган бошланғич шартларни (1) ва (2) тенгламаларга қўямиз:

$$1 = e^0(C_1\cos 0 + C_2\sin 0)$$

$$5 = e^0[(3C_1 + 2C_2)\cos 0 + (3C_2 - 2C_1)\sin 0]$$

ёки бундан $C_1 = 1$ ва $C_2 = 1$.

C_1 ва C_2 нинг топилган қийматларини (1) тенгламага қўйиб, хусусий ечимни ҳосил қиламиз: $y = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$

1539. $y'' + 9y = 0$, бунда $x = \frac{\pi}{3}$ да $y = 1$ ва $y' = -6$.

84- §. Аралаш масалалар

Дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг.

1540. $ds - s\operatorname{ctg} t\, dt = 0$, бунда $t = \frac{\pi}{2}$ да $s = 2$.

1541. $(1 - y)dx + (1 + x)dy = 0$, бунда $x = 1$ да $y = 3$.

1542. $(1 - x^2)dy = xy\,dx$, бунда $x = 0$ да $y = 1$.

1543. $x^2dy + (x - 1)ydx = 0$, бунда $x = 1$ да $y = 1$.

1544. $xy^2dy = (x^3 + \frac{4}{3}y^3)dx$, бунда $x = 1$ да $y = 3$.

1545. $xy\,dy = (x^2 - y^2)dx$, бунда $x = 1$ да $y = 0$.

1546. $\frac{dy}{dx} - 2y - 4 = 0$, бунда $x = 0$ да $y = -1$.

1547. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{e^x}$, бунда $x = 0$ да $y = 5$.

1548. $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{t}\frac{ds}{dt}$, бунда $t = 1$ да $s = 2$ ва $\frac{ds}{dt}$ 1.

1549. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$, бунда $x = 0$ да $y = 4$ ва $\frac{dy}{dx} = -4$.

Контрол иш

Дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг.

I вариант

1550. 1. $4\,xy = (x^2 + 1)\,dy$, бунда $x = 1$ да $y = 4$,
2. $x\,dy = (x - y)\,dx$, бунда $x = 8$ да $y = 3$.
3. $\frac{dy}{dx} + 4y - 2 = 0$, бунда $x = 0$ да $y = \frac{3}{2}$.
4. $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 4$, бунда $t = 2$ да $s = 5$ ва $\frac{ds}{dt} = 6$.
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$, бунда $x = 0$ да $y = 5$ ва $\frac{dy}{dx} = 0$.

II вариант

1551. 1. $(x^2 + 1)\,dy = xy\,dx$, бунда $x = \sqrt{3}$ да $y = 2$.
2. $x^2dy = (xy - y^2)\,dx$, бунда $x = 1$ да $y = 1$.
3. $\frac{dy}{dx} = 4y - 2$, бунда $x = 0$ да $y = \frac{3}{2}$.
4. $\frac{d^2s}{dt^2} = 6t + 8$, бунда $t = -2$ да $s = 12$ ва $\frac{ds}{dt} = -5$.
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$, бунда $x = 0$ да $y = 3$ ва $\frac{dy}{dx} = 0$.

ЖАВОБЛАР

2. 1) 5; 2) $3\sqrt{5}$. **3.** 1) 5; 2) 13. **4.** 1) $15+5\sqrt{5}$; 2) $18+2\sqrt{17}$. **6.** $O_1(4; -1)$. **7.** $O_1(4; -3)$, $r=13$. **9.** $M_1(-2; 0)$, $M_2(22; 0)$. **10.** $B_1(0; -5)$, $B_2(0; 3)$. **12.** 1) (0; —3); 2) (0; 5).

13. 1) (1; 0); 2) (—4; 0). **15.** 1) $M_1(-13; -13)$, $M_2(-5; -5)$; 2) $M_1(2; 2)$, $M_2(10; 10)$. **17.** $M_1(-5; 10)$, $M_2(7; 10)$.

18. $A_1(13; -2)$, $A_2(13; 8)$.

20. 1) $C(2; -1)$; 2) $C(2; -5)$. **22.** $B(2; 1)$. **23.** $A(-1; 8)$. **25.** (6; —2), (—2; 4) ва (—6; —6). **27.** $C(6; 4)$. **28.** $C_1(5; -4)$ ва $C_2(8; -7)$. Масаланинг иккита ечими бор, чунки масаланинг шартида кесма ўзининг қайси учидан бошлаб берилган нисбатда бўлиниши кўрсатилмаган (*A* дан *B* гами ёки *B* дан *A* гами).

30. (—2; —0,5) ва (2; 1,5). **32.** (1; 1) ва (—1; 5). **34.** (—3; —1), (1; 0), (5; 1) ва (9; 2). **36.** $A(-18; 9)$.
37. $B(2; -1)$. **39.** $C(4; -9)$. **40.** $C(9; 5)$. **42.** $C(2; -5)$ **43.** $P(17; 9)$. **45.** $N(0; 4)$. **46.** $A(-11; -2)$. **48.** (—4/3; —4/3). **50.** 1) (—2; 1); 2) (—2/3; 2). **52.** (2; 1). **54.** (—2; 3). **56.** (4; —1).

57. 1) (2; 3); 2) (—2; 3); 3) (2; —3); 4) (—3; —2). **58.** 1) (3; —1) ва (1; —7); 2) (—3; —1) ва (—1; —7); 3) (3; 1) ва (1; 7); 4) (—1; 3) ва (—7; 1).

59. 1) (—3; —2), (—7; —4) ва (—1; —6); 2) (3; —2), (7; —4) ва (1; —6); 3) (—3; 2), (—7; 4) ва (—1; 6); 4) (2; 3); (4; 7) ва (6; 1).

60. 13. **61.** 10. **62.** $A(-8; -3)$. **63.** (—3; —3). **64.** $D(6; -3)$; **65.** $D(-2; -2)$; **66.** $C(5; -5)$ ва $D(1; -7)$. **67.** $C(1; 0)$ ва $D(-2; -4)$.

68. 1) $M(0; -3)$; 2) (—1; 1) ва (1; 2); 3) $A(4; 4)$; 4) $C(11; 5)$; 5) $M_1(2; -2)$, $M_2(10; -10)$ **69.** 1) $M_1(-10; 10)$, $M_2(6; 10)$; 2) $C(4; -3)$; 3) (5; 2) ва (8; 3); 4) $B(7; 4)$; 5) $C(8; -2)$.

75. $y+4=0$. **76.** $x+6=0$. **77.** 6 (кв. бир.). **78.** 20 (кв. бир.).

80. $y=0$; $x=-4$; $y=-3$ ва $x=0$. **81.** $x=2$; $y=0$; $x=5$; $y=3$.

85. $A(9; -3)$ ва $B\left(-1; \frac{1}{3}\right)$ нуқталар тегишли, $C(8; 4)$ нуқта тегишли эмас.

87. 1) $x+y=0$; 2) $4x-y=0$. **89.** 1) $\frac{\pi}{6}$ (30°); 2) $\frac{2\pi}{3}$ (120°); 3) 78°41′; 4) 108°26′; **91.** 1) $\sqrt{3}x-y=0$; 2) $\sqrt{3}x-3y=0$; 3) $x+y=0$; 4) $3x-y=0$; 5) $5x+y=0$. **93.** 1) $2x+y=0$; 2) $5x-y=0$. **95.** $P(4; 3)$. **96.** (0; 0), (12; 0), (12; 16) ва (0; 16).

98. 1) (2; 0) ва (0; 4); 2) (—5; 0) ва (0; —5). **101.** *M* ва *N* нуқталар тегишли, *P* нуқта тегишли эмас. **102.** *A* ва *B* нуқта тегишли, *C* нуқта тегишли эмас.

104. $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$. **106.** 1) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$; 2) $y=-x-2$; 3) $y=2x-2$. **107.** 1) $\alpha\approx 81°52'$; 2) $\alpha=135°$; 3) $\alpha\approx 22°18'$; 4) $\alpha\approx 109°05'$. **109.** $y=-2x-12$. **111.** $y=-2x+3$. **112.** $y=-x-5$. **114.** 1) (—4; 0) ва (0; —5); 2) (—2; 0) ва (0; 7).

117. *A*, *C* ва *D* нуқталар тегишли, *B* нуқта тегишли эмас.

119. 1) $y=-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$; 2) $y=\frac{5}{2}x+3$. **121.** 1) 149°02′;

2) $70°59'$. **123.** 15. **125.** $M(2; -1)$. **126.** $(-4; -2)$.

129. Учинчи нуқта тўғри чизиққа тегишли эмас, қолганлари тегишли. **131.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$; 2) $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$; 3) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 4) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$. **133.** 1) $5x+2y-10=0$; 2) $4x-3y-12=0$; 3) $2x+3y-1=0$. **135.** 1) $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1$; 2) $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-2}=1$; 3) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$. **137.** 1) $y=\frac{5}{2}x-5$; 2) $y=\frac{1}{2}x+2$; 3) $y=-\frac{3}{2}x+3$. **139.** 1) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$; 2) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$. **141.** 1) 10; 2) 20. **143.** 1) $158°12'$. 2) $75°58'$.

145. $y+2=k(x+4)$. **147.** 1) $(-1; -4)$; 2) $(2; 0)$. **149.** $x-y=0$. **150.** $2x+y-4=0$. **152.** $3x+y-7=0$. **153.** 1) $x-y+1=0$; 2) $x+y-5=0$.

155. 1) $x-y=0$; 2) $4x+3y-12=0$. **156.** 1) $AB: 7x-4y+13=0$; $BC: 9x+7y-44=0$ ва $AC: 2x+11y+28=0$; 2) $2x-y-1=0$ $5x+y-20=0$ ва $3x-5y-12=0$. **157.** 1) $x+y-1=0$; 2) $x-2y-2=0$. **159.** 1) $\operatorname{arctg} 0{,}8 \approx 38°39'$; 2) $\operatorname{arctg}(-3) \approx 108°26'$; **161.** $a=5$, $b=-5$. **162.** $(0; 3)$. **164.** $x-y+3=0$. **165.** $x+y-2=0$.

167. 1) $(-1; -3)$; 2) $(4; -2)$. **169.** 1) $(-2; -4)$, $(5; 2)$ ва $(-5; 0)$; 2) $(4; 1)$, $(-3; -3)$ ва $(1; 6)$.

171. 1) $\operatorname{arctg} 2 \approx 63°26'$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{7}{9} \approx 37°52'$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{14}{23} \approx 31°20'$. **173.** 1) $\operatorname{arctg} 2{,}4 \approx 67°23'$, $\operatorname{arctg} 1{,}5 \approx 56°19'$ ва $\operatorname{arctg} 1{,}5 \approx 56°19'$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{45}{11} \approx 76°16'$, $\operatorname{arctg}\frac{45}{47} \approx 43°45'$ ва $\operatorname{arctg}\frac{45}{26} \approx 59°59'$. **175.** $\operatorname{arctg}\frac{16}{15} \approx 46°51'$. **176.** $\operatorname{arctg}\frac{25}{21} \approx 49°58'$. **178.** 1) $A \approx 25°46'$, $B \approx 23°38'$, $C \approx 130°36'$; 2) $A \approx 67°23'$, $B=C \approx 59°19'$. **180.** $\operatorname{arctg} 0{,}75 \approx 36°52'$. **182.** $\operatorname{arctg}\frac{9}{8} \approx 48°22'$. **183.** $\operatorname{arctg} 8 \approx 82°52'$. **185.** $\operatorname{arctg}\frac{27}{47} \approx 29°53'$. **187.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{7} \approx 35°32'$. **188.** $45°$. **190.** $2x-y+9=0$, $11x-2y+32=0$. **191.** $y=0$, $(-1; 0)$; $x=0$, $(0; 1)$. **193.** 1) $y=-3x$ ва $y=-\frac{2}{3}x$; 2) $y=-\frac{3}{2}x$ ва $y=-\frac{1}{3}x$. **195.** $y+2=0$.

197. $5x-3y+21=0$. **198.** $3x+4y+19=0$. **199.** $7x+5y+26=0$. **200.** $x-6y-25=0$. **201.** $x-4y+6=0$. **202.** $x-2y+2=0$. **204.** $2x+5y+7=0$. **205.** $5x+6y+14=0$. **206.** $3x-2y=0$. **207.** $5x-9y+26=0$. **208.** $x+y+3=0$ ва $x-y-3=0$. **209.** $x+3y=0$. **210.** $x-y-5=0$. **211.** $2x-3y+10=0$. **213.** $2x-3y+1=0$. **214.** $7x+3y+20=0$. **216.** 1) $10x+3y+2=0$, $5x+9y+2=0$ ва $5x-6y=0$; 2) $x+y+10=0$, $15x+4y-18=0$ ва $10x-y-68=0$. **218.** 1) $2x-11y-29=0$, $5x-3y+10=0$ ва $3x+8y+39=0$; 2) $x+2y-5=0$, $x-y=0$ ва $2x+y-5=0$. **220.** 5. **221.** 10. **223.** 1) 10; 2) 13.

224. $k = 2$. **225.** $(-2; -7)$. **226.** $x - 6y = 0$, $3x - 2y = 0$. **227.** $x - 6y = 0$, $2x - 3y = 0$. **228.** $8x - 11y + 2 = 0$, $5x - 2y - 15 = 0$, $2x + 7y - 32 = 0$. **229.** $9x + 11y + 24 = 0$. **230.** $(6; 2)$ **231.** $5x - 12y = 0$. **232.** $8x - 15y + 11 = 0$. **233.** $4x - y + 36 = 0$, $x + 4y - 25 = 0$. **234.** $4x + 5y - 16 = 0$, $4x + 5y + 25 = 0$. **235.** 1) $2x - 3y + 4 = 0$; 2) $3x - 11y - 7 = 0$; 3) $3x + 2y - 7 = 0$; 4) 45 ва 90°; 5) $\left(\frac{7}{3}; 0\right)$. **236.** $x - y - 1 = 0$. **237.** $14x + 7y - 20 = 0$. **238.** $9x + 2y - 85 = 0$, $7x - 6y - 51 = 0$ ва $x + 4y - 17 = 0$. **239.** $x - 3y - 3 = 0$, $3x - 2y - 16 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$ ва $5x - 8y - 6 = 0$. **240.** $x - 3y - 8 = 0$, $5x - 3y - 32 = 0$, $5x - 9y + 4 = 0$ ва $x + 6y - 13 = 0$. **241.** $2x - y + 3 = 0$, $2x - y - 7 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, $x + 2y - 11 = 0$, $3x + y - 8 = 0$ ва $x - 3y + 4 = 0$. **242.** $3x - y + 1 = 0$ ва $x + 3y - 13 = 0$. **243.** $(1; 4)$.

244. 1) $4x - 3y + 37 = 0$; 2) $4x + 5y + 13 = 0$; 3) $3x - 4y - 10 = 0$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{48}{11}$; 5) $x + 1 = 0$. **245.** 1) $x - 2y + 18 = 0$; 2) $y - 4 = 0$; 3) $x - 3y + 2 = 0$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{21}{13}$; 5) $\left(-\frac{2}{3}; 4\right)$.

247. $x - y - 4 = 0$. **250.** $x^2 + y^2 = 36$. **252.** $2x^2 + 2y^2 - 25 = 0$. **254.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. **256.** $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$. **258.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{72} = 1$. **260.** $y^2 - 6x + 9 = 0$. **261.** $x^2 + 8y + 8 = 0$. **263.** $y^2 - 6y + 12x - 3 = 0$. **264.** $x^2 + 6x - 12y + 21 = 0$. **265.** $x^2 - 4x + 2y + 5 = 0$. **268.** $x^2 + y^2 - xy = 0$. **270.** $xy - 5x - 8y + 28 = 0$.

271. $(2; 4)$ нуқта тегишли. $(7; 1)$ ва $(0; 2)$ нуқталар тегишли эмас. **272.** $(-4; 3)$ нуқта тегишли. $(5; 0)$ нуқта тегишли эмас.

274. $x^2 + y^2 = 3$. **275.** $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 20 = 0$. **277.** $x^2 + y^2 + 2x - 8y = 0$. **278.** $x^2 + y^2 + 6x - 32 = 0$. **279.** 1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 21 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8y + 11 = 0$. **280.** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. **281.** $x^2 + y^2 + 8x - 10y = 0$. **282.** 1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$. **284.** $(2; 0)$, $(-6; 0)$, $(0; 3)$ ва $(0; -4)$. **286.** $(1; 5)$ ва $(7; -3)$. **288.** 1) $x^2 + y^2 + 8x - 84 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. **289.** 1) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 87 = 0$. **291.** $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$ ва $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$; **293.** $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ ва $x^2 + y^2 - 54x - 58y + 729 = 0$. **295.** $x^2 + y^2 - 58x - 58y + 841 = 0$ ва $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$. **297.** $x^2 + y^2 - 4y - 30 = 0$. **299.** $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 27 = 0$. **300.** $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$. **302.** $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$. **304.** $x^2 + y^2 + 4x + 3y = 0$. **307.** 1) $O_1(-3; 5)$, $r = \sqrt{21}$; 2) $O_1(0; -6)$, $r = 7$. **308.** $O_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $r = \frac{7}{2}$.

309. 1) $O_1\left(-\frac{7}{3}; 3\right)$, $r = 5$; 2) $O_1(2; 5)$, $r = 0$ (айлана мавжуд эмас). 3) $O_1(-3; -7)$, $r = \sqrt{-23}$ (айлана мавжуд эмас). **310.** 1) 10; 2) $\sqrt{157}$. **311.** 1) $4x - 3y - 10 = 0$; 2) $4x - 7y + 29 = 0$. **313.** $x + y + 1 = 0$. **315.** $3x + 2y = 0$. **316.** $5x + 2y - 13 = 0$. **317.** $x - y - 3 = 0$. **319.** $2x + 5y + 4 = 0$. **321.** $y = 2x$. **323.** $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 87 = 0$.

324. 1) A ва B нуқталар тегишли, C тегишли эмас; 2) A ва B нуқталар тегишли. **326.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **327.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$. **329.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **330.** $\frac{x^2}{89}+\frac{y^2}{64}=1$. **332.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$. **334.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$. **335.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$. **337.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{28}=1$. **339.** $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{24}=1$. **340.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. **342.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **343.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. **345.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. **346.** $\frac{4x^2}{169}+\frac{4y^2}{25}=1$. **348.** $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{225}=1$. **349.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **351.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. **352.** $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$. **354.** 1) $(\pm 5;\ 0)$, $(0;\ \pm 3)$, $2a=10$ ва $2b=6$; 2) $(\pm 4;\ 0)$ $(0;\ \pm 9)$, $2a=18$ ва $2b=8$. Эллипснинг фокуслари Oy ўқда жойлашган. **356.** 1) $F(\pm 3;\ 0)$, $2c=6$; 2) $F(0;\ \mp 4)$, $2c=8$. **358.** 1) $e=0,8$; 2) $e=0,75$. **360.** 1) (12; 3) ва (9; 4); 2) 4; 1,8) ва (3; 2,4). **362.** $\sqrt{245}\approx 15,6$. **363.** 1) A ва B нуқталар тегишли, C нуқта тегишли эмас; 2) A ва C нуқталар тегишли, B нуқта тегишли эмас. **365.** $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{400}=1$. **367.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$. **368.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$. **370.** 1) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$. 2) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$. **372.** $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{32}=1$. **374.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$. **376.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ва $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{256}-\frac{y^2}{144}=1$. **378.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$. **379.** $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{36}=1$. **381.** 1) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$; 2) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$. **383.** 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$. **385.** 1) $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$; 3) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}=1$. **387.** 1) $y=\pm\frac{3}{4}x$; 2) $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$. **389.** $x^2-y^2=60$. **390.** $y^2-x^2=2$. **392.** $(-6;\ 0)$ ва $(6;\ 0)$. **393.** 1) $2a=10$; $2b=14$; 2) $2a=4\sqrt{3}$, $2b=18$. **395.** $(-6;\ 0)$ ва $(6;\ 0)$. **396.** 1) $2c=16$; 2) $2c=12$. **398.** 1) $e=\frac{4}{3}$; 2) $e=\frac{7}{5}$. **400.** $A(0;\ \pm 4)$, $F(0;\ \pm 5)$; $e=\frac{5}{4}$; $x=\pm\frac{3}{4}y$. **401.** A ва B нуқталар тегишли, C нуқта тегишли эмас. **402.** A ва B нуқталар тегишли, C нуқта тегишли эмас. **404.** 1) $y^2=20x$; 2) $y^2=-16x$; 3) $x^2=8y$; 4) $x^2=-12y$. **406.** 1) $y^2=8x$; 2) $y^2=-12x$; 3) $x^2=16y$; 4) $x^2=-4y$. **408.** 1) $y^2=1,8x$; 2) $y^2=-x$; 3) $y^2=-2x$. **410.** 1) $x^2=-\frac{4}{3}y$; 2) $x^2=9y$. **412.** 1) $x=-2$; 2) $x=\frac{9}{4}$; 3) $y=-1$; 4) $y=\frac{5}{2}$. **414.** 1) $F\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$; 2) $F(-1;\ 0)$; 8) $F\left(0;\ \frac{7}{2}\right)$; 4) $F\left(0;\ -\frac{5}{4}\right)$. **416.** 1) $F(-2;\ 0)$; 2) $F(5;\ 0)$; 3)

$F(0;\ 4)$; 4) $F(0;\ 6)$. 418. 20. 420. 1) (1; 4); 2) (1; 2) ва (4; 4). 422. (0; 0) ва (1; 1).

424. $y^2+4y-5x-16=0$. 425. $x^2-4x-16y+68=0$. 426. $y^2+8y-8x=0$. 427. $x^2-10x-5y=0$. 429. $3y^2+6y+2x-3=0$. 430. $5x^2-30x+9y=0$. 432. 1) $y^2-12y+24x-60=0$; 2) $x^2-6x-8y-7=0$; 3) $x^2+2x+20y-19=0$. 434. $y^2+6y+16x-7=0$. 435. $x^2+4x-24y+100=0$. 436. $x^2+6x+8y-31=0$. 438. $y^2-12x+36=0$. 439. $y^2+24x+96=0$. 440. $x^2-8y+16=0$. 441. $x^2-12y-24=0$. 442. $x^2+12y+36=0$. 444. $y^2+2y+16x+33=0$. 445. $y^2-8x-16=0$. 446. $x^4-4x-12y-8=0$. 447. $x^2+8y-16=0$. 450. 1) (3; —5); 2) (—4; —1). 452. (—2; —3). 454. 1) (—1; 4); 2) (—3; 0). 456. 1) (—5; —4); 2) (0; 0). 458. 1) $y=5$; 2) $x=-8$. 460. 1) $x=-1{,}5$; 2) $x=0$; 3) $y=1{,}5$.

463. $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. 464. $\operatorname{arctg}\frac{16}{13}$. 465. $\operatorname{arctg} 8$, $\operatorname{arctg}\frac{8}{23}$. 466. $3x-y-16=0$, $3x-y-4=0$, $x+3y+12=0$, $x+3y-28=0$. 467. (—2; —1), (—2; 1), (2; —1) ва (2; 1). 468. $(-\sqrt{3};\ -1)$ ва $(\sqrt{3};\ -1)$. 469. $x=0$, $y=0$, $5x+3y-15=0$; $5x-3y+15=0$, $5x+3y+15=0$, $5x-3y-15=0$. 470. 8,8 (кв. бирл.). 471. 24 (кв. бирл.). 472. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$. 473. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 474. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. 475. (0; 0) ва (3; 6). 476. $y-2=0$. 477. $p=8$.

478. 1) $2x+5y+1=0$; 2) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{44}=1$; 3) $e=\frac{4}{3}$; 4) $y=1$; 5) $y=-4$. 479. 1) $x-y+3=0$; 2) $e=\frac{3}{5}$; 3) $\frac{x^2}{729}-\frac{y^2}{1296}=1$; 4) $x=-3$; 5) $x=5$.

481. 1) 25; 2) —1; 3) —12; 4) 10. 483. 1) —21; 2) 8. 485. 1) —6; 2) 3. 487. 1) ∞; 2) ∞. 489. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. 491. 1) $\frac{1}{6}$; 2) —6; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 3. 493. 1) 3; 2) 1. 495. 1) $-\frac{3}{5}$; 2) $\frac{32}{35}$. 497. 1) 6; 2) $\frac{1}{2}$. 498. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$. 500. $-\frac{1}{6}$. 502. 1) 2; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 503. $-\frac{1}{2}$. 504. —2. 506. 1) ∞; 2) $-\infty$. 508. 1) 0; 2) 5. 510. 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$. 512. 1) 3; 2) 4. 514. 1) ∞; 2) ∞; 3) 3. 516. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{2}$.

518. 1) x^3 миқдор x га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор, 2) $\sqrt{6x}$ миқдор x га нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик миқдор; 3) $5x$ ва x бир хил кичиклик тартибида; 4) $\sin\frac{x}{3}$ ва x бир хил тартибли чексиз кичик миқдорлар; 5) $\operatorname{tg} x$ ва x — эквивалент чексиз кичик миқдорлар.

522. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 0. 524. 1) $\frac{1}{16}$; 2) 27. 526. 1) 0; 2) ∞. 528. 1) 2; 2) 2; 3) 4; 4) 6; 5) 0. 530. 0. 532. 1) $\frac{4}{5}$; 2) 2. 534. 1. 536. 1) 1; 2) 1.

538. 1) 1,099; 2) 1,386; 3) 1,609; 4) 2,303; 5) —1,204; 6) —0,223; 7) 1,758; 8) —1,427; 9) 2,747. 540. 1) 0,9031; 2) 1,6021; 3) 0,8508 542. 1) 148,5; 2) 1,396; 3) 0,1353. 544. 1) 6,909; 2) —4,606; 3) 1,535. 546. $e^{\frac{2}{3}}$. 548. 1) $e^{\frac{12}{5}}$; 2) $\frac{1}{e}$. 550. 1) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 2) e.

551. 1 552. 3. 553. 4. 554. $\frac{3}{4}$. 555. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 556. $\frac{3}{2}$. 557. $\frac{1}{4}$. 558. 1) 0; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$. 559. 1) ∞; 2) $\frac{1}{2}$. 560. —2. 561. 0. 562. 1. 563. 2. 564. $\frac{3}{5}$. 565. $\frac{1}{2}$. 566. $e^{\frac{4}{9}}$. 567. $e^{\frac{10}{3}}$. 568. 1) e^{k}; 2) e^{-3}.

569. 1) $\frac{13}{14}$; 2) 3; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) e^{-2}. 570. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 5; 5) e^{-3}.

572. 1) $F(0)=4$; $F(-1)=8$; $F(2)=20$; 2) $s(0)=8$; $s(2)=0$, $s(-1)=15$. 575. 1. 1) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{8}$; 2) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$, 3) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$; 4) $f(0)=1$; 2. 1) $f(0)=1$; 2) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; 3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; 4) $f(\pi)=1$.

577. 1) $(-\infty, +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty, +\infty)$. 580. 1) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; 2) $(-\infty, 4)$ ва $(4, +\infty)$; 3) $(-\infty, -2)$ ва $(-2, +\infty)$. 582. 1) $(-\infty, -1)$, $(-1; +1)$ ва $(+1, +\infty)$; 2) $(-\infty, -3)$, $(-3, 4)$ ва $(4, +\infty)$; 3) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ ва $(2, +\infty)$; 4) $(-\infty, 4)$, $(4, 5)$ ва $(5, +\infty)$. 585. 1) $(-\infty, 1]$; 2) $(-\infty, 3]$; 3) $[4, +\infty)$. 587. 1) $[0, 4]$; 2) $[5, +\infty)$. 589. $(1, 7]$. 591. 1) $(-\infty, -5]$ ва $[-3, +\infty)$; 2) $[-5, 2]$. 593. 1) $[8, 12)$; 2) $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$. 595. 1) $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ ва $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. 597. 1) $\left(-\infty, \frac{\pi n}{2}\right)$ ва $\left(\frac{\pi n}{2}, +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty, -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$ ва $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n, +\infty\right)$; 3) аниқланиш соҳаси πk ва $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ дан бошқа ҳамма ҳақиқий сонлар, бунда k ва n — ихтиёрий бутун сонлар. 600. 1) $[-2; 2]$; 2) $[-4; 6]$. 602. 1) $[-1, +\infty)$; 2) $\left[-\frac{25}{8}, +\infty\right)$. 604. 1) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; 2) $[-2, 2]$.

606. $\Delta y=2,25$. 608. 1) $\Delta y=2x\Delta x+2\Delta x+(\Delta x)^2=0,81$; 2) $\Delta y=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=2,791$. 610. 1) $\Delta y=\frac{3\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{3}{7}$; 2) $\Delta y=-\frac{\Delta x}{2x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{14}$; 3) $\Delta y=-\frac{(x^2+x\Delta x+1)\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{33}{35}$.

612. 1) $\Delta y = \sqrt{2(x+\Delta x)} - \sqrt{2x} \approx 0,135$; 2) $\Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x} = 0,06$. 614. Ўзининг аниқланиш соҳасининг ҳаммасида узлуксиз. 616. Ўзининг аниқланиш соҳасининг ҳаммасида узлуксиз. 618. Ўзининг аниқланиш соҳасининг ҳаммасида узлуксиз. 620. $x = \frac{\pi}{3}$ нуқтада узлуксиз. 622. 1) $x = \frac{1}{2}$ нуқтада узилиш; 2) $x = 0$ нуқтада узилиш, 3) $x = \pm 1$ нуқталарда узилиш; 4) $x=1$ нуқтада узилиш.

624. 1) 15; 2) 40. 626. 100 м/сек. 627. 24 м/сек. 629. 1) $y'_{x=0} = -1$; 2) $y'_{x=1} = -3$; 3) $s'_{t=2} = 12$. 630. 1) $y'_{x=3} = \frac{1}{3}$; 2) $y'_{x=-1} = 2$. 632. 1) $y'_{x=5} = \frac{1}{4}$; 2) $y'_{x=4} = -\frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{6}$. 634. 1) $y'_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$; 2) $y'_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$. 636. $y'_{x=\frac{\pi}{6}} = -4$.

638. 1) $4x^3$; 2) $6x^2$; 3) $-\frac{15}{x^6}$; 4) $\frac{6}{x^3}$; 5) $\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$; 6) $6\sqrt{x}$; 7) $-3x^{-\frac{8}{5}}$; 8) $3\sqrt{x}$; 9) $-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$; 10) $-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. 640. 1) $\frac{2}{x^3}$; 2) $-\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$; 3) $-\frac{9}{2x^2\sqrt{x}}$; 4) $\frac{20}{3}x^2\sqrt[3]{x}$; 5) $\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$; 6) $3\sqrt{x}$; 7) $-\frac{5}{x^3\sqrt{x}}$; 8) $-x^{-\frac{7}{6}}$; 9) $-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$; 10) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 11) $-\frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}}$; 12) $\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}$. 642. 1) -48; 2) $-\frac{8}{3}$; 3) $\frac{11}{6}$. 644. 1) -20; 2) 21; 3) 3,5.

646. 1) $15x^{-6} - 60x^{-5} + 6x^{-4} - x^{-2}$; 2) $3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + 3$; 3) $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{4}{3}} - 4x^{-3} - x^{-2}$; 4) $x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{5}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} + x^{-2}$. 648. 1) $6x^2 + 14x + 1$; 2) $24x^3 + 22x$; 3) $4x^3$. 650. 1) $\frac{2a}{(x+a)^2}$; 2) $\frac{4x}{(2-x^2)^2}$; 3) $\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$; 4) $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$. 652. 1) $5\ (x^3-2x^2+5)^4(3x^2-4x)$; 2) $18x^2(x^3-1)^5$; 3) $n(ax^2+bx+c)^{n-1}(2ax+b)$; 4) $-8x(r^2-x^2)^3$. 654. 1) $\frac{15x^2}{(1-x^3)^6}$; 2) $-\frac{an}{(ax+b)^{n+1}}$. 656. 1) $\frac{6x^2(x^4+1)^2(x^4+2x-1)}{(x^3+1)^3}$; 2) $\frac{2an(a+x)^{n-1}}{(a-x)^{n+1}}$. 658. 1) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$; 4) $-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$; 5) $\frac{bx}{c\sqrt{x^2-a^2}}$; 6) $\frac{\sqrt{2px}}{2x}$. 660. 1) $\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$; 2)

$\frac{t(5t-2)}{\sqrt{2t-1}}$; 3) $\frac{t(3t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}}$; 4) $-5(1-2x)\sqrt{1-2x}$. 662. 1) $-\frac{a\sqrt{ax+}}{2(ax+b)}$
2) $-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$; 3) $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$; 4) $-\frac{3x+1}{2x\sqrt{3x}}$. 664. 1) $-\frac{3\sqrt{x^2-}}{(x^2-1)}$
2) $\frac{4\sqrt{x^2+4}}{(x^2+4)^2}$; 3) $\frac{9\sqrt{9+x^2}}{x^2(9+x^2)}$. 666. 1) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$; 2) $\frac{3a}{4(ax+b)^{\frac{1}{4}}}$
3) $-3\sqrt{2x-1}$; 4) 1.

668. 1) 32, 22, 2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$; 3) 17,2. 669. 1) 7; 2) 11. 671. $t=$ $=4$ сек. 673. 6 рад/сек, -2 рад/сек^2, $t=5$ сек. 675. Секундига 3°·677. 20 000 Ж. 679. 35 А/сек.

681. $k=5$. 682. $k=3$. 684. 63°26′. 685. 85°14′. 687. $x-y-6=0$; $x+y-2=0$. 688. $6x-y+4=0$; $x+6y+13=0$. 690. $(-2; -12)$.

692. arctg (-6) ва arctg 6. 694. (4; 2). 695. (1; 3). 697. arctg $\frac{5}{3}$ ва arctg $\frac{5}{7}$. 699. arctg 0,75. 700. arctg $\frac{9}{13}$.

701. 1) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; 2) 1; 3) $\frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}$; 4) $-\frac{3}{4}$. 702. 1) $\frac{1}{2\sqrt{t}}+$ $+\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$; 2) $\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$; 3) $-\frac{1}{16}$; 4) $-\frac{4}{9}$. 703. 1) $12(m+n)$; 2) $\frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$; 3) $-\frac{9x^2}{(3x-1)^4}$; 4) $18\sqrt{3}$. 704. 1) $\frac{1}{8}$; 2) -2; 3) $\frac{a}{(1-ax)^2}\times$ $\times\sqrt{\frac{1-ax}{1+ax}}$; 4) $-\frac{4}{15}$. 705. 1) $\frac{17}{18}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{36}$; 3) $\frac{7-4\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{(\sqrt{1-u^2}-1)\sqrt{1-u^2}}$. 706. arctg $\frac{5}{7}$ ва arctg $\frac{5}{3}$.

707. 1) 15; 2) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 20 м/сек^2; 5) $x+2y-4=0$. 708. 1) -3; 2) $7\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 30 м/сек^2; 5) arctg $\frac{3}{4}$.

710. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $2x+\cos x$; 3) $\sin x+x\cos x$. 712. 1) $3\cos 3x$; 2) $4\cos(4x-1)$; 3) $2t\cos t^2$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 5) $-\frac{m}{t^2}\cos\frac{m}{t}$; 6) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$.

714. 1) $\sin 2x$; 2) $15\varphi\sin 5\varphi^2\sin 10\varphi^2$; 3) $-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$; 4) $\frac{3}{4\sqrt{x}}\times$ $\times\sin\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}$. 716. 1) $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 2) $-\frac{3\cos 3x}{\sin^2 3x}$; 3) $-\frac{3x^2\cos(x^3-1)}{\sin^2(x^3-1)}$; 4) $-\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$; 5) $-\frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$; 6) $-\frac{6\cos 2x}{\sin^4 2x}$.

718. 1) $\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}$; 2) $\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$. **720.** 1) $\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\sin^2 3x}}$; 2) $\frac{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{6x\sqrt[3]{\sin^2\sqrt{x}}}$; **721.** 1) $-\frac{3\operatorname{ctg}3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$; 2) $-\frac{3\operatorname{ctg}x}{2\sqrt{\sin^3 x}}$; 3) $-\frac{2}{3}\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$. **722.** 1) 6 м/сек; 2) 1 м/сек². **724.** 153°26′. **725.** $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right)$. **727.** $\frac{\pi}{4}$. **729.** $x-6y+3\sqrt{3}-\pi=0$, $12x+2y-\sqrt{3}-12\pi=0$. **731.** 1) $4\sqrt{2}-6$; 2) $2\cos x+\sin x$; 3) $3\cos x-\sin x-1$; 4) $\sqrt{3}+1$. **732.** 1) $\cos 2t$; 2) $\cos x-\cos 2x$; 3) $\cos x-x\sin x$. 4) $\cos 2x-\sin x$. **734.** 1) $-3x^2\sin x^3$; 2) $\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{2x}}\sin\sqrt{2x}$. **735.** 1) $-3\sin x\cos^2 x$; 2) $\frac{\sqrt{x}}{2x^2}\sin\frac{2}{\sqrt{x}}$; 3) $-\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}\times$ $\times\sin 2\sqrt[3]{x}$. **736.** 1) $\frac{2\sin x}{\cos^2 2x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}\operatorname{tg}\sqrt{3x}}{2x\cos\sqrt{3x}}$; 3) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 4) $\frac{6x\sin(x^3-1)}{\cos^4(x^3-1)}$. **737.** 1) $-\operatorname{tg}2x\sqrt{\cos 2x}$; 2) $-\frac{3}{2}x^2\operatorname{tg}x^3\sqrt{\cos x^3}$; 3) $-\frac{1}{4x}\operatorname{tg}\sqrt{2x}\sqrt{2x\cos\sqrt{2x}}$. **738.** 1) $-\frac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; 2) $\frac{x\operatorname{tg}x^2}{\sqrt{\cos x^2}}$; 3) $\frac{2x^2\operatorname{tg}x^3}{\sqrt[3]{\cos^2 x^3}}$. **740.** 1) $4\sin 3x\sin x$; 2) $-\frac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}$; 3) $-\frac{t}{2}$. **741.** $2\sqrt{3}$ м/сек; 4 м/сек². **742.** $6x+2y-\pi=0$. **744.** 1) $\frac{1}{1-\sin 2x}$; 2) $\operatorname{tg}^2 x$; 3) $\frac{u+\sin^2 u}{\cos^2 u}$; 4) 0. **746.** 1) $\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$; 2) $\frac{1}{3\cos^2\frac{x}{3}}$; 3) $\frac{2x}{\cos^2 x^2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2x}\cos^2\sqrt{2x}}$. **747.** 1) $\frac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$; 2) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos^3\sqrt{x}}$. **749.** 1) $-3\operatorname{tg}^2 3x$; 2) 13,5; 3) $\frac{1}{2\cos^4\frac{x}{2}}$. **750.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{2}{\sin^2 2x}$. **751.** arctg 4. **752.** arctg 2. **754.** 1) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 2) -4. **756.** 1) $-\frac{3x^2}{\sin^2 x^3}$; 2) $-\frac{x}{\sin^2\frac{x^2}{2}}$; 3) $\frac{1}{2\sin^4\frac{x}{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2x}\sin^2\sqrt{2x}}$. **757.** 1) $-\frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$; 2) $-\frac{2\sqrt{\operatorname{ctg}2x}}{\sin 4x}$; 3) $\frac{1}{2\sin^4\frac{x}{2}}$. **758.** 1) $\frac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$; 2) $\frac{2}{3\sin 2x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}}$.

760. 1) 1; 2) 2,5657; 3) $x(2\ln x+1)$; 4) $-\ln x$; 5) 26. 762. 1) $\frac{2}{x\ln^2 x}$; 2) $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. 764. 1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{4x}{2x^2-3}$. 766. 1) $\frac{2}{1-x^2}$; 2) $-\frac{1}{2+x}$. 768. 1) $\frac{0,4343}{x}$; 2) $\frac{0,8686}{2x+1}$. 770. 1) $\frac{1}{2x-1}$;) $\frac{x}{x^2-a^2}$; 3) $\frac{0,4343x}{x^2+4}$; 4) $\frac{1}{x^2-1}$. 771. 1) ctg$x$; 2) $-\operatorname{tg} x$; 3) $\frac{2}{\sin 2x}$; 4) $-\frac{2}{\sin 2x}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $-2\operatorname{tg} x$. 772. 1) $\frac{4}{16x^2-1}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 774. 1) $\frac{3\ln^2 3x}{x}$; 2) $\frac{4\ln(2x+1)}{2x+1}$; 3) $\operatorname{ctg} x \ln\sqrt{\sin x}$. 776. arctg 0,4343. 777. arctg 0,04343.

779. 1) $e^x(x^{-1}+\ln x)$; 2) $xe^x(2+x)$; 3) $-xe^x$; 4) $3^x e^x(\ln 3+1)$; 5) $\frac{e^x(1-\ln 2)}{2^x}$; 6) $5+e$. 781. 1) $-\frac{7e^x}{(e^x+2)^2}$; 2) $-\frac{1}{e^x}$. 783. 1) $3x^2\times\times 5^{x^3}\ln 5$; 2) $\frac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}$; 3) $\frac{3^{\ln x}\ln 3}{x}$; 4) $2^{-\cos x}\sin x\ln 2$. 785. 1) $-2xe^{-x^2}$; 2) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; 3) $\frac{e^{\ln x}}{x}$; 4) (-1). 787. 1) $e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}$; 2) $\frac{4}{(e^{-x}-e^x)^2}$.

790. 1) $\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\arcsin x+\arccos x$. 792. 1) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 3) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$. 794. 1) $\frac{3}{2\sqrt{3x(1-3x)}}$; 2) $-\frac{1}{2\sqrt{(2-x)(x-1)}}$; 3) $\frac{2a}{x^2+a^2}$. 796. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arc\,ctg} x$. 798. 1) $\frac{2x}{1+x^4}$; 2) $-\frac{3}{1+9x^2}$; 3) $-\frac{a}{x^2+a^2}$; 4) $-\frac{a}{a^2+x^2}$. 800. 1) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$; 2) $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. 801. 1) $\frac{1}{1+x^2}$; 2) $\frac{1}{1+x^2}$.

803. 1) $\frac{4x+1}{5}$; 2) $\frac{1+2x}{2}$. 805. 1) $\frac{x-2}{y}$; 2) $\frac{6x-1}{4y}$. 807. 1) $-\frac{x}{y}$; 2) $\frac{b^2x}{a^2y}$; 3) $\frac{p}{y}$. 809. 1) $3x-4y+25=0$, $4x+3y=0$; 2) $12x-5y-169=0$, $5x+12=0$; 3) $2x-3y+25=0$, $3x+2y+18=0$; 4) $10x+3y+32=0$, $3x-10y+75=0$; 5) $x+y+2=0$, $x-y-6=0$; 6) $3x-2y+3=0$, $2x+3y-11=0$; 7) $2x-2y+3=0$, $2x+2y-9=0$. 811. 1) $-\frac{2x+y}{x}$; 2) $-\frac{y}{x}$. 812. 1) $\frac{1}{2y+1}$; 2) $\frac{1-2x}{2y-1}$; 3) $\frac{y(2x-y)}{x(2y-x)}$. 813. 1) $\frac{5}{2(y+1)}$; 2) $\frac{x}{1-y}$; 3) $\frac{2x}{3y^2}$. 815. 1) $-\frac{2x}{\sin 2y}$;

2) $\frac{y\cos^2 y}{1 - x\cos^2 y}$. **816.** 1) $\sqrt{1-y^2}$; 2) $-2x\,(1+y^2)$. **818.** 1) $\frac{3x^2}{e^y}$; 2) $2xy$; 3) 1.

820. 1) $30x + 6$; 2) 8. **822.** 1) $-\frac{\sqrt{2x}}{4x^2}$; 2) $\frac{3\sqrt{x}}{4x^3}$. **823.** 1) $-\frac{2}{t^3}$; 2) $8\,(6t^2 - 1)$; 3) $\frac{2}{t^3}$. **825.** 1) $-\cos x$; 2) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **826.** 1) $e^{\cos t}(\sin^2 t - \cos t)$; 2) $e^{-\sin t}(\cos^2 t + \sin t)$. **828.** 1) $-\frac{2}{x^2}$; 2) $\frac{1}{x^2}$. **830.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 21; 4) 5. **832.** 1) $v = 20$, $a = 16$; 2) $v = 0$, $a = 2$; 3) $v = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$; $a = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}$; 4) $v = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$, $a = \frac{\pi^2}{18}$. **834.** $t = 1$, $v = 3$. **836.** 1) $s = 106$ м; 2) $v = 20{,}6$ м/сек, $a = -9{,}8$ м/сек^2; 3) $s = 128$ м, $t = 5{,}1$ сек. **838.** $v = -3$; $a = 9$. **340.** $F = 9$ *т*. **841.** $\frac{5\pi^2}{18}$ *т*.

842. 1) $-\cos^3 x$; 2) $\cos 2x$; 3) $4\sin x\cos 3x$. **843.** 1) $6x - 6y + 3\sqrt{3} - \pi = 0$, $6x + 6y - 3\sqrt{3} - \pi = 0$; 2) $12x + 12y - 6\sqrt{3} - \pi = 0$, $12x - 12y + 6\sqrt{3} - \pi = 0$. **844.** $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. **845.** 1) $\frac{3}{\sin 6x - 1}$; 2) $\frac{8}{\sin^2 4x}$; 3) $-\frac{32\operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x}$. **846.** $\frac{\pi}{4}$. **847.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. **848.** 1) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$; 3) $\frac{a}{1-a^2x^2}$. **849.** 1) $-\frac{1}{\sin x}$; 2) $2\operatorname{ctg}(x-1)$; 3) $\frac{8z}{\sin 2z^2}$. **850.** 1) $\frac{2\ln x}{x}$; 2) $\frac{1}{x\ln x}$; 3) $\frac{x}{(x^2-1)\ln\sqrt{x^2-1}}$. **851.** 1) $2\cos 2t$; 2) $e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$; 3) $e^{\operatorname{tg} x}(1 - \sin 2x)$. **852.** 1) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $-\frac{1}{1+z^2}$; 3) 0. **853.** 1) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; 2) $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}$. **854.** 1) 0; 2) 1; 3) -1; 4) $2x + y + 4 = 0$; 5) 2 сек охирида. **855.** 1) 8; 2) 2; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $4x + 3y + 7 = 0$; 5) 1 сек охирида.

857. 1) $(-\infty, 3)$ — камаяди; $(3, +\infty)$ — ўсади; 2) $(-\infty, 1)$ — камаяди, $(1, +\infty)$ — ўсади; 3) $(-\infty, 2)$ — ўсади, $(2, +\infty)$ — камаяди. **859.** 1) $(-\infty, 0)$ — ўсади, $(0,2)$ — камаяди; $(2, +\infty)$ — ўсади; 2) $(-\infty, 0)$ — камаяди, $(0, 1)$ — ўсади, $(1, +\infty)$ — камаяди. **861.** 1) $(-\infty, 2)$ — камаяди, $(2, +\infty)$ — ўсади; 2) $(-\infty, -1)$ — камаяди, $(-1, +\infty)$ — ўсади. **863.** $(-\infty, 2)$ — ўсади, $(2,3)$ — камаяди, $(3, +\infty)$ — ўсади. **865.** $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ — ўсади. **867.** 1) $(-\infty, 0)$ — камаяди. $(0, +\infty)$ — ўсади, 2) $(0, +\infty)$ — камаяди. **869.** $(0,1)$ — камаяди ва $(1, +\infty)$ — ўсади. **871.** 1) $(-\infty, 0)$ — камаяди, $(0, +\infty)$ — ўсади; 2) $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ — камаяди. **873.** $(-\infty, 0)$ — камаяди, $(2, +\infty)$ — ўсади.

875. 1) мин. $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$; 2) мин. $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{9}{4}\right)$. **877.** 1) макс. $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$; 2) макс. (2; 4). **879.** 1) мин. (2; — 1); 2) мин. (5; — 16). **881.** 1) макс. (1; 4); 2) макс. (— 0,5; 6,25). **883.** 1) мин. $\left(\frac{1}{4};\ -\frac{9}{8}\right)$; 2) мин. (1; 0). **885.** 1) мин. $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{8}\right)$; 2) мин. (— 2; — 12). **887.** 1) макс. $\left(-2;\ 5\frac{1}{3}\right)$, мин. $\left(2;\ -5\frac{1}{3}\right)$; 2) макс. (0; 0); мин. $\left(2;\ -\frac{4}{3}\right)$. **889.** 1) макс. (— 1; 15), мин. (2; — 12); 2) макс. (— 2; — 6), мин. (— 1); — 7).

891. 1) мин. (0; 0); 2) мин. (0; — 2); 3) мин. (1; — 1); 4) макс. (2; 4); 5) мин. $\left(\frac{5}{4};\ -\frac{9}{8}\right)$; 6) макс. $\left(\frac{1}{2};\ 6\frac{1}{4}\right)$. **893.** 1) макс. $\left(1;\ 5\frac{1}{3}\right)$, мин. (3; 4); 2) макс. $\left(1;\ 7\frac{1}{3}\right)$, мин. $\left(5;\ -3\frac{1}{3}\right)$; 3) макс. $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$, мин. (2; 0). **895.** мин. (0; — 4). **897.** макс. $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$, мин $\left(-1;\ -\frac{3}{2}\right)$. **899.** 1) энг кат. 13, энг кич. 4; 2) энг кат. 8, энг кич. 6. **900.** 1) энг кат. $\frac{1}{6}$, энг кич. $-4\frac{1}{2}$; 2) энг кат. 32, энг кич. 0. **902.** энг кат. 1, энг кич. — 1.

904. 12 ва 12. **906.** 3 ва 3. **908.** 3 ва 3. **910.** Томони 12,5 см бўлган квадрат. **912.** Томони 4 см бўлган квадрат. **914.** Томони 10 см бўлган квадрат. **916.** Томони $R\sqrt{2}$ бўлган квадрат. **918.** Тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати 1:4. **922.** 2:1. **924.** Томонлари $\frac{c}{\sqrt{2}}$ бўлган тенг ёнли.

926. Томонлари $a\sqrt{2}$ бўлган тенг ёнли. **928.** Тўғри тўртбурчакнинг баландлиги ва асоси мос равишда учбурчак баландлиги ва асосининг ярмига тенг. **930.** $R=\sqrt{S}$, $P=4\sqrt{S}$. **932.** 10 см. **934.** Асосининг томони $\sqrt[3]{2V}$, баландлиги $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

936. $K=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, $H=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

938. $R=l\sqrt{\frac{2}{3}}$; $H=l\sqrt{\frac{1}{3}}$. **941.** $r=\frac{HR}{2(H-R)}$, $h=\frac{H(H-2R)}{2(H-R)}$.

944. $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, $h=R\sqrt{2}$. **946.** $r=\frac{2\sqrt{2}R}{3}$, $h=\frac{4}{3}R$.

949. 12 м/сек.

951. 19,6 м.

953. 1) $(-\infty, 0)$ интервалда қавариқ, $(0, +\infty)$ интервалда ботиқ; 2) ҳамма ерда ботиқ; 3) ҳамма ерда қавариқ; 4) ҳамма ерда ботиқ. **955.** 1) $x = -1$ нуқтада ботиқ; $x = 1$ нуқтада қавариқ; 2) $x = -2$ ва $x = 1$ нуқталарда ботиқ. **957.** 1) $(-\infty, 2)$ интервалда қавариқ ва $(2, +\infty)$ интервалда ботиқ; 2) $(-1, 2)$ интервалда қавариқ ва $(-\infty, -1)$ ҳамда $(2, +\infty)$ интервалларда ботиқ.

959. 1) букилиш нуқтаси $(0; 0)$; 2) букилиш нуқтаси $(2; 16)$; 3) букилиш нуқтаси $(3; 2)$. **961.** 1) букилиш нуқтаси $(1; -6)$ ва $(3; -86)$; 2) букилиш нуқтаси $(1; -3)$ ва $(2; 6)$.

976. 2,5 ва 2,5. **977.** $-\frac{a}{2}$ ва $\frac{a}{2}$. **978.** 16. **979.** Асосининг томони $\frac{1}{3}\sqrt{3S}$, баландлиги $\frac{1}{6}\sqrt{3S}$. **980.** $R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, $H = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. **981.** $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $H = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. **982.** 125 м. **983.** $a = \pi$. **984.** 5 км/соат.

985. 1) а) $(-\infty, -3)$ ўсади, $(-3, -1)$ камаяди, $(-1, +\infty)$ ўсади; б) макс. $(-3; 8)$, мин. $(-1; 4)$; в) қавариқ $(-\infty, -2)$, ботиқ $(-2, +\infty)$, г) букилиш нуқтаси $(-2; 6)$.

2) а) $(-\infty, -1)$ — ўсади, $(-1; 2)$ — камаяди, $(2, +\infty)$ — ўсади; б) макс. $(-1; 6)$; мин. $(2; -21)$; в) қавариқ $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, ботиқ $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; г) букилиш нуқтаси $\left(\frac{1}{2}; -7\frac{1}{2}\right)$; 3) а) $(-\infty, 0)$ — ўсади, $(0, 4)$ — камаяди, $(4, +\infty)$ — ўсади; б) макс. $(0; 16)$, мин. $(4, -16)$; в) қавариқ $(-\infty, 2)$, ботиқ $(2, +\infty)$; г) букилиш нуқтаси $(2; 0)$; 4) а) $(-\infty, -2)$ ўсади, $(-2; 1)$ камаяди; $(1, +\infty)$ ўсади; б) макс. $(-2; 10)$, мин. $(1; -17)$, в) қавариқ $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, ботиқ $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; г) букилиш нуқтаси $\left(-\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$.

986. 1) $(-\infty, 0)$ — камаяди, $(0, 1)$ — ўсади; $(1, +\infty)$ — камаяди; 2) $y_{\text{энг кат.}} = 3$, $y_{\text{энг кич.}} = -1\frac{1}{2}$; 3) қавариқ $(-\infty, -1)$, ботиқ $(- ; +\infty)$; 4) букилиш нуқтаси $(0; 0)$; 5) $v = 1$ м/сек.

987. 1) $(-\infty, 1)$ — камаяди, $(1, +\infty)$ — ўсади; 2) $y_{\text{энг кат.}} = 5$, $y_{\text{энг кич.}} = -5\frac{2}{3}$; 3) қавариқ $(-\infty, 4)$, ботиқ $(4, +\infty)$; 4) букилиш нуқтаси $(-1; 1)$; 5) $v = 14$ м/сек.

989. 1) $-10x(1-x^2)^4\,dx$; 2) $6ax(ax^2+b)^2\,dx$; 3) $10anx^4(ax^5+1)^{2n-1}\,dx$. **990.** 1) $-\frac{2x\,dx}{\sqrt{4-2x^2}}$; 2) $\frac{3x^2\,dx}{2\sqrt{x^3-1}}$; 3) $-\frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^3}}$.

991. 1) $-2\operatorname{tg} x\,dx$; 2) $-\frac{dx}{2x}$; 3) $-\frac{2dx}{x^2\sin\frac{2}{x}}$. **992.** 1) $-\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 2)

$\frac{dx}{(1+2x)\sqrt{2x}}$; 3) $\frac{dx}{1+x^2}$. **994.** 1) $d^2y=-\frac{2dx^2}{\cos^2 x}$; 2) $d^2y=-\frac{16\cos 4x\,dx^2}{\sin^2 4x}$; 3) $d^2y=-\frac{(x^2+1)\,dx^2}{(x^2-1)^2}$. **995.** 1) $d^2y=\frac{e^{\mathrm{tg}\,x}(1+\sin 2x)\,dx^2}{\cos^4 x}$; 2) $d^2y=9\ln^2 a\cdot a^{3x}\,dx^2$; 3) $d^2y=\frac{e^{\sqrt{x}}(x-\sqrt{x})\,dx^2}{4x^2}$. **996.** 1) $d^2y=-\frac{x\,dx^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; 2) $d^2y=\frac{2(1-3x^4)\,dx^2}{(1+x^4)^2}$; 3) $d^2y=\frac{2x\,dx^2}{(1+x^2)^2}$.

998. ≈ 1%. *999.* ≈ 1,5%. *1001.* 1) ≈ 0,023; 2) ≈ 0,13; 3) ≈ 0,001. **1003.** 6 см³. **1005.** 1) ≈ 7,07; 2) ≈ 19,18; 3) ≈ $2\frac{5}{6}$. **1008.** ≈ 1,2%. **1011.** ≈ 1,6%. 1014. ≈ 0,1%. **1017.** ≈ 0,1%. **1019.** 1) 92,16; 2) 1,036; 3) 985; 4) 1,05; 5) 0,9. **1021.** 1) 1,002; 2) 5,08; 3) 4,984; 4) 10,05; 5) 9,975; 6) 1,003. 1023. 1) 1,01; 2) 0,1007. **1026.** 1) 0,0122; 2) 0,0366. **1027.** 1) 0,0209; 2) 0,0576.

1031. 1) $e^x(\sin x+\cos x)\,dx$; 2) $(ae)^x(\ln a+1)\,dx$; 3) $\frac{e^x(2x+1)\,dx}{\sqrt{2x}}$. **1032.** 1) $2(e^{2x}-e^{-2x})\,dx$; 2) $-\frac{e^x\,dx}{(e^x-1)^2}$; 3) $-\frac{dx}{e^x}$. **1033.** 1) $\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; 2) $\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$; 3) $-\frac{dx}{x(1+\ln^2 3x)}$. 1034. 1) 0,02; 2) 0,001; 3) 0,04. **1035.** 1) ≈ 1,001; 2) ≈ 112,4; 3) ≈ 0,5375. **1036.** 1) ≈ 0,2%; 2) ≈ [illegible]%. **1037.** 1) $6\,\mathrm{ctg}\,3x\cdot\Delta x$; 2) $\frac{4\Delta x}{\sin 2x}$. 1038. 1) $\sin 2x\cdot\Delta x$; 2) $\frac{\ln 3}{2}\frac{\Delta x}{\sqrt{x}}$.

1039. 1) −0,02; 2) 0,3%; 3) 0,08; 4) 18,66; 5) 1,002. 1040. 1) 0,12; 2) 0,2%; 3) 0,002; 4) 87,6; 5) 1,14.

1042. 1) $3u+C$; 2) $a\varphi+C$; 3) $(m-1)y+C$; 4) $x+3$. **1044.** 1) $\frac{1}{5}x^5+C$; 2) $\frac{1}{m}x^m+C$; 3) $\frac{1}{2-n}x^{2-n}+C$; 4) $\frac{1}{p+2}u^{p+2}+C$. **1046.** 1) x^2+C; 2) t^3+C; 3) $\frac{ax^3}{3}+C$; 4) x^n+C. **1048.** 1) $u^4-2u^3-2u^2+3u+C$; 2) $\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{4}x^3+5x+C$; 3) $ax^4-2bx^3-2cx^2+cx+C$; 4) $\frac{3}{2}\varphi^2-6\varphi+C$. **1050.** $\frac{12}{5}x^5-4x^3+3x+C$. **1052.** $\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5+C$. 1054. $\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2-8x+C$. **1056.** 1) $\frac{1}{6}u^2-\frac{1}{3}u+C$; 2) $\frac{2}{5}\varphi-\frac{1}{5}\varphi^3+C$. **1058.** 1) $-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}+C$; 2) $-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}+x+C$. **1060.** 1) $-\frac{1}{3t}+C$; 2) $\frac{u^{1-n}}{1-n}+C,\ n\neq 1$; 3) $\frac{x^n}{n}+C$.

1062. 1) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$; 2) $2u^{\frac{5}{2}}-4u^{\frac{7}{4}}+C$; 3) $2x^2\sqrt{x}+C$; 4) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+$ $+C$; 5) $3\sqrt[3]{x}+C$. **1064.** $-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}}+C$. **1066.** 1) $3\sqrt[3]{u}+C$; 2) $\sqrt{\varphi}+C$; 3) $-\frac{4}{3\sqrt{t}}+C$. **1068.** 1) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$; 2) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+C$; 3) $-\frac{3}{t}-4\sqrt{t}+6\sqrt[3]{t^2}+C$. **1070.** $a\ln|\varphi|+C$. **1072.** 1) $2\ln|x+3|+C$; 2) $5\ln|u-3|+C$; 3) $-3\ln|2-\varphi|+C$. **1074.** 1) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$; 2) $-\frac{1}{3}\ln|a^3-x^3|+C$. **1077.** 1) $\ln(2-\cos x)+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln(3+2\sin x)+C$. **1079.** 1) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$; 2) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{u-5}{u+5}\right|+$ $+C$. **1081.** 1) $\ln|x+\sqrt{x^2+9}|+C$; 2) $\ln|x+\sqrt{x^2-16}|+C$. **1083.** 1) $\frac{5^x}{\ln 5}+C$; 2) $\frac{b^u}{\ln b}+C$. **1085.** $\frac{4^{2x}}{2\ln 4}+C$. **1087.** $\frac{5^{x^3}}{3\ln 5}+C$. **1089.** e^x+x^2+C. **1091.** $\frac{1}{5}e^{5x}+C$. **1093.** 1) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 2) $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$. **1095.** 1) $-\cos x-5x+C$; 2) $-2\cos x+C$. **1097.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **1099.** 1) $-\cos(x-5)+C$; 2) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$. **1101.** $4x-3\sin x+$ $+C$. **1103.** $\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **1105.** 1) $-\frac{1}{3}\sin(2-3x)+C$; 2) $\frac{1}{3}\times$ $\times\sin x^3+C$. **1107.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$. **1110.** 1) $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)+C$; 2) $-\operatorname{tg}(1-x)+C$. **1112.** $-3\operatorname{ctg}x+C$. **1114.** 1) $-\operatorname{ctg}3x+C$; 2) $-\frac{1}{2}\times$ $\times\operatorname{ctg}2z+C$. **1116.** 1) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+2)+C$; 2) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x^2+C$. **1118.** $\frac{1}{3}\arcsin z+C$. **1120.** 1) $\arcsin\frac{x}{4}+C$; 2) $\arcsin\frac{u}{\sqrt{3}}+C$. **1122.** 1) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{5}+C$; 2) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}}+C$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi+C$; 4) $\arcsin\frac{z}{\sqrt{3}}+C$; 5) $\arcsin\frac{3}{4}x+C$; 6) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}x+C$. **1124.** $a\times$ $\times\operatorname{arc\,tg}x+C$. **1126.** 1) $\frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{5}+C$; 2) $\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{3}+C$. **1128.** 1) $\frac{1}{20}\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{4}x+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{5}{3}}x+C$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$.

1130. 1) $y = x^4 - x^2 + 3x + C$; 2) $y = x^3 + 6x + C$. **1132.** $y = x^3 - 5x + 4$. **1133.** $y = x^3 - 2x^2 + 5x$. **1134.** $y = 3e^x + x^2 + 5$. **1136.** 1) $3\sin x - \cos x + 3$; 2) $\sin x - e^x + x^3 + 4$; 3) $3\,\mathrm{arc\,tg}\,x + 2x$; 4) $-\frac{1}{2x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$. **1138.** $y = -\frac{3}{2}x^2 + C$. **1139.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$. **1141.** 1) $y = \frac{C}{x}$; 2) $x^2 - y^2 = C$; 3) $x^2 + y^2 = C$. **1143.** $y = \frac{1}{6}x^2$. **1144.** $y = x^3 - x^2 + 4$. **1145.** $y = x^3 + 4$. **1147.** $y = e^{x+1}$. **1149.** $s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 2t + C$. **1150.** $s = 2t^2 - t^3 + C$. **1152.** $s = t^2 - 3t + 6$. **1153.** $s = t^3 + 2t^2 - t$. **1154.** $s = 2\sin t + 3$. **1157.** $s = t^4 + t^3 + t + 3$. **1158.** $s = 2t^4 + 4t^3 - 6t + 12$. **1160.** 1) $v = -3t^2 + 18t + 24$, $s = -t^3 + 9t^2 + 24t + 15$; 2) $a_{t=2} = 6$ м/сек², $v_{t=2} = 48$ м/сек; 3) $t = 3$ сек бўлганда тезлик максимал қийматга эришади; $v = 51$ м/сек.

1162. 1) $-\frac{1}{8}(7 - 2x)^4 + C$; 2) $\frac{1}{25}(5t - 1)^5 + C$; 3) $\frac{(ax + b)^{m+1}}{a(m + 1)} + C$. **1164.** 1) $\frac{1}{3(4 - 3x)} + C$; 2) $-\frac{1}{10(5z + 1)^2} + C$; 3) $\frac{1}{a(1-m)(ax+b)^{m-1}} + C$. **1166.** 1) $\frac{1}{3}(2x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$; 2) $-\frac{1}{5} \times (4 - 3t)^{\frac{5}{3}} + C$; 3) $\frac{m\sqrt[m]{(ax+b)^{m+n}}}{a(m + n)} + C$. **1168.** 1) $\sqrt[3]{3x - 5} + C$; 2) $-\frac{2}{\sqrt{v + 7}} + C$; 3) $\frac{m\sqrt[m]{(ax+b)^{m-n}}}{a(m - n)} + C$. **1170.** 1) $\frac{1}{12}(x^2 + 3)^6 + C$; 2) $\frac{1}{3}(x^4 - 1)^3 + C$; 3) $\frac{(ax^n + b)^{m+1}}{an(m + 1)} + C$. **1172.** 1) $\frac{1}{3(1-2z^3)^2} + C$; 2) $-\frac{1}{80(5x^4 + 3)^4} + C$; 3) $\frac{1}{an(1 - m)(ax^n+b)^{m-1}} + C$. **1174.** 1) $\frac{1}{18}(4x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$; 2) $\frac{m\sqrt[m]{(ax^n + b)^{m+1}}}{an(m + 1)} + C$; 3) $\frac{1}{3}(2\sin x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$; 4) $\frac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$; 5) $\frac{1}{10}(x^4 - 1)^{\frac{5}{2}} + C$. **1175.** 1) $\frac{1}{30}(3z^4 + 2)^{\frac{5}{2}} + C$; 2) $-\frac{1}{14}(1 - 3x^4)^{\frac{7}{3}} + C$; 3) $\frac{m\sqrt[m]{(ax^n+b)^{m+p}}}{an(m + p)} + C$. **1176.** 1) $\sqrt{x^2 + 1} + C$; 2) $\frac{3}{20}\sqrt[3]{5x^4 + 2} + C$; 3) $-\frac{2}{3\sqrt{x^3 - 1}} + C$; 4) $\frac{m\sqrt[m]{(ax^n + b)^{m-p}}}{an(m - p)} + C$; 5) $-2\sqrt{1 - \sin x} + C$; 6) $-\frac{1}{2(e^x + 1)^2} +$

$+C$. **1178.** 1) $\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln|1+z^3|+C$; 3) $\frac{1}{3}\ln(e^{3x}+1)+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln|2\sin x+1|+C$. **1180.** 1) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|+C$; 2) $\frac{1}{k}\ln|\sin kx|+C$; 3) $2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C$. **1183.** 1) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+C$; 2) $3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{6}\right|+C$. **1185.** 1) $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)\right|+C$; 2) $2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{4}\right)\right|+C$; 3) $\ln(1+\ln t)+C$. **1187.** 1) $\frac{a^{x^4}}{4\ln a}+C$; 2) $\frac{(ab)^{2x}}{2\ln(ab)}+C$. **1189.** 1) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 2) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 3) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$; 4) $e^{\sin x}+C$; 5) $-e^{\frac{1}{x}}+C$. **1191.** 1) $-\frac{1}{2}\cos(t^2-1)+C$; 2) $-2\cos\frac{z}{2}+C$. **1193.** 1) $2\sin\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$. **1195.** 1) $2\operatorname{tg}\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x^2+C$. **1197.** 1) $-\frac{a}{3}\operatorname{ctg}\frac{x^3}{a}+C$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)+C$; 3) $-\operatorname{ctg}\ln x+C$. **1199.** 1) $\arcsin e^{\varphi}+C$; 2) $\arcsin\ln z+C$. **1201.** 1) $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{a}+C$; 2) $\operatorname{arctg}e^x+C$; 3) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+C$; 4) $\operatorname{arctg}\ln x+C$.

1203. 1) $\ln\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}+C$; 2) $\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C$. **1205.** 1) $\ln\left[C(x-2)^{\frac{2}{5}}(x+3)^{\frac{13}{5}}\right]$; 2) $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|^3+C$. **1207.** 1) $\ln\frac{Cx(x-1)}{(x+3)^2}$; 2) $\ln\frac{Cx(x-2)}{(x+2)^2}$.

1209. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **1211.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **1213.** $-\operatorname{ctg}x-x+C$. **1215.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x+\operatorname{ctg}x+x+C$. **1217.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C$. **1219.** $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x+C$. **1221.** $-\frac{1}{2}\times\operatorname{ctg}^2x-\ln\sin x+C$. **1223.** 1) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 2) $\frac{1}{4}\times\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 8x+C$; 3) $-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{14}\cos 7x+C$.

1225. 1) $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$; 2) $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$. **1227.** 1) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; 2) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **1229.** $\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$. **1231.** $\sqrt{2x}-5\ln(\sqrt{2x}+5)+C$.

1235. $x \sin x + \cos x + C$. **1237.** $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$. **1239.** $\frac{1}{2} x \times \sqrt{x^2 - b} - \frac{b}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 - b}) + C$. **1241.** $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + b} + \frac{b}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + b}) + C$.

1242. $-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{6} e^{3x^2} + x + C$. **1243.** $-\ln (\cos x + e) + 3$. **1244.** $y = 2 \sin \frac{x}{2} + 1$. **1245.** $s = -\frac{1}{2} \cos 2t + 1$. **1246.** 1) $v = -3t^2 + 24t - 6$; 2) $s = -t^3 + 12t^2 - 6t + 15$; 3) 6 м/сек², 39 м/сек; 78 м; 4) 4 сек. **1247.** $\sqrt{x^2 - 1} + C$. **1248.** $\frac{2}{3} \sqrt{(e^{\sin x} + 1)^3} + C$. **1249.** $\ln (1 - \cos x) + C$. **1250.** $\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sin x}{3} \right) + C$. **1251.** $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$. **1252.** $-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C$. **1253.** $\ln [C (x - 1)^5 (x + 3)^3]$. **1254.** $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$. **1255.** $\frac{1}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{1 + x^2} \right) + C$. **1256.** $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \times \left(\frac{2}{3} \operatorname{tg} x \right) + C$. **1257.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right) + C$. **1258.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln \cos x + C$.

1259. 1) $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + \ln x + C$; 2) $\arcsin \frac{2}{3} x - e^{-x} + C$; 3) $\ln \operatorname{tg} x + C$; 4) $y = x^2 - 4x - 4$; 5) $s = t^3 + 3t^2 - 4t - 4$. **1260.** 1) $\ln x - 6x^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{x} + C$; 2) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} - e^{-x} + C$; 3) $\frac{4}{3} \sin^3 x - \sin x + C$; 4) $y = -\cos x + 1$; 5) $s = t^3 + 3t^2 - 5t$.

1262. 1) 2; 2) $2\frac{2}{3}$; 3) 16; 4) $3\frac{3}{4}$; 5) 19. **1264.** 1) 40; 2) $-\frac{2}{3}$. **1265.** 1) $1\frac{1}{2}$; 2) 1. **1267.** 1) $18\frac{3}{5}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $7\frac{1}{2}$; 4) $3(\sqrt[3]{2} - 1)$; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $13\frac{1}{3}$. **1268.** 1) $3\frac{1}{2}$; 2) 3. **1270.** 1) $e - 1$; 2) $e^2 - e$. **1272.** 1) $\ln 2 = 0{,}6931$; 2) $\ln 4 = 1{,}3863$. **1274.** 1) $\ln 2 = 0{,}6931$; 2) $\ln \frac{5}{4} = 0{,}2231$. **1276.** $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$. **1278.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{2}$. **1280.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2. **1282.** 1) 4; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **1284.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$. **1286.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$. **1288.** 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{12}$. **1290.** 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{\pi}{18}$.

1292. 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{7}{64}$. **1294.** 1) $3\frac{3}{4}$; 2) 48,4. **1296.** 1) $10\frac{1}{8}$; 2) $\frac{8}{9}$. 3) 52; 4) 3,1; 5) $\frac{1}{3}$. **1298.** $-\frac{2}{3}$. **1300.** 1) $\ln\frac{3}{2} = 0,4055$. 2) $\ln\frac{9}{2} = 1,5041$. **1302.** 1) $\frac{1}{2}(1-e)$; 2) $\frac{1}{2}(e-1)$. **1304.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **1306.** 1) $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$; 2) $2(\sqrt{3}-1)$. **1308.** 1) $\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})$; 2) $\frac{1}{3}$. **1310.** 1) $\sqrt{3}-1$; 2) $2\sqrt{3}$. **1312.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **1314.** $\frac{\pi}{36}$; 2) $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$

1315. 1) 14; 2) 3. **1316.** 1) $\frac{15}{64}$; 2) 61; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{2}{3}$. **1317.** 1) $-\ln 1,5$; 2) e^2-1. **1318.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) $\sqrt{3}$. **1319.** 1) $2\sqrt{3}$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **1320.** 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$. **1321.** 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$.

1323. 1) 8; 2) 6. **1325.** 1) 7,5; 2) 12. **1327.** 1) 4; 2) 14,75. **1329.** 1) 9; 2) 35. **1331.** 1) $8\frac{1}{3}$. 2) 14. **1333.** 1) 6; 2) 8. **1335.** $2\sqrt{3}$. **1337.** 1) 36; 2) 8; 3) $3\frac{2}{3}$. **1339.** 1,3862. **1341.** 1) 1; 2) 0,6931; 3) 0,549. **1343.** 1) 6; 2) 9. **1345.** 6. **1347.** 6. **1349.** 1) 7; 2) 6; 3) $10\frac{2}{3}$. **1351.** 1) 8; 2) 17. **1353.** 8. **1355.** 32. **1357.** 9π. **1959.** 12π. **1361.** 1) 4. **1363.** $4\frac{1}{2}$. **1365.** 1) $4\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $10\frac{2}{3}$. **1367.** 1) $4\frac{1}{2}$; 2) $40\frac{1}{2}$; 3) 18. **1369.** 1) 36; 2) $5\frac{1}{3}$. **1371.** 1) 1,5π; 2) 12π; 3) 24π; 4) 4π. **1373.** 1) $\frac{16}{15}\pi$; 2) 8,1π; 3) $\frac{1}{30}\pi$. **1375.** $5\frac{1}{3}\pi$. **1377.** $\frac{32\pi}{3}$. **1380.** 48π. **1382.** 1) $10\frac{2}{3}\pi$; 2) 16π. **1384.** $\frac{\pi^2}{4}$. **1386.** 1,5π. **1388.** $50\frac{2}{3}\pi$.

1391. 1) 1,196 (уз. бирл). **1393.** 1,196 (уз. бирл). **1395.** $4\frac{2}{3}$ (уз. бирл) **1397.** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

1401. 8π. **1403.** 40π. **1405.** 49π. **1411.** 70π.

1406. 1) 36; 2) $4\frac{1}{2}$. **1407.** 1) $2\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. **1408.** 30π. **1409.** 71,1π. **1410.** $10\frac{2}{3}\pi$.

1412. 1) 4; 2) $3-\sqrt{3}$; 3) $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$; 4) $10\frac{2}{3}$; 5) $\frac{\pi}{2}$. **1413.** 1) $33\frac{1}{3}$; 2) $\sqrt{3}-1$; 3) $\frac{\pi}{18}$; 4) $4\frac{1}{2}$; 5) $\frac{16\pi}{15}$. **1415.** 270 м. **1417.** 7 м. **1419.** 108 м. **1421.** 900 м. **1423.** 4 сек; 96 м. **1425.** 44,1 м.

1427. 3,6 Ж. **1431.** 7,2 Ж. **1433.** 76,8 Ж. **1435.** 0,05 м. **1437.** 1,2 Ж. **1439.** 28093,4 Ж.

1441. 176508π Ж. **1443.** 3260π Ж. **1445.** 2452π Ж.

1447. 156912 Н. **1449.** 68649 Н. **1451.** 235,4 Н. **1453.** 167 Н.

1455. $\left(0;\ \frac{2a}{\pi}\right.$. **1458.** $C\,(2{,}4;\ 1{,}5)$; 2) $\left(1;\ \frac{2}{5}\right)$.

1459. 1) 54 м; 2) 22 м; 3) 64 м. **1460.** 176508 Ж. **1461.** 6538π Ж. **1462.** 2324 Н.

1463. 1) 1 м; 2) 1,8 Ж; 3) 160 Ж; 4) 19 614π Ж; 5) 147 105Н. **1464.** 1) 54 м; 2) 2,5 Ж; 3) 0,06 м; 4) 235 368 Ж; 5) 39 228 Н.

1466. 1) $s=t+4$; 2) $s=t^3-t^2$. **1463.** 1) $y^2=x^2+12$; 2) $y^3=\frac{x^2}{2}+1$. **1470.** 1) $s=6t$; 2) $y=(\sqrt{x}-1)^2$. **1472.** 1) $y^3=x^3+8$; 2) $x^2-y^2+4y-2x=0$. **1474.** 1) $(1-x)(1+y)=12$; 2) $y=\ln(xy)+x$. **1476.** $\frac{1}{\cos^2 x}-3=\cos^2 y$. **1478.** $y=C\sqrt{1+x^2}$. **1480.** $y=Cx^2e^{-\frac{3}{x}}$. **1482.** $2\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg} y=C$. **1484.** $s=-2t^3+2t^2+6$. **1486.** $y^2=x-1$. **1488.** 35,6° C. **1490.** 1575 йил. **1492.** 82,5 сек.

1494. $x^2+2xy=C$. **1496.** $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=C$. **1498.** $xe^{\frac{y}{x}}=C$.

1500. $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$. **1502.** $y^3=3x^3(\ln x+9)$.

1504. $y=Ce^x-1$. **1506.** 1) $y=\frac{x^2}{4}+\frac{C}{x^2}$; 2) $y=(x+1)^2(x+C)$.

1508. 1) $y=2x+3\sqrt{1+x^2}$; 2) $y=x^3e^x$; 3) $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{2x^2}$

1510. $y=x$. **1512.** $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$. **1514.** 1) $s=2t^3+20t+2$; 2) $y=-\sin x+3x$. **1516.** $s=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}t$. **1518.** $0=\frac{\omega^4}{12}$. **1520.** $y=e^x+1$. **1523.** $y=\frac{1}{4}x^2+5$.

1525. 1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$; 2) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{5x}$; 3) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$. **1527.** 1) $y=C_1e^{-3x}+C_2$; 2) $y=C_1e^{x}+C_2$. **1529.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$; 2) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$. **1531.** 1) $y=e^{-x}+e^{1}$; 2) $y=\frac{4}{5}e^{-5x}+e^{4x}$. **1533.** 1) $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$; 2) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-x}$.

1535. $y=2e^{5x}-2xe^{5x}$. **1537.** 1) $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 2) $y=e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$. **1539.** $y=2\sin 3x-\cos 3x$.

1540. $s = 2\sin t$. **1541.** $y = x + 2$. **1542.** $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. **1543.** $y = \frac{1}{x} e^{1 - \frac{1}{x}}$. **1544.** $y^3 = 30x^4 - 3x^3$. **1545.** $y^2 = \frac{x^2 - x^{-2}}{2}$. **1546.** $y = e^{2x} - 2$. **1547.** $y = e^{-x}(x + 5)$. **1548.** $s = \ln t + 2$. **1549.** $y = 2e^{-4x} + 2e^{3x}$.

1550. 1) $y = (x^2 + 1)^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{8}{x}$; 3) $y = e^{-4x} + \frac{1}{2}$; 4) $s = t^3 - 2t^2 + 2t + 1$; 5) $y = 2e^{-3x} + 3e^{2x}$. **1551.** 1) $y^2 = x^2 + 1$; 2) $y = \frac{x}{1 + \ln x}$; 3) $y = e^{4x} + \frac{1}{2}$; 4) $s = t^3 + 4t^2 - t + 2$; 5) $y = e^{2x} + 2e^{-x}$.

МУНДАРИЖА

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- боб

Координаталар методи

2- боб

Тўғри чизиқ

3- боб

Текисликда нуқталарнинг геометрик ўрни. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

4-боб

Лимитлар

5-боб

Функция тушунчаси

6-боб

Ҳосила

7-боб

Ҳосилани функцияларни текширишга татбиқ этиш

8-боб

Функциянинг дифференциали

ИНТЕГРАЛ ҲИСОБ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

9-боб

Аниқмас интеграл

10-боб

Аниқ интеграл

11-боб

Аниқ интегралнинг татбиқлари

12-боб

Дифференциал тенгламалар

На узбекском языке

НИКОЛАЙ ВАСИЛЬЕВИЧ БОГОМОЛОВ

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие для средних
специальных учебных заведений

Перевод с русского 2-го издания изд-ва «Высшая школа», М., 1973.

Издательство «Ўқитувчи»
Ташкент — 1976

Таржимонлар: *Х. Алимов* (I—VII боблар), *М. Сагдуллаев* (VIII—XII боблар)
Махсус редактор *Ш. Мирахмедов*
Нашриёт редактори *У. Ҳусанов*
Техредактор *Т. Скиба*
Бадиий редактор *Е. Соин*
Корректор *Л. Умарова*

Теришга берилди 12/XI—1975 й. Босишга рухсат этилди 28/I-1976 й. Қоғоз № 3. $84\times108^1/_{32}$. Физ. б. л 15,5. Шартли босма л. 26,04. Нашр л. 22,2. Тиражи 15000.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 88-75. Баҳоси 60 т. Муқоваси 20 т.

ЎзССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинати. Навоий кўчаси, 30. 1976 й. Зак. № 166.

Ташполиграфкомбинат Государственного комитета Совета Министров УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Ташкент, Навои, 30.

ҲУРМАТЛИ КИТОБХОНЛАР!

«Ўқитувчи» нашриёти Сизлар учун республикамизнинг етук олимлари, илғор ўқитувчилари, талантли ёш мутахассислари томонидан яратилган, шунингдек, рус тилидан таржима қилинган дарсликлар, ўқув ва методик қўлланмалар нашр этади.

Бизнинг ўқув адабиётимиз билан тўлароқ танишишда Сизга нашриётнинг 1976 йил учун аннотацияли плани ёрдам беради. Уни китоб магазинларидан топишингиз мумкин.