

# NAZARIY FIZIKA KURSI

*Professor A.A. Abdumalikov umumiy tahriri ostida*

I JILD



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA  
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

---

**B.A. FAYZULLAYEV**

# **NAZARIY MEXANIKA**

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi  
tomonidan 5140200 — «Fizika» ta'lim yo'nalishi talablari uchun darslik  
sifatida tavsiya etilgan*

*Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi  
Toshkent — 2011*

UDK: 531(075)  
BBK 22.21ya73  
F20

**Taqrizchilar:**

*A. Boydedayev* — fizika-matematika fanlari nomzodi, professor,  
*K.A. Tursunmetov* — fizika-matematika fanlari doktori, professor.

**Fayzullayev B.A.**

F20 Nazariy mexanika: universitetlar va pedagogik universitetlar uchun  
darslik / B.A. Fayzullayev. — T.: Choʻlpon nomidagi nashriyot-  
matbaa ijodiy uyi, 2011. — 312 b.  
ISBN 978-9943-05-419-6

Ushbu darslik universitetlar uchun yozilgan 4-jildlik «Nazariy fizika kursi»ning birinchi jildi boʻlib, klassik nazariy mexanikaga bagʻishlangan. Unda nazariy fizika uchun muhim boʻlgan Langraj hamda Gamilton formalizmlarining asoslari, tebranishlar nazariyasi, qattiq jism harakati va irosikllar mexanikasining elementlari keltirilgan

Mazkur darslik universitetlarning fizika fakultetlari talabalari uchun moʻljallangan boʻlib, undan matematika va muhandis talabalar ham foydalanishlari mumkin.

**UDK: 531(075)**  
**BBK 22.21ya73**

ISBN 978-9943-05-419-6

© B.A. Fayzullaev, 2011  
© Choʻlpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2011

---

## SO‘ZBOSHI

Klassik mexanika fani uch yuz yildan ortiq tarixga ega. Mexanika fanini rivojlantirishga Galiley, Nyuton, Eyler, Yakobi, Gamilton va boshqa buyuk olimlar katta hissa qo‘shishgan. Albatta, mexanika fanining rivojlanishi hali ham davom etmoqda, ammo uning prinsipial asoslari XIX asrning ikkinchi yarmiga kelib aniqlangan desak bo‘ladi. Klassik mexanika juda keng va chuqur fan. Har xil soha mutaxassislari unda o‘ziga qiziqarli va muhim bo‘lgan yo‘nalishlarni topishi mumkin. Fiziklar sifatida biz mana shu fanning fizika uchun muhim bo‘lgan qismlarini tanlab oldik. Birinchi navbatda bu nazariy fizikaning hamma sohalarida keng qo‘llaniladigan tushunchalar — Lagranj formalizmi, Gamilton formalizmi, ta’sir integrali, eng qisqa ta’sir prinsipi, harakat integrallari, tashqi maydonlarda harakat va sochilish va h.k. Universitetlar uchun nazariy fizika kursi shunday qurilganki, yuqorida aytilgan fundamental tushunchalar birinchi bo‘lib nazariy mexanika kursida kiritiladi.

Kichik tebranishlarga ham katta ahamiyat berilgan — tebranish jarayonlari fizikaning deyarli hamma sohalarida uchraydi va kichik tebranishlarning qonuniyatlari hamma sohalarida ham bir xildir. Real fizik sistemalar ayniqsa elektrotexnik qurilmalarning xossalarini o‘rganishda ko‘pincha nochiziqli tebranishlar nazariyasini qo‘llashga to‘g‘ri keladi. Nochiziqli tebranishlar sohasi birmuncha murakkab bo‘lganligi uchun kitobimizda uning faqat asoslari yoritilgan.

Qattiq jism harakati masalasi klassik matematik fizikaning eng mukammal ishlab chiqilgan qismlaridan biri sifatida e’tiborimizni o‘ziga tortadi. Klassik mexanikaning bu sohasi bilan real hayot orasida ko‘pincha bevosita bog‘lanishlarni topish mumkin.

Darslik fiziklar uchun universitet dasturiga mos ravishda suyuqliklar mexanikasiga bag‘ishlangan bob ham bor.

Bu bobda berilgan ma’lumotlar talabalarga suyuqliklar va gazlar mexanikasiga doir asosiy qonunlarni o‘zlashtirishga imkoniyat beradi degan umiddamiz.

Klassik mexanika fizik sistemalarning fazodagi mexanik harakatini o'rganadi, bu qonunlarni vektorlar tilida ifoda qilish juda qulaydir. Vektorlar algebrasining asosiy qoidalari ilovada berilgan, ular kitobni tushunish uchun yetarlidir deb o'ylaymiz. Kitob davomida mana shu ilovada tushuntirilgan soqov indekslar bo'yicha yig'indi qoidasi keng foydalanilgan. Agar o'quvchi vektorlar bilan ishlashda qiyinchiliklar sezsa mana shu ilovaga murojaat qilishi kerak bo'ladi.

O'zbek tilida Nazariy fizika kursi birinchi bor yaratilmoqda. Ajab emas, sinchkov o'quvchilar darslikda ba'zi-bir nosozliklarni uchratib qolsa. Bunday o'quvchilarning tanqidiy mulohazalari kitobimizdagi kamchiliklarni kamaytirishga xizmat qilgan bo'lar edi. Tegishli fikr va mulohazalarni quyidagi manzil bo'yicha yuborishingizni so'raymiz: Toshkent, M. Ulug'bek nomli O'zbekiston Milliy universiteti, fizika fakulteti, Yadro va nazariy fizika kafedresi.

Ushbu darslik O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi qoshidagi Fan va texnologiyalarni rivojlantirishni muvofiqlashtirish qo'mitasi tomonidan ta'minlangan «ОИД-3-9» sonli innovatsion loyiha doirasida yaratilgan.

Yana bir muammoga to'xtab o'taylik. Dunyo ilmiy adabiyotlarida olimlarning nomi ularning o'z ona tilida qanday yozilsa boshqa tillarda ham o'zgartirilmasdan shundayligicha qoladi. Ammo biz tarixan kirill alifbosiga moslashtirilgan rus tilidagi talaffuzga o'rganib qolganmiz. Ikkinchi tomondan, o'quvchi ilmiy adabiyotni o'rgana boshlaganda bizning darslikdagi ruscha talaffuzga moslashtirilgan nomlarning haqiqiy shakliga duch kelib o'ylanib qolmasligi uchun quyidagi jadvalda nomlarning qiyosiy shakllarini keltiramiz:

<b>Ona tilida</b>	<b>Ushbu kitobda</b>	<b>Rus adabiyotida</b>
Newton	Nyuton	Ньютон
Hamilton	Gamilton	Гамильтон
Lagrange	Lagranj	Лагранж
Euler	Eyler	Эйлер
D'Alambert	Dalamber	Даламбер
Coulumb	Kulon	Кулон
Navier	Naviye	Навьё
Stokes	Stoks	Стокс
Jacobi	Yakobi	Якоби
Maupertuis	Mopertyui	Мопертюи
Poincare	Puankare	Пуанкаре
Poisson	Puasson	Пуассон
Cartan	Kartan	Картан
Noeter	Nyoter	Нетер
Liouville	Liuvil	Лиувилль
Routh	Raus	Раус
Coriolis	Koriolis	Кориолис
Rutherford	Rezerford	Резерфорд
Huygence	Guygens	Гюйгенс
Legendre	Lejandr	Лежандр

### **1.1. Erkinlik darajasi. Umumlashgan koordinatalar**

Jismlarning fazodagi mexanik harakatini o'rganish uchun sanoq sistemasiga ega bo'lishimiz kerak. Sanoq sistemasi tushunchasiga ma'lum bir yo'l bilan tanlab olingan koordinatalar sistemasi va soat kiradi. Ular yordamida jismning ixtiyoriy vaqt momentidagi holatini aniqlash mumkin.

Jism holatining vaqt bo'yicha o'zgarishini uzliksiz belgilab borsak, shu jismning fazodagi trayektoriyasini olgan bo'lamiz.

Bu ishini bajarish uchun bir muhim tushuncha moddiy nuqta tushunchasidan foydalaniladi. Jismning o'lchami ko'rilayotgan masaladagi boshqa o'lchamlarga nisbatan juda kichik bo'lsa uni massaga ega bo'lgan bir nuqta sifatida ko'rish mumkin. Bu albatta ma'lum bir yaqinlashuv, ideallashtirish, ammo u, odatda, yaxshi yaqinlashuvdir. Masalan, otilgan o'q yoki snaryadning trayektoriyasi jismlarning to'qnashuvida impuls va energiyaning saqlanish qonunlarini va hatto Yerning Quyosh atrofidagi harakatini o'rganganda bu jismlarni moddiy nuqta sifatida ko'rish mumkin. Hatto qattiq jismning harakatini o'rganganimizda ham uni moddiy nuqtalardan iborat deb qarasaq qulay bo'ladi.

Fizika fani tajribaga asoslangan fandır. Bundan keyin gapiriladigan ko'pgina tasdiqlar olimlarning ko'p asrlik tajribasiga asoslangan bo'lib, ular o'zidan soddaroq bo'lgan boshqa tushunchalarga keltirilmaydi. Darslikda bir necha marta uchrab turadigan «tajriba shuni ko'rsatadiki» degan ibora olimlarning ko'p asrlik tajribasi asosida keltirib chiqarilgan tasdiqlarga tegishlidir.

Fizik sistemaning fazodagi holatini aniqlash uchun har xil koordinatalardan foydalanish mumkin. Ko'p masalalarda Dekart koordinatalar sistemasi qo'llaniladi. Bu holda moddiy nuqtaning radius-vektori  $\mathbf{r}$  ni va tezligini  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}$  deb belgilanadi. Ko'p hollarda vektorlarning komponentalari  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  va  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$  dan ham foydalaniladi. Agar moddiy nuqtalar soni bir nechta bo'lsa ularning nomeri, odatda,



$a$  harfi bilan belgilaymiz. Bu holda  $a$  moddiy nuqtaning radiusi va tezligi  $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{v}_a$  harflar bilan belgilanadi. Radius va tezlikning argumentlarini odatda ko'rsatib o'tirmaganimizga qaramasdan shuni esda saqlash kerakki, umumiy holda ular vaqtga bog'liq bo'lgan kattaliklar:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$  va  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \{v_x(t), v_y(t), v_z(t)\}$ . Quyidagi munosabatlar

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.1)$$

moddiy nuqtaning  $x, y$  va  $z$  koordinatalarining vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalaydi, ya'ni, ular shu nuqtaning **trayektoriyasini** ifodalaydi. Bir necha moddiy nuqtali sistema haqida gap ketganda har bir nuqtaning koordinatlarini ham shu ma'noda tushuniladi.

Masalada sferik simmetriya bo'lsa, sferik koordinat sistemasini qo'llash qulayroqdir. Boshqa holatlarda ko'rilyotgan masala uchun boshqa koordinatlar qulay bo'lishi mumkin. Fanning muhim tomoni shundan iboratki, harakat qonunlarini umumiy ko'rinishda konkret koordinat sistemasiga bog'lamagan holda **umumlashgan koordinatalar** tilida ifodalash mumkin. Mana shu umumlashgan koordinatalarni  $q_1, q_2, \dots, q_s$  deb belgilaylik. Ular ham umumiy holda vaqtning funksiyalari bo'ladi:  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)$ , ammo buni har gal yozish shart emas. Umumlashgan koordinatlarga o'tishga misol sifatida sferik koordinatlarga o'tishni ko'raylik:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.2)$$

Bu munosabatlar orqali yangi koordinatlar  $\{r, \theta, \varphi\}$  kiritiladi. Agar sistemada  $N$  ta moddiy nuqta bo'lsa va ularning dekart koordinatlarini  $x_a, y_a, z_a, a = 1, \dots, N$  deb belgilansa, umumlashgan koordinatlarga o'tishni

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \dots, q_s), \\ y_1 &= f_2(q_1, \dots, q_s), \\ z_1 &= f_3(q_1, \dots, q_s), \\ &\vdots \\ z_N &= f_{3N}(q_1, \dots, q_s). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

formulalar orqali ko'zda tutush mumkin. Sistemaning holatini to'liq aniqlash uchun yetarli bo'lgan koordinatlar soni sistemaning **erkinlik darajasi** deyiladi. Yuqorida erkinlik darajasi  $s$  harfi bilan belgilangan,

shuncha umumlashgan koordinata kiritildi. Erkinlik darajasi soni  $3N$  dan kam bo'lishi mumkin. Bitta moddiy nuqtaning fazodagi holatini aniqlash uchun uning uchta koordinatasini aniqlashimiz yetarlidir. Demak, bitta moddiy nuqtaning erkinlik darajasi uchga teng. Ikkita moddiy nuqtaning erkinlik darajasi esa oltiga tengdir. Ammo ularning orasidagi masofa o'zgarmas bo'lsin desak, sistemaning erkinlik darajasi beshga teng bo'ladi — shu sistemadagi ixtiyoriy bir nuqtaning holatini aniqlash uchun 3 ta son kerak, ikkinchi nuqtaning holatini aniqlash uchun ikkita son yetarlidir.

Tekislik ustida harakat qilayotgan jismning erkinlik darajasi 2 ga tengdir tekislik ustidagi ixtiyoriy nuqtani uning ikkita koordinatasi orqali aniqlashi mumkin.

Oxirgi ikki misolda haqiqatda yana bitta tushuncha kiritildi. ya'ni bog'lamlar soni tushunchasi. O'zaro masofasi o'zgarmaydigan ikki nuqtali sistemada bitta bog'lanish bor — shu ikki nuqta orasidagi masofaning o'zgarmasligi sharti. Buni matematik ko'rinishga keltiraylik, uning uchun birinchi nuqta koordinatalarini  $x_1, y_1, z_1$  va ikkinchi nuqta koordinatalari esa  $x_2, y_2, z_2$  deb belgilanadi. Unda shu ikki nuqta orasidagi masofaning o'zgarmaslik sharti

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2 \quad (1.4)$$

ko'rinishni oladi, bunda  $l$  berilgan o'zgarmas masofa. Bu yerda har bir koordinata vaqtning funksiyasidir (sistema harakat qilishi mumkin), ammo masofa o'zgarmasdir.

Har bir shart sistema erkinlik darajasini bittaga kamaytiradi. Masalan, ixtiyoriy tekislik ustida bir-biriga uzunligi o'zgarmaydigan ingichka ip bilan bog'langan ikkita moddiy nuqta berilgan bo'lsin. Bu sistemaning erkinlik darajasini topaylik. Har bir nuqta sirt ustida yotibdi — bu ikkita shart. Ular orasidagi masofa o'zgarmaydi — yana bitta shart.

Demak, sistemadagi erkinlik darajalar soni  $6 - 3 = 3$  ga teng ekan. Haqiqatan ham, sistemaning holatini aniqlash uchun nuqtalarning bittasining sirt ustidagi ikkita koordinatasini berishimiz va ularni bog'lab turgan o'qning  $x$  yoki  $y$  o'qiga nisbatan burchagini aniqlash yetarlidir.

**1.1-misol.** O'zaro masofalari o'zgarmaydigan uchta moddiy nuqta sistemasining erkinlik darajasini toping.

Uchta moddiy nuqtali sistemani ifodalash uchun  $3 \cdot 3 = 9$  ta koordinata kerak. Ammo ularning bir qismi mustaqil emas. Uchta nuqta orasidagi

masofalarning o'zgarishligi 3 ta shartni beradi, demak, sistemaning erkinlik darajasi  $9 - 3 = 6$  ga teng.

**1.2-misol.** Chiziq bo'ylab harakat qilayotgan quyidagi sistemalarning erkinlik darajalarini toping:

- 1) o'zaro masofasi o'zgarmaydigan ikkita moddiy nuqta;
- 2) o'zaro masofalari o'zgarmaydigan  $N$  ta moddiy nuqtadan iborat sistema.

**Javobi.** Ikkala holda ham erkinlik darajalari soni birga teng, chunki bu sistemalarning holatini aniqlash uchun ulardagi ixtiyoriy bitta nuqtaning holatini aniqlash yetarlidir.

**1.3-misol.** Tekislikda harakat qilayotgan sistemalarning erkinlik darajasini toping:

- 1) 3 ta o'zaro bog'langan moddiy nuqtalar;
- 2) 3 ta ketma-ket bog'langan moddiy nuqtalar;
- 3) ikkita o'zaro bog'langan moddiy nuqtalar, ularning biri faqat berilgan chiziq ustida harakatlanadi.

**Javobi.** 1) Har bir nuqtaning  $z$  koordinatasiga shart bor:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 0$ , bu — uchta shart. O'zaro bog'langanlik shartlari ham uchta, demak, sistemaning  $9 - 3 - 3 = 3$  ta erkinlik darajasi bor.

3) Chiziq ustida harakatlanadigan nuqtaning erkinlik darajasi birga teng, ikkinchi nuqtaning harakatini aniqlash uchun uni birinchi nuqta bilan bog'laydigan chiziqning tekislikdagi  $x$ - (yoki  $y$  -) o'qiga nisbatan burchagini topish mumkin. Demak, sistemaning erkinlik darajasi ikkiga teng.

**1.4-misol.** Fazoda harakatlanayotgan sistemalarning erkinlik darajalarini toping:

- 1) 2 ta bir-biri bilan bog'langan moddiy nuqtalar;
- 2) 3 ta ketma-ket bog'langan moddiy nuqtalar;
- 3) 2 ta o'zaro bog'langan — biri tekislikda, ikkinchisi esa fazoda harakatlanayotgan moddiy nuqtalar.

**Javobi.** 1. 5: fazodagi nuqtaning erkinlik darajasi 3 ga teng, ikkinchi nuqtaning holatini topish uchun nuqtalarni bog'laydigan chiziqning tekislikka perpendikular  $z$  — o'qi bilan hosil qilgan burchagi va shu chiziqning  $(x, y)$  tekislikka proyeksiyasining  $z$  — o'qi bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlansa bo'ldi;

2. 5;
3. 4.

Tajriba shuni ko'rsatadiki, jismning harakat trayektoriyasi uning boshlang'ich holati  $\mathbf{r}(t_0)$  va boshlang'ich tezligi  $\mathbf{v}(t_0)$  bilan aniqlanadi. Bu degani, harakat tenglamasi vaqtga nisbatan ikkinchi tartibli differensial tenglama bo'lishi kerak. Koordinatadan vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosila tezlanish deyiladi, demak, harakat tenglamasi umumiy holda tezlanish, tezlik va trayektoriya orasidagi munosabat ko'rinishiga ega bo'lishi kerak ekan.

## 1.2. Lagranj funksiyasi va ta'sir integrali

Tajriba shuni ko'rsatadiki, fizik sistemaning hamma xossalari uning **Lagranj funksiyasi**  $L(q, \dot{q}, t)$  va **ta'sir integrali**

$$S[q] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\dot{q}, q, t) \quad (1.5)$$

da mujassamlangandir.

Lagranj funksiyasini qanday topish masalasi alohida ko'rib chiqiladi, bu yerda esa ta'sir integrali bilan shug'ullaniladi.

Bizning maqsadimiz  $S[q]$  ga qo'yilgan talab orqali harakat tenglamalarini keltirib chiqarish. Keltirib chiqarishni soddalik uchun bir o'lehamli holdan boshlaylik. Moddiy nuqta  $t_a$  vaqt momentida  $q(t_a) = q_a$  nuqtadan harakatni boshlab,  $t_b$  vaqt momentida  $q(t_b) = q_b$  nuqtaga kelgan bo'lsin. Tushunarliki, jism  $q_a$  nuqtadan  $q_b$  nuqtaga qanday trayektoriya bo'yicha borishi, ya'ni,  $q(t)$  trayektoriyaning ko'rinishi (1.5) integralning son qiymatiga ta'sir qiladi.  $S[q]$  mana shu harakat trayektoriyasining funksionalidir. Bu degani, trayektoriya o'zgarasa ta'sirning son qiymati ham o'zgaradi. Buni tushunish uchun eng oddiy bir o'lehamli

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx \quad (1.6)$$

integral olaylik. Integral ostidagi  $f(x)$  funksiya o'zgartirilsa integral  $I$  ning son qiymati ham o'zgaradi, shuning uchun u  $I[f]$  deb belgilandi. Integral qiymatining integral ostidagi funksiyaga bog'liqligini funksional bog'lanish deyiladi, qisqacha aytganda, bunday integrallar funksional deyiladi. Ta'sir integrali (1.5) albatta trayektoriya  $q(t)$  ning funksionalidir.

**Eng qisqa ta'sir prinsipi** bo'yicha haqiqiy trayektoriyaga ta'sirning eng kichik qiymati to'g'ri keladi. Buni boshqacha ham aytish mumkin — ta'sir integralining minimal qiymatiga olib keladigan funksiya  $q(t)$  haqiqiy harakat trayektoriyasiga mos keladi. Mana shu prinsipni matematik ko'rinishga keltiraylik.

Buning uchun ta'sir integralini quyidagi ikkita trayektoriya uchun solishtiriladi:  $q(t) + \delta q(t)$  va  $q(t)$ . Bu yerdagi  $\delta q(t)$  funksiya **trayektoriyaning variatsiyasi** deyiladi. U birinchidan  $t = t_a$  va  $t = t_b$  vaqt momentlarida nolga teng bo'lsin:

$$\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0, \quad (1.7)$$

va, ikkinchidan, cheksiz kichik qiymatlarnigina qabul qilsin. Bu degani, birinchidan,  $q(t) + \delta q(t)$  va  $q(t)$  trayektoriyalar bir nuqtada boshlanadi va bir nuqtada tugaydi va ikkinchidan, ixtiyoriy  $t_a < t < t_b$  vaqt momentida son jihatdan bir biridan cheksiz kam farq qiladi. Shu ikki trayektoriya uchun ta'sirning farqi topiladi:

$$\begin{aligned} \delta S &= S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_a}^{t_b} dt [L(\dot{q} + \delta \dot{q}, q + \delta q, t) - L(\dot{q}, q, t)] \approx \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Bu yerda yuqori tartibli cheksiz kichiklari tashlab yuborildi. Topilgan kattalik ta'sirning variatsiyasi deyiladi. Trayektoriya minimal ta'sirga to'g'ri kelishi uchun ixtiyoriy  $\delta q$  uchun  $\delta S = 0$  bo'lishi kerak. Integral ostidagi ifodaning birinchisiga  $\delta \dot{q}$  kirgan, trayektoriyaning variatsiyasini vaqt bo'yicha hosiladan chiqarib olish uchun shu had bo'laklab integralanadi (bu amalni bajarganda variatsion hisobda isbot qilinadigan

$\delta \frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} \delta q$  munosabatdan foydalandik):

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \frac{d}{dt} = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]. \quad (1.9)$$

Natijada

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_b}^{t_a} + \int_{t_a}^{t_b} dt \delta q \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] = 0 \quad (1.10)$$

munosabatga kelamiz. Birinchi had (1.7) shart natijasida nolga tengdir, ikkinchi had ixtiyoriy  $\delta q$  uchun nolga teng bo'lishi uchun

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (1.11)$$

tenglama bajarilishi kerak. Olingan tenglama **Eyler—Lagranj** tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaga jismning koordinatasi  $q$ , tezligi  $\dot{q}$  va tezlanishi  $\ddot{q}$  kirgan. Demak, Eyler—Lagranj tenglamasi harakat tenglamasi ekan.

Sistemaning erkinlik darajalari soni  $s$  ta bo'lgan holga o'tilsa olingan tenglamalar sistemasi

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (1.12)$$

ko'rinishga keladi. Ya'ni, har bir erkinlik darajasiga bitta Eyler—Lagranj tenglamasi to'g'ri keladi. Bu tenglamalar sistemasi  $s$  ta ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. Ularni yechish uchun  $2s$  ta boshlang'ich shartlar berilgan bo'lishi kerak. Bu boshlang'ich shartlar sistemaning boshlang'ich holati  $q_i(0) = q_{i0}$  va boshlang'ich tezliklari  $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0}$  dir.

Dekart sistemasida  $\{q_i\} = \{r_i\}$  Eyler—Lagranj tenglamalarining ko'rinishi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}. \quad (1.13)$$

**1.2.1-misol.** Quyidagi Lagranj funksiyasi uchun harakat tenglamasini toping ( $k$  — o'zgarmas son):

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - kq. \quad (1.14)$$

Kerakli hosilalarni topaylik:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -k, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}. \quad (1.15)$$

Harakat tenglamasi:

$$\ddot{q} + k = 0. \quad (1.16)$$

**1.2.2-misol.** Quyidagi Lagranj funksiyasi uchun harakat tenglamalarini toping ( $k$  — o'zgarmas son):

$$L = \frac{m}{2} \times (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - k(q_2 - q_1)^2. \quad (1.17)$$

Sistemaning ikkita erkinlik darajasi bor. Harakat tenglamalarining soni ham ikkita bo'ladi. Hosilalarni topib, harakat tenglamalariga o'tiladi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_1} &= 2k(q_2 - q_1); & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m\dot{q}_1 \Rightarrow m\ddot{q}_1 - 2k(q_2 - q_1) = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -2k(q_2 - q_1); & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m\dot{q}_2 \Rightarrow m\ddot{q}_2 + 2k(q_2 - q_1) = 0.\end{aligned}\quad (1.18)$$

**1.2.3-misol.** Eyer—Lagranj tenglamalarining nuqtaviy deyiladigan quyidagi almashtirishlarga nisbatan

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad \det \left| \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right| \neq 0 \quad (1.19)$$

o'zgarishini ko'rsating.

Yangi va eski Lagranj funksiyalarini bog'laylik:

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t). \quad (1.20)$$

Eski koordinataning vaqt bo'yicha hosilasini topishdan boshlaylik:

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Bu yerdan

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}; \quad (1.22)$$

ekanligini topamiz. Lagranj hosilalarini hisoblaylik:

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}; \quad \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}. \quad (1.23)$$

Oxirgi tenglikka o'tish uchun (1.22) dan va  $\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = 0$  ekanligidan foydalanildi. Yangi o'zgaruvchilar tilida Eyer—Lagranj tenglamalarini yozib olish goldi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right). \quad (1.24)$$

Ikkinchi had nolga teng, chunki

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial t}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial t}. \quad (1.25)$$

Demak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \quad (1.26)$$

Bu tenglikning o'ng tomoni nolga teng bo'lsa, chap tomoni ham nolga teng bo'ladi.

### 1.3. Inersial sanoq sistemalari

Jismning harakatini o'rganish uchun biror bir sanoq sistemasini tanlab olishi kerak. Ixtiyoriy bo'lgan sanoq sistemasida umumiy holda fazo va vaqtning xossalari murakkab bo'lishi mumkin, bu esa harakat qonunlariga jism harakatining o'ziga hos bo'lmagan murakkablikni kiritishi aniqdir. Masalan, vaqtning bir jinlimasligi (ya'ni, vaqtning ikkita momentlari  $t_1$  va  $t_2$  ekvivalent emasligi) shunga olib kelishi mumkinki, boshlang'ich paytda tinch turgan jism vaqt o'tishi bilan harakat qila boshlashi mumkin. Shu boisdan jismlarning mexanik harakatini **fazo bir jinsli va izotrop, vaqt bir jinsli** bo'lgan sistemada o'rganiladi. Bunday sistema **inersial sistema** deyiladi. Inersial sistemada jismga hech qanday tashqi kuch ta'sir qilmayotgan bo'lsa, uning harakat holati o'zgarmaydi. Harakat holati deganda  $v$  tezlik bilan harakat ko'zda tutiladi, shu jumladan,  $v = 0$  bo'lishi ham mumkin. Shu tasdig'imizni isbot qilaylik.

Buning uchun birinchi navbatda erkin jismning inersial sistemadagi Lagranj funksiyasini topish kerak. Bu Lagranj funksiyasi na vaqt  $t$  ga va na radius  $r$  ga bog'liq bo'lishi mumkin — vaqt va fazoning bir jinslili natijasida. Demak, tezlik  $v$  qolayapti. Ammo fazoning izotropligi (ya'ni, fazodagi yo'nalishlarning ekvivalentligi) shunga olib keladiki, Lagranj funksiyasi faqatgina  $v^2$  ning funksiyasi bo'lishi mumkin:

$$L = L(v^2). \quad (1.27)$$

Harakat tenglamalarini yozaylik:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}. \quad (1.28)$$



Bu tenglamaning o'ng tomoni nolga teng:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (1.29)$$

Tezlikning ta'rifi bo'yicha:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ , demak quyidagiga kelinadi:

$$\frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}} = \text{const} \quad (1.30)$$

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasi bo'yicha

$$\frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}^2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial \mathbf{v}} = 2 \frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}^2} \mathbf{v}. \quad (1.31)$$

Bu esa

$$\mathbf{v} = \text{const} \quad (1.32)$$

ekanligini ko'rsatadi. Olingan natija **Nyutonning birinchi qonuni** yoki, **inersiya qonuni** deyiladi. Demak, inersial sanoq sistemasida tashqi kuch ta'sirida bo'lmagan jism o'zgarmas tezlik bilan harakat qilar ekan.

Berilgan inersial sistemaga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan harakat qilayotgan boshqa sistema berilgan bo'lsin. Jism bu sistemaga nisbatan ham o'zgarmas tezlik bilan harakat qilayotgan bo'ladi, demak, bu yangi sistema ham inersial sistema ekan. Inersial sistemalarning soni cheksiz ko'p bo'lishi mumkin, ularning hammasi bir-biriga nisbatan qandaydir o'zgarmas tezlik bilan harakat qilayotgan bo'ladi.

Tajriba shuni ko'rsatadiki, mexanika qonunlari hamma inersial sistemalarda bir xil ko'rinishga ega. Buni quyidagicha tushunish mumkin: qo'zg'olmasdan turgan laboratoriya sistemasiga nisbatan o'zgarmas tezlik bilan harakat qilayotgan kemani olaylik (kema inersial sistema bo'lishi uchun yetarli darajada katta bo'lishi kerak, dengiz yoki daryo tinch bo'lishi kerak, shunda kema yetarli darajada inersial sistemaga yaqin bo'ladi). Shu kema hamda hamma oynalari yopiq bir xonada hech qanday mexanik tajriba orqali kema harakat qilayaptimi-yoqmi degan savolga javob bera olmaymiz – hamma tajribalar laboratoriya sistemasida qanday o'tsa, shunday o'tadi. Inersial sistemalarning mexanika qonunlari nuqtayi nazaridan teng huquqliligi haqidagi tasdiq **Galiley prinsipi** deyiladi. Inersial sistemalar teng huquqli deganimiz ularda mexanika qonunlari bir xil ko'rinishga ega bo'ladi deganimizdir. Mexanika qonunlari differensial tenglamalar orqali ifodalanadi, demak,

bu tenglamalarning koʻrinishi hamma inersial sistemalarda bir xil boʻlishi kerak. Bir sistemadan ikkinchi sistemaga oʻtish maʼlum bir almash-tirishlarni talab qiladi. Ularni topaylik.

Bizga ikkita sistema berilgan boʻlsin, ulardagi koordinatlarni  $\mathbf{r}$  va  $\mathbf{r}'$  deb belgilaylik, shtrixlangan sistema birinchi sistemaga nisbatan  $\mathbf{V}$  tezlik bilan harakat qilayotgan boʻlsin. Bu ikki sistemadagi koordinatlar

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t \quad (1.33)$$

koʻrinishda bogʻlangan boʻladi. Vaqt klassik mexanikada absolut xarakterga ega:

$$t' = t. \quad (1.34)$$

Bu — postulat,<sup>1</sup> klassik mexanikaning matematik apparati shu postulatga asoslangan.

Yuqoridagi formulalar, (1.33) va (1.34) *Galiley almashtirishlari* deyiladi. Inersial sanoq sistemalarning teng huquqligi mexanika qonunlarining mana shu almashtirishlarga nisbatan *kovariant* boʻlishi kerakligini bildiradi. Kovariant degani koʻrinishi oʻzgarmaydi degani yaʼni, tenglama  $(\mathbf{r}, t)$  oʻzgaruvchilarda qanday koʻrinishga ega boʻlsa,  $(\mathbf{r}', t)$  oʻzgaruvchilarda ham huddi shunday koʻrinishga ega boʻlishi kerak. Demak, Galiley prinsipi harakat qonunlariga kuchli talab qoʻyar ekan.

#### 1.4. Galiley invariantligi va erkin jismning Lagranj funksiyasi

Bir inersial sistemadan unga nisbatan  $\mathbf{V}$  oʻzgarmas tezlik bilan harakat qilayotgan ikkinchi sistemaga oʻtganda jismning koordinatlari va tezliklari quyidagi Galiley almashtirishlari orqali bogʻlanganligini bilamiz:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}. \quad (1.35)$$

Bitta jismning mana shu ikkila sistemalardagi Lagranj funksiyalari orasidagi farq

$$L(\mathbf{r}', \mathbf{v}') = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, \mathbf{V}) \quad (1.36)$$

<sup>1</sup> «Vaqt oʻz-oʻzicha, hech narsaga bogʻliq boʻlmagan holda oquvchi absolut abstraksiya» (Nyuton).

ko'rinishgagina ega bo'lishigina mumkin. Aks holda ikkala Lagranj funksiyalari har xil harakat tenglamalariga olib kelgan bo'lar, bu esa inersial sistemalarning teng huquqliligini buzadi (paragrafqa qarang). Bu yerdagi ixtiyoriy noma'lum funksiya  $f(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ , albatta,  $\mathbf{V}$  ga bog'liq bo'lishi kerak. Hattoki, kichik  $V$  uchun

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad (1.37)$$

bo'lishi kerak, chunki  $\mathbf{V} = 0$  bo'lganda ikkala Lagranj funksiyasi bir-biridan farq qilmasligi kerak. Oddiy yoyilma (tezlik  $\mathbf{V}$  ni kichik deb faraz qilaylik)

$$L(\mathbf{r} + \mathbf{V}t, \mathbf{v} + \mathbf{V}) = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + t\mathbf{V} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \quad (1.38)$$

dan kelib chiqadiki,

$$t\mathbf{V} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (1.39)$$

$\mathbf{V}$  ning ixtiyoriyligi va o'zgarishligini hamda harakat tenglamasini hisobga olinsa:

$$\frac{d}{dt} \left( t \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad (1.40)$$

kelib chiqadi. Endi fazoning bir jinsliligi hisobga olinsa:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.41)$$

Demak,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (1.42)$$

$\mathbf{f}$  funksiya faqat  $\mathbf{r}$  ning funksiyasi bo'lgani uchun undan  $\mathbf{r}$  bo'yicha hosila ham faqat  $\mathbf{r}$  ning funksiyasi bo'lishi mumkin. Ammo, (1.42) tenglikning chap tomoni  $\mathbf{r}$  ga umuman bog'liq bo'lmagani uchun uning o'ng tomoni ham  $\mathbf{r}$  ga bog'liq bo'lmaydi:

$$\frac{\partial f_i}{\partial r^j} = -m_{ij}, \quad (1.43)$$

biz bu yerda qulaylik uchun indeksli belgilashlarga o'tdik, ixtiyoriy tenglik uchun indekslar balansi bajarilishi bo'lishi, uning chap va o'ng tomonlaridagi ozod indekslar soni teng bo'lishi kerak. Paydo bo'lgan

$m_{ij}$  sonlar o'zining kelib chiqishi bo'yicha qandaydir o'zgarmas sonlardir. Natijada

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = -\sum_j m_{ij} v^j, \quad (1.44)$$

tenglikni olamiz. Ammo,  $L = L(v)^2$  ekanligi ham ma'lum, bu degani, haqiqatda

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = -m v^i \quad (1.45)$$

bo'lishi kerak degani, ya'ni  $m_i = m_j$  deb olishimiz kerak. Bu sodda ifoda oddiy integrallanadi:

$$L = \frac{m \mathbf{v}^2}{2}. \quad (1.46)$$

(Lagranj funksiyasidan konstantani hamma vaqt tashlab yuborish mumkin). Mulohazalarimiz davomida paydo bo'lgan o'zgarmas son  $m$  **jismning massasi** deyiladi. Yo'l-yo'lakay kichik tezlikli Galiley almashtirishlari uchun

$$f = -m \mathbf{r} \cdot \mathbf{V}$$

ekanligini ham topdik.

Lagranj funksiyasida paydo bo'lgan va jismning **massasi** deyilgan kattalik hamma vaqt musbat son bo'lishi kerak, aks holda erkin jism uchun eng qisqa ta'sir prinsipi bajarilmas edi

$$S = \frac{m}{2} \int \mathbf{v}^2 dt \quad (1.47)$$

ifoda  $m < 0$  bo'lganda hamma vaqt manfiy bo'lib tezliklar katta bo'lgan sari quyidan chegaralanmagan, va, demak, minimumga ega bo'la olmaydigan bo'lib qolar edi.

Lagranj funksiyasiga vaqt va koordinataning biror-bir funksiyasining vaqt bo'yicha to'liq hosilasini qo'shib, yangi Lagranj funksiyasiga o'taylik:

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t). \quad (1.48)$$

Bu holda ta'sir integrali faqatgina qandaydir aniq songa o'zagaradi:

$$S' = \int_{t_a}^{t_b} dt L' = S + f(q_b, t_b) - f(q_a, t_a). \quad (1.49)$$

$\delta S = 0$  va  $\delta S' = 0$  shartlar bir-biridan farq qilmagani uchun harakat tenglamalari ham o'zgarmaydi. Shu sababdan  $L'$  va  $L$  Lagranj funksiyalarini **ekvivalent Lagranj funksiyalari** deyiladi.

$f$  funksiya sifatida biror konstantaning vaqtga ko'paytmasini olsak:  $f = ct$  ikki ekvivalent Lagranj funksiyalari mana shu konstanta  $c$  ga faqr qiladi.

**1.4.1-misol.**  $L' = \dot{x} \sin t$  va  $L = -x \cos t$  Lagranj funksiyalari ekvivalentdir:

$$L' = \dot{x} \sin t = -x \cos t + \frac{d}{dt}(x \sin t). \quad (1.50)$$

Ikkala Lagranj funksiyasi uchun harakat tenglamalarini solishtiraylik:

$L = -x \cos t$  Lagranj funksiyasi uchun:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\cos t, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \quad (1.51)$$

$L' = \dot{x} \sin t$  Lagranj funksiyasi uchun:

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \sin t \Rightarrow \cos t = 0 \quad (1.52)$$

Harakat tenglamalari bir xil bo'ldi.

Lagranj funksiyasining yana bir umumiy xossasi bor uni ixtiyoriy o'zgarmas songa ko'paytirishimiz mumkin, harakat tenglamalari bunda o'zgarmaydi. Bu Eyer—Lagranj tenglamalaridan yaqqol ko'rinib turibdi.

## 1.5. Moddiy nuqtalar sistemasining Lagranj funksiyasi

Erkin zarrachalar sistemasidan boshlaylik. Bir necha erkin moddiy nuqtalar sistemasidagi har bir nuqtaning harakat tenglamasi boshqa nuqtalarning holatiga bog'liq bo'lishi mumkin emas. Bu degani, erkin moddiy nuqtalar sistemasining Lagranj funksiyasi additivlik xossasiga ega:

$$L = \sum_a L_a, \quad L_a = \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2}. \quad (1.53)$$

Tajriba shuni ko'rsatadiki, moddiy nuqtalar orasidagi o'zaro ta'sir shu moddiy nuqtalarning koordinatlariga bog'liq bo'lgan va **potensial energiya** deb atalgan  $U(r_1, r_2, \dots, r_n)$  funksiya orqali ifodalanadi. Bu

holda sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (1.54)$$

ko'rinishda olinishi kerak. Yig'indiga kirgan

$$T = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2} \quad (1.55)$$

ifoda sistemaning **kinetik energiyasi** deyiladi.

Harakat tenglamalarini olish uchun Lagranj hosilalari hisoblanadi:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = m\mathbf{v}_a = m\dot{\mathbf{r}}_a. \quad (1.56)$$

Demak, sistemaga kirgan  $a$ - zarrachaning harakat tenglamalari

$$m\ddot{\mathbf{r}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \quad (1.57)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. O'ng tomondagi vektor  $a$ - zarrachaga ta'sir qilayotgan **kuch** deyiladi:

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (1.58)$$

Dekart sistemasida harakat tenglamalari Nyuton tenglamalari ko'rinishini oldi:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{F}_a \quad (1.59)$$

Harakat tenglamasiga potensial energiyaning faqat hosilasi kirdi, demak, potensial energiya o'ziga ixtiyoriy konstantani qo'shib qo'yish-gacha aniqlikda aniqlangan. Bu avvalgi paragrafdagi ekvivalent Lagranj funksiyalarining muhokamasiga mos keladi.

Lagranj funksiyasi dekart koordinatlar sistemasida keltirib chiqarildi. Sistemaning Lagranj funksiyasini umumlashgan koordinatlar tiliga o'tkazib olish qiyin emas. Dekart va umumlashgan koordinatlarni bog'laydigan eng umumiy ifoda (nuqtalarning nomeri  $a$  yuqorida yozaylik):

$$\mathbf{r}_i^a = f_i^a(q_1, \dots, q_s), \quad \frac{d\mathbf{r}_i^a}{dt} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_i^a}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.60)$$

Shunga ko'ra

$$\frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a = \frac{1}{2} \sum_a m_a \sum_{i,j,k} \frac{\partial f_i^a}{\partial q_j} \frac{\partial f_i^a}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.61)$$

formula hosil bo'ladi. Agar

$$a_{jk} = \sum_a m_a \frac{\partial f_i^a}{\partial q_j} \frac{\partial f_i^a}{\partial q_k} \quad (1.62)$$

belgilash kiritilsa Lagranj funksiyasini

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_s) \quad (1.63)$$

ko'rinishga keltirib olinadi, bu yerda  $s$ -erkinlik darajalari soni. Ko'rinib turibdiki, umumiy holda kiritilgan koeffitsiyentlar umumlashgan koordinatlarning funksiyalari bo'ladi:

**1.5.1-misol.** Lagranj funksiyasini sferik va silindrik sistemalarda toping. Dekart sistemasida Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U(x_1, y_1, z_1, \dots) \quad (1.64)$$

ko'rinishga ega edi. Sferik sistemaga

$$x_a = r_a \sin \theta_a \cos \varphi_a, \quad y_a = r_a \sin \theta_a \sin \varphi_a, \quad z_a = r_a \cos \theta_a \quad (1.65)$$

formular bo'yicha o'tiladi. Hamma hosilalarni hisoblab

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\theta}_a^2 + r_a^2 \sin^2 \theta_a \dot{\varphi}_a^2) - U(r_1, \theta_1, \varphi_1, \dots) \quad (1.66)$$

formulaga kelamiz. Agar bitta moddiy nuqta haqida gap ketayotgan bo'lsa

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi) \quad (1.67)$$

ifoda shu nuqtaning sferik sistemadagi Lagranj funksiyasini beradi.

Silindrik sistemaga kelaylik. Bu holda

$$x_a = r_a \cos \varphi_a, \quad y_a = r_a \sin \varphi_a \quad (1.68)$$

formulalardan foydalanib

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U(r_1, \varphi_1, z_1, \dots) \quad (1.69)$$

ifodaga kelinadi. Bitta nuqtaning Lagranj funksiyasi esa

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \varphi, z) \quad (1.70)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Sistema ikki kichikroq sistemalardan iborat bo'lsin:  $A$  va  $B$ . Shu ikki sistemani bir-biridan uzoqlashtira borilsa ular orasidagi o'zaro ta'sir ham kamaya boradi va cheksiz limitda uni nolga teng deb qarash mumkin. Ya'ni, o'zaro ta'sir qilmayotgan qismlarga kirgan moddiy nuqtalar bir-biridan mustaqil bo'lgan harakat tenglamalariga ega bo'lishi kerak.

Bu degani  $L_A$  ga  $B$  ga taalluqli koordinatalar kirmaydi va aksincha. Buni sistemaning umumiy Lagranj funksiyasi ikki qism orasidagi cheksiz limitda

$$\lim L = L_A + L_B \quad (1.71)$$

xossaga ega bo'lishi kerak deb ifodalashi mumkin. Bunday xossa additivlik xossasi deyiladi. Avvalgi paragrafning oxirida aytib o'tilgan xossa Lagranj funksiyasining ixtiyoriy songa ko'paytirish mumkinligining additivlik xossasi nuqtayi nazaridan shuni bildiradiki, hamma ko'p sistemalarning Lagranj funksiyalarini bir vaqtda qandaydir bitta songa qaytarish mumkin. Topilgan xossa fizik kattaliklarning o'lchash birliklarini tanlashga tegishlidir — hamma zarrachalar uchun bir birliklar sistemasidan ikkinchisiga o'tilganida Lagranj funksiyasi ma'lum bir songa ko'payadi.

## 1.6. Bog'lanishlar bo'lgan holda Eyler—Lagranj tenglamalari

Avvalgi paragrafda ko'rilgan hol sistemada bog'lanishlar bo'limgandagi sodda vaziyatga mos keladi. Bog'lanishlar mavjud bo'lsa, harakat tenglamalari qay darajada o'zgarishi kerak?

Birinchi navbatda bog'lanishlarning klassifikatsiyasini keltiraylik.  $N$  ta zarrachali sistemani ko'raylik. Uning erkinlik darajalari soni  $3N$  ga tengdir. Shu sistemada  $k$  ta bog'lanishlar bo'lsin. Albatta,  $k < 3N$  bo'lishi kerak. Agar bog'lanishlarning ko'rinishi

$$f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.72)$$

bo'lsa, ya'ni, ularga tezliklar kirmasa, bunday bog'lanishlar **golonom bog'lanishlar** deyiladi.



**1.6.1-misol.** Sistema ikkita jismdan iborat bo'lsin va shu jismlar orasidagi masofa o'zgarmas va berilgan son  $l$  ga teng bo'lsin:

$$|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)| = l. \quad (1.73)$$

**1.6.2-misol.** Zarracha radiusi  $R$  – ga teng va markazi  $\mathbf{r}_0$  nuqtada joylashgan sferaning ustida harakatlanmoqda:

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2 = R^2. \quad (1.74)$$

Golonom bog'lanishlarga tezliklar bevosita kirmagan bo'lsa ham ular tezliklarni ham cheklaydi. Bunga ishonch hosil qilish uchun (1.72) ni vaqt bo'yicha differensiallaylik:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \dot{\mathbf{r}}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.75)$$

(1.72) bog'lanishlar tezlanishlarni ham bog'laydi, buni ko'rish uchun (1.75) tenglamani vaqt bo'yicha yana bir differensiallash kerak:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \ddot{\mathbf{r}}_j + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial r_k \partial r_j} \dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.76)$$

Ma'lumki, jismning tezlanishi va unga ta'sir qilayotgan kuch o'zaro proporsionaldir. Shu nuqtayi nazardan bog'lanishlar sistemaga kirgan qismlarning orasidagi qo'shimcha kuchlar sifatida ham qaralishi mumkin.

Vaqtga bog'liq bo'lmagan golonom bog'lanishlar **skleronom bog'lanishlar** deyiladi, vaqtga bog'liq bo'lganlarini esa **reonom bog'lanishlar** deyiladi.

Agar bog'lanishlarga tezliklar ham bevosita kirsa:

$$f_i(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.77)$$

va ularni integrallash yo'li bilan (1.72) ko'rinishga keltirish mumkin bo'lmasa bunday bog'lanishlar **nogolonom** yoki **integrallanuvchanmas bog'lanishlar** deyiladi.  $3N$  o'zgaruvchilar  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  ning  $k$  tasi harakat tenglamalaridan emas, yuqoridagi shartlardan topiladi. Bundan harakat tenglamalarining ham faqat  $3N - k$  tasining mustaqilligi kelib chiqadi.

Bog'lanishlar bilan qanday ishlash kerak? Birinchi fikr – ularni oshkora holda yechib koordinatalarning  $k$  tasini boshqa koordinatlar orqali ifodalab olish maqsadga muvofiq bo'lar edi. Ammo, nogolonom bog'lanishlar yechib bo'lmaydigan munosabatlar turiga kiradi. Golo-

nom bog‘lanishlarning ham ba‘zi-birlari bilan yechilmagan holda ishlash qulayroq bo‘lishi mumkin. Shuning uchun bog‘lanishlar paydo bo‘lganda Lagranj formalizmi shu bog‘lanishlarni hisobga olish uchun qanday o‘zgarishi kerak degan savolga javob beraylik.

Bog‘lanishlar bo‘lgan holda eng qisqa ta‘sir prinsipi quyidagi ko‘rinishga keltiriladi. Gologonom holdan boshlaylik va metodning mohiyatini avval sodda misolda ko‘rib chiqaylik.

Bizga  $f(x,y)$  funksiya berilgan bo‘lsin. Funksiyamizning biror nuqtada ekstremumi mavjud bo‘lishi uchun shu nuqtada

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (1.78)$$

bo‘lishi kerak.  $dx$  va  $dy$  lar mustaqil va ixtiyoriy bo‘lgani uchun bu nuqtada

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1.79)$$

bo‘lishi yetarli va zaruriydir. Endi funksiyaning ekstremumi quyidagi shart bajarilganda aniqlanishi kerak bo‘lsin:

$$g(x, y) = 0. \quad (1.80)$$

Bu degani  $dx$  va  $dy$  orttirmalar endi mustaqil emas balki

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0 \quad (1.81)$$

shartdan kelib chiqadigan

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial x} \quad (1.82)$$

munosabatga bo‘ysungan. Demak, ekstremum nuqtasida

$$\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x} = \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial x} \quad (1.83)$$

bo‘lishi kerak. Buni

$$\frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} = \frac{\partial f / \partial x}{\partial g / \partial x} = -\lambda \quad (1.84)$$

ko‘rinishida yozib olinadi, bu yerda  $\lambda$  noma‘lum konstanta. Lekin u faqat  $x, y$  o‘zgaruvchilarga nisbatan konstanta, agar masalada qandaydir

parametrlar bo'lsa noma'lum  $\lambda$  ularga bog'liq bo'lishi shubhasizdir. Konstanta paydo bo'lishining sababi shuki, bu tenglikning chap va o'ng tomonlari ikkita har xil funksiyalarning turli xil argumentlari bo'yicha xususiy hosilalarining nisbatlaridir,  $x, y$  argumentlarning ixtiyoriy qiymatlarida bu tenglik o'rinli bo'lishi uchun bu nisbatlar faqatgina o'zgarmas son bo'lishigina mumkin, uni  $(-\lambda)$  deb belgiladik.

Demak,  $f(x, y)$  ning  $g = 0$  shart bajarilgandagi ekstremumi (shartli ekstremumi)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (1.85)$$

tenglamalardan topilishi kerak ekan. Ammo bu formulalar  $f + \lambda g$  funksiyaning hech qanday shart yo'qligidagi oddiy ekstremumi uchun tenglamalarning o'zidir. Paydo bo'lgan kattalik  $\lambda$  **Lagranj ko'paytuvchisi** deyiladi. Bu ko'paytuvchini kiritib shartli ekstremum masalasini shartsiz ekstremum masalasiga o'tkazdik, ammo buning uchun masaladagi noma'lumlar sonini bittaga ko'paytirishga to'g'ri keldi, chunki  $\lambda$  yangi noma'lum, uni ham aniqlash kerak.

Masaladagi o'zgaruvchilar va tenglamalar soniga aniqlik kiritaylik. Uchta mustaqil o'zgaruvchi  $x, y, \lambda$  bor. Ularni aniqlash uchun uchta tenglama mavjud (1.85) ga kirgan ikkita tenglama va  $g = 0$  shart.

Shu soddami solni umumlashtirib quyidagi sxemaga kelamiz. Bizga (1.72) bog'lanish berilgan bo'lsin. Ularni umumlashgan koordinatlar ko'rinishida yozib olaylik:

$$f_j(q, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.86)$$

Bu bog'lanishlarni Lagranj ko'paytuvchilariga ko'paytirib undan integral olamiz:

$$\sum_{i=1}^k \int_{t_a}^{t_b} dt \lambda_i f_i(q, t) = 0. \quad (1.87)$$

Ta'sir variatsiyasining nolga tengligi shartini esa quyidagicha yozib olinadi:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} dt [L(\dot{q}, q, t) + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(q, t)] = 0. \quad (1.88)$$

Variatsion prinsipda ro'y bergan o'zgarish shundan iboratki, Lagranj funksiyasi o'zgardi:

$$L \rightarrow L' = L + \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(q, t), \quad (1.89)$$

ta'sir integrali ham o'zgardi:

$$S \rightarrow S' = \int dt L'. \quad (1.90)$$

Mana shu yangi ta'sirga eng qisqa ta'sir prinsipi qo'llanilsa yangi Eyer—Lagranj tenglamalari hosil bo'ladi:

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (1.91)$$

Bog'lanishlarning ko'rinishi (1.86) ekanligini hisobga olinsa, olingan tenglamalar avvalgi Eyer—Lagranj tenglamalaridan bitta qo'shimcha had bilan faqr qilishini ko'ramiz:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (1.92)$$

Harakat tenglamalari sistemasiga qo'shimcha tenglamalarni qo'shib qo'yish kerak:

$$f_j(q, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.93)$$

Shu yerda aslida  $\lambda_i = \lambda_i(t)$  bo'lishi mumkin ekanligini aytib o'tish kerak (buni quyida keltirilgan misollarda yana ko'rib o'tiladi). Yuqorida aytilgan ediki,  $\lambda_j$  masaladagi o'zgaruvchilar (bizning holimizda  $q_j$  lar) ga nisbatan mustaqil o'zgaruvchi, ammo masaladagi boshqa parametrlarga bog'liq bo'lishi mumkin. Variatsion prinsipda  $\lambda$  ham ishtirok etishi uchun uni umumiy holda vaqtga bog'liq deb hisoblash kerak.

(1.93) tenglamalar berilgan shartlardir, ammo ushbu yondoshishda ular go'yoki qo'shimcha tenglamalar rolini o'ynaydi. Ularni variatsion prinsipdan olish uchun ta'sir funksionalini  $\lambda_j$  larni yangi o'zgaruvchilar deb ular bo'yicha variatsiyalash kerak:

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda_j(t)} = 0 \Leftrightarrow f_j = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.94)$$

Harakat tenglamalari deganda (1.91) – (1.93) tenglamalar sistemasini ko'zda tutish kerak. Tenglamalar va noma'lumlar sonini solishti-

raylik. Avvalida  $3N - k$  ta mustaqil o'zgaruvchi bor edi:  $3N$  ta  $q_i$  lar  $k$  ta bog'lanishlarga bo'sungan. Yangi formalizmda  $3N + k$  ta mustaqil o'zgaruvchilar bor:  $3N$  ta  $q_i$  va  $k$  ta  $\lambda_j$ . Tenglamalar soni ham  $3N + k$  taga teng:  $3N$  ta (1.92) va  $k$  ta (1.93) tenglamalar.

Nogolonom bog'lanishlarga o'taylik. Ular bilan ishlash usuli yuqoridagidan farq qiladi. Odatda, nogolonom bog'lanishlarga tezliklar chiziqli holda kiradi:

$$f_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} \dot{q}_j + d_i = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.95)$$

Agar bu bog'lanishlarni  $\delta t$  ga ko'paytirilsa ular

$$\sum_{j=1}^k c_{ij} \delta q_j = 0 \quad (1.96)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Yaqqol ko'rinib turibdiki, koordinatalarimizning variatsiyalari  $\delta q_i$  mustaqil emas, ular yuqoridagi  $k$  ta munosabatga bo'sungan. Bu holda Lagranj ko'paytuvchilarini bevosita ta'sirning variatsiyasiga kiritamiz:

$$\delta S = \int dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j c_{ji} \right] \delta q_i = 0. \quad (1.97)$$

Natijada Eyler—Lagranj tenglamalari

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda_k c_{ki} \quad (1.98)$$

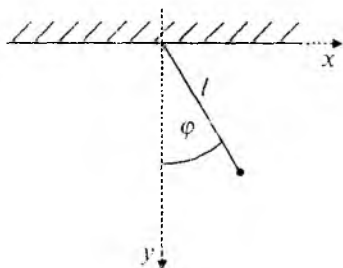
ko'rinishni oladi.

Birinchi qarashda golonom va nogolonom hollarda har xil tarzda yo'l tutganimizdek bo'lib ko'rinsa ham olingan harakat tenglamalari ikkala holda ham bir xil ko'rinishga ega bo'ladi. Haqiqatan ham, (1.72) golonom shartni (1.75) ko'rinishda yozib olinsa u nogolonom bo'lgan (1.95) shart ko'rinishini oladi, (1.75) dan (1.95) ga o'tish uchun

$$c_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$$

deb yozish kerak. Bu (1.92) bilan (1.98) ning bir-biriga mos ekanligini ko'rsatadi.

Harakat tenglamalari bir xil ko‘rinishga keltirilgan bo‘lishiga qarasma-sondan golonom va nogolonom shartlarning orasida boshqa farqlardan tashqari yana bitta katta farq bor – ikkala holda sistemaning erkinlik darajalari soniga har xil yondoshish kerak. Bu masala «Qattiq jism» bobida muhokama qilingan.



1.1- rasm. **Mayatnik.**

mustaqil erkinlik darajasi bitta, shu erkinlik darajasi sifatida, odatda, burchak  $\varphi$  olinadi. Haqiqatan ham,

$$x = l \cos \varphi, \quad y = l \sin \varphi \quad (1.100)$$

munosabatlar (1.99) bog‘lanishning yechimini beradi.

Harakat tenglamalarini tahlil qilaylik. Birinchidan Lagranj funksiyasini tuzaylik: sistemaning kinetik energiyasi

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (1.101)$$

Mayatnikning potensial energiyasi Yer tortishish kuchi bilan aniqlanadi, potensial energiyani  $y = l$  nuqtada nolga teng deb olinsa

$$U = mg(l - y) = mgl + U' \quad (1.102)$$

ifoda hosil bo‘ladi. Lagranj funksiyasiga kirgan o‘zgarmas sonni tashlab yuborish mumkin bo‘lgani uchun

$$L = T - U' = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy. \quad (1.103)$$

Agar (1.99) ning yechimi bo‘lgan (1.100) formulalarni bu Lagranj funksiyasiga qo‘yilsa bitta mustaqil o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan Lagranj funksiyasi topiladi:

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (1.104)$$

Shu yagona o'zgaruvchi tilida harakat tenglamalarini tuzish qiyin emas:

$$\frac{dL}{d\varphi} = -mgl \sin \varphi, \quad \frac{dL}{d\dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (1.105)$$

Endi umumiy metodga o'taylik. Umumiy metod bo'yicha Lagranj funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \lambda(l^2 - x^2 - y^2). \quad (1.106)$$

Noma'lumlar soni uchta  $\{x, y, \lambda\}$ . Har biriga to'g'ri keluvchi harakat tenglamalarini yozib chiqamiz:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= -2\lambda y + mg, \\ x^2 + y^2 &= l^2. \end{aligned} \quad (1.107)$$

$x$  va  $y$  uchun harakat tenglamalari olindi,  $\lambda$  uchun esa uning vaqt bo'yicha hosilasi kirgan tenglama yo'q, demak, bu o'zgaruvchi mustaqil dinamikaga ega bo'lgan o'zgaruvchi emas. Tenglamalar sistemasini yechishni uning uchinchisidan boshlash qulay:

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi.$$

Ularning ikkinchi tartibli hosilalari:

$$\ddot{x} = -l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + l\ddot{\varphi} \cos \varphi, \quad \ddot{y} = -l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - l\ddot{\varphi} \sin \varphi. \quad (1.109)$$

Bularni birinchi ikkita tenglamalarga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + 2\lambda l \sin \varphi &= 0; \\ ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - 2\lambda l \cos \varphi &= -mg. \end{aligned}$$

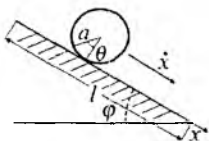
Ikkita noma'lum  $\varphi$ ,  $\lambda$  uchun ikkita tenglama qoldi. Ularning birinchisini  $\cos \varphi$  ga va ikkinchisini  $\sin \varphi$  ga ko'paytirib, qo'shilsa  $\varphi$  uchun tenglama hosil bo'ladi:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (1.111)$$

Hosil bo'lgan tenglama (1.105) ning aynan o'zidir. Lagranj ko'paytuvchisi  $\lambda$  ni ham topish oson:

$$\lambda = \frac{1}{2} m\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2l} mg \cos \varphi. \quad (1.112)$$

Ko'rinib turibdiki,  $\lambda$  mustaqil o'zgaruvchi emas, uning qiymati to'liq ravishda (1.111) ning yechimi  $\varphi(t)$  orqali aniqlanadi. Lagranj ko'paytuvchisi  $\lambda$  dinamik o'zgaruvchi bo'lmasa ham u qandaydir o'zgaruvchi, umumlashgan koordinatalarning biri. Uning mana shu xususiy misoldagi ma'nosi nimadan iborat? Oxirgi formuladan ko'rinib turibdiki  $2\lambda l$  mayatnikka ta'sir qilayotgan ikkita kuchning yig'indisiga teng: markazdan qochma kuch plus gravitatsiya kuchining ipga proyeksiyasi. Haqiqatan ham, (1.98) dan ko'rinib turibdiki,  $\Sigma \lambda c$  had bog'lanish orqali paydo bo'lgan kuch ma'nosiga ega bo'lishi kerak.



1.2- rasm. Qiyalik bo'yicha tushayotgan silindr.

**1.6.4.-misol.** Yer bilan  $\varphi$  burchak hosil qilgan qiyalik bo'yicha harakat qilayotgan  $a$  radiusli silindr masalasini qarab chiqaylik.

Masalada ikkita umumlashgan koordinata bor

$q^1 = x, q^2 = \theta$ . Silindrimiz sirpanmasdan tushayapti demog'chi bo'lsak uning harakatini

$$a\dot{\theta} = \dot{x} \quad (1.113)$$

shartga bo'ysundirish kerak. Bu shart silindrning tekislikka tegib turgan nuqtasining ilgarilanma harakat tezligi uning aylanma harakat tezligiga tengligini bildiradi.

Ya'ni, bu shart ishqalanish kuchi borligini hisobga olishga tengdir. Shart o'z ko'rinishi bo'yicha nogolonom bo'lishiga qaramay uni integrallab tezliklar kirmaydigan, faqat umumlashgan koordinatlarga bog'liq bo'lgan shaklga keltirishi mumkin:

$$d(a\theta - x) = 0 \rightarrow a\theta - x = \text{const.} \quad (1.114)$$

Silindrning kinetik energiyasi ikki qismdan iborat:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m k^2 \dot{\theta}^2. \quad (1.115)$$

Birinchi had ilgarilanma harakat kinetik energiyasi, ikkinchi had aylanma harakat kinetik energiyasi («Qattiq jism» bobiga qarang). Ikkinchi haddagi koeffitsiyent silindrning inersiya momenti bilan aniqlanadi, uning aniq ta'rifi hozir zarur emas. Potensial energiyani

$$U = mg(l - x)\sin\varphi \quad (1.116)$$

ko'rinishda olamiz Bunda  $l$  - qiyalikning uzunligi,  $mg l \sin \varphi$  - silindrning harakat boshidagi potensial energiyasi. Albatta,  $mg l \sin \varphi$  o'zgarmas hadni tashlab yuborish mumkin, u harakat tenglamalariga ta'sir qilmaydi, ammo uni potensialining fizik ma'nosini yoritishga xizmat qilgani uchun qoldiramiz. Demak, Lagranj funksiyasi



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m k^2 \dot{\theta}^2 - mg(l-x) \sin \varphi. \quad (1.117)$$

Harakat tenglamalariga o'taylik. Bu hol shunday holki, golonom va nogolonom hollardagi metodlarning ikkalasini ham qo'llashi mumkin, chunki bog'lanishni ikkala ko'rinishda yozib olindi – (1.113) va (1.114) formulalar. Agar golonom holidagi metoddan foydalanilsa, Lagranj ko'paytuvchisini bevosita Lagranj funksiyasiga kiritiladi:

$$L' = L + \lambda(a\theta - x - c_1), \quad (1.118)$$

bunda  $c_1$  ixtiyoriy konstanta. Uchta o'zgaruvchi bor  $x$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ . Mana shu umumlashgan koordinatlar bo'yicha harakat tenglamalari yozib olinadi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \varphi - \lambda; \\ mk^2\ddot{\theta} &= a\lambda; \\ a\theta - x &= c_1. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Oxirgi tenglamani  $a\ddot{\theta} = \ddot{x}$  ko'rinishga keltirib olib, oddiy hisob yordamida

$$\lambda = \frac{mk^2 g}{a^2 + k^2} \sin \varphi \quad (1.120)$$

va

$$\ddot{x} = \frac{a^2 g}{a^2 + k^2} \sin \varphi \quad (1.121)$$

ekanligini topamiz.  $\lambda$  ning ma'nosini –  $F = \partial L' / \partial x = mg \sin \varphi - \lambda$  formuladan olish mumkin.  $F$  umumlashgan kuch, u ikki qismdan iborat: birinchisi tortish kuchi, ikkinchisi ishqalanish kuchi.

Demak, qiyalik bo'yicha aylanib tushayotgan silindrga ta'sir qilayotgan ishqalanish kuchini topdik.

Silindrning tezlanishiga kelaylik. Agar qiyalikni absolut tekis ya'ni, masalada hech qanday ishqalanish yo'q deb olsak, (1.113) shart paydo bo'lmas edi, silindr aylanib tushishi kerak ham bo'lmas edi. Ya'ni, kinetik energiya hadida  $\dot{\theta}$  ga bog'liqlik ham paydo bo'lmas edi. Bu holda (1.120) va (1.121) tenglamalarda  $k = 0$  deb olish kerak (bu bilan silindrning aylanma harakatini chiqarib tashlaymiz).

Ko'rinish turibdiki, ishqalanishning mavjudligi silindrning tezlanishini kamaytiradi.

Harakat tenglamalarini integrallash qiyin emas. Qiyalikning uchida turgan silindrning boshlang'ich tezligini nol deb quyidagi topiladi:

$$x = \frac{1}{2} \frac{a^2 g t^2}{a^2 + k^2} \sin \varphi + l \sin \varphi. \quad (1.122)$$

Bu formuladan silindrning qiyalikning oxirigacha yetib borishi uchun qancha vaqt kerak degan savolga javob topish qiyin emas, buning uchun  $x(t_0) = l$  tenglamani yechish kerak xolos.

Shart boshida nogolonom (1.113) ko'rinishga ega edi. Mashq sifatida shu masalani nogolonom shartga mos keluvchi ikkinchi metod (1.98) yordamida yechaylik. Buning uchun (1.113) shartni (1.95) va (1.96) ko'ri-nihslarga keltirib olinadi:

$$-\dot{x} + a\dot{\theta} = \sum c_k \dot{q}_k = 0. \quad (1.123)$$

Shartning soni bittaligidan foydalanib  $c_{ik} \rightarrow c_k$  ekanligiga o'tildi. Yuqori-dagidan topamizki  $c_1 = -1, c_2 = a$ . Harakat tenglamalarini (1.98) orqali yozib olinsa yana o'sha (1.119) formulalarga kelinadi, faqat oxirgi tenglama sifatida  $a\dot{\theta} = \dot{x}$  tenglamani qo'llash kerak.

Masalani birinchi metod bilan yechilganda  $a\dot{\theta} = \dot{x}$  munosabatning o'zidangina foydalanilgan edi, shu sababdan ikkinchi metod ham huddi o'sha yechimni beradi.

### ***1-bobga mashq va savollar***

1. *Erkinlik darajalasi nima?*
2. *Qanday sistema inersial sistema deyiladi?*
3. *Berilgan Lagranj funksiyalari uchun harakat tenglamalarini toping:*

$$\text{a) } L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q^2; \quad \text{b) } L = \frac{1}{2} t \dot{q}^2; \quad \text{c) } L = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - \cos \theta.$$

4. *Quyidagi Lagranj funksiyalariga mos keluvchi harakat tenglamalarini toping:*

$$\text{a) } L = \frac{m l^2}{2} (\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi} \dot{\theta}) + 3l \cos \varphi; \quad \text{b) } L = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{k x^2}{2};$$

$$\text{c) } L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + A(x) \dot{x} - \varphi(x); \quad \text{d) } L = \dot{x}^2 - (e^x - 1)^2.$$

5. *Quyidagi Lagranj funksiyasi bilan xarakterlanuvchi sistemalarning tezlanishlarini toping:*

$$\text{a) } L = -\sqrt{1-\dot{q}^2} + q; \quad \text{b) } L = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2};$$

$$\text{c) } L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}).$$

6. To'liq hosilani tashlab yuborish yo'li bilan ekvivalent Lagranj funksiyasini tuzing:

$$\text{a) } L' = \frac{1}{2}(\dot{q} + t)^2; \quad \text{b) } L' = \frac{1}{2}(\dot{q} + q)^2; \quad \text{c) } L' = x\dot{y} - y\dot{x};$$

$$\text{d) } L' = t\dot{x}\dot{x}; \quad \text{e) } L' = \dot{\phi} \cos t; \quad \text{f) } L' = \frac{m}{2}(2a\dot{x}t + a^2t^2).$$

7.  $L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$  almashtirish natijasida Eylér--Lagranj tenglamalarining o'zgarishligini ko'rsating.

8. Galiley almashtirishlari  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t$  bajarilganida erkin zarraning Lagranj funksiyasi ekvivalent ko'rinishga o'tishini ko'rsating.

9. Dekart koordinatlari bilan quyidagicha bog'lanishda bo'lgan koordinatlarda moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasini tuzing:

$$\text{a) } x = R(\varphi + \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi);$$

$$\text{b) } x = \varphi + \theta, \quad y = \frac{\varphi}{\theta};$$

$$\text{c) } x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

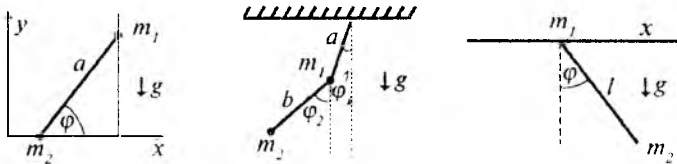
10.  $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2}$  Lagranj funksiyasiga mos keluvchi ta'sir  $S = \int L dt$  uchun

$$x = q \operatorname{ch} \lambda + \tau \operatorname{sh} \lambda, \quad t = q \operatorname{sh} \lambda + \tau \operatorname{ch} \lambda$$

almashtirish bajarilganda  $S = \int L(\dot{x}) dt = \int L(\dot{q}) d\tau$  bo'lishini ko'rsating ( $\lambda -$  o'zgarma,  $\dot{q} = dq/d\tau$ ).

11. Bir jinsli og'irlik maydonida joylashgan gorizontal chiziqda harakatlanuvchi  $m_1$  va vertikal chiziqda harakatlanuvchi  $m_2$  zarralarning Lagranj funksiyasini tuzing.

Ularning orasidagi masofa o'zgarma va  $a$  ga teng (1.3-rasmning birinchisiga qarang).



1.3- rasm. 11-, 12- va 13- mashqlarga oid.

12. 1.3-rasmning o'rtasida ko'rsatilgan tekis mayatnik uchun Lagranj funksiyasini tuzing.

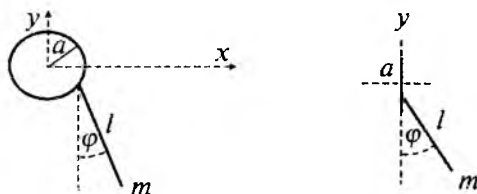
13. 1.3-rasmning o'ngida ko'rsatilgan mayatnik uchun Lagranj funksiyasini toping.  $m_1$  nuqta  $x$  o'qi bo'yicha ixtiyoriy harakat qiladi.

14. Massasi  $m$  va uzunligi  $l$  bo'lgan mayatnikning osish nuqtasi

a) vertikal tekislikda  $a$  radiusli aylana bo'yicha o'zgarmas  $\gamma$  burchak tezligi bilan harakatlanmoqda;

b)  $y$  o'qi bo'yicha  $a \cos \gamma t$  qonun bo'yicha harakat qilmoqda.

Shu sistemalarning Lagranj funksiyalarini toping.



1.4- rasm. 14- mashqga oid.

15. O'zaro ta'sir energiyasi  $U = k\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$  bo'lgan ikki zarradan iborat mexanik sistemaning Lagranj funksiyasini tuzing, harakat tenglamalari hamda  $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)$  larni toping.

## 2-bob. HARAKAT INTEGRALLARI

---

Harakat jarayonida sistemaga kirgan moddiy nuqtalarning holati o'zgaradi, shunga ko'ra, ularning umumlashgan koordinatalari  $q_i$  va tezliklari  $\dot{q}_i$  ham o'zgarib boradi. Ammo shu kattaliklardan tuzilgan va fizik jarayon davomida o'z qiymatini o'zgartirmaydigan kattaliklar ham mavjud, ular **saqlanuvchan kattaliklar** deyiladi.

Matematik ta'rifdan boshlaylik. Ta'rif bo'yicha

$$f(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) = C_1 \quad (2.1)$$

funksiya

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (2.2)$$

differensial tenglamalar sistemasining **birinchi integrali** yoki **harakat integrali** deyiladi qachonki  $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  larning o'rniga (2.2) tenglamalarning yechimini qo'yganimizda  $f$  funksiyamiz o'zgar-mas songa aylansa. Uning son qiymati masalaning boshlang'ich shartlariga bog'liq bo'ladi. Harakat integrallari saqlanuvchi kattalikning yana bir boshqa nomlanishidir. (2.2) tenglamalarning birinchi integral-larining soni bir nechta bo'lishi mumkin.

Umumiy holda  $s$  erkinlik darajali sistema  $2s - 1$  ta harakat integraliga ega bo'ladi.

Saqlanuvchan kattaliklar fizikada markaziy rollardan birini o'ynaydi. Saqlanuvchan kattaliklarning hammasi ham teng ma'noga ega emas. Masalan, bir nechta saqlanuvchan kattalikdan tuzilgan ixtiyoriy funksiya yana saqlanuvchan kattalik bo'ladi, ammo uning mustaqil ahamiyati katta bo'lmaydi.

Biror bir kattalikning sistema uchun qiymati shu sistemaga kirgan qismlar uchun qiymatlarning yig'indisiga teng bo'lsa, bu kattalik **additiv** kattalik deyiladi. Saqlanuvchi kattaliklar ichida additivlik xossasiga ega bo'lganlari ayniqsa katta ahamiyatga egadir. Biz shu bo'limda

ko'rib chiqadigan saqlanuvchi kattaliklar bir tomondan fundamental xarakterga ega – ularning kelib chiqishi fazo va vaqtning fundamental xossalari bog'liq – ikkinchi tomondan ular additivlik xossasiga ega. Saqlanuvchan kattaliklar fizik jarayonlar haqida muhim ma'lumot beradi va ko'pgina hollarda masalani to'liq yechishga birdan-bir imkoniyat beradi.

## 2.1. Energiyaning saqlanish qonuni

Vaqtning bir jinsliligining natijasi bo'lgan saqlanuvchi kattalik keltirib chiqaraylik. Bu holda Lagranj funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lmaydi, ya'ni,  $L = L(\dot{q}, q)$  bo'ladi. Vaqtga bog'liqlik Lagranj funksiyasiga faqat koordinatalar  $q_i(t)$  orqaligina kiradi. Shuni hisobga olib, Lagranj funksiyasining vaqt bo'yicha to'liq hosilasini topaylik:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L &= \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^s \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=1}^s \left( \frac{d}{dt} \dot{q}_j \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bu formulaning o'ng tomoni chap tomoniga o'tkazilsa

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) = 0 \quad (2.4)$$

formula hosil bo'ladi. Qavs ichidagi kattalik **energiya** deyiladi:

$$E = \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L. \quad (2.5)$$

U vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydigan, saqlanuvchi kattalik ekan. Olingan (2.4) munosabat **energiyaning saqlanish qonuni** deyiladi.

Energiya saqlanish qonuni fizikadagi eng muhim tushunchalardan biri ekanligini hisobga olib uni yana bir yo'l bilan keltirib chiqaraylik. Eyler – Lagranj tenglamalari (2.2) ni  $\ddot{q}_j$  ga ko'paytirib quyidagi holga keltiriladi:

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left( L - \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, agar  $L$  vaqtga oshkora bog'liq bo'lmasa  $L = L(\dot{q}, q)$  energiya harakat tenglamalarining birinchi integrali, ya'ni saqlanuvchan kattalik bo'lar ekan.

Energiyaning son qiymatiga kelganimizda u (2.5) ga kirgan trayektoriya va tezlikning boshlang'ich qiymatlari orqali aniqlanadi. Energiyasi saqlanuvchi sistemalar **konservativ sistemalar** deyiladi. Ular qatoriga yopiq sistemalar kiradi. Agar sistema vaqtga bog'liq bo'lmagan tashqi maydonda harakat qilayotgan bo'lsa bu holda ham uning Lagranj funksiyasi vaqtga bog'liq bo'lmaydi, vaqt yana bir jinslidir, energiya saqlanadi.

**2.1.1-misol.** Energiya harakat tenglamasining birinchi integrali ekanligini isbot qiling.

**Isbot:**

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.7)$$

tenglamaning ikki tomonini  $\dot{\mathbf{r}}$  ga skalar ko'paytiramiz:

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.8)$$

Bu tenglikning chap tomoni

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}^2) \quad (2.9)$$

ga teng, o'ng tomondagi  $U = U(\mathbf{r}(t))$  funksiya uchun

$$\frac{d}{dt} U(\mathbf{r}(t)) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.10)$$

ekanligidan foydalanib

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad (2.11)$$

formulaga kelamiz. Qavs ichidagi ifoda kinetik va potensial energiyalarning yig'indisi – to'liq energiyadir.

## 2.2. Impulsning saqlanish qonuni

Fazoning bir jinsliligidan kelib chiqadigan saqlanish qonunini keltirib chiqaraylik. Ko'rib chiqishni Dekart koordinat sistemasidan boshlaylik. Fazoning bir jinsliligi shuni bildiradiki, sistemani butunligicha (uni buramasdan ya'ni, o'ziga parallel qilib) bir nuqtadan ikkinchisiga ko'chirilsa sistemaning holati o'zgarmaydi. Bundan uning Lagranj funksiyasi ham o'zgarmaydi degan ma'no kelib chiqadi. Sistemaning o'ziga parallel ko'chirishni  $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$  ko'rinishda ifodalash mumkin. Bizning maqsadimizga cheksiz kichik ko'chirish yetarli bo'lgani uchun  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ni cheksiz kichik o'zgarma vektor deb qaraymiz. Sistemaga kirgan hech bir nuqtaning tezligi o'zgarmaydi:  $\dot{\mathbf{r}}_a = \dot{\mathbf{r}}'_a$ . Lagranj funksiyasining o'zgarmaslik sharti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$L(\dot{\mathbf{r}}_a, \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}) - L(\dot{\mathbf{r}}_a, \mathbf{r}_a) = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0 \quad (2.12)$$

Ko'chirish vektori  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0 \quad (2.13)$$

ekanligiga kelamiz. Bu formulani esa harakat tenglamalari yordamida

$$\frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = 0 \quad (2.14)$$

ko'rinishga keltiramiz. Yig'indiga kirgan

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} = m_a \mathbf{v}_a \quad (2.15)$$

kattalik  $a$  – nuqtaning *impulsi* deyiladi,

$$\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a} \quad (2.16)$$

esa sistemaning *to'liq impuls* deyiladi. (2.14) formula esa sistemaning to'liq impuls saqlanuvchan kattalik ekanligini ko'rsatadi.

Umumlashgan koordinatalar sxemasida o'tsak, Lagranj funksiyasining umumlashgan tezliklar bo'yicha hosilasi

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.17)$$



*umumlashgan impuls* deyiladi. Harakat tenglamalari ularning tilida

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.18)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Agar Lagranj funksiyasi biror  $q_i$  ga bog'liq bo'lmasa uni *siklik koordinata* deyiladi. Ko'rinib turibdiki, mana shu siklik koordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls  $p_i$  uchun tenglama  $\dot{p}_i = 0$  ko'rinishga ega bo'ladi, bundan umumlashgan impuls  $p_i$  saqlanuvchan kattalik bo'ladi degan ma'no kelib chiqadi.

### 2.3. Inersiya markazi

Bizga massalari  $m_1, m_2, \dots, m_n$  bo'lgan  $n$  ta moddiy nuqtadan iborat yopiq sistema berilgan bo'lsin. Shu sistema uchun masofa o'lchamligiga ega bo'lgan quyidagi kattalikni tuzaylik:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a} \quad (2.19)$$

Undan vaqt bo'yicha hosilani  $\mathbf{V}$  deb belgilaylik:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \frac{\sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a}{\sum_a m_a} \quad (2.20)$$

Mahrajdagi sistemaning to'liq massasini  $M$  deb belgilansa, olingan formuladan quyidagi formula hosil bo'ladi:

$$M\mathbf{V} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a \mathbf{p}_a \quad (2.21)$$

Impuls – additiv kattalik, sistemaga kirgan nuqtalarning impulslarining yig'indisi sistemaning to'liq impulsiga teng:

$$\sum_a \mathbf{p}_a = \mathbf{P}, \quad (2.22)$$

yoki

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}. \quad (2.23)$$

Demak, sistemaga massasi  $M$ , tezligi  $\mathbf{V}$  va radius-vektori  $\mathbf{R}$  bo'lgan bitta moddiy nuqtadek qarashimiz mumkin ekan. (2.19) formula orqali

kiritilgan radius-vektor sistemaning *inersiya markazi* deyiladi.  $\mathbf{V}$  tezlik esa jismning bir-butunligicha ilgariharakat tezligi bo'ladi.

Ikkita  $K$  va  $K'$  sanoq sistemani kiritaylik, ularning ikkinchisi birin- chisiga nisbatan o'zgaras  $\mathbf{V}_0$  tezlik bilan harakat qilayotgan bo'lsin. Bu holda har bir nuqtaning  $K$  va  $K'$  sistemalardagi radius-vektorlari

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{V}_0 t \quad (2.24)$$

munosabat orqali bog'langan bo'ladi. Inersiya markazlari, sistemaning bir butunligicha tezliklari va impulslari uchun esa quyidagilarga egamiz:

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{R}'_a + \mathbf{V}_0 t, \quad \mathbf{V}_a = \mathbf{V}' + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}' + M\mathbf{V}_0. \quad (2.25)$$

$K'$  sistemada  $\mathbf{v}' = 0$  bo'lsin. Bu degani,  $K'$  da sistema bir butunligicha qo'zg'olmasdan turibdi, uning to'liq impulsi ham nolga teng. Bunday sanoq sistemasi *inersiya markazi sistemas* deyiladi. Bu holda sistema bir butunligicha  $K$  ga nisbatan o'zgaras  $\mathbf{V}_0$  tezlik (va, demak, o'zgaras impuls  $\mathbf{P}$ ) bilan harakat qilayotgan bo'ladi.

Uzliksiz taqsimlangan hajmi  $V$  va zichligi  $\rho(\mathbf{r})$  bo'lgan sistema uchun inersiya markazi quyidagicha ifodalanadi:

$$\mathbf{R} = \frac{\int_V d^3 r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}}{\int_V d^3 r \rho(\mathbf{r})}. \quad (2.26)$$

Bir butunligicha qo'zg'olmasdan turgan sistemaning energiyasi unga kirgan zarrachalarning ichki harakat kinetik energiyasi va o'zaro ta'sir potensial energiyasidan tashkil topgan. U sistemaning ichki energiyasi deyiladi. Inersiya markazi sistemasida sistemaning energiyasi uning ichki energiyasiga teng.  $K$  va  $K'$  sanoq sistemalarida energiyalarni bog'laylik:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \mathbf{v}_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V}_0)^2 + U = \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \mathbf{v}'_a{}^2 + \sum_a m_a \mathbf{v}'_a \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_0^2 + U = \\ &= E' + \mathbf{P}' \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_0^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Inersiya markazi sistemasida  $\mathbf{P}' = 0$  va  $E' = E_{\text{ichki}}$ . Demak,

$$E = E_{\text{ichki}} + \frac{1}{2} M V_0^2.$$

Bu formulani oldindan ham yozib olishimiz mumkin edi: harakatdagi sistemaning to'liq energiyasi uning butunligicha ilgarilanma harakat kinetik energiyasi bilan ichki energiyasidan tuzilgan bo'lishi kerak.

**2.3.1-misol.** Massalari bir xil bo'lgan  $n$  ta nuqtalardan tuzilgan yopiq sistemaning inersiya markazini toping.

**Javob:**

$$\mathbf{R} = \frac{1}{n} \sum_{a=1}^n \mathbf{r}_a. \quad (2.28)$$

**2.3.2-misol.** Zichligi bir uchidan hisoblanganda  $\alpha x^k$  qonun bo'yicha o'zgaradigan va uzunligi  $L$  ga teng sim berilgan bo'lsin. Uning inersiya markazini toping.

**Javob:**

$$R = \frac{\int_0^L dx \alpha x^{k+1}}{\int_0^L dx \alpha x^k} = \frac{k+1}{k+2} L. \quad (2.29)$$

**2.3.3-misol.**  $R$  radiusli bir jinsli aylananing choragi ko'rinishiga ega bo'lgan ingichka plastinaning inersiya markazini toping (koordinat boshi — aylananing markazida).

**Javob:** Inersiya markazining  $x$  — koordinatasi:

$$R_x = \frac{\int_0^R dr r^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi}{\int_0^R dr r \int_0^{\pi/2} d\varphi} = \frac{4R}{3\pi}. \quad (2.30)$$

$y$  — koordinata ham huddi shunday qiymatga ega:  $R_y = \frac{4R}{3\pi}$ .

**2.3.4-misol.**  $R$  radiusli sharning yuqori pallasining inersiya markazini toping. Shar zichligi markazdan masofaning  $k$ -darajasiga proporsional bo'lsin.

Koordinata markazini sharning markaziga qo'yilsa masalaning simmetriyasidan  $R_x = R_y = 0$  ekanligi kelib chiqadi.  $R_z$  quyidagiga teng:

$$R_z = \frac{\int_0^R dr r^{k+3} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^R dr r^{k+2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{k+3}{k+4} R. \quad (2.31)$$

Bir jinsli ( $k = 0$ ) yarimshar uchun  $R_z = \frac{3R}{8}$ .

## 2.4. Harakat miqdori momentining saqlanish qonuni

Fazoning izotropligi bilan bog'liq bo'lgan saqlanuvchan kattalikni keltirib chiqaraylik. Fazoning izotropligi shuni bildiradiki, sistema bir butunligicha biror burchakka burilsa uning xossalari o'zgarmaydi. Shunga ko'ra, sistemaning Lagranj funksiyasi ham o'zgarmasligi kerak.

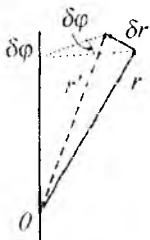
Buralish burchagini o'zgarmas va cheksiz kichik deb qaraymiz. Buralish qandaydir bir yo'nalish — o'q atrofida roy berishi kerak, demak unga vektor kattalik mos kelishi kerak. Shu boisdan  $\delta\varphi$  buralish vektori deganda son qiymati buralish burchagi  $|\delta\varphi|$  ga va yo'nalishi buralish o'qiga mos keluvchi vektorni ko'zda tutamiz.

Vektorlar algebrasining qoidalari bo'yicha ixtiyoriy nuqtaning  $\mathbf{r}_a$  radius-vektori  $\delta\varphi$  burchakka burilganda quyidagicha o'zgaradi:

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \delta\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a + [\delta\varphi \mathbf{r}_a]. \quad (2.32)$$

Shunga ko'ra tezlik uchun ham

$$\mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_a + \delta\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a + [\delta\varphi \mathbf{v}_a]. \quad (2.33)$$



2.1- rasm.  
Buralish  
burchagi.

ga ega bo'lamiz. Buni yoki avvalgi formuladan vaqt bo'yicha hosila olib, yoki vektorlar algebrasi qoidalarini bevosita tezlik vektori  $\mathbf{v}_a$  ga qo'llab olish mumkin. Demak, sistemani butunligicha kichik  $\delta\varphi$  burchakka burdik, bunda sistemaga kirgan har bir moddiy nuqtaning radius-vektori va tezlik vektori yuqoridagi qoidalar bo'yicha o'zgardi. Ammo sistemaning Lagranj funksiyasining o'zgarishi nolga teng bo'lsin:

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta \mathbf{v}_a \right) = \\ &= \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} [\delta \varphi \mathbf{r}_a] + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} [\delta \varphi \mathbf{v}_a] \right) = 0.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Harakat tenglamalaridan va uch vektorlarning aralash ko'paytmasi qoidasidan foydalanib, bu tenglik qulay ko'rinishga keltiriladi:

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_a \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} [\delta \varphi \mathbf{r}_a] + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \left[ \delta \varphi \frac{d}{dt} \mathbf{r}_a \right] \right) = \\ &= \delta \varphi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a \left[ \mathbf{r}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right] = \delta \varphi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Kichik burchak  $\delta \varphi$  ixtiyoriy bo'lgani uchun nolga vaqt bo'yicha hosilali ko'paytuvchini tenglashtirish kerak:

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0.\quad (2.36)$$

Yig'indiga kirgan kattalikni *impuls* (yoki, *harakat miqdori*) *momenti* deb ataladi:

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a].\quad (2.37)$$

Olingan (2.36) formula esa *fazoning izotropligidan kelib chiqadigan impuls momentining saqlanish qonunini* bildiradi. Impuls momenti vektor kattalik bo'lgani uchun uning to'liq saqlanishi uchta saqlanish qonunini beradi —  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Lekin hamma vaqt ham fazo to'liq izotrop bo'lavermaydi. Tashqi maydon umuman olganda izotporlikni buzadi. Ammo ba'zi bir hollarda tashqi maydon ma'lum bir yo'nalish bo'yicha izotroplikni saqlab qoladi. Bu holda impuls momentining shu yo'nalish bo'yicha komponentasi saqlanuvchan bo'ladi. Masalan, markaziy maydonni olaylik. Markaziy maydonda jismga ta'sir qilayotgan kuch faqat markazgacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'ladi. Bu holda sistemaning xossalari markazdan chiqqan ixtiyoriy o'q atrofida aylanganda o'zgarmaydi. Shunga ko'ra, momentning markazdan chiqqan ixtiyoriy o'qqa proyeksiyasi saqlanuvchan kattalik bo'ladi. Buni (2.35) dan ko'rish mumkin. Ixtiyoriy shunday bir o'qni olib, uni  $z$  o'qi deb

belgilaylik. Bu holda buralish burchagi  $\delta\varphi = \{0, 0, \delta\varphi_z\}$  ko'rinishga ega bo'ladi. Shunga ko'ra (2.35) dagi skalar ko'paytma

$$\delta\varphi_z \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a]_z = 0 \quad (2.38)$$

ko'rinishni oladi. Bu degani esa, bu holda saqlanuvchan kattalik  $M_z$  ekanligini bildiradi. Markaziy maydonda  $z$  o'qi sifatida ixtiyoriy o'qni olish mumkin.

**2.4.1-misol.**  $\{M_x, M_y, M_z\}$  larni silindrik koordinatlar orqali ifodalang.

Dekart  $(x, y, z)$  va silindrik  $(r, \varphi, z)$  koordinatlar quyidagicha bog'langan:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (2.39)$$

$M_x$  ni topaylik:

$$\begin{aligned} M_x &= yp_z - zp_y = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = m(r \sin \varphi \dot{z} - z\dot{r} \sin \varphi - zr \cos \varphi \dot{\varphi}) = \\ &= m \sin \varphi (r\dot{z} - z\dot{r}) - m zr \cos \varphi \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Huddi shu yo'sinda boshqa komponentalar ham topiladi:

$$\begin{aligned} M_y &= zp_x - xp_z = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = m \cos \varphi (z\dot{r} - r\dot{z}) - m zr \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ M_z &= xp_y - yp_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$= m[r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi + r\dot{\varphi} \sin \varphi)] = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (2.42)$$

Bu misoldan bir foydali munosabat keltirib chiqarishi mumkin. Agar moddiy nuqtaning silindrik sistemadagi Lagranj funksiyasini

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \varphi, z) \quad (2.43)$$

yuqorida topilgan  $M_z$  bilan taqqoslansa

$$M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad (2.44)$$

ekanligi topiladi. Demak, umumlashgan  $\varphi$  koordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls  $M_z$  ga teng bo'lar ekan:  $p_\varphi = M_z$ .

**2.4.2-misol.**  $\{M_x, M_y, M_z\}$  larni sferik koordinatlar orqali ifodalang.

Dekart  $(x, y, z)$  va sferik  $(r, \varphi, \theta)$  koordinatlar quyidagicha bog'langan:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.45)$$

Bizga  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  va  $\dot{z}$  lar kerak bo'ladi. Ular quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi \sin \theta - r \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta; \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi \sin \theta + r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + r \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta; \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Navbatma navbat har bir komponenta topiladi:

$$M_x = y p_z - z p_y = m(y \dot{z} - z \dot{y}) = -m r^2 (\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi); \quad (2.47)$$

$$M_y = z p_x - x p_z = m(z \dot{x} - x \dot{z}) = m r^2 (\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi); \quad (2.48)$$

$$M_z = x p_y - y p_x = m(x \dot{y} - y \dot{x}) = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (2.49)$$

Moddiy nuqta Lagranj funksiyasining sferik sistemadagi ifodasini

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r, \varphi, \theta) \quad (2.50)$$

(2.49) bilan taqqoslanilsa, yana

$$M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad (2.51)$$

ekanligi topiladi. Bu koordinatlarda ham  $\varphi$  koordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls momentning  $z$  – komponentasiga teng bo'lib chiqdi:

$$p_\varphi = M_z.$$

## 2.5. Virial teorema

Finit harakat qilayotgan moddiy nuqtalardan iborat sistemani olib qaraylik. Bunday sistemadagi hech bir jism vaqt o'tishi bilan chesizlikka ketib qolmaydi.

Agar sistemaning potensial energiyasi o'z o'zgaruvchilarining  $k$ -tartibli bir jinsli funksiya bo'lsa, ya'ni

$$U(\alpha \mathbf{r}_1, \alpha \mathbf{r}_2, \dots, \alpha \mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (2.52)$$

kinetik, potensial va to'liq energiyalarning vaqt bo'yicha o'rtacha qiymatlari orasida sodda munosabat o'rnatish mumkin. Buning uchun dekart koordinat sistemasida  $a$  zarracha uchun harakat tenglamasini yozib olaylik:

$$m_a \ddot{\mathbf{r}}_a = -\nabla_a U, \quad \nabla_a = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (2.53)$$

Uning ikkala tomonini  $\mathbf{r}_a$  ga skalar ko'paytirib, hamma zarralar bo'yicha yig'indiga o'tiladi:

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_a \cdot \ddot{\mathbf{r}}_a = -\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \nabla_a U. \quad (2.54)$$

Chap va o'ng tomonlar ustida quyidagi almashtirishlarni bajaraylik. Birinchidan,

$$\mathbf{r}_a \cdot \ddot{\mathbf{r}}_a = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a) - \dot{\mathbf{r}}_a^2. \quad (2.55)$$

Ikkinchidan, potensial energiya  $k$  tartibli bir jinsli funksiya bo'lgani uchun Eyler teoremasi bo'yicha

$$\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \nabla_a U = kU. \quad (2.56)$$

Demak,

$$\frac{d}{dt} \sum_a m_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a - \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 = -kU. \quad (2.57)$$

Vaqt bo'yicha o'rtacha qiymat ixtiyoriy funksiya  $f$  uchun quyidagicha ta'riflanadi:

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f dt. \quad (2.58)$$

Shu ta'rif asosida (2.57) ning ikkala tomonini o'rtalashtiramiz. Sistema faqat finit harakat qilayotgani uchun chap tomondagi birinchi hadning o'rtacha qiymati nolga teng bo'ladi. Natijada quyidagi ifodaga kelinadi:

$$\overline{\sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2} = k\bar{U}. \quad (2.59)$$

Kinetik energiya uchun

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 \quad (2.60)$$

ekanligini hisobga olib topilgan formulani



$$2\bar{T} = k\bar{U}. \quad (2.61)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. To'liq energiyani ham bunday munosabatlarga kiritilsa, vaqt bo'yicha o'rtacha qiymatlar uchun

$$\bar{E} = \bar{T} + \bar{U} = \frac{k+2}{2}\bar{U} = \frac{k+2}{k}\bar{T} \quad (2.62)$$

munosabatlarga kelinadi. Topilgan munosabatlar *virial teoremani* tashkil qiladi<sup>1</sup>. Ularning hususiy hollari qiziqarlidir. Masalan, kichik tebranishlarga o'tilsa  $k = 2$  bo'ladi, demak,

$$\bar{U} = \bar{T} = \frac{1}{2}\bar{E}.$$

Gravitatsion va kulon elektr maydonlarida potensial  $U \sim 1/r$  ko'rishtigiga ega, ya'ni  $k = -1$ . Bu hollarda

$$\bar{U} = -2\bar{T}$$

va

$$\bar{E} = -\bar{T}$$

bo'ladi. Kinetik energiyaning hamma vaqt musbatligidan kelib chiqadiki, gravitatsion va kulon maydonlarida finit harakat qilayotgan zarrachaning to'liq energiyasi manfiy bo'lar ekan.

Harakat tenglamasi (2.53) ga qaytib kelaylik. (2.52) ga kirgan koordinatlarni «cho'zish»

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}'_a = \alpha \mathbf{r}_a$$

bilan bir vaqtda vaqt ustida ham

$$t \rightarrow t' = \beta t \quad (2.63)$$

almashtirish bajarilsa, harakat tenglamani chap tomoni  $\alpha/\beta^2$  ga ko'payadi, o'ng tomoni esa (2.52) bo'yicha  $\alpha^{k-1}$  ga ko'payadi. Ko'rinib turibdiki,

$$\beta = \alpha^{1-k/2} \quad (2.61)$$

shart bajarilsa harakat tenglamasi o'zgarmaydi. Demak,  $U$  tashqi maydonda zarracha uchun  $\mathbf{r}_a(t)$  funksiya qandaydir trayektoriyani ifodalasa  $\mathbf{r}'_a(t')$  funksiya ham huddi shu tashqi maydondagi mumkin

<sup>1</sup> Teoremaning nomi (2.54) ga kirgan  $\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \nabla_a U = -\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{F}_a$  had bilan bog'liq.

$U$  ba'zi bir hollarda «virial» deyiladi.

bo'lgan harakat trayektoriyasini berar ekan. Topilgan munosabatni aniqroq tushunish uchun bundan keyin  $\alpha = l'/l$  deb qaraladi, bu yerda  $l$  va  $l'$  – trayektoriyalarning chiziqli o'ichamlari.

Agar ikkala trayektoriya bo'yicha harakat tezliklari solishtirsak:

$$v' \sim \frac{r'}{l'} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} - \frac{\alpha}{\beta} v \sim \alpha^{k/2} v = \left( \frac{l'}{l} \right)^{k/2} v \quad (2.65)$$

Shtixlanmagan trayektoriyada  $a$  nuqtadan  $b$  nuqtagacha harakat uchun  $t$  vaqt ketgan bo'lsa, shtixlangan trayektoriya bo'yicha ularga mos keluvchi  $a'$  nuqtadan  $b'$  nuqtagacha  $t' = \beta t = (l'/l)^{1-k/2} t$  vaqt ketadi, tezlik esa yuqorida topildi. Masalan, tortish kuchi maydoni uchun  $k = -1$ , demak,  $(t'/t)^2 = (l'/l)^3$ . Keplerning uchinchi qonuni topildi – sayyoralar uchun Quyosh atrofida aylanish davrlari nisbatining kvadrati ular orbitalari radiuslari nisbatining kubiga teng.

**2.6.1-misol.** Yer va Mars uchun orbita radiuslari  $l = 1.496 \cdot 10^{13} \text{ sm}$  va  $l' = 2.2794 \cdot 10^{13} \text{ sm}$ , ya'ni,  $l'/l = 1.5237$ . Agar Yerdagi bir yil 365 kun davom etsa, Marsdagi bir yil  $= 365 \cdot 1.5237^{3/2} = 365 \cdot 1.88 = 686$  kun chiqadi.

Energiya uchun  $E'/E = (l'/l)^k$  ekanligini topish qiyin emas.

## 2-bobga mashq va savollar

1. Quyidagi Lagranj funksiyalariga mos keluvchi energiyalarni toping:

a)  $L = \frac{ml^2}{2} \left( \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi} \dot{\theta} \right) + 3l \cos \varphi;$

b)  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^3}{2};$

c)  $L = -\sqrt{1-x^2} + A(x)\dot{x} - \varphi(x);$

d)  $L = \dot{x}^2 - (e^x - 1);$

2. Quyidagi maydonlarda harakat qilayotganda impuls va momentning qanday komponentalari saqlanadi?

a) Tashqi maydon faqat  $z$  o'qiga bog'liq, ya'ni,  $(x, y)$  tekisligida u bir jinsli;

- b) cheksiz bir jinsli silindr ko'rinishdagi maydon;
- c)  $z$  o'qida yotgan ikki nuqta hosil qilgan maydon;
- d)  $y$  o'qi bilan chegaralangan yarim tekislikdagi bir jinsli maydon.

3. Quyidagi umumiy koordinat almashtirishida energiya va impulsning o'zgarish qonunini toping:

$$q_i = f_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s), \quad i = 1, \dots, s.$$

4. O'zgarmas va bir jinsli tashqi magnit maydon  $\mathbf{B}$  da harakat qilayotgan  $e$  zaryadli zarracha uchun  $I = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} + \frac{e}{2c} (\mathbf{r} \times \mathbf{B})^2$  kattalik harakat integrali bo'lishini ko'rsating. Bu yerda  $\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ . Tashqi magnit maydonda zaryadga

$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  kuch ta'sir qiladi.

5. Galiley almashtirishlari uchun invariantni toping.

### 3-bob. HARAKAT TENGLAMALARINI INTEGRALLASH

---

#### 3.1. Bir o'lchamli harakat tenglamasi

Eyler—Lagranj tenglamalari fizikaga aloqasi bo'lgan deyarli hamma hollarda nohiziqli differensial tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. Bunday tenglamalarni integrallashning birdan bir usuli tenglamalarning (demak, sistemaning erkinlik darajasining) soniga teng bo'lgan harakat integrallarini topishdir. Har bir harakat integrali bitta tenglamaning darajasini bittaga pasaytirib beradi, birinchi tartibli oddiy hosilali tenglamani esa, odatda, integrallash mumkin bo'lib chiqadi.

Bir o'lchamli harakat tenglamasini integrallashdan boshlaylik. Lagranj funksiyasi bu holda

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (3.1)$$

ko'rinishga ega. Bu yerda  $U(x)$  — berilgan tashqi maydon (potensial). Harakat tenglamasi

$$m\ddot{x} = -U'(x) \quad (3.2)$$

ko'rinishni oladi. Tashqi potensial  $U(x)$  murakkab ko'rinishga ega bo'lishi mumkin, ammo masalada bitta harakat integralining mavjudligi bizning ishimizni darrov yengillashtiradi. Lagranj funksiyasi (3.1) vaqtga bog'liq emas, demak, energiya saqlanuvchi kattalik ( o'zgarmas son). Uning ifodasi

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \quad (3.3)$$

dan darhol quyidagi ifodani hosil qilish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}. \quad (3.4)$$

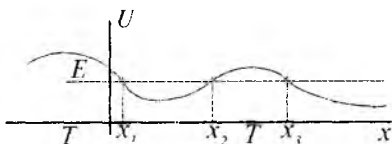
Olingan tenglama oson integrallanadi:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} + \text{const.} \quad (3.5)$$

Bu integralni hisoblash natijasida koordinata  $x$  va vaqt  $t$  orasidagi bogʻlanish topiladi. Javobni integral orqali ifodalash, odatda, **kvadraturaga keltirish** deyiladi. (3.5) formula bir oʻlchamli harakat masalasini eng umumiy holda yechadi. Bu yechimga ikkita oʻzgarmas kirgan —  $E$  va  $\text{const.}$  Ular masalaning boshlangʻich shartlaridan topiladi.  $E - U$  kinetik energiyaga teng boʻlgani uchun hamma vaqt

$$E - U \geq 0 \quad (3.6)$$

boʻlishi kerak.  $E - U = 0$  nuqtada esa jismning tezligi nolga teng boʻladi. Bunday nuqtalar **toʻxtash nuqtalari** deyiladi. Bir oʻlchamli harakatning asosiy xossalarini oʻz ichiga olgan 3.1-rasmni koʻraylik. Rasmdan koʻrinib turibdiki, tashqi maydonning koʻrinishi va energiya-ning son qiymatiga qarab toʻxtash nuqtalar bir necha boʻlishi mumkin. 3.1-rasmda toʻxtash nuqtalari  $x_1, x_2, x_3$ . Agar harakat ikki tomondan toʻxtash nuqtalari bilan chegaralangan boʻlsa, bunday harakat **finit harakat** deyiladi. Rasmda bu soha  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Odatda, bu formadagi sohalar **potensial oʻra** deyiladi. Rasmdagi  $x_3 < x$  soha — **infinite** harakat sohasidir, bunday sohalar da jism harakati yoki bir tomonlama chegaralangan boʻladi, yoki umuman chegaralanmagan boʻladi. Koʻrinib turibdiki, bunday sohadagi jism vaqt oʻtishi bilan cheksizlikka intiladi.



3.1-rasm. Potensial maydondagi harakat.

Rasmdagi T harfi bilan belgilangan sohalar — taqiqlangan sohalar, bunday sohalar da (3.6) tengsizlik bajarilmaydi. Jism bunday sohaga oʻta olmaydi.

**3.1.1-misol.**  $U = x$  potensial maydonda toʻxtash nuqtalarini toping va harakatni integrallang. Boshlangʻich shartlar —  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$ . Jismning massasini bir deb oling.

Boshlang'ich shartlardan foydalanib, energiyaning qiymati topiladi:

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x = 1. \text{ To'xtash nuqtasi } x = 1. \text{ (3.5) bo'yicha}$$

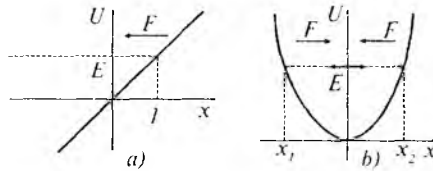
$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \text{const} = -\sqrt{2(1-x)} + \text{const}.$$

Boshlang'ich shart  $\text{const}=0$  ga olib keladi. Demak,

$$x = 1 - \frac{1}{2} t^2.$$

Shu holga mos keladigan harakat tenglamasi  $\ddot{x} = -1$  ni yechib yana shu natijaga kelishimizni tekshirib ko'rish qiyin emas.

Bu potentsialdagi harakat 3.2-rasmning birinchisida ko'rsatilgan. Jismga ta'sir qilayotgan kuchning yo'nalishi ham ko'rsatilgan.



3.2-rasm. (3.1.1) va (3.1.2) misollarga oid.

**3.1.2-misol.**  $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$  potentsial maydondagi harakat qonuni aniqlansin.

(3.5) formulaga potentsialni qo'yamiz:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2} kx^2}} + \text{const} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left( x(t) \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) + \text{const}. \quad (3.7)$$

Demak, 
$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} + \alpha \right), \quad (3.8)$$

bunda  $\alpha$  – boshlang'ich shartdan topiladigan konstanta. Masalan,  $t = 0$  vaqt momentida  $x(0) = 0$  bo'lsin desak  $\alpha = \pi/2$  bo'lishi kerak.

## 3.2. Ikki jism masalasi

Ko'p o'lchamli mexanik harakatlar ichida aniq integrallanadiganlari kam. Ularning ichida markaziy maydon orqali o'zaro ta'sir qiluvchi **ikki jism masalasi** eng e'tiborga sazovardir. Bu masalani ko'rib o'rganish **keltirilgan massa** tushunchasidan boshlanadi.

### 3.2.1. Keltirilgan massa

Massalari  $m_1$  va  $m_2$  bo'lgan ikki jism berilgan bo'lsin. Ular orasidagi o'zaro ta'sir faqat o'zaro masofagagina bog'liq bo'lishi mumkin, bu degani, potensial energiyaning ko'rinishi  $U(|r_1 - r_2|)$  bo'lishi kerak. Sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} - U(|r_1 - r_2|).$$

Inersiya markazi sistemasiga o'taylik:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0 \quad (3.10)$$

va o'zaro masofa vektori kiritaylik:

$$r = r_1 - r_2. \quad (3.11)$$

Bu ikki tenglamani yechib

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (3.12)$$

lar olinadi. Rasmdan ko'rinib turibdiki,  $r$  vektori ikkinchi jismdan birinchi jismga qaratilgan. Agar quyidagi munosabat orqali

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.13)$$

**keltirilgan massa** tushunchasi kiritilsa, Lagranj funksiyasi quyidagi sodda ko'rinishga keladi:

$$L = \frac{m \dot{r}^2}{2} - U(r). \quad (3.14)$$

Natijada ikkita moddiy nuqtaning o'zaro ta'siri masalasi bitta moddiy nuqtaning  $U(r)$  ko'rinishli tashqi maydondagi harakati masalasiga

keltirildi. Har bir jismning trayektoriyasi esa (3.12) formulalar orqali topilishi mumkin.

Keltirilgan massani yaxshiroq tasavvur qilish uchun ikki chegaraviy hollarni ko'raylik.

Birinchi hol:  $m_1 \gg m_2$ , ya'ni, birinchi jismning massasi ikkinchikidan ko'p marta katta bo'lsin (ko'z oldimizga Quyosh va Yerni keltirish mumkin). Bu holda  $m_1 = m_2$  va  $\mathbf{r} = -\mathbf{r}_2$  bo'ladi. Sistemaning inersiya markazi massasi katta moddiy nuqtaning yaqinida joylashgan bo'ladi, massasi kichik jism uning atrofida  $\approx r$  masofada aylanayotgan bo'ladi.

Ikkinchi hol:  $m_1 = m_2$ . Bu holda  $m = \frac{1}{2} m_1 = \frac{1}{2} m_2$  va inersiya markazi ikki jismning qoq o'rtasida joylashgan bo'ladi. Ikkala jism shu markaz atrofida aylanadi.

### 3.2.2. Markaziy maydon

(3.14) Lagranj funksiyasi bilan ifodalanadigan masalani yechishga o'tamiz. Potensial energiya faqatgina markazgacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'lgani uchun bunday maydon **markaziy maydon** deyiladi, ko'rilyotgan masala esa markaziy maydondagi harakat masalasi deyiladi.

Eyler—Lagranj tenglamalari bu holda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.15)$$

O'ng tomondagi kuch radius-vektor bo'yicha yo'nalgandir:

$$-\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.16)$$

Uning son qiymati markazgacha bo'lgan masofa  $r$  ning funksiyasidir. (3.15) tenglamalar sistemasi uchta nochiziqli tenglamadan iborat bo'lgan sistema bo'lib, uning yechimlarini topish uchun harakat integrallari qo'llanilishi kerak.

Masala sferik simmetriyaga ega bo'lgani uchun (3.14) Lagranj funksiyasini sferik koordinat sistemasida ochib chiqamiz:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r). \quad (3.17)$$



Bu ifoda hali murakkabdir. Saqlanuvchi kattaliklarni aniqlaylik. Ularning ichida birinchisi — impuls momenti. Uning saqlanuvchan kattalik ekanligini oddiy yo‘l bilan isbot qilishi mumkin:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = m \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] = m[\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}] + m[\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}] = -\frac{dU(\mathbf{r})}{dr} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] = 0. \quad (3.18)$$

Bu isbotda (3.15), (3.16) formulalardan va ixtiyoriy vektorning o‘z-o‘ziga vektor ko‘paytmasi nolga tengligidan foydalanildi.

Harakat miqdori momenti

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] \quad (3.19)$$

jismning radius-vektoriga doimo perpendikularidir, uning o‘zgarasligi jism radiusining doimo bir tekislikda yotishini ya’ni, harakat bir tekislikdagina ro‘y berishini bildiradi. Shu tekislik sifatida  $\theta = \pi/2$  tekislik olinadi. Bu degani biz  $z$ -o‘qini harakat miqdori momenti bo‘yicha yo‘naltirdik deganimizdir.

Lagranj funksiyasi uchun ifodani bir pog‘onaga soddalashtirishga erishildi:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (3.20)$$

Ko‘rinib turibdiki, Lagranj funksiyasi  $\varphi$  — kordinataga bog‘liq emas. Bunday koordinatlarni siklik koordinata deyilgan edi. Siklik koordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls saqlanuvchi kattalik bo‘ladi:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}. \quad (3.21)$$

Bizning holda siklik  $\varphi$  kordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (3.22)$$

harakat miqdori momentining  $z$  komponentasidir ((2.51) ga qarang):

$$M_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_z = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (3.23)$$

Ammo  $z$  o‘qi  $\mathbf{M}$  bo‘yicha yo‘naltirilgan, demak,  $M_z = M$ . Bu tahlildan  $\dot{\varphi}$  ni topib (3.20) Lagranj funksiyasini

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{M^2}{m^2 r^2} \right) - U(r) \quad (3.24)$$

ko'rinishga keltiramiz. O'z navbatida bu energiya uchun

$$E = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{M^2}{m^2 r^2} \right) + U(r) \quad (3.25)$$

formulani beradi. Uni

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (3.26)$$

ko'rinishga keltirib, darhol quyidagini ifoda olinadi:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} = t. \quad (3.27)$$

Integral hisoblansa radiusni vaqtning funksiyasi sifatida topgan bo'lamiz —  $r = r(t)$ . Trayektoriyani to'liq topish uchun burchakning ham vaqtga bog'liqligini topish kerak. Buning uchun (3.23) dan foydalanish yetarlidir:

$$\varphi = \int \frac{M}{mr^2} dt = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2m}{M^2} (E - U(r)) - \frac{1}{r^2}}}. \quad (3.28)$$

Ikkita oxirgi integral  $r, \varphi$  va  $t$  o'zgaruvchilar orasidagi ikki munosabatni berib trayektoriyani to'liq aniqlab beradi.

Agar (3.25) formulada radial tezlik nolga tenglashtirilsa:  $\dot{r} = 0$  quyidagini olamiz:

$$E = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (3.29)$$

Ta'rif bo'yicha bu radial yo'nalishdagi to'xtash nuqtalari uchun tenglama. Tenglamani  $r$  ga nisbatan yechib mana shu «to'xtash nuqtalari»  $r_{0i}$  (ularning soni tenglamaning tartibiga bog'liq) topiladi. Bu nuqtalarda jism o'zining markazdan uzoqlashishini ( $\dot{r} > 0$ ) unga yaqinlashishga ( $\dot{r} < 0$ ) o'zgartiradi va aksincha. Burchak tezlik  $\dot{\varphi}$  ning ishorasi esa, (3.22) dan ko'rinib turibdiki, hech qachon o'zgarmaydi

va nolga teng bo'lmaydi. Demak, markaziy maydonda jism markaz atrofidagi aylanish yo'nalishini hech qachon o'zgartirmas ekan. Radial harakat esa murakkabroq tabiatga ega. Agar

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (3.30)$$

belgilash kiritilsa (3.25) formulani

$$E = \frac{mv^2}{2} + U_{\text{eff}}(r) \quad (3.31)$$

ko'rinishga keltirib olish mumkin. Bu formulaga bir o'lchamli harakat formulasi sifatida qaralsa markaziy maydondagi radial harakat (3.30) munosabat orqali aniqlanadigan **effektiv potentsialdagi** harakat bo'lib chiqadi. Agar Lagranj tenglamasida  $-\partial U/\partial q_i$  ifoda (umumlashgan) kuchning ifodalashi eslansa effektiv potentsialdagi qo'shimcha had

$$-\frac{\partial}{\partial r} \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{M^2}{mr^3} \quad (3.32)$$

ko'rinishga ega bo'lgan markazdan tashqariga yo'nalgan qo'shimcha kuchga olib keladi. Bu kuch **markazdan qochirish kuchi** deb ataladi. Harakat miqdori momenti bilan bog'liq bo'lgan bu kuchning paydo bo'lishi ma'lum oqibatlariga olib keladi.

Birinchiidan, markaziy maydonda harakat qilayotgan jism maydon markaziga tusha oladimi yo'qmi degan savolga javob shu qo'shimcha kuchga bog'liqdir. Hattoki, maydon tortish maydoni bo'lganda ham markazga tushish  $r \rightarrow 0$  uchun (3.32) kuchni yengish kerak. Buning uchun esa  $r \rightarrow 0$  limitda

$$-\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{M^2}{mr^3} < 0, \quad (3.33)$$

yoki bu munosabat integrallansa  $r \rightarrow 0$  limitda

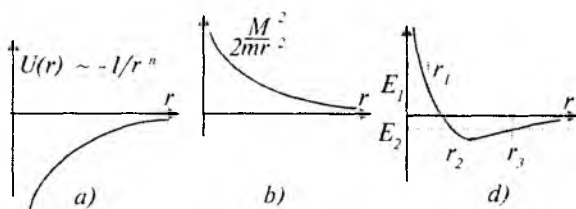
$$r^2 U(r) < -\frac{M^2}{2m} \quad (3.34)$$

bo'lishi kerakligi topiladi. Albatta, hamma maydonlar ham bu tengsizlikni qanoatlantirmaydi. Bu tengsizlik bajarilishi uchun potentsial

$U(r)$  yoki  $-1/r^n$ ,  $n > 2$  ko'rinishga ega bo'lishi kerak, yoki  $-\alpha/r^2$  ko'rinishga ega bo'lganda ham  $-\alpha > M^2/2m$  bo'lishi kerak.

Ikkinchidan, ma'lum vaziyatlarda potensial energiyadagi bu qo'shimcha had tortish maydoni bo'lgan potensial maydonda ham finit harakatning mumkin emasligiga olib kelishi mumkin. Buni ko'rish uchun tortish maydoni  $\partial U/\partial r > 0$  ning umumiy grafigini chizaylik (albatta, har xil maydonlar uchun grafikning og'ishi va nuqtama-nuqta son qiymatlari har xil bo'ladi, ammo  $\partial U/\partial r > 0$  shartga bo'ysunadigan funksiyaning eng umumiy ko'rinishi shu grafikka mos keladi). Endi bu grafikga  $M^2/r^2$  funksiyasining grafigi ustma-ust qo'yilsa (3.3-rasmga qarang). Natijaviy grafikda potensial o'ra bormi-yo'qmi? Potensial o'ra bo'lishi uchun  $M^2$  ning qiymati yetarli darajada kichik bo'lishi kerak (uning son qiymati konkret maydonga bog'liq bo'ladi).

Demak, jismning harakat miqdori momenti ma'lum chegaradan oshib ketsa, finit harakat bo'lmasligi ham mumkin ekan.



3.3- rasm. Effektiv potensialning hosil bo'lishi.

Harakat chegaralarini energiya  $E$  ning son qiymati aniqlab beradi ( $u$ , o'z navbatida, boshlang'ich shartlar orqali aniqlanadi). Bu tasdiqni 3.3-rasmga qarab tushunish qiyin emas.

Agar energiyaning qiymati shunday bo'lsaki, harakat faqat bir tomondan chegaralangan  $r \geq r_1 = r_{min}$  bo'lsa (3.3-d rasmdagi  $E_1$  hol) bunday harakat infinit harakat bo'ladi — jism cheksizlikdan keladi va cheksizlikka qaytib ketadi. Agar harakat ikki tomondan chegaralangan bo'lsa  $r_{min} = r_1 \leq r \leq r_3 = r_{max}$  (3.3-d rasmdagi  $E_2$  hol) u finit harakat bo'ladi. Harakat finit bo'lishi uchun effektiv potensial «o'raga» ega bo'lishi kerak.

Finit harakatga mos keluvchi trayektoriya hamma hollarda ham yopiq bo'lavermaydi. Oddiy matematik mulohazadan kelib chiqadiki, (3.28) integralning  $r_{min}$  dan  $r_{max}$  gacha qiymati shu integralning  $r_{max}$  dan

$r_{min}$  gacha qiymatiga tengdir. Demak, jism markazga eng yaqin nuqtadan chiqib yana shu nuqtaga qaytib kelguncha  $\varphi$  burchakning o'zgarishi

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (3.35)$$

ga teng bo'ladi. Trayektoriya yopiq bo'lishi uchun  $\Delta\varphi = 2\pi m/n$  bo'lishi kerak, bu yerda  $m$  va  $n$  – butun sonlar, bu holda jism  $n$  marta aylangandan keyin yana boshlang'ich nuqtaga qaytib keladi.

### 3.3. Kepler masalasi

Kepler masalasi deb jismning

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (3.36)$$

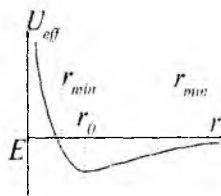
ko'rinishdagi maydondagi harakatini o'rganishni aytiladi. Bu ko'rinishdagi maydon fizikada eng muhim rol o'ynaydigan gravitatsion maydon va kulon maydonlariga to'g'ri keladi. Gravitatsion maydon faqat tortishish tabiatiga ega ( $\alpha > 0$ ), kulon maydoni ham tortishish, ham itarish ( $\alpha < 0$ ) tabiatiga egadir. Effektiv potensial ( $\alpha > 0$ ) hol uchun)

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (3.37)$$

(3.4) rasmda korsatilgan.

Effektiv potensialda o'ra bor, demak, (3.36) maydonda finit harakat mavjud ekan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, buning uchun jism energiyasi manfiy bo'lishi kerak:  $E < 0$ .

Bu hol uchun markazga eng yaqin va eng uzoq nuqtalar  $E = U_{eff}(r)$  tenglamadan topiladi:



3.4- rasm. Effektiv potensial.

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{M^2}{2mE}} = \frac{\alpha}{2|E|} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2|E|M^2}{m\alpha^2}} \right)$$

Yuqori ishora  $r_{max}$  ga va quyi ishora  $r_{min}$  ga to'g'ri keladi. Albatta, agar  $E > 0$  bo'lsa

$$r_{min} = -\frac{\alpha}{2E} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{M^2}{2mE}} \quad (3.38)$$

ga teng bo'ladi,  $r_{max}$  esa mavjud bo'lmaydi.

Effektiv potensial  $r_0 = \frac{M^2}{m\alpha}$  nuqtada minimumga erishadi:

$$(U_{eff})_{min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}.$$

Hech qanday jismning energiyasi bundan kichik bo'lishi mumkin emas. Musbat energiyali va energiyasi nolga teng jismlar infinit harakat qiladi – ular cheksizlikdan kelib cheksizlikka ketadi.

Kepler masalasidagi integrallar oson hisoblanadi. Burchak  $\varphi$  ni topaylik (c-integrallash konstantasi):

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + c = -M \int \frac{d(1/r)}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + c = \\ &= \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + c. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Integrallash konstantasi shunday tanlab olinadiki,  $\varphi = 0$  nuqta  $r = r_{min}$  ga to'g'ri kelsin.

Buning uchun  $const = 0$  bo'lishi kerak.

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad (3.40)$$

belgilashlar kiritilsa olingan formula

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (3.41)$$

ko'rinishga keltiradi. Orbita konus kesimi formulasi keltirildi,  $P$  – **orbita parametri** va  $e$  – uning **eksstrensiteti** deyiladi.  $\varphi=0$  va  $\varphi=\pi$  nuqtalar orbitaning markazga eng yaqin (**perigeliy**) va eng uzoq (**apogeliy**) nuqtalariga to'g'ri keladi.  $E<0$  holda  $e<1$  bo'ladi, orbita ellips ko'rinishiga ega. Ellipsning fokuslarining birida jismlarning biri joylashgan bo'ladi, chunki fokusdan ellipsning eng yaqin nuqtasigacha masofa geometriyaning ma'lum formulasi bo'yicha  $P/(1+e)$  ga teng, bu esa  $r_{min}$  ning o'zidir. Tabiiyki, shu fokusdan eng uzoq masofa  $P/(1-e)$  avval aniqlangan  $r_{max}$  ga tengdir. Bundan harakat davomida jismlarning biri ellipsning bitta markazida turadigan bo'lib chiqadi.

Agar  $E=(U_{eff})_{min}$  bo'lsa  $e=0$  ga aylanadi, orbita aylanma ko'rinishini oladi, markazgacha masofa o'zgarmas  $r=p=M^2/m\alpha$  ga teng bo'ladi.

$E=0$  bo'lgan holda  $e=1$  bo'ladi, ya'ni, orbita parabola ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu holda harakat infinitligi aytilgan edi.

Energiyasi musbat jism esa gravitatsion (kulon) maydonida giperbola bo'yicha harakat qiladi – bu holda  $e>1$ .

**3.3.1-misol.** Ko'rilayotgan  $U(r) = -\alpha/r$  maydonda yana bitta harakat integrali bor, u ham bo'lsa

$$\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r} \quad (3.42)$$

ekanligini ko'rsating.

**Yechish.**

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - \frac{\alpha\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3} \quad (3.43)$$

Bunda  $\mathbf{M} = m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]$  va harakat tenglamasi  $m\ddot{\mathbf{r}} = \alpha\mathbf{r}/r^3$  larni qo'ysak  $\dot{\mathbf{A}} = 0$  ekanligini darhol ko'ramiz. Vektor  $\mathbf{A}$  orbita tekisligida yotadi – bu uning ta'rifidan ko'rinib turibdi.  $\mathbf{A}$  vektor markazdan perigeliyga qarab yo'nalgan (bobning oxiridagi masalalarni qarang).

**3.3.2-misol.** Kepler masalasini  $\mathbf{A}$  harakat integrali yordamida yeching.

**Yechish:**  $\mathbf{A}$  ni  $r$  ga skalar ko'paytiraylik:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = -\alpha r + \frac{M^2}{m}. \quad (3.44)$$

Agar  $\mathbf{A}$  va  $\mathbf{r}$  orasidagi burchakni  $\varphi$  deb belgilansa va  $e=A/\alpha$ ,  $p=M^2/(m\alpha)$  belgilshlar kiritilsa, o'zimizga ma'lum bo'lgan (3.41) formula hosil bo'ladi:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3.45)$$

### 3.5. Markaziy maydonda sochilish jarayonlari

#### 3.5.1. Sochilish kesimi

Shu paytgacha markaziy maydonlardagi asosan finit harakatni o'rganildi. Tashqi maydonlardagi infinit harakatlar ham katta ahamiyatga ega. Cheksiz uzoqdan tushayotgan jism maydon markaziga yaqinlashganida maydon bilan o'zaro ta'sir natijasida o'z trayektoriyasini o'zgartirishi turgan gapdir.

Shu jumladan, u markazga tushishi, boshqa jism bilan to'qnashishi mumkin. Fizik jarayonlar o'rganganda ularga adekvat bo'lgan (ya'ni, mos keluvchi) tushunchalardan foydalanishi kerak. To'qnashish va sochilish jarayonlarini sochilish kesimi tushunchasi yaxshi ifodalaydi. U quyidagicha kiritiladi.

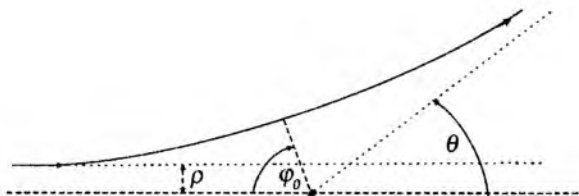
Tajribada zarrachalar oqimi nishonga tushadi. Oqimning zichligi  $j$  – birlik vaqt ichida birlik sirt orqali o'tgan zarralar sonini bildiradi. Uning o'lchamligi  $[j] = \text{sm}^{-2}\text{sek}^{-1}$ . Nishon (nishonni tashkil qilgan zarrachalarning maydonlari) bilan o'zaro ta'sir natijasida oqimni tashkil qilgan zarralar sochiladi (sochiladi deganda hamma mumkin bo'lgan jarayonlar ko'zda tutiladi – shu jumladan, markazga tushish, markazda tutilish va h.k. Ya'ni, sochilish deganda zarrachaning o'z boshlang'ich trayektoriyasini o'zgartirishi ko'zda tutiladi). Agar 3.5-rasmda ko'rsatilganidek, jismning og'ish burchagi  $\theta$  deb belgilaylik. Kuzatuvchi bir sekunda qancha zarracha ( $\theta, \theta + d\theta$ ) burchak orasida tarqalganini sanaydi. Mana shu son  $dn(\theta)$  deb belgilanadi. Uning o'lchamligi  $[dn] = \text{sek}^{-1}$ . Agar uning tushayotgan oqim zichligiga nisbati olinsa bir sekunda birlik yuzadan o'tib nishonga tushgan zarrachalarning qanday qismi ( $\theta, \theta + d\theta$ ) burchak ichida tarqalgani topiladi. **Sochilishning differensial kesimi**, yoki, ko'pincha soddalik uchun qisqartirilib aytiladigan sochilish kesimi,

$$d\sigma = \frac{dn}{j} \quad (3.46)$$

formula orqali ta'riflanadi. Differensial kesimning o'lchamligi yuzaga o'lchamligiga teng.

3.5-rasm sochilish jarayonida ishlatiladigan ba'zibir kattaliklarni kiritishga tegishli. Chap tomondan bir jism tushayotgan bo'lsin.  $\theta$  – sochilish burchagi (laboratoriya sistemada, e-sistemada),  $\rho$  – **nishon parametri** Nishon parametri – agar tushayotgan zarra va markaz





3.5- rasm. Bir jismning sochilishini ta'riflashga oid.

orasida hech qanday o'zaro ta'sir kuchi bo'lmaganda shu zarraning markazdan qanday masofada o'tib ketishini bildiradi.

Ko'rinib turibdiki

$$2\varphi_0 + \theta = \pi. \quad (3.47)$$

Sochilish jarayonini laboratoriya (*l*-sistema) va inersiya markazi (*m*-sistema) larda ko'rib chiqishi mumkin. *m*-sistema – sochilish jarayonida ishtirok etayotgan zarrachalarning to'liq impulsi nolga teng bo'lgan sistema. Markaziy maydonda sochilish jarayonlari *m*-sistemada ko'riladi, *l*-sistemaga o'tish formulalari 3.5.2-paragrafda berilgan.

Tushayotgan zarracha nishon bilan o'zaro ta'sir natijasida markazdan  $\theta$  burchak ostida sochildi. Agar nishon parametri  $\rho$  boshqacha bo'lsa, zarraning sochilish burchagi  $\theta$  ham boshqacha bo'ladi. Boshqa so'z bilan aytganimizda,  $\rho \rightarrow \rho + d\rho$  o'zgarishiga  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  o'zgarishi mos keladi.  $d\rho$  va  $d\theta$  larning ishoralari orasidagi bog'lanishni aniqlaylik. Odatda,  $\rho$  kamaysa  $\theta$  oshishi kerak (chunki bu holda zarra markazga yaqinroq keladi va, natijada, ular orasidagi o'zaro ta'sir kuchayadi) va aksincha. Demak, odatda, (ko'pincha shunday, ba'zi-bir hollardagina bunday emas)  $d\rho$  va  $d\theta$  larning ishoralari har xil ekan.

$\varphi_0$  – burchakka o'taylik. Fizikada eng qiziq bo'lgan markaziy maydonda sochilish jarayonini o'rganamiz, shuning uchun  $\varphi_0$  sifatida (3.28) formula bo'yicha aniqlanadigan burchakni olamiz:

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad (3.48)$$

bunda  $r_{min}$  – trayektoriyaning markazga eng yaqin nuqtasigacha masofa.

Ko'rilayotgan masalada zarracha cheksizlikdan nishonga tushmoqda. Uning saqlanuvchan energiyasi va impuls momentlarini boshlang'ich kattaliklar orqali ifodalab olish maqsadga muvofiqdir:

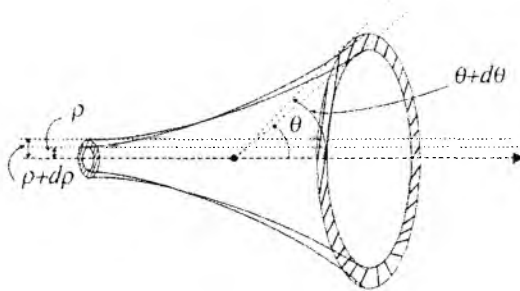
$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}, \quad M = mv_{\infty}\rho, \quad (3.49)$$

bunda  $v_{\infty}$  – zarrachaning boshlang'ich (cheksiz uzoq masofadagi) tezligi. Natijada og'ish burchagi uchun integral

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2}}} \quad (3.50)$$

ko'rinishni oladi.

3.6-rasmda ko'rsatilganidek, boshlang'ich oqimda ( $\rho, \rho+d\rho$ ) nishon masofasida bo'lgan zarralar ( $\theta, \theta+d\theta$ ) burchak ichiga sochilgan bo'ladi. Ichki va tashqi radiusi ( $\rho, \rho+d\rho$ ) bo'lgan halqaning yuzasi  $2\pi\rho d\rho$ , uni oqim jichligi  $j$  ga ko'paytirilsa shu yuzadan bir sekunda o'tgan zarralar soni kelib chiqadi. Demak,  $dn = 2\pi\rho dj$  ekan, bu esa



3.6- rasm. Sochilish.

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \quad (3.51)$$

formulaga olib keladi. Burchak o'zgaruvchisiga o'taylik:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta) \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right| d\theta. \quad (3.52)$$

Absolut qiymat paydo bo'lganining sababi yuqorida aytilganidek deyarli hamma vaqt  $d\rho/d\theta < 0$  ekanligidir, sochilish kesimi esa o'zining ma'nosi bo'yicha musbat bo'lishi kerak.

Agar fazoviy burchak  $d\sigma = 2\pi \sin\theta d\theta$  ga o'tilsa, differensial kesim uchun formula

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right| d\theta \quad (3.53)$$

ko'rinishga keladi.

### 3.5.2. To'qnashish jarayonlari

To'qnashish jarayonida jismlarning impulslari va energiyalari o'zgaradi. Demak, bir jismdan ikkinchisiga uzatilgan energiya va impulslarning hisoblash masalasi qarab chiqilishi kerak. Energiya, impuls va tezliklarning qiymatlarini saqlanish qonunlari orqali topishi mumkin. Bu ish bir necha misollarda ko'rsatiladi.

**3.51-misol.** Boshlang'ich tezligi  $\mathbf{V}$  bo'lgan zarracha ikki qismga parchalandi. Parchalanish natijasida hosil bo'lgan zarrachalarning chiqish burchagini toping.

Zarrachalarning bittasini olaylik. Uning tezligi  $l$  va  $m$  sistemalarda  $\mathbf{v}$  va  $\mathbf{v}_0$  bo'lsin.  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$  munosabatni  $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$  ko'rinishda olib kvadratga ko'tarilsa

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos\theta = v_0^2 \quad (3.54)$$

formula olinadi. Bunda  $\theta$  —  $\mathbf{v}$  va  $\mathbf{V}$  vektorlar orasidagi ( $l$  — sistemadagi) burchak. Bu tenglama  $v$  ga nisbatan yechilsa

$$v_{1,2} = V \cos\theta \pm \sqrt{v_0^2 - V^2 \sin^2\theta} \quad (3.55)$$

formulaga kelinadi. Agar  $v_0 \geq V$  bo'lsa  $\theta$  burchak ixtiyoriy qiymatni qabul qilishi mumkin ya'ni, parchalanish natijasida hosil bo'lgan zarracha ixtiyoriy yo'nalishda uchib ketishi mumkin. Ammo  $v_0 < V$  bo'lsa  $\theta$  burchak chegaralangan bo'ladi:

$$|\sin\theta| \leq \frac{v_0}{V}. \quad (3.56)$$

Birinchi holda parchalanish mahsuloti  $\mathbf{V}$  ga nisbatan ixtiyoriy yo'nalishda harakat qilishi mumkin (shu jumladan, teskari yo'nalishda ham). Ikkinchi holda esa u  $\mathbf{V}$  ga nisbatan faqat oldinga qarab uchib chiqadi, bunda uchib chiqish burchagining maksimal qiymati quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\sin\theta_{\max} = \frac{v_0}{V}. \quad (3.57)$$

Agar  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$  va  $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$  munosabatlarni kvadratga ko'tarib ulardan  $V^2$  ni topib bir-biriga tenglashtirilsa

$$v \cos \theta = v_0 \cos \theta_0 + V \quad (3.58)$$

formula topiladi. Bu yerdan olingan  $V^2$  ni  $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$  ning kvadrati bilan tenglashtirilsa

$$v \sin \theta = v_0 \sin \theta_0 \quad (3.59)$$

ekanligi topiladi. Demak,  $l$  va  $m$ . sistemalardagi uchib chiqish burchaklari ( $\theta$  va  $\theta_0$ ) quyidagicha bog'langan ekan:

$$\theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{V + v_0 \cos \theta_0}. \quad (3.60)$$

Bu formulani  $\theta_0$  ga nisbatan yechib, burchaklar orasidagi teskari bog'lanishni ham topish qiyin emas:

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}. \quad (3.61)$$

Bu yerdagi  $\pm$  ishora yana  $v_0$  va  $V$  tezliklar orasidagi munosabatga bog'liq.

**3.5.2-misol.** Ikkita zarrachaning elastik to'qnashishi natijasida biridan ikkinchisiga uzatilgan energiya va impulsni toping.

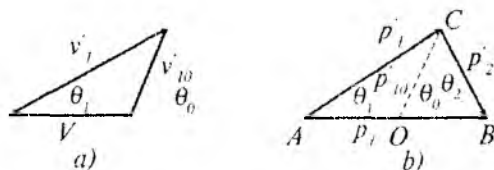
Zarrachalarning  $l$  sistemadagi to'qnashishgacha impulslarini  $\mathbf{p}_1$  va  $\mathbf{p}_2$ , to'qnashishdan keyingi impulslarini  $\mathbf{p}'_1$  va  $\mathbf{p}'_2$  deb olaylik. Impulsning saqlanish qonuni bo'yicha

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \quad (3.62)$$

To'qnashuv elastik, demak, to'qnashuv natijasida zarrachalarning ichki holatlari o'zgarmaydi.  $m$ -sistemada to'liq impuls hamma vaqt nolga teng:

$\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02} = \mathbf{p}'_{01} + \mathbf{p}'_{02} = 0$ , bu degani, to'qnashishdan oldin va keyin zarrachalarning impulsarlari son jihatdan o'zaro teng va qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi (3.8-rasmga qarang):

$$|\mathbf{p}_{01}| = |\mathbf{p}_{02}|, \quad |\mathbf{p}'_{01}| = |\mathbf{p}'_{02}|.$$



3.7- rasm. Sochilish jarayoni: tezliklar va impulslar.

Bu esa o'z navbatida, ularning energiyalari ham o'zgarishini bildiradi. Demak,  $m$ -sistemada to'qnashish bor-yo'g'i zarrachalarning yo'nalishlarining o'zgarishiga olib keladi. 3.8-rasmda ko'rsatilganidek  $m$  - sistemada zarrachalarning to'qnashish natijasidagi og'ish burchagini  $\theta_0$  deb belgilaylik. Bu burchakni topish masalasini alohida ko'rib chiqdik (-ga qarang).

Ikki jism uchun inersiya markazi sistemasiga o'tish formulalarini eslaylik:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (3.63)$$

Bunda  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  - zarrachalarining  $m$  - sistemadagi koordinatlari. Bu formulalardan vaqt bo'yicha hosila olinsa

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}. \quad (3.64)$$

Ikkinchi munosabatni  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  deb ham yozib olish mumkin ( $m$ -sistemaning  $l$ -sistemaga nisbatan tezligini  $\mathbf{V}$  deb olinsa  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i0} + \mathbf{V}$  bo'ladi). (3.64) formuladan

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} = \frac{m}{m_1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} = -\frac{m}{m_2} \mathbf{v} \quad (3.65)$$

ekanligi kelib chiqadi, bu yerda  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  - keltirilgan massa.

Zarrachalardan birini ( $m_2$  massalisini) to'qnashishdan oldin qo'zg'almasdan turibdi deb olaylik (shu zarracha qo'zg'olmasdan turgan sistema  $l$ -sistema deb qaraladi). Yani,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ . Impulslarga o'tilsa

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$$

bo'ladi. Undan tashqari  $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_{10} + \mathbf{V}$  va

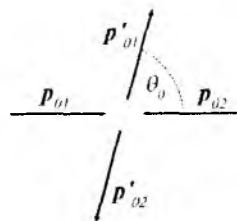
$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_{20} + \mathbf{V}$  formulalarning birinchisini  $m_1$  ga

va ikkinchisini  $m_2$  ga ko'paytirilsa  $\mathbf{p}'_{10} = -\mathbf{p}'_{20}$  ni hisobga olgan holda

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_{10} + \frac{m}{m_2} \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_{10} + \frac{m}{m_1} \mathbf{p}_2 \quad (3.66)$$

formulalarga kelinadi. Ularni 3.9-rasm bilan solishtirilsa  $\overline{OB} = \frac{m}{m_1} \mathbf{p}_1$

ekanligini topamiz. Ikkinchi tomondan (3.91) formulalarning birinchisidan



3.8-rasm.  $m$ -sistemada zarrachalarning impulslari.

$\mathbf{p}_{10} = \frac{m}{m_1} \mathbf{p}_1$  ekanligi kelib chiqadi.  $|\mathbf{p}_{10}| = |\mathbf{p}'_{10}|$  va  $\overline{OC} = \mathbf{p}'_{10}$  munosabatlar qo'llanilsa darhol  $OB = OC$  ekanligi topiladi. Bu  $\theta_2 = (\pi - \theta_0)/2$  ekanligini beradi.

Impulslar va tezliklar orasidagi munosabatlarni (3.8-rasmdan ko'rish mumkin. Bu yerda  $\theta_1$  – birinchi zarrachaning to'qnashish natijasidagi og'ish burchagi,  $m$  – sistemada unga  $\theta_0$  – burchak mos keladi. Shu rasmdan ko'rish qiyin emaski

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{v'_{10} \sin \theta_0}{v'_{10} \cos \theta_0 + V}. \quad (3.67)$$

Birinchi tomondan, yuqorida aytilganidek,  $|\mathbf{v}'_{10}| = |\mathbf{v}_{10}|$ , yoki,  $v'_{10} = v_{10}$ ,

ikkinchi tomondan  $v_{10} = \frac{m}{m_1} v$ , uchinchi tomondan

$\mathbf{V} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 = \frac{m}{m_2} \mathbf{v}_1 = \frac{m}{m_2} \mathbf{v}$  (chunki  $\mathbf{v}_2 = 0$ ). Burchaklar orasidagi hamma olingan natijalarni bir joyga yig'ilsa

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \frac{m_1}{m_2}}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \theta_0}{2} \quad (3.68)$$

formulalarga kelinadi.

$m_2 > m_1$  holda birinchi jismning  $e$ -sistemadagi sochilish burchagi ixtiyoriy bo'lishi mumkin. Agar  $m_2 \gg m_1$  bo'lsa  $\theta_1 \approx \theta_0$  bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda ikkinchi jism qo'zg'almasdan turgan markaz rolini o'ynaydi deyish ham mumkin.

Agar  $m_1 \gg m_2$  bo'lsa, birinchi zarrachaning sochilish burchagi quyidagi maksimal qiymat bilan chegaralangan bo'ladi:

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.69)$$

Birinchi zarrachadan ikkinchisiga uzatilgan energiyani topaylik. Buning uchun (3.66) formulaning birinchisi kvadratga ko'tariladi va topiladi:

$$p_1^2 = p_1'^2 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta_0}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (3.70)$$

Bu munosabatni tezliklar tilida ham yozib olishi mumkin:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \theta_0}}{m_1 + m_2} v. \quad (3.71)$$

(3.66) formulaning ikkinchisini kvadratga ko'tarib

$$v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (3.72)$$

ni ham topish mumkin. Demak,

$$\Delta E_1 = E_1' - E_1 = \frac{p_1'^2 - p_1^2}{2m_1} = -\frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} E_1. \quad (3.73)$$

Ko'rinib turibdiki, hamma vaqt  $\Delta E < 0$  – birinchi zarracha energiya yo'qotadi, (boshida qo'zg'olmay turgan) ikkinchi zarracha esa energiya oladi. Bunday energiya uzatilishi  $\theta = \pi$  bo'lganda maksimal qiymatga ega bo'ladi.  $\theta = \pi$  esa to'qnashish natijasida birinchi zarrachaning yo'nalishi teskarisiga almashgan holga mos keladi. Ikkinchi zarrachaning energiyasi boshida nolga teng edi, uning to'qnashish natijasida olgan energiyasi birinchi zarracha yo'qotgan energiyaga teng bo'ladi:

$$E_2' = -\Delta E_1. \quad (3.74)$$

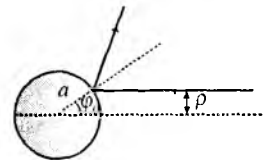
$m_1 = m_2$  holga alohida to'xtalib o'taylik. Bu holda  $\Delta E_1 = -\sin^2 \frac{\theta_0}{2} E_1$  bo'ladi. Ko'rib turibmizki, agar  $\theta = \pi$  bo'lsa  $\Delta E_1 = -E_1$  bo'ladi: nishonga tushayotgan birinchi zarracha hamma energiyasini boshida qo'zg'olmasdan turgan ikkinchi zarrachaga beradi va o'zi to'xtab qoladi, ikkinchi zarracha esa birinchi zarrachaning boshlang'ich yo'nalishida uning tezligi bilan harakat qilib ketadi.

### 3.5.3. Sochilish jarayonlariga misollar

**3.5.3-misol.** Kichik zarracha radiusi  $a$  bo'lgan qattiq sharda sochilyapti. Sochilish kesimini toping. Sharning potensialini ifodalab olaylik:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (3.75)$$

Agar tushayotgan zarrachaning nishon masofasi  $a$  dan katta bo'lsa u shar bilan ta'sirga kirmaydi. 3.9-rasmdan ko'rinib turibdiki



3.9- rasm. Qattiq sharda sochilish.

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2}. \quad (3.76)$$

Buni (3.52) formulaga olib borib qo'yamiz:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \pi a^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.77)$$

To'liq kesim

$$\sigma = \int d\sigma = \pi a^2 \quad (3.78)$$

shar ekvatorial kesimining yuzasiga teng. Sochilish kesimi nima uchun shunday deyilishini shu misolda tushunish mumkin – misoldagi sharda sochilish uchun zarracha shar ekvatorial kesimiga teng bo'lgan  $\pi a^2$  maydonga tushishi kerak, aks holda sochilish umuman ro'y bermaydi.

**3.5.4-misol.** Kulon maydonida sochilish kesimini toping (**Rezerford formulasi**).

Kulon maydoni

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (3.79)$$

potensial bilan aniqlanadi. (3.50) formulaga shu potensialni qo'yib integral-lansa

$$\varphi_0 = -\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_{\infty}^2 r}}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}\right)^2}} \quad (3.80)$$

ekanligi topiladi ( $r_{\min}$  uchun (3.38) formulani bu punktda qo'llanilgan terminlarda yozib olish kerak). Bu yerdan  $\rho$  ni topish qiyin emas (ikkinchi tenglikka o'tishda (3.73) dan foydalandik):

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.81)$$

Kesim (3.52) bo'yicha topiladi:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (3.82)$$

Bu formulani fazoviy burchak tilida ham ifodalab olaylik:



$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2m\nu_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.83)$$

Olingan formula *Rezerford formulasi* deyiladi.

**3.5.5-misol.** Cheksizlikda tezligi  $\nu$  bo'lgan elektron qo'zg'olmasdan turgan ikkinchi elektronga  $\rho$  nishon masofasi bilan tushdi. Ikkala elektronning to'qnashishdan keyingi tezliklarini toping.

(3.71) va (3.72) formulalar bo'yicha  $m_1 = m_2 = m$  holda

$$\nu_1' = \cos \frac{\theta_1}{2} \nu, \quad \nu_2' = \sin \frac{\theta_1}{2} \nu \quad (3.84)$$

bo'ladi. (3.68) bo'yicha esa

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \theta_0}{2}$$

ga ega bo'linadi. Ko'rinib turibdiki, zarrachalar orasidagi uchib ketish burchagi ( $l$ -sistemada)  $\pi/2$  ga teng.

Burchak  $\theta_0$  bilan masalaning parametrlari (3.81) formula orqali bog'linadi:

$$ctg^2 \frac{\theta_0}{2} = \frac{4E^2 \rho^2}{\alpha^2}. \quad (3.85)$$

$l$ -sistemadagi burchaklar uchun esa quyidagilarni topish qiyin emas:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\alpha}{2E\rho}. \quad (3.86)$$

To'qnashishdan keyingi tezliklar quyidagicha aniqlanadi:

$$\nu_1' = \frac{2E\rho\nu}{\sqrt{\alpha^2 + 4E^2\rho^2}}, \quad \nu_2' = \frac{\alpha\nu}{\sqrt{\alpha^2 + 4E^2\rho^2}}. \quad (3.87)$$

Agar  $E_1' = m\nu_1'^2/2$  va  $E_2' = m\nu_2'^2/2$  larni hisoblab ularning yig'indisini olinsa bo'lishi kerak bo'lgan munosabat topiladi:

$$E_1' + E_2' = \frac{m\nu^2}{2} = E. \quad (3.88)$$

**3.5.6-misol.**  $U = \frac{\beta}{r^2}, \beta > 0$  maydonda sochilish kesimini toping.

Berilgan potensialni yana (3.50) formulaga qo'yiladi va natijada quyidagi topiladi:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\beta}{mv_\infty^2}}} = \frac{\pi - \theta}{2}. \quad (3.89)$$

$\rho$  ni  $\theta$  orqali ifodalab, differensial kesim darhol topiladi:

$$d\sigma = 4\pi^3 \frac{\beta}{mv_\infty^2} \frac{\theta - \pi}{\theta^2(\theta - 2\pi)} d\theta. \quad (3.90)$$

**3.5.7-misol.**  $U = -\frac{\beta}{r^2}$ ,  $\beta > 0$  maydonda markazga tushish kesimini toping.

Markazga tushish uchun (3.34) shart bajarilishi kerak. Bizning holimizda

$$\beta > \frac{M^2}{2m}, \quad \text{yoki}, \quad \beta > \frac{mv_\infty^2}{2} \rho^2$$

bo'lishi kerak. Boshlang'ich tezligi berilgan bo'lganda nishon masofasi

$$\rho_{max} = \sqrt{\frac{2\beta}{mv_\infty^2}}$$

dan oshmagan zarrachagina markazga tushishi mumkin. Markazga tushish to'liq kesimi

$$\sigma = \pi \rho_{max}^2 = \frac{2\pi\beta}{mv_\infty^2} \quad (3.91)$$

ga teng bo'ldi. Shu yerda kesimning ma'nosiga yana bir qaytaylik: markaz atrofidagi  $\rho_{max}$  radiusli yuzani nishonga ololgan zarracha markazga tushadi, shu yuzali maydonchaga tushmagam zarracha markazga tushmaydi.

**3.5.8-misol.** Radiusi  $R$  va nassasi  $M$  bo'lgan sharning ustiga massasi  $m \ll M$  bo'lgan va shu jism bilan Nyuton qonuni bo'yicha o'zaro ta'sir qiladigan zarrachaning tushish kesimini toping.

Ikkala jism orasidagi potensial

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

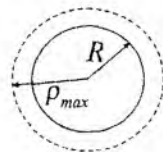
ko'rinishga ega. Ikkinchi jism birinchi jismning ustiga shunda tushgan bo'ladiki, qachonki  $r_{min} < R$  bo'lsa, bu yerda  $r_{min}$  — kichik zarracha trayektoriyasi va katta jismning markazi orasidagi minimal masofa.  $r_{min}$  ni topish sharti o'sha eskicha:  $E = U_{eff}(r_{min})$ . Bu yerdan topilgan  $r_{min}$  ni  $R$  ga tenglashtirishi kerak,  $\rho_{max}$  ni beradi:

$$r_{min} = R = -\frac{GM}{v_{\infty}^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{v_{\infty}^4} + \rho_{max}^2} \Rightarrow \rho_{max}^2 = R^2 + \frac{2RGM}{v_{\infty}^2}. \quad (3.92)$$

Shu bilan  $R$  radiusli tortish maydoni bor sharning ustiga tushish effektiv kesimi

$$\sigma = \pi \rho_{max}^2 = \pi R^2 \left( 1 + \frac{2GM}{Rv_{\infty}^2} \right) \quad (3.93)$$

bo'lib chiqdi. 3.10-rasmda bu formulaga illustratsiya keltirilgan —  $R$  — radiusli massiv sharga tushish effektiv kesimi shar kesimidan bir oz kattadir.



3.10- rasm.  
Radiusli sharga  
tushish effektiv  
kesimi.

Masalan, Yer shari uchun  $2GM_{\oplus}/R_{\oplus} = 1,25 \cdot 10^8$ ,

Quyosh uchun  $2GM_{\odot}/R_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{11}$ . Agar  $v_{\infty}$  sifatida

quyidagi tezlikni olinsa  $v_{\infty} = 10 \text{ km/sek} = 1 \cdot 10^6 \text{ cm/sek}$ .

Quyoshga tushish effektiv kesimi Quyosh kesimidan 38% katta bo'ladi. Yer shariga tushish effektiv kesimi esa Yer

sharining kesimidan bor-yo'g'ri  $1,25 \cdot 10^{-4}\%$  ga katta bo'ladi.

### 3.5.9-misol.

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} \quad (3.94)$$

maydonning markaziga tushish effektiv kesimini toping.

$\alpha, \beta > 0$  holdan boshlaylik. Effektiv potensialni topaylik:

$$U_{eff}(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} + \frac{mv_{\infty}^2}{2} \frac{\rho^2}{r^2} = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta - E\rho^2}{r^2}. \quad (3.95)$$

Agar  $\beta > E\rho^2$  bo'lsa, effektiv potensialning grafigi  $r_0 = \frac{2(\beta - E\rho^2)}{\alpha}$  nuqtada musbat maksimumga ega bo'ladi (3.11-a rasimga qarang):

$$(U_{eff})_{max} = \frac{\alpha^2}{4(\beta - E\rho^2)}. \quad (3.96)$$

Markazga tushish uchun zarrachaning energiyasi shu maksimal qiymatdan katta bo'lishi kerak:

$$E > \frac{\alpha^2}{4(\beta - E\rho^2)}.$$

Bundan nishon masofasining maksimal qiymatini topish mumkin:

$$\rho_{max}^2 = \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}.$$

Aks holda zarracha maydon markaziga yaqinlasha olmaydi. Effektiv kesimni topdik:

$$\sigma = \pi\rho_{max}^2 = \pi \left( \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \right). \quad (3.97)$$

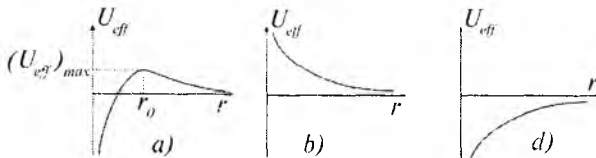
Kesim o'zining ta'rifi bo'yicha musbat son bo'lishi kerak. Buning uchun

$$E > \frac{\alpha^2}{4\beta} \quad (3.98)$$

bo'lishi kerak. Bu shart bajarilmasa  $\sigma = 0$  bo'ladi.

Agar  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  bo'lsa, effektiv potensial faqat itarish kuchiga olib keladi – markazga tushish ro'y bera olmaydi (3.12-b rasmga qarang).

$0 < \beta < E\rho^2$  bo'lib  $\alpha < 0$  bo'lsa, markazga tushish ro'y bera olmaydi – bu holda effektiv potensial  $r_0$  nuqtada minimumga ega (bu holga 3.4-rasm mos keladi). Agar  $0 < \beta > E\rho^2$ ,  $\alpha < 0$  bo'lsa ixtoriy energiyali zarracha markazga tushadi (3.11-rasmga qarang).



3.12- rasm. (3.94)-potensialga oid.

### 3-bobga mashq va savollar

1. Quyidagi Lagranj funksiyali sistemalar uchun to'xtash nuqtalarini toping:

a)  $L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2}$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = \sqrt{8}$ ;

b)  $L = \dot{x}^2 - x^2 + x$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ;

$$\text{c) } L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \cos x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{m}};$$

$$\text{d) } L = \dot{x}^2 - e^x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2;$$

$$\text{e) } L = \dot{x}^2 - \ln x, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \ln e;$$

$$\text{f) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U_0 e^{\lambda x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \geq \sqrt{\frac{2U_0}{m}};$$

$$\text{g) } L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{x}, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = \frac{2}{\sqrt{m}};$$

$$\text{h) } L = \dot{x}^2 - tg^2 x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2;$$

$$\text{k) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U_0 ch^{-2} kx, \quad E = -E_0 < 0,$$

2. Quyidagi Lagranj funksiyalari va boshlang'ich shartlar berilganda bir o'lchamli harakat tenglamalarini integrallang:

$$\text{a) } L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\text{b) } L = \dot{x}^2 + e^x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1;$$

$$\text{c) } L = \frac{\dot{x}^2}{x} - x, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1;$$

$$\text{d) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ax^4, \quad a > 0, \quad t = 0 \text{ da } E = 0.$$

3. Quyidagi potentsiallar uchun markazga eng yaqin va eng uzoq nuqtalarni toping:

$$\text{a) } U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0; \quad \text{b) } U(r) = \frac{1}{r^4}; \quad \text{c) } U(r) = \frac{1}{2} \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right);$$

$$\text{d) } U(r) = -U_0 \left( 1 + \frac{r^2}{c^2} \right)^{-1}.$$

4. Quyidagi potentsial maydonlardagi harakat integrallansin:

$$\text{a) } U(r) = -\frac{1}{2r^2}, \quad m = 1; \quad \text{b) } U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right), \quad m = 1.$$

5. Kulon (Nyuton) maydonida quyidagi saqlanuvchan kattaliklar borligi ko'rsatildi: energiya  $E$ , impuls momenti  $\mathbf{M}$  va 3.3.1-misolda kiritilgan  $\mathbf{A}$  vektori. Ular mustaqil emas balki ular orasida quyidagi ikkita munosabat borligini ko'rsating:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A}^2 = \frac{2E}{m} \mathbf{M}^2 + \alpha^2.$$

6. Oldingi misoldagi  $\mathbf{A}$  vektor markazdan perigeliyga qarab yo'nalgan ekanligini ko'rsating.

7.  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$ ,  $\alpha, \beta > 0$  maydonda harakat qilayotgan zarrachaning markazga tushish vaqtini toping. Boshlang'ich masofa  $-R$ . Zarrachamiz markaz atrofida necha marta aylanishga ulguradi?

8.  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$ ,  $\alpha, \beta > 0$  maydonda statik muvozanat nuqtasini toping.

Bu nuqta barqaror muvozanat nuqtasi bo'ladimi?

9. Quyidagi maydonlar berilgan:

$$\text{a) } U(r) = -\alpha e^{-kr}/r; \quad \text{b) } U(r) = -Ve^{-k^2 r^2}.$$

Impuls momenti  $M$  ning qanday qiymatlarida bu maydonlarda finit harakat qilish mumkin?

10.  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  maydonda harakat tenglamalarini qutb sistemasida yozing va ularni integrallang.

11.  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$  maydonda  $m$  massali zarracha  $r_0$  radiusli aylana orbita bo'yicha harakat qilmoqda.  $n < 2$  bo'lganda bu orbita kichik tebranishlarga nisbatan barqaror bo'lishini ko'rsating. Javobni 8-masala bilan taqqoslang.

12.  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  maydonda  $R$  masofadan markazga tushish vaqtini toping. Zarrachaning boshlang'ich tezligi nolga teng.

13. Cheksizlikdan  $v$  tezlik va  $p$  nishon parametri bilan  $m_1$  massali zarracha  $m_2$  massali qo'zg'olmasdan turgan zarrachaga tushmoqda. Ular

orasidagi o'zaro ta'sir potentsiali  $U(r) = \alpha/r^n, \alpha > 0$ . Zarrachalar orasidagi eng kichik masofani toping.

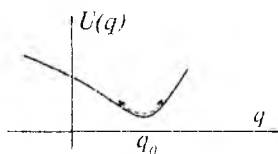
14. Boshida qo'zg'olmasdan turgan  $m$  massali zarrachaga huddi shunday massali zarracha cheksizlikdan  $v$  tezlik bilan tushmoqda. Zarrachalarning o'zaro potentsiali  $U = \alpha/r^n$ , to'qnashish — markaziy. Tushayotgan zarra-  
chaning to'xtash nuqtasini toping.

15.  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \alpha, \beta > 0$  maydonda zarrachaning trayektoriyasini

toping. Perigeliyni ( $r = r_{min}$  nuqtami) ketma-ket o'tilgandagi burchak farqi  $\Delta\varphi$  ni toping. Radial tebranishlar davri  $T_r$  va to'liq aylanish davri  $T_0$  ni toping. Trayektoriya yopiq bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

### 4.1. Bir o'lchamli sistemalar

Tebranishli harakat qilishi mumkin bo'lgan fizik sistemalarning soni ko'p. Bu sistemalar bir-biridan qancha farq qilishidan qat'i nazar ularda ro'y beradigan **kichik tebranishlar** deb atalgan tebranishlar juda keng tarqalgan bo'lib, ularning matematik nazariyasi hamma sistemalar uchun ham bir xildir. Mana shu nazariyani o'rganishga o'taylik.



4.1- rasm. Muvozanat nuqtasi atrofidagi kichik tebranish.

Bizga ma'lum bir potensial maydon  $U(q)$  da harakat qilayotgan erkinlik darajasi birga teng bo'lgan bir fizik sistema berilgan bo'lsin.

$U(q)$  potensial maydon  $q_0$  nuqtada minimumga ega bo'lsin, ya'ni

$$U'(q_0) = 0, \quad U''(q_0) > 0, \quad (4.1)$$

bo'lsin. Agar potensial energiyani shu nuqta atrofida qatorga yoyib qatorning faqatgina kvadratik hadigina qoldirilsa

$$U(q) \approx U(q_0) + \frac{1}{2}(q - q_0)^2 U''(q_0) + \dots \quad (4.2)$$

formulaga ega bo'lamiz. Kichik tebranishlar yaqinlashuvi mana shu yaqinlashuvga mos keladi. Qulaylik uchun  $q - q_0 = x$  deb belgilaylik. Kinetik energiyani ham shu yaqinlashuvda olinadi:

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (4.3)$$

( $a(q_0) = m$  deb olindi). Natijada sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (4.4)$$

ko'rinishni oladi, bu yerda  $U''(q_0) = k$  belgilash ham kiritildi. Harakat tenglamasini topish qiyin emas:



$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (4.5)$$

Bunday tenglama **erkin tebranishlar** tenglamasi deyiladi. Ba'zi bir hollarda uni **garmonik ossilator** tenglamasi ham deyiladi. Ko'pincha uni

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.6)$$

ko'rinishga keltirib olish qulaydir. Kichik tebranishlarning ((4.2) va (4.4) -yaqinlashuvning) ma'nosi endi tushunarli bo'ldi - bu yaqinlashuvda harakat tenglamasi **chiziqli** tenglama bo'lar ekan. Shu sababdan kichik tebranishlar ko'pincha chiziqli tebranishlar ham deyiladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (4.7)$$

ko'rinishga ega. Ko'rinib turibdiki, vaqt  $\Delta t = 2\pi / \omega$  qiymatga o'zgar-ganda yechim o'zining eski qiymatiga qaytib keladi:

$$x(t + \Delta t) = x(t), \quad (4.8)$$

demak, (4.4) ko'rinishdagi Lagranj funksiyasiga ega bo'lgan sistema

$\frac{\omega}{2\pi}$  chastota bilan garmonik tebranishli harakat qilayotgan sistema ekan. Odatda,  $\omega/2\pi = \nu$  kattalikni **tebranish chastotasi**,  $\omega$  ni esa **siklik chastota** deyiladi. Lekin, ko'pincha,  $\omega$  ni chastota deb ham ketilaveradi, biz ham shu atamadan foydalanamiz.

Masalada boshlang'ich shartlar bo'lishi kerak —  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ . Ko'rinib turibdiki, noma'lum  $c_1$ ,  $c_2$  lar mana shu **boshlang'ich holat**  $x_0$  va **boshlang'ich tezlik**  $v_0$  orqali ifodalanadi:

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega}. \quad (4.9)$$

Yechim fizikaviy kattaliklar orqali ifodalandi:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (4.10)$$

(4.7) yechimni bir muncha hollar uchun qulayroq bo'lgan ko'rinishga keltririb olish uchun  $c_1 = a \cos \alpha$ ,  $c_2 = a \sin \alpha$  almashtirish bajaraylik (ikkita noma'lum  $c_1$ ,  $c_2$  larning o'rniga ikkita yangi noma'lumlar —  $a$ ,  $\alpha$  kiritildi). Natijada

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.11)$$

formula olinadi. Paydo bo'lgan  $a$  — **tebranish amplitudasi**,  $\omega t + \alpha$  — **tebranish fazasi** va  $\alpha$  — **boshlang'ich faza** deyiladi. Tebranish energiyasini topaylik:

$$E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2. \quad (4.12)$$

**4.1.1-misol.** Matematik mayatnik. (1.104) va (1.105) tenglamalar orqali biz matematik mayatnikni kiritgan edik. Bu tenglamalar kichik tebranishlarga mos kelmaydi, kichik tebranishlarni olish uchun (1.104) Lagranj funksiyasida  $\cos \varphi$  ni barqaror muvozanat nuqtasi  $\varphi = 0$  atrofida kvadratik hadgacha qatorga yoyib

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots, \quad (4.15)$$

o'zgartmas son  $mg/l$  ni Lagranj funksiyasidan tashlab yuborib, quyidagi Lagranj funksiyasiga o'tish kerak:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{2} \varphi^2. \quad (4.16)$$

Mos keluvchi harakat tenglamasini keltirib chiqarish qiyin emas (uni (1.105) dan  $\sin \varphi \approx \varphi + \dots$  yoyilma orqali olish ham mumkin edi):

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (4.17)$$

Ko'rinib turibdiki, chastota  $\omega$  tebranish amplitudasiga bog'liq emas, bu — kichik (chiziqli) tebranishlarning eng muhim xossasi. Tebranishlar davri

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.18)$$

faqat mayatnik osilgan ipning uzunligiga bog'liq ekan. Masalan, mayatnikning davri bir sekundga teng bo'lsin desak uning uzunligi  $l = g / (4\pi^2) \approx 25$  sm bo'lishi kerak.

**4.1.2.-misol.** Guygensning sikloidal izoxron mayatniki (4.2-c rasimga qarang).

Bu mayatnikka osib qo'yilgan massa  $m$  ning harakati sikloida bilan chegaralangandir:

$$x = l(\varphi - \sin \varphi), \quad y = l(1 + \cos \varphi). \quad (4.19)$$

Sistemaning Lagranj funksiyasini topaylik. Kinetik energiya:

$$T = \frac{ml}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2ml^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}^2, \quad (4.20)$$

Potensial energiya

$$U = -mgl \cos \varphi. \quad (4.21)$$

Masalaga mos keluvchi o'zgaruvchiga o'taylik. Kerakli o'zgaruvchini ko'rish uchun kinetik hadga nazar tashlaylik:

$$2ml^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}^2 = 8ml^2 \left( \frac{d}{dt} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2. \quad (4.22)$$

Ko'rinib turibdiki, yangi o'zgaruvchi sifatida

$$\psi = \cos \frac{\varphi}{2}$$

ni tanlab olinsa va potensial energiyadan o'zgarmas sonni ajratib tashlab yuborsak Lagranj funksiyamiz quyidagi ko'rinishga keladi:

$$L = 8ml^2 \dot{\psi}^2 - 2mgl\psi^2. \quad (4.23)$$

Harakat tenglamasi:

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4.24)$$

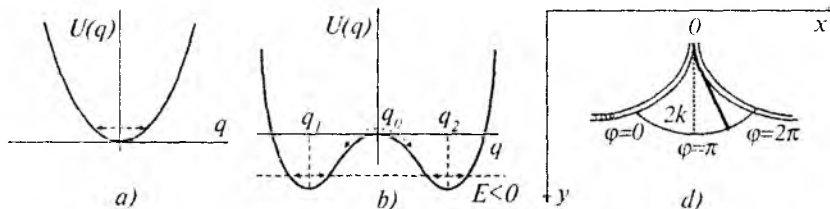
**4.1.3-misol.** (4.1)-shartlarga qaytaylik. Quyidagi potensial maydondagi kichik tebranishlar masalasini ko'raylik:

$$U(q) = \frac{k}{2} q^2 + \frac{\beta}{4} q^4, \quad \beta > 0. \quad (4.25)$$

Muvozanat holatlarini  $U'(q) = 0$  shartga mos keluvchi  $kq + \beta q^3 = 0$  tenglamadan topish mumkin. Agar  $k > 0$  bo'lsa bu tenglamaning haqiqiy sonlar sohasida bitta yechimi bo'ladi:  $q_0 = 0$ . Bu holga mos keluvchi grafik 4.2-a rasmda ko'rsatilgan. Agar  $k < 0$  bo'lsa bu tenglamaning uchta yechimi bor:

$$q_0 = 0, \quad q_1 = -\sqrt{\frac{|k|}{\beta}}, \quad q_2 = +\sqrt{\frac{|k|}{\beta}}.$$

Ular 4.2-rasmda ko'rsatilgan. Ko'rinib turibdiki,  $q_0$  nuqta turg'un muvozanat nuqtasi emas, bu nuqta atrofida tebranib bo'lmaydi, bu nuqtadan o'zgina siljigan massa o'ng yoki chap o'ralarga tushib ketishi kerak. Bu -



4.2. -rasm.

lokal maksimum nuqtasi, bu nuqtada  $U''(q_0) < 0$ . Tebranish chastotasining kvadrati uchun manfiy bo'lgan  $U''(q_0) = -|k|/m$  qiymatga egamiz.  $q_{1,2}$  nuqtalarda esa  $U''(q_0) > 0$ , bu nuqtalar lokal minimum nuqtalari. Agar

jismning energiyasi manfiy  $E < 0$  bo'lsa (albatta,  $E > U_{\min} = -\frac{k^2}{4\beta}$  bo'lishi

ham kerak) u mana shu minimumlar atrofida tebranuvchan harakat qilishi mumkin. Bu nuqtalar atrofidagi kichik tebranish chastotasi

$\omega_{1,2} = \sqrt{U''(q_0)} = \sqrt{2k/m}$ . Shu maydonda tebranayotgan va to'liq energiyasi manfiy bo'lgan moddiy nuqta shu ikkala minimumning birida finit harakat qilishi kerak. Qaysi birida? Agar sistemada  $k > 0 \rightarrow k < 0$  o'tish ro'y bersa  $k=0$  nuqta o'tilayotganida sistema yoki chap yoki o'ng o'raga tushib ketadi, «Qaysi biriga?» degan savolga javob berib bo'lmaydi, ikkala minimum simmetrik joylashgan va bir xil qiymatga ega. Faraz qilaylik, bu  $q_2$  nuqta bo'lsin. Agar sistema mana shu  $q_2$  nuqta atrofida tebranayotgan bo'lsa harakat tenglamalarining shunga mos keluvchi yechini

$$q(t) = q_2 + a \cos(\omega_2 t + \alpha) \quad (4.26)$$

bo'ladi. Potensial  $U(q) = U(-q)$  simmetriyaga ega bo'lganligiga qaramay yechim bu simmetriyaga ega emas.

## 4.2. Majburiy tebranishlar

### 4.2.1. Umumiy nazariya

Turg'un muvozanat holati atrofida kichik tebranish bilan harakat qilayotgan jismga tashqi kuch ta'sir qilayotgan bo'lsin. Bunday masala **majburiy tebranishlar** masalasi deyiladi. Albatta, tashqi kuchni ham

kichik deb qarash kerak, aksincha, uning ta'siri ostida tebranish amplitudasi katta bo'lib ketishi, va shunga ko'ra, kichik tebranish yaqinlashuvdan chiqib ketish mumkin.

Masalani aniqroq tushinish uchun ko'z oldimizga Yer tortishish maydonida kichik tebranayotgan zaryadlangan mayatnikni keltirishimiz mumkin. Shu mayatnikka tashqi (kuchli bo'lmagan) elektr maydoni ta'sir qilayotgan bo'lsin (bir o'lehamli sistemalar haqida gap ketar ekan, ushbu elektr maydoni ham  $q$  o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lishi kerak). Tushunarliki, bu tashqi kuch ta'sirida mayatnikning tebranishlari ham o'zgaradi. Tashqi kuch umumiy holda vaqtga bog'liq bo'lishi mumkin (yuqoridagi misolda elektr maydon o'zgaruvchan bo'lishi mumkin). Kuchning kelib chiqishini tashqi potensial maydon bilan bog'laylik. Shu potensial maydonni qatorga yoyaylik:

$$U_T(x, t) = U_T(0, t) + xU_T'(0, t) + \dots \quad (4.27)$$

Chiziqli yaqinlashuvga mos kelish uchun tashqi potensialning yoyilmasida  $x$  bo'yicha chiziqli hadnigina qoldirildi. Umumiy ta'rif bo'yicha  $-\partial U/\partial x$  ifoda kuchni bildirar edi, shu sababdan  $-U_T'(0, t) = F(t)$  tashqi kuchga mos keladi. (4.27) dagi birinchi had faqat vaqtning funksiyasi bo'lgani uchun Lagranj funksiyasidan uni tashlab yuboramiz. Natijada sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mx^2 + xF(t) \quad (4.28)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Harakat tenglamasini yozib olamiz:

$$m\ddot{x} + kx = F(t), \quad (4.29)$$

yoki

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (4.30)$$

Agar bir jinsli tenglamaning yechimini

$$x_0(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (4.31)$$

deb belgilab olib (4.30) ga o'zgaraslarni variatsiyalash metodi qo'llansa quyidagi yechim olinadi ( $x_0(t)$  ni yana (4.11) ko'rinishda olamiz):

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t d\tau F(\tau) \sin(\omega(t - \tau)). \quad (4.32)$$

Formulani tushunish uchun uni xususiy hollarga qo'llab ko'rish kerak.

#### 4.2.2. Tashqi kuch o'zgarmas bo'lgan hol

Birinchi xususiy hol sifatida tashqi kuch o'zgarmas bo'lgan holni ko'raylik:  $F(t) = F_0$ . (4.32) formuladan ko'rinib turibdiki, bu holda tebranuvchi sistemaning eng asosiy xarakteristikasi - tebranish chastotasi o'zgarmaydi.

Misol sifatida 4.3-rasmda ko'rsatilgan sistemani olib ko'raylik. Bu yerda tashqi kuch — gravitatsion maydon. Koordinata o'qi  $x$  yuqoriga qaragan deylik,  $x = 0$  nuqta sistemaning pastdagi ulangan nuqtasi bo'lsin. Bu holda sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - k(x-l)^2 - mgx \quad (4.33)$$

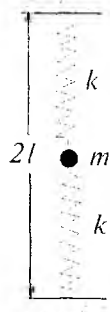
bo'ladi.

Axamiyat bering, bikirlik koeffitsiyenti  $k$  ning oldida  $1/2$  ko'paytuvchi yo'q, sababi — massamizga ta'sir qilayotgan elastik kuch ikki tomondan ta'sir qilayapti — pastdan va yuqoridan. Agar tashqi gravitatsion maydon bo'lmasa sistemaning barqaror muvozanat nuqtasi  $x_0 = l$  bo'lgan bo'lar edi. Tashqi maydon ta'sirida esa sistemaning muvozanat nuqtasi siljiydi:

$$U'(t) = -2k(x_0 - l) - mg = 0 \Rightarrow x_0 = l - \frac{mg}{2k} \quad (4.34)$$

Sistemaning tebranish chastotasi:

$$\omega^2 = \frac{U''(x_0)}{m} = \frac{2k}{m} \quad (4.35)$$



tashqi maydon bo'lmagan holdan farq qilmaydi. Bularni bevosita Lagranj funksiyasi tilida ham ko'rish mumkin edi, buning uchun potensial hadni to'liq kvadrat ko'rinishiga keltirib o'zgarmas hadlarni tashlab yuborish kerak:

4.3- rasm.  
Bir jinsli  
tashqi  
maydondagi  
sistema.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - k\left(x - l + \frac{mg}{2k}\right)^2 \quad (4.36)$$

Endi (4.32) formulaga murojaat ( $F = -mg$  deb olish kerak) qilaylik:

$$x_0(t) = a \cos(\omega t + \alpha) - \frac{mg}{2k}(1 - \cos(\omega t)). \quad (4.37)$$

Ammo  $a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t) = \bar{a} \cos(\omega t + \bar{\alpha})$ , bu yerda  $\bar{a}, \bar{\alpha}$  – yangi o'zgarmlar, demak, olingan tebranishlar tashqi kuch yo'q holdan faqat umumiy  $-mg/(2k)$  siljishga farq qiladi.

### 4.2.3. Tashqi kuch davriy bo'lgan hol

Fizikaviy masalalarning ichida tashqi kuch davriy bo'lgan hol eng qiziqarli holdir. Bu holga

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta)$$

ifoda mos keladi. (4.32) integralni hisoblansa ikki xil hadlar olinadi: yechimning birinchi qismi:

$$\frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta), \quad (4.38)$$

yechimning ikkinchi qismi:

$$\frac{f}{m\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (\gamma \sin \beta \sin(\omega t) - \omega \cos \beta \cos(\omega t)). \quad (4.39)$$

Ikkinchi yechim  $\gamma \neq \omega$  bo'lgan holda (4.32) dagi noma'lum konstantalarni qayta ta'riflashga olib keladi holos (chunki ushbu qo'shimcha hadlar yana o'sha  $\omega$  chastotali tebranishlardir), shuning uchun  $\gamma \neq \omega$  holda bu hadlar alohida yozilmaydi. Ammo  $\gamma \rightarrow \omega$  bo'lgan holda bu hadlarning roli muhimdir, tashqi kuchning chastotasi sistemaning xususiy chastotasiga yaqinlashganda **rezonans** hodisasi ro'y beradi.

Demak,  $\gamma \neq \omega$  hol uchun yechimining ko'rinishi aniqlandi:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (4.40)$$

Sistemada bir vaqtda ikkita tebranish ro'y beradi — biri  $\omega$  chastota bilan, ikkinchisi  $\gamma$  chastota bilan.

Ammo  $\gamma \rightarrow \omega$  bo'lgan holda (4.39) hadlar hisobga olinmasa bo'lmaydi, (4.40) formuladagi ikkinchi had bu holda cheksiz o'sa

boshlaydi, bu esa bu yechimning ko'rayotgan holimizda qo'llanishi mumkin emasligini bildiradi. Quyidagicha yo'l tutamiz: (4.39) va (4.38) yechimlarning yig'indisini olamiz,  $\gamma = \omega + \varepsilon$  deymiz va  $\varepsilon \rightarrow 0$  limitga o'tamiz. Shu limitda quyidagi yechimni topamiz:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} \left( t \sin(\omega t + \beta) - \frac{1}{\omega} \sin \beta \sin(\omega t) \right). \quad (4.41)$$

Topilgan yechimdagi ikkinchi had vaqt o'tishi bilan o'sa boshlaydi, rezonans degan hodisa mana shu cheklanmagan o'sishga olib kelishi bilan xarakterlanadi. Albatta, kichik tebranishlar yaqinlashuvidan chiqib ketmaslik uchun (4.41) formuladan faqatgina tebranish amplitudasi hali yetarlicha kichik bo'lgan hollardagina foydalanish mumkin.

#### 4.2.4. Tashqi kuch bajargan ish

(4.28) Lagranj funksiyasiga mos keluvchi energiya

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 - xF(t) \quad (4.42)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu «energiya» saqlanuvchi kattalik emas, buni Lagranj funksiyasining vaqtga oshkora bog'liqligidan ham tushunish mumkin. Tashqi kuch sistemaga ta'sir qilar ekan sistemaning energiyasi bu kuch ta'siri ostida o'zgarishi kerak. Energiyaning o'zgarishi quyidagicha ta'riflanadi:

$$\Delta E = E(+\infty) - E(-\infty). \quad (4.43)$$

(4.42) ifodadagi birinchi ikki hadni

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{m}{2} |\dot{x} + i\omega x|^2 = \frac{m}{2} |\zeta|^2, \quad \zeta = \dot{x} + i\omega x. \quad (4.44)$$

ko'rinishga keltirib olaylik.<sup>1</sup>  $x_0 = a \cos(\omega t + \alpha)$  uchun

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + i\omega x_0 &= -a\omega \sin(\omega t + \alpha) + i\omega a \cos(\omega t + \alpha) = \\ &= i a \omega \exp(i\omega t + i\alpha) \end{aligned} \quad (4.45)$$

va  $x_1$  uchun esa

---

<sup>1</sup> Kompleks tahlildan ma'lumki,  $z = x + iy$  kompleks son uchun  $|z|^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + i\omega x_1 &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t d\tau F(\tau) [\cos(\omega(t-\tau)) + i\omega \sin(\omega(t-\tau))] = \\ &= \frac{1}{m} \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^t d\tau F(\tau) \exp(-i\omega\tau) \end{aligned} \quad (4.46)$$

ifodalarga o'taylik. Bu yerda tashqi kuch  $t = -\infty$  vaqt momentidan ta'sir qila boshladi deb olindi. Ikkala formula birlashtirilsa

$$\zeta(t) = \exp(i\omega t) \left\{ i a \omega \exp(i\alpha) + \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t d\tau F(\tau) \exp(-i\omega\tau) \right\} \quad (4.47)$$

ga kelinadi. Bu funksiyaning moduli

$$|\zeta(t)| = \left| i a \omega \exp(i\alpha) + \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t d\tau F(\tau) \exp(-i\omega\tau) \right|. \quad (4.48)$$

Undan tashqari,

$$x = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \zeta(t)$$

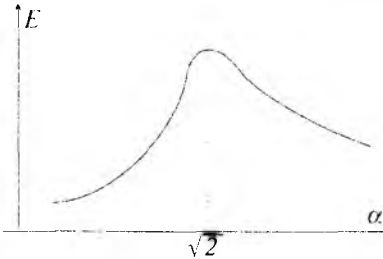
belgilashdan ham foydalanaylik<sup>1</sup>. Demak, tashqi kuch tomonidan sistemaga  $t = -\infty$  dan  $t = \infty$  gacha uzatilgan energiya

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(\infty) - E(-\infty) = \frac{m}{2} \left\{ |\zeta(\infty)|^2 - |\zeta(-\infty)|^2 \right\} - x F(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \\ &= \frac{m}{2} \left| i a \omega \exp(i\alpha) + \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau F(\tau) \exp(-i\omega\tau) \right|^2 - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 - \frac{F(t)}{\omega} \operatorname{Im} \zeta(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad (4.49)$$

formula orqali ifodalanar ekan. Agar boshlang'ich tebranishlar bo'lmasa ( $a = 0$ ) va tashqi kuch  $t \rightarrow \pm\infty$  da nolga intilsa bu formula soddalashadi:

<sup>1</sup> Kompleks son  $z = x + iy$  ning haqiqiy va mavhum qismlari  $x = \operatorname{Re} z$  va  $y = \operatorname{Im} z$  deb belgilanadi.

$$\Delta E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\tau F(\tau) \exp(-i\omega\tau) \right|^2. \quad (4.50)$$



4.4- rasm. Yutilgan energiya grafigi.

teng, shu sababli (4.50) formula Integralni hisoblaylik:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) \exp(-i\omega t) = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-t^2/\tau^2 - i\omega t). \quad (4.51)$$

Integral ostida quyidagi siljish bajaraylik:  $t \rightarrow t - \frac{i\omega\tau^2}{2}$ ,

$$\begin{aligned} F_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-t^2/\tau^2 - i\omega t) &= F_0 \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-t^2/\tau^2) = \\ &= \sqrt{\pi} F_0 \tau \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Demak, ossillatorga berilgan energiya

$$E = \frac{\pi F_0^2}{2m} \tau^2 \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right). \quad (4.53)$$

Olingan natijani tahlil qilaylik.  $\omega$  — sistemaning parametri, u berilgan o'zgarmas son. Tashqi kuchning ifodasidan ko'rinib turibdiki,  $\tau$  — tashqi kuchning noldan sezilarli farq qilish davri. Parametr  $\tau$  vaqt o'lchamligiga

#### 4.2.1-misol.

Ossillator  $F(t) = F_0 \exp(-t^2/\tau^2)$

kuch ta'sirida  $t = -\infty$  dan  $t = \infty$  gacha qancha energiya olgan? Masalani ikki holda ko'ring: a)  $t = -\infty$  da ossillator muvozanat holatida bo'lgan; b)  $t = -\infty$  da ossillatorning amplitudasi  $a$  ga teng bo'lgan.

**Yechish.** a) birinchi holda ossillatorning boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

toringing boshlang'ich energiyasi nolga

ega, demak,  $\omega\tau$  — o'lcamsiz parametr. Bu parametrni  $\omega\tau = \beta$  deb belgilansa berilgan energiya

$$E = \frac{\pi F_0^2}{2m\omega^2} \beta^2 \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \quad (4.54)$$

ko'rinishga keltiriladi. Bu funktsiyaning grafigi 4.4-rasmda ko'rsatilgan.

Oydinki,  $\beta \ll 1$  va  $\beta \gg 1$  bo'lganda (ya'ni, qisqa vaqtli zarba yoki, tashqi kuch sekin paydo bo'lib sekin yo'q bo'lsa) ossillatorga berilgan energiya kam bo'ladi,  $\beta = \sqrt{2}$  ( $\tau = \sqrt{2/\omega}$ ) bo'lganda esa ossillatorga berilgan energiya maksimal bo'ladi:

$$E_{\max} = \frac{\pi F_0^2}{m\omega^2 e}.$$

b) Bu holda ossillatorining boshlang'ich energiyasi bor. (4.49) formuladagi oxirgi had bo'lmaydi holos, chunki  $t \rightarrow \pm\infty$  da  $F(t) \rightarrow 0$  bo'ladi. Integralni hisoblash masalamizning a) qismida ko'rsatilgan, natija:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{m}{2} \left| i a \omega \exp(i\alpha) + \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau F(\tau) \exp(-i\omega\tau) \right|^2 - \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 = \\ &= \frac{\pi F_0^2}{2m} \tau^2 \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{2}\right) - a \omega \sqrt{\pi} F_0 \tau \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}\right) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ikkinchi hadning oldida minus ishorasi turibdi, sistema energiya oladimi yoki yo'qotadimi  $\sin\alpha$  ning ishorasiga bog'liq, bu yerda  $\alpha$  tashqi kuch bo'lmaganda ossillatorining  $t = 0$  momentidagi fazasi edi. Agar  $\pi \leq \alpha < 2\pi$  bo'lsa aniqki, ossillatori energiya yutadi,  $0 < \alpha < \pi$  holda esa energiya yo'qotishi mumkin. Ba'zi bir hollarda ossillator atomda harakat qilayotgan elektronning klassik modeli sifatida ishlatiladi, tashqi kuch ta'sirida atom energiyani yutishi yoki nurlanish orqali uni yo'qotishi mumkin. Bizning holimizda bu elektroning boshlang'ich fazasiga bog'liq ekan.

### 4.3. So'nuvchi tebranishlar

Shu paytgacha tashqi muhitning sistemaga ta'sirini hisobga olmay kelingan edi. Sistema biror tashqi muhitda harakat qilsa u shu muhitning molekulari bilan to'qnashishi natijasida o'z energiyasini yo'qota

boshlaydi. Molekular o'zaro ta'sirini hisobga olgan bunday harakatning to'liq nazariyasi murakkab bo'lib u mexanika fanining vazifasi emas. Ammo agar jism tezligi kichik bo'lsa, muhitning ta'sirini ishqalanish kuchi sifatida harakat tenglamasiga kiritish mumkin ya'ni, masalani mexanik masalaga aylantirish mumkin. Bunday ishqalanish kuchi jism tezligiga proporsional bo'lishi kerak, chunki tezlik nolga teng bo'lganda ishqalanish kuchi ham yo'q bo'ladi. Kichik tezliklar haqida gap ketayotganini hisobga olib, bu kuch tezlikning birinchi darajasiga proporsional deb olinadi:

$$f = -\alpha \dot{x}. \quad (4.56)$$

Minus ishora kuch harakat tezligiga qarshi yo'nalganini ko'rsatadi. Demak, bu holda, harakat tenglamasi

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} \quad (4.57)$$

ko'rinishga ega. Quyidagi  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $2\gamma = \alpha/m$  belgilashlar kiritib bu tenglama

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.58)$$

ko'rinishga keltirib olinadi. Bu tenglamaning yechimi

$$x = \exp(kt) \quad (4.59)$$

ko'rinishda qidiriladi.  $k$  uchun tenglama:

$$k^2 + 2\gamma k + \omega_0^2 = 0. \quad (4.60)$$

Tenglamaning ikkita yechimi bor:

$$k_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad k_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (4.61)$$

Ko'rinib turibdiki, uch xil hol uchrashi mumkin:

1.  $\omega_0^2 > \gamma^2$ ;
2.  $\omega_0^2 < \gamma^2$ ;
3.  $\omega_0^2 = \gamma^2$ .

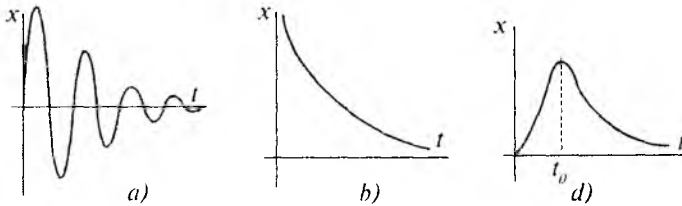
Birinchi holda  $\omega_0^2 - \gamma^2 = \omega^2$  deb belgilansa

$$k_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \quad (4.62)$$

ga kelinadi, bu degani, (4.58) ning yechimi

$$x = a \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.63)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yechim davriy yechim emas, u **so'navchi tebranishlarga** mos keladi. Uning grafigi 4.5-a rasmda ko'rsatilgan.



4.5- rasm. So'navchi tebranishlar.

Ikkinchi holga o'taylik. Bu holda (4.61) dagi ildiz haqiqiy son bo'ladi, umumiy yechim

$$x = c_1 \exp(-\gamma t + t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) + c_2 \exp(-\gamma t - t\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}). \quad (4.64)$$

Bunday yechim so'nishning o'zini beradi. Uning grafigi 4.5-b rasmda ko'rsatilgan.

Uchinchi holga kelaylik. Bu holda xarakteristik tenglamaning ildizlari karralidir. Umumiy nazariya bo'yicha yechim

$$x = (c_1 + c_2 t) \exp(-\gamma t) \quad (4.65)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Agar tebranish quyidagi boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa:  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v$ ,

$$x = vt \exp(-\gamma t)$$

bo'ladi, bu funksiyaning grafigi 4.5-d rasmda ko'rsatilgan.

Ishqalanish bor bo'lgani uchun energiyani saqlanishi haqida gap bo'lishi mumkin emas. (4.58) tenglamani  $m\dot{x}$  ga ko'paytirib uni

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) = -2\gamma m \dot{x}^2 \quad (4.66)$$

ko'rinishga keltirib olinadi. Bu munosabat esa (4.12) ni ko'zda tutgan holda ossillator tomonidan energiya yo'qotish tezligi uchun

$$\frac{d}{dt} E = -\alpha \dot{x}^2 \quad (4.67)$$

formulani beradi. Fizik sistemaning energiya yo'qotishi muhim

tushuncha bo'lgani uchun uni *dissipativ funksiya* deyiladigan va

$$F = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad (4.68)$$

ko'rinishga ega bo'lgan funksiya orqali ifodalash qabul qilingan. Bu holda avvalgi tenglama

$$\frac{d}{dt} E = -2F \quad (4.69)$$

ko'rinishni oladi. Ya'ni, dissipativ funksiya sistemaning vaqt birligi ichidagi energiyasining dissipatsiyasini bildirar ekan. Bu holda (4.57) harakat tenglamasini

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \quad (4.70)$$

ko'rinishda ham yozib olish mumkin.

Odatda, energiya yo'qotishining bir «davr»  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  ichidagi o'rtacha qiymati qiziqarli bo'ladi. Bu kattalikni hisoblash uchun birinchi holga murojaat qilinadi va  $\gamma \ll \omega^0$  (ishqalanish juda kichik) deb olinadi.

Bu holda  $x(t) = ae^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$  va

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \dot{x}^2 = -\alpha a^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

bo'ladi. Quyidagi kattalik ishqalanish quvvati deyiladi:

$$P = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} dt \frac{dE}{dt} = -\frac{\alpha a^2 \omega_0^3}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} dt e^{-2\gamma t} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{\alpha a^2 \omega_0^2}{2} e^{-2\gamma t} \quad (4.71)$$

Integralning qiymati  $T=2\pi/\omega_0$  davr ichida energiyaning o'zgarishiga teng, uni  $T$  ga bo'linsa, bir davr ichidagi yo'qotilgan energiya kelib chiqadi. Integralni hisoblaganda  $\gamma \ll \omega_0$  ni hisobga olib integral ostidan  $\exp(-2\gamma t)$  ni chiqarib tashladik

Ko'rilayotgan yaqinlashuvda energiya uchun  $E = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t}$  ifoda

olinadi((4.12) formulada amplitudani  $a \rightarrow ae^{-\gamma t}$  ga almashtirish yetarli). Yana bir marta ta'kidlab ketaylik, ossillatorning energiyasi sifatida (4.12) ifoda qaraladi, (4.69) ifoda energiya yo'qotish tezligiga tegishlidir.

Bundan foydalanib muhim bo'lgan o'lichamsiz bir kattalik kiritaylik:

$$Q = \frac{\langle E \rangle \omega_0}{P} = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (4.72)$$

Uning nomi **asillik**, ossillator energiyasining bir davr ichida ishqalanish orqali yo'qotilgan energiyaga nisbati (chastotaga ko'paytirilgan holda) – so'nuvchi tebranishlarning qay darajada uzoq davom etishini xarakterlaydigan kattalik.

#### 4.4. Ishqalanish bo'lgandagi majburiy tebranishlar

Ishqalanish kuchi ta'sir qilayotgan muhitda tebranayotgan sistemaga tashqi kuch ta'sir qilayotgan bo'lsin. Tashqi kuch davriy xarakterga ega bo'lgan hol eng qiziq bo'lgani uchun shu holni ko'rib chiqaylik:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\gamma t). \quad (4.73)$$

Tashqi kuchning ko'rinishi shunday tanlab olindiki, u  $t=0$  vaqt momentida noldan boshlab ishga tushsin. Tenglamaga o'zgarmaslarni variatsiyalash metodini qo'llaymiz. Bir jinsli tenglamaning yechimi

$$x_0(t) = c_1 e^{\left\{ -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right\} t} + c_2 e^{\left\{ -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right\} t} \quad (4.74)$$

bo'lsa, o'zgarmaslarni variatsiyalash metodi (4.73) ning yechimini quyidagi ko'rinishda beradi:

$$x(t) = x_0(t) + \frac{f}{m} \frac{2\gamma\lambda \sin(\gamma t) - (\gamma^2 - \omega_0^2) \cos(\gamma t)}{(\gamma^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}. \quad (4.75)$$

Shu yechimning xossalari tahlil qilaylik. Gap tebranishlar haqida ketayotgan ekan  $\lambda < \omega_0$  deb olamiz. Bir jinsli tenglamaning yechimi so'nish bor bo'lgani uchun vaqt o'tishi bilan nolga intilib ketadi:  $x_0(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Haqiqatda, albatta,  $t$  cheksizlikka intilishi shart emas,  $x_0$  ni tashlab yuborish uchun  $\lambda t$  kattaroq son bo'lishi yetarlidir. Demak, ma'lum bir vaqt o'tganidan keyin yechim sifatida

$$x(t) = \frac{f}{m} \frac{2\gamma\lambda \sin(\gamma t) + (-\gamma^2 + \omega_0^2) \cos(\gamma t)}{(\gamma^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}. \quad (4.76)$$

funksiyani olish mumkin. Tebranishning so'nmaydigan qismi tashqi kuchdan olib turilgan energiya hisobiga mavjud bo'ladi. Agarda

$$\sin \delta = -\frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}}, \quad \cos \delta = -\frac{(-\gamma^2 + \omega_0^2)}{\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}}, \quad (4.77)$$

va

$$h = \gamma \frac{f}{m\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}}$$

deb belgilab olinsa ( $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$  ekanligini tekshirish qiyin emas) topilgan yechimni

$$x(t) = h \cos(\gamma t + \delta) \quad (4.78)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bizni eng qiziqtiradigan hol - tashqi chastota  $\lambda$  sistemaning xususiy chastotasi  $\omega_0$  ga yaqin bo'lgan holdir. Ishqalanish kuchi bo'lmagan holda tebranishlar amplitudasi cheksiz o'sa boshlar edi (4.41) ga qarang). Endichi? Bu savolga javob berish qiyin emas — (4.78) dan ko'rinib turibdiki, tebranish amplitudasi hamma vaqt cheklangan va uning maksimal qiymati  $h$  ga tengdir.  $h$  uchun ifoda esa  $\gamma \rightarrow \omega_0$  bo'lganda ham chekliligicha qoladi.

Rezonans sohasini chuqurroq tahlil qilaylik, buning uchun  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$  deb olinadi va  $\varepsilon \rightarrow 0$  sohani tekshiramiz. Undan tashqari  $\lambda \ll \omega_0$  deb ham olamiz (ishqalanish kuchi kichik bo'lsin). Bu sohada tebranish amplitudasi

$$h = \frac{f}{2m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}} \quad (4.79)$$

va tebranish fazasi

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad (4.80)$$

ko'rinishga keladi. Majburiy tebranish fazasi tashqi kuchning fazasiga nisbatan «kechikish» xossasiga ega ekan. Buni quyidagicha ko'rish mumkin. (4.77) dan ko'rinib turibdiki,  $\gamma \rightarrow 0$  bo'lganda ( $\gamma \rightarrow \omega_0$  sohada)



$\delta \rightarrow \omega_0$  bo'ladi.  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $\gamma \rightarrow \omega_0$ ) sohada esa  $\delta \rightarrow -\pi$  bo'ladi. Agar tashqi kuch chastotasi  $\gamma \rightarrow \omega_0$  ga intilsa  $\delta \rightarrow -\pi/2$  ga intiladi.

(4.78) tebranyotgan mayatnikning energiyasi o'zgarishidan qolishi kerak. Demak, mayatnik tashqaridan olayotgan energiyani ishqalanishga ketkazadi. Bir davr bo'yicha o'rtalashtirilgan energiya yutilishi intensivligini  $I(\gamma)$  deb belgilab uni topaylik, u esa energiya dissipatsiyasiga teskari ishora bilan tengdir. (4.69) formula bo'yicha

$$I(\gamma) = 2\overline{F} \quad (4.81)$$

bo'ladi, bunda  $\overline{F}$  — bir davr bo'yicha o'rtalashtirishni bildiradi. Dissipativ funksiya bizning holimizda

$$F = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 = \lambda m \dot{x}^2 = \lambda m x^2 h^2 \sin^2(\gamma t + \delta).$$

Sinus kvadratining bir davr bo'yicha o'rtacha qiymati  $1/2$  ga teng, demak

$$I(\gamma) = \lambda m \gamma^2 h^2. \quad (4.82)$$

Rezonansga yaqin sohada

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \quad (4.83)$$

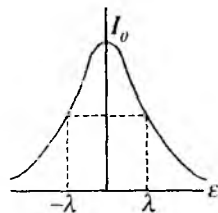
Energiya yutish intensivligining maksimumini

$$I_0 = \frac{f^2}{4m\lambda}$$

deb belgilab, yuqoridagi formulani

$$I(\varepsilon) = I_0 \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2 + \lambda^2} \quad (4.84)$$

ko'rinishda yozib olinadi. Olingan funksiyaning grafigi 4.6-rasmda ko'rsatilgan. Bu formuladan  $I(\pm\lambda) = \frac{1}{2} I_0$  ekanligi kelib chiqadi, shu sababdan  $|\varepsilon| = \lambda$  qiymat rezonans egri chizig'ining yarim kengligi



4.6-rasm. Rezonans yaqinida energiya yutilishi intensivligi.

deyladi. So'nish kamaygan sari  $\lambda \rightarrow 0$  rezonans grafigining cho'qqi-simonligi ortib boraveradi, ammo grafigning ostidagi yuza o'zgar-maydi.

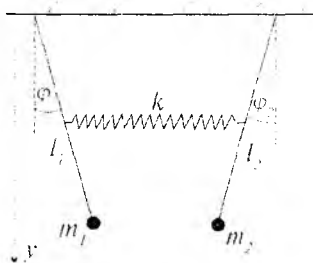
## 4.5. Ko'p o'lchamli sistemalardagi tebranishlar

### 4.5.1. Ikkita bog'langan mayatniklar

4.7-rasmda ko'rsatilgan sistemadagi tebranuvchi harakatni o'r-ganaylik.

Sistema uzunliklari va massalari  $l_1, m_1$  va  $l_2, m_2$  bo'lgan ikkita matematik mayatniklardan iborat. Ular bikirligi  $k$  bo'lgan prujina orqali bir-biri bilan bog'langan. Tushunarliki, agar biror mayatnikka turtki bersak ikkinchisi ham tebrana boshlaydi, bu ikki mayatnik orasida o'zaro ta'sir natijasida energiyaning biridan ikkinchisiga ko'chishi ro'y berishi kerak. Ushbu sistemaning Lagranj funksiyasini topaylik. Umumiy qoida bo'yicha

$$L - T_1 + T_2 - U_1 - U_2 - U_{12}. \quad (4.85)$$



4.7- rasm. Ikkita bog'langan mayatnik.

bunda  $T_i, i = 1, 2$  — mos ravishda tegishli mayatnikning kinetik energiyasi,  $U_i, i = 1, 2$  — mos ravishda mayatnikning potensial energiyasi va  $U_{12}$  — ularning o'zaro ta'sir energiyasi. Birinchi mayatnikka tegishli koordinatlarni  $x_i, y_i$ , ikkin-chi mayatnikka tegishli koordi-natlarni esa  $x_2, y_2$  deb belgilaylik (esimizdan chiqarmaylik,  $x_i, y_i$  — barqaror muvozanat holatidan chetlashishlarni bildiradi). Mayat-

niklar osilgan iplar bukilmaydigan deb qaraladi. Agar ikkala mayatnik barqaror muvozanat holatida bo'lsa, oradagi prujinaning tarangligi nolga teng bo'ladi. Lagranj funksiyasi quyidagicha tuziladi:

$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2. \quad (4.86)$$

Burchak o'zgaruvchilariga o'tamiz va kichik tebranishlar haqida gap ketayotganini hisobga olamiz:

$$x_i = l_i \sin \varphi_i = l_i \varphi_i, \quad y_i = l_i \cos \varphi_i = l_i \left( 1 - \frac{1}{2} \varphi_i^2 \right) \quad (4.87)$$

O'zgarmas sonlarni tashlab yuborilganidan keyin Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2} m_1 g e \varphi_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g e \varphi_2^2 - \frac{1}{2} k (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (4.88)$$

Harakat tenglamalarini yozib olamiz:

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g l \varphi_1 &= -k (\varphi_1 - \varphi_2); \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g l \varphi_2 &= k (\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Asosiy g'oyani tushunish uchun xususiy holga o'tamiz —

$$m_1 = m_2 = m, \quad l_1 = l_2 = l \quad (4.90)$$

va maqsadga muvofiq bo'lgan belgilashlarni kiritamiz:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \alpha = \frac{k}{m l^2}.$$

Bu holda tenglamalar soddalashadi:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= -\alpha (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= \alpha (\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (4.91)$$

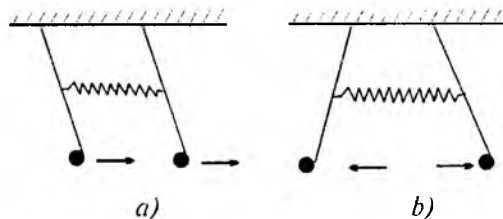
Agar  $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi_1$  va  $\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_2$  formulalar orqali yangi o'zgaruvchilar kiritilsa tenglamalari bir-biridan ajraladi:

$$\ddot{\psi}_1 + (\omega_0^2 + 2\alpha) \psi_1 = 0; \quad \ddot{\psi}_2 + \omega_0^2 \psi_2 = 0. \quad (4.92)$$

Yangi koordinatlar **normal koordinatlar** deyiladi. Bu koordinatlar tilida sistema ikkita mustaqil tebranish qilayotgan bo'lib chiqadi —  $\psi_1$  koordinataga  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha}$  va  $\psi_2$  koordinataga  $\omega_2 = \omega_0$  chastotali tebranishlar mos keladi. Bular **normal chastotalar** deyiladi.

Ular 4.8-rasmda ko'rsatilgan. Rasmdagi a) hol  $\psi_2$  koordinataga mos keladi va b) hol  $\psi_1$  koordinataga mos keladi. Ikkala holga mos keluvchi umumiy yechimlar:

$$\psi_1 = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t, \quad \psi_2 = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t. \quad (4.93)$$



4.8- rasm. Normal tebranishlar.

Boshlang'ich shartlarni quyidagicha tanlaylik:

$$t = 0 \text{ da } \varphi_1 = \varphi_0 \text{ va } \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_2 = 0 \quad (4.94)$$

Bu deganimiz boshlang'ich momentda birinchi mayatnik muvozanat holatidan chiqarilgan, ammo uning tezligi nolga teng, ikkinchi mayatnik esa nolga teng tezlik bilan o'zining muvozanat holatida turibdi. Normal koordinatlar tilida

$$t = 0 \text{ da } \psi_1 = \psi_2 = \varphi_0, \quad \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0. \quad (4.95)$$

Bundan

$$a_1 = a_2 = \varphi_0, \quad b_1 = b_2 = 0. \quad (4.96)$$

Demak,

$$\psi_1 = \varphi_0 \cos \omega_1 t, \quad \text{va} \quad \psi_2 = \varphi_0 \cos \omega_2 t, \quad (4.97)$$

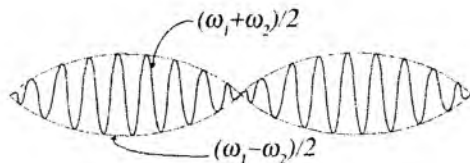
va, natijada, eski koordinatalarga qaytsak

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \varphi_0 (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t) = \varphi_0 \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right), \end{aligned} \quad (4.98)$$

yechimlar olinadi. Har bir koordinata uchun ikkita tebranishlarning kombinatsiyasini ko'rayapmiz: katta chastotali  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  va kichik chastotali  $(\omega_2 - \omega_1)/2$ . Bunday tebranishlar **tepkili tebranishlar** deyiladi.

4.9-rasmdan ko'rinib turibdiki, katta  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  chastotali tebranishning maksimal amplitudasi kichik chastota  $(\omega_2 - \omega_1)/2$  bilan tebranadi.

Endi (4.90) shartdan voz kechib umumiy hol (4.89) ga qaytib kelaylik. Bu holda normal koordinatlar qanday ajratib olinadi? (4.89) sistemani quyidagi ko'rinishga keltirib olinadi:



4.9- rasm. Tepkili tebranish.

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \varphi_1 &= -\alpha_1 (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2 \varphi_2 &= \alpha_2 (\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Bunda

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_2}, \quad \alpha_1 = \frac{k}{m_1 l_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{k}{m_2 l_2^2}. \quad (4.100)$$

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yechishning umumiy metodi bo'yicha (4.99) ning yechimi quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$\varphi_1 = A \exp(i\omega t), \quad \varphi_2 = B \exp(i\omega t). \quad (4.101)$$

Bularni (4.99) ga olib borib qo'yilsa quyidagi algebraik sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \omega^2 + \omega_1^2)A - \alpha_1 B &= 0, \\ \alpha_2 A - (\alpha_2 - \omega^2 + \omega_2^2)B &= 0. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Bu sistema yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi kerak, bundan esa

$$\begin{aligned} \omega_{(1,2)}^2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \\ &\pm \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}) \end{aligned} \quad (4.103)$$

kelib chiqadi. Paydo bo'lgan chastotalar **xususiy** yoki **normal chastotalar** deyiladi. Agar  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  va  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  desak, darhol (4.92) dagi  $\omega_{(1)}^2 = \omega_0^2 + 2\alpha$  va  $\omega_{(2)}^2 = \omega_0^2$  chastotalar olinadi.

Shu bilan sistemadagi mumkin bo'lgan chastotalar topildi.  $A$  va  $B$  larni topish qoldi.

Buning uchun (4.102) sistemaga birinchi marta  $\omega^2 = \omega_{(1)}^2$  deb qo'yi-  
ladi va  $A_1$  va  $B_1$  orasidagi munosabat topiladi, ikkinchi marta esa  
 $\omega^2 = \omega_{(2)}^2$  deb qo'yamiz va  $A_2$  va  $B_2$  orasidagi munosabatni topamiz.  
Qaysi amplitudani ikkinchisi orqali ifodalash —  $A_1$  ni  $B_1$  orqalimi yoki  
teskari — ahamiyatga ega emas, bu — qulaylik masalasi. Belgilash  
kiritaylik:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{B_1}{A_1} = \frac{\alpha_1 + \omega_1^2 - \omega_{(1)}^2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \omega_2^2 - \omega_{(1)}^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{B_2}{A_2} = \frac{\alpha_1 + \omega_1^2 - \omega_{(2)}^2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \omega_2^2 - \omega_{(2)}^2}.\end{aligned}\quad (4.104)$$

Natijada izlayotgan tebranishlarning **har biri ikkita normal tebranish-  
larning superpozitsiyasi** sifatida ifodalanadi:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 \exp(i\omega_{(1)}t) + A_2 \exp(i\omega_{(2)}t) = Q_1 + Q_2, \\ \varphi_1 &= \gamma_1 A_1 \exp(i\omega_{(1)}t) + \gamma_2 A_2 \exp(i\omega_{(2)}t) = \gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2.\end{aligned}\quad (4.105)$$

Topilgan ifodani (4.88) Lagranj funksiyasiga olib borib qo'yilsa quyidagi  
ifoda hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{Q}_1^2 + m_2 \dot{Q}_2^2) \left[ \dot{Q}_1^2 - \omega_{(1)}^2 Q_1^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (m_1 \dot{Q}_1^2 + m_2 \dot{Q}_2^2) \left[ \dot{Q}_2^2 - \omega_{(2)}^2 Q_2^2 \right].\end{aligned}\quad (4.106)$$

Normal koordinatalarning ma'nosi shu ekanki, ular yordamida boshida  
ikkita o'zaro ta'sirda bo'lgan erkinlik darajalari ikkita mustaqil teb-  
ranishlar ko'rinishiga keltirildi. Ularning har biri (4.4) ko'rinishdagi  
**erkin tebranishlar** bo'lib chiqdi.

Qo'shimcha ishonch hosil qilish uchun (4.106) Lagranj funksiya-  
sidan harakat tenglamalarini keltirib chiqaraylik:

$$\ddot{Q}_1 + \omega_{(1)}^2 Q_1 = 0, \quad \ddot{Q}_2 + \omega_{(2)}^2 Q_2 = 0.\quad (4.107)$$

#### 4.5.2. Umumiy hol

Endi ko'p erkinlik darajali sistemalardagi tebranishlarning umumiy nazariyasi bilan tanishib chiqaylik. Bizga erkinlik darajasi  $s$  ga teng bo'lgan sistema berilgan bo'lsin. Bu sistemaga kirgan zarrachalarning o'z barqaror muvozanat holati atrofida kichik tebranishlarini o'rganaylik. Barqaror muvozanat holati  $q_{0i}$  lardan chetlanishlarni yana  $x_i = q_i - q_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, s$  deb belgilab va potensial energiyani kvadratik hadlargaacha aniqlikda qatorga yoyilsa potensial energiya uchun quyidagi ifoda olinadi:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s k_{ij} x_i x_j. \quad (4.108)$$

Bu yerda paydo bo'lgan koeffitsiyent

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i=q_{0i}} \quad (4.109)$$

o'zining ta'tifi bo'yicha simmetrikdir:

$$k_{ij} = k_{ji}. \quad (4.110)$$

Kinetik energiya uchun

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.111)$$

ifodada  $a_{ij}(q) = m_{ij}$  deb olamiz, chunki olingan yaqinlashuvda  $a_{ij}(q) a_{ij}(q) = a_{ij}(q_0 + x + \dots) \approx a_{ij}(q_0)$  bo'lishi kerak (aks holda chiziqli yaqinlashuvdan chiqib ketiladi). Natijada

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad (4.112)$$

ga kelamiz. Demak, sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j). \quad (4.113)$$

Kinetik energiyaning ta'rifi bo'yicha  $T \geq 0$ , tenglik belgisi faqatgina har bir zarrachaning kinetik energiyasi nolga teng bo'lgandagina o'rinni

bo'lishi mumkin. Demak,  $\sum_{i,j=1}^s m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$  kvadratik forma musbat aniqlangan formadir. Potensial energiyani ifodalovchi forma ham musbat

aniqlangan formadir:  $\sum_{i,j=1}^s k_{ij} x_i x_j \geq 0$ .

Lagranj hosilalari

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^s k_{ij} x_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{x}_j \quad (4.114)$$

ga teng ekanligidan harakat tenglamalar topiladi:

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4.115)$$

Bu  $s$  ta tenglamadan iborat bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi. Umumiy metod bo'yicha uning yechimlarini

$$x_i = A_i \exp(i\omega t) \quad (4.116)$$

ko'rinishda izlash kerak ((4.101) bilan taqqoslang). Natijada harakat tenglamalari

$$\sum_{j=1}^s (-m_{ij} \omega^2 + k_{ij}) A_j = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4.117)$$

ko'rinishiga keladi (har bir tenglamadan  $\exp(i\omega t)$  ko'paytuvchini ajratib tashlagandan keyin). Bu bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasi faqat

$$\det(-m_{ij} \omega^2 + k_{ij}) = 0 \quad (4.118)$$

bo'lgandagina yechimga ega ((4.102) va (4.103) lar bilan solishtiring). Bu tenglama  $\omega^2$  ga nisbatan  $s$  tartibli tenglama bo'lib u **xarakteristik tenglama** deyiladi. Bu tenglamaning  $s$  ta yechimi  $\omega_i^2, i = 1, \dots, s$  musbat bo'lib, ulardan olingan  $\omega_i$  lar **xususiy** yoki **normal chastotalar** deyidadi.  $\omega_i^2$  larning musbatligini isbot qilaylik.

Buning uchun (4.117)  $A_i^*$  ga ko'paytirib,  $i$  bo'yicha yig'indisi olinadi.



Natijada

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^s m_{ij} A_i^* A_j}{\sum_{i,j=1}^s k_{ij} A_i^* A_j} \quad (4.119)$$

formula olinadi. Birinchidan  $m_{ij}$  va  $k_{ij}$  larning simmetrik va haqiqiy-ligidan mahraj va suratining haqiqiy sonligi kelib chiqadi:

$$\left( \sum_{i,j=1}^s m_{ij} A_i^* A_j \right)^* = \sum_{i,j=1}^s m_{ij} A_j A_i^* = \sum_{i,j=1}^s m_{ij} A_i^* A_j, \quad (4.120)$$

mahraj uchun ham huddi shu. Oxirgi tenglikka o'tishda  $i \leftrightarrow j$  almash-tirildi va  $m_{ij} = m_{ji}$  simmetrikligidan foydalanildi. Yuqorida aytilganidek,  $T$  va  $U$  uchun kvadratik formalar musbat formalar, demak, hamma mumkin bo'lgan chastotalarning kvadratlari ham ikki musbat sonlarning nisbati sifatida musbat sonlardir.

Hamma chastotalar kvadratlarining musbatligi yana shundan ham kelib chiqadiki, ko'rilyotgan holda hech qanday tashqi ta'sir yo'q, demak, tebranishlarning o'z-o'zidan o'sishi yoki kamayishi mumkin emas. Vaholangki, qandaydir chastotalar uchun  $\omega^2 < 0$  bo'lsa, chasto-talar orasida mavhumlari paydo bo'lar edi, bu esa  $e^{\pm i\omega t}$  hadlarga olib kelar edi.

Tashqi ta'sir — ishqalanish kuchi bor holatga o'taylik. Dissipativ funksiya tushunchasi ham ((4.68) ga qarang) ko'p o'ichamli holga umumlashiriladi:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \dot{x}_i x_j. \quad (4.121)$$

Paydo bo'lgan koeffitsiyentlar  $\alpha_{ij}$  simmetriklik xossasiga ega:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \quad (4.122)$$

Ushbu koeffitsiyentlarning kelib chiqishi kinetik nazariyada tushuntiriladigan bo'lgani uchun ularni **kinetik koeffitsiyentlar** deyiladi. Ularning simmetrikligi ham kinetik nazariyada isbot qili-nadi. Ko'p o'ichamli holda harakat tenglamalariga ishqalanish

kuchlarini dissipativ funksiya orqali quyidagicha kiritish mumkin:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \quad (4.123)$$

Sistemaning birlik vaqt ichida ishqalanish orqali yo‘qotgan energiyasi va dissipativ funksiya orasidagi bog‘lanish (4.69) ning ko‘rinishi ko‘p o‘lchamli holda ham o‘zgarmaydi. Buni quyidagicha keltirib chiqarish mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = \\ &= - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = -2F, \end{aligned} \quad (4.124)$$

oxirgi tenglik  $F$  funksiyaning ikkinchi tartibli bir jinsliligidan kelib chiqadi (Eylar teoremasi).

(4.113), (4.121) va (4.123) formulalar bo‘yicha ishqalanish kuchi harakat tenglamalariga kiritiladi:

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} \dot{x}_j + \alpha_{ij} x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4.125)$$

Yechimni

$$x_i = A_i e^{i\omega t} \quad (4.126)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bu holda yuqoridagi tenglamalar sistemasi

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij} \omega^2 + \alpha_{ij} \omega + k_{ij}) A_j = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4.127)$$

ko‘rinishni oladi. Bu sistemaning yechimi mavjud bo‘lishi uchun

$$\det |m_{ij} \omega^2 + \alpha_{ij} \omega + k_{ij}| = 0 \quad (4.128)$$

shart bajarilishi kerak. Bizga bu  $\omega$  ga nisbatan 2s-tartibli algebraik tenglamani beradi. Oliy algebra kursidan ma‘lumki, bu tenglamaga kirgan hamma koeffitsiyentlar  $-m_{ij}$ ,  $k_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$  — haqiqiy bo‘lgani uchun uning yechimlari yoki haqiqiy, yoki o‘zaro kompleks qo‘shma juftlardan iborat bo‘ladi. Ishqalanish borligi tebranishlar so‘nuvchi bo‘lishi kerakligini bildiradi, bundan shunday xulosaga kelish kerakki, bu chasto-

talarning haqiqiyliklari ham, komplekslarining haqiqiy qismlari ham manfiy bo'lishi kerak.

Sistemaning erkinlik darajalari soni uch-to'rt dan ko'p bo'lganda yuqorida berilgan umumiy nazariyani analitik ko'rinishda qo'llash masalada soddalashtirishga imkoniyat beradigan qandaydir simmetriya bo'lmasa qiyin bo'ladi. Shu bobning oxirgi paragrafidan mana shunday bir necha misollar keltirilgan.

### 4.5.3. Molekulalarning tebranishlari

Molekulalarning to'liq nazariyasi kvant nazariyasi bo'lishi kerak, ammo, kichik tebranishlar haqida gap ketganda klassik tahlildan kelib chiqqan natijalar kvant natijalar bilan bir xil bo'lib chiqadi.

Kichik tebranishlar nuqtayi nazaridan  $n$  ta atomli molekula - o'zaro prujinalar bilan bog'langan massalari  $m_1, m_2, \dots, m_n$  bo'lgan moddiy nuqtalar sistemasidir. Bunday tasdiq uchun asos shundan iboratki, atomlar orasidagi potentsiallar 4.10-rasmda ko'rsatilgan ko'rinishga ega. Ko'rish qiyin emaski, (4.1) paragrafdagi umumiy mulohazalar atomning turg'un muvozanat nuqtasi atrofidagi kichik tebranishlariga bevosita mos keladi.

Molekulalarning kichik tebranishlariga tegishli bo'lgan umumiy mulohazalar uzun bo'lmasdan quyidagi punktlardan iboratdir.

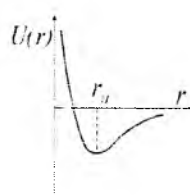
Molekula o'zaro ta'sirda bo'lgan atomlarning yopiq sistemasidir. Bunday sistemaga uch xil harakat hosdir - butunligicha ilgarilanma harakat, butunlikcha aylanma harakat va atomlarning bir-biriga nisbatan tebranishi. Butunlikcha ilgarilanma va butunlikcha aylanma harakatlarni chiqarib tashlash kerak. Ishni bosqichlarga bo'laylik:

1. Butunlikcha ilgarilanma harakatni chiqarib tashlash uchun molekulaning to'liq impulsini nolga tenglashtirish kerak:

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = 0. \quad (4.129)$$

Bu degani molekulaning inersiya markazi sistemasiga o'tildi degani:

$$\mathbf{R} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a = \text{const}. \quad (4.130)$$



4.10-rasm.  
**Atomlararo  
 potentsial,  
 $r_0$  - turg'un  
 muvozanat  
 nuqtasi.**

Har bir atomning radius-vektori  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{d}_a$  ko'rinishda olinsin, bu yerda  $\mathbf{r}_{a0}$  —  $a$  atomning muvozanat holati,  $\mathbf{d}_a$  esa muvozanatdan chetlashish vektori. Tashqi maydonda bo'lmagan sistemaning inersiya markazi o'z-o'zidan o'zgarishi mumkin emas, shuning uchun

$$\mathbf{R} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a = \sum_a m_a \mathbf{r}_{a0} = \text{const.} \quad (4.131)$$

Demak,

$$\sum_a m_a \mathbf{d}_a = 0 \quad (4.132)$$

bo'lishi kerak.

2. Molekulaning butunlikcha aylanishini chiqarib tashlash uchun uning to'liq harakat miqdori momentini nolga tenglashtirishi kerak. Kichik tebranishlar haqida gap ketayotganini hisobga olib birinchi tartibli kichik sonlar yaqinlashuvida

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] = \sum_a m_a [\mathbf{r}_{a0} \dot{\mathbf{d}}_a] = \frac{d}{dt} \sum_a m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{d}_a] = 0. \quad (4.133)$$

deb olish mumkin. Hosila ostidagi kattalik o'zgarmas songa teng,  $\mathbf{d}_a$  larning nolga teng bo'lganida ham u o'sha son bo'lishi kerak bo'lgani uchun

$$\sum_a m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{d}_a] = 0 \quad (4.134)$$

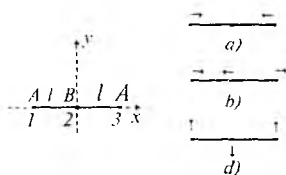
deb olish kerak.

Olingan shu ikkita tenglamalar sistemasini yechib normal koordinatlarni topish mumkin. Tebranishlarga mos keluvchi erkinlik darajalari sonini, ya'ni, mustaqil tebranishlar sonini topaylik.  $n$  ta atomdan iborat molekulaning  $3n$  ta erkinlik darajasi bor. Yuqoridagi ikkita vektor shartlarning soni 6 taga teng.

Demak,  $n$  atomli molekulaning tebranish erkinlik darajalari umumiy holda  $3n - 6$  ta ekan. Agar atomlar bir to'g'ri chiziqda joylashgan bo'lsa, bu o'q atrofida aylanish haqida gapirishning ma'nosi yo'q, demak, bu holda tebranish erkinlik darajalari soni  $3n - 5$  ga teng. Masalan,  $\text{CO}_2$  molekulasining tebranishlari soni  $3 \cdot 2 - 5 = 1$  ga teng.  $\text{H}_2\text{O}$  molekulasining esa mustaqil tebranishlari soni  $3 \cdot 3 - 6 = 3$  ga teng.

**4.5.1-misol.** 4.11-rasmda ko'rsatilgan chizikli  $\text{BA}_2$  molekulaning tebranish chastotalarini topaylik.

$A$  atomlarning massasini  $m_a$ ,  $B$  atomning massasini  $m_b$  deb belgilaylik. Yuqorida keltirilgan hisob bo'yicha bu molekulaning mustaqil tebranishlari soni  $3 \cdot 3 - 5 = 4$  bo'lishi kerak. Ular rasmda ko'rsatilgan — bo'ylanma tebranishlari soni 2 ta, ko'ndalang tebranishlari soni ham 2 ta (rasmda ularning bittasi ko'rsatilgan, ikkinchisi huddi shuning o'zi, faqat tebranish yo'nalishlari rasm tekisligiga perpendikulardir). Sistemaning bo'ylanma harakat Lagranj funksiyasi:



4.11- rasm. Chiziqli molekulaning tebranishlari turlari.

$$L = \frac{m_a}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_b}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2] \quad (4.135)$$

$AB$  bog'lanish kuchi  $BA$  bog'lanish kuchiga teng, shuning uchun ikkala hol uchun ham bitta koeffitsiyent  $k$  olindi. Harakat tenglamalari

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) &= 0, \\ m_b \ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) &= 0, \\ m_a \ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.136)$$

inersiya sistemasiga o'tish sharti bilan to'ldirilishi kerak:

$$m_a(x_1 + x_3) + m_b x_2 = 0. \quad (4.137)$$

Agar birinchi tenglamadan uchinchi ayirilsa

$$m_a(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3) + k(x_1 - x_3) = 0 \quad (4.138)$$

tenglama olinadi. Bu bizga ko'rilayotgan masala uchun  $Q_s = x_1 - x_3$  koordinata tabiiy koordinata ekanligini ko'rsatadi. (4.137) shartdan  $x_2$  koordinatani aniqlab olib, ikkinchi tabiiy koordinata  $Q_a = x_1 - x_3$  ekanligini ko'ramiz. Shularning natijasida ikkita mustaqil tenglamalar sistemasi qoldi:

$$\ddot{Q}_s + \frac{k}{m_a} Q_s = 0, \quad \ddot{Q}_a + k \frac{2m_a + m_b}{m_a m_b} Q_a = 0. \quad (4.139)$$

Haqiqatan ham, boshidagi uchta harakat tenglamalari bitta bog'lanishga bo'ysunishi kerak edi, demak, ularning ichida faqat ikkitasi mustaqil ekan. Biz ularni topdik. Kiritilgan yangi koordinatalar  $Q_a$ ,  $Q_b$  normal koordinatalardir (normalarigacha aniqlikda). Ko'rinib turibdiki,  $Q_s$  koordinataga

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m_a}} \quad (4.140)$$

chastotali tebranish mos keladi,  $Q_a$  koordinataga esa

$$\omega_a = \sqrt{\frac{kM}{m_a m_b}} \quad (4.141)$$

chastotali tebranish mos keladi, bu yerda  $M = 2m_a + m_b$  — molekulaning to'liq massasi.  $\omega_a$  chastotali tebranishga 4.11-rasmdagi a-hol to'g'ri keladi,  $\omega_b$  chastotali tebranishga 4.11-rasmdagi b-hol to'g'ri keladi.

Faraz qilaylik,  $m_b \gg m_a$  bo'lsin. Bu holda  $\omega_a \approx \omega_b$  bo'ladi.

Sistemaning ko'ndalang tebranishlariga o'taylik. Bu holda birinchidan, butunlikcha ilgari lanma harakatni chiqarib tashlash kerak:

$$m_a (y_1 + y_3) + m_b y_2 = 0, \quad (4.142)$$

ikkinchidan, butunlikcha aylanma harakatni chiqarib tashlash kerak ( $x, y$  — tekisligidagi aylanishga impuls momentining  $z$  komponentasi mos keladi):

$$\left( \sum_a m_a [\mathbf{r}_{a0} \mathbf{d}_a] \right)_z = \quad (4.143)$$

$$= m_a (x_{10} y_1 - y_{10} x_1) + m_b (x_{20} y_2 - y_{20} x_2) + m_a (x_{30} y_3 - y_{30} x_3) = 0.$$

Tushunarliki,

$$x_{20} = 0, \quad x_{10} = -x_{30} = l, \quad y_{10} = y_{20} = y_{30} = 0.$$

Demak, sistemaga qo'yilgan ikkinchi shart

$$y_1 = y_3 \quad (4.144)$$

ko'rinishga ega ekan. Kvadratik aniqlikda potensial energiyani topish qoldi.

Agar  $ABA$  chiziqning  $\pi$  burchakdan og'ishini 4.12-rasmdagidek  $\delta$  harfi bilan belgilansa

$$\delta = \frac{1}{l} (y_1 - y_2 + y_3 - y_2) \quad (4.145)$$

deb yozib olish kerak (kichik burchak rasmda bo'rttirib ko'rsatilgan). Ko'ndalang tebranishlar uchun Lagranj funksiyasini tuzib olinadi:

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{y}_1^2 - \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{k_k}{2} l^2 \delta^2. \quad (4.146)$$

(4.144) ni hisobga olib (4.142) va (4.145) lardan

$$y_1 = y_3 = \frac{1}{2} \frac{m_B l \delta}{m}, \quad y_2 = -\frac{m_A l \delta}{m}, \quad m = 2m_A + m_B, \quad (4.147)$$

ekanligi topiladi. Bu esa Lagranj funksiyasini



4.12- rasm.  
Ko'ndalang  
tebranishlarga  
oid.

$$L = \frac{m_A m_B l^2}{4m} \dot{\delta}^2 - \frac{k_k}{2} l^2 \delta^2 \quad (4.148)$$

ko'rinishga keltirishga imkon beradi. Bu yerdan ko'ndalang tebranishlar chastotasini topish qiyin emas:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k_k m}{m_A m_B}} \quad (4.149)$$

#### 4.6. Zanjirlarning tebranishlari

Umumiy holda (4.118) va (4.128) tenglamalarni yechib sistemadagi xususiy chastotalarni topish murakkab masala. Fizik nuqtayi nazardan qiziq bo'lgan bir xususiy hol ko'rib chiqiladi, u ham bo'lsa bir chiziqqa terilgan massasi  $m$  bo'lgan moddiy nuqtalar sistemasi bo'lsin. Ular orasida bikirligi  $k$  bo'lgan prujinalar bo'lsin, bu prujinalar massalarni muvozanat holatiga qaytaruvchi kuchlarga olib keladi.

31-rasmda bunday sistemalarning uch xili ko'rsatilgan: birining ikkala chegaraviy nuqtalari mahkamlangan, ikkinchisining bitta chegaraviy nuqtasi mahkamlangan, uchinchisining chegaraviy nuqtalari ozod.

Massalarning soni  $N$  ga teng bo'lsin. Uchala sistema uchun Lagranj funksiyalari tuziladi.  $i$  nuqtaning o'z muvozanat holidan siljishini  $x_i$  deb belgilanadi. Uchala hol uchun ham kinetik energiya bir xil bo'ladi:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dots + \dot{x}_N^2) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2 \quad (4.150)$$

Potensial energiya birinchi holda

$$U_a = \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{N-1} - x_N)^2 + x_N^2] \quad (4.151)$$

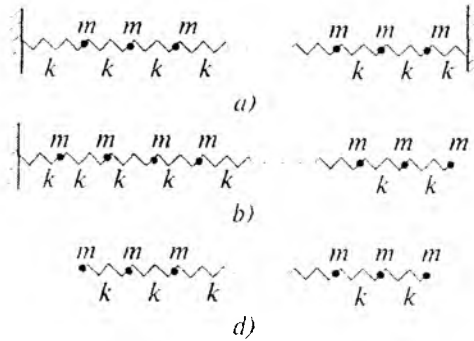
Ikkinchi holda

$$U_b = \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{N-1} - x_N)^2] \quad (4.152)$$

Uchinchi holda esa

$$U_c = \frac{k}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{N-1} - x_N)^2] \quad (4.153)$$

Birinchi holda chegaraviy massalarga ikki tomondan muvozanatga



4.13- rasm. Zanjirlar:

a) ikkala uchi mahkamlangan; b) bir uchi ozod; c) ikkala uchi ozod.

qaytaruvchi kuch ta'sir qiladi, ikkinchi holda esa faqat chapdagi birinchi nuqtaga ikki tomondan kuch ta'sir qiladi,  $N$ -nuqtaga esa faqat boshqa massalar tomonidan kuch ta'sir qiladi, uchinchi holda esa qaytaruvchi kuch faqat qo'shni massalar tomonidan ta'sir qiladi. Shunday soddalashtirilgan hol uchun ham umumiy yechimni topish qiyin, biz yuguruvchi to'lqin deyiladigan yechimlarni o'rganamiz.

#### 4.6.1. Chegaraviy massalar biriktirilgan hol

Bu holda harakat tenglamalari quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2); \quad (4.154)$$

$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3); \quad (4.155)$$

$$m\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3) - k(x_3 - x_4); \quad (4.156)$$

$$\vdots = \vdots \quad \ddots \quad (4.157)$$

$$m\ddot{x}_N = k(x_{N-1} - x_N) - kx_N. \quad (4.158)$$

Agar

$$x_0 = x_{N+1} = 0 \quad (4.159)$$

shart kiritilsa bu tenglamalarni umumiy ko'rinishga keltirib olish mumkin:

$$m\ddot{x}_n = k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.160)$$

Bu sistemaning xususiy yechimini normal koordinatalarga o'tib quyidagi ko'rinishda izlanadi:



$$x_n = A_n e^{i\omega t} = a_{1n} e^{i\omega t + i\varphi_n}. \quad (4.161)$$

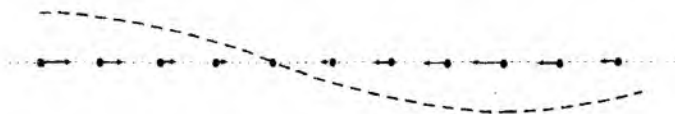
Bu yerda  $\varphi_n$  –  $n$  nuqtaning to‘lqin fazasi. Masalaning simmetriyasidan kelib chiqadiki, hamma massalarning tebranish amplitudasi bir xil bo‘lishi kerak:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_N = a. \quad (4.162)$$

$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \varphi$  deb belgilab (bu ham masalaning simmetriyasidan kelib chiqadi, ixtiyoriy ikkita qo‘shni massa orasidagi faza farqi bir xil bo‘lishi kerak) (4.160) tenglamadan darhol

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (4.163)$$

tenglik olinadi. (4.159) chegaraviy shartlarni qoniqtirish uchun quyidagicha mulohaza yuritaylik. Sistemada tebranishlar o‘zaro ta‘sir natijasida bir nuqtadan ikkinchisiga uzatililmoqda. Bu degani, sistemada tebranishlar to‘lqini tarqalayapti. Bu 4.14-rasmda ko‘rsatilgan.



4.14- rasm. Zanjir bo‘yicha tarqalayotgan to‘lqin.

Bu rasmda massaning o‘zining muvozanat holatidan o‘ng tomonga siljishini musbat, chap tomonga siljishini esa manfiy amplitudaga mos keltirsaq punktir bilan ko‘rsatilgan to‘lqinni olamiz.

Demak, zanjirdagi massalarning tebranishlari jarayonini zanjir bo‘yicha to‘lqinning tarqalishi deb qarash mumkin ekan. Shu nuqtayi nazardan (4.159) shartlar bu nuqtalatta qarama-qarshi amplitudali (faza farqi  $\pi$  bo‘lgan) ikkita to‘lqinning uchrashib bir-birini so‘n-dirishiga mos keladi. Yuqoridagi xususiy yechim (4.161) larning superpozitsiyasidan foydalanib shunday umumiy yechim topaylikki, u (4.159) chegaraviy shartlarga bo‘ysunsin. Shularni hisobga olib tebranish amplitudasini ikki to‘lqin superpozitsiyasi ko‘rinishida olamiz:

$$x_n = ae^{i\omega t + n\varphi} + be^{i\omega t - n\varphi}. \quad (4.164)$$

$x_0 = 0$  sharti  $a = -b$  ni beradi:

$$x_n = 2iae^{i\omega t} \sin(n\varphi). \quad (4.165)$$

$$x_{N+1} = 0 \text{ sharti esa } \sin((N+1)\varphi) = 0 \text{ yoki}$$

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \varphi = \frac{l\pi}{N+1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.166)$$

ekanligi ko'rsatadi.  $\varphi$  butun son  $l = 1, 2, 3, \dots, N$  ga bog'liq bo'lib qolgani uchun u

$$\varphi_l = \frac{l\pi}{N+1} \quad (4.167)$$

deb belgilanadi. Shu bilan sistemada  $N$  ta normal tebranishlar bor ekanligiga ishonch hosil qildik:

$$\omega_l^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\varphi_l}{2} = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{l\pi}{N+1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (4.168)$$

Normal koordinatalarga

$$x_n = \sum_{l=1}^N \sqrt{\frac{2}{N+1}} Q_l \sin(n\varphi_l) \quad (4.169)$$

formula orqali o'tish mumkin.

### Uzliksiz muhitga o'tish

Yuqoridagi misol diskret nuqtalar sistemasiga tegishli edi. Agar uzliksiz muhitga o'tmoqchi bo'linsa, quyidagicha mulohaza yuritishimiz kekar. O'sha  $N$  ta nuqtalar sistemasi ishga olingan uzunlik  $L$  bo'lsin. Unda har ikki moddiy nuqta orasidagi masofa  $a = L/N$  ga teng bo'ladi. Uzliksiz muhitga o'tish uchun  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$  limitga o'tish kerak, ammo bunda  $Na = L$  o'zgarmasdan qolishi kerak. Shundan keyin  $x$  koordinatali nuqtaning  $t$  vaqt momentida o'z muvozanat holidan siljishini  $u(t, x)$  deb belgilaylik. Yuqoridagi formulalar bilan bog'lanish uchun  $x_i$  koordinatali moddiy nuqtaning siljish amplitudasini  $u_i(t)$  deb olinadi. Shunda

$$m\ddot{u}_n + k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) = 0 \quad (4.170)$$

deb yozib olish mumkin. Hosilaning chekli approximatsiyasini eslaylik:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta x^2}$$

Undan tashqari, chiziqli zichlik  $\rho = m / \Delta x$  va ipning tarangligi  $k = T / \Delta x$  ga o'tylik. Bu belgilashlar qo'llanilsa (4.170) tenglama uzliksiz limitda ( $N \rightarrow \infty, \Delta x = x_n - x_{n-1} \rightarrow 0$ )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c = \sqrt{T / \rho}, \quad (4.171)$$

tenglamaga o'tadi. Bu tenglamaning nomi **to'lqin tenglamasi**, uning yechimlari  $x$  o'qining musbat va manfiy yo'nalishlarida  $c$  tezlik bilan tarqalayotgan to'lqinlarni beradi.

#### 4.6.2. Chegaraviy massalarning bittasi birlashtirilgan

Avvalgi holdan farq chegaraviy shartda – mahkam birlashtirilgan chap nuqtada mos keluvchi shart o'z joyida qoladi:

$$x_0 = 0, \quad (4.172)$$

o'ng chegaradagi massaning koordinatasi uchun esa

$$x_N = x_{N+1} \quad (4.173)$$

shartni olish kerak.<sup>1</sup> Harakat tenglamalari sistemasi ham o'z joyida qoladi:

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.174)$$

shunga ko'ra – chastotalar ham:

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (4.175)$$

Yuqorida keltirilgan chegaraviy shartlarni hisobga olib tekshirib ko'rish mumkinki, bu tenglamalar (4.152) potensial energiyaga to'g'ri keladi. Bu sistemaning xususiy yechimlari avval topilgan edi:

$$x_n = A_n e^{i\omega t} = a_n e^{i\omega t + i\varphi_n}. \quad (4.176)$$

$x_0$  nuqtaga tegishli bo'lgan yuqoridagi mulohazalarni qaytarib shu nuqtadagi chegaraviy shartni qanoatlantiradigan yechim olinadi:

<sup>1</sup> Matematik fizika kursidan ma'lumki, tebranayotgan tor yoki sterjenlarning erkin uchiga  $\partial u / \partial x = 0$  shartni qo'yishimiz kerak, bu yerda  $u$  - tebranish amplitudasi,  $x$  - koordinata. Diskret holda bu shartni  $(u_{N+1} - u_N) / \Delta x = 0$  yoki  $u_{N+1} - u_N = 0$  bilan almashtirishimiz kerak. Bizning holda tebranish amplitudasi  $-x_p$ .

$$x_n = 2iae^{i\omega t} \sin(n\varphi). \quad (4.177)$$

Yana turg'un to'liqin olindi. Ikkinchi chegaraviy shartga kelaylik. Uni quyidagi ko'rishga keltiriladi:

$$\sin((N+1)\varphi) - \sin(N\varphi) = 2 \cos \frac{(2N+1)\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (4.178)$$

Bu tenglamaning yechimi

$$\varphi_l = \frac{2l-1}{2N+1} \pi, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (4.179)$$

( $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$  tenglamaning yechimi shuning ichida ekanligini ko'rsating.)

Demak, sistemada  $N$  ta har xil chastotalar bor ekan:

$$\omega_l^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{2l-1}{2(2N+1)} \pi, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (4.180)$$

Masalan,  $N = 2$  bo'lsa ( $k/m = \omega_0^2$ )

$$\omega_1^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{3\pi}{10} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \omega_0^2. \quad (4.181)$$

Chastotaning birinchisi ikkala massaning bir butun massa sifatidagi tebranishiga to'g'ri keladi (ikkala massaning orasidagi masofa o'zgar-maydi), ikkinchisi — ikkala massaning bir-biriga qarama-qarshi hara-katiga mos keladi.

### 4.6.3. Chegaraviy massalar erkin bo'lgan hol

Bu hol 4.14-rasmdagi d) holga to'g'ri keladi. Biz bu sistemaning faqat hamma massalar yotgan chiziq bo'yicha tebranishlarini ko'r-moqchimiz. Ma'lumki, sistemaning ilgarilanma harakatini chiqarib tashlash kerak (molekulalarning tebranishlarining muhokamasini eslang). Buning uchun inersiya markazi qo'zg'olmasdan turibdi deb olish kerak:

$$R = \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^N q_{0i} + \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N q_{0i} \quad (4.182)$$

tenglik

$$\sum_{i=1}^N x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N = 0 \quad (4.183)$$

shartni beradi. Avvalgi misollardagi chegaraviy shartlarning o'rnini mana shu shart bosadi.

Tebranishlar tenglamasi yana o'sha:

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, N-1. \quad (4.184)$$

indeks  $n$  endi 0 va  $N+1$  qiymatlarni qabul qilmaydi, chegaraviy shart esa (4.183). Tenglamaning yechimi

$$x_n = A_n e^{i\omega t} e^{in\varphi} \quad (4.185)$$

ko'rinishda izlanadi:

$$(2\omega_0^2 - \omega^2) e^{in\varphi} = (e^{i(n-1)\varphi} + e^{i(n+1)\varphi}). \quad (4.186)$$

Yana o'sha (4.163) formulaga keldik:

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (4.187)$$

Endi (4.183) ni ishlataylik, buning uchun geometrik progressiyadan foydalanish kerak:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_N &= A e^{i\omega t} (e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{iN\varphi}) = \\ &= A e^{i\omega t} \frac{e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} (1 - e^{iN\varphi}) = 0. \end{aligned} \quad (4.188)$$

Bu tenglik bajarilishi uchun

$$N\varphi = 2l\pi \quad (4.189)$$

bo'lishi kerak, bu yerda  $l$  — butun son. Bu degani  $\varphi$  — ikki qo'shni nuqta o'rtasidagi fazalar farqi —  $N - 1$  ta har xil qiymat qabul qila oladi:

$$\varphi_l = \frac{2\pi}{N} l, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (4.190)$$

Demak, 31-rasmda ko'rsatilgan holdagi  $N$  ta nuqtaviy massalar sistemasida  $N - 1$  ta normal tebranishlar bor ekan (yana qaytaramiz, to'g'ri chiziqdan chiqadigan tebranishlar hisobga olinmadi):

$$\omega_l^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{l\pi}{N}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (4.191)$$

Masalan, sistema ikkita moddiy nuqtadan iborat bo'lsin:  $N = 2$ . Bu holda sistemada faqatgina bitta tebranish bor:  $\omega = 2\omega_0$ .

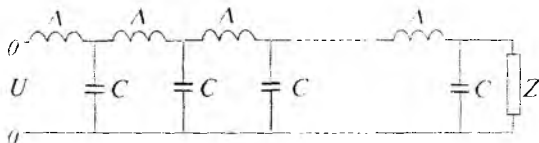
Agar sistema uchta zarradan iborat bo'lsa  $N = 3$ , sistemada ikkita normal tebranishlar bor:

$$\omega_1 = \sqrt{3}\omega_0, \quad \omega_2 = 2\omega_0.$$

#### 4.6.4. Elektr zanjirlar

4.15-rasmda ko'rsatilgan elektrik zanjirning bir uchiga  $U = U_0 \cos \gamma t$  kuchlanish berilmoqda. (Rasmda induktivlikni odatdagi  $L$  ning o'rniga Lagranj funksiyasi bilan adashtirmaslik uchun  $\Lambda$  xarfi bilan belgiladik.)

Zanjirdagi tebranishlar yuguruvchi to'liqin ko'rinishiga ega bo'lishi uchun (bundan, har bir keyingi kondensator  $C$  dagi kuchlanish avvaldagsidan faqat o'zining fazasi bilan farq qiladi degani) uning ikkinchi uchiga ulanilgan kompleks qarshilik  $Z(\gamma)$  qanday bo'lishi kerak?



4.15-rasm. Elektr zanjir.

Zaryadni  $q$  deb belgilaylik. Unda elektr toki  $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$  bo'ladi.

Elektr zanjirda kondensator  $C$  dagi potensial tushishi  $q/C$  ga teng,

induktivlik  $\Lambda$  dagi potensial tushishi  $\Lambda \frac{dI}{dt} = \Lambda \dot{q}$  bo'ladi. Agar zanjirda

faqat  $C$  va  $\Lambda$  bo'lsa Kirxgof qoidasi bo'yicha quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\Lambda \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Demak, bu holda sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2} \Lambda \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

ko‘rinishga mos keladi. Zanjirning tebranish chastotasi  $\omega^2 = \frac{1}{\Lambda C}$  ga teng. Qarshilik  $R$  da potensial tushishi  $RI = R\dot{q}$  ga teng, ko‘rinib turibdiki, harakat tenglamasida qarshilik ishqalanish kuchi rolini o‘ynar ekan:

$$\Lambda\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

Agar tashqi potensial  $U$  berilgan bo‘lsa uni tenglamaning o‘ng tomoniga yozamiz. Demak, qarshilikni dissipativ funksiya orqali kiritish mumkin:

$$F = \frac{1}{2} R\dot{q}^2.$$

Rasmdagi bog‘langan konturlarga o‘tganda har bir kondensator ikki qo‘shni kontur uchun umumiydir. Birinchi konturdagi zaryadni  $q_1$ , ikkinchi konturdagi zaryadni  $q_2$  va h.k. deb belgilansa sistemaning Lagranj funksiyasi uchun quyidagi olinadi:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left[ \Lambda \dot{q}_n^2 - \frac{1}{C} (q_n - q_{n+1})^2 \right] + U_0 q_1 \cos \gamma t.$$

Qarshilik dissipativ funksiya orqali kiritiladi:

$$F = \frac{1}{2} Z \dot{q}_{N+1}^2.$$

Harakat tenglamalari:

$$\Lambda \ddot{q}_1 + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) = U_0 \cos \gamma t,$$

$$\Lambda \ddot{q}_n + \frac{1}{C} (2q_n - q_{n-1} - q_{n+1}) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, N,$$

$$\frac{1}{C} (q_{N+1} - q_N) = Z \dot{q}_{N+1}.$$

Yechim

$$x_i = A e^{i(\gamma t - n\varphi)} \quad (4.192)$$

ko‘rinishda izlanadi (har galdagidek, oxirida eksponentaning haqiqiy qismini chiqarib olish kerak). Ikkinchi tenglama

$$-\gamma^2 \Lambda + \frac{1}{C} (2 - e^{-in\varphi} - e^{in\varphi}) = 0$$

ko'rinishni oladi. Bu esa

$$\gamma^2 \Lambda C = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

ni beradi. Uchinchi tenglamadan (elementar trigonometrik almash-tirishlardan so'ng):

$$Z = -\frac{i}{2} \gamma \Lambda + \sqrt{\frac{\Lambda}{C}} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2 \Lambda C}{4}}$$

Birinchi tenglamadan amplituda topiladi, bunda biz tenglamaning faqat haqiqiy qismini chiqarib yozib olamiz:

$$A \left[ -\gamma^2 \Lambda + \frac{1}{C} (1 - \cos \varphi) \right] = U_0 \cos \varphi,$$

yoki

$$A = \frac{2U_0}{\gamma^2 \Lambda} \left( \frac{\gamma^2 \Lambda C}{2} - 1 \right)$$

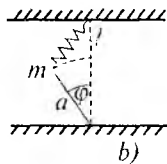
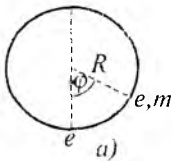
#### 4-bobga mashq va savollar

1. Berilgan Lagranj funksiyalariga mos keluvchi kichik tebranishlar chastotalarini toping:

a)  $L = \dot{x}^2 - x^2 e^x$ ; b)  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \left( \frac{kx^2}{2} - fx \right)$ ,  $f = \text{const}$ ;

c)  $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - (V \cos \alpha x - Fx)$ ,  $V, F = \text{const}$ ; d)  $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x}{\ln x}$ .

2. Massasi  $m$  va zaryadi  $e$  bo'lgan zarra radiusi  $R$  bo'lgan vertikal aylana ichida og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanadi. Aylananing eng quyi nuqtasida  $e$  zaryad joylashgan. Muvozanat holati va tebranish chastotasi topilsin 4.16-a rasm).



4.16- rasm. Tebranuvchi sistemalar.

3. 4.16-b rasmda ko'rsatilgan sistemaning kichik tebranishlar chastotasi topilsin. Muvozanat holatida prujina  $F$  kuch bilan tortilib turadi va uning uzunligi  $l$  ga teng.

4. Boshlang'ich  $t=0$  momentda sistema muvozanat holatida ( $x(0)=0$ ) tinch turibdi ( $\dot{x}(0)=0$ ) deb, quyidagi kuchlar



ta'sirida sistemaning majburiy tebranishini aniqlang. Erkin tebranish chastotasi  $\omega$  ga teng.

a)  $F(t) = F_0$ ;    b)  $F(t) = F_0 t$ ;    c)  $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ ;

d)  $F(t) = F_0 \sin \alpha t$ ;    e)  $F(t) = F_0 e^{-\alpha t} \sin \beta t$ ;

f)  $F(t) = F_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t$ .

5. Quyidagi tashqi kuchlar ta'sirida tebranish amplitudasining vaqtga bog'liq ravishda o'zgarishi topilsin. Erkin tebranish chastotasi:  $\omega$ , boshlang'ich shart:  $x(0) = 0$ :

a)  $F(t) = a \cos \omega t$ ;    b)  $F(t) = a \sin \omega t$ ;    c)  $F(t) = a \sin(\omega + \Delta)t$ ;

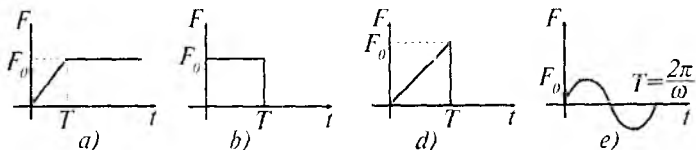
6.  $t=0$  momentda muvozanat holatida tinch turgan ( $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ) sistema  $F(t)$  kuch ta'sirida tebrana boshlaydi. Har gal ham  $t < 0$  da  $F = 0$  deb olib tebranish amplitudasi quyidagi hollarda topilsin (4.17-rasmga qarang):

a)  $0 < t < T$  da  $F(t) = \frac{t}{T} F_0$ ,  $t > T$  da  $F = F_0$ ;

b)  $0 < t < T$  da  $F(t) = F_0$ ,  $t > T$  da  $F = 0$ ;

c)  $0 < t < T$  da  $F(t) = F_0 t / T$ ,  $t > T$  da  $F = 0$ ;

d)  $0 < t < T = \frac{2\pi}{\omega}$  da  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ ,  $t > T$  da  $F = 0$ .



4.17- rasm. (6)-misolga oid.

7. Ossillatorga quyidagi kuch ta'sir qilmoqda:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_0 e^{\lambda t}, & t < 0; \\ \frac{1}{2} F_0 (2 - e^{-\lambda t}), & t > 0. \end{cases}$$

Shu kuch ta'sirida ossillator olgan energiyani toping.  $\lambda > 0$  va  $t \rightarrow -\infty$  da ossillatorning energiyasi  $E_0 = ma^2\omega^2/2$

8. Quyidagi Lagranj funksiyasiga ega sistemalarning barqaror muvozanat holati va xususiy chastotalarini toping:

$$a) L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}}{2} - (x^3 - y^3 + 3xy);$$

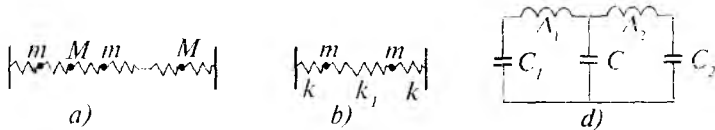
$$b) L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}}{2} - \left( \ln(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

9. Quyidagi Lagranj funksiyasiga ega sistemalarning normal tebranishlarini toping:

$$a) L = \frac{2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2}{2} - \frac{3x^2 + 2y^2}{2};$$

$$b) L = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2}{2} + \alpha x_1 x_2.$$

10. Massalari  $m$  va  $M$  bo'lgan  $2N$  zarrachalar 36-a rasmda ko'rsatilgandek bikirligi bir xil  $k$  bo'lgan prujinalar bilan ulangan zanjir hosil qiladi. Sistemaning tebranish chastotalarini toping.



4.18- rasm. 11-, 12- va 13-misollarga oid.

11. 4.18-b rasmning ko'rsatilgan sistemaning quyidagi hollardagi tebranishlarini toping:

a) boshlang'ich momentda bir zarrachaning tezligi  $v$  ga teng, ikkinchi zarrachaning tezligi nolga, ikkala zarrachaning muvozanatdan og'ishi nolga teng;

b) boshlang'ich momentda bir zarrachaning muvozanatdan og'ishi  $a$  ga teng, ikkinchi zarrachaning og'ishi va ikkala zarrachalarning tezliklari nolga teng;

c) ikkala hol uchun ham bir zarrachadan ikkinchisiga bo'lgan energiya oqimini toping.

12. 4.18-d rasmning ko'rsatilgan bog'langan konturdagi normal tebranishlarni toping.

### 5.1. Angarmonik had $x^4$ bo'lgandagi tebranishlar

Nochiziqli tebranishlar sohasi o'ta murakkab sohadir. Shuning uchun bu sohadan bir necha misollar bilan chegaralanib qolaniz.

Quyidagi Lagranj funksiyasiga ega bo'lgan sistemani olaylik:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{m\beta}{4}x^4. \quad (5.1)$$

Chiziqli tebranishlardan bu hol o'zining oxirgi hadi bilan farq qiladi. Paydo bo'lgan parametr  $\beta > 0$  ni kichik deb faraz qilamiz, bu mana shu oxirgi hadni potensial energiyaga tuzatma deb qarab masalani yechishga g'alayonlanish nazariyasi orqali yondashish imkoniyatini beradi. Bu gaplarimizni quyidagicha ifodalaylik:

$$U = U_0 + \delta U, \quad U_0 = \frac{kx^2}{2}; \quad \delta U = \frac{m\beta}{4}x^4; \quad |\delta U| \ll |U_0|. \quad (5.2)$$

Bunday holni, odatda, **kuchsiz nochiziqli** tebranishlar deyiladi. Harakat tenglamasini yozib olaylik:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3. \quad (5.3)$$

Bu — nochiziqli tenglama bo'lib uni qandaydir yaqinlashuv usuli bilan yechish kerak. To'liq yechimni

$$x = x_0 + \delta x = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \dots \quad (5.4)$$

ko'rinishda qidirish tabiiy bo'lib ko'rinadi. Bu holda tenglama

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \beta(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \beta^2(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) + \dots = -\beta x_0^3 - 3\beta^2 x_0^2 x_1 - \dots \quad (5.5)$$

ko'rinishga keladi. Hosil bo'lgan tenglamaning chap va o'ng tomonlaridagi  $\beta$  bo'yicha bir xil tartibdagi hadlarini bir-biriga tenglashtirish kerak:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0;$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -x_0^3; \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -3x_0^2 x_1; \\ &\dots\end{aligned}\tag{5.6}$$

Bu qatordagi birinchi tenglama

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0\tag{5.7}$$

ning yechimi

$$x_0 = a \cos(\omega_0 t + \varphi).\tag{5.8}$$

Ko'rinib turibdiki,  $x_0$  ni ikkinchi tenglamaga qo'yib, undan  $x_1$  ni topish mumkin,  $x_1$  ni bilgandan keyin qatordagi uchinchi tenglamadan  $x_2$  ni topish mumkin va h.k. Bunday yondashishning asosida masalada kichik parametr  $\beta$  borligi yotadi, yuqoridagi fikr masalani shu parametr bo'yicha ketma-ket yaqinlashuv metodi bilan yechmoqchi bo'lishimizni bildiradi.

Fikrimiz sodda va, odatda, matematikaning ko'pgina sohalarida keng qo'llanadigan bo'lishiga qaramasdan, bizning holimizda u bir jiddiy muammoga olib keladi. Shu muammoni yechish noxiziqli tebranishlar sohasida standart bo'lib qolgan umumiy metodga olib keladi.

Muammoni ko'rish uchun (5.6) ning ikkinchi tenglamasini olaylik:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3.\tag{5.9}$$

$x_0$  ning o'rniga (5.8) ni qo'yiladi:

$$-x_0^3 = -a^3 \cos^3(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{a^3}{4} \cos[3(\omega_0 t + \varphi)] - \frac{3a^3}{4} \cos(\omega_0 t + \varphi)\tag{5.10}$$

(bu yerda  $\cos^3 x = (3 \cos x + \cos 3x)/4$  formuladan foydalanildi). Muammoga duch keldik — tenglamaning o'ng tomonida rezonans had bor  $-3a^3 \cos(\omega_0 t + \varphi)/4$ . Agar shu hadni tenglamaning o'ng tomonida qoldirilsa, unda yechimda vaqt o'tishi bilan cheklanmasdan o'sadigan

$$t \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ko'rinishdagi sekular yoki asriy deyiladigan had hosil bo'lishi kerak, bu esa masalaning fizikasiga hech ham to'g'ri kelmaydi, tashqi ta'sir bo'lmagan sistemada tebranish amplitudasi o'z- o'zidan o'sa boshlashi mumkin emas. Agar (5.3) ni  $m\dot{x}$  ga ko'paytirilsa u

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{m\beta x^4}{4} \right) = 0,$$

yoki,

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{m\beta x^4}{4} = \text{const} \quad (5.11)$$

ko'rinishga keltiriladi. Bu — energiyaning saqlanish qonuni, undan ko'rinib turibdiki, amplituda  $x(t)$  yuqoridan chegaralangan va o'z-o'zidan o'sib ketavera olmaydi.

Demak, sekular hadni boshqacha tahlil qilish kerak. Muammoning yechimi quyidagicha. Qaytatdan (5.3) tenglamani  $\beta$  bo'yicha birinchi tartibli aniqlikda yozib olamiz:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \beta (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) = -\frac{a^3 \beta}{4} \cos[3(\omega_0 t + \varphi)] - \frac{3a^3 \beta}{4} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.12)$$

Oxirgi hadni  $a \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_0$  ekanligini hisobga olib, tenglamaning chap tomoniga o'tkazamiz va uni  $\omega_0^2 x_0$  ga qo'shib qo'yamiz:

$$\ddot{x}_0 + \left( \omega_0^2 + \frac{3a^2 \beta}{4} \right) x_0 + \beta (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) = -\frac{a^3 \beta}{4} \cos[3(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (5.13)$$

Ko'rinib turibdiki, yangi chastota

$$\omega = \omega_0 + \beta \omega_1 = \omega_0 + \frac{3\beta a^2}{8} \quad (5.14)$$

hosil bo'ldi. Natijada,  $x_0$  uchun tenglamani

$$\ddot{\bar{x}}_0 + \omega^2 \bar{x}_0 = 0 \quad (5.15)$$

ko'rinishda yozib olishga to'g'ri keladi. Albatta,  $\bar{x}_0$  endi  $\beta$  ga bog'liq bo'lib qoldi, shu sababli u boshqacha belgilandi, ammo bu bog'liqlik oshkora emas, chastota orqali kirgan bog'liqlikdir:  $\bar{x}_0 = \bar{x}_0(\omega(\beta))$ . Bu tenglamaning yechimi (5.8) dan farq qiladi:

$$\bar{x}_0 = a \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.16)$$

$\bar{x}_0$  yechimni shunday qayta aniqlaganimizdan keyin  $\bar{x}_1$  uchun tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\ddot{\bar{x}}_1 + \omega^2 \bar{x}_1 = -\frac{a^3}{4} \cos[3(\omega t + \varphi)]. \quad (5.17)$$

Bu tenglamaga kelish uchun (5.4) yoyilmani qaytatdan bajarishimiz kerak, undagi  $x_0$  hadni  $\bar{x}_0$  ga va chastotani ham  $\omega_0 \rightarrow \omega$  almashtirishimiz kerak. Umumiy qoida bo'yicha bu tenglamaning yechimi

$$\bar{x}_1 = \frac{a^3}{32\omega^2} \cos[3(\omega t + \varphi)] \quad (5.18)$$

bo'ladi.

Demak, birinchi yaqinlashuvdagi umumiy yechim

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \cos(3\omega t + 3\varphi), \quad \omega = \omega_0 + \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}, \quad (5.19)$$

ko'rinishga ega bo'ldi.

Haqiqatda ikkinchi hadning mahrajida  $\omega \rightarrow \omega_0$  deb olish kerak, chunki

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_0^2 + \frac{3\beta a^2}{4}} = \frac{1}{\omega_0^2} - \frac{3\beta a^2}{4\omega_0^4} + \dots$$

yoyilmadan ko'rinib turibdiki, ushbu almashtirish bajarilmasa  $x_2$  ga kirishi kerak bo'lgan hadlarning bir qismini  $x_1$  ga kiritib qo'ygan bo'lib chiqamiz. Shu mulohazani fikrda tutib birinchi tartibli aniqlikdagi yechim

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\beta a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\omega t + 3\varphi), \quad \omega = \omega_0 + \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}, \quad (5.20)$$

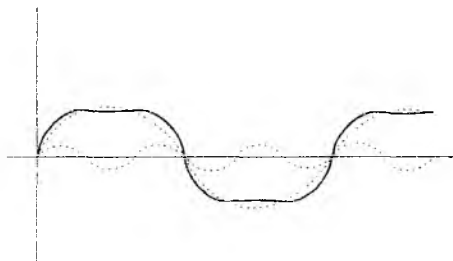
deb olinadi.

Olingan natijadagi ikkita muhim o'zgacha xossalarni aytib o'tish kerak.

Birinchidan, chiziqli sistemalardan farqli o'laroq nochiziqli sistema-ning tebranish chastotasi (5.14) tebranish amplitudasiga bog'liq bo'lib chiqdi.

Ikkinchidan, yechimda yuqori chastotali tebranish — *yuqori gar-monika* — hosil bo'ldi. Ularning yana bir nomi — *kombinatsion chas-totalar*. Umumiy metodga o'tkanimizda ko'ramizki, bu ikkita alohida xossa nochiziqli tebranishlar uchun umumiy bo'lgan xossalardir, har keyingi yaqinlashuv hisobga olinganda chastotaning o'zgarishi yana ro'y beraveradi va  $\omega_i \pm \omega_j$  qoida bo'yicha (bu yerda  $\omega_{i,j}$  — avvalgi

yaqinlashuvlarda hosil bo'lgan chastotalar) yangi kombinatsion chastotalar hosil bo'laveradi.



5.1- rasm. (5.20) ning grafiqi: punktirli chiziqlar  $\omega$  va  $3\omega$  chastotali tebranishlarga mos keladi, uzliksiz chiziq esa to'liq yechimga mos keladi.

## 5.2. Umumiy metod

Ko'rib chiqqan misollarda kuchsiz nochiziqli tebranishlarning bir necha asosiy xossalari bilan tanishdik. Shu misollarni umumlashtirib ma'lum bir metodga kelish mumkin. Umumlashtirish yo'llari bir necha ular ichida boshqa ko'pgina metodlarni o'z ichiga olgan va barkamol deb hisoblangan Bogolyubov-Krilov metodini o'rganamiz.

Bizga

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) \quad (5.21)$$

ko'rinishdagi tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda  $\varepsilon$  — masaladagi kichik parametr,  $f(t, x, \dot{x})$  — o'z argumentlarining funksiyasi. Kichik parametrning mavjudligi gap kuchsiz nochiziqlik haqida ketayotganidan dalolat beradi. Yechimni

$$x = a \cos \psi + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n x_n(a, \psi) + O(\varepsilon^{N+1}) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (5.22)$$

ko'rinishda qidiramiz<sup>1</sup> ( $x_0 = a \cos \psi$ ). Avvalgi paragraflardagi misollarda ko'rdikki, yuqori tartiblarga o'tganda tebranish chastotasi va garmonikalarning amplitudalari o'zaro bog'liq bo'lgan murakkab funksiyalarga aylanadi.

<sup>1</sup> Eslatib ketaylik.  $O(\varepsilon^{N+1})$  ifoda  $\varepsilon \rightarrow 0$  limitda  $O(\varepsilon^{N+1})/\varepsilon^{N+1} = const$  ekanligini bildiradi.

Masalan,

$$\psi = \omega_0 t + (\varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots) t + \varphi, \quad (5.23)$$

bunda  $\psi_1$  – topish kerak bo‘lgan funksiyalar,  $\varphi$  – boshlang‘ich faza. Shuni nazarda tutib, (5.22) dagi kattaliklar quyidagicha ta‘riflanadi:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n A_n(a) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (5.24)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots = \omega_0 + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \psi_n(a) + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (5.25)$$

Hosil bo‘lgan  $x_n, A_n, \psi_n$  funksiyalar shunday tanlanib olinishi kerakki, (5.22) orqali aniqlangan funksiya (5.21) tenglamaning yechimi bo‘lib chiqsin. (5.22) formulaga ahamiyat berilsa hisoblash davomida vaqt bo‘yicha hosilani  $a$  va  $\psi$  bo‘yicha hosilalarga o‘tkazib olish qulaydir. Murakkab funksiyaning hosilasiga tegishli zanjir qoida bo‘yicha:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial x}{\partial \psi}. \quad (5.26)$$

(5.21) tenglamaga qo‘yish uchun  $x(a(t), \psi(t))$  ning vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilasi kerak:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{da}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = \frac{d^2 a}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \\ &+ \left( \frac{da}{dt} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial \psi}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Bu yerda hosil bo‘lgan  $\ddot{a}$  va  $\ddot{\psi}$  lar ham mos holda quyidagi ko‘rinishga keltirib olinadi:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \frac{da}{dt} = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{dA_n(a)}{da} = \varepsilon^2 A_1 \frac{dA_1(a)}{da} + O(\varepsilon^3); \quad (5.28)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \frac{d\psi}{dt} = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{d\psi_n(a)}{da} = \varepsilon^2 A_1 \frac{d\psi_1(a)}{da} + O(\varepsilon^3) \quad (5.29)$$



(5.21) tenglamaning chap tomonini to'liq ravishda kerakli ko'rinishga keltirish uchun yana bir necha hosilalarni hisoblaylik. Ularda ham  $\varepsilon^2$  aniqlik bilan chegaralanamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} &= \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots, \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} &= -a \sin \psi + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial \psi} + \varepsilon^2 \frac{\partial x_2}{\partial \psi} + \dots, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} &= \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial a^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial a^2} + \dots, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} &= -a \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + \dots, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \psi \partial a} &= -\sin \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial a} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi \partial a} + \dots. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Agar  $\varepsilon$  bo'yicha kvadratik hadlar bilan chegaralanilsa (5.21) tenglamaning chap tomoni quyidagi ko'rinishga keltiriladi ( (5.27) da avval koeffitsiyentlarning, keyin esa  $x$  ning  $a$  va  $\psi$  bo'yicha hosilalarining yoyilmalari qo'llaniladi):

$$\begin{aligned} &\omega_0^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} + 2\varepsilon \omega_0 \left[ \psi_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} + A_1 \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial \psi} \right] + \varepsilon^2 \left[ A_1^2 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + A_1 \frac{dA_1}{da} \frac{\partial x}{\partial a} + \right. \\ &+ 2A_1 \psi_1 \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial \psi} + (\psi_1^2 + 2\omega_0 \psi_2) \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} + A_1 \frac{d\psi_1}{da} \frac{\partial x}{\partial \psi} \left. \right] + \\ &+ \omega_0^2 a \cos \psi + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots = \varepsilon \left[ \omega_0^2 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) - 2\omega_0 (A_1 \sin \psi + a\psi_1 \cos \psi) \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \omega_1^2 \left( \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) + 2\omega_0 \left( A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial a} + \psi_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} \right) + \right. \\ &\left. + \left( A_1 \frac{dA_1}{da} - a\psi_1^2 - 2a\omega_0 \psi_2 \right) \cos \psi - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \left( aA_1 \frac{d\psi}{da} + 2A_1 \psi_1 + 2\omega_0 A_2 \right) \sin \psi \right] + \dots \quad (5.31)$$

(5.21) tenglamaning chap tomoni to'liq ravishda yangi o'zgaruvchilarga o'tkazilib kichik parametr bo'yicha kvadratik aniqlikda qatorga yoyilib hisoblab chiqildi.

Tenglamaning o'ng tomoni ham  $\varepsilon$  bo'yicha mos keladigan aniqlikda qatorga yoyilishi kerak:

$$\begin{aligned} \varepsilon f(x, \dot{x}) &= \varepsilon f(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots, \dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \dots) = \varepsilon f(x_0, \dot{x}_0) + \\ &+ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \dot{x}_1 \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ahamiyat bering, tenglamaning chap va o'ng tomonlaridagi qatorlar  $\varepsilon$  ning birinchi darajasiga proporsional hadlardan boshlanadi. Bu tabiiydir, (5.22) ga qarasak,  $x_0$  hadning ko'rinishi ma'lum deb olingan. Qilishimiz kerak bo'lgan ish (5.31) va (5.32) ifodalardagi  $\varepsilon$  ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni bir-biriga tenglashtirish.  $\varepsilon$  bo'yicha birinchi tartibli hadlarni bir-biriga tenglashtirilsa  $x_1$  ni aniqlash uchun differensial tenglama olinadi,  $\varepsilon^2$  ga proporsional hadlarni tenglashtirilsa  $x_2$  uchun differensial tenglama olinadi va h.k. Bitta savol qoladi —  $A_1$  va  $\psi_1$  lar qanday aniqlanadi? Ular rezonans hadlar bo'lmasligi shartidan topiladi. Birinchi bosqichda ( $\varepsilon$  bo'yicha birinchi tartibli hadlarni olinganda)  $A_1$  va  $\psi_1$  koeffitsiyentlar rezonans hadlarning bo'lmasligi shartidan topiladi,  $x_1$  had  $\psi$  bo'yicha differensial tenglamaning yechilishidan topiladi.

Ikkinchi bosqichda bularning hammasi (5.31) formuladagi  $\varepsilon^2$  oldidagi to'g'ri qavsning ichidagi ifodaga qo'yiladi. Noma'lumlar bu bosqichda  $A_2$ ,  $\psi_2$  va  $x_2$  bo'ladi.  $A_2$ ,  $\psi_2$  larni yana rezonans hadlar bo'lmasligi shartidan topiladi, natijada,  $x_2$  uchun o'ng tomonidagi hamma hadlari aniqlangan differensial tenglamaga kelamiz. Buni misollarda ko'rganimiz yaxshidir.

### 5.2.1. Angarmonik ossillator: $\delta U = m\varepsilon x^4$ .

5.1 qismda ko'rgan misolga qaytib kelaylik. Umumiy metod bilan solishtirishni osonlashtirish uchun u yerdagi kichik parametr  $\beta$  ning o'rniga  $\varepsilon$  olinadi:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon x^3. \quad (5.33)$$

Demak,

$$f(x, \dot{x}) = -\varepsilon x^3.$$

(5.32) yoyilma bu holda

$$f(x, \dot{x}) = -\varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^3 = -\varepsilon x_0^3 - 3\varepsilon^2 x_0^2 x_1 + \dots \quad (5.34)$$

ko'rinishga keladi. Endi (5.31) dagi  $\varepsilon$  ning birinchi darajasi oldidagi hadni  $(-x_0^3 = -a^3 \cos^3 \psi)$  ga tenglashtiramiz:

$$\omega_0^2 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) = 2\omega_0 (A_1 \sin \psi + a\psi_1 \cos \psi) - a^3 \cos^3 \psi. \quad (5.35)$$

Agar o'ng tomondagi  $\sin \psi$  va  $\cos \psi$  hadlarni yo'q qilmasak tenglamaning yechimida  $t \cos \psi$  tipdagi rezonans hadlar hosil bo'ladi. Tashqi kuch ta'sirida bo'lmagan sistema uchun bunday hadlarning hosil bo'lishi mumkin emas, bu  $A_1$  va  $\psi_1$  uchun shartlarni beradi.

Ularni olish uchun  $\cos^3 \psi = (3 \cos \psi + \cos 3\psi)/4$  formuladan foydalanib, tenglamaning o'ng tomoni (5.35)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 = \frac{2}{\omega_0} (A_1 \sin \psi + a\psi_1 \cos \psi) - \frac{3a^3}{4\omega_0^2} \cos \psi - \frac{a^3}{4\omega_0^2} \cos 3\psi \quad (5.36)$$

ko'rinishga keltiriladi. Demak, rezonans hadlarning hosil bo'lmalik shartlari

$$A_1 = 0, \quad \psi_1 = \frac{3a^2}{8\omega_0} \quad (5.37)$$

ifodalarni beradi. Bularning ikkinchisi yangi chastotani beradi:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \psi_1 = \omega_0 + \frac{3a^2 \varepsilon}{8\omega_0} = \omega. \quad (5.38)$$

Natijada  $x_1$  uchun tenglama

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 = -\frac{a^3}{4\omega_0^2} \cos 3\psi \quad (5.39)$$

ko'rinishni oladi. Uning yechimi

$$x_1 = \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi = \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\omega t + 3\varphi). \quad (5.40)$$

Yana qaytatdan (5.20) yechimni olindi.

Endi  $x_2$  ni topishga kirishamiz. Buning uchun (5.31) va (5.32) formulalardan foydalanish kerak.

Natija:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left( \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) + 2\omega_0 \left( A_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial a} + \psi_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} \right) + \left( A_1 \frac{dA_1}{da} - \omega \psi_1^2 - 2a\omega_0 \psi_2 \right) \cos \psi - \\ - \left( aA_1 \frac{d\psi_1}{da} + 2A_1 \psi_1 + 2\omega_0 A_2 \right) \sin \psi = -3x_0^2 x_1. \end{aligned} \quad (5.41)$$

$x_0$ ,  $x_1$ ,  $A_1$  va  $\psi_1$  larning o'rniga tegishli ifodalarni qo'yib, tenglama soddalashtiriladi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 = \frac{2A_3}{\omega_0} \sin \psi + \frac{a}{\omega_0^2} \left( 2\omega_0 \psi_2 + \frac{15a^4}{128\omega_0^2} \right) \cos \psi + \\ + \frac{21a^5}{128\omega_0^4} \cos 3\psi - \frac{3a^5}{128\omega_0^4} \cos 5\psi. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Rezonans hadlarning yo'q bo'lish shartlari:

$$A_2 = 0, \quad \psi_2 = -\frac{15a^5}{256\omega_0^3}. \quad (5.43)$$

Natijada  $x_2$  uchun quyidagi tenglama qoladi:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 = \frac{21a^5}{128\omega_0^4} \cos 3\psi - \frac{3a^5}{128\omega_0^4} \cos 5\psi. \quad (5.44)$$

Uning yechimi:

$$x_2 = -\frac{21a^5}{1024\omega_0^4} \cos 3\psi + \frac{3a^5}{1024\omega_0^4} \cos 5\psi. \quad (5.45)$$

Bajargan ishimizni yig'ib chiqaylik.  $\varepsilon^2$  aniqlikdagi topilgan yechim:

$$x(t) = a \cos \psi + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\psi + \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} (-21 \cos 3\psi + 3 \cos 5\psi). \quad (5.46)$$

Tebranish chastotasi:

$$\psi = \omega t + \varphi = \left( \omega_0 + \frac{3a^2\varepsilon}{8\omega_0} - \frac{15a^5\varepsilon^2}{256\omega_0^3} \right) t + \varphi. \quad (5.47)$$

Biz yana bir marta kombinatsion chastotalarning (yuqori garmonikalar) hosil bo'lishi va chastotaning amplituda va masaladagi parametrga bog'liq bo'lib siljishi hodisalarini ta'kidlab ketaylik. Bu hodisalar nochiziqli tebranishlar uchun hos bo'lgan hodisalaridir.

### 5.2.2. Angarmonik ossillator: $\delta U = m\varepsilon x^3$ .

Yuqoridagi metodni

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon x^2 \quad (5.48)$$

tenglamaga qo'llaylik. Metodning mohiyatini ma'lum darajada tushundik deb uning ustida ortiqcha to'xtalib o'tirmaymiz.

Bu gal ham masala  $\varepsilon^2$  aniqlikda yechiladi. Tenglamaning o'ng tomoni:

$$-\varepsilon f(x, \dot{x}) = -\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^2 = -\varepsilon x_0^2 - 2\varepsilon^2 x_0 x_1 + \dots. \quad (5.49)$$

Birinchi yaqinlashuv tenglamasi:

$$\omega_0^2 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) = 2\omega_0 (A_1 \sin \psi + a\psi_1 \cos \psi) - a^2 \cos^2 \psi. \quad (5.50)$$

Tenglamaning o'ng tomonida  $\cos^2 \psi = (1 + \cos 2\psi)/2$  almashtirish bajaramiz va rezonans (sekular) hadlarning yo'q qilish shartlarini topamiz:

$$A_1 = 0, \quad \psi_1 = 0. \quad (5.51)$$

Yakuniy tenglama:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 = -\frac{a^2}{2\omega_0^2} (1 + \cos 2\psi). \quad (5.52)$$

Bu tenglamaning yechimi:

$$x_1 = -\frac{a^2}{2\omega_0^2} + \frac{a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\psi, \quad \psi = \omega_0 t + \varphi. \quad (5.53)$$

Ushbu tartibda chastota o'zgargani yo'q, chunki  $\psi_1 = 0$ . Keyingi tartibli had uchun tenglama (5.51) hisobga olindi:

$$\omega_0^2 \left( \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 \right) = 2a\omega_0 \psi_2 \cos \psi + 2\omega_0 A_2 \sin \psi - 2x_0 x_1. \quad (5.54)$$

Bu yerga  $x_0$  va  $x_1$  larni qo'yib kerakli soddalashtiramiz:

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 = \left( \frac{2a}{\omega_0} \psi_2 + \frac{5a^3}{6\omega_0^4} \right) \cos \psi + \frac{2}{\omega_0} A_2 \sin \psi - \frac{a^3}{6\omega_0^4} \cos 3\psi. \quad (5.55)$$

Rezonans hadlarning yo'q bo'lishi shartlari:

$$A_2 = 0, \quad \psi_2 = \frac{5a^2}{12\omega_0^3}. \quad (5.56)$$

(5.55) ning yechimi:

$$x_2 = \frac{a^3}{48\omega_0^4} \cos 3\psi. \quad (5.57)$$

Shunday qilib, harakat tenglamasi (5.48) bo'lgan sistemaning  $\varepsilon^2$  aniqlikdagi tebranishlari topildi:

$$x = a \cos \psi - \varepsilon \frac{a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\varepsilon a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\psi + \frac{\varepsilon^2 a^3}{48\omega_0^4} \cos 3\psi, \quad \psi = \left( \omega_0 - \frac{5a^2 \varepsilon^2}{12\omega_0^3} \right) t + \varphi. \quad (5.58)$$

### 5.2.3 Mayatnik

Matematik mayatnikning aniq harakat tenglamasini o'z vaqtida keltirib chiqargan edik (1.105) va (1.111) tenglamalarga qarang). Bu yerda o'sha tenglamani

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (5.59)$$

ko‘rinishda yozib olinadi (qulaylik uchun  $\varphi \rightarrow x$  almashtirish bajarildi). Kichik argument uchun o‘rinli bo‘lgan

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

yoyilmadan foydalanib (5.59) ni

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0^2}{6} x^3, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad (5.61)$$

ko‘rinishga keltirib olinadi. Agar o‘ng tomondagi kubik hadni tashlab yuborilsa mayatnikning (chiziqli) garmonik tebranishlari tenglamasining o‘zi olinadi. O‘rganilayotgan holda birinchi angarmonik had kibik had ekan. Krilov—Bogolyubov metodini shu tenglamaga qo‘llaylik.

Metodni qo‘llash uchun nochiziqli hadni kichik tuzatma deb qarashimiz kerak, ya‘ni

$$\varepsilon f(x, \dot{x}) = \frac{\omega_0^2}{6} x^3. \quad (5.62)$$

Bu yaqinlashuv hatto  $x = 30^\circ$  ( $x = 0.5236$  rad) bo‘lganda ham juda yaxshi yaqinlashuv bo‘ladi:  $(x - x^3/6) - \sin x \approx 0,4997 - 0,5 \approx 3 \cdot 10^{-4}$ .

Agarda bu yaqinlashuvning aniqligi yetarli bo‘lmasa sinusning yoyilmasidagi keyingi hadni ham hisobga olish mumkin.

Shularni hisobga olib (5.61) ni yechishga o‘taylik. Yechim yana (5.22) ko‘rinishida izlanadi. Birinchi tartibli tuzatma uchun (5.31) asosida

$$\omega_1^2 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) = 2\omega_0 A_1 \sin \psi + 2a\omega_0 \psi_1 \cos \psi + \frac{\omega_0^2 a^3}{6} \cos^3 \psi. \quad (5.63)$$

tenglama olinadi. Demak,

$$A_1 = 0, \quad \psi_1 = -\frac{\omega_0 a^2}{16}. \quad (5.64)$$

$x_1$  uchun tenglamaning ko‘rinishi esa

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 = \frac{a^3}{24} \cos 3\psi. \quad (5.65)$$

Shunday qilib, matematik mayatnik uchun birinchi nochiziqli had hisobga olinsa

$$x = a \cos \psi - \frac{a^3}{192} \cos 3\psi, \quad \psi = \omega_0 \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right) t + \varphi \quad (5.66)$$

yechim olinadi. Ko‘rinib turibdiki, mayatnikning chastotasi kamaydi, tebranish davri esa o‘sdi:

$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{a^2}{16}} \approx T_0 \left( 1 + \frac{a^2}{16} \right). \quad (5.67)$$

Shu yo‘l bilan keyingi hadlarni ham topish mumkin.

#### 5.2.4. So‘nuvchi tebranuvchi mayatnik

Mayatnik ishqalanish bor bo‘lgan tashqi muhitda harakat qilayotgan bo‘lsin. Bu holdagi chiziqli tenglama (4.58) ko‘rinishga ega edi. Umumiy holda uni

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \quad (5.68)$$

tenglamaga almashtirish kerak, bu yerda yana  $\omega_0^2 = g/l$ . Tenglamada yana (5.60) yaqinlashuvga o‘tilsa

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\lambda \dot{x} + \frac{\omega_0^2}{6} x^3 \quad (5.69)$$

tenglama olinadi. Ishqalanish kuchli hadni o‘ng tomonga o‘tkazish bilan uni ham kichik tuzatma sifatida ko‘rmoqchi ekanligimizni aytmoqchimiz. Buning sababi (4.4) paragrafdagi muhokamadan kelib chiqadi, u yerda ko‘rgan edikki, agar ishqalanish koeffitsiyenti katta bo‘lsa, harakat tebranuvchan emas, tez so‘nuvchi bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\varepsilon f(x, \dot{x}) = -2\lambda \dot{x} + \frac{\omega_0^2}{6} x^3. \quad (5.70)$$

Tenglamaning o‘ng tomonini to‘g‘ri ochib chiqish uchun (5.22), (5.24) va (5.25) formulalarni qo‘llash kerak:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \psi + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots; \\ \dot{x} &= -a \dot{\psi} \sin \psi - a \ddot{\psi} \cos \psi + \varepsilon \dot{x}_1 + \dots = \end{aligned}$$



$$= -a\omega_0 \sin \psi + \varepsilon (A_1 \cos \psi - a\psi_1 \sin \psi + \dot{x}_1) \dots \quad (5.71)$$

Endi  $\varepsilon f$  ni qatorga yoyish mumkin:

$$\begin{aligned} \varepsilon f(x, \dot{x}) &= \varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial f}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \left( A_1 \cos \psi - a\psi_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \right) \right] + \dots \quad (5.72) \end{aligned}$$

Bu yerdan birinchi tartibli had sifatida

$$\varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) = 2a\lambda\omega_0 \sin \psi + \frac{a^3\omega_0^3}{6} \cos^3 \psi \quad (5.73)$$

ifodani olish kerak. Natijada, birinchi tartibda quyidagi tenglamaga kelinadi:

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 \right) = \frac{2}{\omega_0} (\varepsilon A_1 + \lambda a) \sin \psi + \left( \frac{2a}{\varepsilon\omega_0} \psi_1 + \frac{a^3}{8} \right) \cos \psi + \frac{a^3}{24} \cos 3\psi. \quad (5.74)$$

Rezonans hadlarning yo'q bo'lishi shartlari:

$$\varepsilon A_1 = -\lambda a, \quad \varepsilon \psi_1 = -\frac{a^2\omega_0}{16}. \quad (5.75)$$

Shuni ta'kidlash kerakki, ko'rgan misollarning ichida birinchi marta  $A_1$  ko'effitsiyent noldan farqli bo'lib chiqdi. Buning ma'nosini tushunish qiyin emas —  $A_1$  ko'effitsiyent nolga teng bo'lganda tebranish amplitudasi birinchi tartibda o'zgarmasdan qoladi. So'nuvchi tebranishlar uchun esa amplitudaning nolga intilishi kerakligi tushunarlidir.

Topilgan ko'effitsiyentlardan  $a$  va  $\psi$  uchun tenglamalarga o'taylik:

$$\frac{da}{dt} = -\lambda a; \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 - \frac{a^2\omega_0}{16}. \quad (5.76)$$

Ularning yechimlari:

$$a = a_0 \exp(-\lambda t), \quad \psi = \omega_0 t + \frac{\omega_0}{32\lambda} (\exp(-2\lambda t) - 1) + \varphi, \quad \psi(0) = \varphi. \quad (5.77)$$

Bularni  $x$  uchun ifodaga olib borib qo'yiladi:

$$x = a_0 \exp(-\lambda t) \cos \left\{ \omega_0 \left[ t + \frac{a_0^2}{32\lambda} (\exp(-2\lambda t) - 1) \right] + \varphi \right\} \quad (5.78)$$

Tebranish amplitudasi vaqt o'tishi bilan nolga intilmoqda, tebranish fazasi murakkab funksiya bo'lib, vaqt o'tishi bilan u  $\omega_0 t + \varphi$  ifodaga intiladi.

### 5-bobga mashq va savollar

1. Kinetik energiyaga quyidagi angarmonik tuzatma  $\delta T = \frac{m\gamma x \dot{x}^2}{2}$

kiritilganda garmonik tebranishlarning o'zgarishini toping.

2. Quyidagi tenglama bilan ifodalanadigan

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

va Van-der-Paul ossillatori deyiladigan sistema uchun birinchi yaqinlashuvdagi tebranish amplitudasi va chastotasi topilsin.

3. Quyidagi tenglama uchun birinchi tartibli yaqinlashuvda yechimni toping:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \varepsilon x^3.$$

### 6.1. Dinamik o'zgaruvchilar

#### 6.1.1. Koordinata o'qlarini tanlash. Burchak tezlik<sup>1</sup>

Mexanikada *qattiq jism* deganda uning moddiy nuqtalari orasidagi masofa o'zgarish bo'lgan sistema ko'zda tutiladi. Albatta, bu ma'lum bir darajadagi yaqinlashuv, uning qo'lanishi tezliklarning kichikligi bilan bog'liq. Qattiq jismning harakati haqida gapirganda uni yoki diskret moddiy nuqtalardan iborat sistema, yoki uzliksiz muhitli sistema deb qaraladi.

Qattiq jismning erkinlik darajalari soni 6 ga teng. Buni quyidagicha ko'rish mumkin. Jism  $N$  ta moddiy nuqtadan iborat bo'lsin. Ularning erkinlik darajalari soni  $3N$  ga teng. Shu nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy 3 tasini tanlab olinadi, ularning orasidagi masofalarning o'zgarishlik shartlari soni 3 ga teng. Qolgan  $N - 3$  ta nuqtaning har bittasidan shu uchta nuqttagacha masofalarning o'zgarishlik shartlari  $3(N - 3)$  ta bo'ladi. Demak, sistemaning erkinlik darajalari soni  $3N - 3 - 3(N - 3) = 6$  ga teng ekan.

Buni soddaroq qilib aytish ham mumkin — jism ichidagi bir to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta nuqtani tanlab olish uchun 6 ta umumlashgan koordinatalarni aniqlash yetarlidir, qolgan  $N - 3$  ta nuqta masofalarning o'zgarishlik shartlari orqali aniqlanadi.

Keyingi formulalarda, odatda, qattiq jismni diskret moddiy nuqtalardan iborat bo'lgan sistema deb ko'riladi. Qattiq jismni uzliksiz muhit sifatida qarash uchun diskret moddiy nuqtalar bo'yicha yig'indilarni (ular uchraganda) shu qattiq jismning hajmi bo'yicha integralga quyidagi sodda qoida bo'yicha almashtirish yetarli:

$$\sum_a m_a \rightarrow \int_V d^3x' \rho(x', y', z'), \quad (6.1)$$

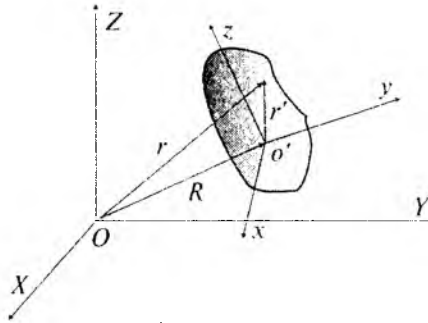
bunda  $a$  —  $m_a$  massali nuqtaning nomeri.

Qattiq jismning harakatini o'rganish uchun ikkita koordinat sistemalarini kiritish maqsadga muvofiqdir. Ularning biri laboratoriya

---

<sup>1</sup> Ushbu bobni o'rganishdan oldin ilovadagi vektorlar bilan ishlash qoidalari bilan tanishib chiqish kerak.

sistemi bo'lib, uning o'qlari katta harflar bilan belgilanadi —  $X, Y, Z$ . Ikkinchisi — shu qattiq jism bilan mahkam bog'langan sistema,



6.1- rasm. Qattiq jism koordinatlari.

uning o'qlarini  $x, y, z$  deb belgilanadi. Bu sistemaning boshini jismning inersiya markazida joylashtirish qulaydir.

O'qlari  $x, y, z$  bo'lgan sistema shu qattiq jism bilan birga harakatda bo'ladi. Harakatdagi sistemaning koordinat boshi qo'zg'almas sistemada  $\mathbf{R}$  radius-vektor orqali ifodalansin.

Qattiq jismning ixtiyoriy bir nuqtasi olinadi, qo'zg'almas va qo'zg'oluvchan sistemalarda uning radius-vektorlari mos ravishda  $\mathbf{r}$  va  $\mathbf{r}'$  bo'lsin (6.1-rasmga qarang). Ko'rinib turibdiki

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \quad (6.2)$$

Jismning cheksiz kichik siljishini ko'raylik. Bu siljish ikki qismdan iborat bo'ladi: birinchisi — butun bir jismning o'z-o'ziga parallel ko'chishi, bu — jismning inersiya markazining ko'chishi  $d\mathbf{R}$  orqali hosil bo'lgan qismi, ikkinchisi — jismning  $d\varphi$  burchakka buralishi natijasida hosil bo'lgan qismi:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{r}' = d\mathbf{R} + [d\varphi\mathbf{r}'] \quad (6.3)$$

Bu tenglikning ikkala tomonini  $dt$  ga bo'lsak va

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \Omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (6.4)$$

formulalar orqali ko'rilayotgan nuqtaning qo'zg'almas sistemadagi to'liq tezligi, jism inersiya markazining shu sistemadagi tezligi va jismning **burchak tezligi**  $\Omega$  larni kiritilsa, tezliklar orasidagi munosabat olinadi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega\mathbf{r}'] \quad (6.5)$$

Ikki koordinat sistemasini kiritishning qulayligi endi tushunarli bo'ldi — jismning ixtiyoriy harakatini uning inersiya markazining o'ziga parallel ko'chishi  $x$  inersiya markazidan o'tgan o'q atrofida aylanishi deb qarash mumkin ekan.

Qattiq jismning inersiya markazi sistemasiga o'taylik. Bu holda (6.5) bo'yicha jism nuqtasining chiziqli tezligi uning burchak tezligi bilan  $\mathbf{v}' = [\Omega \mathbf{r}']$  formula orqali bog'langan.

Koordinat boshi  $O$  ni va o'qlarni tanlash ixtiyoriydir, jismning ilgari lanma harakat tezligi yangi sistemada albatta, o'zgaradi. Ammo burchak tezlik esa bunda o'zgarmaydi. Shuni ko'rsatish uchun qo'zg'uluvchan sistema boshini  $\mathbf{a}$  vektorga ko'chiramiz:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{a} + \mathbf{r}_1. \quad (6.6)$$

Bir tomondan

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{a} + \mathbf{r}_1. \quad (6.7)$$

ikkinchi tomondan

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_1. \quad (6.8)$$

Bunda  $\mathbf{R}_1$  yangi koordinat boshi  $O_1$  ning  $O$  ga nisbatan radius-vektori,  $\mathbf{r}_1$  — nuqtaning  $O_1$  ga nisbatan radius-vektori. Jism ilgari lanma + aylanma harakat qilganida tezliklar uchun

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega \mathbf{a}] + [\Omega \mathbf{r}_1] \quad (6.9)$$

va

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_1 + [\Omega_1 \mathbf{r}_1] \quad (6.10)$$

formular hosil bo'ladi. Bu yerdan ko'rinib turibdiki,  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + [\Omega \mathbf{a}]$  va  $\Omega = \Omega_1$ , ya'ni, jismning burchak tezligi koordinat sistemasini tanlab olishga bog'liq emas ekan. Demak, burchak tezlik jism aylanma harakatining haqiqiy xarakteristikasi ekan. Odatda, harakatdagi sistema boshi jismning inersiya markazida olingan deb qaraymiz.

### 6.1.2. Inersiya markazi. Impuls

Qattiq jismning to'liq massasini  $m = \sum_a m_a$  deb belgilaymiz. Inersiya markazining ta'rifi bo'yicha

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_a m_a \mathbf{r}_a. \quad (6.11)$$

Uzliksiz sistema uchun

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \quad (6.12)$$

bunda  $V$  – jismning hajmi. Agar  $O'$  nuqta jismning inersiya markazida joylashgan bo'lsa

$$\sum_a m_a \mathbf{r}'_a = 0 \quad (6.13)$$

bo'ladi. Uzliksiz sistema uchun bu tenglikni

$$\int_V d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = 0 \quad (6.14)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin.

Bundan keyin hamma formulalarni diskret holda yozaveramiz, uzliksiz holga o'tish qiyin emasligini ko'rdik.

Impulsga kelaylik. Impuls additivlik xossasiga ega ekanligidan

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{V} + \sum_a m_a [\Omega \mathbf{r}'_a] = m \mathbf{V} + \sum_a m_a [\Omega \mathbf{r}'_a]. \quad (6.15)$$

Shtrixlangan koordinat boshi inersiya markazida bo'lsa, ikkinchi had yana nolga teng bo'ladi:

$$\mathbf{P} = m \mathbf{V} \quad (6.16)$$

Ya'ni, koordinat boshi inersiya markazida olinsa, jismning ilgarilanma harakatini o'rganganda uning butun massasini bitta  $\mathbf{R}$  radiusli nuqtada joylashgan deb qarash mumkin ekan.

### 6.1.3. Impuls momenti

Impuls momentini yozaylik:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{V}] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a [\Omega \mathbf{r}_a]]. \quad (6.17)$$

Agar harakatdagi sistemaning koordinat boshi jismning inersiya markazida bo'lsa, yana birinchi had nolga teng bo'ladi:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a [\Omega \mathbf{r}_a]]. \quad (6.18)$$

Bu yerda radiusni shtixlab belgilanmaymiz, formuladagi radius-vektorlar inersiya markazi sistemasida olinganligini esdan chiqarilmasa bo'ldi. Inersiya markazi sistemasida hisoblangan impuls momenti, odatda, jismning xususiy momenti deyiladi. Umuman esa impuls momenti bir qiymatli aniqlangan kattalik emas.

Ko'rinib turibdiki, umumiy holda impuls momenti va burchak tezligining yo'nalishlari mos tushmas ekan.

(6.18) formulani (A.36) asosida ochib chiqaylik (zarrachaning nomeri va vektorning indeksini adashtirmaslik uchun zarrachaning nomerini kerakli joylarda qavs ichiga olinadi  $a \rightarrow (a)$ ):

$$[\mathbf{r}_a [\boldsymbol{\Omega}_a \mathbf{r}_a]]_j = \varepsilon_{ijk} r_{aj} [\boldsymbol{\Omega}_a \mathbf{r}_a]_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} r_{(a)j} \Omega_l r_{(a)m} = \Omega_l r_a^2 - r_{(a)l} \Omega \cdot \mathbf{r}_a \quad (6.19)$$

Buni (6.18) ga olib borib qo'yamiz:

$$M_j = \sum_a m_a (\Omega_l r_a^2 - r_{(a)l} \Omega \cdot \mathbf{r}_a). \quad (6.20)$$

Bu formulani vektor ko'rinishda ham yozib olish mumkin:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\Omega (\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_a) - \mathbf{r}_a (\Omega \cdot \mathbf{r}_a)]. \quad (6.21)$$

(6.20) formulani yana bir ko'rinishga keltiraylik:

$$M_i = I_{ij} \Omega_j, \quad I_{ij} = \sum_a m_a (\delta_{ij} r_a^2 - r_{(a)i} r_{(a)j}). \quad (6.22)$$

Bunda paydo bo'lgan yangi kattalik  $I_{ij}$  inersiya tenzori deyiladi, uni alohida keyin o'rganamiz.

#### 6.1.4. Kinetik energiya

Jismning kinetik energiyasiga o'taylik, uni hisoblaganda ham harakatdagi sistema boshi inersiya markazida joylashgan deb olamiz:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \mathbf{v}_a^2 = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_a] + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_a]^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_a]^2, \end{aligned} \quad (6.23)$$

chunki (vektorlarning qo'shma ko'paytmasi qoidasi (A.31) ni qo'llansa)

$$\sum_a m_a \mathbf{v} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_a] = [\mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}] \sum_a m_a \mathbf{r}_a = 0. \quad (6.24)$$

Kinetik energiya uchun formuladagi birinchi had jismning ilgari-  
lanma harakat kinetik energiyasi. Ikkinchi had ilovadagi (A.32) formula  
yordamida soddalashtiriladi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_a m_a [\Omega \mathbf{r}_a]^2 &= \frac{1}{2} \sum_a m_a [\Omega^2 \mathbf{r}_a^2 - (\Omega \cdot \mathbf{r}_a)^2] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \Omega_i [\Omega_i \mathbf{r}_a^2 - r_{(a)i} \Omega \cdot \mathbf{r}_a] = \frac{1}{2} \Omega_i I_{ij} \Omega_j. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Demak, kinetik energiya ham inersiya tenzori orqali ifodalanar ekan:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \Omega_i I_{ij} \Omega_j. \quad (6.26)$$

Yana bir marta ta'kidlab o'taylik, birinchi had ilgari-  
lanma harakat kinetik energiyasi bo'lsa, ikkinchi had aylanma harakat kinetik energiyasi  
bo'ladi.

Inersiya tenzorining fizik ma'nosi mana shu formuladan ko'rinib  
turibdi: birinchi hadga kirgan inert massa jismning ilgari-  
lanma harakatga nisbatan inertligini bildirsa inersiya tenzori shu jismning aylanma  
harakatga nisbatan inertligini bildirar ekan.

Qattiq jismning Lagranj funksiyasiga kelinsa uni

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \Omega_i I_{ij} \Omega_j - U \quad (6.27)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin.

### 6.1.5. Inersiya tenzori

Biz impuls momenti va kinetik energiya tushunchalarini qattiq  
jismga tatbiq qilganimizda inersiya momenti (tenzori) tushunchasini  
kiritgan edik. Bu juda muhim tushuncha bo'lib, uni alohida o'rganish  
maqsadga muvofiqdir. Inersiya tenzori ta'rifini yana bir marta yozib  
olamiz:

$$I_{ij} = \sum_a m_a (\delta_{ij} \mathbf{r}_a^2 - r_{(a)i} r_{(a)j}). \quad (6.28)$$

Muhokama qilingan qoida bo'yicha uzliksiz muhit uchun

$$I_{ij} = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} \mathbf{r}^2 - r_i r_j). \quad (6.29)$$



Ta'rifga asosan, inersiya tenzori jism ichidagi massa taqsimotining xarakteristikasi ekan. Bu — har bir jismning ichki xarakteristikasi. Uning komponentalarini ochib yozaylik:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_a (y_a^2 + z_a^2) & -\sum m_a x_a y_a & -\sum m_a x_a z_a \\ -\sum m_a x_a y_a & \sum m_a (x_a^2 + z_a^2) & -\sum m_a y_a z_a \\ -\sum m_a x_a z_a & -\sum m_a y_a z_a & \sum m_a (x_a^2 + y_a^2) \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, inersiya tenzori simmetrik tenzordir:

$$I_{ij} = I_{ji}. \quad (6.31)$$

Bundagi shartlarning soni 3 ta, demak, simmetrik tenzorning 9 ta komponentasidan 6 tasi mustaqildir. Undan tashqari, uchta burchakdan foydalanib jismning fazodagi oriyentatsiyasini o'zgartirishimiz mumkin, bu yana 3 ta shartni beradi. Shularni hisobga olinsa simmetrik tenzorni uchta mustaqil komponenta orqali ifodalangan ko'rinishga keltirish mumkinligi aniqdir. Buni boshqacha ham aytish mumkin: koordinat o'qlarini aylantirib, simmetrik tenzorni diagonal ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

Bu yangi yo'naltirilgan o'qlar inersiya bosh o'qlari deyiladi,  $I_1, I_2, I_3$  lar esa bosh inersiya momentlari deyiladi. Diagonal ko'rinishga keltirishga geometrik ma'no ham berish mumkin. Quyidagi kvadratik formani ko'raylik:

$$r_i I_{ij} r_j = x^2 I_{11} + y^2 I_{22} + z^2 I_{33} + 2xy I_{12} + 2xz I_{13} + 2yz I_{23} = A. \quad (6.33)$$

Ma'lumki, ixtiyoriy simmetrik matritsani diagonal ko'rinishga keltirish mumkin va shu matritsa bilan bog'liq bo'lgan kvadratik formani kanonik (ya'ni, faqat kvadratlardan iborat bo'lgan) ko'rinishga keltirish mumkin. Ikkinchi rang simmetrik tenzorini mana shunday matritsa deb qarab, uni (6.32) diagonal formaga va u bilan bog'liq bo'lgan (6.33) kvadratik formani kanonik formaga keltirish mumkin. Buning uchun koordinat o'qlari ustida quyidagi ortogonal almashtirish bajarish kerak:

$$r_i = O_{ij}r'_j, \quad r_i = \{x, y, z\}, \quad r'_i = \{x', y', z'\}. \quad (6.34)$$

Natijada

$$x^2 I_1 + y^2 I_2 + z^2 I_3 + 2xy I_{12} + 2xz I_{13} + 2yz I_{23} = I_1 x'^2 + I_2 y'^2 + I_3 z'^2 \quad (6.35)$$

formula olinadi. Analitik geometriyadan ma'lumki,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  tenglama ellipsoidning tenglamasi, shu sababdan kvadratik forma

$$\frac{x'^2}{A/I_1} + \frac{y'^2}{A/I_2} + \frac{z'^2}{A/I_3} = 1 = \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2}$$

bilan bog'liq bo'lgan figura ko'pincha inersiya ellipsoidi deb ataladi. Yangi o'qlar 6.2-rasmida ko'rsatilgan.

Shunday ish bajarilgandan keyin aylanish kinetik energiyasi

$$T_{avl} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2) \quad (6.36)$$

ko'rinishni oladi. Impuls momenti uchun ham (6.22) ning o'rniga soddaroq ifoda olinadi:

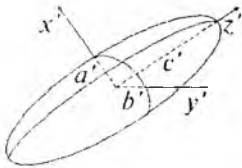
$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_2 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3. \quad (6.37)$$

Bosh inersiya momentlarining ixtiyoriy biri boshqa ikkitasining yig'indisidan hech qachon katta bo'lishi mumkin emas — buni (6.30) ning diagonal elementlaridan ko'rish qiyin emas.

Agar  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  bo'lsa, bunday jism asimmetrik pirildoq deyiladi.  $I_1 = I_2 \neq I_3$  bo'lsa, simmetrik pirildoq deyiladi.  $I_1 = I_2 = I_3$  holda shar pirildoq deyiladi. Birinchi holda ellipsoidning uchala asosiy o'lchamlari har xil bo'ladi. Ikkinchi holda ellipsoidni  $x, y$  tekislik bilan kesilsa to'g'ri aylana olinadi. Bu holda shu tekislikda  $x, y$  o'qlarini qanday tanlab olish ahamiyatga ega emas. Uchinchi holda ellipsoid sharga aylanadi, uchala o'qlarni qanday tanlab olish ahamiyatga ega emas.

Agar  $I_1 = I_2, I_3 = 0$  bo'lsa, bunday jism rotator deyiladi.

Inersiya tenzori o'zining qanday nuqtaga nisbatan aniqlanganligiga bog'liq bo'ladi. Inersiya tenzorining yuqoridagi ta'rif inersiya markaziga nisbatan olingan ta'rif edi. Agar koordinata boshi  $\mathbf{a}$  vektorga siljitsa:  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , yangi va eski tenzorlar orasidagi munosabat



6.2-rasm. Inersiya ellipsoidi.

$$I'_{ij} = \sum_a m_a (\delta_{ij} r_a'^2 - r'_{(a)i} r'_{(a)j}) = I_{ij} + m (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) \quad (6.38)$$

bo'ladi, bu yerda  $m = \sum m_a$  - sistemaning to'liq massasi. Bu munosabatni keltirib chiqarish uchun inersiya markazining ta'rifi  $\sum m_a \mathbf{r}_a = 0$  yetarli bo'ladi.

**6.1.1-misol.** Massalari  $m_1$  va  $m_2$  va o'zaro masofasi  $l$  bo'lgan ikki moddiy nuqtadan tuzilgan sistemaning inersiya momentlarini toping.

Ikkala moddiy nuqta yotgan chiziqni  $z$  o'qi deb olamiz. Bu sistemaning inersiya markazi

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0, \quad z_2 - z_1 = l$$

tenglamalardan topiladi (ikkinchi nuqta yuqorida joylashgan bo'lsin):

$$z_1 = -\frac{lm_2}{m_1 + m_2}, \quad z_2 = \frac{lm_1}{m_1 + m_2}.$$

Ravshanki,  $I_3 = 0$ , chunki sistemaning  $z$  o'qi atrofida aylanishi haqida gapirish ma'noga ega emas. Buni asosiy formula (6.28) dan ham ko'rish qiyin emas:

$$I_3 = \sum_{a=1}^2 m_a (x_a^2 + y_a^2) = 0,$$

chunki  $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ . Davom etamiz:

$$I_1 = I_2 = \sum_{a=1}^2 m_a z_a^2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

Bir chiziqda 3 ta moddiy nuqta joylashgan bo'lsachi? Qo'shni nuqtalar orasidagi masofa yana  $l$  bo'lsin. Nuqtalarning inersiya markazi sistemasidagi koordinatlari

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0, \quad z_2 - z_1 = z_3 - z_2 = l$$

tenglamalardan topiladi:

$$z_1 = -\frac{m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l, \quad z_2 = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l, \quad z_3 = \frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} l.$$

Natijada quyidagini olamiz:

$$I_1 = I_2 = \sum_{a=1}^3 m_a z_a^2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + m_3 z_3^2 = \frac{m_2 m_3 + m_1 (m_2 + 4m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} l^2.$$

Bir chiziqda  $n$ -ta moddiy nuqta joylashgan bo'lsachi? Yuqoridagi mulohazalarni qaytarib

$$I_1 = I_2 = \frac{I^2}{M} \sum_{a \neq b} m_a m_b, \quad M = \sum_a m_a$$

ekanligi topiladi. Bu yerdagi yig'indiga hamma  $a$  va  $b$  lar bir martadan kiradi.

**6.1.2-misol.** Radiusi  $R$  va massasi  $m$  bo'lgan bir jinsli sharning inersiya momentlarini toping.

Bir jinsli shar uchun  $\rho = 3m/(4\pi R^3)$ .

$$I_1 = \int d^3r \rho (r^2 - x^2) = \frac{3m}{4\pi R^3} \int_0^R dr r^4 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi) = \frac{2mR^2}{5}.$$

(6.39)

Huddi shu yo'l bilan  $I_2$  va  $I_3$  larni ham topib  $I_1 = I_2 = I_3$  ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

**6.1.3-misol.** Uzunligi  $l$  asosining radiusi  $a$  va massasi  $m$  bo'lgan bir jinsli silindrning inersiya momentlarini toping.

Silindrning zichligi  $\rho = m/(\pi a^2 l)$ . Hisobni silindrik sistemada bajarish qulay:

$$I_1 = \int d^3r \rho (y^2 + z^2) = \frac{m}{\pi a^2 l} \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-l/2}^{l/2} dz (r^2 \sin^2\varphi + z^2) = \frac{m}{4} \left( a^2 + \frac{l^2}{3} \right).$$

(6.40)

Tekshirib ko'rish qiyin emaski,  $I_1 = I_2$ . Uchinchi moment:

$$I_3 = \frac{m}{\pi a^2 l} \int_0^a dr r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-l/2}^{l/2} dz = \frac{ma^2}{2}.$$

(6.41)

Agar  $a \rightarrow 0$  limitga o'tilsa, ingichka sterjen deb ataladigan jismning inersiya momentlarini topgan bo'lamiz:

$$I_1 = I_2 = \frac{ml^2}{12}, \quad I_3 = 0.$$

(6.42)

Yuqoridagi terminologiya bo'yicha ingichka sterjen rotatordir. Silindrning aylanma kinetik energiyasi

$$T_{avl} = \frac{m}{8} \left( a^2 + \frac{l^2}{3} \right) (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{m}{4} a^2 \Omega_3^2 \quad (6.43)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Tekislikda joylashgan va radiusi  $a$  ga teng bo'lgan massa taqsimotining inersiya momentlarini topish uchun silindr uchun formulalarda  $l \rightarrow 0$  deb olinsa yetarlidir:

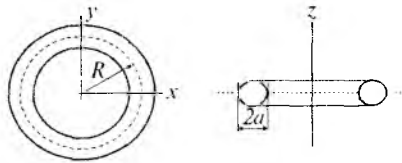
$$I_1 = I_2 = \frac{ma^2}{4}, \quad I_3 = I_1 + I_2 = \frac{ma^2}{2}. \quad (6.44)$$

Demak, radiusi  $a$  va massasi  $m$  bo'lgan ingichka diskning aylanish kinetik energiyasi

$$T_{avl} = \frac{ma^2}{8} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + 2\Omega_3^2) \quad (6.45)$$

ga teng.

**6.1.4-misol.** 6.3-rasmda ko'rsatilgan bir jinsli massasi  $m$  ga teng bo'lgan teshikkulchasimon simmetrik pirildoqning inersiya momentlarini toping.



6.3-rasm: Teshkulchasimon simmetrik pirildoq.

Teshikkulchaning hajmi  $V=2\pi^2 a^2 R$ . Ravshanki,  $I_1=I_2=I$ . Shuning uchun  $I_1+I_2=2I$  ni hisoblash qulaydir (silindrik sistemada):

$$2I = \int_{R-a}^{R-a} \int_{R-a}^{z_2} \int_0^{2\pi} dr r dz d\varphi \rho (2z^2 + r^2) = \frac{\pi^2 a^2 R}{2} (5a^2 + 4R^2) \rho, \quad (6.46)$$

$$z_2 = \sqrt{a^2 + (r-R)^2}, \quad z_1 = -z_2.$$

Zichlik uchun  $\rho = m/(2\pi^2 a^2 R)$  ifodani qo'llansa quyidagi javob olinadi:

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{8} (5a^2 + 4R^2). \quad (6.47)$$

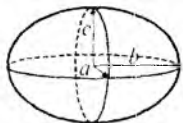
Uchinchi bosh momentni ham topish qiyin emas:

$$I_3 = \int_{R-a}^{R+a} dr r^3 \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \rho = \frac{m}{4} (3a^2 + 4R^2). \quad (6.48)$$

**6.1.5-misol.** Yarim o'qlari  $a, b$  va  $c$  bo'lgan bir jinsli ellipsoidning inersiya momentlarini toping.

Ellipsoid 6.4-rasmda ko'rsatilgan. Ellipsoidning tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (6.49)$$



6.4-rasm:  
Ellipsoid.

Ellipsoidning hajmi  $V = \frac{4\pi}{3} abc$ , massasi  $m$ .

O'zgarmas zichlik:  $\rho = m/V$ .  $x$  o'qiga nisbatan inersiya momenti:

$$I_1 = \rho \int dx dy dz (y^2 + z^2) = \rho \int_{-a}^a dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz (y^2 + z^2) = \frac{m}{5} (b^2 + c^2) \quad (6.50)$$

Integralga kirgan chegaralar quyidagicha aniqlangan:

$$y_2 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y_1 = -y_2, \quad z_2 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad z_1 = -z_2. \quad (6.51)$$

Huddi shu yo'l bilan qolgan ikkita inersiya bosh momentlari ham topiladi:

$$I_2 = \frac{m}{5} (a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{m}{5} (a^2 + b^2). \quad (6.52)$$

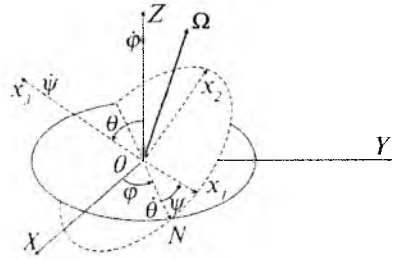
## 6.2. Eyler burchaklari

Qattiq jism bilan bog'liq bo'lgan harakatdagi koordinata o'qlarining yo'nalishlarini har xil yo'l bilan tanlab olish mumkin. Shu imkoniyatlarning ichida **Eyler burchaklari** bilan bog'liq tanlov o'zining katta qulayliklari bilan ajralib turadi. Eyler burchaklarining ta'rifi 6.5-rasmda ko'rsatilgan.

Bu  $\{\varphi, \psi, \theta\}$  burchaklardir. Bizni faqat burchaklarning yo'nalishlari qiziqtirgani uchun harakatlanuvchi va qo'zg'almas sistemalarning bosh nuqtalari birlashtirildi. Rasmdan ko'rinib turibdiki, kiritilgan burchak-

larning o'zgarish sohalari  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  
 $0 \leq \psi \leq 2\pi$  va  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Eyler burchaklarining ma'nosi shundaki, jismning fazodagi ixtiyoriy buralishini uch bosqichdan iborat deb qarash mumkin: 1)  $Z$  o'qi atrofida  $\varphi$  burchakka, 2)  $X$  o'qining yangi holati  $ON$  ( $ON$  chiziq tugunlar chizig'i ham deyiladi) atrofida  $\theta$  burchakka va 3)  $x_3$  atrofida  $\psi$  burchakka. Bu burchaklarni qo'llash uchun birinchi navbatda qattiq jism burchak tezligini ular orqali ifodalab olish kerak.



6.5-rasm: Eyler burchaklari.

Burchak tezligining qo'zg'aluvchan  $(x_1, x_2, x_3)$  sistemadagi komponentalarini  $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ , buralgan koordinatlardagi komponentalarini esa  $\Omega = \{\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}\}$  deb belgilab olamiz. 5-rasmdan ko'rinib turibdiki.  $\dot{\varphi}$  —  $Z$  o'qi atrofidagi aylanish burchak tezligi,  $\dot{\theta}$  —  $ON$  o'q atrofida aylanish burchak tezligi,  $\dot{\psi}$  —  $x_3$  o'qi atrofidagi aylanish burchak tezligi.

Mana shu burchak tezliklariga mos keluvchi vektorlarni katta harflar bilan quyidagicha belgilaymiz:  $\Phi, \Theta, \Psi$ .

Demak,  $\Phi$  —  $Z$  o'qi bo'yicha yo'nalgan va son qiymati  $\dot{\varphi}$  ga teng bo'lgan vektor,  $\Theta$  —  $ON$  o'q bo'yicha yo'nalgan va son qiymati  $\dot{\theta}$  ga teng bo'lgan vektor,  $\Psi$  —  $x_3$  o'qi bo'yicha yo'nalgan va son qiymati  $\dot{\psi}$  ga teng bo'lgan vektor.

Ularning har birining  $(x_1, x_2, x_3)$  o'qlariga bo'lgan proyeksiyalarini rasmdan topib olish qiyin emas:

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \dot{\varphi} \cos \theta\}; \\ \Theta &= \{\dot{\theta} \cos \psi, -\dot{\theta} \sin \psi, 0\}; \\ \Psi &= \{0, 0, \dot{\psi}\}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Bu ifodalarning birinchi komponentalarinig yig'indisi  $\Omega_1$  ni, ikkinchi komponentalarinig yig'indisi  $\Omega_2$  ni va uchinchi komponentalarinig yig'indisi  $\Omega_3$  ni beradi:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \\
\Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\
\Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.
\end{aligned}
\tag{6.54}$$

Bu burchaklarning qulayligini qattiq jism harakat tenglamalarini integrallashda ko'ramiz.

### 6.3. Qattiq jismning harakat tenglamalari

Qattiq jismning oltita erkinlik darajasi bor. shulardan uchta uning ilgarilanma harakati, qolgan uchta esa uning aylanma harakati bilan bog'liq. Demak, qattiq jism harakat tenglamalarining soni ham oltita bo'lishi kerak. Ilgarilanma harakat jismning impulsi bilan bog'liq. Ilgarilanma harakat tenglamasi quyidagicha keltirib chiqariladi. Moddiy nuqtaning harakat tenglamasini eslaylik:

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{f}_a,
\tag{6.55}$$

bunda  $\mathbf{p}_a$  – shu nuqtaning impulsi,  $\mathbf{f}_a$  – shu nuqtaga ta'sir qilayotgan kuch. Qattiq jism moddiy nuqtalarning yig'indisi bo'lgani uchun uning harakat tenglamasini olish uchun (6.55) ni hamma moddiy nuqtalar bo'yicha yig'ib chiqish kerak. Jismning to'liq impulsi va kuchlarning yig'indisini

$$\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a, \quad \mathbf{F} = \sum_a \mathbf{f}_a$$

deb belgilab

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}
\tag{6.56}$$

tenglamaga kelinadi. Jismning har bir nuqtasiga shu jismning boshqa nuqtalari tomonidan kuchlar ta'sir qiladi, ammo bunday kuchlarning umumiy kuch  $\mathbf{F}$  ga qo'shgan hissasi nolga teng. Buni tushunish qiyin emas – ixtiyoriy ikkita nuqtani 1 va 2 deb belgilaylik, 1-nuqtaning 2-nuqtaga ta'sir kuchini  $\mathbf{f}_{12}$  deb belgilaylik, 2 nuqtaning birinchi nuqtaga ta'sir kuchini esa  $\mathbf{f}_{21}$  deb belgilaylik. Ta'sirning aks ta'sirga tengligi va qarama-qarshiligi  $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$  ekanligini bildiradi. Demak, to'liq kuchga shu ikkala nuqtaning o'zaro ta'siridan bo'lgan hissa  $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21} = 0$  bo'ladi.



Qattiq jismning aylanma harakati uning impuls momenti bilan bog'langan. Impuls momentining vaqt bo'yicha hosilasi quyidagicha:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}_a \dot{\mathbf{p}}_a] + \sum_a [\dot{\mathbf{r}}_a \mathbf{p}_a]. \quad (6.57)$$

Ikkinchi had tashlab yuboriladi (chunki  $\mathbf{p}_a \parallel \dot{\mathbf{r}}_a$ ), birinchi hadda (6.55) ni hisobga olamiz:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{f}_a]. \quad (6.58)$$

$[\mathbf{r}_a \mathbf{f}_a]$  ifoda kuch momenti deyiladi. To'liq kuch momentini

$\mathbf{K} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{f}_a]$  deb belgilansa yuqoridagi tenglama

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K} \quad (6.59)$$

ko'rinishni oladi. Agar koordinata boshini  $\mathbf{a}$  vektorga siljitilsa:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$  kuch momentining ifodasi ham o'zgaradi:

$$\mathbf{K} = \sum_a [\mathbf{r}'_a \mathbf{f}_a] + \sum_a [\mathbf{a} \mathbf{f}_a] = \mathbf{K}' + [\mathbf{a} \mathbf{F}]. \quad (6.60)$$

Ko'rinish turibdiki, qattiq jismga ta'sir qilayotgan to'liq kuch nolga teng bo'lganida kuch momenti o'zining qaysi nuqtaga nisbatan aniqlanganligiga bog'liq bo'lmaydi.

Yuqoridagi harakat tenglamalari qo'zg'almas  $\{X, Y, Z\}$  sistemasida o'rinli bo'lgan tenglamalardir. Qattiq jism bilan birga harakat qilayotgan sistemada  $\{x_1, x_2, x_3\}$  harakat tenglamalari biroz o'zgaradi.  $\Omega$  burchak tezlik bilan aylanayotgan ixtiyoriy  $\mathbf{A}$  vektorning vaqt bo'yicha o'zgarish qonuni ma'lumdir:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\Omega \mathbf{A}]. \quad (6.61)$$

Agar tenglamaning o'ng tomoniga shu vektorning qo'zg'oluvchan sistemadagi hosilasini (uni  $d\mathbf{A}/dt$  deb belgilaylik) qo'shib qo'yilsa, uning to'liq o'zgarishi topilgan bo'linadi:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + [\Omega \mathbf{A}]. \quad (6.62)$$

A vektor sifatida impuls  $P$  va moment  $M$  ni ko'zda tutsak, quyidagi tenglamalar olinadi:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{dt} + [\Omega\mathbf{P}] = \mathbf{F}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{M}}}{dt} + [\Omega\mathbf{M}] = \mathbf{K}. \quad (6.63)$$

Bu tenglamalarning ikkinchisi qattiq jism uchun Eyley tenglamalari deyiladi<sup>1</sup>. Bu tenglamalarda vaqt bo'yicha hosila qo'zg'aluvchan sistemada hisoblanadi, shu sababdan tenglamalarni to'liq ravishda o'sha sistemada yozib olamiz. Bunda biz vaqt bo'yicha hosila ustidagi tilda belgisini tashlab yuboramiz. To'liq impuls uchun  $\mathbf{P} = m\mathbf{V}$  deb olib ( $m$  — jismning massasi) birinchi tenglamalarni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2 \right) &= F_1, & m \left( \frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3 \right) &= F_2, \\ m \left( \frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1 \right) &= F_3. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Impuls momenti va inersiya momenti orasidagi  $M_i = I_i \Omega_i, i = 1, 2, 3$  munosabatlarni eslab, Eyley tenglamalarini ham komponentlar tilida yozib olinadi:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= K_3. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Ko'rinib turibdiki, bu tenglamalar burchak tezliklari uchun tenglamalardir.

<sup>1</sup> Suyuqlik mexanikasi sohasida ham Eyley tenglamalari bor, ular darslikning oxirgi bobida o'rganiladi

## 6.4. Qattiq jism harakatini integrallash

Qattiq lism harakatini integrallash masalasi tarixda katta rol o'ynagan. Bu yerda muvaffaqiyatli yechilgan masalalarning ikkita eng soddalarini keltiramiz.

### 6.4.1. Erkin simmetrik pirildoq (Eyler holi)

Erkin simmetrik pirildoq masalasidan boshlaylik. Pirildoqning impuls momenti  $\mathbf{M}$  ni qo'zg'almas o'q  $Z$  bo'yicha yo'nalgan deb olamiz. Bu tanlovga  $M = M_Z$  mos keladi. Pirildoqning ilgari lanma harakati bizni qiziqitmaydi, shu sababdan qo'zg'almas va qo'zg'oluvchan sistemalarining boshlarini pirildoqning inersiya markazida joylashgan deb olamiz.  $\{x_1, x_2, x_3\}$  o'qlar pirildoqning bosh inersiya oq'lariga mos kelsin. Pirildoq hech qanday kuch ta'siri ostida bo'lmagani uchun uning impuls momenti saqlanuvchan bo'ladi, ya'ni,  $M = M_Z = \text{const}$ . Jism bilan bog'liq bo'lgan  $x_1, x_2, x_3$  sistemada pirildoq momentining komponentalari  $M_1, M_2, M_3$  bo'ladi. Erkin simmetrik pirildoq uchun Lagranj funksiyasi uning kinetik energiyasidan iborat bo'ladi. Uni Eyler burchaklari orqali ifodalab olamiz:

$$L = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (6.66)$$

Eyler burchaklarining qay darajada qulayligi endi ko'rinib turibdi: burchaklarning ikkitasi  $\varphi, \psi$  — siklik koordinata bo'lib chiqdi. Ularga mos keluvchi umumlashgan impuls harakat integrallari bo'lishi kerak:

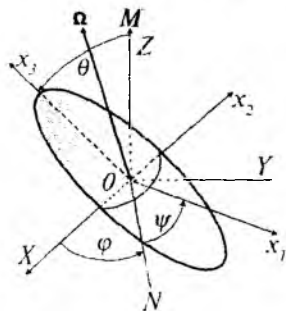
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = M_Z = M = \text{const}; \quad (6.67)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = M_3 = \text{const}.$$

$M$  ning harakat integrali ekanligi masalaning qo'yilishidan kelib chiqqan edi,  $M_3$  ning harakat integrali ekanligini Eyler burchaklaridan keltirib chiqarildi. Bundan yana bir muhim xulosaga kelish mumkin:  $M_3 = M \cos \theta$  bo'lgani uchun  $\theta = \text{const}$  bo'lishi kerak. O'z navbatida  $\Omega_3 = M_3 / I_3$  ham o'zgarmas ekanligiga kelinadi.

(6.67) munosabatlardan  $\dot{\phi}$  va  $\dot{\psi}$  larni topish qiyin emas:

$$\dot{\phi} = \frac{M}{I_1} = \frac{M_3}{I_1} \cos \theta, \quad \dot{\psi} = \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) M \cos \theta = \Omega_3 - \frac{M_3}{I_1}. \quad (6.68)$$



6.6-rasm. Erkin pirildoq.

Bundan ko'rinib turibdiki, pirildoq Z o'qi atrofida o'zgarmas  $\dot{\phi}$  burchak tezligi bilan aylanma harakat qilar ekan. Bunday harakat **presessiya**<sup>1</sup> deyiladi.

Natijalarni 6.6-rasm bilan taqqoslab ko'ramizki, pirildoq umumiy holda ikkita aylanma harakat qilar ekan — o'zining  $x_3$  bosh inersiya momenti o'qi atrofida  $\Omega_3$  o'zgarmas burchak tezligi bilan va o'zining to'liq momenti vektori  $\mathbf{M}$  yo'nalishi atrofida o'zgarmas  $\dot{\phi}$  burchak tezligi bilan presessiya deyiladigan aylanma harakat. Bu harakat davomida

pirildoqning  $\mathbf{M}$  ga nisbatan og'ish burchagi  $\theta$  o'zgarmasdan qolar ekan.

Bitta xususiy holga to'xtalib o'taylik. (6.68) ning ikkinchi tenglamasidan ko'rinib turibdiki, sharsimon pirildoq ( $I_1 = I_3$ ) uchun  $\dot{\psi} = 0$ .

Huddi shu masalaga Eyer tenglamalari nuqtayi nazaridan yondashaylik. Erkin jismning harakati haqida gap ketayotgani uchun kuch momentlari nolga teng:  $\mathbf{K} = 0$ . Undan tashqari  $I_1 = I_2 = I$ . Demak, erkin simmetrik pirildoq uchun Eyer tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$I \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I)\Omega_2\Omega_3 = 0, \quad I \frac{d\Omega_2}{dt} + (I - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0, \quad I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = 0. \quad (6.71)$$

Oxirgi tenglamadan  $\Omega_3 = \text{const}$  ekanligi topiladi. Demak, pirildoq o'z o'qi  $x_3$  atrofida o'zgarmas burchak tezligi bilan aylanar ekan — yuqorida ham huddi shu xulosaga kelingan edi.

$$\left( \frac{I_3}{I} - 1 \right) \Omega_3 = \omega$$

belgilash kiritilsa, qolgan ikkita tenglama

<sup>1</sup> Rus tilida — прецессия.

$$\frac{d\Omega_1}{dt} + \omega\Omega_2 = 0, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} - \omega\Omega_1 = 0 \quad (6.72)$$

ko'rinishga keladi. Birinchi tenglamani  $\Omega_1$  ga va ikkinchi tenglamani  $\Omega_2$  ga ko'paytirib qo'shilsa

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) = 0, \quad (6.73)$$

ya'ni,

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \text{const} \quad (6.74)$$

ekanligi topiladi. Shu konstantani  $a^2$  deb belgilansa, burchak tezliklari uchun

$$\Omega_1(t) = a \cos \psi(t), \quad \Omega_2(t) = a \sin \psi(t) \quad (6.75)$$

yechimlarni topiladi. Argument  $\psi(t)$  ni topish uchun (6.72) tenglamalarning har birini yana bir marta vaqt bo'yicha differensiallansa har bir  $\Omega_i$  uchun  $\ddot{\Omega}_i + \omega^2 \Omega_i = 0$  tenglama hosil bo'ladi, uning yechimi esa  $(\omega t + \alpha)$  argumentli sinus va kosinuslardir,  $\alpha$  - boshlang'ich faza. Demak,

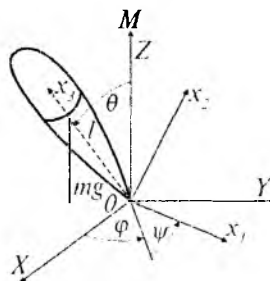
$$\Omega_1(t) = a \cos(\omega t + \alpha), \quad \Omega_2(t) = a \sin(\omega t + \alpha). \quad (6.76)$$

Hulosa qilib shuni aytish mumkinki,  $\Omega$  vektorning  $\{x_1, x_2\}$  tekislikka proyeksiyasi shu tekislikda  $O$  nuqta atrofida  $\omega$  burchak tezlik bilan aylanadi (presessiya) va bunda shu proyeksiyaning uzunligi o'zgar-masdan qoladi:  $\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = a^2$ .

#### 6.4.2. Tashqi maydondagi simmetrik pirildoq (Lagranj holi)

6.7-rasmda tashqi gravitatsion maydonda o'zining qo'zg'almas nuqtasi atrofida aylanayotgan simmetrik pirildoq ko'rsatilgan.

Shu pirildoqning harakati integrallaymiz. Bu ishini huddi avvalgi holdagidek bajaramiz, ya'ni harakatini integrallari topiladi va ular yordamida har bir erkinlik darajasining dinamikasi aniqlanadi. Rasmdan ko'rinib turibdiki, qo'zg'aluvchan (va qo'zg'almas) o'qlar boshini inersiya markazida emas, balki sistemaning qo'zg'almas nuqtasida tanlab olindi. Inersiya



6.7-rasm. Yer maydondagi pirildoq.

markazidan shu qo'zg'almas nuqtagacha bo'lgan masofani  $l$  deb belgilaylik. (6.38) qoida bo'yicha bu holda  $\{x_1, x_2, x_3\}$  sistemada bosh inersiya momentlari  $I'_1 = I'_2 = I_1 + ml^2 = I'$ ,  $I'_3 = I_3$  ga teng bo'ladi. Tashqi gravitatsion maydondagi pirildoqning Lagranj funksiyasi shunga ko'ra

$$L = \frac{1}{2}I'(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos\theta \quad (6.77)$$

ga teng bo'ladi. Bizda yana uchta saqlanuvchi kattaliklar bor – umumlashgan impulslar

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I' \dot{\varphi} \sin^2\theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}) \cos\theta = M_Z,$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}) = M_3, \quad (6.78)$$

va energiya

$$E = \frac{1}{2}I'(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2 + mgl \cos\theta. \quad (6.79)$$

Shu yerda erkin va tashqi maydondagi pirildoqlarning harakat integrallari orasidagi farqni uqtirib ketaylik. Ikkala holda ham uchta harakat integraliga egamiz. Birinchi holda energiya haqida gapirgan emas edik, chunki u bizga kerak bo'lgani yo'q. Farq quyidagi harakat integralida: erkin pirildoq uchun  $p_\varphi = M$  edi,  $Z$  – o'qi bo'yicha yo'nalgan tashqi bir jinsli maydonda esa momentning  $Z$  – komponentasiga saqlanadi –  $p_\varphi = M_Z$ .

Formula (6.78) dan  $\dot{\varphi}$  va  $\dot{\psi}$  larni topib:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_Z - M_3 \cos\theta}{I' \sin^2\theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} + \frac{M_3 \cos\theta - M_Z}{I' \sin^2\theta} \cos\theta, \quad (6.80)$$

ularni (6.79) ga olib borib qo'yamiz:

$$E = \frac{1}{2}I'\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_3^2}{I_3} + \frac{1}{2}\frac{(M_Z - M_3 \cos\theta)^2}{I' \sin^2\theta} + mgl \cos\theta. \quad (6.81)$$

Energiya uchun ifodani

$$E' = \frac{1}{2} I' \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta), \quad E' = E - \frac{1}{2} \frac{M_3^2}{I_3} - mgl, \quad (6.82)$$

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{I' \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta)$$

ko'rinishda ham yozib olamiz. Energiya uchun ifodani bu holga keltirib olganimizning sababi effektiv potensial  $U_{\text{eff}}$  potensial o'ra ko'rinishiga egaligidir, agar  $M_z = M_3$  bo'lmasa u  $\theta = 0$  va  $\theta = \pi$  nuqtalarda cheksizlikka intiladi,  $0 < \theta < \pi$  oraliqda esa minimumdan o'tadi. Bu  $\theta$  bo'yicha harakatning finit bo'lishi kerakligini ko'rsatadi:  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ . To'xtash nuqtalari  $\{\theta_1, \theta_2\}$   $E' = U_{\text{eff}}$  shartdan topilishi kerak, harakat sohasi esa  $E' \geq U_{\text{eff}}$  shartga bo'ysunadi.

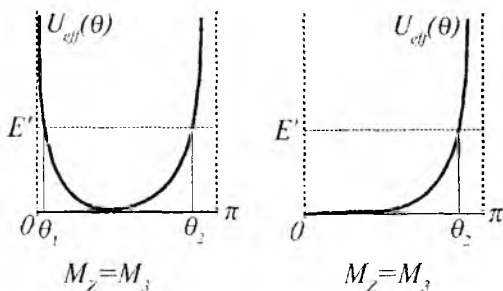
Pirildoqning harakatini chuqurroq o'rganish maqsadida quyidagi belgilashlar kiritib

$$a = \frac{M_z}{I'}, \quad b = \frac{M_3}{I'}, \quad c = \frac{2mgl}{I'}, \quad d = \frac{2E'}{I'} \quad (6.83)$$

energiya uchun ifodani

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = -(a-b)\cos \theta)^2 + c(1 - \cos \theta)\sin^2 \theta \quad (6.84)$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Ko'rinib turibdiki, bu formulada  $\cos \theta$  tabiiy o'zgaruvchidir, uni  $u = \cos \theta$  orqali belgilansa tenglama



6.8-rasm.  $U_{\text{eff}}$ -ning grafigi

$$u^2 = -(a - bu)^2 + (1 - u^2)(d + c - cu) \quad (6.85)$$

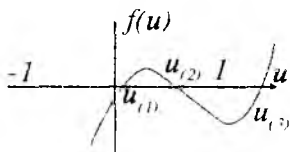
ko'rinishni oladi. Bu differensial tenglama kvadraturaga oson keltiriladi:

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{-(a-bu)^2 + (1-u^2)(d+c-cu)}}. \quad (6.86)$$

Olingan integral elliptik tipdagi integrallarga mansubdir. Agar bu tenglamadan  $\theta = \theta(t)$  topilsa oldingi tenglamalardan  $\varphi$  va  $\psi$  larni ham vaqtning funksiyasi sifatida topish mumkin.

Bundan keyingi mulohazalar uchun muhim bo'lgani uchun (6.85) ning o'ng tomonini  $u$  o'zgaruvchining funksiyasi sifatida alohida belgilab olamiz:

$$f(u) = -(a-bu)^2 + (1-u^2)(d+c(1-u)). \quad (6.87)$$



6.9-asm.  $f$ -ning grafi

Elliptik integrallarning umumiy nazariyasi asosida (6.86) integral orqali aniqlanadigan funksiyaning hamma xossalarini o'rganish mumkin edi, ammo bu yo'l katta matematik tadqiqotga olib keladi. Bizning maqsadimiz uchun esa og'ir simmetrik pirildoqning (6.85) tenglamadan kelib chiqadigan umumiy xos-

salarining o'zi yetarlidir. Buning uchun esa  $f(u)$  funksiyaning asosiy xossalarini o'rganish yetarlidir. Eng umumiy holda bu funksiyaning grafi 6.9-rasmda keltirilgan.

Rasmdan yaqqol ko'rinib turgan bir muammoni yechishdan boshlaymiz.  $f(u) = 0$  tenglama kubik tenglama, uning ildizlari soni shunga ko'ra uchga teng. Go'yoki, to'xtash nuqtalarining soni uchga teng bo'lib chiqmoqda. Ammo  $U_{ej}$  ning yuqoridagi muhokamasidan ma'lumki, finit harakat  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  chegaralarda ro'y beradi,  $u = \cos \theta$  o'zgaruvchi tilida  $u_{(1)} < u < u_{(2)}$ . Bu nosozlikni qanday qilib yechish mumkin? Uning yechimi oson: uchinchi ildiz hamma vaqt mavjud, ammo  $u_{(3)} > 1$  bo'lgani uchun u fizikaviy ma'noga ega emas. Uchinchi ildiz hamma vaqt  $u_3 > 1$  ekanligini isbot qilaylik. (6.87) tenglamadagi  $c > 0$  ekanligidan kelib chiqadiki,  $u \rightarrow \infty$  bo'lganida  $f \rightarrow \infty$  bo'ladi va  $u \rightarrow -\infty$  bo'lganida  $f \rightarrow -\infty$  bo'ladi (rasm chizilganida shu mulohazadan foydalanilgan edi). Endi  $f(u)$  ning to'rtinchi ildizida  $u = 1$  deb olavlik:



$$f(1) = -(a-b)^2. \quad (6.88)$$

Demak, bu nuqtada  $f < 0$ , bu degani, uchinchi ildiz  $u = 1$  nuqtadan o'ngroq yotishi kerak.

Bundan bitta istisno bor —  $a = b$ , yoki,  $M_z = M_3$  bo'lgan hol. Bu hol pirildoq vertikal turganiga mos keladi, uni keyinroq tahlil qilamiz.

Faraz qilaylik, pirildoqning boshlang'ich og'ish burchagi (vertikalga nisbatan)  $\theta_0$  bo'lsin. Ko'rsatish qiyin emaski, (6.85) tenglamani

$u_0 = \cos \theta_0$  o'zgaruvchi orqali

$$(1-u_0^2)u'^2 = (u-u_0)[2ab(1+uu_0)-(a^2+b^2)(u+u_0)-c(1-u^2)(1-u_0^2)] \quad (6.89)$$

ko'rinishga keltirib olish mumkin (2-masalaga qarang). Bundan xulosa shuki,  $u_0$  ham  $f(u)=0$  tenglamaning yechimlaridan biridir. Keyingi xulosalar  $\dot{\varphi}_0$  ning qanday berilganligiga bog'liq.

**$\dot{\varphi}_0 = 0$  bo'lgan hol.**

Bu holda  $u_0 = \cos \theta_0$  nuqta (9) rasmdagi  $u_{(2)}$  nuqtaga mos keladi. Sababi — pirildoqni  $t = 0$  momentda  $\theta_0$  burchak ostida qo'yib yobirilgandan keyin u og'irlik kuchi ta'sirida pastga qarab og'a boshlaydi, bu esa  $u = \cos \theta$  ning kamayishiga olib kelishi kerak. Shunday ekanligini energiyaning ifodasidan ham keltirib chiqarish mumkin:

boshlang'ich vaqtda  $\dot{\theta}_0 = 0$  (pirildoqning boshlang'ich og'ishi bor, tugun chiziq atrofidagi boshlang'ich burchak tezligi yo'q) va  $\dot{\varphi}_0 = 0$  (pirildoq faqat o'zining o'qi atrofida aylantirilgan), demak ((6.80) va (6.81) larga qarang),

$$E = \frac{1}{2} \frac{M^2}{I_3} + mgl \cos \theta_0.$$

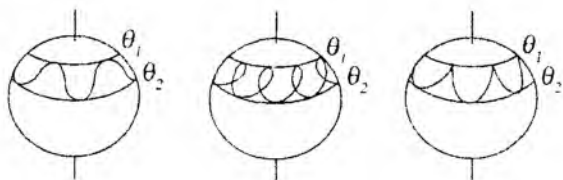
$M_3$  va  $I_3$  o'zgarmasligi ma'lum, (6.81)-dagi boshqa hadlarning hammasi musbat, demak, vaqt o'tishi bilan mana shu musbat hadlar qo'shilishiga qaramasdan energiyaning qiymati o'zgarmasligi uchun  $u_0 = \cos \theta_0$  kamayishi kerak.

Shu yerda erkin va tashqi maydondagi pirildoqlarning preses-siyalari orasidagi katta farqni ko'riladi: erkin pirildoqning preses-siyasi o'zgarmas  $\theta = \text{const}$  burchak bilan o'zgarar edi, yer maydonidagi

pirildoq uchun esa  $\theta$  burchak o'zgarib turar ekan, uning o'zgarish chegaralari, yuqorida ko'rsatilganidek,  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  bo'ladi.

Pirildoq yuqori uchining bunday tebranma harakati **nutatsiya** deyiladi. Agar  $O$  nuqta atrofida pirildoqning uzunligiga teng radiusli sfera chizilsa pirildoqning uchi harakat davomida mana shu sferaning ustida egri chiziq bo'yicha harakat qiladi.

Agar erkin pirildoqni qarasak unga mos keluvchi chiziq  $\theta = \text{const}$  qandaydir parallelga mos keladi (shu sferaning ustida parallellar va meridianlar o'tkazilsa), bunday presessiya **regular presessiya** deyiladi. Irregular presessiyaga olib keladigan nutatsiya esa uch xil formaga ega bo'ladi, ular 6.10-rasmda ko'rsatilgan.



6.10-rasm. Nutatsiya.

Bu uchala variantni tahlil qilish uchun (6.89) ifoda soddalashtiramiz. Buning uchun boshlang'ich shartlarga qaytiladimiz.  $t = 0$  nuqtada  $\dot{\varphi}_0 = 0$  bo'lishi kerak (presessiya yo'q), demak,  $M_z = M_3 \cos \theta_0$  yoki,  $a = bu_0$  bo'ladi.

Buni yuqoridagi tenglamaga qo'yiladiamiz:

$$\dot{u}^2 = -(u - u_0)[b^2(u - u_0) + c(1 - u^2)]. \quad (6.90)$$

$f(u) = 0$  tenglamaning ikkita izdizi topildi — uning bittasi ( $u_{(1)}$ ) aloqasi yo'q bo'lib chiqdi, ikkinchisi boshlang'ich og'ishga teng bo'lib chiqdi  $u_{(2)} = u_0$ . Agar  $u_{(1)}$  ni ham topilsa

$$T = 2 \int_{u_0}^{u_{(1)}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \quad (6.91)$$

integral orqali nutatsiya davrini topish mumkin. Kerakli ildizimiz

$$\frac{b^2}{c}(u - u_0) + 1 - u^2 = 0 \quad (6.92)$$

tenglamaning yechimi bo'lishi kerak. Bu tenglamaning umumiy yechimlarini topish qiyin emas, ammo hosil bo'lgan ifodalar murakkab bo'lgani uchun bir xususiy holnigina ko'ramiz: «tez pirildoq» - katta burchak tezligi bilan harakat qilayotgan pirildoq. Bu holda

$$\frac{b^2}{c} = \frac{M_3^2}{2mgl'} = \frac{I_3 I_3 \Omega_3^2}{l' 2mgl'} \quad (6.93)$$

ifoda katta son bo'ladi. Sababi – birinchi ko'paytuvchi  $I_3 \sqrt{l'}$  taxminan birga teng kattalik (giroskoplar uchun u birdan kam farq qiladi), ikkinchi ko'paytuvchi esa aylanish kinetik energiyasining potensial energiyaga nisbati, shart bo'yicha aylanish burchak tezligi juda katta, demak, bu nisbat ham katta ( o'lchamsiz) son:

$$\frac{b^2}{c} \gg 1.$$

Tenglamaning izlanayotgan izdizini  $u_1$  deb belgilansa,  $u_1 = u_0 + \Delta$  ni hisobga olib

$$\frac{b^2}{c}(u_1 - u_0) + 1 - u_1^2 = \left( \frac{b^2}{c} - 2u_0 \right) \Delta + 1 - u_0^2 - \Delta^2 = 0 \quad (6.94)$$

tenglamaga kelimiz. Aniqki,  $\Delta$  - kichik son, shuning uchun,  $\Delta$  uchun kvadratik tenglamada uning kvadratini tashlab yuborishga haqlimiz. Natijada

$$\Delta = \frac{c}{b^2} \sin^2 \theta_0 \quad (6.95)$$

ekanligi topiladi. Nutatsiya burchagi ham topaylik. Biz yana  $u_1 - u_0$  va shunga ko'ra,  $\theta_0 - \theta_1$  farqlarning kichikligidan foydalanamiz:

$$u_0 - u_1 = \cos \theta_0 - \cos \theta_1 = 2 \sin \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} = (\theta_0 - \theta_1) \sin \theta_0. \quad (6.96)$$

Yuqoridagi tenglama bilan taqqoslash nutatsiya burchagi uchun

$$\theta_0 - \theta_1 = \frac{c}{b^2} \sin \theta_0 \quad (6.97)$$

formulaga olib keladi. Nutatsiya davri (va chastotasi) topiladi, buning uchun (6.91) integralda yuqori chegara sifatida  $u_0 - \Delta$  ni olish va  $f(u)$  uchun esa ishlatilgan yaqinlashuvga mos keluvchi

$$f(u) = -(u - u_0)[b^2(u - u_0) + c(1 - u_0^2)] \quad (6.98)$$

ni olish kerak:

$$T = 2 \int_{u_0}^{u_0 + \Delta} \frac{du}{\sqrt{-(u - u_0)[b^2(u - u_0) + c(1 - u_0^2)]}} = \frac{2\pi}{b}. \quad (6.99)$$

Nutatsiya chastotasi topildi:

$$\omega_{nut} = \frac{2\pi}{T} = b = \frac{M}{I'} = \frac{I}{I'} \Omega_3. \quad (6.100)$$

Bu — pırildoqning burchak tezligi bilan bir xil tartibga ega bo'lgan katta son. Shu bilan nutatsiya amplitudasi va chastotasi topildi. Endi presessiy burchak tezligi  $\dot{\phi}$  ni topilsa masala to'liq yechilgan bo'ladi.

Yuqorida olingan  $M_Z = M_3 u_0$  munosabat va  $b$  ning ta'rifidan foydalanilsa

$$\dot{\phi} = \frac{M_Z - M_3 \cos \theta}{I' \sin^2 \theta} = b \frac{u_0 - u}{1 - u^2} \quad (6.101)$$

ekanligi kelib chiqadi. Presessiya burchak tezligi  $\theta = \theta_0$  dan tashqari hamma nuqtalarda musbat, faqat shu nuqtada nolga teng. Bu 6.10-rasmdagi uchinchi holga mos keladi. Presessiya burchak tezligi uchun aniq ifodani topish uchun (6.86) integralni (6.99) yaqinlashuvda topamiz:

$$t = \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{-(u - u_0)[b^2(u - u_0) + c(1 - u_0^2)]}} = -\frac{2}{b} \arcsin \left( \frac{b\sqrt{u_0 - u}}{\sqrt{c} \sin \theta_0} \right) \quad (6.102)$$

yoki

$$u = u_0 - \frac{c}{2b^2} \sin^2 \theta_0 (1 - \cos(bt)) = u_0 - \frac{1}{2} \Delta (1 - \cos(\omega_{nut} t)) \quad (6.103)$$

Presessiya burchak tezligini hisoblashda kichik son bo'lgan  $\Delta$  bo'yicha birinchi tartibli had bilan chegaralanamiz:

$$\dot{\phi} = b \frac{u_0 - u}{1 - u_0^2} = \frac{c}{2b} [1 - \cos(\omega_{nut} t)]. \quad (6.104)$$

Ko'rinib turibdiki, nutatsiyaning har bir davri tugashi bilan huddi rasmda ko'rsatilganidek  $\dot{\varphi} = 0$  bo'ladi. Presessiyaning o'rtacha burchak tezligi standart yo'l bo'yicha topiladi:

$$\bar{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \varphi(t) = \frac{c}{2b} \quad (6.105)$$

Presessiyaning o'rtacha burchak tezligi uning maksimal qiymatining yarmisiga teng bo'lib chiqdi. Jarayonning fizikasiga aniqlik kiritish uchun  $c$  va  $b$  larning o'rniga (6.83) formulalar bo'yicha fizik kattaliklarga o'taylik:

$$\bar{\varphi} = \frac{mgl}{I_3 \Omega_3} \quad (6.106)$$

Demak, boshlang'ich burchak tezlik qancha katta bo'lsa, presessiya burchak tezligi shuncha kichkina bo'ladi va aksincha.

#### $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ bo'lgan hol

Bu bandda biz faqat oldingi banddagi natijalardan farqli bo'lgan natijalarnigina keltiramiz. Ko'rilyotgan holda (6.102) dan farqli o'laroq

$$\dot{\varphi} = \frac{M_Z - M_3 \cos \theta}{I' \sin^2 \theta} = b \frac{\beta - u}{1 - u^2}, \quad \beta = \frac{a}{b} = \frac{M_Z}{M_3} \quad (6.107)$$

bo'ladi. Shuni hisobga olib, quyidagi nisbatni ko'raylik:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}} = \frac{(1-u^2)\sqrt{f(u)}}{b(\beta-u)} \quad (6.108)$$

Demak,  $f(u)$  nolga teng bo'lgan nuqtalarda ( $\theta_1$  va  $\theta_2$  nuqtalarda)  $dud\varphi = 0$  bo'ladi, bu degani, pirildoqning uchi presessiya davomida  $\theta = \theta_1$  va  $\theta = \theta_2$  parallellarga urinib o'tadi. Ya'ni,  $\varphi_0 \neq 0$  holga 6.10-rasmlarning birinchi va ikkinchisi mos kelar ekan.

Agar  $u_2 < \beta < u_1 < 1$  bo'lsa  $\dot{\varphi}$  ning ishorasi  $u < \beta$  bo'lganda musbat,  $u > \beta$  bo'lganda manfiy bo'ladi. Bu 6.10-rasmlarning ikkinchisiga mos keladi. Aks holda rasmdagi birinchi holga ega bo'lamiz.

Ba'zi bir xususiy hollarga to'xtalib o'taylik.

1.  $f(u) = 0$  tenglamaning yechimlari karrali bo'lsin:  $u_1 = u_2$ . Bu degani  $\theta_1 = \theta = \theta_2$ , va presessiya davomida  $\theta = \text{const}$  ga egamiz.  $\dot{\varphi}$  va  $\theta$

orasidagi yuqorida keltirilgan bog'lanishni eslasak,  $\phi = \text{const}$  ekanligiga kelinadi. Demak, vertikal o'q atrofidagi presessiya o'zgarmas burchak tezligi bilan o'tadi va nutatsiya yo'q.

2.  $\beta = 1$  yoki  $M_z = M_3$  holni ko'raylik — 6.9-rasmdagi ikkinchi hol.  $M_z = M_3$  bo'lishi uchun pirildoqning o'qi vertikal turgan bo'lishi kerak. Agar  $(d+c)/c = \alpha$  deb belgilansa  $f(u)$  funksiya

$$f(u) = -b^2(1-u)^2 + c(\alpha-u)(1-u^2) \quad (6.109)$$

ko'rinishni oladi. Ko'rinib turibdiki,  $u=1$  yoki,  $\theta=0$  - yechimlarning biri va  $\alpha < 1$ ,  $\alpha > 1$  va  $\alpha = 1$  hollarga har xil vaziyatlar mos keladi.

Eng sodda hol —  $\alpha = 1$ . Bu holda  $\int du/\sqrt{f(u)}$  integral aniq olinadi, ammo, kerakli ma'lumotni bu integralni hisoblamasdan ham olish mumkin.  $\alpha = 1$  munosabat  $E' = 0$ , yoki

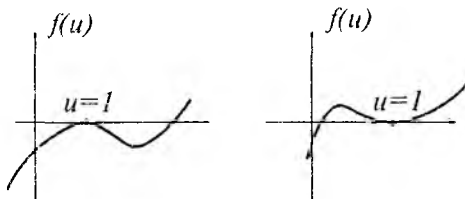
$$E = \frac{1}{2} \frac{M_3^2}{I_3} + mgl$$

munosabatga teng, bu esa pirildoq o'z harakatini vertikal holdan boshlagan degani. Bu holda

$$f(u) = (1-u)^2[-b^2 + c(1+u)] \quad (6.110)$$

funksiya uchun nuqta ikki karrali ildiz bo'ladi. Bitta ildizi ( $u=1$ ) karrali bo'lgan kubik funktsiyaning mumkin bo'lgan grafiklari 6.11-rasmda ko'rsatilgan. Grafikning qaysi biriga qanday fizika mos kelishini topish uchun tenglamaning uchinchi ildizini tekshirish kerak:

$$u_3 = \frac{b^2}{c} - 1. \quad (6.111)$$



6.11-rasm. Boshlang'ich momentda o'qi vertikal turgan pirildoq.

Agar  $\frac{b^2}{c} > 2$  bo'lsa, uchinchi ildizi  $u_3 > 1$  bo'ladi va birinchi grafikka egamiz. Bu tez aylanadigan pirildoq, bu holda pirildoq harakat davomida boshlang'ich vertikal holatini saqlab qoladi, chunki harakat faqatgina  $f(u) \geq 0$  sohadagina ro'y berishi mumkin, bu soha esa faqat bitta nuqtadan iborat.

Agar  $\frac{b^2}{c} < 2$  bo'lsa, uchinchi ildiz  $u_3 < 1$  bo'ladi. Bu holda pirildoq o'z presessiyasi davomida  $\theta = 0$  va  $\theta = \theta_3$  burchaklar orasida nutatsion harakat qiladi.

(6.93) formula bo'yicha  $\frac{b^2}{c} > 2$  shart

$$\Omega_3^2 > \frac{4mgl'l'}{I_3^2}$$

shartga mos keladi. Demak, boshlang'ich burchak tezlik ma'lum bir chegaradan yuqori bo'lsa, pirildoqning aylanish o'qi o'zining boshlang'ich vertikal holatini saqlab qolishi kerak. Albatta, haqiqatda ishqalanish kuchi mavjudligi sababli pirildoqning burchak tezligi kamaya boshlaydi va u chegaraviy chastotadan o'tgandan keyin birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tadi – nutatsiya boshlanadi. Oxirida pirildoq o'z energiyasini yo'qotib to'xtab qolishi kerak.

### Eyler tenglamalariga asoslanib yondoshish

Huddi shu masalaga Eyler tenglamalari nuqtayi nazaridan ham yondoshib ko'raylik, buni ikkita maqsadda qilamiz: tashqi maydonda Eyler tenglamasini o'rganish va harakat integrallarining o'rnini bosadigan hech narsa yo'qligini ko'rsatish uchun. Eyler tenglamalarini yozish uchun birinchidan shu tenglamalarga kirgan kuch momentini aniqlash kerak.

Kuch momenti  $\{x_1, x_2, x_3\}$  sistemada koordinat boshi  $O$  ga nisbatan aniqlanishi kerak. Masalada faqat bitta tashqi kuch bor — og'irlik kuchi  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ . Og'irlik kuchi qo'yilgan nuqtaning radius-vektori  $\mathbf{I} = \{0, 0, l\}$  bo'lgani uchun uning momenti uchun  $\mathbf{K} = [\mathbf{I}\mathbf{P}] = \{K_1, K_2, K_3\} = \{-lP_2, lP_1, 0\}$  ifodani olamiz. Demak, Eyler tenglamalari quyidagi

ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned}
 I' \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I') \Omega_2 \Omega_3 &= -lP_2, \\
 I' \frac{d\Omega_2}{dt} + (I' - I_3) \Omega_3 \Omega_1 &= lP_1, \\
 I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.112}$$

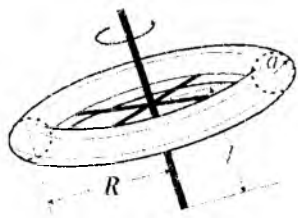
Oxirgi tenglamadan darhol  $\Omega_3 = \text{const}$  ekanligi topiladi. Ya'ni, og'ir pirildoq ham o'zining bosh inersiya o'qi atrofida o'zgarmas burchak tezlik bilan aylanar ekan. Albatta, ma'lum bo'lgan

$$M_3 = I_3 \Omega_3 = \text{const}$$

munosabat ham shu yerdan kelib chiqadi. Yana  $(I_3/I - 1)\Omega_3 = \omega$  belgilash kiritib va 6.7-rasmdan  $P_1 = -mg \sin \theta \sin \psi$ ,  $P_2 = -mg \sin \theta \cos \psi$  ekanligini topib yuqoridagi tenglamalarning qolgan ikkitasini

$$\frac{d\Omega_1}{dt} + \omega \Omega_2 = \frac{mgl}{I'} \sin \theta \sin \psi, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} - \omega \Omega_1 = -\frac{mgl}{I'} \sin \theta \cos \psi \tag{6.113}$$

ko'rinishga keltirib olinadi. Afsuski, bu tenglamalarni bevosita yechishning ilojisi yo'q, yana harakat integrallaridan foydalanish kerak.



6.12-rasm. Teshikkulcha shaklidagi pirildoq.

**6.4.1-misol.** Teshikkulcha shaklidagi pirildoq. Simmetrik pirildoqqa misol sifatida 6.12-rasmda ko'rsatilgan «teshikkulcha»ni olamiz. U bronzadan yasalgan bo'lsin. o'lchamlarini quyidagicha olamiz:  $R = 5\text{sm}$ ,  $a = 1\text{sm}$ . Inersiya markazidan pirildoq turgan sirtgacha masofa  $l = 2\text{sm}$  bo'lsin. Teshikkulchanning hajmi  $V = 2\pi^2 a^2 R$ . Armaturaning og'irligi hisobga

olmaymiz. Bronzaning zichligi  $\rho = 8,8\text{g/sm}^3$  ekanligini hisobga olib, pirildoqning massasini topamiz:  $m = 868\text{g}$ . Boshlang'ich shartlar:

pirildoqqa berilgan burchak tezlik sekundiga 100 marta aylanishga teng bo'lsin. ya'ni,  $\Omega_3 = 2\pi \cdot 100/\text{sek}$ , undan tashqari,  $\phi_0 = 0$  bo'lsin deb olamiz.

Yer maydoni uchun  $g = 981\text{sm/sek}^2$ .



Teshkulchasimon simmetrik pirildoqning bosh inersiya momentlari 6.1.4-misolda hisoblangan:

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{8}(5a^2 + 4R^2), \quad I_3 = \frac{m}{4}(3a^2 + 4R^2). \quad (6.114)$$

Pirildoq harakatini aniqlaydigan tenglamalarga  $I' = I + ml^2$  kattalik kiradi. Berilganlardan foydalanib inersiya momentlarining son qiymatlarini topamiz:

$$I' = \left( \frac{105}{8} + 4 \right) m \quad \text{va} \quad I_3 = \frac{103}{4} m.$$

Shularni hisobga olib masaladagi asosiy parametrlar topiladi:

$$b = \frac{I_3}{I'} \Omega_3 = \frac{206}{137} 2\pi \cdot 100 = 945 \text{ sek}^{-1},$$

$$c = \frac{2mgl}{I'} = \frac{2 \cdot 981 \cdot 2}{\frac{105}{8} + 4} \approx 229 \text{ sek}^{-2}, \quad \frac{c}{b^2} = 2.56 \cdot 10^{-4}. \quad (6.115)$$

Nutatsiya burchak tezligi  $\omega_{nut} = b$  edi, chastota shundan aniqlanadi:

$$\nu_{nut} = \frac{\omega_{nut}}{2\pi} = 150 \text{ Hz}.$$

Nutatsiya burchak amplitudasi (6.98) bo'yicha

$$\theta_0 - \theta_1 = 2.56 \cdot 10^{-4} \sin \theta_0 \quad (6.116)$$

ga teng bo'ladi. Faraz qilaylik, boshlang'ich og'ish burchagi  $\theta_0 = 45^\circ$  bo'lsin. Bu holda

$$\theta_0 - \theta_1 = 1.81 \cdot 10^{-4} = 0,62' \text{ (burchak minuti)}$$

bo'ladi. Agar pirildoqning uzunligi 1 metr bo'lganda ham uning uchi nutatsiya davomida bor yo'g'i 0,181 mm amplitudali tebranish qilgan bo'lar edi. Bunday kichik siljishni odamning ko'zi sezishi qiyin.

(6.106) bo'yicha presessiyaning o'rtacha burchak tezligi

$$\bar{\dot{\varphi}} = \frac{c}{2b} = \frac{229}{945} \text{ sek}^{-1} \approx 0,24 \text{ sek}^{-1} \quad (6.117)$$

ga teng. Demak, pirildoq vertikal o'q atrofida presessiya hisobiga

$$T = \frac{2\pi}{\bar{\dot{\varphi}}} = 26 \text{ sek} \quad (6.118)$$

vaqt ichida bir marta aylanar ekan.

### 6.4.2-misol. Yer shari pirildoq sifatida.

Yer sharini juda yaxshi aniqlikda simmetrik pirildoq sifatida ko'rish mumkin. Yer haqiqiy shar emas, balki qutblarida oz-mos siqilgan formaga egadir. Ya'ni, birinchi yaqinlashishda Yerni 6.1.5-misoldagi ellipsoid sifatida qarash mumkin, faqat  $a = b$  deb olish kerak. Bu bilan Yerni simmetrik pirildoq sifatida qaragan bo'lamiz. O'lchashlar shuni ko'rsatadiki, Yer uchun

$$\frac{a-c}{a} \approx \frac{1}{300}. \quad (6.119)$$

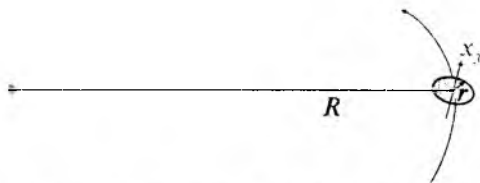
Yerning o'qi uning orbitasi tekisligiga perpendikular bilan  $23^\circ$  ni tashkil qiladi. Koordinat sistemasini quyidagicha tanlab olaylik —  $X, Y$  tekisligi Yer orbitasi tekisligi bilan mos tushsin,  $Z$  o'qi unga perpendikular bo'lsin.  $x_3$  o'qi Yer o'qi bilan mos tushsin (shimoliy yo'nalish). Quyosh bilan bog'liq bo'lgan sferik sistema koordinatlarini  $R, \Theta, \Phi$  deb belgilansa, Yerning kinetik energiyasi quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\Theta}^2 + R^2 \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (6.120)$$

Bunda  $I_1 = I_2 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ ,  $I_3 = \frac{2m}{5}a^2$ ,  $m$  - Yerning massasi.

6.13-rasmda Quyosh-Yer sistemasini masalaning maqsadiga muvofiq chizildi. Quyoshni nuqtaviy zarra deb olinadi. Quyosh bilan Yer markazlari orasidagi masofani  $R$  deb belgilab, Yerning markazidan uning ixtiyoriy nuqtasigacha masofaning radius-vektorini  $r$  deb belgilaylik. Ushbu masalada Yerni moddiy nuqta emas, balki o'lchamlari sezilarli bo'lgan ellipsoid sifatida qarash kerak. Ravshanki,  $R \gg r$ . Bu — masalaning yechimini  $r/R$  kichik parametr bo'yicha yoyilma sifatida topishga imkon beradi.

Masalada  $\dot{R} \approx 0, \dot{\Theta} \approx 0$  deb olish mumkin. Undan tashqari,  $\Theta \approx \pi/2$  bo'ladi.  $\dot{\Phi}$  - Yerning Quyosh atrofidagi aylanish tezligi, demak,



6.13-rasm. Quyosh atrofida aylanayotgan Yer.

$$\frac{2\pi}{\Phi} = 1 \text{ yil.} \quad (6.121)$$

Yer o'qining preessiyasi Quyosh maydonining Yerning har xil nuqtalariga har xil ta'siri bilan tushuntiriladi. Quyosh hosil qilgan tortishish maydonining potentsiali (Quyosh massasini  $M$  deb belgilanadi):

$$\bar{U} = -\frac{GM}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|}. \quad (6.122)$$

Yerning zichligini bir jinsli deb qarab, uning bu maydondagi potentsial energiyasini

$$U = -GM \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|} \quad (6.123)$$

deb ifodalab olinadi. Integral ostidagi funktsiyani  $\mathbf{r}$  ortirma bo'yicha Taylor qatorga yoyamiz:

$$\frac{1}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|} = \frac{1}{R} + r_i \frac{\partial}{\partial R_i} \frac{1}{R} + \frac{1}{2} r_i r_j \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \frac{1}{R} + \dots \quad (6.124)$$

Hosilalarni hisoblash qiyin emas:

$$\frac{\partial}{\partial R_i} \frac{1}{R} = -\frac{R_i}{R^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \frac{1}{R} = \frac{3R_i R_j - R^2 \delta_{ij}}{R^5}. \quad (6.125)$$

Yer ellipsoidining nuqtaviy Quyosh bilan gravitatsion ta'sir energiyasi topildi (6.125) yoyilmadagi ikkinchi had toq funktsiyani bergani uchun undan olingan integral nolga teng bo'ladi):

$$U = -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^5} \int d^3r \rho [3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2 - R^2 r^2]. \quad (6.126)$$

Bu yerdagi integral Yer hajmi bo'yicha olinadi. Integral ostidagi funktsiyani quyidagicha yozib olaylik:

$$3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^2 - R^2 r^2 = R_i R_j (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2). \quad (6.127)$$

Quyidagi kattalik

$$D_{ij} = \int d^3r \rho [3r_i r_j - \delta_{ij} r^2] \quad (6.128)$$

jismning **kvadrupol momenti** deyiladi. Potentsial energiya uchun ifoda quyidagi ko'rinishga keltirildi:

$$U = -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^5} R_i R_j D_{ij}. \quad (6.129)$$

Ta'rifidan ko'rinib turibdiki, kvadrupol moment - simmetrik tenzor. demak, uni hamma vaqt diagonal ko'rinishga keltirish mumkin. Bunda jismning simmetriya o'qini hisobga olish kerak, bizning holda bu o'q -  $x_3$  o'qi. Demak, kvadrupol momentning  $D_1$ ,  $D_2$  va  $D_3$  hadlarigina qoladi. Umumiy formula bo'yicha  $D_1 + D_2 + D_3 = 0$  bo'lgani va jismning simmetriyasidan  $D_1 = D_2$  bo'lgani uchun

$$D_1 = D_2 = -\frac{1}{2} D_3$$

deb olamiz va bundan keyin  $D_3 = D$  deb belgilaymiz. Yana bir soddalashtirish bajaraylik:

$$R_i R_j D_{ij} = -\frac{1}{2} D (R_1^2 + R_2^2) + D R_3^2 = D \left[ \frac{3}{2} R_3^2 - \frac{1}{2} R^2 \right] = \frac{1}{2} R^2 D (3 \cos^2 \alpha - 1), \quad (6.130)$$

bunda  $\alpha$  -  $\mathbf{R}$  vektor va  $x_3$  o'q orasidagi burchak. Kvadrupol moment va inersiya momentlari orasidagi bog'lanishni topish qoldi. Bu ish qiyin bo'lmagani uchun uni o'quvchiga havola qilinadi. Javobi -

$$D = 2(I_1 - I_3).$$

Shu bilan potensial energiya uchun

$$U = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMD}{4R^3} (3 \cos^2 \alpha - 1) \quad (6.131)$$

ifoda topildi.

Yerni moddiy nuqta deb qaralganida birinchi hadning o'zi qolgan bo'lar edi. Yer hatto sof shar bo'lganda ham ikkinchi had bo'lmas edi - chunki bu holda  $I_1 = I_3$  va, demak,  $D = 0$ .

Ko'rilayotgan yaqinlashuvda Yerning Quyosh maydonidagi Lagranj funksiyasi (6.120) va (6.131) larning ayirmasiga teng. Ammo yana ba'zi bir mulohazalarni hisobga olish kerak.

$\alpha$  burchak  $\mathbf{R}$  vektor va  $x_3$  o'q orasidagi burchak, demak, bir yil ichida u  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$  dan  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$  gacha o'zgarishi kerak. Yaqinlashuv doirasida  $\cos^2 \alpha$  ni uning yil bo'yicha o'rtalashtirilgan qiymatiga almash-tiriladi:  $\cos^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 \theta$ .

Yerning sutkali aylanish burchak tezligi  $\psi$ , precessiya tezligi  $\dot{\phi}$  ni unga nisbatan juda kichik deb qarashga haqqimiz bor (tajriba asosida). Shu sababli kinetik energiya (6.120) da  $\dot{\phi}$  bo'yicha kvadratik hadlar tashlab yuboriladi:

$$(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \Rightarrow \dot{\theta}^2, (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \Rightarrow \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta. \quad (6.132)$$

(6.121) formuladan oldingi gaplarni va  $\dot{\varphi}$  ning o'zgarishini hisobga olinib, kinetik energiyadagi birinchi qavs tashlab yuborilishi kerakligiga kelinadi.

Shularning hammasini bir joyga yig'ib, Yerning masalaga mos keluvchi Lagranj funksiyasini quyidagicha holda olamiz:

$$L = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta) + \frac{3GMm(a^2 - c^2)}{20R^3} \cos^2 \theta. \quad (6.133)$$

Lagranj funksiyasida hamma o'zgarish sonlar tashlab yuborildi. Bu Lagranj funksiyasida ikkita siklik o'zgaruvchi bor —  $\varphi$  va  $\psi$ . Shunga mos ravishda ikkita harakat integraliga egamiz:

$$p_\varphi = I_3 \dot{\psi} \cos \theta, \quad p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta). \quad (6.134)$$

$\dot{\psi}$  ni — Yerning sutkali aylanish burchak tezligini — o'zgarish deb olgan edik, bunga  $p_\varphi$  ning konstantaligi qo'shilsa  $\theta$  ham o'zgarish son ekanligiga kelinadi. Ikkinchi harakat integralidan esa  $\dot{\varphi}$  ning ham o'zgarish son ekanligi kelib chiqadi. Endi  $\theta$  uchun harakat tenglamasi keltirib chiqaraylik:

$$I_1 \ddot{\theta} + I_3 \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta + \frac{3GMm(a^2 - c^2)}{10R^3} \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (6.135)$$

$\theta = 23^\circ$  o'zgarish bo'lgani uchun  $\ddot{\theta} = 0$ , demak,

$$\dot{\varphi} = -\frac{3GM(a^2 - c^2)}{4R^3 a^2 \dot{\psi}} \cos \theta. \quad (6.136)$$

(6.119) bo'yicha  $a$  va  $c$  orasidagi farq kamligini ko'zda tutib, quyidagi soddalashtirishni bajaramiz:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} \approx \frac{2(a - c)}{a}.$$

Yakuniy formula quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

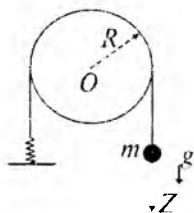
$$\dot{\varphi} = -\frac{3GM}{2R^3 \dot{\psi}} \frac{a - c}{a} \cos \theta. \quad (6.137)$$

Birinchiidan, Quyosh maydoni ta'sirida Yerning presessiya burchak tezligi topaylik. Buning uchun  $M$  sifatida Quyoshning massasi  $M = 1.98844 \cdot 10^{33}$ g va  $R$  sifatida Yerdan Quyoshgacha bo'lgan masofa  $R = 1.496 \cdot 10^{13}$ sm ni olish kerak. Qolgan kattaliklar ham ma'lum:

$$G = 6.6742 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{sek}^2}, \quad \psi = \frac{2\pi}{86400} \text{sek}^{-1}.$$

Natijada

$$\dot{\varphi} = -2.5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{rad}}{\text{sek}} = -16.26 \frac{\text{burchak sekundi}}{\text{yil}} \quad (6.138)$$



6.14-rasm. Blok ustidan o'tgan ipga osilgan massa.

ekanligini topiladi. Agar Yer o'qining presessiyasi faqat Quyosh maydoni ta'siridagina hosil bo'layotgan bo'lganida Yer kurrasi o'z orbita tekisligiga perpendikular bo'lgan o'q atrofida presessiya natijasida ~ 79700 yil ichida bir marta to'liq aylanardi. Presessiya yo'nalishi yerning o'z o'qi atrofidagi aylanish yo'nalishiga teskaridir. Ammo hali Oyning ta'siri e'tiborga olinmadi, uni e'tiborga olinsa olingan son o'zgaradi.

Oy maydoni ta'siridagi presessiya tezligi ham aniqlaylik, buning uchun yuqoridagi formulaga Oyning massasi  $M=7.35 \cdot 10^{25}\text{g}$  va Yer bilan Oyning markazlari orasidagi masofa  $R=3.908 \cdot 10^{10}\text{sm}$  larni qo'yish kerak. Bu Yerning Oy maydoni ta'siridagi presessiya tezligini beradi:

$$\dot{\varphi} = -33.8 \frac{\text{burchak sekundi}}{\text{yil}}. \quad (6.139)$$

Ikkala ta'sirning yig'indisi  $-50.06''$  ni beradi. Eksperimental ma'lumotlar  $-50.02''$  ekanligidan dalolat beradi. Olgan natija shuni bildiradiki, Yer o'qi o'z orbita tekisligiga perpendikular bo'lgan o'q atrofida presessiya natijasida ~ 26000 yil ichida bir marta to'liq aylanadi. Yer o'qi hozir Qutb yulduziga qaragan, yillar o'tishi bilan Yer o'qining yo'nalishi osmonda aylana chizib boradi, biz topgan davr ~ 26000 yil shu aylanani bir marta chizishga kerak bo'lgan vaqt. Bir necha ming yildan keyin qutb yulduzi boshqa bo'ladi, masalan, 12000 yildan keyin Vega qutb yulduzi bo'ladi.

**6.4.3-misol.** Gorizontaal  $O$  o'q atrofida aylanadigan blok ustidan uzunligi o'zgarimaydigan ip o'tgan. Ipning bir uchi bikirligi  $k$  bo'lgan prujinaga ulangan, ikkinchi uchiga  $m$  massa osilgan. Harakat yo'nalishi  $z$  o'qi. Blokning massasi  $m_1$ , uni  $R$  radiusli ingichka disk deb qarang. Shu sistemaning kichik tebranishlar chastotasini toping.

Sistemaning kinetik energiyasini yozamiz:

$$T = \frac{mz^2}{2} + \frac{I_1 \Omega_1^2}{2} = \frac{mz^2}{2} + \frac{m_1 R^2 \Omega_1^2}{4}. \quad (6.140)$$

Burchak tezligi  $\Omega_1 = \dot{z}/R$  bo'lgani uchun

$$T = \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_1}{2} \right) \dot{z}^2. \quad (6.141)$$

Potensial energiya ikki qismdan iborat bo'ladi – gravitatsion maydondagi energiya va barqaror muvozanat holatida uzunligi  $l$  bo'lgan prujinaning uzayishi energiyasi:

$$U = -mgz + \frac{k(l+z)^2}{2} - \frac{kl^2}{2} = -mgz + klz + \frac{kz^2}{2}. \quad (6.142)$$

Barqaror muvozanat holatida

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = mg - kl = 0 \quad (6.143)$$

bo'lishi kerak, demak,  $kl = mg$ . Sistemaning Lagranj funksiyasi topildi:

$$L = \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_1}{2} \right) \dot{z}^2 - \frac{kz^2}{2}. \quad (6.144)$$

Kichik tebranishlar chastotasi:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m + m_1}} = \sqrt{\frac{2m}{2m + m_1} \frac{g}{l}}. \quad (6.145)$$

## 6.5. Dalamber prinsipi

Bir-biriga tegib turgan qattiq jismlar sistemasi berilgan bo'lsin. Ularga tashqi kuchlar ham ta'sir qilayotgan bo'lishi mumkin. Shu jismlar bir-biriga tegib turganligi tufayli biri ikkinchisining harakatini chegaralab turgan bo'ladi. Ya'ni, har bir jism uchun bog'lanishlar paydo bo'ladi. Bilamizki, bog'lanishlarni kuch sifatida ham talqin qilishimiz mumkin.

Bu kuchlar bog'lanishlarga bo'lgan **reaksiya** kuchlari deyiladi, boshqa kuchlar esa **aktiv kuchlar** deyiladi. O'zaro tegib turgan jismlarning harakatini aniqlash uchun shu reaktiv kuchlarni ham topish kerak. (1.6) paragrafda bog'lanishlar bilan qanday ishlashni golonom bog'lanishlar misolida ko'rib chiqdik. Ushbu paragrafda ham golonom, ham nogolonom bog'lanishlarga qo'llanishi mumkin bo'lgan Dalamber metodi deyiladigan metodni ikkita misolda ko'rib chiqamiz.

Metodning mohiyati quyidagicha. Aktiv kuchlarni  $\mathbf{f}_a$  deb, reaktiv kuchlarni  $\mathbf{f}_r$  deb belgilaylik. Qattiq jismning harakat tenglamalari (6.56) va (6.58) ga kirgan kuch sifatida  $\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_r$  yig'indi olinadi. Bu tenglamalar sistemasiga bog'lanishlar qo'shiladi. Hosil bo'lgan tenglamalar to'liq sistemasidan jismning harakati bilan birga reaktiv kuchlar ham aniqlanishi mumkin. Ushbu metod keyingi paragraflarda ikkita masala misolida ko'rsatilgan.

## 6.6. Qattiq jismlar sistemalariga misollar. Nogolonom shartlar

Qattiq jismlarning bir-biriga tegib turishi ularning harakatini cheklaydi. Bunday cheklashni bog'lanishlar tilida ifoda qilish qulaydir. Biz (1.6) paragrafda golonom va nogolonom bog'lanishlar texnikasini muhokama qilgan edik. 1.6.4-misolida qiya tekislik bo'yicha g'ildirab tushayotgan silindr harakatini aniqlash masalasi ko'rilgan. Bu yerda esa nogolonom bog'lanishli harakatga misollar keltiriladi.

Bizga biron sistema berilgan bo'lsin. Uni ifodalash uchun kerak bo'lgan umumlashgan koordinatalar soni  $n$  ta bo'lsin. Odatda, nogolonom bog'lanishlar chiziqli ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^k c_{ij} \dot{q}_j + d_i = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.147)$$

Bunda  $k$  — bog'lanishlar soni. Agar  $d_i = 0$  bo'lsa, bunday bog'lanishlar bir jinsli deyiladi. Umumiy holda  $c_{ij}$  koeffitsiyentlar umumlashgan koordinatalar va vaqtning funksiyalari bo'lishi mumkin. Agar bizga bundan tashqari quyidagi golonom bog'lanishlar ham berilgan bo'lsa:

$$f_l(q, t) = 0, \quad l = 1, \dots, s, \quad (6.148)$$

umumlashgan koordinatalarimizning variatsiyalari mustaqil bo'lmasdan

$$\sum_{j=1}^k c_{ij} \delta q_j = 0 \quad (6.149) \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_l}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad (6.150)$$

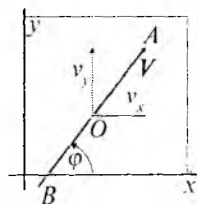
shartlarga bo'ysungam bo'ladi. Bu shartlarning umumiy soni  $k + s$ , shuning uchun  $n - k - s$  soni nogolonom sistemaning erkinlik darajalari



soni deyiladi. Haqiqatda (misollarda keyin ko'riladi) nogolonom bog'lanishlar mustaqil koordinatalar sonini kamaytirmaydi, ular koordinatalarning faqat mustaqil variatsiyalarining sonini kamaytiradi.

**6.4.5-misol.**  $(x, y)$  tekislikda yotgan va unga o'zining uch nuqtasi  $AOB$  bilan tegib turgan jism 6.15-rasmda ko'rsatilganidek  $x$  o'qi bilan  $\varphi$  burchak hosil qilib harakat qilayotgan bo'lsin.

Harakat davomida jism markazi  $O$  nuqta tekislikka tegib tursin,  $A$  va  $B$  nuqtalar esa  $O$  atrofida buralishi mumkin bo'lsin. Ishqalanish kuchini yo'q deb olinadi. Jism tezligining komponentalari  $v_x, v_y$ . Ko'rinib turibdiki, bu komponentalar mustaqil emas:



6.15-rasm. Tekis sirt ustidagi chiziqli jism.

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.151)$$

Agar umumlashgan koordinatlarni  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = \varphi$  yo'l bilan kiritilsa, sharti

$$\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \operatorname{tg} q_3 = 0 \quad (6.152)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglik hech qanday funksiyaning to'liq hosilasi emas, demak, u – nogolonom shartdir. Uni  $\delta t$  ga ko'paytirilsa variatsiyalarni bog'laydigan tenglamaga kelinadi:

$$\delta q_2 - \delta q_1 \operatorname{tg} q_3 = 0. \quad (6.153)$$

Hulosa sifatida shuni aytish kerakki,  $x$ ,  $y$ , va  $\varphi$  koordinatalarning o'zgarishlari mustaqil bo'la olmasligiga qaramasdan koordinatalarning o'zlari mustaqilligicha qoladi, chunki, (6.154) shartni integrallab uni koordinatlarni bog'laydigan shartga o'tkazish mumkin emas.

Shunga qaramasdan harakat integrallarining mavjudligi masalani to'liq yechishga imkon beradi. Masala birinchi Lagranj ko'paytuvchilari tilida yechiladi, keyin harakat integrallarining muholama qilamiz.

Jismning Lagranj funksiyasi (haqiqatda u kinetik energiyaning o'zi)

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2. \quad (6.154)$$

Bunda  $m$  – jismning massasi,  $I$  –  $O$  nuqtadan o'tgan vertikal o'qqa nisbatan inersiya momenti. (1.6) paragrafda aytilgani bo'yicha nogolonom bog'lanishlar bor taqdirda harakat tenglamalari

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k \lambda_k c_{ki} \quad (6.155)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (6.150) va (6.154) shartlar taqqoslansa

$$c_{11} = -tg\varphi, \quad c_{12} = 1, \quad c_{13} = 0 \quad (6.156)$$

ekanligi topiladi. Bu darhol harakat tenglamalarini yozib olishga imkon beradi:

$$m\ddot{x}_O = -\lambda_1 tg\varphi, \quad m\ddot{y}_O = \lambda_1, \quad I\ddot{\varphi} = 0. \quad (6.157)$$

Bu sistema

$$\dot{y} - \dot{x}tg\varphi = 0 \quad (6.158)$$

tenglama bilan to'ldirilishi kerak. Shu bilan, to'rtta noma'lum bor —  $x, y, \varphi, \lambda$ . Ular uchun yozilgan tenglamalar soni ham to'rtta — (6.158) da uchta va (6.159) tenglama. Shu tenglamalar ichidagi uchinchisini yechish eng osoni:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad (6.159)$$

bunda  $\omega = \dot{\varphi}$  — jismning  $z$  o'qi atrofidagi burchak tezligi. (6.158) dagi birinchi va ikkinchi tenglamalardan  $\gamma_1$  ni qisqartirilsa

$$\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi = 0 \quad (6.160)$$

hosil bo'ladi. (6.159) tenglamani ham

$$\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = 0 \quad (6.161)$$

ko'rinishda olib ikkalasi qo'shilsa

$$\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = 0, \quad (6.162)$$

yoki

$$\frac{d}{dt} [\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi] = 0 \quad (6.163)$$

tenglamaga kelinadi. Bitta harakat integrali topildi

$$\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = c_1. \quad (6.164)$$

Bu tenglamani (6.162) tenglama bilan taqqoslab

$$\dot{x} = c_1 \cos \varphi, \quad \dot{y} = c_1 \sin \varphi \quad (6.165)$$

ekanligini, shunga ko'ra,

$$x = \frac{c_1}{\omega} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) + x_0, \quad y = -\frac{c_1}{\omega} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + y_0 \quad (6.166)$$

ekanligi topiladi. (6.166) tenglamadan  $c_1 = v$  ekanligi kelib chiqadi. (6.158) sistemaning ikkinchi tenglamasidan  $\gamma_1$  topiladi:

$$\lambda_1 = m\omega v \cos \varphi. \quad (6.167)$$

(6.158) sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarning o'ng tomonlari reaksiya kuchining  $x$  va  $y$  komponentalarini beradi:

$$R_x = -m\omega v \sin \varphi, \quad R_y = m\omega v \cos \varphi. \quad (6.168)$$

Ko'rinib turibdiki,

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 = m^2 \omega^2 v^2.$$

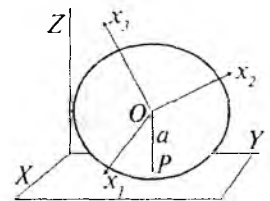
Demak, reaksiya kuchi o'zgarmas qiymatga ega  $R = m\omega v$ . Uning yo'nalishini aniqlash qiyin emas (6.169) formulalardan xulosa qilish mumkinki, bu kuch  $A$  va  $B$  nuqtalar chizayotgan aylanaga urinma bo'yicha yo'nalgan.

Harakat integrallariga kelaylik. Masalaning yechilishining sababi yetarli darajadagi harakat integrallarining mavjudligidadir. Ulardan birinchisi—energiya:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2. \quad (6.169)$$

Ikkinchisi -  $\varphi$  ning sikllikligidan kelib chiqadigan  $\dot{\varphi} = \text{const}$  ekanligi. Bundan esa o'z navbatida  $\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = \text{const}$  ekanligi. (6.165) tenglama shu oxirgi munosabatning o'zidir. Buni ko'rish uchun tenglikning ikkala tomonini  $v = |\mathbf{v}|$  ga ko'paytirib  $x = v \cos \varphi$  va  $y = v \sin \varphi$  ekanligini hisobga olish kerak.

**6.4.6-misol.** Tekislik ustida  $a$  radiusli shar sirpanmasdan harakat qilayotgan bo'lsin. Sharning tekislikka tegib turgan nuqtasining tezligi sirpanmaslik sharti oqibatida nolga teng bo'lishi kerak. Sharning erkinlik darajalari sonini aniqlaylik. Sharning holati uning markazining koordinatalari  $X_0, Y_0$  va uchta Eyler burchaklari  $\varphi, \psi, \theta$  orqali aniqlanadi. Haqiqatan ham, tekislik ustida harakat deganimiz sharga  $Z$  o'qi bo'yicha qo'yilgan bitta shartga mos keladi:  $Z = a$ , bu — golonom shart.



6.16-rasm. Tekis sirt ustidagi shar.

Demak, erkinlik darajalari soni  $6-1=5$ . Sharning sirtga tegib turgan nuqtasini  $P$  deb, sharning markazidan unga tushgan vektorni  $\mathbf{a}$  deb belgilaylik.

Markaz  $O$  ning tezligi  $\mathbf{V}_0$  deb belgilansa,  $P$  nuqtaning tezligi nolga tengligi sharti

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{a}] = 0 \quad (6.170)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.  $\mathbf{a} = \{0, 0, -a\}$  bo'lgani uchun komponentalarda bu tenglama

$$\dot{X}_p = \dot{X}_O - a\Omega_y = 0, \quad \dot{Y}_p = \dot{Y}_O + a\Omega_x = 0 \quad (6.171)$$

ko'rinishni oladi. Bu — nogolonom shartlar, chunki burchak tezligining komponentalari hech qanday funksiyaning vaqt bo'yicha to'liq hosilasi emas ( $\Omega$  lar Eyley burchaklari  $\varphi, \psi, \theta$  ning murakkab funksiyalaridir). Shu sababdan bu shartlarni yecha olmaymiz. Ularni harakat tenglamalariga Dalamber prinsipi yordamida ((6.5) paragrafni qarang) reaksiya kuchlari orqali kiritganimiz maqsadga muvofiqroqdir.

Shularni hisobga olib harakat tenglamalari sistemasiga o'taylik. Sharning massasini  $m$  deb, uning markazining ilgarilanma harakat tezligini  $m$  deb olinsa va shar uchun  $\mathbf{M} = I\Omega$  ekanligidan foydalanilsa tenglamalar sistemasi quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad I \frac{d\Omega}{dt} = \mathbf{K} + [\mathbf{a}\mathbf{R}], \quad \mathbf{V} + [\Omega\mathbf{a}] = 0. \quad (6.172)$$

Bunda  $\mathbf{F}$  — tashqi kuch va  $\mathbf{K}$  — u hosil qilgan kuch momenti. Uchinchi tenglama birinchiga qo'yiladi,  $\dot{\Omega}$  ni esa ikkinchi tenglamadan olinadi:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \frac{m}{I} ([\mathbf{K}\mathbf{a}] - \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{R}a^2) = 0. \quad (6.173)$$

Bu tenglama komponentalar bo'yicha yozib olaylik (shar uchun  $I = 2ma^2/5$  ekanligi hisobga olindi):

$$R_x = -\frac{2}{7}F_x + \frac{5}{7a}K_y, \quad R_y = -\frac{2}{7}F_y - \frac{5}{7a}K_x, \quad R_z = -F_z. \quad (6.174)$$

Reaksiya kuchlari topildi. Endi harakat tenglamalarini faqat tashqi kuchlar orqali yozib olish mumkin. Birinchidan, harakat tenglamalarining mustaqillari soni nechaga teng? Boshida oltita harakat tenglamasi bor edi, ularga kirgan kattaliklarga uchta shart qo'yilgan. Demak, mustaqil harakat tenglamalari soni uchga teng bo'lishi kerak. Ular sifatida

$$m \frac{dV_x}{dt} = \frac{7}{5} \left( F_x + \frac{1}{a} K_y \right); \quad m \frac{dV_y}{dt} = \frac{7}{5} \left( F_y - \frac{1}{a} K_x \right); \quad I \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z \quad (6.175)$$

tenglamalar olinadi. Qolgan kattaliklar quyidagicha topiladi: (6.175) ning uchinchisidan  $\dot{V}_z = 0$  ekanligi kelib chiqadi, bu esa boshlang'ich golonom sharti  $z = a$  ning natijasidir,  $\Omega_x, \Omega_y$  lar esa (6.173) ning uchinchisi bo'lgan bog'lanishlar  $\Omega_x = -V_y/a, \Omega_y = -V_x/a$  dan topiladi.

Huddi shu masalani Lagranj ko'paytuvchilari tilida ham qarash mumkin. Buni o'quvchiga masala sifatida havola qilinadi (shu bobga 3-masalaga qarang).

## 6.7. Noinersial sistemalardagi harakat

Inersial sistemalarning mexanikadagi alohida ahamiyati haqida kursining boshida gapirgan edik. Inersial sistemada jismning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} - U(\mathbf{r}_0) \quad (6.176)$$

ko'rinishga ega (bu sistemaga taalluqli tezliklarni nol indeksi bilan belgilanadi). Noinersial sistemaga o'tganda jismning Lagranj funksiyasi qanday bo'ladi?

Vaqt bir jinsli va fazo bir jinsli hamda izotrop bo'lgan sistemalar inersial sistema deb ta'riflangan edi. Noinersial sistemaga o'tganimizda fazo va vaqtning bu xossalari yo'qolishi kerak.

Inersial sistemada o'zgarmas  $\mathbf{v}_0$  tezlik bilan harakat qilayotgan jism olaylik. Shu sistemaga nisbatan ixtiyoriy  $\mathbf{V}(t)$  tezlik bilan harakat qilayotgan shtrixlangan sistema  $K'$  da jismning tezligi  $\mathbf{v}'$  quyidagicha aniqlanadi:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \quad (6.177)$$

Buni (6.177) ga olib borib qo'yilsa (faqat vaqtning funksiyasi bo'lgan  $\mathbf{V}^2(t)$  had tashlab yuboriladi va potensial yangi koordinatlarda ifodalanadi):

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}(t) - U(\mathbf{r}'). \quad (6.178)$$

Agar  $\frac{d}{dt}\mathbf{V}(t) = \mathbf{W}(t)$  orqali shtrixlangan sistemaning tezlanishi kiritilsa, shu Lagranj funksiyasiga mos keluvchi harakat tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m\mathbf{v}' = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} - m\mathbf{W}(t). \quad (6.179)$$

Demak, tezlanishning paydo bo'lishi  $-m\mathbf{W}(t)$  ko'rinishdagi bir jinsli kuch maydonining paydo bo'lishiga ekvivalent ekan. Bu maydonda har bir jism o'zining massasiga bog'liq bo'lmaydigan — hamma jismlar uchun bir xil bo'lgan va sistemaning tezlanishiga teskari bo'lgan tezlanish olar ekan. Mana shu tashqi bir jinsli kuch maydonining paydo bo'lishini bo'rttirib ko'rsatish uchun  $L'$  Lagranj funksiyasidagi ikkinchi hadni

$$m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}(t) = m \frac{d}{dt} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}(t) = m \frac{d}{dt} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}(t)) - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{W}(t) \quad (6.180)$$

ko'rinishga keltiriladi. Bu yerdagi vaqt bo'yicha to'liq hosilali hadni Lagranj funksiyasidan tashlab yuborishi mumkin. Natijada Lagranj funksiya quyidagi ko'rinishga keladi:

$$L' = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} - U(\mathbf{r}') - m\mathbf{r}' \cdot \mathbf{W}(t). \quad (6.181)$$

Albatta, bu Lagranj funksiyasidan olingan harakat tenglamasi huddi o'sha (6.180) ko'rinishga ega bo'ladi.

Ikkinchi bosqichga o'taylik. Shtrixlangan sistema  $K'$  ga nisbatan  $\Omega(t)$  burchak tezlik bilan harakat qilayotgan sistema  $K$  kiritiladi. Bu sistemaning koordinat boshi shtrixlangan sistemaning boshi bilan bir xil bo'lsin, bu degani,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ .  $K$  dagi tezlik  $\mathbf{v}$  bilan  $K'$  dagi  $\mathbf{v}'$  tezlik quyidagicha bog'langan bo'ladi:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\Omega\mathbf{r}]. \quad (6.182)$$

Biz  $K'$  sistemadagi o'zgaruvchan tezlik  $\mathbf{v}'$  ni ikki qismga ajratdik - ilgarilanma harakat tezligi  $\mathbf{v}$  va aylanma harakat tezligi  $[\Omega\mathbf{r}]$ . (6.182) dagi tezlikni bu qoida bo'yicha almashtirilsa  $K$  sistemadagi Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + m\mathbf{v} \cdot [\Omega\mathbf{r}] + \frac{m}{2} [\Omega\mathbf{r}]^2 - U(\mathbf{r}) - m\mathbf{r} \cdot \mathbf{W}(t). \quad (6.183)$$

Lagranj hosilalarini hisoblashga o'taylik. Ikkinchi haddan radius-vektor bo'yicha hosiladan boshlaymiz:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} (\mathbf{v} \cdot [\Omega\mathbf{r}]) = \frac{\partial}{\partial r_i} \varepsilon_{jkl} v_j \Omega_k r_l = \varepsilon_{jkl} v_j \Omega_k \delta_{il} = \varepsilon_{jkl} v_j \Omega_k = \varepsilon_{ijk} v_j \Omega_k = [\mathbf{v}\Omega]_i. \quad (6.184)$$

Uchinchi haddan radius-vektor bo'yicha hosila:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} [\Omega\mathbf{r}]^2 &= \frac{\partial}{\partial r_i} (\varepsilon_{jkl} \Omega_k r_l \varepsilon_{jmn} \Omega_m r_n) = \varepsilon_{jkl} \Omega_k \varepsilon_{jmn} \Omega_m (r_n \delta_{il} + r_l \delta_{in}) = \\ &= 2\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{jmi} \Omega_k \Omega_m r_l = 2[\Omega[\mathbf{r}\Omega]]_i \end{aligned} \quad (6.185)$$

Shularni hisobga olib

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + m[\mathbf{v}\Omega] + m[\Omega[\mathbf{r}\Omega]] - m\mathbf{W} \quad (6.186)$$

ekanligiga ishonch hosil qilinadi. Tezlik bo'yicha hosilani hisoblash osonroq:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m[\Omega\mathbf{r}]. \quad (6.187)$$

Topilgan Lagranj hosilalaridan harakat tenglamalariga o'tamiz:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W} + 2m[\mathbf{v}\Omega] + m[\Omega[\mathbf{r}\Omega]] + m[\mathbf{r}\dot{\Omega}]. \quad (6.188)$$

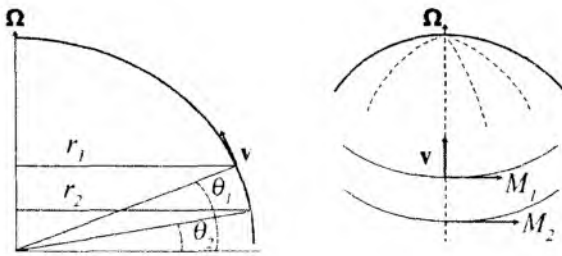
Aylanma harakatni hisobga olish (6.180) dagi kuchlarga yana uch xil yangi kuchning qo'shilishiga olib keldi. Ularning birinchisi —  $2m[\mathbf{v}\Omega]$  — **Koriolis kuchi** deyiladi. Ikkinchisi —  $m[\Omega[\mathbf{r}\Omega]]$  — **markazdan qochma kuch** deyiladi.  $\mathbf{r}$  va  $\Omega$  o'zaro perpendikular bo'lgan holda bu kuch elementar fizikadan ma'lum bo'lgan  $m\Omega^2 r = m\bar{v}^2/r$  ko'rinishga keladi, bu yerda  $\bar{v} = \Omega r$  burchak tezligi bilan harakat qilayotgan  $r$  radiusli nuqtaning chiziqli tezligi:  $\bar{v} = \Omega r$ .

Oxirgi had burchak tezligining mumkin bo'lgan tekismasligi bilan bog'liq bo'lgan haddir. Topilgan kuchlarning ichida Koriolis kuchi ajralib turadi — faqat u jismning noinersial sistemadagi tezligiga bog'liq. Qolgan kuchlar noinersial sistemada qo'zg'almasdan turgan jismlarga ham ta'sir qiladi.

Koriolis kuchining kelib chiqishini 6.17-rasmda ko'rsatilgan xususiy hol asosida tushunish mumkin.

Rasmda ko'rsatilganidek, Yer sharining  $\theta_1$  va  $\theta_2$  kengliklari olinadi. Yer sirtida turgan jismlar uchun Yerning aylanishi bilan bog'liq bo'lgan impils momentlari  $M_1 = m\bar{v}_1 r_1 = m\Omega r_1^2$  va  $M_2 = m\bar{v}_2 r_2 = m\Omega r_2^2$  bo'ladi, demak,  $M_1 < M_2$  ekan. Janubdan shimolga qarab oqayotgan daryoni olaylik. Suv zarrachalari o'zi bilan sharqqa yo'nalgan impuls momentining qoldig'ini olib keladi.

Bu qoldiqning ta'siri ostida suv zarrachalari inersiya bo'yicha daryoning o'ng qirg'og'iga qo'shimcha bosim bilan ta'sir qiladi. Mana shu kuch — Koriolis kuchidir.



6.17-rasm. Koriolis kuchining kelib chiqishiga oid.

Bu mulohazamizni matematik ko‘rinishga keltiraylik. Qulaylik uchun  $r_1 = r$  va  $r_2 = r_1 + \Delta r = r + \Delta r$  deb olamiz. shunga ko‘ra  $M_1 = M$  va  $M_2 = M_1 + \Delta M = M + \Delta M$  deb yozamiz va

$$\Delta M = M_2 - M_1 = m\Omega(r_2^2 - r_1^2) = 2m\Omega r \Delta r \quad (6.189)$$

ga kelimiz. Tenglamani ikkala tomonini  $\Delta t$  ga bo‘lib cheksiz kichiklarga o‘taylik. Bu holda o‘ng tomonda jism tezligining radial komponentasi paydo bo‘ladi:  $dr/dt = v_r$ . Rasmdan ko‘rish mumkinki,  $v_r = v \sin \theta$ . Demak,

$$\frac{dM}{dt} = 2m\Omega v \sin \theta r \quad (6.190)$$

tenglamaga kelimiz. Ikkinchi tomondan,  $\Omega v \sin \theta$  ifoda  $[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]$  vektorining kenglik paralleli bo‘yicha yo‘nalgan komponentasi. Tezlikning tanlab olgan yo‘nalishini ko‘zda tutilsa, olingan tenglamani vektor ko‘rinishda quyidagicha yozib olish mumkinligi kelib chiqadi:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 2m[\mathbf{r}[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]] \quad (6.191)$$

Impuls momenti uchun harakat tenglamasi (6.58) bilan taqqoslansa suv zarrasiga  $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]$  kuch ta’sir qilayotganini ko‘ramiz. Bu – Koriolis kuchi.

Agar endi suv oqimi shimoldan janubga qarab yo‘nalgan bo‘lsa  $\Delta M < 0$  bo‘ladi, kuch g‘arb tomonga yo‘nalgan bo‘lib chiqadi. Shimoliy yarim sharda oqayotgan daryo uchun bu – yana o‘sha o‘ng qirg‘oqqa ta’sir qiluvchi kuchni beradi. Umuman, suv tezligini ixtiyoriy yo‘nalishda deb olinsa mos keluvchi vektor ifodalarga kelimiz.



Janubiy yarim shar uchun yuqoridagi mulohazalar qo'llanilsa bu holda Koriolis kuchi daryolarning chap qirg'og'iga ta'sir qilishi topiladi.

Mana shu tushuntirishdan ko'rinib turibdiki Koriolis kuchi inersia kuchining namoyonidir.

Yuqoridan qarab Yerga tushayotgan jismga Koriolis kuchining ta'siri nimaga olib keladi? Bu holda  $[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]$  vektor sharq tomonga qarab yo'nalgan bo'ladi (qaysi yarim sharda ekanligimizdan qat'iy nazar). Bu degani, pastga tushayotgan jismning trayektoriyasi tik to'g'ri chiziq bo'lmay u sharq tomonga og'gan egri chiziq bo'ladi.

Bu hodisani ham inersiya kuchlari orqali tushuntirish mumkin. Yuqorida turgan jismning impuls momenti shu jismga nisbatan vertikal bo'yicha pastroq joylashgan jismning impuls momentidan katta bo'ladi (esdan chiqarmaylik, Yer bilan birga aylanayotgan sistemadamiz). Momentning saqlanish qonuni bo'yicha radius-vektor kamayganda (jism pastga tushganda) jismning aylanma chizikli tezligi oshishi kerak. Natijada boshlang'ich vaqt momentida Yer sirtiga parallel yo'nalishda tezlikka ega bo'lmagan jismning pastga tushgan sari sharq tomonga yo'nalgan tezlik komponentasi paydo bo'ladi va orta boshlaydi.

Pastdan yuqoriga otilgan jism uchun esa trayektoriyaning siljishi g'arb tomonga qarab yo'nalgan bo'ladi.

(6.189) harakat tenglamasining xususiy holini olaylik:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{const} \quad \text{va} \quad \mathbf{W} = 0 \frac{\pi}{6} \quad (6.193)$$

bo'lsin, ya'ni, sistema ilgari lanma tezlanishga egamas va uning burchak tezligi o'zgarmas bo'lsin:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + m[\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]]. \quad (6.194)$$

Shu tenglamani  $\mathbf{v}$  ga skalar ko'paytirib

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = \frac{dU}{dt} \quad \text{va} \quad \mathbf{v} \cdot [\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2 \quad (6.195)$$

ekanliklari hisobga olinsa saqlanish qonuniga kelinadi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2} [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2 + U \right) = 0. \quad (6.196)$$

Qavs ichidagi ifoda — energiya:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2} [\Omega \mathbf{r}]^2 + U. \quad (6.197)$$

Kinetik va oddiy potensial energiyalardan tashqari unga markazdan qochma potensial energiyasi  $-\frac{1}{2}[\Omega \mathbf{r}]^2$  - ham kirgan. Bu ifodani bevosita (6.184) Lagranj funksiyasidan ham olish mumkin edi.

Koriolis kuchi ish bajarmaydi - hamma vaqt tezlikka perpendikular yo'nalgan bo'lgani uchun (huddi magnit maydonidek). Shu sababdan unga mos keluvchi had energiyning ifodasida paydo bo'lmadi.

Umumlashgan impulsni (6.188) dan olamiz:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + m[\Omega \mathbf{r}]. \quad (6.198)$$

Umumlashgan impuls ilgariylanma va aylanma qismlardan iborat ekan.

**6.7.1-misol.** Boshlang'ich tezligi  $v_0$  va boshlang'ich holati  $\mathbf{r}_0$  bo'lgan jism Yer maydonida harakat qilmoqda. Jism trayektoriyasining Koriolis kuchi orqali o'zgarishini toping. Yerning burchak tezligini o'zgarmas deb qarang.

Yer uchun burchak tezlikning son qiymati juda kichikligi -

$|\Omega| = \frac{2\pi}{86400} \text{sek}^{-1} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \text{sek}^{-1}$  -  $\Omega^2$  ga proporsional bo'lgan markazdan qochma kuchni hisobga olmasligimiz kerakligini bildiradi. Potensial energiya  $U = -mg \cdot \mathbf{r}$  ekanligidan harakat tenglamasi quyidagicha bo'lishi klib chiqadi:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}\Omega]. \quad (6.199)$$

Tenglama  $\Omega$  bo'yicha iteratsiyalar bilan yechiladi. Buning uchun

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} \quad (6.200)$$

deb olinadi va  $\mathbf{v}^{(0)}$  had  $\Omega$  ga bog'liq bo'lmaydi,  $\mathbf{v}^{(1)}$  had esa  $\Omega$  ning birinchi darajasiga proporsional bo'ladi deb olinadi. Natijada

$$\dot{\mathbf{v}}^{(0)} = \mathbf{g}, \quad \dot{\mathbf{v}}^{(1)} = 2[\mathbf{v}^{(0)}\Omega] \quad (6.201)$$

tenglamalar sistemasi olinadi. Bu sistema oson yechiladi:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}^{(1)} = [\mathbf{g}\Omega]t^2 + 2[\mathbf{v}_0\Omega]t, \quad (6.202)$$

yoki

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}]t + [\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}]t^2. \quad (6.203)$$

Harakat tenglamasida  $\boldsymbol{\Omega}^2$  ga proporsional bo'lgan hadni tashlab yuborganimiz uchun iteratsiya jarayonini shu yerda to'xtatishimiz kerak.

Radius-vektorni topish uchun tezlikni vaqt bo'yicha integrallaymiz:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + [\mathbf{v}_0\boldsymbol{\Omega}]t^2 + \frac{1}{3}[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}]t^3. \quad (6.204)$$

**6.7.2-misol.** Boshlang'ich tezligi nolga teng bo'lgan jism  $h$  balandlikdan Yerga tushish davomida vertikalidan qanchaga og'adi?

Masalani konkret bir kenglikka bog'laylik, bu kenglikni  $\theta$  deb belgilaymiz (Toshkent uchun  $\theta = 41^\circ$ ). Koordinat o'qlari tanlaymiz.  $x$ -o'qi meridian bo'yicha janubdan shimolga qaratamiz.  $z$ -o'qi yuqoriga yo'naltiriladi.  $y$  o'qi  $g$ 'arbgga yo'nalgan bo'ladi.

Bu holda  $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$  va  $\boldsymbol{\Omega} = \{\Omega \cos \theta, 0, \Omega \sin \theta\}$  bo'ladi va yechimdagi vektor ko'paytmaning birdan-bir noldan farqli komponentasi uning  $y$  komponentasi bo'ladi:

$$[\mathbf{g}\boldsymbol{\Omega}] = \{0, -g \Omega \cos \theta, 0\}.$$

Demak, boshlang'ich koordinatlari  $\mathbf{r}_0 = \{0, 0, h\}$  bo'lgan jism yerga tushganda (6.204) bo'yicha

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3}g\Omega \cos \theta t^3 \quad (6.205)$$

koordinatlarga ega bo'lar ekan. Minus ishora og'ishning sharq tomonga ro'y berishini ko'rsatadi.  $z$  - komponenta uchun ifodani nolga tenglash-tirib

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad (6.206)$$

tushish vaqtini (6.205) ga qo'yamiz:

$$y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega \cos \theta. \quad (6.207)$$

Son qiymatlarini qo'yib chiqaylik:

$$y = -2,19 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \cos \theta. \quad (6.208)$$

Toshkent kengligi uchun

$$y = -1,65 \cdot 10^{-5} h^{3/2}.$$

Agar  $h = 100\text{m}$  deb olinsa,  $y = -1,65 \cdot 10^{-2}\text{m} = -1,65\text{sm}$  bo'ladi. Agar jism Toshkent teleminorasining uchidan tushib ketsa ( $h=340\text{m}$ ), uning vertikal-dan sharqqa og'ishi  $y = -10,3\text{sm}$  ekanligini topamiz. Albatta, hayotda shamolning ta'siri bundan kuchliroq bo'ladi.

**6.7.3-misol.** Boshlang'ich  $v_0$  tezlik bilan Yer sirtidan otilgan jism Yerga qaytib tushganda o'zining boshlang'ich tezligi yotgan tekislikdan qanchaga chetlashadi?

Koordinat o'qlarini avvalgi misoldagidek tanlaymiz. Effekt maksimal bo'lishi uchun tezlikni  $x, z$  tekisligida yotibdi deb olamiz. Bu holda (6.204) dan

$$y = \Omega(v_{0z} \cos \theta - v_{0x} \sin \theta)t^2 - \frac{1}{3}g\Omega t^3 \quad (6.209)$$

ekanligini topiladi. Jism Yerga qaytib tushgunicha  $t = 2v_{0z}/g$  vaqt ketadi. Demak,

$$y = \frac{4\Omega v_{0z}^2}{g^2} \left( \frac{1}{3}v_{0z} \cos \theta - v_{0x} \sin \theta \right) \quad (6.210)$$

To'pdan va miltiqdan o'q otishda aniq nishonga olish uchun shu natijalarni ham hisobga olish kerak.

### 6-bobga mashq va savollar

1. Erkin jism uchun Eyley tenglamalaridan ( $\mathbf{K} = 0$ )

– Jism energiyasining harakat integrali ekanligini;

-- Impuls momentining kvadrati  $M^2$  harakat integrali ekanligini keltirib chiqaring.

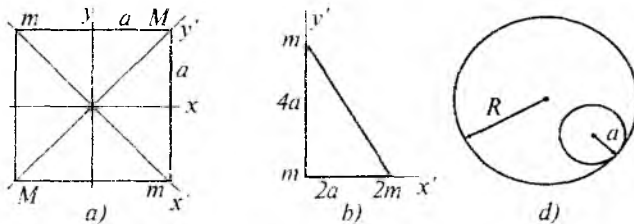
2. Energiya  $E'$  ning ((6.82) ga qarang) harakat integralligidan foydalanib (6.89) tenglamani keltirib chiqaring. Buning uchun boshlang'ich  $\theta_0$  burchakda energiyaning qiymati ixtiyoriy boshqa  $\theta$  burchakdagi qiymatiga teng ekanligidan foydalaning.

3. Tekislikda sirpanmasdan harakat qilayotgan shar masalasini Lagranj ko'paytuvchilari metodi bilan yeching ((1.6)-paragrafga qarang).

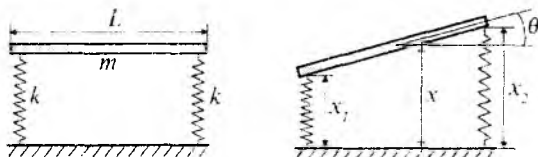
4. 6.18-b rasmda ko'rsatilgan 2a tomonli kvadrating uchlarida joylashgan massalar sistemasi uchun inersiya tenzorining komponentalarini toping. Bu ishni  $(x, y)$  va  $(x', y')$  sistemalarda bajaring.

5. 6.18-rasmda ko'rsatilgan katetlari 2a va 4a bo'lgan to'g'ri burchakli uch burchak uchlarida joylashgan  $m$  va  $2m$  massalar uchun bosh inersiya o'qlarini va bosh inersiya momentlarini toping.

6. Faraz qilaylik, Yerning radiusi 1% ga kamaydi, massasi o'zgarmadi. Uning burchak tezligi qanchaga o'zgaradi? Energiyasichi?



6.18-rasm. Moddiy nuqtalar sistemalari.



6.19-rasm. Tebraneyotgan hoda

7. Uzunligi  $L$  va massasi  $m$  bo'lgan hoda bikirliklari  $k$  bo'lgan ikki prujinaga 6.19-rasm<sup>da</sup> ko'rsatilganidek o'rnatilgan. Bir uchini kichik masofaga pastga qarab siljitib harakatga keltirildi. Hodaning tebranish chastotalarini toping.

8. Shimoliy yarim shardagi daryo janubga qarab oqmoqda.  $\theta$  kenglikda daryoning kengligi  $H$  ga teng. Sharqiy va g'arbiy qirg'oqlardagi suvning balandliklarining farqini toping.

9.  $a$  radiusli bir jinsli silindr  $R$  radiusli katta bo'shliqli silindrning ichida sirpanmasdan harakat qilmoqda (6.18-d rasmga qurang). Uning Lagranj funksiyasini toping. Kichik silindrning barqaror muvozanat holati atrofidagi kichik tebranishlar chastotasini toping.

### 7.1 Gamilton tenglamalari

Lagranj formalizmi klassik mexanikadagi yagona formalizmi emas. Ushbu bobda ko'rib chiqiladigan *kanonik* yoki *Gamilton metodi* mexanikaning yana bir eng umumiy metodi bo'lib Lagranj metodidan ba'zi bir jihatlarda hatto ustunligi ham bor. Shu metodni o'rganishga o'taylik.

Lagranj metodida umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklarning funksiyasi bo'lmish Lagranj funksiyasini topish kerak edi va shu funksiyadan foydalanib vaqtga nisbatan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bo'lgan harakat tenglamalarini topish kerak edi. (2.2) paragrafdagi (2.17) formula orqali umumlashgan impuls tushunchasini kiritgan edik.

Bu bobdagi metod umumlashgan koordinatalar va umumlashgan impulslar tilida ifodalanadi.

Vaqtga oshkora bog'liq bo'lmagan Lagranj funksiyasining to'liq differensialini yozaylik:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i. \quad (7.1)$$

Umumlashgan impulsning ta'rifi

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7.2)$$

Eyler--Lagranj harakat tenglamalari

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad (7.3)$$

va

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d \left( \sum_i p_i \dot{q}_i \right) - \sum_i dp_i \dot{q}_i \quad (7.4)$$

dan foydalanib yuqoridagi formulani

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i \quad (7.5)$$

ko'rinishga keltiraylik. Bu munosabatning o'ng tomoniga ahamiyat berilsa, chap tomondagi  $\sum_i p_i \dot{q}_i - L$  kombinatsiya  $q$  va  $p$  argumentlarning funksiyasi ekanligini ko'ramiz. Shu boisdan  $\sum_i p_i \dot{q}_i - L$  uchun yangi belgilash kiritaylik:

$$H(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (7.6)$$

Kiritilgan funksiya **Gamilton funksiyasi** deyiladi. Lagranj funksiya-sidan Gamilton funksiyasiga o'tish uchun bajarilgan almashtirish Lejandr almashtirishi deyiladi.

Olingan

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i \quad (7.7)$$

formuladan darhol quyidagi formulalar kelib chiqadi:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (7.8)$$

Olingan tenglamalarning nomi — **Gamilton tenglamalari**. Ular ko'pincha **kanonik tenglamalar** ham deyiladi.

Gamilton funksiyasining ta'rifi (7.6) ni energiyaning ta'rifi (2.5) bilan taqqoslansa, ularning bir xil ekanligini ko'ramiz, faqat Gamilton funksiyasi energiyani umumlasgan impuls va koordinatalarning funksiyasi sifatida ifodalanadi. Bu ikkala ifodalarning son qiymatlari (koordinatlar va impuls harakat tenglamalarining yechimlari bo'lgan holda) bir hildir.

**7.1.1-misol.** Bir o'lchamli garmonik ossillatorning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}. \quad (7.9)$$

Umumlashgan impuls:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}. \quad (7.10)$$

Bu yerdan  $\dot{q}$  ni  $p$  ning funksiyasi sifatida topib olamiz:

$$\dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (7.11)$$

Gamilton funksiyasi:

$$H(q, p) = p\dot{q} - L = p \frac{p}{m} - \frac{m}{2} \frac{p^2}{m^2} + \frac{kq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}. \quad (7.12)$$

Ikkinchi tenglik belgisidan so'ng (7.11) formula qo'llanildi. Gamilton tenglamalari:

$$\dot{p} = -kq, \quad q = \frac{p}{m}. \quad (7.13)$$

Bu ikkita birinchi tartibli tenglamadan bitta ikkinchi tartibli (o'zimizga yaxshi ma'lum bo'lgan) tenglamaga o'tish mumkin:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (7.14)$$

**7.1.2-misol.** Sferik koordinata sistemasida ixtiyoriy potensial  $U$  da harakat qilayotgan jismning Gamilton funksiyasini toping.

Lagranj funksiyasi:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r, \theta, \phi). \quad (7.15)$$

Qoida bo'yicha umumlashgan impulslarni kiritamiz:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (7.16)$$

Gamilton funksiyasiga o'tish uchun bu tenglamalarni umumlashgan tezliklar  $(r, \theta, \phi)$  ga nisbatan yechib topilgan ifodalarni Gamilton funksiyasi ta'rifi (7.6) ga qo'yish kerak. Shu ishni bajaraylik:

$$\begin{aligned} H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) &= p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L = \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + U(r, \theta, \phi) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Endi Lagranj funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lgan holni ko'raylik -  $L = L(\dot{q}, q, t)$ . Bu holda



$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (7.18)$$

va Gamilton funksiyasining ta'rifida ham qo'shimcha had paydo bo'ladi:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7.19)$$

Ko'rinib turibdiki,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (7.20)$$

Ikkinchi tomondan,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (7.21)$$

chunki ikkinchi va uchinchi hadlar yig'indisi (7.8) natijasida nolga tengdir. Demak,

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (7.22)$$

Biz yana bir bor energiyaning saqlanish qonuniga keldik – Lagranj funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lmasa yuqoridagi tenglikning o'ng tomoni nolga teng bo'ladi, demak, energiya harakat integrali bo'ladi:

$$H = \text{const}. \quad (7.23)$$

Gamilton va Lagranj funksiyalarining vaqt bo'yicha hosilalari haqidagi natijani umuman ixtiyoriy parametr tiliga o'tkazishimiz mumkin. Faraz qilaylik,  $L = L(\dot{q}, q, \lambda)$  bo'lsin, bunda  $\lambda$  – sistemani yoki unga ta'sir qilayotgan kuchni xarakterlovchi bir parametr bo'lsin. Lagranj funksiyasining to'liq differensial

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda \quad (7.24)$$

ni olib, uning ustida Legendre almashtirishi bajarilsa

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda \quad (7.25)$$

munosabatga kelinadi. Bu degani ixtiyoriy parametr uchun

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,q} \quad (7.26)$$

bo'lishi kerak.

Lagranj va Gamilton funksiyalarini bog'laydigan yana bitta xossa bor, bu xossa g'alayonlanish nazariyasida muhim rol o'ynaydi. Agar Lagranj funksiyasiga kichik qo'shimcha  $L'$  qo'shilsa, Gamilton funksiyasi ham o'zgaradi, (7.6) ta'rifidan bevosita ko'rinib turibdiki bu o'zgarish

$$H' = -L'$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar fizik sistemaning Gamilton funksiyasi berilgan bo'lsa, unga mos keluvchi Lagranj funksiyasini ham topish mumkin. Buning uchun (7.6) formulaga teskari tomondan qarashimiz kerak:

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H. \quad (7.27)$$

**7.1.3-misol.** Quyidagi Gamilton funksiyasi berilgan:

$$H = \frac{p_x^2 t}{2} + p_x p_y. \quad (7.28)$$

Unga mos keluvchi Lagranj funksiyasini topish uchun tezliklar va impulslarni kanonik tenglamalar orqali bog'laymiz:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x t + p_y, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_x. \quad (7.29)$$

Bundan topilgan  $p_x = \dot{y}$ ,  $p_y = \dot{x} - \dot{y}t$  formulalar (7.27) ga olib borib qo'yiladi:

$$L = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{p_x^2 t}{2} - p_x p_y = \dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}\dot{y}^2 t. \quad (7.30)$$

**7.1.4-misol.** Quyidagi Lagranj funksiyasiga mos keluvchi Gamilton funksiyasini toping:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (7.31)$$

bunda  $m$  va  $c$  — konstantalar (jismning massasi va yorug'lik tezligi).

Umumlashgan impulsni topaylik:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.32)$$

Tezlik impulsning funksiyasi sifatida aniqlanadi:

$$v = \frac{p}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}}. \quad (7.33)$$

Gamilton funksiyasi:

$$H = pv - L(v) = \frac{p^2}{m} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2}} = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}. \quad (7.34)$$

Agar jismning tezligi (impulsi) nolga teng bo'lsa, Gamilton funksiyasi o'zgarmas songa tenglashadi:  $H = mc^2$ .

**7.1.5-misol.** Quyidagi Gamilton funksiyasi uchun Gamilton tenglamalarini tuzing va ularni yeching:

$$H = \frac{(p - r^2)^2}{2}. \quad (7.35)$$

Gamilton tenglamalari:

$$\dot{p} = 2r(p - r^2); \quad \dot{r} = p - r^2. \quad (7.36)$$

Ko'rinib turibdiki,

$$\dot{p} = 2r\dot{r}, \quad (7.37)$$

yoki

$$\frac{d}{dt}(p - r^2) = 0. \quad (7.38)$$

Demak,

$$p - r^2 = c_1.$$

Natijada harakat tenglamalari osongina yechiladi:

$$r = c_1 t + c_2, \quad p = c_1^2 t^2 + 2c_1 c_2 t + c_1 + c_2^2.$$

$c_1, c_2$  — boshlang'ich shartlardan aniqlanadigan konstantalar.

**7.1.6-misol.** Gamilton funksiyasi

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \lambda \left( \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \right)^2 \quad (7.39)$$

ko'rinishga ega bo'lgan sistemaning harakatini aniqlang.

Agar

$$E_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \quad (7.40)$$

deb belgilab olinsa, Gamilton funksiyasining vaqtga bog'liq emasligidan uning o'zgarishiga tengligi:  $H = E_0 + \lambda E_0^2 = \text{const}$  va natijada,  $E_0 = \text{const}_0$  ekanligi olinadi. Kanonik tenglamalar:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\omega_0^2(1 + 2\lambda E_0)x, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = (1 + 2\lambda E_0)p. \quad (7.41)$$

Agar  $\omega = (1 + 2\lambda E_0)\omega_0$  belgilash kiritsak, sistemaning yechimi

$$x = A \cos \omega t, \quad p = -\omega_0 A \sin \omega t \quad (7.42)$$

ko'rinishda ekanligi topiladi, bunda  $A$  – ixtiyoriy konstanta.

**7.1.7-misol.** Tajriba shuni ko'rsatadiki, zaryadi  $e$  va massasi  $m$  bo'lgan zarrachaning tashqi elektromagnit maydondagi Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e\varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (7.43)$$

ko'rinishga ega. Bu yerda kiritilgan  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  va  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  funksiyalar elektromagnit maydonning skalar va vektor potentsiallari deyiladi. Shu Lagranj funksiyasiga mos keluvchi Gamilton funksiyasi topilsin.

Umumlashgan impulslar:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (7.44)$$

Gamilton fuksiyasi:

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi. \quad (7.45)$$

Gamilton tenglamalariga o'taylik:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{m} \left( p_i - \frac{e}{c} A_i \right) \frac{e}{c} \nabla A_i - e \nabla \varphi; \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \end{aligned} \quad (7.46)$$

Bu birinchi tartibli tenglamalar sistemasi, tenglamalar soni oltita. Ularni uchta ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasiga aylantirish mumkin. Buning

uchun ikkinchi tenglamadan yana bir marta vaqt bo'yicha hosila olinadi:

$$m\dot{\mathbf{r}} = -e\nabla\varphi - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{e}{c}\dot{r}_j\nabla A_j. \quad (7.47)$$

Ikkita oxirgi hadlarni bir oz o'zgartiraylik. Ikkinchi had-dagi vaqt bo'yicha to'liq hosilani murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasi bo'yicha ochamiz:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_j}\mathbf{A}. \quad (7.48)$$

Natijada harakat tenglama indekslar orqali yozilganda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{r}_i = -e\frac{\partial}{\partial r_i}\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c}\dot{r}_j \left( \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j} \right). \quad (7.49)$$

Odatda

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (7.50)$$

formular orqali elektr  $\mathbf{E}$  va  $\mathbf{B}$  magnit maydon kuchlanganliklari kiritiladi. Ularning tilida yuqoridagi tenglama (tezliklarga o'tilganda:  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ )

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}] \quad (7.51)$$

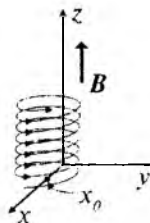
ko'rinishni oladi. O'ng tomongagi ifoda Lorentz kuchi deyiladi.

**7.1.8-misol.** Massasi  $m$  va zaryadi  $e$  bo'lgan zarracha tashqi bir jinsli o'zgarmas  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  magnit maydondagi harakatini Gamilton tenglamalari orqali o'rganing (7.1-rasmga qarang).

Tashqi magnit maydondagi zarrachaning Gamilton funksiyasi

$$H = \frac{\left( \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2}{2m} \quad (7.52)$$

ko'rinishga ega bo'ladi (avvalgi misolga qarang). Bu yerda paydo bo'lgan vektor  $\mathbf{A}$  magnit maydon bilan quyidagicha bog'langan:  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ . Magnit maydoni o'zgarmas va faqat  $z$ -komponentaga ega bo'lishi uchu vektor potensial  $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$  komponentalik vektor bo'lishi kerak. Shuni hisobga olib zaryadining Gamilton funksiyasini ochib yozib olamiz:



7.1-rasm.  
**Magnit maydonda zaryad.**

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\left(p_y - \frac{e}{c}xB\right)^2}{2m}. \quad (7.53)$$

Ikkita siklik koordinataga egamiz:  $y$  va  $z$ . Ularga ikkita harakat integrali mos keladi:  $p_y = \text{const}$  va  $p_z = \text{const}$ . Quyidagi belgilashlar kiritilsa:

$$\omega = \frac{eB}{mc}, \quad x_0 = \frac{cp_y}{eB}$$

Gamilton funksiyasi

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x-x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m} \quad (7.54)$$

ko'rinishga keladi. Bu — muvozanat nuqtasi  $x_0$  bo'lgan bir o'lchamli garmonik ossillatorning o'zi. Uning yechimlari ma'lum:

$$x = x_0 + a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad p_x = -m\omega a \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (7.55)$$

$y$  va  $z$  koordinatalar bo'yicha harakat tenglamalarini ham yozaylik:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} \left( p_y - \frac{e}{c}xB \right) = -a\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}. \quad (7.56)$$

Bulardan

$$y = -a \sin(\omega t + \varphi_0) + y_0, \quad z = \frac{p_z}{m}t + z_0 \quad (7.57)$$

ekanligi topiladi.

Demak, zarracha  $\mathbf{B}$  maydonga parallel yo'nalgan ( $x = x_0, y = 0$ )-o'q bo'yicha o'zgarmas  $p_z/m$  tezlik bilan harakat qilmoqda, shu bilan bir vaqtda u ( $x, y$ ) tekisligida shu o'q atrofida burchak tezlik bilan aylanmoqda.

### 7.3. Raus funksiyasi va siklik koordinatalar

Lagranj formalizmi haqida gap ketayotganida siklik koordinata tushunchasi kiritilgan edi. Siklik deb Lagranj funksiyasida ishtirok etmagan umumlashgan koordinatani aytilgan edi. Unga mos kelgan umumlashgan tezlik Lagranj funksiyasida ishtirok etadi:  $L = L(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ . Bu siklik koordinata Gamilton funksiyasida ham ishtirok etmaydi. Buni ko'rish qiyin emas: mos

keluvchi umumlashgan impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

Eyler—Lagranj tenglamasi bo'yicha saqlanuvchan kattalik:  $\dot{p}_i = 0$ .  
Kanonik tenglamalar bo'yicha

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0,$$

demak,  $H$  ham  $q^i$  ga bog'liq emas ekan:  $H = H(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . Bu nuqtayi nazardan Lagranj va Gamilton funksiyalari bir-biriga o'xshash. Ammo Gamilton funksiyasining bir ustunligi bor —  $p_i = \text{const}$  bo'lganligi sababli Gamilton funksiyasiga impulsning o'rniga mana shu konstanta kiradi. Bu konstantani  $\alpha$  deb belgilaylik, uning son qiymati boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. Gamilton funksiyasi bu holda  $H(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{i-1}, \alpha, p_{i+1}, \dots, p_n)$  ko'rinishga ega bo'ladi. Natijada Gamilton funksiyasi umuman kanonik juftlik  $(q_i, p_i)$  ga bog'liq bo'lmaydi. Demak, kanonik sistemaga kirgan tenglamalar soni ham 2 taga kam bo'ladi:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}, \quad k = 1, \dots, k \neq i, \dots, n. \quad (7.71)$$

Umumlashgan koordinata  $q^i$  ni shunda  $\dot{q}^i = \partial H / \partial p_i$  tenglamani oddiy integrallash yo'li bilan topish mumkin:

$$q^i = \int dt \frac{\partial H}{\partial p_i} + c_i.$$

Agar  $l$  ta koordinata siklik bo'lsa, unda kanonik tenglamalar sistemasining tartibini  $2l$  ga tushurish mumkin.

Siklik koordinatalarning mavjudligida ko'pincha Gamilton funksiyasi o'rniga **Raus funksiyasi** kiritiladi. Umumlashgan koordinatalarni ikki

qismga bo'lamiz:  $\{q_i, \zeta^i\}$ , bunda —  $\{q^i, i = 1, \dots, k\}$  ta siklik bo'lgan

koordinatalar va  $\{\zeta^i, i = k+1, \dots, n\}$  — qolgan umumlashgan koordinatalar. Bu holda  $k$  ta birinchi integralga egamiz:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = c_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (7.72)$$

Raus funksiyasi quyidagicha ta'riflanadi:

$$R = \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i - L. \quad (7.73)$$

Uning to'liq differensialini topaylik:

$$\begin{aligned} dR &= \sum_{i=1}^k \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^k p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} d\zeta_i - \\ &- \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i} d\dot{\zeta}_i = \sum_{i=1}^k \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} d\zeta_i - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i} d\dot{\zeta}_i. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Demak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p_i} &= \dot{q}_i, & \frac{\partial R}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i, \quad i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial R}{\partial \zeta_i} &= -\frac{\partial L}{\partial \zeta_i}, & \frac{\partial R}{\partial \dot{\zeta}_i} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_i}, \quad i = k+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Bu sistemaga kirgan birinchi tenglamalar Gamilton tenglamalari ko'rinishiga ega, Gamilton funksiyasi rolini Raus funksiyasi o'ynaydi.

Ikkinchi qatordagi tenglamalar esa  $\zeta_i$  o'zgaruvchilar uchun

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\zeta}_i} = \frac{\partial R}{\partial \zeta_i} \quad (7.76)$$

tenglamalarni olishimizni ko'rsatadi. Bu — Lagranj funksiyasi rolini Raus funksiyasi o'ynaydigan Eyler-Lagranj tenglamalari.  $q_i$  koordinatlar siklik bo'lgani uchun ular Raus funksiyasiga ham kirmaydi. Ularga mos keluvchi impulslar  $p_i$  o'zgaruvchilar sonlar:  $p_i = c_i$ , demak, Raus funksiyasi  $R = R(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-k}, \dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_{n-k}, c_1, \dots, c_k, t)$  ko'rinishga ega bo'ladi. Agar  $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-k}, \dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_{n-k}$  o'zgaruvchilar uchun Lagranj tenglamalari yechilgan bo'lsa, siklik o'zgaruvchilarni



$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (7.77)$$

tenglamalardan to'g'ri integrallash yo'li bilan topish mumkin, chunki bu tenglamaning o'ng tomoni faqat o'zgarmas sonlar va vaqtning funksiyasidir.

Energiyani Raus funksiyasi orqali ifodalab olish mumkin:

$$E = \sum_{i=1}^k \dot{q}_i p_i + \sum_{i=1}^{n-k} \zeta_i \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} - L = R - \sum_{i=1}^{n-k} \zeta_i \frac{\partial R}{\partial \zeta_i}. \quad (7.78)$$

#### 7.4. Puasson qavslari

Klassik dinamikaning hamma sohalarida quyidagicha ta'riflanadigan

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (7.79)$$

va **Puasson qavslari** deb ataladigan kattalik juda muhim rol o'ynaydi. Bu yerdagi  $s$  – ko'rilayotgan sistemaning erkinlik darajasi,  $f$  va  $g$  funksiyalar esa umumlashgan koordinatalar va impulslardan tuzilgan va shu sistemaning biror xossalariga tegishli bo'lgan funksiyalardir. Puasson qavslarini Gamilton funksiyasiga va kanonik tenglamalarga bog'lab kiritish mumkin. Buning uchun qaralayotgan biror sistemaning umumlashgan koordinatlari va impulslarining funksiyasi bo'lmish bir funksiya  $f(q, p, t)$  ning vaqt bo'yicha to'liq hosilasi hisoblaymiz:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \quad (7.80)$$

Gamilton tenglamalari hisobga olinsa

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( -\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (7.81)$$

ifodaga kelamiz. Agar  $f$  funksiya vaqtga oshkora bog'liq bo'lmasa

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}. \quad (7.82)$$

Bundan ko'rinib turibdiki,  $f$  harakat integrali bo'lishi uchun

$$\{H, f\} = 0 \quad (7.83)$$

bo'lishi kerak. Puasson qavslarining fundamental ahamiyati birinchi navbatda shu dalilga kelib taqaladi.

Puasson qavslarining asosiy xossalarini sanab chiqaylik:

1.  $\{f, g\} = -\{g, f\}$  ;
2.  $\{c, f\} = 0$ , bunda  $c$  — o'zgarmas son;
3.  $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$  ;
4.  $\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} f_2 + f_1 \{f_2, g\}$  ;
5.  $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$  ;
6.  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$  — Yakobi ayniyati.

Birinchi, ikkinchi va uchinchi munosabatlar osongina tekshiriladi. To'rtinchi munosabat Leibnitz qoidasining natijasidir:

$$\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial p_i} = \frac{\partial f_1}{\partial p_i} f_2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial p_i}, \quad (7.84)$$

va  $q_i$  uchun ham huddi shunday.

Beshinchi munosabat ham Leibnitz qoidasining va analizdan ma'lum bo'lgan xususiy hosilalarning tartibini o'zgartirish mumkinligining natijasidir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (7.85)$$

va  $p_i$  uchun ham huddi shunday.

Oltinchi munosabat **Yakobi ayniyati** deyiladi, uning isboti oz moz hisobni talab qiladi.

Quyidagi munosabatlarni ham keltiraylik:

$$\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad (7.86)$$

bunda  $q_i$  — umumlashgan koordinata;

$$\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (7.87)$$

bunda  $p_i$  - umumlashgan impuls. Juda muhim rol o'ynaydigan munosabatlarga quyidagi **fundamental Puasson qavslari** kiradi:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \quad (7.88)$$

Ularni ham keltirib chiqarish qiyin emas.

Puasson qavslarining muhim tomoni quyidagi Puasson teoremasidan kelib chiqadi:

**Teorema:** Agar  $f$  va  $g$  harakat integrallari bo'lsa, ularning Puasson qavsi  $\{f, g\}$  ham harakat integrali bo'ladi.

**Isbot:**  $\{f, g\}$  ning vaqt bo'yicha to'liq hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{H, \{f, g\}\}. \quad (7.89)$$

Beshinchi va oltinchi qoidalarni ishlatsak

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\}. \quad (7.90)$$

Oxirgi hadlarga birinchi qoidani qo'llasak darhol maqsadga kelamiz:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} = 0. \quad (7.91)$$

Albatta, bunday jarayon (ikkita harakat integralining Puasson qavsini tashkil qilish) bizga hamma vaqt ham yangi harakat integrallarini beravermaydi: mustaqil harakat integrallarining soni  $2s - 1$  bilan cheklangan, yangi harakat integrali eski integrallarning funksiyasi bo'lib chiqishi mumkin

Ba'zi bir hollarda Puasson qavslarini eslab qolish uchun oson bo'lgan determinant ko'rinishida ham ifoda qilib olish maqsadga muvofiqdir:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^s \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_i} & \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} & \frac{\partial g}{\partial q_i} \end{vmatrix}. \quad (7.92)$$

**7.4.1-misol.** Impuls momentining komponentalari  $M_i$  orasidagi Puasson qavslarini toping.

**Yechish.** Albatta hamma  $\{M_p, M_i\}$  lar ( $i$  bo'yicha yig'indi yo'q) nolga teng (birinchi xossa bo'yicha). Qolganlari:

$$\{M_x, M_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} =$$

$$= \{yp_z, zp_x\} - \{yp_z, xp_z\} - \{zp_y, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} = yp_x - xp_y = -M_z; \quad (7.93)$$

$$\begin{aligned} \{M_y, M_z\} &= \{zp_x - xp_z, xp_y - yp_x\} = \\ &= \{zp_x, xp_y\} - \{zp_x, yp_x\} - \{xp_z, xp_y\} + \{xp_z, yp_x\} = zp_y - yp_z = -M_x; \quad (7.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{M_z, M_x\} &= \{xp_y - yp_x, yp_z - zp_y\} = \\ &= \{xp_y, yp_z\} - \{xp_y, zp_y\} - \{yp_x, yp_z\} + \{yp_x, zp_y\} = xp_z - zp_x = -M_y \quad (7.95) \end{aligned}$$

Puasson teoremasi bo'yicha ikki harakat integralining Puasson qavsi yana harakat integrali bo'lishi kerak edi. Yuqoridagi hisoblar bo'yicha agar  $M_x$  va  $M_y$  harakat integrallari bo'lsa  $M_z$  ham harakat integrali bo'lishi kerak va h.k. Bu uchala formulani Ilovada keltirilgan birlik antisimmetrik tenzor orqali bitta formula ko'rinishida yozib olish mumkin:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k. \quad (7.96)$$

Bu yerda ikki marta uchragan indeks  $k$  bo'yicha 1 dan 3 gacha yig'indi ko'zda tutilgan.

**7.4.2-misol.** Impuls va impuls momentlari orasidagi Puasson qavslarini hisoblang. Masalani (7.87) ni hisobga olib, osongina yechish mumkin:

$$\{M_x, p_x\} = -\frac{\partial}{\partial x}(yp_z - zp_y) = 0; \quad (7.97)$$

$$\{M_y, p_x\} = -\frac{\partial}{\partial x}(zp_x - xp_z) = p_z; \quad (7.98)$$

$$\{M_z, p_x\} = -\frac{\partial}{\partial x}(xp_y - yp_x) = p_y; \quad (7.99)$$

va h.k. Bu formulalarni ham birlik antisimmetrik tenzor  $\varepsilon_{ijk}$  dan foydalanib bitta formula ko'rinishida yozib olishimiz mumkin:

$$\{M_i, p_j\} = -\frac{\partial}{\partial q^j} M_i = -\frac{\partial}{\partial q^j} \varepsilon_{ikl} q_k p_l = -\varepsilon_{ikl} p_l \delta_{kj} = -\varepsilon_{jil} p_l. \quad (7.100)$$

Ko'rinib turibdiki,  $i = j$  bo'lsa o'ng tomon hamma vaqt nolga teng.

**7.4.3-misol.** Impuls momentlari va koordinatalar orasidagi Puasson qavslarini toping.

Masalani (7.86) asosida yechiladi:

$$\{M_x, x\} = \frac{\partial}{\partial p_x} M_x = \frac{\partial}{\partial p_x}(yp_z - zp_y) = 0; \quad (7.101)$$

$$\{M_x, y\} = \frac{\partial}{\partial p_y} M_x = \frac{\partial}{\partial p_y} (yp_z - zp_y) = -z \quad (7.102)$$

va h.k. Bu formulalarni ham birlik antisimmetrik tenzor  $\varepsilon_{ijk}$  dan foydalanib bitta formula ko'rinishida yozib olishimiz mumkin:

$$\{M_i, q_j\} = \frac{\partial}{\partial p_j} M_i = \frac{\partial}{\partial p_j} \varepsilon_{ikt} q_k p_t = \varepsilon_{ikt} q_k \delta_{jt} = \varepsilon_{ikj} q_k = -\varepsilon_{ijk} q_k \quad (7.103)$$

Ko'rib turibdiki,  $i = j$  bo'lsa o'ng tomon hamma vaqt nolga teng.

**7.4.4-misol.**  $\{p, r^n\}$  ni hisoblang.

Bu qavsning bitta ixtiyoriy  $i$  komponentasini topamiz:

$$\{p_i, r^n\} = \frac{\partial}{\partial r_i} r^n = nr^{n-2} r_i \quad (7.104)$$

Vektor ko'rinishida:

$$\{p, r^n\} = nr^{n-2} \mathbf{r}. \quad (7.105)$$

Shuncha Puasson qavslarini hisoblandi. Bularning amaliy ahamiyati nimadan iborat? Buni o'rganish uchun paragrafning boshidagi umumlashgan impuls va koordinatalarning vaqtga oshkora bog'liq bo'lmagan ixtiyoriy funksiyasi  $f(p(t), q(t))$  uchun bo'lgan (7.82) formulaga qaytib kelaylik. Mana shu funksiyani vaqt bo'yicha qatorga yoyaylik:

$$\begin{aligned} f(p(t), q(t)) = & f(p(0), q(0)) + \left( \left. \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} \right) t + \\ & + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \dot{p}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \dot{p} \dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q}^2 \right) \right) t^2 + \dots \end{aligned} \quad (7.106)$$

Kanonik tenglamalardan foydalanib,  $\dot{p}$  va  $\dot{q}$  larning o'rniga  $H$  ning hosilalari qo'yilsa quyidagi formulaga kelinadi:

$$f(p(t), q(t)) = f(p(0), q(0)) + \{H, f\}|_{t=0} t + \frac{1}{2} \{H, \{H, f\}\}|_{t=0} t^2 + \dots \quad (7.107)$$

Bu formula bizga Gamilton funksiyasi va Puasson qavsining yana bir muhim ma'nosini tushunishga yordam beradi – Gamilton funksiyasi mexanik sistemaning vaqt bo'yicha siljishini Puasson qavslari orqali ta'minlovchi kattalik ekan.

Shu tomonni yorituvchi bir misol keltiramiz.

**7.4.5-misol.** Garmonik ossillator uchun  $p(t)$  ni (7.107) qator yordamida hisoblang. Garmonik ossillatorning Gamilton funksiyasi topilgan ((7.12) ga qarang):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (7.108)$$

Kerakli bo'lgan Poisson qavslarini topaylik:

$$\begin{aligned} \{H, p\} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx, \quad \{H, \{H, p\}\} = -k\{H, x\} = -k\frac{\partial H}{\partial p} = -k\frac{p}{m}, \\ \{H, \{H, \{H, p\}\}\} &= \frac{k^2}{m}x, \quad \{H, \{H, \{H, \{H, p\}\}\}\} = \frac{k^2}{m}\frac{p}{m}, \dots \end{aligned} \quad (7.109)$$

Boshlang'ich shartlarni  $p(0)=p_0$  va  $x(0)=x_0$  deb belgilab olamiz. Undan tashqari,  $k=m\omega^2$  ekanligini ham hisobga olaylik. Demak,

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 - m\omega^2 x_0 t + \frac{1}{2}\omega^2 p_0 t^2 - m\omega^4 x_0 \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{4!} p_0 \omega^4 t^4 + \dots = \\ &= p_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{4!}\omega^4 t^4 + \dots \right) - m\omega x_0 \left( \omega t - \frac{1}{3!}\omega^3 t^3 + \dots \right) = \\ &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega x_0 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (7.110)$$

Huddi shu yo'l bilan  $x(t)$  ni ham topish mumkin. Buning uchun yana o'sha (7.109) Puasson qavslaridan foydalansak yetarlidir:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t). \quad (7.111)$$

Albatta, ma'lum bo'lgan yechim topildi. Bu yechimni oddiy differensial tenglamani yechish yo'li bilan topish osonroq edi, ammo, hozir qo'llagan metod murakkabroq bo'lgan misollarda qulayroq bo'lib chiqishi mumkin. Ayniqsa, kvant mexanikasiga o'tishda bu metodning ahamiyati oshadi.

Endi ixtiyoriy  $f(r)$  funksiya bilan impulsning Puasson qavslari (7.87) ga kelaylik. Uni

$$\{p_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial r_i} \quad (7.112)$$

ko'rinishda yozib olib,  $n$  marta qayta qo'llaylik:

$$\{p_{i_n}, \dots, \{p_{i_2}, \{p_{i_1}, f\}\}\dots\} = \frac{\partial^n f}{\partial r_{i_n} \dots \partial r_{i_2} \partial r_{i_1}}. \quad (7.113)$$

$f(r)$  funksiya uchun Taylor qatorini yozaylik:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{r}) = & f(0) + r_i \left. \frac{\partial f}{\partial r_i} \right|_{r=0} + \frac{1}{2} r_{i_1} r_{i_2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial r_{i_2} \partial r_{i_1}} \right|_{r=0} + \dots + \\
 & + \frac{1}{n!} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \left. \frac{\partial^n f}{\partial r_{i_n} \dots \partial r_{i_2} \partial r_{i_1}} \right|_{r=0} + \dots
 \end{aligned} \tag{7.114}$$

Bu formula Puasson qavslari yordamida

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{r}) = & f(0) + r_i \{p_i, f\}_{r=0} + \frac{1}{2} r_{i_1} r_{i_2} \{p_{i_1} \{p_{i_2}, f\}\}_{r=0} + \dots + \\
 & + \frac{1}{n!} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \{p_{i_n}, \dots \{p_{i_2}, \{p_{i_1}, f\}\}\dots\}_{r=0} + \dots
 \end{aligned} \tag{7.115}$$

ko'rinishga keltiriladi. Hulosa qilib shuni aytilish mumkinki, impuls fazo bo'yicha siljishni ta'minlovchi kattalik ekan.

Puasson qavslari yordamida impuls momentining ham chuqur ma'nosini yoritish mumkin. (2.44) va (2.51) formulalardan ko'rinib turibdiki

$$p_\varphi = M_z. \tag{7.116}$$

Umumiy qoida ((7.88) ga qarang) bo'yicha  $\{p_\varphi, \varphi\} = 1$  bo'lishi kerakligini hisobga olinsa

$$\{M_z, \varphi\} = 1 \tag{7.117}$$

olinadi. Agar argumentlari ichiga  $\varphi$  ham kirgan biror  $f$  funksiya berilgan bo'lsa

$$\{M_z, f\} = \{p_\varphi, f\} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \tag{7.118}$$

formulani  $n$  marta tatbiq qilib quyidagini olamiz:

$$\{M_z, \dots \{M_z, \{M_z, f\}\}\dots\} = \frac{\partial^n f}{\partial \varphi^n}, \tag{7.119}$$

chap tomonda Puasson qavslari  $n$  marta qo'llanilgan. Demak,

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) = & f(0) + \varphi f'(0) + \frac{1}{2} \varphi^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} \varphi^n f^n(0) + \dots = \\
 = & f(0) + \varphi \{M_z, f\} \Big|_{\varphi=0} + \frac{1}{2} \varphi^2 \{M_z, \{M_z, f\}\} \Big|_{\varphi=0} + \dots +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{n!} \varphi^n \left\{ M_z, \dots \left\{ M_z, \{ M_z, f \} \dots \right\} \right\}_{\varphi=0} + \dots \quad (7.120)$$

ekan. Ya'ni,  $M_z$  ixtiyoriy funksiyaning argumentini  $\varphi$  burchakka berib berar ekan, bu degani  $M_z$  mexanik sistemani aylanma siljishini ifodalovchi kattalik ekan. Puasson qavslari energiya, impuls va impuls momenti vaqt fazo va fazoviy burchak bo'yicha siljishni ta'minlovchi kattaliklar ekanligini tushunishga yordam berdi.

## 7.5. Ta'sir integrali koordinata va vaqtning funksiyasi sifatida

Kursning boshida ta'sir integrali

$$S[q] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\dot{q}, q, t) \quad (7.121)$$

kiritilgan edi. Harakat trayektoriyasini topish masalasi ta'sir integralining variatsiyasini nolga tenglashtirib yechilgan edi. Bunda trayektoriyaning variatsiyalarini trayektoriyaning boshi va oxirida nolga teng deb olgan edik. Ta'sir integrali trayektoriyaning funksionali bo'lishi bilan bir vaqtda o'zining ta'rifini (7.121) bo'yicha  $(t_a, t_b, q(t_a), q(t_b))$  o'zgaruvchilarga bog'liqdir, ya'ni ularning funksiyasidir. Bizning bu paragrafdagi maqsadimiz shu bog'liqlikning ko'rinishini topish. Ya'ni, moddiy nuqta harakat tenglamalari orqali aniqlangan trayektoriya bo'yicha harakat qiladi deb olinadi va ta'sirni shu trayektoriyaning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari (va vaqtlar)ning funksiyasi sifatida o'rganiladi. Bunday masalani yechish uchun  $q_i$  va  $t$  mustaqil ravishda o'zgarimoqda deb qarash kerak. Demak, zarracha haqiqiy trayektoriya bo'yicha harakat qilmoqda, ammo biz bu trayektoriyani formal ravishda variatsiyalaymiz:  $q \rightarrow q'$  va yangi traektoriyada vaqt ham boshqacha o'tadi deymiz:  $t \rightarrow t'$ . Bu paragrafda  $i$  indeks ikki marta uchrasa ular bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi, ammo yozilmaydi.

Traektoriya ustida vaqtni ham o'z ichiga olgan umumiy almashtirish bajaraylik:

$$q_i(t) \rightarrow q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t). \quad (7.122)$$

$\delta q_i(t)$  — *to'liq* yoki *asinxron* variatsiya deyiladi. Agar Eyler–Lagranj tenglamalarini keltirib chiqarishga bag'ishlangan mulohazalarni eslansa



u yerda vaqt ustida hech qanday alamshtirish bajarilmagan edi. Bu yerda esa vaqt ham almashtiriladi  $t \rightarrow t' = t + \delta t$ .

$q(t)$  funksiya ikki sababdan o'zgaradi – trayektoriya ko'rinishining o'zgarishi:  $q(t) \rightarrow q'(t)$ , va argumentning o'zgarishi:  $t \rightarrow t'$ . Shu ikkala o'zgarishni ajratib yozamiz. To'liq o'zgarishni

$$q'_i(t') = q'_i(t + \delta t) = q'_i(t) + \delta t \dot{q}_i(t). \quad (7.123)$$

ko'rinishda yozib olib avvalgi formula bilan taqqoslansa

$$\delta q_i(t) = q'_i(t) - q_i(t) + \delta t \dot{q}_i(t) = \delta_0 q_i(t) + \delta t \dot{q}_i(t) \quad (7.124)$$

formula olinadi. Bu yerda

$$\delta_0 q_i(t) = q'_i(t) - q_i(t) \quad (7.125)$$

trayektoriya ko'rinishining o'zgarishi. Keyingi formulalarda kerak bo'lgani uchun Lagranj funksiyasining ham to'liq o'zgarishini shu ko'rinishda yozib olamiz:

$$\delta L = \delta_0 L + \delta t \dot{L}. \quad (7.126)$$

Ta'sirning to'liq variatsiyasi huddi (2.5) da hisoblangandek hisoblanadi (quyida keltiriladigan formulalarning hammasida birinchi tartibli cheksiz kichiklarga qoldirilgan):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt' L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') - \int dt L(q(t), \dot{q}(t), t) = \\ &= \int [(dt + d\delta t)(L(t) + \delta_0 L + \dot{L}\delta t) - dtL(t)] = \\ &= \int d(\delta t)L + \int dt(\delta_0 L + \dot{L}\delta t) = \int d(\delta t)L + \int dt\delta_0 L. \end{aligned} \quad (7.127)$$

Lagranj funksiyasining variatsiyasi standart yo'l bilan hisoblanadi:

$$\delta_0 L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta_0 q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 \dot{q}_i(t). \quad (7.128)$$

Avval aytib o'tilganidek  $\delta_0 \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \delta_0 q(t)$ . Shuni hisobga olib va variatsiyaga hosila tushgan hadni bo'laklab integrallab, quyidagi ifoda olinadi:

$$\delta S = \int d[\delta t L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_0 q] + \int dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta_0 q. \quad (7.129)$$

Shu yerda masalaning qo'yilishini yana bir muhokama qilaylik. Haqiqiy trayektoriya bo'yicha harakat qilayotgan sistemani ko'rayapmiz. Ya'ni, trayektoriyani aniqlash masalasi bilan shug'ullanmaymiz, trayektoriya Eylér–Lagranj tenglamalarining

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (7.130)$$

yechimi sifatida topilgan, zarracha shu trayektoriya bo'yicha harakat qiladi. Demak, (7.129) formuladagi ikkinchi had nolga teng va birinchi hadning o'zi qoladi:

$$\delta S = \int d[\delta t L + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i]. \quad (7.131)$$

Bunga kirgan  $\delta_0 q_i$  uchun

$$\delta_0 q_i(t) = \delta q_i(t) - \delta t \dot{q}_i(t) \quad (7.132)$$

ekanligini eslab ta'sirning to'liq variatsiyasi

$$\delta S = \left[ \delta t L - \delta t \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_a}^{t_b} = [p_i \delta q_i - H \delta t]_{t_a}^{t_b} \quad (7.133)$$

ko'rinishga keltiriladi. Formulani ochib yozaylik:

$$\delta S = p_i(t_b) \delta q_i(t_b) - H(t_b) \delta t_b - p_i(t_a) \delta q_i(t_a) + H(t_a) \delta t_a. \quad (7.134)$$

Agar trayektoriyaning boshlang'ich nuqtasi o'zgarmas bo'lgan hol qaralsa (bunda birdan-bir o'zgaruvchilar yuqori nuqtaga tegishli bo'ladi va shu sababdan, ularni indekslarisiz yozamiz):

$$\delta S = p_i \delta q_i - H \delta t \quad (7.135)$$

ga ega bo'lamiz. Ko'rinib turibdiki,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (7.136)$$

Agar trayektoriyaning oxirgi nuqtasini va unga mos keluvchi vaqt momentini o'zgarmas deb olsak, yuqoridagi formulalarda o'ng tomonlarning ishoralari o'zgaradi. (7.136) formulalarni

$$dS = p_i dq_i - H dt \quad (7.137)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Umumiy holda esa

$$dS = p_i(t_b) dq_i(t_b) - H(t_b) dt_b - p_i(t_a) dq_i(t_a) + H(t_a) dt_a \quad (7.138)$$

formulaga egamiz. Bu munosabatning ma'nosi shundan iboratki, harakat ixtiyoriy bo'lavermas ekan, u faqatgina shunday bo'lishi mumkinki, bu formulaning o'ng tomoni to'liq differensial bo'lsin.

(7.137) formulani integral ko'rinishda yozib olaylik:

$$S = \int (p_i dq_i - H dt). \quad (7.139)$$

Biz ta'sir integrali uchun yangi ifoda oldik, bu ifodadan ham harakat tenglamalarini keltirib chiqishimiz mumkin. Albatta, bu galda kanonik tenglamalar kelib chiqishini kutish kerak. Eslatib o'taylik, harakat tenglamalarini qidirganda trayektoriya variatsiyalanadi (bu holda  $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$ ,  $p(t) \rightarrow p(t) + \delta p(t)$ ), vaqtga tegmaymiz, chegaralarning o'zgarishidan foydalaniladi:  $\delta q_a = \delta q_b = \delta p_a = \delta p_b = 0$ . Umumiy metod bo'yicha  $\delta S$  hisoblaymiz va uni nolga tenglashtiramiz:

$$\delta S = \int (\delta p dq + p \delta dq - \delta H dt). \quad (7.140)$$

Integral ostidagi ikkinchi hadni bo'laklab integrallaymiz va

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial p} \delta p + \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \quad \text{ekanligini hisobga olamiz:}$$

$$\delta S = \int \delta p \left( dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) - \int \delta q \left( dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) + p \delta q \Big|_{t_a}^{t_b} = 0. \quad (7.141)$$

Oxirgi had nolga teng (chegaraviy shartlar natijasida). Variatsiyalar ixtiyoriy bo'lganida bu ifoda nolga teng bo'lishi uchun

$$dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt = 0, \quad dp + \frac{\partial H}{\partial q} dt = 0 \quad (7.142)$$

bo'lishi kerak. Kanonik tenglamalarga yana keldik.

**7.5.1-misol.** Bir o'lchamli harakat qilayotgan erkin nuqtaning ta'sirini toping.

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\dot{q}, q, t) = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \dot{q}^2 = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \left( \frac{d}{dt} [q\dot{q}] - q\ddot{q} \right) = \frac{m}{2} [q\dot{q}]_{t_a}^{t_b} \quad (7.143)$$

chunki erkin nuqta uchun  $\ddot{q} = 0$ . Endi  $\dot{q} = \frac{q_b - q_a}{t_b - t_a} = \text{const}$  ekanligini hisobga olish qoldi. Natijada

$$S = \frac{m}{2} \frac{(q_b - q_a)^2}{t_b - t_a} \quad (7.144)$$

formulaga kelinadi. Ko'rinib turibdiki,

$$p_b = \frac{\partial S}{\partial q_b} = m \frac{q_b - q_a}{t_b - t_a} = m\dot{q}, \quad p_a = -\frac{\partial S}{\partial q_a} = m \frac{q_b - q_a}{t_b - t_a} = m\dot{q}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t_b}. \quad (7.145)$$

Uch o'lichamli holga o'tganimizda (7.144) o'rniga

$$S = \frac{m}{2} \frac{(\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)^2}{t_b - t_a} \quad (7.146)$$

formulani olamiz.

**7.5.2-misol.** Garmonik ossillatorning ta'sirini toping.

$$S = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) = \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \left( \frac{d}{dt} [q\dot{q}] - q\ddot{q} - \omega^2 q^2 \right) = \frac{m}{2} [q\dot{q}]_{t_a}^{t_b}. \quad (7.147)$$

chunki garmonik ossillator uchun harakat tenglamasi  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ . Bu tenglamaning yechimini

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (7.148)$$

ko'rinishda olib, chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda uni

$$q(t) = q_a \cos \omega(t - t_a) + \frac{\dot{q}_a}{\omega} \sin \omega(t - t_a) = q_b \cos \omega(t - t_b) + \frac{\dot{q}_b}{\omega} \sin \omega(t - t_b) \quad (7.149)$$

ko'rinishga keltirish mumkin. O'z navbatida bu munosabatlardan

$$\dot{q}_a = \frac{\omega}{\sin \omega T} (q_b - q_a \cos \omega T), \quad \dot{q}_b = \frac{\omega}{\sin \omega T} (q_b \cos \omega T - q_a) \quad (7.150)$$

ekanligi topamiz, bunda  $T = t_b - t_a$ . Topilgan formulalar

$$[q\dot{q}]_{t_a}^{t_b} = \frac{\omega}{\sin \omega T} \left[ (q_a^2 + q_b^2) \cos \omega T - 2q_a q_b \right] \quad (7.151)$$

ga olib keladi. Natijada, garmonik ossillator uchun ta'sir integrali shu integralning chegaraviy nuqtalarining funksiyasi sifatida quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$S = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \left[ (q_a^2 + q_b^2) \cos \omega T - 2q_a q_b \right]. \quad (7.152)$$

(7.136) formulalarni tekshirib chiqish qiyin emas.

## 7.6. Kanonik almashtirishlar

### 7.6.1. Ta'rif. Hosil qiluvchi funksiyalar

Avval aytgan edikki, Lagranj formalizmidagi umumlashgan koordinatalar  $q_i$  ni ixtiyoriy ravishda tanlab olish mumkin, harakat tenglamalarining umumiy ko'rinishi bunga bog'liq emas. Ular ustida hatto vaqtga bog'liq bo'lgan almashtirishlarni ham bajarish mumkin:

$$Q_i = Q_i(q, t), \quad (7.153)$$

bunda  $q$  – eski koordinatalar,  $Q$  – yangi koordinatalar ((1.2)-misolga qarang).

Kanonik formalizmi  $2s$  o'lchamli  $(q, p_i)$ ,  $i=1, \dots, s$  fazo tilida ifodalanadi. Bunday matematik fazo **fazaviy fazo** deyiladi. Bu fazoni tashkil qiluvchi  $q$  va  $p$  koordinatlar teng huquqlidir. Ularning teng huquqliligi yangi imkoniyatlarga olib keladi. Quyidagi matematik almashtirish yordamida

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t) \quad (7.154)$$

bu fazoda yangi koordinatalarga o'tish mumkin. Yangi koordinatalarga o'tishdan asosiy maqsad ularni shunday tanlab olishki, ularning ichida mumkin qadar ko'proq siklik  $Q_i$  lar bo'lsin. Masalan,  $Q_i$  siklik koordinata bo'lib chiqdi deylik. Unga mos keluvchi impuls bu holda o'zgarmas harakat integrali bo'ladi:  $P_i = \text{const}$ . Asosiy maqsad, yuqorida aytilganidek, yangi koordinatalarni shunday tanlab olishki, ularning hammasi siklik bo'lib chiqsin. Bu holda  $s$  ta harakat integralini topgan bo'lamiz, harakat tenglamalari darhol integrallanadi.

Koordinata va impuls larni (7.154) formula bo'yicha o'zgartirilganda umumiy holda Gamilton funksiyasi ham o'zgarishi turgan gap:  $H \rightarrow H'$ , ammo bu almashtirishlarga qo'yiladigan asosiy talab – ularning natijasida harakat tenglamalari o'z ko'rinishini saqlab qolishi kerak:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}. \quad (7.155)$$

Bunday xossaga ega bo'lgan almashtirishlar **kanonik almashtirishlar** deyiladi. Almashtirishlarning kanoniklik shartini keltirib chiqaraylik. (7.139) —(7.141) formulalar bo'yicha kanonik tenglamalarni quyidagi variatsion prinsipdan keltirib chiqarilgan edi:

$$\delta \int (p_i dq_i - H dt) = 0. \quad (7.156)$$

Gamilton tenglamalarining ko'rinishi o'zgarmasin deyilsa yangi o'zgaruvchilarga ham huddi shu prinsipni qo'llash kerak:

$$\delta \int (P_i dQ_i - H' dt) = 0. \quad (7.157)$$

Bu ikkala variatsiya bitta haqiqiy harakat trayektoriyasiga olib kelishi kerak, faqatgina, bu trayektoriya har xil o'zgaruvchilar tilida yozilgan. Ikkala variatsiya nolga teng bo'lishi uchun integral osti ifodalar bir-biridan koordinata va impulslarning funksiyasi bo'lgan funksiyaning to'liq differensialigagina farq qilishi mumkin. Bu holda bir integral ikkinchisidan shu funksiyaning chegara nuqtalardagi o'zgarma qiymatlarigagina farq qiladi. O'zgarma sonning variatsiyasi nolga tengdir. Demak<sup>1</sup>:

$$p_i dq_i - P_i dQ_i + (H' - H) dt = dF. \quad (7.158)$$

Paydo bo'lgan funksiya  $F$  kanonik almashtirishlarning **hosil qiluvchi** funksiyasi deyiladi. Ko'rinib turibdiki  $F = F(q, Q, t)$  va

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (7.159)$$

Bu birdan bir mumkin holmi? Yo'q, hosil qiluvchi funksiyaning argumentlarini boshqacha qilib ham tanlab olish mumkin. Buning uchun (7.158) chap tomonidagi  $-P_i dQ_i$ <sup>1</sup> hadni o'ng tomonga o'tkaziladi va shu tomonni

$$dF + P_i dQ_i = d(F + P_i Q_i) - Q_i dP_i \quad (7.160)$$

ko'rinishga keltirib olinadi (bunday almashtirish Lejandr almashtirishi deyilishini yana bir eslatib o'taylik). O'ng tomondagi  $Q_i dP_i$  hadni chap tomonga o'tkazamiz. Yangi hosil bo'lgan funksiyani  $F_2$  deb belgilab:

---

<sup>1</sup> Yana bir eslatib ketaylik, ikki marta uchragan indeks bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi:  $P_i dQ_i = \sum_i P_i dQ_i$

$$F_2(q, P, t) = F(q, Q, t) + P_i Q_i, \quad (7.161)$$

uning differensial uchun

$$dF_2(q, P, t) = p_i dq_i + Q_i dP_i + (H' - H) dt \quad (7.162)$$

ifodani topamiz. Shu munosabat bilan birinchi paydo bo'lgan hosil qiluvchi funksiyani  $F_1 = F_1(q, Q, t)$  deb belgilab olaylik. Yangi hosil qiluvchi funksiya uchun

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (7.163)$$

Lejandr almashtirishlari yo'li bilan yana ikki xil hosil qiluvchi funksiyalarni topish mumkin. Buning uchun (7.162) o'ng tomonidagi  $p_i dq_i$  hadni chap tomonga o'tkazib chap tomonni

$$dF_2 - p_i dq_i = d(F_2 - p_i q_i) + q_i dp_i \quad (7.164)$$

ko'rinishga keltiramiz.  $F_2 - p_i q_i = F_3(p, P, t)$  belgilash kiritib

$$dF_3 = -q_i dp_i + Q_i dP_i + (H' - H) dt \quad (7.165)$$

ekanligini ko'rish mumkin. To'rtinchi va oxirgi ko'rinish quyidagichadir:

$$dF_4(p, Q, t) = -q_i dp_i - P_i dQ_i + (H' - H) dt. \quad (7.166)$$

Topilgan hosil qiluvchi funksiyalarni keltiraylik:

$$F_1(q, Q, t), \quad F_2(q, P, t), \quad F_3(p, P, t), \quad F_4(p, Q, t). \quad (7.167)$$

Boshqa variantlar yo'q.

Agar hosil qiluvchi funksiya vaqtga oshkora bog'liq bo'lmasa (hamma variantlarda ham) yangi va eski Gamilton funksiyalari teng bo'ladi:

$$H' = H. \quad (7.168)$$

Kanonik almashtirishlarga misollar keltiraylik.

**7.6.1-misol.** Bir o'lchamli garmonik ossillator uchun

$$F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q \quad (7.169)$$

kanonik almashtirish yordamida yangi o'zgaruvchilarga o'ting.

Garmonik ossillatorning Gamilton funksiyasi bizga ma'lum:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right) \quad (7.170)$$

Hosil qiluvchi funksiya vaqtga oshkora bog'liq bo'lmagani uchun

$$H' = H. \quad (7.171)$$

Yangi va eski o'zgaruvchilarni bog'laydigan munosabatlarni yozaylik:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} Q, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}. \quad (7.172)$$

Bu munosabatlarni yechib quyidagi ifodalar osongina topiladi:

$$q^2 = \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q, \quad p^2 = 2Pm\omega \cos^2 Q. \quad (7.173)$$

Demak,

$$H = P\omega. \quad (7.174)$$

Ko'rinib turibdiki,  $Q$  siklik koordinata, demak, unga mos keluvchi kanonik impuls  $P$  saqlanuvchi kattalik:

$$P = \text{const}. \quad (7.175)$$

Buni kanonik tenglamalardan ham ko'rish mumkin:

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega. \quad (7.176)$$

Birinchi tenglamadan darhol (7.175) kelib chiqadi, ikkinchi tenglamadan esa

$$Q = Q(t) = \omega t + \beta \quad (7.177)$$

ekanligi kelib chiqadi. O'zgarmas son  $\beta$  boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. (7.175) ga kirgan o'zgarmasni topish qiyin emas. Garmonik ossillator uchun energiya saqlanuvchi bo'lgani uchun (7.174) dan kelib chiqadiki

$$P = \frac{E}{\omega}. \quad (7.178)$$

Eski o'zgaruvchilarga qaytib kelaylik:

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta), \\ p(t) &= \sqrt{2mP\omega} \cos Q = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (7.179)$$

Biz kanonik tenglamalarni integrallash masalasini qulay bo'lgan hosil qiluvchi funksiyani topib kanonik almashtirishlar metodi bilan osongina yechdik. Albatta, misolning o'zi qiyin emas edi, ammo murakkab hollarda ham shu metod qulaylik tug'dirishi mumkinligi turgan gap.

Ikkinchi misolga o'tishdan oldin yana umumiy mulohazalarga qaytib kelaylik.



Yuqoridagi misoldagi kanonik almashtirishda hosil bo'lgan yangi umumlashgan koordinata va impulsarga qaralsa ((7.173) ga qarang) ular odatdagi koordinata va impuls tushunchalariga to'g'ri kelmasligini ko'rish mumkin, ularning o'lchamliklari ham koordinata va impulsning o'lchamligiga mos kelmaydi. Kanonik almashtirishlar koordinatalarni impulslar bilan bog'laganligi uchun yangi umumlashgan koordinatalar umumiy holda oddiy fazoviy koordinata ma'nosini yo'qotishi mumkin. Masalan, yuqoridagi misolda  $Q$  umuman o'lchamlikka ega emas. Ya'ni, kanonik formalizmida umumlashgan koordinata va umumlashgan impuls o'zining boshlang'ich ma'nosini yo'qotishi mumkin. Shu sababdan  $(Q, P)$  juftlikni, odatda, **kanonik qo'shma o'zgaruvchilar** deyiladi. Ularning qaysi birining fizik ma'nosi qanday bo'lishi konkret masalada ko'rilgan konkret kanonik almashtirishlarga bog'liq bo'ladi.

Bu holatga misol sifatida  $Q = p$ ,  $P = -q$  almashtirishlarni keltirilishi mumkin, bor yo'g'i impuls va koordinataning o'rnini almashtirib qo'ydik, bu kanonik almashtirish ekanligini tekshirib ko'rish mumkin.

**7.6.2-misol.** Avvalgi misolda ko'rilgan almashtirishga kirgan chastotani vaqtga bog'liq deb o'lylik:

$$F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2} m \omega(t) q^2 \operatorname{ctg} Q. \quad (7.180)$$

Bunday almashtirish garmonik ossillatorining chastotasi o'zgaruvchan bo'lgan holga mos keladi. Bu holda yangi o'zgaruvchilar tilida kanonik tenglamalarning ko'rinishi qanday bo'ladi va bu qanday qulayliklar beradi?

**Yechish.** Bu hol avvalgi holdan farq qiladi. Yangi Gamilton funksiyasi  $H'$  eskisiga teng emas:

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + m \omega^2 q^2 \right) + \frac{1}{2} m q^2 \operatorname{ctg} Q \dot{\omega}. \quad (7.181)$$

Yangi va eski kanonik o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish o'zgar-maydi:

$$q^2 = \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q, \quad p^2 = 2Pm\omega \cos^2 Q. \quad (7.182)$$

Natijada yangi Gamilton funksiyasi uchun quyidagi formula olinadi:

$$H' = P\omega \left( 1 + \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2} \sin(2Q) \right) \quad (7.183)$$

Kanonik tenglamalarga kelaylik:

$$\dot{P} = P \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos(2Q), \quad \dot{Q} = \omega \left( 1 + \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2} \sin(2Q) \right). \quad (7.184)$$

Bu tenglamalar sistemasini  $\dot{\omega}/\omega^2 \ll 1$  bo'lgan holda g'alayonlanish nazariyasi orqali yechish mumkin.

Quyidagi misollar kanonik almashtirish yordamida nochizikli tebranishlar masalasini yechishga oiddir.

**7.6.3-misol.** Nochizikli ossillatorni olaylik:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\alpha}{3} x^3. \quad (7.185)$$

Masala quyidagidan iborat:  $F_2(x, P) = xP + ax^2P + bP^3$  hosil qiluvchi funksiyada  $a$  va  $b$  parametrlarni shunday tanlab olingki, yangi Gamilton funksiyasiga o'tilganida sistemaning kichik tebranishlari garmonik ko'rinishga ega bo'lsin.

**Yechish.** Yangi va eski kanonik o'zgaruvchilarni bog'laylik:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x} = P + 2axP; \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = x + ax^2 + 3bP^2 \quad (7.186)$$

Keyin ko'ramizki,  $a$  va  $b$  parametrlar masaladagi kichik parametr  $\alpha$  ga proporsional bo'ladi, shuning uchun ular bo'yicha faqat birinchi tartibli hadlar qoldiriladi. Mana shu birinchi tartibda eski o'zgaruvchilar yangilari orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$p = P + 2aQP; \quad x = Q - aQ^2 - 3bP^2. \quad (7.187)$$

Hosil qiluvchi funksiya vaqtga oshkora bog'liq emas, shu sababdan yangi Gamilton funksiyasiga o'tish uchun eski Gamilton funksiyasida mana shu almashtirishlarni bajarilsa yetarli (eslatib o'tamiz,  $a$  va  $b$  parametrlar bo'yicha chizikli yaqinlashuvda qolish kerak, undan tashqari,  $a, b \sim \alpha$ , shu sababdan  $\alpha a, \alpha b$  hadlar ham tashlab yuboriladi):

$$H = \frac{1}{2} P^2 + \frac{\omega^2}{2} Q^2 + (2a - 3b\omega^3)QP^2 + (\alpha/3 - a\omega^2)Q^3 + \dots \quad (7.188)$$

Oxirgi ikkita nochizikli hadlar bo'lmasligi uchun

$$2a - 3b\omega^2 = 0, \quad \alpha = 3a\omega^2 \quad (7.189)$$

bo'lishi kerak. Bu degani,

$$a = \frac{\alpha}{3\omega^2}, \quad b = \frac{2\alpha}{9\omega^4}. \quad (7.190)$$

Demak,

$$p = P + \frac{2\alpha}{3\omega^2}QP, \quad x = Q - \frac{\alpha}{3\omega^2}Q^2 - \frac{2\alpha}{3\omega^4}P^2. \quad (7.191)$$

Yangi  $H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{\omega^2}{2}Q^2$  Gamilton funksiyasi uchun yechimlar bizga ma'lum:

$$Q = A \cos \omega t, \quad P = -\omega A \sin \omega t. \quad (7.192)$$

Bularni (7.191) formulalarga qo'yilsa noxiziqli tebranishlar masalasini birinchi tartibli yaqinlashuvda yechgan bo'lamiz:

$$x = A \cos \omega t - \frac{\alpha A^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha A^2}{6\omega^2} \cos 2\omega t. \quad (7.193)$$

**7.6.4-misol.** Quyidagi ko'rinishdagi angarmonik ossillatorni olaylik:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\beta}{4} x^4. \quad (7.194)$$

Agarda (5.1) da  $m = 1$  desak, mana shu Gamilton funksiyasi olinadi.

Hosil qiluvchi funksiya sifatida

$$F_2 = xP + ax^3P + bxP^3 \quad (7.195)$$

ni ishlatib yuqoridagi angarmonik ossillator tebranishlarini toping.

Yangi va eski o'zgaruvchilarni bog'laylik:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x} = P + 3ax^2P + bP^3; \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = x + ax^3 + 3bxP^2. \quad (7.196)$$

Bu sistemani iteratsiyalar yordamida yechish mumkin. Keyin ko'ramizki,  $a$  va  $b$  parametrlar masaladagi kichik parametr  $\beta$  ga proporsional bo'ladi, shuning uchun ular bo'yicha yuqori tartibli hadlar tashlab yuboriladi. Ko'rish qiyin emaski,

$$x = \frac{Q - ax^3}{1 + 3bP^2} \approx (Q - ax^3)(1 - 3bP^2 - \dots) \approx Q - aQ^3 - 3bQP^2 + \dots \quad (7.197)$$

Buni hisobga olib quyidagiga kelamiz:

$$p = P + bP^3 + 3aP(Q - aQ^3 - 3bQP^2 + \dots)^2 = P + bP^3 + 3aPQ^2 + \dots \quad (7.198)$$

Hosil qiluvchi funksiya vaqtga oshkora bog'liq emas, shu sababdan yangi Gamilton funksiyasiga o'tish uchun eski Gamilton funksiyasida (7.197) va (7.198) almashtirishlarni bajarish yetarli:

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} Q^2 + bP^4 + 3(a - b\omega_0^2)Q^2 P^2 + \left(\frac{\beta}{4} - a\omega_0^2\right)Q^4. \quad (7.199)$$

Avvalgi misoldan farqli o'laroq bu holda  $a$  va  $b$  parametrlarni hech qanday tanlab olganimiz bilan  $P^4$  haddan qutila olmaymiz. Shuning uchun bu gal boshqacha yo'l tutamiz. (7.39) misolni eslaylik. Agar  $P_4$  haddan qutila olmas ekanmiz, Gamilton funksiyani (7.39) ko'rinishga keltirishga harakat qilaylik. Buning uchun

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} Q^2 + \lambda \left( \frac{P^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} Q^2 \right)^2 = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} Q^2 + \frac{\lambda}{4} P^4 + \frac{\lambda\omega_0^4}{4} Q^4 + \frac{\lambda\omega_0^2}{2} Q^2 P^2 \quad (7.200)$$

ifodani (7.199) ga tenglashtirish kerak. Buning uchun

$$a = \frac{5\beta}{32\omega_0^2}, \quad b = \frac{3\beta}{32\omega_0^4}, \quad \lambda = \frac{3\beta}{8\omega_0^4} \quad (7.201)$$

bo'lishi kerak. (7.39) ko'rinishdagi Gamilton funksiyasi uchun

$$Q = A \cos \omega t, \quad P = -\omega_0 A \sin \omega t, \quad \omega^2 = (1 + 2\lambda E_0) \omega_0^2 \quad (7.202)$$

edi. Bizning holimizda ((7.40) ga qarang)  $E_0 = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2$ . Demak, nochiziqli tebranish uchun birinchi tartibda quyidagi topildi:

$$x = Q - \frac{5\beta}{32\omega_0^2} Q^3 - \frac{9\beta}{32\omega_0^2} QP^2. \quad (7.203)$$

Trigonometrik almashtirishlar bajarilganidan keyin quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$x = A \left( 1 - \frac{3\beta A^2}{16\omega_0^2} \right) \cos \omega t + \frac{\beta A^3}{32\omega_0^2} \cos 3\omega t, \quad \omega = \left( 1 + \frac{3\beta A^2}{8\omega_0^2} \right) \omega_0. \quad (7.204)$$

### 7.6.2. Kanonik almashtirishlar va Puasson qavslari

Bizga qandaydir bir almashtirish berilgan bo'lsin:

$$(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) \Rightarrow (Q_1, Q_2, \dots, Q_s, P_1, P_2, \dots, P_s). \quad (7.205)$$

Puasson qavslarining bu almashtirishlarga nisbatan invariantligi:

$$\{f, g\}_{pq} = \{f, g\}_{pQ} \quad (7.206)$$

ularning kanonikligining zaruriy va yetarli sharti ekanligini isbot qilaylik (qaysi o'zgaruvchilarga nisbatan hosilalar hisoblanayotganini qavslarning o'ng tomonidagi indeksi sifatida belgilandi).

Zaruriylik shartidan boshlaylik (ya'ni, (7.205) ni kanonik deb undan (7.206) ni keltirib chiqaramiz). Isbotni ikki bosqichga bo'lamiz. Birinchi navbatda

$$\{f, P_i\}_{pq} = -\frac{\partial f}{\partial Q_i}, \quad \{f, Q_i\}_{pq} = \frac{\partial f}{\partial P_i} \quad (7.207)$$

ekanligini ko'rsataylik.

$$\begin{aligned} \{f, P_i\}_{pq} &= \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right) = \sum_k \left( -\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_k \partial Q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial^2 F_4}{\partial p_k \partial Q_i} \right) = \\ &= \sum_k \left( -\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\partial F_1}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\partial F_4}{\partial p_k} \right) = \sum_k \left( -\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \right) = -\frac{\partial f}{\partial Q_i}. \end{aligned} \quad (7.208)$$

Oxirgi tenglik belgisiga o'tishda murakkab funksiyaning hosilasi uchun zanjir qoidasidan foydalanildi. Huddi shu yo'l bilan (7.207) ga kirgan ikkinchi formulani ham isbot qilish mumkin. Bu formulalarning natijasi sifatida

$$\{P_i, P_j\}_{pq} = \{Q_i, Q_j\}_{pq} = 0, \quad \{P_i, Q_j\}_{pq} = \delta_{ij} \quad (7.209)$$

munosabatlarga kelinadi.

Olingan natijalar asosida asosiy bo'lgan (7.206) formula isbot qilamiz. Ishni soddalashtirish uchun bir o'lchamli holni ko'raylik, ko'p o'lchamli holga o'tishni o'quvchiga havola qilamiz. Keyingi hisoblarda ham murakkab funksiyaning hosilasi uchun zanjir qoidasi asosiy bo'ladi:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{pq} &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} = \left( \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \right) - \\ &- \left( \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right). \end{aligned} \quad (7.210)$$

Ifodaning o'ng tomonini ochib chiqilsa sakkizta haddan to'rttasi qisqaradi. Qolgan adlar yig'ib chiqilsa va (7.209) ning uchinchisini qo'llanilsa izlagan formula hosil bo'ladi:

$$\{f, g\}_{pq} = \left( \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \right) \{f, g\}_{PQ} = \{P, Q\}_{pq} \{f, g\}_{PQ} = \{f, g\}_{PQ}. \quad (7.211)$$

Endi yetarlilik shartiga o'taylik (ya'ni, (7.206)-bajarilganida (7.205)-almashtirish kanonik ekanligini ko'rsatamiz). Buning uchun yangi o'zgaruvchilar uchun harakat tenglamalarini topaylik.  $Q_i$  dan boshlaylik:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q_i(q(t), p(t), t) &= \sum_k \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \\ &= \sum_k \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \{H, Q_i\}_{pq}. \end{aligned} \quad (7.212)$$

Ammo

$$\{H, Q_i\}_{pq} = \{H, Q_i\}_{PQ}, \quad (7.213)$$

va, demak, (7.207) bo'yicha

$$\frac{d}{dt} Q_i = \{H, Q_i\}_{PQ} = \frac{\partial H}{\partial P_i}. \quad (7.214)$$

$P_i$  uchun ham kanonik tenglama olishimizni huddi shunday yo'l bilan isbot qilish mumkinligini o'quvchiga havola qilamiz.

### 7.6.3. Kanonik almashtirish va harakat

Kanonik o'zgaruvchilarning  $t$  vaqt momentidagi qiymatlarini  $q_t, p_t$  va  $t + \Delta t$  vaqt momentidagi qiymatlarini  $q_{t+\Delta t}, p_{t+\Delta t}$  deb belgilaylik. Ta'sir integrali uchun

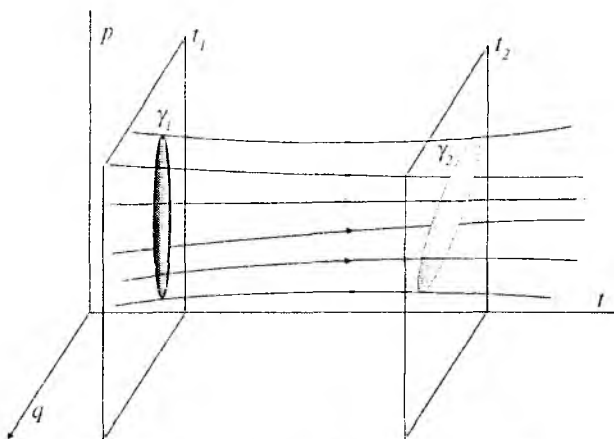
$$dS = \sum_k (p_{t+\Delta t} dq_{t+\Delta t} - p_t dq_t) \quad (7.215)$$

(bizning holimizda  $dt_a = dt_b = 0$ , chunki harakat boshi va oxiriga mos keluvchi vaqt momentlari aniqdir:  $t_a = t, t_b = t + \Delta t$ ) ifodani (7.158) bilan taqqoslansa  $q_t, p_t$  dan  $q_{t+\Delta t}, p_{t+\Delta t}$  ga o'tishni kanonik almashtirish deb qarash mumkinligi tushuniladi, bunda ta'sir integrali  $S$  hosil qiluvchi funksiya rolini o'ynaydi.

## 7.7 Integral invariantlar

### 7.7.1 Fazaviy fazodagi integral invariant

Ba'zi bir hollarda oddiy uch o'lchamli fazo yoki umumlashgan koordinatalar fazosi **konfiguratsion fazo** deyiladi. Kanonik formalizmga o'tganimizdan keyin biz uchun koordinatalar va impulslar  $\{q_i, p_i, i=1, \dots, s\}$  mustaqil o'zgaruvchilar bo'lib qoldi, shunga yarasha mana shu o'zgaruvchilardan tuzilgan  $2s$  o'lchamli **fazaviy fazo** tiliga o'tishimiz maqsadga muvofiqdir. Agar bir o'lchamli harakat haqida gap ketayotgan bo'lsa bu  $2$  o'lchamli fazo — tekislik bo'ladi.



7.2-rasm. Puankarening integral invarianti.

Faraz qilaylik,  $t_1$  vaqtida ko'rilayotgan sistema fazaviy fazoda ma'lum bir hajmni egallasin. Bir o'lchamli hol uchun bu hajmni 7.2-rasmdagi  $\gamma_1$  konturning ichidagi soha sifatida ko'rishimiz mumkin. Vaqt o'tishi bilan sistemadagi umumlashgan koordinata va impulslar o'zgarib boradi, shunga yarasha, sistemaning fazaviy fazodagi egallagan sohasi ham o'zgarib boshlaydi. Fazaviy fazodagi har bir nuqtaning trayektoriyasi

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, s \quad (7.216)$$

tenglamalar sistemasiga bo'ysunadi. Agar sistema bir-necha zarralardan tashkil topgan bo'lsa uning fazaviy fazodagi traektoriyalari majmuasi

fazaviy oqimni tashkil qiladi. Yana bir o'lichamli holga qaytib kelsak  $t_2$  vaqtda sistemaning egallagan fazaviy hajmi 7.2-rasmdagi  $\gamma_2$  konturning ichidagi sohadir. Shu rasmdagi  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$  tomon yo'nalgan chiziqlar fazaviy oqimni ifodalaydi.

Quyidagini isbot qilaylik:

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (7.217)$$

bu yerda  $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = p_1 dq^1 + p_2 dq^2 + \dots + p_s dq^s$ . Bu formulaga kirgan integral **Puankarening universal integral invariant** deyiladi. Olingan formulani

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = 0$$

ko'rinishda tushunish mumkin. Konturning ustida vaqt o'zgarmagani uchun vaqt bo'yicha hosilani integral ostiga kiritishimiz mumkin:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\gamma} (\dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot d\dot{\mathbf{q}}) = \oint_{\gamma} (\dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p}) + \oint_{\gamma} d(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}})$$

Ohirgi integral to'liq differensialdan yopiq kontur bo'yicha olingani uchun aynan nolga teng. Demak,

$$\oint_{\gamma} (\dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p}) = 0$$

Bu integral **ihiyoriy** yopiq kontur  $g$  bo'yicha nolga teng bo'lishi uchun integral ostidagi ifoda qandaydir funksiyaning to'liq differensial bo'lishi kerak:

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} = -dH$$

Shu tarzda tanlab olingan funksiya uchun kanonik tenglamalarni olamiz:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad (7.218)$$

Haqiqatda 7.218-dan 7.217-ni keltirib chiqarish ham mumkin, ya'ni, 7.217-ning bajarilishi uchun kanonik tenglamalarning bajarilishi yetarli va zaruriydir.



### 7.7.2. Liuvil teoremasi

Quyidagi munosabatni isbot qilaylik:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \iint_S \sum_{i=1}^s dp_i dq_i \quad (7.219)$$

Bu yerda  $S$  –  $g$  egri chiziq bilan chegaralangan sirt. Isbot uchun  $2s$  - o'lchamli fazaviy fazo koordinatalarini  $\{x_j\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{2s}\} = \{p_1, p_2, \dots, p_s, q_1, q_2, \dots, q_s\}$  deb belgilaylik va  $\{A_j\} = \{0, 0, \dots, 0, p_1, p_2, \dots, p_s\}$  vektorni kiritaylik. Bu belgilashda

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\gamma} \sum_{i=1}^{2s} A_i dx^i$$

bo'ladi. Stoks teoremasi bo'yicha

$$\oint_{\gamma} \sum_{i=1}^{2s} A_i dx^i = \frac{1}{2} \iint_S \sum_{i,j=1}^{2s} dx^i dx^j \left( \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right)$$

$A_i$  vektor sifatida yuqoridagi ta'rifdan foydalanib 7.4-formulani olamiz (Stoks teoremasiga kirgan  $dx^i dx^j$  integrallash elementi  $dx^i dx^j = -dx^j dx^i$  qoidaga bo'ysunadi, ya'ni, u yo'nalishga ega bo'lgan sirt elementidir).

7.217- va 7.19-formulalarni taqqoslash harakat davomida  $\iint_S \sum_{i=1}^s dp_i dq_i$

integral-ning saqlanishini bildiradi. Chuqur matematik muloxazalar asosida

$$\iiint \sum_{i \neq j=1}^s dp_i dq_i dp_j dq_j \quad \text{va} \quad \iiint \sum_{i \neq j \neq k=1}^s dp_i dq_i dp_j dq_j dp_k dq_k \quad (7.220)$$

va h.k integrallarning ham invariant bo'lishini isbot qilish mumkin. Bunday isbot [14] kitobda keltirilgan, isbotning murakkabligi uni bu yerda keltirishga imkon bermaydi. Misol sifatida bir va ikki o'lchamli hollarni qaraylik: 1) bir o'lchamli holda 7.219 ning o'ng tomoni  $\int dp_1 dq_1$  bo'ladi, bu - sistemaning fazaviy hajmi; 2) ikki o'lchamli holda ikkita invariantga egamiz:  $\int (dp_1 dq_1 + dp_2 dq_2)$  va  $\int dp_1 dq_1 dp_2 dq_2$ , ikkinchisi shu ikki o'lchamli sistemaning fazaviy hajmi.

Harakat, 7.6.3-da isbot qilinganidek, kanonik almashtirishning hususiy holi. Shuni hisobga olib quyidagi umumlashtiruvchi ta'rifni qabul qilaylik:

*Fazaviy fazoda quyidagi koordinat almashtirishlar berilgan bo'lsin:*  
 $(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s) \rightarrow (Q_1, Q_2, \dots, Q_s, P_1, P_2, \dots, P_s)$ .  
*Agar*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \oint_{\gamma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} \quad (7.221)$$

*bo'lsa bunday almashtirishlar kanonik almashtirish deyiladi.*

**Misol 7.7.1.** 7.6.1. paragrafda kanonik almashtirishlar kanonik tenglamalarning ko'rinishini saqlaydigan almashtirishlardir deb ta'riflangan edi. Hozirgi ta'rifimiz avvalgi ta'rifni o'z ichiga olishini bir hususiy holda — bir o'lchamli sistema uchun vaqtga bog'liq bo'lmagan almashtirishlar misolida ko'rsataylik.

7.221-formuladan ko'rinib turibdiki integral ostidagi ifoda to'liq differensial bo'lishi kerak:

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dS,$$

Bir o'lchamli holda:  $p dq - P dQ = dS$ .  $Q = Q(p, q)$  ekanligini hisobga olib bu formulani

$$p dq - P \left( \frac{\partial Q}{\partial q} dq + \frac{\partial Q}{\partial p} dp \right) = \left( p - P \frac{\partial Q}{\partial q} \right) dq - P \frac{\partial Q}{\partial p} dp$$

ko'rinishga keltiramiz. O'ng tomondagi ifodaning to'liq differensialligi sharti:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( p - P \frac{\partial Q}{\partial q} \right) = - \frac{\partial}{\partial q} \left( P \frac{\partial Q}{\partial p} \right).$$

Bu formulani ochib chiqsak  $\{P, Q\} = 1$  ekanligi kelib chiqadi. Demak, yangi o'zgaruvchilarda Puasson qavsi saqlanar ekan. 7.6.2-paragrafda isbot qilingani bo'yicha Puasson qavsining saqlanishi almashtirishning kanonikligining yetarli va zaruriy sharti edi.

7.219-ni hisobga olib kanonik almashtirish davomida (integrallash sohalari  $\gamma$  va  $\Gamma$  deb belgilaylik)

$$\iint_{\gamma} \sum_{i=1}^s d p_i d q_i = \iint_{\Gamma} \sum_{i=1}^s d P_i d Q_i \quad (7.222)$$

bo'lishi kerak degan hulosaga kelamiz. Bir o'lchamli holda bu formula

$$\iint_{\gamma} dpdq = \iint_{\Gamma} dPdQ$$

ko'rinishga ega bo'ladi.  $\gamma$  —  $(p, q)$  o'zgaruvchilar tilidagi boshlang'ich sirt,  $\Gamma$  —  $(P, Q)$  o'zgaruvchilar tilidagi sirt. Demak, kanonik alamshtirishlarda bir o'lchamli sistemaning fazaviy hajmi saqlanar ekan.

7.220-formulaga olib kelgan mulohazalarni davom ettirsak,  $i, j, k, \dots$  indekslarining soni  $s$  ga teng bo'lganida invariantlikni 7.222-ma'noda tushunib quyidagi natijaga kelamiz:

$$\int_{\gamma} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 \dots dp_s dq_s = \int_{\Gamma} dP_1 dQ_1 dP_2 dQ_2 \dots dP_s dQ_s \quad (7.223)$$

Ushbu tasdiq **Liuvil teoremasi** deyiladi. Chap tomondagi integral  $s$ - ta erkinlik darajasiga ega bo'lgan sistemaning fazaviy fazodagi hajmi, o'ng tomonda esa shu sistemaning yangi kanonik o'zgaruvchilarga o'tilgandan keyingi fazaviy hajmi. Demak, kanonik almashtirishda sistemaning fazaviy fazodagi hajmi o'zgarmas ekan.

## 7.8. Mopertyui prinsipi

Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lmagan holda energiya saqlanadi:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E. \quad (7.255)$$

Bu shart  $2s$  o'lchamli ( $s$  — erkinlik darajalari soni) fazaviy fazoda  $2s - 1$  o'lchamli sirtni aniqlaydi.

Masalan,  $s = 1$  bo'lsa fazaviy fazo tekislik bo'ladi, yuqoridagi shart esa shu tekislikdagi chiziqni beradi. Konkret misolni qaraylik: garmonik ossillator uchun

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E \quad (7.256)$$

shart  $(q, p)$  tekislikdagi ellipsni beradi. Demak,  $E$  energiyalik chizikli ossillatorning tebranishi davrida fazaviy tekislikda uni ifodalaydigan nuqta mana shu ellipsni chizib chiqadi.

Harakat faqatgina  $2s - 1$  o'lchamli sirtning ustidagina bo'lishi mumkin, shu jumladan, boshlang'ich  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_a$  va oxirgi  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_b$  nuqtalar ham mana shu sirtning ustida yotadi. Bu holda variatsion prinsipni qanday ko'rinishda olganimiz qulaydir? Shu savolga Mopertyui prinsipi javob beradi.

(7.139) formulani (7.224) holda quyidagicha yozib olish mumkin:

$$S = \int p_i dq_i - E(t - t_0), \quad (7.257)$$

bunda  $t_0$  — harakat boshi momenti. Paydo bo'lgan

$$S_0 = \int p_i dq_i = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (7.258)$$

kattalik **qisqartirilgan** ta'sir deyiladi.

(7.255) shart o'rinli bo'lganda (7.258) ta'sirning minimumi

$$\delta S_0 = 0 \quad (7.259)$$

harakat trayektoriyasining ko'rinishini berishini isbot qilaylik. Ushbu tasdiq **Mopertyui prinsipi** deyiladi. Buning uchun (7.255) shartni  $p_1$  ga nisbatan yechib oldik deylik:

$$p_1 = K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, T, E), \quad (7.260)$$

va maqsadimizga muvofiq bo'lgan quyidagi belgilashlarni ham kiritib olaylik:

$$\mathbf{P} = \{p_2, p_3, \dots, p_s\}, \quad \mathbf{Q} = \{q_2, q_3, \dots, q_s\}, \quad T = -q_1. \quad (7.261)$$

Natijada

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - KdT \quad (7.262)$$

tenglikni olamiz, o'ng tomonda paydo bo'lgan formada  $K$  ni yangi Gamilton funksiyasi va  $T$  ni yangi vaqt deb qaralsa  $S_0$  ning ko'rinishi yangi o'zgaruvchilarga nisbatan to'liq ta'sirning o'zi bo'ladi. Demak, (7.157) asosida harakat tenglamalari sifatida quyidagi tenglamalarni olish mumkin:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dT} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{P}}. \quad (7.263)$$

2s — 1 o'lchamli (7.255) shart bilan chegaralangan fazodagi harakat tenglamalari mana shu ko'rinishga ega bo'ladi.

Olingan tenglamalar kanonik tenglamalarga o'xshasa ham ularning ma'nosi bir oz boshqachadir — bu tenglamalar trayektoriyaning vaqt o'tishi bilan o'zgarishini emas, balki shu trayektoriyaning 2s o'lchamli fazodagi ko'rinishini beradi, chunki ular sistemamizning umumlashgan koordinatalari va impulslarini bog'laydigan tenglamalar sistemasini tashkil qiladi.

Buni tushunish qiyin emas, bu tenglamalardagi «vaqt»  $T$  haqiqatda  $q_1$  koordinata va «energiya» — haqiqatda impulsning birinchi kompo-

mentasi  $p_i$  dir. Demak, bu tenglamalar 2s o'Ichamli fazaviy fazodagi trayektoriyaning geometrik ko'rinishini beradi. Demak, (7.259) variatsion prinsip (7.255) shart o'rinli bo'lgan va sistemaning boshlang'ich va oxirgi holatlari berilgan holda harakat trayektoriyasini berar ekan.

Qisqartirilgan ta'sirga boshqa ko'rinish beraylik. Bir tomondan

$$\int p_i dq_i = \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt = \int 2T dt = \int 2(E - U) dt. \quad (7.264)$$

Bu yerda ikkinchi tenglikdan keyin Eylerning bir jinsli funksiyalar haqidagi teoremasini qo'llanildi. Ushbu formuladan vaqtning yo'q qilishimiz kerak, chunki faqat trayektoriyani qidiramiz. Ikkinchi tomondan

$$E = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q) = \frac{1}{2} \frac{\sum a_{ij} dq_i dq_j}{dt^2} + U(q) \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ij} dq_i dq_j}{2(E - U)}}. \quad (7.265)$$

Demak,

$$S_0 = \int p_i dq_i = \sqrt{2} \int \sqrt{(E - U) \sum a_{ij} dq_i dq_j}. \quad (7.266)$$

Endi Mopertyui prinsipining aniq ko'rinishini berishimiz mumkin: *harakatning boshlang'ich  $\mathbf{q}_a$  va oxirgi  $\mathbf{q}_b$  nuqtalarini bog'laydigan  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  trayektoriya  $H(p, q) = E$  shart bajarilganida quyidagi minimum prinsipiga bo'ysunadi:*

$$\delta \int \sqrt{(E - U) \sum a_{ij} dq_i dq_j} = 0. \quad (7.267)$$

Bu prinsipda vaqt haqida hech narsa deyilmaydi, berilgan boshlang'ich  $\mathbf{q}_a$  va oxirgi  $\mathbf{q}_b$  nuqtalar orasidagi masofani sistema qancha vaqtda bosib o'tgani energiya  $E$  orqali aniqlanishi mumkin.

Agar bitta ozod moddiy nuqta haqida gap ketayotgan bo'lsa

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \quad (7.268)$$

bo'ladi, bunda  $dl$  — uzunlik elementi. Natijada

$$\delta \int \sqrt{E - U} dl = 0 \quad (7.269)$$

prinsipga kelinadi. Bu yerdagi integral berilgan nuqtalarning orasidagi trayektoriya bo'yicha olingan. Vaqtning ham boshlang'ich nuqtasi berilgan, ammo oxirgi nuqtasi berilmagan.

Ozod zarracha uchun bu

$$\delta \int dl = 0 \quad (7.270)$$

shartni beradi. Bu esa ikki nuqta orasidagi eng qisqa chiziq – to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Haqiqatan ham, ozod zarradan to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakat qiladi.

### 7.9. Gamilton — Yakobi tenglamasi

(7.136) tenglamalarning ikkinchisini olib qaraylik:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(p, q, t) = 0. \quad (7.271)$$

Agar bu tenglamada impulslarning o‘rniga (7.136) ning birinchisini ishlatsak

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_1, q_2, \dots, q_s, t\right) = 0 \quad (7.272)$$

ko‘rinishdagi birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani olgan bo‘lamiz. Bu tenglama ta‘sir funksiyasi  $S(q, t)$  uchun bo‘lib, uning mavjudligi harakat tenglamalarini integrallashning yana bir zabardast metodini beradi. Bu metodni o‘rganish uchun birinchidan xususiy hosilali differensial tenglama (7.272) ning toliq integrali kiritaylik. Ta‘rif bo‘yicha differensial tenglamaning to‘liq integrali uning shunday yechimiki, unga kirgan mustaqil ixtiyoriy o‘zgarmaslar soni tenglamadagi mustaqil o‘zgaruvchilarning soniga teng bo‘ladi. Bizning holimizda mustaqil o‘zgaruvchilar soni  $s + 1$ ,  $s$  ta koordinata va vaqt. Ta‘sir tenglamaga faqat hosila ostida kirgani uchun bitta o‘zgarmasni additiv ravishda olishi mumkin:

$$S = f(t, q_1, q_2, \dots, q_s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + \alpha_0, \quad (7.273)$$

bunda  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  – ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar (integrallash konstantalari).

#### **Teorema (Yakobi):**

(7.273) funksiya (7.272) ning to‘liq integrali va  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\right) \neq 0$

bo‘lsin. Unda

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, s$$

sistemaning umumiy yechimi

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (7.274)$$

munosabatlar bilan aniqlanadi, bunda  $\beta_i$  – yangi ixtiyoriy doimiylar.

$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$  dan  $q_i = q_i(\beta, \alpha, t)$  lar topiladi, topilgan  $q_i$  larni  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$  ga

qo'yib  $p_i = p_i(\beta, \alpha, t)$  lar topiladi.

**Isbot:** (7.273) dagi  $f(q, \alpha, t)$  ni hosil qiluvchi funksiya sifatida olaylik, bunda  $\alpha_i$  lar yangi impulslar rolini o'ynasin:  $\alpha_i = P_i$ . Kanonik almashtirish bajaraylik:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial f}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (7.275)$$

Bu qatordagi oxirgi formula va (7.272) dan kelib chiqadiki  $H' = 0$ .

Demak,  $\dot{P}_i = 0$ ,  $\dot{Q}_i = 0$ . Yoki,  $P_i = \alpha_i = \text{const}$ ,  $Q_i = \text{const}$ . Oxirgi konstantalarni  $Q_i = \beta_i$  deb belgilashi bilan teoremmamiz isbot bo'ladi.

Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lmagan holda ta'sir  $S = S_0 - Et$  ko'rinishga ega bo'lishini ko'rgan edik. Bu holda Gamilton--Yakobi tenglamasi qisqartirilgan ta'sir uchun yoziladi va

$$H \left( \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, q_1, q_2, \dots, q_s \right) = E \quad (7.276)$$

ko'rinishni oladi.

### 7.9.1-misol.

Garmonik ossiliatorni olib qaraylik:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (7.277)$$

Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bogliq emas. Demak, Gamilton--Yakobi tenglamasining to'liq integralini  $S = -Et + W(q, \alpha)$  ko'rinishda qidirish kerak.  $W$  uchun

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = E \quad (7.278)$$

tenglama olamiz. Uni integrallash qiyin emas:

$$W = \int^q \sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right)} dx = \frac{E}{\omega} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \quad q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \varphi. \quad (7.279)$$

Ta'sir  $S$  bitta o'zgarmas  $E$  ga bog'liq, tabiiyki, uni  $\alpha = E$  deb olinadi. Ya'ni, yangi kanonik «impuls» energiyaga teng bo'lib chiqdi. To'liq integral aniqlandi. Endi Yakobi teoremasi bo'yicha  $\beta = \partial S / \partial E$  dan koordinatani topish kerak:

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int^q \frac{mdx}{\sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right)}} = -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \left( q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \right), \quad (7.280)$$

yoki

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta). \quad (7.281)$$

Impulsga kelsak

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mE} \cos \omega(t + \beta) \quad (7.282)$$

ifoda olinadi. Chiziqli ossillator uchun harakat tenglamalari integrallandi.

## 7.10. O'zgaruvchilarni ajratish

### 7.10.1. Umumiy g'oyalar

Quyidagi masaladan boshlaylik.  $(q_1, p_1)$  o'zgaruvchilar Gamilton funksiyasiga faqat  $f(q_1, p_1)$  kombinatsiya orqali kirsin:

$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, p_2, \dots, q_s, p_s).$$

$f(q_1, p_2)$  ning harakat integrali ekanligini isbot qilaylik. Harakat integralini tekshirish uchun Puasson qavsini topamiz:

$$\{H, f\} = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad (7.283)$$

chunki  $f$  faqat  $q_1$  va  $p_1$  larga bog'liq. Ikkinchi tomondan,

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1}. \quad (7.284)$$



Bularni Puasson qavsiga olib borib qo'ysak

$$\{H, f\} = 0 \quad (7.285)$$

ekanligi, ya'ni  $f$  – harakat integrali ekanligi topiladi.

Ko'rib chiqilgan masala Gamilton—Yakobi tenglamasi uchun o'zgaruvchilarni ajratish metodining asosi bo'lib xizmat qiladi.

Yuqorida topgan natijani Gamilton—Yakobi tenglamasiga qo'l-laylik.  $(q_1, p_1)$  o'zgaruvchilar Gamilton funksiyasiga faqat  $f(q_1, p_1)$  kombinatsiya orqali kirgan bo'lsin. Bu holda quyidagi tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$f\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) = \alpha_1; \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\alpha_1, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \frac{\partial S}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_2, q_3, \dots, q_s, t\right) = 0. \quad (7.286)$$

Hozir ko'rsatilgani bo'yicha  $\alpha_1 = \text{const}$ . Agar shu sistemadagi ikkinchi tenglamada  $q_1$  o'zgaruvchini o'zgartirilsa tenglamada hech narsa o'zgar-masligi kerak. Buning uchun esa ta'sir

$$S = S'(q_2, q_3, \dots, q_s, t, \alpha_1) + S_1(q_1) \quad (7.287)$$

ko'rinishga ega bo'lishi kerak. Aks holda (7.286) sistemaning ikkinchi tenglamasiga  $\{\partial S/\partial q_i, i = 2, 3, \dots, s\}$  hosilalar orqali  $q_1$  ga bog'lanish kirib qolishi mumkin. Demak,  $q_1$  koordinata uchun to'liq hosilali

$$f\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1 \quad (7.288)$$

tenglamaga keldik. To'liq hosilali tenglamani esa oddiy yo'l bilan integrallash mumkin. Shu bilan Gamilton—Yakobi tenglamasidagi o'zgaruvchilar sonini bittaga kamaytirgan bo'lamiz. Bu holda  $q_1$  o'zga-ruvchi ajratildi deyiladi. Faraz qilaylik, shu yo'l bilan boshqa o'zga-ruvchilarni ham ajratib oldik. Agar sistema konservativ bo'lsa ta'sir

$$S = -Et + \sum_{i=1}^s S_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \quad (7.289)$$

ko'rinishga keltirilgan bo'ladi. Bu holda masala **to'liq integrallandi** deyiladi.

To'liq integrallanish afsuski juda kam uchraydigan hol. Uning yetarlilik shartini quyidagi **Liuvil teoremasi**<sup>1</sup> deyiladigan tasdiq ifo-dalaydi:

<sup>1</sup> Fazoviy hajmning saqlanishi haqidagi Linvill teoremasi bilan adashtirmang.

**Teorema.** Agar Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^s a_i(q_i) \dot{q}_i^2 - \frac{1}{f} \sum_{i=1}^s U_i(q_i), \quad f = \sum_{i=1}^s F_i(q_i), \quad (7.290)$$

ko'rinishga ega bo'lsa Gamilton—Yakobi tenglamasi kvadraturalarga keltiriladi.

**Isbot.** Gamilton funksiyasini topish uchun quyidagi umumlashgan impulsolni

$$p_i = f a_i(q_i) \dot{q}_i, \quad (7.291)$$

(7.6) ta'rifga olib borib qo'yamiz. Natijada quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$H = \frac{1}{f} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \frac{p_i^2}{a_i(q_i)} + \sum_{i=1}^s U_i(q_i) \right] \quad (7.292)$$

Bu yerdan Gamilton—Yakobi tenglamasini darhol olinadi:

$$\sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{a_i(q_i)} \left( \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \right)^2 + U_i(q_i) - EF_i(q_i) \right] = 0. \quad (7.293)$$

Yechishni

$$S_0 = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_s(q_s) = \sum_{i=1}^s S_i(q_i) \quad (7.294)$$

ko'rinishda qidirish tabiiydir. Bu holda (7.293) tenglama

$$\sum_{i=1}^s \left[ \frac{1}{2a_i(q_i)} \left( \frac{dS_i}{dq_i} \right)^2 + U_i(q_i) - EF_i(q_i) \right] = 0 \quad (7.295)$$

ko'rinishga keladi. Yig'indidagi har bir had faqat mos keluvchi  $q_i$  gagina bog'liq, bu degani, mana shu har bir hadni qandaydir bir o'zgarmas songa tenglashtirib qo'yish kerak:

$$\frac{1}{2a_i(q_i)} \left( \frac{dS_i}{dq_i} \right)^2 + U_i(q_i) - EF_i(q_i) = \alpha_i, \quad (7.296)$$

(7.295) bo'yicha

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i = 0. \quad (7.297)$$

(7.296) dan  $S_i$  larni kvadratura ko‘rinishida topib olishi qiyin emas:

$$S_i(q_i) = \int dq_i \sqrt{2a_i(q_i)(\alpha_i + EF_i(q_i) - U_i(q_i))}. \quad (7.298)$$

Gamilton—Yakobi tenglamasining to‘liq integrali topildi, u  $s$  ta o‘zgarmas songa bog‘liq bo‘lib chiqdi:

$$E, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}. \quad (7.299)$$

$\alpha_s$  esa (7.297) tenglamadan aniqlanadi:  $\alpha_s = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{s-1}$ . Teorema isbot qilindi.

Siklik o‘zgaruvchilarga kelaylik. Ularga mos keluvchi umumlashgan impuls harakat integrallari ekanligini bilamiz. Shunday bo‘lishi kerakligi o‘zgaruvchilarni ajratish metodi bilan hamohangdir. Koordinata siklik bo‘lganda u Gamilton funksiyasida qatnashmaydi. Natijada (7.288) tenglama

$$\frac{dS_1}{dq_1} = \alpha_1 \quad (7.300)$$

ko‘rinishga kelib qoladi. Demak, ta’sir siklik koordinataning oddiy chiziqli funksiyasi bo‘lar ekan:

$$S_1 = \alpha_1 q_1. \quad (7.301)$$

O‘zgarmas son  $\alpha_1$  esa shu koordinataga mos keluvchi impulsning o‘zi:  $p_1 = \alpha_1$

Konservativ sistemalar uchun ta’sirning vaqtga bog‘liq qismi  $S'(t) = -Et$  ko‘rinishga ega bo‘lishini bu holda vaqtning Gamilton funksiyasiga oshkora kirmasligi, ya’ni «siklik koordinata» bo‘lishining natijasi deb qarash mumkin. Bu nuqtayi nazardan  $E$  yuqoridagi o‘zgarmas  $\alpha$  larning biridir, masalan,  $E = \alpha_0$ .

O‘zgaruvchilarni ajratib olish uchun koordinat sistemasini masalaning mohiyatiga mos keladigan qilib tanlab olish juda muhimdir. Quyida shunga bir necha misollar ko‘ramiz.

### 7.10.2. Qutb koordinat sistemasi

Tekislik ustida markaziy maydon ta’sirida harakat qilayotgan jismni qaraylik. Uning Gamilton funksiyasi:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) + U(r). \quad (7.302)$$

Birinchidan, Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq bo'lmagani uchun

$$S = -Et + W(r, \varphi), \quad (7.303)$$

bunda birinchi o'zgarmas son  $\alpha_0 = \text{const} = E$  paydo bo'ldi. Ikkinchidan,  $\varphi$  siklik koordinata bo'lgani uchun

$$W(r, \varphi) = W_1(r) + \alpha_\varphi \varphi. \quad (7.304)$$

Ko'rinib turibdiki,  $\alpha_\varphi = \partial S / \partial \varphi = p_\varphi$  (yuqoridagi muhokama bo'yicha  $\alpha_\varphi = \text{const} = p_\varphi$ ). Shularni hisobga olib

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + W_1(r) \quad (7.305)$$

deb yozib olinadi. Gamilton—Yakobi tenglamasi quyidagi ko'rinishga keldi:

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right] + U(r) = E. \quad (7.306)$$

$W_1$  uchun tenglama:

$$\frac{dW_1}{dr} = \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}. \quad (7.307)$$

Uning yechimi:

$$W_1(r) = \int dr \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}. \quad (7.308)$$

Ta'sir uchun quyidagini topdik:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int dr \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}. \quad (7.309)$$

To'liq integral topildi. U ikkita mustaqil o'zgarmas sonlarga bog'liq bo'lib chiqdi:  $\alpha_0 = E$  va  $\alpha_1 = p_\varphi$ . Yuqorida keltirilgan Yakobi teoremasi bo'yicha trayektoriya va impulslarni topish mumkin:

$$\beta_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + m \int \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}, \quad (7.310)$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \varphi - \int \frac{p_\varphi dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}}. \quad (7.311)$$

Bu tenglamalarning birinchisi  $r$  va  $t$  orasidagi bog'lanishni beradi, ikkinchisi esa  $r$  va  $\varphi$  orasidagi bog'lanishni beradi. Agar potensial  $U(r)$  berilgan bo'lsa, bu formulalar trayektoriyani to'liq aniqlab bergan bo'ladi. O'zgarmas sonlarga kelinsa  $\beta_0$  boshlang'ich vaqt momentini,  $\beta_1$  esa boshlang'ich burchak momentini ifodalaydi.

### Kepler masalasi

3.3- paragrafda Kepler masalasi yechilgan edi. Kepler masalasi sferik simmetrik

$$U(r) = -\frac{\gamma}{r} \quad (7.312)$$

maydondagi jismning harakatini topishdan iborat edi ( 3.3 -paragrafdagi  $\alpha$  ni  $\lambda$  ga almashtirdik, bu paragrafda  $\alpha$  harfi boshqa ma'noda qo'llangan). Lagranj funksiyasi (3.20) ifoda orqali berilgan edi. Unga potensial qo'yilsa

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\gamma}{r}. \quad (7.313)$$

Ko'rinib turibdiki, (7.302) Gamilton funksiyasining o'zi olindi. 3.3-paragrafga to'liq mos kelishi uchun  $p_\varphi = M$  deyish yetarlidir. Demak, (7.310) va (7.311) formulalar markaziy maydondagi moddiy nuqtaning trayektoriyasi masalasini yechar ekan. Darhaqiqat, bu formulalar boshqa metod bilan avval topilgan 3.27- va 3.28-larning o'zidir.

#### 7.10.3. Sferik koordinata sistemasi

Sferik koordinata sistemasida Gamilton funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$H = \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + U(r, \theta, \varphi). \quad (7.314)$$

Agar potensial

$$U(r, \theta, \varphi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (7.315)$$

ko'rinishga ega bo'lsa, Gamilton—Yakobi tenglamasida o'zgaruvchilarni ajratish imkoniyatiga ega bo'lamiz. Bu yerdagi oxirgi had fizik nuqtayi nazardan ahamiyatga ega emas, bunday hadli potentsiallar fizikada uchramaydi. Shu sababdan u tashlab yuboriladi.

Gamilton funksiyasi vaqtga oshkora bog'liq emas, demak,

$$S = -Et + S_0.$$

Qisqartirilgan ta'sir uchun Gamilton—Yakobi tenglamasi quyidagi ko'rinishga keltirilishi mumkin:

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + a(r) \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + b(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2 = E. \quad (7.316)$$

Ko'rinib turibdiki,  $\varphi$  — siklik koordinata, demak,

$$p_\varphi = \frac{\partial S_0}{\partial \varphi} = \text{const}$$

saqlanuvchi kattalik (harakat integrali) ekan. Ya'ni,

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + S_1(r, \theta). \quad (7.317)$$

Shuni hisobga olib yuqoridagi tenglamani

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + b(\theta) + \frac{1}{2m \sin^2 \theta} p_\varphi^2 = r^2 \left[ E - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right)^2 - a(r) \right] \quad (7.318)$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Chap tomon faqat  $\theta$  ga bog'liq, o'ng tomon esa faqat  $r$  ga bog'liq. Ya'ni, Gamilton—Yakobi tenglamasi faqat  $\{\theta, \partial S_1 / \partial \theta\}$  va  $\{r, \partial S_1 / \partial r\}$  ga bog'liq kombinatsiyalarga keltirildi. Umumiy nazariya bo'yicha

$$S_1(r, \theta) = S_2(r) + S_3(\theta) \quad (7.319)$$

ko'rinishida izlanishi kerak. Natijada tenglama

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_3(\theta)}{d\theta} \right)^2 + b(\theta) + \frac{1}{2m \sin^2 \theta} p_\varphi^2 = r^2 \left[ E - \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_2(r)}{dr} \right)^2 - a(r) \right] \quad (7.320)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Ixtiyoriy  $r$  va  $\theta$  uchun bu tenglik bajarilishi uchun ikkala tomon ham qandaydir o‘zgarmas songa teng bo‘lishi kerak. U  $\alpha$  deb belgilansa, quyidagi ikkita tenglamaga kelinadi:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_3(\theta)}{d\theta} \right)^2 + b(\theta) + \frac{1}{2m \sin^2 \theta} p_\phi^2 = \alpha, \quad \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_2(r)}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\alpha}{r^2} = E. \quad (7.321)$$

Bu tenglamalarni integrallash qiyin emas:

$$S_2 = \int dr \sqrt{2m \left( E - a(r) - \frac{\alpha}{r^2} \right)}, \quad S_3 = \int d\theta \sqrt{2m \left( \alpha - b(\theta) \right) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (7.322)$$

Shu bilan, Gamilton—Yakobi tenglamasining to‘liq integralini topdik:

$$S = -Et + p_\phi \phi + \int dr \sqrt{2m \left( E - a(r) - \frac{\alpha}{r^2} \right)} + \int d\theta \sqrt{2m \left( \alpha - b(\theta) \right) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (7.323)$$

### 7.11. Ta’sir-burchak o‘zgaruvchilari

Finit harakat qilayotgan sistemani olib ko‘raylik.

Masala quyidagicha qo‘yiladi: kanonik almashtirish yordamida shunday yangi kanonik o‘zgaruvchilar  $\{I_k, \phi_k\}$  ni kiritaylikki, Gamilton funksiya  $\phi_k$  ga bog‘liq bo‘lmasin. Bu holda kanonik tenglamalar

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial H(I)}{\partial \phi_k} = 0, \quad \dot{\phi}_k = \frac{\partial H(I)}{\partial I_k} \quad (7.324)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Birinchi tenglamadan  $I_k = \text{const}$  ekanligini topiladi.  $H$  o‘zgarmas  $I_k$  largagina bog‘liq ekan o‘zi ham o‘zgarmas bo‘ladi. Bu degani,  $\dot{\phi}_k = \text{const} = \omega_k$ , ya’ni,  $\phi_k = \omega_k t + \phi_{0k}$ . Harakat tenglamalari integrallandi,  $\phi_k$  — o‘zining ma’nosi bo‘yicha burchak ekan.

Soddalashtirish uchun bir o‘lchamli holdan boshlaylik. Yuqoridagi maqsadni nazarda tutib  $\{p, q\} \rightarrow \{I, \phi\}$  kanonik almashtirishning hosil qilish funksiyasi  $F_2(I, q)$  ni topish kerak:

$$p = \frac{\partial F_2(I, q)}{\partial q}, \quad \phi = \frac{\partial F_2(I, q)}{\partial I}, \quad H\left(\frac{\partial F_2(I, q)}{\partial q}, q\right) = E(I). \quad (7.325)$$

Hosil qiluvchi funksiya vaqtga bog'liq bo'lmagani uchun yangi va eski Gamilton funksiyalari bir-biriga teng. Uni energiyaga tenglashtirib qo'ydik.

Hosil qiluvchi funksiyani topaylik.  $I$  o'zgarmas bo'lganida (7.325) ning birinchisidan

$$dF_2|_{I=\text{const}} = p dq \quad (7.326)$$

ekanligiga kelinadi.  $I = I(E) = \text{const}$  sirtning ustida qolishimiz kerak bo'lgani uchun umuman

$$F_2(I, q) = \int_{q_0}^q p dq \quad (7.327)$$

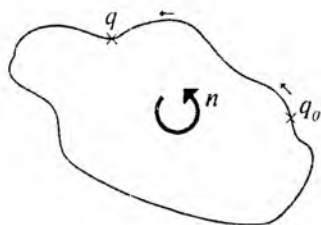
deb olish kerak. Integral  $I = I(E) = \text{const}$  sirtning ustidagi  $q_0$  va  $q$  nuqtalar orasida yotgan ma'lum bir haqiqiy trayektoriya bo'yicha olinadi. Finit harakat haqida gapirilmoqda, burchak  $\phi$  o'zgaruvchi yopiq trayektoriya bo'yicha harakat qilib qaytib kelganda

$$\oint d\phi = 2\pi \quad (7.328)$$

bo'lishi kerak. Ikkinchi tomondan

$$\Delta F_2 = \oint_{I(E)=\text{const}} p dq \quad (7.329)$$

integral  $I(E) = \text{const}$  sirt ustidagi yopiq egri chiziq bilan chegaralangan sirt yuzasini beradi.



7.3-rasm.  $q_0$  nuqtadan  $q$  nuqtaga bevosita borish yoki konturni  $n$  marta aylanib borish mumkin.

Bu integralni ikki ma'noda tushunish mumkin — 7.3-rasmda ko'rsatilganidek  $q_0$  dan  $q$  ga borishni yoki aylanmasdan bevosita  $q_0 \rightarrow q$  borish, yoki yopiq konturimizni  $n$  marta aylanib borish deb tushunish mumkin. Kontur bo'yicha har bir aylanganda  $\Delta F_2$  ga shu yopiq kontur bilan chegaralangan sirt yuzasi qiymatini bir marta qo'shgan bo'linadi. Demak,  $F_2$  funksiya bir qiymatli aniqlangan funksiya emas ekan, unga mana shu sirt yuzasining ixtiyoriy butun songa ko'paytirilgan qiy-



matini qo‘shib qoyish mumkin ekan. Bu noaniqlik  $\partial F_2/\partial q$  ga ta‘sir qilmasa ham  $\phi = \partial F_2/\partial I$  ga ta‘sir qiladi. (7.328) shart  $F_2$  funksiyani aniqlashga xizmat qiladi. Shu shart bajarilishi uchun

$$\frac{d}{dI} \Delta F_2 = 2\pi \quad (7.330)$$

bo‘lishi kerak. Bu tenglik bajarilishi uchun o‘z navbatida

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (7.331)$$

bo‘lishi kerak. Integral yopiq kontur bo‘yicha **bir marta** aylanishga mos keladi, ya‘ni integrali yopiq konturning sirtiga teng.

Hosil bo‘lgan kattalik  $I$  — **ta‘sir o‘zgaruvchisi** deyiladi, unga kanonik qo‘shma bo‘lgan  $\phi$  — **burchak o‘zgaruvchisi** deyiladi.  $I$  ning ta‘rifidan ko‘rinib turibdiki uning o‘lchamligi ta‘sirning va harakat miqdori momentining o‘lchamligiga teng,  $\phi$  ning esa o‘lchamligi yo‘q.

**7.11.1-misol.** Garmonik ossillator uchun ta‘sir burchak o‘zgaruvchilarini toping.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad \text{uchun} \quad H = E \quad \text{«sirt» katta va kichik yarimo‘qlari}$$

$$a = \sqrt{2mE} \quad \text{va} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

bo‘lgan ellipsni beradi, uning yuzasi

$$\pi ab = 2\pi \frac{E}{\omega} \quad (7.332)$$

ga teng. Demak,

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (7.333)$$

Huddi shu natijaga (7.331) integralni bevosita hisoblash orqali ham kelish mumkin. Buning uchun avval  $H = E$  shartdan impuls topiladi:

$$p = \sqrt{2m(E - m\omega^2 q^2/2)}. \quad (7.334)$$

Demak,

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m(E - m\omega^2 q^2/2)} dq = \frac{1}{2\pi m\omega} \oint \sqrt{2mE - x^2} dx. \quad (7.335)$$

Bu integralda  $x = \sqrt{2mE} \sin \varphi$  almashtirish bajarib, uni  $\varphi$  bo'yicha 0 dan  $2\pi$  gacha integrallansa yana o'sha (7.333) natijaga kelinadi.

Burchak o'zgaruvchisini topish uchun harakat tenglamasidan foydalanamiz:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \left( \frac{dI}{dE} \right)^{-1} = \omega. \quad (7.336)$$

Demak, burchak o'zgaruvchi tebranish fazasining o'zi ekan:

$$\phi = \omega t + \phi_0. \quad (7.337)$$

Shu bilan harakat tenglamalarini integrallasdan turib jism harakati aniqlandi – bu harakat  $\omega$  chastotali tebranish ekan.

Amplitudaning maksimal qiymati  $E = m\omega^2 q_0^2/2$  shartdan topiladi:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \text{ Biz yana o'sha eski natijaga keldik:}$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \phi_0). \quad (7.338)$$

**7.11.2-misol.** Rotatorni estaylik:

$$H = \frac{M_z^2}{2A} = \frac{p_\varphi^2}{2A}. \quad (7.339)$$

Bu yerda inersiya momenti  $A$  harfi bilan belgilandi ( $I$  harfi band bo'lgani uchun). Ko'rish osonki

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{A}, \quad (7.340)$$

yoki,

$$p_\varphi = \text{const}, \quad \varphi = \frac{p_\varphi}{A} t + \varphi_0. \quad (7.341)$$

Demak, rotator  $p_\varphi/A$  chastotali aylanma harakat qilari ekan, uning umumlashgan impulsi  $p_\varphi$  (harakat miqdori momenti) saqlanuvchan kattalik ekan.

Ko'p o'lchamli holga o'taylik. Sistema hamma koordinatlar bo'yicha finit harakat qilayotgan bo'lsin. Faraz qitaylik, hamma koordinatalar bo'yicha o'zgaruvchilarni ajratish mumkin bo'lsin. Ma'lumki, bu holda qisqartirilgan ta'sir uchun

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i) \quad (7.342)$$

tasavvurga ega bo'lamiz. Umumlashgan impulslar

$$p_i = \frac{dS_i}{dq_i} \quad (7.343)$$

orqali mana shu ta'sirning tashkil qiluvchi qismlari uchun

$$S_i = \int p_i dq_i \quad (7.344)$$

deb yozib olish mumkin. Agar  $q_i$  koordinata bir marta to'liq finit harakat qilib qaytsa  $S_i$  ning qiymati

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = \oint p_i dq_i = 2\pi I_i \quad (7.345)$$

ga o'zgaradi. Bu sistemada ham «ta'sir-burchak» o'zgaruvchilariga o'tish mumkin.

$$\phi_i = \frac{\partial S_0}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i} \quad (7.346)$$

formula orqali «burchak» o'zgaruvchilari kiritiladi. Yuqoridagi hamma gaplar bu holga ham ko'chiriladi – harakat tenglamalari:

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{\phi}_i = \frac{\partial H(I)}{\partial I_i}, \quad (7.347)$$

ularning yechimlari:

$$I_i = \text{const}, \quad \phi_i = \frac{\partial H(I)}{\partial I_i} t + \text{const} = \omega_i(I)t + \text{const}. \quad (7.348)$$

Ko'rinib turibdiki,  $q_i$  koordinataning to'liq o'zgarishiga mos keluvchi  $\phi_i$  ning  $2\pi$  ga o'zgarishi to'g'ri keladi:

$$\Delta \phi_i = \sum_k \frac{\partial \Delta S_k(q_k, I)}{\partial I_i} = 2\pi \sum_k \frac{\partial I_k}{\partial I_i} = 2\pi. \quad (7.349)$$

Ossillator va rotator misollarida burchak koordinatlaridan dekart koordinatlariga qaytilsa ularning

$$x = Ae^{i\varphi} = Ae^{i\omega t} \quad (7.350)$$

tasavvurga ega bo'lishimizni ko'ramiz (kompleks tasavvurda). Bunday narakatni davriy harakat deyiladi. Hozirgina ko'rdikki, agar finit harakat

uchun o'zgaruvchilar to'liq ajratilsa har bir burchak o'zgaruvchisi davriy bo'lib qolar ekan. Bu degani, agar finit harakatga mos keluvchi biror  $F(p, q)$  funksiya berilgan bo'lsa bu funksiya har bir burchak o'zgaruvchisi bo'yicha davriy bo'ladi (davri  $= 2\pi$ ). Demak, bu funktsiyani fourier-qatoriga yoyish mumkin:

$$F = \sum_{k_1, \dots, k_s} A_{k_1, \dots, k_s} e^{i(k_1\phi_1 + \dots + k_s\phi_s)} = \sum_{k_1, \dots, k_s} A_{k_1, \dots, k_s} e^{i(k_1\omega_1 + \dots + k_s\omega_s)}, \quad (7.351)$$

$k_1, \dots, k_s$  — butun sonlar ( $-\infty$  dan  $+\infty$  gacha).  $A_{k_1, \dots, k_s}$  koeffitsiyentlar  $L_i$  larning funktsiyalaridir. Har bir  $\phi_i$  ning vaqtga bog'liqligi (7.348) bo'yicha aniqlangan. Bu formuladagi chastota  $\omega_i$  larning nisbatlari umumiy holda ratsional sonlar bo'lmagani uchun funksiya ham aniq davriy funksiya bo'lmaydi. Aytmoqchimizki, funksiya  $F$ , faraz qilaylik,  $q_1$  bo'yicha

bir marta to'liq o'zgardi,  $\omega_1 \neq \frac{m}{n}\omega_2, m, n$  — butun son bo'lgani uchun  $q_2$

koordinata bo'yicha sistema boshlang'ich holatga qaytib kelmaydi. Agar, masalan,  $2\omega_1 = 3\omega_2$  bo'lganda edi,  $q_1$  koordinata bo'yicha ikki marta aylanib kelganda  $q_2$  bo'yicha uch marta aylanib, boshlang'ich holatga qaytib kelgan bo'lar edik. Bu holda (ikki o'lichamli sistemamiz) haqiqiy davriy sistema bo'lgan bo'lar edi. Umumiy holda, yuqorida aytganimizdek, chastotalarning nisbatlari ratsional sonlarga teng emas, bunday harakat **shartli-davriy** harakat deyiladi.

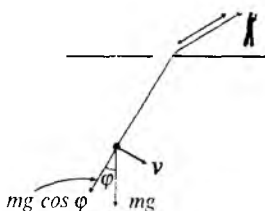
## 7.12. Adiyatik invariantlar

7.4-rasmda ko'rsatilgan mayatnikni olaylik. Mayatnikning chastotasi uning uzunligiga bog'liqligini bilamiz:  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

Faraz qilaylik, uning uzunligi juda sekin o'zgarayotgan bo'lsin. Juda sekin deganini quyidagicha tushuniladi:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \ll \omega. \quad (7.352)$$

$T = 2\pi/\omega$  bo'lgani uchun bu ta'rif bir davr ichida chastotaning o'zgarishi shu chastotaga nisbatan juda kichik son ekanligini bildiradi.



Rasm 6: Uzunligi o'zgaruvchan mayatnik.

Mayatnik tashqi kuch ta'siri ostida bo'lgani uchun uning energiyasi saqlanmaydi. Ammo, shunga qaramasdan, sistemaning parametri  $\omega$  juda sekin — **adiabatik ravishda** — o'zgarayotganligi ma'lum bir saqlanuvchi kattalikning mavjudligiga olib keladi. Bunday kattaliklarning umumiy nomi **adiabatik invariantlardir**.

Yuqoridagi mulohazalar finit harakat qilayotgan ixtiyoriy sistemalar uchun o'rinlidir. Mayatnikning chastotasi o'rniga sistemaning ixtiyoriy qandaydir parametrini ko'z oldiga keltirsak bo'ladi.

Adiabatik invariantlar sifatida avvalgi paragrafda kiritilgan kanonik ta'sir o'zgaruvchilarini olish kerakligini ko'rsataylik. Buning uchun yana mayatnikka qaytib kelaylik. Uning uzunligi sekin o'zgarishi natijasida ustida bajarilgan ishni topaylik. Bu ish ikki qismdan iborat — tortishish kuchi  $mg \cos \varphi$  ga qarshi ish va markazdan qochma kuch  $mv^2/l = ml\dot{\varphi}^2$  ga qarshi ish:

$$A = - \int_l^{l+\Delta l} (mg \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2) dl. \quad (7.353)$$

Shart bo'yicha bir davr ichida  $\Delta l$  juda kichik, shuning uchun bu formulani

$$\bar{A} = - \left( mg \overline{\cos \varphi} + ml \overline{\dot{\varphi}^2} \right) \Delta l \quad (7.354)$$

ko'rinishda olamiz, bu formuladagi ustchiziq bir (g'alayonlanmagan) davr ichidagi o'rtacha qiymatni ifodalaydi. Tebranish burchagi kichik ekanligini hisobga olib  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$  almashtirish bajaraylik:

$$\bar{A} = -mg\Delta l + \left( \frac{1}{2} mg \overline{\varphi^2} - ml \overline{\dot{\varphi}^2} \right) \Delta l = -mg\Delta l + \Delta E. \quad (7.355)$$

Birinchi had muvozanat nuqtasining yuqoriga ko'tarilishiga mos keladi va biz uchun qiziq emas, ikkinchi had esa tebranma harakat energiyasining o'zgarishiga mos keladi. Kichik tebranishlar uchun mayatnikning energiyasi

$$E = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl \varphi^2}{2} \quad (7.356)$$

edi. Ma'lumki, garmonik tebranish uchun  $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$  bo'ladi, bu degani

$$\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} \varphi_0^2, \quad \overline{\dot{\varphi}^2} = \frac{\omega^2}{2} \varphi_0^2. \quad (7.357)$$

Shularni hisobga olib

$$\Delta E = -\frac{1}{4} mg\varphi_0^2 \Delta l, \quad E = \frac{1}{2} mgl\varphi_0^2, \quad (7.358)$$

yoki

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} \quad (7.359)$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan,

$$\frac{\Delta l}{l} = -2 \frac{\Delta \omega}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (7.360)$$

Demak,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \omega}{\omega} \quad (7.361)$$

Bu tenglik integrallansa

$$\frac{E}{\omega} = \text{const} \quad (7.362)$$

munosabatga kelinadi. Hulosa: mayatnik uchun energiya  $E$  va chastota  $\omega$  uning uzunligiga bog'liq, uzunlik o'zgarsa ular o'zgarmasdan qolmaydi, ammo  $E/\omega$  nisbat uzunlik adiabatik o'zgarganda o'zgarmasdan qolar, invariant ekan. Avvalgi paragrafda ko'rgan edikki,  $I = E/\omega$  kattalik mayatnik uchun ta'sir o'zgaruvchisi edi.

Shu xususiy misolda topilgan natija – ta'sir o'zgaruvchisining adiabatik invariantligi – umumiy bo'lib u hamma hollarda to'g'ridir: ta'sir o'zgaruvchisi

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$$

adiabatik invariantdir.

**7.12.1-misol.**  $U(r) = -\alpha/r$  maydondagi harakat uchun ta'sir burchak o'zgaruvchilarini toping.

Gamilton funksiyasi:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{\alpha}{r}. \quad (7.363)$$

(7.10.2) paragrafda ko'rgan edikki, bu holda o'zgaruvchilar ajraladi,  $p_r$  uchun olingan ifoda quyidagicha edi ((7.307) ga qarang):

$$p_r = \frac{dW_1}{dr} = \sqrt{-2m|E| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}, \quad (7.364)$$

$p_\varphi = M$  deb belgilab va ko'rilayotgan maydonda finit harakat energiyasining manfiyligini hisobga olindi. Sistemada ikkita erkinlik darajasi bor —  $r$  va  $\varphi$ . Ularga mos keluvchi ta'sir o'zgaruvchilari:

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = M; \quad (7.365)$$

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{-2m|E| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}} = \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}} - M. \quad (7.366)$$

Oxirgi integralda

$$\oint dr = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr$$

ekanligini hisobga olindi. Energiyani ta'sir o'zgaruvchilari orqali ifodalash mumkin:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}. \quad (7.367)$$

(3.40)-formulalarga nazar tashlansa orbitaning parametri va eksentrisiteti uchun

$$p = \frac{I_\varphi^2}{m\alpha}, \quad e^2 = 1 - \left( \frac{I_\varphi}{I_r + I_\varphi} \right)^2. \quad (7.368)$$

Masalada ikkita parametr bor —  $m$  va  $\alpha$ . Ta'sir o'zgaruvchilarining adiabatik invariantligidan quyidagi hulosaga kelinadi: agar  $\alpha$  va  $m$  sekin o'zgarsa orbita parametri ularga teskari o'zgaradi, eksentrisitet o'zgarmaydi. Energiya  $I_r$  va  $I_\varphi$  lar bo'yicha aynigan, ya'ni ularning yig'indisi o'zgarmasdan har birining o'zi o'zgarsa energiya o'zgarmaydi.

## 7-bobga mashqlar va savollar

1. Quyidagi Lagranj funksiyalariga mos keluvchi Gamilton funksiyalarini toping:

$$a) L = \frac{x\dot{y}}{2} + \ln x; \quad b) L = \frac{m}{2} \sum_{a=1}^n \dot{\mathbf{r}}_a^2 - \frac{m^2}{2\mu} \left( \sum_{a=1}^n \dot{\mathbf{r}}_a \right)^2;$$

$$c) L = \frac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 + x; \quad d) L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x}; \quad e) L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + x\dot{y} - y\dot{x};$$

$$f) L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \theta) - mgr \cos \theta.$$

2. Quyidagi Lagranj funksiyasi uchun Gamilton funksiyasini toping:

$$L = \frac{1}{2} m \left( \dot{\mathbf{r}} + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}] \right)^2 - U(\mathbf{r})$$

3. Avvalgi misol uchun Gamilton tenglamalarini tuzing.

4. Eylor burchaklari  $\theta, \varphi, \psi$  ni umumlashgan koordinatlar sifatida olib simmetrik pirildoq uchun Gamilton funksiyasini toping.

5. Tashqi maydondagi zarrachaning Gamilton funksiyasini sferik va silindrik sistemalarda toping.

6. Sistemaning Gamilton funksiyasi sistemaning bir butunligicha cheksiz kichik siljishida o'zgarmasligidan impulsning saqlanish qonunini kelib chiqishini ko'rsating.

7. Sistemaning Gamilton funksiyasi sistemaning bir butunligicha cheksiz kichik buralishida o'zgarmasligidan impuls momentining saqlanish qonunini keltirib chiqaring.

8. Quyidagi Gamilton funksiyasiga mos keluvchi Lagranj funksiyasini toping:

$$H = \frac{p_r^2}{2\theta^2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2 \sin \theta} + r.$$

9. Og'ir simmetrik pirildoq uchun Raus funksiyasini tuzing.

10. Quyidagi Puasson qavslarini hisoblang:

$$a) \{M_i, r_j\}; \quad b) \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\}$$

$$c) \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{M}\}; \quad d) \{\mathbf{M}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}\};$$

$$e) \{\mathbf{p}, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2\}; \quad f) \{r_i, \mathbf{M}^2\};$$



$$g)\{p_i, \mathbf{M}^2\}; \quad h)\{p_i, \mathbf{P}^2\}; \quad i)\{r_i, r^n\}.$$

11.  $U = -\alpha/r$  maydonda  $\mathbf{M}$  saqlanuvchan kattalik ekanligini Puasson qavslarini ishlatib ko'rsating.

12. 3-bobdagi (3.3)-misolda kiritilgan Laplas vektori  $\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$  ning harakat integrali ekanligini Puasson qavslari orqali isbot qiling.

13.  $F_2(q, P) = q^2 e^P$  hosil qiluvchi funksiya olib keladigan kanonik almashtirishlarga olib keladigan  $F_4(p, Q)$  hosil qiluvchi funksiyani toping.

14.  $F_2(q, P) = q \ln P$  hosil qiluvchi funksiya bajaradigan kanonik almashtirishlarni toping.

15. Jismning tashqi tortish maydonidagi Gamilton funksiyasi

$H = \frac{p^2}{2m} + mgx$  hosil qiluvchi funksiya  $F_2(x, P) = xP - mgxt$  ga mos keluvchi kanonik almashtirishdan keyin qanday ko'rinishni oladi?

16.  $F_2(q, P) = \sum_{i=1}^n f_i(q, t) P_i$  funksiya yordamida bajarilgan almashtirish

$f_i(q, t)$  funksiya bo'yicha chiziqli bo'lganda kanonik ekanligini isbot qiling.

17. Lagranj funksiyasi  $L(q, \dot{q}, t)$  ni  $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$  ga almashtirish, bunda  $f(q, t)$  - ixtiyoriy funksiya, harakat tenglamalarini o'zgartirmas edi. Ushbu almashtirish kanonik almashtirish ekanligini ko'rsating va unga mos keluvchi hosil qilish funksiyasini toping.

### 8.1. Uzliksizlik tenglamasi

Suyuqlik va gazlarning mexanik harakatini o'rganganda ularni tutash muhit sifatida ko'riladi. Jismlar mexanikasida «moddiy nuqta» tushunchasi qanday ro'l o'ynagan bo'lsa gidrodinamikada «suyuqlik nuqtasi», «suyuqlik zarrachasi» tushunchalari shunday rol o'ynaydi. Suyuqlik nuqtasi deganda shunday kichik hajmdagi suyuqlikka aytiladiki, bu hajm ko'rilayotgan masalaning masshtabiga nisbatan juda kichik bo'lishi kerak. Shu bilan birga, bu hajmning ichidagi molekularlar soni uni tutash muhit deyishimizga yetarli bo'lgan darajada katta bo'lishi kerak. Ya'ni, suyuqlik nuqtasi suyuqlikning shu darajada kichik elementiki, uni geometrik tomondan bir nuqta sifatida ko'rish mumkin, shu boisdan uning koordinatalari bor —  $x, y, z$ , fizik tomondan esa bu elementning ichida molekularlarning soni juda katta bo'lishi kerak.

Gapimizga illyustatsiya keltiraylik. Normal sharoitda havoning  $1\text{sm}^3$  hajmida  $2.7 \cdot 10^{19}$  ta molekula bor. Agar tomonlari  $0,1\text{mm}$  bo'lgan hajmni olinsa (uni albatta, nuqta deb ko'rish mumkin!) uning ichida  $27 \cdot 10^{13}$  ta molekula bo'ladi. Suyuqliklarda bir kub santimetrning ichida yanada ko'proq molekular bo'ladi —  $10^{22}$ , yana tomonlari  $0,1\text{mm}$  bo'lgan hajm qaralsa uning ichida  $\sim 10^{16}$  ta molekular bo'ladi.

Uzliksiz muhit haqida gap ketar ekan uning zichligi bor —  $\rho(x, y, z, t)$ . Harakat haqida gapirilganda suyuqlik tezligini kiritish kerak —  $v(x, y, z, t)$ .

Bu tezlik suyuqlikning  $x, y, z$  koordinatali nuqtasidan  $t$  vaqt momentida o'tayotgan suyuqlik zarrachasining tezligidir. Vaqt o'tishi bilan bu zarracha boshqa nuqtaga oqib ketadi, lekin ixtiyoriy boshqa vaqt momentida ham  $v(x, y, z, t)$  tezlik yana o'sha  $x, y, z$  nuqtaga boshqa  $t'$  vaqt momentida yetib kelgan suyuqlik zarrachasining tezligini bildiradi.

Bu kattaliklar sistemasiga suyuqlik (gaz)ning bosimini ham kiritish kerak, chunki muhit ichidagi bosim har xil nuqtalarda har xil bo'lsa bosim yuqori nuqtadan bosim past nuqtaga suyuqlik oqimi paydo bo'ladi. Demak, suyuqlikning mexanik harakatini o'rganish uchun unga taalluqli bo'lgan beshta kattalik uchun — zichlik  $\rho$ , bosim  $p$  va

tezlik  $v$  – tenglamalar topish kerak ekan. Shularning biri – uzliksizlik tenglamasidir. U quyidagicha keltirib chiqariladi.

Ixtiyoriy bir hajm  $V$  ni olamiz. Zichlikning ta’rifi bo‘yicha  $\int_V \rho dV$  integral  $V$  hajm ichidagi modda miqdorini beradi. Shunga ko‘ra,

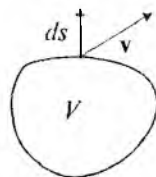
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (8.1)$$

shu hajm ichidagi modda miqdorining o‘zgarish tezligini beradi.

Hajm ichidagi suyuqlik miqdori suyuqlik unga oqib kirsya yoki oqib chiqib ketsa o‘zgaradi. Oqim zichligini – birlik vaqt ichida birlik sirtqan o‘tgan modda miqdorini – quyidagicha ta’riflaylik:  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ . Demak,

$$-\oint_S ds \cdot \mathbf{j} \quad (8.2)$$

integral  $v$  hajmni o‘z ichiga olgan sirt  $s$  orqali suyuqlik oqimi tezligini ko‘rsatadi. Minus ishorasiga ahamiyat beraylik 8.1-rasmga qaralsa sirtga normal vektor va oqim vektori  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  orasidagi burchak o‘tkir bo‘lsa (ya’ni, suyuqlik hajmqan oqib chiqib ketayotgan bo‘lsa) (8.2) integral manfiy bo‘ladi, aks holda u musbat bo‘ladi. Haqiqatan ham,  $d\mathbf{S}$  va  $\mathbf{V}$  orasidagi burchak o‘tmas bo‘lishi hajmga kirib kelayotgan suyuqlikga mos keladi. Shularni hisobga olib  $V$  hajm uchun modda balansi tenglamasini yozamiz:



8.1-rasm:  
**Ixtiyoriy hajm, sirt elementi va oqim tezligi.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho = - \oint_S ds \cdot \mathbf{j} \quad (8.3)$$

Tenglamaning o‘ng tomoniga Gauss teoremasi qo‘llanilsa

$$\int_V dV \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right) = 0 \quad (8.4)$$

tenglikka kelinadi. Bu tenglikning ixtiyoriy  $V$  hajm uchun bajarilishi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (8.5)$$

bo'lishi kerakligiga olib keladi. Hosil bo'lgan tenglamaning nomi – **uzliksizlik tenglamasi**.

Boshida aytilganidek, suyuqlik deganda ham suyuqliklar, ham gazlar tushuniladi. Suyuqliklar (gazlar emas) oddiy sharoitda siqilmaslik xossasiga ega. Ular uchun  $\rho = const$  deb qabul qilish mumkin. Bunday suyuqlik **siqilmaydigan suyuqlik** deyiladi. Keyin ko'rsatamizki, zichlikning o'zgarishi harakat tezligining tovush tezligiga nisbatining kvadratiga proporsional bo'ladi, suyuqliklar uchun bu nisbat juda kichik sonidir. Ya'ni, suyuqliklarni odatda siqilmaydigan muhit sifatida ko'rish mumkin. Gazlarda harakat tezligi tovush tezligiga yaqin va hatto undan yuqori ham bo'lishi mumkin, bunday harakatlarni o'rgangandagina zichlikning konstanta emasligini hisobga olish kerak. Siqilmaydigan suyuqlik uchun uzliksizlik tenglamasi

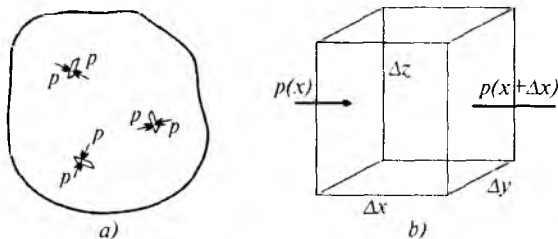
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (8.6)$$

ko'rinishni oladi.

## 8.2. Eyler tenglamasi

Tajriba shuni ko'rsatadiki, suyuqlik elementi unga qo'yilgan hatto eng kichik kuch (bosim) ostida ham harakat qila boshlaydi. Suyuqlikning ichidagi ixtiyoriy sirt olinsa bosim unga perpendikular yo'nalgan bo'ladi. Bulardan xulosa shuki, muvozanatda turgan suyuqlikdagi ixtiyoriy sirt elementiga ikki tomondan ta'sir qilqyotgan bosimlar muvozzantda turibdi (8.2-a rasmga qarang). Bunday xossa bosimning izotropligi deyiladi.

Bosim – sirt birligiga perpendikular yo'nalishda ta'sir qilayotgan kuch. Suyuqlik ichida kichik parallelogramm olaylik (8.2-b rasmga qarang) (bu parallelogramm «suyuqlik nuqtasini» birinchi yaqinlashuvda ifodalasin). Shu parallelogrammning  $x$  va  $x+\Delta x$  sirtlari orasidagi tashqi bosimning o'zgarishini hisoblaylik:



8.2-rasm : a) bosimning izotropligi;  
b) bosim kuchini topishga oid.

$$p(x) - p(x + \Delta x) = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x. \quad (8.7)$$

Bosimning bu o'zgarishini u ta'sir qilayotgan sirt elementiga ko'paytirilsa, parallelogrammga  $x$  yo'nalishda ta'sir qilayotgan kuchni topgan bo'lamiz:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta V. \quad (8.8)$$

Shu mulohazalarni  $y$  va  $z$  o'qlariga ham qo'llanilsa,  $\Delta V$  hajmli suyuqlik nuqtasiga ta'sir qilayotgan kuchni topgan bo'lamiz:

$$-\nabla p \Delta V. \quad (8.9)$$

Demak, chekli  $V$  hajm uchun bosim o'zgarishi orqali ta'sir qilayotgan kuch

$$-\int dV \nabla p \quad (8.10)$$

ko'rinishga ega. Bosim kuchining zichligini topdik:  $-\Delta p$ . Agar bosim gradiyentidan tashqari kuchlar bo'lsa ularning zichligini umumiy  $\mathbf{f}$  harfi bilan belgilaymiz. Harakat tenglamasini tuzish uchun massa zichligining tezlanishga ko'paytmasini kuch zichligiga tenglashtirish kerak:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (8.11)$$

Bu tenglamada  $\mathbf{v}$  tezlik harakat qilayotgan suyuqlik zarrachasining tezligi, u ikki sababdan o'zgaradi — fazoda ma'lum trayektoriya bo'yicha harakat qilishi natijasida (trayektoriyaning har xil nuqtalarida uning qiymati har xil bo'lishi mumkin) va vaqt o'tishi bilan. Tezlikning vaqt bo'yicha to'liq orttirmasi:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t). \quad (8.12)$$

Bu orttirmani hisoblash uchun birinchidan  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  ni Teylor qatoriga yoyishimiz kerak:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta t \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}(t) + \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)). \quad (8.13)$$

Bu bilan biz trayektoriyaning  $\Delta t$  vaqt ichida qancha o'zgargani topdik. Tezlikka qaytaylik:

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}(\mathbf{r}(t+\Delta t), t+\Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) = \\ & = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t) + \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)), t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \Delta t. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Natijada quyidagi **Eyler tenglamasiga** kelamiz:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (8.15)$$

Eyler tenglamasi o'zining sodda ko'rinishiga qaramasdan ko'pgina murakkab fizikaviy jarayonlarni ifodalaydi.

Agar suyuqlik tashqi gravitatsion maydonda bo'lsa  $\mathbf{f} = \mathbf{g}\rho$  deb olish kerak:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (8.16)$$

Bosim gradiyentining oldidagi minus ishorasi suyuqlik bosim yuqori nuqtadan bosim kichikroq nuqta tomonga harakat qilishini bildiradi.

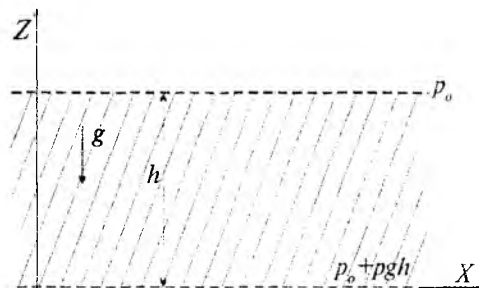
### 8.3. Hidrostatika

Eyler tenglamasini o'rganishni eng sodda hol — suyuqlik gravitatsion maydonda qimirlamay turgan holdan boshlaylik.

Bu holda tezlik nolga teng va Eyler tenglamasi keskin soddlashadi:

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (8.17)$$

Koordinat o'qlarini 8.3-rasmdagidek chizilsa, bosim uchun  $x$  va  $y$  yo'nalishlarda



8.3-rasm. Statik hol ( $y$  o'qi tekislikka perpendikular).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

tenglamalar olinadi. Ya'ni, bu yo'nalishlarda bosim o'zgarmas bo'ladi:  $p = \text{const}$ .  $z$  yo'nalishda esa

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \quad (8.18)$$

ekanligini topamiz (vektor  $\mathbf{g}$  ning komponentalari:  $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$ ). Integrallash doimiysini  $p_0$  deb belgilasak

$$p(z) = p_0 - \rho g z \quad (8.19)$$

yechim topiladi. Demak,  $z$  balandlikka ko'tarilganida suyuqlik (gaz) bosimi  $\rho g z$  qiymatga kamayar ekan. Boshqacha aytganda,  $p + \rho g z$  kombinatsiya bu hol uchun Eyler tenglamasining harakat integrali ekan.

Bu mulohazalarda balandlik o'zgaranda ham zichlik  $\rho$  o'zgarmasdan qoladi deb oldik. Haqiqatda, ayniqsa gazlarni olganda, bu faraz to'g'ri emas, gazning holat tenglamasidan uning bosimi pasaysa (temperaturasi o'zgarmanda) zichligi ham kamayishi kelib chiqadi. Ammo bu farq gazlarning yetarli darajadagi katta massivlari uchun-gina sezilarli bo'lgani uchun yuqoridagi formula balandliklar katta bo'lmaganda yaxshi aniqlikda ishlaydigan formula deb hisoblanishi mumkin.

#### 8.4. Bernulli qonuni

Eyler tenglamasidagi  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  hadni vektor algebrasi yordamida maqsadga muvofiq bo'lgan ko'rinishga keltiraylik:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]. \quad (8.20)$$

Undan tashqari gravitatsion maydonni potensial orqali ifodalab olaylik:  $\mathbf{g} = -\Delta\varphi$ . Natijada Eyler tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = -\frac{1}{2} \nabla v^2 - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi. \quad (8.21)$$

Har bir suyuqlik nuqtasi o'zining oqim chizig'iga ega, bu — shu suyuqlik zarrasining trayektoriyasidir. Har bir suyuqlik zarrasining tezligi

oqim chizig'ining mos kelgan nuqtasida urinma bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Tezlik vektori vektor maydonni hosil qiladi (magnitostatik va elektrostatik maydonlarni eslab ko'ring).

Statsionar oqimni ko'raylik. Statsionar oqim shunday oqimki, unda tezliklar vaqtga bog'liq bo'lmaydi, faqat koordinatlarga:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ . Ya'ni, oqim chiziqlarining hech qaysisi vaqt o'tishi bilan o'zgar olmaydi. Ma'lum bir suyuqlik zarrachasining ma'lum bir  $(x, y, z)$  nuqtadagi tezligi  $\mathbf{v}(x, y, z)$  bo'lsa shu nuqtaga boshqa vaqt momentida yetib kelgan boshqa zarrachaning tezligi ham huddi o'sha bo'ladi. Albatta, har bir suyuqlik zarrachasining tezligi vaqt o'tishi bilan o'zgarib boradi, ammo shu zarrachaning o'rniga kelayotgan zarrachaning tezligi ham huddi shu tartibda o'zgaradi.

Yana suyuqlikni siqilmaydigan deb olamiz:  $p = \text{const}$  (8.21) ni chap tomondan  $\mathbf{v}$  ga skalar ravishda ko'paytiraylik. Natijada

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = 0 \quad (8.22)$$

tenglama hosil bo'ladi. Qavs ichidagi kattalik statsionar oqim uchun Eylar tenglamasining birinchi integralidir.

Bu tenglamadagi  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  operator tezlik  $\mathbf{v}$  yo'nalishi bo'yicha olingan hosila operatoridir, demak, oqim chiziqlari ustid  $a$  qavs ichidagi kattalik o'zgar mas ekan:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const.} \quad (8.23)$$

Umuman, ushbu const har bir oqim chizig'i uchun o'z qiymatiga ega. Agar rot  $\mathbf{v} = 0$  bo'lganda edi (8.21) tenglamadan

$$\nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = 0 \quad (8.24)$$

munosabatga kelgan bo'lar edik, bu esa yana (8.23) natijani berar edi, ammo, bu holda yuqoridagi const hamma chiziqlar uchun bir xil qiymatga ega bo'lgan bo'lar edi.

(8.23) munosabat **Bernulli teoremasi** deyiladi. Uning ma'nosi sodda. Zichlikning o'zgar masligini hisobga olib uni

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi + p = \text{const} \quad (8.25)$$



ko‘rinishga keltirib olinadi. Bu yerda birinchi had – suyuqlik zarrachasining kinetik energiya zichligi, ikkinchi had – tashqi gravitatsion maydondagi potensial energiya zichligi va uchinchi had – termodinamika qonunlari bo‘yicha ichki energiya zichligidir. Demak, Bernulli teoremasi energiyaning saqlanish qonunining bir ko‘rinishi ekan.

### 8.5. Tezlik sirkulatsiyasi

Tezlikdan yopiq kontur bo‘yicha olingan integral

$$\text{Sirkulatsiya} = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.26)$$

tezlikning shu kontur bo‘yicha sirkulatsiyasi deyiladi. Stoks teoremasi bo‘yicha

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{v}, \quad (8.27)$$

bunda  $S$  – yopiq kontur  $L$  bilan chegaralangan sirt. Tezlikning rotori Eyler tenglamasining (8.21) ko‘rinishida ham paydo bo‘lgan edi. Shu rotorni alohida belgilab olaylik:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}. \quad (8.28)$$

Bu yangi kattalikning fizik ma‘nosini tushunish maqsadida biror o‘q atrofida  $\omega$  burchak tezligi bilan aylanayotgan qattiq jismni ko‘raylik. Ushbu jismning ixtiyoriy  $\mathbf{r}$  nuqtasining chiziqli va burchak tezliklari quyidagicha bog‘langan edi:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]. \quad (8.29)$$

Tezlikning rotorini topaylik:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}. \quad (8.30)$$

Demak,  $\boldsymbol{\Omega}$  ning noldan farqliligi shu zarrachaning ma‘lum bir o‘q atrofida  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}$  burchak tezlik bilan aylanayotganini anglatadi. Darhaqiqat, (8.27) formula shu talqinga mosdir.

$\boldsymbol{\Omega}$ . odatda, **buramalilik** deyiladi<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Ruschasi — завихренность.

Eyler tenglamasini faqat sirkulatsiya va tezliklar tilida ham yozib olish mumkin. Buning uchun (8.15) ikki tomonining rotorini hisoblaylik. Natija:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + [\nabla[\mathbf{v}\Omega]] = 0. \quad (8.31)$$

Bu tenglamaga quyidagilarni qo'shilsa to'liq sistema olinadi:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \Omega = [\nabla \mathbf{v}]. \quad (8.32)$$

Olingan tenglamalar sistemasiga bosim va zichliklar kirmadi.

Bu tenglamalar ideal suyuqlikning harakatini o'rganish masalasini to'liq yechadi – bizga tezlik  $\mathbf{v}$  ma'lum bo'lsa (8.31) tenglamadan  $\Omega$  ni topamiz, topilgan  $\Omega$  asosida (8.32) tenglamalardan  $\mathbf{v}$  ni topiladi va h.k. (8.32) tenglamalarni yechish yo'li ma'lum, magnitostatikani eslaylik:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [\nabla \mathbf{B}] = 4\pi \mathbf{j}/c.$$

Magnitostatikada berilgan tok bo'yicha magnit maydonni topish masalasi gidrodinamikada berilgan buramalik orqali tezlikni topish masalasi bilan bir xil ekan.

(8.28) ta'rifdan ko'rinib turibdiki hamma vaqt

$$\nabla \cdot \Omega = 0. \quad (8.33)$$

Demak,  $\Omega$  ning kuch chiziqlari hech qayerda boshlanmas va hech qayerda tugamas ekan.

Faraz qilaylik, biror vaqt momentida fazoning hamma nuqtalarida  $\Omega = 0$  bo'lsin. Bu degani,  $\partial \Omega / \partial t = 0$  ham bo'lishi kerak. Keyingi vaqt momenti  $t + \Delta t$  ga o'tilsa (8.31) bo'yicha ba'ri bir  $\Omega = 0$  va  $\partial \Omega / \partial t = 0$  ekan. Bu degani, agar vaqtning boshida buramalik nolga teng bo'lsa u hech qanday yo'l bilan paydo bo'la olmaydi (ideal suyuqlik uchun). Bu holda suyuqlik tezliklarining maydonini topish uchun

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad [\nabla \mathbf{v}] = 0 \quad (8.34)$$

tenglamalar sistemasini qo'llash yetarlidir. Bu holni zaryadlar va toklar bo'lmagan holdagi elektrostatika ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, [\nabla \mathbf{E}] = 0$ ) va magnitostatika

( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, [\nabla \mathbf{B}] = 0$ ) tenglamalari bilan solishtirish mumkin.

Fazoning hamma nuqtasida rot  $\mathbf{v} = 0$  bo'lgan oqim *potensial* (yoki, *buramasiz*) oqim deyiladi. Potensial oqim uchun tezlik sirkulatsiyasi

aynan nolga teng:

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{v} = 0. \quad (8.35)$$

Suyuqlik ichida bir yopiq kontur olaylik. Konturining ustidagi suyuqlik nuqtalari vaqt o'tishi bilan siljib boradi, ular bilan birga kontur ham harakatda bo'ladi.

Shu kontur bo'yicha olingan sirkulatsiyaning o'zgarishidan qolishi isbot qilylik. Sirkulatsiyadan vaqt bo'yicha hosila oliganda nafaqat kontur ustidagi suyuqlik zarrachalarining tezliklarining, balki harakatdagi kontur nuqtalarining ham vaqt bo'yicha o'zgarishini hisobga olish kerak:

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{v} \cdot d \frac{d\mathbf{l}}{dt}. \quad (8.36)$$

$d\mathbf{l}$  element shu elementning bosh va oxirgi nuqtalarining radius-vektorlarining ayirmasidir, undan vaqt bo'yicha hosila tezlikning o'zidir. Ikkinchi had to'liq differensialdan olingan integral ko'rinishiga keltiriladi, kontur yopiqligini hisobga olinsa u nolga tengdir:

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint_L d(v^2) = 0. \quad (8.37)$$

Eyler tenglamasini hisobga olib birinchi hadni ham to'liq differensialdan yopiq kontur bo'yicha integral ko'rinishiga keltirib olamiz (yana bir eslataylik,  $\rho = \text{const}$  holni ko'ryapmiz), va, demak, u ham nolga teng bo'ladi:

$$\oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{\rho} \oint_L \nabla p \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{\rho} \oint_L dp = 0. \quad (8.38)$$

Demak,

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (8.39)$$

yoki

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} \quad (8.40)$$

ekan. Bu natija sirkulatsiyaning saqlanish qonuni deyiladi.

## 8.6. Tezlik potentsiali

Oqimning potentsiallik sharti

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \quad (8.41)$$

ni quyidagicha yechish mumkin:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (8.42)$$

Kiritilgan kattalik  $\varphi$  tezlik potentsiali deyiladi. Agar (8.21) tenglamaga bu ta'rif kiritilsa tenglama

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (8.43)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning birinchi integrali:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (8.44)$$

Agar  $\varphi$  vaqtga bog'liq bo'lmasa (statsionar oqim) o'ng tomondagi  $f(t)$  ni constantaga almashtirish mumkin:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (8.45)$$

Biz yana Bernulli teoremasiga qaytdik – (8.25) formula bilan solishtiring.

## 8.7. Impuls oqimi zichligi tenzori

Zichlikning tezlikka ko'paytmasi  $\rho \mathbf{v}$  impulsning zichligi ma'no-siga ega, ikkinchi tomondan u bir sekundda birlik sirdan oqib o'tgan modda miqdorini bildiradi. Suyuqlikning harakat tenglamasini shu impuls zichligi tiliga o'tkazaylik, bu ishqalanuvchi suyuqlik tenglamasini olishda yordam beradi. Shu maqsadda (8.5) va (8.15) tenglamalardan foydalanib  $\rho \mathbf{v}$  ning vaqt bo'yicha hosilasini hisoblaylik:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -\mathbf{v} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) + \rho \left( -\frac{\nabla p}{\rho} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p - \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (8.46)$$

Bu tenglamani kerakli ko'rinishga keltirish uchun **impuls oqimi zichligi tenzori** degan kattalikni kiritaylik:

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j. \quad (8.47)$$

Kiritilgan kattalik tilida yuqoridagi tenglama

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x^j} \quad (8.48)$$

ko'rinishni oladi. Chap tomonda impuls zichligidan vaqt bo'yicha hosila kirgan, bu – birlik hajmdagi suyuqlikka ta'sir qilayotgan kuch, agar undan hajm bo'yicha integral olinsa shu hajm ichidagi suyuqlikka ta'sir qilayotgan kuch olinadi.

Ikkinchi tomondan, u mana shu hajm ichidagi suyuqlik impulsining bir sekunddagi o'zgarishini beradi. O'ng tomonga Gauss teoremasini qo'llanilsa mana shu hajmni o'z ichiga olgan yopiq sirt orqali  $\Pi_{ij}$  tenzorining oqimi topilgan bo'linadi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho v_i = - \int_V dV \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x^j} = - \oint_S dS^j \Pi_{ij}. \quad (8.49)$$

$\Pi_{ij}$  ga kirgan birinchi had bosim  $p$  edi. Ma'lumki, bosimning sirt elementi  $dS^j$  ga ko'paytmasi shu sirt elementiga ta'sir qilayotgan bosim kuchini beradi. Bizning holimizda  $dS^j \delta_{ij} = p dS^j$  –  $i$ -sirtga bosim orqali ta'sir qilayotgan kuch.

Kuchning bu qismi faqat suyuqlikning bosimi bilan bog'liq bo'lsa, uning ikkinchi qismi –  $dS^j \rho v_i v_j$  – o'zining ma'nosi bo'yicha birlik vaqt ichida  $dS^j$  sirtidan suyuqlikning harakati natijasida oqib o'tgan impulsni berishi kerak. Shuning uchun  $\Pi_{ij}$  tenzor impuls oqimi zichligi tenzori deyiladi.

Uning ma'nosini yanada aniqroq tushunish uchun sirt elementini shu sirtga perpendikular bo'lgan birlik vektor orqali belgilab olaylik:  $dS^j = n^j dS$ , bunda  $dS$  – shu sirt elementi yuzasi. Unda  $dS^j \rho v_i v_j$  ko'paytmani vektor ko'rinishda ( $dS$  ni yozmay turib) quyidagicha ifodalashimiz mumkin:

$$\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \quad (8.50)$$

Agar  $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$  bo'lsa bu ifoda nolga teng bo'ladi, demak,  $\rho dS^j \rho v_i v_j$  oqimning sirtga perpendikular ( $\mathbf{n}$  ga parallel!) qisminigina o'z ichiga olgan.

Oqim tezligiga perpendikular sirt orqali impuls zichligi oqimi faqat bosim  $p$  ga teng bo'ladi.

## 8.8. Yopishqoq suyuqlik

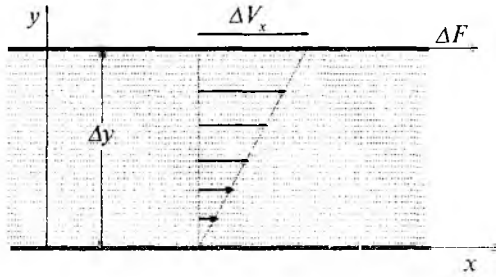
Ideal suyuqlikning ichida suyuqlik qatlamlari bir-biriga ishqalanmasdan oqadi, ular orasida o'zaro impuls almashinish bo'lmaydi. Impuls faqatgina mexanik harakat natijasidagina bir nuqtadan ikkinchisiga uzatiladi. Haqiqiy suyuqliklarda albatta, bunday emas — ularning bir-biriga nisbatan harakat qilayotgan qatlamlari orasidagi ishqalanish natijasida impuls qiymati baland nuqtadan qiymati past nuqtaga uzatiladi. Bunday jarayonlar fizikada dissipativ jarayonlar deyiladi.

Ideal suyuqlik uchun olingan tenglamalarni ishqalanish bo'lgan holga moslab o'zgartiraylik. Ideal va yopishqoq suyuqliklar orasidagi katta farq chegaraviy shartlarda namoyon bo'ladi — qattiq jism bilan chegarada ideal suyuqlik tezligining normal komponentasi  $v_n$  nolga tenglashtirishi kerak. Tezlikning tangensial (sirtga parallel) komponentasiga hech qanday shart qo'yilmaydi — suyuqlik ideal ekan u sirtga ishqalanmasdan, unga yopishmasdan harakat qilishi kerak. Eyler tenglamasidan ham chegaraviy shart bitta bo'lishi kerakligi kelib chiqadi — tenglama birinchi tartibga ega.

Yopishqoq suyuqliklarga o'tish uchun quyidagi fundamental tajribaviy dalilga asoslanishimiz kerak — haqiqiy suyuqlik qattiq jism sirtiga yopishish xossasiga ega. Ya'ni, chegaraviy shartlar bu holda ikkita bo'lishi kerak — tezlikning normal va tangensial komponentalari qattiq jism sirtida nolga teng bo'lishi kerak:  $v_n=0$ ,  $v_t=0$ .

Suyuqlik qattiq jism sirtiga yopishar ekan boshida qo'zg'almasdan turgan qattiq jism harakatlana boshlasa (tashqi kuch ta'sirida) suyuqlikning shu sirtga yopishgan qatlami ham shu jismning tezligi bilan harakat qila boshlashi kerak. O'zaro ishqalanish oqibatida suyuqlikning qo'shni qatlamlariga ham impuls uzatila boshlanadi va ular ham harakatga keladi 8.4-rasmga qaraylik. Bu rasmda ikkita parallel plastinalar orasidagi oqim ko'rsatilgan. Pastgi plastina qo'zg'almasdan turibdi, yuqoridagi plastinaga ( $x$ -oqi yo'nalishida)  $\Delta F$  kuch qo'yilgan, shu kuch ta'sirida plastina  $\Delta v_x$  tezlik bilan harakat qilayapti, suyuqlikning eng yuqori qatlami esa ishqalanish natijasida shu sirtga ergashib aynan o'sha tezlik bilan harakat qiladi.

$\Delta F$  qancha katta bo'lsa  $\Delta v_x$  ham shuncha katta bo'ladi, ya'ni ular o'zaro proporsionaldir. Ikkinchi tomondan, plastinalar orasidagi masofa  $\Delta y$  qancha katta bo'lsa, plastina o'zgarimas tezlik bilan harakat qilishi uchun shuncha kam kuch kerak bo'ladi, ya'ni  $\Delta F$  va  $\Delta y$  o'zaro teskari



8.4-rasm. Ikki parallel plastina orasidagi oqim.

proporsionaldir. Undan tashqari, plastina sirti  $\Delta S$  qancha katta bo'lsa plastinani berilgan tezlik bilan harakatlantirishga shuncha ko'p kuch kerak. Shularning hammasini hisobga olib, quyidagi munosabatga kelamiz:

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \quad (8.51)$$

Bunda paydo bo'lgan proporsionallik koeffitsiyenti  $\eta$  – **ishqalanish koeffitsiyenti** deyiladi. Chap tomondagi kattalik kuchning sirt zichligi. Cheksiz kichiklarga o'tib ko'rilayotgan holda

$$\text{kuchning sirt zichligi} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (8.52)$$

ekanligini topamiz.

Endi shu natijani umumlashtiraylik. Asosiy xulosa shundan iborat bo'ldiki, ishqalanish kuchi tezliklarning gradiyentlariga proporsional ekan, agar misoldagi plastinalarni  $x$ ,  $y$  va  $z$  o'qlariga nisbatan har xil qilib joylashtirilsa (8.52) dagi hosilani

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

larning kombinatsiyasiga almashtirish kerak bo'ladi. Qidirayotgan kattalik kuch zichligi sifatida impuls oqimi zichligi tenzori (8.47) ga qo'shilishi kerak. Unga kiruvchi tezliklarning hosilalaridan tuzilgan kombinatsiya quyidagi ko'rinishda tanlab olinadi:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \quad (8.53)$$

Uning bunday simmetrik ko'rinishi quyudagi misol bilan asoslanadi – o'zgarmas  $\omega$  burchak tezlik bilan aylanayotgan silindrik formadagi suv massivini olaylik. Uni silindrik qatlamlarga bo'lib chiqilsa bu qatlamlar bir-biriga nisbatan harakat qilmaydi. Demak, bu qatlamlar orasida ishqalanish bo'lmaydi. Yuqoridagi simmetrik forma huddi shu xossaga mos keladi. Buni ko'rish uchun  $\omega$  burchak tezlikli silindirdagi  $r$  nuqta tezligi uchun

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}] \quad (8.54)$$

formuladan foydalanib yuqoridagi kombinatsiyani hisoblaylik:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} = \varepsilon_{ijk} \omega_k + \varepsilon_{ijk} \omega_k = 0. \quad (8.55)$$

Hosil bo'lgan simmetrik tenzorni quyidagi ko'rinishga keltirib olinadi:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (8.56)$$

Bu ifodaning birinchi qismining izi nolga teng:

$$\delta_{ij} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = 2 \operatorname{div} \mathbf{v} - 2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Simmetrik tenzorning izsiz va birlik tenzor ko'rinishidagi qismlari koordinat almashtirishlarida faqat o'z- o'zi orqaligina almashingani uchun ularni har xil koeffitsiyentlar bilan oldik. Odatda,  $\eta$  – (birinchi) ishqalanish koeffitsiyenti,  $\zeta$  esa – ikkinchi ishqalanish koeffitsiyenti deyiladi. Keltirib chiqarish bo'yicha bu koeffitsiyentlar tezliklarga bog'liq emas. Ammo ular umumiy holda temperatura va bosimning funksiyalari bo'lishi mumkin. Ularning ikkalasi ham musbatdir:

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0. \quad (8.57)$$

Topilgan tenzor ishqalanish orqali paydo bo'ladigan kuch zichligini ifodalaydi, shu sababli uni kuch zichligi umumiy tenzori  $\Pi_{ij}$  ga qo'shib qo'yiladi ((8.49) tenglamaning o'ng tomoniga  $\Pi_{ij}$  minus ishora bilan kirgani uchun  $\sigma'_{ij}$  ning ham ishorasi minus bilan olingun):

$$\Pi_{ij} = p \delta_{ij} - \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j \quad (8.58)$$

Oxirgi tenglikdan keyingi ifoda orqali kuchlanganlik tenzorini ikki



qismga bo'landi — bosim va ishqalanish orqali suyuqlik ichidagi paydo bo'ladigan impuls oqimi

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}, \quad (8.59)$$

va impuls zichligi oqimining suyuqlikning zarralari bilan birga ko'chadigan qismiga bo'landi.

$$\rho v_i v_j \quad (8.60)$$

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqliklar uchun kuchlanganlik tenzori

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \quad (8.61)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bunday suyuqliklar ko'pincha **Nyuton suyuqliklari** deyiladi. Deyarli hamma suyuqliklar uchun bu qonun o'rinlidir, bu qonunga bo'ysunmaydigan suyuqliklar uchun kuch tenzorini topish murakkab masala hisoblanadi.

Yopishqoq suyuqlik harakat tenglamasini keltirib chiqarish uchun umumiy ko'rinishdagi harakat tenglamasi (8.49) ga (8.58) ni qo'yamiz ( $\eta$  va  $\zeta$  koeffitsiyentlarini o'zgarimas deb qaraymiz) va uzliksizlik tenglamasi hisobga olamiz:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (8.62)$$

Bu tenglamaning nomi **Naviye—Stoks tenglamasi**. Agar siqilmaydigan suyuqlik haqida gap ketayotgan bo'lsa oxirgi hadni tashlab yuborish mumkin:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (8.63)$$

Bu yerda **kinematik yopishqoqlik** deyiladigan  $\nu = \eta/\rho$  kattalik kiritildi.

Agar tashqi gravitatsion maydonni hisobga olish kerak bo'lsa NS tenglamasining o'ng tomoni quyidagicha o'zgaradi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}. \quad (8.64)$$

Tenglama vaqt bo'yicha birinchi tartibli tenglama, demak, tezlikning boshlang'ich qiymati berilgan bo'lishi kerak (statsionar hollardan tashqari). Chegaraviy shartlarni muhokama qilaylik. Chegara ikki xil bo'lishi mumkin — qattiq jism sirti va boshqa suyuqlik (yoki gaz) bilan

chegara. Qattiq jism sirtida yopishqoq suyuqlikning shu sirtga yopishib qolishini ifodalaydigan shart

$$\mathbf{v}|_S = 0. \quad (8.65)$$

Bu – eksperimental fakt, hammamiz ko‘p marta ko‘rganmizki, qattiq jism sirtiga yopishgan changning juda kichik zarralarini havo oqimi bilan shu sirtidan uchirib yuborish mumkin emas. Faqat yetarli darajada katta zarralargina havo oqimi ta’sirida uchib ketadi. Bu hodisaning sababi – havo oqimining sirt ustidagi tezligining nolga tengligidir.

Vektorining komponentasi uchta bo‘lishiga qaramay bu shartlarning soni ikkita – tezlikning sirtga normal va sirtga urinma komponentalarini nolga tenglashtirish kerak –  $v_n = 0$ ,  $v_t = 0$ . Fazoviy hosilalar bo‘yicha tenglamaning ikkinchi tartibli ekanligi bunga mos keladi.

Agar qattiq sirt harakatda bo‘lsa, suyuqlikning shu sirt ustidagi tezligi sirtning tezligiga teng bo‘lishi kerak  $\mathbf{v}|_S = \mathbf{v}_{sirt}$ .

## 8.9. Yopishqoq suyuqliklar oqimiga misollar

### 8.9.1. Ikki plastina orasidagi oqim

Bir-biriga nisbatan  $v_0$  tezlik bilan harakat qilayotgan ikkita cheksiz parallel plastinalar orasidagi yopishqoq suyuqlik oqimini ko‘raylik. Koordinat o‘qlari quyidagicha tanlab olinadi:  $x$ ,  $y$  o‘qlari pastgi plastinaning ustida joylashsin,  $z$  o‘qi plastinalarga perpendikular bo‘lsin va ularning orasidagi masofa  $d$  ga teng bo‘lsin.  $v_0$  tezlik  $y$  o‘qi bo‘yicha yonalgan deb olamiz. Masala statsionardir, tezliklar vaqtga bog‘liq bo‘lmaydi.

Masalaning qo‘yilishidan ko‘rinib turibdiki, suyuqlik tezligi  $y$  o‘qi bo‘yicha yo‘nalgan:  $\mathbf{v} = (0, v, 0)$  Tezlik va bosim faqat  $z$  koordinatagagina bog‘liq bo‘lishi mumkin:  $v = v(z)$ ,  $p = p(z)$

Birinchidan,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Vaqt bo‘yicha hosilaning nolga tengligi bilan bu Naviye-Stoks tenglamasining chap tomoni umuman nolga teng ekanligini ko‘rsatadi. NS tenglamasining o‘ng tomonining  $x$  komponentasi ham nolga teng.

Uning  $y$  komponentasi

$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0 \quad (8.66)$$

ko'rinishni oladi.  $z$  – komponentasi esa

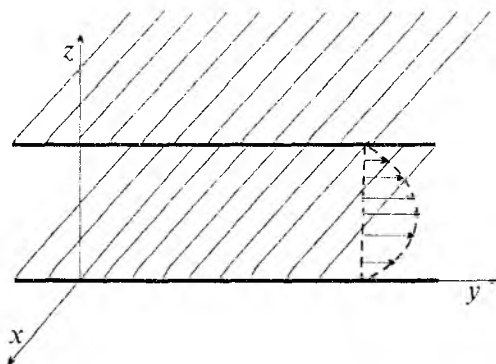
$$\frac{dp}{dz} = 0 \quad (8.67)$$

ga tengdir. Ikkinchi tenglamaning yechimi  $p = \text{const}$ , birinchi tenglamaning umumiy yechimi  $v = az + b$ , chegaraviy shartlar hisobga olinsa

$$v = \frac{z}{d} v_0 \quad (8.68)$$

Endi masalaning shartlarini o'zgartiraylik. Ikkala parallel plastinalar bir-biriga nisbatan qo'zg'almasdan turgan bo'lsin.  $y$  o'qi bo'yicha

bosim gradiyenti berilgan bo'lsin:  $\nabla p = (0, \frac{\partial p}{\partial y}, 0)$ . Masala bu gal ham stasionardir.



8.5-rasm. Ikkita  $q$  o'zg'almas parallel plastinalar orasidagi oqim.

Bu holda ham NS tenglamasining chap tomoni nolga teng. O'ng tomonidagi bosim gradiyentini chap tomonga o'tkazaylik:

$$\nabla p = \nu \Delta v. \quad (8.69)$$

Tezlik yana faqat  $z$  ga bog'liq va  $\mathbf{v}=(0,v,0)$ , bosim uchun esa  $p=p(y,z)$  deb olish kerak. Demak, oxirgi tenglamadan faqat quyidagilar qoladi:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (8.70)$$

Oxirgi tenglama bosim  $z$  ga bog'liq emasligini, ya'ni bosim suyuqlik qatlami bo'yicha o'zgarishsizligini ko'rsatadi. Natijada birinchi tenglamaning chap tomoni faqat  $y$  ning funksiyasi, o'ng tomoni esa faqat  $z$  ning funksiyasi bo'lib chiqadi. Har xil o'zgaruvchilarning funksiyalari bir-biriga teng bo'lishi uchun ularning har biri o'zgarishsiz bo'lishi kerak:

$$\frac{dp}{dy} = \text{const} = v \frac{d^2 v}{dz^2} = G. \quad (8.71)$$

Bu tenglamadan tezlikni topish oson:

$$v = \frac{1}{2v} Gz^2 + az + b. \quad (8.72)$$

Chegaraviy shartlarni eslaylik (sirt ustida urinma tezlikning nolga tengligi):  $v(0)=v(d)=0$ . Natija:

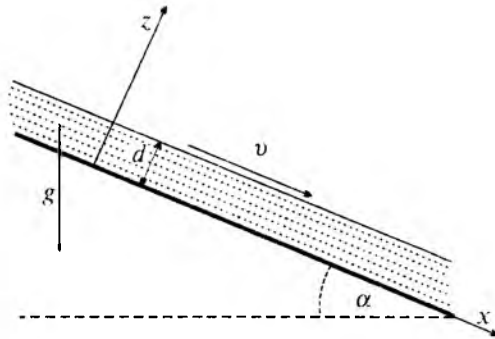
$$v = \frac{1}{2v} Gz(z-d). \quad (8.73)$$

Tezligimiz  $z=0$  dagi plastinadan  $z=d$  dagi plastinagacha yetguncha parabola bo'yicha o'zgarar ekan. 8.5-rasmda tezlikning profili ko'rsatilgan.

### 8.9.2. Qiyalik bo'yicha oqim

Eng qiziq masalalardan biri bo'lgan qiyalik tekislik bo'yicha oqim masalasini ko'rib chiqaylik. Bu masalani 8.6-rasm bo'yicha tasavvur qilish qiyin emas: gorizontga  $\alpha$  burchak bilan og'gan tekis qiyalik ustida qalinligi  $d$  bo'lgan suyuqlik qatlami tortishish kuchi ta'sirida pastga oqib tushmoqda. Suyuqlikning ustida bosimi  $p_0$  bo'lgan ochiq havodir (atmosfera).

Koordinat o'qlarining yo'nalishi rasmda ko'rsatilgan ( $y$  o'qi qiya tekislikning ustida yotibti). Masalaning mohiyati bo'yicha bosim faqat



8.6-rasm. Qiyali tekislik bo'yicha oqim.

$z$  koordinataga bog'liq bo'lishi mumkin:  $p = p(z)$ , tezlikning esa faqat  $x$  koordinatasi bor  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ , va u ham bo'lsa faqat  $z$  ning funksiyasidir:  $v = v(z)$ . Oqim stasionar bo'lgani uchun vaqt bo'yicha hosila tashlab yuboriladi. Undan tashqari

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v \frac{\partial}{\partial x}$$

ekanligini va tezlik  $x$  ga bog'liq emasligini hisobga olinsa NS tenglamalari quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$v \frac{d^2 v}{dz^2} + g \sin \alpha = 0, \quad \frac{dp}{dz} + g \rho \cos \alpha = 0. \quad (8.74)$$

Chegaraviy shartlarni aniqlaylik.  $z = 0$  tekislikda  $\mathbf{v} = 0$  bo'lishi kerak. Suyuqlikning ochiq sirtida ( $z = d$ ) esa

$$\sigma_{xx} = -p|_{z=d} = -p_0, \quad \sigma_{xz} = \eta \frac{dv}{dz} = 0 \quad (8.75)$$

bo'lishi kerak. (8.74) tenglamalarning bu shartlarga bo'ysunadigan yechimlari quyidagicha:

$$p = p_0 + g \rho \cos \alpha (d - z), \quad v = \frac{g \sin \alpha}{2\eta} z(2d - z). \quad (8.76)$$

Ko'rinib turibdiki, suyuqlik tezligining maksimal qiymatiga  $z = d$  nuqtada erishadi. Oqim zichligi (birlik vaqt ichida birlik sirt orqali oqib o'tgan suyuqlik miqdori)  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  formula orqali ifodalanar edi, shuni hisobga olib ( $y, z$ ) tekisligida yotgan balandligi  $d$  va kengligi  $l$  ga teng sirtidan bir sekunda o'tgan suyuqlik miqdorini

$$Q = \int_0^l dy \int_0^d dz j_x = \rho \int_0^d dz v = \frac{g\rho \sin \alpha}{3\nu} d^3 \quad (8.77)$$

formuladan topish mumkin.

### 8.9.3. Quvur bo'yicha oqim

Radiusi  $R$  ga teng bo'lgan silindrik quvur bo'yicha oqimni olib ko'raylik. Quvurning uzunligi  $l$  bo'lsin.  $x$  o'qini quvurning o'qi bo'yicha yo'naltiramiz. Bu holda suyuqlik tezligining komponentalari  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$  ko'rinishga ega bo'ladi. Albatta,  $v = v(y, z)$  bo'lishi kerak — suyuqlik tezligi faqat quvurning ko'ndalang kesim sirtidagina o'zgarishi mumkin. Bundan xulosa —

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = v \frac{\partial}{\partial x} v(y, z) = 0.$$

Oqim stasionar ekanligini hisobga olinsa NS tenglamasidagi vaqt bo'yicha hosila ham nolga aylanadi va natijada yana sodda holga kelinadi:

$$\nabla p - \eta \Delta v = 0. \quad (8.78)$$

Bu tenglamaning  $y$  va  $z$  komponentalari

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (8.79)$$

ko'rinishga ega, demak, bosim  $p$  quvurning ko'ndalang kesim sirtida o'zgarmas ekan. Boshqacha aytganda —  $p = p(x)$ .

Ana endi (8.79) tenglamaning  $x$  — komponentasiga kelaylik:

$$\frac{dp}{dx} = \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (8.80)$$

Tenglamaning o'ng tomoni  $x$  ga, chap tomoni esa  $y, z$  larga bog'liq emas. Hulosa — ikkala tomon ham o'zgarmas songa teng. Demak, quvur bo'yicha bosim gradiyenti o'zgarmas son ekan, shunday ekan, uni quvurning ikkala uchidagi bosimlar farqi  $\Delta p$  orgali ifodalash mumkin:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l}$$

(oqim tezligi  $x$  o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan, buning uchun bosim quvurning boshida uning oxiriga nisbatan yuqori bo'lishi kerak  $- dp/dx < 0$ ). Endi (8.80) tenglamaning o'ng tomonini qutb koordinat sistemasida yozib olamiz:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\eta l} \quad (8.81)$$

o'ng tomonda konstanta ekanligini hisobga olib tenglamani ikki marta integrallaymiz:

$$v = - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln r + b. \quad (8.82)$$

Tezlik quvurning hamma nuqtalarida chekli bo'lishi kerak bo'lgani uchun  $a = 0$ , quvurning (ichki) sirtida esa  $v(R) = 0$ . Natijaviy formula

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (8.83)$$

Tezlik profili parabola ko'rinishiga ega ekan.

Quvur bo'yicha 1 sekundda oqib o'tayotgan suyuqlik miqdori (xarajati)ni topaylik. Buning uchun oqim zichligi  $\rho v$  dan quvurning kesimi bo'yicha integral olamiz:

$$Q = 2\pi \int_0^R dr r \rho v = \frac{\pi \rho \Delta p}{8\eta l} R^4. \quad (8.84)$$

Suyuqlik xarajati quvur radiusining to'rtinchi darajasiga proporsional ekan.

## 8.10. Tovush

Siqiluvchan suyuqlik (gazlar) dinamikasiga misol sifatida tovushning paydo bo'lishi va tarqalishi masalasi ko'rib chiqamiz. Tovush deganda amplitudasi va, shunga ko'ra, tezligi kichik bo'lgan tebranishlarning tarqalishi tushuniladi. Masalaning qo'yilishi quyidagicha: qo'zg'almasdan turgan suyuqlik ichida kichik tezlikli g'alayonlanish hosil qilamiz, buning uchun bir suyuqlik nuqtasini o'z muvozanat holidan qo'zg'atiladi. Mana shu nuqta atrofida bosim va zichliklar ham o'zgaradi. Bosim va zichlikning g'alayonlanishi ham kichik bo'lsin. Mana shu g'alayonlanishning tarqalishi masalasini ko'raylik. Demak, tezlik, bosim va zichlik uchun

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (8.85)$$

deb yozib olish kerak, bunda  $\mathbf{v}_0=0, p_0, \rho_0$  — tezlik, bosim va zichlikning qo'zg'olmasdan turgan suyuqlikka mos keluvchi o'zgarish qiymatlari,  $\mathbf{v}', p'$  va  $\rho'$  lar esa ularning g'alayonlangan o'zgaruvchan qismlariga mos keladi. Bundan keyin kichik sonlarning shtrixlarini tashlab yuboramiz. Shart bo'yicha —  $p \ll p_0, \rho \ll \rho_0$ . Kichik tebranishlarga kichik tezliklar mos kelishi sababidan Eyler tenglamasida  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  hadni ikkinchi tartibli kichik son sifatida tashlab yuboramiz. (Tovush tarqalishi masalasini Eyler tenglamasi asosida ko'riladi, tovushning dissipatsiyasi masalasini ko'rish uchungina NS tenglamasi kerak bo'ladi.) Shu yaqinlikda uzliksizlik tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (8.86)$$

Ikkinchi hadda tashlab yuborilgan qism  $\rho \mathbf{v}$  ikkinchi tartibli kichik sonidir. Eyler tenglamasida ham birinchi tartibli hadlarni qoldirilsa u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0}. \quad (8.87)$$

Tenglamalarning soni to'rtta, o'zgaruvchilar soni beshta —  $\rho, p, \mathbf{v}$ . Suyuqlikning holat tenglamasi orqali  $\rho$  va  $p$  larni bog'lashimiz qoldi. Suyuqlik (gaz)ni termodinamik ma'noda ideal deb qaraymiz, tovush tarqalish jarayonini esa adiabatik deb qaraymiz. Shu sababdan bosim va zichlikning o'zgarishlari uchun

$$p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,0} \rho \quad (8.88)$$

deb yozib olish mumkin. Endi tenglamalarining soni noma'lumlar soniga teng bo'ldi. Oxirgi tenglamadagi  $s$  indeks jarayonining adiabatik ekanligini ko'rsatadi,  $0$  indeks esa hosila muvozanat holati  $\rho=0$  da hisoblanishi kerakligini bildiradi.

Olingan tenglamalar sistemasini yana bir marta yozib chiqaylik:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_0 \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho_0} = 0, \quad p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,0} \rho. \quad (8.89)$$



Bu tenglamalarning birinchisidan vaqt bo'yicha hosila olib, uning ikkinchi hadiga tenglamalarning ikkinchi va uchinchi qo'yilsa

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho = 0 \quad (8.90)$$

tenglamaga hosil bo'ladi, bunda

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,0} \quad (8.91)$$

va

$$\Delta \rho = \text{div grad } \rho = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho. \quad (8.92)$$

Bosim g'alayoni uchun ham huddi shunday tenglamaga kelinadi:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^4 \Delta \rho = c^2 \Delta p. \quad (8.93)$$

(8.90) (va 8.93) ko'rinishdagi tenglama matematik fizikada **to'liqin tenglamasi** deyiladi (4.170 tenglama bilan solishtiring, u yerdagi tenglama bir o'lchamli to'liqin tenglamasi, bu bobda uch o'lchamli tenglamaga o'tdik).

**Masala 8.10.1**  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$  kiritib  $\varphi$  uchun ham to'liqin tenglamasi kelib chiqishi ko'rsating.

Bu tenglamaning mag'zini chaqish uchun uning eng sodda holiga o'taylik – bir o'lchamli holga. Ya'ni, to'liqinning hamma kattaliklari faqat bitta koordinatga bog'liq bo'lsin, masalan,  $x$  koordinatga. Bunday to'liqlar **yassi to'liqin** deyiladi. Bu holda tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi ( $p$  va  $\rho$  larning o'rniga bitta  $\varphi$  funksiyasi olaylik va  $c^2$  ni qulayroq o'ringa joylash-tiraylik):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (8.94)$$

Tekshirish qiyin emaski bu tenglamaning yechimi

$$\varphi(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \quad (8.95)$$

ko'rinishga ega, bunda  $f_1$  va  $f_2$  funksiyalar ixtiyoriy (ikki marta uzliksiz differensiallanuvchi) funksiyalardir.

### 8.10.1-misol. Shu tasdiqni tekshiring.

Yassi to'ldiqdagi hamma kattaliklar  $-\rho, p, v$  — koordinata  $x$  va vaqt  $t$  ga mana shu ikkita kombinatsiya  $x - ct$  va  $x + ct$  orqaligina bog'liq bo'ladi.

Yechimlarning birini olaylik va aniqlik uchun zichlik haqida gapiraylik  $-\rho = f_1(x-ct)$ . Ko'rinib turibdiki, zichlik koordinata va vaqtning

$$x - ct = \text{const, yoki } x = \text{const} + ct \quad (8.96)$$

kombinatsiyasida o'zgarmas qiymatga ega bo'ladi. Zichlik (va boshqa kattaliklar)ning shu qiymati  $t$  vaqt o'tgandan keyin  $x$  o'qi bo'yicha  $ct$  masofaga ko'chadi. Bu degani, zichlik g'alayonlanishi muhitda  $c$  tezlik bilan ko'chadi, shu sababdan  $c$  tovush tezligi deyiladi.

Ikkinchi yechimga kelsak  $-f_2(x + ct)$  — u  $x$  o'qining manfiy yo'nalishi bo'yicha  $c$  tezlik bilan tarqalayotgan to'ldiqga mos keladi.

Tovush tezligiga qaytaylik. Gazni ideal gaz deb qaralsa uning holat tenglamasi

$$p = \frac{RT}{\mu} \rho \quad (8.97)$$

bo'ladi, bunda  $R = 8.314 \text{ J/grad}$  — universal gaz doimiysi.  $T$  — absolut temperatura,  $\mu$  — gazning molar massasi. 8.91 formuladagi hosilani termodinamika qoidalari bo'yicha

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{x,0} = \gamma \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \quad (8.98)$$

ko'rinishda yozib olinadi, bunda  $\gamma = c_p / c_v$ . Bu bizga (8.97) formulani qo'llashga imkon beradi:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \quad (8.99)$$

Havo uchun tovush tezligini topaylik. Havo uchun  $\gamma = 1.4$ ,  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ . Temperatura  $T = 273^\circ \text{ K}$  bo'lganda  $c = 331 \text{ m/sek}$ , temperatura  $T = 300^\circ \text{ K}$  bo'lganda esa  $c = 347 \text{ m/sek}$  bo'ladi.

Gazning molekular massasi oshsa undagi tovush tezligi kamayadi. Masalan, argon uchun  $\mu = 40 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ , tovush tezligi  $T = 273^\circ$  bo'lganda

$$c = 288 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$$

Agar (8.91) ga ahamiyat bersak siqilmaydigan suyuqlik uchun  $c = \infty$  ekanligini ko'ramiz. Albatta, absolut ravishda siqilmaydigan suyuqlik yo'q, real suyuqliklarning ozgina bo'lsa ham siqiluvchanligi bor. Shuning uchun

ularda ham tovush tarqalishi ro'y beraveradi, tovush tezligi, albatta, gazlarga nisbatan katta bo'ladi.

### 8.11. Quvur bo'yicha gazning bir o'lchamli statsionar oqimi

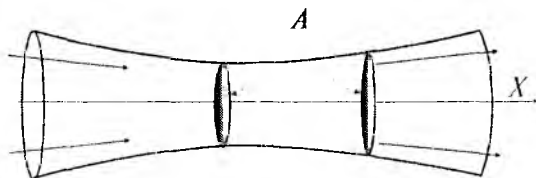
Suyuqlik tezligi tovush tezligiga yaqin bo'lganda birinchi qarashda qiziq tuyulgan hodisalar ham ro'y beradi. Bunga misol qilib quvur bo'yicha bir o'lchamli statsionar oqimni ko'raylik (8.7-rasmga qarang, oqim  $x$ -o'qi bo'yicha ro'y berayapti). Oqim tezligi ixtiyoriy bo'lsin. Oqimni bir jinsli deb qaraymiz, buning uchun, albatta, quvur kesimi juda katta bo'lmasligi va u o'zining o'qi bo'yicha tez o'zgarmasligi kerak.

Shu shartlar bajarilganida masalaning bir o'lchamligi uning statsionarligidan kelib chiqadi — ixtiyoriy biror  $x$  nuqtaga perpendikular bo'lgan tekislikning hamma nuqtalarida tezlik va boshqa xarakteristikalar vaqtga bog'liq emas, demak, ular faqatgina  $x$  koordinataning funksiyalaridir. Quvur kesimi sirtining qiymatini  $A$  harfi bilan belgilaymiz. Quvurning kesimi  $x$  o'qi bo'yicha o'zgarsin. Oqim zichligi  $j = \rho v$  bo'lsa bir sekunda quvurning ixtiyoriy  $A$  kesimidan oqib o'tadigan suyuqlik miqdori

$$Q = \rho v A = \text{const} \quad (8.100)$$

bo'lishi kerak. Bu — uzliksizlik tenglamasining ko'rilayotgan holga mos keluvchi formasidir. Quvurning uzunligini uning diametriga nisbatan juda katta deb qaraladi. Statsionar oqim uchun bir o'lchamli Eyler tenglamasini olamiz:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (8.101)$$



8.7-rasm. Quvur bo'yicha oqim.

Bu tenglamani

$$v dv = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -c^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (8.102)$$

ko'rinishga keltiraylik. Bu yerdagi  $d\rho/\rho$  ni topish uchun (8.100) ning differensialini olamiz va uni  $\rho v A$  ga bo'lamiz:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} - \frac{dA}{A}. \quad (8.103)$$

Demak,

$$(v^2 - c^2) \frac{dv}{v} = c^2 \frac{dA}{A} \quad (8.104)$$

ekan. Odatda, suyuqlik tezligining tovush tezligiga nisbatini

$$M = \frac{v}{c} \quad (8.105)$$

harfi bilan belgilanadi va uni **Mach soni** deyiladi.  $M < 1$  hol tovush tezligidan kichik tezlikli oqimga,  $M > 1$  hol esa tovush tezligidan katta tezlikli oqimga mos keladi.  $M = 1$  hol esa oqim tezligi tovush tezligiga teng ekanligini ko'rsatadi. Shu belgilashni hisobga olib oxirgi olingan tenglamani

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} \quad (8.106)$$

ko'rinishga keltirib olylik. Bu tenglamaning nomi – *Hugoniot* tenglamasi.

Ko'rinib turibdiki, quyidagi hollar o'rinlidir:

1.  $M < 1$  bo'lsin. Bu holda  $dv$  va  $dA$  larning ishoralari har xildir. Ya'ni, oqim tovushdan sekin bo'lsa, quvurning kesimi kamayganda oqim tezligi oshadi va quvurning kesimi ko'payganda oqim tezligi kamayadi.

2.  $M > 1$  bo'lsin. Bu holda  $dv$  va  $dA$  larning ishoralari bir xildir. Ya'ni, oqim tezligi tovush tezligidan katta bo'lganda quvurning kesimi oshgan sari oqim tezligi ham osha boradi va aksincha – quvur ingichkalashgan sari oqim tezligi ham kamaya boradi. Bunday qiziq natijani faqatgina quyidagicha tushunish mumkin – quvur kengayganda gaz zichligi  $\rho$  shu darajada kamayib ketadiki,  $\rho A$  ham kamayadi, faqat

shundagina  $v$  oshishi mumkin. Ya'ni, paradoks zichlikning keskin kamayishi bilan tushuntiriladi.

3.  $M = 1$  holda  $dA = 0$  bo'lishi kerak. Ya'ni, kesim o'zining ekstremumiga erishadi. Bu ekstremum minimumdir, chunki  $M < 1$  tomondan  $M = 1$  ga yaqinlashsa  $A$  kamayishi kerak,  $M > 1$  tomondan  $M = 1$  ga yaqinlashsa  $A$  yana kamayishi kerak.

4.  $dA = 0$  holni ko'raylik. Bu holga yoki  $M = 1$ , yoki  $dv = 0, M \neq 1$  mos keladi.  $dA = 0$  sharti kesimning ekstremumligi shartidir,  $dv = 0$  sharti esa tezlikning ekstremumligi shartidir:

— Agar  $M < 1$  bo'lsa, maksimal kesim nuqtasida tezlik minimal bo'ladi va minimal kesim nuqtasida tezlik maksimal bo'ladi.

— Agar  $M > 1$  bo'lsa, maksimal kesim nuqtasida tezlik ham maksimal bo'ladi va minimal kesim nuqtasida tezlik ham minimal bo'ladi.

Bu xulosalarni quyidagi tahlil bilan ham bog'lash mumkin. Eyler tenglamasini yana bir boshqa ko'rinishga ham keltirib olish mumkin. (8.102) dan

$$\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho v}{c^2} \quad (8.107)$$

tenglamani olish mumkin, uning ikkala tomonini  $v$  ga ko'paytirilsa

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (8.108)$$

yoki,

$$\frac{dj}{dv} = \rho (1 - M^2) \quad (8.109)$$

tenglama kelinadi. Ko'rinib turibdiki,  $M < 1$  bo'lsa, tezlik oshgan sari oqim zichligi ham oshib boradi,  $v = c_*$  (quvurning har xil nuqtalarida gaz zichligi va temperaturasi har xil bo'lishi mumkin, natijada, har xil nuqtada tovush tezligi ham har xil bo'lishi mumkin,  $c_*$  mahalliy tovush tezligini bildiradi) bo'lganda esa oqim zichligi o'zining maksimal qiymatiga erishadi. Odatda, bu zichlik **kritik zichlik** deyiladi. Bu qiymat quvurning qaysi nuqtasida erishiladi? Hugoniot tenglamasining tahlilidan aytish mumkinki, bu quvurning eng ingichka nuqtasida ro'y beradi.  $M > 1$  bo'lganda (8.109) ning o'ng tomoni manfiy, tezlik oshishi bilan oqim zichligi kamaya boradi va nolga intiladi (boshlang'ich

qiymati ma'lum bir musbat son bo'lgan funksiya kamayaversa oxiri nolga teng bo'lishi kerak). Bu — oqim chiziqlarining bir-biridan uzoqlashib ketishi bilan bog'liq.

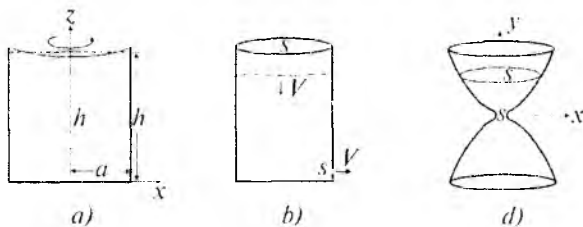
Ko'rinib turibdiki, gaz oqimining xossalari uning tezligi tovush tezligiga qanday munosabatda ekanligiga kuchli darajada bog'liqdir.

### 8-bobga mashq va savollar

1. Vertikal radiusli silindrga siqilmaydigan ideal suyuqlik quyilgan (8.8-a rasimga qarang). Suyuqlik bir butunligicha  $\omega$  burchak tezlik bilan vertikal yo'nalgan o'q atrofida aylanmoqda. Agar tinch turganda suyuqlik balandligi  $h$  bo'lsa, aylanayotgan suyuqlik ichidagi bosimni toping.

2. Kesimi  $S$  bo'lgan baland idishning quyi qismida kichik  $s$  kesimli teshik bor (8.8-b rasimga qarang). Shu teshikdan oqib chiqayotgan susyuqlik tezligi  $v$  nimaga teng?

3. 8.8-d rasmda ko'rsatilgan suv soatining formasini hosil qiluvchi chiziq formulasini toping. Suv soatiga qo'yiladigan asosiy talab — ixtiyoriy birlik vaqt intervalida kichik  $s$  kesimli teshikdan bir xil suyuqlik miqdori o'tishi kerak.



8.8-rasm. 1-, 2- va 3- misollarga oid.

4. Siqilmaydigan  $\rho$  o'zichlikli suyuqlik  $R$  radiusli sharni tashkil qilsin. Shu sharning markazidagi bosimni toping.

### 1-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

1. Sistemaning holatini bir qiymatli aniqlash uchun kerak bo'lgan kattaliklar soni.

2. Fazo bir jinsli va izotrop hamda vaqt bir jinsli bo'lgan sanoq sistemasi inersial sistema deyiladi.

$$3. a) \frac{\partial L}{\partial q} = -q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \Rightarrow \ddot{q} + q = 0;$$

$$b) \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = t\dot{q} \Rightarrow \frac{d}{dt}(t\dot{q}) = 0;$$

$$c) \frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta, \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}; \Rightarrow \ddot{\theta} = \sin \theta (1 + \dot{\varphi}^2 \cos \theta);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \sin^2 \theta; \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0.$$

$$4. a) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\ddot{\theta} = -\frac{3}{ml} \sin \varphi, \ddot{\varphi} + \ddot{\theta} = 0; \quad b) \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = k/m;$$

$$c) \ddot{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad d) \ddot{x} + e^x (e^x - 1) = 0.$$

$$5. a) \ddot{q} = (1 - \dot{q}^2)^{3/2}; \quad b)$$

$$6. a) L' = L + \frac{d}{dt} \left( qt + \frac{1}{6} t^3 \right); \quad L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - q;$$

$$b) L' = L + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} q^2; \quad L = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + q^2);$$

$$c) L' = -2y\dot{x} + \frac{d}{dt}(xy) = 2x\dot{y} - \frac{d}{dt}(xy); L = 2x\dot{y} = -2\dot{x}y;$$

$$d) L' = L + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right); L = -\frac{1}{2}x^2; \quad e) L' = L + \frac{d}{dt}(\varphi \cos t); L = \varphi \sin t;$$

$$f) L' = L + \frac{d}{dt}\left(\max t + \frac{1}{6}ma^2t^3\right); L = -\max.$$

$$7. \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \text{ ekanligini hisobga olib}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial q}; \quad \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t}$$

formulalarni keltirib chiqariladi. Bu yerdan esa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

kelib chiqadi.

8. Lagranj funksiyasida paydo bo'ladigan qo'shimcha had vaqt bo'yicha to'liq hosila ko'rinishiga egadir:

$$cL' = \frac{m}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + m\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2\right) = L + m \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2}t\mathbf{V}^2\right)$$

$$9. \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{q} \operatorname{ch} \lambda + \dot{q} \operatorname{ch} \lambda}{\dot{q} \operatorname{sh} \lambda + \dot{q} \operatorname{ch} \lambda}, \quad \dot{q} = \frac{dq}{d\tau}; \quad S = - \int dt \sqrt{1 - \dot{x}^2} =$$

$$= - \int \sqrt{1 - \dot{q}^2} \frac{d\dot{q} \operatorname{ch} \lambda + d\tau \dot{q} \operatorname{ch} \lambda}{\dot{q} \operatorname{ch} \lambda + \dot{q} \operatorname{ch} \lambda} = - \int d\tau \sqrt{1 - \dot{q}^2}.$$

$$10. a) L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) = 2R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - U(R, \varphi);$$

$$b) L = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{\dot{\varphi}^2}{\theta^2} - \frac{\varphi\dot{\theta}}{\theta^2}\right) - U(\varphi, \theta);$$



$$c) L = \frac{1}{8} \left( \xi^2 \left( 1 + \frac{\eta}{\xi} \right) + \eta^2 \left( 1 + \frac{\xi}{\eta} \right) \right) + \frac{1}{2} \xi \eta \phi^2 - U(\xi, \eta)$$

$$11. L = \frac{a^2 \dot{\varphi}^2}{2} (m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi) - m_1 g a \sin \varphi.$$

$$12. L = \frac{m_1 + m_2}{2} a^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} b^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 a b \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2) g a (1 - \cos \varphi_1) - m_2 g b (1 - \cos \varphi_2).$$

$$13. L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) - m_2 g l (1 - \cos \varphi).$$

14. a)  $m$  nuqtaning koordinatlari:

$$x = a \cos \gamma t + l \sin \varphi, \quad y = a \sin \gamma t - l \cos \varphi.$$

Lagranj funksiyasi (vaqtning funksiyasi va vaqt bo'yicha to'liq hosila tashlab yuborilgandan keyin):

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m a l \gamma^2 \sin(\varphi - \gamma t) - m g l (1 - \cos \varphi).$$

b)  $m$  nuqtaning koordinatlari:  $x = l \sin \varphi, \quad y = a \sin \gamma t - l \cos \varphi.$

Lagranj funksiyasi (faqat vaqtning funksiyasi va vaqt bo'yicha to'liq hosila tashlab yuborilgandan keyin):

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m a l \gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi - m g l (1 - \cos \varphi).$$

$$15. L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - k \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2; \quad m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -k \mathbf{r}_2, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -k \mathbf{r}_1.$$

Ikkala harakat tenglamasi qo'shilsa  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -k(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = 0$ , yoki  $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$  ekanligi topiladi.

Demak, haqiqatda mustaqil harakat tenglamasi bitta:  $m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = k \mathbf{r}_1$ .

## 2-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

$$1. a) E = \frac{ml^2}{2} \left( \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi} \dot{\theta} \right) - 3l \cos \varphi; \quad b) E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2};$$

$$c) E = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} + \varphi(x); \quad d) E = \dot{x}^2 + (e^x - 1)^2.$$

2. a) Saqlanuvchi kattaliklar:  $P_x, P_y, M_z$ . Sababi:  $(x, y)$  tekisligida sistemani xohlagan nuqtaga bir butun sifatida ko'chirish mumkin. Undan tashqari, sistemani  $z$  o'qi atrofida ixtiyoriy burchakka burganida ham uning holati o'zgar olmaydi;

$$b) P_x, M_z;$$

$$c) M_z;$$

$$d) P_y.$$

$$3. P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}, E' = \sum P_i \dot{Q}_i - L \text{ ta'riflarni kiritaylik. } P_i \text{ va } E' - \text{ yangi}$$

impuls va energiya. Bu holda  $P_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial Q_i}$  va  $E' = E - p_j \frac{\partial f_j}{\partial t}$  bo'ladi,  $p_i$  va

$E$  - eski impuls va energiya. Bunda  $\dot{q}_i = \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}$  dan foydalandik.

$$4. \dot{i} = \left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} + [\mathbf{F}\mathbf{r}] \right) \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Ikkinchi tomondan,  $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$ . Demak,  $\dot{i} = 0$ .

## 3-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

$$1. a) E = 9; x_{1,2} = \pm 1/3, \text{ harakat infinit: } x \geq x_1, x \leq x_2;$$

$$b) E = 1, x_1 = 2, \text{ harakat infinit } x \leq 2;$$

$$c) E = -1/2, \text{ harakat finit: } \pi/3 \geq x \leq 2\pi/3;$$

$$d) E = 5, x_1 = \ln 5, \text{ harakat infinit: } x \leq \ln 5;$$

$$e) E = 1, x_1 = e, \text{ harakat infinit: } x \leq e;$$

$$f) E = 0; \text{ to'xtash nuqtasi yo'q, harakat infinit: } -\infty < x < \infty;$$

g)  $E = 5/2$ ; to'htash nuqtasi  $x_1 = 2/5$ ; harakat infinit:  $x \geq 2/5$ ;

h)  $E = 4$ ; harakat finit:  $-2 \leq x \leq 2$ ;

k) Harakat finit:  $-\frac{1}{k} \operatorname{arccch} \sqrt{\frac{U_0}{E_0}} \leq x \leq \frac{1}{k} \operatorname{arccch} \sqrt{\frac{U_0}{E_0}}$ .

2. a)  $x(t) = \sqrt{1+4t^2}$ ; b)  $x(t) = -2 \ln(1-t/2)$ ; c)  $x(t) = 1 + \sin t$ ;

d)  $x(t) = \frac{x_0}{1 \pm tx_0 \sqrt{\frac{2a}{m}}}$ .  $x_0 = x(0)$ . Mahrajdagi ishora boshlang'ich

tezlikning ishorasiga teskari bo'ladi.

3. a)  $r_{min} = \frac{\alpha}{2E} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{EM^2}{m\alpha^2}} \right)$ ; b)  $r_{min}^2 = \frac{M^2}{4mE} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{16m^2E}{M^2}} \right)$ ;

c)  $E^2 \geq 1 + \frac{M^2}{m}$  shart bajarilganda harakat finit:  $r_1 \leq r \leq r_2$ ;

$$r_1^2 = E \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \frac{M^2}{m}}{E^2}} \right); \quad r_2^2 = E \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1 + \frac{M^2}{m}}{E^2}} \right);$$

4. a)  $\varphi = M \int \frac{(-1)d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{2E + \frac{1}{r^2} - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{-M}{\sqrt{1-M^2}} \ln \left( \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{2E}{1-M^2}} \right)$ ;

b)  $\varphi = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} \arctan \left( \frac{1}{2\sqrt{1+M^2}} \frac{r-2(1+M^2)}{\sqrt{2Er^2+r-(1+M^2)}} \right)$

5. Birinchi munosabat  $M$  ning ta'rifidan darhol kelib chiqadi. Ikkinchi munosabatni olganda  $E = mv^2/2 - \alpha/r$  ifodani qo'llash kerak.

6. Avvalgi misolning birinchi munosabatidan **A** vektorning orbita tekisligida yotishi kelib chiqadi.

7 Statik muvozanat nuqtasi uchun  $U'_{eff}(r_0) = 0$  bo'lishi kerak. Bu

$r_0 = 2 \frac{\beta - M^2/(2m)}{\alpha}$  ni beradi, buning uchun esa  $M^2 < 2m\beta$  bo'lishi kerak.

Muvozanat barqaror bo'lishi uchun esa  $U''_{eff}(r_0) > 0$  bo'lishi kerak. Bu

$r_0 > 3 \frac{\beta - M^2/(2m)}{\alpha}$  bo'lishi kerakligini beradi. Demak, muvozanat nuqtasi barqaror bo'lmas ekan.

8. Harakat finit bo'lishi uchun  $U'_{eff}(r)$  minimumga ega bo'lishi kerak:

$$U'_{eff}(r_0) = 0.$$

a) Bu holda minimum sharti  $\frac{\kappa M^2}{\alpha m} = f(x) = x(1+x)e^{-x}$ ,  $x = \kappa r_0$  ko'rinishga ega. Bu tenglama yechimga ega bo'lishi uchun uning chap tomoni o'ng tomonidagi  $M^2 < 2m\beta$  ning maksimumidan kichik bo'lishi kerak.  $f(x)$  funksiya  $x = 1.618$  nuqtada 0,84 ga teng maksimumga ega. Demak,

$\frac{\kappa M^2}{\alpha m} < 0.84$  shart bajarilgandagina berilgan potentsialda finit harakat bo'lishi mumkin.

b) Effektiv potentsial uchun minimum sharti  $\frac{\kappa^2 M^2}{2mV} = x^4 e^{-x^2}$ ,  $x = \kappa r_0$ .

Finit harakat sharti:

$$M^2 < \frac{8mV}{\kappa^2 e^2}.$$

9. Harakat tenglamasining Dekart sistemasidagi ko'rinishi:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Harakat bir tekislikda ro'y beradi. Tenglamaning o'ng tomonini qutb sistemasiga o'tkazamiz:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\alpha \cos \varphi}{m r^2}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\alpha \sin \varphi}{m r^2}.$$

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}$  ni (3.23) ga qarang) hisobga olib bu tenglamalarni

$$\frac{d\dot{x}}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{M} \cos \varphi, \quad \frac{d\dot{y}}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{M} \sin \varphi$$

ko'rinishga keltiramiz. Demak,

$$\dot{x} = -\frac{\alpha}{M} \sin \varphi + c_1, \quad \dot{y} = \frac{\alpha}{M} \cos \varphi + c_2.$$

Endi  $x$  va  $y$  larning o'rniga qutb koordinatlariga o'tiladi:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Natijada oxirgi tenglamalar

$$\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{\alpha}{M} \sin \varphi + c_1, \quad \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{\alpha}{M} \cos \varphi + c_2$$

ko'rinishni oladi. Ularning birinchisini  $-\sin \varphi$  va ikkinchisini  $\cos \varphi$  ga ko'paytirib qo'shilsa

$$r\dot{\varphi} = \frac{\alpha}{M} - c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi$$

ga kelinadi. Yana bir bor (3.23) formulani qo'llanib trayektoriya formulasi topiladi:

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{M^2} - \frac{c_1 m}{M} \sin \varphi + \frac{c_2 m}{M} \cos \varphi.$$

Bu — ellips tenglamasi.

11. Trayektoriya aylana bo'lishi uchun  $r_0$  effektiv potensial

$U_{\text{eff}} = U + \frac{M^2}{2mr^2}$  ning minimumi bo'lishi kerak:

$$\frac{dU_{\text{eff}}(r_0)}{dr} = 0, \quad \frac{d^2U_{\text{eff}}(r_0)}{dr^2} > 0.$$

Birinchi shartdan  $r_0^{n-2} = n\alpha m/M^2$ , ikkinchi shartdan esa

$$3n > n(n+1), \text{ yoki, } n < 2$$

ekanligini topiladi.

12. Energiyaning saqlanish qonuni bo'yicha

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{R}.$$

$$\text{Demak, } t = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mR^3}{2\alpha}}.$$

13. Zarrachaning harakat miqdori momenti  $M = mv\rho$ , energiyasi  $E = mv^2/2$ , bunda  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ , minimal masofa  $U_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = E$  shartimad topiladi. Demak,

$$r_{\text{min}}^n - \rho^2 r_{\text{min}}^{n-2} - \frac{2\alpha}{mv^2} = 0.$$

Bu tenglamaning faqat  $n = 1, 2, 4$  hollardagina sodda yechimi bor. Masalan,

$$n = 1, r_{\text{min}} = \frac{\alpha}{mv^2} + \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\alpha}{mv^2}\right)^2}, \quad n = 2, r_{\text{min}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv^2}}.$$

14. Zarrachalar orasidagi kuch – itarish kuchidir:  $-\frac{dU}{dr} = \frac{n\alpha}{r^{n+1}}$ .

#### 4-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

1. a) Potensial  $U(x) = x^2 e^x$  ni uning minimumi  $x = 0$  atrofida qatorga yoyaylik:

$$U = x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

Lagranj funksiyasi:  $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}2x^2 + x^3 + \dots$ . Chastota:  $\omega = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$ .

$$\text{b) } U = \frac{1}{2}k\left(x - \frac{f}{k}\right)^2 - \frac{f^2}{2k}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

c) Potensialning minimumlari

$$x_0 = -\frac{1}{\alpha} \arcsin\left(\frac{f}{\alpha V}\right) + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

nuqtalarda joylashgan. Shu nuqtalarning ixtiyoriy biri atrofida potensial qatorga yoyilsa kvadratik had

$$\frac{1}{2} V \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{f^2}{\alpha^2 V^2}} (x - x_0)^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak,  $\omega^2 = \frac{\alpha^2 V}{m} \sqrt{1 - \frac{f^2}{\alpha^2 V^2}}$ .

d)  $U(x) = \frac{x}{\ln x} = e + \frac{(x-e)^2}{2e} + \dots$ . Demak,  $\omega = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

2. Sistemaning Lagranj funksiyasi:

$$L = \frac{mR^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgR(1 - \cos \varphi) - \frac{e^2}{2R \sin \frac{\varphi}{2}}$$

Muvozanat nuqtasi:  $\varphi_0 = 2 \arcsin\left(\frac{e^2}{8mgR^2}\right)^{1/3}$ .

Shu nuqta atrofida potensialni qatorga yoyib, kvadratik hadning o'zini qoldiramiz:

$$L = \frac{mR^2}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} 3mgR \left(1 - \left(\frac{e^2}{8mgR^2}\right)^{2/3}\right) (\varphi - \varphi_0)^2 + \dots$$

Chastota:

$$\omega^2 = \frac{3g}{R} \left(1 - \left(\frac{e^2}{8mgR^2}\right)^{2/3}\right)$$

Albatta,  $e^2 < 8mgR^2$  bo'lishi kerak, aks holda muvozanat barqaror bo'lmaydi.

3. Massaning kinetik energiyasi  $T = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\varphi}^2$ . Potensial energiyani topish uchun prujinaga ta'sir qilayotgan kuch  $F$  ni prujina uzunligining o'zgarishi

$\Delta l$  ga ko'paytiramiz.  $\Delta l$  ni cosinuslar teoremasidan topish mumkin:

$$\Delta l = \sqrt{a^2 + (a+l)^2 - 2a(a+l)\cos\varphi} - l = \frac{a(a+l)}{2l}\varphi^2.$$

$$\text{Chastota: } \omega = \sqrt{\frac{(a+l)F}{mal}}.$$

$$4. \text{ a) } x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t); \quad \text{b) } x(t) = \frac{F_0}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t);$$

$$\text{c) } x(t) = \frac{F_0}{m\omega} \frac{\omega e^{-\alpha t} - \omega \cos\omega t + \alpha \sin\omega t}{\omega^2 + \alpha^2};$$

$$\text{d) } x(t) = \frac{F_0}{m\omega} \frac{\omega \sin\alpha t - \alpha \sin\omega t}{\omega^2 - \alpha^2};$$

$$\text{e) } x(t) = \frac{F_0}{m\omega \left[ (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4 \right]} \left[ \omega e^{-\alpha t} [2\alpha\beta \cos\beta t + (\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2)\sin\beta t] + \beta [-2\alpha\omega \cos\omega t + (\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)\sin\omega t] \right].$$

$$\text{f) } x(t) = \frac{F_0}{m\omega \left[ (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4 \right]} \left[ \omega e^{-\alpha t} \left[ (\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta \sin\beta t \right] + \left[ \alpha(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)\sin\omega t - \omega(\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2)\cos\omega t \right] \right].$$

$$5. \text{ a) } x(t) = \frac{at}{2m\omega} \sin\omega t; \quad \text{b) } \frac{a}{2m\omega^2} (\sin\omega t - \omega t \cos\omega t);$$

$$\text{c) } x(t) = \frac{a}{m\omega} \frac{(\Delta + \omega)\sin\omega t - \omega \sin(\omega + \Delta)t}{\Delta(\Delta + 2\omega)}.$$

a) va b) yechimlar vaqt o'tishi bilan cheklanmagan holda o'suvchi bo'lib ularni kichik tebranishlar sohasida qo'llanib bo'lmaydi. c) holda  $\Delta$  chekli son bo'lganda muammo yo'q,  $\Delta \rightarrow 0$  holda yana b) holga kelinadi.

6. a) (4.32) formuladagi integral  $t < T$  holda:



$$\frac{F_0}{m\omega^3 T}(\omega t - \sin \omega t)$$

Endi  $t > T$  dagi yechimni topaylik. Yuqoridagi integral  $t > T$  da (integrallash yuqori chegarasi  $T$  bo'lganda)

$$\frac{F_0}{m\omega^3 T}(T\omega \cos \omega(t-T) + \sin \omega(t-T) - \sin \omega t)$$

ga tengdir. Undan tashqari, kuch  $F_0$  bo'lganda  $t > T$  holda integral

$$\frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega(t-T))$$

ga teng. Shularning hammasini yig'ib  $t > T$  dagi yechimni

$$c_1 \cos \omega(t-T) + c_2 \sin \omega(t-T) + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

ko'rinishda qidirish kerakligiga kelinadi.  $x$  va uning hosilasi  $\dot{x}$  ning  $t = T$  nuqtada uzliksizligidan  $c_1, c_2$  doimiylarni topiladi:

$$c_1 = -\frac{F_0}{m\omega^3 T} \sin \omega T, \quad c_2 = \frac{F_0}{m\omega^3 T} (1 - \cos \omega T).$$

Demak,  $t > T$  da

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} \left[ 1 + \frac{\sin \omega(t-T) - \sin \omega t}{\omega T} \right].$$

Tebranish amplitudasi:  $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{m\omega^3 T} \sin \frac{\omega T}{2}$ .

b)  $t < T$  bo'lganda:  $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$ ;

$t > T$  bo'lganda:

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (\cos \omega(T-t) - \cos \omega t) = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2} \sin \omega(T/2 - t).$$

c)  $t < T$  bo'lganda:  $x = \frac{F_0}{m\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$ ;

$t > T$  bo'lganda:

$$x = \frac{F_0}{m\omega^3 T} (\omega T \cos \omega(T-t) - \sin \omega t - \sin \omega(T-t)) =$$

$$= \frac{F_0}{m\omega^3 T} [(\omega T \cos \omega T - \sin \omega T) \cos \omega t + (\omega T \sin \omega T + \cos \omega T - 1) \sin \omega t].$$

Tebranish amplitudasi:  $a = \sqrt{\omega^2 T^2 + 2(1 - \cos \omega T) - 2 \sin \omega T}$ .

d)  $t < T$  bo'lganda:  $x = \frac{F_0}{2m\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$ ;

$t > T$  bo'lganda:  $x = -\frac{\pi F_0}{2m\omega^2} \cos \omega t$ .

7. (4.49) formulaning birinchi qatoridagi ifodani

$$\frac{m}{2} (\operatorname{Re} \zeta^2(t) + \operatorname{Im} \zeta^2(t)) - \frac{F(t)}{\omega} = \frac{m}{2} \left| \zeta(t) - i \frac{F(t)}{m\omega} \right|^2 - \frac{F^2(t)}{2m\omega^2}$$

dan foydalanib hisoblash qulaydir:

$$\left| \zeta(\infty) - i \frac{F(\infty)}{m\omega} \right|^2 = \left| a\omega \cos \alpha - \frac{F_0}{2m\omega} \frac{\lambda^2}{\omega^2 + \lambda^2} + ia\omega \sin \alpha \right|^2.$$

va

$$\left| \zeta(-\infty) - i \frac{F(-\infty)}{m\omega} \right|^2 = a^2 \omega^2.$$

Natijada

$$\Delta E = E(\infty) - E(-\infty) = -\frac{F_0^2}{2m\omega^2} + \frac{\lambda^4 F_0^2}{2m\omega^2 (\lambda^2 + \omega^2)^2} - \frac{a\lambda^2 F_0 \cos \alpha}{\lambda^2 + \omega^2}.$$

8. a) Minimum:  $x_0 = 1, y_0 = -1$ . Chastotalar:  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 6$ ;

b) Minimum:  $x = 1, y = 1$ . Chastotalar:  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ .

9. a) Normal chastotalar:  $\omega_1 = \sqrt{6}, \omega_2 = 1$ ; Normal koordinatlar:

$$x = Q_1 + Q_2, \quad y = -\frac{3}{2} Q_1 + Q_2.$$

Lagranj funksiyasi:  $L = \frac{5}{8} \dot{Q}_1^2 - \frac{15}{4} Q_1^2 + \frac{5}{2} \dot{Q}_2^2 - \frac{5}{2} Q_2^2$ .

b) Normal chastotalar:  $\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2}{4} + \alpha^2}$ .

Normal koordinatlar:  $x_1 = Q_1 + Q_2$ ,  $x_2 = \frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}{\alpha} Q_1 + \frac{\alpha}{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2} Q_2$ .

10. Kinetik energiya:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dots + \dot{x}_{2N-1}^2) + \frac{M}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{x}_4^2 + \dots + \dot{x}_{2N}^2).$$

Potensial energiya:

$$U = \frac{k}{2} (x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{2N-1} - x_{2N})^2 + x_N^2).$$

Harakat tenglamalari:

$$m\ddot{x}_{2n-1} + k(2x_{2n-1} - x_{2n} - x_{2n-2}) = 0, \quad M\ddot{x}_{2n} + k(2x_{2n} - x_{2n+1} - x_{2n-1}) = 0.$$

Chegaraviy shartlar:  $x_0 = x_{2N+1} = 0$ .

Yechimni turg'un to'liqlar  $x_{2n-1} = A e^{i(\omega \pm (2n-1)\varphi)}$ ,  $x_{2n} = B e^{i(\omega \pm 2n\varphi)}$

ko'rinishda qidiramiz. Bu holda chastota uchun tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k}{\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \varphi} \right), \quad \mu = \frac{mM}{m+M}.$$

$\omega_1$  chastota ba'zi bir hollarda «optik chastota»,  $\omega_2$  esa «akustik chastota» deyiladi (ko'rilayotgan sistema ba'zi bir hollarda qattiq jismning soddalashtirilgan modellaridan biri bo'lib xizmat qiladi). Chegaraviy shartlarning birinchisini qanoatlantirish uchun yuqoridagi turg'un to'liqlarning quyidagi kombinatsiyasi olinishi kerak:

$$x_{2n-1} = A_k \sin((2n-1)\varphi_k) \cos(\omega_k t + \alpha_k), \quad x_{2n} = B_k \sin(2n\varphi_k) \cos(\omega_k t + \alpha_k),$$

bunda  $\varphi_k = \frac{k\pi}{2N+1}$  – ikkinchi chegaraviy shartdan olinadi.

11. Sistemaning Lagranj funksiyasi:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{k_1}{2} (x_1 - x_2)^2.$$

Harakat tenglamalari:

$$m\ddot{x}_1 + (k + k_1)x_1 - k_1x_2 = 0, \quad m\ddot{x}_2 + (k + k_1)x_2 - k_1x_1 = 0.$$

$$\text{Chastotalar } \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m}.$$

$$\text{a) } x_1 = \frac{v}{2} \left( \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right), \quad x_2 = \frac{v}{2} \left( \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right).$$

$$\text{b) } x_1 = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \quad x_2 = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t).$$

c) Birinchi zarrachadan ikkinchisiga  $dt$  vaqt ichida berilgan energiya  $F = k_1(x_1 - x_2)$  kuchning shu vaqt ichida bajargan ishiga teng:

$$dE = F dx_2 = k_1(x_1 - x_2) dx_2 = k_1(x_1 - x_2) \dot{x}_2 dt.$$

Demak,

$$\text{a) } \frac{dE}{dt} = \frac{k_1 v^2}{2\omega_2} \sin \omega_2 t (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t);$$

$$\text{b) } \frac{dE}{dt} = \frac{k_1 a^2}{2} \cos \omega_2 t (\omega_2 \sin \omega_2 t - \omega_1 \sin \omega_1 t).$$

Ko'rinib turibdiki, energiya oqimi vaqt o'tishi bilan ishorasini davriy ravishda o'zgartirib turadi — energiya goh birinchi zarrachadan ikkinchishiga, goh teskari oqadi.

12. a) Sistemaning Lagranj funksiyasi:

$$L = \frac{1}{2} (\Lambda_1 \dot{q}_1^2 + \Lambda_2 \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} \left( \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{C} \right).$$

Agar quyidagi belgilashlar kiritilsa:

$$\sqrt{\Lambda_1} q_1 = x_1, \quad \sqrt{\Lambda_2} q_2 = x_2, \quad \omega_{01}^2 = \frac{1}{\Lambda_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} \right),$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{1}{\Lambda_2} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} \right), \quad \alpha = \frac{1}{C \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}$$

9-masalaning b) qismidagi Lagranj funksiyasini olgan bo'lamiz.

## 5-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

1. Birinchi tartibli tuzatma uchun tenglama:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 = \frac{2}{\omega_0} (A_1 \sin \psi + a\psi_1 \cos \psi) + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \cos 2\psi.$$

Demak,  $A_1 = 0$ ,  $\psi_1 = 0$ .

**Yechish:**  $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{a^2 \gamma}{4} - \frac{a^2 \gamma}{4} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi).$

Chastotaga birinchi tartibli tuzatma yo'q ekan.

2. Birinchi tuzatma uchun tenglama:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2} + x_1 = \left( 2A_1 - a + \frac{a^2}{4} \right) \sin \psi + 2a\psi_1 \cos \psi + \frac{a^2}{4} \sin 3\psi.$$

Demak,  $2A_1 - a + \frac{a^2}{4} = 0$ ,  $\psi_1 = 0$ .

Ikkinchi tuzatma uchun tenglama:

$$c \frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 = \left[ 2a\psi_2 - A_2 \frac{dA_1}{da} + \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right) A_1 + \frac{a^5}{128} \right] \cos \psi +$$

$$+ 2A_2 \sin \psi + \frac{a^3 (a^2 + 8)}{128} \cos 3\psi + \frac{5a^5}{128} \cos 5\psi.$$

Asriy hadlarning paydo bo'lmalik sharti:

$$A_2 = 0, \quad \psi_2 = \frac{A_1}{2a} \left( \frac{dA_1}{da} - 1 + \frac{3a^2}{4} \right) - \frac{a^4}{256}.$$

**Yechim:**

$$x = a \cos \psi - \frac{\varepsilon a^3}{32} \sin 3\psi - \frac{\varepsilon^2 a^3}{1024} \left[ \frac{5}{3} a^2 \cos 5\psi + (a^2 + 8) \cos 3\psi \right].$$

bunda

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(-1 + \frac{4}{a_0^2}\right) e^{-\varepsilon t}}, \quad \psi = t - \frac{\varepsilon^2}{16} t - \frac{\varepsilon}{8} \ln a + \frac{7\varepsilon}{64} a^2 + \varphi_0.$$

$$3. \quad x = a \cos \psi - \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} (\sin 3\psi + \cos 3\psi);$$

$$a^2 = \frac{a_0^2 e^{\varepsilon t}}{1 + \frac{a_0^2}{4\omega_0} (e^{\varepsilon t} - 1)}, \quad a_0 = a(0), \quad \psi = \omega_0 t - \frac{3}{2} \frac{\ln \left( -1 + \frac{e^{\varepsilon t}}{1 - \frac{4\omega_0^2}{a_0^2}} \right)}{1 + \ln \frac{e}{1 - \frac{4\omega_0^2}{a_0^2}}}.$$

## 6-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

1. Ko'rsatma: mos keluvchi tenglamalarni skalar ravishda **P** va **M** ga ko'paytiring.

2. Energiyaning saqlanish qonunini

$$l \frac{(M_z - M_3 \cos \theta_0)^2}{2I' \sin^2 \theta_0} - mgl(1 - \cos \theta_0) =$$

$$= \frac{1}{2} I' \dot{\theta}^2 + \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I' \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta)$$

ko'rinishda yozib olinadi, (6.79) belgilashlarni kiritiladi va kerakli algebraik soddalashtirishlar bajariladi.

$$3. \quad I_{xx} = I_{yy} = 2a^2(m + M), \quad I_{xz} = I_{yz} = 2a^2(m - M),$$

$$I_{zz} = 2I_{xx}, \quad I_{xz} = I_{yz} = I_{yx} = I_{xy} = 0, \quad I'_{xx} = 4a^2 m, \quad I'_{yy} =$$

$$= 4a^2 M, \quad I'_{zz} = I_{xx} + I_{yy}.$$

4.  $(x', y')$  koordinat o'qlarida inersiya markazi  $(a, a)$  nuqtada joylashgan. Shu nuqtaga nisbatan inersiya momentlarini topilsa quyidagi natija olinadi:

$$I'_{ij} = \begin{pmatrix} 12ma^2 & 4ma^2 & 0 \\ 4ma^2 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 16ma^2 \end{pmatrix}, \quad O^z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koordinat sistemani  $\varphi$  burchakka burab shunday yangi  $(x, y)$  koordinatlarga o'taylikki, ularda  $I_y$  diagonal bo'lsin. Buning uchun  $z$  o'qi atrofida  $\varphi$  burchakka burash matritsasi  $O^z$  dan foydalanamiz.  $I'_{ij} = O_{il}^z O_{jk}^z I'_{lk}$

Birinci elementni topaylik:

$$I_{11} = O_{1l}^z O_{1k}^z I'_{lk} = O_{11}^z O_{11}^z I'_{11} + 2O_{11}^z O_{12}^z I'_{12} + O_{12}^z O_{12}^z I'_{22} = \\ = 4ma^2 (3\cos^2 \varphi + 2\sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi).$$

Huddi shunday:

$$I_{12} = O_{1l}^z O_{2k}^z I'_{lk} = O_{11}^z O_{21}^z I'_{11} + O_{11}^z O_{22}^z I'_{12} + O_{12}^z O_{21}^z I'_{21} + O_{12}^z O_{22}^z I'_{22} = \\ = 4ma^2 (-\sin 2\varphi + \cos 2\varphi);$$

$$I_{22} = 4ma^2 (3\cos^2 \varphi - \sin 2\varphi + \sin^2 \varphi); \quad I_{33} = 16ma^2; \quad I_{13} = I_{23} = 0.$$

$\varphi$  burchakni shunday tanlab olish kerakki,  $I_{12} = 0$  bo'lsin. Buning uchun  $\varphi = \pi/8$  bo'lishi kerak. Natijada inersiya tenzorining bosh momentlari uchun quyidagilar olinadi:

$$I_{11} = I_1 = 4ma^2 (2 + \sqrt{2}); \quad I_{yy} = I_2 = 4ma^2 (2 - \sqrt{2}); \quad I_{zz} = I_3 = 16ma^2.$$

5. Impuls momentining saqlanishi qonuni bo'yicha  $M = I\Omega = \text{const}$ .

Bu munosabat shar uchun  $R^2\Omega = \text{const}$  ko'rinichga ega.  $R^2\Omega = R'^2\Omega'$  dan  $\Omega' = \Omega/(0,99)^2 \approx 1,02\Omega$  ekanligi topiladi. Yerdagi sutkaning uzunligi  $\sim 28$  minutga kamayadi. Yerning aylanish energiyasi 2% ga oshadi.

6. Tortish kuchi yo'q bo'lganda prujinalarning uzunligini  $b$  deylik. Sistemamizning erkinlik darajasi ikkiga teng  $-x$  va  $\theta$ . Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k[(x_1 - b)^2 + (x_2 - b)^2] - mgx.$$

$x_2 - x_1 = L\theta$ ,  $x_1 + x_2 = x$  munosabatlardan  $x_1 = x - L\theta/2$ ,  $x_2 = x + L\theta/2$  lar olinadi. Natilada Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishni oladi:

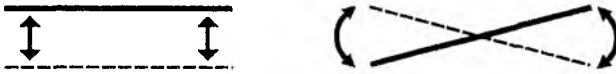
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - k(x-b)^2 - mgx - \frac{1}{4}kL^2\theta^2.$$

Xodani ingichka deb qaraylik:  $I = mL^2/12$ .

Harakat tenglamalari:

$$\ddot{x} + 2\omega^2(x-b) + g = 0, \quad \ddot{\theta} + 6\omega^2\theta = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Demak, sistemada ikkita chastota bor ekan:  $\omega_1 = \sqrt{2}\omega$ ,  $\omega_2 = \sqrt{6}\omega$ . Ularga mos keluvchi tebranish modalari – normal tebranishlar – (1.)-rasmda ko'rsatilgan.



1-rasm. 6-bobdagi 6-masalaga oid

7. 2-a rasmdan ko'rinib turibdiki,  $h = H \operatorname{tg} \alpha = \frac{2vH\Omega}{g} \sin \theta$ .

8. 2-b rasmdagi belgilashlardan foydalaniladi. Kichik silindrning kinetik energiyasi ikki qismdan iborat – o'z o'qi atrofida aylanish energiyasi va katta silindrning ichida yumalash energiyasi:

$$T = \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-a)^2\dot{\delta}^2.$$

Bu yerda  $(R-a)\dot{\delta} = v$  kichik silindr markazining harakat tezligi,

$I_3 = ma^2/2$ . Sirpanishsiz harakat uchun  $a\dot{\theta} = (R-a)\dot{\delta}$ . Demak,

$$T = \frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\delta}^2.$$

Silindrchaning potensial energiyasi:  $U = (R-a)mg(1 - \cos \delta)$ . Lagranj funksiyasi:

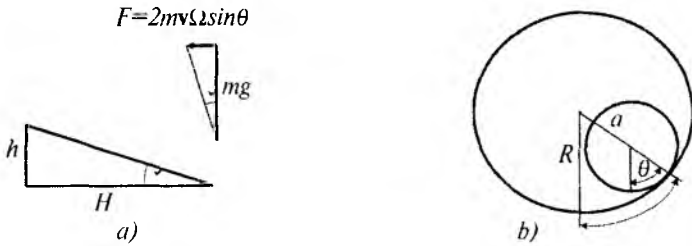
$$L = \frac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\delta}^2 - (R-a)mg(1 - \cos \delta).$$



Kichik tebranishlar haqida gapirish uchun  $\cos \delta \approx 1 - \delta^2/2$  deb olinadi:

$$L = \frac{3}{4} m (R-a)^2 \dot{\delta}^2 - \frac{(R-a)mg\delta^2}{2}.$$

Tebranish chastotasi:  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}.$



2-rasm. 6-bobdagi (7)- va (8)-masalalarga oid

### 7-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

$$a) H = -\ln x; \quad b) H = \frac{1}{2m} \sum_a \mathbf{p}_a^2 + \frac{1}{2M} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \right)^2;$$

$$c) H = \frac{1}{4} x p_x^2 + \frac{1}{4x} p_y^2 - x; \quad d) H = \frac{1}{4} x p_x^2 + x p_y p_z;$$

$$e) H = \frac{1}{2} p_x^2 + p_y^2 + y p_x - x p_y + \frac{1}{2} (x^2 + y^2);$$

$$f) H = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \sin^2 \theta + mgr \cos \theta.$$

2.  $\mathbf{p} = m(\dot{\mathbf{r}} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}])$ ,  $H = \frac{1}{2} m \mathbf{p}^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r}\mathbf{p}] + U(\mathbf{r})$ . Agar burchak tezlik nolga teng bo'lgandagi Gamilton funksiyasini  $H_0$  deb belgilansa va impuls momentining ta'rifini eslansa  $H = H_0 - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}$  bo'ladi.

$$3. \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} + [\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]; \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}\boldsymbol{\Omega}] - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

$$4. H = \frac{p_{\theta}^2}{2I_1} + \frac{(p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_{\varphi}^2}{2I_3}.$$

$$5. \text{ Silindrik sistemada: } H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z).$$

$$\text{Sferik sistemada: } H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_{\theta}^2}{r^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

6. Cheksiz kichik siljish:  $\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a.$

$$H(\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a) = H(\mathbf{r}'_a, \mathbf{p}'_a) \text{ shart } \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} = 0 \text{ ekanligini bildiradi. Demak,}$$

kanonik tenglamalar bo'yicha

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_a \dot{\mathbf{p}}_a = - \sum_a \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{const.}$$

7. Cheksiz kichik  $\delta\varphi$  burchakka burilganda

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \delta\mathbf{r}_a, \quad \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a + \delta\mathbf{p}_a; \quad \delta\mathbf{r}_a = [\delta\varphi \mathbf{r}_a], \quad \delta\mathbf{p}_a = [\delta\varphi \mathbf{p}_a]$$

bo'ladi.

$$\begin{aligned} H &= \sum_a \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} \delta\mathbf{r}_a + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_a} \delta\mathbf{p}_a \right) = \sum_a (-\dot{\mathbf{p}}_a \delta\mathbf{r}_a + \dot{\mathbf{r}}_a \delta\mathbf{p}_a) = \\ &= \sum_a (-\dot{\mathbf{p}}_a \cdot [\delta\varphi \mathbf{r}_a] + \dot{\mathbf{r}}_a \cdot [\delta\varphi \mathbf{p}_a]) = \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0. \end{aligned}$$

$$\delta\varphi \text{ ixtiyoriy bo'lgani uchun } \mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \text{const.}$$

$$8. L = \frac{\theta \dot{r}^2}{2} + \frac{r^2 \sin \theta \dot{\theta}^2}{2} - r.$$

$$9. R(\theta, \dot{\theta}, M_z, M_3) = -\frac{1}{2} I' \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{I_3} + \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I' \sin^2 \theta};$$

$$\varphi, \psi - \text{siklik, } p_{\varphi} = M_z, p_{\psi} = M_3.$$

$$\begin{aligned}
 & a) \{M_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k; \quad b) \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\} = b_i a_j \{M_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk} b_i a_j r_k = \\
 & 10. = \mathbf{b} \cdot [\mathbf{a}\mathbf{r}]; \\
 & c) \{\mathbf{b} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{M}\} = \mathbf{c} \cdot [\mathbf{b}\mathbf{M}]; \quad d) 0; \\
 & e) \left\{ \mathbf{p}, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 \right\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 = 2\mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}); \\
 & f) \{r_i, \mathbf{M}^2\} = 2M_j \{r_i, M_j\} = 2[\mathbf{M}\mathbf{r}]_i; \quad g) \{p_i, M^2\} = 2[\mathbf{p}\mathbf{M}]_i; \\
 & h) 0; \quad i) 0.
 \end{aligned}$$

11. Berilgan maydonda  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$ .  $\dot{\mathbf{M}} = \{H, \mathbf{M}\}$  ni topish kerak.

Komponentalar bo'yicha hisoblaylik:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_i &= \{H, M_i\} = \varepsilon_{ijk} \{H, r_j p_k\} = \varepsilon_{ijk} \{H, r_j\} p_k + \varepsilon_{ijk} r_j \{H, p_k\} = \\
 &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H}{\partial p_j} p_k - \varepsilon_{ijk} \frac{\partial H}{\partial r_k} r_j = \frac{1}{m} \varepsilon_{ijk} p_j p_k - \frac{\alpha}{r^3} \varepsilon_{ijk} r_j r_k = 0,
 \end{aligned}$$

12. Kulon (Nyuton) maydonida  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$ . Vazifamiz  $\dot{\mathbf{A}} = \{H, \mathbf{A}\}$  ni hisoblash. Komponentalar bo'yicha hisoblaylik:

$$\dot{A}_i = \{H, A_i\} = \{H, [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}]_i\} - \alpha \left\{ H, \frac{r_i}{r} \right\} = \varepsilon_{ijk} \{H, \dot{r}_j M_k\} - \alpha \frac{\{H, r_i\}}{r} - \alpha \left\{ H, \frac{1}{r} \right\} r_i.$$

Quyidagi hadni hisoblaylik:

$$\dot{r}_j = \{H, r_j\} = \left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, r_j \right\} = \frac{p_k}{m} \{p_k, r_j\} = \frac{p_j}{m}.$$

Demak,

$$\dot{A}_i = -\frac{\alpha}{mr^3} \varepsilon_{ijk} r_j M_k - \frac{\alpha}{mr} p_i + \frac{\alpha}{mr^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) r_j = 0,$$

chunki

$$\varepsilon_{ijk} r_j M_k = \varepsilon_{ijk} r_j \varepsilon_{klm} r_l p_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) r_j r_l p_m = r_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - p_i r^2.$$

$$13. \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2qe^p; \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q^2 e^p \Rightarrow P = \ln \frac{p}{2q}; \quad Q = \frac{pq}{2}.$$

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}; \quad P = -\frac{\partial F_4}{\partial Q}.$$

$$\text{Yechish kerak: } \frac{2Q}{p} = -\frac{\partial F_4}{\partial p}; \quad \ln \frac{p^2}{4Q} = -\frac{\partial F_4}{\partial Q}.$$

$$\text{Yechish: } F_4(p, Q) = -2Q \ln p + C(Q); \quad -2 \ln p + \frac{dC(Q)}{dQ} = -\ln \frac{p^2}{4Q}$$

$$\Rightarrow C(Q) = Q(\ln 4Q - 1) \Rightarrow F_4(p, Q) = Q \left( \ln \frac{4Q}{p^2} - 1 \right).$$

$$14. \quad P = e^p, \quad Q = qe^{-p}.$$

$$15. \quad H' = \frac{(P - mgt)^2}{2m}.$$

16. Almashtirish formulalari:

$$P_i = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} P_j, \quad Q_i = f_i(q, t), \quad H' = H + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial t} P_j.$$

Ko'rsatish qiyin emaski:

$$\dot{Q}_i - \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \left( \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0, \quad \dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_j} \left( \dot{P}_j + \frac{\partial H'}{\partial Q_j} \right) = 0.$$

17. Ko'rinib turibdiki,  $P = p + \frac{\partial f}{\partial q}$ ,  $Q = q$ . Yangi Gamilton funksiyasi

$$H' = P\dot{Q} - L' = pq - L - \frac{\partial f}{\partial t} = H - \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Demak, yangi o'zgaruvchilarda ham tenglamalar kanonik bo'lib chiqadi.

$$18. \quad F_2(q, P) = qP - f(q, t).$$

## 8-bobga oid masalalarning javoblari va yechimlari

1. O'qlarni rasmda ko'rsatilganidek tanlaymiz. Burchak tezlik  $\Omega = \{0, 0, \omega\}$ .  $(x, y)$  koordinatali suyuqlik nuqtasining tezligi:  $v_x = -\omega y$ ,  $v_y = \omega x$ ,  $v_z = 0$ . Undan tashqari  $\rho = \text{const}$ . Bu hol uchun Eyler tenglamalari:

$$\omega^2 x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Demak,  $dp = \rho\omega^2(xdx + ydy) - \rho g dz$ ,

$$\text{yoki, } p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - \rho g z + C.$$

Suyuqlik sirtida  $p = 0$ , demak,  $\frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) - \rho g z + C = 0$ .

Bu — aylanma paraboloid tenglamasi. Shu sirtning markazida  $-\rho g h' + C = 0$ . Demak,  $p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) + \rho g (h' - z)$ .

$h'$  ni suyuqlikning hajmi o'zgarmasligi shartidan topiladi:

$$\pi a^2 h = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr r z = 2\pi \int_0^a dr r \left( \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h' \right) = \pi a^2 \left( h' + \frac{a^2 \omega^2}{4g} \right)$$

Shu bilan bosim uchun ifoda to'liq aniqlandi:

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) + \rho g (h - z) - \frac{a^2 \omega^2 \rho}{4}.$$

2.  $z$  o'qini yuqoridan pastga qaratamiz. Bernulli integrali:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 - gz = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} V^2.$$

$p_0$  — tashqi atmosfera bosimi,  $z$  — suyuqlik sirtining boshlang'ich balandligi. Uzliksizlik tenglamasi:  $SV = sV$ . Natija:

$$v^2 = 2gz / \left( 1 - \frac{s^2}{S^2} \right). \text{ Agar } s/S \ll 1 \text{ bo'lsa } v^2 = 2gz \text{ deb olish mumkin.}$$

3. Uzliksizlik tenglamasi  $SV = sV$ , tezlik uchun avvalgi masalada olingan tenglama  $v^2 = 2gy$  va  $S = \pi x^2$  larni birlashtiramiz:  $\pi x^2 V = s\sqrt{2gy}$ .

Demak,

$$x^4 = \frac{2gs^2}{\pi^2 V^2} y.$$

Bunday tenglama bilan aniqlanadigan chiziq klepsidra deyiladi.

4. Bu holda Eyler tenglamasi:

$$0 = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}.$$

Uning faqat radial komponentasi qoladi, sharning ichida:

$$\frac{dp}{dr} = -g(r) = -\frac{G}{r^2} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = -\frac{4\pi G \rho}{3} r.$$

$R$  radiusli shar uchun:

$$p(R) - p(0) = \int_0^R \frac{dp}{dr} dr = -\frac{1}{2} \frac{4\pi G}{3} \rho R^2.$$

Ravshanki,  $p(R) = 0$ . Sharning sirtidagi tortish kuchi tezlanishini  $g_R$  deb olib sharning markazidagi bosim uchun quyidagi formula olinadi.

$$p(0) = \frac{1}{2} g_R \rho R$$

---

---

## Vektor algebra

Vektorlar ustida amallarni bajarishning bir necha yo'llari bor. Shular ichida analitik metod o'zining umumiyligi va soddaligi bilan ajralib turadi. Mana shu metodni o'rganaylik. Biz faqat uch o'lchamli vektorlar bilangina shug'ullanamiz.

Skalar ko'paytma tushunchasidan boshlaymiz. Ikki vektorning skalar ko'paytmasi quyidagicha aniqlangan:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i. \quad (\text{A.14})$$

Vektorning  $x, y, z$  komponentalarini 1, 2, 3 deb belgilash qulaydir. Skalar ko'paytma natijasida skalar kattalik paydo bladi. Quyidagicha qoida kiritaylik (**Einstein qoidasi**): ikki marta uchragan indeks bo'yicha yig'indi ko'zda tutiladi. Bu holda yuqoridagi formulani yig'indi belgisiz yozishimiz mumkin:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i. \quad (\text{A.15})$$

Bunday indekslarni **soqov indekslar** deymiz. Qoida kiritilishining sababi – formulalarning yozilishini soddalashtirish. Masalan, to'rtta vektorning skalar ko'paytmalarining ko'paytmasi:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = A_i B_i C_j D_j. \quad (\text{A.16})$$

Agar soqov indeks tushunchasidan foydalanmasak o'ng tomonda ikkita yig'indi belgisini yozishimiz kerak bo'lgan bo'lar edi – biri  $i$  bo'yicha, ikkinchisi  $j$  bo'yicha (ikkalasi 1 dan 3 gacha). Soqov indekslarni bir-biridan farq qilish kerak – agar ifodada bir-necha soqov indeks ishtirok etsa ularning har biri o'z harfi bilan belgilanishi kerak. Ozod indeks tushunchasini ham kiritaylik

$$(A)_i = A_i. \quad (\text{A.17})$$

Biz bu belgilash bilan chap tomondagi vektorning  $i$ -nchi komponentasi  $A_i$  ekanligini ko'rsatmoqchimiz.

Masalan,  $\mathbf{A}$  vektori  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  skalar ko'paytmaga ko'paytirilgan bo'lsin.

Hosil bo'lgan vektorning  $i$ -nchi komponentasi nimaga teng? Javob:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}))_i = A_i B_j C_j. \quad (\text{A.18})$$

Endi Kronecker simvolini kiritaylik:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa,} \\ 0 & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa.} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Bu simvolni ikki vektorning skalar ko'paytmasining ta'rifida ishlatishimiz mumkin:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = \delta_{ij} A_i B_j. \quad (\text{A.20})$$

O'ng tomonda ikkita soqov indeks bo'yicha yig'indi ketayapti. Oxirgi formula

$$A_i = \delta_{ij} A_j \quad (\text{A.21})$$

ga asoslangandir ( $j$  bo'yicha yig'indida faqatgina bitta had qoladi –  $j = i$  bo'lgan had).

Birlik antisimmetrik tenzor tushunchasini kiritaylik:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{agar } ijk = 123, 231, 312 \text{ ketma - ketliklarni xosil qilsa.} \\ 0 & \text{agar } i, j, k \text{ larning biror ikkitasi teng bo'lsa.} \\ -1 & \text{qolgan hollarda} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Ya'ni,  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ,

$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$ ,  $\varepsilon_{122} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{332} = \dots = 0$ . Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, ushbu tenzorning indekslari o'rnini siklik ravishda almashtirishimiz mumkin:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}. \quad (\text{A.23})$$

Birlik antisimmetrik tenzor o'zining indekslari bo'yicha antisimmetrikdir:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}, \dots \quad (\text{A.24})$$

Natijada uning ixtiyoriy ikki indeksi bir-biriga teng bo'lib qolsa u nolga teng bladi:  $\varepsilon_{ijj} = \varepsilon_{jji} = \varepsilon_{iik} = 0$  va h.k. Bu uch undeksli kattalik (psevdo)tenzorni xosil qiladi. Shu tenzor yordamida ikki vektorning vektor ko'paytmasini quyidagicha ta'riflashimiz mumkin:

$$[\mathbf{AB}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (\text{A.25})$$



Tekshirib ko'raylik.  $i = 1$  bo'lsin:

$$[\mathbf{AB}]_1 = [\mathbf{AB}]_x = \varepsilon_{1jk} A_j B_k. \quad (\text{A.26})$$

O'ng tomondagi ikkita yig'indi ostida soqov indekslar  $j$  va  $k$  faqatgina 2 va 3 qiymatlarni qabul qilgan hadlarga nolgacha teng emas:

$$\varepsilon_{1jk} A_j B_k = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2. \quad (\text{A.27})$$

Olgan natijamizni o'zimizga ma'lum ko'rinishga keltirib olish mumkin:

$$[\mathbf{AB}]_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 = A_y B_z - A_z B_y. \quad (\text{A.28})$$

Demak,  $\varepsilon_{ijk}$  tenzori vektor ko'paytmani kompakt ko'rinishda yozib olishga imkon berar ekan. Agar shu tenzorning quyidagi xossalarni kiritsak:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6, \quad (\text{A.29})$$

vektor algebrasida uchraydigan eng murakkab ifodalarni ham soddalashtirish imkoniyatiga ega blamiz. Bu xossalarning birinchisini to'g'ridan-to'g'ri tekshirib ko'rishgina mumkin. Ikkinchisi esa birinchisidan uni  $\delta_{jl}$  ga ko'paytirib soqov indekslar bo'yicha yig'indini xisoblab olinadi. Uchinchisi ikkinchisini  $\delta_{km}$  ga ko'paytirib olinadi.

Kiritilgan formulalarning qanday ishlashini misollarda ko'rib chiqaylik.

**A.1-misol.** Uch vektorning qo'shma ko'paytmasini toping.

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{BC}] = A_i [\mathbf{BC}]_i = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k. \quad (\text{A.30})$$

Agar (A.23) ni eslasak uch vektor qshma ko'paytmasining bizga ma'lum bir xossasini olgan bo'lamiz:

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{BC}] = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{CA}] = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{AB}]. \quad (\text{A.31})$$

**A.2-misol.**

$$\begin{aligned} [\mathbf{AB}] \cdot [\mathbf{CD}] &= [\mathbf{AB}]_i [\mathbf{CD}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \varepsilon_{ilm} C_l D_m = \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

**A.3-misol.** Birlik antisimmetrik tenzorning antisimmetrikligidan foydalanib

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{AB}] = 0 \quad (\text{A.33})$$

ekanligini ko'rsating.

**Isbot.**

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{AB}] = \varepsilon_{ijk} A_i A_j B_k. \quad (\text{A.34})$$

Bu ifodada uchta soqov indeks bor –  $i, j, k$  ularning har biri bo'yicha 1 dan 3 gacha yig'indi ko'zda tutilgan.  $k$  indeksni olaylik va uning har bir qiymati uchun nol olishni ko'rsataylik.  $k=3$  dan boshlaylik. Unda

$$\varepsilon_{ij3} A_i A_j B_3 = (A_1 A_2 - A_2 A_1) B_3 = 0 \quad (\text{A.35})$$

bo'ladi. Shu muloxazani  $k=1$  va  $k=2$  xollar uchun ham qaytarishimiz mumkin, har gal ham nolni olamiz. Umumiy natija ham nolga tengdir.

Uchta vektorning vektor ko'paytmasini ko'raylik:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}[\mathbf{BC}]]_i &= \varepsilon_{ijk} A_j [\mathbf{BC}]_k = \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m = B_l (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_m (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

yoki, to'liq ravishda vektor ko'rinishga o'tsak:

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{A.37})$$

Asosiy tekstda uchta vektorning vektor ko'paytmasi uchraganda ularda ham huddi (A.36) formulasidagi tartib ko'zda tutilgan – birinchi vektor ikkinchi va uchinchi vektorlarning vektor ko'paytmasiga vektor ravishda ko'paytirilgan.

---

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика, — М.: Физматгиз, 204 бет (1973)
2. *Голдстейн.* Классическая механика, — М.: Наука, 415 бет.(1975)
3. *Коткин,* Сербо. Сборник задач по классической механике
4. *Маркеев А.П.* Теоретическая мсханика, — М.: Наука, 414 бет.(1990)
5. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, — М.: ГИТТЛ, т.1, 560 бет (1955)
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика, — М.: Наука, 736 бет(1986)
7. *Валле-Пуссен Ш.Ж.* Лекции по теоретической механике, т. II, — М.: ИЛ, 328 бет. (1949)
8. Вариационные принципы механики, Сборник статей под ред. Л.С. Полака, — М.: ГФМЛ, 932 бет (1959)
9. *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике, М.: Изд.МГУ, 336 бет. (1991)
10. *Борн М.* Атомная физика, — М.: Мир, 496 бет (1970)
11. *Зоммерфельд А.* Механика, — М.: ИЛ, 392 бет (1947)
12. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику, — М.: Наука, 252 бет (1991)
13. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, — М.: Наука, 504 бет (1974)
14. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики, — М.: Наука, 472 бет (1989)

## MUNDARIJA

### **1-bob. HAKKAT TENGLAMALARI**

So'zboshi.....	5
1.1. Erkinlik darajasi. Umumlashgan koordinatalar.....	8
1.2. Lagranj funksiyasi va ta'sir integrali.....	12
1.3. Inersial sanoq sistemalari.....	16
1.4. Galiley invariantligi va erkin jismning Lagranj funksiyasi.....	18
1.5. Moddiy nuqtalar sistemasining Lagranj funksiyasi.....	21
1.6. Bog'lanishlar bo'lgan holda Eyler—Lagranj tenglamalari.....	24

### **2-bob. HAKKAT INTEGRALLARI**

2.1. Energiyaning saqlanish qonuni.....	38
2.2. Impulsning saqlanish qonuni.....	40
2.3. Inersiya markazi.....	41
2.4. Harakat miqdori momentining saqlanish qonuni.....	44
2.5. Virial teorema.....	47

### **3-bob. HAKKAT TENGLAMALARINI INTEGRALLASH**

3.1. Bir o'lchamli harakat tenglamasi.....	52
3.2. Ikki jism masalasi.....	55
3.2.1. Keltirilgan massa.....	55
3.2.2. Markaziy maydon.....	56
3.3. Kepler masalasi.....	61
3.5. Markaziy maydonda sochilish jarayonlari.....	64
3.5.1. Sochilish kesimi.....	64
3.5.2. To'qnashish jarayonlari.....	67
3.5.3. Sochilish jarayonlariga misollar.....	71

### **4-bob. KICHIK TEBRANISHLAR**

4.1. Bir o'lchamli sistemalar.....	80
4.2. Majburiy tebranishlar.....	84

4.2.1. Umumiy nazariya.....	84
4.2.2. Tashqi kuch o'zgarmas bo'lgan hol.....	86
4.2.3. Tashqi kuch davriy bo'lgan hol.....	87
4.2.4. Tashqi kuch bajargan ish.....	88
4.3. So'nuvchi tebranishlar.....	91
4.4. Ishqalanish bo'lgandagi majburiy tebranishlar.....	95
4.5. Ko'p o'lchamli sistemalardagi tebranishlar.....	98
4.5.1. Ikkita bog'langan mayatniklar.....	98
4.5.2. Umumiy hol.....	103
4.5.3. Molekulalarning tebranishlari.....	107
4.6. Zanjirlarning tebranishlari.....	111
4.6.1. Chegaraviy massalar birlashtirilgan hol.....	112
4.6.2. Chegaraviy massalarning bittasi birlashtirilgan.....	115
4.6.3. Chegaraviy massalar erkin bo'lgan hol.....	116
4.6.4. Elektr zanjirlar.....	118

### 5-bob. NOCHIZIQLI TEBRANISHLAR

5.1. Angarmonik had $x^4$ bo'lgandagi tebranishlar.....	123
5.2. Umumiy metod.....	127
5.2.1. Angarmonik ossillator: $\delta U = m\epsilon x^4$ .....	131
5.2.2. Angarmonik ossillator: $\delta U = m\epsilon x^3$ .....	133
5.2.3. Mayatnik.....	134
5.2.4. So'nuvchi tebranuvchi mayatnik.....	136

### 6-bob. QATTIQ JISM HARAKATI

6.1. Dinamik o'zgaruvchilar.....	139
6.1.1. Koordinata o'qlarini tanlash. Burchak tezlik <sup>i</sup> .....	139
6.1.2. Inersiya markazi. Impuls.....	141
6.1.3. Impuls momenti.....	142
6.1.4. Kinetik energiya.....	143
6.1.5. Inersiya tenzori.....	144
6.2. Eyler burchaklari.....	150
6.3. Qattiq jismning harakat tenglamalari.....	152
6.4. Qattiq jism harakatini integrallash.....	155
6.4.1. Erkin simmetrik pirildoq (Eyler holi).....	155
6.4.2. Tashqi maydondagi simmetrik pirildoq (Lagranj holi).....	157
Eyler tenglamalariga asoslanib yondoshish.....	167

6.5. Dalamber prinsipi.....	175
6.6. Qattiq jismlar sistemalariga misollar. Nogolonom shartlar.....	176
6.7. Noinersial sistemalardagi harakat.....	180

### **7-bob. KANONIK FORMALIZM**

7.1 Gamilton tenglamalari.....	190
7.3. Raus funksiyasi va siklik koordinatalar.....	198
7.4. Puasson qavslari.....	201
7.5. Ta'sir integrali koordinata va vaqtning funksiyasi sifatida.....	208
7.6. Kanonik almashtirishlar.....	213
7.6.1. Ta'rif. Hosil qiluvchi funksiyalar.....	213
7.6.2. Kanonik almashtirishlar va Puasson qavslari.....	220
7.6.3. Kanonik almashtirish va harakat.....	222
7.7 Integral invariantlar.....	223
7.7.1 Fazaviy fazodagi integral invariant.....	223
7.7.2. Liuvil teoremasi.....	225
7.8. Mopertyui prinsipi.....	227
7.9. Gamilton — Yakobi tenglamasi.....	230
7.10. O'zgaruvchilarni ajratish.....	232
7.10.1. Umumiy g'oyalari.....	232
7.10.2. Qutb koordinat sistemasi.....	235
Kepler masalasi.....	237
7.10.3. Sferik koordinata sistemasi.....	237
7.11. Ta'sir-burchak o'zgaruvchilari.....	239
7.12. Adiabatik invariantlar.....	244

### **8-bob. SUYUQLIKLAR MEXANIKASI**

8.1. Uzliksizlik tenglamasi.....	250
8.2. Eyler tenglamasi.....	252
8.3. Hidrostatika.....	254
8.4. Bernulli qonuni.....	255
8.5. Tezlik sirkulatsiyasi.....	257
8.6. Tezlik potentsiali.....	260
8.7. Impuls oqimi zichligi tenzori.....	260
8.8. Yopishqoq suyuqlik.....	262
8.9. Yopishqoq suyuqliklar oqimiga misollar.....	266

8.9.1. Ikki plastina orasidagi oqim.....	266
8.9.2. Qiyalik bo'yicha oqim.....	268
8.9.3. Quvur bo'yicha oqim.....	270
8.10. Tovush.....	271
8.11. Quvur bo'yicha gazning bir o'lchamli statsionar oqimi.....	275
Masalalarning javoblari va yechimlari .....	279
Vektor algebra.....	303
Foydalanilgan adabiyotlar.....	307

**Biruniy Amanullayevich FAYZULLAYEV**

## **NAZARIY MEXANIKA**

*Oliy o'quv yurtlari uchun darslik*

*Muharrir Xudoyberdi Po'latxo'jayev*

*Badiiy muharrir Yasharbek Rahimov*

*Texnik muharrir Yelena Tolochko*

*Musahhah Muhabbat Xalliyeva*

*Kompyuterda teruvchi Feruza Razzoqova*

Litsenziya raqami AI № 163. Boshiga ruxsat etildi 22.07. 2011. Bichimi 60×84<sup>2/16</sup>. Tayms UZ gamiturasi. Shartli b.t.18,13 Nashr b.t. 167. Shartnoma № 61–2011. 509 nusxada. Buyurtma № 40

O'zbekiston Matbuot va axborot agentligining Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbuot ijodiy uyi. 100129, Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30-uy.

«NOSHIR-FAYZ» MCHJ bormaxomasiyla chop etildi. Toshkent tumani, Keles shahar, k. G'ofurov ko'chasi, 97-uy.