Ўзбекистон Республикаси олий ва
ўрта махсус таълим Вазирлиги
Наманган Давлат университети

Бадалов Махмуджон

Группалар назариясига кириш

Наманган – 2004

Ўзбекистон Республикаси олий ва
ўрта махсус таълим Вазирлиги

Наманган Давлат университети

Бадалов Махмуджон

Группалар назариясига кириш

(ўқув қўлланма)

Талабалар учун ўқув қўлланма.
Наманган шаҳри, 2004 йил, 100 бет.

Махсус мухаррир: ф.м.ф.н. доц. А.Машраббоев.

Тақризчилар: ф.м.ф.н. доц. Х.Расулов.
Катта ўқитувчи Х.Нажмиддинова

Техник мухаррир: катта ўқитувчи М.Дадаханов

Ушбу қўлланма Наманган Давлат Университети Илмий Кенгашининг 2004 йилдаги №7 йиғилишида тасдиқланган ва чоп этишга рухсат этилган.
(баённнома №7)

Наманган – 2004

СЎЗ БОШИ

Ушбу қўлланма математика факультетларида таҳсил олаётган бакалаврлар учун ўқув режада кўзда тутилган факультатив машғулотларда ўқиладиган махсус дарслар учун мўлжалланган бўлиб, у 30 соатлик маъруза 10 соатлик амалий (семинар) машғулот ўтказиш учун материални ўз ичига олган.

Қўлланма группалар назариясига киришдан иборат бўлиб, унда группалар назариясининг асосий бир неча бўлимларини энг содда мисоллар (талабалар учун яхши таниш бўлган объектлар) орқали берилган. Қўлланмадаги барча назарий билимлар 170 га яқин мисолларни воситa ечиб кўрсатиш орқали баён этилган.

Бундай усулни танлашдан асосий мақсад талабаларни алгебраик аппарат ва уни ишлатиш усуллари (техникаси) билан яқиндан таништиришдир.

Танланган ҳар бир мавзу баёнидан сўнг мавзудаги таянч иборалар ажратилган ва мавзуни мустаҳкамлаш бўйича назорат саволлари ҳамда мустақил ишлаш учун ўртача 10 тадан мисол ва масалалар келтирилганки, уларга тўлақонли жавоб бериш нафақат талабалар билимини мустақил равишда оширишга (назорат қилишга), балки ўтқазиладиган амалий машғулотлар учун йўналтирувчи материал бўлиб хизмат қилади.

Махсус курс материалларини бундай тарзда баён этилиши қизиқувчан талабаларга абстракт алгебра бўйича билимларини мустақил равишда оширишлари учун кенг имкониятлар яратади деб ўйлайман ва бу йўлда уларга зафарлар тилайман.

Муаллиф.

Кириш мавзуси:
Тўплам тушунчаси. Тўпламлар устида амаллар.

Р е ж а :

1. Тўплам, унинг қуввати, берилиш усуллари, қисм тўпламлар.
2. Тўпламлар устида амаллар.
3. Тўпламлар устида амалларни Эйлер - Венн диаграммаларида тасвирлаш.

Тўплам - математиканинг бошланғич тушунчаси бўлиб, у қатъий математик таърифланмайди. Тўплам деганда предметларнинг иxтиёрий мажмуи тушунилади. Унга кирувчи предметлар унинг элементлари дейилади. Тўпламни одатда у ёки бу алифбонинг катта, элементларини эса кичик харфлари билан белгиланади. Баъзи мухим тўпламлар учун эса стандарт белгилашлар мавжудки, улар математиканинг барча бўлимларида бир хилда қўлланилади. Мисол учун натурал сонлар тўплами **N** билан, бутун сонлар тўплами **Z** билан, рационал сонлар тўплами **Q** билан, ҳақиқий сонлар тўплами **R** билан, комплекс сонлар тўплами **C** билан белгиланади.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ элементлар ***A тўпламнинг элементлари*** (ёки $a_1, a_2, \dots, a_n$ элементлар ***A да ётади***, ёки $a_1, a_2, \dots, a_n$ элементлар ***A га тегишли***) деган жумла $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n} \in \mathbf{A}$ каби ифодаланади. Бу белгилашдаги $\in$ белги, ***тегишлилик белгиси*** дейилади. Бу белгига тескари белги $\notin$ эса у ёки бу элемент(лар)нинг A тўпламда ётмаслигини ифодалайди. Мисол учун $2 \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Тўплам ўз элементларининг сони (куввати)га кўра 2 турга - ***чекли*** ва ***чексиз тўпламлар*** га бўлинади ва у асосан 3 хил усулда берилади: барча элементларини бевосита санаб ўтиш (кўрсатиш) усули билан, ўз элементларининг хоссаларига кўра ва график усули билан.
Биринчи усул тўплам фақат чекли бўлган ҳолдагина қўлланилиши мумкин. (Мисол учун $A = \{2, 3, 5\}$, аксарият холда 2- ва 3- холлар қўлланилади.)

Таъриф. Бирорта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам ***бўш тўплам*** дейилади ва $\varnothing$ каби белгиланади.

Таъриф. B тўплам **A** тўпламнинг ***қисм тўплами*** ёки ***тўплам остиси*** дейилади ва $\mathbf{B \subseteq A}$ ($\mathbf{A \supseteq B}$) каби белгиланади, агар **B** нинг хар бир элементи **A** да ётса.

Бу таърифни математик тилда $(\mathbf{B \subseteq A}) \Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{b} \in \mathbf{B} \Rightarrow \boldsymbol{b} \in \mathbf{A})$ каби ёзилади. Бу ерда $\forall$- умумийлик квантори, $\Rightarrow$ - ҳулоса қилиш белгиси, $\Leftrightarrow$ - белги "таърифга кўра" деб ўқилувчи тенг кучлилик белгисидир.

Юқоридаги таърифлардан кўринадики, ҳар қандай **A** тўплам учун $\varnothing \subseteq$ **A** ва **A** $\subseteq$ **A** бўлади. Одатда, бу қисм тўпламлар **A** нинг ***хосмас*** ёки ***тривиал қисм тўпламлари*** дейилади. Демак, **A** нинг ўзидан ва $\varnothing$ тўпламдан бошқа барча қисм тўпламлари унинг ***тривиал бўлмаган*** ёки ***хосмас қисм тўпламлари*** дейилади. Юқорида келтирилган **N, Z, Q, R, C** тўпламлар учун **N** $\subseteq$ **Z** $\subseteq$ **Q** $\subseteq$ **R** $\subseteq$ **C** ўринлидир.

Таъриф. A ***ва*** **B** ***тўламлар тенг*** дейилади ва **A = B** каби белгиланади, агар улар бир хил элементлардан ташкил топган бўлса.

Мисол учун **A = {2, 3}, B = {3, 2}** бўлса, **A = B** бўлади. Одатда, **A** нинг қуввати (яъни элементлари сони) $|$**A**$|$ каби белгиланади. Лекин, тенг **A** ва **B** тўпламлар учун $|$**A**$|$ = $|$**B**$|$ бўлгани ҳолда, умуман олганда $|$**A**$|$ = $|$**B**$|$ эканидан **A = B** бўлиши келиб чиқмайди. Ҳақиқатдан A = {2, 3}, B = {2,4} бўлса, $|A| = |B|$, лекин $A \neq B$.

Тўпламлар устида амаллар.

Таъриф. A ва **B** тўпламларнинг ***бирлашмаси (йиғиндиси)*** деб, **A** ва **B** тўпламларнинг барча элементларидангина ташкил топган С тўпламга айтилади ва **C = A$\cup$B** каби белгиланади.

Мисол. A = {1, 3, 5, 6}, B = {1, 2, 3, 4, 5} булса, A$\cup$B = {1,2,3,4,5,6}.

Таъриф. A ва **B** тўпламларнинг ***кесишмаси (кўпайтмаси)*** деб, **A** га ҳам **B** га ҳам кирувчи элементлардангина ташкил топган **C** тўпламга айтилади ва **C = A$\cap$B** каби белгиланади.

Мисол учун юқоридаги **A** ва **B** тўпламларни олсак,

$$C = A\cap B = \{1,3,5\}.$$

Таъриф. A ва **B** тўпламларнинг ***айирмаси*** деб, **A** да ётиб, **B** да ётмаган (**A** га тегишли бўлиб, **B** га тегишли бўлмаган) барча элементлардангина ташкил топган **C** тўпламга айтилади ва у **C = B_A = A \ B** каби белгиланади.

Мисол учун юқоридаги **A** ва **B** тўпламларни олсак,

$$C = B_A = A \setminus B = \{ 6 \}.$$

Юқоридаги таърифлар асосида **A_1, A_2, A_3,...A_n** тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмасини аниқлаш мумкин.

Таъриф. A_1, A_2, A_3,...A_n тўпламларнинг бирлашмаси деб, **A_1, A_2, A_3,...A_n** тўпламларнинг барча элементларидангина ташкил топган C тўпламга айтилади ва $C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ каби белгиланади.

Таъриф. A_1, A_2, A_3,..., A_n тўпламларнинг кесишмаси деб, **A_1, A_2, A_3,..., A_n** тўпламларнинг ҳар бирига тегишли бўлган элементлардангина ташкил топган C тўпламга айтилади ва $C=\bigcap_{i=1}^{n} Ai$ каби белгиланади.

Энди бирлашма, кесишма ва айирмаларнинг юқоридаги таърифлардан бевосита келиб чиқувчи бир неча асосий хоссаларни кўрайлик ;

(1) коммутативлик : $\mathbf{A\cup B = B\cup A}$, ($1^1$). $\mathbf{A\cap B = B\cap A}$
(2) Идемпотентлик : $\mathbf{A\cup A = A}$, (2^1). $\mathbf{A\cap A = A}$
(3) Ассоциативлик : $\mathbf{(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)}$,
(3^1). $\mathbf{(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)}$
(4) Бирлашманинг кесишмага нисбатан дистрибутивлиги :

$$\mathbf{A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)}$$

(4^1) Кесишманинг бирлашмага нисбатан дистрибутивлиги :

$$\mathbf{A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)}$$

(5) Де - Морган қоидаси (**қонуни**): $\mathbf{A_c\cup B_c = (A\cap B)_c}$
(5^1) $\mathbf{A_c\cap B_c = (A\cup B)_c}$

Юқоридаги келтирилган хоссаларнинг хеч бири айирма учун ўринли эмас (**Мустақил исботлаб кўринг!**).
Юқоридагилардан (4) - нинг исботини келтирамиз:
Бунинг учун юқорида эслатилганидек,
(*) $\mathbf{A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)}$
(*.*) $\mathbf{(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)}$ эканлигини кўрсатиш кифоя.

Буни кўрсатиш учун қисм тўплам таърифини текширамиз. Яъни $\forall x\in \mathbf{A\cup(B\cap C)}$ элемент олиб, уни $\mathbf{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$ тўпламга ҳам тегишли эканини кўрсатамиз, сўнг тескариси - $\forall\ x\in\mathbf{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$ элемент олиб, уни $\mathbf{A\cup(B\cap C)}$ тўпламга ҳам тегишли эканини кўрсатамиз.

а) $\forall x\in \mathbf{A\cup(B\cap C)} \Rightarrow x\in\mathbf{A}$ ёки $x\in(\mathbf{B\cap C}) \Rightarrow$ **(1)** агар $x\in\mathbf{A}$ бўлса $\Rightarrow$
$x\in(\mathbf{A\cup B})$ ва $x\in(\mathbf{A\cup C}) \Rightarrow x\in(\mathbf{A\cup B})\cap(\mathbf{A\cup C})$,
(2) агар $x\in\mathbf{B\cap C} \Rightarrow x\in\mathbf{B}$ ва $x\in\mathbf{C} \Rightarrow x\in\mathbf{A\cup B}$ ва $x\in(\mathbf{A\cup C}) \Rightarrow$
$x\in(\mathbf{A\cup B})\cap(\mathbf{A\cup C})$, демак (*) ўринли экан.
б) $x\in(\mathbf{A\cup B})\cap(\mathbf{A\cup C}) \Rightarrow x\in\mathbf{A\cup B}$ ва $x\in(\mathbf{A\cup C}) \Rightarrow x\in\mathbf{A}$ ёки $x\in\mathbf{B}, x\in\mathbf{C}$
Агар $x\in\mathbf{A}$ бўлса $\Rightarrow x\in\mathbf{A\cup(B\cap C)}$ бўлади.

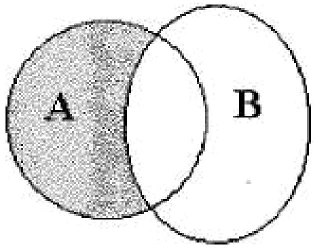
Агар $x\notin\mathbf{A}$ бўлса, у ҳолда $x\in\mathbf{B}$ ва $x\in\mathbf{C}$ бўлади, бундан $x\in\mathbf{A\cap C}$ бўлади ва бундан $x\in\mathbf{A\cup(B\cap C)}$ яъни (*.*) нинг ҳам ўринли экани исботланади.

Қолган барча хоссалар ҳам шу каби исботланади. (**Мустақил исботлаб кўринг!**).

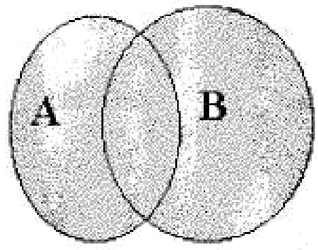
Эйлер-Венн диаграммаси

U қандайдир бўш бўлмаган тўплам бўлиб, **A,B,C** лар унинг қандайдир тўплам остилари бўлсин. У ҳолда юқорида аниқланган амаллар “Эйлер - Венн диаграммаси” деб айтилувчи диаграмма орқали қуйидагича ифода этилиши мумкин.

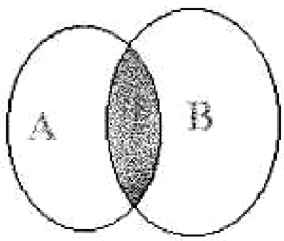
1



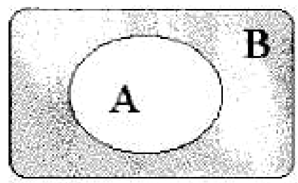
2



3



4



Юқорида келтирилган расмлардаги штрихланган қисмлар мос равишда: (1) – $A \backslash B$ ни, (2) – $A \cup B$ ни, (3) – $A \cap B$ ни, (4) – $\overline{A}_B$ ни билдиради.

Таянч иборалар: тўплам, унинг элементлари, тегишлилик белгиси, чекли, чексиз, бўш тўплам, қисм тўплам (тўплам ости), тенг тўпламлар, тўпламларнинг бирлашмаси, кесишмаси, айирмаси, Эйлер-Венн диаграммаси.

Назорат учун саволлар:

0.1. Тўплам нима?

0.2. Тўпламнинг элементи деганда нимани тушунасиз?

0.3. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ белгилари нимани ифодалайди?

0.4. Қандай тўплам чекли, чексиз ёки бўш тўплам дейилади?

0.5. Қисм тўплам нима?

0.6. Тўпламлар устида бирлашма, кесишма, айирма амаллари қандай аниқланади?

0.7. Бу амаллар Эйлер-Венн диаграммаларида қандай тасвирланади?

№1 - Мавзу.
Группалар ва уларга доир мисоллар.

Режа.

1. Тўпламда бинар амал тушунчаси.
2. Амалнинг хоссалари.
3. Группани аниқлаш.

Арифметикада биз шундай амалга дуч келамизки, у берилган 2 та сонга учинчи бир сонни мос қўяди. Масалан, қўшиш амали **<8, 6>** сонлар жуфтлигига 14 сонини мос қўяди, **<4, 4>** жуфтликка эса 8 сонини мос қўяди. Айириш амали, агар бутун сонлар тўплами **Z** да қаралса, ҳар бир берилган сонлар жуфтлигига аниқ бир бутун сонни мос қўяди. Бу ерда нафақат сонлар жуфтлигини, балки бу сонларнинг тартибини ҳам кўрсатиш керак бўлади.Чунки айириш амали **<8, 6>** жуфтликка 2 сонини мос қўйса, **<6, 8>** жуфтликка **-2** сонини мос қўяди. Шунинг учун **<8, 6>** ва **<6, 8>** жуфтликларни ҳар-хил деб қараш керак бўлади.

Элементларнинг тартиби аниқ кўрсатилган жуфтликни ***тартибланган жуфтлик*** деб атаймиз.

Таъриф: М - иҳтиёрий элементлардан тузилган бўш бўлмаган қандайдир тўплам бўлсин. Агар **М** нинг элементларидан тузилган ҳар бир тартибланган жуфтликка **М** дан биттадан элемент мос қўйилса, у ҳолда **М** да ***бинар амал аниқланган*** дейилади.

Бинар амалга натурал сонлар тўплами **N** да ёки бутун сонлар тўплами **Z** да аниқланган қўшиш амали, **Z** тўпламдаги айириш амаллари мисол бўлади. **N** тўпламда айириш амали бинар амал бўлмайди.Чунки, масалан, **<6, 8>** жуфтликка ҳеч қайси натурал сон мос келмайди.

1. Қуйидаги тўпламларда кўрсатилган амалллар бинар амал бўладими ?

1). ҳамма жуфт натурал сонлар тўплами **2Z да,**

2). ҳамма тоқ натурал сонлар тўпламида,

3). ҳамма манфий бутун сонлар тўпламида

а) қўшиш, б) **айириш**, в) **кўпайтириш** амаллари?

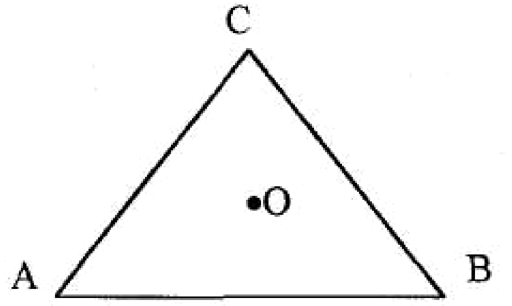
Жавоб. а) қўшиш амали 1), 3) тўпламларда,

б) айириш амали ҳеч қайси тўпламда,

в) кўпайтириш амали 1), 2) тўпламларда бинар амал бўлади.

Бинар амалга бир нечта мисоллар келтирамизки, бу мисолларга биз келгусида бир неча бор қайтамиз.

Мисол 1. A, B, C лар тенг томонли ABC учбурчакнинг учлари бўлсин (1-расм).



1 - расм

Учбурчакни O маркази атрофида соат стрелкасига тескари йўналиш бўйича 120 ^{0} га бурамиз. У ҳолда учбурчакнинг A учи B учига, B учи C учига ва C учи эса A учига ўтади. Бундай буришдан сўнг учбурчак ўзининг дастлабки ҳолатига қайтади (агар учларининг номи эътиборга олинмаса), яъни O нуқта атрофида 120^0 га бурищ берилган учбурчакни ўзини ўзига ўтказувчи алмаштириш бўлади. Бу алмаштиришни a билан белгилаймиз ва қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$a=\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$, бу ерда юқоридаги сатр учбурчакнинг учларини кўрсатади, пастдаги сатр эса учбурчакнинг юқоридаги ҳар бир учи мос равишда буришдан сўнг қайси учга ўтганини англатади. O нуқта атрофида худди шу йуналишда 240^0 га буриш ҳам учбурчакни ўзини ўзига ўтқазувчи алмаштириш бўлади. Бу алмаштиришни b билан белгиласак, $b=\begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix}$ бўлади. a в b дан фарқ қилувчи учбурчакни бураш ёрдамида ўзини ўзига ўтказувчи яна бир алмаштириш бор. У 0^0 га бурищдир. Бу алмаштириш $e=\begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix}$ бўлади. Кўриниб турибдики, мунтазам учбурчакни (марказий нуқта атрофида қаралаётган йўналиш бўйича) ўзини ўзига ўтказувчи фақат 3 та - e, a, b алмаштириш мавжуд экан. g_1 ва g_2 - учбурчакнинг иҳтиёрий алмаштириши бўлсин. У ҳолда $g_1 * g_2$ деганда шундай g_3 алмаштиришни тушунамизки, бунда аввал g_2 сўнгра g_1 алмаштириш бажарилади, одатда g_3 алмаштиришни g_1 ва g_2 алмаштиришларнинг ***кўпайтмаси*** ёки ***композицияси*** дейилади.

Мунтазам ABC учбурчакни ўзини ўзига ўтказувчи алмаштиришлар учун ***кўпайтириш жадвали***ни тузиш мумкин (1-жадвал). Унда ҳар бир сатр ва ҳар бир устунга қандайдир алмаштириш мос қўйилади. g_1 алмаштиришга мос келувчи сатр билан g_2 алмаштиришга мос келувчи устуннинг кесишган жойига $g_1 * g_2$ алмаштиришни ёзилади. Масалан, жадвалдаги ажратилган a сатр билан b устун кесишган ўринга биз $a * b$ алмаштиришни қўйишимиз керак,

	e	a	b
e			
a			e
в			

1- жадвал.

яъни учбурчакни аввал 240° га, сўнгра яна 120° га бурамиз, натижада $a * b$ - 360° га буришга тенг бўлади, яъни e алмаштиришга тенг бўлади. Қуйидагича фикр юритсак ҳам худди шу натижага эга бўламиз: b алмаштириш учбурчакнинг А учини С га ўтказади, a алмаштириш эса С учни А га ўтказади. Демак, $a * b$ алмаштириш А учни А учга ўтказади. Ҳудди шу каби, В уч В учга ўтади, С уч эса С учга ўтади. Бундан, $a * b = e = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix}$ экани келиб чиқади.

2. Мунтазам учбурчакни ўзини ўзига ўтказувчи алмаштиришлар композицияси учун тузилган 1- жадвални тўлдиринг, бу ерда $e = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix}$ алмаштиришлар.

Ечиш.

$$aa = \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix} = b,\ ba = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix} = e,\quad bb = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix} = a.$$

Шу каби $ab = e, \quad ea = ae = a, \quad eb = be = b, \quad ee = e.$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

2 - жадвал

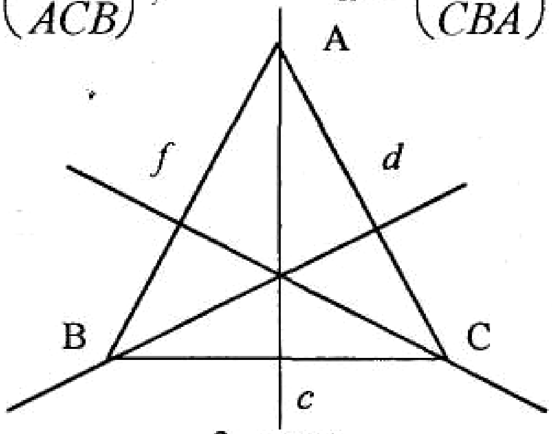
Фигуранинг ҳамма нуқталари орасидаги масофани сақловчи ва уни ўзини ўзига ўтказувчи иҳтиёрий алмаштириш берилган ***фигуранинг симметрияси*** дейилади.

Демак, 1- мисолда қаралган мунтазам учбурчакнинг айлантиришлари унинг симметриялари бўлар экан.

Мисол 2. Мунтазам учбурчакнинг юқоридаги айлантиришларидан ташқари, унинг яна учта симметрияси мавжуд. Улар учбурчакнинг баландликларига нисбатан (ўққа **нисбатан симметрия**) аксларидир.

Бу алмаштиришларни мос равишда *c, d, f* каби белгилаймиз.

$$c=\begin{pmatrix}ABC\\ACB\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}ABC\\CBA\end{pmatrix},\qquad f=\begin{pmatrix}ABC\\BAC\end{pmatrix}.$$



2 - расм

3. Мунтазам учбурчакнинг ҳамма симметриялари учун кўпайтириш жадвалини тузинг.

Ечиш.

$$e=\begin{pmatrix}ABC\\ABC\end{pmatrix},\qquad a=\begin{pmatrix}ABC\\BCA\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}ABC\\CAB\end{pmatrix},$$

$$c=\begin{pmatrix}ABC\\ACB\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}ABC\\CBA\end{pmatrix},\qquad f=\begin{pmatrix}ABC\\BAC\end{pmatrix},$$

$$a*c=\begin{pmatrix}ABC\\BAC\end{pmatrix}=f,\quad a*d=\begin{pmatrix}ABC\\ACB\end{pmatrix}=c,\quad a*f=\begin{pmatrix}ABC\\CBA\end{pmatrix}=d$$

$$b*c=\begin{pmatrix}ABC\\CBA\end{pmatrix}=d\quad b*d=\begin{pmatrix}ABC\\BAC\end{pmatrix}=d\quad b*f=\begin{pmatrix}ABC\\ACB\end{pmatrix}=c$$

$$c*a=\begin{pmatrix}ABC\\CBA\end{pmatrix}=d\quad c*b=\begin{pmatrix}ABC\\BAC\end{pmatrix}=f\quad c*c=\begin{pmatrix}ABC\\ABC\end{pmatrix}=e$$

$$c*f=\begin{pmatrix}ABC\\CAB\end{pmatrix}=b\quad c*d=\begin{pmatrix}ABC\\BCA\end{pmatrix}=a\quad d*a=\begin{pmatrix}ABC\\BAC\end{pmatrix}=f$$

$$d*b=\begin{pmatrix}ABC\\ACB\end{pmatrix}=c\quad d*c=\begin{pmatrix}ABC\\CAB\end{pmatrix}=b\quad d*f=\begin{pmatrix}ABC\\BCA\end{pmatrix}=a$$

$$f*a=\begin{pmatrix}ABC\\ABC\end{pmatrix}=c\quad j*b=\begin{pmatrix}ABC\\CBA\end{pmatrix}=d$$

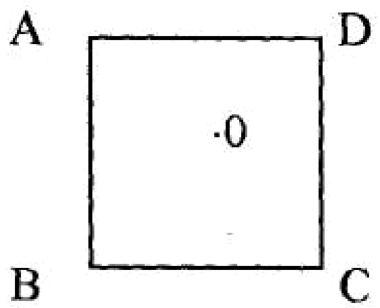
	e	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*
e	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*
a	*a*	*b*	*e*	*f*	*c*	*d*
b	*b*	*e*	*a*	*d*	*f*	*c*
c	*c*	*d*	*f*	*e*	*a*	*b*
d	*d*	*f*	*c*	*b*	*e*	*a*
f	*f*	*c*	*d*	*a*	*в*	*e*

3 - жадвал

4. Квадратнинг марказий О нуқтаси атрофида бури натижасида ўзини ўзига ўтказувчи айлантиришлари учун кўпайтири жадвалини тузинг.

Ечиш: $e = 0^0$ га, $a = 180^0$ га

$b = 90^0$ га, $c = 270^0$ га айлантириш.



3 - расм

$$e = \begin{pmatrix} ABCD \\ ABCD \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} ABCD \\ DABC \end{pmatrix}.$$

$$a * a = \begin{pmatrix} ABCD \\ ABCD \end{pmatrix} = e \qquad a * b = \begin{pmatrix} ABCD \\ DABC \end{pmatrix} = c$$

$$a * c = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix} = b \qquad b * a = \begin{pmatrix} ABCD \\ DABC \end{pmatrix} = c$$

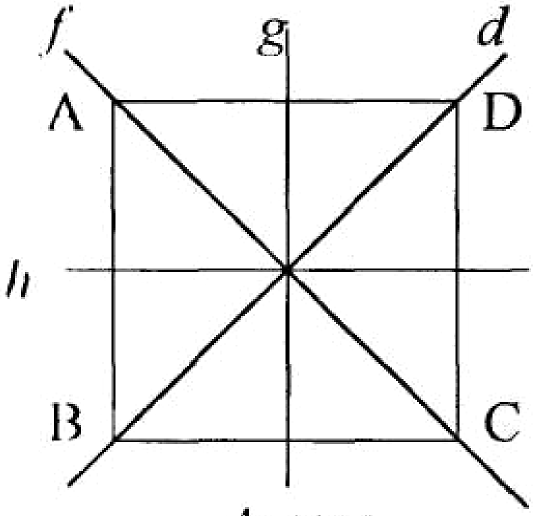
$$b * b = \begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix} = a \qquad b * c = \begin{pmatrix} ABCD \\ ABCD \end{pmatrix} = e$$

$$c * a = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix} = b \qquad c * b = \begin{pmatrix} ABCD \\ ABCD \end{pmatrix} = e$$

$$c * c = \begin{pmatrix} ABCD \\ CDAB \end{pmatrix} = a$$

Шу каби $a*e = e*a = a$, $b*e = e*b = b$, $c*e = e*c = c$, $e*e = e$.

5. Квадратнинг ҳамма симметрияси учун кўпайтириш жадвалини тузинг.



4 - расм

$$e=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}$$

$$a=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}\quad f=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}ABCD\\BCDA\end{pmatrix}\quad g=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix}ABCD\\DABC\end{pmatrix}\quad h=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}$$

	e	a	b	c	d	f	g	h
e	e	a	b	c	d	f	g	h
a	a	e	c	b	f	d	h	g
b	b	c	a	e	g	h	F	d
c	c	b	e	a	h	g	d	f
d	d	f	h	g	e	a	c	в
f	f	d	g	h	a	e	b	c
g	g	h	d	f	b	c	e	a
h	h	g	f	d	c	b	a	e

5 - жадвал

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	a	a

4-жадвал

$$a*d=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}=f,\qquad a*f=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}=d,$$

$$a*g=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=h,\qquad a*h=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=g,$$

$$b*d=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=g,\qquad b*f=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=h,$$

$$b*g=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}=f,\qquad b*h=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}=d,$$

$$c*d=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=h\qquad c*f=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=g$$

$$c*g=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}=d \qquad c*h=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}=f$$

$$d*a=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}=f \qquad d*b=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=h$$

$$d*c=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=g \qquad d*d=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e$$

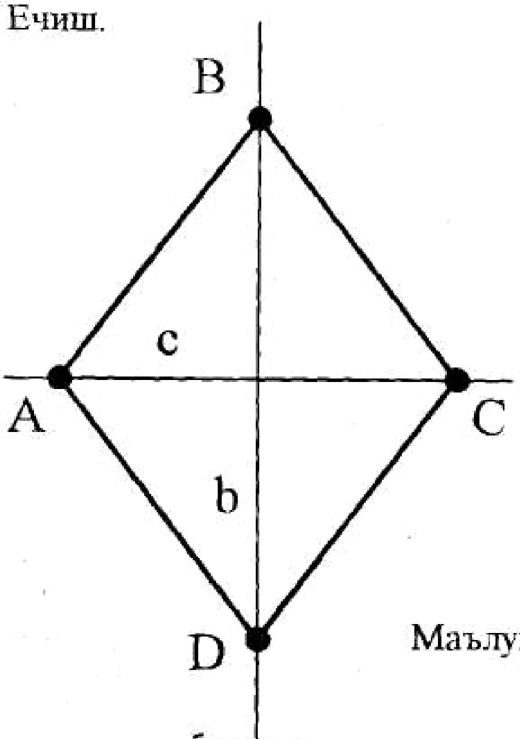
$$d*f=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=a \qquad d*g=\begin{pmatrix}ABCD\\DABC\end{pmatrix}=c$$

$$f*a=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}=d \qquad f*b=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=g$$

$$f*c=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=h$$

6. Квадрат бўлмаган ромбнинг барча симметриясини топинг ва улар учун кўпайтириш жадвалини тузинг.

Ечиш.



5 - расм.

e - О нуқта атрофида 0^0 га буриш.
a - О нуқта атрофида 180^0 га буриш.
b - BD-диагонал бўйича,
c - AC-диагонал бўйича симметриялар.

Юқоридаги белгилашга кўра

$$e=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix},$$

$$a=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}, \quad c=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}.$$

Маълумки, $a*e=e*a=a$, $b*e=e*b=b$, $c*e=e*c=c$, $e*e=e$.

$$a*a=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e \qquad a*b=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}=c$$

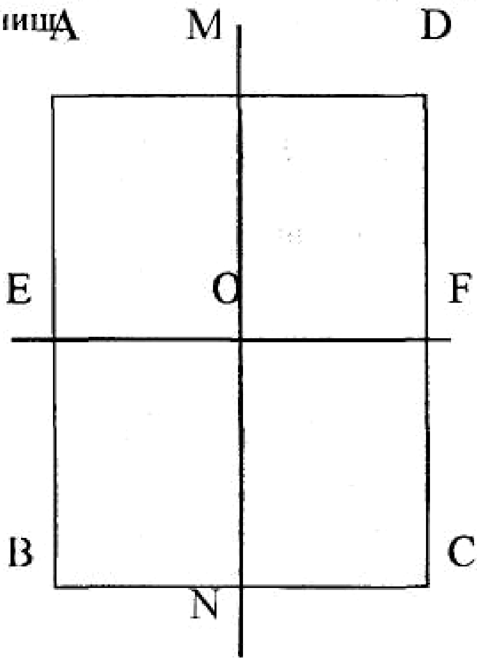
$$a*c=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}=b,\ b*a=\begin{pmatrix}ABCD\\ADCB\end{pmatrix}=c,b*b=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e$$

$$b*c=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=a,\ c*a=\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix}=b,c*b=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=a$$

$$c*c=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e$$

7. Квадрат бўлмаган тўғри тўртбурчакнинг ҳамма симметриясини топинг ва улар учун кўпайтириш жадвалини тузинг.

Ечиш.



6 - расм

e - **O** нуқта атрофида 0^0 **га** буриш.
a - **O** нуқта атрофида 180^0 га буриш.
b - **EF**-ўқ бўйича симметрия.
c - **MN**-ўқ бўйича симметрия.
Юқоридаги белгилашларга асосан,

$$e=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}$$

$$a*a=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e,a*b=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=c$$

$$a*c=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=b,b*a=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=c$$

$$b*b=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e,\qquad b*c=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=a,$$

$$c*a=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=b,\qquad c*b=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=a,$$

$$c*c=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e$$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

8 - жадвал

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

6-жадвал

6- мисолнинг жадвали билан солиштиринг!

Тўпламнинг ***e*** элементи унда аниқланган * бинар амал нисбатан **нейтирал ёки бирлик элемент** дейилади, агар тўпламнинг ихтиёрий ***a*** элементи учун $a * e = e * a = a$ бўлса.

Агар тўпламнинг ихтиёрий ***a*** элементи учун $a * e = a$ бўлса, **ўнг нейтирал**, агар тўпламнинг ихтиёрий ***a*** элементи учун $e * a =$ бўлса, **чап нейтирал** элемент дейилади.

Тўпламда аниқланган * бинар амали **коммутатив** ама дейилади, агар тўпламнинг ихтиёрий ***a*** ва ***в*** элементлари учу ***a* в=в* a*** бўлса.

Тўпламда аниқланган * бинар амали **ассоциатив** ама дейилади, агартўпламнинг ихтиёрий ***a,в,c*** элементлари учу ***(a* в)* c=a* (в* c)*** ўринли бўлса.

Коммутативлик ва ассоциативлик амалнинг энг асосий кучл ҳоссаларидан бўлиб, бундай ҳоссаларга ҳар қандай амаллар ҳам эг бўлавермайди.

Таянч иборалар:

Тўплам, бинар амал, тартибланган жуфтлик, нейтрал элемент,амалнинг асосий хоссалари, фигуранинг симметрияси.

Назорат учун саволлар.

1.1. Тўплам деганда нимани тушунилади?
1.2. Тартибланган жуфтлик нима?
1.3. Тўпламда аниқланган бинар амал деб нимага айтилади?
1.4. Текисликдаги фигуралар (мунтазам учбурчак, квадрат, тўғри тўртбурчак, ромб) нинг қандай симметрияларини биласиз?

Мустакил ишлаш учун масалалар.

1.1. Арифметик амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш) дан қайси бири қуйидаги тўпламларда бинар амал бўлади.
а) { 0, 1, -1 } тўпламда, б) **N** тўпламда в) **Z** тўпламда

1.2. **A** = {-3,-2,-1,0,1,2,3} тўпламда айириш бинар амал бўладими ?

1.3. Қуйидаги амаллар берилган тўпламларда бинар амал бўладими?
а) **2Z** - жуфт сонлар тўпламида қўшиш.

о) юқ сонлар тўпламида қўшиш.

п) R^{+} - барча мусбат хақиқий сонлар тўпламида соннинг ўнли логарифмни топиш

с) R^{+} тўпламда иккита соннинг ўрта геометригини топиш.

т) **N** да иккита соннинг энг катта умумий бўлувчисини топиш.

1.4 Қуйидаги тўпламларда матрицаларни кўпайтириш амали бинар амал бўлишини ва бу амал тескариланувчилигини кўрсатинг.

$$\text{а) } M=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}, a\in R\right\} \quad \text{б) } M=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{bmatrix}, a,b,c\in R\right\}$$

1.5. **R** да $a*b=a^2-2ab-b^2$ қоида билан бажарилувчи амал бинар амал бўладими ?

а) **N** тўпламда - чи ?　　　　б) **Z** тўпламда - чи ?

1.6. Q^{+} тўпламда қуйидаги формуллар билан бажарилувчи амаллар бинар амал бўладими, агар бўлса бу амал нейтрал элементга эгами ?

а) $a*b=(a-b)^2$　　б) $a*b=(a+b)/2$,　　в) $a*b=a(a-1)+b(b-1)$,

Жавобларни нима учунлигини тушунтиринг.

1.7. Қўшиш,кўпайтириш, айириш амаллари **Z** тўпламда коммутатив, ассоциатив амал бўладими ?

1.8. Қуйидаги бинар амаллардан қайсилари **N** тўпламда коммутатив, ассоциатив амал бўлади ? Бу амаллар чап нейтирал, ўнг нейтрал элементларга ва умуман нейтрал элементга эгами ?

а) $a*b=a^b$　　б) $a*b=$ ЭКУБ(a,b)　　в) $a*b=$ ЭКУК(a,b)

1.9. R^{+} тўпламда $a*b=\sqrt{ab}$ -ўрта геометрикни топиш амали коммутатив, лекин ассоциатив эмаслигини, бундан ташқари бу амал нейтрал элементга эга эмаслигини исботланг.

1.10 $a*b=a^2+b^2$ қоида билан аниқланган амал **R** тўпламда коммутатив, лекин ассоциатив эмаслигини исботланг.

1.11 $\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ b & a\end{bmatrix}, b, a\in R^{+}\right\}$ кўринишидаги матрицалар тўпламида матрицаларни кўпайтириш амали коммутатив ва ассоциатив эканини ва бу амал тескариланувчилиги кўрсатинг.

1.12. Шундай тўплам кўрсатингки унда $a*b=b$ бинар амал ассоциатив, лекин коммутатив бўлмасин.

№2 - Мавзу.
Алмаштиришлар группаси.

Режа.

1. Акслантириш ва унинг турлари.
2. Алмаштиришлар группаси.

Агар **Х** ва **У** - иҳтиёрий тўпламлар бўлиб, ҳар бир $x\in$ элемент учун бир қийматли аниқланган $y\in У$ элемент мос қўйилга бўлса, у ҳолда **Х** ни **У** га мос қўювчи қандайдир φ ***акслантири*** берилган дейилади (ва уни одатда **φ:Х→У** каби белгиланади) ҳамда элемент ***x*** элементнинг ***акси***, ***x*** эса ***y*** элементнинг ***асли*** дейилади ва б акслантириш **у = φ(х)** каби ёзилади.

Таъриф. **φ:Х→У** акслантириш **Х** тўпламни **У** тўпламни ***устига акслантириш*** дейилади, агар ҳар бир $y\in$ **У** элемент учун **Х** д камида битта x элемент мавжуд бўлиб, $\varphi(x) = y$ бўлса, яъни ҳар би $y\in$ **У** элемент **Х** да ўз аслига эга бўлса.

8. φ акслантириш Ўзбекистондаги ҳар бир шахар номин унинг бош харфига мос қўйсин (масалан, φ (Наманган) = Н).
φ - Ўзбекистоннинг хамма шахарларини ўзбек алифбосининг устиг акслантириш бўладими?

Жавоб: **φ: Х →У** акслантириш устига акслантириш бўлиш учун ҳар бир $y\in$ **У** элемент **Х** да ўзининг аслига эга бўлиши керак.

Бу мисолдаги φ - устига акслантириш бўлмайди, чунк Ўзбекистонда ўзбек алифбосидан олинган **ъ** ёки **ь** харфлари била бошланувчи шахар йўқ.

Таъриф. φ:Х→У устига акслантириш Х тўпламни У тўпламг ***ўзаро бир қийматли акслантириш*** дейилади, агар ҳар бир $y\in$У элемент Х да ягона аслига эга бўлса.

9. Бутун сонлар тўпламини номанфий бутун сонлар тўпламиг ўтқазувчи қуйидаги акслантиришларни қараймиз:

а) $\varphi(z) = z^2$; б) $\varphi|n| = |n|$;

в) $$\varphi(n)=\begin{cases}2n, \text{ агар } n\ge 0 \text{ бўлса}\\ 2|n|-1, \text{ агар } n<0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

Бу акслантиришлардан қайсилари устига акслантириш қайсилари ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади?

Жавоб: Бу акслантиришлардан:
а) $\varphi(z) = z^2$ - устига акслантириш бўлмайди.
б) $\varphi|n| = |n|$ - устига акслантириш бўлади (лекин, бир қийматли эмас!)

в) $\varphi(n)=\begin{cases}2n, & агар\, n\geq 0\ бўлса\\ 2|n|-1, & агар\ n<0\ бўлса\end{cases}$ - ўзаро бир қийматли аксланттириш.

Чунки, а) $\varphi(z)$ аксланттиришда $\varphi(z)=3$ ни қаноатлантирувчи z бутун сони йўқ, яъни 3 сони **Z** да аслига эга эмас.

б) $\varphi(n) = |\ n\ |$ - устига аксланттириш, лекин ўзаро бир қийматли эмас. Чунки $\mathbf{Z}^+$ даги ҳар бир элемент **Z** да ўз аслига эга, лекин $\varphi(n)$ аксланттириш натижасида улар 2 тадан аслга эга бўлади, масалан 5 сонига 2 та: -5 ва 5 сонлари аксланади. ($\varphi(5)=\varphi(-5)=5$)

в) Ўзаро бир қийматли аксланттириш. Чунки 0,1,2,... сонлари 0, 2, 4,.. сонларига, -1, -2, -3,... сонлари эса 1,3,5,... сонларига аксланади.

Таъриф. ***M*** тўпламни ўзини ўзига мос қўювчи ихтиёрий ўзаро бир қийматли аксланттириш g: ***M→M*** ни ***M тўпламнинг алмаштириши*** дейилади.

М тўпламнинг иккита g_1 ва g_2 аксланттиришлари тенг дейилади, агар ихтиёрий $m\in$M элемент учун $g_1(m)=g_2(m)$ ўринли бўлса.

Алмаштириш тушунчасининг ўрнига (аксарият тўплам чекли бўлган ҳолда) кўпинча ўрин алмаштириш (подстановка) тушунчаси қўлланилади. Чекли тўпламларда ўрин алмаштириш қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$g=\begin{pmatrix}a_1a_2a_3\ldots a_n\\ a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\ldots a_{i_n}\end{pmatrix}$$

юқори сатрда - берилган тўпламнинг (бирор тартибга нисбатан биринчи, иккинчи ва х. к.) барча элементлари, қуйи сатрда эса юқори сатрдаги ҳар бир элемент мос равишда қайси элементга ўтгани кўрсатилади. Агар $\left(i_1\, i_2\, i\ \ .\ .\ .\ i_n\right)$ сонлар кетма - кетлигида 1 дан n гача бўлган $\left(1\ 2\ 3\ldots n\right)$ сонларнинг табиий тартибига нисбатан бузилишлар сони ***жуфт*** (***тоқ***) бўлса, ***g*** - ***жуфт (тоқ)*** **ўрин алмаштириш** дейилади.

g - алмаштиришнинг ўзаро бир қийматли аксланттириш эканидан, унинг учун шундай g^{-1} - ***тескари алмаштириш*** мавжудки, у қуйидагича аниқланади: агар g $(a)=b$ бўлса, у ҳолда $g^{-1}(b)=a$ бўлади.

1- мисолда $a=\begin{pmatrix}ABC\\ BCA\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}ABC\\ CAB\end{pmatrix}$ бўлгани учун $ab=ba=e$ бўлади, яъни $a^{-1}=b$ бўлади.

Эслатма. Алмаштиришларнинг кўпайтмаси қуйидагича аниқланади: $(g_1 \cdot g_2)(a) = g_1(g_2(a))$ (аввал g_2, кейин g_1 алмаштириш бажарилад Агар g_1 ва g_2 M тўпламнинг алмаштиришлари бўлса, у ҳолда $g_1 \cdot g_2$ ҳ M тўпламнинг алмаштириши бўлади.

10. Мунтазам учбурчакнинг барча симметрияси учун теска алмаштиришларни топинг (1, 2 - мисоллар).

11. $g(x) = 2x$ - **R** нинг алмаштириши бўлсин. Унга теска амаштиришни топинг.

Ечиш.	$g(x)$	$g^{-1}(x)$
	$0 \to 0$	$0 \to 0$
	$1 \to 2$	$2 \to 1$
	$2 \to 4$	$4 \to 2$
	$-1 \to -2$	$-2 \to -1$
	$\frac{-3}{2} \to -3$	$-3 \to \frac{-3}{2}$

Демак, $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$, чунки $(g \cdot g^{-1})(x) = (g^{-1} \cdot g)(x) =$

Таъриф. Қандайдир алмаштиришлар тўплами **G** қуйида ҳоссаларга эга бўлсин; 1) агар g_1 ва g_2 алмаштиришлар **G** тўплам тегишли бўлса, у ҳолда $g = g_1 * g_2 \in \mathbf{G}$,
2) агар $g \in \mathbf{G}$ бўлса, у ҳолда g га тескари бўлган алмаштириш $g^{-1} \in \mathbf{G}$

Юқоридаги 2 та шарт бажарилса, у ҳолда алмаштиришла тўплами **G** ***ни алмаштиришлар группаси*** дейилади.

1-6 мисолларда келтирилган алмаштиришлар тўпламлари алмаш тиришлар группаси эканини бевосита текшириш мумкин.

12. Барча алмаштиришлар группасида шундай (айний алмаштириш e мавжудки, $\forall a \in M$ учун $e(a) = a$ бўлади. Исботланг.

Исботи. g - берилган алмаштиришлар группаси **G** ни элементи бўлсин. У ҳолда алмаштиришлар группасининг таърифидаг иккинчи шартга кўра, g^{-1} акслантириш ҳам бу группанинг элемент бўлади. Бундан, ўз навбатида таърифдаги биринчи шартга кўр $g^{1} * g = e \in \mathbf{G}$ келиб чиқади. ***Исбот бўлди.***

13. Ихтиёрий g алмаштириш учун $eg = ge = g$ эканини исботлан

Исботи. Алмаштиришлар кўпайтмасининг таърифидан $\forall$ элемент учун $(e\,g)(a) = e(g(a)) = g(a)$ ва $(g\,e)(a) = g(e(a)) = g(a)$ га эг бўламиз. Шунинг учун $e\,g = g$ ва $g\,e = g$ бўлади. ***Исбот бўлди.***

14. Ихтиёрий q_1, q_2, q_3 алмаштиришлар учун $(q_1 q_2)q_3 = q_1(q_2 q_3)$ тенглик ***(ассоциативлик ҳоссаси) ўринли*** эканини исботланг.

$$((q_1 q_2)\, q_3)\,(a) = (q_1 q_2)\,(q_3(a)) = q_1(q_2(q_3(a)))$$

$$(q_1(q_2q_3))(a) = q_1((q_2q_3)(a)) = q_1(q_2(q_3)(a))).$$

Исбот бўлди.

Таянч иборалар:

Акслантириш, алмаштиришлар группаси, устига акслантириш, ўзаро бир қийматли акслантириш, ўрин алмаштириш.

Назорат учун саволлар.

2.1. Акслантириш нима?
2.2. Қандай группани акслантиришлар группаси дейилади?
2.3. Акслантиришларнинг қандай турларини биласиз?
2.4. *Ўрин алмаштириш нима*?

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

2.1. 3- даражали S_3 - **симметрик группа** элементлари учун бу элементларни харфлар билан белгилаб, кўпайтириш жадвалини тузинг. Бу жадвал ёрдамида группанинг ўзаро тескари элементларини топинг ва қаралаётган группанинг коммутатив группа эмаслигини исботланг.

2.2. $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

ўрин алмаштирищдан тузилган G группа учун кўпайтириш жадвалини тузинг ва бу жадвал ёрдамида G-абел группа эканини кўрсатинг.

2.3. Қуйидагиларни исботланг.

а) бир хил жуфтликдаги икки ўрин алмаштиришнинг кўпайтмаси жуфт бўлади, ҳар хил жуфтликдаги ўрин алмаштиришларнинг кўпайтмаси эса тоқ ўрин алмаштириш бўлади.

б) a ва a^{-1} ўрин алмаштиришлар бир хил жуфтликка эгадирлар, бу ерда a-$\forall$ ўрин алмаштириш

в) n - даражали барча жуфт ўрин алмаштиришлар тўплами $\mathbf{A_n}$ - ўрин алмаштиришларнинг кўпайтириш(композицияси) амалига нисбатан группа ташкил қилади.

2.4. F- текисликдаги қандайдир фигура бўлсин. F фигурани ўзини ўзига ўтказувчи алмаштиришлар тўплами алмаштиришларнинг кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилишини исботланг.

2.5. Мунтазам n- бурчакни буришлар группаси топинг.

2.6. M- текисликдаги барча нуқталар тўплами бўлсин.
M тўпламнинг қуйидаги алмаштиришлари тўпламларидан қайси бири **алмаштиришлар группасини** ташкил қилади ?

а) Текисликнинг ўқлар бўйича симметриялари тўплами.

б) Текисликни унинг мумкин бўлган нуқтаси атрофида буришлар тўплами.

№3-Мавзу.
Группалар.

Р е ж а.

1. Бинар амал ва унинг хоссалари.
2. Группалар.

6- ва 7- масалаларни ечишда ромб ва тўғри тўртбурч симметриялари учун кўпайтириш жадваллари тузилди.

Бунда, ***симметрияларни*** *келтирилган бу мисоллардаги ка белгилаганда* ***кўпайтириш жадваллари бир хил бўлди.***

Элементлари ҳар хил предметлардан иборат бўлган икки тўпламда (бизнинг мисолларда ромб ва тўғри тўртбурчакни алмаштиришларидан иборат тўпламларда) табиати икки хил бўлг иккита бинар амал (бизнинг мисолда ҳар иккиси ҳам алмаштиришл композицияси) аниқланган бўлсада уларнинг "кўпайтириш жадваллари белгилашларга кўра айнан бир хил бўлиши мумкин эка Ундан ташқари айрим ҳолларда тўпламларда аниқланган бу амалл учун алмаштиришлар группасининг асосий хоссалари ўринли бўлади. Келгусида тўпламда аниқланган (берилган) бинар амални кўпайтири деб атаймиз ва агар бу амал $(a,в)$ жуфтликка c элементни мос қўйса, ни a ва $в$ элементларнинг кўпайтмаси деб атаймиз ва $ав = c$ каб белгилаймиз. Бир неча хусусий ҳолларда бу амални бошқач номланади, масалан композиция, йиқинди ва ҳоказо.

Таъриф. Агар иҳтиёрий элементлардан тузилган G тўплам аниқланган • бинар амал учун қуйидаги шартлар ўринли бўлса, $\langle G, \bullet$ жуфтлик ёки қисқача G ***группа*** дейилади:

1) ***ассоциативлик*** : $\forall a,в,c \in G$ учун $(a\bullet в)\bullet c = a\bullet(в\bullet c)$

2) G да шундай e элемент мавжуд бўлсаки, $e\bullet a = a\bullet e = a$ тенгли иҳтиёрий $a\in G$ элемент учун ўринли бўлса; (бундай e элемент группанинг ***бирлик (нейтрал) элементи*** дейилади.)

3) $\forall\ a \in G$ элемент учун G да шундай a^{-1} элемент мавжуд бўлсаки $a\bullet a^{-1} = a^{-1}\bullet a = e$ тенглик ўринли бўлса.. Бундай элемент a элементи тескари (қарама-қарши) элемент дейилади.

12-14 масалалардан кўринадики, иҳтиёрий алмаштиришла тўплами алмаштиришларнинг композицияси амалига нисбатан групп ташкил қилади. Бу группани алмаштиришлар группаси дейилад (айрим ҳолларда тескари тасдиқ ҳам ўринли бўлади (55-масала каранг). Шундай экан, биз группага доир бир нечта мисолларга э бўлдик. Бу группаларнинг ҳаммаси чекли сондаги элементларда ташкил топган. Бундай группалар чекли группалар дейилади. Чекл группадаги элементлар сони группанинг тартиби дейилади.

Чексиз кўп элементларни ўз ичига олган группани **чексиз группа** дейилади.

Чексиз группаларга бир нечта мисолларни келтирамиз:

Мисол 7. Барча бутун сонлар тўплами **Z** ни қараймиз ва бу тўпламдаги бинар амал деб одатдаги + **қўшиш амалини** оламиз. У холда биз $\langle Z, +\rangle$ группага эга бўламиз. Ҳақиқатдан ҳам, ноль сони бирлик элемент вазифасини бажаради: $\forall\, n \in \mathbf{Z}$ учун $0 + n = n + 0 = n$.

Бундан ташқари, хир бир n элемент учун тескари элемент $-n$ (бу холда $-n$ қарама-қарши элемент дейилади) мавжудки, $n + (-n) = (-n) + n = 0$ бўлади.

Ассоциативликнинг ўринлилиги арифметика қонунларидан келиб чиқади. Ҳосил бўлган бу группани ***бутун сонларнинг қўшишга нисбатан группаси*** дейилади.

15. Одатдаги кўпайтириш амали " · " га нисбатан қуйидаги тўпламлар группани ташкил қиладими?

1) **R** - барча ҳақиқий сонлар тўплами.

2) $\mathbf{R}^0$ - нолдан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўплами.

<u>Ечиш.</u>

1) **R** -барча ҳақиқий сонлар тўплами.

а) ассоциативлик ўринли, яьни $\forall\, a,в,c \in \mathbf{R}$ учун

$a\cdot(в\cdot c) = (a\cdot в)\cdot c$

б) $\forall\, a \in \mathbf{R}$ учун мавжуд $1\in \mathbf{R} \Rightarrow a\cdot 1 = 1\cdot a = a$, $e = 1$-нейтрал элемент.

в) $\forall\, a \in \mathbf{R}^0$ учун $1/a \in \mathbf{R}^0 \Rightarrow a\cdot 1/a = 1/a\cdot a = 1 = e$, $a^{-1} = 1/a$, лекин $a = 0$ бўлган ҳолда $1/a$ қарама - қарши элемент бўла олмайди. Демак, $\langle \mathbf{R},\cdot\rangle$ группа ташкил этмайди.

2) $\mathbf{R}^0 = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

а).ассоциативлик ўринли.

б). $\forall\, a \in \mathrm{R}$ учун $\exists\ 1\in \mathbf{R}^0$ $e=1$ бирлик элемент.

в). $\forall\, a \in \mathbf{R}^0$ учун $\exists\ 1/a = a^{-1}\in \mathbf{R}^0 \Rightarrow a\cdot 1/a = 1/a\cdot a = 1 = e$, $a^{-1} = 1/a$ - қарама -қарши элемент.

Демак, $\langle \mathbf{R}^0,\cdot\rangle$ - группа ташкил қилади.

16. Барча мусбат ҳақиқий сонлар тўплами оддий кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қиладими ?

<u>Ечиш.</u> $<\mathrm{R}^+,\cdot>$

а) Ассоциативлик ўринли, $\forall a,b,c \in \mathrm{R}^+$ учун $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

б). $\forall\, a \in \mathrm{R}^+$ учун $\exists 1 \in \mathrm{R}^+ \Rightarrow a\cdot 1 = 1\cdot a = a$, $e = 1$ - бирлик элемент.

в). $\forall a \in R^+$ учун $1/a \in R^+ \Rightarrow a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = 1$. $a^{-1} = 1/a$ -қарама-қарш элемент.

Демак,$< R^{+,} \cdot >$ - группа.

17. а) <N,+>, б) <N, $\cdot$> группа ташкил қиладими?

Ечиш.

а) ассоциативлик ўринли.

б) $\forall\ a \in N$ учун шундай 0 сони $\exists$ бўлиши керакки, $0 \in N$ ва $a+0=0+a=$ тенглик ўринли бўлиши керак, лекин бундай бўлмайди, чунки $0 \notin N$.

Демак, <N,+>- группа бўлмайди.

б) <N, $\cdot$> учун 1) ассоциативлик ўринли.

2) $\forall a \in N$ учун $\exists\ 1 \in N \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, демак нейтрал элемент мавжу

3) $\forall a \in N$ учун, агар у 1 га тенг бўлмаса, унга N да тескари элемент йў чунки $1/a \notin N$. Демак <N, $\cdot$>- группа бўлмайди.

18. Иҳтиёрий группада бирлик элемент ягона бўлишини исботланг.

Исботи.

Фараз қилайлик, ягона эмас, **яъни** e ва e' лар группанин бирлик элементлари бўлсин.

У ҳолда $e' = e \cdot e' = e$ ***Исбот бўлди.***

19. Иҳтиёрий группада тескари элемент a^{-1} ягона бўлишини исботланг

Исботи.

Фараз қилайлик, a элемент учун a_1 ва a_2 лар тескар элементлар бўлсин. У ҳолда $a_1 \cdot a = e$ ва $a \cdot a_2 = e$ бўлади ва

$(a_1 \cdot a) \cdot a_2 = e \cdot a_2 = a_2$ ва $\qquad a_1 \cdot (a \cdot a_2) = a_1 \cdot e = a_1$

Лекин, ассоциативлик қонунига кўра, $(a_1 \cdot a) \cdot a_2 = a_1 \cdot (a \cdot a_2)$, бундан $a_1 = a_2$. ***Исбот бўлди.***

20. Қуйидагиларни исботланг:

1). $e^{-1} = e$, $\qquad$ 2). $(a^{-1})^{-1} = a$.

Исботи.

1). $e^{-1} = e \cdot e^{-1} = e^{-1} \cdot e = e$.

2). $(a^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = e$,

Шу каби $\quad (a^{-1}) \cdot (a^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$.

Исбот бўлди

Агар a ва $в$ лар қандайдир группанинг элементлари бўлса, у ҳолда таърифга кўра бинар амалнинг $a \bullet в$ ифодаси группанинг аниқ бир элементини беради.

Шунинг учун $(a\bullet в)\bullet c$, $a\bullet(в\bullet c)$, $(a\bullet в)\bullet(c\bullet d)$ кўринишдаги ифодалар ҳам группанинг қандайдир аник элементларини билдиради. Хосил бўлган элементлардан ихтиёрий иккитасини яна кўпайтириш мумкин. Натижада яна группанинг элементи хосил бўлади ва хоказо. Бунда хар бир кадамда кайси амал кейин бажарилишини бир қийматли аниқлаш учун ҳар бир кўпайтирилаётган ифодаларни қавсларга оламиз (битта ҳарфдан иборат бўлган ифодани қавсга олмаслик мумкин). Бундай усул билан тузиш мумкин бўлган барча ифодаларни ***тўғри тузилган кўпайтмалар*** дейилади.

Масалан, $(a\bullet в)\bullet(c\bullet(c\bullet d))$-**тўғри** тузилган кўпайтма. $(a\bullet в)\bullet c\bullet(c\bullet d)$- эса **тўғри** тузилган кўпайтма эмас, чунки кўпайтириш амали қандай тартибда бажарилиши кераклиги аниқ эмас. $a_1,a_2,...a_n$ - бир нечта ҳақиқий сонларнинг кўпайтмаси $a_1a_2...\ a_n$ да умуман қавслардан фойдаланмаймиз.Чунки ҳақиқий сонларнинг ҳоссасига кўра, кўпайтманинг қиймати амалнинг бажарилиш тартибига боқлиқ эмас, яъни қавсларнинг ихтиёрий тартибида жойлашувида ҳам натижа бир хил бўлади. Бу хосса ихтиёрий группада ўринли бўлади. Бу қуйидаги мисолнинг натижасидан келиб чиқади.

21. $a\cdot b$ бинар амал ассоциативлик қонунига бўйсунсин, яъни $\forall a,b,c$ элементлар учун $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ тенглик ўринли бўлсин. $a_1,a_2,..\ a_n$ элементлардан чапдан ўнгга томон тузилган ихтиёрий ***тўғри тузилган кўпайтма*** $(...((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)...\ a_{n-1})\cdot a_n$ нинг натижавий элементи бу элементлар учун ихтиёрий тартибда қавслар қўйиб ҳосил қилинган барча **тўғри** тузилган кўпайтмаларнинг қиймати билан тенг бўлишини исботланг.

<u>Исботи.</u>

Математик индукция принципидан фойдаланиб исботлаймиз.

$n = 3$ бўлган ҳолда масаланинг шарти ўринли бўлади, бу ҳолда фақат иккита кўпайтмани тузиш мумкин: $(a_1\cdot a_2)\cdot a_3$ ва $a_1\cdot(a_2\cdot a_3)$ ва группанинг шартига кўра, $a_1\cdot(a_2\cdot a_3) = (a_1\cdot a_2)\cdot a_3$. Масаланинг шарти $n < k$ бўладиган хамма n ларда ўринли бўлсин. У ҳолда $n = k$ да ҳам ўринли бўлишини исботлаймиз.

k та кўпайтувчилардан тузилган ихтиёрий А - **тўғри тузилган** кўпайтма берилган бўлсин. Унда охири бажариладиган кўпайтириш амали мавжуд бўлади ва А кўпайтма $A = (A_1)\cdot(A_2)$ кўринишга эга, бўлади, бу ерда A_1 ва A_2 лар мос равишда s ва k-s кўпайтувчилардан ($s< k$, k-$s<k$) иборат бўлгани учун индукция қонунига кўра, А кўпайтма иккита: $A_1 = (...((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)...\ a_{s-1})\cdot a_s$ ва $A_2=(...((a_{s+1}\cdot a_{s+2})\cdot a_{s+3})...a_{k-1})\cdot a_k$ кўпайтувчиларнинг кўпайтмасига тенг бўлади.

$A_1 = a$, $(..((a_{s+1}\cdot a_{s+2})\cdot a_{s+3})...\cdot a_{k-1} = в$ белгилашларни киритсак, А кўпайтма учун қуйидагини ҳосил қиламиз: $a\cdot(в\cdot a_k)$.

Лекин ассоциативлик қонунига кўра, $a\cdot(в\cdot a_k)=(a\cdot в)\cdot$ кўпайтмага тенг ва бизда $(a\cdot в)$ кўпайтма $к\text{-}1<к$ кўпайтувчидан ибор бўлгани учун индукция қонунига кўра у қуйидаги тўғри тузилг кўпайтма $(...((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)...\ a_{s-1})\cdot a_s)\cdot a_{s+1})\cdot a_{s+2})\cdot a_{s+3})...\ a_{k-1}$ га те бўлади.

Бундан, А кўпайтма
$a\cdot(в\cdot a_k)=(a\cdot в)\cdot a_k=(...((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)...a_{s-1})\cdot a_s)\cdot a_{s+1})\cdot a_{s+2})\cdot a_{s+3})...\cdot a_{k-1})\cdot a_k$
га тенг экани келиб чиқади. ***Исбот бўлди.***

Демак, агар $a_1, a_2,...a_n$ - группанинг элементлари бўлса, у хол бу элементлар учун иҳтиёрий тартибда қавслар қўйиб ҳосил қилинга барча тўғри тузилган кўпайтмалар битта қийматга эга бўлади, у ***умумлашган ассоциативлик конуни ўринли*** дейилади ва $a_1a_2...a_n$ каб белгиланади.

Хақиқий сонларни кўпайтиришда яна бир мухим хосс бажарилади: $a_1a_2...a_n$ кўпайтманинг қиймати кўпайтувчиларнин ўринларини иҳтиёрий тартибда алмаштирилганда ҳам ўзгармайди. Б хосса юқоридаги умумлашган ассоциативлик қонунидан фарқли ҳамм группаларда ҳам бажарилмаслиги мумкин.

Таъриф. Агар группанинг иккита элементлари учун $a\bullet в=в\bullet a$ тенглик ўринли бўлса, бу элементлар ***ўрин алмашинувчи*** ёк ***коммутатив*** элементлар дейилади. Агар группанинг барч элементлари ўзаро коммутатив бўлса, бундай группа ***коммутатив*** ёки ***абель группаси*** дейилади.

Коммутатив бўлмаган группалар хам мавжуд. Бундай группаларга учбурчак симметриясининг группаси мисол бўлади. (2 - мисолда $ac=f$, $ca=d$ ва $ac\neq ca$).

22. Қуйидаги группалар коммутативми:

1) учбурчакни айлантиришлар группаси.
2) квадратни айлантиришлар группаси.
3) квадрат симметриясининг группаси.
4) ромб симметриясининг группаси.
5) тўғри тўртбурчак симметриясининг группаси?

<u>Ечиш.</u>

1). Учбурчакни айлантиришлар группаси коммутатив группадир.

Чунки, $a\bullet в=в\bullet a=e$, $a\bullet e=e\bullet a=a$, $в\bullet e=e\bullet в=в$.

2) квадратни айлантиришлар группаси комутативдир.

3) квадрат симметриясининг группаси коммутатив эмас.

Чунки $f\cdot d=в$, $d\cdot f=c$ $f\cdot d=d\cdot f$.

4) ромб симметриясининг группаси коммутатив.

5) тўғри тўртбурчак симметриясининг группаси коммутатив.

23. Иҳтиёрий группада:

1) $(a_1a_2)^{-1} = a_2^{-1}\, a_1^{-1}$ 2) $(a_1a_2,...a_n)^{-1} = a^{-1}{}_n ... a_1^{-1}$,

эканини исботланг.

Исботи.

1) ҳақиқатдан $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ бўлса,

$(ab)(ab)^{-1} = abb^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = ala^{-1} = aa^{-1} = e,$

шу каби $(ab)^{-1}\,(ab) = b^{-1}a^{-1}\,ab = b^{-1}eb = e$

Бундан тескари элементни ягоналигидан керакли натижага эга бўламиз.

2) n-бўйича индукция қонунидан фойдаланамиз.

Агар n-1 учун исботланган бўлса (1-пунктда), у ҳолда

$(a_1,....a_n)^{-1} = a_n^{-1}(a_1...a_{\,n-1})^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}....a_1^{-1}$ ***Исбот бўлди.***

Агар иҳтиёрий G группада $a = в$ бўлса (тенгликнинг чап ва ўнг томонларида бир хил элементлар бўлса), у ҳолда бу тенгликнинг ҳар икки томонидаги элементларни қандайдир $c \in$G элементга кўпайтириб, янги тенгликни ҳосил қилиш мумкин.

Группада кўпайтманинг киймати кўпайтувчилар ўринларининг тартибига боғлиқ бўлганлиги учун тенгликни ҳар икки томонини қандайдир c элементга чапдан ёки ўнгдан кўпайтирилади. $ca=cв$ ёки $ac=вc$.

24. $a,в$- қандайдир группанинг иҳтиёрий элементлари бўлсин. $ax=b$ ва $ya=b$ тенгламаларнинг ҳар бири берилган группада ягона ечимга эга бўлишини исботланг.

Исботи.

$ax=b \Rightarrow a^{-1}(ax)=a^{-1}b \Rightarrow (a^{-1}a)x=a^{-1}b \Rightarrow ex=a^{-1}b \Rightarrow x=a^{-1}b.$

$ya=b \Rightarrow (ya)(a^{-1})=ba^{-1} \Rightarrow y(aa^{-1})=ba^{-1}$

$ye=b\,a^{-1} \Rightarrow y=ba^{-1}.$

Бу элементлар ҳақиқатан ҳам берилган тенгламаларнинг ечими бўлади.

Чунки: $a(a^{-1}b)=b \Rightarrow (aa^{-1})b=b \Rightarrow b=b.$

$y(ba^{-1})a=b \Rightarrow b(a^{-1}a)=b \Rightarrow b=b.$

Исбот бўлди.

24-масаладаги ягоналик шарти яна қуйидагича ҳам ифодаланиши мумкин: агар $ab_1 = ab_2$ ёки $b_1a=b_2a$ бўлса, у ҳолда $b_1=b_2$ бўлади.

25. G группанинг иҳтиёрий a элементи учун $aa=e$ бўлса, G-коммутатив группа эканини исботланг.

Исботи.

Шартга кўра, иҳтиёрий a элемент учун $aa=e$. У ҳолда иҳтиёрий b ва c элементлар учун $(b\,c)(b\,c)=e$ бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини чапдан b га ва ўнгдан c га кўпайтириб,

$b(bc)(bc)c=bec$ га эга бўламиз. $bb=e$, $cc=e$ бўлган и учун $(ec)(be)=(be$
бўлади. Бундан $cb=bc$. b ва c - G группанинг ихтиёрий элементлар
бўлганлиги учун бу тенгликдан G группанинг коммутативлиги кели
чиқади. ***Исбот бўлди.***

$a\in G$ ва $\forall m \in \mathbf{N}$ учун a^m элемент $a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$ - кўпайтувчилари a г
тенг бўлган m та кўпайтмани билдиради.

26. Группанинг ихтиёрий a элементи учун барча m - натура
сонларда $(a^m)^{-1}=(a^{-1})^m$ эканини исботланг.

Исботи.

$a^m(a^{-1})^m=(a^{-1})^m a^m=e$ эканини исботлаш керак.

Бунинг учун

$a^m(a^{-1})^m=a^{m-1}a\, a^{-1}(a^{-1})^{m-1}=a^{m-1}e(a^{-1})^{m-1}=a^{m-1}(a^{-1})^{m-1}=\ldots=a\,a^{-1}=e.$

$(a^{-1})^m a^m=e$ ҳам худди шундай исботланади.

Юқоридагиларга асосан, $m\in N$ учун $(a^m)^{-1}$ ва $(a^{-1})^m$ элементла
битта элементни ифодалайди ва уни a^{-m} каби белгиланади. Бунда
ташқари, ихтиёрий a элемент учун $a^0=e$ деб белгиланади.

Исбот бўлди

27. Ихтиёрий m ва n - бутун сонлар учун $a^m a^n=a^{m+n}$ эканин
исботланг.

Исботи.

Бир неча ҳолни кўриб чиқамиз:

1-ҳол. $m>0$, $n>0$ бўлсин.

У ҳолда $a^m a^n=a\ldots a\, a\ldots a=a\, a\ldots a=a^{m+n}$

2-ҳол. $m<0$, $n<0$, $m=-k$ $(k>0)$, $n=-l$ $(l>0)$ бўлсин.

У ҳолда $a^m a^n=a^{-k}a^{-l}=(a^{-1})^k(a^{-1})^l=$ (1-ҳолга кўра)

$(a^{-1})^{k+l}=a^{-(k+l)}=a^{-k-l}=a^{-k+(-l)}=a^{m+n}$

3-ҳол. $m>0$, $n<0$, $m+n\geq 0$ бўлсин.

У ҳолда $a^m a^n=$ (1-ҳолга кўра)

$(a^{m+n}a^{-n})a^{-(-n)}=a^{m+n}a^{-n}(a^{-n})^{-1}=a^{m+n}$

4-ҳол. $m>0$, $n<0$, $m+n<0$ бўлсин.

У ҳолда $a^m a^n=$ (2-ҳолга кўра)

$a^m(a^{-m}a^{m+n})=a^m(a^m)^{-1}a^{m+n}=a^{m+n}.$

5-ҳол. $m<0$, $n>0$ бўлсин.

Бу ҳол 3- ва 4- ҳоллардаги каби текширилади.

6-хол. $m=0$, $n=0$ бўлсин.

Бу ҳол ҳам осон ҳал этилади.

28. Ихтиёрий m ва n - бутун сонлар учун $(a^m)^n=a^{mn}$ бўлишини
исботланг.

Исботи.

Бир неча ҳолни кўриб ўтамиз:

1-хол. $n>0$. Бу ҳолда $(a^m)^n=a^m a^m\ldots a^m=$ (27-га кўра) $a^{m+m+\ldots+m}=a^{mn}$

2-ҳол. $n<0$, $m>0$, $n = -l$ $(l>0)$.

У ҳолда $(a^m)^n = ((a^m)^{-l}) = ((a^m)^l)^{-1}$ = (1- ҳолга кўра)

$$(a^{ml})^{-1} = (ml>0) = a^{-ml} = a^{m(-l)} = a^{mn}$$

3-ҳол. $m<0$, $n<0$ $m = -k$ $(k>0)$ $n = -l$ $(l>0)$

У ҳолда $(a^m)^n = (a^{-kn})^{-l}$=(2-ҳолга кўра)$(a^{-kl})^{-1} = a^{-(-kl)} = a^{-k(-l)} = a^{mn}$

4-хол. $m = 0$, $n = 0$ бўлган ҳол осон хал этилади.

Таянч иборалар:

Тартибланган жуфтлик, бинар амал, нейтрал (бирлик) элемент, тескари (қарама-қарши) элемент, бинар амалнинг ҳоссалари, группа тушунчаси, коммутатив (абель) группа.

Назорат учун саволлар.

1.1. Тартибланган жуфтлик нима?
1.2. Тўпламда аниқланган бинар амал деб нимага айтилади?
1.3. Қандай элементни нейтрал (бирлик) элемент дейилади?
1.4. Қандай элементни тескари (қарама-қарши) элемент дейилади?
1.5. Бинар амалнинг қандай хоссаларини биласиз?
1.6. Группа нима?
1.7. Қандай группани абель группаси дейилади?

Мустақил ишлаш учун масалалар.

1.1. Барча n-тартибли детерминанти нолдан фарқли бўлган квадратик матрицалар тўплами матрицаларни кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилишини исботланг.(n=2, n=3 бўлган холда алохида)

1.2. **Z** қуйидаги формула билан берилган амалга нисбатан группа ташкил қилишини исботланг.

$$a*b = \begin{cases} a+b & \text{, агар } a \text{ жуфт бўлиб,} b \text{ ихтиёрий бутун сон бўлса} \\ a-b & \text{, агар } a \text{ ток бўлиб, } b \text{ ихтиёрий бутун сон бўлса} \end{cases}$$

бу группа абел группаси бўладими ?

1.3. G $-f(x) = x+a$, $a \in \mathbf{R}$ формула билан берилган барча алмаштиришлар тўплами бўлсин. G тўплам алмаштиришларнинг кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилишини исботланг. Бу группанинг нейтрал элементини ва ҳар бир элемент учун тескари элементини топинг.

3.4. **G** - барча тузиш мумкин бўлган $(k_1,k_2,1)$ ва $(\kappa_1, \kappa_2, -1)$ кўринишдаги сонлар учлигининг тўплами ва **G** да қуйидаги қоида била бажариладиган амал аниқланган бўлсин:

$(k_1,k_2,\varepsilon)\cdot(l_1,l_2,+\delta) = (k_1+l_1,k_2+l_2,\varepsilon\delta)$. **G** тўплам аниқланган амалга нисбатан группа ташкил қилишини исботланг.

3.5. Мультипликатив **G** группанинг ихтиёрий a элементи учун $a\cdot a\cdot a=$ бўлса, **G** - группа абел группаси бўладими ?

3.6. **R** устида берилган $f(x) = ax$, $a\in\mathbf{R}, a\neq 0$ кўринишдаги алмаштиришлар тўплами **G** - алмаштиришларнинг кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилишини исботланг. $f_1(x)=2x$, $f_2(x)= -2x$, $f_3(x)=1/3$ алмаштиришлар учун тескари элементларни топинг.

3.7. Қуйидаги **R** устидаги берилган бир ўзгарувчили функциялар тўплами алмаштиришларни кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қиладими ?.

а) кўпҳадлар тўплами.

б) 1- даражали кўпҳадлар тўплами

в) жуфт даражали кўпҳадлар тўплами

г) тоқ даражали кўпҳадлар тўплами

д) x^n кўринишидаги функциялар тўплами, n-$\forall$ натурал сон.

3.8. Қуйидаги **R** устида берилган ҳақиқий функциялар тўплами алмаштиришларни кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қиладими.

а) $x=1$ да ноль қиймат қабул қилувчи функциялар тўплами.

б) жуфт сонлар тўплами

в) тоқ функциялар тўплами

г) чегараланган функциялар тўплами.

№ 4 – Мавзу.
Циклик группалар.

Р е ж а.

1. Элементнинг тартиби тушунчаси.
2. Циклик группа ва унинг ташкил этувчиси.
3. Циклик группанинг тартиби ва қисм группалари.

Группанинг содда ва айни вақтда муҳим турларидан бири бу - **циклик группадир**.

Таъриф. $a \in \mathbf{G}$, яъни a - **G** группанинг элементи бўлсин. Агар $a^n = e$ тенгликни қаноатлантирувчи энг кичик натурал n сони мавжуд бўлса, у ҳолда n сони ***а элементнинг тартиби*** дейилади. Агар шундай n сони мавжуд бўлмаса, у ҳолда ***а - чексиз тартибли элемент*** дейилади.

29. Мунтазам учбурчак, квадрат ва ромб симметриялари группасидаги барча элементларнинг тартибини топинг (3,5,6-масалалар).

Ечиш.

1. Мунтазам учбурчак симметриялари группасида:

$$a^3 = e,\ в^3 = e,\ c^2 = e,\ d^2 = e,\ f^2 = e.$$

Демак, a, $в$ элементлар 3-тартибли, c, d, f элементлар 2-тартибли.

2. Квадрат симметрияларининг группасида:

$$a^2 = e,\ в^4 = e,\ c^4 = e,\ d^2 = e,\ f^2 = e,\ g^2 = e,\ h^2 = e.$$

Демак, $в,c$ элементлар 4-тартибли, $a,d,f,g.,h$ элементлар 2-тартибли.

3. Ромб симметрияларининг группасида:

$$a^2 = e,\ в^2 = e,\ c^2 = e.$$

Демак, $a,в,c$ элементларнинг тартиби **2** га тенг.

30. Агар a элементнинг тартиби n га тенг бўлса, қуйидагиларни исботланг:

1) $e, a, a^2,...,a^{n-1}$ элементларнинг ҳаммаси ҳар хил.

2) Иҳтиёрий m бутун сон учун a^m элемент $e,a,a^2... a^{n-1}$ элементлардан қайси бири билан дир устма - уст тушади.

Исботи:

1).Фараз қилайлик $k>l$ учун $a^k = a^l$ бўлсин,бу ерда $0 \le k \le n-1$, $0 \le l \le n-1$. Тенгликнинг ҳар икки томонини ўнгдан a^{-l} га кўпайтирамиз: $a^k a^{-l} = a^l a^{-l}$ ва 27-мисолга кўра $a^{k-l} = e$. $0 < k-l \le n-1$ бўлгани учун биз қарама-қаршиликка дуч келамиз, чунки a элементнинг тартиби n га тенг эди.

2. Иҳтиёрий m бутун сонни $m=nt+r$ кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $0 \le r \le n-1$ ва t қандайдир бутун сон.

Шунинг учун $a^m = a^{nt+r}$ = (27- мисолга кўра) $a^{nt} a^r$ = (28- мисолга кўра) $(a^n)^t a^r$ = ($a^n = e$ бўлгани учун) $e^t a^r = a^r$, бу ерда $0 \le r \le n-1$.

Исбот бўлди

Таъриф. Агар $a \in G$ элементнинг тартиби ***n*** га тенг бўлса ва G группада $e, a, a^2, \ldots a^{n-1}$ элементлардан бошқа ***a*** элемент бўлмаса, у ҳолда G группа ***n-тартибли циклик группа*** дейилади, ***a*** элемент эса бу группанинг ***ташкил этувчиси*** дейилади.

Мисол 8. Текисликда мунтазам n-бурчак берилган бўлсин. Мунтазам n бурчакни ўзини ўзига ўтказувчи текисликнинг ҳамма айлантиришларини қараймиз.

31. Текисликда мунтазам *n-* бурчак берилган бўлсин. Бу мунтазам *n-* бурчакни ўзини ўзига ўтказувчи айлантиришлар группаси n-тартибли циклик группа бўлишини исботланг.

Исботи.

Текисликдаги мунтазам n-бурчакнинг марказий бурчаги $2\pi/_n$ га тенг. Шунинг учун мунтазам n-бурчакни унинг маркази атрофида $2\pi/_n$ бурчакка бир марта айлантирсак, у биринчи марта ўзи ўзига ўтади, икки марта айлантирсак,иккинчи марта ва ҳокозо, n марта айлансак(бир йўналишда), n марта ўзи-ўзига ўтади. Бу n-марта айлантиришдан сўнг мунтазам n-бурчак биринчи марта дастлабки ҳолатига қайтади, яъни барча учлар ўзгаришсиз ўз ҳолатида қолади.

Демак, текисликда берилган мунтазам n-бурчакни ўзини ўзига ўтказувчи айлантиришлар группаси n-тартибли циклик группа бўлиб, унинг ташкил этувчиси $2\pi/_n$ бурчакка буриш (айлантириш) экан.

Исбот бўлди.

32. Мунтазам учбурчак ва квадратнинг (марказий нуқталари атрофида) айлантиришлар группаларидаги барча ташкил этувчи элементларни топинг (1 ва 3.мисоллар.)

Ечиш.

1) учбурчакни айлантиришлар группасида:
а-120^0 га буриш, ***в***-240^0 га буриш – жамида 2 та ташкил этувчи бор.
2) квадратни айлантиришлар группасида:
в- 90^0 га айлантириш, ***с***-270^0 га айлантириш.

33. a элементнинг тартиби n га тенг бўлсин. $a^m = e$ бўлиши учун $m = nd$, d – ихтиёрий бутун сон, бўлиши зарур ва старли эканини исботланг.

Исботи. $m = nd + r$, $0 \le r \le n-1$ бўлсин. У ҳолда (30 - 2)га кўра) $a^m = a^r$. Лекин, $0 \le r \le n-1$ бўлгани учун $a^r = e$ бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, қачонки, $r=0$ бўлса. (30-1) га кўра). Бундан $a^m = e$ бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, қачонки, $m = nd$ бўлса. ***Исбот бўлди.***

34. a нинг тартиби p- туб бўлса, ихтиёрий бутун m сон учун $a^m = e$ ёки a^m элементнинг тартиби ҳам p тенг бўлишини исботланг.

Исботи.

$a^p = e$ эканидан $(a^m)^p = a^{mp} = (a^p)^m = e^m = e \Rightarrow (a^m)^p = e$.

Шунинг учун 33-мисолга кўра a^m элементнинг тартиби p соннинг бўлувчиси бўлиши керак. p-туб сон бўлгани учун $a^m = e$ ёки a^m элементнинг тартиби p га тенглиги келиб чиқади. ***Исбот бўлди***

35. m ва n - натурал сонларнинг ЭКУБ (энг катта умумий бўлувчиси)и d га ва a элементнинг тартиби n га тенг бўлса, a^m элементнинг тартиби $n/_d$ бўлишини исботланг.

Исботи.

ЭКУБ$(m,n)=d$ бўлгани учун $n/_d$ ва $m/_d$ лар ўзаро туб бутун сонлар. Шунинг учун $(a^m)^{n/d} = a^{mn/d} = a^{(m/d)n} = (a^n)^{m/d} = e^{m/d} = e$.

Агар k- шундай натурал сон бўлсаки, $(a^m)^k = a^{mk} = e$ бўлса, у ҳолда (33-га кўра) mk n га бўлиниши керак, бундан $(m/d)k$ сони $n/_d$ га бўлиниши келиб чиқади, лекин $m/_d$ сони $n/_d$ сонига бўлинмагани (чунки улар ўзаро туб)учун, k сонини $n/_d$ сонига бўлинишлиги келиб чиқади.

Бундан эса $(a^m)^k = e$ бўладиган **энг кичик натурал сон** k нинг n/d га тенглиги келиб чиқади. ***Исбот бўлди***

36. Мунтазам 12- бурчакнинг айлантиришлари группасидаги ҳамма ташкил этувчиларни топинг.

Ечиш.

a - соат стрелкаси йўналишига қарама - қарши йўналишда $2\pi/_{12}$ бурчакка буриш бўлсин. У ҳолда қаралаётган группанинг ҳамма элементлари бу - $e, a, a^2, ..., a^{n}$ бўлади. Бирор a^m элемент ташкил этувчи бўлиши учун унинг тартиби 12 га тенг бўлиши керак ҳамда m ва 12 ўзаро туб бўлиши керак (35-га кўра). Шунинг учун $m=1,5,7,12$ бўлгандагина a^m элемент ташкил этувчи элемент бўлади.

37. a- чексиз тартибли элемент бўлсин....a^{-2}, a^{-1}, $a^0 = e$, a, a^2.... элементларнинг ҳаммаси ҳар хил эканини исботланг.

Исботи.

Фараз қилайлик $a^k = a^l$ ва $k>l$ бўлсин.

Бундан $a^k a^{-l} = a^l a^{-l} \Rightarrow a^{k-l} = e$, яъни қарама-қаршиликка дуч келдик. Чунки a элемент чексиз тартибли элемент эди.

Исбот бўлди.

Таъриф. a – чексиз тартибли элемент бўлсин. G группада ... a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2,... элементлардан бошқа элемент бўлмаса, у ҳолда G ***чексиз циклик группа*** дейилади ва a элемент унинг ташкил этувчиси дейилади.

38. Бутун сонлар группаси қўшиш амалига нисбатан чекси тартибли циклик группа бўлишини исботланг ҳамда унинг барч ташкил этувчиларини топинг.

Исботи.

Группа қўшиш амалига нисбатан қаралаётгани учун a^m элемен $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{m}=ma$, a^{-1} эса $-a$ кўринишга эга бўлади.

Бу группанинг нейтрал элементи 0 сони бўлгани учун 0 да бошқа ҳар қандай a учун ҳеч қачон $ma=0$ тенгликни қаноатлантирувч m натурал сон мавжуд эмас. Ундан ташқари **Z** нинг барча сонлари дан ва -1 ёки 1 нинг каррали сонларидан ташкил топганини инобатг олсак, яъни ... $(-1)^{-2}=2$, $(-1)^{-1}=1$, $e=0$, $(-1)^{1}=-1$, $(-1)^{2}=-2$,.... ек ... $1^{-2}=-2$, $1^{-1}=-1$, $e=0$, $1^{1}=1$, $1^{2}=2$,... эканидан таърифга кўра буту сонларнинг аддитив группаси **Z** чексиз тартибли циклик группа бўлиб унинг ташкил этувчилари -1 ва 1 дан иборат бўлади. ***Исбот бўлди***

Мисол-9. n натурал сон бўлсин. Барча бутун сонларни n г бўлгандаги қолиши мумкин бўлган барча қолдиқларни қараймиз, яъни $0,1,2,\ldots, n-1$. Бу ***қолдиқлар тўплами***да қуйидаги бинар амални киритамиз: берилган қолдиқларни одатдагидек бир-бирига қўшамиз йиғиндини эса n га бўлиб, қолган қолдиқни натижа сифатида оламиз Бу амални ***n модул бўйича қўшиш*** дейилади. Масалан, 4 модул бўйич $1+2=3$, $3+3=2$ бўлади.

39. а) 2, б) 3 ва в) 4 модулга кўра қўшиш жадвалини тузинг

Ечиш.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

40. n модул бўйича қолдиқлар қўшиш амалига нисбата группа ташкил қилишини, бу группа n -тартибли циклик групп бўлишини исботланг.

Исботи.

Группанинг барча хоссалари ўринли бўлишини исботлаймиз:

1). $\forall$ a,b,c - қолдиқлар учун n модул бўйича (а+в)+с = а+(в+с) бўлади Чунки чап ва ўнг томонда n модул бўйича а+в+с йиғинди ҳоси бўлади.

2). Найтрал элемент e=о. $\forall$ m - қолдиқ учун m + о = о + m = m.

3). Агар $m \neq 0$ бўлса, у холда m га қарама - қарши элемент n-m бўлади. Чунки n модул бўйича $m+(n-m) = (n-m)+m = 0$. 0 элементга қарама-қарши элемент ўзи бўлади.

Барча 0,1,2,..., n-1 қолдиқлар 1 қолдиққа каррали эканини ва $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k\text{ та}}=0$ бўладиган n модул бўйича энг кичик k сони n га тенглигини инобатга олсак, **бу группа - ташкил этувчиси 1 га тенг бўлган циклик группадир.** Уни одатда $\mathbf{Z}_n$ каби белгиланади.

Исбот бўлди.

41. Ихтиёрий n - тартибли e, a, a^2,..., a^{n-1}- циклик группада $a^m \bullet a^r = a^k$, бу ерда $0 \le m < n$, $0 \le r < n$ ва $0 \le k < n$ бўлиши зарур ва старли эканини исботланг.

Исботи.

$a^m \bullet a^r = a^k$ бўлса, у холда $a^m \bullet a^r \bullet a^{-k} = a^k \bullet a^{-k} \Rightarrow a^{(m+r)-k} = e$. Бундан, 33 га кўра $(m+r)$ -k n га бўлиниши, яьни $m+r$ ва k ларни n га бўлганда бир хил қолдиқ хосил бўлиши келиб чиқади. *Исбот бўлди*

41-масаладан кўринадики, ихтиёрий n- тартибли циклик группада элементларни кўпайтириш(бу элементлар ташкил этувчининг даражалари кўринишида) қайсидир маънода қолдиқларни n модул бўйича қўшишга мос келади. Худди шу каби чексиз циклик группадаги кўпайтириш бутун сонларни қўшишга мос келади. (27-га қаранг!). Бу ерда биз группалар назариясининг муҳим бир тушунчасига - изоморфизм тушунчасига дуч келдик.

Таянч иборалар:

Элеметнинг тартиби, циклик группа ва унинг ташкил этувчиси, циклик группанинг тартиби, n- тартибли циклик группа, чексиз циклик группа, n - модул бўйича қолдиқлар группаси.

Назорат учун саволлар.

4.1. Элементнинг тартиби деб нимага айтилади?
4.2. Қандай группани циклик группа дейилади ва унинг ташкил этувчиси деганда нимани тушунасиз?
4.3. Циклик группанинг тартиби нима?
4.4. Чекли ва чексиз тартибли циклик группалар ҳақида нима биласиз?
4.5. n- модул бўйича қолдиқлар группаси нима? Унинг тартиби нимага тенг?

Мустакил ишлаш учун мисоллар.

4.1. Группа элементининг тартибини топинг.

а) (2 3 1 5 4) $\in S_5$; б) (2 3 4 5 1 6) $\in S_6$;

в) $-\sqrt{3}/_2 + 1/_2\, i \in C_*$; г) $1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\; i \in C$;

д) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in GL_4(R)$; е) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL_2(C)$;

det = 1 бўлган матрицалар группаси.

ж) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(C)$.

4.2. Исботланг: < G, *> группанинг ихтиёрий чекли қисм группас циклик группа бўлади.

4.3. Агар x элементнинг тартиби n га тенг бўлса, x^k элементнин тартибини топинг.

4.4. Группа a элементининг тартиби m га тенг бўлса, у холда $a^s = a$ бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, качонки $(s\text{-}z)= m$ бўлса. Исботланг

4.5. Группа a элементининг тартиби m га тенг бўлса, у ҳолда a элементнинг тартиби $m/(m,k)$ га тенг бўлишини исботланг, бунд (m,k)=ЭКУБ(m,k).

4.6. Кандайдир m- тартибли G- циклик группада a элемент ташки этувчи бўлса, $к$ нинг қандай қийматида a^k элемент ҳам G нинг ташки этувчиси бўлади.

4.7. Квадратни айлантиришлар группаси циклик группа бўладими?

4.8. G-группа n та элементдан, H-группа κ та элементдан ибора бўлсин. GxH группанинг тартиби қандай бўлади?

4.9. a элементнинг тартиби p – туб сон бўлсин ва m – ихтиёрий буту сон бўлсин. a^m элемент ёки бирлик элемент бўлишини ёки тартиби p г тенг бўлишини исботланг.

4.10. 8- тартибли (a) циклик группада:

а) хамма ташкил этувчиларни;

б) хамма элементнинг тартибини;

в) ўзаро туб тартибли $в$ ва c кўринишидаги барча элементларни топинг

Агар $в$ ва c элементлар ўзаро туб тартибли бўлса,

г) $вc$ кўпайтманинг тартиби кўпайтувчилар тартибларининг кўпайтмасига тенг бўлишини кўрсатинг.

№5-Мавзу.
Изоморфизм.

Режа:

1. Группалар изоморфизми тушунчаси.
2. Циклик группаларнинг изоморфлиги
3. Мисоллар.

Таъриф. G_1 ва G_2 - 2 та группа берилган бўлсин ва G_1 группа элементларини G_2 группа элементларига мос куювчи шундай ***ўзаро бир қийматли φ акслантириш*** аниқланган бўлсинки, G_1 даги кўпайтириш G_2 даги кўпайтиришга мос келсин, яъни агар G_1 группада $\varphi(a)=a'$, $\varphi(в)=в'$, $\varphi(c)=c'$ ва $a\,в=c$ бўлса, у ҳолда G_2 группада $a'в'=c'$ бўлсин. У ҳолда φ — G_1 ни G_2 га мос куювчи ***изоморфизм*** дейилади, изоморфизм ўрнатилган группалар эса ***ўзаро изоморф группалар*** дейилади.

Ўзаро бир қийматли акслантириш - φ нинг изоморфизм бўлиш шартини яна қуйидагича ёзиш мумкин: $\forall\ a,в \in G_1$ учун $\varphi(a*в)=\varphi(a)\bullet\varphi(в)$, бу ерда $a*в$ кўпайтма G_1 да олинади, $\varphi(a)\bullet\varphi(в)$ кўпайтма эса G_2 да олинади.

42. Қуйидаги группалардан қайсилари ўзаро изоморф:

1) квадратни айлантиришлар группаси.
2) ромб симметриясининг группаси.
3) тўғри тўртбурчак симметриясининг группаси.
4) 4 модул бўйича қолдиқларнинг қўшиш амалига нисбатан группаси?

Ечиш.

1) ва 4) группалар учун $\varphi(e)=0$, $\varphi(a)=2$, $\varphi(в)=1$, $\varphi(c)=3$ акслантиришни қарасак,

1) $\varphi(e*a)=\varphi(a)=2=0+2=\varphi(e)+\varphi(a)$.
2) $\varphi(e*в)=\varphi(в)=1=0+1=\varphi(e)+\varphi(в)$.
3) $\varphi(e*c)=\varphi(c)=3=0+3=\varphi(e)+\varphi(c)$.
4) $\varphi(a*a)=\varphi(e)=0=2+2=\varphi(a)+\varphi(a)$.
5) $\varphi(a*в)=\varphi(c)=3=2+1=\varphi(a)+\varphi(в)$.
6) $\varphi(a*c)=\varphi(в)=1=2+3=\varphi(a)+\varphi(c)$.
7) $\varphi(в*a)=\varphi(c)=3=1+2=\varphi(в)+\varphi(a)$.
8) $\varphi(в*в)=\varphi(a)=2=1+1=\varphi(в)+\varphi(в)$.

Демак, 1) ва 4) группалар ўзаро изоморф экан.

2) ва 3) группалар учун $\varphi(e)=e$, $\varphi(a)=a$, $\varphi(в)=в$, $\varphi(c)=c$ акслантиришни қарасак, бу группалар ҳам ўзаро изоморф эканлигини кўрамиз, Чунки ромб билан тўғри тўртбурчак симметриялари учун кўпайтириш жадвали бир хил.

43. $\varphi: G_1\to G_2$ - изоморфизм бўлсин. Тескари акслантириш $\varphi^{-1}: G_2\to G_1$ хам изоморфизм бўлишини исботланг.

__Исботи.__

φ - ўзаро бир қийматли акслантириш бўлгани учун φ^{-1} акслантириш мавжуд ва у ҳам ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади.

c ва d - G_2 группанинг ихтиёрий элементлари бўлсин. G_1 группада шундай a ва $в$ элементлар мавжуд (ва ягона) ки, $\varphi(a) = c$ ва $\varphi(в) = d$ бўлади. φ - изоморфизм бўлгани учун $\varphi(a \bullet в) = \varphi(a) * \varphi(в) = c * d$ бўлади (кўпайишлар мос группаларда олинади).

Бундан $\varphi^{-1}(c * d) = a \bullet в = \varphi^{-1}(c) \bullet \varphi^{-1}(d)$ келиб чиқади. Бу ерда c ва d лар G_2 группанинг ихтиёрий элементлари эди. Шунинг учун $\varphi^{-1}: G_2 \to G_1$ изоморфизм бўлади. ***Исбот бўлди***

44. $\varphi_1: G_1 \to G_2$ ва $\varphi_2: G_2 \to G_3$ изоморфизмлар бўлсин. $\varphi_2\varphi_1: G_1 \to G_3$ ҳам изоморфизм бўлишини исботланг.

__Исботи.__

$\varphi_1: G_1 \to G_2$ ва $\varphi_2: G_2 \to G_3$ -ўзаро бир қийматли акслантиришлар бўлганлиги учун $\varphi_2\varphi_1: G_1 \to G_3$ ҳам ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади.

a ва $в$ лар G_1 группанинг ихтиёрий элементлари бўлсин. У ҳолда $\varphi_2\varphi_1(a \cdot в) = \varphi_2(\varphi_1(a \cdot в)) = \varphi_2(\varphi_1(a) * \varphi_1(в)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \bullet \varphi_2(\varphi_1(в)) = \varphi_2\varphi_1(a) \bullet \varphi_2\varphi_1(в)$ бўлади. Бундан $\varphi_2\varphi_1$ - изоморфизмлиги келиб чиқади (кўпайтиришлар мос группа G_1, G_2, G_3 ларда олинади). ***Исбот бўлди***

Охирги иккита мисолдан кўринадики, иккита группа учинчи группага изоморф бўлса, улар ўзаро изоморф бўлади.

45. n - тартибли ихтиёрий циклик группа n модул бўйича қолдиқлар синфининг **қўшиш** амалига нисбатан группаси $\mathbf{Z}_n$ га изоморф бўлишини исботланг.

__Исботи.__

$\varphi(a^m) = m$ акслантиришни қараймиз, бу ерда $0 \le m \le n-1$. Бу акслантириш ўзаро бир қийматли.

a^k ва a^l – n-тартибли циклик группанинг ихтиёрий элементлари бўлсин, бу ерда $0 \le k, l \le n-1$ ва $k > l$.

$\varphi(a^k \bullet a^l) = \varphi(a^{k+l}) = k + l = \varphi(a^k) + \varphi(a^l)$ n модул бўйича.

Демак, $\varphi(a^m) = m$ – изоморфизм экан. ***Исбот бўлди***

46. Ихтиёрий чексиз тартибли циклик группа бутун сонларнинг аддитив группасига изоморф эканлигини исботланг.

__Исботи.__

$\varphi(a^m) = m$ акслантиришни қараймиз, бу ерда $m \in \mathbf{Z}$ бўлиб, бу акслантириш ўзаро бир қийматлидир.

a^k ва a^l - чексиз тартибли циклик группанинг ихтиёрий элементлари бўлсин, бу ерда $k, l \in \mathbf{Z}$.

$\varphi\ (a^k \bullet a^l) = \varphi(a^{k+l}) = k+l = \varphi\ (a^k) + \varphi\ (a^l)$. a^k ва a^l - ихтиёрий элементлар эди. Демак, φ - акслантириш изоморфизм экан.

Исбот бўлди.

47. φ: $G \to F$ – изоморфизм бўлса, $\varphi\ (e_G)=e_F$ эканини исботланг, бу ерда e_G ва e_F лар G ва F группаларнинг бирлик элементлари.

Исботи.

$\varphi\ (e_G) = x$ бўлсин. У холда $x * x = \varphi\ (e_G) * \varphi\ (e_G)=$

(φ - изоморфизм бўлгани учун) $\varphi\ (e_G \bullet e_G) = \varphi\ (e_G) = x$, яъни $x^2 = x$.

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини F группада x^{-1} га кўпайтирамиз.

$x^2 * x^{-1} = x * x^{-1} \Rightarrow x = e_F$. Демак, $\varphi\ (e_G) = e_F$ экан. ***Исбот бўлди***

48. φ: $G \to F$ - изоморфизм бўлса, G группанинг барча g элементлари учун $\varphi\ (g^{-1}) = [\ \varphi(g)]^{-1}$ эканини исботланг.

Исботи.

φ - изоморфизм бўлгани учун $\varphi\ (g) * \varphi\ (g^{-1}) = \varphi\ (g \bullet g^{-1}) = \varphi\ (e_G) =$ (47-га кўра) e_F, бундан $\varphi\ (g^{-1}) = [\ \varphi(g)]^{-1}$. ***Исбот бўлди***

49. $\varphi : G \to F$ - изоморфизим бўлсин ва $\varphi\ (g) = h$ бўлсин. g ва h- бир хил тартибли бўлишини исботланг.

Исботи.

n - натурал сон бўлсин. У ҳолда

$$\varphi(g^n)=\varphi(\underbrace{g \cdot g \cdot \ldots \cdot g}_{n}) = \underbrace{\varphi(g) * \varphi(g) * \ldots * \varphi(g)}_{n} = \underbrace{h * h * \ldots * h}_{n} = h^n$$

бўлади.

n ва m лар g ва h элементларнинг тартиби бўлсин. У ҳолда $\varphi\ (g^m) = h^m = e_F$ ва (47 - га кўра) $g^m = e_G$, бундан $n \le m$ келиб чиқади.

2- томондан: $h^n = \varphi\ (g^n) = \varphi\ (e_G) = e_F$, бундан $m \le n$.

Демак, $n = m$. ***Исбот бўлди***

Агар группани ташкил этувчи элементларнинг табиати аҳамиятга эга бўлмай, фақат группадаги асосий амалнинг ўзи ўрганилаётган бўлса, у ҳолда изоморф группалар бир хил деб қаралаши мумкин. Масалан, изоморфизм аниқлигида n-тартибли циклик группалар (45-мисол) ни $\mathbf{Z}_n$ билан белгилаб, уларнинг ҳаммасини битта деб қараш мумкин; ёки изоморфизм аниқлигидаги барча чексиз циклик группаларни битта деб хисоблаб, уни $\mathbf{Z}$ билан белгилаш мумкин.

Агар G_1 группа G_2 группага изоморф бўлса, уни $\mathbf{G_1 \cong G_2}$ каби белгиланади.

50. а) 2 элементли, б) 3 элементли изоморфизмгача аниқликдаги ҳамма группаларни топинг.

Ечиш.

а) e, a - группанинг элементлари ва e - бирлик элемент бўлсин. У ҳолда $e * e = e$, $e * a = a * e = a$ ва фақат $a * a$ ни аниқлаш қолади. Агар $a * a = a = e * a$ бўлса, у ҳолда (24-га кўра) $a = e$ - қарама- қаршиликка эга бўлинади.

Демак, $a^2 = e$ ва 2 элементли фақат битта группа ҳосил бўлади.

Бу - $\mathbf{Z}_2$ - циклик группадир.

б) e, a, $в$, - группанинг элементлари ва e- бирлик элемент бўлсин.

$a * в$ ва $a * a$, $в * в$ кўпайтмаларнинг нимага тенглигини аниқлаш керак. Агар $a * в = a$ бўлса, у ҳолда $в = e$ - қарама - қаршилик, агар $a * в = в$ бўлса, $a = e$ қарама - қаршилик, демак, $a*в = e$ ва худди шу каби $в*a = e$. агар $a^2 = a$ бўлса, у ҳолда $a = e$ қарама - қаршилик, агар $a^2 = e = a * в$ бўлса, $a = в$ қарама - қаршилик, демак $a^2 = в$ ва худди шу каби $в^2 = a$. Шундай қилиб, 3 элементли битта группа мавжуд.

Унда $a^3 = a^2 * a = в * a = e$ бўлгани учун бу группа e, a, $в = a^2$ – элементли Z_3 - циклик группадир.

Жавоб: а) $\mathbf{Z}_2$, б) $\mathbf{Z}_3$.

51. Элементларининг сони бир хил бўлган ва ўзаро изоморф бўлмаган 2 та группага мисол келтиринг.

Ечиш.

Масалан, квадратни айлантиришлар группаси ва ромб (тўғри тўртбурчак) симметриясининг группаси элементларининг сони бир хил, лекин улар ўзаро изоморф эмас. Чунки, биринчи группада 4- тартибли элемент мавжуд, иккинчи группада эса бундай элемент йўқ. (49- га қаранг!).

52. Барча ҳақиқий сонлар тўпламининг қўшишга нисбатан группаси мусбат ҳақиқий сонлар тўпламининг кўпайтиришга нисбатан группасига изоморф эканини исботланг.

Исботи.

$\varphi(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, акслантиришни қараймиз. Агар x - барча мумкин бўлган ҳақиқий қийматларни қабул қилса, у ҳолда a^x фақат бир мартадан мусбат ҳақиқий қийматларни қабул қилади. Шунинг учун φ- барча ҳақиқий сонларни мусбат ҳақиқий сонларга ўтказувчи ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади. Бунда x ва y ҳақиқий сонлар учун $\varphi(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ ўринли бўлади.

Демак, φ - ҳақиқий сонларнинг адитив группаси билан мусбат ҳақиқий сонларнинг мультипликатив группаси ўртасидаги изоморфизм экан. ***Исбот бўлди***

53. a - G группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. Қуйидагича аниқланган, G группани ўзига ўтказувчи φ_a акcланишлар тўпламини қараймиз:

$\varphi_a(x) = ax$, $\forall x \in G$ учун. φ_a - G группа элементлари тўпламини алмаштириш эканини исботланг (яъни G группа элементларининг тўпламини ўзига ўтказувчи ўзаро бир қийматли акслантириш).

Исботи.

y - G группанинг ихтиёрий элементи бўлсин, у ҳолда $\varphi_a(a^{-1}y)=a\,a^{-1}y=y$ бўлади. Шунинг учун φ_a - G группани бутун G группа устига акcланиш бўлади. Агар $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ бўлса, у ҳолда $a\,x = a\,y \Rightarrow x = y$ бўлади.

Шунинг учун φ_a - G группани ўзининг устига акслантирувчи ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади. ***Исбот бўлди***

54. G группанинг хар бир a элементи учун φ_a - алмаштириш аниқланган бўлсин (олдинги масаладаги каби). ҳамма худди шундай алмаштиришлар тўплами алмаштиришларни кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилишини исботланг.

Исботи.

$(\varphi_a\varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(bx) = a\,b\,x = (\varphi_{ab}(x)$ $\forall x \in G$ учун. Шунинг учун $\varphi_a\varphi_b = \varphi_a\varphi_b$ бўлади. $\varphi_a(a^{-1}x) = a\,a^{-1}x = x$ бўлгани учун $(\varphi_a)^{-1}(x) = a^{-1}x = \varphi_a^{-1}(x)$, $\forall x \in G$ учун, шунинг учун $\varphi^{-1}{}_a = \varphi_a^{-1}$ бўлади.

Демак, барча φ_a - алмаштиришлар тўплами алмаштиришлар группаси бўлар экан. ***Исбот бўлди***

55. G группа юқоридаги мисолларда ҳосил қилинган φ_a-алмаштиришлар группасига изоморф эканини исботланг.

Исботи.

$\forall x \in G$ ва $\forall a \in G$ лар учун $\varphi_a(x) = a\,x$, $\psi(a) = \varphi_a$ акслантиришни қараймиз. $\varphi_a(e) = a\,e = a$ ва $\varphi_b(e) = b\,e = b$ бўлгани учун $a \neq b$ бўлганда $\varphi_a \neq \varphi_b$ бўлади. Шунинг учун ψ- ўзаро бир қийматли акслантиришдир. Бундан ташқари, $\varphi(a\,b) = \varphi_{a\,b}$ =(54-га кўра) $= \varphi_a\varphi_b = \psi(a)\,\psi(b)$ бўлади.

Демак, ψ - изоморфизм экан. ***Исбот бўлди***

Таянч иборалар:

Ўзаро бир қийматли акслантириш, изоморфизм, ўзаро изоморф группалар.

Назорат учун саволлар.

5.1. Қандай акслантиришни ўзаро бир қийматли акслантириш дейилади?

5.2. Изоморфизм нима?

5.3. Қандай группаларни ўзаро изоморф группалар дейилади?

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

5.1. Учбурчакни айлантиришлар группаси M 3- даражали ишоралари алмашинувчи A_3 группага изоморф эканини исботланг.

5.2. R нинг аддитив группаси $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in R$, кўринишдаги матрицалар тўпламининг элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган матрицаларни кўпайтиришга нисбатан группасига изоморф эканини исботланг.

5.3. $< Q^+, \bullet >$ группа $< Q, + >$ группага изоморфми?

Кўрсатма. Фараз қилайлик, изоморф акслантириш $\varphi : Q^+ \to Q$ мавжуд бўлиб, $\varphi(1) = a$ бўлсин. У ҳолда $\varphi(n) = a^n$, $\forall\ n$ - натурал сон учун, $(a \neq 1)$ ва $\varphi(^1/_n) = a^{1/n}$ бўлади. Демак $a \in Q$ шундай сон бўлиши керакки, $\forall\ n$ натурал сон учун $\sqrt[n]{a} \in Q$ бўлсин. Бундай $a \neq 1$ сон мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

5.4. Ромбни айлантиришлар группаси тўғри тўртбурчакни айлантиришлар группасига изоморфми?

5.5. Ихтиёрий n - тартибли циклик группа n модул бўйича чегирма синфларнинг Z_n группасига изоморф эканини исботланг.

5.6. φ - G_1 ни G_2 га ўтказувчи изоморфизм ва $\varphi(g) = h$ бўлсин. g ва h элементлар бир хил тартибли эканини исботланг.

5.7. Исботланг:

а). Барча чексиз тартибли циклик группалар ўзаро изоморф;

б). Барча n- тартибли чекли циклик группалар ўзаро изоморф.

5.8. Мусбат рационал сонларнинг мультипликатив группаси барча рационал сонларнинг аддитив группасига изоморф эканини исботланг.

5.9. Қандай G группа учун f: G $\to$ G акслантириш изоморфизм бўлади: а). $f(x) = x^2$; б). $f(x) = x^{-1}$?

5.10. $< Z_4, + >$ ва $< Z_5, \bullet >$ группалар ўртасидаги барча изоморфизмларни топинг.

№6-Мавзу.
Қисм группалар.

Р е ж а:

1. Қисм группа.
2. Циклик группаларнинг қисм группалари
3. Қисм группаларнинг кесишмаси ҳақида.

G группада элементларнинг H қисм тўпламини қараймиз. H нинг ўзи ҳам G да берилган бинар амалга нисбатан группа ташкил қилиши мумкин.

Бундай ҳолда H G группанинг ***қисм группаси*** дейилади. Масалан, мунтазам n бурчакнинг айлантиришлар группаси мунтазам n бурчакдаги барча симметриялар группасига қисм группа бўлади.

Агар a - G группанинг элементи бўлса, у холда a^m кўринишдаги барча элементлардан тузилган тўплам G группанинг қисм группаси бўлади (бу қисм группа цикликдир, уни 4 § да кўрдик).

56. H - G группанинг қисм группаси бўлса,
а) G ва H нинг бирлик элементлари устма-уст тушишини,
б) агар a - H кисм группанинг элементи бўлса, у ҳолда G ва H даги a га тескари бўлган элементлар устма-уст тушишини исботланг.

Исботи.
а) e_G ва e_H - мос равишда G ва H группаларнинг бирлик элементлари бўлсин. H қисм группада $e_H \bullet e_H = e_H$ тенглик ўринли бўлади. Қисм группанинг таърифига кўра, бу тенглик G группада ҳам ўринли. Бундан ташқари, G группада $e_G \bullet e_H = e_H$ тенглик ҳам ўринли. Бундан G группада $e_H \bullet e_H = e_G \bullet e_H \Rightarrow e_H = e_G$.
б) a - H қисм группанинг ихтиёрий элементи бўлсин ва $a^{-1}{}_G$ ва $a^{-1}{}_H$ лар мос равишда G группадаги ва H қисм группадаги a га тескари элементлар бўлсин. У холда H қисм группада $a^{-1}{}_H \bullet a = e_H = e_G$ га эга бўламиз. Қисм группанинг таърифига кўра, бу тенглик G группада ҳам ўринли. Бундан ташқари, G группада $a^{-1}{}_G \bullet a = e_G$, бундан G группада $a^{-1}{}_H \bullet a = a^{-1}{}_G \bullet a$ ва $a^{-1}{}_H = a^{-1}{}_G$. ***Исбот бўлди***

57. H - G группанинг қисм групаси бўлиши учун (G даги бинар амалга нисбатан) Қуйидаги шартлар ўринли бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.
а) агар $a \in$ H ва $b \in$ H $\Rightarrow a\,b \in$ H (кўпайтириш G-группада олинади).
б) $e_G \in$ H,
в) агар $a \in$ H $\Rightarrow a^{-1}{}_G \in$ H.

Изох. 1) - ва 3) - шартлардан 2)- шарт келиб чиқади.

Исботи.

1. Зарурлиги. 56 - масала натижасидан ва кисм группанинг таърифидан келиб чиқади.

2. Етарлилиги. 1) хоссага кўра, G группадаги бинар амал H учун ҳам бинар амал бўлади. H да ётган e_G элемент 2) хоссага кўра, H да ҳам бирлик элемент бўлади, яъни G группанинг ихтиёрий a элементи учун ва хусусий ҳолда, H нинг барча элементлари учун $e_G\, a = a\, e_G = a$ бўлади. Агар a - H нинг ихтиёрий элементи бўлса, у ҳолда a_G^{-1} - H да ётгани учун, 3) ҳоссага кўра H да a га тескари элемент бўлади, яъни $e_G^{-1}\, a = a\, a_G^{-1} = e_G = a_H$.

Асоциативлик ўз- ўзидан равшан.

Демак, H - G группанинг қисм группаси бўлади. ***Исбот бўлди***

58.

1) Мунтазам учбурчакнинг симметриялари,

2) Квадратнинг симметриялари группаларининг ҳамма қисм группаларини топинг.

Ечиш.

1). а) $\{e, a, b\}$- айлантиришлар қисм группаси.
б) $\{e, c\}$, $\{e, d\}$, $\{e, f\}$ - баландликларга нисбатан.
в) $\{e\}$ ва бутун группа- тривиал қисм группалар.

2). а) $\{e, a, b, c\}$ - айлантиришлар қисм группаси.
б) $\{e, a\}$ - марказий симметриялар қисм группаси.
в) $\{e, d\}$, $\{e, f\}$, $\{e, g\}$, $\{e, h\}$ - симметрия ўқларига нисбатан.
г) $\{e, a, d, f\}$ ва $\{e, a, d, h\}$ - қисм группалар.
д) $\{e\}$ ва бутун группа - тривиал қисм группалар.

59. а) $\mathbf{Z}_5$, б) $\mathbf{Z}_8$, в) $\mathbf{Z}_{15}$ - циклик групаларнинг барча қисм группаларини топинг.

Ечиш.

Берилган группаларнинг элементлари $\{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$, ($n$=5,8,15) бўлсин. У холда қисм группалар қуйидагилар бўлади:

а). $\{e\}$ ва $\mathbf{Z}_5$;

б). $\{e\}$, $\{e, a^4\} \cong \mathbf{Z}_2$, $\{e, a^2, a^4, a^6\} \cong \mathbf{Z}_5$, $\mathbf{Z}_8$.

в). $\{e\}$, $\{e, a^5, a^{10}\} \cong \mathbf{Z}_8$, $\{e, a^3, a^6, a^9\} \cong \mathbf{Z}_5$, $\mathbf{Z}_{15}$.

Бу қисм группаларни бинар амалларнинг Кэли жадваллари ёрдамида бевосита таърифга кўра текшириш мумкин.

60. $\mathbf{Z}_n$ группанинг барча қисм группалари $\{e, a^d, a^{2d}, ..a^{n/d-1}\}$ дан иборат эканини исботланг, бу ерда d - n нинг бўлувчиси ва a - $\mathbf{Z}_n$ группанинг ташкил этувчиси.

Исботи.

Н – қисм группа $\{e\}$ дан фарқли бўлсин ва a^d – Н қисм группанинг элементлари ичидаги энг кичик мусбат кўрсаткичли элемент бўлсин. У ҳолда Н барча (k - ихтиёрий бутун сон бўлганда) $a^{kd}=(a^d)^k$ кўринишидаги элементлардан иборат бўлади. ҳақиқатдан ҳам a^m - Н қисм группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. m ни d га қолдиқли бўламиз: $m = t\,d + r$, бу ерда $0 \leq r \leq d - 1$. У ҳолда $a^m \bullet a^{-t\,d} = a^{m-t\,d} = a^r$ элемент Н да ётади.

Агар $r > 0$ бўлса, у ҳолда d Н даги энг кичик кўрсаткич эканига, яъни қарама-қаршиликка дуч келамиз. Демак, $r = 0$ ва m d га бўлинади. $a^n = e$ элемент Н да ётгани учун d n нинг бўлувчиси бўлади.

Шундай қилиб, Н- қисм группа масала шартида кўрсатилган кўринишда бўлади. ***Исбот бўлди***

61. Чексиз тартибли циклик групанинг барча қисм группалари $\{\ldots, a^{-2r}, a^{-r}, e, a^r, \ldots\}$ кўринишида бўлишини исботланг, бу ерда a - ташкил этувчи, r - ихтиёрий натурал сон.

Исботи 60 - мисолдаги каби бўлади.

62. Ихтиёрий чексиз группа чексиз кўп қисм группаларга эга бўлишини исботланг.

Исботи.

Агар группанинг қайсидир элементи чексиз тартибли бўлса, у хосил қилган чексиз циклик қисм группа чексиз кўп қисм группага эга бўлади (61-га кўра). У эса берилган группага қисм группа бўлади.

Агар группанинг барча элементи чекли тартибли бўлса, у ҳолда қуйидаги элементлардан ташкил топган циклик группаларни қараймиз:

1) Ихтиёрий a_1 элементдан,

2) 1) қисм группага кирмаган a_2 элементдан,

3) 1) ва 2) қисм группаларга кирмаган a_3 элементдан ва хоказо.

Бу жараённи чегарасиз давом эттириш мумкин, чунки бунда барча тузилган қисм группалар чекли. ***Исбот бўлди***

63. G группа ихтиёрий сондаги қисм группаларининг кесишмаси яна G группанинг қисм группаси бўлишини исботланг.

Исботи.

$H_1, H_2, \ldots, H_m$ - қандайдир G группанинг қисм группалари ва Н- уларнинг кесишмаси бўлсин. У ҳолда (57- кўра)

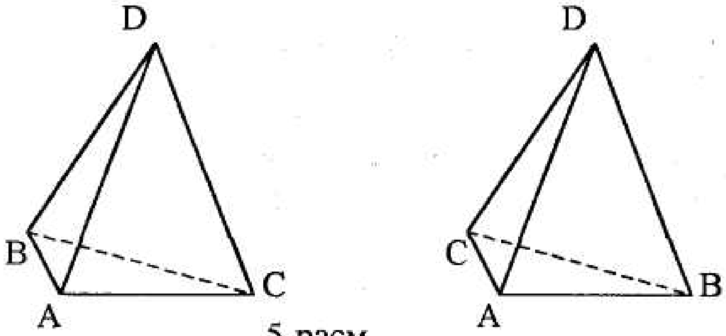
1) агар $a, b \in$ Н бўлса, у ҳолда a ва b барча H_i ларда ётади. Шунинг учун $a \bullet b$ хам барча H_i ларда ётади ва демак, Н да ҳам ётади.

2) e - ҳамма H_i қисм группаларда ётади ва демак, Н да ҳам ётади.

3) агар $\forall a \in$ H бўлса, у ҳолда a барча H_i ларда ётади. У ҳолда a^{-1} ҳам барча H_i ларга тегишли элемент бўлади, ва демак, H га ҳам тегишли элемент бўлади.

Демак, 57-мисол натижасига кўра, H - G группанинг қисм группаси экан. ***Исбот бўлди***

Мисол 10. Учлари A, B, C ва D нуқталарда бўлган мунтазам тетраэдрни қараймиз. Агар D нуқтадан ABC учбурчакка қаралса, у ҳолда A,B,C нуқталар соат стрелкаси йўналишида ёки унга қарама-қарши йўналишда айлантирилиши мумкинлиги кузатилади (5-расм). Унга мос ҳолда тетраэдрнинг иккита ориентациясини ажратишимиз мумкин.



5-расм

64. Қуйидаги алмаштиришлар тетраэдрнинг ориентациясини сақлайдими:

$a = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCAD \end{pmatrix}$ – баландлик атрофида 120^0 га айлантириш,

$b = \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix}$ – AD ва BC кирраларининг ўрталаридан ўтган ўқ атрофида 180^0 га айлантириш,

$c = \begin{pmatrix} ABCD \\ ACBD \end{pmatrix}$ – B C қирранинг ўртаси ва A D киррадан ўтган текисликка нисбатан симметрик алмаштириш.

$d = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix}$ – тетраэдр учларини циклик айлантириш.

Жавоб: a, b алмаштиришлар сақлайди.
c, d алмаштиришлар сақламайди.

Равшанки, мунтазам тетраэдрнинг барча симметриялари тўплами группа ташкил қилади, уни ***тетраэдрнинг симметриялари группаси*** дейилади.

65. Тетраэдр симметриясининг группасида нечта элемент бор?

Ечиш.

$$e=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}-$$

А учни ихтиёрий учга ўтказиш мумкин, В учни қолган ихтиёрий учга, С учни қолган 2 та учдан ихтиёрийсига ўтказиш мумкин.

Демак, $4\cdot3\cdot2=24$ та.

66. Тетраэдр симметриясининг группасида

а) учбурчак симметриясининг группасига,

б) Z_4 - циклик группага изоморф бўлган қисм группаларни топинг.

Ечиш. а) D учни урнида қолдирувчи ҳамма симметриялар:

$$\left\{\begin{pmatrix}ABCD\\BCAD\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\CABD\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\ACBD\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\CBAD\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\BACD\end{pmatrix}\right\}$$

изоморфизм $\varphi\left(\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}ABC\\ABC\end{pmatrix}$.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}ABCD\\BCAD\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}ABCD\\CABD\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}ABC\\ABC\end{pmatrix}=$$

$$=e=a\bullet b=\begin{pmatrix}ABC\\BCA\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}ABC\\CAB\end{pmatrix}==\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\BCAD\end{pmatrix}\bullet\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\CABD\end{pmatrix}.$$

б). $\left\{e=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}, d=\begin{pmatrix}ABCD\\BCDA\end{pmatrix}, d^2=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}, d^3=\begin{pmatrix}ABCD\\DABC\end{pmatrix}\right\}$

$\varphi(d)=\bar{1}$,

$$\varphi(d\bullet d^2)=\varphi\left(\begin{pmatrix}ABCD\\BCDA\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}\right)=\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\DABC\end{pmatrix}=\varphi(d^3)=$$

$$=\bar{1}^3=\bar{1}^2+\bar{1}^2=\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\BCDA\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}.$$

$$\varphi(d\bullet d^3)=\varphi\left(\begin{pmatrix}ABCD\\BCDA\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}ABCD\\DABC\end{pmatrix}\right)=\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=\varphi(e)=\bar{0}=\bar{1}+\bar{1}^{-3}=$$

$$=\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\BCDA\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}ABCD\\DABC\end{pmatrix}.$$

67. Тетраэдрнинг ориентациясини сақловчи барча симметриялар группа ташкил қилишини исботланг. Унда нечта элемент бор?

Исботи.

$$\{\begin{pmatrix}ABCD\\BCAD\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\CABD\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\BDCA\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\DACB\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\CBDA\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\DBAC\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}ABCD\\ACDB\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\ADBC\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix},\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}\}$$

Тетраэдр ориентациясини сақловчи (ва сақламайдиган) 2 та алмаштиришнинг кўпайтмаси ориентацияни сақлайди. Агар битта алмаштириш ориентацияни саклаб, 2- чи алмаштириш ориентацияни сақламаса, уларнинг кўпайтмаси ориентацияни сақламайди.

Равшанки, e - ориентацияни сақлайди. Агар ихтиёрий a алмаштириш учун $a^{-1}\bullet a=e$ бўлса, у ҳолда агар a ориентацияни сақласа, a^{-1} ҳам ориентацияни сақлайди. Бундан, 57 - га кўра, тетраэдр ориентациясини сақловчи барча симметриялар тўплами бутун тетраэдр симметриялари группаси учун қисм группа бўлиши келиб чиқади.
Бу группа элементларининг сони 12 га тенг. ***Исбот бўлди***

Тетраэдрнинг ориентацияни сақловчи симметриялари группаси ***тетраэдрнинг айлантиришлари группаси*** дейилади.

68. Тетраэдрни айлантиришлар группасида а) $\mathbf{Z}_2$, б) $\mathbf{Z}_3$ циклик группаларга изоморф бўлган қисм группани топинг.

Ечиш.

$$a_1=\begin{pmatrix}ABCD\\BCAD\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}ABCD\\CABD\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}ABCD\\BDCA\end{pmatrix},\ a_4=\begin{pmatrix}ABCD\\DACB\end{pmatrix},$$

$$a_5=\begin{pmatrix}ABCD\\CBDA\end{pmatrix},\ a_6=\begin{pmatrix}ABCD\\DBAC\end{pmatrix},\ a_7=\begin{pmatrix}ABCD\\ACDB\end{pmatrix},\ a_8=\begin{pmatrix}ABCD\\ADBC\end{pmatrix},$$

$$a_9=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix},\ a_{10}=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix},\ a_{11}=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix},\ e=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}.$$

Қисм группа: $\{a_9=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}, a_{10}=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}, a_{11}=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}\}$

•	a_9	a_{10}	a_{11}
a_9	e	a_{11}	a_{10}
a_{10}	a_{11}	e	a_9
a_{11}	a_{10}	a_9	e

$$a_9 a_9=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e$$

$$a_9 a_{10}=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=a_{11}$$

$$a_9 a_{11}=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=a_{10}$$

$$a_{10} a_9=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=a_{11}$$

$$a_{10} a_{10}=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e$$

$$a_{10} a_{11}=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=a_9$$

$$a_{11} a_9=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=a_{10}$$

$$a_{11} a_{10}=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\CDAB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\DCBA\end{pmatrix}=a_9$$

$$a_{11} a_{11}=\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABCD\\BADC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABCD\\ABCD\end{pmatrix}=e$$

изоморфизм $\varphi(a_9)=\bar{0}$ $\varphi(a_9)=\bar{1}$ $\varphi(a_9)=\bar{2}$ бўлганда бу қисм группа $\mathbf{Z}_3$ циклик группага изоморф эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Таянч иборалар:

Қисм группа, ориентацияни сақловчи акслантириш, тетраэдр симметрияларининг группаси, тетраэдрнинг айлантиришлар группаси.

Назорат учун саволлар.

6.1. Қисм группа нима?

6.2. Қандай акслантиришни ориентацияни сақловчи акслантириш дейилади?

6.3. Тетраэдр симметриялари группаси нима?

6.4. Тетраэдрнинг айлантиришлари группаси нима?

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

6.1. n га каррали бутун сонлар тўплами $n\mathbf{Z}$ $\mathbf{Z}$ - аддитив группага қисм группа эканини исботланг.

6.2. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$ кўринишидаги матрицалар тўплами M барча детерминанти нолдан фарқли бўлган 2- тартибли матрицаларнинг мультипликатив группаси G га қисм группа эканини исботланг.

6.3. 3 сонининг бутун даражалари тўплами $Q/\{0\}$ мультипликатив группага қисм группа бўлишини исботланг.

6.4. 3 - даражали $\mathbf{S}_3$ - симметрик группа хар бир элементининг тартибини топинг. Бу элементлар $\mathbf{S}_3$ - нинг қандай циклик группасини хосил қилади? $\mathbf{S}_3$ нинг нечта ҳар хил қисм группалари бор. $\mathbf{A}_3$ - $\mathbf{S}_3$ нинг циклик қисм группаси бўладими? Унинг ташкил этувчилари қайсилар?

6.5. Ташкил этувчиси $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ ўрин алмаштиришдан иборат бўлган циклик группанинг барча қисм группаларини топинг.

6.6. $\mathbf{Z}_n$ - n модул бўйича чегирма синфлар группасининг ҳамма қисм группалари қандай кўринишда бўлади.

6.7. Квадратни айланишлар группасида 4 модул бўйича чегирма синфлар (қолдиқлар) группаси $\mathbf{Z}_n$ га изоморф бўлган қисм группани топинг.

№ 7-Мавзу
Тўғри кўпайтма.

Режа.

1. Тартибланган жуфтлик.
2. Тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси.
3. Группаларнинг тўғри кўпайтмаси.

G ва H тўпламларнинг элементларидан $<g,h>$ кўринишдаги жуфтликларни тузамиз, бунда $g \in G$, $h \in H$. Бундай жуфтликларни одатда ***тартибланган жуфтликлар*** дейилиб, ундаги g ва h ларни тартибланган жуфтликнинг ташкил этувчилари ёки аниқроғи, биринчи ва иккинчи компоненталари (координаталари) дейилади.

Таърифга кўра, иккита $<g_1, h_1>$ ва $<g_2, h_2>$ тартибланган жутликлар тенг дейилади ва $<g_1, h_1> = <g_2, h_2>$ каби ёзилади фақат ва фақат шу холдаки, қачонки $g_1 = g_2$,
$h_1 = h_2$ бўлса, акс холда жуфтликлар тенгмас дейилади.

Бундан кўринадики, умуман айтганда $<g_1, h_1> \neq <h_1, g_1>$ (лекин $\{g_1,h_1\}=\{h_1,g_1\}$ эди!), шунинг учун хам **тартибланган жуфтлик** деб номланган.

Таъриф. Бўш бўлмаган G ва H ***тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси (Декарт купайтмаси)*** деб, тузиш мумкин бўлган барча $<g, h>$ $(g\in G, h\in H)$ кўринишдаги тартибланган жуфтликлардангина иборат бўлган тўпламга айтилади ва
$G\times H = \{<g, h> \mid g\in G, h\in H\}$ каби белгиланади.

Чекли тўпламлар учун $G\times H$ - тўғри кўпайтманинг элементлари сони G ва H тўпламлар элементлари сонининг кўпайтмасига тенг бўлиши таърифдан бевосита кўриниб турибди. Агар $|G| = n$, $|H| = m$ бўлса, $|G\times H| = |H\times G| = nm$.

Тўғри кўпайтма (Декарт купайтма) тушунчаси группалар учун қўйидагича киритилади:

Таъриф. $G\times H$ туплам $\cdot$ бинар амалга нисбатан иккита $< G, * >$ ва $< H, \bullet >$ ***группаларнинг тўғри кўпайтмаси (Декарт купайтмаси)*** дейилади,агар $G\times H$ тупламдаги $\cdot$ бинар амали қуйидагича аниқланган булса:

$$< g_1, h_1> \cdot < g_2, h_2> = < g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2>,$$

бунда $\forall g \in G$, $\forall h\in H$ ва $g_1 * g_2$ кўпайтма G группада, $h_1\bullet h_2$ кўпайтма эса H группада бажарилади.

69. $< G\times H, \cdot >$ - группа эканини исботланг.

Исботи.

$G\times H =\{<g,h > \mid g\in G, h \in H\}$. $<g_1, h_1> \cdot <g_2, h_2> = <g_1 * g_2, h_1\bullet h_2>$,

1) Ассоциативлик:

$(<g_1, h_1> \cdot <g_2, h_2>) \cdot <g_3, h_3> = <g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2> \cdot <g_3, h_3> =$
$= <g_1 * g_2 * g_3, h_1 \bullet h_2 \bullet h_3>$

g_1, g_2, g_3 ва h_1, h_2, h_3 лар мос равишда G ва H группаларнинг элементлари бўлгани учун ассоциативлик ўринли бўлади.

2) Нейтрал элементнинг мавжудлиги:

$\forall <g, h> \in G\times H$ учун $\exists < e_G, e_H> \in G\times H$ - нейтрал элемент:

$<g,h> \cdot <e_G, e_H> = < g * e_G, h \bullet e_H> = < e_G * g, e_H \bullet h> = < g, h>$.

3) Қарама-қарши элементнинг мавжудлиги:

$\forall <g,h> \in G\times H$ учун $\exists <g^{-1}, h^{-1}> \in G\times H$ - қарама-қарши элемент

$<(g, h) \cdot <(g^{-1}, h^{-1}) = <g * g^{-1}, h \bullet h^{-1} > = <g^{-1} * g, h^{-1} \bullet h > = <e_G, e_H>$

Демак, G×H - группа ташкил қилади. ***Исбот бўлди***

70. G группанинг элементлари n та, H группанинг элементлари эса k та бўлсин. G×H группада нечта элемент бор?

Ечиш.

$G = \{ g_1, g_2, ..., g_n \}$, $H = \{ h_1, h_2, ..., h_k \}$.

$G\times H = \{ < g_1, h_1>, <g_1, h_2>, .., <g_1, h_k>, <g_2, h_1>, ..., < g_2, h_2>, ..., <g_n, h_k> \}$.

яъни G×H группа учун $n \bullet k$ та $< g_i, h_j>$ кўринишидаги жуфтликлар тузилади.

Жавоб: $n \bullet k$ та.

71. G×H ва H×G группалар изоморф эканини исботланг.

Исботи.

$G\times H = \{<g,h> \mid g \in G, h \in H\}$, $H\times G = \{<h,g> \mid h\in H, g\in G\}$

ва $<g_1, h_1>\bullet <g_2, h_2> = <g_1\bullet g_2, h_1\bullet h_2>$, $<h_1, g_1> \bullet <h_2, g_2> = <h_1\bullet h_2, g_1\bullet g_2>$.

$\varphi(<g, h>) = <h,g>$ асклантиришни қараймиз.

$\varphi(<g_1, h_1> \bullet <g_2, h_2>) = \varphi(<g_1 \bullet g_2, h_1 \bullet h_2>)) = <h_1 \bullet h_2, g_1 \bullet g_2> =$
$= <h_1 g_1> \bullet <h_2 g_2> = \varphi(<g_1, h_1>) \bullet \varphi(<g_2, h_2>)$.

Демак, φ - изоморфизм экан. ***Исбот бўлди***

72. G ва H группаларга изоморф бўлган G×H нинг қисм группаларини топинг.

Ечиш.

$G\times H = \{<g, h> \mid g \in G, h \in H\}$.

1) $\{<g,e_H> \mid g \in G, e_H \in H\}$ кўринишидаги барча элементлар тўпламини оламиз. Бу тўплам G×H га қисм группа бўлади.

$\varphi(<g,e_H)) = <g,e_H>$ акслантиришни қараймиз:

$\varphi(<g_1, e_H> \bullet < g_2, e_H>) = \varphi(<g_1\bullet g_2, e_H \bullet e_H> = \varphi(<g_1, e_H>) \bullet \varphi(<g_2,e_H>)$

Демак, φ - изоморфизм.

2) $\{<e_G, h> \mid e_G \in G, h \in H\}$ кўринишидаги элементлар тўплами $G\times H$ га қисм группа бўлади. Худди юқоридагидек, $\varphi(<e_H, h> = h$ акслантириш изоморфизм бўлади.

$\varphi(<e_G,h_1>\bullet<e_G, h_2>)=\varphi(<e_G \bullet e_G, h_1\bullet h_2>) = h_1\bullet h_2=\varphi(<e_G, h_1>) \bullet\varphi(<e_G, h_2>)$.

73. G ва H группалар коммутатив бўлсин. $G\times H$ группа ҳам коммутатив бўлишини исботланг.

Исботи.

$G\times H = \{<g, h> \mid g \in G, h \in H\}$.

$\forall <g_1,h_1>, <g_2,h_2> \in G\times H$ элементлар оламиз.

$<g_1, h_1> \bullet <g_2, h_2>= <g_1 \bullet g_2, h_1 \bullet h_2> = <g_2 \bullet g_1, h_2 \bullet h_1>= <g_2, h_2> \bullet <g_1 \bullet h_1>$.

Демак, $<g_1 g_1> \bullet <g_2, h_2> = <g_2,h_2> \bullet <g_1, h_1>$, яъни $G\times H$ группа коммутатив экан. ***Исбот бўлди***

74. G_1 - G группанинг қисм группаси, H_1 - H группанинг қисм группаси бўлсин. $G_1 \times H_1$ - $G\times H$ группанинг қисм группаси эканини исботланг.

Исботи.

$G_1 \subset G, H_1 \subset H$.

Агар $<g_1, h_1>$ ва $<g_2, h_2>$ $G\times H$ нинг элементлари бўлса, у ҳолда g_1,g_2 ва $g_1 \bullet g_2$ G_1 да, h_1,h_2 ва $h_1 \bullet h_2$ - H_1 да ётади.

Шунинг учун $<g_1\bullet g_2,h_1 \bullet h_2> = <g_1,h_1> \bullet <g_2,h_2>$ элемент $G_1\times H_1$ да ётади.

2) G_1 ва H_1 - мос равишда G ва H нинг қисм группалари бўлгани учун e_G - G_1 да, e_H - H_1 да ётади. Шунинг учун $<e_G,e_H>$ - $G\times H$ группанинг бирлик элементи $G_1 \times H_1$ да ётади.

3) Агар $<g, h>$ - $G_1\times H_1$ да ётса, у ҳолда $g\in G_1$, $h\in H_1$ бўлади. G_1 ва H_1 - қисм группалар бўлгани учун $g^{-1}{}_G \in G$, $h^{-1}{}_H\in H$ бўлади. Шунинг учун G группада $<g,h>$ элементга тескари элемент $<g^{-1}{}_G, h^{-1}{}_H> \in G_1\times H_1$ бўлади. ***Исбот бўлди***

75. G ва H ихтиёрий группалар бўлсин. Қуйидаги тасдиқ ўринлими: $G\times H$ нинг ихтиёрий қисм группасини $G_1\times H_1$ кўринишида ифодалаш мумкин, бу ерда G_1 ва H_1 - мос равишда G ва H нинг қисм группалари.

Ечиш.

Тасдиқ ўринли эмас. Қуйидаги мисолни қараймиз.

$G=\{e_1,c\}$ ва $H=\{e_2,d\}$ - 2-тартибли иккита циклик группалар бўлсин. У ҳолда $\{<e_1,e_2>, <c,d>\}$ - $G\times H$ нинг қисм группаси. Лекин уни юқорида кўрсатилган усулда ифодалаб бўлмайди.

76. Ромб симметриясининг группаси $Z_2 \times Z_2$ группага изоморф эканини исботланг.

Исботи.

$$Z_2 \times Z_2 = \{<\bar{0},\bar{0}>,<\bar{0},\bar{1}>,<\bar{1},\bar{0}>,<\bar{1},\bar{1}>\}.$$

Акслантириш $\varphi(e) = <\bar{0},\bar{0}>$, $\varphi(a) = <\bar{0},\bar{1}>$, $\varphi(b) = <\bar{1},\bar{0}>$, $\varphi(c) = <\bar{1},\bar{1}>$ кўринишда олинганда ромб симметрияси учун кўпайтириш жадвалидан кўринадики, бу группа $Z_2 \times Z_2$ группага изоморф экан.

Исбот бўлди

77. Қуйидаги муносабатлар ўринлими:

а) $Z_2 \times Z_3 \cong Z_6$, б) $Z_2 \times Z_4 \cong Z_8$?

Ечиш.

1) $Z_2 \times Z_3 = \{<e_1,e_2>, <e_1,h>, <e_1,h^2>, <g,e_2>, <g,h>, <g,h^2>\}$.
$Z_2 = \{e_1,g\}$, $Z_3 = \{e_2,h,h^2\}$ - берилган группалар бўлсин.
$a = <g,h> \in Z_2 \times Z_3$ элементнинг тартибини топамиз.
$a = <g,h> \neq <e_1,e_2>$, $a^2 = <g^2, h^2> = <e,h^2> \neq <e_1,e_2>$, $x^3 = <g,e_2> \neq <e_1,e_2>$,
$a^4 = <e_1,h> \neq <e_1,e_2>$, $a^5 = <g,h^2> \neq <e_1,e_2>$, $a^6 = <e_1,e_2>$
$Z_2 \times Z_3$ группа факат 6 та элементдан иборат бўлгани учун $Z_2 \times Z_3 \cong Z_6$.

2) $<g,h>$ - $Z_2 \times Z_4$ группанинг ихтиёрий элементи бўлсин.
У ҳолда $<g,h>^4 = <g^4,h^4> = <e_1,e_2>$ бўлади. Шунинг учун $Z_2 \times Z_4$ да тартиби 8 га тенг бўлган элемент йўқ ва демак бу группа Z_8 га изоморф эмас.

78. $Z_m \times Z_n \cong Z_{mn} \Leftrightarrow <m,n> = 1$ эканини исботланг.

Исботи.

g - Z_m нинг, h -Z_n нинг ташкил этувчилари ва r - $Z_m \times Z_n$ группадаги $<g,h>$ элементнинг тартиби бўлсин.

Агар $<g,h>^{mn} = <g^{mn},h^{mn}> = <e_1,e_2>$ бўлса, у ҳолда $r \leq mn$ бўлади. $<g^r, h^r> = <g,h>^r = <e_1,e_2>$ бўлганда эса (33- га кўра) r m га ва n га бўлинади. Агар m ва n ўзаро туб бўлса, у ҳолда $r = m\,n$ ва $<g,h>$ - $Z_m \times Z_n$ группанинг ташкил этувчиси бўлади.

Бундан $Z_m \times Z_n \cong Z_{mn}$ келиб чиқади.

Агар m ва n ўзаро туб бўлса, у ҳолда уларнинг энг кичик умумий карралиси $k < mn$ бўлади. $k = m\,k_1$ ва $k = m\,k_2$ бўлсин. Агар g ва h Z_m ва Z_n группаларнинг ихтиёрий элементлари бўлса, у ҳолда $g^m = e_1$, $h^n = e_2$ бўлади.

Шунинг учун $<g,h>^k = <g^{mk_1}, h^{nk_2}> = <e_1,e_2>$ бўлади. $k < mn$ бўлгани учун бу холда $Z_m \times Z_n$ группада тартиби m га тенг бўлган элемент йўқ ва демак, $Z_m \times Z_n$ ва Z_{mn} группалар ўзаро изоморф эмас.

Исбот бўлди

Таянч иборалар:

Тартибланган жуфтлик, тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси, группаларнинг тўғри кўпайтмаси.

Назорат учун саволлар.

7.1. Тартибланган жуфтлик нима?
7.2. Қандай тўпламни икки тўпламнинг тўғри кўпайтмаси дейилади?
7.3. Қандай тўпламни n - та тўпламнинг тўғри кўпайтмаси дейилади?
7.4. Группаларнинг тўғри кўпайтмаси деганда нимани тушунасиз?

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

7.1. Ромбнинг ўзини ўзига ўтказувчи алмаштиришлар группаси m ва n нинг қайси қийматларида $\mathbf{Z_m}$ x $\mathbf{Z_n}$ группанинг аддитив группасига изоморф бўлади.

7.2. Z_m x Z_n- группанинг барча қисм группаларни топинг.

7.3. G_1xG_2 – иккита группанинг кўпайтмаси бўлсин ва e_1, e_2 лар мос равишда G_1 ва G_2 группаларнинг бирлик элементлари бўлсин. У ҳолда:

а) G_1 xe_1 ва G_2xe_2 лар G_1xG_2 нинг қисм группалари бўлади;

б) G_1 xe_1 қисм группа G_1 га изоморф, G_2 xe_2 эса G_2 га изоморф бўлади;

в) $\varphi: \ G_1 \text{x} G_2 \to G_1 \text{x} e_1$ акслантиришда $\varphi(g_1, g_2) = < g_1, e_1 >$ деб олинса φ $\ Ker\varphi = e_1 \text{x} G_2$ бўлган изоморфизм бўлади;

г) e_1xG_1 ва G_2xe_2 лар G_1xG_2 нинг нормал қисм группалари бўлади.

7.4. Квартернионлар группасини иккита группанинг тўғри кўпайтмаси шаклида ифодалаш мумкин эмаслигини исботланг.

7.5. G группа ўзининг G_1, G_2 қисм группаларининг тўғри кўпайтмасига тенг бўлсин. Агар H G_1 нинг нормал қисм группаси бўлса, у ҳолда у G группанинг ҳам нормал қисм группаси бўлади.

№ 8-Мавзу.
Қўшни синфлар. Лагранж теоремаси.

Р е ж а.

1. Чап ва ўнг қўшни синфлар.
2. Лагранж теоремаси.

G группанинг ҳар бир H қисм группаси G группа элементларининг қисм группаларга тақсимоти билан қўйидагича боғланади: $\forall\ x \in G$ учун барча xh кўринишидаги элементлар тўпламининг қараймиз, бунда h - H қисм группанинг олиш мумкин бўлган барча элементлари. Хосил бўлган x H тўплам x элемент ёрдамида H қисм группа бўйича тузилган ***чап қўшни синф*** дейилади.

79. Учбурчак симметриясининг қуйидаги қисм группалари бўйича барча чап қўшни синфларни топинг:
а) учбурчакни айлантиришлар группаси.
б) $\{e,c\}$- битта ўқ бўйича.

<u>Ечиш.</u>
Учбурчак симметриясининг группаси : $\{e, a, b, c, d, f\}$ эди.

а) $H_1 = \{e,a,b\}$, $e = \begin{pmatrix} ABC \\ ABC \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} ABC \\ CAB \end{pmatrix}$,

қисм группа бўйича:
1) $e\,H_1 = \{e \bullet e,\ e\bullet a,\ e\bullet b\} = \{e,\ a,\ b\} = H_1$
2) $a\,H_1 = \{a \bullet e,\ a \bullet a,\ a \bullet b\} = \{a,\ b,\ e\} = H_1$
3) $b\,H_1 = \{b \bullet e,\ b \bullet a,\ b \bullet b\} = \{b,\ e,\ a\} = H_1$
4) $c\,H_1 = \{c \bullet e,\ c \bullet a,\ c \bullet b\} = \{c,\ d,\ f\} = c\,H_1$
5) $d\,H_1 = \{d \bullet e,\ d \bullet a,\ d \bullet b\} = \{d,\ f,\ c\} = c\,H_1$
6) $f\,H_1 = \{f \bullet e,\ f \bullet a,\ f \bullet b\} = \{f,\ c,\ d\} = c\,H_1$

Демак, H_1 қисм группа бўйича барча чап қўшни синфлар $\{e,a,b\}$ ва $\{c,\ d,\ f\}$ экан.
б) $H_2 = \{e,\ c\}$ қисм группа бўйича:
1) $e\,H_2 = \{e \bullet e,\ e \bullet c\} = \{e,\ c\} = H_2$
2) $a\,H_2 = \{a \bullet e,\ a \bullet c\} = \{a,\ f\} = a\,H_2$
3) $b\,H_2 = \{b \bullet e,\ b \bullet c\} = \{b,\ d\} = b\,H_2$
4) $c\,H_2 = \{c \bullet e,\ c \bullet c\} = \{c,\ e\} = H_2$
5) $d\,H_2 = \{d \bullet e,\ d \bullet c\} = \{d,\ b\} = b\,H_2$
6) $f\,H_2 = \{f \bullet e,\ f \bullet c\} = \{f,\ a\} = a\,H_2$

Демак, H_2 қисм группа бўйича чап қўшни синфлар $\{e, c\}$, $\{a, f\}$ ва $\{b, d\}$ экан.

80. Группанинг хар бир элементи H қисм группа бўйича қайсидир чап қўшни синфга тушишини исботланг.

Исботи.

Ихтиёрий x элемент учун $x = x \bullet e$ тенглик ўринли. Лекин $e \in$H.
Демак, $x \in x$ H бўлади. ***Исбот бўлди***

81. y элемент H қисм группа бўйича x элемент ёрдамида тузилган чап қўшни синфга элемент бўлсин x ва y элементлар ёрдамида тузилган чап қўшни синфлар устма- уст тушишини исботланг.

Исботи.

$y \in x$ H $\Rightarrow y = x\, h_1,\ h_1 \in$ H. Бундан $x = y\, h_1^{-1}$ келиб чиқади.

h - H қисм группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. У холда $h\, h_1$ ва $h_1^{-1}h$ элементлар H да ётади. Шунинг учун $y\, h = (x\, h_1)\, h = x(h_1 h) \in x$ H ва $x\, h = (y\, h_1^{-1})\, h = y(h_1^{-1} h) \in y$H. Яъни y H нинг хар бир элементи x H да ётибди ва аксинча.

Демак, x H = y H. ***Исбот бўлди***

82. H ққисм группа бўйича x ва y элементлар ёрдамида тузилган чап қўшни синфлар умумий элементга эга бўлсин. Бу қўшни синфлар устма-уст тушишини исботланг.

Исботи.

x H $\cap$ y H= z, яъни $z \in x$ H ва $z \in y$ H бўлсин. У холда 81- га кўра, x H = z H ва z H = y H $\Rightarrow x$ H = y H. ***Исбот бўлди***

Шундай қилиб, ихтиёрий иккита элемент ёрдамида тузилган чап қўшни синфлар ёки кесишмайди, ёки устма - уст тушади. Демак, биз G группа барча элементларининг ўзаро кесишмайдиган синфларга парчаланишига эга бўламиз. Бу парчаланиш G ***группанинг*** H ***қисм группа бўйича чап ёйилмаси*** дейилади.

Қисм группадаги элементлар сони ***қисм группанинг тартиби*** дейилади. m - H кисм группанинг тартиби бўлсин. Агар $h_1 \neq h_2$ бўлса, у холда $x\ h_1 \neq x\ h_2$ бўлади, шунинг учун чап қўшни синф ҳам m та элементдан иборат бўлади. Демак, агар G группанинг H қисм группа бўйича ёйилмасида чап қўшни синфларнинг сони r га тенг бўлса, у холда $m\, r = h$ бўлади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исботладик.

Теорема1. (Лагранж теоремаси). Қисм группанинг тартиби группа тартибининг бўлувчисидир.

83. Ихтиёрий элементнинг тартиби группа тартибининг бўлувчиси бўлишини исботланг.

Исботи.

Группа ихтиёрий элементининг тартиби шу элемент ёрдамида хосил қилинган циклик группанинг тартибига тенг. Бу циклик группа берилган группа учун қисм группа бўлади. Лагранж теоремасига кўра бу қисм группанинг тартиби группа тартибининг бўлувчиси бўлади.

Исбот бўлди.

84. Ихтиёрий туб тартибли группа - циклик группа эканини ва бу группанинг e дан фарқли ихтиёрий элементи унинг ташкил этувчиси бўлишини исботланг.

Исботи.

Агар группанинг тартиби p - туб сон бўлса, у холда группанинг e дан фарқли ихтиёрий элементи p - тартибли бўлади. *Исбот бўлди*

85. G группа 31 та элементдан иборат бўлсин. G да нечта қисм группа бўлиши мумкин?

Ечиш.

G группанинг тартиби $p = 31$ - туб сон. Шунинг учун 84- га кўра, бу группа циклик группадир. Лагранж теоремасига кўра, қисм группанинг тартиби группа тартибининг бўлувчисига тенг. 31 нинг бўлувчилари 1 ва 31.

Демак, бу группанинг қисм группалари иккита: 1- тартибли ва 31- тартибли группалар бўлади. Булар $\{ e \}$ ва группанинг ўзи.

Жавоб: G даги қисм группалар сони 2 та.

86. Барча туб p - тартибли группалар бир-бири билан изоморф бўлишини исботланг.

Исботи.

84-га кўра, p–туб тартибли ихтиёрий группа циклик группадир. 45-га кўра эса ихтиёрий n-тартибли циклик группа n-модул бўйича қолдиқларнинг аддитив группасига изоморфдир. Демак, p-туб тартибли ихтиёрий группа p-модул бўйича қолдиқларнинг аддитив группасига изоморф экан. Бундан бундай группаларнинг бир-бири билан изоморф бўлиши келиб чиқади. *Исбот бўлди*

87. n m га булинсин. n-тартибли шундай группа тузингки, у берилган m-тартибли G группага изоморф бўлган қисм группани ўз ичига олсин.

Ечиш.

G – m-тартибли берилган группа ва $n=m\bullet d$ бўлсин. n-тартибли $G\times Z_d$ группани оламиз. ҳақиқатан ҳам, бу группанинг тартиби n га тенг (70- га кўра). 72 - га кўра, $G\times Z_d$ группа G группага изоморф бўлган $\{g, ez_2\}$ кўринишдаги қисм группага эга. Бунда изоморфизм - $\varphi((g,ez_2))=g$ каби ўрнатилади.

Жавоб: $G\times Z_d$

88. n m га бўлинсин. n - тартибли группада m - тартибли қисм группа бўлмаслиги мумкинми?

Жавоб. Мумкин. Масалан, тетраэдрни айлантиришлар группасида 12 та элемент бор (67). Лекин бу группада 6 элементли қисм группа йўқ. Буни исботлаймиз.

Исботи.

Тетраэдрни айланишлар группаси 12 та элементдан иборат: айний айлантириш - e, баландлик атрофида 8 та айлантириш (120^0 ва 240^0 га) ва 3 та айлантириш - қарама-қарши қирранинг ўртасидан ўтган ук атрофида айлантириш (180^0 га).

Фараз қилайлик, тетраэдрни айланишлар группаси 6 элементли қисм группага эга бўлсин. Бу кисм группа хеч бўлмаганда битта қайсидир баландлик атрофида айлантириш a ни ўз ичига олади. Масалан, бу айлантириш А учни ўз ўрнида қолдирсин. Агар a - 120^0 га (ёки 240^0га) айлантириш бўлса, у холда a^2 - 240^0 га (120^0 га) айлантириш бўлади. Шунинг учун бизнинг қисм группа А учни ўз ўрнида қолдирувчи, баландлик атрофидаги ҳар икки айлантиришни ўз ичига олиши керак. Демак, А учни ўз ўрнида қолдирувчи 3 та айлантириш бўлди (e билан бирга), у холда бу қисм группа А учни қайсидир бошқа учга, масалан, В учга ўтказувчи b айлантиришни ҳам ўз ичига олиши керак. У холда қисм группада $b\bullet a\bullet b^{-1}$ элемент ҳам ётади. Бу айлантириш В учни В га ўтказади ва бундан ташқари, $b\bullet a\bullet b^{-1}$ $\neq e$ (акс холда $a = b\bullet b^{-1} = e$). Шунинг учун қисм группа В учдан туширилган баландлик атрофидаги камида битта, ва демак, ҳар икки айлантиришни ўз ичига олиши керак.

Бу айлантиришлар А учни С ва D учга ўтказади. Бундан, юқоридаги каби, бизнинг қисм группамиз С ва D учдан туширилган баландликлар атрофидаги ҳамма айлантиришларни ўз ичига олиши кераклиги келиб чиқади. Унда 9 та элемент (e билан бирга) хосил бўлади. Бу қарама-қаршиликка олиб келди. Демак, тетраэдрни айлантиришлар группасида тартиби 6 га тенг бўлган қисм группа йўқ экан.

Исбот бўлди

Худди чап қўшни синфлар каби, ўнг қўшни синфлар Hx ни ва G группанинг Н қисм группаси бўйича ўнг ёйилмасини ҳам тузиш мумкин. Агар Н қисм группанинг тартиби m га тенг бўлса, у ҳолда барча ўнг қўшни синфлар ҳам m та элементдан иборат бўлади ва уларнинг сони n/m - натурал сонига тенг бўлади, бу ерда n - G группанинг тартиби. Шунинг учун ўнг қўшни синфлар сони чап қўшни синфлар сонига тенг бўлади.

Изох. Амалда чекли тўпламнинг ёйилмасини кўриш учун ҳар бир элемент бўйича қўшни синфларни тузиш шарт эмас, чунки бунда бир хил синфлар хосил бўлади, балки тузилган қўшни синфларга кирмаган элементларнигина олиш керак. eH = He = H булгани учун қисм группанинг ўзи бир вактда ҳам ҳам, ҳам чап қўшни синфни ташкил қилади.

89. Учбурчак симметриясининг группасидаги қуйидаги қисм группалари бўйича барча ўнг ва чап қўшни синфларини топинг.

а) $H_1 = \{ e, a, b \}$ - айлантириш,

б) $H_1 = \{ e, c \}$ - битта ўқ атрофида айлантириш.

Ечиш.

Учбурчак симметриясининг группаси: $\{e, a, b, c, d, f\}$.

а) 1) $e \bullet \{ e, a, b \} = \{ e, a, b \} \bullet e = \{ e, a, b \} = H_1$

2) $a \bullet \{ e, a, b \} = \{ a \bullet e, a \bullet a, a \bullet b \} = \{ a, b, e \} = H_1$

3) $b \bullet \{ e, a, b \} = \{ b, e, a \} = H_1$

4) $c \bullet \{ e, a, b \} = \{ c, d, f \} = H_1$

5) $\{ e, a, b \} \bullet a = \{ a, b, e \} = H_1$

6) $\{ e, a, b \} \bullet c = \{ c, f, d \} = H_1$

Демак, чап ва ўнг қўшни синфлар: $\{ e, a, b \}$ ва $\{ c, d, f \}$.

б) 1) $e \bullet \{ e, c \} = \{ e, c \} \bullet e = \{ e, c \} = H_2$

2) $a \bullet \{ e, c \} = \{ a, f \}$

3) $b \bullet \{ e, c \} = \{ b, d \}$

4) $\{ e, c \} \bullet a = \{ a, d \}$

5) $\{ e, c \} \bullet b = \{ b, f \}$

Демак, чап қўшни синфлар: $\{ e, c \}, \{ a, f \}, \{ b, f \}$, ўнг қўшни синфлар $\{ e, c \}, \{ a, d \}, \{ b, f \}$.

90. Квадрат симметриясининг группасидаги қуйидаги қисм группалар бўйича чап ва ўнг қўшни синфларни топинг:

а) $\{ e, a \}$ - марказий симметрия,

б) $\{ e, d \}$ - диагонал бўйича симметрия.

Ечиш.

Квадрат симметриясининг группаси: $\{ e, a, b, c, d, f, g, h \}$.

а) 1) $e \bullet \{ e, a \} = \{ e, a \}$ 6) $\{ e, a \} \bullet e = \{ e, a \}$
2) $a \bullet \{ e, a \} = \{ a, e \}$ 7) $\{ e, a \} \bullet b = \{ b, c \}$
3) $b \bullet \{ e, a \} = \{ b, c \}$ 8) $\{ e, a \} \bullet d = \{ d, f \}$
4) $d \bullet \{ e, a \} = \{ d, f \}$ 9) $\{ e, a \} \bullet g = \{ g, h \}$
5) $g \bullet \{ e, a \} = \{ g, h \}$
Демак, чап ва ўнг қўшни синфлар: $\{ e, a \}, \{ b, c \}, \{ d, f \}, \{ g, h \}$.
б) 1) $e \bullet \{ e, d \} = \{ e, d \}$ 5) $\{ e, d \} \bullet e = \{ e, d \}$
2) $a \bullet \{ e, d \} = \{ a, f \}$ 6) $\{ e, d \} \bullet a = \{ a, f \}$
3) $b \bullet \{ e, d \} = \{ b, g \}$ 7) $\{ e, d \} \bullet b = \{ b, h \}$
4) $c \bullet \{ e, d \} = \{ c, h \}$ 8) $\{ e, d \} \bullet c = \{ c, g \}$
Демак, чап қўшни синфлар: $\{ e, d \}, \{ a, f \}, \{ b, g \}, \{ c, h \}$,
ўнг қўшни синфлар: $\{ e, d \}, \{ a, f \}, \{ b, h \}, \{ c, g \}$.

91. Барча бутун сонларнинг аддитив группасидаги 3 га бўлинадиган сонлар қисм группаси бўйича қўшни синфларни топинг.

Ечиш.

$Z \supset 3Z = H$.
$0 + 3Z = 3Z$
$1 + 3Z = 3Z + 1 = \{ 3k + 1 \mid k \in Z \}$
$2 + 3Z = \{ 2 + 3k \mid k \in Z \} = \{ 3k + 2 \mid k \in Z \}$
$3 + 3Z = \{ 3k + 3 = 3k \mid k \in Z \}$.

Жавоб: хар икки қўшни синфлар устма-уст тушади, жамида 3та қўшни синфлар бор: $\{3k \mid k \in Z\}, \{3k + 1 \mid k \in Z\}, \{3k + 2 \mid k \in Z\}$.

92. Изоморфизмгача аниқликдаги барча а) 4 -, б) 6 -, в) 8 - тартибли группаларни топинг.

Ечиш.

а) 2 та группа - Z_4 ва $Z_2 \times Z_2$ (78 - га кўра),
б) 2 та группа - Z_6 ва учбурчак симметриясининг группаси,
в) 5 та группа - Z_8, $Z_4 \times Z_2$, $(Z_2 \times Z_2) \times Z_2$, квадрат симметриясининг группаси, ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ элементли кватернионлар группаси (кўпайтириш жадвали берилган).

•	*1*	*-1*	*i*	*-i*	*j*	*-j*	*k*	*-k*
1	*1*	*-1*	*i*	*-i*	*j*	*-j*	*k*	*-k*
-1	*-1*	*1*	*-i*	*i*	*-j*	*j*	*-k*	*k*
i	*I*	*-i*	*-1*	*1*	*k*	*-k*	*-j*	*j*
-I	*-i*	*i*	*1*	*-1*	*-k*	*k*	*j*	*-j*
j	*j*	*-j*	*-k*	*k*	*-1*	*1*	*i*	*-i*
-j	*-j*	*j*	*k*	*-k*	*1*	*-1*	*-i*	*i*
k	*k*	*-k*	*j*	*-j*	*-i*	*i*	*-1*	*1*
-k	*-k*	*k*	*-j*	*j*	*i*	*-i*	*1*	*-1*

Таянч иборалар:

Чап қўшни синф, ўнг қўшни синф, группанинг қисм группа бўйича чап ва ўнг ёйилмаси.

Назорат учун саволлар.

81. Чап (ўнг) қўшни синф деб нимага айтилади?
82. Группанинг қисм группа бўйича чап (ўнг) ёйилмаси деганда нимани тушунасиз?

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

8.1. H G группанинг қисм группаси экани маълум бўлса ва $x \in$H бўлса, x H = H x = H эканини исботланг.
8.2. Квадратни айлантиришлар группасини H={e,a} қисм группа бўйича чап ва ўнг қўшни синфларга ёйилмасини топинг, бунда a-диоганалга нисбатан симметрияси.
8.3. Ихтиёрий G нинг ўз бўйича ёйилмаси қандай элементлардан иборат бўлган қисм группаси ва G нинг ўзи бўйича ёйилмаси қандай элементлардан иборат бўлади ?
8.4. A_4 - группанинг B = { e, (123), (132) } қисм группаси бўйича чап қўшни синфларни топинг.
8.5. Группа 4 та элементдан иборат, улардан фақат биттаси 4-тартибли бўлса, группадаги қолган элементларнинг тартиби қандай ва бу группа нечта қисм группага эга бўлади ?
8.6. 17 элементли группа нечта қисм группага эга бўлади ?
8.7. 5-ёки ундан кичик тартибли ихтиёрий группа абель группаси эканини исботланг.
8.8. Агар H G группанинг қисм группанинг қисм группаси эса G группанинг қандайдир элементи бўлса, у ҳолда $H_x=xHx^{-1}$ кўринишдаги барча қисм группаларни топинг, бунда H- квадратни айлантиришлар группаси.
8.9. Қўшни синфларни топинг:

а) Бутун сонлар аддитив группасининг n Z, n $\in$N қисм группаси бўйича

б) ҳақиқий сонлар аддатив группасининг бутун сонлар қисм группаси бўйича

в) Текисликдаги координита бошидан ўтувчи векторлар аддитив группасининг Ox ўқда ётувчи векторлар қисм группаси бўйича

8.10. 2 к- тартибли G группанинг к-тартибли қисм группаси *G* группа барча элементларининг квадратларидан иборат эканини исботланг.

№ 9-Мавзу
Ички автоморфизмлар.

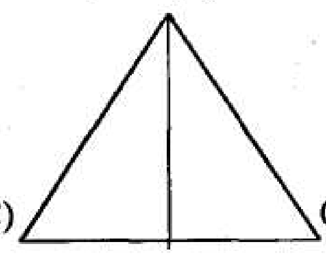
Р е ж а.

1. Группани ўзини ўзига ўтказувчи акслантириш.
2. Ички автоморфизмлар.

Мисолдан бошлаймиз. Мунтазам учбурчак симметриясининг группасини қараймиз. Агар учбурчакнинг учларини A,B,C билан белгиласак, у ҳолда бу группанинг ҳар бир элементи учта ҳарф A,B,C ларнинг ўрин алмашиши орқали бир қийматини аниқланади. Масалан, A учидан BC томонга туширилган баландликка нисбатан симметрия $\begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}$ кўринишида ёзилади. Учбурчак симметриясининг группасидаги иккита элементни кўпайтириш учун биринчи ўрин алмаштиришни иккинчисидан кейин бажариш керак бўлади. Бу холда, учбурчак симметриясининг группаси ва учта харф A,B,C ларнинг ўрин алмаштиришлар группаси ўртасида ўрнатилган изоморфизмга эга бўламиз. Бу изоморфизм бир қийматли аниқланмаганлигини таъкидлаймиз: у учбурчакнинг айнан қайси учини A билан, қайси учини B ва C билан белгилашимизга боғлик. Учбурчак учларини белгилашнинг ўзини ҳам A, B, C харфларнинг ўрин алмашиши сифатида қараш мумкин. Масалан, $g=\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$ учларни қуйидагича янги белгилашни мос қўяди:

Олдинги белгилаш	A	B	C
Янги белгилаш	B	C	A

Учларни янгича белгилашга кўра, учбурчак симметриясининг группасидаги ҳар бир элемент A, B, C ҳарфларнинг ўрин алмашиши кўринишидаги янги белгилашга эга бўлади. Масалан, вертикал баландлик бўйича учбурчак симметрияси қуйидагича белгиланади (6-расм): олдинги белгилаш $\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$ янги белгилаш $\begin{pmatrix} ABC \\ CBA \end{pmatrix}$



6 - расм

93. Учбурчак симметрияси группасининг элементларини қараймиз, унинг учларини қандайдир усулда белгилашга h ўрнига қўйиш мос келсин. Учбурчак учларини g кўринишда белгилаганда учбурчак симметрияси группасининг худди шу элементига қандай ўрнига қўйиш мос келади?

Ечиш.

Янги белгилашдаги А учни оламиз. У холда олдинги белгилаш g^{-1}(A) бўлади. Кўрсатилган алмаштиришлар бажарилгандан сўнг, бу уч олдинги белгиланиши $h\ g^{-1}$(A), янги белгиланиши $g\ h\ g^{-1}$ (A) бўлган учга ўтади. Худди шу каби, янги белгилашдан сўнг, В уч $g\ h\ g^{-1}$(B) га С уч эса $g\ h\ g^{-1}$ (C) га ўтади. Бундан, янги белгилаш бўйича бу алмаштиришга $g\ h\ g^{-1}$ ўрнига қўйиш мос келиши келиб чиқади.

Жавоб: $g\ h\ g^{-1}$.

"янгича белгилаш" қуйидаги таърифни киритишга олиб келади.

Таъриф. G группа, g - унинг элементи бўлсин. G ***группани ўзини ўзига ўтказувчи*** φ_g ***акслантириш***ни қуйидагича аниқлаймиз:

$\varphi_g(h) = ghg^{-1}$ (бунда h группанинг ихтиёрий элементи).

Бу акслантириш g элементдан тузилган G группанинг ***ички автоморфизми*** дейилади.

94. Группанинг ички автоморфизми группани ўзини ўзига ўтказувчи изоморфизм бўлишини исботланг.

Исботи.

$g\ h\ g^{-1} = h_1$ бўлади фақат ва фақат шу холдаки, қачонки $h = g^{-1}\ h_1 g$ бўлса. Шунинг учун φ_g акслантириш натижасида h_1 элементнинг асли мавжуд ва ягона бўлади. Бундан $\varphi_g(h) = g\ h\ g^{-1}$ акслантириш группани ўзини ўзига ўтказувчи ўзаро бир қийматли акслантириш эканлиги келиб чиқади.

Бундан ташқари,

$\varphi_g(h_1 h_2) = g\ (h_1 h_2) g^{-1} = g\ h_1\ (g^{-1}\ g\ ) h_2 g^{-1} = (g\ h_1 g^{-1}\ )\ (g\ h_2 g^{-1}\ ) = \varphi_g(h_1)\ \varphi_g(h_2)$.

Шунинг учун φ - изоморфизм бўлади. ***Исбот бўлди***

95. Учбурчак симметриясининг группасидаги барча мумкин бўлган ички автоморфизмлар натижасида баландликларга нисбатан симметриялар қайси элементларга ўтади?

Ечиш.

Баландликларга нисбатан симметриялар:

$$c = \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} ABC \\ CBA \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} ABC \\ BAC \end{pmatrix},$$

1) $\varphi_a(c) = a\ c\ a^{-1}$ = (BCA) (ACB) (CAB) = (CBA) (CAB) = (BAC) = f

2) $\varphi_b(c) = b\ c\ b^{-1}$ = (CAB) (ACB) (BCA) = (BAC) (BCA) = (CBA) = d

3) $\varphi_c(c) = c\,c\,c^{-1} = a\,c^{-1} = a\,c = c$
4) $\varphi_d(c) = d\,c\,d^{-1} = b\,d = f$
5) $\varphi_f(c) = f\,c\,f^{-1} = a\,f = d$
6) $\varphi_a(d) = a\,d\,a^{-1} = c\,b = f$
7) $\varphi_b(d) = b\,d\,b^{-1} = f\,a = c$
8) $\varphi_c(d) = c\,d\,c^{-1} = a\,c = f$
9) $\varphi_d(d) = d\,d\,d^{-1} = b\,d = d$
10) $\varphi_f(c) = f\,d\,f^{-1} = c$
11) $\varphi_a(f) = a\,f\,a^{-1} = c$
12) $\varphi_b(f) = b\,f\,b^{-1} = d$
13) $\varphi_c(f) = c\,f\,c^{-1} = d$
14) $\varphi_d(f) = d\,f\,d^{-1} = c$
15) $\varphi_f(f) = f\,f\,f^{-1} = f$

Жавоб: Ҳамма баландлик симметрияларига.

96. Учбурчак симметриясининг группасидаги мумкин бўлган ички автоморфизмлар натижасида учбурчакни 120^0 га айлантириш қайси элементларга ўтади?

Ечиш: $$a = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix},$$

1) $\varphi_a(a) = a\,a\,a^{-1} = b\,b = a$
2) $\varphi_b(a) = b\,a\,b^{-1} = e\,a = a$
3) $\varphi_c(a) = c\,a\,c^{-1} = d\,c = b$
4) $\varphi_d(a) = d\,a\,d^{-1} = b$
5) $\varphi_f(a) = f\,a\,f^{-1} = b$
6) $\varphi_e(a) = e\,a\,e^{-1} = a$

Жавоб: a - 120^0 га, b - 240^0 га айлантиришга ўтади.

97. Тетраэдр симметриясининг группасидаги ички автоморфизм ёрдамида кайси 2 та элементни бир - бирига ўтказиш мумкин, кайси 2 та элементни эса йўқ? Бу масала тетраэдрни айлантиришлар группаси учун қандай ҳал этилади?

Жавоб. Тетраэдр симметрияси группасининг барча элеметларини қуйидаги синфларга ажратамиз: 1) e ; 2) баландликлар атрофидаги e дан фарқли барча айлантиришлар; 3) қарама - қарши қирранинг ўртасидан ўтган ук атрофида 180^0 га айлантириш; 4) қайсидир қирра ва унинг қаршисидаги қирранинг ўртасидан ўтган текисликка нисбатан симметрия; 5) учларнинг циклик ўрин алмашинишидан ҳосил бўладиган барча айлантиришлар (масалан, $\begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix}$). У холда тетраэдр симметриясининг группасидаги 2 та элемент ички автоморфизм натижасида бир - бирига ўтиши мумкин фақат ва фақат шу ҳолдаки, қачонки, улар битта синфда ётсалар.

Тетраэдрни айланишлар группасида 4) ва 5) синфлар бўлмайди, 2) синф 2 та қисм синфларга ажралади: 2а) баландлик атрофида соат стрелкасига қарама - қарши йўналишда 120^0 га айлантиришлар; 2б) баландлик атрофидаги ҳамма 240^0 га айлантиришлар.

98. Ихтиёрий группада $a\ b$ ва $b\ a$ элементларнинг тартиби тенг эканини исботланг.

Исботи.

$\varphi_b(a\ b) = b\ (a\ b)\ b^{-1} = b\ a$. (94 га кўра) φ_b - изоморфизм бўлгани учун ab ва ba элементлар бир хил тартибли бўлади (49 - га кўра).

Шуни таъкидлаш керакки, группанинг ихтиёрий ички автоморфизмида (ихтиёрий изоморфизм каби) унинг ҳар бир қисм группаси, умуман олганда, бутунлай бошқа группага ўтади (масалан учбурчакнинг битта баландлигига нисбатан симметрияси бошқа баландликка нисбатан симметриясига ўтади). Лекин, айрим "махсус симметрик" қисм группалар ички автоморфизм натижасида ўз ўрнида қолади (масалан, учбурчак симметрияси группасининг учбурчакни айлантиришлар қисм группасида). Бундай қисм группаларни биз кейинги мавзуларда кўриб чиқамиз.

Таянч иборалар:

Акслантириш, группани ўзини ўзига ўтказувчи акслантиришлар, ички автоморфизмлар.

Назорат учун саволлар.

9.1 Акслантириш нима?
9.2. Группани ўзини ўзига ўтказувчи акслантириш нима?
9.3. Группаларнинг изоморфизми ва гомоморфизми деганда нимани тушунасиз?
9.4. Ички автоморфизм деб нимага айтилади?

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

9.1. Ихтиёрий қисм группанинг барча автоморфизмлари тўплами композиция амалига нисбатан группа ташкил қилишини исботланг.
9.2. φ: $x \to a\ x\ a^{-1}$, $a \in G$ акслантириш группада ички автоморфизм бўлишини исботланг.
9.3. а).Z б) Z_p группаларнинг ички автоморфизмлари группасини топинг.
9.4. а) S_3 б) V_4 группаларнинг ички автоморфизмлари группасини топинг.
9.5. а) D_4 б) Q_8 группаларнинг ички автоморфизмлари группасини топинг.
9.6. а) 5-тартибли б) 6-тартибли циклик группанинг ички автоморфизмлари группасини топинг.

№ 10-Мавзу
Нормал қисм группалар.

Режа:

1. Ички автоморфизм, қўшни синфлар, нормал қисм группа.
2. Қисм группанинг нормал бўлишининг зарурий ва етарли шарти.
3. Нормал қисм группалар кесишмаси ва декарт кўпайтмасининг нормал қисм группа бўлишлиги.

Таъриф. Агар группанинг қисм группасига группанинг барча ички автоморфизмларини қўллаш натижасида яна ўзига аксланса, бу қисм группа группанинг **нормал қисм группаси** дейилади.
Бошқача қилиб айтганда, $\mathbf{G_1}$ группанинг $\mathbf{H}$ қисм группаси $\mathbf{G_1}$ да нормал қисм группа дейилади, агар $\forall\, a \in \mathbf{H}$ ва $\forall\, g \in \mathbf{G_1}$ элементлар учун $g\, a\, g^{-1}$ элемент $\mathbf{H}$ да ётса.

Шунинг учун учбурчак симметриясининг группасидаги айлантиришлар қисм группаси нормал қисм группа бўлади. **А** учидан **ВС** томонга тушурилган баландликка нисбатан симметриялар қисм группаси (2 элементдан иборат) эса учбурчак симметриясининг группасида нормал қисм группа бўлмайди.

99. Коммутатив группанинг ихтиёрий қисм группаси нормал қисм группа бўлишини исботланг.

Исботи.

G- коммутатив группа, **H** - унинг қисм группаси бўлсин. У холда $\forall\, a \in \mathbf{H}$ ва $\forall\, g \in \mathbf{G}$ элементлар учун $\varphi_g(a) = g\, a\, g^{-1} = a\, g\, g^{-1}$ (группа коммутатив бўлгани учун) $= a \in \mathbf{H}$. Демак, $\varphi_g(a) \in \mathbf{H}$ ва **H** - нормал қисм группа экан. *Исбот бўлди*

100. Квадрат симметриясининг группасидаги иккита элементли $\{e, a\}$ - марказий симметрия қисм группаси нормал қисм группа бўладими (3-, 4- мисоллар) ?

Ечиш.

Квадрат симметриясининг группаси: $\mathbf{G} = \{ e, a, b, c, d, f, g, h \}$.

Қисм группа: $\mathbf{H} = \{ e, a \}$.

1). $\varphi_e(e) = e \in \mathbf{H}$,
2). $\varphi_e(a) = a \in \mathbf{H}$,
3). $\varphi_a(e) = a\, e\, a^{-1} = e \in \mathbf{H}$,
4). $\varphi_a(a) = a\, a\, a^{-1} = a\, e = a \in \mathbf{H}$,
5). $\varphi_b(e) = b\, e\, b^{-1} = e \in \mathbf{H}$,
6). $\varphi_b(a) = b\, a\, b^{-1} = c\, a = b \in \mathbf{H}$,
7). $\varphi_c(e) = e \in \mathbf{H}$,
8). $\varphi_d(e) = e \in \mathbf{H}$,
9). $\varphi_f(e) = e \in \mathbf{H}$
10). $\varphi_g(e) = e \in \mathbf{H}$,
11). $\varphi_h(e) = e \in \mathbf{H}$,
12). $\varphi_c(a) = c\, a\, c^{-1} = a \in \mathbf{H}$,
13). $\varphi_d(a) = d\, a\, d^{-1} = a \in \mathbf{H}$,
14). $\varphi_f(a) = f\, a\, f^{-1} = a \in \mathbf{H}$,
15). $\varphi_g(a) = g\, a\, g^{-1} = a \in \mathbf{H}$,
16). $\varphi_h(a) = h\, a\, h^{-1} = a \in \mathbf{H}$.

Демак, **H** **G** группа учун нормал қисм группа бўлади.

Агар, $\forall$ **g** $\in$ **G** элемент ва **H** қисм группа учун g **H** = **H** g бўлса у холда **H** нормал кисм группа бўлади. Бу юқоридаги мисол учун қуйидагича:

$$1)\ a\{e,a\} = \{a, e\} = \{e, a\}a = \{a, e\},$$
$$2)\ b\{e,a\} = \{b, c\} = \{e, a\}b = \{b, e\},$$
$$3)\ c\{e,a\} = \{c, b\} = \{e, a\}c = \{c, b\},$$
$$4)\ d\{e,a\} = \{d, f\} = \{e, a\}d = \{d, f\},$$
$$5)\ f\{e,a\} = \{f, d\} = \{e, a\}f = \{f, d\},$$
$$6)\ g\{e,a\} = \{g, h\} = \{e, a\}g = \{g, h\},$$
$$7)\ h\{e,a\} = \{h, g\} = \{e, a\}h = \{h, g\},$$

Теорема 2. **G** группанинг **N** кисм группаси нормал қисм группа бўлиши учун **N** бўйича чап ва ўнг қўшни синфлар устма-уст тушиши зарур ва етарли.

101. Теорема 2 ни исботланг.

Исботи.

G - группа, **N** - унинг қисм группаси бўлсин. **N** - нормал қисм группа бўлиши учун $\forall g \in$ **G** учун g **N** = **N** g бўлиши зарур ва етарли эканини исботлаймиз.

1) Зарурлиги. **N** - **G** группа учун нормал қисм группа бўлсин. **G** группанинг ихтиёрий g элементи учун g **N** = **N** g эканини исботлаймиз.

$g\,a$ - g **N** синфнинг ихтиёрий элементи бўлсин. У холда $gag^{-1}=b$ бўлади, бунда b - **N** нинг қандайдир элементи. Шунинг учун $g\,a = b\,g$ ($g\,a\,g^{-1}g = b\,g$). Бундан, $g\,a$ (ва демак, бутун g **N** синф) элементлар **N**g синфда ётиши келиб чиқади. Энди $c\,g$ - **N**g синфнинг ихтиёрий элементи бўлсин. У холда $(g^{-1})\,c\,(g^{-1})^{-1} = d$ бўлади, бу ерда d - **N** нинг қандайдир элементи. Бундан $c\,g = g\,d$ келиб чиқади ва $c\,g$ (ва демак бутун **N** g синф) элементлар g **N** да ётиши келиб чиқади. Шундай қилиб, g **N** = **N** g синфлар устма-уст тушади.

2) Етарлилиги. Энди g **N** = **N** g, яъни чап ва ўнг қўшни синфлар устма-уст тушсин ва a - **N** нинг ихтиёрий элементи, g - **G** группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. g **N** ва **N** g синфлар умумий g элементга эга бўлгани учун улар устма-уст тушади. Шунинг учун g **N** га тегишли бўлган $g\,a$ элемент **N** g да ҳам ётади, яъни **N** да шундай b элемент мавжуд бўладики, $g\,a = b\,g$ бўлади. Бундан, $g\,a\,g^{-1} = b$ элементнинг **N** да ётиши келиб чиқади, демак, **N** - **G** группа учун нормал қисм группа экан. ***Исбот бўлди***

102. n - **G** группанинг тартиби бўлсин, m - **H** қисм группанинг тартиби ва $m = n/_2$ бўлсин. **H** - **G** нинг нормал қисм группаси бўлишини исботланг.

Исботи.

Қисм группанинг элементлари сони $n/_2$ бўлгани учун группанинг бу қисм группа бўйича ўнг ва чап қўшни синфларга ёйилмасида фақат иккита синф бўлади, улардан биринчиси шу қисм группанинг ўзи бўлса иккинчиси бу қисм группага кирмаган группанинг барча элементларидан ташкил топган синф бўлади. Демак группанинг бу қисм группа бўйича ўнг ва чап қўшни синфларга ёйилмаси устма уст тушади ва 2- теоремага асосан бу қисм группа нормал қисм группа бўлади. ***Исбот бўлди***

103. Қандайдир **G** группанинг ихтиёрий сондаги нормал қисм группаларининг кесишмаси яна нормал қисм группа бўлишини исботланг.

Исботи.

$N_1, N_2, \dots, N_5$ - **G** группанинг нормал қисм группалари ва **N** уларнинг кесишмаси бўлсин. Агар a - **N** даги ихтиёрий элемент бўлса, у холда a барча N_i ларга тегишли бўлади. Шунинг учун агар g - **G** группанинг ихтиёрий элементи бўлса, у холда $g\,a\,g^{-1}$ элемент барча N_i ларда ва шунинг учун, **N** да ҳам ётади. Демак, **N** - **G** группада нормал қисм группа экан. ***Исбот бўлди***

104. **G** группанинг хамма элементлари билан ўрин алмашинувчи элементлар тўплами **G** группанинг маркази дейилади. Марказ - қисм группа, бундан ташқари, нормал қисм группа бўлишини исботланг.

Исботи.

g - **G** группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. $g\,e = e\,g$ бўлгани учун e - марказда ётади. Агар a элемент марказда ётса, у холда $ga=ag$ бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини ўнгдан ва чапдан a^{-1} га кўпайтирамиз: $g\,a^{-1} = a^{-1}\,g$ Шунинг учун a^{-1} элемент ҳам марказда ётади. Агар a ва b лар марказда ётсалар, у холда $g\,a = a\,g$ ва $b\,g = g\,b$ бўлади. Шунинг учун $g\,(a\,b) = (g\,a)\,b = a\,(g\,b) = (a\,b)\,g$ ва демак, $a\,b$ ҳам марказда ётади. Бундан, 57- мисолга кўра, марказ қисм группа экани келиб чиқади.

a - марказнинг ихтиёрий элементи ва g - **G** группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. У холда $g\,a\,g^{-1} = a\,g\,g^{-1} = a$ элемент ҳам марказда ётади. Шунинг учун марказ - нормал қисм группа бўлади.

Исбот бўлди.

105. N_1 ва N_2 - мос равишда G_1 ва G_2 группаларнинг нормал қисм группаси бўлсин. $N_1 \times N_2$ - $G_1 \times G_2$ группанинг нормал қисм группаси бўлишини исботланг.

Исботи.

1- усул. $\mathbf{G_1 \times G_2} = \{<g_1 g_2> \mid g_1 \in \mathbf{G_1}, g_2 \in \mathbf{G_2}\} \wedge <g_1 g_2> \bullet <g'_1 g'_2> =$
$= < g_1 \cdot g_1', g_2 \circ g_2'>$ эди.

$\forall <g_1 g_2> \in \mathbf{G_1 \times G_2}$ оламиз ва $<g_1, g_2> \bullet \mathbf{N_1 \times N_2} = \mathbf{N_1 \times N_2} \bullet < g_1 g_2>$ эканини кўрсатамиз.

1- дан: $\mathbf{N_1 \times N_2}$ - $\mathbf{G_1 \times G_2}$ га қисм группа. Чунки,

а) агар $<m_1, n_1>$ ва $< m_2, n_2> \in \mathbf{N_1 \times N_2}$ бўлса, $<m_1, n_1> \bullet <m_2, n_2> = <m_1 \cdot m_2, n_1 \circ n_2> = < m, n> \in \mathbf{N_1 \times N_2}$ келиб чиқади.

б) агар $<e_1, e_{22}> \in \mathbf{G_1 \times G_2}$ - группанинг бирлик элементи бўлса, у ҳолда $<e_1, e_2> \in \mathbf{N_1 \times N_2}$ бўлади, чунки $\mathbf{N_1}$ ва $\mathbf{N_2}$ лар мос равишда $\mathbf{G_1}$ ва $\mathbf{G_2}$ группаларга қисм группалардир.

в) агар $<g_1^{-1}, g_2^{-1}> \in \mathbf{G_1 \times G_2}$ - группанинг $<g_1 g_2> \in \mathbf{N_1 \times N_2}$ элементига қарама-қарши элементи бўлса, $<g_1^{-1}, g_2^{-1}> \in \mathbf{N_1 \times N_2}$ бўлади, чунки $\mathbf{N_1}$ ва $\mathbf{N_2}$ лар мос равишда $\mathbf{G_1}$ ва $\mathbf{G_2}$ ларнинг қисм группаси.

2 - дан: $\forall <m,n> \in \mathbf{N_1 \times N_2}$ учун $<g_1, g_2> \bullet \mathbf{N_1 \times N_2} =$
$\mathbf{N_1 \times N_2} \bullet <g_1 g_2>$ ($\mathbf{N_1}$ ва $\mathbf{N_2}$ лар мос равишда $\mathbf{G_1}$ ва $\mathbf{G_2}$ га нормал қисм группа бўлгани учун) $<g_1 g_2>$ ва $<m,n>$ лар ихтиёрий элементлар бўлгани учун $\mathbf{N_1 \times N_2}$ - $\mathbf{G_1 \times G_2}$ группа учун нормал қисм группа бўлади.

2- усул. h_1 ва h_2 лар мос равишда $\mathbf{N_1}$ ва $\mathbf{N_2}$ группаларнинг, g_1 ва g_2 лар эса мос равишда $\mathbf{G_1}$ ва $\mathbf{G_2}$ группаларнинг ихтиёрий элементлари бўлсин. У холда $g_1\, h_1\, g_1^{-1}$ элемент $\mathbf{N_1}$ да ётади, $g_2\, h_2\, g_2^{-1}$ элемент эса $\mathbf{N_2}$ да ётади. Шунинг учун

$$<g_1 g_2> \bullet <h_1 h_2> \bullet <g_1 g_2>^{-1} = <g_1 \cdot h_1 g_2 \circ h_2> \bullet <g_1^{-1} g_2^{-1}> =$$

$< g_1 \cdot h_1 \cdot g_1^{-1}, g_2 \circ h_2 \circ g_2^{-1}>$ элемент $\mathbf{N_1 \times N_2}$ да ётади.

Бундан $\mathbf{N_1 \times N_2}$ - $\mathbf{G_1 \times G_2}$ группа учун нормал қисм группа экани келиб чиқади. ***Исбот бўлди***

Қуйидаги мисолдан кўринадики, **G группа нормал қисм группасининг нормал қисм группаси G га нормал қисм группа бўлмаслиги мумкин.**

Мисол 11. Квадратнинг симметриялари группасидаги унинг маркази ва диагоналларига нисбатан симметрияларидан тузилган қисм группасини қарайлик (3-, 4- мисолларга қаранг, $\{ e, a, d, f \}$- қисм группа). Бу қисм группадаги элементлар сони квадратнинг симметриялари группасидаги элементлар сонининг ярмига тенг бўлгани учун у бу группага нормал қисм группа бўлади (102 га кўра).

$\{ e,d \}$- битта диагоналга нисбатан қисм симметриядан иборат бўлган қисм группа элементларининг сони $\{ e, a, d, f \}$- қисм группа элементлари сонининг ярмига тенг бўлганлиги учун у ҳам $\{ e, a, d, f \}$-

қисм группа учун нормал қисм группа бўлади. Лекин, { e, d } - қисм группа квадратнинг симметриялари группасига нормал қисм группа бўлмайди, чунки ички автоморфизм натижасида d бошқа диагоналга нисбатан симметрияга ўтади: $b\, d\, b^{-1} = f$.

Таянч иборалар:

Қўшни синфлар, нормал қисм группалар, группанинг маркази.

Назорат учун саволлар.

10.1. Қўшни синфлар нима?

10.2. Қандай қисм группани нормал қисм группа дейилади?

10.3. Группанинг маркази нима?

Мустақил ишлаш учун мисоллар.

10.1. $\mathbf{S_3}$ - симметрик группанинг қисм группалари ичидан қайси бирлари нормал қисм группа бўлади?

10.2. 2 индексли ихтиёрий қисм группа нормал қисм группа бўлишини исботланг.

10.3. G группанинг унинг a элементи билан ўрин алмашинувчи элементларидан тузилган тўплам N(a) {a} - циклик, нормал қисм группани ўз ичига олувчи G группанинг қисм группаси (G да a - нормаллаштирувчи) бўлишини исботланг.

10.4. G группанинг унинг a элементи билан қўшма бўлган элементлари сони G нинг N(a) нормаллаштирувчисининг индексига тенг бўлишини исботланг.

10.5. p^n - тартибли G группанинг маркази биттадан ортиқ элементга эга бўлишини исботланг, бунда p - туб сон.

10.6. Даражаси $n \geq 5$ бўлган ишораси алмашинувчи $\mathbf{A}_n$ группанинг камида битта учлик циклни ўз ичига олувчи ихтиёрий нормал бўлувчиси $\mathbf{A}_n$ билан устма-уст тушишини исботланг.

10.7. G - уч ўлчовли фазодаги барча ҳаракатлар группаси, H - параллел кўчиришлар қисм группаси, K - берилган нуқта атрофидаги айлантиришлар группаси бўлсин. H - G группага нормал қисм группа бўлишини, K эса нормал қисм группа бўлмаслигини исботланг.

10.8. G нинг чекли j индексли H - нормал қисм группаси G нинг тартиби j билан ўзаро туб бўлган барча элементларини ўз ичига олишини исботланг. H - кисм группа нормал қисм группа бўлмаган холда юқоридаги тасдиқ ўринли бўлмаслигини мисолда кўрсатинг.

№ 11-Мавзу
Фактор группалар.

Режа:

1. Қўшни синфлар тўплами ва унда бинар амал аниқлаш.
2. Фактор группа.
3. Фактор группага мисоллар.

Квадратнинг симметриялари группасини e ва a - марказий симметриялардан тузилган нормал қисм группа бўйича ёйилмасини кўрамиз (3-, 4- мисолларга қаранг!). Равшанки, бу группанинг тўртта қўшни синфларга ёйилмаси 8- жадвалда кўрсатилганидек бўлади.

e	b	d	g
a	c	f	h
E	A	B	C

8- жадвал

Хар бир қўшни синфни қандайдир ҳарфлар билан, масалан, E, A, B, C билан белгилаймиз. Агар A синфнинг ихтиёрий элементини B синфнинг иҳтиёрий элементига кўпайтирсак, натижа A ва B синфлардан қандай элементлар олинишидан қатъий назар C синфда ётади. Қуйидаги масаланинг ечими кўрсатадики, бу хол тасодиф эмас.

106. G группанинг N нормал қисм группаси бўйича қўшни синфларга ёйилмаси мавжуд бўлсин ва x_1, x_2 элементлар битта қўшни синфда ҳамда y_1, y_2 элементлар ҳам (бошқа)битта қўшни синфда ётса, у ҳолда x_1y_1 ва x_2y_2 элементлар ҳам битта қўшни синфда ётишини исботланг.

Исботи.

Шартга кўра, x_1 элемент x_1 N синфда ётгани учун, x_2 элемент ҳам x_1 N синфда ётади. Демак, N да шундай h_1 элемент мавжудки, $x_2 = x_1 h_1$ бўлади. Худди шу каби, N да шундай h_2 элемент ҳам мавжудки, $y_2=y_1h_2$ бўлади. N- нормал қисм группа бўлгани учун N y_1 = y_1 N бўлади. Шунинг учун N да шундай h_3 элемент мавжуд бўладики, $h_1y_1=y_1h_3$ бўлади. У холда $x_2y_2 = x_1 h_1 y_1 h_2 = x_1 y_1 h_3 h_2$ бўлади. $h_3 h_2$ элемент N га тегишли бўлгани учун, $x_1 y_1$ ва $x_2 y_2$ лар битта қўшни синф - $x_1 y_1$ N да ётади. ***Исбот бўлди***

Шундай килиб, иккита қўшни синфдан элементлар олиб, уларни кўрсатилган тартибда ўзаро кўпайтирсак, бу синфлардан қандай элементлар танлаб олинишидан қатьий назар, битта қўшни синф элементларига эга бўлаверамиз. Бундан, группанинг N нормал қисм группа бўйича ёйилмасидан хосил бўлган қўшни синфлар тўпламида бинар амални қуйидагича аниқлаш мумкин бўлади: агар A = x N, B = y N бўлса, у холда A∗B = (x y) N бўлади. 106 - масаланинг натижаси шуни кўрсатадики, бу бинар амал бир қийматли аниқланган ҳамда у A ва B қўшни синфларни хосил қилувчи x ва y элементларнинг танланишига боғлик эмас. Шундай экан, юқорида келтирилган масалада A∗B= C бўлади. Қуйидаги 107 - 109 масалалар группаларнинг нормал қисм группалар бўйича ёйилмаларига бағишланган.

107. T_1, T_2, T_3 - қўшни синфлар бўлсин. $(T_1\ T_2)\ T_3 = T_1\ (T_2\ T_3)$ эканини исботланг.

Исботи.

а, в, с лар мос равишда T_1, T_2, T_3 қўшни синфларнинг ихтиёрий элементлари бўлсин. Қўшни синфларни кўпайтириш қоидасига кўра, $(T_1\ T_2)\ T_3$ ва $T_1\ (T_2\ T_3)$ - лар мос холда *(а в)с* ва *а (в с)* элементларни ўз ичига олган қўшни синфлар бўлади. *(а в) с = а (в с)* бўлгани учун $(T_1\ T_2)\ T_3 = T_1\ (T_2\ T_3)$ бўлади. ***Исбот бўлди***

108. Нормал қисм группани E билан белгилайлик. У холда ихтиёрий T - қўшни синф учун E T = T E = T эканини исботланг.

Исботи.

E - бирлик элемент e ни ўз ичига олган нормал қўисм группа бўлгани учун T қўшни синфдан ихтиёрий a элемент олсак, қўшни синфларни кўпайтириш қоидасига кўра ҳамда e ва a лар группанинг элементлари бўлгани учун $e\ a = a\ e = a$ тенглик ўринли бўлади. a - T қўшни синфнинг ихтиёрий элементи бўлгани учун E T = T E = T тенглик ўринли бўлади. ***Исбот бўлди***

109. Ихтиёрий T - қўшни синф учун шундай T^{-1} синф топиладики, $TT^{-1} = T^{-1}\ T$ = E бўлади.

Исботи.

a - T қўшни синфнинг ихтиёрий элементи бўлсин. T^{-1} синф сифатида a^{-1} элементни ўз ичига олувчи қўшни синфни оламиз. У холда $T\ T^{-1}$ синф $a\ a^{-1}$ ни, $T^{-1}\ T$ эса $a^{-1}\ a$ ни ўз ичига олади. a ва a^{-1} - группанинг элементлари бўлгани учун $a\ a^{-1} = a^{-1}\ a = e$ бўлади. e элемент эса E нормал қисм группанинг таркибига киради. Демак, $T\ T^{-1} = T^{-1}\ T$=E.

Исбот бўлди.

107 - 109 масалалардан кўринадики, қўшни синфлар тўплами юқорида аниқланган бинар амалга нисбатан группа ташкил қилади. Бу группа нормал қисм группага нисбатан ***фактор группа*** дейилади ва **G/N** каби белгиланади. Равшанки, $G/\{e\} \cong G$ ва $G/G \cong \{e\}$

Яна шу равшанки, агар n - **G** группанинг тартиби, m эса **N**-нормал қисм группанинг тартиби бўлса у холда **G/N** фактор - группанинг тартиби n/m- натурал сонга тенг бўлади. Масалан, квадрат симметрияси группасининг марказий симметрия қисм группасига нисбатан фактор группаси тўртта элементдан иборат.

110. Квадрат симметрияси группасининг $\mathbf{N} = \{e,a\}$ марказий симметриялар қисм группаси бўйича фактор группаси **квадратнинг айлантиришлар группаси ёки ромбнинг симметриялари группасига изоморф бўладими?**

Ечиш.

Буни исботлаш учун квадратнинг айлантиришлар группасини **N** буйича фактор группасини карасак ундаги A, B, C синфлар учун $\mathbf{A^2 = B^2 = C^2 = E}$ эканлигини курамиз. Бу эса 4-ва 6- мисолларнинг натижасига кура ва $\mathbf{AB = C}$ эканини эътиборга олсак талаб этилган хулосани тугри эканини курамиз. ***Исбот булди***

111. Қуйидаги группаларнинг барча нормал қисм группалари ва улар бўйича фактор группаларни топинг (бу ва бундан кейинги масалаларда фактор группани топиш талаб қилинганда изланаётган фактор группага изоморф бўлган группани аниқлаш талаб қилинади):

а) учбурчак симметриясининг группаси. б) $\mathbf{Z_2 \times Z_2}$,

в) квадрат симметриясининг группаси. г) кватернионлар группаси.

Ечиш.

а) $G=\{e, a, b, c, d, f\}$ группанинг қисм группалари: $H_1=\{e, a, b\}$, $H_2=\{e, c\}$, $H_3=\{e, d\}$, $H_4=\{e, f\}$, $H_5=\{e\}$, $H_6=G$ лардир.

1) H_1 ни текширамиз:

$\varphi_e(e) = e \in H_1$, $\varphi_e(a) = e\,a\,e^{-1} = a \in H_1$,

$\varphi_e(b) = e\,b\,e^{-1} = b \in H_1$, $\varphi_b(a) = b\,a\,b^{-1} = e\,a = a \in H_1$,

$\varphi_a(e) = a\,e\,a^{-1} = a\,b = e \in H_1$, $\varphi_b(b) = b\,b\,b^{-1} = a\,a = b \in H_1$,

$\varphi_a(a) = a\,a\,a^{-1} = b\,b = a \in H_1$, $\varphi_c(e) = c\,e\,c^{-1} = c\,c = e \in H_1$,

$\varphi_a(b) = a\,b a^{-1} = b\,b = b \in H_1$, $\varphi_c(a) = c\,a\,c^{-1} = d\,c = b \in H_1$,

$\varphi_b(e) = b\,e\,b^{-1} = b\,a = e \in H_1$, $\varphi_c(b) = c\,b\,c^{-1} = f\,c = a \in H_1$,

$\varphi_d(e) = d\,e\,d^{-1} = d\,d^{-1} = e \in H_1$, $\varphi_f(e) = f\,c\,f^{-1} = h\,c = d$,

$\varphi_d(a) = d\,a\,d^{-1} = f\,d = a \in H_1$, $\varphi_f(a) = f\,a\,f^{-1} = d\,f = a$,

$\varphi_d(b) = d\,b\,d^{-1} = h\,d = c \in H_1$, $\varphi_f(b) = f\,b\,f^{-1} = f\,g = c$.

2) 102- масалага кўра, H_2 - G нинг нормал қисм группаси бўлиши учун H_2 нинг тартиби $6/2 = 3$ га тенг бўлиши керак. H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 ларнинг тартиби $\neq 3$ бўлгани учун улар нормал қисм группа бўлмайди.

б) $\{e_1, c\}\times\{e_2, d\}$- берилган группа бўлсин. 99, 74, 75 - масалаларга кўра, нормал қисм группалар : 1) $\{(e_1, e_2), (c, e_2)\}$, 2) $\{(e_1, e_2), (e_1, d)\}$,

4) $\{(e_1, e_2), (c, d)\}$. ҳамма холларда ҳам фактор группалар Z_2 группага изоморф бўлади.

в) 3, 4 - масалалардаги белгилашдан фойдаланамиз. Агар квадрат симметриясининг группасидаги нормал қисм группа b ёки c элементни ўз ичига олса, у холда у бутун квадратни айлантиришлар кисм группасини ўз ичига олади. Унда $\{e, a, b, c\}$нормал қисм группага эга бўламизки (102 - га кўра), у бўйича тузилган фактор группа Z_2 дан иборат бўлади.

$b\ d\ b^{-1} = f$ ва $b\ f\ b^{-1} = d$ эди. Шунинг учун агар d, f элементлардан бири нормал қисм группа таркибига кирса, у холда иккинчиси ҳам шу нормал қисм группа таркибига киради. $d\ f = a$ бўлгани учун бу холда a элемент ҳам нормал қисм группа таркибига киради. Натижада $\{e, a, b, c\}$ нормал қисм группага эга бўламизки, у бўйича тузилган фактор группа Z_2 дан иборат бўлади.

Агар нормал қисм группа b, c, d, f, g, h элементларни ўз ичига олмаса, у холда у $\{e, a\}$ нормал қисм группа билан устма-уст тушадики, бу бўйича фактор группа $\mathbf{Z_2 \times Z_2}$ группага изоморф бўлади (100, 110 - ларга қаранг!).

Шундай қилиб, нормал қисм группалар: 1) $\{e, a, b, c\}$, 2) $\{e, a, d, f\}$, 3) $\{e, a, g, h\}$, 4) $\{e, a\}$. 1) - 3) холларда фактор группалар Z_2 группага, 4) холда $Z_2 \times Z_2$ группага изоморф бўлади.

г) $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ - берилган группа бўлсин. Агар h - 1 ва -1 дан фарқ қилувчи ихтиёрий элемент бўлса, у холда $h^2 = 1$ бўлади. Шунинг учун ихтиёрий нормал қисм группа ($\{1\}$дан ташкари) -1 элементни ўз ичига олади. Агар $\{1, -1\}$ элементлар билан чегаралансак, у холда биринчи нормал қисм группага эга бўламиз. У бўйича группанинг ёйилмаси 12 - жадвалда кўрсатилган.

1	i	j	k
-1	$-i$	$-j$	$-k$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ бўлгани учун $A^2 = B^2 = C^2 = E$ бўлади ва бу холда фактор группа $\mathbf{Z_2 \times Z_2}$ группага изоморф бўлади. -1 элемент ихтиёрий (тривиал бўлмаган) нормал қисм группа таркибига киргани учун i ва $-i$ элементлар нормал қисм группа таркибига ёки бир вақтда киради ёки бир вақтда кирмайди. Бу хусусият j ва $-j$ хамда k ва $-k$ лар учун ҳам ўринли бўлади. Кватернионлар группасидаги тривиал бўлмаган нормал қисм группа, Лагранж теоремасига кўра, факат 2 ёки 4 элементли бўлади. У холда биз яна учта нормал қисм группага эга бўламиз (102 - га қаранг!): $\{1, -1, i, -i\}$, $\{1, -1, j, -j\}$, $\{1, -1, k, -k\}$. Бу ҳолда фактор группа Z_2 га изоморф бўлади.

Шундай қилиб, нормал қисм группалар: $\{1, -1\}$,$\{1, -1, i, -i\}$, $\{1, -1, j, -j\}$, $\{1, -1, k, -k\}$. 1) холда фактор группа $Z_2 \times Z_2$ га, 2) - 4) холда эса Z_2 га изоморф бўлади.

112. а) $\mathbf{Z}_n$, б) $\mathbf{Z}$ группаларнинг барча нормал қисм группалари ва улар бўйича фактор группаларни топинг.

Ечиш.

99, 60 - масалаларга қаранг! $n = d\,k$ бўлсин. 13 - жадвалда $\mathbf{Z}_n = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ группанинг $\{e, a^d, a^{2d}, ..., a^{(k-1)d}\}$ қисм группа бўйича ёйилмаси кўрсатилган ($l = \overline{0, k-1}$).

a^{dl}	a^{dl+1}	a^{dl+2}	...	$a^{dl+(d-1)}$
E	A_1	A_2	...	A_{d-1}

a элемент A_1 синфда ётади ва E синфда ётувчи энг кичик мусбат m га мос келувчи a^m элемент d га тенг. Шунинг учун A_1 элементнинг фактор группада тартиби d га тенг ва демак, фактор группа $\mathbf{Z}_d$ га изоморф бўлади.

б) 99, 61 - масалаларга қаранг! 13 - жадвалда $\mathbf{Z}_n = \{..., a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ группанинг $\{..., a^{-2d}, a^{-d}, e, a^d, a^{2d}, ..., a^{(k-1)d}\}$ қисм группа бўйича ёйилмаси кўрсатилган ($l = 0, \pm 1, \pm 2, ...$). Худди а) холдаги каби, Z_d га изоморф бўлган фактор группага эга бўламиз.

113. Тетраэдрни айлантиришлар группасидаги барча нормал қисм группаларни ва улар бўйича фактор группаларни топинг.

Ечиш.

97-га қаранг! Қайсидир айлантиришлар тўплами ттетраэдрни айлантиришлар группасига нормал қисм группа бўлиши учун 97 - масаланинг ечимида (айлантиришлар группаси учун) тузилган бир нечта синфлардан иборат бўлиши ва у қўисм группа бўлиши керак. Агар нормал қисм группа (120^0 ёки 240^0) тетраэдрнинг қайсидир баландлигига нисбатан айлантиришларни ўз ичига олса, у холда у шу баландлик атрофидаги иккинчи айлантиришни ҳам ўз ичига олади ва демак, тетраэдрнинг барча баландлиги атрофидаги барча айлантиришларни ўз ичига олади. Агар $a = \begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix}$ ва $b = \begin{pmatrix} ABCD \\ CBDA \end{pmatrix}$ - мос ҳолда A ва B учлардан туширилган баландликлар атрофидаги айлантиришлар бўлса, у ҳолда $ab = \begin{pmatrix} ABCD \\ DCBA \end{pmatrix}$ - AD ва BC кирраларнинг ўртасидан ўтган ўқ атрофида 180^0 га айлантиришдан иборат бўлади. Шунинг учун бу ҳолда нормал қисм группа қарама-қарши қирраларнинг ўрталаридан ўтган ўқлар атрофидаги барча 180^0 га айлантиришларни ўз ичига олади ва у бутун тетраэдрни айлантиришлар группаси билан устма-уст тушади.

Шундай қилиб, тетраэдрни айлантиришлар группасида фақатгина битта (тривиал бўлмаган) нормал қисм группа мавжуд экан, у айний алмаштиришни ва учта қарама-қарши қирраларнинг ўрталаридан ўтган ўқлар атрофидаги 180^0 га айлантиришни ўз ичига олар экан. Бу нормал қисм группа бўйича фактор группа 3 та элементдан иборат бўлади ва демак, у $\mathbf{Z}_3$ га изоморф бўлади (50-га каранг!).

114. Группаларнинг $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ - **тўғри** кўпайтмасида $\mathbf{G}_1 \times \{e_2\}$ қисм группани қараймиз. Бу қисм группа нормал қисм группа эканини ва у бўйича тузилган фактор группа G_2 группага изоморф эканлигини исботланг.

Исботи.

(e_1,e_2)- $G_1 \times G_2$ группадаги ихтиёрий элемент ва (g_3,e_2) - $G_1 \times \{e_2\}$ қисм группадаги ихтиёрий элемент бўлсин.

У холда $(g_1,g_2) \bullet (g_3,e_2) \bullet (g_3,e_2)^{-1}$ = (69 - масаланинг ечимига қаранг!) = = $(g_1 \bullet g_3, g_2) \bullet (g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 \bullet g_3 \bullet g_1^{-1}, e_2)$ элемент $G_1 \times \{e_2\}$ да ётади. Шунинг учун $G_1 \times \{e_2\}$ - $G_1 \times G_2$ группа учун нормал қисм группа бўлади.

(g_1,a) - $G_1 \times G_2$ группадаги ихтиёрий элемент бўлсин. Бу элемент $G_1 \times \{e_2\}$ нормал қисм группа бўйича қандай қўшни синфларни хосил қилишини кўрамиз. Агар (g_1,a) элементни $G_1 \times \{e_2\}$ нормал қисм группанинг барча элементига кўпайтирсак (масалан, чапдан), у холда барча (g,a) кўринишдаги элементларни хосил қиламиз, бунда g - G_1 группанинг барча элементлари.

Бу қўшни синфни T_a билан белгилайлик. У холда $G_1 \times \{e_2\}$ нормал қисм группа қўшни синфлар - T_a кўринишдаги синфлар бўлади, бунда a - G_2 группанинг барча элементлари. (e_1, a), (e_1, b) ва $(e_1, a \bullet b)$ лар мос равишда T_a, T_b, $T_{a \bullet b}$ синфларда ётса ва
$(e_1, a) \bullet (e_1, b) = (e_1, a \bullet b)$ бўлса, у холда $T_a \bullet T_b = T_{a \bullet b}$ бўлади. G_2 ва хосил қилинган фактор группа ўртасидаги ўзаро бир қийматли акслантириш φ ни G_2 нинг ихтиёрий a элементи учун $\varphi(a) = T_a$ каби танласак, у изоморфизм бўлади, чунки, $\varphi(a \bullet b) = T_{a \bullet b} = T_a \bullet T_b = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$.

Шундай қилиб, $G_1 \times G_2$ группанинг $G_1 \times \{e_2\}$ нормал қисм группа бўйича фактор группаси G_2 группага изоморф экан.

Таянч иборалар:

Нормал қисм группа, қўшни синфлар тўплами, фактор группа.

Назорат учун саволлар.

11.1. Нормал қисм группа нима?

11.2. Қўшни синфлар тўплами нима, унда амал қандай аниқланган?

11.3. Фактор группа деганда нимани тушунасиз?

Мустакил ишлаш учун мисоллар.

11.1. Фактор группаларни топинг:

а) 3 га каррали бутун сонлар аддитив группасининг 15 га каррали бутун сонлардан иборат қисм группаси;

б) Бутун сонлар аддитив группасининг берилган n - натурал сонга каррали сонлардан иборат қисм группаси;

в) Нолдан фарқли хақиқий сонлар мультипликатив группасининг мусбат сонлар қисм группаси бўйича.

11.2. $\mathbf{S}_n$-симметрик группанинг ишораси алмашинувчи $\mathbf{A}_n$-группа бўйича фактор группаси бутун сонлар аддитив группасининг жуфт сонлар қисм группаси бўйича фактор группасига изоморфлигини исботланг.

11.3. Исботланг: детерминанти нолдан фарқли бўлган n - тартибли квадратик матрицаларнинг мультипликатив группаси учун:

а) Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган матрицалар группасининг детерминанти 1 га тенг бўлган матрицалар қисм группаси бўйича фактор группаси нолдан фарқли ҳақиқий сонларнинг мультипликатив группасига изоморф;

б) Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган матрицалар группасининг детерминанти ± 1 га тенг бўлган матрицалар қисм группаси бўйича фактор группаси нольдан фарқли ҳақиқий сонларнинг мультипликатив группасига изоморф;

11.4. **G** - уч ўлчовли фазодаги барча харакатлар группаси, **H** - параллел кўчиришлар қисм группаси, **K** - берилган **O** нуқта атрофида айлантиришлар қисм группаси бўлсин. **G/ H** фактор группага **K** га изоморфлигини исботланг.

11.5. Коммутатив бўлмаган **G** группанинг унинг маркази **Z** бўйича фактор группаси циклик бўлиши мумкин эмаслигини исботланг.

11.6. 8 модул бўйича чегирма синфлар группасининг $\mathbf{H} = \{0,4\}$ нормал қисм группа бўйича фактор группасини ва унинг элементлари учун қўшиш жадвалини тузинг.

11.7. **G** - коммутатив группанинг ихтиёрий фактор группаси ҳам коммутатив бўлишини исботланг. Тескариси ўринлими?

11.8. Агар $\mathbf{A} = (6) = \{x \,/\, x = 6\,k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ бўлса, $\mathbf{Z} / \mathbf{A}$ фактор группани тузинг. У коммутатив группа бўладими?

$(6 + \mathbf{A}) + (9 + \mathbf{A}) = (9 + \mathbf{A}) + (6 + \mathbf{A})$ ни топинг.

11.9. $\mathbf{Z} / \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ фактор группани тузинг, бунда $\mathbf{A} = (6)$, $\mathbf{B} = (4)$ ва у учун қўшиш жадвалини тузинг. $5 + \mathbf{M}$, $\mathbf{M} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ элементга қарама-қарши элементни топинг.

11.10. $\mathbf{A} = (12) = \{x / x = 12\,k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ $\mathbf{M} = (3) = \{y / y = 3\,k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ группага қисм группа, нормал қисм группа бўладими? Жавобингизни тушунтиринг. **M/A** фактор группани ва унинг элементлари учун қўшиш жадвалини тузинг.

№ 12-Мавзу
Группанинг коммутанти.

Р е ж а:

1. Группанинг коммутанти.
2. Коммутант - нормал қисм группа.
3. Кубни ва октаэдрни айлантиришлар группаси.

Агар G группанинг иккита a ва b элементлари учун $ab=ba$ тенглик ўринли бўлса, бу икки элемент ўзаро ***ўрин алмашинувчи*** ёки ***коммутатив*** элементлар дейилар эди. Группа иккита элементининг коммутатив эмаслик даражасини $a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}$ кўпайтма ёрдамида ўлчаш мумкин, бу кўпайтма 1 га тенг бўлади фақат ва фақат шу холдаки, қачонки, a ва b элементлар ўзаро ўрин алмашинувчи бўлсалар (исботланг!).

Таъриф. $a\ b\ a^{-1}\ b^{-1}$ элемент a ва b элементларнинг ***коммутатори*** дейилади. **G** группанинг **K(G)** ***коммутанти*** деб, **G** группадаги чекли сондаги ***коммутаторларнинг*** тўпламига айтилади.

115. Коммутант - қисм группа бўлишини исботланг.

Исботи:

57-масалага қаранг. 57-масаладаги қисм группа бўлишликнинг 1) хоссаси ўринли бўлиши ўз - ўзидан равшан.
2) $e\,e\,e^{-1}\,e^{-1}=e$, шунинг учун e коммутант таркибига киради.
3) Агар $k\ a\ b\ a^{-1}\ b^{-1}$ коммутатор бўлса, у холда $k^{-1}=(a\,b\,a^{-1}\,b^{-1})^{-1}=$ (23-га қаранг!) $=b\,a\,b^{-1}\,a^{-1}$, яъни k^{-1} - ҳам коммутатор бўлади.

Коммутантнинг таърифига кўра, унинг ихтиёрий a элементини $a=k_1\bullet k_2\bullet\ldots\bullet k_n$ кўринишда ифодалаш мумкин, бунда k_i - коммутатор. У холда $a^{-1}=(k_1\bullet k_2\bullet\ldots\bullet k_n)^{-1}=k_n^{-1}\bullet\ldots\bullet k_2^{-1}\,k_1^{-1}$ бўлади, лекин барча k_i лар - коммутаторлардир. Шунинг учун a^{-1} элемент коммутантда ётади.

Исбот бўлди.

116. Коммутант - группанинг нормал қисм группаси бўлишини исботланг.

Исботи:

Агар g - группанинг ихтиёрий элементи, $k\ a\ b\ a^{-1}\ b^{-1}$ коммутатор бўлса, у холда $g\,k\,g^{-1}$ ҳам коммутатор бўлади. ҳақиқатан ҳам, $g\,k\,g^{-1}=g\,a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}\,g^{-1}=g\,a\,(g^{-1}g)\,b\,(g^{-1}g)\,a^{-1}\,(g^{-1}g)\,b^{-1}\,g^{-1}=$ $=(g\,a\,g^{-1})\,(g\,b\,g^{-1})\,(g\,a\,g^{-1})^{-1}\,g\,b\,g^{-1})^{-1}$ бўлади. Агар a - коммутантнинг ихтиёрий элементи бўлса, у холда $a=k_1\bullet k_2\bullet\ldots\bullet k_n$ бўлади, бунда k_i - коммутатор.

Шунинг учун

$g\,a\,g^{-1}=(k_1\bullet k_2\bullet\ldots\bullet k_n)\,g^{-1}=g\,k_1\bullet(g^{-1}g)\bullet k_2\bullet(g^{-1}g)\bullet\ldots\bullet(g^{-1}g)\bullet k_n\,g^{-1}=$ $(g\,k_1\,g^{-1})\bullet(g\,k_2\,g^{-1})\bullet\ldots\bullet(g\,k_n\,g^{-1})$ - коммутаторларнинг кўпайтмаси бўлади ва демак, у коммутантда ётади. g - группанинг ихтиёри элементи эди, шунинг учун коммутант - группа учун нормал ки группа бўлади.

Исбот бўлди

117. Группанинг коммутанти бирлик қисм группа $\{e\}$ би устма-уст тушиши учун группанинг узи коммутатив бўлиши зарур етарли эканини исботланг.

Исботи.

Агар группа коммутатив бўлса, унинг ихтиёрий a, элементлари учун $ab = ba$ бўлади. Шунинг учун бу элементларда (тенгликни ўнг ва чап томонларини аввал a^{-1} сунг эса b^{-1} кўпайтирищдан) хосил килинган коммутатор $a\, b\, a^{-1}\, b^{-1}$ e га тен бўлади. a, b элементлар ихтиёрий бўлгани учун ихтиёрий коммутатор тенг экани ва ундан бутун коммутантнинг бирлик кисм группага тен экани келиб чикади.

Аксинча ихтиёрий коммутатор $a\, b\, a^{-1}\, b^{-1} = e$ бўлса, унда ассоциативликка кўра $ab = ba$ бўлади.

Исбот бўлди

118. Қуйидаги группаларнинг коммутантини топинг:

а) учбурчакнинг симметриялари группасининг;

б) квадратнинг симметриялари группасининг;

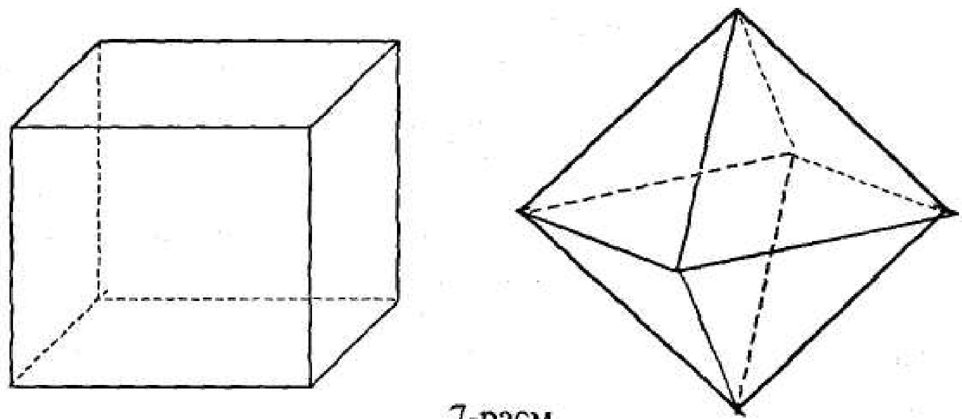
в) кватернионлар группасининг.

Ечиш.

а) Учбурчак симметриясининг группаси коммутатив эмас. холда унинг коммутанти $\{e\}$ дан фарқли бўлади. Агар g - учбурчакни ихтиёрий алмаштириш бўлса, у холда g ва g^{-1} алмаштиришлар ёки бир вақтда учбурчакни "буради", ёки бир вақтда бурмайди. Шунинг учун $g_1\, g_2\, g_1^{-1}\, g_2^{-1}$ кўпайтмада учбурчакни бурувчи кўпайтувчилар сони ёки 0 та, ёки 2 та, ёки 4 та бўлади ва бу холда $g_1\, g_2\, g_1^{-1}\, g_2^{-1}$ элемент хар доим учбурчакни бурмайди, яъни айлантириш бўлади. Шунинг учун коммутантга фақатгина учбурчакни айлантиришлар кириши мумкин. Коммутант $\{e\}$ дан фарқли ва у қисм группа бўлгани учун 58 - га кўра учбурчак симметриясининг группасидаги коммутант учбурчакнинг барча айлантиришлари қисм группаси билан устма-уст тушади.

б) а) холдаги каби, коммутант $\{e\}$ дан фарқли ва у фақатгина квадратни айлантиришларни ўз ичига олсин. Агар g - квадратни ихтиёрий алмаштириш бўлса, у холда g ва g^{-1} алмаштиришлар бир вақтда квадратнинг диагоналлари ўрнини алмаштиради ёки бир вақтда диагоналларни ўз ўрнида қолдиради. Бундан ташқари, ихтиёрий коммутатор квадратни айлантириш бўлса, у холда у ёки $\{e\}$ билан, ёки марказий симметрия a билан устма-уст тушади. Шунинг учун коммутант фақатгина иккита элементни - e ва a ни ўз ичига олиши мумкин холос, лекин $\{\ e\ \}$ дан фарқли. У холда у марказий симметриялар қисм группаси - $\{e,\ a\ \}$ билан устма-уст тушади.

Яна иккита группани қараймиз: *кубни айлантиришлар группаси* ва *октаэдрни айлантиришлар группаси* (7-расм).



7-расм

123. Юқоридаги группаларнинг ҳар бирида нечтадан элементлар бор? Кубни айлантиришлар группасининг элементларини кўрсатинг.

Жавоб: 24 та. Куб учун: 1) айний алмаштириш; 2) қарама-қарши ёқларнинг ўрталаридан ўтувчи ўқ атрофида 90° га, 180° га ва 270° га айлантириш (улар 9 та); 3) қарама-қарши қирраларнинг ўрталаридан ўтган ўқ атрофида 180° га айлантириш (улар 6 та); 4) қарама-қарши учлардан ўтган ўқлар атрофида 120° ва 240° га айлантириш (улар 8 та).

124. Кубни айлантиришлар группаси ва октаэдрни айлантиришлар группаси ўзаро изоморф эканлигини исботланг.

Исботи.

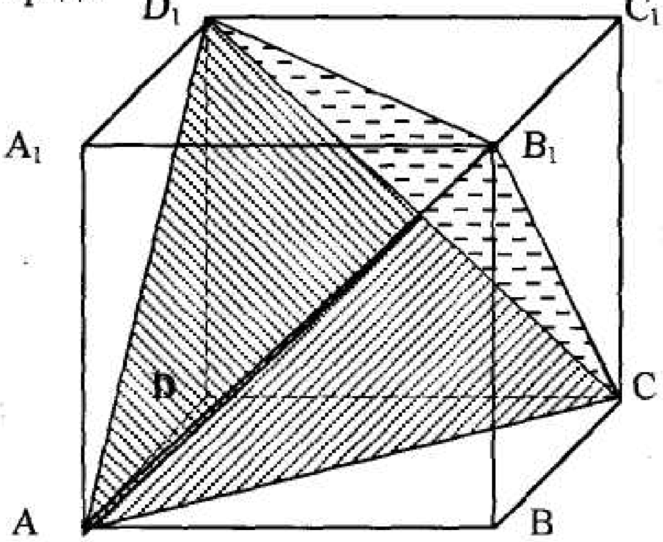
Агар кубнинг қўшни ёқларининг марказларини бирлаштирсак, у холда октаэдр хосил бўлади. У холда кубнинг хар бир айлантириши октаэдрнинг айлантиришлари билан мос келади ва аксинча. Бунда кубни айлантиришларнинг композицияси октаэдр айлантиришларининг композициясига мос келади ва биз кубни айлантиришлар группасининг октаэдрни айлантиришлар группасига изоморфизмига эга бўламиз. ***Исбот бўлди***

125. Кубни 6 та қиррасини 6 хил бўёқк билан неча усулда бўяш мумкин,агар бунда ҳар хил деб кубни бурашлар ёрдамида бир бирига келтириб бўлмайдиганлари саналса.(Мустақил счиб кўринг)

126. Сизга маълум бўлган группалардан қайси бири гугурт қутисини айлантиришлар группасига изоморф?

Жавоб: ромбнинг симметриялари группасига ва $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ группага.

Расмда кўрсатилганидек, кубга тетраэдрни ички чизиш кубни айлантиришлар группасида коммутантни хисоблаш учун қулайлик туғдиради (8-расм). Бунда агар қолган B, D, A_1 ва C_1 учларни бирлаштирсак, у холда яна бир тетраэдрни хосил қиламиз. Кубни ихтиёрий айлантириш тетраэдрни ўзини-ўзига ўтказади, ёки уларнинг ўрнини алмаштиради.



127. Кубнинг ҳар икки тетраэдрни ўзини - ўзига ўтказувчи ҳамма айлантиришлари кубни айлантиришлар группаси учун а) қисм группа, б) нормал қисм группа бўлишини исботланг.

Кўрсатма. а) 57-масалага қаранг! б) g ва g^{-1} алмаштиришларнинг иккиси бир вақтда ёки тетраэдрлар ўринларини алмаштиради ёки тетраэдрларни ўзини - ўзига ўтказади. Шундан фойдаланинг.

128. Кубни айлантиришлар группасининг коммутанти кубни айлантиришлар группасига изоморф эканлигини исботланг.

Исботи.

Кубнинг g ва g^{-1} айлантиришлари ACB_1D_1 ва A_1C_1BD тетраэдрлар (8- расмга қаранг!) ўрнини алмаштиради ёки ҳар бир тетраэдрларни ўз ўрнида қолдиради. Шунинг учун коммутатор ҳар икки тетраэдрни ҳам ўз ўрнида қолдиради. Бундан, кубни айлантиришлар группаси коммутантининг ихтиёрий элементи ACB_1D_1 тетраэдрнинг айланиши билан мос келиши келиб чиқади.

a - кубнинг ABCD ва $A_1B_1C_1D_1$ ёқларининг ўрталаридан ўтувчи ўқ атрофида 90° га шундай айлантириш бўлсинки, у B учни A учга ўтказсин. b эса A_1 ва C учлардан ўтувчи ўз атрофида 120° га шундай айлантириш бўлсинки, у A учни D_1 учга ўтказсин. У холда $a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}$ айлантириш A учни ўзига ўтказади, A_1 учни эса D учга ўтказади (текшириб кўринг!), яъни кубнинг A ва C_1 учларидан ўтувчи ўтказ атрофидаги айний бўлмаган алмаштириш бўлади. Бу айлантириш

ACB_1D_1 тетраэдрнинг ҳам A учидан ўтган ўқ атрофидаги айлантириши бўлади. Бундан, осонгина кўрсатиш мумкинки (121 га каранг!), кубни айлантиришлар группасининг коммутанти ACB_1D_1 тетраэдрни ўзини - ўзига ўтказувчи барча айлантиришларни ўз ичига олиши келиб чиқади. У ўзи ўкатгина шундай айлантиришлардан тузилган эди, шунинг учун кубни айлантиришлар группасининг коммутанти тетраэдрнинг айлантиришлари группасига изоморфлиги келиб чиқади.

Исбот бўлди

129. Ихтиёрий **G** группанинг коммутанти бўйича фактор группаси коммутатив группа эканлигини исботланг.

Исботи.

A, B - иккита ихтиёрий қўшни синфлар ва *a, b* - уларнинг элементлари бўлсин. $a\ b\ a^{-1}\ b^{-1}$ элемент коммутантда ётади, у холда A B $A^{-1}\ B^{-1}$ = E бўлади. Бундан, A B = B A келиб чиқади.

Исбот бўлди

130. **N** - **G** группанинг нормал қисм группаси ва **G / N** - фактор группа коммутатив бўлсин. **N G** группанинг коммутантида ётишини исботланг.

Исботи.

a, b - группанинг ихтиёрий элементлари ва A, B лар бу элементлар кирган қўшни синфлар бўлсин. A B = B A бўлгани учун A B $A^{-1}\ B^{-1}$ = E бўлади. Шунинг учун $a\ b\ a^{-1}\ b^{-1}$ коммутатор **N** нормал қисм группада ётади. Шундай экан, **N** ҳамма коммутаторларни ва демак, бутун коммутантни ўз ичига олади.

Исбот бўлди

131. N - G группанинг нормал қисм группаси ва **K(N) - N** группанинг коммутанти бўлсин. **K(N) - G** группада нормал қисм группа бўлишини исботланг.

Таянч иборалар:

Группанинг коммутатив элементлари, элементларнинг коммутатори, коммутант, куб ва унинг айлантиришлар группаси, октаэдр ва унинг айлантиришлар группаси.

Назорат учун саволлар.

12.1. Групанинг қандай элементлари коммутатив элементлар дейилади?
12.2. Коммутатор нима?
12.3. Коммутант деганда нимани тушунасиз?
12.4. Куб нима? Октаэдр нима?
12.5. Кубнинг ва октаэдрнинг айлантиришлари группаси деганда қандай группани тушунасиз?

Мустакил ишлаш учун мисоллар.

12.1. G группага тегишли бўлган x, y элементларнинг коммутатори $[x, y] = x\, y\, x^{-1}\, y^{-1}$ қуйидаги хоссаларга эга бўлишини исботланг:
а) $[x, y] = [x, y]$;
б) $[xy, z] = x[y, z]\, x^{-1}\, [x, z]$;
в) $[z, xy] = [z, x]\, x\, [z, y]\, x^{-1}$;
12.2. Куйидаги тенгликлардан қайси бири S_3 группада айнан бажарилади:
а) $[[x, y], z] = 1$;
б) $[x^2, y^2] = 1$;

12.3. Асосий диагонали бирлардан иборат бўлган 3- тартибли юқори учбурчак матрицалар группасида қуйидаги айниятлар ўринли бўлишини исботланг:
$(x\, y)^n = x^n\, y^n\, [x, y]^{-n(n-1)/2,}\ (n \in \mathrm{N})$.

12.4. Агар G группада $[[x, y], z] = 1$ айният ўринли бўлса, у холда G да $[x, y\, z] = [x, y]\, [x, z]$, $[xy, z] = [x, z]\, [y, z]$ айниятлар ҳам ўринли бўлишини исботланг.

12.5. Агар G группада $x^2 = 1$ тенглик ўринли бўлса, у холда G - коммутатив группа бўлишини исботланг.

12.6. G группанинг коммутанти K нормал бўлувчи эканини исботланг.

12.7. G/H фактор группа коммутатив бўлиши учун H G группанинг коммутанти K да ётиши зарур ва етарли эканини исботланг.

№ 13-Мавзу
Гомоморфизм.

Режа:

1. Гомоморфизм.
2. Табиий гомоморфизм.
3. Гомоморфизмнинг ядроси.
4. Қисм группалар, нормал қисм группалар ва коммутантларнинг гомоморф акслари.

$< \mathbf{G},\cdot >$ группани $< \mathbf{F},* >$ группага ўтказувчи ***гомоморфизм*** деб, шундай $\varphi:\mathbf{G}\to\mathbf{F}$ акслантиришга айтиладики, $\forall\ a,b \in \mathbf{G}$ учун $\varphi(a\cdot b) = \varphi(a)*\varphi(b)$ бўлса (бу ерда $a\cdot b$ " кўпайтма" **G** группада олинади $\varphi(a)*\varphi(b)$ "кўпайтма" эса **F** группада олинади).

Гомоморфизм изоморфизмдан шуниси билан фарқ қиладики гомоморфизмда акслантириш учун ўзаро бир қийматлилик талаб қилинмайди.

Мисол 12. **G** - кубни айлантиришлар группаси, $\mathbf{Z_2}$ - унга ички чизилган иккита тетраэдрнинг ўрин алмаштиришлар группаси бўлсин. Кубнинг ҳар бир айланишига тетраэдрларнинг аниқ бир ўрин алмаштиришлари мос келади. Кубни иккита айлантиришини кетма-кет бажаришда унга мос келувчи тетраэдрларнинг ўрин алмаштиришлари кўпайтирилади. У холда кубни айлантиришлар группасини иккита тетраэдрнинг ўрин алмаштиришлар группасига мос қўювчи акслантириш гомоморфизм бўлади.

132. $\varphi:\mathbf{G}\to\mathbf{F}$ - **G** группани **F** группанинг устига акслантирувчи гомоморфизм бўлсин. Агар **G** группа коммутатив бўлса, у холда **F** группа ҳам коммутатив бўлишини исботланг.

Исботи.

f_1 ва f_2 - **F** группанинг ихтиёрий элементлари бўлсин. φ - **G** группани **F** группанинг **устига** ўтказувчи гомоморфизми бўлгани учун **G** группада шундай g_1 ва g_2 элементлар топиладики, $\varphi(g_1)=f_1$ ва $\varphi(g_2)=f_2$ бўлади. У холда

$$f_1 f_2 = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2)\,\varphi(g_1) = f_2 f_1 \text{ бўлади.}$$

Демак, **F** группа коммутатив экан. ***Исбот бўлди***

133. **G** группани **F** группага ўтказувчи гомоморфизмда **G** группанинг бирлик элементи **F** группанинг бирлик элементига ўтишини исботланг.

Исботи.

$\varphi(e_G) = x$ бўлсин.

У холда $x * x = \varphi(e_G)\,\varphi(e_G) = \varphi(e_G\, e_G) = \varphi(e_G) = x$ бўлади. Бундан $x * x = x$ ва бундан $x = e_F$ келиб чиқади. ***Исбот бўлди***

134. $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$ эканини исботланг, бунда φ:**G**→**F** - гомоморфизм ва тенгликнинг чап қисмидаги тескари элемент **G** да олинган, ўнг қисмидаги эса **F** да.

Исботи.

$\varphi(a) * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a\, a^{-1}) = \varphi(e_G) =$ (133 - га кўра) $= e_F$.

Бундан, $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$ га эга бўламиз. ***Исбот бўлди***

135. φ_1:**G**→**F** ва φ_2: **F** →**H** - гомоморфизмлар бўлсин. $\varphi_2\,\varphi_1$: **G**→**H** ҳам гомоморфизм бўлишини исботланг.

Исботи.

Бу ерда **< G,· >, < F,* >, < H,· >** группалар бўлиб, a,b - **G** группанинг ихтиёрий элементлари бўлсин. У холда

$\varphi_2\,\varphi_1\,(a \cdot b) = \varphi_2\,(\varphi_1\,(a \cdot b)) = \varphi_2\,(\varphi_1\,(a) * \varphi_1\,(b)) =$

$\varphi_2\,(\varphi_1\,(a)) \cdot \varphi_2(\varphi_1\,(b)) = \varphi_2\,\varphi_1(a) \cdot \varphi_2\,\varphi_1(b)$ бўлади. ***Исбот бўлди***

Гомоморфизмга доир мухим мисоллар қуйидаги **“табиий гомоморфизм”** конструкцияси ёрдамида олинади.

N - **G** группанинг нормал қисм группаси бўлсин. **G** группани **G/H** фактор группага мос куювчи қуйидаги φ акслантиришни қараймиз. **G** группанинг ҳар бир g элементига шу элементни ўз ичига олувчи **T** қўшни синфни мос қўямиз.

136. φ: **G**→**G/H** - **G** группани **G/H** группанинг устига ўтказувчи гомоморфизм эканини исботланг.

Исботи.

Агар **<G/H, · >** бўлиб,$\varphi(a)$ = A ва $\varphi(b)$ = B бўлса, у холда $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$ = A·B = (қўшни синфларни кўпайтириш таърифига кўра) = $\varphi(ab)$ бўлади.

Исбот бўлди.

Юқоридаги мисолда қаралган φ акслантиришни **G** группани **G/H** фактор группанинг устига ўтказувчи ***табиий гомоморфизм*** дейилади. Биз ҳар бир нормал қисм группа билан қандайдир гомоморфизм ўзаро боғланганлигини кўрсатдик.

Энди тескариси ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз.

G группани **F** группанинг устига ўтказувчи ҳар бир гомоморфизмни **G** нинг мос нормал қисм группаси бўйича **G/H** фактор группасининг устига ўтказувчи табиий гомоморфизм сифатида қараш мумкин.

φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{F}$- гомоморфизм бўлсин. У холда $\varphi(g) = e_F$ шартни қаноатлантирувчи g элементлар тўплами φ - ***гомоморфизмнинг ядроси*** дейилади ва **Ker** φ каби белгиланади.

137. Ker φ **- G** группа учун қисм группа бўлишини исботланг.

Исботи.

57-га қаранг!

1) Агар a ва b элементлар **Ker** φ да ётсалар, у холда $\varphi(a) = e_F$, $\varphi(b) = e_F$ ва $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b) = e_F\,e_F = e_F$ бўлади ва бундан, $a\,b$ нинг ҳам **Ker** φ да ётиши келиб чиқади.

2) $\varphi(e_G)$=(133-га қаранг!)=e_F. Шунинг учун e_G элемент **Ker** φ да ётади.

3) Агар $\varphi(a) = e_G$ бўлса, у холда $\varphi(a^{-1})$=(134-га кўра) = $[\varphi(a)]^{-1}$ = $=e_F^{-1} = e_F$. Шунинг учун, агар a элемент **Ker** φ да ётса, у холда a^{-1} элемент ҳам **Ker** φ да ётади.

Демак, **Ker** φ - **G** да қисм группа экан. ***Исбот бўлди***

138. Ker φ **- G** группада нормал қисм группа бўлади.

Исботи.

a - ядро бўлмиш **Ker** φ нинг, g эса **G** группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. У холда $\varphi(a) = e_F$ ва $\varphi(gag^{-1}) = \varphi(g)\,\varphi(a)\,\varphi(g^{-1}) =$ =(134 - га кўра) = $\varphi(g)e_F\,[\varphi(g)]^{-1} = e_F$ бўлади. Шунинг учун gag^{-1} элемент ҳам **Ker** φ да ётади ва бундан **Ker** φ нинг **G** группанинг нормал қисм группаси экани келиб чиқади. ***Исбот бўлди***

139. g_1 ва g_2 элементлар φ табиий гомоморфизмнинг ядроси **Ker** φ бўйича битта қўшни синфда ётиши учун $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

Исботи.

g_1 ва g_2 битта қўшни синф - g Ker φ да ётсин. У холда **Ker** φ да шундай r_1 ва r_2 элементлар топиладики, улар учун $g_1 = g\,r_1$ ва $g_2 = g\,r_2$ бўлади. У холда

$\varphi(g_1) = \varphi(gr_1) = \varphi(g)\varphi(r_1) = \varphi(g) = \varphi(g)e_F = \varphi(g)\varphi(r_2) = \varphi(gr_2) = \varphi(g_2)$ бўлади.

Аксинча, $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ бўлсин. У холда $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1^{-1})\,\varphi(g_2) =$ =(134- га қаранг!) = $[\varphi(g_1)]^{-1}\,\varphi(g_1) = e_F$ га эга бўламиз. Бундан, $g_1^{-1}g_2 = r$ экани келиб чиқади, бунда r - ядро **Ker** φ нинг элементи. $g_2 = g_1\,r$ бўлгани учун g_1 ва g_2 элементларнинг ҳар иккиси ҳам g_1 Ker φ да ётади. ***Исбот бўлди***

Теорема 3. φ: **G**$\to$ **F** - **G** группанинг **F** группанинг устига ўтказувчи гомоморфизм бўлсин. У холда ҳар бир қўшни синфнинг $\varphi(g)$ қийматига қандайдир g (ва бу ҳолда ихтиёрий (139- га қаранг!)) элементини мос қўювчи ψ: **G/Ker**$\varphi \to$ **F** акслантириш изоморфизм бўлади.

Бу теореманинг исботи қуйидаги мисолларнинг ечимларида ифодаланади.

140. ψ - устига акслантириш эканини исботланг.

Исботи.

f - **F** нинг ихтиёрий элементи бўлсин. φ - устига акслантириш бўлгани учун **G** группанинг шундай a элементи мавжуд бўладики, $\varphi(a)=f$ бўлади. А - a элементи ўз ичига олувчи қўшни синф бўлсин. У холда таърифга кўра, ψ (А) = $\varphi(a)$ = f бўлади. ***Исбот бўлди***

141. ψ - ўзаро бир қийматли акслантириш эканини исботланг.

Исботи.

ψ (А) =ψ (В) ва a,b лар А ва В синфларнинг элементлари бўлсин. У ҳолда $\varphi(a)$ = ψ (А) =ψ (В) = $\varphi(b)$. Бундан, 139- га кўра, А = В келиб чиқади. ***Исбот бўлди***

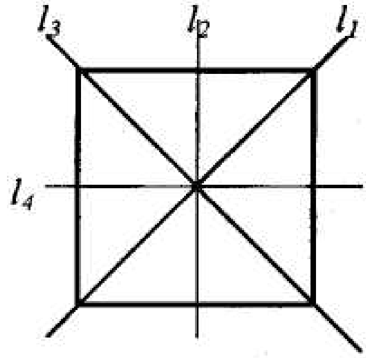
142. ψ - изоморфизм эканини исботланг.

Исботи.

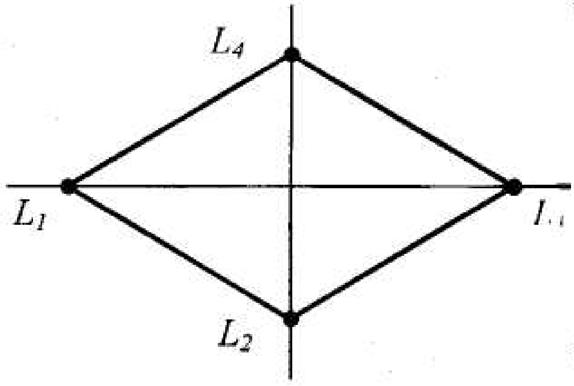
А ва В - ихтиёрий қўшни синфлар ва a,b лар уларнинг элементлари бўлсин. У холда ab элемент АВ синфга тегишли бўлади. ψ-акслантиришнинг аникланишига кўра, ψ(АВ)=$\varphi(ab)$=(φ-гомоморизм) = $\varphi(a)\cdot\varphi(b)$ = ψ (А)$\cdot\psi$ (В). ψ - ўзаро бир қийматли акслантириш бўлгани учун (141- га каранг!) бу холда ψ - изоморфизм бўлади. ***Исбот бўлди***

Исботланган теореманинг қўлланилишига доир мисоллар келтирамиз.

Мисол 13. 110-мисолда квадратнинг симметрияси группасининг марказга нисбатан симметрия нормал қисм группаси бўйича фактор группаси квадратни айлантиришлар группаси ёки ромб симметриясининг группасига изоморфлигини кўрсатиш талаб қилинган эди. Квадрат симметриясининг группасидаги ҳар бир элементга l_1, l_2, l_3, l_4 симметрия ўқларининг қайсидир ўрин алмаштириши мос келади (9- расм). Бу холда l_1 ва l_2 диагоналлар фақат бир-бирига ўтиши мумкин, холос.



9 - расм



10 - расм

l_2 ва l_4 ўқлар ҳам фақат бир-бирига ўтади. У холда квадрат симметрияси группасини 4 та: l_1, l_2, l_3, l_4 элементли ўрин алмаштиришлар группасига мос куювчи акслантиришга эга бўламиз. Бу акслантириш бундай ўрин алмаштириш ларнинг устига ўтказувчи гомоморфизм бўладики, у l_1 ва l_3 ни l_1 ва l_3 га, l_2 ва l_4 ни эса l_2 ва l_4 га ўтказади. Бу группа 4 та ўрин алмаштиришдан иборат бўлади ва ромб симметриясининг группаси $L_1L_2L_3L_4$ (10 -расм) га изоморф бўлади. Кўрилган гомоморфизмнинг ядроси квадратни ўзини ўзига ўтказувчи 4 та симметрия ўқларига нисбатан алмаштиришлар бўлади. Бундай алмаштиришлар фақат l ва марказий симметрия a дан иборатлигини кўриш қийин эмас.

Бундан, теорема 3 га кўра, марказга нисбатан $\{e,a\}$-алмаштиришлар қисм группаси квадрат симметриясининг группасида нормал қисм группа бўлишлиги ва унга мос келувчи фактор группа ромб симметриясининг группасига изоморф бўлиши келиб чиқади.

Юқоридаги мисолларга ўхшаш бўлган қуйидаги масалаларни ечиш мумкин.

143. Тетраэдрни қарама-қарши қирраларнинг ўртасидан ўтувчи ўқлар атрофидаги 180° га айлантиришлар айний алмаштириш билан биргаликда тетраэдрнинг симметриялари группасида нормал қисм группа бўлишини исботланг ва унга мос фактор группани топинг.

144. Кубни қарама-қарши ёқларнинг ўрталаридан ўтувчи ўқлар атрофида 180° га айлантиришлар айний алмаштириш билан биргаликда кубни айлантиришлар группасида нормал қисм группа бўлишини исботланг ва унга мос фактор группани топинг.

145. Текисликда О марказли мунтазам n- бурчак берилган бўлсин. R- текисликни О нуқта атрофидаги барча айлантиришлар группаси бўлсин. Бу группанинг мунтазам n- бурчакни ўзини-ўзига ўтказувчи барча айлантиришлар қисм группаси Z_n ни қараймиз. Бу группа R группада нормал қисм группа бўлишини ва $R/Z_n \cong R$ эканини исботланг.

146. N_1 ва N_2 - мос равишда G_1 ва G_2 группаларнинг нормал қисм группалари бўлсин. $N_1 \times N_2$ - $G_1 \times G_2$ группанинг нормал қисм группаси бўлишини ва $G_1 \times G_2 / N_1 \times N_2 \cong G_1 / N_1 \times G_2 / N_1$ эканини исботланг.

147. Иккита ўзаро изоморф бўлмаган группалар ўзаро изоморф бўлган нормал қисм группаларга ва улар бўйича фактор группага эга бўлиши мумкинми?

Жавоб. Мумкин. Масалан, $Z_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ ва $Z_2 \times Z_2$ группалар мос равишда Z_2 га изоморф бўлган $\{e, a^2\}$ ва $Z_2 \times \{e_2\}$ нормал қисм группаларга эга, булар бўйича фактор группалар ҳам Z_2 га изоморф бўлади.

148. Группанинг ўзаро изоморф бўлмаган иккита фактор группалари ўзаро изоморф нормал қисм группаларга эга бўлиши мумкинми?

Жавоб. Мумкин. Масалан, $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$ группа, бу ерда

$\mathbf{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ иккита ўзаро изоморф бўлган $\{e_1\} \times \mathbf{Z}_2$ ва $\{e_1, a^2\} \times \{e_2\}$ нормал қисм группаларга эгаки, улар бўйича тузилган фактор группалар мос равишда (146- га кўра)

$\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2 / \{e_1\} \times \mathbf{Z}_2 \cong \mathbf{Z}_4 / \{e_1\} \times \mathbf{Z}_2 / \mathbf{Z}_2 \cong \mathbf{Z}_4$ ва

$\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2 / \{e_1, a^2\} \times \{e_2\} \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ бўлади.

149. Группа фактор группалари ўзаро изоморф иккита ўзаро изоморф бўлмаган нормал қисм группага эга бўлиши мумкинми?

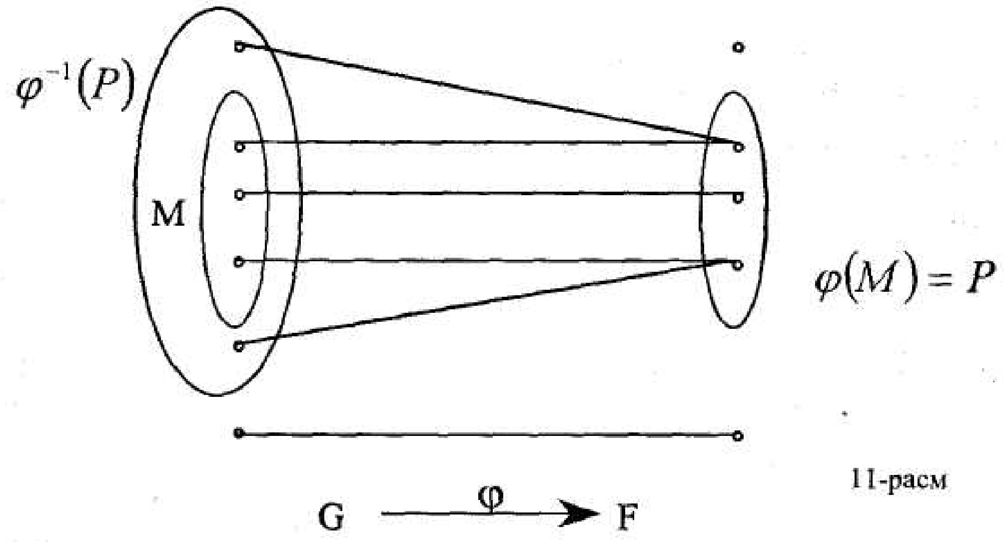
Жавоб. Мумкин. Бундай чексиз группа 145- масалада келтирилган, бу ерда $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_n \cong \mathbf{R}$ ва равшанки, $\mathbf{R}/\{e\} \cong \mathbf{R}$.

Нормал қисм группалари $\mathbf{Z}_4 \times \{e_2\}$ ва $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ кўринишда ва улар бўйича тузилган фактор группалари $\mathbf{Z}_2$ га изоморф бўлган $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$ группа чекли группага мисол бўлади (146-га каранг!).

Энди қисм группалар, нормал қисм группалар ва коммутантларнинг гомоморф аксларини кузатайлик $\varphi: \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ - гомоморфизм ва **G** группада қандайдир **M** қисм тўплам танланган бўлсин. **M** тўпламнинг φ гомоморфизм натижасидаги ***гомоморф акси*** деб, **M** да камида битта аслига эга бўлган элементлардан тузилган **F** нинг қисм тўплами **P** га айтилади ва $\varphi(\mathbf{M}) = \mathbf{P}$ каби белгиланади.

Аксинча, **P** - **F** нинг қандайдир қисм тўплами бўлсин, у холда **P** нинг ***тўлиқ асли*** деб, (у $\varphi^{-1}(\mathbf{P})$ каби белгиланади) **G** даги шундай элементлар тўпламига айтиладики, уларнинг акси **P** да ётади.

Шуни таъкидлаш керакки, φ^{-1} белги **P** дан алохида қаралса ҳеч қандай маънони билдирмайди: умуман олганда, гомоморфизм учун тескари акслантириш мавжуд эмас. Яна шуни таъкидлаш лозимки, агар $\varphi(\mathbf{M}) = \mathbf{P}$ бўлса, у холда $\varphi^{-1}(\mathbf{P})$ **M** да ётади, лекин у билан устма-уст тушиши шарт эмас (11-расм).



11-расм

150. G группа **H қисм группасининг** φ:**G**$\to$**F** - гомоморфизм натижасидаги **акси F** группанинг қисм группаси бўлишини исботланг.

Исботи.

57-га қаранг! 1) f_1 ва f_2 φ(**H**) да ётсин. У холда **H** да шундай h_1, h_2 элементлар топиладики, $\varphi(h_1) = f_1$, $\varphi(h_2) = f_2$ бўлади. У холда $h_1 h_2$ - элемент H да ётади ва $\varphi(h_1 h_2)$ = (φ - гомоморфизм бўлгани учун) = $\varphi(h_1)\varphi(h_2) = f_1 f_2$ бўлади. Демак, $f_1 f_2$ хам φ(**H**) да ётади.

2). e_G **H** га тегишли бўлгани ва $\varphi(e_G) = e_F$ (133- га қаранг!) бўлгани учун e_G **H** қисм группанинг акси бўлган φ(**H**) да ётади.

3). f элемент φ(**H**) да ётсин. Бундан кўринадики, **H** да шундай h элемент топиладики, $\varphi(h) = f$ бўлади. У холда h^{-1} элемент **H** га тегишли бўлади ва $\varphi(h^{-1})$ = (134- га кўра) = = $[\varphi(h)]^{-1} = f^{-1}$ бўлади. Шунинг учун f^{-1} ҳам φ(**H**) га тегишли бўлади. ***Исбот бўлди***

151. H - F нинг қисм группаси ва φ:**G**$\to$**F** - гомоморфизм бўлсин. φ^{-1} (**H**) - **G** нинг қисм группаси бўлишини исботланг.

152. N - F группанинг нормал қисм группаси ва φ:**G**$\to$**F** - гомоморфизм бўлсин. φ^{-1} (**N**) - **G** нинг нормал қисм группаси бўлишини исботланг.

Исботи.

a - φ^{-1} (**N**) нинг ихтиёрий элементи бўлсин. Бундан кўринадики, $\varphi(a) = h$ элемент **N** да ётади. Агар g **G** группанинг ихтиёрий элементи ва $\varphi(g) = f$ бўлса, $\varphi(g^{-1})$ = (134- га кўра) $=[\varphi(g)]^{-1} = f^{-1}$ бўлади. У холда $\varphi(gag^{-1}) = \varphi(g)\varphi(a)\varphi(g^{-1}) = f h f^{-1}$ элемент **N** га тегишли бўлади.
N - F группанинг нормал қисм группаси эди. Шунинг учун gag^{-1} элемент φ^{-1} (**N**) да ётади ва демак, φ^{-1} (**N**) - **G** группанинг нормал қисм группаси бўлади. ***Исбот бўлди***

153. $\varphi: G \to F$ - гомоморфизм, K_1 ва K_2 лар **G** ва **F** группаларнинг мос равишда коммутантлари бўлса, φ (K_1) K_2 да ва K_1 эса φ^{-1} (K_2) да ётишини исботланг.

154. **N** - **G** группанинг нормал қисм группаси ва φ - **G** ни **F** группанинг **устига** - ўтказувчи гомоморфизм бўлсин. φ (**N**) - **F** группанинг нормал қисм группаси бўлишини исботланг.

Исботи.

a - φ^{-1} (**N**) нинг ихтиёрий элементи бўлсин. Бундан кўринадики, **N** да шундай h элемент топиладики, $\varphi(h) = a$ бўлади. f - **F** группанинг ихтиёрий элементи бўлсин. φ - **устига** ўтказувчи гомоморфизм бўлгани учун **G** группада шундай g элемент топиладики, $\varphi(g) = f$ бўлади. У холда $\varphi(g^{-1}) = f^{-1}$ (134- га кўра) ва $\varphi(g\,h\,g^{-1}) = f\,a\,f^{-1}$ бўлади. **N** - **G** группанинг нормал қисм группаси бўлгани учун $g\,h\,g^{-1}$ элемент **N** да ётади. Шунинг учун $f\,a\,f^{-1}$ элемент φ(**N**) га тегишли бўлади ва демак, φ (**N**) - **F** группанинг нормал қисм группаси бўлади. ***Исбот бўлди***

155. K_1 ва K_2 лар **G** ва **F** группаларнинг коммутантлари ва φ - **G** ни **F** группанинг **устига** - ўтказувчи гомоморфизм бўлсин. $\varphi(K_1) = K_2$ эканини исботланг. $K_1 = \varphi^{-1}(K_2)$ ўринлими?

Таянч иборалар:

Гомоморфизм, табиий гомоморфизм, гомоморфизмнинг ядроси, тўпламнинг гомоморф акси, тўпламнинг тўлиқ асли.

Назорат учун саволлар.

13.1. Қандай акслантиришни гомоморфизм дейилади?
13.2. Табиий гомоморфизм нима?
13.3. Гомоморфизмнингядроси деганда нимани тушунасиз? У қандай белгиланади?
13.4. Тўпламнинг гомоморф акси ва тўлиқ асли деганда нимани тушунасиз?

Мустақил ишлаш учун масалалар.

13.1. $\varphi: C^* \to R^*$ - акслантиришлардан қайси бири гомоморфизм бўлади:
а) $\varphi(x) = |x|$; б) $\varphi(x) = 2\,|x|$; в) $\varphi(x) = 1/\,|x|$;
г) $\varphi(x) = 1 + |x|$; д) $\varphi(x) = |x|^2$; е) $\varphi(x) = 1$;
ж) $\varphi(x) = 2$?

13.2. Қандай **G** группа учун қуйидаги қоида асосида аниқланган $\varphi: G \to G$ - акслантириш гомоморфизм бўлади:
а) $\varphi(x) = x^2$; б) $\varphi(x) = x^{-1}$?
Қандай шарт бажарилганда бу акслантиришлар изоморфизм бўлади?

№ 14 -Мавзу
Ечилувчи группалар.

Режа:

1. Ечилувчи группалар.
2. Мисоллар.

Группаларнинг коммутативликка яқин бўлган мухим синфи мавжудки, у ***ечилувчи группалар*** деб номланади. Ечилувчи деб номланишига сабаб, алгебраик тенгламаларни радикалларда ечиш имконияти қайсидир группанинг ечилувчи бўлишлигига (тарихан) боғлиқ бўлади.

G - берилган группа ва **K(G)** - унинг коммутанти бўлсин. **K(G)** коммутантнинг ўзи группа ташкил этади ва унда яна **K(K(G))** коммутантни қараш мумкин. Хосил бўлган янги группада яна коммутантни қараш мумкин ва хоказо. $\underbrace{K(K(\dots(K(G))\dots))}_{r}$ группани қискача $K_r(G)$ каби белгилаймиз. У холда $K_{r+1}(G) = K(K_r(G))$ бўлади.

Таъриф. Агар группаларнинг G, $K_1(G)$, $K_2(G)$, $K_3(G)$,... занжири қандайдир n - чекли қадамда бирлик группа билан якунланса, яъни қандайдир n да $K_n(G) = \{e\}$ хосил бўлса, у холда **G** группа ***ечилувчи группа*** дейилади.

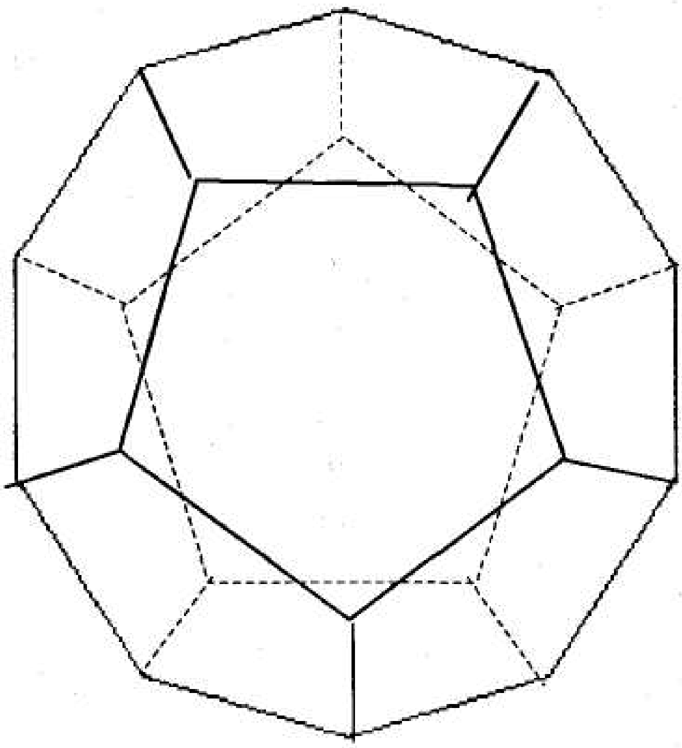
Масалан, ихтиёрий коммутатив группа ечилувчидир, чунки, агар **G**- коммутатив группа бўлса, у холда биринчи қадамдаёқ $K_n(G) = \{e\}$ группага эга бўламиз (117- га каранг!). Агар **G**- группанинг коммутанти коммутатив бўлса ҳам, у ечилувчи группа бўлади, чунки бу холда $K_2(G) = \{e\}$ бўлади.

156. Қуйидаги группалар ечилувчими:
а) Z_n - циклик группа, б) учбурчак симметриясининг группаси, в) квадрат симметриясининг группаси, г) кватернионлар группаси, д) тетраэдрни айлантиришлар группаси, е) тетраэдр симметриясининг группаси, ж) кубни айлантиришлар группаси?

Жавоб.

а) Ха. Z_n - коммутатив группа, б) ҳа (118- га қаранг!),
в) ҳа (118-га қаранг!), г) ҳа (118- га қаранг!),
д) ҳа (120- га қаранг!), е) ҳа (122- ва д) га қаранг!),
ж) ҳа (128- ва д) га қаранг!).

156- масалада қаралган ҳамма группалар ечилувчи экан. Шунинг учун табиий савол туғилади, бутунлай ечилувчи бўлмаган группалар ҳам мавжудми? Қуйида биз мунтазам ***додекаэдрнинг айлантиришлари группаси*** ечилувчи бўлмаган группа эканини (қуйида келтирилган бешта мисолнинг натижаси сифатида) кўрсатамиз (12- расм).



12-расм

157. Додекаэдрни айлантиришлар группасида нечта элемент бор?

Жавоб. 60 та. Ҳар қандай фиксирланган ёк ихтиёрий 12 та ёк билан 5 хил усул билан мос тушиши мумкин.

Додекаэдрнинг барча айлантиришларини 4 та синфга ажратиш мумкин: 1) айний алмаштириш; 2) қарама-қарши ёқларнинг ўрталаридан ўтувчи ўқлар атрофида айлантириш; 3) қарама-қарши учлардан ўтувчи ўқлар атрофида айлантириш; 4) қарама-қарши қирраларнинг ўрталаридан ўтувчи ўқлар атрофида айлантириш.

158. ҳар бир синфда нечта элемент ётади (2) - 4) синфларга айний алмаштириш кирмайди)?

Жавоб. 1) 1та, 2) 24 та, 3) 20 та, 4) 15 та.

159. N - додекаэдрни айлантиришлар группасининг ихтиёрий нормал қисм группаси ва **N** га юқоридаги 1) - 4) синфлардан камида битта элемент тегишли бўлсин. Бу холда **N** да шу элемент ётган бутун синф ётишини исботланг.

Шундай қилиб, **N** га 1) - 4) синфларнинг ҳар бири бир вақтда тўла кирмайди ёки бир вақтда тўла **N** га киради.

160. Додекаэдрни айлантиришлар группасида $\{e\}$ ва бутун группадан бошка нормал қисм группа мавжуд эмаслигини исботланг.

Исботи.

159-масаланинг ечимидан келиб чиқадики, додекаэдрни айлантиришлар группасининг нормал қисм группаси 1)- 4)-синфларни биридан тузилган бўлиши керак. 1) синф албатта нормал қисм группа таркибига киради. Нормал қисм группанинг тартиби додекаэдрни айлантиришлар группаси тартиби (60) нинг бўлувчиси бўлмоғи шарт (Лагранж теоремасига кўра). Текшириш мумкинки (158- га қаранг!), бу холат нормал қисм группа фақатгина 1) синфдан ва бутун группадан иборат бўлгандагина рўй беради.

Исбот бўлди

161. **G** - группа коммутатив бўлмасин ҳамда у $\{e\}$ ва **G** группадан бошқа нормал қисм группага эга бўлмасин. **G** группа ечилувчи эмаслигини исботланг.

Исботи.

G - группа коммутатив бўлмагани учун унинг коммутанти **K(G)** $\neq$ $\{e\}$ бўлади. 116- га кўра **K(G)** **G** группада нормал группа бўлади. У холда масаланинг шартига кўра **K(G) = G** бўлади. Шунинг учун **G**, $K_1(G)$, $K_2(G)$, $K_3(G)$,... занжирдаги барча группалар **G** билан устма-уст тушади ва демак, бу занжир ҳеч қачон бирлик группа билан якунланмайди. Бундан **G** группанинг ечилувчи эмаслиги келиб чиқади.

Исбот бўлди.

160- ва 161-масалалардан келиб чиқадики, додекаэдрни айлантиришлар группаси ечилувчи бўлмаган группа экан.

Яна бир нечта масалаларни келтирамизки, уларнинг натижалари келгусида керак бўлади.

162. Ечилувчи группанинг ихтиёрий қисм группаси ечилувчи эканлигини исботланг.

Исботи.

G - группа ечилувчи бўлсин. У ҳолда шундай *n* сони мавжуд бўладики, $K_n(G)=\underbrace{K(K(\ldots(K(G))\ldots))}_{n}$ қисм группа бирлик группага тенг бўлади. Агар **H** **G** группанинг қисм группаси бўлса, у холда **K(H)** қисм группа **K(G)** да ётади, **K(K(H))** қисм группа эса **K(K(G))** да ётади ва х. к. $K_n(H)$ қисм группа $K_n(G)$ да ётгани ва $K_n(G)$ қисм группа бирлик группа бўлгани учун $K_n(H)$ хам бирлик группа бўлади. Шунинг учун **H** қисм группа ечилувчи бўлади.

Исбот бўлди

163. **φ:G→F** - **G** ни **F** группанинг **устига** ўтказувчи гомоморфизм ва **G** - ечилувчи группа бўлсин. **F** группа ҳам ечилувчи бўлишини исботланг.

Исботи.

G группанинг коммутантини **K(G)** билан, $\underbrace{K\left(K\left(\ldots\left(K\left(G\right)\right)\ldots\right)\right)}_{r}$ ***r*** қисм группани **K_r(G)** билан белгилаймиз. φ - **G** ни **F** группанинг **устига** ўтказувчи гомоморфизм бўлгани учун **φ(K(G)) = K(F)** бўлади (155- га кўра). Бундан, **φ(K_2(G)) = K_2 (F)** ва умуман, **φ(K_r(G)) = K_r (F)** бўлади. **G** группа ечилувчи эди. У холда қандайдир ***n*** қийматда **K_n(G)** қисм группа бирлик группага тенг бўлади. **φ(K_n(G)) = K_n (F)** бўлса, у ҳолда **K_n (F)** бирлик группа бўлади. Шунинг учун **F** группа ечилувчи группа бўлади. ***Исбот бўлди***

164. Юқоридаги масалада **F** группа ечилувчи, **G** группа эса ечилувчи бўлмаган холга мисол келтиринг.

Жавоб. Масалан, **φ:G→ {*e*}**, бу ерда **G** - **додекаэдрни** айлантиришлар группаси.

165. G группа ечилувчи бўлсин ва **N** - **G** нинг нормал қисм группаси бўлсин. **G/N** - фактор группа ечилувчи бўлишини исботланг.

Исботи.

Кўрсатма. **G** группани **G/N** фактор группага ўтказувчи **табиий** гомоморфизмни қаранг. Сунгра 163-масаланинг **натижасидан** фойдаланинг.

166. Агар **N** ва **G/N** группалар ечилувчи бўлсалар, у холда **G** группа ҳам ечилувчи бўлишини исботланг.

Исботи.

K(G) - **G** группанинг коммутанти ва $K_r\left(G\right)=\underbrace{K\left(K\left(\ldots\left(K\left(G\right)\right)\ldots\right)\right)}_{r}$ бўлсин. **G** группани **G/N** фактор группага ўтказувчи табиий гомоморфизм φ ни қараймиз. У холда (155-га кўра) **φ(K(G)) = K (G/N), φ(K_2(G)) = K_2 (G/N)** бўлади ва умуман, **φ(K_r(G)) = K_r (G/N)** бўлади. **G/N** - группа ечилувчи бўлгани учун қандайдир ***n*** қийматда **K_n(G/N)** бирлик группага тенг бўлади, яъни **K_n(G/N) = {E}** бўлади. **φ(K_n(G)) = K_n (G/N) = {E}** бўлса, у ҳолда **K_n (G)** қисм группа **N** нормал қисм группага тегишли бўлади. **N** группа ечилувчи. Шунинг учун қандайдир ***s*** қийматда **K_s(N)** қисм группа бирлик группага тенг бўлади. **K_n(G) N** да ётгани учун **K_{n+s}(G)** қисм группа **K_s(N)** га тегишли бўлади ва шунинг учун у бирлик группага тенг бўлади. Демак, **G** группа ечилувчи экан. ***Исбот бўлди***

167. G ва **F** группалар ечилувчи бўлсин. **G×F** группа ҳам ечилувчи бўлишини исботланг.

Исботи.

146 - масаладан $\mathbf{G} \times \mathbf{F}/\mathbf{G} \times \{e_2\} \cong \{e\} \times \mathbf{F}$ га эга бўламиз. $\mathbf{G} \times \{e_1\}$ ва $\{e\} \times \mathbf{F}$ группалар мос равишда **G** ва **F** группаларга изоморф бўлгани учун улар ечилувчи бўлади, у холда (166 - га кўра) $\mathbf{G} \times \mathbf{F}$ группа ҳам ечилувчи бўлади.

Исбот бўлди

168. **G** группа ечилувчи бўлсин. У холда группаларнинг шундай занжири - $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_n$ мавжудки, 1) $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}$; 2) ҳар бир $\mathbf{G}_i$ $(1 \le i \le n)$ группа $\mathbf{G}_{i-1}$ группанинг нормал қисм группаси бўлади ва барча $\mathbf{G}_{i-1}/\ \mathbf{G}_i$ фактор группалар коммутатив бўлади; 3) $\mathbf{G}_n$ группа коммутатив бўлади. Юқоридаги жумлаларни исботланг.

Исботи.

G группа ечилувчи бўлса, у холда коммутантларнинг **G, K(G), K₂(G),...** занжири қандайдир n қийматда бирлик группа билан якунланади, яъни $\mathbf{K}_n(\mathbf{G}) = \{e\}$ бўлади. Группаларнинг $\mathbf{G}, \mathbf{K}(\mathbf{G}), \mathbf{K}_2(\mathbf{G}), \ldots, \mathbf{K}_n(\mathbf{G})$ занжирини қараймиз. Группаларнинг бу занжирида ҳар бир группа ўзидан олдинги группанинг коммутанти бўлади ва демак, нормал қисм группаси ҳам бўлади (116- га кўра).Шунинг учун барча $\mathbf{K}_i(\mathbf{G})\ /\ \mathbf{K}_{i+1}(\mathbf{G})$ фактор группалар, хусусан $\mathbf{G}\ /\ \mathbf{K}(\mathbf{G})$ фактор группа ҳам коммутатив (129- га кўра)бўлади; $\mathbf{K}_n(\mathbf{G}) = \{e\}$ группанинг коммутативлиги тушунарли.

Исбот бўлди

169. **G** группа учун олдинги масалада келтирилган хоссаларга эга бўлган группалар занжири мавжуд бўлсин. **G** группа ечилувчи эканини исботланг.

Исботи.

Шартга кўра, $\mathbf{G}_{i-1}/\ \mathbf{G}_i$ фактор группалар коммутатив, у холда $\mathbf{K}(\mathbf{G}_{i-1})$ коммутант $\mathbf{G}_i$ да ётади (130- га кўра). Бундан, $\mathbf{K}(\mathbf{G}_{i-1})$ қисм группа $\mathbf{K}(\mathbf{G}_i)$ да ётиши, умуман, ихтиёрий $r \ge 1$ ва $1 \le i \le n$ учун $\mathbf{K}_r(\mathbf{G}_{i-1})$ қисм группа $\mathbf{K}_{r-1}(\mathbf{G}_{i-1})$ да ётиши келиб чиқади. Шунинг учун $\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{G}_0)$ қисм группа ўз навбатида $\mathbf{K}_{n-1}(\mathbf{G}_2)$ да ётган $\mathbf{K}_n(\mathbf{G}_1)$ қисм группада ётади ва х.к. $\mathbf{K}(\mathbf{G}_n)$ гача давом этади.Шундай қилиб, $\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{G}_0)$ қисм группа $\mathbf{K}(\mathbf{G}_n)$ да ётади. Лекин, $\mathbf{K}(\mathbf{G}_n) = \{e\}$ ва $\mathbf{G}_n$ группа шартга кўра коммутатив. Шунинг учун $\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{G}_n) = \{e\}$ ҳам коммутатив бўлади, яъни **G** группа ечилувчи бўлади.

Исбот бўлди

168- ва 169 - масалалардан кўринадики, **G** группа учун 168- масаланинг шартида кўрсатилган хоссаларга эга бўлган группалар занжири ечилувчи тушунчасига тенг кучлидир ва унинг ўзини ечилувчиликнинг таърифи сифатида қабул қилиш мумкин.

Таянч иборалар:

Ечилувчи группа, додекаэдр ва унинг айлантиришлари группаси.

Назорат учун саволлар.

14.1. Қандай группани ечилувчи группа дейилади?
14.2. Ечилувчи ва ечилувчи бўлмаган группаларга мисоллар келтиринг.
14.3. Додекаэдр нима, унинг айлантиришлари группаси деганда қандай группани тушунасиз?

АДАБИЁТЛАР:

1. Назаров ва бошқалар. Алгебра ва сонлар назарияси. Тошкнт. Ўқитувчи нашриёти, 1993.
2. Александров П.С. Введение в теорию групп. Москва, Наука. 1980.
3. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. Москва, Издательство «Мир», 1979.
4. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Минск, «Висщая школа», 1987.
5. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Ўқитувчи нашриёти, 1993.
6. Фадеев К. ва бошқалар. Сборник задач по высщей алгебре. Москва, Мир. 1977.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Москва, Наука. 1977.

Мундарижа:

	Сўз боши	3
Кириш мавзуси	Тўплам тушунчаси. Тўпламлар устида амаллар.	4
1-мавзу	Группалар ва уларга доир мисоллар	8
2-мавзу	Алмаштиришлар группаси	18
3-мавзу	Группалар	22
4-мавзу	Циклик группалар	31
5-мавзу	Изоморфизм	37
6-мавзу	Қисм группалар	43
7-мавзу	Тўғри кўпайтма	51
8-мавзу	Қўшни синфлар. Лагранж теоремаси	56
9-мавзу	Ички автоморфизмлар	63
10-мавзу	Нормал қисм группалар	67
11-мавзу	Фактор группалар	72
12-мавзу	Группанинг коммутанти	79
13-мавзу	Гомоморфизм	86
14-мавзу	Ечилувчи группалар	94
	Адабиётлар рўйхати	99