

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA  
MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

**A.Y. NARMANOV**

# **ANALITIK GEOMETRIYA**

*Matematika bakalavriat ta‘lim yo‘nalishi  
uchun darslik*

**O‘ZBEKISTON FAYLASUFLARI MILLIY  
JAMIYATI NASHRIYOTI  
TOSHKENT  
2008**

Bu darslik universitetlarning matematika, mexanika, tabiiy matematika va informatika, statistika yo'nalishlari uchun mo'ljallangan va amaldagi yangi bakalavrlar dasturiga muvofiq muallifning O'zbekiston Milliy Universitetda o'qigan ma'ruzalari asosida yozilgan. Darslik oltita qismdan iborat bo'lib, unda vektorlar algebrasi, tekislikda koordinatalar sistemasini almashtirish, to'g'ri chiziqlar va tekisliklar, ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlar nazariyalari yoritilgan.

**Muallif** – fizika-matematika fanlari doktori, professor,  
O'zbekiston Milliy Universiteti geometriya kafedrasini mudiri  
A.Y. Narmanov

**Taqrizchilar:**

fizika-matematika fanlari doktori, dotsent Bahodir Shoimqulov  
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent Rasulmat Yunusmetov

**Muharrir** – filologiya fanlari nomzodi G.N. Tavaldiyeva

**22.151.5**

**N25**

**Narmanov A.Y.**

**Analitik geometriya:** Darslik /A.Y. Narmanov; O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. - T.: O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2008. – 176 b.

**BBK 22.151.5#73**

**ISBN 978-9943-319-66-0**

© «O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti», 2008

# KIRISH

## ANALITIK GEOMETRIYA PREDMETI HAQIDA

Tekislik yoki fazoda koordinatalar sistemasini kiritganimizda, geometrik figuraga tegishli nuqtalar koordinatalarga ega bo'ladi. Agar figuraga tegishli nuqtalarning koordinatalari biror algebraik tenglamani qanoatlantirsa, u algebraik tenglama bilan aniqlanuvchi geometrik figura deyiladi. Masalan, markazi  $A(a, b)$  nuqtada bo'lgan va radiusi  $R$  ga teng aylana tenglamasi  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$  ko'rinishga ega bo'ladi.

Analitik geometriya kursida o'rganish metodlarining asosini koordinatalar metodi tashkil qiladi. Biz asosan figuralarni ularning tenglamalari yordamida o'rganamiz, ya'ni algebraik tenglamalarini o'rganish bilan shugullanamiz. Bu yerda algebraik metodlar asosiy rolni o'ynaydi. Biz asosan birinchi va ikkinchi darajali tenglamalar bilan ish ko'ramiz. Analitik geometriya kursida o'rganiladigan geometrik figuralar sinfi unchalik katta bo'lmasa ham, birinchi va ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlanuvchi geometrik figuralar fan va texnikada juda katta rol o'ynaydi.

Birinchi darajali algebraik tenglamalar bilan aniqlanuvchi geometrik figuralar – to'g'ri chiziq va tekislikdir. Ushbu asosiy geometrik figuralar bilan siz elementar geometriya kursidan tanishsiz. Tekislikda ikkinchi darajali tenglamalar ikkinchi tartibli chiziqlarni, fazoda esa ikkinchi tartibli sirtlarni aniqlaydi. Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, aylana ikkinchi tartibli chiziqdir.

Fazoda  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0$  tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalar to'plami esa sferadan iborat bo'lib, u ikkinchi tartibli sirtir.

Analitik geometriya kursida vektorlar algebraasi ham o'rganiladi. Vektor tushunchasi muhim fundamental tushunchalardan bo'lib, faqatgina analitik geometriya kursida emas, balki matematikaning boshqa bo'limlarida ham muhim rol o'ynaydi.

Bu darslik muallifning O'zbekiston Milliy universitetining mexanika-matematika fakultetida o'qigan ma'ruzalari asosida yozilgan. Darslik universitetlarning mexanika va matematika yo'nalishlarining bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan.

# I BOB

## VEKTORLAR ALGEBRASI

### 1-§. Vektorlar va ular ustida amallar

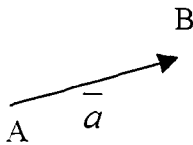
**1-ta'rif.** Yo'nalishga ega bo'lgan kesma vektor deb ataladi.

Biz vektorni  $\overline{AB}$  ko'rinishida yoki bitta kichik lotin harfi bilan  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

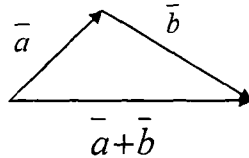
ko'rinishida belgilaymiz. Vektorni  $\overline{AB}$  ko'rinishida belgilasak  $A, B$  nuqtalar mos ravishda vektorning boshi va oxiri joylashgan nuqtalardir,

vektorning uzunligi  $|\overline{AB}|$ ,  $|\overline{a}|$  ko'rinishida belgilanadi.

Agar vektorning boshi va oxiri bitta nuqtada bo'lsa, u nol vektor deyiladi. Nol vektor yo'nalishga ega emas, uning uzunligi esa nolga teng. Nol vektor  $\overline{0}$  ko'rinishida yoziladi.



1-chizma.



2-chizma.

**2-ta'rif.** Ikkita  $\overline{a} = \overline{AB}$  va  $\overline{b} = \overline{CD}$  vektorlardan  $\overline{b} = \overline{CD}$  vektor boshini  $\overline{a} = \overline{AB}$  vektor oxiriga qo'yilganda  $\overline{AB}$  vektor boshidan  $\overline{CD}$  vektor oxiriga yo'naltirilgan vektor, bu vektorlarning yig'indisi deyiladi va  $\overline{a} + \overline{b}$  ko'rinishida yoziladi.

Yuqorida keltirilgan vektorlarni qo'shish qoidasi uchburchak qoidasi deyiladi.

**3-ta'rif.** Berilgan  $\lambda$  haqiqiy son va  $\bar{a}$  vektorning ko'paytmasi shunday vektorki, uning uzunligi  $|\lambda \bar{a}|$  ga teng, yo'nalishi:  $\lambda > 0$  bo'lganda  $\bar{a}$  vektor yo'nalishi bilan bir xil,  $\lambda < 0$  bo'lganda esa  $\bar{a}$  vektor yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi. Ko'paytma  $\lambda \bar{a}$  ko'rinishida yoziladi.

Vektorlar algebrasi deganda, vektorlar to'plamida vektorlarni qo'shish va skalyar songa ko'paytirish amallari tushuniladi. Biz  $V$  bilan hamma vektorlar to'plamini belgilaymiz. Bunda vektorlarimiz bir to'g'ri chiziqda, bir tekislikda yoki fazoda yotgan bo'lishi mumkin.

Vektorlarni qo'shish va haqiqiy songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

$$1. \forall \bar{a}, \bar{b} \in V \text{ uchun; } \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \text{ -kommutativlik.}$$

$$2. \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V \text{ uchun; } (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \text{ -assosiativlik.}$$

$$3. \forall \bar{a} \in V \text{ uchun } \exists \bar{b} \in V \bar{a} + \bar{b} = \bar{0}. \text{ tenglik o'rinli va } \bar{b} = -\bar{a}$$

$$4. \forall \bar{a} \in V \text{ uchun; } \bar{a} \cdot 1 = \bar{a} \text{ - tenglik o'rinli.}$$

$$5. \forall \bar{a}, \bar{b} \in V \text{ hamda } \forall \lambda \in R \text{ uchun } \lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b} \text{ tenglik o'rinli.}$$

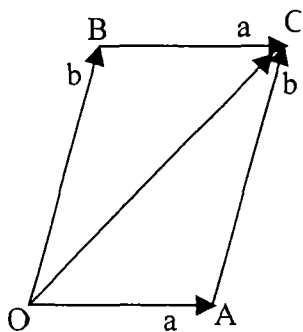
$$6. \forall \lambda, \mu \in R \text{ va } \forall \bar{a} \in V \text{ uchun: } \bar{a}(\lambda + \mu) = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a} \text{ tenglik o'rinli.}$$

$$7. \forall \lambda, \mu \in R \text{ va } \forall \bar{a} \in V \text{ uchun } \lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a} \text{ tenglik o'rinli.}$$

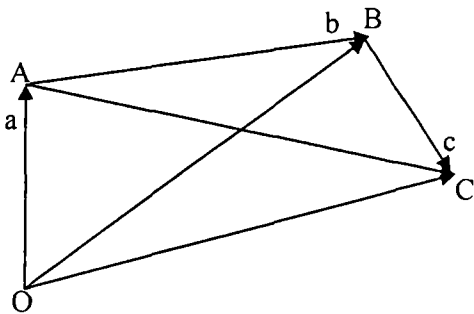
$$8. \forall \bar{a} \in V \text{ uchun } \bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \text{ tenglik o'rinli.}$$

Bu xossalarning ba'zilarini isbotlaymiz, ba'zilarining isbotini esa o'quvchilarga havola qilamiz.

Birinchi xossani isbotlash uchun ixtiyoriy ikkita  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlarning boshini bitta  $O$  nuqtaga joylashtiramiz va 3-chizmadagi  $OABC$



3-chizma.



4-chizma.

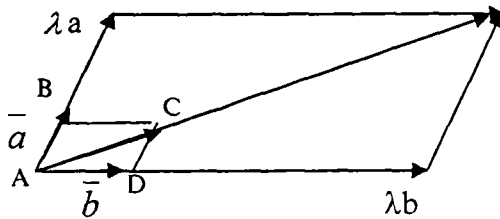
parallelogrammni hosil qilamiz. Bu parallelogrammdagi  $OAC$  uchburchakdan  $\overline{OC} = \overline{a} + \overline{b}$  tenglik,  $OBC$  uchburchakdan esa  $\overline{OC} = \overline{b} + \overline{a}$  tenglikni hosil qilamiz (3-chizma).

Ikkinchi xossani isbotlash uchun  $\overline{a}$  vektorning boshini  $O$  nuqtaga,  $\overline{b}$  vektorning boshini  $\overline{a}$  vektorning oxiriga,  $\overline{c}$  vektorning boshini esa  $\overline{b}$  vektorning oxiriga joylashtiramiz. Chizmadan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{OC} \quad \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{OC}$$

Har bir  $\overline{a} = \overline{AB}$  vektor uchun  $\overline{b} = \overline{BA}$  vektor  $\overline{a}$  vektorga qarama-qarshi yo'nalgan, uzunligi esa  $\overline{a}$  ning uzunligiga teng vektordir. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra  $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{O}$  tenglikni hosil qilamiz.

Beshinchi xossani isbotlash uchun  $\overline{a}$  va  $\overline{b}$  vektorlarning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirib, ular yordamida quyidagi  $ABCD$  parallelogrammni hosil qilamiz.



5-chizma.

Berilgan  $\lambda$  son uchun  $\lambda \bar{a}$  va  $\lambda \bar{b}$  vektorlarga qurilgan parallelogramm  $ABCD$  parallelogrammga o'xshashdir. Shuning uchun uning diagonali uzunligi  $ABCD$  parallelogramm diagonali uzunligidan  $|\lambda|$  marta "kattadir" Bundan esa  $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$  tenglikni hosil qilamiz.

Oltinchi xossani isbotlash uchun  $\lambda \mu > 0$  va  $\lambda \mu < 0$  hollarni qaraymiz. Birinchi holda  $\lambda$  va  $\mu$  sonlarining ishorasi bir xil bo'ladi. Shuning uchun ularning ikkalasi ham yoki manfiy yoki musbat bo'ladi. Biz ularning ikkalasi ham manfiy bo'lgan holni qaraylik. Bu holda  $\bar{a}(\lambda + \mu)$ ,  $\lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$  vektorlar  $\bar{a}$  vektorga qarama qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak, ular bir xil yo'nalishga ega. Ularning uzunliklari esa  $|\lambda + \mu| |\bar{a}|$  ga tengdir. Agar  $\lambda$  va  $\mu$  sonlari musbat son bo'lsa, yuqoridagi mulohaza takrorlanadi.  $\lambda$  va  $\mu$  sonlarining ishoralari har xil bo'lsa biz yana ikkita holni qaraymiz:

$\lambda + \mu > 0$  va  $\lambda + \mu < 0$ . Agar  $\lambda + \mu > 0$  bo'lsa  $\bar{a}(\lambda + \mu)$ ,  $\lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$  vektorlar  $\bar{a}$  vektor bilan bir xil yo'nalishga ega.  $\mu\bar{a}$  vektorning boshini  $\lambda\bar{a}$  vektorning oxiriga joylashtirib, ularning uzunligi ham tengligini ko'ramiz. Qolgan hollar yuqoridagidek mulohazalar asosida tekshiriladi.

**4-ta'rif.** Bir to'g'ri chiziqqa parallel vektorlar kollinear vektorlar deyiladi.

Vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lsa,  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$  ko'rinishda, agar qarama qarshi yo'nalishga ega bo'lsa,  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$  ko'rinishda belgilaymiz.

**1-tasdiq.** Nol vektordan farqli  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar kollinear bo'lishi uchun  $\lambda \in R$  son mavjud bo'lib,  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  tenglikning bajarilishi zarur va etarlidir.

Isbot. Vektorlar uchun  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  shart bajarilsa,  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar kollinearligini isbotlash sodda bo'lganligi uchun uni isbotlashni o'quvchilarga havola etamiz. Bu shartninig zarurligini ko'rsatamiz. Agar  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar kollinear bo'lsa, ularni parallel ko'chirish natijasida bitta to'g'ri chiziqqa joylashtirish mumkin. Shuning uchun ular  $l$  to'g'ri chiziqda yotadi va ularning boshi  $O$  nuqtada deb hisoblaymiz. Agar

$\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lsa  $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$  uchun  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

tenglik bajariladi. Agar  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar qarama qarshi yo'nalishga ega

bo'lsa  $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$  uchun  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  tenglik bajariladi.

**5-ta'rif.** Vektor yotgan to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel bo'lsa, bu vektor  $\alpha$  tekislikka parallel deyiladi.

**6-ta'rif.** Uchta  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlar bitta tekislikka parallel bo'lsa, ular komplanar vektorlar deyiladi.

Tabiiyki, agar vektorlar komplanar bo'lsa, ularni parallel ko'chirish natijasida bitta tekislikka joylashtirish mumkin.



## 2-§. Chiziqli erkli va chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasi

Bizga  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  vektorlar oilasi va  $n$  ta

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sonlar berilgan bo'lsa,  $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$

vektor  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb ataladi.

Chiziqli kombinatsiyada qatnashayotgan sonlarning birtortasi noldan farqli bo'lsa, u notrivial chiziqli kombinatsiya deb ataladi.

**Ta'rif.** Berilgan  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  vektorlar oilasi uchun kamida

bittasi noldan farqli bo'lgan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sonlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

tenglik o'rinli bo'lsa,  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$  vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli deyiladi.

Izoh. Vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, uning birorta notrivial chiziqli kombinatsiyasi nol vektor bo'ladi.

**1-teorema.** Ikkita vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun bu oila vektorlarining kollinear bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Oilaga tegishli ikkita  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlar chiziqli bog'lanishli

bo'lsa, kamida bittasi noldan farqli  $\lambda_1, \lambda_2$  sonlari mavjud

bo'lib,  $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} = \bar{0}$  tenglik bajariladi. Agar  $\lambda_1 \neq 0$

bo'lsa,  $\bar{a} = -(\lambda_1 / \lambda_2) \bar{b}$  tenglikni hosil qilamiz. Bu esa birinchi

tasdiqqa ko'ra  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlarning kollinear ekanligini ko'rsatadi.

Va aksincha,  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlar kollinear bo'lsin. Ularning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirsak, ular bitta to'g'ri chiziqda yotadi. Bu to'g'ri chiziqda vektorlar boshi joylashgan nuqtani koordinata boshi sifatida olib, koordinatalar sistemasini kiritamiz. Vektorlarning oxirlarini  $A$  va  $B$

harflar bilan belgilaymiz:  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ . Vektorlardan bittasi, misol uchun  $\vec{a}$  noldan farqli vektor bo'lsin. Demak,  $\vec{a} \neq \vec{0}$  va  $O$  nuqta  $AB$  kesmani biror  $\lambda$  nisbatda bo'ladi:  $BO/OA = \lambda$  yoki  $BO = \lambda OA$

Endi  $\vec{b} = -\lambda \vec{a}$  tenglikni ko'rsatamiz. Agar  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar yo'nalishi bir xil bo'lsa,  $O$  nuqta  $AB$  kesmaga tegishli emas va  $\lambda < 0$ . Agar  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar yo'nalishi qarama-qarshi bo'lsa,  $\lambda > 0$  bo'ladi. Shuning uchun  $\vec{b}$  va  $-\lambda \vec{a}$  vektorlarning yo'nalishlari bir xil. Ularning uzunliklari ham teng:

$$|\vec{b}| = |\vec{BO}| = |\lambda| |\vec{OA}| = |\lambda| |\vec{a}| = |-\lambda \vec{a}|.$$

Demak, bu vektorlar tengdir. Endi  $\vec{b} = -\lambda \vec{a}$  tenglikdan  $-\lambda \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$  tenglik kelib chiqadi. Demak,  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar chiziqli bog'lanishli oilani tashkil qiladi.

## 2-teorema.

1) Vektorlar oilasiga nol vektor tegishli bo'lsa, bu oila chiziqli bog'lanishlidir.

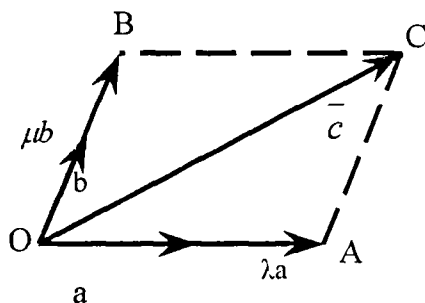
2) Vektorlar oilasi birorta chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasini o'z ichiga olsa, bu oila ham chiziqli bog'lanishlidir.

## Isbot.

1) Berilgan  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$  oilada  $\vec{a}_i = \vec{0}$  bo'lsa,  $\lambda_i = 0$ ,  $\lambda_j = 1, i \neq j$  sonlar uchun  $\lambda_{i_1} \vec{a}_{i_1} + \lambda_{i_2} \vec{a}_{i_2} + \lambda_{i_3} \vec{a}_{i_3} + \dots + \lambda_{i_m} \vec{a}_{i_m} = \vec{0}$  tenglik o'rinli bo'ladi.

2) Berilgan  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$  oilada bir nechta  $\vec{a}_{i_k}$   $k = 1, 2, \dots, m, m < n$ , vektorlar chiziqli bog'lanishli oilani tashkil qilsa, ularning birorta notrivial chiziqli kombinatsiyasi nol vektor bo'ladi:

$$\lambda_{i_1} \bar{a}_{i_1} + \lambda_{i_2} \bar{a}_{i_2} + \lambda_{i_3} \bar{a}_{i_3} + \dots + \lambda_{i_m} \bar{a}_{i_m} = \bar{0}$$



6-chizma.

Biz agar  $\lambda_j = \lambda_{j_k}$ ,  $j = j_k$  va  $\lambda_j = 0$ ,  $j \neq j_k$  tengliklar bilan n ta  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  sonlarni aniqlasak

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

tenglikni hosil qilamiz.

**3-teorema.** Uchta vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va etarli.

**Isbot.** Oilaga tegishli uchta  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ularning komplanarligini isbotlaymiz. Chiziqli bog'lanishlikning ta'rifiga asosan, kamida bittasi noldan farqli  $\alpha, \beta, \gamma$  sonlar uchun

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c} = \bar{0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Aniqlik uchun  $\alpha$  noldan farqli bo'lsin, unda avvalgi tenglikdan

$$\bar{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \bar{a} - \frac{\beta}{\gamma} \bar{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikda  $\lambda = \alpha/\gamma$ ,  $\mu = \beta/\gamma$  belgilashlarni kiritib  $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$  tenglikni hosil qilamiz. Agar  $\vec{a}, \vec{b}$  va  $\vec{c}$  vektorlarning boshi bitta umumiy  $O$  nuqtaga joylashtirilgan bo'lsa, oxirgi tenglikdan  $\vec{c}$  vektor  $\lambda \vec{a}$  va  $\mu \vec{b}$  vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonaliga tengligi kelib chiqadi. Bu esa ular bitta tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlardir.

Va aksincha,  $\vec{a}, \vec{b}$  va  $\vec{c}$  vektorlar komplanar bo'lsin. Ular chiziqli bog'liqligini isbotlaymiz.

Berilgan uchta vektorlar orasida kollinear vektorlar bo'lgan holni chiqarib tashlaymiz. 1-teoremaga asosan, ushbu vektorlar jufti chiziqli bog'lik bo'lar edi va berilgan uchta vektor ham chiziqli bog'liqligi kelib chiqar edi. Shuning uchun  $\vec{a}, \vec{b}$  va  $\vec{c}$  vektorlar orasida hech bir jufti kollinear bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz (xususan, ular orasida nol vektor ham yo'q). Vektorlarni bitta tekislikka ko'chirib, ularning boshlarini  $O$  nuqtaga joylashtiramiz (6-chizmaga qarang). Keyin  $\vec{c}$  vektorning  $C$  uchi orqali  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz,  $\vec{a}$  vektor yotgan to'g'ri chiziqning  $\vec{b}$  vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini  $A$  deb belgilaymiz va  $\vec{b}$  vektor yotgan to'g'ri chiziqning  $\vec{a}$  vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini  $B$  deb belgilaymiz. (Ushbu nuqtalarning mavjudligi,  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar kollinear emasligidan kelib chiqadi). Vektorlarni qo'shishning parallelogramm qoidasiga ko'ra  $\vec{c}$  vektor  $\vec{OA}$  va  $\vec{OB}$  vektorlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB} \text{ tenglik o'rinlidir.}$$

$\vec{OA}$  vektor noldan farqli  $\vec{a}$  vektorga kollinear (u bilan bir to'g'ri chiziqda yotuvchi), demak, shunday  $\lambda$  haqiqiy son topiladiki,

$$\overline{OA} = \lambda \overline{a}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash,  $\overline{OB} = \lambda \overline{b}$  tenglik ham o'rinli. Bu tengliklardan

$$\overline{c} = \lambda \overline{a} + \mu \overline{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni  $\lambda \overline{a} + \mu \overline{b} + (-1)\overline{c} = \overline{0}$  ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikdagi  $\lambda$ ,  $\mu$  va  $-1$  sonlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganligi sababli, oxirgi tenglik  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$  va  $\overline{c}$  vektorlarning chiziqli bog'lanishligini ifodalaydi. Teorema isbotlandi.

**1-natija.** Agar  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$  va  $\overline{c}$  vektorlar komplanar bo'lmasa, ular chiziqli erkli bo'ladilar.

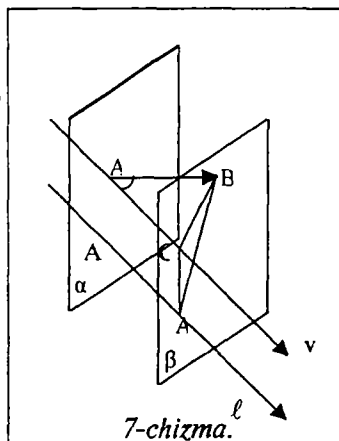
**2-natija.** Ixtiyoriy uchta komplanar bo'lmagan vektorlar orasida ikkita kollinear vektorlar bo'la olmaydi. Shuningdek ular orasida nol vector ham bo'lmaydi.

### 3-§. Vektorlarning o'qqa proeksiyasi

Vektorning o'qqa proeksiyasi vektorning yo'nalishiga qarab musbat, manfiy yoki nolga teng bo'lgan son bo'lib,  $\overline{a}$  vektorning  $\ell$  o'qqa proeksiyasi quyidagi qoida bo'yicha aniqlanadi: (7-chizma)

Agar  $\overline{a} = \overline{AB}$  bo'lsa,  $A$  va  $B$  nuqtalarning  $\ell$  o'qdagi ortogonal proeksiyalarini mos ravishda  $A'$ ,  $B'$  bilan belgilaymiz.  $A'B'$  kesmaning  $\ell$  o'qdagi kattaligi  $\overline{a}$  vektorning  $\ell$  o'qdagi proeksiyasi deb ataladi. Proeksiya uchun

$$pr_{\ell} \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi$$



tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda  $\varphi$ -berilgan  $\vec{a}$  vektor va  $\ell$  o'q orasidagi burchakdir.

Proeksiyaning xossalari:

$$1. \text{pr}_\ell \lambda \vec{a} = \lambda \text{pr}_\ell \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}^1$$

$$2. \text{pr}_\ell (\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_\ell \vec{a} + \text{pr}_\ell \vec{b}$$

**Isbot.** 1. Birinchi  $\text{pr}_\ell \lambda \vec{a} = \lambda \text{pr}_\ell \vec{a}$  tenglikni isbotlash uchun quyidagi hollarni qaraymiz:

a)  $\lambda = 0$  bo'lsa  $\lambda \vec{a} = \vec{0}$  tenglik o'rinli bo'ladi va natijada  $A' = B'$  munosabatdan

$$\text{pr}_\ell \lambda \vec{a} = 0 \quad \text{va} \quad \text{pr}_\ell \lambda \vec{a} = \lambda \text{pr}_\ell \vec{a} = 0$$

tengliklar kelib chiqadi.

b)  $\lambda > 0$  bo'lsa,  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$  munosabatdan  $\varphi = \psi$  tenglik kelib chiqadi; bu  $\varphi$  yerda va  $\psi$  mos ravishda  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning  $\ell$  o'q bilan hosil qilgan burchaklaridir. Bu holda  $|\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$  va demak

$$\text{pr}_\ell (\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \psi = \lambda \text{pr}_\ell \vec{a}$$

b)  $\lambda < 0$  bo'lsa,  $\lambda \vec{a}$  va  $\vec{a}$  vektorlar uchun  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$  munosabat o'rinli bo'ladi. Shuning uchun  $\psi = \varphi + \pi$  tenglikdan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\text{pr}_\ell (\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos(\varphi + \pi) = -\lambda |\vec{a}| \cos(\varphi + \pi) = \lambda \text{pr}_\ell \vec{a}$$

2.  $\text{pr}_\ell (\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_\ell \vec{a} + \text{pr}_\ell \vec{b}$  tenglikni isbotlashni keyinroqqa qoldirib, skalyar ko'paytmani o'rganishga o'tamiz.

#### 4-§. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Ikkita  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$  ifodaga aytiladi. Bu yerda  $\varphi$  -  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar orasidagi burchak.

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan bevosita quyidagi fakt kelib chiqadi:

**1-xossa.** Ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun ularning o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va etarlidir.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \vec{a} \perp \vec{b}$$

**2-xossa.**  $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$

**3-xossa.** Kommutativlik  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .

**4-xossa.**  $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$

**5-xossa.**  $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

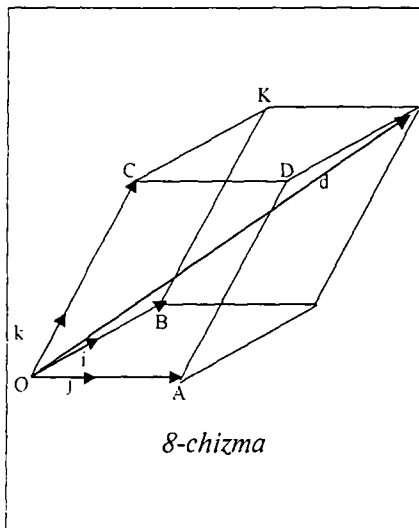
Beshinchi xossa isboti proeksiyaning ikkinchi xossasidan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) &= |\vec{a} + \vec{b}||\vec{c}|\cos\varphi = pr(\vec{a} + \vec{b})|\vec{c}| = pr_1(\vec{a} + \vec{b})|\vec{c}| = \\ &pr_1\vec{a} \cdot |\vec{c}| + pr_1\vec{b} \cdot |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos\alpha + |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\varphi \end{aligned}$$

#### 5-§. Bazis va vektorning koordinatalari

**Ta'rif.** Berilgan  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  vektorlar oilasi chiziqli erkli bo'lib, ixtiyoriy vektorni ularning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu oila bazis deyiladi.

Quyidagi muhim faktlar o'rindir:



**1-xossa.** Bir tekislikda yotuvchi vektorlar uchun har qanday ikkita nokollinear vektorlar bazisni tashkil qiladi.

**2-xossa.** Fazoda yotuvchi vektorlar uchun har qanday uchta nokomplnar vektorlar bazisni tashkil qiladi.

Bu xossalarning birinchisi 1-teoremaning bevosita natijasidir.

Ikkinchi xossani isbotlaymiz:

Bizga uchta nokomplanar

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlar berilgan bo'lsin. Ikkinchi punktda isbotlagan teoreмага ko'ra ular chiziqli erkli oilani tashkil qiladi. Endi ixtiyoriy

$\vec{d}$  vektorni olib, uni  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlar orqali chiziqli ifodalash mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlarning boshlarini  $O$  nuqtaga joylashtiramiz va  $\vec{d}$  vektorning oxiridan  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar tekisligiga,  $\vec{a}, \vec{c}$  vektorlar tekisligiga va  $\vec{c}, \vec{b}$  vektorlar tekisligiga parallel tekisliklar o'tkazamiz. O'tkazilgan tekisliklarning  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlar yotgan to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda  $A, B, C$  harflar bilan belgilaymiz. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\vec{d} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

tenglikni olamiz. Bu yerda  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  vektorlar mos ravishda  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlarga kollinear bo'lganligi uchun shunday  $\lambda, \mu, \nu$  sonlar mavjudki

$$\vec{OA} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{OB} = \mu \vec{b}, \quad \vec{OC} = \nu \vec{c}$$



tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarni hisobga olib

$$\bar{d} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} + \nu \bar{c}$$

tenglikni olamiz.

*Ta'rif.* Bizga  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  bazis berilib,  $\bar{a}$  vektor uchun

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n$$

tenglik o'rinli bo'lsa,  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  sonlar  $\bar{a}$  vektorning koordinatalari deyiladi.

**6-xossa.** Har bir vektor berilgan bazisda o'zining koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi.

Berilgan  $\bar{a}$  vektor uchun ikkita

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n$$

$$\bar{a} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + \dots + b_n \bar{e}_n$$

tengliklar o'rinli bo'lsa ularning birini ikkinchisidan hadma-had ayirib

$$(a_1 - b_1) \bar{e}_1 + (a_2 - b_2) \bar{e}_2 + \dots + (a_n - b_n) \bar{e}_n = \bar{0}$$

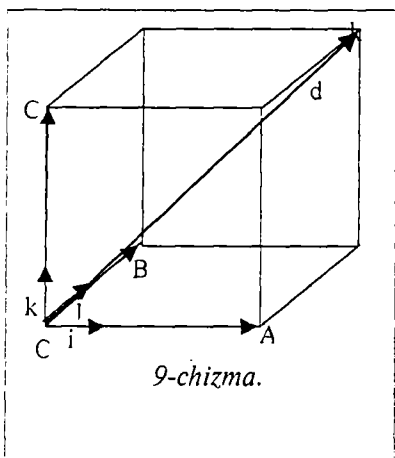
tenglikni hosil qilamiz. Bazisni tashkil qiluvchi  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  vektorlar chiziqli erkli bo'lganligi uchun

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots, a_n - b_n = 0$$

munosabat hosil bo'ladi.

## 6-§. Affin koordinatalar sistemasi

Fazoda yoki tekislikda affin koordinatalar sistemasini kiritish uchun birorta bazis va bitta nuqta tanlanadi. Agar  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  bazis va  $O$  nuqta berilgan bo'lsa,  $\overline{OM}$  vektorning  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  bazisdagi koordinatalari  $M$  nuqtaning affin koordinatalari deyiladi.



**1-ta'rif.** Berilgan  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$

bazis uchun

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ tengliklar}$$

bajarilsa,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  - ortonormal bazis deyiladi.

**2-ta'rif.** Ortonormal bazis yordamida berilgan koordinatalar sistemasi to'g'ri burchakli yoki dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi.

**Teorema.** Dekart koordinatalar sistemasida vektorning berilgan bazisdagi koordinatalari, uning koordinatalar o'qlariga tushirilgan proeksiyalari bilan ustma-ust tushadi.

**Isbot.** Bizga  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  ortonormal bazis berilgan bo'lsa, ularning boshlarini  $O$  nuqtaga joylashtirib  $OXYZ$  koordintalar sistemasini kiritaylik. Agar

$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$  bo'lsa,  $\bar{a}$  vektorning boshini koordinata boshiga joylashtirib, uning oxirini  $M$  bilan belgilaymiz. Agar  $M$  nuqtaning koordinata o'qlariga ortogonal proeksiyalarini  $A, B, C$  harflari bilan belgilasak  $\overline{OA} = x\bar{i}$ ,  $\overline{OB} = y\bar{j}$ ,  $\overline{OC} = z\bar{k}$  tengliklarni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  kesmalarning kattaliklari mos ravishda  $x, y, z$  sonlariga teng bo'lgani uchun  $x = pr_{Ox} \bar{a}$ ,  $y = pr_{Oy} \bar{a}$ ,  $z = pr_{Oz} \bar{a}$  munosabatlarni hosil qilamiz.

**1-natija.**  $pr_l(\bar{a} + \bar{b}) = pr_l \bar{a} + pr_l \bar{b}$

**Isbot.** Bizga  $\ell$  o'q berilgan bo'lsin: shunday  $OXYZ$  koordinatalar

sistemasi kiritamizki,  $Ox$  koordinata o'qi  $\ell$  bilan ustma-ust tushsin. Agar

$$\bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j} + z_a \bar{k}, \quad \bar{b} = x_b \bar{i} + y_b \bar{j} + z_b \bar{k},$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_{a+b}) \bar{i} + (y_{a+b}) \bar{j} + (z_{a+b}) \bar{k}$$

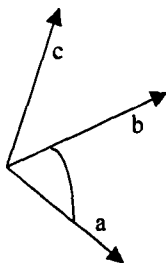
bo'lsa, teoreмага ko'ra  $pr_1 \bar{a} = x_a$  va  $pr_1 = x_b$ ,  $pr_1(\bar{a} + \bar{b}) = x_{a+b}$  tengliklarni hosil qilamiz. Lekin vektorlarni qo'shganda ularning koordinatalari mos ravishda qo'shilgani uchun  $pr_1(\bar{a} + \bar{b}) = x_a + x_b$  munosabatni olamiz.

## 7-§. Vektor va aralash ko'paytmalar

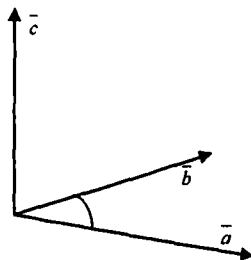
**1-ta'rif.** Tartiblangan  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  uchlikda  $\bar{c}$  vektor oxiridan  $\bar{a}, \bar{b}$  vektorlar tekisligiga qaraganimizda  $\bar{a}$  dan  $\bar{b}$  ga qisqa burilish yo'nalishi soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, bu uchlik o'ng uchlik deb ataladi. Agar bu yo'nalish soat mili yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa,  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  uchlik chap uchlik deyiladi.

Quyida  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  o'ng va  $\{\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\}$  chap uchliklar ko'rsatilgan.

Shunda  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \{\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}\} \{\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}\}$  uchliklar o'ng,  $\{\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\}, \{\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}\}, \{\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}\}$  uchliklar chap uchlik hosil qiladi.



10-chizma.



11-chizma.

**2-ta'rif.** Ikkita  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning vektor ko'paytmasi deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor  $[\vec{a}, \vec{b}]$  kabi belgilanadi va:

1)  $[\vec{a}, \vec{b}]$  ning uzunligi  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarga qurilgan parallelogramm

yuziga tengdir:  $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ ,  $\varphi = \vec{a} \wedge \vec{b}$ ;

2)  $[\vec{a}, \vec{b}]$  vektor  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarga perpendikulyar bo'lishi kerak:

$$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b};$$

3)  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar va vektor ko'paytma  $[\vec{a}, \vec{b}]$  o'ng uchlik hosil qiladi:

Vektor ko'paytmaning xossalari:

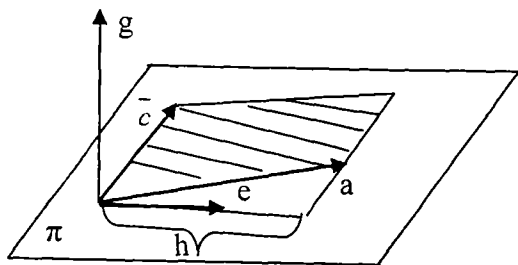
$$1) [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}];$$

$$2) [\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}] = -[\lambda \vec{b}, \vec{a}], \lambda \in R;$$

$$3) [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}];$$

$$4) [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

**1-tasdiq.** (Yordamchi fakt). Berilgan  $\alpha$  tekislikda  $\vec{c}$  vektor va unga perpendikulyar birlik  $\vec{e}$  vektor berilgan bo'lsin. Agar  $\vec{g}$  vektor  $\alpha$



12-chizma

tekislikka perpendikulyar

va  $\vec{e}, \vec{c}, \vec{g}$  o'ng uchlik

bo'lsa,  $\alpha$  tekislikda

yotuvchi har qanday  $\vec{a}$

vektor uchun

$$[\vec{a}, \vec{c}] = \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} \cdot |\vec{c}| \vec{g}$$

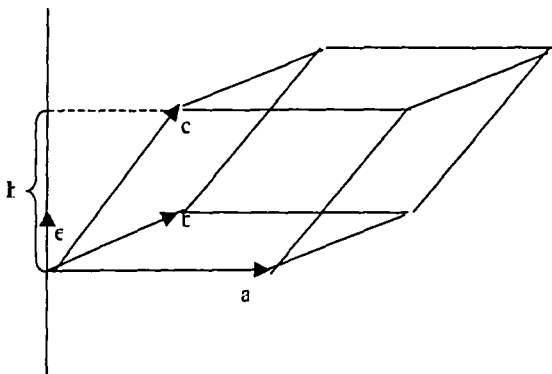
tenglik o'rinlidir.

**Isbot.** 1) Vektorlar tengligini ko'rsatish uchun ularning yo'nalishlari bir xil va uzunliklari tengligini ko'rsatamiz. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra uning uzunligi  $\bar{a}$  va  $\bar{c}$  vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga tengdir:  $|\bar{a}, \bar{c}| = S$ . Chap tomondagi vektorning uzunligi esa  $|pr_c \bar{a}| |\bar{c}|$  ga tengdir. Agar parallelogrammning asosi sifatida  $\bar{c}$  vektorni olsak, uning yuzasi  $|\bar{c}| h$  ga tengdir. Bu yerda  $h$  balandlik bo'lib,  $|pr_c \bar{a}| = h$  tenglik o'rinlidir. Demak, vektorlarning uzunligi tengdir. Endi ularning yo'nalishi bir xil ekanligini ko'rsatamiz. Agar  $\bar{a}, \bar{c}, \bar{g}$  o'ng uchlik bo'lsa,  $\bar{g}$  va  $[\bar{a}, \bar{c}]$  vektorlar bir xil yo'nalishga ega. Bu holda  $\bar{a}$  va  $\bar{c}$  vektorlar  $\bar{c}$  vektorning bir tomonida joylashgan va  $pr_c \bar{a} > 0$  bo'ladi. Agar  $\bar{a}, \bar{c}, \bar{g}$  chap uchlik bo'lsa,  $pr_c \bar{a} < 0$  va  $pr_c \bar{a} |\bar{c}| \bar{g}$  vektor  $\bar{g}$  vektorga qarama-qarshi yo'nalgandir. Demak,  $pr_c \bar{a} |\bar{c}| \bar{g}$  vektor yo'nalishi  $[\bar{a}, \bar{c}]$  vektor yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Natijada  $[\bar{a}, \bar{c}] = pr_c \bar{a} \cdot |\bar{c}| \bar{g}$  tenglikni hosil qildik.

**3-ta'rif.** Uchta  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  vektorlarning aralash ko'paytmasi deb,  $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$  miqdorga aytiladi va quyidagi ko'rinishda belgilanadi:  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \equiv ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$ .

**2-tasdiq.** Berilgan nokomplanar (chiziqli erkli)  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  vektorlar o'ng uchlikni tashkil qilsa, ularning aralash ko'paytmasi ularga qurilgan parallelipipedning hajmiga, aks holda esa hajmning manfiy ishora bilan olinganiga tengdir.

**Isbot:** Biz  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmini  $V$  bilan belgilaymiz. Agar  $S$  bilan  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzasini belgilasak,  $[\vec{a}, \vec{b}] = S\vec{e}$  tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda  $\vec{e}$  vektor  $[\vec{a}, \vec{b}]$  ko‘paytma bilan bir xil yo‘nalgan birlik vektordir. Skalyar ko‘paytmani proeksiya yordamida yozsak,  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = S|\vec{e}| pr_{\vec{e}} \vec{c}$  tenglikni hosil qilamiz.



13-chizma.

Bu yerda  $pr_{\vec{e}} \vec{c}$  absolyut qiymati bo‘yicha  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlarga qurilgan va asosi  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlarga yasalgan parallelogrammdan iborat parallelepipedning balandligiga tengdir. Agar  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  o‘ng uchlikni tashkil qilsa,  $pr_{\vec{e}} \vec{c} = h$ , agar  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  chap uchlikni tashkil qilsa,  $pr_{\vec{e}} \vec{c} = -h$  tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda  $h$  qaralayotgan parallelepipedning balandligidir. Shuning uchun  $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = Sh$  formulani hisobga olsak biz bevosita tasdiq isbotini olamiz.

Endi biz vektor ko‘paytma xossalarini isbotlashga kirishamiz.

**1-xossa** isboti  $\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$  va  $\bar{a}, \bar{b}, [\bar{b}, \bar{a}]$  uchliklarning orientatsiyalari har xil ekanligidan kelib chiqadi: birinchi uchlik o'ng orientatsiyaga, ikkinchi uchlik chap orientatsiyaga egadir.

**2-xossa**ni isbotlash uchun ikkita holni ko'ramiz  $\lambda > 0$  va  $\lambda < 0$ .

Birinchi holda  $\bar{a}$  va  $\lambda\bar{a}$  vektorlar bir xil yo'nalishga ega va shuning uchun  $\bar{a}, \bar{b}, [\lambda\bar{a}, \bar{b}]$  va  $\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$  vektorlar bir hil orientatsiyaga ega. Demak,  $[\lambda\bar{a}, \bar{b}]$  va  $\lambda[\bar{a}, \bar{b}]$  vektorlar uzunliklari teng va bir xil yo'nalishga ega.

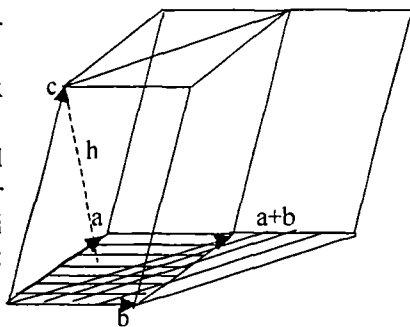
Ikkinchi holda  $\bar{a}$  va  $\lambda\bar{a}$  vektorlar yo'nalishlari qarama-qarshi va  $\bar{a}, \bar{b}, [\lambda\bar{a}, \bar{b}]$  va  $\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$  vektorlar uchliklari har xil orientatsiyaga ega bo'ladi. Bundan esa  $[\lambda\bar{a}, \bar{b}]$  va  $[\bar{a}, \bar{b}]$  vektorlar qarama qarshi yo'nalishga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak,  $[\lambda\bar{a}, \bar{b}]$  va  $\lambda[\bar{a}, \bar{b}]$  vektorlar bir xil yo'nalishga ega va uzunliklari tengdir.

**3-xossa** isbotini keltiramiz.

a)  $\bar{a}, \bar{b}$ , va  $\bar{c}$  komplanar vektorlar,  $\bar{e}, \bar{c}, \bar{g}$  - o'ng uchlik bo'lib,  $\bar{e}, \bar{g}$  vektorlar 1-tasdiq shartlarini qanoatlantiruvchi vektorlar bo'lsa, ikkita vektor ko'paytmani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$[\bar{a}, \bar{c}] = pr_c \bar{a} |\bar{c}| \bar{g}$$

va



$$[\bar{b}, \bar{c}] = pr_c \bar{b} |\bar{c}| \bar{g}$$

14-chizma.

Endi proeksiya xossasidan foydalanib,

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = pr_c (\bar{a} + \bar{b}) |\bar{c}| \bar{g} = pr_c \bar{a} |\bar{c}| \bar{g} + pr_c \bar{b} |\bar{c}| \bar{g}$$

tenglikni hosil qilamiz.

b)  $\bar{a}, \bar{b}$ , va  $\bar{c}$  komplanar vektorlar emas;

Bu holda  $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}], [\bar{a}, \bar{c}] [\bar{b}, \bar{c}]$  vektorlarning barchasi  $\bar{c}$  vektorga perpendikulyar bo'lganligi uchun ular komplanar oilani tashkil etadi. Demak, ular chiziqli bog'lanishli bo'ladi, ya'ni kamida bittasi noldan farqli  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sonlari mavjud bo'lib

$$\lambda_1 [\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] + \lambda_2 [\bar{a}, \bar{c}] + \lambda_3 [\bar{b}, \bar{c}] = \bar{0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan

$$\lambda [\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = -\lambda_2 [\bar{a}, \bar{c}] - \lambda_3 [\bar{b}, \bar{c}]$$

tenglikni hosil qilib, uning ikkala tomonini  $\bar{b}$  ga skalyar ko'paytiramiz va

$$\lambda_1 (\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} \bar{b} = -\lambda_2 \bar{a} \bar{c} \bar{b}$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi aralash ko'paytma haqidagi tasdiqqa ko'ra

$$(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} \bar{b} \text{ va } \bar{a} \bar{c} \bar{b}$$

aralash ko'paytmalarning absolyut qiymatlari mos ravishda  $V_{(a+b)cb}$ ,  $V_{acb}$  parallelipiped hajmlariga tengdir.

Bu parallelipipedlarning asoslari sifatida mos ravishda  $\bar{a} + \bar{b}, \bar{b}$  va  $\bar{a}, \bar{b}$ , vektorlarga qurilgan parallelogrammlarni olsak, ularning balandligi tengligini ko'ramiz. Shuning uchun  $V_{acb} = S_1 h$  va  $V_{(a+b)cb} = S_2 h$  tengliklardan va ularning asoslari yuzalari ham tengligidan bu hajmlarning tengligi kelib chiqadi.

Endi  $(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} \bar{b}$  va  $\bar{a} \bar{c} \bar{b}$  aralash ko'paytmalar bir xil ishoralarga



ega bo'lishi,  $\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}, \bar{b}$  uchlik orientatsiyasi  $\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}$  uchlik orientatsiyasi bilan ustma-ust tushishidan kelib chiqadi. Demak,  $(\bar{a} + \bar{b}) \bar{c} \bar{b} = \bar{a} \bar{c} \bar{b}$ . Bundan esa  $\lambda_1 = -\lambda_2$  munosabatni hosil qilamiz. Xuddi shunday usul bilan  $\lambda_1 = -\lambda_3$  tenglikni isbotlaymiz.

Demak,

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$$

tenglik o'rinlidir.

**4-xossaning isboti**  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlar parallel bo'lganda ular orasidagi burchakning sinusi nolga tengligidan kelib chiqadi.

### 8-§. Vektor va aralash ko'paytmani koordinatalar orqali ifodalash

O'ng uchlikni tashkil qiluvchi ortonormal  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  bazis berilgan bo'lsa,  $\bar{a}, \bar{b}$ , va  $\bar{c}$  vektorlarni

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3,$$

$$\bar{b} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3,$$

$$\bar{c} = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + c_3 \bar{e}_3$$

ko'rinishda yozib, skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarni hisoblaymiz.

Skalyar ko'paytma uchun

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{ tenglik hosil bo'ladi.}$$

Vektor ko'paytmani hisoblashda

$$[\overline{e_1}, \overline{e_2}] = \overline{e_3} \quad [\overline{e_3}, \overline{e_1}] = \overline{e_2}, \quad [\overline{e_2}, \overline{e_3}] = \overline{e_1}$$

munosabatlarni hisobga olib

$$[\overline{a}, \overline{b}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \overline{e_1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \overline{e_2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \overline{e_3}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Qulaylik uchun vektor ko'paytmani koordinatalari orqali

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \end{array} \right\}$$

ko'rinishda yozish qabul qilingan.

Bundan foydalanib aralash ko'paytma uchun

$$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

formulani hosil qilamiz.

## 9-§. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi

Tekislikda kutb koordinatalar sistemasini kiritish uchun birorta  $O$  nuqtani va bu nuqtadan o'tuvchi o'qni tanlab olamiz. Tanlangan nuqtani qutb boshi, o'qni esa qutb o'qi deb ataymiz va uni  $\ell$  bilan belgilaymiz.

Tekislikda berilgan ixtiyoriy  $O$  nuqtadan farqli  $M$  nuqta uchun  $\rho$  bilan  $|OM|$  masofani,  $\varphi$  bilan esa  $\ell$  o'q bilan  $OM$  nur orasidagi burchakni belgilaymiz. Bu kattaliklar  $M$  nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va  $M(\rho, \varphi)$  ko'rinishda belgilanadi.

Tekislikning  $O$  nuqtadan farqli nuqtalari bilan qutb koordinatalari o'rtasidagi moslik o'zaro bir qiymatli bo'lishi uchun  $\rho$  va  $\varphi$  kattaliklar uchun quyidagi chegara qo'yiladi:  $0 < \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$

Agar  $(x, y)$  Dekart koordinatalar sistemasini 15-chizmadagidek kiritsak, quyidagi

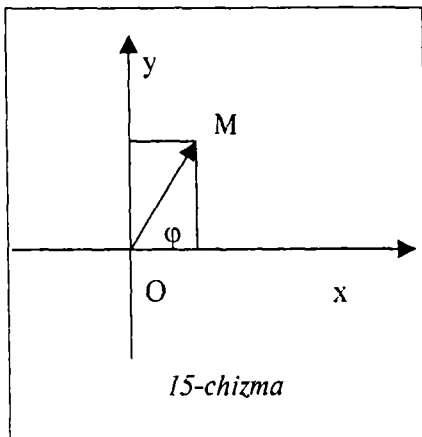
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

bog'lanishlarni olamiz. Berilgan  $M$  nuqtaning Dekart koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning qutb koordinatalarini topish uchun

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

formula bo'yicha birinchi qutb koordinatani topamiz. Ikkinchi qutb

koordinatani topish uchun  $M$  nuqtaning qaysi chorakda joylashganligini bilishimiz kerak va



15-chizma

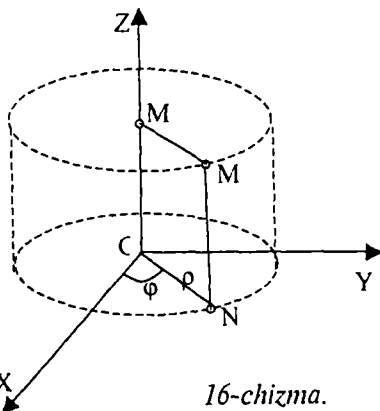
$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arccctg} \frac{x}{y}$$

tengliklardan foydalanishimiz kerak.

## 10-§. Silindrik koordinatalar sistemasi

Fazoda silindrik koordinatalar sistemasini kiritish uchun biz fazoda bitta tekislikni va unga tegishli birorta  $O$  nuqtani tanlashimiz kerak. Tanlangan tekislikda  $O$  nuqtani qutb boshi sifatida olib, bu tekislikda qutb koordinatalarini kiritamiz. Berilgan tekislikka perpendikulyar va  $O$  nuqtadan o'tuvchi o'qni  $OZ$  o'qi sifatida olib, fazoda silindrik koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz:

fazoda berilgan  $M$  nuqtaning



16-chizma.

tekislikdagi proyeksiyasini  $N$  bilan, uning  $OZ$  o'qdagi proeksiyasini  $M'$  bilan belgilaymiz. Silindrik koordinatalar sifatida  $(\rho, \varphi, z)$  kattaliklarni olamiz. Bu yerda  $(\rho, \varphi)$  -  $N$  nuqtaning berilgan tekislikdagi qutb koordinatalari,  $z$  esa  $OM'$  kesma kattaligidir.

Agar biz fazoda  $OXY$  tekislik sifatida tanlangan tekislikni,  $OX$  o'q sifatida qutb o'qini olib dekart koordinatalar sistemasini kiritsak

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

bog'lanishlarni olamiz. Bu yerda  $\rho, \varphi$  o'zgaruvchilar uchun

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

munosabatlar o'rinalidir.

Fazoda silindrik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo bitta o'qqa ega bo'lgan ichma-ich joylashgan (konsentrik) silindrlarga ajraladi. Fazoning har bir nuqtasi bu silindrlarning faqat bittasiga tegishli bo'ladi. Agar nuqtaning silindrik koordinatalari  $\rho, \varphi, z$  bo'lsa, bu nuqta yotgan silindrning radiusi  $\rho$  ga teng bo'ladi. Agar nuqta silindrlar o'qiga tegishli bo'lsa, u tegishli bo'lgan silindrning radiusi nolga teng bo'ladi. Yuqoridagi tanlangan dekart koordinatalar sistemasida silindrlarning o'qi  $Oz$  o'qidan iboratdir. Bu dekart koordinatalar sistemasida konsentrik silindrlar tenglamasi

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

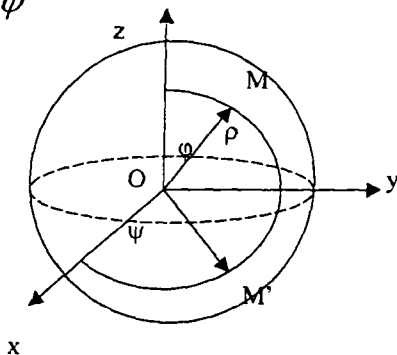
ko'rinishda bo'ladi.

## 11-§. Sferik koordinatalar sistemasini

Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritish uchun  $Oxyz$  –Dekart koordinatalar sistemasini kiritilgan deb hisoblab, berilgan  $M$  nuqta uchun markazi koordinata boshida bo'lgan va radiusi  $\rho = |OM|$  ga teng bo'lgan sferani qaraymiz. Berilgan  $M$  nuqtaning  $Oxy$  tekisligiga proyeksiyasini  $M'$  bilan,  $\overline{OM}$  vektor va  $Oz$  o'qi orasidagi burchakni  $\varphi$  bilan,  $\overline{OM'}$  vektor va  $Ox$  o'qi orasidagi burchakni  $\psi$  bilan belgilaymiz.

Burchaklarni aniqlashda  $\varphi$  burchak shunday tanlanadiki,  $Oz$  o'qining musbat yo'nalishi tomonidan qaraganimizda,  $Ox$  o'qini  $\overline{OM'}$  nur bilan ustma-ust tushirish uchun soat mili yo'nalishiga qarshi yo'nalishda  $\varphi$  burchakka burish kerak. Yuqorida aniqlangan  $\rho, \varphi, \psi$  kattaliklar  $M$  nuqtaning sferik koordinatalari deyiladi. Bunga sabab, fazoning koordinatalari  $\rho = const$  tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalari to'plami sferani tashkil qiladi. Fazoning har bir nuqtasi radiusi koordinata boshidan shu nuqtagacha bo'lgan masofaga teng bo'lgan sferada yotadi. Nuqtaning dekart koordinatalari bilan sferik koordinatalari orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \psi \cos \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ y = \rho \sin \psi \sin \varphi, & -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2} \\ z = \rho \cos \psi \end{cases}$$



17-chizma.

Odatda fazo nuqtalari bilan ularning sferik koordinatalari orasidagi moslik o'zaro bir qiymatli bo'lishi uchun

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < \pi$$

chegaralar qo'yiladi.

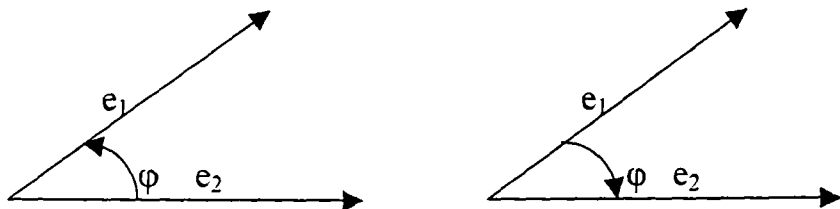
Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo markazi

bitta nuqtada bo'lgan sferalarga ajraladi. Agar nuqtaning sferik koordinatalari  $\rho, \varphi, \psi$  bo'lsa, u yotgan sferaning radiusi  $\rho$  ga teng bo'ladi. Bu masofa nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofaga tengdir. Nuqta  $\rho$  radiusli sferada yotgan bo'lsa,

$\varphi$  va  $\psi$  burchaklar uning sferadagi vaziyatini aniqlaydi.

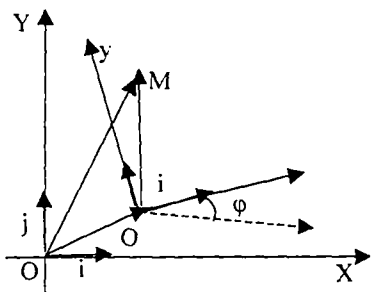
## 12-§. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish

Orientasiya: Bir vektordan ikkinchisiga qisqa burilish yo'nalishi soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lsa, bu vektorlar o'ng ikkilik, aks holda chap ikkilik tashkil qiladi deyiladi. Bazis sifatida biror ikkilik tanlansa, biz orientatsiya tanlab olingan deb hisoblaymiz. Bizga  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$  va  $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$  orthonormal bazislar berilgan bo'lsin. Bu bazislar yordamida kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasilarini mos ravishda  $Oxy$  va  $O'x'y'$  bilan belgilaylik. Nuqtaning “eski” va “yangi” koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz. “Yangi” koordinatalar sistemi markazining “eski” koordinata sistemasidagi koordinatalarini  $(a, b)$  bilan belgilaylik.



18-chizma.

Tekislikda  $M$  nuqta berilgan bo'lib, uning  $Oxy$  va  $O'x'y'$  sistemalardagi koordinatalari mos ravishda  $(x, y)$  va  $(x', y')$  juftliklardan iborat bo'lsin.



19-chizma.

Biz quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad \overline{O'M} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}',$$

$$\overline{OO'} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

Har bir vektorni  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$  bazis orqali ifodalash mumkinligi uchun

$$\bar{i}' = a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j},$$

$$\bar{j}' = a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j} \quad (1)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu ifodalarni

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \quad \overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

tengliklarga qo'yib

$$x\bar{i} + y\bar{j} = a\bar{i} + b\bar{j} + a_{11}x'\bar{i} + a_{12}x'\bar{j} + a_{21}y'\bar{i} + a_{22}y'\bar{j}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bazis vektorlari  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$  chiziqli erkli oilani tashkil etganligi uchun yuqoridagi munosabatdan

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + a$$

$$y = a_{12}x' + a_{22}y' + b \quad (2)$$

formulalarni olamiz. Endi  $a_{ij}$  koeffitsientlarni topish uchun ikkita holni qaraymiz.

Birinchi hol:  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$  va  $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$  bazislar bir xil orientatsiyaga ega.

Bu holda agar  $\varphi$  bilan  $\bar{i}$  va  $\bar{i}'$  vektorlar orasidagi burchakni belgilasak,  $\bar{j}$  va  $\bar{j}'$  vektorlar orasidagi burchak ham  $\varphi$  ga teng bo'ladi. Yuqoridagi

(1) tengliklarning har ikkalasini  $\bar{i}$  va  $\bar{j}$  vektorlarga skalyar ko'paytirib,

$$a_{11} = \cos \varphi, a_{12} = \sin \varphi, a_{21} = -\sin \varphi, a_{22} = \cos \varphi$$

formulalarni olamiz. Agar  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$  va  $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$  bazislar har xil orientatsiyaga ega bo'lsa,  $\bar{j}$  va  $\bar{j}'$  vektorlar orasidagi burchak  $\pi - \varphi$  ga teng bo'ladi. Bu holda (1) tengliklarning har birini  $\bar{i}$  va  $\bar{j}$  vektorlarga skalyar ko'paytirib  $a_{11} = \cos \varphi, a_{12} = \sin \varphi, a_{21} = -\sin \varphi, a_{22} = \cos \varphi$  formulalarni hosil qilamiz. Bu formulalarni (2) formulalarga qo'yib, mos ravishda quyidagi ikkita formulalarni olamiz:

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + a \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b \end{cases} \quad (3)$$

Bu holda o'tish determinanti uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$$

tenglik o'rinli.

Ikkinchi holda bazislarning orientatsiyalari har xil va koordinatalarni almashtirish formulalari

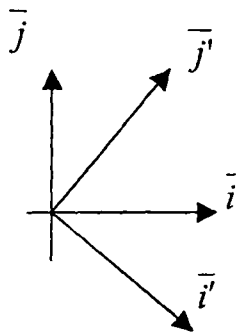
$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi + a \\ y = x' \sin \varphi - y' \cos \varphi + b \end{cases} \quad 4)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu holda o'tish determinanti uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -1$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, koordinatalar sistemasini almashtirganimizda o'tish matritsasining determinanti musbat bo'lsa, orientatsiya o'zgarmaydi. Agar o'tish matritsasining determinanti manfiy bo'lsa, orientatsiya qarama-qarshi orientatsiyaga o'zgaradi.





### 13-§. Birinchi bob bo'yicha oraliq nazorat uchun topshiriqlar namunalari

#### Variant № 1

1.  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$  tenglikni isbotlang.

2. Berilgan  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$  vektorlar uchun  $(\vec{x}, \vec{a}) = -5$ ,  $(\vec{x}, \vec{b}) = -11$ ,  $(\vec{x}, \vec{c}) = 20$  shartlarni qanoatlantiruvchi  $\vec{x}$  vektorni toping.

3. Uchburchakning  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(-4; -2; 0)$  va  $C(3; -2; 1)$  uchlari berilgan. Uning  $B$  uchidagi burchagini toping.

#### Variant № 2

1.  $(\alpha + \mu)a = \alpha a + \mu a$  tenglikni isbotlang.

2. Uchburchakning  $A(3; 2; -3)$ ,  $B(5; 1; -1)$  va  $C(1; -2; 1)$  uchlari berilgan.  $A$  uchining tashqi burchagini toping.

3. Berilgan  $a = 2i - j + 3k$ ,  $b = i - 3j + 2k$ ,  $c = 3i + 2j - 4k$  vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini toping.

#### Variant № 3

1.  $(a+b, c) = (a, c) + (b, c)$  tenglikni isbotlang.

2. Berilgan  $a = \alpha i - 3j + 2k$ ,  $b = i + 2j - \alpha k$  vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchun  $\alpha$  ning qiymati qanday bo'lishi kerak.

3. Berilgan  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar orasidagi  $\varphi$  burchak  $\frac{\pi}{6}$  ga tengligi va  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 1$  ekanligi ma'lum bo'lsa,  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$  va  $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$  vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasi topilsin.

#### Variant № 4

1.  $[\lambda a, b] = [a, \lambda b] = \lambda [a, b]$  tenglikni isbotlang.
2. Uchburchakning  $A(-1; -2; 4)$   $B(-4; -2; 0)$  va  $C(3; -2; 1)$  uchlari berilgan. Uning  $B$  uchidagi tashqi burchagini toping.
3. O'ng uchlik tushunchasini keltiring.

#### Variant № 5

1. Ikkita nokollinear vektorlarning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.
2. Berilgan  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar orasidagi  $\varphi$  burchak  $\frac{\pi}{6}$  ga tengligi va  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 1$  ekanligi ma'lum bo'lsa,  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$  va  $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$  vektorlar orasidagi burchak topilsin.
3. Chap uchlik tushunchasini keltiring

#### Variant № 6

1. Uchta nokollinear vektorlarning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.
2.  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzini toping.
3. Vektor ko'paytmaning ta'rifini keltiring.

#### Variant № 7

1. Bazis va koordinatalar. Dekart koordinatalar sistemasi.
2. Berilgan  $\vec{a} = \{1, 0\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 1\}$  vektorlar orqali  $\vec{c} = \{-1, 0\}$  vektorni chiziqli ifodalang.
3. Aralash ko'paytmani aniqlang.

#### Variant № 8

1. Skalyar ko'paytmaning dekart koordinatalardagi ifodasini keltirib chiqaring.
2. Uchburchakning  $A(3; 4; -1)$   $B(2; 0; 3)$  va  $C(-3; 5; 4)$  uchlari berilgan. Uchburchakning yuzi hisoblansin.

3. Berilgan  $a = \{2, -1, 3\}$ ,  $b = \{1, 4, 2\}$  vektorlarning vector ko'paytmasini toping.

### Variant № 9

1. Vektor ko'paytmaning dekart koordinatalardagi ifodasini keltirib chiqaring.

2. Fazoda  $M(-5; 7; -6)$  va  $N(7; -9; 9)$  nuqtalar berilgan.

Berilgan  $\vec{a} = \{1; -3; 1\}$  vektorning  $\overline{MN}$  vektor yo'nalishdagi o'qqa proeksiyasini toping.

3. Berilgan  $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 4, 2\}$  vektorlarning kollinear bo'lish yoki bo'lmashligini aniqlang.

### Variant № 10

1. Aralash ko'paytmaning dekart koordinatalardagi ifodasini keltirib chiqaring.

2. Uchlari  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(5; 5; 4)$ ,  $C(3; 2; -1)$ ,  $D(4; 1; 3)$  nuqtalarda bo'lgan tetraedr hajmi hisoblansin.

3. Berilgan  $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 4, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{3, 1, -1\}$  vektorlarning komplanar bo'lish yoki bo'lmashligini aniqlang.

### Variant № 11

1. Skalyar ko'paytmaning xossalarini keltiring.

2. Berilgan  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar orasidagi  $\varphi$  burchak  $\frac{\pi}{6}$  ga tengligi va  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 1$  ekanligi ma'lum bo'lsa,  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$  va  $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$  vektorlari orasidagi burchak topilsin.

3. Berilgan  $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 4, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{3, 1, -1\}$  vektorlarga qurilgan parallelopipedning hajmini toping.

### Variant № 12

1. To'g'ri chiziqda koordinatalar sistemasini kiriting.

2. Berilgan  $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$   $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$  vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchun  $\alpha$  ning qiymati qanday bo'lishi kerak

3. Berilgan  $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 4, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{3, 1, -1\}$  vektorlarning o'ng yoki chap uchlik hosil qilishini aniqlang.

### Variant № 13

1. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini kiriting.

2. Uchlari  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(5; 5; 4)$ ,  $C(3; 2; -1)$ ,  $D(4; 1; 3)$  nuqtalarda bo'lgan tetraedr balandligi hisoblansin.

3. Berilgan  $\vec{a} = \{2, -1, 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 4, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{3, 1, -1\}$  vektorlarning bir tekislikka parallel bo'lishi yoki bo'lmashligini aniqlang.

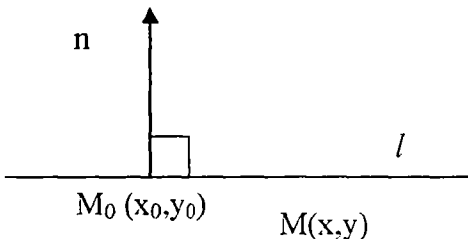
## II BOB

### TO'G'RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

#### 1-§. Tekislikda to'g'ri chiziqlar

##### 1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

Tekislikda  $Oxy$  Dekart koordinatalar sistemasini kiritilgan bo'lsin. Agar tekislikda biror  $\ell$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, unda yotgan nuqtalar koordinatalari birinchi darajali  $Ax + By + C = 0$



21-chizma.

tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Tekislikda yangi  $O'x'y'$  koordinatalar sistemasini shunday kiritamizki  $\ell$  to'g'ri chiziq absissa o'qi bilan ustma-ust tushsin. Yangi  $O'x'y'$  koordinatalar sistemasida  $\ell$  to'g'ri chiziqdagi nuqtalarning koordinatalari  $y' = 0$  tenglamani qanoatlantiradi. Biz  $O'x'y'$  koordinatalar sistemasidan eski  $Oxy$  koordinatalar sistemasiga o'tsak yuqoridagi tenglama  $Ax + By + C = 0$  ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda koeffitsientlar quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:  $A^2 + B^2 > 0$

Testkari masala qo'yamiz, ya'ni berilgan tenglamaga  $Ax + By + C = 0$  ko'ra to'g'ri chiziqni aniqlaymiz.

Koordinatalari  $Ax + By + C = 0$  tenglamani qanoatlantiruvchi  $M(x_0, y_0)$  nuqtani olamiz. Agar  $\ell$  bilan  $M(x_0, y_0)$  nuqtadan o'tuvchi va  $\vec{n} = \{A, B\}$  vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziqni belgilasak,  $M(x, y)$  nuqta  $\ell$  to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun  $\overline{M_0M}$  vektor

$\vec{n} = \{A, B\}$  vektorga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir. Ortogonallik shartini skalyar ko'paytma orqali yozsak

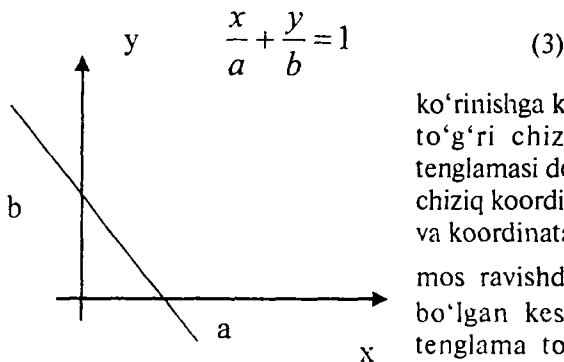
$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Agar (1) tenglamada  $A = 0$  bo'lsa, (1) tenglama  $Ox$  o'qiga parallel to'g'ri chiziqni,  $B = 0$  va  $C = 0$  bo'lgan hollarda mos ravishda  $Oy$  o'qiga parallel va koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqni olamiz.

Bizga berilgan (1) tenglamaning hamma koeffitsientlari noldan farqli bo'lsa, tenglamani

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1 \quad (2)$$

ko'rinishda yozib va  $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$  belgilashlar kiritib, uni



ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deyiladi. Bu holda to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tmaydi va koordinata o'qlaridan kattaliklari mos ravishda  $a$  va  $b$  larga teng bo'lgan kesmalarni ajratadi. Bu tenglama to'g'ri chiziqni chizish uchun qulaydir.

22-chizma.

## 2-§. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

To'g'ri chiziqqa parallel har qanday vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi. Agar to'g'ri chiziqning bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektori berilgan bo'lsa, uning tenglamasini tuzish masalasini qaraylik. Agar  $\vec{a} = \{\ell, m\}$  yo'naltiruvchi vektor bo'lib,  $M(x_0, y_0)$  nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsa, to'g'ri chiziqning har bir  $M(x, y)$  nuqtasi uchun  $\overline{M_0M}$  vektor  $\vec{a} = \{\ell, m\}$  vektorga kollinear bo'lishi kerak. Kollinearlik shartini yozsak, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} \quad (4)$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Yuqoridagi (4) tenglamaning o'ng va chap tomonlarini  $t$  bilan belgilasak quyidagi parametrik tenglamalarni olamiz:

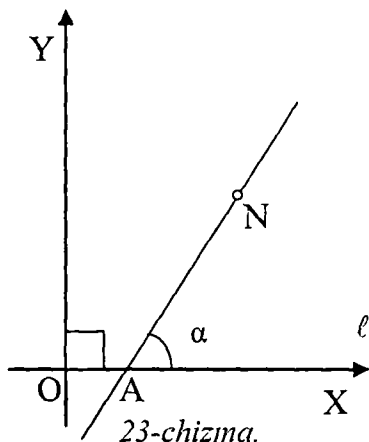
$$x = x_0 + \ell t, \quad y = y_0 + m t$$

Agar absissa o'qiga parallel bo'lmagan  $L$  to'g'ri chiziq  $OX$  o'qini  $A$  nuqtada kesib o'tsa, absissa o'qi bilan to'g'ri chiziq orasidagi burchakni  $\varphi$  bilan belgilaymiz. Burchak  $\varphi$  yagona ravishda tanlanishi uchun to'g'ri chiziqning birorta yo'naltiruvchi

$\vec{a} = \{\ell, m\}$  vektorini tanlab burchakni  $OX$  o'qidan yo'naltiruvchi vektorga soat mili yo'nalishiga qarshi yo'nalishda hisoblaymiz. Bu burchakning tangensini  $k$  bilan belgilasak

$$k = \frac{m}{\ell}$$

tenglikni hosil qilamiz. To'g'ri chiziqning birorta  $M(x_0, y_0)$  nuqtasini bilsak, uning tenglamasini



$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (5)$$

ko'rinishda yoza olamiz. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz. Agar  $L_1$  va  $L_2$  to'g'ri chiziqlar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ va } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchak ularning  $\overline{n_1} = \{A_1, B_1\}$ ,  $\overline{n_2} = \{A_2, B_2\}$  normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Vektorlar orasidagi burchak bizga ma'lum bo'lgan

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (6)$$

formula bilan hisoblanadi. Agar  $L_1$  va  $L_2$  to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \text{ va } \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} \quad (7)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning yo'naltiruvchi  $a_1 = \{\ell_1, m_1\}$  va  $a_2 = \{\ell_2, m_2\}$  vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Bu holda ham to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak skalyar ko'paytma yordamida

$$\cos \varphi = \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2} \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2}} \quad (8)$$

formula bilan hisoblanadi. To'g'ri chiziqlarning parallel yoki perpendikulyar bo'lishi mos ravishda ularning normal vektorlari (agar ular (5) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa) yoki yo'naltiruvchi vektorlarning (agar ular (7) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa) parallel yoki perpendikulyar bo'lishiga ekvivalentdir. Shuning uchun

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ va } A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

tengliklar to'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlaridir.



*Mustaqil ish – 1.* Agar to'g'ri chiziqlar (7) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning parallel yoki perpendikulyar bo'lishi shartlarini yozing.

To'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$y = k_1x + b_1 \text{ va } y = k_2x + b_2 \quad (9)$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning absissa o'qi bilan hosil qilgan burchaklarini  $\alpha_1$  va  $\alpha_2$  bilan belgilasak, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak  $\varphi$  uchun

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \quad (10)$$

formula orqali

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

munosabatni hosil qilamiz.

*Mustaqil ish-2.* To'g'ri chiziqlar (9) tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular uchun paralellik va perpendikulyarlik shartlarini yozing.

### 3-§. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

Bizga  $\ell$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, koordinata boshidan o'tuvchi va  $\ell$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqni  $L$  bilan, ularning kesishish nuqtasini  $M_0$  bilan belgilaymiz. Agar  $\vec{n}$  bilan  $L$  to'g'ri chiziqning birlik yo'naltiruvchi vektorini belgilasak, u

$$\vec{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Tekislikning  $M(x, y)$  nuqtasi  $l$  to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun  $\overline{OM}$  vektorning  $L$  to'g'ri chiziqqa proeksiyasi  $\overline{OM_0}$  vektorning uzunligiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Agar  $\overline{OM_0}$  vektorning uzunligini  $p$  bilan belgilasak,

$$pr_n \overline{OM} = p$$

tenglikni hosil qilamiz. Proeksiyani skalyar ko'paytma orqali ifodalash natijasida biz

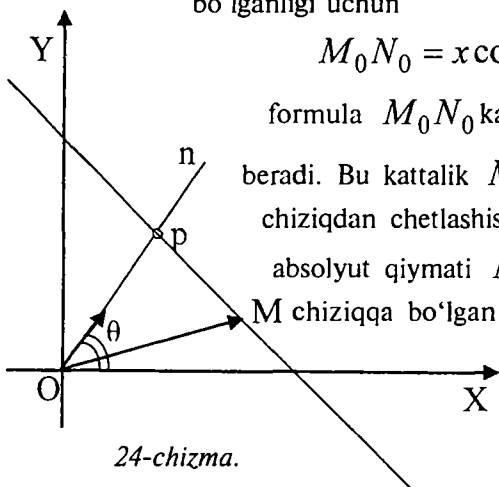
$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

Agar  $M(x, y)$  nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa,  $N_0$  bilan  $M(x, y)$  nuqtaning  $L$  to'g'ri chiziqdagi proeksiyasini belgilasak,  $\overline{M_0N_0}$  kesma kattaligi uchun quyidagi  $M_0N_0 = ON_0 - OM_0 = ON_0 - p$  tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda  $ON_0 = pr \cdot OM$  bo'lganligi uchun

$$M_0N_0 = x \cos \theta + y \sin \theta - p$$

formula  $M_0N_0$  kattalikni hisoblash imkonini beradi. Bu kattalik  $M(x, y)$  nuqtaning  $l$  to'g'ri chiziqdan chetlashishi deyiladi. Chetlashishning absolyut qiymati  $M(x, y)$  nuqtadan  $l$  to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofaga tengdir. Demak, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash uchun to'g'ri chiziq tenglamasini



24-chizma.

normal ko'rinishga keltirish keyin esa nuqta koordinatalarini normal tenglamaning chap tomonidagi o'zgaruvchilar o'rni qo'yish yetarlidir.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltirish uchun uning ikkala tarafini

$$t = \mp \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ifodaga ko'paytirish zarur bo'ladi. Bu yerda  $tC = -p$  tenglik bajarilishi kerak. Shuning uchun  $t$  ifodaning ishorasi  $C$  ning ishorasiga qarama-qarshi bo'lishi lozimdir.

## 4-§. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari

### 4.1 Tekislikning umumiy tenglamasi

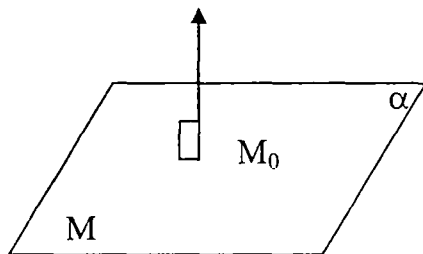
Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan va unda  $\alpha$  tekislik berilgan bo'lsin. Bu tekislikka tegishli nuqtalar koordinatalari birinchi darajali chiziqli tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Tekislikka tegishli  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtani olib,  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar

birorta vektorni  $\vec{n}$  bilan

belgilasak,  $M(x, y, z)$  nuqta  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lishi uchun

$\overline{M_0M}$  vektorning  $\vec{n}$  vektorga perpendikulyar bo'lishiga teng kuchlidir. Demak,  $M(x, y, z)$

nuqtaning koordinatalari



25-chizma.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

tenglamani qanoatlantirishi kerak. Agar  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$  belgilashni kiritsak,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

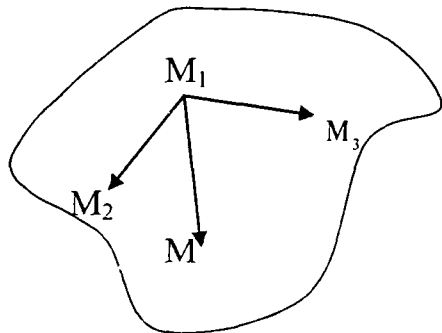
Teskari masala qo'yamiz:  $Ax + By + Cz + D = 0$  tenglama berilgan bo'lsa, koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami tekislikni hosil qilishini ko'rsatamiz. Koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi birorta  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtani olib,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan o'tuvchi va  $\vec{n} = \{A, B, C\}$  vektorga perpendikulyar tekislikni  $\alpha$  bilan belgilasak, bu tekislikdagi nuqtalarning koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantirishini ko'ramiz. Va aksincha, koordinatalari berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning har biri  $\alpha$  tekislikka tegishlidir.

#### 4.2 Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$

nuqtalar berilgan bo'lsa, ulardan o'tuvchi  $\alpha$  tekislik tenglamasini tuzaylik. Fazoning  $M(x, y, z)$  nuqtasi  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lishi

$M_1M$ ,  $M_2M$ ,  $M_3M$  vektorlarning komplanar bo'lishiga teng kuchlidir. Bu vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishini koordinatalar orqali yozsak



26-chizma.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

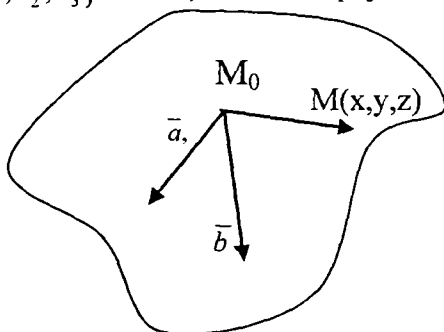
### 4.3 Berilgan nuqtadan o'tuvchi va ikki vektorga parallel tekislik tenglamasi

Bizga fazoda  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqta va nokollinear  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlar berilgan bo'lsin. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlarga parallel  $\alpha$  tekislik tenglamasini tuzaylik. Bu holda  $M(x, y, z)$  nuqta  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lishi uchun  $\overline{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$  vektorlarning komplanar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar  $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$  bo'lsa, aralash ko'paytmani koordinatalar orqali yozsak

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.



27-chizma.

### 4. 4 Ikki tekislikning o'zaro vaziyati

Bizga dekart koordinatalari kiritilgan fazoda  $\alpha$  va  $\beta$  ikkita tekisliklar mos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Bu tekisliklar orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Ularning  $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$  va  $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$  normal vektorlari orasidagi burchakning kosinusini

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

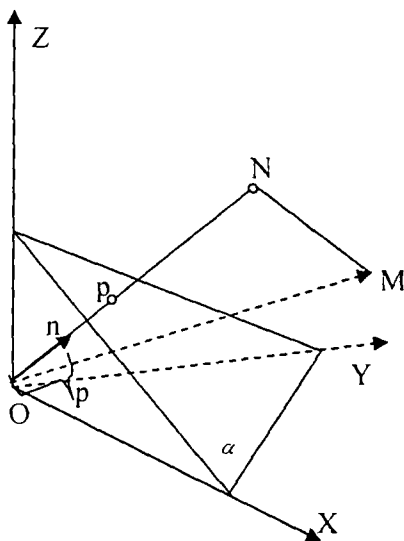
formula bo'yicha hisoblashni bilamiz. Tekisliklarning parallellik sharti ularning normal vektorlari parallelligiga teng kuchlidir. Shuning uchun bu shart

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ko'rinishda yoziladi. Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti ularning normal vektorlari perpendikulyarligiga teng kuchli va

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

ko'rinishda yoziladi.



28-chizma.

## 5-§. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash

Fazoda  $\alpha$  tekislik berilgan bo'lsa, koordinata boshidan bu tekislikka perpendikulyar  $\ell$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz va bu to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini  $M_0$  bilan belgilaymiz. To'g'ri chiziqning  $\overline{OM}_0$  vektorga parallel yo'naltiruvchi birlik  $\vec{e}$  vektorini

$$\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Bu yerda  $\vec{e}$  vektorning koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari mos ravishda  $\alpha, \beta, \gamma$  harflari bilan belgilangan. Agar  $M_0$  nuqta koordinata boshi bilan ustma-ust tushsa,  $\vec{e}$

vektor sifatida  $\ell$  to'g'ri chiziqqa parallel ixtiyoriy vektorni olish mumkin. Bu vektorning tanlanishi  $\ell$  to'g'ri chiziqda yo'nalishni aniqlaydi va  $\ell$  to'g'ri chiziq o'qqa aylanadi. Fazoning  $M(x, y, z)$  nuqtasi  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lishi uchun  $\overline{OM}$  vektorning  $\ell$  o'qqa proeksiyasi  $\overline{OM}_0$  vektor uzunligiga teng bo'lishi lozimdir. Demak,

$$pr_{\ell} \overline{OM} = p$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda  $p$  - koordinata boshidan  $\alpha$  tekislikkacha bo'lgan masofa). Bu tenglikda  $\bar{e}$  vektorning birlik vektor ekanligini hisobga olib, tenglikni

$$pr_{\ell} \overline{OM} = (\bar{e}, \overline{OM})$$

ko'rinishda yozamiz. Skalyar ko'paytmani koordinatalar orqali ifodalasak, yuqoridagi tenglik

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Bu tenglama yordamida berilgan  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash mumkin. Berilgan  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikkacha bo'lgan masofani  $d$  bilan,  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtaning  $\ell$  o'qdagi proeksiyasini  $N$  bilan belgilasak, yo'nalishga ega bo'lgan  $\overline{M_0N}$  kesmaning kattaligi  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtaning  $\alpha$  tekislikdan chetlanishi deyiladi. Bu chetlashishni  $\delta$  bilan belgilasak

$$\delta = M_0N = ON - OM_0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda  $p = OM_0$  tenglikni hisobga olsak

$$\delta = ON - p$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda  $\overline{OM}$  vektorning  $ON$  proyeksiyasini skalyar ko'paytma orqali yozsak,

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$$

formulani olamiz. Bundan esa  $d$  uchun

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

formulani topamiz.

Biz oldingi paragraflarda tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa formulasini ham keltirgan edik. To'g'ri chiziq va tekislik tenglamalarini vektor ko'rinishda yozib, biz ikkita formulani bitta formula ko'rinishida yozishimiz ham mumkin. Haqiqatan tekislikning

(to'g'ri chiziqning) normal vektorini  $\vec{n} = \{A, B, C\}$  (to'g'ri chiziq uchun  $\vec{n} = \{A, B\}$ ) ko'rinishda, tekislikka tegishli (to'g'ri chiziqqa tegishli) nuqta radius vektorini  $r_0$  bilan belgilasak, tekislik (to'g'ri chiziq) tenglamasini

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Radius -vektori  $\vec{r}_1$  bo'lgan  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan tekislikkacha (to'g'ri chiziqqacha) bo'lgan masofa skalyar ko'paytmaning moduliga tengdir:

$$d = \left| \left( \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right) \right|$$

## 6-§. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari

Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoda bizga  $\ell$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa,  $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  vektor  $\ell$  to'g'ri chiziqqa parallel vektorlardan bittasi bo'lsin,  $M(x_0, y_0, z_0)$  esa to'g'ri chiziqqa tegishli



birorta nuqta bo'lsin. Berilgan  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtaning radius-vektorini  $r_0$  bilan belgilasak, fazoda radius-vektori  $\bar{r}$  bo'lgan  $M(x, y, z)$  nuqtaning to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi  $\bar{r} - \bar{r}_0$  va  $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  vektorlarning parallelligiga teng kuchlidir. Bu shartni

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + at \quad (1)$$

ko'rinishda yozib, to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi tenglamasini olamiz. Bu yerda  $t$  parametr  $-\infty$  dan  $\infty$  gacha o'zgarganda  $\bar{r}$  vektor oxiri  $\ell$  to'g'ri chiziq nuqtalarini hosil qiladi. Yuqoridagi tenglamani koordinatalar orqali yozsak

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t, \quad z = z_0 + a_3 t$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tenglamalar to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi. Agar bu tenglamalardan  $t$  ni yo'qotsak

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (2)$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglama  $\ell$  to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

### 6.1 Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Fazoda radius-vektorlari mos ravishda  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  bo'lgan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  va  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  nuqtalar berilgan bo'lsa, bu nuqtalardan o'tgan  $\ell$  to'g'ri chiziq uchun  $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$  vektor yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Yuqoridagi (1) tenglamadagi vektor o'rniga  $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$  vektorni qo'ysak,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqta sifatida  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqtani olsak  $\ell$  to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi parametrik tenglamasini

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \frac{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)t}{\quad} \quad (3)$$

ko'inishda yozish mumkin. Agar (3) tenglamada  $t$  parametrni yo'qotib, uni koordinatlar orqali yozsak  $\ell$  to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4)$$

ko'inishda hosil qilamiz.

## 6.2 To'g'ri chiziq ikkita tekislikning umumiy qismidir

Bizga  $\ell$  to'g'ri chiziq kanonik

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

tenglama yordamida berilgan bo'lsin. Bu tenglamadan quyidagi ikkita tenglamalarni hosil qilamiz

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (5)$$

Bu tenglamalarni

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0 \quad a_3(y - y_0) - a_2(z - z_0) = 0$$

ko'inishda yozsak  $\ell$  to'g'ri chiziq

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0 \quad \text{va} \quad a_3(y - y_0) - a_2(z - z_0) = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi tekisliklarning kesishishidan iborat

bo'lishini ko'ramiz. Agar bizga ikkita  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{va} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilib

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi 2ga teng bo'lsa, ular parallel bo'lmaydi va birorta  $\ell$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini

tuzish uchun uning birorta nuqtasini va bitta yo'naltiruvchi vektorini bilishimiz yetarli. Biz koordinatalari

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

sistemani qanoatlantiruvchi  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtani topib,  $\ell$  to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida  $\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$  va  $\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$  vektorlarning vektor ko'paytmasini olamiz, chunki bu vektor ko'paytma  $\ell$  to'g'ri chiziqqa paralleldir.

### 7-§. Fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash

Bizga fazoda  $\ell$  to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqta berilgan bo'lsin. Biz bilamizki to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orqali bitta tekislik o'tkazish mumkin. Tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblashni oldingi paragraflarda o'rgangan edik. Buning uchun biz to'g'ri chiziqning tekislikdagi tenglamasini va nuqtaning tekislikdagi koordinatalarini bilishimiz kerak. Lekin bu ish har doim qulay bo'lmaganini uchun biz bevosita  $\ell$  to'g'ri chiziqning

$$\overline{r} = \overline{r_0} + a\overline{t}$$

tenglamasidan foydalanmoqchimiz. Bizga to'g'ri chiziqning

$M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtasi va uning yo'naltiruvchi  $\overline{a}$  vektori ma'lum.

Agar  $N$  nuqta  $\ell$  to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  va  $N$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq  $\ell$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  va  $N$  nuqtalar orasidagi masofa  $M_1(x_1, y_1, z_1)$

nuqtadan  $\ell$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofadir. Biz  $\overline{NM_1}$  vektorini

$$\overline{NM_1} = d\overline{e_1}$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu yerda  $d = |\overline{NM_1}|, \overline{e_1}$  esa  $\overline{NM_1}$  vektor bilan bir xil yo'nalishga ega bo'lgan birlik vektordir. Xuddi shunday  $\overline{a}$  vektorni

$$\overline{a} = |\overline{a}|\overline{e_2}$$

ko'rinishda yozib,  $\overline{NM_1}$  va  $\overline{a}$  vektorlarning vektor ko'paytmasi uchun

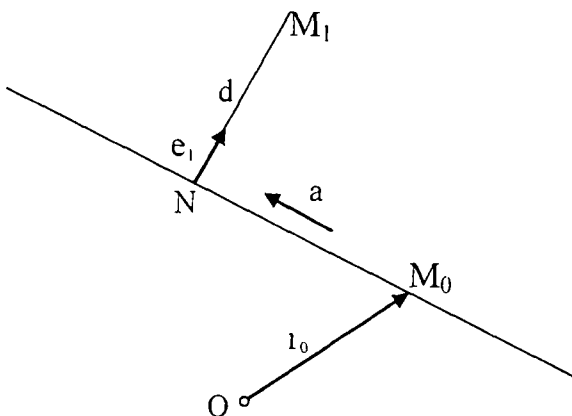
$$[\overline{NM_1}, \overline{a}] = d|\overline{a}|[\overline{e_1}, \overline{e_2}]$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikdan

$$d = \frac{[\overline{NM_1}, \overline{a}]}{|\overline{a}|}$$

formulani hosil qilamiz. Lekin bu formulada  $N$  nuqta koordinatalari noma'lum bo'lganligi uchun biz undan bevosita foydalana olmaymiz.

Lekin chizmadan ko'rinib turibdiki, biz  $\overline{NM_1}$  vektorni



29-chizma.

$$\overline{NM_1} = \overline{r_1} - (\overline{r_0} + \overline{at_1})$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu yerda  $t_1$ -parametrning  $N$  nuqtaga mos keluvchi qiymatidir. Endi bu ifodani yuqoridagi formulaga qo'yib,  $\overline{at_1}$ ,  $\overline{a}$  vektorlarning vektor ko'paytmasi nol vektor ekanligini hisobga olib,

$$d = \frac{|\overline{[r_1 - r_0, a]}|}{|\overline{a}|}$$

formulani yozamiz. Bu formulani koordinatalar orqali yozsak, u

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

ko'rinishga keladi.

## 8-§. To'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati

Bizga ikkita  $\ell_1, \ell_2$  to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad \text{va} \quad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$$

kanonik tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin. Bu tenglamalarni vektor ko'rinishda yozsak ular

$$\overline{r} = \overline{r_1} + \overline{at} \quad \text{va} \quad \overline{r} = \overline{r_2} + \overline{as}$$

ko'rinishlarga keladi.

*Parallellik.* Bu to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotib, kesishmasa ular parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi. Agar biz uchta  $\overline{r_2} - \overline{r_1} = \overline{M_1 M_2}$ ,  $\overline{a}$  va

$\vec{b}$  vektorlarning bir tekislikda yotishi shartini yozsak

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. To'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaganligi uchun  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar o'zaro kollinear emas.

*Ayqash to'g'ri chiziqlar* To'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa ular ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi. Bu holda  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overline{M_1 M_2}$ ,  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar komplanar bo'lmaganligi uchun

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overline{M_1 M_2}$ ,  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar komplanar bo'ladi,  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar esa kollinear emas.

### 9-§. Ikkita ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

Biz ikkita

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t \text{ va } \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{b}s$$

tenglamalar bilan berilgan  $\ell_1, \ell_2$  ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqarmoqchimiz. Ikkita  $\ell_1, \ell_2$  to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

$$d = \inf d(A, B), A \in \ell_1, B \in \ell_2$$

formula bo'yicha aniqlanadi. Bu yerda  $d(A, B)$  -  $A$  va  $B$  nuqtalar

orasidagi masofadir. Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa ular orasidagi masofa nolga teng bo'ladi. Parallel  $\ell_1, \ell_2$  to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani hisoblash uchun bitta  $A \in \ell_1$  nuqtani olib undan  $\ell_2$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash yetarlidir. To'g'ri chiziqlar ayqash bo'lgan holda biz avvalo mos ravishda  $\ell_1, \ell_2$  to'g'ri chiziq'larga tegishli bo'lgan  $A_0$  va  $B_0$  nuqtalar mavjud bo'lib, bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning  $\ell_1, \ell_2$  to'g'ri chiziq'larga perpendikulyar ekanligini ko'rsatamiz.

Buning uchun biz  $\overline{A_0B_0}$  vektorni

$$\overline{A_0B_0} = (\overline{r_2} + \overline{b}s_0) - (\overline{r_1} + \overline{a}t_0)$$

ko'rinishda yozib, uning  $\overline{a}$  va  $\overline{b}$  vektorlarga perpendikulyarlik shartlarini yozamiz. Bu shartlarni skalyar ko'paytma orqali yozsak, ular

$$(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{a}) + (\overline{a}, \overline{b})s_0 - (\overline{a}, \overline{a})t_0 = 0 \quad (5)$$

$$(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{b}) + (\overline{b}, \overline{b})s_0 - (\overline{a}, \overline{b})t_0 = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu tengliklar  $s_0, t_0$  noma'lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasidan iboratdir. Bu sistemaning asosiy determinanti  $\Delta$  noldan farqli, chunki

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\overline{a}, \overline{a}) & (\overline{a}, \overline{b}) \\ (\overline{a}, \overline{b}) & (\overline{b}, \overline{b}) \end{vmatrix} = [\overline{a}, \overline{b}]^2 > 0$$

munosabat o'rinalidir. Demak, (5) sistema yagona yechimga ega, ya'ni  $(A_0, B_0)$  juftlik yagonadir. Endi  $A_0B_0$  kesma uzunligi to'g'ri chiziqlar orasidagi masofaga tengligini ko'rsatamiz. Buning uchun mos ravishda  $\ell_1, \ell_2$  to'g'ri chiziq'larga tegishli va radius - vektorlari

$$\overline{r_1} + \overline{a}t \quad \overline{r_2} + \overline{b}s$$

vektorlardan iborat  $A, B$  nuqtalar uchun

$$|AB| \geq |A_0B_0|$$

tengsizlikni isbotlaymiz.

Bu tengsizlikni isbotlash uchun  $\overline{AB}$  vektorni

$\overline{AB} = (\overline{r_2} - \overline{r_1}) + (\overline{b}s - \overline{a}t) = (\overline{r_2} - \overline{r_1} + \overline{b}s_0 - \overline{a}t_0) + (s - s_0)\overline{b} + (t - t_0)\overline{a}$   
ko'rinishda yozamiz. Bu ifodada

$$\overline{A_0B_0} = \overline{r_2} - \overline{r_1} + \overline{b}s_0 - \overline{a}t_0$$

tenglik o'rinli. Ikki ta o'zaro perpendikulyar  $\overline{p}$ ,  $\overline{q}$  vektorlar uchun

$$(\overline{p} + \overline{q})^2 = \overline{p}^2 + \overline{q}^2$$

tenglik o'rinlidir. Bu tenglik umumlashgan Pifagor teoremasi deyiladi.

Bu tenglikni

$$\overline{p} = \overline{A_0B_0}, \quad \overline{q} = (s - s_0)\overline{b} + (t - t_0)\overline{a}$$

vektorlar uchun yozsak,

$$\overline{AB}^2 = (\overline{r_2} - \overline{r_1} + \overline{b}s_0 - \overline{a}t_0)^2 + [(s - s_0)\overline{b} + (t - t_0)\overline{a}]^2$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikdan esa

$$\overline{AB}^2 \geq (\overline{r_2} - \overline{r_1} + \overline{b}s_0 - \overline{a}t_0)^2 = \overline{A_0B_0}^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Endi  $A_0B_0$  kesma uzunligini hisoblash uchun

formulani keltirib chiqaramiz. Shu maqsadda  $\overline{A_0B_0}$ ,  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$  vektorlarning aralash ko'paytmasini tekshiramiz. Aralash ko'paytma moduli uchun

$$|\overline{A_0B_0} \overline{a} \overline{b}| = |\overline{A_0B_0}| |\overline{a}, \overline{b}|$$

tenglik o'rinli ekanligini bilamiz. Bundan esa

$$d = |\overline{A_0B_0}| = \frac{|\overline{A_0B_0} \overline{a} \overline{b}|}{|\overline{a}, \overline{b}|}$$

munosabatni olamiz. Aralash ko'paytmadagi  $\overline{A_0B_0}$  vektorni



$$\overline{A_0B_0} = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_0}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda  $A_1 \in \ell_1, A_2 \in \ell_2$  va  $\overline{OA_1} = \overline{r_1}, \overline{OA_2} = \overline{r_2}$

Shuning uchun  $\overline{A_0A_1}$  vektor  $\overline{a}$  vektorga,  $\overline{B_0B_1}$  vektor esa  $\overline{b}$  vektorga paralleldir. Bularni hisobga olsak

$$d = \frac{|\overline{A_1B_1} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}|}{|\overline{a} \cdot \overline{b}|}$$

formula kelib chiqadi. Bu formulani koordinatalar yordamida yozsak ,u

$$d = \frac{abs \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

ko'rinishga keladi.

*Mustaqil ish uchun topshiriq.* Berilgan  $Ax + By + Cz + D = 0$  tekislik

$\overline{CE}$  kesmani kesishi shartini yozing.

## 10-§. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyati

Bizga  $\ell$  to'g'ri chiziq

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

tenglama bilan,  $\alpha$  tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, ularning tenglamalari bo'yicha o'zaro vaziyatini aniqlamoqchimiz.

Tekislik va to'g'ri chiziq orasidagi burchak to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori va tekislik normal vektori orasidagi burchakning

$\frac{\pi}{2}$  gacha bo'lgan to'ldiruvchisiga tengdir, ya'ni agar  $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$

va  $\vec{n} = \{A, B, C\}$  vektorlar orasidagi burchak  $\psi$  ga teng bo'lsa, tekislik va

to'g'ri chiziq orasidagi  $\varphi$  burchak  $\frac{\pi}{2} - \psi$  ga tengdir. Bu burchak

$$\sin \varphi = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

formula bo'yicha hisoblanadi. Tekislik va to'g'ri chiziqning paralellik sharti

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

tenglikka, perpendikulyarlik sharti esa

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$$

munosabatga teng kuchlidir.

Agar

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \text{ va } Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

tengliklar bajarilsa  $\ell$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi.

## 11-§ Mustaqil ish uchun topshiriqlar

### 1. Uchta tekislik

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

2. Ikkita parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular hosil qilgan burchakning bissektressalari tenglamalarini tuzing.

3. Berilgan  $M(x_0, y_0)$  nuqtadan o'tuvchi va  $y = kx + b$  to'g'ri chiziq bilan ma'lum  $\varphi$  burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

4. Uchta to'g'ri chiziq

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning bir nuqtada kesishish shartini toping.

5. Ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ular hosil qilgan ikki yoqli burchaklar uchun bissektorial tekisliklar tenglamalarini tuzing.

6. Ikkita parallel bo'lmagan tekisliklar

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, berilgan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  va

$M_2(x_2, y_2, z_2)$  nuqtalarning tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli

burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.

7. Berilgan tekislikning kesmani kesishi shartini yozing.

8. Ikkita parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, ,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, ,$$

tenglamlar bilan berilgan bo'lsa, koordinata boshi va berilgan  $M_1(x_1, y_1)$  nuqtaning to'g'ri chiziqlar hosil qilgan burchaklarga nisbatan holatini aniqlang.

9. Berilgan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqtadan o'tuvchi va

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasini yozing.

10. To'g'ri chiziq  $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$  tenglama bilan

berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

11. Affin koordinatalar sistemasini aniqlovchi bazis vektorlari orasidagi

burchak  $\frac{\pi}{3}$  ga teng bo'lsa,

$$4x - 5y + 7 = 0 \text{ va } 9x + 4y - 11 = 0$$

tenglamlar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

12. Affin koordinatalar sistemasi o'qlari orasidagi burchak  $\frac{\pi}{3}$  ga

teng bo'lsa, uchlari  $A(-1, 2), B(1, 1), C\left(2, -\frac{5}{2}\right)$  nuqtalarda bo'lgan

uchburchakning AB tomoni va C uchidan tushirilgan medianasi orasidagi burchakni toping.

13. Quyidagi uchta to'g'ri chiziq bitta nuqtada kesishadimi?

$$3x - y - 1 = 0, 2x - y + 3 = 0, x - y + 7 = 0$$

14. Ikkita to'g'ri chiziq

$$x - 3y + 10 = 0,$$

$$2x + y - 8 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar orasidagi qismi  $P(0,1)$  nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

15. Uchburchak tomonlari

$$2x - y + 3 = 0, x + 5y - 7 = 0 \text{ va } 3x - 2y + 6 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, uning balandliklari tenglamalarini tuzing.

16. To'rtburchak tomonlari

$$x - y = 0, x + 3y = 0, x - y - 4 = 0, 3x + y - 12 = 0$$

tenglamalari bilan berilgan. To'rtburchak diagonallari tenglamalarini tuzing.

17. Uchburchak tomonlari

$$2x - 5y - 2 = 0, x + y - 8 = 0, 5x - 2y - 5 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchak ichida shunday nuqta topingki, bu nuqta bilan uchburchak uchlarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq uchburchakni teng yuzali uchburchaklarga ajratsin.

18. To'g'ri chiziq

$$12x + 5y - 52 = 0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, unga parallel va undan 2 birlik masofada bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

19. Ikkita ayqash to'g'ri chiziq

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \text{ va } \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

tenglamalar bilan berilgan. Ularning umumiy perpendikulyari tenglamasi tuzilsin.

20. To'g'ri chiziq

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, unga koordinata boshidan tushirilgan perpendikulyar tenglamasini tuzing.

21. To'g'ri chiziq

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, unga  $A(4,0,-1)$  nuqtadan tushirilgan perpendikulyar tenglamasini tuzing.

22. Berilgan  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  nuqtadan o'tuvchi va

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

23. Tomonlari

$$18x + 6y - 17 = 0, \quad 14x - 7y + 15 = 0, \quad 5x + 10y - 9 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan uchburchakning burchaklarini toping.

24. Quyidagi to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini toping:

$$1) 8x - 3y - 1 = 0, \quad 4x + y - 13 = 0$$

$$2) 3x + 7y - 15 = 0, \quad 9x + 21y - 32 = 0$$

$$3) 5x - 2y + 13 = 0, \quad x + 3y - 11 = 0$$

25. Quyidagi uchta to'g'ri chiziq bir nuqtadan o'tadimi?

$$1) 3x - y - 1 = 0, \quad 2x - y + 3 = 0, \quad x - y + 7 = 0$$

$$2) x + 3y - 1 = 0, \quad 5x + y - 10 = 0, \quad 3x - 5y - 8 = 0$$

$$3) 3x - y + 6 = 0, \quad 4x - 3y - 5 = 0, \quad 2x - y + 5 = 0.$$

26. Uchburchak tomonlari

$$x + 2y + 3 = 0, \quad 3x - 7y + 9 = 0, \quad 5x - 3y - 11 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning balandliklari kesishgan nuqtani toping.

27. To'rtburchak tomonlari

$$x + 3y = 0, \quad x - y = 0, \quad x - y - 4 = 0, \quad 3x + y - 12 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. To'rtburchakning diagonalari tenglamasini tuzing.

28. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

29. Ushbu  $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$  va  $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

to'g'ri chiziq'larga umumiy perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

30. Quyidagi to'g'ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasini toping.

1)  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$  va  $3x - 3y + 2z - 5 = 0$

2)  $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$  va  $x + 2y - 4z + 1 = 0$

3)  $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$  va  $3x - y + 2z - 5 = 0$

31. Berilgan  $(3, 1, -2)$  nuqtadan va

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$$

to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

32. Berilgan  $A(4, -3, 1)$  nuqtaning  $x + 2y - z - 3 = 0$  tekislikdagi proeksiyasini toping.

33. Berilgan  $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$  to'g'ri chiziqning

$x - y + 3z + 8 = 0$  tekislikdagi proeksiyasini toping.

34.  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va

$\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$  to'g'ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasini tuzing.

35. Berilgan to'g'ri chiziq berilgan tekislikda yotadimi?

1)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$   $4x + 3y - z + 3 = 0$

2)  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$   $5x - 8y - 2z - 1 = 0$

3)  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$   $3x - 2y - z - 1 = 0$

36. Berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

1)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$   $4x + 3y - z + 3 = 0$

2)  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$   $5x - 8y - 2z - 1 = 0$

3)  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$   $3x - 2y - z - 1 = 0$

37. Berilgan  $A(4, -3, 1)$  nuqtadan  $x + 2y - z - 3 = 0$  tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

38. Ushbu  $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$  va  $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$  to'g'ri chiziq orasidagi masofani toping.

39. Quyidagi to'g'ri chiziqning tenglamalarini kanonik ko'rinishga keltiring.

$$1) \begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$



**40. To'rtburchak tomonlari**

$$x + 3y = 0, \quad x - y = 0, \quad x - y - 4 = 0, \quad 3x + y - 12 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. To'rtburchak burchaklari bissektrisarining tenglamalarini tuzing.

**41. To'g'ri to'rtburchakning uchta tomoni**

$$x + y = 0, \quad x - y = 0, \quad x - y - 4 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning yuzasi 10 ga teng bo'lsa, to'rtburchakning to'rtinchi tomoni tenglamasini tuzing.

**42. Uchburchak tomonlari**

$$x + 2y + 3 = 0, \quad 3x - 7y + 9 = 0, \quad 5x - 3y - 11 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning medianalari kesishgan nuqtani toping.

### III BOB

## IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR

### 1-§. Parabolaning kanonik tenglamasi

Tekislikda biror dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi lozim. Bu shartni

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0 \text{ ko'rinishda yozish mumkin.}$$

**1-ta'rif.** Tekislikda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli chiziq deyiladi.

Misollar.

Tekislikda koordinatalari  $x^2 + y^2 = 0$  tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami faqat bitta nuqtadan iborat.

2) Tekislikda koordinatalari  $x^2 - y^2 = 0$  tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkita to'g'ri chiziqdan iborat.

3) Tekislikda koordinatalari  $xy - 1 = 0$  tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikki qismdan iborat va maktab kursidan ma'lumki, u giperbola deb ataladi.

**2-ta'rif.** Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini biror dekart koordinatalar sistemasida

$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u parabola deb ataladi. Tenglamadagi  $p$  soni parabola parametri deyiladi.

**Misol.** Siz maktab kursidan  $y = x^2$  tenglama bilan berilgan parabolani yaxshi bilasiz. Bu tenglamani kanonik ko'rinishga keltirish uchun

$$x' = y, y' = x$$

almashtirish bajaramiz. Natijada  $y'^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} x'$  tenglamani hosil

qilamiz. Bu yerda  $p = \frac{1}{2}$

*Mustaqil ish - 1.* O'quvchiga tanish  $y = ax^2 + bx + c$  tenglama bilan berilgan parabolani chizing va tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Biz ikkinchi tenglamani tekshirish yordamida parabolaning xossalarini o'rganamiz va uni chizamiz. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, agar  $(x, y)$  koordinatali nuqta parabolga tegishli bo'lsa,  $(x, -y)$  nuqta ham parabolga tegishli bo'ladi. Demak, parabola  $Ox$  o'qiga nisbatan simmetrik joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi parabolga tegishli,  $x$  manfiy qiymatlarni qabul qilmaganligi uchun parabola  $Oy$  o'qining o'ng tomonida joylashgan. Bu mulohazalardan foydalanib, biz chizmada parabolani quyidagi ko'rinishda tasvirlashimiz mumkin.

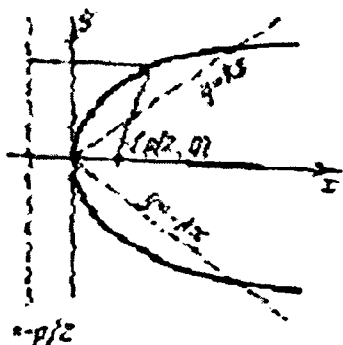
Tekislikda  $x + \frac{p}{2} = 0$  tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziq

parabolaning direktrisasi,  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

nuqta esa uning fokusi deb ataladi.

Parabola xossalari:

1<sup>0</sup> Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan direktrisagacha bo'lgan masofa fokusgacha bo'lgan masofaga tengdir.



30-chizma.

Parabola nuqtasidan  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  nuqtagacha bo'lgan masofani  $r$  bilan,

direktrisagacha bo'lgan masofani  $d$  bilan belgilab,  $r = d$  tenglikni isbotlaymiz.

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2}$$

ifodada  $y^2 = 2px$  tenglikdan foydalansak va  $x \geq 0$  munosabatni hisobga olsak,

$$r = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

formulani hosil qilamiz.

Direktrisagacha bo'lgan masofani hisoblash uchun nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasidan foydalanib,

$$d = \left| -x - \frac{p}{2} \right| = x + \frac{p}{2} = r$$

tenglikni hosil qilamiz.

$2^0$  Parabolaning geometrik aniqlanishi.

*Berilgan to'g'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plami paraboladir.*

Tekislikda  $\ell$  to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan  $F$  nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan  $F$  nuqtadan  $\ell$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani  $p$  bilan belgilab va  $F$  nuqtadan  $\ell$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ravishda o'tuvchi to'g'ri chiziqni absissa o'qi sifatida olib koordinatalar sistemasini kiritamiz. Absissa o'qining musbat yo'nalishi  $\ell$  to'g'ri chiziqdan  $F$  nuqta

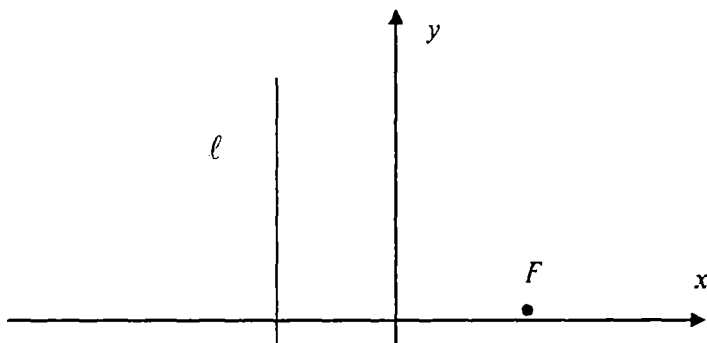
tarafga yo'nalgan, koordinata boshini  $\ell$  to'g'ri chiziq va  $F$  nuqta o'rtasiga quyidagi chizmadagi kabi joylashtiramiz. Ordinata o'qi esa  $\ell$  to'g'ri chiziqqa paralleldir. Natijada  $\ell$  to'g'ri chiziq:  $x + \frac{p}{2} = 0$  tenglamaga,

$F$  nuqta esa  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  koordinatalarga ega bo'ladi. Tekislikning  $M(x, y)$

nuqtasidan  $\ell$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning shu nuqtadan  $F$  nuqtagacha bo'lgan masofaga tengligidan

$$y^2 = 2px$$

tenglamani hosil qilamiz.



31-chizma.

## 2-§. Ellips

**3-ta'rif.** Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta  $Oxy$  dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, u ellips deb ataladi. Bu yerda koeffitsientlar  $a \geq b > 0$  munosabatni qanoatlantiradi.

Bu tenglamani o'rganish natijasida ellipsni chizamiz va uning xossalari keltirib chiqaramiz. Tenglamadan ko'rinib turibdiki  $x, y$  o'zgaruvchilar

$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$  tengsizliklarni qanoatlantiradi. Absissa o'qida yotuvchi  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  nuqtalar ellipsning fokuslari,

$x \pm \frac{a}{e} = 0$  tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar ellipsning

direktrisalari deb ataladi. Bu yerda  $c = \sqrt{a^2 - b^2}, e = \frac{c}{a}$  bo'lib,  $e$

soni ellipsning eksentrisiteti deyiladi. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lib, koordinata boshi uning simmetriya markazidir.

#### Ellips xossalari:

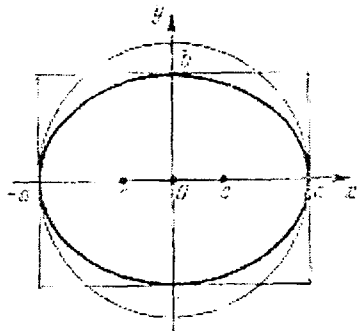
1. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas va  $2a$  ga tengdir.

Bu xossa bevosita hisoblash yordamida  $r_1 + r_2 = 2a$  tenglikni tekshirish bilan isbotlanadi.

2. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrisalargacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas va  $e$  soniga tengdir.

Bu xossa bevosita  $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$  tenglikni tekshirish yordamida

isbotlanadi.



32-chizma.

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}} =$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2} + 2aex + a^2} = \sqrt{x^2 \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} + 2aex + a^2} = |xe + a|$$

$$d_1 = \left| -x - \frac{a}{e} \right| = \left| x + \frac{a}{e} \right| = \frac{|xe + a|}{e} \Rightarrow \frac{r_1}{d_1} = e$$

2. Ellipsning geometrik aniqlanishi.

Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarining yig'indisi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

**Isbot.** Tekislikda  $F_1, F_2$  nuqtalar berilgan. Biz tekislikning nuqtasidan

bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda  $r_1, r_2$  ko'rinishda belgilab,

$$r_1 + r_2 = \text{const} = 2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarining geometrik o'rnini aniqlashimiz kerak. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani  $2c$  bilan belgilasak,

$r_1 + r_2 > 2c$  tengsizlikdan  $a > c$  munosabat kelib chiqadi. Tekislikda

dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Berilgan  $F_1, F_2$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni absissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish  $F_1$  nuqtadan  $F_2$  nuqtaga qarab yo'nalgan bo'ladi.

Koordinata boshini  $F_1, F_2$  nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib, ordinata o'qi sifatida absissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikka qo'yib,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshirib, hadlarni ixchamlashtirib, yana qayta kvadratga oshiramiz va quyidagi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda  $b^2 = a^2 - c^2$  belgilash kiritilgan.

3. Bizga  $l$  to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta  $F$  berilgan bo'lsa, tekislikda berilgan nuqttagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas birdan kichik  $e$  soniga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

Bu faktni isbotlash uchun berilgan  $F$  nuqtadan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazib, uni absissa o'qi sifatida olamiz. Natijada absissa o'qini  $F$  nuqta ikki qismga ajratadi. Berilgan  $F$  nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning  $e$  soniga ko'paytmasini  $p$  bilan belgilab, quyidagi tengliklar bilan

$$a = \frac{p}{1-e^2} \text{ va } c = ea, b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$a, b, c$  sonlarni kiritamiz. Koordinata boshini absissa o'qining  $l$  to'g'ri chiziqni kesmaydigan qismida  $F$  nuqtadan  $c$  birlik masofada joylashtiramiz. Natijada koordinata boshidan  $l$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$p_1 + c = \frac{p}{e} + ea = \frac{a(1-e^2)}{e} + ea = \frac{a}{e}$$

kattalikka teng bo'ladi. Bu yerda  $p_1$  bilan  $F$  nuqtadan  $l$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa belgilangan. Demak,  $l$  to'g'ri chiziq tenglamasi

$$x - \frac{a}{e} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi koordinata o'qini  $l$  to'g'ri chiziqqa parallel



o'tkazib, tekislikning  $M(x, y)$  nuqtasidan  $F$  nuqtagacha bo'lgan masofani  $r$  bilan,  $l$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga  $d$  bilan belgilasak,

$$r = ed$$

tenglikdan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamani olamiz.

### 3-§. Giperbola

**4-ta'rif.** Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta  $Oxy$  Dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu chiziq giperbola deb ataladi. Bu yerda koeffitsientlar  $a \geq b > 0$  munosabatni qanoatlantiradi.

Giperbola tenglamasini tekshirish natijasida quyidagilarni olamiz:

1)  $x, y$  o'zgaruvchilar  $|x| \geq a, -\infty < y < \infty$  tengsizliklarni qanoatlantiradi. Abssissa o'qidagi  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$  nuqtalar

giperbolaning fokuslari,  $x \pm \frac{a}{e} = 0$  tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisalari deyiladi. Bu yerda

$c = \sqrt{a^2 + b^2}, e = \frac{c}{a} > 1$  bo'lib,  $e$  soni giperbolaning eksentrisiteti deyiladi.

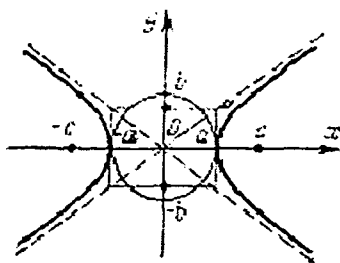
2) Tenglamada  $x, y$  o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari

qatnashganligi uchun giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi giperbolaning simmetriya markazidir.

*Giperbola xossalari:*

1. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli o'zgarmas va  $2a$  ga tengdir.

2. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrisalarigacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas va  $e$  soniga tengdir.



Bu xossa bevosita 
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$$

33-chizma

tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi. Giperbolaning  $M(x, y)$  nuqtasidan fokuslarga bo'lgan masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(ex + a)^2}, r_2 = \sqrt{(ex - a)^2}$$

tengliklar o'rinlidir. Bu yerda ildiz chiqarish amalini bajarsak

agar  $x > 0$  bo'lsa  $r_1 = a + ex, r_2 = -a + ex$

agar  $x < 0$  bo'lsa  $r_1 = -a - ex, r_2 = a - ex$

tengliklarni hosil qilamiz. Natijada agar  $x > 0$  bo'lsa

$r_1 - r_2 = 2a$  agar  $x < 0$  bo'lsa  $r_1 - r_2 = -2a$  tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, ixtiyoriy  $x$  uchun

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3. Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalari ayirmasining moduli o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola bo'ladi.

Tekislikda  $F_1, F_2$  nuqtalar berilgan. Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda  $r_1, r_2$  ko'rinishda belgilab

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami giperbola ekanligini isbotlaymiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani  $2c$  bilan belgilaymiz va tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz.

Berilgan  $F_1, F_2$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni absissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish  $F_1$  nuqtadan  $F_2$  nuqtaga qarab yo'nalgan.

Koordinata boshini  $F_1, F_2$  nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib, ordinata o'qi sifatida absissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(ex + a)^2}, r_2 = \sqrt{(ex - a)^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikga qo'yib

$$\left| \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni kvadratga oshirib va zaruriy algebraic almashtirishlarni bajarib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

munosabatni olamiz. Bu yerda  $b^2 = c^2 - a^2$  belgilash kiritilgan.

4. Bizga  $l$  to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta  $F$  berilgan bo'lsa, tekislikda berilgan nuqttagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas birdan katta  $e$  soniga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola bo'ladi.

Bu xossani isbotlash o'quvchilar uchun topshiriq sifatida havola etamiz. Biz yuqorida  $e < 1$  bo'lganda ellips hosil bo'lishini ko'rsatgan

edik. Bu yerda  $p$  soni ellipsdagi kabi, giperbolaning katta va kichik yarim o'qlari

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Bu yerda  $c$  soni  $c = ea$  tenglik bilan aniqlanadi.

#### 4-§. Parabola, ellips va giperbolaning ba'zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari

1. Koordinata boshi chiziqning uchida bo'lgan hol:

a) Ellips kanonik ko'rinishdagi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa,

$$x' = x + a, \quad y' = y \quad (2)$$

almashtirish bajarsak, yangi  $O'x'y'$  koordinatalar boshi ellipsning chap  $(-a, 0)$  uchida joylashadi va (1) tenglama

$$\frac{(x' - a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamani

$$y'^2 = 2px' + qx'^2 \quad (4)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda  $p = \frac{b^2}{a}$ ,  $q = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$

bo'lib,  $-1 \leq q < 0$  munosabat bajariladi. Agar giperbolaning

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

tenglamasida

$$x' = x - a, y' = y \quad (6)$$

almashtirish bajarsak tenglama

$$y'^2 = 2px' + qx'^2 \quad (*)$$

ko'rinishda bo'lib, koeffitsientlar uchun

$$q = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 > 0, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Agar (\*) tenglamada  $q = 0$  bo'lsa parabola tenglamasini hosil qilamiz.

Demak, giperbolalar, ellipslar va parabolalar tenglamalarini (\*) ko'rinishda yozish mumkin.

## 2. Qutb koordinata sistemasidagi tenglamalar

a) Parabola

$$y^2 = 2px$$

kanonik tenglama bilan berilgan bo'lsa, qutbni parabola fokusiga joylashtirib, qutb o'qi sifatida absissa o'qini olib parabola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozaylik. Agar biz

$$x' = x - \frac{p}{2}, \quad y' = y$$

almashtirishlar bajarsak

$$x' = r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu yerda  $r, \varphi$  nuqtaning qutb koordinatalari

bo'lib, agar nuqta parabolaga tegishli bo'lsa,  $r$  uning fokal radiusiga tengdir. Biz

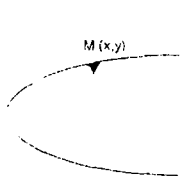
$$x - \frac{p}{2} = r \cos \varphi$$

tenglikda  $r$  ning nuqtadan direktrisagacha bo'lgan masofaga tengligini

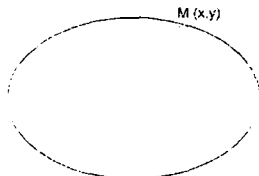
hisobga olib  $r = x + \frac{p}{2}$  ifodani yuqoridagi tenglikka qo'ysak,

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabat parabolaning qutb



34-chizma.



35-chizma.

koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir.

b) Ellipsning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun qutbni ellipsning chap fokusiga joylashtirib, absissa o'qini qutb o'qi sifatida olamiz. Ellipsning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kanonik tenglamasini qutb koordinatalar sistemasiga o'tkazish uchun

$$\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y \end{cases}$$

almashtirishlar yordamida yangi  $O'x'y'$  dekart koordinatlar sistemasini kiritamiz. Bu koordinatalar sistemasi va qutb koordinatalar orasidagi bog'lanish boshi

$$x' = r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi$$

formulalar yordamida beriladi. Ellipsning  $M$  nuqtasi uchun chap fokal radius uning qutb radiusiga tengligidan foydalanib,

$$MF_1 = r = ex + a$$

tenglikni yozamiz. Bu tenglikdagi  $r = ex + a$  ifodani

$$x + c = r \cos \varphi$$

tenglikka qo'ysak

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = a - ec$$

tenglikdan foydalandik.

b) Giperbola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun uning har qismi uchun mos ravishda qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. Uning o'ng qismi uchun qutb boshini giperbolaning uning fokusiga joylashtiramiz va absissa o'qini qutb o'qi sifatida olamiz.

Giperbola nuqtasi uchun qutb radiusi  $r$  uning o'ng fokal radiusiga teng bo'lganligi uchun

$$r = ex - a$$

ifodani hosil qilamiz. Biz bilamizki, agar dekart  $O'x'y'$  koordinatalar sistemasi uchun qutb boshi koordinata boshida joylashgan va qutb o'qi  $O'x'$  absissa o'qi bilan ustma-ust tushsa, qutb koordinatalar sistemasi

va  $O'x'y'$  koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanish

$$x' = r \cos \varphi$$

$$y' = r \sin \varphi$$

formular yordamida beriladi. Bu yangi  $O'x'y'$  koordinatalar sistemasi va giperbola tenglamasi berilgan  $Oxy$  koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanish esa

$$x' = x - c$$

$$y' = y$$

ko'rinishda bo'ladi. Biz bu tengliklarning birinchisidan foydalanib,

$$x - c = r \cos \varphi$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi  $r = ex - a$  ifodani bu tenglikka qo'ysak

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglikdan foydalandik.

Biz giperbola chap shoxining tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun qutb boshini chap fokusga joylashtiramiz va absissa o'qini qarama-qarshi yonalish bilan qutb o'qi sifatida olamiz. Biz agar

$$x' = -x - c$$

$$y' = y$$

formular bilan yangi dekart koordinatalar sistemasi kiritsak, ular uchun



$$x' = r \cos \varphi$$

$$y' = r \sin \varphi$$

formular o'rinli bo'ladi. Bu yerda qutb radiusi chap focal radiusga teng bo'lganligi uchun

$$r = -ex - a$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdagi  $r$  ning ifodasini yuqoridagi formulalardan kelib chiqadigan

$$-x - c = r \cos \varphi$$

tenglikka qo'yib,

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$

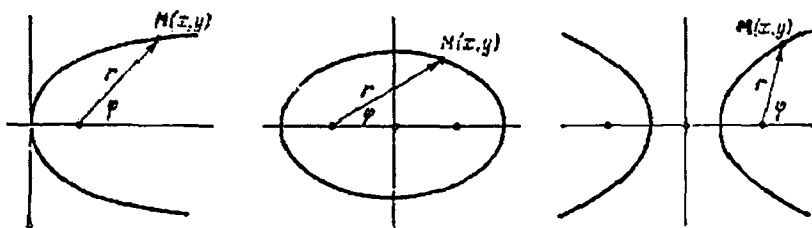
tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda ham

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglik o'rinlidir.

Demak, qutb koordinatalar sistemasida mos ravishda tanlanganda har qanday ikkinchi tartib chiziq tenglamasini

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$$



36, 37, 38-chizmalar.

ko'inishda yozish mumkin ekan. Bu tenglama  $e = 1$  bo'lsa parabola,  $e < 1$  bo'lganda ellips va nihoyat  $e > 1$  bo'lganda giperbola tenglamasidir.

### 5-§. Ellips, giperbola va parabolaning urinmalari

Bu chiziqlarning har biri o'ziga tegishli har bir nuqtaning atrofida birorta differensiallanuvchi funksiyaning grafigi bo'ladi. Shuning uchun, bu chiziqlar urinmalarining tenglamalarini tuzishda biz maktab kursidan ma'lum bo'lgan

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

tenglamadan foydalanishimiz mumkin. Misol uchun ellipsning ordinatalari manfiy bo'lmagan nuqtalardan iborat qismi

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad -a \leq x \leq a$$

funksiyaning grafigi bo'ladi. Bu funksiyaning hosilasini topsak, u

$$y' = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

ko'inishda bo'ladi. Bu ifodalarni hisobga olib, ellipsga tegishli  $(x_0, y_0)$  nuqtadagi urinma tenglamasini yozamiz:

$$y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Bu tenglamada

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

tenglikni hisobga olsak, yuqoridagi tenglama

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

ko'rinishga keladi.

Giperbola va parabola uchun urinma tenglamalarini keltirib chiqarish o'quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etiladi. Ularning  $(x_0, y_0)$  nuqtadagi urinmalari tenglamalari mos ravishda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$y_0 y = p(x + x_0)$$

## 6-§. Ellips, giperbola va parabolaning optik xossalari

Biz ellipsning quyidagi optik xossasini isbotlaymiz

**Teorema.** *Ellipsning bitta fokusidan chiquvchi nur sinishdan so'ng ikkinchi fokusga tushadi.*

**Isbot.** Ellipsning chap  $F_1$  fokusidan chiquvchi nur uning  $M$  nuqtasida sinib  $F_2$  fokusga tushishini ko'rsatish uchun  $MF_1$  va  $MF_2$  to'g'ri chiziqlarning  $M$  nuqtadan o'tuvchi urinma bilan teng burchaklar hosil qilishini ko'rsatishimiz kerak. Biz ellipsning  $M$  nuqtasidan o'tuvchi urinmasini  $\ell$  bilan,  $\ell$  to'g'ri chiziqqa nisbatan  $F_1$  nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani  $F_1^*$  bilan belgilaymiz. Agar  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  bo'lsa,  $F_1^*F_2$  to'g'ri chiziqning urinma bilan kesish nuqtasi  $M$  urinish nuqta  $M$  bilan ustma-ust tushmaydi. Shuning uchun

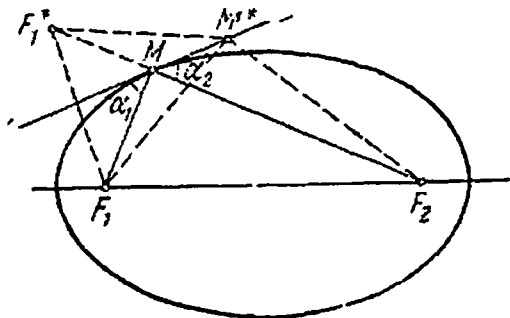
$$\left| F_1 M^* \right| + \left| F_2 M^* \right| = \left| F_1^* F_2 \right| < \left| F_1 M \right| + \left| F_2 M \right| = 2a$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda  $a$  - ellipsning katta yarim o'qi.

Biz  $M^*$  nuqtani urinma bo'ylab  $M$  nuqtadan uzoqlashtira

boshlaymiz. Bunda  $|F_1M^*| + |F_2M^*|$  yig'indi o'sa boshlaydi.

Boshlang'ich holatda bu yig'indining qiymati, yuqoridai tengsizlikka ko'ra  $2a$  dan kichik bo'lganligi uchun, yig'indi o'sish natijasida qandaydir  $N$  nuqtada  $2a$  ga teng bo'ladi. Bu nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofalarning yig'indisi  $2a$  ga teng bo'lganligi uchun, u ellipsga tegishli nuqta boladi.

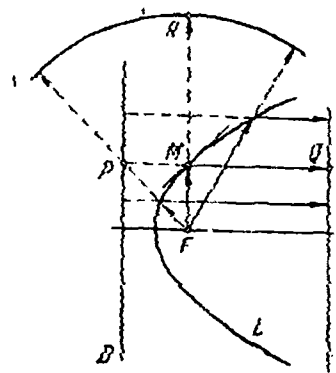
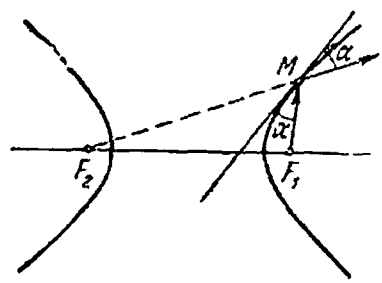


39-chizma.

Bundan esa  $\ell$  urinma ellipsni ikkita nuqtada kesishi kelib chiqadi.

Ellipsning har bir urinmasi uni faqat bitta nuqtada kesib o'tganligi uchun biz ziddiyat hosil qildik. Demak,  $\alpha_1 = \alpha_2$  tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Giperbola va parabola uchun optik xossalr quyidagi teoremlarda keltirilgan. Giperbola uchun optik xossa ellipsning optik xossasiga o'xshaydi. Parabola uchun esa, optik xossa boshqacha formilirovka qilinadi. Agar biz yorug'lik manbaini, parabolaning fokusiga joylashtirsak,



40,41-chizmalar.

undan tarqaluvchi yorug'lik nurlari parabolaga urinib, singandan so'ng direktrisaga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar bo'ylab harakatlanadi. Bu chiziqlarning optik xossalari fan va texnikada ko'p qo'llaniladi. Misol uchun siz bilasizki parabolaning optik xossasi antennalar yasashda ishlatiladi.

Giperbola va parabolaning optik xossalarini isbotlash o'quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

Izoh. Giperbola va parabolaning urinmalari ham ellipsning urinmasi singari, ularni faqat bitta nuqtada kesib o'tadi.

**Teorema – 2.** Giperbolaning bitta fokusidan chiquvchi nur sinishdan so'ng ikkinchi fokusga tushadi.

**Teorema – 3.** Parabolaning fokusidan chiquvchi nur sinishdan so'ng uning o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanadi.

## 7-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Giperbolaning urinmasi uning asimptotalari bilan yuzasi o'zgarmas uchburchak hosil qilishini ko'rsating.

$$2. y - y_0 = \lambda(x - x_0) \text{ to'g'ri chiziq bilan } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsning urinish shartini yozing.

3. Giperbolaning nuqtasidan uning asimptotalarigacha bo'lgan masofalarning ko'paytmasi o'zgarmas( hamma nuqtalar uchun bir xil)ekanligini ko'rsating.

4. Ellips kanonik tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning  $(x_0, y_0)$  nuqtasidan o'tgan urinma tenglamasi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

ko'rinishda bo'lishini isbotlang.

5. Ellips urinmasining burchak koeffitsienti  $k$  ga teng bo'lsa, uning urinish nuqtasini toping.

6. Tosh gorizont bilan o'tkir burchak hosil qilgan yo'nalishda otildi va parabola yoyi bo'yicha harakat qilib, boshlang'ich holatidan 16 metr

uzoqlikda yerga tushdi. Uning eng yuqori holati 12 metr balandlikda bo'lsa, parabolaning parametrini toping.

7. Parabolaning fokusidan o'tuvchi vatarlar o'rtalarining geometrik o'rnini toping.

8. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylananar markazlarining geometrik o'rnini toping.

9. Har qanday ellips aylananing proeksiyasi ekanligini isbotlang.

10. Ellips

$$\rho^2 = \frac{288}{16 - 7 \cos^2 \varphi}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning uzunligi 10 ga teng bo'lgan diametri fokal o'q bilan qanday burchak tashkil qiladi.

11. Giperbola 
$$\rho = \frac{2}{1 - \sqrt{2} \cos \varphi}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning asimptotalari va direktrisalari tenglamasini tuzing.

12. Giperbolaning chap qismi uchun mos qutb koordinatalar sistemasini kiriting va uning tenglamasini yozing.

13. Asimptotasi  $y = \pm \frac{1}{2}x$  bo'lgan va  $(12; 3\sqrt{3})$  nuqtadan o'tuvchi giperbola tenglamasini tuzing.

14. Ellips  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  tenglama bilan berilgan bo'lsin. Berilgan ellips  $90^\circ$  burchak ostida ko'rinadigan nuqtalarning geometrik o'rnini toping.

15. Giperbola  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$  tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning uzunligi 20 ga teng bo'lgan diametr tenglamasini tuzing.

13. Quyidagi chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini yozing.

$$a). \rho = \frac{2}{13 - 12 \cos \varphi}$$

$$b). \rho = \frac{2}{3 - 3 \cos \varphi}$$

$$v). \rho = \frac{2}{4 - 5 \cos \varphi}$$

$$g). \rho = \frac{2}{\sqrt{5} - 3 \cos \varphi}$$

16. Giperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning

parallel diametrlarining o'rtalarining geometrik o'rnini toping.

17. Ellipsning birinchi fokusidan chiquvchi nurlar elliptik ko'zguga urilib, qaytgan nurlar ikkinchi fokusda yig'ilishini isbotlang.

18. Quyidagi ellipsning umumiy urinma tenglamalarini tuzing:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ va } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

19.  $Ax + By + C = 0$  to'g'ri chiziqning  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  giperbolaga

urinish shartini yozing.

20. Quyidagi tenglamalar bilan berilgan parabolalarning uchlarini, parametrlarini va o'qlari yonalishlarini toping:

$$1) y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$$

$$2) y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$$

$$3) y^2 + 8x - 16 = 0$$

$$4) x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$$

$$5) y = Ax^2 + Bx + C$$

$$6) y = x^2 - 8x + 15$$

$$7) y = x^2 + 6x$$

21. Ellips  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  tenglama bilan berilgan bo'lsa,

$2x - y + 17 = 0$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tenglamasini tuzing.

22.  $4x - 5y - 40 = 0$  to'g'ri chiziq va  $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$  ellips urinishi ma'lum bo'lsa, urinish nuqtasini toping.



## IV BOB

### IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING UMUMIY TENGLAMALARI

#### 1-§ Ikkinchi tartibli chiziqlarning markazi

Biz bu bobda tekislikda dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni tekshirish bilan shug'ullanamiz. Bu ishni koordinatalar sistemasini o'zgartirish va (1) tenglamani soddalashtirish yordamida amalga oshiramiz. Birinchi navbatda parallel ko'chirishda (1) tenglama koeffitsientlari qanday o'zgarishini tekshiramiz. Buning uchun

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \quad (2)$$

formulalar yordamida almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda koordinata o'qlarining yo'nalishlari o'zgarmaydi, faqat koordinata boshi  $O'(x_0, y_0)$  nuqtaga ko'chadi. Bu formulalardan  $x, y$  larni topib va (1) ga qo'yib,

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada koeffitsientlar uchun

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}, & a'_{12} &= a_{12}, & a'_{22} &= a_{22}, & a'_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, & a'_{33} &= F(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (4)$$

tengliklar o'rinli bo'lib,  $F(x, y)$  bilan (1) tenglamaning chap tomonidagi ifoda belgilangan.

Yuqoridagi (3) formulalardan ko'rinib turibdiki, parallel ko'chirishda ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeffitsientlar o'zgarmaydi.

Agar  $O'(x_0, y_0)$  nuqtaning koordinatalari

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

sistemani qanoatlantirsa, (3) tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi.

Bundan tashqari, agar  $O'(x_0, y_0)$  nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirsa,  $O'(x_0, y_0)$  nuqta ikkinchi tartibli chiziq uchun simmetriya markazi bo'ladi. Haqiqatan ham bu holda koordinatalar markazini  $O'(x_0, y_0)$  nuqtaga ko'chirsak, tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi. Shuning uchun yangi koordinatalar sistemasida

$$F(x', y') = F(-x', -y')$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak,  $O'(x_0, y_0)$  nuqta chiziq uchun simmetriya markazidir. Va aksincha, agar birorta  $A$  nuqta chiziq uchun simmetriya markazi bo'lsa uning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Koordinata boshini  $A$  nuqtaga joylashtirib, yangi  $x, y$  koordinatalar sistemasini kiritamiz. Agar  $M(x, y)$  nuqta chiziqqa tegishli bo'lsa,

$$F(x, y) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Koordinata boshi simmetriya markazi bo'lgani uchun  $F(-x, -y) = 0$  tenglik ham o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarni ikkinchisini birinchisidan ayirib

$$a_{12}x + a_{23}y = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar  $a_{13}, a_{23}$  koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, bu tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi, ya'ni ikkinchi tartibli chiziqning hamma nuqtalari bir to'g'ri chiziqda yotadi. Agar

ikkinchi tartibli chiziq bir to'g'ri chiziqda yotmasa, bu koeffitsientlarning har ikkalasi ham nolga teng bo'ladi. Bu esa  $A$  nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatadi. Bu faktlarni hisobga olsak quyidagi ta'rifning geometrik ma'nosi yaxshi tushinarli bo'ladi.

**1-ta'rif.** Tekislikdagi  $M_0(x_0, y_0)$  nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirsa, u (1) tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning markazi deyiladi.

Tabiiyki, (5) sistema yagona yechimga ega bo'lishi, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi yoki umuman yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Agar,

$$a_{11}a_{22} - a_{21}^2 \neq 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, (5) sistema yagona yechimga ega bo'ladi. Agar,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat o'rinli bo'lsa sistema cheksiz ko'p yechimga,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat bajarilsa sistema yechimga ega emas. Bulami e'tiborga olib, biz ikkinchi tartibli chiziqlarni uchta sinfga ajratamiz:

- a) yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar;
- b) cheksiz ko'p markazga ega bo'lgan chiziqlar;
- d) markazga ega bo'lmagan chiziqlar;

Biz quyidagi determinantlarni kiritamiz

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bu yerda  $a_{21} = a_{12}$ ,  $a_{31} = a_{13}$ ,  $a_{32} = a_{23}$ . belgilashlar

kiritilgan. Yagona markazga ega chiziqlar uchun  $\delta \neq 0$ , yagona markazga ega bo'lmagan chiziqlar uchun  $\delta = 0$ . Chiziqlar cheksiz ko'p markazga ega bo'lishi uchun  $\Delta = 0$  tenglik bajarilishi kerak.

Uchinchi tartibli determinantni

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yozib olsak, oxirgi determinant  $\delta$  ga tengdir. Agar  $\delta = 0$  bo'lsa, birorta  $k$  soni uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabat bajariladi. Bu tenglikni hisobga olib

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar  $\Delta = 0$  tenglik ham bajarilsa

$$a_{13} - ka_{23} = 0 \quad \text{va} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

tengliklardan kamida bittasi o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarning birinchisi o'rinli bo'lsa

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k \quad \text{munosabatdan} \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k \quad \text{munosabat kelib}$$

chiqadi. Agar,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa,  $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$  va  $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$  tengliklardan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,  $\delta = 0$  va  $\Delta = 0$  tengliklarning bir vaqtda bajarilishi

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

shartga teng kuchlidir. Natijada biz quyidagi tasdiqni hosil qilamiz:

**1-tasdiq.** *Ikkinchi tartibli chiziq*

- a)  $\delta \neq 0$  bo'lsa yagona markazga ega,
- b)  $\delta = 0$  va  $\Delta = 0$  bo'lsa cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'plami bitta to'g'ri chiziqni tashkil etadi;
- v)  $\delta = 0$  va  $\Delta \neq 0$  bo'lsa markazga ega emas.

**2-tasdiq.** *Yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq markazi unga tegishli bo'lishi uchun  $\Delta = 0$  tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

**Isbot.** Ikkinchi tartibli chiziq markazi  $M_0(x_0, y_0)$  nuqtada bo'lib, u chiziqqa tegishli bo'lsa

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

va

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \quad (7)$$

tengliklar bajariladi. Yuqoridagi (6) tenglikning birinchisini  $x_0$  ga, ikkinchisini  $y_0$  ga ko'paytirib, (7) tenglikdan ayirsak,

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak,  $(x_0, y_0, 1)$  uchlik

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

bir jinsli sistemaning notrivial yechimidir. Bu esa  $\Delta = 0$  shartga teng kuchlidir. Aksincha  $\Delta = 0$  bo'lsa, (8) sistema notrivial  $(x_0, y_0, z_0)$  yechimga egadir. Bu uchlikda  $z_0 \neq 0$ , chunki  $\delta \neq 0$ . Biz  $z_0 = 1$  deb hisoblay olamiz, chunki  $\delta \neq 0$  bo'lganligi uchun har bir  $z_0$  uchun  $(x_0, y_0)$  juftlik mavjud. Yuqoridagi (8) sistemada  $z_0 = 1$  bo'lganda  $(x_0, y_0)$  juftlik markaz koordinatalari ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari (8) sistemadan foydalanib,

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni olish mumkin.

## 2-§. Ikkinchi tartibli chiziq va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati

Bizga (1) tenglama bilan aniqlangan ikkinchi tartibli chiziq va

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \ell t \\ y &= y_0 + mt\end{aligned}\quad (9)$$

parametrik tenglamalar yordamida  $\ell$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq va ikkinchi tartibli chiziqning kesishish nuqtalarini topish uchun (9) ifodalarni (1) ga qo'yamiz. Natijada quyidagi

$$\begin{aligned}(a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2)t^2 + \\ 2(a_{11}\ell x_0 + a_{12}(\ell y_0 + mx_0) + a_{22}my_0 + a_{13}\ell + a_{23}m)t + F(x_0, y_0) = 0\end{aligned}\quad (10)$$

kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada ikkinchi darajali had oldidagi ifoda to'g'ri chiziqning yo'nalishiga bog'liq xolos. Ba'zi yo'nalishlar uchun bu ifoda nolga teng bo'ladi va yuqoridagi tenglama chizikli tenglamaga aylanadi. Ba'zi yo'nalishlar uchun bu ifoda nolga teng emas va yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo'ladi.

**1-ta'rif.** Berilgan  $\{\ell, m\}$  yo'nalish uchun

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0\quad (11)$$

tenglik bajarilsa, bu yo'nalish asimptotik yo'nalish,

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 \neq 0\quad (12)$$

munosabat bajarilsa noasimptotik yo'nalish deyiladi.

To'g'ri chiziqning yo'nalishi noasimptotik bo'lsa, yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo'ladi. Demak, bu to'g'ri chiziq (1) chiziq bilan ikkita yoki bitta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Noasimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bitta nuqtada kesishsa, u urinma deb ataladi.

To'g'ri chiziqning yo'nalishi asimptotik bo'lsa, yuqoridagi tenglama chizikli tenglama bo'ladi. Demak, bu holda to'g'ri chiziq (1) bilan bitta nuqtada kesishadi, yoki to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari (1)ga tegishli

bo'ladi. Agar ikkinchi darajali had koeffitsienti nolga teng bo'lib, ozod had noldan farqli bo'lsa, to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmaydi. Asimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota deyiladi.

Biz

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0$$

tenglamada  $\ell \neq 0$  bo'lsa,  $k = \frac{m}{\ell}$  belgilash kiritib uni

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

ko'rinishda, agar  $m \neq 0$  bo'lsa,  $k = \frac{\ell}{m}$  belgilash kiritib uni

$$a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$$

ko'rinishda yozamiz. Ikkala holda ham diskriminant uchun

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\delta$$

tenglik o'rinli. Demak,  $\delta > 0$  bo'lsa asimptotik yo'nalish mavjud emas.

Bu holda (1) chiziq elliptik chiziq deyiladi, agar  $\delta = 0$  bo'lsa, asiptotik yo'nalish bitta va bu holda (1) chiziq parabolik  $\delta < 0$  bo'lsa, ikkita asimptotik yo'nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

Yuqoridagi (11) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsient

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)x + (a_{12}\ell + a_{22}m)y + a_{13}\ell + a_{22}m = 0 \quad (13)$$

ko'rinishga ega. Agar



$$a_{11}\ell + a_{12}m = 0$$

$$a_{21}\ell + a_{22}m = 0$$

tengliklar bir vaqtda bajarilmasa, (13) tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Berilgan  $\{\ell, m\}$  yo'nalish uchun (14) tengliklar bajarilsa,  $\{\ell, m\}$  yo'nalish maxsus yo'nalish deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziq uchun  $\delta \neq 0$  bo'lsa, (14) sistema faqat trivial yechimga ega va demak yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar uchun maxsus yo'nalishlar yo'q.

**2-ta'rif.** Maxsus bo'lmagan  $\{\ell, m\}$  yo'nalish uchun (13) tenglama aniqlovchi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziqning  $\{\ell, m\}$  yo'nalishga qo'shma diametri deb ataladi.

Diãmetr tushunchasining korrekt aniqlanganligini ko'rsatamiz. Avvalo  $\{\ell, m\}$  yo'nalish asimptotik yo'nalish bo'lgan holni qaraylik. Bu holda

$$a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 = 0$$

tenglikning chap tomoni uchun

$$\begin{aligned} a_{11}\ell^2 + 2a_{12}\ell m + a_{22}m^2 &= \\ &= (a_{11}\ell + a_{12}m)\ell + (a_{12}\ell + a_{22}m)m \end{aligned} \quad (14)$$

tenglik o'rinli. Demak

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)\ell + (a_{12}\ell + a_{22}m)m = 0 \quad (15)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikdan

$$\frac{\ell}{-(a_{12}\ell + a_{22}m)} = \frac{m}{a_{11}\ell + a_{12}m} \quad (16)$$

proporsionallik munosabati kelib chiqadi.

Diametr uchun  $\{-(a_{12}\ell + a_{22}m), a_{11}\ell + a_{12}m\}$  vektor yo'naltiruvchi vektor bo'lganligi uchun diametr  $\{\ell, m\}$  yo'nalishga parallel bo'ladi. Diametrga tegishli nuqtalar uchun (11) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsient nolga teng bo'ladi. Demak, bu holda diametr ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota bo'ladi (kesishmaydi) yoki diametrga tegishli hamma nuqtalar (1) chiziqda yotadi.

Noasimptotik  $\{\ell, m\}$  yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq (1) chiziqni ikkita  $M_1$  va  $M_2$  nuqtalarda kesib o'tsa,  $M_1M_2$  kesmaning o'rtasini  $M_0(x_0, y_0)$  bilan belgilab to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$x = x_0 + \ell t \quad y = y_0 + mt$$

ko'rinishda yozamiz. Parametrning  $M_1, M_2$  nuqtalarga mos keluvchi qiymatlarini  $t_1, t_2$  bilan belgilasak, ular (10) tenglamaning ildizlari bo'ladi va Viet teoremasiga ko'ra,  $t_1 + t_2 = 0$  tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan  $M_0(x_0, y_0)$  nuqtaning diametrga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, noasimptotik  $\{\ell, m\}$  yo'nalishga parallel vatarlarning o'rtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu yo'nalishga qo'shma diametr bo'ladi.

Noasimptotik  $\{\ell, m\}$  yo'nalishga ega bo'lgan va qo'shma diametrga tegishli  $M_0(x_0, y_0)$  o'tuvchi to'g'ri chiziq (1) chiziqni  $M_1$  va  $M_2$  nuqtalarda kesib o'tsa, bu nuqtalarga mos keluvchi parametrning qiymatlari (10) tenglamaning ildizlari bo'ladi. To'g'ri chiziqning  $M_0(x_0, y_0)$  nuqtasi diametrga tegishli bo'lganligi uchun (10)

tenglamada birinchi darajali had oldidagi koeffitsient nolga teng bo'ladi. Viet teoremasiga ko'ra  $t_1 + t_2 = 0$  bo'lganligi uchun  $M_0(x_0, y_0)$  nuqta  $M_1M_2$  kesmaning o'rtasi bo'ladi. Demak, diametr tushunchasi korrekt aniqlangan.

Berilgan  $\{\ell, m\}$  yo'nalishga qo'shma diametr tenglamasini

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\ell + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0 \quad (17)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, har qanday diametr (1) chiziq markazidan o'tadi.

### 3-§. Qo'shma yo'nalishlar va bosh yo'nalishlar

Berilgan  $\{\ell, m\}$  yo'nalishga qo'shma diametr yo'nalishi  $\{\ell', m'\}$  uchun

$$\ell' : m' = -(a_{12}\ell + a_{22}m) : (a_{11}\ell + a_{12}m) \quad (18)$$

munosabat o'rinli. Bu munosabatni

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)\ell' + (a_{12}\ell + a_{22}m)m' = 0 \quad (19)$$

ko'rinishda yoki

$$a_{11}\ell\ell' + a_{12}(\ell m' + m\ell') + a_{22}mm' = 0 \quad (20)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

**1-ta'rif.** Ikkita  $\{\ell, m\}$  va  $\{\ell', m'\}$  yo'nalishlar uchun (20) munosabat bajarilsa, bu yo'nalishlar (1) chiziqqa nisbatan qo'shma yo'nalishlar deyiladi.

Bu munosabatda (1) tenglama koeffitsientlari qatnashadi.

Koeffitsientlar esa koordinatalar sistemasiga bog'liq. Ikkita  $\{\ell, m\}$  va  $\{\ell', m'\}$  yo'nalishlar biror koordinatalar sistemasida (1) chiziqqa nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'lsa, ular ixtiyoriy koordinatalar sistemasida (1) chiziqqa nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'lishini ko'rsatamiz.

Biz  $Oxy$  koordinatalar sistemasidan  $O'x'y'$  koordinatalar sistemasiga

$$\begin{aligned}x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0\end{aligned}\quad (21)$$

almashtirishlar yordamida o'tsak, (1) tenglama

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (22)$$

ko'rinishga keladi. Ikkita  $\{\ell, m\}$  va  $\{\ell', m'\}$  yo'nalishlar uchun qo'shma bo'lish sharti bo'lgan (21) tenglikni

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (23)$$

belgilash kiritib

$$(l', m')A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

ko'rinishda, (1) tenglamani esa

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0 \quad (25)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Almashtirishlar formulasini

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (26)$$

belgilash kiritib, matrisalar va vektorlar yordamida yozsak

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi tartibli chiziqning (25) tenglamasiga (27) formuladagi ifodani qo'ysak va

$$(x, y) = \left[ C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right]^T, A = A^T \text{ va } (a, b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (c, d) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

tengliklarni hisobga olsak, (25) tenglama quyidagicha o'zgaradi:

$$\left[ C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right]^T A \left[ C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] + 2(a_{13}, a_{23}) \left[ C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] + a_{33} = 0$$

$$(x', y') C^T A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x', y') C^T A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (x_0, y_0) A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$$

$$+ (x_0, y_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

$$(x', y') C^T A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2[(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0) A] C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x_0, y_0) A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} = 0.$$

Bu tenglamalarning oxirgisidan ko'rinib turibdiki yangi koordinatalar sistemasidagi koeffitsientlardan iborat

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \text{ matrisa } A' = C^T AC \quad (28)$$

qoida bo'yicha o'zgaradi va

$$\begin{aligned} (a'_{13}, a'_{23}) &= [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C \\ a'_{33} &= (x_0, y_0)A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} \end{aligned} \quad (29)$$

tengliklar o'rinli ekanligini ko'rish mumkin.

Biz  $a$  vektorning eski koordinatalarini  $a_1, a_2$  bilan, yangi koordinatalarini  $a'_1, a'_2$  bilan belgilasak,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni hisobga olib,  $OX, \bar{b} = \{\ell', m'\}$  vektorlarning yangi koordinatalarini  $\{\ell_1, m_1\}, \{\ell'_1, m'_1\}$  bilan belgilasak,

$$(\ell', m')A \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = (\ell', m')C^T AC \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = (\ell'_1, m'_1)A' \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan (24) tenglik

$$(\ell'_1, m'_1)A' \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (30)$$

tenglikka teng kuchli ekanligi koordinatalar sistemasiga bog'liq emasligi kelib chiqadi. Demak,  $\bar{a}, \bar{b}$  vektorlarning (1) chiziqqa nisbatan qo'shma bo'lishi koordinatalar sistemasiga bog'liq emas.

Ikkinchi tartibli chiziqning markazi tushunchasi koordinatalar sistemasiga bog'liq emasligini biz 1-paragrafda geometrik ravishda ko'rsatgan edik. Hozir esa yuqoridagi almashtirishlar formulasini keltirganimizdan keyin bu fakti algebraik isbotlashimiz mumkin. Haqiqatan ham biz sistemani

$$(x, y)A + (a_{13}, a_{23}) = (0, 0) \quad (31)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Ikkinchi tomondan yangi koordinatalar sistemasida bu tenglik

$$(x', y')A' + (a'_{13}, a'_{23}) = (0, 0) \quad (32)$$

ko'rinishda bo'ladi. Yuqoridagi almashtirish formulalarni hisobga olib, uning (31) tenglikka teng kuchli ekanligini ko'rsatamiz. Bu tenglikda

$$(x', y') = \left[ C^{-1} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T \quad A' = C^T A C,$$

$$(a'_{13}, a'_{23}) = [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C$$

almashtirishlarni bajarsak, u

$$\left[ C^{-1} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T C^T A C +$$

$$+ [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C = (0, 0) \quad (33)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglikda

$$\left[ C^{-1} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T = [(x, y) - (x_0, y_0)] (C^{-1})^T$$

tenglikni hisobga olsak, (33) tenglik

$$[(x, y)A + (a_{13}, a_{23})]C = (0, 0) \quad (34)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu tenglikdagi matrisaning determinanti noldan farqli bo'lganligi uchun, bu tenglik (31) tenglikka teng kuchlidir.

**1-ta'rif.** Birorta yo'nalish o'ziga perpendikulyar yo'nalishga qo'shma bo'lsa, u bosh yo'nalish deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra  $\{\ell, m\}$  yo'nalish bosh yo'nalish bo'lishi uchun u  $\{-m, \ell\}$  yo'nalishga qo'shma bo'lishi kerak. Albatta, agar  $\{\ell, m\}$  yo'nalish bosh yo'nalish bo'lsa,  $\{-m, \ell\}$  yo'nalish ham bosh yo'nalish bo'ladi. Berilgan  $\{\ell, m\}$  yo'nalishning bosh yo'nalish bo'lish sharti

$$a_{11}\ell\ell' + a_{12}(\ell m' + m\ell') + a_{22}mm' = 0$$

tenglikda  $\{\ell', m'\}$  vektorni  $\{-m, \ell\}$  bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{12}\ell^2 + (a_{22} - a_{11})\ell m - a_{21}m^2 = 0 \quad (35)$$

Agar  $\{\ell, m\}$  maxsus yo'nalish bo'lsa,



$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}$$

tenglik o'rinli bo'ladi va yuqoridagi (35) shart bajarilgan. Biz bilamizki, faqat  $\delta = 0$  bo'lgan hollardagina ikkinchi tartibli chiziq maxsus yo'nalishga ega bo'lib, u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptotik yo'nalish bo'ladi. Demak, yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun asimptotik yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi. Albatta, maxsus yo'nalishga perpendikulyar yo'nalish ham bosh yo'nalish bo'ladi. Boshqa bosh yo'nalishlar yo'q. Demak, yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun o'zaro perpendikulyar faqat ikkita bosh yo'nalish mavjuddir.

Yuqoridagi (35) tenglikda  $a_{12} = 0$  va  $a_{11} = a_{22}$  munosabatlar bajarilsa, bu tenglik ixtiyoriy  $\{\ell, m\}$  yo'nalish uchun bajariladi. Demak, bu holda ixtiyoriy yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi. Agar  $a_{12} \neq 0$  bo'lsa, (35) tenglik

$k = \frac{\ell}{m}$  (va  $k = \frac{m}{\ell}$ ) ifoda uchun kvadrat tenglama bo'ladi. Bu

tenglamada diskriminant uchun

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun u ikkita ildizga ega va demak ikkinchi tartibli chiziq uchun ikkita o'zaro perpendikulyar bosh yo'nalish mavjud.

#### 4-§. Umumiy tenglamalarni soddalashtirish

Biz bu paragrafda umumiy

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni aniqlash va uni yasash bilan shug'ullanamiz.

1. *Yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini soddalashtirish.*

Bu holda parallel ko'chirish yordamida koordinata boshini ikkinchi tartibli chiziqning markaziga joylashtiramiz. Natijada, tenglamada birinchi hadlar yo'qoladi. Koordinata o'qlarini o'zaro perpendikulyar bosh yo'nalishlar bo'yicha yo'naltiramiz. Yo'nalishlarning o'zaro qo'shma bo'lishini variant xossa bo'lganligi uchun yangi koordinatalar sistemasida  $\{1,0\}$  va  $\{0,1\}$  yo'nalishlar o'zaro qo'shma bo'ladi. Bu shart

$$a'_{12} = 0$$

tenglikka teng kuchlidir. Demak, bu holda ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasi

$$a'_{11} x'^2 + a'_{22} y'^2 + a'_{33} = 0 \quad (36)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada  $a'_{11} \neq 0$ ,  $a'_{22} \neq 0$ ,  $a'_{33}$  koeffitsient esa nolga teng bo'lishi ham, nolga teng bo'lmasligi ham mumkin. Agar  $a'_{33}$  koeffitsient esa nolga teng bo'lsa, (36) tenglama

$$Ax'^2 + By'^2 = 0 \quad (37)$$

ko'rinishga keladi. Agar  $A, B$  koeffitsientlar har xil ishoralarga ega bo'lsa, bu tenglama ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Koeffitsientlar bir xil ishoralarga ega bo'lsa, bu tenglama bitta nuqtani aniqlaydi.

Yuqoridagi (36) tenglamada  $a'_{33}$  koeffitsient esa nolga teng bo'lmasa, (36) tenglama

$$Ax'^2 + By'^2 = 1 \quad (38)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama esa koeffitsientlarning ishorasiga qarab, ellipsni yoki giperbolani aniqlaydi. Demak, yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi to'rtta chiziqning biridan iborat:

1) Ellips

- 2) giperbola;
- 3) ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq;
- 4) bitta nuqta .

## 2. Yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini soddalashtirish

Biz bu holda yangi ordinata o'qini maxsus bo'lmagan bosh yo'nalish bo'yicha yo'naltiramiz. Bu yo'nalish noasimptotik ekanligini bilamiz. Absissa o'qi sifatida ordinata o'qi yo'nalishiga qo'shma diametrmni olamiz.

Yangi koordinatalar sistemasida ordinata o'qi yo'nalishi  $\{0,1\}$  koordinatalarga ega bo'ladi va bu yo'nalishga qo'shma diametr tenglamasi

$$a'_{12} x' + a_{22} y' + a'_{23} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglama  $y' = 0$  tenglamaga teng kuchli bo'lganligi uchun

$$a'_{12} = 0 \quad a'_{23} = 0 \quad a_{22} \neq 0$$

munosabatlarni olamiz. Bundan tashqari

$$\delta = a'_{11} a'_{22} - a'_{12}{}^2 = 0$$

tenglikni hisobga olsak,  $a'_{11} = 0$  kelib chiqadi. Natijada yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi

$$a'_{22} y'^2 + 2a'_{13} x'^2 + a_{33} = 0 \quad (39)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada  $a'_{22} \neq 0$  munosabat o'rinlidir. Bu chiziq uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{31} & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = -a'_{22} a'_{13}{}^2$$

bo'lganligi uchun, agar  $a'_{13} \neq 0$  bo'lsa ikkinchi tartibli chiziq markazga ega bo'lmaydi, agar  $a'_{13} = 0$  bo'lsa ikkinchi tartibli chiziq cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'g'ri chiziqni tashkil qiladi.

Agar ikkinchi tartibli chiziq markazga ega bo'lmasa, yuqoridagi (39) tenglamada

$$a'_{13} \neq 0 \text{ va ikkinchi tartibli chiziq absissa o'qini } x' = -\frac{a'_{33}}{2a'_{13}}$$

nuqtada kesib o'tadi. Biz koordinata boshini shu nuqtaga ko'chirib, tenglamani

$$a'_{22} y'^2 + 2a'_{13} x' = 0 \quad (40)$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamada  $a'_{13}$  koeffitsientning ishorasi  $a'_{22}$  koeffitsient ishorasiga qarama-qarshi bo'lsa, (40) tenglama

$$y'^2 = 2px' \quad (41)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada  $p > 0$  bo'lganligi uchun, u parabolani aniqlaydi.

Agar  $a'_{13}$  koeffitsient ishorasi  $a'_{22}$  koeffitsient ishorasi bilan bir xil bo'lsa, (41) tenglamada  $p < 0$  bo'lganligi uchun, u bo'sh to'plamni aniqlaydi.

Yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqning (39) tenglamasida  $a'_{13}$  koeffitsient nolga teng bo'lsa, (39) tenglama

$$a'_{22} y'^2 + a'_{33} = 0 \quad (42)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada  $a'_{22} \neq 0, a'_{33}$  koeffitsient esa nolga

teng bo'lishi ham, nolga teng bo'lmashligi ham mumkin. Agar  $a'_{33}$  koeffitsient nolga teng bo'lsa, (42) tenglama

$$y'^2 = 0 \quad (43)$$

ko'rinishga keladi va ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Yuqoridagi (42) tenglamada  $a'_{33}$  koeffitsient nolga teng bo'lmasa, (42) tenglama

$$y'^2 = c \quad (44)$$

ko'rinishga keladi. Agar  $a'_{33}$  koeffitsientning ishorasi  $a'_{22} \neq 0$  koeffitsient ishorasiga qarama-qarshi bo'lsa, (44) tenglamada  $c > 0$  bo'ladi va u ikkita parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Agar  $a'_{33}$  koeffitsientning ishorasi  $a'_{22} \neq 0$  koeffitsient ishorasi bilan bir xil bo'lsa, (44) tenglamada  $c < 0$  bo'ladi va u bo'sh to'plamni aniqlaydi.

Demak, yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi uchta chiziqning biridan iborat:

- 1) parabola (markazga ega emas);
- 2) ikkita parallel to'g'ri chiziq (markazlar to'g'ri chizig'iga ega);
- 3) ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziq (markazlar to'g'ri chizig'iga ega).

## 5-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

### 1. Giperbola

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

tenglama bilan berilgan. Uning asimptotalarini toping.

### 2. Ikkinchi tartibli chiziq

$$(ax + by + c)^2 - (a_1x + b_1y + c_1)^2 = 0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, u ikkita to'g'ri chiziqdan iborat ekanligini ko'rsating.

3. To'g'ri chiziqdarga ajralmaydigan ikkita ikkinchi tartibli to'g'ri chiziq beshta nuqtada kesishsa, ularning ustma-ust tushishini ko'rsating.

4. Birorta to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan uchta nuqtada kesishsa, ikkinchi tartibli chiziq bir juft to'g'ri chiziqdan iborat ekanligini ko'rsating.

5. Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning markazini toping.

a)  $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

b)  $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

v)  $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$

g)  $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

d)  $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

6. Ikkinchi tartibli chiziq va uning diametri mos ravishda

$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$  va  $x + 2y - 2 = 0$

tenglamalar berilgan. Bu diametrga qo'shma diametr tenglamasini tuzing.

7. Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning ko'rinishini aniqlang.

a)  $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$  J: Giperbola

b)  $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$  J: Ellips

v)  $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$  J: Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

g)  $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$  J: Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

d)  $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$  J: Giperbola

8. Berilgan beshta  $(0;0)$ ,  $(0;2)$ ,  $(-1;0)$ ,  $(-2;1)$ ,  $(-1;3)$  nuqtalardan o'tuvchi ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini tuzing.

9. Koordinatlar boshi  $O'(1;0)$  nuqtaga ko'chirilsa, u holda ushbu

$$x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$$

ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi qanday ko'rinishga keladi.

10. Ellipsga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchak tomonlari, ellipsning o'qlariga parallel bo'lishini isbotlang.

11. Quyidagi giperbolalarning asimptotalarini toping.

a)  $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$

J:  $6x - 2y + 5 = 0$  va  $2x + 2y - 1 = 0$

b)  $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

J:  $6x + 14y + 11 = 0$  va  $2x + 2y - 1 = 0$

v)  $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$

J:  $5y + 3 = 0$  va  $25x - 5y + 13 = 0$

g)  $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$

J:  $2x - 3y + 1 = 0$  va  $x - 1 = 0$

12. Ellips tenglamasi

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

ko'rinishda va ikkita qo'shma diametrlardan biri katta o'q bilan  $30^\circ$  burchak hosil qiladi. Diametrlarning yo'nalishlari orasidagi burchak topilsin.

$$J: \varphi = 120^\circ$$

13. Ellips tenglamasi

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} = 1$$

ko'rinishda va ikkita qo'shma diametrlari orasidagi burchak  $60^\circ$  ga teng bo'lsa, diametrlarning uzunliklari topilsin.

$$J: 2a' = 4\sqrt{2}, 2b' = 2\sqrt{5}$$

14. Giperbola tenglamasi

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$$

ko'rinishda bo'lsa, uning  $45^\circ$  burchak hosil qiluvchi qo'shma diametrlarining tenglamasini tuzing.

15. Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning bosh o'qlarini toping.

$$a) 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$$

$$J: 2x + 2y + 1 = 0 \text{ va } x - y + 2 = 0$$

$$b) 5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0$$

$$J: 28x + 21y + 4 = 0 \text{ va } 33x - 44y - 6 = 0$$



$$v) x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$$

$$J: x + y = 0 \text{ va } x - y = 0$$

16. Parabola  $x^2 = 6y$  tenglama yordamida berilgan. Uning

$$4x - y - 5 = 0$$

to'g'ri chiziq yo'nalishiga qo'shma diametri tenglamasini tuzing.

$$J: x - 12 = 0$$

17. Parabola  $y^2 = 2px$  tenglama yordamida berilgan. Uning parabola o'qi bilan  $45^\circ$  burchak tashkil qiluvchi vatarlarga qo'shma diametri tenglamasi tuzilsin.

$$J: y - p = 0$$

18. Parabola

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$$

tenglama yordamida berilgan. Uning absissa o'qiga qo'shma diametr tenglamasini tuzing.

$$J: x - 3y - 6 = 0$$

## V BOB

# IKKINCHI TARTIBLI SIRTLARNING KANONIK TENGLAMALARI

### 1-§. Ellipsoid va giperboloidlar

#### 1. Ellipsoid

Fazoda dekart koordinatalari sistemasi kiritilgan bo'lib, unda ikkinchi darajali  $F(x, y, z)$  ko'phad yordamida berilgan

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

tenglamani qaraylik. Fazoda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deb ataladi.

**1-ta'rif.** *Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

*ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ellipsoid deb ataladi. Bu tenglamada  $a \geq b \geq c > 0$  munosabat bajarilishi talab qilinadi.*

Ellipsoid tenglamasidan ko'rinib turibdiki, u koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.

Ellipsoidning shaklini chizish uchun uning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimini qaraymiz. Masalan, uni  $z = h$  tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak,  $|h| < c$  bo'lganda kesimda

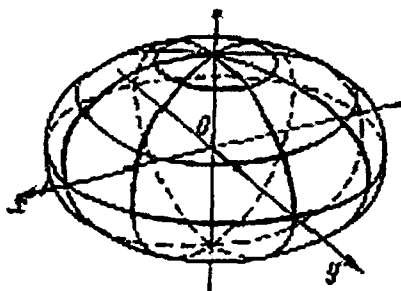
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu tenglamani

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Xuddi shunday, ellipsoidni  $Oxz$ ,  $Oyz$  tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olib, ellipsoidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



42-chizma.

**2-ta'rif.** *Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3)$$

*ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikki pallali giperboloid deb ataladi. Bu tenglamada  $a \geq b > 0, c > 0$  munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.*

Ikki pallali giperboloid tenglamasidan ko'rish mumkinki, uchinchi o'zgaruvchi  $z \leq c$  va  $z \geq c$  tengsizliklarni qanoatlantirishi kerak.

Demak, ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat va uning nomi shakliga mosdir. Agar ikki pallali giperboloidni  $z = h$  tenglama bilan aniqlangan tekislikda kessak,  $|h| > c$  bo'lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

kattaliklarga tengdir.

Agar ikki pallali giperboloidni  $y = h$  tenglama bilan aniqlangan tekislikda kessak, har qanday  $h$  uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} + 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}} \quad a\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Xuddi shunday ikki pallali giperboloidni  $x = h$  tenglama bilan

aniqlangan tekislikda kessak, har qanday  $h$  uchun kesimda

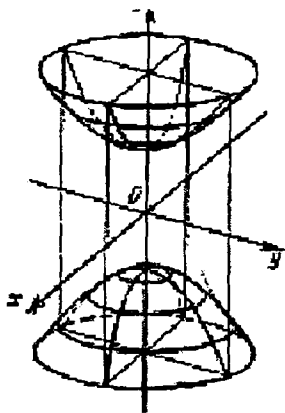
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} + 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \quad b\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Bundan tashqari (3) tenglamadan ko'rish mumkinki, giperboloid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bularni hisobga olib, uni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



43-chizma.

**3-ta'rif.** *Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

ko'inishda yozish mumkin bo'lsa, u bir pallali giperboloid deb ataladi.

Bu tenglamada  $a \geq b > 0$ ,  $c > 0$  munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Bir pallali giperboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bir pallali giperboloidni  $z = h$  tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday  $h$  uchun kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning

yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar  $h=0$  bo'lsa, kesimda eng kichkina ellips hosil bo'ladi. Bu ellips bir pallali giperboloidning bo'g'zi deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni  $x=h$ ,  $y=h$  tenglama bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, mos ravishda  $|h| < a$  va  $|h| < b$  bo'lganda kesimda

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$$

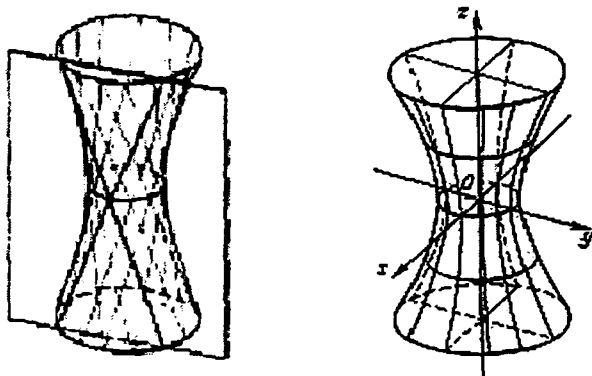
tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalar hosil bo'ladi. Bu giperbolalardan birinchisining yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar  $|h| = a$  yoki  $|h| = b$  bo'lsa, kesimda mos ravishda

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ va } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Bu faktlarni hisobga olib, bir pallali giperboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



44-chizma.

**4-ta'rif.** *Sirtning har bir nuqtasidan shu sirtga yotuvchi to'g'ri chiziq o'tsa, bunday sirt chizikli sirt deyiladi.*

Sirt chegaralagan bo'lsa, unda to'g'ri chiziq yotmaydi va shuning uchun u chizikli sirt bo'lmaydi. Demak, ellipsoid chizikli sirt bo'lmaydi.

**1-teorema.** *Bir pallali giperboloid chizikli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan giperboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.*

**Isbot.** Bir pallali giperboloidning  $M(x_0, y_0, z_0)$  nuqtasidan  $\{\ell, m, n\}$  yo'nalishdagi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \ell t \\
 y &= y_0 + m t \\
 z &= z_0 + n t
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq bir pallali giperboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0 + \ell t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + m t)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + n t)^2}{c^2} = 1$$

tenglik  $t$  ning har qiymatida bajarilishi kerak. Bu tenglikda

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

munosabatni hisobga olsak,

$$\frac{\ell^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{\ell x_0}{a^2} + \frac{m y_0}{b^2} - \frac{n z_0}{c^2} = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Yo'nalishni aniqlovchi  $\{\ell, m, n\}$  vektorning hamma koordinatalari nolga teng bo'lmaganlini uchun yuqordagi tenglikning birinchisidan  $n \neq 0$  ekanligi kelib chiqadi. Biz umumiylikni chegaralamasdan  $n = c$  deb olamiz. Bundan esa  $\ell, m$  lar uchun

$$\frac{\ell^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1, \quad \frac{\ell x_0}{a^2} + \frac{m y_0}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

shartlarni olamiz. Agar biz

$$x_0 = x_1 + \ell \frac{z_0}{c}, \quad y_0 = y_1 + m \frac{z_0}{c}
 \tag{6}$$

tengliklar bilan  $(x_1, y_1, 0)$  nuqtani aniqlasak



$$\frac{\ell x_1}{a^2} + \frac{m y_1}{b^2} = 0 \quad (7)$$

tenglikni olamiz. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} \frac{\left(x_1 + \ell \frac{z_0}{c}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_1 + m \frac{z_0}{c} t\right)^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} &= \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \\ + 2\left(\frac{\ell x_1}{a^2} + \frac{m y_1}{b^2}\right) \frac{z_0}{c} + \left(\frac{\ell^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 1\right) \frac{z_0^2}{c^2} &= \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \end{aligned}$$

tenglikdan

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,  $(x_1, y_1, 0)$  nuqta giperboloidning bo'g'ziga tegishlidir. Yuqoridagi (6) tenglikdan

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

munosabat kelib chiqadi. Biz agar

$$\ell = -\frac{a}{b} y_1 u, \quad m = \frac{b}{a} x_1 u$$

tengliklar bilan  $\{\ell, m, c\}$  vektorning  $\ell, m$  koordinatalarini aniqlasak,

$$\frac{\ell^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = \left(\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}\right) u^2$$

munosabatni hisobga olib (8) tenglikdan  $u = \pm 1$  qiymatlarni topamiz. Demak, biz qidirayotgan to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalari

$$x = x_0 - u \frac{a}{b} y_1 t$$

$$y = y_0 + u \frac{b}{a} x_1 t$$

$$z = z_0 + ct$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqlar  $t = -\frac{z_0}{c}$  bo'lganda  $(x_1, y_1, 0)$

nuqtadan o'tadi. Haqiqatan ham (6) tengliklardan

$$x_1 = x_0 + u \frac{a}{b} y_1 \frac{z_0}{c}$$

$$y_1 = y_0 + u \frac{b}{a} x_1 \frac{z_0}{c}$$

munosabatlarni hosil qilish mumkin. Teorema isbotlandi.

## 2-§. Konus va uning kesimlari

**3-ia'rif.** Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u konus deb ataladi. Bu tenglamada  $a \geq b > 0, c > 0$  munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Konus tenglamasidan ko‘rinib turibdiki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir. Bundan tashqari, agar  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqta konusga tegishli bo‘lsa,  $O(0, 0, 0)$  va  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqdagi har bir nuqta konusga tegishlidir. Haqiqatan ham, bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqta  $(tx_0, ty_0, tz_0)$  ko‘rinishga ega va bevosita

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2} + \frac{(ty_0)^2}{b^2} - \frac{(tz_0)^2}{c^2} = t^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0$$

tenglikni tekshirib ko‘rish mumkin.

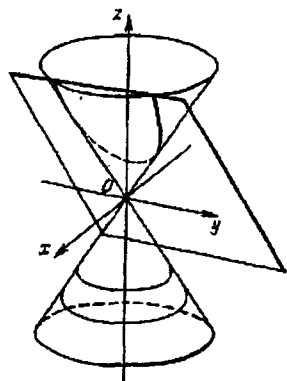
Konusning har bir yasovchisi bu ellipsni bir marta ( faqat bitta nuqtada) kesib o‘tadi. Konusda yotuvchi va bu xossaga ega bo‘lgan chiziqlar konusning yasovchisi deyiladi. Bu ellipsning markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq konusning o‘qi deyiladi.

Yuqoridagi kanonik tenglamada konusning o‘qi  $oz$  o‘qi bilan ustma-ust tushadi. Koordinata boshi ham konusga tegishli, konusning hamma yasovchilari bu nuqtadan o‘tadi. Konusning hamma yasovchilari o‘tuvchi nuqta uning uchi deb ataladi.

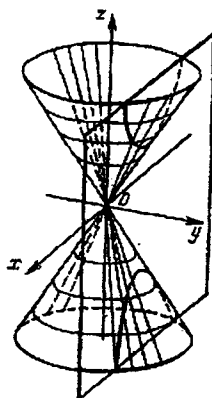
**4-ta’rif.** *Konusni uning uchidan o‘tmaydigan tekisliklar bilan kesish natijasida hosil bo‘lgan chiziqlar konus kesimlar deyiladi.*

**2-teorema.** *Aylanadan boshqa hamma konus kesimlar tekislikda berilgan nuqttagacha bo‘lgan masofasining berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofasiga nisbati o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘midir.*

**Isbot.** Konusni  $\alpha$  tekislik bilan kesganimizda hosil bo‘lgan chiziqni  $\gamma$  bilan belgilaylik. Konusga ichki chizilgan va  $\alpha$  tekislikka urinuvchi sferaning tekislik bilan kesishish nuqtasini  $F$  bilan belgilaymiz. Ichki chizilgan sfera konusga aylana bo‘ylab urinadi. Bu aylana yotuvchi tekislikni  $\omega$  bilan belgilaymiz. Konus kesimga tegishli ixtiyoriy  $M$  nuqta olib, undan o‘tuvchi yasovchi bilan  $\omega$  tekislikning kesishish



45-chizma.



nuqtasini  $B$  bilan belgilaymiz. Konus kesimga tegishli  $M$  nuqtadan  $\alpha$  va  $\omega$  tekisliklar kesishishidan hosil bo'lgan  $\delta$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazamiz. Sferaga  $M$  nuqtadan o'tkazilgan urinmalar kesmalari bo'lgani uchun  $FM = BM$  tenglik o'rinli bo'ladi. Berilgan  $M$  nuqtadan  $\omega$  tekislikkacha bo'lgan masofani  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  bilan belgilasak,

$$AM = \frac{h(M)}{\sin \varphi} \quad BM = \frac{h(M)}{\sin \psi} \quad \text{tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu}$$

yerda  $\varphi$  -  $\alpha$  va  $\omega$  tekisliklar orasidagi burchak,  $\psi$  - konus yasovchi va  $\omega$  tekislik orasidagi burchak,  $A$  nuqta esa  $M$  nuqtadan  $\delta$  to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar asosidir. Yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{FM}{AM} = \frac{BM}{AM} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = e$$

munosabatni olamiz. Bu munosabatdan ko'rinib turibdiki,  $\frac{FM}{AM}$  nisbat

$M$  nuqtaga bog'liq emas. Teorema isbotlandi.

Konus kesim uchun  $F$  nuqta uning fokusi  $\delta$  to'g'ri chiziq esa direktrisa deyiladi. Yuqoridagi nisbat 1 dan kichik yoki teng bo'lganda konus kesimning hamma nuqtalari fokus bilan birgalikda direktrisaning bir tarafida yotadi. Haqiqatdan ham direktrisaning boshqa tarafida yotuvchi  $M'$  nuqta uchun

$$\frac{FM'}{AM'} > \frac{BM'}{AM'} \geq 1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar yuqoridagi nisbat 1 dan katta bo'lsa, direktrisaning har ikkala tarafida konus kesimga tegishli nuqtalar bor. Demak, bu holda konus kesim ikki qismdan iborat.

Biz bilamizki, agar  $e < 1$  bo'lsa konus kesim ellips bo'ladi. Biz III bobda bu fakti isbotlaganmiz. Agar  $e = 1$  bo'lsa, konus kesim parabola bo'ladi. Konus kesim uchun  $e < 1$  bo'lsa, u giperbola bo'ladi.

Biz III bobda o'rgangan ikkinchi tartibli chiziqlarning(ellips, parabola va giperbola) har biri ikkinchi teoremaga ko'ra, konusning birorta tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lar ekan. Bu fakti algebraik metod bilan isbotlash ham mumkin.

Konusni  $z = h$  tenglama bilan aniqlanuvchi tekislik bilan kessak, kesimda yarim o'qlari mos ravishda

$$\frac{a}{c}|h|, \frac{b}{c}|h|$$

kattaliklarga teng bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Agar biz konusni  $x = h$ ,  $y = h$  tenglamalar orqali aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda yarim o'qlari mos ravishda

$$\frac{c}{d}|h|, \frac{a}{d}|h| \text{ va } \frac{c}{a}|h|, \frac{b}{a}|h|$$

kattaliklarga teng bo'lgan giperbolalar hosil bo'ladi. Konus kesimda

parabola hosil bo'lishini ko'rsatish uchun, uni  $z = \frac{c}{a}x + h, h \neq 0$

tenglama bilan aniqlanuvchi tekislik bilan kesamiz. Natijada kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{\left(\frac{c}{a}x + h\right)^2}{c^2} = 0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkinchi tartibli chiziqni hosil qilamiz. Koordinatalar sistemasini almashtirish yordamida bu tenglamani

$$y^2 = 2 \frac{hb^2}{ac} \left( x + \frac{ha}{2c} \right)$$

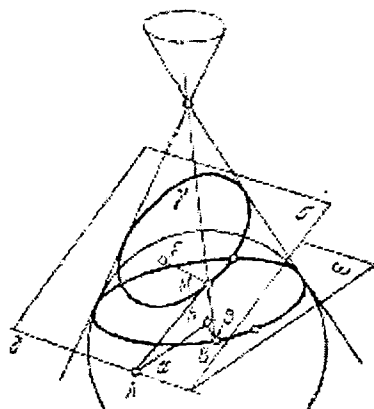
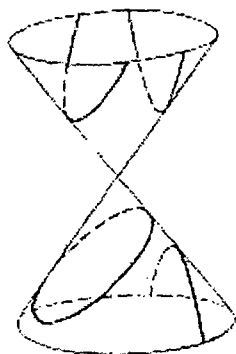
ko'rinishga keltirsak, uning parabola ekanligini ko'ramiz.

### 3-§. Paraboloidlar

*5-ta'rif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (4)$$

*ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u elliptik paraboloid deb ataladi. Bu*



46-chizma.

tenglamada  $p, q > 0$  munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Elliptik paraboloidning tenglamasidan ko‘rish mumkinki, koordinata boshi unga tegishli,  $yOz$  va  $xOz$  tekisliklari elliptik paraboloidning simmetriya tekisliklari bo‘ladi. Elliptik paraboloidni  $z = h$  tenglama orqali aniqlangan tekislik bilan kessak,  $h > 0$  bo‘lganda kesimda yarim o‘qlari mos ravishda  $\sqrt{2hp}$  va  $\sqrt{2hq}$  kattaliklarga teng bo‘lgan ellips hosil bo‘ladi. Elliptik paraboloidni  $x = h$ ,  $y = h$  tenglamalar orqali aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda fokal parametrlari mos ravishda  $p$ ,  $q$  kattaliklarga teng bo‘lgan parabolalar hosil bo‘ladi. Bu parabolalarning uchlari mos ravishda

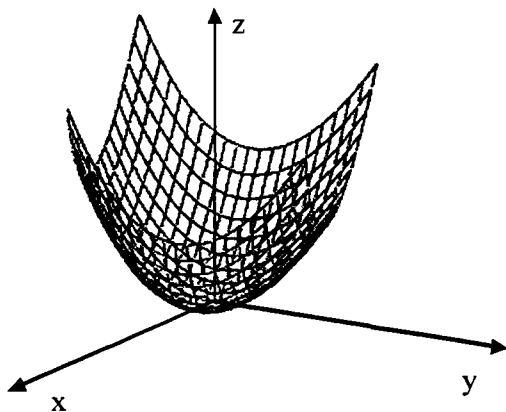
$\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$  va  $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$  nuqtalarda joylashgan. Bu xossalarni

hisobga olib, elliptik paraboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.

**6-ta’rif.** Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa, u giperbolik paraboloid deb ataladi. Bu tenglamada  $p > 0, q > 0$ , munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.



47-chizma.

Giperbolik paraboloid ham  $yOz$  va  $xOz$  tekisliklarga nisbatan simmetrik joylashgandir. Agar giperbolik paraboloidni  $z = h$  tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak,  $h > 0$  bo'lganda kesimda yarim o'qlari mos ravishda

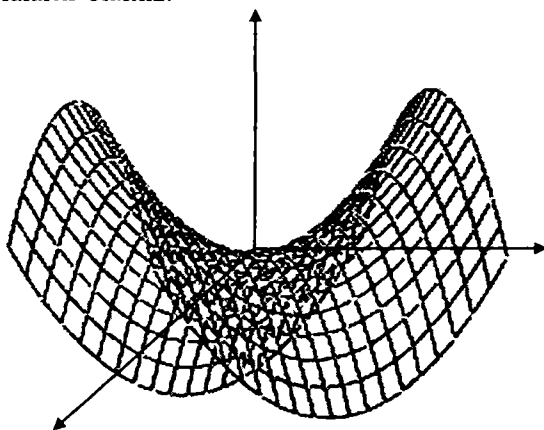
$$\sqrt{2hp}, \sqrt{2hq}$$

kattaliklarga teng bo'lgan giperbola hosil bo'ladi. Agar  $h < 0$  bo'lsa, kesimda haqiqiy o'qi  $Ox$  o'qqa, mavhum o'qi  $Oy$  o'qqa parallel va yarim o'qlari mos ravishda  $\sqrt{-2hq}, \sqrt{-2hp}$  kattaliklarga teng bo'lgan giperbola paydo bo'ladi. Kesuvchi tekislik  $xOy$  tekisligi ustma-ust tushsa, kesimda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq hosil bo'ladi.

Giperbolik paraboloidni o'qiga parallel tekisliklar bilan kessak kesimda parabolalarni olamiz.



48-chizma.



Masalan kesuvchi tekislik  $x = h$  tenglama bilan berilsa, kesimda

fokal parametrlari  $q$  ga teng va uchi  $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$  nuqtada bo'lgan parabola hosil bo'ladi.

**1-teorema.** *Giperbolik paraboloid chiziqli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan paraboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.*

Isbot. Giperbolik paraboloidga tegishli  $y = k_1x + b_1$  nuqtadan o'tuvchi va

$$x = x_0 + \ell t$$

$$y = y_0 + mt$$

$$z = z_0 + nt$$

tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziq paraboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0 + t\ell)^2}{p} - \frac{(y_0 + tm)^2}{q} = 2(z_0 + tn)$$

tenglik parametrning har bir qiymatida bajarilishi kerak. Bu tenglikni

$$t^2 \left( \frac{\ell^2}{p} - \frac{m^2}{q} \right) + 2t \left( \frac{\ell x_0}{p} - \frac{m y_0}{q} - n \right) = 0$$

ko'rinishda yozib, undan

$$\frac{\ell^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{\ell x_0}{p} - \frac{m y_0}{q} - n = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan  $\{l, m, n\}$  yo'nalish uchun

$$l : m : n = \sqrt{p} : u\sqrt{q} : \left( \frac{x_0}{\sqrt{p}} - u \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerda  $u = \pm 1$  tenglik bajarilgan. Demak, giperbolik paraboloidning har bir nuqtasidan unda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi. Bu to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalarini

$$\begin{aligned}x &= x_0 + t\sqrt{p} \\y &= y_0 + ut\sqrt{q} \\z &= z_0 + t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\end{aligned}\tag{5}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu parametrik tenglamalarda

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) \neq 0$$

munosabat bajarilsa,

$$t = t_1 = -\frac{z_0}{\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

bo'lganda (5) to'g'ri chiziqlar  $z = 0$  tekislikni kesib o'tadi. Bu tekislikda

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0\tag{6}$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar ham yotadi. Demak, (5) to'g'ri chiziq (6) to'g'ri chiziqlarning bittasini kesib o'tadi. Buni aniqlash uchun (5) ifodalarni (6) tenglamalarga qo'ysak

$$\left( \frac{x_0 + t_1 \sqrt{p}}{\sqrt{p}} + u \frac{y_0 + ut_1 \sqrt{q}}{\sqrt{q}} \right) = \left( \frac{x_0}{\sqrt{p}} + u \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) + 2t_1 = 0$$

tenglikni olamiz. Demak, (5) to'g'ri chiziq

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + u \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad (7)$$

to'g'ri chiziqni kesib o'tadi. Bu to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{aligned} x &= \tau \sqrt{p} \\ y &= -u \tau \sqrt{q} \quad -\infty < \tau < +\infty \end{aligned}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Yuqoridagi (5) va (7) to'g'ri chiziqlar kesishish

$(x_0 + t_1 \sqrt{p}, y_0 + ut_1 \sqrt{q})$  nuqtasida kesishadi va bu nuqtaga parametrlarning

$$\tau_1 = \frac{x_0 + t_1 \sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + t_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{x_0}{\sqrt{p}} - u \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right)$$

qiymati mos keladi.

Agar  $t' = t - t_1$  belgilashni kiritib, (5) to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$x = x_0 + t \sqrt{p} = (x_0 + t_1 \sqrt{p}) + (t - t_1) \sqrt{p} = (t' + \tau_1) \sqrt{p}$$

$$y = y_0 + tu \sqrt{q} = (y_0 + t_1 u \sqrt{q}) + u(t - t_1) \sqrt{q} = u(t' - \tau_1) \sqrt{q}$$

$$z = z_0 + t \left( \frac{x_0}{\sqrt{p}} - u \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) = (t - t_1) \left( \frac{x_0}{\sqrt{p}} - u \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) = 2t' \tau_1$$

ko'rinishda yozish mumkin.

$$\text{Agar } \frac{x_0}{\sqrt{p}} - u \frac{y_0}{\sqrt{q}} = 0 \text{ bo'lsa, giperbolik paraboloidning (4)}$$

tenglamasidan  $z_0 = 0$  tenglik kelib chiqadi. Demak, bu holda (5) to'g'ri chiziq  $z = 0$  tekislikda yotadi. Yuqoridagi keltirib chiqarilgan xossalarni quyidagicha yozishimiz mumkin.

**2-teorema.** Giperbolik paraboloidning har bir yasovchisi  $z = 0$  tekislikda yotadi yoki bu tekislikni kesib o'tadi. Yasovchining parametrik tenglamalarini

$$\begin{aligned} x &= (t + \tau) \sqrt{p}, \\ y &= u(t - \tau) \sqrt{q}, \\ z &= 2t\tau \end{aligned}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda  $u = \pm 1$ . Agar yasovchi  $z = 0$  tekislikda yotasa  $\tau = 0$ , yasovchi  $z = 0$  tekislikda yotmasa

$$\tau = \frac{d}{\sqrt{p+q}}, \ell - (5) \text{ va } (7) \text{ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan}$$

koordinata boshigacha bo'lgan masofadir.

#### 4-§. Silindrlar

**7-ta'rif.** *Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u elliptik silindr deb ataladi. Bu tenglamada  $a \geq b > 0$ , munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Elliptik silindr tenglamasida  $x, y$  o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun koordinata boshi uning simmetriya markazi bo'ladi, koordinata tekisliklari esa simmetriya tekisliklaridir.

Silindrning simmetriya markazidan yasovchilarga parallel o'tadigan to'g'ri chiziq silindrning o'qi deyiladi. Elliptik silindrni (8) tenglama yordamida aniqlaganimizda uning o'qi  $Oz$  o'qi bilan ustma-ust tushadi. Bu sirtning o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo'ladi.

Mustaqil ish uchun topshiriq. Elliptik silindr tenglamasida  $a = b$  bo'lsa, uning o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kessak, kesimda aylana hosil bo'ladi. Lekin  $a \neq b$  bo'lganda ham uni yasovchilarga parallel bo'lmagan tekislik bilan kesib aylana hosil qilish mumkin. Bu faktning isbotlang.

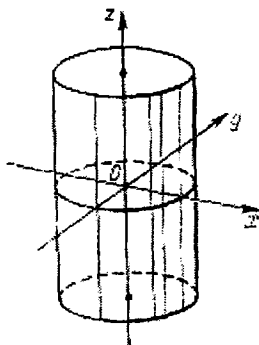
**8-ta'rif.** *Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u giperbolik silindr deb ataladi. Bu tenglamada  $a > 0$ ,  $b > 0$  munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Giperbolik silindr tenglamasida  $x, y$  o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun elliptik silindr kabi koordinata boshi

uning simmetriya markazi bo'ldi, koordinata tekisliklari esa simmetriya tekisliklaridir. Giperbolik silindrni unig o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kessak, kesimda (9) tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi.



49-chizma.  
Elliptik silindr.

**9-ta'rif.** Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

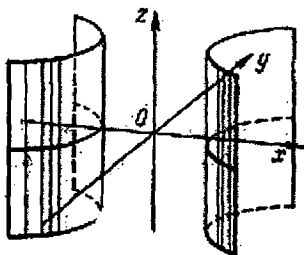
$$y^2 = 2px \quad p > 0 \quad (10)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u parabolik silindr deb ataladi.

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

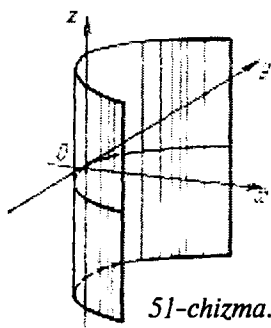
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (11)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikkita kesishuvchi tekislikdan iborat bo'ladi.



50-chizma. Giperbolik silindr.

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida



51-chizma.

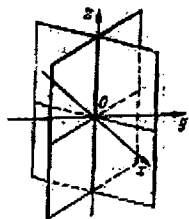
$$y^2 - b^2 = 0 \quad (12)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikkita parallel tekislikdan iborat bo'ladi.

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini biorta dekart koordinatalari sistemasida

$$y^2 = 0 \quad (13)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikkita ustma-ust tushuvchi tekislikdan iborat bo'ladi.



52-chizma.

### 5-§. Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi

Bizga ikkinchi tartibli sirt

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, unga

tegishli  $M(x_0, y_0, z_0)$

nuqtadagi urinma tekislik tushunchasini kiritamiz.

**10-ta'rif.** *Ikkinchi tartibli sirtta yotuvchi va  $M_0$  nuqtadan o'tuvchi hamma chiziqlarning shu nuqtadagi urinmalari yotuvchi tekislik Sirtning  $M_0$  nuqtadagi urinma tekisligi deyiladi.*

Urinma tekislik tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun  $M_0$  nuqtadan o'tuvchi  $\alpha$  tekislik bilan sirtni kesganimizda hosil bo'lgan kesimni (chiziqni)  $\gamma$  bilan, uning  $M_0$  nuqtadagi urinmasini  $\ell$  bilan belgilaymiz.

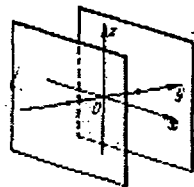
Urinmaga tegishli nuqtani  $M(x, y, z)$  bilan,  $\gamma$  chiziqda  $M_0$  nuqtaga yetarli yaqin nuqtani  $N$  bilan belgilab,  $M_0$  va  $N$  nuqталardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqda  $M(x, y, z)$  nuqtaga eng yaqin nuqta  $M'(x', y', z')$  bo'lsin.  $N$  nuqtaning koordinatalarini

$$x_N = x_0 + t(x' - x_0)$$

$$y_N = y_0 + t(y' - y_0)$$

$$z_N = z_0 + t(z' - z_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin.



53-chizma.

Koordinatalar uchun bu ifodalarni (1) tenglamaga qo'ysak

$$F(x_0 + t(x' - x), y_0 + t(y' - y_0), z_0 + t(z' - z_0)) = 0 \quad (1)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikning chap tomonidagi ifodada  $t \rightarrow 0$  da  $x', y', z'$  o'zgaruvchilar mos ravishda  $x_0, y_0, z_0$  kattaliklarga intiladi.

Yuqoridagi tenglikni  $t$  ga bo'lib va  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  tenglikni hisobga olib,  $t \rightarrow 0$  da limitga o'tsak

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (14)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama sirtning  $M_0$  nuqtadagi urinma tekisligi tenglamasidir.

## 6-§. Sirtning diametral tekisligi

Biz ikkinchi tartibli chiziqlar uchun diametr tushunchasini kiritgan edik. Ikkinchi tartibli sirt uchun esa diametr tekislik tushunchasini kiritamiz. To'g'ri chiziq ikkinchi tartibli sirtning ikki  $M, N$  nuqtada kesib o'tsa,  $MN$  kesma ikkinchi tartibli sirt uchun vatar bo'ladi.

**1-teorema.** *Parallel vatarlarning o'rtalari bir tekislikda yotadi.*

**Isbot.** Ikkinchi tartibli sirt uchun maxsus tanlangan  $Oxyz$  dekart koordinatalar sistemasi mavjudki, uning tenglamasida  $xy, xz, yz$  ifodalar qatnashmaydi. Bu faktning isbotlash uchun

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$$

belgilash kiritib

$$f(x, y, z) = \frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz}{x^2 + y^2 + z^2}$$



funksiyani qaraymiz. Bu funksiya hamma o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli, ya'ni

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = f(x, y, z), \quad \lambda \in R^1$$

tenglik o'rinlidir. Bundan tashqari  $f$  funksiya birlik sferada chegaralangan va sferaning birorta  $M_0$  nuqtasida bu sferadagi eng kichik qiymatga erishadi.

Funksiya bir jinsli bo'lgani uchun, u koordinata boshidan chiquvchi nurlarda funksiyaning qiymati o'zgarmaydi. Demak,  $M_0$  nuqtada funksiya o'zining aniqlanish sohasidagi eng kichik qiymatiga erishadi.

Koordinatalar boshini o'zgartirmagan holda  $Oz'$  o'qni  $\overline{OM_0}$  vektor bo'yicha yo'naltirib, yangi  $Ox'y'z'$  koordinatalar sistemasini kiritamiz. Yangi koordinatalar sistemasida funksiya

$$f(x', y', z') = \frac{a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Maxrajda turgan ifoda nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofaning kvadrati bo'lgani uchun. Uning ko'rinishi o'zgarmaydi. Yangi koordinatalar sistemasida  $M_0$  nuqta  $(0, 0, z_0)$  koordinatalarga ega va

$$f(0, y', z_0) = \frac{a'_{22}y'^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33}z_0^2}{z_0^2 + y'^2}$$

tenglik o'rinli. Demak,

$$\left. \frac{df(0, y', z_0)}{dy'} \right|_{y'=0} = 0$$

tenglikdan  $a'_{23} = 0$  munosabat kelib chiqadi. Yuqoridagidek

$f(x', 0, z_0)$  funksiyaning  $M_0$  nuqtada minimumga erishishidan foydalanib,  $a'_{13} = 0$  tenglikni olamiz. Natijada ikkinchi tartibli sirt tenglamasi

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{33}z'^2 + a'_{44} = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda faqat  $x', y'$  o'zgaruvchilarga bog'liq ifodada  $x'y'$  ko'paytmani yo'qotish uchun koordinatalar sistemasini qanday o'zgartirishni biz IV bobda o'rgandik. Buning uchun koordinata boshini o'zgartirmasdan yangi,  $Ox''$ ,  $Oy''$  o'qlarni o'zaro qo'shma qilib tanlasak,  $Oz'$  o'q yo'nalishini o'zgartirmasak, sirt tenglamasi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \quad (15)$$

ko'rinishga keladi.

Endi bevosita teorema isbotiga kirishamiz. Buning uchun

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$$

to'g'ri chiziqqa parallel vatar o'rtasining koordinatalarini  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  bilan belgilasak, uning uchi koordinatalari mos ravishda

$$x = \bar{x} + \lambda t, \quad y = \bar{y} + \mu t, \quad z = \bar{z} + \nu t \quad \text{va} \quad x = \bar{x} - \lambda t, \\ y = \bar{y} - \mu t, \quad z = \bar{z} - \nu t \quad (16)$$

ko'rinishda bo'ladi. Vatar uchlari sirtga tegishli bo'lgani uchun, ularning koordinatalari (15) tenglamani qanoatlantiradi. Ularni (15) tenglamaga qo'ysak,

$$a_{11}\bar{x}^{-2} + a_{22}\bar{y}^{-2} + a_{33}\bar{z}^{-2} + 2a_1\bar{x} + 2a_2\bar{y} + 2a_3\bar{z} + a + 2t(\lambda a_{11}\bar{x} + \mu a_{22}\bar{y} \\ + \nu a_{33}\bar{z} + \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3) + t^2(a_{11}\lambda^2 + a_{22}\mu^2 + a_{33}\nu^2) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda  $t$  ning ishorasini o'zgartirsak ham, u o'rinli bo'ladi. Demak, birinchi darajali had koeffitsienti nolga teng bo'ladi:

$$\lambda(a_{11}\bar{x} + a_1) + \mu(a_{22}\bar{y} + a_2) + \nu(a_{33}\bar{z} + a_3) = 0 \quad (17)$$

Bundan esa vatar o'rtasining koordinatalari (17) tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

**11-ta'rif.** *Parallel vatarlarning o'rtalaridan o'tuvchi tekislik sirtning diametrial tekisligi deb ataladi.*

Diametrial tekislikning tenglamasini ixtiyoriy dekart koordinatalar sistemasida yozish uchun (16) ifodalarni

$$F(x, y, z) = 0$$

tenglamaga qo'yib,

$$2F(x, y, z) \pm 2t(\lambda F_x(x, y, z) + \mu F_y(x, y, z) + \nu F_z(x, y, z)) + t^2(a_{11}\lambda^2 + a_{12}\mu^2 + a_{33}\nu^2 + 2a_{12}\lambda\mu + 2a_{23}\mu\nu + 2a_{31}\nu\lambda) = 0$$

tenglikni olamiz. Bu tenglik bajarilishi uchun  $t$  oldidagi koeffitsient nolga teng bo'lishi kerak. Demak, diametrial tekislik tenglamasini

$$\lambda F_x + \mu F_y + \lambda F_z = 0 \quad (18)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ravshanki, agar ikkinchi tartibli sirt simmetriya markaziga ega bo'lsa, har qanday diametrial tekislik bu markazdan o'tadi.

Demak, ikkinchi tartibli sirt markazi

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0 \quad (19)$$

tenglamalar sistemasi yordamida aniqlanadi.

Paraboloidning diametrial tekisligi uning o'qiga parallel bo'ladi. Bu holda  $a_{33} = 0$  bo'lganligi uchun (18) tenglamada  $z$  o'zgaruvchi qatnashmaydi.

*Elliptik va giperbolik silindrlar uchun ularning o'qlaridagi hamma*

nuqtalar markaz bo'lgani uchun har qanday diametrial tekislik sirt o'qi orqali o'tadi.

## 7-§. Sirtning simmetriya tekisligi

**12-ta'rif.** Bizga  $\alpha$  tekislik berilgan bo'lib, sirtga tegishli ixtiyoriy

$M$  nuqta uchun  $\alpha$  tekislikka nisbatan bu nuqtaga simmetrik nuqta ham sirtga tegishli bo'lsa,  $\alpha$  tekislik sirtning simmetrik tekisligi deyiladi.

Diametrial tekislik tenglamasidan foydalanib, sirtning simmetriya tekisligi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Simmetriya tekisligiga perpendikulyar yo'nalishdagi o'zaro parallel vatarlar o'rtalari simmetriya tekisligiga tegishli bo'lganligi uchun  $\bar{a} = \{\ell, m, n\}$  vektorga perpendikulyar simmetriya tekisligi tenglamasi (18) ga ko'ra

$$\ell F_x + m F_y + n F_z = 0 \quad (20)$$

ko'rinishda bo'ladi. Simmetriya tekisligiga  $\bar{a} = \{\ell, m, n\}$  vektor perpendikulyar bo'lganligi uchun

$$\frac{a_{11}\ell + a_{12}m + a_{13}n}{\ell} = \frac{a_{21}\ell + a_{22}m + a_{23}n}{m} = \frac{a_{31}\ell + a_{32}m + a_{33}n}{n} \quad (21)$$

proportionallik o'rinli bo'ladi. Simmetriya tekisligiga perpendikulyar yo'nalishni (20) tenglikdan aniqlash uchun (21) nisbatni  $k$  bilan belgilab, ekvivalent sistemani hosil qilamiz

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\ell + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{21}\ell + (a_{22} - k)m + a_{23}n = 0 \\ a_{31}\ell + a_{32}m + (a_{33} - k)n = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$\ell, m, n$  lar bir vaqtda nolga teng bo'lmaganligi uchun

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan  $k$  ni topib, (22) sistemaga qo'yamiz va undan  $\{\ell, m, n\}$  yo'nalishni topamiz.

Biz sirtning simmetriya tekisligini bilsak, ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirish uchun qulay, ya'ni kanonik koordinatalar sistemasini topish qiyin bo'lmaydi.

### 8-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. *Koordinata boshini sirtning simmetriya markaziga ko'chirish yordamida quyidagi sirtlarning tenglamasini soddalashtiring.*

$$1) x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z = 0;$$

$$2) y^2 + 3xy + 2yz + zx + 3x + 2y = 0;$$

$$3) x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 2y + 2z + 1 = 0$$

2. *Ikkinchi tartibli sirt  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$  tenglama bilan berilgan.*

*Bu sirtning  $M(2, 1, -1)$  nuqtadan o'tuvchi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi vatarining tenglamasini yozing.*

3. *Ikkinchi tartibli sirt  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$  tenglama bilan berilgan.*

*Bu sirtga  $(-6; 2; 6)$  nuqtada urinuvchi tekislik tenglamasini yozing.*

4. *Ellipsoid  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$  tenglama bilan berilgan. Uning  $(-2;$*

1; -1/2) nuqtadagi normal tenglamasini yozing.

5. Ikkinchi tartibli sirt

$$2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 12yz + 6zx + 2xy + 8x + 14y + 18z = 0$$

tenglama bilan berilgan. Bu sirtning 1)  $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-5}$  to'g'ri chiziqqa;

2)  $Ox$  o'qiga; 3)  $Oy$  o'qiga; 4)  $Oz$  o'qiga parallel vatarlarga qo'shma diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

6.  $x^2 + 3z^2 - 6xy + 8x + 5 = 0$  tenglama bilan berilgan ikkinchi

tartibli sirtning  $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{3}$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi diametrial tekisligi tenglamasini yozing.

7. Ikkinchi tartibli sirtning bitta  $M(2,0,-1)$  nuqtasi, markazi  $C(0,0,-1)$

va  $Oxy$  tekislik bilan kesimi

$$\begin{cases} x^2 - 4xy - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ma'lum bo'lsa, uning tenglamasini tuzing.

8. Ikkinchi tartibli sirtning berilgan tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziqni tekshiring

$$1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad 4x - 3y - 12z - 6 = 0$$

$$2) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \quad x + 4z - 4 = 0.$$

9.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$  paraboloidning  $3x + 2y - 4z = 0$  tekislikka

parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli yasovchilarini toping.

10. Berilgan  $M(6,2,8)$  nuqtadan o'tuvchi va  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$

sirtida yotuvchi to'g'ri chiziqlarni toping.

# VI BOB

## CHIZIQLI VA AFFIN FAZOLAR

### 1-§. Chiziqli fazolar

Birorta bo'sh bo'lmagan  $V$  to'plam berilgan bo'lsin. Biz  $V$  to'plamning elementlari nimadan iborat ekanligi haqida ma'lumot bermagan holda, unda quyidagi ikkita amal kiritilgan bo'lishini talab qilamiz.

**Birinchi amal:** bu to'plamga tegishli har qanday ikkita elementga berilgan qoidaga ko'ra bu to'plamning bitta elementi mos qo'yilgan; Biz shartli ravishda  $V$  to'plamning  $a, b$  elementlariga mos qo'yilgan elementni  $a + b$  ko'rinishda yozamiz.

**Ikkinchi amal:** berilgan haqiqiy son va  $V$  to'plamning berilgan elementiga  $V$  to'plamning bitta elementi mos qo'yilgan. Biz shartli ravishda  $V$  to'plamning  $a$  elementiga va  $\lambda$  haqiqiy songa mos qo'yilgan  $V$  to'plamning elementini  $\lambda a$  ko'rinishda yozamiz.

**1-misol.** Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan barcha haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamini  $V$  bilan belgilab, unda yuqoridagi ikkita amalni kiritaylik. Berilgan ikkita  $f$  va  $g$  funksiyalar uchun  $f + g, \lambda f$  funksiyalarni quyidagi qoidalar bilan kiritamiz:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Bu tengliklarning o'ng tomonida mos ravishda funksiyalarning qiymatlari qo'shilgan va funksiyaning qiymati haqiqiy songa ko'paytirilgan.

Biz birinchi bobda vektorning tor ma'nodagi geometrik ta'rifini kiritgan edik. Matematikada vektor tushunchasi biz keltirgan ta'rifga nisbatan juda keng. Vektorning keng ma'nodagi ta'rifini keltirish uchun biz avvalo chiziqli fazo tushunchasini kiritishimiz kerak.

*1-ta'rif.* Berilgan  $V$  to'plamdagi yuqorida kiritilgan ikkita amal uchun



1) Ixtiyoriy  $a, b, c$  elementlar uchun  $a + (b + c) = (a + b) + c$  tenglik,

2) Ixtiyoriy  $a, b$  elementlar uchun  $a + b = b + a$  tenglik,

3)  $V$  to'plamga tegishli shunday  $0$  element mavjudki har qanday  $a$  element uchun  $a + 0 = a$  tenglik,

4) Har bir  $a$  element uchun shunday  $-a$  element mavjudki  $a + (-a) = 0$  tenglik,

5) Har qanday  $\lambda, \mu$  haqiqiy sonlar uchun va va har bir  $a$  element uchun  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$  tenglik,

6) Har qanday  $\lambda, \mu$  haqiqiy sonlar uchun va har bir  $a$  element uchun  $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$  tenglik,

7) Har qanday  $\lambda$  haqiqiy son va ixtiyoriy  $a, b$  elementlar uchun  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  tenglik,

8) Har bir  $a$  element uchun  $1 \cdot a = a$  tengliklar o'rinli bo'lsa,  $V$  to'plam chiziqli fazo, uning elementlari esa vektorlar deb ataladi. Uchinchi aksiomada mavjudligi ta'kidlangan  $0$  element chiziqli fazoning nol elementi yoki nol' vektor deyiladi.

Yuqoridagi misolda ko'rish mumkinki, keng ma'noda funksiya ham vektor bo'ladi. Albatta bir to'g'ri chiziqda yotgan vektorlar (yo'nalishga ega bo'lgan kesmalar), bir tekislikda yoki fazoda yotgan vektorlar chiziqli fazolardir. Biz ular uchun yuqorida keltirilgan sakkizta aksiomalarning bajarilishini birinchi bobda isbotlaganmiz. Chiziqli fazolarga juda ko'plab misollar keltirish mumkin.

### **Mustaqil ish uchun topshiriqlar.**

1. Berilgan  $[a, b]$  kesmada aniqlangan va  $k$  marta differensiallanuvchi funksiyalar to'plami chiziqli fazo ekanligini ko'rsating.

2. Bir o'zgaruvchili hamma ko'phadlar to'plami chiziqli fazo ekanligini ko'rsating.

**2-misol.** Tartiblangan  $n$  ta haqiqiy sonlar ketma-ketliklari to'plamini  $R^n$  bilan belgilab, unda chiziqli amallarni, ya'ni "qo'shish" va songa "ko'paytirish" amallarini quyidagicha kiritamiz:

ikkita  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  elementlar uchun ularga mos qo'yilgan element

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} + \{b_1, b_2, \dots, b_n\} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n\}$$

tenglik bilan,  $\lambda$  haqiqiy son va  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  element uchun

"ko'paytirish" amalini  $\lambda\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n\}$  tenglik bilan aniqlaymiz. Bu amallar yuqoridagi 1-8 aksiomalarni qanoatlantiradi. Bu chiziqli fazo biz uchun nihoyatda muhim ekanligini keyingi paragraflarda ko'ramiz.

1) Bizga chiziqli fazo berilgan bo'lsa, 3-aksiomada mavjudligi talab qilingan nol vektor yagonadir. Haqiqatan, agar ikkita  $o_1$  va  $o_2$  nol elementlar mavjud bo'lsa, ixtiyoriy  $a$  element uchun  $o_1 + a = a$  va  $o_2 + a = a$  tengliklar o'rinli bo'ladi. Birinchi tenglikni  $a = o_2$  element uchun, ikkinchi tenglikni  $a = o_1$  element uchun yozsak, biz  $o_1 + o_2 = o_2$ ,  $o_2 + o_1 = o_1$  tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan  $o_1 = o_2$  tenglik kelib chiqadi.

2) Chiziqli fazoda har bir  $a$  element uchun unga qarama-qarshi  $-a$  element yagonadir.

Agar  $a$  element uchun ikita  $b, c$  elementlar mavjud bo'lib  $a + b = o$  va  $a + c = o$  tengliklar o'rinli bo'lsa,

$$b = o + b = (a + c) + b = (a + b) + c = o + c = c$$

tenglik o'rinlidir.

3) Chiziqli fazoga tegishli ixtiyoriy  $a, b$  elementlar uchun

$$a + x = b$$

tenglama yagona  $x = b + (-a)$  yechimga ega.

Haqiqatan  $a + x = b$  bo'lsa,  $x$  element uchun  $x = (a + x) + (-a) = b + (-a)$  tenglik o'rinli va  $a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = 0 + b$  bajariladi.

4) Chiziqli fazo elementini nol soniga ko'paytirsak nol element hosil bo'ladi, ya'ni  $0a = 0$  tenglik o'rinlidir. Haqiqatan  $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a = 0$  munosabatdan  $0a = 0a - 0a = 0$  tenglik kelib chiqadi.

5) Chiziqli fazoning nol vektorini ixtiyoriy songa ko'paytirsak nol vektor hosil bo'ladi, ya'ni  $\forall \lambda \in R$  uchun  $\lambda 0 = 0$  tenglik o'rinlidir. Haqiqatan  $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$ , munosabatdan  $\lambda a = \lambda a - \lambda a = 0$  tenglik kelib chiqadi.

6) Chiziqli fazoning ixtiyoriy  $a$  elementini  $-1$  soniga ko'paytirsak unga qarama-qarshi  $-a$  element hosil bo'ladi, ya'ni

$(-1)a = -a$  tenglik o'rinlidir. Haqiqatan

$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = 0$ . munosabatdan

$(-1)a = -a$  tenglik kelib chiqadi.

7) Chiziqli fazo aksiomalarining ikkinchisi boshqa aksiomalar va qarama-qarshi element yagonaligidan kelib chiqadi.

Haqiqatan  $(a + b) - (b + a) = a + b + (-1)(b + a) =$

$a + (b - b) - a = a - a = 0$  munosabatdan  $b + a = a + b$  tenglik kelib chiqadi.

Bizga chiziqli fazoda  $m$  ta vektordan iborat  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila va  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar yordamida

hosil qilingan

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \quad (1)$$

vektor  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

Birorta  $b$  vektor  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lsa,  $b$  vektor  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorlar orqali chiziqli ifodalangan deyiladi.

**2-ta'rif.** Chiziqli fazoning  $a_1, a_2, \dots, a_m$  elementlar uchun kamida bittasi noldan farqli  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  haqiqiy sonlar mavjud bo'lib,  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$  munosabat o'rinli bo'lsa,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli, aks holda esa bu oila chiziqli erkli deyiladi.

Biz tor ma'nodagi vektorlar uchun chiziqli bog'lanishli va chiziqli erkli oilalarning xossalari bilan birinchi bobda tanishdik. Keng ma'nodagi vektorlar uchun ham bu xossalar saqlanadi. Ularning asosiyalarini keltiramiz.

1) Birorta  $b$  vektor  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lsa,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oilaga tegishli har bir vektor  $b_1, b_2, \dots, b_m$  lar orqali chiziqli ifodalansa,  $b$  vektor  $b_1, b_2, \dots, b_m$  vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi.

2) Vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli qism oilaga ega bo'lsa, bu chiziqli bog'lanishli bo'ladi.

3) Vektorlar oilasiga nol vektor tegishli bo'lsa, bu oila chiziqli bog'lanishli bo'ladi.

**1-teorema.** Vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun bu oiladagi kamida bitta vektor qolganlari orqali chiziqli ifodalanishi zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Chiziqli fazoning  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, kamida bittasi noldan farqli  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  haqiqiy

sonlar mavjud bo'lib,  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$  tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar  $\lambda_1 \neq 0$  bo'lsa,

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} a_m \text{ tenglikni hosil qilamiz.}$$

Va aksincha  $a_1 = k_2 a_2 + \dots + k_m a_m$  tenglikdan  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = k_2, \dots, \lambda_m = k_m$  sonlar uchun  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$  tenglikni hosil qilamiz.

**2-teorema.** Chiziqli fazoda  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oilaning har bir vektori  $b_1, b_2, \dots, b_n$  vektorlar orqali chiziqli ifodalanib,  $m > n$  bo'lsa,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila chiziqli bog'lanishli bo'ladi.

**Isbot.** Teorema shartiga ko'ra

$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n},$$

$$\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n},$$

$$\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \dots, \lambda_{mn},$$

haqiqiy sonlar mavjud bo'lib,

$$a_1 = \lambda_{11} b_1 + \lambda_{12} b_2 + \dots + \lambda_{1n} b_n,$$

$$a_2 = \lambda_{21} b_1 + \lambda_{22} b_2 + \dots + \lambda_{2n} b_n,$$

$$a_m = \lambda_{m1} b_1 + \lambda_{m2} b_2 + \dots + \lambda_{mn} b_n,$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Biz

$$\lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \dots + \lambda_{m1}x_m = 0,$$

$$\lambda_{1n}x_1 + \lambda_{2n}x_2 + \dots + \lambda_{mn}x_m = 0,$$

tenglamalar sistemasini qarasaq, bu sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'p, ya'ni  $m > n$  bo'lganligi uchun bu sistema notrivial  $x_1^{(0)}$ ,  $x_2^{(0)}$ , ...,  $x_m^{(0)}$  yechimga ega. Bu yechim elementlari

yordamida hosil qilingan  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}a_1 + x_2^{(0)}a_2 + \dots + x_m^{(0)}a_m &= x_1^{(0)}(\lambda_{11}b_1 + \lambda_{12}b_2 + \dots + \lambda_{1n}b_n) + \\ &+ x_2^{(0)}(\lambda_{21}b_1 + \lambda_{22}b_2 + \dots + \lambda_{2n}b_n) + \dots + x_m^{(0)}(\lambda_{m1}b_1 + \lambda_{m2}b_2 + \dots + \lambda_{mn}b_n) = \\ &= (\lambda_{11}x_1^{(0)} + \lambda_{21}x_2^{(0)} + \dots + \lambda_{m1}x_m^{(0)})b_1 + \dots + (\lambda_{1n}x_1^{(0)} + \lambda_{2n}x_2^{(0)} + \dots + \lambda_{mn}x_m^{(0)})b_n = \\ &= 0b_1 + \dots + 0b_n = 0. \end{aligned}$$

Demak  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila chiziqli bog'lanishli bo'ladi.

Chiziqli fazo elementlari uchun ham kollinear va komplanar vektorlar tushunchalarini kiritish mumkin. Buning uchun chiziqli bog'lanishlik tushunchasidan foydalanamiz.

3-ta'rif. Ikkita vektordan iborat vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ular kollinear vektorlar, uchta vektordan iborat vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ular komplanar vektorlar deyiladi.

Bizga ma'lumki, bir tekislikda yotuvchi har qanday uchta vektor va uch o'lchamli fazoda har qanday to'rtta vektor chiziqli bog'lanishli bo'ladi.

Endi chiziqli fazoda oila tushunchasini kiritamiz.

**4-ta'rif.** Chiziqli fazoda har qanday vektorni  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vektorlar orqali ifodalash mumkin bo'lsa,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oila to'liq oila deyiladi.

Agar chiziqli fazoda chekli sondagi elementardan iborat to'liq oila mavjud bo'lsa, fazo chekli o'lchamli deyiladi.

**5-ta'rif.** Chiziqli fazoda chiziqli erkli to'liq oila shu fazoning oilasi deyiladi.

**3-teorema.** Bizga  $V$  chiziqli fazoda  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila va  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila berilgan bo'lsin. Berilgan  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila chiziqli erkli bo'lsa,  $m \leq n$  bo'ladi, agar  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila to'liq bo'lsa,  $m \geq n$  bo'ladi.

**Isbot.** Chiziqli fazo oilai  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila to'liq bo'lganligi uchun  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oilaning har bir vektori  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oilaning vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi. Yuqoridagi 2- teoreмага ko'ra agar  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila chiziqli erkli bo'lsa,  $m \leq n$  bo'ladi.

Agar  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oila to'liq bo'lsa, u holda  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oilaning har qanday vektori  $a_1, a_2, \dots, a_m$  oilaning vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi. Yana 2- teoreмага ko'ra  $e_1, e_2, \dots, e_n$  chiziqli erkli bo'lganligi uchun  $m \geq n$  bo'ladi.

Bu teoremadan quyidagi muhim fakt kelib chiqadi:

**4-teorema.** Chekli o'lchamli chiziqli fazo oilalari bir xil sondagi vektorlardan iborat bo'ladi.

Biz keyingi paragraflarda faqat chekli o'lchamli chiziqli fazolar bilan ish ko'ramiz va chekli o'lchamli  $V$  chiziqli fazoning o'lchamini  $\dim V$  bilan belgilaymiz.

**5-teorema.** Chekli o'lchamli chiziqli fazoda  $n$  ta vektordan iborat oila ( $n = \dim V$ ) oila bo'lishi uchun bu oilaning to'liq yoki chiziqli erkli bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Biz agar birorta  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila to'liq bo'lsa, chiziqli erkli bo'lishini va aksincha  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila chiziqli erkli bo'lsa, uning

to'liq ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Agar  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila to'liq va chiziqli bog'lanishli bo'lsa, unda  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oiladan mos vektorni o'chirib  $n - 1$  vektordan tashkil topgan to'liq vektorlar oilasini hosil qilamiz. Bu esa 3-teoremaga ziddir. Demak,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila to'liq bo'lsa u chiziqli erkli bo'lar ekan.

Endi  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila chiziqli erkli bo'lsin. Biz bu oilaning to'liq ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni ixtiyoriy  $a \in V$  vektor  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila vektorlari orqali chiziqli ifodalanishini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun  $e_1, e_2, \dots, e_n, a$  oilani qaraylik, bu oila  $n + 1$  ta vektordan iborat va yuqoridagi 3-teoremaga ko'ra  $e_1, e_2, \dots, e_n, a$  vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'ladi. Demak,  $e_1, e_2, \dots, e_n, a$  oila vektorlaridan bittasi qolgan vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi. Teorema shartiga ko'ra  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila chiziqli erkli bo'lganligi uchun faqat  $a$  vektorgina qolgan vektorlar orqali chiziqli ifodalanishi mumkin. Teorema isbotlandi.

Chiziqli  $V$  fazoda  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oila berilgan bo'lsin.

Ixtiyoriy  $a \in V$  vektor uchun shunday  $a^1, a^2, \dots, a^n$  sonlar mavjud bo'lib, bu vektorni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n \quad (1)$$

**6-ta'rif.** Birinchi tenglikdagi  $a^1, a^2, \dots, a^n$  sonlari  $a$  vektorning  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oiladagi koordinatalari deb ataladi.

**6-teorema.** Ixtiyoriy vektor berilgan oiladagi koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi. Vektorlar qo'shilganda ularning koordinatalari qo'shiladi, vektorni songa ko'paytirganda ko'paytma vektor koordinatalari mos ravishda ko'paytiriluvchi vektor koordinatalari bilan ko'paytirilayotgan



son ko'paytmalaridan iborat.

**Isbot.** Biz  $a$  vektor uchun oila vektorlar orqali ikkita chiziqli

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n$$

$$a = b^1 e_1 + b^2 e_2 + \dots + b^n e_n$$

ifodalarga ega bo'lsak, bu tengliklardan

$$0 = (a^1 - b^1)e_1 + (a^2 - b^2)e_2 + \dots + (a^n - b^n)e_n$$

tenglikni olamiz. Bazisni tashkil qiluvchi  $e_1, e_2, \dots, e_n$  vektorlarning chiziqli erkinlik ekanligidan

$$a^1 = b^1, \quad a^2 = b^2, \dots, \quad a^n = b^n$$

tengliklar kelib chiqadi. Demak, har qanday vektor o'zining koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi.

Biz agar ikkita

$$a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + \dots + a^n e_n \quad b = b^1 e_1 + b^2 e_2 + \dots + b^n e_n$$

vektorlarning yig'indisini

$$a + b = a^1 e^1 + a^2 e^2 + \dots + a^n e_n + b^1 e_1 + \dots + b^n e_n =$$

$$= a^1 e_1 + b^1 e_1 + \dots + a^n e_n + b^n e_n = (a^1 + b^1) e_1 + \dots + (a^n + b^n) e_n.$$

ko'rinishda yozsak,  $a + b$  vektorning koordinatalari mos ravishda  $a$  va  $b$  vektorlarning koordinatalari yig'indilariga tengligini ko'ramiz.

Ixtiyoriy  $a$  vektor va  $k$  soni uchun chiziqli fazo aksiomalaridan foydalanib,

$$ka = k(a^1 e_1 + \dots + a^n e_n) = (ka^1) e_1 + \dots + (ka^n) e_n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni yig'indi belgisidan foydalanib, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$ka = k \left( \sum_{i=1}^n a e_i \right) = \left( \sum_{i=1}^n ka e_i \right).$$

Teorema isbotlandi.

Qulaylik uchun yig'indida yuqori indeks va quyi indeks bir xil sonda qatnashgan holda shu indeks bo'yicha yig'indi belgisi tushirib quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$a = a^i e_i, ka = (ka^i) e_i.$$

Keyingi paragraflarda yozuvni qisqartirish maqsadida biz bu belgilashdan foydalanamiz.

**7-ta'rif.** Bizga  $V$  va  $V'$  chiziqli fazolar va o'zaro bir qiymatli  $\varphi: V \rightarrow V'$  akslantirish berilgan bo'lib, ixtiyoriy  $a, b \in V$  vektorlar va ixtiyoriy  $k$  haqiqiy son uchun  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$   $\varphi(ka) = k\varphi(a)$  tengliklar bajarilsa,  $\varphi$  akslantirish izomorfizm deb ataladi.

Agar,  $V$  va  $V'$  chiziqli fazolar o'rtasida izomorfizm mavjud bo'lsa  $V$  va  $V'$  fazolar izomorf fazolar deyiladi va  $V \approx V'$  ko'rinishda yoziladi. Fazolar o'rtasidagi izomorflik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'ladi, ya'ni quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$a) V \approx V, b) V \approx V' \Rightarrow V' \approx V$$

$$s) V \approx V' \quad V' \approx V'' \Rightarrow V \approx V''$$

Biz  $V$  chiziqli fazoda  $(e_1, \dots, e_n)$  oila yordamida har bir  $a \in V$  vektorni uning koordinatalari yordamida  $a^1, \dots, a^n$  yagona ravishda aniqlaymiz. Ikkinchi tomondan  $(a^1, \dots, a^n)$  ketma-ketlik  $R^n$  fazo elementidir. Natijada

$\varphi(a) = (a^1, \dots, a^n)$  formula yordamida  $\varphi: V \rightarrow R^n$  izomorfizmini aniqlaymiz. Bu akslantirish uchun  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ,  $\varphi(ka) = k\varphi(a)$ . tengliklar 5-

teoremadan kelib chiqadi. Demak quyidagi teorema o'rinlidir.

**7-teorema.** Har qanday  $n$  o'lchamli chiziqli fazo  $R^n$  fazoga izomorfdir.

## 2-§. Affin fazolar

**8-ta'rif.** Bizga  $X$  to'plam va  $n$  o'lchamli  $V$  chiziqli fazo berilib,  $X$  to'plamning nuqtalarining har bir  $A, B$  juftiga birorta  $V$  chiziqli fazoga tegishli  $\overline{AB}$  vektor mos qo'yilgan bo'lib:

1)  $X$  to'plamning har bir  $A$  nuqtasi va har bir  $a \in V$  uchun yagona  $B \in X$  nuqta mavjud bo'lib  $\overline{AB} = a$  tenglik,

2) Ixtiyoriy uchta  $A, B, C$  nuqtalar uchun  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  tenglik bajarilsa,  $X$  to'plam  $n$  o'lchamli affin fazo deyiladi.

Bu ta'rifning ikkinchi shartidan  $A = B = C$  bo'lganda  $\overline{AA} = 0$  tenglikni,  $C = A$  bo'lganda  $\overline{BA} = -\overline{AB}$  tenglikni hosil qilamiz. Biz bir o'lchamli affin fazoni to'g'ri chiziq, ikki o'lchamli affin fazoni tekislik va uch o'lchamli affin fazoni fazo deb ataymiz.

**9-ta'rif.** Affin fazoda berilgan  $O$  nuqta va  $V$  chiziqli fazoning  $e_1, \dots, e_n$  bazisidan iborat  $\{O, e_1, e_2, \dots, e_n\}$  oila affin fazodagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va  $O e_1 \dots e_n$  ko'rinishda belgilanadi.

Bizga affin fazoda  $A$  nuqta berilgan bo'lsa,  $\overline{OA} = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n$  tenglikdagi  $a^1, \dots, a^n$  sonlari  $A$  nuqtaning affin koordinatalari deyiladi.

Affin fazolarda to'g'ri chiziq tushunchasiga ta'rif bera olamiz. Agar affin fazoda  $M_0$  nuqta va mos chiziqli fazoda  $a$  vektor berilgan bo'lsa,

$\overline{M_0 M}$  vektor  $a$  vektorga kollinear bo'ladigan affin fazodagi  $M$  nuqtalar

to'plami  $M_0$  nuqtadan o'tuvchi va  $a$  vektorga parallel to'g'ri chiziq deyiladi.

**8-teorema.** *Affin fazoning o'zaro farqli ikkita nuqtasidan bitta to'g'ri chiziq o'tadi.*

**Isbot.** Bizga  $M_0$  va  $M_1$  nuqtalar berilgan bo'lsa  $\overline{M_0M_1} = a$  vektorga parallel va  $M_0$  nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq  $M_0$  va  $M_1$  nuqtalardan o'tuvchi yagona to'g'ri chiziqdir.

Berilgan  $M_0$  va  $M_1$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq nuqtalari  $M_0M = tM_0M_1$  tenglikdan aniqlanadi. Bu tenglikdan har bir  $M$  nuqta  $t$  parametrning bitta qiymati bilan aniqlanishi kelib chiqadi. Masalan  $M = M_0$  nuqta parametrning  $t = 0$  qiymatiga,  $M = M_1$  nuqta esa parametrning  $t = 1$  qiymatiga mos keladi. Parametrning  $0 < t < 1$  qiymatlariga mos keluvchi nuqtalar  $M_0$  va  $M_1$  nuqtalar orasida yotuvchi nuqtalar deyiladi. Berilgan  $M_0$  va  $M_1$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning  $M_0$  va  $M_1$  nuqtalar orasida yotuvchi nuqtalar to'plami boshi  $M_0$  nuqtada va oxiri  $M_1$  nuqtada bo'lgan kesma deyiladi va  $\overline{M_0M_1}$  ko'rinishda belgilanadi.

**10-ta'rif.** *Chizikli fazo elementlarining har bir juftiga bitta haqiqiy sonni mos qo'yuvchi  $a, b \rightarrow (a, b)$  funksiya uchun:*

1. Ixtiyoriy  $a, b, c \in V$  vektorlar uchun  $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$  tenglik.

2. Ixtiyoriy  $k$  haqiqiy son va  $a, b$  vektorlar uchun  $k(a, b) =$

$(ka, b) = (a, kb)$  tenglik;

3. Har qanday ikkita  $a, b$  vektor uchun  $(a, b) = (b, a)$  tenglik

4. Ixtiyoriy noldan farqli  $a$  vektor uchun  $(a, a) = a^2 > 0$

munosabat bajarilsa,  $(a, b)$  miqdor  $a, b$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi.

Chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa,

$|a| = \sqrt{(a, a)}$  formula yordamida vektor uzunligini aniqlaymiz.

Vektorlar orasidagi burchakning kosinusi

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2} \sqrt{b^2}}$$

tenglikdan aniqlanadi. Bu yerda  $a^2 = (a, a)$  belgilash qabul qilingan. Bu

formula korrekt aniqlanganligini ko'rsatish uchun  $|ab| \leq |a||b|$

tengsizlikni isbotlashimiz kerak. Bu tengsizlik Koshi-Bunyakovskiy

tengsizligi deb ataluvchi  $(ab)^2 \leq a^2 b^2$  tengsizlikka teng kuchlidir.

Bu tengsizlikni isbotlash uchun  $f(t) = (a + tb)^2$  funksiyani qaraymiz.

Bu funksiyani  $f(t) = a^2 + 2t(ab) + t^2 b^2$  ko'rinishda yozsak, uning

diskriminanti uchun

$$(ab)^2 - a^2 b^2 \leq 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlik esa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ekvivalentdir. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan

$$a + b \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2a|b| + b^2$$

$$b \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 - 2a|b| + b^2$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2a|b| + b^2$  tengsizliklarni hosil qilamiz. Bu

tengsizliklardan

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

**11-ta'rif.** *Affin fazoga mos keluvchi chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, yevklid fazosi deyiladi.*

Yevklid fazosida  $ABC$  – ixtiyoriy uchburchak berilgan bo'lsa,  $a=AB$ ,  $b=BC$  belgilashlar kiritib va  $a+b=AC$  tenglikni hisobga olib uchburchak tomonlari uchun

$$|AB| - |BC| \leq |AC| \leq |AB| + |BC|$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Agar  $OACB$  – parallelogramm bo'lsa,  $a = OA$ ,  $b = OB$  belgilashlar kiritib,  $OC = a + b$ ,  $\overline{AB} = b - a$  tengliklarni hisobga olib

$$|OC|^2 + |AB|^2 = (a + b)^2 + (b - a)^2 = 2(a^2 + b^2) = 2(|OA|^2 + |OB|^2) = |OA|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 + |OB|^2$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi uning tomonlari kvadratlarini yig'indisiga teng.

**12-ta'rif.** *Berilgan  $a$  va  $b$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, ular ortogonal vektorlar deyiladi.*

Agar vektorlar ortogonal bo'lsa,  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  tenglik o'rinli bo'ladi. Uchburchakning tomonlari uchun  $a = OA$ ,  $b = OB$ , belgilashlar kiritib va  $b - a = AB$  tenglikni hisobga olib, Pifagor teoremasini hosil qilamiz:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$$

Bizga  $V$  chiziqli fazoda  $e_1, \dots, e_n$  oila berilgan bo'lsa,

$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n, y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \dots + y^n e_n$   
vektorlarning skalyar ko'paytmasini

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n (x^i e_i)(y^j e_j) = \sum_{i,j=1}^n (e_i e_j) x^i y^j$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Agar  $g_{ij} = (e_i, e_j)$  belgilash kiritsak skalyar ko'paytma uchun

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x^i y^j \quad (1)$$

ifodani olamiz. Tekshirib ko'rish mumkinki

$g_{ij} = (e_i, e_j)$  matritsa simmetrik matritsadir. Masalan  $n = 3$  bo'lganda skalyar ko'paytma

$$\begin{aligned} (x, y) = & g_{11} x^1 y^1 + g_{12} x^1 y^2 + g_{13} x^1 y^3 + g_{21} x^2 y^1 + g_{22} x^2 y^2 + \\ & + g_{23} x^2 y^3 + g_{31} x^3 y^1 + g_{32} x^3 y^2 + g_{33} x^3 y^3 = g_{11} x^1 y^1 + \\ & + g_{12} (x^1 y^2 + x^2 y^1) + g_{13} (x^1 y^3 + x^3 y^1) + g_{22} x^2 y^2 + \\ & + g_{23} (x^2 y^3 + x^3 y^2) + g_{33} x^3 y^3, \end{aligned}$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda

$g_{11} = (e_1, e_1), \quad g_{22} = (e_2, e_2), \quad g_{12} = g_{21} = (e_1, e_2),$   
 $g_{23} = g_{32} = (e_2, e_3), \quad g_{13} = g_{31} = (e_1, e_3), \quad g_{23} = (e_3, e_3)$  bo'lib,  
skalyar ko'paytmani

$$(x, y) = \sum_i g_{ii} x^i y^i + \sum_{i < j} g_{ij} (x^i y^j + x^j y^i)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Biz agar  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} \\ g_{21} \cdots g_{2n} \\ g_{n1} \cdots g_{nn} \end{pmatrix}$  matritsalar

kiritsak, skalyar ko'paytmani  $x^T G y$  ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Bu yerda  $x^T = (x^1, \dots, x^n)$  transponirlangan matritsa. Matritsalarini ko'paytirish amallarini bajarsak

$$x^T G y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x^i y^j$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak

$$(x, y) = x^T G y$$

tenglik o'rinalidir. Agar  $x = y$  bo'lsa,

$$(x, x) = x^2 = g_{ij} x^i x^j = \sum_i g_{ii} (x^i)^2 + 2 \sum_{i < j} g_{ij} x^i x^j = x^T G x$$

ifodani hosil qilamiz. Algebra kursidan bilamizki

$$x^T G y$$

ifoda bichiziqli forma deb ataladi. Skalyar ko'paytma uchun  $(x, y) = (y, x)$  tenglik o'rinli bo'lganligi uchun bu forma simmetrik formadir. Har bir  $x$  vektor  $(x, x) = x^2 \geq 0$  bo'lganligi uchun  $(x)$  musbat aniqlangan bichiziqli formadir. Demak, skalyar ko'paytma berilgan oilada musbat aniqlangan bichiziqli formadan iboratdir. Bu forma oilaning metrik formasi deyiladi. Albatta oila o'zgaranda metrik forma o'zgaradi. Koeffitsientlarning o'zgarish qonunini tekshirish uchun  $x$  vektorning  $e_1, \dots, e_n$  va  $e_1', \dots, e_n'$  oiladagi koordinatalaridan iborat



$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}$$

matritsalarini kiritib va  $e_1, \dots, e_n$  oiladan  $e_{1'}, \dots, e_{n'}$  oilaga o'tish matritsasini  $C = (C_{ij}')$  – bilan belgilab,

$$x = Cx' \quad (x, x) = x^2 = x^T G x$$

tengliklardan

$$(x, x) = (x'^T C^T) G (Cx') = x'^T (C^T G C) x' \quad (2)$$

munosabatni olamiz. Bu tenglikdan

$$G' = C^T G C \quad (3)$$

bog'lanish kelib chiqadi. Bu munosabatni koeffitsientlar orqali yozsak, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$g_{i'j'} = \sum_{i,j=1}^n c_{i'}^i c_{j'}^j g_{ij} \quad (4)$$

**13-ta'rif.** Berilgan  $e_1, \dots, e_m$  bazis uchun

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, bu bazis ortonormal bazis deyiladi.

Ortonormal bazisning vektorlari o'zaro ortogonal bo'lib, ularning uzunliklari birga tengdir.

**14-ta'rif.** Berilgan  $x$  vektor uchun  $x_1 = (x, e_1), \dots, x_m = (x, e_m)$

skalyar ko'paytmalar  $e_1, \dots, e_n$  oilaga nisbatan  $x$  vektorning Fur'e

*koeffitsientlari deyiladi.*

Albatta agar  $x=0$  bo'lsa, uning Fur'e koeffitsientlari uchun  $x_1=0, \dots, x_m=0$  tengliklar o'rinli bo'ladi, lekin  $x_1=0, \dots, x_m=0$  tengliklardan  $x=0$  tenglik kelib chiqmaydi. Agar har bir  $x$  vektor uchun  $x_1=0, \dots, x_m=0$  tengliklardan  $x=0$  kelib chiqsa, oila yopiq oila deyiladi.

**9-teorema.** *Ortonormal oilada har bir  $x$  vektor uchun*

$$x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq |x|^2$$

*tengsizlik o'rinli bo'lib,  $x' = x - x_1 e_1 - \dots - x_m e_m$  vektor  $e_1, \dots, e_m$  vektorlarga ortogonaldir.*

*Teoremaning birinchi qismini isbotlash uchun*

$$|x'|^2 = x^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2$$

tenglikni ko'rsatish yetarlidir. Bu tenglikni isbotlash uchun bevosita hisob-kitob ishlarini bajaramiz:

$$\begin{aligned} 0 \leq |x'|^2 &= x^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 = \left(x - \sum_{i=1}^m x_i e_i\right) \left(x - \sum_{j=1}^m x_j e_j\right) \\ &= x^2 - 2 \sum_{i=1}^m x_i (x e_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i x_j (e_i e_j) = \\ &= x^2 - 2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^m x_i^2 = x^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{aligned}$$

*Teoremaning ikkinchi qismi*

$$(e_i, x - x_1 e_1 - \dots - x_m e_m) = (e_i, x) - x_i (e_i, e_i) = x_i - x_i = 0$$

tenglikdan kelib chiqadi. Bu yerda  $i = 1, \dots, m$ .

**15-ta'rif.** *Ortonormal oilani ixtiyoriy vektor bilan to'ldirganimizda, u ortormal bo'lmay qolsa, bu oila maksimal oila deyiladi.*

**10-teorema.** Ortonormal  $e_1, \dots, e_n$  oila uchun quyidagilar teng kuchlidir:

1)  $e_1, \dots, e_n$  maksimal oilalar;

2)  $e_1, \dots, e_n$  yopiq oilalar

3)  $e_1, \dots, e_n$  to'liq oilalar ;

4) Har qanday  $x$  vektor uchun

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda  $x_1, \dots, x_n$  koordinatalar

Fur'e koefitsientlariga tengdir.

5) Har qanday  $x$  vektor uchun

$$x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

tenglik o'rinlidir.

6) Har qanday  $x, y$  vektorlar uchun

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

tenglik o'rinlidir.

**Isbot.** 1) Berilgan ortonormal oila  $e_1, \dots, e_n$  maksimal bo'lib, yopiq bo'lmasa, Fur'e koefitsientlari nolga teng bo'lgan noldan farqli  $x$  vektor

mavjud bo'ladi. Agar,  $e_1, \dots, e_n$  oilaga  $\frac{x}{|x|}$  vektorni qo'shsak, yana ortonormal oila hosil bo'ladi. Demak, maksimal oila yopiq oiladir.

2) Yopiq  $e_1, \dots, e_n$  oila to'liq bo'lmasa, ular orqali chiziqli ifodalanmaydigan  $x$  vektor mavjud bo'ladi. Bu vektor yordamida

$$x' = x - x_1 e_1 - \dots - x_n e_n$$

vektorni qursak, u noldan farqli, lekin uning Fur'e koefitsientlari nolga tengdir.

3) Agar  $x = k_1 e_1 + \dots + k_n e_n$ , bo'lsa,  $x_i = (x, e_i) = k_i (e_i, e_i) = k_i$

tenglik o'rinlidir.

$$4) \text{ Agar } x = \sum_i x_i e_i \text{ va } y = \sum_j y_j e_j, \text{ bo'lsa,}$$

$$(x, y) = \left( \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j \right) = \sum_i \sum_j x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_i x_i y_i.$$

tenglik o'rinlidir.

5) Yuqoridagi tenglikda  $x = y$  bo'lsa,

$$x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

tenglikni hosil qilamiz.

6) Agar ortonormal oila  $e_1, \dots, e_n$  oilaga yana bitta  $x$  vektorni qo'shib, yana ortonormal oila hosil qilsak,  $x$  vektor uchun

$$1 = x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0,$$

tenglik hosil bo'ladi. Teorema tsbotlandi.

Bizga  $n$  o'lchamli  $X$  affin fazo berilgan bo'lib, unga mos  $V$  chiziqli fazoda skalyar ko'paytma kiritilgan bo'lsin, ya'ni  $V$  yevklid fazosi bo'lsin. Bu holda  $X$  ham yevklid fazosi deyiladi. Faqat bunda  $X$  ning elementlari nuqtalardan iborat ekanligini yoddan chiqarmasligimiz kerak.  $X$  da  $V$  dagi  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal oila yordamida kiritilgan  $0 e_1, \dots, e_n$  koordinatalar sistemasi to'g'ri burchakli yoki dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi. Biz yuqorida ko'rdikki, ortonormal oilada vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

formula yordamida, vektorning uzunligi

$$x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

formula yordamida hisoblanadi. Natijada yevklid fazosida ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash uchun

$$|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

formulani olamiz. Bu yerda  $x_1, \dots, x_n$  -  $A$  nuqtaning koordinatalari,

$y_1, \dots, y_n$   $B$  nuqtaning koordinatalaridir. Agar bizga birorta  $e_1, \dots, e_n$  oila berilgan bo'lsa, uning yordamida ortonormal oila qurishning Gram-Shmidt usulini keltiramiz. Agar  $e_1, \dots, e_n$  oilaning  $e_1, \dots, e_k$  vektorlari ortonormal bo'lsa,  $k + 1$  -vektor

$$e_{k+1} = e_{k+1} - x_1 e_1 - \dots - x_k e_k,$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu yerda  $x_1, \dots, x_k$  - lar  $x = e_{k+1}$  vektorning  $e_1, \dots, e_k$  vektorlarga nisbatan Fur'e koeffitsientlaridir. Hosil bo'lgan vektor  $e_1, \dots, e_k$  vektorlarning har biriga ortogonaldir. Uni o'zining uzunligiga bo'lib qo'ysak, birlik vektor hosil qilamiz. Keyin protsessni davom ettirib ortonormal oilani olamiz. Albatta jarayonning boshida  $k = 0$ , shuning uchun birinchi vektorni

$$e'_1 = \frac{e}{|e|} \text{ formula yordamida quramiz. Ikkinchi vektor esa}$$

$e'_2 = e_2 - x_1 e'_1$  formula yordamida aniqlanib, keyin esa u o'zining uzunligiga bo'linadi. Bu yerda  $x_1 = (e_2, e'_1)$ .

**16-ta'rif.** Bizga ikkita ortonormal oila berilsa, ularning biridan ikkinchisiga o'tish matritsasi ortogonal matritsa deyiladi.

Ortonormal oilada metrik forma koeffitsientlari birlik matritsadan iborat bo'lganligi uchun quyidagi teorema o'rinalidir.

**11-teorema.** Berilgan  $C$  matritsa ortogonal bo'lishi uchun

$$C^T C = E \quad (5)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Bizga ortogonal  $C$  matritsa berilgan bo'lsin. Agar bu matritsa ortonormal  $e_1, \dots, e_n$  oiladan ortonormal  $e'_1, \dots, e'_n$  oilaga o'tish matritsasi bo'lsa,

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \dots + c_{1n}e_n$$

$$e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{2n}e_n$$

$$e'_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \dots + c_{nn}e_n$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bazis  $e'_1, \dots, e'_n$  ortonormal bo'lganligi uchun

$$(e'_i, e'_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

tengliklar o'rinlidir. Bu tengliklardan  $\frac{n(n+1)}{2}$  ta

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \dots + c_{ni}c_{nj} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

tengliklarni olamiz. Bu tengliklar (5) tenglikka teng kuchlidir. Va aksincha agar  $C$  matritsa uchun  $C^T C = E$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $e_1, \dots, e_n$  oiladan yuqoridagi formulalar yordamida hosil qilingan  $e'_1, \dots, e'_n$  oila ortonormal bo'ladi. Teorema isbotlandi.

**12-teorema.** Berilgan  $C$  matritsa ortogonal bo'lishii uchun quyidagilardan birortasining bajarilishi zarur va yetarlidir:

1) Matritsa va transponirlangan matritsalar ko'paytmasi birlik matritsadir:

$$CC^T = E, C^T C = E.$$

2) Ustunlar ortonormal oila tashkil qiladi.

3) Satrlar ortonormal oila tashkil qiladi.

4) Teskari matritsa transponirlangan matritsaga tengdir:  $C^{-1} = C^T$ .

Bu teorema isboti o'quvchilarga mashq sifatida havola qilinadi.

Ortogonal matritsa uchun  $CC^T = E$  tenglikdan  $\det C^T = \det C$  munosabatni hisobga olib,  $(\det C)^2 = 1$  tenglikni olamiz. Bundan esa  $\det C = \pm 1$  tenglik kelib chiqadi.

Ortogonal matritsalar to'plami oddiy matritsalarini ko'paytirish qoidasiga nisbatan gruppaga hosil qiladi. Bu gruppaga  $O(n)$  ko'rinishda belgilanadi. Agar  $n = 2$  bo'lsa, ortogonallik sharti

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1, \quad c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0, \quad c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu shartlardan birinchisi va oxirgisidan  $\alpha$  va  $\beta$  burchaklar mavjud bo'lib,

$$c_{11} = \cos \alpha, \quad c_{21} = \sin \alpha,$$

$$c_{12} = \cos \beta, \quad c_{22} = \sin \beta$$

tengliklar bajarilishi kelib chiqadi. Yuqoridagi tengliklarning ikkinchisidan esa

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabat esa

$$\cos(\beta - \alpha) = 0$$

tenglikka teng kuchlidir. Demak,

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad \text{va} \quad \beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

tengliklarning birortasi o'rinlidir. Bundan esa  $C$  matritsaning determinanti birga teng bo'lsa, u

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ko'rinishga, uning determinanti minus birga teng bo'lsa, u

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega ekanligi kelib chiqadi. Biz  $C$  matritsaning bu ko'rinishlardan foydalanib, tekislikda bir xil orientatsiyaga ega dekart koordinatalar sistemasini almashtirish uchun bizga yaxshi tanish bo'lgan

$$x = \cos \alpha x' - \sin \alpha y' + x_0,$$

$$y = -\sin \alpha x' + \cos \alpha y' + y_0,$$

formulalarni olamiz. Bu yerda  $(x_0, y_0)$  – yangi koordinatalar boshi,  $\alpha$  esa yangi va eski absissa o'qlari orasidagi burchakdir.

### 3-§. *Mustaqil ish uchun topshiriqlar*

1. *Chiziqli fazoda mos ravishda  $a_1 = \{1,1,0,0\}, a_2 = \{0,1,1,0\}, a_3 = \{0,0,1,1\}$  va  $b_1 = \{1,0,1,0\}, b_2 = \{0,2,1,1\}, b_3 = \{1,2,1,2\}$  bazislarga ega  $V_1$  va  $V_2$  qism fazolar yig'indisi va kesishmasining bazisini toping.*

2. *Chiziqli fazoda mos ravishda  $a_1 = \{1,2,0,1\}, a_2 = \{1,1,1,0\}$  va  $b_1 = \{1,0,1,0\}, b_2 = \{1,3,0,1\}$  bazislarga ega  $V_1$  va  $V_2$  qism fazolar yig'indisi va kesishmasining bazisini toping.*

3. *To'g'ri chiziq va gipertekislik mos ravishda  $x_1 = 8t, x_2 = 4t, x_3 = 3t, x_4 = -3t$  va  $2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$  tenglamalar bilan berilgan. Berilgan  $x = \{1,2,3,4\}$  vektorni to'g'ri chiziqqa tegishli*



*y* vektor va gipertekislikka tegishli *z* vektorlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalang.

4. Tekislikning  $(-1,1,0,1,5), (2,-1,3,4,0), (1,2,7,6,1)$  nuqtalardan o'tishi ma'lum bo'lsa, uning parametrik va umumiy tenglamalari tuzilsin.

5. Umumiy tenglamasi bilan berilgan

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 6 = 0 \end{cases}$$

tekislikning parametrik tenglamasini yozing.

6. Birinchi to'g'ri chiziq  $(1,0,-2,1)$  nuqta va  $\{1,2,-1,-3\}$  vektor bilan, ikkinch tekislik esa  $(0,1,1,-1)$  nuqta va  $\{2,3,-2,-4\}$  vektor bilan aniqlangan bo'lsa, ularni o'z ichiga oluvchi eng kichik o'lchamli tekislik tenglamasini yozing.

7. Ikkita  $x_1 = 1+t, x_2 = 2+t, x_3 = 3+t, x_4 = 4+t, x_1 = 0, x_2 - x_3 + 1 = 0, x_4 - 3 = 0$  to'g'ri chiziq o'z ichiga oluvchi eng kichik o'lchamli tekislik tenglamasini yozing.

8. To'rt o'lchamli fazoda

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 2 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 - 7 = 0 \end{cases}$$

sistema bilan berilgan tekislik va  $5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 20 = 0$  to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini aniqlang.

9. To'rt o'lchamli fazoda  $5x_1 + 9x_3 + 2x_4 - 20 = 0, x_2 = 0$  tekislik va

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 2 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 - 7 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziq berilgan. Ularning o'zaro vaziyatini aniqlang.

10. To'g'ri chiziq va tekislik mos ravishda  $x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + 2t, x_3 = 3 + 3t, x_4 = 4 + 4t$  va  $x_1 + x_2 + 1 = 0, x_3 - x_4 = 0$  tenglamalar bilan berilgan. Ularning kesishmasligini ko'rsating va to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib berigan tekislikdan o'tuvchi eng kichik o'lchamli tekislik tenglamasini yozing.

11. Ortonormal bazisga nisbatan uchta  $\{1, 2, 2, 1\}, \{1, 1, -5, 3\}, \{3, 2, 8, -7\}$  vektorlar berilgan. Berilgan vektorlarga tortilgan qism fazoning bazisini toping va uni fazoning bazisigacha to'ldiring.

12. Besh o'lchamli fazoda ortonormal bazisga nisbatan  $x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$  gipertekislik berilgan. Birinchi to'rttasi berilgan gipertekislikda yotuvchi yangi bazisni toping.

13. Gipertekislik  $2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$  va  $x = \{2, 0, 4, 6\}$  vektor berilgan.  $x$  vektorni berilgan gipertekislikka tegishli  $y$  vektor va shu gipertekislikka ortogonal  $z$  vektorlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalang.

14. Yevklid fazosi  $V$  da  $x_1, x_2$  vektorlar,  $V$  ning qism fazosi  $V'$  da  $y_1, y_2$  vektorlar va  $V'$  ga ortogonal bo'lgan  $z_1, z_2$  vektorlar berilgan. Agar,  $x_2 - x_1$   $V'$  fazoga tegishli bo'lsa,  $z_1 = z_2$  munosabat o'rinliligini isbotlang.

15. O'zining  $M(x_0, y_0)$  bazislari bilan berilgan qism fazoga  $\{4, -1, 3, 4\}$  vektorning ortogonal proeksiyasini toping.

16. Tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

bilan berilgan qism fazoga  $\{7, -4, -1, 2\}$  vektorning ortogonal proeksiyasini toping.

17. To'rt o'lchamli fazoda  $x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_2 = 2x_3$  to'g'ri chiziq va  $3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0$  tekislik orasidagi burchak topilsin.

18. To'rt o'lchamli yevklid fazosida  $\{1,1,1,1\}, \{1,-1,1,-1\}$  vektorlarga hamda  $\{2,2,1,0\}, \{1,-2,2,0\}$  vektorlarga qurilgan qism fazolar orasidagi burchak topilsin.

19. Berilgan  $M(5,1,0,8)$  nuqtadan  $A(1,2,3,4), B(2,3,4,5), C(2,2,3,7)$  nuqtalardan o'tuvchi tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi va asosi topilsin.

20. Berilgan  $M(4,2,-5,1)$  nuqtadan

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi va asosi topilsin.

21. Berilgan  $A(1,1,1,1), B(2,2,0,0), C(1,2,0,1)$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik va  $D(1,1,1,2), E(1,1,2,1)$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini aniqlang, ularning umumiy perpendikularining tenglamasini yozing va uzunligini toping.

### Adabiyotlar:

1. Вахвалов S. V., Modenov P. S., Parxomenko A. S. Analitik geometriyadan masalalar to'plami. Toshkent, 2006, 546 bet.
2. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1981, с. 232.
3. Pogorelov A. V. Analitik geometriya. Toshkent, O'qituvchi, 1983, 206-bet.
4. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1979. с. 336.
5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Санкт-Петербург – Москва, Изд. Лан', 2003 г. стр. 336.
6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука. 1998,
7. Кравченко К. Решения задач по аналитической геометрии. [http:// www.a-geometry.narod.ru](http://www.a-geometry.narod.ru)

# MUNDARIJA

Kirish .....	3
I bob. Vektorlar algebrasi .....	4
1-§. Vektorlar va ular ustida amallar .....	4
2-§. Chiziqli erkli va chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasi .....	9
3-§. Vektorlarning o'qqa proyeksiyasi .....	13
4-§. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi .....	15
5-§. Bazis va vektorning koordinatalari .....	15
6-§. Affin koordinatalar sistemasi .....	17
7-§. Vektor va aralash ko'paytmalar .....	19
8-§. Vektor va aralash ko'paytmani koordinatalar orqali ifodalash ..	25
9-§. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi .....	26
10-§. Silindrik koordinatalar sistemasi .....	27
11-§. Sferik koordinatalar sistemasi .....	28
12-§. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish .....	30
13-§. Birinchi bob bo'yicha oraliq nazorat uchun topshiriqlar namunalari .....	33
II bob. To'g'ri chiziqlar va tekisliklar .....	37
1-§. Tekislikda to'g'ri chiziqlar .....	37
2-§. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi .....	39
3-§. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa .....	41
4-§. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari .....	43
5-§. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash .....	46
6-§. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari .....	48
7-§. Fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash .....	51
8-§. To'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati .....	53
9-§. Ikkita ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa .....	54
10-§. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyati .....	57
11-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar .....	58
III bob. Ikkinchi tartibli chiziqlar .....	66
1-§. Parabolaning kanonik tenglamasi .....	66
2-§. Ellips .....	69
3-§. Giperbola .....	73
4-§. Parabola, ellips va giperbolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamalari .....	76

5-§. Ellips, giperbola va parabolaning urinmalari .....	82
6-§. Ellips, giperbola va parabolaning optik xossalari .....	83
7-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar .....	85
<b>IV bob. Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamalari .....</b>	<b>89</b>
1-§. Ikkinchi tartibli chiziqlarning markazi .....	89
2-§. Ikkinchi tartibli chiziq va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati .....	95
3-§. Qo'shma yo'nalishlar va bosh yo'nalishlar .....	99
4-§. Umumiy tenglamalarni soddalashtirish .....	105
5-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar .....	109
<b>V bob. Ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari .....</b>	<b>114</b>
1-§. Ellipsoid va giperboloidlar .....	114
2-§. Konus va uning kesimlari .....	122
3-§. Paraboloidlar .....	126
4-§. Silindrlar .....	133
5-§. Ikkinchi tartibli sirtning urinma tekisligi .....	135
6-§. Sirtning diametral tekisligi .....	136
7-§. Sirtning simmetriya tekisligi .....	140
8-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar .....	141
<b>VI bob. Chiziqli va affin fazolar .....</b>	<b>144</b>
1-§. Chiziqli fazolar .....	144
2-§. Affin fazolar .....	155
3-§. Mustaqil ish uchun topshiriqlar .....	168
Adabiyotlar .....	172

# ANALITIK GEOMETRIYA

*Matematika bakalavriat ta'lim yo'nalishi uchun darslik*

O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti  
100083, Toshkent, Matbuotchilar ko'chasi, 32.  
Tel: 236-55-79; faks: 239-88-61

Muharrir: *G. Zokirova*  
Musahhih: *H. Zokirova*  
Dizayner: *N. Mamanov*

Bosishga ruxsat etildi 13.06.2008-y. Bichimi 60 x 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Ofset qog'oz. Tayms  
garnituras. Kegli 10. Shartli bosma tabog'i 11,5. Nashriyot-hisob tabog'i 11,0.  
Adadi 2000 nusxa. Buyurtma № 23.

«AVTO-NASHR» bosmaxonasida chop etildi.  
Manzil: Toshkent shahri, 8-mart ko'chasi, 57-uy.