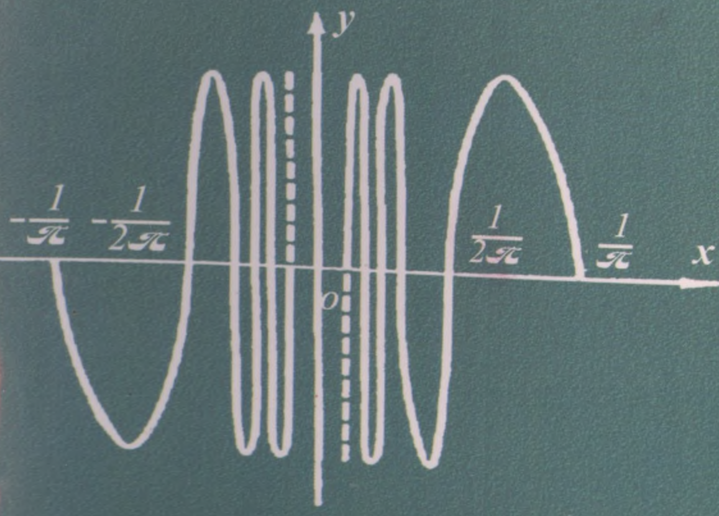
ISBN-978-9943-362-71-0

«TAFAKKUR-BO'STO
NASHRIYOTI

T.F.JO‘RAYEV

TOPOLOGIYAGA KIRISH

Funktorlar. O‘lchamlar. Chiziqlar



519.46(U15)
J-96

T. F. JO‘RAYEV

TOPOLOGIYAGA KIRISH

Funktorlar. O‘lchamlar. Chiziqlar

Toshkent
“Tafakkur-Bo‘stoni”
2012

BUXORO OLIY
TEXNOLOGIYALAR MUHANDISLIK-
TEXNIKA INSTITUTI
ARM
5294

UDK: 519.46(075)
22.152
J96

Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar/ – Toshkent, «Tafakkur-Bo'stoni», 2012. 240 b.

ISBN: 978-9943-362-71-0

UDK: 519.46(075)
KBK: 22.152

Taqrizchi: Madirimov M.M. – Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universiteti "Matematik analiz" kafedrasi proffessori

Mazkur qo'llanma topologiya fani bo'yicha "Matematika", "Matematika-informatika" hamda "Matematika o'qitish metodikasi" yo'nalishlari talabalari uchun o'zbek tilida ilk bor yozilgan qo'llanmadir. Ushbu qo'llanmaga topologiyaning fizikaga ba'zi tatbiqlari ham kiritilgan.

ISBN – 978-9943-362-71-0

© T. F. Jo'rayev, 2012.
© «Tafakkur-Bo'stoni» nashriyoti, 2012.

Beshinchi bobda topologik fazolarda kategoriya tushunchasi, kovariant funktorlar, normal funktorlar keltiriladi. Ehtimollik o'lchovli funktorning ba'zi geometrik va topologik xossalari o'rganiladi. Shuningdek, bu bobda gomotopik guruh funktorlari, gomotopik guruh funktorlarining kontravariant funktor ekanligi hamda ularning ba'zi tatbiqlari ham keltiriladi.

Oltinchi bob topologik sirtlar va ko'pxilliklar deb ataladi. Topologik ko'pxilliklarning triangulyasiyasi, sirtlarning yoyilmasi tushunchasi berilib, yoyilmalarning klassifikatsiyasi yoritiladi. Topologik akslantirishlar yordamida sirtlarda "yelimlash" amali aniqlanadi. Proektiv tekislik va proektiv fazolarning Eyler xarakteristikasi keltiriladi. Ko'pburchak (muntazam)larning turlari keltiriladi. Miyobius varag'i, oriyentirlangan va oriyentirlanmagan sirtlarning topologik klassifikatsiyasi keltiriladi. Triangulyasiyasi berilgan sirtlarda yiriklashtirish, maydalashtirish va ixchamlashtirish amallari aniqlanadi.

Yettinchi bobda umumiy topologiyaning, aniqrog'i, algebraik topologiyaning fizikadagi ba'zi tatbiqlari beriladi. Moddalarning turli tartiblangan strukturasida kondensirlangan holatlarni o'rganishda va topologik talqin qilishda, tekshirishda strukturada u yoki bu defektlarning barqarorligi hosil bo'ladigan zaruriyat yuzaga keladi. Bu defektlarga kristallarda dislokatsiya (kristallik tartibining buzilishi), suyuq kristallarda disklinatsiya (moddalar yo'nalish maydonining uzluksizligi buzilishi), vixrlar – uyurmalar, He^3, He^4 suyuqliklarda o'ta oquvchanlik va ferromagnetik hamda boshqa barqaror (mustahkam) geometrik konfiguratsiyalar kiradi. Nematiklarda hosil bo'ladigan fizik jarayonlarni topologiyaning gomotopik guruhlari nuqtai nazaridan qarash, nematiklarda barqarorlik holatlari ko'rib chiqiladi.

So'nggi, sakkizinchi bobda chiziq tushunchasini ta'riflashga bo'lgan ba'zi urinishlar, Peano chiziqlari, Kantorning mukammal to'plami, Jordan teoremasi va va'da chizig'i keltiriladi, Serpinskiy gilami va Mengerning universal chizig'i bayoni beriladi, Urison chiziqlari ta'riflanadi. O'lcham va o'lchovlar farqlanadi, so'ngra eng kichik o'lchamli sirtlar – fraktallar ta'riflanadi.

Shuni ta'kidlaymizki, risolada keng adabiyotlar ro'yxati keltirilib, har bir bob uchun tavsiya etilayotgan adabiyotdar ro'yxati alohida ajratib berilgan.

UDK: 519.46(075)
22.152
J96

Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar/ – Toshkent, «Tafakkur-Bo'stoni», 2012. 240 b.

ISBN: 978-9943-362-71-0

UDK: 519.46(075)
KBK: 22.152

Taqrizchi: Madirimov M.M. – Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika Universiteti "Matematik analiz" kafedrasi proffessori

Mazkur qo'llanma topologiya fani bo'yicha "Matematika", "Matematika-informatika" hamda "Matematika o'qitish metodikasi" yo'nalishlari talabalari uchun o'zbek tilida ilk bor yozilgan qo'llanmadir. Ushbu qo'llanmaga topologiyaning fizikaga ba'zi tatbiqlari ham kiritilgan.

ISBN – 978-9943-362-71-0

© T. F. Jo'rayev, 2012.
© «Tafakkur-Bo'stoni» nashriyoti, 2012.

Beshinchi bobda topologik fazolarda kategoriya tushunchasi, kovariant funktorlar, normal funktorlar keltiriladi. Ehtimollik o'lchovli funktorning ba'zi geometrik va topologik xossalari o'rganiladi. Shuningdek, bu bobda gomotopik guruh funktorlari, gomotopik guruh funktorlarining kontravariant funktor ekanligi hamda ularning ba'zi tatbiqlari ham keltiriladi.

Oltinchi bob topologik sirtlar va ko'pxilliklar deb ataladi. Topologik ko'pxilliklarning triangulyasiyasi, sirtlarning yoyilmasi tushunchasi berilib, yoyilmalarning klassifikatsiyasi yoritiladi. Topologik akslantirishlar yordamida sirtlarda "yelimlash" amali aniqlanadi. Proektiv tekislik va proektiv fazolarning Eyler xarakteristikasi keltiriladi. Ko'pburchak (muntazam)larning turlari keltiriladi. Miyobius varag'i, oriyentirlangan va oriyentirlanmagan sirtlarning topologik klassifikatsiyasi keltiriladi. Triangulyasiyasi berilgan sirtlarda yiriklashtirish, maydalashtirish va ixchamlashtirish amallari aniqlanadi.

Yettinchi bobda umumiy topologiyaning, aniqrog'i, algebraik topologiyaning fizikadagi ba'zi tatbiqlari beriladi. Moddalarning turli tartiblangan strukturasida kondensirlangan holatlarni o'rganishda va topologik talqin qilishda, tekshirishda strukturada u yoki bu defektlarning barqarorligi hosil bo'ladigan zaruriyat yuzaga keladi. Bu defektlarga kristallarda dislokatsiya (kristallik tartibining buzilishi), suyuq kristallarda disklinatsiya (moddalar yo'nalish maydonining uzluksizligi buzilishi), vixrlar – uyurmalar, He^3, He^4 suyuqliklarda o'ta oquvchanlik va ferromagnetik hamda boshqa barqaror (mustahkam) geometrik konfiguratsiyalar kiradi. Nematiklarda hosil bo'ladigan fizik jarayonlarni topologiyaning gomotopik guruhlari nuqtai nazaridan qarash, nematiklarda barqarorlik holatlari ko'rib chiqiladi.

So'nggi, sakkizinchi bobda chiziq tushunchasini ta'riflashga bo'lgan ba'zi urinishlar, Peano chiziqlari, Kantorning mukammal to'plami, Jordan teoremasi va va'da chizig'i keltiriladi, Serpinskiy gilami va Mengerning universal chizig'i bayoni beriladi, Urison chiziqlari ta'riflanadi. O'lcham va o'lchovlar farqlanadi, so'ngra eng kichik o'lchamli sirtlar – fraktallar ta'riflanadi.

Shuni ta'kidlaymizki, risolada keng adabiyotlar ro'yxati keltirilib, har bir bob uchun tavsiya etilayotgan adabiyotdar ro'yxati alohida ajratib berilgan.

Qo‘llanma pedagogika institutlari va universitetlarining yuqori kurs talabalari, bitiruv malakaviy va kurs ishlari yozayotgan talabalar, geometriya-topologiya yo‘nalishida o‘qiyotgan magistr va aspirantlar, akademik litsey hamda kollej o‘qituvchilari, oliy o‘quv yurtlarining mazkur yo‘nalishda dars berayotgan professor-o‘qituvchilari uchun mo‘ljallangan.

Mazkur risola topologiya fani yo‘nalishida o‘zbek tilida yaratilgan dastlabki qo‘llanmadir. Shu sababli ba’zi atamalar o‘z o‘rnida to‘g‘ri qo‘llanilmagan bo‘lishi mumkin. Aytmoqchimizki, qo‘llanma ayrim juz’iy kamchiliklardan xoli emas. Bu nuqsonlarni bartaraf etishga bel bog‘lagan hamkasblarga oldindan chuqur minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Risolaning yaratilishiga bevosita hissa qo‘shgan, qimmatli fikr va maslahatlarini bergan fizika-matematika fanlari doktori, professor R.B. Beshimovga, qo‘lyozmani o‘qib, mazmunan boyitishda xizmatlari singgan fizika-matematika fanlari nomzodlari, dotsentlar G. Jabborov va D. Davletovlarga, qo‘lyozmani tahrir qilishda yordamini ayamagan K. Qo‘chqorov hamda dotsent O. Rahmatullayevlarga o‘z samimiy minnatdorchiligimizni izhor qilamamiz.

I bob. TOPOLOGIK FAZO VA UZLUKSIZ AKSLANTIRISHLAR

Bu bobda topologiyaning asosiy obyektlari va topologik fazo ta'rifi beriladi, topologik fazoning asosiy tushunchalaridan biri bo'lmish topologik akslantirishlar mohiyati yoritiladi. Topologik fazolarni solishtirish, to'plamda turli topologiyalar mavjudligi, ochiq va yopiq akslantirishlar, topologik fazoda fazoostilar haqida, faktor fazo va ularning o'rinlari, inisial va final topologiyalar, filtr tushunchasi va umumlashgan yo'nalish (yoki umumlashgan ketma-ketlik) limiti, topologik fazo predmeti, topologik fazodagi asosiy invariantlar, to'plamda topologiyani kiritishning ba'zi yo'llari, topologik fazo bazasi va uning mohiyati, metrik fazo ta'rifi keltiriladi va metrik fazolarda ham topologiyaning kiritilishi haqida gap ketadi. Topologiyadagi inisial, final va indutsirlangan (sug'orilgan) topologiyalar xususida fikr yuritiladi. Qisqasi, bu bobda topologiya va topologik fazolarning asosiy tushunchalari o'rganiladi.

1.1-§. Topologiya haqida

Ko'pgina matematik tushunchalar, ba'zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida bir qancha vaqt davomida o'z tatbig'ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo'ladi: ushbu sonlar bir necha yuz yillar mobaynida boshqa sohalarda qo'llanilmay, keyinchalik fizika va mexanikaga kirib keldi. Shunga o'xshab, matematikaning asosiy bo'g'ini bo'lmish geometriya fanini oladigan bo'lsak, bu sohada noevklid (Lobachevskiy) geometriyaning asosiy obyektlari – Lobachevskiy tekisligi va fazosi (Lobachevskiy tekisligi modeli) ham bir necha o'n yillar davomida o'z tatbig'ini topmagan.

Shunga o'xshash sohalardan yana biri **Evklid geometriyasi, Lobachevskiy geometriyasi, zamonamiz geometriyasi**, qolaversa, zamonaviy matematikaning bir bo'limi, hosilasi bo'lgan topologiya fanidir. Topologiya so'zining lug'aviy ma'nosi yunoncha $\tau o\pi o\zeta$ – *joy (o'rin)*, $\tau o\gamma o\zeta$ – *qonun* so'zlaridan iborat.

Topologiya atamasini birinchi bo'lib Listing qo'llagan. Topologiya – matematikaning nisbatan "yosh" va muhim bo'limlaridan biridir. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlarini (tushunchalarini) umumiy nuqtai nazardan qayta ko'rib chiqish natijasida paydo bo'ldi.

Topologiya fan sifatida ilk marta XIX asrning oxirlarida buyuk fransuz matematigi Anri Puankare ishlarida shakllana boshlagan. U topologiyani "analysis situs" (lotinchadan tarjimasi – *joy (o'rin) geometriyasi*) tahlili deb nomlaydi. Bu atamani esa, matematikaga birinchi bo'lib Riman olib kirgan. Keyinchalik bu atamalar bir so'z bilan *topologiya* deb atala boshlandi.

A. Puankare topologiya to'g'risida shunday degan edi: ***"O'zimga keladigan bo'lsak, oldinma-ketin kirib chiqqan turfa yo'llar meni "analysis situs" tomon boshlab keldi".***

Bu o'rinda mashhur fransuz matematigi Andre Veylning topologiya xususida aytgan quyidagi so'zlari ham e'tiborga loyiqdir: ***"Har bir matematikning qalbini zabt etish ustida topologiya farishtasi bilan mavhum algebra shaytoni kurash olib boradi. Bu orqali, birinchidan, topologiyaning ajoyib jozibasi va go'zalligi namoyon bo'lsa, ikkinchidan, barcha zamonaviy matematikaning g'aroyib birikishi topologiya va algebraga eltishi ifoda etiladi".***

Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyaning fizika, biologiya, ximiya va binobarin, geografiya fanlaridagi tatbig'i qo'llanilmoqda. Topologiyaning sehrli olamiga kirish mashaqqatlidir. Shu sababli topologiya fanining tushuncha, ta'rif va ma'lumotlarini puxta o'zlashtirish muhim. Oddiy topologik tushunchalar bizni o'rab turgan olamga nazar tashlaganda paydo bo'la boshlaydi. O'z-o'zidan tushunarliki, figuralarning geometrik xossalariga figura o'lchamlari, ularning joylashishi, burchaklarining ko'rinishi va hokazolar kiradi.

Bu geometrik xususiyatlardan tashqari, yana nimadir nazarimizdan chetda qolayotgandek tuyuladi. Masalan, geometrik chiziqlarning yopiq yoki yopiq emasligi, figuralarning "teshikli" yoki "teshiksiz", cho'ziluvchan yoki cho'ziluvchan emasligi, geometrik figuralarning zanjirsimonligi yoki yo'qligi, bog'lamli chiziqlarning bog'ichli bo'lishi yoki bo'lmasligi, figuralarni yirtmasdan cho'zish yoki cho'zish mumkin emasligi kabi xossalarini inobatga oladigan bo'lsak, Evklid geometriyasidan sal tashqariga chiqishga to'g'ri keladi. Aynan shu o'rganish natijasida va shu kabi geometrik figuralarning xossalarini o'rganuvchi topologiya fani elementlari kirib kela boshladi.

KIRISH

Topologiya fani umumiylik nuqtai nazaridan geometriya va matematik analiz fanlarining asosiy tushunchalarini qayta ko'rib chiqish natijasida vujudga kelgan. Topologiya fani matematikaning deyarli yosh, lekin muhim qismidir. Topologiyaga quyidagicha ta'rif berish mumkin: **topologiya** – matematikaning geometrik bo'limi bo'lib, uzluksizlikni tadqiq qiluvchi, ya'ni uzluksiz akslantirishlarni o'rganuvchi sohasi hisoblanadi. Qisqacha qilib aytganda, funksiyaning uzluksizligi tushunchasga ko'ra, metrik fazo va topologik fazolar hamda ularning uzluksiz akslantirishlarni anglatadi. Geometrik nuqtai nazardan ikki sonning ayirmasi moduli uni sonlar o'qi R da nuqtalar orasidagi masofadan iborat ekanligini bildiradi.

1906-yilda fransuz matematigi M. Freshe fanga metrik fazo tushunchasini kiritganidan so'ng ixtiyoriy tabiatli to'plamda ikki nuqta orasidagi masofani ma'lum shartlar asosida aniqlash imkoni tug'ildi.

Akslantirish $f: X \to Y$ ning biror nuqtadagi uzluksizlik shartini olaylik, bunda nuqtaning yetarli "yaqin" nuqtalari obrazning yetarli "yaqin" nuqtalariga o'tadi. Bu fikrni geometrik tasavvur nuqtai nazardan ifodalaymiz: X metrik fazo x_0 nuqtasining (xususiy holda R – to'g'ri chiziq) ε atrofi $O_\varepsilon(x_0)$ deb fazoning x_0 nuqtadan $\varepsilon > 0$ dan katta bo'lmagan uzoqlikda yotgan nuqtalari to'plamini bildiradi, ya'ni $O_\varepsilon(x_0) = \{x : \rho(x_1 x_0) < \varepsilon\}$ (to'g'ri chiziqda x_0 nuqtaning ε atrofi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervaldan iborat).

Akslantirishning x_0 nuqtasidagi uzluksizligi quyidagi ko'rinishni oladi: ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $x \in O_\varepsilon(x_0)$ nuqtalar uchun $f(x) \in O_\delta f(x_0)$ o'rinli bo'laveradi.

Bu esa, $f: X \to Y$ akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, x_0 nuqtaning yetarli "zich" atrofidagi nuqtalari obrazi $f(x_0)$ nuqtaning yetarli "zich" atrofidagi nuqtalariga akslanadi demakdir.

Bundan ko'rinadiki, akslantirishning nuqtadagi uzluksizligini aniqlash uchun nuqtalar orasidagi masofa yetarli emas, balki nuqtaning atrofi tushunchasidan foydalanish ma'qul bo'ladi.

1914-yilda nemis matematigi F. Xausdorf o'zining "To'plamlar nazariyasi" kitobida birinchi bo'lib nuqtaning atrofi tushunchasini aksiomalashtirib, topologik (atroflar orqali aniqlangan) fazoning ta'rifini ifodalab berdi. Keyinchalik topologik fazolarning nisbatan soddaroq ta'riflari keltirildi.

Shuni jiddiy ta'kidlashimiz kerakki, metrik fazolar tabiiy ravishda topologik fazoni tashkil qiladi. Topologik fazolarga uzluksiz akslantirishlarning mavjud bo'lishi uchun tabiiy muhit sifatida qaralib, uning asosida topologiyaning umumiy topologiya deb ataluvchi bir tarmog'i vujudga keldi va barqaror rivojlanib bormoqda. Topologiyaning boshqa tarmoqlaridan farqli o'laroq umumiy geometrik topologiya uning umumiy va sof topologik xossalarini o'rganadi.

Xususiy holda differensial va bo'lakli-chiziqli (kusochno-lineynaya) topologiya differensiallanuvchi ko'pxilliklar va poliedrlar (umumlashgan ko'pyoqliklar)ning, algebraik va gomotopik topologiya esa, algebraning topologiyada qo'llanishiga asoslanadi. Shuni ta'kidlash kerakki, oxirgi paytlarda gomologiya va gomotopik topologiyalarda topologiyaning juda muhim umumiy topologik fazolar sinflari o'rganilmoqdaki, algebraik topologiya bilan umumiy topologiya orasidagi chegarani aniqlash ma'lum murakkablik tug'dirmoqda. Uzluksiz akslantirishlar xususiyatini o'rganish, o'z navbatida, bu akslantirishlarni aniqlash va qiymatlari sohalari bo'lmish topologik fazolarni o'rganishga olib keladi.

Topologik fazolarni uzluksiz akslantirishlar orasida topologik akslantirishlar (gomeomorf) deb ataluvchi gomeomorfizmlar maxsus o'rin tutadi. Bu akslantirishlar topologiyada shunday muhim o'rinni egallaydiki, chunonchi, o'zaro bir qiymatli affin akslantirishlar affin geometriyada qanday ahamiyat kasb etsa, ular ham topologiyada shunday ahamiyat kasb etadi. Masalan, X va Y lar metrik fazolar bo'lsa, $f: X \to Y$ akslantirishning gomeomorfizm ekanligi X fazoning shakl va o'lchovlari Y fazoga ham bir xilda o'tadi, X fazoda hech qanday "uzilish" va hech qanday nuqtalarni "yelimlash" ro'y bermasa, Y fazoda ham xuddi shunday bo'ladi.

Masalan, $[0,1]$ kesmani ixtiyoriy kesmaga va uni yarim aylana $\{(x,y): x^2+y^2=1, y \geq 0\}$ ga topologik akslantirish mumkin, $(0,1)$ intervalni esa, butun R to'g'ri chiziqqa gomeomorf akslantirish mumkin. Bu jarayonda $[0,2\pi)$ yarim intervalning φ nuqtasiga R^2 tekislikning $f(\varphi)=(\cos\varphi, \sin\varphi)$ nuqtasini mos qo'yuvchi birlik aylana S ning nuqtasini olsak, bu akslantirish bir qiymatli va bir tomonga uzluksiz, f^{-1}

akslantirish esa, $(1,0) \in S$ nuqtada uzilishga ega (f akslantirish $[0,2\pi)$ yarim intervalning 0 nuqtasini "uzoq" to'plam $[\pi,2\pi)$ ga "yelimlamoqchi").

Topologik akslantirishlar bizga jo'n topologik invariantlarni ta'riflash va aniqlashda qo'l keladi. Bu invariantlar topologik akslantirishda o'z xususiyatini o'zgartirmaydi. Topologik invariantlarga misol tariqasida topologik fazoning quvvati tushunchasini, topologik fazolarning salmog'ini, fazoning bir yoki bir necha bo'lakdan iborat bo'lishini, ya'ni bog'lamli yoki bog'lamsiz ekanligini, topologik chegaralanganlik xossasini (kompaktliligini), fazolarning "o'lchovlari soni"ni (fazoning o'lchami) keltirish mumkin. Metrik, affin va proektiv geometriyalarga o'xshab, topologiya ham ko'p hollarda matematikaning topologik invariantlarini o'rganuvchi bo'limi deb yuritiladi.

Umumiy topologiyada ko'p o'rganilayotgan, yetarlicha geometrik va asosiy topologik invariantlardan biri fazolarning "o'lchovlari soni"dir. Bu juda muhim invariantlardan biridir. Biz geometriyada to'g'ri chiziq, tekislik, R^3 fazo va uning qism fazolari o'lchamlarini vektor fazoning chiziqli erkin vektorlari soni orqali aniqlagan edik. Topologiyada esa, o'lchamlarning uchta: $\dim$, ind va Ind invariantlari bilan tanishamiz.

O'lchamlar nazariyasining eng mashhur nazariyotchi va asoschilari sifatida dunyoning uch mashhur matematigi: A. Puankare, A. Lebeg va L. Brauerlar alohida e'tirof etiladi.

1913-yilgacha hech qanday o'lchamlar nazariyasi, hattoki ularning ta'riflanishi ham mavjud emas edi. Shu jumladan, o'lchamlar nazariyasi topologiyaning o'rganish sohasi ekanligi ham ma'lum emasdi. Lekin o'lchamlar nazariyasi to'plamlar nazariyasining o'rganish obyekti emasligi aniq edi. Bu faktni to'plamlar nazariyasi asoschisi G. Kantor 1890-yilda to'g'ri chiziq nuqtalari to'plami bilan tekislikning nuqtalari to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatib, asoslagan edi.

Bu yo'nalishda 1911-yilda Brauer ajoyib natijaga, ya'ni R^n va R^m $(m \neq n)$ Evklid fazolarining gomeomorf emasligini aniqlashga erishdi. Bu faktni isbotlashda Brauer o'lchamlar nazariyasiga asoslanmadi, chunki bu paytda hatto o'lchamning ta'rifi ham yo'q edi.

1912-yilda filosofik jurnalda A. Puankarening bir maqolasi e'lon qilindi va u o'z maqolasida o'lchamning ta'rifini keltirmasa ham, o'lchamning ta'rifiga induktiv yondashish kerakligini yetarlicha yoritib berdi. Ushbu maqolada u topologik fazoni yetarlicha "kichik" o'lchamli qism fazoostilarga bo'lishga asoslanadi. 1913-yilda Brauer bu maqolaga asoslanib, yetarlicha keng topologik fazolar sinfi uchun katta induktiv o'lcham – $IndX$ deb ataluvchi o'lchamning aniq ta'rifini berdi va $IndR^n = n$ ni isbotladi. Keyinchalik Lebeg va Brauerlar o'lchamning qoplama tilidagi ta'rifini berdi, ya'ni $\dim X$ to'plam o'lcham invarianti ta'riflandi.

1922–1923-yillarda Brauerning $IndX$ o'lchamidan farqli ravishda va bir-biridan bexabar holda rus matematigi P.S. Urison hamda avstriyalik Ye. Mengerlar kichik $indX$ o'lchamining ta'rifini berishdi.

Shunday qilib, topologik fazolar sinfida o'lchamlarning uchta invarianti: ind, Ind va dim vujudga keldi. Bu o'lchamlar invariantlari sof topologik, yetarlicha geometrik invariant bo'lib, ular sanoqli bazali metrik fazolarda ustma-ust tushadi. Bu invariantlar yordamida ixtiyoriy geometrik figura o'lchamini aniqlashimiz mumkin bo'ladi. Masalan, $indX$ o'lchami yordamida P.S. Urison geometriyada birinchi bo'lib geometrik chiziqning uzil-kesil ta'rifini berdi.

Qo'llanmaning birinchi bobida topologik va metrik fazolarning ta'riflari va xossalari keltirilib, bu fazolardagi akslantirishlar, invariantlar, topologiyaning predmeti, topologik fazolarda ba'zi amallar ta'riflari keltiriladi.

Ikkinchi bobda topologik fazolarda ko'paytma, bog'lamlilik tushunchalari, bikompakt fazolar va diadik bikompaktlar, ajrimlilik va funksional ajrimlilik aksiomalari o'rganiladi, separabel va sanoqli bazalik topologik fazolar, parakompakt va lokal bikompakt fazolar, lokal bikompakt fazolarning kichik kengaytmasi – Aleksandrov kengaytmasi beriladi. Shuningdek, bu bo'limda keltirilgan tushunchalar orasidagi bog'lanishlar va ularning sodda xossalari yoritiladi.

Uchinchi bob topologik fazolarning uchta o'lchami: ind, Ind va dim invariantlariga bag'ishlangan bo'lib, bu o'lchamlar orasidagi munosabatlar aniqlanadi. Qo'zg'almas nuqta haqida Brauer teoremasi berilib, uning ba'zi tatbiqlari, R^n Evklid fazosidagi geometrik figuralar o'lchami va geometrik chiziqning Urison ta'rifi keltiriladi.

To'rtinchi bobda uzluksiz akslantirishlar fazosi, gomotopiya va gomologiya, fundamental guruh tushunchalari bayon qilinadi. Algebraik topologiyaning ba'zi masalalari, ikki o'lchamli sirtlarning yuqori tartibli fundamental guruhlari, singulyar gomologiyalari keltiriladi. Fazoning n o'lchamli gomologiyasi va ularning xossalari bayon qilinadi.

MUNDARIJA:

Kirish 7

I bob. Topologik fazo va uzluksiz akslantirishlar 13

1.1-§. Topologiya haqida 13

1.2-§. Metrik fazolar 17

1.3-§. Topologik fazolar 19

1.4-§. Topologik fazolarni solishtirish 22

1.5-§. Topologik fazo bazasi va old bazasi 24

1.6-§. Topologik fazoda to'plamlararo amallar 27

1.7-§. Uzluksiz akslantirishlar 31

1.8-§. Ochiq va yopiq akslantirishlar 33

1.9-§. Gomeomorfizm 34

1.10-§. Topologik tip, topologik invariantlar va topologiyaning predmeti 36

1.11-§. Indutsirlangan topologiya va fazoosti 37

1.12-§ Faktor topologiya va faktor fazo 38

1.13-§. Initsial va final topologiya 44

1.14-§. Yo'naltirilganlik filtri va uning limiti 45

I bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi 48

II bob. Topologik fazodagi amallar va topologik fazoning ajrimlilik aksiomalari 49

2.1-§. Topologik fazolar ko'paytmasi 49

2.2-§. Topologik fazolarda akslantirishlarning diagonal va to'g'ri ko'paytmasi 52

2.3-§. Topologik yig'indi 54

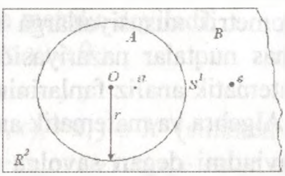
2.4-§. Bog'lamli topologik fazolar 55
2.5-§. Topologik fazoda ajrimlilik aksiomalari.
T_0; T_1; T_2; T_3; $T_{3\frac{1}{2}}$; T_4 — fazolar 62
2.6-§. Sanoqli baza. Separabel fazolar 70
2.7-§. Kompakt va bikompakt fazolar 75
2.8-§. Lokal kompakt va parakompakt fazolar 79
2.9-§. Lokal bikompakt fazolarning Aleksandrov kengaytmasi 81
2.10-§. Diadik bikompaktlar 83
II bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi ... 84
III bob. Topologik fazo o'lchami 85
3.1-§. Nol o'lchamli topologik fazolar 85
3.2-§. n o'lchamli topologik fazolar 86
3.3-§. Qo'zg'almas nuqta haqida Brauer teoremasi va uning tatbig'i 89
3.4-§. Fazoning ind, Ind va dim o'lchamlari hamda
ularning asosiy xossalari 96
3.5-§. R^n fazo va uning to'plamostilari o'lchami. Chiziq ta'rifi 100
III bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi 105
IV bob. Gomotopiya va gomologiya 107
4.1-§. Uzluksiz akslantirishlar fazosi 107
4.2-§. Uzluksiz akslantirishlar fazosida ekvivalentlik. Gomotopiya 110
4.3-§. Yo'llarni ko'paytirish 113
4.4-§. Fundamental gruppa (guruh) 120
4.5-§. Aylana va ba'zi sirtlarning fundamental gruppasi 124
4.6-§. Ba'zi bir sirtlarning yuqori tartibli fundamental gruppalari 130

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning *n* o'lchamli gomologiyasi va xossalari 133
IV bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi 138
V bob. Bikompaktlar kategoriyasida kovariant funktorlar 139
5.1-§ Kategoriya tushunchasi 139
5.2-§. Funktorlar 141
5.3-§. Normal funktorlar 144
5.4-§. Ehtimol o'lchovli funktorlar va ularning qism funktorlari 146
5.5-§. Gomotopik gruppa funktorlari 154
V bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi 156
VI bob. Topologik sirtlar va ko'pxilliklar 157
6.1-§. Ikki o'lchamli sirtlarni yelimlash 158
6.2-§. Sirtlarning triangulyasiyasi 162
6.3-§. Sirtlarning yoyilmasi 165
6.4-§. Yoyilma klassifikatsiyasi (tasnifi) 167
6.5-§. Ko'pburchak va sirtlarning Eyler xarakteristikasi 174
6.6-§. Sirtlarning Eyler xarakteristikasi va topologik klassifikatsiyasi 179
VI bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi 181
VII bob. Fizika fanining ba'zi sohalarida topologiyaning tatbig'i 182
7.1-§. Vektor maydon. Maxsus nuqta va maxsus chiziqlar 183
7.2-§. Akslantirish darajasi, topologik va gomotopik invariantlarning fizik jarayonlardagi talqini 186

7.3-§. Ferromagnetikning magnit maydoni va o‘ta oquvchan He^4 “gaz”ining uyurmalari 189
7.4-§. Ferromagnetik va o‘ta oquvchan He^4 gaz uyurmalarining barqarorligi 192
7.5-§. Topologik tushunchalar va fizik xossalarning bog‘liqligi 194
7.6-§. Nematik-suyuq kristallarning topologik tabiati 198
VII bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi 206
VIII bob. Chiziqlar. O‘lchamlar. Fraktallar 207
8.1-§. Kantorning mukammal to‘plami 207
8.2-§. Kantor zinapoyasi 209
8.3-§. Serpinskiy gilami 212
8.4-§. Menger chizig‘i 213
8.5-§. Peano chiziqlari 214
8.6-§. Jordan teoremasi. Va’da chizig‘i 219
8.7-§. Urison chiziqlari 223
8.8-§. O‘lchamlar va o‘lchovlar 226
8.9-§. Fraktallar 228
VIII bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi 229
Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati 231

A. Puankare nuqtai nazariga ko'ra, topologiya shunday fanki, u geometrik figuralarning sifatiy xossalarini faqat uch o'lchamli fazoda emas, balki undan yuqori o'lchamli fazolarda ham o'rganishga yordam beradi. Geometrik figuralarning sifatiy xossalari deganda, masalan, sferani rezina qobiq bilan qoplangan deb faraz qilib, uni yetarlicha siqishni yoki yetarlicha uzmasdan cho'zishni tushunish mumkin. Sferani bunday almashtirishlar topologik gomeomorfizm deb yuritiladi. Gomeomorfizm natijasida hosil qilingan har xil geometrik figuralar o'zaro gomeomorf deyiladi. Figuralarning sifatiy xossalari bu figuraga o'zaro gomeomorf bo'lgan barcha geometrik figuralarga tegishli bo'ladi. Bunday xossalar bir so'z bilan topologik xossalar deb ataladi.

Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, sferaning topologik xususiyati uning bir butunligi va bog'lamli ekanligidadir. Sferani chuqurroq o'rganishga, masalan, sfera bilan shar yoki doiraning harakati natijasida gomeomorfligini ko'rsatishga harakat qilsak, uning boshqa xususiyatlari ayon bo'ladi. Aslida bunday gomeomorfizm bo'lishi mumkin emas. Masalan, voleybol to'pi bilan velosiped kamerasi o'zaro topologik har xildir. Ko'rgazmali tasavvurlardan ma'lum bo'ladiki, doiraviy halqa doiraga gomeomorf emas. Chunonchi, figuralar teshiklari soni ham figuraning topologik xususiyatidir. Evklid tekisligi R^2 dagi markazi O nuqtada radiusi bo'lgan va r bo'lgan aylanani S^1 bilan belgilaylik (1.1.1-rasm).



1.1.1-rasm

U holda $R^2 \backslash S^1$ to'plam ikkita o'zaro bir-birini to'ldiruvchi (S^1 ga nisbatan) ochiq A va B to'plamlarga ajraladi, ya'ni $A \cup B = R^2 \setminus S^1$. S^1 ga nisbatan A – ichkarisi, B esa, tashqarisi desak, S^1 aylana A va B to'plamlar o'rtasida chegara – to'siq vazifasini o'tamoqda. A to'plamning ixtiyoriy $a \in A$ nuqtasi bilan B to'plamning ixtiyoriy $b \in B$ nuqtasi orasida S^1 aylana bilan kesishmaydigan sodda uzluksiz yo'l mavjudmi?

To‘g‘ri chiziqdagi $[0;1]$ kesmaning tekislikdagi gomeomorf obrazi (aksi) sodda uzluksiz yo‘l deb ataladi. Yuqoridagi savolning javobi: “yo‘q”. Haqiqatan ham, agar $\rho(x,y)$ bilan R^2 Evklid tekisligida ikki nuqta orasidagi masofani belgilasak, $\gamma(t):[0;1]\to R$ yo‘l bo‘lsa, bu yerda $\gamma(0)=a$ va $\gamma(1)=b$. U holda $f(t)=\rho(\gamma(t),0)$ funksiya ham $\gamma(t)$ uzluksiz bo‘lgani uchun uzluksizdir va $f(0)<r; f(1)>r$. Funksiyaning xossalariga ko‘ra, $f(0)=\rho(\gamma(0),0)=\rho(a,0)<r$, ya’ni $a\in A$; $f(1)=\rho(\gamma(1),0)=\rho(b,0)>r$, ya’ni $b\in B$. Funksiyaning uzluksizligidan shunday t_0 nuqta topiladiki, bu nuqtada f funksiyaning qiymati r ga teng bo‘ladi. Bundan esa, $\gamma(t_0)\varepsilon S^1$. Demak, $\gamma([0,1])\cap S^1\neq\varnothing$. Ma’lum bo‘ladiki, A va B to‘plamlarni tutashtiruvchi S^1 bilan kesishmaydigan uzluksiz yo‘l mavjud emas ekan. Agar S^1 ning gomeomorf obrazini G orqali belgilasak, bunday chiziq yopiq sodda chiziq deb yuritiladi.

Shunday savol tug‘iladi: $R^2\setminus G$ to‘plam o‘zaro kesishmaydigan, chegaralari G dan iborat bo‘lgan ochiq to‘plamlarga ajraladimi? Topologiyaning chuqurroq tushunchalaridan foydalanib, Jordon bu savolga “ha” javobini beradi. Jordon teoremasi haqida risolamizning oxirgi boblaridan birida atroflicha to‘xtalamiz.

Topologiyaning geometrik xususiyatlarga boy muhim yo‘nalishlaridan yana biri qo‘zg‘almas nuqtalar nazariyasidir. Qo‘zg‘almas nuqtalar nazariyasi algebra va matematik analiz fanlarining asosiy masalalari bilan chambarchas bog‘liqdir. Algebra va matematik analizda $f(x)=0$ (1) tenglamaning yechimlari mavjudmi degan savolga duch kelamiz. Bu yerda $f(x)$ ko‘phad yoki boshqa biror funksiya (1) tenglamaga ekvivalent.

$$f(x)+x=x \quad (2)$$

Agar $F(x)=f(x)+x$ deb belgilash kiritsak, ekvivalent $F(x)=x$ (3) tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu (3) tenglamaning yechimlari F akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi deyiladi. Ushbu akslantirish birorta yopiq (Evklid fazosida), albatta, chegaralangan to‘plamda qaralsa, qo‘zg‘almas nuqta mavjudligining mazmunli alomatlari hamda isbotlari bor.

Hozirgi kunga kelib topologiya matematik tadqiqotlarning mustahkam quroliga aylandi, uning tili esa, universal ahamiyat kasb etmoqda.

Topologiyaning fizikada, mexanikada va boshqa fanlarda kompleks qo‘llanishi fakt bo‘lib qoldi. Fizikada ba’zi real holatlarni bayon qilishni topologiyasiz hal qilib bo‘lmaydi. Teskari holatlar ham uchrab turadi, ya’ni fizikadagi ba’zi muammolar topologiyaning rivojlanishiga ta’sir etmoqda.

1.2-§. Metrik fazolar

Matematikaning ko‘p qo‘llaniladigan tushunchalaridan biri metrik fazo tushunchasidir. Bu tushuncha matematikaga birinchi bor fransuz matematigi M. Freshe tomonidan 1906-yilda kiritildi.

Metrik fazo – bu biror bo‘sh bo‘lmagan to‘plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlash ma’lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma’lum bir shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi shart bo‘ladi. Bu shartlar masofa (yoki metrika) aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tatbiq etiladi. Qolaversa, barcha fanlarda ham turli-tuman ko‘rinishda ishlatiladi. Fazoda (to‘plamda) ikki nuqta orasidagi masofa ma’lum bo‘lsa, nuqtalarning o‘zaro “yaqin”ligini, nuqta va to‘plamning, qolaversa, ikkita to‘plam (figura) “yaqin”ligini aniqlasa bo‘ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalarini o‘rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Bo‘sh bo‘lmagan X to‘plam va R haqiqiy sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin.

1.2.1.-ta’rif. Agar quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa, $\rho : X \times X \to R$ aks-lantirish X to‘plamda metrika deyiladi:

$(\rho 1)$. $\forall x, y \in X, \rho(x,y) \geq 0$;

$(\rho 2)$. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$(\rho 3)$. $\rho(x,y) = \rho(y,x), \forall x, y \in X$ (simmetriklik aksiomasi);

$(\rho 4)$. $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ $\forall x, y, z \in X$ (uchburchak aksiomasi).

Agar X to‘plam va ρ akslantirish metrika tashkil qilsa, ular birgalikda metrik fazo deyiladi va (X, ρ) ko‘rinishda yoziladi. Metrikani (X, ρ) metrik fazoda ikki element yoki ikki nuqta orasidagi masofa deb tushuniladi.

1.2.2-misol. X to‘plam sifatida R^1 – sonlar to‘g‘ri chizig‘i yoki X – haqiqiy sonlar to‘plami R^1 ni olsak hamda ixtiyoriy x va y sonlar uchun $\rho(x,y) = |x - y|$ desak, u holda, ma’lumki, bu ρ metrikaning hamma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $(R^1, |x - y|)$ metrik fazo tashkil qiladi.

TEXNOLOGIYALAR MUHANDISLIK-
TEXNIKA INSTITUTI
ARM
№ 5294

1.2.3-misol. R^n – ko‘p o‘lchovli sonlar fazosi. X sifatida $\{x=(x_1,..,x_n): x_i \in R^1, i=\overline{1,n}\}$ ko‘rinishdagi to‘plamni olaylik. Bu to‘plamning ikki x va y elementlari orasidagi metrikani (masofani) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}$ formula bilan aniqlaymiz, bu yerda $x=(x_1,...,x_n)\in X, y=(y_1,...,y_n)\in X$.

Ma’lumki, bu ρ metrika tashkil qiladi. Bu fazo n o‘lchovli sonlar fazosi deb yuritiladi va R^n ko‘rinishda belgilanadi.

Xususiy holda, agar $n=2$ bo‘lsa, R^2 da Evklid tekisligidagi metrika $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, $n=3$ bo‘lsa, R^3 da Evklid fazosidagi metrika $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$ ko‘rinishlarda bo‘ladi.

1.2.4-izoh. Bu X to‘plamda ko‘p hollarda metrika $\rho(x,y)=\max_i|x_i-y_i|$ ko‘rinishda ham aniqlanadi.

1.2.5-misol. l_p – fazo. X to‘plam sifatida $x=(x_1,...,x_n,...)$ ko‘rinishdagi haqiqiy sonlardan tashkil topgan, $\sum_{i=1}^{\infty}|x_1|^p<+\infty$ shartni qanoatlantiruvchi barcha sonli ketma-ketliklar to‘plamini olaylik. Bu yerda $p\geq 1$ shartni qanoatlantiruvchi tayin son. Bu to‘plamda ikki x va y elementlar orasidagi masofa (metrika)ni $\rho(x,y)=\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_1-y_1|^p\}^{\frac{1}{p}}$ ko‘rinishda aniqlaymiz, bu yerda $x_i\in R, \forall i=\overline{1,\infty}$. Tekshirib, ishonch hosil qilish mumkinki, bu (X,ρ) metrik fazo bo‘ladi. Bu fazo l_p ko‘rinishda belgilanadi. Agar $p=2$ bo‘lsa, l_2 fazo ko‘p hollarda **Gilbert** fazosi deb yuritiladi.

1.2.6-misol. Diskret metrik fazo. Faraz qilaylik, X bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. X to‘plamda ikki element: x va y orasidagi metrika (masofa)ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{agar } x=y,\\ 1, \text{agar } x\neq y\end{cases}$$

Bu $\rho(x,y)$ metrika tashkil qiladi va diskret metrika deyiladi. (X,ρ) fazo diskret metrik fazo deb yuritiladi.

Shuni aytish kerakki, bu ko'rinishda fazoni metrikalashtirish doim ham mazmunli bo'lavermaydi. Shu sababli doimo fazoni diskret bo'lmagan metrika bilan ta'minlash mazmunliroq bo'ladi va ko'p o'rganiladi.

1.2.7-izoh. Agar A to'plam (X,p) metrik fazoning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsa, A to'plamning ixtiyoriy x_1 va x_2 elementlari uchun bu ikki element orasidagi masofani (metrikani) $\rho_A(x_1,x_2)=\rho(x_1,x_2)$ deb olsak, u holda A to'plamostida metrika bo'ladi. Bu metrika ρ_A indutsirlangan metrika deb yuritiladi. (A, ρ_A) metrik fazo esa, (X,ρ) metrik fazoning fazoostisi deb yuritiladi. Agar A va B to'plamlar (X, ρ) ning bo'sh bo'lmagan to'plamostilari bo'lsa, bu A va B to'plamlar orasidagi masofa sifatida $\rho(A,B)=\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\rho(x,y)$ son qabul qilingandir. Xususiy holda $\rho(x_0,A)=\inf\limits_{x\in A}\rho(x_0,x)$ soni x_0 nuqtadan A to'plamgacha bo'lgan masofa deb ataladi. Xullas, M to'plamning diametri deb $diamM=\sup\limits_{x,y\in M}\rho(x,y)$ songa aytiladi. Bu yerda $M\subset X$.

Nihoyat, agar $diamM<\infty$ o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan to'plam deyiladi. Metrik fazolarga doir misollar ba'zi hollarda matematik analizga doir masalalarni hal qilishda yuzaga chiqmoqda.

1.2.6-misol. $[0,1]$ kesmada uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plamini olaylik. Bu to'plam $C_{[0,1]}$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $x(t),y(t)$ funksiyalar $C_{[0,1]}$ ning ixtiyoriy uzluksiz funksiyalari bo'lsa, ular orasidagi masofani $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$ shaklda aniqlaymiz. Matematik analiz kurslaridan ham ma'lumki, bu ρ funksiya $C_{[0,1]}$ da metrika tashkil qiladi. $C_{[0,1]}$ uzluksiz funksiyalar fazosi deb ataladi.

1.3-§. Topologik fazolar

Ixtiyoriy "tabiatli" bo'sh bo'lmagan X to'plam va $\tau=\{U_\alpha:U_\alpha\subseteq X,\alpha\in A\}$ sistema (shu X to'plamning to'plamostilardan tashkil topgan) berilgan bo'lsin.

1.3.1-ta'rif. Agar τ sistema (to'plamostilar oilasi) quyidagi:

1) $\varnothing, X \in \tau$;

2) τ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall A' \subset A$ uchun $\bigcup\limits_{\alpha^1 \in A^1} U_{\alpha'} \in \tau; \alpha^1 \in A^1; U_\alpha \in \tau$;

3) τ sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall \alpha_i \in A$, $i = \overline{1,S}$ $\bigcap\limits_{i=1}^{S} U_{\alpha_i} \in \tau$ $U_{\alpha_i} \in \tau$ shartlarni qanoatlantirsa, τ sistema X to'plamdagi topologiya, $(X;\tau)$ juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi. $(X;\tau)$ topologik fazo tashkil qilsa, τ sistemaning elementlari ochiq to'plamlar deb ataladi. Bu ta'rifdagi 1–3-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta'rifdan ma'lumki, X to'plam qanday bo'lishidan qat'i nazar, topologik fazodagi ochiq to'plamlar turlicha bo'lishi mumkin ekan. Ko'p hollarda, agar $(X;\tau)$ topologik fazo bo'lsa, τ sistema topologik struktura, X to'plam esa, $(X;\tau)$ topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi – eltuvchisi deb ataladi.

1.3.2-misol. Ikki a va b elementlardan iborat X to'plam berilgan deylik. τ sistema sifatida bo'sh to'plam, X to'plamning o'zini va $\{a\}$ dan tashkil topgan to'plamlar oilasini olamiz, ya'ni $\tau = \{\varnothing; \{a,b\}; \{a\}\}$. Bu τ sistema ta'rifdagi 1–3-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Demak, $(X;\tau)$ juftlik topologik fazodir. Bu fazo topologik sodda qurilganiga qaramasdan, muhim va qiziqarli jihatlarga ega bo'lganligi uchun maxsus nom bilan "bog'lamli ikki nuqta" deb yuritiladi.

1.3.2-misolda, agar τ ni $\{\varnothing; \{a;b\}, \{b\}\}$ ko'rinishida olsak ham, τ sistema topologiya tashkil qiladi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plamga doimo turlicha topologiya kiritish, ya'ni aniqlash imkoni mavjuddir. Topologiyalarning aniqlanishidan ma'lum bo'lmoqdaki, ulardagi ochiq to'plamlar ham turlicha bo'lishi (topologiyaga qarab) mumkin ekan. Ya'ni, bir topologik strukturaga nisbatan ochiq bo'lgan to'plam ikkinchi strukturaga nisbatan ochiq bo'lmasligi mumkin.

1.3.3-misol. X ixtiyoriy, albatta, bo'sh bo'lmagan to'plam deylik. $\tau_0 = \{\varnothing; X\}$ to'planmani (sistemani) olamiz. Bevosita tekshirib ko'rish mumkinki, $(X;\tau_0)$ juftlik topologik fazo tashkil qiladi. Ya'ni, ta'rifdagi 1–3-shartlar o'rinli. Bu topologik fazo trivial yoki antidisret topologik fazo deb yuritiladi.

1.3.4-misol. Ixtiyoriy cheksiz X to'plam berilgan bo'lsin. To'plamostilar oilasi τ sifatida $\varnothing, X$ va shunday $U_\alpha \subset X$ to'plamostilarni olamizki, $X \setminus U_\alpha$ to'plam chekli to'plamdan iborat bo'lsin, ya'ni $\tau = \{C; X\ U_\alpha : X \setminus U_\alpha = CU_\alpha$ chekli, $\alpha \in A\}$. Bu yerda CU_α bilan U_α to'plamostining X gacha bo'lgan to'ldiruvchisi $X - U_\alpha$ kabi belgilanadi. To'plamlar ustida bajariladigan amallardan ma'lumki, bu τ to'plamlar oilasi ham topologiya tashkil qiladi. Bu topologik fazo Zarisskiy fazosi deb ataladi.

Eslatma: bu yerda $\varnothing$ o'sh to'plamosti ham chekli to'plam hisoblanadi.

1.3.5-misol. X o'plam sifatida sonlar o'qini, ya'ni haqiqiy sonlar to'plami – R^1 ni olaylik. R^1 dagi topologiya esa, quyidagi to'plamostilar oilasidan tashkil topsin. Bo'sh to'plam $\varnothing$, ixtiyoriy intervallar va ularning $U = \bigcup_\alpha (a_\alpha; b_\alpha)$ ko'rinishdagi birlashmasi. Ya'ni,

$$\tau = \{\varnothing; (a,b);\ (a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in A,\ a, b, \in R(a_\alpha, b_\alpha) \subset R\}$$

Haqiqiy o'zgaruvchilarning funksiyalar nazariyasi kursidan ma'lumki, bu τ sistema ham topologiya ta'rifidagi 1–3-aksiomalarni qanoatlantiradi. Bunday aniqlangan topologiya to'g'ri chiziqdagi tabiiy topologiya deb yuritiladi.

1.3.6-misol. X to'plam sifatida R^2 Evklid tekisligini olaylik. Ochiq to'plam sifatida R^2 ning ixtiyoriy nuqtasi va markazi shu nuqtada bo'lgan radiusi yetarlicha kichik bo'lgan ochiq doiralarni, bo'sh to'plamni qarasak, bu barcha ochiq to'plamlar oilasi topologiya tashkil qiladi.

1.3.7-misol. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy X to'plam berilgan bo'lsin. Topologiya sifatida X to'plamning jami to'plamostilarini olaylik, ya'ni $\{U : U \subseteq X,\ U - ixtiyoriy\ to\text{'}plamosti\}$. Bu topologik struktura ham X da topologiya tashkil qiladi. Bu topologiya τ_1 topologiya deb qabul qilingan. Bu (X, τ_1) topologik fazo diskret topologik fazo deyiladi.

1.4-§. Topologik fazolarni solishtirish

Yuqoridagi topologik fazo ta'rifidan, keltirilgan misollardan ko'rinadiki, bir elementdan ortiq bo'lgan ixtiyoriy to'plamda turlicha topologik strukturalarni aniqlash mumkin ekan.

1.4.1-ta'rif. X to'plamda τ va τ' topologiyalar aniqlangan bo'lsin. Agar τ ning ixtiyoriy U elementi uchun $u \in \tau$ ekanligidan $u \in \tau'$ ekanligi kelib chiqsa, τ topologiya $\tau`$ topologiyadan kuchsizroq (ojizroq) deyiladi. Bu holda $\tau`$ topologiya τ topologiyadan kuchliroq (ozg'in, maydaroq) deyiladi.

Yuqoridagi ta'rif va misollardan ko'rinadiki, bo'sh bo'lmagan X to'plamdagi ixtiyoriy τ topologiya uchun $\tau_0 < \tau < \tau_1$ munosabat o'rinlidir.

Bu yerda τ_0 topologiya X fazodagi antidiskret, τ_1 esa, diskret topologiyalardir.

Agar τ va $\tau`$ topologiyalarning har biri o'zida ikkinchisining biror qism to'plamlarini saqlasa, taqqoslanmaydigan topologiya deyiladi. Bu yerda τ_0 topologiya X fazodagi antidiskret, τ_1 esa, diskret topologilardir.

Ma'lum bo'ladiki, X to'plamda aniqlangan $\tau_1 < \tau_2$ munosabat barcha topologiyalar to'plamida qisman tartiblangan munosabatlar strukturasini hosil qiladi. Lekin bu tartib munosabatlar to'plami chiziqli tartiblangan emas, ya'ni ixtiyoriy ikki topologiyani doimo taqqoslab bo'lavermaydi. 1.3.6-misolda aniqlangan X to'plamdagi τ_1 topologiya diskret yoki maksimal topologiya deb yuritiladi.

X to'plamda aniqlangan τ_0 topologiya (1.3.2-misol) trivial yoki minimal topologiya deb ataladi.

Topologiyalar orasida yuqorida keltirilgan qisman tartiblangan munosabatlar to'plamida eng kichik element – trivial topologiya va eng katta element – diskret topologiyalar bor ekan. Boshqacha aytganda, bu qisman tartiblanganlik munosabati quyidan va yuqoridan chegaralangandir.

$(X;\tau)$ topologik fazodagi ochiq to'plam tushunchasi bilan yopiq to'plam tushunchasi birgalikda keladi. Ya'ni, $U \in \tau$ bo'lsa, u holda $X \setminus U$ – yopiq va aksincha, agar F yopiq to'plam bo'lsa, u holda $X \setminus F$ ochiq to'plamdir.

To'plamlar nazariyasidagi amallarning ikkilik tamoyiliga (prinsipiga) ko'ra, agar X dagi barcha yopiq to'plamlar jamlanmasini $F=\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ deb olsak, bu jamlanma quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$F1)$ $X;\varnothing\in\{F_\alpha:\alpha\in A\}=F$;

$F2)$ $\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ ning ixtiyoriy sondagi elementlari kesishmasi ham $\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ ga tegishlidir.

Bu xossalar $(X;\tau)$ topologik fazoda yopiq to'plamlarning to'liq xarakteristikasi bo'la oladi.

1.4.2-mashq. $[a,b]$ kesma R^1 da aniqlangan (1.3.4-misoldagi) topologiyada yopiq to'plamdir. R^2 dagi yopiq doira yopiq to'plamdir (1.3.5-misoldagi topologiya).

1.4.3-misol. Sonlar o'qi R^1 da Z butun sonlar to'plamini olsak, bu to'plam yopiq to'plam tashkil qiladi. Chunki uning to'ldiruvchisi $R^1\setminus Z$ ni $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n,0)$ va $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(0,+n)$ to'plamlar birlashmasi ko'rinishida yozishimiz mumkin. R^1 da kiritilgan topologiyaga (1.3.4-misol) ko'ra, bu birlashmalarning har bir elementi ochiq to'plamdan iborat. Ikkala birlashmaning birlashmasi ham ochiq to'plamdir. Demak, $R^2\setminus Z$ to'plam ochiq to'plamdir. U holda Z yopiqdir.

1.4.4-misol. Tekislikdagi ixtiyoriy ikkinchi tartibli chiziq yopiq to'plamdir. Bu jumlaning to'g'riligini isbotlash uchun, agar ikkinchi tartibli chiziqni γ deb belgilasak, u holda $R^2\setminus\gamma$ to'plam ochiq to'plam ekanligini ko'rsatishimiz yetarli bo'ladi. Tekislikda γ chiziq ellips, parabola, giperbola, ikkita parallel to'g'ri chiziq yoki ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan biri bo'lishi mumkin. Agar ixtiyoriy $x_0\in R^2\setminus\gamma$ ni olsak, bu nuqta ikkinchi tartibli chiziq γ ga tegishli emas. Agar γ yuqoridagi chiziqlardan birortasi, masalan, ellips bo'lsa, u holda x_0 nuqta yoki ellips "ichida" yoxud "tashqarisida" yotadi. Bunday vaziyatda x_0 nuqta o'z ichiga olgan shunday kichik r radiusli ochiq doira topiladiki, bu doira γ chiziq bilan kesishmaydi. Bu esa, $R^2 \setminus \gamma$ ning ochiq to‘plam ekanligidir. Agar γ chiziq ikkinchi tartibli chiziqlarning boshqa birortasi bo‘lsa ham, shunday yo‘l tutiladi.

1.5-§. Topologik fazo bazasi va old bazasi

Birorta bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamda ma’lum bir τ topologiyani kiritish uchun uning barcha ochiq to‘plamlarini ko‘rsatish doimo ham shart bo‘lavermaydi. Buning uchun uning biron-bir ochiq to‘plamlari jamlanmasini ko‘rsatish yetarlidir. Ochiq to‘plamlar jamlanmasi ma’lum bir xossalarga ega bo‘ladi. Bu xossalar shu τ topologiyaning bazasini aniqlaydi.

1.5.1-ta’rif. Agar X fazoning ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan U ochiq to‘plami β jamlanmaga tegishli bo‘lgan elementlarning birlashmasidan iborat bo‘lsa, (X,τ) topologik fazoning ochiq to‘plamlaridan tashkil topgan bu β to‘plamlar jamlanmasi τ topologiyaning bazasi yoki fazoning bazasi deyiladi.

Ta’rifdan ma’lum bo‘ladiki, har bir (X,τ) fazo bazaga ega. Ma’lumki, barcha ochiq to‘plamlardan tashkil topgan jamlanma uning bazasini tashkil qiladi.

1.5.2-ta’rif. Agar x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilganda, bu atrof bilan M to‘plamning kesishmasi faqat x_0 nuqtadan iborat, ya’ni $U \cap M = \{x_0\}$ bo‘lsa, X topologik fazoning x_0 nuqtasi M to‘plamostisining yakkalangan nuqtasi deyiladi.

(X,τ) topologik fazo va $x_0 \in X$ uning nuqtasi bo‘lsin.

1.5.3-ta’rif. Birorta x_0 nuqtaning (X,τ) fazodagi atrofi deb shunday $A(x) \subset X$ to‘plamostiga aytiladiki, u quyidagi ikki shartni qanoatlantiradi:

1) $x \in A(x)$;

2) shunday $U \in \tau$ topiladiki, $x \in U \subset A(x)$.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, (X,τ) topologik fazoning ixtiyoriy x_0 nuqtasi uchun X to‘plamning o‘zi atrof bo‘la oladi.

Birorta nuqtaning barcha atroflaridan tashkil topgan to‘plamlar oilasiga kelsak, bu oila quyidagi xossalarga egadir:

1) ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi yana X ning atrofidan iborat bo‘ladi;

2) ixtiyoriy chekli sondagi elementlarining kesishmasi yana x ning atrofi bo‘ladi;

3) x nuqtaning birorta atrofini o‘zida saqlagan ixtiyoriy to‘plam x nuqtaning atrofi bo‘ladi.

Shuni ta’kidlashimiz kerakki, X fazo birorta nuqtasining ochiq atrofi deb shu nuqtani o‘zida saqlagan ixtiyoriy ochiq to‘plamga aytiladi.

1.5.4-teorema. (X,τ) topologik fazoda A to‘plam $(A\neq\varnothing)$ ochiq to‘plam bo‘lishi uchun mazkur A to‘plam har bir nuqtasining atrofini o‘zida saqlashi zarur va yetarlidir.

Topologik fazo bazasi ta’rifidan va nuqtaning atrofi tushunchasidan ayon bo‘ladiki, fazoning barcha yakkalangan nuqtalari (agar shunday nuqtalar mavjud bo‘lsa) baza elementlari safiga kirar ekan.

1.5.5-teorema. (X,τ) topologik fazoning ochiq to‘plamlaridan tashkil topgan β jamlanma fazoning bazasi bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x\in X$ nuqtaning atrofi U uchun shunday $V\in\beta$ topilib, $x\in V\subset U$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremadan ma’lum bo‘ladiki, topologik fazo bazasi quyidagi ikki xossaga ega:

1^0. β jamlanmaga tegishli barcha elementlarning birlashmasi butun X fazodan iborat.

2^0. β jamlanmaning ixtiyoriy ikki elementi U,V va ixtiyoriy $x\in U\cap V$ uchun shunday $W\in\beta$ topiladiki, $x\in W\subset U\cap V$ shart o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, bu ikki xossadan ko‘rinadiki, birorta β ochiq to‘plamlar sistemasi $\beta.X$ fazoning bazasi bo‘lishi uchun yuqoridagi ikki xossaga ega bo‘lishi zarur ekan. Bu ikki xossa X to‘plamdagi topologiyaning bazasini to‘la xarakterlaydi. Demak, baza orqali ham topologiyani kiritish mumkin ekan.

1.5.6-teorema. Bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamda yuqoridagi ikki 1^0–2^0-shartlarni qanoatlantiruvchi β to‘plamlar sistemasi aniqlangan bo‘lsin.

U holda X to‘plamda shunday yagona τ topologiya mavjud bo‘ladiki, bu τ topologiya uchun β sistema baza bo‘ladi.

Mabodo birorta X to‘plamning to‘plamostilari sistemasi $V=\{V_\alpha :\}$ berilgan va agar bu sistema elementlari uchun $X=\bigcup\limits_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \in V$, $V_\alpha \subset X$ shart o‘rinli bo‘lsa, V sistema X to‘plamning qoplamasi deyiladi.

Agar qoplamaning elementlari ochiq to‘plamlardan tashkil topgan bo‘lsa, u qoplama ochiq qoplama deb yuritiladi.

Agarda $\{S_\alpha\}$ to‘plamostilar sistemasi X to‘plamning ixtiyoriy qoplamasi bo‘lsa, tabiiy savol tug‘iladi: qanday shart bajarilsa, to‘plamning ixtiyoriy qoplamasiga ko‘ra X to‘plamda biron-bir topologiyani aniqlash mumkinmi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

1.5.7-teorema. $\{S_\alpha\}$ sistema X fazoning qoplamasi bo‘lsin. $\{V=\bigcap\limits_{\alpha\in k} S_\alpha : k - ixtiyoriy\ chekli\ to‘plam\}$ jamlanma tabiiy topologiya vujudga keltiradi va V sistema τ topologiyaning bazasini tashkil qiladi.

Demak, X to‘plamning qoplamasi $\{S_\alpha\}$ ushbu to‘plamda topologiya tashkil qilar ekan. Bu topologiyada $V(\bigcap\limits_{\alpha\in k} S_\alpha)$ ko‘rinishdagi barcha mumkin bo‘lgan birlashmalar va bo‘sh to‘plam ochiq to‘plamlar sinfini tashkil qiladi.

1.5.8-ta’rif. $(X,\ \tau)$ topologik fazoning ochiq to‘plamlaridan tashkil topgan $v=\{W_\alpha\}$ sistemaning ixtiyoriy sondagi chekli elementlari kesishmasi τ topologiya bazasini tashkil qilsa, u topologik fazoning old bazasi deyiladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, topologiyaning ixtiyoriy bazasi old baza bo‘la oladi. Lekin buning teskarisi har doim ham o‘rinli emas.

1.5.9-misol. Endi $X=R^1$ to‘g‘ri chiziq yoki haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. $S_\alpha=\{x : x<\alpha;\ \alpha\in R^1\}$ va $S_\beta=\{x : x>\beta;\ \beta\in R^1\}$ to‘plamlar sistemasini olaylik. Bu to‘plamlar sistemasi sonlar chizig‘i R^1 dagi tabiiy topologiyaning old bazasini tashkil qiladi.

1.5.10-misol. R^n – n o‘lchamli vektor fazo bo‘lsin. Bu R^n fazoda topologiyaning bazasi sifatida $B=\{V_{a,b}\}$ ko‘rinishdagi elementlardan tashkil topgan $V_{a,b}=\{x\in R^n : a_i<\xi_i<b_i, i=\overline{1,n}\}$ sistemani olamiz, bu yerda ξ_i – vektorning koordinatasi $x=(\xi_1;\xi_2;...;\xi_n)$; $a=(a_1;a_2;...;a_n)$;

$b=(b_1;b_2;...;b_n)$ lar R^n dagi ixtiyoriy vektorlar, bunda $a_i<b_i$ bo'lsa, R^n fazodagi $V_{a,b}$ ko'rinishdagi to'plamlar R^n ning ochiq parallelipipedi deb yuritiladi.

1.6-§. Topologik fazoda to'plamlararo amallar

Topologik fazoda yopiq to'plam, yakkalangan nuqta tushunchalari aniqlangandan keyin bu tushunchalar bilan bevosita bog'liq bo'lgan to'plamning teginish nuqtasi, to'plamning yopig'i va to'plam ichi hamda ichki nuqtalari tushunchalarini ham bilish lozim bo'ladi.

1.6.1-ta'rif. (X,τ) topologik fazoning $x_0\in X$ nuqtasi berilgan bo'lib, agar bu nuqtaning ixtiyoriy U atrofi M to'plamning birorta nuqtasini o'zida saqlasa, ya'ni $U\cap M\neq\varnothing$. $M\subset X$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta M to'plamning teginish nuqtasi deyiladi.

Topologik fazoda M to'plamning barcha teginish nuqtasidan tashkil topgan to'plam uning yopig'i deb ataladi va $\overline{M}$ ko'rinishda belgilanadi. To'plamning o'zidan yopig'i to'plamga o'tish amali to'plamning topologik yopig'ini olish amali deb yuritiladi. Ta'rifdan ko'rinadiki, to'plamning yopig'i uning o'zini o'z ichiga oladi: $\varnothing$ ning yopig'i o'ziga teng; butun X ning yopig'i fazoning o'ziga teng. Shuningdek, agar $M\subset N$ bo'lsa, u holda $\overline{M}\subset\overline{N}$ bo'ladi. Bu esa, mazkur amalning monotonlik xarakterga ega ekanligini ko'rsatadi. Yana shuni ta'kidlash lozimki, bu amal idempotentdir, ya'ni $\overline{\overline{M}}=\overline{M}$ o'rinli bo'ladi.

1.6.2-teorema. Fazoning M to'plamostisi yopiq bo'lishi uchun u o'zining yopig'iga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.6.3-natija. Fazoning ixtiyoriy M to'plamostisi yopig'i $\overline{M}$ bu fazoda yopiq to'plamdir.

Shuni ta'kidlash kerakki, to'plam yopig'ini olish amali quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\overline{A_1\cup A_2\cup...\cup A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup...\cup\overline{A_n}$

2^0. $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

3^0. $A\subset\overline{A}$

4^0. $\overline{\varnothing}=\varnothing$

1.6.4-ta'rif. Agar x_0 ning ixtiyoriy atrofida M to'plamning x_0 dan farqli elementi bo'lsa, X fazoning x_0 nuqtasi $M \subset X$ to'plamning limit nuqtasi deyiladi, ya'ni $U(x_0) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi uning teginish nuqtasi bo'lishi mumkin, lekin teginish nuqtasi yoki yakkalangan nuqta doimo ham limit nuqtasi bo'lavermaydi. Shuni ta'kidlash mumkinki, $\overline{M} \setminus M$ ning har bir nuqtasi M to'plam uchun limit nuqta bo'ladi. To'plamning yopig'ini oladigan bo'lsak, bu to'plam teginish, limit va yakkalangan nuqtalardan tashkil topgan ekan. To'plamning barcha limit nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni uning hosila to'plami deb belgilanadi va M ning hosila to'plami M' ko'rinishda ifodalanadi. Hosila to'plam ta'rifidan ma'lumki, $M' \subset \overline{M}$ o'rinli va M to'plam yopiq bo'lishi uchun $M^1 \subset M$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.6.5-ta'rif. Agar X fazoning M to'plami o'z-o'zining hosila to'plami bilan ustma-ust tushsa, mukammal to'plam deyiladi, ya'ni $M^1 = M$.

Bu ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, mukammal to'plam, bir tomondan, yopiq to'plam, ikkinchi tomondan, yakkalangan nuqtalarga ega emas ekan. Mukammal to'plamga misol sifatida to'g'ri chiziqda ixtiyoriy kesma, tekislikda yopiq doirani olishimiz mumkin. Yana shuni ta'kidlash mumkinki, fazoda yopiq to'plamlarning ixtiyoriy birlashmasi har doim ham yopiq bo'lavermaydi. Ba'zi hollarda yopiq to'plamlar birlashmasi ham yopiq bo'lishi mumkin.

1.6.6-ta'rif. Agar X to'plamning to'plamostilaridan tashkil topgan $S = \{A_i : i \in \Im\}$ jamlanma berilgan bo'lsa, X ning ixtiyoriy x_0 nuqtasi shunday U_0 atrofga ega bo'lsaki, bu atrof jamlanmaning chekli sondagi elementlari bilan kesishsa, u holda bu jamlanma lokal chekli deyiladi, ya'ni $U_0 \cap A_i \neq \varnothing,\ i \in K, |K| < \infty$.

1.6.7-teorema. X topologik fazoning ixtiyoriy lokal chekli jamlanmasi $S = \{A_i : i \in \Im\}$ uchun $\overline{\bigcup_{i\in\Im} A_i} = \bigcup_{i\in\Im} \overline{A_i}$ munosabat (tenglik) o'rinli.

Teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin.

1.6.8-xulosa. Yopiq to'plamlarning lokal chekli jamlanmasi – birlashmasi yopiq to'plamdir.

Agar to‘plamning yopig‘ini olish amalini $ClM = \overline{M}$ bilan belgilasak va bu amalni birorta bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamda qo‘llasak, shu to‘plamda topologiya aniqlashning yana bir usuli kelib chiqadi. Bu usul, ya’ni to‘plamning yopig‘ini olish amali buyuk polyak topologi K. Kuratovskiy tomonidan yaratilgan.

1.6.9-teorema. (Topologiyani Kuratovskiy operatori orqali kiritish).

Ixtiyoriy X to‘plamda qo‘llaniladigan ixtiyoriy Kuratovskiy operatori $C\ell$ shu to‘plamda ma’lum bir τ topologiyaga asos soladi, aynan $\tau = \{U\}$ ning har bir U elementi uchun $C\ell(X \setminus U) = X \setminus U$ tenglik o‘rinli va ixtiyoriy $M \subset X$ to‘plamosti uchun $\overline{M} = clM$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1.6.10-misol. Ixtiyoriy sanoqsiz X to‘plam berilgan bo‘lsin. X to‘plamda $C\ell$ to‘plamning yopig‘i amalini quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy sanoqlidan katta bo‘lmagan M to‘plam uchun $C\ell(M) = M$, agar M sanoqsiz bo‘lsa, $C\ell(M) = X$ deb olamiz. Tekshirib ko‘rish ko‘rsatadiki, bunday aniqlangan amal to‘plamning yopig‘ini olishning hamma shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsatadi. Ya’ni:

1) $C\ell(M \cup N) = C\ell(M) \cup C\ell(N)$;

2) $M \subset C\ell(M)$;

3) $C\ell(C\ell(M)) = C\ell(M)$;

4) $C\ell(\varnothing) = \varnothing$ shartlar o‘rinlidir.

Bu misolda X to‘plamda yopiq to‘plam sifatida faqat va faqat $C\ell(M) = M$ tenglikni qanoatlantiruvchi to‘plamlarni e’lon qilsak. Bu X da ma’lum bir topologiyani aniqlaydi.

1.6.11-ta’rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqtaning shunday ochiq atrofi U_0 topilsaki va bu atrof to‘la M_0 to‘plamda yotsa, u X fazoning M to‘plamostisining ichki nuqtasi deyiladi, ya’ni $U_0 \subset M$ bo‘lsa, M to‘plamning barcha ichki nuqtalari tashkil topgan to‘plam M ning ichi deyiladi va $\operatorname{int} M$ ko‘rinishida belgilanadi. Ta’rifdan va oldingi keltirilgan faktlardan ko‘rinadiki, M to‘plam ochiq to‘plam bo‘lishi uchun $\operatorname{int} M = M$ tenglik yoki u o‘zining ichiga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Yana shuni aytish mumkinki, M to‘plamning ichi ochiq to‘plam va $\operatorname{int} M$ – bu M da yotgan ochiq to‘plamlarning birlashmasidan iboratdir. To‘plamning ichi int quyidagi xossalarga ega:

1) agar $M \subset N$ bo'lsa; $\operatorname{int} M \subset \operatorname{int} N$ (monotonligi);

2) $\operatorname{int}(\operatorname{int} M) = \operatorname{int} M$ (idemponent);

3) $\operatorname{int}(M \cap N) = \operatorname{int} M \cap \operatorname{int} N$.

1.6.12-misol. Sonlar o'qi R^1 topologiyasiga ko'ra, $\operatorname{int} Q = \varnothing$ va $\operatorname{int}(R^1 \setminus Q) = \varnothing$, bu yerda Q – ratsional sonlar to'plami.

X topologik fazoning ixtiyoriy M to'plamostisi uchun:

$X \setminus \overline{M} = \operatorname{int}(X \setminus M)$

$X \setminus \operatorname{int} M = \overline{(X \setminus M)}$ tengliklar o'rinlidir.

1.6.13-ta'rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqta uning ixtiyoriy ochiq U atrofini ham, M ning elementlarini ham uning to'ldiruvchisi $CM = X - M$ ning elementlarini o'zida saqlasa, x_0 nuqta $M \subset X$ to'plami uchun chegaraviy nuqta deyiladi, ya'ni $U \cap M \neq \varnothing$ va $U \cap X \setminus M \neq \varnothing$. Boshqacha aytganda, x_0 nuqta M va $X \setminus M$ to'plamlar uchun teginish nuqtasi bo'lgan taqdirda, u chegaraviy nuqta deyiladi. To'plamning barcha chegaraviy nuqtalaridan tashkil topgan to'plam uning chegarasi deyiladi va $F_r M$ ko'rinishda belgilanadi.

Demak, M ning chegarasi $F_r M$ uchun $F_r M = \overline{M} \cap \overline{CM}$ tenglik o'rinli ekan. Chegara uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$F_r M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M = (\overline{M} \setminus M) \cup (M \setminus \operatorname{int} M) = (\overline{M} \setminus M) \cup (M \cap \overline{CM}$$

1.6.14-teorema. X topologik fazoning M to'plami ochiq bo'lishi uchun u o'zining chegarasi bilan kesishmasligi zarur va yetarlidir. M to'plam yopiq bo'lishi uchun esa, u o'zida chegarasini to'la saqlashi zarur va yetarlidir.

1.6.15-misol. Sonlar o'qi R^1 dagi topologiyani olsak, $F_r Q = R^1$ va $F_r(R^1 \setminus Q) = R^1$ tengliklar o'rinlidir.

Ammo $F_r R^1 = \varnothing$, $F_r(F_r Q) = F_r R^1 = \varnothing$. Agar $M \subset X$ bo'lib, M ning faqat o'ziga tegishli bo'lgan chegaraviy nuqtalarini olsak, bu nuqtalar to'plami M ning cheti deb yuritiladi. Bunda $M \cap \overline{CM} = M \setminus \operatorname{int} M$ o'rinlidir. Demak, birorta to'plamning cheti uning ichki nuqtalarini o'z ichiga olmas ekan. Ya'ni, to'plamning cheti ichki nuqtasiz ekan.

Ba'zi bir masalalarda figuralarning topologik xossalarini o'rganishda maxsus ochiq (yopiq) to'plamlar sinfidan foydalanishga to'g'ri keladi.

1.6.16-ta'rif. Agar X topologik fazoning $A \subset X$ to'plamostisi, o'z yopig'ining ichiga (ichining yopig'iga) teng bo'lsa, kanonik ochiq (kanonik yopiq) deyiladi. Ya'ni, agar $A = \operatorname{int} \overline{A}$ bo'lsa, A kanonik ochiq deyiladi, agar $A = \overline{\operatorname{int} A}$ bo'lsa, A kanonik yopiq deyiladi. Kanonik ochiq va kanonik yopiq to'plamlarga tekislikda ochiq va yopiq doiralarni misol keltirish mumkin.

To'plamning kanonik yopig'ini olish amalini $C\ell^*$ bilan, to'plamning kanonik ichini olish amalini int^* bilan belgilasak, bu maxsus amallar bilan to'plamning yopig'i va ichini olish amallari orasida quyidagicha bog'lanish mavjud:

$\operatorname{int}^* A = \operatorname{int} \overline{A}$;

$c\ell^* A = \overline{\operatorname{int} A}$.

Ko'p hollarda kanonik ichini olish amali $\operatorname{int}^* A$ to'plamning kanonik yadrosini aniqlash amali deb ham yuritiladi. To'plamning ichini topish $\operatorname{int} A$ esa, uning yadrosini aniqlashdir.

Ma'lumki, $A \subset \overline{A}$, u holda $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int}^* A$. Ya'ni, ochiq yadro doimo kanonik yadroda yotadi. Demak, barcha ochiq to'plamlar o'zining kanonik yadrosida yotar ekan. Bundan ko'rinadiki, $\operatorname{int} A \subset A$ munosabat o'rinli. U holda $C\ell(A) \subset \overline{A}$. Ya'ni, to'plamning kanonik yopig'i uning yopig'ida yotadi. Demak, barcha yopiq to'plamlar o'zida kanonik yopig'ini saqlar ekan.

1.7-§. Uzluksiz akslantirishlar

Uzluksiz akslantirishlar topologiyaning eng asosiy va ko'p qo'llaniladigan tushunchalaridan biri hisoblanadi.

X va Y lar har xil topologik fazolar deylik.

1.7.1-ta'rif. Agar $f : X \to Y$ akslantirishda, $y_0 = f(x_0)$ obrazning ixtiyoriy V atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u $f(U) \subset V$ ni qanoatlantirsa, u holda f akslantirish X topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasida uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, y_0 nuqta atrofining proobrazi x_0 nuqta uchun atrof bo'la oladi.

Agar $f : X \to Y$ akslantirish X fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, f akslantirish X fazoda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz akslantirishga trivial misol sifatida $i_x : X \to X$ ayniy akslantirishni olish mumkin. Bu akslantirish X ning har bir x nuqtasiga yana shu $i(x) = x$ nuqtasini mos qo'yadi.

Bundan ko'rinadiki, u har bir nuqtada uzluksizdir.

1.7.2-misol. Agar $\sin : R^1 \to R^1$ ni olsak, ya'ni har bir $x \in R$ ga $\sin x$ ni mos qo'ysak, bu akslantirish uzluksizdir.

1.7.3-misol. Agar $arctg : R^1 \to (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$ akslantirishni olsak, bu akslantirish uzluksiz va biektiv akslantirishdir. Bunga teskari akslantirish $tg : (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}) \to R^1$ ham uzluksizdir.

Uzluksiz akslantirishlar quyidagi asosiy xossaga ega bo'lib, bu xossa ularni to'la tavsiflaydi.

1.7.4-teorema. $f : X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y dagi ixtiyoriy ochiq $V \subset Y$ to'plamning $f^{-1}(V)$ proobrazi (asli) X fazoda ochiq to'plam bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bizga ma'lumki, ochiq to'plamlarning to'ldiruvchisi yopiq bo'lganligidan va uzluksiz akslantirishlar ta'rifidan quyidagini tasdiqlash mumkin.

1.7.5-teorema. $f : X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y fazodagi ixtiyoriy yopiq to'plamning proobrazi X fazoda yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Uzluksiz akslantirishga misol sifatida quyidagini aytishimiz mumkin: ixtiyoriy $f : X \to Y$ akslantirishda X fazo diskret fazo bo'lsa, yoki Y antidiskret fazo bo'lsa, bu akslantirish doimo uzluksiz bo'ladi.

Bulardan xulosa qilib aytishimiz mumkinki, $f : X \to Y$ ning uzluksiz bo'lishi bu fazolardagi topologiyalarga bog'liq ekan. Masalan, bir X to'plamda ikki xil topologiyani olsak, u holda $i_x : X \to Y$ ayniy akslantirish doimo uzluksiz bo'lavermaydi.

Uzluksiz akslantirishlarning oddiy, biroq muhim xossalaridan biri shuki, bir necha uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasi yana uzluksiz akslantirishdan iborat bo'ladi.

1.7.6-teorema. Agar $f: X \to Y$ va $g: Y \to Z$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsa, u holda ularning kompozitsiyasi $h = gof: X \to Z$ uzluksiz bo'ladi.

1.8-§. Ochiq va yopiq akslantirishlar

Topologiyaning ko'pgina masalalarini bayon qilishda ochiq va yopiq akslantirishlar sinfi juda muhim ahamiyatga egadir.

1.8.1-ta'rif. Agar uzluksiz $f: X \to Y$ akslantirishda, X dagi har bir ochiq to'plamning (mos ravishda yopiq to'plamning) aksi Y to'plamda ochiq (mos ravishda yopiq) to'plam bo'lsa, ochiq (mos ravishda yopiq) akslantirish deyiladi.

Bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq akslantirishga misol sifatida $i_x: X \to X$ ayniy akslantirishni olsak, $i_x: A \to X$ shaklidagi joylashtirishda doimo ochiq to'plamning aksi ochiq, yopiq to'plamning aksi yopiq to'plamdir, bunda $A \subset X$.

Ochiq akslantirishlarning muhim sinfi sifatida ochiq to'plamlarda aniqlangan kompleks o'zgaruvchili golomorf funksiyalar sinfini ko'rsatish mumkin. Bundan tashqari, topologik guruhda aniqlangan gomeomorfizmlar ham mavjuddir.

1.8.2-misol. Ixtiyoriy $f:[a,b] \to R^1$ uzluksiz akslantirishni olsak, bu akslantirish doimo yopiq akslantirish bo'ladi. Lekin u doimo ochiq akslantirish bo'lavermaydi.

1.8.3-misol. $P: R^2 \to R$ proeksiyalashni olsak, bu akslantirish $p(x_1;x_2) = x_1$ formula bilan aniqlanadi va ochiq akslantirish bo'ladi. Ya'ni, markazi (x_1, x_2) nuqtada bo'lgan ochiq doira proeksiyasi markazi x_1 da bo'lgan intervaldan iboratdir. Agar R^2 da $x_1x_2 = 1$ giperbolani olsak, bu giperbola yopiq to'plamdir.

Yopiq to'plamlarga misol keltirganda tekislikdagi ixtiyoriy ikkinchi tartibli chiziq yopiq to'plam ekanligini ta'kidlagan edik. Bu to'plamlardan ba'zilarining proeksiyasi $R^1 \setminus \{0\}$ dan iborat bo'lib, bu yopiq to'plam emas. Demak, bu akslantirish yopiq akslantirish emas.

1.8.4-misol. Agar $f: R^1 \to R^1$ uzluksiz funksiyani $f(x) = 1/(1+x^2)$ formula bilan aniqlasak, bu uzluksiz akslantirish bo'lib, ochiq ham, yopiq ham emasdir. Shundan $f(R^1)=(0;1]$ to'plam R^1 da ochiq ham, yopiq ham emasligi ma'lum bo'ladi.

1.8.5-teorema. Uzluksiz $f: X \to Y$ akslantirish ochiq bo'lishi uchun X fazoda ixtiyoriy x_0 nuqtaning U atrofi aksi (obrazi) $y_0 = f(x_0)$ nuqta uchun Y fazoda ochiq atrof bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ochiq va yopiq akslantirishlar ta'rifidan quyidagini keltirishimiz mumkin.

1.8.6-teorema. Ochiq (yopiq) akslantirishlar kompozitsiyasi ochiq (yopiq) akslantirish bo'ladi.

Akslantirishning yopiq bo'lishi uchun quyidagi fakt ham o'rinlidir.

1.8.7-teorema. $f: X \to Y$ akslantirish yopiq bo'lishi uchun ixtiyoriy $A \subset X$ to'plam uchun $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

1.9-§. Gomeomorfizm

Topologiya fanida gomeomorf akslantirish tushunchasi muhim o'rinlardan birini egallaydi. Gomeomorf akslantirish topologik strukturalarni farqlashsiz o'rganishni tavsiya etadi. Bu akslantirish natijasida topologiyaning fundamental masalasi – qaysi topologik strukturalar o'zaro izomorf ekanligi aniqlanadi.

1.9.1-ta'rif. Agar f va f^{-1} lar bir vaqtda o'zaro uzluksiz bo'lsa, $f: X \to Y$ biektiv akslantirish gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm (ba'zi hollarda topologik akslantirish) deyiladi.

Topologik fazo X bilan topologik fazo Y lar orasida kamida bitta gomeomorf (topologik) $f: X \to Y$ akslantirish mavjud bo'lsa, birinchisi ikkinchisiga gomeomorf yoki topologik ekvivalent deyiladi. Topologik ekvivalent yoki gomeomorf fazolar $X \approx Y$ yoki $X \widetilde{top} Y$ ko'rinishda belgilanadi.

Gomeomorfizmga $id_x : X \to X$ ayniy akslantirishni trivial misol qilib keltirsa bo'ladi. Shuning bilan birga, tekshirib ko'rish mumkinki, to'g'ri chiziqda aniqlangan ixtiyoriy monoton funksiya ham gomeomorf akslantirish bo'ladi.

1.9.2-misol. R^n fazoda radiusi 1 ga teng bo'lgan B ochiq sharni olsak, $f: R^n \to B$ akslantirishni $f(x) = x/(1+|x|)$ formula bilan aniqlasak, bu yerda $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$; $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Bu akslantirish biektivdir. Teskari akslantirish $f^{-1}: B \to R^n$ esa, $f^{-1}(x) = x/(1 - \| x \|)$ formula bilan aniqlanadi. f va f^{-1} lar uzluksizdir. Shu sababli f – gomeomorfizm.

Agar X topologik fazo Y topologik fazoning birorta to'plamostisiga gomeomorf bo'lsa, ya'ni $f: X \to Y_0 \subset Y$ gomeomorfizm bo'lsa, u holda X fazo Y fazoga topologik joylashgan yoki X fazo Y fazoda topologik yotadi yoxud Y fazo X fazoni o'zida saqlaydi, deyiladi. Bunday gomeomorfizm joylash yoki joylashtirish deyiladi.

Topologik fazolarning gomeomorf akslantirishlarda o'zgarmay qoladigan xossalari ularning topologik xossalari deb yuritiladi. Shu sababli topologiyani shunday akslantirishlarda fazoning topologik xossalarini o'rganuvchi fandir, desak ham bo'ladi.

1.9.3-teorema. $f: X \to Y$ ochiq (mos ravishda yopiq) biektiv akslantirish gomeomorfizmdir.

1.9.4-natija. $f: X \to Y$ biektiv akslantirish gomeomorfizm bo'lishi uchun $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Shuni aytib o'tish kerakki, gomeomorfizmni ikki fazo orasidagi munosabat sifatida qarasak, gomeomorfizm munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

Gomeomorfizm tushunchasidan kengroq bo'lgan lokal gomeomorfizm tushunchasini ham bilish talab etiladi.

1.9.5-ta'rif. Agarda ixtiyoriy x va $y = f(x)$ juftlik uchun shunday $U(x)$ va $V(y)$ atroflar topilib, $f: U(x) \to V(y)$ gomeomorfizm bo'lsa, bu $f: X \to Y$ akslantirish lokal gomeomorfizm deyiladi.

1.9.6-misol. $f: R^1 \setminus \{0\} \to R^1 \setminus \{0\}$ akslantirishni $f(x) = x^2$ formula bilan olsak, u lokal gomeomorfizmni tashkil qiladi.

1.10-§. Topologik tip, topologik invariantlar va topologiyaning predmeti

Yuqorida ta'kidlab o'tdikki, topologik gomeomorfizm munosabati fazolar orasida ekvivalent munosabatni tashkil qiladi. Ekvivalent munosabat barcha topologik fazolar jamlanmasini o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi, bu sinflar topologik ekvivalent sinflarning topologik tipi deb yuritiladi. Bir ekvivalentlik sinfiga qarashli barcha topologik fazolar bir xil topologik tipga ega deyiladi. Bir topologik tipga tegishli fazolarning topologik xossalari shu ekvivalentlik sinfining topologik xossasi yoki shu tipning topologik invarianti deb yuritiladi. Boshqacha aytganda, o'zaro gomeomorf bo'lgan topologik fazolar bir xil topologik xossaga yoki invariantga ega. Ya'ni, X va Y topologik fazolar gomeomorf bo'lsa, ular bir xil topologik invariantga ega bo'ladi.

$f:X\to Y$ va $f^1:X^1\to Y^1$ akslantirishlar berilgan bo'lsin, bu akslantirishlar topologik ekvivalent deyiladi. Agar shunday $\varphi:X\cong X^1$ va $\psi:Y\cong Y^1$ gomeomorfizmlar mavjud bo'lib, ular uchun quyidagi diagramma kommutativ bo'lsa,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ X^1 & \xrightarrow{f^1} & Y^1 \end{array}$$

o'rinli, ya'ni $f^1=\psi o f o\varphi^{-1}$ o'rinli bo'lsa, u holda, agar f $f:X\to Y$ akslantirishga topologik ekvivalent bo'lgan akslantirish ham shu xossaga ega bo'lsa, $f:X\to Y$ akslantirishning xossasi topologik xossa deyiladi.

Ushbu ta'rifdan va keltirilgan tushunchalardan ko'rinadiki, akslantirishning uzluksizligi, ochiq yoki yopiqligi uning topologik xossasiga kiradi. Masalan, $f:R^n\to R^n$ akslantirishning chiziqli yoki differensiallanuvchi bo'lishi topologik xossaga ega emas.

Yuqoridagilardan anglashiladiki, topologiya fani topologik fazo va ularni topologik va uzluksiz akslantirishlardagi topologik xossalarini o'rganuvchi fandir.

1.11-§. Indutsirlangan topologiya va fazoosti

Ixtiyoriy topologik X fazodagi τ topologiya uning birorta to'plamostisida tabiiy ravishda qanday to'la ma'lum topologiyani (indutsirlangan) aniqlaydi? $(X;\tau)$ topologik fazoda $A\subset X$ bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy to'plamostisini olamiz. Quyidagi $\tau_A=\{U\cap A=U_A:U\in\tau\}$ to'plamlar oilasini qaraylik. Tekshirib ko'rish mumkinki, τ_A sistema A to'plamda topologik strukturaning (topologik fazo barcha aksiomalarining) shartlarini qanoatlantiradi. Bu to'plamlar oilasi τ_A fazoning to'plami A da topologiyani tashkil qiladi. (A,τ_A) topologik fazo $(X;\tau)$ topologik fazoning fazoostisi deb yuritiladi. τ_A topologiya esa, indutsirlangan topologiya deb ataladi. Boshqacha aytganda, $(X;\tau)$ fazodagi τ topologiya A to'plamostiga singdirilgan (nasliy o'tgan yoki τ topologiya bilan sug'orilgan) topologiya deb ham atashimiz mumkin. Mabodo B to'plam A to'plamning to'plamostisi bo'lsa, yuqoridagilardan ma'lum bo'ladiki, B to'plamostisida ikkita – τ_B va τ_A indutsirlangan topologiyalar vujudga keladi. Tekshirib, amin bo'lish mumkinki, bu indutsirlangan topologiyalar ustma-ust tushadi. Bundan ko'rinadiki, B da indutsirlangan topologiya o'zini qamrab olgan fazoostiga bog'liq emas. Bu esa, topologiyani indutsirlash tranzitivlik xossasiga ega ekanligidan dalolatdir.

1.11.1-teorema. A to'plamning to'plamostisi A fazoda yopiq to'plam bo'lishi uchun bu to'plam X topologik fazoda birorta yopiq to'plam bilan A to'plamning kesishmasidan iborat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Aytaylik, A to'plam X ning fazoostisi va $B\subset A$ bo'lsin. Agar B to'plam X fazoda ochiq to'plam bo'lsa, albatta, u A fazoda ham ochiq to'plam bo'ladi. Buning aksi doim ham o'rinli bo'lavermaydi.

1.11.2-misol. R^2 fazoda "chegarasiz" doirani olaylik. Bu to'plam o'zi yotgan fazoda ochiq to'plam bo'ladi. Biroq R^3 fazoda ochiq to'plam bo'la olmaydi, hatto bu to'plamning R^3 da birorta ichki nuqtasi ham mavjud emas.

1.11.3-ta'rif. Agar X topologik fazoning A va B to'plamlari uchun $\overline{A}\cap B=\varnothing$ va $A\cap\overline{B}=\varnothing$ shart o'rinli bo'lsa, bu to'plamlar X fazoda topologik ayri (ajratilgan) yoki X fazoda ayri deyiladi.

Isbotlash mumkinki, agar U va V lar X fazoning ixtiyoriy ochiq (yoki yopiq) to'plamostilari bo'lsa, u holda $A = U \setminus V$ va $B = V \setminus U$ lar X fazoning ayri to'plamlari bo'ladi.

1.11.4-ta'rif. Agar topologik fazoning biror bir xossasi uning ixtiyoriy fazoostisida ham o'rinli bo'lsa, u holda bu xossa nasliy xossa deyiladi.

$(X;\tau)$ topologik fazo va $Y \subset X$ bo'lsin. Ma'lum bo'ladiki, $\tau_Y = \{V : V \subset U \cap Y : U \in \tau\}$ sistema Y to'plamostida topologiya tashkil qilar ekan. Bu topologiyani ko'p hollarda X ning Y dagi nasliy topologiyasi deb ham yuritiladi.

$f : X \to Z$ akslantirish $(X;\tau)$ va (Z,∂) topologik fazolar orasidagi uzluksiz akslantirish bo'lsin. Agar $Y \subset X$ fazoosti bo'lsa, u holda $f : Y \to Z$ akslantirishni olsak, bu akslantirish f ning Y fazoostidagi torayishi (yoki y bilan chegaralanishi) deyiladi va $f | Y$ ko'rinishda belgilanadi.

1.11.5-teorema. $f | y : Y \to Z$ akslantirish uzluksizdir.

Shuni ta'kidlash mumkinki, agar $A; B \subset X$ topologik fazoning yopiq to'plamostilari bo'lib, $X = A \cup B$ o'rinli bo'lsa, u holda $f : X \to Y$ uzluksiz bo'lishi uchun $f|_A : A \to Y$ va $f|_B : B \to Y$ larning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.12-§. Faktor topologiya va faktor fazo

Bo'sh bo'lmagan X to'plamda ekvivalent munosabat R aniqlangan bo'lsin. Bu holda X to'plam o'zaro kesishmaydigan ekvivalent sinflarga ajraladi. $\{\ddot{A}_\alpha\}$ — barcha ekvivalent sinflar to'plami bo'lsin. Bu to'plamni $X / R = \{\ddot{A}_\alpha\}$ ko'rinishda belgilaymiz, bu yerda R — ekvivalent munosabatidir.

1.12.1-ta'rif. X / R to'plam X to'plamning R ekvivalentlik munosabati hosil qilgan yoki aniqlagan faktor to'plami deyiladi.

Faraz qilaylik, (X,τ) topologik fazo va bu X to'plamda R ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. U holda X ning X / R faktor to'plamida tabiiy ravishda topologiyani quyidagicha aniqlashimiz mumkin: $V \subset \{Д_\alpha\}$ (bu yerda V to'plam $Д_\alpha$ ning elementlaridan tashkil topgan) ochiq to'plam faqat va faqat, agar ularning birlashmasi $\bigcup_{\alpha} Д_{\alpha} \cap Y$ to'plam sifatida (X, τ) fazoda ochiq to'plam bo'lsa ochiq, agar $\cup Д_{\alpha} \cap V$ to'plam (X, τ) fazoda ochiq to'plam bo'lsagina $V \subset \{Д_{\alpha}\}$ to'plamosti ochiq bo'ladi. Bu ochiq to'plamlarga bo'sh $\varnothing$ to'plamni ham kiritamiz. Bu oddiy aniqlangan ochiq to'plamlar jamlanmasi X/R to'plamda topologiya tashkil qiladi va bu topologiya faktor topologiya deb atalib, τ_R ko'rinishda belgilanadi, ya'ni $(X/_R, \tau_R)$ topologik fazo faktor fazo deb yuritiladi.

Faktor topologiyaning aniqlanishi har bir $x \in X$ elementga R munosabat natijasida shu nuqtaga ekvivalent bo'lgan $Д_x$ sinfni mos qo'yuvchi $\pi : X \to X|R$ akslantirishning mavjud bo'lishi bilan ma'lum bo'ladi. Bu akslantirish proeksiyalash, ya'ni X fazoning $X|R$ ga proeksiyasi deb yuritiladi.

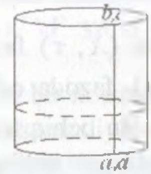
Demak, $V \subset X|R$ to'plam ochiq to'plam bo'lishi uchun $\pi^{-1}(V)$ to'plam X da ochiq to'plam bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan ko'rinadiki, $\pi : (X, \tau) \to (X/R, \tau_R)$ proeksiya uzluksiz akslantirishdan iborat ekan.

Shuni ta'kidlash mumkinki, X/R fazoda π akslantirish uzluksiz bo'ladigan boshqa topologiyalar ham aniqlanishi mumkin. Bu τ_R topologiyani tavsiflovchi quyidagi teorema o'rinlidir.

1.12.2-teorema. X/R topologik fazoda keltirilgan τ_R topologiya π proeksiyalash uzluksiz bo'ladigan topologiyalarning eng kuchlisidir.

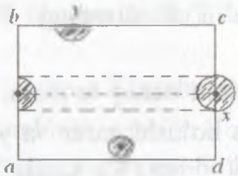
1.12.3-misol. X to'plam sifatida $abcd$ to'g'ri to'rtburchakni olaylik (1.12.1-rasm). Bu to'plamda ekvivalentlik munosabati R ni quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy $x \in X$ uchun $x \sim x$ va $x \sim y$ faqat va faqat $x \in ab$, $y \in cd$ va x, y bo'lgan nuqtalar X ning bitta gorizontal kesmasiga tegishli bo'lsin. Ya'ni, xy to'g'ri chiziq kesmasi ad kesmaga parallel bo'lsin. Bundan hamda yuqoridagi rasmlardan ko'rinadiki, X/R topologik fazo va bu silindr gomeomorfdir (1.12.2-rasm).

1.12. 1-rasm



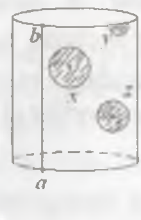
1.12. 2-rasm

Haqiqatan ham, silindrdagi topologiyaning bazasini ikki o‘lchamli “disk“lar (tekislikda markazi biror nuqtada bo‘lgan ma’lum radiusli ochiq doiralar) tashkil qiladi. Ular R^3 fazodagi sharlar bilan silindrning kesishmasidan iboratdir (1.12.3-rasm).



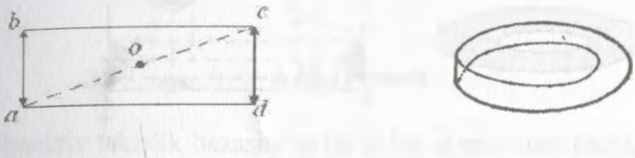
1.12.3-rasm

Agar silindrni *ab* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kessak va to‘g‘ri to‘rtburchakka yoysak, u holda “disklar“ to‘g‘ri to‘rtburchakdagi topologiya bazasiga aylanadi. *ab* ni kesgan “disklar” ikkita o‘zaro bir-birini to‘ldiruvchi va to‘g‘ri to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlarida (1.12.4-rasm) yotgan segmentlarga ajraladi. Bundan ko‘rinadiki, X/R fazodagi topologiyaning bazasini tuzish uchun o‘zaro bir-birini to‘ldiruvchi segmentlarni qirqish chizig‘i bo‘yicha yelimlash zarur ekan..



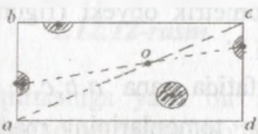
1.12.4-rasm

1.12.4-misol. Endi X to'plam sifatida yana a,b,c,d to'rtburchakni olaylik va ekvivalentlik munosabati R ni quyidagicha aniqlaylik. Ixtiyoriy $x\in X$ uchun $x\overset{R}{\sim}x$ va $x\overset{R}{\sim}y$ faqat va faqat $x\in(a,b)$, $y\in(cd)$ bo'lsin va x,y nuqtalar X ning markazi 0 nuqtaga nisbatan (qarama-qarshi) simmetrik bo'lsin (1.12.5-rasm).



1.12.5-rasm

Bu ekvivalentlik munosabati natijasida hosil bo'lgan geometrik obyekt Miyobius varag'i deb yuritiladi. Bu sirt bir varaq qog'ozni rasmdagidek qilib yelimlash natijasida hosil qilingan, desak ham bo'ladi. Bu faktor fazo, ya'ni Miyobius varag'ining bir necha ajoyib xossalari mavjud bo'lib, ular risola davomida ko'plab uchraydi. Masalan, bu sirt bir chetga ega bo'lgan yo'naltirilmaydigan (yo'nalmaydigan) sirt bo'ladi. 1.12.6-rasmda bu topologik fazoning ba'zi bir ochiq to'plamlari keltirilgan.

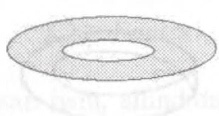


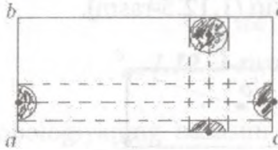
1.12.6-rasm

Bu fazoda *ab* va *cd* tomonlarda yotgan segmentlar markaziy simmetrik nuqtalar bo'yicha yelimlanadi. Keyingi misolda X to'plam sifatida shu a,b,c,d to'g'ri to'rtburchakni olib yelimlash jarayonini quyidagicha o'tkazsak (1.12.7-rasm), natijada, tor ballon deb ataluvchi ikki o'lchamli sirtga ega bo'lamiz.

1.12. 7-rasm

a,b,c,d varaqda ab va cd tomonlari bir umumiy gorizontalda yotgan nuqtalar bo'yicha va bir vaqtning o'zida a,d va b,c yotgan tomonlarni bir umumiy vertikal nuqtalar bo'yicha yelimlab yopishtiramiz. Bu sirtning R^3 Evklid fazosidagi ko'rinishi 1.12.8-rasmdagi singari bo'ladi.



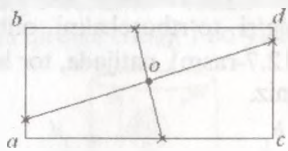


1.12.8-rasm ***1.12. 9-rasm***

Yelimlash natijasida hosil bo'lgan ushbu figurani (geometrik obyektni) faktor topologiyasi bo'yicha qarasak, torga gomeomorf ekanligi ma'lum bo'ladi. Bu fazoning ba'zi bir ochiq to'plamlari 1.12.9-rasmda keltirilgan.

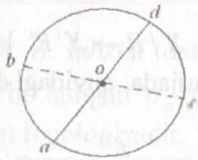
Geometriya fanida, qolaversa, topologiyada yelimlash natijasida hosil bo'ladigan (geometrik obyekt) yana bir sirt – bu RP^2 proektiv tekislikdir. Proektiv tekislik ham geometrik obyekt (figura) sifatida uch o'lchamli Evklid fazosi R^3 da yotadi.

Agar X to'plam sifatida yana a,b,c,d to'g'ri to'rtburchak olib, oldingilari kabi bd va ac tomonlarining markazga nisbatan diametrial qarama-qarshi nuqtalarini yelimlasak (1.12.10-rasm), yangi sirt hosil bo'ladi. Bu yelimlash natijasida hosil bo'lgan faktor fazo proektiv tekislik deyiladi va RP^2 ko'rinishda belgilanadi.



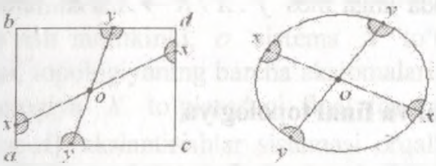
1.12.10-rasm

Shuni ta'kidlash mumkinki, a,b,c,d to'g'ri to'rtburchak chegarasi a,b,d,c bo'lgan doiraga gomeomorfdir. Shu sababli proektiv tekislikni doira chegarasidagi diametrial qarama-qarshi nuqtalarni yelimlashdan iborat bo‘lgan figura sifatida ham keltirish mumkin (1.12.11-rasm).



1.12.11-rasm

Proektiv tekislik bazasining ba’zi bir elementlari (ochiq to‘plamlari) 12-rasmda keltirilgan. Bu yerda elementlar to‘g‘ri to‘rtburchak chegarasining ham vertikal, ham gorizontal yoqlarining diametrial qarama-qarshi nuqtalari yelimlangandir.



1.12.12-rasm

Faktor fazo hosil qilinishiga yana bir muhim misol keltiramiz. $Y \subset X$ — topologik fazoning to‘plamostisi bo‘lsin. Y to‘plamning barcha nuqtalarini o‘zaro ekvivalent (ya’ni bitta nuqta) va $x \in X \setminus Y$ nuqtalarni esa, o‘ziga ekvivalent deb ataymiz.

Natijada hosil bo‘lgan faktor fazoni $X \setminus Y$ ko‘rinishda belgilaymiz.

$\pi : X \to X / Y$ proeksiya esa, Y to‘plamni nuqtaga yelimlash deyiladi. Masalan, $S^1 = [0;1]/\{0;1\}$ aylana $[0;1]$ kesma uchlarining faktor fazosidir. X va X^1 topologik fazolar berilgan bo‘lsin. R va R^1 lar bu topologik fazolardagi ekvivalentliklar bo‘lsin. $f : X \to X^1$ akslantirishni olganda, $x \overset{R}{\sim} y$ dan $f(x) \overset{R}{\sim} f(y)$ kelib chiqsa, f akslantirish ekvivalentlikni saqlaydi deyiladi.

Bu f akslantirish X / R va X^1 / R^1 faktor fazolar orasida tabiiy akslantirishni vujudga keltiradi, ya’ni, agar $\{Д_\alpha\}$ X dagi ekvivalentlik sinfi va $x \in Д_{\alpha}$ ixtiyoriy element bo‘lsa, u holda $f(x)$ ni o‘zida saqlovchi $\{Д_{\alpha}^{1}\}$ ekvivalentlik sinfini olsak, aniqlanishiga ko‘ra, $f(Д_{\alpha}) = Д_{\alpha}^{1}$ o‘rinli bo‘ladi. Bu akslantirishni $\tilde{f} : X / R \to X^{1} R^{1}$ bilan belgilaymiz va u faktor akslantirish deb yuritiladi. Natijada, quyidagi diagramma hosil bo‘ladi:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\
X/R \arrow[r, "\tilde{f}"] & X'/R'
\end{tikzcd}$$

1.12.3.Teorema. Agar $f : X \to X^{1}$ uzluksiz akslantirish ekvivalentlikni saqlasa, u holda unga mos $\tilde{f} : X / R \to X^{1} / R^{1}$ faktor akslantirish uzluksizdir.

1.13-§. Initsial va final topologiya

Topologiya fanida topologik fazo to‘plamostisida berilgan biron-bir topologiyani butun fazoga davomlashtirish (kengaytirish) masalasi ham mavjuddir. Boshqacha aytganda, X to‘plamning to‘plamostilari topologiyada aniqlangan bo‘lsa, bu topologiyalarni barcha aniqlangan topologiyalar bilan moslashtirgan holda butun X to‘plamga kengaytirish mumkinmi yoki yo‘qmi degan masalalar ko‘riladi. So‘ngra birorta $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsa va Y to‘plamda biron-bir σ topologiya aniqlangan bo‘lsa, σ topologiyaning proobrazi (asli) qanday hollarda X to‘plamda topologiya tashkil qiladi? Bu punktda biz shu ikki savolga javob berishning ikki umumiy usuli ustida to‘xtalamiz.

Aytaylik, X ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin (albatta, $X \neq \varnothing$), bunda $\{(Y_{\alpha}, \tau_{\alpha}) : d \in A\}$. Topologik fazolarning ixtiyoriy sinfi va har bir $\alpha \in A$ uchun $f_{\alpha} : X \to Y_{\alpha}$ akslantirish aniqlangan bo‘lsin. f_{α} akslantirish natijasidagi τ_{α} topologiyalarning proobrazini σ_{α} bilan belgilaymiz. X to‘plamda topologiyaning old bazasi sifatida σ_{α} sistema elementlarining birlashmasini olamiz. Bu birlashma, ma’lumki, biror-bir topologiyaga old baza bo‘ladi, lekin birlashma har doim ham baza bo‘la olmaydi. X to‘plamdagi topologiyani σ bilan belgilaymiz, bu topologiyaga $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ akslantirishlar va $\{\delta_\alpha : \alpha \in A\}$ topologiyalar sistemasi hosil qilgan initsial topologiya deyiladi.

Tushunish qiyin emaski, σ initsial topologiya berilgan f_α akslantirishlarning har biri uzluksiz bo'ladigan σ_α (X to'plamda) topologiyalar ichida eng kuchsiz (bo'shroq) topologiyadir. Ta'rifdan ko'rinadiki, initsial topologiya bu – topologiyalar proobrazi tushunchasining umumiysi ekan.

Endi ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan X to'plam, $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha); \alpha \in A\}$ topologik fazolar sistemasi va har bir $\alpha \in A$ uchun $g_\alpha : Y_\alpha \to X$ akslantirish berilgan bo'lsin. X to'plamda har bir shunday $U \subset X$ to'plam uchun $g_\alpha^{-1}(U)$ to'plam Y_α da ochiq bo'lgan barcha to'plamlarning σ sistemasini olaylik. Demak, σ sistemaning elementlari shunday ekanki, ularning proobrazlari ochiq to'plamlardir.

Tekshirib ko'rish mumkinki, σ sistema X to'plamda topologiya tashkil qiladi (ya'ni, topologiyaning barcha aksiomalarini qanoatlantiradi). Bu yangi σ topologiya X to'plamdagi final topologiya deyiladi. Bu topologiya $\{g_\alpha : \alpha \in A\}$ akslantirishlar sistemasi orqali aniqlangan topologiya deb ataladi. Demak, σ final topologiya X fazoda g_α akslantirish uzluksiz bo'ladigan topologiyalar orasida eng kuchlisi ekan.

Ta'rifdan ko'rinadiki, faktor-topologiya va topologiyalar yig'indisi kabi muhim tushunchalar final topologiyaga misol bo'lar ekan.

1.14-§. Yo'naltirilganlik filtri va uning limiti

Ma'lumki, matematika fanining ko'pgina asosiy bo'limlari (nazariyalari) ketma-ketliklar va ularning limiti tushunchasiga asoslangandir. Ketma-ketliklar va ularning limiti qo'llanma boshida haqiqiy sonlar to'plamida ko'rildi, keyinchalik ixtiyoriy metrik fazolarga umumlashtirildi. Bu esa, matematikaning ko'pgina bo'lim va tatbiqlarida o'z aksini topdi. Masalan, funksiyaning limiti va hokazolarida chuqur qo'llanildi.

Ketma-ketliklar nazariyasining birgina funksiyalarda qo'llanilishini hisobga olsak, agar fazo birinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantirmasa, hozirda funksiya limiti to'g'risida gap ham bo'lishi mumkin emas edi. Shu sababli yanada umumiy topologik fazolar sinflarini oladigan bo'lsak, ketma-ketliklar va uning limiti tushunchasini kengaytirishga to'g'ri keladi.

Shu matematik ehtiyojlar tufayli Mur, Smit va Shatunovskiylar tomonidan umumlashtirilgan ketma-ketliklar nazariyasi — umumiy yo‘nalishlari va limiti nazariyasi yaratildi.

XX asrning 30-yillarida fransuz matematigi Kartan tomonidan prinsipial yangi tushunchalar – filtr, ultrafiltr va uning limiti orqali umumiy yaqinlashishlar nazariyasi yaratildi va bir qancha muhim natijalar olindi. Keyinchalik bu universal yaqinlashishlar nazariyasiga aylanib ketdi.

1.14.1-ta’rif. Agar qisman old tartiblangan to‘plam S to‘plamning ixtiyoriy S_1 va S_2 elementlari uchun shunday $S^1 \in S$ topilsa va $S^1 \geq S_1$ hamda $S^1 \geq S_2$ o‘rinli bo‘lsa, u holda u o‘ngga filtrlangan yoki o‘sish bo‘yicha tartiblangan yoxud yo‘naltirilgan deyiladi. Yo‘naltirilgan to‘plamga natural sonlar to‘plami N ni eng oddiy misol qilib olish mumkin.

X topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasini olaylik. Ω_{x_0} bilan x_0 nuqtani o‘zida saqlovchi $U(x_0)$ barcha atroflar sistemasini ko‘raylik. Tushunish osonki, bu Ω_{x_0} sistema, teskari ichma-ich joylashish bo‘yicha tartiblangan (ya’ni $U \leq V$, agar $U \supset V$ bo‘lsa) bo‘lib, yo‘naltirilgan o‘lcham tashkil qiladi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $U_1, U_2 \in \Omega_{x_0}$ uchun $U = U_1 \cap U_2$ to‘plam U_1 dan ham, U_2 dan ham keyin turadi.

1.14.2-ta’rif. Yo‘naltirilgan to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy $f : S \to X$ akslantirish umumlashgan ketma-ketlik deyiladi. Bunda S to‘plam f yo‘naltirmaning aniqlanish sohasi, $f(S)$ to‘plam esa, qiymatlari sohasidir. Demak, X to‘plamdagi ixtiyoriy ketma-ketlikning aniqlanish sohasi N natural sonlar to‘plami bo‘lgan X to‘plamdagi yo‘nalganlik ekan.

Ko‘p hollarda $f : S \to X$ akslantirishda f_S ning $s \in S$ ga mos qiymatini x_s bilan belgilab, f yo‘naltirilganlik $\{x_s : s \in S\}$ ko‘rinishda belgilanadi.

1.14.3-misol. Aytaylik, Ω_{x_0} yo‘naltirilgan to‘plam X fazodagi x_0 nuqtani o‘z ichiga olgan barcha atroflar to‘plami bo‘lsin. Agar har bir $U \in \Omega_{x_0}$ to‘plamdan bitta x_U nuqtani tanlab olib, $\{x_u : u \in \Omega\infty\}$ ni hosil qilsak, X to‘plamda aniqlangan $\{x_U : U \in \Omega_{x_0}\}$ yo‘nalganlikka ega bo‘lamiz.

1.14.4-ta'rif. Agar shunday $s_0 \in S$ topilsaki, $S \geq S_0$ lar uchun $f_s \in A$ o'rinli bo'lsa, $f : S \to X$ yo'naltirilganlik (yo'naltirma) X to'plamning $A \subset X$ to'plamostisida, birorta joyidan boshlab (keyin) yotadi yoki $A \subset X$ to'plamostida deyarli yotadi, deyiladi.

Agar har bir $s_1 \in S$ uchun shunday $S_2 \geq S_1$ topilsa va uning uchun $f_{S_2} \in A$ o'rinli bo'lsa, f yo'nalganlik A to'plamda dam-badam yotadi, deyiladi.

Agar $f : S \to X$ yo'nalganlik A da dam-badam yotsa, u holda f yo'nalganlik $X \setminus A$ to'plamda deyarli yotmaydi, balki buning teskarisidir: agar f yo'nalganlik $X \setminus A$ da deyarli yotsa, A to'plamda dam-badam yotmaydi.

1.14.5-ta'rif. Agar X topologik fazoda berilgan $f : S \to X$ yo'nalganlik, x_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofida deyarli yotsa, ya'ni, x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U \subset X$ atrofi uchun shunday $x_U \in S$ topilsa va har bir $S \geq S_u$ uchun $f_s \in U$ o'rinli bo'lsa, $x_0 \in X$ nuqtaga yaqinlashadi. Bunda x_0 nuqta $f : S \to X$ yo'nalganlikning limiti deyiladi va $\lim\limits_{s} f_s = x_0$ ko'rinishda belgilanadi.

Yo'nalganlik ta'rifidan keyin ta'kidlandiki, X topologik fazodagi ixtiyoriy $x_n : n \in N$ ketma-ketlikni $f : N \to X$ yo'nalganlik deb atash mumkin. Bu yerda $f(n) = x_n$ deyish yetarli bo'ladi. Bu holat teskarisining ham o'rinli ekanligiga undaydi.

1.14.6-ta'rif. Agar bo'sh bo'lmagan, E to'plamning to'plamostilaridan tashkil topgan F sistema quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, u (majmua) E to'plamda filtrlanuvchi to'plam deyiladi:

(F_1): agar B to'plam f sistemaning A to'plamini o'z ichiga olsa, u holda $B \in f$;

(F_2): chekli sondagi f sistemaning elementlari kesishmasi ham f ga tegishli;

(F_3): bo'sh to'plam f sistemaga tegishli emas.

Bu shartlarni qanoatlantiruvchi F sistemaning o'zi E to'plamda filtr deyiladi.

1.14.7-misol. X topologik fazoda tayin bo'sh bo'lmagan $A \subset X$ to'plamning barcha atroflari to'plamlaridan tashkil topgan sistemani qarab chiqamiz. Bu sistema filtr tashkil qiladi.

1.14.8-misol. x_0 nuqta X topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'l-sin va F sistema X fazoda filtr tashkil qilsin. U holda, agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi F ga tegishli bo'lsa, F filtr x_0 nuqtaga yaqinlashadi, x_0 nuqta F ning limiti deyiladi. Agar F_{x_0} bilan x_0 nuqtani o'z ichiga olgan barcha atroflar sistemasini olsak, x_0 nuqta F_{x_0} ning limiti bo'ladi.

I bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Umumiy topologiyaning sistematik ilk sodda kurslarini 2–3, 5, 10–11, 20–21, 26–27, 48, 51, 53–54, 58–59, 73–74, 87, 92, 105, 108 raqamlar bilan berilgan kitoblardan; uning qiziqarli, mazmunli, ommabop bayonlarini esa 21, 32, 43, 70–71, 81, 95 raqamlar bilan berilgan kitoblardan; topologiyaning asosiy konstruktiv qurilmalarini 1, 4, 10, 14, 47, 66 – 68, 80 raqamlar bilan berilgan kitoblardan; metrik fazolar va ularning asosiy topologik va geometrik xossalari haqidagi ma'lumotlarni 6–7, 9, 11, 13, 17–18, 22–23, 28, 51, 53, 58–59, 82, 91–92, 105 raqamlar bilan berilgan kitoblardan; kompakt, bikompakt fazolarning barcha xossalarini 3, 10, 26, 21, 92, 87, 105, 108 raqamlar bilan berilgan kitoblardan va mazkur bob bo'yicha masala-mashqlarni 11, 13, 21, 51, 53, 54, 92, 105 raqamlar bilan berilgan kitoblardan qo'shimcha o'rganish mumkin.

Kirish qismi, analitik geometriya, chiziqli algebra, proektiv geometriya, noevklid geometriyalar va geometriyadagi yasashga doir ma'lumotlarni 15, 18, 6, 8, 21, 38, 39, 41, 44, 42, 60, 52, 55, 69, 72, 79, 84, 106 raqamlar bilan berilgan kitoblardan olsa bo'ladi.

Umumiy topologiyaning asosiy tushunchalari, topologik fazolarda muhim amallar, ularning qo'llanilishiga doir sodda mashqlar 10, 13, 11, 105 raqamlar bilan berilgan kitoblarda keltirilgan.

II bob. TOPOLOGIK FAZODAGI AMALLAR VA TOPOLOGIK FAZONING AJRIMLILIK AKSIOMALARI

Mazkur bobda umumiy topologiyaning (nazariyasining) asosiy amallari: deport ko'paytma (to'g'ri ko'paytma), diagnostik ko'paytma, cheksiz sondagi fazolarning tixonov ko'paytmasi tushunchalari bayon etiladi. Topologik fazolar ko'rdikki, undagi ochiq to'plamlarning sifatiga bog'liq ekan. Shu sababli topologik fazolarni farqlash uchun ajrimlilik aksiomalari kiritiladi. Bu aksiomalar yordamida topologik fazolarning qanchalik turli-tuman, sermazmun ekanligi ko'rsatiladi. Topologik fazolarning kengaytmasi tushunchasi berilib, lokal bikompakt fazolarda minimal kengaytma – ***Aleksandrov kengaytmasi*** bayon etildi.

Parakompakt fazolar, bog'lamli, chiziqli bog'lamli, diadik bikompakt va final bikompakt fazolar o'rganilib, uning sodda xossalari keltiriladi. Shuningdek, topologik fazolarning juda muhim sinfi sanoqli bazali va sanoqli salmoqqa ega bo'lgan fazolar sinfining tasnifi beriladi. Separabel fazolarning ma'lum bir topologik xossalari bayon etiladi.

2.1-§. Topologik fazolar ko'paytmasi

Ma'lumki, (x, y) ko'rinishda tartiblangan juftliklar majmuasi ikki X va Y to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi $X \times Y$ deb atalar edi. Bu yerda $x \in X$ va $y \in Y$. Albatta, bu holatda ixtiyoriy sondagi to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasini ham aniqlash mumkin. Bunday ko'paytmaning $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ elementlari (x_α), $\alpha \in A$, $x_\alpha \in X_\alpha$ ko'rinishda bo'ladi. Boshqacha aytganda, $\prod_\alpha X_\alpha$ ning $(x) = x$ elementidagi $x : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, $x_\alpha \in X_\alpha$ ko'rinishidagi $x \in$ X funksiyalaridan iboratdir.

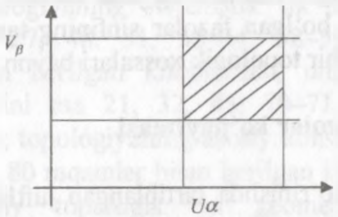
Agar $A = \{1, 2, ..., .n..\}$ chekli n elementli to'plamdan iborat bo'lsa, u holda $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot ... \cdot X_n$ ko'paytma ko'p hollarda $X_1 \times X_2 \times X_3 \times ..., ... \times X_n$ ko'rinishda ham belgilanadi. Uning elementlari tartiblangan $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ yig'ma to'plamdan iborat bo'lib, bu yerda $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, n}$.

Bizga X va Y topologik fazolar berilgan bo'lsin. $X \times Y$ to'g'ri ko'paytmada topologiyani quyidagicha aniqlaymiz: bazaning elementlari

$\{U_\alpha \times V_\beta\}$ ko‘rinishdagi barcha sistemalardan iborat bo‘lib, bu yerda $\{U_\alpha\}$ va $\{V_\beta\}$ sistemalar mos ravishda X va Y fazolardagi topologiyalarning bazalaridir.

$\{U_\alpha x V_\beta\}$ baza orqali aniqlangan topologiya $X \times Y$ fazodagi ko‘paytmaning topologiyasi deyiladi. Boshqacha aytganda, $X \times Y$ ko‘paytmadagi topologiyaning bazasini X va Y lardagi topologiyalar bazalarining ko‘paytmasi tashkil qiladi.

2.1.1-misol. Ma’lumki, R^2 tekislik R^1 va R^1 to‘g‘ri chiziqlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi bo‘lib, u $R^2 = R^1 \times R^1$ ko‘rinishda yoziladi. R^2 fazodagi topologiya bazasini esa, $V_\alpha x V_\beta$ ko‘rinishdagi to‘g‘ri to‘rtburchaklar tashkil qiladi, bu yerda V_α va V_β — ochiq intervallardir (2.1.1-rasm).



2.1.1-rasm

Quyidagi proeksiyalarni ko‘raylik.

$P_1 : X \times Y \to X; (x, y) \xrightarrow{P_1} x$

$P_2 : X \times Y \to Y; (x, y) \xrightarrow{P_{12}} y$

2.1.2-teorema. Agar X va Y topologik fazolar bo‘lib, $X \times Y$ ko‘paytmada topologiya aniqlangan bo‘lsa, u holda ρ_1 va ρ_2 akslantirishlar uzluksizdir. Topologik ko‘paytma $X \times Y$ da esa, ρ_1 va ρ_2 proeksiyalar uzluksiz bo‘ladigan topologiyalarning eng kuchsizidir.

Endi ixtiyoriy (yoki cheksiz) sondagi to‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi ΠX_α ni ko‘rib chiqaylik. Bu yerda har bir $\alpha \in A$ uchun X_α ko‘paytuvchi, A to‘plamning quvvati esa, cheksiz bo‘lishi ham mumkin. Har bir $\alpha \in A$ uchun X_α topologik fazo bo‘lsin. ΠX_α ko‘paytmada shunday kuchsiz topologiya aniqlaymizki, bu topologiyada har bir $P_\alpha : \Pi X_\alpha \to X_\alpha$ proeksiya $\alpha \in A$, uzluksiz bo‘lsin. Bu yerda P_α proeksiya har bitta $x=(x_\alpha)$ $x=(x_\alpha)$ $(\alpha \in A \in \prod X_\alpha)$ nuqtaga shu nuqtaning α o‘rindagi koordinatasi x_α ni mos qo‘yadi. Bu topologiya ko‘paytmadagi topologiya yoki **Tixonov topologiyasi** deb yuritiladi.

Ko‘paytmada topologiyani bunday aniqlashni birinchi bo‘lib A.N. Tixonov taklif etgan. Mazkur topologiyaning bayoni xususida to‘xtalsak, bu yerda uning oldbazasi tavsifini keltirish nisbatan yengilroq ekanligi ma’lum bo‘ladi. Bu oldbaza quyidagicha aniqlanadi: barcha $B_{\alpha_0} = \left\{ x : x(\alpha_0) \subset U_{\alpha_0} \right\}$ ko‘rinishdagi to‘plamlar ΠX_α ko‘paytmaning to‘plamostilaridir, bu yerda α_0 indeks A ning, U_{α_0} esa, X_{α_0} topologik fazo bazasining ixtiyoriy elementidir.

Aniqlanishiga ko‘ra, aytish mumkinki, $P^{-1}_{\alpha_0}(U_{\alpha_0}) = B_{\alpha_0}$ tenglik o‘rinlidir. Bundan ko‘rinadiki, tayin $\alpha_0 \in A$ indeks uchun $\{ B_\alpha \}$ sistema ΠX_α ko‘paytmadagi P_{α_0} proeksiya uzluksiz bo‘ladigan eng kuchsiz topologiyani tashkil qilar ekan. Boshqacha aytganda, har bir U_{α_0} ochiq to‘plam X_{α_0} topologik fazoning bazasi elementi bo‘lsa, tayin α_0 uchun B_{α_0} oldbaza elementlari quvvati X_{α_0} topologik fazoning bazasi elementlari quvvatiga tengdir. Ikkinchi tomondan, tayin har bir $\alpha_0 \in A$ indeksga mos B_{α_0} element uchun $B_{\alpha_0} = U_{\alpha_0} x \Pi X_\alpha, \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ deb, ikkinchi ko‘paytmani $\overline{X_{\alpha_0}}$ bilan belgilab, bu ko‘paytma ko‘rinishidagi to‘plamostini α_0 yo‘lakcha deb atasak, B_{α_0} element U_{α_0} ning α_0 yo‘lakcha ko‘paytmasiga teng ekan. Endi $\{ B_\alpha : \alpha \in A \}$ to‘plamlar (yo‘lakchalar) oilasini Tixonov topologiyasining oldbazasi deb e’lon qilamiz.

Natijada ΠX_α ko‘paytma har bir $\alpha^6 \in A$ uchun hamma P_α proeksiyalar uzluksiz bo‘ladigan eng kuchsiz topologiya bazasiga ega bo‘lamiz.

Tixonov topologiyasi oldbazasining aniqlanishiga ko‘ra, ΠX_α ko‘paytmada Tixonov topologiyasi bazasi elementlari $U = P^{-1}_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap P^{-1}_{\alpha_2}$

$(U_{\alpha_2}) \cap \ldots . \cap P_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ ko‘rinishdagi to‘plamlardan iborat. Bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — ixtiyoriy chekli elementlar nabori $\alpha_i \in A, i = \overline{1, n} U_{\alpha_i}$ esa, X_{α_i} topologiya bazasining ixtiyoriy elementi. Yuqorida keltirilgan tengliklar va xulosalardan ushbu tenglikni isbotlash mumkin. Quyidagi tenglik o‘rinlidir: agar $\alpha \neq \alpha_1, \ldots ., \alpha_n$ bo‘lsa, $P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap P_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots$ $\ldots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) = \prod_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ bo‘ladi, bu yerda $U_\alpha = X_\alpha$. Boshqacha aytganda, bazaning ochiq to‘plami quyidagi yig‘ma funksiyadan iboratdir:

$$\left\{ x : x(\alpha_i) \in U_{\alpha_i} : i = 1, \ldots . n \right\} = \left\{ x : x(\alpha_i) \in U_{\alpha_1} \right\} \cap \ldots \cap \left\{ x : x(\alpha_n) \in U_n \right\}$$

Ta’kidlash lozimki, ko‘paytmani ko‘paytmaning topologiyasi deb olamiz.

2.1.3-teorema. Ixtiyoriy $\alpha_0 \in A$ uchun $P_{\alpha_0} : \Pi X_\alpha \to X_{\alpha_0}$ proeksiya uzluksiz va ochiq akslantirishdir.

2.2-§. Topologik fazolarda akslantirishlarning diagonal va to‘g‘ri ko‘paytmasi

Bizga $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$ akslantirishlar berilgan bo‘lsin. Bu yerda X va Y_α ixtiyoriy, $\alpha \in A$ lar bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlardir. Boshqacha aytganda, $\{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$ ixtiyoriy to‘plamlar oilasi va har bir $\alpha \in A$ uchun $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ akslantirish aniqlangan bo‘lib, bunda X tayin bo‘sh bo‘lmagan to‘plamdir. Bu holda $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ akslantirishlar oilasi (jamlanmasi) kanonik ravishda quyidagicha aniqlangan ma’lum bir akslantirishni vujudga keltiradi.

2.2.1-ta’rif. $\{ f_\alpha : \alpha \in A \}$ akslantirishlar oilasining diagonal ko‘paytmasi deb $f : X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, $f(x) = \{ f_\alpha(x) : \alpha \in A \}$ formula bilan aniqlangan akslantirishga aytiladi va $\Delta f_\alpha = f$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu yerda har bir $\alpha \in A$ uchun f_α akslantirish f diagonal akslantirishning komponentasi deyiladi.

Shuni aytish mumkinki, ixtiyoriy $g: X \to \underset{\alpha\in A}{\Pi} Y_\alpha$ akslantirishni biror-ta akslantirishlar oilasining diagonal ko'paytmasi sifatida qarash mumkin. Haqiqatan ham, har bir $\alpha_0 \in A$ uchun $f_{\alpha_0} = P_{\alpha_0} \circ g: X \to Y_{\alpha_0}$ desak, bu yerda $P_\alpha : \Pi Y_\alpha \to Y_{\alpha_0}$ proeksiyani qiyinchiliksiz qabul qilishimiz mumkinki, Δf_α diagonal ko'paytma berilgan g akslantirish bilan ustma-ust tushadi.

2.2.2-ta'rif. Agar X ning ixtiyoriy har xil ikki elementi uchun shunday α_0 indeks topilsa va uning uchun $f_{\alpha_0}(x_1) \neq f_{\alpha_0}(x_2)$ o'rinli bo'lsa, $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ akslantirishlar oilasi X to'plamning elementlarini farqlaydi deyiladi.

Bu ta'rifdan ravshanki, yuqoridagi f_α akslantirishlardan loaqal bit-tasi inektiv akslantirish bo'lsa, bu akslantirishlar oilasi X to'plam ele-mentlarini farqlar ekan.

2.2.3-teorema. Agar $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ oila X ning elementlarini farq-lasa, u holda ularning diagonal ko'paytmasi $f = \underset{\alpha}{\Delta} f_\alpha : X \to \underset{\alpha}{\Pi} Y_\alpha$ inek-tivdir va f — joylashtirishdan iborat.

Shuni ta'kidlash mumkinki, agar diagonal akslantirish inektiv bo'lsa, bu akslantirishlar oilasi $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ X ning elementlarini farqlaydi.

2.2.4-teorema. Agar diagonal ko'paytma $f = \underset{\alpha\in A}{\Delta} f_\alpha$ ochiq akslan-tirish bo'lsa, u holda uning har bir komponentasi f_α ham ochiq akslan-tirishdir.

2.2.5-teorema. Diagonal ko'paytma $f = \underset{\alpha}{\Delta} f_\alpha$ uzluksiz bo'lishi uchun har bir $\alpha \in A$ uchun f_α uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

Duch kelishimiz mumkin bo'lgan yana bir $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ akslan-tirishlar oilasini olaylik, bu yerda $\alpha \in A$ uchun X_α va Y_α lar topologik fazolar bo'lsin. Tabiiyki, $\Pi f_\alpha : \Pi X_\alpha \to \Pi Y_\alpha$ akslantirishni ixtiyoriy $x \in \Pi X_\alpha$ nuqtaga $y \in \Pi Y_\alpha$ nuqtani $y = (y_\alpha) = (f_\alpha(x))$ formula bilan mos qo'yamiz, akslantirishlar sistemasi bu akslantirish f_α ning to'g'ri ko'paytmasi deb yuritiladi. Agar $A = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$ bo'lsa, akslantirishlar ko'paytmasi $f_1 . f_2 . f_3 \ldots, f_n$ ko'p hollarda $f_1 \times f_2 \times f_3 \times \ldots \times f_n : X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots X_n \subset_\to Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \ldots Y_n$ ko'rinishda belgilanadi.

2.2.6-teorema. Akslantirishlarning ko'paytmasi Πf_α uzluksiz bo'lishi uchun har bir $\alpha \in A$ uchun f_α uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.3-§. Topologik yig'indi

Topologik fazolar oilasi $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ berilgan bo'lsin. Bu topologik fazolarning birlashmasi $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ ni olaylik. Ushbu birlashmadan iborat bo'lgan to'plamning har bir elementi X_α da $\alpha = A$ topologiyaga egadir. $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ birlashmada ochiq to'plam deb shunday to'plamostilarni olamizki, bu to'plamostining har bir $in_\beta : X_\beta \to \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$* akslantirishdagi asli ochiq to'plamdan iborat bo'lib, bu yerda $\beta \in A$. Shunga o'xshab, agar ixtiyoriy $\alpha \in A$ uchun $in_\gamma^{-1}(B) \subset X_\alpha$ yopiq to'plam bo'lsa, $B \subset \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ yopiq to'plamdir. Bu ikkala hol o'zaro teng kuchlidir.

Shuni ta'kidlash joizki, ochiq yoki yopiq to'plamning UX_α birlashmalarda bunday e'lon qilinishi UX_γ da topologiyani tashkil qiladi. Hosil bo'lgan topologik fazoga topologik fazolarning yig'indisi (summasi) deyiladi va $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ ko'rinishida belgilanadi.

Bizga ma'lumki, har bir $\alpha \in A$ uchun $in_\alpha : X_\alpha \to \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ayniy akslantirish yoki joylashtirish aniqlangan. Topologik yig'indi $X = \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ da ochiq to'plamning aniqlanishiga ko'ra, agar har bir $\alpha \in A$ uchun $U \bigcap X_\alpha$ to'plam X_α da ochiq bo'lsa, u holda U to'plam yig'indi X fazoda ochiq bo'ladi. Agar indekslar to'plami A chekli to'plam bo'lsa, yig'indi fazo $X_1 \coprod X_2 \bigcup ..., \coprod X_n$ ko'rinishda belgilanadi.

---

* $\coprod$ belgisi topologik birlashma yoki topologik yig'indini bildiradi.

2.4-§. Bog‘lamli topologik fazolar

Bog‘lamli topologik fazolar topologiyaning asosiy va muhim tushunchalaridan biridir. Bu tushuncha ba’zi manbalarda tutash fazolar sifatida ham keltirilgan.

2.4.1-ta’rif. Agar X to‘plamni o‘zining bo‘sh bo‘lmagan ikkita o‘zaro kesishmaydigan ochiq to‘plamostilari birlashmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lmasa, X topologik fazo bog‘lamli topologik fazo deyiladi. Ya’ni, $X \neq U_1 \cup U_2$ $U_1 \cap U_2 = \theta$, $U_1 \neq \theta$, $U_2 \neq \theta$ θ – bo‘sh to‘plam, U_1, U_2 ochiq to‘plamlardir.

Ta’rifdan bevosita ma’lumki, bog‘lamli X fazoda X va θ dan boshqa ochiq va yopiq to‘plamlar bo‘lmasligi zarur va yetarlidir. Bog‘lamli bo‘lmagan fazoga misol sifatida elementi bittadan ortiq bo‘lgan ixtiyoriy diskret fazoni keltirish mumkin.

Bog‘lamli fazoga ixtiyoriy bir nuqtali topologik fazolar misol bo‘la oladi.

2.4.2-misol. X to‘plam haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamda topologiyani, ya’ni ochiq to‘plamlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$\tau = \{\{\theta\} \cup \{R\} \cup \{-\infty; x\} : x \in R\}$ (X,τ) fazoda ixtiyoriy to‘plam bog‘lamli bo‘ladi.

Bu jumlani isbotlash uchun ixtiyoriy $S \subset X$ to‘plamni olamiz. Faraz qilaylik, F to‘plam S ning bo‘sh bo‘lmagan ochiq va yopiq to‘plamostisi bo‘lsin. Bu holda F to‘plamni $F = U \cap S = C \cap S$ ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda U to‘plam X da ochiq, S to‘plam esa, X da yopiq to‘plamdir. Ya’ni, $U = (-\infty, b)$, $b \in R$, $C = [a, \infty)$, $a \in R$, $F = U \cap S = C \cap S$ tengliklar o‘rinli.

Yuqoridagilar o‘rinli bo‘lganligi sababli ixtiyoriy $x \in S$ uchun $x \angle b$ va $x \geq a$ lar ham o‘rinli bo‘ladi.

Agar shunday $x \geq b$ topilsa, u holda $C \cap S \neq U \cap S$. Shunga o‘xshab, shunday $x \angle a$ topilsa, u holda $U \cap S \neq C \cap S$. Shunday qilib, $S \subset [a, b)$ va $F = S$. Bu S to‘plamning bog‘lamli ekanligini anglatadi. Demak, bu topologiyada ixtiyoriy $S \subset X$ bog‘lamli ekan. Endi shu haqiqiy sonlar to‘plami R da τ topologiyani quyidagicha aniqlaymiz.

Agar ixtiyoriy $s\in S$ uchun shunday $t>S$ topilsa va $[S,t)\subset S$ bo‘l-sagina, $S\in\tau$ dir. Bu topologiya bilan aniqlangan fazoda yagona bog‘lamli bo‘sh bo‘lmagan to‘plam faqat nuqtadan iboratdir. Bu jumlani isbotlash uchun X da ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan bog‘lamli T to‘plamostini olaylik va τ nuqta T ga tegishli bo‘lsin. Ma’lumki, $[x,x+\varepsilon)$ to‘plam ixtiyoriy ε >0 uchun X fazoda ham ochiq, ham yopiq to‘plamdir. U holda $[x,x+\varepsilon)\cap T$ – kesishma ham ochiq, ham yopiq to‘plam bo‘ladi. T ning bog‘lamli ekanligidan va $[x,x+\varepsilon)\cap T\neq\theta$ shartdan ko‘rinadiki, ixtiyoriy ε >0 uchun $[x,x+\varepsilon)\cap T=\theta$ o‘rinli bo‘ladi. Bu esa, T to‘plamning faqat $T=\{x\}$ shartidagina bo‘lishini ko‘rsatadi. Demak, bu fazoda faqat bir nuqtadan iborat bo‘lgan to‘plamlargina bog‘lamli to‘plam bo‘lar ekan.

2.4.3-teorema. X topologik fazo bog‘lamli bo‘lishi uchun uni ikki ayri bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkin bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. X bog‘lamli bo‘lsin va $X=A\cup B$ bo‘lib, A va B lar bo‘sh bo‘lmagan ayri to‘plamlar bo‘lsin. U holda, bir tomondan aniqki, $C\overline{B}\subset CB=A$; ikkinchi tomondan, $A\cap\overline{B}=\theta$. Ma’lumki, $A\subset C\overline{B}$, shu sababli $A=C\overline{B}$. Shunga o‘xshab, amin bo‘lamizki, $B=C\overline{A}$. Bundan ko‘rinadiki, yopiq to‘plamlarning to‘ldiruvchi to‘plamlari bo‘lganligi sababli A ham, B ham ochiq to‘plamlardir. Bu X ning bog‘lamli ekanligiga ziddir.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, X bog‘lamsiz bo‘lsin. U holda $X=F_1\cup F_2$, F_1 yopiq, F_2 yopiq, $F_1\neq\varnothing, F_2\neq\varnothing$ va $F_1\cap F_2=\varnothing$, bundan ko‘rinadiki, F_1 va F_2 to‘plamlar ayri to‘plamlardir, chunki bu to‘plamlar uchun $\overline{F_1}\cap F_2=F_1\cap F_2$, $F_1\cap\overline{F_2}=F_1\cap F_2$, $\overline{F_1}\cap F_2=\varnothing$ va $F_1\cap\overline{F_2}=\varnothing$ tengliklar o‘rinlidir.

2.4.4-teorema. $[a,в]$ kesma bog‘lamlidir.

Isboti. Buning aksini faraz qilamiz, ya’ni $[a,в]$ kesma bog‘lamli bo‘lmasin. U holda $[a,в]$ kesmani ikkita bo‘sh bo‘lmagan kesishmaydigan ochiq to‘plamlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkin. Ya’ni, $X=U\cup V$, $U\neq\theta\neq V$, $U\cap V=\theta$. U va V lar ochiq to‘plamlar.

Aytaylik, $a \in U$. Shuni aytish kerakki, U va V to'plamlar $[a,в]$ da yopiqdir, chunki $[a,в]$ kesmaning o'zi R^1 da yopiq bo'lganligi sababli $\Phi = \{u \in U : u \angle V \text{ ixtiyoriy } v \in V \text{ uchun}\}$ F to'plam bo'sh emas, chunki $a \in \Phi$. Agar $\eta = \text{supp } F$ bo'lsa, U yopiq to'plam bo'lgani uchun $\eta \in U$. η son yuqori chegara bo'lganligi sababli ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $(\eta - \varepsilon, \eta \in \varepsilon) \cap V \neq \theta$. Bundan ko'rinadiki, η nuqta uchun V tegish nuqtasidir. Ya'ni, $\eta \in \overline{V}$, V ning yopiq ekanligidan $\eta \in V$. Bu $\eta \in U \cap V \neq \theta$ ni bildiradi. Bu ziddiyat $[a,в]$ ning yopiq ekanligini isbotlaydi. Demak, $[a,в]$ kesma bog'lamli ekan.

Eslatma. Keltirilgan 2.2.4-teoremadan va 2.4.2-misoldan ma'lum bo'lmoqdaki, fazoning yoki fazoostining bog'lamli bo'lishi yoki bo'lmasligi unda qaralayotgan topologiyaga bog'liq ekan.

2.4.5-teorema. Evklid fazosi R^n da ixtiyoriy qavariq to'plam bog'lamlidir.

Isbot. Aytaylik, $T \subset R^n$ to'plam qavariq bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $a, в \in T$, $a \neq в$ nuqtalar uchun $[a,в] \subset T$ o'rinli.

Buning aksini faraz qilamiz, ya'ni $T = U \cup V, U, V$ bo'sh bo'lmagan ochiq to'plamlar hamda $U \cap V = \theta$.

$X = [a,b]$ to'plamni olaylik, bu yerda $a \in U$ va $b \in V$.

Endi $U_x = U \cap X$ va $V_x = V \cap X$ to'plamlarni ko'raylik. Bu to'plamlar bo'sh bo'lmagan kesishmaydigan to'plamlardan iborat. Ular uchun $X = U_x \cup V_x$ tenglik o'rinlidir. Bu esa, $X = [a,b]$ kesmaning bog'lamliligiga ziddir.

Evklid fazosi R^n da quyidagi to'plamlarni olamiz.

$$Д_r(x_0) = \{x \in R^n : \rho(x, x_0) < r\}$$

$$\overline{Д_r}(x_0) = \{x \in R^n : \rho(x, x_0) \leq r\}$$

$Д_r(x_0)$ — ochiq shar, $\overline{Д_r}(x_0)$ — yopiq shar deyiladi, ba'zida ular mos ravishda ochiq (yopiq) "disk" deb ham yuritiladi. Yuqoridagi teoremadan bevosita quyidagilar kelib chiqadi.

2.4.6-natija. R^n fazo va $Д_r(x_0)$, $\overline{Д_r}(x_0)$ disklar bog'lamlidir.

2.4.7-teorema. Uzluksiz akslantirishlarda bog'lamlilik saqlanadi. Ya'ni, uzluksiz akslantirishda bog'lamli fazo aksi (obrazi) bog'lamli bo'ladi.

Isbot. $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. X bog'lamli fazo bo'lsin. Biz bu yerda f akslantirishni syurektiv deb olishimiz mumkin, ya'ni ixtiyoriy $y \in Y$ nuqta uchun $f^{-1}(y) \neq \theta$. Agar U to'plam Y ning ochiq va yopiq to'plami bo'lsa, u holda $f^{-1}(U)$ to'plam X ning ochiq va yopiq to'plami bo'ladi. Bu holda $f^{-1}(U) = \theta$ yoki $f^{-1}(U) = X$, qolaversa, $U = \theta$ yoki $U = U$ bo'lishi mumkin. Bu Y fazoning bog'lamli ekanligini ko'rsatadi.

Endi $f(t) = (\cos 2\pi t; \sin 2\pi t) \in S^1 \subset R^2$ formula orqali aniqlangan $f: [0,1] \to S^1$ akslantirishni olaylik, bu yerda S^1 – aylana. Bu akslantirish syurektiv va uzluksizdir. Bundan ko'rinadiki, aylana S^1 bog'lamlidir.

2.4.8-natija. Agar X va U gomeomorf topologik fazolar bo'lsa, X fazo bog'lamli bo'lishi uchun U ning bog'lamli bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.4.9-teorema. Agar X topologik fazo ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi nuqtalarni o'zida saqlagan bog'lamli to'plamostiga ega bo'lsa, X bog'lamli bo'ladi.

Isbot. Buning teskarisini olaylik, ya'ni X topologik fazo bog'lamli bo'lmasin. U holda X fazoni o'zaro umumiy nuqtaga ega bo'lmagan ikki bo'linmas ochiq to'plamlar birlashmasi ko'rinishida yozishimiz mumkin.

Demak, $X = U \cup V$, $U \neq \theta \neq V$, $U \cap V = \theta$, U, V – ochiq to'plamlar. Aytaylik, $U_0 \in U$ va $V_0 \in V$ bo'lsin. $L \subset X$ to'plam U_0 va V_0 nuqtalarni o'zida saqlovchi bog'lamli to'plam bo'lsin. Quyidagi to'plamlarni olaylik: $U_1 = U \cap L$ va $V_1 = V \cap L$. Bu to'plamlar bo'sh emas va L da ochik to'plamlardir. Ularning birlashmasi $U_1 \cup V_1 = L$ dan iboratdir. Lekin $U_1 \cap V_1 = \theta$ o'rinli. Bu L ning bog'lamli ekanligiga ziddir.

Bog'lamli to'plamlar uchun quyidagilarni isbotlash qiyin emas.

2.4.10-teorema.

1) agar A va B to'plamlar X ning bog'lamli to'plamlari bo'lib, $A \cap B \neq \theta$ o'rinli bo'lsa, $A \cup B$ birlashma bog'lamli bo'ladi;

2) agar A, B, S to'plamlar X ning bog'lamli to'plamostilari bo'lib, $A\cap B\neq\theta$ va $B\cap C\neq\theta$ o'rinli bo'lsa, birlashma $A\cup B\cup C$ bog'lamli bo'ladi.

Fazoning bog'lamli bo'lishining umumiyroq kriteriysini keltiramiz.

2.4.11-teorema. X fazoning bog'lamli to'plamostilari oilasi $\{A_\alpha:\alpha\in J\}$ berilgan bo'lib, bu oilaning ixtiyoriy ikki elementi o'zaro ayri bo'lmasa, $C=\bigcup_\alpha A_\alpha$ to'plam X fazoda bog'lamlidir.

Isbot. Buning aksini faraz qilamiz, ya'ni $C=C_1\cup C_2$, $C_1\cap C_2=\theta$, C_1,C_2 to'plamlar bo'sh emas va S da yopiq to'plamlardir.

A_α to'plamlarning bog'lamli ekanligidan har bir A_α to'plam S_1 yoki S_2 ning qismi bo'ladi. S_1 yoki S_2 larning bo'sh to'plam emasligidan shunday A_{α_1}, $A_{\alpha_2}\in\{A_\alpha:\alpha\in J\}$ topiladiki, $A_{\alpha_1}\subset C_1$, $A_{\alpha_2}\subset C_2$. C_1 va C_2 larning yopiq C da yopiq ekanligidan, A_{α_1} va A_{α_2} to'plamlarning C dagi yopig'i mos ravishda C_1 va C_2 da yotadi.

Bu quyidagilarga ekvivalentdir:

$\overline{A_{\alpha_1}}\cap C\subset C_1$, $\overline{A_{\alpha_2}}\cap C\subset C_2$. Bu yerda $\overline{A_{\alpha_1}}$ va $\overline{A_{\alpha_2}}$ lar A_{α_1} va A_{α_2} larning X dagi yopig'idir. Shu sababli quyidagi ikki tenglikka ega bo'lamiz.

$(\overline{A_{\alpha_1}}\cap C)\cap A_{\alpha_1}=\theta$, $A_{\alpha_1}\cap(\overline{A_{\alpha_2}}\cap C)=\theta$. Lekin,

$(\overline{A_{\alpha_1}}\cap C)\cap A_{\alpha_2}=\overline{A_{\alpha_1}}\cap(C\cap A_{\alpha_2})=A_{\alpha_1}\cap\overline{A_{\alpha_2}}$

$A_{\alpha_1}\cap(\overline{A_{\alpha_2}}\cap C)=(A_{\alpha_1}\cap C)\cap\overline{A_{\alpha_2}}=\overline{A_{\alpha_1}}\cap A_{\alpha_2}$.

Bundan $\overline{A_{\alpha_1}}\cap A_{\alpha_2}=\theta$, $A_{\alpha_1}\cap\overline{A_{\alpha_2}}=\theta$ o'rinlidir. Bu A_{α_1} va A_{α_2} to'plamlarning ayri ekanligini bildiradi. Bu ziddiyat teorema o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Bog'lamli fazolarning maxsus chiziqli bog'lamli sinfi ham mavjud. Yuqoridagi teorema shu chiziqli bog'lamli fazolar sinfi shartlarini qanoatlantiradi.

2.4.12-ta'rif. $S:[0,1]\to X$, $S(0)=a$, $S(1)=b$ shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz S akslantirish X topologik fazoning a va b nuqtalarini tutashtiruvchi yo'l deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $[0,1]$ kesmaning S akslantirishdagi obrazi a va b nuqtalarni tutashtiruvchi bog'lamli to'plam ekan.

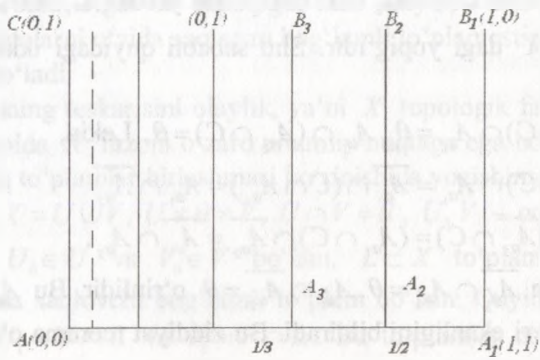
2.4.13-ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki nuqtasini yo'l orqali tutashtirish mumkin bo'lsa, X fazo chiziqli bog'lamli fazo deyiladi.

Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, ixtiyoriy chiziqli bog'lamli fazo bog'lamlidir. Lekin buning aksi doimo ham o'rinli bo'lavermaydi. Bunga quyidagi ikki misolni keltiramiz.

2.4.14-misol. Tekislikda, ya'ni R^2 fazoda quyidagi to'plamostini ko'raylik:

$$X=\left[\overset{A}{(0,0)};\overset{A_1}{(1,0)}\right]\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\overset{A_n}{(\frac{1}{n},0)},\overset{B_n}{(\frac{1}{n},1)}\right]\cup(0,1);$$

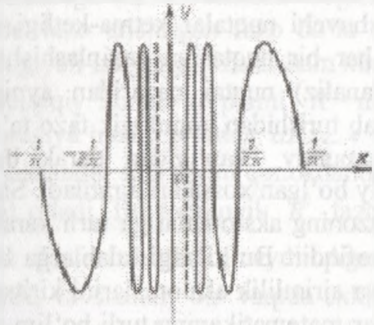
bu yerda $A(0,0)$, $A_1(1,0)$, $A_n(\frac{1}{n},0)$, $B_n(\frac{1}{n},1)$ tekislik nuqtalardir, $[A,A_1]$, $[A_n,B_n]$ kesmalar, $(0,1)$ interval (2.4.1-rasm).



2.4.1-rasm

Bu X to'plam bog'lamli bo'ladi. Lekin chiziqli bog'lamli emas, chunki $S(0,1)$ nuqtani X ning boshqa nuqtalari bilan yo'l orqali tutashtirish mumkin emas.

2.4.14-misol. R^2 tekislikda M to‘plam sifatida ordinatalar o‘qida uchlari $A(0,-1)$ va $B(0,1)$ nuqtada bo‘lgan $[A,B]$ kesma va $y=\sin\frac{1}{x}(0<x\leq 2\pi)$ funksiya grafigi Grf dan (2.4.2-rasm) tashkil topgan to‘plamni olaylik.



2.4.2-rasm

Bu M to‘plam bog‘lamli to‘plamni tashkil qiladi, lekin chiziqli bog‘lamli bo‘lmaydi. Chunki $[A,B]$ kesma nuqtalari bilan M ning boshqa nuqtalarini tutashtiruvchi yo‘l mavjud emas. Haqiqatan ham, M to‘plam $[A,B]$ kesma va Tf grafikdan iborat, ya’ni $M=[A,B]\cup F_f$. F_f grafikni olsak, bu bog‘lamli to‘plamdir. $[A,B]$ kesmaning har bir nuqtasi M to‘plam uchun tegish nuqta bo‘lmoqda, ya’ni ixtiyoriy $0(x_0\in\varepsilon)$ atrofi bilan M va F_f ning kesishmasi bo‘sh emas. Demak, $\overline{F_f}=F_f\cup[A,B]=M$. Bu xulosaga ko‘ra, M to‘plam bog‘lamli to‘plamdir.

Bog‘lamli to‘plamlarning (fazolarning) to‘g‘ri ko‘paytmasi va Tixonov ko‘paytmalarining bog‘lamli bo‘lishi haqidagi jumlalarni keltiramiz.

2.4.15-teorema. Bog‘lamli fazolarning ko‘paytmasi $X\times Y$ bog‘lamli fazodir.

2.4.16-teorema. Ixtiyoriy sondagi bog‘lamli fazolarning Tixonov ko‘paytmasi $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ bog‘lamli fazo bo‘ladi.

2.5-§. Topologik fazoda ajrimlilik aksiomalari. T_0; T_1; T_2; T_3; $T_{3\frac{1}{2}}$; T_4 — fazolar

I va II boblarda keltirilgan misol va mashqlardan ma'lumki, shunday "yomon tuzilgan" topologik fazolar mavjudki, alohida olingan nuqta yopiq to'plamosti bo'lmasligi mumkin, chekli to'plam limit nuqtaga ega bo'lishi mumkin, bitta yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligi ikkita har xil nuqtalarga yoki fazoning har bir nuqtasiga yaqinlashishi mumkin. Bunday hollar klassik tahlil (analiz) nuqtai nazaridan aynigan vaziyatlarning (situatsiyalarning) uchrab turishidan, topologik fazo ta'rifi asosidagi 1^0–4^0 aksiomalarning juda umumiy ekanligidan darak beradi. Shu tufayli fazolarning juda umumiy bo'lgan xossalari ajratiladi. Shulardan kelib chiqqan holda, topologik fazoning aksiomalariga turli xarakterdagi chegaralar qo'yish maqsadga muvofiqdir. Bu xildagi talablarga birinchi va ikkinchi sanoqlilik aksiomalari va ajrimlilik aksiomalarini kiritsa bo'ladi. Natijada, bunday topologik fazolar matematikaning turli bo'lim va tatbiqlarida juda keng qo'llaniladi. Uchrayotgan turli matematik muammolarda topologik fazolar qo'shimcha xususiyatlarga ega bo'lmoqda.

2.5.1-ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtasi uchun kamida birining ikkinchisini o'z ichiga olmaydigan atrofi mavjud bo'lsa, T_0 fazo yoki ***Kolmogorov fazosi*** deyiladi.

Agar bu ta'rifda har ikkala ixtiyoriy nuqtalar birorta atrofga ega bo'lib, biri ikkinchisini o'zida saqlamasa, ma'lum bo'ladiki, bunday fazolar sinfi nisbatan tordir.

Bu fazolar sinfi T_1 fazo yoki erishilgan, istilo qilingan yoki egallangan fazo deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinadiki, ixtiyoriy T_1 fazo X da ixtiyoriy bir nuqtali to'plam yopiq to'plamdir va buning teskarisi ham o'rinlidir. Yana shuni isbot qilish mumkinki, agar x_0 nuqta birorta M to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi M ning cheksiz ko'p turli nuqtalarini o'zida saqlaydi.

Haqiqatan ham, x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u M ning $x_1, x_2, ..., x_n$ chekli nuqtalarini o'zida saqlasa, u holda X fazo X_1 bo'lganligi sababli X_i ning shunday U_i atroflari topiladiki, ular x_i nuqtalardan boshqasini o'z ichiga olmaydi.

Endi $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ to‘plamni ko‘raylik. Ma’lumki, U to‘plam x_0 nuqtaning atrofi bo‘ladi. Bu to‘plam M ning x_0 nuqtadan boshqa nuqtalarini o‘zida saqlamaydi. Bundan ko‘rinadiki, x_0 nuqta M ning limit nuqtasi emas. Bu ziddiyat ta’rifning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Kolmogorov fazosiga misol sifatida bog‘lamli “qo‘sh nuqtani” keltirish mumkin. Bu fazo erishilgan fazo bo‘la olmaydi. Kolmogorov fazosiga trivial topologiyali ixtiyoriy fazolar ham kiradi.

2.5.2-misol. Haqiqiy sonlar to‘plami R^1 ni olaylik. Bu haqiqiy to‘g‘ri chiziqda topologiya bazasi sifatida $a \angle x \angle +\infty$ nurlarni olamiz. Bu ko‘rinishdagi nurlar bazaning shartlarini qanoatlantiradi. Bunday baza R^1 da topologiya tashkil qiladi. Bu topologik R^1 fazo T_0 fazo aksiomasini qanoatlantiradi, lekin T_1 fazo bo‘la olmaydi. Agar turli ikki $x_1, x_2 \in R^1$ haqiqiy sonlarni olsak, ravshanki, bir vaqtda ikkinchisini o‘zida saqlamaydigan x_1 va x_2 nuqtalarning birorta atrofi topilmaydi. Demak, bunday topologiyali R^1 fazo Kolmogorov fazosi bo‘ladi.

2.5.3-ta’rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki har xil nuqtasi o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo‘lsa, u T_2 fazo yoki ***Xausdorf fazosi*** (yoki Xausdorf topologiyali fazo) deyiladi.

Ma’lumki, ixtiyoriy Xausdorf fazosi T_1 fazo bo‘ladi, lekin buning teskarisi doimo ham o‘rinli emas. Ta’rifdan yana shuni anglash mumkinki, fazoning Xausdorf fazosi bo‘lishi nasliy xususiyatga ega, ya’ni uning ixtiyoriy fazoostisi ham Xausdorof fazosiniki bo‘lishidir. Xausdorf fazosining yana bir muhim xossasi — bu fazoda ixtiyoriy ketma-ketlikning limiti yagona bo‘ladi. x_n ketma-ketlik limitining ikki x^1 va x^2 nuqtalari bo‘lib, u^1 va u^2 ularning o‘zaro kesishmaydigan atroflari deylik. Ketma-ketlik limitining ta’rifiga ko‘ra, bu atroflarning biri ketma-ketlikning chekli elementlarini o‘zida saqlaydi. Bu ta’rifning shartiga ziddir.

Xausdorf fazolariga misol sifatida ixtiyoriy metrik fazoni olish mumkin. Zariskiy topologiyasini olsak, bu topologiya ham T_1 fazo bo‘ladi, lekin T_2 fazo bo‘lolmaydi.

2.5.4-misol. To‘g‘ri chiziqda $[0,1]$ kesmani olaylik. Bu to‘plamda ochiq to‘plam sifatida bo‘sh to‘plam, $[0,1]$ kesmaning o‘zi va $[0,1]$

kesmadan sanoqlidan ko‘p bo‘lmagan nuqtalarni chiqarib tashlashdan hosil bo‘lgan to‘plamlarni qaraylik.

Agar hosil bo‘lgan topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtalarini olsak, bu nuqtalar ikkinchisini o‘zida saqlamaydigan atrofga egadir. Bu fazoning erishilgan T_1 fazo ekanligini ko‘rsatadi. Lekin ikki ixtiyoriy har xil nuqtalar o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega emas. Bu fazoning Xausdorf fazosi emasligidan darak beradi.

2.5.5-ta’rif. Agar X fazoning ixtiyoriy yopiq to‘plami A va ixtiyoriy $x_0 \overline{\in} A$ nuqtasi X fazoda shunday ochiq o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo‘lsa, X topologik fazo T_3 topologik fazo deyiladi,

Agar X topologik fazo X bir vaqtda ham T_1 fazo, ham T_3 fazolar bo‘lsa, u holda u regulyar fazo deyiladi. Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, regulyar fazo Xausdorf fazosi bo‘lar ekan. Lekin buning aksi doimo o‘rinli emas.

Regulyar fazolarga ixtiyoriy metrik fazolar misol bo‘ladi, xususiy holda R^n fazo ham regulyar fazodir.

2.5.6-misol. Aytaylik, X barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat bo‘lib, τ topologiya atroflar natijasida aniqlangan bo‘lsin. Bu topologiyada nol nuqtadan boshqa barcha nuqtalarning atrofi, to‘g‘ri chiziqdagi nuqtaning interval ko‘rinishidagi atrofini olamiz. Nol nuqtaning atrofi deb uning to‘g‘ri chiziqdagi interval ko‘rinishdagi atrofidan sonlar o‘qining $\left\{\frac{1}{n}; n\in N\right\}$ nuqtalari chiqarib tashlangan to‘plamlarini olamiz. Ya’ni,

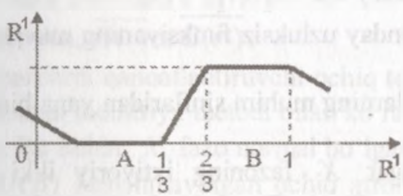
$$u(0)=(a,b)\setminus\left\{\frac{1}{n}: n\in N\right\} \text{ ixtiyoriy } 0\in (a,b)\subset R .$$

Agar $A=\left\{\frac{1}{n}: n\in N\right\}$ to‘plamni olsak, A to‘plam sonlar o‘qida yopiq to‘plamlardir. Nol nuqta va A to‘plam bu yerda o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo‘lmaydi. Ya’ni, shunday aniq atroflar mavjud emas. Bu fazoning regulyar fazo emasligini ko‘rsatadi. Lekin bu fazoda ixtiyoriy ikki har xil nuqta o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega. Demak, bu topologik fazo Xausdorf fazosi ekan.

Endi elementlari soni ikkitadan ortiq to‘plamlardagi trivial topologiyani ko‘rsak, bu fazolar T_3 fazoga sodda misol bo‘la oladi, lekin ular regulyar fazo emas, chunki bunday fazolar T_1 fazo emasdir.

Regulyar fazolarning xossalariga keladigan bo'lsak, fazoning regulyarligi – bu nasliy xarakterga ega, ya'ni regulyar fazolarning ixtiyoriy to'plamostisi ham regulyar bo'ladi. Bundan xususiy holda kelib chiqadiki, regulyar fazolarning to'g'ri ko'paytmasi regulyar bo'lsa, uning har bir ko'paytuvchisi regulyar bo'ladi. Nihoyat, regulyar fazolar ixtiyoriy oilasining Tixonov ko'paytmasi ham regulyar fazo bo'ladi. Shuni aytish mumkinki, regulyar fazodagi faktor-topologiya doimo regulyar fazo bo'lavermaydi.

2.5.7-ta'rif. Agar X topologik fazoning ikki A va B to'plamostilari uchun butun X fazoda aniqlangan shunday haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya $f : X \to [0,1]$ mavjud bo'lsa va u funksiya uchun barcha $x \in A$, $f(x) = 0$ va $f(x) = 1$ barcha $x \in B$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda ular X da funksional ayri deyiladi (2.5.1-rasm).



2.5.1-rasm

Ravshanki, A va V to'plamlarning X fazoda funksional ayri ekanligidan ularning shu X fazoda ayri ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar A va V lar X fazoda funksional ayri bo'lsa, $U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right)\right)$ va $f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right]\right) = V$ to'plamlar A va V to'plamlarning o'zaro kesishmaydigan atroflari bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, shunday Xausdorf, qolaversa, regulyar fazolar borki, bu fazolarda juft ikki nuqta funksional ayri emas. Bunga sabab shunday regulyar fazolar mavjudki, bu fazolarda aniqlangan konstant funksiyadan boshqa funksiya mavjud bo'lmaydi.

2.5.8-ta'rif. Agar fazoning ixtiyoriy x_0 nuqtasi va bu nuqtani o'zida saqlamaydigan bo'sh bo'lmagan F yopiq to'plam funksional ayri bo'lsa, X topologik fazo $T_{3/2}$ fazo deyiladi.

Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 fazo, ham $T_{3/2}$ fazo bo'lsa, uni Tixonov fazosi yoki to'kis regulyar (butkul regulyar) fazo deyiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, Tixonov fazosi regulyar fazo bo'ladi.

Har bir metrik fazo, xususiy holda R^n fazo ham, Tixonov fazosi bo'ladi.

Tixonov fazolarining xossalaridan biri – bu fazo ham nasliy xususiyatga ega, ya'ni bu fazoning ixtiyoriy to'plamostisi ham Tixonov fazosi bo'lishidir.

Shuni ta'kidlash mumkinki, har bir egallangan (marraviy), fazo to'la regulyar fazo bo'lishi uchun ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqtasi va uning ixtiyoriy ochiq atrofi U uchun $f: X \to [0,1]$, $f(x_0)=0$, $f(X \setminus U)=1$ shartlarni qanoatlantiruvchi shunday uzluksiz funksiyaning mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.

Topologik fazolarning muhim sinflaridan yana biri normal topologik fazolardir.

2.5.9-ta'rif. Agar X fazoning ixtiyoriy ikki bo'sh bo'lmagan kesishmaydigan yopiq F_1 va F_2 to'plamlarining o'zaro kesishmaydigan $U(F_1)$ va $U(F_2)$ ochiq atroflari mavjud bo'lsa, X topologik fazo T_4 fazo deyiladi.

Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1, ham T_4 fazo bo'lsa, bunday topologik fazolarga normal topologik fazolar deyiladi.

Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, normal topologik fazolar regulyar va to'la regulyar fazo bo'ladi. Buning teskarisi o'rinli bo'lavermaydi. T_1 fazolar sinfi ichidagi $T_{3/2}$ fazolar sinfi T_3 fazolar sinfi bilan T_4 fazolar sinfi orasidagi oraliq sinfdir. Shu sababli belgilashlarda ham butkul regulyar fazolar sinfi $T_{3/2}$ bilan belgilanadi.

Yuqoridagi topologik fazolarga o'xshab, normal fazolar sinfi nasliy xususiyatga ega emas, ya'ni bu fazolarning ixtiyoriy to'plamostisi normal fazo bo'lavermaydi. Normal fazolar sinfida uzluksiz akslantirishlarning bir oilasi mavjud bo'lib, bu uzluksiz akslantirishlar o'lcham nazariyasi va topologiyaning boshqa deyarli barcha jabhalarida figuralarning geometrik xossalari bilan bog'liq muammolarida va funksiyalarni davomlashtirish masalalarini yechishda, fazoning gomologik o'lchamini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Bu masalaning asosini Urison teoremasi (Urison lemmasi) tashkil qiladi.

2.5.10-Urison lemmasi. Ixtiyoriy normal X fazoning o'zaro kesishmaydigan yopiq A va B to'plamlari uchun shunday uzluksiz $f: X \to [0,1]$ funksiya mavjudki, uning uchun $f/_A \equiv 0$, $f/_B \equiv 1$ va har bir $x \in X$ uchun shartlar o'rinlidir.

Isbot. X normal fazo, A va B lar uning ixtiyoriy yopiq to'plamostilari va $A \cap B = \theta$ bo'lsin. Har bir $r = k/2^n$, $k = 0,1,...,2^n$ ratsional songa shunday $G_{(r)}$ ochiq to'plamni mos qo'yamizki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $A \subset G(0), X \setminus B = G(1)$;

2) agar $r \angle r'$ bo'lsa, $\overline{G(r)} \subset \overline{G(r')}$.

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi ochiq to'plamlar sistemasini n ko'rsatkichga nisbatan induksiya metodi bilan ko'ramiz.

$n = 0$ bo'lsin. Bu holda, X fazo normal bo'lganligi tufayli A va B larning $U(A)$ va $U(B)$ kesishmaydigan ochiq atroflari mavjud bo'ladi. Ularni $G(0) = U(A)$ va $G(1) = X \setminus B$ qilib belgilaymiz.

$k = n-1$ uchun $G_{(r)}$ ochiq to'plamlar sistemasi qurilgan bo'lsin.

Endi n uchun $G_{(n)}$ to'plamni qurishimiz kerak. $2m/2^n = m/2^{n-1}$ bo'lganligi sababli $G_{(r)}$ to'plamni $r = k/2^n$ n – toq son uchun ko'rishimiz yetarli bo'ladi. Aytaylik, $k = 2m+1$ bo'lsin, u holda $(k+1)/2^n = (m+1)/2^{n-1}$, $(k-1)/2^n = m/2^{n-1}$ va induksiya shartiga ko'ra, $\overline{G(k-1/2^n)} \subset G(k+1/2^n)$ ifodaga egamiz. Ravshanki, $\overline{G(k-1/2^n)}$, $X - G(k+1/2^n)$ lar yopiq va kesishmaydi. X fazoning normalligi tufayli $\overline{G(k-1/2^n)}$ ning ochiq atrofi mavjudki, bu ochiq to'plam $X - G(k+1/2^n)$ ning ochiq atrofi bilan kesishmaydi. $V = G(k/2^n)$ belgilashni kiritamiz. Aniqki, $\overline{G(k-1/2^n)} \subset G(k/2^n)$, $\overline{G(k/2^n)} \subset G(k+1/2^n)$ lar o'rinli, shu bilan induksiya tugaydi.

$G_{(r)}$ to'plamlarning aniqlanish sohasini quyidagicha kengaytiramiz:

$$G(r)=\begin{cases}\theta, & agar \ r>0 \\ X, & agar \ r<1\end{cases} \text{ bo'lsa.}$$

Endi $\varphi : X \to [0,1]$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $x \in G(0)$ bo'lsa $\varphi(x)=0$, va $\varphi(x)=\operatorname{supp}\{r : x \in G(r)X-G(r)\}$. Bu φ funksiyaning uzluksizligini ko'rsatishimiz kerak. Shunga erishish maqsadida ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqta va $N>0$ uchun x_0 nuqtaning shunday $O_{N(x_0)}$ atrofini ko'ramizki, u uchun $|\varphi(x_0)-\varphi(x)| \leq \frac{1}{2^N}$, $x \in O_N(x_0)$ o'rinli bo'lsin.

Aytaylik, r_0 son $k/2^n$ ko'rinishda bo'lib, $\varphi(x_0)<r_0<\varphi(x_0)+ {}^1\!/_2 N+1$ (1) shartni qanoatlantirsin. Belgilaymiz: $U_N(x_0)=G(r_0)\backslash\overline{G(r_0-{}^1\!/_2 N)}$. Bu holda $x_0 \in U_n(x_0)$, chunki $r_0<\varphi(x_0)$ va $r_0-{}^1\!/_2 N+1 \leq \varphi(x_0)$. Agar $x \in U_N(x_0)$ bo'lsa, u holda $x \in G(r_0)$. Shu sababli $\varphi(x) \leq r_0$. Bundan tashqari, $x \in X-\overline{G(r_0-{}^1\!/_2 N)} \subset X-G(r_0-{}^1\!/_2 N)$, shu sababli $r_0-{}^1\!/_2 N \leq \varphi(x)$. Demak, $r_0-{}^1\!/_2 N \leq \varphi(x) \leq r_0$.

(1) va (2) larni solishtirsak, quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x)| \prec {}^1\!/_2 N, x \in U_n(x_0)$$

Bu φ ning uzluksizligini ko'rsatadi. Funksiyaning qurilishiga ko'ra, $\varphi|_A \equiv 0; \varphi|_B \equiv 1$ va $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

Bunday qurilgan funksiya Urison funksiyasi deyiladi. Urisonning bu lemmasi quyidagiga ekvivalentdir.

Normal X fazoning ixtiyoriy kesishmaydigin va bo'sh bo'lmagan A va B yopiq to'plamlari uchun shunday $\varphi_{a,b}(x)$ uzluksiz funksiya mavjud bo'ladiki, u quyidagi shartni qanoatlantiradi: $\varphi_{a,b}(x)\big|_A \equiv a; \varphi_{a,b}(x)\big|_B = b;$ $a \leq \varphi_{a,b}(x) \leq b, x \in X$. Bu yerda a,b $(a<b)$ ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

Haqiqatan ham, agar $\varphi_{a,b}(x)$ Urison funksiyasi bo'lsa, u holda $\varphi_{a,b}(x)=(b-a)\varphi(x)+a$ izlangan funksiya bo'ladi.

2.5.11-teorema. Normal X fazoning ixtiyoriy yopiq A to'plamida berilgan ixtiyoriy chegaralangan $\varphi : A \to R$ uzluksiz funksiya uchun shunday $\Phi : X \to R$ uzluksiz funksiya mavjudki, uning uchun quyidagi o'rinli:

$$\Phi\big|_A \equiv \varphi \ va \ \operatorname{supp}\{\Phi(x), x\in X\}\big| = \operatorname{supp}\{\varphi(x), x\in A\}.$$

Isbot. Izlanayotgan uzluksiz $F_{(x)}$ funksiyani funksiyalar ketma-ketligining limiti ko'rinishida quramiz.

Aytaylik:

$$\varphi_0 = \varphi \quad va \quad a_0 = \operatorname{supp}\{|\varphi(x)| : x\in A\} \quad A_0 = \left\{x : \varphi_0(x) \le -\frac{a_0}{3}\right\},$$

$$B_0 = \left\{x : \varphi_0(x) \ge {}^{a_0}\!/_3\right\}$$

bo'lsin

Ma'lumki, A_0 va B_0 to'plamlar yopiq va o'zaro kesishmaydi. Urison lemmasiga ko'ra, shunday uzluksiz funksiya $g_0 : X \to R$ mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_0(x)| \le {}^{a_0}\!/_3 \ \text{va} \ g_0(x) = \begin{cases} -{}^{a_0}\!/_3 & agar,\ x\in A_0 \ \ bo'lsa \\ {}^{a_0}\!/_3 & agar,\ x\in B_0 \ \ bo'lsa \end{cases}$$

Endi A to'plamda φ_1 funksiyani $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - g_0(x)$ ko'rinishda aniqlaymiz. U holda φ_1 funksiya uzluksiz va $a_1 = \operatorname{supp}\{|\varphi_1(x)| : x\in A\} \le \frac{2}{3}a_0$ o'rinli. Shunga o'xshab, quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$A_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \le -\frac{a_1}{3}\right\}, \quad B_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \le \frac{a_1}{3}\right\}.$$

Endi yana Urison funksiyasi g_1 ni olamiz, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_1(x)| \le {}^{a_1}\!/_3 \quad va \quad g_1(x) = \begin{cases} -{}^{a_1}\!/_3, & agar \ \ x\in A_1 \ bo'lsa \\ {}^{a_1}\!/_3, & agar \ \ x\in B_1 \ bo'lsa \end{cases}$$

A to'plamda $\varphi_2(x)$, funksiyani $\varphi_2(x)=\varphi_1(x)-g_1(x)$ ko'rinishda ko'ramiz va $a_2=\sup(A)\{|\phi_2(x)|: x\in A\}\leq\frac{2}{3}a_1$ deb olamiz. Shu yo'sinda A to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning $\varphi_0=\varphi; \varphi_1; \varphi_2; ..., \varphi_n, ...$ ketma-ketligi va X da uzluksiz g_0; g_1; g_2; ..., g_n, ... funksiyalar ketma-ketligiga ega bo'lib, ular quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\varphi_{n1}(x)=\varphi_n(x)-g_n(x),\quad |g_n(x)|\leq\frac{a_n}{3}; a_{n+1}\leq\frac{2}{3}a_n.$$

Bu yerda $a_n=\sup\{|\varphi_n(x)|: x\in A\}$ $n=0,1,2,...$, bundan $|\varphi_n(x)|\leq(\frac{2}{3})^n a_0$, $|\varphi_n(x)|\leq(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{a_0}{3}$ larga ega bo'lamiz. Oxirgi tengsizliklardan $\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)$ qator X da birorta uzluksiz funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu yig'indini $\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)$ bilan belgilaymiz va quyidagi baholashga ega bo'lamiz: $|\Phi(x)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n\frac{a_0}{3}=a_0$. Endi $x\in A$ bo'lsin, u holda $S_n(x)=g_0(x)+...+g_n(x)$ qismiy yig'indi $\varphi_{n+1}(x)$ funksiyalarning qurilishiga ko'ra $\varphi_0(x)-\varphi_n(x)$ ga teng. Lekin $\varphi_n(x)\to 0$, u holda har bir $x\in A$ uchun $\Phi(x)=\varphi_0(x)=\varphi(x)$. Demak, $\Phi(x)$ izlangan funksiya ekan.

2.5.12-natija. Normal X fazo ning ixtiyoriy yopiq A to'plamostisida berilgan har bir uzluksiz $\varphi: A\to I^n$ akslantirishni $\Phi: X\to I^n$ akslantirishgacha uzluksiz davomlashtirish mumkin.

2.6-§. Sanoqli baza. Separabel fazolar

Ma'lum bir muammolarni yechishda topologik fazo bazasi va topologik fazo ayrim to'plamostilariga turli shartlar qo'yiladi. Buning natijasida topologik fazolar sinfi kichrayib, torayib boradi. Ba'zi matematik masalalarda separabel fazo, sanoqli bazaga ega bo'lgan fazolar uchraydi. Shu sababli bu fazolar va ularning T_0; T_1; T_2; T_3; $T_{3\frac{1}{2}}$; T_4 fazolari orasidagi bog'liqliklarni ko'rib chiqamiz.

2.6.1-ta'rif. Agar $\overline{A}=X$ bo'lsa, X topologik fazoning $A\subset X$ to'plamostisi X fazoda mutloq zich deyiladi, ya'ni A to'plamning tegish nuqtalari butun X fazodan iborat. Agar A to'plam uchun $\operatorname{int}\overline{A}=\theta$ tenglik o'rinli bo'lsa, A to'plam hech qayerda zich (albatta, X ning) bo'lolmaydi. Boshqacha aytganda, hech qayerda zich bo'lmagan to'plamlar hech qanday ochiq to'plamda zich emasdir. Hech qayerda zich bo'lmagan to'plamlarga tekislikdagi ixtiyoriy to'g'ri chiziq, ixtiyoriy ikkinchi tartibli chiziqlar va ixtiyoriy algebraik chiziqlar kiradi. Mutloq zich to'plamlarga sonlar to'g'ri chizig'ida ratsional, irratsional sonlar to'plami kiradi. R^n fazoda esa mutloq zich to'plamga hamma koordinatalari ratsional sondan iborat bo'lgan to'plam kiradi. Shuni ta'kidlash kerakki, agar A to'plam X da mutloq zich bo'lsa, u holda A to'plam albatta X ning barcha yakkalangan nuqtalarini o'zida saqlaydi. Agar X topologik fazo diskret fazo bo'lsa, uning yagona mutloq zich to'plami fazoning o'zidan iborat bo'ladi.

2.6.2-ta'rif. Agar fazoda sanoqli va mutloq zich to'plam mavjud bo'lsa, u separabel fazo deyiladi.

Separabel fazolarga muhim misol sifatida R^n va $C[a,b]$ fazolarni keltirish mumkin. R^n fazoda barcha ratsional koordinatalarga ega bo'lgan nuqtalar to'plami, $C[a,b]$ fazoda esa, ratsional koeffitsiyentli ko'phadlar sanoqli va mutloq zich to'plamlardir.

Separabel bo'lmagan fazoga ixtiyoriy sanoqli bo'lmagan to'plamdagi diskret fazo misol bo'ladi.

2.6.3-misol. Ber fazosi. Natural sonlardan tashkil topgan $\xi=\{n_1,n_2,...,n_m...\}$, $n_i\in N$ ketma-ketliklar to'plamini M bilan belgilaymiz, ya'ni $M=\{\xi=(n_1,n_2,...,n_k,...):n_i\in N\}$ M to'plamda ρ metrikani quyidagicha aniqlaymiz. Har bir $\xi\in M$ uchun $\rho(\xi,\xi)=0$ deymiz. Ixtiyoriy har xil elementlar uchun $\rho(\xi,\eta)=1/\lambda$, bu yerda $\xi=(n_1,n_2,...,n_k,...)\in M$, $\eta=(m_1,m_2,...,m_k,...)\in M$, λ – koordinatalar teng bo'lmaydigan $m_\lambda\neq n_\lambda$ eng kichik indeksdir. Tekshirib ko'rish mumkinki, (M,ρ) metrik fazodir. Bu metrik fazo Ber fazosi deyiladi. Xususiy holda bu fazo separabel fazoga trivial bo'lmagan misoldir. Endi bu M to'plamda sanoqli va mutloq zich to'plamostini quyidagicha tuzamiz.

Ixtiyoriy $K \in N$ son uchun $B_k = \{(n_1, n_2, ..., 1, 1, ...) : n_i \in N,$ $(n_1, n_2, ..., n_k, 1, 1, ...) \in M$, $n_i - ixtiyoriy\ \ natural\ \ son\}$ ni olaylik. Ma'lumki, B_k to'plam ixtiyoriy $k \in N$ uchun sanoqli to'plam bo'ladi.

Endi B to'plam sifatida B_k larning birlashmasini olamiz. $B = \bigcup_k B_k$. B to'plam sanoqli sondagi sanoqli to'plamlarning birlashmasi bo'lganligi sababli sanoqli to'plamdir. B to'plam (M, ρ) Ber fazosida mutloq zich to'plamdir. Haqiqatan ham, agar $\xi = (m_1, m_2, ..., m_k, ...) \in M$ ixtiyoriy nuqta bo'lsa, $\xi^{(k)} = (m_1, m_2, ..., m_k, 1, 1, ...)$ qatorlar ketma-ketligi ξ nuqtaga (M, ρ) fazoda yaqinlashadi. Bu yerda $\xi^{(k)} \in B_k$.

Ma'lumki, $\rho(\xi, \xi^{(k)}) \le \dfrac{1}{k+1}$ o'rinlidir. Bundan ko'rinadiki, M to'plamning ixtiyoriy nuqtasi B to'plam uchun teginish nuqtasi ekan. Demak, $\overline{B} = M$.

Biz topologiya bazasi tushunchasi bilan oldinroq tanishgan edik. Bundan tashqari, yana bir muhim tushuncha – nuqtaning atroflari sistemasining bazasi tushunchasi ham mavjud.

2.6.4-ta'rif. X topologik fazodagi x nuqtaning atroflari oilasi $B(x) = \{V(x)\}$ bo'lib, agar x nuqtaning ixtiyoriy atrofida bu oilaning birorta elementi yotsa, u holda bu oila x nuqtaning atroflari sistemasining bazasi deyiladi.

Ma'lumki, nuqtaning barcha ochiq atroflari oilasi shu nuqtaning atroflari sistemasining bazasi bo'ladi.

2.6.5-misol. Ixtiyoriy (X, ρ) metrik fazo berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun $B(X) = \left\{V_k(x) = D_{1/k}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ to'plamlar oilasini olaylik, bu yerda $D_{1/k}(x) = \left\{ y \in X : \rho(x, y) < \dfrac{1}{k} \right\}$ x nuqtaning sharsimon (doirasimon) atrofi deyiladi. $B(X)$ sistema x nuqtaning atroflari sistemasining bazasi bo'ladi. Haqiqatan ham, x ning ixtiyoriy atrofiga shu nuqtaning sharsimon atrofini joylash yoki ichiga chizish mumkin, x

nuqtaning ixtiyoriy sharsimon atrofi $D_\varepsilon(x)$ uchun esa, shunday $\varepsilon > \frac{1}{k}$, k sonni topish mumkinki, u son uchun $V_k(x) \subset D_\eta(x)$ o'rinli bo'ladi. Demak, $B(X)$ oila x nuqtaning atroflari sistemasining bazasi ekan.

2.6.6-misol. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasining atroflar sistemasi sanoqli bazaga ega bo'lsa, ya'ni sanoqlidan katta bo'lmagan atroflar bazasiga ega bo'lsa, birinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi, deb hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan misoldan va ta'rifdan ko'rinadiki, ixtiyoriy metrik fazo birinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantirar ekan.

2.6.7-misol. Ixtiyoriy sanoqsiz X to'plamdagi diskret topologiyani olaylik. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x \in X$ ni olsak, uning atroflari sistemasining bazasi sifatida biror $\overline{V} = \{x\}$ atrofni olsa bo'ladi. Demak, ixtiyoriy diskret topologiyali sanoqsiz fazo birinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi. Bundan shunday xulosaga kelishimiz mumkinki, har bir diskret va antidiskret fazolar birinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi.

2.6.8-ta'rif. Agar τ (X, τ) topologiyasi sanoqli bazaga ega bo'lsa, u holda u topologik fazoning ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi, deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, R^n fazo ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi.

2.6.9-teorema. Ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiruvchi fazo separabel fazodir.

Isbot. X topologik fazo va $B = \{V_k : k \in N\}$ uning sanoqli bazasi (τ topologiyaning) bo'lsin. Har bir $V_n \in B$ to'plamdan bittadan $a_n \in V_n$ element tanlab olamiz va ulardan $A = \{a_1; a_2, ...\}$ to'plamni tuzamiz. $\overline{A} = X$, ya'ni A to'plam X da mutloq zich. Ma'lumki, $\overline{A} = A^1 \cup A$ tenglik o'rinli. Shu sababli $X \setminus A$ ning ixtiyoriy nuqtasi A to'plam uchun limit nuqta ekanligi yetarlidir. Ixtiyoriy $x \in X \setminus A$ nuqtani olaylik va $U(x)$ uning birorta atrofi bo'lsin. V sistemaning baza ekanligidan shunday $V_k \in B$ to'plam topiladiki, uning uchun $x \in V_k$ va $V_k \subset U(x)$. Shu sababli $a_k \in U(x)$ va $a_k \neq x$, binobarin, $x \in A^1$.

Yuqorida keltirilgan 2.6.7-misoldan ko‘rinadiki, buning aksi o‘rinli emas. Ya’ni separabel fazolar ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantirmaydi. Lekin metrik fazolar uchun teskari jumla ham o‘rinlidir.

2.6.10-teorema. Ixtiyoriy separabel metrik fazolar ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi.

Isbot. Faraz qilaylik, $A=\{a_1,a_2,...,a_n...\}$ sanoqli to‘plam X fazoda mutloq zich to‘plam bo‘lsin. X fazo bazasi sifatida quyidagi ochiq to‘plamlar jamlanmasini olamiz: $B=\left\{V_{n,k}=D_{1/k}(a_n):n\in N,k\in N\right\}$. Bu jamlanma X fazo bazasini tashkil etadi. Haqiqatan ham, X ning separabel ekanligidan ixtiyoriy $x\in X$ nuqta va yetarlicha kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $a_n\in A$ topiladiki, u uchun $a_n\in D_{\varepsilon/3}(x)$ o‘rinli. Bundan tashqari, shunday k nomer topiladiki, $x\in V_{n,k}\subset D_\varepsilon(x)$ (k ni $\varepsilon/3\le 1/k\le 2\varepsilon/3$ shartni qanoatlantiradigan qilib olish yetarli).

X fazodagi ixtiyoriy ochiq to‘plam ochiq sharlar birlashmasidan iboratdir. Har bir ochiq shar esa, V ning $V_{n,k}$ to‘plamlari birlashmasidir. Demak, V jamlanma sanoqli baza ekan.

Quyidagi ikki teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.6.11-teorema. (Tixonov) Ixtiyoriy sanoqli bazaga ega bo‘lgan regulyar fazo normaldir.

2.6.12-teorema. Ixtiyoriy metrik fazo normaldir.

Topologik fazoda birinchi va ikkinchi sanoqlilik aksiomalari kiritilgandan keyin bu tushunchalar bilan bevosita bog‘liq fazoning salmog‘i va fazoning zichligi tushunchalari ham ko‘p foydalaniladi.

2.6.13-ta’rif. X topologik fazoda mutloq zich to‘plamlarning eng kichik quvvatlisi uning zichligi deyiladi va $d(X)$ ko‘rinishida belgilanadi.

Ta’rifga ko‘ra, $d(X)=\min\{|A|:\overline{A}=X\}$, bu yerda $|A|$ bilan to‘plam quvvati (kardinal son) belgilanadi.

Demak, X topologik fazo separabel bo‘lsa, u holda uning zichligi χ_0 ga teng ekan. Ya’ni, uning zichligi sanoqli to‘plam quvvatiga tengdir. Diskret topologik fazolar uchun esa, $d(X)=|X|$ o‘rinli ekan. Ixtiyoriy topologik fazo uchun esa, $d(X)\le|X|$ tengsizlik doimo o‘rinlidir.

2.6.13-ta'rif. X topologik fazo bazalarining eng kichik quvvati X topologik fazoning salmog'i deyiladi va $w(X) = \min\{|B| : B\}$ jamlanma X ning bazasi deb belgilanadi.

Diskret topologik fazolar uchun uning salmog'i fazoning quvvatiga teng bo'lar ekan. Ya'ni, $w(X) = |X|$. Boshqa hollarda $W(X) \le |X|$ tengsizlik doimo o'rinlidir.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.6.14-teorema. Metrik fazolarda $d(X) = w(X)$ tenglik o'rinlidir. Xususiy holda separabel metrik fazo uchun $w(X) \le \aleph_0$ o'rinlidir.

2.7-§. Kompakt va bikompakt fazolar

Bu paragrafda topologik fazolar sinfining eng muhim qismlaridan biri bikompakt va kompakt fazolar o'rganiladi. Bu sinf qoplamalar tilida bayon qilinsa-da, abstrakt, lekin qulay xossalarga ega. Bikompakt fazolar sof topologik fazolarning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

2.7.1-ta'rif. (X,τ) topologik fazo va $U = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar $X = U\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ o'rinli bo'lsa, U sistema X ning qoplamasi deyiladi. Agar qoplamaning elementlari ochiq to'plamlar bo'lsa, u qoplama ochiq qoplama deyiladi.

2.7.2-ta'rif. Agar topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan (qoplama elementlari ochiq to'plamlar), chekli qoplamaosti ajratib olish mumkin bo'lsa, bu topologik fazo bikompakt deyiladi.

Xausdorf bikompakt fazolar sinfi bikompaktdir.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, ixtiyoriy trivial topologik fazo bikompakt fazo ekan. Ixtiyoriy diskret fazo bikompakt fazo bo'lishi uchun uning elementlari chekli bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.7.3-misol. Zarisskiy topologiyasi kiritilgan ixtiyoriy cheksiz X to'plamni olaylik. Bu topologik fazo, ta'kidlandiki, Xausdorf fazosi emas. Lekin bu fazo bikompakt fazo bo'ladi. Haqiqatan ham, X fazoning ixtiyoriy $S = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ochiq qoplamasini olaylik. Bu topologik fazo xususiyatiga ixtiyoriy $\alpha \in A$ uchun U_α to'plamlar cheksiz to'plamlardir.

Shu sababli shunday $\alpha_0 \in A$ olamizki, $U_{\alpha_0} \neq X$ va $X - U_{\alpha_0} = F_{\alpha_0}$ to'plam chekli to'plamdan iborat. Aytaylik, $F_{\alpha_0} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bo'lsin, bu yerda $x_i \in X$, $i = \overline{1,n}$ S jamlanma qoplama bo'lganligi sababli shunday $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}$ lar X fazoning chekli qoplamasi bo'ladi. Demak, bu fazo bikompakt fazo ekan.

2.7.4-ta'rif. Agar topologik fazoning ixtiyoriy sanoqli ochiq qoplamasidan chekli qoplamaostini ajratish mumkin bo'lsa, bu topologik fazo sanoqli-kompaktli fazo deyiladi.

Sanoqli-kompaktli fazoning quyidagi tavsifini isbotsiz keltiramiz.

2.7.5-teorema. Topologik T_1 fazo sanoqli-kompaktli bo'lishi uchun uning ixtiyoriy cheksiz to'plamostisi limit nuqtaga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.7.6-ta'rif. Agar topologik fazoning ixtiyoriy qoplamasidan sanoqli qoplamaosti ajratib olish mumkin bo'lsa, bunday topologik fazo final-kompaktli deyiladi.

Bundan ko'rinadiki, bikompaktlilik ikkita sanoqli-kompaktlilik hamda final- kompaktliliklarning mantiqiy birlashmalaridan iborat ekan. Bikompaktlilik atamasi ham shundan kelib chiqqan.

Shuni ta'kidlashimiz mumkinki, fazoostining nasliy xossaga ega bo'lish xususiyati sanoqli-kompaktlik, final-kompaktlik va bikompaktlilikning yopiq to'plamostilarida o'rinli bo'ladi. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.7.7-teorema. Regulyar va final-kompaktli fazo normaldir.

2.7.8-teorema. Ixtiyoriy bikompakt normaldir.

Isbot. 2.7.7-teoremaga asosan, ixtiyoriy bikompaktning regulyar ekanligini ko'rsatish yetarlidir. Ixtiyoriy $x \in X$ va $F \subset X$ yopiq to'plamni olamiz, bu yerda $x \overline{\in} F$. U holda ixtiyoriy $y \in F$ nuqta uchun x va y nuqtalarning $O_x(y), O_y$ o'zaro kesishmaydigan atroflari mavjud. Bu yerda $\{F \cap O_y : y \in F\}$ jamlanma F to'plamning qoplamasini tashkil qiladi. Ta'kidlaganimizga ko'ra, bikompaktlilik yopiq to'plamlarda nasliy bo'lganligi sababli, $\{F \cap O_y : y \in F\}$ qoplamadan chekli $\{F \cap O_{y1}, ..., F \cap O_{yn}\}$ qoplamaosti ajratib olish mumkin. Endi

$Ox = \bigcap_{i=1}^{n} O_x(y_i)$ va $OF = \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}$ larni olamiz. Bu to‘plamlar $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$; $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ nuqta va F to‘plamning o‘zaro kesishmaydigan atroflari bo‘ladi.

Quyidagi ikki teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.7.9-teorema. Ixtiyoriy sanoqli-kompaktli metrik fazo sanoqli bazaga ega.

2.7.10-teorema. Ixtiyoriy sanoqli-kompaktli metrik fazo bikompaktdir.

Bu ikki teorema va yuqorida keltirilganlardan ko‘rinadiki, metrik fazolarda sanoqli-kompaktlik va bikompaktlik bir xil ekan. Shu sababli bundan keyin metrik bikompaktlilikni kompakt deb ataymiz.

2.7.11-teorema. Sonlar to‘g‘ri chizig‘i R^1 da ixtiyoriy kesma kompaktdir.

Isbot. To‘g‘ri chiziq R^1 da $[0,1]$ kesmani olaylik va $[0,1]$ ning ixtiyoriy $S = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ochiq qoplamasi bo‘lsin, bu yerda ixtiyoriy $\alpha \in A$ uchun $U_\alpha \subset R$, U_α – ochiq to‘plamlardir. Endi bu S qoplamaning chekli qoplamaostisi mavjudligini ko‘rsatamiz, agar S sistemaning yopiq $[0,\delta_0]$ kesmani qoplovchi chekli sistemaostisi mavjud bo‘lsa. Bu holda $[0,1]$ kesmaning $x_0 \in [0,1]$ nuqtasini belgilangan deymiz. Barcha belgilangan nuqtalar to‘plamini M bilan belgilaymiz.

Ma’lumki, $x = 0$ nuqta belgilangan nuqtadir, ya’ni $O \in M$. Bu yerda $M \neq \theta$. Endi $\eta = \sup M$ nuqtani olaylik. η nuqtaning belgilangan ekanligini ko‘rsatamiz, ya’ni $\eta \in M$. Agar $\eta \in U_{\alpha_0}$ bo‘lsa, u holda U_{α_0} ning ochiq to‘plam ekanligi tufayli shunday $\xi \in M$ topiladiki, u uchun $0 < \xi < \eta$ va $[\xi,\eta]$ kesma butunlay U_{α_0} da yotadi. ξ nuqtaning belgilangan ekanligidan S sistemaning shunday chekli $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ qism sistemasi topiladiki, bu qism sistema $[0,\xi]$ kesmani qoplaydi. Shu sababli $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ qism sistema $[0,\eta]$ ni qoplaydi. Demak, $\eta \in \grave{I}$.

Endi biz η ning $[0,1]$ kesma ikkinchi uchi bilan ustma-ust tushishini ko‘rsatishimiz kerak. Faraz qilaylik, $\eta \neq 1$. U holda U_{α_0}

to‘plamning ochiq ekanligidan shunday $\eta' \in (\eta, 1)$ topiladiki, uning uchun $\left[\eta, \eta'\right] \subset U_{\alpha_0}$. Binobarin, qism sistema $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}$ elementlari birlashmasi $[0, \eta]$ ni qoplaydi. Bundan $\eta' \in M$. Bu esa, $\eta = \sup M$ ga ziddir.

2.7.12-teorema. Bikompakt fazolarning uzluksiz obrazi bikompakt fazodir.

Isbot. $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo‘lsin. Bu yerda X bikompakt fazo va Y ixtiyoriy fazo. $T = \{V_i : i \in J\}$ sistema Y topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasi bo‘lsin. f akslantirishning uzluksizligiga ko‘ra, $S = \{U_i = f^{-1}(V_i) : i \in J\}$ sistema X bikompakt fazoning ochiq qoplamasini tashkil qiladi. X ning bikompakt ekanligidan S qoplama chekli $\overline{S}$ qism qoplamani o‘z ichida saqlaydi. $\overline{S}$ qoplamaga kiruvchi barcha ochiq to‘plamlarning obrazi chekli qism qoplama tashkil qiladi. Bu qoplamani $\overline{T}$ bilan belgilaymiz. $\overline{T}$ qoplama T qoplamaning qism qoplamasidir. Demak, Y fazo bikompakt fazo ekan.

2.7.13-misol. Agar X birorta bikompakt Y fazoning faktor fazosi bo‘lsa, u holda X bikompakt fazo bo‘ladi.

Haqiqatan ham, X fazo Y ning uzluksiz proeksiyasidan iborat bo‘ladi. Demak, X bikompakt fazo ekan.

2.7.14-misol. X topologik fazo sifatida R^1 to‘g‘ri chiziqni olaylik. Bu fazoning $\{(-n, n) : n \in N\}$ qoplamasidan chekli qoplamani ajratib bo‘lmaydi. Shu sababli R^1 fazo kompakt fazo emas. Quyidagi ikki teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.7.15-teorema. R^n fazoning ixtiyoriy yopiq va chegaralangan to‘plamostisi kompaktdir.

2.7.16-teorema. Kompakt fazolarning ixtiyoriy sistemasi $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ ning Tixonov ko‘paytmasi $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = X$ bikompaktdir.

2.7.17-misol.

a) S^n – sfera; $T^n = S^1 \times S^1 \times .... \times S^1$ – tor;

b) RP^n – proektiv fazo;

d) S^n / U_p – linza fazosi;

e) $I^n = [0,1] \times [0,1] \times .... \times [0,1]$ – kub;

f) M^2 – Miyobius varag‘i biokompakt fazolardir.

Haqiqatan ham, S^n – sfera, $\underline{\underline{T}}^n$ – tor, I^n – kub, M^2 – Miyobius varag'i yopiq va chegaralangan bo'lganligi uchun kompaktdir. RP^n proektiv fazo esa, S^n ning syurektiv obrazi bo'lgani uchun bikompaktdir. Linza fazosi S^n / U_p ham S^n ning faktor fazosi bo'lganligi tufayli bikompaktdir.

2.8-§. Lokal kompakt va parakompakt fazolar

Topologiyada lokal kompakt va parakompakt fazolar alohida o'rin egallaydi. Chunki, ko'pgina metrik fazolar, metrik bo'lmagan yaxshi xossalarga ega bo'lgan fazolar parakompakt yoki lokal kompakt fazolardir.

2.8.1-ta'rif. Agar har bir $x \in X$ nuqtaning shunday atrofi topilsa va u δ qoplamaning chekli sondagi elementlari bilan kesishsa, X topologik fazoning δ qoplamasi lokal chekli deyiladi.

Agar qoplama elementlari ochiq to'plamlardan iborat bo'lsa, bunday qoplamalarga ochiq qoplama deyiladi.

2.8.2-ta'rif. Agar δ ning har bir elementi δ^1 ning birorta elementida saqlansa, fazoning δ qoplamasi δ^1 qoplamasiga ichki chizilgan hisoblanadi. Ya'ni, ixtiyoriy $U \in \delta$ uchun shunday $U' \in \delta'$ mavjudki, $U \subset U'$. Agar δ qoplama δ^1 ga chizilgan bo'lsa, $\delta > \delta^1$ ko'rinishda belgilanadi.

2.8.3-ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasiga lokal chekli ichki qoplama chizish mumkin bo'lsa, u holda X fazoga parakompakt deyiladi.

2.8.4-misol. $X = R^1$ fazo parakompaktdir. Haqiqatan ham, aytaylik, $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ sistema R^1 ning ochiq qoplamasi bo'lsin. Biz R^1 ni $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} [n, n+1]$ ko'rinishida ifodalashimiz mumkin. Har bir $[n, n+1]$ kesmani biroz interval $(n-\varepsilon,\ n+1+\varepsilon)$ ga kengaytiramiz. Endi $U_\alpha \cap (n-\varepsilon, n+1+\varepsilon) : \alpha \in A$ sistemani olsak, bu sistema $[n, n+1]$ kesmaning qoplamasini tashkil qiladi. $[n, n=1]$ kesma kompakt bo'lganligi uchun bu qoplamadan chekli $V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{k_n}^n$ qoplama ajratib olish mumkin. Bunday qoplamalarning n bo'yicha birlashmasi R^1 ning lokal chekli qoplamasi bo'ladi va bu qoplama $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ qoplamaga chizilgandir.

2.8.4-ta'rif. Agar X topologik fazoning har bir $\tilde{o} \in \tilde{O}$ nuqtasi yopig'ining bikompakt bo'ladigan atrofi mavjud bo'lsa, bunday fazolarga lokal bikompakt fazo deyiladi.

Lokal bikompakt fazolarga R^n fazoni ko'rsatishimiz mumkin.

2.8.5-teorema. X lokal bikompakt fazo, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ va S_n bikompakt bo'lsa, u holda X parakompaktdir.

Isbot. X fazo yuqoridagi shartlarni qanoatlantirsin.

Avval matematik induksiya usuli bilan X ni $\bigcup_{m=1}^{\infty} U_n = X$, $\overline{U_n} \subset U_{n+1}, \overline{U_n}$ bikompakt, U_n ochiq to'plam ko'rinishida ifodalashimiz mumkin. Ya'ni, X fazo ichma-ich joylashgan ochiq to'plamlarning birlashmasi bo'lib, oldingisining yopig'i bikompaktdir.

$U_0 = \theta$ ni olamiz. U_1 ochiq to'plam deb S_1 bikompaktning yopig'i bikompakt bo'ladigan atrofini olamiz. Ya'ni, $O(C_1) \supset C_1$, $\overline{OC_1}$ bikompakt $U_1 = O(C_1)$ fazoning bikompakti bo'lganligi tufayli bu shartlar doimo o'rinli bo'ladi.

Endi U_{n+1} ochiq to'plam sifatida $\overline{U}_n \cup C_{n+1}$ bikompaktning shunday ochiq atrofi $O(\overline{U}_n \cup C_{n+1})$ ni olamizki, $\overline{O(\overline{U}_n \cup C_{n+1})}$ bikompakt bo'lsin. Demak, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$; $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$, $\overline{U_n}$ – bikompakt, U_n – ochiq to'plamlardir.

Bizga $\{V_\alpha : \alpha \in M\}$ ixtiyoriy ochiq qoplama berilgan bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $D_n = \overline{U}_n \setminus U_{n+1}$ bikompakt $U_{n+1} \setminus U_{n-1}$ ochiq to'plam D_n ning atrofi bo'la oladi. Bu holda $\{W_\alpha^n : \alpha \in M\} = \{V_\alpha \cap (U_{n+1} \setminus \overline{U_{n-2}}\ \alpha \in M)\}$ sistema D_n bikompaktning ochiq qoplamasi bo'ladi. Bu qoplamadan $\{W_\alpha^n : \alpha \in M\}$ chekli qism qoplama ajratib olamiz. Bu jarayonni barcha n uchun takrorlasak, natijada, X fazoning sanoqli $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{W_{n}^{\alpha}\right\}_{m=1}^{P_n}$ ochiq qoplamasiga ega bo'lamiz. Bu qoplama qurilishiga ko'ra, $\{W_{\alpha} : \alpha \in M\}$ qoplamaga chizilgan qoplamadir. Endi bu qoplamaning lokal chekli ekanligini ko'rsatamiz. $\bar{o}_0 \in \bar{O}$ nuqta X ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin va $n_0 = \min\{n : x \in U_n\}$. Ma'lumki $x_0 \bar{\in} U_{n_0 - 1}$, u holda x ning shunday $O(x)$ atrofi topiladiki, u uchun $O(x) \subset U_{n_0}$ va $O(x) \bigcap \overline{U}_{n_0-2} = \varnothing$ lar o'rinli bo'ladi. Demak, $O(x)$ to'plam chekli sondagi W_{m}^{k} to'plamlar bilan kesishadi, bu yerda $1 \le m \le P_k$, $n_0 - 2 \le k \le n_0 + 1$. Bunday to'plamlar qoplamaning qurilishiga ko'ra cheklidir.

2.8.6-natija. Agar lokal bikompakt fazo sanoqli bazaga ega bo'lsa, u holda u parakompaktdir.

Isbot. Haqiqatan ham, agar X fazo lokal bikompakt bo'lsa, u holda bu fazo sanoqli bazali bo'lganligi sababli shunday ochiq to'plamlar sistemasi $\{U^c\}$ mavjudki, u sanoqli baza bo'ladi, U^c ochiq to'plamlar va $\overline{U^c}$ bikompaktdir. Sanoqli bazadan har bir U^c ni o'zida saqlagan elementlarini olsak, $\{V_i^c\}_{i=1}^{\infty}$ sanoqli sistemaga ega bo'lamiz va ixtiyoriy i uchun $\overline{V_i^c}$ bikompaktdir. U holda $X = \bigcup \overline{V_i^c}$ o'rinli. X ning parakompaktligi esa, oldingi teoremadan chiqadi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.8.7-teorema. Har qanday metrik fazo parakompaktdir.

2.9-§. Lokal bikompakt fazolarning Aleksandrov kengaytmasi

Topologik fazolarning, ayniqsa, regulyar bo'lsa, regulyar fazolarning, qolaversa, metrik fazolarning turli kengaytmalari mavjud. Bu kengaytmalar fazoni o'zining hamma yerida zich saqlaydi va kengaytmadagi topologiya shunday topologiyaki, natijada, fazoning topologiyasi indutsirlangan topologiya bilan ustma-ust tushadi. Boshqacha aytganda, topologik fazo shunday to‘plamlar bilan boyitiladiki, uning fazoostisidagi topologiya berilgan topologiya bilan sug‘orilgan bo‘ladi.

Regulyar va to‘la regulyar fazoning turli-tuman kengaytmalari mavjud, ular u yoki bu xossalarga ega bo‘ladi. Masalan, to‘la regulyar fazolarning Stoun – Chex kengaytmasi mavjud bo‘lib, bu kengaytma maksimal kengaytma deb yuritiladi. Maksimal kengaytma deyilishiga asosiy sabab, bu kengaytmadan uning boshqa kengaytmalariga uzluksiz akslantirish mavjud ekanligidir.

Lokal bikompakt fazolarni olsak, bu fazolar bir nuqtali minimal kengaytmaga ega bo‘ladi. Shuni ta’kidlab o‘tish mumkinki, faqat lokal bikompakt fazolar bir nuqtali kengaytmalarga egadir. Fazoning kengaytmalari, ayniqsa, bir nuqtali kengaytmalar nazariyasiga P.S. Aleksandrov tomonidan asos solingan va mazmunli o‘rganilgan. Kengaytmalar, asosan, bikompakt kengaytmalar keng o‘rganilgan. Kengaytmalarning o‘rganilishi va kiritilishi turli-tuman masalalarni yechishda qo‘l kelmoqda.

2.9.1-ta’rif. X topologik fazoning bikompakt kengaytmasi deb shunday bikompakt bX topologik fazoga aytiladiki, u:

1. $X \subset bX$, $\overline{X} = bX$, ya’ni X fazo $b(X)$ da zich to‘plamdir.

2. X fazoning topologiyasi $b(X)$ fazodagi indutsirlangan topologiyadan iborat shartlarini qanoatlantiradi.

Topologik fazoning bikompakt kengaytmasiga kengaytirilgan kompleks sonlar to‘plamini klassik misol qilib keltirish mumkin, ya’ni $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$. $\overline{C}$ to‘plam, ma’lumki, S^2 sferaga gomeomorfdir.

Endi lokal bikompakt Xausdorf topologik fazosi X berilgan bo‘lsin. Bu fazoni bitta boshqa ξ nuqta bilan boyitamiz (to‘ldiramiz).

Natijada, $\tilde{X} = X \cup \{\xi\}$ to‘plamga ega bo‘lamiz. X to‘plam $\tilde{X}$ fazoda ochiq to‘plamni tashkil qiladi. Endi yangi ξ nuqtaning ochiq atrofini aniqlash yetarli bo‘ladi. $\tilde{X}$ fazoda ξ nuqtaning ochiq atrofi deb, $\{\xi \cup B : B$ to‘plam X fazodagi bikompakt$\}$ ko‘rinishdagi to‘plamga aytiladi. Bu to‘plamlar $\tilde{X}$ fazo nuqtalarining atrofi sifatida mavjud. Yangi hosil bo‘lgan fazo bX bilan belgilanadi. Bu $b(X)$ fazo Aleksandrov bikompaktifikatsiyasi deb yuritiladi. Hosil bo‘lgan yangi $b(X)$ fazo quyidagi ajoyib xossalarga ega:

1. X fazo $b(X)$ da zich to‘plamdir.

2. $b(X)$ bikompakt fazodir.

3. $b(X)$ fazo X ning minimal kengaytmasidir, ya'ni $b(X)\setminus X=\xi$.

4. $b(X)\setminus X$ to'plam $b(X)$ fazoda yopiq to'plamni tashkil qiladi va bu to'plam o'simta deb yuritiladi.

5. $b(X)$ yagona bir nuqtali kengaytmadir.

6. $b(X)$ fazo Xausdorf fazosi bo'ladi.

7. X fazo $b(X)$ da ochiq to'plamdan iboratdir.

Bunday kengaytmalar uchun quyidagi teorema o'rinlidir.

2.9.2-teorema. Bir nuqtali bikompakt kengaytma $b(X)$ Xausdorf fazosi bo'lishi uchun X fazoning lokal bikompakt va Xausdorf fazosi bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.10-§. Diadik bikompaktlar

Topologik fazolar sinfining muhim va qiziqarli qismlaridan biri diadik bikompaktlardir. Diadik bikompaktlar uzluksiz akslantirishlar va bikompaktlar fazosini chambarchas bog'lab turuvchi fazoni tashkil qiladi.

Biz haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasidan Kantorning mukammal to'plamini bilamiz. Endi bizga Kantorning umumlashgan diskontinium tushunchasi kerak bo'ladi.

$D_\alpha=\{0,1\}_\alpha$ ikki nuqtali fazoni olaylik, bu yerda indekslar to'plami A ixtiyoriy τ quvvatga ega bo'lsin, ya'ni $|A|=\tau$.

D^τ bilan $\prod\limits_{\alpha\in A} D_\alpha=\prod\limits_{\alpha}\{0,1\}_\alpha$ Tixonov ko'paytmasini belgilaylik. D^τ fazo bikompakt fazo bo'ladi va D^τ fazo umumlashgan Kantor diskontiniumi deb yuritiladi.

2.10.1-ta'rif. Kantorning umumlashgan diskontiniumi D^τ ning uzluksiz akslantirishdagi obrazi ***diadik bikompakt*** deb ataladi.

Kantorning umumlashgan diskontiniumining ta'riflanishidan ko'rinadiki, bu fazo bikompakt fazo bo'lar ekan. Bikompakt fazolar uzluksiz akslantirishlarda saqlangani tufayli diadik bikompaktlar ham bikompakt fazo bo'ladi.

Keyingi boblarda uchratamizki, Kantorning mukammal to'plamini $[0,1]$ kesmaga uzluksiz akslantirish mumkin. Demak, Kantorning mukammal to‘plami ham, qolaversa, to‘g‘ri chiziqdagi [0,1] kesma va ixtiyoriy $[a,b]$ kesma ham diadik bikompakt ekan.

Diadik bikompaktlar haqidagi ba’zi bir faktlarni keltiramiz.

2.10.2-teorema. Tixonov kubi $I^{\tau} = \prod_{\alpha} [0,1]_{\alpha}$, $\alpha \in A$, $|A| \leq \tau$ diadik bikompaktdir.

Cheksiz τ uchun I^{τ} kub D^{τ} ning uzluksiz obrazi bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan fakt va mulohazalardan ma’lumki, diadik bikompaktlarning ko‘paytmasi va uzluksiz obrazi yana diadik bikompakt bo‘ladi. Shuni ham ta’kidlash mumkinki, diadik bikompaktlar hamma kompaktlarni o‘zida saqlovchi ko‘paytma bo‘lib, uzluksiz akslantirishlarda o‘zgarmaydigan bikompaktlar ichida yopiq bo‘lgan eng kichik bikompakt fazolar sinfidir. Lekin ixtiyoriy bikompakt doimo diadik bikompakt bo‘lavermaydi. Quyidagi ikki qiziq teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.10.3-teorema. Ixtiyoriy kompakt Kantor mukammal to‘plamining uzluksiz obrazidir.

2.10.4-teorema. Salmog‘i τ ga teng bo‘lgan ixtiyoriy bikompakt D^{τ} bikompaktda joylashgan (yotgan) nol o‘lchovli bikompaktning uzluksiz obrazidir.

II bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Bu bobda keltirilgan topologik fazoda ko‘paytmalar, akslantirishlarning ko‘paytmalari, topologik fazolarda bog‘lamlilik, ajrimlilik aksiomalari, kompakt va bikompakt fazolar, diadik bikompaktlar, sanoqli fazolar, separabel fazolar, parakompakt va lokal bikompakt fazolarning Aleksandrov kengaytmalari va ularning turli topologik va geometrik xossalari 3, 5, 9 – 11, 13, 20 – 23, 48 – 51, 70 – 71, 58–59, 53–54, 87, 103, 105 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda to‘la va kengroq berilgan.

III bob. TOPOLOGIK FAZO O'LCHAMI

Umumiy topologiya fani o'rganadigan asosiy va o'ta geometrik-topologik invariantlar qatoriga topologik fazolar o'lchami tushunchasi ham kiradi. Bu invariant to'g'ri chiziq, ko'pburchak, fazo, ko'pyoqlilar va hokazolarning elementar-geometrik o'lchamlari tushunchasining o'lchovlar sonini umumlashtiruvchi topologik invariantdir. Bu invariant $n = 1,2,3,...$ hollarda arifmetik fazo R^n to'plamostilarining topologik xarakteristikasini berish uchun ham juda muhimdir.

Masalan, to'g'ri chiziq va kesma, tekislik va kvadrat o'lchovlari, fazoda kub o'lchamlari biz tasavvur qilganimizdek, mos ravishda 1, 2 va 3 ga tengdir. Bu invariant yordamida ko'p geometrik figuralarga, masalan, chiziq tushunchasiga umumiy ta'rif beriladi.

O'lchamlar nazariyasida asosan (albatta, topologik invariant) uchta klassik *ind* , *Ind* va dim o'lcham funksiyalari mavjud bo'lib, bu bo'limda ular bilan tanishtirib o'tiladi.

3.1-§. Nol o'lchamli topologik fazolar

3.1.1-ta'rif. Agarda p ning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday V atrof topilsa va u $V \subset U$ hamda $FrV = \varnothing$ shartni qanoatlantirsa, X topologik fazo $p \in X$ nuqtada nol o'lchamli fazo deyiladi (o'lchami nol).

3.1.2-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan X topologik fazo o'zining har bir nuqtasida nol o'lchamga ega bo'lsa, nol o'lchamli fazo deyiladi va $\dim X = O$ ko'rinishda yoziladi.

Agar X topologik fazo, agar har bir nuqtasi bo'sh to'plamdan iborat atrofga ega bo'lsa, nol o'lchamli bo'lar ekan.

Ta'rifdan ko'rinadiki, fazoning nol o'lchamli yoki nuqtada nol o'lchamli bo'lishi xossasi topologik invariantdir.

Fazoning nol o'lchamli bo'lishini quyidagicha ta'riflash ham mumkin. Fazoning elementlari bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq to'plamlardan iborat bo'lsa, fazo nol o'lchamlidir.

3.1.3-misol. Har bir chekli yoki sanoqli topolgik fazo nol o'lchamlidir.

Deylik, U ochiq to'plam birorta $p \in X$ nuqtaning atrofi bo'lsin. Bu holda p nuqtaning shunday $O_r(p)$ shar atrofi topiladiki, $O_r(p) \subset U$

o‘rinlidir. $x_1, x_2, x_3,..$ lar X ning nuqtalari bo‘lsin. Bu holda $r_i = \rho(x_i, \rho)$. Endi shunday r^1 son topiladiki, u r^1 va $r^1 \neq r_i$ uchun o‘rinli bo‘lishi zarur. U holda $O_{r^1}(p)$ shar atrofi uchun $O_{r^1}(p) \subset U$ va $FrO_{r^1}(p) = \varnothing$.

Bu misoldan xususiy holda barcha natural, butun va ratsional sonlar to‘plami nol o‘lchamli ekanligi ko‘rinadi.

3.1.4-teorema. Nol o‘lchamli fazoning bo‘sh bo‘lmagan har qanday to‘plamostisi nol o‘lchamlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, $X_0 \subset X$, $X_0 \neq \varnothing$ va x_0 nuqta X_0 ning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U^1 to‘plam x_0 ning ixtiyoriy atrofi bo‘lsin. X_0 nuqtaning X fazoda shunday U atrofi topiladiki, $U \cap X^1 = U^1$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. X ning nol o‘lchamli ekanligidan, bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq shunday V to‘plam topiladiki, $x_0 \in V \subset U$. $V^1 = V \cap X_0$ desak, $x_0 \in V^1$ va V^1 – ochiq va yopiqdir. $x_0 \in V^1 \subset U^1$. Demak, X_0 nol o‘lchamlidir.

3.1.5-misol. Barcha irratsional sonlar to‘plami J nol o‘lchamlidir.

Agar $U \subset J$ to‘plam r irratsional sonning atrofi bo‘lsa, shunday r_1 va r_2 ratsional sonlar topiladiki, r_1 va r_2 orasida yotgan barcha irratsional sonlar to‘plami $J(r, r_1)$ uchun $J(r_1 r_2) \subset U$ bo‘ladi. Irratsional sonlar fazosi J da $J(r_1 r_2)$ ochiq to‘plamlar va $F_r J(r_1 r_2) = \varnothing$. Chunki ixtiyoriy irratsional nuqta limit bo‘lib, u ham yana shu $J(r_1 r_2)$ ga tegishlidir.

Ikki nol o‘lchamli to‘plamlar birlashmasi nol o‘lchamli bo‘lishi shart emas. Chunki irratsional va ratsional sonlar birlashmasi nol o‘lchamli emas.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

3.1.6-teorema. Sanoqli sondagi yopiq nol o‘lchamli to‘plamlar birlashmasi nol o‘lchamlidir.

3.2-§. *n* o‘lchamli topologik fazolar

Ushbu paragrafda biz, agar aksi aytilmagan bo‘lsa, fazo sifatida sanoqli bazaga ega bo‘lgan metrik fazolarni ko‘rib chiqamiz. Nuqta atrofi deb esa, faqat shu nuqtani saqlovchi ochiq to‘plamlarni olamiz.

Fazoning nuqtadagi o‘lchamini induksiya bo‘yicha quyidagicha aniqlaymiz:

3.2.1-ta’rif. Bo‘sh to‘plam va faqat bo‘sh to‘plam -1 o‘lchamga ega.

Agar x_0 nuqta chegarasi $\leq n-1$ o‘lchamga ega bo‘lgan shunday turli kichik atroflarga ega bo‘lsa, topologik fazo X o‘zining $x_0 \notin X$ nuqtasida o‘lchami $\leq n (n \geq 0)$ ga ega deyiladi.

Topologik fazo, agar o‘zining har bir nuqtasida $\leq n$ o‘lchamga ega bo‘lsa, uning o‘lchami $\leq n (n \geq 0)$ deyiladi va $\dim X \leq n$ ko‘rinishda yoziladi. Agar X fazo $\dim X \leq n$ bo‘lib, $\dim X > n-1$ bo‘lsa, $\dim X = n$ deyiladi.

Agar $\dim X \geq n$ uchun har qanday $n \in N$ o‘rinli bo‘lsa, $\dim X = \infty$ deyiladi.

Ravshanki, topologik akslantirishlarda fazoning strukturasi o‘zgarmaydi. Shu sababli nuqtaning atrofi va chegarasida o‘zgarish bo‘lmaydi.

Bu ta’rifdan quyidagi xulosalarni chiqarishimiz mumkin.

3.2.2-xulosa. Ma’lum bo‘ladiki, fazoning n o‘lchamli (nuqtada n o‘lchamli) bo‘lish xususiyati topologik invariant ekan.

3.2.3-xulosa. $\dim X \leq n$ shart X fazoning shunday ochiq bazasi topilib, uning elementlari chegarasi $\leq n-1$ o‘lchamga ega bo‘lishi shartiga ekvivalentdir.

3.2.4-xulosa. $n=0$ bo‘lganda, 3.1.1- va 3.2.1-ta’riflar ustma-ust tushadi.

3.2.5-teorema. Agar $\dim X = n$, bo‘lsa, n chekli. U holda ixtiyoriy $m \leq n$ uchun X fazo m o‘lchamli qismga ega.

Isbot. Ma’lumki, agar $\dim X > n-1$ bo‘lsa, u holda shunday $x_0 \in X$ nuqta va uning U_0 atrofi topiladiki, V ixtiyoriy ochiq atrof uchun $x_0 \in V \subset U_0$ va $\dim F_r V \geq n-1$ shartlar o‘rinli. Ikkinchi tomondan, $\dim X \leq N$ bo‘lganligidan shunday ochiq V_0 topiladiki, $x_0 \in V_0 \subset U_0$ bo‘lsin. Bu atrof uchun $\dim F_r V_0 \leq n-1$. Demak, V_0 to‘plamning chegarasi X ning shunday to‘plamostisi ekanki, uning o‘lchami $n-1$ ga teng ekan. Bizdan xuddi shuning isboti talab qilingan edi.

Mazkur 3.2.5-teorema faqat chekli o‘lchamli fazolar uchun o‘rinlidir.

3.2.6-misol.

a) to‘g‘ri chiziq va interval 1 o‘lchamlidir;

b) ixtiyoriy ko'pburchak, aylana, ellips, giperbola va parobola 1 o'lchamga ega;

d) doira, Miyobius varag'i va sfera 2 o'lchamlidir.

3.2.7-teorema. Ixtiyoriy $X_0 \subset X$ uchun $\dim X_0 \leq \dim X$ o'rinlidir.

Isbot. Induksiya metodi bilan isbotlaymiz: $n=-1$ bo'lganda teorema o'rinli.

$n-1$ uchun teorema sharti o'rinli bo'lsin. X fazo uchun $\dim X \leq n$ o'rinli, X_0 qism fazo va $x_0 \in X_0$ ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, U_0 to'plam uning X_0 dagi atrofi bo'lsin. U holda X_0 nuqtaning X da U atrofi topiladiki, u uchun $U_0 = U \cap X_0$ o'rinli. $\dim X \leq n$ bo'lganidan, X fazoda shunday V ochiq to'plam topiladiki, u uchun $x_0 \in V \subset U$, $\dim F_r V \leq n-1$ o'rinlidir. $V_0 = V \cap X_0$ desak, u holda V_0 to'plam X_0 da ochiq to'plam va $x_0 \in V_0 \subset U_0$. Endi $B = FrV$ va $B_0 = F_r V_0$ deb belgilasak, bu yerda

$B = \overline{V} \setminus V, B_0 = (\overline{V}_0 \setminus V) \cap X_0$. Bu holda, ravshanki, $B_0 \subset B \bigcap X_0$. Induksiya shartiga ko'ra, $\dim B_0 \leq n-1$. Biz aynan shuni isbot qilishimiz lozim edi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

3.2.8-teorema. X topologik fazoning ixtiyoriy ikki A va B to'plamlari uchun quyidagi tengsizlik o'rinlidir:

$$\dim(A \bigcup B) \leq \dim A + \dim B + 1$$

3.2.9-teorema. X va Y topologik fazolar uchun $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ o'rinlidir.

Isbot. Induksiya metodi bilan isbotlaymiz. Agar $\dim X = -1$ va $\dim Y = -1$ bo'lsa, teorema o'rinli.

Faraz qilaylik, $\dim X = m$, $\dim Y = n$ bo'lsin. Induksiyaga ko'ra, quyidagi hollar o'rinli:

$\dim X \leq m$, $\dim Y \leq n-1$ (1)

$\dim X \leq m-1$, $\dim Y \leq n$ (2)

Har bir $Z=(x,y) \in X \times Y$ nuqta $X \times Y$ topologik fazoda yetarli kichik UxV ko'rinishdagi atrofga ega va bu yerda U to'plam x ning X fazodagi, V esa, y ning Y dagi atroflari bo'lib, ular uchun $\dim F_r U \leq m-1$, $\dim F_r V \leq n-1$ lar o'rinli bo'ladi.

Dekart ko'paytma va chegaraviy to'plamlarning xossalariga ko'ra, ular uchun $Fr(U\times V)=(\overline{U}\times FrV)\cup(FrM\times\overline{V})$ tenglik o'rinli. Bu birlashmada $\overline{U}xFrV$ va $FrUx\overline{V}$ to'plamlar yopiq to'plamlardir. Induktiv shartga va (1), (2) larga ko'ra, qo'shiluvchilar o'lchami $\le m+n-1$ ga teng. Demak, $\dim F_r(X\times Y)\le m+n-1$.

U holda $\dim(XxY)\le m+n$ bo'ladi.

3.3-§. Qo'zg'almas nuqta haqida Brauer teoremasi va uning tatbig'i

R^n fazoning o'lchami n ga teng bo'lishini ko'rsatish uchun bu fazoning tuzilishiga chuqurroq e'tibor berish kerak. Buning uchun albatta kombinator fikrlash jarayoni lozimdir. Brauer teoremasidan $\dim R^n=n$ tenglik oson isbotlanadi va bu teorema ko'pgina teoremalarni isbotlashda qo'llaniladi.

Agar har bir λ_0, λ_1 ... λ_k haqiqiy sonlar sistemasi uchun $\lambda_0x_0+x_1x_0+...+\lambda_kx_k=0$ va $\lambda_0+\lambda_1+...+\lambda_k=0$ shartlar faqat $\lambda_i=0, i\in\overline{0,n}$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, R^n fazoning $x_0,x_1....x_k$ nuqtalar sistemasi chiziqli erkin sistema deyiladi.

R^n fazoning ixtiyoriy $m+1$ chiziqli erkin $a_0,a_1,...,a_m$ nuqtalari berilgan bo'lsin. R^n fazoning $x=\lambda_0a_0+\lambda_1a_2+...+\lambda_ma_m$ (1) ko'rinishidagi nuqtalar to'plami $a_0a_1,...,a_m$ nuqtalarga tortilgan m o'lchamli simpleks deyiladi va $[a_0a_1...a_m]=T^m$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda $\lambda_0+\lambda_1+...+\lambda_m=1$ va $\lambda_i\ge 0$ $i=\overline{0,m}$ (2).

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, m o'lchamli simpleks $T^m=[a_0,a_1,...,a_m]\subset R^n$ nuqtalarning tartibiga bog'liq emas, u faqat $\{a_0a_1,...,a_m\}$ to'plamga bog'liqdir.

$T^m=[a_0,a_1,a_2...,a_m]\subset R^n$ simpleksni olsak, m dan katta bo'lmagan va manfiy bo'lmagan har qanday $k+1$ haqiqiy sonlar $j_0,j_1,...$ uchun $a_{j0},a_{j1},...,a_{jk}$ nuqtalar sistemasi ham chiziqli erkindir. Bundan doimo k o'lchovli $T^k=[a_{j_0}a_{j_1}...a_{jk}]$ simpleks aniqlangan bo'ladi. Har bir shu

$T^k = \left[a_{j_0} a_{j_1} ... a_{jk}\right]$ ko‘rinishdagi simpleks $T^m = \left[a_0 a_1 ... a_m\right]$ simpleksning k - o‘lchovli tomoni (yog‘i) deyiladi. 0 o‘lchovli tomoni $a_0, a_1, a_2 ..., a_m$ nuqtalar bo‘lib, ular $T^m = \left[a_0, a_1, a_2 ..., a_m\right]$ simpleksning uchlari deyiladi. $T^m = \left[a_0 a_1 ... a_m\right]$ simpleks ham o‘ziga yoq hisoblanadi. Agar $x \in T^m = \left[a_0 ... a_m\right]$ bo‘lsa, u holda u nuqta bo‘lib, bu nuqta uchun (1) va (2) tengliklar o‘rinlidir. Bu holda $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ sonlar x nuqtaning barisentrik koordinatalari deyiladi va $(\lambda_0(x), \lambda_1(x), ..., \lambda_m(x))$ ko‘rinishda yoziladi.

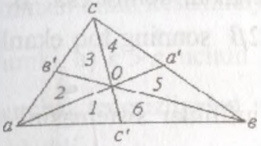
Bu ta’rifda $m = 0$ bo‘lsa, 0 o‘lchovli $T^0 = \left[a_0\right]$ simpleks — bu nuqta; $m = 1$ bo‘lsa, 1 o‘lchovli simpleks $T^1 = \left[a_0 a_1\right]$ — bu uchlari a_0 va a_1 nuqtalarda bo‘lgan kesma; $m = 2$ bo‘lsa, 2 o‘lchovli simpleks $T^1 = \left[a_0 a_1 a_2\right]$ — bu uchlari a_0, a_1, va a_2 nuqtalarda bo‘lgan uchburchak (albatta, teng tomonli); $m = 3$ bo‘lsa, 3 o‘lchovli $T = \left[a_0 a_1 a_2 a_3\right]$ simpleks — bu uchlari a_0, a_1, a_2, a_3 nuqtalarda bo‘lgan tetraedrdir. Yopiq simpleks $\overline{T^m} = \left[\overline{a_0 a_1 a_2 .. a_m}\right]$ ko‘rinishda belgilanadi va yoqlari bilan birga qaraladi. Ochiq simpleks ko‘p hollarda $\overset{0}{T^m} = \left[a_0, a_1, ..., a_m\right]$ ko‘rinishda belgilanadi, bu simpleksga uning yoqlari kirmaydi.

3.3.1-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy n o‘lchovli yopiq simpleks $\overline{T^n}$ ni o‘z-o‘ziga $f : \overline{T^n} \to \overline{T^n}$ uzluksiz akslantirishda kamida bitta qo‘zg‘almas nuqta mavjud, ya’ni shunday $x \in \overline{T^n}$ topiladiki, uning uchun $f(x) = x$ o‘rinli bo‘ladi.

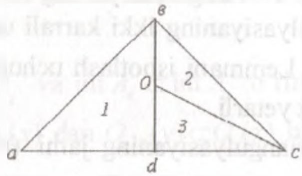
Isbot. Bu teoremaning $n = 2$ bo‘lgan holdagi isbotini keltiramiz. Tekislikda yoki R^n, $n > 2$ fazoda uchlari a, v va c nuqtalarda bo‘lgan uchburchakni $T = [a, b, c]$ ko‘rinishda belgilaylik. $T = [a, b, c]$ uchburchakning triangulyasiyasi τ deb shunday chekli sondagi uchburchaklarning ixtiyoriy sistemasiga aytiladiki, bu τ sistema quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $\cup\{\tau : \tau \in \tau\} = T$;

b) τ sistemaning ixtiyoriy ikki turli elementi (uchburchagi) umumiy nuqtaga ega emas yoki agar umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu nuqta har ikkalasi uchun uch bo'lsin yoxud ular kesma bo'yicha kesishsa, bu kesma har ikkalasi uchun tomon bo'lsin.



3.3.1-rasm



3.3.2-rasm

3.3.1-rasmdagi uchburchaklar sistemasi $[a,b,c]$ uchburchakning τ triangulyasiyasi bo'la oladi. 3.3.2-rasmdagisi esa, triangulyasiya bo'la olmaydi.

$[a,b,c]$ uchburchak triangulyasiyasi τ ning o'lchovlari va kesmalari sifatida triangulyasiyadagi uchburchakning uchlari va kesmalarini olish kerak. a,b va c lar ham triangulyasiya uchlari bo'ladi, uning $[ab]$, $[bd]$ va $[ca]$ kesmalarda yotgan kesmalari kesmalarning triangulyasiyasini ifodalaydi.

Teoremani isbotlash uchun quyidagi Shperner lemmasidan foydalanamiz.

3.3.2-Lemma (Shperner lemmasi). $[a_0,a_1,a_2]$ uchburchakning ixtiyoriy τ triangulyasiyasi berilgan va triangulyasiyaning har bir e uchiga uchburchak $T=[a_0a_1a_2]$ ning $f(e)$ uchi mos qo'yilgan bo'lsin. Bu moslik $f(a_i)=a_i, i=0,1,2$ shartni va τ trangulyasiyada uchburchak T ning $[a_ia_j]$ tomonida yotgan ye uchiga, moslik $f(e)=a_i$ yoki $f(e)=a_j$ shartni qanoatlantirsin; bu yerda $0\le i<j\le 2$. U holda τ triangulyasiya uchburchaklari uchlariga uchburchak T ning mos kelgan har xil uchlari to'g'ri kelgan, triangulyasiyaning uchburchaklari soni toq sondir.

Isbot. $f:\tau\to T$ moslik berilgan bo'lsin. Agar bu f moslikda T uchburchakning ikki a_0 va a_1 uchlari mos qo'yilgan bo'lsa, τ kesmasi belgilangan kesma deyiladi. Uchburchakning (triangulyasiyasining) har bir xil uchiga T uchburchakning har xil uchi mos qo'yilgan bo'lsa, bunday uchburchak bir karrali uchburchak deyiladi. τ triangulyasiyaning bittadan kam bo'lmagan belgilangan tomonli bir karrali bo'lmagan uchburchagi ikki karrali uchburchak deyiladi. Ravshanki, triangulyasiyada ikki karrali uchburchak ikkita belgilangan tomonga ega.

Endi τ triangulyasiyaning bir karrali uchburchaklar sonini α bilan, τ triangulyasiyaning ikki karrali uchburchaklar sonini esa, β bilan belgilaymiz. Lemmani isbotlash uchun $\alpha + 2\beta$ sonning toq ekanligini ko'rsatishimiz yetarli.

τ triangulyasiyaning jami (t^1, t^2) juftliklar sistemasini olamiz, bu yerda t^1 — kesmalari, t^2 — uchburchaklari bo'lib, agar $t^1 \neq (t^1)'$ yoki $t^2 \neq (t^2)'$ bo'lsa, (t^1, t^2) juftlik $((t^1)', (t^2)')$ juftlikdan farqli hisoblanadi. Agar t^1 kesma belgilangan bo'lib, t^2 uchburchakning tomonidan iborat bo'lsa, (t^1, t^2) juftlik belgilangan belgili deyiladi. Har bitta bir karrali uchburchak element sifatida faqat bitta belgilangan juftlikka kiradi, har bir ikki karrali uchburchak esa, element sifatida ikkita belgilangan juftlikka kiradi. Shu sababli $\alpha + 2\beta$ ifoda hamma belgilangan juftliklar sonidir.

Lemmaning shartiga ko'ra, τ triangulyasiyaning belgilangan kesmalari $[a_1 a_2]$ va $[a_0 a_2]$ kesmalarda yotmaydi. Shu sababli ular $[a_0, a_1]$ kesmada yoki T uchburchakning ichida yotadi (uchlaridan tashqari). Agar belgilangan kesma $[a_0, a_1]$ kesmada yotsa, u holda bu kesma τ triangulyasiyada faqat bitta uchburchakning tomonidan iborat bo'ladi. Shu vaqtning o'zida agar belgilangan kesma (uchlarisiz) T uchburchakning ichida yotsa, u holda bu kesma τ triangulyasiyaning ikkita uchburchagi tomonidan iborat bo'ladi. Shu sababli $\alpha + 2\beta = \gamma + 2\delta$ tenglik o'rinli, bu yerda γ — T uchburchakning $[a_0, a_1]$ tomonida yotgan belgilangan kesmalar sonidir, δ esa, T uchburchakning ichida yotgan belgilangan kesmalar sonidir. Shperner lemmasi kesma uchun qaralganda, δ — toq sondan iboratdir. Shu sababli $\alpha + 2\beta$ son ham toq sondir.

Shperner lemmasidan talab qilingan natijalarni olish uchun quyidagilar kerak.

3.3.3-Lemma (Lebeg lemmasi). X kompaktda shunday yopiq to'plamlar sistemasi $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ berilgan bo'lsin va bu sistema ixiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun X kompaktda shunday M_ε to'plam topilib, bu to'plam ixtiyoriy

$\alpha \in A$ uchun $diamM_\varepsilon < \varepsilon$, bu $M_\varepsilon \cap F_\alpha \neq \varnothing$, $\alpha \in A$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in A\} \neq \varnothing$.

Isbot. Faraz qilaylik, $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in A\} = \varnothing$ o'rinli bo'lsin. $A_\varepsilon = \{x \in X ::$ $O_\varepsilon(x) \cap F_\alpha = \varnothing \quad \alpha \in A^1 \not\subset A\}$ to'plamni olaylik. Ya'ni, $O_\varepsilon(x)$ to'plam F_α larning hammasi bilan kesishmaydi.

Ma'lumki, a) $\varepsilon > \overset{0}{\varepsilon}$ uchun $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon}$ va $\operatorname{int} A_\varepsilon \subset \operatorname{int} A_{\varepsilon}$ o'rinli.

Uchburchak tengsizligidan $y \in O_{\varepsilon/2}(x)$ dan $O_{\varepsilon/2}(y) \subset O_\varepsilon(x)$ ham o'rinli. Shu sababli,

b) $A_\varepsilon \leq \operatorname{int} A_{\varepsilon/2}$.

Shartimizga ko'ra, ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun shunday $\alpha = \alpha(x)$ nomer topiladiki, $x \overline{\in} F_\alpha$, ya'ni $x \in X \setminus F_\alpha$. $X \setminus F_\alpha$ ning ochiq to'plam ekanligidan, shunday $\varepsilon > 0$ topiladiki, $O_\varepsilon(x) < X \cdot F_\alpha$. Bundan $x \in A_\varepsilon$. Demak,

d) $X = \bigcup\{A_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ tenglik o'rinlidir.

b) va d) shartlardan $X = \bigcup\{\operatorname{int} A_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ ni ham yozishimiz mumkin. X ning kompakt ekanligidan shunday $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$ lar topiladiki, ular uchun $X = \operatorname{int} A_{\varepsilon_1} \cup \operatorname{int} A_{\varepsilon_2} \cup ... \cup \operatorname{int} A_{\varepsilon_k}$ tenglik o'rinli; a) xossadan $\delta = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k\}$ son uchun $X = \operatorname{int} A_\delta \subset A_\delta$ ga ega bo'lamiz.

Agar $\varnothing \neq M \leq X$ va $diam\overline{M} < \delta$ bo'lsa, u holda $x_0 \in M$ uchun $M \subseteq O_\delta x_0$ o'rinli. Shu sababli M to'plam hamma F_α larni kesmaydi. M to'plamning ixtiyoriy ekanligi lemmaning shartiga ziddir.

X metrik fazo berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $M \subset X$, $diamM < \eta$ to'plam λ sistemaning hamma elementlarini kesmasa (kesishmasa), X metrik fazoning yopiq to'plamlar sistemasi $\lambda = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ uchun $\eta > 0$ son sistemaning Lebeg soni deyiladi.

Agar ixtiyoriy $M \subset X$, $diamM < r$ to'plam uchun shunday $\alpha = \alpha(M)$ nomer topilsa va uning uchun $M \subseteq O_\alpha$ o'rinli bo'lsa, X fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasi $\omega = \eta\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ uchun $\eta \geq$ son qoplamaning Lebeg soni deyiladi.

Lebeg lemmasidan quyidagilar kelib chiqadi:

a) kompakt fazoda kesishmasi bo'sh to'plamdan iborat bo'lgan yopiq to'plamlar sistemasi loaqal bitta Lebeg soniga ega bo'ladi;

b) kompaktning ixtiyoriy ochiq qoplamasi kamida bitta Lebeg soniga ega.

Haqiqatan ham, $\omega = \{O_\alpha\}$ sistema X fazoning ochiq qoplamasi bo'lsa, u holda $X - O_\alpha = F_\alpha$ yopiq to'plamdir va ularning kesishmasi bo'sh to'plamdir. Isbotlanganiga ko'ra, $\{F_\alpha\} = \lambda$ sistemaning Lebeg soni mavjud, bu son ω qoplama uchun ham Lebeg son bo'ladi.

3.3.4-natija. $T = [a_0 a_1 a_2]$ uchburchakning, yopiq F_1, F_2, F_3 to'plamlar shunday qoplamasi bo'lsinki, ular uchun $a_i \in F_i$, $i = 0, 1, 2$ va $[a_i a_j] \subseteq F_i \cup F_j$ $0 \le i < j \le 2$ o'rinli bo'lsin. U holda $F_0 \cap F_1 \cap F_2 \ne \varnothing$.

Isbot. Tayinlangan $\varepsilon > 0$ uchun $T = [a_0 a_1 a_2]$ uchburchakning shunday τ triangulyasiyasini olamizki, uning elementlarining diametri ε dan katta bo'lmasin. Bunday τ triangulyasiyaga ε triangulyasiya deyiladi. Bu triangulyasiya va T uchburchak orasida quyidagicha f moslik o'rnatamiz: τ ning ixtiyoriy ye uchiga T uchburchakning shunday $fe = a_i$ uchini mos qo'yamiz: 1) $e \in F_i$ va 2) agar $e = a_j$ bo'lsa, u holda $i = j$; agar $e \in [a_j a_k]$, $0 \le j < k \le 2$ bo'lsa, u holda yoki $i = j$, yoki $i = k$. Shartga ko'ra, bu bo'lishi mumkin bo'lgan holdir.

Ma'lum bo'ladiki, Shperner lemmasining 3.3.2-shartlari o'rinli. Bu holda τ triangulyasiyada shunday $t = [a, b, c]$ uchburchak topiladiki, $f\{a, b, c\} = \{a_0, a_1, a_2\}$ o'rinli bo'ladi. Demak, $t \cap F_i \ne \varnothing$; $i = 0, 1, 2$ va $\rho(F_i, F_j) \le diamt < \varepsilon$ $0 \le i < j \le 2$. Lebeg lemmasidan va $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriy ekanligidan: $F_0 \cap F_1 \cap F_2 \ne \varnothing$.

Brauer teoremasining isboti (davomi). $f : T \to T$, $T = [a_0 a_1 a_2]$, uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. l_{ij} bilan T uchburchak a_i va a_j uchlaridan o'tgan to'g'ri chiziqlarni belgilaymiz, bu yerda $0 \le i < j \le 2$.

$\varphi_k(x) = \rho(x, l_{ij}), x \in R^2$, $0 \le i, j, k \le 2$. $i \ne j \ne k \ne i$ funksiyani olaylik. Shuni aytishimiz kerakki, φ_k funksiya ℓ_{ij} to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarda doimiy qiymatga ega, to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqlarda va shu chiziqlardan chiqqan nurlarda chiziqli funksiyalardir, bu yerda $i \neq j \neq k \neq r$.

Bu funksiya R^2 da uzluksiz bo'lganligi sababli T da ham uzluksizdir. Shu tufayli $F_k = \{x \in T : \varphi_k(x) - \varphi_k(f(x)) \geq 0\}$, $k = 0, 1, 2$.

$\varphi_k(x)$ va $\varphi_k(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo'lganligidan F_k to'plamlar yopiq to'plamlardir. Ixtiyoriy $x \in T$ nuqta uchun quyidagi:

$\varphi_0(x)\rho(a_1a_2) + \varphi_1(x)\rho(a_2a_0) + \varphi_2(x)\rho(a_0a_1) = \varphi_0(f(x))\rho(a_1a_2) + \varphi_1(f(x))$ $\rho(a_2a_0) + \varphi_2(f(x))\rho(a_0a_1)$ tenglik o'rinli.

Shu sababli,

$[\phi_0(x) - \phi_0(f(x))]\rho(a_1a_2) + [\phi_1(x) - \phi_1(f(x))]\rho(a_2a_0) + [\phi_2(x) - \phi_2(f(x))]$ $\rho(a_0a_1) = 0$ (*) .

Ikkinchi ko'paytuvchilar musbat bo'lganligi uchun bu (*) yig'indida birinchi ko'paytuvchilardan birortasi manfiy emas. Binobarin, $T = F_0 \cup F_1 \cup F_2$.

Agar $x = a_0$ bo'lsa, u holda $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$ va (*) da oxirgi ikki qo'shiluvchi musbat emas. Binobarin, $\varphi_0(x) - \varphi_0(f(x)) \geq 0$ va $a_0 \in F_0$. Shunga o'xshab, $a_k \in F_k, i = 1, 2$. Agar $x \in [a_1a_2]$ bo'lsa, u holda $\varphi_0(x) = 0$ va (*) dagi birinchi qo'shiluvchi musbat emas. Shu sababli qolgan ikki qo'shiluvchidan kamida biri manfiy emas va shuning uchun $x \in F_1 \cup F_2$. Bundan esa, $[a_1a_2] \subset F_1 \cup F_2$ va $[a_0a_1] \subset F_0 \cup F_1$, $[a_0a_1] \subset F_0 \cup F_2$. Oldingi 3.3.4-natijaga ko'ra, shunday nuqta $J \in F_0 \cap F_1 \cap F_2$ mavjudki, bu nuqta uchun (*) tenglikka ko'ra $\varphi_k(\xi) - \varphi_k(f(\xi)) = 0$; $k = 0, 1, 2$. Ya'ni, $\rho(\xi, l_{ij}) = \rho(f(\xi), l_{ij})$, $0 \leq i < j \leq 2$. Binobarin, agar l_{ij} to'g'ri chiziq uchburchak T ni kesib va l_{ij} to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lib, undan $\rho(\xi, l_{ij})$ masofada bo'lsa, u holda ξ va $f(\xi)$ nuqtalar uchta l_{ij} to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishlidir. Ya'ni, bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat ekan. Demak, $f(\xi) = \xi$.

X topologik fazo va $A \subset X$ ning to'plamostisi bo'lsin.

Agar $f(x) = x, x \in A$ bo'lsa, uzluksiz $f : X \to A$ akslantirish retraksiya deyiladi. Bu yerda $A \subset X$ to'plam X fazoni retrakti deb yuritiladi.

3.3.5-misol. $\{(x,y)\in R^3 : x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$ silindrni olsak, uni OZ o'qga parallel proeksiyalari natijasida asosiga retraksiyalash mumkin.

Agar $I=[a,b]$ kesmani olsak, bu holda bunday retraksiya $f:[a,b]\to S^0=\{a\}\cup\{b\}$ mavjud emas.

Haqiqatan ham, agar $f:[a,b]\to\{a\}\cup\{b\}$ mavjud bo'lsa, $f^{-1}(a)=F_1$, $f^{-1}(b)=F_2$, F_1, F_2 lar yopiq to'plamlardir va $F_1\cup F_2=[a,b]$, $a\in F_1$ va $b\in F_2$. $F_1\cap F_2\neq\varnothing$. Agar $F_1\cap F_2=\varnothing$ bo'lsa, $[a,b]$ ning bog'lamli ekanligiga ziddir. Demak, bunday retraksiya mavjud emas.

Agar $T=[a_0a_1a_2]$ uchburchakni olsak, T da ham o'zining chegarasi (konturiga) $S^{'}=[a_0a_1]\cup[a_1a_2]\cup[a_2a_0]$ ga retraksiyasi mavjud emas.

Agar shunday $f:T\to S^{'}$ uzluksiz akslantirish mavjud desak, $F_0=f^{-1}([a_0a_1])$, $F_1=f^{-1}([a_1a_2])$, $F_2=f^{-1}([a_2a_0])$ to'plamlar T da yopiq va T ni qoplaydi. Ravshanki, $a_1\in F_i$, $i=0,1,2$ va $[a_{ij}]\subset F_i\cup F_j$, $0\le i<j\le 2$.

3.3.4-natijaga ko'ra, shunday $\xi\in F_1\cap F_2\cap F_3$ nuqta mavjud. U holda $f(\xi)\in[a_0a_1]\cap[a_1a_2]\cap[a_2a_0]=\varnothing$. Bu ziddiyat retraksiya mavjud emasligini ko'rsatadi.

3.4-§. Fazoning ind, Ind va dim o'lchamlari hamda ularning asosiy xossalari

Biz 3.2-§ da sanoqli bazaga ega bo'lgan metrik fazolarning *dim* ko'rinishdagi o'lchami bilan tanishgan edik. Lekin fazolarning *ind, Ind* va *dim* o'lchamlari ham mavjud. Bu o'lchamlar sanoqli bazaga ega bo'lmagan metrik fazolar sinfidan tashqarida teng emas. Ya'ni, metrik bo'lmagan X topologik fazo uchun $\dim X\neq indX\neq IndX$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Lekin sanoqli bazali yoki separabel metrik fazolar uchun bu uchala o'lcham ekvivalentdir.

X regulyar fazo va n- manfiy bo'lmagan butun son berilgan bo'lsin.

3.4.1-ta'rif.

i1) $indX=-1$ faqat va faqat, $X=\varnothing$ bo'lsa;

i2) agar ixtiyoriy $x\in X$ va uning ixtiyoriy atrofi V uchun shunday ochiq $U\subset X$ topilsa va $x\in U\subset V$ hamda $indF_rU\le n-1$ o'rinli bo'lsa, $indX\le n$;

i3) agar $indX \le n$ tengsizlik o‘rinli va $indX \le n-1$ tengsizlik bajarilmasa, $indX = n$;

i4) agar $ind \le n$ tengsizlik hech bir n uchun o‘rinli bo‘lmasa, $indX = \infty$.

Bu i1) – i4) shartlar har bir X regulyar fazoga $indX$ manfiy bo‘lmagan butun sonni yoki 1 yoxud cheksiz son ∞ mos qo‘ymoqda. Boshqacha aytganda, ind funksiya barcha regulyar fazolar oilasini $\{-1, 0, 1, 2, ..., n, ... + \infty\}$ to‘plamga akslantiradi. Yana shuni ta’kidlash lozimki, o‘lchami bir xil bo‘lgan fazolar topologik ekvivalentdir. $indX$ son regulyar fazoning Menger-Urison o‘lchami yoki kichik induktiv o‘lchami deyiladi. Osongina tekshirib ko‘rish mumkinki, agar X va Y regulyar fazolar gomeomorf bo‘lsa, u holda $indX = indY$ o‘rinlidir.

3.4.2-ta’rif. X topologik fazoning E to‘plami uning $P \subset X$ va $Q \subset X$ to‘plamlarini ayiradi (yoki ajratadi), deyiladi, agar $X \setminus E = H_1 \cup H_2$ bo‘lib, H_1, H_2 dizyunkt va $X \setminus E$ da ochiq va $P \subseteq H_1; Q \subseteq H_2$ bo‘lsa.

X topologik fazoning regulyar bo‘lganligi tufayli ta’rifdagi i2) shartning U to‘plamini kuchliroq $\overline{U} \subset V$ shart bilan almashtirsak ham bo‘ladi. Bu holda $indX \le n \ge 0$ tengsizlik ixtiyoriy $x \in X$ nuqta bilan bu nuqtani o‘z ichiga olgan ixtiyoriy F yopiq to‘plamni o‘lchami $indF \le n-1$ bo‘lgan to‘plam orqali ajratish mumkin bo‘lsa.

Menger-Urison o‘lchami ta’rifidan bevosita aytishimiz mumkin: agar X fazoning shunday β bazasi mavjud bo‘lsa va $indX \le n$ bu fazoning ixtiyoriy $U \in \beta$ elementi uchun $F_2U \le n-1$ o‘rinli bo‘lsa.

Topologik fazoning regulyarligi nasliy xossa bo‘lganligi tufayli, agar X fazoda ind o‘lcham aniqlangan bo‘lsa, u holda uning ixtiyoriy fazoostisi $M \le X$ da ham $indX$ o‘lcham aniqlangan bo‘ladi.

3.4.3-teorema. Regulyar topologik fazoning ixtiyoriy M fazoostisi uchun $indM \le indX$ o‘rinli.

Isbot. Agar $indX = 1$ yoki $indX = \infty$ bo‘lsa, teorema shartidagi tengsizlik o‘rinlidir. Yuqoridagi $indM \le indX$ tengsizlik $indX \le n-1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha X fazolar uchun isbotlangan bo‘lsin. Endi X regulyar fazo va $indX = n$ bo‘lsin va ixtiyoriy $x \in M$ nuqtani olaylik. V to‘plam x nuqtanng M dagi ixtiyoriy atrofi bo‘lsin. X da V_1 ixtiyoriy ochiq to‘plam olamiz, u $V = V_1 \cap X$ shartni qanoatlantirsin. $indX \leq n$ bo‘lganligi sababli shunday $U_1 \subset X$ ochiq to‘plam topiladiki, u uchun

$x \in U_1 \subset V_1$ va $indFrU_1 \leq n-1$ (1)

$U = M \cap U_1$ to‘plam x nuqtaning M atrofi bo‘ladi, uning M dagi chegarasi $FrU = M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1}$. U_1 ning X dagi chegarasining fazoostidir.

Binobarin, (1) va induktiv shartga ko‘ra, $indM \leq n$.

Endi X normal fazo va n manfiy bo‘lmagan butun son bo‘lsin.

3.4.4-ta’rif.

I1) $IndX = -1$ faqat va faqat, $X = \varnothing$ bo‘lsa;

I2) agar ixtiyoriy $V \subset X$ atrofi uchun shunday $U \subset X$ ochiq to‘plam topilmasa va u uchun $A \subset U \subset V$ va $IndFrU \leq n-1$ o‘rinli bo‘lsa; $IndX \leq n$ bo‘ladi.

I3) agar $IndX \leq n$ bo‘lsa va $IndX \leq n-1$ tengsizlik bajarilmasi $IndX = n$ bo‘ladi.

I4) agar $IndX \leq n$ tengsizlik hech bir n uchun o‘rinli bo‘lmasa $IndX = \infty$ bo‘ladi.

I1) – I4) shartlar har bir normal X fazo uchun $IndX$ sonni mos keltirmoqda, bu $IndX$ yoki $\geq /-1$ butun son yoki “cheksiz katta” ∞ sondan iboratdir. $IndX$ son X normal fazoning Brauer-Chex o‘lchami yoki katta induktiv o‘lchami deb yuritiladi. Agar X va Y fazolar gomeomorf bo‘lsa, u holda $IndX = IndY$ ekanligi osongina tekshiriladi.

Bu ta’rifdan hamda X normal fazo bo‘lganligi tufayli I2) shartdagi U to‘plamni yanada kuchliroq shart $\overline{U} \subset V$ bilan almashtirsa bo‘ladi. Bu holda I2) shart quyidagi ko‘rinishga keladi:

$IndX \leq n$ tengsizlik shuni anglatadi: agar X fazoda ixtiyoriy ikki yopiq kesishmaydigan $A \subset X$ va $B \subset X$ to‘plamlar chegarasining o‘lchami $\leq n-1$ dan iborat bo‘lgan to‘plam bilan ajratilgan (yoki ayirilgan) bo‘lsa.

Quyidagi teoremaning isboti o‘quvchiga qiyinchilik tug‘dirmaydi. Bu teorema kichik va katta induktiv o‘lchamlar deb atalishini oqlaydi.

3.4.5-teorema. Agar X normal fazo bo‘lsa, u holda $indX \leq IndX$. Ma’lumki, normal fazolar nasliy xossaga ega emas. Quyidagi teorema ham 3.4.3-teoremaga o‘xshab isbotlanadi.

3.4.6-teorema. Normal fazoning ixtiyoriy $M \subset X$ yopiq fazoostisi uchun $IndM \leq IndX$ tengsizlik o'rinlidir.

Bo'sh bo'lmagan X to'plam berilgan bo'lsin, $A=\{A_\alpha : A_\alpha \subset X, \alpha \in J\}$ to'plamostilar sistemasi karrasi deb shunday eng katta butun n songa aytiladiki, A sistemaning $n+1$ ta elementi kesishmasi bo'sh bo'lmasa yoki "cheksiz son" ∞ deyiladi, agar bunday butun son mavjud bo'lmasa. Demak, agar A sistemaning tartibi n ga teng bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n+2$ ta har xil $S_1, S_2, ... S_{n+2} \in J$ indeks uchun $A_{s1} \cap A_{s1} \cap ... \cap A_{s_{n+2}} = \varnothing$ o'rinli. A sistemaning karrasi $ordA$ ko'rinishida belgilanadi.

3.4.7-ta'rif. Agar shunday $f : X \to [0,1]$ funksiya mavjud bo'lib, uning uchun $f^{-1}(0) = A$ bajarilsa, X topologik fazoning A to'plamostisi funksional yopiq to'plam deyiladi.

X fazoning funksional yopiq to'plamlarining to'ldiruvchisi funksional ochiq to'plam deyiladi. Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, funksional yopiq to'plam yopiq to'plamdir. Shu sababli funksional ochiq to'plam ochiq to'plam bo'ladi.

Endi X Tixonov fazosi, n butun son va $n \geq -1$ bo'lsin.

3.4.8-ta'rif. d1) agar X fazoning ixtiyoriy funksional ochiq chekli qoplamasiga karrasi $\leq n$ bo'lgan funksional ochiq chekli qoplama chizish mumkin bo'lsa; $\dim X \leq n$ bo'ladi.

d2) agar $\dim X \leq n$ o'rinli, lekin $\dim X \leq n-1$ o'rinli bo'lmasa; $\dim X = n$ bo'ladi.

d3) agar $\dim X \leq n$ tengsizlik barcha n lar uchun bajarilmasa, $\dim X = \infty$; bo'ladi.

d1) – d3) shartlar har bir Tixonov fazosi X ga $\dim X$ sonni mos keltirmoqda. Bu $\dim X$ son yoki butun son ≥ 1 yoxud "cheksiz son" ∞ bo'lar ekan. $\dim X$ son X Tixonov fazosining Chex-Lebeg o'lchami yoki fazoning qoplama ma'nosida o'lchami deb yuritiladi. Agar X va Y fazolar gomeomorf bo'lsa, $\dim X = \dim Y$ o'rinli bo'ladi.

Fazoning qoplama ma'nosidagi ta'rifidan bevosita aytish mumkinki, $X = \varnothing$ bo'lgan taqdirdagina $\dim X \leq -1$ bo'ladi.

Tixonov fazolari nasliy xossaga ega bo'lgani uchun, agar bunday X da dim aniqlangan bo'lsa, uning ixtiyoriy fazoostisida ham dim aniqlangandir.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz. Bu teorema ko‘p hollarda ta’rif sifatida ham qabul qilinadi.

3.4.9-teorema. Har bir X normal fazo uchun quyidagi ikki shart ekvivalentdir:

1) $\dim X \leq n$;

2) X fazoning ixtiyoriy chekli ochiq qoplamasiga karrasi $\leq n$ bo‘lgan chekli ochiq qoplama chizish mumkin.

Agar X metrik hamda sanoqli bazaga ega bo‘lgan fazo bo‘lsa, 3.1-§ da keltirilgan o‘lcham $\dim$, 3.2-§ da keltirilgan o‘lcham $\dim$ va 3.4-§ da keltirilgan o‘lchamlar ind, Ind va $\dim$ lar o‘zaro ekvivalentdir. Ya’ni, sanoqli bazaga ega bo‘lgan metrik X fazo uchun quyidagi tenglik doimo o‘rinli:

$$\dim X = indX = IndX$$

3.5-§. R^n fazo va uning to‘plamostilari o‘lchami. Chiziq ta’rifi

O‘lchamlar nazariyasi nafaqat geometrik figuralarning, balki R^n Evklid fazosining ixtiyoriy mukammal to‘plamostilarining o‘lchovlar soni haqida gap yuritishga imkon beradi. Gohida Evklid fazosi R^n ning to‘plamostilari shunchalik murakkab bo‘ladiki, ularni o‘rganib chiqishda geometrik tasavvurimiz ko‘p hollarda ojizlik qilib qoladi. O‘lchamlar nazariyasida esa, teskari topologiyadan geometriyaga o‘tish jarayoni mavjud bo‘lib qoldi. Ixtiyoriy topologik fazolarning o‘lchamini geometrik tushunchalar poliedr va n o‘lchovli kublar o‘lchovlari soni yordamida xarakterlash mumkin. Bunday urinish birinchi marta o‘tgan asrning 20-yillari o‘rtalari va oxirlarida rus matematigi P.S. Aleksandrov tomonidan ε siljish, ε akslantirishlar va jiddiy akslantirish haqidagi teoremalar yordamida amalga oshirildi.

Aleksandrovning ε akslantirish haqidagi teoremasi topologik fazolarning eng muhim sinfi Evklid fazosi R^n dagi barcha to‘plamostilarning xarakteristikasini keltirib chiqardi. Ma’lum bo‘ldiki, bu to‘plamostilar barcha chekli-o‘lchovli yoki sanoqli bazaga ega bo‘lgan metrik fazolardan boshqa narsa emas ekan.

Jiddiy akslantirishlar haqidagi teoremasi esa, Aleksandrovning gomologik o‘lchamlar nazariyasini qurishni boshlab berdi va o‘lchamning algebraik xarakteristikasini vujudga keltirdi. Metrik fazolar sinfidan chetga chiqsak, keltirilgan uchala o‘lcham ta’rifi o‘zaro ekvivalent emas. Metrik fazolar sinfidan tashqarida asosan dim o‘lchami nazariyasi invariantdir. Ya’ni, o‘lchamning topologik fazodagi qoplama ma’nosidagi ta’rifi juda qo‘l keladi. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, metrik fazolar sinfidan tashqarida o‘lchamlar nazariyasi yetarlicha mazmunga ega va geometrikroqdir.

3.5.1-misol. Haqiqiy sonlar o‘qi R yoki aylana S^1 ni olaylik. Ularning ixtiyoriy x nuqtasi va bu nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun ularning shunday U atrofi topiladiki, $U \subset V$ va chegara $F_r U$ faqat ikkita nuqtadan iborat bo‘ladi. Ya’ni, ta’rifga ko‘ra, $indF_r U = \varnothing$ chegara. U holda $indR \le 1$ va $indS^1 \le 1$ ga ega bo‘lamiz. $indM \le indX$ va diskret fazolar nol o‘lchamli ekanligidan $IndR > 0$ tengsizlikni yoza olamiz. Shu sababli quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

$$IndR = IndI = 1 \quad indS^1 = 1$$

Evklid fazosi R^n yoki S^n sferaning ixtiyoriy x nuqtasi va uning ixtiyoriy V atrofi uchun shunday U atrof topiladiki, $U \subset V$ va $F_r U$ gomeomorf S^{n-1} bo‘ladi. Induksiya orqali ko‘paytmasini oson isbotlash mumkin: $indR^n \le n$, $indS^n \le n$ va $indI^n \le n$ tengsizliklar o‘rinli.

3.5.2-teorema. C_1 va C_2 yopiq to‘plamlar X fazoning o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlari va $A \subset X$ fazoostisi bo‘lib, $\dim A \le n$ bo‘lsin. U holda C_1 va C_2 larni ajratuvchi shunday B to‘plam topiladiki, u uchun $\dim A \cap B \le n-1$ o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teoremani induksiya metodi bilan isbotlaymiz. Agar $n = 0$ bo‘lsa, $\dim A = -1$ yoxud $\dim A = 0$ bo‘lib, teorema o‘rinli.

Endi $n > 0$ bo‘lsin. Ma’lumki, to‘plamga chekli sondagi elementlarni qo‘shsak, o‘lcham o‘zgarmaydi. Shu sababli A to‘plamni $A = D \cup E$ ko‘rinishda ifodalashimiz mumkin, bu yerda $\dim D \le n-1, \dim E \le 0$. Teorema shartiga ko‘ra, $n = 0$ bo‘lganda, C_1 va C_2 larni ayiruvchi shunday B to‘plam topiladiki, $B \cap E = \varnothing$ o‘rinli bo‘ladi. Bundan $A \cap B \subset D$, $\dim D \le n-1$ bo‘lganligi sababli $\dim A \cap B \le n-1$.

3.5.3-teorema. X topologik fazo va $\dim X \le n-1$ bo‘lsin. n tadan C_i va C^1_i yopiq to‘plamlar berilgan bo‘lib, ular $C_i \cap C^1_i = \varnothing$, $i = 0,1,\dots,n-1$ shartni qanoatlantirsin. U holda shunday n ta yopiq B_i

to'plamlar topiladiki, har bir B_i to'plam C_i va $C^{|}_i$ ni ajratadi va $B_0 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1} = \varnothing$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. Topologik fazo uchun $\dim X \le n-1$ o'rinli bo'lsin. Oldingi teoremaga ko'ra, shunday B_i yopiq to'plam topiladiki, B_1 to'plam C_1 va $C^{|}_1$ ni ayiradi va $\dim B_1 \le n-2$ bo'ladi. Yana shu teoremani qo'llasak, shunday B_2 to'plam C_2 va C^1_2 to'plamlarni ayiradi va $\dim B_1 \cap B_2 \le n-3$ bo'ladi. Oldingi teoremani qo'llash natijasida n ta B_i yopiq to'plamlar topiladiki, ular C_k va $C^{|}_k$ ni ayiradi va $\dim(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k) \le n-k-1$, $k = 1,2,...,n$ o'rinli bo'ladi. Agar $n = k$ bo'lsa, $\dim(B_1 ... \cap B_{n-1}) = -1$, bu esa, faqat $\varnothing$ to'plam uchun o'rinlidir. Ya'ni, $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n = \varnothing$.

3.5.4-misol. I^n kub berilgan bo'lsin, $I^n \subset R^n$ – Evklid fazosi. Ma'lumki, ixtiyoriy $x \in I^n$ uchun $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $|x_i| \le 1$ shart o'rinlidir. $C_i = \{x \in I^n : x_i = 1\}$; $C^1_i = \{x \in I^n : x_i = -1\}$. Agar B_i yopiq to'plam Ci va C^1_2 larni ayirsa, u holda $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \ne \varnothing$.

Isbot. Agar B_i yopiq to'plam Ci va C^1_2 larni ayirsa, u holda ta'rifga ko'ra, $X \setminus B_i = U_i \cap U^1_i, C_i \subset U_i, C^1_i \subset U^1_i$ $U_i \cap U^1_i = \varnothing$ o'rinli.

U_i va $U^{|}_i$ lar $I^n \setminus B_i$ to'plamda ochiq bo'lgani uchun ular I^n da ham ochiq to'plamdir. Har bir $x \in I$ nuqta uchun $\vec{V}(x)$ vektor olamiz. $V(x)$ ning $i-$ koordinatasi $\pm\rho(x, B_i)$ dan iborat bo'lib, agar $x \in U_i$ bo'lsa, $+\rho(x, B_i)$ olinadi; agar $x \in U^1_i$ bo'lsa, $-\rho(x, B_i)$ olinadi.

Har bir $x \in I^n$ nuqta uchun bunday moslikda $f(x)$ deb, x nuqtadan boshlab $\vec{V}(x)$ qo'ysak, shu $\vec{V}(x)$ ning uchini $f(x)$ nuqta deb olamiz. $\overline{T}^n$ va I^n fazolar gomeomorf bo'lganligi tufayli Brauer teoremasini qo'llash mumkin. Brauer teoremasiga ko'ra, bu uzluksiz akslantirishda shunday ishoralar qonuniyatiga ko'ra, har qanday holda ham $f(x) \in I^n$ o'rinlidir. Natijada, $f : I^n \to I^n$ akslantirishga ega bo'lamiz. Bu akslantirish uzluksizdir.

$x^0 \in I^n$ nuqta topiladiki, $f(x^0) = 0$ o'rinli bo'ladi.

Ixtiyoriy i indeks uchun $\rho(x^0, B_i) = 0$, bundan $x^0 \in B_i$ deyishimiz mumkin. U holda $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \neq \varnothing$.

Endi quyidagini isbot qilamiz.

3.5.5-teorema. Ixtiyoriy n uchun $\dim I^n \geq n$ o'rinli.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\dim I^n \leq n-1$ bo'lsin. 3.5.3-teoremaga ko'ra, I^n kubning turli qarama-qarshi yoqlarini ayiruvchi n ta yopiq B_i to'plamostilar mavjud bo'lib, ular $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \overline{T} \varnothing$ shartni qanoatlantiradi. Bu esa, 3.5.4-misolda keltirilgan qoidaga ziddir. Demak, $\dim I^n \geq n$.

3.5.5-teorema va 3.5.1-misoldan quyidagi o'rinli.

3.5.6-teorema. Ixtiyoriy n butun son uchun $indR^n = indS^n = IndI^n = n$ tenglik o'rinlidir.

Sanoqli bazaga ega metrik fazolarda uchala o'lcham ekvivalent bo'l-ganligi tufayli quyidagi o'rinli.

3.5.7-teorema. Ixtiyoriy n butun son uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$indR^n = indS^n = IndI^n = n$

$\dim R^n = \dim S^n = \dim I^n = n$

$IndR^n = IndS^n = IndI^n = n$

Ma'lumki, $\overline{T}^n$ simpleks yopiq B^n sharga gomeomorf. Shu tufayli $\overline{T}^n$ ning chegarasi S^{n-1} ga gomeomorfdir. $n=2$ bo'lganda yopiq uchburchak $[a_0 a_1 a_2]$, tekislikdagi yopiq doiraga gomeomorfdir. Uchburchakning chegarasi (konturi) $[a_0 a_1] \cup [a_1 a_2] \cup [a_2 a_0]$ S^1 aylanaga gomeomorfdir. Shu sababli $n=2$ bo'lgan holda 3.3-§ da quyidagi teoremaning isboti keltirilgan.

3.5.8-teorema. R^n fazoda yopiq B^n shar va S^{n-1} uning $(n-1)$ o'lchamli chegarasi berilgan bo'lsin. S^{n-1} sferaning nuqtalarning qo'zg'almas qoldiradigan hech qanday uzluksiz $F: B^n \to S^{n-1}$ akslantirish mavjud emas. Boshqacha aytganda, S^{n-1} sfera B^n sharga retrakt bo'la olmaydi.

Quyidagi teorema to'plamostining ichki va chegaraviy nuqtalarining R^n fazoda invariantligi haqida Brauer teoremasidir.

3.5.9-teorema. X to'plam R^n ning ixtiyoriy to'plamostisi bo'lsin va $f:X \to Y$ gomeomorfizm bo'lsin va $f(X)=Y \subset R^n$. Agar $x \in X$ nuqta X ning ichki nuqtasi bo'lsa, $f(x) \in Y$ nuqta ham $f(X)$ ning ichki nuqtasi bo'ladi. Agar $x \in X$ nuqta X ning chegara nuqtasi bo'lsa, u holda $f(x)$ nuqta ham Y ning chegara nuqtasi bo'ladi. Xususiy holda agar A va B to'plamlar R^n ning gomeomorf to'plamlari bo'lib, A ochiq to'plam bo'lsa, u holda B ham ochiq to'plam bo'ladi.

Isbot. Bu teoremaning ichki nuqta chegaraviy nuqta uchun isbotini keltiramiz. Haqiqatan ham, x nuqta X ning ichki nuqtasi bo'lsin.

$S_r(x)$ bu nuqtaning shunday sferik atrofi bo'lsinki, $\overline{S_r(x)} \subset X$. Ko'ramizki, x nuqtaning X dagi $S_r(x)$da yotadigan atrofi qanday bo'lishidan qat'i nazar, $X \setminus U$ ni S^{n-1} ga akslantiruvchi uzluksiz akslantirish mavjud bo'ladiki, bu akslantirishni butun X ga davomlashtirish mumkin bo'lmaydi. S^{n-1} sifatida $\overline{S_r(x)}$ ning chegarasini, $f:X \setminus U \to S^{n-1}$ akslantirish sifatida esa, x nuqtadan $X \setminus U$ to'plamning S^{n-1} ga proeksiyasini olamiz. Bu proeksiyada S^{n-1} ning nuqtalari qo'zg'almas qoladi. Bu $f:X \setminus U \to S^{n-1}$ akslantirishni butun X fazoga davomlashtirish mumkin emas. Agar mumkin bo'lsa, ya'ni $f:X \to S^{n-1}$ o'rinli bo'lsa, S^{n-1} ning nuqtalari qo'zg'almas qolib, $\overline{S_r(x)}$ ham S^{n-1} ga uzluksiz akslantirish bo'ladi. Ya'ni, S^{n-1} sfera $\overline{S_r(x)}$ sharning retrakti bo'lib qolmoqda. 3.5.8-teoremaga ko'ra esa bu mumkin emas. Demak, R^n ichki nuqtalar invariant ekan.

Biz birinchi bobda ba'zi chiziqlar bilan tanishdik. Evklidning "Negizlar" asarida ham "chiziq — ensiz uzunlikdir" deb izohlangan. Yuqorida kiritilgan o'lchamlar chiziqni ta'riflashga imkon beradi.

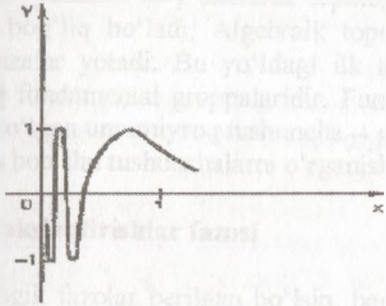
Olimlar deyarli 2500 yil mobaynida geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri chiziqqa turli ta'riflar berib kelishgan. Endi oxirgi aniq urinishni keltiramiz.

3.5.10-ta'rif. Bir o'lchamga ega bog'langan va kompakt metrik fazolar chiziq deyiladi.

Kompakt bo'lmagan hollarda esa, chiziqni quyidagicha ta'riflash mumkin.

3.5.11-ta'rif. Bir o'lchamli lokal kompakt chekli dizyunkt yopiq bog'lamli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lgan metrik fazolarga chiziq deyiladi.

Tekislikda yotgan chiziqlarga silliq chiziq deyiladi. Tekislikda ichki nuqtaga ega bo'lmagan bog'lamli yopiq kompakt to'plamlar silliq chiziq deb ataladi. Bu — chiziqqa Kantor tomonidan berilgan xarakteristika yoki ta'rifdir. Chiziqqa kesma, aylana, giperbola va quyidagi tekislik to'plamostisi misol bo'la oladi.



3.5.1-rasm

Bu chiziqni $\left\{(x,y)\in R^2 : y=\sin \frac{1}{x}; x\in (o,T]\right\}\cup\left\{(x,y)\in R^2 : x=0, -1\le y\le 1\right\}$ to'plam sifatida olishimiz mumkin. (3.5.1-rasm)

Ma'lum bo'lishicha, ixtiyoriy chiziqni I^3 kubda yotgan Menger universal chizig'ining birorta qismiga topologik ekvivalent deb olishimiz mumkin.

III bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Topologik fazolardagi $indX$; $IndX$ hamda $\dim X$ o'lchamlar, ularning asosiy topologik va geometrik xossalari, nol o'lchamli topologik fazolar asosan 5, 9, 34, 44, 58–59, 73–74, 92, 103, 105, 108 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, R^n fazo va uning fazoostilarining algebraik o'lchamlari, o'lchovlari, gomologik va kombinatorik o'lchamlari, qo'zg'almas nuqta haqidagi Brauer teoremasi va uning algebraik topologiya masalalariga tatbig'i jarayonlari 22 – 24, 31, 40, 56, 61 – 65, 85, 88, 95, 100 – 103 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda batafsilroq yoritilgan.

Topologik fazolarning geometrik xossalarini o'rganishda asosiy topologik usullardan biri algebraik vositalarni ishlatishdir. Topologiyada bu maqsadni amalga oshirish uchun qator usullar, topologik fazoga algebraik obyektlar, masalan, gruppalar, halqalar, maydon va algebralar mos qo'yilib o'rganila boshlandi. Topologiya masalalarini yechishga bunday funktorial yondashish mos algebraik masalaga olib keladi. Algebraik masalalarning "hosila" yechimi ko'p hollarda topologik masalalar yechimini aniqlash bilan bog'liq bo'ladi. Algebraik topologiya asosida shu ko'rinishdagi mulohazalar yotadi. Bu yo'ldagi ilk tushunchalardan biri topologik fazolarning fundamental gruppalaridir. Fundamental gruppalardan keyinroq paydo bo'lgan umumiyroq tushuncha – gomotopik gruppalar va gomologiyadir. Bu bob shu tushunchalarni o'rganishga bag'ishlanadi.

4.1-§. Uzluksiz akslantirishlar fazosi

X va Y topologik fazolar berilgan bo'lsin, barcha X fazodan Y fazoga uzluksiz akslantirishlar to'plamini $S(X,Y)$ bilan belgilaymiz. Ya'ni:

$$S(X,Y)=\{f:X\to Y: f - \text{uzluksiz va topologik fazo}\}.$$

Ma'lumki, $S(X,Y)$ ning elementlari uzluksiz akslantirishdan iborat bo'lib, bo'sh bo'lgan to'plamdir.

Bu to'plamning hamda X va Y fazolarning ko'pgina xossalari uzviy bog'liq. Agar X fazo bir nuqtadan iborat bo'lsa, u holda $S(X,Y)=Y$ bo'ladi.

Agar (Y,ρ) metrik fazo va X kompakt bo'lsa, u holda $S(X,Y)$ to'plam metrikasini qo'yidagicha aniqlasa bo'ladi:

$$\mu(f_1,f_2)=\sup\{\rho(f_1(x)f_2(x)):x\in Xf_1,f_2\in C(X,Y)\}.$$

Ya'ni, $(C(X,Y),\mu)$ metrik fazodan iborat ekan.

4.1.1-ta'rif. S(X,Y) to'plamda μ metrika orqali aniqlanadigan topologiya tekis yaqinlashuvchi topologiya deyiladi va τ_μ ko'rinishda belgilanadi.

$S(X,Y)$ to'plamda quyidagi to'plamostilarni ko'raylik:

$$\{x,U_i\}_{i=1}^{k} = f \in C(X,Y): f(x_i) \in U_i, i=\overline{1,k}\}$$

Bu yerda $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ va $U_1, U_2, ..., U_k$ lar Y fazoning ochiq to'plamlaridir. $\{x_1, U_1\}_{i=1}^{k}$ to'plamlar tizimi $S(X,Y)$ to'plamda birorta τ_p ma'lum topologiyaning old bazasi bo'ladi. Bu topologiya nuqtalar bo'yicha yaqinlashuvchi topologiya deyiladi. Ko'pincha bu fazo $(C(X,Y), \tau_\rho)$ ko'rinishda ham belgilanadi.

4.1.2-ta'rif. Agar X fazoning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan ochiq U to'plami uchun λ jamlanmada shunday element topilsa va bu element U da yotsa, X topologik fazoning bo'sh bo'lmagan to'plamostilari jamlanmasi λ fazoning π seti (turi) deyiladi.

Bikompakt π -to'rlarni olaylik, ya'ni π to'rning elementlari bikompakt to'plamdan iborat bo'lsin. X va Y – topologik fazolar bo'lsin, $F \subset X$ va $V \subset Y$, ya'ni X fazodagi F va Y fazodagi V to'plamlar uchun $O(F,V) = \{g : g \in C(X,Y), g(f0 \subset V\}$ belgilashni kiritamiz. X topologik fazoning π turi λ uchun $B\ \lambda = \{O(F,V) : F \in \lambda$, V esa, U dagi ixtiyoriy ochiq to'plam$\}$ belgilashlar kiritamiz.

$S\ \lambda\ (X,Y)$ deb old bazasi V_λ jamlanmali bo'lgan $S(X,Y)$ ning elementlar to'plamini olamiz.

4.1.3-teorema. X bikompakt, λ esa, X ning barcha yopiq to'plamostilari sistemasi va Y metrik fazo bo'lsin. U holda $S_\lambda(X,Y)$ topologik fazo topologiyasi $S(X,Y)$ to'plamdagi tekis yaqinlashuvchi topologiya bilan ustma-ust tushadi.

Isbot. Ta'rifdan ko'rinadiki, V_λ jamlanma tekis yaqinlashuvchi topologiyaning old bazasi ekanligini isbotlash lozim.

Buning uchun $V\ \lambda$ sistema elementlarining tekis yaqinlashuvchi metrikaga nisbatan ochiq to'plam ekanligini ko'rsatish kerak.

$F \subset X$ yopiq, $U \subset Y$ ochiq to'plamlar va $g \in O(F.U)$ bo'lsin. U holda $g\ (F)$ kompakt va $g\ \ (F) \subset U, \varphi(t) = \rho(t, Y \setminus U)$ uzluksizdir, bu yerda $t \in g(F)$ va bu funksiya $g\ (F)$ ning nuqtalarida musbat qiymatlar qabul qiladi. $\varphi(g(F))$ to'plamning kompakt ekanligidan $\in = \inf\{(\varphi g(F)) =$

$\rho(g(F);Y\setminus U\}$ musbat sondan iborat. Agar g va $h\in C(x,y)$ akslantirish orasidagi masofada ε dan kichik bo'lsa, u holda ixtiyoriy $t\in F$ nuqta va ixtiyoriy $y\in Y\setminus U$ nuqta uchun $\rho(h(t),y)\geq\rho(g(t),y)-\rho(h(t),g(t))>\varepsilon-\varepsilon=0$. Shu sababli $h(t)\in U(t)$ va $t\in F$ ning ixtiyoriy ekanligidan, $h\in O(F,U)$. Demak, old baza elementlari metrik tekis yaqinlashishga nisbatan ochiq to'plam ekan.

Ikkinchi bosqichda $V\chi$ sistematizim elementlarining ixtiyoriy chekli kesishmasi tekis yaqinlashuvchi topologiyaning bazasi ekanligini ko'rsatishimiz kerak. $g\in S(X,Y)$ va $\varepsilon>0$ berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $x\in X$ nuqta uchun shunday Ox atrofni olamizki, agar u uchun $t\in Ox$ bo'lsa, u holda $\rho(g(t),g(x))<\varepsilon/u$ bo'ladi. $\{Ox:x\in X\}$ ochiq qoplamadan $\{Ox_1,Ox_2,...,Ox_n\}$ qoplamani ajratib olamiz: $F_i=\{t:t\in X,\rho(g(t),g(x_1))<\varepsilon/u\}$ yopiq to'plam bo'ladi.

Ma'lumki, $Ox_i\subset F_i$. U holda $\{F_1,F_2,....,F_n\}$ sistema X ni qoplaydi.

$$U=\bigcap_{i=1}^{n}\{0(F_i;O\varepsilon/2\,g(x_i)):i=\overline{1,n}\}.$$

Ixtiyoriy $h\in U$ va $t\in F_i, i=\overline{1,n}$ larni olaylik. Bu holda $\rho(h(t),g(t))\leq\rho(h(t),g(x_i))+\rho(g(x_i)g(t))<\varepsilon/2+\varepsilon/2<\varepsilon$. Shu sababli h funksiya g funksiyaning ε atrofida (tekis yaqinlashish metrikasiga nisbatan) yotadi. $h\in U$ funksiyaning ixtiyoriy ekanligidan U to'plam to'la g ning ε atrofida yotadi. Bundan esa $g\in U$.

$C\lambda(X,Y)$ topologik fazo bayoni keltirilganda, bizni ikki chekka holat qiziqtiradi. X ni T_1 fazo deb olaylik. X topologik fazoning barcha bir nuqtadan iborat bo'lgan jamlanmasini esa R bilan belgilaylik. U holda $S_r(X,Y)$ fazo nuqtalar bo'yicha yaqinlashuvchi akslantirishlar fazosi deyiladi. $S_r(X,Y)$ fazoning topologiyasi esa, nuqtalar bo'yicha yaqinlashish topologiyasi deb yuritiladi.

Ikkinchi chekka holat – λ jamlanma X ning barcha yopiq bikompakt to'plamostilaridan iborat bo'lsin. $S(X,Y)$ fazodagi topologiya bikompakt ochiq topologiya deb yuritiladi. $S_r(X,Y)$ fazodagi topologiyani

τ_r bilan, $S(X,Y)$ fazoda kompakt ochiq topologiyani τ_s bilan belgilaylik.

Demak, 4.1.3-teoremadan ko'rinadiki, Y fazo metrik fazo bo'lganda, $\tau_\mu \equiv \tau_s$ o'rinli.

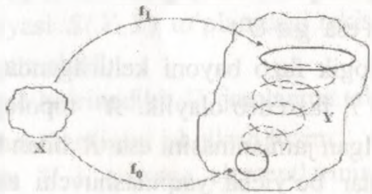
4.2-§. Uzluksiz akslantirishlar fazosida ekvivalentlik. Gomotopiya

$S(X,Y)$ fazo topologiyasi haqida hech qanday jumla aytilmagan bo'lsa, bu fazoda τ_c topologiya (kompakt ochiq) qaralayotgan deb hisoblaymiz. Ushbu paragrafda biz $S(X,Y)$ fazoda ekvivalentlik munosabatini aniqlaymiz, mazkur munosabatning ba'zi geometrik va algebraik xossasini keltiramiz.

4.2.1-ta'rif. Agar shunday $F: X[0,1] \to Y$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lib, u uchun $F(x,o) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$ $x \in X$ o'rinli bo'lsa, bu ikkiga f_0 va $f_1 \in C(X,Y)$ uzluksiz akslantirishlar gomotop deyiladi va $f \sim f_1$ ko'rinishda yoziladi.

Ko'p hollarda akslantirish f_0 va f_1 larni bog'lovchi gomotopiya deb ham yuritiladi.

Shunday qilib, agar $f_0 \sim f_1$ bo'lsa, shunday $t \in [0,1]$ sonli parametrga bog'liq bo'lgan $f_t X \to Y$ akslantirishlar to'plami mavjud ekanki, bu akslantirishlar uzluksiz ravishda f_0 va f_1 larni tutashtirar ekan.



4.2.1-rasm

4.2.1-rasmda o'zaro gomotop bo'lgan f_0 va f_1 akslantirishlar keltirilgan.

4.2.2-misol. X ixtiyoriy, $Y \subset R^n$ qavariq to'plamosti bo'lsin. f_0, $f_1 \in S(X,Y)$ ixtiyoriy uzluksiz akslantirishlar bo'lsin. U holda $F: XxI \to Y$ akslantirish $F(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$ formula bilan aniqlansa, $F(x,t)$ ifoda f_0 va f_1 lar orasida gomotopiya bo'ladi.

4.2.3-teorema. Gomotopiya $S(X,Y)$ to'plamda ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

Isbot. a) refleksivlik: $f \sim f$ sharti $F(x,t) \equiv f(x)$ gomotopiya yordamida o'rnatiladi;

b) simmetriklik: f_0 va f_1 ning gomotopiyasi $F(x,t)$ bo'lsin. U holda f_0 va f_1 orasida gomotopiya $\overline{F}(x,t) = F(x,1-t)$ orqali aniqlanadi. Bundan $f_0 \sim f_1$;

d) $f_0 \sim f_1$, $f_1 \sim f_2$ larning gomotopiyasi mos ravishda $F_1(x,t)$ va $F_2(x,t)$ lar bo'lsin. Quyidagi formulani qaraymiz:

$$H(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t); \text{ bunda } 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ F_2(x,2t-1); \text{bunda} \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Bu akslantirish uzluksizdir, chunki $H(x,t)$ akslantirish $Xx[0,\frac{1}{2}]$ va $Xx[\frac{1}{2},1]$ yopiq to'plamostilarning har bir qismida uzluksizdir. Ma'lumki, $H(x,t)$ akslantirish f_1 va f_2 lar orasida gomotopiyadir. Demak, akslantirishlarning gomotop bo'lishi munosabati $S(X,Y)$ fazoda ekvivalent munosabat ekan.

Gomotop akslantirishlar sinflari gomotopik sinflar deyiladi. Bunda, R bilan gomotop munosabatni belgilaymiz $S(X,Y)/R$. Faktor to'plam $\pi(X,Y)$ ko'rinishida belgilanadi. Bu ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, $\pi(X,Y)$ to'plam $S(X,Y)$ fazoning chiziqli bog'liq komponentalaridan iborat ekan. $S(X,Y)$ fazoda $f \in S(X,Y)$ akslantirishga gomotopik bo'lgan sinf $[f]$ ko'rinishida belgilanadi.

4.2.4-ta'rif. Agar shunday $g \in S(X,Y)$ akslantirish mavjud bo'lib, $gof \sim 1_x$ va $fog \sim 1_x$ o'rinli bo'lsa, $f \in C(X,Y)$ akslantirish gomotopik ekvivalentlik deyiladi.

4.2.5-ta'rif. Agar $S(X,Y)$ fazoda gomotopik ekvivalentlik mavjud bo'lsa, X topologik fazo Y topologik fazoga gomotopik ekvivalent yoki X va Y fazolar bir xil gomotopik tipga ega deyiladi.

Ma'lumki, gomeomorf topologik fazolar bir xil gomotopik tipga ega; Haqiqatan ham, agar $f: X \to Y$ gomeomorfizm bo'lsa, teskari aksonometriya $f^{-1} = g: Y \to X$ ni olsak, f va g lar uchun $gf = 1_x$ va $fg = 1_x$ lar o'rinli. Bu esa, X va Y fazolarning gomotopik ekvivalentligidir. Buning aksi o'rinli emas.

Masalan, $n > 0$ bo'lganda n o'lchamli $B^n \subset R^n$ sharni olsak, bu shar V^n va $x_0 \in V^n$ nuqtada bir gomotopik tipga ega. Bu fazolarning gomotopik ekvivalent ekanligini ko'rsatamiz. $f: x_0 \to B^n$ joylash va $g: B^n_x \to x_0$ doimiy akslantirish bo'lsin.

Ma'lumki, $gf = 1_{x0}$. $F: B^n[0.1] \to B^n$ gomotopiyani $F(x,t) = tx + (1-t)$ formulasi bilan aniqlaymiz. Bu $F([x,t]$ akslantirish fg va $1_B n: B^n \to B^n$ orasida gomotopiya ekan. Demak, bu B^n fazo $\{x_0\}$ nuqtaga gomotopik ekvivalent ekan. Lekin ular gomeomorf emas.

4.2.6-ta'rif. Agar ayniy $1_x: X \to X$ akslantirish doimiy $g: X \to x_0$ $x_0 \in X$ akslantirishga gomotop bo'lsa, X topologik fazo tortiluvchan fazo deyiladi. Ular orasidagi gomotopiya X ning nuqtaga tortilishi (x_0 nuqta) deyiladi.

4.2.7-teorema. Fazo tortiluvchan bo'lishi uchun u bir nuqtali fazoning gomotopik tipiga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. X tortiluvchan va $FXx[0,1] \to X$ esa, X ning $x_0 \in X$ ga tortilishi bo'lsin. $\{x_0\}$ nuqtadan iborat fazoni Ω bilan belgilaymiz. $\varphi: X \to \Omega$ doimiy akslatirish, $j: \Omega \to X$ — joylash. U holda $\varphi_0 j = 1 \bigcap$. φ esa, 1_x va $j\varphi$ larga gomotopiyadir. Demak, φ gomotopiya X va Ω lar orasidagi gomotopik ekvivalentlik ekan.

Bunga teskari jumlaning isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

4.2.8-misol. Silindr va aylana gomotop ekvivalentdir. S silindr va S^1 aylanani quyidagicha yozamiz:

$$S=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2=1;-1\le z\le 1\}$$

$$S^1=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2=1, z=0\}$$

$i:S^1\to C$ joylash akslantirish va $r:C\to S^1$ akslantirishni $r(x,y,z)=(x,y,0)$ formulasi orqali aniqlaymiz.

Ma'lumki, $r\cdot i=1:S^1\to S^1$. $F:Cx[0,1]\to C$ gomotopiya $F((x,y,z),t=(x,y,t,z)$ formula bilan aniqlanadi. Bu $F((x,y,z),t)$ ifoda $i\circ r$ va $1:S\to S$ orasidagi gomotopiya bo'ladi.

4.3-§. Yo'llarni ko'paytirish

Ixtiyoriy $f:[0,1]\to X$ uzluksiz akslantirish X fazoda yo'l deyiladi. $f(0)$ – yo'lning boshi, $f(1)$ esa, oxiri deyiladi. Boshqacha aytganda, X fazoda $f(0)$ dan $f(1)$ gacha bo'lgan yo'l deyiladi. Agar $f(t)$ yo'l bo'lsa, $f(1-t)=f(t)$ ham yo'l bo'ladi. Agar f va g lar X da yo'llar va $f(1)=g(0)$ bo'lsa, f va g yo'llarning ko'paytmasi $f*g$ yo'l bo'lib, u quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t);\ \text{agar } 0\le t\le \dfrac{1}{2} \text{ bo'lsa;} \\ g(2t-1);\ \text{agar } \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

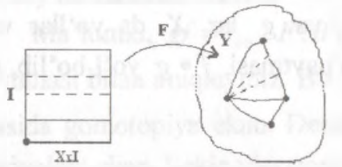
Yo'lga elementar misol sifatida o'zgarmas $\varepsilon_x:[0.1]\to X, \varepsilon_x(t)=x$ ni olishimiz mumkin, bu yerda $x\in X$ ning birorta nuqtasi $t\in[0.1]$ ixtiyoriy sondir. Boshqacha aytganda, yo'lni ma'lum bir vaqt birligi ichida o'tilgan masofa konturi desak, o'zgarmas yo'l — bu bir nuqtada turish ekan, ya'ni har doim bir nuqtada turiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, agar $f:[0.1]\to X$ yo'l bo'lsa, f ning uzluksizligidan $f:[0,1]$ obrazi X fazoda birorta egri chiziqdan iboratdir. X fazo Xausdorf fazo bo'lsa, $f([0.1])$ yopiq kompaktdir. Yuqorida keltirilgan Peano chizig'i, Kantor chizig'i, Urison-

Menger universal chizig‘i va Serpinskiy gilamlaridan ma’lumki, $f([0.1])$ to‘plam X topologik fazoda turli-tuman bo‘lishi mumkin ekan.

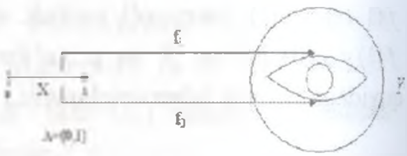
Agar $f:[0.1]\to X$ yo‘l bo‘lsa, u holda $F(x,t)=f(1-t)x$ gomotopiya yo‘lining o‘zgarmas yo‘lga $\varepsilon_{f(0)}$ gomotop ekanligini ko‘rsatadi.

Shunday holatlardan qochish maqsadida quyidagi tushunchani kiritamiz.

4.3.1-ta’rif. A to‘plam X ning qismi, $f:X\to Y$, $i=\overline{0,1}$ uzluksiz akslantirishlar bo‘lsin. f_0 va f_1 lar A to‘plamga nisbatan (ko‘p hollarda A ga nisbatan) gomotop deyiladi, qachonki, f_0 va f_1 lar orasida quyidagi $F:XxI\to X$ mavjud bo‘lib, $F(a,t)$ akslantirish. $a\in A$ bo‘lganda t ga bog‘liq bo‘lmasa. Boshqacha aytganda, ixtiyoriy $a\in A$ va $t\in[0,1]$ uchun $F(a,t)=f_0(a)$ Shuni aytish kerakki, ixtiyoriy aєA uchun $F(a,t)=f_0(a)$. Yuqoridagi ta’rifda keltirilgan F gomotopiya A ga nisbatan gomotopiya deyiladi va $f_0\sim f_1(relA)$ ko‘rinishida belgilanadi.



4.3.1-rasm



4.3.2-rasm

4.3.1-rasmda $X=1$ va $A=\{0\}\subset X$. Bu yerda F akslantirish A ga nisbatan gomotopiya bo‘ladi.

4.3.2-rasmda $X=1$ va $A=\{0;1\}\subset X$. Y esa, R^2 fazoda halqa. Bu yerda f_0 va f_1 lar A ga nisbatan gomotop emas, lekin f_0 va f_1 lar absolyut ma’noda gomotopdir. Ma’lumki, $A\neq\varnothing$ bo‘lganda A ga nisbatan gomotopiya oddiy ma’nodagi gomotopiya bilan ustma-ust tushadi.

4.3.2-teorema. $S(X,Y)$ fazodagi $\approx(relA)$ munosabat ekvivalent munosabatdir.

Isbot. Munosabat refleksivdir, chunki $F(x,t)=f(x)$ F va f lar orasida A ga nisbatan gomotopiyadir.

Munosabat simmetrikdir. $f \sim g(relA)$ va F uning gomotopiyasi bo'lsin. $G(x,t) = F(x,1-t)$ ni olsak, bu gomotopiya $g \sim f(relA)$ ni qanoatlantiradi. Demak, $f \sim g(relA)$ munosabat tranzitivdir. $F: f \sim g(relA)$ va $G: g \simeq h(relA)$ bo'lsin. Quyidagi gomotopiyani olamiz:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t); \text{ agar } 0 \le t \le \frac{1}{2} \text{ bo'lsa;} \\ G(x,2t-1); \text{ agar } \frac{1}{2} \le t \ge 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Ma'lumki, $H(x,t)$ uzluksiz f va h akslantirishlar orasida A ga nisbatan gomotopiya tashkil qiladi. Demak, $f \sim g(relA)$.

Oldingi bobda topologik fazoda retrakt tushunchasini kiritgan edik. Endi esa deformatsiyali retrakt tushunchasi bilan tanishamiz.

4.3.3-ta'rif. Agar shunday $r: X \to A$ retraksiya topilsa va uning uchun $ior = 1: X \to X$ o'rinli bo'lsa, $A \subset X$ to'plam X fazoda deformatsiyali retrakt deyiladi. Bu yerda $i: A \to X$ joylashtirishdir.

Boshqacha aytganda, agar shunday $F(x,t): X \times I \to X$ gomotopiya topilib, $F(x,0) = x$ barcha $x \in X$ uchun va $F(x,1): X \to A$ retraksiyadan iborat bo'lsa, A to'plam deformatsiyali retrakt deyiladi. Demak, aylana silindrning deformatsiya retrakti ekan. Shuni ta'kidlash kerakki, agar A to'plam X ning deformatsiyali retrakti bo'lsa, A va X to'plamlar gomotopik ekvivalentdir.

Akslantirishlarning davomlashtirish masalasi ba`zi bir xususiy hollarda yechimga ega. To'liq yechim hali mavjud emas. Masalan, fazo metrik yoki normal bo'lganda, bu masala yechimga egadir. Titse-Brauer teoremalarini oldingi boblarda keltirdik. Bu bobda esa, akslantirishni davomlashtirish masalasini gomotopiya bilan bog'liqlikda o'rganamiz.

$f: A \to Y$, $A \subset X$ akslantirish berilgan bo'lsin. Bu akslantirishni butun X fazoga davomlashtirish mumkinmi, ya'ni A to'plamdagi $F / A: \to U$ cheklovi berilgan f bilan ustma-ust tushadigan shunday $F: X \to U$ akslantirish mavjudmi? Bu $F: X \to V$ akslantirish $f: A \to Y$ davomlashtirish deyiladi.

4.3.4-teorema. $\varphi : S^n \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin, S^n birlik (radiusi 1 ga teng) sfera. U holda quyidagi ikki shart ekvivalentdir:

i) φ akslantirish o'zgarmas akslantirishga gomotop;

ii) φ akslantirishni butun sharga $V^{n+} \subset R^{n+1}$ davomlashtirish mumkin.

Isbot. i) $\Rightarrow ii$ (i) ekanligini ko'rsataylik, ya'ni $f \sim C$ bo'lsin, C – o'zgarmas akslantirish, ya'ni $S : S^n \to P$. P – nuqta. $P \in Y$ f va C lar orasidagi gomotopiya

$F : S^n xI \to Y$ bo'lsin. f akslantirishning davomi $f' : B^{n+1} \to Y$ ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f'(x) = \begin{cases} p; \text{ agar } 0 \leq \| x \| \leq \frac{1}{2} \text{ bo'lsa;} \\ F(x \| x \|, 2 - 2 \| x \|); \text{ agar } \frac{1}{2} \leq \| x \| \leq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Ma'lumki, $f_0^1 s^n = f$ tenglik o'rinli va f^1 akslantirish uzluksiz, chunki f^1 ning $\{x \in V^{n+1} : 0 \leq \| x \| \leq \frac{1}{2}\}, \{x \in B^{n+1} ; \frac{1}{2} \| x \| \leq 1\}$ yopiq to'plamlardagi cheklovi uzluksizdir.

Endi ii) => i)) bo'lishinini ko'ramiz. $f : S^n \to Y$ ning davomi $f^1 : B^{n+1} \to Y$ bo'lsin va $y_0 \in S^n$. $F(x,t) : S^n xI \to Y$ akslantirishni quyidagicha aniqlaymiz:

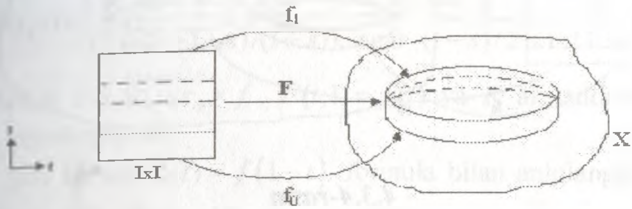
$$F(x,t) = f'[(1-t)x + ty_0]$$

Ma'lumki, $F(x.0) = f(x); F(x,1) = f'(y_0) = P \in Y$. Demak, $F(x,t)$ gomotopiya f va c o'zgarmas akslantirish bog'lovchi gomotopiya ekan.

4.3.5-ta'rif. Agar $f : [0,1] \to X, g : [0,1] \to X$ yo'llar $\{0,1\}$ f va g ga nisbatan gomotop bo'lsa, o'zaro ekvivalent deyiladi va $f \sim g$ ko'rinishda yoziladi.

f_0 va f_1 yo'llar ekvivalent bo'lsa, u holda shunday $F : I \times I \to X$ uzluksiz akslantirish, uning uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, mavjud bo'ladi.

$F(t,0)=f_0(t)$ va $F(t,1)=f_1(t)$, $t\in 1$, $F(0,s)=f_0(0)$ va $F(1,s)=f_0(1)$, $S\in 1$ bo'ladi (4.3.3-rasm).



4.3.3-rasm

Bu holda $F:f_0\sim f_1$ ko'rinishida yoziladi.

4.3.2-teoremadan kelib chiqadiki, $\sim$ munosabat X topologik fazodagi barcha yo'llar to'plami $S([0,1],X)$ dagi ekvivalentlik ekan. $C([0,1],X)$ ni olsak, 4.3.2-teoremadan ma'lum bo'ladiki, $\sim$ munosabat $S([0,1],X)$ da ekvivalentlik ekan. $f\in C([0,1],X$ yo'lni olsak, f ga ekvivalent yo'llar sinfini $[f]$ bilan belgilaymiz. Ikki ekvivalent yo'lning ko'paytmasi $[f][g]=[f*g]$ ham korrekt aniqlangandir. Demak, $[f]\in S[0,1],X)/\sim$.

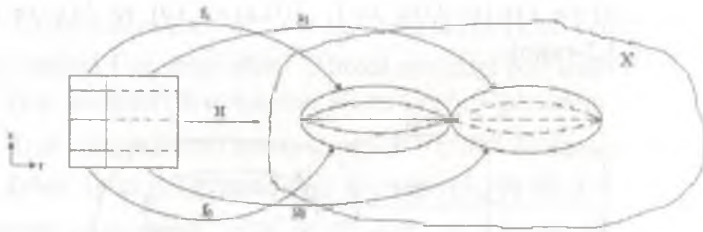
4.3.6-lemma. $f_0,f_1,g_0,g_1\in C(I,X),f_0(1)=g_0(0)$ va $f_1(1)=g_1(0)$ bo'lsin. Agar $f_0\sim f_1,g_0\sim g_1$ bo'lsa, u holda $f_0*g_0\sim f_1*g_1$

Isbot. $F:f_0\sim f_1$ va $G:g_0\sim g_1$ ekvivalentliklarni $\{0,1\}$ ga nisbatan ta'minlovchi gomotopiya $N{:}I\,x\,I\to X$ ni

$$N(t,s)=\begin{cases} F(2t,s), \text{ agar } 0\le t\le \frac{1}{2} \text{ bo'lsa;} \\ G(2t-1,s), \text{ agar } 1/2\le t\le 1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

formula bilan aniqlaymiz. Ma'lumki, $H(t,s)$ uzluksizdir va $F(1,s)=f_0(1)=g_0(0)G=(0,S)$.

f_0*g_0 va f_1*g_1 lar orasidagi $\{0,1\}$ ga nisbatan gomotopiya N dan iboratdir (4.3.4-rasm).



4.3.4-rasm

Quyidagi lemmani isbotsiz qabul qilamiz.

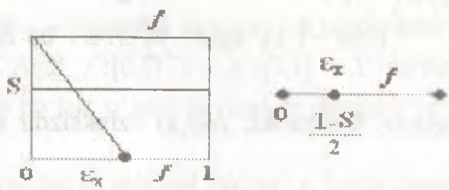
4.3.7-lemma. $f,g,h\in C(I,X)$ lar uchun, $f(1)=g(0)$ va $g(1)=h(0)$ o'rinli bo'lsin. U holda $(f*g)*h\sim f*(g*h)$.

Bu lemmadan ko'rinadiki, $f(1)=g(0))$ va $g(1)=h(0)$ yo'llar sinflarining ko'paytmasi $([f][g])[h]=[f]([g][h])$ assotsiativlik qonuniga bo'ysunadi. Umumiy holda $(f*g)h\neq f*(g*h)$ o'rinlidir. Ma'lumki, har bir $x\in X$ uchun $\varepsilon_x : I\to X$ o'zgarmas yo'l, $\varepsilon_x(t)=x$ formula orqali aniqlangan.

O'zgarmas yo'lning ekvivalent sinfi ko'paytmada o'zini chap yoki o'ng birlik element sifatida tutadi. Ya'ni, agar f yo'l x nuqtada boshlanib, u nuqtada tugasa, $[\varepsilon_x][f]=[f]=[f][\varepsilon_x]$ bo'ladi.

4.3.8-lemma. Agar $f\in C(I,X), f(0)=x$ va $f(1)=y$ o'rinli bo'lsa, $\varepsilon_x * f\sim f$ va $f*\varepsilon_y\sim f$ bo'ladi.

Isbot. Lemmani $\varepsilon_x * f\sim f$ shart uchun isbotlaymiz, $f*\varepsilon_y\sim f$ ning isboti shunga o'xshashdir.



4.3.5-rasm

4.3.5-rasmni ko'rib chiqamiz. $F: IxI \to X$ gomotopik akslantirishni quyidagicha aniqlaymiz:

$$F(t,s)=\begin{cases} x; \text{ agar } 0 \le t \le (1-s)/2 \text{ bo'lsa;} \\ f((2t-1+s)/(1+s)), \text{ agar } (1-s)/2 \le t \le 1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

U holda $F(t,0)=\varepsilon_x * f$. $F(t,1)=f(t)$ va F akslantirish {0,1}] ga nisbatan gomotopiyadir.

f yo'l uchun $\overline{f}(t)=f\left(1-t\right)$ formula bilan aniqlangan yo'lni $\overline{f}$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $f \sim g$ bo'lishi uchun $\overline{f} \sim \overline{g}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

4.3.9-lemma. $f \in C(I,X), f(0)=x$ va $F(1)=y$ bo'lsa, u holda $f*\overline{f} \sim \varepsilon_x$ va $\overline{f}*f=\varepsilon_y$ bo'ladi.

Isbot. $f*\overline{f} \sim \varepsilon_x$ uchun isbotlaymiz, $\overline{f}*f=\varepsilon_y$ shunga o'xshab isbotlanadi.

$f*f$ yo'l quyidagi formula bilan beriladi:

$$(f*\overline{f})(t)=\begin{cases} f(2t), \text{agar } 0 \le t \le 1/2 \text{ bo'lsa;} \\ F(2-2t), \text{ agar } 1/2 \le t \le 1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Biz bu yo'lni vaqtning yarmida f bo'ylab o'tamiz, vaqtning ikkinchi yarmida esa, yo'lni $\overline{f}$ bo'ylab, teskari yo'nalishda o'tamiz. Birlik vaqtda yo'lni x dan y gacha va teskari x gacha bosib o'tish uchun 2 birlik tezlik bilan harakatlanishimiz lozim bo'ladi. Agar $s \in I$ da tezlikni (1-s) ga proporsional almashtirsak, u holda ixtiyoriy s uchun x dan boshlanib $f(2/(1-s))$ ga boruvchi va keyin x ga qaytgan yo'lga ega bo'lamiz. $S=0$ bo'lganda $f*\overline{f}$ ga, $s=1$ bo'lganda esa, ε_x ga ega bo'lamiz. Shu sababli $F: IxI \to X$ akslantirishni quyidagi formula bilan aniqlaymiz:

$$F(t,s)=\begin{cases} f(2t)/1-S)), \text{ agar } 0 \le t \le \frac{1}{2} \text{ bo'lsa;} \\ f((2-2t)/(1-s)), \text{ agar } \frac{1}{2} \le t \le 1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

Ma'lumki, F uzluksiz va

$$F(t,0)=(f*f)(t), F(t,1)=f(0)=\varepsilon_x(t),$$

$F(0,s)=f(0)=(f*\overline{f})(0), F(1,s)=f(0)=(f*\overline{f})(1)$ tengliklar o'rinli.

Demak, $f*f\sim\varepsilon_x$.

Bu lemmadan ma'lumki, f ning ekvivalentlik sinfi $\overline{f}$ ekvivalentlik sinfiga teskarilik vazifasini o'tamoqda. Ya'ni, x dan boshlanib, y da oxiri bo'lgan f yo'l uchun $[f][\overline{f}]=[\varepsilon_x],[\overline{f}][f]=[\varepsilon_y]$ o'rinlidir.

Ta'kidlash mumkinki, agar $f\in C(I,X)$ bo'lsa, u holda $\overline{f}\in C(I,X)$.

4.4-§. Fundamental gruppa (guruh)

4.3-§ da ko'rdikki, $S(I,X)$ fazoda aniqlangan yo'llarning ekvivalentlik sinflari (agar $\{0,1\}$ ga nisbatan gomotop bo'lsa, yo'llar ekvivalent) aksiomalar gruppasining deyarli hammasini qanoatlantiradi. Bu to'plamda, ya'ni $C(I,X)$ da muammo shundaki, ko'paytirish doimo aniqlanmagan, chunki birlik element ma'lum ma'noda "suzadi". Bu qiyinchilikni bartaraf etish uchun yopiq yo'llar sinfini ko'rib chiqamiz.

4.4.1-tarif. Agar f uchun $f(0)=f(1)$ o'rinli bo'lsa, $f\in S(I,X)$ yo'l yopiq deyiladi. Agar $f(0)=f(1)$ bo'lsa, F yo'l X fazoning x nuqtasidagi yopiq yo'l deyiladi.

Ko'p adabiyotlarda yopiq yo'lni ilmoq (petlya) yoki halqa deb ham atashadi.

Ta'kidlash lozimki, X ning birorta x nuqtasida x da yopiq ixtiyoriy juft f va g lar uchun $f*g$ aniqlangan. $S(I,X)$ topologik fazoning x nuqtadagi yopiq yo'llar ekvivalentlik sinfini $\pi(X,x)$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $\pi(X,x)\subset C(I,X)$. 4.3.6-lemmaga ko'ra, agar $[f],[g]\in\pi(X,x)$ bo'lsa, u holda $[f]*[g]\in\pi(X,x)$ bo'ladi. $\pi(X,x)$ to'plam X topologik fazoning x nuqtadagi fundamental gruppasi deyiladi.

4.4.2-teorema. $\pi(X,x)$ to'plam $C(\tau,X)$ fazoda gruppa tashkil qiladi.

Ma'lumki, bu to'plamda * amali aniqlanadi, $[f],[g]\in \pi(X,x)$ bo'lsa, u holda $[f],[g]\in \pi(X,x)$ bo'ladi. Birlik elementi esa, $[\varepsilon_x]$ dan iborat.

Teskari element $[[f]^{-1}=[\overline{f}]$ tenglik bilan aniqlanadi. Amalning assotsiativligi 4.3.7-lemmadan kelib chiqadi. Buning uchun $[(g*h)oh]$ yozuvi o'rniga ko'p hollarda $[f*g*h]$ yozuvni ishlatamiz.

4.4.3-misol. Agar X chekli diskret topologik fazo bo'lsa, $\pi(X,x)=0$. Ya'ni, bu $\pi(X,x)$ gruppa elementlari $[\varepsilon_x]$ lardan iborat.

4.4.4-teorema. $x,y\in X$. Agar X fazoda x va y larni bog'lovchi yo'l mavjud bo'lsa, $\pi(X,x)$ va $\pi(X,y)$ gruppalar izomorf bo'ladi.

Isbot. X fazoning x va y nuqtalari orasidagi yo'l f bo'lsin, ya'ni $f\in C(I,X)$ va $f(0)=x$ va $f(1)=y$. Agar $g\in C(I,X)$ x nuqtadagi yopiq yo'l bo'lsa, u holda $(f*g)*f$ y nuqtada yopiq yo'l bo'ladi. Shu sababli, $U_f:\pi(X,x)\to\pi(X,y)$ akslantirishni $u_f(g)=[\overline{f}*g*f]$ formulasi bilan aniqlaymiz. Bu akslantirish gruppalar gomomorfizmi bo'ladi, chunki $u_f([g][h])=u_f[g*h]=[\overline{f}*g*h]=[\overline{f}*f*\overline{f}*h*f]=\overline{f}*g*h]$ $[\overline{f}*h*f]=u_f[g]u_f[f]$ o'rinlidir. Teskari yo'l $\overline{f}$ ni, ya'ni y va x lar orasidagi yo'lni qo'llab, $U_{\overline{f}}:\pi(X,y)\to\pi(X,x)$ ni $u_{\overline{f}}(h)=[f*h*\overline{f}]$ formulasi bilan aniqlaymiz. Tekshirish natijasida $u_{\overline{f}}u_f[g]=[g]$ va $u_f u_{\overline{f}}[h]=[h]$ larga ega bo'lamiz. Demak, u_f biektiv akslantirish ekan. Shu sababli U_f izomorf bo'ladi.

Bu teoremadan bevosita quyidagi natijaga ega bo'lamiz.

4.4.5-natija. Agar X fazo chiziqli bog'lamli bo'lsa, uning ixtiyoriy x va y elementlari uchun $\pi(X,x)$ va $\pi(X,u)$ gruppalar izomorf bo'ladi.

Bu natijada X chiziqli fazo bo'lganligi ahamiyatlidir. X ni bog'lamli fazoga almashtirib ham bo'lmaydi. Chunki keyingi bo'limlarda tanishamizki, X bog'lamli bo'lganida, $\pi(X,x)$ va $\pi(X,x)$ orasida doimo izomorfizm o'rnatib bo'lmaydi. X chiziqli fazo bo'lganida $\pi(X,x)$ belgilashlarda x ni tashlab yuborsak bo'ladimi? Bu biroz xavfli, chunki $\pi(X,x)$ va $\pi(X,u)$ orasida kanonik izomorfizm bo'lmaydi, sababi x va u lar o'rtasidagi har xil yo'llar turlicha izomorfizmni aniqlashi mumkin. X va Y topologik fazolarda $\varphi: X \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $S(I,X)$ va $S(I,Y)$ topologik fazolarga mos ravishda $\pi(X,x)$ va $\pi(Y,y)$ gruppalari bor. Quyidagi uch fakt ravshandir:

i) agar $f, g \in C(I,X)$ bo'lsa, $\varphi f \ \ \varphi g \in C(I,Y)$ bo'ladi.

ii) agar $f \sim g$ bo'lsa, u holda $\varphi f \sim \varphi g$ bo'ladi.

iii) agar $f(0) = f(1) = x$ bo'lsa, ya'ni f yo'l nuqtada yopiq yo'l bo'lsa, $f \in C(I,X)$ bo'ladi. $\varphi g \in C(I,Y)$, $\varphi f(0) = \varphi f(1) = \varphi(x)$, ya'ni φf yo'l $\varphi(x)$ nuqtadagi yopiq yo'l ekan.

Demak, agar $[f] \in \pi(X,x)$ bo'lsa, u holda $[\varphi f]$ korrekt aniqlangan va $[\varphi f] \in \pi(Y, \varphi(x))$ bo'ladi.

Shu sababli $\varphi * \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ akslantirishni $\varphi * = ([f]) = [\varphi f]$ tenglik bilan aniqlaymiz.

4.4.6-lemma. $\varphi * \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ gomomorfizmdir.

Haqiqatan ham, $\varphi * ([f][g]) = \varphi * [f * g] = [\varphi(f * g)] = [\varphi(\varphi * g)] =$ $[\varphi f][\varphi g] = \varphi * [f] \varphi * [g]$

$\varphi * \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ gomomorfizm $\varphi: X \to Y$ uzluksiz akslantirishning indutsirlangan gomomorfizmi deb yuritiladi.

Quyidagi ikki tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

4.4.7-teorema.

i) agar $\varphi: X \to Y$ va $\Psi: Y \to Z$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsa, u holda $(\Psi\varphi) * \Psi * \varphi *$;

ii) agar $1_x : X \to X$ ayniy akslantirish bo'lsa, $1_x * : \pi(X,x) \to (X,x)$ ayniy gomomorfizm.

4.4.8-natija. Agar $\varphi: X \to U$ gomomorfizm bo'lsa, u holda $\varphi * : \pi(X,x) \to \pi(U,\varphi(x))$ izomorfizmdir.

Demak, fundamental gruppa topologiyadan algebraga o'tish uchun bir vosita bo'lmoqda. Bu jarayonning xarakterli jihatlari quyidagilar:

i) bir topologik fazoga (belgili nuqtali) uning biz o'rgangan fundamental gruppasi mos qo'yilmoqda;

ii) topologik fazolar orasidagi akslantirishlarga (indutsirlangan) gruppalar gomomorfizmi mos qo'yilmoqda;

iii) uzluksiz akslantirishlar kompozitsiyasiga indutsirlangan gomeomorfizmlar kompozitsiyasi mos qo'yilmoqda;

iv) ayniy akslantirishga ayniy gomomorfizm mos qo'yilmoqda;

v) gomeomorfizmga esa, izomorfizm mos qo'yilmoqda.

Bayon qilingan topologiyadan algebraga o'tish jarayoni algebraik jarayon deb yuritiladi. Algebraik topologiya qanday masalalar bilan shug'ullanadi yoki algebraik topologiya qanday jumlaga yaxshi misol bo'ladi?

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

4.4.9-teorema. Agar $\varphi : X \to U$ gomotopik ekvivalentlik bo'lsa, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\varphi^* : \pi(X,x) \to \pi(U,\varphi(x))$ izomorfizmdir.

4.4.10-natija. Tortiluvchan fazolar trivial fundamental gruppaga ega.

4.4.11-ta'rif. Agar X chiziqli bog'lamli va ixtiyoriy nuqtasida $\pi(X,x) = \{1\}$ o'rinli bo'lsa, x topologik fazo bir bog'lamli deyiladi.

Demak, tortiluvchan fazolar bir bog'lamli ekan. Quyidagi teoremani ham isbotsiz keltiramiz.

4.4.12-teorema. X va Y topologik fazolar chiziqli bog'lamli bo'lsin. XxY ko'paytmaning fundamental gruppasi bu fazolar fundamental gruppalarining ko'paytmasiga izomorfdir. Ya'ni, $\pi(X \times Y) = \pi(X) \times \pi(Y)$.

Biz o'rgangan $\pi(X, x_0)$ fundamental gruppa ko'p hollarda $\pi_1(X,x)$ ko'rinishda belgilanadi, chunki 1 indeks fundamental gruppa ta'rifidagi yo'lda $S(I,X)$ fazoning $[0,1] = I$ ning bir o'lchamli fazo bo'lganligi uchun olinmoqda.

Umumiy holda $\pi_n(X_1, X_0)$ fundamental gruppaning akslantirishlarini $S(I^n, X)$ fazodan olish mumkin. Bu $\pi_n(X_1, X_0)$ fundamental gruppa X fazoning x_0 nuqtadagi n o'lchamli gomotopik gruppasi deyiladi. Bu ta'rif bilan qisqacha tanishtiramiz.

I^n kub, ya'ni $I^n = IxIx...xIx....xI^n, \partial I^n$ to'plam uning cheti, ya'ni $\partial I^n = \{x \in I^n : x = (x_1...x_n), x_1 = 0 \text{ yoki } 1\}$.

$\pi_n(X, x_0)$ to'plam ∂I^n ga nisbatan gomotopik sinflardan iborat bo'lib, $f \in C(I^n, X)$ akslantirishlar $f(\partial I^n) = x_0$ shartni qanoatlantiradi.

$[f][g] = [f * g]$ ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n) \text{ agar } 0 \le t_1 \le 1/2 \text{ bo'lsa;} \\ g(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n) \text{ agar } 1/2 \le t_1 \le 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bunday aniqlangan ko'paytirish amali korrektdir va shu sababli $\pi_n(x_1,x_0)$ gruppa sturukturasini beradi. Albatta, $n=1$ bo'lsa, $\pi_n(X,x_0)$ fundamental gruppaga ega bo'lamiz. $\pi_n(X,x_0)$ fundamental gruppa har doim ham abel gruppasi emas, lekin $n\geq 2$ bo'lganda, $\pi_n(X,x0)$ doimo Abel gruppasidir.

4.5-§. Aylana va ba'zi sirtlarning fundamental gruppasi

Bu paragrafda aylananing fundamental gruppasini hisoblaymiz va uning butun sonlar to'plami Z ga izomorf ekanligini ko'rsatamiz. So'ngra sirtlar tor, sfera, proektiv RP^2 fazolarning fundamental gruppalarini aniqlaymiz.

4.5.1-rasm

Ixtiyoriy $f\in C(I,S^1)$ yopiq yo'lni olaylik, bunda $x_0\in S^1, f(0)=1$ dan iborat bo'lsin. Har bir bunday $f\in C(I,S^1) f(0)=x_0$ S^1 yopiq yo'lni olsak, aylanani bir necha marta o'ralgan, deb tushunish mumkin. Bu o'ramlar sonini shu yopiq $f\in C(I,S)$ yo'lning darajasi deyishimiz mumkin, ya'ni $x_0\in S^1$ nuqtadan har bir $f\in C(I,S^1)$ yopiq yo'lga birorta butun son n yoki n mos qo'yilgan desak bo'ladi. Agar aylanani o'ragan yopiq yo'l soat miliga teskari n marta o'ralgan bo'lsa, bu son n deb olinadi. Shuni ta'kidlash mumkinki, agar ularning darajalari teng bo'lsa, ikki yopiq yo'l faqat va faqat ekvivalentdir ($\{0,1\}$ ga nisbatan gomotop). Shunday qilib, har bir n son uchun darajasi n ga teng bo'lgan yopiq yo'l mavjuddir.

Yopiq yo'lning aniq va qat'iy ta'rifini keltirish uchun haqiqiy sonlar o'qi R va $e(t)=e^{\pi it}$ formula bilan aniqlangan uzluksiz $e:R\to S^1$ ni olaylik. Geometrik nuqtai nazardan haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'ini spiral shaklida tasavvur qilamiz, proeksiyani e akslantirish deb olamiz (4.5.1-rasm).

Bu holda aytishimiz mumkinki, $e^{-1}(1)=Z$. Fikrimiz shundan iboratki, agar $f\in C(I,S)$ uchun $f(0)=f(1)=1$ o'rinli bo'lsa, shunday yagona $\overline{f}\in C(I,S)$ topiladiki, uning uchun $\overline{f}(0)=0$ va $e\overline{f}=f$ o'rinli bo'ladi. Bu yerda bu $\overline{f}$ akslantirish f akslantirishning tiklanmasi (podnyatiya) deyiladi. Demak, $f(1)=1$, u holda $\overline{f}(1)=e^{-1}(1)=Z$. Bu butun son f akslantirishning darajasi deyiladi.

4.5.1-lemma. Aytaylik, $U\subset S^1\{1\}$ ochiq to'plam va $V=I\cap e^{-1}(U)\subset R$ bo'lsin. U holda $e^{-1}(U)$ to'plam $V+n=\{v+n:v\in V\}$ $n\in Z$ ko'rinishdagi ochiq to'plamlarning dizyunkt birlashmasidan iborat bo'lib, ularning har birini e gomeomorf tarzda U ga akslantiriladi.

Isbot. Aytishimiz mumkinki, U ochiq interval, ya'ni $U=\{2\pi it:0\leq a\leq t\leq b\leq 1\}$ a,b sonlar. U holda $V=(a,b)$ va $V+n=(a+n,b+n)$. Ma'lumki, $\ell^{-1}(U)$ to'plam $V+n$, $n\in N$ ko'rinishdagi ochiq to'plamlarning dizyunkt birlashmasidan iborat. Aytaylik, $e_n=e(a+n,bb+n)$ bo'lsin. Ma'lumki, l_n uzluksiz va biektiv. e_n^{-1} ning uzluksizligini tekshirish uchun $x\in(a+n,b+n)$ nuqtani olamiz va shunday kichik $\varepsilon>0$ olamizki, $x\in W=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\subset W$ o'rinli bo'lsin. W kesma kompakt bo'lgani va S^1 Xausdorf bo'lgani uchun $e_n:W\rightarrow \ln(W)$ gomeomorfizmni aniqlaydi. $\ln(x)$ nuqta $\ln(x)$ yoyning oxiri bo'la olmaydi, chunki unday holda $\ln^1$ gomeomorfizmda $\ln(x)\setminus\ln(x)$ bog'lamli to'plam obrazi bog'lamsiz $W\setminus\{x\}$ to'plam bo'lishi mumkin. Shu sababli $\ln(W)$ to'plam $\ln(x)$ nuqtaning S^1 dagi va U dagi ochiq atrofidir va e_n^{-1} akslantirishning bu to'plamlardagi cheklovi (cheklanishi) gomeomorfizmdir. Demak, $e(x)$ funsiyada nuqtada uzluksiz, $x\in(a+n,b+n)$ nuqtaning ixtiyoriyligidan e_n^{-1} akslantirish $x\in((a+n,b+n))=U$ da uzluksizdir. Shu sababli e_1 — gomemorfizm.

Shuni ta'kidlash kerakki, 4.5.1-lemma $S^1\setminus\{x\}$ uchun o'rinli, bu yerda $x\in S^1$ ning ixtiyoriy natijasidir.

4.5.2-natija. Agar akslantirish $f:X\rightarrow S^1$ syurektiv bo'lmasa, u holda f nolga gomotop bo'ladi.

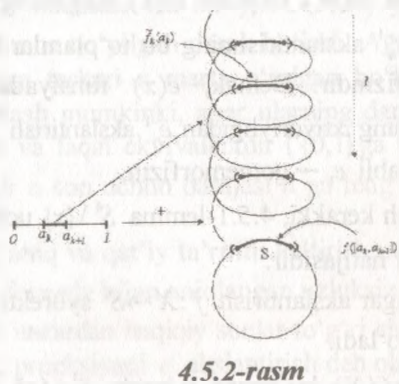
Isbot. Agar $x\varepsilon\overline{f}(X)$ bo'lmasa, u holda $S^1\setminus\{x\}$ fazo (0,1) ga gomeomorfdir. ($x=e^{2\pi is}$ va $S^1=\{e^{2\pi is}:s\leq t\leq 1+s\}$). Bu yerda (0,1) interval tortiluvchan fazodir.

4.5.3-teorema. Har bir uzluksiz $f\in C(I,S)$ akslantirish uchun uning tiklamasi $\overline{f}\in C(I,R)$ mavjuddir.

Vaholanki, agar $x_0 \in R$ birorta nuqta bo'lib, $l(x_0) = f(0)$ bo'lsa, u holda shunday yagona $\overline{f}$ tiklama topiladiki, u uchun $\overline{f}(^{-1}0) = x_0$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, ixtiyoriy $x \in S^1$ uchun U_x uchun shunday ochiq atrof bo'lsinki, $e^{-1}(Ux)$ to'plam R da dizyunkt ochiq to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsin va ularning har birini eU_x ga gomeomorf akslantirsin.

$\{f^{-1}(U_x) : x \in S^1\}$ to'plamni I to'plamning $\{(x_j y_j) \bigcap I : j \in J\}$ ochiq qoplamasi ko'rinishida yozishimiz mumkin. I kesmaning kompakt ekanligidan uning $[0, t_1 + \varepsilon_1), (t_2 - \varepsilon_2), \ldots (t_n - \varepsilon_n, 1]$ ko'rinishdagi chekli qoplamasi mavjud, bu yerda $t_1 + \varepsilon_i > t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, i = 1n - 1$. Har bir $i = \overline{1, n}$ uchun bir $a_i \in (t_{i-1} - \varepsilon_{i+1}, t_i + \varepsilon_i)$ nuqtani olamiz. Ular uchun $0 = a_0 < a_1 <, \ldots, a_n = 1$ o'rinli bo'lsin. $f[a_i, a_{i+1}]$ to'plam S^1 ning S_i ochiq to'plamida yotib, bunda $e^{-1}(Si)$ to'plam R ning dizyunkt ochiq to'plamostilarining birlashmasidan iborat bo'lib, ularning har biri e akslantirish natijasida S_i ga gomeomorf akslanadi. Endi tiklanmani $k = 1, \ldots, n,$ bo'yicha induksiya yordamida aniqlaymiz.



4.5.2-rasm

$K = 0$ bo'lganda trivialdir. $f_0(0) = x_0$ va boshqa tanlash yo'q. Faraz qilaylik, tiklanma $\overline{f_k} : [0, a_k] \to R$ aniqlangan va yagona. Esga olamizki, $f([a_k, a_{k+1}] \subset S_k$ va $e^{-1}(S_k)$ to'plam $\ell / \{(W_j j \in J)\}$ ko'rinishdagi ochiq to'plamlarning dizyunkt birlashmasi bo'lib, ular uchun $\ell / W_j : W_j \to S_k$ akslantirish ixtiyoriy $j \in J$ uchun gomeomorfizmdir. Binobarin, $f_k(ak) \in W$, bu yerda $W \in \{W_1 : j \in J\}$ qandaydir element (4.5.2-rasm). $[a_k, a_{k+1}]$ chiziqli bog'liq bo'lganligi sababli ixtiyoriy $\overline{f_{k+1}}$ davomlashtirish $[a_k, a_{k+1}]$ ni W ga akslantirishi kerak. Bu yerda $\ell / W_j : W_j \to S_k$ cheklovchi gomeomorfizm bo'lgani uchun shunday yagona $P : [a_k, a_{k+1}] \to W$ akslantirish topiladiki, $(\ell_p = f[a_k, a_{k+1}])$ bo'ladi (aslida, p=($p = (\ell / w)^{-1} f$).

f_{k+1} akslantirishni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\overline{f_{k+1}}(S) = \begin{cases} \overline{f}_k(S), \text{agar } 0 \le s \le a_k, \text{ bo'lsa;} \\ P(S), \text{agar } a_k \le s \le a_k, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu akslantirish uzluksiz va tuzilishi bo'yicha yagona hamda $\overline{f_k}(a_k) = P(a_k)$ induksiyaga ko'ra $\overline{f}$ tiklanmaga ega bo'ldik.

Bu teorema $S(I, S^1)$ da yopiq yo'lning darajasini ta'riflashda qo'l keladi. $1 \in S^1$ nuqtadagi $f \in C(I, R)$ yopiq yo'l bo'lsin va $\overline{f} \in C(I, R)$ uning yagona tiklanmasi bo'lib, $f(0) = 0$. $e^{-1}(f(1)) = e^{-1}(1) = Z$ bo'lgani uchun $\overline{f}(1)$ — butun son. Shu son $\overline{f}$ ning darajasi deyiladi.

4.5.4-lemma. Har bir $F \in C(I^2, S^1)$ akslantirish $\bar{F} \in C(I^2, R)$ tiklanmaga ega. Vaholanki, agar $x_0 \in R$ va $\ell(x_0) = F(0,0)$ bo'lsa, u holda shunday yagona $\bar{F}$ tiklanma mavjudki, uning uchun $\bar{F}(0,0) = x_0$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. Oldingi teorema isbotidagi mulohazalarni davom ettiramiz. I^2 kvadrat kompakt bo'lganligi tufayli a_i va b_i sonlarni shunday tanlaymizki, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$0 = a_0 < a_i < \ldots < a_n = 1, 0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = 1$$

$F(R_{is}) \subset S_{is}$, bu yerda R_{is} to'g'ri to'rtburchak, $i = \overline{0, n} j = \overline{o, m}$.

$R_{is} = \{(t, s) \in I^2 : a_i \le t \le a_{i+1}; b_j \le s \le b_{j+1}\}$ S_{ij} to'plam S^1 dagi ochiq to'plam, u uchun $e^{-1}(S_{ij})$. Bu R dagi ochiq to'plamlarning dizyunkt birlashmasi bo‘lib, ularning har biri e natijasida S_{ij} ga gomeomorf akslanadi. Bu yerda to‘g‘ri to‘rtburchaklardagi $R_{i0}, R_{i1}, \ldots, R_{im} R_{i0}, R_{ii}, \ldots, \widetilde{F}$ tiklanma induksiya bo‘yicha oldingi teoremaga o‘xshab aniqlanadi. Qolgan ba’zi (isbotning) qismlarni tiklash o‘quvchiga havola.

4.5.5-natija. $f_0 f_1 \in C(I,S)$ lar S^1 ning l nuqtasidagi ekvivalent yo‘llar bo‘lsin. Agar $\bar{f}_0$ va $\bar{f}_1$ tiklanmalari bo‘lib, $\bar{f}_0(0)=\widetilde{f}_1(0)$ bo‘lsa, u holda $\bar{f}_0(1)=\widetilde{f}_1(1)$ bo‘ladi.

Isbot. f_0 va f_1 orasidagi $\{0,1\}$ ga nisbatan F gomotopiya bo‘lsin.

F bir qiymatli $\bar{F}: I^2 \to R$ gacha tiklanmaga ega bo‘lib, $\bar{F}(0,0)=\widetilde{f}_0(0)=\widetilde{f}_0(0)$. $F(t,0)=f_0(t)$ va $F(t,1)=f_1(t)$ bo‘lgani uchun $\widetilde{F}(t,0)=\widetilde{f}_0(t)$ va $\widetilde{F}(t,1)=\widetilde{f}_1(t)$, vaholanki, $\widetilde{F}(t,1)=\widetilde{f}_1(t)\bar{f}_0(1)$ dan $\widetilde{f}_1(1)$ gacha bo‘lgan yo‘l $\bar{F}(1,t)$, $\bar{F}(1,t)=f_0(1)=f_1(1)$. Bundan $F(1,t)$ o‘zgarmas (doimiy) yo‘l va $\widetilde{f}_0(1)=\widetilde{f}_1(1)\bar{f}_0$. Bundan ko‘rinadiki, $\bar{F}$ yo‘l f_0 va f_1 lar orasidagi $\{0,1\}$ ga nisbatan gomotopiyadir.

4.5.6-teorema. $\pi(S^1,1) \approx Z$.

Isbot. $\varphi : \pi(S^1,1) \to Z$ akslantirishni olamiz va uni $\varphi([f]) = \deg f$ ko‘rinishda aniqlaymiz; bu yerda $\deg f$ degf belgi f ning darajasini bildiradi. Ta’kidlaymizki, $\deg f = \widetilde{f}(1)$, bu yerda $\bar{f}$ akslantirish f ning yagona tiklanmasi bo‘lib, $\bar{f}(0)=0$. Oldingi natijaga ko‘ra, φ akslantirish korrekt aniqlangandir.

φ ning gruppalar orasidagi izomorfizm ekanligini ko‘rsatamiz. Oldin φ ning gomomorfizmligini ko‘rsataylik.

Aytaylik, $1_a(f)$ akslantirish f ftiklanmaning boshlanishi $a \in e^{-1}(f(0))$ bo‘lsin. Demak, $e_0(f)=\bar{f}\grave{a}\grave{a}e_\alpha(f)(t)=\bar{f}(t)+a$ birorta boshlanishi 1 da bo‘lgan S^1 yo‘ldir. Ma’lumki, $1_a(f*g)=1_a(f)*1_a(g)$, bu yerda $b=\bar{f}(1)+a$. Demak, agar $[g],[f] \in (S^1,1)$ bo‘lsa, u holda $([f][g])=\varphi([f*g])=[\bar{f}*g](1)=$ $\ell_0(f*g)=(\ell_0(f))*\ell_b(g))(1)=1_b(g)(1)=b+\bar{g}(1)=f(1)+\tilde{g}(1)=\varphi([f])+\varphi([g])$ bo‘ladi. Bu yerda $b=f(1)$. Demak, φ — gomomorfizm.

Endi φ akslantirishning syurektiv ekanligini ko'rsatamiz. $n \in Z$ uchun, aytaylik, $g: I \to R$ akslantirish $g(t) = nt$ tenglik bilan aniqlansin. U holda $egI \to S^1$ akslantirish 1 nuqtada yopiq yo'l bo'ladi. Bu yerda g akslantirish lg ning tiklanmasi bo'lgani tufayli uning uchun $g(0) = 0$. U holda $\varphi([eg]) = \deg(eg) = g(1) = n$. Bu φ ning syurektivligidir. Endi φ ning in'ektivligini ko'rsatish uchun $\varphi([f]) = 0$ deb faraz qilaylik, ya'ni $\deg f = 0$. f ning tiklanmasi $\tilde{f}$ esa, $\tilde{f}$ (0)= $\tilde{f}$ (1)=0 shartlarni qanoatlantiradi. R ning tortiluvchan ekanligidan $\tilde{f} \approx \tilde{\varepsilon}_0(rel\{0,1\})$. Boshqacha aytganda, shunday $F: I^2 \to R$ akslantirish topiladiki, uning uchun $F(0,t) = \tilde{f}(t)$, $F(1,0) = 0$ va $F(t,0) = F(t,1) = 0$, lekin $F(s,t) = (1-s)\tilde{f}(t)$ bo'lsa. Ammo $eF: I^2 \to S^1$ akslantirish quyidagi $eF(0,t) = f(t), eF(1,t) = 1eF(t,0) = eF(t,1)$ shartlarni qanoatlantiradi.

Shu sababli $f \approx \varepsilon_1(rel\{0,1\})$. Ya'ni, $[f] = 1 \in \pi(S^1:1)$. Bu φ ning inektivligini ko'rsatadi. Demak, φ izomorfizm ekan.

Tor $T = S^1 x S^1$ bo'lganligi tufayli bu teoremadan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi.

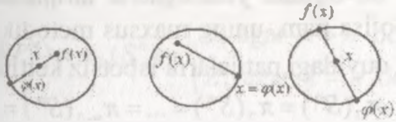
4.5.7-natija. $\pi(T,1) \approx ZxZ$.

Fundamental gruppa texnikasining qo'llanilishini quyidagi teoremada ko'rishimiz mumkin.

4.5.8-teorema. Ixtiyoriy $f: B^2 \to B^2$ uzluksiz akslantirish qo'zg'almas nuqtaga ega.

Isbot. Bu yerda V^2 — tekislikda markazi birorta nuqtada bo'lgan yopiq shar. Teskari isbot qilamiz, ya'ni ixtiyoriy $x \in V^2$ uchun $f(x) \neq x$ o'rinli bo'lsin.

Bunday holda $\varphi: V^2 \to V^2$ akslantirishni quyidagicha aniqlaymiz: $\varphi(x) = [f(x], x) \cap S^1$, bunda $[f(x], x)$ — boshi $f(x)$ va x nuqtadan o'tuvchi nur, S^1 esa, B^2 shar chegarasi — aylanadir (4.5.3-rasm).



4.5.3-rasm

φ ning uzluksizligi ravshan. $i: S^1 \to B^2$ joylash bo'lsa, $\varphi \cdot i = id$ ayniy akslantirishdir.

Bu holda quyidagi kommutativ diagrammaga ega bo'lamiz:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i"'] & & S^1 \\ & B^2 \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Bundan quyidagi diagrammaning kommutativligi kelib chiqadi:

$$\begin{tikzcd} \pi(S^1,1) \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi(S^1,1) \\ & \pi(B^2,1) \arrow[ur, "\varphi_*"'] & \end{tikzcd}$$

V^2 sharning tortiluvchi bo'lganligi tufayli $\pi(V^2,1) = 0$. U holda quyidagi diagrammaga ega bo'lamiz:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & Z \\ & 0 \arrow[ur, "\varphi_*"'] & \end{tikzcd}$$

Bunday bo'lishi esa, mumkin emas. Demak, ixtiyoriy uzluksiz akslantirish $f: B^2 \to B^2$ doimo qo'zg'almas nuqtaga ega ekan.

4.6-§. Ba'zi bir sirtlarning yuqori tartibli fundamental gruppalari

S^n sfera va boshqa sirtlarning yuqori tartibli fundamental $\pi_k(S^n)$ gruppasini hisoblash masalasi zamonaviy algebraik topologiyaning ko'pgina bo'limlarini rivojlantirishga undaydi. Bu masala, ya'ni yuqori tartibli fundamental gruppalarni hisoblash oxirigacha to'la yechilmagan bo'lsa ham, ba'zi hollarda turli qiziq muammolarni yechishga imkon yaratmoqda. Ikki holat: $k \leq n$ va $k > n$ bir-biridan yetarligacha farqlanadi. Birinchi holat: yetarlicha elementar bo'lsa ham, uning maxsus metodikasini rivojlantirish lozim. S^n sfera uchun quyidagi natijalarni isbotsiz keltiramiz:

$n > 1$ bo'lganda, $\pi_1(S^n) = \pi_2(S^n) = \ldots = \pi_{n-1}(S^n) = 0$ bo'ladi va agar $n \geq 1$ bo'lsa, $\pi_n(S^n) \approx Z$ bo'ladi.

Biz $n=1$ bo'lgan holning isbotini oldingi paragrafda keltirdik. Xususiy holda yuqoridagilardan, ko'rinadiki, S^n sfera o'zining hech bir nuqtasiga tortilmaydi.

Ikkinchi holat ham oxirigacha o'rganilmagan, chunki n va $n-k$ sonlarning ortishi bilan murakkablik ham orta boradi. Bu yerda ba'zi bir ma'lum bo'lgan quyidagi natijalarni keltiramiz:

$\pi_1(S^2)\approx Z$, $\pi_4(S^1)\approx Z_2,...,\pi_{n+1}(S^n)\approx Z_2,(\approx n\geq 3)$. Bu esa, $k\leq n$ bo'lganda, $\pi_k(S^n)=0$ tenglikka shubha uyg'otadi.

Shunday qilib, $n=1,2...$ bo'lganda, $\pi_n(S^n)$ gruppalar bir γ yasovchilik erkin abel gruppalari bo'lib, bu yerda γ_n ayniy $id_s n: S^n\to S^n$ akslantirishning gomotopik sinfidan iboratdir. Qisqa qilib aytganda, $\varphi: S^n\to S^n$ akslantirishlarning karralari $l\gamma_n$ sinfning shunday gomotopik sinflari ekanki, ular S^n sferani l marta o'z-o'ziga o'raydi. Shunda ham, agar $\varepsilon>0$ bo'lsa, φ akslantirish natijasida yo'naltirilganlik saqlanadi. Agar $\varepsilon<0$ bo'lsa, sferaning yo'naltirilganligi o'zgaradi.

4.6.1-misol. R^{n-1} fazoda markazi $(0,0,0,...,0)$ nuqtada bo'lgan S^n sferani olaylik. $\varphi(x_1,...,x_{n+1})=(-x_1,x_2,...,x_{n+1})$ tenglik bilan aniqlangan $\varphi: S^n\to S^n$ akslantirishni olsak, bu φ akslantirish karrasi γ_n ga teng bo'lgan gomotopik sinfni aniqlaydi.

Oldingi paragraflarda ta'kidlagan edikki, agar fazo x_0 nuqtaga tortiluvchi fazo bo'lsa, $\pi_n(X,x_0)=0$ bo'ladi. Xususiy holda R^n fazo va undagi V^n shar uchun ham quyidagilar o'rinli:

$$\pi_k(\overline{B}^n)=0;\pi_k(B^n)=0,\pi_k R^n)=0,n=1,2....$$

Proektiv $.RP^n$ fazolar uchun quyidagi natija o'rinlidir:

$$\pi_k(RP^n)=\pi_k(S^n)=\begin{cases}0, \text{ agar } k>n \text{ bo'lsa;}\\ Z, \text{ agar } k=n \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

$\pi_1(RP^3)\cong Z_2,\pi_2(RP^3)=0$ va $\pi_3(RP^3)\cong Z$.

φ ning uzluksizligi ravshan. $i: S^1 \to B^2$ joylash bo‘lsa, $\varphi \cdot i = id$ ayniy akslantirishdir.

Bu holda quyidagi kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i"'] & & S^1 \arrow[dl, "\varphi"] \\ & B^2 & \end{tikzcd}$$

Bundan quyidagi diagrammaning kommutativligi kelib chiqadi:

$$\begin{tikzcd} \pi(S^1,1) \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi(S^1,1) \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ & \pi(B^2,1) & \end{tikzcd}$$

V^2 sharning tortiluvchi bo‘lganligi tufayli $\pi(V^2,1) = 0$. U holda quyidagi diagrammaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & Z \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Bunday bo‘lishi esa, mumkin emas. Demak, ixtiyoriy uzluksiz akslantirish $f: B^2 \to B^2$ doimo qo‘zg‘almas nuqtaga ega ekan.

4.6-§. Ba’zi bir sirtlarning yuqori tartibli fundamental gruppalari

S^n sfera va boshqa sirtlarning yuqori tartibli fundamental $\pi_k(S^n)$ gruppasini hisoblash masalasi zamonaviy algebraik topologiyaning ko‘pgina bo‘limlarini rivojlantirishga undaydi. Bu masala, ya’ni yuqori tartibli fundamental gruppalarni hisoblash oxirigacha to‘la yechilmagan bo‘lsa ham, ba’zi hollarda turli qiziq muammolarni yechishga imkon yaratmoqda. Ikki holat: $k \le n$ va $k > n$ bir-biridan yetarligacha farqlanadi. Birinchi holat: yetarlicha elementar bo‘lsa ham, uning maxsus metodikasini rivojlantirish lozim. S^n sfera uchun quyidagi natijalarni isbotsiz keltiramiz:

$n > 1$ bo‘lganda, $\pi_1(S^n) = \pi_2(S^n) = \ldots = \pi_{n-1}(S^n) = 0$ bo‘ladi va agar $n \ge 1$ bo‘lsa, $\pi_n(S^n) \approx Z$ bo‘ladi.

Biz $n=1$ bo'lgan holning isbotini oldingi paragrafda keltirdik. Xususiy holda yuqoridagilardan, ko'rinadiki, S^n sfera o'zining hech bir nuqtasiga tortilmaydi.

Ikkinchi holat ham oxirigacha o'rganilmagan, chunki n va $n-k$ sonlarning ortishi bilan murakkablik ham orta boradi. Bu yerda ba'zi bir ma'lum bo'lgan quyidagi natijalarni keltiramiz:

$\pi_1(S^2)\approx Z$, $\pi_4(S^1)\approx Z_2,...,\pi_{n+1}(S^n)\approx Z_2,(\approx n\geq 3)$. Bu esa, $k\leq n$ bo'lganda, $\pi_k(S^n)=0$ tenglikka shubha uyg'otadi.

Shunday qilib, $n=1,2...$ bo'lganda, $\pi_n(S^n)$ gruppalar bir γ yasovchilik erkin abel gruppalari bo'lib, bu yerda γ_n ayniy $id_s n:S^n\to S^n$ akslantirishning gomotopik sinfidan iboratdir. Qisqa qilib aytganda, $\varphi:S^n\to S^n$ akslantirishlarning karralari $l\gamma_n$ sinfning shunday gomotopik sinflari ekanki, ular S^n sferani l marta o'z-o'ziga o'raydi. Shunda ham, agar $\varepsilon>0$ bo'lsa, φ akslantirish natijasida yo'naltirilganlik saqlanadi. Agar $\varepsilon<0$ bo'lsa, sferaning yo'naltirilganligi o'zgaradi.

4.6.1-misol. R^{n+1} fazoda markazi $(0,0,0,...,0)$ nuqtada bo'lgan S^n sferani olaylik. $\varphi(x_1,...,x_{n+1})=(-x_1,x_2,...,x_{n+1})$ tenglik bilan aniqlangan $\varphi:S^n\to S^n$ akslantirishni olsak, bu φ akslantirish karrasi γ_n ga teng bo'lgan gomotopik sinfni aniqlaydi.

Oldingi paragraflarda ta'kidlagan edikki, agar fazo x_0 nuqtaga tortiluvchi fazo bo'lsa, $\pi_n(X,x_0)=0$ bo'ladi. Xususiy holda R^n fazo va undagi V^n shar uchun ham quyidagilar o'rinli:

$$\pi_k(\overline{B}^n)=0;\pi_k(B^n)=0,\pi_k R^n)=0,n=1,2....$$

Proektiv RP^n fazolar uchun quyidagi natija o'rinlidir:

$$\pi_k(RP^n)=\pi_k(S^n)=\begin{cases}0, \text{ agar } k>n \text{ bo'lsa;}\\ Z, \text{ agar } k=n \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

$\pi_1(RP^3)\cong Z_2,\pi_2(RP^3)=0$ va $\pi_3(RP^3)\cong Z$.

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo‘la olmaydi.

Isbot. Bizga ma’lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo‘lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo‘lar edi, bu yerda $i:S^n\to\overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1}\to S^n$ retraksiya.

(1)
$$\begin{tikzcd}
B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\
& S^n &
\end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd}
\pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\
& S^n &
\end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko‘ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo‘lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}}\to\overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in\overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo‘lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya’ni $r(x)=S^n\bigcap[f(x),x]$. Natijada. $r:\overline{B^{n+1}}\to S^n, x\to r(x)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_s n:S^n\to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko‘rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to‘plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo‘ladi. Yoki agar $f:S\to S^1$ lokal gomeomorfizm bo‘lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x\in S^n$ uchun $\overline{f^1}(x)$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f:S^n \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ ko‘rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma’lumki, $R^{n+1}\setminus\{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko‘rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo‘lishi uchun $f:S^n \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ akslantirish $\bar{f}:\overline{B^{n-1}} \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ davomlashtirishga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f\sim 0$ gomotopiyani $h(x,t)=\bar{f}(t,x)x\in S^n, t\in[0,1]$ ko‘rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo‘lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f)\neq 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy $\overline{f}:\overline{B^{n+1}} \to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0\in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo‘ladi.

Bu natija ko‘p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko‘rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f:B^{n+1}\to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko‘phad $f(z)=z^m+a_1z^{m-1}+...+a_{m-1}z+a_m$ kompleks sonlar to‘plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba’zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya’ni, $n\geq 3$ bo‘lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n\geq 5$ bo‘lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n\geq 6$ bo‘lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n\geq 7$ bo‘lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o‘rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o‘lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning turli bo‘limlarida keng qo‘llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo‘la olmaydi.

Isbot. Bizga ma’lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo‘lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo‘lar edi, bu yerda $i:S^n\to\overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1}\to S^n$ retraksiya.

$$(1)\quad \begin{tikzcd} B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\ & S^n & \end{tikzcd}\quad (2)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\ & Z & \end{tikzcd}\quad (3)$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko‘ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo‘lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}}\to\overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in\overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo‘lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya’ni $r(x)=S^n\cap[f(x),x]$. Natijada. $r:\overline{B^{n+1}}\to S^n, x\to r(x)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_sn:S^n\to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko‘rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to‘plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo‘ladi. Yoki agar $f:S\to S^1$ lokal gomeomorfizm bo‘lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x\in S^n$ uchun $\overline{f^{-1}(x)}$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ ko‘rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma’lumki, $R^{n+1}\setminus\{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko‘rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo‘lishi uchun $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ akslantirish $\bar{f}:\overline{B^{n+1}}\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ davomlashtirishga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f\sim 0$ gomotopiyani $h(x,t)=\bar{f}(t,x)x\in S^n, t\in[0,1]$ ko‘rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo‘lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f)\neq 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy $\overline{f}:\overline{B^{n+1}}\to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0\in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo‘ladi.

Bu natija ko‘p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko‘rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f:B^{n+1}\to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko‘phad $f(z)=z^m+a_1z^{m-1}+...+a_{m-1}z+a_m$ kompleks sonlar to‘plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba’zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya’ni, $n\geq 3$ bo‘lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n\geq 5$ bo‘lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n\geq 6$ bo‘lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n\geq 7$ bo‘lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o‘rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o‘lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning turli bo‘limlarida keng qo‘llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo‘la olmaydi.

Isbot. Bizga ma’lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo‘lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo‘lar edi, bu yerda $i:S^n \to \overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1} \to S^n$ retraksiya.

$$\begin{tikzcd}
B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\
& S^n &
\end{tikzcd} \quad (1) \qquad
\begin{tikzcd}
\pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\
& S^n &
\end{tikzcd} \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\
& Z &
\end{tikzcd} \quad (3)$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko‘ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo‘lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}} \to \overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x \in \overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x) \neq x$ bo‘lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya’ni $r(x)=S^n \cap [f(x),x]$. Natijada. $r:\overline{B^{n+1}} \to S^n, x \to r(x)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_s n:S^n \to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko‘rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to‘plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo‘ladi. Yoki agar $f:S \to S^1$ lokal gomeomorfizm bo‘lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x\in S^n$ uchun $\overline{f^1(x)}$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ ko'rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma'lumki, $R^{n+1}\setminus\{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko'rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo'lishi uchun $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ akslantirish $\bar{f}:\overline{B^{n+1}}\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f\sim 0$ gomotopiyani $h(x,t)=\bar{f}(t,x)x\in S^n, t\in[0,1]$ ko'rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo'lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f)\neq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $\bar{f}:\overline{B^{n+1}}\to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0\in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo'ladi.

Bu natija ko'p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f:B^{n+1}\to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko'phad $f(z)=z^m+a_1z^{m-1}+...+a_{m-1}z+a_m$ kompleks sonlar to'plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba'zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya'ni, $n\geq 3$ bo'lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n\geq 5$ bo'lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n\geq 6$ bo'lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n\geq 7$ bo'lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o'rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o'lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo'lib, uning turli bo'limlarida keng qo'llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo‘la olmaydi.

Isbot. Bizga ma’lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo‘lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo‘lar edi, bu yerda $i:S^n\to\overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1}\to S^n$ retraksiya.

(1)
$$\begin{tikzcd} B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\ & S^n & \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} \pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\ & S^n & \end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko‘ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo‘lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}}\to\overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in\overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo‘lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya’ni $r(x)=S^n\cap[f(x),x]$. Natijada. $r:\overline{B^{n+1}}\to S^n, x\to r(x)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_sn:S^n\to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko‘rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to‘plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo‘ladi. Yoki agar $f:S\to S^1$ lokal gomeomorfizm bo‘lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x\in S^n$ uchun $\overline{f^{1}(x)}$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f:S^n \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ ko'rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma'lumki, $R^{n+1}\setminus\{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko'rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo'lishi uchun $f:S^n \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ akslantirish $\bar{f}:\overline{B^{n+1}} \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f\sim 0$ gomotopiyani $h(x,t)=\bar{f}(t,x)x\in S^n, t\in[0,1]$ ko'rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo'lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f)\neq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $\overline{f}:\overline{B^{n+1}} \to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0\in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo'ladi.

Bu natija ko'p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f:B^{n+1} \to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko'phad $f(z)= z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_{m-1}z + a_m$ kompleks sonlar to'plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba'zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya'ni, $n\geq 3$ bo'lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n\geq 5$ bo'lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n\geq 6$ bo'lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n\geq 7$ bo'lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o'rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o'lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo'lib, uning turli bo'limlarida keng qo'llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo‘la olmaydi.

Isbot. Bizga ma’lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo‘lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo‘lar edi, bu yerda $i:S^n\to\overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1}\to S^n$ retraksiya.

$$\begin{tikzcd}
B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\
(1) & S^n &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\
& S^n & (2)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\
& Z & (3)
\end{tikzcd}$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko‘ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo‘lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}}\to\overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in\overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo‘lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya’ni $r(x)=S^n\cap[f(x),x]$. Natijada, $r:\overline{B^{n+1}}\to S^n, x\to r(x)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_s n:S^n\to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko‘rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to‘plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da, $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo‘ladi. Yoki agar $f:S\to S^1$ lokal gomeomorfizm bo‘lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x \in S^n$ uchun $\overline{f^1(x)}$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f : S^n \to R^{n+1} \setminus \{0\}$ ko'rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma'lumki, $R^{n+1} \setminus \{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko'rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f) = 0$ bo'lishi uchun $f : S^n \to R^{n+1} \setminus \{0\}$ akslantirish $\bar{f} : \overline{B^{n+1}} \to R^{n+1} \setminus \{0\}$ davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f \sim 0$ gomotopiyani $h(x,t) = \bar{f}(t,x) x \in S^n, t \in [0,1]$ ko'rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r = 1$ bo'lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f) \neq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $\overline{f} : \overline{B^{n+1}} \to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0 \in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0) = 0$ bo'ladi.

Bu natija ko'p hollarda $\bar{f}(x) = 0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f : B^{n+1} \to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko'phad $f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_{m-1} z + a_m$ kompleks sonlar to'plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba'zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya'ni, $n \geq 3$ bo'lganda, $\pi_{n+2}(S^n) = Z_2; n \geq 5$ bo'lganda, $\pi_{n+3}(S) = Z_{24}; n \geq 6$ bo'lganda, $\pi_{n+4}(S^n) = O; n \geq 7$ bo'lganda, $\pi_{n+5}(S^n) = O$ lar o'rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o'lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo'lib, uning turli bo'limlarida keng qo'llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo‘la olmaydi.

Isbot. Bizga ma’lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo‘lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo‘lar edi, bu yerda $i:S^n\to\overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1}\to S^n$ retraksiya.

$$(1)\quad \begin{tikzcd} B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\ & Z & \end{tikzcd} \quad (3)$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko‘ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo‘lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}}\to\overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in\overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo‘lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya’ni $r(x)=S^n\bigcap[f(x),x]$. Natijada. $r:\overline{B^{n+1}}\to S^n, x\to r(x)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_sn:S^n\to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko‘rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to‘plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo‘ladi. Yoki agar $f:S\to S^1$ lokal gomeomorfizm bo‘lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x\in S^n$ uchun $\overline{f^{1}(x)}$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ ko'rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma'lumki, $R^{n+1}\setminus\{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko'rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo'lishi uchun $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ akslantirish $\bar{f}:\overline{B^{n+1}}\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f\sim 0$ gomotopiyani $h(x,t)=\bar{f}(t,x)x\in S^n, t\in[0,1]$ ko'rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo'lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f)\neq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $\overline{f}:\overline{B^{n+1}}\to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0\in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo'ladi.

Bu natija ko'p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f:B^{n+1}\to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko'phad $f(z)=z^m+a_1z^{m-1}+...+a_{m-1}z+a_m$ kompleks sonlar to'plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba'zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya'ni, $n\geq 3$ bo'lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n\geq 5$ bo'lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n\geq 6$ bo'lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n\geq 7$ bo'lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o'rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o'lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo'lib, uning turli bo'limlarida keng qo'llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo‘la olmaydi.

Isbot. Bizga ma’lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo‘lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo‘lar edi, bu yerda $i:S^n \to \overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1} \to S^n$ retraksiya.

$$\begin{tikzcd}
B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\
& S^n &
\end{tikzcd} \quad (1) \qquad
\begin{tikzcd}
\pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\
& S^n &
\end{tikzcd} \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\
& Z &
\end{tikzcd} \quad (3)$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko‘ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo‘lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo‘lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}} \to \overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in \overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo‘lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya’ni $r(x)=S^n \cap [f(x),x]$. Natijada. $r:\overline{B^{n+1}} \to S^n, x \to r(x)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_s n:S^n \to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko‘rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to‘plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo‘ladi. Yoki agar $f:S \to S^1$ lokal gomeomorfizm bo‘lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x\in S^n$ uchun $\overline{f^{1}}(x)$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f:S^n \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ ko'rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma'lumki, $R^{n+1}\setminus\{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko'rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo'lishi uchun $f:S^n \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ akslantirish $\bar{f}:\overline{B^{n-1}} \to R^{n+1}\setminus\{0\}$ davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f\sim 0$ gomotopiyani $h(x,t)=\bar{f}(t,x)x\in S^n, t\in[0,1]$ ko'rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo'lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f)\neq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $\overline{f}:\overline{B^{n+1}} \to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0\in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo'ladi.

Bu natija ko'p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f:B^{n+1}\to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko'phad $f(z)=z^m+a_1z^{m-1}+...+a_{m-1}z+a_m$ kompleks sonlar to'plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba'zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya'ni, $n\geq 3$ bo'lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n\geq 5$ bo'lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n\geq 6$ bo'lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n\geq 7$ bo'lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o'rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o'lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo'lib, uning turli bo'limlarida keng qo'llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo'la olmaydi.

Isbot. Bizga ma'lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n-1}}$ ning retrakti bo'lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo'lar edi, bu yerda $i:S^n \to \overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1}\to S^n$ retraksiya.

$$\begin{tikzcd} B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \quad (1) \qquad \begin{tikzcd} \pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\ & Z & \end{tikzcd} \quad (3)$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko'ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo'lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo'lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}}\to\overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo'zg'almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in\overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo'lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya'ni $r(x)=S^n\cap[f(x),x]$. Natijada. $r:\overline{B^{n+1}}\to S^n, x\to r(x)$ akslantirishga ega bo'lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_s n:S^n\to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko'rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o'rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to'plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo'ladi. Yoki agar $f:S\to S^1$ lokal gomeomorfizm bo'lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x \in S^n$ uchun $\overline{f^{1}(x)}$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f: S^n \to R^{n+1} \setminus \{0\}$ ko‘rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma’lumki, $R^{n+1} \setminus \{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko‘rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo‘lishi uchun $f: S^n \to R^{n+1} \setminus \{0\}$ akslantirish $\bar{f}: \overline{B^{n+1}} \to R^{n+1} \setminus \{0\}$ davomlashtirishga ega bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f \sim 0$ gomotopiyani $h(x,t) = \bar{f}(t,x) x \in S^n, t \in [0,1]$ ko‘rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo‘lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f) \neq 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy $\bar{f}: \overline{B^{n+1}} \to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0 \in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo‘ladi.

Bu natija ko‘p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko‘rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f: B^{n+1} \to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko‘phad $f(z)= z^m + a_1 z^{m-1} + ... + a_{m-1} z + a_m$ kompleks sonlar to‘plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba’zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya’ni, $n \geq 3$ bo‘lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n \geq 5$ bo‘lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n \geq 6$ bo‘lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n \geq 7$ bo‘lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o‘rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o‘lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning turli bo‘limlarida keng qo‘llaniladi. Gomo-

4.6.2-teorema. $\overline{B^{n+1}}$ yopiq sharning chegarasi S^n sfera, $\overline{B^{n+1}}$ sharga retrakt bo'la olmaydi.

Isbot. Bizga ma'lumki, $\pi_n(S^n)=Z$ va $\pi_n(\overline{D^{n+1}})=0$. Agar S^n sfera $\overline{B^{n+1}}$ ning retrakti bo'lsa, quyidagi (1) diagramma kommutativ bo'lar edi, bu yerda $i:S^n \to \overline{B^{n+1}}$ S^n ni $\overline{B^{n+1}}$ ga joylash akslantirishi, $r:V^{n+1}\to S^n$ retraksiya.

$$\begin{tikzcd} B^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "id_{S^n}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \quad (1) \qquad \begin{tikzcd} \pi(B^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_{\pi_n(S^n)}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "r_*"'] & & Z \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "id_Z"] \\ & Z & \end{tikzcd} \quad (3)$$

Natijada, π_n ning xossalariga ko'ra, (1) kommutativ diagrammadan (3) kommutativ diagrammaga ega bo'lamiz. Demak, r retraksiya mavjud emas.

Bu teorema yordamida qiziq va muhim teoremaga ega bo'lamiz.

4.6.3-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy $f:\overline{B^{n+1}}\to\overline{B^{n+1}}$ uzluksiz akslantirish kamida bitta qo'zg'almas nuqtaga egadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. Har qanday $x\in\overline{B^{n+1}}$ uchun $f(x)\neq x$ bo'lsin. $[f(x),x]$ yarim intervalni $[f(x),x]$ nur sifatida olib, uni S^n bilan kesishguncha davom ettiramiz. $[f(x),x]$ nur bilan S^n ning kesishgan nuqtasini $r(x)$ orqali belgilaymiz, ya'ni $r(x)=S^n\cap[f(x),x]$. Natijada, $r:\overline{B^{n+1}}\to S^n, x\to r(x)$ akslantirishga ega bo'lamiz. Bu akslantirish uzluksiz va $id_s n:S^n\to S^n$ ayniy akslantirishning davomlashtirishidan iboratdir. Oldingi teoremada ko'rsatildiki, bunday davomlashtirish mavjud emas. Bu ziddiyat teoremaning o'rinli ekanligini isbotlaydi.

4.6.4-misol. Kompleks sonlar to'plamida birlik aylana $S^1=\{z:|z=1\}$ da. $f(z)=z^n$ formula bilan berilgan akslantirishni olsak, $\deg f=n$ bo'ladi. Yoki agar $f:S\to S^1$ lokal gomeomorfizm bo'lsa, u holda bu ixtiyoriy

$x\in S^n$ uchun $\overline{f^1}(x)$ ning elementlari soni uning $\deg f$ ini tashkil qiladi. Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi, $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ ko'rinishdagi uzluksiz akslantirishlarning $\overline{B^{n+1}}$ gacha davomlashtirishlarida keng tatbiqqa ega.

Ma'lumki, $R^{n+1}\setminus\{0\}$ fazo S^n ga gomotopik ekvivalent. Shu sababli ularning gomotopik gruppalari izomorfdir. Shuning uchun akslantirish darajasi f vektor maydonning (yoki aylanish) xarakteristikasi deb yuritiladi va $\chi_s(f)$ ko'rinishida belgilanadi.

4.6.5-lemma. $\chi_{sn}(f)=0$ bo'lishi uchun $f:S^n\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ akslantirish $\bar{f}:\overline{B^{n-1}}\to R^{n+1}\setminus\{0\}$ davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu lemmaning isboti quyidagi izohdan bevosita kelib chiqadi: $\bar{f}$ davomlashtirish $f\sim 0$ gomotopiyani $h(x,t)=\bar{f}(t,x)x\in S^n, t\in[0,1]$ ko'rinishda aniqlaydi va aksincha. Bu yerda S^n markazi $O(0,0,...,0)$ nuqtada va $r=1$ bo'lgan sfera.

4.6.6-natija. Agar $\chi_s n(f)\neq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $\overline{f}:\overline{B^{n+1}}\to R^{n+1}$ davomlashtirish uchun shunday $x_0\in B^{n+1}$ nuqta mavjudki, $\bar{f}(x_0)=0$ bo'ladi.

Bu natija ko'p hollarda $\bar{f}(x)=0$ tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish uchun ishlatiladi, bu yerda $f:B^{n+1}\to R^{n+1}$ berilgan akslantirishdan iboratdir.

4.6.7-misol. Algebraning asosiy teoremasi: kompleks ko'phad $f(z)=z^m+a_1z^{m-1}+...+a_{m-1}z+a_m$ kompleks sonlar to'plamida m ta ildizga ega.

Aniq fazolar uchun ba'zi fundamental gruppalar hisoblanganligini keltiramiz. Ya'ni, $n\geq 3$ bo'lganda, $\pi_{n+2}(S^n)=Z_2; n\geq 5$ bo'lganda, $\pi_{n+3}(S)=Z_{24}; n\geq 6$ bo'lganda, $\pi_{n+4}(S^n)=O; n\geq 7$ bo'lganda, $\pi_{n+5}(S^n)=O$ lar o'rinlidir.

4.7-§. Singulyar gomologiya, fazoning n o'lchamli gomologiyasi va xossalari

Gomologiya nazariyasi zamonaviy matematikaning markaziy tushunchalaridan biri bo'lib, uning turli bo'limlarida keng qo'llaniladi. Gomo-

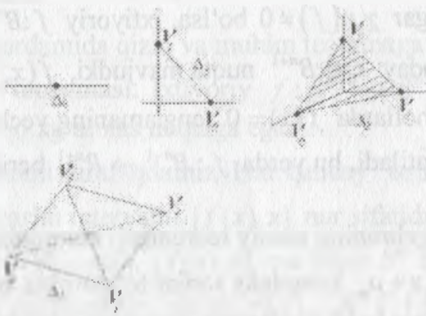
logiya ham gomotopik gruppalarga o‘xshab, aniqlanishi qiyin bo‘lgani bilan ularni hisoblash nisbatan osonroq kechadi.

Gomologiya nazariyasi ancha keng bo‘lgani tufayli uni kichik bir risolada to‘la bayon qila olmaymiz. Bu yerda uning asosiy g‘oyalarini berib, misol tariqasida fazolarining fundamental gruppalar bilan uzviy bog‘liqligini ko‘rsatamiz.

Gomologiya gruppasi ham topologik invariantdir. Gomologiya gruppasini hisoblash (aniqlash) nisbatan oson bo‘lganligi tufayli uni tatbiq qilish va o‘rganish topologiya va algebraik topologiyada keng qo‘llaniladi.

Gomologiya nazariyasi o‘lchamlar nazariyasi bilan ham chambarchas bog‘liqdir.

Bizga ma’lumki, R^{n+1} fazoda n o‘lchovli $\Delta_n = \{x = (x_0,...,x_n) \in R^{n+1}$ sipmleks $\sum_1^n = 0 \quad x_1 = 1, \quad x_1 \geq 0, i = o, n\}$ ko‘rinishidagi figura bo‘lib, $v_0 = (0,...,0), v_1 = (0,1,...,...,...,0)..., v_n = (0,0,....0,1)$ nuqtalar Δ_n ning uchlari deb yuritiladi. Demak, Δ_0 — nuqta, Δ_1 — kesma, Δ_2 — uchburchak va Δ_3 — tetraedr (4.7.1-rasm).



4.7.1-rasm

X topologik fazo berilgan bo‘lsin.

4.7.1-ta’rif. Ixtiyoriy $f \in C(\Delta_n, X)$ uzluksiz akslantirishning X fazodagi Δ_n ning obrazi n o‘lchovli singulyar simpleks deyiladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, X fazodagi O o‘lchovli simpleks — bu nuqtadan va 1 o‘lchovli simpleksga esa, x nuqtadagi yo‘ldan iborat ekan.

Ta’kidlashimiz mumkinki, singulyar simrleks xususiy xolda 1 o‘lchovli simpleks nuqta bshlishi mumkin.

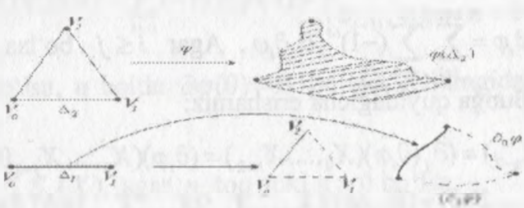
Haqiqatan ham, agar φ singulyar 1 o'lchovli simpleks bo'lsa, u holda $f(t)=\varphi(1-t,t)$ tenglik $f\in C(I,X)$ yo'lni ifodalaydi, bu $\varphi(v_0)$ va $\varphi(v_1)$ lar orasidagi yo'ldir. Buning teskarisi, ya'ni $f\in C(I,X)$ yo'l esa, $\varphi\in S(\Delta,X)$ bu yerda $\varphi(x_0,x_1)=f(x_1)$ desak, bir o'lchovli simpleksni aniqlaydi.

4.7.2-ta'rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\sum_{j\in} jm_j\varphi_j$ ko'rinishdagi ifoda X fazoda singulyar n o'lchovli zanjir deb ataladi, bu yerda:

$$\{\varphi_j : \varphi_j \in C(\Delta_n, X)\}$$

J – indekslar to'plami va $n_j\in Z,\{n_j : j\in J\}$ – sonlar to'plami va $n_j\in Z\{n_j : J\in J\}$ sonlar to'plamida ularning faqat chekli qismi noldan farqli. X topologik fazoning barcha singulyar zanjirlari to'plamini $S_n(X)$ deb belgilaymiz. Ma'lumki, $S_n(X)...\subset(\Delta_n,X)$ shartini qanoatlantiradi. $S_n(X)$ to'plamda qo'shish (yig'indi) amalini $\sum n_j\varphi_j+\sum m_j\varphi=\sum(n_j+m_j)\varphi_j$ ko'rinishida; nol elementni $\sum 0\varphi_j$ va $\sum n_j\varphi_j$ ga teskari (qarama-qarshi) elementni $\sum(-n_j\varphi_j)$ ko'rinishda aniqlasak, $S_n(x)$ to'plam qo'shish amaliga nisbatan abel gruppasini tashkil qiladi. Bundan $S_n(x)$ gruppaning assotsiativligi va kommutativligi ayon bo'ladi. Ushbu $S_n(x)$ gruppa ko'pgina xossalarga ega, lekin bu gruppa juda kengdir. Shu sababli $S_n(x)$ gruppaga birorta ekvivalentlik munosabatini kiritsak, u ekvivalentlik sinflariga ajralib, fundamental gruppa singari ravshanroq strukturaga ega bo'ladi.

$S_n(x)$ ga chegara operatori tushunchasini kiritamiz. Berilgan $\varphi\in S(\Delta_n,X)$ n no'lchovli simpleks uchun $n-1$ o'lchovli $\partial_j...\varphi\in S(\Delta_{n-1},X)$) simpleksni $\partial_j\varphi=(x_0,x_1,...,x_{n-1})=\varphi(x_0,x_1,...,x_{i-1}0x_i,...,x_{n-1})$ formulasi bilan aniqlaymiz, bu yerda $n=\overline{o,n-1}$ (4.7.2-rasmga qarang).



4.7.2-rasm

Ma'lumki, $S_n(x)$ va $S_{n-1}(x)$ gruppalardir. Bu gruppalar orasida $\partial_i : S_n(x) \to S_{n-1}(x)$ gomomorfizm aniqlanib, unda $\sum n_i \varphi_i$ ifoda $\sum n_i \partial_j \varphi_i$ ifodaga o'tadi.

4.7.3-ta'rif. Bu chegara (chegaraviy) operatori $\partial_i : S_n(x) \to S_{n-1}(x)$ quyidagi $\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \partial_3 ... + (-1)^n \partial_i = \sum_{i-0}^{n}$ formula bilan aniqlanadi.

Chegaraviy operator yordamida $S_n(x)$ gruppaning ikkita muhim gruppaostisini ta'riflash mumkin.

4.7.4-ta'rif. Agar $\partial s = 0$ bo'lsa, singulyar n o'lchovli $S \in S_n(X)$ zanjir n o'lchovli sikl deyiladi.

X fazodagi barcha n o'lchovli sikllar to'plamini $Z_n(X)$ bilan belgilaymiz.

Agar $e \in S_{n+1}(X)$ uchun $d = \partial e$ tenglik o'rinli bo'lsa, singulyar n o'lchovli $d \in S_n(X)$ zanjir n o'lchovli chegara deyiladi. X fazodagi barcha chegaralar to'plami $B_n(X)$ bilan belgilanadi. Aniqlanishiga va gruppa xossalariga ko'ra, bu ikki gruppa uchun quyidagi o'rinli bo'ladi:

$$Z_n(X) = \ker \partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$
$$B_n(X) = im : S_{n-1}(X) \to S_{n-}(X)$$

Demak, $Z_n(X)$ va $V_n(X)$ lar $S_n(x)$ gruppaning gruppaostilaridir. Shuni ta'kidlash mumkinki, barcha 0 o'lchovli zanjirlar 0 o'lchovli sikl tashkil qiladi, ya'ni $Z_0(X) = S_0(X)$. Ikkinchi tomondan, barcha n o'lchovli chegara n o'lchovli sikl bo'la oladi. Bu quyidagi teoremadan bevosita kelib chiqadi.

4.7.5-teorema. Ixtiyoriy $\varphi \in S(\Delta^n, X)$ uchun $\partial\partial\varphi = 0$ o'rinli.

Isbot. Aytaylik, $\varphi \in S(\Delta^n, X)$ bo'lsin. $\partial\partial\varphi$ ni hisoblaymiz. Ya'ni. $\partial\partial\varphi = \partial \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i \varphi = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi$. Agar $i \le j$ bo'lsa, $\partial_j \partial_j = \partial_i \partial_{j-1}$ o'rinli bo'ladi. Bunga quyidagicha erishamiz:

$$(\partial_j \partial_i \varphi)(X_0, ..., X_{n-2}) = (\partial_j(\partial_i \varphi)(X_0, ..., X_{n-2}) = (\partial_i \varphi)(X_0, ..., X_{j-2} 0 X_j, ..., X_{n-2}) =$$
$$\varphi(X_0, ..., X_{i-1} 0 X_j, .., X_{n-2}) = (\partial_{j+1}(\varphi))(X_0, ..., X_{i-1} 0 X_j, .., X_{n-2}) = (\partial_j \partial_i \varphi)(X_0, ..., X_{n-2})$$

Demak,

$$\partial\partial\varphi=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_j\varphi=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}=$$

$$(-1)^{i+j}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_j(\varphi)+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_j(\varphi)=0$$

$$(-1)^{i+j}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_j(\varphi)+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_j(\varphi)=0$$

Bundan ko'rinadiki, $V_n(X)$ gruppa $Z_n(X)$ ning gruppaostisi ekan. Demak, ikkala gruppa ham abel gruppasidir. Shu sababli $V_n(X)$ gruppa $Z_n(X)$ gruppaning normal gruppaostisidir. Demak, $Z_n(X)/V_n(X)$ faktor gruppa aniqlangandir.

4.7.6-ta'rif. $Z_n(X)/Z_n(X)$ faktor gruppa X topologik fazoning n o'lovli gomologik gouppasi deyiladi va $Z_n(X)$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshqacha aytganda, $Z_n(X)$ elementlari quyidagi: $s\sim s^1 \Leftrightarrow s-s^1\in V\cap(X), s-s^1\in Z_n(X)$, ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan ekvivalent sikllar sinfidan iboratdir. Bu holda s va s^1 sikllar gomologik deyiladi.

4.7.7-lemma. Agar X bir nuqtali fazo bo'lsa, u holda $Z_0(X)\approx Z$ va $n>0$ bo'lganda, $H_n(X)=0$.

Isbot. Ixtiyoriy $n\geq 0$ bo'lganda shunday yagona $\varphi(n)\in C(\Delta_n, X)$ singulyar n o'lchovli simpleks topiladiki, $S_n(X)=Z\{k\varphi_{(n)}:K\in Z\}$ o'rinli bo'ladi. $n>0$ bo'lganda:

$$\partial\varphi_n\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i\varphi(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i\varphi(n)=\begin{cases}0, \text{agar n toq bo'lsa;}\\ \varphi_{(-1)}, \text{agar } n>0 \text{ juft bo'lsa.}\end{cases}$$

$n=0$ bo'lsa, u holda $\partial\varphi(0)=0$ bo'ladi. Oldingidan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$Z_n(X)=\begin{cases}S_n(X), \text{agar } n \text{ toq yoki } n=0 \text{ bo'lsa;}\\ 0, \text{agar } n \text{ juft va } n>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$$

$$B_n(X)=\begin{cases} S_n(X), & \text{agar } n \text{ toq bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } n \text{ juft bo'lsa.} \end{cases}$$

Demak,

$$H_n(X)=\begin{cases} Z, & \text{agar } n=0 \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } n>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Quyidagi lemmani isbotsiz keltiramiz.

4.7.8-lemma. Agar X bo‘sh bo‘lmagan chiziqli bog‘lamli fazo bo‘lsa, u holda $H_0(X)\approx Z$ bo‘ladi.

Quyidagi teorema va uning natijasini isbotsiz keltiramiz.

4.7.9-teorema. n natural son bo‘lsin, u holda

$$H_k(S^n)=\begin{cases} Z, & \text{agar } k=0,n \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar boshqa } K\in N,\ K\neq 0,\ K\neq n \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

4.7.10-natija.

a) agar $m\neq n$ bo‘lsa, S^n va S^m har xil gomotopik tipga ega;

b) ixtiyoriy $f:B^n\to B^n$ uzluksiz akslantirish qo‘zg‘almas nuqtaga ega.

Keltirilganlardan ma’lum bo‘ladiki, fazoning n o‘lchovli gomologiyasini hisoblash mumkin ekan, lekin biz ta’kidladikki, fazoning n o‘lchamli fundamental gruppai ko‘p hollarda aniqlanmagandir.

IV bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Uzluksiz akslantirishlar, fazodagi topologiyani o‘zlashtirish va yengil mashqlarni bajarish uchun 11, 13, 22, 26, 27, 34, 51, 53, 92, 99, 105 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarga, proektiv va noevklid geometriyalar haqidagi tushunchalar, xossalariga doir ma’lumotlarni 15–18, 38–39, 44, 52, 72, 106 raqamlar bilan berilgan adabiyotlardan; gomotopik topologiya, algebraik topologiya, gomoliya, komologiya hamda fazolarning fundamental gruppalariga oid tushunchalarni 12, 21, 75–78, 89–90, 96–98 raqamlar bilan berilgan adabiyotlardan qo‘shimcha o‘rganish mumkin.

V bob. BIKOMPAKTLAR KATEGORIYASIDA KOVARIANT FUNKTORLAR

1944-yilda S. Eylenberg va S. Makleynlar topologik fazolarning gomologiya va kogomologiya gruppalari nazariyasining aksiomatikasi muammosini yechish jarayonida matematikaga kategoriya va funktorlar tushunchasini kiritishdi. Bu tushunchalar matematikaning boshqa sohalarida ham o'z tatbiqini topa boshladi. Ayniqsa, oxirgi paytda topologiyada aniq funktorlarning ma'lum fazolarda geometrik xossalarini o'rganish va uning tatbig'i yo'nalishi keng rivojlanib bormoqda.

5.1-§. Kategoriya tushunchasi

5.1.1-ta'rif. Agar elementlari obyekt deb ataluvchi $Ob\zeta$ sinf berilgan bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, ζ kategoriya berilgan kategoriya deyiladi:

1) agar ζ ning har bir (A,B) juft obyektlari uchun morfizmlar deb ataluvchi to'plami $Hom\zeta(A,B)$ (A dan B ga) berilgan bo'lsa; bu yerda $Hom\zeta(A,B)=\{u:A\to B\}$ morfizmdan iborat deyish mumkin, ko'p hollarda u $\in Hom\zeta(A,B)$, $A\xrightarrow{u}B$ ko'rinishda yoziladi;

2) ζ ning ixtiyoriy uchlik (A,B,C) obyekti uchun $\mu: Hom\zeta(A,B)\times Hom\zeta(B,C)\to Hom\zeta(A,C)$ akslantirish aniqlangan bo'lsin, bu yerda $\mu(y,\vartheta)$ juftlikning aksi (obrazi), $u\in Hom\zeta(A,B)$, $\vartheta\in Hom\zeta(B,C)$, bu $\mu(y,\vartheta)$ obraz $\vartheta_0 y$ yoki $\vartheta * y$ ko'rinishda belgilanib, y,ϑ larning kompozitsiyasi deb ataladi;

3) quyidagicha tasdiq. $Hom\zeta(A,B)$ to'plamlar va morfizmlar kompozitsiyasi uchun o'rinli: (d) bu kompozitsiya assotsiativdir, ya'ni ixtiyoriy morfizmlar uchligi $A\xrightarrow{u}B\xrightarrow{\vartheta}C\xrightarrow{\omega}D$ uchun $\omega(\vartheta y)=(\omega\vartheta)y$ o'rinli;

4) ζ ning har bir A obyekti uchun ayniy morfizm deb ataluvchi $1_A: A\to A$ morfizm mavjud bo'ladi, agar uning ixtiyoriy $A\xrightarrow{u}B$; $A\xrightarrow{\vartheta}C$ morfizmlari uchun $1_A U=U$ va $\vartheta 1_A=\vartheta$ lar o'rinli bo'lsa;

5) (γ) agar ζ ning (A,B), (A^1,B^1) juftliklari har xil bo'ladi, agar $Hom\zeta(A,B)$ va $Hom\zeta(A^1,B^1)$ to'plamlarning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lsa.

5.1.2-misol. *ζ set kategoriya.* Bu kategoriyaning obyektlari to'plamlardir. Ixtiyoriy ikki A va B to'plamlar uchun $Hom\zeta_{Gns}(A,B)$ sifatida A ning B ga bo'lgan barcha akslantirishlar to'plami tushuniladi. (f,g) kompozitsiya sifatida esa, oddiy $(g,f)\to fg$ akslantirishlar kompozitsiyasi $f*g$ tushuniladi.

5.1.3-misol. *Top kategoriya.* Bu kategoriyaning obyekti topologik fazolardir. $Homtop(X,U)=C(X,Y)$ – barcha uzluksiz akslantirishlar to'plami, kompozitsiya esa, uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasi uzluksiz bo'lganligi sababli, uzluksiz akslantirishlarning oddiy kompozitsiyasidir.

5.1.4-misol. *£ kategoriya.* £ kategoriyaning obyekti barcha gruppalar to'plami, $Hom(A,B)$ esa, barcha A va B gruppalar orasidagi gomeomorfizmlar to'plamidir. Kompozitsiya sifatida esa, gomeomorfizmlarning sodda kompozitsiyasini olish mumkin.

5.1.4-misol. *Somp kategoriya.* Bu kategoriyaning obyekti barcha bikompaktlar to'plami, $Hom(Comp(X,Y))$, barcha X va Y bikompaktlar orasidagi uzluksiz akslantirishlar to'plamidir. Kompozitsiya sifatida esa, uzluksiz akslantirishlar kompozitsiyasini olamiz.

5.1.5-misol. Agar f morfizmga teskari $f^1\in Mor_k(X,Y)$ mavjud bo'lsa, $f\in Mor_k(X,Y)$ morfizmni ekvivalentlik $(f:X\approx Y)$ deymiz. Bu yerda Mor_k bilan kategoriya morfizmlarini belgiladik.

Kategoriya ta'rifidan ko'rinadiki, ixtiyoriy $X\in Ob_k$ obyektning ayniy 1_x morfizmi yagonadir.

Yuqorida keltirilganlardan tashqari, kategoriyalarga muhim misol sifatida quyidagilarni ko'rsatishimiz mumkin:

1. Barcha metrik fazolar va ularning uzluksiz akslantirishlari to'plami.
2. Barcha chiziqli fazolar va ularning chiziqli akslantirishlari to'plami.

Shuni ta'kidlash kerakki, yuqorida keltirilgan ζ_{set}, ζ_{top}, *Comp* kategoriyalarda faqat gomeomorfizm, "£ kategoriyada esa, faqat gomeomorfizm ekvivalentlik vazifasini o'taydi.

Barcha chiziqli fazolar va ularning chiziqli akslantirishlari kategoriyasida ekvivalentlik vazifasini chiziqli gomeomorfizm o'taydi. Barcha metrik fazolar va ularning uzluksiz akslantirishlari kategoriyasida esa, gomeomorfizm ekvivalentlik rolini o'taydi.

5.2-§. Funktorlar

Endi birorta kategoriyada aniqlangan birlik elementni va morfizmlar kompozitsiyasini saqlovchi ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi akslantirishlarni ko'rib chiqaylik.

5.2.1-ta'rif. A va B kategoriyalar berilgan bo'lsin. A kategoriyaning har bir X obyektiga B kategoriyaning $F(X)$ obyektini va A kategoriyaning har bir $f: X_1 \to X_2$ morfizmiga B kategoriyaning $F(f): T(X_1) \to T(X_2)$ morfizmini mos keltiruvchi $F: A \to B$ akslantirish berilgan bo'lib, agar u

1. $F(1_x) = 1_F(x)$
2. $F(gf) = F(g)F(f)$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda u kovariant funktor deyiladi.

Bu ta'rifning 1) va 2) shartlarini funktorning ko'rgazmali ko'rinishida quyidagicha ifodalash mumkin. A kategoriyada ixtiyoriy kommutativ diagramma B kategoriyaning kommutativ diagrammasiga akslanadi:

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \arrow[dr, "g"] \arrow[rrr, dashed, "F"] & & & F(X_2) \arrow[dr, "F(g)"] & \\
X_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & X_3 & F(X_1) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(gf)"'] & & F(X_3)
\end{tikzcd}$$

Agar $F: A \to B$ kovariant funktor bo'lsa, A kategoriya F funktorning aniqlanish sohasi, B esa, uning o'zgarish yoki qiymatlari sohasi deyiladi.

5.2.2-misol. G gruppalar kategoriyasini olaylik. Har bir G gruppaga uning $[G,G]$ kommutanti bo'yicha olingan $G|[G,G]$ faktor gruppasini mos qo'yaylik. $G([G,G]$ faktor gruppa, bizga ma'lumki, abel gruppasini tashkil qiladi. Har bir $f: G \to H$ gomeomorfizmga, f gomeomorfizm orqali vujudga kelgan, $\hat{f}([g]) = f([g])/[f(g)]$ formula bilan aniqlangan $\hat{f}: G/[G,G] \to$

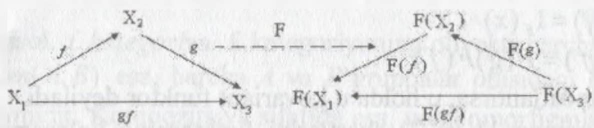
$H/[H,H]$ gomeomorfizmni mos qo‘yaylik. Natijada, gruppalar kategoriyasi G ni abel gruppalar kategoriyasi AG ga akslantiruvchi $F:G\to AG$ kovariant funktorga ega bo‘ldik. Ko‘p hollarda bu funktor kommutirlangan funktor deb yuritiladi.

5.2.3-ta’rif. Yuqorida keltirilgan kovariant funktor ta’rifida F funktor uchun

$$F(1_x)=1F(x)=1_{F(X)}$$
$$F(gf)=F(f)*F(g)$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, F funktor kontravariant funktor deyiladi.

Boshqacha aytganda, kontravariant funktor A kategoriyadagi kommutativ diagrammani B kategoriyadagi kommutativ diagrammaga o‘tkazar ekan, bunda u faqat strelkalar yo‘nalishini almashtiradi:



5.2.4.-misol Aytaylik, $C(X)=\{\varphi:X\to R-\text{uzluksiz funksiya}\}$ barcha X fazodagi uzluksiz funksiyalar to‘plami bo‘lsin. Ma’lumki, bu to‘plamning ixtiyoriy $\phi\in C(X)$ và $\varphi\in C(X)$ elementlari uchun

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x),\quad (\varphi\psi(x)=\varphi x)*\psi(x)$$

formulalar yordamida binar amal aniqlangan. Bu to‘plamda yuqoridagi binar amaliga nisbatan birlik element ham mavjud. Shu sababli $C(X)$ fazo kommutativ halqa tashkil qiladi. Agar $f:X\to Y$ uzluksiz akslantirish bo‘lsa, u holda har bir uzluksiz $\varphi:Y\to R$ akslantirishga $\psi\circ f:X\to R$ kompozitsiyani mos qo‘ysak, natijada $F(f):C(Y)\to C(X)$ akslantirishga ega bo‘lamiz. Bu akslantirish halqalar orasidagi gomeomorfizmdan iborat bo‘ladi. Natijada, har bir $X\in Ob$ top obyektga (topologik fazoga) X fazoda uzluksiz funksiyalar halqasi $C(X)$ ni, har bir $f:X\to Y$ morfizmga $(f\in Mor_{tor}(X,Y))$ halqaviy gomeomorfizm $F(f):C(Y)\to C(X)$ ni mos keltirdik. Buni tekshirish muammo tug‘dirmaydi, topologik fazolar kategoriyasida birlik elementli, kommutativ halqalar kategoriyasiga akslantiruvchi kontravariant F funktor mavjud.

Topologik masalalarni hal qilishda gruppalar nazariyasiga funktorlarning qo'llanilishi xususida to'xtalaylik. Oldingi boblarda akslantirishlarni davomlashtirish (kengaytirish) masalasi bayon qilingan edi. Endi shu masalani quyidagicha yoritamiz. X topologik fazo bo'lsin va $A \subset X$. $i: A \to X$ tabiiy akslantirish (yoki joylashtirish) bo'lsin, ya'ni har bir $a \in A$ uchun $i(a) = a$ o'rinlidir. $\varphi: A \to Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsin.

$\overline{\varphi}: X \to Y$ akslantirish φ ning davomlashtirishi bo'lishi uchun quyidagi diagramma kommutativ bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

F funktor (masalan, kovariant funktor) yordamida hosila – algebraik masalaga ega bo'lamiz. Quyidagi diagrammada kommutativ bo'ladigan $F(\overline{\varphi})$ gomeomorfizm mavjudmi?

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(i)"] \arrow[dr, "F(\varphi)"'] & & F(X) \arrow[dl, "F(\overline{\varphi})"] \\ & F(Y) & \end{tikzcd}$$

Bundan ko'rinadiki, yuqoridagi masala yechilsa, keyingi algebraik masala ham yechiladi. Demak, $F(\overline{\varphi})$ gomeomorfizmning mavjud bo'lishi φ akslantirishning davomlashtirishi $\overline{\varphi}$ mavjudligining zaruriy shartidir.

5.2.5-teorema. $F: K_1 \to K_2$ ixtiyoriy kovariant yoki kontravariant funktor berilgan bo'lsin. U holda F funktor natijasida K_1 kategoriyadagi f ekvivalentlikning K_2 kategoriyadagi obrazi $F(f)$ ekvivalentlik bo'ladi.

Isbot. $F: K_1 \to K_2$ kovariant funktor bo'lsin va $f: X \cong Y$ K_1 kategoriyadagi ekvivalentlik bo'lsin. Ekvivalentlik ta'rifiga ko'ra, shunday $g: Y \to X$ morfizm topiladiki, uning uchun $g_0 f = 1x$, $f_0 g = 1y$ o'rinli bo'ladi. Funktorning ikkita aksiomasiga ko'ra, $F(g)_0 F(f) = F(g_0 f) = F(1_x) = 1_{F(x)}$ va $F(f)_0 F(g) = F(f_0 g) = F(1_y) = 1_{F(y)}$ bo'ladi.

Demak, $F(f)$ morfizm, haqiqatan ham ekvivalentlik ekan. Kontravariant funktor isboti ham shunga o'xshaydi.

5.2.6-natija. Ixtiyoriy funktor ekvivalent obyektlarni ekvivalent obyektlarga o'tkazadi.

5.2.7-misol. Oldingi bobda keltirilgan fazoning n o'lchovli fundamental gruppasi $\pi_n(x)$ va X fazoning n o'lchovli gomologiyasi $H_n(x)$ ni olsak, bu π_n va H_n lar ham kovariant funktorlar bo'ladi.

R^2 va R^1 fazolarni topologik farqlash masalasida oldingi bobda keltirilgan H_0 funktorning qo'llanilishiga to'xtalaylik.

Teskaridan faraz qilamiz: $f : R^1 \to R^2$ gomeomorfizm mavjud bo'lsin. U holda, $R\setminus\{0\}$ va $R^2\setminus\{0\}$ lar ham gomeomorfdir.

Ikkinchidan, $R\setminus\{0\}$ va $R^2\setminus\{0\}$ larning bog'lamli komponentalarining soni ikkiga teng, shu sababli bunga mos $H_0(R^1\{0\})$ erkin abel gruppasi faqat bitta bog'lamli komponentaga ega. Yuqoridagi 5.1.1-natijaga ko'ra, N_0 funktor gomeomorf fazolarni izomorf g gruppalarga o'tkazishi kerak. Lekin, $H_0(R^1\{0\})$ va $H_0(R^2\{0\})$ gruppalar izomorf bo'la olmaydi, chunki ularning yasovchilar soni har xildir. Bu ziddiyat R^1 va R^2 fazolarning gomeomorf emasligini ko'rsatadi.

5.3-§. Normal funktorlar

$\xi = (\sigma, m)$ kategoriya berilgan bo'lsin, bu yerda σ — barcha obyektlar va m — barcha morfizmlar jamlanmasi bo'lsin.

Agar obyektlar jamlanmasi σ va har bir $[X,Y]$ jamlanma biror to'plamdan iborat bo'lsa, ζ kategoriya kichik kategoriya deyiladi. Bu yerda X dan Y ga bo'lgan barcha morfizmlar oilasini $[X,Y]$ bilan belgilaymiz. Agar $\zeta = (\sigma, m)$ kategoriya bo'lsa, uning obyektlar jamlanmasi σ da, tabiiyki, old tartib mavjuddir, ya'ni biror munosabat refleksiv va tranzitivdir. Haqiqatan ham, $X \le Y \Leftrightarrow [X,Y] \ne \varnothing$.

5.3.1-ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, kichik $\Im=(\sigma,m)$ kategoriya teskari spektr deyiladi:

1) σ to'plamdagi old tartib qisman tartiblangan bo'lsa;

2) qisman tartiblangan σ to'plam yuqoriga yo'nalgan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy ikki $X,Y\in\sigma$ obyektlar uchun shunday $Z\in\sigma$ topilsa va uning uchun $X\le Z$ va $Y\le Z$ o'rinli bo'lsa;

3) $[X,Y]$ to'plam bitta elementdan ortiq bo'lmasa.

Teskari spektrning obyektlari uning elementlari, morfizmlari esa, proeksiyalari deb yuritiladi. Qulaylik maqsadida spektrning elementlarini X bilan belgilab, uni indeksdagi α bo'yicha birorta qisman tartiblangan to'plamdan iborat deyishimiz mumkin. Shunda X dan $X\alpha$ ga proeksiyani π_β^α bilan belgilaymiz. Demak, spektrni $S=\{X_\alpha;\pi_\beta^\alpha;A\}$ ko'rinishida belgilasak bo'lar ekan. Albatta, bu yerda $\alpha,\beta\in A$ va $\beta\le\alpha$, $\pi_\beta^\alpha:X_\alpha\to X_\beta$ deb tushuniladi. Teskari spektrlarni ham spektrlar deb ataymiz.

Agarda (albatta, S spektr qaralayotgan kategoriyada) ixtiyoriy, $\alpha,\beta\in A$, $\beta\le\alpha$, uchun $\pi_\beta^\alpha\circ\pi_\alpha=\pi$ o'rinli va ixtiyoriy boshqa Y obyekt va $\pi_\beta^\alpha o f_\alpha=f_\beta$ xossalariga ega bo'lgan $f_\alpha:Y\to X_\alpha$ morfizmlar oilasi uchun shunday yagona $f:Y\to X$ morfizm topilib, har bir $\alpha\in A$ uchun $fa=\pi a_0 f$ o'rinli bo'lsa, X obyekt va morfizmlar oilasi $\pi\alpha:X\to X\alpha$, $\alpha\in A,S$ spektrning limiti deyiladi. Spektrning limiti $X=\lim S$ ko'rinishda belgilanadi. $\pi\alpha$ morfizmlarga oralovchi proeksiyalar deyiladi.

Biror kategoriyada aniqlangan F kovariant funktor va $S=\{X\alpha:\pi\alpha\}$ spektr berilgan bo'lsin. Aytaylik, $F(S)=\{F(X\alpha):\pi_\alpha^\beta\}$. Bu holda $F(S)$ ham spektrdan iborat bo'ladi. Uni oralovchi proeksiyalarni π_α^F bilan belgilaymiz.

5.3.2-ta'rif. Agar ixtiyoriy S spektr uchun $F(\lim S)=\lim F(S)$ o'rinli bo'lsa, F funktor uzluksiz deyiladi. Boshqacha aytganda, shunday $f:F(\lim S)=\lim F(S)$ gomeomorfizm mavjudki, uning uchun

$$\mathrm{F}(\pi F(\pi\alpha)=\pi_\alpha^F of \qquad (1)$$

o'rinli bo'ladi. (1) tenglikdan ma'lumki, f gomeomorfizm mavjud va u yagonadir. Bu $F(f\alpha)$ akslantirishlarning limitidan iborat. Ya'ni, agar

$F(\pi\lambda)$ larning limiti gomeomorfizm bo'lsa, F funktor uzluksizdir. Buning aksi bo'lsa, funktor *Somp* kategoriyasida qaralayotgan hisoblanadi.

5.3.3-ta'rif. Agar F funktor bir nuqtali to'plamni yana bir nuqtali to'plamga o'tkazsa, funktor nuqtani saqlaydi.

Aytaylik, $i_A : A \to X$ yopiq A to'plamni X ga aynan joylashtirish bo'lsin. $F_X(A)$ orqali $F(i_A)$ akslantirish obrazini belgilaylik. Agar ixtiyoriy X va uning ixtiyoriy $\{A\alpha)$ to'plamostilar tizimi uchun $F_X(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha F_X(A_\alpha)$ o'rinli bo'lsa, F faktor kesishmalarni saqlaydi deyiladi.

Agar, $F(f)^{-1} Fy(A) = F_X(f^{-1}A)$ tenglik ixtiyoriy $f : X \to Y$ akslantirish va ixtiyoriy $A \subset Y$ to'plam uchun o'rinli bo'lsa, F funktor proobrazlarni (asllarni) saqlaydi.

5.3.4-ta'rif. Agar ixtiyoriy o'zaro bir qiymatli f akslantirish (syurektiv) uchun $F(f)$ akslantirish ham o'zaro bir qiymatli (syurektiv) bo'lsa, F funktor monomorf mos ravishda epimorf deyiladi.

5.3.5-ta'rif. Agar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, F funktor normal funktor deyiladi:

1) F funktor nuqta va bo'sh to'plamni saqlasa;
2) F funktor kesishmalarini saqlasa;
3) F monomorfizmni saqlasa;
4) F epimorfizmni saqlasa;
5) F uzluksiz bo'lsa;
6) F proobrazlar va bikompaktlarning salmog'ini saqlasa, ya'ni $\omega(X) \le \tau \Rightarrow \omega(F(X)) \le \tau$ bo'lsa.

Oxirgi 30–40-yillar mobaynida topologik fazolarning turli kategoriyalarida yuqoridagi xossalarga ega bo'lgan normal funktorlarning geometrik va topologik xossalari o'rganib borilmoqda. Normal funktor birorta topologik fazoda qaralsa, bu fazoning ko'pgina geometrik xossalarini u yoki bu ma'noda o'zgartirib yuboradi.

5.4-§. Ehtimol o'lchovli funktorlar va ularning qism funktorlari

Ehtimol o'lchovli funktor bikompakt fazolar kategoriyasida qaralsa, funktor natijasida hosil bo'lgan topologik fazolarning geometrik va boshqa xossalarini o'rganish katta ahamiyatga egadir. Bu funktorni chekli to'plamlarda qarasak, chekli o'lchamli simplekslarga ega bo'lamiz. Uning funktorostilarini oladigan bo'lsak, chekli o'lchamli fazolarni yana chekli o'lchamli fazoga o'tkazadi va bu funktor fazoning ko'pgina xossalarini "yaxshiroq" xossalarga almashtiradi.

X bikompakt bo'lsin. Ma'lumki, har bir $\mu \in C(C(X))$ uzluksiz chiziqli funksionalga (akslantirish) X ning o'lchovi deyiladi. $C(C(X))$ fazo ko'p hollarda $(C(x))^*$ ko'rinishida belgilanadi. $(C(x))^*$ barcha uzluksiz funksionallar fazosi deb yuritiladi va bu fazo $C(X)$ fazoga qo'shma fazodir. $(C(x))^*$ normalangan fazo, bu fazoda norma $\|f(x)\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ ko'rinishda aniqlanadi, boshqacha aytganda, $(C(x))^*$ fazo Banax fazosidir. Albatta, barcha uzluksiz funksionallarni oladigan bo'lsak, ular chegaralangandir.

Agar X fazodagi barcha chekli regulyar o'lchovlarni $M(X)$ bilan belgilasak, Riss teoremasiga ko'ra, $(C(x))^*$ fazo $M(X)$ fazo bilan izomorfdir. Shu sababli $M(X)$ dagi ba'zi belgilashlarni qabul qilamiz. Bizga Riss teoremasi shart bo'lmaydi, o'lchovlar nazariyasidan boshqa tushunchalarni ishlatmaymiz. X fazoda o'lchov deb faqat $\mu \in C^*(X)$ uzluksiz funksionalni tushunamiz. Ba'zida $\int \varphi \, d\mu$ belgilashni μ funksionalning φ dagi qiymati deb tushuniladi.

Agar ixtiyoriy $\varphi \geq 0$ uchun va $\mu \in M(X)$ o'lchov uchun $\mu(\varphi) \geq 0$ o'rinli bo'lsa, μ o'lchov musbat deyiladi va $\mu \geq 0$ kabi yoziladi. $M(X)$ fazoning barcha musbat o'lchovlari to'plami musbat konus deyiladi. Shuni aytish kerakki, $\mu \geq 0$ bo'lishi uchun $\mu(1_X) = \|\mu\|$ bajarilishi zarur va yetarlidir. Haqiqatan ham, $\mu \geq 0$ va $|\varphi| \leq 1$ bo'lsin. U holda $\mu(1_X - \varphi) \geq 0$. Bundan $\mu(1_X) \geq \mu(\varphi)$ va $\mu(1_X) = \|\mu\|$. Endi esa, $\mu(1_X) = \|\mu\|$ va $\varphi \geq 0$ bo'lsin.

Aytaylik, $\psi = 1_X - \left(\varphi / \|\varphi\|\right)$. Bunda $\|\varphi\| \leq 1$, $\mu(\psi) \leq \|\mu\| = \mu(1_X)$, ya'ni $\mu(1_X) - \mu\left(\varphi / \|\varphi\|\right) \leq \mu(1_X)$. Bundan $\mu(\varphi) \geq 0$ kelib chiqadi.

Agar $\mu \in M(X)$ o'lchov uchun $\|\mu\| = 1$ bo'lsa, μ o'lchov normalangan deyiladi. Musbat normalangan μ o'lchov ehtimol o'lchovi deyiladi. Oldingilardan ko'rinadiki, μ o'lchov ehtimollik o'lchovi bo'lishi uchun $\int 1_x ;\lambda\mu = 1$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Endi $M(X)$ to'plamda kuchsiz deb ataluvchi topologiyani kiritamiz. Ya'ni, $M(X)$ to'plam sonlar o'qining ko'paytmasidan iborat desak, $M(X)$ ni $\prod\{R\varphi : \varphi \in (X)\}$ to'plamning to'plamostisi deb olishimiz mumkin.

Demak, $M(X)$ fazo to'la (mutloq) regulyar fazo bo'lar ekan.

$\mu \in M(x)$ elementning atroflari bazasini $O(\mu,\varphi,...\varphi_k,\varepsilon)$ ko'rinishdagi to'plamlar tashkil qiladi. Bu yerda $\phi \in C(X), \varepsilon > 0$ va $O(\mu,\varphi,...\varphi_k \varepsilon) = \{\mu \in M(x) : | \mu^1(\varphi_i) - \mu(\varphi_i) | \varepsilon, i, = \overline{i_1 k}\}$. $M(X)$ fazoning barcha ehtimollik o'lchovlaridan tashkil topgan to'plamostisini $\rho(X)$ bilan belgilaymiz. Demak, $\rho(X) \subset M(X)$.

5.4.1-teorema. Ixtiyoriy X bikompakt uchun $\rho(X)$ bikompakt.

Isbot. Bizga ma'lumki, $\rho(X) \subset \prod\{R\varphi : \varphi \in C(X)\}$. Eng avvalo, $\rho(X)$ ning bu ko'paytmada yopiq to'plam ekanligini ko'rsatamiz. Agar $\mu \in [P(X)]$ bo'lsa, u holda μ funksiya chiziqli, agar $\varphi, \psi \in C(X), \varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda shunday $\mu_1 \in P(X)$ ni olamiz; $\mu_1 \in O(\mu, \varphi, \psi, \varphi + \psi, \varepsilon/3)$ bo'lsin. U holda $|\mu(\varphi+\psi) - \mu(\varphi) - \mu(\psi)| = |\mu(\varphi+\psi) - \mu_1(\varphi+\psi) + \mu_1(\phi) + \mu_1(\psi) - \mu(\varphi) - \mu(\psi)| \le (\mu(\varphi+\psi) - \mu_1(\varphi+\psi)| + |\mu_1(\varphi) - \mu(\varphi)| + |\mu_1(\psi) - \mu(\psi)| < \varepsilon$. Ya'ni, $\mu(\varphi+\psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$. Shunga o'xshab, $\mu(r\varphi) = r\mu(\varphi)$. $\|\mu\| = 1$, agar $\|\varphi\| \le 1$ va $\varepsilon < 0$ bo'lsa, u holda shunday $\mu_1 \in P(X)$ topiladiki, $|\mu_1(\varphi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon$ bo'ladi. U holda $|\mu(\varphi)| \le |\mu_1(\varphi)| + \varepsilon$, ya'ni $|\mu(\varphi)| | \le 1 + \varepsilon$. Demak, $|\mu(\varphi)| \le 1$. Shunga o'xshab, $\mu(1_x) = 1$ o'rinli. Demak, μ o'lchov normalangan va musbat ekan, ya'ni $\mu \in P(X)$. Ikkinchi tomondan. $\rho(X)$ to'plam $[-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$ kesmalarning ko'paytmasi $P\{[-\|\varphi\|, \|\varphi\|] : \varphi \in C(X)\}$ da yotmoqda. Demak, $\rho(X)$ bikompakt ekan.

Agar F da nol bo'lgan (F to'plamda qiymati nolga teng) ixtiyoriy $\varphi \in C(X)$ funksiya uchun $\int \varphi d\mu = 0$ o'rinli bo'lsa, μ o'lchov $F \subset X$ to'plamda jamlangan deyiladi.

μ o'lchovning jamlangan to'plamlarining eng kichigi uning eltuvchisi deyiladi va surr μ ko'rinishda yoziladi.

5.4.2-lemma. Har bir $x \in X$ nuqta uchun shu nuqtada jamlangan yagona ehtimol o'lchovi δ_x mavjud.

Isbot. Aytaylik, δ_x aytilgan o'lchov bo'lsin. U holda $\delta_x(1_x) = 1$ va $\delta_x(\varphi) = \delta_x(\varphi(x)1_x \setminus = \varphi(x)$. Ikkinchidan, $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ tenglik bilan aniqlangan δ_x o'lchov ehtimollik o'lchovi va u x nuqtada jamlangan.

Fazoning x nuqtasida jamlangan δ_x o'lchov Dirak o'lchovi deyiladi.

5.4.3-lemma. X fazodagi x nuqtani δ_x Dirak o'lchoviga o'tkazuvchi (mos qo'yuvchi) $\delta : X \to P(X)$ akslantirish uzluksiz va gomeomorfizmdir.

Isbot. Bu akslantirishning o'zaro bir qiymatli ekanligi ravshan. Shu sababli uning uzluksizligini ko'rsataylik. δ_x ning ixtiyoriy $O\delta_x$ atrofida $O(\delta_x, \varphi_1, ..., \varphi_k \varepsilon)$ bazis atrof mavjuddir. Uning Ox atrofi topiladiki, uning uchun $|(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))| < \varepsilon$ tengsizlik barcha $y \in Ox$ va $i = \overline{1,k}$ larda o'rinlidir. U holda $\delta(Ox) \subset O(\delta_x, \phi, ..., \phi_k, \varepsilon)$.

5.4.4-lemma. Ixtiyoriy cheksiz bikompakt X uchun $\omega(X) = \omega P(X)$ o'rinli.

Isbot. 5.3.3-lemmaga ko'ra, X fazo δ akslantirish natijasida $P(X)$ ga joylashtirilgan. Shu sababli $\omega(X) \le \omega P(X)$ o'rinlidir. Ikkinchidan, $M(X)$ fazodagi topologiyani aniqlashda φ_i funksiyalarni $C(X)$ dagi hamma joydagi zich to'plamdan olsa bo'ladi. Bu yerda ε ni ham ratsional son deyish mumkin. Ma'lumki, agar X bikompakt salmog'i τ bo'lsa, u holda $C(X)$ fazoda fazoning hamma joyida zich va quvvati τ bo'lgan to'plam osti mavjud. Shu sababli cheksiz bikompakt X uchun $dC(X) \le \omega X$ o'rinli.

Aytaylik, $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsin. $P(f) : P(X) \to P(Y)$ akslantirishni $(P(f)(\mu)(\phi)) = \mu(\phi \circ f)$ (1) formula bilan aniqlaymiz. $P(f)$ akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, $\mu \in P(x)$ va $v = P(f)(\mu)$ bo'lsin. v nuqtaning bazis atrofi $V = O(v, \varphi_1, ..., \varphi_k, \varepsilon)$ ni olaylik, $U = O(\mu, \varphi_1 of, \varphi_2 of, ..., \varphi_k of, \varepsilon)$ deylik va $P(f)(U) \subset V$ ni ko'rsataylik. Agar $\mu^1 \in U$ bo'lsa, u holda $|\mu(\phi_i of)-\mu(\phi_i of)|<\varepsilon$ (1) tenglikka ko'ra bu tengsizlik $|(P(f)(\mu^1))(\varphi_i)-\nu(\varphi_i)|<\varepsilon$ tengsizlikka teng kuchlidir. Bundan $P(f)(\mu)\in V$ ga ega bo'lamiz. Bevosita tekshirish mumkinki, $P(g\circ f)=P(g)\circ P(f)$ tenglik ham o'rinlidir. Demak, ρ funktor *Comp* kategoriyada harakatlanuvchi kovariant funktor ekan. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

5.4.5-teorema. ρ funktor uzluksizdir, ya'ni $S=\{x_\alpha;\pi_\beta^\lambda,A\}$ spektr uchun $P(\lim x)=\lim P(s)$ o'rinli.

5.4.6-teorema. Agar $f:X\to Y$ monomorfizm bo'lsa, u holda $P(f):P(X)\to P(Y)$ ham monomorfizmdir.

Isbot. Agar $\mu_1,M_2\in P(X)$ ikkita har xil o'lchovlar bo'lsa, u holda shunday $\varphi\in C(x)$ funksiya mavjud bo'ladiki, $\mu_1(\varphi)\neq\mu_2(\varphi)$ o'rinli bo'ladi. Brauer-Titse-Urison teoremasiga ko'ra, shunday $\Psi\in C(Y)$ funksiya topiladiki, uning uchun $\varphi=\Psi of$ o'rinli bo'ladi. (1) tenglikka ko'ra, $P(f)(\mu_i)(\Psi)=\mu_i(\Psi of)=\mu_i(\varphi)$. Bundan $P(f)(\mu_i)\neq P(f)(\mu_2)$ kelib chiqadi.

Eltuvchisi chekli sondagi nuqtalardan iborat bo'lgan o'lchov chekli eltuvchili o'lchov deb tushuniladi. Ya'ni, μ o'lchov uchun $|\mathrm{supp}\,\mu|<\infty$. Aytaylik, $\mu\in P(X)$ o'lchovning eltuvchisi $\mathrm{supp}\,\mu=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ har xil nuqtalardan iborat bo'lsin. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_1,\varphi_2,....,\varphi_n\in C(x)$ funksiyalarni olaylik:

$$\varphi_i(x_j)=\begin{cases}1, \text{ agar } i=j \text{ bo'lsa;}\\ 0, \text{ agar } i\neq j \text{ bo'lsa.}\end{cases} \quad (2)$$

Aytaylik, $m_i=\mu(\varphi_i)$. O'lchovlarning eltuvchilik ta'rifiga ko'ra, m_i sonlar (2)-shartni qanoatlantiruvchi φ_i funksiyalarni tanlashga bog'liq emas. Shu sababli ular m_i sonini x_i nuqtaning μ o'lchovi deyiladi. (2)-shartni qanoatlantiruvchi φ_i funksiyalarni $\sum\varphi_i=1$ va $\varphi_i\geq 0$ shartlar qanoatlantiruvchi qilib tanlashimiz mumkin. Shu sababli

$$m_1+m_2+....+m_n=1 \text{ va } m_i\geq 0 \quad (3).$$

Endi eltuvchisi $\{x_1,.....,x_n\}$ chekli to'plamdan iborat bo'lgan μ o'lchov x_i nuqtalarining o'lchovlari m_i lar orqali bir qiymatli aniqlanishini ko'rsatamiz. Ya'ni,

$$\mu(\varphi)=m_1\varphi(x_1)+.....+m_n\varphi(x_n) \qquad (4)$$

Tenglik ko'rinishi. Dirak o'lchovi δ_{x_i} ning aniqlanishiga ko'ra, (4)-tenglik

$$\mu=m_1\delta x_1+m_2\delta x_2+....+\mu_n\delta x_n \ (5)$$

ga aylanadi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy φ funksiyani

$$\varphi=\varphi(x_1)\varphi_1+\varphi(x_2)\varphi_2+.....+\varphi(x_n)\varphi_n$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $\varphi_1,.....,\varphi_n$ fuksiyalar (2)-shartni qanoatlantiradi. U holda

$$\mu(\varphi)=\varphi(x_1)\mu(\varphi_i)+\varphi(x_2)\mu(\varphi_2)+.....+\varphi(x_n)\mu(\varphi_n)=\varphi(x_1)m_1+\varphi(x_2)m_2+....+\varphi(x_n)m_n$$

Shunday qilib, quyidagi teorema ham isbotlandi.

5.4.7-teorema. Chekli eltuvchili o'lchovlar Dirak o'lchovlarining qavariq chiziqli kombinatsiyasi (5) dan iborat ekan.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

5.4.8-teorema. Chekli eltuvchili barcha o'lchovlar $\rho(X)$ to'plamda zich to'plamostini tashkil qiladi.

5.4.9-teorema. Agar $f:X\to Y$ epimorfizm bo'lsa, u holda $P(f)$: $P(X)\to P(Y)$ ham epimorfizmdir.

Isbot. Dastlab $P(f)$ akslantirish natijasida barcha $\mu\in P(Y)$ chekli eltuvchili o'lchovlar qamrab olinishini ko'rsatamiz, ya'ni $\mu=\sum_{i=1}^{u}m_i\delta y_i$. Haqiqatan ham, $f^{-1}(y_i)$ dan bittadan $x_i\in f^{-1}(y)$ nuqtani olsak va $v=\sum m_i\delta x_i$ o'lchovni tuzsak, $P(f)(v)=\mu$ o'rinli bo'ladi. Endi 5.4.8-teoremani qo'llasak, isbot poyoniga yetadi.

Agar $f:X\to Y$ akslantirish va har bir $a\in F(X)$ nuqta uchun quyidagi $f(\operatorname{supp} a)=\operatorname{supp} F(f)a$ (6) o‘rinli bo‘lsa, F funktor eltuvchilarni saqlaydi.

5.4.10-teorema. Monomorf F funktor eltuvchini saqlashi uchun F funktor proobrazlarni saqlashi zarur va yetarlidir.

Isbot. *Yetarliligi.* Ixtiyoriy $A\subset X$ yopiq to‘plam uchun $F(A)$ ni $F(X)$ dagi tabiiy ravishdagi $F_X(A)\subset F(X)$ to‘plamostisi sifatida qarash mumkin, ya’ni $i_a:A\to X$ ayniy joylashtirishni olsak va $F(i_a)$ funktordagi obrazini qarasak, $F(i_A)(A)\subset F(X)$ o‘rinli bo‘ladi. Aytaylik, $A=\operatorname{supp} a$ bo‘lsin. $F(f)(a)\in F(f)|_{F(A)}\subset F(f_A)$ o‘rinli, ya’ni $\operatorname{supp} F(f)(a)\subset f(\operatorname{supp} a)$ Y va aksincha, aytaylik, $B=\operatorname{supp} F(f)(a)$ bo‘lsin. U holda F proobrazlarni saqlaganligi tufayli quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$F(f^{-1}(B))=F(f)^{-1}F(B)\supset F(f)^{-1}F(f)(a)\supset a$$

Demak, $\operatorname{supp} a\subset f^{-1}B$. Ya’ni, $f\left(\operatorname{supp} a\right)\subset B$ bo‘ladi.

Zarurligi. f akslantirish $f^{-1}(A)$ ni A ga o‘tkazganligi tufayli $F(f)(F(f)(f^{-1}(A))\subset F(A)$ ga ega bo‘lamiz va shu sababli $F(f^{-}(A))\subset$ $F(f)^{-1}F(f)(F(f^{-1}A))\subset F(f)^{-1}F(A)$ bo‘ladi. Demak, $F(f)^{-1}F_Y(A)=$ $F_x(f^{-1}(A))$ tenglikda $\supset$ ni tekshirishda F ning eltuvchini saqlashi zarur bo‘lmadi.

Endi teskari $\supset$ ni tekshiramiz. Aytaylik, $a\in F(f)^{-1}F(A)$ bo‘lsin. U holda F ning eltuvchini saqlashi tufayli $f(\operatorname{supp} a)\subset A$ ga ega bo‘lamiz. Nihoyat, $\operatorname{supp}(a)\subset f^{-1}(A)$ o‘rinli va $a\in F(f^{-1}A)$.

5.4.11-teorema. $x\in X$ nuqta $\mu\in P(X)$ o‘lchovning eltuvchisiga tegishli bo‘lishi uning ixtiyoriy Ox atrofi uchun $\mu([Ox])>0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, x nuqtaning shunday Ox mavjud bo‘lsinki, u uchun $\mu([Ox])=0$ o‘rinli bo‘lsin. Ixtiyoriy shunday $\varphi\in C(X)$ funksiyani olaylikki, $\varphi(X\setminus Ox)=0$ bo‘lsin. Aytaylik, $|\varphi|\le M>0$ bo‘lsin. $C(X)$ fazoda shunday $\Psi\in C(X)$ ni olamizki, u uchun $0\le\Psi\le 1$ va $\Psi([0_x])=1$,

$\mu(\mu\varphi)<\varepsilon M$ o'rinlidir. U holda $|\varphi|\leq M\psi$ va, nihoyat, $\mu(|\varphi|)\leq\mu(M\psi)<\varepsilon$. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\mu(|\varphi|)<\varepsilon$. Nihoyat, $\mu(|\varphi|)=0$, bundan esa, $\mu(\varphi)=0$ kelib chiqadi. Eltuvchining ta'rifiga ko'ra, $\mathrm{supp}\mu\subset X\setminus(Ox)$ va, nihoyat, $x\bar{\in}\ \mathrm{supp}\mu$. Buning aksi, agar $x\bar{\in}\ \mathrm{supp}\mu$ bo'lsa, X ning O_x atrofini $O_x\cap\sup p\mu=\varnothing$ shartni qanoatlantiradigan qilib olib, Urison teoremasiga ko'ra shunday $\psi\in C(X)$ topish mumkinki, $x\in\mathrm{supp}\mu$ nuqtalarda bo'ladi. U holda $\mu([Ox])\leq\mu(\varphi)=0$. Bu yerda $\mu([Ox])=\inf\{\mu(\phi)$: $\phi\in C(X),\ 0\leq\phi(x)\leq 1, \phi(x)=0, x\in F\}$.

Bu teorema bilan bir qatorda quyidagi ham isbotlandi.

5.4.12-teorema. Agar $\mu(F)>0$ bo'lsa, u holda $F\cap\sup p\mu\neq\varnothing$.

5.4.13-teorema. Ixtiyoriy $f\in C(X,Y)$ akslantirish va ixtiyoriy $\mu\in P(X)$ uchun quyidagi o'rinli: $\mathrm{supp}P(f)(\mu)=f(\mathrm{supp}\mu)$.

Isbot. Avval $\subset$ bo'lishini tekshiramiz. Aytaylik, $\varphi\in C(Y)$ funksiya $f(\mathrm{supp}\,\mu)$ da nolga teng bo'lsin. U holda $(\varphi o f)(\mathrm{supp}\mu)=0$ bo'ladi. Demak, $\mu(\varphi o f)=0$. Bu holda $P(f)(\mu)(\phi)=\mu(\phi o f)=0$ ham o'rinli.

Endi $\supset$ bo'lishini tekshiraylik. Aytaylik, $y\in f(\mathrm{supp}\,\mu)$. Bu holda 5.4.11-teoremaga ko'ra, ixtiyoriy Ou atrof uchun $P(f)(\mu)([Oy])>0$ ni tekshirish kerak. Shunday $x\in\sup p\mu$ nuqta va shunday Ox atrof olaylikki, $f(O_x)\subset Oy$ o'rinli bo'lsin. 5.4.11-teoremaga ko'ra, $\mu([Ox])>0$. Lekin ixtiyoriy yopiq $F\subset X$ to'plam uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\mu(F)\leq P(f)(\mu)(f(F))\ (1)$$

Haqiqatan ham, agar $x\in F$ bo'lsa, bu tengsizlik $0\leq\varphi\leq 1$, $\varphi(x)=0$, $x\in f(F)$ lardan $0\leq\varphi o f\leq 1$, $\varphi o f(x)=0$ larni keltirib chiqaradi. Demak, $P(f)(\mu)([Oy])\geq P(f)(\mu)(f[Ox])\geq$ ((1) ga ko'ra) $\geq\mu[Ox])>0$.

5.4.14-teorema. Ehtimollik funktori ρ normal funktordir.

Isbot. Ma'lumki, ehtimollik funktori R nuqtani va bo'sh to'plamni saqlaydi, ya'ni ρ natijasida nuqta yana nuqtaga, bo'sh to'plam yana bo'sh to'plamga o'tadi. Ushbu paragrafda biz funktorning uzluksizligi (5.4.5-teorema), monomorfligi (5.4.6-teorema), epimorfligi (5.4.9-teorema), cheksiz biokompaktlarning salmog'ini saqlashini (5.4.4-lemma) ko'rsatdik. Endi proobrazlarni hamda kesishmalarni saqlashini ko'rsatishimiz lozim. Proobrazlarni saqlashi eltuvchini saqlashga ekvivalent bo'lganligi tufayli (5.4.10-teorema) o'rinlidir. Kesishmalarni saqlashini ko'rsatsak yetarli bo'ladi, chunki ρ funktor 5.4.13-teoremaga ko'ra eltuvchini saqlaydi. Ma'lumki, ρ funktor uzluksiz, shu sababli bir juft to'plamning kesishmasini saqlashini ko'rsatishimiz yetarli. Aytaylik, $Y_1, Y_2, \subset X$ va $\mu \in P(Y_1) \cap P(Y_2)$ bo'lsin. Bu ixtiyoriy $\varphi \in C(Y_i)$ funksiya va uning X gacha ixtiyoriy davomlashtirishlari $\varphi^{1}, \varphi^{11}$ lar uchun $\mu(\varphi^{1}) = \mu(\varphi^{11})$ o'rinli. Boshqacha aytganda, agar $\varphi \in C(X)$ va $\varphi(Y_i) = 0$ bo'lsa, u holda $\mu(\varphi) = 0$. Aytaylik, $\varphi(Y_1 \cap Y_2) = 0$ bo'lsin. Y_1 to'plamda φ ga va Y_2 to'plamda nolga teng bo'lgan $\psi' : Y_1 \cup Y_2 \to R$ funksiyani olamiz. Aytaylik, ψ funksiya ψ^{1} ning X gacha bo'lgan ixtiyoriy davomlashtirishi bo'lsin. $\mu \in P(Y_1)$ bo'lganligi sababli $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ ga ega bo'lamiz. Lekin $\psi(Y_2) = 0$ va $\mu \in (Y_2)$. Demak, $\mu(\varphi) = 0$. Binobarin, $\mu(\varphi) = 0$ va $\mu \in P(Y_1 \cap Y_2)$. $P(Y_1 \cap Y_2) \subset P(Y_1) \cap P(Y_2)$ ning isboti trivialdir.

Biz ehtimollik funktori $P : Comp \to Comp$ bikompaktlar va ularning uzluksiz akslantirishlari kategoriyada normal funktor ekanligini ko'rsatdik. ρ funktorning funktorostilari P_n va P^c lar ham ajoyib geometrik xossalarga ega. Qiziqqan o'quvchilar boshqa $\exp, \exp_n, \lambda, \lambda_n$ funktorlar bilan ham tanishishlari mumkin.

5.5-§. Gomotopik gruppa funktorlari

Oldingi bo'limlarda ta'kidlaganimizdek, ba'zi bir hollarda $\pi(X,Y)$ to'plam gruppa tashkil qilar ekan. Ayrim hollarda bu gruppa abel gruppasini tashkil qiladi. Shu sababli $\pi(X,Y)$ gruppa strukturasiga qarab topologik fazolar va ularning uzluksiz akslantirishlari kategoriyasida har xil algebraik funktorlarni ko'rish mumkin. Algebraik funktorlar turli-tuman topologik algebraning va umumiy topologiya vazifalarini yechishda qo'l keladi. Bunday algebraik funktorlarni ko'rish va tatbiq qilish gomotopik topologiyaning asosini tashkil qiladi. Shuni ta'kidlashimiz lozimki, har bir Y topologik fazo hamda X_1 va X_2 topologik fazolar orasidagi $f : X_1 \to X_2$ uzluksiz akslantirishga tabiiy aniqlangan quyidagi akslantirish mos kelmoqda:

$$\pi^{Y}(f) : \pi(X_2, Y) \to \pi(X_1, Y).$$

Aniqroq aytadigan bo'lsak, agar $[\varphi]\in \pi(X_2,Y]$ bo'lsa, $\pi(X_1,Y)$ fazoda (gruppada) bu $[\varphi]$ ga bir qiymatli $[\varphi f]$ mos kelmoqda. Shunga o'xshab, har bir X topologik fazo va $g:Y_1\to Y_2$ uzluksiz akslantirishga quyidagi akslantirishni mos qo'yishimiz mumkin: $\pi_X(g):\pi(X_2,Y_1)\to\pi(X_1,Y_2)$.

Agar $[f]\in \pi(X_1,Y_2)$ bo'lsa, $[f]$ ga mos bir qiymatli qilib $\pi(X_1,Y_2)$ fazoda (gruppada) $[fg]\in \pi(X_1,Y_2)$ ni mos qo'yishimiz mumkin.

Bu yerda keltirilgan ikki $\pi_X(g)$ va $\pi^Y(f)$ konstruksiyalar korrekt aniqlangandir.

Tayinlangan Y topologik fazo uchun $Y\to\pi(X,Y)$ moslik kontravariant funktor bo'ladi. Bu funktor topologik fazolar kategoriyasi τop da funktor bo'ladi.

Agar tayin X fazo uchun $Y\to\pi(X,Y)$ moslikni olsak, bu moslik topologik fazolar kategoriyasi τop da kovariant funktor bo'ladi.

Keltirilgan ikki funktorni oladigan bo'lsak, ikkala funktor ham τop kategoriyadan topologik gruppalar kategoriyasiga o'tkazuvchi funktorlardir. Aniqroq aytganda, $\pi_X(g)$ va $\pi^Y(f)$ funktorlar τop kategoriyani gruppalar kategoriyasi $\mathfrak{I}$ ga o'tkazuvchi funktorlardir. Agar $\pi(X,Y)$ gruppada birorta topologiya keltirilsa, ya'ni $\pi(X,Y)$ topologik gruppa holatiga keltirilsa, bu ikki $\pi_X(g)$ va $\pi^Y(f)$ funktorlar τop kategoriyada harakat qiladi, deyishimiz mumkin.

X topologik fazoning gomotopik va fundamental gruppalarini olsak, bu operatsiya ham kovariant (algeraik) funktorni tashkil qiladi. Fazoning gomologik gruppasi $H(X)$ ni oladigan bo'lsak, bu ham algebraik xarakterdagi funktorlarga misol bo'la oladi. Fazoning fundamental gruppasi, gomotopik va gomologik gruppasi tushunchalari ba'zi topologik xarakterdagi masalalarni algebraik usullarda hal qilishda juda qo'l keladi va aksincha.

Topologik xarakterdagi misollarni yechishda funktorning gruppalarda qo'llanishini ko'rib chiqaylik: A to'plam X topologik fazoning yopiq to'plamostisi bo'lsin, tabiiy joylashtirish akslantirishini $i:A\to X$ bilan belgilaylik. Aytaylik, $\varphi:A\to Y$ birorta uzluksiz akslantirish bo'lsin. Bu φ akslantirishning davomlashtirishi $\overline{\varphi}:X\to Y$ mavjud bo'lishi uchun quyidagi diagrammaning kommutativ bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Masalan, birorta T funktor (aytaylik, kovariant funktor) yordamida quyidagi hosila — algebraik masalaga ega bo‘lamiz. Quyidagi diagrammada kommutativ bo‘ladigan $T(\overline{\varphi})$ gomeomorfizm mavjudmi?

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[rr, "T(i)"] \arrow[dr, "T(\varphi)"'] & & T(X) \arrow[dl, "T(\overline{\varphi})"] \\ & T(Y) & \end{tikzcd}$$

Berilgan masalaning yechimi keyingi algebraik masalaning yechimi borligiga olib keladi. Shunday qilib, $T(\overline{\varphi})$ gomeomorfizmning mavjudligi $\overline{\varphi}$ davomlashtirish mavjudligining zaruriy sharti ekan. Masalan, agar $T(i)$ gomeomorfizm nol bo‘lib, $T(\varphi)$ noldan farqli bo‘lsa, u holda $T(\overline{\varphi})$ gomeomorfizm mavjud bo‘lmaydi. Bu holda φ akslantirishning davomlashtirishi $\overline{\varphi}$ ham mavjud bo‘lmaydi, chunki diagrammaning kommutativligi buziladi.

V bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Kategoriya, funktorlar tushunchalari, ularga doir misollarni 19, 25, 30, 35, 37, 45–46, 83, 86, 107 raqamlar bilan berilgan adabiyotlardan; kovariant funktorlar, ularning ba’zi geometrik va topologik xossalarini o‘rganishni 47, 81, 92 raqamlar bilan berilgan adabiyotlardan; gruppalarga doir ma’lumotlarni 91, 74, 57 raqamlar bilan berilgan adabiyotlardan, algebraik va gomotopik gruppa funktorlarini 21, 24, 30, 40, 56, 61–68, 81, 83, 85–90, 98, 100–101 raqamlar bilan berilgan adabiyotlardan qo‘shimcha o‘qib, o‘rganish mumkin. Topologik, metrik va bikompakt fazolarda akslantirishlarning qo‘zg‘almas nuqtalari va ularning ba’zi geometrik, topologik xossalari hamda qo‘llanilishi yuzasidan tushunchalar 9, 22–23, 34, 58–59, 70–71, 92, 103, 105, 108 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda batafsil yoritilgan.

VI bob. TOPOLOGIK SIRTLAR VA KO‘PXILLIKLAR

Sirt tushunchasi Evklid tomonidan geometriya faniga olib kirilganida sirtga: “Sirt shuldirki, u uzunlikka va enga ega”, “Sirtning chegaralari chiziqlardir”, “Tekislik shunday sirtki, u o‘zidagi barcha to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan bir xil joylashgandir” deya ta’rif berilgan va qariyb ikki ming yil davomida turli sirtlar o‘rganib kelingan. Keyinchalik sirtlar elementar va sodda sirtlarga ajratib tadqiq qilingan. Masalan, kvadrat, yopiq yarim tekislik va tekislik eng sodda sirt deb atalgan. Eng sodda sirtlar vositasida elementar sirt kiritilgan. Elementar sirt deb sodda sirtlarning birortasiga gomeomorf bo‘lgan figuraga aytilgan. Masalan, elliptik va giperbolik paraboloidlar va parabolik silindrlar elementar sirtga misol bo‘la oladi, chunki ularning har biri tekislikning bir qismiga gomeomorfdir.

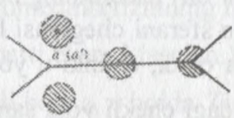
Yarim sferani chegarasi bilan birga olsak, u ham elementar sirtlarga misol bo‘la oladi, chunki u yopiq yarim tekislikka gomeomorfdir. Evklid fazosi R^3 dagi chekli yoki sanoqli sondagi elementar sirtlar bilan qoplangan to‘plam (figura) sirt deb ataladi. Boshqacha aytganda, Evklid fazosi R^3 dagi birorta figurani chekli yoki sanoqli sondagi elementar sirtlar bilan qoplash mumkin bo‘lsa, unga sirt deyiladi. Sfera, ellipsoid, elliptik silindr, bir pallali va ikki pallali giperboloidlarni olsak, ular sirtga misol bo‘la oladi. Chunki sferani ikkita yarim sfera bilan qoplash mumkin: ellipsoid esa, sferaga gomeomorfdir; elliptik silindrni chekli sondagi silindrik poloskalar (yo‘lakchalar) orqali qoplash mumkin. Ularning har biri esa, tekislikka gomeomorfdir; bir pallali giperboloid ikkita yo‘lakchadan iborat bo‘lib, ularning har biri tekislikka gomeomorfdir. Oldingi boblarning birida biz yelimlash amali yoki faktor fazo va faktor akslantirish tushunchasi aniqlangandan keyin yelimlash orqali R^3 Evklid fazoda ko‘pgina sirtlarni ko‘rishimizga to‘g‘ri kelgan. Shu sirtlarning har birini topologik sirt sifatida qarab, ixtiyoriy biror o‘lchamga ega bo‘lgan sirtni olsak, bunday sirtlar tasnifini bera olamizmi yoki yo‘qmi degan savollarga javob izlashga urinamiz.

Qattiq jismlar, dengiz to‘lqinlarining bir ondagi sirti yoki kundalik hayotda ishlatiladigan piyola, gantel yoki ikki tutqichli jismlar sirtlarini olsak, ular turli-tumandir. Ushbu sirtlarning umumiy xususiyatlarini aniqlab, shunga ko‘ra ularni sinflarga ajratishimiz mumkin bo‘ladi.

6.1-§. Ikki o‘lchamli sirtlarni yelimlash

Bu bo‘limda tekis figurani yelimlab yopishtirish amali natijasida hosil bo‘ladigan faktor fazosini to‘liq o‘rganamiz. R^2 tekislikda P ko‘pburchak olamiz va unda indutsirlangan metrikani ko‘rib chiqamiz. Ma’lumki, har bir $x \in P$ nuqtaning doirasimon atrofi mavjud. Bu atrof P ko‘pburchak bilan markazi x nuqtada bo‘lgan doira kesishmasidan iborat bo‘ladi. Agar x nuqta P ko‘pburchakning chegarasiga tegishli bo‘lmasa, x ning yetarli kichik doirasimon atrofi ochiq doiralardir. Agar x nuqta P ko‘pburchak chegarasiga tegishli bo‘lsa, u holda atrofi ochiq doiraning chegaralovchi radiuslari bilan olingan sektorlardan yoki segmentlardan iborat bo‘ladi (6.1.1-rasm).

6.1.1-rasm

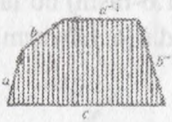


6.1.2-rasm

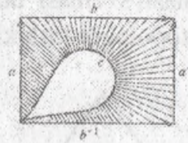
Ikkita P va P^1 ko‘pburchaklar berilgan bo‘lsin va ularning a va a^1 tomonlarining uzunligi teng bo‘lsin. Ko‘pburchaklarni a va a^1 tomonlari bo‘yicha yelimlab yopishtiramiz. Bu bilan $\lambda : a \to a^1$ gomeomorfizmda obraz va proobrazni (bu ikki nuqtani bir nuqta deb qabul qilamiz) ekvivalent deb olamiz. R ekvivalentlik munosabatida $(P \cup P^1)/R$ faktor fazo topologiyasi: agar x va x^1 nuqtalar ko‘pburchaklarning ichki nuqtalari bo‘lsa, ularning ochiq atrofi bu nuqtani o‘z ichiga olgan doiradan iborat bo‘ladi; agar x va x^1 nuqtalar ko‘pburchaklarning chegarasiga tegishli, ya’ni yelimlangan ekvivalent $x \in a$ va $x^1 \in a^1$ nuqtalardan iborat bo‘lsa, bu ularning atroflari nuqtalarni o‘z ichiga olgan yelimlanuvchi sektorlardan iborat bo‘ladi. 6.1.2-rasmda ko‘pburchaklarning a va a^1 tomonlarini yelimlash chizmasi keltirilgan. Shunga o‘xshab, ko‘pburchakning ikki tomonini yelimlab yopishtirish mumkin bo‘ladi.

Yuqorida yelimlash natijasida hosil bo‘lgan sirtning faktor fazodagi topologiyasining bazasi (yoki ochiq to‘plami) qanday bo‘lishini ko‘rsatdik.

Endi sirtlarni yelimlashga o'taylik.



6.1.3-rasm



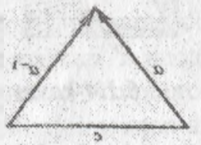
6.1.4-rasm

6.1.3-rasmda berilgan beshburchakning bir xil harflar bilan belgilangan tomonlarini yelimlab yopishtiramiz. Yelimlash tartibi quyidagicha: mos, ya'ni bir xil harflar bilan belgilangan tomonlar yo'nalishi strelka bilan ko'rsatilgan bo'lib, yo'naltirilgan mos kesmalarning boshi bilan boshi, oxiri bilan oxiri yelimlanadi. Harflar tepasidagi -1 ishorasi o'sha tomonlarning yo'nalishi mos tushmasligini bildiradi, ya'ni ko'pburchakning cheti bo'ylab soat mili yo'nalishiga nisbatan strelka (yo'nalish) teskaridir. Yelimlash tartibini bayon qilishda ko'pburchak tomonlarini aylanib o'tish soat mili bo'ylab olinsa, qulayroq bo'ladi. Masalan, yuqoridagi beshburchakda yelimlash jarayoni a tomondan boshlansa, uning sxemasi aba^{-1}, $b^{-1}c$ ko'rinishda bo'ladi. Bu ko'rinishdagi yelimlash sxemasi ko'pburchakning yelimlanadigan tomonlarini to'la aniqlaydi va yelimlash qonuniyatini qanoatlantiradi. Shuni ta'kidlash kerakki, yelimlash jarayonida yelimlanadigan tomonlarning uzunliklari bir xil deb olinadi.

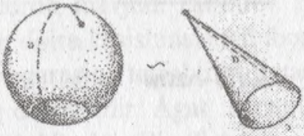
Ishonch hosil qilish mumkinki, bu faktor fazoni boshqa usul, ya'ni topologik ekvivalentlik usuli orqali ham yasashimiz mumkin (6.1.4-rasm): bu yerda faktor fazo teshigining cheti c chiziqdan iborat bo'lgan tor (ballon, kamera)dir. 6.1.5-rasmda shtrixlangan chiziqlar orqali yelimlash aa^{-1} va bb^{-1} chiziqlari belgilangan. Teshikli tor dasta (ruchka) deb ataladi.

6.1.5-rasm

6.1.1-misol. Ixtiyoriy uchburchak olamiz va uning qo‘shni tomonlarini yelimlashni ko‘rib chiqaylik. Agar oriyentatsiya teskari bo‘lsa, u holda yelimlash sxemasi $aa^{-1}c$ ko‘rinishida (6.1.6-rasm) bo‘ladi. Bu holda faktor fazo topologik teshikli sferaga ekvivalentdir (6.1.7-rasm).



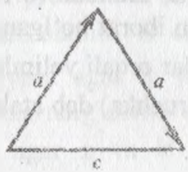
6.1.6-rasm



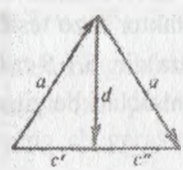
6.1.7-rasm

6.1.2-misol. Endi bir xil oriyentatsiyali uchburchakning qo‘sh tomonlarini yelimlashni sxema bo‘yicha (6.1.7-rasm) ko‘rib chiqaylik. Uchburchakni bir umumiy d balandligi bilan ko‘rsatilgan oriyentatsiyali ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchak deb olaylik (6.1.8-rasm). Bunday holatda uchburchaklarni yelimlash tartibi quyidagicha bo‘ladi. Birinchi navbatda uchburchaklarning gipotenuzalari yelimlanadi, so‘ngra katetlari d yelimlanadi (6.1.9-rasm). Natijada, Myobius varag‘i hosil bo‘ladi. Buni oldingi boblarda keltirilgan Miyobius varag‘i bilan solishtirish mumkin.

Shuni ta’kidlash kerakki, oxirgi hosil bo‘lgan faktor fazo birinchi keltirilgan (6.1.7-rasm) fazoga gomeomorfdir.

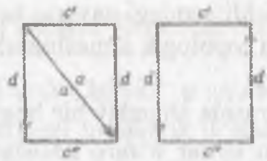


6.1.8-rasm



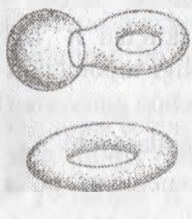
6.1.9-rasm

6.1.3-misol. S^2 sferadan halqacha kesib olamiz, yo bo‘lmasa, teshikli sferaga erkin chetki c chizig‘i bo‘ylab dasta yoki Myobius varag‘ini yelimlab yopishtiramiz. Birinchi holda torga ega bo‘lamiz (6.1.10- rasm).



6.1.10-rasm

Ikkinchi holda esa, proektiv tekislik RP^2 ga ega bo'lamiz. Haqiqatan ham, proektiv tekislik (oldingi bo'limda keltirilgan) topologik (6.1.10-rasm) faktor fazoga ekvivalentdir. Buning uchun yuqori "qopqoqga" cheti c chiziq-dan iborat Myobius varag'i ekanligini ko'rsatish yetarlidir. Bu figurani ichki aylananing diametrial qarama-qarshi nuqtalari aynanlash-tirilgan (yelimlangan, ya'ni diametrial qarama-qarshi ikki nuqta bir nuqta deb hisoblangan) tekis halqa sifatida tasavvur qilib, Myobius varag'iga olib keluvchi topologik almashtirishlar (6.1.11-rasm) bajariladi. Yuqoridagi yasash (sirtlarni ko'rish) jarayonini quyidagi ikki yo'nalishda rivojlantirish mumkin:



6.1.11-rasm

1) sferada R dona halqacha qirqib, unga R dona dasta yelimlaymiz;

2) sferada q dona halqacha qirqib, unga q dona Miyobius varag'ini yelimlab yopishtiramiz.

Shunday qilib, biz ikki qator quyidagi sirtlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{matrix} M_0; M_1, \dots, M_r, \dots \\ N_0; N_1, \dots, M_q, \dots \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

Ta'kidlash lozimki, M_0 va N_0 sirtlar S^2 sferadir. Hosil qilingan bu sirtlarning ba'zi geometrik xossalarini o'rganamiz va talqin qilamiz. Birinchi navbatda, bu sirtlar chekli sondagi qavariq ko‘pburchaklarning tomonlarini yelimlash va keyingi topologik almashtirishlar natijasida hosil qilinganligini anglab olish kerak.

Mr va Nq sirtlar orasida shunday bir bog‘liqlik borki, ular yagona bo‘lakdan iborat, ya’ni bu sirtlar o‘zaro kesishmaydigan ko‘pburchaklar guruhiga ajralmaydi. Chunki, bu sirtlarning qurilish jarayoniga e’tibor bersak, ko‘pburchakning ikki uchini bog‘lovchi tomoni bo‘yicha yelimlashda uchlarini tutashtiruvchi uzluksiz yo‘l doim mavjud ekanligini ko‘ramiz. Bu sirtlar chetga ega emas, chunki yelimlashda qatnashayotgan ko‘pburchakning ixtiyoriy chegaraviy tomoni faqat bitta boshqa tomon bilan yelimlanadi. Bundan kelib chiqadiki, bu sirtlarning ixtiyoriy nuqtasi ochiq doiraga gomeomorf atrofga ega. Shu sababli bunday sirtlar (fazolar) ikki o‘lchamli ko‘pxillik deyiladi.

Shuni ta’kidlash lozimki, Mr sirt oriyentirlangan va uni R^3 fazoga o‘zaro kesishmagan ikki tomonli sirt sifatida joylashtirish mumkin.

Nq sirt esa, Mr sirtning aksi – oriyentirlanmagan Miyobius varag‘iga o‘xshab bir tomonli va uni R^3 fazoga o‘zaro kesishgan sirt sifatida joylashtirish mumkin emas. Lekin uni R^4 fazoga joylashtirish mumkin.

Sirtning oriyentirlanganligi topologik xossa bo‘lganligi tufayli Mr va Mq sirtlar $(q \geq 1)$ hech qachon gomeomorf bo‘la olmaydi.

Har xil ikki Mr va Mq sirtlar (yoki Np va Nq sirtlar) (bunda $p \neq q$) ham hech qachon o‘zaro gomeomorf bo‘la olmaydi (bu ta’kid qurish jarayonidan kelib chiqadi).

Demak, (1) ro‘yxat yopiq sirtlarning to‘la topologik tasnifidan iborat bo‘lar ekan.

Agar sferaga R ta dasta va $q \geq 1$ ta Miyobus varag‘i ($p+q$ ta teshik teshib) yelimlasak, hosil bo‘lgan sirt sferaga, $2r+q$ ta Miyobius varag‘i yelimlangan sirtga topologik ekvivalentdir.

6.2-§. Sirtlarning triangulyasiyasi

Bu bo‘limda ikki o‘lchamli yopiq sirtlarni topologik uchburchaklarga bo‘lib, ularning ba’zi geometrik xossalarini ko‘rib chiqamiz.

Agar X topologik fazoning har bir x nuqtasi R^2 fazodagi ochiq doiraga gomeomorf bo‘lgan atrofga ega bo‘lsa, X fazo ikki o‘lchamli ko‘pxillik deyiladi. Bunday fazolarni o‘rganishda ularni Evklid fazolaridagi uchburchakka gomeomorf bo'ladigan elementar bo'laklarga bo'lib o'rganish qulay bo'ladi.

6.2.1-ta'rif. Agar $T \subset X$ bo'lib, $\varphi : \Delta \to T$ gomeomorf bo'lsa, u holda (T,φ) juftlik X fazodagi topologik uchburchak deyiladi. Bu yerda $\Delta \subset R^2$, Δ – uchburchak, φ gomeomorfizm "ustiga", boshqacha aytganda, φ – syurektiv, ya'ni akslantirish $\varphi^{-1}(t) \neq \varnothing$, $\forall \gamma, t \in T$.

Agar $\varphi : \Delta \to \mathrm{T}$ gomeomorfizm tayin bo'lsa, ortiqcha takrorlamaslik va tushunmovchilik bo'lmasligi uchun Δ uchburchakning uchi va tomonlarini topologik $T \subset R^2$ uchburchakning ham uchi va qirralari deb qabul qilamiz. Bir xillik hamda qulay bo'lishi uchun Δ uchburchakning tomonlarini T ning qirralari deymiz. Uchburchakning oriyentatsiyasini aniqlaymiz va Δ ning uchlaridan tashkil topgan har xil tartiblangan "uchlikdan" (uchta uchidan) iborat nuqtalar to'plami hosil qilamiz.

Agar bir uchlik ikkinchi uchlikdan o'rin almashtirish natijasida hosil qilingan bo'lsa, ikkita uchlik ekvivalent deymiz. Ma'lumki, bu yerda ekvivalentlik sinfi ikkitadan iborat bo'ladi. Agar bu tayin bir ekvivalent sinflarining biridan iborat bo'lsa, Δ uchburchakni oriyentirlangan deymiz. Agarda Δ uchburchak oriyentirlangan bo'lsa, (T,φ) topologik uchburchak oriyentirlangan deyiladi.

Δ uchburchakning oriyentatsiyasi ushbu uchburchakning uchlari orqali soat millari bo'ylab yoki soat miliga teskari harakatlanish orqali bir qiymatli aniqlanadi. Bu o'tish yo'nalishi φ ning gomeomorfizm yordamida topologik uchburchakda ham uchlaridan o'tish yo'lini aniqlaydi. Bunga indutsirlangan gomeomorfizm φ oriyentatsiyasi deyiladi. Uchburchakning oriyentatsiyasi uning qirralari oriyentatsiyasini ham aniqlaydi. Yuqoridagidan ko'rinadiki, shunga o'xshab n burchak va uning qirralari $(n>3)$ oriyentatsiyasini ham aniqlash mumkindir.

6.2.2-ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, X fazoning chekli sondagi $R = \{(T_i \varphi_i) : i = \overline{1,k}\}$ topologik uchburchaklardan tashkil topgan to'plami ikki o'lchamli ko'pxillikning triangulyasiyasi deyiladi:

1) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} T_i$;

2) $T_i, T_j = \varnothing$ yoki $T_i \cap T_j$ kesishma T_i va T_j larning umumiy qirrasidan yoki umumiy uchidan iborat bo'lsa, bu yerda $\forall i, j \in \{1,k\}$, $K = \{T_i : i = \overline{1,k}\}$ triangulyasiya.

Agar ko'pxilliklar triangulyasiyaga ega bo'lsa, bunday ko'pxilliklar triangulyasiyali ko'pxillik deyiladi. Agar K uchburchaklarning ixtiyoriy ikki uchini qirralaridan tuzilgan yo'l orqali tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda X bog'lamli deyiladi.

6.2.1-rasm

6.2.1-rasmda S^2 sfera sakkizta uchburchakdan tashkil topgan triangulyasiyali figuraga misol bo'ladi.

6.2.3-ta'rif. Bog'lamli triangulyasiyali ikki o'lchamli ko'pxilliklar yopiq sirt deyiladi.

Ta'rifdan va 6.2.1-rasmdan ko'rinadiki, S^2 sfera yopiq ikki o'lchamli ko'pxillik ekan. Oldingi bo'limda keltirilgan yopiq sirtlar triangulyasiyali yopiq sirtlarga misol bo'la oladi. Yopiq sirtlarning topologik xossalari triangulyasiyasining ko'rilishi asosida ta'riflanadi. Ularni o'rganish uchun tekislikda ularning sxematik yoyilmasini ifodalash lozim. Shuni aytib o'tish kerakki, $T_i \subset K$ uchburchaklarning asli (proobrazi) bo'lgan tekis Δ_i uchburchaklarni bir tekislikda yotadi va o'zaro kesishmaydi, deb olish talab qilinadi. Bunday yoyilmalarni yoki bu taqdimot bayonini keltiraylik.

Ko'pxillikning K triangulyasiyasi berilgan bo'lsin. Aytaylik, (T_i, φ_i), (T_j, φ_j) lar K ning uchburchaklari va $T_i \cap T_j = a$ ularning umumiy qirrasi bo'lsin.

$a_i = \varphi_i^{-1}(a)$ va $a_j = \varphi_j^{-1}(a)$ lar mos ravishda Δ_i va Δ_j larning qirralari bo'lsin. Demak, yelimlovchi gomeomorfizm $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1}|_a \circ \rho_i|_{ai} : a_i \to a_j$ aniqlangan.

Shunday qilib, K ning triangulyasiyasini $\Delta = (\{\Delta_i\}_{i=1}^{k}, \{\varphi_{ij}\})$ uchburchaklar sistemasiga mos keltiramiz, bu tekislikdagi uchburchaklar sistemasi mos qirralar juftligi birgalikdagi φ_{ij} gomeomorfizmlari bilan olinadi.

Agar φ_{ij} lar gomeomorfizmda bir-biriga mos tushsa, $\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i$ birlashmada ikki nuqtani ekvivalent deb ataymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi va uni R bilan belgilaymiz.

6.2.4-lemma. $(\bigcup_{i=1}^{k}\Delta i)/R$ faktor fazo X sirtga gomeomorfdir.

Isboti. Ekvivalentlik munosabati ta'rifida keltirilgan $\varphi_i:\Delta_i \to T_i$ gomeomorfizmlar tabiiy ravishda $(\varphi:\bigcup_{i=1}^{k}\Delta i)\to X$ syurektiv akslantirishni aniqlaydi, bunda har bir $x\in X$ nuqtaning asli $\varphi^{-1}(x)$ aniq R ekvivalentlik sinfidan iborat bo'ladi. Faktor akslantirish $\overline{O}(\bigcup_{i=1}^{k}\Delta i)/R \to X$ uluksiz akslantirish bo'lib, ayni paytda biektiv hamdir. Aniqki, unga teskari bo'lgan $\hat{o}^{-1}$ akslantirish ham uzluksiz. Demak, $\overline{O}$ akslantirish biektiv va ikki tomonga uzluksiz ekan. Bu esa, gomeomorfizmdir.

6.3-§. Sirtlarning yoyilmasi

Bu bo'limda ham Δ sistemaga o'xshash X sirtni taqdim etuvchi sxematik K triangulyasiyasi zarur bo'ladi. Ammo bunda uchburchaklar bilan birgalikda n burchaklar ham (n>3) ishtirok etishi mumkin.

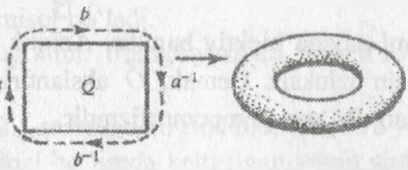
6.3.1-ta'rif. Agar $Q=(\{Q_i\},\{\varphi_{ij}\})$ sistema uchun quyidagilar o'rinli bo'lsa, bu sistema yoyilma tashkil qilgan deyiladi, agar $\{Q_i\}$ chekli sondagi kesishmaydigan tekis ko'pburchaklardan iborat bo'lib, $\{\varphi_{i,j}\}$ chekli sondagi yelimlovchi gomeomorfizm bo'lib, ular $\{Q_i\}$ ko'pburchaklar naborining juft qirralarini yelimlasa va har bir qirra faqat bitta qirra bilan yelimlansa, bu yelimlashda bitta ko'pburchakning qirrasi ishtirok etsa.

Xususiy holda $\Delta=(\{\Delta_i\},\{\varphi_{ij}\})$ sistema ham yoyilma tashkil qila oladi. bu Δ yoyilma X sirtning K triangulyasiyasi bilan bog'liq yoyilmasi deb yuritiladi.

Ixtiyoriy Q yoyilma berilgan bo'lsin. Bu yoyilmada yoki $\cup Q_i$ birlashmada φ_{ij} gomeomorfizmlar aniqlangan R ekvivalentlik munosabati orqali hosil bo'lgan $\tilde{Q}$ faktor fazoni qaraylik, ya'ni $\tilde{Q}=(\bigcup_{i}^{l}Q_i)/R$. $\tilde{Q}$

faktor fazoni yoyilma fazosi deb ataymiz. Ma'lumki, bu faktor fazo, ya'ni yoyilma fazosi ikki o'lchamli ko'pxillikdir. Bu fazo yetarli mayda ko'pburchak Q_i triangulyasiya hosil qilgan triangulyasiyaga ega bo'ladi. Shu sababli, agar $\bar{Q}$ faktor fazo bog'lamli bo'lsa, bu fazo yopiq sirt bo'ladi. Bu holda Q ga $\bar{Q}$ sirtning yoyilmasi deyiladi.

$\bar{Q}$ fazodagi faktor akslantirish bu sirtni bo'laklarga, ko'pburchaklar aksiga, qirralar aksiga (qirra bo'laklari), uchlari aksi (uchlari bo'laklari) ga ajratadi; umuman olganda, bu bo'laklar uning triangulyasiyasi bo'lmaydi. 6.3.2-rasmda ko'pburchak orqali taqdim qilingan torning yoyilmasi keltirilgan. Bu rasmdagi strelka va qirralar belgilanishi torning yelimlash qonuniyatini anglatadi.



6.3.2-rasm

Keyinchalik biz yoyilmadagi ko'pburchaklar oriyentatsiyasini har birining ba'zi oriyentatsiyasiga qarab kiritamiz. Ko'pburchak oriyentatsiyasi mos qirralarining oriyentatsiyasini aniqlaydi. Ikki qirrani yelimlovchi gomeomorfizm $\varphi_{ij} : a_j \to a_i$ da a_i qirra gomeomorfizmi φ_{ij} orqali indutsirlangan (a_i qirra oriyentatsiyasidan) oriyentatsiyani oladi: bu oriyentatsiya a_j qirraning oriyentatsiyasidan farq qilishi mumkin.

Agar hamma ko'pburchaklarning bir xil oriyentatsiyasida (masalan, ko'pburchakning uchlaridan soat millari yo'nalishida o'tganda qirralarni yelimlovchi gomeomorfizmlar qirraning obrazida qilgan oriyentatsiya teskari oriyentatsiyani indutsirlasa, α yoyilma oriyentatsiyalangan deyiladi. Teskari holda, ya'ni lokal bitta qirradagi oriyentatsiya indutsirlagani bilan bir xil bo'lsa, bunday yoyilma oriyentirlamaydigan deyiladi. Agar yoyilmasi oriyentirlangan (oriyentirlanmaydigan) bo'lsa, X sirt oriyentirlangan (oriyentirlanmagan) deyiladi.

6.4-§. Yoyilma klassifikatsiyasi (tasnifi)

Bu bo'limda sirtning yoyilmasi turlari va ularning farqlari bilan tanishamiz. Oriyentirlangan va oriyentirlanmaydigan sirtlar yoyilmalarining tasnifini – klassifikatsiyasini keltiramiz.

6.4.1-ta'rif. Agar yoyilmalarning faktor fazolari o'zaro gomeomorf bo'lsa, ikki $\bar{Q}$ va Q yoyilmalar ekvivalent deyiladi.

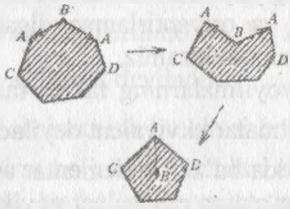
Endi yoyilmalar ustida ba'zi bir elementar amallarni bajaramizki, buning natijasida yoyilmalar o'ziga ekvivalent yoyilmaga aylanadi.

Bo'linmalar (bo'laklash). Aytaylik, Q yoyilmada Q_i $(n>3)$ n burchak mavjud bo'lsin. Bu ko'pburchakda birorta d diagonal o'tkazsak, u holda Q_i ko'pburchak ikkita Q_i^I va Q_i^{II} ko'pburchaklarga ajraladi. Q_i^I va Q_i^{II} larni ajratib olib, Q yoyilmaning yangi $\tilde{Q}$ yoyilmasini, ya'ni Q_i ko'pburchakni ikkita Q_i^I va Q_i^{II} lar bilan almashtirib ko'ramiz. Bu yangi yoyilmada yangi ikki qirra, d va d^* lar d diagonallarining nusxalarini tabiiy gomeomorfizm aynanlantirish bilan bog'laymiz, eski qirralar gomeomorfizmini o'zgartirmaymiz. Yangi $\tilde{Q}$ yoyilma oldingi Q yoyilmaning bo'linmasi deyiladi. Ushbu $\tilde{Q}$ va Q yoyilmalar o'zaro ekvivalentdir.

Yelimlash, dag'allashtirish (yiriklashtirish). Bu amal yuqorida keltirilgan birinchi amalga teskaridir. Q yoyilmaning ikki ko'pburchagi Q_i^I va Q_i^{II} bitta ko'pburchak Q_i qilib, d va d^* qirralarning bir gomeomorfizmi yordamida yelimlanadi.

Qolgan qirralarining gomeomorfizmlari (Q_i^I va Q_i^{II} ko'pburchaklarning) esa, Q_i ko'pburchakning qirralari gomeorfizmlari bilan indutsirlanadi. Natijada, yoyilmaning ikkita ko'pburchagi bir ko'pburchak bo'lib yiriklashadi.

Yumaloqlashtirish. Bu amalda biz yoyilmadagi ba'zi ko'pburchaklarning uchlari va qirralari sonini yelimlash orqali kamaytirib, yoyilmaning ekvivalentligini saqlab qolamiz. Aytaylik, Q yoyilmadagi Q_i ko'pburchakning ikki yonma-yon o'zaro teskari oriyentatsiyali qirrasi yelimlansin. Bu qirralarni yelimlab, shunday $\tilde{Q}$ yoyilmaga ega bo'lamizki, bu yoyilma Q_i ko'pburchakni o'zida saqlaydi, ammo Q_i ko'pburchakning uchlari soni Q_i nikidan ikkitaga kam va nihoyat, $\tilde{Q}$ yoyilmaning gomeomorfizmlari to‘plami Q ning gomeomorfizmlari to‘plamidan bittaga kamdir (6.4.1-rasm).



6.4.1-rasm

Ta’kidlaymizki, keltirilgan yumaloqlashtirish, qaysidir ma’noda ixchamlashtirish amali bayoni va 6.4.1-rasmdan ko‘rinadiki, bu amal ekvivalentlik sinflarini o‘zgartirmaydi. Ya’ni, bu amal natijasida yoyilma yana o‘ziga ekvivalent yoyilmaga o‘tadi.

Keyingi bayonimizda qulay bo‘lishi uchun har bir yoyilmani maxsus so‘z – belgilar to‘plami bilan quyidagi qonun asosida talqin qilamiz.

Aytaylik, $Q=\{\{Q_i\},\{\varphi_{ij}\}\}$ yoyilma berilgan bo‘lsin. Yoyilmaning bir ko‘pburchagi uchun ma’lum bir oriyentatsiyani (masalan, aniqlik maqsadida yoyilmaning hamma ko‘pburchaklari uchun uchlaridan o‘tish yo‘nalishi soat mili bo‘yicha deb) tayin qilamiz. Q yoyilmaning ko‘pburchaklari qirralarini harflar bilan shunday belgilaymizki, yelimlanmaydigan qirralar bir xil harflar bilan, yelimlanadigan qirralar esa, har xil xarflar bilan belgilansin. Gomeomorfizmlarni φ_{ij} orqali, berilayotgan qirralarni yelimlash tartibini rasmdagi strelka orqali ko‘rsatamiz. Strelkalarning yo‘nalishini shunday ko‘rsatamizki, yelimlanayotgan qirralarning oxiri oxiri bilan, boshi esa, qirraning boshi bilan yelimlansin. Bunda har bir yelimlanayotgan qirralar juftligida, qirrralar bittasining yo‘nalishi ixtiyoriy ravishda boshqasining yo‘nalishini mos ravishda yelimlovchi φ_{ij} gomeomorfizmlar orqali bir qiymatli aniqlanadi.

Shunday qilib, yoyilmaning barcha ko‘pburchagining jami qirrasi shunday oriyentatsiyalanadiki, u boshqa qirralar bilan yelimlanadi. Bu yerda shunday bo‘lishi mumkinki, ba’zi qirralarning oriyentatsiyasi tayinlangan ko‘pburchakni aylanib o‘tishi orqali berilgan yo‘nalishdan farq qilishi mumkin. Bunday hollarda qirraning harfli belgilash ko‘rsatkichiga -1 bilan qo'shiladi va shunday yoziladi. Oldingi belgilashlarga o'xshab, bitta Q_i ko'pburchak qirralarini $\omega(Q_i)$ so'z bilan berilgan yo'nalishda qirralaridan ketma-ket o'tib belgilaymiz. $\omega(Q_i)$ so'z Q yoyilmadagi Q_i ko'pburchakni yelimlash sxemasini xarakterlaydi. Barcha ko'pburchaklarning so'zlar to'plami Q yoyilmani xarakterlaydi.

Asosan, ikkita yoyilma tipi ajratiladi.

6.4.2-ta'rif. Agar yoyilma aa^{-1} yoki $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots..$ $a_mb_ma_v^{-1}b_m^{-1}; m>0$ ko'rinishda so'z bilan aniqlangan bitta ko'pburchakdan iborat bo'lsa, yoyilmalarning I kanonik tipi deb aytiladi.

6.4.3-ta'rif. Yoyilmaning II kanonik tipi deb, $a_1a_1a_2a_2\ldots.a_ma_m, m>0$ ko'rinishdagi so'z bilan ifodalangan bitta ko'pburchakdan iborat yoyilmaga aytiladi.

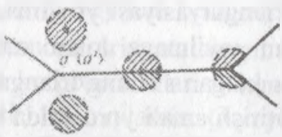
Endi I va II tipdagi kanonik yoyilmalarning asosiy geometrik xossalari, topologiyasi va qanday topologik sirtlar hosil qilishi, oriyentatsiyalari qanday bo'lishi masalalariga to'xtalib o'tamiz.

1. Yoyilmani yiriklashtirish amalidan ma'lumki, bu operatsiya yordamida X sirtning mos triangulyasiyasi yoyilmadan yoyilmasi bitta ko'pburchakdan iborat bo'lgan yoyilmaga doimo o'tishi mumkin. Boshqacha aytganda, yoyilmaga mos kelgan sirtning triangulyasiyasini tashkil qilgan uchburchaklarni yiriklashtirish amali yordamida bitta ko'pburchakdan iborat bo'lgan yoyilmaga doimo erishish mumkin. Shu sababli bundan keyin faqat shunday yoyilmani olamiz.

2. Agar yoyilmani tashkil qilgan aa^{-1} dan farqli so'zning tarkibida baribir aa^{-1} ko'rinishdagi birikma bo'lsa, yumaloqlashtirish amali yordamida bunday birikmalardan ketma-ket xalos bo'la borish mumkin. Masalan: a va a^{-1} qirralarining umumiy uchi A dan xalos bo'lish natijasidagi yangi yoyilmaning so'zi oldingi so'zdan aa^{-1} birikmalarini tashlab yuborishdan iborat bo'ladi. Eslatamizki, hosil qilinayotgan sirtlar yopiq sirtdir. Natijada, bir yoki ikki harfdan iborat (aa^{-1} yoki aa) so'zga yoki harflari to'rttadan kam bo'lmagan, tarkibida aa^{-1} birikma qatnashmaydigan so'zga ega bo'lmoqdamiz. Demak, aa, aa^{-1} ko'rinishdagi so'zlar kanonik yoyilmani tasnif qilar, izohlar ekan. Keyingi tahlilimizda aa^{-1} ko'rinishdagi so'zdan tashkil topgan yoyilmalar ustida to'xtalamiz.

3. Hosil qilingan a yoyilmadan hamma uchlari ekvivalent bo‘lgan, ya’ni ularni faktorizatsiya natijasida yelimlaydigan yoyilmaga o‘tishimiz mumkin.

Faraz qilaylik, Q yoyilmada ekvivalent bo‘lmagan uchlar bo‘lsin. U holda Q yoyilmada a qirra mavjudki, uning oxirlari A va B ekvivalent emas. Aytaylik, b ikkinchi uchi C dan iborat bo‘lgan B uch yonidagi qirra bo‘lsin. Ya’ni, bir uchi B, ikkinchi uchi C bo‘lgan ko‘pburchakning a qirra yonida tomonidir. A va C uchlarni d diagonal bilan tutashtiramiz. Bu holda b qirra bilan yelimlanuvchi b^1 qirra ΔABC ning tashqarisida topiladi. Aks holda $a=b$, yoki $b=a^{-1}$, bu A va B uchlarning ekvivalent emasligiga zid-dir yoki so‘zda aa^{-1} ko‘rinishdagi birikmaning yo‘qligidir. Endi yoyil-maga d diagonal bo‘yicha bo‘laklash amalini tatbiq qilamiz, so‘ngra b qirra bo‘yicha yiriklashtiramiz (ya’ni, b qirrani b^l qirra bilan yelimlab yopishtiramiz). Hosil bo‘lgan R^l yoyilmada A uchga ekvivalent uchlar to‘plami bittaga ko‘payadi, B uchga ekvivalent bo‘lgan uchlar to‘plami esa, bittaga kamayadi (6.4.2-rasm).



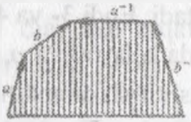
6.4.2-rasm

Agar shunda ham R^1 yoyilmaning so‘zida aa^{-1} ko‘rinishdagi birikmalar mavjud bo‘lsa, yumaloqlashtirish amali yordamida ularni olib tashlash mumkin. Shuni ta’kidlash kerakki, oxirgi qayta ko‘rish jarayoni B uchga ekvivalent bo‘lgan uchlar to‘plami va A uchga ekvivalent bo‘lgan uchlar to‘plamlari orasidagi ayirma qiymatini o‘zgartira olmaydi (tekshirib ko‘ring).

Keyinchalik, agar yana A uchga ekvivalent bo‘lmagan uchlar qolgan bo‘lsa, to istalgan xossali yoyilmaga erishguncha yuqoridagi qayta ko‘rish jarayonini to‘liq qo‘llaymiz.

Shunday qilib, bundan keyin ko‘rilayotgan yoyilmada hamma uchlar ekvivalent va uning so‘zi tarkibida aa^{-1} ko‘rinishdagi birikmalar yo‘q deb hisoblashimiz mumkin bo‘ladi.

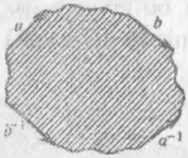
4. Yoyilmaning so'zi tarkibida qatnashayotgan bir xil harflarni doimo yonma-yon qo'yish mumkin. Haqiqatan ham, masalan, a harf bilan a harf yonma-yon turmasin. Bu holda ko'pburchakda a qirraning boshi bilan a qirra boshini birlashtiruvchi d diagonalni o'tkazamiz. So'ngra d diagonal bo'yicha bo'laklash amalini, keyin esa, a qirra bo'yicha yiriklashtirish amalini qo'llaymiz. Natijada, hosil bo'lgan yangi so'zda a harflar bo'lmaydi, lekin so'z tarkibida dd ko'rinishdagi birikma paydo bo'ladi (6.4.3-rasm).



6.4.3-rasm

Tekshirib ko'rish mumkinki, 3-punktda erishgan natijalarimizga putur yetmadi. Boshqa yonma-yon turmagan harflar uchun ham yuqoridagi jarayonni qo'llaymiz. Shuni ta'kidlashimiz mumkinki, ushbu jarayonni qo'llash natijasida boshqa aa ko'rinishdagi birikmalarni ajratmadik va oldindan ekvivalent bo'lmagan a qirraga qo'shni bo'lgan qirra ajratildi.

5. Endi 3- va 4-punktlardagi shartlar bajarildi deb hisoblab, ko'rsatamizki, agar a va a^{-1} harflar so'z tarkibida yonma-yon turmasa, shunday b va b^{-1} harflar topiladiki, a,a^{-1} juftlik b,b^{-1} juftlikni ajratadi (6.4.4-rasm).

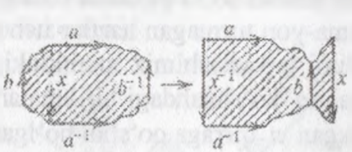


6.4.4-rasm

Teskaridan qilaylik. Agar b,b^{-1} ko'rinishdagi juftlik bo'lmasa, u holda a va a^{-1} harflar orasida faqat ss ko'rinishdagi so'z birikmasi bor. Bunday holat yoyilmaning hamma uchlari ekvivalentligiga ziddir, chunki bu holat, agar a qirraning A va B uchlari ekvivalent bo'lmasagina, mavjud bo'lishi mumkin (6.4.5-rasm).

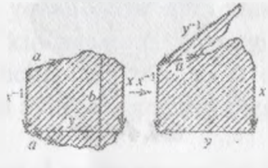
6.4.5-rasm

6. Shunday qilib, yoyilmaning so‘zida ikki juftlik – a, a^{-1} va b, b^{-1} lar mavjud va ular bir-birini ajratadi. Endi 3- va 4-punktlardagi shartlarni buzmagan holda, so‘zning tarkibida kelayotgan a, a^{-1} va b, b^{-1} to‘rtlikni $xyx^{-1}y^{-1}$ ko‘rinishdagi birikmaga almashtirish mumkinligini ko‘rsatamiz. Eng avvalo, a va a^{-1} qirralar boshlarini x diagonal bilan tutashtiramiz va unga bo‘laklash (bo‘linmalar) amalini qo‘llaymiz. Keyin esa, b qirra bo‘yicha yiriklashni qo‘llaymiz (6.4.6-rasm).



6.4.6-rasm

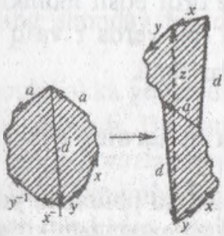
Hosil bo‘lgan ko‘pburchakda x va x^{-1} qirralar oxirlarini y diagnol bilan tutashtiramiz va unga bo‘laklash, so‘ngra a qirra bo‘yicha yiriklashtirish amallarini qo‘llaymiz (6.4.7-rasm).



6.4.7-rasm

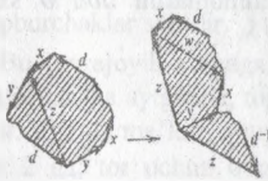
Hosil qilingan yoyilma so‘zining a, a^{-1} b, b^{-1} harflari o‘rnida $xyx^{-1}y^{-1}$ ko‘rinishdagi birikma paydo bo‘ladi. Agar bu amallardan ss^{1} ko‘rinishdagi so‘z birikmalari vujudga kelsa, yumaloqlashtirish amali yordamida ular bartaraf qilinadi. Lekin dd^{-1} va $cdc^{-1}d^{-1}$ ko'rinishdagi birikmalar ajratilmaydi. Demak, 3- va 4-punktlarda qilingan qadamlar natijasida 1–6-punktlardagi ko'rish jarayonida berilgan so'zning tarkibi $xyx^{-1}y^{-1}$ va aa dan iborat bo'lgan so'z bilan almashtirdik. Agar so'z tarkibida aa birikma bo'lmasa, bu I tipdagi kanonik yoyilmadir.

7. Agar yoyilmaning so'zi tarkibida bir vaqtda $xyx^{-1}y^{-1}$ va aa ko'rinishdagi birikmalar bo'lmasa, bu yoyilma II kanonik tipdagi so'zga quyidagicha keltiriladi: a va a qirralarning umumiy uchi bilan y va x^{-1} qirralarning umumiy uchini d diagonal orqali tutashtiramiz va d bo'yicha bo'laklash amalini bajaramiz, so'ngra d bo'yicha yiriklashtiramiz (6.4.8-rasm).

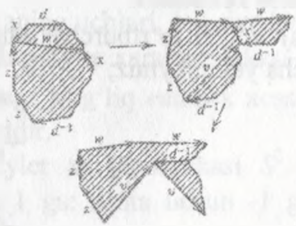


6.4.8-rasm

Hosil bo'lgan ikki juft x va x, y va y ayri qirralarni 4-punktdagidek ko'rish ishlarini bajarib, ularni zz_y va $\omega\omega$ ko'rinishdagi so'z birikmalariga aylantiramiz (6.4.9–6.4.10-rasmlar).



6.4.9-rasm



6.4.10-rasm

Bu amallardan keyin ham d^{-1},d^{-1} ayri juftliklar uchrasa, yana 4-punktdagi amallarni qo'llab, uni vv ko'rinishdagi so'z birikmasiga olib kelamiz (6.4.10-rasm). Natijada, talab qilingan kanonik ko'rinishdagi so'zga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $xyx^{-1}y^{-1}$ va aa ko'rinishdagi birikmalar juftliklari so'zda uchta aa ko'rinishdagi juftliklar birikmasiga almashar ekan. Bu jarayonda boshqa $xyx^{-1}y^{-1}$ yoki aa ko'rinishdagi so'z birikmalari buzilmaydi. Jarayonni $xyx^{-1}y^{-1}$ ko'rinishdagi so'z birikmalari to'liq yo'qolib ketguncha davom ettirish mumkin bo'ladi.

Natijada, 1–7-punktlardan xulosa qiladigan bo'lsak, quyidagi yoyilma klassifikatsiyasini ifodalovchi teoremani isbotladik.

6.4.4-teorema. Ixtiyoriy oriyentirlangan yoyilma (mos ravishda – oriyentirlanmagan) I tip kanonik (II tip kanonik) yoyilmaga ekvivalentdir.

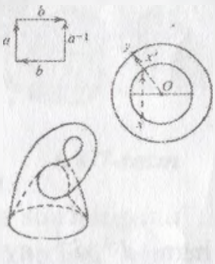
Bu teoremadan shuni e'tirof etish mumkinki, har qanday yopiq sirt *Mr* yoki *Mq* ko'rinishdagi (bu yerda r va q lar sirtning jinsi deb yuritiladi) sirtga gomeomorf bo'lar ekan.

6.5-§. Ko'pburchak va sirtlarning Eyler xarakteristikasi

Bu punktda topologik sirt ko'pburchak yoki topologik ko'pburchaklarning Eyler xarakteristikasi va muntazam ko'pyoqlilarning turlari aniqlanadi. Oldingi punktdagi teoremadan ma'lum bo'ldiki, ixtiyoriy yopiq sirt *Mr* yoki *Nq* ga gomeomorf ekan. Bundan ko'rinadiki, *Mr* va *Nq* larning Eyler xarakteristikasini keltirsak, topologik sirtlar yoki sirtlarning to'la klassifikatsiyasini keltirgan bo'lamiz. Shu sababli ba'zi bir sirtlarning turli ekvivalent ta'riflarini keltirish maqsadga muvofiq bo'ladi.

1. Endi Kleyn butilkasi deb ataluvchi, N_2 sirtga ekvivalent bo'lgan ta'riflarni keltiramiz.

a) to'g'ri to'rtburchakning (6.5.1-rasm) tomonlarini $aba^{-1}b$ sxema bo'yicha yelimlaymiz;



6.5.1-rasm

b) halqaning chetlari – ichki va tashqi aylanalarni yo'nalishini almashtirgan holda yelimlaymiz. Bunga quyidagicha erishish mumkin: ichki aylanani birorta diametri bo'yicha bukib, ichki va tashqi aylanalardagi bir radiusda yotgan x va y nuqtalar yelimlanadi (6.5.1-rasm);

d) ikkita Miyobius varag'ini cheti – aylanalari bo'yicha yelimlaymiz;

e) halqaning chetlari – har bir aylanaga ikkita Miyobius varag'ini yelimlaymiz.

2. Ma'lumki, proektiv fazo RP^1 aylana S^1 ning diametrial qarama-qarshi nuqtalarini aynanlantirish natijada hosil qilingandir. Isbotlash mumkinki,

a) $R\rho^1$ fazo S^1 ga gomeomorfdir;

b) $RP^1 \subset RP^2$;

d) RP^2 fazoda RP^1 ning shunday Miyobius varag'iga gomeomorf bo'ladigan atrofi topiladi.

3. Yopiq qavariq ko'pburchakka gomeomorf bo'lgan topologik fazolar topologik ko'pburchaklar deyiladi. Bu gomeomorfizmda ko'pburchak mos uchlarining (tomonlarining) obrazlari topologik ko'pburchaklarning uchlari (qirralari) deb yuritiladi. Umumiylikni buzmaslik maqsadida sirtning triangulyasiyasi qirralari bir-biriga yopishgan – qo'shni topologik ko'pburchaklardan tashkil topgandir, deb xulosa qilsa bo'ladi. Bunga erishish uchun qavariq ko'pburchakning sirt hosil qiladigan (qaralayotgan sirt) tomonlarini aynanlashtirish kerak. Bundan oldin esa, ko'pburchakni yetarli mayda ko'pburchaklarga (masalan, uchburchaklarga) bo'lib yuborish lozim bo'ladi. Endi shunday sirtlarning triangulyasiyalarini ko'ramiz.

Har qanday triangulyasiyalangan P sirt uchun $\chi(\ddot{I}\ ) = l - k + f$ sonni aniqlaymiz. Bu yerda l – triangulyasiyaning uchlari, k – qirralari va f – ko'pburchaklar sonidir. $\chi(\ddot{I}\ )$ son P sirtning Eyler xarakteristikasi deyiladi. Bu son ajoyib xossaga – triangulyasiyaga bog'liq emaslik xossasiga ega. Boshqacha aytganda, topologik invariantdir.

4. Bizga ma'lum, quyidagi sirtlar Eyler xarakteristikasi S^2 sfera uchun 2 ga; tor uchun 0 ga; doira uchun 1 ga; dasta uchun -1 ga va Miyobius varag'i uchun 0 ga teng bo'ladi.

Agar Jordan teoremasidan foydalansak, S^2 sfera uchun $\chi(S^2)$ Eyler xarakteristikasining topologik invariantligini osongina isbotlash mumkin bo'ladi.

kelamiz (6.4.10-rasm). Natijada, talab qilingan kanonik ko'rinishdagi so'zga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $xyx^{-1}y^{-1}$ va aa ko'rinishdagi birikmalar juftliklari so'zda uchta aa ko'rinishdagi juftliklar birikmasiga almashar ekan. Bu jarayonda boshqa $xyx^{-1}y^{-1}$ yoki aa ko'rinishdagi so'z birikmalari buzilmaydi. Jarayonni $xyx^{-1}y^{-1}$ ko'rinishdagi so'z birikmalari to'liq yo'qolib ketguncha davom ettirish mumkin bo'ladi.

Natijada, 1–7-punktlardan xulosa qiladigan bo'lsak, quyidagi yoyilma klassifikatsiyasini ifodalovchi teoremani isbotladik.

6.4.4-teorema. Ixtiyoriy oriyentirlangan yoyilma (mos ravishda – oriyentirlanmagan) I tip kanonik (II tip kanonik) yoyilmaga ekvivalentdir.

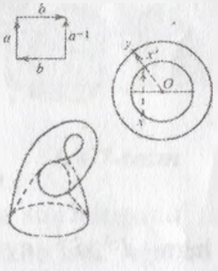
Bu teoremadan shuni e'tirof etish mumkinki, har qanday yopiq sirt *Mr* yoki *Mq* ko'rinishdagi (bu yerda r va q lar sirtning jinsi deb yuritiladi) sirtga gomeomorf bo'lar ekan.

6.5-§. Ko'pburchak va sirtlarning Eyler xarakteristikasi

Bu punktda topologik sirt ko'pburchak yoki topologik ko'pburchaklarning Eyler xarakteristikasi va muntazam ko'pyoqlilarning turlari aniqlanadi. Oldingi punktdagi teoremadan ma'lum bo'ldiki, ixtiyoriy yopiq sirt *Mr* yoki *Nq* ga gomeomorf ekan. Bundan ko'rinadiki, *Mr* va *Nq* larning Eyler xarakteristikasini keltirsak, topologik sirtlar yoki sirtlarning to'la klassifikatsiyasini keltirgan bo'lamiz. Shu sababli ba'zi bir sirtlarning turli ekvivalent ta'riflarini keltirish maqsadga muvofiq bo'ladi.

1. Endi Kleyn butilkasi deb ataluvchi, N_2 sirtga ekvivalent bo'lgan ta'riflarni keltiramiz.

a) to'g'ri to'rtburchakning (6.5.1-rasm) tomonlarini $aba^{-1}b$ sxema bo'yicha yelimlaymiz;



6.5.1-rasm

b) halqaning chetlari – ichki va tashqi aylanalarni yo'nalishini almashtirgan holda yelimlaymiz. Bunga quyidagicha erishish mumkin: ichki aylanani birorta diametri bo'yicha bukib, ichki va tashqi aylanalardagi bir radiusda yotgan x va y nuqtalar yelimlanadi (6.5.1-rasm);

d) ikkita Miyobius varag'ini cheti – aylanalari bo'yicha yelimlaymiz;

e) halqaning chetlari – har bir aylanaga ikkita Miyobius varag'ini yelimlaymiz.

2. Ma'lumki, proektiv fazo RP^1 aylana S^1 ning diametrial qarama-qarshi nuqtalarini aynanlantirish natijada hosil qilingandir. Isbotlash mumkinki,

a) Rp^1 fazo S^1 ga gomeomorfdir;

b) $RP^1 \subset RP^2$;

d) RP^2 fazoda RP^1 ning shunday Miyobius varag'iga gomeomorf bo'ladigan atrofi topiladi.

3. Yopiq qavariq ko'pburchakka gomeomorf bo'lgan topologik fazolar topologik ko'pburchaklar deyiladi. Bu gomeomorfizmda ko'pburchak mos uchlarining (tomonlarining) obrazlari topologik ko'pburchaklarning uchlari (qirralari) deb yuritiladi. Umumiylikni buzmaslik maqsadida sirtning triangulyasiyasi qirralari bir-biriga yopishgan – qo'shni topologik ko'pburchaklardan tashkil topgandir, deb xulosa qilsa bo'ladi. Bunga erishish uchun qavariq ko'pburchakning sirt hosil qiladigan (qaralayotgan sirt) tomonlarini aynanlashtirish kerak. Bundan oldin esa, ko'pburchakni yetarli mayda ko'pburchaklarga (masalan, uchburchaklarga) bo'lib yuborish lozim bo'ladi. Endi shunday sirtlarning triangulyasiyalarini ko'ramiz.

Har qanday triangulyasiyalangan P sirt uchun $\chi(\bar{I}\,) = l - k + f$ sonni aniqlaymiz. Bu yerda l – triangulyasiyaning uchlari, k – qirralari va f – ko'pburchaklar sonidir. $\chi(\bar{I}\,)$ son P sirtning Eyler xarakteristikasi deyiladi. Bu son ajoyib xossaga – triangulyasiyaga bog'liq emaslik xossasiga ega. Boshqacha aytganda, topologik invariantdir.

4. Bizga ma'lum, quyidagi sirtlar Eyler xarakteristikasi S^2 sfera uchun 2 ga; tor uchun 0 ga; doira uchun 1 ga; dasta uchun -1 ga va Miyobius varag'i uchun 0 ga teng bo'ladi.

Agar Jordan teoremasidan foydalansak, S^2 sfera uchun $\chi(S^2)$ Eyler xarakteristikasining topologik invariantligini osongina isbotlash mumkin bo'ladi.

Jordan teoremasi. Ixtiyoriy sodda yopiq chiziq (aylanaga gomeomorf bo'lgan chiziq) tekislik yoki sferani ikkita chegaralari shu chiziqdan iborat bo'lgan o'zaro kesishmaydigan sohalarga ajratadi.

Endi S^2 ning birorta triangulyasiyasini olaylik. Bitta uch (*) ni tayin qilib va qirralarni ketma-ket o'chirib, S^2 ga kelishimiz mumkin. Birinchi qirrani (*) uch bilan yangi uchini tutashtirib, har bir keyingi qirra yangi chizilgan qirraning uchidan boshlanishini ta'minlaymiz. Har bir bosqichda hosil bo'lgan uchlar soni l ni, qirralar soni k ni va qirralardan tashkil topgan sodda yopiq chiziq bilan chegaralangan sohalar soni f ni hisoblab boramiz. Aytaylik, boshlang'ich holatda l=1, k=0, f=1 bo'lsin (ya'ni S^2 cfera (*) uch va uni to'ldiruvchi sohadan iborat bo'lsin). Ishonch hosil qilish mumkinki, l-k+f son bitta yangi qirra qo'shish bilan o'zgarmaydi. Haqiqatan ham, agar bu qirra yangi uchga borgan bo'lsa, u holda yangi soha vujudga kelmaydi. Ammo l va k lar 1 taga oshadi. Agar yangi qirra ikki eski uchlarni tutashtirsa, u holda bu qirra qirralardan iborat bo'lgan yo'lni yopadi (ya'ni yopiq yo'l hosil bo'ladi) va natijada Jordan teoremasiga ko'ra, yangi soha hosil bo'ladi. Demak, k va f lar bittaga oshadi, lekin l o'zgarmaydi. Oxirgi qirrani tutashtirib, triangulyasiyani to'la tiklaymiz va u holda $l-k+f=\chi(S^2)$ bo'ladi. Boshlang'ich holatda $l-k+f=2$ tenglik o'rinli edi. Demak, $\chi(S^2)=2$.

5. P_1 va P_2 sirtlar berilgan bo'lsin va ularning chetlari l_1 va l_2 lar S^1 ga gomeomorf bo'lsin. Bu holda P_1 va P_2 sirtlarning chetini $\alpha : l_1 \to l_2$ gomeomorfizm orqali yelimlangan deb hisoblashimiz mumkin. Aytaylik, $P_1 \underset{\alpha}{\cup} P_2$ hosil bo'lgan faktor fazo bo'lsin. Quyidagi formulani isbotlaymiz:

$$\chi(\Pi_1 \underset{\alpha}{\cup} \Pi_2) = \chi(\Pi_1) + \chi(\Pi_2) \quad (1)$$

P_1 va P_2 sirtlarni shunday triangulyasiyalaymizki, uning chetlari l_1 va l_2 larda gomeomorf triangulyasiyalar hosil bo'lsin. S^1 ning triangulyasiyasi l uchdan va shunday sondagi qirradan iborat bo'lsin. Yelimlashdan keyin uchlar, qirralar va ko'pburchaklar soni mos ravishda l_1+l_2-l, k_1+k_2-l va f_1+f_2 larga teng bo'lib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$(l_1+l_2-l)-(k_1+k_2-l)+(f_1+f_2)=(l_1-k_1+f_1)+(l_2-k_2+f_2).$$

(1) formula bu tenglikdan kelib chiqadi. Bu formula ba'zi hollarda sirtlarning Eyler xarakteristikasini hisoblash uchun juda qulaydir. Aytaylik, ${}_pS^2$ teshikli sfera bo'lsin. Agar bu ${}_pS^2$ figuraga qayta R ta doira yelimlasak, S^2 cferaga ega bo'lamiz. (1) formula $\chi(S^2)=\chi({}_pS^2)+P$ tenglikni keltirib chiqaradi.

Oxirgi tenglikdan $\chi({}_pS^2)=2-P$ ga ega bo'lamiz. Bizga ma'lumki, (oldingi punktda keltirilgan) M_r sirt ${}_pS^2$ sirtga R dona dastani yelimlashdan hosil bo'lgan edi. Bu dastalar har birining Eyler xarakteristikasi -1 dan iborat. (1) formuladan

$$\chi(M_r)=2-2P \quad (2)$$

Shunga o'xshab, Nq ko'rinishdagi sirtlar uchun

$$\chi(Nq)=2-q \quad (3)$$

formulaga ega bo'lamiz. Ma'lumki, har bir Miyobius varag'ining Eyler xarakteristikasi 0 ga tengdir.

(2) va (3) tengliklardan ko'rinadiki, $\chi(Mr_1)=\chi(Mr_2)$ tenglik faqat $R_1=R_2$ bo'lganda, $\chi(Nq_1)=\chi(Nq_2)$ tenglik esa, faqat $q_1=q_2$, bo'lganda o'rinli bo'ladi. Eyler xarakteristikasining topologik invariant ekanligidan Mr va Mr_1 sirtlar $P\neq P^1$ bo'lganda gomeomorf bo'la olmaydi. Shunga o'xshab, Nq va Nq^1 sirtlar ham $q\neq q^1$ bo'lganda gomeomorf bo'la olmaydi.

6. Eyler xarakteristikasi qavariq ko'pyoqlilar geometriyasi nazariyasida mazmunli va qiziq qo'llanishga ega. Qavariq ko'pyoqlarning sirtni chekli sondagi qavariq ko'pburchaklarni (tomonlarini) aynan akslantirish yordamida qirralarni yelimlash natijasida hosil bo'lgan sirt sifatida qarash mumkin. Bu qavariq ko'pyoq uchun quyidagi Eyler xarakteristikasiga ega bo'lamiz.

$$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2 \qquad (4)$$

Bu yerda α_0 – ko'pyoqning uchlari, α_1 – qirralari va α_2 – yoqlari sonidir.

Haqiqatan ham, o'ngdagi 2 son sferaga gomeomorf bo'lgan ko'pyoq sirtining Eyler xarakteristikasidan iboratdir.

Agar har bir uch m ta yoqning umumiy uchi bo'lib, har bir yoq n burchakdan iborat bo'lsa, ko'pyoqli *(n,m)* tipga ega deyiladi.

Agar n burchaklar muntazam bo'lsa, u holda ko'pyoqli muntazam deyiladi. Ko'pyoqlining *(n,m)* tipini bilsak, u holda α_0, α_1 va α_2 larni hisoblash mumkin bo'ladi. Haqiqatan ham, har bir uchda m ta qirra uchrashadi (kesishadi). Shu sababli $\alpha_0 m = 2\alpha_1$ har bir yoqda n qirra bor. Bundan esa, $\alpha_2 \cdot n = 2\alpha_1$ (har bir qirra ikki uchni birlashtiradi va qirra ikki yoqning tarkibida bo'ladi).

Demak:

$$\frac{\alpha_0}{m^{-1}} = \frac{\alpha_1}{2^{-1}} = \frac{\alpha_2}{n^{-1}} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{4mn}{2n + 2m - mn}$$

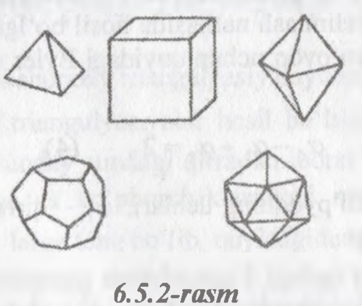
Bu tenglik yordamida $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ larning qiymatlari hisoblanadi. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ larning musbat bo'lishi haqidagi tabiiy shartning bajarilish zaruratidan n va butun musbat sonlar uchun quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$2n + 2m - mn > 0, \text{ bundan } (n-2)(m-2) < 4$$

Tekshirib ko'rish qiyin emaski, bu oxirgi tengsizlik quyidagi 5 ta yechimga ega:

$$\{3;3\} \leftrightarrow \{4;3\} \leftrightarrow \{3;4\} \leftrightarrow \{5;3\} \leftrightarrow \{3;5\} \quad (5)$$

Elementar geometriyadan ma'lumki, 5 ta muntazam ko'pyoqli mavjud (6.5.2- rasm):



6.5.2-rasm
tetraedr; kub; oktaedr; dodekaedr; ikosaedr.

Bu ko‘pyoqlarning tiplari (5) yechim bilan bir xil bo‘ladi. Shunday qilib, biz (n,m) tipdagi ko‘pyoqlilarning to‘la klassifikatsiyasini keltirdik.

6.6-§. Sirtlarning Eyler xarakteristikasi va topologik klassifikatsiyasi

Bu bo‘limda oriyentirlangan va oriyentirlanmagan sirtlarning topologik klasifikatsiyasini o‘rganamiz. Shu jarayonda ikki o‘lchamli sirtlarning Eyler xarakteristikasi ham keltiriladi. Oldingi bo‘limda isbotlangan teoremalarning geometrik talqiniga e’tibor qaratadigan bo‘lsak, X sirtning kanonik yoyilmasi so‘zi tarkibida $xux^{-1}y^{-1}$ ko‘rinishdagi so‘z bo‘lagiga dasta, $a\ a$ so‘z bo‘lagiga esa, X sirtning qolgan qismi cheti bo‘ylab yelimlangan Miyobius varag‘i mos keladi. Shunday qilib, sirtning kanonik yoyilmasining I yoki II tipga qarashli ekanligi mos ravishda sirtga chekli sondagi dasta yoki Miyobius varag‘i yelimlanganidan darak beradi. Bunday yelimlashni S^2 sferaga dastalar va Miyobius varaqlarini yelimlashdan hosil bo‘lgan figura sifatida tasavvur qilish mumkin.

Demak, I tipli kanonik yoyilmali sirt — bu oriyentirlangan Mr ko‘rinishdagi sirt ekan. Bu yerda r sferaga yelimlangan dastalar sonini ifodalaydi (sirtning jinsi deb ham yuritiladi). Agar sirtning kanonik yoyilmasi II tipli bo‘lsa, u holda bu sirt oriyentirlanmagan $Nq(q \geq 1)$ tipdagi sirtdir, bu yerda q sferaga yelimlangan Miyobius varaqlari sonini bildiradi (sirtning jinsi ham deb ataladi).

Ko‘rinib turibdiki, agar S^2 sferaga bir vaqtda r ta dasta va $q(q \geq 1)$ ta Miyobius varag‘i yelimlansa, hosil bo‘lgan sirt oriyentirlanmagan sirt bo‘lib, u N_{2p+q} tipga ega bo‘ladi.

Yoyilmalarning klassifikatsiyasi haqida keltirilgan teorema ixtiyoriy yopiq sirt Mr yoki Nq tipdagi sirtlarga gomeomorf bo‘ladi, deya xulosa qilishga imkon beradi. Bu xulosa natijasini aniqlashtirish maqsadida sirtning Eyler xarakteristikasini ko‘rib chiqamiz. Ma’lumki, uning Eyler xarakteristikasi $\chi(X)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ dan iborat bo‘lib, bu yerda X sirtning yoyilmasidagi (bo‘laklardagi) α_0 uchlar, α_1 qirralar α_2 ko‘pburchaklarning obrazlari sonidir.

Eyler xarakteristikasining bunday aniqlanishi oldingi ta’rifni umumlashtiradi. Masalan, ko‘pburchakning obrazi topologik ko‘pburchak bo‘lmasdan, balki bitta ko‘pburchakning tomonlari yelimlangan figura bo‘lishi mumkin. Agar X sirt Mr tipga ega va R uning $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}......a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$ so‘zli kanonik yoyilmasi bo‘lsa, u holda, ravshanki, $\alpha_0=1$, va $\alpha_1=2p$, $\alpha_2=1$ $\chi(X)=2-2p$.

Agar X sirt Nq tipga ega va Q kanonik yoyilmasi $a_1a_2,...,a_q$ so‘zli bo‘lsa, u holda $\alpha_0=1$; $\alpha_1=q$; $\alpha_2=1$ va $\chi(Nq)=2-q$.

Agar Q qaralayotgan X sirtning ixtiyoriy yoyilmasi bo‘lsa, u holda elementar amallar yordamida u kanonik yoyilmaga keltiriladi. Osongina ishonch hosil qilish mumkinki, bu elementar amallar $\chi(X)$ ni o‘zgartirmaydi. Haqiqatan ham, bo‘laklash amalida α_1 va α_2 sonlar 1 ga oshadi, α_0 esa, o‘zgarmaydi. Yiriklashtirish amalida α_1 va α_2 lar 1 ga kamayadi, α_0 esa, o‘zgarmaydi; yumaloqlashtirishda esa, α_0 va α_1 sonlar 1 ga kamayadi, α_2 o‘zgarmaydi. Shu sababli yig‘indi $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ o‘zgarmaydi.

Yuqoridagilarga ko‘ra, quyidagi muhim xulosaga kelamiz: sirtning Q yoyilmasining kanonik yoyilmasi unda bajariladigan elementar almashtirishlarga bog‘liq emas. Haqiqatan ham, agar Q yoyilma ikki R va R^1 kanonik yoyilmalar ko‘rinishiga keltirilsa, masalan, 1 tipdagi:

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}.....a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1} \text{ va } a_1\beta_1a_1^{-1}\beta_1^{-1}.....a_p\beta_pa_p^{-1}\beta_p^{-1}$$

U holda Q maydalash (bo‘laklash) bo‘yicha hisoblangan Eyler xarakteristikasi R va R^1 lar hisoblari natijalari bilan ustma-ust tushishi shartdir va biz $2-2p=2-2p_1$ tengliklarga ega bo‘lar edik. Bundan $R=P_1$ o‘rinli. Ya’ni, R va R^1 larning so‘zlari ustma-ust tushadi.

Shunga o‘xshash fikrlarni II tipga ega bo‘lgan yoyilmalar R va R^1 lar uchun ham yuritish o‘rinli.

Agar R yoyilma I tipga, R^1 yoyilma esa, II tipga ega bo‘lsa, $2-2p=2-2q$ tenglik faqat $2p=q$ bo‘lganda o‘rinli. Yuqorida aytilgan mulohazalar shuni ko‘rsatadiki, yoyilma uchun I kanonik tip (R lik) va II kanonik tipidagi $(q\neq 2p)$ yoyilmaga ega bo‘lmaydi.

Umumiy xulosa va mulohazalar shunga olib keldiki, elementar almashtirishlar yordamida bir vaqtda yoyilmani ham I kanonik tip, ham II kanonik tip ko‘rinishiga olib kelib bo‘lmaydi, chunki elementar amallar yoyilmaning oriyentatsiyalanganligi (oriyentatsiyalanmaganligi) xossalarini saqlaydi. Shunday qilib, sirtlarning topologik klassifikatsiyasi haqida quyidagi markaziy teoremaga ega bo'ldik.

6.6.1-teorema. Agar r va q lar bir vaqtda nolga teng bo'lmasa, ixtiyoriy yopiq sirt *Mr* yoki *Nq* tipdagi sirtlarga topologik ekvivalentdir. *Mr* va *Nq* $(q \geq 1)$ tipdagi sirtlar topologik ekvivalent emas; r va q larning har xil qiymatlarida ham $Mp(Nq)$ sirtlar topologik ekvivalent emas.

Quyida ba'zi ma'lum yopiq sirtlarning jinsi va tiplarini keltiramiz:

a) sfera – $M_0 = N_0$; $\chi(N_0) = \chi(M_0) = 2$

b) tor (bir dastalik sfera) – M_1; $\chi(M_1) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$

d) krendel (ikki dastalik sfera) – M_2; $\chi(M_2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2$

e) proektiv tekislik – N_1; $\chi(N_1) = 2 - 1 = 1$

f) Kleyn butilkasi – N_2; $\chi(N_2) = 2 - 2 = 0$

VI bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Topologik fazolarda faktor topolgogiya amali, fazolarda yelimlash, ikki o'lchamli sirtlarni yelimlash amali 9, 11, 14, 20–21, 26, 54, 95 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, simpleks va sirtlarning triangulyasiyasi 1, 3–5, 9, 15, 21–22, 34, 48, 70, 73, 92, 105, 108 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda batafsil bayon etilgan.

Sirtlarning ko'pyoqlilar va ko'pxilliklar yoyilmasi tushunchalari 15, 17–18, 20–22, 38, 72, 75–81, 103 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda to'la yoritib berilgan.

Yoyilmalarning, sirtlarning Eyler va topologik klassifikatsiyalari esa, 2, 5, 9, 15–18, 20–23, 34, 38–39 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda sistematik ravishda keng va to'la bayon qilingan.

VII bob. FIZIKA FANINING BA'ZI SOHALARIDA TOPOLOGIYANING TATBIG'I

Topologiya fani tushunchalari ham yaqin-yaqingacha matematikadan tashqarida qo'llanilishga ega bo'lmagan. Topologiyaning vujudga kelishiga e'tibor beradigan bo'lsak, uni ilk bor A. Puankare vaziyatlar geometriyasi fani (analysis situs – *joy (o'rin) geometriyasi* (lotinchadan)) deb, bu fan figuralarning sifatiy xossalarini nafaqat uch o'lchamli fazoda, balki undan yuqori o'lchamli fazolarda ham o'rganadi deb ta'kidlagan edi. Topologiya juda qiziq fan bo'lib, uning tushunchalari geometriya va algebrani uzviy bog'lab, nafaqat zamonaviy matematikada differensial tenglamalarda, balki mexanikada, kompleks analizda, algebraik geometriyada, funksional analizda, matematik va kvant fizikasida, taqdimotlar nazariyasida keng qo'llanila boshlandi. Xattoki, diqqatga sazovarli sonlar nazariyasi, kombinatorika va murakkab hisoblashlar nazariyasida boshqa ko'rinishlarda qo'llanilmoqda.

Topoloiyaning fizikadagi ayrim qo'llanishlarini keltiramiz.

XX asrning 70-yillaridan keyin fizika fanining ayrim sohalarida bir qator masalalar yuzaga chiqdiki, ular bugun o'z adekvat yechimini topologiya tilida topmoqda. Bu hol fizikaning ushbu bo'limlari faol rivojlanishda ekanligidan darak beradi.

Polimerlar fizikasida belkovlar gigant molekulalari va nuklein kislotalari bunga misol bo'lishi mumkin. Molekulaning fazodagi holatini o'rganishda, chegaralangan topologik atrof-muhitga ega bo'lmoqdamiz. Sof matematik nuqtai nazardan bu uzun yopiq molekula yopiq chiziqni ifodalaydi. Bilamizki, bunday chiziqlar turli ko'rinishdagi bog'ichli tugun (uzel) lardan iborat bo'ladi.

Polimerlar biofizikasida uzun molekulalarning o'zi (harakati) topologik obyekt bog'ichlarni hosil qiladi. Maydon nazariyasida esa, zarralar konfiguratsiyasi vektor maydonning topologik maxsus xususiyatlari yordamida matematik talqin qilinadi.

Fizikada kondensirlangan holatdagi moddalarning tartiblangan sturukturasi qator defektlarining barqarorligi topologiya fani bilan bog'liqligi ma'lum bo'ldi. Ular qatoriga oddiy va suyuq kristallar, o'ta o'tkazuvchilar, o'ta o'tkazuvchan suyuqliklar va ferromagnetiklar kiradi. Shunday suyuq kristallar defektlari barqarorligining topologik tabiatini keltiramiz. Bunday kristallar nematik kristal yoki nematik deb yuritiladi.

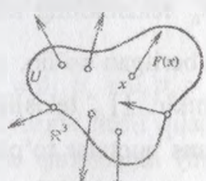
Fizikada turli moddalarning tartiblangan sturukturasi kondensirlangan holatlarini o'rganishda, topologik talqin qilishda va tekshirishda bu strukturada u yoki bu defektlarning barqarorligi hosil bo'ladigan zaruriyat yuzaga keladi.

Bu defektlar kristallarda – dislokatsiya (kristallik strukturasi tartibining buzilishi), suyuq kristallarda – disklinatsiya (molekulalar yo'nalish maydoni uzluksizligining buzilishi), vixrlar – He^3, He^4 suyuqliklarda o'ta oquvchanlik va ferromagnetik yoki boshqa barqaror (mustahkam) geometrik konfiguratsiyalardir. Bu bobda shu kabi ayrim hodisalar topologik asoslarining bayoni keltiriladi.

7.1-§. Vektor maydon. Maxsus nuqta va maxsus chiziqlar

Vektor maydon va uning maxsus nuqtasi (maxsus chizig'i) tushunchalari birinchi bo'lib defektlarni matematik bayon qilish jarayonida paydo bo'ldi.

Uch o'lchamli Evklid fazosi R^3 ning $U \subset R^3$ sohasida vektor maydon deb, odatda, har bir $x \in U$ nuqtaga $\vec{F}(x) \in R^3, \overline{F(x)} \neq \vec{0}$ vektorni mos qo'yuvchi (bu yerda x nuqta bilan uning radius vektori $\vec{x}$ ni ayniylashtiramiz) $F: U \to R^3 \setminus \{0\}$ akslantirishga aytiladi. Agar qaralayotgan R^3 fazoning U sohasida har bir $x \in U$ nuqtadan $\overline{F}(x)$ vektorni qo'ysak, hosil bo'lgan geometrik holat U sohadagi vektor maydon deyiladi. Vektor maydonni bunday aniqlashda $\overline{F}(x)$ ning x nuqtaga uzluksiz bog'liqligi talab qilinishi maqsadga muvofiqdir (ya'ni, $F: U \to R^3 \setminus \{0\}$ akslantirish uzluksiz bo'lishi lozim). Ammo bu shart doimo ham bajarilmasligi mumkin, ya'ni maxsus nuqta deb ataluvchi nuqtalarda, maxsus chiziq $\gamma \subset U$ nuqtalarida maydon aniqlanmagan yoki F uzilishga ega bo'lishi mumkin. Xususiy holda $\overline{F}(x) = \vec{0}$ ham aniqlanmagan nuqtaga kiradi.



7.1.1-rasm

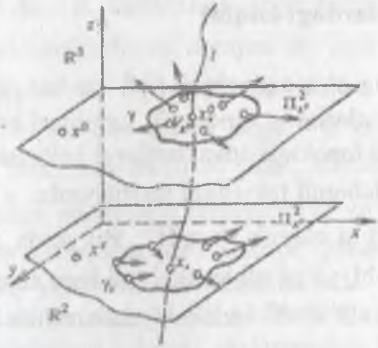
Shuni ta'kidlash mumkinki, sohaning har bir $x \in U$ nuqtasiga shu nuqtadan qo'yilgan $\overline{F(x)}$ vektor mos bo'lsa, bu $F : U \to R^1 \setminus \{0\}$ moslikni o'zaro bir qiymatli desak ham bo'ladi. Lekin ayrim hollarda (ba'zi bir nuqtalarida) sohalaridagi shart bajarilmasligi mumkin. Bunday nuqtalar vektor maydonning maxsus nuqtalari deyiladi. Masalan, $\overline{F(x)}$ uzilishga ega bo'lishi mumkin yoki $\overline{F(x)}$ nol qiymatga, ya'ni nol vektor $\overline{F(x)} = 0$ dan iborat bo'lishi mumkin. Bunday hollarda maydon xos nuqtali vektor maydon deyiladi.

Masalan, agar U soha fizik modda bilan ferromagnetik bilan band (to'ldirilgan) bo'lsa, u holda uning nuqtalarida magnit momenti $\overrightarrow{M}$ vektor aniqlangan bo'ladi (tashqi magnit maydoni bo'lmasa ham). Bu moddaga xarakterli magnit momenti aniqlangan bo'ladi (agar harorat kritik holatdan past bo'lsa ham). Bu jarayonda U sohada hosil bo'lgan vektor maydon $\overline{F(x)} = M(x)$ xos nuqtaga va xos chiziqqa ega bo'lishi mumkin, agar maxsus nuqtaning sodda tiplaridan biri, masalan, maydon quyidagi radius vektor bilan aniqlangan bo'lsa:

$$\overrightarrow{x} : \overline{M(x)} = \frac{\overline{x} \cdot M(x)}{|\overline{(x)}|} \quad \text{yoki} \quad \overline{M(x)} = \frac{M(x) \cdot \overline{x}}{|\overline{x}|}$$

Bu yerda $M(x) \neq 0$ U sohada aniqlangan uzluksiz sonli funksiya, $0 \in U$; bunda $x = 0$ nuqtada maydon aniqlangan emas. Bu nuqtaga "tipratikan" deyiladi.

Agar har bir aniqlangan nuqtasida $\overrightarrow{M}(x)$ vektor $R^2 \subset R^3$ fazoostiga parallel bo'lsa, u holda $\overline{M(x)} \in R^2$ va ixtiyoriy R^2 ga parallel bo'lgan va $x^0 \in U^2$ nuqtadan o'tgan $\overline{Mx_0}$ tekislikning kesishmasi $V_x = U \cap \prod_{x^0}$ da $\overrightarrow{M} : V_{x0} \to R^2$ vektor maydon berilgan bo'lib, v_{x0} tekis sohaning x^0 nuqtasi maxsus nuqta bo'lishi mumkin. $\prod_{x^0}$ tekislikni parallel ko'chirishda (x^0 nuqtani o'zgartirishi) bu maxsus nuqtalar to'plami bitta maxsus chiziq l tashkil qilishi mumkin va bu maxsus chiziqlar $\overrightarrow{M}$ vektor maydonning U sohasidagi maxsus chizig'i deyiladi (7.1.2-rasm).



7.1.2-rasm

l maxsus chiziq $\overrightarrow{T}$ vektor maydonning uyurmasi (vixri) deyiladi. Uyurmalar tabiiy ravishda suyuqlik va gazlarning harakati natijasida paydo bo'ladi. Ya'ni, muhitning zarrachalari birorta l chiziq atrofida aylanma harakat hosil qiladi.

Odatda, uyurma sifatida l atrofidagi zarralarning aylanma harakati tushuniladi. l chiziq uyurma "o'qi" deb yuritiladi. Matematik bayon qilishda uyurmalar "o'qini" uyurma bilan aynanlashtirish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Bizning bu holatda vektor maydon $\overrightarrow{M}$ rolini muhitdagi x nuqtaning tezliklar maydoni $\overrightarrow{v(x)}$ o'ynaydi, l esa, $\overline{v}(x)$ vektor maydonning maxsus chizig'i rolini o'taydi. O'ta oquvchan He^4 uyurmalarning ochilishi ajoyib voqea bo'ldi. Ma'lumki, He^4 suyuqlik absolyut nolga yaqin haroratda o'zini ikkita komponentli aralashma sifatida tutadi: normal (zichligi P_n va tezligi $\overline{v}_n$) va o'ta oquvchan (zichligi p_s va tezligi $\vec{v}_s$). Bu yerda $p = p_n + p_s$.

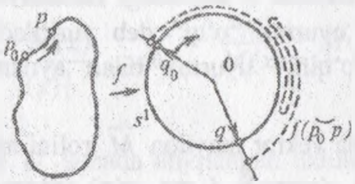
Haroratda to'liq zichlik $T = 0$ $p_n = 0, p_s = p$ bo'ladi. He^4 geliyning o'ta oquvchan komponentasi uyurma hosil qiladi. Hosil qilingan uyurma sirpanish yopishqoqlik kuchiga qaramagan (hisobga olmaganda) holda ham barqaror (mustahkam) bo'ladi. Boshqa suyuqlik va gazlarda uyurma bunday barqarorlikka ega emas.

7.2-§. Akslantirish darajasi, topologik va gomotopik invariantlarning fizik jarayonlardagi talqini

Ferromagnetik va o‘ta oquvchan He^4 lar barqarorligi va uyurmalar ekvivalentlik qonuniyatlarining topologik sabablari hamda xususiyatlarini o‘rganish uchun sodda topologik invariantlarni keltirish zarur.

$P^2 \subset R^3$ ikki o‘lchamli tekislikni tayinlaymiz. γ yopiq yo‘l (aylanaga gomemorf bo‘lgan) ni olaylik, $\gamma \subset \Pi^2$. Bu yerda γ ning nuqtalaridan aylanib o‘tish yo‘nalishi, ya’ni oriyentatsiyasi ham aniqlangan bo‘lsin.

Aytaylik, $f:\gamma \to S^1 \subset R^2$ uzluksiz akslantirish ham aniq, bu yerda S^1 markazi koordinatalar boshida va radiusi birga teng bo‘lgan oriyentatsiyaga ega aylanadir. Qachonki $p \in \gamma$ nuqta belgilangan $P_0 \in \gamma$ nuqtadan chiziqda oriyentatsiya yo‘nalishi bo‘yicha $\overline{p_0 p}$ yo‘lni bosib o‘tsa, $q = f(p)$ nuqta ham S^1 aylanada (*r* nuqtaning joylashishiga bog‘liq holda) oriyentatsiya yo‘nalishi bo‘yicha yoki oriyentatsiya yo‘nalishiga teskari $q_0 = f(p_0)$ nuqtadan boshlab $f(\overline{p_0 p})$ yo‘lni bosib o‘tadi.



7.2.2-rasm

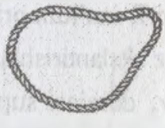
Qachonki R nuqta γ chiziqni to‘la bir marta aylanib o‘tsa, $q = f(p)$ nuqta oxir-oqibat oriyentatsiya yo‘nalishi K_{*F} bo‘ylab S^1 ni to‘liq aylanib o‘tadi va *K*- oriyentatsiyaga teskari yo‘nalishdagi yo‘lni to‘liq bosib o‘tadi. Boshqacha aytganda, P_0 nuqta γ chiziqda oriyentatsiya yo‘nalishida to‘liq bir marta γ ni aylansa, $g = f(p_0)$ nuqta S^1 aylanani oriyentatsiya yo‘nalishi K_x bo‘yicha oriyentatsiya yo‘nalishiga teskari *K* larda to‘liq aylanib o‘tishi mumkin.

$f:\gamma \to S^1$ uzluksiz akslantirishda (oriyentatsiyali chiziq γ ni S^1 ga) $K_+ - K_-$ shakl f akslantirishning darajasi deyiladi va $\deg f$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifga ko'ra, K_+ va K_- lar butun sonlardir, shu sababli $\deg f$ ham butun son bo'ladi. Lekin $\deg f = 0$ bo'lishi ham, $\deg f < 0$ yoki $\deg f > 0$ bo'lishi ham mumkin ekan. Bizning holatda f akslantirish darajasi $\vec{q}$ radius vektorning oriyentatsiya yo'nalishi bo'yicha to'liq buralishini 1 deb, oriyentatsiya yo'nalishiga teskari to'liq buralishini -1 deb hisoblab, umumiy yig'indidan aniqlasa bo'ladi.

Shuni ta'kidlashimiz mumkinki, akslantirishning daraja tushunchasini $f:\gamma \to G$ ko'rinishidagi uzluksiz akslantirishga ham kengaytirsa bo'ladi, bu yerda γ va R^1 lar yopiq oriyentirlangan yo'llar, γ, G chiziqlar ham tekislikda olinayotgan bo'lishi shart emas, lekin ular aylanaga gomeomorf bo'lsa yetarli. Akslantirishning darajasi tushunchasi kerak bo'lar ekan, bu ta'rifda yopiq chiziq (aylanaga gomeomorf) tushunchasi ham lozim bo'lmoqda.

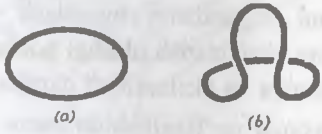
Yopiq chiziqlar sinfi haqida ham biroz ma'lumot keltiramiz. Uch o'lchamli Evklid fazosi R^3 da S^1 aylanaga gomeomorf bo'lgan figuraga bog'ich (uzel) deyiladi. Bog'ich tushunchasini intuitiv tasavvur qilish murakkab emas.

Sodda bog'ichga 7.2.2-rasm misol bo'la oladi.



7.2.2-rasm

Sodda bo'lmagan bog'ichga esa quyidagilarning ba'zi birlarini misol qilib keltirish mumkin:



7.2.3-rasm

Rasmlardan ko‘rinadiki, birga keltirilgan bog‘lar bir-biriga o‘zaro gomeomorf, lekin intuitsiyamiz ko‘rsatadiki, ularning R^3 fazoda joylashishi har xildir. Ko‘rinadiki, bog‘ichlar bog‘larining soni bilan (bir bog‘ichdan ko‘plari petlya deb yuritiladi) farq qiladi. Masalan, 7.2.3-rasmda (a) va (b) lar bir bog‘ichli, qolganlari ko‘p bog‘ichli tugunlardir.

Akslantirishning darajasi $\deg f$ tushunchasi topologik invariantdir (aniqroq qilib aytganda, bu tushuncha gomotopik invariant), ya’ni akslantirishda u uzluksiz gomotoplasak o‘zgarmaydi. Bu quyidagini anglatadi, agar f akslantirish $f_\lambda \to G$ akslantirishlar oilasiga joylashib (kirib) qolsa, bu yerda $\lambda \in [0,1]$, $0 \leq x \leq 1$, f_λ oila λ parametrga bog‘liq bo‘lib, $f_1 = f$ va $q = f_\lambda(q)$ nuqta $(\lambda, p) \in [0,1] \cdot \gamma$ o‘zgaruvchiga uzluksiz bog‘liq bo‘ladi, u holda bu f_λ oilaning har bir f_λ akslantirishi uchun $\deg f_\lambda$ son $\lambda \in [0,1]$ o‘zgarmas bo‘ladi.

Shunday qilib, f akslantirishni uzluksiz o‘zgartirish natijasida uning (darajasining) yig‘indi summasini kamaytirib bo‘lmas ekan, ya’ni $f(\gamma)$ obrazining G ga o‘ralgan, musbat va manfiy o‘rama bog‘ichlar soni o‘zgarmas ekan. Boshqacha aytganda, $K_+ - K_-$ o‘zgarmas bo‘lib qolaveradi.

$\deg f$ darajaning muhim xossalaridan yana biri quyidagichadir, agar $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ lar aylanaga gomeomorf, ma’lum oriyentatsiyaga ega yo‘llar bo‘lsa va $f : \gamma \to \gamma_2, g : \gamma_1 \to \gamma_2$ uzluksiz akslantirishlar bo‘lib, $\deg f$ va $\deg g$ larga ega bo‘lsa, u holda $gf : \gamma \to \gamma_2$ darajasi superpozitsiya f va g akslantirishlar darajalari $\deg f$ hamda $\deg g$ larning ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $\deg(gf) = \deg(g) \cdot \deg(g) \cdot \deg f$.

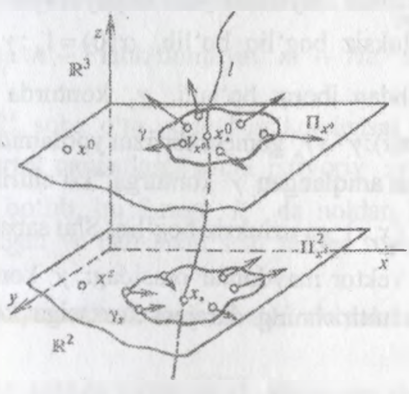
Bu xossa $f(\gamma), g(\gamma)$ obrazlarning γ_1 va γ_2 chiziqlar o‘ralgan o‘ramalarning oxirgi yig‘indisidan foydalangan holda $gf(\gamma)$ obrazning γ_2 ga o‘ralgan o‘ramlari soni yig‘indisini hisoblash yordamida tekshiriladi. Gomotopiya va gomotop akslantirish oldingi boblarda ham keltirilgan edi. Bu bobda bizga gomotopiya va akslantirish darajasi deg boshqa aspektda, ma’lum bir fizik jarayonga qo‘llanilishida zarur bo‘lmoqda. Biroz takrorlash bo‘lsa-da, bu o‘quvchiga ortiqchalik qilmaydi.

Har bir $f:\gamma \to G$ akslantirishga unga gomotop bo‘lgan akslantirishlar $f^1:\gamma \to G$ sinfi $[f]$ ni mos qo‘yamiz. Bizga ma’lumki, akslantirishning gomotop bo‘lishi $[f]$ sinfda ekvivalentlik munosabatini o‘rnatadi. Natijada, $C(\gamma,G)$ to‘plam o‘zaro kesishmaydigan $\{[f]\}$ sinflarga ajraladi va bu sinflar gomotopik ekvivalentlik sinflari deb yuritiladi.

Ixtiyoriy $f^1 \in [f]$ uchun $\deg f^1 = \deg f$ o‘rinli bo‘ladi, shu sababli har bir $[f]$ sinfga uning darajasi $\deg(f)$ ni mos qo‘ysak, ya’ni $[f] \to \deg f$ moslik o‘rnatsak, har bir ekvivalentlik sinfiga butun son $\deg f$ mos qo‘yilmoqda. Fazoning fundamental gruppasi ko‘rsatildiki, bu moslik biektivdir. Shu sababli butun son $n = \deg f$, f gomotopik akslantirishlar sinfi $[f]$ ning topologik invariantidir. Qulaylik uchun ushbu sinf indeksida n nomerni yozsak, maqsadga muvofiq bo‘ladi. Ya’ni, $[f]_n$. Demak, ixtiyoriy $\varphi \in [f]_n$ uchun $\deg\varphi = n$ dir. $[f]_0$ sinf doimiy akslantirish $f_0:\gamma \to q$ ga gomotop bo‘lgan akslantirish to‘plamidan iborat ekan.

7.3-§. Ferromagnetikning magnit maydoni va o‘ta oquvchan He^4 “gaz”ining uyurmalari

O‘ta oquvchan He^4 gazining uyurmasi va ferromagnetikdagi magnit uyurmasini ko‘rib chiqaylik (7.3.1-rasm).



7.3.1-rasm

P_{x0} tekislikda oriyentirlangan yopiq γ yo'lni tanlab olaylik va γ chiziqda maxsus nuqta bo'lmasin, yagona maxsus nuqta x_0 bu γ yo'lning ichki sohasida joylashgan bo'lsin. Aytaylik, γ yo'l aylanaga gomeomorf bo'lsin va bu maxsus nuqta atrofidan γ chiziq bir marta aylanib o'tsin. $S^1 \subset R^2$ aylana oriyentirlangan bo'lib, uning markazi O nuqtada va radius 1 ga teng bo'lsin. γ chiziqning x nuqtalarida qaralayotgan $\overrightarrow{M}$ vektor maydon $f:\gamma \to S^1$ akslantirishi aniqlanadi, bunda

$$\overline{f(x)} = \frac{\overline{M(x)}}{|M(x)|}, x \in \gamma \qquad (1)$$

(1) ko'rinishdagi akslantirish uchun $\deg f$ ham aniqlangan bo'ladi. Bu vektor maydonning γ atrofida aylanishidan iborat bo'ladi. Ularni $\aleph(\overline{M}, \gamma)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Endi P_{x0} tekislikni o'ziga parallel holda uzluksiz harakat qildirib, Π_{x_1} holatga keltiraylik, γ kontur ma'lum bir oraliq holatda γ_s (o'ziga mos tekislikda) bo'lib, γ_1 kontur ko'rinishiga keladi. $\gamma_1 \subset \Pi_x$, bu yerda $0 \leq s \leq 1$, va $\gamma_{s=0}\gamma, \gamma_{s=1} = \gamma_1$. Hamma γ_s konturlar maxsus chiziq γ o'rab olgan va berilgan γ ga gomeomorf $\alpha(s):\gamma \to \gamma_s$, bir xil oriyentatsiyalangan va $\alpha(s)$ gomeomorfizmlar oriyentatsiyani saqlaydi (ya'ni, $\deg\alpha(s) = +1$) va S parametrga uzluksiz bog'liq bo'lib, $\alpha(0) = 1_\gamma : \gamma \to \gamma$ – a ayniy (o'z-o'ziga) akslantirishdan iborat bo'ladi. γ_s konturda qaralayotgan $\overline{M(x)}$ vektor maydonni $\alpha(s):\gamma \to \gamma_s$ gomeomorfizm yordamida $\overrightarrow{F_s}(x) = \overrightarrow{M}(\alpha(s)(x))$, $x \in \gamma$ formula bilan aniqlangan γ konturga "ko'chirish" mumkin. γ konturdagi $F_s(x)$ oila (x,s) ga uzluksiz bog'liq. Shu sababli $\overrightarrow{F_1}(x) = M(\alpha(1)(x))$ va $\overrightarrow{F}_0(x) = \overline{M(x)}$ vektor maydonlar orasidagi γ konturdagi gomotopiyadan iboratdir. Akslantirishning darajasi xossasiga ko'ra, quyidagi o'rinlidir:

$$\aleph(\overrightarrow{M}, \gamma) = \aleph(\overrightarrow{F_1}\gamma) = (\deg\lambda(1))\aleph(\overrightarrow{M}, \gamma_1) = \aleph(\overrightarrow{M}, \gamma_1).$$

Bu yerda oxirgi aylanish $\overline{M}$ maydonning γ_1 atrofida Π_{x^1} tekislikdagi aylanishidir. $\overline{M}$ maydonning ixtiyoriy Π_{x^1} tekislikdagi umumiy aylanishi bo'lib, ferromagnetikdagi l uyurmaning topologik indeksi $\aleph(l)$ uyurmaning topologik zaryadi deb yuritiladi.

Ferromagnetik uchun, agar u yengil magnitlantiruvchi R^2 tekislikka ega bo'lsa, yuqorida talab qilinayotgan shartlar bajariladi. Bu holda ferromagnetikdagi uyurmaning barqarorlik sharti noldan farqli o'laroq, daraja $\deg f$ ga yoki aylanish $\aleph(\overline{M}\ \gamma)$ ga teng kuchli bo'ladi.

Endi He^4 ning o'ta oquvchan komponentasini ko'raylik. He^4 ning absolyut nolga yaqin haroratda hosil bo'ladigan o'ta oquvchan suyuqlik qismi (o'ta oquvchan kondensat holatidagi qismi) xarakteristikasiga keladigan bo'lsak, kvant mexanika tilida kompleks qiymatli quyidagi to'lqinli funksiyalar ko'rinishida ifodalanadi: $\psi(x), x \in R^3$. Ular uchun $\psi(x) = |\psi(x)|\, e^{i\Phi(x)}$ o'rinli bo'ladi. Bu yerda $|\psi|$ – kompleks sonning moduli, F esa, to'lqinli funksiyalarning fazasi. Shu holatda, agar o'ta oquvchan kondensat teng og'irlik holatida (ya'ni, $\overline{v_s} = 0$) bo'lsa, u holda $|\psi|$ – o'zgarmas (x ga bog'liq emas), F – noaniq konstantadir; agar o'ta oquvchan kondensat teng og'irlik holatida bo'lmasa, ya'ni, $\overline{v_s} \neq 0$ ayniy bo'lsa, u holda $|\psi|$ konstanta bo'lib, $F=F(x)$ ga bog'liq funksiyalardan iborat bo'ladi, $x \in R^3$ va o'ta oquvchan komponentaning maydon tezligi $\overline{v_s}(x) = \frac{h}{m} grad\Phi$ formula bilan topiladi, bu yerda h – Plank doimiysi, m – He^4 ning atom massasidir.

Aytaylik, $U \subset R^3$ soha o'ta oquvchan kondensat bilan egallangan bo'lsin. $\overline{v_s}(x) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x \in U$ nuqta uchun $F(x)$ faza aniqlangan bo'lib, bu fazaga R^2 da noldan boshlab nur mos kelib, bu nur tayinlangan yo'nalishdan soat miliga teskari $F(x)$ burchak ostida bo'ladi.

$\overline{v_s}(x) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in U$ nuqtalar uchun $F(x)$ aniqlangan emas.

Shunday qilib, U sohada birlik $\overline{d(x)}$ vektordan iborat vektor maydon vujudga keladi. $d: U \to S^1$ akslantirish aniqlanib, bu vektor nur yo'nalishida bo‘ladi va qiymati mos faza *F(x)* (nurni hosil qilgan burchagi) ning qiymatiga teng. Bu yerda maxsus nuqtalarda fazaning qiymati aniqlanmagan (yoki fazo aniqlanmagan). Agar U sohada yopiq oriyentirlangan maxsus nuqtalarga ega bo‘lmagan yo‘lni tanlab olsak, u holda S^1 ning tayinlangan oriyentatsiyasida $d:\gamma\to S^1$ akslantirish uchun uning darajasi $\deg d$ aniqlangan bo‘ladi. Endi o‘ta oquvchan He^4 da ℓ uyurma chizig‘iga ega bo‘lgan uyurmani ko‘raylik. Agar l da fazaning qiymati aniqlanmagan bo‘lsa, u holda $\overline{d}\,(x)$ vektor maydonining maxsus nuqtalaridan iborat bo‘ladi. γ chiziq sifatida l uyurma chizig‘ini bir marta qamrab olgan oriyentirlangan yopiq yo‘lni tanlab olaylik. Ferromagnetik uyurmada bo‘lgani kabi $d:\gamma\to S^1$ akslantirish darajasi $\deg d$ ni uyurmaning (bu yerda o‘ta oquvchan He^4 ning) topologik indeksi (yoki topologik zaryadi) deb ataymiz. O‘ta oquvchan He^4 da uyurmaning barqarorligi uyurmaning topologik indeksi noldan farqli ekanligi bilan xarakterlanadi.

7.4-§. Ferromagnetik va o‘ta oquvchan He^4 gaz uyurmalarining barqarorligi

Ferromagnetik va o‘ta oquvchan He^4 gazlardagi uyurmalarning barqarorligi (mustahkamligi) fizika nuqtai nazaridan tashqi ta’sirga qaramasdan (tashqi ta’sirdan xalos bo‘lmasa ham) kuzatish mumkin bo‘lgan tabiiy fizik jarayondir. Matematika fani nuqtai nazaridan barqarorlik keyinroq yana talqin qilinadiki, bunda uyurmaning noldan farqli topologik indeksga ega bo‘lishi va shu sababli y S^1 aylananing gomotopik xossalari bilan bog‘liqligida namoyon bo‘ladi.

Agar $\overline{M(x)}$ magnit maydon yoki o‘ta oquvchanlik tezligi $\overline{v_s}(x)$ (mos F(x) fazalik)ni har bir x nuqtada yetarlicha kichik tekis o‘zgartirsak, u holda yangi hosil bo‘lgan $\overline{M_1}(x)=\overline{M}\,(x)+\Delta\overline{M}\,(x)$, $(\overline{\vartheta_s})_s(x)=\overline{v_s}(x)+\Delta\overline{v_s}(x)$ (fazasi $F_1(x)=f(x)+\Delta f(x)$) qiymatlar yetarlicha kichik orttirmalarda oldingisiga gomotop bo‘ladi. Bunday gomotopiyalar, masalan, quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\overline{M_\lambda}(x)=\overline{M}\,(x)+\lambda\Delta\overline{M}\,(x),\ F_\lambda(x)=f(x)+\lambda\Delta f(x),\ 0\le\lambda\le 1;$$

Bu gomotopiyalar $\overline{f(x)}$ va $\overline{d(x)}$ vektor fazolar orasida gomotopiyani vujudga keltiradi. Ya'ni, $f_\gamma : \lambda \to S^1$, $d_\lambda : \gamma \to S^1$ akslantirishlar (f_λ akslantirishlar 7.3-§ dagi (1) formula bilan aniqlanadi) λ parametrga uzluksiz bog'liq va $\lambda = 0$ bo'lganda, $f_0 = f$, $d_0 = d$ bo'ladi; $\lambda = 1$ bo'lganda, f_1 va d_1 lar mos ravishda $\overline{M_1}(x)$ va $(\overline{v_1}(x))(x)$ maydonlarga javob beradi.

Shu sababli $\deg f_\lambda$ va d_λ darajalar λ ning o'zgarishi bilan o'zgarmaydi. Demak, kichik fizik qo'zg'alishlarda γ konturda daraja o'zgarmas ekan. Agar uyurmalarning topologik indeksi $\deg f$ va $\deg d$ lar noldan farqli bo'lsa, u holda γ chiziqdagi kichik qo'zg'alishdan keyin ham $\deg f_1 \neq 0$ yoki $\deg d_1 \neq 0$ bo'ladi.

Bu fikrlash va tasdiqlashlardan quyidagi markaziy jumlaga ega bo'lamiz: γ egri chiziq o'zgartirilgan vektor maydon $\overline{M_1}(x)$ yoki $(\overline{v_1})_s(x)$ maxsus chiziqni to'la qamrab oladi. Haqiqatan ham, γ chiziqni aylana bilan almashtib (Π_{x0} tekislikda yotgan), so'ngra uni chegaralab turgan yopiq doirada $D \subset \Pi_{x0}$ ning vektor maydoni $\overline{M_1}$ yoki $(\overline{v_1})_s$ ning maxsus nuqtalari mavjud emas (uyurma maxsus chizig'ining D bilan kesishmasining izi) deb olib, $f_1 : D \to s^1$ ($d_1 : D \to S^1$) kengaytirilgan akslantirishga ega bo'lamiz. Ya'ni, f_1 akslantirish γ aylanadan doiraga kengaytirilgan (davomlashtirilgan). Doiraning deformatsiyasini, ya'ni D doiraning o'z markazi a ga deformatsiyasini $\varphi_\lambda(x) = a + \lambda(x - a)$ $0 \leq \lambda \leq 1$ ko'rinishda aniqlaymiz. Bu esa, $\bar{f}_\lambda(\bar{d}_\lambda) : \gamma \to S^1$ gomotopiyani $\bar{f}_\lambda(x) = f(\varphi_\lambda(x))$ formula bilan vujudga keltiradi ($\bar{d}_\lambda$ uchun ham shunga o'xshab aniqlanadi).

Ma'lumki, $\lambda = 1$ bo'lganda $\bar{f}_1(x) = f_1(x)$; $\lambda = 0$ bo'lganda esa, $\bar{f}_0(x) = f_1(a) -$ o'zgarmas akslantirish bo'ladi.

Demak, isbotladikki, agar f_1 akslantirish D doiraga (va shunga o'xshash $d_1 : \gamma \to S^1$ uchun) davomlashtirilsa (kengaytirilsa), $f_1 : \gamma \to S^1$ akslantirish doimiy akslantirishga gomotop bo'ladi.

Ma'lumki, $\deg \bar{f}_0 (\deg \bar{d}_0)$ ning qiymati o'zgarmas akslantirish uchun nolga teng bo'ladi. Gomotopiyada akslantirish darajasining saqlanishi xossasiga ko'ra $\deg \bar{f}_1 = 0$ $(\deg \bar{d}_1 = 0)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu esa, oldingi chiqarilgan $\deg f_1$ $(\deg d_1)$ lar noldan farqli, degan xulosalarimizga ziddir.

Shunday qilib, vektor maydon $\overline{M_1}(x)$ yoki $\overline{d_1}(x)$ larning doira ichida (doiraning ichki nuqtasida) maxsus nuqtasi mavjudligiga ishonch xosil qildik. Doiraning uyurma chizig'i l bo'ylab harakat qildirsak, maxsus nuqtalar to'plamiga ega bo'lamiz, bu maxsus nuqtalar to'plami $\overline{M_1}(x)$ yoki $(\overline{v_1})_s(x)$ maydonning uyurma chizig'i l_1 ni hosil qiladi.

Xulosa qilish mumkinki, kichik fizik qo'zg'alishlar ferromagnetikda (R^2 tekislikda) yoki o'ta oquvchan He^4 komponentasining tezliklari maydonida nolga teng bo'lmagan topologik indeksli uyurmani yo'qota olmas ekan. Aynan shu xulosa uyurmaning barqarorligi deb yuritiladi. Bunday (kengroq) olganda, undan ham kuchliroq "topologik barqarorlik" xulosasi:

Har qanday $\overline{M}_\lambda(x)$, $(\overline{v_1})_s(x)$ gomotopiyada uyurma saqlanar ekan: kichik bo'lishi shart emas; $f_\lambda : \gamma \to S^1$, $d_\lambda : \gamma \to S^1$ uzluksiz gomotopiyalar aniqlangan bo'lishi yetarli.

Topologik indeksi 0 ga teng bo'lgan uyurmalar topologik barqaror emas. Ya'ni, gomotopiya (deformatsiya) jarayonida buzilib ketishi mumkin.

7.5-§. Topologik tushunchalar va fizik xossalarning bog'liqligi

1. Oldingi paragrafda berilgan uyurma tahlilida S^1 aylana hosil bo'lishining sof fizik sabablari mavjud. Fizikaning ma'lum prinsipiga ko'ra, eksperimentlarda kuzatilayotgan moddaning barqaror holatiga lokal minimum energiya mos keladi. Moddaning holatini belgilovchi qonuniyat asosida berilgan maydon (vektor, tenzor va boshqa) energiya (quvvat) hisoblanadi. Masalan, ferromagnetiklarda energiya vektor maydonining magnit momenti $M(x)$ orqali aniqlanadi. He^4 da esa, to'lqin funksiyasi $\psi(x)$ orqali aniqlanadi. Moddaning "tug'ma holati" deb ataluvchi holatlari maydonning yagona emasligi bilan xarakterlanadi, bu holatda energiya lokal (mahalliy) minimum qiymatga ega bo'ladi. Masalan, agar $M(x)$ vektorlar

aniqlangan kristallik o'qiga ortogonal (perpendikulyar) bo'lsa (ya'ni, birorta ikki o'lchamli R^2 tekislikda yotsa), ferromagnetiklarda energiya minimal qiymatga ega bo'lishi mumkin. Shunda ham $|\overline{M}(x)|$ o'zgarmas modulga ega va ular ixtiyoriy yo'nalishga ega bo'lishi mumkin, bu aynan "yengil tekisroq" magnitlangan holatni bildiradi.

Shu singari barcha vektorlar to'plami $\overline{M}(x)$ ko'rilayotgan tekislikda S^1 aylana hosil qiladi. Bu aylananing radiusi $|\overline{M}(x)|= const$ dan iborat bo'ladi va u ferromagnetikning (magnitlanganlik parametri bo'yicha) "tug'ma sohasining" holati deb ataladi. Agar ferromagnetikning energiyasi faqat magnitlanganlik moduli $|\overline{M}(x)|= const$ ga bog'liq bo'lsa, u holda uning tug'ma sohasi ikki o'lchamli S^2 sferadan iborat bo'ladi, bu holat moddaning amorf (izotrop) xususiyatiga mos keladi. O'ta oquvchan He^4 holati ferromagnetik holatdan farqli o'laroq, u kvant mexanikasi bilan bog'liqdir: o'ta oquvchan kondensat teng og'irlikda fazasi F to'lqinli funksiya $\psi =|\psi| \exp(e\Phi)$ ixtiyoriy bo'ladi. $|\psi|$ modul o'zgarmas, energiya F ga bog'liq bo'lmaydi. Shu sababli F faza bo'yicha tug'ma va tug'ma holatlar sohasi – bu kompleks tekislikda ψ funksiyaning barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamidan iborat. Bu esa, o'z navbatida, radiusi $|\psi|$ dan iborat S^1 aylanadir.

Yuqorida keltirilgan uyurmalarning topologik indeksi $f,d:\gamma \to S^1$ akslantirishning ta'riflanishiga ko'ra, γ chiziq ferromagnetik va o'ta oquvchan He^4 ning tug'ma sohasidagi yengil magnitlanadigan tekis (tekislikda aylanaga gomeomorf chiziq) yopiq chiziqdan iborat. Shunday qilib, topologik barqaror uyurmaning bu moddalarda mavjud bo'lishi tug'ma sohaning topologik xossalari bilan bog'liq bo'ladi.

Lekin bu tug'ma soha sirtda S^1 chiziqdan iborat bo'ladi.

2. Fizikada shunday tug'ma sirtlar (sohalar) ham uchraydiki, ular S^1 dan farq qiladi. Masalan, izotropning ferromagnetik holati ko'rsatmoqdaki, uning tug'ma sohasi ikki o'lchamli S^2 sferadan iborat bo'ladi. Bu holda ularning topologik barqaror uyurmasining mavjud bo'lmasligini e'tirof etish mumkin. Agar D tekislikda ixtiyoriy doira bo'lib, γ uning chegarasi (aylana) bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f:\gamma \to S^2$ akslantirish doimiy $f_0:\gamma \to \overline{C}$

$\vec{c} \in S^2$ akslantirishga gomotop bo'ladi. Bunday gomotopiyaga quyidagicha erishish mumkin: $f(\gamma)$ chiziqning nuqtalarini S^2 sfera tayin C nuqtaga meridian bo'yicha $-\vec{c}$ (sodda bo'lishi uchun $(-\overline{C})$ nuqta $f(\gamma)$ obrazda yotmaydi, deb hisoblasa bo'ladi) harakat qildirish kerak. Demak, $\deg f_0 = \deg f = 0$. Bu yerda D doira topologik barqaror uyurma chizig'i bilan kesishishi shart emas. Bu fakt (xulosa) tug'ma soha bo'lgan S^2 sferaning topologik xossalari natijasidir. Yuqorida keltirilgan xossalarga izotrop ferromagnetiklarda yana bir sodda topologik xususiyat mavjud bo'lmoqda va kuzatilmoqdaki, u vektor maydon $\overline{M(X)}$ ning yakkalangan maxsus nuqtalaridir.

Bunga "tipratikan" tipidagi nuqtalar misol bo'ladi (bunday nuqtalar oldingi bo'limlarda keltirilgan). Maxsus nuqtalarning topologik indeksini aniqlash va qurish uchun $S_\varepsilon^2(x*)$ sferada oldingi bo'limdagiga o'xshash f akslantirishni ta'riflash zarur bo'ladi. Bu yerda sfera yetarlicha ε kichik radiusli va markazi x^* maxsus nuqtada bo'ladi. Ya'ni, $f: S_\varepsilon^2(x*) \to S^2$ akslantirish S^2 radiusi birga teng bo'lgan sferadir. Bunday akslantirishlar uchun ham akslantirishning darajasi tushunchasi umumlashtiriladi va $\deg f$ ko'rinishda belgilanadi. Akslantirishning sferani sferaga darajasi konstruksiyasi aylanani aylanaga akslantirish darajasidan ko'ra murakkabroqdir. Birinchidan, sferaning oriyentatsiyasini kiritish zarur bo'ladi. Oriyentatsiya kiritganda ham urinuvchi tekisliklar oriyentatsiyalanib, yetarli yaqin nuqtalar bir xil oriyentatsiyaga ega bo'lishi zarur. Ikkinchidan, $f: s_\varepsilon^2 \to S^2$ akslantirishda S^2 sferada yotgan $f(s_\varepsilon^2)$ obraz qatlamlarining algebraik sonini ta'riflash zarur bo'ladi. Bunda qatlamga (+1) soni qo'shiladi, agar uning oriyentatsiyasi S^2 sfera ning oriyentatsiyasi bilan bir xil bo'lsa, (-1) qo'shiladi, agar teskarisi o'rinli bo'lsa.

Bu jumlani aniq matematik iboralarda ifodalash birmuncha murakkab jarayon, chunki sferik sirtlarda akslantirishning darajasini to'la talqin qilishda differensial geometriya tushunchalari ham ishlatiladi. Shu sababli biz bu paragrafda $\deg f$ ning, qat'iy bo'lmasa ham, ko'rsatmali holdagi talqinini keltiramiz.

Aylanalarni akslantirishdagi darajaning xossalari sferani akslantirishda ham o'rinli bo'ladi. Shu sababli magnit maydoni $\overline{M(x)}$ bo'lgan ferromagnetik va uning maxsus x^* nuqtasi uchun butun son $\deg f$ aniqlangan. Bu songa maxsus x^* (yakkalangan) nuqtaning topologik indeksi deyiladi va u $\aleph(x^*)$ ko'rinishda belgilanadi. Agar ε yetarlicha kichik bo'lsa, bu son $S^2_\varepsilon(x^*)$ sferaning radiusi $\varepsilon > 0$ ga bog'liq emas.

$\aleph(x^*)$ sonni fiziklar x^* maxsus nuqtaning topologik zaryadi deb atashadi.

Xususiy holda x^* maxsus nuqta "tipratikan" tipidagi nuqta bo'lsa, $\aleph(x^*) = +1$ ga ega bo'lamiz. Maxsus nuqtaning topologik indeksi $\aleph(x^*)$ tushunchasi uyurmalarning maxsus chizig'i indeksi $\aleph(\ell)$ qanday vazifani o'tagan bo'lsa, o'rganishda u ham shunday vazifani o'taydi. Agar $\aleph(x^*) \neq 0$ bo'lsa, maxsus nuqta topologik barqarordir. Bunday nuqtalar fizik ko'rinishga ega va magnit maydoni gomotopiya (deformatsiya)larda saqlanadi. Buning aksi, ya'ni $\aleph(x^*) = 0$ bo'lsa, magnit maydonning mos gomotopiyasida x^* maxsus nuqta tuzatilishi (yo'qotilishi) mumkin, ya'ni topologik barqaror bo'lmaydi.

O'tgan asrning 70-yillarida He^4 ning o'ta oquvchan fazasining tug'ma sohasi o'rganildi. Bu fazalar ikkita A va B dan iborat bo'lib, ular orasidagi A fazo juda murakkab va qiziqarli ekanligi namoyon bo'ldi.

A fazoning tug'ma sohasi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{v})$ to'rtlik vektorlar to'plami bilan xarakterlanadi. Bu yerda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, vektorlar R^3 fazodagi ortonormallangan tayinlangan oriyentatsiyali vektorlar bo'lib, $\vec{v}$ ixtiyoriy birlik vektor, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{v})$ vektorlar aniq fizik ma'noga ega (biz hozir bu haqda to'xtalmaymiz). Oriyentirlangan reperlar to'plamini, $S0(3)-(3x3)$ o'lchamli ortogonal matritsialar gruppasi yoki qattiq jism aylanishi gruppasi bilan aynanlashtirish mumkin bo'ladi. $\vec{v}$ vektorlar to'plami esa, birlik S^2 sferadan iborat bo'ladi.

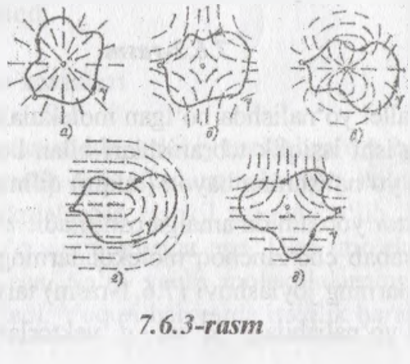
Demak, A fazoning tug'malik sohasi $S^2 x SO(3)$ dekart ko'paytmadan iborat bo'lib, uning o'lchami 5 ga tengdir. Ma'lum fizik holatlarda (jarayonda) $\vec{v}$ vektor tayin qilinadi, u holda tug'malik sohasi holati $SO(3)$ gruppaga keltiriladi. Bunday holatda akslantirish darajasi tushunchasi jihatdan farqsiz. Boshqacha aytganda, $\overline{d}$ vektorlarni strelka bilan emas, chiziqcha bilan ko'rsatish yetarli (uning qiymatida "–" yoki "+" ishora bo'lishi shart emas).

Idish devorining va tashqi maydon (masalan, magnit maydoni) ta'siri tufayli nematik holati doimo bir jinsli emas, bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chib turadi. Bu shuni bildiradiki, $\overline{d}$ vektorning yo'nalishi asta-sekin bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga ko'chib turadi. $\overline{d}$ vektorning R^3 fazoda taqsimlanishi $\vec{d}$ (birlik vektor) ning vektor maydoni deyiladi.

2. Nematiklardagi disklinatsiya

Quyosh nurlarining (umuman, nurlarning) nematik suyuq kristallarda tez va kuchli tarqalishi tufayli ular tutuq yaltiroq emasdek ko'rinadi. Agar mikroskop ostida qaraydigan bo'lsak, uning tarkibida uzun ingichka ip suzib yurganini ko'ramiz. Bu ip nematiklar uchun yot emasligi va molekulalarining maxsus joylashuvi XX asrning boshlarida olim va tadqiqotchilarga ma'lum bo'lgan. Shu tufayli ham bunday tipdagi suyuq kristallar (yunoncha *nema* so'zi *"ip"* ma'nosini anglatadi) nematik nomi bilan atalgan.

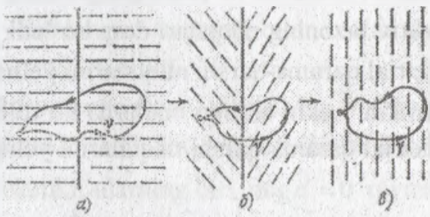
Haqiqatan ham, yo'nalishlar maydonida (direktor $\vec{d}$ ning) maxsus chiziqlari mavjud bo'lishi mumkin, bu chiziqlarda $\vec{d}$ direktor yo'nalishi aniqlanmagan (uzilishga ega). Bunday $\vec{d}$ direktor yo'nalishi taqsimlanishlarini tekis vektor maydonda tasvirlash soddaroq bo'ladi. Ya'ni, fazodagi barcha $\vec{d}$ direktor vektorlar birorta tekislikka parallel bo'ladi (7.6.3-rasmda direktor maydon chiziqlar bilan ko'rsatilgan).



7.6.3-rasm

Maxsus nuqtalar (vektor maydon) tekislikda maxsus nuqtalarning indeksi bilan xarakterlanadi. Maxsus nuqtaning indeksi deb $\vec{d}$ vektorning musbat yo'nalishi bo'yicha γ yopiq kontur bo'ylab ∂^0 maxsus nuqtaning atrofini to'liq aylanib o'tishlari soniga aytiladi va $\aleph(x^0\overline{d})$ ko'rinishda, ba'zi adabiyotlarda ν bilan belgilanadi. 7.6.3-rasmda maxsus nuqta 0 bilan belgilangan. Masalan, a rasmga qarasak, 0 maxsus nuqtaning indeksiga 1 son mos keladi, ya'ni $\aleph(0,\vec{d})=1$ yoki $\nu=1$; b rasmda $\aleph(0,\vec{d})=-1$ yoki $\nu=-1$ 2; d rasmda $\aleph(0,2)$ yoki $\nu=2$. Yuqorida ta'kidladikki, $\vec{d}$ direktor ishorasi e'tiborga olinmaydi. Shu sababli $\vec{d}$ vektor maxsus nuqtaning atrofi γ yopiq chiziq bo'ylab yarim (oborot) aylangan bo'lishi ham mumkin.

e va f rasmlarda maxsus nuqtaning indeksi mos ravishda $\aleph(0,d)=\frac{1}{2}$ va $\aleph(0,d)=-\frac{2}{2}$ bo'ladi. 7.6.3-rasmga e'tibor bersak, maxsus nuqtalar $\vec{d}$ yo'nalishlar maydonida maxsus chiziq ham tekislikka olib chiqadi. Agar maxsus chiziqqa yuqoridan emas, yonidan qarasak, u holda $\vec{d}$ ning taqsimlanishi 7.6.4-a rasmdagidek ko'rinadi.



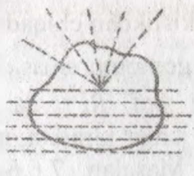
7.6.4-rasm

Angliyalik fizik Frankning taklifiga ko'ra, direktorning yo'nalishlar maydoni uzilish chizig'iga disklinatsiya deb atalgan. Molekulalar orasidagi o'zaro harakatda ular parallel bo'lishga intiladi, bunga $\vec{d}$ direktorning taqsimlanishi tarkibida maxsus chiziqning borligi energetik foydali bo'lmaydi. Shu sababli nematiklarda $\vec{d}$ direktorning taqsimlanishida $\vec{d}$ ning taqsimlanishidagi maxsusligini bo'rttirib olish va bir jinsli taqsimlashga kelishtirish maqsadida deformatsiya bo'lishi mumkin. 7.6.4-a rasmdagi ko'rinishda disklinatsiya bo'lishi mumkin. Haqiqatan ham 7.6.4-a-d rasmda keltirilgan deformatsiya maxsusliklarga ega bo'lmagan bir jinsli taqsimlanishga olib kelishi mumkin ekan. Direktor $\vec{d}$ maxsus taqsimlanishga va boshqa ko'pgina fizik xossalarga ega. Biz ular ustida to'xtalmadik.

3. Disklinatsiya va topologiya

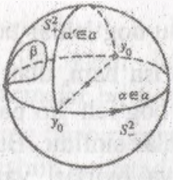
Direktorlar maydonini analitik ifodalash uchun R^3 fazoda har bir yo'nalishga direktorga parallel bo'lgan $\vec{d}$ birlik vektorni mos qo'yamiz. Bu vektorlarni har bir $x \in U$ nuqtaga mos qo'ysak $U \subset R^3$ va U soha nematik bilan to'ldirilgan yoki nematik bilan band bo'lsa, u holda R^3 fazoning U sohasida $\overline{d(x)}$ vektor maydon vujudga keladi. Direktor maydoni vektor maydon $\overline{d(x)}$ bilan aniqlanadi. Lekin uning vektor maydoni $\overline{d(x)}$ dan farqlanadi. Chunki $\pm\overline{d(x)}$ vektorlar bitta va faqat bitta yo'nalishga ega $\pm\overline{d(x)}$ vektorning oxiri R^3 fazodagi birlik sferada bir juft markaziy-simmetrik nuqtalarni ifodalaydi, ularni $d(x)$ nuqta bilan belgilasak, bu nuqtalar RP^2 proektiv fazoning nuqtalari desa bo'ladi. Bu proektiv fazoni S^2 sferaning diametrial qarama-qarshi nuqtalarini yelimlashdan hosil bo'lgan, deb aytish mumkin. Lekin oldingi boblarda ko'rdikki, RP^2 fazoni yarim sferaning diametrial qarama-qarshi nuqtalarini yelimlashdan ham hosil qilsa bo'ladi.

Shunday qilib, direktor maydon $\hat{d}: U \to RP^2$ akslantirish orqali to'liq tavsif (xarakteristika) ga ega bo'ladi. U soha RP^2 proektiv fazodan iborat edi. Aynan RP^2 fazo nematikning tug'ma holatini ifodalovchi sohadan iborat, chunki molekulalar o'qlarining yo'nalishiga birorta fizik chegara yo'q (boshqa qator suyuq kristallar tipidan farqli o'laroq). Tabiiyki, U sohada $\hat{d}$ akslantirishdan uzluksizlik shartini talab qilish maqsadga muvofiq bo'ladi, lekin bu shartni doim ham talab qilib bo'lavermaydi. Chunki U sohaning (vektor maydonga o'xshab) maxsus nuqta (maxsus chiziq) larida bu akslantirish aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo'ladi.



7.6.5-rasm

7.6.6-rasm



7.6.7-rasm

Nematikning nomlanishi va xususiyatidan ma'lumki, maxsus chiziqlar uning tarkibida mavjuddir. 7.6.5 va 7.6.6-rasmlardan ko'rinadiki, nematikning direktor maydoni $\overline{d(x)}$ bu yerda tekis maydon, ya'ni $\overline{d(x)} \in R^2 d(x)$ vektorlar R^2 fazodagi vektorlar (fazoga kollinear). Bu yerda uyurma markazi nuqta ko'rinishida keltirilgan. Uyurmaning topologik klassifikatsiyasi oldingi bo'limdagi kabi aniqlanadi. Maxsus chiziqni o'rab olgan (o'z ichiga olgan) aylana olamiz va unda direktor maydonni quyidagicha aniqlaymiz: $\hat{d} : s^1 \to RP^2$, bunda $[\hat{d}] \in \pi_1(RP^2)$ gomotopik sinf, $\pi_1(RP^2)$ fundamental gruppaning strukturasi ravshan, $\pi_1(RP^2) = Z_2$ moduli ikkiga teng bo'lgan taqqoslamalar gruppasi. Z_2 bu yerda $\alpha \in Z_2$ bog'ich yasovchi shunday gomotopik sinfki, α ekvator (yarim sfera) ning diametral qarama-qarshi yelimlangan nuqtalari bilan o'zida saqlaydi. $\alpha^1 = 0$ doimiy bog'ich (doimiy yo'l) sinfidir.

Shunday qilib, umumlashgan daraja $\deg \hat{d}$ aniqlandiki, bu daraja 0 yoki 1 qiymatni qabul qiladi. Shu sababli ikkita har xil topologik uyurmalar tipi mavjud ekanki, ularning biri $\deg \hat{d} = 0$ qiymatga, ikkinchisi esa, $\deg \hat{d} = 1$ qiymatga ega. Birinchisi topologik barqaror emas, ikkinchisi topologik barqarordir. 7.6.5-rasmda topologik barqaror uyurmaga misol keltirilgan bo'lib, uning $\hat{d}$ bog'ichi bog'ich-ekvator bilan ustma-ust tushadi. Shu sababli ham $\deg d = 1$ bo'ladi. α bog'ichning gomotopik sinfi boshqa, boshlari va oxirlari yarim sfera ekvatorida diametrining oxiridan iborat bo'lgan chiziqlar ko'rinishidagi RP^2 dagi bog'ichlarni o'z ichiga oladi (7.6.7-rasm).

Bu bog'ichlar uchun $d(x)$ yo'nalish RR^2 tekislikdan chiqadi. Shunday bo'lsa ham, ular RP^2 dagi doimiy bog'ichga gomotop emas. Bunday ikkita bog'ich ko'paytmasi 0 sinfga tushadi. 0 sinf RP^2 da doimiy bog'ichlar sinfidir. Bu sinfga barcha shunday bog'ichlar kiradiki, ularning boshi va oxirlari yarim sferada qo'zg'algandir. Masalan, 7.6.6-rasmda uyurma 0 sinfli bog'ichlarni xarakterlaydi. Yuqorida keltirilgan barcha tasdiq va xossalarni bir geometrik holat bilan ifodalash mumkin, ya'ni belgilangan $y_0 \in RP^2 = Y$ nuqta uchun $\pi_1(Y, y_0)$ gruppa oxirlari ekvatorning diametri bo'lgan bog'ichlari bilan hisoblanadi. Shu sababli tug'ma sohalarning topologik holati izotrop ferromagnetik va nematiklar (mos ravishda S^2 sfera va RP^2 proektiv tekislik) har xil bo'lganligi tufayli har xil fizik natijalarga: birinchi holda – uyurmalarning kuzatilmasligiga, ikkinchi holda – ko'rinishli ekanligiga (topologik indeksi $\deg \hat{d} = 1$ bo'lgan uyurmalar) ega bo'lamiz. Tajribalar nazariya bilan uyg'unlashgandir. Shunda ham fiziklar topologik barqaror uyurmalarning "uyurma kuchi" $\frac{1}{2}$ deb hisoblashadi. $\bar{d}$ direktor yo'nalishi bog'ichlardan o'tganda, $1/2 \cdot (2\pi) = \pi$ burchakka o'zgarar ekan. Agar $\overline{d(x)}$ ning yo'nalishi $N \cdot (2\pi)$ burchakka o'zgarsa (N butun son), u holda uyurma kuchi N deyiladi. Bizning klassifikatsiyada kuchi N bo'lgan uyurma $\deg_2 \hat{d} = 0$ topologik indeksga egadir va topologik barqaror emas (kuchi $N = -1$ bo'lgan uyurmaga 7.6.6-rasmdagi uyurmani misol qilib keltirish mumkin).

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, $N = \pm 1$ kuchga ega bo'lgan uyurma chizig'i "tekisroq", "yalpayganroq" bo'lib, uning ko'rinishini α uyurmaning oqishi sifatida tasavvur qilish mumkin. Bu holat shuni ko'rsatadiki, direktor uyurma chizig'i disklinatsiya chizig'i yaqinidan burilib, ushbu chiziq bo'ylab (uzunasiga) oriyentirlanadi. Shu sababli uyurmaning maxsus chizig'i yo'qolib ketadi.

Topologiya disklinatsiyaning butun N qiymati kuchga ega emasligini uqtiradi. Shu uyurma effektining uchinchi o'lchovga oqib chiqib ketishining payqab qolinishi va murakkabroq (o'ta) tug'ma sohaga ega bo'lgan moddalar defektini o'rganish (masalan, He^3 izotop gaz) rus fiziklari G.E. Volovik, V.P. Mineyev, fransuzlar G. Tuluza, T. Klemanlar tomonidan defektlarning topologik tavsifi (xarakteristikasi) ni bayon qilishda gomotopik topologiyani tatbiq qilinishiga olib keldi. Ma'lum bo'lishicha, π_1 gruppaning multiplikativ xossalari uyurmalar bir-biri bilan almashinishini (kombinirovat) ta'riflaydi; uyurmalarning bir-biriga qo'shilib ketishida (bu holat topologik indekslarning qo'shilishini anglatadi) yoki uyurmaning bir necha uyurmalarga bo'linib (ajralib) ketishida topologik indeks (zaryad) larning umumiy yig'indisi o'zgarmay qoladi. Bu kondensirlangan holatdagi moddalarning muhim fizik qonunidir.

Nematiklar va shunga o'xshash ferromagnetiklar uchun nuqtali defektlar vujudga kelishi ehtimoli doimo mavjud. Ya'ni, $\vec{d}$ direktorning yo'nalishlar maydoni uning maxsus nuqtasidadir. Agar x^* shunday nuqta bo'lsa, u holda uning topologik indeksini (zaryadini) aniqlash uchun bu nuqtani $S_\varepsilon^2(x^*)$ sfera bilan o'rab olish (ferromagnetik holatga o'xshab) zarur. Bu sfera boshqa maxsus nuqtani o'z ichiga olmasligi kerak, shu sababli radiusni yetarlicha kichik qilib olinsa, yetarli bo'ladi va $\hat{d}(x)S_\varepsilon^2(x^*) \to RP^2$ akslantirishni ko'rib chiqish kerak bo'ladi. Bu akslantirishning gomotopik sinfi $[d] \in \pi_2(RP^2, y_0)$ bo'lib, bu yerda $y_0 = \hat{d}(x_0)$ $x_0 \in -S_\varepsilon^2(x^*)$ ning belgilangan nuqtasidir.

Ma'lumki, $\pi_2(RP^2) = Z$ erkin abel gruppasi. Bu abel gruppasining yasovchisi $\gamma_2 : S^2 \to RR^2$ akslantirishda diametral qarama-qarshi nuqtalardan hosil bo'lgan γ_2 chiziq bo'ylab o'tadi. $\pi_2(RP^2) = Z$ bo'lganligi sababli $[\hat{d}] = k\gamma_2$ bo'ladi. Bu yerda $k \in Z$ va k son akslantirishning butun qiymatli darajasi $\deg \hat{d}$ deyiladi. Bu daraja $\varepsilon > 0$ ga bog'liq emas va $\varepsilon \to 0$ bo'lganda x* maxsus nuqtaning topologik indeksi (zaryadi) $\aleph(x^*)$ bo'ladi. Shunga o'xshab, ferromagnetiklar uchun ham bundan-da qat'iy $\aleph(x^*) = k$ ni aniqlasa bo'ladi. Bu yerda $[f] = k\gamma_2$ bo'lib, γ_2 chiziq $\pi_2(S^2) = Z$ erkin gruppasining yasovchisidir. Topologik barqaror maxsus nuqtalar uchun $\aleph(x^*) \neq 0$, lekin $|\aleph(x^*)| > 1$ o'rinli bo'lgan nuqtaviy defektlar eksperimentlarda aniqlanmaydi (mavjud bo'lmaydi).

Nematik silindrik kapilyarga solinsa, uning chegarasida direktor kapilyar devorida ortoganal holatda ko'zga tashlanadi. Umumiyroq qilib aytganda, sirtni (sohani) qamrab olgan modda yangi defektlar sinflarini indutsirlashi (keltirib chiqarishi) mumkin, chunki ular tug'malik sohasi topologiyasini o'zgartirishi mumkin. Nematiklarning boshqa sinflari, masalan, ikki o'qlilarini olsak, ular A fazaga ega bo'lgan He^3 ning defektlarini eslatadi. Masalan, He^3 ning tug'ma sohasi SO (3) proektiv RP^3 ga gomeomorfdir. Shu sababli $\pi_2(SO(3)\sigma\pi_2(RP^3) = 4$. Bundan ko'rinadiki, He^3 izotopda topologik barqaror nuqtali maxsusliklar yo'qligi namoyon bo'ladi.

VII bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Topologiyaning fizikaga tatbig'i, ya'ni moddalarning kondensirlangan holati mavzulari 21, 29, 33, 49 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, elementar zarralarning fizik holati, topologik qirralar bayoni 49, 50, 93 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, teskari fizik jarayonlarning zamonaviy ko'pxilliklar topologiyasiga ta'siri 94, 102 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, topologiyaning mexanikada qo'llanilishi 94, 104 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda batafsil yoritilgan.

Chiziq tushunchasi geometriyaning eng muhim va asosiy tushunchalaridan biridir. Intuitiv nuqtai nazardan chiziqqa bir o'lchovli tuzilmalar sifatida qarash mumkin. Shu sababli ham Evklid chiziqni ta'riflashda "ensiz uzunlikdir" yoki "chiziqning chegaralaridagi nuqtalaridir", deya tushuntirishga harakat qilgan. Chiziq ta'rifiga javob beruvchi yetarlicha keng figuralar sinfini ajratish uchun deyarli ikki ming yil davomida urinishlar amalga oshirilgan. Oldingi boblarda eslatdikki, bu masalaga P.S. Urison tomonidan uzil-kesil javob berilgan, lekin biz hozir ba'zi ajoyib xususiyatga ega bo'lgan chiziqlar ustida to'xtalib o'tamiz.

8.1-§. Kantorning mukammal to'plami

R^1 to'g'ri chiziqda $\Delta=[0,1]$ kesmani olaylik. Bu kesmani $\frac{1}{2}$ va $\frac{2}{3}$ nuqtalar bilan uchta teng bo'lakka ajratamiz va bo'laklarni quyidagicha belgilaymiz:

$$\Delta_0=[0,\frac{1}{3}],\qquad \delta=(\frac{1}{3};\frac{2}{3}),\qquad \Delta_1=[\tfrac{2}{3},1]$$

Δ_0 va Δ_1 kesmalarni 1-rang kesmalar deb ataymiz. Δ kesmaning markaziy uchdan bir qismi bo'lgan δ intervalni "tashlab yuborib" (hisobga olmasdan), qolgan Δ_0 va Δ_1 kesmalarning har birini yana

$$\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9};\qquad \frac{2}{9}=\frac{2}{3^2};\qquad \tfrac{7}{9}=\frac{7}{3^2},\qquad \tfrac{8}{9}=\tfrac{8}{3^2}$$

nuqtalar bilan uch bo'lakka ajratamiz. Markaziy intervallar $\delta_0=(\tfrac{1}{9};\tfrac{2}{9})$, $\delta_1=(\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9})$ ni 1-rang interval deb ataymiz va ularni Δ_0 va Δ_1 kesma-lardan tashlab yuboramiz-da, quyidagi 2-rang kesmalarni qoldiramiz:

$$\Delta_{00}=[0,\tfrac{1}{9}],\ \Delta_{01}=[\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}],\ \Delta_{10}=[\tfrac{6}{9};\tfrac{7}{9}],\ \Delta_{11}=[\tfrac{8}{9},\tfrac{9}{9}].$$

Qolgan kesmalarni teng uch bo'lakka bo'lish jarayonini davom ettiramiz va markaziy intervallarni tashlab yuboramiz. Natijada, to'g'ri chiziqning to'plamostisi bo'lmish S to'plamga ega bo'lamiz. S to'plamosti uni birinchi bo'lib aniqlagan olim G. Kantor sharafiga Kantor to'plami yoki Kantor diskontinuumi deb ataladi.

Endi ushbu to'plamning tuzilishini to'laroq tasniflaymiz.

Aytaylik, barcha k, $2 \le k < n$, $n \ge 3$ lar uchun dizyunkt (o'zaro kesishmaydigan) va uzunliklari $1/3k$ bo'lgan k-rang Δ_{iioik} kesmalar va $(k-1)$ rang $\delta_{i,\dots i_{k-1}}$, $i_p = 0,-1$ $p = 1,2,..,k$ intervallar qurilgan bo'lib, ular quyidagi shartni qanoatlantirsin:

$$\Delta_{i1}\dots i_{k-1} = \Delta_{i1}\dots i_{k+0} \cup \delta_{i1}\dots i_{k-1}\dots \cup \Delta_{i1}\dots i_{k+1}\dots, \qquad (1)$$

$$\Delta_{i1}\dots i_{k-1}0 \text{ kesma } \Delta_{iioik}\ ik-1 \qquad (2)$$

kesmadan chaproqda joylashgan (ya'ni $x < y$ tengsizlik ixtiyoriy $x \in \Delta_{i1}\dots i_{k-1}0$ va $y \in \Delta_{i1}\dots i_{k-1}1$ nuqtalar uchun o'rinli). Ixtiyoriy $n-1$ rangli $\Delta_{i1}\dots in-1 = [a,b]$ kesma uchun $\Delta_{i1\_n-1}0 = [a, a + 1/3n]$; $\delta_{i1\_n-1} = (a + 1/3n,$ $a + 2/3n)$, $\Delta_{i1\_n+1} = [a + 2/3n, b]$ belgilashlar kiritamiz.

$$C_n = \cup\{\Delta_{ij\_in} : i_p = 0,1; p = 1,2,\dots n\}, \ C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

S to'plam Kantor to'plamidan iboratdir, bu yerda

$$C_n = C_{n-1} \setminus \cup\{\delta_{i1\dots\dots in-1} : i_p = 0,1; \ p = 1,\dots n-1\}$$

U holda $C = [0,1] \setminus (\delta \cup \{\delta_{i1}\dots i_{n-1} : ip = 0,1; p = 1,\dots n-1, n = 2,\dots\})$, ya'ni S Kantor to'plami $[0,1]$ kesmadan δ interval va $\delta_{i1}\dots i_n$, $i_p = 0,1$; $p = 1,\dots n$; $n = 1,2,3,\dots$ ko'rinishidagi barcha intervallarni tashlab yuborishdan tashkil topgandir. Bu δ va $\delta_{i1}\dots i_n$ intervallar hamda $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$

intervallar S to‘plamga qo‘shni deb ataladi. S to‘plamning qurilishidan u quyidagi xossalarga ega:

(A): S ga qo‘shni ixtiyoriy ikki interval orasida S ga qo‘shni interval mavjud;

(V): S ning birorta nuqtasi ham S ga qo‘shni bo‘lgan ikkita intervalning oxiri bo‘la olmaydi.

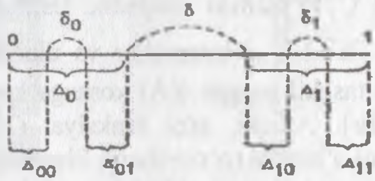
S to‘plamga qo‘shni intervallarning oxirlari, ixtiyoriy C_n ga tegishli. Demak, S ga ham tegishli, ular S ning tomonlari nuqtalaridir. Sizga ma’lumki, bu to‘plam sanoqsiz to‘plam bo‘lib, uning quvvati kontinuumga tengdir, boshqacha aytganda, $[0,1]$ kesmaning yoki R^1 to‘g‘ri chiziq nuqtalarining soni qancha bo‘lsa, S ning nuqtalari ham shunchadir.

Kantorning mukammal to‘plami va ikkinchi atamasining diskontinuum deyilishiga asosiy sabab S to‘plam uzil-kesil bog‘lamsiz to‘plam ekanligidir. Ya’ni, S ning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasida S ga qo‘shni bo‘lgan interval mavjud. Boshqacha aytganda, S to‘plam o‘zida “tug‘ma” bo‘lmagan kesmalarni saqlamaydi.

S to‘plamning yana bir ajoyib xossasi shundaki, S to‘plam mukammal to‘plamdir. Ya’ni, S to‘plam o‘zining hosila to‘plamiga teng. Boshqacha aytganda, uning barcha nuqtalari limit nuqtalardan iboratdir.

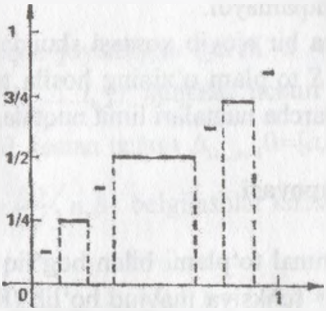
8.2-§. Kantor zinapoyasi

Kantorning mukammal to‘plami bilan bog‘liq bo‘lgan xossa – bu S to‘plamda uzluksiz $c(x)$ funksiya mavjud bo‘lib (Kantorning mukammal to‘plamida aniqlangan), bu funksiyaning Kantor zinapoyasi deb yuritilishidir. Endi shu funksiyani aniqlashga kirishamiz.



8.2.1-rasm

$c(x)$ funksiyaning qiymati $x=0$ nuqtada 0 ga; $x=1$ nuqtada 1 ga; δ interval va uning oxirlaridagi nuqtalarida (8.1.1-rasm) $\frac{1}{2}$ ga; δ_0 interval va uning oxirlaridagi nuqtalarida $\frac{1}{4}$ ga; δ_1 interval va uning oxirlarida $3/4$ ga; $\delta_{\underbrace{0\ldots0}_{n-1\,marta}}$ interval va uning oxirlarida $1/2^n$ ga; $\delta_{\underbrace{0\ldots01}_{n-2\,marta}}$ interval va uning oxirlarida $3/2^n$ ga; $\delta_{\underbrace{1\ldots10}_{n-2\,marta}}$ interval va uning oxirlarida $(2^n-3)/2^n$ ga; $\delta_{\underbrace{1\ldots1}_{n-1\,marta}}$ interval va uning oxirlarida $(2^n-1)/2^n$ ga teng (intervalning o'ngda bo'lgan soni uchun *s(x)* funksiya qiymati ham kattaroq bo'lib boradi) deb olamiz va hokazo. Natijada, *s(x)* ning ma'lum bir qismi grafigiga ega bo'lamiz.



8.2.2-rasm

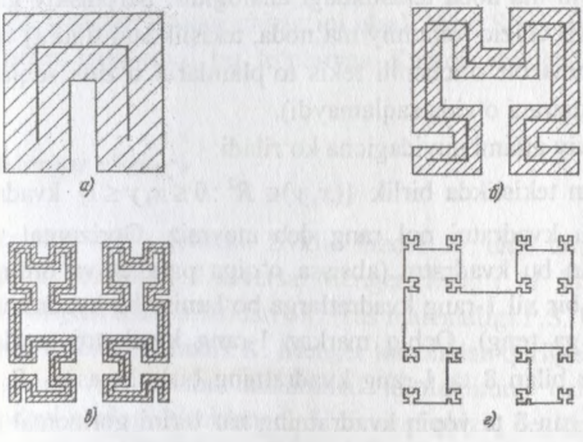
s(x) funksiyani C to'plamda aniqladik. Ushbu to'plam δ va $\delta_{i_1\ldots i_n}$, $i_n=0,1$, $k=1,\ldots,n$, $n=1,2,\ldots$ intervallar va ularning oxirlaridan iborat bo'lgan nuqtalardan tashkil topgan ((A) xossaga ko'ra (8.1-§.), *s(x)* ning aniqlanishi korrektdir). Aniqki, *s(x)* funksiya C to'plamda monoton (qat'iy bo'lmasa ham) o'suvchi (o'suvchan). Shuningdek, *s(x)* ning bunday aniqlanishida ixtiyoriy $x\in C$ nuqta (ikki tomonlama yoki bir tomonlama) uchun quyidagi shart bajariladi:

(1) $\operatorname{supp}\{C(x^1): x > x^1,\ x^1 \in C\} = \inf\{\tilde{n}(x^1): x^1 > x; x^1 \in C\}$

s(x) funksiyaning ikki tomonlama $x \in C$ nuqtalardagi qiymati (1) formuladagi sonlarning biriga teng deb aniqlaymiz. *S* to‘plamda $C(x)$ funksiyaning monotonligi va o‘suvchi ekanligidan bu funksiyaning uzluksizligi kelib chiqadi. $C(x)$ ning uzluksizligi va *S*(0)=0, *S*(1)=1 lardan $C([0,1`]) = [0,1]$ o‘rinli bo‘ladi. S ga qo‘shni intervalda va uning oxirlarida S(x) ning qiymati bir xil bo‘lgani uchun $c(C) = [0,1]$ ham o‘rinlidir.

Aytish mumkinki, $c: C \to [0,1]$ akslantirish *S* to‘plamga (Kantor to‘plamiga) qo‘shni bo‘lgan intervallarning oxirlarini jufti bilan yelimlashdan iborat bo‘lmoqda, ya’ni to‘g‘ri chiziqdagi Kantor mukammal to‘plamining “teshiklarini yamash” amalga oshirilmoqda. Funksiyaning *S* ga qo‘shni bo‘lgan intervallarning barcha nuqtalarida hosilasi nolga teng. Ya’ni, uning hosilasi deyarli hamma nuqtalarda mavjud va 0 ga teng. Ammo, $C(x)$ funksiya o‘zgarmas emas, *S(x)* funksiya 0 dan 1 gacha o‘suvchidir.

Chiziqning matematik nuqtai nazardan nisbatan qoniqarli bo‘lgan ta’rifi birinchi bo‘lib Kantor tomonidan berilgan (bu ta’rif ko‘proq tekislikdagi chiziqlarga to‘g‘ri keladi). Topologiyada tekislikdagi bog‘lamli kompakt to‘plam yassi (tekis) kontinuum deyiladi. Demak, tekislikda aylana, doira, uchburchak, 8.2.3-rasmdagi figuralar kontinuum bo‘lar ekan.



8.2.3-rasm

Ichki nuqtalarga ega bo'lmagan tekis (yassi) kontinuum Kantor chizig'i deyiladi. Har qanday kontinuum ham chiziq bo'lavermaydi. Boshqacha aytganda, Kantor chizig'iga tegishli bo'lgan ixtiyoriy nuqtaning istalgan atrofida chiziqqa tegishli va tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud bo'laverar ekan. Doira, bu ma'noda, Kantor chizig'iga misol bo'la olmaydi.

Yuqoridagi talqin va mulohazalardan aytishimiz mumkinki, Kantor chizig'i shunday X kontinuumdan iboratki, bu kontinuum tekislikdagi ochiq to'plam chegarasidir. Shu nuqtai nazardan, chiziqni "sirt chegarasi" deb ta'riflash (Evklid chiziqqa shunday ta'rif bergan) maqsadga muvofiqdek tuyuladi.

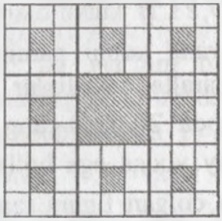
8.3-§. Serpinskiy gilami

Kantor tomonidan ta'riflangan chiziqlarning tashqi ko'rinishi elementar va analitik geometriya kurslarida uchraydigan chiziqlarga qaraganda ancha murakkab bo'lishi mumkin. Misol tariqasida polyak matematigi Serpinskiy tomonidan keltirilgan, ajoyib xossalarga ega bo'lgan chiziqni olaylik.

Serpinskiy gilami deb ataluvchi bu chiziq Kantor mukammal to'plamining ma'lum ma'noda tekislikdagi analogidir. Serpinskiy gilami shunday ajoyib tekis chiziq (umumiy ma'noda, tekislikdagi figura) va topologik ma'noda hamma bir o'lchamli tekis to'plamlarni o'zida saqlaydi (ya'ni, hech qanday doirani o'zida saqlamaydi).

Serpinskiy gilami quyidagicha ko'riladi:

Q^2 bilan tekislikda birlik $\{(x,y)\in R^2 : 0\le x,y\le 1\}$ kvadratni belgilaymiz va bu kvadratni nol rang deb ataymiz. Gorizontal va vertikal kesmalar bilan bu kvadratni (absissa o'qiga parallel va ordinata o'qiga vertikal) 9 ta bir xil 1-rang kvadratlarga bo'lamiz (bu kvadratning tomoni uzunligi 1\3 ga teng). Ochiq markaz 1-rang kvadratni tashlab, qolgan yopiq markaz bilan 8 ta 1-rang kvadratning birlashmasini S_1 bilan belgilaymiz. Qolgan 8 ta yopiq kvadratning har birini gorizontal va vertikal kesmalar bilan 9 tadan bir xil (teng) 2-rang bo'laklarga (kvadratlarga) bo'lib (bu bo'laklar 2-rang kvadratlar), markaziy ochiq kvadratlarni tashlab yuboramiz. Qolgan 64 ta 2-rang kvadratlar birlashmasini S_2 bilan belgilaymiz (8.3.1-rasm).



8.3.1-rasm

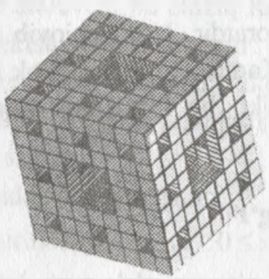
Yuqoridagi jarayonni davom ettirib, qolgan har bir $n-$rang kvadratlarni 9 ta teng $(n+1)$ rang kvadratlarga bo'lib, har bir markaziy $(n+1)$ rang kvadratni tashlab, qolgan $(n+1)$ rang kvadratlar birlashmasini S_{n+1} bilan belgilasak, bu yerda $n=0,1,2,...$ oxir-oqibat Serpinskiy gilami $S=\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ ga ega bo'lamiz.

Bu S chiziqdan iboratdir. Ushbu ajoyib chiziq yuqoridagi barcha xossalarga ega. Istalgan Kantor chizig'ini olsak ham, Serpinskiy gilamida shunday to'plam topiladiki, bu to'plamga Kantor chizig'i gomeomorf bo'ladi.

8.4-§. Menger chizig'i

Chiziqlarning uch o'lchamli Evklid fazosi R^3 dagi umumiy ko'rinishlaridan birini keltiramiz. Universal Menger chizig'i M birinchi marta o'lchamlar nazariyasi asoschilaridan biri (rus matematigi P.S. Urison bilan birgalikda) avstriyalik matematik K. Menger tomonidan qurilgan. Bu chiziq Serpinskiy gilami va Kantor mukammal to'plamining uch o'lchamli Evklid fazosidagi analogi hisoblanadi. Universal chiziq deyilishiga sabab, birinchidan, u chiziq; ikkinchidan, bu barcha fazodagi chiziqlarni va bir o‘lchamli to‘plamlarni topologik jihatdan o‘zida saqlaydi (bir o‘lchamli to‘plamlarni gomeomorf joylash mumkin).

Menger chizig‘i M ni quraylik. Buning uchun R^3 fazoda birlik $Q^3 = \{(x,y,z)\in R^3 :\ 0\leq x,y,z\leq 1\}$ kubni olamiz va uni o “rangli” tekislik deb belgilaymiz. Bu nol rang kubni paralellar va gorizontallar bilan (koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan) 27 ta teng (bir xil) kublarga bo‘lamiz. a^3 kubda 20 ta 1-rang yopiq kubni saqlab, 7 ta markaziy kub bilan umumiy yoqqa ega bo‘lmagan, 1-rang kublarni Q^3 dan tashlab yuboramiz. Bu qolgan figura tanklarga qarshi ishlatiladigan “tipratikan”ga o‘xshagan jismdir (ya’ni, bu jism uchta o‘zaro perpendikulyar, o‘rtada payvand qilingan bir xil uzunlikdagi relsdan iborat). Har bir qolgan 1-rang kublarni yana koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan 27 ta teng 2-rang bo‘lakka bo‘lamiz va oldingiga o‘xshab har bir 1-rang kubda 20 ta 2-rang kub qoldiramiz (bu qoldirgan 20 ta 2-rang kub markaziy 27 ta kub bilan umumiy ikki o‘lchamli yoqqa ega emas). Yuqorida bayoni keltirilgan jarayonni davom ettirib, “tipratikan”larni tashlab yuboramiz va oxir-oqibat universal Menger chizig‘i M ga ega bo‘lamiz (8.4.1-rasm).



8.4.1-rasm

Bu chiziqning yana bir ajoyibligi shundaki, u topologik bir jinsli to‘plam (figura)dir. Ya’ni, M chiziqning ixtiyoriy ikkita har xil x va y nuqtalari uchun shunday $f:M\to M$ topologik akslantirish mavjudki, f akslantirish uchun $f(x)=y$ o‘rinli bo‘ladi.

8.5-§. Peano chiziqlari

Chiziq ta'rifini berishga urinishlardan yana biriga to'xtalaylik. Agar biz fazoda yetarlicha kichik o'lchovlarga (o'lchamlarga) ega bo'lgan jism (nuqtaviy jism) harakat izini (traektoriyasi yoki orbitasini) olsak, bu nuqtaviy jism harakatining izi ma'lum bir vaqt oralig'ida chiziqni ifodalaydi. Bu iz, ya'ni nuqtaning izi chiziqdan iborat bo'ladi. Bu holatda vaqtning t momentida jism holati fazoda $x=\varphi(t), y=\psi(t); z=\aleph(t)$ koordinatalar bo'yicha harakatlansa, φ,ψ va x funksiyalar bilan bog'liq va albatta uzluksiz funksiyalar bo'ladi. Agar harakatlanayotgan nuqtaning (jismning) holatini ma'lum bir t_0 vaqtdan boshlab t_1 vaqtgacha davom etish bilan chegaralasak, matematik nuqtai nazardan qaraganda $[t_0,t_1]$ kesmani R^3 fazoga uzluksiz akslantirish $(x=\varphi(t), y=\psi(t)$ va $z=\aleph(t)$ formulalar bilan) holatiga tushamiz. Bunday harakatlanayotgan nuqta holatining fazodagi majmuasi (fazodagi traektoriyasi) $[t_0,t_1]$ kesmaning obrazidan iborat bo'ladi.

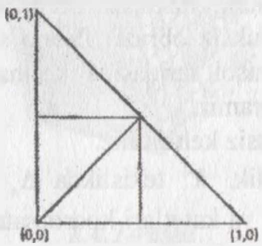
Chiziq ta'rifini berishga urinilgan bunday tabiiy yondashish yetarli jiddiy kamchiliklarga egadir. Ma'lum bo'lishicha, kesmaning uzluksiz obrazlari, masalan, kvadrat, sfera, shar va boshqa ikki o'lchamli figuralar, uch o'lchamli va hattoki n o'lchamli $(n>3)$ figuralardan iborat bo'lib, birortasi ham bizning tasavvurimizdagi chiziqqa o'xshamaydi. Bu ajoyib chiziqlar birinchi marta italyan matematigi Peano tomonidan aniqlangan. Shu sababli ham kesmaning uzluksiz obrazidan iborat bo'lgan figura (qisqacha, kesmaning uzluksiz obrazi) Peano sharafiga Peano chiziqlari deb yuritiladi. Quyida misol tariqasida kesmani uchburchakka (to'liq) uzluksiz akslantirishni ko'ramiz.

Ushbu lemmani isbotsiz keltiramiz.

8.5.1-lemma. Aytaylik, R^2 tekislikda Δ_n to'g'ri burchakli uchburchaklar sistemasi berilgan va katetlari koordinata o'qlariga parallel bo'lib, $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$; $n=1,2,...$ va Δ_n lar gipotenuzasi uzunligi d_n nolga intilsa (n ning ortishi bilan), u holda barcha Δ_n uchburchaklar faqat bitta umumiy nuqtaga egadir.

Endi $[0,1]$ kesmani uchlari $(0,0),(1,0)(0,1)$ nuqtalarda bo'lgan teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakka akslantiruvchi uzluksiz akslantirishni olamiz. τ_n orqali $n=0,1,...2^n$ dona uzunligi $1/2^n$ bo'lgan, yig'indisi (birlashmasi) $[0,1]$ ga teng bo'luvchi (o'zaro kesishmasi bir nuqtadan ko'p bo'lmagan) kesmalar sistemasini belgilaymiz. τ_n sistemasining kesmalarini $n-$ rang kesmalar deb ataymiz. Xususiy holda $[0,1]$ kesma nol rang kesma deyiladi.

n rang kesma $[p/2^n, (p+1)/2^n]$ ni $\delta_{n+1,p}$ bilan, uning o'rtasini $S_{n+1,p}, p=0,1,...2^n-1$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib, $S_{n+1}, p=(2p+1)/(2^{n+1}=2(2p+1)/2^{n+2}=......)$. Xususiy holda $[0,1]=\delta_{10}$. Har bir $n=0,1,2,....$ son uchun 2^n ta to'g'ri burchakli teng yonli o'zaro teng (kongruent) raqobatdosh $n-$ rang uchburchaklardan, ularning birlashmasi Δ dan iborat bo'ladigan, ularning ixtiyoriy ikkitasi yoki kesishmaydigan, yoki bir nuqtada kesishsa, bu nuqta ulardan har birining uchi bo'ladigan, yoki kesma bo'yicha kesishma bu kesma har birining tomoni bo'ladigan uchburchaklardan iborat Q_n sistemani ko'ramiz. Keyinchalik teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakning yarmi deganda, gipotenuzaga tushirilgan perpendikulyar ajratgan ikkita uchburchakka aytiladi. Aytaylik, O_0 sistema bitta Δ uchburchakdan, $\acute{I}_1$ sistema esa, ikki yarim uchburchaklardan iborat bo'lsin (8.5.1-rasm).



8.5.1-rasm

Faraz qilaylik, talab qilingan (izlanayotgan) uchburchaklardan (yuqoridagi talablarni qanoatlantiruvchi) tashkil topgan Q_{n-1} sistema qurilgan (tuzilgan) bo'lsin. U holda Q_n sistemani Q_{n-1} sistemaning barcha yarim uchburchaklaridan tashkil topgan, deb olishimiz mumkin. S orqali barcha mumkin bo'lgan τ_n sistelarmaning barcha kesmalarining hamma uchlari to'plamini belgilaymiz. Ma'lumki, $[0,1]$ kesma barcha nuqtalarining to'p-lami $p/2^n$, $p = 0,1$; $n = 1,2,........$ ko'rinishda ifodalanishdan iboratdir. T bilan mumkin bo'lgan barcha Q_n sistemaning jami uchburchaklarining barcha uchlari to'plamini belgilaymiz. $f: S \to T$ va $\varphi_n: \tau_n^z \to Q_n$, $n = 0,1,2,...$ akslantirishni quyidagicha (bunda $\varphi_n(\delta_{n+1,p})$ obrazni $\Delta_{n+1,p}$ bilan belgilay-miz) mosliklar bilan aniqlaymiz: $f(0) = (1,0)$; $f(1) = (0,1)$, $f(\frac{1}{2}) = (0;0)$, $\varphi_0(\delta_{10}) = \Delta = \Delta_0$. Faraz qilaylik, barcha $n < k, k > 0$ uchun:

a) $\varphi_n(\tau_n) = Q_n$ akslantirishlar aniqlangan va

b) f akslantirish barcha $S_{n+1,p}$ nuqtalarda aniqlangan bo'lib, uning uchun quyidagilar o'rinli:

$(\alpha_n): \Delta_{n+1,p}$ uchburchak o'z gipotunuzasining oxirlari (uchlari) $f\left(\frac{p}{2^n}\right)$ va $f\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$ nuqtalardan iborat;

$(\beta n): f\ (S_{n+1,p})$ nuqta $\Delta_{n+1,p}$ uchburchakning to'g'ri burchagi uchidir.

Endi $\delta_{k+1,p} = \left[\frac{p}{2k}, \frac{p+1}{2k}\right]$ kesmani olaylik. Bu ikki R va $P+1$ son-lardan faqat bittasi juft sondir. Masalan, R juft bo'lsin ($P+1$ uchun shunga o'xshash qaraladi), ya'ni $P = 2q.$, u holda $\frac{p+1}{2k} = \frac{2q+1}{2k}$ nuqta $\delta_{k,q} = \left[\frac{p}{2k} = \frac{q}{2^{k-1}}, (q+1)2^{k-1}\right]$ kesmaning o'rtasidir. $(\alpha_n - 1)$ shartga ko'ra, $\Delta_{k,p}$ uchburchak gipotenuzasining uchlari (oxirlari) sifatida $f\left(\frac{p}{2^k}\right) = \frac{q}{2^{k-1}}$

va $f\left(\frac{q+1}{2^{k-1}}\right)$ nuqtalarga ega. $f\left(\frac{p+1}{2^k}\right)$ nuqta (β_{n-1}) shartga ko'ra, $\Delta_{k,p}$ uchburchak to'g'ri burchagi uchidan iborat. $\Delta_{k+1,p}$ sifatida $\Delta_{k,p}$ ning shunday yarimta uchburchagini olamizki, $f\left(\frac{p}{2^k}\right)$ va $f\left(\frac{p+1}{2^k}\right)$ nuqtalar bu yarimtalik uchburchakning gipotenuzasi uchlaridan iborat bo'lsin.

$f\left(\frac{2p+1}{2^{k+1}}\right)$ nuqta sifatida $\Delta_{k+1,p}$ uchburchak to'g'ri burchagi uchini olamiz. Ya'ni, $\Delta_{k,p}$ uchburchak gipotenuzasining o'rtasi. Bundan (α_n) va (β_n) shartlar bajarilmoqda. Demak, (α_n) va (β_n), $n=0,1,2,...$ shartlarni qanoatlantiruvchi f va φ_n akslantirishlarni ko'rish mumkin ekan. f akslantirish uchun quyidagi shartlarga osonlikcha erishish mumkin:

a) $f(s)=T$;

b) $(\gamma_n):\Delta_{n+1,p}\supset\Delta_{n+2,q}$ va $\delta_{n+1,p}\supset\delta_{n+2,q}$ lar o'rinli bo'lgan p, q lar uchun teng kuchli: $n=0,1,2,...$

$f:S\to T$ akslantirishni butun $[0,1]$ kesmaga davomlashtiramiz. Aytaylik, $s\in[0,1]\setminus S$. Bu holda ixtiyoriy n uchun S nuqtani o'zida saqlovchi yagona $\delta_{n+1,P(s)}$ kesma topiladi (mavjud bo'ladi). Bundan ravshanki, $\delta_{n+1,P(s)}\supset\delta_{n+2,q(s)}$, $n=0,1,2,...$ Shu sababli (α_n) shartga ko'ra, $\Delta_{n+1,P(s)}\supset\Delta_{n+2,q(s)}$ ham o'rinli. Lemmaga ko'ra, barcha $\Delta_{n+1,P(s)}$ uchburchakka tegishli yagona $t=F(s)$ nuqta topiladi. F akslantirishni S to'plamda f ga teng deb olamiz. Ko'rsatamizki, tuzilgan (aniqlangan) $F:[0,1]\to\Delta$ akslantirish izlangan akslantirish bo'ladi (rus va boshqa adabiyotlarda akslantirishlar "*Ha*" (ustiga) deyiladi. Biz bu yerda ularni syurektiv akslantirish desak ham bo'ladi.

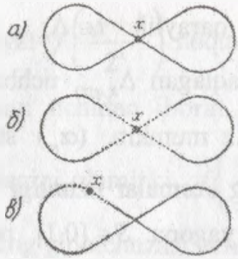
$t\in\Delta\setminus T$ nuqtani olaylik. U holda $t\in\Delta_{1,0}\cdot\Delta_{2P(t)}$ sifatida Δ_{10} uchburchak yarim uchburchaklarining t nuqtani o'z ichida saqlaganini olaylik. Faraz qilaylik, $\Delta_{n+1,P(t)}$ uchburchaklar uchun $n<k, k>1, \Delta_{m,P(t)}\supset\Delta_{m+1,q(t)}\ni t$, $m<k$ lar o'rinli.

$\Delta_{k,P(t)}$ uchburchakni qaraylik. $t \in \Delta_{k,P(t)}$ bo‘lgani uchun, $\Delta_{k+1\,q(t)}$ sifatida, t nuqtani o‘zida saqlagan $\Delta_{k,q(t)}$ uchburchakning yarimtalik uchburchagini doimo olishimiz mumkin. (α_n) shartdan, $\delta_{n+1,P(s)} \supset \delta_{n+2,q(s)}$, $n = 0,1,2,...$ o‘rinli. n rang kesmalar uzunligi n ning ortishi bilan nolga yaqinlashadi. Shu tufayli yagona $S \in [0,1]$ nuqta topiladiki, u hamma $\delta_{n,p(t)}$ larga tegishli bo‘ladi. Aniqki, $F(s) = t$. Demak, $F([0,1]) = \Delta$, ya’ni F akslantirish syurektiv akslantirish ekan. Qurilgan akslantirishning uzluksizligi qiyinchiliksiz tekshiriladi.

Demak, $[0,1]$ kesmaning uzluksiz obrazi uchburchakdan iborat bo‘ldi. Xulosa qilib aytganda, uchburchak ham Peano chizig‘idan iborat ekan.

8.6-§. Jordan teoremasi. Va’da chizig‘i

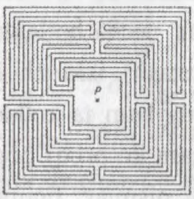
Geometriyada, qolaversa, topologiyada figuraning eng muhim xossalaridan biri uning yaxlit bir bo‘lakdan yoki, aksincha, bir-biri bilan bog‘lanmagan (umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan) bir necha bo‘laklardan iborat bo‘lishidir. Birinchi holda figura bog‘lamli (tutash), ikkinchi holatda esa, bog‘lamsiz (tarqoq) deyiladi. Oldingi boblarda ham ta’kidlandiki, bog‘lamsiz figura – bu bir necha (balki, undan ham ko‘proq) bog‘lamli bo‘laklardan tashkil topgandir. Shu bog‘lamli qismlar figuraning komponentalari (maksimal bog‘lamli qismlari) deyiladi. Masalan, yo harfi 3 ta, *i* harfi 2 ta, T, X U va O harflari 1 ta komponentaga ega. Figuralarning komponentalari soni, yassi chiziqning o‘z-o‘zi bilan kesishish nuqtalar soniga invariantdir. Agar figuraning birorta nuqtasi uni bittadan ortiq komponentalarga ajratsa, bunday nuqtaga ajratuvchi nuqta deyiladi. Masalan, 8.6.1-rasmda x nuqta lemniskatani 2 ta komponentaga ajratadi. Unda shunday x nuqtadan boshqa nuqta yo‘q.



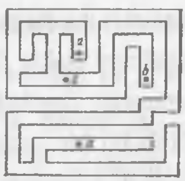
8.6.1-rasm

Yuqorida keltirilgan yo, x, y, t, va *i* harflarida ham shunday nuqta topiladiki, ularni 2 va undan ortiq komponentalarga ajratadi. Bulardan ma'lum bo'lmoqdaki, figuralarda birorta nuqta uni ikkita komponentaga ajrata olmas ekan. Boshqacha aytganda, figura ajratuvchi nuqtalarga ega bo'lavermas ekan (8.6.1-rasm).

Shunday bo'lishi ham mumkinki, agar birorta figura sohani ikki komponentaga (ichki va tashqi) ajratgan bo'lsa, birorta tayin nuqta qaysi ichki yoki tashqi sohaga tegishli yoki tegishli emasligini ajratish qiyin bo'lmaydi (8.6.2-rasmdagi R nuqtani olaylik).



8.6.2-rasm



8.6.3-rasm

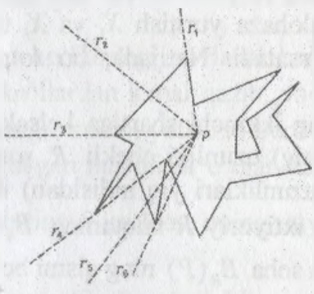
Masalan, 8.6.3-rasmda yopiq sodda siniq chiziq keltirilgan bo'lib, uning tekislikni qanday ichki va boshqa bo'laklarga ajratishi ayon emas. a,b,c va d nuqtalar qaysi qismlarga tegishli ekanligini darrov bilib bo'lmaydi. Shu ko'rinishdagi holatlarga quyida keltirilgan Jordan teoremasi javob beradi. Aylanaga gomeomorf bo'lgan yopiq chiziq sodda yopiq chiziq deb ataladi (Jordan chizig'i ham deyiladi).

Jordan teoremasi. Ixtiyoriy sodda yopiq chiziq tekislikni ikkita komponentaga ajratadi. Bu komponentalarning biri chegaralangan bo‘ladi.

Jordan teoremasining Jordan ko‘pburchaklari uchun isbotini keltiramiz. Agar Jordan chizig‘i chekli sondagi to‘g‘ri chiziq kesmalaridan tashkil topgan bo‘lsa, u Jordan ko‘pburchagi deyiladi.

Isbot. Aytaylik, $C \subset R^2$ tekislikda Jordan ko‘pburchagi bo‘lsin. $R^2 \setminus C$ ning ikkitadan kam bo‘lmagan komponentasi mavjudligini ko‘rsatishimiz kerak.

$P \in R^2 \setminus C$ nuqtani olaylik. R nuqtadan chiqqan ixtiyoriy nurni qaraylik. $P(r,p)$ orqali C ko‘pburchak bilan r nurning quyidagi shartlarni hisobga olib sanalgan kesishishlari sonini belgilaymiz. Agar r nur V uchdan o‘tsa yoki C ko‘pburchakning butun tomonini o‘zida saqlasa, u holda bu kesishishni 2 marta deb hisoblaymiz. Agar tomonlari V yoki L bilan qo‘shni bo‘lib, r nurdan bir tomonda yotsa, kesishishlar bir marta hisoblanadi.



8.6.4-rasm

Masalan, 8.6.4-rasmda $P(r_1,p)=1$, $P(r_2,p)=1$, $P(r_3,p)=1$, $P(r_4,p)=5$, $P(r_5 p)=3$, $P(r_6,p)=3$, r nurning r nuqta atrofidagi $P(r,p)$ qiymati o‘zgarib turadi, lekin $P(r,p)$ ning juft son ekanligi o‘zgarmaydi. Shu sababli $P(r,p)$ sonning juft yoki toqligiga qarab, R nuqtaning juft yoki toqligi xossalarini uning jufti deb ataymiz.

Shunday qilib, $R^2 \setminus C$ to‘plam ikkita juftlik va toqlik nuqtalar to‘plamiga ajraladi va bu to‘plamlar mos ravishda X_j va X_t bilan belgilanadi.

Ma’lumki, $R^2 \setminus C = X_j \cup X_t$ va $X_j \cap X_t = \varnothing$.

Aytaylik, $P\in R^2\setminus C$ va $\rho(p,C)=\varepsilon$. Bundan $B_\varepsilon(p)\subset R^2\setminus CB_\varepsilon(P)$ to'plamning barcha nuqtalarining juftligi R nuqtaning juftligi bilan ustma-ust tushadi. $x\in B_\alpha(p)$ nuqta uchun uchi R nuqtada va x nuqtadan o'tuvchi nurni olish kerak. Demak, X_j va X_t to'plamlar ochiq to'plamlardir, bu esa, $X\setminus C$ ning bog'lamsiz to'plam va ikkitadan kam bo'lmagan komponentaga ega ekanligini ko'rsatadi.

Endi X_j va X_t to'plamlarning chiziqli bog'lamli ekanligini ko'rsatamiz. Buni isbotlash uchun S siniq chiziqning ixtiyoriy birorta kesmasini olamiz va uning yaqin atrofida $a\in R^2\setminus C$ va $b\in R^2\setminus C$ nuqtalarni tanlangan kesmaning turli tomonlarda birinchisini X_j, ikkinchisini X_t to'plamdan olamiz. Ya'ni, $a\in X_j$, $b\in X_t$. Agar r nuqta $R^2\setminus C$ ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, u holda, $R^2\setminus C$ da r nuqtani C ga yaqin birorta nuqta bilan tutashtiruvchi yo'l mavjud (C siniq chiziqdagi tanlangan kesmaga yaqin bo'lishi shart emas). Shu yo'l C siniq chiziq bo'ylab yaqin nuqtalarga shunday davom ettiriladiki, bu yo'l $R^2\setminus C$ dan qolsin va a va b nuqtaga yetib kelsin. Bunday mulohaza yuritish X_j va X_t to'plamlarning chiziqli bog'lamli ekanligini ko'rsatadi. Natijada, bu to'plamlarning bog'lamli ekanligi kelib chiqadi.

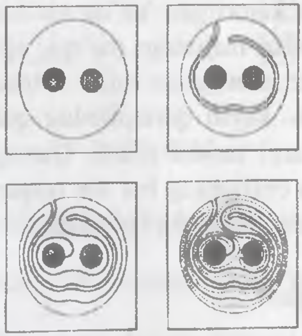
Jordan teoremasining ikkinchi shartiga kelsak, chekli sondagi siniq chiziqlarning (kesmalarning) uzunligi chekli R sondan (C siniq chiziqni tashkil qilgan kesmalar uzunliklari yig'indisidan) iborat bo'ladi. C siniq chiziqning ichida yotgan ixtiyoriy R nuqtaning $B_R(P)$ atrofini olsak, bu siniq chiziq S o'rab turgan soha $B_R(P)$ ning qismi bo'ladi. Demak, bu sohalarning biri chegaralangan ekan.

Jordan teoremasida keltirilgan sodda Jordan chizig'i C tekislikda ikkita sohaning umumiy chegarasidan iborat bo'lmoqda. Intuitsiyamiz ham tekislikda chiziq ikkita sohaning chegarasi bo'ladi, degan faktni tasdiqlaydi. Lekin, aslida, intuitsiyamiz xatolikka olib kelishi mumkin.

Misol. Tekislikda bir vaqtda uchta sohaning umumiy chegarasi bo'ladigan chiziq mavjuddir.

Bunday chiziqlar mavjudligini birinchi bo'lib yapon matematigi K. Yoneyama ta'riflab ko'rsatgan. Bu misol Va'da ko'llari nomi bilan ham ataladi.

1917-yilda yapon matematigi tabiatda bunday ko'llar (Va'da) mavjudligini payqaydi. Faraz qilaylik, dengiz bilan o'ralgan quruqlik (orol) bo‘lib, bu orolda ikkita issiq va sovuq suvga ega bo‘lgan ko‘llar mavjud bo‘lsin. Dengiz va ko‘llardan quruqlikka suv olib kelish uchun kanallar quriladi. Bu sohani qo‘sh halqa ko‘rinishida tasavvur qilamiz (8.6.5-rasm).



8.6.5-rasm

Qulaylik uchun bu ko‘llardagi suvlarni har xil ko‘rinishda tasvirlaylik. Endi dengiz va ko‘llardan kanal qazib, vaqtning $t=0$ momentida dengizdan quruqlikka dengiz suvini yetkazib beruvchi har bir nuqtalaridan 1 (birlik) dan kam bo‘lmagan masofada o‘tgan kanal qaziymiz. Vaqtning $t=\frac{1}{2}$ momentida esa, birinchi ko‘ldan uning suvini quruqlikka (orolga) yetkazib beruvchi va quruqlikning har bir nuqtalaridan $\frac{1}{2}$ dan kam bo‘lmagan masofada o‘tgan kanal qaziymiz. Vaqtning $t=\frac{3}{4}$ momentida esa, ikkinchi ko‘ldan uning suvini quruqlikka yetkazib beruvchi quruqlikning har bir nuqtasidan $\frac{1}{4}$ dan kam bo‘lgan masofada o‘tgan kanal qaziymiz. Shu jarayonni davom ettirib, vaqtning $t=1-(\frac{1}{2})^n$ momentiga mos suv havzalarining suvini quruqlikka yetkazib beruvchi, quruqlikning har bir nuqtasidan $(\frac{1}{2})^n$ dan kam bo‘lmagan masofada o‘tgan ariq qaziymiz. Albatta, bu qazilayotgan kanallar o'zaro kesishmaydi. Ikki ko'l o'z kanallari bilan uchta ochiq bog'lamli sohani (to'plamni) tashkil qildi, quruqlikning qolgan qismi bularga umumiy chegara vazifasini o'taydi.

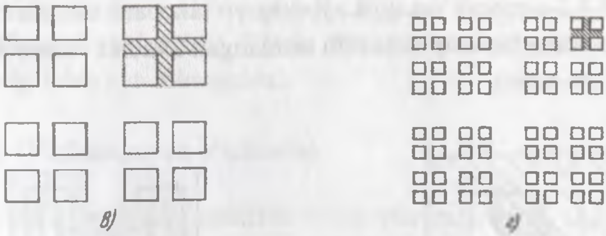
Agar ko'llarning birini sovuq, ikkinchisini issiq suvli ko'llar deb tasavvur qilsak, yuqorida keltirilgan Va'da ko'llari misolida oxir-oqibat sovuq, issiq va dengiz suvlari majmuiga (to'rga) ega bo'lar ekanmiz, lekin bu suvlar to'ri hech qayerda birga qo'shilib ketmaydi. E'tibor bersangiz, har bir kanal qazilganidan keyin quruqlikning qolgan qismi bitta yaxlit bo'lakni (bog'lamli to'plam) tashkil qiladi. Quruqlikning oxirida qolgan qismi "chiziq" bo'lib, bu chiziqning har bir nuqtasidan yetarlicha kichik masofada issiq, sovuq va dengiz suvlari joylashadi.

8.7-§. Urison chiziqlari

Ma'lumki, Evklid o'zining "Negizlar" asarida chiziqni (egri chiziqni) "ensiz uzunlik" deb ta'riflagan. Biz bu iborani ta'rif sifatida qabul qilmasak-da, lekin u chiziqni ayniy tasavvur qilishimizda bir turtki bo'lishi mumkin. Oldingi boblarda chiziqni to'g'ri chiziq qismlarining gomeomorf obrazi deb qabul qilishimizga qaramay, bu figura Evklid iborasiga doimo to'g'ri kelavermasligini tasdiqlash maqsadida bir taajjubli tuyulgan misolni keltiramiz. Bu misoldan va oldingi boblarda keltirilgan ma'lumotlardan ko'rinadiki, chiziq oddiy figuralar safiga kiravermas, ba'zida chiziq yuzasi ma'lum bir sathni egallab turar ekan.

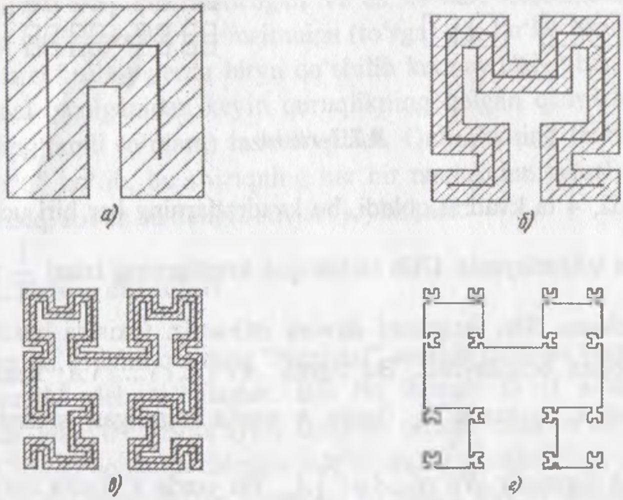
Endi misolga qaytaylik. Yuzasi 1 ga teng bo'lgan kvadrat olib, undan yuzasi $\frac{1}{4}$ ga teng bo'lgan krestni olib tashlaymiz (8.7.1-rasm).


a)   б)



8.7.1-rasm

Natijada, 4 ta kvadrat qoladi, bu kvadratlarning har biri uchun yana oldingi ishni takrorlaymiz. Olib tashlangan krestlarning izlari $\frac{1}{8}$ ni tashkil qilsin va hokazo. Shu jarayonni davom ettiramiz. Oxirida hosil bo‘lgan figurani A bilan belgilaymiz. Bu figura $A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n$ kesishmadan iborat bo‘ladiki, bu yerda A_n figura n marta bajarilgan ishlardan keyin hosil bo‘lgan figuradir. Ya’ni, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Bu yerda A figura ayrim-ayrim bo‘laklarga ajralib ketgan kvadratlardan (tashlab yuborilganlardan qolgan figura) iborat bo‘ladi. Lekin qolgan A figura musbat yuzaga ega bo‘lar ekan. Haqiqatan ham, birinchi bosqichda biz kvadratdan $\frac{1}{4}$ yuzaga ega krestni chiqarib tashladik, keyin $1/8$, so‘ng $1/16$ va hokazo. U holda limitda hosil bo‘lgan A figuraning yuzasi $1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+......)$ ga teng bo‘ladi. Qavsda turgan yig‘indi geometrik progressiya bo‘yicha hisoblansa, $\frac{1}{2}$ ga teng bo‘ladi. Bundan A figura $\frac{1}{2}$ yuzaga ega bo‘lar ekan. Endi shunday sodda chiziq (kesmaga gomeomorf) quramizki, u chiziq A figuraning barcha nuqtalaridan o‘tsin. Birinchi bosqichda hosil qilingan to‘rtta kvadratni qoplaydigan kirillcha “П” harfi shaklida buklangan yo'lakcha (8.7.2-a-rasm) yasaylik. Keyin yo'lakchani toraytirib va yana buklab, 16 ta ikkinchi bosqichda olib tashlangan kvadrat yuzasicha kamaytiramiz (8.7.2-b-rasm).



8.7.2-rasm

O'zidan oldingi figuralarning har biri uning ichida joylashadi va u bilan birga dastlabki figura ichida yotadi. Binobarin, uning yuzasi $\frac{1}{2}$ dan kam emas, o'zi esa, qing'ir-qiyshiq, egri-bugri ko'rinishdadir. Bu figuraga (chiziqqa) "ensiz uzunlik" deb bo'lmaydi.

Oldingi boblarda Urison chizig'ini o'lchami 1 ga teng bog'lamli kompakt to'plam deb ta'riflagan edik. Barcha chiziqlarni (giperbola, to'g'ri chiziq va hokazo) o'z ichiga olgan ta'rifni keltiradigan bo'lsak, Urison chizig'i ta'rifidagi kompaktlarni lokal kompaktlarga, bog'lamlikni chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan bog'lamli yopiq to'plamlarning birlashmasiga almashtirish mumkin. Urison chizig'iga kesma, Serpinskiy gilami, Menger chizig'i va Kantor chizig'i misol bo'la oladi. Kantor tomonidan chiziqqa berilgan ta'rifni fazoga nisbatan joriy qilishning iloji yo‘q. Masalan, fazoda ichki nuqtalarga ega bo‘lmagan yassi kontinuum mavjud (ellipsoid yoki doira). Peano chiziqlarini oladigan bo‘lsak, ularni Urison chizig‘i deb ayta olmaymiz.

8.8-§. O‘lchamlar va o‘lchovlar

Ma’lumki, funksional analizda o‘lchovlar nazariyasi, algebra va geometriya fanlarida o‘lchamlar nazariyasi fanlari mavjuddir. Algebrada chiziqli fazolarning o‘lchami ko‘pincha chiziqli erkin vektorlar maksimal soni bilan o‘lchanadi. Geomometriyada ham chiziqli vektorlar va affin fazolar qismida chiziqli erkin vektorlar soni fazoning o‘lchami deb yuritiladi. Topologiya va algebraik topologiya fanida esa, biz fazoning sof topologik ind, Ind va dim o‘lchamlari tushunchalari bilan tanishdik.

Fazolarning gomologik va kogomologik o‘lchamlari tushunchalari ham mavjuddir. Biz adabiyotlarda ishlatayotgan “mera” so‘zi o‘rniga o‘lchov so‘zini, “razmernost” so‘zi o‘rniga “o‘lcham” so‘zini ishlatib keldik va shunday davom etamiz. O‘lchov va o‘lchamlar tushunchalari orasida juda yaqin bog‘liqlik mavjud. R o‘lchovli $(p \geq 0)$ o‘lchov metrik fazolar uchun umumiy holda Xausdorf tomonidan aniqlangan.

Bu o‘lchov Lebeg ma’nosidagi o‘lchov bilan chambarchas bog‘liqdir. n o‘lchamli fazo n o‘lchovli o‘lchovga ega, lekin o‘lchovi n ga teng bo‘lgan fazo n o‘lchamga ega bo‘lavermaydi.

Masalan, irratsional sonlar to‘plami J (to‘g‘ri chiziqning birlik kesmasida), S Kantor mukammal to‘plamlarining o‘lchami 0 ga teng, lekin J ning (chiziqli) o‘lchovi 1 ga, S ning o‘lchovi 0 ga tengdir. Shuni aytish mumkinki, J topologik ma’noda S da yotadi, J ning topologik obrazi mavjudki, uning o‘lchovi nolga teng. X metrik fazo bo‘lsin, r haqiqiy nomanfiy son, ya’ni $0 \leq p < \infty$, berilgan $\varepsilon > 0$ son, uchun

$$m_p^{\varepsilon}(X) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(A_i)]^p .$$

Bu yerda, $X = A_1 \cup A_2 \cup ....$ ixtiyoriy sanoqli sondagi diametrlari ε dan kichik to‘plamostilarga yoyilmasi; $\delta_i(A)$ to‘plamdagi A ning diametri $< \varepsilon$ dan kichik va $[\delta(E)]^0 = 0$ deymiz, agar $E=\varnothing$ bo‘lsa, $[\delta(E)]^0 = 1$ deymiz. Agar aksincha bo‘lsa, r daraja ko‘rsatkichidir. Endi quyidagi sonni aniqlaymiz:

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon>0} m^{\bullet}_p(X)$$

$m_p(X)$ son X fazoning R o‘lchovli o‘lchovi deyiladi.

r=0 uchun

$m_0(X) = 0,$ agar $X = \varnothing$ bo‘lsa;
$m_0(X) = n,$ agar $|X| = n$ bo‘lsa;
$m_0(X) = \infty,$ agar $|X| > \chi_0$ bo‘lsa, ular o‘rinli bo‘ladi.

Agar $p < q$ bo‘lsa, $m_p(X) \geq m_q(X)$.

Haqiqatan ham, $p < q$ va $m_p(X) < \infty$ dan $m_q(X) = 0$ kelib chiqadi.

O‘lchovning dim o‘lcham bilan bog‘liqlik holatini keltiramiz.

Agar X metrik fazo (sanoqli bazaga ega bo‘lgan fazolarni ko‘rganmiz) o‘lchami $\dim X \leq n, (n < \infty)$ bo‘lsa, $m_n(X) > 0$ bo‘ladi. Agar X metrik fazo uchun $m_{n+1}(X) = 0 (0 \leq n < \infty)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\dim X \leq n$ bo‘ladi.

Ixtiyoriy X metrik fazo berilgan bo‘lsin. X fazo uchun $m_p(X) > 0$ bo‘ladigan *r* haqiqiy sonlarning eng yuqori chegarasiga X ning Xausdorf o‘lchami deyiladi, ya’ni $D(X) = \sup\{p : m_p(X) > 0\}$. Bu ta’rifdan va oldingi o‘lchov to‘g‘risidagi mulohazalardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy metrik fazo uchun $\dim X \leq D(X)$ o‘rinli.

Fazoning Xausdorf o‘lchami D butun son bo‘lishi shart emas. Masalan, Kantorning mukammal to‘plami S ning Xausdorf o‘lchami $D(C) = \dfrac{\lg 2}{\lg 3} = 0{,}63093$ dan iborat.

Xausdorf o‘lchami va qoplamlar ma’nosidagi o‘lcham dim lar orasida quyidagi tenglik mavjud. $\dim X = \inf\{D(X^1) : X^1\}$ ga X gomeomorf (topologik).

Shuni aytib o‘tishimiz kerakki, “yaxshi” fazolar uchun Xausdorf o‘lchami D va dim o‘lchamlari bir xil bo‘ladi.

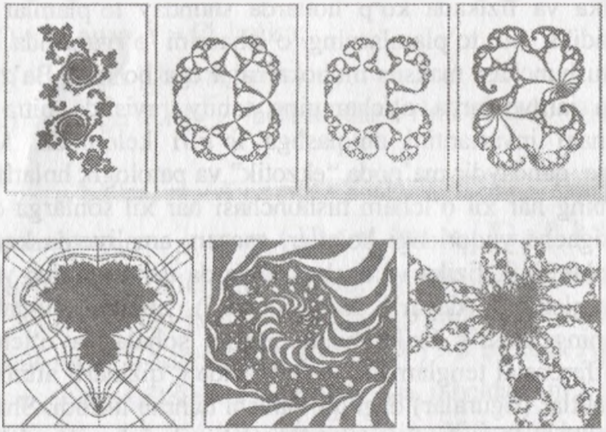
Kompakt fazolarning biz keltirgan to‘rtta o‘lchamdan tashqari fazoning ko‘pgina geomometrik xossalarini, deformatsiyalarini qo‘llab o‘rganadigan fazolarning fundamental va sheyp o‘lchamlari ham mavjud. Bu o‘lchamlar orasida ham turli munosabatlar o‘rnatilgandir.

8.9-§. Fraktallar

Oldingi boblarda o‘lchamlar nazariyasi haqida ba’zi ma’lumotlarga ega bo‘ldik, asosiy o‘lchamlar (geometriyada va topologiyada ishlatib kelinayotgan) dim, *ind* va *Ind* xossalari bilan tanishdik. Lekin, matematikada, mexanika va fizikada ko‘p hollarda shunday to‘plamlar (figuralar) uchrab turadiki, bu to‘plamlarning o‘lchamini o‘rganishda o‘lchamlar nazariyasi tushunchasi maxsus muhokamaga ega bo‘ladi. Ba’zan fizikada uchrayotgan jarayonlarda o‘lchamning tabiiy ravishda bitta emas, bir necha o‘lcham invariantini aniqlashga to‘g‘ri kelmoqda. Ma’lum bir murakkabroq, qandaydir ma’noda “ekzotik” va patologik holatlarda obyekt (figura) larning har xil o‘lcham tushunchasi har xil sonlarga olib keladi. Yaqin-yaqingacha yuqoridagi holatlar, asosan, amaliyotda kam qo‘llaniladigan fazolar sinfi, fizika va boshqa fanlarda uchraydi deb yuritilar edi. Yaqinda aniqlandiki (deyarli aniq bo‘ldiki), anomal nuqtai nazardan matematikaning klassik fizika bilan bog‘liq sohalarida o‘lchamlarning, masalan, differensial tenglamalar nazariyasida (“qiziqarli attraktorlar”) va boshqa obyektlar (figuralar) dagi qo‘llanishi uchrab turibdi. Shular sababli yana o‘lchamlar nazariyasining turli o‘lchamlarini o‘rganish va tahlil qilishga qiziqish ortdi. Fraktallar va fraktallar geometriyasi tushunchalari ishlab chiqildi va o‘rganila boshlandi.

Bizga X kompakt berilgan bo‘lsin. X kompaktni metrik fazo deb olaylik. Bezikovich isbotladiki, ixtiyoriy X kompakt uchun doimo shunday D haqiqiy son topiladiki, uning $m-$ o‘lchovli Xausdorf o‘lchovi $m<D$ bo‘lganda cheksiz, $m>D$ bo‘lganda, nolga teng. Biz oldin ham keltirgan edikki, bu o‘lchov Xausdorf o‘lchami deyiladi. Ko‘pgina adabiyotlarda bu Xausdorf-Bezikovich o‘lchami deb ham yuritiladi. $D=(X)$ songa X ning kritik o‘lchami ham deyiladi. O‘lchami $D>\dim$ bo‘lgan to‘plamlar (figuralar) fraktal deb ataladi. Xususiy holda o‘lchami butun son bo‘lmagan to‘plamlarga ham fraktallar deyiladi.

Oldingi bo‘limda ko‘rsatdikki, Kantorning mukammal to‘plami Xausdorf o‘lchami $\dfrac{\lg 2}{\lg 3}=0,6309$ bo‘lar edi. Shu sababli Kantorning mukammal to‘plami ham fraktal bo‘lar ekan. Kantor to‘plamining tuzilish jarayonini ozgina o‘zgartirib, Xausdorf o‘lchami oldindan berilgan $\lambda\in(0,1)$ songa teng bo‘ladigan to‘plam qurish mumkin bo‘ladi. Bo‘sh to‘plam uchun $\dim K = 0$ bo‘lib qolaveradi. Serpinskiy gilami ham fraktalga misol bo‘la oladi. Fraktallar tabiiy ravishda tekislikda kompleks almashtirishlarda ham paydo bo‘ladi. Fraktallarga misol sifatida 8.9.1-rasmdagi figuralarni ham keltirish mumkin.



8.9.1-rasm

VIII bob yuzasidan foydalanishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar sharhi

Kantorning mukammal to‘plami 3, 9, 53 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, Kantor zinapoyasi 70 raqam bilan berilgan adabiyotda, Peano chiziqlari bayoni 2, 70, 54 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, Jordan teoremasi va Va’da chizig‘i 20, 2, 5, 54, 70 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, Serpinskiy gilami va Menger universal chizig‘i 2, 5, 20, 54, 70 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, o‘lchamlar 3–4, 19, 34, 70, 105, 108 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, o‘lchovlar 34, 53, 82 raqamlar bilan berilgan adabiyotlarda, fraktallar esa, A.T. Fomenkoning 95 raqam bilan berilgan monografiyasida batafsil yoritilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Адамс Д.Ж.. Бесконечнократные пространства петель. – М.: Мир, 1983. – С. 416.

2. Azlarov T.A., Mirzaaxmedov M.A., Otaqo'ziyev D.O., Sobirov M.A., To'laganov S.T. Matematikadan qo'llanma, II qism, – T.: O'qituvchi, 1990, 352-b.

3. Александров П.С.. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – С. 388.

4. Александров П.С. Теория размерности и смежные вопросы; статьи общего характера. – М.: Наука, 1978. – С. 432.

5. Александров П.С. Комбинаторная топология. – М.: Гостехиздат, 1947. – С. 660.

6. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – С. 512.

7. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. – М.: Наука, 1968. – С. 912.

8. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – С. 672.

9. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973. – С. 576.

10. Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах. – М.: Наука, 1971. – С. 144.

11. Александрян Р.А, Мирзаханян Э.А..Общая топология. – М.: Высшая школа, 1979. – С. 336.

12. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. – М.: Наука, 1987. – С. 160.

13. Архангельский А.В., Пономарев В.И.. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

14. Архангельский А.В., Федорчук В.В. Основные понятия и конструкции топологии // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.17. Итоги наука и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. – С. 3-110.

15. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Часть I-II. – М.: Просвещение, 1986-1987 г. – С.336, С.352.

16. Бакельман И.Я.. Высшая геометрия. – М.: Просвещение, 1967. – С.368.

17. Берже М. Геометрия. Т-1. – М.: Мир, 1984. – С. 560.

18. Берже М. Геометрия. Т-2. – М.: Мир, 1984. – С. 368.

19. Бешимов Р.Б. Ковариантные функторы и слабая сепарабельность. ДАН РУз, 1994, № 5. – С. 11 – 14.

20. Болтянский В.Г, Ефремович В.А.. Нагладная топология. – М.: Наука, 1983. – С. 160.

21. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. – М.: Наука, 1995. – С. 416.

22. Борсук К. Теория ретрактов. 3– М.: Мир, 1971. – С. 288.

23. Борсук К.. Теория шейпов. – М.: Мир, 1976. – С. 175.

24. Ботт Р., Ту Л.В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. – М.: Наука, 1989. – С. 336.

25. Букур И., Деляну А.. Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972. – С. 254.

26. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – С. 272.

27. Васильев В.А. Введение в топологию. – М.: ФАЗИС, 1997. – С. 132.

28. Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Элементы топологии и дифференциальной геометрии. – М.: Просвещение, 1985. – С. 112.

29. Воловик Г.Е., Минеев В.П. Физика и топология. – М.: Знание, 1980. – С. 64.

30. Габриель П., Цисман М. Категории частных и теория гомотопий. – М.: Мир, 1971. – С. 295.

31. Гарднер М. Математические досуги. – М.: Мир, 1972. – С. 496.

32. Гильберт Д., С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. – С. 344.

33. Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р. Полимеры и биополимеры: взгляд физиков-теоретиков // Будущее науки. Вып.18. – М.: Знание, 1985. – С. 122–132.

34. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: Мир, 1948. – С. 232.

35. Давлетов Д.Э. Некоторые свойства функтора полуаддитивных функционалов. – Т.: Узбекский математический журнал, 2009. № 4, – С. 50–60.

36. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т.. Минимальные поверхности и проблема Плато. – М.: Наука, 1987. – С. 312.

37. Джаббаров Г.Ф. Категорные свойства функтора слабо аддитивных положительно-однородных функционалов. – Т.: Узбекский математический журнал, 2006. № 2. – С. 11–20.

38. Додажонов Н.Д., Жураева М.М. Геометрия, I қисм, – Т.: “Ўқитувчи”, 1982. 368 б.

39. Додажонов Н.Д., Юнусметов Р., Абдуллаев Т. Геометрия, II қисм. – Т.: “Ўқитувчи”, 1988. 176 б.

40. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. – М.: Мир, 1976. – С. 464.

41. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984. – С. 344.

42. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978. – С. 576.

43. Ефремович В.А. Основные топологические понятия // Энциклопедия элементарной математики. Т.5. Геометрия. – М.: Наука, 1966. – С. 476 – 556.

44. Житомирский О.К. Проективная геометрия в задачах. – М.: Гостехиздат, 1954. – С. 184.

45. Жўраев Т.Ф. О ковариантных функторах конечной степени сохраняющих A(N)R (*M*) – пространства. Доклады АН Болгария № 43, № 9, 1990. – с. 5 – 8.

46. Жўраев Т.Ф. Пространство всех вероятностных мер с конечными носителями-гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству. Общая топология. Пространства и отображения. 1989, МГУ. – Москва. – С. 66 – 71.

47. Заричный М.М., Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категориях топологических пространств. Итоги науки и техники Алгебра. Топология. Геометрия. Т-28, ВИНИТИ, – М.: 1990. – С. 47 – 95.

48. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. – М.: Л. ГОНТИ, 1938. – С. 400.

49. Казаков Д.И. Микромир за пределами вооброжения // Будущее науки вып. 20. – М.: Знание, 1987. – С. 70 – 87.

50. Квантовые жидкости и кристаллы. – М.: Мир, 1979. – С. 9 – 42.

51. Келли Д.Л. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – С. 432.

52. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966. – С. 648.

53. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – С. 544.

54. Коснёвски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. – М.: Мир, 1983. – С. 304.

55. Костин В.И. Основания геометрии. – М.: Учпедгиз, 1946. – С. 303.

56. Кроуэлл Р., Р. Фокс. Введение в теорию узлов. – М.: Мир, 1967. – С. 348.

57. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979. – С. 559.

58. Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1966. т. I. – С. 594.

59. Куратовский К. Топология, 1969. II том. – М.: Мир. – С. 624.

60. Кутузов В.В. Лобачевский геометрияси ва геометрия асослари элементлари. – М.: Узпеддавнашр, 1951. 146 б.

61. Маклейн С. Гомология. – М.: Мир, 1966. – С. 544.

62. Масси У. Теория гомологий и когомологий. – М.: Мир, 1981. – С. 388.

63. Масси У. Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. – М.: Мир, 1977. – С. 278.

64. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972. – С. 278.

65. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 184.

66. Новиков С.П. Топология // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.12. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1986. – С. 5 – 252.

67. Новиков С.П., Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Задачи по геометрии. Дифференциальная геометрия и топология. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – С. 164.

68. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1978. – С. 432.

69. Отажонов Р.К. Геометрик ясаш методлари. – Т.: “Ўқитувчи”, 1971. 407 б.

70. Пасынков Б.А., Федорчук В.В. Топология и теория размерности. – М.: Знание, 1984. – С. 64.

71. Пасынков Б.А., Федорчук В.В., Филиппов В.В. Теория размерности. В сб. Алгебра. Топология. Геометрия. – М.: Винити, 1979. – С. 229 – 306.

72. Погорелов А.Г. Геометрия. – М.: Наука, 1983. – С. 288.

73. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. – М.: Наука, 1976. – С. 136.

74. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1984. – С. 520.

75. Понтрягин Л.С. Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий. – М.: Наука, 1985. – С. 174.

76. Постников М.М. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – С. 480.

77. Постников М.М. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. – М.: Наука, 1984. – С. 416.

78. Постников М.М. Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств. – М.: Наука, 1985. – С. 336.

79. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – С. 480.

80. Пуанкаре А. Избранные труды: В 3 т. – М.: Наука, 1972. т. II. – С. 998; 1974. т. III. – С. 772.

81. Рохлин В.В., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – С. 488.

82. Саримсоқов Т.А. Функционал анализ курси. – Т.: "Ўқитувчи", 1980. 391 б.

83. Свитцер Р.М. Алгебраическая топология. Гомотопии и гомологии. – М.: Наука, 1985. – С. 608.

84. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию. – М.: Просвещение, 1988. – С. 126.

85. Спеньер Э. Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – С. 680.

86. Стинрод Н. Топология косых произведений. – М.: ИЛ, 1953. – С. 276.

87. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. – М.: Мир, 1967. – С. 224.

88. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. – М.: ИЛ, 1958. – С. 404.

89. Телеман К. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия. – М.: Мир, 1967. – С. 390.

90. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. – М.: Мир, 1987. – С. 304.

91. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: МГУ, 1990. – С. 328.

92. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. – М.: МГУ, 1988. – С. 252.

93. Физика за рубежом, 83. – М.: Мир, 1983. – С. 21 – 44; 83 – 103.

94. Фоменко А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. – М.: МГУ, 1983. – С. 216.

95. Фоменко А.Т. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. – М.: МГУ, 1998. – С. 254.

96. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989. – С. 528.

97. Фрид Д., Уленбек К. Инстантовы и четерехмерные многообразия. – М.: Мир, 1988. – С. 271.

98. Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л. Гомотопическая топология. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – С. 460.

99. Хаусдорф Г. Теория множеств. – М.: ОНТИ, 1934. – С. 312.

100. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. – М.: Мир, 1966. – С. 452.

101. Хирш М. Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – С. 280.

102. Шапиро И.С., Ольшанецкий МА. Лекции по топологии для физиков. Москва, ИТЭФ, 1980. – С. 128.

103. Шашкин Ю.А. Неподвижные точки. – М.: Наука, 1989. – С. 89.

104. Шварц А.С. Квантовая теория поля и топология. – М.: Наука, 1989. – С. 400.

105. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – С. 752.

106. Ғайбуллаев Н. Мактабда ноевклид геометриялар элементлари. – Т.: "Ўқитувчи", 1974. 96 б.

107. Zaitov A.A. Some categorical properties of functors O_τ and O_R weakly additive functionals. Math. notes. 2006, vol.79, № 75, pp. 632 – 642.

108. Engelking R. Demension theory PWN. Warszawa, 1978.

JO‘RAYEV TURSUNBOY FAYZIYEVICH

TOPOLOGIYAGA KIRISH

Funktorlar. O‘lchamlar. Chiziqlar

Bosh muharrir: M. Sarapov

Muharir: A. Omonov

Musahhih: Z. Ostonov

Rassom: A. Mamasoliyev

«TAFAKKUR-BO‘STONI» nashriyoti
Litsenziya № AI 190, 10.05.2011 y.
Toshkent sh. Yunusobod 9-13

Terishga berildi 30.05.2012 y. Bosishga ruxsat etildi: 04.09.2012 y.
Bichimi 60 x 84 $^1/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Shartli bosma tabog‘i 15,0. Adadi 500 dona.
Buyurtma № 14

Tafakkur-Bo‘stoni MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh. Yunusobod 9-13