

Nizomiy nomidagi TDPU ning
70 yilligiga bag'ishlanadi

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI



CHIZMA GEOMETRIYA

Oily o'quv yurtlari uchun

I qism

TOSHKENT – 2005

Chizma geometriya. I - qism.

Ushbu o'quv qo'llanma pedagogika oliy o'quv yurtlar ta'lim yo'nalishi 5140700 - «Tasviriy san'at va muhandislik grafikasi» o'quv rejasi va dasturi asosida yozilib bakalavriat talabalariga mo'ljallangan. Qo'llanma chizma geometriyaning nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik va ularning o'zaro vaziyatlari va ortogonal proyeksiyalarini qayta tuzish usullarini o'z ichiga oladi. Qo'llanmada asosiy e'tibor olingan nazariy bilimlarga asosan masala yechishga qaratilgan.

Qo'llanmadan chizma geometriya kursini o'qiydigan barcha ta'lim yo'nalishi talabarlari ham foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:	Professor SH.Murodov, Dotsent T.Rixsiboyev
Mas'ul muharrir:	dots. E.Ro'ziyev
Muharrir:	Z.Mirholiqov

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi oliy o'quv yurtlararo ilmiy – uslubiy birlashmalar faoliyatini muvofiqlashtiruvchi kengash prezidiumining 2003 yil 1 iyuldagi 57 – sonli majlis bayoni bilan o'quv qo'llanma sifatida nashrga tavsiya etilgan.

So'z boshi

Ushbu qo'llanma pedagogika oliy o'quv yurtlari badiiy grafika fakulteti talabalariga mo'ljallab, «Tasviriy san'at va muhandislik grafikasi» bakalavriat yo'nalishi uchun chizma geometriya bo'yicha tasdiqlangan dasturga muvofiq yozildi.

Mazkur qo'llanma chizma geometriyaning nuqta, to'g'ri chiziq va tekisliklarga oid bo'limlarini o'z ichiga olgan bo'lib, bakalavriat talablaridan kelib chiqqan holda nazariy bilimlar asosida ko'proq amaliy masalalar yechishga qaratilgan.

Chizma geometriya matematik fan - proyektiv geometriya fanining o'ziga xos bir shohobchasi bo'lib, o'zining amaliy mohiyati jihatidan muhandislik fanlari qatoriga kiritiladi. U narsalarning geometrik xususiyatlariga asoslangan holda tasvirlash usullari yordamida ularning shakllari, o'lchamlari va o'zaro joylashishlarini, shuningdek, pozitsion, metrik va konstruktiv masalalarni yechish algoritmlarini o'rganadi.

Chizma geometriya tasvirlash usullari yordamida o'quvchining fazoviy tasavvurini kengaytiradi, tasvirlarni yasash va oldindan yasalgan tasvirlarni o'qiy bilish hamda muhandislik masalalarini yechishga yordam beradi.

Fanning mohiyatini asosan ikki narsa tashkil qiladi:

1. Fazodagi tabiiy buyum va geometrik jismlarni biror sirt yoki tekislik ustida tasvirlash usullari;

2. Jismlarning bajarilgan tasvirlari bo'yicha ular orasidagi pozitsion (o'zaro tegishlilik) va metrik munosabatlarini tekshirish;

Chizma geometriya usullaridan foydalanib, ma'lum qonun va qoidalari asosida, tekislikda jismlarni tasvirlari hosil qilinadi. Bu tasvirlar orqali buyumlarning fazoviy shaklini chizish va o'lchamlarni aniqlash mumkin.

Chizma geometriya kursida quyidagi masalalar o'rganiladi:

1) Fazodagi geometrik figuralarning tekislikdagi tasvirlarini yasash;

2) Pozitsion va metrik masalalarni grafik yechish usullari;

3) Figuralarning tekis tasvirlariga, proyeksiyalariga asosan ularning fazoviy ko'rinishlarini tasavvur qilish, ya'ni chizmani o'qish va ularni yaqqol tasvirini chizish.

4) Talabalarining boshqa muhandislik fanlarini o'zlashtirishida va amaliy faoliyatida zarur bo'lgan mantiqiy fikrlash, hamda fazoviy tasavvurlash qobiliyatini o'stirish ham o'rganiladi.

Ushbu qo'llanmani yozishda o'zlarining beg'araz ko'rsatgan yordamlari va maslahatlari uchun professor SH.Murodov, dotsentlar P.Odilov va T.Rixsiboyevlarga muallif o'z minnatdorchiligini bildiradi.

QO'LLANMADA FOYDALANILGAN SHARTLI BELGILAR

Shakl	Belgi	Misol	Belgining ma'nosi nimani bildiradi
Nuqta	Lotin alifbosining bosh harflari	A, B, C, ... 1, 2, 3, ...	A nuqtasi, B nuqtasi, C nuqtasi, 1 nuqtasi, 2 nuqtasi, 3 nuqtasi
Nuqtalarning ketma-ketligi Nuqtalarning proyeksiyalari	Lotin alifbosining bosh harflari	$A^I, A^{II}, A^{III} \dots$ A_1, A_2, A_3, \dots	A_1 - A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A_2 - A nuqtaning frontal proyeksiyasi A_3 - A nuqtaning profil proyeksiyasi
Chiziq	Lotin alifbosining yozma harflari	a, b, c, d, ...	a to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziq c to'g'ri chiziq
Burchaklar	Grekl alifbosining yozma harflari	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	α burchagi, β burchagi, γ burchagi
Tekisliklar	Lotin alifbosining bosh harflari	M, N, K, ...	M tekisligi, N tekisligi, K tekisligi
Proyeksiyalar tekisligi	Lotin alifbosining bosh harflari	H, V, W	H - gorizontal proyeksiyalar tekisligi, V - frontal tekisligi, W - profil proyeksiyalar tekisligi

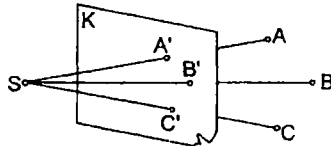
Tekislik izlari		P_H, P_V, P_W	P_H – tekislikning gorizontal izi P_V – tekislikning frontal izi
\cap	Kesishish	$a \cap b$	a to'g'ri chiziqning b to'g'ri chiziq bilan kesishuvi
\subset yoki \supset	O'zaro tegishlilik	$A \supset a$	A nuqta a to'g'ri chiziqqa tegishli
\parallel	Parallellik	$a \parallel N$	a to'g'ri chiziq N tekislikka parallel
\perp	Perpendikulyarlik	$t \perp M$	t to'g'ri chiziq M tekislikka perpendikulyar
=	1) Natija 2) Tenglik	$a \cap b = A$ $AB = CD$	A nuqta a va b to'g'ri chiziqlarning kesishuv natijasi
\equiv	Ustma-ust tushgan	$A \equiv A_1$	A nuqta o'zining gorizontal proyeksiyasi A_1 bilan ustma-ust tushgan
/	Inkor qilish	$A \not\subset a$ $a' \not\parallel b$	A nuqta a to'g'ri chizig'iga tegishli emas. a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel emas

I bob. KIRISH

1.1 § Proyeksiyalash asoslari, Yevklid fazosini kengaytirish

1.1.1. Proyeksiyalar haqida dastlabki tushunchalar

Fazoda K tekisligi va unda yotmaydigan S nuqta, hamda A, B, C nuqtalar berilgan bo'lsin (1-shakl). S nuqta bilan A nuqtani to'g'ri chiziq orqali birlashtiramiz. SA to'g'ri chiziq K tekislik bilan A' nuqtada kesishdi deb faraz qilaylik.



1-shakl

Bu jarayon proyeksiyalash deyilib, lotincha "aks ettirish" yoki "tasvirlash" degan ma'noni bildiradi. S – proyeksiyalash markazi, SA – esa proyeksiyalovchi nur deb ataladi. A' nuqta fazodagi A nuqtaning K tekislikdagi markaziy proyeksiyasi va K tekislik esa, proyeksiyalar tekisligi deyiladi.

Proyeksiya so'zi lotincha "olg'a uloqtirish" degan ma'noni bildirsada, biz uni narsaning tekislikdagi tasviri deb qabul qilamiz. A nuqtaning K tekislikdagi markaziy proyeksiyasini hosil qilish jarayoni ramziy belgilardan foydalanib quyidagicha ifodalash mumkin:

$$SA \cap K \rightarrow A'$$

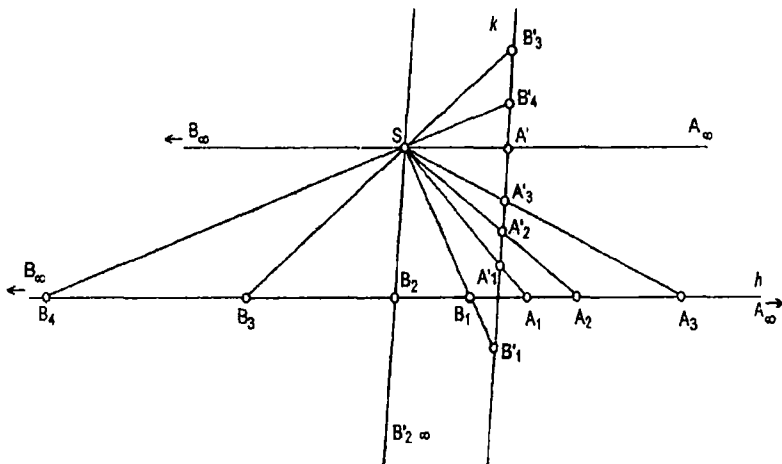
ya'ni, SA proyeksiyalovchi nur K proyeksiyalar tekisligi bilan kesishib A nuqtaning proyeksiyasi A' nuqtani hosil qiladi. B va C nuqtalarning markaziy proyeksiyalari ham shu usulni qo'llash orqali yasalgan, ya'ni

$$SB \cap K \rightarrow B'$$

$$SC \cap K \rightarrow C'$$

1.1.2. Yevklid fazosini xosmas elementlar bilan to'ldirish

Tekislikda o'zaro kesishuvchi h, k chiziqlar va ularda yotmagan S nuqta berilgan bo'lsin (2 - shakl).



2-shakl

S nuqtani proyeksiyalash markazi, k to'g'ri chiziqni - proyeksiyalar to'g'ri chizig'i va h ni proyeksiyalanuvchi to'g'ri chiziq deb qabul qilaylik. h to'g'ri chiziqda tanlab olingan A_1, A_2, A_3 nuqtalami S proyeksiyalash markazi bilan birlashtiramiz. SA_1, SA_2, SA_3 proyeksiyalovchi nurlar proyeksiyalar to'g'ri chizig'i k bilan kesishib, unda bu nuqtalarning markaziy proyeksiyalari A'_1, A'_2, A'_3 ni hosil qiladi.

Demak, k proyeksiyalar to'g'ri chizig'idagi har bir nuqta proyeksiyasiga h to'g'ri chiziqdagi aynan bir nuqta mos kelmoqda va aksincha. Agar biz h to'g'ri chizig'i bo'ylab A_1, A_2, A_3 yo'nalishda A nuqtani cheksiz uzoqlashtirib, uni A_∞ bilan belgilasak, uning proyeksiyasini quyidagicha yasash mumkin.

A_∞ nuqtani h to'g'ri chiziqning xosmas nuqtasi deb ataymiz va uning proyeksiyasini hosil qilish uchun proyeksiyalash markazi S dan h ga parallel o'tkazamiz va uning k bilan kesishgan nuqtasini A'_∞ bilan belgilaymiz. Shunday qilib, A_∞ nuqta ayni vaqtda ikki to'g'ri chiziqqa, ya'ni h ga va S nuqtadan unga parallel o'tkazilgan SA_∞ ga tegishli bo'ladi. h to'g'ri chiziqdagi A_∞ dan boshqa hamma nuqtalami uning oddiy yoki xos nuqtalari deb ataladi.

Endi h to'g'ri chiziqda B_1 nuqtani tanlab uning k dagi markaziy proyeksiyasi B'_1 ni hosil qilamiz. Keyingi tanlangan B_2 nuqta orqali SB_2 proyeksiyalovchi nurni o'tkazsak, u k ga parallel bo'lib qoladi,

demak, u k to'g'ri chiziq bilan xosmas nuqtada kesishadi, ya'ni $SB_2 \cap k \rightarrow B_2'_{\infty}$.

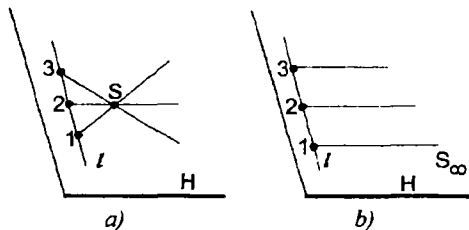
h to'g'ri chiziqda tanlangan B_3, B_4, \dots nuqtalarning k dagi markaziy proyeksiyalari A_{∞}' dan yuqorida joylashadi va nuqtalar h bo'ylab B_1 dan uzoqlashgan sari ularning proyeksiyalari yuqoridan pastga, ya'ni A_{∞}' ga yaqinlasha boradi. Shu yo'nalishda B nuqtani cheksiz uzoqlashtirib, uni B_{∞} deb olsak, uning proyeksiyasini yasash uchun S dan h ga parallel o'tkazishimiz kerak bo'ladi. SB_{∞} to'g'ri chiziq SA_{∞} bilan ustma - ust tushadi. Demak, B_{∞} ning proyeksiyasi B_{∞}' hamda A_{∞}' bilan ustma-ust tushadi: $B_{\infty}' \equiv A_{\infty}'$.

Demak, h to'g'ri chizig'i yagona xosmas nuqtaga ega, chunki u bitta nur orqali proyeksiyalanmoqda. Agar ular ikkita bo'lganda edi, ularni proyeksiyalash uchun ikki proyeksiyalovchi nur ishlatilgan bular edi.

Shunday qilib, Yevklid fazosidagi har bir to'g'ri chiziqqa bittadan xosmas (cheksiz o'zoqlashgan) nuqta mos kelar ekan.

Bundan o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar bitta umumiy xosmas nuqtaga ega degan xulosaga kelamiz. Endilikda, tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziq hamma vaqt o'zaro kesishadi deya olamiz. Ular xos yoki xosmas nuqtada kesishishi mumkin.

Tekislikdagi bir nuqtadan o'tuvchi va tekislikka tegishli chiziqlar to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi. Agar to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqta xos nuqtada joylashgan bo'lsa xos markazga ega to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi (3-shakl, a). S markazga ega bo'lgan bu to'g'ri chiziqlar dastasini l to'g'ri chizig'i bilan kesaylik. U dasta to'g'ri chiziqlarni 1, 2, 3 nuqtalarda kesgan bo'lsin. S dan chiqqan bu to'g'ri chiziqlarni uzilmas cho'ziluvchan rezinkalar deb faraz qilib,

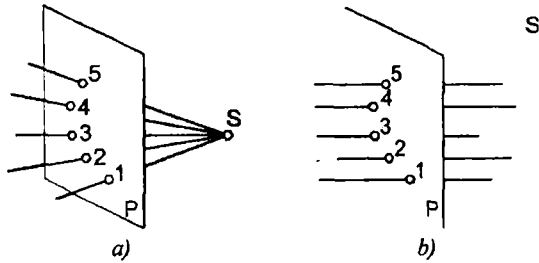


3-shakl

S markazni ma'lum yo'nalishda cheksiz uzoqlashtiraylik. Bu holda $S1, S2, S3, \dots$ to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel (3-shakl, b) bo'lib qoladi. Natijada xosmas markazga ega to'g'ri chiziqlar dastasiga ega bo'lamiz.

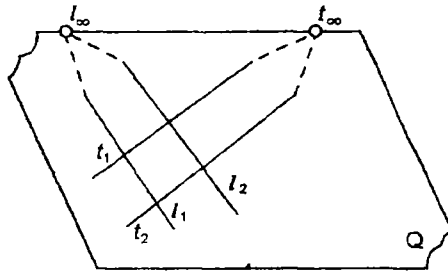
Fazoda joylashgan bir nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqlar to'plamini to'g'ri chiziqlar bog'lami deyiladi.

Bog'lam markazi xos nuqtada joylashgan bo'lsa xos markazga ega, yoki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar bog'lami, agar xosmas nuqtada joylashgan bo'lsa, xosmas markazga ega yoki parallel to'g'ri chiziqlar bog'lami deyiladi (4-shakl, a,b).



4-shakl

5 - shaklda Q tekisligi va unda joylashgan ikki yo'nalishda t_1 , t_2 va l_1 , l_2 to'g'ri chiziqlar ko'rsatilgan.

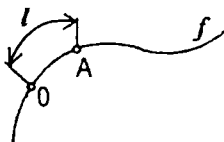


5-shakl

Tekislikdagi har bir to'g'ri chiziq bitta xosmas nuqtaga ega ekanligi bizga ma'lum. Bu xosmas nuqtalarning to'plami qanday chiziqni tashkil etadi? Har bir to'g'ri chiziq bu to'plam hosil qilgan to'g'ri chiziqni bitga xosmas nuqtada kesib o'tadi. Tekislikda yotgan cheksiz ko'p to'g'ri chiziq'larga tegishli xosmas nuqtalar to'plami xosmas to'g'ri chiziqni hosil qilar ekan, ma'lumki tekislikdagi to'g'ri chiziq faqat to'g'ri chiziq bilangina bitta nuqtada kesishadi. Demak, tekislik bitta xosmas to'g'ri chiziqqa ega bo'ladi. O'zaro parallel tekisliklar bitta xosmas to'g'ri chiziq bo'yicha kesishib tekisliklar dastasini hosil qiladi.

1.2 § Geometrik elementlarni parametri

Egri chiziq va sirtlarni avvaldan qo'yilgan shartlarga asosan loyihalashda geometrik elementlar to'plamlarini parametrlash, ya'ni ularni quvvatini aniqlash ahamiyatga ega. Shuning uchun biz parametrlash bo'yicha boshlang'ich tushunchalar bilan tanishaylik. Tekislikda biror f chizig'i berilgan bo'lsin (6-shakl).



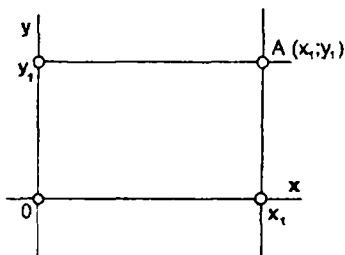
6-shakl

Unda yotgan A nuqtaning holatini aniqlash uchun uning biror nuqtasini 0 bilan belgilab, uni boshlang'ich holat sifatida qabul qilamiz. Endi 0 nuqtadan A nuqtagacha bo'lgan masofani biror o'lchov birligi bilan, masalan l bilan yoki ma'lum bosib o'tgan yo'lga sarflangan vaqt birligi bilan aniqlashimiz mumkin. Har qanday holatda ham A nuqtaning holati bir parametr bilan aniqlanmoqda. Demak, boshqa har qanday nuqtaning holati ham bir parametr bilan aniqlanadi. Shuning uchun ham chiziqda bir parametrli nuqtalar to'plami mavjud deyiladi va quyidagicha belgilanadi - ∞^1 .

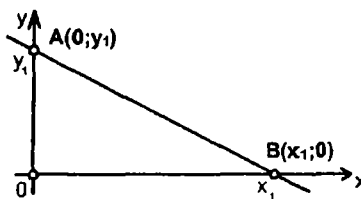
Agar tekislikka XOY koordinat tizimini kiritsak undan har qanday holatdagi nuqtaning o'rnini ikki son bilan aniqlash mumkin (7-shakl).

Shuning uchun ham tekislikda ikki parametrli nuqtalar to'plami mavjud deyiladi ∞^2 .

Tekislikda to'g'ri chiziqning holati uning OX va OY o'qlarini kesib o'tgan nuqtalar bilan aniqlanadi (8-shakl)



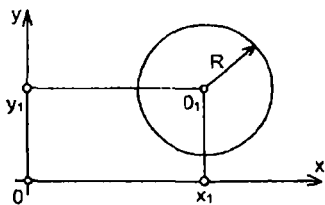
7-shakl



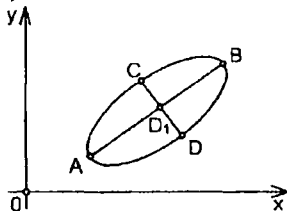
8-shakl

Har bir o'qda bir parametrli (∞^1) nuqtalar to'plami mavjud bo'lganligi uchun tekislikda ikki parametrli (∞^2) to'g'ri chiziq to'plami mavjuddir.

Tekislikda uch parametrlı aylanalar to'plami mavjud, chunki uning markazi ∞^2 va radiusi ∞^1 ga teng (9-shakl).



9-shakl



10-shakl

Bunda ∞^2 - holat parametri, ∞^1 - shakl parametri deyiladi.

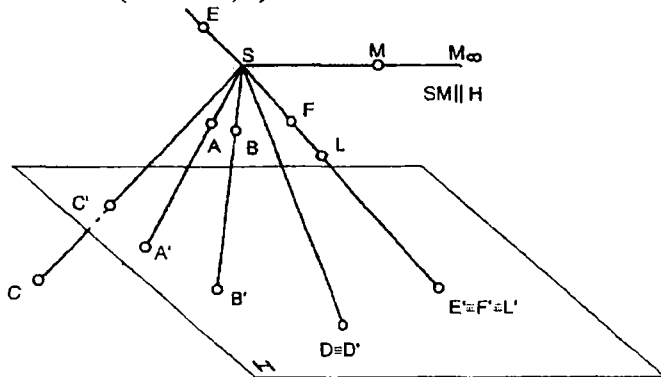
Tekislikda besh parametrlı (∞^5) ellipslar to'plami mavjud bo'lib, uning ∞^3 - holat parametrini, ∞^2 shakl parametrini tashkil qiladi (10-shakl).

Ellipsning katta o'qi tekislikda ∞^2 , ya'ni ikki parametrlı to'g'ri chiziqlar to'plamini tashkil etadi. Unda ellipsning markazi joylashadi. Markaz bu to'g'ri chiziqda ∞^1 , bir parametrlı nuqtalar to'plamiga ega. Endi katta o'qi ∞^1 va kichik o'qi ∞^1 bo'lganligi uchun ja'mi ellipslar tekisligida ∞^5 , ya'ni besh parametrlı ellipslar to'plamini tashkil qiladi.

1.3 §Markaziy va parallel proyeksiyalash va ularning xossalari

1.3.1. Markaziy proyetsiyalash

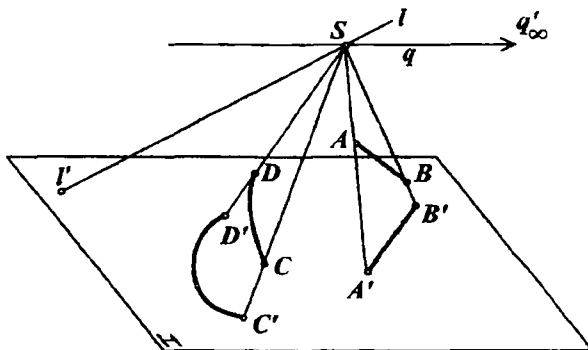
Fazoda S proyeksiyalash markazi va H proyeksiyalar tekisligi berilgan bo'lsin (11-shakl, a).



11-shakl, a)

Fazoda A, B va C nuqtalarni tanlaymiz va ular orqali S markazidan proyeksiyalovchi nurlar o'tkazib, bu nurlarning H tekislik bilan kesishuv nuqtalarini belgilaymiz. Belgilangan A', B', C' kesishuv nuqtalar mos ravishda A, B, C nuqtalarning H tekislikdagi markaziy proyeksiyalari bo'ladi. Tekislikda yotgan D nuqtaning markaziy proyeksiyasi D' nuqtaning o'zi bilan ustma-ust tushadi. Bitta proyeksiyalovchi nurda yotgan L, F, E nuqtalarning L', F', E' markaziy proyeksiyalari bitta nuqtada bo'ladi. Demak, nuqtaning tekislikdagi bitta proyeksiyasi uning fazodagi holatini aniqlab bera olmaydi, chunki proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqda bir parametrlilik cheksiz ko'p nuqtalar to'plami mavjuddir. M nuqtani proyeksiyalovchi SM nur H proyeksiyalar tekisligiga parallel, shuning uchun ham M nuqtaning markaziy proyeksiyasi tekislikning xosmas to'g'ri chizig'ida bo'ladi.

Endi fazoda AB to'g'ri chiziq kesmasining H tekislikdagi proyeksiyasini yasaylik (11-shakl, b).



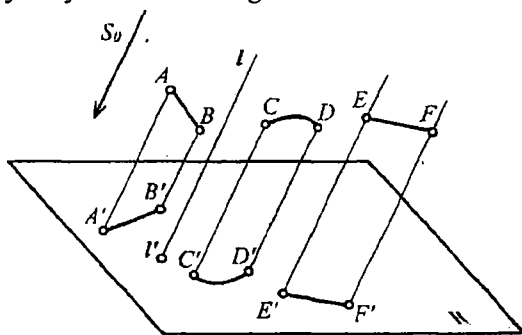
11-shakl, b)

S nuqtadan AB kesmaning hamma nuqtalari orqali proyeksiyalovchi nurlar o'tkazamiz. Bu nurlar to'plami S va AB orqali o'tuvchi SAB proyeksiyalovchi tekislikni tashkil qiladi. SAB tekislik proyeksiyalar tekisligi H bilan to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Shuning uchun ham AB kesmaning proyeksiyasi A'B' umumiy holatda to'g'ri chiziq kesmasi ko'rinishda bo'ladi. CD egri chiziqning proyeksiyasi C'D' egri chiziq bo'ladi, chunki S va CD orqali proyeksiyalovchi konus sirti o'tadi. U tekislik bilan egri chiziq bo'yicha kesishadi. S orqali o'tgan

har qanday chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi. Masalan: l to'g'ri chiziqning proyeksiyasi l' nuqta, H proyeksiyalar tekisligiga parallel q to'g'ri chiziqning proyeksiyasi H ga tegishli xosmas q_∞ nuqtada bo'ladi.

1.3.2. Parallel proyeksiyalash

Parallel proyeksiyalash markaziy proyeksiyalashning xususiy holi bo'lib, unda proyeksiyalash markazi proyeksiyalash yo'nalishi deb ataluvchi biror S_0 yo'nalishda cheksiz uzoqlashtirilgan deb faraz qilinadi (12-shakl). Parallel proyeksiyalashda to'g'ri chiziqning proyeksiyasi umumiy holda to'g'ri chiziq $AB \rightarrow A'B'$, egri chiziqning proyeksiyasi esa egri chiziq $CB \rightarrow C'B'$ bo'ladi. Proyeksiyalash yo'nalishiga parallel to'g'ri chiziqning proyeksiyasi nuqta tekislikka parallel to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi o'ziga teng va parallel bo'ladi. Parallel proyeksiyalash nurlari yo'nalishining proyeksiyalar tekisligiga nisbatan hosil qilgan α burchagiga qarab qiyshiq burchakli (agar $\alpha < \frac{\pi}{2}$) va to'g'ri burchakli (agar $\alpha = \frac{\pi}{2}$) proyeksiyalarga ajraladi. Biz asosan to'g'ri burchakli proyeksiyalash bilan shug'ullanamiz.



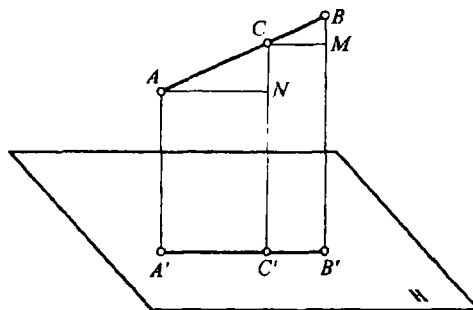
12-shakl

1.3.3. Parallel proyeksiyalarning xossalari

Geometrik obrazlarni (figuralarni) parallel proyeksiyalashda uning quyidagi asosiy xossalardan foydalaniladi.

1. Nuqtaning proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2. Proyeksiyalash markazidan o'tmagan yoki proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqning proyeksiyasi ham to'g'ri chiziq bo'ladi (11, 12-shakllar).



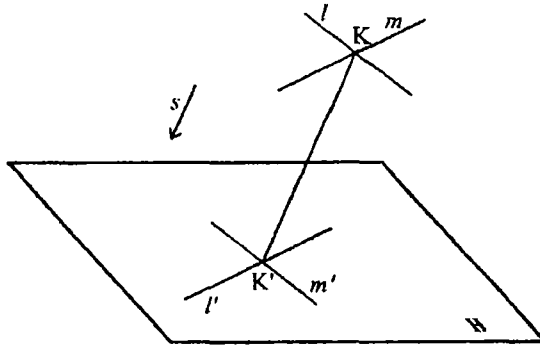
13-shakl

3. Agar nuqta biror to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsa, uning proyeksiyasi ham to'g'ri chiziq proyeksiyasiga tegishli bo'ladi (13 - shakl).
4. Biror to'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning proyeksiyasi, kesma proyeksiyasini ham shu nisbatda bo'ladi, ya'ni $AC:CB=m:n$ bo'lsa, $A'C':C'B'=m:n$ bo'ladi (13-shakl).

Faraz qilaylik C nuqta fazoda AB to'g'ri chiziq kesmasini $AC:CB=m:n$ nisbatda bo'lsin. $A'C':C'B'=m:n$ ekanligini isbotlashimiz zarur.

Buning uchun proyeksiyalanuvchi kesmaning A va C nuqtalaridan $A'B'$ proyeksiyaga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz va ularning proyeksiyalovchi CC' va BB' nurlar bilan kesishgan N hamda M nuqtalarini belgilaymiz. Bundan $AN=A'C'$ va $CM=C'B'$ ekanligini payqash qiyin emas. Unda hosil bo'lgan ACN va CBM uchburchaklar o'xshash bo'ladi. Bu uchburchaklarning o'xshashligidan $AC:CB=AN:CM$ bo'ladi. Agar AN ni $A'C'$ bilan, CM ni $C'B'$ bilan almashtirsak, $AC:CB=A'C':C'B'$ ekanligi isbotlanadi.

5. O'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqning proyeksiyalari ham o'zaro kesishuvchi bo'lib, ularning kesishuv nuqtalari bitta proyeksiyalovchi nurda yotadi (14- shakl).

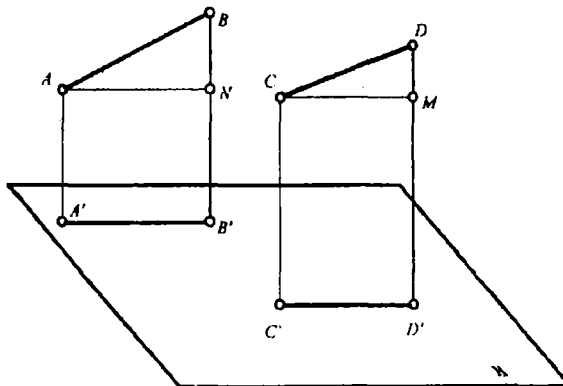


14-shakl

Shaklda K nuqtada kesishuvchi l va m to'g'ri chiziqlar berilgan. Agar $l \cap m = K$ bo'lsa, $l' \cap m' = K'$ bo'ladi.

Fazodagi l va m o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlarni H proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalovchi tekisliklar s proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lagi uchun ularning o'zaro kesishish chizig'i ham proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'ladi. Proyeksiyalashning 3-xossasiga asosan $K \in l$ va $K \in m$ bo'lgani uchun $K' \in l'$ va $K' \in m'$ bo'ladi. Demak, K' nuqta l' va m' to'g'ri chiziqlar uchun umumiy nuqta bo'lib ularning, ya'ni proyeksiyalarning o'zaro kesishish nuqtasidir.

6. O'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi. Agar $AB \parallel CD$ bo'lsa, u holda $A'B' \parallel C'D'$ bo'ladi (15-shakl).



16-shakl

Fazodagi AB va CD kesmalalar o'zaro parallel bo'lsa, ularni proyeksiyalovchi tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi. Bu tekisliklar proyeksiyalar tekisligi H bilan kesishib o'zaro parallel to'g'ri chiziqlarni hosil qiladi va shu to'g'ri chiziqlarda berilgan kesmalarning A'B' va C'D' proyeksiyalari yotadi. Demak, A'B' || C'D' hosil bo'ladi.

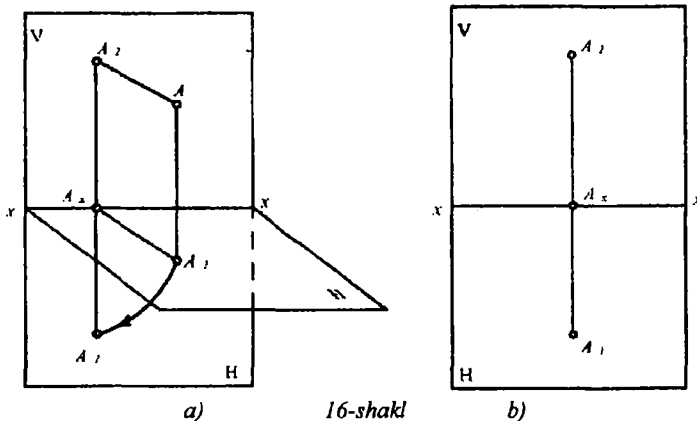
7. O'zaro parallel to'g'ri chiziq kesmalarining bir-biriga nisbati ularning proyeksiyalarining bir-biriga nisbatiga teng. AB va CD to'g'ri chiziq kesmalari va ularning A'B' || C'D' parallel proyeksiyalari berilgan (15-shakl).

AB:CD=A'B':C'D' ekanligini isbotlashimiz kerak. Kesmalarining A va C uchlaridan A'B' va C'D' proyeksiyalarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz va ularning BB' hamda DD' nurlar bilan kesishgan nuqtalarini N va M bilan belgilaymiz. ANB va CMD uchburchaklarning o'xshashligidan AB:CD=AN:CM ekanligi ma'lum. Ammo AN=A'B' va CM=C'D' bo'lganligidan, AB:CD=A'B':C'D' ekanligi isbotlanadi.

1.4 § Nuqtaning o'zaro perpendikulyar ikki va uch tekislikdagi proyeksiyalari

Har bir geometrik jismni umuman nuqtalar to'plami sifatida qarash mumkin. Shuning uchun ham proyeksiyalarni o'rganishni nuqtalar tasviridan boshlaymiz. Lekin nuqtaning bitta tekislikdagi proyeksiyasi uning fazoviy holatini aniqlay olmaydi. Shuning uchun nuqtani o'zaro perpendikulyar ikki tekislikka proyeksiyalashni ko'rib chiqaylik. Proyeksiyalashning bunday tizimini chizma geometriya fanining asoschisi, mashhur fransuz matematigi va davlat arbobi Gospar Monj (1746-1818) yaratganligi sababli uning nomi bilan Monj metodi deb ataladi.

Fazodagi gorizontal H va unga perpendikulyar bo'lgan vertikal V tekislik olaylik (1b-shakl, a), vertikal V tekislikni frontal (bizga yuzmayuz, ro'paramizda to'rganligi uchun) proyeksiyalar tekisligi deb ataymiz.



16-shakl

Gorizontal proyeksiyalar tekisligi H bilan frontal proyeksiyalar tekisligi V ning kesishuv chizig'i XX - proyeksiyalar o'qi deyiladi. Fazoning ikki proyeksiyalar tekisliklari bilan chegeralangan va bu tekisliklarda yotmagan A nuqtasini tanlaymiz. Bu A nuqtani H va V proyeksiyalar tekisliklariga ortogonal proyeksiyalab, ularda A nuqtaning mos ravishda A_1 va A_2 proyeksiyalarini hosil qilamiz.

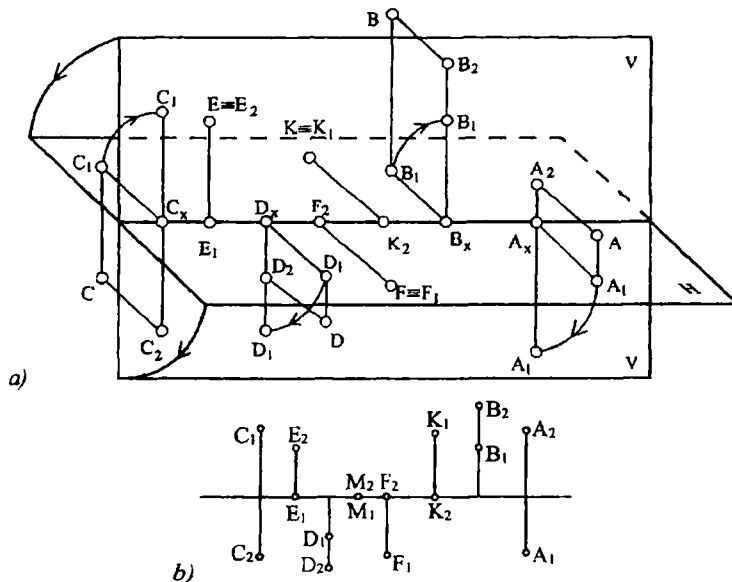
Gorizontal proyeksiyalar tekisligidagi A_1 nuqta A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi va frontal proyeksiyalar tekisligidagi A_2 nuqta A nuqtaning frontal proyeksiyasi deyiladi. A nuqtani bu ikki proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalovchi nurlar (AA_1 va AA_2) birgalikda proyeksiyalovchi tekislik ($A_1A_XA_2A$) ni hosil qiladi. Bu (A_1AA_2) tekislik gorizontal proyeksiyalar tekisligi H bilan A_1A_X to'g'ri chiziq bo'yicha va frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan esa A_2A_X to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Bu A_1A_X va A_2A_X to'g'ri chiziqlar proyeksiyalar o'qi XX ga perpendikulyar bo'lib, nuqtaning gorizontal A_1 va frontal A_2 proyeksiyalarini bog'lab turadi va ular proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqlar deb ataladi. A nuqta gorizontal proyeksiyalar tekisligi H dan $AA_1=A_XA_2$ masofada, frontal proyeksiyalar tekisligi V dan esa $AA_2=A_XA_1$ masofada joylashgan. Demak, fazodagi nuqtaning o'rnini uning proyeksiyalarini XX proyeksiyalar o'qidan o'zoqliklariga qarab ham aniqlash mumkin ekan.

Endi gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ni XX proyeksiya o'qi atrofida soat mili harakati yo'nalishi bo'yicha (agar chapdan qaralsa) 90° pastga burib frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan jiplashtiramiz. Natijada 16-shakl, b) dagi tekis shaklga ega bo'lamiz. Bu tekis chizma-

epyr deb ataladi. A nuqtaning epyurdagi gorizontaal proyeksiyasi A_1 va frontal proyeksiyasi A_2 larni bog'lovchi chiziq $A_1A_xA_2$ proyeksiyalar o'qi XX ga hamma vaqt perpendikulyar bo'ladi, ya'ni $A_1A_x \perp XX$ va $A_2A_x \perp XX$.

Fazoda ihtiyoriy olingan gorizontaal H tekislik uni ikkiga : yuqori va pastki yarim fazoga bo'ladi. Bu tekislikka perpendikulyar qilib olingan frontal V tekislik H bilan birga fazoni to'rt qismga, ya'ni choraklarga ajratadi. Choraklar tartibi (17-shakl, a) da ko'rsatilgan bo'lib, gorizontaal H tekislikning yuqori qismida, ya'ni yuqorigi yarim fazoda I va II, pastki yarim fazoda esa III va IV choraklar joylashadi.

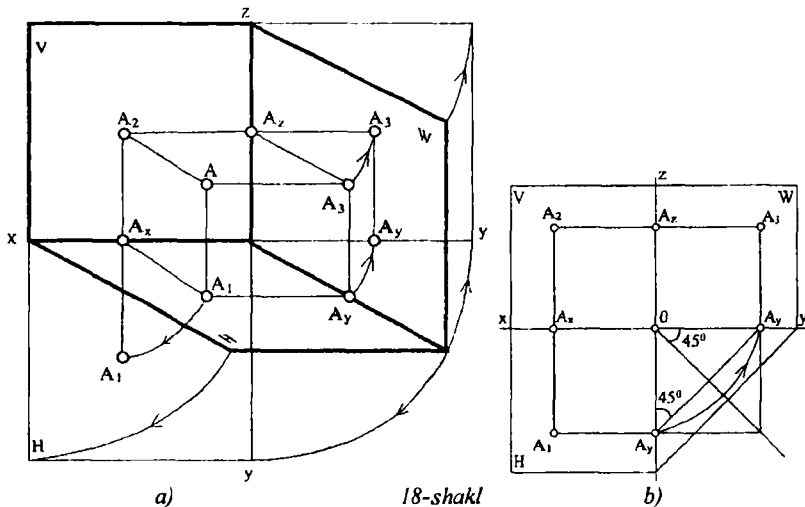
Bu choraklarda A, B, C va D nuqtalar tanlab, ularning gorizontaal va frontal proyeksiyalarini hosil qilamiz. So'ngra gorizontaal proyeksiyalar tekisligi H ni XX proyeksiyalar o'qi atrofida 90° ga burib frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan jipslashtirib epyurda yuqoridagi nuqtalarning proyeksiyalarini yasaymiz (17-shakl, b). 17-shakl a) va b) da fazoda turli choraklardagi, proyeksiyalar tekisliklaridagi va proyeksiyalar o'qida joylashgan A, B, C, D, E, F, M va N nuqtalar ko'rsatilgan.



17-shakl

Texnikada ba'zi murakkab detallarni faqat ikki proyeksiyada tasvirlash yetarli bo'lmaydi. Ularni uch va undan ko'p proyeksiyalarda tasvirlashga to'g'ri keladi.

Horizontal H va frontal V proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyar holda uchinchi tekislikni o'tkazamiz (18-shakl, a) va uni profil (yon) proyeksiyalar tekisligi deb W bilan belgilaymiz. Bu proyeksiyalar tekisliklarining kesishuv chiziqlari koordinata o'qlari deyiladi. H va V tekisliklarning kesishuv chizig'ini OX bilan belgilab, uni absissa, H va W tekisliklarning kesishuv chizig'ini OY bilan belgilab, uni ordinata va V bilan W tekisliklarning kesishuv chizig'ini OZ bilan belgilab, uni applikata o'qi deyiladi. Bu koordinatalar o'qlari o'zaro koordinata boshi deyiluvchi O nuqtada kesishadi. Hosil qilingan H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasida A nuqtaning proyeksiyanishini va epyurini yasashni ko'rib chiqaylik. Berilgan A nuqtadan proyeksiyalar tekisliklariga tik to'g'ri chiziqlar tushurib nuqtaning proyeksiyalarini topamiz. Bu holda A_1 - fazodagi A nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi, A_2 - nuqtaning frontal proyeksiyasi, A_3 - nuqtaning profil proyeksiyasi deyiladi.



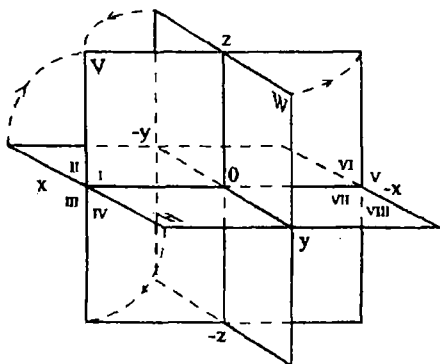
Demak, fazodagi A nuqtaning o'rnini uchta koordinata o'qlari bo'yicha aniqlash mumkin, ya'ni $A(X_1, Y_1, Z_1)$, bu yerda $X_1=OA_x$; $Y_1=OA_y$; $Z_1=OA_z$ bo'ladi.

Bu sistemaning epyurini hosil qilish uchun N tekislikni soat mili harakati yo'nalishi bo'yicha OX o'qi atrofida, W tekislikni esa OZ o'qi atrofida soat mili harakati yo'nalishiga teskari (yuqoridan qaraganda) yo'nalishda aylantirib V tekislik bilan jipslashtiramiz. Natijada 18-shakl, b) dagi ko'rinishga ega bo'lamiz.

Shakldan ko'rinib turibdiki, fazodagi A nuqtaning profil proyeksiyasi A_3 uning frontal proyeksiyasi A_2 bilan bitga gorizontal bog'lovchi chiziqda yotar ekan. Uning, ya'ni A_3 ning, OZ o'qidan uzoqligi OA_V masofaga teng bo'lar ekan.

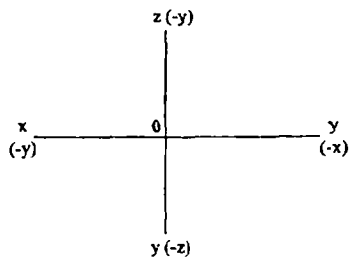
Umuman olganda, o'zaro uchta perpendikulyar tekisliklar sistemasi fazoni sakkiz bo'lakka bo'ladi, uning har bir 1/8 bo'lagi oktant deyiladi. 19-shakl, a) da oktantlarning joylashish tartibi keltirilgan.

Bu sistemada koordinata o'qlari ikki (musbat va manfiy) yo'nalishlarga ega bo'lib qoladi. Absissa o'qi OX ning kuzatuvchiga nisbatan koordinata boshi O dan chapga yo'nalishi, ordinata o'qi OY ning O nuqtadan kuzatuvchi tomonga yo'nalishi va applikata o'qi OZ ning O nuqtadan yuqoriga yo'nalishi musbat va O nuqtaga nisbatan ularga qarama-qarshi tomonga yo'nalish, manfiy yo'nalish bo'lib hisoblanadi.



a)

19-shakl

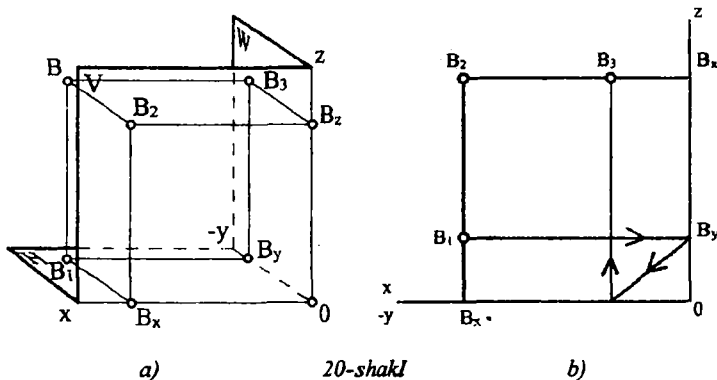


b)

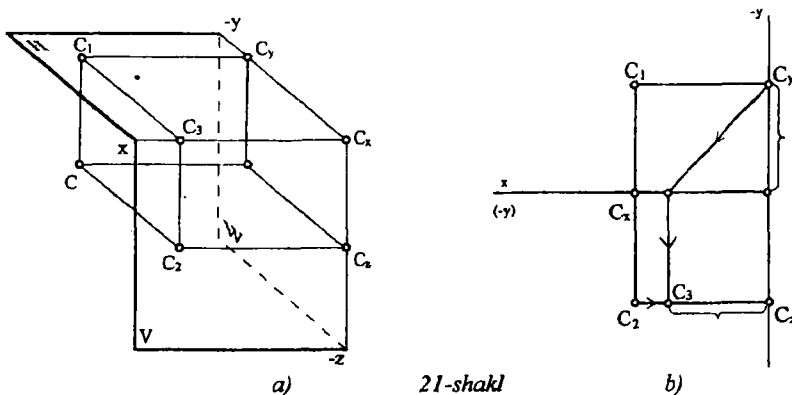
Epyurda koordinata o'qlarining yo'nalishi va ishoralari 19-shakl, b) da keltirilgan. Oktantlarda koordinata o'qlarining yo'nalish ishoralari jadvalda keltirilgan.

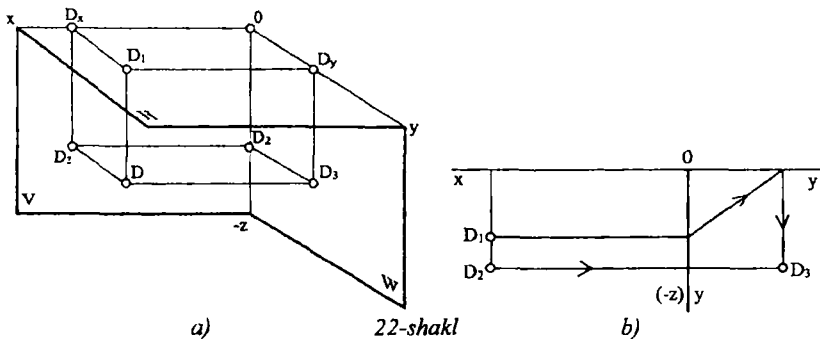
oktant koor	1	2	3	4	5	6	7	8
X	+	+	+	+	-	-	-	-
Y	+	-	-	+	+	-	-	+
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

Ikkinchi oktantdagi B nuqtaning yaqqol tasviri va epyuri 20-shakl a) va b) da, uchinchi oktantdagi C nuqtaning yaqqol tasviri va epyuri 21-shakl a) va b) da, to'rtinchi oktantdagi D nuqtaning yaqqol



tasviri va epyuri 22 - shakl a) va b) da keltirilgan.

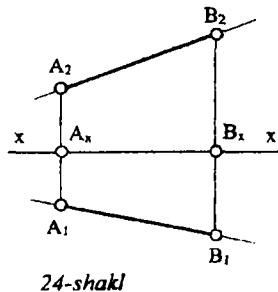
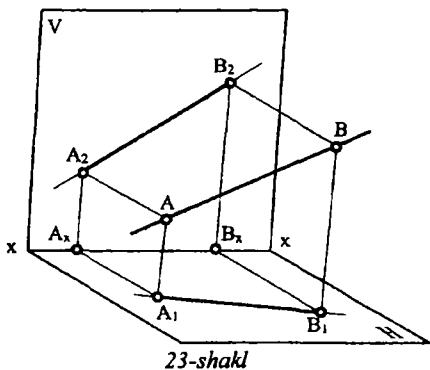




II bob. TO'G'RI CHIZIQNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

2.1 Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning proyeksiyalari

To'g'ri chiziq eng oddiy geometrik figura hisoblanadi. Ma'lumki, ikki nuqta orqali faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Fazodagi A va B nuqtalarni o'zaro tutashtirib, uni ikki tomonga cheksiz davom ettirsak, to'g'ri chiziq to'g'risida tasavvur hosil qilamiz (23-shakl).



To'g'ri chiziqning ikki nuqta bilan chegaralangan qismi to'g'ri chiziq kesmasi deyiladi. Fazoda berilgan ixtiyoriy to'g'ri chiziqni lotin alifbosining yozma, a, b, c, \dots , kabi harflar bilan belgilaymiz. Berilgan to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan ixtiyoriy ikki nuqtaning proyeksiyalarini yasash bilan berilgan to'g'ri chiziqning proyeksiyasi aniqlanadi (24-shakl).

Fazodagi ixtiyoriy to'g'ri chiziq proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan umumiy va xususiy vaziyatda joylashgan bo'lishi mumkin. Proyeksiyalar tekisliklarining hech qaysi biriga parallel ham, perpendikulyar ham bo'lmagan to'g'ri chiziq umumiy holatda berilgan to'g'ri chiziq deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari asliga nisbatan kichrayib proyeksiyalanadi.

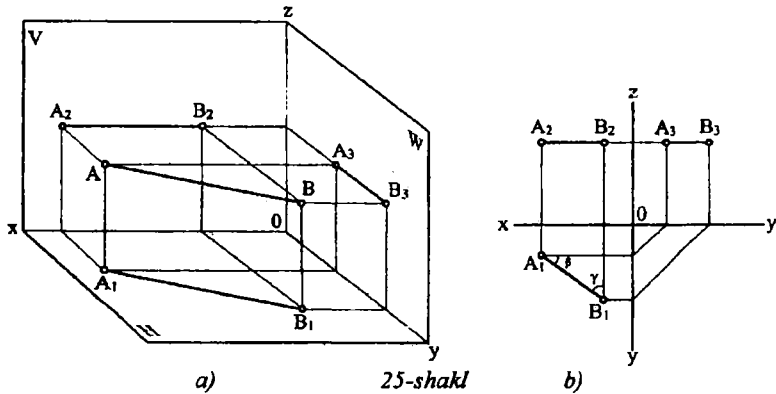
2.2 § Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari

Agar to'g'ri chiziq proyeksiyalar tekisliklarining hech bo'lmaganda bittasiga parallel yoki perpendikulyar bo'lsa, yoki proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga tegishli bo'lsa, bunday to'g'ri chiziq xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq deyiladi.

2.2.1. Proyeksiyalar tekisliklarining bittasiga parallel to'g'ri chiziqlar

1. Gorizontal to'g'ri chiziq. Gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq gorizontal to'g'ri chiziq deb ataladi (25-shakl, a). Gorizontal chiziqning barcha nuqtalari gorizontal proyeksiyalar tekisligidan bir xil uzoqlikda bo'ladi ya'ni $Z_A = Z_B$. Shuning uchun uning frontal A_2B_2 proyeksiyasi OX o'qiga, profil A_3B_3 proyeksiyasi esa, OY o'qiga parallel yo'naladi, gorizontal proyeksiyasi esa, OX o'qiga nisbatan ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin (25 - shakl, b).

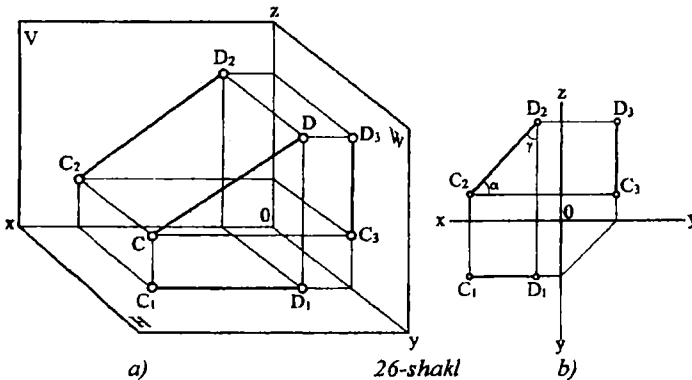
Bunday to'g'ri chiziq kesmasining gorizontal proyeksiyasi uning haqiqiy uzunligiga teng bo'ladi. 25-shakl, a) va b) da ko'rsatilgan β va γ burchaklar bu to'g'ri chiziqning frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan va profil proyeksiyalar tekisligi W bilan hosil qilgan burchaklaridir.



a) 25-shakl

b)

2. Frontal to'g'ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq frontal to'g'ri chiziq deb ataladi (26-shakl, a). Bu to'g'ri chiziqning barcha nuqtalari V tekislikdan bir xil masofada bo'ladi, ya'ni $Y_C = Y_D$, uning gorizontali C_1D_1 proyeksiyasi OX o'qiga, profil C_3D_3 proyeksiyasi esa OZ o'qiga parallel bo'ladi. Bu chiziqning frontal proyeksiyasi OX o'qiga nisbatan ixtiyoriy yo'nalishda bo'lib, kesmaning haqiqiy uzunligiga teng bo'ladi. Chizmadagi α burchak to'g'ri chiziq bilan H tekislik orasidagi, γ burchak esa, to'g'ri chiziq bilan W tekislik orasidagi burchakdir (26-shakl, b).



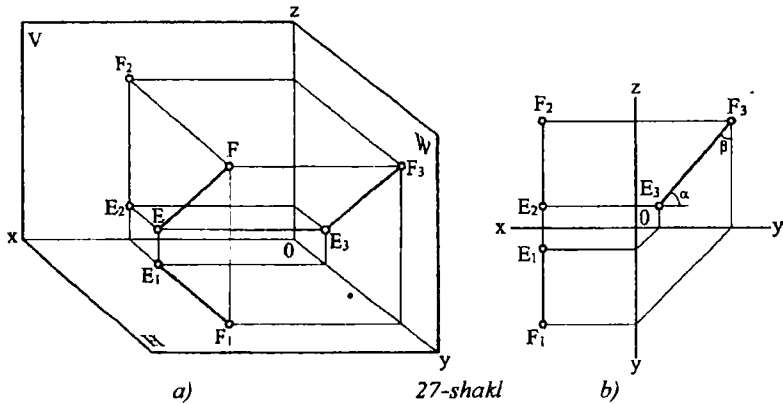
a) 26-shakl

b)

3. Profil to'g'ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq profil to'g'ri chiziq deb ataladi (27-shakl, a). Uning gorizontali E_1F_1 proyeksiyasi ham, frontal E_2F_2 proyeksiyasi ham

OX o'qiga perpendikulyar bo'lib, profil E_3F_3 proyeksiyasi kesmaning haqiqiy uzunligiga teng bo'ladi.

Chizmadagi α va β burchaklar mos ravishda H va V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan burchagidir (27-shakl, b).

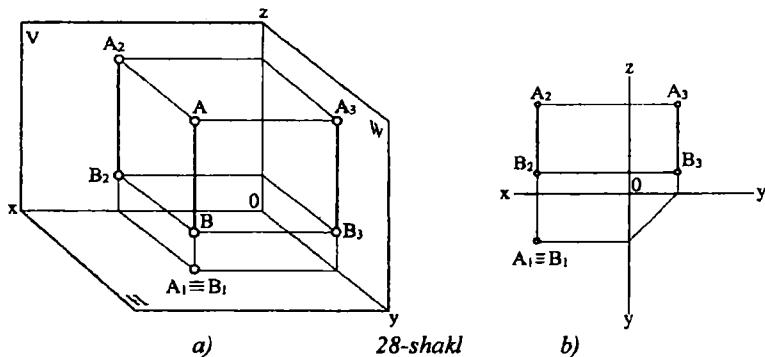


27-shakl

2.2.2. Proyeksiyalar tekisliklarining bittasiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar

Proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlar proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar deb ataladi.

1. Horizantal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq. Horizantal proyeksiyalar tekisligi H ga perpendikulyar to'g'ri chiziq proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lganligi sababli horizantal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq deb ataladi. 28-shakl, a) da tasvirlangan AB to'g'ri chiziq shunday to'g'ri chiziqlar to'plamiga mansubdir. Bunday to'g'ri chiziqning horizantal proyeksiyasi A_1B_1 , nuqta ko'rinishida bo'lib, frontal A_2B_2 va profil A_3B_3 proyeksiyalari mos ravishda OX va OY o'qlariga perpendikulyar

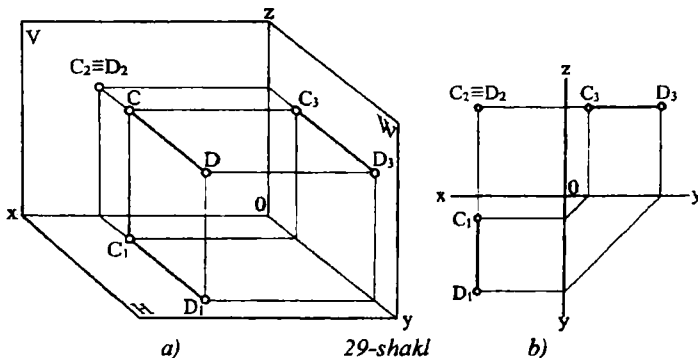


a) 28-shakl

b)

bo'lib, kesmaning haqiqiy kattaligiga teng bo'ladi (28-shakl, b).

2. Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq deyiladi. Uning frontal C_2D_2 proyeksiyasi nuqta ko'rinishida bo'lib, gorizontl C_1D_1 va profil C_3D_3 proyeksiyalari mos ravishda OX va OZ o'qlariga perpendikulyar bo'ladi va kesmaning haqiqiy kattaligiga teng bo'ladi (29-shakl, a, b).

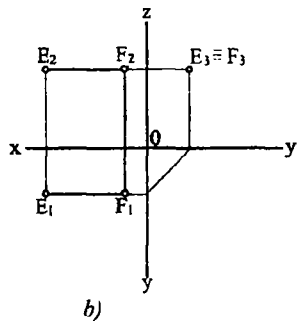
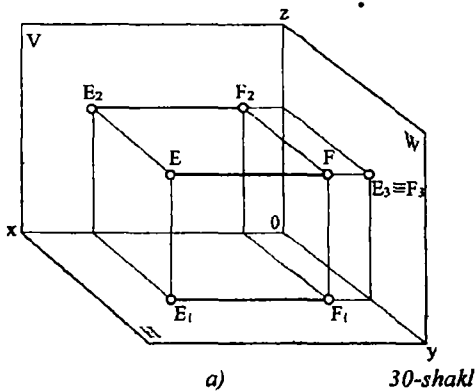


a) 29-shakl

b)

3. Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlar profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Bunday to'g'ri chiziqning profil proyeksiyasi E_3F_3 nuqta ko'rinishida bo'lib, gorizontl E_1F_1 va frontal E_2F_2 proyeksiyalari OX o'qiga parallel bo'ladi va kesmaning haqiqiy kattaligiga teng bo'ladi (30-shakl, a, b)



2.3 § Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasini tahlil qilish

Umumiy vaziyatda joylashgan to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy katgaligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalalari amalda ko'p uchraydi.

To'g'ri chiziqning fazoviy holatini unga tegishli bo'lgan ikki nuqta orqali to'la aniqlanadi. 31-shakl, a) da umumiy vaziyatda berilgan to'g'ri chiziqning AB kesmasi tasvirlangan. AB to'g'ri chiziq kesmasi H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga o'z haqiqiy kattaligidan kichik bo'lib proyeksiyalangan, ya'ni $A_1B_1 < AB$, $A_2B_2 < AB$ va $A_3B_3 < AB$ bo'ladi. Gorizontaal proyeksiyalar tekisligi H ni OX o'qi atrofida, profil proyeksiyalar tekisligi W ni esa OZ, o'qi atrofida aylantirib frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan jipslashtiramiz (31-shakl, b), natijada AB kesmaning epyuriga ega bo'lamiz. To'g'ri chiziq kesmasining epyuri bo'yicha uning haqiqiy kattaligini, shuningdek proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini to'g'ri burchakli uchburchak yasash usulida aniqlanadi.

Kesmaning A uchidan uning gorizontaal proyeksiyasi A_1B_1 ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning BB_1 proyeksiyalovchi chiziq bilan kesishgan nuqtasini K bilan belgilaymiz ya'ni $AK \parallel A_1B_1$ (31-shakl, a). $AK \perp BB_1$ bo'lganligi uchun $\triangle AKB$ to'g'ri burchakli uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchakning bitta AK kateti kesmaning gorizontaal proyeksiyasiga ($AK = A_1B_1$), ikkinchi BK kateti esa kesma uchlari A va B larning gorizontaal proyeksiyalar tekisligi H dan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$BK = BB_1 - AA_1$, bu yerda $AA_1 = KB_1$ bo'lgani uchun

$$BK = BB_1 - KB_1 = \Delta z \text{ bo'ladi.}$$

To'g'ri burchakli AKB uchburchakning gipotenuzasi AB va AK kateti orasidagi α burchak, berilgan kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi. Bu kesmaning haqiqiy kattaligini topish epyurda (31-shakl, b) quyidagicha bajarilgan: kesma B uchining B_1 gorizontal proyeksiyasidan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq chiziladi; bu to'g'ri chiziqqa kesmaning frontal proyeksiyasidan $B_2B_X - A_2A_X = \Delta z$ ni o'lchab qo'yib B_0 nuqta aniqlanadi. Hosil bo'lgan $A_1B_1B_0$ to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib, uning gipotenuzasi A_1B_0 kesmaning haqiqiy kattaligi va gipotenuza A_1B_0 bilan katet A_1B_1 orasidagi burchak, kesmani H tekislik bilan hosil qilgan α burchagi bo'ladi.

To'g'ri chiziq kesmasining frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun ABE to'g'ri burchakli uchburchakdan foydalanamiz (31-shakl, a). Bu uchburchakning BE kateti AB kesmaning frontal A_2B_2 proyeksiyasiga teng va parallel, ikkinchi AE kateti esa uning A va B uchlarni V tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng, ya'ni

$$AE = AA_2 - BB_2, \text{ bu yerda } BB_2 = A_2E \text{ bo'lgani uchun}$$

$$AE = AA_2 - A_2E = \Delta y \text{ bo'ladi.}$$

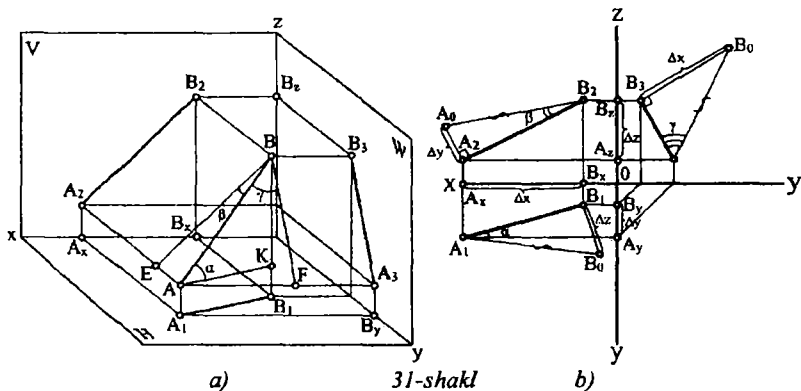
To'g'ri burchakli AEB uchburchakning AB gipotenuzasi va BE kateti orasidagi burchak, kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagi bo'ladi. 31-shakl, b) da β burchakni topish ko'rsatilgan. Buning uchun kesmaning frontal A_2B_2 proyeksiyasining A_2 uchi orqali unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazilib, $A_1A_X - B_1B_X = \Delta y$ (gorizontal proyeksiya bo'yicha) masofada A_0 nuqta belgilanadi. Hosil bo'lgan $B_2A_2A_0$ to'g'ri burchakli uchburchakning A_0B_2 gipotenuzasi kesmaning haqiqiy kattaligi, chizmada belgilangan β burchak esa, kesmani V tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

To'g'ri chiziq kesmasining profil proyeksiyalar tekisligi W bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash uchun ABF to'g'ri burchakli uchburchakdan foydalanamiz (31-shakl, a). Shakldan ko'rinib turibdiki, bu uchburchakning bir kateti AB kesmaning profil A_3B_3 proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesma A va B uchlarning W tekislikdan uzoqliklarning ayirmasiga teng, ya'ni

$$AF = AA_3 - BB_3, \text{ bu yerda } BB_3 = A_3F \text{ bo'lgani uchun}$$

$$AF = AA_3 - FA_3 = \Delta x \text{ bo'ladi.}$$

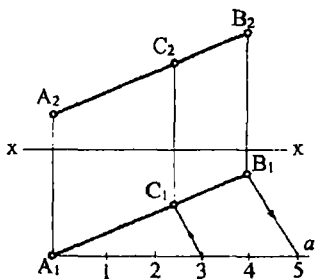
To'g'ri burchakli AFB uchburchakning AB gipotenuzasi va BF kateti orasidagi burchak, kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagi bo'ladi.



31-shakl, b) da γ burchakni epyurda topish ko'rsatilgan. Buning uchun kesmaning profil A_3B_3 proyeksiyasining B_3 uchi orqali unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazilib, $OA_x - OB_x = \Delta x$ masofada B_0 nuqta belgilanadi. Hosil bo'lgan $A_3B_3B_0$ to'g'ri burchakli uchburchakning B_0A_3 gipotenuzasi kesmaning haqiqiy kattaligi, chizmada belgilangan γ burchak esa, kesmani W tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

2.4 § To'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'lish

Parallel proyeksiyalashning xossasiga asosan to'g'ri chiziq kesmasiga tegishli nuqta kesmani qanday nisbatda bo'lsa, kesmaning proyeksiyalarini ham shunday nisbatda bo'ladi.



32-shakl

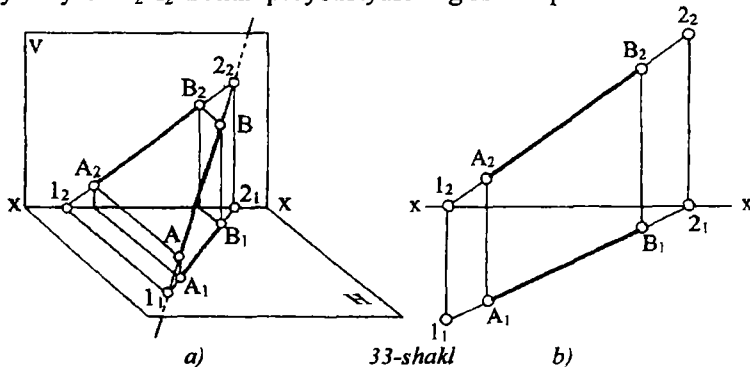
Shu xossadan foydalanib har qanday to'g'ri chiziq kesmasini ixtiyoriy nisbatda proporsional bo'laklarga bo'lish mumkin. Masalan, 32-shaklda berilgan $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasini 3:2 nisbatda bo'luvchi $C(C_1, C_2)$ nuqtaning proyeksiyalarini topish ko'rsatilgan.

Buning uchun kesmaning ixtiyoriy, masalan, gorizontaal proyeksiyasining A_1 uchidan ixtiyoriy burchak ostida a to'g'ri chiziq o'tkazib, unga A_1 nuqtadan boshlab ixtiyoriy teng kesma birligida besh bo'lak, ya'ni $(2 + 3)$ o'lchab qo'yamiz. So'ngra 5 - nuqtani kesmaning B_1 uchi bilan birlashtirib, 3 nuqtadan B_1S ga parallel chizamiz va A_1B_1 proyeksiya bilan kesishgan nuqtani C_1 bilan belgilaymiz. Vertikal bog'lovchi chiziq yordamida uning frontal C_2 proyeksiyasi topiladi. Yordamchi a to'g'ri chiziqni A_1 yoki A_2 va B_2 nuqtalardan ham o'tkazib, kesmani proporsional bo'laklarga bo'lish mumkin.

2.5 § To'g'ri chiziq izlari

To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishuv nuqtalari uning izlari deb ataladi. Chunonchi, to'g'ri chiziqning gorizontaal proyeksiyalar tekisligi H bilan kesishuv nuqtasi uning gorizontaal izi, frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan kesishuv nuqtasi uning frontal izi va profil proyeksiyalar tekisligi W bilan kesishuv nuqtasi uning profil izi deyiladi.

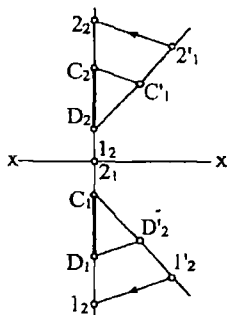
33-shakl, a) da AB to'g'ri chizig'i BA yo'nalishda davom ettirilganida, u H gorizontaal proyeksiyalar tekisligini 1 nuqtada kesib, o'zining gorizontaal izini hosil qiladi. 1 nuqtaning gorizontaal 1_1 proyeksiyasi iz bilan ustma - ust tushgan holda, uning 1_2 frontal proyeksiyasi B_2A_2 frontal proyeksiyasining XX o'qi bilan



kesishuv nuqtasida bo'ladi. Endi to'g'ri chiziqni AB yo'nalishda davom ettirsak V proyeksiyalar tekisligini 2 nuqtada kesadi. Bu 2 nuqta uning frontal izidir. To'g'ri chiziq frontal izining 2_2 frontal proyeksiyasi izning o'zi bilan ustma-ust tushadi. Uning 2_1 gorizontaal proyeksiyasi

AB to'g'ri chiziq gorizontal proyeksiyasi A_1B_1 ning XX o'qi bilan kesishuv nuqtasida bo'ladi. Bu bog'liqlikdan foydalanib, to'g'ri chiziq proyeksiyalari orqali uning izlarini osongina yasash mumkin bo'ladi.

33-shakl, b) da shu AB to'g'ri chiziqning A_1B_1 gorizontal va A_2B_2 frontal proyeksiyalari berilgan. AB to'g'ri chiziqning gorizontal izini yasash uchun, uning A_2B_2 frontal proyeksiyani XX o'qi bilan kesishguncha davom ettiramiz. Gorizontal izning l_2 frontal proyeksiyasini belgilaymiz. l_2 nuqtadan XX proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar bog'lovchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning B_1A_1 gorizontal proyeksiya bilan kesishuv l_1 nuqtasini belgilaymiz. l_1 gorizontal izning gorizontal proyeksiyasi bo'lib, izning o'zi ham shu nuqtada bo'ladi. AB to'g'ri chiziqning frontal izini yasash uchun, uning gorizontal proyeksiyasining XX o'qi bilan kesishtirib, frontal izning 2_1



33-shakl

gorizontal proyeksiyasini hosil qilamiz. 2_1 nuqtadan o'tkazilgan bog'lovchi chiziq bilan A_2B_2 frontal proyeksiyasini o'zaro kesishtirib to'g'ri chiziqni frontal izining 2_2 frontal proyeksiyasini yasaymiz. Frontal izning o'zi ham 2_2 nuqta bilan ustma-ust tushadi.

34-shaklda berilgan CD profil to'g'ri chiziqning gorizontal va frontal izlarini topishni ko'rib chiqamiz. CD to'g'ri chiziqning gorizontal izini topish uchun C_2D_2 frontal proyeksiyasini XX o'qi bilan l_2 nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. To'g'ri chiziqning gorizontal va frontal proyeksiyalari bitta bog'lovchi chiziqda yotganligi sababli, gorizontal izning gorizontal proyeksiyasini yasash uchun qo'shimcha geometrik yasashlardan foydalanishga to'g'ri keladi.

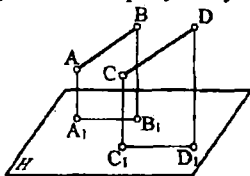
Buning uchun kesmani berilgan nisbatda bo'lishda ishlatilgan geometrik yasashlardan foydalanamiz. C_1D_1 gorizontal proyeksiyaning C_1 nuqtasidan boshlab, C_2D_2 , l_2 kesmani o'lchab qo'yamiz, ularni D_2' , l_2' deb belgilaymiz. So'ngra D_2' nuqtani D_1 bilan to'g'ri chiziq yordamida birlashtiramiz va l_2' nuqtadan $D_2'D_1$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu o'tkazilgan to'g'ri chiziq C_1D_1 to'g'ri chiziqni l_1 nuqtada kesib, CD to'g'ri chiziqning gorizontal izi va shu bilan birgalikda uning gorizontal proyeksiyasini aniqlaydi. CD to'g'ri chiziqning frontal izi ham shu usuldan foydalanib topiladi.

III bob. FAZODAGI IKKI TO'G'RI CHIZIQNING O'ZARO VAZIYATI

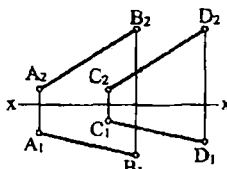
Fazoda ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel, kesishuvchi va chalmashuvchi (ayqash) vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

3.1 § Parallel to'g'ri chiziqlar

Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari



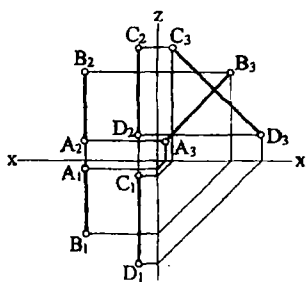
a)



b)

35-shakl

ham o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni agar $AB \parallel CD$ bo'lsa, u holda $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ va $A_2B_2 \parallel C_2D_2$ bo'ladi (35-shakl, a, b).

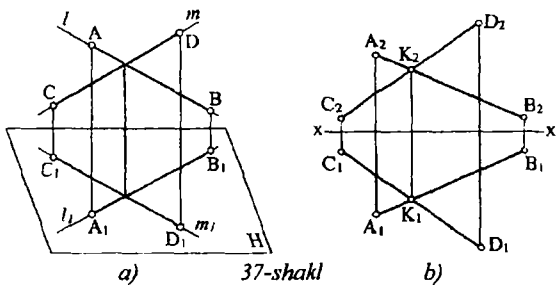


36-shakl

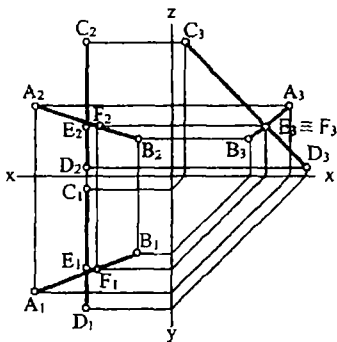
Agar fazodagi ikki to'g'ri chiziq profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo'lsa, u holda ularning gorizontaal va frontal proyeksiyalari o'zaro parallel bo'lib profil proyeksiyalari parallel bo'lmasligi ham mumkin. Bunday to'g'ri chiziqlar chalmashuvchi (ayqash) bo'ladi (36-shakl).

3.2 § Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

Agar fazodagi ikki to'g'ri chiziq umumiy bir nuqta (xos nuqta) ga ega bo'lsa, bunday to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlar deyiladi. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham kesishuvchi bo'lib, kesishuv nuqtalarning proyeksiyalari bitta bog'lovchi to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi, ya'ni agar $AB \cap CD = K$ bo'lsa, u holda $A_1B_1 \cap C_1D_1 = K_1$ va $A_2B_2 \cap C_2D_2 = K_2$ bo'ladi (37-shakl, a, b).



37-shakl

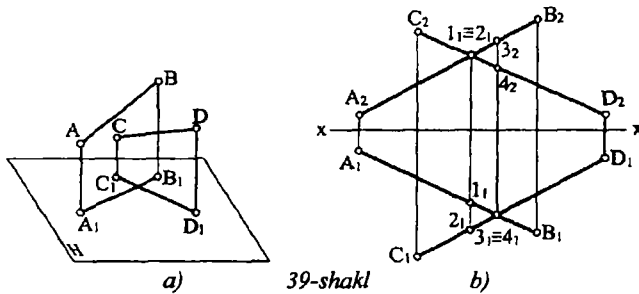


38-shakl

Agar to'g'ri chiziqlarning birortasi profil proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda ularning gorizont va frontal proyeksiyalarining o'zaro kesishuvchi bo'lishi yetarli emas. Masalan 38-shaklda berilgan $AB(A_1B_1, A_2B_2)$ va $CD(C_1D_1, C_2D_2)$ kesmalardan biri CD profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel. Shakldan ko'rinib turibdiki bu to'g'ri chiziqlar chalmashuvchidir.

3.3 § Chalmashuvchi (ayqash) to'g'ri chiziqlar

Fazodagi to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'lmasa yoki o'zaro kesishmasa, bunday to'g'ri chiziqlar chalmashuvchi (ayqash) to'g'ri chiziqlar deyiladi (39-shakl, a). Chalmashuvchi ikki to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalari o'zaro kesishishi mumkin, lekin gorizont proyeksiyalarining o'zaro kesishish nuqtasi, frontal proyeksiyalarining o'zaro kesishish nuqtasi bilan bitta bog'lovchi chiziqda yotmaydi (39-shakl, b).

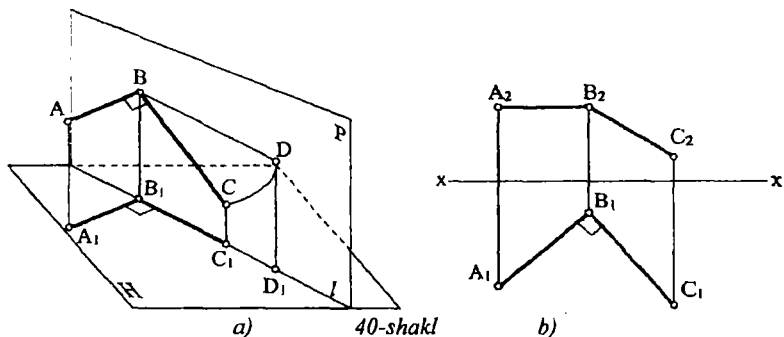


39-shakl, b) da AB va CD ayqash to'g'ri chiziqlarning A_2B_2 va C_2D_2 frontal proyeksiyalari $1_2 = 2_2$ nuqtada kesishgan. Agar $1 \subset AB$, $2 \subset CD$ desak, ustidan ko'rinish, ya'ni gorizontaal proyeksiyasi A_1B_1 to'g'ri chiziqda 1_1 va C_1D_1 to'g'ri chiziqda 2_1 nuqtalarni alohida ajralgan holda ko'ramiz. 1 va 2 nuqtalarning gorizontaal proyeksiyalaridan AB to'g'ri chiziqqa tegishli 1 nuqtaning kuzatuvchiga CD to'g'ri chiziqdagi 2 nuqtadan ko'ra uzoqroq joylashganini payqaymiz. Demak, CD to'g'ri chiziqdagi 2 nuqta AB to'g'ri chiziqni to'sib turgan ekan (39-shakl, b). Xuddi shunday mulohaza AB to'g'ri chiziqqa tegishli 3 nuqtaning CD to'g'ri chizig'iga oid 4 nuqtadan balandroq joylashgan va shuning uchun ham gorizontaal proyeksiyalarda, ya'ni ustidan ko'rinishda AB to'g'ri chiziqni CD to'g'ri chiziq to'sib turishini anglab olamiz. Bunday nuqtalar konkurent yoki raqobatlashuvchi nuqtalar deb ataladi.

3.4 § To'g'ri burchakning proyeksiyasi

Parallel proyeksiyalarning xossasidan ma'lumki, agar birorta tekis shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda uning shu tekislikdagi proyeksiyasi o'z haqiqiy katgaligida proyeksiyalanadi. Lekin to'g'ri burchakning parallel proyeksiyalashda ajoyib xususiyati borki, bu uning (to'g'ri burchakning) bir tomoni proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa ham, shu tekislikka ham to'g'ri burchak bo'lib proyeksiyalanadi (40-shakl, a), ya'ni $AB \cap BC = 90^\circ$ bo'lib $AB \parallel H$ bo'lsa, u holda $A_1B_1 \cap B_1C_1 = 90^\circ$ bo'ladi (40-shakl, b).

Fazoda berilgan ikki chalmashuvchi to'g'ri chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lib ikkinchisi birinchisi bilan 90° li burchak hosil qilganda ham yuqorida qayd qilingan xususiyat o'rinnidir. Bu xususiyatni isbotlash uchun quyidagicha yo'l tutamiz (40-shakl, a).

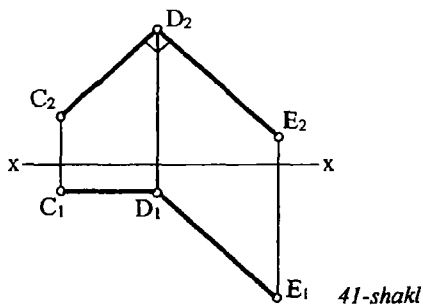


a) 40-shakl

b)

BC to'g'ri chiziq orqali H ga tik bo'lgan P proyeksiyalovchi tekislik o'tkazamiz. Bunda AB to'g'ri chiziq kesmasi P ga perpendikulyar bo'ladi. B nuqtani markaz qilib C nuqtani P tekislikda D nuqta holatigacha aylantiramiz. BD kesma P tekislikka tegishli bo'lganligi sababli uning H tekislikdagi D_1 proyeksiyasi H va P tekisliklarning kesishgan chizig'i l da bo'ladi. 41 - shaklda to'g'ri burchakni frontal proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalanishi ko'rsatilgan.

• To'g'ri burchakning bu proyeksiyalanish xususiyati chizma geometriyada metrik va pozitsion masalalarni yechishda keng qo'llaniladi.



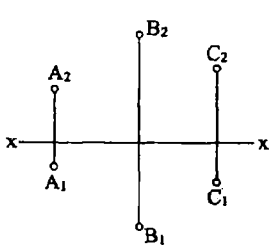
41-shakl

IV bob. TEKISLIKNING FAZODA BERILISHI

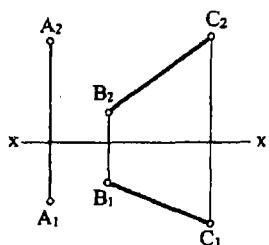
Tekislik ikki parametrlil nuqtalar to'plami bo'lib, u fazoda cheksiz chegarasizdir. Uning hamma nuqtalarini tasvirlash amalda mumkin emas. Shuning uchun amalda fazodagi holatini aniqlay oladigan

tekislikka oid elementlardan yoki tekislikning biror qismi olinib ulardan foydalaniladi.

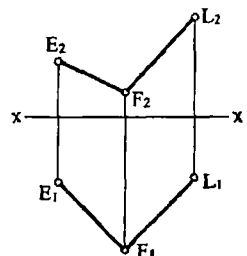
Tekislikning fazoviy holatini bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta, to'g'ri chiziq va unda yotmagan bitta nuqta, o'zaro parallel yoki kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq to'la aniqlaydi. Ana shu elementlar orqali tekislikda hojlagan biror nuqtani aniqlash mumkin. Chizmada esa tekislikning holati bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtaning proyeksiyalari (42-shakl), bir to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqtaning proyeksiyasi (43-shakl), o'zaro kesishuvchi (44-shakl) va parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bilan beriladi (45-shakl).



42-shakl

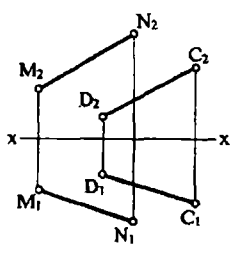


43-shakl

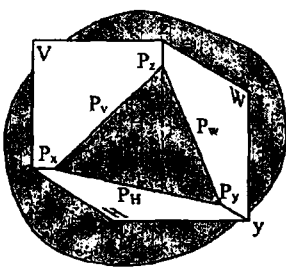


44-shakl

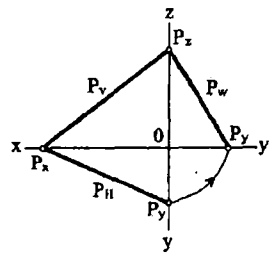
Agar tekislik har tarafga davom ettirilsa proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishadi. Bu kesishuv chiziqlari, uning izlari deb ataladi. Chunonchi H bilan kesishuv chizig'i uning gorizontali izi, V bilan kesishuv chizig'i uning frontal izi va W bilan kesishuv chizig'i uning profil izi deyiladi. 46-shakl (a, b) larda P tekislikning gorizontali izi P_H , frontal izi P_V va profil izi P_W ko'rsatilgan. Demak, tekislik o'zining izlari bilan ham beriladi



45-shakl



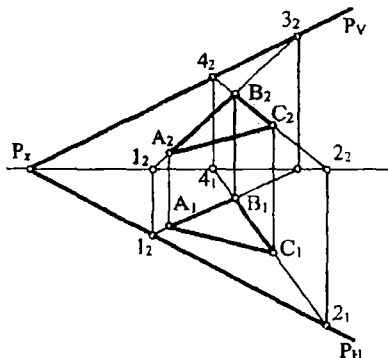
46, a)-shakl



46, b)-shakl

4.1 § Tekislikning izlarini yasash

Har qanday ko'rinishda berilgan tekislikning izlarini aniqlash mumkin. Buning uchun tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqning gorizont va frontal izlarini aniqlash kifoyadir. Chunki ikki tekislik o'zaro bitta to'g'ri chiziq bo'yicha kesishib uning holatini ikki nuqta aniqlay oladi. 47-shaklda ABC uchburchak tekisligining izlarini yasash ko'rsatilgan.



47-shakl

chiziqlarning frontal izlari 3 va 4 topilgan. Tekislik fazoda proyeksiyalar tekisliklari H, V va W ga nisbatan asosan ikki xil: umumiy va xususiy vaziyatlarda joylashishi mumkin. Proyeksiyalar tekisliklarning hech bittasiga perpendikulyar yoki parallel joylashmagan tekislik umumiy vaziyatda berilgan tekislik deyiladi. Bunga yuqorida ko'rsatilgan tekisliklar misol bo'la oladi.

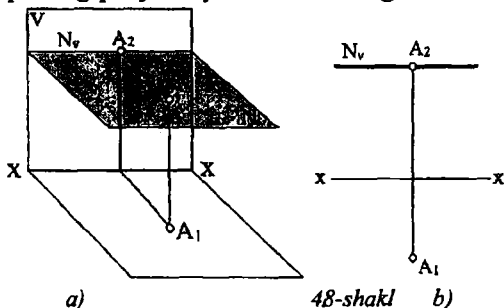
4.2 § Tekislikning xususiy xolatlari

Agar tekislik proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga parallel yoki perpendikulyar holda joylashgan bo'lsa, u holda u xususiy vaziyatda berilgan tekislik deb ataladi.

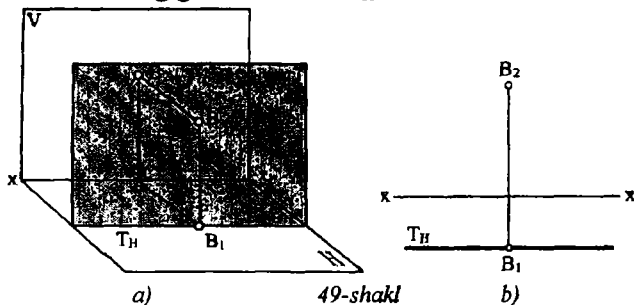
4.2.1 Proyeksiyalar tekisliklardan bittasiga parallel bo'lgan tekisliklar

1. Gorizont tekislik. Gorizont proyeksiyalar tekisligi H ga parallel tekislik uning nomi bilan gorizont tekislik deb ataladi. 48-shakl (a, b) larda gorizont tekislik N ning yaqqol tasviri va epyuri

ko'rsatilgan. Gorizont tekislikning H va V tekisliklar sistemasida faqat bitta frontal izi N_V bo'lib, u XX o'qiga parallel bo'ladi. Unda yotgan har qanday shaklning frontal proyeksiyasi tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi, chunki tekislik V ga perpendikulyardir, gorizont proyeksiyasi esa o'ziga teng bo'lib proyeksiyalanadi. 48-shaklda A nuqtaning proyeksiyalari ko'rsatilgan



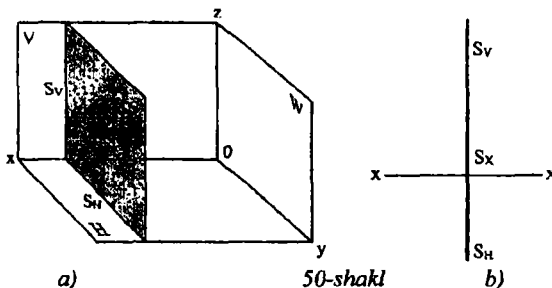
2. Frontal tekislik. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel tekislik uning nomi bilan frontal tekislik deb ataladi (49-shakl, a,b). Frontal tekislik T ning gorizont izi T_H bo'lib, u



XX o'qiga parallel joylashadi. Frontal tekislikda yotgan har qanday tekis shaklning gorizont proyeksiyasi uning gorizont izi bilan ustma-ust tushadi, frontal proyeksiyasi esa o'ziga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

3. Profil tekislik. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel tekislik profil tekislik deyiladi (50-shakl). Profil tekislikning gorizont va frontal izlari ustma-ust tushib, XX o'qiga perpendikulyar joylashadi, undagi har qanday tekis shaklning frontal

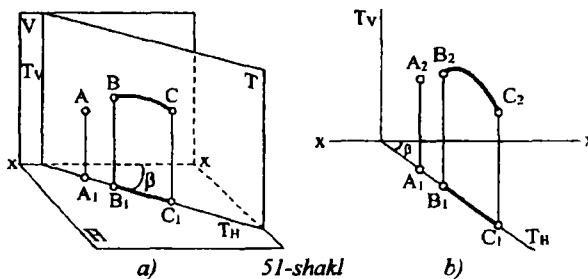
va gorizontal proyeksiyasi tekislik izi bilan qoʻshilib qoladi, profil proyeksiyasi esa oʻziga teng boʻlib proyeksiyalanadi.



4.2.2 § Proyeksiyalar tekisliklaridan bittasiga perpendikulyar boʻlgan tekisliklar

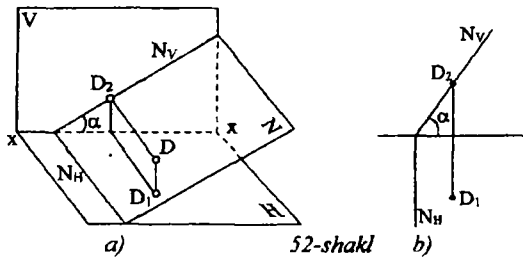
Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar boʻlgan tekisliklar proyeksiyalovchi tekisliklar deyiladi.

1. Horizontal proyeksiyalovchi tekislik. Horizontal proyeksiyalar tekisligi H ga perpendikulyar boʻlgan tekislik gorizontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi. "Proyeksiyalovchi" soʻzi uning H ga proyeksiyalovchi nurlarga parallelligidan kelib chiqqandir. Gorizontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi XX oʻqiga perpendikulyar boʻlib gorizontal izi esa ixtiyoriy vaziyatda joylashishi mumkin. Gorizontal proyeksiyalovchi tekislikda yotgan har qanday tekis shaklning gorizontal proyeksiyasi uning gorizontal izi bilan ustma-ust tushadi (51-shakl, a, b). Tekislikning



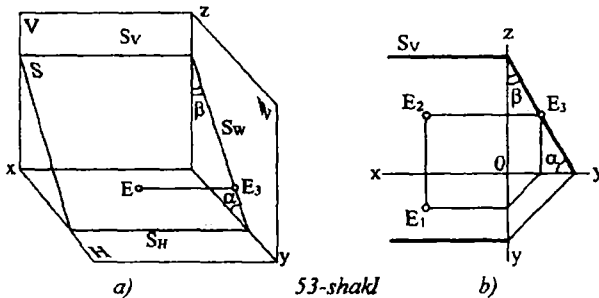
gorizontal T_H izining XX o'qi bilan hosil qilgan β burchagi $T(T_H, T_V)$ tekislikning frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan hosil qilgan burchagining haqiqiy kattaligiga teng.

2. Frontal proyeksiyalovchi tekislik. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga perpendikulyar bo'lgan tekislik frontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi. Frontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal N_H izi XX o'qiga perpendikulyar bo'ladi (52-shakl, a, b). Uning frontal N_V izi esa ixtiyoriy yo'nalishda bo'ladi. Tekislik frontal N_V izining XX o'qi bilan hosil qilgan α burchagi $N(N_H, N_V)$ tekislikning gorizontal proyeksiyalar tekisligi H bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi. Frontal proyeksiyalovchi tekislikda yotuvchi har qanday tekis shaklning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V izi bilan ustma-ust tushadi. 52-shakl, a), b) da tekislikdagi D nuqtaning D_2 proyeksiyasi N_V ga tegishli.



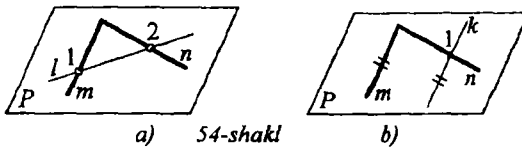
52-shakl

3. Profil proyeksiyalovchi tekislik. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga perpendikulyar bo'lgan tekislik profil proyeksiyalovchi tekislik deyiladi. Bunday tekislikning gorizontal S_H va frontal S_V izlari XX o'qiga parallel, $S_H \parallel XX$, $S_V \parallel XX$ bo'lib, uning profil izi ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin (53-shakl, a, b). Tekislik profil S_W izining OY o'qi bilan hosil qilgan α burchagi S tekislikning H tekislik bilan, S_W ning OZ o'qi bilan hosil qilgan β burchagi esa, tekislikning V bilan hosil qilgan burchagiga teng. Bu tekislikda yotuvchi har qanday tekis shaklning profil proyeksiyasi S_W bilan qo'shilib qoladi. 53-shakl a), b) da E nuqtaning E_3 proyeksiyasi S_W ga tegishli.



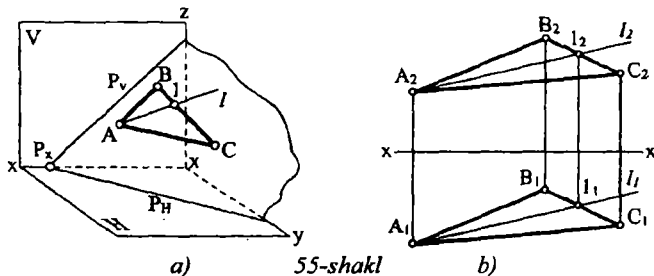
4.3 § Tekislikda to'g'ri chiziq tanlash

Elementar geometriyadan ma'lumki, agar to'g'ri chiziq biror tekislikka tegishli bo'lgan ikki to'g'ri chiziqni kesib o'tsa yoki to'g'ri chiziqlardan birini kesib ikkinchisiga parallel bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq ham shu tekislikka tegishli bo'ladi (54-shakl, a, b). Ixtiyoriy P tekislik o'zaro kesishuvchi m va n to'g'ri chiziqlar bilan berilgan (54 - shakl, a), ya'ni $m \cap n = P$. Faraz qilaylik ixtiyoriy l to'g'ri chiziq m va n to'g'ri chiziqdami mos ravishda 1 va 2 nuqtalarda kesib o'tsin, ya'ni $l \cap m = 1$, $l \cap n = 2$. Bu 1 va 2 nuqtalar P tekislikka tegishli bo'lgani uchun ulardan o'tuvchi l to'g'ri chiziq ham P tekislikka tegishli bo'ladi. 54-shakl, b)da P tekislikdagi n to'g'ri chiziqni 1 nuqtada kesib m to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan

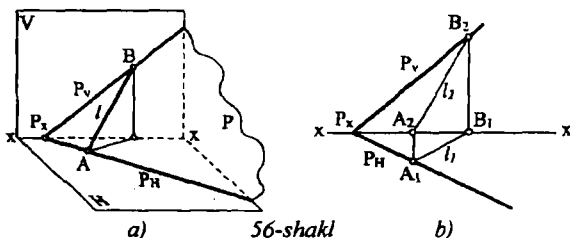


k to'g'ri chiziq tasvirlangan, ya'ni $m \cap n = P$, $k \cap n = 1$, $k \parallel m$ va $l \supset P$ bo'lgani uchun $k \supset P$ bo'ladi.

55-shakl, a), b) da ABC uchburchak tekisligining yaqqol tasviri va proyeksiyasi berilgan. ABC uchburchakning A(A_1A_2) uchi orqali l (l_1, l_2) to'g'ri chizig'ini o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq BC(B_1C_1, B_2C_2) tomonni $l(1_1, 1_2)$ nuqtada kesib o'tadi. Demak, l to'g'ri chiziq ABC uchburchak tekisligiga tegishlidir. 56-shakl, a), b) da P tekislik o'zining gorizontal P_H va frontal P_V izi orqali berilgan.



Bu tekislikda to'g'ri chiziq tanlash uchun tekislikning gorizontali P_H da $A(A_1, A_2)$ va frontal izi P_V da $B(B_1, B_2)$ nuqta tanlaymiz va ularning bir nomli proyeksiyalarini tutashtiramiz. Natijada P tekislikda yotuvchi $l(l_1, l_2)$ to'g'ri chizig'iga ega bo'lamiz.



4.4 § Tekislikning maxsus chiziqlari

Tekislik ustida ikki parametrlilik (∞^2) to'g'ri chiziqlar to'plami mavjud bo'lib, bu to'g'ri chiziqlarning shunday holatda joylashganlari borki, ular yordamisiz metrik va pozitsion masalalarni yechib bo'lmaydi. Bu to'g'ri chiziqlar, ya'ni ixtiyoriy tekislikka tegishli bo'lib biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq shu tekislikning maxsus chizig'i deyiladi.

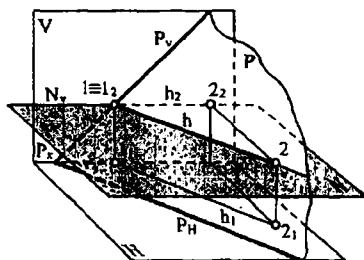
1. Tekislikning gorizontali chiziqlari. Tekislikka tegishli bo'lib, gorizontali proyeksiyalar tekisligi H ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq, tekislikning gorizontali chizig'i, yoki qisqacha gorizontali deyiladi.

57-shakl, a), b) larda umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislikning gorizontali $h(h_1, h_2)$ ko'rsatilgan. Tekislik gorizontalinining frontal proyeksiyasi hamma vaqt XX o'qiga parallel ($h_2 \parallel XX$), uning gorizontali h_1 proyeksiyasi esa tekislikning gorizontali izi P_H ga ($h_1 \parallel P_H$) parallel bo'ladi. Chunki, agar tekislik ustidagi ixtiyoriy, masalan 57-shakl a) da l nuqtadan gorizontali proyeksiyalar tekisligi H ga

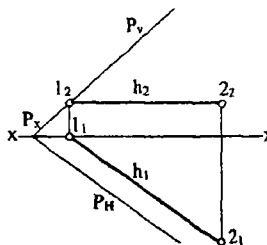
parallel qilib N tekislik o'tkazsak, uning frontal izi XX o'qiga parallel bo'ladi. Bu tekislikda yotuvchi har qanday shaklning frontal proyeksiyasi N_V iz bilan qo'shilib qoladi, ya'ni $h_2 \supset N_V$. O'zaro parallel H va N tekisliklarni uchinchi P tekislik kesgani uchun ularning o'zaro kesishish chiziqlari P_V va h lar ham parallel bo'ladi. Bundan $h_1 \parallel P_H$ ekanligi kelib chiqadi (57-shakl, b).

Demak, tekislik ustida bir parametrl (∞^1) gorizontallar to'plami mavjuddir. 57-shakl, v) da umumiy vaziyatdagi $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligining gorizontolini o'tkazish keltirilgan. Bunda uchburchakning ixtiyoriy uchi, masalan $A(A_1; A_2)$ ning frontal proyeksiyasi A_2 dan XX o'qiga parallel, ya'ni gorizont to'g'ri chiziq o'tkazib, CB tomonning frontal proyeksiyasi B_2C_2 da l_2 nuqta aniqlanadi va bog'lovchi chiziq orqali l nuqtaning gorizont proyeksiyasi l_1 aniqlanib, A_1 bilan tutashtiriladi. Natijada $A1(A_1l_1; A_2l_2)$ tekislikning gorizontliga ega bo'lamiz.

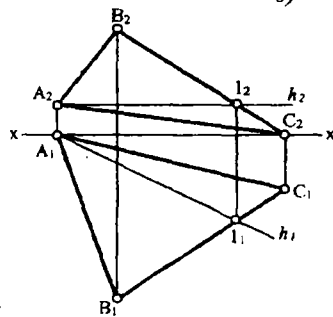
2. Tekislikning frontal chiziqlari. Tekislikka tegishli bo'lib, frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tekislikning frontal chizig'i yoki qisqachi frontali deyiladi.



a)



b)

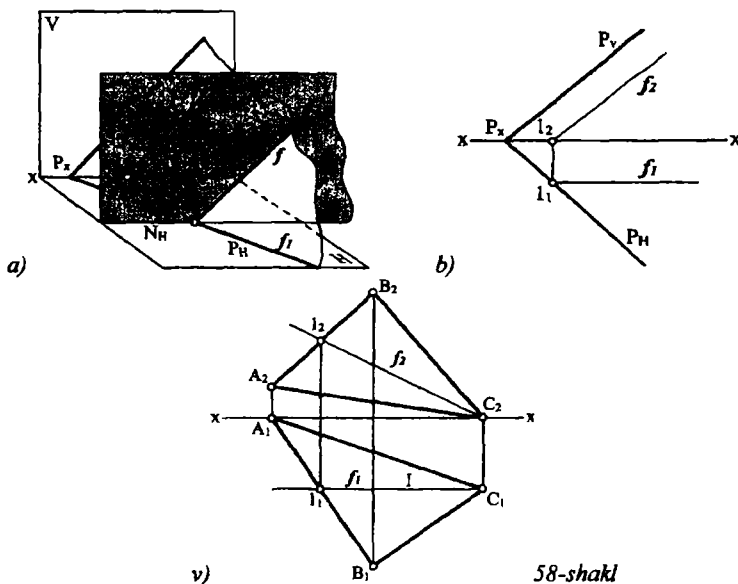


v)

57-shakl

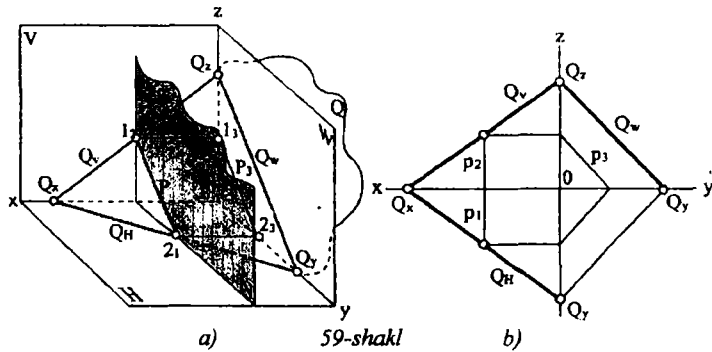
58-shakl, a), b) da umumiy vaziyatdagi $P(P_H;P_V)$ tekislikning frontali $f(f_1;f_2)$ ko'rsatilgan. Tekislik frontalining gorizontaal f_1 proyeksiyasi doimo XX o'qiga parallel ($f_1 \parallel XX$) bo'lib, uning frontal proyeksiyasi f_2 esa, tekislikning frontal P_V iziga parallel bo'ladi. 58-shakl, v) da umumiy vaziyatdagi $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligining frontalini o'tkazish ko'rsatilgan. Demak, tekislik ustida bir parametrl (∞^1) frontallar to'plami mavjud bo'ladi.

3. Tekislikning profil chiziqlari. Tekislikka tegishli bo'lib, profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq, tekislikning profil chizig'i yoki qisqacha profili deyiladi.



58-shakl

59-shakl, a), b) da umumiy vaziyatdagi $Q(Q_H;Q_V;Q_W)$ tekislikning profili $p(p_1;p_2;p_3)$ ko'rsatilgan. Tekislik profilining gorizontaal proyeksiyasi p_1 va frontal proyeksiyasi p_2 bitta OX o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqda yotadi.

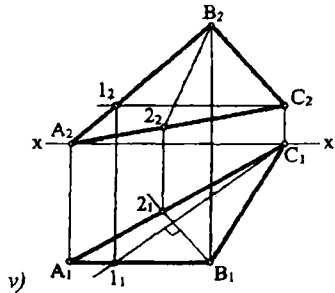
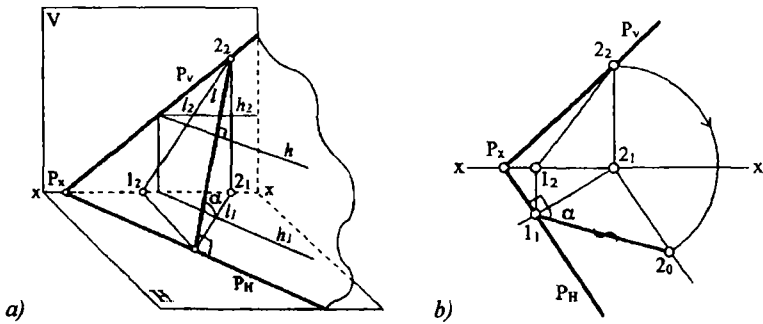


Tekislik profilining profil proyeksiyasi p_3 esa, tekislikning profil izi P_w ga parallel bo'ladi. Tekislikda bir parametrlil (∞^1) profil chiziqlar to'plami mavjuddir.

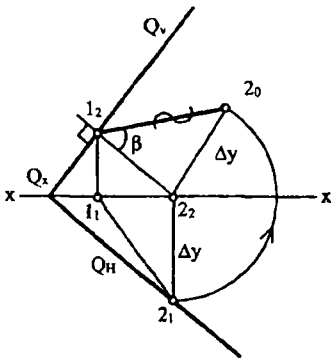
4.5 § Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari

Ixtiyoriy P tekislikka tegishli bo'lib, uning maxsus chiziqlariga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq shu P tekislikning eng katta og'ma chizig'i deyiladi.

1. Umumiy vaziyatdagi P tekislikka tegishli bo'lib, uning gorizontali h ga perpendikulyar bo'lgan l to'g'ri chiziq P tekislikning gorizontal proyeksiyalari tekisligi H ga nisbatan eng katta og'ma chizig'i bo'ladi. 60-shakl, a), b) da $P(P_H;P_V)$ tekislikning H tekislik bilan hosil qilgan α burchakni topish keltirilgan. P tekislikning ixtiyoriy masalan, 2 nuqtasidan (shaklda 2 nuqta P_V da tanlangan) tekislikning gorizontali h ga perpendikulyar l to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziq bilan uning gorizontal l_1 proyeksiyasi orasidagi α burchak P bilan H orasidagi burchak bo'ladi. 60-shakl b) da shu masalaning epyurda yechilishi ko'rsatilgan. Tekislikning P_H izi gorizontalning gorizontal proyeksiyasi h_1 ga parallel bo'lgani uchun, 2_1 nuqtadan P_H ga perpendikulyar o'tkazib l_1 nuqta aniqlanadi. 12 kesma shu tekislikning H ga nisbatan eng katta og'ma chizig'i bo'ladi. Bu kesmaning haqiqiy kattaligi to'g'ri burchakli uchburchak yasash yo'li bilan topilib, α burchak aniqlanadi. 60-shakl, v) da $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligining H ga nisbatan eng katta og'ma chizig'i B_2 ning proyeksiyalari B_12_1 va B_22_2 ni topish ko'rsatilgan.



60-shakl



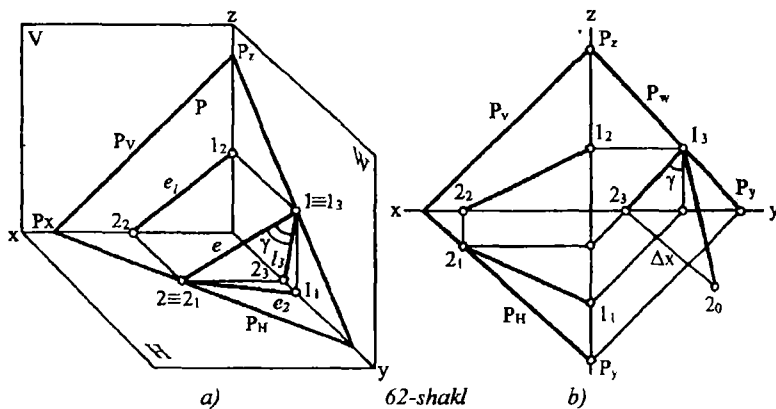
61-shakl

2. Umumiy vaziyatdagi Q tekislikka tegishli bo'lib, uning frontali f ga perpendikulyar bo'lgan m to'g'ri chiziq Q tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i bo'ladi. 61-shakldagi epyurda $Q(Q_H; Q_V)$ tekislikning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini yasash uchun Q tekislikning frontal izi Q_V da ixtiyoriy $l_2 \perp Q_V$ va unga perpendikulyar qilib tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta og'ma chiziqning frontal $l_2 \perp Q_V$ proyeksiyasi olinadi va uning gorizonttal proyeksiyasi

$l_1, 2_1$ topiladi. Bu $l_2(1_2, 2_2)$ chiziqning V bilan hosil qilgan β burchagi Q bilan V tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakka teng bo'ladi.

3. Umumiy vaziyatdagi P tekislikka tegishli bo'lib, uning profil chizig'iga (profil iziga) perpendikulyar bo'lgan e to'g'ri chiziq P

tekislikning W tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i bo'ladi. 62-shakl, a), b) da shunday to'g'ri chiziqning yaqqol tasviri va epyurda P tekislikning W tekislikka nisbatan og'ish burchagi γ ning haqiqiy kattaligini aniqlash keltirilgan.

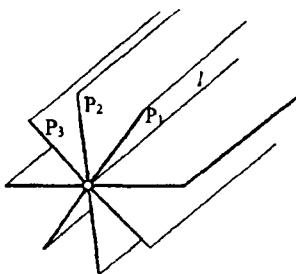


V bob. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIKNING O'ZARO VAZIYATI

Fazodagi ixtiyoriy l to'g'ri chiziq umumiy vaziyatdagi P tekislik bilan o'zaro quyidagi vaziyatlarda bo'lishi mumkin:

1. l to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli;
2. l to'g'ri chiziq P tekislikka parallel;
3. l to'g'ri chiziq P tekislik bilan kesishadi.

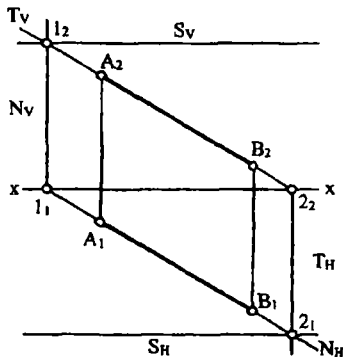
5.1 § To'g'ri chiziq orqali tekislik o'tkazish



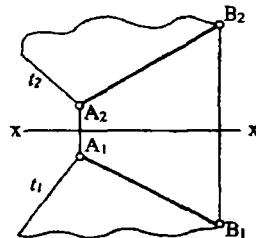
63-shakl

Pozitsion masalalarni yechishda ko'p hollarda to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan tekisliklardan foydalaniladi. To'g'ri chiziq orqali bir parametrlil (∞^1) tekisliklar to'plamini o'tkazish mumkin (63-shakl). Umumiy vaziyatda berilgan to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan tekisliklar to'plamida proyeksiyalar tekisliklariga parallel

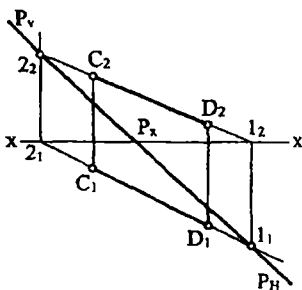
tekisliklar mavjud bo'lmaydi. Lekin ular orasida proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyar (ya'ni proyeksiyalovchi) bo'lgan tekisliklar mavjud bo'ladi. 64-shaklda $AB(A_1B_1;A_2B_2)$ to'g'ri chiziq orqali gorizontāl proyeksiyalovchi $N(N_H;N_V)$, frontal proyeksiyalovchi $T(T_H;T_V)$ va profil proyeksiyalovchi $S(S_H;S_V)$ tekisliklarni o'tkazish ko'rsatilgan. Proyeksiyalovchi tekisliklarni xususiyatiga ko'ra to'g'ri chiziqning bitta proyeksiyasi tekislikning u perpendikulyar bo'lgan proyeksiyalar tekisligidagi izi bilan ustma-ust tushadi. To'g'ri chiziq orqali profil proyeksiyalovchi tekislik $S(S_H;S_V)$ ni o'tkazish uchun bu to'g'ri chiziqning gorizontāl izi $1(1_1;1_2)$ va frontal izi $2(2_1;2_2)$ topilib bu nuqtalardan XX o'qiga parallel holda va mos ravishda S_H va S_V tekislikning izlari o'tkaziladi. 65-shaklda berilgan $AB(A_1B_1;A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasi orqali



64-shakl



65-shakl



66-shakl

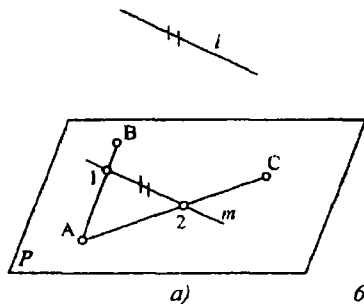
umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazilgan. Buning uchun kesmaning $A(A_1;A_2)$ uchi orqali ixtiyoriy yo'nalishda $t(t_1;t_2)$ to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Demak, tekislik o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziq orqali aniqlandi. 66-shaklda $CD(C_1D_1;C_2D_2)$ to'g'ri chiziq kesmasi orqali umumiy vaziyatdagi P tekislik izlari orqali o'tkazilgan. Bunda to'g'ri chiziq kesmasining gorizontāl izi $1(1_1;1_2)$ va frontal izi $2(2_1;2_2)$ topiladi va ular orqali mos ravishda tekislikning gorizontāl izi P_H

va frontal izi P_V o'tkaziladi. Lekin o'tkazilishi zarur bo'lgan tekislikning

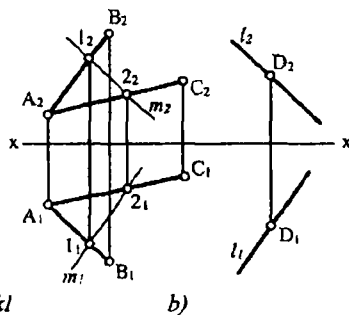
holatiga biror shart qo'yilmaganligi uchun XX o'qidagi izlarning o'zaro kesishish nuqtasi P_x ixtiyoriy tanlangan.

5.2 § To'g'ri chiziqning tekislikka parallelligi

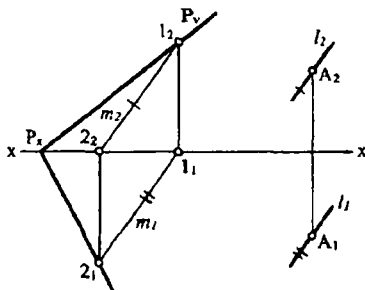
Agar fazodagi biror l to'g'ri chiziq ixtiyoriy P tekislikka tegishli bo'lgan m chiziqqa parallel bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq tekislikka ham parallel bo'ladi, ya'ni $m \supset P, l \parallel m$ bo'lsa, u holda $l \parallel P$



67-shakl



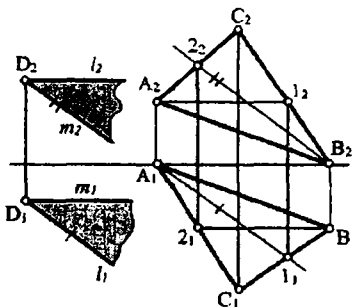
b)



68-shakl

bo'ladi (67-shakl, a,b). Fazoda berilgan tekislikka uning tashqarisidagi nuqtadan shu tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziq bir parametrli (∞^1) to'plamni tashkil qiladi. Fazodagi $A(A_1;A_2)$ nuqtadan umumiy vaziyatdagi $P(P_H;P_V)$ tekislikka parallel to'g'ri chiziq o'tkazish uchun (68-shakl) P tekislikda ixtiyoriy $m(m_1;m_2)$ to'g'ri chiziq tanlaymiz. A nuqtaning A_1 va A_2

proyeksiyalaridan shu to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalari m_1 va m_2 ga parallel holda l_1 va l_2 proyeksiyalari o'tkaziladi, ya'ni $l_1 \supset A_1, l_1 \parallel m_1$ va $l_2 \supset A_2, l_2 \parallel m_2$ demak, $l \parallel P$ bo'ladi. Yuqoridagi misolda o'tkaziluvchi to'g'ri chiziqqa qo'shimcha shartlar qo'yilgan emas. 69-shaklda $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligidan tashqaridagi $D(D_1;D_2)$ nuqta orqali shu tekislikka va H tekislikka, hamda V tekislikka parallel to'g'ri chiziq o'tkazish ko'rsatilgan.



Buning uchun berilgan tekislikning gorizontali $A_1(A_11_1;A_21_2)$ hamda frontali $B_2(B_12_2;B_22_2)$ o'tkazilib, A nuqtaning A_1 va A_2 proyeksiyalaridan tekislikning maxsus chiziqlariga parallel, $l \parallel A_1$ va $m \parallel B_2$ to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu yerda $l \parallel A_11_1$, $l_2 \parallel A_21_2$ va $m_1 \parallel B_12_1$, $m_2 \parallel B_22_2$ bo'ladi.

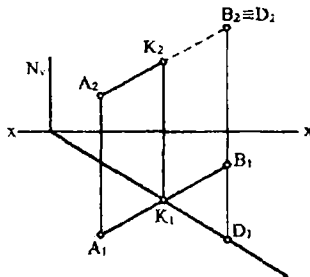
5.3 § To'g'ri chiziqni tekislik bilan kesishishi

To'g'ri chiziqning proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash

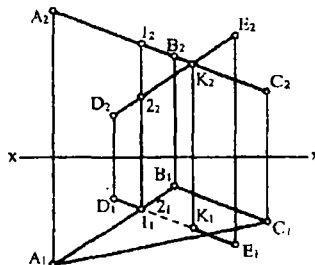
Proyeksiyalovchi tekislikning xususiyatiga ko'ra to'g'ri chiziq bilan proyeksiyalovchi tekislikning kesishuv nuqtasining bitta proyeksiyasi tekislik izida bo'ladi.

Shuningdek izlanayotgan nuqta A_1B_1 ($N \perp H$ bo'lsa)da yoki A_2B_2 ($N \perp V$ bo'lsa)da bo'ladi, shunga ko'ra izlanayotgan nuqtani gorizont proyeksiyalovchi tekislikning gorizontali izi bilan A_1B_1 ni yoki frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi bilan A_2B_2 ni kesishtirib aniqlanadi. Shuning uchun ham to'g'ri chiziqning bunday tekislik bilan kesishuv nuqtasini topish qiyinchilik tug'dirmaydi. 70-shaklda $AB(A_1B_1;A_2B_2)$ to'g'ri chiziq bilan gorizont proyeksiyalovchi N tekislikning kesishuv nuqtasini yasash ko'rsatilgan. AB to'g'ri chizig'ining gorizont proyeksiyasi A_1B_1 tekislikning gorizontali izi N_H ni K_1 nuqtada kesgan. K_1 kesishuv nuqtasining gorizont proyeksiyasi bo'lib, uning frontal proyeksiyasi K_2 esa A_2B_2 ustida bog'lovchi chiziq yordamida topiladi. AB kesma tekislikni $K(K_1;K_2)$ nuqtada teshib o'tgan uchun uning bir qismi tekislikning orqa tomonida qolib ko'rinmas bo'ladi. Bu misolda kesmaning ko'rinar va ko'rinmas qismini gorizont proyeksiya orqali osongina aniqlasa bo'ladi. Chunki ustidan ko'rinishda uning KB qismi ko'rinmas bo'lishi gorizont

proyeksiyadan yaqqol ko'rinib turibdi. Lekin keyingi misollarimizda konkurent nuqtalardan foydalanish ko'proq ishlatilishi tufayli bu misoldagi ko'rinar va ko'rinmas qismlarni konkurent nuqtalar yordamida tushuntiramiz. Kesmaning frontal



70-shakl



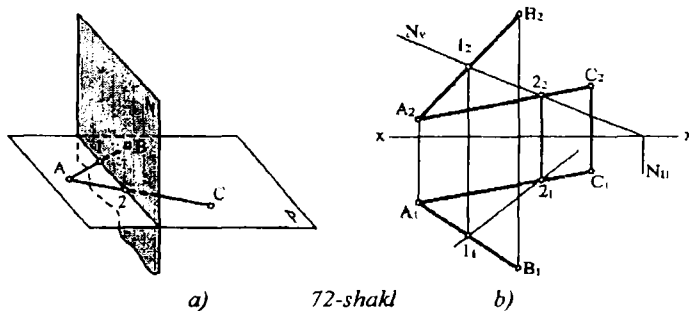
71-shakl

proyeksiyasida B nuqtaning frontal proyeksiyasi B_2 bilan tekislikka tegishli D nuqtaning frontal proyeksiyasi D_2 ustma-ust tushgan bo'lsin. D ning gorizontal proyeksiyasi D_1 ni aniqlaymiz. U N tekislikning gorizontal izi N_H da bo'ladi. Shunday qilib, gorizontal proyeksiyalar yordamida B nuqtaning oldidan ko'rinishda D nuqtaga nisbatan uzoqroq yotganligi ma'lum bo'ladi. Shuning uchun ham frontal proyeksiyada K_2B_2 qism ko'rinmas bo'ladi. 71-shaklda frontal proyeksiyalovchi tekislikda yotgan ABC uchburchak va DE to'g'ri chiziq kesmasi berilgan. ABC uchburchakning frontal proyeksiyasi to'g'ri chiziq ko'rinishida bo'lib, D_2E_2 bilan K_2 nuqtada kesishadi.

K ning gorizontal proyeksiyasi K_1 esa, D_1E_1 ustida bog'lovchi chiziq yordamida topiladi. Demak, DE to'g'ri chiziq ABC uchburchak bilan $K(K_1;K_2)$ nuqtada kesishadi. DE ning ustidan ko'rinishida uning ko'rinar-ko'rinmas qismini aniqlaymiz. Buning uchun DE ga tegishli 2 va AB tomonga tegishli 1 nuqtaning ustma-ust tushgan proyeksiyalaridan foydalanamiz. 1 va 2 nuqtalarning frontal proyeksiyalarini aniqlaymiz. Ularning frontal proyeksiyalaridan AB ga tegishli 1 nuqtaning 2 nuqtaga nisbatan balandroqda joylashganligini ko'ramiz. Shuning uchun ham DE kesmaning K_12_1 qismi ko'rinmas bo'ladi.

5.4 § Umumiy vaziyatdagi tekislikning xususiy vaziyatda berilgan tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash

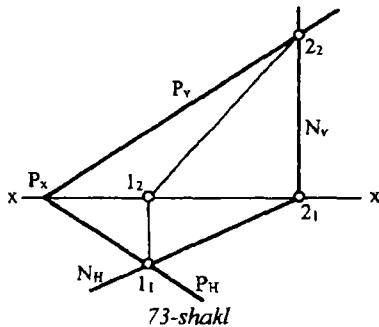
Ikki tekislik o'zaro to'g'ri chiziq bo'yicha kesishib, uning holati bu tekisliklarga umumiy bo'lgan ikki nuqta to'la aniqlaydi. 72-shakl, a) da ikki tekislikning o'zaro kesishish chizig'ini topish ko'rsatilgan. Bunda P tekislikdagi AB va AC to'g'ri chiziqlarning N tekislik bilan kesishgan nuqtalari 1 va 2 topiladi. Topilgan bu 1 va 2 nuqtalar har ikkala tekislikka tegishli bo'ladi. Demak,



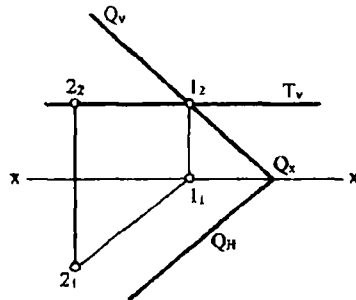
ularni birlashtiruvchi 12 to'g'ri chiziq berilgan ikki tekislikning o'zaro kesishgan chizig'i bo'lar ekan. 72-shakl, b) da AB va AC o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ko'rinishida berilgan P tekislik bilan frontal proyeksiyalovchi $N(N_H; N_V)$ tekislikning kesishish chizig'ini epyurda topish ko'rsatilgan. Bunda AB va AC kesmalarining frontal proyeksiyalari A_2B_2 va A_2C_2 larni N tekislikning frontal izi N_V bilan kesishish nuqtalari 1_2 va 2_2 topilib ularning gorizontal 1_1 va 2_1 proyeksiyalari aniqlanadi. 1_1 va 2_1 nuqtalarni birlashtirib tekisliklarning kesishish chizig'ining gorizontal proyeksiyasini topamiz. Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi 1_22_2 proyeksiyalovchi tekislikning xususiyatiga asosan uning frontal izi N_V bilan ustma-ust yotadi.

Agar kesishuvchi P va N tekisliklar epyurda P_H, R_V va N_H, N_V izlari bilan berilsa, ularning o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalarini topish uchun, ularning bir nomli izlarining kesishish nuqtalari $1(1_1; 1_2)$ va $2(2_1; 2_2)$ topiladi, ya'ni $R_H \cap N_H = 1_1$ va $R_V \cap N_V = 2_2$ va ularning bir nomli proyeksiyalari o'zaro birlashtiriladi (73-shakl). Topilgan $12(1_12_1; 1_22_2)$ to'g'ri chiziq berilgan ikki tekislikning kesishish chizig'i bo'ladi. 74-shaklda umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislikni

gorizontal $T(T_V)$ tekislik bilan kesishish chizig'ining proyeksiyalarini topish ko'rsatilgan.



73-shakl



74-shakl

Bunda T tekislik P tekislikni uning $1(1_1;1_2)$ nuqtadan o'tuvchi

gorizontali orqali kesadi.

$12(1_12_1;1_22_2)$ tekisliklarning kesishish

chizig'i bo'ladi. 75-shaklda frontal

proyeksiyalovchi $DEF(D_1E_1F_1;D_2E_2F_2)$

uchburchak tekisligi bilan umumiy

vaziyatdagi $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$

uchburchak tekisligining kesishuv

chizig'ini yasash ko'rsatilgan.

Uchburchak tekislik ABC ning AB

tomoni DEF tekislik bilan $1(1_1;1_2)$

nuqtada, AC tomoni esa, $2(2_1;2_2)$

nuqtada,

kesishadi. 1 va 2 nuqtalarni birlashtirib ikki tekislikning kesishuv chizig'i $12(1_12_1;1_22_2)$ ga ega bo'lamiz. Lekin bu tekislikning uchburchaklar bilan chegaralangan qismlari $1K(1_1K_1;1_2K_2)$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.

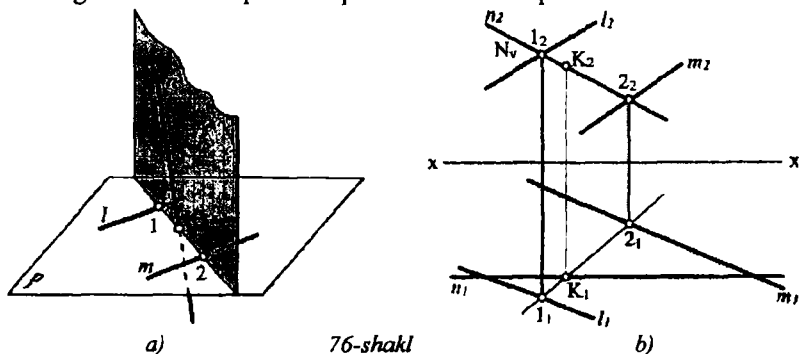
Bu uchburchaklarning gorizontal proyeksiyalaridagi ko'rinar va ko'rinmas qismlari konkurent nuqtalar $(3, 4)$ lar orqali aniqlangan.

5.5 § To'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishish nuqtasini topish

To'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro kesishish nuqtasi bir vaqtda ham tekislikka, ham to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan umumiy nuqtadir. Bu umumiy nuqtani berilgan to'g'ri chiziq orqali yordamchi tekislik o'tkazish yo'li bilan aniqlanadi. Berilgan va o'tkazilgan

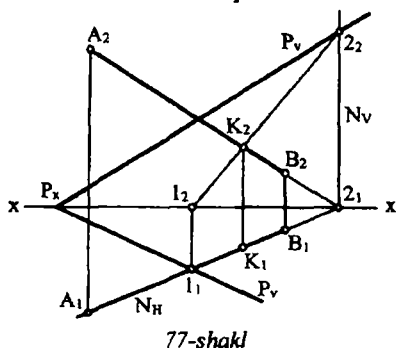
tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ini topib, yordamchi tekislikda ikkita o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga ega bo'lamiz, ularning kesishgan nuqtasi ham to'g'ri chiziqqa ham berilgan tekislikka tegishli bo'ladi, ya'ni to'g'ri chiziqni tekislik bilan o'zaro kesishish nuqtasi bo'ladi.

Fazoda n to'g'ri chiziq, hamda o'zaro parallel l va m to'g'ri chiziqlar bilan aniqlangan P tekislik berilgan bo'lsin (76-shakl, a, b). Ularning kesishish nuqtasini topishni ko'rib chiqamiz.



76-shakl

Berilgan n to'g'ri chiziq orqali ixtiyoriy N tekislik o'tkazamiz (ko'p hollarda proyeksiyalovchi). 76-shakl, b) da uning frontal izi N_v o'tkazilgan. Bu tekislik P tekislik bilan l_2 to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, ya'ni $l \cap n = 1$, $m \cap n = 2$, epyurda $l_2 \cap N_v = l_2$, $m_2 \cap N_v = 2_2$. Bu to'g'ri chiziq berilgan n bilan K nuqtada ($n_1 \cap l_1, 2_1 = K_1$) kesishadi. Topilgan, $K(K_1; K_2)$ nuqta berilgan to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro kesishish nuqtasi bo'ladi.



77-shakl

77-shaklda umumiy vaziyatdagi P tekislik P_H va P_V izlari bilan berilgan. Bu tekislik bilan $AB(A_1B_1; A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasining o'zaro kesishish nuqtasini topish ko'rsatilgan. Bunda AB kesma orqali $N(N_H; N_V)$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi, $P(P_H; P_V)$ bilan $N(N_H; N_V)$ ning kesishish chizig'i $l_2(l_1, 2_1; l_2, 2_2)$ yasaladi va bu chiziq bilan AB ning kesishish nuqtasi

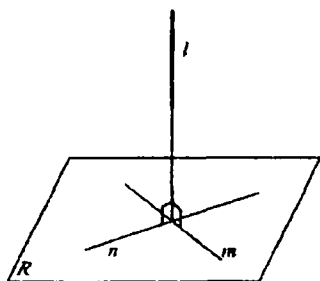
$K(K_1;K_2)$ aniqlanadi.

5.6 § To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi

Agar l to'g'ri chiziq $P(m \cap n)$ tekislikdagi o'zaro kesishuvchi m va n to'g'ri chiziqlarning har biriga perpendikulyar bo'lsa, u holda bu l to'g'ri chiziq P tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi (78-shakl).

l to'g'ri chiziq P tekislikning barcha to'g'ri chiziqlariga va shular qatori uning gorizontali va frontali chiziqlariga ham perpendikulyar bo'ladi. Shunga asosan $l_1 \perp h_1$ va $l_2 \perp f_2$ bo'ladi va bunday to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

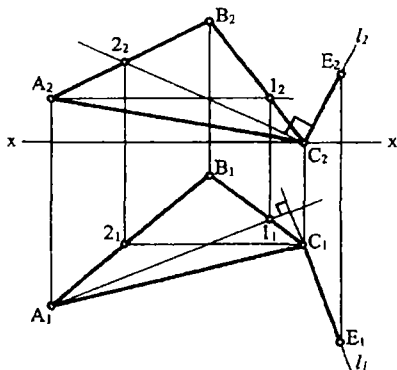
Berilgan $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligining $C(C_1;C_2)$ uchidan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazishni ko'rib chiqamiz (79-shakl). Buning uchun tekislikning maxsus chiziqlarini, ya'ni uning



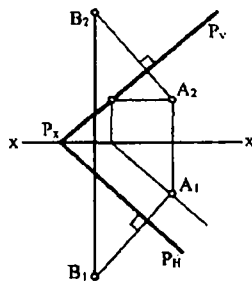
78-shakl

$A_1(A_11;A_21_2)$ gorizontali va $C_2(C_12_1;C_22_2)$ frontali o'tkazamiz. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xossasiga asosan C nuqtaning gorizont C_1 va frontal C_2 proyeksiyasidan mos ravishda berilgan $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligining $C(C_1;C_2)$ uchidan A_11_1 va C_22_2 larga perpendikulyar l ($l_1; l_2$) to'g'ri chiziq o'tkazib, unda ixtiyoriy $E(E_1;E_2)$ nuqtani belgilaymiz. Demak, CE kesma ABC

uchburchak tekisligiga perpendikulyar bo'ldi. Agar P tekislik P_H, R_V izlari bilan berilgan bo'lsa (80-shakl), u holda unga tegishli bo'lgan $A(A_1;A_2)$ nuqtadan perpendikulyar o'tkazish uchun nuqtaning gorizont A_1 va frontal A_2 proyeksiyalaridan tekislikning gorizont P_H va frontal P_V izlariga mos ravishda perpendikulyar o'tkazib unda ixtiyoriy $B(B_1;B_2)$ nuqta belgilanadi. Metrik masalalarni yechishda yuqoridagi usuldan ko'p foydalaniladi.



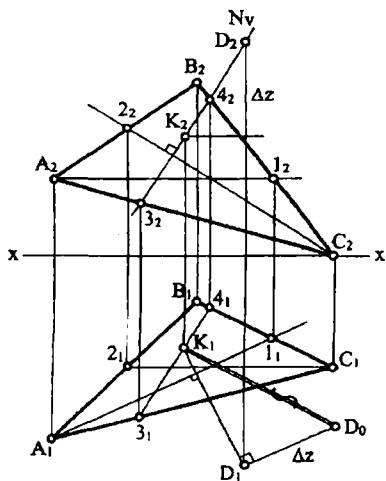
79-shakl



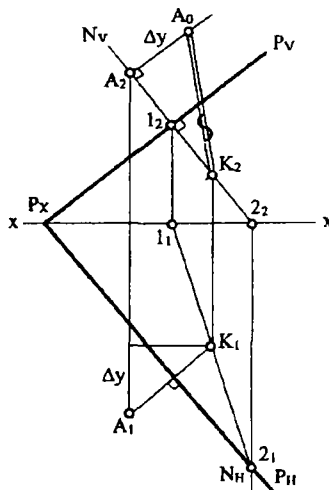
80-shakl

1-Misol. Berilgan $D(D_1;D_2)$ nuqtadan $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligigacha bo'lgan eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi aniqlansin (81-shakl).

Yechish. ABC tekislikning A uchidan uning $A_1(A_1l_1, A_2l_2)$ gorizontali va C uchidan esa uning



81-shakl



82-shakl

$C_2(C_1l_1;C_2l_2)$ frontali o'tkaziladi. D nuqtaning gorizantal D_1 va frontal D_2 proyeksiyalaridan A_1l_1 va C_2l_2 ga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu perpendikulyarning frontal proyeksiyasi orqali frontal proyeksiyalovchi $N(N_V)$ tekislik o'tkazib, uning $A_2B_2C_2$ bilan kesishish

chizig'i, ya'ni 3_2 va 4_2 nuqtalar topiladi. Bog'lovchi chiziqlar orqali bu nuqtalarning gorizontal 3_1 va 4_1 proyeksiyalari topilib birlashtirilsa D_1 nuqtadan o'tkaziladigan perpendikulyarni kesib ABC tekislik bilan kesishgan nuqtasi K ($K_1;K_2$) ni beradi. Demak, DK ($D_1K_1;D_2K_2$) kesma fazodagi D nuqtadan ABC tekislikgacha bo'lgan eng qisqa masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Uning haqiqiy kattaligi D_0K_1 to'g'ri burchakli $D_1D_0K_1$ uchburchak yordamida topilgan

2-Misol. Berilgan A($A_1;A_2$) nuqtadan umumiy vaziyatdagi P($P_H;P_V$) tekislikgacha bo'lgan eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi aniqlansin (82-shakl).

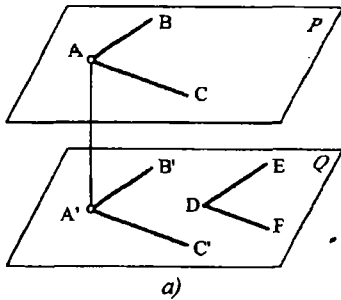
Yechish. Berilgan A nuqtaning gorizontal A_1 va frontal A_2 proyeksiyalardan tekislikning gorizontal P_H va frontal P_V izlariga mos ravishda perpendikulyar o'tkazamiz.

O'tkazilgan perpendikulyar orqali frontal proyeksiyalovchi N($N_H;N_V$) tekislik o'tkazamiz. Berilgan P va o'tkazilgan N tekisliklarning o'zaro kesishgan chizig'i $12(1_12_1;1_22_2)$ ni topamiz. Bu chiziqning gorizontal proyeksiyasi A nuqtaning gorizontal A_1 proyeksiyasidan o'tkazilgan perpendikulyarni K_1 nuqta kesib, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasining gorizontal proyeksiyasini beradi, uning K_2 proyeksiyasini topib to'g'ri burchakli $K_2A_2A_0$ uchburchak yordamida eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi $K_2 A_0$ topiladi.

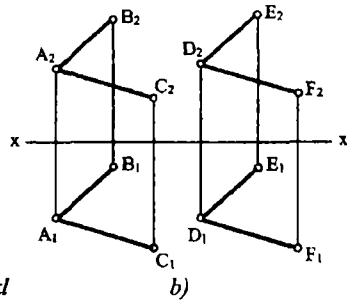
VI bob. FAZODAGI IKKI TEKISLIKNING O'ZARO VAZIYATI

6.1 § O'zaro parallel tekisliklar

Agar bir tekislikdagi o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ikkinchi tekislikdagi o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziq'larga mos ravishda parallel bo'lsa, u holda bu ikki tekislik o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni $AB \cap AC \supset P$, $DE \cap DF \supset Q$ bo'lib, $AB \parallel DE$ va $AC \parallel DF$ bo'lsa, $Q \parallel R$ bo'ladi (83-shakl a,b). Haqiqatdan, A nuqtadan Q tekislikka AA' perpendikulyar tushirib A' nuqtadan AB va AC to'g'ri chiziq'larga



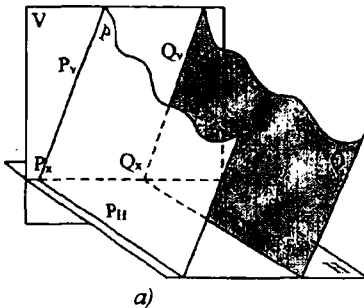
83-shakl



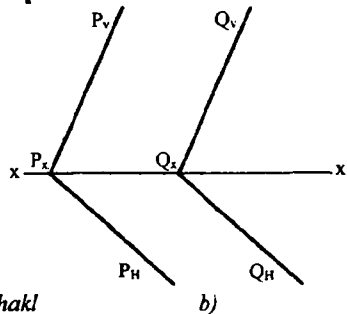
mos ravishda parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bundan $A'B' \parallel AB$ va $A'C' \parallel AC$ ekanligi oydin. $AA' \perp A'B'$ va $AB \parallel A'B'$ bo'lganligi uchun $AA' \perp AB$ bo'ladi. Xuddi shunday $AA' \perp AC$. Demak, $AA' \perp P$ ya'ni P va Q tekisliklar AA' ga perpendikulyar. Agar ikki tekislik bir to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u holda ular o'zaro paralleldir.

Bu tekisliklardagi o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni $A_1B_1 \parallel D_1E_1$, $A_1C_1 \parallel D_1F_1$ va $A_2B_2 \parallel D_2E_2$, $A_2C_2 \parallel D_2F_2$ (83-shakl, b).

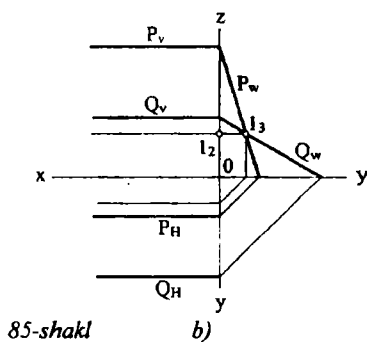
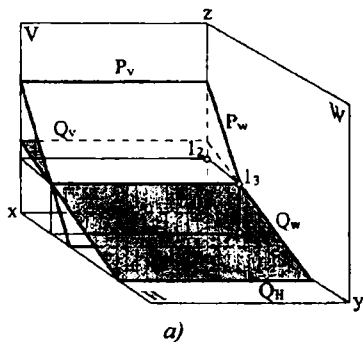
Agar ikki o'zaro parallel tekisliklar izlari bilan berilgan bo'lsa, u holda ularning bir nomli izlari ham o'zaro parallel bo'ladi (84-shakl). Haqiqatdan ikki o'zaro parallel tekisliklarni uchinchi tekislik kesib o'tsa ularning o'zaro kesishgan chiziqlari ham parallel bo'ladi.



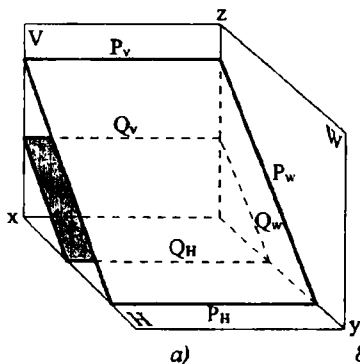
84-shakl



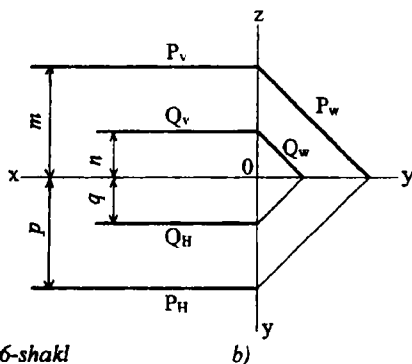
84-shakl, a) da kesuvchi tekislik sifatida proyeksiyalar tekisliklari H va V olinadi va ular P va Q tekisliklarni mos ravishda P_H , Q_H va P_V , Q_V chiziqlar bo'yicha kesadi. Demak, $P_H \parallel Q_H$ va $P_V \parallel Q_V$ bo'ladi (84-shakl, b). Tekisliklarning bir nomli izlari o'zaro parallel bo'lsa, tekisliklar fazoda doimo parallel bo'lavermaydi.



Masalan, profil proyeksiyalovchi P va Q tekisliklar berilgan (85-shakl, a, b). Ularning gorizontal P_H va Q_H hamda frontal P_V va Q_V izlari o'zaro parallel, ya'ni $P_H \parallel Q_H$ va $P_V \parallel Q_V$ lekin profil izlari P_v va Q_v o'zaro kesishuvchi, demak bu tekisliklar o'zaro parallel emas. Bunday tekisliklarning parallelligini tekshirish uchun ularning profil izlarini yasash zarur yoki quyidagicha tahlil qilish kerak, ya'ni tekisliklarning gorizontal $Q_H \parallel P_H$ izlari Ox o'qiga nisbatan qanday uzoqlikda joylashsa, frontal izlari ham shunday tartibda joylashishi kerak va izlarining Ox o'qigacha bo'lgan nisbatlari teng bo'lishi kerak, ya'ni $m:n = p:q$ (86-shakl, b).

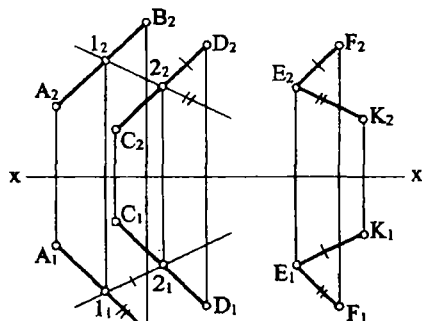


86-shakl



1-Misol. Fazodagi $E(E_1; E_2)$ nuqtadan o'zaro parallel AB ($A_1B_1; A_2B_2$) va CD ($C_1D_1; C_2D_2$) to'g'ri chiziqlar bilan berilgan tekislikka parallel tekislik o'tkazilsin (87-shakl).

Bu masalani yechish uchun E nuqtadan berilgan to'g'ri chiziq



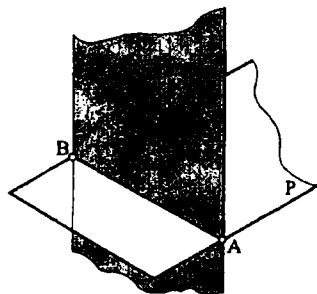
87-shakl

kesmalariga parallel o'tkazish kerak. E nuqtaning frontal proyeksiyasi E_2 dan CD ning frontal proyeksiyasi C_2D_2 ga parallel o'kazib ixtiyoriy F_2 nuqtani belgilaymiz. EF kesmaning gorizontal proyeksiyasi E_1F_1 esa C_1D_1 ga parallel bo'ladi, ya'ni $E_2F_2 \parallel C_2D_2$ va $E_1F_1 \parallel C_1D_1$. E nuqtadan o'tuvchi tekislikni ifodalovchi ikkinchi to'g'ri chiziqni o'tkazish uchun berilgan $AB \parallel CD$ tekislikda

ixtiyoriy $l_2 (l_{12_1}; l_{12_2})$ to'g'ri chiziqni tanlab olamiz va E nuqtaning proyeksiyalaridan l_2 ning proyeksiyalariga mos ravishda parallel to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi, ya'ni $E_1K_1 \parallel l_{12_1}$ va $E_2K_2 \parallel l_{22_2}$. Hosil bo'lgan EFK ($E_1F_1K_1; E_2F_2K_2$) tekislik izlangan tekislik bo'ladi.

6.2 § O'zaro kesishuvchi tekisliklar

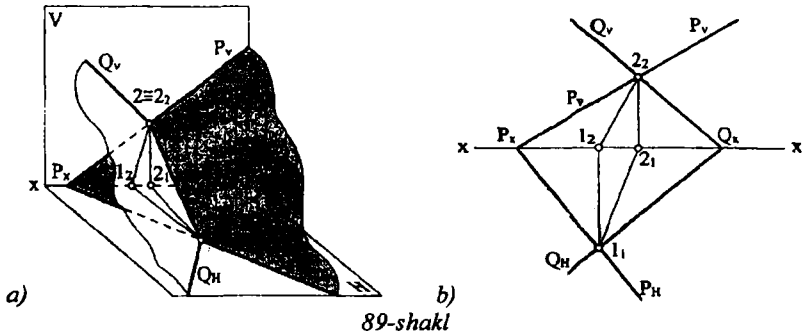
Ma'lumki ikki tekislik o'zaro bitta umumiy to'g'ri chiziq



88-shakl

bo'yicha kesishadi. To'g'ri chiziq esa ikki parametrlil (∞^2) nuqtalar to'plami bo'lib, o'zining ikki nuqtasi bilan, yoki bir nuqta va yo'nalishi bilan aniqlanadi. Demak, ikki tekislikning kesishgan chizig'ini yasash uchun har ikkala tekislikka tegishli bo'lgan ikkita (A va B) nuqtani topib ularni birlashtirish kifoyadir (88-shakl).

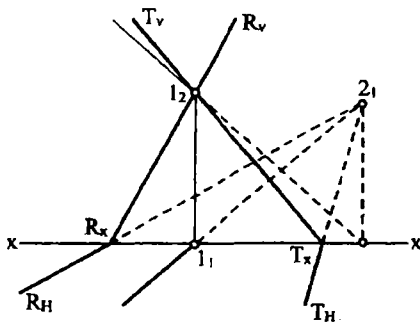
1-Misol. 89-shakl, a) va b) da umumiy vaziyatdagi o'zaro kesishuvchi P (P_H, P_V) va Q (Q_H, Q_V) tekisliklar berilgan. 89-shakl, a) dan ko'rinib turibdiki, bu tekisliklar uchun umumiy bo'lgan 1 va 2 nuqtalar tekisliklarning bir nomli izlarining kesishgan nuqtalari bo'ladi, ya'ni $P_H \cap Q_H = 1$ va $P_V \cap Q_V = 2$.



89-shakl

Epyurda (89-shakl, b) bu tekisliklarning o'zaro kesishgan chizig'ini proyeksiyalarini yasash uchun ularning bir nomli izlarning kesishish $1(1_1; 1_2)$ va $2(2_1; 2_2)$ proyeksiyalarni aniqlaymiz va bir nomli proyeksiyalarni o'zaro birlashtiramiz. Natijada hosil bo'lgan $12(1_1, 2_1; 1_2, 2_2)$ kesma P va Q tekisliklarning kesishish chizig'ini, izlari bilan chegaralangan qismining proyeksiyalari bo'ladi.

Chizma geometriyaning aksariyat ko'p masalalarini fazoning



90-shakl

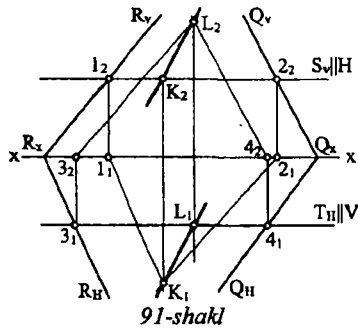
birinchi oktantida yechiladi. Lekin umumiy vaziyatda bo'lgan ikki tekislikning bir nomli izlari birinchi oktant chegarasi kesishmasligi ham mumkin. U holda bu izlarni davom ettirib boshqa oktantlarda kesishtirib topish bilan kesishgan chizig'ini proyeksiyalari yasaladi. Buni quyidagi misolda ko'ramiz.

2-Misol. 90-shaklda $R(R_H; R_V)$ va $T(T_H; T_V)$ tekisliklarning gorizontaal izlari ikkinchi oktantga o'tib kesishadi.

Agar kesishuvchi R va Q tekisliklarning bir nomli izlari chizma chegarasida o'zaro kesishmasa, u holda ularning kesishish chizig'ini yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalanib topiladi.

3-Misol. 91-shakl $R(R_H; R_V)$ va $Q(Q_H; Q_V)$ tekisliklar izlari bilan berilgan bo'lib, bir nomli izlari chizma chegarasida kesishmaydi. Yordamchi kesuvchi tekisliklar sifatida $S(S_V)$ gorizontaal, ya'ni H ga

parallel tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik R va Q larni mos ravishda $1(1_1;1_2)$ va $2(2_1;2_2)$ nuqtalardan o'tuvchi gorizontallari bo'yicha kesadi.



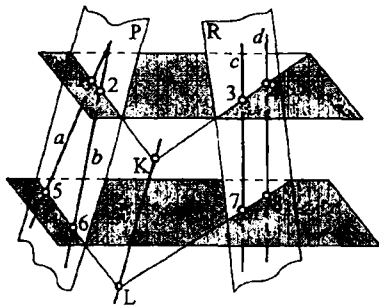
91-shakl

Tekisliklarning bu gorizontallari kesishib izlanayotgan nuqtalardan biri $K(K_1;K_2)$ ni aniqlaydi. Ikkinchi yordamchi kesuvchi tekislik $T(T_H)$ ni V ga parallel, ya'ni frontal, holda o'tkazamiz. Bu tekislik esa R va Q ni mos ravishda $3(3_1;3_2)$ va $4(4_1;4_2)$ nuqtalardan o'tuvchi frontallar bo'yicha kesib, izlanayotgan ikkinchi $L(L_1;L_2)$ nuqtani beradi. Demak R va Q tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari

$KL(K_1L_1;K_2L_2)$ bo'lar ekan.

Agar kesishuvchi tekisliklar epyurda qandaydir tekis shakllar bilan berilgan bo'lsa, ularning o'zaro kesishish chizig'ini topish uchun albatta yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalaniladi.

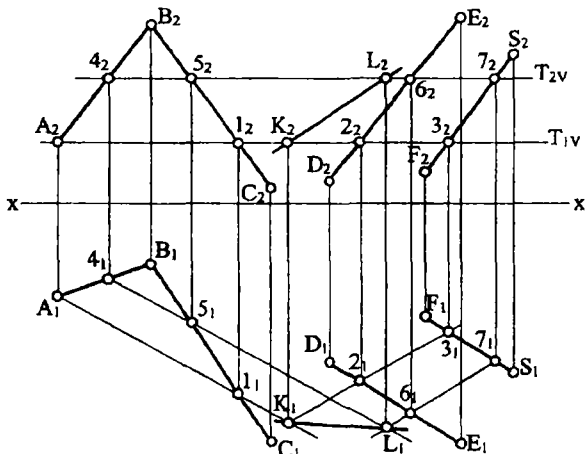
4-Misol. 92-shakl, a)da P tekislik o'zaro kesuvchi a va b ($P=a \cap b$), R



92, a)-shakl

tekislik esa o'zaro parallel c va d ($R=c \parallel d$) to'g'ri chiziqlar bilan berilgan. Bu tekisliklarni T_1 tekislik bilan kesib P tekislikda 1 va 2 nuqtani, R tekislikda esa 3 va 4 nuqtalar topilib, 1 va 2 hamda 3 va 4 nuqtalar birlashtirilsa ular o'zaro K nuqtada kesishib izlanayotgan nuqtalardan biri beradi. T_2 tekislik bilan kesib yuqoridagi usul bilan L nuqta topiladi. KL to'g'ri chiziq P va R tekisliklarning o'zaro kesishish

chizig'i bo'ladi. 92-shakl b) da shu masalaning epyurda yechilishi ko'rsatilgan. Bunda T_1 va T_2 kesuvchi tekisliklar N tekislikka parallel holda olingan. Chunki bu tekisliklar P va R tekisliklarni ularning gorizontallari bo'yicha kesadi.



92, b)-shakl

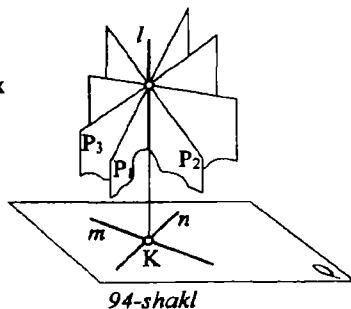
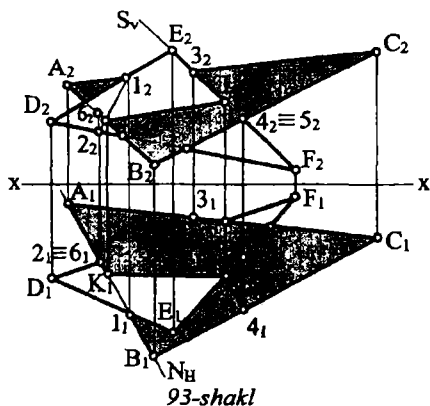
T_1 tekislik birinchi tekislikni $A1(A_11_1;A_21_2)$ va ikkinchi tekislikni esa $23(2_13_1;2_23_2)$ gorizontallar bo'yicha kesib $K(K_1;K_2)$ nuqtani aniqlaydi. T_2 tekislik esa $45(4_15_1;4_25_2)$ va $67(6_17_1;6_27_2)$ gorizontallar bo'yicha kesadi va $L(L_1;L_2)$ nuqtani aniqlaydi. Demak, hosil bo'lgan $KL(K_1L_1;K_2L_2)$ to'g'ri chiziq berilgan ikki tekislikning o'zaro kesishish chizig'ini proyeksiyalari bo'ladi.

5-Misol. $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ va $DEF(D_1E_1F_1;D_2E_2F_2)$ uchburchaklar bilan berilgan tekisliklarning kesishish chizig'i topilsin (93-shakl).

Bu masalani yechishda yordamchi kesuvchi tekisliklar uchburchaklarni biror tomonlari orqali proyeksiyalovchi holatda o'tkaziladi. ABC uchburchak AB tomoni orqali N gorizont proyeksiyalovchi tekislik o'tkazamiz.

$(A_1B_1 \supset N_H)$. Bu tekislik DEF uchburchakning DE ($D_1E_1;D_2E_2$) tomonini $1(1_1;1_2)$ va $DF(D_1F_1;D_2F_2)$ tomonini esa $2(2_1;2_2)$ nuqtalarda kesadi va $12(1_12_1;1_22_2)$ chiziq AB ning frontal A_2B_2 proyeksiyasini $K(K_1;K_2)$ nuqtada kesadi. K nuqta izlanayotgan nuqtalardan biridir. Endi $DEF(D_1E_1F_1;D_2E_2F_2)$ uchburchakning $EF(E_1F_1;E_2F_2)$ tomoni orqali $S(S_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazamiz va yuqoridagi usuldan foydalanib $L(L_1;L_2)$ nuqtani topamiz, ya'ni $E_2F_2 \supset S_V$, $S_V \cap A_2C_2 = 3_2$ ($3_1 \supset A_1C_1$), $S_V \cap B_2C_2 = 4_2$ ($4_2 \supset B_1C_1$), $3_14_1 \cap E_1F_1 = L_1$, $L_2 \supset E_2F_2$. Topilgan $KL(K_1L_1;K_2L_2)$ kesma berilgan uchburchak tekisliklarning kesishgan chizig'idir. Tekisliklar shaffof emas deb ularning ko'rinar-ko'rinmas

qismlari konkurent nuqtalar $4(4_1;4_2)$ va $5(5_1;5_2)$ hamda $2(2_1;2_2)$ va $6(6_1;6_2)$ nuqtalardan foydalanib aniqlanadi.

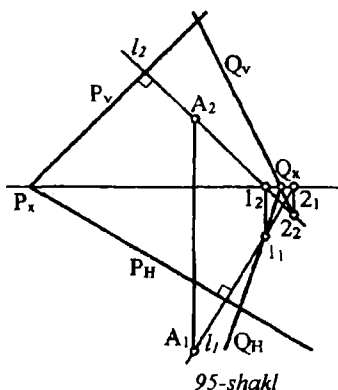


6.3 § Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi

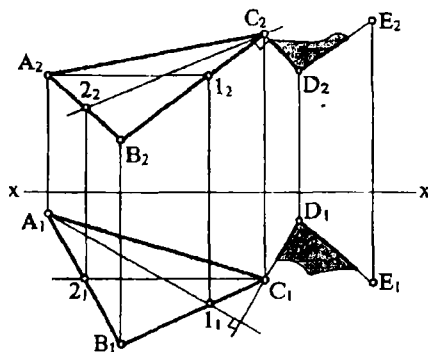
Agar biror P tekislik ikkinchi bir Q tekislikka perpendikulyar bo'lgan l to'g'ri chiziq orqali o'tsa, u holda bu P tekislik Q tekislikka perpendikulyar bo'ladi. Ya'ni $l \perp Q$ bo'lib, $l \supset P$ bo'lsa, u holda $P \perp Q$. Ma'lumki, to'g'ri chiziq orqali bir parametrli (∞') tekisliklar to'plami o'tadi. Demak, tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq orqali o'tgan P_n tekisliklar ham bir parametrli (∞') perpendikulyar tekisliklar to'plamini tashkil qiladi. (94-shakl).

1-Misol. Fazodagi $A(A_1;A_2)$ nuqtadan izlari bilan berilgan $P(P_H;P_V)$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan $Q(Q_H;Q_V)$ tekislik o'tkazilsin (95-shakl). Buning uchun $A(A_1;A_2)$ nuqtadan $P(P_H;P_V)$ tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Epyurda A nuqtaning gorizonttal A_1 va frontal A_2 proyeksiyalaridan mos ravishda P_H ga P_V ga perpendikulyar holda l to'g'ri chiziqning gorizonttal l_1 ($l_1 \perp P_H$) va frontal l_2 ($l_2 \perp P_V$) proyeksiyalarini o'tkazib, uning H va V tekisliklardagi l_1 va l_2 izlari topiladi. Bu l to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi har qanday Q tekislik berilgan P tekislikka perpendikulyar bo'ladi. 95-shaklda Q tekislikning gorizonttal Q_H izi l_1 nuqta orqali ixtiyoriy yo'nalishda o'tkazilib Q_X nuqta topiladi, bu nuqta va l_2 nuqta orqali esa Q tekislikning frontal Q_V izi o'tkaziladi. Agar o'tkazilgan Q tekislikning biror izi berilgan P tekislikning biror iziga mos ravishda perpendikulyar

bo'lsa, u holda Q tekislikning ikkinchi izi albatta XX o'qiga perpendikulyar bo'lib, o'tkazilgan tekislik proyeksiyalovchi holda bo'ladi.



95-shakl



96-shakl

2-Misol. $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligining $C(C_1; C_2)$ uchidan unga perpendikulyar tekislik o'tkazilsin (96-shakl).

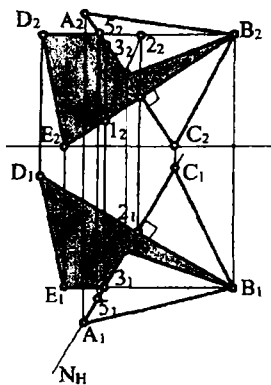
Bu masala quyidagicha yechiladi: $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligining gorizontal $A_1(A_11_1; A_21_1)$ va frontal $C_2(C_12_1; C_22_2)$ chiziqlari o'tkaziladi; $C(C_1; C_2)$ nuqtadan yuqoridagi maxsus chiziq'larga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazib unda ixtiyoriy $D(D_1; D_2)$ nuqta tanlanadi. Ya'ni $C_1D_1 \perp A_11_1$ va $C_2D_2 \perp C_22_2$ bo'ladi.

Demak, bu $CD(C_1D_1; C_2D_2)$ to'g'ri chiziq berilgan ABC uchburchak tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. Ma'lumki, tekislik o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziq'larga ham beriladi. Shuning uchun $D(D_1; D_2)$ nuqtadan ixtiyoriy yo'nalishda (CD dan farqli) to'g'ri chiziq o'tkazib, unda $E(E_1; E_2)$ nuqtani belgilaymiz. Demak, o'zaro kesishuvchi CD va $DE(CD \cap DE)$ to'g'ri chiziq'larga izlangan tekislikni ifodalaydi.

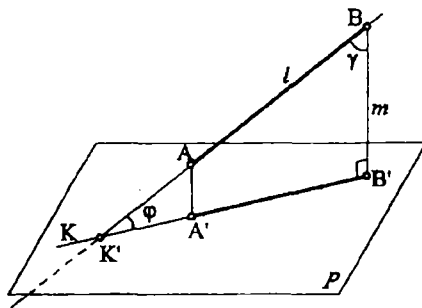
3-Misol. Umumiy vaziyatdagi $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ uchburchakning $B(B_1; B_2)$ uchidan $AC(A_1C_1; A_2C_2)$ tomoniga perpendikulyar tekislik o'tkazilsin va ularning o'zaro kesishish chizig'i aniqlansin (97-shakl).

Uchburchakning $B(B_1; B_2)$ uchidan o'tkazilishi kerak bo'lgan tekislikning maxsus chiziq'lari $AC(A_1C_1; A_2C_2)$ ga perpendikulyar holda o'tkazamiz, ya'ni $B_1D_1 \perp A_1C_1$ $B_2D_2 \parallel XX$ tekislikning gorizontali va $B_2E_2 \perp A_2C_2$, $V_1E_1 \parallel XX$ tekislikning frontalini o'tkazamiz. O'tkazilgan $BDE(B_1D_1E_1; B_2D_2E_2)$ tekislik ABC ga perpendikulyar bo'ladi. Endi

AC to'g'ri chiziq orqali $N(N_H)$ gorizontaal proyeksiyalovchi (frontal proyeksiyalovchi ham bo'lishi mumkin) tekislik o'tkazamiz. Bu tekislikning N_H izi B_1E_1 , ni 1 nuqtada, B_1D_1 ni esa 2_1 , nuqtada kesib o'tadi, topilgan nuqtalarning frontal 1_2 va 2_2 proyeksiyalarini birlashtirib A_2C_2 da K_2 ni, undan so'ng K_1 ni topamiz. Topilgan $K(K_1;K_2)$ nuqtani $B(B_1;B_2)$ bilan (B nuqta har ikki tekislikka umumiydir, chunki ikkala uchburchakning umumiy uchidir) birlashtirib uchburchak tekisliklarining o'zaro kesishish chizig'iga ega bo'lamiz, ya'ni $ABC \cap BDE = BK$. Bu uchburchakning ko'rinar-ko'rinmas qismlarini konkurent $1(1_1;1_2)$ va $3(3_1;3_2)$ hamda, $4(4_1;4_2)$ va $5(5_1;5_2)$ nuqtalar yordamida aniqlanadi.



97-shakl



98-shakl

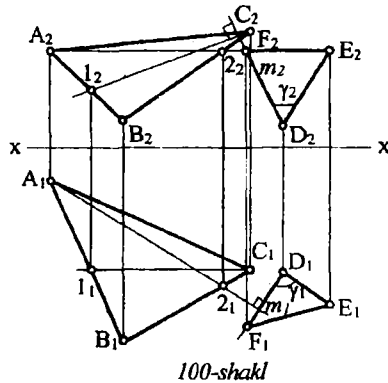
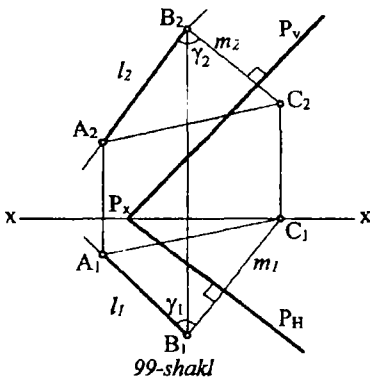
6.4 § To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni aniqlash

To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak, shu to'g'ri chiziqning berilgan tekislikdagi to'g'ri burchakli proyeksiyasi bilan hosil qilgan burchak orqali o'lchanadi (98-shakl).

Bu burchakni aniqlash uchun quyidagi reja asosida ish olib boriladi:
 1. Berilgan l to'g'ri chiziqning P tekislik bilan kesishish nuqtasi K topiladi, ya'ni $K = l \cap P$.
 2. To'g'ri chiziqning ixtiyoriy, masalan B , nuqtasidan P tekislikka perpendikulyar ($BB' \perp P$) tushirib, uning berilgan P tekislikdagi B' proyeksiyasi aniqlanadi. Hosil bo'lgan $KB'B$ uchburchak tekisligi P ga perpendikulyar bo'lib, $K'B'$ to'g'ri chiziq esa bu tekisliklarning kesishish chizig'idir. BKB' uchburchakning K uchidagi burchak l to'g'ri chiziq bilan P tekislik orasidagi burchak bo'ladi. Bu

masalani nisbatan sodda yo'l bilan hal qilish ham mumkin. Ma'lumki, uchburchak ichki burchaklarning yig'indisi 180° ga teng, ya'ni $\varphi + \gamma + 90^\circ = 180^\circ$. 98-shakldagi $KB'B$ uchburchak to'g'ri burchakli bo'lganidan $\varphi + \gamma = 90^\circ$ bo'lishi kerak.

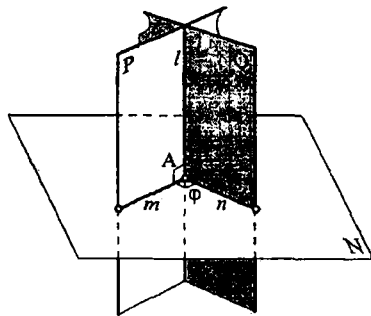
Bu yerdan $\varphi = 90^\circ - \gamma$. Demak, φ burchakni γ burchak, (ya'ni uni 90° ga to'ldiruvchi γ burchak) orqali topish mumkin ekan. Buning uchun l to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan berilgan tekislikka perpendikulyar yo'nalishni topish kifoya ekan. 99-shaklda $AB(A_1B_1; A_2B_2)$ to'g'ri chiziq bilan umumiy vaziyatdagi izlari bilan berilgan $P(P_H; P_V)$ tekislik orasidagi burchakni 90° ga to'ldiruvchi burchakning proyeksiyalari ko'rsatilgan. 100-shaklda esa, $DE(D_1E_1; D_2E_2)$ to'g'ri chiziq bilan $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligi orasidagi burchakning proyeksiyalarini topish keltirilgan.



6.5 § Ikki tekislik orasidagi burchakni aniqlash

Ikki tekislik orasidagi burchak, bu tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi chiziqli burchak bilan o'lchanadi. 101-shaklda P va Q tekisliklar orasidagi burchakni topish ko'rsatilgan. Bu chiziqli φ burchakni topish quyidagi algoritm bo'yicha bajariladi.

1. P va Q tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'i l topiladi, ya'ni $P \cap Q = l$;



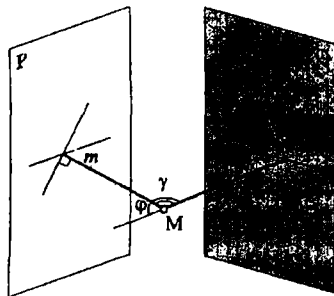
101-shakl

2. Tekisliklarning kesishish chizig'i l dagi ixtiyoriy A nuqtadan l ga perpendakulyar N tekislik o'tkaziladi. $A \in l \perp N$. Bu N tekislik bir vaqtda P va Q tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi, chunki $l \supset P$ va $l \supset Q$ demak $N \perp P$ va $N \perp Q$.

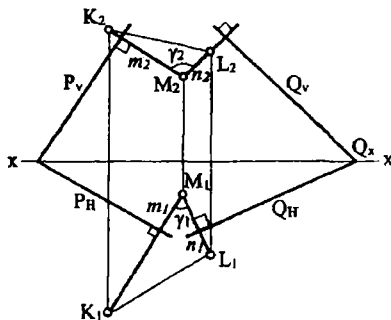
3. O'tkazilgan N tekislik bilan berilgan P va Q tekisliklarning o'zaro kesishish chiziqlari m va n aniqlanadi, ya'ni $N \cap P = m$, $N \cap Q = n$.

4. Tekisliklarni kesishish chiziqlari m va n orasidagi φ burchak izlangan burchak bo'ladi. Bu masalani yuqoridagi algoritmda yechish ko'p geometrik (grafik) yasashlarni talab qiladi. Ikki tekislik orasidagi burchakni quyidagi soddalashtirilgan usul bilan ham aniqlash mumkin. Buning uchun fazoda P va Q tekisliklarga tegishli bo'lmagan ixtiyoriy M nuqta tanlab berilgan tekisliklarga m va n perpendikulyar tushiramiz va ular orasidagi burchakni aniqlaymiz (102-rasm).

Ma'lumki, ikki tekislik orasidagi burchak o'tkir burchak bilan o'lchanadi. Demak $\varphi = 180^\circ - \gamma$ bo'ladi.



102-shakl

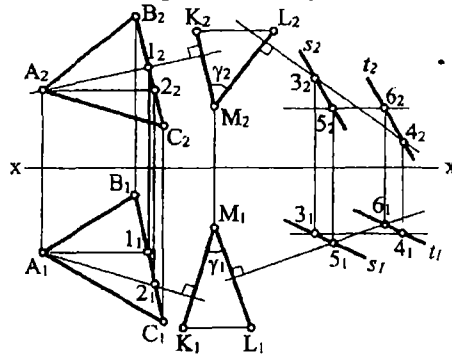


103-shakl

1-Misol. Epyurda (103-shakl) izlari bilan berilgan $P(P_H; P_V)$ va $Q(Q_H; Q_V)$ tekisliklar orasidagi φ burchak aniqlansin. Buning uchun ixtiyoriy $M(M_1; M_2)$ nuqtani tanlab, uning M_1 va M_2 proyeksiyalarida tekisliklarning gorizantal va frontal izlariga mos ravishda perpendikulyar o'tkazamiz va ularda ixtiyoriy $K(K_1; K_2)$ va $L(L_1; L_2)$ nuqtalarni tanlaymiz, ya'ni $M_1K_1 \perp P_H$, $M_2K_2 \perp P_V$ va $M_1L_1 \perp Q_H$, $M_2L_2 \perp Q_V$.

Hosil bo'lgan $KML(K_1M_1L_1;K_2M_2L_2)$ uchburchakning $M(M_1;M_2)$ uchidagi γ burchak, φ ni 180° ga to'ldiruvchi burchak bo'ladi. Bu γ burchakning haqiqiy kattaligini aniqlab, φ burchakni, ya'ni $\varphi=180^\circ-\gamma$ topamiz.

2-Misol. $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ va $s(s_1;s_2)||t(t_1;t_2)$ to'g'ri chiziqlar bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchak topilsin (104-shakl).



104-shakl

Ixtiyoriy tanlangan $M(M_1;M_2)$ nuqtadan berilgan tekisliklarga epyurda maxsus chiziqlariga perpendikulyar o'tkazamiz, ya'ni $M_1K_1 \perp A_1A_2$, $M_2K_2 \perp A_2A_1$ va $M_1L_1 \perp 5_16_1$, $M_2L_2 \perp 3_24_2$. Hosil bo'lgan $KML(K_1M_1L_1;K_2M_2L_2)$ uchburchakning $M(M_1;M_2)$ uchidagi burchak izlanayotgan φ burchakni 180° ga to'ldiruvchisi bo'ladi, ya'ni $\varphi=180^\circ-\gamma$.

VII bob. ORTOGONAL PROYEKSIYALARNI QAYTA TUZISH USULLARI

Oldingi boblarda ko'rib o'tilganidek geometrik shakllar fazoda proyeksiyal tekisliklariga nisbatan xususiy holda joylashgan bo'lsa, ularga tegishli pozitsion va metrik munosabatlarni tekshirish g'oyat osonlashadi, ya'ni grafik operatsiyalar soni kamayib, aniqlik darajasi oshadi.

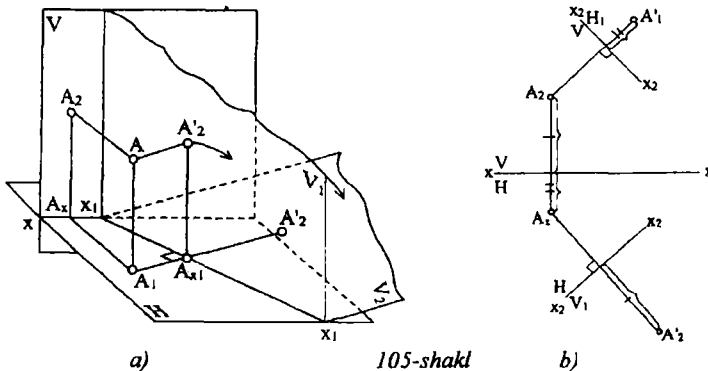
Agar masalalarda berilgan geometrik figuralar fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan umumiy holda joylashgan bo'lsa, ularning yechimini aniqlash ancha murakkablashib, ish hajmi

ortadi. Shuning uchun ba'zi hollarda umumiy holda berilgan geometrik shakllarni xususiy holga kelishtirish usullari mavjud. Bulardan proyeksiyalar tekislikni almashtirish va aylantirish, yordamchi proyeksiyalash usullaridan ko'proq foydalaniladi. Bu usullarni ko'rib chiqamiz.

Fazoda berilgan nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik yoki sirt birlamchi proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qo'zg'almasdan bu geometrik figuralarga nisbatan qulay holatda yangi proyeksiyalar tekisligi olinadi. Yangi proyeksiyalash yo'nalishi tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Bu usul proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli deyiladi. Agar birlamchi proyeksiyalar tekisliklari qo'zg'almay, balki fazodagi geometrik figuralar biror o'q atrofida harakatlanib proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga qulay vaziyatga keltirilsa, bu aylantirish usuli deyiladi. Yordamchi proyeksiyalash usulida esa, proyeksiyalar tekisligi ham, proyeksiyalash yo'nalishi ham o'zgaradi.

7.1 § Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli. Proyeksiya tekisliklaridan bittasini almashtirish

Bu usulning mohiyati shundan iboratki, bunda geometrik figura o'z holatini o'zgartirmay qolib, unga nisbatan proyeksiyalar tekisliklaridan biri o'z holatini maqsadga muvofiq o'zgartiradi. Birinchi chorakda H, V tekisliklar sistemasida joylashgan $A(A_1; A_2)$ nuqta misolida proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish jarayonini ko'rib chiqamiz (105-shakl, a).



Gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga perpendikulyar qilib, yangi vertikal V_1 proyeksiyalar tekisligini tanlaymiz va unga A nuqtani ortogonal proyeksiyalab, A'_2 proyeksiyani hosil qilamiz. A nuqtaning yangi vertikal proyeksiyalar tekisligi V_1 dagi frontal proyeksiyasi A'_2 bo'ladi. Gorizontal A_1 proyeksiyasi esa aslicha qoladi, chunki biz H, V tekisliklar sistemasidan yangi H, V_1 sistemaga o'tib, yangi proyeksiyalar o'qi X_1X_1 ga ega bo'lamiz. Endi V_1 tekislikni X_1X_1 proyeksiya o'qi atrofida aylantirib H bilan ustma-ust qo'yamiz. Natijada A nuqtaning yangi epyuriga (105-shakl, b) ega bo'lamiz.

Epyurda nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A_1 ga nisbatan yangi preksiyalar o'qi X_1X_1 ni tanlaymiz va A_1 dan unga perpendikulyar bog'lovchi chiziqni o'tkazamiz. 105-shakl, a) dan $AA_1 = A_2A_X = A'_2A_{X_1}$ ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun 105-shakl, b) da bog'lovchi chiziqqa A_{X_1} nuqtadan A_2A_X ni o'lchab qo'yib epyurda A'_2 ni hosil qilamiz. Demak, A nuqtaning yangi frontal proyeksiyasini hosil qilish uchun quyidagi bosqichlar bajariladi.

1. Yangi proyeksiyalar o'qi X_1X_1 tanlanadi.
2. Nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A_1 dan X_1X_1 ga perpendikulyar bog'lovchi chiziq o'tkaziladi va uning o'q bilan kesishgan nuqtasi A_{X_1} belgilanadi.
3. A nuqtaning frontal proyeksiyasi A_2 ning XX o'qidan (N dan balandligi) uzoqligi A_XA_2 masofani o'lchab olinadi va u A_1 dan o'tgan bog'lovchi chiziqqa A_{X_1} nuqtadan boshlab o'lchab qo'yiladi.

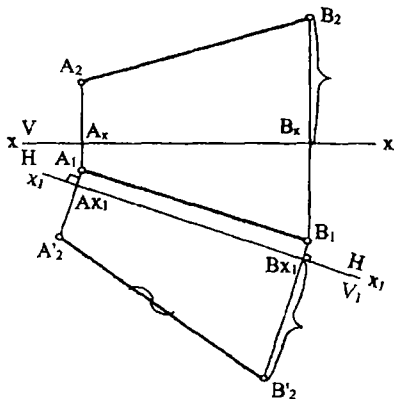
Agar gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ning holati o'zgartirilib, u H_1 ga almashtirilsa, nuqtaning yangi gorizontal proyeksiyasi quyidagicha yasaladi (105-shakl, b)

1. Nuqtaning frontal proyeksiyasi A_2 ga nisbatan X_2X_2 o'qi tanlanadi.
2. A_2 nuqtadan unga perpendikulyar bog'lovchi chiziq o'tkazib A_{X_2} ni belgilaymiz.
3. A_XA_1 ni (A nuqtaning V tekislikdan uzoqligi) o'lchab olib bog'lovchi chiziqqa, uning A_{X_2} nuqtadan boshlab o'lchab qo'yib yangi gorizontal proyeksiya A'_1 , ni hosil qilamiz. Demak, birlamchi H, V sistema yangi H_1, V sistemaga almashadi.

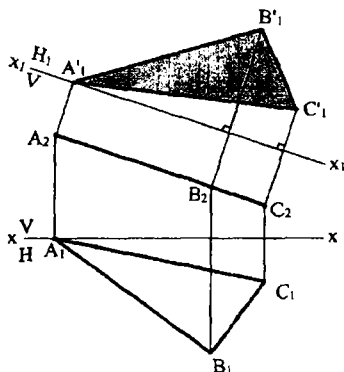
Quyida proyeksiyalar tekisliklaridan bittasini almashtirish usulida yechiladigan ba'zi pozitsion va metrik misollarni ko'ramiz.

1-misol. Umumiy vaziyatda berilgan $AB(A_1B_1;A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy kattaligi aniqlansin. Buning uchun yangi proyeksiyalar tekisligi V_1 ni AB kesmaga parallel holda tanlash kifoya. 106-shaklda V_1 tekislikning H bilan kesishish chizig'i, ya'ni X_1X_1 proyeksiyalar o'qi, AB kesmaning gorizontaal proyeksiyasi A_1B_1 ga parallel holda olingan ($A_1B_1 \parallel X_1X_1$) va shu tekislikdagi A'_2 va B'_2 proyeksiyalar topilib birlashtirilgan. AB kesma V_1 ga parallel bo'lgani uchun $A'_2B'_2$ haqiqiy kattaligi bo'ladi.

2-misol. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga nisbatan perpendikulyar joylashgan $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi aniqlansin (107-shakl). Buning uchun yangi proyeksiyalar tekisligini ABC uchburchak tekisligiga parallel tanlash kerak. Demak, gorizontaal proyeksiyalar tekisligini almashtirish kerak. Birlamchi H, V sistemadan H_1V sistemaga o'tamiz. H_1 tekislik ABC ga parallel ($H_1 \parallel ABC$). Yangi proyeksiyalar X_1X_1 o'qini $A_2B_2C_2$ ga nisbatan parallel ($X_1X_1 \parallel A_2B_2C_2$) holda tanlab, H_1 tekislikda ABC uchburchakning yangi gorizontaal $A'_1B'_1C'_1$ proyeksiyasini hosil qilamiz. $ABC \parallel H_1$ bo'lgani uchun $A'_1B'_1C'_1$ uchburchak berilgan ABC uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi bo'ladi.

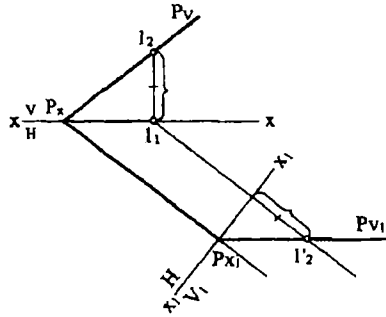


106-shakl



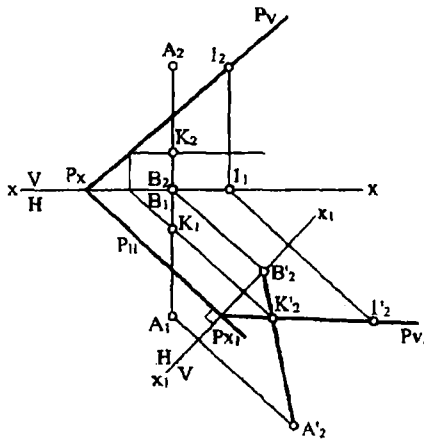
107-shakl

3-misol. Umumiy vaziyatda izlari bilan berilgan $P(P_H;P_V)$ tekislik V ga nisbatan perpendikulyar holatga keltirilsin (108-shakl).



108-shakl

Masalaning berilish shartidan ma'lumki, P tekislikning yangi xolatidagi gorizontaal P_H izi yangi proyeksiyalar o'qi X_1X_1 ga perpendikulyar bo'lishi kerak. Shuning uchun yangi proyeksiyalar o'qi X_1X_1 ni tekislikning gorizontaal P_H iziga perpendikulyar holda olamiz. Birlamchi H, V sistema yangi H, V_1 sistemaga almashadi. P tekislikning yangi izini topish uchun uning frontal P_V izida $l(1_1;1_2)$ nuqta tanlab uning yangi vertikal V_1 tekislikdagi l'_2 frontal proyeksiyasini topamiz. P_H bilan x_1x_1 o'qining kesishish nuqtasi P_{X1} bo'ladi. Topilgan l'_2 ni P_{X1} bilan birlashtirib tekislikning P_{V1} izini hosil qilamiz.

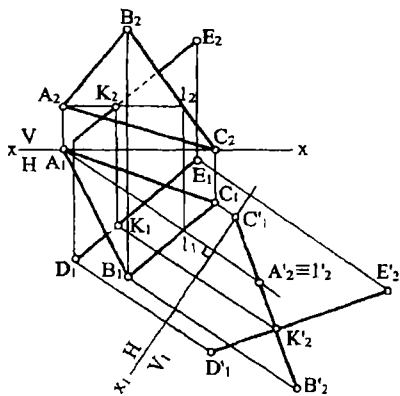


109-shakl

4-misol. Umumiy vaziyatda izlari bilan berilgan $P(P_H;P_V)$ tekislik bilan profil to'g'ri chiziq $AB(A_1B_1;A_2B_2)$ ning o'zaro kesishish nuqtasi topilsin (109-shakl). 3-misoldagi usuldan

foydalanib P tekislikni frontal proyeksiyalovchi holatga keltirib, uning yangi V_1 tekislikdagi P_{V_1} izini topamiz. Endi shu yangi H, V_1 sistemada AB to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalarini yasash kerak.

Kesmaning $B(B_1;B_2)$ uchi XX o'qida yotganligi sababli uning yangi B'_2 proyeksiyasi ham X_1X_1 o'qqa tegishli bo'ladi. A nuqtaning A'_2 proyeksiyasini ma'lum usuldan foydalanib topiladi. P tekislik yangi holatda proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli $A'_2B'_2$ kesmaning P_{V_1} iz bilan kesishgan K'_2 nuqtasi izlangan nuqtaning H, V_1 sistemadagi proyeksiyasi bo'ladi. Topilgan K'_2 nuqtani teskari yo'nalishda proyeksiyalab birlamchi H, V sistemada uning K_1 va K_2 proyeksiyalari aniqlanadi. Topilgan $K(K_1;K_2)$ nuqta izlangan nuqtaning proyeksiyalari bo'ladi. Xuddi shu usul bilan $DE(D_1E_1;D_2E_2)$ to'g'ri chiziqning $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligi bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalarini yasash mumkin. Bunda berilgan tekislikni proyeksiyalovchi tekislik holatiga keltirish uchun yangi proyeksiya tekisligi V_1 berilgan tekislikning gorizontaliga perpendikulyar holda olinadi (110-shakl).

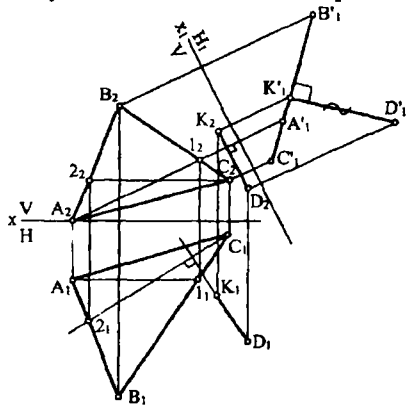


110-shakl

Buning uchun X_1X_1 proyeksiyalar o'qi tekislik gorizontalining gorizontal proyeksiyasi A_1l_1 ga perpendikulyar qilib olinadi. Berilgan geometrik figuralarning yangi proyeksiyalar tekisligi V_1 dagi proyeksiyalari yasaladi. ABC uchburchakning $A'_2B'_2C'_2$ proyeksiyasi to'g'ri chiziq ko'rinishda bo'lib, to'g'ri chiziq kesmasining $D'_2E'_2$ proyeksiyasi bilan K'_2 nuqtada (bu izlangan nuqtaning proyeksiyasi) keshib izlangan nuqtaning H, V_1 sistemasidagi proyeksiyasini hosil qiladi. Teskari proyeksiyalash yo'nalishidan foydalanib nuqtaning

birlamchi HV sistemadagi proyeksiyalari K_1 va K_2 topiladi. ABC uchburchakni shaffof emas deb, DE kesmaning ko'rinar-ko'rinmas qismlari aniqlanadi.

5-misol. Fazodagi $D(D_1;D_2)$ nuqtadan umumiy vaziyatda berilgan ABC ($A_1B_1C_1;A_2B_2C_2$) uchburchak tekisligigacha bo'lgan eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi topilsin (111-shakl). Bu masalani yechishda ham umumiy vaziyatdagi tekisliklarni proyeksiyalovchi holatga keltirish kerak. Buning uchun yangi H_1 proyeksiyalar tekisligini tekislikning frontali $A_1(A_1l_1;A_2l_2)$ ga perpendikulyar holatda olinadi. Shaklda yangi proyeksiyalar o'qi X_1X_1 frontalining frontal proyeksiyasi A_2l_2 ga perpendikulyar, ya'ni $X_1X_1 \perp A_2l_2$ olingan. Yangi H_1 tekislikka ABC uchburchak $C_1A_1B_1$ ko'rinishdagi kesma bo'lib, D nuqta esa D_1 proyeksiyaga ega bo'ladi. D_1 dan $C_1A_1B_1$ ga perpendikulyar o'tkazib kesishish nuqtasini K'_1 bilan belgilaymiz. $D_1K'_1$ kesma eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi bo'ladi. Shu sababli uning V tekislikdagi D_2K_2 proyeksiyasi X_1X_1 o'qiga parallel bo'lib, A_2l_2 ga esa perpendikulyar holda yo'naladi. Proyeksion moslikda K_1 ni topiladi.



111-shakl

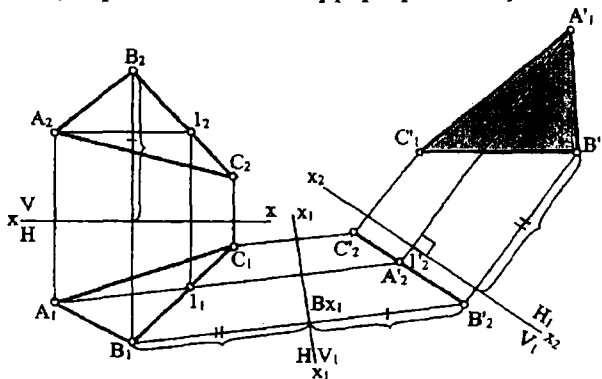
7.2 § Proyeksiyalar tekisliklarini ikki marta almashtirish

Ba'zi masalalarni yechishda proyeksiyalar tekisliklaridan birini almashtirish bilan kerakli natijaga erishib bo'lmaydi. Bunday vaziyatda proyeksiyalar tekisligini ketma-ket ikki marta almashtirishga to'g'ri keladi.

1-misol. Umumiy vaziyatda berilgan $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi topilsin (112-shakl). Bu masalani yechish ikki bosqichdan iborat bo'lib, ular quyidagilardir:

1. ABC uchburchak tekisligi yangi sistemada proyeksiyalovchi (ya'ni biror tekislikka perpendikulyar) holatga keltiriladi;

2. Ikkinchi almashtirishda yangi proyeksiyalar tekisligi uchburchak tekisligiga parallel holda olinadi. Shaklda yangi V_1 tekislik maxsus chiziq $A_1(A_1l_1;A_2l_2)$ ga perpendikulyar olingan bo'lib, X_1X_1 o'q bu maxsus chiziqqa perpendikulyardir.



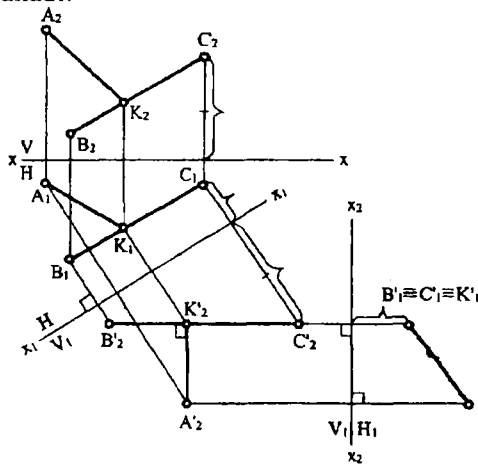
112-shakl

Tanlangan V_1 tekislikka ABC uchburchak $A'_2B'_2C'_2$ to'g'ri chiziq kesmasi ko'rinishda proyeksiyalanadi.

Endi H, V_1 sistemadan V_1, H_1 sistemaga o'tamiz. Yangi H_1 proyeksiyalar tekisligi ABC ga parallel olinadi, u holda X_2X_2 proyeksiyalar o'qi $A'_2B'_2C'_2$ ga parallel yo'naladi. Proyeksiyalash yo'nalishi H_1 ga nisbatan perpendikulyar bo'ladi. B nuqtani H_1 tekisligida topishni ko'rib chiqamiz. B'_2 nuqtadan X_2X_2 ga perpendikulyar bog'lovchi chiziq o'tkazib, unga $B_1B_{x_1}$ masofani B_{x_2} nuqtadan qo'yib, B'_1 nuqtani belgilaymiz. Shu usul bilan uchburchakning qolgan nuqtalari A'_1 va C'_1 topiladi. Hosil bo'lgan $A'_1B'_1C'_1$ uchburchak berilgan uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi bo'ladi.

2-misol. Fazodagi $A(A_1;A_2)$ nuqtadan $BC(B_1C_1;B_2C_2)$ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan eng qisqa masofa aniqlansin (113-shakl). Yangi proyeksiyalar tekisligiga BC to'g'ri chiziq kesmasi nuqta ko'rinishida proyeksiyalanishi kerak, demak yangi proyeksiyalar tekisligi BC ga perpendikulyar holda bo'ladi. Bu masala ham H, V

sistemadagi proyeksiyalar tekisligini ikki marta almashtirishni taqozo qiladi. Birinchi almashtirishda V_1 tekislik BC ga parallel olinadi, ya'ni $V_1 \parallel B_1C_1$, demak, $X_1X_1 \parallel B_1C_1$ bo'ladi, V_1 tekislikda BC ni haqiqiy kattaligi $B'_2C'_2$ ga ega bo'lamiz. Ikkinchi marta almashtirishda H_1 ni jumladan X_2X_2 ni ham $B'_2C'_2$ ga perpendikulyar olib unda $B'_1 \equiv C'_1$ nuqtaga ega bo'lamiz. Har ikki almashtirish jarayonida $A(A_1; A_2)$ nuqta ham almashtirib boriladi. H_1 dagi A'_1 ni $B'_1 \equiv C'_1$ bilan birlashtirib nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligiga ega bo'lamiz. V_1 tekislikdagi A'_2 nuqtadan X_2X_2 ga parallel o'tkazib $B'_2C'_2$ da K'_2 ni aniqlaymiz. K nuqtaning birlamchi proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash yo'li bilan aniqlanadi.



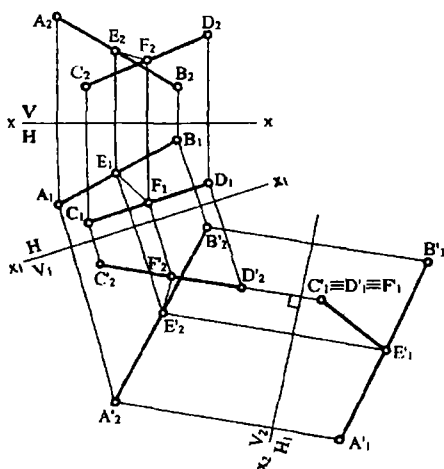
113-shakl

3-misol. $AB(A_1B_1; A_2B_2)$ va $CD(C_1D_1; C_2D_2)$ chalmashuvchi ikki to'g'ri chiziq orasidagi eng qisqa masofa aniqlansin (114-shakl). Buning uchun to'g'ri chiziqlardan biri (masalan CD) ni biror tekislikka nisbatan perpendikulyar holga keltiramiz. Yangi V_1 tekislik CD ga parallel olinadi ($X_1X_1 \parallel C_1D_1$), va AB hamda CD kesmalarning yangi V_1 tekislikdagi $A'_2B'_2$ va $C'_2D'_2$ proyeksiyalari hosil qilinadi.

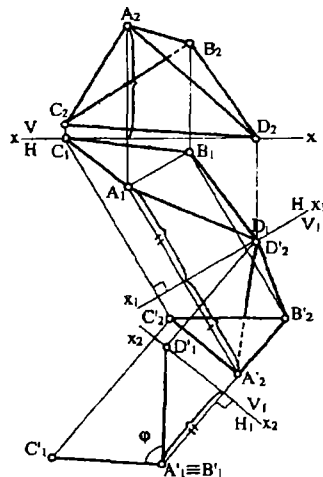
Ikkinchi almashtirishdagi H_1 tekislik $C'_2D'_2$ ga perpendikulyar tanlanib ($X_2X_2 \perp C'_2D'_2$), H_1 tekislikdagi $A'_1B'_1$ va $C'_1D'_1$ ni topiladi. CD to'g'ri chiziq kesmasining H_1 tekislikdagi $C'_1D'_1$ nuqta ko'rinishdagi proyeksiyasi orqali $A'_1B'_1$ ga perpendikulyar o'tkazib izlangan masofa topiladi. $A'_1B'_1$ dagi E'_1 nuqta va $C'_1D'_1$ dagi F'_1

nuqtaning birlamchi proyeksiyalari teskari yo'nalishda proyeksiyalanib topiladi.

4-misol. $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ va $ABD(A_1B_1D_1; A_2B_2D_2)$ uchburchak tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchakni o'lchovchi chiziqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (115-shakl). Bu masalani yechish uchun yangi proyeksiyalar tekisligi har ikkala uchburchak tekisliklariga bir vaqtda perpendikulyar bo'lishi kerak, demak ularning o'zaro kesishish chizig'i (ya'ni AB) ga perpendikulyar bo'lishi kerak. Lekin, uchburchaklarning umumiy tomoni AB umumiy vaziyatda bo'lgani uchun H, V sistemani avval H, V_1 sistemaga almashtirib, ya'ni $V_1 \parallel AB, X_1 X_1 \perp A_1 B_1$, so'ngra bu H, V_1 sistemani $H_1 \perp AB, X_2 X_2 \perp A_2 B_2$ qilib ketma-ket almashtiramiz. Natijada ABC va ABD uchburchaklar H_1 proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lib qoladi va kesishuvchi kesmalar ko'rinishda proyeksiyalanadi. Bu kesmalar orasidagi φ burchak izlangan burchak bo'ladi.



114-shakl



115-shakl

7.3 § Aylantirish usuli

Epyurni qayta tuzish usullaridan biri aylantirish usulidir. Bu usulning mohiyati shundan iboratki, bunda birlamchi H, V tekisliklar sistemasi o'z holatini o'zgartirmay, balki tekshirilayotgan obraz biror o'q atrofida qulay-maxsus holga kelgunga qadar aylantiriladi. Bu o'q

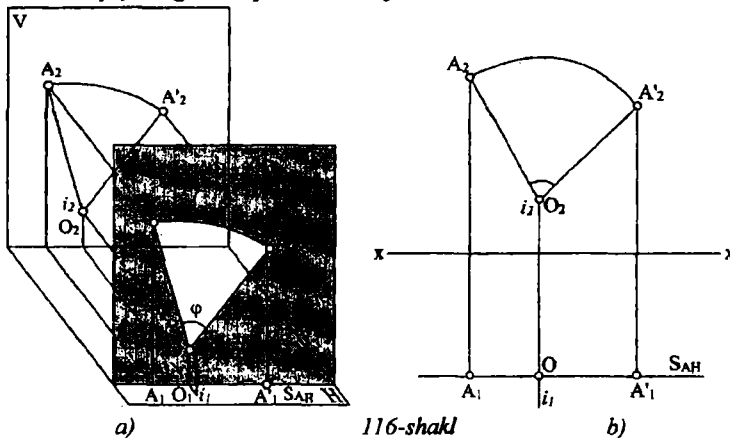
proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga perpendikulyar yoki parallel tanlab olinadi.

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish

7.3.1. Nuqtani aylantirish

Faraz qilaylik $A(A_1;A_2)$ nuqtani (116-shakl, a) frontal proyeksiyalar tekisligi V ga perpendikulyar $I(i_1;i_2)$ o'q atrofida soat strekasi yo'nalishida φ burchakka aylantirish talab qilinsin. Aylanma harakat aylanish o'qiga nisbatan perpendikulyar tekislikda sodir bo'ladi.

Masalani yechish uchun aylantirish usulining elementlaridan foydalanib quyidagi bosqichlarni bajaramiz:



116-shakl

1. Kuzatish nuqtasi $A(A_1;A_2)$ tanlanadi;
2. Masalaning shartiga qarab $I(i_1;i_2)$ aylantirish o'qi o'tkaziladi, 116-shakl, b)da $I \perp V$;
3. Kuzatish nuqtasi $A(A_1;A_2)$ dan aylantirish o'q $I(i_1;i_2)$ ga perpendikulyar qilib harakat tekisligi $S(S_A)$ o'tkaziladi;
4. Harakat tekisligi S_A bilan aylantirish o'qi I ning kesishgan $O(O_1; O_2)$, aniqlanadi. Bu nuqta aylantirish markazi bo'ladi;
5. Kuzatish nuqtasi $A(A_1;A_2)$ dan aylantirish markazi $O(O_1; O_2)$ gacha bo'lgan AO masofa aylantirish radiusi deyiladi;

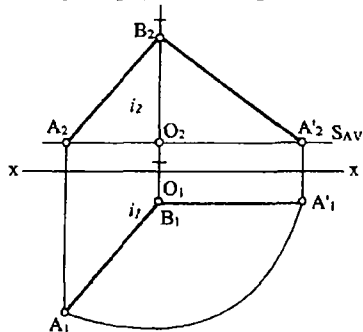
6. Aylantirish radiusi AO ning haqiqiy kattaligi O_2A_2 topiladi. 116-shakl, b)da $OA \parallel V$ bo'lgani uchun O_2A_2 haqiqiy kattaligidir;

7. Aylantirish radiusining haqiqiy kattaligi O_2A_2 dan foydalanib A nuqtani O_2 markaz, ya'ni i_2 o'q atrofida φ burchakka buriladi.

Demak, $A'(A'_1;A'_2)$ nuqta A nuqtaning yangi holatidir.

7.3.2. To'g'ri chiziqni aylantirish

1-misol. Umumiy vaziyatda berilgan $AB(A_1B_1;A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy kattaligi topilsin (117-shakl). Buning uchun kesmaning $B(B_1;B_2)$ uchidan H tekislikka perpendikulyar qilib $I(i_1;i_2)$ aylantirish o'qi tanlanadi. Kuzatish nuqtasi sifatida kesmaning $A(A_1;A_2)$ uchi olinadi, chunki $B(B_1;B_2)$ nuqta aylantirish o'qiga tegishli bo'lgani uchun u harakat davomida o'z o'rnini o'zgartirmaydi. A nuqtadan I aylantirish uqiga perpendikulyar qilib S harakat tekisligi o'tkaziladi (shaklda $S_{AV} \perp i_2$). Aylantirish o'qi $I(i_1;i_2)$ bilan S_{AV} harakat tekisligining kesishgan $O(O_1;O_2)$ nuqtasi aylantirish markazi bo'ladi. Hosil bo'lgan $O(O_1;O_2)$ nuqtadan kuzatish nuqtasi $A(A_1;A_2)$ gacha bo'lgan masofa aylantirish radiusi bo'ladi. Harakat tekisligi H ga parallel bo'lgani uchun A_1O_1 aylantirish radiusining haqiqiy kattaligi bo'ladi. Agar AB

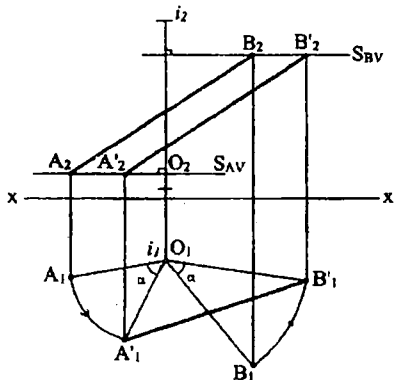


117-shakl

kesmani I o'q atrofida aylantirib V ga parallel holatga keltirsak, u bu tekislikka o'zining haqiqiy kattaligida proyeksiyalanib qoladi. Demak, AB kesmaning yangi holatining gorizontaal proyeksiyasi XX o'qiga parallel bo'lishi kerak. Aylantirish markazining O_1 gorizontaal proyeksiyasini markaz qilib O_1A_1 proyeksiyani $O_1A'_1$, holatgacha

buramiz va bog'lovchi chiziq yordamida A'_2 ni topamiz. Natijada AB ning haqiqiy kattaligi, $A'_2B'_2$ ga ega bo'lamiz.

2-misol. Umumiy vaziyatda berilgan $AB(A_1B_1; A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasi berilgan vertikal o'q atrofida α burchakka burilsin (118-shakl).



118-shakl

Kuzatish nuqtasi A va B nuqtalar bo'lsa, harakat tekisliklari S_A va S_B bo'lsin, ya'ni $S_{AV} \perp i_2$ va $S_{BV} \perp i_2$ bo'ladi. A nuqta uchun $O(O_1, O_2)$ nuqta aylantirish markazi va AO kesma esa, aylantirish radiusi bo'ladi. Uning haqiqiy kattaligi-uzunligi A_1O_1 kesmaga teng bo'ladi. A nuqta i o'q atrofida α burchakka quyidagicha buriladi; A_1O_1 dan boshlab soat strelkasi yo'nilishiga teskari berilgan burchak yasaladi; $\angle(A_1O_1; l_1) = \alpha$. Uni soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha ham yasash mumkin. O_1 markazdan A_1O_1 radiusda aylana chizib uni l_1 bilan kesishuv nuqtasi aniqlanadi. Ya'ni A nuqtani berilgan α burchakka burilgan yangi vaziyati aniqlanadi. Uni A'_1 belgilab, S_{AV} da uning frontal A'_2 proyeksiyasi aniqlanadi.

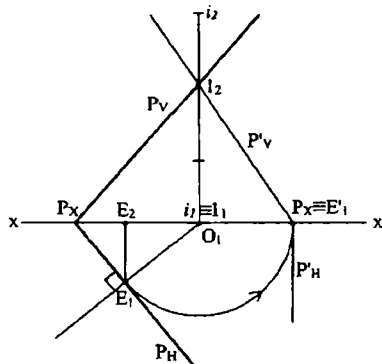
Aynan yuqorida keltirilgan grafik amallarni B nuqta uchun ham takrorlab uning α burchakka berilgan yangi $B'(B'_1, B'_2)$ vaziyati topiladi. A' va B' nuqtalarini birlashtirib, burilgan kesmaning yangi, α burchakka burilgan vaziyati yasaladi.

Aylantirish o'qi $I(i_1; i_2)$ H tekislikka perpendikulyar holda berilgan. Kuzatish nuqtasi $A(A_1; A_2)$, harakat tekisligi $S_A \perp I$, chizmada $S_{AV} \perp i_2$ (bu tekislik H ga parallel). Aylantirish markazi $O(O_1; O_2)$ ning gorizontal proyeksiyasi O_1 dan, soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda α burchak ostida to'g'ri chiziq

о'тказамиз ва aylantirish radiusining haqiqiy kattaligi O_1A_1 da $A_1A'_1$ yoyni chizib A'_1 nuqtani, ya'ni A nuqtaning yangi holatining gorizontal proyeksiyasini topamiz va A'_2 ni belgilaymiz. Shu usul bilan B nuqtaning yangi holati $B'(B'_1;B'_2)$ ni topamiz. Natijada $A'B'(A'_1;B'_1;A'_2;C'_2)$ berilgan kesmaning yangi, α burchakka burilgan holati bo'ladi.

7.3.3. Tekislikni aylantirish

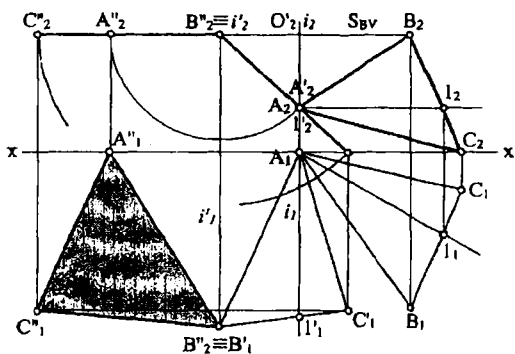
Izlari bilan berilgan umumiy vaziyatdagi $P(P_H;P_V)$ tekislik frontal proyeksiyalovchi holatga kelguncha aylantirilsin (119-shakl). Buning uchun aylantirish o'qi $I(i_1;i_2)$ ni frontal proyeksiyalar tekisligi V da, gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga perpendikulyar holda tanlaymiz ($I \perp V, I \perp H$).



119-shakl

Ma'lumki, bu holda aylantirish o'qining gorizontal i_1 proyeksiyasi XX o'qida bo'ladi va bu i_1 nuqtadan berilgan tekislikning P_H gorizontal iziga perpendikulyar o'tkazib ularning kesishish nuqtasi E_1 topiladi, demak, $i_1E_1 \perp P_H$. O_1E_1 kesma aylantirish radiusining haqiqiy kattaligi bo'ladi. O_1E_1 kesmani aylantirib XX o'qiga joylab E'_1 nuqtani topamiz. $O_1E_1 \perp P_H$ bo'lganligidan tekislikning yangi holatidagi gorizontal P'_H izi ham $O_1E'_1$ ga perpendikulyar ya'ni $O_1E_1 \perp P'_H$ bo'ladi. P' tekislikning frontal izini topish uchun P'_X nuqtani aylantirish o'qidagi I nuqtaning frontal I_2 proyeksiyasi bilan birlashtiramiz, bu P' ning frontal P' izi bo'ladi. Shunday qilib P tekislik proyeksiyalovchi P' vaziyatga kelib qoladi.

Umumiy vaziyatda berilgan $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak tekisligi yuzasining haqiqiy kattaligini topish 120-shaklda keltirilgan. Bu masalani yechish uchun berilgan uchburchak proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan o'qlar atrofida ikki marta aylantirilishi zarur. Birinchi holda aylantirish o'qi uchburchakning $A(A_1;A_2)$ uchidan H ga perpendikulyar o'tkazilgan. Bu $I(i_1;i_2)$ o'q atrofida aylantirish natijasida berilgan uchburchak frontal proyeksiyalar tekisligi V ga nisbatan proyeksiyalovchi, ya'ni $(A'_2B'_2C'_2 \perp V)$ bo'ladi. Uchburchak tekisligining bu ko'rinishga kelishi uchun esa uning $A1(A_1I_1;A_2I_2)$ gorizontaal chizig'ini V ga perpendikulyar, ya'ni $A1 \perp V$ ($A_1I_1 \perp XX$), holatgacha aylantirib yasaladi. Ikkinchi aylantirish o'qi $I'(i'_1;i'_2)$ berilgan uchburchakning yangi holatidagi $B'(B'_1;B'_2)$ uchidan V ga perpendikulyar o'tkazib H ga parallel kelguncha holga qadar aylantiriladi, ya'ni $B' \perp I'$, $i'_1 \perp XX$, $(A''_2B''_2C''_2) \parallel XX$. Hosil bo'lgan $A''B''C''(A''_1B''_1C''_1;A''_2B''_2C''_2)$ uchburchakning gorizontaal $A''_1B''_1C''_1$ proyeksiyasi berilgan ABC uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi bo'ladi.



120-shakl

Yuqoridagi masalani proyeksiyalar tekisliklaridan bittasiga parallel bo'lgan o'q atrofida aylantirish yo'li bilan osongina yechish mumkin.

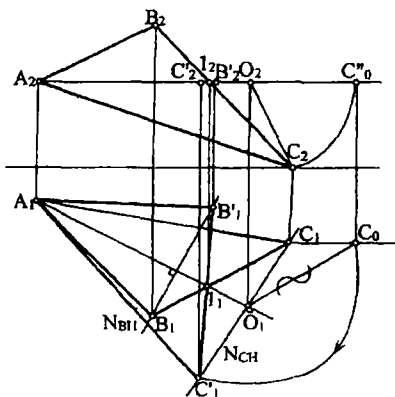
7.4 § Proyeksiyalar tekisliklaridan bittasiga parallel bo'lgan o'q atrofida aylantirish

1-Misol. Umumiy vaziyatdagi $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi topilsin.

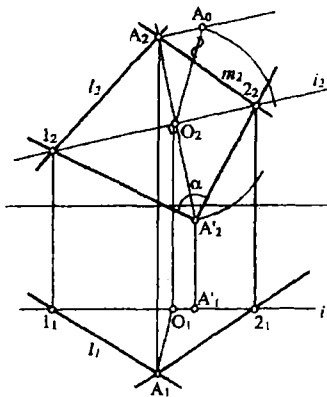
Bu masalani yechish uchun aylantirish o'qi ABC uchburchak tekisligida H ga parallel tanlab olingan (121-shakl). Berilgan ABC uchburchakni tanlangan o'q atrofida aylantirib H ga parallel holga keltirishimiz kerak. Aylantirish o'qi sifatida ABC uchburchakning $A(A_1;A_2)$ uchidan o'tuvchi A_1 gorizontali tanlangan.

Kuzatish nuqta sifatida $C(C_1; C_2)$ ni tanlab undan aylantirish o'qi A_1A_1 ga perpendikulyar bo'lgan N_C harakat tekisligining gorizontal izi N_{CH} ni o'tkazamiz. Bu tekislik aylantirish o'qini $O(0_1;0_2)$ nuqtada kesib aylantirish markazini beradi. $OC(0_1C_1; 0_2C_2)$ masofa aylantirish radiusi bo'lib, O_1C_0 kesma uning haqiqiy kattaligi bo'ladi. O_1 markaz orqali O_1C_0 radiusli yoy chizib, N_{CH} tekislik izida C'_1 nuqta topiladi. Demak, $C(C_1;C_2)$ nuqta berilgan $C(C'_1;C'_2)$ nuqtaning yangi holatidir. Endi $B(B_1;B_2)$ nuqtadan N_B (chizmada N_{BH}) harakat tekisligini o'tkazamiz. Aylantirish o'qiga tegishli $l(l_1;l_2)$ nuqta harakat davomida o'z holatini o'zgartirmasligini bilgan holda topilgan $C'(C'_1;C'_2)$ nuqtani (chizmada C'_1) l_1 nuqta bilan birlashtirib, N_{BH} da B'_1 nuqta topiladi. Topilgan $C'(C'_1;C'_2)$ va $B'(B'_1;B'_2)$ nuqtalarning frontal proyeksiyalari aylantirish o'qining frontal proyeksiyasi bilan qo'shilib qoladi. Demak, $A_1B'_1C'_1$, uchburchak berilgan uchburchakning haqiqiy kattaligidir bo'ladi.

2-Misol. O'zaro kesishuvchi $l(l_1; l_2)$ va $m(m_1;m_2)$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning haqiqiy kattaligi topilsin. Buning uchun frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan $l(i_1;i_2)$ to'g'ri chiziq aylantirish o'qi sifatida qabul qilingan (122-shakl). Berilgan l va m to'g'ri chiziqlar aylantirish o'qi bilan mos ravishda $1(1_1;l_2)$ va $2(2_1;2_2)$ nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalar



121-shakl



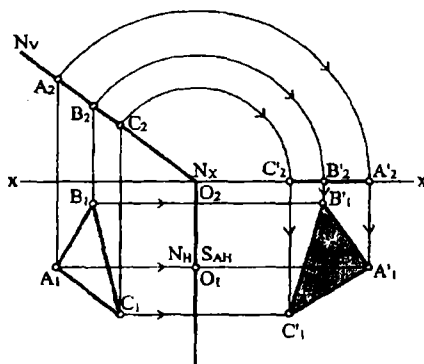
122-shakl

qo'zg'almas nuqtalardir. $A(A_1;A_2)$ nuqtaning yangi holati, uning harakat tekisligida, O_1 dan aylantirish radiusini haqiqiy kattaligini o'lchab qo'yib, $A'(A'_1;A'_2)$ ni topamiz. $1A'2(1A'_12_1;1_2A'_22_2)$ uchburchakning A' uchidagi α burchak izlanayotgan burchak bo'ladi.

7.5 § Tekislikni uning izlarini biri atrofida aylantirish

Agar aylantirish o'qi sifatida tekislikning biror izi olinsa u holda aylantirish o'qi proyeksiyalar tekisliklariga tegishli bo'ladi va bu tekislik qaysi proyeksiya tekisligida aylantirish o'qi tanlansa shu tekislik bilan jipslashtiriladi. Agar aylantirish o'qi tekislikning gorizontal izi bo'lsa, u H tekislik bilan, agar frontal izi olinsa, u V tekislik bilan jipslashtiriladi.

1-misol. Frontal proyeksiyalovchi N tekislikga tegishli $ABC(A_1B_1C_1;A_2B_2C_2)$ uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi topilsin (123-shakl).

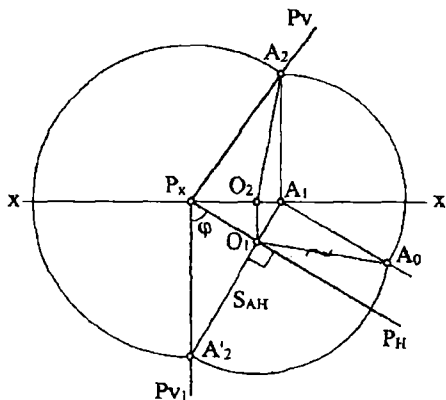


123-shakl

Bu masalani yechish uchun aylantirish o'qi sifatida tekislikning gorizontal N_H izini tanlaymiz. Kuzatish nuqtasi A ning gorizontal proyeksiyasi A_1 dan N_H (aylantirish o'qi) ga perpendikulyar S_{AH} harakat tekisligini o'tkazib, O_1 aylantirish markazining gorizontal undan esa O_2 frontal proyeksiyasi topiladi. Aylantirish radiusi OA frontal V tekislikga parallel bo'lgani uchun O_2A_2 uning haqiqiy kattaligi bo'ladi. O_2 markazidan O_2A_2 radius bilan yoy chizib, XX o'qida A'_2 nuqtani undan vertikal bog'lovchi chiziq o'tkazib S_{AH} da

A_1 nuqta topiladi. Demak, $A'(A'_1;A'_2)$ berilgan A nuqtaning H tekislik bilan jipslashgan holati bo'ladi.

Shu usul bilan qolgan B va C nuqtalarni aylantirib $B'(B'_1;B'_2)$ va $C'(C'_1;C'_2)$ larni H tekislik bilan jipslashgan vaziyatlarini topamiz. Hosil bo'lgan $A'B'C'(A'_1B'_1C'_1;A'_2B'_2C'_2)$ uchburchak berilgan ABC uchburchakning haqiqiy kattaligi bo'ladi.



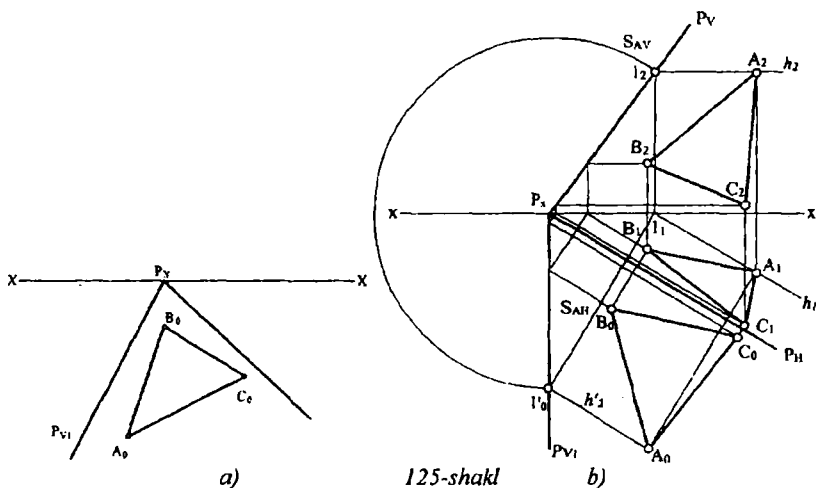
124-shakl

2-misol. Izlari bilan berilgan umumiy vaziyatdagi $P(P_H;P_V)$ tekislikning izlari orasidagi burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (124-shakl).

Aylantirish o'qi sifatida berilgan tekislikning gorizontalar P_H izini olamiz. Tekislikda ixtiyoriy $A(A_1;A_2)$ nuqtani (masalan tekislikning P_V izida) tanlab uni H tekislikka P_H atrofida aylantirib jipslashtiramiz. Buning uchun nuqtaning gorizontalar proyeksiyasi A_1 orqali P_H ga perpendikulyar qilib S_{AH} harakat tekisligi o'tkazib aylantirish markazi $O(0_1;0_2)$ ni topamiz. $OA(0_1A_1;0_2A_2)$ aylantirish radiusi bo'lib, 0_1A_0 esa uning haqiqiy kattaligidir. O_1 nuqtani markaz qilib, S_{AH} ni kesgunga qadar O_1A_0 gradusda yoy chizamiz va A nuqtani H bilan jipslashgan A'_2 proyeksiyasi bo'ladi. Topilgan A'_2 va P_x nuqtalarni birlashtirib, P tekislikning H proyeksiyalari tekisligi bilan jipslashgan P_{V1} izi yasaladi. Demak, tekislikning P_{V1} va P_H izlari orasidagi φ burchak izlangan burchak bo'ladi.

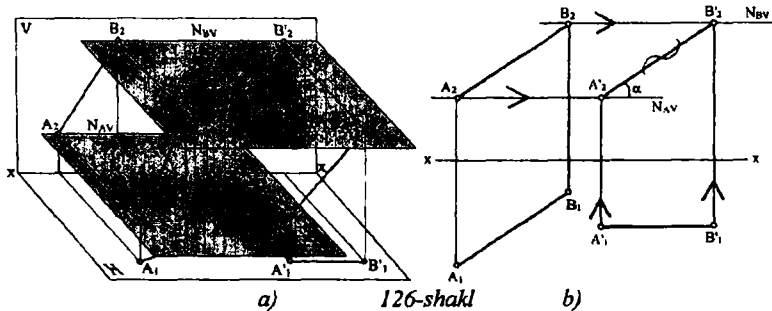
3-misol. P tekislik ustidagi ABC uchburchakning H bilan jipslashgan holatidagi haqiqiy ko'rinishi $A_0B_0C_0$ uchburchak berilgan. Bu uchburchakning gorizontalar va frontal proyeksiyalari yasalsin (125-

shakl). Bu masalani yechish uchun berilgan uchburchakning A_0 uchidan P tekislikning h'_2 gorizontali o'tkaziladi, u P_H ga parallel bo'ladi. Bu o'tkazilgan gorizontalni dastlabki chizmaga tiklaymiz. Buning uchun tekislikning P_{V1} izidagi l'_0 nuqtadan P_H ga perpendikulyar S_{AH} harakat tekisligining gorizontali izi o'tkaziladi. P_X nuqtani markaz qilib $P_X l'_0$ radiusli yoyni S_{AV} iz bilan kesishgan l_2 nuqtasi aniqlanadi. Bu l_2 nuqta orqali P tekislikning frontal P_V izi o'tkaziladi. A nuqta h gorizontalda yotganligi uchun uning A_1 va A_2 proyeksiyalari mos ravishda h_1 va h_2 ga tegishli bo'ladi. Qolgan B va C nuqtalarni yuqoridagi usul bilan aniqlab berilgan ABC uchburchakning $A_1 B_1 C_1$ va $A_2 B_2 C_2$ proyeksiyalarini hosil qilamiz.



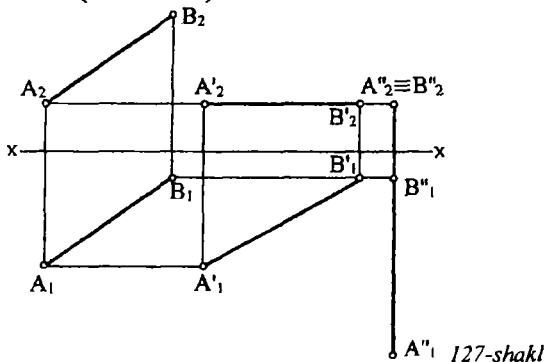
7.6 § Tekis parallel ko'chirish usuli

Bu usulda berilgan geometrik obrazning (nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik va h.k.) har bir nuqtasi proyeksiyalar tekisligiga nisbatan parallel bo'lgan gorizontali yoki frontal tekisliklarda harakatlantiriladi.



1-misol. 126-shakl a) va b) da berilgan $AB(A_1B_1; A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy kattaligi topilsin. Bunda kesmaning $A(A_1; A_2)$ uchi H ga parallel N_A tekislikda, $B(B_1; B_2)$ uchi esa N_B tekislikda harakatlanadi. Bu tekisliklardagi harakat natijasida AB kesma frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel holga keltiriladi. 126-shakl, b) dagi epyurda ixtiyoriy A'_1 nuqtani belgilab, undan gorizontal chiziq o'tkazib A_1B_1 proyeksiyani o'lchab $A'_1B'_1 = A_1B_1$ qo'yiladi va B'_1 nuqta hosil qilinadi ya'ni $A'_1B'_1 = A_1B_1$. A nuqtaning frontal proyeksiyasi A_2 orqali N_A tekislikning N_{AV} izi o'tadi. Proyeksion bog'lanishda B' nuqtaning B'_2 frontal proyeksiyasi topiladi. Hosil bo'lgan $A'_2B'_2$ kesma AB kesmani haqiqiy katgaligi bo'lib, α burchak esa bu kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

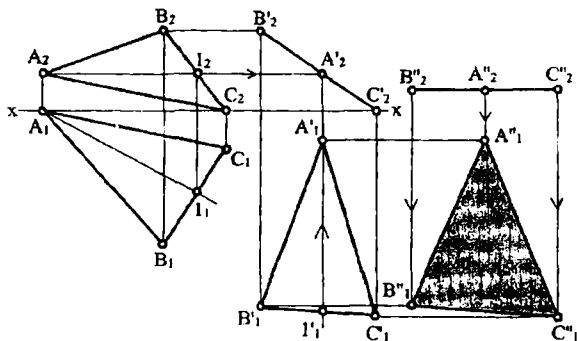
2-misol. Umumiy vaziyatda berilgan $AB(A_1B_1; A_2B_2)$ to'g'ri chiziq kesmasi frontal proyeksiyalar tekisligi V ga perpendikulyar holatga keltirilsin (127-shakl).



Ixtiyoriy tanlangan A_2 nuqtadan o'tkazilgan gorizontal chiziqqa kesmaning frontal proyeksiyasi A_2B_2 ni o'lchab qo'yamiz: ($A_2B_2 = A_2B_2$).

Kesmaning gorizontal proyeksiyasi A_1B_1 holga kelib qoladi. A_1B_1 ni ixtiyoriy B''_1 nuqtadan vertikal to'g'ri chiziqqa o'lchab qo'yamiz, ya'ni ($A''_1B''_1 = A_1B_1$). U holda kesmaning frontal proyeksiyasi $A''_2B''_2$, ya'ni nuqta bo'lib, u V ga perpendikulyar bo'ladi.

3-misol. Umumiy vaziyatda berilgan $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi aniqlansin (128-shakl). Bu masalani yechish uchun uchburchakning $Al(A_1l_1; A_2l_2)$ gorizontalini o'tkazib, uni V tekislikga perpendikulyar holatga keltiramiz, buning uchun uning gorizontal chizig'ini frontal proyeksiyalovchi, ya'ni $A_1l_1 \perp XX$ vaziyatda o'tkazib olish kerak.



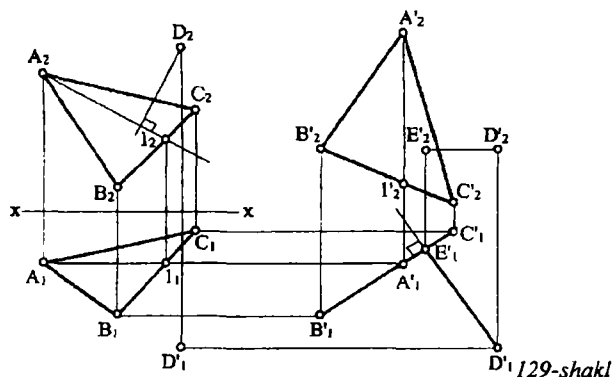
128-shakl

Gorizontal chiziqning yangi A_1l_1 vaziyatidan foydalanib, uchburchakning yangi vaziyatdagi proyeksiyalari yasaladi. Shu holda uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi $C''_2A''_2B''_2$ to'g'ri chiziq bo'lib proyeksiyalanadi, ya'ni tekislik frontal proyeksiyalovchi vaziyatga kelib qoladi. Endi uchburchakning $A_2B_2C_2$ proyeksiyasi H ga parallel holga keltiramiz va uchburchakning H tekislikdagi $A''_1B''_1C''_1$ proyeksiyasini topamiz. Hosil bo'lgan bu $A''_1B''_1C''_1$ uchburchak, berilgan ABC uchburchak yuzasining haqiqiy kattaligi bo'ladi.

4-misol. Fazodagi $D(D_1; D_2)$ nuqtadan $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ tekisligacha bo'lgan eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi topilsin (129-shakl). Bu masala quydagicha yechiladi.

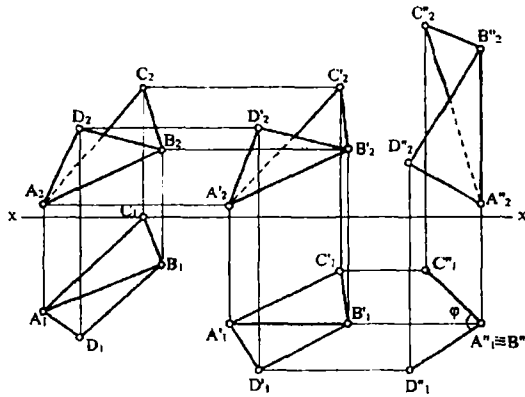
$ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ uchburchakning uchlarini V ga parallel tekisliklarda harakatlantirib, H ga perpendikulyar vaziyatga

keltiramiz. Buning uchun bu uchburchakning yangi proyeksiyasini uning $A_1(A_1l_1; A_2l_2)$ frontalini H tekislikga perpendikulyar bo'lgan holatda yasaymiz. Bunday vaziyatda berilgan uchburchakning gorizontaal proyeksiyasi $B'_1A'_1C'_1$ kesma ko'rinishida bo'ladi. Berilgan $D(D_1D_2)$ nuqtani ham berilgan AVS uchburchakga bog'langan holda harakatlantirib yangi proyeksiyalari D'_1 va D'_2 ni aniqlanadi. Bunda $l'_1D'_1=l_2D_2$ va $A'_2D'_2=A_2D_2$ bo'ladi. D ning D'_1 proyeksiyasidan $A'_1B'_1C'_1$ ga perpendikulyar tushirib E'_1 nuqta topiladi. $D'_1E'_1$ kesmaning frontal proyeksiyasi $A'_2l'_2$ ga perpendikulyar bo'ladi. Topilgan $D'_1E'_1$ masofa izlangan masofa bo'ladi.



5-misol. Umumiy AB qirraga ega bo'lgan $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ va $ABD(A_1B_1D_1; A_2B_2D_2)$ uchburchak tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (130-shakl).

Bu masalani yechish uchun quyidagicha yo'l tutamiz. Umumiy qirra AB ni V ga parallel holda joylashtiramiz. Buning uchun ixtiyoriy A'_1 nuqtadan ($A'_1B'_1 = A_1B_1$) kesma belgilaymiz. D'_1 va C'_1 nuqtalar berilgan uchta tomoniga asosan uchburchak yasash usulidan foydalanib yasaladi. Parallel ko'chirish qoidasiga binoan A_2, B_2, C_2, D_2 nuqtalardan gorizontaal chiziqalar o'tkazib A'_2, B'_2, C'_2 va D'_2 yangi frontal proyeksiyalarni yasaymiz. Endi AB qirrani H ga perpendikulyar (ya'ni vertikal) qilib ixtiyoriy A''_2 nuqtadan joylashtiramiz, $A''_2B''_2 \equiv A'_2B'_2$. Bu qirra bilan birgalikda C va D nuqtalar ham ko'chiriladi. $A'_1B'_1C'_1$ va D'_1 nuqtalarni gorizontaal yo'nalishda ko'chirib $C''_1, A''_1 \equiv B''_1$ va D''_1 nuqtalarni topamiz.



130-shakl

Bunda berilgan ABC va ABD uchburchaklar H ga nisbatan perpendikulyar holatga kelib qoladi. Ular orasidagi φ burchak izlangan burchak bo'ladi.

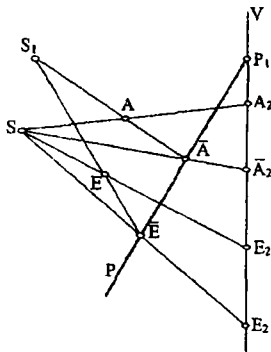
7.7 § Yordamchi proyeksiyalash usuli

Yordamchi proyeksiyalash usulining amaliy ahamiyati shundan iboratki, uni qo'llash orqali yechilishi bir nechta amallardan iborat bo'lgan masalalarning yechimiga bitta operatsiya orqali erishiladi. Bu usulni professor S.M.Kolotov (1880-1965) taklif qilgan.

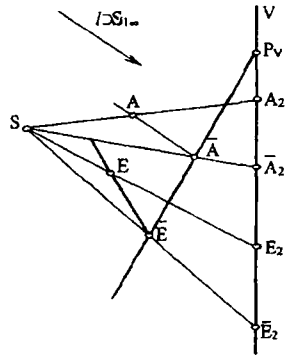
Usulning mohiyati quyidagilardan iborat. Nuqtaning tasviri chizma tekisligidagi asosiy proyeksiyalash yo'nalishi (markaziy yoki parallel) bo'yicha hosil qilingan bo'lsin. Qo'shimcha proyeksiyalar tekisligi va qo'shimcha proyeksiyalash markazini hos yoki hosmas nuqtada tanlab olamiz. Berilgan nuqtani bu markazdan qo'shimcha tanlangan tekislikka proyeksiyalaymiz va hosil bo'lgan qo'shimcha proyeksiyani asosiy proyeksiyalash yo'nalishi bo'yicha chizma tekisligiga proyeksiyalab, unda nuqtaning takroriy proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning ana shu ikki marta proyeksiyalash natijasida, asosiy chizma tekisligida hosil qilingan takroriy proyeksiyasi, uning umumiy holdagi yordamchi proyeksiyasi bo'ladi.

131-shaklda asosiy proyeksiyalar tekisligi V, proyeksiyalash markazi S va A hamda E nuqtalar berilgan. A va E nuqtalarni V tekisligiga S proyeksiyalash markazidan foydalanib, ularning markaziy A_2 va E_2 proyeksiyalari yasalgan.

Qo'shimcha proyeksiyalash markazi S_1 nuqta va qo'shimcha P tekislikni tanlab olamiz. S_1 markazdan A va E nuqtalarni P tekislikka proyeksiyalab, unda qo'shimcha \bar{A} va \bar{E} proyeksiyalarni hosil qilamiz. So'ngra \bar{A} va \bar{E} proyeksiyalarni asosiy proyeksiyalash markazi S nuqtadan foydalanib V tekislikka proyeksiyalab, unda \bar{A} va \bar{E} nuqtalarning yordamchi \bar{A}_2 va \bar{E}_2 proyeksiyalariga ega bo'lamiz.



131-shakl

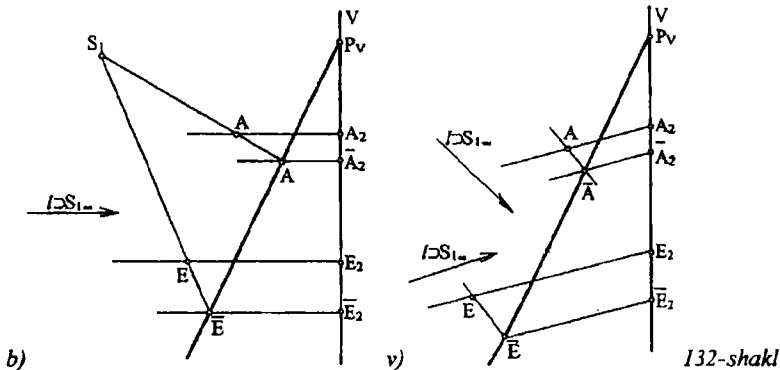


132, a)-shakl

Yordamchi proyeksiyalashning bu umumiy holiga nisbatan amalda keng qo'llaniladigan quyidagi xususiy hollarini ko'rish mumkin:

- 1) asosiy proyeksiyalash markazi hos nuqta (S), qo'shimcha proyeksiyalash markazi ($S_{1\infty}$) esa hosmas nuqta (132-shakl, a);
- 2) asosiy proyeksiyalash markazi hosmas (S_{∞}) nuqtada, qo'shimcha proyeksiyalash markazi (S_1) esa hos nuqtada (132-shakl, b);
- 3) har ikkala proyeksiyalash markazlari (S_{∞} ; $S_{1\infty}$) hosmas nuqtalarda (132-shakl, v).

Bu hollardan birinchisi perspektivada, ikkinchi va uchinchi hollar esa, parallel proyeksiyalashda pozitsion va metrik masalalarni yechishda qo'llaniladi.



133-shakl, a) da P tekislik izlari orqali va unga perpendikulyar AB to'g'ri chiziq kesmasi berilgan. AB to'g'ri chiziqning P tekisligi bilan kesishish nuqtasini topish va P tekisligini uning frontal izi P_V atfida aylantirib V proyeksiyalar tekisligi bilan ustma-ust qo'yish (jipslashtirish) talab qilinsin. Bu masalani yechish bir necha bosqichda bajariladi.

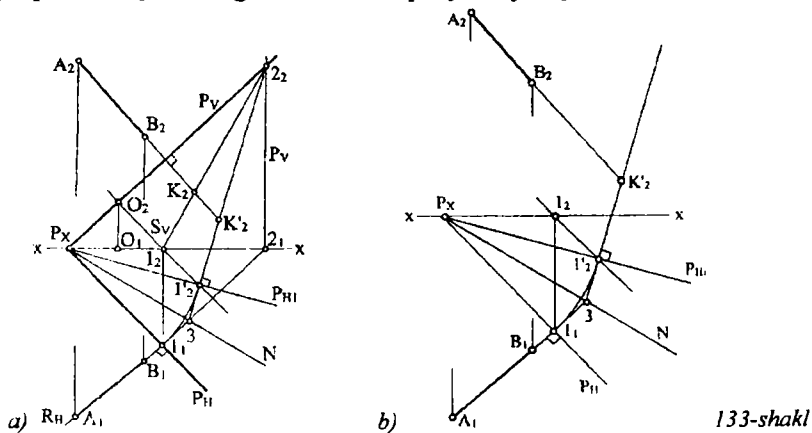
1. AB to'g'ri chiziq orqali $P(P_H; P_V)$ tekisligini o'tkazamiz;
2. Yordamchi tekislik R bilan P tekislikning kesishish chizig'i $l_2(1_2; 2_2)$ ni topamiz;
3. Kesishgan chizig'i bilan AB ning o'zaro kesishish nuqtasi K ni aniqlaymiz (chizmada uning frontal proyeksiyasi K_2 ko'rsatilgan).

Endi P tekislikni P_V atrofida aylantirib, uni frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan jipslashtirish uchun P_H da yotgan $l(1_1; 2_1)$ nuqtani tanlaymiz. Tanlangan $l(1_1; 2_1)$ nuqta orqali aylantirish o'qi P_V ga perpendikulyar harakat tekisligi $S(S_V)$ ni o'tkazamiz, u P_V bilan kesishib, l_1 nuqta uchun aylanish markazi $0(0_1; 0_2)$ ni hosil qiladi. So'ngra P_X nuqtani markaz qilib $R=P_X l_1$ radius bilan yoy chizamiz va uning $0_2 l_2$ bilan kesishish nuqtasi $1'_2$ ni belgilaymiz. Topilgan $1'_2$ nuqtani P_X bilan birlashtirib berilgan P tekislikning gorizontali izi P_H ning V tekislik bilan ustma-ust tutashgan yangi P_{H1} iziga ega bo'lamiz. O'zaro perpendikulyar R va P tekisliklarining kesishish chizig'i l_2 , berilgan P tekisligi uchun eng katta og'ma chiziqdir, chunki u P_H ga perpendikulyar. Demak, u (ya'ni l_2) P_{H1} ga ham perpendikulyar bo'lib qoladi. $A_2 B_2$ ni davom ettirib $l_2 2_2$ bilan kesishish nuqtasi K_2 ni belgilaymiz. $A_2 B_2$ ning $l_2 2_2$ bilan kesishgan K'_2 nuqtasi K_2 nuqtaning V tekislik bilan ustma-ust tushgan holati bo'ladi.

Agar $2_2l'_2$ to'g'ri chiziqni davom ettirilsa u A_1B_1 bilan 3 nuqtada kesishadi. Hosil bo'lgan 3 nuqtani P_x bilan birlashtirsak birlamchi, ya'ni boshlang'ich, proyeksiya bilan berilgan tekislikning V bilan ustma-ust qo'yilgandagi holati orasida bir qiymatli moslik o'rnatuvchi N o'qiga ega bo'lamiz. Bu o'q moslik o'qi deb atalib, u aslida P va V tekisliklar orasidagi bissektor tekislikning gorizontal izi bo'ladi.

Endi P tekislikdagi biror nuqtaning ortogonal proyeksiyasini va uning P tekislik bilan birgalikda V bilan jipslashgan holatini quyidagi algoritm asosida bajarish mumkin. Buning uchun l nuqtaning gorizontal proyeksiyasidan A_1B_1 ga parallel o'tkazib, uning N bilan kesishish 3 nuqtasi orqali l'_22_2 ga parallel o'tkaziladi va uning frontal proyeksiyasi orqali A_2B_2 ga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi, ya'ni talab qilingan nuqtaga ega bo'linadi. l'_22_2 to'g'ri chiziq elito'vchi to'g'ri chiziq deb ataladi. 133-shakl, a) dagi P_V va R_V tekisliklar izlarini olib tashlasak, chizma 133-shakl, b) dagi ko'rinishga kelib ancha ixchamlashadi. Bu chizma Kolotov diagrammasi deb nom olgan. Moslik o'qi N ni o'ziga parallel holda istalgan joyga ko'chirish mumkin.

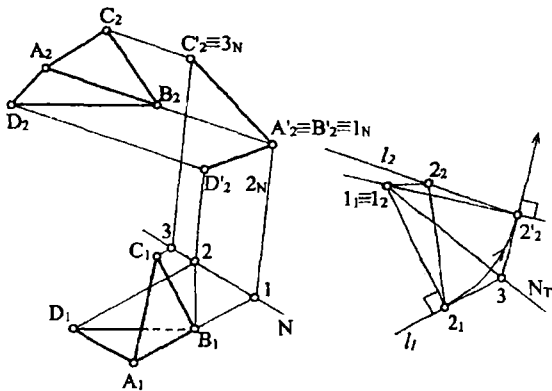
1-misol. $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$ va $ABD(A_1B_1D_1; A_2B_2D_2)$ uchburchak tekisliklari orasidagi ikkiyoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin. Bu burchakning haqiqiy kattaligini aniqlash uchun berilgan uchburchaklarni, ularning kesishish chizig'i AB ga perpendikulyar bo'lgan tekislikka proyeksiyalaymiz.



Uchburchaklar bu tekislikka o'zaro kesishuvchi ikki kesma ko'rinishda proyeksiyalanadi va ular orasidagi burchak ikkiyoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi.

Bu masalani yechish uchun asosiy chizmadan o'ng tomondagi bo'sh joyda diagramma yasaymiz (134-shakl). Ixtiyoriy $l_1 \equiv l_2$ nuqtadan A_1B_1 ga perpendikulyar qilib $l_2(1_2; 2_2)$ gorizontalni olamiz ($A_1B_1 \perp l_2$). 2_2 nuqtadan A_2B_2 ga parallel l_2 yo'nalashni o'tkazamiz ($l_2 \parallel A_1B_1$; $l_2 \parallel A_2B_2$), so'ngra $l_1 \equiv l_2$ nuqtani markaz qilib $R = l_1$ radius bilan yoy chizamiz va uning l_2 bilan kesishish nuqtasini $2'_2$ bilan belgilaymiz. Hosil bo'lgan $2'_2$ nuqtani l_2 bilan birlashtirib, $2'_2$ nuqtadan $l_2 2'_2$ ga perpendikulyar o'tkazamiz va bu chiziq elituvchi bo'ladi.

Elituvchi chiziq bilan l_1 ning kesishish nuqtasi 3 ni aniqlab, o'ni $l_1 \equiv l_2$ bilan tutashtirsak, u moslik o'qi N_T ni hosil qiladi. Moslik o'qi N ni unga parallel qilib, chizmaga yaqin va qulay joyga ko'chiramiz va A_1B_1 yo'nalishda ABC va ABD larning gorizontaal proyeksiyasini unga proyeksiyalab 1, 2 va 3 nuqtalarni aniqlaymiz. Hosil bo'lgan 1, 2 va 3 nuqtalardan elituvchiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib ularning A_2B_2 yo'nalishda proyeksiyalangan to'g'ri chiziqlar bilan mos ravishda kesishgan nuqtalarni belgilaymiz va ularni birlashtiramiz. Hosil bo'lgan φ burchak izlangan burchak bo'ladi.



134-shakl

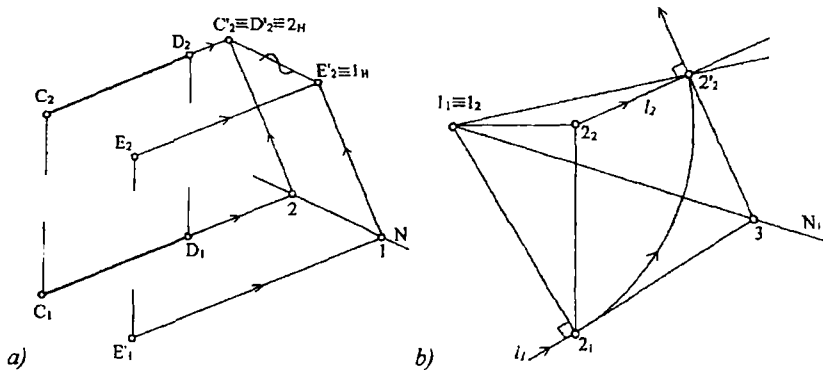
2-misol. Berilgan $E(E_1; E_2)$ nuqtadan $CD(C_1D_1; C_2D_2)$ to'g'ri chiziq kesmasigacha bo'lgan eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi topilsin.

Bu so'ralgan masofaning haqiqiy kattaligini topish uchun berilgan to'g'ri chiziq kesmasini va E nuqtani CD ga perpendikulyar bo'lgan tekislikka CD yo'nalishda proyeksiyalanadi, natijada uning nuqta ko'rinishdagi proyeksiyasiga ega bo'lamiz va bu tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofa izlangan masofa bo'ladi. Bu masalani yechish uchun

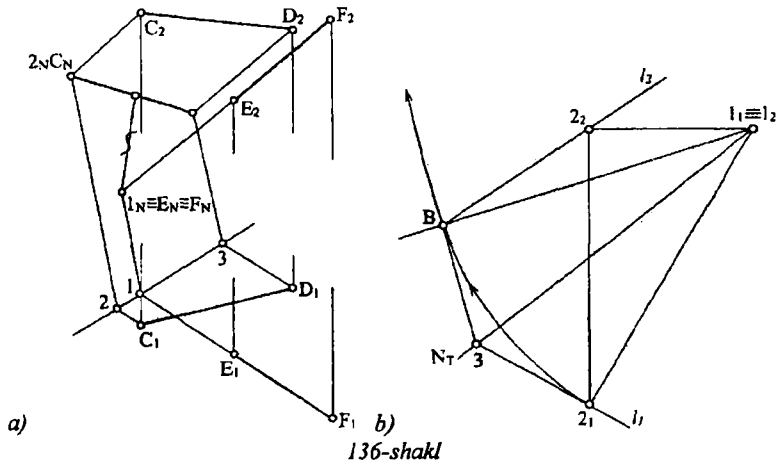
asosiy chizmaning o'ng tarafida bo'sh joyda ixtiyoriy $l_1 \equiv l_2$ nuqtani tanlab (135-shakl) diagramma yasaymiz. Buning uchun CD kesmaga perpendikulyar bo'lgan 12 gorizontal chiziq o'tkazamiz: 12 ($l_1 2_1; l_2 2_2$) bunda $l_1 \equiv l_2$ vaziyatda olinadi. l_1 yo'nalish $C_1 D_1$ ga parallel ($l_1 \parallel C_1 D_1$) bo'lib, u 2_1 nuqtadan o'tadi.

Endi asosiy chizmaga yaqin ixtiyoriy joyda moslik o'qini o'ziga parallel ko'chiramiz (N). Bu o'qga $C_1 D_1$ ni va E_1 nuqtani ($l_2 \parallel C_1 D_1$) proyeksiyalab 1 va 2 nuqta topiladi. Bu nuqtalardan tashuvchiga parallel to'g'ri chiziqlar chizib E'_2 va $C'_2 \equiv D'_2$ nuqtalar topiladi. Bu ikki nuqta orasidagi masofa izlangan masofa bo'ladi.

3-misol. O'zaro chalmashuvchi $CD(C_1 D_1; C_2 D_2)$ va $EF(E_1 F_1; E_2 F_2)$ to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi topilsin. Bu masalani yechishda ham berilgan to'g'ri chiziqlardan biriga perpendikulyar tekislikka shu to'g'ri chiziq yo'nalishda proyeksiyalab, uni nuqta ko'rinishga keltiramiz. Bu nuqtadan ikkinchi to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa izlangan masofa bo'ladi. 136-shaklda $l_1 \parallel E_1 F_1$; $l_2 \parallel E_2 F_2$ qilib tanlab olingan.



135-shakl



CHIZMA GEOMETRIYADAGI ATAMALAR VA TUSHUNCHALAR BO'YICHA YIG'MA LUG'AT

A

Algoritm	masalani yechish rejasi
Aylantirish usuli	proyeksiyalar tekisliklarini o'zgartirmay, berilgan shaklni biror o'q atrofida aylantirib, proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holatga keltirish
Aylanish o'qi	narsani biror proyeksiyalar tekisligiga qulay holga keltirishda uni aylantirish uchun tanlangan to'g'ri chiziq
Aylantirish tekisligi	biror shaklning nuqtasi orqali o'tuvchi va aylanish o'qiga perpendikulyar tekislik
Aylantirish markazi	aylanish o'qi bilan aylantirish tekisligining kesishuv nuqtasi
Aylanish radiusi	aylanish markazidan harakatlanuvchi nuqtagacha bo'lgan masofa

B

Bissektor tekisligi	H va V tekisliklar orasidagi bissektor tekislik. Bissektor tekisligi I, III choraklar va II, IV choraklarni teng ikkiga bo'ladi
---------------------	---

G

Gorizontal proyeksiyalar tekisligi	shaklning gorizontal proyeksiyalari yotgan gorizontal tekislik (H)
Gorizontal to'g'ri chiziq	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
Gorizontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Gorizontal tekislik	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik
Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik

YO

Yordamchi proyeksiyalash asosiy proyeksiyalash yo'nalishiga qo'shimcha ravishda bajariladigan proyeksiyalash

K

Koordinata o'qlari proyeksiyalar tekisliklarining kesishgan chiziqlari
Konkurent bir proyeksiyalovchi nurda yotgan nuqtalar

M

Markaziy proyeksiya bir nuqtadan proyeksiyalash markazi orqali tekislikda hosil bo'lgan proyeksiya

O

Oktant fazoning sakkizdan bir qismi
Ortogonal to'g'ri burchakli proyeksiyalash
proyeksiyalash

Ortogonal proyeksiyalarni masala yechishda grafik amallarni - masala yechishda grafik amallarni chizmani qayta tuzish usullari
almashtirish

P

Proyeksiyalash bu jarayon bo'lib, unda proyeksiyalanuvchi ob'yekt nuqtalari orqali nurlar o'tkazib ularning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuv nuqtalari aniqlanadi

Proyeksiyalash markazi proyeksiyalovchi nurlar chiqadigan xos yoki xosmas nuqta

Proyeksiya narsani proyeksiyalovchi nurlarning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuvidan hosil bo'lgan tasvir

Proyeksiyalar tekisligi proyeksiyalar yotgan tekislik

Proyeksiyalash nuri proyeksiyalanuvchi nuqta bilan proyeksiyalash markazini boglovchi to'g'ri chiziq

Parametr narsaning holati va shaklini aniqlashda qatnashadigan ko'rsatkichlar

Parametrlashtirish	narsalar to'plamining holati va shakl parametrlarini aniqlash
Profil to'g'ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Profil tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik
Profil proyeksiyalovchi tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik
Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish	narsaning holatini o'zgartirmay, balki unga nisbatan proyeksiyalar tekisliklarining holatini o'zgartirish
Pozitsion masala	shakllarni o'zaro tegishligini, ya'ni o'zaro umumiy elementlarni aniqlaydigan masala

T

To'g'ri burchakli uchburchak usuli	kesmaning proyeksiyalari bo'yicha uning haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarni aniqlashda qo'llaniladigan usul. Uchburchakning bir kateti sifatida kesmaning proyeksiyasi, ikkinchi kateti sifatida esa kesma uchlarining shu tekislikdan uzoqliklar ayirmasi olinadi
To'g'ri chiziqning izlari	to'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan nuqtalari
Tekislikning izlari	tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari
Tekislikning gorizontali	tekislikda yotgan va H ga parallel to'g'ri chiziq
Tekislikning frontali	tekislikda yotgan va V ga parallel to'g'ri chiziq
Tekislikning profili	tekislikda yotgan va W ga parallel to'g'ri chiziq
Tekislikning eng katta og'ish chizig'i	tekislikka tegishli bo'lib, uning gorizontalari yoki frontallariga yoki profillariga perpendikulyar to'g'ri chiziq
To'g'ri chiziqning	tekislikda yotgan biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan

tekislikka paralelligi	to'g'ri chiziq
To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyati	to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, xususiyati ikkinchi tomoni unga perpendikulyar bo'lmasa, uning proyeksiyasi ham to'g'ri burchak bo'ladi
Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq	tekislikdagi o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq
Tekis parallel ko'chirish usuli	aylantirish usulining xususiy holi bo'lib, unda aylanish o'qi ko'rsatilmaydi

U

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq	proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziq
Umumiy vaziyatdagi tekislik Jipslashtirish usuli	proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo'lmagan tekislik aylantirish usulining xususiy hol bo'lib, bunda aylantirish o'qi sifatida tekislikning biror izi qabul qilinadi va uning atrofida aylantirib tekislik shu proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi

F

Frontal to'g'ri chiziq	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Frontal tekislik	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik
Frontal proyeksiyalovchi tekislik	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik

X

Xosmas nuqta	tekislikning cheksiz uzoqlashgan chizig'i
Xosmas to'g'ri chiziq	uch o'lchamli fazoning cheksiz uzoqlashgan nuqtalar to'plami
Xosmas tekislik	uch o'lchamli fazoning cheksiz uzoqlashgan nuqtalar to'plami
Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq	proyeksiyalar tekisliklarining eng kamida biriga parallel yoki perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Xususiy vaziyatdagi tekislik	proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel yoki perpendikulyar bo'lgan tekislik

CH

Chorak	fazoning to'rtidan bir qismi
--------	------------------------------

E

Epyur	fransuz so'zi bo'lib, chizma degan ma'noni bildiradi
-------	--

O'

O'zaro parallel tekisliklar	bir tekislikda yotgan va o'zaro kesishgan ikki chiziq ikkinchi tekislikda yotgan va o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lgan tekisliklar
O'zaro perpendikulyar tekisliklar	bir tekislikda yotgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislik yoki tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik

ADABIYOT

1. SH.K.Murodov va boshqalar. Chizma geometriya kursi. Toshkent. «O'qituvchi». 1988.
2. YU.Qirg'izboyev. Chizma geometriya. Toshkent. «O'qituvchi» 1989.
3. R.X.Xorunov. Chizma geometriya kursi. Toshkent. «O'qituvchi». 1998.
4. YU.Qirg'izboyev. Chizma geometriyadan masalalar to'plami. Toshkent. «O'qituvchi». 1971.
5. И.И.Котов. Начертательная геометрия. Москва. «Высшая школа». 1970.

Mundarija

So'zboshi	3
I bob. KIRISH	6
1.1-§ Proyeksiyalash asoslari, Yevklid fazosini kengaytirish	6
1.2-§ Geometrik elementlarni parametri	10
1.3-§ Markaziy va parallel proyeksiyalash va ularning xossalari.	11
1.4-§ Nuqtaning o'zaro perpendikulyar ikki va uchtekislikdagi proyeksiyalari	16
II bob. TO'G'RI CHIZIQNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI	22
2.1-§ Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning proyeksiyalari	22
2.2-§ Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari	23
2.3-§ Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasini tahlil qilish	27
2.4-§ To'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'lish	29
2.5-§ To'g'ri chiziq izlari	30
III bob. FAZODAGI IKKI TO'G'RI CHIZIQNING O'ZARO VAZIYATI	32
3.1-§ Parallel to'g'ri chiziqlar	32
3.2-§ Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar	32
3.3-§ Chalmashuvchi (ayqash) to'g'ri chiziqlar	33
3.4-§ To'g'ri burchakning proyeksiyasi	34
IV bob. TEKISLIKNING FAZODA BERILISHI	35
4.1-§ Tekislikning izlarini yasash	37
4.2-§ Tekislikning xususiy holatlari	37
4.3-§ Tekislikda to'g'ri chiziq tanlash	41
4.4-§ Tekislikning maxsus chiziqlari	42
4.5-§ Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari	45
V bob. FAZODAGI TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIKNING O'ZARO VAZIYATI	47
5.1-§ To'g'ri chiziq orqali tekislik o'tkazish	47
5.2-§ To'g'ri chiziqning tekislikka parallelligi	49
5.3-§ To'g'ri chiziqni tekislik bilan kesishishi. To'g'ri chiziqning	

proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash	50
5.4-§ Umumiy vaziyatdagi tekislikning xususiy vaziyatda berilgan tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash	52
5.5-§ To'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishish nuqtasini topish.	53
5.6-§ To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi	56
VI bob. FAZODAGI IKKI TEKISLIKNING O'ZARO VAZIYATI	57
6.1-§ O'zaro parallel tekisliklar	57
6.2-§ O'zaro kesishuvchi tekisliklar	60
6.3-§ Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi	64
6.4-§ To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni aniqlash	66
6.5-§ Ikki tekislik orasidagi burchakni aniqlash	67
VII bob. ORTOGONAL PROYEKSIYALARNI QAYTA TUZISH USULLARI	69
7.1-§ Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli. Proyeksiya tekisliklaridan bittasini almashtirish	70
7.2-§ Proyeksiyalar tekisliklarini ikki marta almashtirish	75
7.3-§ Aylantirish usuli. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish	78
7.4-§ Proyeksiyalar tekisliklaridan bittasiga parallel bo'lgan o'q atrofida aylantirish	83
7.5-§ Tekislikni uning izlarini biri atrofida aylantirish	85
7.6-§ Tekis parallel ko'chirish usuli	87
7.7-§ Yordamchi proyeksiyalash usuli	91
Chizma geometriyadagi atamalar va tushunchalar bo'yicha yig'ma lug'at	98
A d a b i y o t l a r	102

**35 – buyurtma 500 nusxa. Hajmi 6,5 b.t.
2005 yil 25 martda bosishga puxsat etildi.
Nizomiy nomidagi TDPU Pizografida
nashr qilindi.**