Ё. У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

1

Ё. У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Икки жилдлик

1-жилд

Ўзбекистон республикаси олий ва ўрта махсус таълими вазирлиги олий техника ўқув юртлари учун дарслик сифатида тавсия этган

Ўзбекистон Фанлар академиясининг ҳақиқий аъзоси,
физика-математика фанлари доктори,
профессор В. Қ. ҚОБУЛОВ умумий таҳрири остида

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1992

9800

Тақризчилар: Тошкент қишлоқ хўжалигини ирригациялаш ва механизациялаш мухандислари институти «Олий математика» кафедраси; Тошкент Давлат техника университети «Умумий таълим фанлари» кафедраси.

Таҳрир ҳайъати: физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар М. **Жўраев** (масъул), Ё. М. **Хусанбоев**, А. А. **Ҳамдамов**.

Дарслик Олий техника институтлари талабалари учун мўлжалланган. Бу ерда келтирилган назарий маълумотлар олий ўқув юртларининг мухандис-техник ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги дастурига тўла мос келади.

Китоб икки жилддан иборат бўлиб, ҳар бир жилд кўп миқдорда мисоллар билан таъминланган, бу эса назарий мазмуннинг маъносини очишга ёрдам беради ва дарсни баён қилишнинг аниқ ва тушунарли бўлишини таъминлайди.

С $\frac{1602000000-229}{353\,(04)-92}$ 75—91

ISBN 5—645—01370—0

СЎЗ БОШИ

Китобхон эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур «Олий математика» дарслиги олий техника институтларининг талабалари учун мўлжалланган.

Унда келтирилган мавзулар олий ўқув юртларининг муҳандис-техник ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги дастурига тўла мос келади.

Дарслик икки жилддан иборат бўлиб, унинг биринчи жилдига чизиқли алгебра ва аналитик геометрия элементлари, математик анализга кириш, бир ўзгарувчили функцияларнинг дифференциал ҳисоби, функцияларни ҳосилалар ёрдамида текшириш, ҳақиқий ўзгарувчининг вектор ва комплекс функциялари, бир ўзгарувчили функцияларнинг интеграл ҳисоби, бир неча ўзгарувчили функциялар ҳамда оддий дифференциал тенгламаларнинг асослари киритилган.

Дарсликда келтирилган мавзуларнинг иложи борича қатъий ва тушунарли бўлишига ҳаракат қилинди ҳамда кўп миқдорда мисоллар билан таъминланди, бу эса назарий мазмуннинг маъносини очишга ёрдам беради ва дарсни баён қилишни аниқ ва тушунарли қилади. Ундан ташқари, ўтилган мавзуларни мустаҳкамлаш учун ўз-ўзини текшириш мақсадида саволлар келтирилган ва мустақил ечиш учун машқлар тавсия этилган; уларнинг тартиб рақамлари I бобда В. П. Минорскийнинг «Сборник задач по высшей математике», М., Высшая школа, 1977 ва қолган бобларида эса Г. Н. Берманнинг «Сборник задач по курсу математического анализа», М., Наука, 1985 китобларидан кўрсатилган.

Дарсликни ёзишдан мақсад амалдаги «Дастур» га тўла мос келадиган ягона ўқув китобининг йўқлигидир. Уни тузишда «Дастур»да тавсия қилинган асосий ва қўшимча адабиётлардан ҳамда ўзбек тилида чоп этилган дарслик ва ўқув қўлланмаларидан кенг фойдаланилди. Мазкур дарсликни «Олий математика мисол ва масалаларда» ўқув қўлланмаси билан тўлдириш кўзда тутилган.

Муаллиф дарсликни тузишда, унинг айрим қисмларини ёзишда берган маслаҳатлари ва ёрдамлари учун «Олий ва амалий математика» кафедраси ўқитувчиларига миннатдорчилик билдиради.

Ўзбекистон ФА нинг ҳақиқий аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор В. Қ. Қобуловнинг дарсликка илиқ муносабати учун муаллиф ўз миннатдорчилигини билдиради.

Ўзбекистон ФА нинг мухбир аъзоси, ТошДУ «Амалий математика» кафедрасининг мудири, физика-математика фанлари доктори, профессор Н. Ю. Сотимовнинг дарслик мазмунини мукаммаллаштириш борасидаги фикрлари учун муаллиф ўз ташаккурини билдиради.

Холисона тақриз, танқид ва дарсликни бир хил бўлган ўзбек ва рус тилларидаги нусхаларини ёзишда йўл қўйилган камчиликларни кўрсатганлари учун Ломоносов номидаги МДУ профессори, физика-математика фанлари доктори А. С. Андреевга, Россия ФА А. А. Благонравов номидаги машинасозлик институтининг профессори, физика-математика фанлари доктори Э. Л. Айрапетовга, Тошкент қишлоқ хўжалигини ирригациялаш ва механизациялаш мухандислари институти «Олий математика» кафедраси мудири, профессор Э. Ф. Файзибоевга, ТошДУ «Умумий математика» кафедрасининг катта ўқитувчиси, физика-математика фанлари номзоди А. А. Раҳимовга, таҳрир ҳайъатининг аъзолари физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар М. Жўраев, Ё. М. Хусанбоев, А. А. Ҳамдамовларга муаллиф ўз ташаккурини билдиради.

Дарслик камчиликлардан холи эмас, албатта, шу сабабли муаллиф ўртоқларнинг уни янада такомиллаштиришга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини мамнуният билан қабул қилади ва олдиндан ўз миннатдорчилигини билдиради.

Муаллиф

1-боб

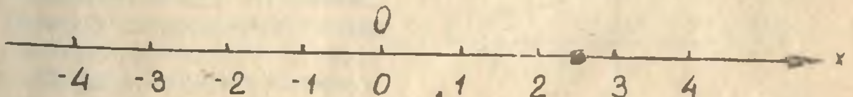
ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Текисликда ва фазода тўғри бурчакли Декарт координаталари

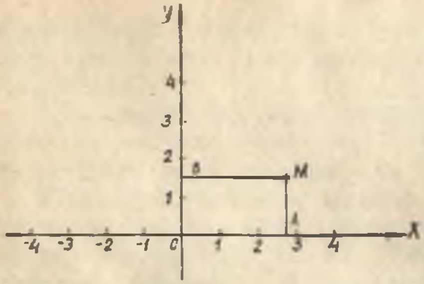
Математиканинг геометрик масалалар алгебраик усул билан ечиладиган бўлими аналитик геометрия деб аталади. Аналитик геометриянинг асоси координаталар усули бўлиб, уни XVII асрда француз математиги ва файласуфи Рене Декарт киритган ва бу усулни кўпгина геометрик масалаларга татбиқ этган. Координаталар усули нуқтанинг вазиятини координаталар системасини ҳосил қиладиган бирор чизиқларга нисбатан қарашга асосланади. Дастлаб, тўғри чизиқда ётган нуқтанинг вазияти қандай аниқланишини кўрайлик. Ихтиёрий тўғри чизиқ олайлик, унда бошланғич O нуқта танланган, саноқнинг мусбат йўналиши «→» билан кўрсатилган ҳамда узунлик бирлиги (масштаб) танланган бўлсин (1-шакл). Бундай тўғри чизиқ *ўқ* деб аталади.

M — бу тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overrightarrow{OM}$ йўналган кесманинг (яъни бошланғич нуқтаси O ва охирги нуқтаси M кўрсатилган кесманинг) катталиги (узунлиги) OM ни қарайлик. Эслатиб ўтамизки, $\overrightarrow{OM}$ нинг йўналиши ўқнинг йўналиши билан устма-уст тушганда $OM = |\overrightarrow{OM}|$ бўлади. $\overrightarrow{OM}$ нинг йўналиши ўқнинг йўналишига қарама-қарши бўлган ҳолда эса $OM = -|\overrightarrow{OM}|$ бўлади, бу ерда $|\overrightarrow{OM}|$ йўналган $\overrightarrow{OM}$ кесманинг узунлигини билдиради.

Бунга асосланиб, энди M нуқтанинг ўқдаги вазиятини $\overrightarrow{OM}$ йўналган кесманинг OM катталиги ёрдамида аниқлаш мумкин. Бу сонни биз M нуқтанинг *координатаси* деб атаймиз ва x ҳарфи билан белгилаймиз. Шундай қилиб, $x = OM$. Ox ўқни *координата* ўқи деб атаймиз.



1-шакл.



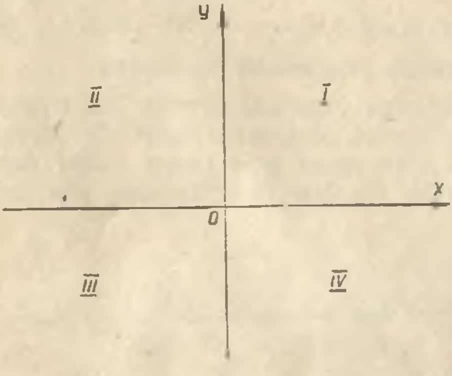
2- шакл.

Энди текисликда ётган нуқтанинг вазияти қандай аниқланишини кўриб чиқайлик. Боши умумий ва бир хил масштаб бирлигига эга бўлган иккита ўзаро перпендикуляр Ox ва Oy ўқлар текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини ҳосил қилади. Ox ўқни *абсциссалар* ўқи (горизонтал ўқ), Oy ўқни *ординаталар* ўқи (вертикал ўқ), уларни биргаликда эса *координаталар ўқи* деб атаймиз. Координата ўқларининг кесишиш нуқтаси — O нуқтани *координаталар боши*, Ox ва Oy ўқлар жойлашган текисликни эса *координаталар текислиги* деб атаймиз ва Oxy билан белгилаймиз (2-шакл).

M — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, унинг вазияти битта сон билан эмас, балки иккита сон билан аниқланади. M нуқтадан Ox ва Oy ўқларга MA ва MB перпендикулярлар туширамиз. M нуқтанинг x ва y тўғри бурчакли координаталари деб, мос равишда $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ йўналган кесмаларнинг OA ва OB катталикларига айтилади. Шундай қилиб, $x = OA$, $y = OB$.

M нуқтанинг x ва y координаталари мос равишда унинг абсциссаси ва ординатаси деб аталади. M нуқтанинг x ва y координаталарга эгалиги бундай кўринишда ёзилади: $M(x;\ y)$, бунда қавсда биринчи ўринда нуқтанинг абсциссаси, иккинчи ўринда ординатаси кўрсатилади.

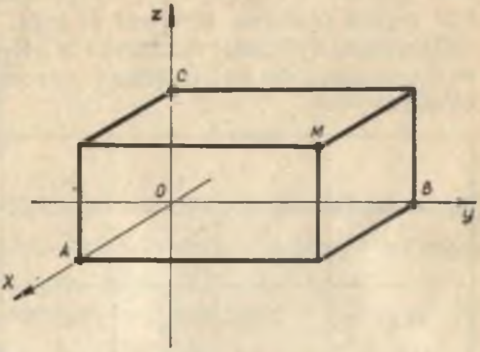
Шундай қилиб, танланган координаталар системасида текисликнинг ҳар бир M нуқтасига ҳақиқий сонларнинг биргина тартибланган жуфти $(x;\ y)$ — унинг координаталари мос келади, ва аксинча, ҳақиқий сонларнинг ҳар бир тартибланган жуфти $(x;\ y)$ га Oxy текисликда шундай биргина M нуқта мос келадики, унинг абсциссаси x га, ординатаси y га тенг бўлади.



3- шакл.

Координата ўқлари текисликни *чораклар* деб аталадиган тўрт бўлакка бўлади. 3-шаклда чоракларнинг тартибланишлари, қуйидаги жадвалда эса нуқталарнинг у ёки бу чоракда жойланишига қараб, уларнинг координаталари ишоралари кўрсатилган:

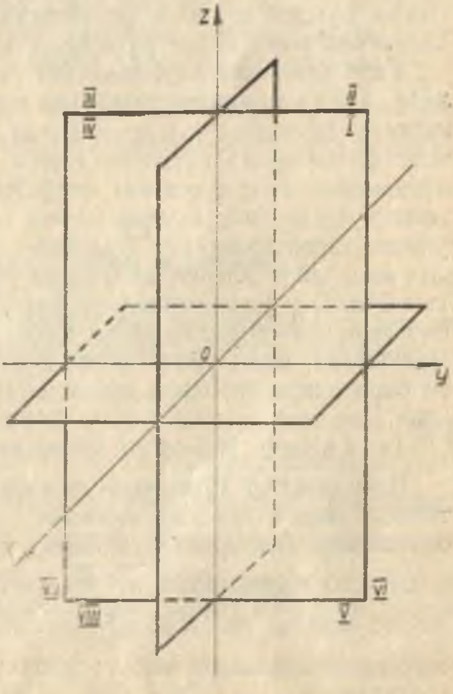
	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−



4- шакл.

Энди фазодаги нуқтанинг вазиятини аниқлашга ўтамиз. Битта *O* нуқтада кесишадиган ва бир хил масштаб бирлигига эга бўлган учта ўзаро перпендикуляр *Ox*, *Oy* ва *Oz* ўқлар фазода тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини аниқлайди ва у бундай белгиланади: *Oxyz*. Бунда *O* нуқта координаталар боши, *Ox* — абсциссалар ўқи, *Oy* — ординаталар ўқи, *Oz* — аппликаталар ўқи дейилади.

M — фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, у орқали *Ox*, *Oy*, *Oz* координата ўқларига перпендикуляр бўлган учта текислик ўтказамиз (4- шакл). Бу текисликларнинг ўқлар билан кесишиш нуқталарини мос равишда *A*, *B*, *C* орқали белгилаймиз. *M* нуқтанинг *x*, *y*, *z* тўғри бурчакли координаталари деб, мос равишда, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ йўналган кесмаларнинг *OA*, *OB*, *OC* катталикларига айтилади. Шундай қилиб, $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$. Бунда *x* сони *M* нуқтанинг абсциссаси, *y* сони ординатаси, *z* сони аппликатаси деб аталади. *M* нуқтанинг *x*, *y* ва *z* координаталарга эга эканлиги қуйидагича ёзилади: $M(x; y; z)$. Шундай қилиб, танланган координаталар системасида фазонинг ҳар бир *M* нуқтасига ҳақиқий сонларнинг биргина тартибланган учлиги $(x; y; z)$ — тўғри бурчакли координаталари мос келади ва аксинча, ҳақиқий сонларнинг ҳар бир тартибланган учлиги $(x; y; z)$ га фазода биргина *M* нуқта мос келади. *xOy*, *yOz*, ва *xOz* текисликлар координата текис-



5- шакл.

ликлари деб аталади. Улар бутун фазони *октантлар* деб аталадиган саккиз бўлакка (қисмга) бўлади. 5-шаклда октантларнинг тартибланиши, қуйидаги жадвалда эса нуқталарнинг у ёки бу октантда жойлашишига боғлиқ равишда уларнинг ишораларини аниқлаш кўрсатилган:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

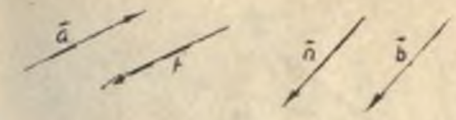
2- §. Векторлар. Векторларнинг тенглиги

Физик, кимёвий ва бошқа ҳодисаларни ўрганишда учрайдиган катталикларни икки синфга бўлиш мумкин. *Скаляр* катталиклар деб аталадиган катталиклар синфи мавжудки, уларни характерлаш учун бу катталикларнинг сон қийматларини кўрсатиш етарлидир. Булар, масалан, ҳажм, масса, зичлик, ҳарорат ва бошқалардир. Лекин шундай катталиклар мавжудки, улар фақат сон қийматлари билангина эмас, балки йўналиши билан ҳам характерланади.

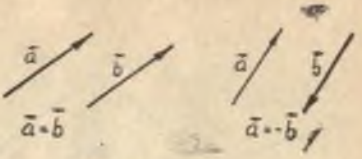
Улар *йўналган катталиклар* ёки *вектор катталиклар* деб аталади. Масалан, ҳаракатланаётган нуқтанинг бир вазиятдан иккинчи вазиятга кўчишида таъсир этаётган кучни характерлаш учун кучнинг ўлчамларини кўрсатиш кифоя қилмасдан, балки бу кучнинг йўналишини ҳам кўрсатиш зарурдир. Ҳаракат тезлиги, магнит ёки электр майдонининг кучланганлиги ва бошқа катталиклар ҳам шунга ўхшаш характерланади. Буларнинг ҳаммаси вектор катталикларга оид мисолдир. Уларни тасвирлаш учун вектор тушунчаси киритилган бўлиб, у математиканинг ўзи учун ҳам фойдали бўлиб чиқди. Биз юқорида йўналган кесма ҳақида гапирганимизда, унда йўналиш аниқланган, яъни унинг четки нуқталаридан қайси бири боши, қайси бири охири эканлиги кўрсатилган кесма эканлиги ҳақида айтган эдик.

1- таъриф. Йўналган кесма *вектор* деб аталади.

Векторни $\overrightarrow{AB}$ кўринишда белгилаймиз, бунда биринчи ҳарф векторнинг бош нуқтасини, иккинчи ҳарф эса унинг охирги нуқтасини белгилайди. Векторни, шунингдек, устига «→» чизилган битта ҳарф билан ҳам белгилаймиз: $\vec{a}$. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлигини унинг *модули* деб атаймиз ва $|\overrightarrow{AB}|$ кўринишда белгилаймиз. Агар вектор $\vec{a}$ билан белгиланган бўлса, у ҳолда унинг модули $|\vec{a}|$ ёки a билан белгиланади.



6- шакл.



7- шакл.

Боши охири билан устма-уст тушган вектор *ноль* вектор деб аталади ва $\vec{0}$ билан белгиланади. Бундай вектор тайин йўналишга эга эмас, унинг модули нолга тенг, яъни $|\vec{0}| = 0$.

2- таъриф. Битта тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётувчи $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар *коллинеар векторлар* деб аталади.

Коллинеар векторлар бир хил ёки қарама-қарши йўналган бўлиши мумкин (6- шакл).

3- таъриф. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар, бир хил йўналган ва узунликлари тенг бўлса, улар *тенг векторлар* деб аталади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар тенг бўлса, бундай ёзилади: $\vec{a} = \vec{b}$. Агар берилган векторни ўз-ўзига параллел кўчирсак, 3- таърифга асосан, яна берилган векторга тенг вектор ҳосил қиламиз. Шу маънода аналитик геометрияда векторлар эркин векторлар деб ҳисобланади.

4- таъриф. Битта текисликда ёки параллел текисликларда ётувчи векторлар *компланар векторлар* деб аталади.

Агар компланар векторларнинг бошлари умумий нуқтага эга бўлса, улар битта текисликда ётишини кўрсатиш қийин эмас.

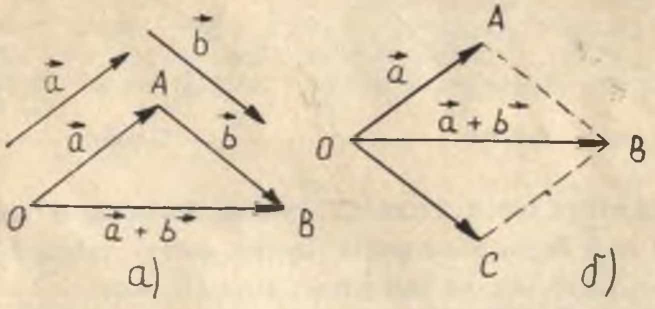
$\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BA}$ векторлар *қарама-қарши векторлар* деб аталади. Агар $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ каби белгиланса, у ҳолда унга қарама-қарши вектор $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ билан белгиланади (7- шакл).

3- §. Векторлар устида чизиқли амаллар

Векторлар устида чизиқли амаллар деб, векторларни қўшиш ва айириш ҳамда векторни сонга кўпайтиришга айтилади. Бу амалларни алоҳида кўриб чиқамиз.

Нолдан фарқли иккита ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор берилган бўлсин. Ихтиёрий O нуқтани оламиз ва $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ векторни ясаймиз, сўнгра A нуқтага $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ векторни қўямиз. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг *йиғиндиси* $\vec{a} + \vec{b}$ деб биринчи қўшилувчи векторнинг бошини иккинчи қўшилувчи векторнинг охири билан туташтирувчи $\overline{OB}$ векторга айтилади. Векторларни бундай қўшиш усули учбурчак усули дейилади (8- a шакл).

Векторларнинг йиғиндисини бошқача усул билан ҳам аниқлаш мумкин. Бирор O нуқтадан $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ва $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ векторларни қўямиз.



8- шакл.

Бу векторларни томонлар сифатида олиб, *OABC* параллелограмм ясаймиз. Параллелограммнинг *O* учидан ўтказилган диагонали $\overrightarrow{OB}$ вектор, $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар йиғиндиси $\vec a + \vec b$ вектордир. Векторларни бундай қўшиш усули параллелограмм қоидаси деб аталади (8- *б* шакл).

Икки векторни қўшишнинг иккинчи усули синиқ чизиқда кетма-кет жойлаштирилган исталган сондаги векторлар учун ҳам яроқлидир. Бунда йиғинди синиқ чизиқни кўпбурчакка ёпадиган вектор бўлиб, унинг боши биринчи векторнинг боши билан, охири эса сўнгги векторнинг охири билан устма-уст тушади. Бир неча векторни бундай қўшиш усули кўпбурчак қоидаси деб аталади (9- шакл).

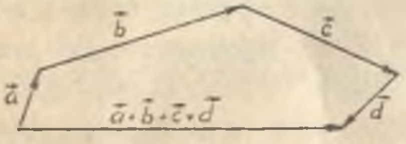
Қўшиш амалининг асосий хоссасини шаклларда тушунтириш мумкин.

1. Ўрин алмаштириш хоссаси (10- шакл) $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$.

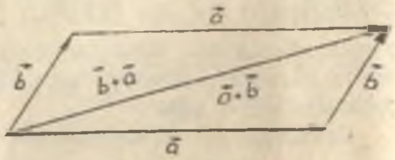
2. Груҳлаш хоссаси (11-шакл) $(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$.

Энди векторларни айириш амалини қўшишга тескари амал сифатида аниқлаймиз. $\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг айирмаси деб, $\vec a - \vec b$ билан белгиланадиган ва $\vec b$ вектор билан йиғиндиси $\vec a$ векторни берадиган векторга айтилади. Бундан векторларни айириш қоидаси келиб чиқади, агар $\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг боши умумий нуқтага қўйилса, у ҳолда $\vec a - \vec b$ вектор ҳосил бўлган синиқ чизиқни ёпади ва айрилувчи векторнинг охиридан камаювчи векторнинг охирига йўналган бўлади (12- шакл).

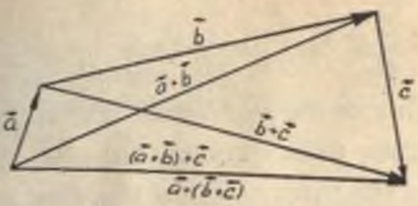
Энди векторни сонга кўпайтириш амалини кўрамиз:



9- шакл.



10- шакл.



11- шакл.

12- шакл.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ векторнинг $m \neq 0$ сонга *кўпайтмаси* деб, $\vec{a}$ векторга коллинеар, узунлиги $|m| \cdot |\vec{a}|$ га тенг бўлган, $m > 0$ бўлганда $\vec{a}$ вектор билан бир хил йўналишдаги, $m < 0$ бўлганда эса унга қарама-қарши йўналган ҳамда $m\vec{a}$ билан белгиланадиган векторга айтилади. Шундай қилиб, $m\vec{a} = \vec{b}$ бўлса, у ҳолда таърифга кўра $\vec{b} \parallel \vec{a}$ ва $|\vec{b}| = |m| \cdot |\vec{a}|$. Бу амал кўпайтириш амалининг асосий хоссаларига эга.

1. Ўрин алмаштириш хоссаси:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot m.$$

2. Скаляр сонга кўпайтиришга нисбатан груҳлаш хоссаси:

$$m(n\vec{a}) = (m\,n)\vec{a}.$$

3. Скалярларни (сонларни) қўшишга нисбатан тақсимот хоссаси:

$$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\,\vec{a}.$$

4. Векторларни қўшишга нисбатан тақсимот хоссаси:

$$m(\vec{a}+\vec{b}) = m\,\vec{a} + m\vec{b}.$$

Бу хоссалар геометрик йўл билан осон исботланади.

$(-\vec{a})$ қарама-қарши векторни $\vec{a}$ векторни (-1) сонига кўпайтириш натижаси деб қараш мумкинлигини айтиб ўтамиз: $(-\vec{a}) = (-1)\,\vec{a}$. $\vec{a} \neq \vec{0}$ векторни $m \neq 0$ сонга бўлишни доимо $\vec{a}$ векторни $\frac{1}{m}$ сонга кўпайтириш деб тушунамиз: $\frac{\vec{a}}{m} = \frac{1}{m}\vec{a}$. Агар $\vec{a}$ векторни ўзининг узунлиги $|\vec{a}|$ га бўлсак, у ҳолда ҳосил бўлган $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ вектор, $\vec{a}$ векторнинг йўналишига эга бўлиб, узунлиги 1 га тенг бўлиши равшан. Ҳақиқатан ҳам, агар $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}^{\circ}$ деб белгиласак, у ҳолда

$$|\vec{a}^{\circ}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1.$$

Узунлиги 1 га тенг бўлган вектор *бирлик вектор* деб аталади. Шундай қилиб, исталган $\vec{a}$ векторни унинг узунлиги $|\vec{a}|$ ва ўша йўналишли $\vec{a}^{\circ}$ бирлик векторга кўпайтмаси сифатида ифодалаш мумкин: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^{\circ}$.

4- §. Чизиқли эркли векторлар системаси

n та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ вектор ва шунча $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонни қараймиз. Бу сонларнинг мос векторларга кўпайтмалари йиғиндиси $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ векторларнинг *чизиқли комбинацияси* деб аталади.

Таъриф. $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси учун камида биттаси нолдан фарқли шундай n та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар мавжуд бўлсаки, векторларнинг чизиқли комбинацияси нолга тенг, яъни

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} \qquad (4.1)$$

бўлса, у система *чизиқли боғлиқ система* деб аталади. Акс ҳолда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар *чизиқли эркли* деб аталади, улар учун (4.1) тенглик фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ бўлганда ўринли бўлади.

Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots a_n$ векторлар чизиқли боғлиқ деб фараз қилсак ва, масалан, $\alpha_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n.$$

Бу ерда

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_2, -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \beta_3, \ldots, -\frac{\alpha_n}{\alpha_1} = \beta_n$$

деб белгиласак, у ҳолда

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 + \ldots + \beta_n \vec{a}_n$$

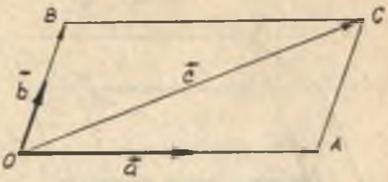
га эга бўламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонида $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \vec{a}_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси турибди. Шундай қилиб, агар n та вектор чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда уларнинг камида биттасини қолганларининг чизиқли комбинацияси сифатида ифодалаш мумкин. Бунга тескари даъво ҳам ўринли, агар векторлардан бири қолган векторларнинг чизиқли комбинацияси сифатида ифодаланган бўлса, у ҳолда бу векторлар чизиқли боғлиқдир. Акс ҳолда барча векторлар чизиқли эркли бўлиши равшан.

1- мисол. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор коллинеар бўлганда ва фақат шундагина чизиқли боғлиқ бўлишини исботланг.

Ечиш. Ҳақиқатан ҳам улар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{b} = \alpha\vec{a} \quad (\alpha \neq 0);$$

бундан $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар эканлиги (векторни сонга кўпайтириш амали таърифига кўра) келиб чиқади. Тескари даъво ҳам тўғри. Ҳақиқатан ҳам, агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда $\alpha \neq 0$ сонни доимо шундай танлаш мумкинки, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ тенглик тўғри бўлади, бу эса $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг чизиқли боглиқлигини билдиради. Бу мисолдан коллинеар бўлмаган иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг доимо чизиқли эрклилиги келиб чиқади.



13- шакл.

2-мисол. Учта $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлганда ва фақат шундагина чизиқли боғлиқ бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. Ҳақиқатан ҳам, улар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$ тенглик тўғри. Лекин $\alpha\vec{a}$ вектр $\vec{a}$ векторга коллинеар, $\beta\vec{b}$ вектор $\vec{b}$ векторга коллинеар ва уларнинг $\alpha a + \beta\vec{b}$ йиғиндиси $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан компланар бўлган вектордир (векторлар йиғиндиси таърифига кўра). Демак, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар компланардир.

Тескари даъво ҳам тўғри. Ҳақиқатан, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ компланар векторларни умумий O бошга келтирамиз, $OACB$ параллелограммни ясаймиз (13- шакл).

Равшанки, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Шу билан бирга $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ векторлар мос равишда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга коллинеар. Шунинг учун $\overrightarrow{OA} = \alpha a$ ва $\overrightarrow{OB} = \beta b$, бу ерда α, β — нолга тенг бўлмаган сонлар.

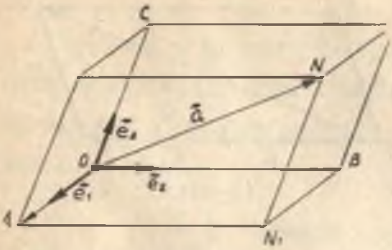
Шундай қилиб, ушбу тенгликка эгамиз:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

бу эса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг чизиқли боглиқлигини билдиради. Бу мисолдан келиб чиқадики, учта компланар бўлмаган вектор доимо чизиқли эрклидир (улар орасида иккита коллинеар бўлгани йўқ). Худди шунга ўхшаш фазодаги ҳар қандай тўртта $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, векторнинг доимо чизиқли боғлиқлигини кўрсатиш мумкин.

5- §. Базис. Базис бўйича ёйилма

Таъриф. Исталган $\vec{a}$ векторни n та чизиқли эркли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда бу векторлар *фазонинг базиси* деб аталади.



14- шакл.

Базисни ҳосил қиладиган векторлар сони фазонинг ўлчами деб аталади. Базисга кирувчи векторлар базис векторлар деб аталади. Тўғри чизиқнинг ўлчами 1 га тенг экани равшан, чунки тўғри чизиқда исталган $\vec{e}$ вектор базис ҳосил қилади, қолган векторлар эса у орқали бундай кўринишда ифодаланиши мумкин:

$$\vec{a} = \alpha\vec{e} \quad (\alpha \neq 0).$$

Текисликнинг ўлчами 2 га тенг, чунки текисликда коллинеар бўлмаган исталган иккита $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ вектор чизиқли эркли бўлиб, базис ҳосил қилади, қолган барча векторлар эса улар орқали ушбу кўринишда ифодаланиши мумкин:

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2, \ (\alpha,\ \beta \neq 0).$$

Фазонинг ўлчами 3 га тенг, чунки фазода исталган учта компланар бўлмаган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар чизиқли эркли бўлиб, базис ҳосил қилади, қолган барча векторлар эса улар орқали ушбу кўринишда ифодаланиши мумкин:

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 \ (\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 0).$$

Векторни базис векторларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш базис бўйича ёйиш деб аталади.

Мисол кўрайлик. 14- шаклдаги $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар базис ҳосил қилади. Масала $\vec{a}$ векторни базис векторлар орқали ифодалашдан иборат. Шаклдан кўринадики,

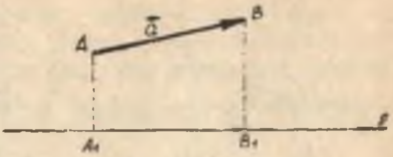
$$\vec{a} = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN_1} + \overrightarrow{N_1N}. \quad (5.1)$$

Лекин $\overrightarrow{OA}$ вектор $\vec{e}_1$ га коллинеар, $\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{OB}$ вектор $\vec{e}_2$ га коллинеар, $\overrightarrow{N_1N} = \overrightarrow{OC}$ вектор $\vec{e}_3$ га коллинеар, шунинг учун $\overrightarrow{AN_1} = \beta\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{e}_1$, $\overrightarrow{N_1N} = \gamma\vec{e}_3$, бу ерда α, β, $\gamma \neq 0$. Шундай қилиб, (5.1) формула

$$\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$$

кўринишни олади, яъни $\vec{a}$ вектор базис векторларнинг чизиқли комбинациясидир ёки $\vec{a}$ вектор $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базис бўйича ёйилма шаклида ифодаланган. Хусусан, базис векторлар бирлик векторлар бўлиши мумкин.

Тўғри бурчакли координаталар системаси киритилган уч ўлчовли фазода базис сифатида координата ўқларида ётувчи ва йўналиши координата ўқларининг мусбат йўналиши билан устма-уст тушувчи $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлар олинади.



15- шакл.

6- §. Векторлар проекциялари ва уларнинг координаталари

Фазода бирор l ўқ ва бирор $\overrightarrow{AB}$ вектор берилган бўлсин. A ва B нуқталардан бу ўққа перпендикуляр туширамиз, A_1 ва B_1 нуқталар ҳосил бўлади, уларни $\overrightarrow{AB}$ векторнинг A боши ва B охирининг l ўққа *проекциялари* деб атаймиз (15- шакл).

$\overrightarrow{AB}$ вектор бошининг проекциясини унинг охирининг проекцияси билан туташтирувчи $\overrightarrow{A_1B_1}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги ташкил этувчиси ёки *компонентаси* деб атаймиз.

$\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўққа проекцияси деб унинг $\overrightarrow{A_1B_1}$ ташкил этувчисининг l ўқ йўналишида ёки унга қарама-қарши йўналганлигига қараб, мусбат ёки манфий ишора билан олинган узунлигига айтилади (16- шакл). Векторнинг l ўққа проекцияси бундай белгиланади: $\text{Пр}_l\,\overrightarrow{AB}$. Шундай қилиб, бундай ёзиш мумкин: $\text{Пр}_l\,\overrightarrow{AB} = \pm|\overrightarrow{A_1B_1}|$.

Проекцияларнинг асосий хоссаларини қараймиз:

1. $\vec{a}$ векторнинг l ўққа проекцияси $\vec{a}$ вектор модулининг бу вектор билан ўқ орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига тенг, яъни

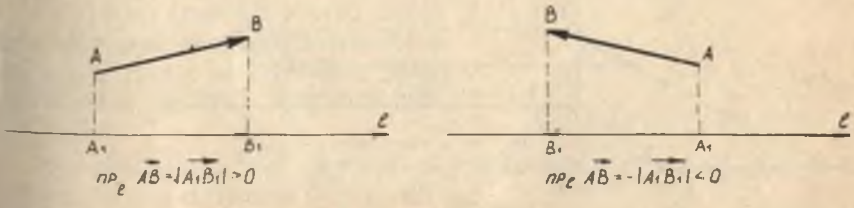
$$\text{Пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

Бу 17- шаклдан кўриниб турибди.

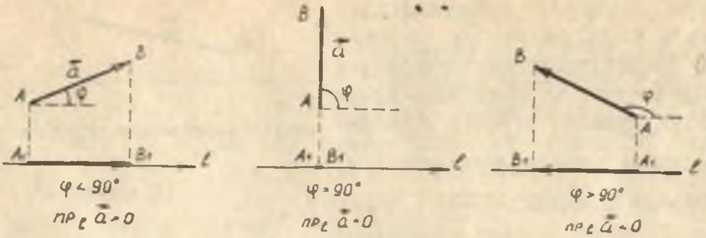
2. Икки вектор йиғиндисининг ўққа проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўққа проекциялари йиғиндисига тенг, яъни

$$\text{Пр}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \text{Пр}_l\,\vec{a} + \text{Пр}_l\,\vec{b}.$$

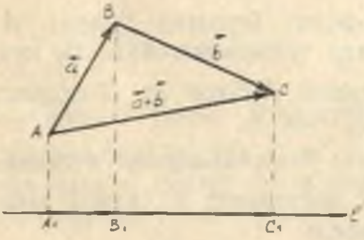
Бу 18- шаклдан кўриниб турибди.



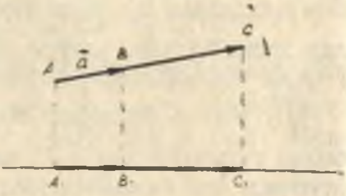
16- шакл.



17- шакл.



18- шакл.



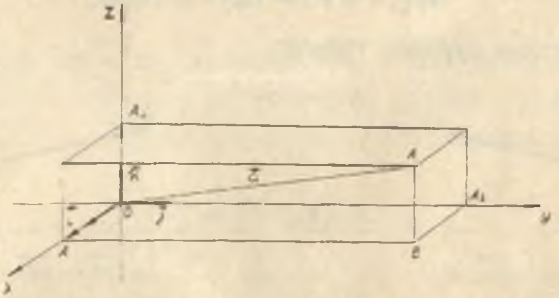
19- шакл.

3. λ соннинг $\vec{a}$ векторга кўпайтмасининг l ўққа проекцияси λ сонни $\vec{a}$ векторнинг шу ўққа проекциясига кўпайтмасига тенг, яъни ўзгармас сонни проекциядан ташқарига чиқариш мумкин:

$$Пр_l \lambda \vec{a} = \lambda\, Пр_l \vec{a}.$$

Бу 19- шаклдан кўриниб турибди.

Oxyz фазода тўғри бурчакли координаталар системасини олайлик. Ўқларнинг ҳар бирида йўналиши ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушадиган бирлик вектор оламиз, уларни $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ билан белгилаймиз. Бу учала ўзаро перпендикуляр бирлик вектор *ортлар* деб аталади. Улар ўзаро компланар эмас, яъни базис ташкил қилади (20- шакл).



20- шакл.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ векторнинг координата ўқларига проекцияларини a_x, a_y, a_z орқали белгилаймиз. Исталган векторни унинг узунлигини ўша йўналишдаги бирлик векторга кўпайтмаси сифатида ифодалаш мумкин (3- § нинг охири) бўлганлиги учун $\vec{a}$ векторларнинг ўқлардаги ташкил этувчилари

$$\overrightarrow{OA_1}=a_x\vec{i},\ \overrightarrow{OA_2}=a_y\vec{j},\ \overrightarrow{OA_3}=a_z\vec{k}$$

бўлади. Бироқ, $\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BA}$, бунда $\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA_3}$, шу сабабли узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}. \tag{6.1}$$

(6.1) формула $\vec{a}$ векторнинг $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базис векторлар ёки координата ўқлари бўйича ёйилмасини беради. $\vec{a}$ векторнинг a_x, a_y, a_z проекциялари унинг *координаталари* деб аталади. Агар векторнинг боши координаталар бошида, охири эса $A(x, y, z)$ нуқтада бўлса, у ҳолда $a_x=x$, $a_y=y$, $a_z=z$ бўлади.

Бу ҳолда $\overrightarrow{OA}$ вектор $\vec{r}$ орқали белгиланади ва A нуқтанинг *радиус-вектори* деб аталади.

7- §. Координата шаклида берилган векторлар устида чизиқли амаллар

Агар векторларнинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, у ҳолда бу векторлар устидаги чизиқли амалларни уларнинг проекциялари устидаги арифметик амаллар билан алмаштириш мумкин.

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

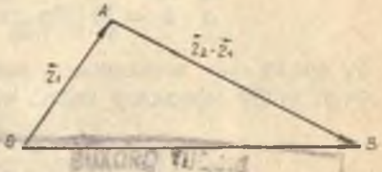
бўлсин. У ҳолда

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k},$$
$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k},$$

яъни векторларни қўшишда (айиришда) уларнинг бир исмли проекциялари қўшилади (айирилади), векторни сонга кўпайтиришда унинг ҳар бир проекцияси бу сонга кўпайтирилади.

Мисол. Агар $\overrightarrow{AB}$ вектор боши ва охирининг координаталари $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ бўлса, унинг координата ўқларига проекцияларини топинг.

Ечиш. $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ ларнинг радиус-векторлари бундай бўлади (21-шакл):



21- шакл.

$$\vec{r_1} = \vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$
$$\vec{r_2} = \vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Шаклдан: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. Юқорида таърифланган векторларни айириш қоидасидан фойдаланиб,

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, боши ва охирининг координаталари маълум бўлган векторнинг проекцияларини топиш учун унинг охирининг координаталаридан бошининг координаталарини айириш лозим.

Масалан, $A(6, -1, 2)$, $B(-3, 1, 4)$ бўлса, у ҳолда $\vec{AB} = -9\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай векторлар коллинеар, компланар, тенг деб аталади?
2. Векторнинг модули нима?
3. Векторлар устидаги қайси амаллар чизиқли амаллар деб аталади?
4. Қандай векторлар чизиқли боғлиқ ва қандай векторлар чизиқли эркли деб аталади?
5. Фазонинг базиси ва ўлчами нима?
6. Векторнинг ўқдаги ташкил этувчиси нима?
7. Векторнинг ўққа проекцияси нима?
8. Векторлар устида чизиқли амалларга уларнинг координаталари устида шундай амаллар мос келишини исботланг.
9. 372—398- масалаларни ечинг.

8- §. Скаляр кўпайтма

Таъриф. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг *скаляр кўпайтмаси* деб, бу векторлар узунликларини улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига тенг бўлган скалярга (сонга) айтилади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси бундай белгиланади:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi. \qquad (8.1)$$

$|\vec{a}|\cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ ва $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$ бўлганлиги учун (8.1) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} \text{ ёки } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}, \qquad (8.2)$$

бу ердан бир векторнинг иккинчи вектор йўналишига проекцияси учун ушбу ифодалар келиб чиқади:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ ва } \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}. \qquad (8.3)$$

Хусусан, векторлардан бири, масалан, $\vec{a}$ бирлик вектор, яъни $|\vec{a}| = 1$ бўлса, у ҳолда (8.3) формула ушбу кўринишни олади:

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{1} = \vec{a}\cdot\vec{b},$$

яъни векторнинг бирлик векторга проекцияси бу векторларнинг скаляр кўпайтмасига тенг.

1. Скаляр кўпайтманинг хоссалари

а) Ўрин алмаштириш хоссаси:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Бу хосса скаляр кўпайтма таърифидан бевосита келиб чиқади:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \quad \text{ва} \quad \vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\varphi,$$

демак, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$

б) Сонга кўпайтиришга нисбатан гуруҳлаш хоссаси:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Бу (8.2) формуладан келиб чиқади:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}).$$

Лекин проекцияларнинг хоссасига асосан қуйидагига эгамиз:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Шу сабабли

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = |\vec{b}|\lambda\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \lambda(|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}).$$

Иккинчи томондан (8.2) формулага асосан:

$$|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Демак, $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$

Шундай қилиб,

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

в) Векторларни қўшишга нисбатан тақсимот хоссаси:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Бу (8.2) формуладан келиб чиқади:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}).$$

Йиғиндининг проекцияси ҳақидаги хоссани қўлласак,

$$\text{Пр}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{c}.$$

Шундай қилиб,

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\,(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,(\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}+\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{c}) =$$

$$= |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} + |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Демак, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$

Бу хоссалар векторли кўпҳадларни скаляр кўпайтиришдаги амалларни ҳадма-ҳад бажаришда кўпайтувчиларнинг тартибига эътибор бермаслик ҳамда скаляр кўпайтмадаги ўхшаш ҳадларни жамлаш ҳуқуқини беради. Масалан,

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{c}+4\vec{d}) = 15\vec{a}\cdot\vec{c}+12\vec{a}\cdot\vec{d}-10\vec{b}\cdot\vec{c}-8\vec{b}\cdot\vec{d}.$$

1-мисол. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базис векторларнинг скаляр кўпайтмаларини ҳисобланг.

Ечиш. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ бирлик векторлар, яъни $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Шу сабабли

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1, \tag{8.4}$$

чунки бир хил йўналишдаги тенг векторлар орасидаги бурчак нолга тенг ва $\cos 0^\circ = 1$. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлар ўзаро перпендикуляр, шунинг учун

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0, \tag{8.5}$$

чунки перпендикуляр векторлар орасидаги бурчак 90° га тенг ва $\cos 90^\circ = 0$.

2-мисол. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг координаталари орқали ифодаланг.

Ечиш. a_x, a_y, a_z лар $\vec{a}$ векторнинг координаталари бўлсин, яъни $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$; b_x, b_y, b_z лар $\vec{b}$ векторнинг координаталари бўлсин, яъни $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Векторларнинг хоссаларидан ҳамда (8.4) ва (8.5) тенгликлардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) =$$

$$= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+$$

$$+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Шундай қилиб, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бир исмли координаталар кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{8.6}$$

(8.6) формула жуда кўп қўлланилади. Қуйида улардан баъзилари билан танишамиз.

2. Векторнинг узунлиги. $\vec{a}$ векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмасини қараймиз. Бундай кўпайтма векторнинг *скаляр квадрати* деб аталади:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0° = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2.$$

Скаляр квадрат бундай белгиланади: $\vec{a}^2$. Шундай қилиб, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, яъни векторнинг скаляр квадрати унинг модули квадратига тенг. Бундан қуйидагига эгамиз:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}, \tag{8.7}$$

яъни векторнинг модули унинг скаляр квадратидан олинган квадрат илдизга тенг. Бироқ вектор ўзининг базис векторларга ёйилмаси билан берилган, яъни унинг координаталари маълум бўлса:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

у ҳолда (8.6) формулага асосан $\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ ни ҳосил қиламиз. Бунда (8.7) формула ушбу кўринишни олади:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + v_z^2}, \tag{8.8}$$

яъни векторнинг узунлиги унинг координаталари квадратлари йиғиндисидан олинган квадрат илдизга тенг.

3- мисол. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ векторнинг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. (8.8) формуладан фойдаланамиз:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

4- мисол. $\vec{c}$ векторнинг узунлигини ҳисобланг, бунда $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ ҳамда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак 60° га тенг.

Ечиш. (8.7) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}^2}.$$

Сўнгра $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 4^2 = 16$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = 3\cdot 4\cos 60° = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 6$$

бўлганлиги учун $|\vec{c}| = \sqrt{9 - 4\cdot 6 + 4\cdot 16} = \sqrt{49} = 7.$

3. Икки вектор орасидаги бурчак. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\;|\vec{b}|\cos\varphi$$

дан

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \tag{8.9}$$

ни топамиз. Агар бу векторларнинг базис векторлари бўйича ёйилмалари маълум, яъни

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

бўлса, у ҳолда (8.9), (8.6), (8.8) формулалардан фойдаланиб, векторлар орасидаги бурчак косинусини топиш учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (8.10)$$

5- мисол. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. (8.10) формулага асосан топамиз:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \varphi = 45°.$$

4. Икки векторнинг перпендикулярлик шарти. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда улар орасидаги бурчак 90° га тенг ва $\cos 90° = 0$. Демак, бундай векторлар учун скаляр кўпайтма нолга тенг: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$. Аксинча, агар икки векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ёки $|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi = 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} \neq 0$ ёки $\vec{b} \neq 0$, бинобарин, $\cos\varphi = 0$ (яъни векторлар перпендикуляр).

Шундай қилиб, иккита нолмас $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad (8.11)$$

ёки (8.6) формуладан фойдалансак,

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (8.12)$$

бўлганда ва фақат шундагина улар перпендикулярдир. Векторлар базис векторлар орқали ёйилмалари

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

билан берилган ҳолда шу шарт $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ га тенг кучлидир.

Шундай қилиб, (8.11) ёки (8.12) формулалар икки векторнинг перпендикулярлик шартини ифодалайди.

6- мисол. Параллелограммнинг учлари берилган: $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Унинг AC ва BD диагоналлари перпендикулярлигини исботланг.

Ечиш. $\vec{AC}$ ва $\vec{BD}$ векторларни қараймиз:

$$\overrightarrow{AC} = \{-4-1; \quad 1+2; \quad 1-2\} = \{-5, 3, -1\},$$
$$\overrightarrow{BD} = \{-5-1, -5-4, 3-0\} = \{-6, -9, 3\}.$$

Бу векторларнинг скаляр кўпайтмасини (8.6) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) + (-1) \cdot 3 = 0.$$

Демак, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ экан.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси деб нимага айтилади?
2. Проекциялари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай ҳисобланади?
3. Скаляр кўпайтманинг қандай хоссалари бор?
4. Вектор узунлиги учун формула келтириб чиқаринг.
5. Ўзларининг координаталари билан берилган икки нуқта орасидаги масофа учун формула келтириб чиқаринг.
6. Икки вектор орасидаги бурчак учун формула келтириб чиқаринг.
7. Икки векторнинг ўзаро перпендикулярлик шарти нимадан иборат?
8. 399—425- масалаларни ечинг.

9-§. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар, уларнинг хоссалари

1. Иккинчи тартибли детерминант. Тўртта сондан иборат ушбу жадвални қараймиз ва уни матрица, аниқроғи, иккинчи тартибли квадрат матрица деб атаймиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ сон (9.1) матрицанинг *детерминанти* ёки оддий қилиб, *иккинчи тартибли детерминант* деб аталади. (9.1) матрицанинг детерминанти бундай белгиланади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{9.2}$$

Шундай қилиб, таърифга ва белгилашга асосан қуйидагига эгамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{9.3}$$

(9.1) матрица билан унинг (9.2) детерминантини чалкаштирмаслик лозим, чунки матрица бори йўғи тўртта сондан иборат жадвал бўлиб, детерминант эса шу жадвалдан (9.3) да кўрсатилгани каби ҳосил қилинган биргина сондир.

Детерминантни ташкил қиладиган сонлар унинг элементлари деб аталади. Иккинчи тартибли детерминант иккита сатрга ва иккита устунга эга. Исталган элементнинг белгиланишида биринчи индекс шу элемент турган сатр тартибини, иккинчи индекс эса устун тартибини кўрсатади.

a_{11}, a_{12} элементлар биринчи сатрни, a_{21}, a_{22} элементлар иккинчи сатрни ташкил этади.

a_{11}, a_{21} элементлар биринчи устунни, a_{12}, a_{22} элементлар иккинчи устунни ташкил этади.

a_{11}, a_{22} элементлар жойлашган диагонал детерминантнинг *бош диагонали*, a_{21} a_{12} элементлар жойлашган диагонал эса *ёрдамчи диагонали* деб аталади.

Шундай қилиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

детерминант мос равишда бош ва ёрдамчи диагоналларда турган элементларнинг кўпайтмалари айирмасига, яъни $a_{11} \cdot a_{22} — a_{21} \cdot a_{12}$ га тенг.

1-мисол. $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot 5 — 3 \cdot (—1) = 43.$

2. Учинчи тартибли детерминант. Учинчи тартибли квадрат матрицани, яъни 3×3 та сондан иборат ушбу жадвални қараймиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (9.4)$$

Бу матрицанинг учинчи тартибли детерминанти деб қуйидаги

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} — a_{31}a_{22}a_{13} — a_{12}a_{21}a_{33} — a_{23}a_{32}a_{11}$$

сонга айтилади. Учинчи тартибли детерминант бундай белгиланади

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Шундай қилиб,

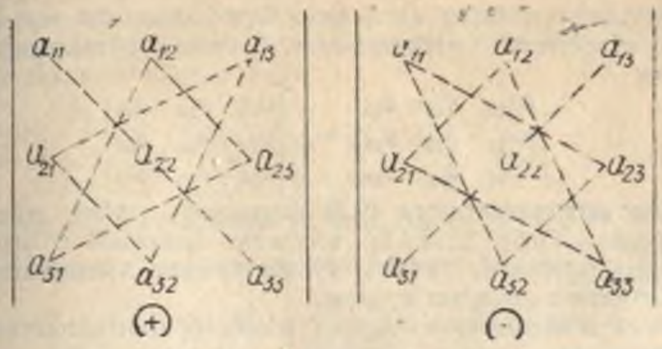
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} — \\ — a_{31}a_{22}a_{13} — a_{21}a_{12}a_{33} — a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad (9.5)$$

Учинчи тартибли детерминант учун сатр, устун, бош ва ёрдамчи диагоналлар тушунчалари иккинчи тартибли детерминантдаги каби киритилади. (9.5) ифодани хотирлаб қолиш учун бундай йўл тутамиз. Детерминантдаги (9.5) ифодага мусбат ишора билан кирадиган ҳар бир кўпайтманинг учта элементини пунктир чизиқ ёрдамида туташтирамиз. (9.5) ифодага манфий ишора билан кирадиган кўпайтмалар учун ҳам шундай қиламиз. Осон хотирлаб қолинадиган схема (учбурчаклар қоидаси) ҳосил бўлади (21′-шакл).

2-мисол. Ушбу учинчи тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Ечиш. (9.5) формуладан фойдаланиб, изланаётган детерминантни ҳисоблаймиз:



21′- шакл.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 0\cdot 4\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 6 - 4\cdot(-1)\cdot 1 = 0.$$

3. **Детерминантнинг хоссалари.** Бу хоссаларни учинчи тартибли детерминант учун келтирамиз.

а) Детерминантнинг сатрларидаги элементлари ва устунларидаги элементлари ўринлари алмаштирилганда унинг миқдори ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хоссани исботлаш учун юқоридаги детерминантларга (9.5) формулани татбиқ этиш ва олинган ифодаларнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш кифоядир. Бу хосса детерминантнинг сатр ва устунлари элементларининг тенг ҳуқуқлигини белгилаб беради. Шу сабабли барча кейинги хоссаларни сатрлар учун ҳам, устунлар учун ҳам таърифлаб, уларни бир сўз билан *қатор* деб атаймиз.

б) Агар детерминантнинг иккита параллел қатор элементларининг ўринлари алмаштирилса, унинг ишораси қарама-қарши ишорага алмашади. Масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бу хосса ҳам олдинги хосса каби исботланади.

в) Агар детерминант иккита бир хил элементли қаторга эга бўлса, у нолга тенг. Ҳақиқатан, иккита параллел бир хил элементли қаторларнинг ўринларини алмаштириш билан детерминант ўзгармайди, бироқ б) хоссага асосан унинг ишораси ўзгаради. Демак, $\Delta = -\Delta$, яъни $2\Delta = 0$ ёки $\Delta = 0$. Масалан, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

г) Детерминант бирор қаторининг барча элементларини исталган λ сонга кўпайтириш детерминантни бу сонга кўпайтиришга тенг кучлидир:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хосса детерминантларга (9.5) формулани татбиқ этиш билан текширилади. Ушбу даъво бу хоссанинг натижаси бўлади: бирор қатор элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

д) Агар детерминант ноллардан иборат бўлган қаторга эга бўлса, у нолга тенг. Бу хосса олдинги хоссадан $\lambda = 0$ бўлганда келиб чиқади.

е) Агар детерминант иккита параллел пропорционал қаторга эга бўлса, у нолга тенг. Ҳақиқатан, агар иккита параллел қаторнинг ҳадлари пропорционал бўлса, у ҳолда г) хоссага асосан, бу қаторлар элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, натижада иккита параллел бир хил қатор қолади, у эса в) хоссага асосан нолга тенг. Масалан,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

ж) Агар детерминант бирор қаторининг ҳар бир элементи иккита қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда бу детерминант икки детерминант йиғиндисидан иборат бўлади. Масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хосса детерминантларга (9.5) формулани қўллаш билан текширилади.

з) Агар бирор қатор элементларига бошқа параллел қаторнинг элементларини исталган умумий кўпайтувчига кўпайтириб қўшилса, детерминант ўзгармайди. Масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу хоссани ўнг томонга ж) ва е) хоссаларни қўллаб текшириш мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Алгебраик тўлдирувчилар ва минорлар. Навбатдаги хоссаларни таърифлаш учун минор ва алгебраик тўлдирувчи тушунчаларини киритамиз. Детерминант бирор элементининг минори деб, шу детерминантдан бу элемент турган сатр ва устунни ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантга айтилади. Соддалик учун қуйидаги учинчи тартибли детерминантни оламиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Детерминант a_{ik} элементининг минори M_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ билан белгиланади. Масалан, a_{11} элементнинг минори $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ сон, a_{32} элементнинг минори эса $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ сон бўлади ва ҳ. к. Детерминантнинг бирор a_{ik} элементи турган сатр ва устун тартиб рақамларининг йиғиндиси $i+k$ жуфт ёки тоқ сон бўлишига боғлиқ равишда бу элемент жуфт ёки тоқ жойда турибди деб айтилади. Масалан, a_{11} элемент детерминантда жуфт жойни эгаллаган, чунки у биринчи сатр ва биринчи устун кесишган жойда турибди, $1 + 1 = 2$ эса жуфт сон. a_{32} элемент эса тоқ жойни эгаллаган, чунки $3 + 2 = 5$ тоқ сон ва ҳ. к. Детерминант бирор элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб унинг бу детерминантда жуфт ёки тоқ жой эгаллаганига боғлиқ равишда мусбат ёки манфий ишора билан олинган минорига айтилади. a_{ik} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси A_{ik} билан белгиланади. Масалан, a_{11} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси $A_{11} = (-1)^{1+1} \times \times M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ сон бўлади, чунки a_{11} элемент жуфт жойда турибди, a_{32} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

сон бўлади, чунки a_{32} элемент тоқ жойда турибди, ва ҳ.к.

Детерминантнинг алгебраик тўлдирувчиларга боғлиқ хоссалари билан танишишда давом этамиз.

Детерминант бирор қатор элементлари билан уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг. Шундай қилиб, ушбу тенглик ўринли:

$$\begin{aligned} &\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, && \Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ &\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, && \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \quad (9.6) \\ &\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, && \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{aligned}$$

Детерминантнинг (9.6) формулаларнинг бири бўйича ёзилиши унинг қатор элементлари бўйича *ёйилмаси* деб аталади. Бу тенгликларнинг биринчисини исботлаймиз. Бунинг учун (9.6) формуланинг ўнг қисмини ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}) - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13}).$$

Ҳар бир қавсдан умумий кўпайтувчини чиқарамиз:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}). \quad (9.7)$$

Қавсларда турган миқдорлар a_{11}, a_{12}, a_{13} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларидир, яъни

$$a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11},$$

$$-(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12}, \quad (9.8)$$

$$a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = A_{13}.$$

(9.7) формулани (9.8) формулани ҳисобга олган ҳолда бундай ёзамиз:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

ана шуни исботлаш керак эди.

3- мисол. Ушбу детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ечиш. Бунда биринчи сатрда нол бўлганлиги учун биринчи сатр элементлари бўйича ёйиш формуласидан фойдаланиш қулайдир. Қуйидагини топамиз:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (10+8) - 1 \cdot (12-2) = 8.$$

Детерминант бирор қаторининг битта элементидан ташқари барча элементлари нолга тенг бўлганда детерминантнинг бу қатор элементлари бўйича ёйилмаси айниқса содда кўринишда бўлади. Бунга эса 3) хоссадан фойдаланиб эришиш мумкин.

4- мисол. Ушбу детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

Ечиш. Детерминантнинг қийматини ўзгартирмасдан уни шундай алмаштирамизки, унинг бирор қаторининг битта элементидан бошқа ҳамма элементлари нолга тенг бўлсин. Бунинг учун 1- қатор билан шуғулланамиз. Иккинчи устунга биринчи устуннинг 3 га кўпайтирилганини, учинчи устунга эса биринчи устуннинг (—2) га кўпайтирилганини қўшамиз. Шу алмаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & -9 \\ 3 & 11 & -10 \end{vmatrix}.$$

Иккита нолни ўз ичига олган қатор элементлари бўйича ёйиб ушбуни топамиз:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 19 & -9 \\ 11 & -10 \end{vmatrix} = -190 + 99 = -91.$$

Сўнгги хоссага ўтамиз.

к) Детерминантнинг бирор қатори элементларини параллел қатор мос элементларининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг. Масалан,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

10- §. *n*- тартибли детерминант ҳақида тушунча

n- тартибли матрицани, яъни $n \times n$ та сондан иборат ушбу жадвални қараймиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бу матрицанинг *n*- тартибли детерминанти деб бундай белгиланадиган сонга айтилади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

n- тартибли детерминант учун юқорида айтилган барча хоссалар, жумладан, детерминантни бирор қатор элементлари бўйича ёйиш формуласи бу ерда ҳам ўринли.

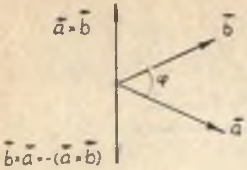
Исталган тартибли детерминантни ҳисоблашда айни шу формуладан фойдаланилади.

Мисол. Ушбу тўртинчи тартибли детерминантни иккинчи сатр элементлари бўйича ёйиш йўли билан ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$



24- шакл.

лар бўлади (24- шакл). Демак, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

б) Сонга кўпайтиришга нисбатан гуруҳлаш хоссаси:

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Бу хосса $\lambda=0$ ёки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлган ҳол учун равшан, шу сабабли $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар эмас ҳамда $\lambda\neq 0$ деб фараз қиламиз.

$\lambda>0$ бўлсин, у ҳолда вектор кўпайтма таърифидан фойдаланиб, қуйидагини оламиз:

$$|(\lambda\vec{a})\times\vec{b}|=|\lambda\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,$$

$$|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})|=\lambda|\vec{a}\times\vec{b}|=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,$$

бу ерда φ — берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак. Демак, $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ ва $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ векторлар бир хил узунликка эга.

Бундан ташқари, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$, $\lambda\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар битта текисликда ётади, шу сабабли $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр, $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ вектор ҳам шу векторга перпендикуляр. Шундай қилиб, $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$, $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ векторлар коллинеар ва бир хил узунликка эга. Ниҳоят, улар бир хил йўналган, чунки $\lambda\vec{a}$ ва $\vec{a}$ векторлар бир хил йўналган.

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Бу хоссанинг $\lambda<0$ бўлган ҳол учун ҳам тўғрилигини шунга ўхшаш исботлаш мумкин.

в) Векторларни қўшишга нисбатан тақсимот хоссаси:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

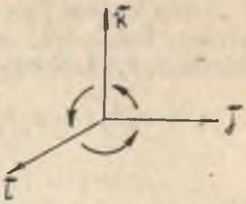
Бу формуланинг исботини келтирмаймиз.

Бу хоссалар векторли кўпҳадларни вектор кўпайтиришда амалларни ҳадма-ҳад бажариш ва ўхшаш вектор кўпайтувчиларнинг сон коэффициентларини жамлаш имконини беради. Лекин шуни хотирада тутиш керакки, вектор кўпайтмада кўпайтувчиларнинг тартиби муҳим бўлиб, кўпайтувчиларнинг ўринлари алмаштирилганда вектор кўпайтманинг ишораси ўзгартирилиши лозим. Масалан,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times(2\vec{a}+3\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{a})+2(\vec{b}\times\vec{a})+2(\vec{c}\times\vec{a})+$$
$$+3(\vec{a}\times\vec{b})+3(\vec{b}\times\vec{b})+3(\vec{c}\times\vec{b})=-2(\vec{a}\times\vec{b})+2(\vec{c}\times\vec{a})+$$
$$+3(\vec{a}\times\vec{b})+3(\vec{c}\times\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})+2(\vec{c}\times\vec{a})+3(\mathrm{c}\times\vec{b}).$$

Бу ерда $\vec{a}\times\vec{a}=0$, $\vec{b}\times\vec{b}=0$, чунки $\vec{a}$ ва $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{b}$ коллинеар векторлар, $\varphi=0$, $\sin\varphi=0$ ва $|\vec{a}\times\vec{a}|=0$, $|\vec{b}\times\vec{b}|=0$.

1-мисол. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ ва $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини ҳисобланг.



25-шакл.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{p}+2\vec{q})\times(3\vec{p}-\vec{q})=3(\vec{p}\times\vec{p})-(\vec{p}\times\vec{q})+6(\vec{q}\times\vec{p})-$$
$$-2(\vec{q}\times\vec{q})=7(\vec{q}\times\vec{p}),$$

чунки $\vec{p}\times\vec{p}=\vec{0}$, $\vec{q}\times\vec{q}=\vec{0}$, $\vec{p}\times\vec{q}=-\vec{q}\times\vec{p}$.

2-мисол. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ўнг учлик ташкил қилувчи базис векторларнинг вектор кўпайтмаларини ҳисобланг (25-шакл).

Ечиш. Булар ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар ва ўнг учлик ҳосил қилганлиги учун, вектор кўпайтманинг таърифига кўра:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Сўнгра, равшанки,

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Шунингдек, $\vec{i}\times\vec{i}=0$, $\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$, $\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$.

2. Вектор кўпайтмани детерминант орқали ҳисоблаш. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базис векторлар бўйича ёйилма шаклида берилган бўлсин:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини уларнинг a_x, a_y, a_z, ва b_x, b_y, b_z проекциялари орқали ифодалаймиз. Ушбу тенглик тўғрилигини исботлаймиз:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Вектор кўпайтманинг а), б) ва в) хоссаларидан ҳамда шу параграфдаги мисолнинг натижасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$
$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+$$

$$+a_y b_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_y b_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_z b_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_z b_y(\vec{k}\times\vec{j})+$$
$$+a_z b_z(\vec{k}\times\vec{k})=a_x b_y\vec{k}+a_x b_z(-\vec{j})+a_y b_x(-\vec{k})+a_y b_z\vec{i}+$$
$$+a_z b_x\vec{j}+a_z b_y(-\vec{i})=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}-(a_x b_z-a_z b_x)\vec{j}+$$
$$+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}.$$

Қавслар ичидаги айирмалар иккинчи тартибли детерминантлардир:

$$a_y b_z-a_z b_y=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\quad a_x b_z-a_z b_x=\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix},$$
$$a_x b_y-a_y b_x=\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Шу сабабли сўнгги тенгликни бундай қайта ёзиш мумкин:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (11.1)$$

Бу ифодага детерминантни бирор қатори элементлари бўйича ёйиш формуласини қўллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (11.2)$$

3-мисол. Ушбу векторларнинг вектор кўпайтмасини топинг:

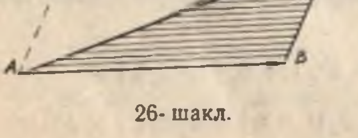
$$\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k},$$
$$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}.$$

Ечиш. (11.2) ва (11.1) формулаларга биноан, қуйидагини оламиз:

$$\vec{a}\times\vec{b}=6\vec{i}+7\vec{j}+10\vec{k}.$$

4-мисол. Учлари $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(4;\ 2;\ -1)$, $C(-3;\ 1;\ 4)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзини топинг (26-шакл):

Ечиш. $\vec{a}=\vec{AB}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{AC}=-4\vec{i}+3\vec{k}$ векторларни қараймиз, улар ΔABC нинг томонлари билан устма-уст тушади. Изланаётган юз қуйидагича бўлади:



26-шакл.

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|,$$

чунки учбурчакнинг юзи параллелограмм юзининг ярмига тенг, у эса ўз навбатида шу параллелограммни ясаган векторлар вектор кўпайтмасининг модулига тенг. Аввал вектор кўпайтмани ҳисоблаймиз:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Демак, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$, бундан $S_\wedge = \frac{1}{2}\sqrt{26}$ кв. бирлик.

12-§. Аралаш кўпайтма

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларни қараймиз ва ушбу кўпайтмани тузамиз:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Бу ерда $\vec{a}$ вектор аввал $\vec{b}$ векторга кўпайтирилади, кейин олинган $(\vec{a} \times \vec{b})$ вектор $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтирилади. Векторларнинг бундай кўпайтмаси *аралаш кўпайтма* деб аталади. Сўнгги амал скаляр кўпайтма бўлганлиги учун натижа скаляр бўлади.

Аралаш кўпайтма оддий геометрик маънога эга: у берилган векторларни қирралар сифатида олиб ясалган параллелепипед ҳажмига ишора аниқлигида тенг.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар эмас деб фараз қилиб, бу векторларда параллелепипед ясаймиз ва $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ векторни ҳам ясаймиз (27-шакл). Бундай белгилаймиз: S — параллелепипед асосининг юзи (асос $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларда ясалган), h — унинг баландлиги, α эса $\vec{c}$ ва $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак. Скаляр кўпайтманинг таърифига кўра қуйидагига эгамиз:

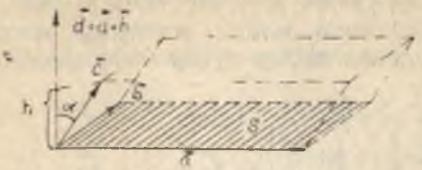
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\alpha = S \cdot |\vec{c}| \cos\alpha.$$

27-шаклдан кўриниб турибдики,

$$|\vec{c}| \cos\alpha = h.$$

Демак, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot h$, бу эса параллелепипед ҳажмига тенг.

Шаклда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар ўнг учлик ҳосил қилган ва $\cos\alpha > 0$. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чап учлик бўлса, у ҳолда α ўтмас бурчак бўлади ва $\cos\alpha < 0$. Бу ҳолда $|\vec{c}| \cos\alpha < 0$, лекин абсолют қий-



27- шакл.

мат бўйича у параллелепипед баландлиги h га тенг.

Шундай қилиб, бундай хулоса қилиш мумкин: аралаш кўпайтма вектор кўпайтувчиларга ясалган параллелепипед ҳажмига ишора аниқлигида тенг, шу билан бирга бу кўпайтма агар (қабул қилинган ўнг системада) векторлар учлиги ўнг учлик бўлса, мусбат ва векторлар учлиги чап учлик бўлса, манфий бўлади, яъни

$$V=\pm(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}. \qquad (12.1)$$

1. Аралаш кўпайтманинг асосий хоссалари.

а) Аралаш кўпайтма амалларнинг ўринларини алмаштиришдан ўзгармайди, яъни

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}. \qquad (12.2)$$

Бу аралаш кўпайтмада «·» ва «×» белгиларининг ўрнини алмаштириш мумкинлигини билдиради. Ҳақиқатан ҳам, скаляр кўпайтманинг ўрин алмаштириш хоссасига асосан

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}). \qquad (12.3)$$

Сўнгра, (12.1) формулага кўра

$$V=\pm(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

$$V=\pm(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}. \qquad (12.4)$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ учликлар бир хил йўналишли, яъни иккаласи ё ўнг учлик, ёки чап учлик. У ҳолда аралаш кўпайтманинг геометрик маъносига кўра (12.4) тенгликларнинг ўнг томонларида бир хил ишора олиш лозим. Шундай қилиб,

$$(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

ва (12.3) тенгликка асосан

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

яъни (12.2) тенгликни олдик.

Бу айниятга асосан $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ аралаш кўпайтмани оддийроқ қилиб, вектор ва скаляр кўпайтмалар белгилари қаерда турганини кўрсатиб ўтирмасдан $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ каби белгилаш мумкин.

б) Аралаш кўпайтма кўпайтувчиларнинг ўринларини ўзаро (доиравий) алмаштиришдан ўзгармайди:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}.$$

Ҳақиқатан, а) хоссадан ва скаляр кўпайтманинг ўрин алмаштириш хоссасидан фойдалансак, кетма-кет қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\vec{c}\vec{a},$$

$$\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Шундай қилиб,

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}=\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}$$

хосса тўғри экан.

в) Иккита қўшни кўпайтувчининг ўрни алмаштирилганда аралаш кўпайтма ишорасини тескарисига алмаштиради:

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=-\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}.$$

Бу хоссани ушбу тенгликлар занжири бўйича исботлаш мумкин:

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=-\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}.$$

2. Аралаш кўпайтмани детерминант бўйича ҳисоблаш. Векторлар базис векторлар орқали ёйилма шаклида берилган бўлсин:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

Ушбу тенгликни исботлаймиз:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ вектор кўпайтма (11.1) ва (11.2) формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k},$$

у ҳолда $\vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ скаляр кўпайтма ушбу кўринишни олади:

$$\vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z.$$

Бу олинган йиғиндини детерминантнинг учинчи сатр бўйича ёйилмаси деб қараш мумкин. Шундай қилиб, қуйидагини олдик:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

1-мисол. Учлари $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(4;\ 4;\ 4)$, $C(3;\ 5;\ 5)$, $D(-2;\ -4;\ -7)$ нуқталарда бўлган пирамиданинг ҳажмини топинг.

Ечиш. Элементар геометриядан маълумки, пирамиданинг ҳажми $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ векторларга ясалган параллелепипед ҳажмининг олтидан бирига тенг. Бунга кўра

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{п-пед}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

Бу аралаш кўпайтмани топамиз. Энг аввал $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, ва $\overrightarrow{AD}$ векторларнинг координаталарини аниқлаймиз:

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}\,, \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}\,,$$

$$\overrightarrow{AD} = -3\vec{i} - 5\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Шундай қилиб,

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -18.$$

Бундан $V_{\text{п-пед}} = |-18| = 18$, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$ куб бирлик.

3. Уч векторнинг компланарлиги. Учта компланар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторни, яъни битта текисликда ёки параллел текисликларда ётадиган векторларни қараймиз. Бу нолга тенг бўлмаган векторларнинг аралаш кўпайтмасини тузамиз: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Равшанки, $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ вектор кўпайтма берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ётадиган текисликка перпендикуляр, ва демак, $\vec{c}$ векторга ҳам перпендикуляр. Шу сабабли $\vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Демак, компланар векторларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг. Тескари даъво ҳам тўғри, яъни аралаш кўпайтма нолга тенг бўлса, векторлар компланардир. Ҳақиқатан, агар $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = 0$ бўлса, бу ушбу ҳолларда бўлиши мумкин:

а) кўпайтувчилар орасида камида битта нол-вектор бор;

б) улардан иккитаси (ёки учаласи) коллинеар;

в) векторлар коллинеар, чунки бу ҳолда $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$, ва демак,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = 0.$$

Учинчи ҳол аслида биринчи икки ҳолни ўз ичига олади. Шундай қилиб, учта вектор компланар бўлиши учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$$

ёки

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

2-мисол. Ушбу нуқталар битта текисликда ётадими: $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-3;\ 2;\ 4)$, $C(2;\ -3;\ 1)$, $D(0;\ 1;\ -2)$?

Ечиш. Ушбу векторларни қараймиз:

$$\vec{AB} = -4\vec{i} + \vec{k},\quad \vec{AC} = \vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k},\quad \vec{AD} = -\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}.$$

Уларнинг аралаш кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -98.$$

Векторларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг эмас, у ҳолда улар компланар эмас ва A, B, C, D нуқталар битта текисликда ётмайди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Чап ва ўнг учликлар деб нимага айтилади?
2. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси нима?
3. Вектор кўпайтманинг геометрик маъноси нима?
4. Проекциялари билан берилган векторларнинг вектор кўпайтмаси қандай ифодаланади?
5. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси деб нимага айтилади?
6. Аралаш кўпайтма қандай хоссаларга эга?
7. Аралаш кўпайтма қандай геометрик маънога эга?
8. Проекциялари билан берилган уч векторнинг аралаш кўпайтмаси қандай ифодаланади?
9. Уч векторнинг компланарлик шарти нимадан иборат?
10. 426—449-мисолларни ечинг.

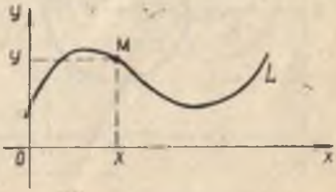
13-§. Текисликда чизиқнинг ва фазода сиртнинг тенгламаси ҳақида тушунча

Аналитик геометриянинг энг муҳим тушунчаси чизиқ тенгламаси тушунчасидир. Текисликда тўғри бурчакли координаталар системаси ва бирор L чизиқ берилган бўлсин (28-шакл). Ушбу

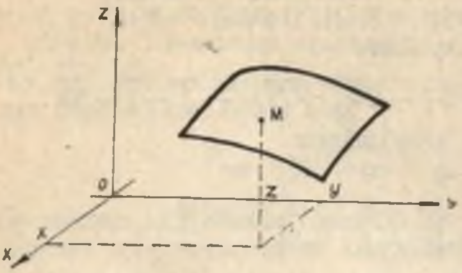
$$F(x,\ y) = 0 \tag{13.1}$$

тенгламани фақат L чизиқда ётувчи исталган M нуқтанинг x ва y координаталари қаноатлантирса, бу тенглама L чизиқнинг тенгламаси деб аталади.

Бундан L чизиқ текисликнинг координаталари (13.1) тенгламани қаноатлантирадиган барча нуқталари тўпламидан иборат эканлиги келиб чиқади. (13.1) тенглама L чизиқни аниқлайди ёки L чизиқни ҳосил қилади деб аталади. Лекин истаган $F(x,\ y) = 0$ тенглама қандайдир чизиқни аниқлайди деб ўйламаслик керак, масалан, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ тенглама ҳеч қандай ҳақиқий чизиқни аниқламайди, чунки текисликнинг ҳеч бир ҳақиқий нуқтасининг координаталари бу тенгламани қаноатлантирмайди.



28-шакл.



29- шакл.

Иккита чизиқнинг кесишиш нуқтасини аниқлаш масаласи бу чизиқлар тенгламалари системасини ечишдан иборат.

Энди фазода $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системаси ва бирор S сирт берилган бўлсин (29- шакл). Ушбу

$$F(x,\ y,\ z) = 0 \qquad (13.2)$$

тенгламани фақат S сиртда ётадиган исталган M нуқтанинг x, y ва z координаталари қаноатлантирса, бу тенглама S сиртнинг тенгламаси деб аталади.

Бу таърифга биноан, S сирт фазонинг координаталари (13.2) тенгламани қаноатлантирадиган барча нуқталари тўпламидир. (13.2) тенглама S сиртни ҳосил қилади ёки аниқлайди деб айтилади.

Фазодаги чизиқни иккита сиртнинг кесишмаси деб қараш мумкин. Шундай қилиб, ушбу

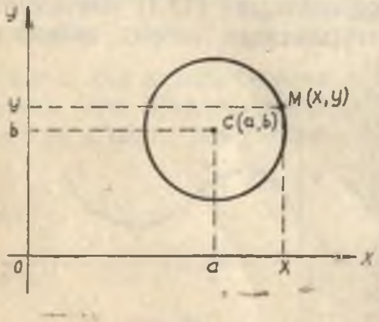
$$\begin{cases} F_1(x,\ y,\ z) = 0, \\ F_2(x,\ y,\ z) = 0 \end{cases} \qquad (13.3)$$

тенгламалар системасини фақат L чизиқда ётадиган исталган нуқтанинг координаталари қаноатлантирса ва унда ётмайдиган нуқталарнинг координаталари қаноатлантирмаса, бу система L чизиқ тенгламаси деб аталади.

Текисликдаги чизиқнинг $F(x,\ y) = 0$ тенгламаси ёки фазодаги сиртнинг $F(x,\ y,\ z) = 0$ тенгламаси берилган бўлса, бу чизиқ ёки сиртнинг хоссаларини текшириш ва шу билан чизиқ ёки сирт нимадан иборатлигини аниқлаш мумкин.

Тескари масалани қараймиз: Нуқталарнинг берилган хоссаси бўйича, қаралаётган чизиқ ёки сирт тенгламасини тузишни кўрайлик.

1. Айлана тенгламаси. Oxy тўғри бурчакли координаталар системасида ҳар бири берилган $C(a,\ b)$ нуқтадан R масофада жойлашган барча нуқталар геометрик ўрни тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бошқача айтганда, радиуси R ва маркази $C(a;\ b)$ нуқтада бўлган айлана тенгламасини келтириб чиқарамиз (30- шакл).



30- шакл.

Масалани ечиш учун ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтани оламиз ва ундан берилган $C(a;\ b)$ нуқтагача бўлган масофани ҳисоблаймиз:

$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\,.$$

Агар M нуқта айланада ётса, у ҳолда $|MC| = R$ ёки $|MC|^2 = R^2$, яъни M нуқтанинг координаталари ушбу тенгламани қаноатлантиради:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{13.4}$$

Агарда M нуқта айланада ётмаса, у ҳолда $|MC|^2 \neq R^2$, яъни M нуқтанинг координаталари (13.4) тенгламани қаноатлантирмайди. Шундай қилиб, изланаётган айлана тенгламаси (13.4) кўринишда бўлади.

Агар (13.4) тенгламада $a = 0$, $b = 0$ десак, бу ҳолда радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган айлана тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2. Сфера тенгламаси. Берилган $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасида ҳар бир берилган $C(a;\ b;\ c)$ нуқтадан R масофада жойлашган нуқталар геометрик ўрни тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бошқача айтганда радиуси R ва маркази $C(a;\ b;\ c)$ нуқтада бўлган сфера тенгламасини келтириб чиқарамиз (31- шакл).

Масала юқоридагига ўхшаш ечилади. $M(x;\ y;\ z)$ ихтиёрий нуқта бўлсин, ундан $C(a;\ b;\ c)$ нуқтагача бўлган масофа ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\,.$$

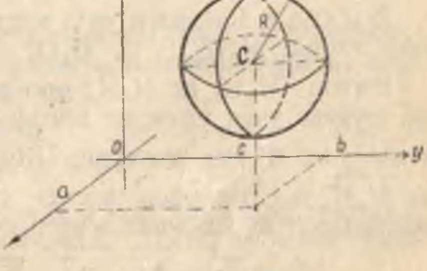
Агар M нуқта сферада ётса, у ҳолда $|MC| = R$ ёки $|MC|^2 = R^2$, яъни M нуқтанинг координаталари ушбу тенгламани қаноатлантиради:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{13.5}$$

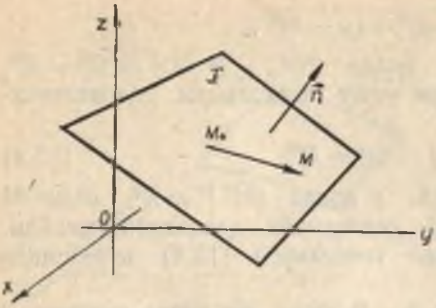
Агарда M нуқта сферада ётмаса, у ҳолда $|MC|^2 \neq R^2$, яъни M нуқтанинг координаталари (13.5) тенгламани қаноатлантирмайди.

Шундай қилиб, сферанинг изланаётган тенгламаси (13.5) кўринишда бўлади. Агар (13.5) тенгламада $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ десак, радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган сфера тенгламасини ҳосил қиламиз: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Сўнгида шуни айтиб ўтамизки, текисликдаги чизиқлар ва фазодаги сиртлар тўғри бурчакли координаталар системасида ўзларининг тенгламаларига кўра алгебраик ва трансцендент чизиқлар ва сиртларга бўлинади.

n- тартибли алгебраик чизиқ (сирт) деб, ўзгарувчиларга нисбатан n- тартибли тенглама билан бериладиган чизиқни (сиртни) айтамиз. Масалан, айлана иккинчи тартибли чизиқ, сфера иккинчи тартибли сиртдир.



31- шакл.



32- шакл.

14- §. Берилган нуқта орқали ўтувчи ва берилган нормал векторга эга текислик тенгламаси

Oxyz тўғри бурчакли координаталар системаси, ихтиёрий π текислик ва унда ётувчи $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта ҳамда бу текисликка перпендикуляр $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ вектор берилган бўлсин. π текислик тенгламасини келтириб чиқарамиз. Масалани ечиш учун ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтани оламиз. $\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{n}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина бу нуқта π текисликда ётади (32- шакл). $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг координаталари $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ бўлганлиги учун икки векторнинг перпендикулярлик шартига асосан ((8.12) формула) M нуқта

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (14.1)$$

бўлганда ва фақат шундагина π текисликда ётади. Бу эса изланаётган π текислик тенгламасидир, чунки уни бу текисликда ётадиган исталган M нуқтанинг координаталари қаноатлантиради ва бу текисликда ётмайдиган ҳеч бир нуқтанинг координаталари қаноатлантирмайди. Бу текисликка перпендикуляр $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ вектор бу текисликнинг *нормал вектори* деб аталади. Шундай қилиб, биз ҳар қандай текисликка x, y, z координаталарга нисбатан биринчи тартибли тенглама мос келишини кўрсатдик.

1- мисол. M_0 (3; —4; 2) нуқтадан ўтувчи ва $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{l} + 3\vec{k}$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бу ерда $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$. (14.1) тенгламага асосан изланаётган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$1 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y + 4) + 3(z - 2) = 0 \text{ ёки } x - 2y + 3z - 17 = 0.$$

2- мисол. Қуйидаги учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг: $M_0(1;\ 1;\ 1)$, $M_1(3;\ -1;\ 0)$, $M_2(2;\ 1;\ 3)$.

Ечиш. $\overrightarrow{M_0M_1}$ ва $\overrightarrow{M_0M_2}$ векторлар изланаётган текисликда ётади, шунинг учун уларнинг вектор кўпайтмаси бу текисликка перпендикуляр бўлган вектордир. Шу сабабли $\vec{n}$ вектор сифатида $\overrightarrow{M_0M_1}$ ва $\overrightarrow{M_0M_2}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини олиш мумкин. Бу векторларни ва уларнинг вектор кўпайтмасини топамиз:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}, \quad \overrightarrow{M_0M_2} = \vec{i} + 2\vec{k},$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Шундай қилиб, $A = -4$, $B = -5$, $C = 2$. (14.1) формулага асосан изланаётган тенгламани оламиз:

$$-4\cdot(x-1) - 5(y-1) + 2(z-1) = 0$$

ёки

$$4x + 5y - 2z - 7 = 0.$$

15- §. Текисликнинг умумий тенгламаси

Биз юқорида ҳар қандай текисликка x, y ва z координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама мос келишини кўрсатдик, яъни текислик биринчи тартибли сиртдир.

Тескари даъво ҳам тўғрилигини, яъни x, y ва z координаталарга нисбатан биринчи тартибли ҳар қандай тенглама берилган координаталар системасида текисликни аниқлашини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системаси ва ихтиёрий A, B, C, D коэффициентли биринчи даражали

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (15.1)$$

тенглама берилган, шу билан бирга, бу коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлсин.

Аниқлик учун $C \neq 0$ деймиз ва (15.1) тенгламани қуйидагича ифодалаймиз:

$$A(x-0) + B(y-0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0. \qquad (15.2)$$

(15.1) ва (15.2) тенгламалар тенг кучли. (15.1) тенгламани (15.2) тенглама билан солиштирадиган бўлсак, у ва демак, унга тенг кучли (15.2) тенглама ҳам $M_0\left(0;\ 0;\ -\frac{D}{C}\right)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ нормал векторга эга бўлган текислик тенгламаси эканлигини кўрамиз. Шундай қилиб, биз x, y, z координаталарга нисбатан биринчи тартибли ҳар қандай тенглама текисликни аниқлашини кўрсатдик.

Текисликнинг (15.1) умумий тенгламасида баъзи коэффициентлар нолга айланганда текислик координата ўқларига нисбатан қандай вазиятни эгаллашини кўрайлик.

1. $D = 0$ бўлса, (15.1) тенглама

$$Ax + By + Cz = 0$$

кўринишни олади ва уни $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, яъни координаталар бошининг координаталари қаноатлантиради. Демак, текислик координаталар бошидан ўтади.

2. $C=0$ бўлса, (15.1) тенглама $Ax+By+D=0$ кўринишни олади ва унинг нормал вектори $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ Oz ўқига перпендикуляр бўлади. Демак, текислик Oz ўқига параллел бўлади.

Агар $B=0$ бўлса, $Ax+Cz+D=0$ текислик Oy ўқига перпендикуляр $\vec{n}=A\vec{i}+C\vec{k}$ нормал векторга эга бўлади. Шунинг учун текислик Oy ўқига параллел.

Ниҳоят, $A=0$ бўлса, текислик $By+Cz+D=0$ тенгламага эга бўлиб, унинг нормал вектори $\vec{n}=B\vec{j}+C\vec{k}$ Ox ўқига перпендикуляр. Шунинг учун текислик Ox ўқига параллел.

Умуман олганда текисликнинг умумий тенгламасида координаталардан бири қатнашмаса текислик ўша координата ўқига параллелдир.

3. Энди иккита коэффициент нолга тенг бўлган ҳолни кўрайлик. Масалан, $D=0$, $C=0$ бўлсин. Бу ҳолда $Ax+By=0$ бўлиб, текислик координаталар бошидан ўтади ($D=0$) ва Oz ўқига параллел ($C=0$), яъни у Oz ўқидан ўтувчи текислик бўлади.

$D=0$, $B=0$ бўлса, $Ax+Cz=0$ тенгламага эгамиз ва у координата бошидан ўтадиган ($D=0$), Oy ўқига параллел ($B=0$) текисликни аниқлайди, яъни Oy ўқидан ўтадиган текислик бўлади.

Ва ниҳоят, $D=0$, $A=0$ бўлса, $By+Cz=0$ бўлади ва бу тенглама координата бошидан ўтадиган ($D=0$), Ox ўқига параллел ($A=0$) текисликни аниқлайди, яъни у Ox ўқидан ўтадиган текислик бўлади.

4. Агар иккита ўзгарувчи олдидаги коэффициент нолга тенг бўлса, масалан, $A=0$, $B=0$ бўлса, нормал вектори $\vec{n}=C\vec{k}$, Oz ўқига параллел ва тенгламаси $Cz+D=0$ бўлган текислик ҳосил бўлади. Демак, текислик Oz ўқига перпендикуляр ва Oxy текислигига параллел бўлади.

Юқоридагидек $By+D=0$ тенглама Oxz текислигига параллел текисликни, $Ax+D=0$ тенглама эса Oyz текислигига параллел текисликни аниқлайди.

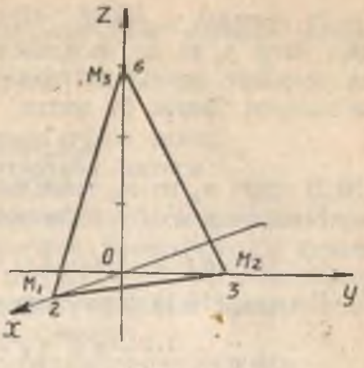
5. Ниҳоят учта коэффициент нолга тенг бўлса, масалан, $B=0$, $C=0$, $D=0$ бўлса, $Ax=0$ ёки $x=0$ тенглама координаталар бошидан ўтадиган ($D=0$) ва Oyz текисликка параллел текисликни аниқлайди, яъни у Oyz координата текислигининг ўзи бўлади. Худди шундай $By=0$ ёки $y=0$ тенглама Oxz координата текислигини, $Cz=0$ ёки $z=0$ тенглама эса Oxy текислигини аниқлайди.

Равшанки, текисликнинг умумий тенгламасида барча коэффициентлар нолга тенг бўлмаганда текислик барча координата ўқларини кесиб ўтади. Текисликни ясаш учун бу нуқталарни топиш лозим. Бунинг учун иккита координатага нолга тенг қийматлар бериш ва текислик тенгламасидан учинчи координатани топиш кифоя.

1-мисол. $3x+2y+z-6=0$ текисликни ясанг.

Ечиш. Текисликнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз. Текисликнинг Ox ўқи билан кесишиш нуқтасини топиш учун текислик тенгламасида $y=0$, $z=0$ дейиш лозим (чунки Ox ўқининг исталган нуқтаси учун $y=z=0$ га эгамиз),

$3x - 6 = 0$ ни оламиз, яъни $x = 2$. Демак, текислик Ox ўқини $M_1(2; 0; 0)$ нуқтада кесиб ўтади. Шунга ўхшаш, текислик тенгламасида $x = 0$ ва $y = 0$ деб $z = 6$ ни ҳосил қиламиз. Демак, текислик Oz ўқини $M_2(0; 0; 6)$ нуқтада кесиб ўтади ва ниҳоят, текислик тенгламасида $x = 0$, $z = 0$ деб $2y - 6 = 0$ ни оламиз ёки $y = 3$. Шундай қилиб, учинчи нуқта $M_3(0; 3; 0)$ ни топдик, у Oy ўқига ва берилган текисликка тегишли. Бу M_1, M_2 ва M_3 нуқталар бўйича текисликни ясаймиз (33-шакл).



33- шакл.

16- §. Икки текислик орасидаги бурчак

Умумий тенгламалари

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

ва

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

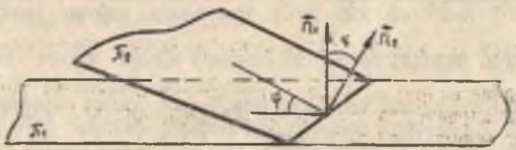
билан берилган π_1 ва π_2 текисликларни қараймиз (34- шакл).

Икки текислик орасидаги φ бурчак дейилганда бу текисликлар билан ҳосил қилинган иккита иккиёқли бурчакдан бири тушунилади. π_1 ва π_2 текисликлар фазода ҳар қандай жойлашганида ҳам улар орасидаги φ бурчаклардан бири $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ нормал векторлар орасидаги бурчакка тенг. Шу сабабли бу бурчак (8.9) ва (8.10) формулага кўра ҳисобланади.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (16.1)$$

Иккинчи бурчак $(180° - \varphi)$ га тенг. Агар π_1 ва π_2 текисликлар параллел бўлса, у ҳолда уларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлари коллинеар ва аксинча. Бироқ бу ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (16.2)$$



34- шакл.

(16.2) шартлар π_1 ва π_2 текисликларнинг параллеллик шартларидир. Агар π_1 ва π_2 текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлса, у ҳолда уларнинг нормал векторлари ҳам бир-бирига перпендикулярдир ва аксинча. Бироқ бу ҳолда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (16.3)$$

(16.3) шарт π_1 ва π_2 текисликларнинг перпендикулярлик шартидир.

1-мисол. Ушбу текисликлар орасидаги бурчакни топинг:

$$x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0 \quad \text{ва} \quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0.$$

Ечиш. (16.1) формулага кўра

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}} = -\frac{2}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

Демак, иккиёқли бурчаклардан бири $\varphi = 120°$, иккинчиси $60°$.

2-мисол. $M_0(2;\ -1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва $3x - y + 4z - 5 = 0$ текисликка параллел текислик тенгламасини топинг.

Ечиш. (14.1) формулага асосан $M_0(2;\ -1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзамиз:

$$A(x-2) + B(y+1) + C(z-3) = 0. \qquad (16.4)$$

Изланаётган ва берилган текисликлар параллел бўлгани учун изланаётган текисликнинг $\vec{n}_1 = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ нормал вектори сифатида берилган текисликнинг $\vec{n} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ нормал векторини олиш мумкин. Демак, $A = 3$, $B = -1$, $C = 4$. Коэффициентларнинг бу қийматларини (16.4) тенгламага қўйиб, изланаётган текислик тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$3(x-2) - (y+1) + 4(z-3) = 0$$

ёки

$$3x - y + 4z - 19 = 0.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Аналитик геометрияда чизиқ деб нимани тушунилади? Чизиқнинг тенгламаси деб нимага айтилади?
2. Тенгламалари берилган икки чизиқнинг кесишиш нуқтасини қандай топиш мумкин?
3. $F(x,\ y) = 0$ тенглама ҳар доим ҳам текисликда бирор чизиқни аниқлайдими? Мисол келтиринг.
4. Аналитик геометрияда сирт тенгламаси нима?
5. Фазода чизиқ тенгламаси қандай аниқланади?
6. $F(x,\ y,\ z) = 0$ тенглама ҳар доим ҳам бирор сиртни аниқлайдими? Мисол келтиринг.
7. Нуқта берилган чизиқда ва сиртда ётишига қандай ишонч ҳосил қилиш мумкин?
8. Декарт координаталарида текислик тенгламаси бошқа сиртларнинг тенгламаларидан қандай характерли белгиси билан фарқ қилади?
9. Текисликнинг нормал вектори нима?
10. Агар текисликнинг тенгламасида у ёки бу ҳад бўлмаса, у координата ўқларига нисбатан қандай жойлашади?

11. Икки текислик орасидаги бурчак қандай аниқланади?
12. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари нимадан иборат?
14. 452 — 487- мисолларни ечинг.

17- §. Фазода ва текисликда тўғри чизиқ. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори

Маълумки, фазода чизиқ тенгламаси иккита кесишувчи сиртнинг ҳар бирига тегишли нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида қаралади. Агар бу сиртлар $F_1(x, y, z) = 0$ ва $F_2(x, y, z) = 0$ тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда уларнинг кесишиш чизиғи ушбу (13.3) тенгламалар системаси билан аниқланади:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

1. Фазода тўғри чизиқ. Қуйидаги биринчи даражали тенгламалар системасини қарайлик:

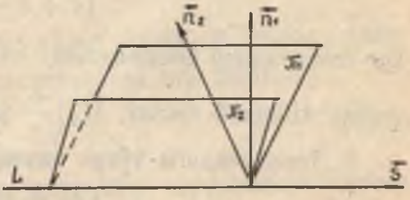
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. & (\pi_2) \end{cases} \tag{17.1}$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бири текисликни беради. Агар бу π_1 ва π_2 текисликлар параллел бўлмаса (яъни уларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлари коллинеар бўлмаса), у ҳолда (17.1) система икки текисликнинг кесишиш чизиғи сифатида, яъни фазонинг координаталари (17.1) системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантирадиган нуқталари геометрик ўрни сифатида бирор L тўғри чизиқни аниқлайди (35- шакл). (17.1) тенгламалар фазода тўғри чизиқнинг *умумий тенгламалари* деб аталади.

Тўғри чизиқни ясаш учун унинг иккита нуқтасини билиш етарли. Энг осони тўғри чизиқнинг координата текисликлари билан кесишиш нуқталарини топишдан иборат. Бундай нуқталар тўғри чизиқнинг *излари* деб аталади. Тўғри чизиқнинг, масалан, Oxy текисликдаги изини топиш учун (17.1) тенгламаларда $z = 0$ деб олиш ҳамда x ва y ни

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}$$

системадан топиш лозим. Тўғри чизиқнинг бошқа координата текисликларидаги изини ҳам шунга ўхшаш топиш мумкин.



35- шакл.

(17.1) тўғри чизиққа параллел ёки унда ётадиган исталган вектор бу тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи вектори* деб аталади.

Тўғри чизиқ текисликларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторларига перпендикуляр бўлгани учун (бу ерда $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2$

B_2, C_2]) L тўғри чизиқнинг $\vec{s}$ йўналтирувчи вектори (у ҳам $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторларга перпендикуляр) сифатида $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ [вектор кўпайтмани олиш мумкин:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad [(17.2)$$

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини ва унинг координата текисликлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

Ечиш. $\vec{n}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{n}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ бўлганлиги учун йўналтирувчи вектор (17.2) формулага кўра бундай бўлади:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Тўғри чизиқнинг Oxy текислик билан кесишиш нуқтасини тўғри чизиқнинг умумий тенгламаларида $z = 0$ деб топамиз:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Тенгламалар системасини ечиб $x = 2$, $y = -1$ ни топамиз. Шундай қилиб, $M_1(2;\ -1;\ 0)$.

Шунга ўхшаш, тўғри чизиқнинг Oyz текислик билан кесишиш нуқтаси M_2 ни тўғри чизиқнинг умумий тенгламаларида $x = 0$ деб топамиз:

$$\begin{cases} y - z - 3 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, $y = 2$, $z = -1$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $M_2(0, 2 - 1)$. Ва, ниҳоят, тўғри чизиқнинг текислик билан кесишиш нуқтаси M_3 ни тўғри чизиқнинг умумий тенгламаларида $y = 0$ деб топамиз:

$$\begin{cases} 2x - z - 3 = 0, \\ x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, $x = \frac{4}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $M_3\left(\frac{4}{3};\ 0;\ -\frac{1}{3}\right)$.

2. Текисликдаги тўғри чизиқ. Қуйидаги биринчи даражали

$$(L)\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ z = 0 \end{cases} \qquad (17.3)$$

тенгламалар системасини қараймиз. Бу тенгламаларнинг ҳар бири текисликни беради, лекин $z=0$ тенглама Oxy координата текислигини беради, шунинг учун (17.3) система ёки

$$Ax+By+D=0 \qquad (17.4)$$

тенглама Oxy текисликда L тўғри чизиқни аниқлайди. (17.4) тенглама Oxy текисликдаги тўғри чизиқнинг *умумий тенгламаси* деб аталади. Бу (17.4) ёки (17.3) тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини топамиз. Тўғри чизиқни берадиган (17.3) текисликларнинг нормал векторлари $\vec{n_1}=A\vec{i}+B\vec{i}+C\vec{k}$, $\vec{n_2}=\vec{k}$ кўринишда бўлганлиги учун (17.4) тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини (17.2) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A & B & C\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=B\vec{i}-A\vec{j}.$$

(17.4) тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган $\vec{n}$ вектор бу тўғри чизиқнинг *нормал вектори* деб аталади. У $\vec{s}$ йўналтирувчи векторга ҳам перпендикуляр бўлганлиги учун $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$ кўринишга эга бўлади. Шундай қилиб, текисликдаги умумий тенгламаси $Ax+By+D=0$ бўлган тўғри чизиқ $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{i}$ нормал векторга (у тўғри чизиққа перпендикуляр), текисликнинг умумий тенгламаси эса $Ax+By+Cz+D=0$ нормал вектор $\vec{n}=\{A, B, C\}$ га эга. Шу сабабли текисликнинг умумий тенгламаси учун айтилган барча фикрлар текисликдаги тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси учун ҳам тўғри бўлади. Масалан, текисликдаги икки

$$(L_1)\ A_1x+B_1y+D_1=0,$$
$$(L_2)\ A_2x+B_2y+D_2=0$$

тўғри чизиқ орасидаги φ бурчак сифатида $\vec{n_1}=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}$, $\vec{n_2}=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}$ нормал векторлари орасидаги бурчак қабул қилинади ва шу сабабли ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Агар L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар параллел бўлса, у ҳолда уларнинг $\vec{n_1}$ ва $\vec{n_2}$ нормал векторлари коллинеар ва шу сабабли

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \qquad (17.5)$$

(17.5) шарт текисликдаги икки тўғри чизиқнинг параллеллик шартидир.

Агар L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда уларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлари ҳам перпендикуляр, шунинг учун қуйидагига эгамиз:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (17.6)$$

(17.6) шарт текисликдаги икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартидир. Агар (14.1) тенгламада $z = z_0 = 0$ десак, у ҳолда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (17.7)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, у Oxy текисликнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасидан ўтадиган шу текисликдаги тўғри чизиқ тенгламасидир. A ва B координаталар текисликдаги тўғри чизиқ нормал векторининг координаталари бўлади, яъни

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}.$$

2-мисол. Учбурчакнинг учлари берилган:

$$M_1(2;\ 1),\ M_2(-1;\ -1),\ M_3(3;\ 2).$$

M_1 учдан ўтказилган баландлик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Баландлик тенгламасини (17.7) кўринишда излаймиз:

$$A(x - 2) + B(y - 1) = 0. \qquad (17.8)$$

Баландлик M_2M_3 томонга перпендикуляр бўлгани учун нормал вектор сифатида $\overrightarrow{M_2M_3}$ векторни олиш мумкин, яъни

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_2M_3} = 4\vec{i} + 3\vec{j}.$$

Бундан $A = 4$, $B = 3$. Бу қийматларни (17.8) тенгламага қўямиз:

$$4(x - 2) + 3(y - 1) = 0 \text{ ёки } 4x + 3y - 11 = 0.$$

Изланаётган баландлик тенгламаси топилди.

18-§. Тўғри чизиқнинг вектор ва каноник тенгламаси

Текислик ва фазодаги тўғри чизиқнинг умумий тенгламалари масалалар ечиш учун ҳар доим ҳам қулай бўлавермайди, шу сабабли кўпинча тўғри чизиқ тенгламаларининг махсус кўринишларидан фойдаланилади.

Гап шундаки, тўғри чизиқнинг вазияти бирор тайинланган M_0 нуқтасининг ва бу тўғри чизиққа параллел ёки унда ётадиган $\vec{s}$ йўналтирувчи векторнинг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

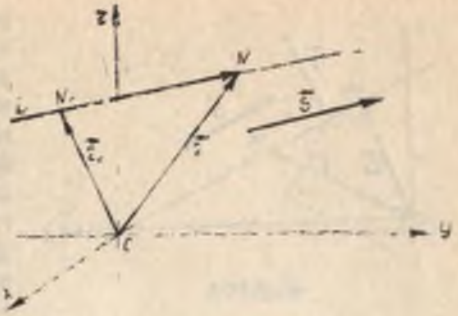
L тўғри чизиқ $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта ва $\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + p\vec{k}$ йўналтирувчи вектор билан берилган бўлсин. L тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқта оламиз (36-шакл).

Шаклдан бевосита

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} \qquad (18.1)$$

ни ҳосил қиламиз. M_0 ва M нуқталарнинг радиус-векторларини мос равишда $\vec{r}_0=\vec{OM}_0$, $\vec{r}=\vec{OM}$ билан белгилаймиз. $\vec{M_0M}$ вектор тўғри чизиқда ётади, шу сабабли у $\vec{s}$ йўналтирувчи векторга коллинеар, ва демак,

$$\vec{M_0M} = t\,\vec{s} \qquad (18.2)$$



36- шакл.

тенглик тўғри, бу ерда t — параметр деб аталадиган скаляр кўпайтувчи, у M нуқтанинг тўғри чизиқдаги вазиятига қараб, исталган қиймат қабул қилиши мумкин.

(18.2) формулани ва киритилган белгилашларни ҳисобга олиб, (18.1) тенгламани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}. \qquad (18.3)$$

(18.3) тенглама тўғри чизиқнинг *вектор тенгламаси* деб аталади. У t параметрнинг ҳар бир қийматига тўғри чизиқда ётадиган ихтиёрий M нуқтанинг радиус-векторини мос қўяди. (18.3) тенгламани координата шаклида ёзамиз. Қуйидаги

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ \vec{r}_0 &= \vec{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}, \qquad (18.4) \\ t\vec{s} &= lt\vec{i} + mt\vec{j} + pt\vec{k}. \end{aligned}$$

ларни эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}$$

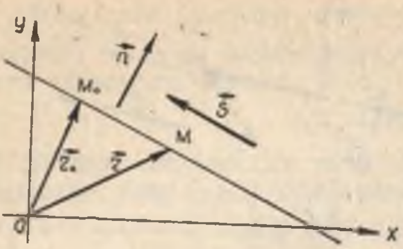
ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар тўғри чизиқнинг *параметрик тенгламалари* деб аталади. t параметр ўзгарганда x, y, z координаталар ўзгаради ва M нуқта тўғри чизиқ бўйлаб кўчади. $\vec{M_0M}$ вектор $\vec{s}$ векторга коллинеар бўлганлиги учун бу векторларнинг проекциялари пропорционал. Сўнгра

$$\vec{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k},$$

$$\vec{s} = l\,\vec{i} + m\vec{j} + p\vec{k}$$

бўлганлиги учун

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (18.5)$$



37-шакл.

ни ҳосил қиламиз. Бу тенглама тўғри чизиқнинг *каноник тенгламаси* деб аталади. Тўғри чизиқнинг текисликдаги вектор тенгламаси (18.3) фазодаги каби бўлади, лекин вектор тенгламалардан параметрик тенгламаларга ўтишда у учта эмас, балки ушбу иккита скаляр тенгламага келтирилади (37-шакл):

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \tag{18.6}$$

Чунки бу ҳолда M_0 ва M нуқталар фақат иккитадан (x_0; y_0) ва (x; y) координатага эга, $\vec{s}$ йўналтирувчи вектор ҳам иккита координатага эга. (18.6) тенгламалардан t параметр чиқарилса, текисликдаги тўғри чизиқнинг каноник тенгламасига ўтиш осон бўлади:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{18.7}$$

1-мисол. $M_0(1; 2; -3)$ ва $M_1(-2; 1; 3)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларини тузинг.

Ечиш. $\vec{s}$ йўналтирувчи вектор сифатида $\overrightarrow{M_0M_1} = -3\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$ векторни оламиз. (18.5) формуладаги берилган нуқта сифатида M_0 ёки M_1 нуқталардан исталганини олиш мумкин. Натижада тўғри чизиқнинг ушбу каноник тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{6}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \tag{18.8}$$

тўғри чизиқнинг

$$2x + 3y + z - 1 = 0 \tag{18.9}$$

текислик билан кесишиш нуқтасини топинг.

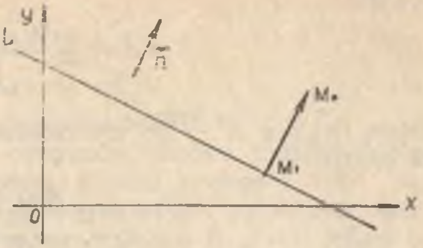
Ечиш. Бу нуқталарни топиш учун (18.8) ва (18.9) тенгламаларни биргаликда ечиш керак. Энг осони берилган (18.8) тўғри чизиқ тенгламасини қуйидагича параметрик шаклда ёзиб олишдир:

$$\begin{aligned} x &= t + 1, \\ y &= -2t - 1, \\ z &= 6t. \end{aligned} \tag{18.10}$$

Бу ифодани текисликнинг (18.9) тенгламасига қўямиз:

$$2(t + 1) + 3(-2t - 1) + 6t - 1 = 0.$$

Бундан $t = 1$. Тўғри чизиқнинг (18.10) параметрик тенгламаларига параметр $t = 1$ қийматини қўйиб, $x = 2$, $y = -3$, $z = 6$ ни оламиз. Демак, тўғри чизиқ ва текислик $M(2; -3; 6)$ нуқтада кесишади.



38- шакл.

19- §. Нуқтадан тўғри чизиққача ва текисликкача бўлган масофа

1. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. Oxy текисликда $M_0(x_0; y_0)$ нуқтани ва

$$Ax + By + D = 0 \qquad (L)$$

умумий тенгламаси билан берилган тўғри чизиқни қараймиз. M_0 нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа $d = |M_0M_1|$ ни аниқлаймиз (38- шакл)· M_0 нуқтадан L тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асосини $M_1(x_1; y_1)$ билан белгилаймиз. Изланаётган d масофа бу перпендикулярнинг узунлигига, яъни

$$\vec{d} = \overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\vec{i} + (y_0 - y_1)\vec{j}$$

векторнинг узунлигига тенг. $\vec{d}$ вектор билан L тўғри чизиқнинг нормал вектори $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ нинг скаляр кўпайтмасини тузамиз. Бу векторлар коллинеар бўлганлиги учун улар орасидаги бурчак ё нолга, ёки 180° га тенг. Шу сабабли $\cos\varphi = \pm 1$ ва скаляр кўпайтманинг таърифига кўра:

$$\vec{n}\cdot\vec{d} = \pm|\vec{n}|\cdot|\vec{d}| = \pm|\vec{n}|\,d. \qquad (19.1)$$

Иккинчи томондан, координаталари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмалари ушбу формула билан ҳисобланиши мумкин:

$$\vec{n}\cdot\vec{d} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1). \qquad (19.2)$$

Бироқ $M_1(x_1; y_1)$ нуқта берилган L тўғри чизиқда ётади, шунинг учун унинг координаталари бу тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради:

$$Ax_1 + By_1 + D = 0.$$

Бундан $Ax_1 + By_1 = -D$. Буни ҳисобга олсак, (19.2) ифода ушбу кўринишни олади:

$$\vec{n}\cdot\vec{d} = Ax_0 + By_0 + D. \qquad (19.3)$$

(19.1) ва (19.3) формулаларни ҳисобга олсак, қуйидагини оламиз:

$$\pm|\vec{n}|\,d = Ax_0 + By_0 + D,$$

бундан

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + D}{|\vec{n}|}. \qquad (19.4)$$

Бироқ $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, шу сабабли (19.4) формула ушбу кўринишни олади:

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ёки

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (19.5)$$

Сўнгги формула $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтадан $Ax + By + D = 0$ тўғри чизиққача бўлган массфани топиш учун хизмат қилади.

1-мисол. Учбурчакнинг учлари берилган:

$$M_1(4;\ 1),\ M_2(0; -2),\ M_3(-5;\ 10).$$

M_1 учдан ўтказилган баландликнинг узунлигини топинг.

Ечиш. Дастлаб M_2 ва M_3 нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини (18.7) формула бўйича тузамиз. Йўналтирувчи вектор сифатида $\vec{s} = \overrightarrow{M_2M_3} = -5\vec{i} + 12\vec{j}$ векторни оламиз, бундан $l = -5$, $m = 12$. Шунинг учун тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\frac{x - 0}{-5} = \frac{y + 2}{12}. \qquad (19.6)$$

Бу тенгламани умумий кўринишга келтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$12x + 5y + 10 = 0.$$

Баландликнинг узунлигини M_1 нуқтадан (19.6) тўғри чизиққача бўлган массфа сифатида (19.5) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$d = \frac{|12\cdot 4 + 5\cdot 1 + 10|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{63}{13} \approx 5.$$

2. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа. Энди $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта ва

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

умумий тенгламаси орқали текислик берилган бўлсин. Улар орасидаги d масофа, яъни M_0 нуқтадан π текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлиги ушбу формуладан аниқланади:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (19.6)$$

Бу формулаларнинг келтириб чиқарилиши нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа формуласи (19.5) га ўхшаш.

2-**мисол.** Ушбу

$$x - 2y - 2z - 12 = 0, \qquad (\pi_1)$$

$$x - 2y - 2z - 6 = 0 \qquad (\pi_2)$$

параллел текисликлар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. π_1 ва π_2 текисликлар орасидаги масофа улардан бирортасида ётувчи нуқтадан иккинчисигача бўлган масофага тенг. Бир текисликнинг, масалан, π_1 текисликнинг ихтиёрий нуқтасини топамиз. Бунинг учун бу текислик тенгламасида $y = 0$, $z = 0$ деймиз ва $x - 12 = 0$ ни ҳосил қиламиз, бундан $x = 12$, $M_0(12; 0; 0)$ нуқта π_1 текисликка тегишли. M_0 нуқтадан π_2 текисликкача бўлган масофани (19.6) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$d = \frac{|1\cdot 12 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Фазодаги тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори нима?
2. Агар фазодаги тўғри чизиқ умумий тенгламалари билан берилган бўлса, унинг йўналтирувчи векторини қандай аниқлаш мумкин?
3. Текисликдаги тўғри чизиқнинг нормал вектори нима?
4. Координата ўқларини координата текисликларининг кесишмаси сифатида қараб, уларнинг тенгламаларини ёзинг.
5. Тўғри чизиқнинг вектор тенгламасини келтириб чиқаринг.
6. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини келтириб чиқаринг.
7. Текисликда нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа формуласини келтириб чиқаринг.
8. 488—513- масалаларни ечинг.

20-§. Икки ва уч номаълумли иккита ва учта чизиқли тенгламалар системаси. Крамер қоидаси

1. Икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси. Икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасининг

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (20.1)$$

ечимини топиш учун детерминантлар назариясидан фойдаланамиз. Бу ерда x ва y номаълум сонлар, қолган барча сонлар эса маълум. Номаълумлар олдидаги кўпайтувчилар система коэффициентлари, b_1 ва b_2 сонлар эса озод ҳадлар деб аталади.

Мактаб математика курсидан баъзи маълумотларни эслатиб ўтайлик. Чизиқли тенгламалар системасини ечиш деган сўз, x ва y сонларнинг шундай тўпламини топиш демакки, уларни система тенгламаларининг ҳар бирига мос номаълумларнинг ўрнига қўйилганда улар айниятларга айланади. Бундай сонлар тўпламини системанинг ечими деб атаймиз. Камида битта ечимга эга бўлган система биргаликдаги система деб аталади. Биргина ечимга эга бўлган биргаликдаги система *аниқ система* деб аталади. Чексиз кўп ечимларга эга бўлган биргаликдаги система *аниқмас система* деб аталади. Битта ҳам ечимга эга бўлмаган система *биргаликда бўлмаган система* деб аталади.

Энди баъзи белгилашлар киритамиз. Система коэффициентларидан қуйидаги иккинчи тартибли детерминантни тузиб, уни Δ билан белгилаймиз ва система детерминанти деб атаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Сўнгра бу детерминантда мос равишда биринчи ва иккинчи устунларни озод ҳадлар билан алмаштириб, Δ_x, Δ_y билан белгиланадиган ушбу детерминантларни тузамиз:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (20.1) системанинг ечимини аниқлайдиган

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{20.2}$$

формуланинг тўғрилигини исботлаймиз. Исботлашда алгебраик қўшиш қоидасидан фойдаланамиз. (20.1) система биринчи тенгламасининг иккала қисмини (a_{22}) га, иккинчисини эса $(-a_{12})$ га кўпайтириб ва сўнгра олинган тенгламаларни қўшиб, қуйидагини оламиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}. \tag{20.3}$$

Шунга ўхшаш, (20.1) система биринчи тенгламасининг иккала қисмини $(-a_{21})$ га, иккинчисини эса (a_{11}) га кўпайтириб, сўнгра олинган тенгламаларни қўшиб, қуйидагини оламиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \tag{20.4}$$

(20.3) ва (20.4) формулаларда турган айирмалар биз юқорида киритган иккинчи тартибли детерминантлардир:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_x, \; a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_y. \tag{20.5}$$

Бу белгилашларда (20.3) ва (20.4) тенгламалар бундай ёзилади:

$$\begin{cases} x\cdot\Delta = \Delta_x, \\ y\cdot\Delta = \Delta_y. \end{cases} \tag{20.6}$$

Уч ҳол бўлиши мумкин. а) Агар система детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда (20.6) формулалардан (20.1) система биргаликда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{20.7}$$

формулалар билан аниқланадиган биргина ечимга эга эканлиги келиб чиқади. (20.2) формуланинг тўғрилиги исбот қилинди. Олинган (20.7) қоида *Крамер қоидаси* деб аталади.

б) Агар система детерминанти $\Delta = 0$, лекин Δ_x ва Δ_y детерминантлардан камида биттаси нолга тенг бўлмаса, у ҳолда (20.6) формулалардан (20.1) система биргаликда эмас, яъни битта ҳам ечимга эга эмаслиги келиб чиқади.

в) Агар система детерминанти $\Delta = 0$ ва $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ бўлса, у ҳолда (20.6) формуладан (20.1) система аниқмас, яъни чексиз кўп ечимларга эга экани келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Ечиш. Детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Крамер қоидасидан фойдаланиб x ва y ни топамиз:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1.$$

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3x + y = 2, \\ 6x + 2y = 3. \end{cases}$$

Ечиш. Детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Система биргаликда эмас, ечимлари йўқ.

3-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 6x - 2y = 4. \end{cases}$$

Ечиш. Детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Система аниқмас, чексиз кўп ечимларга эга. Агар иккинчи тенгламани 2 га қисқартирсак, система ушбу битта тенгламага келади:

$$3x - y = 2.$$

Номаълум x га ихтиёрий қийматлар бериб, y нинг мос қийматларини ҳосил қилиш мумкин. $x = 0$ бўлсин, у ҳолда $y = -2$. $x = 1$ бўлсин, у ҳолда $y = 1$ ва ҳ. к.

Яна (20.1) системага қайтиб, унда озод ҳадлар нолга тенг деймиз. Бундай чизиқли тенгламалар системаси бир жинсли система деб аталади:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y = 0. \end{cases}$$

Бунда

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

бўлганлиги учун бундай система $\Delta \neq 0$ бўлганда аниқ ечимга эга ёки $\Delta = 0$ бўлганда чексиз кўп ечимга эга. Биргаликда бўлмаслик ҳам истисно қилинади.

2. Уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси. Энди ушбу уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасини қараймиз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \tag{20.8}$$

Ушбу белгиларни киритамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(20.8) система коэффициентларидан тузилган Δ детерминантни система детерминанти деб атаймиз. Δ_x, Δ_y, Δ_z детерминантлар Δ детерминантдан унда мос равишда биринчи, иккинчи ёки учинчи устунни b_1, b_2, b_3 озод ҳадлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади. Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (20.8) система ечимини аниқлайдиган ушбу формулаларнинг тўғрилигини исботлаймиз:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{20.9}$$

Исботлаш учун (20.8) система тенгламаларидан y ва z номаълумларни йўқотамиз. Системанинг биринчи тенгламасини Δ детерминант a_{11} элементининг A_{11} алгебраик тўлдирувчисига кўпайтирамиз, иккинчи тенгламасини a_{21} элементининг A_{21} алгебраик тўлдирувчисига кўпайтирамиз, учинчи тенгламасини a_{31} элементининг A_{31} алгебраик тўлдирувчисига кўпайтирамиз, кейин эса бу тенгламаларни қўшамиз. Натижада қуйидагини оламиз:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y +$$
$$+ (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Детерминантларнинг и) ва к) хоссаларини (9-§) бу тенгламанинг чап томонига татбиқ қилиб,

$$x \cdot \Delta = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \tag{20.10}$$

га эга бўламиз.

Шунга ўхшаш қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} y \cdot \Delta &= b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}, \\ z \cdot \Delta &= b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}. \end{aligned} \tag{20.11}$$

Бу тенгликларнинг чап томонларини юқорида киритилган белгилар билан алмаштириб, (20.10) ва (20.11) тенгликларни қайта бундай ёзамиз:

$$\begin{aligned} x \cdot \Delta &= \Delta_x, \\ y \cdot \Delta &= \Delta_y, \\ z \cdot \Delta &= \Delta_z. \end{aligned} \tag{20.12}$$

Агар система детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда (20.8) система биргаликда ва

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{20.13}$$

формулалар билан аниқланадиган биргина ечимга эгалиги келиб чиқади.

(20.9) формуланинг тўғрилиги исботланди.

Олинган (20.13) қоида уч номаълумли учта чизиқли тенгламаларни ечишнинг *Крамер қоидаси* деб аталади.

4-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Ечиш. Δ, Δ_x, Δ_y, Δ_z детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42.$$

Крамер қоидасидан фойдаланиб, x, y, z ни топамиз:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

(20.8) тенгламалар системасига қайтиб, озод ҳадлар нолга тенг деб ҳисоблаймиз. Ушбу бир жинсли системани қараймиз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \tag{20.14}$$

Детерминантлар $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, чунки улар ноллардан иборат устунга эга. Шу сабабли бир жинсли система $\Delta \neq 0$ бўлганда биргина ноль ечим $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ га эга ёки $\Delta = 0$ бўлганда чексиз кўп ечимларга эга.

3. ***n*** **номаълумли** ***n*** **та тенгламалар системаси.** Умумий ҳолда n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси бундай ёзилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (20.15)$$

Бу ерда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълум сонлар, қолган сонлар эса маълум, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ озод ҳадлар, $a_{11}, a_{12}. \ldots, a_{nn}$ система коэффициентлари. 1-бандда икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси учун ва 2-бандда уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси учун олинган Крамер қоидаси номаълумлар сони чизиқли тенгламалар сони билан бир хил бўладиган исталган (20.15) система учун ўринли. Бу қоидани келтириб чиқармасдан қабул қиламиз.

Агар n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси (20.15) нинг детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда система биргаликда ва ушбу формулалар билан ифодаланадиган биргина ечимга эга:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Бу ерда Δ детерминант (20.15) система номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилади. $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ эса Δ дан ундаги ҳар бир номаълум олдидаги мос коэффициентларни озод ҳадлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

21-§. Гаусс усули

n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системасини Крамер қоидаси бўйича ечиш $n = 4$ дан бошлабоқ катта ва машаққатли ишга айланади, чунки бу иш тўртинчи тартибли бешта детерминантни ҳисоблаш билан боғлиқ. Шу сабабли амалда Гаусс усули муваффақият билан қўлланилади ва у система биргаликда ҳамда аниқ бўлса, уни соддароқ кўринишга келтириш ва барча номаълумларнинг қийматларини кетма-кет топиш имконини беради. Гаусс усули шундан иборатки, у алмаштиришлар ёрдамида номаълумларни кетма-кет чиқариб, сўнгги тенгламада фақат битта номаълумни қолдиради.

Қуйидаги n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасини қарайлик:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n. \end{array}\right. \qquad (21.1)$$

Бу системани Гаусс усули билан ечиш жараёни икки босқичдан иборат.

1-босқич. (21.1) система учбурчак кўринишга келтирилади. Бу қуйидагича амалга оширилади: $a_{11}\neq 0$ деб (агар $a_{11}=0$ бўлса, 1-тартибли тенглама билан $a_{li}\neq 0$ бўлган i-тенгламанинг ($i = 2, \ldots, n$) ўринларини алмаштирамиз) қуйидаги нисбатларни тузамиз.

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, m_{n1} = -\frac{a_{n1}}{a_{12}}.$$

Системанинг i-тенгламасига 1-тенгламани m_{i1} га кўпайтирилганини қўшамиз. Бунда биз системанинг 2-тенгламасидан бошлаб ҳаммасида x_1 номаълумни йўқотамиз. Ўзгартирилган система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)}. \end{array}\right. \qquad (21.2)$$

$a_{22}^{(1)}\neq 0$ деб фараз қилиб қуйидаги нисбатларни тузамиз:

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad m_{42} = -\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}}, \ldots m_{n2} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

(21.2) системанинг i-тенгламасига ($i = 3, 4, \ldots, n$) унинг 2-тенгламасини m_{i2} га кўпайтириб қўшамиз ва натижада қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = f_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = f_n^{(2)}. \end{array}\right.$$

Бундан

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}\,a_{i1}; \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\,a_{i2}^{(1)}.$$

Юқоридагидек жараённи $n-1$ маротаба бажариб қуйидаги учбурчак кўринишидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = f_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = f_n^{(n-1)}. \end{cases} \tag{21.3}$$

Шу билан ечимни топишнинг 1-босқичи якунланади.

2-босқич учбурчак кўринишидаги (21.3) системани ечишдан иборат. Охирги тенгламадан x_n топилади. Ундан олдинги тенгламага x_n нинг топилган қиймати қўйилиб, x_{n-1} топилади. Шундай мулоҳазаларни давом эттириб ниҳоят 1-тенгламадан x_1 топилади. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларни топиш учун қуйидаги формулалардан фойдаланиш мумкин:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot \left[f_k^{(k-1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(k-1)}\ x_i \right],$$

$$k = n,\ n-1,\ \ldots,\ 1,\ f_k^{(0)} = f_k,\ a_{ki}^{(0)} = a_{ki}.$$

Гаусс усулининг 1-босқичида $\frac{n^3}{3}$ та қўшиш, шунча кўпайтириш ва $\frac{n^2}{2}$ та бўлиш амаллари бажарилади, 2-босқичда $\frac{n^2}{2}$ та қўшиш, шунча кўпайтириш ва n та бўлиш амали бажарилади.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases} \tag{21.4}$$

тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. Усулнинг биринчи қадами (21.4) системанинг иккинчи ва учинчи тенгламаларидан x номаълумни чиқаришдан иборат. Бунинг учун бу системанинг биринчи тенгламасини (— 2) га кўпайтирамиз ва олинган тенгламани иккинчи тенгламага қўшамиз, кейин эса биринчи тенгламани (— 3) га кўпайтирамиз ва олинган тенгламани учинчи тенгламага қўшамиз. Бу ишлар натижасида берилган (21.4) системага тенг кучли ушбу системани оламиз:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ \quad 7y - 10z = 8, \\ \quad 4y - 14z = -12- \end{cases} \tag{21.5}$$

Бу системанинг учинчи тенгламасини 2 га қисқартириб,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ \quad 7y - 10z = 8, \\ \quad 2y - 7z = -6 \end{cases} \tag{21.6}$$

ни ҳосил қиламиз. Иккинчи қадам y номаълумни (21.3) системанинг учинчи тенгламасидан чиқаришдан иборат. Бунинг учун шу системанинг иккинчи тенгламасини $\left(-\frac{2}{7}\right)$ га кўпайтирамиз ва учинчи тенгламага қўшамиз. Бунинг натижасида ушбу тенг кучли системани оламиз:

$$\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ \quad 7y-10z=8. \\ \qquad -\frac{29}{7}z=-\frac{58}{2}. \end{cases} \tag{21.7}$$

Бу системанинг учинчи тенгламасини $-\frac{29}{7}$ га бўлиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ \quad 7y-10z=8, \\ \qquad z=2. \end{cases} \tag{21.8}$$

(21.4) тенгламалар системаси учбурчакли деб аталадиган (21.8) шаклни олди. Сўнгги тенглама битта z номаълумни, пастдан иккинчи тенглама y ва z номаълумларни, биринчи тенглама эса учала x, y, z номаълумни ўз ичига олади. Ҳар бир олдинги тенглама кейинги тенгламадан битта кўп номаълумни ўз ичига олади. Энди барча номаълумларнинг қийматларини топиш осон. Учинчи тенгламадан $z=2$ ни оламиз, бу қийматни (21.8) системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, $y=4$ ни оламиз. $z=2$ ва $y=4$ қийматларни (21.8) системанинг биринчи тенгламасига қўйиб, $x=8$ ни оламиз: $x=8$, $y=4$, $z=2$ ечим олинди.

Гаусс усулининг хусусияти шундаки, унда системанинг биргаликдалик масаласини олдиндан аниқлаб олиш талаб қилинмайди.

1. Агар система биргаликда ва аниқ бўлса, у ҳолда усул биргина ечимга олиб келади.

2. Агар система биргаликда ва аниқмас бўлса, у ҳолда бирор қадамда иккита айнан тенг тенглама ҳосил бўлади ва шундай қилиб, тенгламалар сони номаълумлар сонидан битта кам бўлиб қолади.

3. Агар система биргаликда бўлмаса, у ҳолда бирор қадамда чиқарилаётган номаълум билан биргаликда қолган барча номаълумлар ҳам чиқарилади, ўнг томондан эса нолдан фарқли озод ҳад қолади.

2-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 3x-y+4z=6, \\ 5x+5y+2z=8. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламани (-3) га кўпайтирамиз ва иккинчи тенгламани қўшамиз, кейин эса биринчи тенгламани (-5) га кўпайтирамиз ва учинчи тенгламани қўшамиз. Шу билан иккинчи ва учинчи тенгламалардан x номаълумни чиқарамиз:

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ \quad -7y+7z=-3, \\ \quad -7y+7z=\ \ 7. \end{cases}$$

Энди учинчи тенгламадан z номаълумни чиқараётганимизда биз y номаълумни ҳам чиқарамиз, бу эса зиддиятликка олиб келади. Чунки $0 \neq 10$. Шундай қилиб, Гаусс усулини қўлланиш берилган системанинг биргаликда эмаслигини кўрсатди.

3-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 3x-y+4z=6, \\ 5x+3y+2z=12. \end{cases}$$

Ечиш. 2-мисолдаги ишларни такрорлаб, системани

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ \quad -7y+7z=-3, \\ \quad -7y+7z=-3 \end{cases} \tag{21.9}$$

кўринишга келтирамиз, бу эса берилган система

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \\ \quad -7y+7z=-3 \end{cases}$$

системага тенг кучли эканлигини билдиради. ((21.9)) системанинг сўнгги икки тенгламаси бир хил). Бу система биргаликда бўлса-да, лекин аниқмас, яъни чексиз кўп ечимга эга.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Крамер қоидасини айтиб беринг.
2. Чизиқли тенгламалар системаси қайси холда биргина ечимга эга? Иккита ва учта тенглама системалари учун буни геометрик нуқтаи назардан қандай талқин этиш мумкин?
3. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Гаусс усули нимадан иборат?
4. 611—692-масалаларни ечинг.

22-§. Матрицалар

m та сатрли ва n та устунли ушбу тўғри бурчакли жадвал шаклида ёзилган $m \cdot n$ та сон берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{22.1}$$

Бундай жадвал $m \times n$ ўлчамли *тўғри бурчакли матрица* деб аталади. Бу жадвалдаги a_{ij} сонлар унинг *элементлари* деб аталади. Элементлар сатрлар ва устунлар ҳосил қилади. i ва j индекслар a_{ij} элемент турадиган сатр ва устуннинг тартиб рақамини кўрсатади.

Ёзувни қисқартириш мақсадида (22.1) матрица кўпинча ушбу кўринишда ёзилади;

$$A = (a_{ij}), \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$$

ёки

$$A = \| a_{ij} \|, \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}).$$

Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда устун матрицага эга бўламиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Сатрлари сони устунлари сонига тенг, яъни $m = n$ бўлган ушбу матрица n-тартибли *квадрат матрица* деб аталади:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ҳар бир n-тартибли A квадрат матрица учун (ва фақат квадрат матрица учун!) шу матрицанинг элементларидан тузилган n-тартибли детерминантни ҳисоблаш мумкин. Бу детерминант $\det A$ ёки $|A|$ орқали белгиланади. Агар $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда A квадрат матрица *хосмас* ёки *махсусмас матрица* деб аталади.

Агар $\det A = 0$ бўлса, у ҳолда A квадрат матрица *хос* ёки *махсус матрица* деб аталади. Квадрат матрицанинг $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементлари жойлашган диагонали *бош диагонал*, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементлари жойлашган диагонал *ёрдамчи диагонал* деб аталади. Бош диагоналида турмаган барча элементлари 0 га тенг квадрат матрица *диагонал матрица* деб аталади:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бунда $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$. Бош диагоналидаги барча элементлари $a \neq 0$ бўлган квадрат матрица *скаляр матрица* деб аталади:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Равшанки, $\det A = a^n$.

Бош диагоналидаги барча элементлари 1 га тенг диагонал матрица *бирлик матрица* деб аталади ва E билан белгиланади.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Бирлик матрицанинг детерминанти бирга тенг: $\det E = 1$. Барча элементлари нолга тенг матрица *нол матрица* деб аталади ва Q билан белгиланади:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нол матрица квадрат матрица ҳам, тўғри бурчакли матрица ҳам бўлиши мумкин. A матрицада барча сатрларни мос устунлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган A^* матрица A матрицага нисбатан *транспонирланган матрица* деб аталади. Жумладан, сатр-матрицага транспонирлаш натижасида устун-матрица мос келади ва аксинча.

Агар A квадрат матрица бўлса, у ҳолда равшанки, $\det A = \det A^*$.

Агар $A = A^*$ шарт бажарилса, у ҳолда A квадрат матрица *симметрик матрица* деб аталади.

Симметрик матрицанинг бош диагоналга нисбатан симметрик жойлашган элементлари жуфт-жуфти билан ўзаро тенг:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

23-§. Матрицалар устида амаллар

Агар иккита $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ матрица бир хил ўлчамли ҳамда i ва j индексларининг барча қийматлари учун $a_{ij} = b_{ij}$ бўлса, бу матрицалар *тенг* деб аталади. Матрицаларни қўшиш, сонга кўпайтириш ва бир-бирига кўпайтириш мумкин. Бу амалларни кўриб чиқамиз.

Бир хил ўлчамли $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ матрицаларнинг *йиғиндиси* деб, элементлари қуйидагича аниқланадиган ўша ўлчамли $C = (c_{ij})$ матрицага айтилади:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i=\overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Матрицалар йиғиндиси бундай белгиланади:

$$C = A + B.$$

Шундай қилиб, бир хилдаги матрицаларни қўшишда бу матрицаларнинг мос элементларини қўшиш лозим.

1-мисол. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

матрицалар йиғиндисини топинг.

Ечиш.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+2 & 0+1 & 1-1\\ 2+3 & 1-2 & -3+1\\ 0+0 & 1+3 & 4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 5 & -1 & -2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Икки матрицанинг *айирмаси* ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

$A=(a_{ij})$ матрицанинг λ сонга *кўпайтмаси* деб, элементлари қуйидагича аниқланадиган ўша ўлчамли $C=(c_{ij})$ матрицага айтилади:

$$c_{ij}=\lambda a_{ij}.$$

Шундай қилиб, матрицани сонга кўпайтиришда шу сонга бу матрицанинг барча элементларини кўпайтириш лозим.

2-мисол Ушбу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

матрицани 2 сонига кўпайтиринг.

Ечиш.

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot2\\ 2\cdot4 & 2\cdot2 & 2\cdot1\\ 2\cdot5 & 2\cdot0 & 2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 8 & 4 & 2\\ 10 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Матрицаларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари чизиқли амаллардир. Бу чизиқли амаллар учун ушбу қоидаларнинг тўғрилигини текшириш осон:

1) $A+B=B+A$;
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3) $A+Q=Q+A=A$;
4) $\mu(\lambda A)=\lambda(\mu A)$;
5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Бу ерда λ, μ — сонлар, A, B, C — матрицалар, Q — нол матрица.

3-мисол.

$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ матрицалар берилган. $2A-B$ матрицани топинг.

Ечиш. $2A$ матрицани тузамиз;

$$2A = 2\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Бу $2A$ матрицадан B матрицани айирамиз:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-0 & 4-(-3) \\ -6-4 & 10-6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

4-мисол. λ сон ва $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрица берилган. $A - \lambda E$ матрицани топинг,

Ечиш. 1,2,3-мисоллардаги каби элементар алмаштиришларни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Навбатдаги амал — матрицаларни кўпайтириш амалига ўтамиз.

$m \times k$ ўлчамли $A = (a_{ij})$ матрицанинг $k \times n$ ўлчамли $B = (b_{ij})$ матрицага *кўпайтмаси* деб, $m \times n$ ўлчамли шундай $C = (c_{ij})$ матрицага айтиладики, унинг c_{ij} элементи A матрица i-сатри элементларини B матрица j-устунининг мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + \ldots + a_{ik}b_{kj}.$$

Матрицалар кўпайтмаси бундай белгиланади $C = A \cdot B$. Таърифдан кўринадики, бунда биринчи кўпайтувчининг устунлари сони иккинчи кўпайтувчининг сатрлари сонига тенг бўлиши талаб қилинади. Шу сабабли матрицалар кўпайтмаси AB нинг маънога эга бўлишидан BA нинг ҳам маънога эга бўлиши доимо келиб чиқавермайди.

5-мисол. Ушбу матрицаларни кўпайтиринг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. AB кўпайтма мавжуд, чунки A матрицанинг устунлари сони 2 га тенг, B матрицанинг сатрлари сони ҳам 2 га тенг. Бу кўпайтмани тузамиз:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 1\cdot 1 & 1\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

BA кўпайтма мавжуд эмас, чунки B матрицанинг устунлари сони 2 га тенг. A матрицанинг сатрлари сони эса 3 га тенг. Матрицаларни кўпайтириш учун асосий талаб бажарилмаяпти.

Агар A ва B матрицалар бир хил тартибли бўлса, у ҳолда AB кўпайтмани ҳам, BA кўпайтмани ҳам тузиш мумкин, бунда ўша тартибли матрица ҳосил бўлади.

6-мисол. Ушбу матрицаларни кўпайтиринг:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Ечиш. Матрицаларни кўпайтириш учун асосий талаб бажарилади. Шунинг учун

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 4-3\cdot 2 & -2\cdot 3-3\cdot 6\\ 5\cdot 4+1\cdot 2 & -5\cdot 3+1\cdot 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -24\\ 22 & -9\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2-3\cdot 5 & -4\cdot 3-3\cdot 1\\ 2\cdot 2+6\cdot 5 & -2\cdot 3+6\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -15\\ 34 & 0\end{pmatrix}.$$

Бундан $AB \neq BA$ эканлиги кўриниб турибди. Бу эса матрицаларни кўпайтириш амали учун ўрин алмаштириш қонуни ҳар доим ҳам бажарилавермаслигини кўрсатади. Шу сабабли матрицаларни кўпайтиришда чапдан ва ўнгдан кўпайтириш ҳақида гапиришга тўғри келади.

Агар $AB = BA$ бўлса, у ҳолда A ва B матрицалар коммутативланадиган ёки ўрин алмашинадиган деб аталади. Масалан, квадрат матрица ва ўша тартибли бирлик матрица ўрин алмашинадиган матрицалардир.

Матрицаларни кўпайтиришнинг қуйидаги асосий хоссаларининг тўғрилигига бевосита кўпайтириш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин:

1) $(AB)C = A(BC)$; 4) $AE = EA = A$;
3) $(A+B)C = AC + BC$; 5) $AQ = QA = Q$;
3) $(\lambda A)B = \lambda(AB)$; 6) $(AB)^* = B^*\cdot A^*$;
7) $\det(AB) = \det A\cdot\det B$.

Бу ерда A, B, C бирор матрицалар бўлиб, улар учун юқоридаги амаллар ўринли, E — бирлик матрица, Q — нол матрица, λ — бирор сон.

24-§. Тескари матрица

Ушбу A квадрат матрицани қарайлик:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}. \tag{24.1}$$

Агар

$$AB = BA = E \tag{24.2}$$

бўлса, B матрица A матрица учун *тескари матрица* деб аталади.

A матрицага тескари матрицани A^{-1} каби белгилаш қабул қилинган.

1-теорема. *Агар A матрица хос, яъни* $\det A = 0$ *бўлса, у ҳолда A^{-1} тескари матрица мавжуд эмас.*

Исботи. A матрица учун $AB = E$ бўладиган B матрица мавжуд деб фараз қилайлик. У ҳолда $\det(AB) = \det E$. 7-хоссага асосан: $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det E$. Бироқ, $\det A = 0$, $\det E = 1$ эканлигини ҳисобга олсак, $0 = 1$ ни ҳосил қиламиз. Бу зиддият теоремани исбот қилади.

2-теорема. *Агар A матрица хосмас, яъни* $\det A \neq 0$ *бўлса, у ҳолда унинг учун A^{-1} тескари матрица мавжуд.*

Исботи. (24.1) матрицанинг детерминантини Δ орқали ифодалаймиз:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{24.3}$$

Бу детерминантни a_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчиси A_{ij} орқали ифодалаймиз. A_{ij} алгебраик тўлдирувчилардан янги $\tilde{A}$ матрица тузамиз:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{24.4}$$

Бу матрица A матрицага *бириктирилган матрица* деб аталади. Бу матрицанинг барча элементларини $\det A = \Delta$ га бўламиз. У ҳолда B матрица ҳосил бўлади:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{24.5}$$

Бу матрица A матрицага тескари матрица бўлишини исбот қиламиз. Бунинг учун A матрицани B матрицага кўпайтирамиз:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} =$$

$$
=\left|\begin{matrix}
\frac{a_{11}A_{11}+\ldots+a_{1n}A_{1n}}{\Delta} & \frac{a_{11}A_{21}+\ldots+a_{1n}A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{a_{11}A_{n1}+\ldots a_{1n}A_{nn}}{\Delta} \\
\frac{a_{21}A_{11}+\ldots+a_{2n}A_{1n}}{\Delta} & \frac{a_{21}A_{21}+\ldots+a_{2n}A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{a_{21}A_{n1}+\ldots+a_{2n}A_{nn}}{\Delta} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{a_{n1}A_{11}+\ldots+a_{nn}A_{1n}}{\Delta} & \frac{a_{n1}A_{21}+\ldots a_{nn}A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{a_{n1}A_{n1}+\ldots+a_{nn}A_{nn}}{\Delta}
\end{matrix}\right|,
$$

Детерминантларнинг «и» ва «к» (9- §) хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$
\Bigg(AB=\begin{vmatrix}
\frac{\Delta}{\Delta} & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \frac{\Delta}{\Delta} & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \frac{\Delta}{\Delta}
\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}=E.
$$

$BA=E$ эканини ҳам шунга ўхшаш исбот қилиш мумкин. Шундай қилиб, B матрица A матрица учун тескари матрицадир, яъни $B=A^{-1}$. Теорема исбот қилинди.

Бундай йўл билан ҳосил қилинган A^{-1} тескари матрицанинг ягоналигини исботлаймиз, бунинг учун ушбу теоремани исбот қиламиз.

3-теорема. *Агар A матрица хосмас бўлса, у ҳолда A^{-1} матрица ягонадир.*

Исботи. Берилган A матрица учун A^{-1} дан фарқли C матрица ҳам мавжуд бўлсин. У ҳолда тескари матрицанинг таърифига кўра

$$AC=E.$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини A^{-1} га чапдан кўпайтирамиз:

$$A^{-1}AC=A^{-1}E.$$

$A^{-1}A=E$ бўлганлиги учун $EC=A^{-1}E$. $EC=C$, $A^{-1}E=A^{-1}$ эканини ҳисобга олсак $C=A^{-1}$ ни ҳосил қиламиз. Теорема исбот қилинди.

Шундай қилиб, берилган A матрицага тескари A^{-1} матрицани ҳосил қилиш учун қуйидаги ишларни амалга ошириш зарур:

1. $\det A=\Delta$ ни ҳисоблаш.
2. Агар $\Delta\neq 0$ бўлса, $\det A$ нинг барча элементлари учун алгебраик тўлдирувчилардан тузилган $\tilde{A}$ бириктирилган матрицани (24.4) формулада кўрсатилганидек тузиш.
3. Бу матрицанинг барча элементларини $\Delta=\det A$ га бўлиш.

1-мисол. Ушбу

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 \\
2 & 0 & -1 \\
-2 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

матрица учун тескари матрица тузинг.

Ечиш. Аввал $\det A$ ни топамиз:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Матрица барча элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

A матрицага бириктирилган $\widetilde{A}$ матрица бундай бўлади.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\widetilde{A}$ матрицанинг ҳамма элементларини $\Delta = 3$ га бўлсак, тескари A^{-1} матрицани ҳосил қиламаз:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Тескари матрицанинг иккита хоссасини келтирамиз:

1. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

25-§. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг матрица усули

Ушбу n та номаълумли n та чизиқли тенгламалар системасини қарайлик:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n. \end{cases} \tag{25.1}$$

Ушбу белгиларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{25.2}$$

У ҳолда (25.1) системани матрицаларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб, ушбу эквивалент шаклда ёзиш мумкин:

$$AX = B. \tag{25.3}$$

Бу ерда A — номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган матрица, B — озод ҳадлардан тузилган устун матрица, X — номаълумлардан тузилган устун матрица.

Агар A матрица хосмас, яъни $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда унинг учун A^{-1} тескари матрица мавжуд. (25.3) матрицали тенгламанинг иккала қисмини A^{-1} га чапдан кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

ёки

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

$A^{-1}A = E$, $EX = X$ эканини ҳисобга олиб,

$$X = A^{-1}B \tag{25.4}$$

ни топамиз. (25.4) формула A матрица хосмас бўлганда n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси ечимининг матрицали ёзувини беради.

Мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Ечиш. Бу мисолда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

У ҳолда берилган тенгламалар системасини

$$AX = B$$

кўринишда ёзиш мумкин. (25.4) формулага асосан

$$X = A^{-1}B.$$

Бу системанинг A матрицаси олдинги параграфдаги матрица билан бир хил бўлгани учун ўша мисолдаги натижадан фойдаланамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}.$$

Бундан $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = +2$.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Матрица деб нимага айтилади?
2. Матрицаларни транспонирлаш деб нимага айтилади?
3. Квадрат матрица нима? Унинг детерминанти- чи?
4. Қандай матрица хос матрица деб аталади? Хосмас матрица деб- чи?
5. Матрицалар устида чизиқли амаллар қандай аниқланади?
6. Икки матрицанинг кўпайтмаси қандай аниқланади?
7. Қандай квадрат матрицалар учун $AB = BA$ бўлади?
8. Қандай матрица берилган матрица учун тескари матрица деб аталади? Тескари матрица қандай топилади?
9. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг матрица усули нимадан иборат?

26-§. Матрица ранги, уни ҳисоблаш

Тўғри бурчакли (хусусий ҳолда квадрат) A матрица берилган бўлсин, унда бирор «k» та сатр ва «k» та устунни ажратамиз. Бу сатрлар ва устунларнинг кесишмасида турган элементлар k-тартибли квадрат матрица ҳосил қилади. Унинг детерминанти берилган матрицанинг k-тартибли *минори* деб аталади. Масалан, ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

матрица учун иккинчи тартибли минорлардан бири

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

бўлиб, у A матрицадан биринчи ва иккинчи сатрларни ҳамда иккинчи ва учинчи устунларни ажратишдан ҳосил бўлган. Учинчи тартибли минорлардан бири

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиб, у A матрицадан биринчи, иккинчи ва учинчи сатрларни ҳамда биринчи, учинчи ва тўртинчи устунларни ажратишдан ҳосил бўлган. A матрицада учинчи тартибли минорлар 4 та, иккинчи тартибли минорлар эса 18 талигини санаш осон. Матрицанинг элементларини эса биринчи тартибли минорлар деб ҳисоблаш мумкин.

A матрицанинг барча минорлари орасида нолдан фарқли бўлганлари ҳам, нолга тенг бўлганлари ҳам мавжуд бўлиши мумкин.

Агар A матрицанинг r-тартибли минорлари орасида камида битта нолдан фарқлиси мавжуд бўлиб, бундан юқори тартибли қолган барча минорлари нолга тенг бўлса, у ҳолда A матрица r рангга эга деб аталади ва бундай ёзилади: $\operatorname{rang} A = r$.

Шундай қилиб, матрица ранги нолдан фарқли минорларнинг энг катта тартибидир. Келтирилган мисолдаги матрицанинг ранги $r = 2$, чунки барча учинчи тартибли минорлар нолга тенг, иккинчи тартибли минорлар орасида эса нолдан фарқлиси бор. Матрица рангини бевосита ҳисоблашда кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Қуйида келтирилган қулайроқ усул матрицани элементар алмаштириш тушунчасига асосланган. Матрицани қуйидагича алмаштиришлар *элементар алмаштиришлар* деб аталади:

а) фақатноллардан иборат сатрни (устунни), яъни «нол» сатр ва «нол» устунни ўчириш;

б) иккита сатрнинг (иккита устуннинг) ўринларини алмаштириш;

в) бир сатр (устун) нинг барча элементларини бирор кўпайтувчига кўпайтириб, бошқа сатр (устун) нинг мос элементларига қўшиш;

г) сатр (устун) нинг барча элементларини нолдан фарқли бир хил сонга кўпайтириш.

Бири иккинчисидан элементар алмаштиришлар ёрдамида ҳосил қилинадиган матрицалар эквивалент матрицалар деб аталади.

Ушбу теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *Матрицалар устида элементар алмаштиришлар натижасида унинг ранги ўзгармайди.*

2-теорема. *Агар матрицанинг ранги r га тенг бўлса, у ҳолда унда r та чизиқли эркли сатр топилади, қолган барча сатрлар эса бу r та сатрнинг чизиқли комбинацияси бўлади.*

Тескари даъво ҳам тўғри. Шу каби теорема устунлар учун ҳам тўғридир. Бу теоремалардан матрицанинг рангини ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисол. Ушбу матрицанинг рангини ҳисобланг:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4\\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

Ечиш. Элементар алмаштиришлар усулидан фойдаланамиз. Чап юқори бурчакда бир турибди. Унинг ёрдамида биринчи устуннинг шу бир остида турган барча элементларини нолга айлантирамиз. Бунинг учун биринчи сатрни (—2) га кўпайтирамиз ҳамда учинчи ва тўртинчи сатрларга қўшамиз. Ушбу эквивалент матрицани ҳосил қиламиз:

$$A\backsim\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Энди иккинчи сатр ва иккинчи устуннинг кесишмасида турган бирдан фойдаланамиз. Учинчи сатрдан иккинчи сатрни айирамиз, тўртинчи устунга эса иккинчи устунни қўшамиз. Ушбу эквивалент матрицани ҳосил қиламиз:

$$A\backsim\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Ҳосил бўлган матрицанинг ранги 2 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Демак, A матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг, яъни $r_A = 2$.

27-§. Чизиқли тенгламалар системасини текшириш. Кронекер — Капелли теоремаси

Энди энг умумий кўринишдаги, яъни исталган n сондаги номаълумли исталган m сондаги чизиқли тенгламалар системасини қараймиз, бунда умуман айтганда $m \neq n$. Система бундай ёзилади:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \qquad (27.1)$$

Бу ерда a_{ij} — коэффициентлар, x_j — номаълумлар, b_i — озод ҳадлар ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) дейилади. Агар система камида битта ечимга эга бўлса, яъни номаълумлар учун шундай $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots$, $x_n = \alpha_n$ қийматлар кўрсатиш мумкин бўлсаки, уларни системага қўйилганда тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, у ҳолда система биргаликда бўлишини эслатиб ўтамиз.

Қуйида чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш аломатини келтирамиз. Бунинг учун система коэффициентларидан тузилган ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (27.2)$$

матрицани ва A матрицадан унга озод ҳадлар устунини қўшиш билан ҳосил қилинган ушбу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (27.3)$$

матрицани қараймиз. A матрица *система матрицаси*, B *эса кенгайтирилган матрица* деб аталади. Бу матрицаларнинг ранглари $r_A \leqslant r_B$ тенгсизлик билан боғланганлиги равшан.

1-теорема (Кронекер — Капелли). (27.1) *чизиқли тенгламалар системаси биргаликда бўлиши учун система матрицаси билан кенгайтирилган матрицанинг ранглари тенг, яъни* $r_A = r_B$ *бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурлиги. (27.1) система биргаликда ва

$$x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,\ \dots,\ x_n=\alpha_n$$

ечимга эга, яъни ушбу тенгликлар тўғри бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\dots+a_{mn}\alpha_n=b_m. \end{cases} \tag{27.4}$$

B матрицанинг сўнгги устунидан α_1 га кўпайтирилган биринчи устунни, кейин α_2 га кўпайтирилган иккинчи устунни ва ҳоказо, ниҳоят α_n га кўпайтирилган n-устунни айирамиз. B матрицага эквивалент ушбу матрицани оламиз, унда (27.4) тенгликларга асосан сўнгги устунда ноллар бўлади:

$$B\backsim B_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn} & 0 \end{pmatrix}. \tag{27.5}$$

$r_{B_1}=r_B$ эканлиги равшан, чунки B_1 матрица B матрицадан элементар алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлди. Бироқ, $r_{B_1}=r_A$, чунки нолинчи сатрни ўчириш билан (элементар алмаштириш) A матрицага келамиз. Демак, $r_A=r_B$ бўлиши зарурлиги исботланди.

Етарлилиги. Энди $r_A=r_B=r$ эканлиги берилган бўлсин. A матрицанинг нолдан фарқли r-тартибли Δ минори чап юқори бурчакда жойлашган деб фараз қилиш мумкин, чунки акс ҳолда номаълумлар ва тенгламаларнинг ўринларини алмаштириб Δ ни айтилган жойга келтира оламиз. Бу минор B матрицага ҳам киради. A ва B матрицаларнинг $k\ (>r)$-сатри биринчи r та сатрнинг чизиқли комбинациясидан иборат (олдинги параграфдаги 2-теорема). Бу эса (27.1) системанинг $k\ (>r)$-тенгламаси биринчи r та тенгламанинг натижаси деган сўздир. Яъни номаълумларнинг бирор $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,\ \dots,\ x_n=\alpha_n$ қийматлари дастлабки r та тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда бу қийматлар k-тенгламани ҳам қаноатлантиради. Шунинг учун $m-r$ та тенгламани тушириб қолдириб, (27.1) системани ушбу қисқароқ система билан алмаштириш мумкин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rn}x_n=b_r. \end{cases} \tag{27.6}$$

(27.6) системани ечишда ушбу икки ҳол бўлиши мумкин: $r=n$ ва $r<n$. Агар $r=n$ бўлса, у ҳолда (27.6) системанинг тенгламалари сони унинг номаълумлари сонига тенг, шу билан бирга, сис-

теманинг детерминанти нолдан фарқли бўлади. Шунинг учун (27.6) система, ва демак, (27.1) система ҳам ягона ечимга эга.

Агар $r < n$ бўлса ($r > n$ бўла олмайди, чунки A матрицанинг ранги r бўлиб, унда бор-йўғи n та устун бор), (27.6) системанинг тенгламалари сони номаълумлари сонидан кам. У ҳолда (27.6) ни бундай ёзамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (27.7)$$

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ номаълумларга ихтиёрий қийматлар берамиз ва $\Delta \neq 0$ бўлгани сабабли (27.7) системани ечиб, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ларнинг қийматларини топамиз.

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n$ «озод номаълум» ларга ҳар қандай қийматлар бериш мумкин бўлганлиги учун (27.7) система, бинобарин, берилган (27.1) система ҳам чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Исбот тугалланди.

Шундай қилиб, A ва B матрицаларнинг ранглари номаълумлар сонига тенг, яъни $r_A = r_B = n$ бўлса, у ҳолда (27.1) система ягона ечимга, агар бу матрицаларнинг ранглари ўзаро тенг бўлиб, лекин номаълумлар сонидан кичик, яъни $r_A = r_B < n$ бўлса, у ҳолда (27.1) система чексиз кўп ечимларга эга бўлишини кўрдик.

Энди $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ бўлган системани қараймиз. Ушбу бир жинсли

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (27.8)$$

система доимо биргаликда, чунки B матрица A матрицадан фақат элементлариноллардан иборат устуни билан фарқ қилади ва шу сабабли $r_A = r_B$. Бу системани $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$ қийматлар ҳам қаноатлантиради. (27.8) бир жинсли система қачон нолмас ечимга эга бўлиши ҳақидаги саволга ушбу теорема жавоб беради.

2-теорема. (27.8) *система нолмас ечимга эга бўлиши учун A матрицанинг r_A ранги номаълумлар сони n дан кичик бўлиши зарур ва етарлидир:* $r_A < n$.

Исботи. Агар $r_A = n$ бўлса, у ҳолда 1-теореманинг исботига кўра системамиз биргина ечимга эга. (27.8) системанинг нол ечими бор бўлганлиги учун энди унинг бошқа ечими йўқ. Агарда $r_A < n$ бўлса, у ҳолда система чексиз кўп ечимларга эга (1-теореманинг исботига қаранг), ва демак, нол ечимдан ташқари бошқа ечимлар ҳам мавжуд бўлади.

Натижа. Агар бир жинсли системанинг тенгламалари сони m номаълумлари сони n дан кичик бўлса, у ҳолда система нолмас ечимга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $r_A \leqslant m < n$.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1. \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

система биргаликдами?

Ечиш. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги 3 дан ортиқ бўлиши мумкин эмас. Уни элементар алмаштиришлар ёрдамида топамиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ҳосил бўлган эквивалент матрицанинг ранги $r = 3$, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 = 4 \neq 0.$$

Демак, A матрицанинг ранги ҳам 3 га тенг: $r_A = 3$. Кенгайтирилган

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисоблаймиз. Элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эквивалент матрица $r_B = 4$ рангга эга, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

B матрицанинг ранги ҳам 4 га тенг: $r_B = 4$. Матрицаларнинг ранглари ҳар хил, демак, система биргаликда эмас.

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

система биргаликдами?

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаймиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$r_A = 2$, чунки $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Кенгайтирилган B матрицанинг рангини ҳисоблаймиз:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$r_B = 2$, чунки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Система биргаликда, чунки $r_A = r_B = 2$. Ранг номаълумлар сонидан кичик бўлгани учун система чексиз кўп ечимларга эга. Бу ечимларни топамиз. Учинчи тенглама биринчи иккита тенгламанинг чизиқли комбинацияси бўлгани учун уни ташлаб юбориш мумкин.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

минор x_3 ва x_4 номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган. Бу номаълумларни тенгликнинг чап қисмида қолдириб, қолган қўшилувчиларни ўнг қисмига кўчирамиз:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 - 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 - 2x_2. \end{cases} \qquad (27.9)$$

x_1 ва x_2 «озод номаълумларга» ихтиёрий қийматларни, масалан, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ қийматларни берамиз. Система ушбу кўринишни олади.

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Уни ечиб, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ ни топамиз. Демак, берилган системанинг чексиз кўп ечимларидан бири $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ аниқланди. x_1 ва x_2 «озод номаълумларга» исталган қийматлар бериб бир эмас, балки чексиз кўп ечимлар тўпламини аниқлаш мумкин. Умумий кўринишда бу бундай ёзилади:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

((27.9) системадан x_3 ва x_4 номаълумларни чиқариш йўли билан ҳосил қилинган.)

3-мисол. Ушбу система биргаликда бўлса, уни ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 15. \end{cases}$$

Ечиш. A матрица рангини ҳисоблаймиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$r_A = 3$, чунки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Кенгайтирилган B матрица рангини ҳисоблаймиз:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

$r_B = 3$, чунки

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$r_A = r_B = 3$ бўлганлиги учун система биргаликда, бундан ташқари матрицалар ранги номаълумлар сонига тенг, шу сабабли система биргина ечимга эга. $\Delta \neq 0$ минор биринчи учта тенглама коэффициентларидан тузилган, шу сабабли тўртинчи тенглама биринчи учта тенгламанинг чизиқли комбинациясидан иборат ва уни ташлаб юбориш мумкин.

Берилган системанинг биринчи учта тенгламасидан тузилган системани ечиб, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ ни топамиз.

4-мисол. Ушбу бир жинсли системани ечинг:

$$\begin{cases}2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0,\\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0,\\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0.\end{cases}$$

Ечиш. Система нолмас ечимга эга, чунки тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик (2-теореманинг натижасига қаранг). A матрица рангини ҳисоблаймиз:

$$A = \begin{pmatrix}2 & -4 & 5 & 3\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & -6 & 4 & 2\\ 2 & -4 & 5 & 3\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 7 & 5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 7 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

$r_A = 2$, чунки

$$\Delta = \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 7 & 5\end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Учинчи тенглама биринчи иккита тенгламанинг чизиқли комбинацияси, шу сабабли уни ташлаб юборамиз. $\Delta = 2$ минор x_3 ва x_4 номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган, шу сабабли биринчи иккита тенгламани бундай ёзамиз:

$$\begin{cases}5x_3 + 3x_4 = -2x_1 + 4x_2.\\ 4x_3 + 2x_4 = -3x_1 + 6x_2.\end{cases}$$

x_3 ва x_4 номаълумларни чиқариб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_4 = 3{,}5x_1 - 7x_2 \\ x_3 = -2{,}5x_1 + 5x_2. \end{cases}$$

Бу ерда x_1 ва x_2 «озод номаълумлар». Уларга ихтиёрий қийматлар бериб, x_3 ва x_4 номаълумларнинг мос қийматларини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, система биргаликда ва чексиз кўп ечимларга эга.

28-§. Чизиқли оператор ҳақида тушунча

Агар фазодаги ҳар бир $\vec{x}$ векторга ўша фазонинг аниқ $\vec{y} = A\vec{x}$ вектори мос қўйилган бўлиб, у ушбу

$$A(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 A\vec{x}_1 + \lambda_2 A\vec{x}_2 \qquad (28.1)$$

чизиқлилик шартига бўйсунса, бу ерда $\vec{x}_1$ ва $\vec{x}_2$ қаралаётган фазонинг ихтиёрий векторлари, λ_1 ва λ_2 исталган сонлар, у ҳолда бу фазода A чизиқли оператор (ёки чизиқли алмаштириш) берилган деб айтилади. $\vec{y}$ вектор $\vec{x}$ векторнинг *акси* деб аталади.

1-мисол. Фазонинг ҳар бир $\vec{x}$ векторига ўша $\vec{x}$ векторнинг ўзини мос қўядиган E оператор чизиқли оператор эканини кўрсатинг.

Ечиш. Шартга кўра

$$E\vec{x} = \vec{x}.$$

E операторни $\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2$ векторга қўлланиб,

$$E(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \lambda_1 E\vec{x}_1 + \lambda_2 E\vec{x}_2$$

ни ҳосил қиламиз, бундан (28.1) шартнинг бажарилиши ва E чизиқли оператор экани кўриниб турибди. У *бирлик оператор* ёки *айний оператор* деб аталади.

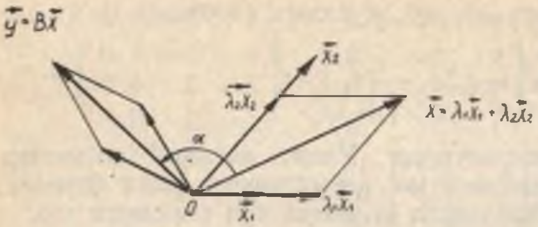
2-мисол. Фазонинг ҳар бир $\vec{x}$ векторини k марта (k — нолдан фарқли исталган сон) чўзадиган A оператор чизиқли оператордир.

Ечиш. Шартга кўра $A\vec{x} = k\vec{x}$ га эгамиз. A операторни $\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2$ векторга қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = k(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1(k\vec{x}_1) + \lambda_2(k\vec{x}_2) =$$
$$= \lambda_1 A\vec{x}_1 + \lambda_2 A\vec{x}_2.$$

Бу ерда (28.1) шартнинг бажарилиши ва A оператор чизиқли экани кўриниб турибди. Бундай оператор *ўхшашлик оператори* деб аталади.

3-мисол. Бирор текисликда ётадиган ҳар бир $\vec{x}$ векторни бирор O нуқта атрофида бир хил томонга ва бир хил α бурчакка бура-



39- шакл.

диган B оператор чизиқли оператордир (39-шакл).

Ечиш. $\vec{y} = B\vec{x}$ бўлсин, бу ерда $\vec{y}$ вектор $\vec{x}$ векторни берилган бурчакка буриш билан ҳосил қилинган. Шаклдан (28.1) шартнинг бажарилиши ва B чизиқли оператор экани кўриниб турибди. Бундай оператор *буриш оператори* деб аталади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Матрицаларни қандай алмаштиришлар элементар алмаштиришлар деб аталади?
2. Қандай матрицалар эквивалент матрицалар деб аталади?
3. Матрица ранги нима ва у қандай ҳисобланади?
4. Чизиқли тенгламалар системасининг матрицаси ва кенгайтирилган матрицасининг ранги деб нимага айтилади?
5. Қандай чизиқли тенгламалар системаси биргаликда деб аталади?
6. n номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси қачон биргаликда бўлади?
7. n номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси қачон нолмас ечимга эга?
8. Чизиқли оператор деб нимага айтилади?

29-§. Чизиқли оператор ва унинг берилган базисдаги матрицаси ҳақида тушунча

Чизиқли оператор ва квадрат матрица орасидаги боғланишни кўриб чиқамиз.

Фазода бирор $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базис векторларни танлаймиз ва базис векторларнинг ҳар бирига A чизиқли операторни татбиқ қиламиз:

$$\left|\begin{array}{l} A(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3, \\ A(\vec{e}_2) = \vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3, \\ A(\vec{e}_3) = \vec{f}_3 = a_{13}\cdot\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3. \end{array}\right. \tag{29.1}$$

Бу ерда $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ векторлар $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторларнинг образлари, улар $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базис бўйича ёйилган.

(29.1) формулаларнинг берилиши билан A чизиқли оператор аниқланишини кўрсатамиз.

Фазонинг ихтиёрий $\vec{x}$ векторини оламиз ва уни базис бўйича ёзамиз:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

бу ерда x_1, x_2, x_3 лар $\vec{x}$ векторнинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базисдаги координаталари. У ҳолда

$$\vec{y} = A\vec{x} = A\,(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}) = x_1A\,(\vec{e_1}) + x_2A\,(\vec{e_2}) + x_3A\,(\vec{e_3}).$$

(29.1) формулалардан фойдаланиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{y} = x_1\,(a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + a_{31}\vec{e_3}) + x_2\,(a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + a_{32}\vec{e_3}) +$$
$$+ x_3\,(a_{13}\vec{e_1} + a_{23}\vec{e_2} + a_{33}\vec{e_3}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,\vec{e_1} +$$
$$+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,\vec{e_2} + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,\vec{e_3}.$$

$\vec{y}$ векторнинг $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ базисдаги координаталарини y_1, y_2, y_3 орқали белгилаб, уларни аниқлайдиган формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \tag{29.2}$$

Бу формулалардан кўриниб турибдики, фазо ихтиёрий $\vec{x}$ векторининг $\vec{y}$ акси (29.1) формулалар билан берилган a_{ij} $(i, j = \overline{1,3})$ коэффициентлар орқали бир қийматли аниқланади.

Шундай қилиб, фазода таъсир этаётган A чизиқли операторга $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ базисда (29.2) тенгликларнинг ўнг томонларидаги коэффициентлардан тузилган ушбу матрица мос қўйилди:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{29.3}$$

A матрица берилган чизиқли операторнинг $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ базисдаги *матрицаси* деб аталади. Агар векторларнинг бу базисдаги координаталарини устун-матрица шаклида ёзсак, у ҳолда (29.3) даги A матрица A чизиқли операторни ушбу формула бўйича аниқлайди:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{29.4}$$

Бошқача айтганда, $\vec{y} = A\vec{x}$ векторнинг координаталарини топиш учун A чизиқли оператор матрицасини $\vec{x}$ вектор координаталари устунига кўпайтириш лозим.

Аксинча, берилган $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ базисда операторга тўла бир қийматли равишда A матрица тўғри келади ва операторнинг таъсири (29.4) ёки (29.2) формула бўйича амалга ошади.

Демак, фазода таъсир этадиган чизиқли операторлар билан квадрат матрицалар орасида бир қийматли мослик мавжуддир.

30-§. R^2 ва R^3 даги чизиқли операторларга мисоллар

29-§ да қаралган чизиқли операторларнинг матрицалари қандай кўринишда бўлишини аниқлаймиз.

1. **Бирлик оператор**. E бирлик оператор бўлсин, у ҳолда $E\vec{x}=\vec{x}$, $\vec{y}=E\vec{x}$ ва $\vec{x}$ векторларнинг ихтиёрий $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базисдаги координаталари ушбу

$$y_1=x_1,\ y_2=x_2,\ y_3=x_3$$

мослик билан боғланган. Бу формулаларни (29.2) формулалар кўринишида ёзсак, қуйидагини оламиз:

$$\begin{aligned}y_1&=1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3,\\ y_2&=0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3,\\ y_3&=0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3.\end{aligned}$$

Бундан E чизиқли операторнинг ихтиёрий базисдаги E матрицаси

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

кўринишда бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, бирлик оператор матрицаси бирлик матрица бўлади.

2. **Ўхшашлик оператори.** A оператор R^3 да таъсир этаётган ўхшашлик оператори бўлсин, у ҳолда $A\vec{x}=k\vec{x}$, $\vec{y}=A\vec{x}$ ва $\vec{x}$ векторларнинг ихтиёрий $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базисдаги координаталари ушбу муносабатлар билан боғланган:

$$y_1=kx_1,\ y_2=kx_2,\ y_3=kx_3.$$

Бу муносабатларни (29.2) формулалар кўринишда ёзиб, қуйидагини оламиз:

$$\begin{aligned}y_1&=k\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3,\\ y_2&=0\cdot x_1+k\cdot x_2+0\cdot x_3,\\ y_3&=0\cdot x_1+0\cdot x_2+k\cdot x_3.\end{aligned}$$

Бу ердан ўхшашлик операторининг ихтиёрий базисдаги A матрицаси

$$A=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}$$

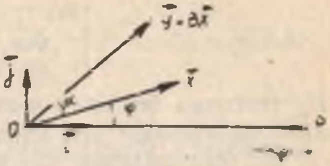
кўринишда бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, ўхшашлик оператори матрицаси скаляр матрица бўлади.

3. **Буриш оператори.** B — бирор R^2 текисликда таъсир этаётган буриш чизиқли оператори бўлсин. Бу текисликда $\vec{i}$, $\vec{j}$ базисни (ўзаро перпендикуляр бирлик векторларни) оламиз. Қутб координаталар системасини киритамиз (40- шакл). У ҳолда $\bar{x}$ векторнинг координаталари

$$x_1=\rho\cos\varphi,\quad x_2=\rho\sin\varphi$$

кўринишда ёзилади, бу ерда ρ, φ — қаралаётган $\vec{x}$ вектор охирининг координаталари. $\vec{y} = B\vec{x}$ вектор $\vec{x}$ векторни O нуқта атрофида α бурчакка буриш билан ҳосил қилингани учун унинг координаталари бундай ёзилади:



40- шакл.

$$y_1 = \rho\cos(\varphi + \alpha) = \rho(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha),$$
$$y_2 = \rho\sin(\varphi + \alpha) = \rho(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha).$$

Бундан буриш чизиқли операторининг B матрицаси $\vec{i}$, $\vec{j}$ базисда ушбу

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлиши келиб чиқади.

31-§. Чизиқли операторларнинг хос векторлари ва хос қийматлари

Агар бирор λ ҳақиқий сон ва ҳар қандай нолмас $\vec{x}$ вектор учун

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{31.1}$$

бўлса, $\vec{x}$ вектор A чизиқли операторнинг *хос вектори*, λ сони эса шу чизиқли операторнинг *хос қиймати* деб аталади. Агар бирор базисда A чизиқли оператор ва $\vec{x}$ вектор

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

матрицалар билан берилган бўлса, у ҳолда (31.1) тенгликка ушбу учта

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases} \tag{31.2}$$

сонли тенглик мос келади. Ҳосил қилинган x_1, x_2, x_3 ларга нисбатан чизиқли тенгламалар системаси (31.2) унинг детерминанти нолга тенг бўлган ҳолда ва фақат шундагина нолдан фарқли ечимга эга бўлади ($\vec{x} \neq 0$ бўлгани учун нол ечим бизни қизиқтирмайди). Бундан

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (31.3)$$

Бу тенглама берилган чизиқли оператор матрицасининг *характеристик тенгламаси* деб аталади.

Бу тенгламанинг ҳар бир λ ҳақиқий илдизи чизиқли операторнинг хос қиймати бўлади. λ сонга мос хос векторнинг координаталари (31.2) системадан топилади.

1-изоҳ. Агар $\vec{x}$ берилган чизиқли операторнинг хос вектори бўлса, у ҳолда унга коллинеар бўлган ҳар қандай нолмас вектор ҳам берилган операторнинг ўша хос сонли хос вектори бўлади.

2-изоҳ. Агар барча хос қийматлар ҳақиқий сонлар бўлса, у ҳолда уларга мос хос векторлар доимо чизиқли эркли бўлади ва уларни янги базис сифатида қабул қилиш мумкин. Бу янги базисда A матрица ҳам соддалашади:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

3-изоҳ. Агар A симметрик матрица бўлса, у ҳолда унинг барча хос қийматлари ҳақиқий сонлар бўлади, хос векторлар эса ўзаро перпендикуляр бўлади.

Мисол. Бирор базисда ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

матрица билан берилган чизиқли операторнинг хос қийматларини ва хос векторларини топинг.

Матрица симметрик, шу сабабли унинг барча хос қийматлари ҳақиқий сонлар бўлади. Уларни топамиз. Бунинг учун характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (31.4)$$

Детерминантни ҳисоблаб,

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0$$

тенгламани оламиз. Бу тенгламанинг коэффициентлари йиғиндиси нолга тенг бўлганлиги учун унинг илдизларидан бири $\lambda_1 = 1$ бўлади. $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28$ кўпҳаднинг қолган илдизларини топиш учун уни $(\lambda - 1)$ га бўлиб, ушбу квадрат тенгламани оламиз:

$$\lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$ бўлади. Шундай қилиб, характеристик тенглама илдизлари: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$ ни — берилган чизиқли операторнинг хос қийматларини топдик. Хос векторларни топиш учун (31.2) тенгламалар системаси

$$\begin{cases}(3-\lambda)\ x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+(4-\lambda)\ x_2-2x_3=0,\\ -2x_2+(5-\lambda)\ x_3=0\end{cases} \tag{31.5}$$

ни $\lambda=\lambda_1,\ \lambda=\lambda_2,\ \lambda=\lambda_3$ да ечамиз.

1) $\lambda=\lambda_1=1$ бўлсин, у ҳолда (31.5) система ушбу кўринишни олади:

$$\begin{cases}(3-1)\ x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+(4-1)\ x_2-2x_3=0,\\ -2x_2+(5-1)\ x_3=0,\end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases}2x_1\ +2x_2=0,\\ 2x_1+3x_2-2x_3=0,\\ -2x_2+4x_3=0,\end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ 2x_1+3x_2-2x_3=0,\\ x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

Бу бир жинсли системанинг (31.4) детерминанти нолга тенг бўлгани учун у нолмас ечимларга эга. Демак, тенгламалардан бири (масалан, иккинчи тенглама) қолган тенгламаларнинг чизиқли комбинациясидан иборат. Иккинчи тенгламани ташлаб юбориб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

«Озод номаълум» битта. Натижада система ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}x_1=-x_2,\\ x_3=\frac{1}{2}x_2.\end{cases}$$

x_2 «озод номаълумга» ихтиёрий қиймат бериб, исталган нолмас ечимни оламиз. $x_2=2$ бўлсин, у ҳолда $x_1=-2,\ x_3=1$. Демак, $\lambda_1=1$ хос қийматга мос хос вектор $\vec{x'}$ ушбу кўринишда бўлади:

$$\vec{x'}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \text{ ёки } \vec{x'}=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Бунга коллинеар исталган вектор ҳам хос вектор бўлади.

2) $\lambda=\lambda_2=4$ хос қийматга мос хос векторни ҳам шунга ўхшаш аниқлаймиз.

Ушбу

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0,\\ 2x_1-2x_3=0,\\ -2x_2+x_3=0\end{cases}$$

системани ечиб, x_1, x_2, x_3 ни топамиз. Бу системадаги биринчи тенгламани ташлаб юбориб,

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = \frac{1}{2} x_3 \end{cases}$$

ни ҳосил қиламиз. x_3 «озод номаълумга» ихтиёрий қиймат бериб, исталган нолмас ечимни оламиз. $x_3 = 2$ бўлсин. У ҳолда

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Демак, $\lambda_2 = 4$ хос қийматга мос хос вектор $\vec{x}''$ ушбу кўринишда бўлади:

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ёки } \vec{x}'' = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

3) Худди шунга ўхшаш, учинчи $\lambda = \lambda_3 = 7$ хос қийматга мос хос векторни ҳам ушбу

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0. \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан ҳосил қиламиз. Системадан иккинчи тенгламани ташлаб юбориб

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_2, \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

ечимларни ҳосил қиламиз.

$x_2 = 2$ бўлсин, у ҳолда $x_1 = 1$, $x_3 = -2$. Демак, $\lambda_3 = 7$ хос қийматга мос хос вектор қуйидагича бўлади:

$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ёки } \vec{x}''' = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

A матрица симметрик эди. Учала хос вектор ўзаро перпендикуляр эканини текшириш осон, чунки $\vec{x}' \cdot \vec{x}'' = 0$, $\vec{x}''' \cdot \vec{x}' = 0$, $\vec{x}'' \cdot \vec{x}''' = 0$. Бу хос векторларни янги базис сифатида олиш мумкин ва унда *A* матрица

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Чизиқли операторнинг матрицаси нима?
2. Чизиқли операторга мисол келтиринг ва унинг матрицасини ёзинг.
3. Чизиқли операторнинг хос қийматлари ва хос векторлари деб нимага айтилади?
4. Чизиқли оператор матрицасининг характеристик тенгламаси нима?
5. Чизиқли операторнинг хос қийматлари ва хос векторларини топиш усулини айтиб беринг.

32-§. Квадратик формалар

Соф математик ва амалий характердаги кўпчилик масалаларда бир неча ўзгарувчининг квадратик формалари учрайди.

Бир неча ўзгарувчининг бир жинсли иккинчи даражали кўпҳади бу ўзгарувчиларнинг *квадратик формаси* деб аталади. Масалан, x_1, x_2, x_3 ўзгарувчиларнинг квадратик формаси

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \tag{32.1}$$

кўринишдаги кўпҳад бўлади. икки ўзгарувчининг квадратик формаси эса

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 \tag{32.2}$$

кўринишдаги кўпҳад бўлади. Бу ерда a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} лар ўзгармас ҳақиқий сонлар.

Квадратик форма фазодаги ҳар бир $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ векторга F сонни (32.1) формула бўйича ёки текисликдаги ҳар бир $\vec{x} = (x_1,\ x_2)$ векторга F сонни (32.2) формула бўйича мос қўяди.

a_{ij} сонли коэффициентлар квадратик формани тўла аниқлайди, уни матрица кўринишида ёзиш мумкин. Буни икки ўзгарувчининг (32.2) квадратик формаси учун келтирамиз. (32.2) ни бундай ёзамиз:

$$\begin{aligned} F &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= (x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = (x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{32.3}$$

Агар $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ устун-матрицани, транспонирланган $x^* = (x_1,\ x_2)$ сатр-матрицани ва a_{ij} коэффициентлардан тузилган

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{32.4}$$

матрицани киритсак, (32.3) квадратик форма ушбу матрица кўринишни олади:

$$F = x^*Ax. \tag{32.5}$$

A матрица икки ўзгарувчи квадратик формаси F нинг матрицаси деб аталади. У симметрик матрицадир. Шунга ўхшаш,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

матрица уч ўзгарувчи квадратик формасининг матрицаси бўлишини кўрсатиш осон. У симметрик матрицадир.

1-мисол. Икки ўзгарувчининг квадратик формаси

$$F = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$$

нинг матрицасини тузинг.

Ечиш. Равшанки, $a_{11} = 17$, $a_{22} = 8$, $a_{12} = 6$. F квадратик форманинг матрицаси бундай ёзилади:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

У симметрик матрицадир.

2-мисол. Уч ўзгарувчининг квадратик формаси

$$F = -3x_1^2 + x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_2x_3$$

нинг матрицасини ёзинг.

Ечиш. Равшанки, $a_{11} = -3$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -8$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -5$, $a_{23} = 1$. Демак, квадратик форма матрицаси бундай ёзилади:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

У симметрик матрицадир.

33-§. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш

Ўзгарувчиларнинг фақат квадратларини ўз ичига олган квадратик форма *каноник кўринишга эга* дейилади. Шу сабабли квадратик формани каноник кўринишга келтириш деган сўз, шундай янги базисни (янги координаталар системасини) топишдан иборатки, унда квадратик форма ўзгарувчиларнинг кўпайтмасини ўз ичига олмасин. Бу янги базисда (32.2) ёки (32.3) квадратик форма ушбу

$$F = a\,(x_1')^2 + b\,(x_2')^2 \tag{33.1}$$

кўринишни олади ёки унинг матрица шаклидаги ёзуви

$$F = (x_1',\ x_2')\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади. Буни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F = x'^*A'x'.$$

Бунда $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ $\vec{x}$ векторнинг янги базисдаги координаталаридан тузилган устун, $x'^* = (x_1',\ x_2')$ — транспонирланган устун, $A' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ квадратик форманинг янги базисдаги матрицаси. Юқорида айтилганидек (31-§, 2 ва 3-изоҳлар), агар янги базис сифатида A матрицанинг хос векторлари олинса, у ҳолда A матрица бу янги базисда бош диагоналда хос қийматлар жойлашган

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

диагонал матрица кўринишини олади. У ҳолда (33.1) квадратик форма ушбу

$$F = \lambda_1 \ (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2$$

кўринишни олади, бу ерда λ_1, λ_2 лар A матрицанинг хос қийматлари. Шундай қилиб, A матрицани квадратик кўринишга келтириш учун A матрицанинг хос қийматларини ва хос векторларини топиш лозим.

Юқорида айтилганларнинг ҳаммаси уч ўзгарувчининг квадратик формаси учун ҳам тўғридир, у канoник кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$F = \lambda_1 \ (x_1')^2 + \lambda_2 \ (x_2')^2 + \lambda_3 \ (x_3')^2,$$

бу ерда λ_1, λ_2, λ_3 — квадратик форма A матрицасининг хос қийматлари.

1-мисол. $F = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$ квадратик формани каноник кўринишга келтиринг, янги базисни (хос векторларни) топинг.

Ечиш. Квадратик форма матрицаси ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади. A матрицанинг хос қийматларини топамиз. Бунинг учун

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

характеристик тенгламани тузамиз. Унинг ечимлари $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$ бўлади. Берилган квадратик форманинг каноник шакли қуйидагича бўлади:

$$F = 5(x_1')^2 + 20 \ (x_2')^2.$$

Берилган форма каноник шаклни оладиган янги базисни топиш учун $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$ хос қийматлар бўйича хос векторларни ушбу

$$\begin{cases} (17-\lambda) \ x_1' + 6x_2' = 0, \\ 6x_1' + (8-\lambda) \ x_2' = 0 \end{cases} \qquad (33.2)$$

системани ечиб топиш лозим.

а) Агар $\lambda = \lambda_1 = 5$ бўлса, (33.2) система ушбу

$$\begin{cases} 12x_1' + 6x_2' = 0, \\ 6x_1' + 3x_2' = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 2x_1' + x_2' = 0, \\ 2x_1' + x_2' = 0 \end{cases}$$

кўринишни олади. Бу система чексиз кўп ечимларга эга. $x_1' = 1$ бўлсин, у ҳолда $x_2' = -2$, $\vec{e}_1 = (1, \ -2)$ хос векторга эга бўламиз.

б) $\lambda = \lambda_2 = 20$ бўлсин, у ҳолда (33.2) система ушбу

$$\begin{cases} -3x_1' + 6x_2' = 0, \\ 6x_1' - 12x_2' = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x_1' - 2x_2' = 0, \\ x_1' - 2x_2' = 0 \end{cases}$$

кўринишни олади. $x_2' = 1$ бўлсин, у ҳолда $x_1 = 2$, $\vec{e}_2 = (2, 1)$ хос векторга эга бўламиз. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, янги базисни ҳосил қилади ва унда, юқорида айтилганидек, квадратик форма ушбу

$$F = 5\,(x_1')^2 + 20\,(x_2')^2$$

кўринишни олади.

34-§. Иккинчи тартибли чизиқларнинг умумий тенгламаси

$P_n(x, y) = 0$ тенглама билан берилган (бу ерда $P_n(x, y)$ ифода x, y ўзгарувчиларнинг n-даражали кўпҳади) чизиқни n-тартибли *алгебраик чизиқ* деб атаймиз. $n = 2$ деб иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини оламиз. $P_2(x, y)$ ифода бу ҳолда иккинчи тартибли кўпҳаддир. Шундай қилиб, текисликдаги иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламаси ушбу

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (34.1)$$

кўринишда бўлади. Бу тенглама A, B, C, D, E, F ўзгармас коэффициентларнинг қийматларига боғлиқ равишда турли чизиқларни тасвирлаши мумкин. Масалан, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 0$ $F = -R^2$ бўлганда (34.1)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

кўринишни олади, бу эса маълумки, радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган айлана тенгламасидир. Агар биз маркази ихтиёрий $O(x_0, y_0)$ нуқтада бўлган айланани қарайдиган бўлсак, у ҳолда унинг тенгламаси

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

кўринишда бўлади, уни ушбу

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

ёки

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

формага келтириш мумкин, бу ерда $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -x_0$, $E = -y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

Шундай қилиб, айлана иккинчи тартибли чизиқдир.

Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини текширишга қайтамиз. (34.1) тенгламадаги иккинчи тартибли ҳадларни алоҳида ёзиб оламиз:

$$L = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Олдинги параграфда кўрсатилганидек, квадратик формани қуйидаги каноник кўринишга келтириш мумкин:

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2.$$

Бу янги базисда берилган чизиқ тенгламаси ушбу

$$\lambda_2\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + 2\hat{D}\breve{x} + 2\tilde{E}\tilde{y} + \breve{F} = 0 \qquad (34.2)$$

кўринишда ёзилади.

1) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ деб фараз қилайлик. $\breve{x}$ ли ва $\hat{y}$ ли қўшилувчиларни йиғиб ва тўла квадратларни ажратиб, (34.2) тенгламани

$$\lambda_1\left(\breve{x} + \frac{\breve{D}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(\hat{y} + \frac{\hat{E}}{\lambda_2}\right)^2 + \tilde{\tilde{F}} = 0$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда

$$\breve{\breve{F}} = \hat{F} - \frac{\breve{D}^2}{\lambda_1} - \frac{\tilde{E}^2}{\lambda_2}.$$

Қуйидагича

$$\tilde{\breve{x}} = \breve{x} + \frac{\hat{D}}{\lambda_1},$$

$$\tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} + \frac{\breve{E}}{\lambda_2}$$

олиб, эски базисга параллел бўлган янги базисга ўтамиз. Бу янги базисда тенглама

$$\lambda_1\tilde{\tilde{x}}^2 + \lambda_2\tilde{\tilde{y}}^2 + \tilde{\tilde{F}} = 0$$

кўринишни олади. Бундан кейин, соддалаштириш мақсадида ҳарфлар устидаги «≍» белгини тушириб қолдирамиз ва оддий қилиб, бундай ёзамиз:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + F = 0. \qquad (34.3)$$

а) $F \neq 0$ бўлсин. (34.3) тенгламани бундай ёзамиз:

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{\lambda_2}} = 1. \qquad (34.4)$$

Агар $-\frac{F}{\lambda_1} > 0$ ва $-\frac{F}{\lambda_2} > 0$ бўлса, у ҳолда (34.4) тенгламада

$$a^2 = -\frac{F}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{F}{\lambda_2}$$

белгилаш киритсак, тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (34.4')$$

Каноник тенгламаси (34'4) кўринишда бўлган иккинчи тартибли эгри чизиқ *эллипс* деб аталади.

Агар $-\frac{F}{\lambda_1} > 0$, $-\frac{F}{\lambda_2} < 0$ $\left(\text{ёки } -\frac{F}{\lambda_1} < 0, \quad -\frac{F}{\lambda_2} > 0\right)$ бўлса, у ҳолда (34.4) тенгламада

$$a^2 = -\frac{F}{\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{F}{\lambda_2}\left(\text{ёки} \quad a^2 = \frac{F}{\lambda_1}, \quad b^2 = -\frac{F}{\lambda_2}\right)$$

белгилаш киритсак, тенглама бундай ёзилади:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left(\text{ёки } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right) \qquad (34.4'')$$

Каноник тенгламаси (34.4″) кўринишда бўлган иккинчи тартибли эгри чизиқ *гипербола* деб аталади. Ниҳоят, $-\frac{F}{\lambda_1}<0$, $-\frac{F}{\lambda_2}<0$ бўлса, у ҳолда координаталари (34.4) тенгламани қаноатлантирадиган битта ҳам нуқта мавжуд эмас. Бу ҳолда тенглама мавҳум эллипсни аниқлайди, деб айтилади.

б) $F=0$ бўлсин. (34.3) тенгламани бундай ёзамиз:

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2=0. \qquad (34.5)$$

Агар λ_1 ва λ_2 нинг ишоралари бир хил бўлса, у ҳолда (34.5) тенгламани ягона (0; 0) нуқта қаноатлантиради.

Агар λ_1 ва λ_2 нинг ишоралари турлича, айтайлик, $\lambda_1>0$ ва $\lambda_2<0$ бўлса, у ҳолда (34.5) тенглама ушбу иккита

$$\sqrt{\lambda_1}x-\sqrt{-\lambda_2}y=0,$$
$$\sqrt{\lambda_1}x+\sqrt{-\lambda_2}y=0$$

тенгламага ажралади. Уларнинг ҳар бири (0; 0) орқали ўтадиган тўғри чизиқни аниқлайди, демак, (34.5) кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтини аниқлайди.

2) Хос қийматлардан бири, масалан, $\lambda_2=0$ бўлсин. (34.2) тенгламада тўла квадрат ажратиб, уни

$$\lambda_1 x^2+2Ey+F=0 \qquad (34.6)$$

кўринишга келтирамиз (яна « ~ » белгиларни тушириб қолдирамиз). Агар $E\neq 0$, $F=0$ бўлса, (34.6) тенгламада $p=-\frac{E}{\lambda_1}$ белгилашни киритсак, тенглама ушбу кўринишни олади:

$$x^2=2py. \qquad (34.6')$$

Каноник тенгламаси (34.6′) ёки $y^2=2px$ кўринишда бўлган иккинчи тартибли эгри чизиқ *парабола* деб аталади. Агар $E=0$, лекин $F\neq 0$ бўлса, Oy ўққа параллел иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади: $x=\pm\sqrt{\frac{F}{\lambda_1}}$ (агар $\frac{F}{\lambda_1}>0$ бўлса, улар мавҳум тўғри чизиқлардир). Ниҳоят, агар $E=0$ ва $F=0$ бўлса, у ҳолда $x=0$ тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

Юқорида баён қилинганларга асосан қуйидаги хулосага келамиз: икки ўзгарувчили иккинчи даражали умумий тенглама ё эллипсни, ёки гиперболани, ёки кесишувчи, параллел ёки қўшилиб кетган тўғри чизиқлар жуфтини, ёки мавҳум чизиқни тасвирлаши мумкин.

Мисол. Тенгламаси

$$4x^2+12xy+4y^2+10x+10y-3=0$$

кўринишда бўлган иккинчи тартибли чизиқни текширинг.

Ечиш. Иккинчи даражали ҳадлар

$$F = 4x^2 + 12xy + 4y^2$$

квадратик формани ҳосил қилади. Уни, олдинги параграфдаги каби, каноник кўринишга келтирамиз. Квадратик форма матрицасини тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ушбу характеристик тенгламани ечиб,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 36 = 0$$

A матрицанинг $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 10$ хос қийматларини топамиз. Квадратик форманинг янги базисдаги (координаталардаги) каноник кўринишини бирданига ёзиш мумкин: $F = -2x^2 + 10y^2$. Форма шу кўринишни оладиган базисни топамиз. Шу мақсадда ушбу

$$\begin{cases} (4-\lambda)x + 6y = 0, \\ 6x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз. Бунга $\lambda = \lambda_1 = -2$ ни қўйиб,

$$\begin{cases} 6x + 6y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases}$$

ни оламиз, бундан $x = 1$ бўлганда $y = -1$ га эга бўламиз ва $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ базис векторни оламиз. Унга мос $\vec{e}_1^{\,\circ}$ бирлик вектор бундай бўлади:

$$\vec{e}_1^{\,\circ} = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

$\lambda = \lambda_2 = 10$ ни қўйиб, $\begin{cases} -6x + 6y = 0, \\ 6x - 6y = 0 \end{cases}$ ни оламиз, бундан

$x = 1$ бўлганда $y = 1$. Иккинчи базис вектор $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j}$ ни олдик. Унга мос бирлик вектор бундай бўлади:

$$\vec{e}_2^{\,\circ} = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Шундай қилиб, эски ва янги координаталарнинг боғланиш формулалари бундай бўлади:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y},$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}.$$

Бу формулалардан фойдаланиб, янги координаталарга ўтсак, берилган тенглама ушбу

$$-2\tilde{x}^2 + 10\tilde{y}^2 + \frac{20}{\sqrt{2}}\tilde{y} - 3 = 0$$

кўринишни олади. Тўла квадрат ажратиб,

$$-2\tilde{x}^2+10\left(\tilde{y}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=8$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Энди координаталар бошини $\tilde{x}=0$, $\tilde{y}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ координатали нуқтага кўчирсак ва янги координаталарни x, y орқали белгиласак, у ҳолда $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4/5}=1$ га эга бўламиз. Бу ердан берилган тенглама гиперболани аниқлаши кўриниб турибди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Квадратик форма ва унинг матрицаси деб нимага айтилади?
2. Қайси ҳолда квадратик форма каноник кўринишда деб айтилади?
3. Иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини каноник кўринишга келтиришда квадратик формалар назариясидан қандай фойдаланилади?
4. 316—325-масалаларни ечинг.

35-§. Эллипс, гипербола ва парабола тенгламаларининг каноник формалари

x ва y координаталарга нисбатан иккинчи даражали тенглама билан аниқланадиган чизиқ иккинчи тартибли эгри чизиқ деб аталишини биз энди биламиз.

Агар эгри чизиқ нуқталари бирор нуқтага нисбатан симметрик бўлса, бу эгри чизиқ *марказий чизиқ*, нуқта эса эгри чизиқнинг маркази деб аталади.

Биз иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг *каноник тенгламалар* деб аталадиган тенгламаларини кўриб чиқамиз. Бу эгри чизиқнинг маркази ёки учи (бу ҳақда қуйироқда айтамиз) координаталар бошида, симметрия ўқлари эса координаталар боши билан устма-уст тушган ҳолдир. Бу тенгламаларни санаб ўтамиз.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — эллипс тенгламасининг каноник шакли.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — гипербола тенгламасининг каноник шакли.

$y^2=2px$ — парабола тенгламасининг каноник шакли.

36-§. Эллипс, гипербола ва параболанинг геометрик хоссаларини текшириш

Эллипс, гипербола ва параболанинг кўринишини ва хоссаларини тегишли эгри чизиқнинг каноник тенгламасига асосланиб текширамиз.

1. Эллипс. Олдинги параграфда айтилганидек эллипс каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (36.1)$$

кўринишда бўлган иккинчи тартибли эгри чизиқдир.

Симметрия. (36.1) тенглама координаталарнинг фақат квадратларини ўз ичига олади, шу сабабли эллипсга $M(x; y)$ нуқта мос келса, у ҳолда унга $M(-x; -y)$ ҳам тегишли бўлади. Демак, (36.1) эллипс координата ўқларига ва координаталар бошига нисбатан симметрик. Координаталар боши (36.1) эллипснинг симметрия маркази, координата ўқлари эса унинг симметрия ўқлари деб аталади.

Координата ўқлари билан кесишиши. Агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда (36.1) тенгламадан $\frac{y^2}{b^2} = 1$ ёки $y = \pm b$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса эллипс ординаталар ўқини $B_1(0; b)$ ва $B_2(0; -b)$ нуқталарда кесиб ўтишини билдиради.

Агар $y = 0$ бўлса, у ҳолда (36.1) тенгламадан $\frac{x^2}{a^2} = 1$ ёки $x = \pm a$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса эллипс абсциссалар ўқини $A_1(a; 0)$ ва $A_2(-a; 0)$ нуқталарда кесиб ўтишини билдиради.

Чизиқнинг симметрия ўқлари билан кесишиш нуқталарини чизиқнинг учлари деб атаймиз. Эллипснинг учлари орасидаги масофалар $|A_1A_2| = 2a$, $|B_1B_2| = 2b$ унинг ўқлари деб аталади. Ўқлардан каттаси катта ўқ, иккинчиси эса кичик ўқ деб аталади. a ва b лар ярим ўқлар дейилади.

Координаталарнинг ўзгариш соҳаси. Эллипснинг (36.1) тенгламасидан кўриниб турибдики,

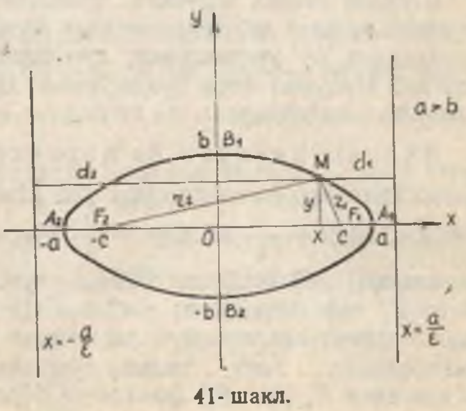
$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1 \text{ ва } \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \text{ ёки } x^2 \leqslant a^2 \text{ ва } y^2 \leqslant b^2.$$

Бундан x ва y координаталарнинг ўзгариш соҳаси келиб чиқади:

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b.$$

Эллипснинг симметриклигига асосан уни фақат биринчи чоракда текшириш етарли. Биринчи чоракда эллипс тенгламасини $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ кўринишда ёзиш мумкин. Бундан x координата 0 дан a гача ортса, y координата b дан 0 гача камаяди. Демак, (36.1) эллипс чегараланган чизиқ, у маркази координаталар бошида ҳамда томонлари $2a$ ва $2b$ бўлган тўғри тўртбурчак ичида жойлашган (41-шакл).

Фокуслар. Фараз қилайлик $a > b$ бўлсин. Эллипснинг катта ўқида фокуслар деб аталадиган $F_1(c, 0)$ ва $F_2(-c, 0)$ нуқталар мавжуд бўлиб, улар ушбу хоссага эга: Эллипснинг исталган $M(x, y)$ нуқтасидан F_1 ва F_2 фокусларгача бўл-



41- шакл.

ган масофалар йиғиндиси ўзгармас катталик бўлиб, катта ўқ узунлиги $2a$ га тенг. Ҳақиқатан ҳам, $M(x, y)$ эллипсга тегишли бўлсин ва

$$|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad |MF_1| + |MF_2| = 2a$$

ёки

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a,$$

бундан

$$2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2,$$

$$4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ ёки } a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Бу ердан

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2),$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Бундан

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \qquad (36.2)$$

тенглама келиб чиқади. (36.2) ни (36.1) билан таққослаб, ушбуга эга бўламиз:

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ ёки } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Хоссанинг тўғрилиги исботланди.

Фокуслар орасидаги $|F_1F_2| = 2c$ масофа эллипснинг фокус масофаси деб аталади; бундан $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c < a$ лиги равшан, шунинг учун фокуслар A_1 ва A_2 лар орасида жойлашған. Эллипснинг фокуслар жойлашган катта ўқи яна фокал ўқ деб ҳам аталади. $|MF_1|$ ва $|MF_2|$ катталиклар фокал радиуслар деб аталади, ҳамда r_1 ва r_2 билан белгиланади.

Шундай қилиб, эллипсга қуйидагича геометрик таъриф бериш мумкин: эллипс деб текисликдаги шундай нуқталарнинг тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан шу текисликнинг фокуслар деб аталувчи икки нуқтасигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас миқдордир.

Эксцентриситет ва директрисалар. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ катталик эллипснинг *эксцентриситети* деб аталади. $0 < c < a$ бўлгани учун $0 < \varepsilon < 1$. $x = \frac{a}{\varepsilon}$ ва $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ тўғри чизиқлар эллипснинг *директрисалари* деб аталади. Эллипс учун $\varepsilon < 1$ бўлгани сабабли $x > a$ (I ва IV чоракларда) ва $x < -a$ (II ва III чоракларда), эллипснинг директрисалари бу эллипсдан ташқарида жойлашган тўғри чизиқлардир. Ушбу тасдиқ ўринли. Эллипснинг исталган M нуқтасидан F_1 (ёки F_2) фокусгача бўлган масофа билан мос директрисагача бўлган масофалар нисбати ўзгармас катталик бўлиб, ε эксцентриситетга тенг, яъни $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$ ва $\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$; бу ерда d_1 ва d_2 — эллипснинг M нуқтасидан директрисаларгача бўлган масофалар.

1-мисол. Эллипснинг катта ўқи $2a=8$ ни ва директрисалар орасидаги масофа $\frac{2a}{\varepsilon}=16$ ни билган ҳолда унинг каноник тенгламасини топинг.

Ечиш. Эллипснинг каноник тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ кўринишда экани маълум. Бундаги a ва b қийматларни топиш лозим. $2a=8$ шартдан $a=4$ бўлиши келиб чиқади. Иккинчи шарт $\frac{2a}{\varepsilon}=16$ дан $\varepsilon=\frac{1}{2}$ экани келиб чиқади. Бироқ $\varepsilon=\frac{c}{a}$, шу сабабли

$$c=a\cdot\varepsilon=4\cdot\frac{1}{2}=2,\quad b^2=a^2-c^2=4^2-2^2=12,$$

бу ердан $b=2\sqrt{3}$.

Шундай қилиб, эллипснинг изланаётган каноник тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

2. Гипербола. Каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (36.3)$$

бўлган иккинчи тартибли эгри чизиқ гипербола деб аталади.

Гиперболанинг шакли ва хоссаларини унинг тенгламаси ёрдамида текширамиз.

Симметрия. (36.3) тенгламага координаталарнинг фақат квадратлари киради, демак, гипербола координата ўқларига ва координата бошига нисбатан симметрик чизиқдир. Координата ўқлари унинг симметрия ўқлари, координаталар боши эса симметрия маркази бўлади.

Координата ўқлари билан кесишиши. Агар $x=0$ бўлса, (36.3) тенгламадан $-\frac{y^2}{b^2}=1$ бўлиши келиб чиқади. Бунинг бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли гипербола Oy ординаталар ўқини кесмайди.

$B_1(0;\ b)$ ва $B_2(0;\ -b)$ нуқталар *мавҳум учлар*, $|B_1B_2|$ кесма *мавҳум ўқ* деб аталади. Агар $y=0$ бўлса, у ҳолда (36.3) тенгламада $\frac{x^2}{a^2}=1$ ёки $x=\pm a$ бўлиши келиб чиқади. Шу сабабли гипербола Ox абсциссалар ўқини $A_1(a;\ 0)$ ва $A_2(-a;\ 0)$ нуқталарда кесиб ўтади. Бу нуқталар гиперболанинг *ҳақиқий учлари* деб аталади. $|A_1A_2|=2a$ гиперболанинг *ҳақиқий ўқи*, a ва b лар эса *ҳақиқий* ва *мавҳум ярим ўқлари* дейилади.

Координаталарнинг ўзгариш соҳаси. (36.3) тенгламадан $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$ бўлиши кўриниб турибди, бундан $x^2 \geqslant a^2$ ёки $x \geqslant a$ ва $x \leqslant -a$ бўлиши келиб чиқади. (36.3) тенгламадан $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ ни ҳосил қиламиз, бундан x координата a дан ∞ гача ортганда y координата 0 дан $\pm\infty$ гача ўзгариши, x координата $-a$ дан $-\infty$ гача камайганда y координата 0 дан $\pm\infty$ гача ўзгариши келиб чиқади. Демак, гипербола чегараланмаган чизиқ бўлиб, у $x=a$ ва $x=-a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳадан ташқарида жойлашган ва иккита тармоққа эга.

Фокуслар. Гиперболанинг ҳақиқий ўқида фокуслар деб аталадиган иккита нуқта $F_1(c; 0)$ ва $F_2(-c; 0)$ мавжуд бўлиб, улар учун ушбу хосса ўринли: гиперболанинг исталган $M(x; y)$ нуқтасидан F_1 ва F_2 фокусларгача бўлган масофалар айирмаси ўзгармас катталик бўлиб мусбат ёки манфий ишора билан олинган фокал ўқ узунлиги $2a$ га тенг.

Ҳақиқатан ҳам. $M(x; y)$ гиперболага тегишли бўлсин, у ҳолда $|MF_1|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $|MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a$ ёки

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2,$$

$$4a^2+4cx=\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$a^2+cx=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

бундан

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2xc+c^2+y^2),$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

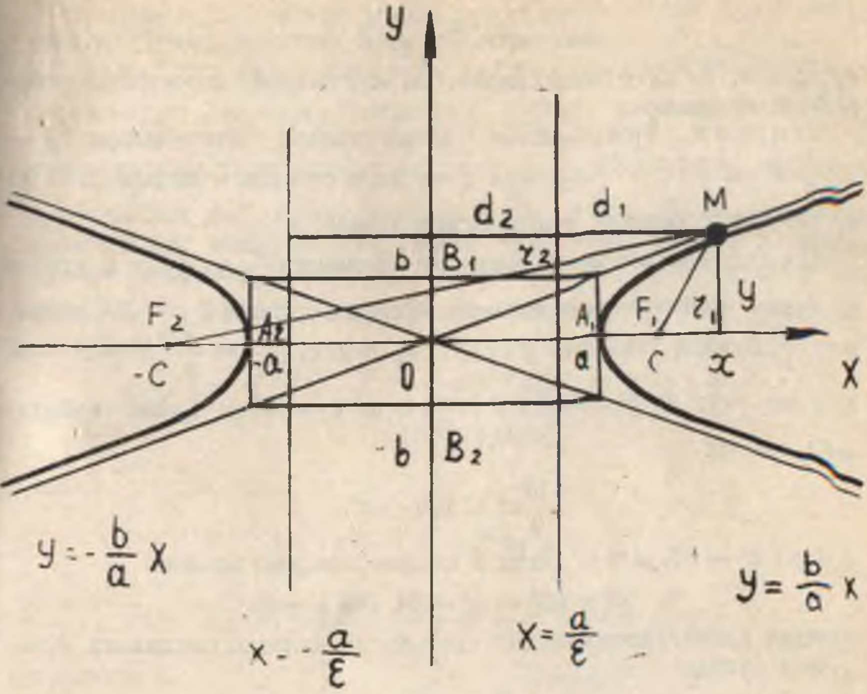
ёки

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \qquad (36.4)$$

(36.4) ва (36.6) ни таққосласак, $c^2-a^2=b^2$ деган хулосага келамиз ёки $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Хоссанинг тўғрилиги исботланди.

Фокуслар орасидаги масофа эллипсдаги каби гиперболанинг фокус масофаси деб аталади: $|F_1F_2|=2c$, бу ерда $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Равшанки, $c>a$, шу сабабли фокуслар $2a$ ҳақиқий ўқдан ташқарида жойлашган. Бу ўқ фокал ўқ деб ҳам аталади. $|MF_1|$ ва $|MF_2|$ катталиклар фокал радиуслар деб аталади, ҳамда r_1 ва r_2 билан белгиланади.

Шундай қилиб, гиперболага қуйидагича геометрик таъриф беришимиз мумкин: гипербола деб текисликдаги шундай нуқталарнинг тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан шу текислик-



42- шакл.

нинг фокуслар деб аталувчи икки нуқтасигача бўлган масофалар айирмаларининг абсалют қийматлари ўзгармас миқдордир.

Асимптоталар. $y = \frac{b}{a} x$ ва $y = -\frac{b}{a} x$ туғри чизиқлар гиперболанинг асимптоталари деб аталади. Улар ушбу хоссага эга: гиперболанинг ихтиёрий M нуқтасидан унга яқин асимптотагача бўлган масофа M нуқта гипербола бўйлаб кўчиб, чексиз узоқлашганида нолга интилади (42- шакл).

Эксцентриситет ва директрисалар. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ катталик эллипсдаги каби гиперболанинг эксцентриситети деб аталади. $c > a$ бўлгани учун $\varepsilon > 1$. $x = \frac{a}{\varepsilon}$ ва $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ тўғри чизиқлар директрисалар деб аталади. Гипербола учун $\varepsilon > 1$, у ҳолда $x < a$ (I ва IV чоракларда) ва $x > -a$ (II, III чоракларда), яъни гиперболанинг директрисалари унинг учлари орасида жойлашган тўғри чизиқлардир. Эллипсдаги каби ушбу хосса бу ерда ҳам ўринли: гиперболанинг исталган M нуқтасидан F_1 (ёки F_2) фокусгача бўлган масофа билан мос директрисагача бўлган масофалар нисбати ўзгармас катталик бўлиб, ε эксцентриситетга тенг, яъни

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

бу ерда d_1 ва d_2 — гиперболанинг M нуқтасидан директрисаларгача бўлган масофалар.

2-мисол. Гиперболанинг асимптоталари тенгламалари $y = \frac{4}{3}x$ ва $y = -\frac{4}{3}x$ ҳамда фокуслари орасидаги масофа $2c = 20$ бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечиш. Гиперболанинг каноник тенгламаси $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ эди. a ва b нинг қийматларини топамиз. Масала шартидан $2 \cdot c = 20$, демак, $c = 10$, бундан ташқари, $y = \pm\frac{4}{3}x$, демак, $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, $b^2 = c^2 - a^2$ бўлгани учун бу тенгликка $b = \frac{4}{3}a$ ва $c = 10$ ни қуйиб қуйидагини оламиз:

$$\frac{16}{9}a^2 = 100 - a^2,$$

бундан $a^2 = 36$, $a = 6$. Энди b ни ҳам аниқлаш мумкин:

$$b^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \text{ ёки } b = 8.$$

Шундай қилиб, гиперболанинг изланаётган каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

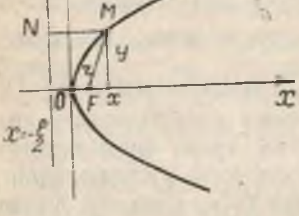
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

3. **Парабола.** Каноник тенгламаси

$$y^2 = 2px \tag{36.5}$$

кўринишда бўлган иккинчи тартибли эгри чизиқ парабола деб аталади. Бу тенгламадан x координата билан p параметрнинг ишоралари бир хил бўлиши кераклиги келиб чиқади. Аниқлик учун $p > 0$ деймиз.

Симметрия. (36.5) тенгламадан кўринадики, x нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига y нинг ишора бўйича қарама-қарши иккита қиймати мос келади, чунки $y = \pm\sqrt{2px}$. Шу сабабли Ox ўқи параболанинг симметрия ўқи деб аталади (43- шакл).



43- шакл.

Координата ўқлари билан кесишиши. Агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда (36.5) тенгламадан $y = 0$ бўлиши келиб чиқади. Шу сабабли парабола Oy ўқини параболанинг учи деб аталадиган $O(0;0)$ нуқтада кесади. Шундай қилиб, парабола координаталар бошидан ўтади.

Координаталарнинг ўзгариш соҳаси. Парабола тенгламасидан кўринадики, x координата 0 дан $+\infty$ гача ўзгарганда ($p>0$ бўлган ҳолда) y координата 0 дан $\pm\infty$ гача ўзгаради. Демак, парабола чегараланмаган чизиқ.

Параболанинг фокуси, директрисаси ва эксцентриситети. Симметрия ўқида (Ox ўқида) жойлашган $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ нуқта параболанинг фокуси деб, $x=-\frac{p}{2}$ тўғри чизиқ эса унинг директрисаси деб аталади ва улар ушбу хосса билан боғланган: параболанинг исталган нуқтасидан фокусгача ва директрисагача бўлган масофалар ўзаро тенг. Ҳақиқатан, $M(x; y)$ нуқта параболага, $N\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ нуқта директрисага тегишли бўлсин, у ҳолда

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}, \quad |MN|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2},$$

$$|MF|=|MN|$$

ёки

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

бу ердан

$$y^2=2px.$$

Шундай қилиб, хоссанинг тўғрилиги исботланди.

Демак, параболага қуйидагича геометрик таъриф беришимиз мумкин: парабола деб текисликнинг фокус деб аталувчи берилган F нуқтасидан ва директриса деб аталувчи берилган тўғри чизиқдан тенг узоқликда жойлашган барча нуқталари тўпламига айтилади.

$|OF|=\frac{p}{2}$ масофа фокус масофа. Ox симметрия ўқи фокал ўқ деб аталади. $|MF|$ катталик фокал радиус деб аталади ва $r=|MF|$ билан белгиланади. M нуқтадан директрисагача бўлган масофани d орқали белгиласак, яъни $|MN|=d$, у ҳолда исботланган хоссани бундай ёзиш мумкин:

$$r=d \text{ ёки } \frac{r}{d}=1.$$

Эллипс ва гиперболанинг хоссаларини ёдга олсак, параболанинг эксцентриситети бирга тенг деб ҳисоблаш мумкин, яъни $\varepsilon=1$. Парабола асимптоталарга эга эмас.

Изоҳ. Агар параболанинг фокал ўқи Oy ўқи сифатида олинса, парабола тенгламаси ушбу кўринишни олади: $x^2=2py$.

3-мисол. Параболанинг $y^2=4x$ каноник тенгламаси берилган. Директриса тенгламасини тузинг ва фокуснинг координаталарини топинг.

Ечиш. $y^2 = 2px$ каноник тенглама билан таққосласак, $2p = 4$ деган хулосага келамиз, яъни $p = 2$. Парабола директрисаси $x = -\frac{p}{2}$ кўринишда, фокус координаталари $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$ бўлгани учун директриса тенгламаси $x = -1$ ва фокус $F(1; 0)$ бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай чизиқ эллипс деб аталади? Унинг каноник тенгламасини ёзинг.
2. Қандай нуқта эллипс маркази деб аталади?
3. Қандай нуқталар эллипснинг учлари деб аталади?
4. Эллипснинг эксцентриситети деб нимага айтилади ва у доимо қандай тенгсизликни қаноатлантиради?
5. Эллипснинг директрисаси нима? Эллипснинг фокуслари қаерда ётади? Улар қандай хосса билан боғланган?
6. Қандай чизиқ гипербола деб аталади? Унинг каноник тенгламасини ёзинг.
7. Қандай нуқта гиперболанинг маркази деб аталади?
8. Қандай нуқталар гиперболанинг учлари деб аталади?
9. Гиперболанинг эксцентриситети деб нимага айтилади ва у доимо қандай тенгсизликни қаноатлантиради?
10. Гиперболанинг директрисаси нима? Гиперболанинг фокуслари қаерда ётади?
11. Гиперболанинг асимптоталари нима?
12. Қандай чизиқ парабола деб аталади? Унинг каноник тенгламасини ёзинг.
13. Параболанинг фокуси ва директрисаси нима? Улар қандай хосса билан боғланган?
14. 179 — 193, 211 — 213- масалаларни ечинг.

37-§. Иккинчи тартибли сиртлар

Маълумки, фазодаги сирт учта ўзгарувчи x, y ва z ни боғлайдиган тенглама билан аниқланади.

x, y ва z га нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенглама билан аниқланган сирт *иккинчи тартибли сирт* деб аталади. Бундай сиртнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz + 2Eyz + 2Fxy + \\ + ax + by + cz + d = 0, \tag{37.1}$$

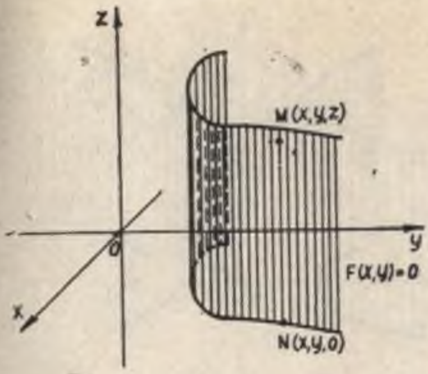
бунда A, B, C, D, E, F коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли. A, B, C, D, E, F, a, b, c, d ўзгармас коэффициентларнинг қийматларига боғлиқ равишда бу тенглама турли сиртларни аниқлаши мумкин. Масалан, $A = B = C = 1$, $D = E = F = 0$, $a = b = c = 0$, $d = -R^2$ бўлса, бу тенглама $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ кўринишни олади, бу эса, маълумки, радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган сфера тенгламасидир. Агар маркази $O_1(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада бўлган сферани қарайдиган бўлсак, унинг тенгламаси бундай бўлади:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

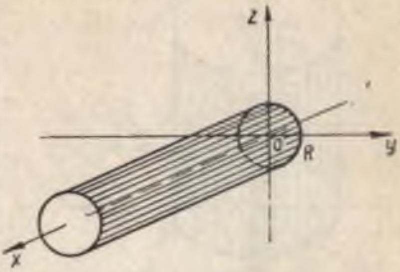
Буни

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

кўринишга келтирамиз ва сиртнинг умумий тенгламаси (37.1) билан солиштирамиз. Равшанки,



44- шакл.



45- шакл.

$$A=1,\ B=1,\ C=1,\ D=E=F=0,\ a=-2x_0,\ b=-2y_0,$$
$$c=-2z_0,\ d=x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2.$$

Шундай қилиб, сфера иккинчи тартибли сиртдир. Иккинчи тартибли сиртларнинг хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз.

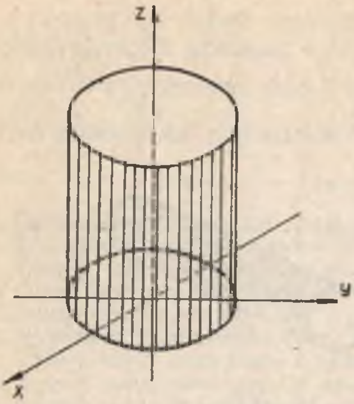
1. Ясовчилари координата ўқларидан бирига параллел бўлган сиртлар. Бирор берилган чизиқни кесувчи тўғри чизиқнинг бу чизиқ бўйлаб ва берилган йўналишга параллел ҳаракатидан ҳосил бўлган сирт *цилиндрик сирт* деб аталади. Ҳаракатланувчи тўғри чизиқ *ясовчи*, берилган чизиқ эса *йўналтирувчи* деб аталади.

Ясовчи Oz ўққа параллел, йўналтирувчи чизиқ эса Oxy текисликда ётадиган ва $F(x, y)=0$ тенглама билан аниқланадиган ҳолни қараймиз (44- шакл). Сиртнинг ясовчисида ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқта оламиз, унинг биринчи иккита координатаси $N(x; y; 0)$ нуқта координаталари билан бир хил бўлади. Шу сабабли цилиндрик сиртнинг $M(x; y; z)$ нуқтасининг координаталари йўналтирувчи чизиқ тенгламаси $F(x, y)=0$ ни қаноатлантиради.

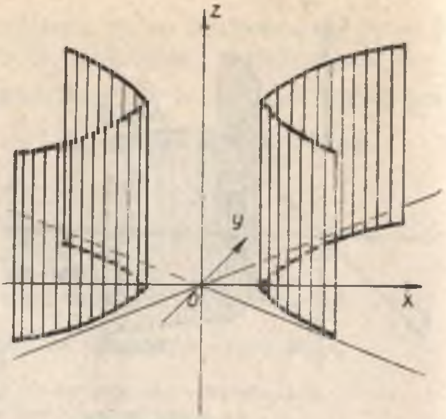
Демак, бу тенглама ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндрик сиртнинг тенгламасидир. Шундай қилиб, z координатани ўз ичига олмаган ва фазода қаралаётган $F(x, y)=0$ тенглама ясовчилари Oz ўққа параллел ва йўналтирувчиси Oxy текисликда ўша тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сиртни аниқлайди. Шунга ўхшаш x координатани ўз ичига олмаган $F(y, z)=0$ тенглама ва y координатани ўз ичига олмаган $F(x, z)=0$ тенглама ясовчилари мос равишда Ox ва Oy ўқларга параллел бўлган цилиндрик сиртларни аниқлайди.

1- мисол. $y^2+z^2=R^2$ тенглама билан аниқланадиган сирт цилиндрик сирт бўлиб, у *доиравий цилиндр* деб аталади. Унинг ясовчилари Ox ўққа параллел, Oyz текисликдаги йўналтирувчиси эса радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган $y^2+z^2=R^2$ айлана тенгламасидир (45- шакл).

2- мисол. Ушбу



46- шакл.



47- шакл.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сирт *эллиптик цилиндр* деб аталади. Унинг ясовчилари Oz ўққа параллел, Oxy текисликдаги йўналтирувчиси эса ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсдир (46- шакл).

3- мисол. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сирт *гиперболик цилиндр* деб аталади. Унинг ясовчилари Oz ўққа параллел, Oxy текисликдаги йўналтирувчиси эса ҳақиқий ўқи a ва мавҳум ўқи b бўлган гиперболадир (47- шакл).

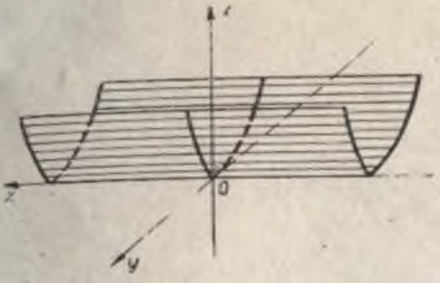
4- мисол. Ушбу

$$x^2=2pz$$

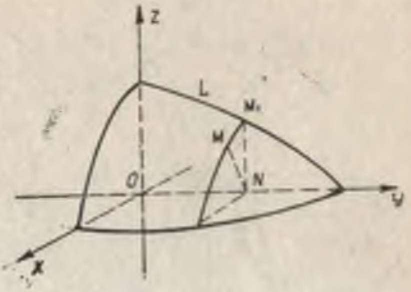
тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сирт *параболик цилиндр* деб аталади. Унинг ясовчилари Oy ўққа параллел, Oxz текисликдаги йўналтирувчиси эса параболадир (48- шакл).

2. Айланиш сиртлари. Oyz текисликдаги $F(y, z)=0$ тенглама билан берилган L чизиқни қарайлик. Бу чизиқнинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасини топамиз. Бу сиртда ихтиёрий $M(x; y; z)$ нуқтани оламиз ва у орқали айланиш ўқига перпендикуляр текислик ўтказамиз. Кесимда маркази айланиш ўқидаги $N(0; y; 0)$ нуқтада бўлган айлана ҳосил бўлади. Бу айлананинг радиуси $\sqrt{x^2+z^2}$ га тенг (49- шакл). Лекин, иккинчи томондан, бу радиус берилган L чизиқ $M_1(0; Y; Z)$ нуқтаси аппликатасининг абсолют қийматига тенг. Бу нуқтанинг ординатаси y га тенг. Демак, берилган тенгламада

$$Y=y,\quad Z=\pm\sqrt{x^2+z^2}$$



48- шакл.



49- шакл.

(M_1 нуқтанинг координаталари) деб изланаётган айланиш сиртининг ушбу тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

Шундай қилиб, L чизиқнинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламасини олиш учун бу чизиқ тенгламасида z ни $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ га алмаштириш керак. Шунга ўхшаш қоида чизиқларнинг бошқа координата ўқлари атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртлар учун ҳам ўринлидир.

5- мисол. Oxz текисликда жойлашган

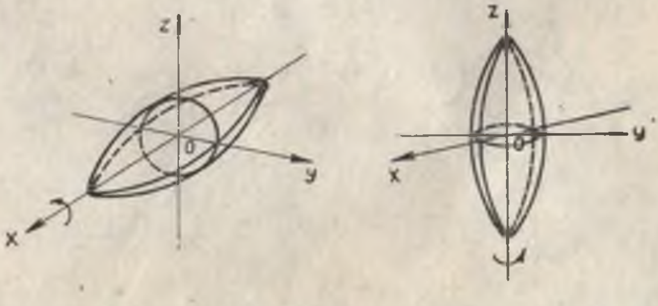
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

эллипснинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламасини z ни $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ га алмаштириб, x координатани эса ўзгаришсиз қолдириб ҳосил қиламиз, яъни

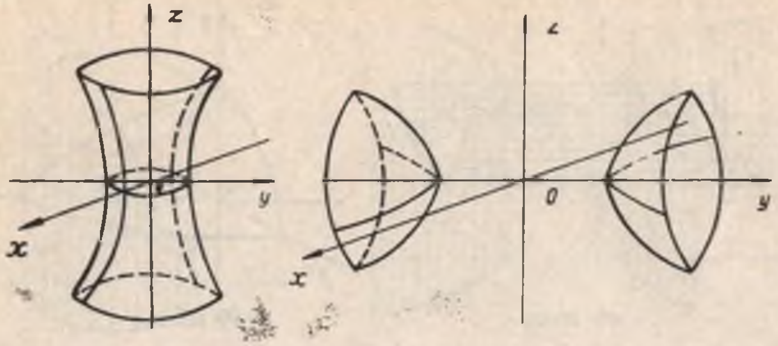
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Агар эллипс Oz ўқи атрофида айланаётган бўлса, у ҳолда унинг тенгламасида x координатани $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ га алмаштириш, z координатани эса ўзича қолдириш лозим. Натижада

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



50- шакл.



51- шакл.

бўлади. Ҳосил бўлган сиртлар *айланиш эллипсоидлари* деб аталади. $a=c$ бўлганда сферага эга бўламиз (50- шакл).

6- мисол. Oyz текисликда жойлашган

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

гиперболанинг Oz ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламаси

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

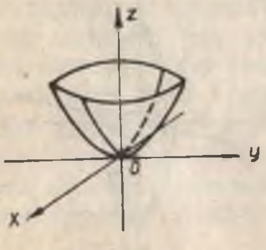
бўлади. Бу *бир паллали айланиш гиперболоиди* деб аталадиган сиртдир.

Агар шу гиперболанинг ўзини Oy ўқи атрофида айлантирилса, ҳосил бўлган сирт $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$ тенгламага эга бўлади. Бу *икки паллали гиперболоид* деб аталадиган сиртдир (51- шакл).

7- мисол. Oyz текисликда жойлашган $y^2=2pz$ параболанинг Oz ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламаси

$$x^2+y^2=2pz$$

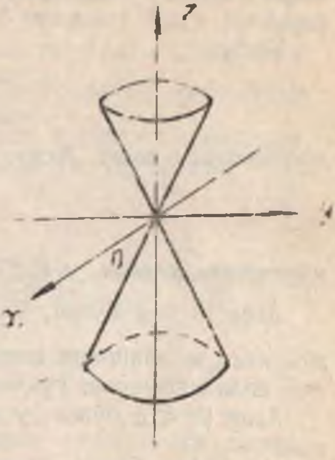
бўлади. Бу *айланиш параболоиди* деб аталадиган сиртдир (52- шакл).



52- шакл.

3. Конуссимон сиртлар. *Конуссимон сирт* деб конуснинг учи деб аталадиган берилган нуқтадан ўтувчи ва конуснинг йўналтирувчиси деб аталадиган берилган чизиқни кесувчи барча тўғри чизиқлардан ташкил топган сиртга айтилади. Бунда берилган нуқта берилган чизиқда ётмайди. Конуссимон сирт ташкил этадиган тўғри чизиқларнинг ҳар бири конуснинг *ясовчиси* деб аталади.

Учи координаталар бошида бўлган иккинчи тартибли конуссимон сирт ҳар доим x, y ва z координаталарга нисбатан иккинчи даражали бир жинсли тенглама билан берилишини исботсиз айтиб ўтамиз. Масалан, $x^2+y^2-z^2=0$ тенглама учи координаталар бошида бўлган доиравий конусни аниқлайди (53- шакл).



53- шакл.

38- §. Асосий иккинчи тартибли сиртлар тенгламаларининг каноник шакли. Сиртларни кесимлар усули билан текшириш

Иккинчи тартибли сиртлар тенгламаларининг каноник шаклларини қараймиз. Бу сиртларнинг хусусияти шундаки, координата ўқлари улар учун симметрия ўқлари бўлади, уларнинг учи ёки симметрия маркази эса координаталар боши билан устма-уст тушади. Сиртнинг тенгламаси бўйича унинг кўриниши ҳақида кесимлар усули ёрдамида тасаввур ҳосил қилиш мумкин бўлиб, у қуйидагидан иборат. Берилган сирт координата текисликлари ёки координата текисликларига параллел текисликлар билан кесилади ва олинган кесимларнинг тури бўйича сирт тури текширилади.

1. **Эллипсоид.** Каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{38.1}$$

кўринишда бўлган иккинчи тартибли сирт *эллипсоид* деб аталади, бу ерда a, b, c — берилган ўзгармас мусбат сонлар.

Эллипсоиднинг шаклини аниқлаймиз. (38.1) тенглама координаталарнинг фақат квадратларини ўз ичига олади, шу сабабли эллипсоидга $M(x;\ y;\ z)$ нуқта тегишли бўлса, у ҳолда унга ишоралари исталганча комбинацияланган $M(\pm x;\ \pm y;\ \pm z)$ нуқталар ҳам киради. Демак, эллипсоид координаталар боши ва координата ўқларига нисбатан симметрикдир.

Бу эллипсоидни координата текисликлари билан кесимларини қараймиз. Эллипсоид Oxy координата текислиги ($z=0$ текислик) билан кесилганда ярим ўқлари a ва b бўлган

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади. Эллипсоид Oyz координата текислиги ($x=0$ текислик) билан кесилганда ярим ўқлари b ва c бўлган

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади. Эллипсоид Oxz координата текислиги ($y=0$ текислик) билан кесилганда ярим ўқлари a ва c бўлган

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади. Эллипсоиднинг Oxy координата текислигига параллел $z=h$ текислик билан кесимини кўрамиз.

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \tag{38.2}$$

тенгламани оламиз. Агар $h=\pm c$ бўлса, у ҳолда (38.2) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

кўринишга келади, у $(0;\ 0;\ \pm c)$ нуқталарга айланади.

Агар $|h|>c$ бўлса, у ҳолда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$ бўлади ва (38.2) чизиқ мавҳум эллипсни аниқлайди, яъни эллипсоиднинг $z=h$ текислик билан кесишиш нуқталари йўқ.

Агар $|h|<c$ бўлса, у ҳолда (38.2) ни бундай ифодалаш мумкин:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Бу тенглама $z=h$ текисликда ярим ўқлари

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \qquad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

бўлган эллипсни аниқлайди. $|h|$ камайганда a_1 ва b_1 нинг қийматлари орта боради ва энг катта қийматларига $h=0$ да эришади. У ҳолда эллипсоиднинг Oxy $(z=0)$ координата текислиги билан кесимида ярим ўқлари $a_1=a$, $b_1=b$ бўлган энг катта эллипс ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, қаралган кесимлар эллипсоидни ёпиқ овал сирт сифатида ифодалаш имконини беради. a, b, c катталиклар эллипсоиднинг *ярим ўқлари* деб аталади, Агар a, b, c сонлар орасида тенглари бўлмаса, эллипсоид *уч ўқли эллипсоид* деб аталади. Агар a, b, c сонлар орасида қандайдир иккитаси ўзаро тенг бўлса, у ҳолда айланиш эллипсоидига эга бўламиз (54- шакл).

2. Бир паллали гиперболоид. Каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{38.3}$$

бўлган сирт *бир паллали гиперболоид* деб аталади, бу ерда a, b, c — берилган мусбат сонлар.

Бир паллали гиперболоиднинг шаклини аниқлаймиз. (38.3) тенглама координаталарнинг фақат квадратларини ўз ичига олади. Шу сабабли бу сирт координаталар боши ва координата ўқларига нисбатан симметрик.

54- шакл.

Гиперболоиднинг координата текисликлари билан кесимини қараймиз.

Гиперболоиднинг $Oxy\,(z=0)$ координата текислиги билан кесимида ярим ўқлари a ва b бўлган $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс ҳосил бўлади. Гиперболоиднинг $Oxz\,(y=0)$ координата текислиги билан кесимида ярим ўқлари a (ҳақиқий ўқ) ва c (мавҳум ўқ) бўлган

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

гипербола ҳосил бўлади. Гиперболоиднинг $Oyz\,(x=0)$ координата текислиги билан кесимида ярим ўқлари a ва c бўлган

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{c^2}{z^2}=1$$

гипербола ҳосил бўлади.

Берилган гиперболоиднинг Oxy координата текислигига параллел $z=h$ текислик билан кесимини қараймиз. Ушбу тенгламани оламиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Бу тенглама $z=h$ текисликда ярим ўқлари

$$a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

бўлган эллипсни аниқлайди. Бу ярим ўқлар энг кичик қийматларига $h=0$ да эришади, яъни берилган гиперболоиднинг $Oxy\,(z=0)$ координаталар текислиги билан кесимида $a_1=a$ ва $b_1=b$ ярим ўқли энг кичик эллипс ҳосил бўлади. $h\to\infty$ да a_1 ва b_1 нинг қийматлари чексиз ортади. Шундай қилиб, бу кўриб чиқилган кесимлар бир паллали гиперболоидни Oxy текисликдан (иккала томонга) чексиз узоқлашилган сари кенгайиб борадиган чексиз труба сифатида тасвирлаш имконини беради. a, b, c катталиклар бир паллали гиперболоиднинг ярим ўқлари деб аталади. Агар $a=b$ бўлса, у ҳолда бир паллали айланиш гиперболоиди ҳосил бўлади (55- шакл).

3. Икки паллали гиперболоид. Каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (38.4)$$

бўлган иккинчи тартибли сирт *икки паллали гиперболоид* деб аталади, бунда a, b, c — берилган ўзгармас мусбат сонлар. (38.4) тенглама координаталарнинг фақат квадратларини ўз ичига олади, шу сабабли сирт координата ўқларига ва координата бошига нисбатан симметрик. Гиперболоиднинг $Oxz\,(y=0)$ координата текислиги билан кесимида ярим ўқлари a (мавҳум ўқ) ва c (ҳақиқий ўқ) бўлган

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

гипербола ҳосил бўлади. Гиперболоиднинг Oyz $(x=0)$ координата текислиги билан кесимида ярим ўқлари b (мавҳум ўқ) ва c (ҳақиқий ўқ) бўлган

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

гипербола ҳосил бўлади. Гиперболоиднинг Oxy координата текислигига параллел $z=h$ текислик билан кесимини кўрамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1. \quad (38.5)$$

(38.5) тенгламадан келиб чиқадики, $|h|>c$ бўлганда текислик гиперболоидни

$$a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

ярим ўқли эллипс бўйича кесади ва $h\to\infty$ да a_1, b_1 лар ортиб боради. $h=\pm c$ бўлганда (38.5) тенгламани $(0;\ 0;\ c)$ ва $(0;\ 0;\ -c)$ нуқталар қаноатлантиради (яъни $z=\pm c$ текисликлар бу сиртга уринади). $h<c$ бўлганда (38.5) тенглама мавҳум эллипсни аниқлайди, яъни гиперболоид $z=h$ текислик билан кесишмайди.

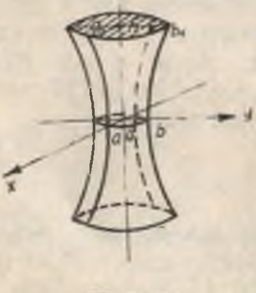
Шундай қилиб, кўриб чиқилган кесимлар икки паллали гиперболоидни иккита алоҳида палладан иборат сирт сифатида тасвирлаш имконини беради. a, b, c катталиклар икки паллали гиперболоиднинг ярим ўқлари деб аталади. Агар $a=b$ бўлса, у ҳолда икки паллали айланиш гиперболоиди ҳосил бўлади (56- шакл).

4. Эллиптик параболоид. Каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (38.6)$$

бўлган иккинчи тартибли сирт *эллиптик параболоид* деб аталади, бу ерда p ва q бир хил ишорали берилган сонлар (масалан, $p>0$, $q>0$).

Эллиптик параболоиднинг шаклини аниқлаймиз. (38.6) тенглама x ва y координаталарнинг квадратларини ўз ичига олади, шу сабабли $M(x;\ y;\ z)$ нуқта параболоидга тегишли бўлса, унга ишоралари исталганча алмаштирилган $M(\pm x;\ \pm y;\ z)$ нуқталар ҳам тегишли бўлади. Демак, сирт Oxz, Oyz координата текисликларига ва Oz координата ўқига нисбатан симметрик. Параболо-



55- шакл.

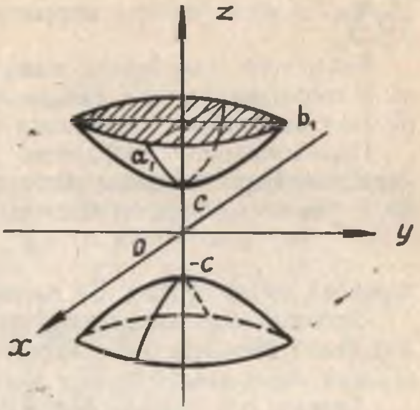
иднинг координата текисликлари билан кесимини қараймиз. Параболоиднинг $Oxz\,(y=0)$ координата текислиги билан кесимида учи координаталар бошида ва симметрия ўқи Oz бўлган

$$x^2 = 2pz \qquad (38.7)$$

парабола ҳосил бўлади. Параболоиднинг $Oyz\,(x=0)$ координата текислиги билан кесимида учи координаталар бошида ва симметрия ўқи Oz бўлган

$$y^2 = 2qz$$

парабола ҳосил бўлади.



56- шакл.

Параболоиднинг Oxy координата текислигига параллел $z = h$ текислик билан кесимини қараймиз:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1. \qquad (38.8)$$

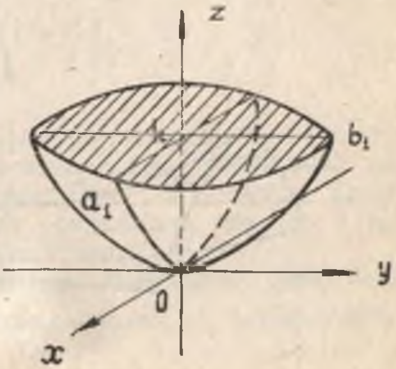
(38.8) тенгламадан кўринадики, $h > 0$ бўлганда $z = h$ текислик эллиптик параболоидни ярим ўқлари

$$a_1 = \sqrt{2ph}\,, \quad b_1 = \sqrt{2qh}$$

бўлган эллипс бўйича кесади. $h \to \infty$ да a_1 ва b_1 нинг катталиклари ортади. $h = 0$ да эллипс нуқтага айланади ($z = 0$ текислик берилган параболоидга уринади). $h < 0$ бўлганда (38.8) тенглама мавҳум эллипсни аниқлайди, яъни $z = h$ текислик параболоид билан кесишмайди.

Шундай қилиб, кўриб чиқилган бу кесимлар эллиптик параболоидни чексиз қавариқ идиш сифатида тасаввур қилишга имкон беради.

$O\,(0;\ 0;\ 0)$ нуқта эллиптик параболоиднинг *учи*, p ва q сонлар унинг *параметрлари* деб аталади. $p = q$ бўлганда айланма параболоид ҳосил бўлади (57- шакл).



57- шакл.

5. Гиперболик параболоид. Каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (38.9)$$

бўлган иккинчи тартибли сирт *гиперболик параболоид* деб аталади, бу ерда p ва q бир хил ишорали берилган сонлар (масалан, $p>0$, $q>0$).

Гиперболик параболоид шаклини аниқлаймиз. (38.9) тенглама x ва y координаталарнинг квадратларини ўз ичига олади, шу сабабли бу сирт координата текислигига ва Oz ўқига симметрик.

Параболоиднинг координата текисликлари билан кесимларини қараймиз. Параболоиднинг Oxz координата текислиги билан кесимида учи координаталар бошида, симметрия ўқи Oz бўлган

$$x^2 = 2\,pz$$

парабола ҳосил бўлади. Бу парабола юқорига йўналган.

Сиртнинг Oxz координата текислигига параллел $y=h$ текисликлар билан кесимида ҳам юқорига йўналган

$$x^2 = 2\,p\left(z+\frac{h^2}{2q}\right)$$

парабола ҳосил бўлади.

Берилган параболоиднинг $Oyz\,(x=0)$ координата текислиги билан кесимида пастга йўналган, Oz ўққа нисбатан симметрик ва учи координаталар бошида бўлган парабола ҳосил бўлади.

Параболоиднинг Oyz координата текислигига параллел $x=h$ текислик билан кесимини қараймиз. Ушбу тенгламани оламиз:

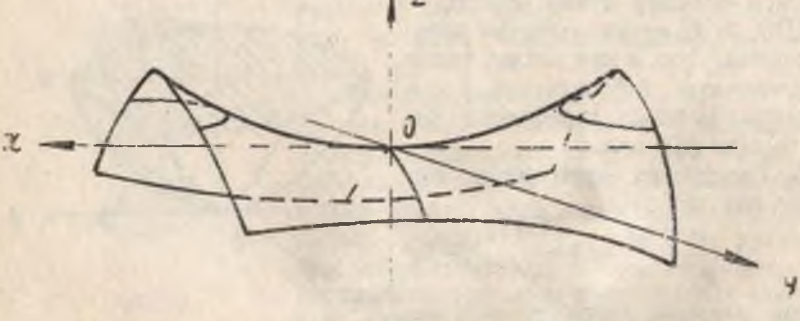
$$y^2 = -2\,q\left(z-\frac{h^2}{2\,p}\right).$$

Бундан келиб чиқадики, исталган $x=h$ кесимда пастга йўналган, параболоидда ётадиган парабола ҳосил бўлади.

Ниҳоят, параболоиднинг Oxy координата текислигига параллел $z=h$ текисликлар билан кесимларини қараймиз. Кесимда

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{2\,ph}-\frac{y^2}{2\,qh}=1$$

чизиқ ҳосил бўлади. Бундан келиб чиқадики, $h>0$ бўлганда кесимда Oxz текисликни кесиб ўтадиган гиперболалар, $h<0$ бўлган-



58- шакл.

да кесимда Oyz текисликни кесиб ўтадиган гиперболалар ҳосил бўлади, $h = 0$ бўлганда гипербола кесишувчи тўғри чизиқлар жуфти

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$$

га айланади.

Шундай қилиб, кўриб чиқилган кесимлар гиперболик параболоидни эгарсимон сирт сифатида ифодалашга имкон беради. $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқта гиперболик параболоиднинг учи, p ва q сонлар эса унинг параметрлари деб аталади (58-шакл).

39-§. Чизиқли сиртлар

Тўғри чизиқнинг ҳаракатланишидан ҳосил бўлган сирт *чизиқли сирт*, унда ётадиган тўғри чизиқлар эса *ясовчилар* деб аталади.

Иккинчи тартибли цилиндрик ва конус сиртлар бундай сиртларга мисолдир. Бир паллали гиперболоид ва икки паллали гиперболоид ҳам чизиқли сиртлар жумласига киради. Ушбу бир паллали гиперболоидни қарайлик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{39.1}$$

Уни бундай ёзамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ёки} \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = $$
$$= \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right). \tag{39.2}$$

Ушбу биринчи даражали тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= k\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{k}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{aligned} \tag{39.3}$$

бу ерда $k \neq 0$ — ихтиёрий сон.

k нинг маълум қийматида бу тенгламалар фазода тўғри чизиқни аниқлайди. Координаталари (39.3) системани қаноатлантирадиган ҳар қандай нуқта (39.2) сиртда ёки шунинг ўзи (39.1) сиртда ётади. Шундай қилиб, (39.3) тўғри чизиқлар оиласидаги ҳар бир тўғри чизиқ бир паллали гиперболоидда тўла ётади.

Шунга ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида гиперболик параболоид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ сиртида ҳам тўғри чизиқли ясовчилар жойлашганлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Уч номаълумли иккинчи даражали умумий тенглама қайси шартларда маркази координаталар бошида бўлган сферани аниқлайди?
2. Цилиндрик сиртнинг таърифини айтиб беринг. Йўналтирувчиси Oxy текисликда ётадиган ва ясовчиси Oz ўққа параллел цилиндрик сиртнинг тенгламасини келтириб чиқаринг.
3. Қуйидагиларни ёзинг: а) ясовчиси Ox ўққа параллел эллиптик цилиндр тенгламасини, б) ясовчиси Oy ўққа параллел гиперболик цилиндр тенгламасини, в) Oxy текислик симметрия текислиги ва ясовчилари Oy ўққа параллел бўлган параболик цилиндр тенгламасини.
4. Уч ўқли эллипсоиднинг каноник тенгламасини ёзинг ва унинг шаклини кесимлар усули билан текширинг.
5. Эллиптик параболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг ва унинг шаклини кесимлар усули билан текширинг.
6. Гиперболик параболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг ва унинг шаклини кесимлар усули билан текширинг.
7. Бир паллали гиперболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг ва унинг шаклини кесимлар усули билан текширинг.
8. Икки паллали гиперболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг ва унинг шаклини кесимлар усули билан текширинг.
9. $f(x, y) = 0$ ясси чизиқнинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўладиган сирт тенгламаси қандай кўринишда бўлади?
10. $x^2 = 2py$ параболанинг Oy симметрия ўқи атрофида айланишидан қандай сирт ҳосил бўлади?
11. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг Ox ўқи атрофида, Oy ўқи атрофида айланишидан қандай сирт ҳосил бўлади?
12. Қандай шартда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллиптик цилиндр ўқи Oz бўлган айланиш сирти бўлади?

2- боб

МАТЕМАТИК АНАЛИЗГА КИРИШ

1- §. Ҳақиқий сонлар тўплами

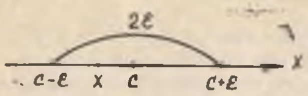
Сон — математик анализнинг асосий тушунчаларидан биридир. Бу тушунча бошланғич тушунча бўлиб, узоқ тарихий ривожланиш йўлини босиб ўтди. Нарсаларни, буюмларни санаш зарурати туфайли натурал сонлар пайдо бўлди. Натурал сонлар тўплами бундай белгиланади: $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Натурал сонлар тўпламига уларга қарама-қарши сонларни ҳамда ноль сонини қўшиш билан бутун сонлар тўплами $Z = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ ни ҳосил қиламиз.

Математиканинг янада тараққиёти рационал сонлар $Q = \left\{\frac{p}{q}\right\}$ (бунда $p, q \in Z$ ва $q \neq 0$) нинг ва кейин эса иррационал сонларнинг, яъни рационал бўлмаган сонларнинг киритилишини тақозо этди. Ҳар қандай рационал сон чекли ёки чексиз даврий ўнли каср шаклида ёзилиши мумкинлигини ҳамда ҳар қандай иррационал сонни чексиз даврий бўлмаган ўнли каср шаклида ёзиш мумкин эканлигини эслатиб ўтамиз.

Рационал ва иррационал сонлар тўпламлари бирлашмаси ҳақиқий сонлар тўпламини ҳосил қилади ва у R билан белгиланади. Ҳақиқий сонларни сон ўқининг нуқталари билан белгиланади. Бу нуқталар ва ҳақиқий сонлар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд, яъни ҳар бир сонга уни сон ўқида тасвирлайдиган ягона нуқта мос келади ва аксинча, сон ўқининг ҳар бир нуқтасига у билан тасвирланадиган ягона сон мос келади. Бу — сон ўқи нуқталарини уларга мос сонлар билан алмаштириш имконини беради.

a ва b сонлар (ёки иккита нуқта) берилган, шу билан бирга $a < b$ бўлсин. $a \leqslant x \leqslant b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x сонлар тўплами *кесма* ёки *сегмент* деб аталади ва у $[a, b]$ орқали белгиланади: a ва b лар кесманинг *охирлари* деб аталади. $a < x < b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x сонлар тўплами *интервал* ёки *оралиқ* деб аталади ва у (a, b) каби белгиланади. $a \leqslant x < b$ ёки $a < x \leqslant b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x сонлар тўплами *ярим очиқ кесма* ёки *ярим ёпиқ интервал* деб аталади ва у $[a, b)$ ёки $(a, b]$ каби белгиланади. Хусусан, мана бундай чексиз интерваллар ёки ярим интерваллар ҳам қаралиши мумкин:

$(-\infty, +\infty), (-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty).$



59- шакл.

c нуқтани ўз ичига оладиган, яъни $a<c<b$ бўлган (a, b) интервал c нуқтанинг *атрофи* деб аталади.

Маркази c нуқта билан устма-уст тушадиган, узунлиги эса 2ε $(\varepsilon>0)$ бўлган $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ интервал c нуқтанинг ε- атрофи деб аталади (59- шакл). c нуқтанинг ε- атрофига тегишли бўлган исталган x нуқта $c-\varepsilon<x<c+\varepsilon$ тенгсизликларни қаноатлантиради.

Таъриф. Ҳақиқий соннинг *абсолют қиймати* деб мусбат ва манфий сонлар тўпламидан олинган мусбат сонга айтилади ва у қуйидагича аниқланади:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,} \\ -x & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Масалан, $|3|=3$, $|-3|=-(-3)=3$.

Сон ўқидаги x нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа $|x|$ га тенглигини айтиб ўтайлик.

Абсолют қийматнинг баъзи хоссаларини эслатиб ўтамиз.

1. Бир неча қўшилувчилар алгебраик йиғиндисининг абсолют қиймати бу қўшилувчилар абсолют қийматларининг йиғиндисидан катта эмас:

$$|x \pm y| \leqslant |x| + |y|.$$

2. Айирманинг абсолют қиймати камаювчи ва айирилувчи абсолют қийматларининг айирмасидан кичик эмас:

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|.$$

3. Кўпайтманинг абсолют қиймати кўпайтувчилар абсолют қийматларининг кўпайтмасига тенг:

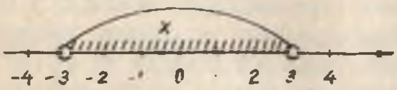
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

4. Бўлинманинг абсолют қиймати бўлинувчи ва бўлувчи абсолют қийматларининг бўлинмасига тенг:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

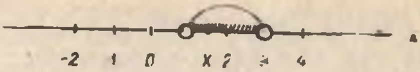
1- мисол. $|x|<3$ тенгсизликни қандай тушуниш керак?

Бу тенгсизлик саноқ бошигача бўлган масофалари 3 дан кичик x нуқталар тўпламини ифодалайди (60- шакл). Исталган x нуқта $(-3, 3)$ интервалга тегишли, яъни $|x|<3$ тенгсизлик $-3<x<3$ тенгсизликларга тенг кучлидир.



60- шакл.

2-мисол. $|x-2|<1$ тенгсизликни қандай тушуниш керак?



61-шакл.

Бу тенгсизлик 2 нуқтагача бўлган масофалари 1 дан кичик x нуқталар тўпламини ифодалайди (61-шакл). $|x-2|<1$ тенгсизлик $-1<x-2<1$ ёки $1<x<3$ тенгсизликларга тенг кучли.

3-мисол. $|x-a|<\varepsilon$ тенгсизликни қандай тушуниш керак? Бу тенгсизлик ушбу тенгсизликларга тенг кучли: $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$ ёки $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$. Демак, $x\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, яъни x нуқталар a нуқтанинг ε-атрофига тегишли.

2-§. Бир ўзгарувчининг функцияси

Иккита x ва y ўзгарувчи миқдорни қарайлик.

1-таъриф. Агар x миқдорнинг D соҳадаги ҳар бир қийматига бирор усул ёки қонун бўйича y нинг бирор E соҳадаги аниқ бир қиймати мос қўйилса, y ўзгарувчи миқдор x ўзгарувчи миқдорнинг *функцияси* дейилади.

Ўзгарувчи x миқдор *эркли ўзгарувчи* ёки *аргумент*, y миқдор эса *боғлиқ ўзгарувчи* ёки *функция* дейилади.

Функцияни кўрсатишда қуйидаги белгилашлардан фойдаланилади:

$$y=f(x),\quad y=y(x),\quad y=\varphi(x) \text{ ва ҳоказо.}$$

Агар $x=x_0$ бўлганда $y=f(x)$ функциянинг қиймати y_0 бўлса, бу

$$y_0=f(x_0) \text{ ёки } y\big|_{x=x_0}=y_0$$

каби белгиланади.

2-таъриф. Ўзгарувчи x нинг $f(x)$ функция маънога эга бўладиган қийматлари тўплами функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва $D(f)$ билан белгиланади.

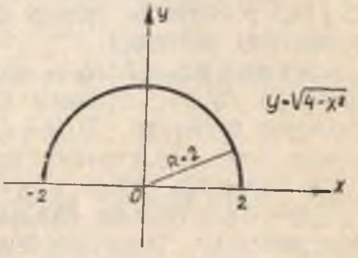
3-таъриф. Функциянинг қабул қиладиган қийматлари тўплами унинг *ўзгариш соҳаси* дейилади ва $E(f)$ билан белгиланади.

1-мисол. Қуйидаги $y=\sqrt{4-x^2}$ функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини топинг.

Ечиш. Берилган функция $4-x^2\geqslant 0$ бўлганда маънога эга. Бу тенгсизликнинг ечими $x^2\leqslant 4$ ёки $|x|\leqslant 2$. Бу тенгсизликни x нинг $[-2,\ 2]$ кесмадаги қийматлари қаноатлантиради.

Демак, $D(f)=[-2;\ 2]$, $E(f)=[0;\ 2]$.

Функция текисликда **график** кўринишда тасвирланади.



62-шакл.

4-таъриф. $y=f(x)$ функциянинг *графиги* деб Oxy текисликдаги координаталари $y=f(x)$ муносабат билан боғланган $P(x,\ y)$ нуқталар тўпламига айтилади.

Бизнинг мисолимизда $y=\sqrt{4-x^2}$ функциянинг графиги $R=2$ радиусли ва маркази координаталар бошида бўлган айлананинг юқори қисмидан иборат (62-шакл).

Функция турли *усуллар* билан берилиши мумкин. Функциянинг жадвал, аналитик ва график кўринишда берилиш усулларини кўрайлик.

Функция *аналитик* усулда берилганда x ва y миқдорлар орасидаги боғланиш формула орқали ифодаланади. Масалан, $y=x^2$, $y=(x-3)^{-1}$.

Функция ўз аниқланиш соҳасининг турли қисмларида турлича формулалар орқали берилиши мумкин. Масалан,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ агар } x\in[-1,\ 0] \text{ бўлса,} \\ x, \text{ агар } x\in(0,\ +\infty) \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Функция *жадвал* усулда берилганда x ва y миқдорлар орасидаги боғланиш жадвал кўринишда ифодаланади:

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

Масалан, логарифмик, тригонометрик функциялар жадваллари маълум.

Функция *график* усулда берилганда унинг графиги маълум бўлиб, аргументнинг турли қийматларига мос келувчи қийматлари бевосита графикдан топилади.

Энди функциянинг ўсиши ва камайиши, жуфт ва тоқлиги, даврийлиги масалаларини қисқача кўриб ўтайлик.

$y=f(x)$ функция бирор $D(f)=[a;\ b]$ соҳада аниқланган бўлсин.

1-таъриф. Агар x нинг шу соҳага тегишли ихтиёрий иккита x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1<x_2$ бўлганда $f(x_1)<f(x_2)$ (ёки $f(x_1)>f(x_2)$) тенгсизлик ўринли бўлса, f функция D соҳада *ўсувчи (ёки камаювчи)* дейилади.

2-таъриф. Агар $x_1<x_2$ бўлганда $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (ёки $f(x_1)\geqslant f(x_2)$) бўлса, функция D соҳада *камаймайдиган (ўсмайдиган)* функция дейилади. $D(f)=[a,\ b]$ соҳа эса f функциянинг мос равишда ўсиш ёки камайиш оралиғи дейилади.

3-таъриф. Агар $y=f(x)$ функцияда ҳар бир $x\in D(f)$ учун $f(-x)=f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция жуфт функция дейилади. Агар ҳар бир $x\in D(f)$ учун $f(-x)=-f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция тоқ функция дейилади.

Масалан, $y=x^2$, $y=\cos x$, $y=\ln(1+x^2)$ ва ҳ. к. жуфт функциялардир. $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=x+\frac{1}{x}$ ва ҳ. к. лар эса тоқ функциялардир.

Жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан, тоқ функция графиги координата бошига нисбатан симметрик бўлади.

4-таъриф. Агар $y=f(x)$ да ҳар бир $x\in D(f)$ ва $x\pm T\in D(f)$ учун $f(x+T)=f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция *даврий функция* дейилади. T — қандайдир ҳақиқий сон. Унинг энг кичик мусбат қиймати T_0 мавжуд бўлса, унга $f(x)$ функциянинг даври дейилади.

Масалан, $y=3^{|\cos x|}$ функция берилган бўлсин. Унинг даврини топиш учун $\cos x=\pm\cos(x+T)$ тенгламани T га нисбатан ечиб, $T_1=(2n-1)\pi-2x$, $T_2=(2n+1)\pi$, $T_3=2n\pi-2x$, $T_4=2k\pi+$ $+2\pi$ ларни топамиз. T_1 ва T_3 лар x га боғлиқ, демак, улар давр бўла олмайди. $n=0$ бўлганда $T_2=\pi$ ва $T_4=2\pi$ эга бўлиб, уларнинг энг кичиги $T_2=\pi$ берилган функциянинг изланган даври бўлади.

Аналитик усулда бериладиган функциялар ичида *элементар функциялар* муҳим ўрин тутади. Аввало асосий элементар функцияларни қарайлик:

1. Ўзгармас (константа) функция:

$$y=C,$$

бунда C — ўзгармас ҳақиқий сон. Унинг аниқланиш соҳаси бутун сонлар ўқидан иборат.

2. Даражали функция:

$$y=x^{\alpha},$$

бунда α — нолдан фарқли ўзгармас ҳақиқий сон. Унинг аниқланиш соҳаси ва графиги α нинг қийматига боғлиқ.

3. Кўрсаткичли функция:

$$y=a^{x},$$

бунда $a>0$, $a\neq 1$ — ўзгармас ҳақиқий сон. Аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

4. Логарифмик функция:

$$y=\log_a x,$$

бунда $a>0$, $a\neq 1$ — ўзгармас ҳақиқий сон. Аниқланиш соҳаси барча мусбат сонлар тўплами.

5. Тригонометрик функциялар:

а) $y=\sin x$ ва $y=\cos x$.

Бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

б) $y=\operatorname{tg} x$ ва $y=\operatorname{ctg} x$.

Бу функциялардан биринчиси $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(n\in Z)$, иккинчиси $x=\pi n$ қийматлардан ташқари ҳамма ҳақиқий сонлар учун аниқланган.

6. Тескари тригонометрик функциялар:

а) $y = \arcsin x$ ва $y = \arccos x$.

Функциялар $[-1,\ 1]$ оралиқда аниқланган.

б) $y = \mathrm{arc\,tg}\,x$ ва $y = \mathrm{arc\,ctg}\,x$.

Функцияларнинг аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами.

Энди *мураккаб функция* тушунчаси билан танишайлик. Фараз қилайлик, бирор D соҳада x ўзгарувчининг функцияси $u = \varphi(x)$ берилган бўлиб, унинг ўзгариш соҳаси G бўлсин. Фараз қилайлик, G соҳада $y = f(u)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда x ўзгарувчининг D соҳадаги ҳар бири қийматига u ўзгарувчининг G соҳадаги аниқ бир қиймати ва бу қийматга y ўзгарувчининг аниқ бир қиймати мос келади.

Шундай қилиб, x ўзгарувчининг D соҳадаги ҳар бир қийматига y ўзгарувчининг аниқ қиймати мос келади, яъни y ўзгарувчи x нинг функциясидир ва уни $y = F(x)$ билан белгилаймиз. $F(x)$ функция f ва φ функциялари орқали қуйидагича ёзилади:

$$y = F(x) = f(\varphi(x)).$$

Бунда $F(x)$ функция x ўзгарувчининг f ва φ функцияларидан тузилган *мураккаб* функцияси дейилади. Бунда $u = \varphi(x)$ оралиқ ўзгарувчи дейилади. Шундай қилиб, функциянинг аргументи эркли ўзгарувчи ёки оралиқ ўзгарувчи, яъни унинг ўзи эркли ўзгарувчининг функцияси бўлиши мумкин. Масалан, агар $y = \lg u$ ва $u = \mathrm{tg}\,x$ бўлса, y мураккаб функция бўлади, $y = \lg\mathrm{tg}\,x$.

Мураккаб функция иккитадан ортиқ функциядан тузилган бўлиши ҳам мумкин. Масалан, агар $y = \lg u$, $u = \mathrm{tg}\,v$ ва $v = \sqrt{x^2+1}$ бўлса, y мураккаб функция бўлади: $y = \lg\mathrm{tg}\sqrt{x^2+1}$.

Асосий элементар функциялар ва мураккаб функция тушунчалари ёрдамида элементар функция таърифини бериш мумкин.

Элементар функция деб асосий элементар функциялардан чекли сондаги арифметик амаллар ва улардан олинган мураккаб функциялардан тузилган функцияга айтилади. Равшанки, асосий элементар функциялар элементар функциялар синфига тегишли. Қуйидагилар элементар функцияларга мисол бўла олади:

$$y = \frac{\lg\sin(x^2+1)}{\sqrt{x-1}},$$

$$y = \sin^2\mathrm{tg}\,x,\quad y = \ln\mathrm{arc\,tg}\,2^{-x}.$$

3- §. Сонли кетма-кетликлар

1. Асосий таърифлар

1- таъриф. Натурал сонлар тўпламида аниқланган функция, яъни $x = f(n)$, $n \in N$ функция *сонли кетма-кетлик* деб аталади.

Агар n га 1, 2, 3, . . ва ҳоказо қийматлар берсак, бу функциянинг

$$x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \dots,\ x_n = f(n)$$

хусусий қийматларини оламиз, улар кетма-кетликнинг *ҳадлари* ёки *элементлари* деб аталади. Сонли кетма-кетлик $\{x_n\}$ ёки $\{f(n)\}$ орқали белгиланади. Кетма-кетликнинг n- ҳади унинг *умумий ҳади* деб аталади. Кетма-кетликнинг умумий ҳади маълум бўлса, у берилган ҳисобланади.

1- мисол. $x = \frac{n}{n+1}$ функция ушбу тўғри касрлар кетма-кетлигини беради:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \dots,\ \frac{n}{n+1},\ \dots\right\}.$$

2- мисол. $x = 2n - 1$ функция ушбу тоқ сонлар кетма-кетлигини беради:

$$\{x_n\} = \{2n-1\} = \{1,\ 3,\ 5,\ \dots,\ 2n-1,\ \dots\}.$$

3- мисол. $x = (-1)^n$ функция ушбу сонли кетма-кетликни беради:

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots\}.$$

4- мисол. $x = \sin\frac{\pi n}{2}$ функция ушбу сонли кетма-кетликни беради:

$$\{x_n\} = \left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\} = \{1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \dots\}.$$

Барча мисолларда $n \in N$, барча кетма-кетликлар чексиз кетма-кетликлардир, яъни уларнинг ҳар бирида сўнгги ҳад мавжуд эмас. Барча ҳадлари бир хил қиймат қабул қиладиган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўзгармас кетма-кетлик деб аталади.

Шундай M сон мавжуд бўлсаки, барча $n \in N$ учун $x_n < M$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *юқоридан чегараланган кетма-кетлик* деб аталади.

Шундай $M > 0$ сон мавжуд бўлсаки, исталган $n \in N$ учун $x_n > M$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик *қуйидан чегараланган кетма-кетлик* деб аталади. Ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган $\{x_n\}$ кетма-кетлик *чегараланган кетма-кетлик* деб аталади.

Бу ҳолда шундай $M > 0$ сон мавжуд бўладики, исталган $n \in N$ учун $|x_n| < M$ тенгсизлик бажарилади.

Агар исталган $n \in N$ учун

$$x_n < x_{n+1}$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *монотон ўсувчи кетма-кетлик* деб аталади.

Агар исталган $n \in N$ учун $x_n > x_{n+1}$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *монотон камаювчи кетма-кетлик* деб аталади.

Агар исталган $n \in N$ учун

$$x_n \geqslant x_{n+1}$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *ўсмайдиган кетма-кетлик* деб аталади.

Агар исталган $n \in N$ учун

$$x_n \leqslant x_{n+1}$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *камаймайдиган кетма-кетлик* деб аталади.

5- мисол. $\{x_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ — ўсувчи, қуйидан чегараланган кетма-кетлик.

6- мисол. $\{x_n\} = \{1-2n\} = \{-1, -3, -5, \ldots\}$ — камаювчи, юқоридан чегараланган кетма-кетлик.

7- мисол. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ — камаювчи, чегараланган кетма-кетлик.

2. Кетма-кетликнинг лимити. a ўзгармас сон ва $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

2- таъриф. Агар исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N = N(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлсаки, барча $n \geqslant N$ лар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, a ўзгармас сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* деб аталади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ ёки } x_n \to a.$$

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи кетма-кетлик*, акс ҳолда эса *узоқлашувчи кетма-кетлик* деб аталади.

$|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ тенгсизликларга тенг кучли эканини биламиз. Буни ҳисобга олсак, лимит тушунчасини геометрик нуқтаи назардан бундай тушунтириш мумкин: агар исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N = N(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $n \geqslant N$ дан бошлаб барча ҳадлари a нуқтанинг ε-атрофига тушса, яъни a нуқтанинг ε-атрофига $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чекли сондаги ҳадларидан ташқари барча ҳадлари тушса, a ўзгармас сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади.

8- мисол. 0 сони $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетликнинг лимити эканлигини, яъни $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ни исботланг.

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни олайлик. $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ ёки $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ тенгсизликни тузамиз. Бироқ $n > 0$, шунинг учун $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ёки $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Бундан кўринадики, $N = N(\varepsilon)$ сифатида $\frac{1}{\varepsilon}$ дан катта исталган сон, яъни $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ олинса, у ҳолда барча $n > N(\varepsilon)$ учун $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ ёки $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ эканини билдиради. Масалан, $\varepsilon = 0{,}01$ учун $N(\varepsilon) = 100$ ва $n > 100$ учун $\left|\frac{1}{n}\right| < 0{,}01$.

3. **Монотон чегараланган кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги.** Ушбу теоремаларни исботсиз келтирамиз:

1-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик монотон ўсувчи ва юқоридан чегараланган бўлса, у лимитга эга.*

2-теорема. *Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик монотон камаювчи ва қуйидан чегараланган бўлса, у лимитга эга.*

4-§. Тўпламларнинг юқори ва қуйи чегаралари. Больцано—Вейерштрасс теоремаси

Ҳақиқий сонларнинг ихтиёрий тўплами E ни қарайлик. Агар у чекли тўплам бўлса, у ҳолда унинг элементлари орасида энг катта ва энг кичик сон мавжуд. Агар у чексиз тўплам бўлса, у ҳолда ҳар доим ҳам шундай бўлавермайди. Масалан, натурал сонлар тўплами N энг кичик сон—бир сонига эга, лекин энг катта сонга эга эмас. Бошқа мисол: (a, b) интервал энг кичик сонга ҳам, энг катта сонга ҳам эга эмас. Ихтиёрий тўплам учун қуйи ва юқори чегара тушунчаларини киритамиз.

1-таъриф. M чекли сон учун ушбу икки шарт бажарилса, у E тўпламнинг аниқ *юқори чегараси* деб аталади:

1) исталган $x \in E$ учун $x \leqslant M$ тенгсизлик ўринли;

2) исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $x_1 \in E$ нуқта мавжудки, унинг учун $M - \varepsilon < x_1 \leqslant M$ тенгсизликлар бажарилади.

E тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup E = M$ ёки $\sup\{x\} = M$ каби белгиланади, бу ерда sup — лотинча supremum «энг юқори» сўзидан олинган.

2-таъриф. m чекли сон учун ушбу икки шарт бажарилса, у E тўпламнинг аниқ *қуйи чегараси* деб аталади:

1) исталган $x \in E$ учун $x \geqslant m$ тенгсизлик ўринли;

2) исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $x_1 \in E$ нуқта мавжудки, унинг учун $m \leqslant x_1 < m + \varepsilon$ тенгсизликлар бажарилади.

E тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $\inf E = m$ ёки $\inf\{x\} = m$ каби белгиланади, бу ерда inf — лотинча *infimum* — «энг қуйи» сўзидан олинган.

1-мисол. $E = \{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$ бўлсин. Бу ерда

$$\inf E = \frac{1}{2}, \ \sup E = 1.$$

2-мисол. $E = (a, b)$ бўлсин, бу ерда a, b — чекли сонлар. Бу ҳолда

$$\inf E = a, \ \sup E = b.$$

Агар E тўплам қуйидан ёки юқоридан чегараланмаган бўлса, унинг аниқ юқори чегараси деб $+\infty$ ни, аниқ қуйи чегараси деб $-\infty$ ни айтилади, яъни $\sup E = +\infty$, $\inf E = -\infty$.

3-мисол. $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Бу ерда $\inf N = 1$, $\sup N = +\infty$.

4-мисол. $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Бу ерда

$$\inf Z = -\infty, \ \sup Z = +\infty.$$

Ихтиёрий ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги $\{x_n\}$ ни қараймиз. Ундан чексиз сондаги элементлар тўпламини ажратсак, янги кетма-кетлик оламиз, уни $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги (қисм тўплами) деб атаймиз. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унинг исталган қисмий кетма-кетлиги ҳам яқинлашувчи бўлади. Бу даъвонинг тўғрилиги фақат яқинлашувчи кетма-кетликлар учунгина хос эмас, чунончи: ҳар қандай ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги $\{x_n\}$ дан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Масалан, $\{x_n\} = \left\{(-1)^n\right\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ узоклашувчи кетма-кетлик, бироқ унинг $\{1, 1, 1, \dots\}$ қисмий кетма-кетлиги 1 га яқинлашувчи кетма-кетликдир.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланмаган бўлса, у ҳолда у $(+\infty)$ га ёки $(-\infty)$ га яқинлашадиган қисмий кетма-кетликни ўз ичига олади.

Теорема. *Агар* $\{x_n\}$ *кетма-кетлик чегараланган бўлса, у ҳолда ундан чекли сонга яқинлашадиган қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.*

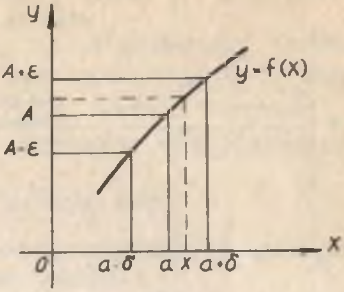
Больцано — Вейерштрасс теоремаси деб аталадиган бу теорема чех математиги Больцано ва немис математиги Вейерштрасс томонидан исботланган эди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай сонлар ҳақиқий сонлар тўпламини ҳосил қилади?
2. Сонниг абсолют қиймати деб нимага айтилади?
3. Абсолют қийматларнинг асосий хоссаларини айтиб беринг.
4. Кесма, интервал деб нимага айтилади?
5. Нуқтанинг атрофи, ε-атрофи тушунчаларига таъриф беринг.
6. Сонли кетма-кетликнинг таърифини айтиб беринг.
7. Қандай кетма-кетликлар юқоридан (қуйидан) чегараланган деб аталади? Мисоллар келтиринг.
8. Қандай кетма-кетликлар монотон ўсувчи (камаювчи), ўсмайдиган, камаймайдиган деб аталади? Мисоллар келтиринг.
9. Кетма-кетлик лимити таърифини айтиб беринг. Яқинлашувчи кетма-кетликка мисол келтиринг.
10. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ҳақидаги теоремани айтиб беринг.
11. Тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари таърифини айтиб беринг. Мисоллар келтиринг.
12. Қисмий кетма-кетлик нима? Больцано — Вейерштрасс теоремасини айтиб беринг.
13. 176 — 185-масалаларни ечинг.

5-§. Функциянинг лимити

1. Функциянинг нуқтадаги лимити.



63- шакл.

5-таъриф. Агар $y=f(x)$ функция $x=a$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб ($x=a$ нуқтанинг ўзида аниқланмаган бўлиши мумкин) исталган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон мавжуд бўлсаки, $|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $x\neq a$ нуқталар учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A чекли сон $y=f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги (ёки $x\to a$ даги) *лимити* деб аталади.

Агар A сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги лимити бўлса, бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \text{ ёки } x\to a \text{ да } f(x)\to A.$$

$|x-a|<\delta$ тенгсизликни a нуқтанинг δ-атрофида ётадиган нуқталар, $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизликни эса A нуқтанинг ε-атрофида ётадиган $f(x)$ лар қаноатлантиради, яъни $f(x)\in(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$.

Демак, юқоридаги таъриф геометрик нуқтаи назардан қуйидагини англатади: агар исталган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ мавжуд бўлсаки, a дан масофаси δ дан ортиқ бўлмаган $(a-\delta;\ a+\delta)$ интервалдаги барча x лар учун $f(x)$ функциянинг қийматлари $(A-\varepsilon;$ $A+\varepsilon)$ интервалга тушса, A сон $f(x)$ функциянинг $x\to a$ даги лимити бўлади (63-шакл).

2-мисол. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2$ эканини таърифдан фойдаланиб исботланг.

$f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ функцияни $x=4$ нуқтанинг бирор атрофида, масалан, $(3;\ 5)$ интервалда қарайлик. Ихтиёрий $\varepsilon>0$ ни оламиз ва $|f(x)-A|$ ни $x\neq 4$ деб қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|=\left|\frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)}-2\right|=\left|\frac{x+4}{x}-2\right|=\frac{|x-4|}{x}.$$

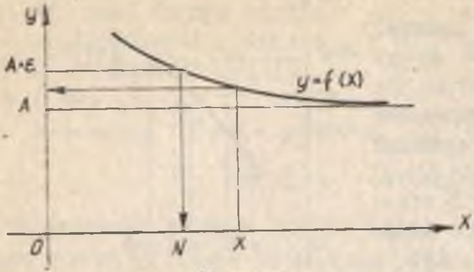
$x\in(3;\ 5)$, яъни $x>3$ ни ҳисобга олсак, ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{|x-4|}{3};$$

бундан кўриниб турибдики, $\delta=3\varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $|x-4|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $x\in(3;\ 5)$ учун ушбу тенгсизлик бажарилади:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{\delta}{3}=\varepsilon.$$

Бундан 2 сони $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ функциянинг $x=4$ нуқтадаги лимити бўлиши келиб чиқади.



64- шакл.

2. Функциянинг чексизликдаги лимити.

6-таъриф. Агар $y=f(x)$ функция x нинг етарлича катта қийматларида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $N>0$ мавжуд бўлсаки, $|x|>N$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, ўзгармас A сон $y=f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги *лимити* деб аталади.

Агар A сон $f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити бўлса, бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

Бу таъриф геометрик нуқтаи назардан қуйидагини англатади: агар исталган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $N>0$ мавжуд бўлса, барча $|x|>N$ учун функциянинг қийматлари $(A-\varepsilon;\ A+\varepsilon)$ интервалга тушади (64-шакл).

3-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}=1$ эканини исботланг.

$f(x)=\frac{x+2}{x}$ функцияни қарайлик.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ ни оламиз ва $|f(x)-A|$ ни ўзгартирамиз:

$$\left|\frac{x+2}{x}-1\right|=\left|1+\frac{2}{x}-1\right|=\frac{2}{|x|}.$$

Агар $N=\frac{2}{\varepsilon}$ ни олсак, у ҳолда барча $|x|>N$ учун ушбу тенгсизлик бажарилади:

$$\left|\frac{x+2}{x}-1\right|<\frac{2}{N}=\varepsilon.$$

Бундан 1 сони $f(x)=\frac{x+2}{x}$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити бўлиши келиб чиқади.

3. Лимитга эга функциянинг чегараланганлиги.

7-таъриф. (a, b) интервалда аниқланган $y=f(x)$ функция учун шундай $M>0$ сон мавжуд бўлсаки, барча $x\in(a, b)$ лар учун $|f(x)|\leqslant M$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $y=f(x)$ функция (a, b) интервалда *чегараланган* деб аталади.

Агар бундай M сон мавжуд бўлмаса, у ҳолда $y=f(x)$ функция бу интервалда чегараланмаган деб аталади.

4-мисол. $y=\sin x$ функция $(-\infty, +\infty)$ интервалда чегараланган, чунки бу интервалдаги барча x лар учун $|\sin x| \leqslant 1$, яъни $M=1$.

5-мисол. $y=\frac{1}{x}$ функция $(0,1)$ интервалда чегараланмаган, чунки $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ бўладиган $M>0$ сон мавжуд эмас.

Функциянинг лимити билан унинг чегараланганлиги орасидаги боғланишни белгилайдиган ушбу теорема ўринли.

1-теорема. *Агар* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *— чекли сон бўлса, у ҳолда* $y=f(x)$ *функция* a *нуқтанинг бирор атрофида чегаралангандир.*

Исботи. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ тенгликдан исталган $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топиладики, a нуқтанинг δ-атрофида ушбу тенгсизлик бажарилади:

$$|f(x)-A|<\varepsilon \text{ ёки } |f(x)|-|A| \leqslant |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Бундан $|f(x)|<|A|+\varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. Агар $M=|A|+\varepsilon$ деб олсак, у ҳолда a нуқтанинг δ-атрофидаги барча x лар учун $|f(x)| \leqslant M$ тенгсизлик бажарилади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Агар $f(x)$ бирор интервалда чегараланган бўлса, у ҳолда $\frac{1}{f(x)}$ ҳам чегараланган функция бўлишини айтиб ўтамиз ($f(x)\neq 0$).

4. Бир томонлама лимитлар.

8-таъриф. Агар $y=f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги ёки $x\to a$ даги лимити таърифида x ўзгарувчи a дан кичик (яъни $x<a$) бўлганича қолса, у ҳолда функциянинг A_1 лимити функциянинг $x=a$ нуқтадаги (ёки $x\quad a-0$ даги) *чап томонлама лимити* деб аталади.

Демак, ҳар бир $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон мавжуд бўлсаки, $0<a-x<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x)-A_1|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A_1 сон $f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги (ёки $x\to a-0$ даги) чап томонлама лимити деб аталади.

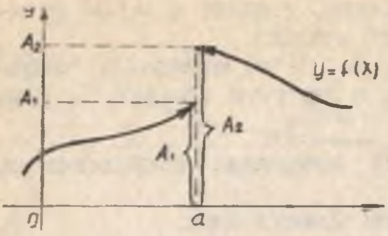
$f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги чап томонлама лимити бундай белгиланади:

$$A_1=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x), \text{ёки } A_1=\lim_{x\to a-0} f(x), \text{ ёки } A_1=f(a-0).$$

Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда бундай ёзилади:

$$A_1=\lim_{x\to -0} f(x)=f(-0).$$

9-таъриф. Агар $y=f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги ёки $x\quad a$ даги лимити таърифида x ўзгарувчи a дан катта (яъни $x>a$)



65- шакл.

бўлганича қолса, у ҳолда функциянинг A_2 лимити $x = a$ нуқтадаги (ёки $x \to a + 0$ даги) *ўнг томонлама лимити* деб аталади.

Демак, ҳар бир $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $0 < x - a < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун:

$$|f(x) - A_2| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A_2 сон $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтадаги (ёки $x \to a + 0$ даги) ўнг томонлама лимити деб аталди. $f(x)$ функциянинг $x = a$ нуқтадаги ўнг томонлама лимити бундай белгиланади:

$$A_2 = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x), \text{ ёки } A_2 = \lim_{x \to a+0} f(x), \text{ ёки } A_2 = f(a + 0).$$

Агар $a = 0$ бўлса, у ҳолда бундай ёзилади:

$$A_2 = \lim_{x \to +0} f(x) = f(+0).$$

$f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги чап ва ўнг томонлама лимитлари бир томонлама лимитлар деб аталади (65-шакл). Агар $A_1 = A_2$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = a$ нуқтада лимитга эга. Бунга тескари даъво ҳам ўринли. Демак, $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги бир томонлама лимитлари мавжуд ва улар ўзаро тенг, яъни $f(a - 0) = f(a + 0)$ бўлганда ва фақат шундагина бу функция a нуқтада лимитга эга бўлади.

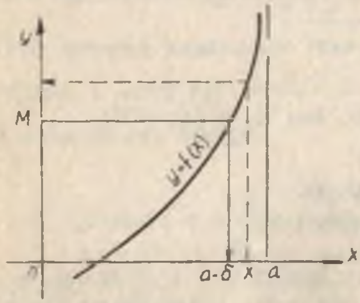
5. Чексиз катта функциялар.

10-таъриф. Агар $f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва исталган $M > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $|x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $x \neq a$ лар учун $|f(x)| > M$ тенгсизлик бажарилса, $x \to a$ да $f(x)$ функция чексизликка интилади деб айтилади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ (66- шакл).}$$

6-мисол. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \infty$ эканини исботланг.

$f(x) = \frac{1}{x - 1}$ функцияни қарайлик. Ихтиёрий $M > 0$ сонни оламиз, $|f(x)| > M$ ни алмаштирамиз. $\left|\frac{1}{x - 1}\right| > M$ бўлсин, бундан $|x - 1| < \frac{1}{M}$ бўлиши келиб чиқади. Агар $\delta = \frac{1}{M}$ деб



66- шакл.

олинса, $|x-1|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун ушбу тенгсизлик бажарилади:

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| > \frac{1}{\delta} = M \quad \text{ёки} \quad \left|\frac{1}{x-1}\right| > M.$$

Бу эса $x \to 1$ да $f(x) = \frac{1}{x-1} \to \infty$ бўлишини билдиради, яъни

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty.$$

11-таъриф. Агар $f(x)$ функция барча x лар учун аниқланган бўлиб, исталган $M>0$ учун шундай $N>0$ топилсаки, $|x|>N$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x)|>M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $x \to \infty$ да *чексизликка интилади* дейилади.

Агар $x\to\infty$ да $f(x)$ функция чексизликка интилса, бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

7-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$ ни исботланг (67-шакл). $f(x)=x^2$ функцияни қараймиз. Ихтиёрий $M>0$ сонни оламиз ва $|f(x)|>M$ тенгсизликни тузамиз. $x^2>M$, бундан $|x|>\sqrt{M}$ келиб чиқади. $N=\sqrt{M}$ деб олинса, $|x|>N$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $x^2>N^2=M$ ёки $x^2>M$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $x\to\infty$ да $f(x)=x^2\to\infty$ ни, яъни $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$ эканини билдиради.

12-таъриф. Агар

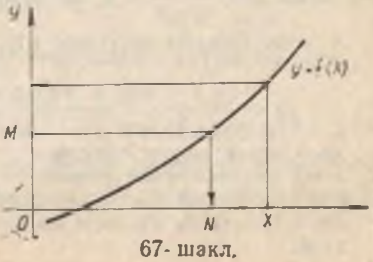
$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x\to a$ да (ёки $x\to\infty$ да) *чексиз катта функция* деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, агар $f(x)$ чексиз катта функция бўлса, у ҳолда исталган $M>0$ учун шундай $\delta>0$ топиладики, $|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x)|>M$ тенгсизлик бажарилади. Бундан чексиз катта функция чегараланмаган функция экани келиб чиқади.

6. Чексиз кичик функциялар ва уларнинг чексиз катта функциялар билан боғлиқлиги.

13-таъриф. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ (ёки $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$) бўлса, $f(x)$ функция $x\to a$ да (ёки $x\to\infty$ да) чексиз кичик функция дейилади.



67- шакл.

Бу таърифдан кўринадики, $f(x)$ функция масалан, $x\to a$ да чексиз кичик функция бўлса, у ҳолда исталган кичик $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, $|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x)|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бундан чексиз кичик функция (қаралаётган нуқтада) доимо чегараланган функция бўлиши келиб чиқади.

Математик анализда чексиз катта ва чексиз кичик функциялар катта аҳамиятга эга. Улар орасида ушбу теорема билан ифодаланадиган боғланиш бор.

2-теорема. 1) *Агар $f(x)$ функция $x\to a$ да ($x\to\infty$ да) чексиз кичик функция бўлса, у ҳолда $\frac{1}{f(x)}$ функция $x\to a$ да ($x\to\infty$ да) чексиз катта функциядир.*

2. *Агар $\varphi(x)$ функция $x\to a$ да ($x\to\infty$ да) чексиз катта функция бўлса, у ҳолда $\frac{1}{\varphi(x)}$ функция $x\to a$ да ($x\to\infty$ да) чексиз кичик функциядир.*

Исботи. 1) *$f(x)$ функция $x\to a$ да чексиз кичик функция бўлсин. $x\to a$ да чексиз кичик функциянинг таърифига кўра исталган кичик $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ мавжудки, $|x-a|<\delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x)|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бундан $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$ бўлиши келиб чиқади, $\frac{1}{\varepsilon}=M$ деб белгиласак, сўнгги тенгсизлик бундай ёзилади:*

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M.$$

Бу эса $x\to a$ да $\frac{1}{f(x)}\to\infty$ бўлишини, яъни $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$ ни билдиради. $x\to\infty$ бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш исботланади.

2) $\varphi(x)$ функция $x\to a$ да чексиз катта функция бўлсин. x a да чексиз катта функциянинг таърифига кўра исталган $M>0$ учун шундай $\delta>0$ мавжудки, $|x-a|<\delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|\varphi(x)|>M$ тенгсизлик бажарилади. Бундан $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right|<\frac{1}{M}$ келиб чиқади. $\frac{1}{M}=\varepsilon$ деб белгиласак, у ҳолда сўнгги тенгсизлик бундай ёзилади: $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right|<\varepsilon$. Бу эса $x - a$ да $\frac{1}{\varphi(x)}\to 0$ ни, яъни $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\varphi(x)}=0$ ни билдиради.

$x\to\infty$ бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. $y=f(x)$ функциянинг $x\to a$ даги лимити нима? Таърифини тенгсизлик ёрдамида беринг ва уни геометрик нуқтаи назардан тушунтиринг.
2. $x\to a$ да лимитга эга функцияга мисол келтиринг.
3. $y=f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити таърифини айтиб беринг. Таърифини тенгсизлик ёрдамида келтиринг. Геометрик маъносини тушунтириб беринг.

4. $x \to \infty$ да лимитга эга бўлган функцияга мисол келтиринг.
5. Бир томонлама лимитлар нима? Функциянинг нуқтадаги лимити ва бир томонлама лимит тушунчалари қандай боғланган?
6. Қандай функция чегараланган функция деб аталади? Лимитга эга бўлган функциянинг чегараланганлиги ҳақидаги теоремани исботланг.
7. Қандай $y = f(x)$ функция $x \to a$ да чексиз катта функция деб аталади? Геометрик маъносини тушунтириб беринг.
8 Қандай $y = f(x)$ функция $x \to \infty$ да чексиз катта функция деб аталади? Таърифни тенгсизликлар ёрдамида айтиб беринг.
9. $x \to a$ да чексиз катта функцияга мисол келтиринг.
10. $x \to \infty$ да чексиз катта функцияга мисол келтиринг.
11. Чексиз катта функция чегараланган функция бўладими? Агар бўлмаса, неғалигини тушунтиринг.
12. Қандай $y = f(x)$ функция $x \to a$ да ва $x \to \infty$ да чексиз кичик функция деб аталади? Тенгсизликлар ёрдамидаги таърифини айтиб беринг.
13. Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар орасида қандай боғланиш бор? Шунга мос теоремани исботланг.
14. 190—195, 198—206- масалаларни ечинг.

6-§. Чексиз кичик функцияларнинг асосий хоссалари

1. Чекли сондаги чексиз кичик функцияларнинг алгебраик йиғиндиси.

1-теорема. *Чекли сондаги чексиз кичик функцияларнинг алгебраик йиғиндиси чексиз кичик функциядир.*

Исботи. Иккита қўшилувчи бўлган ҳолни қараймиз. $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар $x \to a$ да чексиз кичик функциялар бўлсин, яъни

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} \beta(x) = 0.$$

$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ функцияни қарайлик. $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ бўлишини исботлаймиз. $x \to a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция бўлганлиги учун исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $|x - a| < \delta_1$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик бажарилади.

$\beta(x)$ чексиз кичик функция бўлгани сабабли яна ўша $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta_2 > 0$ топиладики, $|x - a| < \delta_2$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик бажарилади.

δ_1 ва δ_2 миқдорларнинг кичигини олиб уни δ билан белгилаймиз. У ҳолда $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун ушбу тенгсизликлар бажарилади:

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ва } |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Демак, a нуқтанинг δ атрофида ушбу тенгсизлик тўғри бўлади:

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Шундай қилиб, $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган x лар учун $|u| < \varepsilon$. Бундан $u(x)$ чексиз кичик функция бўлиши келиб чиқади, яъни

$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} [\alpha(x) + \beta(x)] = 0.$$

Теорема исбот қилинди.

2. Чексиз кичик функциянинг чегараланган функцияга кўпайтмаси.

2-теорема. *Чексиз кичик функциянинг чегараланган функцияга кўпайтмаси чексиз кичик функциядир.*

Исботи. $x\to a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция ва $z(x)$ чегараланган функция бўлсин. $u(x) = \alpha(x)\cdot z(x)$ функцияни қараймиз. $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$ бўлишини исботлаймиз. $x\to a$ да $z(x)$ чегараланган функция бўлганлиги сабабли бирор $M > 0$ сон учун шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $|x - a| < \delta_1$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|z(x)| < M$ тенгсизлик бажарилади. $x\to a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция бўлганлиги сабабли, исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta_2 > 0$ топиладики, $|x - a| < \delta_2$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ тенгсизлик бажарилади. δ_1 ва δ_2 миқдорларнинг кичигини оламиз ва уни δ билан белгилаймиз, у ҳолда $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун ушбу тенгсизликлар бажарилади:

$$|z(x)| < M \text{ ва } |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Демак, a нуқтанинг δ-атрофида ушбу тенгсизлик тўғри бўлади:

$$|u| = |\alpha(x)\cdot z(x)| = |\alpha(x)|\cdot|z(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon.$$

Шундай қилиб, $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|u| < \varepsilon$. Бундан $u(x)$ чексиз кичик функция эканлиги келиб чиқади, яъни

$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} \alpha(x)\cdot z(x) = 0.$$

Теорема исбот қилинди.

3. Чексиз кичик функцияларнинг кўпайтмаси.

3-теорема. *Чексиз кичик функцияларнинг кўпайтмаси чексиз кичик функциядир.*

Исботи. $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар $x\to a$ да чексиз кичик функциялар бўлсин. Лекин чексиз кичик функциялар чегараланган функциялардир, шу сабабли $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ кўпайтмада функциялардан бири чегараланган функция, иккинчиси эса чексиз кичик функциядир. Шу параграфдаги иккинчи теоремани қўллаб, қуйидагини оламиз:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)\cdot\beta(x) = 0$$

Теорема исбот қилинди.

4. Чексиз кичик функциянинг нолдан фарқли лимитга эга бўлган функцияга бўлинмаси.

4-теорема. *Чексиз кичик функциянинг нолдан фарқли лимитга эга бўлган функцияга бўлинмаси чексиз кичик функциядир.*

Исботи. $x \to a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция, $z(x)$ эса $x \to a$ да лимити мавжуд функция бўлсин, бу лимитни $A \neq 0$ билан белгилаймиз. Бироқ лимитга эга бўлган функция чегараланган функциядир (4-§, 3-банд), шу сабабли $z(x)$ чегараланган функциядир. У ҳолда (4-§, 3-банд) $\frac{1}{z(x)}$ функция ҳам чегараланган функциядир. Шу сабабли $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{z(x)}$ бўлинмани $\alpha(x)$ чексиз кичик функциянинг $\frac{1}{z(x)}$ чегараланган функцияга кўпайтмаси сифатида қараш мумкин. Шу параграфдаги 2-теоремани қўллаииб, $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{z(x)} = 0$ ни ҳосил қиламиз. Теорема исбот қилинди.

5. Лимитга эга бўлган функцияни ўзгармас ва чексиз кичик функция йиғиндисига ёйиш.

5-теорема. 1) *Агар $y = f(x)$ функция $x \to a$ да лимитга эга бўлса, у ҳолда уни бу лимитга тенг ўзгармас сон ва чексиз кичик функция йиғиндиси кўринишда ифодалаш мумкин.*

2) *Агар $y = f(x)$ функцияни ўзгармас сон билан ва $x \to a$ да чексиз кичик функциянинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда ўзгармас қўшилувчи бу функциянинг $x \to a$ даги лимити бўлади.*

Исботи. 1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ бўлсин, у ҳолда исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизлик эса $(f(x) - A)$ функция $x \to a$ да чексиз кичик функция эканини билдиради. Уни $\alpha(x)$ орқали белгилаймиз, у ҳолда $f(x) - A = \alpha(x)$ ёки $f(x) = A + \alpha(x)$, бу ерда $x \to a$ да $\alpha(x)$ чексиз кичик функция, A эса $f(x)$ функциянинг лимити.

Теореманинг биринчи қисми исботланди.

2) $f(x) = A + \alpha(x)$ бўлсин, бу ерда A — ўзгармас сон. $\alpha(x)$ эса $x \to a$ да чексиз кичик функция. У ҳолда исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|\alpha(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу эса $|x - a| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$ ёки $|f(x) - A| < \varepsilon$ бўлишини билдиради. Булардан эса $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

7-§. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар

Лимитга ўтишнинг энг содда қоидаларини, яъни функцияларнинг лимитларини топишга ёрдам берадиган қоидаларни келтириб чиқарамиз. Бунда исботни фақат $x \to a$ ҳол учун ўтказамиз ($x \to \infty$ да шунга ўхшаш бўлади). Баъзан эса қисқалик учун, $x \to a$ ни ҳам, $x \to \infty$ ни ҳам ёзмаймиз.

1. Йиғиндининг лимити.

1-теорема. *Чекли сондаги функциялар алгебраик йиғиндисининг лимити қўшилувчи функциялар лимитларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Исботни иккита қўшилувчи бўлган ҳол учун ўтказамиз. u ва v иккита функция, a ва b лар эса ўзгармас сонлар бўлиб, бу функцияларнинг лимитлари бўлсин, яъни $\lim u = a$, $\lim v = b$.

5-§ даги 5-теоремага асосан $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$ деб ёзиш мумкин, бу ерда α, β — чексиз кичик функциялар. Демак, $u + v = (a + \alpha) + (b + \beta) = (a + b) + (\alpha + \beta)$. Бу тенгликда $(a + b)$ ўзгармас сон, $(\alpha + \beta)$ — чексиз кичик функция. Бунга 5-§ даги 5-теореманинг иккинчи қисмини қўлласак, $\lim (u + v) = a + b = \lim u + \lim v$ эканлиги келиб чиқади.

Теорема исбот қилинди.

1-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 1.$

2. Кўпайтманинг лимити.

2-теорема. *Чекли сондаги функциялар кўпайтмасининг лимити функциялар лимитларининг кўпайтмасига тенг.*

Исботни иккита функция бўлган ҳол учун келтирамиз. $\lim u = a$, $\lim v = b$ бўлсин, бунда a ва b ўзгармас сонлар. У ҳолда $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, бунда α, β — чексиз кичик функциялар (5-§, 5-теоремага кўра). Демак,

$$u \cdot v = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + (a\beta + \alpha b + \alpha\beta).$$

Сўнгги тенгликда ab ўзгармас сон $(a\beta + \alpha b + \alpha\beta)$ — чексиз кичик функция (5-§. 1, 2, 3-теоремаларга асосан). 5-§ даги 5-теореманинг иккинчи қисмини қўлласак:

$$\lim u \cdot v = ab = \lim u \cdot \lim v.$$

Теорема исбот қилинди.

2-мисол. $\lim\limits_{x\to3} (x + 1)(x - 8) = \lim\limits_{x\to3} (x + 1) \cdot \lim\limits_{x\to3} (x - 8) =$

$$= (3 + 1)(3 - 8) = - 20.$$

Натижа. *Ўзгармас с кўпайтувчини лимит белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни*

$$\lim c \cdot u(x) = c \lim u(x),$$

чунки

$$\lim c = c \text{ — ўзгармас сон.}$$

3-мисол. $\lim\limits_{x\to2} 5x^2 = 5 \cdot \lim\limits_{x\to2} x^2 = 5 \cdot 2^2 = 20.$

3. Бўлинманинг лимити.

3-теорема. Иккита функция бўлинмасининг лимити махражнинг лимити нолдан фарқли бўлса, бу функциялар лимитларининг бўлинмасига тенг, яъни агар $\lim v \neq 0$ бўлса, $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$ бўлади.

Исботи. $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$ бўлсин. Демак, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$. Ушбу айниятни ёзамиз:

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Бу тенгликда $\frac{a}{b}$ — ўзгармас сон, $\frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}$ — чексиз кичик функция (5-§, 1, 2, 3-теоремаларга асосан), чунки $\alpha b - a\beta$ чексиз кичик функция, $b(b+\beta) \to b^2$, шу билан бирга, $b \neq 0$. Сўнгги тенгликка 5-§, 5-теореманинг иккинчи қисмини қўлласак:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

Теорема исбот қилинди.

4-мисол. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x-3}{5x+2}$ ни топинг.

$\lim\limits_{x\to 1}(5x+2) = 5\cdot 1 + 2 = 7 \neq 0$. Шунинг учун:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x-3}{5x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(5x+2)} = \frac{4\cdot 1 - 3}{5\cdot 1 + 2} = \frac{1}{7}.$$

5-мисол. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ ни топинг.

Бу ерда $x \to 2$ да сурат ва махраж 0 га интилади. Теоремани қўллаб бўлмайди. $x \neq 2$ бўлганда ўринли бўладиган ушбу айний алмаштиришни бажарамиз:

$$\frac{x^3-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$$

Шу сабабли бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

6-мисол. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x-2}$ ни топинг.

Бу ерда $x \to 2$ да махраж 0 га интилади. Теоремани қўллаб бўлмайди. Бироқ сурат 1 га интилади. Тескари миқдорнинг лимитини топамиз, яъни

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Бундан $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x-2} = \infty$, чунки чексиз кичик функцияга тескари функция чексиз катта функциядир (4-§ нинг 6-бандидаги теорема).

4. Тенгсизликларда лимитга ўтиш.

4-теорема. *Агар a нуқтанинг бирор атрофига тегишли барча x лар учун* $y=f(x)\geqslant 0$ *ва* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *(A — чекли сон) бўлса, у ҳолда* $A\geqslant 0$ *бўлади.*

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз, $A<0$ бўлсин, у ҳолда $|f(x)-A|\geqslant|A|$, яъни айирманинг модули $|A|$ мусбат сондан катта ва демак, $x\to a$ да нолга интилмайди. Бироқ бу ҳолда $x\to a$ да $y=f(x)$ функция A га интилмайди, бу эса теорема шартига зид, бинобарин $A<0$ деган фараз зиддиятликка олиб келди. Демак, $f(x)\geqslant 0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\geqslant 0$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

$f(x)\leqslant 0$ бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш исботланади.

5-теорема. *Агар* $f_1(x)$ *ва* $f_2(x)$ *функциянинг мос қийматлари учун* $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\geqslant\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ бўлади.

Исботи. Шартга кўра $f_1(x)\geqslant f_2(x)$, бундан $f_1(x)-f_2(x)\geqslant 0$. Олдинги теоремага кўра $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)-f_2(x))\geqslant 0$ ёки $[\lim\limits_{x\to a} f_1(x)-\lim f_2(x)]\geqslant 0$, бундан

$$\lim_{x\to a} f_1(x)\geqslant\lim_{x\to a} f_2(x).$$

Теорема исбот қилинди.

5. Оралиқ функциянинг лимити.

6-теорема. *Агар* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функцияларнинг мос қийматлари учун*

$$f_1(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant f_2(x)$$

тенгсизлик бажарилса ва бунда $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$ *бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ *бўлади.*

Исботи. Шартга кўра $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A$ ва $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$, демак, исталган $\varepsilon>0$ сон учун a нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, унда $|f_1(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Худди шу каби, ўша $\varepsilon>0$ учун a нуқтанинг бирор бошқа шундай атрофи мавжудки, унда $|f_2(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бу атрофларнинг кичигида $|f_1(x)-A|<\varepsilon$ ва $|f_2(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизликлар бажарилади. Булар эса ушбу тенгсизликларга тенг кучли:

$$\begin{aligned}-\varepsilon<f_1(x)-A<\varepsilon,\\ -\varepsilon<f_2(x)-A<\varepsilon.\end{aligned}\qquad(6.1)$$

Энди теорема шарти $f_1(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant f_2(x)$ га қайтиб, уларни ушбу тенг кучли тенгсизликлар билан алмаштирамиз;

$$f_1(x)-A\leqslant\varphi(x)-A\leqslant f_2(x)-A.$$

Агар бу тенгсизликларга (6.1) тенгсизликларни қўлласак, қуйидагини оламиз:

$$-\varepsilon < f_1(x) - A < \varphi(x) - A < f_2(x) - A < \varepsilon,$$

бундан $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади, яъни

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A.$$

Теорема исбот қилинди.

Бу теорема функция лимитининг мавжудлик аломатини ифодалайди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

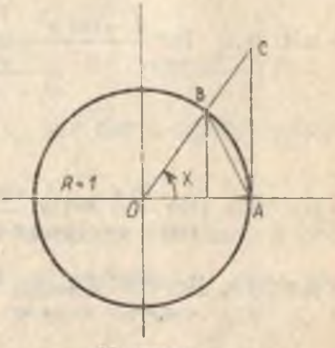
1. Чексиз кичик функциялар йиғиндиси ҳақидаги теоремани исботланг.
2. Чексиз кичик функциянинг чегараланган функцияга кўпайтмаси ҳақидаги теоремани исботланг.
3. Чексиз кичик функциялар кўпайтмаси нимага интилади? Исботланг.
4. Чексиз кичик функциянинг нолга тенгмас лимитга эга бўлган чегараланган функцияга бўлинмаси нимага интилади? Исботланг.
5. Лимитга эга бўлган функция билан чексиз кичик функция орасида қандай боғланиш бор? Тўғри ва тескари теоремаларни исботланг.
6. Кўпайтманинг лимити ҳақидаги теоремани исботланг.
7. Функциялар йиғиндисининг лимити ҳақидаги теоремани исботланг.
8. Бўлинманинг лимити ҳақидаги теоремани исботланг.
9. Тенгсизликларда лимитга ўтиш ҳақидаги теоремани исботланг.
10. Оралиқ функциянинг лимити ҳақидаги теоремани исботланг.
11. 211 — 215, 268 — 278, 281 — 286, 293 — 301, 306 — 312-мисолларни ечинг.

8-§. Биринчи ажойиб лимит

Оралиқ функциянинг лимити ҳақидаги теоремани ушбу муҳим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ лимит муносабатни келтириб чиқаришга қўллаймиз. Бу лимит кўпинча биринчи ажойиб лимит деб аталади.

Теорема. $\frac{\sin x}{x}$ *функция* $x \to 0$ *да 1 га тенг лимитга эга.*

Исботи. R радиусли айлана оламиз, радианларда ифодаланган x бурчак $0 < x < \frac{\pi}{2}$ оралиқда ётади деб фараз қилайлик (68-шакл).



68-шакл.

Шаклдан кўринадики, $\triangle_{BOA\ юз} < \triangle_{BOA\ сект.\ юз} < \triangle_{COA\ юз}$. Бироқ, $\triangle_{BOA\ юз} = \frac{1}{2} OA \cdot BO \cdot \sin\ x = \frac{R^2}{2} \sin x$, $\triangle_{BOA\ сектор\ юзи} = \frac{1}{2}\ OA^2 \cdot \breve{AB} = \frac{R^2}{2}\ x$, $\triangle_{COA\ юзи} = \frac{1}{2}\ OA \cdot AC = \frac{R^2}{2} \operatorname{tg} x$. Шу сабабли тенгсизликлар ушбу кўринишни олади:

$$\frac{R^2}{2}\sin x<\frac{R^2}{2}x<\frac{R^2}{2}\operatorname{tg} x$$

ёки

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

Барча ҳадларни $\sin x>0$ га бўламиз $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \text{ ёки } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

$\frac{\sin x}{x}$ функция бир хил лимит $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ ва $\lim\limits_{x\to 0} 1=1$ га эга бўлган функциялар билан чегараланган. Оралиқ функциянинг лимити ҳақидаги теоремага асосан (6-§, 6-теорема):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теорема $x>0$ бўлган ҳол учун исбот қилинди. Энди x бурчак $-\frac{\pi}{2}<x<0$ чегараларда ётади деб фараз қилайлик. $x=-z$ ($z\to 0$, $z>0$) алмаштириш бажариб, шакл алмаштирамиз:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}}\frac{\sin(-z)}{(-z)}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}}\frac{\sin z}{z}=1.$$

Шундай қилиб, формула $x<0$ бўлган ҳол учун ҳам исбот қилинди. Шундай қилиб, биринчи ажойиб лимит формуласи $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ни исталган (манфий ва мусбат) x лар учун исбот қилдик.

1-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3.$

2-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=$

$$=1\cdot 0=0.$$

3-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

4-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}}=\frac{2}{5}.$

9- §. Иккинчи ажойиб лимит. e сони

Монотон чегараланган кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремани ушбу муҳим

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

лимитни келтириб чиқаришга татбиқ этамиз. У иккинчи ажойиб лимит деб аталади.

$\left\{x_n\right\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ сонли кетма-кетликни қараймиз, бунда $n \in N$.

1-теорема. *Умумий ҳади $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ бўлган кетма-кетлик $n\to\infty$ да 2 ва 3 орасида ётадиган лимитга эга.*

Исботи. Исботлашда бу кетма-кетлик ўсувчи ва чегараланганлигини кўрсатамиз. Ньютон биноми формуласи

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}b^n$$

бўйича кетма-кетликнинг n-ҳади ва $(n+1)$-ҳади учун ифодаларни ёзамиз:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (8.1)$$

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

x_n ва x_{n+1} ни taққосласак, x_{n+1} ҳад x_n дан битта мусбат қўшилувчига ортиқлигини кўрамиз. Сўнгра $1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n+1} > 1-\frac{2}{n}$, $1-\frac{3}{n+1} > 1-\frac{3}{n}$ ва ҳоказо, бўлганлиги учун учинчисидан бошлаб, x_{n+1} даги ҳар бир қўшилувчи x_n даги мос қўшилувчидан катта. Демак, $x_{n+1} > x_n$, бу эса умумий ҳади $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ бўлган кетма-кетлик ўсувчи эканини билдиради.

Энди бу кетма-кетлик чегараланганлигини кўрсатамиз. $k = 1, 2, 3, \ldots$ учун $\left(1-\frac{k}{n}\right)<1$ эканини айтиб ўтамиз. У ҳолда (8.1) формула бундай ёзилади:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot \quad (8.2)$$

Сўнгра

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\ldots,\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

эканлилигини ҳисобга олсак, (8.2) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\left(1+\frac{1}{2}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Қавсга олинган ҳадлар махражи $q=\frac{1}{2}$ ва биринчи ҳади 1 бўлган геометрик прогрессия ҳосил қилади. Шу сабабли

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3.$$

Демак, барча n лар учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

(8.1) тенгликдан $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2$ экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, ушбу тенгсизликларни ҳосил қилдик:

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3. \quad (8.3)$$

Демак, умумий ҳади $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ бўлган кетма-кетлик чегараланганлигини кўрсатдик. Шундай қилиб, $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва чегараланган, шу сабабли у лимитга эга (2- §, 3-банддаги теорема). Бу лимитни e ҳарфи билан белгилаймиз, яъни умумий ҳади $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ бўлган кетма-кетликнинг $n\to\infty$ даги лимити e сони деб аталади:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \quad (8.4)$$

(8.3) тенгсизликлардан $2<e<3$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот қилинди.

e — иррационал сон, унинг қиймати вергулдан кейинги еттита рақами билан қуйидагига тенг:

$$e = 2{,}7182818\ldots.$$

2- теорема. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *функция* $x\to\infty$ *да* e *сонга тенг лимитга эга:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Исботи. Исботланган (8.4) формулада n бутун мусбат қийматни қабул қилиб чексизликка интилади. Энди x бутун ҳамда каср қийматларни қабул қилиб ∞ га интилсин.

1) $x\to+\infty$ бўлсин. Унинг ҳар бир қиймати иккита бутун мусбат сон орасида ётади.

$$n \leqslant x < n+1.$$

Қуйидаги тенгсизликларнинг бажарилиши равшан:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Агар $x\to+\infty$ бўлса, у ҳолда $n\to\infty$. Энди $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ функцияни ўз ичига олган ифодаларнинг лимитларини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\cdot(1)^{-1} = e.$$

Лимитлар тенг. Демак, оралиқ функциянинг лимити ҳақидаги теоремага асосан (6- §, 6- теорема) қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2) $x\to-\infty$ бўлсин. Янги $x=-(t+1)$ ўзгарувчи киритамиз. $x\to-\infty$ да $t\to+\infty$. Бундай ёзиш мумкин:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ эканлигини исботладик. Бу тенгликда $\frac{1}{x} = \alpha$ деб олсак, у ҳолда $x \to \infty$ да $\alpha \to 0$ $(\alpha \neq 0)$ га эгамиз ва $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ бўлиши келиб чиқади.

1- мисол. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3.$

2- мисол. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2.$

3- мисол. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

4- мисол. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^{x+2} =$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \cdot \left(1+\frac{3}{x}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{e^3 \cdot 1}{e^{-1} \cdot 1} = e^4.$$

10- §. Натурал логарифмлар

Математикада асоси $e = 2{,}71\ldots$ бўлган натурал логарифмлар катта аҳамиятга эга. Улар $\ln N$ билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\ln N = \log_e N.$$

Бир асосли логарифмдан бошқа асосли логарифмга ушбу формула ёрдамида ўтилади:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Бу ерда $\frac{1}{\log_a b}$ кўпайтувчи a асосдан b асосга ўтиш (ўтказиш) модули деб аталади. Натурал логарифмлардан ўнли логарифмларга ва аксинча ўтиш формулалари бундай бўлади:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}, \qquad \lg N = \frac{\ln N}{\ln 10},$$

бу ерда $\frac{1}{\lg e} = 2{,}30258\ldots$, $\frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429\ldots$ ўтиш модули.

Шундай қилиб, $\ln N \approx 2{,}3026 \lg N$, $\lg N \approx 0{,}4343 \ln N$.

Сонли ҳисоблашларда ўнли логарифмлар қулай, ҳарфий алмаштиришларда эса натурал логарифмлар қўлланилганда кўпчилик формулалар соддалашади.

Мисол. $\ln 32{,}94$ ни ҳисобланг.

Формулага кўра $\ln 32{,}94 \approx \lg 32{,}94 \cdot 2{,}3026$. Ўнли логарифмлар жадвалидан $\lg 32{,}94 \approx 1{,}5177$ ни топамиз. Демак, $\ln 32{,}94 \approx$ $\approx 1{,}5177 \cdot 2{,}3026 \approx 3{,}4947$.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Оралиқ функциянинг лимити ҳақидаги теоремани айтиб беринг.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ формулани исботланг.
3. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ҳақидаги теоремани айтиб беринг.
4. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ формулани исботланг.
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ формулани исботланг.
6. Қандай логарифмлар системаси натурал логарифмлар деб аталади? Натурал системадан ўнли системага ва аксинча қандай ўтилади?
7. 314—324, 351—361- масалаларни ечинг.

11- §. Чексиз кичик функцияларни таққослаш

Келгусида α ва β ни умумий аргументлари бир хил лимитга интиладиган чексиз кичик функциялар деб тушунамиз. Иккита чексиз кичик α ва β функцияни таққослаш учун улар нисбатининг лимитини топиш лозим. Бунда бир неча ҳол бўлиши мумкин.

1. Чексиз кичик функциянинг тартиби. а) агар $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ бўлса, α функция β функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция дейилади. Бу ерда α нолга β га қараганда тезроқ интилади деб айтилади.

1- мисол. $\alpha = x^3$, $\beta = x$ ва $x \to 0$ бўлсин. Топамиз:

$$\lim_{x \to 0} x^3 = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x = 0.$$

У ҳолда $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. Бу эса $\alpha = x^3$ функция $\beta = x$ функцияга қараганда юқори тартибли чексиз кичик функция эканини билдиради.

б) агар $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ бўлса, α функция β га нисбатан қуйи тартибли чексиз кичик функция дейилади.

2- мисол. $\alpha = x$, $\beta = x^3$ ва $x \to 0$ бўлсин. У ҳолда $\lim \frac{\alpha}{\beta} =$ $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Бу $\alpha = x$ функция $\beta = x^3$ функцияга қараганда қуйи тартибли чексиз кичик функция эканини билдиради.

Кўриб чиқилган а) ва б) ҳоллардан келиб чиқадики, агар α функция β функцияга қараганда юқори тартибли чексиз кичик функция бўлса, у ҳолда β функция α функцияга қараганда қуйи тартибли чексиз кичик функция бўлади, яъни агар $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.

в) Агар $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ ва A чекли сон бўлса, у ҳолда α ва β бир хил тартибли чексиз кичик функциялар дейилади.

3-мисол. $\alpha = \sin 5x$, $\beta = x$ ва $x \to 0$ бўлсин. Равшанки, $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, у ҳолда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5.$$

Демак, α ва β бир хил тартибли чексиз кичик функциялардир.

2. **«о» ва «О» белгилари.** Чексиз кичик функцияларни таққослашда «о» ва «О» белгиларидан фойдаланилади. «о» белги юқорироқ тартибли чексиз кичик функцияни белгилаш учун хизмат қилади. Агар α чексиз кичик функция β чексиз кичик функцияга нисбатан юқорироқ тартибли бўлса, у ҳолда бу бундай ёзилади: $\alpha = o(\beta)$.

Шу параграфдаги 1-мисолда $x \to 0$ да $\alpha = x^3$ функция $\beta = x$ га қараганда юқорироқ тартибли чексиз кичик функция, шу сабабли бундай ёзиш мумкин: $x^3 = o(x)$.

«О» белги бир хил тартибли чексиз кичик функцияларни белгилаш учун хизмат қилади. α чексиз кичик функция β чексиз кичик функция билан бир хил тартибли бўлса, бундай ёзилади: $\alpha = O(\beta)$. Шу параграфдаги 3-мисолда $x \to 0$ да $\alpha = \sin 5x$ функция $\beta = x$ билан бир хил тартибли чексиз кичик функция, шу сабабли бундай ёзиш мумкин: $\sin 5x = O(x)$.

12-§. Эквивалент чексиз кичик функциялар

Агар α ва β бир хил тартибли чексиз кичик функциялар, шу билан бирга $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ бўлса, у ҳолда улар эквивалент деб аталади. Эквивалент α ва β чексиз кичик функциялар учун $\alpha \sim \beta$ белгилаш қабул қилинган.

1-мисол. $x \to 0$ да $\sin x \sim x$, чунки $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2-мисол. $x \to 0$ да $\operatorname{tg} x \sim x$, чунки $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

3-мисол. $x \to 0$ да $\ln(1 + x) \sim x$, чунки

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

4-мисол. $x \to 0$ да $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, чунки

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1.$$

1. Эквивалентлик шарти. Иккита чексиз кичик функция эквивалентлигининг содда белгиси мавжуд.

1-теорема. α ва β *чексиз кичик функциялар эквивалент бўлиши учун бу функциялар бир-биридан тартиби уларнинг ҳар бирининг тартибидан юқорироқ бўлган чексиз кичик функцияга фарқ қилиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. $\alpha-\beta$ айирмани γ орқали белгилаймиз. $\gamma=\alpha-\beta$ чексиз кичик функциядир.

Зарурлиги: $\alpha\sim\beta$ бўлсин, γ ни α ва β билан таққослаймиз:

$$\lim\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0,$$

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=\lim\frac{\alpha}{\beta}-1=1-1=0,$$

$$\text{чунки } \lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\beta}{\alpha}=1.$$

Шундай қилиб, $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0$ ва $\lim\frac{\gamma}{\beta}=0$, демак, $\gamma=\alpha-\beta$ функция α ва β га қараганда юқорироқ тартибли чексиз кичик функциядир.

Етарлилиги: γ функция α ва β га нисбатан юқорироқ тартибли чексиз кичик функция бўлсин, яъни

$$\lim\frac{\gamma}{\alpha}=0 \text{ ва } \lim\frac{\gamma}{\beta}=0.$$

Алмаштириш бажарамиз:

$$\lim\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim\frac{\beta}{\alpha},$$

бундан

$$1-\lim\frac{\beta}{\alpha}=0 \text{ ва } \lim\frac{\beta}{\alpha}=1$$

ёки

$$\lim\frac{\gamma}{\beta}=\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=\lim\frac{\alpha}{\beta}-1,$$

бундан

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}-1=0 \quad \text{ва } \lim\frac{\alpha}{\beta}=1.$$

Шундай қилиб, $\alpha\sim\beta$. Теорема исбот қилинди.

Амалиётдаги кўпчилик масалаларда шу теорема муносабати билан чексиз кичик функцияларни уларга эквивалент чексиз кичик функциялар билан алмаштириш мумкин, яъни $\alpha\approx\beta$ (тақрибан тенг) деб ҳисоблаш мумкин. Тақрибий ҳисоблашларда бундан кенг фойдаланилади. Масалан, кичик x ларда ($x\to 0$ да) ушбу тақрибий тенгликларни тўғри деб ҳисоблаш мумкин:

$$\sin x \approx x, \ \operatorname{tg} x \approx x, \ \ln(1+x) \approx x \text{ ва ҳоказо.}$$

2. **Лимитларни ҳисоблашда чексиз кичик функцияларни эквивалент чексиз кичик функциялар билан алмаштириш.** Лимитларни ҳисоблашда ушбу теоремадан фойдаланилади.

2-теорема. *Иккита чексиз кичик функция нисбатининг лимити уларга эквивалент чексиз кичик функциялар нисбатининг лимитига тенг.*

Исботи. α, β — чексиз кичик функциялар ва $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ бўлсин, $\frac{\alpha}{\beta}$ нисбатнинг лимитини топамиз:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \lim \frac{\beta_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

чунки $\lim \frac{\alpha}{\alpha_1} = 1, \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1$. Шундай қилиб, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Теорема исбот қилинди.

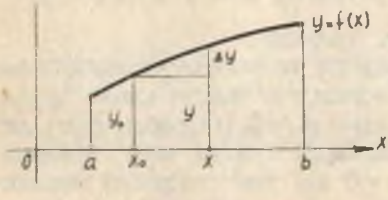
8-мисол. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3.$

9-мисол. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2(\sin x)^2}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{3x} = \frac{2}{3} \lim\limits_{x \to 0} x = 0.$

10-мисол. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin^2 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{(2x)^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2x} = \infty.$

13-§. Функциянинг узлуксизлиги

1. **Аргумент ва функциянинг орттирмалари.** $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлсин. Ихтиёрий $x_0 \in (a, b)$ нуқтани оламиз, унга функциянинг $y_0 = f(x_0)$ қиймати мос келади (69-шакл). Бошқа $x \in (a, b)$ нуқтани оламиз, унга функциянинг $y = f(x)$ қиймати мос келади. $x - x_0$ айирма x аргументнинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва Δx билан белгиланади. $f(x) - f(x_0)$ айирма f функциянинг аргумент орттирмаси Δx га мос орттирмаси дейилади ва Δy билан белгиланади. Шундай қилиб, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Бундан $x = x_0 + \Delta x$, у ҳолда



69-шакл.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

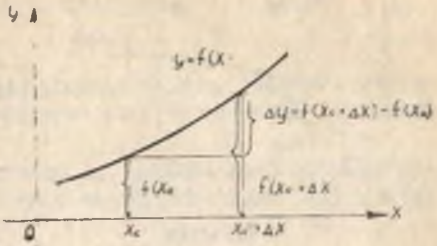
Δx ва Δy орттирмаларни эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган нуқта координаталарининг ўзгариши деб аталади.

2. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги.

1-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad (12.1)$$

яъни функциянинг x_0 нуқтадаги лимити унинг шу нуқтадаги қиӣматига тенг бўлса, $y = f\ (x)$ функция x_0 *нуқтада узлуксиз* деб аталади. Бу таъриф ушбу таърифга тенг кучли.



70- шакл.

2-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлиб, исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжуд бўлсаки, $|x - x_0| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган исталган x учун

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (12.2)$$

тенгсизлик тўғри бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 *нуқтада узлуксиз* деб аталади.

Агар (12.2) тенгсизликни қуйидаги

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

кўринишда ёзсак, ундан $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ келиб чиқади. Шундай қилиб, 1-таъриф ушбу таърифга тенг кучли. Қуйидаги таъриф ҳам юқоридагиларига тенг кучлидир.

3-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлиб, аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0 \qquad (12.3)$$

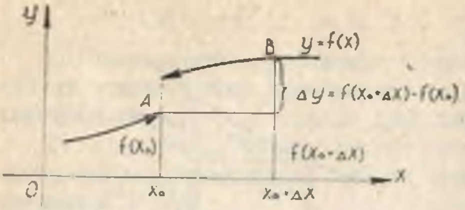
бўлса, функция x_0 *нуқтада узлуксиз* дейилади. 70- шаклда функция x_0 нуқтада узлуксиз, чунки (12.3) шарт бажарилади, 71- шаклда эса функция x_0 нуқтада узлуксиз эмас, чунки бу шарт бажарилмаган.

1-мисол. $y = x^2$ функция $x_0 = 1$ нуқтада узлуксизлигини кўрсатинг. Бу функция барча ҳақиқий сонлар учун аниқланган. Δy ни тузамиз:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 =$$
$$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Демак, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} (2\Delta x + (\Delta x)^2) = 0$. Шундай қилиб, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, демак, $y = x^2$ функция $x_0 = 1$ нуқтада узлуксиз, 1-таъриф ва (12.1) формулага қайтайлик. Функциянинг нуқтадаги бир томонлама лимитлари ўзаро тенг бўлганда, яъни

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$



71- шакл.

да ва фақат шундагина функциянинг лимити мавжудлиги маълум. Шу сабабли 1- таъриф қуйидаги таърифга тенг кучли.

4- таъриф. Функциянинг чап ва ўнг лимитлари x_0 да мавжуд ва ўзаро тенг бўлса, $y=f(x)$ функция x_0 *нуқтада узлуксиз* деб аталади. Бу таърифдан кўринадики:

1) $f(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг атрофида аниқланган,

2) бир томонлама лимитлар мавжуд ва улар ўзаро тенг:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0);$$

3) бу умумий лимит функциянинг x_0 нуқтадаги лимитига тенг. Яна (12.1) таърифга қайтамиз ва уни бундай қайта ёзамиз:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Ушбу даъво бунинг натижасидир.

Агар функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуқтада лимит ва функция белгиларининг ўринларини алмаштириш мумкин.

2- мисол. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x^2+1)=\ln \lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=\ln 2.$

3. Бир томонлама узлуксизлик.

5- таъриф. Агар $y=f(x)$ функция $(a, x_0]$ оралиқда аниқланган ва $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ бўлса, бу функция x_0 нуқтада *чапдан узлуксиз* деб аталади (71- шакл).

6- таъриф. Агар $y=f(x)$ функция $[x_0, b)$ оралиқда аниқланган ва $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада *ўнгдан узлуксиз* деб аталади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Иккита чексиз кичик функцияни таққослаш нимадан иборат?
2. Чексиз кичик функцияларни таққослашда «о» ва «О» белгиларидан қандай фойдаланилади?
3. Қайси ҳолда бир чексиз кичик функция иккинчи чексиз кичик функциядан юқорироқ тартибли чексиз кичик бўлади. Қуйироқ тартибли чексиз кичик бўлади?
4. Қайси ҳолда иккита чексиз кичик функция эквивалент бўлади?
5. Иккита чексиз кичик функция эквивалентлигининг зарурий ва етарли аломатини келтиринг.
6. Эквивалент чексиз кичик миқдорларга мисоллар келтиринг.
7. Лимитни ҳисоблашда эквивалент чексиз кичик функциялардан қандай фойдаланилади? Тегишли теоремани исботланг.
8. $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлиги таърифини келтиринг ва геометрик талқин этинг.
9. Узлуксиз функция учун лимитга ўтиш қоидаси нимадан иборат?
10. $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада чапдан ва ўнгдан узлуксизлиги таърифларини айтиб беринг.
11. 325—335, 345—350, 363—378, 221, 323, 224- масалаларни ечинг.

14- §. Нуқтада узлуксиз функцияларнинг хоссалари

1. Йиғиндининг узлуксизлиги.

1- теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x) \pm \varphi(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада узлуксиз функциядир.*

Исботи. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлганлиги учун $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ва $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ бўлади. $f(x) \pm \varphi(x)$ функция лимитини топамиз:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0) \pm \varphi(x_0).$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = f(x_0) \pm \varphi(x_0)$. Демак, $f(x) \pm$ $\pm \varphi(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиздир.

2. Кўпайтманинг узлуксизлиги.

2- теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot\varphi(x)$ кўпайтма ҳам x_0 нуқтада узлуксиз функциядир.*

Исботи. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлганлиги учун:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ ва } \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Бу функциялар кўпайтмасининг лимитини топамиз:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = f(x_0)\cdot\varphi(x_0).$$

Демак, $f(x)\cdot\varphi(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз функциядир.

3. Бўлинманинг узлуксизлиги.

3- теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $\varphi(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда уларнинг бўлинмаси $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ҳам x_0 нуқтада узлуксиз функциядир.*

Исботи. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлганлиги учун $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ва $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \neq 0$. Бу функциялар бўлинмасининг лимитини топамиз:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}.$$

Демак, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ функция x_0 нуқтада узлуксиздир.

4. Мураккаб функциянинг лимити ва узлуксизлиги. Ушбу теорема ўринли бўлиб, биз уни исботсиз келтирамиз.

4- теорема. *Агар $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0$ ва $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$ лимитлар мавжуд* *бўлса, у ҳолда x_0 нуқтада, $f[\varphi(x)]$ мураккаб функция мавжуд, шу билан бирга*

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{y\to y_0} f(y).$$

Бу теорема лимитларни x ўзгарувчидан янги y ўзгарувчига ўтиб ҳисоблаш имконини беради.

5-теорема. *Агар $y=\varphi(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз, шу билан бирга $\varphi(x_0)=y_0$ бўлиб, $f(y)$ эса y_0 нуқтада узлуксиз функция бўлса, у ҳолда $f[\varphi(x)]$ мураккаб функция x_0 нуқтада узлуксиздир.*

Исботи. $f(y)$ функция y_0 нуқтада узлуксиз бўлганлиги учун функция узлуксизлигининг 2-таърифига кўра исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\eta > 0$ мавжудки, $|y-y_0| < \eta$ шартни қаноатлантирадиган барча y лар учун

$$|f(y)-f(y_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бироқ, $y=\varphi(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада узлуксиз, бинобарин, қандай $\eta > 0$ сон берилган бўлмасин, шундай $\delta > 0$ мавжудки, $|x-x_0| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган исталган x учун $|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \eta$ тенгсизлик бажарилади. Булардан келиб чиқадики, қандай $\varepsilon > 0$ берилган бўлмасин, шундай $\delta > 0$ мавжудки, $|x-x_0| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган исталган x учун $|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \eta$ ёки $|y-y_0| < \eta$ тенгсизлик бажарилиши билан ушбу тенгсизлик ҳам бажарилади:

$$|f(y)-f(y_0)| < \varepsilon$$

ёки

$$|f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]| < \varepsilon.$$

Бу эса $f[\varphi(x)]$ мураккаб функция x_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради. Теорема исбот қилинди.

Эслатма. Мураккаб функция узлуксиз бўлган ҳолда лимит ва функция белгиларининг ўринларини алмаштириш мумкин, яъни

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)].$$

5. Асосий элементар функцияларнинг узлуксизлиги.

6-теорема. *Асосий элементар функциялар ўзлари аниқланган барча нуқталарда узлуксиздир.*

Мисол сифатида $y=\sin x$ функция ўзи аниқланган ҳар бир $x\in R$ нуқтада узлуксизлигини кўрсатамиз.

x_0 нуқтани белгилаймиз ва Δy орттирмани тузамиз:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Ҳосил қилинган функциянинг орттирмасини баҳолаймиз:

$|\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < \Delta x$, чунки кичик бурчаклар учун $\sin\alpha < \alpha$ тенгсизлик исботланган эди. Энди лимитга ўтамиз: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$. Демак (нуқтада узлуксизликнинг учинчи таърифига кўра), $\sin x$ функция x_0 нуқтада узлуксиз. Бироқ x_0 сон тўғри чизиғининг исталган нуқтаси, демак, $y = \sin x$ функция сонлар ўқининг исталган нуқтасида узлуксиздир.

6. Элементар функцияларнинг узлуксизлиги. Бу параграфнинг 1—5-бандларидаги барча теоремаларни ҳисобга олсак, ушбу теоремани таърифлаш мумкин.

7-теорема. *Барча элементар функциялар ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиздирлар.*

7. **Ишора турғунлиги.**

8-теорема. *Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуқтанинг шундай $\delta > 0$ атрофи мавжудки, унда бу функция x_0 нуқтадаги ишорасини сақлайди.*

Исботи. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз шу билан бирга $f(x_0) > 0$ бўлсин. Функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлигидан келиб чиқадики, исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжудки, x_0 нуқтанинг δ атрофига тегишли барча нуқталар учун $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Уни тенг кучли тенгсизликларга алмаштирамиз: $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < +\varepsilon$ ёки $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. $f(x_0) > 0$ бўлгани учун $f(x_0) + \varepsilon > 0$ бўлади. $\varepsilon > 0$ шундай кичик бўлсинки, $f(x_0) - \varepsilon > 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x)$ иккита мусбат сон орасида бўлади, бу эса x_0 нуқтанинг δ атрофига тегишли барча x ларда $f(x) > 0$ бўлишини билдиради.

$f(x) < 0$ бўлган ҳолни ҳам шунга ўхшаш исботлаш мумкин. Теорема исбот қилинди.

15-§. Узилиш нуқталари ва уларнинг турлари

1-таъриф. Агар x_0 нуқтада $y = f(x)$ функция учун қуйидаги шартлардан камида биттаси бажарилса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг *узилиш нуқтаси*, функциянинг ўзи эса *узлукли функция* деб аталади:

1) функция x_0 нуқтада аниқланмаган;

2) функция x_0 нуқтада аниқланган, лекин $f(x_0 - 0)$ ва $f(x_0 + 0)$ бир томонлама лимитлардан камида бири мавжуд эмас;

3) функция x_0 нуқтада аниқланган, бир томонлама лимитлар мавжуд, лекин ўзаро тенг эмас;

4) функция x_0 нуқтада аниқланган, бир томонлама лимитлар мавжуд ва ўзаро тенг, лекин улар функциянинг бу нуқтадаги қийматига тенг эмас: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Уч турдаги узилиш нуқталари фарқ қилинади.

1. Йўқотиладиган (четлатиладиган) узилиш.

2-таъриф. x_0 нуқтада $y=f(x)$ функция аникланмаган, бироқ бир томонлама лимитлар мавжуд ва ўзаро тенг, яъни $f(x_0-0)=$ $=f(x_0+0)$ бўлса, x_0 нуқта йўқотиладиган *узилиш нуқтаси* деб аталади.

Бу нуқтанинг бундай аталишига сабаб шуки функциянинг бу нуқтадаги қиймати сифатида бир томонлама лимитларнинг қийматларини оладиган бўлсак, биз гўё функцияни шу нуқтада янгидан аниқлаб, узилишни йўқотамиз.

1-мисол. $x_0=0$ нуқта $f(x).=\frac{\sin x}{x}$ функциянинг узилиш нуқтасидир.

Бироқ, $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ ва $\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1$, яъни $f(-0)=f(+0)$ бир томонлама лимитлар мавжуд ва ўзаро тенг, аммо $f(x)$ мавжуд эмас, демак, x_0 йўқотиладиган узилиш нуқтаси, $f(0)=f(-0)=$ $=f(+0)=1$ деб оламиз. Шу билан узилиш нуқтасини йўқотамиз (72-шакл).

2. Биринчи тур узилиш нуқтаси.

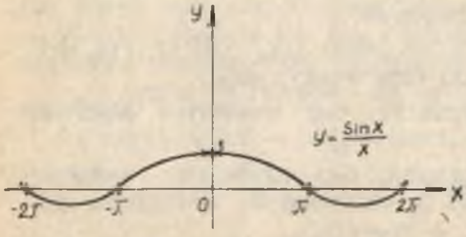
3-таъриф. Агар функция x_0 нуқтада аниқланган ёки аниқланмаган, лекин бир томонлама лимитлар мавжуд ва ўзаро тенг бўлмаса, яъни $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ бўлса, бу нуқта *биринчи тур узилиш нуқтаси* деб аталади. $h=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ сони функциянинг x_0 нуқтадаги сакраши деб аталади (73-шакл).

2-мисол. $f(x)=\frac{|x|}{x}$ функция $x=0$ нуқтада аниқланмаган.

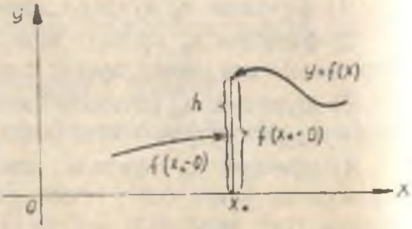
$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{+x}{x}=1,$$

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-x}{x}=-1,$$

яъни $f(+0)\neq f(-0)$ ва $h=1-(-1)=2$.

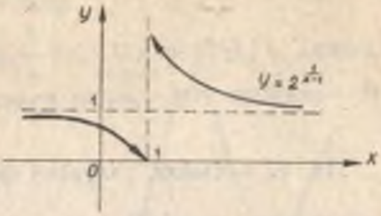


72-шакл.



73-шакл.

74- шакл.



75- шакл.

Демак x_0 — биринчи тур узилиш нуқтаси (74- шакл).

3. Иккинчи тур узилиш нуқтаси.

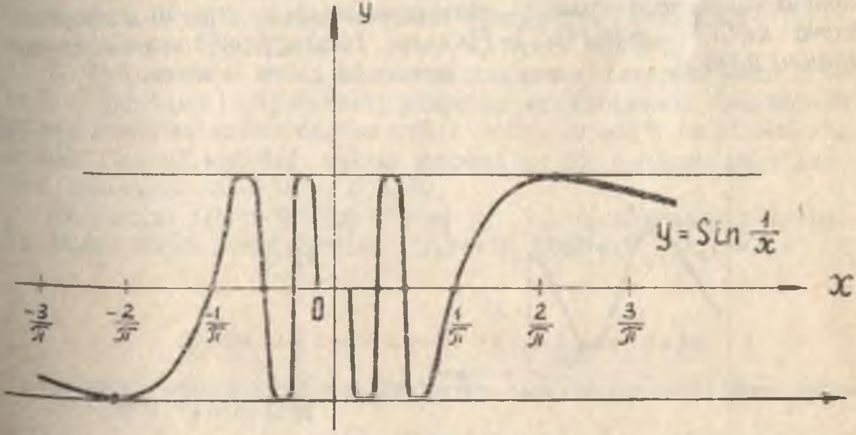
4- таъриф. Агар x_0 нуқтада бир томонлама лимитлардан камида бири мавжуд эмас ёки чексизликка тенг бўлса, x_0 нуқта *иккинчи тур узилиш нуқтаси* деб аталади.

3- мисол. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ функция $x = 1$ нуқтада мавжуд эмас (75- шакл):

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{-\infty} = 0,$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty.$$

Демак, $x = 1$ — иккинчи тур узилиш нуқтаси.



76- шакл.

4-мисол. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функция $x = 0$ нуқтада аниқланмаган (76-шакл). $f(\pm 0) = \lim\limits_{x\to\pm 0} \sin\frac{1}{x}$ тайин лимитга эга эмас, демак, $x = 0$ — иккинчи тур узилиш нуқтаси.

16-§. Кесмада узлуксиз функцияларнинг хоссалари

1-таъриф. $y = f(x)$ функция (a, b) оралиқнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у бу оралиқда *узлуксиз функция* деб аталади.

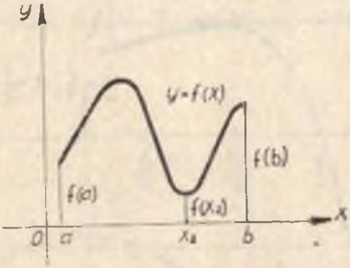
2-таъриф. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг барча ички нуқталарида узлуксиз ва унинг охирларида бир томонлама узлуксиз бўлса, бу функция шу *кесмада узлуксиз* деб аталади.

Кесмада узлуксиз функцияларнинг баъзи хоссаларини исботсиз келтирамиз.

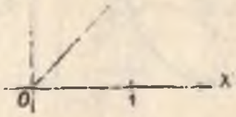
1. Функциянинг чегараланганлиги ҳақидаги теорема. *Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у шу кесмада чегараланган функциядир, яъни шундай ўзгармас чекли m, M сонлар мавжудки, барча $x\in[a,b]$ қийматлар учун $m \leqslant f(x) \leqslant M$ тенгсизликлар ўринли.*

Агар интервал ёки ярим интервал олинадиган бўлса хосса тўғри бўлмаслиги мумкин. Масалан, $f(x) = \frac{1}{x}$ функция $(0,1)$ ёки $(0,1]$ да узлуксиз, бироқ чегараланмаган, чунки ҳар қандай $M > 0$ сон олмайлик, шундай кичик x топиш мумкинки, $\frac{1}{x} > M$ бўлади.

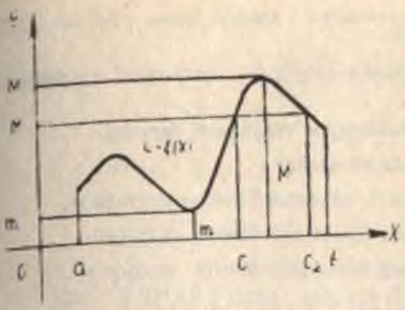
2. Функциянинг энг кичик ва энг катта қийматининг мавжудлиги ҳақидаги теорема. *Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда у бу кесмада ўзининг энг кичик ва энг катта қийматига эришади, яъни шундай x_1, $x_2 \in [a, b]$ мавжудки, барча $x\in[a,b]$ учун $f(x_1) \geqslant f(x)$ ва $f(x_2) \leqslant f(x)$ тенгсизликлар ўринли бўлади.*



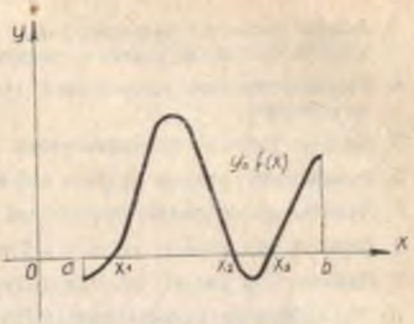
77-шакл.



78-шакл



79- шакл.



80- шакл.

77- шаклда $x\in[a,b]$ учун $f(x_2)\leqslant f(x)$ ва $f(b)\geqslant f(x)$. $f(b)$ функциянинг кесмадаги энг катта, $f(x_2)$ эса энг кичик қиймати.

Агар интервал ёки ярим интервал олинса, хосса тўғри бўлмаслиги мумкин. Масалан, $x\in(0,1)$ учун $f(x)=x$ узлуксиз, лекин энг кичик ва энг катта қийматларни кўрсатиш мумкин эмас (78- шакл).

3. Оралиқ қиймат ҳақидаги теорема. *Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, шу билан бирга m ва M лар функциянинг $[a,b]$ даги энг кичик ва энг катта қийматлари бўлса, у ҳолда функция шу кесмада m ва M орасидаги барча оралиқ қийматларни қабул қилади, яъни $m<\mu<M$ шартни қаноатлантирадиган исталган μ сон учун камида битта $x=c\in[a,b]$ шундай нуқта мавжудки, унинг учун $f(c)=\mu$ тенглик тўғри бўлади* (79- шакл).

Бу хоссани, соддароқ бундай ифодалаш мумкин: x аргумент ихтиёрий оралиқда ўзгарганда, узлуксиз $f(x)$ функциянинг қабул этган қийматлари бирорта оралиқни туташ тўлдиради. 79- шаклда $f(c_1)=\mu$, $f(c_2)=\mu$ бўлган иккита c_1 ва c_2 нуқта мавжуд.

4. Функциянинг нолга айланиши ҳақидаги теорема. *Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва кесманинг охирларида турли ишорали қийматларни қабул қилса, у ҳолда $[a,b]$ кесмада камида битта шундай нуқта мавжудки, бу нуқтада функциянинг қиймати нолга тенг бўлади.*

80- шаклда $f(b)>0$, $f(a)<0$ ва x_1, x_2, x_3 нуқталарда график Ox ўқини кесиб ўтади, демак, $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, $f(x_3)=0$.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар ҳақидаги теоремаларни таърифланг ва исботланг.
2. Узлуксиз функциялардан тузилган мураккаб функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремани таърифланг ва исботланг.

3. Асосий элементар функцияларнинг узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин? Элементар функциялар ҳақида-чи?
4. Узлуксиз функция ишорасининг турғунлиги ҳақидаги теоремани таърифланг ва исботланг.
5. Кесмада узлуксиз функцияларнинг хоссаларини таърифлаб беринг.
6. Функциянинг узилиш нуқтаси деб нимага айтилади?
7. Йўқотиладиган узилиш нуқтаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
8. Биринчи тур узилиш нуқтаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
9. Иккинчи тур узилиш нуқтаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
10. 225—239- масалаларни ечинг.

3- боб

БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1- §. Функциянинг ҳосиласи, унинг геометрик ва механик маъноси

1. Функциянинг нуқтадаги ҳосиласи. $y=f(x)$ функция (a,b) интервалда аниқланган бўлсин. (a,b) интервалга тегишли x_0 ва $x_0+\Delta x$ нуқталарни оламиз.

$y=f(x)$ функциянинг бу нуқталардаги қийматлари $f(x_0)$ ва $f(x_0+\Delta x)$ дан функциянинг $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ орттирмасини тузамиз. У аргумент Δx га ўзгарганда функция қанчага ўзгарганини кўрсатади. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатни қараймиз. Уни аргумент Δx га ўзгарганида функциянинг ўртача ўзгариши деб аталади.

1-таъриф. Функция орттирмаси Δy нинг аргумент орттирмаси Δx га нисбатининг Δx нолга интилгандаги лимити $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *ҳосиласи* деб аталади.

Бу лимит ушбу белгилардан бири билан белгиланади:

$$y',\ f'(x_0),\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df}{dx}.$$

Шундай қилиб,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Агар бу лимит мавжуд (яъни чекли сонга тенг) бўлса, ҳосила x_0 нуқтада мавжуд деб аталади.

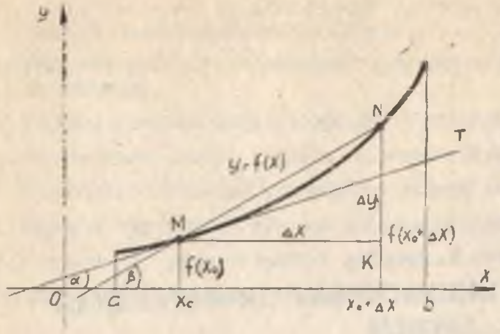
2-таъриф. Агар $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$ бўлса, $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада *чексиз ҳосилага эга* деб айтилади.

Агар ҳосила таърифида $\Delta x\to-0$ ёки $\Delta x\to+0$ бўлса, бир томонлама ҳосилаларга эга бўламиз, улар $f'_+(x_0)$ ва $f'_-(x_0)$ билан белгиланади ҳамда

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{—}\ x_0\ \text{нуқтадаги ўнг ҳосила,}$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{—}\ x_0\ \text{нуқтадаги чап ҳосила.}$$

$y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлиши учун ўнг ва чап ҳосилалар мавжуд ва тенг, яъни



81-шакл.

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳосилани топиш жараёни функцияни *дифференциаллаш* деб аталади.

2. Ҳосиланинг геометрик маъноси. Бирор (a, b) интервалда аниқланган $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Унга мос эгри чизиқ L да $M(x_0, y_0)$ ва $N(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ нуқталарини оламиз. Эгри чизиқнинг иккита нуқтасини туташтирувчи тўғри чизиқ кесувчи деб аталади (81-шакл). N нуқта L эгри чизиқда ҳаракатланиб, M га яқинлашса, MN кесувчи M нуқта атрофида бурила бошлайди.

3-таъриф. Эгри чизиқ L га унинг M нуқтасида ўтказилган *уринма* деб, N нуқта L эгри чизиқда ҳаракатлана бориб, M нуқтага интилганда MN кесувчи оладиган MT лимит вазиятига айтилади.

Шаклда уринма Ox ўқ билан α бурчак, кесувчи эса β бурчак ҳосил қилади. ΔMNK дан $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ экани кўриниб турибди. Эгри чизиқ L бўйлаб $N \to M$ да $\Delta x \to 0$ бўлади ва $\beta \to \alpha$. Бу эса бундай ёзилади:

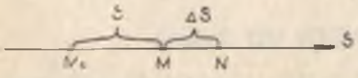
$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Бироқ, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$ ва $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, демак, $y' = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Шундай қилиб, $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи эгри чизиққа x_0 абсциссали M нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагининг тангенсига тенг. Ҳосиланинг геометрик маъноси ана шундан иборат.

3. Ҳосиланинг механик маъноси. Бирор M нуқта тўғри чизиқда ҳаракатланаётган бўлсин (82-шакл). Бирор M_0 бошланғич вазиятдан M нуқтагача ҳисобланадиган s масофа t вақтга боғлиқ, яъни s масофа t вақтнинг функцияси бўлади:

$$s = f(t).$$



82-шакл.

Вақтнинг бирор t моментида M нуқта M_0 бошланғич вазиятдан s масофада, навбатдаги бирор $t + \Delta t$ моментда эса бу нуқта N вазиятда бошланғич вазиятдан $s + \Delta s$ масофада бўлсин. Шундай қилиб, Δt вақт оралиғида нуқта Δs масофани ўтган, яъни s катталик Δs га ўзгарган бўлади. Нуқтанинг Δt вақт ичида ўртача ҳаракат тезлиги $v_{\text{ўрт.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ бўлиши равшан. Бироқ, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ўрт.}} = v$ — берилган t моментдаги ҳаракат тезлиги, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'$ эса ҳосила. Шундай қилиб $v = s'$, яъни тезлик йўлдан вақт бўйича олинган ҳосила. Ҳссиланинг механик маъноси ана шундан иборат.

2-§. Функциянинг дифференциалланувчанлиги

1-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли ҳосилага эга, яъни $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ чекли сон бўлса, бу функция шу *нуқтада ҳосилага эга* дейилади.

2-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция (a, b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга бўлса, у шу *интервалда дифференциалланувчи* деб аталади.

3-таъриф. Агар $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг барча ички нуқталарида дифференциалланувчи ҳамда чекли бир томснлама $f'_+(a)$ ва $f'_-(b)$ ҳосилалар мавжуд бўлса, бу функция шу *кесмада дифференциалланувчи* деб аталади.

Функциянинг узлуксизлиги ва дифференциалланувчанлиги орасидаги боғланишни белгилайдиган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Агар $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуқтада узлуксиздир.*

Исботи. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун таърифга кўра ушбу тенглик ўринли:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ — чекли сон.}$$

Лекин 5-теоремани (1-боб, 5-§) қўлланиб бундай ёзиш мумкин:

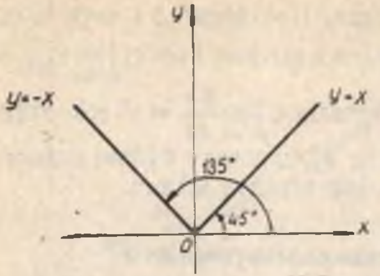
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

бу ерда $\Delta x \to 0$ да α — чексиз кичик функциядир. Бундан $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$. Бу тенглик $\Delta x \to 0$ да $\Delta y \to 0$ бўлишини кўрсатади, яъни $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Бу эса $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксизлигини билдиради (1-боб, 12-§, 3-таъриф).

Тескари даъво, умуман айтганда, тўғри эмас, чунончи бирор нуқтада узлуксиз, лекин бу нуқта дифференциалланувчи бўлмаган функциялар мавжуд.

Ушбу функцияни қарайлик (83-шакл):

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x > 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0, \\ -x, & \text{агар } x < 0. \end{cases}$$



83- шакл.

Бу функция x нинг барча қийматларида аниқланган ва барча нуқталарда, хусусан $x=0$ нуқтада узлуксиз. У шу нуқтада дифференциалланувчи эмаслигини кўрсатамиз. Ҳосиланинг геометрик маъносидан $f'_-(0)=\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, $f'_+(0) = = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Бу эса $x=0$ нуқтада ҳосила мавжуд эмаслигини, яъни функция дифференциалланувчи эмаслигини билдиради.

3- §. Дифференциаллашнинг асосий қоидалари

1. Ўзгармаснинг ҳосиласи.

1-теорема. *Ўзгармаснинг ҳосиласи нолга тенг:*

$$C' = 0.$$

Исботи. x аргумент Δx орттирма олганида y функция ушбу орттирмани олади:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

Демак, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Шундай қилиб, $y' = 0$ ёки $C' = 0$.

2. Йиғинди, кўпайтма ва бўлинманинг ҳосиласи.

2-теорема. *Агар $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда уларнинг алгебраик йиғиндиси, кўпайтмаси ва бўлинмаси* (махражи нолга тенг бўлмаса) *ҳам шу нуқтада дифференциалланувчидир.*

Бунда ҳосилалар ушбу формулалар бўйича топилади:

а) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
б) $(u \cdot v)' = u'v + v' \cdot u$,
в) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Исботи (бўлинма учун). $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ бўлсин, бу ерда $v(x) \neq 0$. x_0 қиймат Δx орттирма олганида u ва v функциялар Δu ва Δv орттирмалар, y функция эса Δy орттирма олади. Δy орттирмани қарайлик:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} =$$

$$= \frac{u(x_0+\Delta x)\, v(x_0) - v(x_0+\Delta x)\, u(x_0)}{v(x_0) \cdot v(x_0+\Delta x)} =$$

$$= \frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]\,v(x_0)-[v(x_0+\Delta x)-v(x_0)]\,u(x_0)}{v(x_0)\cdot v(x_0+\Delta x)} =$$

$$= \frac{v(x_0)\cdot\Delta u-u(x_0)\,\Delta v}{v(x_0)\,v(x_0+\Delta x)};$$

$u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг дифференциалланувчанлигига асосан:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v', \quad \lim_{\Delta x\to 0} v(x_0+\Delta x)=v(x_0).$$

Демак,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x_0)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\,v(x_0+\Delta x)}=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

шундай қилиб,

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \quad \text{ёки} \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

а) ва б) формулалар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Бу теорема қўшилувчилар ёки кўпайтувчилар исталган чекли сон бўлганида ҳам тўғри бўлади.

Натижа. Ўзгармас кўпайтувчини ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни $(Cu)'=Cu'$, бунда C — ўзгармас сон.

4-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Теорема. *$y=f(u)$ ва $u=\varphi(x)$ дифференциалланувчи функциялар бўлсин. Мураккаб $f(u)$ функциянинг эркли ўзгарувчи x бўйича ҳосиласи бу функциянинг оралиқ аргументи бўйича ҳосиласининг оралиқ аргументининг эркли ўзгарувчи x бўйича ҳосиласига кўпайтмасига тенг, яъни*

$$y'_x=f'_u(u)\cdot u'_x(x).$$

Исботи. $u=\varphi(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада, $y=f(u)$ функция эса $u_0=\varphi(x_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)$ мавжуд. Бундан қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u_0)+\alpha \text{ ёки } \Delta y=f'(u_0)\,\Delta u+\alpha\,\Delta u,$$

бунда $\Delta u\to 0$ да $\alpha\to 0$. $u=\varphi(x)$ функция $x=x_0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлганлиги учун $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x_0)$ мавжуд, бундан қуйидаги келиб чиқади: $\frac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x_0)+\beta$ ёки $\Delta u=\varphi'(x_0)\,\Delta x+\beta\,\Delta x$, бунда $\Delta x\to 0$ да $\beta\to 0$. $\Delta x\to 0$ да $\Delta u\to 0$ бўлишини айтиб ўтамиз (чунки $u=\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлиб, бу унинг дифференциалланувчанлигидан келиб чиқади). Энди Δu нинг қийматини Δy га қўямиз:

$$\Delta y = f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)\Delta x + f'(u_0)\beta\Delta x + \alpha\varphi'(x_0)\Delta x + \alpha\beta\Delta x.$$

Сўнгра Δy ни Δx га бўламиз ва $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\varphi'(x_0) + f'(u_0)\beta + \alpha\varphi'(x_0) + \alpha\beta] =$$
$$= f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

Демак, исталган x нуқтада: $y'_x = f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$. Теорема исбот қилинди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласи таърифини беринг.
2. Чексиз ҳосила таърифини беринг.
3. Бир томонлама ҳосилалар деб нимага айтилади?
4. Чизиққа берилган нуқтада уринма тўғри чизиқ деб нимага айтилади?
5. Функциянинг нуқтадаги ҳосиласининг геометрик маъноси нимадан иборат?
6. Ҳосиланинг механик маъноси нимадан иборат?
7. Қандай функция нуқтада дифференциалланувчи деб аталади? Интервалда-чи? Кесмада-чи?
8. Функциянинг нуқтада дифференциалланувчанлигининг зарурий шарти нимадан иборат?
9. Ўзгармас соннинг ҳосиласини келтириб чиқаринг.
10. Йиғинди, кўпайтма ва бўлинманинг ҳосиласини ҳисоблаш формулаларини келтириб чиқаринг.
11. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси нимадан иборат? Уни келтириб чиқаринг.
12. 440, 441, 454 — 457, 462, 463-мисолларни ечинг.

5-§. Тескари функция. Тескари функциянинг узлуксизлиги ва дифференциалланувчанлиги

1. Тескари функция. $[a, b]$ да аниқланган ўсувчи ёки камаювчи $y = f(x)$ функция берилган бўлсин, шу билан бирга $f(a) = c$, $f(b) = d$ бўлсин. Аниқлик учун $f(x)$ ўсувчи функция бўлган ҳолни қараймиз. $[a, b]$ кесмада x_1, x_2 иккита нуқтани оламиз, бунда $x_1 < x_2$ бўлсин, у ҳолда $y_1 = f(x_1)$ ва $y_2 = f(x_2)$ бўлади, шу билан бирга $y_1 < y_2$. Тескари тасдиқ ҳам тўғри: агар $y_1 < y_2$ бўлиб, $y_1 = f(x_1)$ ва $y_2 = f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $x_1 < x_2$. Шундай қилиб, x нинг қийматлари билан y нинг уларга мос қийматлари орасида ўзаро бир қийматли мослик бор. y ни аргумент, x ни эса функция сифатида қараб x ни y нинг функцияси сифатида ҳосил қиламиз:

$$x = \varphi(y).$$

Бу функция $y = f(x)$ функцияга тескари функция дейилади. Камаювчи функция учун ҳам шундай мулоҳаза юритилади. Шуни қайд қиламизки, $y = f(x)$ функциянинг қийматлар соҳаси $x = \varphi(y)$ тескари функция учун аниқланиш соҳаси бўлади ва аксинча.

1-мисол. $y = x^3$ функция берилган бўлсин. Бу функция $x \in R$ лар учун ўсувчи, $D(f) = R$, $E(f) = R$. $x = \sqrt[3]{y}$ тескари функция мавжуд, шу билан бирга $y \in R$.

2-мисол. $y = e^x$ функция берилган бўлсин. У $x \in R$ лар учун аниқланган ва ўсувчи. $D(f) = R$, $E(f) = (0, +\infty)$. Унинг учун $x = \ln y$ тескари функция мавжуд, шу билан бирга $y \in (0, +\infty)$.

2. Тескари функциянинг узлуксизлиги. Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *Агар ўсувчи (камаювчи) $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, шу билан бирга $f(a) = c$, $f(b) = d$ бўлса, у ҳолда унга тескари $x = \varphi(y)$ функция $[c, d]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлади.*

3. Тескари функцияларнинг дифференциалланувчанлиги.

2-теорема. *$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида монотон ва узлуксиз бўлсин. Бундан ташқари $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f'(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $x = \varphi(y)$ тескари функция $y_0 = f(x_0)$ нуқтада дифференциалланувчи, яъни ҳосилага эга бўлиб,*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

бўлади.

Шундай қилиб, тескари функциянинг ҳосиласи функция ҳосиласига тескари миқдорга тенгдир, яъни $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Исботи. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлганлиги учун $\Delta x \to 0$ да $\Delta y \to 0$. Аммо тескари функциянинг узлуксизлиги ҳақидаги теоремага кўра $x = \varphi(y)$ функция ҳам y_0 нуқтада узлуксиз, демак, $\Delta y \to 0$ да $\Delta x \to 0$. Бу хулосадан бундан кейинги алмаштиришларда фойдаланамиз.

Ҳосиланинг таърифига кўра:

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Демак, $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, шу билан теорема исботланди.

6-§. Асосий элементар функцияларни дифференциаллаш

1. Логарифмик функциянинг ҳосиласи. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ эканини исботлаймиз, бунда $u = \varphi(x)$. $y = \ln x$ функцияни қараймиз. Агар x Δx орттирма олса, у ҳолда функция Δy орттирма олади, бу орттирмани бундай ёзиш мумкин: $\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}$. Ушбу $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ нисбатни тузамиз. $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз ва $\alpha \to 0$ да $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$ эканини ҳисобга олиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{x}.$$

Шундай қилиб, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ эканини исбот қилдик.

Агар $y = \ln u$ бўлиб, бунда $u = \varphi(x)$ дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига биноан

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

тенгликка эга бўламиз.

Хусусан, агар $y = \log_a u = \frac{\ln u}{\ln a}$ бўлса, бунда $u = \varphi(x)$, у ҳолда

$$(\log_a u)' = \left(\frac{\ln u}{\ln a}\right)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

(бунда a — const, $a > 0$, $a \neq 1$).

2. Логарифмик дифференциаллаш. Агар $f(x)$ функция логарифмланадиган бўлса, у ҳолда бу функциянинг ҳосиласини излаш учун олдин логарифмлаш амали, сўнгра эса дифференциаллаш амалини қўллаш мумкин.

Бу усулни *логарифмик дифференциаллаш* дейилади.

Логарифмик дифференциаллаш усулини кўрсаткичли ва даражали функцияларнинг ҳосилаларини топишга қўллаймиз.

3. Даражали функциянинг ҳосиласи. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ эканини исботлаймиз, бунда $u = \varphi(x)$ дифференциалланувчи ($\alpha \in R$).

$y = u^\alpha$ функцияни қараймиз. Уни логарифмлаб, ушбуга эга бўламиз:

$$\ln y = \alpha \ln u.$$

y ни x нинг функцияси деб ҳисоблаб, тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз $\frac{y'}{y} = \alpha \frac{u'}{u}$ Бундан:

$$y' = \alpha \cdot y \frac{u'}{u} = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'.$$

Шундай қилиб, $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$. Шу билан формула исботланади, хусусан, $\alpha = \frac{1}{2}$ да ушбуга эгамиз: $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$. $\alpha = -1$ да ушбуга эгамиз: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.

4. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ эканини исботлаймиз, бунда $u = \varphi(x)$ дифференциалланувчи функция ($a > 0$, $a \neq 1$). $y = a^u$ функцияни олдин логарифмлаймиз, сўнгра x бўйича дифференциаллаб, ушбуга эга бўламиз: $\ln y = u \ln a$, $\frac{y'}{y} = u' \cdot \ln a$.

Охирги тенгликдан y' ни топамиз:

$$y' = y \ln a \cdot u' \text{ ёки } y' = (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

Формула исботланди.

Хусусий ҳолда, агар $a = e$ бўлса, у ҳолда $\ln e = 1$, шундай қилиб, $(e^u)' = e^u \cdot u'$ тенгликка эга бўламиз.

1-мисол. $y = e^{x^3}$ функция берилган. y' ни топинг

$$y' = e^{x^3} \cdot (x^3)' = 3x^2 e^{x^3}.$$

5. Кўрсаткичли-даражали функциянинг ҳосиласи. Асоси ҳам даража кўрсаткичи ҳам x нинг функцияси бўлган, яъни $y = u^v$ кўринишдаги (бунда $u = \varphi(x)$ ва $v = \psi(x)$) функция кўрсаткичли-даражали функция дейилади.

$(u^v)' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$ эканини исботлаймиз. $y = u^v$ функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = v \ln u.$$

Ҳосил бўлган тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u};$$

бундан ушбуга эга бўламиз:

$$y' = y\left(v \cdot \frac{u'}{u} + v' \ln u\right).$$

y ўрнига $y = u^v$ ни қўйиб, алмаштиришларни бажариб, ушбуга эга бўламиз:

$$(u^v)' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Формула исботланди.

Шундай қилиб, кўрсаткичли-даражали функциянинг ҳосиласи икки қўшилувчидан иборат: u^v — даражали функция деб фараз қилинса, биринчи қўшилувчи, u^v — кўрсаткичли функция деб фараз қилинса, иккинчи қўшилувчи ҳосил бўлади.

2-мисол. $y = (x^2 + 1)^{x^2 - 1}$ функция берилган. y' ни топинг.

$$y' = (x^2 - 1)(x^2 + 1)^{x^2 - 2} \cdot 2x + (x^2 + 1)^{x^2 - 1} \cdot \ln(x^2 + 1) \cdot 2x =$$

$$= 2x \cdot (x^2 + 1)^{x^2 - 1} \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1)\right).$$

6. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари. а) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ эканини исботлаймиз, бунда $u = \varphi(x)$ дифференциалланувчи функция.

$y = \sin x$ функцияни қараймиз. x га Δx орттирма берамиз, у ҳолда функция Δy орттирма олади:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Ушбу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

нисбатни тузамиз. $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб ва $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$ эканини ҳисобга олиб,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

га эга бўламиз. Шундай қилиб, $(\sin x)' = \cos x$.

Агар $y = \sin u$ (бунда $u = \varphi(x)$) бўлса, у ҳолда мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

3-мисол. $y = \sin x^2$ функциянинг ҳосиласини топинг.

$$y' = \cos x^2 \cdot 2x.$$

4-мисол. $y = \sin^2 x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

б) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ эканини исботлаймиз.

$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ келтириш формуласидан фойдаланиб, ҳосилани топамиз:

$$y' = (\cos u)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - u\right)' =$$

$$= -\sin u \cdot u'.$$

Шундай қилиб, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

5-мисол. $y = \cos\frac{1}{x}$ функциянинг ҳосиласини топинг. $y' = -\frac{1}{x^2}\left(-\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$.

в) $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ эканини исботлаймиз.

$y = \mathrm{tg}\, u$ функцияни қараймиз, бунда $u = \varphi(x)$ дифференциалланувчи функция. $tg\, u = \frac{\sin u}{\cos u}$ бўлгани сабабли касрни дифференциаллаш қоидасига биноан:

$$(\mathrm{tg}\, u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{\cos u \cdot \cos u \cdot u' - (-\sin u)\sin u \cdot u'}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u)\, u'}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

Шундай қилиб, $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

г) $(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}u'$ эканини шунга ўхшаш исботлаймиз.

$$(\mathrm{ctg}u)' = \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right) = \frac{(-\sin u\cdot\sin u - \cos u\cdot\cos u)u'}{\sin^2 u} =$$

$$= -\frac{(\sin^2 u + \cos^2 u)\cdot u'}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'.$$

Шундай қилиб $(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

6-мисол. Агар $y=\mathrm{tg}\sqrt{x}$ бўлса, у ҳолда: $y' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

7-мисол. $y = \ln\mathrm{ctg}x$ бўлса, у ҳолда:

$$y' = \frac{1}{\mathrm{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

д) Қуйидагиларни ҳам шуларга ўхшаш исботлаш мумкин:

$$(\sec u)' = \frac{\sin u}{\cos^2 u}\cdot u' \text{ ёки } (\sec u)' = \mathrm{tg}u\cdot\sec u\cdot u'.$$

$$(\mathrm{cosec}\,u)' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u}u' \text{ ёки } (\mathrm{cosec}\,u)' = -\mathrm{ctg}u\cdot\mathrm{cosec}u\cdot u'.$$

7. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари.

а) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ эканини исботлаймиз.

Узлуксиз, дифференциалланувчи, $y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ лар учун ўсувчи $x = \sin y$ функцияни қараймиз. Унинг қийматлар соҳаси $[-1,1]$ дан иборат. Бу функция $x\in[-1;\ 1]$ лар учун аниқланган, қийматлари $y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ бўлган $y = \arcsin x$ тескари функцияга эга. Тескари функциянинг дифференциалланувчанлиги ҳақидаги теоремага кўра: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Шундай қилиб: $y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ лар учун $\cos y \geqslant 0$ бўлгани сабабли ишора «+» олинди. Демак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Агар $y = \arcsin u$ бўлса, бунда $u = \varphi(x)$ — дифференциалланувчи функция, у ҳолда мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига биноан:

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$$

б) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ эканини ҳам шунга ўхшаш исботлаш мумкин.

в) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ эканини исботлаймиз.

$x = \operatorname{tg} y$ узлуксиз, дифференциалланувчи, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ лар учун ўсувчи функцияни қараймиз, унинг қийматлари соҳаси $(-\infty; +\infty)$ дан иборат. Бу функция $x \in (-\infty; +\infty)$ учун аниқланган $y = \operatorname{arctg} x$ тескари функцияга эга, унинг қийматлари: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Энди y'_x ни топамиз:

$$y'_x = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Демак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Агар $y = \operatorname{arctg} u$ бўлса (бунда $u = \varphi(x)$ дифференциалланувчи функция), у ҳолда $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

г) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ эканини ҳам шундай исботлаш мумкин.

8-мисол. Агар $y = \arcsin^2 x$ бўлса, у ҳолда: $y' = 2\arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9-мисол. Агар $y = \operatorname{arctg} e^{-x}$ бўлса, у ҳолда: $y' = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}$.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай функция тескари функция дейилади? Мисоллар келтиринг.
2. Тескари функцияни дифференциаллаш қоидаси нимадан иборат? Уни келтириб чиқаринг.
3. Логарифмик функция ҳосиласи формуласини келтириб чиқаринг.
4. Логарифмик дифференциаллаш қоидаси нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.
5. Даражали функциянинг, кўрсаткичли функциянинг ва кўрсаткичли-даражали функцияларнинг ҳосилалари учун формулалар чиқаринг. Мисоллар келтиринг.
6. Тригонометрик функциялар ҳосилалари учун формулалар чиқаринг.
7. Тескари тригонометрик функциялар ҳосилалари учун формулалар чиқаринг.
8. 472 — 487, 499 — 513, 526 — 544, 561 — 569, 584 — 597, 611 — 629, 650 — — 666-масалаларни ечинг.

7-§. Гиперболик функциялар уларнинг хоссалари ва графиклари

1. Таърифлар. $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ каби белгиланувчи ва ушбу тенгликлар билан аниқланувчи функциялар *гиперболик* функциялар дейилади:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболик синус,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболик косинус,}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ — гиперболик тангенс,}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ — гиперболик котангенс.}$$

Функцияларнинг таърифларидан тегишли тригонометрик функциялар орасидаги муносабатларга ўхшаш муносабатлар келиб чиқади:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x} \text{ ва ҳ. к.}$$

Масалан, биринчи айниятни текшириб кўрамиз:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} -$$

$$- \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Қолган муносабатларнинг тўғрилиги ҳам шунга ўхшаш текширилади.

Ушбу

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$$

тригонометрик функциялар $x^2 + y^2 = 1$ айлананинг параметрик тенгламалари бўлгани каби

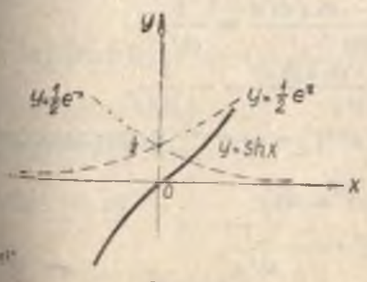
$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$$

гиперболик функциялар гиперболанинг параметрик тенгламалари бўлади. Бу функцияларнинг ҳам гиперболик деб аталишининг сабаби ҳам шу билан тушунтирилади.

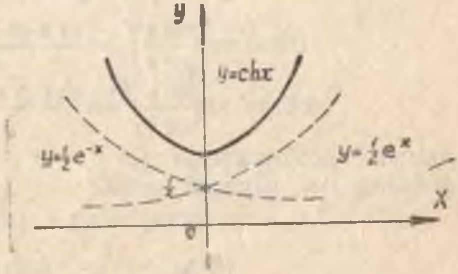
2. Гиперболик функцияларнинг хоссалари ва графиклари. $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ функциялар $x \in R$ лар учун аниқланган, $\operatorname{cth} x$ функция эса $x \neq 0$ лар учун аниқланган.

а) $\operatorname{sh} x$ — тоқ функция, $x > 0$ да мусбат, $x < 0$ да манфий, $x = 0$ да нолга тенг (84-шакл).

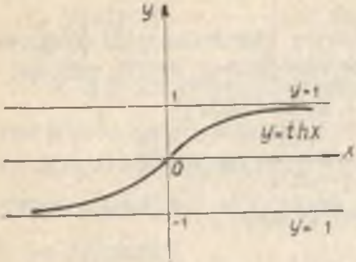
б) $\operatorname{ch} x$ — жуфт функция, барча x лар учун мусбат (85-шакл).



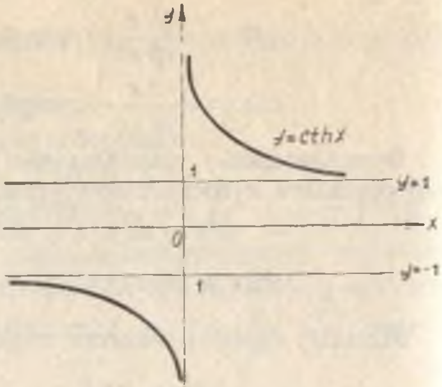
84-шакл.



85-шакл.



86- шакл.



87- шакл.

в) $\text{th}\, x$ — тоқ функция, $x > 0$ да мусбат, $x < 0$ да манфий, $x = 0$ да нолга тенг, $|\text{th}\, x| < 1$.

Ушбу лимитни топамиз:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \text{th} x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = 1, \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = -1. \end{cases}$$

Бу th$x$ функция графиги $y = \pm 1$ тўғри чизиқларга яқинлашишини билдиради (86- шакл).

г) cth$x$ функция тоқ функция, $x > 0$ да мусбат, $x < 0$ да манфий, $x = 0$ да аниқланмаган. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \text{cth}\, x = \pm 1$, $|\text{cth}\, x| > 1$, $\lim\limits_{x \to \pm 0} \text{cth} x = \pm\infty$ эканини кўрсатиш мумкин (87- шакл).

8- §. Гиперболик функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаш

$\text{sh}\, x$, $\text{ch}\, x$, $\text{th}\, x$, $\text{cth}\, x$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$(\text{sh}\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{ch}\, x,$$

$$(\text{ch}\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh} x,$$

$$(\text{th}\, x)' = \left(\frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}\right)' = \frac{\text{ch}\, x \cdot \text{ch}\, x - \text{sh}\, x\, \text{sh}\, x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x},$$

$$(\text{cth}\, x)' = \left(\frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}\right)' = \frac{\text{sh}\, x\, \text{sh}\, x - \text{ch}\, x\, \text{ch}\, x}{\text{sh}^2 x} = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}.$$

Ҳамма ҳисоблашларда $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$ формулалардан фойдаландик. Шундай қилиб:

$$(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x, \quad (\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x,$$

$$(\text{th}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \quad (\text{cfh}\, x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}.$$

9-§. Ҳосилалар жадвали

$u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференциалланувчи функциялар деб ҳисоблаймиз.

1.. Асосий элементар ва гиперболик функциялар ҳосилалари жадвалини тузамиз:

1) $C' = 0$; C — const.

2) $x' = 1$, x — эркли ўзгарувчи.

3) $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, α — const.

4) Хусусий ҳолда $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

5) Хусусий ҳолда $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$.

6) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, a — const, $a > 0$, $a \neq 1$.

7) Хусусий ҳолда $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

8) $(u^v)' = v\, u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$.

9) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$, a — const, $a > 0$, $a \neq 1$.

10) Хусусий ҳолда $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

11) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

12) $(\cos u)' = - \sin u \cdot u'$.

13) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

14) $(\operatorname{ctg} u)' = - \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

15) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$.

16) $(\arccos u)' = - \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$.

17) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$.

18) $(\operatorname{arcc\,tg} u)' = - \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$.

19) $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

20) $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

21) $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.

22) $(\operatorname{cth} u)' = - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

2. Дифференциаллаш қоидаларини тузамиз:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

3) $C \cdot u)' = C \cdot u'$, C — const.

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

5) Агар $y = f(u)$, $u = u(x)$, яъни $y = f(u(x))$ бўлса, у ҳолда

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

6) Агар $y = f(x)$ ва $x = \varphi(y)$ ўзаро тескари функциялар бўлса, у ҳолда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

1-мисол. $y = \ln^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ нинг ҳосиласини топинг.

$$y' = 2 \ln \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

2-мисол. $y = (\arcsin e^{3x})^{\frac{1}{3}}$ нинг ҳосиласини топинг.

$$y' = \frac{1}{3} (\arcsin e^{3x})^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (e^{3x})^2}} \cdot e^{3x} \cdot 3.$$

10-§. Ошкормас функция ва уни дифференциаллаш

x ва y ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланиш бирор

$$F(x, y) = 0 \tag{10.1}$$

формула билан берилган бўлсин. Агар бирор (a, b) оралиқда аниқланган бирор $y = f(x)$ функция (10.1) тенгламани қаноатлантирса, яъни уни айниятга айлантирса, у ҳолда $y = f(x)$ функция (10.1) тенглик билан аниқланган *ошкормас функция* дейилади.

Функциянинг ошкор берилишига ўтиш учун (10.1) тенгламани y га нисбатан ечиш керак. Бундай ўтиш ҳар доим ҳам осон бўлавермайди, баъзан эса умуман мумкин бўлмайди.

1-мисол. $3x - 2y - 6 = 0$ тенглама ошкормас функцияни аниқлайди. Унинг ошкор берилишига ўтиш учун бу тенгламани y га нисбатан ечамиз ва $y = \frac{3x - 6}{2}$ га эга бўламиз.

2-мисол. $x^2 + y^2 = 1$ тенглама ошкормас функцияни аниқлайди. Ошкор ҳолда у иккита функцияни тасвирлайди.

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{ва} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

3-мисол. $y^3 - 3xy + x^2 = 0$ тенглама y ни x нинг функцияси сифатида аниқлайди, аммо бу функцияни ошкор ҳолда ифодалаш 1 ва 2-мисоллардагига қараганда анча қийинроқ, чунки бунинг учун учинчи даражали тенгламани ечиш керак.

4-мисол. $y + x \cdot 2^y = 1$ тенгламани y га нисбатан умуман алгебраик ечиб бўлмайди, яъни y ни x орқали ошкор ифодалаб бўлмайди.

Ошкормас функция ҳосиласини уни ошкор ҳолга келтирмасдан туриб топиш мумкин. Ошкормас ҳолда $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган функция ҳосиласини топиш учун бу тенгламани, y ни x нинг функцияси эканини ҳисобга олган ҳолда x бўйича дифференциаллаш керак.

5-мисол. $3x - 2y - 6 = 0$ тенглама билан берилган функция учун y' ни топинг. y ўзгарувчи x нинг функцияси эканини ҳисобга олган ҳолда x бўйича дифференциаллаб, ушбуга эга бўламиз: $3 - 2y' = 0$, бундан $y' = \frac{3}{2}$.

6-мисол. $x^2 + y^2 = 1$ тенглама билан берилган функциянинг y' ҳосиласини топинг.

Дифференциаллаймиз: $2x + 2y \cdot y' = 0$, бундан $y' = -\frac{x}{y}$.

7-мисол. Ушбу

$$y^3 - 3xy + x^3 = 0$$

тенглама билан берилган функциянинг y' ҳосиласини топинг.

Дифференциаллаймиз: $3y^2 y' - 3y - 3xy' + 3x^2 = 0$, бундан

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

8-мисол. Ушбу

$$y + x \cdot 2^y = 1$$

тенглама билан берилган функциянинг y' ҳосиласини топинг.

Дифференциаллаймиз: $y' + x \cdot 2^y \ln 2 \cdot y' + 2^y = 0$, бундан

$$y' = -\frac{2^y}{1 + x \cdot 2^y \cdot \ln 2}.$$

$x \cdot 2y$ ни $1 - y$, $2y$ ни $\frac{1-y}{x}$ билан алмаштирамиз, натижада

$$y' = -\frac{1 - y}{x(1 + \ln 2 - y \ln 2)}$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб, ошкормас функцияни, уни ошкор кўринишда ифодалаш мумкин ёки мумкин эмаслигидан қатъи назар, дифференциаллаш мумкин.

11-§. Параметрик кўринишда берилган функциялар ва уларни дифференциаллаш

x ва y ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланишни ҳар доим ҳам $y=f(x)$ ошкор кўринишда ёки $F(x, y)=0$ ошкормас кўринишда ёзиш қулай бўлмайди. Баъзан ёрдамчи ўзгарувчи t ни киритиб, x ва y ўзгарувчини t нинг функцияси сифатида қуйидагича ифодалаш қулай бўлади:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \tag{11.1}$$

(11.1) тенглама функциянинг параметрик берилиши, t ўзгарувчи эса параметр деб аталади. t нинг ихтиёрий қийматига x нинг аниқ қиймати ва y нинг аниқ қиймати мос келади. x ва y нинг қийматлари жуфтига текисликда $M(x, y)$ нуқта мос келади. t параметр аниқланиш соҳасидан ҳамма қийматларни қабул қилганда $M(x, y)$ нуқта Oxy текисликда бирор чизиқни чизади. (11.1) тенгламани шу чизиқнинг параметрик тенгламаси дейилади. y нинг x га ошкор боғлиқлигини топиш учун (11.1) система тенгламаларидан t параметрни чиқариш керак. Бунинг учун бу системанинг биринчи тенгламасидан t ни x нинг функцияси сифатида ифодаланади:

$t=u(x)$, буни иккинчи тенгламага қўйиб, $y=\psi(u(x))$ га ёки $y=f(x)$ га эга бўламиз.

1-мисол. Тўғри чизиқнинг текисликдаги ушбу

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases},$$

(бунда m, n — йўналтирувчи вектор координаталари) параметрик тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{x-x_0}{m}=t, \quad \frac{y-y_0}{n}=t.$$

Бундан $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ — тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси келиб чиқади.

2-мисол. Айлананинг параметрик тенгламаси

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t \end{cases}$$

берилган бўлсин. Ундан t ни чиқарамиз, бунинг учун тенгламанинг ҳар бирини квадратга кўтарамиз:

$$\begin{cases} x^2=R^2\cos^2 t, \\ y^2=R^2\sin^2 t \end{cases}$$

ва уларни қўшамиз, бундан $x^2+y^2=R^2$ — айлана тенгламаси келиб чиқади.

Параметрик берилган

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

функция ҳосиласини топиш учун формула чиқарамиз; бунда $x = \varphi(t)$ функция тескари функцияга эга. Бу ерда y ни x нинг мураккаб функцияси деб ҳисоблаш мумкин, бунда t—оралиқ аргумент. Шу сабабли мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x, \tag{11.2}$$

аммо бунда x ўзгарувчининг t функцияси эмас, балки t ўзгарувчининг x функцияси берилган, шу сабабли тескари функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. (11.3)

(11.3) ни (11.2) га қўйиб ушбуга эга бўламиз:

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Шундай қилиб:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{11.4}$$

1-мисол.

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases} \qquad y'_x = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

2-мисол.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \qquad y'_x = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Гиперболик функцияларнинг таърифини айтинг.
2. Гиперболик функциялар тавсифини беринг.
3. Гиперболик функциялар ҳосилалари формулаларини чиқаринг.
4. Қандай функция ошкормас функция дейилади? Ошкормас функцияларга мисоллар келтиринг.
5. Ошкормас ҳолда берилган функциялар қандай дифференциалланади? Мисоллар келтиринг.
6. Функциялар ва чизиқлар тенгламаларининг параметрик берилиши нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.
7. Параметрик берилган функцияларни дифференциаллаш қандай бажарилади? Мисоллар келтиринг.
8. 634 — 649, 792 — 812. 936 — 946- мисолларни ечинг.

12- §. Функциянинг дифференциали

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада дифференциалланувчи бўлсин. Бу ҳар қандай $x \in [a, b]$ учун

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{12.1}$$

чекли ҳосила мавжуд эканини билдиради.

$f'(x) \neq 0$ деб фараз қилайлик, у ҳолда (12.1) тенгликдан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

экани келиб чиқади, бунда $\Delta x \to 0$ да $\alpha \to 0$.

Агар охирги тенгликнинг ҳамма ҳадини Δx га кўпайтирилса, ушбу

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

ёки

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \beta \tag{12.2}$$

муносабатга эга бўламиз, бунда $\beta = \alpha \cdot \Delta x$. $\Delta x \to 0$ да (12.2) формуладаги иккала қўшилувчи нолга интилади. Уларни Δx билан таққослаймиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \text{— чекли сон.}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Шундай қилиб, биринчи қўшилувчи $f'(x) \cdot \Delta x$ тартиби Δx тартибга тенг бўлган чексиз кичик миқдордир, у Δx га нисбатан чизиқли; иккинчи қўшилувчи $\beta = \alpha \cdot \Delta x$ даражаси Δx даражасидан юқори бўлган чексиз кичик миқдордир. Бундан (12.2) формулада биринчи қўшилувчи $f'(x)\,\Delta x$ асосий эканлиги келиб чиқади. Ана шу қўшилувчи функциянинг *дифференциали* дейилади.

Функциянинг дифференциали dy ёки $d\,f(x)$ каби белгиланади. Шундай қилиб,

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{12.3}$$

Демак, агар $y = f(x)$ функция x нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда функциянинг дифференциали функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ ни эркли ўзгарувчининг Δx орттирмасига кўпайтирилганига тенг бўлади, шу билан бирга Δx x га боғлиқ бўлмайди.

$y = x$ функция дифференциалини топамиз. $y' = 1$ бўлгани учун $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$ ёки $dx = \Delta x$, яъни эркли ўзгарувчининг орттирмаси унинг дифференциалига тенг. У ҳолда (12.3) формула бундай ёзилади:

$$dy = f'(x)\,dx = y' \cdot dx. \tag{12.4}$$

Бу формула ҳосила билан дифференциални боғлайди, шу билан бирга ҳосила чекли сон, дифференциал эса чексиз кичик миқдордир.

1-мисол. $y = \cos x$ функция дифференциалини топинг.

$y' = -\sin x$ бўлгани учун, $dy = -\sin x\,dx$.

2-мисол. $y = \ln x$ функция дифференциалини топинг.

$$y' = \frac{1}{x} \text{ бўлгани учун } dy = \frac{dx}{x}.$$

(12.4) тенгликдан

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

га эгамиз, яъни ҳосилани функция дифференциалининг эркли ўзгарувчи дифференциалига нисбати деб қараш мумкин.

Функциянинг дифференциалини топиш масаласи ҳосилани топишга тенг кучли, чунки ҳосилани эркли ўзгарувчи орттирмасига кўпайтириб функция дифференциалига эга бўламиз. Шундай қилиб, ҳосилаларга тегишли теоремалар ва формулаларнинг кўпчилиги дифференциаллар учун ҳам тўғри бўлиб қолаверади.

Агар u ва v — дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда қуйидаги формулалар тўғри бўлади:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(C \cdot u) = Cdu, \quad C \text{ — const.}$$

$$d(u \cdot v) = v\,d\,u + u\,d\,v, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,d\,u - u\,d\,v}{v^2}\ .$$

Шу формулалардан охиргисини исботлаймиз:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u' \cdot v - v' u}{v^2}\, dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} =$$

$$= \frac{v\,du - udv}{v^2}\ .$$

13- §. Мураккаб функциянинг дифференциали. Дифференциал шаклининг инвариантлиги

Мураккаб функция дифференциалини топамиз ва уни эркли аргументнинг функцияси дифференциали билан таққослаймиз.

$y = f(u)$ функция u эркли аргументнинг дифференциалланувчи функцияси бўлсин, у ҳолда

$$dy = f'(u)\,du \tag{13.1}$$

га эга бўламиз, бунда $du = \Delta\, u$.

Энди $y = f(u)$ оралиқ аргумент u нинг дифференциалланувчи функцияси бўлсин, бунда $u = \varphi(x)$. $y = f(\varphi(x))$ мураккаб функция ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$dy = y'_x\,dx = f'_u(u) \cdot \varphi'(x)\,dx. \tag{13.2}$$

Аммо $\varphi'(x)\,dx = du$, шу сабабли мураккаб функция дифференциали ушбу кўринишни олади:

$$dy = f'(u)\,du, \tag{13.3}$$

бунда

$$du = \varphi'(x)\,dx.$$

Дифференциалнинг иккала ифодасини таққослаш унинг шакли ўзгармаслигини (инвариантлигини) кўрсатади, яъни функциянинг аргументи бошқа аргументнинг оралиқ функцияси бўлиши ёки эркли ўзгарувчи бўлишига боғлиқ бўлмаган ҳолда бир хил шаклни қабул қилади.

Бу хосса (13.2) кўринишидаги ёзув узундан-узоқ ва шу сабабли ҳар хил амалларни бажариш учун ноқулай бўлганда дифференциалнинг (13.3) кўринишидаги ёзувига мурожаат қилиш имконини беради.

1-мисол. $y = \ln^2 x$ функция учун $dy = 2\ln x \cdot \frac{dx}{x}$ дифференциал бўлади, аммо

$$dy = 2\ln x\, d(\ln x)$$

ёзувдан ҳам фойдаланиш мумкин.

2-мисол. $y = (x^2 + a^2)^3$ функция учун $dy = 6x(x^2 + a^2)^2 dx$ дифференциал бўлади, аммо

$$dy = 3(x^2 + a^2)^2 d(x^2 + a^2)$$

ёзувдан ҳам фойдаланиш мумкин.

3-мисол. $y = \arcsin\sqrt{x}$ функция учун $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$ дифференциал бўлади, аммо

$$dy = \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}$$

ёзувдан ҳам фойдаланиш мумкин.

Дифференциал кўринишининг инвариантлигидан интеграллаш амалларида бевосита фойдаланилади.

14-§. Тақрибий ҳисоблашларда дифференциалдан фойдаланиш

(12.2) тенгликка қайтамиз:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta,$$

бунда $\beta = \alpha\Delta x$ (шу билан бирга $\Delta x \to 0$ да α, $\beta \to 0$). $f'(x)\Delta x = dy$ эканлигини ҳисобга олсак, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\Delta y = dy + \beta. \tag{14.1}$$

Функциянинг Δy орттирмаси ва функциянинг dy дифференциали эквивалент чексиз кичик миқдорлар эканини исботлаймиз. Бунинг учун $f'(x) \neq 0$ деб улар нисбатларининг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{dy+\beta}{dy} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(1 + \frac{\beta}{dy}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(1 + \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x}\right) = 1 + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

$f'(x) \neq 0$ — чекли сон бўлгани учун $\Delta x \to 0$ да $\alpha \to 0$. Шундай қилиб, $\Delta y \sim dy$, демак, Δy ва dy тақрибан тенг ифодалар деб ҳисоблаш мумкин, яъни

$$\Delta y \approx dy. \tag{14.2}$$

(14.1) тенгликдан улар бир-биридан Δy ва dy ларга нисбатан юқорироқ даражали чексиз кичик миқдор β га қадар фарқ қилиши келиб чиқади.

(14.2) тақрибий тенглик Δx нинг қиймати қанча кичик бўлса, шунча кичик хато беради, чунки бу хато β нинг қиймати билан аниқланади. Шу билан бирга dy дифференциални ҳисоблаш амали Δy орттирмани ҳисоблашга қараганда анча осондир.

1-мисол. Кубнинг узунлиги 30 см бўлган қирраси 0,1 см орттирилди. Шу куб ҳажмининг қанчалик ўзгарганини топиш талаб қилинади.

Куб қиррасини x билан белгилаймиз, у ҳолда куб ҳажми учун $v = x^3$ формулага эгамиз.

Агар қирранинг ўзгариш миқдорини Δx билан белгиласак, у ҳолда куб ҳажмининг ўзгариш миқдори функция орттирмаси сифатида аниқланади:

$$\Delta v = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \qquad (14.3)$$

Агар бу ўзгаришнинг миқдорини аниқлаш учун берилган функция дифференциали

$$dv = v' dx = 3x^2 \Delta x \qquad (14.4)$$

олинадиган бўлса, у ҳолда биз ҳажмнинг ҳақиқий ҳажми ўзгаришига нисбатан хатога йўл қўямиз. Берилган $x = 30$, $dx = \Delta x = 0,1$ қийматларини дифференциалнинг (14.4) ифодасига қўйиб, куб ҳажми ўзгаришининг тақрибий қийматини аниқлаймиз:

$$dv = 3\ 900 \cdot 0,1 = 270 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ҳажм ўзгаришининг ҳақиқий қиймати функция орттирмасининг (13.3) ифодасидан аниқланади:

$$\Delta v = 3 \cdot 900 \cdot 0,1 + 3 \cdot 30 \cdot 0,01 + 0,001 = 270,901 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Шундай қилиб, ҳажмининг ўзгаришини аниқлаш учун дифференциалдан фойдаланишда юз берадиган хато $\Delta v - dv = 0,901$ (см^3). Бу хато 1 см^3 дан ҳам кичик. Бу хатони ҳисобга олмаса ҳам бўлади, чунки бу хато ҳажм ҳақиқий ўзгаришининг 0,4 фоизидан кам.

Дифференциал ёрдамида тақрибий ҳисоблашлар функция қийматларининг ўзгаришини (орттирмасини) излаш билан чекланмайди. (14.2) тақрибий тенгликка қайтамиз:

$$\Delta y \approx dy.$$

уни ёйиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

ёки

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x.$$

Бу тақрибий тенглик амалда ушбу масалани ечишда қўлланилади: агар $f(x)$, $f'(x)$ ва x маълум бўлса, $f(x + \Delta x)$ тақрибий қийматни ҳисоблаш, яъни функциянинг x нуқтадаги қийматини билган ҳолда функциянинг $x + \Delta x$ нуқтадаги қийматини тақрибий ҳисоблаш мумкин. Бу қиймат Δx қанча кичик бўлса, шунча аниқ бўлади, яъни $x+\Delta x$ x га қанча яқин бўлса, шунча аниқ бўлади.

Бир нечта мисол қараймиз.

2-мисол. $y=\sqrt[n]{x}$ бўлсин. $dy=\dfrac{dx}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ёки $dy=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}dx$ га эгамиз. Демак, $\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}+\dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}dx$. Бу формулада $dx=\Delta x=\alpha$ деб оламиз, у ҳолда

$$\sqrt[n]{x+\alpha}\approx\sqrt[n]{x}+\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}\cdot\alpha. \tag{14.5}$$

Хусусий ҳолда, агар $x=1$ бўлса, (14.5) формула ушбу кўринишни олади:

$$\sqrt[n]{1+\alpha}\approx 1+\frac{\alpha}{n}. \tag{14.6}$$

(14.5) формулани $\sqrt[3]{24}$ нинг тақрибий қийматини ҳисоблашга татбиқ қиламиз. Бу формулада $n=3$, $x=27$, $\alpha=-3$ деб, ушбуга эга бўламиз:

$$\sqrt[3]{24}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{\sqrt[3]{27}}{3\cdot 27}(-3)=3-\frac{1}{9}=2{,}889.$$

(14.6) формулани $\sqrt{1{,}1}$ нинг тақрибий қийматини топишга қўллаймиз. Бу формулада $n=2$, $\alpha=0{,}1$ деб олсак, ушбуга эга бўламиз:

$$\sqrt{1{,}1}\approx 1+\frac{0{,}1}{2}=1{,}05.$$

3-мисол. $y=\sin x$ бўлсин. У ҳолда $dy=\cos x\,dx$ га эгамиз. Демак, $\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\,dx$. Бу формулада $dx=\Delta x=\alpha$ деб оламиз, у ҳолда:

$$\sin(x+\alpha)\approx\sin x+\alpha\cdot\cos x. \tag{14.7}$$

Хусусий ҳолда, агар $x=0$ бўлса, (14.7) формула ушбу кўринишни олади:

$$\sin\alpha\approx\alpha. \tag{14.8}$$

(14.8) формулани $\sin 31°$ ни ҳисоблашга қўллаймиз. $x=\dfrac{\pi}{6}$ (30° ли бурчакка тўғри келади), $\alpha=\dfrac{\pi}{180}$ (1° ли бурчакка тўғри келади) деб олиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\sin 31°=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=$$

$$=0{,}5+0{,}0174\cdot 0{,}8652=0{,}5151.$$

(14.8) формулани кичик α ларда қўллаш мумкин, масалан,

$$\sin 0{,}001 \approx 0{,}001.$$

4-мисол. $y = \ln x$ бўлсин; $dy = \frac{1}{x} dx$ га эгамиз. Демак, $\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{1}{x} dx$. Бу формулада $\Delta x = dx = \alpha$ деб оламиз, у ҳолда:

$$\ln(x + \alpha) \approx \ln x + \frac{\alpha}{x}. \qquad (14.9)$$

Хусусан, агар $x = 1$ бўлса, у ҳолда (14.9) формула ушбу кўринишни олади:

$$\ln(1 + \alpha) \approx \alpha. \qquad (14.10)$$

(14.9) формулани $\ln 782$ ни ҳисоблашга қўллаймиз. $x = 781$, $\alpha = 1$ деб оламиз, у ҳолда $\ln 782 \approx \ln 781 + \frac{1}{781} = 6{,}66058 + \frac{1}{781} = 6{,}66186$.

(14.10) формула кичик α ларда қўлланилади, масалан,

$$\ln 1{,}02 \approx 0{,}02.$$

Тақрибий формулалар (14.5 — 14.10) нинг ҳаммасида α кичик миқдордир.

15-§. Дифференциалнинг геометрик маъноси

$y = f(x)$ функция ва унга мос эгри чизиқни қараймиз (88-шакл).

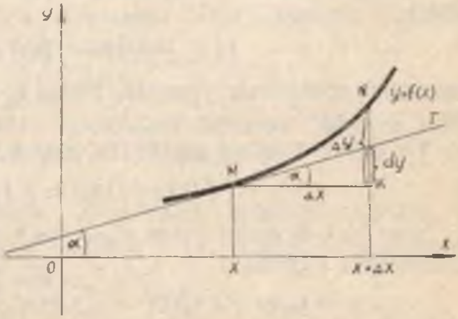
Эгри чизиқда $M(x, y)$ нуқтани оламиз, шу нуқтада эгри чизиққа уринма ўтказамиз, уринма Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қиладиган бурчакни α билан белгилаймиз. Эркли ўзгарувчи x га Δx orттирма берамиз, у ҳолда функция $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ орттирмани олади. Чизмада $\Delta y = KN$, N нуқта эса $N(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ ёки $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$. $\triangle$ MTK дан:

$$TK = MK \operatorname{tg} \alpha.$$

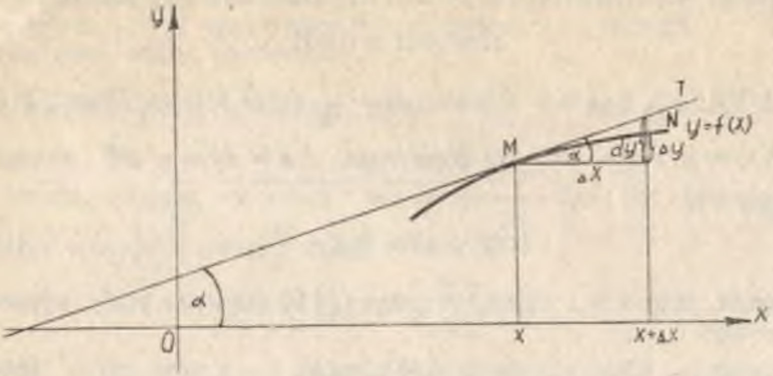
Аммо $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, $MK = \Delta x$, шу сабабли

$$TK = f'(x) \Delta x.$$

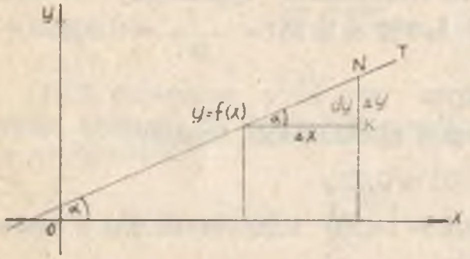
Дифференциалнинг таърифига биноан $dy = f'(x) \Delta x$. Шундай қилиб, $TK = dy$. Бу тенглик $f(x)$ функциянинг x ва Δx нинг берилган қийматларига мос келувчи дифференциали $y = f(x)$ эгри чизиққа x нуқтада ўтказилган уринманинг ординатаси



88-шакл.



89- шакл.



90- шакл.

орттирмасига тенг эканлигини билдиради. Дифференциалнинг геометрик маъноси шундан иборат.

Чизмадан

$$NT = \Delta y - dy$$

экани келиб чиқади. Аммо $\Delta y \sim dy$, шу сабабли $\Delta x \to 0$ да $\frac{NT}{TK} \to 0$. Чизмада $\Delta y > dy$.

89- шаклдан Δy dy дан кичик бўлиши мумкинлигини кўрамиз. Агар $y = f(x)$ — тўғри чизиқ бўлса, у ҳолда $\Delta y = dy$ (90- шакл).

16- §. Функцияни чизиқлаштириш

$y = f(x)$ функция бирор x_0 нуқтада ва унинг атрофида дифференциалланувчи бўлсин. Шу нуқтада

$$\Delta y \approx dy$$

ёки

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (16.1)$$

тақрибий тенгликни тузамиз. Унда $x_0 + \Delta x = x$ алмаштиришни бажарамиз, у ҳолда: $\Delta x = x - x_0$.

(16.1) тенгликни шу белгилашлардан фойдаланиб кўчириб ёзамиз:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0). \qquad (16.2)$$

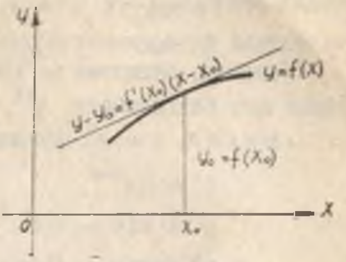
$y = f(x)$ бўлгани учун $y_0 = f(x_0)$ деб белгилаймиз ва уни (16.2) формулага қўямиз:

$$y - y_0 \approx f'(x_0)(x - x_0) \text{ ёки } y \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Охирги тенглик x_0 нуқта атрофида $y = f(x)$ функция ўзини тўғри чизиқдек тутишини билдиради. Геометрик жиҳатдан бу $y=f(x)$ функция графиги бўлган чизиқни x_0 нуқта атрофида шу чизиққа (x_0, y_0) нуқтадаги уринма билан алмаштиришга тенг кучлидир (91-шакл):

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Бундай алмаштиришни функцияни чизиқлаштириш дейилади.



91-шакл.

Бу усулнинг механик мазмуни шундан иборатки, нотекис ҳаракат бирор вақт оралиғида текис ҳаракат билан алмаштирилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Функциянинг дифференциали деб нимага айтилади?
2. Функциянинг дифференциали унинг ҳосиласи орқали қандай ифодаланади?
3. Функция дифференциалининг геометрик маъноси нимадан иборат?
4. Функция графигининг қандай нуқталари учун унинг дифференциали орттирмасидан катта бўлади? Қандай нуқталар учун кичик бўлади?
5. Қандай функциялар учун дифференциал айнан орттирмага тенг бўлади?
6. Функцияни чизиқлаштириш нима?
7. Дифференциалининг асосий хоссаларини айтиб беринг.
8. Дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси нимадан иборат?
9. Тақрибий ҳисоблашларда дифференциалдан фойдаланиш нимага асосланган?
10. Функция қийматларини дифференциал ёрдамида тақрибий ҳисоблаш формуласини келтиринг. Мисол келтиринг.
11. 887—889, 891—893, 896, 900, 902, 906-масалаларни ечинг.

17-§. Юқори тартибли ҳосилалар

1. Ошкор ҳолда берилган функцияларнинг юқори тартибли ҳосилалари. $y=f(x)$ функция барча $x\in[a, b]$ лар учун дифференциалланувчи бўлсин. $f'(x)$ ҳосиланинг қийматлари, умуман айтганда, x га боғлиқ, яъни $f'(x)$ ҳосила $f'(x)=\varphi(x)$ функциядир, шу сабабли $\varphi(x)$ функциянинг ҳосиласи ҳақида гапириш мумкин.

1-таъриф. Берилган функция ҳосиласидан олинган ҳосила шу функциянинг *иккинчи тартибли ҳосиласи* ёки *иккинчи ҳосила* дейилади ва y' ёки $f''(x)$ каби белгиланади:

$$y''=(y')'=f''(x).$$

2-таъриф. Иккинчи тартибли ҳосиладан олинган ҳосила *учинчи тартибли ҳосила* ёки *учинчи ҳосила* дейилади ва y''' ёки $f'''(x)$ каби белгиланади.

3-таъриф. $(n-1)$-тартибли ҳосиладан олинган ҳосила n-тартибли ҳосила дейилади ва $y^{(n)}$ ёки $f^{(n)}(x)$ каби белгиланади:

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'=f^{(n)}(x).$$

Ҳосила тартибини даража кўрсаткичи билан аралаштириб юбормаслик учун ҳосила тартиби қавслар ичига олинади.

$n=0$ бўлган хусусий ҳолда $f^{(0)}(x)=f(x)$ деб оламиз, яъни нолинчи ҳосила функциянинг ўзига тенг.

Тўртинчи, бешинчи ва юқори тартибли ҳосилалар рим рақамлари билан ҳам белгиланади: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, . . .

1-мисол. $y=x^n$ функция берилган. $y^{(n)}$ ни топинг.

$$y'=nx^{n-1},$$
$$y''=n(n-1)x^{n-2},$$
$$y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\ \dots\ 3\cdot2\cdot1\cdot x^{n-n}=n!$$

($n!$ ёзув n факториал деб ўқилади ва 1 дан n гача бўлган натурал сонлар кўпайтмасини билдиради).

Шундай қилиб, $(x^n)^{(n)}=n!$ У ҳолда $(x^n)^{(n+1)}=0$.

2-мисол. $y=a^x$ бўлсин. $y^{(n)}$ ни топинг.

$$y'=a^x\ln a,$$
$$y''=a^x\ln^2 a,$$
$$y'''=a^x\ln^3 a,$$
$$\dots\dots$$
$$y^{(n)}=a^x\ln^n a.$$

Шундай қилиб, $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$.

Хусусий ҳолда: $(e^x)^{(n)}=e^x$.

3-мисол. $y=e^{kx}$ (k — const) бўлсин. $y^{(n)}$ ни топинг.

$$y'=ke^{kx},$$
$$y''=k^2e^{kx},$$
$$y'''=k^3e^{kx},$$
$$\dots\dots$$
$$y^{(n)}=k^n e^{kx}.$$

Шундай қилиб, $\left(e^{kx}\right)^{(n)}=k^n e^{kx}$.

4-мисол. $y=\sin x$ бўлсин. $y^{(n)}$ ни топинг.

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)}=\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Шундай қилиб, $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

5-мисол. $y = \cos x$ бўлсин. $y^{(n)}$ ни топинг. Юқоридагига ўхшаш

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

эканини кўрсатиш мумкин.

6-мисол. $y = \ln x$ бўлсин. $y^{(n)}$ ни топинг.

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$y'' = -1\cdot x^{-2},$$
$$y''' = (-1)^2\cdot 2\cdot x^{-3},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ (n-1)\,x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}.$$

Шундай қилиб, $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

2. Лейбниц формуласи. n-тартибли ҳосилаларни топишда қуйидаги қоидалар тўғрилигича қолади:

а) агар $u = u(x)$, $v = v(x)$ бўлса, у ҳолда

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$$

б) агар $u = u(x)$, C — const бўлса, у ҳолда

$$(C\cdot u)^{(n)} = C\cdot u^{(n)}.$$

Икки $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар кўпайтмасининг n-тартибли ҳосиласини топиш учун ушбу формула ўринли:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}\cdot v' + \frac{n(n+1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Бу формула *Лейбниц формуласи* дейилади. Уни тузиш қоидаси бундай:

$(u+v)^n$ ифодани Ньютон биноми бўйича ёйиш керак:

$$(u+v)^n = u^n v^0 + \frac{n}{1!}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2 + \dots + u^0 v^n.$$

Бу ёйилмада u ва v даража кўрсаткичини ҳосиланинг мос тартиби билан алмаштириш керак.

7-мисол. $(uv)''$ ни ёзинг. Ёйилмани тузамиз:

$$(u+v)^2 = u^2v^0 + 2uv + v^2u^0,$$

бундан

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

8-мисол. $(uv)'''$ ни ёзинг: $(u+v)^3 = u^3v^0 + 3u^2v + 3uv^2 + u^0v^3$. Бундан $(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$.

9-мисол $y = e^x\cdot x^2$ берилган. $y^{(n)}$ ни топинг.

$$u = e^x,\ u' = e^x,\ u'' = e^x,\ \dots,\ u^{(n)} = e^x.$$
$$v = x^2,\ v' = 2x,\ v'' = 2,\ v''' = \dots = v^{(n)} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$y^{(n)} = e^x \cdot x^2 + \frac{n}{1!} e^x \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2!} e^x \cdot 2$$

ёки

$$y^{(n)} = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)).$$

3. Ошкормас функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. $F(x,y) = 0$ тенглама x га боғлиқ y функцияни аниқласин. Бунинг юқори тартибли ҳосиласини излаш учун бу тенгламани, y ва унинг барча ҳосилалари эркли ўзгарувчи x нинг функцияси эканини унутмаган ҳолга, тегишли сон марта дифференциаллаш керак.

10-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенглама билан ошкормас ҳолда берилган y нинг иккинчи ҳосиласини топинг.

Олдин y' ни топамиз. Тенгламани дифференциаллаймиз:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0.$$

Бундан $y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x}{y} \right)' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(y - xy')}{y^2}$.

y'' га топилган y' ни қўямиз:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + x \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \right)}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3}.$$

Аммо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламадан $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ экани келиб чиқади. Шу сабабли y'' ушбу кўринишни олади:

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

y''', y^{IV} ва ҳ. к. ҳосилаларни ҳам шунга ўхшаш топиш мумкин.

4. Параметрик берилган функцияларнинг юқори тартибли ҳосилалари. x нинг y функцияси

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан параметрик берилган бўлсин, бунда $x = \varphi(t)$ функция тескари функцияга эга. y'_x ҳосила (11.4) тенглик билан аниқланиши исботланган эди:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (17.1)$$

Иккинчи ҳосила y''_{xx} ни топиш учун (17.1) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз, бунда t функция x нинг функцияси эканини назарда тутамиз:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Шундай қилиб,

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - x''_{tt}\cdot y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

y'''_{xxx}, y^{IV}_{xxxx} ва ҳ.к. ҳосилаларни ҳам шунга ўхшаш топиш мумкин.

Функциянинг параметрик берилишидан механикада кенг фойдаланилади, унда t параметр вақтни билдиради. Вақт бўйича ҳосилалар штрихлар билан эмас, балки нуқталар билан белгиланади:

$$x'_t = \dot{x},\ x''_{tt} = \ddot{x},\ y'_t = \dot{y},\ y''_{tt} = \ddot{y};$$
$$y'_x = y',\ y''_{xx} = y'',\ \ldots$$

деб белгилаймиз, у ҳолда ҳосилалар формуласини бундай ёзиш мумкин:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad y'' = \frac{\ddot{y}\ \dot{x} - \ddot{x}\ \dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

11-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \quad a - \text{const} \end{cases}$$

тенгламалар билан параметрик берилган, x нинг функцияси бўлган y нинг y' ва y'' ҳосилаларини топинг.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t,\ y'' = (-\operatorname{ctg} t)'_t\cdot t'_x =$$
$$= \frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{\dot{x}} = -\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

18-§. Юқори тартибли дифференциаллар. Инвариантлик шаклининг бузилиши

$y = f(x)$ функцияни қараймиз, бунда x — эркли ўзгарувчи. Бу функциянинг

$$dy = f'(x)dx \qquad (18.1)$$

дифференциали яна x нинг функциясидир, бунда $f'(x)$ биринчи кўпайтувчи x га боғлиқ бўлиши мумкин, иккинчи кўпайтувчи эса аргументнинг Δx орттирмасига тенг бўлиб, x га боғлиқ эмас, шу сабабли бу функциянинг дифференциали ҳақида гапириш мумкин.

1-таъриф. Функциянинг дифференциалидан олинган дифференциал *иккинчи тартибли дифференциал* ёки *иккинчи дифференциал* дейилади ва d^2y деб белгиланади. Шундай қилиб,

$$d(dx) = d^2x.$$

2-таъриф. Иккинчи тартибли дифференциалдан олинган дифференциал *учинчи тартибли дифференциал* ёки *учинчи дифференциал* дейилади ва d^3y деб белгиланади. Шундай қилиб,

$$d(d^2y) = d^3y.$$

3-таъриф. $(n-1)$-тартибли дифференциалдан олинган дифференциал *n-тартибли дифференциал* дейилади ва d^ny деб белгиланади. Шундай қилиб,

$$d\left(d^{n-1}y\right) = d^ny.$$

Юқори тартибли дифференциалларни ҳосилалар орқали ифодалаймиз. Иккинчи дифференциалнинг ифодасини топамиз:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dx\,dx = y''dx^2$$

(бу ифодани чиқаришда dx ифода x га боғлиқ эмаслигидан фойдаландик). Шундай қилиб:

$$d^2y = y''dx^2. \tag{18.2}$$

Бу ерда $dx^2 = (dx)^2$, чунки дифференциал даражасини ёзишда қавсларни тушириб қолдириш қабул қилинган. Бундан кейин $(dx)^3$ ўрнига dx^3 деб ёзамиз ва бу dx ифоданинг куби деб тушунамиз.

Учинчи дифференциалнинг ифодасини ҳам шунга ўхшаш топамиз:

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = (y''dx^2)'dx = y'''dx^3.$$

Шундай қилиб,

$$d^3y = y'''dx^3. \tag{18.3}$$

Бу жараённи давом эттириб, n-дифференциал ифодасини топамиз:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}dx^{n-1})'dx = y^{(n)}dx^n.$$

Шундай қилиб,

$$d^ny = y^{(n)}dx^n. \tag{18.4}$$

Юқори тартибли дифференциаллардан фойдаланиб, (18.1 — 18.4) формулалар ёрдамида ҳар қандай тартибли ҳосилани дифференциалларнинг нисбати сифатида тасвирлаш мумкин, чунончи:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \ \ldots, \ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Ҳозирга қадар ҳамма формулаларда x ўзгарувчи эркли бўлиб келди. Энди x оралиқ аргумент бўлсин, яъни

$$y = f(x)$$

мураккаб функцияга эга бўлайлик, бунда $x = \varphi(t)$. Бу ҳолда ҳам дифференциал шакли сақланишини текшириб кўрамиз. Биз биламизки, биринчи тартибли дифференциал, x эркли ўзгарувчи ёки оралиқ функция бўлишига қарамай, ўз шаклини сақлайди, яъни

$$dy = y'dx, \text{ бунда } dx = \varphi'(t)dt \neq \text{const}.$$

Иккинчи дифференциал учун ифода топамиз:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx + y'd(dx) = y''dx^2 + y'd^2x. \tag{18.5}$$

(18.5) ва (18.2) формулаларни таққослаб, мураккаб функция иккинчи дифференциали (18.2) шаклга эга эмас дейиш мумкин.

Шунга ўхшаш, иккинчи дифференциалдан бошлаб, кейинги дифференциалларнинг ҳаммаси дифференциал шакли инвариантлиги хоссасига эга бўлмайди, дейиш мумкин. Инвариантлик хоссаси фақат биринчи тартибли дифференциал учун ўринли.

1-мисол. $y=\cos x$ функциянинг dy ва d^2y ларини топинг, x — эркли ўзгарувчи.

Ечиш. $dy = y'dx = -\sin x dx$,
$d^2y = y''dx^2 = -\cos x dx^2$.

2-мисол. $y=\cos x$ мураккаб функциянинг dy ва d^2y ларини топинг, бунда $x=\ln t$.

Ечиш. $dy = y'dx = -\sin x \cdot \frac{dt}{t} = -\sin x dx$, чунки $\frac{dt}{t} = dx$.

$d^2y = d(dy) = y''dx^2 + y'd^2x = -\cos x \cdot \left(\frac{dt}{t}\right)^2 + \sin x \cdot \frac{dt^2}{t^2} = -\cos x dx^2 -$
$- \sin x d^2x$, чунки $\left(\frac{1}{t} dt\right)^2 = dx^2$, $\left(-\frac{dt^2}{t^2}\right) = d^2x$.

Шундай қилиб,

$$d^2y = -\cos x\, dx^2 - \sin x dx$$

формула ўринли.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Берилган функциянинг n-тартибли ҳосиласи деб нимани айтилади?
2. Функциялар кўпайтмаси дифференциалини топишнинг Лейбниц қоидасини тушунтириб беринг.
3. Ошкормас функцияларнинг юқори тартибли ҳосилалари қандай топилади?
4. Параметрик берилган функцияларнинг юқори тартибли ҳосилалари қандай топилади?
5. Берилган функциянинг n-тартибли дифференциали деб нимани айтилади?
6. Исталган тартибли дифференциал функциянинг эркли ўзгарувчи бўйича тегишли ҳосиласи орқали қандай ифодаланади?
7. Оралиқ ўзгарувчи функция бўлганда мураккаб функция учун биринчидан юқори тартибли дифференциалларнинг шакли сақланадими?
8. 1006—1018, 1030—1040, 1056—1064, 1069—1075, 1088, 1096—1105- масалаларни ечинг.

19-§. Дифференциалланувчи функциялар ҳақида баъзи теоремалар

1. **Ролль теоремаси** (ҳосиланинг ноллари ҳақидаги теорема). *Агар* $y=f(x)$ *функция* $[a, b]$ *кесмада аниқланган ва узлуксиз,* (a, b) *интервалда дифференциалланувчи, кесманинг охирларида тенг* $f(a)=f(b)$ *қийматларни қабул қилса, у ҳолда кесманинг ичида камида битта* $x=c\in(a, b)$ *нуқта мавжудки унда ҳосила нолга тенг, яъни*

$$f'(c)=0.$$

Исботи. $[a, b]$ кесмада узлуксиз функциянинг хоссасига кўра функция шу кесмада ўзининг энг катта M ва энг кичик m қийматларига эга бўлади, яъни чегараланган дир.

Мумкин бўлган икки ҳолни қараймиз.

а) Энг катта ва энг кичик қийматлар бир хил, яъни $m = M$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = \text{const}$ деган хулосага келамиз. Демак, кесманинг ҳар қандай нуқтасида $f'(x) = 0$. Теорема исботланди.

б) $M \neq m$ бўлсин. $f(a) = f(b)$ бўлгани учун функция энг катта M ва энг кичик m қийматларидан бирини кесманинг охирларида эмас, унинг ичида қабул қилади. $M = f(c)$ бўлсин дейлик, бунда $c \in (a,b)$.

$f'(c)=0$ эканини исботлаймиз. Бунинг учун c нуқтага Δx орттирма берамиз, $(c + \Delta x) \in (a,b)$ нуқтага эга бўламиз.

$f(c)$ функциянинг энг катта қиймати бўлгани учун

$f(c + \Delta x) < f(c)$ ёки $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$ бўлади.

Ушбу муносабатларни қараймиз:

$$\Delta x < 0 \text{ да } \frac{f(c + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} > 0$$

ва

$$\Delta x > 0 \text{ да } \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0.$$

Шартга кўра функция $(a,\ b)$ интервалнинг ҳамма ерида ва хусусан, $x = c \in (a,b)$ нуқтада дифференциалланувчи эканини унутмаган ҳолда $\Delta x \to 0$ да бу муносабатларда лимитга ўтиб, ушбуларга эга бўламиз:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_{-}(c - 0) \geqslant 0,$$

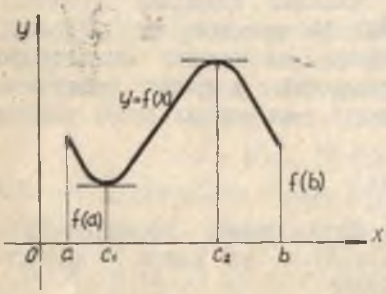
$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_{+}(c + 0) \leqslant 0.$$

Функциянинг $x = c$ нуқтада дифференциаллану вчанлиги сабабли ушбуга эгамиз:

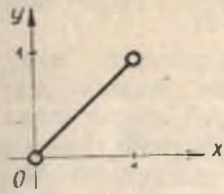
$$f'_{-}(c - 0) = f'_{+}(c + 0) = f'(c).$$

$f'_{-}(c - 0) \geqslant 0$ ва $f'_{+}(c + 0) \leqslant 0$ муносабатлар $f'(c) = 0$ бўлгандагина биргаликда бўлади. Демак, $[a,\ b]$ кесма ичида шундай $x = c$ нуқта мавжудки, унда ҳосила нолга тенг, яъни $f'(c) = 0$ бўлади. Теорема исботланди.

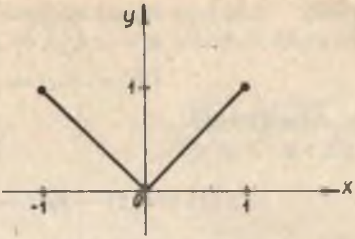
Бу теореманинг геометрик маъноси бундай: $f'(c) = 0$ бўлиши $\operatorname{tg} \alpha = 0$ эканини билдиради, бунда α — Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан графикка абсциссаси $x = c$ га тенг бўлган нуқтада ўтказилган уринма орасидаги бурчак. Шу сабабли теореманинг шарти бажарилса, у ҳолда $(a,\ b)$ кесма ичида кам деганда битта шундай $x = c$ нуқта топиладики, графикка абсциссаси $x = c$ га тенг нуқтада ўтказилган уринма Ox ўққа параллел бўлади (92-шакл). Теорема шартларидан ақалли биттасининг бузилиши теорема тасдиғининг бузилишига олиб келади.



92- шакл.



93- шакл.



94- шакл.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ агар } x \in [0,1) \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция берилган. Бунда биринчи шарт бузилган: функция кесмада узлуксиз эмас, $x=1$ нуқтада у узилишга эга, чунки

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1, \text{ аммо } f(1) = 0$$

ва $f'(c) = 0$ бўладиган $x = c$ нуқта мавжуд эмас (93-шакл).

2-мисол. $[-1, 1]$ кесмада $f(x) = |x|$ функция берилган. Бу ҳолда иккинчи шарт бузилган: функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас (94-шакл) ва демак, $f'(c) = 0$ бўладиган c нуқта мавжуд эмас.

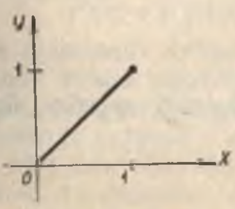
3-мисол. $[0,1]$ кесмада $f(x) = x$ функция берилган. Бунда учинчи шарт бузилган: $f(0) \neq f(1)$, чунки $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ (95-шакл) ва $f'(c) = 0$ бўладиган c нуқта мавжуд эмас.

Ролль теоремасининг шартларида $f(a) = f(b) = 0$ деб фараз қиламиз, $x = a$ ва $x = b$ нуқталарни функциянинг ноллари (ёки $f(x) = 0$ тенгламанинг илдизлари) деймиз, $f'(c) = 0$ бўладиган $x = c$ нуқтани эса ҳосиланинг ноли деймиз.

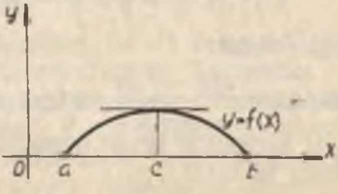
Ролль теоремаси функциянинг иккита ноли орасида ҳосиланинг камида битта ноли мавжуд эканлигини тасдиқлайди. Шу сабабли Ролль теоремасини ҳосиланинг ноллари ҳақидаги теорема ҳам дейилади.

a, *b* лар $y = f(x)$ функциянинг ноллари, *c* эса $y' = f'(x)$ ҳосиланинг нолидир (96-шакл).

2. **Лагранж теоремаси** (чекли орттирмалар ҳақидаги теорема). *Агар* $y = f(x)$ *функция* $[a, b]$ *кесмада аниқланган ва узлуксиз,* (a,b)



95- шакл.



96- шакл.

интервалда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесма ичида камида битта $x = c \in (a, b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

тенглик бажарилади.

Исботи. Ушбу

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ёрдамчи функцияни тузамиз, бунда $b \neq a$.

$F(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ҳақиқатан, **биринчидан**, $F(x)$ узлуксиз функцияларнинг айирмаси бўлгани учун бу функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз; **иккинчидан**, у дифференциалланувчи функцияларнинг айирмаси сифатида (a, b) да дифференциалланувчи; **учинчидан**, у оралиқнинг охирларида бир хил тенг қийматларни қабул қилади, чунончи:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Шу сабабли Ролль теоремасига кўра $[a, b]$ кесманинг ичида камида битта $x = c$ нуқта мавжудки, унда $F'(c) = 0$ бўлади. $F'(x)$ ҳосилани топамиз:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Демак, $x = c$ да

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Бундан:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

бунда

$$a < c < b.$$

Теорема исботланди. Топилган формула **Лагранж формуласи** дейилади.

Бу теореманинг геометрик маъносини аниқлаш учун Лагранж формуласини

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

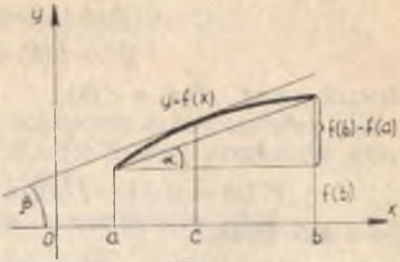
кўринишда ёзамиз.

97-шаклдан $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\alpha$ экани кўриниб турибди, буида α бурчак AB ватарнинг оғиш бурчаги.

Иккинчи томондан,

$$f'(c) = \operatorname{tg}\beta,$$

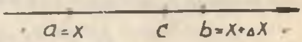
бунда β — абсциссаси c га тенг нуқтада эгри чизиққа ўтказилган уринманинг оғиш бурчаги (97-шакл).



97- шакл.

Лагранж теоремасига кўра $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, бундан эса $\alpha = \beta$ экани келиб чиқади. Демак, эгри чизиқда камида битта нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқтада эгри чизиққа ўтказилган уринма ватарга параллел бўлади.

Лагранж формуласига қайтамиз ва уни бошқа шаклда ёзамиз. Бунинг учун $a = x$, $b = x + \Delta x$ деб оламиз, бунда Δx ҳар қандай ишорали бўлиши мумкин. У ҳолда ушбу тенгликка эгамиз:



98- шакл.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\,\Delta x.$$

x, $x + \Delta x$, c нуқталарни сонлар ўқида тасвирлаймиз (98-шакл). Шаклдан $c - x < \Delta x$ экани кўринади. Шу сабабли $c - x = \theta\,\Delta x$ деб ёзиш мумкин, бунда $0 < \theta < 1$. Бундан: $c = x + \theta\,\Delta x$.

c нуқтанинг бундай ёзилишида Лагранж формуласи ушбу кўринишга эга бўлади:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\,\Delta x)\,\Delta x, \text{ бунда } 0 < \theta < 1.$$

$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$ бўлгани учун Лагранж формуласи узил-кесил ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\,\Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Бундан Лагранж формуласининг нега чекли айирмалар формуласи деб аталиши маълум бўлади.

3. **Коши теоремаси** (икки функция орттирмасининг нисбати ҳақидаги теорема). *Агар иккита* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функция* $[a, b]$ *кесмада узлуксиз,* (a, b) *интервалда дифференциалланувчи, шу билан бирга барча* $x \in (a, b)$ *лар учун* $\varphi'(x) \neq 0$ *бўлса, у ҳолда* $[a, b]$ *кесма ичида ақалли битта* $x = c \in (a, b)$ *нуқта мавжудки, унда*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

тенглик бажарилади, бунда $\varphi(b) \neq \varphi(a)$.

Исботи. Ушбу

$$F(x) = (f(b) - f(a))\,\varphi(x) - (\varphi(b) - \varphi(a))\,f(x)$$

ёрдамчи функцияни тузамиз. Бу функция $[a, b]$ кесмада Ролль теоремасининг ҳамма шартларини қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, **биринчидан**, бу функция узлуксиз функцияларнинг айирмаси сифатида $[a, b]$ кесмада узлуксиз; **иккинчидан**, у дифференциалланувчи функциялар айирмаси сифатида (a, b) интервалда дифференциалланувчи; **учинчидан**, бу функция $[a, b]$ кесманинг охирларида бир хил қийматларни қабул қилади. Чунончи:

$$F(a) = f(b)\cdot\varphi(a) - \varphi(b) f(a),$$
$$F(b) = f(b)\cdot\varphi(a) - \varphi(b) f(a).$$

Шундай қилиб, $F(a) = F(b)$.

Шу сабабли Ролль теоремасига кўра ақалли битта $x = c \in (a, b)$ нуқта мавжудки, унда $F'(c) = 0$ бўлади. $F'(x)$ ни топамиз:

$$F'(x) = (f(b) - f(a))\cdot\varphi'(x) - (\varphi(b) - \varphi(a))\cdot f'(x)$$

$x = c$ деб олсак,

$$F'(c) = (f(b) - f(a))\varphi'(c) - (\varphi(b) - \varphi(a)) f'(c) = 0.$$

Тенгликнинг иккала қисмини

$$\varphi'(c)(\varphi(b) - \varphi(a)) \neq 0 \quad \text{(шартга кўра)}$$

га бўламиз. Натижада

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (\text{бунда } a < c < b)$$

тенгликка эга бўламиз. Шу билан теорема исботланди.

Агар $\varphi(x) = x$ деб олинса, Лагранж теоремаси Коши теоремасининг хусусий ҳоли бўлишини таъкидлаймиз. Агар $f(a) = f(b)$ деб ҳисобланса, Ролль теоремаси Лагранж теоремасининг хусусий ҳоли бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ролль теоремасини ифодаланг ва исботланг.
2. Ролль теоремасининг геометрик маъносини тушунтиринг.
3. Лагранж теоремасини ифодаланг ва исботланг.
4. Лагранж теоремасининг геометрик маъносини тушунтиринг.
5. $f(x) = px^2 + qx + r$ функция учун Лагранж теоремасида қатнашаётган $x = c$ нуқта қаралаётган кесманинг ўртасидан иборат бўлишини кўрсатинг.
6. Коши теоремасини ифодаланг ва исботланг.
7. 1116 — 1121, 1127 — 1134- масалаларни ечинг.

20-§. Аниқмасликларни ечиш. Лопиталь қоидаси

Агар лимитларни ҳисоблашда $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 кўринишидаги натижалар ҳосил бўлса, бундай ҳолда биз *аниқмасликлар* билан иш кўрамиз дейилади. Бу ҳолда лимитни ҳисоблаш *аниқмасликни* ечиш дейилади. Аниқмасликларни ечиш француз математиги Лопиталь кўрсатган қоида бўйича амалга оширилади. Бу қоида ушбу теорема кўринишида ифодаланади.

1-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функциялар* $x = a$ *нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз, а нуқтанинг ўзидан ташқари шу атрофда дифференциалланувчи бўлиб, шу атрофда* $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$ ва $\varphi'(x) \neq 0$ *ҳамда* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ *лимит (чекли ёки чексиз) мавжуд бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *лимит мавжуд ва ушбу*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A\quad(\varphi'(x)\neq 0)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи. Ушбу

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}$$

нисбатни қараймиз. Бу тенглик тўғри, чунки шартга кўра

$$f(a)=0,\ \varphi(a)=0.$$

Агар x a нуқтанинг атрофига тегишли бўлса, у ҳолда тенгликнинг ўнг қисмига Коши теоремасини қўллаб ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

c нуқта a нуқта атрофига тегишли бўлгани учун $x\to a$ да $c\to a$ муносабат ҳам ўринли бўлади.

Шу сабабли охирги тенгликда $x\to a$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A.$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Теорема исботланди.

1-эслатма. Агар $f'(a)=0$, $\varphi'(a)=0$ ва $f'(x)$ ҳамда $\varphi'(x)$ ҳосилалар теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда теоремани $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ нисбатга иккинчи марта қўллаиш мумкин, чунончи:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}\ \text{ва ҳ.к.}$$

1-мисол.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 4x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{3}=\frac{4}{3}.$$

2-мисол.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

2-эслатма. Теорема $x\to\infty$ да $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$ бўлганда ҳам тўғрилигича қолади, яъни

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Ҳақиқатан ҳам, $x = \frac{1}{z}$ деб олиб, $x \to \infty$ да $z \to 0$ бўлишини кўрамиз, шу сабабли

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad \lim_{z\to 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

$\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ ифодага нисбатан Лопиталь қоидасини қўллаймиз:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right)'}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3-мисол.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{4}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sin\frac{3}{x}\right)'}{\left(\frac{4}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{3}{x}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{4}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{4}\cos\frac{3}{x} = \frac{3}{4}.$$

Ушбу теоремани исботсиз келтирамиз.

2-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функциялар* $x = a$ *нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз, шу оралиқда* ($x = a$ нуқтанинг ўзидан ташқари) *дифференциалланувчи бўлса ҳамда шу атрофда*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0$$

бўлса ва $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ *лимит* (чекли ёки чексиз) *мавжуд бўлса, у ҳолда* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *мавжуд бўлади ва ушбу*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу теорема $x \to \infty$ да ҳам ўз кучини сақлайди.

4-мисол.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(\sin^2 x)'}{(x)'} = -\lim_{x\to 0} 2\sin x\cos x = 0.$$

5-мисол.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x^2})'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x\,e^{x^2}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2x^2e^{x^2}=+\infty.$$

1 ва 2-теоремаларни умумлаштириб ва эслатмаларни ҳисобга олиб, Лопиталь қоидасини бундай ифодалаш мумкин:

Агар $x\to a$ ва $x\to\infty$ да $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар бир вақтда 0 га ёки ∞ га интилса, у ҳолда бу функциялар нисбатининг лимитини улар ҳосилалари нисбатининг лимити (агар бундай лимит мавжуд бўлса) билан алмаштириш мумкин, яъни

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\text{ ёки }\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

бунда A — чекли ёки чексиз.

3-эслатма. Агар охирги ифоданинг ўнг томонидаги (чекли ёки чексиз) лимити мавжуд бўлса, Лопиталь қоидаси ўринли бўлади. Чап томондаги лимит мавжуд бўлган бир вақтда ўнг томондаги лимит мавжуд бўлмаслиги мумкин.

6-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ лимитни топинг.

Ечиш. Лопиталь қоидасини қўллаймиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)$$

$x\to\infty$ да $(1+\cos x)$ ифода 0 билан 2 орасида тебранади, яъни $x\to\infty$ да $(1+\cos x)$ ифоданинг лимити мавжуд эмас, шу сабабли Лопиталь қоидасини қўлланиб бўлмайди.

Изланаётган лимитни бошқа йўл билан топамиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

4-эслатма. Шуни эслатиб ўтамизки, Лопиталь қоидаси ҳар доим ҳам жавобга олиб келавермайди.

7-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ лимитни топинг.

Ечиш. Лопиталь қоидасини қўллаймиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Аниқламасликни очмасдан дастлабки лимитга қайтиб келдик.

Изланаётган лимитни бошқа усул билан топамиз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

1. $0\cdot\infty$ **кўринишидаги аниқмаслик.** Бундай аниқмасликни очиш дейилганда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ бўлганда $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)$ лимитни топиш тушунилади.

Агар изланаётган ифодани

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\quad \text{ёки}\quad \lim_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ёзилса, у ҳолда $x\to a$ да $0\cdot\infty$ кўринишидаги аниқмасликлар $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликларни очишга келтирилади.

8-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$ ни топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ бўлгани учун $0\cdot\infty$ кўринишидаги аниқмасликка эгамиз. Берилган ифодани шакл алмаштирамиз ва юқоридагига кўра топамиз:

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0.$$

2. $\infty-\infty$ **кўринишидаги аниқмаслик.** Бундай аниқмасликни очиш дейилганда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ бир хил ишорали чексизлик бўлганда $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$ лимитни топиш тушунилади. Бундай аниқмасликлар $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасликларга келтирилади.

9-мисол. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sec x-\operatorname{tg}x)$ ни топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sec x=+\infty$. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=+\infty$ бўлгани учун $\infty-\infty$ кўринишидаги аниқмасликка эга бўламиз. Энг содда алмаштиришлар $\frac{0}{0}$ кўринишга олиб келади:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sec x-\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

3. 1^∞, 0^0, ∞^0 **кўринишидаги аниқмасликлар.**

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}$ лимитни топиш деб, агар $f(x)\to 1$, $\varphi(x)\to\infty$ бўлса, 1^{∞} кўринишидаги аниқмасликни очишни;

б) агар $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to 0$ бўлса, ∞^{0} кўринишидаги аниқмасликни очишни;

в) агар $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$ бўлса, 0^{0} кўринишидаги аниқмасликни очишни тушунилади.

Ҳамма ҳолларда ҳам функция олдиндан логарифмланади, бундан $0\cdot\infty$ кўринишидаги аниқмасликка эга бўлинади, бу эса ўз навбатида $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликка келтирилади. Шундан кейин логарифмнинг лимити бўйича берилган функция лимити топилади. Натижа потенцирланади.

10-мисол. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ни топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ бўлгани учун 1^{∞} ҳолга эгамиз. $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ деб белгилаймиз. Бу ифодани e асос бўйича логарифмлаймиз:

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right)}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб, $\ln A=-\frac{1}{2}$, бундан потенцирлаб,

$A=e^{-\frac{1}{2}}$ ни ҳосил қиламиз.

Демак, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

11-мисол. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$ ни топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ бўлгани учун ∞^{0} ҳолга эгамиз. $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$ деб белгилаймиз. Бу ифодани логарифмлаймиз:

$$\ln A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{tg}x)^{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(\operatorname{tg}x)=(0\cdot\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\cos x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\operatorname{tg}x\sin x}=0.$$

Шундай қилиб, $\ln A = 0$, бундан потенцирлаб, $A = 1$ ни ҳосил қиламиз.

Демак, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$.

12-мисол. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$ ни топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ бўлгани учун 0^0 ҳолга эгамиз. $A = \lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$ деб белгилаймиз. Бу ифодани логарифмлаймиз:

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln (\sin x)^x = \lim_{x\to 0} x \ln \sin x = -(0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = -\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\frac{1}{\cos^2 x}} = 0.$$

Шундай қилиб, $\ln A = 0$, бундан $A = 1$.

Демак, $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x = 1$.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. $x\to a$ (чекли) ва $x\to\infty$ да $\frac{0}{0}$ аниқмасликни очиш учун Лопиталь қоидасини чиқаринг.
2. $x\to a$ ва $x\to\infty$ да $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликни очиш учун Лопиталь қоидасини баён қилинг. Мисоллар келтиринг.
3. 1^∞, ∞^0, 0^0 кўринишидаги аниқмасликларни очиш учун Лопиталь қоидасининг қўлланилишини баён қилинг. Мисоллар келтиринг.
4. 1324 — 1364-масалаларни ечинг.

21-§. Тейлор формуласи

1. **Тейлор кўпҳади.** $y = f(x)$ функция $x = a$ нуқтанинг бирор атрофида $(n+1)$-тартибгача ҳосилага эга ($n+1$-ҳосила ҳам киради) бўлсин. Даражаси n дан катта бўлмаган, $x = a$ нуқтадаги қиймати $f(x)$ функциянинг шу нуқтадаги қийматига тенг бўлган, n-тартибгача бўлган ҳосилаларининг $x = a$ нуқтадаги қийматлари $f(x)$ функциядан шу нуқтада олинган мос ҳосилалари қийматларига тенг бўлган $y = P_n(x)$ кўпҳадни, яъни

$$P_n(a) = f(a),\ P'_n(a) = f'(a),\ P''_n(a) = f''(a),\ \dots,\ P^{(n)}_n(a) = f^{(n)}(a) \tag{21.1}$$

шартни қаноатлантирадиган кўпҳадни топиш керак. Бундан кўпҳад баъзи маънода $f(x)$ функцияга яқин бўлишини кутиш мумкин.

Бу кўпҳадни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n, \tag{21.2}$$

$C_0, C_2, C_1, \ldots, C_n$ коэффициентларни (21.1) шартлар бажариладиган қилиб аниқлаймиз.

$P_n(x)$ нинг ҳосилаларини топамиз:

$$P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + \ldots + n \cdot C_n(x-a)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},$$

. . . .

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1\, C_n. \tag{21.3}$$

(21.2) ва (21.3) тенгликларга $x = a$ қийматни қўямиз, натижада ушбуга эга бўламиз:

$$P_n(a) = C_0,\ P'_n(a) = C_1,\ P''_n(a) = 2 \cdot 1 \cdot C_2, \ldots,$$

$$P_n^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_n. \tag{21.4}$$

(21.4) тенгликларнинг чап томонларини (21.1) тенгликлар асосида алмаштирамиз, натижада ушбуга эга бўламиз:

$$f(a) = C_0,\ f'(a) = C_1,\ f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot C_2, \ldots,$$

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_n,$$

бундан коэффициентларнинг қийматларини топамиз:

$$C_0 = f(a),\ C_1 = f'(a),\ C_2 = \frac{1}{2!}f''(a),\ C_3 = \frac{1}{3!}f'''(a), \ldots,$$

$$C_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Бу $C_0, C_1. C_2, \ldots, C_n$ қийматларни (21.2) формулага қўямиз ва изланаётган кўпҳадга эга бўламиз:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{21.5}$$

Бу кўпҳад $f(x)$ функциянинг $(x-a)$ нинг даражалари бўйича **Тейлор кўпҳади** дейилади.

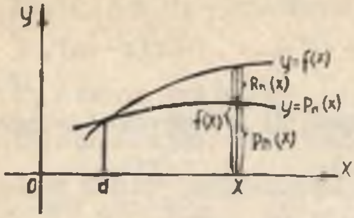
2. **Тейлор формуласи**. Берилган $f(x)$ функция билан тузилган $P_n(x)$ кўпҳад айирмасини $R_n(x)$ билан белгилаймиз:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \tag{21.6}$$

бундан $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ёки ёйиб ёзилганда:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \tag{21.7}$$



99- шакл.

(21.6) формула $f(x)$ функция учун *Тейлор формуласи* номи билан юритилади.

$R_n(x)$ ни Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади дейилади. У $f(x)$ ни Тейлор кўпҳади билан алмаштирганимизда қандай хатога йўл қўйганимизни кўрсатади (99- шакл).

3. Лагранж шаклидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи. Қолдиқ ҳаднинг ҳар хил шакллари мавжуд. Биз Лагранж шаклини қараймиз.

Теорема. Агар $f(x)$ *функция $x=a$ нуқтанинг атрофида $(n+1)$-тартибгача ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда бу атрофнинг ҳар қандай x нуқтаси учун қолдиқ ҳад ушбу кўринишга эга бўлади:*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1},$$

бунда ξ қиймат a ва x орасида ётади.

Исботи. (21.7) ва (21.1) формулаларга кўра:

$$\begin{cases} R_n(a)=0, \\ R_n'(a)=f'(a)-P_n'(a)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ R_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)-P_n^{(n)}(a)=0, \\ R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-P_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x), \end{cases} \tag{21.8}$$

чунки $P_n^{(n+1)}(x)=0$.

$\varphi(x)=(x-a)^{n+1}$ деб белгилаймиз. У ҳолда $\varphi(x)$ ни дифференциаллаб ва ҳосилаларни $x=a$ да ҳисоблаб, ушбуларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} \varphi(x)=(x-a)^{n+1},\ \varphi(a)=0, \\ \varphi'(x)=(n+1)(x-a)^n,\ \varphi'(a)=0, \\ \varphi''(x)=(n+1)n(x-a)^{n-1},\ \varphi''(a)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n)}(x)=(n+1)!\ (x-a),\ \varphi^{(n)}(a)=0, \\ \varphi^{(n+1)}(x)=(n+1)! \end{cases} \tag{21.9}$$

(21.8) ва(21.9) формулалардан фойдаланиб, $R_n(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларга Коши теоремасини қўллаймиз:

$$\frac{R_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{R_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)}=\frac{R_n'(x_1)-R_n'(a)}{\varphi'(x_1)-\varphi'(a)}=\ldots=$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)}=\frac{R_n^{(n)}(x_n)-R_n^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(a)}=\frac{R_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}=\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Бунда $x_1 \in (a, x)$, $x_2 \in (a, x_1)$, $x_3 \in (a, x_2)$, $\ldots$, $x_{n+1} \in (a, x_n)$. Демак,

$$\frac{R_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{n+1)!}.$$

Бундан $x_{n+1} = \xi$ деб белгилаб, ушбуга эга бўламиз:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (21.10)$$

бунда $\xi \in (a, x)$.

Теорема исботланди. (21.10) формула Лагранж шаклидаги қолдиқ ҳад дейилади. (21.10) ни (21.7) га қўйиб топамиз:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (21.11)$$

бунда $a < \xi < x$.

(21.11) формула Лагранж шаклидаги $R_n(x)$ қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи деб аталади.

(21.11) Тейлор формуласининг баъзи хусусий ҳолларини эслатиб ўтамиз. $n = 0$ да $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$ га эга бўлиб, Лагранж формуласини ҳосил қиламиз. $n = 1$ да

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2.$$

Бу формулада қолдиқ ҳадни ташлаб юбориб, дифференциални қўллашга асосланган маълум

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

тақрибий формулага эга бўламиз.

22-§. Элементар функцияларни Маклорен формуласи бўйича ёйиш

(21.11) Тейлор формуласининг $a = 0$ даги хусусий кўриниши **Маклорен формуласи** дейилади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \qquad (22.1)$$

бунда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $a < \xi < x$. Бу формула функциянинг эркли ўзгарувчи x нинг даражалари бўйича ёйилмасини беради.

1. **$f(x) = e^x$ функцияни Маклорен формуласи бўйича ёйиш.** e^x функция барча $x \in (-\infty, +\infty)$ лар учун ҳар қандай тартибли ҳосилаларга эга. Шу ҳосилаларнинг $x = 0$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = e^x & f(0) = 1 \\
f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \\
f^{(n+1)}(x) = e^x & f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi}, \text{ бунда } 0 < \xi < x.
\end{array}$$

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини (22.1) Маклорен формуласига қўйиб, e^x нинг ушбу ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}. \qquad (22.2)$$

2. **$f(x) = \sin x$ функцияни Маклорен формуласи бўйича ёйиш.** Функция барча $x \in (-\infty, +\infty)$ лар учун ҳар қандай тартибли ҳосилаларга эга. Шу ҳосилаларнинг $x = 0$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f^{n)}(x) = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f^{(n)}(0) = \sin n\,\frac{\pi}{2}, \qquad f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left(\xi + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < \xi < x.$$

Тартиби жуфт бўлган ҳосилаларнинг ҳаммаси $x = 0$ да нолга тенг. Топилган қийматларни (22.1) Маклорен формуласига қўйиб, $\sin x$ учун ушбу ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + $$
$$+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right). \qquad (22.3)$$

3) **$f(x) = \cos x$ функцияни Маклорен формуласи бўйича ёйиш.** Функция барча $x \in (-\infty, +\infty)$ лар учун ҳар қандай тартибли ҳосилаларга эга. Шу ҳосилаларнинг $x = 0$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(x) = \cos x \qquad\qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right) \qquad f''(0) = -1$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(\xi)=\cos\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right), \qquad 0<\xi<x.$$

Бунда тоқ тартибли ҳосилаларнинг ҳаммаси $x = 0$ да нолга тенг. $f(x) = \cos x$ функция учун Маклорен формуласи ушбу кўринишни олади:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+$$
$$+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\xi+\frac{(2n+2)}{2}\pi\right). \qquad (22.4)$$

4. **$f(x)=\ln(1+x)$ функцияни Маклорен формуласи бўйича ёйиш.** Функция $x>-1$ лар учун ҳар қандай тартибли ҳосилаларга эга. $f(x)$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1} \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-1(1+x)^{-2} \qquad f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=1\cdot 2(1+x)^{-3} \qquad f'''(0)=2!$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\,(1+x)^{-n} \qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n}\cdot n!\,(1+x)^{-n-1} \qquad R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}.$$

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини (22.1) Маклорен формуласига қўямиз:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3\cdot 2!}{3!}-\frac{x^4\cdot 3!}{4!}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}(n-1)!+R_n(x).$$

Қисқартиришлардан кейин:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x). \qquad (22.5)$$

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ функцияни Маклорен формуласи бўйича ёйиш. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=(1+x)^{\alpha} & f(0)=1 \\
f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0)=\alpha \\
f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0)=\alpha(\alpha-1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0)= \\
 & =\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha- \\
 & -n+1)
\end{array}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-1-n}.$$

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини (22.1) Маклорен формуласига қўямиз:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x). \qquad (22.6)$$

α кўрсаткич n дан катта бўлмаган бутун мусбат сон бўлган хусусий ҳолда $R_n(x)$ нолга айланади, (22.6) тенглик эса Ньютон биноми формуласига айланади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тейлор кўпҳади нима?
2. Қолдиқ ҳади Лагранж шаклида бўлган Тейлор формуласини ёзинг.
3. Қандай ҳолда Тейлор формуласини Маклорен формуласи дейилади?
4. e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ ва $(1+x)^{\alpha}$ функциялар учун Маклорен формуласини ёзинг.
5. 1498 — 1509- масалаларни ечинг.

23-§. Тейлор (Маклорен) формуласининг татбиқи

(21.11) Тейлор формуласи ихтиёрий $f(x)$ функцияни тақрибан

$$f(x)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Тейлор кўпҳади деб аталувчи кўпҳад кўринишида тасвирлаш имконини беради, шу билан бирга бунда пайдо бўлган

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}, \qquad a<\xi<x$$

хатони баҳолаш имконини беради (бу хатони кўп ҳолларда етарлича кичик қилиш мумкин). Шу сабабли бу формула математик анализнинг муҳим формулаларидан бири ҳисобланади ва бу формула назарий тадқиқотларда ҳам, кўпчилик амалий масалаларни ечиш воситаси сифатида (хусусий ҳолда функциялар қийматларини тақрибий ҳисоблашларда) ҳам кенг қўлланилади.

(22.1) Маклорен формуласи ҳам $f(x)$ функцияни Маклорен кўпҳади кўринишида тақрибан тасвирлаш имконини беради:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

бундаги хато

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \qquad 0 < \xi < x$$

бўлади.

Бир нечта мисол қараймиз.

1. **$f(x) = e^x$ функциянинг кўпҳад кўринишидаги тасвири (тақрибий тасвири)** (22.2) формуладан келиб чиқади:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}. \qquad (23.1)$$

Бу тақрибий тенгликнинг хатоси Маклорен формуласининг

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi}, \quad \text{бунда} \quad 0 < \xi < x \qquad (23.2)$$

қолдиқ ҳади орқали аниқланади, шу билан бирга барча x лар учун $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, чунки e^{ξ} — чекли, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ эса n ∞ да чексиз кичик. Бундан ҳар қандай x да e^x функцияни исталган аниқликдаги Маклорен кўпҳади билан алмаштириш мумкинлиги келиб чиқади. $n = 1, 2, 3$ деб олиб, ушбу тақрибий формулаларга эга бўламиз:

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

бу формулалар аниқликнинг ортиб бориши тартибида жойлашган.

1-мисол. e сонини 0,001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. $x = 1$ қийматни (23.1) ва (23.2) формулаларга қўямиз:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Хатолик: $R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$, чунки $0 < \xi < 1$ да $e^{\xi} < 3$. $R_n(x) \leqslant 0{,}001$ ёки $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$ тенгсизликни ечиб, бу тенгсизлик $n = 6$ да бажарилишини кўрамиз. Демак,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2{,}718$$

(0,001 гача аниқликда).

2. $f(x) = \sin x$ **функцияни Маклорен кўпҳади кўринишидаги тақрибий тасвири ёйилмаси** (22.3) формуладан келиб чиқади:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \qquad (23.3)$$

Бу тақрибий тенгликнинг хатоси Маклорен формуласининг қолдиқ ҳади билан аниқланади:

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad (23.4)$$

$$\text{бунда } 0 < \xi < x,$$

шу билан бирга ҳар қандай x учун $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n} = 0$, чунки $\left|\sin\left(\xi + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| < 1$ чекланган, $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ эса $n \to \infty$ да чексиз кичик. Бундан ҳар қандай x да $\sin x$ функцияни исталганча кичик хатоли Маклорен кўпҳади билан алмаштириш мумкинлиги келиб чиқади.

$n = 1, 2, 3$ деб олиб, $\sin x$ учун энг содда тақрибий ифодаларга эга бўламиз:

$$\sin x \approx x, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Бу формулаларнинг иккинчиси биринчисидан, учинчиси эса иккинчисидан аниқроқ.

2-мисол. $\sin 10°$ тақрибий қийматни 0,00001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Бурчакнинг радиан ўлчовига ўтамиз:

$$x = 10° = \frac{\pi}{18}.$$

$x = \frac{\pi}{18}$ қийматни (23.3) ва (23.4) формулаларга қўямиз:

$$\sin 10° = \sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}\cdot\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n-1}.$$

Хатолик:

$$|R_{2n}| = \left|\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}\cdot\sin\left(\xi + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} < 0{,}00001.$$

Тақрибий тенгликдаги ҳадлар сонини аниқлаш учун қолдиқ ҳаднинг миқдорини ҳар хил n ларда ҳисоблаймиз.

Агар $n = 1$ бўлса, у ҳолда $|R_2| \leqslant \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0{,}00089 > 0{,}00001$;

агар $n = 2$ бўлса, у ҳолда $|R_4| \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 = 0{,}0000013 < 0{,}00001$.

Демак, тақрибий формуланинг иккита олдинги ҳади олинса, ҳисоблашнинг берилган (талаб қилинган) аниқлигига эришилади:

$$\sin 10° \approx 0{,}17453 - 0{,}00089 = 0{,}17364$$

(0,00001 гача аниқликда).

3. **$f(x) = \cos x$ функциянинг Маклорен кўпҳади кўринишидаги тақрибий ёйилмаси** (22.4) формуладан келиб чиқади:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot \qquad (23.5)$$

Бу тақрибий тенгликнинг хатоси Маклорен формуласининг қолдиқ ҳади билан аниқланади:

$$R_{2n+1} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\xi + (2n+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot \qquad (23.6)$$

Бунда $\left|\cos\left(\xi + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)\right| < 1$, n ∞ да эса $\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ 0, шу сабабли ҳар қандай x да

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0.$$

Бундан ҳар қандай x да $\cos x$ функцияни исталган аниқликда Маклорен кўпҳади билан алмаштириш мумкинлиги келиб чиқади.

$n = 1, 2, 3$ деб олиб, $\cos x$ учун тақрибий ифодаларга эга бўламиз:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720},$$

бу формулалар аниқликнинг ортиб бориши тартибида жойлашган.

3-мисол. $\cos 5°$ ни 0,000001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Бурчакнинг радиан ўлчовига ўтамиз: $x = 5^0 = \frac{\pi}{36}$ ва $x = \frac{\pi}{36}$ қийматни (23.5) ва (23.6) формулаларга қўямиз:

$$\cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n}.$$

Хатолик:

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|\frac{1}{(2n+2)!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n+2}\cdot\cos(\xi+\pi(n+1))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2n+2)!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n+2} < 0{,}000001.$$

Тақрибий тенгликда нечта ҳадни олишни аниқлаш ёки берилган аниқликдаги ҳисоблашларни олиш учун R_{2n+1} қолдиқ ҳадларнинг кетма-кетлигини баҳолаймиз:

агар $n=0$ бўлса, у ҳолда $|R_1| \leqslant \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 = 0{,}003808 > 0{,}000001,$

агар $n=1$ бўлса, у ҳолда $|R_3| \leqslant \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 = 0{,}000002 > 0{,}000001,$

агар $n=2$ бўлса, у ҳолда $|R_5| \leqslant \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^6 = 0{,}00000003 < 0{,}000001.$

Демак, берилган аниқликка эришиш учун R_5 дан олдин келадиган учта биринчи ҳадни олиш керак:

$$\cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 = 1 - 0{,}003808 + 0{,}000002 =$$

$$= 0{,}996194.$$

(0,000001 гача аниқликда).

4. **$f(x) = (1+x)^\alpha$ функциянинг Маклорен кўпҳади шаклидаги тақрибий ёйилмаси** (22.6) формуладан келиб чиқади:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \qquad (23.7)$$

Бу тақрибий тенгликнинг хатоси Маклорен формуласининг қолдиқ ҳади билан аниқланади:

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot(1+\xi)^{\alpha-n-1}. \qquad (23.8)$$

$R_n(x)$ хатони исталганча кичик миқдор қилиш мумкин, яъни $|x| < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $n \to \infty$ да $R_n \to 0$. Бу қаторлар назариясида исботланади.

$n = 1, 2, 3$ деб олиб, қуйидаги тақрибий формулаларга эга бўламиз:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)x^2,$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha}{2}(\alpha-1)x^2 + \frac{\alpha}{6}(\alpha-1)(\alpha-2)x^3.$$

Бу тенгликларнинг кейинги ҳар бири олдингисидан аниқроқдир.

4-мисол. $\sqrt[4]{83}$ нинг тақрибий қийматини 0,000001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Берилган илдизни алмаштирамиз:

$$\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(23.7) ва (23.8) формулаларни қўллаймиз, уларда $x=\frac{2}{81}$, $\alpha=\frac{1}{4}$ деб оламиз:

$$\sqrt[4]{83}\approx3\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{1!}\cdot\frac{2}{81}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{2}{81}\right)^2+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\dots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{2}{81}\right)^n\right).$$

Баъзи алмаштиришлардан кейин:

$$\sqrt[4]{83}\approx3\left(1+\frac{1}{162}-\frac{1}{162\cdot108}+\frac{7}{162\cdot108\cdot486}-\frac{7}{162\cdot108\cdot486\cdot59}\right).$$

Хатолик:

$$3R_n=3\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\dots\left(\frac{1}{4}-n\right)}{(n+1)!}\left(\frac{2}{81}\right)^{n+1}(1+\xi)^{\frac{1}{4}-n-1}.$$

Ҳисоблашларнинг хатоликлари $3|R_n|$ кетма-кетлигини баҳолаймиз:

агар $n=1$ бўлса, у ҳолда $3|R_1|<\frac{3}{162\cdot108}<0{,}0002>$

агар $n=2$ бўлса, у ҳолда $3|R_2|<\frac{3\cdot7}{162\cdot108\cdot486}<0{,}000003;$

агар $n=3$ бўлса, у ҳолда

$$3|R_3|<\frac{3\cdot7}{162\cdot108\cdot486\cdot59}<0{,}00000006<0{,}000001.$$

Демак, ҳисоблашларнинг берилган аниқлигига эришмоқ учун R_3 дан олдин келадиган тўртта ҳад йиғиндисини олиш етарли:

$$\sqrt[4]{83}\approx3(1+0{,}006\cdot173-0{,}000057+0{,}000001)=3{,}018349.$$

(0,000001 гача аниқликда).

5) **$f(x)=\ln(1+x)$ функциянинг Маклорен кўпҳади кўринишидаги тақрибий ёйилмаси** (22.5) формуладан келиб чиқади:

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

$|x|<1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча x лар учун $n\to\infty$ да хатолик: $|R_n|=\frac{1}{n+1}\cdot\left|\frac{x}{1+\xi}\right|^{n+1}\to0$. $n=1,\ 2,\ 3$ да қуйидаги тақрибий формулаларга эга бўламиз:

$$\ln(1+x)\approx x,$$

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2},$$

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},$$

бу формулалар аниқликнинг ортиб бориши тартибида ёзилган.

Қараб чиқилган мисоллар аргумент кичик бўлганда ҳисоблашларда Маклорен формуласида унчалик кўп бўлмаган сондаги ҳадларни олиб, аниқликка эришиш мумкинлигини кўрсатади.

Агар аргумент етарлича кичик бўлса, у ҳолда кўпинча унинг биринчи ёки иккинчи даражаси билан чекланиш мумкин. Масалан, аргументнинг етарлича кичик қийматлари учун қуйидаги тақрибий формулалар ҳосил бўлади:

1) $\sin x\approx x;$

2) $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2};$

3) $e^x\approx 1+x;$

4) $\ln(1+x)\approx x;$

5) $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x.$

Бу формулалардан амалий ҳисоблашларда кўпинча фойдаланишга тўғри келади.

Қуйидаги тақрибий формулалар охирги тақрибий тенгликдан α нинг турли қийматларида келиб чиқади:

6) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x;$

7) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2};$

8) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{x}{2};$

9) $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{x}{3};$

10) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\approx 1-\frac{x}{3}.$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ функцияларнинг Маклорен кўпҳади кўринишидаги тақрибий ёйилмаларини ёзинг.
2. Функцияларнинг берилган аниқликдаги тақрибий қийматларини ҳисоблаш учун Маклорен формуласидан қандай фойдаланилади?
3. 1524 — 1528-масалаларни ечинг.

4-боб

ФУНКЦИЯЛАРНИ ҲОСИЛАЛАР ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ

1-§. Функциянинг ўсиш ва камайиш шартлари

1-таъриф. Агар аргументнинг (a, b) оралиққа тегишли катта қийматига функциянинг катта қиймати мос келса, яъни $x_2>x_1$ тенгсизликдан, бунда x_1, x_2 лар (a, b) интервалга тегишли, $f(x_2)>f(x_1)$ тенгсизлик келиб чиқса, у ҳолда $y=f(x)$ функция шу (a, b) интервалда *ўсувчи функция* дейилади. Бу тенгсизликларни бундай ёзиш мумкин:

$$x_2-x_1>0 \text{ ва } f(x_2)-f(x_1)>0.$$

Агар $x_2-x_1=\Delta x$, $f(x_2)-f(x_1)=\Delta y$ деб белгиласак, $\Delta x>0$ ва $\Delta y>0$ эканини, яъни бир хил ишорали эканини кўрамиз. Шундай қилиб, ўсувчи функция учун Δy функция орттирмасининг Δx аргумент орттирмасига нисбати ҳар доим мусбат, яъни $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0.$

2-таъриф. Агар бирор (a, b) интервалда аргументнинг катта қийматига функциянинг кичик қиймати мос келса, яъни агар $x_2>x_1$ тенгсизликдан, бунда $x_1, x_2\in(a, b)$, $f(x_2)<f(x_1)$ тенгсизлик келиб чиқса, у ҳолда $y=f(x)$ функция (a, b) интервалда *камаювчи функция* дейилади. Юқоридаги тенгсизликлардан $x_2-x_1>0$ ва $f(x_2)-f(x_1)<0$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда $\Delta x=x_2-x_1$ ва $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ орттирмалар ҳар хил ишорали.

Шундай қилиб, камаювчи функция учун Δy орттиманинг Δx аргумент орттирмасига нисбати манфий, яъни $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0.$

Функциянинг ўсиш ва камайишининг зарурий ва етарли шартларини ҳосилалар ёрдамида аниқлаймиз.

1-теорема (функция ўсувчи бўлишининг зарурий шарти). *Агар (a, b) интервалда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция ўсувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг ҳосиласи интервалнинг ҳамма нуқтасида манфий бўлмаслиги зарур, яъни барча $x\in(a, b)$ учун $f'(x)\geqslant 0$.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра функция ўсувчи, шу сабабли исталган $x\in(a, b)$ учун $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Мусбат функциянинг лимити манфий бўла олмаслиги сабабли $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0$. Аммо теорема шартига кўра $f(x)$ дифференциалланувчи, шу сабабли $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$— чекли сон. Шундай қилиб, барча $x \in (a, b)$ учун $f'(x) \geqslant 0$. Теорема исботланди.

2-теорема (функция камайишининг зарурий шарти). *Агар (a,b) интервалда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция камайса, у ҳолда унинг ҳосиласи интервалнинг ҳамма нуқтасида мусбат бўлмаслиги зарур, яъни барча $x \in (a, b)$ лар учун $f'(x) \leqslant 0$.*

Исботи. Теорема шартига кўра функция камаювчи, шу сабабли барча $x \in (a, b)$ лар учун $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$. Манфий функциянинг лимити мусбат бўла олмаслиги сабабли $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$. Аммо теорема шартига кўра $f(x)$ функция дифференциалланувчи, шу сабабли $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$— чекли сон. Шундай қилиб, барча $x \in (a, b)$ лар учун $f('x) \leqslant 0$. Теорема исботланди.

Кўриб ўтилган теоремаларни геометрик тасвирлаймиз.

Ўсувчи функциялар учун уринмалар Ox ўқ билан ўткир бурчаклар ҳосил қилади ёки Ox ўққа параллел бўлади (100-шакл). Ўткир бурчаклар тангенслари мусбат. Уринма Ox ўққа параллел бўлган жойларда тангенс нолга тенг, яъни

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1 > 0, \; f'(x_3) = \operatorname{tg} \alpha_3 > 0, \; f'(x_2) = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

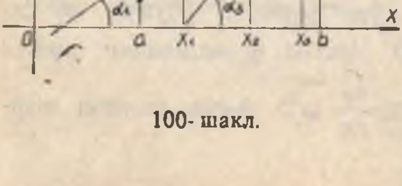
Шундай қилиб, ўсувчи функция учун $f'(x) \geqslant 0$.

Қамаювчи функция учун ҳам шундай: $f'(x_4) = \operatorname{tg} \alpha_4 < 0$, $f'(x_6) = \operatorname{tg} \alpha_6 < 0$, чунки α_4, α_6 — ўтмас бурчаклар, $f'(x_5) = \operatorname{tg} 0 = 0$. Демак, камаювчи функция учун $f'(x) \leqslant 0$ (101-шакл).

3-теорема (функция ўсувчи бўлишининг етарлилик шарти). *Агар $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функция ҳар бир ички нуқтада мусбат ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция $[a, b]$ кесмада ўсувчи бўлади.*

Исботи. Иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматни қараймиз, бунда $x_2 > x_1$ ва $x_1, x_2 \in (a, b)$. $[x_1, x_2]$ кесмада Лагранжнинг чекли айирмалар формуласини тузамиз:

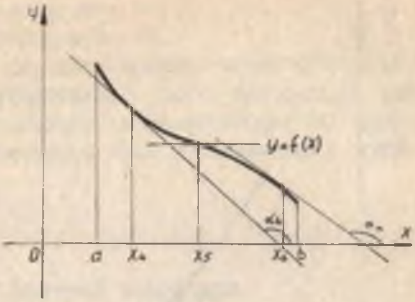
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), \; x_1 < c < x_2. \tag{1.1}$$



100-шакл.

Теорема шартига кўра, барча $x \in (a, b)$ нуқталарда $f'(x) > 0$, шу сабабли $f'(c) > 0$. Бундан ташқари, $x_2 - x_1 > 0$, шу сабабли (1.1) нинг ўнг қисми мусбат, яъни $(x_2 - x_1) \times f'(c) > 0$. Шундай қилиб, (1.1) нинг чап қисми ҳам мусбат, яъни $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Бундан, агар $x_2 > x_1$ бўлса, $f(x_2) > f(x_1)$ экани, яъни $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўсувчи эканлиги келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

4-теорема (функция камаювчи бўлишининг етарлилик шарти). *Агар $[a, b]$ кесмада узлуксиз $y = f(x)$ функция бу кесманинг ҳар бир ички нуқтасида манфий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция $[a, b]$ кесмада камаювчи бўлади.*



101- шакл.

Исботи. (a, b) интервалга тегишли иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқтани қараймиз, бунда $x_2 > x_1$. $[x_1, x_2]$ кесмада Лагранж формуласини тузамиз:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \; x_1 < c < x_2. \tag{1.2}$$

Теорема шартига кўра барча $x \in (a, b)$ нуқталарда $f'(x) < 0$, шу сабабли $f'(c) < 0$, бундан ташқари $x_2 - x_1 > 0$, шунга мувофиқ (1.2) нинг ўнг қисми манфий, яъни $(x_2 - x_1) f'(c) < 0$. Демак, (1.2) нинг чап қисми ҳам манфий, яъни $f(x_2) < f(x_1)$. Бундан, агар $x_2 > x_1$ бўлса, $f(x_2) < f(x_1)$, яъни $f(x)$ функция $[a, b]$ да камаювчи.

Теорема исботланди.

$[a, b]$ кесмада фақат ўсувчи (фақат камаювчи) функция шу кесмада монотон ўсувчи (монотон камаювчи) функция дейилади (101-шакл).

Функция фақат камаювчи ёки фақат ўсувчи бўладиган интерваллар монотонлик интерваллари дейилади.

1-мисол. $y' = 3x^6$ функциянинг монотонлик интервалларини аниқланг.

Ечиш. y' ҳосилани топамиз: $y' = 18x^5$.

$x < 0$ да $y' < 0$ — функция камаяди;

$x > 0$ да $y' > 0$ — функция ўсади.

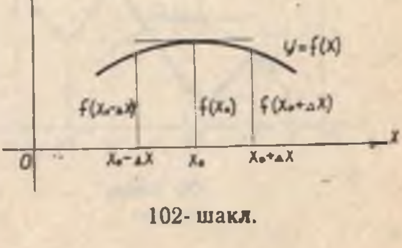
2-мисол. $y = 2x - \cos x$ функциянинг монотонлик интервалларини топинг.

Ечиш. y' ҳосилани топамиз: $y' = 2 + \sin x$. Барча x лар учун $y' > 0$, y функция $(-\infty, +\infty)$ да ўсади.

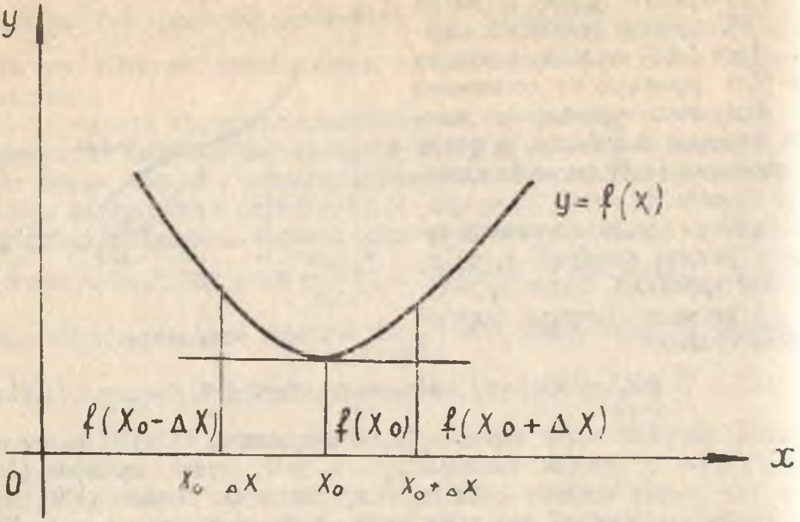
2- §. Функциянинг экстремум нуқталари

1-таъриф. Агар $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги қиймати шу функциянинг бу нуқтанинг етарлича кичик атрофидаги қолган қийматидан катта бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада *максимум* (maximum) *га эга* дейилади.

Бошқача айтганда, агар ҳар қандай етарлича кичик мусбат ёки манфий Δx да (102-шакл) $f(x_0 + \Delta x) <$



102- шакл.



103- шакл.

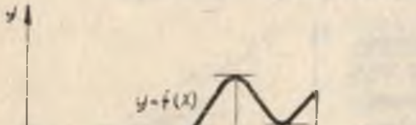
$< f(x_0)$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эга дейилади.

2- таъриф. Агар $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги қиймати шу нуқтанинг етарлича кичик атрофидаги қийматидан кичик бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада *минимум* (minimum) *га эга* дейилади.

Бошқача айтганда, ҳар қандай етарлича кичик мусбат ёки манфий Δx ларда $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эга дейилади (103- шакл).

1- эслатма. Агар функция $[a, b]$ кесмада аниқланган бўлса, у ҳолда бу функция ўзининг максимум ва минимумларига x нинг шу кесма ичидаги қийматларидагина эришади.

2- эслатма. Функциянинг $[a, b]$ кесмадаги максимум ва минимумлари ҳар доим ҳам унинг шу кесмадаги энг катта ёки энг кичик қиймати бўлавермайди: максимум нуқтасида функция энг катта қийматни максимум нуқтасига етарлича яқин нуқталардаги қийматларига нисбатан (максимум нуқтасининг кичик атрофида) гина қабул қилади; минимум нуқтасига нисбатан ҳам шуларни айтиш мумкин. Максимум минимумдан кичик бўлиб қолиши мумкин.



104- шакл.

104- шаклда $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган.

$x = x_1$ ва $x = x_3$ да функция максимумга эга.

$x = x_2$ ва $x = x_4$ да функция минимумга эга.

Аммо $x = x_4$ даги минимум $x = x_1$ даги максимумдан катта, $x = b$ да функциянинг қиймати функциянинг $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай максимумидан катта. Функциянинг максимумлари ва минимумлари функциянинг ***экстремумлари*** ёки ***экстремал қийматлари*** дейилади.

3- §. Экстремумнинг зарурий шартлари

1-теорема. *Агар дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эга булса, у ҳолда унинг шу нуқтадаги ҳосиласи нолга тенг бўлиши зарур, яъни $f'(x_0) = 0$ бўлади.*

Исботи. Аниқлик учун функция x_0 нуқтада максимумга эга деб фараз қиламиз (105- шакл).

1) У ҳолда $x < x_0$ лар учун функция ўсувчи ва $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, демак, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$.

Аммо функция дифференциалланувчи, шу сабабли $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(x_0)$. Демак,

$$f'_-(x_0) \geqslant 0. \tag{3.1}$$

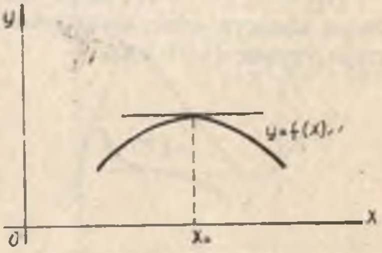
2) $x > x_0$ лар учун функция камаювчи ва $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, демак, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(x_0)$. Шундай қилиб,

$$f'_+(x_0) \leqslant 0. \tag{3.2}$$

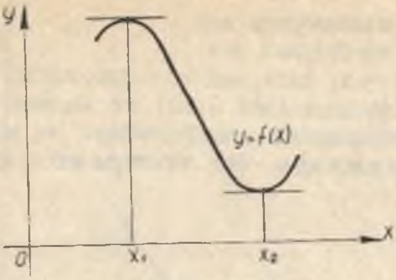
(3.1) ва (3.2) тенгсизликлардан $f'(x_0) = 0$ экани келиб чиқади, чунки функция дифференциалланувчи, демак унинг чап ҳамда ўнг ҳосилалари x_0 нуқтада ўзаро тенг бўлиши керак. Бу $f'(x_0) = 0$ бўлгандагина мумкин бўлади.

Минимум ҳоли учун теорема шунга ўхшаш исботланади.

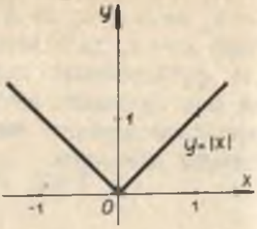
Теореманинг геометрик мазмуни шуни билдирадики, дифференциалланувчи функция учун экстремум



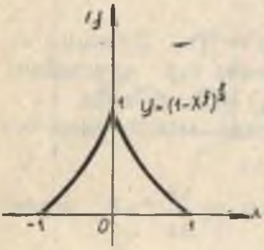
105- шакл.



106- шакл.



107- шакл.



108- шакл.

нуқталарида уринма Ox ўққа параллел бўлади (106- шакл).

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0,$$
$$f'(x_2) = \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Дифференциалланмайдиган функция ҳолида экстремум нуқтасида ҳосила чексиз бўлиши ёки мавжуд бўлмаслиги мумкин.

1- мисол. $y = |x|$ функция ўқнинг ҳамма ерида услуксиз, $x=0$ нуқтада унинг ҳосиласи мавжуд эмас (107- шакл), аммо бу нуқтада y минимумга эга.

2- мисол. $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ функция $x = 0$ нуқтада аниқланган, максимумга эга, аммо унинг $y' = -\frac{(1 - x^{2/3})^{1/2}}{x^{\frac{1}{3}}}$ ҳосиласи бу нуқтада чексизликка айланади: $y' = \infty$ (108- шакл).

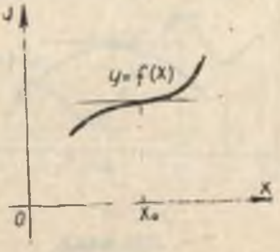
Хулоса: агар функция нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда ҳосила бу нуқтада нолга тенг, чексизликка тенг бўлади ёки мавжуд бўлмайди. Бундай нуқталар ***критик нуқталар*** дейилади.

Демак, экстремумни критик (стационар) нуқталарда излаш керак.

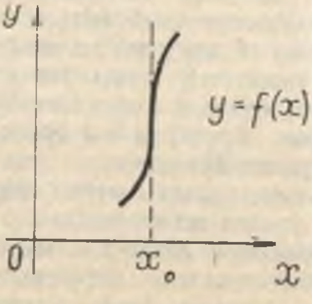
Тескари тасдиқ тўғри эмас. Нуқта критик нуқта бўлиши мумкин, аммо унда экстремум бўлмаслиги мумкин.

$f'(x_0) = \operatorname{tg} 0 = 0$, аммо экстремум мавжуд эмас, функция монотон ўсувчи (109- шакл).

$f'(x_1) = \operatorname{tg} 90° = \infty$, аммо экстремум мавжуд эмас, функция монотон ўсувчи (110- шакл).



109- шакл.



110- шакл.

4- §. Экстремумнинг етарлилик шартлари

Теорема. *Агар x_0 критик нуқтани ўз ичига олувчи интервалда узлуксиз $y=f(x)$ функциянинг $f'(x)$ ҳосиласи x_0 нуқтадан ўтишда ишорасини ўзгартирса, у ҳолда ишора „+“ дан „—“ га алмашганда x_0 нуқта максимум нуқтаси, ишора „—“ дан „+“ га алмашганда x_0 нуқта минимум нуқтаси бўлади.*

Исботи. x_0 — критик нуқта бўлсин.

1) $f'(x)$ — ҳосила x_0 нуқтадан ўтишда ишорасини „+“ дан „—“ га ўзгартирсин. Бу $x<x_0$ лар учун $f'(x)>0$ га, $x>x_0$ лар учун эса $f'(x)<0$ га эга бўлишимизни билдиради. Монотонликнинг етарлилик шартини қўлланиб, $x<x_0$ ларда функция ўсувчи эканини, $x>x_0$ лар учун эса камаювчи эканини кўрамиз, яъни $x<x_0$ да $f(x_0)>f(x)$ тенгсизликка, $x>x_0$ лар учун эса $f(x_0)<f(x)$ тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб, x_0 нуқта максимум нуқтаси, чунки x_0 нинг атрофига тегишли барча x ларда $f(x)<f(x_0)$.

2) $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтадан ўтишда ишорасини „—“ дан „+“ га алмаштирсин. Бу барча $x<x_0$ лар учун $f'(x)<0$ га, $x>x_0$ лар учун эса $f'(x)>0$ га эга бўлишимизни билдиради. Монотонликнинг етарлилик шартини қўлланиб, барча $x<x_0$ ларда функция камаювчи бўлишини, $x>x_0$ ларда эса ўсувчи бўлишини кўрамиз, яъни $x<x_0$ лар учун $f(x)>f(x_0)$ тенгсизликка, $x>x_0$ лар учун эса $f(x)>f(x_0)$ тенгсизликка эга бўламиз.

Демак, x_0 — минимум нуқтаси, чунки x_0 нинг атрофига тегишли барча x лар учун $f(x)>f(x_0)$. Теорема исботланди.

Шундай қилиб, функция экстремумга эга бўлиши учун критик (стационар) нуқта атрофида унинг ҳосиласи турли ишорага эга бўлиши етарли.

Мисол. $y=x^3-6x^2+9x+3$ функциянинг монотонлик интервалларини ва экстремумини топинг.

Ечиш. 1) Берилган функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган ва дифференциалланувчи.

2) Функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y'=3x^2-12x+9.$$

3) Критик нуқталарни топамиз:

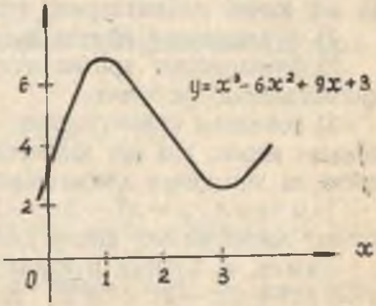
$$3x^2-12x+9=0,$$

$$x^2-4x+3=0.$$

$x_1=1$; $x_2=3$ — критик нуқталар.

Бу нуқталар $(-\infty, +\infty)$ аниқланиш соҳасини учта интервалга бўлади: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$.

4) Ҳосиланинг ишорасини текширамиз (111- шакл). Текшириш натижасини жадвалда келтирамиз:



111- шакл.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

$$y_{\max} = f(1) = 7,\ y_{\min} = f(3) = 3.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Кесмада ўсувчи ва камаювчи функция таърифини ифодаланг.
2. Функция ўсувчи бўлишининг зарурий ва етарлилик шартларини исботланг. Бу теоремаларнинг геометрик мазмуни нимадан иборат?
3. Функция камаювчи бўлишининг зарурий ва етарлилик шартларини исботланг. Бу теоремаларнинг геометрик мазмуни нимадан иборат?
4. Функциянинг экстремум нуқталарини, функциянинг экстремал қийматларини таърифланг.
5. Экстремумнинг зарурий шартини исботланг. Бу шартнинг етарлилик эмаслигини кўрсатувчи мисоллар келтиринг.
6. Функция экстремуми етарлилик шартини биринчи ҳосила ёрдамида исботланг.
7. 1152—1182- масалаларни ечинг.

5- §. Функцияларнинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматлари

Маълумки, $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлган $y = f(x)$ функция шу кесмада ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади. Шу қийматларни қандай топиш мумкин?

Агар $y = f(x)$ функция монотон бўлса (унинг ҳосиласи ўз ишорасини сақласа, яъни у ё манфиймас, ёки мусбатмас бўлса), у ҳолда функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари $[a, b]$ кесманинг охирларида — $x = a$ ва $x = b$ нуқталарда бўлади.

Агар $y = f(x)$ функция монотон бўлмаса (яъни унинг ҳосиласи ишорасини ўзгартирса), у ҳолда функция экстремумларга эга бўлади. Бу ҳолда энг катта ва энг кичик қийматлар экстремумлар билан бир хил бўлиши мумкин, маълумки, экстремумлар критик нуқталарда бўлади.

Шундай қилиб, $y = f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун:

1) функциянинг критик нуқталарини аниқлаш;

2) функциянинг критик нуқталардаги ва кесманинг охирларидаги қийматларини ҳисоблаш;

3) топилган қийматлардан энг катта ва энг кичик қийматларни танлаш керак, ана шу қийматлар функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини ифодалайди.

1- мисол. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ функциянинг $[-2, 5]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини аниқланг.

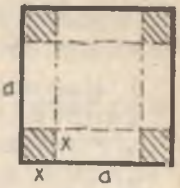
Ечиш. а) Критик нуқталарни топамиз: y' ҳосилани ҳисоблаймиз: $y' = 3x^2 + 6x - 9$. $y' = 0$ тенгламани ечамиз: $3x^2 + 6x - 9 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Берилган кесмага фақат $x_1 = 1$ нуқта киради.

б) Функциянинг $x = 1$, $x = -2$, $x = 5$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(1) = -4,\ f(-2) = 23,\ f(5) = 156.$$

в) Топилган қийматлардан энг катта M ни ва энг кичик m ни танлаймиз:

$$M = f(5) = 156,\ m = f(1) = -4.$$



112- шакл.

Шундай қилиб, функциянинг энг катта қиймати кесманинг $x=5$ ўнг охирида экан, энг кичик қиймати эса $x=1$ нуқтадаги минимум билан бир хил экан.

2- мисол. Томони a га тенг бўлган квадрат шаклидаги картондан асоси тўғри тўртбурчак шаклида бўлган энг катта ҳажмли усти очиқ қути тайёрланг.

Ечиш. Одатда, квадрат шаклидаги картоннинг бурчакларидан тенг квадратларни қирқиб ва унинг четларини буклаб, очиқ тўғри тўртбурчак шаклидаги қути ясалади. Агар кесилган квадратларнинг томонини x десак, қути асосининг томони $a - 2x$, қутининг баландлиги эса x га тенг (112- шакл). У ҳолда қутининг ҳажми

$$V = x(a - 2x)^2$$

бўлади. Масаланинг шартидан $x \in \left[0,\ \frac{a}{2}\right]$ экани келиб чиқади. Энди V функцияни $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматга синаш қолади.

V' ни топамиз, уни нолга тенглаймиз ва критик нуқталарни аниқлаймиз:

$$V' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

$$V' = 0,\ (a - 2x)\cdot(a - 6x) = 0.$$

$$a - 2x = 0,\ x_1 = \frac{a}{2},\quad a - 6x = 0,\ x = \frac{a}{6}.$$

V функциянинг $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{6}$, 0 нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$V\left(\frac{a}{2}\right) = 0,\ V(0) = 0,\ V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}.$$

Шундай қилиб, $x = \frac{a}{6}$ да функция энг катта қийматга эга. Демак, энг катта ҳажм асос томони $\frac{2}{3}\,a$, баландлиги $\frac{a}{6}$ га тенг бўлганда ҳосил бўлади.

6- §. Экстремумларни юқори тартибли ҳосилалар ёрдамида текшириш

1. Иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида текшириш

Теорема. Агар $f'(x_0)=0$ бўлиб, иккинчи ҳосила мавжуд ва $f''(x_0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $x=x_0$ нуқтада экстремум мавжуд: агар $f''(x_0)<0$ бўлса, максимум, агар $f''(x_0)>0$ бўлса, минимум бўлади.

Исботи. а) $f'(x_0)=0$ ва $f''(x_0)<0$ бўлсин. $x=x_0$ нуқтада максимумга эришилишини кўрсатамиз. Иккинчи тартибли ҳосиланинг таърифига кўра:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

$f''(x_0)<0$ эканини ҳисобга олиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0.$$

Лимит манфий, шу сабабли кичик Δx лар учун ўзгарувчининг ўзи ҳам манфий бўлади, яъни

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0.$$

Бу тенгсизликдан

$$\begin{gathered}\Delta x<0 \text{ да } f'(x_0+\Delta x)>0 \text{ экани,}\\ \Delta x>0 \text{ да } f'(x_0+\Delta x)<0 \text{ экани}\end{gathered}$$

келиб чиқади.

Бу x_0 нуқтадан ўтишда ҳосила ўз ишорасини „+“ дан „—“ га ўзгартиришини кўрсатади. Демак, функция $x=x_0$ нуқтада максимумга эга.

б) $f'(x_0)=0$ ва $f''(x_0)>0$ бўлсин. $x=x_0$ нуқтада минимум мавжудлигини кўрсатамиз. Иккинчи тартибли ҳосиланинг таърифига кўра:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

$f''(x_0)>0$ эканини ҳисобга олиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0.$$

Лимит мусбат, шу сабабли кичик Δx ларда ўзгарувчининг ўзи ҳам мусбат бўлади, яъни

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0.$$

Бу тенгсизликдан $\Delta x<0$ да $f'(x_0+\Delta x)<0$ эканига, $\Delta x>0$ да $f'(x_0+\Delta x)>0$ эканига эга бўламиз.

Бу x_0 нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини „—“ дан „+“ га ўзгартиришини кўрсатади. Демак, функция $x=x_0$ нуқтада минимумга эга бўлади. Теорема исботланди.

Агар $x = x_0$ критик нуқтада $f''(x_0) = 0$ бўлса, у ҳолда шу нуқтада ё минимум, ёки максимум бўлиши мумкин, ёки минимум ҳам, максимум ҳам бўлмаслиги мумкин. Бундай ҳолда текширишни биринчи ҳосила бўйича олиб бориш керак.

1-мисол. $y = x - 2\sin x$ функциянинг $[0, 2\pi]$ кесмадаги экстремумини топинг.

Ечиш. а) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = 1 - 2\cos x.$$

б) $[0, 2\pi]$ кесмага тегишли критик нуқталарни топамиз. y' ни нолга тенглаймиз:

$$1 - 2\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

в) Иккинчи ҳосилани топамиз:

$$y'' = 2\sin x.$$

г) Иккинчи ҳосиланинг x_1 ва x_2 нуқталардаги ишорасини аниқлаймиз:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$
$\frac{\pi}{3}$	0	+	min −0,58
$\frac{5\pi}{3}$	0	−	max 6,96

2-мисол. $y = x^6$ функцияни экстремумга текширинг.

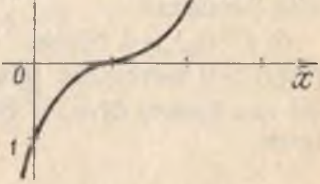
Ечиш. а) $y' = 6x^5$,

б) $y' = 0$, $6x^5 = 0$, $x = 0$ — критик нуқта.

в) $y'' = 30x^4$, г) $y''(0) = 0$ — критик нуқтадаги қиймат. Демак, иккинчи ҳосила жавобни бермайди. Биринчи ҳосилага мурожаат қилиб, топамиз: $x < 0$ да $y' < 0$ ва $x > 0$ да $y' > 0$. Шундай қилиб, $x = 0$ да функция минимумга эга.

3-мисол. $y = (x - 1)^3$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечиш. $y' = 3(x - 1)^2 = 0$, $x = 1$ — критик нуқта. $y'' = 6(x - 1)$, $y''(1) = 0$ — критик нуқтадаги қиймат. Иккинчи ҳосила жавобни бермайди. $x > 1$ ва $x < 1$ лар учун биринчи ҳосила $y' > 0$. Шундай қилиб, $x = 1$ да функция максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас. У сон ўқининг ҳамма ерида ўсувчи (113- шакл).



113- шакл.

2. Экстремумларни Тейлор формуласи ёрдамида текшириш. Олдинги бандда, агар $x = x_0$ нуқтада $f'(x_0) = 0$ ва $f''(x) = 0$ бўлса, бу нуқтада ё минимум, ёки максимум бўлиши мумкинлиги, ёки униси ҳам, буниси ҳам бўлмаслиги таъкидланган эди. Бундай ҳолда x_0 нуқтада нимага эга бўлишимизни Тейлор формуласи ёрдамида аниқлаймиз.

$f(x)$ функция $x = x_0$ нуқта атрофида узлуксиз n-тартибли ҳосилага эга ва $x = x_0$ нуқтада $(n-1)$-тартибгача бўлган ҳосилаларнинг ҳаммаси нолга тенг, деб фараз қиламиз:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \qquad (6.1)$$

(6.1) ни ҳисобга олиб, $f(x)$ функция учун Тейлор формуласини ёзамиз:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (6.2)$$

бунда ξ сони x_0 ва x лар орасидаги сон.

$f^{(n)}(x)$ функция x_0 нуқтанинг атрофида узлуксиз ва $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ бўлгани учун, узлуксиз функциялар ишораларининг сақланиш хоссасига кўра, x_0 нуқтанинг шундай кичик атрофи топиладики, бу атрофнинг ҳар қайси x нуқтасида $f^{(n)}(x) \neq 0$. Бунда, агар $f^{(n)}(x_0) > 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқта атрофининг барча нуқталарида $f^{(n)}(x) > 0$; агар $f^{(n)}(x_0) < 0$ бўлса, у ҳола x_0 нуқта атрофининг ҳамма x нуқталарида $f^{(n)}(x) < 0$. Узлуксиз функция ишорасининг сақланишининг бу хоссаси бундан кейинги текширишларимизда ёрдам бериши мумкин.

(6.2) формулани бундай кўринишда қайта ёзамиз:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (6.3)$$

Ҳар хил хусусий ҳолларни қараймиз.

Биринчи ҳол. n — жуфт сон.

а) $f^{(n)}(x_0) < 0$ бўлсин, у ҳолда x_0 нуқтанинг кичик атрофига тегишли барча x нуқталарда $f^{(n)}(x) < 0$, демак, $f^{(n)}(\xi) < 0$, чунки ξ қиймат x_0 ва x орасида ётади. Аммо n — жуфт сон, шу сабабли $x \neq x_0$ да $(x - x_0)^n > 0$. Шунга кўра

$$x \neq x_0 \text{ да } \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n < 0,$$

демак, (6.3) дан x_0 нуқтанинг атрофига тегишли ҳамма x лар учун

$$f(x) - f(x_0) < 0 \text{ ёки } f(x_0) > f(x)$$

экани келиб чиқади. Бу эса $x = x_0$ да функция максимумга эга эканини билдиради.

б) $f^{(n)}(x_0) > 0$ бўлсин. У ҳолда x_0 нуқтанинг кичик атрофида $f^{(n)}(x) > 0$ тенгсизлик ўринли бўлади, демак, $f^{(n)}(\xi) > 0$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади, чунки ξ сон x ва x_0 лар орасида ётади. Демак,

$$x \neq x_0 \text{ да } \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n > 0.$$

Шу сабабли (6.3) дан x_0 нуқта атрофига тегишли ҳамма x лар учун

$$f(x)-f(x_0)>0 \text{ ёки } f(x_0)<f(x)$$

экани келиб чиқади.

Бу эса $x=x_0$ да функция минимумга эга эканини билдиради.

Иккинчи ҳол. n — тоқ сон.

Бу ҳолда n — тоқ сон ва $(x-x_0)^n$ миқдор $x<x_0$ ва $x>x_0$ да ҳар хил ишорали бўлади.

а) $f^{(n)}(x_0)<0$ бўлсин, у ҳолда x_0 нуқтанинг шундай атрофи топиладики, унда $f^{(n)}(x)<0$, ва демак, $f^{(n)}(\xi)<0$. Шу сабабли $x<x_0$ лар учун

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n>0$$

га, $x>x_0$ лар учун эса

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n<0$$

га эга бўламиз.

Демак, (6.3) дан
$x<x_0$ лар учун $f(x)-f(x_0)>0$ ёки $f(x)>f(x_0)$,
$x>x_0$ лар учун эса $f(x)-f(x_0)<0$ ёки $f(x)<f(x_0)$ экани келиб чиқади.

Бу эса $x=x_0$ да минимум ҳам, максимум ҳам мавжуд эмаслигини, функция эса камаювчи эканини билдиради.

Олинган натижаларни ифодалаймиз:

Агар $x=x_0$ да $f'(x_0)=f''(x_0)= \ldots =f^{(n-1)}(x_0)=0$ ва $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ га эга бўлсак, у ҳолда:

а) n жуфт бўлганда экстремум мавжуд:
агар $f^{(n)}(x_0)<0$ бўлса, $f(x)$ максимумга эга,
агар $f^{(n)}(x_0)>0$ бўлса, $f(x)$ минимумга эга.

б) n тоқ бўлганда экстремум мавжуд эмас;
$f^{(n)}(x_0)<0$ бўлса, $f(x)$ камаювчи, $f^{(n)}(x_0)>0$ бўлса, $f(x)$ ўсувчи.

4-мисол. Ушбу функцияни экстремумга текширинг:

$$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1.$$

Ечиш. 1) Биринчи ҳосилани топамиз:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-4.$$

2) Критик нуқталарни аниқлаймиз:

$$4x^3-12x^2+12x-4=0$$

ёки

$$x^3-3x^2+3x-1=0.$$

Бундан

$$(x-1)^3=0.$$

$x=1$ критик нуқта.

3) Критик нуқтада функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини текширамиз:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12, \qquad f''(1) = 0,$$
$$f'''(x) = 24x - 24, \qquad f'''(1) = 0,$$
$$f^{IV}(x) = 24 > 0 \text{ (барча } x \text{ лар учун).}$$

Демак, $x=1$ да $f(x)$ функция минимумга эга.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини қандай топиш мумкин? Ҳар доим ҳам улар мавжудми?
2. Иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида функция экстремумининг етарлилик шарти нималадан иборат?
3. Функция экстремумини топиш учун Тейлор формуласидан қандай фойдаланилади? Мисоллар келтиринг.
4. 1185 — 1194, 1208 — 1218, 1228, 1238-масалаларни ечинг.

7-§. Функциялар графигини қавариқлик ва ботиқликка текшириш. Эгилиш нуқталари

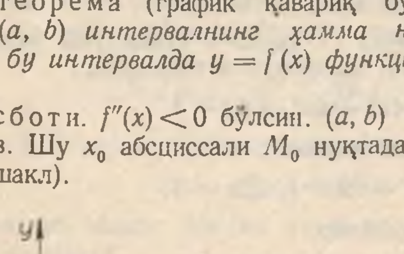
1-таъриф. Агар дифференциалланувчи $y = f(x)$ функциянинг графиги ўзининг (a, b) интервалдаги ҳар қандай уринмасидан пастда жойлашса, у ҳолда бу функциянинг графиги *қавариқ* дейилади (114-шакл).

2-таъриф. Агар дифференциалланувчи $y = f(x)$ функциянинг графиги ўзининг (a, b) интервалдаги ҳар қандай уринмасидан юқорида жойлашса, у ҳолда бу функциянинг графиги *ботиқ* дейилади (115-шакл).

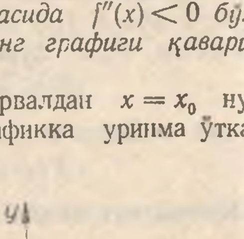
3-таъриф. $y = f(x)$ узлуксиз функция графигининг ботиқ қисмини қавариқ қисмидан ажратувчи нуқтаси графикнинг эгилиш нуқтаси дейилади. (116-шакл). Эгилиш нуқтасида уринма, агар у мавжуд бўлса, эгри чизиқни кесиб ўтади.

1-теорема (график қавариқ бўлишининг етарлилик шарти). *Агар (a, b) интервалнинг ҳамма нуқтасида $f''(x) < 0$ бўлса, у ҳолда бу интервалда $y = f(x)$ функциянинг графиги қавариқ бўлади.*

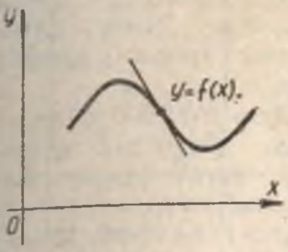
Исботи. $f''(x) < 0$ бўлсин. (a, b) интервалдан $x = x_0$ нуқтани оламиз. Шу x_0 абсциссали M_0 нуқтада графикка уринма ўтказамиз (117-шакл).



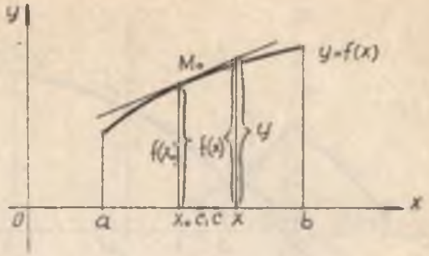
114-шакл.



115-шакл.



116- шакл.



117- шакл.

Уринма тенгламасини тузамиз:

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{7.1}$$

бунда Y — уринманинг x абсциссага мос келувчи ординатаси.

(7.1) тенгламани бундай ёзамиз:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

x нуқтада график ва уринма ординаталари айирмаси қуйидагига тенг:

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \tag{7.2}$$

$f(x) - f(x_0)$ айирмага нисбатан Лагранж фомуласини қўллаймиз ва (7.2) га қўямиз:

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

ёки

$$y - Y = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0), \quad x_0 < c < x.$$

$f'(c) - f'(x_0)$ айирмани Лагранж формуласи бўйича яна алмаштирамиз:

$$y - Y = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c,$$

бундан

$$y - Y < 0$$

экани келиб чиқади, чунки $f''(c_1) < 0$ (шартга кўра),

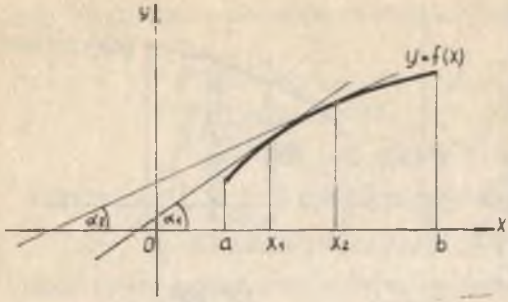
$$c > x_0 \text{ ва } x > x_0.$$

Шундай қилиб, $y < Y$, демак, y функция ординатаси бир хил x нинг ўзида уринма ординатаси Y дан кичик. Бу графикнинг қавариқлигини билдиради.

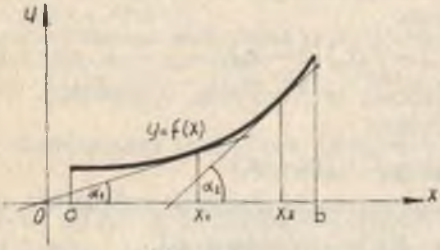
Теорема исботланди. $f''(x) > 0$ бўлган ҳол учун ҳам теорема шундай исботланади.

2-теорема (графикнинг ботиқ бўлишининг етарлилик шарти). *Агар (a, b) интервалнинг барча нуқтасида $f''(x) > 0$ бўлса, у ҳолда бу интервалда $y = f(x)$ функция графиги ботиқ бўлади.* Бу теоремаларни геометрик тасвирлаймиз (118- расм).

Агар $f''(x) < 0$ бўлса, у ҳолда $(f'(x))' < 0$ бўлади. Ундан $f'(x)$ — функция камаювчи функция экани келиб чиқади.



118- шакл.



119- шакл.

$x_2 > x_1$ да $f'(x_2) < f'(x_1)$ бўлади, яъни $\operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$. Демак, функциянинг графиги қавариқ экан.

Агар $f''(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $(f'(x))' > 0$ бўлиб, $f'(x)$ — ўсувчи функция экани келиб чиқади. $x_2 > x_1$ да $f'(x_2) > f'(x_1)$ бўлиб, $\operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}\alpha_1$ дан $\alpha_2 > \alpha_1$ келиб чиқади. Демак, функциянинг графиги ботиқ экан (119- шакл).

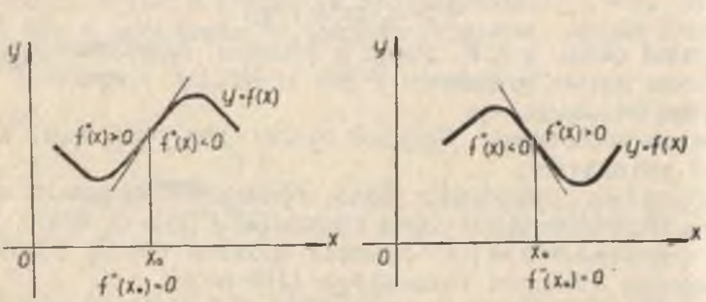
Эгилиш нуқталарини иккинчи тартибли ҳосила нолга тенг бўлган ёки узилишга эга бўлган нуқталар орасидан излаш керак.

3-теорема (Эгилиш нуқталарининг мавжуд бўлишининг етарлилик шарти). *Агар $f''(x_0) = 0$ бўлса ёки $f''(x_0)$ мавжуд бўлмаса ва x_0 нуқтадан ўтишда иккинчи ҳосила ўз ишорасини ўзгартирса, у ҳолда абсциссаси x_0 га тенг бўлган нуқта $y = f(x)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади.*

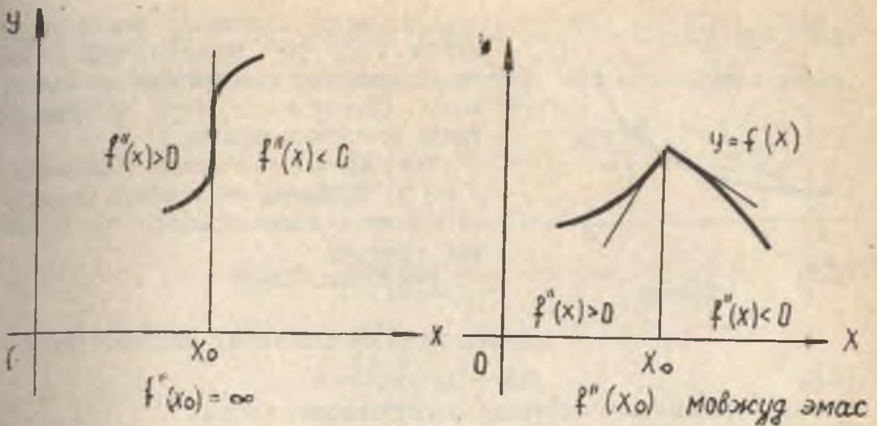
Исботи. Масалан, $f''(x_0) = 0$ бўлсин, шу билан бирга $x < x_0$ лар учун $f''(x) < 0$ тенгсизликка, $x > x_0$ лар учун эса $f''(x) > 0$ тенгсизликка эга бўлайлик. Бу $x < x_0$ лар учун график қавариқ, $x > x_0$ лар учун эса график ботиқ эканлигини билдиради. Демак x_0 нуқта қавариқлик интервалларини ботиқлик интервалларидан ажратади, яъни x_0 эгилиш нуқтасининг абсциссаси. Теорема исботланди.

Теоремани геометрик тасвирлаймиз (120 ва 121-шакллар).

1-мисол. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ функция графигининг қавариқлик, ботиқлик интервалларини, эгилиш нуқталарини топинг.



120- шакл.



121- шакл.

Ечиш. Иккинчи ҳосилани топамиз:

$$y' = 3x^2 + 6x - 9, \quad y'' = 6x + 6.$$

Иккинчи ҳосилани нолга тенглаймиз:

$$y'' = 0, \quad 6x + 6 = 0, \quad x = -1.$$

Ушбу жадвални тузамиз.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	∩	12	∪

$A(-1, 12)$—эгилиш нуқтаси,

$(-\infty, -1)$ — қавариқлик интервали.

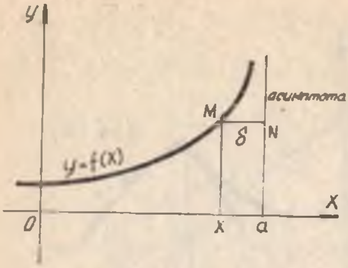
$(-1, +\infty)$ — ботиқлик интервали.

8- §. Эгри чизиқларнинг асимптоталари

Таъриф. Агар $y = f(x)$ функция графигининг ўзгарувчи нуқтаси чексиз узоқлашганда ундан бирор тўғри чизиққача бўлган масофа нолга интилса, бу тўғри чизиқ $y = f(x)$ функция графигининг *асимптотаси* деб аталади.

Бундан буён вертикал асимптоталарни (яъни Oy ўққа параллел асимптоталарни) оғма (яъни Oy ўққа параллел бўлмаган) асимптоталардан фарқ қиламиз.

1. Вертикал асимптоталар. Вертикал асимптота ҳолида $\lim\limits_{x\to a-0} MN = \lim\limits_{x\to a-0} \delta = 0$ бўлиши таърифдан келиб чиқади (122- шакл). Бу эса агар $x = a$ асимптота бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ бўлишини; ва аксинча, агар $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ бўлса, у ҳолда $x = a$ асимптота бўлишини англатади.



122- шакл.

Хулоса: Вертикал асимптотани излаш учун $f(x)$ функция чексизликка айланадиган $x = a$ қийматни топиш керак. Шунда $x = a$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

1-эслатма. Умуман айтганда, $y = f(x)$ функциянинг графиги бир нечта вертикал асимптоталарга эга бўлиши мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$y = x + \frac{1}{x-2}$$

функция графигининг вертикал асимптотасини топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x + \frac{1}{x-2}\right) = \infty$, шу сабабли $x = 2$ тўғри чизиқ вертикал асимптотадир.

2-мисол. $y = \operatorname{tg} x$ функция графигининг вертикал асимтотасини топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+n\pi} \operatorname{tg} x = \infty$ бўлгани учун функциянинг графиги чексиз вертикал асимптоталарга эга:

$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \quad x = \pm\frac{3}{2}\pi, \quad x = \pm\frac{5}{2}\pi, \ \ldots$$

2. Огма асимптоталар. $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = \lim\limits_{x\to+\infty} \delta = 0$ эканлиги таърифдан келиб чиқади. Асимптота тенгламаси $y = kx + b$ кўринишга эга (123- шакл). $\triangle MNK$ дан $\angle KMN = \alpha$, шу сабабли $MK = \frac{MN}{\cos\alpha}$, аммо берилган асимптота учун α — const $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$, шу сабабли

$$\lim_{x\to+\infty} MK = \lim_{x\to+\infty} \frac{MN}{\cos\alpha} = 0.$$

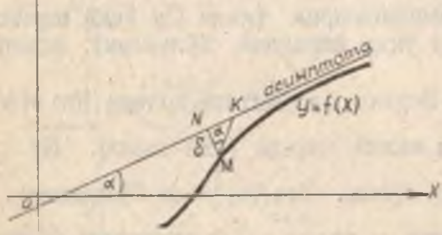
шу сабабли

$$MK = Y_{\text{а}} - Y_{\text{э}} = (kx+b) - f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} ((kx+b) - f(x)) = 0. \tag{8.1}$$

Бундан:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x}\right) = 0.$$



123- шакл.

Аммо $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$, шу сабабли $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(k-\frac{f(x)}{x}\right)=0$. Бу тенгликда $x\to+\infty$, шу сабабли иккинчи кўпайтувчи нолга интилиши керак. Бундан

$$\lim_{x\to+\infty}\left(k-\frac{f(x)}{x}\right)=0$$

ёки

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{8.2}$$

k нинг топилган қийматини (8.1) га қўямиз:

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx). \tag{8.3}$$

Шундай қилиб, оғма асимптотани топиш учун (8.2) ва (8.3) лимитларни ҳисоблаш керак.

2-эслатма. Агар (8.2) ёки (8.3) лимитлардан ақалли биттаси мавжуд бўлмаса, у ҳолда $y=f(x)$ функциянинг графиги $x\to+\infty$ да оғма асимптотага эга бўлмайди.

3-эслатма. $x\to-\infty$ да ҳам асимптота шунга ўхшаш топилади.

4-эслатма. Умуман айтганда, $x\to+\infty$ ва $x\to-\infty$ да функциянинг графиги иккитадан ортиқ бўлмаган ҳар хил оғма асимптотага эга бўлиши мумкин.

3-мисол. $y=\frac{x^2}{x-2}$ функция графигининг асимптотасини топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2}{x-2}=\infty$ бўлгани учун $x=2$ тўғри чизиқ вертикал асимптота. $y=kx+b$ оғма асимптотани излаймиз.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

Демак, $y=x+2$ — оғма асимптотадир.

4-мисол. $y=e^{-x}\sin x+x$ функция графигининг асимптотасини топинг.

Ечиш. Вертикал асимптоталар мавжуд эмас, чунки функция ҳамма жойда аниқланган. $y=kx+b$ оғма асимптотани излаймиз:

1) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x\cdot e^x}+1\right)=1,$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{e^x}+x-x\right)=0.$$

$y=x$ оғма асимптота.

2) $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sin x\cdot e^{-x}}{x}+1\right)$ мавжуд эмас, чунки биринчи қўшилувчи чексиз ўсади. $x\to-\infty$ да график оғма асимптотага эга эмас.

9- §. Графиклар ясашнинг умумий схемаси

Функция графигини ясашда одатда қуйидаги схемага амал қилинади:

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси ва узилиш нуқталарини топиш.

2. Функциянинг жуфтлигини, тоқлигини, даврийлигини текшириб кўриш.

3. Графикнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқлаш.

4. Функциянинг ишораси сақланадиган интервалларни топиш.

5. Графикнинг асимптоталарини топиш.

6. Функциянинг монотонлик интерваллари ва экстремумларини топиш.

7. Қавариқлик, ботиқлик интервалларини ва эгилиш нуқталарини топиш.

Юқоридаги текширишлар асосида графикни чизамиз.

Мисол. $y=\frac{x^3}{4(2-x)^2}$ функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг.

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси:

$$x\in\{(-\infty,\ 2)\cup(2,+\infty)\}.$$

$x=2$ — узилиш нуқтаси.

2. Функция даврий эмас, жуфтлик ва тоқлик хоссаларига эга эмас, чунки:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{4(2+x)^2}=-\frac{x^3}{4(2+x)^2}\neq\begin{cases} f(x),\\ -f(x).\end{cases}$$

3. Функциянинг координаталар ўқлари билан кесишиши:

Oy ўқ билан $x=0$ да $y=0$;

Ox ўқ билан $y=0$ да $x=0$.

Шундай қилиб, битта $O(0,\ 0)$ нуқтада кесишади.

4. Функциянинг ишораси сақланадиган интервалларни бундай аниқлаймиз: аниқланиш соҳасини нуқталар ёрдамида функция нолга тенг бўладиган интервалларга ажратамиз, бу интервалларнинг ҳар бирида функциянинг ишорасини текширамиз. Жадвал тузамиз.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
y	$-$	0	$+$	∞	$+$
Графикнинг жойлашиши	Ox ўқи остида		Ox ўқи устида		Ox ўқи устида

5. Графикнинг асимптоталарини топиш:

а) Oy ўққа параллел ўқлар — вертикал асимптоталар.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}=+\infty$ бўлгани учун $x=2$ тўғри чизиқ — вертикал асимптота.

б) Oy ўққа параллелмас ўқлар — оғма асимптоталар.

$y=kx+b$ оғма асимптотанинг формуласидан k ва b ларни ҳисоблаймиз:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4x(2-x)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3\left(\dfrac{2}{x}-1\right)^2}=\frac{1}{4}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{1}{4}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(2-x)^2}{4(2-x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x}{4(2-x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{(2-x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\left(\dfrac{2}{x}-1\right)^2}=1.$$

Бундан: $y=\dfrac{1}{4}x+1$ — оғма асимптота.

6. Функцияни монотонлик интерваллари ва экстремумларини текширамиз:

$$y'=\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}.$$

а) $x_1=0,\qquad x_2=6,\qquad y'=0.$

б) $x=2,\qquad y'=\infty.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 6)$	6	$(6,+\infty)$
y'	+	0	+	∞	−	0	+
y	↗	0	↗	∞	↘	$\dfrac{27}{8}$	↗

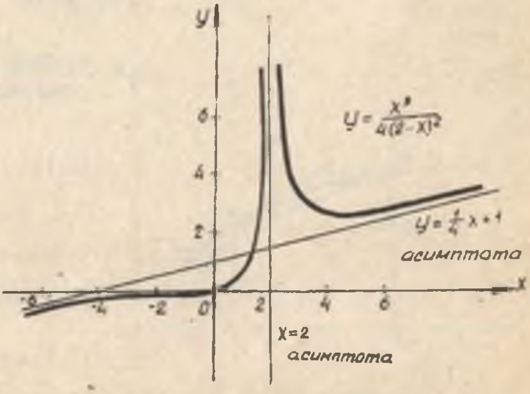
$$y_{\min}=y(6)=\frac{27}{8}$$

7. Функцияни қавариқлик, ботиқлик интервалларини текширамиз ҳамда эгилиш нуқталарини топамиз (124- шакл).

$$y''=\frac{6x}{(x-2)^4}.$$

а) $x_1=0,\qquad y''=0,$

б) $x_2=2,\qquad y''=\infty.$



124- шакл.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	$\cap$	0	$\cup$	∞	$\cup$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. $y = f(x)$ функция графигининг қавариқлик ва ботиқлик таърифини ҳамда эгилиш нуқталари таърифини беринг.
2. $y = f(x)$ функция ботиқлиги характери билан функция иккинчи ҳосиласи ишораси орасидаги боғланиш ҳақидаги теоремани ифодаланг ва исботланг.
3. Эгилиш нуқталари учун етарлилик шарти нимадан иборат? Уни исботланг.
4. $y = f(x)$ функция графигининг қавариқлиги ва ботиқлиги интерваллари ва эгилиш нуқталари қандай топилади? Мисоллар келтиринг.
5. Чизиқ асимптотасининг таърифини ифодаланг. Қандай асимптоталар мавжуд?
6. Вертикал асимптотанинг мавжудлик шарти қандай? Вертикал асимптоталар қандай топилади?
7. Оғма асимптотанинг мавжудлик шарти қандай? Оғма асимптоталар қандай топилади?
8. Функцияни умумий текшириш ва графигини ясаш схемасини баён қилинг. Мисоллар келтиринг.
9. 1287—1300, 1375—1390, 1398, 1400, 1408, 1409, 1416, 1419, 1431, 1432, 1435-масалаларни ечинг.

5-боб

ҲАҚИҚИЙ ЎЗГАРУВЧИНИНГ ВЕКТОР ВА КОМПЛЕКС ФУНКЦИЯЛАРИ

1-§. Ясси эгри чизиқнинг эгрилиги

1. Ёй узунлиги дифференциали. Текисликда $y=f(x)$ тенглама билан берилган эгри чизиққа эга бўлайлик. $M_0(x_0, y_0)$ нуқта шу эгри чизиқнинг бирор тайинланган нуқтаси, $M(x, y)$ эса ўзгарувчи нуқтаси бўлсин.

$\overset{\frown}{M_0M}$ ёй узунлигини s билан белгилаймиз, яъни $s=\overset{\frown}{M_0M}$ (125-шакл). M нуқта абсциссасининг ўзгариши билан ёйнинг s узунлиги ҳам ўзгаради, яъни s x нинг функцияси:

$$\overset{\frown}{M_0M}=s(x).$$

$s(x)$ функциянинг x бўйича ҳосиласини топамиз. x га Δx орттирма берамиз, у ҳолда s ёй Δs орттирма олади: $\Delta s=\overset{\frown}{MM_1}$. У ҳолда:

$$s'(x)=\frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\Delta x}. \qquad (1.1)$$

Қуйидагини исботсиз қабул қиламиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\overline{MM_1}}=1,$$

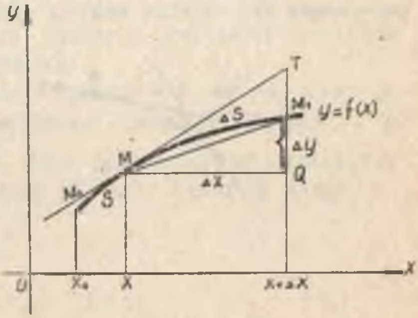
яъни $\overset{\frown}{MM_1}\sim\overline{MM_1}$, (1.1) формула эса ушбу кўринишни олади:

$$s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{MM_1}}{\Delta x}. \qquad (1.2)$$

125-шаклдан

$$\overline{MM_1}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \qquad (1.3)$$

экани келиб чиқади. (1.3) ни (1.2) формулага қўйиб, топамиз:



125-шакл.

$$s'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

ёки

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \qquad (1.4)$$

Бундан ёй дифференциали учун қуйидагини топамиз:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (1.5)$$

ёки

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\, . \qquad (1.6)$$

Охирги ифодадан ёй дифференциалини чизиқ уринмасининг тегишли кесмаси билан ифодалаш мумкинлиги келиб чиқади (чизмада MT кесма).

Агар эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

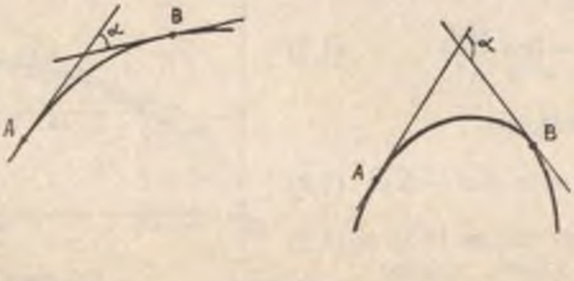
параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда $dx = \dot{x}\, dt$, $dy = \dot{y}\, dt$ ва (1.6) ифода ушбу кўринишни олади:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt. \qquad (1.7)$$

2. Эгрилик. Эгри чизиқ шаклини характерловчи элементлардан бири унинг эгилганлик даражасидир.

Ўз-ўзини кесиб ўтмайдиган ва ҳар қайси нуқтада маълум уринмага эга бўлган текис эгри чизиқни қараймиз. Эгри чизиқда иккита A ва B нуқтани оламиз, танлаб олинган нуқталарда эгри чизиққа ўтказилган уринмалар ҳосил қилган бурчакни α билан белгилаймиз, яъни уринманинг A нуқтадан B нуқтага ўтишдаги бурилиш бурчагини α билан белгилаймиз (126-шакл).

Бу α бурчак AB ёйнинг қўшнилик бурчаги дейилади. Бир хил узунликка эга бўлган иккита ёйдан (шакллардан кўриниб турғани-



126-шакл.

дек) қўшнилик бурчаги катта бўлгани кўпроқ эгилган бўлади (эгрилиги катта бўлади).

Агар ҳар хил узунликдаги ёйлар қараладиган бўлса, қўшнилик бурчаги эгилганлик даражасини баҳолай олмайди. Шу сабабли қўшнилик бурчагининг тортилаётган ёй узунлигига нисбати эгилганликнинг тўла характеристикаси бўлади.

1-таъриф. AB ёйнинг *ўртача эгрилиги* $k_{\text{ўр}}$ деб тегишли қўшнилик бурчаги α нинг ёй узунлигига нисбатига айтилади:

$$k_{\text{ўр}} = \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Битта эгри чизиқнинг ўзи учун ҳар хил қисмларида ўртача эгрилик ҳар хил бўлиши мумкин.

Эгри чизиқнинг бевосита A нуқта яқинидаги эгилганлик даражасини баҳолаш учун эгри чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилиги тушунчасини киритамиз.

2-таъриф. Эгри чизиқнинг берилган A нуқтадаги *эгрилиги* k_A деб ёй узунлиги нолга интилганда (яъни $B \to A$ да) AB ёй ўртача эгрилиги лимитига айтилади:

$$k_A = \lim_{B \to A} k_{\text{ўр}} = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}.$$

1-мисол. Радиуси r га тенг айлана учун α марказий бурчакка мос келувчи AB ёй ўртача эгрилигини ва A нуқтадаги эгриликни топинг.

Ечиш.

$$k_{\text{ўр}} = \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r},$$

$$k_A = \lim_{\alpha \to 0} k_{\text{ўр}} = \frac{1}{r}.$$

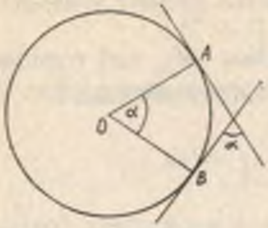
Шундай қилиб, айлананинг эгрилиги нуқтани танлашга боғлиқ эмас ва $\frac{1}{r}$ га тенг (127-шакл).

3. Эгриликни ҳисоблаш. Узлуксиз иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган $y = f(x)$ эгри чизиқни қараймиз.

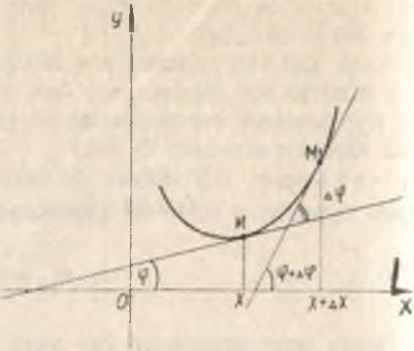
Абсциссалари x ва $x + \Delta x$ бўлган иккита M ва M_1 нуқтада уринма ўтказамиз (128-шакл), уринмаларнинг оғиш бурчакларини φ ва $\varphi + \Delta\varphi$ билан белгилаймиз. $\overset{\frown}{MM_1}$ ёйга мос келувчи қўшнилик бурчаги ушбуга тенг: $\alpha = |\Delta\varphi|$ (қавариқ ёй учун $\Delta\varphi < 0$, ботиқ ёй учун $\Delta\varphi > 0$).

$\overset{\frown}{MM_1}$ бўлакдаги ўртача эгриликни

$$k_{\text{ўр}} = \frac{\alpha}{\overset{\frown}{MM_1}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$



127- шакл.



128- шакл.

формула бўйича аниқлаймиз. $M \to M_1$ да $\Delta s \to 0$ ва $k_{ўр} \to k_{M}$ га эгамиз:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} k_{ўр} = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|.$$

Шундай қилиб, M нуқтадаги эгрилик $k = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$ формула бўйича ҳисобланади. Энди $\frac{d\varphi}{ds}$ ҳосилани топиш қолади. Ушбу алмаштиришларни бажарамиз:

$$k = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \left| \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} \right|. \tag{1.8}$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ ни топиш учун $\operatorname{tg} \varphi = y'$, ва демак, $\varphi = \operatorname{arctg} y'$ эканини пайқаймиз. Охирги тенгликни x бўйича дифференциаллаб, ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2}.$$

$\frac{ds}{dx}$ ҳосила эса илгари чиқарилган (1.5) формулага биноан $\sqrt{1 + (y')^2}$ га тенг. $\frac{d\varphi}{dx}$ ва $\frac{ds}{dx}$ ни (1.8) га қўйсак:

$$k = \left| \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right|. \tag{1.9}$$

Шундай қилиб, (1.9) формула нуқтадаги эгриликни ҳисоблашга хизмат қилади. Бунда махраждаги илдизнинг арифметик қийматинигина олиш керак. Шу сабабли (1.9) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$k = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \tag{1.10}$$

Агар чизиқнинг тенгламаси

$$x = x(t),$$
$$y = y(t)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, $y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$ ва (1.10) формула бундай ёзилади:

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \qquad (1.11)$$

2-мисол. $y = x^2$ параболанинг исталган нуқтасидаги эгриликни топинг.

Ечиш. Биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз: $y' = 2x$, $y'' = 2$. Буларни (1.10) формулага қўйиб, ихтиёрий нуқтадаги эгриликни топамиз:

$$k = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}.$$

Хусусий ҳолда параболанинг (0,0) учидаги эгрилик $k = 2$.

3-мисол. $y = ax + b$ тўғри чизиқнинг эгрилигини топинг.

Ечиш. $y' = a$, $y'' = 0$. Эгрилик $k = 0$.

Тўғри чизиқ эгрилиги нолга тенг чизиқдир.

4-мисол. Циклоида эгрилигини топинг:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ечиш. Параметрик берилган эгри чизиқ эгрилигини (1.11) формула бўйича топамиз, бунинг учун ҳосилаларни топамиз:

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \qquad \dot{y} = a\sin t,$$
$$\ddot{x} = a\sin t, \qquad \ddot{y} = a\cos t.$$

Уларни (1.11) формулага қўямиз:

$$k = \frac{|a^2\cos t(1 - \cos t) - a^2\sin^2 t|}{(a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t)^{3/2}} = \frac{a^2|\cos t - 1|}{a^3(2(1 - \cos t))^{3/2}} =$$

$$= \frac{\left|-2\sin^2\frac{t}{2}\right|}{a\left(4\sin^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{8a\left|\sin^3\frac{t}{2}\right|} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

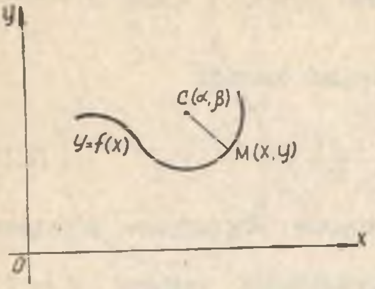
4. Эгрилик радиуси, маркази ва доираси.

Таъриф. Чизиқнинг берилган M нуқтадаги эгрилиги k га тескари R миқдор шу чизиқнинг қаралаётган нуқтадаги *эгрилик радиуси* дейилади:

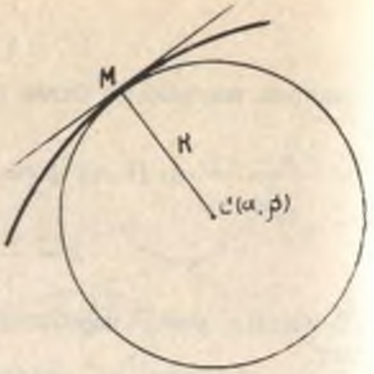
$$R = \frac{1}{k}$$

ёки

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$



129- шакл.



130- шакл.

M нуқтада эгри чизиқнинг ботиқлигига йўналган нормал (уриниш нуқтасида уринмага перпендикуляр тўғри чизиқ) ясаймиз (129- шакл) ва бу нормалга *M* нуқтадаги радиус эгрилигига тенг (*R* га тенг) *MC* кесмани қўямиз. *C* нуқта берилган эгри чизиқнинг *M* нуқтадаги *эгрилик маркази* дейилади.

Маркази *C* нуқтада бўлган *R* радиусли доира (ва айлана) берилган эгри чизиқнинг *M* нуқтадаги эгрилик доираси (ва айланаси) дейилади.

Эгрилик доираси таърифидан эгри чизиқнинг эгрилиги ва эгрилик доирасининг берилган нуқтадаги эгрилиги ўзаро тенг экани келиб чиқади.

Эгрилик маркази координаталари учун формула чиқарамиз.

Эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин (130- шакл). Эгри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтани белгилаймиз. *C* эгрилик маркази координаталарини α ва β билан белгилаймиз. Эгри чизиққа *M* нуқтада ўтказилган нормал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \tag{1.12}$$

бунда *X*, *Y* — нормалнинг ўзгарувчи координаталари.

$C(\alpha;\ \beta)$ нуқта нормалга тегишли бўлгани учун унинг координаталари (1.12) тенгламани қаноатлантириши керак:

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \tag{1.13}$$

$C(\alpha,\ \beta)$ нуқта $M(x;\ y)$ нуқтадан эгрилик радиуси *R* га тенг масофада ётади, шу сабабли:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \tag{1.14}$$

(1.13) ва (1.14) тенгламаларни биргаликда ечиб, α ва β ларни топамиз:

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} R,$$

$$\beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} R. \qquad (1.15)$$

$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ қийматни (1.15) га қўйсак:

$$\alpha = x \pm \frac{y'(1+y'^2)}{|y''|},$$

$$\beta = y \mp \frac{1+y'^2}{|y''|}.$$

$y'' > 0$ ва $y'' < 0$ бўлган ҳолларда охирги формулалар қуйидагича соддалашишини кўрсатиш мумкин:

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Эгри чизиқнинг нуқтадаги эгрилик маркази координаталари формулаларининг узил-кесил кўриниши шундан иборат.

Агар эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда эгрилик маркази координаталарини (1.16) формуладан олиш мумкин, бунинг учун унга ҳосилаларнинг

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

қийматларини қўйиш керак. У ҳолда

$$\alpha = x - \frac{\dot{y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}},$$

$$\beta = y + \frac{\dot{x}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}. \qquad (1.17)$$

5-мисол. $y = x^2$ параболанинг исталган нуқтасидаги эгрилик маркази координаталарини аниқланг.

Ечиш. y' ва y'' ни топамиз:

$$y' = 2x. \quad y'' = 2.$$

Ҳосилаларни (1.16) формулага қўямиз:

$$\alpha = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3,$$

$$\beta = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{6x^2+1}{2}.$$

Эгрилик марказининг координаталари:

$$\alpha = -4x^3, \quad \beta = \frac{1}{2}(6x^2 + 1).$$

Хусусий ҳолда параболанинг учида $x = 0$, шу сабабли эгрилик марказининг координаталари бундай бўлади:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

6-мисол. Циклоида эгрилик маркази координаталарини аниқланг:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Ечиш. $\dot{x} = a(1 - \cos t), \qquad \dot{y} = a\sin t,$

$\ddot{x} = a\sin t, \qquad \ddot{x} = a\cos t.$

Буларни (1.17) формулага қўйиб, топамиз:

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = -a(1 - \cos t). \end{cases}$$

5. Эволюта ва эвольвента. Берилган чизиқдаги ҳар бир M нуқтага тўла аниқланган эгрилик маркази $C(\alpha;\ \beta)$ тўғри келади. Берилган чизиқнинг ҳамма эгрилик марказлари тўплами бирор чизиқни ҳосил қилади, бу чизиқ *эволюта* дейилади.

Берилган чизиқ ўз эволютасига нисбатан *эвольвента* (ёки ёйилма) дейилади.

Агар берилган эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан аниқланса, у ҳолда (1.16) тенгламани эволютанинг x параметрли *параметрик тенгламалари* деб қараш мумкин:

$$\alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''},$$

$$\beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

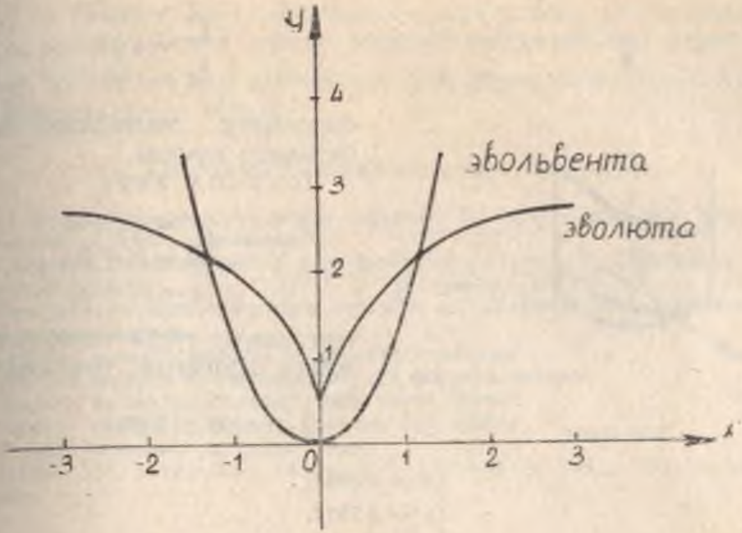
Бу тенгламалардан x параметрни чиқариб, эволютанинг α ва β ўзгарувчи координаталари орасидаги бевосита боғланишни топиш мумкин.

Агар берилган эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан ифодаланган бўлса, у ҳолда (1.17) тенгламалар параметри

$$\alpha = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}},$$



131- шакл.

$$\beta = y + \frac{\dot{x}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}\,.$$

дан иборат бўлган эволютанинг параметрик тенгламасини беради.

Эволютанинг хоссаларидан бирини исботсиз таъкидлаб ўтамиз: берилган эгри чизиққа (эволвентага) ўтказилган нормал эволютага уринма бўлади.

7-мисол. $y = x^2$ парабола эволютаси тенгламасини топинг.

Ечиш. 5-мисолда параболанинг ихтиёрий нуқтаси учун эгрилик маркази координаталари топилган эди:

$$\begin{cases} \alpha = -4x^3, \\ \beta = \frac{1}{2}(6x^2 + 1). \end{cases}$$

Бу тенгламаларни $y = x^2$ парабола эволютасининг параметрик тенгламалари деб қараш мумкин. x параметрни чиқариб, топамиз:

$$\alpha^2 = \frac{16}{27}\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Бу ярим кубик параболанинг тенгламасидир (131- шакл).

2-§. Фазовий эгри чизиқнинг эгрилиги

Oxy текисликда чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилиши мумкин. Фазовий чизиқлар ҳам шунга ўхшаш

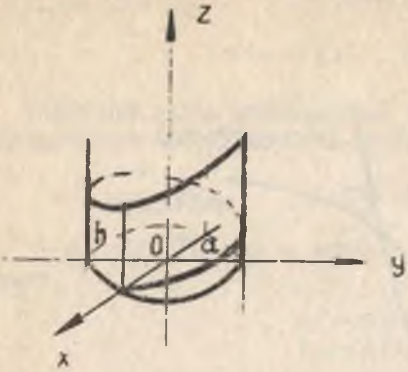
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилиши мумкин.

1- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = lt + y_0, \\ z = pt + z_0 \end{cases},$$

тенгламалар тўғри чизиқнинг фазодаги параметрик тенгламаларидир.



132- шакл.

2- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt \end{cases}$$

тенгламалар $x^2 + y^2 = a^2$ доиравий цилиндрга жойлашган (132- шакл) винт чизиқнинг параметрик тенгламаларидир. $h = 2\pi b$ — винт чизиқнинг қадами.

Фазовий эгри чизиқ эгрилиги дифференциалини ва эгрилик маркази координаталарини ҳисоблаш формулаларини исботсиз келтирамиз:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\; dt,$$

$$k = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{3/2}},$$

$$\alpha = x + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{A^2 + B^2 + C^2}(B\dot{z} - C\dot{y}), \tag{2.1}$$

$$\beta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{A^2 + B^2 + C^2}(C\dot{x} - A\dot{z}),$$

$$\gamma = z + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{A^2 + B^2 + C^2}(A\dot{y} - B\dot{x}).$$

Бунда қисқалик учун ушбу белгилашлар киритилган:

$$A = \dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y},$$

$$B = \dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z},$$

$$C = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}.$$

(1.7), (1.11), (1.17) формулалар — эгри чизиқ эгрилиги дифференциали ва текис чизиқ эгрилик маркази координаталари формулалари бўлиб, $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$ деб олинса, (2.1) формуланинг хусусий ҳоллари сифатида ҳосил бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ейл дифференциали формуласини чиқаринг. Бу хулоса чизиқнинг қандай геометрик хоссасига асосланади?
2. Қўшнилик бурчаги нима? У эгри чизиқнинг эгилганлик даражасини қандай характерлайди?
3. Чизиқнинг берилган нуқтадаги эгрилиги деб нимани айтилади? Эгрилик учун формула чиқаринг.
4. Эгрилик радиуси, маркази ва доирасини аниқланг.
5. Эгрилик маркази координаталари учун формула чиқаринг.
6. Эволюта ва эвольвенталарнинг таърифини беринг.
7. Фазовий чизиқнинг берилиш усулини баён қилинг.
8. Фазовий чизиқнинг эгрилиги нима?
9. 1529—1534, 1543—1546, 1554—1557, 1568—1573, 1581, 1582-масалаларни ечинг.

3-§. Скаляр аргументнинг вектор функциялари

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ векторни қараймиз, унинг боши координаталар боши билан, охири эса бирор $M(x;\ y;\ z)$ нуқта билан устма-уст тушади. Бундай вектор M нуқтанинг *радиус-вектори* дейилади. Бу векторни координата ўқларидаги проекциялар орқали ифодалаймиз:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{3.1}$$

Агар $\vec{r}$ векторнинг проекциялари бирор параметрнинг функциялари бўлса, яъни

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

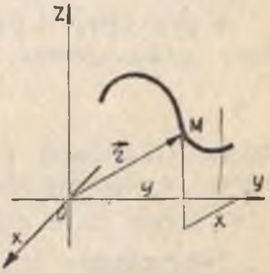
бўлса, (3.1) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{3.3}$$

ёки қисқача

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{3.4}$$

t параметр ўзгарса, x, y, z координаталар ҳам ўзгаради, у ҳолда M нуқта — $\overrightarrow{OM}$ векторнинг охири фазода бирор чизиқни чизади, бу чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ векторнинг *годографи* дейилади (133-шакл).



133- шакл.

(3.3) ва (3.4) тенгламалар чизиқнинг фазодаги *вектор тенгламаси* дейилади.

(3.2) тенгламалар чизиқнинг фазодаги *параметрик тенгламалари* дейилади.

(3.3) ва (3.4) тенгламалардан t параметр ўзгарганда $\vec{r}$ вектор умумий ҳолда миқдори бўйича ҳам, йўналиши бўйича ҳам ўзгариши келиб чиқади.

$\vec{r}$ вектор t скаляр аргументнинг вектор функцияси дейилади: $\vec{r}=\vec{r}(t)$. $\vec{r}(t)$ вектор функциянинг берилиши учта скаляр функциянинг — унинг координаталар ўқларига проекциялари $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ нинг берилишига тенг кучлидир.

Агар бирор $\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$ вектор t t_0 да

$$\lim_{t\to t_0} x(t)=x_0,$$
$$\lim_{t\to t_0} y(t)=y_0,$$
$$\lim_{t\to t_0} z(t)=z_0$$

бўлса, шу вектор $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ вектор функциянинг *лимити* дейилади.

Агар $\vec{r}_0$ вектор $\vec{r}(t)$ вектор функциянинг $t\to t_0$ даги лимити бўлса, у ҳолда бундай ёзилади:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0.$$

$\vec{r}(t)$ вектор функция $t=t_0$ да ва t_0 ни ўз ичига олувчи бирор интервалда аниқланган бўлсин, у ҳолда агар

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$$

бўлса, $\vec{r}(t)$ функция t_0 нуқтада *узлуксиз функция* дейилади.

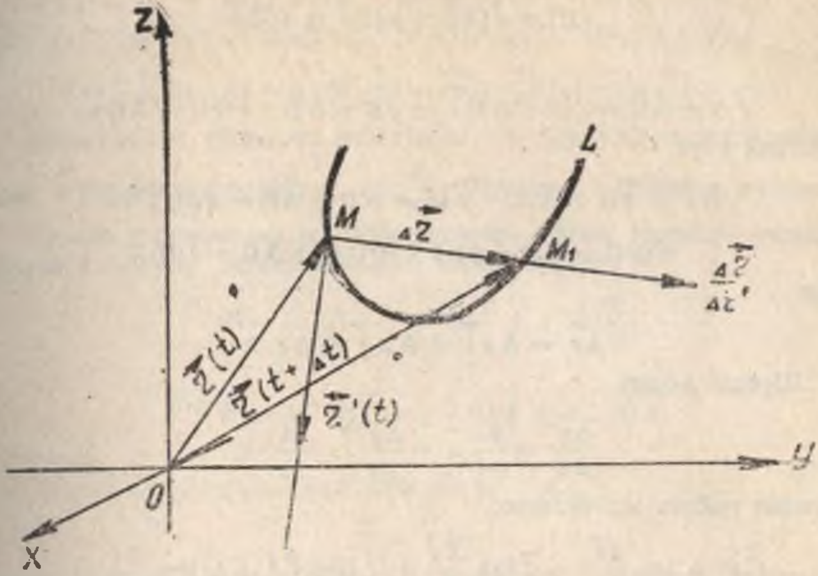
4-§. Скаляр аргументли вектор функциянинг ҳосиласи

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ вектор функция $M(x, y, z)$ нуқтанинг радиус-вектори, яъни

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$$

бўлсин (134-шакл). t параметр ўзгарганда M нуқта L годографни чизади. t параметр қийматини танлаймиз ва тайинлаб қўямиз. Унга $\vec{r}(t)$ вектор ва M нуқта мос келади.

Параметрнинг бошқа $t+\Delta t$ қийматини оламиз. Унга $\vec{r}(t+\Delta t)$ вектор ва M_1 нуқта мос келади.



134- шакл.

$\Delta\vec r$ векторни қараймиз:

$$\Delta\vec r=\overline{MM_1}\ \text{ ёки }\ \Delta\vec r=\vec r\,(t+\Delta t)-\vec r\,(t).$$

Уни $\vec r\,(t)$ вектор функциянинг t нуқтадаги орттирмаси деймиз.

$\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}$ нисбат $\Delta\vec r$ векторга коллинеар вектор, чунки $\frac{1}{\Delta t}$ скаляр кўпайтувчи.

Таъриф. $\Delta\vec r$ вектор функция орттирмасининг аргументнинг мос Δt орттирмасига нисбатининг Δt 0 даги лимити $\vec r\,(t)$ вектор функциянинг t нуқтадаги t скаляр аргумент бўйича олинган ҳосиласи дейилади.

Вектор функциянинг ҳосиласи бундай белгиланади:

$$\vec r\,'(t)\quad \text{ёки}\quad \frac{d\vec r}{dt}.$$

Шундай қилиб,

$$\vec r\,'(t)=\frac{d\vec r}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}.$$

Лимитнинг таърифига кўра $\vec r\,'(t)$ вектордир.

$\vec r\,(t)$ функция ҳосиласини унинг координаталар ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

ва

$$\vec{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\vec{i} + y(t + \Delta t)\vec{j} + z(t + \Delta t)\vec{k}$$

бўлгани учун

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (x(t + \Delta t) - x(t))\vec{i} +$$
$$+ (y(t + \Delta t) - y(t))\vec{j} + (z(t + \Delta t) - z(t))\vec{k}$$

ёки

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}.$$

Бундан ушбуга эга бўламиз:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{i}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{j}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \vec{k}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} =$$
$$= x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Шундай қилиб,

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}. \qquad (4.1)$$

Бундан дифференциаллашнинг барча қоидалари векторлар учун ҳам тўғри бўлиши дарҳол келиб чиқади:

1) $(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))' = \vec{r}'_1(t) \pm \vec{r}'_2(t)$,

2) $(f(t)\cdot\vec{r}(t))' = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t)$, бунда $f(t)$ — скаляр функция,

3) $(c\cdot\vec{r}(t))' = c\cdot\vec{r}'(t)$, бунда c — ўзгармас сон,

4) $(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))' = \vec{r}'_1(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}'_2(t)$,

5) $(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)) = \vec{r}'_1(t) \times \vec{r}_2(t) + r_1(t) \times r'_2(t)$.

Мисол учун тўртинчи формулани исботлаймиз:

$$\vec{r}_1(t) = x_1(t)\vec{i} + y_1(t)\vec{j} + z_1(t)\vec{k}.$$
$$\vec{r}_2(t) = x_2(t)\vec{i} + y_2(t)\vec{j} + z_2(t)\vec{k}$$

бўлсин. Шу векторларнинг скаляр кўпайтмасини тузамиз:

$$\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) + y_1(t)\cdot y_2(t) + z_1(t)\cdot z_2(t).$$

t бўйича ҳосилани топамиз:

$$(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))' = (x_1(t)\cdot x_2(t))' + (y_1(t)\cdot y_2(t))' + (z_1(t)\cdot z_2(t))' =$$
$$= (x_1'(t)\cdot x_2(t) + y_1'(t)\cdot y_2(t) + z_1'(t)\cdot z_2(t)) + (x_1(t)\cdot x_2'(t) +$$
$$+ y_1(t)\, y_2'(t) + z_1(t) z_2'(t)) = \vec{r}_1'(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\, \vec{r}_2'(t).$$

Формуланинг тўғрилиги исботланди. Бу формуладан фойдаланиб, агар $\vec{e}$ бирлик вектор бўлса, $\vec{e}\perp\frac{d\vec{e}}{dt}$ бўлишини исботлаш мумкин.

Скаляр аргумент вектор функциясининг юқори тартибли ҳосилаларини кетма-кет дифференциаллаб топиш мумкин:

$$\vec{r}''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k},$$

$$\vec{r}'''(t) = x'''(t)\vec{i} + y'''(t)\vec{j} + z'''(t)\vec{k}$$

ва ҳоказо.

Эслатма. Агар фазовий эгри чизиқ

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда эгри чизиқнинг эгрилиги k((1.18) формула) қисқача бундай ёзилиши мумкин:

$$k = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2}{|\vec{r}'|^3}.$$

5-§. Скаляр аргументли вектор функция ҳосиласининг геометрик маъноси

Скаляр аргументли вектор функциянинг ҳосиласи таърифига қайтамиз: $\vec{r}'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ва 2-§ даги чизмани қараймиз. $\vec{r}'(t)$ нинг йўналиши ва узунлигини аниқлаймиз.

1. $\vec{r}'(t)$ векторнинг йўналиши. $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ вектор $\Delta\vec{r}$ векторга коллинеар ва MM_1 кесувчи бўйича йўналган. $\Delta t\to 0$ да M_1 нуқта M нуқтага чексиз яқинлашади. MM_1 кесувчи эса M нуқтада L эгри чизиққа ўтказилган T уринмага чексиз яқинлашади.

Шундай қилиб, $\vec{r}'(t)$ вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ радиус-вектор годографига уринма бўйлаб параметр ўсадиган томонга йўналган.

$\vec{r}'(t)$ вектор функция ўзгармас модулга эга, аммо йўналиши ўзгарувчан бўлган хусусий ҳолни таъкидлаймиз. Бу ҳолда годограф сферада ётади, шу сабабли $\vec{r}'(t)$ ҳосила, вектор сифатида, годографга уринма, радиус-векторга перпендикуляр бўлади, яъни агар $\vec{r}(t)$

вектор ўзгармас модулга эга бўлса, у ҳолда $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$. Шундай қилиб, модули ўзгармас векторнинг ҳосиласи векторнинг ўзига перпендикуляр.

2. $\vec{r}'(t)$ векторнинг модули.

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

экани исботланган. Бундан эса

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

экани келиб чиқади, бунда $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt = dl$ — эгри чизиқ ёйи дифференциали. Бундан:

$$\frac{dl}{dt} = |\vec{r}'(t)|.$$

Шундай қилиб, вектор функциянинг ҳосиласи модули годограф узунлигидан t аргумент бўйича олинган ҳосилага тенг. Шуни таъкидлаш керакки, ҳосиланинг модули модулнинг ҳосиласига тенг эмас, яъни

$$|\vec{r}'(t)| \neq |\vec{r}(t)|'.$$

6-§. Скаляр аргументли вектор функция биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласининг механик маъноси

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор функциянинг годографи ҳаракатланувчи моддий нуқтанинг траекторияси бўлсин, бунда t параметр ҳаракат вақтини билдиради.

Маълумки, нуқта ҳаракатининг t моментдаги $\vec{v} = \vec{v}(t)$ тезлиги уринма бўйлаб ҳаракат йўналишига қараб йўналган вектордир. Бунда

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t},$$

бу ерда Δl — Δt оралиқда нуқта томонидан босиб ўтилган йўл (яъни Δl — Δt вақт ичида ўтилган годограф ёйи узунлиги).

$\vec{v} = \vec{r}'(t)$ эканини кўрсатамиз.

$\vec{r}'(t)$ ва $\vec{v}$ векторлар бир хил йўналишга эга, чунки $\vec{r}'(t)$ ҳам уринма бўйлаб $\vec{r}$ вектор годографига қараб йўналган. Шу векторларнинг модуллари ҳам бир хил эканини кўрсатамиз. $\Delta t > 0$ да қуйидагини қараймиз:

$$\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta l}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta l}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta t},$$

бунда $|\Delta \vec{r}|$ миқдор MM_1 ватарнинг узунлиги, Δl эса тегишли $\overset{\frown}{MM_1}$ ёйнинг узунлиги.

Кейинчалик

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta l} = 1$$

эканн кўрсатилади, лекин у вақтда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta l} = 1,$$

ва демак,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta l} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t},$$

бундан $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \left|\vec{r}\,'(t)\right|$ (тезликнинг таърифидан), шу сабабли ушбуга эгамиз: $|\vec{r}\,'(t)| = |\vec{v}|$.

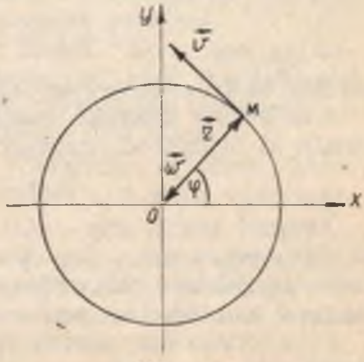
Шундай қилиб, вектор функциянинг $\vec{r}\,'(t)$ ҳосиласи вақтнинг берилган моментидаги моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги $\vec{v}(t)$ га тенг экан.

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t).$$

Вектор функциянинг биринчи тартибли ҳосиласининг механик маъноси шундан иборат. Иккинчи тартибли ҳосиласи

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t)$$

эканини, яъни вектор функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи моддий нуқта вақтнинг t моментидаги ҳаракати тезланишига тенг эканини кўрсатиш мумкин.



135- шакл.

Мисол. Ушбу $x^2 + y^2 = R^2$ айлана бўйлаб ўзгармас бурчак тезлик ω билан ҳаракатланаётган моддий нуқта M нинг тезлиги ва тезланишини топинг.

Ечиш. φ — M нуқта радиус-векторининг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчаги бўлсин. $\varphi = \omega t$ ни ҳосил қиламиз, 135- шаклдан:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x = R\cos\omega t, \\ y = R\sin\omega t. \end{cases}$$

Демак, M нуқтанинг радиус-вектори:

$$\vec r(t) = x\vec i + y\vec j + z\vec k = R\cos\omega t\cdot\vec i + R\sin\omega t\vec j.$$

Энди M нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = -R\omega\sin\omega t\vec i + R\omega\cos\omega t\vec j.$$

Тезликнинг модули $|\vec v| = \omega R$. $\vec r$ ва $\vec v$ векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлгани учун $\vec r \perp \vec v$.

$\vec a = \vec r''(t) = \vec v' = -R\omega^2\cos\omega t\vec i - R\omega^2\sin\omega t\vec j$. Бундан $\vec a = -\omega^2\vec r$ экани кўринади, яъни $\vec a \parallel \vec r$ ва қарама-қарши йўналган. Демак, тезланиш айлана марказига йўналгандир.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Скаляр аргументнинг вектор функцияси ва унинг годографи таърифини беринг.
2. Вектор функциянинг ҳосиласи ва унинг узлуксизлиги таърифини беринг.
3. Скаляр аргумент вектор функциясининг ҳосиласи таърифини беринг.
4. Ҳосилани бирлик векторлар бўйича ёйиш формуласини чиқаринг.
5. Скаляр аргументли вектор функция ҳосиласининг геометрик маъноси нима? Ҳосиланинг йўналиши ва модули қандай?
6. Скаляр аргументли вектор функцияси ҳосиласининг механик маъноси нима?
7. Ўзгармас модулли вектор ҳосиласининг йўналиши қандай?
8. 3260 — 3374- масалаларни ечинг.

7-§. Комплекс сонлар

1. Асосий таърифлар

1-таъриф. *z комплекс сон* деб

$$z = x + iy$$

кўринишидаги ифодага айтилади, бунда x ва y — *ҳақиқий сонлар*; i эса

$$i = \sqrt{-1} \text{ ёки } i^2 = -1$$

тенглик билан аниқланувчи *мавҳум бирлик* деб аталувчи бирлик.

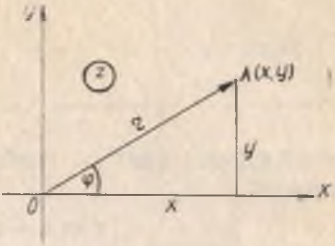
x ва y ни z комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари дейилади ва бундай белгиланади:

$$\mathrm{Re}\, z = x, \ \mathrm{Im}\, z = y.$$

Хусусий ҳолда, агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда $z = 0 + iy = iy$ сонни *соф мавҳум* сон, агар $y = 0$ бўлса, у ҳолда $z = x + i0 = x$, яъни ҳақиқий сон ҳосил бўлади. Шундай қилиб, ҳақиқий ва мавҳум сонлар z комплекс соннинг хусусий ҳолларидир.

2-таъриф. Агар иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонларнинг ҳақиқий сонлари алоҳида, мавҳум сонлари алоҳида тенг бўлса, бу комплекс сонлар *тенг*, яъни $z_1 = z_2$ бўлади, бошқача айтганда $\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2$ ва $\mathrm{Im}\,z_1 = \mathrm{Im}\,z_2$ бўлса, $z_1 = z_2$ ҳисобланади.

3-таъриф. $z = x + iy$ комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисми нолга тенг бўлсагина, у нолга тенг бўлади, яъни агар $x = 0$ ва $y = 0$ бўлсагина $z = 0$, ва аксинча.



136- шакл.

4-таъриф. Мавҳум қисмлари билан фарқ қилувчи иккита

$$z = x + iy \text{ ва } \overline{z} = x - iy$$

комплекс сон *қўшма комплекс сонлар* дейилади.

5-таъриф. Ҳақиқий ва мавҳум қисмларининг ишоралари билан фарқ қилувчи иккита

$$z_1 = x + iy \text{ ва } z_2 = -x - iy$$

комплекс сон *қарама-қарши комплекс сонлар* дейилади.

2. Комплекс соннинг геометрик тасвири. Ҳар қандай

$$z = x + iy$$

комплекс сонни Oxy текисликда x ва y координатали $A(x, y)$ нуқта шаклида тасвирлаш мумкин ва, аксинча, текисликнинг ҳар бир нуқтасига комплекс сон мос келади.

Комплекс сонлар тасвирланадиган текислик z комплекс ўзгарувчининг *текислиги* дейилади.

Комплекс текисликда z сонни тасвирловчи нуқтани z нуқта деб атаймиз (136-шакл). Ox ўқда ётувчи нуқталарга ҳақиқий сонлар мос келади (бунда $y = 0$), Oy ўқда ётувчи нуқталар соф мавҳум сонларни тасвирлайди (бу ҳолда $x = 0$). Шу сабабли Ox ўқ ҳақиқий ўқ, Oy ўқ мавҳум ўқ дейилади. $A(x, y)$ нуқтани координаталар боши билан бирлаштириб $\overrightarrow{OA}$ векторни ҳосил қиламиз, бу ҳам $z = x + iy$ комплекс соннинг геометрик тасвири дейилади.

3. Комплекс соннинг тригонометрик шакли. Координаталар бошини қутб деб, Ox ўқнинг мусбат йўналишини қутб ўқи деб комплекс текисликда координаталарнинг қутб системасини киритамиз. φ ва r ларни $A(x, y)$ нуқтанинг қутб координаталари деймиз.

A нуқтанинг қутб радиуси r, яъни A нуқтадан қутбгача бўлган масофа z комплекс соннинг модули дейилади ва $|z|$ каби белгиланади. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ экани равшан.

A нуқтанинг қутб бурчаги φ ни z комплекс соннинг *аргументи* дейилади ва $\mathrm{Arg}z$ каби белгиланади. Аргумент бир қийматли аниқланмай, балки $2\pi k$ қўшилувчи қадар аниқликда аниқланади, бунда k — бутун сон. Аргументнинг ҳамма қийматлари орасидан $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи биттасини танлаймиз. Бу қиймат *бош қиймат* дейилади ва бундай белгиланади:

$$\varphi = \arg z.$$

Ушбу

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

тенгликларни ҳисобга олиб, z комплекс сонни бундай ифодалаш мумкин:

$$z = x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

бунда $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ва

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ агар } x > 0, y > 0 \text{ бўлса}, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса}, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ агар } x > 0,\ y < 0 \\ \text{бўлса}. \end{cases}$$

Ёзувнинг бу шакли комплекс соннинг тригонометрик шакли дейилади. $z = x + iy$ кўринишдаги ёзув комплекс соннинг алгебраик шакли дейилади.

1-мисол. Чизмада

$$z = x + i\,y \quad \text{ва} \quad \overline{z} = x - i\,y$$

қўшма комплекс сонлар (137-шакл), шунингдек $z_1 = x + i\,y$ ва $z_2 = -x - i\,y$ қарама-қарши сонлар (138-шакл) тасвирланган.

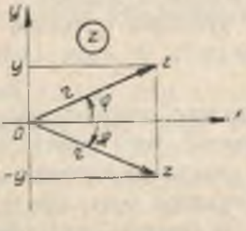
Чизмадан $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ва $|\overline{z}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ экани, яъни

$$|z| = |\overline{z}| \text{ ва } \arg z = -\arg \overline{z}$$

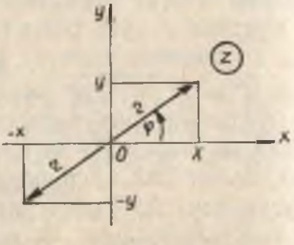
экани келиб чиқади.

Қўшма комплекс сонлар бир хил модулга эга ва абсолют қийматлари бўйича тенг аргументларга эга бўлиб, ҳақиқий ўққа симметрик бўлгаи нуқталар билан тасвирланади (137-шакл). Чизмадан $|z_1| = |z_2|$, $\arg z_2 = \pi + \arg z_1$ экани келиб чиқади.

Қарама-қарши комплекс сонлар координаталар бошига нисбатан симметрик нуқталар билан тасвирланади (138-шакл).



137-шакл.



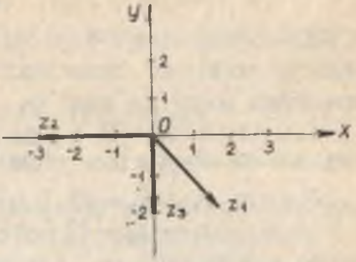
138-шакл.

2-мисол. Қуйидаги сонларни тригонометрик шаклда ифодаланг (139-шакл):

$$z_1 = \sqrt{3} - i,\ z_2 = -3,\ z_3 = -2i.$$

1) $z_1 = \sqrt{3} - i$ сон учун $x = \sqrt{3},\ y = -1,\ r = 2,$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi.$$



139-шакл.

Шундай қилиб, $z_1 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right).$

2) $z_2 = -3$ — ҳақиқий сон.

$$x = -3,\ y = 0,\ r = 3,\ \operatorname{tg}\varphi = 0,\ \varphi = \pi,\ z_2 = -3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

3) $z_3 = -2i,\ x = 0,\ y = -2,\ r = 2,\ \varphi = \frac{3\pi}{2},$

$$z = -2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

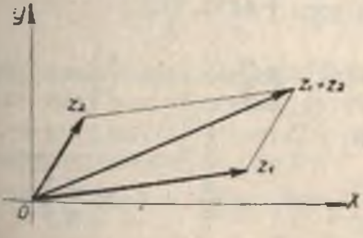
8-§. Комплекс сонлар устида алгебраик амаллар

1. **Комплекс сонларни қўшиш.** Иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс соннинг йиғиндиси деб,

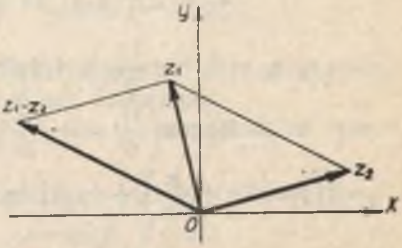
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

тенглик билан аниқланувчи комплекс сонга айтилади. Бу формуладан векторлар билан ифодаланган комплекс сонларни қўшиш векторларни қўшиш қоидаси бўйича бажарилиши келиб чиқади (140-шакл).

2. **Комплекс сонларни айириш.** Иккита $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс соннинг айирмаси деб, шундай сонга айтиладики, у z_2 га қўшилганда йиғиндида z_1 комплекс сон ҳосил бўлади (141-шакл):



140-шакл.



141-шакл.

$$z_1 - z_2 = (x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2) = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

Шуни таъкидлаб ўтамизки, икки комплекс сон айирмасининг модули комплекс текисликда шу сонларни ифодаловчи нуқталар орасидаги масофага тенг: $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

1-мисол. $z_1 = 2 + i$ ва $z_2 = 2 - 3i$ комплекс сонларнинг йиғиндиси ва айирмасини топинг.

Ечиш. $z_1 + z_2 = (2 + i) + (2 - 3\,i) = (2+2) + i\,(1 - 3) = 4 - 2i,$
$z_1 - z_2 = (2 + i) - (2 - 3i) = (2 - 2) + i\,(1 + 3) = 4i.$

3. Комплекс сонларни кўпайтириш. $z_1 = x_1 + i\,y_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонларнинг кўпайтмаси деб, бу сонларни иккиҳад сифатида алгебра қоидалари бўйича кўпайтириш ва $i^2 = -1$ эканини ҳисобга олиш натижасида ҳосил бўладиган комплекс сонга айтилади.

z_1 ва z_2 комплекс сонлар тригонометрик шаклда берилган бўлсин:

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ ва } z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Шу сонларнинг кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$z_1\cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1\cdot r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+ \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1 r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Шундай қилиб,

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

яъни иккита комплекс сон кўпайтирилганда уларнинг модуллари кўпайтирилади, аргументлари эса қўшилади.

2-мисол. $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ комплекс сонларни алгебраик шаклда ва тригонометрик шаклларда кўпайтиринг.

Ечиш. 1) $z_1\cdot z_2 = (\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}\,i) = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) +$
$+ i\,(2\sqrt{3}\sqrt{3} - 2) = 4\sqrt{3} + 4\,i.$

2) $z_1 = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right),$

$$z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_1\cdot z_2 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 8\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 8\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} + 4i.$$

3-мисол. $z = x + iy$ ва $\overline{z} = x - iy$ қўшма комплекс сонларни кўпайтиринг.

Ечиш. $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ ёки $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, чунки

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Шундай қилиб, қўшма комплекс сонларнинг кўпайтмаси улардан ҳар бирининг модули квадратига тенг бўлган ҳақиқий сон экан.

4. Комплекс сонларни бўлиш. Комплекс сонларни бўлиш амали кўпайтиришга тескари амал сифатида аниқланади.

Агар $z \cdot z_2 = z_1$ бўлса, z сони $z_1 = x_1 + iy_1$ нинг $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонига бўлинмаси $\left(\text{яъни } z = \frac{z_1}{z_2}\right)$ дейилади.

$z_1 = z \cdot z_2$ тенгликнинг иккала қисмини $\overline{z}_2 = x_2 - iy_2$ га кўпайтирамиз, ушбуга эга бўламиз:

$$z_1 \cdot \overline{z}_2 = z(z_2 \cdot \overline{z}_2), \text{ бундан: } z = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} +$$

$$+ i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Бундан ушбу қоида чиқади: z_1 ни z_2 га бўлиш учун бўлинувчи ва бўлувчини бўлувчига қўшма бўлган комплекс сонга кўпайтириш керак.

Агар комплекс сонлар $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ва $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ тригонометрик шаклда берилган бўлса, у ҳолда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Шундай қилиб,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

яъни комплекс сонларни бўлишда бўлинувчининг модули бўлувчининг модулига бўлинади, аргументлари эса айирилади.

4-мисол. $z_1 = 1 - i$ ни $z_2 = -2 - 2i$ га алгебраик ва тригонометрик шаклларда бўлинг.

Ечиш. 1) 1) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i}{-2 - 2i} = \frac{(1 - i)(-2 + 2i)}{(-2 - 2i)(-2 + 2i)} =$

$$= \frac{(-2 + 2) + i(2 + 2)}{4 + 4} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i.$$

$$2)\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{\sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)+$$

$$+\,i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)\Big)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\,i.$$

5. Даражага кўтариш. Кўпайтириш қоидасидан даражага кўтариш қоидаси келиб чиқади. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ учун натурал n да

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

экани келиб чиқади. Бу формула *Муавр формуласи* дейилади. Бу формула комплекс сонни натурал даражага кўтаришда модул шу даражага кўтарилиши, аргумент эса даража кўрсаткичига кўпайтирилиши кераклигини кўрсатади.

5-мисол. Мавҳум бирлик i нинг натурал даражаси учун формула топинг.

Ечиш: $i^1=i,\quad i^2=-1,\ i^3=i\cdot i^2=-i,\ i^4=i^2\cdot i^2=1,$
$i^5=i\cdot i^4=i,\ i^6=i\cdot i^5=i^2=-1,\ i^7=i\cdot i^6=-i,\ i^8=1.$

Умуман, $i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i.$

6-мисол. $(1+i)^{10}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

$$z^{10}=(1+i)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}=$$

$$=2^5\left(\cos 10\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 10\cdot\frac{\pi}{4}\right)=32\cdot(0+i)=32\,i.$$

Муавр формуласида $r=1$ деб олиб, топамиз:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Бу формула $\sin n\varphi$ ва $\cos n\varphi$ ларни $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ ларнинг даражалари орқали ифодалаш имконини беради.

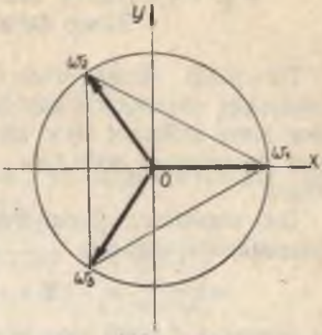
Масалан, $n=3$ да $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$ га эга бўламиз, бундан:

$$\cos^3\varphi+3\cos^2\varphi\sin\varphi\cdot i+3\cos\varphi\sin^2\varphi\cdot i^2+i^3\sin\varphi=$$
$$=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi.$$
$$(\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi)+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi)=$$
$$=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi.$$

Икки комплекс соннинг тенг бўлиши шартидан фойдаланиб, топамиз:

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$
$$\sin 3\varphi=3\sin\varphi\cos^2\varphi-\sin^3\varphi.$$

6. Илдиз чиқариш. Бу амал даражага кўтариш амалига тескари амалдир. Комплекс соннинг n-даражали илдизи $\sqrt[n]{z}$ деб шундай W сонга айтиладики, бу соннинг n-даражаси илдиз остидаги сонга тенгдир, яъни агар $W = \sqrt[n]{z}$ бўлса, $W^n = z$.



142- шакл.

Агар $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ва $W = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ бўлса, у ҳолда: $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Муавр формуласига биноан:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n\ (\cos n\theta + i\sin n\,\theta).$$

Бундан $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$. ρ ва θ ни топамиз:

$$\rho = \sqrt[n]{r}\,,\ \theta = \frac{\varphi + 2\,\pi k}{n},$$

бунда k — исталган бутун сон, $\sqrt[n]{r}$ — арифметик илдиз. Демак,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\,\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\,\pi k}{n}\right).$$

k га $0, 1, 2, \ldots, n-1$ қийматлар бериб, илдизнинг n та ҳар хил қийматига эга бўламиз, бу қийматларнинг модуллари бир хил.

$k > n - 1$ да илдизнинг топилган қийматлари билан бир хил бўлган қийматлар ҳосил бўлади. n та илдизнинг ҳаммаси маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси $\sqrt[n]{r}$ га тенг айлана ичига чизилган мунтазам n томонли кўпбурчак учларида ётади.

6-мисол. $\sqrt[3]{1}$ нинг ҳамма қийматларини топинг. Уларни комплекс текисликда тасвирланг.

Ечиш. Сонни тригонометрик шаклда ёзамиз: агар $z = 1$ бўлса, у ҳолда $x = 1$, $y = 0$, $r = 1$, $\varphi = 0$ ва ушбуга эга бўламиз:

$$z = 1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

У ҳолда $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$, бунда $k = 0,\ 1,\ 2$ (142- шакл).

$$k = 0,\ W_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$k = 1,\ W_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 2,\ W_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Бу нуқталарни радиуси 1 га тенг айланада ясаймиз.

9-§. Кўрсаткичи комплекс бўлган кўрсаткичли функция. Эйлер формуласи, унинг қўлланиши

Таъриф. Агар комплекс ўзгарувчи z нинг бирор комплекс қийматлар соҳасидаги ҳар бир қийматига бошқа W комплекс миқдорнинг аниқ қиймати мос келса, у ҳолда W комплекс ўзгарувчи z нинг *функцияси* дейилади ва $W = f(z)$ ёки $W = W(z)$ каби белгиланади.

Биз комплекс ўзгарувчининг битта функциясини — кўрсаткичли функцияни қараймиз:

$$W = e^z \quad \text{ёки} \quad W = e^{x+iy},$$

бу функция бундай аниқланади:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Агар бу формулада $x = 0$ десак, у ҳолда:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Мана шунинг ўзи мавҳум кўрсаткичли даражали функцияни тригонометрик функциялар орқали ифодаловчи Эйлер формуласидир.

Комплекс сонни тригонометрик шаклда ифодалаймиз:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Эйлер формуласи бўйича:

$$\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Шундай қилиб, ҳар қандай комплекс сонни кўрсаткичли шаклда ифодалаш мумкин:

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Мисол. $1, i, 1+i, -i$ сонларни кўрсаткичли шаклда ифодаланг.

Ечиш. 1) Агар $z_1 = 1$ бўлса, $r = 1$, $\varphi = 2\pi k$ бўлади, шу сабабли

$$1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = e^{2\pi k i}.$$

2) $z_2 = i$, $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, шу сабабли:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i}.$$

3) $z_3 = 1 + i$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, шу сабабли

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}.$$

4) $z_4 = -i$, $r = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, шу сабабли

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

Кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш амаллари кўрсаткичли шаклда осон бажарилади.

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}\ \text{бўлсин. У ҳолда:}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},\ z^n = r^n e^{i\varphi n}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}.$$

Бу формулалар шу амалларнинг ўзи учун тригонометрик шаклда чиқарилган формулалар билан бир хил.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Комплекс сон деб нимага айтилади?
2. Қандай комплекс сонлар тенг, қандайлари қарама-қарши, қандайлари қўшма комплекс сонлар дейилади?
3. Комплекс сон қандай қилиб геометрик тасвирланади?
4. Комплекс сонниг тригонометрик шакли ҳақида гапириб беринг. Комплекс сонниг модули деб, аргументи деб нимага айтилади? Уларнинг ўзгариш соҳалари қандай?
5. Комплекс сонниниг алгебраик шакли билан тригонометрик шакли орасидаги боғланиш қандай?
6. Алгебраик шаклдаги комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш қоидалари қандай?
7. Тригонометрик шаклдаги комплекс сонларни кўпайтириш ва бўлиш формулаларини чиқаринг.
8. Тригонометрик шаклдаги комплекс сонларни даражага кўтаришнинг Муавр формуласини ёзинг. Мисол келтиринг.
9. Комплекс ўзгарувчининг функцияси деб нимага айтилади?
10. Эйлер формуласини ёзинг.
11. Комплекс сонниниг кўрсаткичли шакли қандай?

10-§. Комплекс соҳада кўпҳадлар

Таъриф. n-даражали *кўпҳад* ёки *полином* деб

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

кўринишдаги ифодага айтилади, бунда $n \geqslant 0$ — бутун сон, $a \neq 0$, a_1, a_2, . . . , a_n лар эса кўпҳаднинг коэффициентларидир.

Кўпҳадлар ушбу белгилар билан белгиланади: $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $q(x)$, $r(x)$.

Кўпҳад n-даражали кўпҳад эканини таъкидлаш учун у

$$P_n(x)$$

каби ёзилади. x ўзгарувчи ва коэффициентларнинг ҳаммаси сонлар, умуман айтганда комплекс сонлардир. a_n ни озод ҳад, a_0 ни юқори коэффициент, n ни эса кўпҳаднинг даражаси дейилади.

Хусусан, $n = 0$ да $P_0(x) = a_0$ (бунда $a_0 \neq 0$) нолинчи даражали кўпҳадга эга бўламиз.

Агар иккита $P_n(x)$ ва $Q_n(x)$ кўпҳадларнинг x ўзгарувчининг бир хил даражали олдидаги коэффициентлари тенг бўлса, бу кўпҳадлар тенг дейилади:

$$P_n(x) = Q_n(x).$$

Тенг кўпҳадлар x нинг барча қийматларида бир хил қийматлар қабул қилади.

Кўпҳадларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш мумкин.

Иккита $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳаднинг йиғиндиси (айирмаси) деб шундай кўпҳадга айтиладики, бу кўпҳаднинг ҳар бир x нинг даражаси олдидаги коэффициенти $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадлардаги x нинг шу даражалари олдидаги коэффициентлари йиғиндиси (айирмаси) га тенг бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$P_3(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 4,$$
$$Q_4(x) = x^4 + 2x^3 - 3x + 5$$

кўпҳадлар берилган. Шу кўпҳадларнинг йиғиндиси ва айирмасини топинг.

Ечиш. $P_3(x) + Q_4(x) = (3x^3 - 5x^2 + x - 4) + (x^4 + 2x^3 - 3x + 5) = x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 2x + 1;$

$P_3(x) - Q_4(x) = (3x^3 - 5x^2 + x - 4) - (x^4 + 2x^3 - 3x + 5) = -x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 9.$

Иккита $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадни кўпайтириш учун $P_n(x)$ кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини $Q_m(x)$ кўпҳаднинг ҳар бир ҳадига кўпайтириш ва натижаларни қўшиш керак.

Кўпҳадларни қўшиш, айириш ва кўпайтириш амаллари арифметик амалларнинг асосий хоссаларига эга.

2-мисол. Биринчи мисолда берилган $P_3(x)$ ва $Q_4(x)$ кўпҳадларни кўпайтиринг.

Ечиш: $P_3(x) \cdot Q_4(x) = (3x^3 - 5x^2 + x - 4) \cdot (x^4 + 2x^3 - 3x + 5) =$

$$= 3x^7 + 6x^6 - 9x^4 + 15x^3 - 5x^6 - 10x^5 + 15x^3 - 25x^2 + x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x - 4x^4 - 8x^3 + 12x - 20 = 3x^7 + x^6 - 9x^5 - 11x^4 + 22x^3 - 28x^2 + 17x - 20.$$

Кўпҳадларни бўлиш қолдиқсиз (бутун) ва қолдиқли бўлиши мумкин.

$P_n(x)$ ва $D_m(x)$—иккита кўпҳад бўлсин, бунда $n \geqslant m$.

$P_n(x)$ кўпҳадни $D_m(x)$ кўпҳадга бутун сон марта бўлиш деганн

$$P_n(x) = D_m(x) \cdot Q_{n-m}(x) \qquad (10.1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $Q_{n-m}(x)$ ни топиш демакдир. Бунда $P_n(x)$ бўлинувчи, $D_m(x)$ бўлувчи, $Q_{n-m}(x)$ бўлинма кўпҳад дейилади.

Кўпҳадларни ҳар доим ҳам бутун сон марта бўлиш мумкин бўлавермайди, масалан, x^2+1 кўпҳад $x+1$ кўпҳадга бутун сон марта бўлинмайди. Аммо кўпҳадларни қолдиқли бўлиш ҳар доим ҳам бажарилаверади.

$P_n(x)$ кўпҳадни $D_m(x)$ кўпҳадга қолдиқли бўлиш дегани шундай иккита $Q_{n-m}(x)$ ва $R(x)$ кўпҳадни топиш демакки, улар учун

$$P_n(x) = D_m(x) \cdot Q_{n-m}(x) + R(x)$$

тенглик бажарилсин. Бунда $P_n(x)$ бўлинувчи, $D_m(x)$ бўлувчи, $R(x)$ — қолдиқ кўпҳадлардир. $R(x)$ нинг даражаси $D_m(x)$ бўлувчи даражасидан кичик. Хусусий ҳолда. агар $R(x)=0$ бўлса, у ҳолда (10.1) формулага эга бўламиз, яъни $P_n(x)$ кўпҳад $D_m(x)$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинади.

Кўпҳадларни бўлишдан чиқадиган бўлинма ва қолдиқни топишнинг ҳар хил усуллари мавжуд. Кўпинча «бурчакли бўлиш» қоидасидан фойдаланилади.

3-мисол. $P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x$ кўпҳадни $D_2(x) = x^2 - 1$ кўпҳадга бўлинг. Бўлинма ва қолдиқни топинг.

Ечиш.

$$\begin{array}{r|l}
-\,2x^4 - 5x^3 + 2x & x^2 - 1 \\
\underline{2x^4 - 2x^2 } & \overline{2x^2 - 5x + 2} \\
-\,-5x^3 + 2x^2 + 2x & \\
\underline{-5x^3 + 5x} & \\
-\,2x^2 - 3x & \\
\underline{2x^2 - 2} & \\
-3x + 2 &
\end{array}$$

Бундан:

$$2x^4 - 5x^3 + 2x = (x^2-1)(2x^2-5x+2) + (-3x+2),$$
$$Q_2(x) = 2x^2 - 5x + 2, \quad R(x) = -3x + 2.$$

11-§. Кўпҳаднинг илдизи. Безу теоремаси

$P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи деб x ўзгарувчининг шу кўпҳадни нолга айлантирадиган қийматларига айтилади, яъни $P_n(\alpha) = 0$ бўлса, у ҳолда $x = \alpha$ кўпҳаднинг илдизидир.

$P_n(x)$ кўпҳадни $x - \alpha$ га бўлишдан чиқадиган қолдиқни бўлиш жараёнини бажармай туриб топиш имконини берадиган муҳим теоремани исботлаймиз.

Безу теоремаси. *$P_n(x)$ кўпҳадни $x - \alpha$ иккиҳадга бўлишдан чиқадиган қолдиқ $P_n(x)$ кўпҳаднинг $x = \alpha$ даги қийматига тенг.*

Исботи. $P_n(x)$ кўпҳадни $x-\alpha$ иккиҳадга бўлиб, ушбуни топамиз:

$$P_n(x)=(x-\alpha)\,Q_{n-1}(x)+R,$$

бунда бўлинма $Q_{n-1}(x)$ даражаси $P_n(x)$ нинг даражасидан битта кам бўлган кўпҳад, қолдиқ R эса бирор сон.

Бу тенгликда x ўзгарувчига α қийматни бериб, топамиз:

$$P_n(\alpha)=R,$$

яъни $R=P_n(\alpha)$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

1-мисол. $P_3(x)=8x^3+4x^2+1$ кўпҳадни: а) $x-1$, б) $x+i$ иккиҳадларга бўлишдан чиқадиган қолдиқни топинг.

Ечиш. а) $R=P_3(1)=8\cdot 1^3+4\cdot 1^2+1=13.$

б) $R=P_3(-i)=8(-i)^3+4(-i)^2+1=-8i^3+$
$+4i^2+1=8i-4+1=8i-3=-3+8i.$

Безу теоремаси натижаси. Агар α $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, яъни $P_n(\alpha)=0$ бўлса, у ҳолда $P_n(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га қолдиқсиз бўлинади, яъни

$$P_n(x)=(x-\alpha)\cdot Q_{n-1}(x)$$

кўпайтма кўринишида тасвирланади, бунда $Q_{n-1}(x)$ бўлинма даражаси бўлинувчи кўпҳад $P_n(x)$ даражасидан битта кам бўлган кўпҳад.

Бошқача айтганда, $P_n(x)$ кўпҳаднинг $x-\alpha$ иккиҳадга бутун бўлиниши учун α $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлиши талаб қилинади.

2-мисол. $P_3(x)=x^3-6x^2+11x-6$ кўпҳад $x-1$ иккиҳадга бутун сон марта бўлинади, чунки $P_3(1)=0$. Шу кўпҳаднинг бошқа илдизларини топинг.

Ечиш. $P_3(x)$ кўпҳадни $(x-1)$ иккиҳадга бўлишдан чиқадиган бўлинмани топамиз:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\;x^3-x^2\qquad\qquad & x^2-5x+6 \\ \cline{1-1}
-5x^2+11x-6 & \\
-\;-5x^2+5x\qquad & \\ \cline{1-1}
6x-6 & \\
-\;6x-6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Шундай қилиб,

$$P_3(x)=(x-1)\cdot(x^2-5x+6)$$

тенгликка эга бўламиз. Агар x^2-5x+6 ни нолга тенгласак, $P_3(x)$ нинг қолган илдизларини топамиз: $x^2-5x+6=0$, бундан $x_1=2$, $x_2=3$.

Демак, $P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

Кўпҳадни даражаси нолга тенг бўлмаган иккита ёки бир нечта кўпҳаднинг кўпайтмаси шаклида тасвирлаш кўпҳадни *кўпайтувчиларга ажратиш* дейилади.

12-§. Алгебранинг асосий теоремаси. Кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш

Қуйидаги теорема ҳар қандай кўпҳад илдизга эга бўладими, деган саволга жавоб беради.

Алгебранинг асосий теоремаси: *ҳар қандай n-даражали кўпҳад камида битта илдизга эга.*

Теоремани исботсиз қабул қиламиз. Бу теореманинг натижаси сифатида қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *n-даражали ҳар қандай* $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *кўпҳад* $x - \alpha$ кўринишдаги *n та чизиқли кўпайтувчига ажралади, яъни:*

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Исботи. Алгебранинг асосий теоремасига биноан $P_n(x)$ кўпҳад камида битта илдизга эга. Уни α_1 билан белгилаймиз. У ҳолда Безу теоремасининг натижасига кўра бундай ёзиш мумкин:

$$P_n(x) = (x - \alpha_1) Q_{n-1}(x),$$

бунда $Q_{n-1}(x)$ кўпҳад $(n - 1)$-даражали кўпҳад. Безу теоремасини қўлланиш мумкин. Бунга нисбатан α_2 $Q_{n-1}(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлсин, у ҳолда

$$Q_{n-1}(x) = (x - \alpha_2) Q_{n-2}(x),$$

бунда $Q_{n-2}(x)$ $(n - 2)$-даражали кўпҳад.

Жараённи давом эттириб,

$$Q_1(x) = (x - \alpha_n) \cdot Q_0$$

га эга бўламиз, бунда Q_0 — даражаси нолга тенг бўлган кўпҳад, яъни бирор сон. Бу сон x олдидаги коэффициентга тенг, яъни

$$Q_0 = a_0$$

экани равшан.

Топилган тенгликлар асосида бундай ёзиш мумкин:

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Энг охирги ёйилмадан $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизлари экани келиб чиқади, чунки

$$x = \alpha_1, \quad x = \alpha_2, \ldots, x = \alpha_n$$

ларни қўйилганда ёйилманинг ўнг қисми нолга тенг бўлиши келиб чиқади.

Хулоса: *n*-даражали кўпҳад *n* тадан ортиқ илдизга эга бўла олмайди.

13- §. Ҳақиқий коэффициентли кўпҳадни чизиқли ва квадрат учҳад кўринишидаги кўпайтувчиларга ажратиш

1. Кўпҳаднинг квадрат учҳад кўринишидаги илдизлари ҳақида. Агар n-даражали кўпҳаднинг чизиқли кўпайтувчиларга ёйилмаси

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \qquad (13.1)$$

да баъзи чизиқли кўпайтувчилар бир хил бўлса, уларни бирлаштириш мумкин. У ҳолда (13.1) ёйилма ушбу кўринишни олади:

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m},$$

бунда $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Бу ҳолда α_1 илдиз карралилиги k_1 га тенг илдиз ёки k_1 каррали илдиз, α_2 эса k_2 каррали илдиз дейилади ва ҳоказо. Карралилиги 1 га тенг бўлган илдиз оддий илдиз дейилади.

Масалан, $P_6(x) = 3(x - 2)^2(x + 3)^3(x - 4)$ кўпҳад ушбу илдизларга эга: $\alpha_1 = 2$ — карралилиги 2 га тенг.

$\alpha_2 = -3$ карралилиги 3 га тенг.

$\alpha_3 = 4$ оддий илдиз.

Агар кўпҳад карралилиги k га тенг бўлган илдизга эга бўлса, у ҳолда кўпҳад k та бир хил илдизга эга деб ҳисобланади.

Хулоса: n-даражали ҳар қандай кўпҳад роппа-расо n та илдизга (ҳақиқий ёки комплекс) эга.

2. Кўпҳаднинг комплекс илдизлари ҳақида. (13.1) формулада $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ илдизлар ҳақиқий илдизлар бўлиши ҳам, комплекс илдизлар бўлиши ҳам мумкин. Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. *Агар ҳақиқий коэффициентли $P_n(x)$ кўпҳад $\alpha = \gamma + i\delta$ комплекс илдизга эга бўлса, у ҳолда $\overline{\alpha} = \gamma - i\delta$ қўшма илдизга ҳам эга бўлади.*

Бу теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Бу теоремага асосан (13.1) ёйилмада комплекс илдизлар ўз қўшма жуфтлари билан қатнашади.

(13.1) ёйилмада комплекс қўшма илдизларга мос келадиган чизиқли кўпайтувчиларни кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned}(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) &= (x - (\gamma + i\delta)) \cdot (x - (\gamma - i\delta)) = \\ &= ((x - \gamma) - i\delta) \cdot ((x - \gamma) + i\delta) = (x - \gamma)^2 - i^2\delta^2 = \\ &= x^2 - 2x\gamma + \gamma^2 + \delta^2. \end{aligned} \qquad (13.2)$$

$-2\gamma = p$, $\gamma^2 + \delta^2 = q$ деб белгилаймиз, бунда p ва q — ҳақиқий сонлар. У ҳолда (13.2) тенглик бундай кўринишни олади:

$$(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 + px + q.$$

Шундай қилиб, қўшма илдизларга мос келадиган чизиқли кўпайтувчилар кўпайтмасини ҳақиқий коэффициентли, дискриминанти манфий бўлган квадрат учҳад билан алмаштириш мумкин.

Агар $\alpha = \gamma + i\delta$ карралилиги k га тенг илдиз бўлса, у ҳолда $\overline{\alpha} = \gamma - i\delta$ қўшма илдизнинг карралиги ҳам худди шу k га тенг бўлади. Бу ҳолда $(x-\alpha)^k\cdot(x-\overline{\alpha})^k$ кўпайтмани ҳақиқий коэффициентли шу k даражали квадрат учҳад билан алмаштириш мумкин, яъни:

$$(x-\alpha)^k(x-\overline{\alpha})^k=((x-\alpha)(x-\overline{\alpha}))^k=(x^2+px+q)^k.$$

Шундай қилиб, ҳақиқий коэффициентли ҳар қандай кўпҳад тегишлича каррали биринчи ва иккинчи тартибли ҳақиқий коэффициентли кўпайтувчиларга ёйилади, яъни:

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\times$$
$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{s_l},$$

бунда $k_1+k_2+\ldots+k_r+2s_1+2s_2+\ldots+2s_l=n.$

Бу ёйилмада $(x-\alpha)^k$ кўринишдаги чизиқли кўпайтувчилар карралилиги k га тенг бўлган ҳақиқий илдизларга, $(x^2+px+q)^s$ кўринишдаги квадрат учҳадлар эса карралилиги s га тенг бўлган комплекс қўшма илдизлар жуфтига мос келади.

Мисол. Ушбу $P_7(x)=x^7+x^5-x^4+x^3-x^2-1$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг.

Ечиш.

$$P_7(x)=(x^7+x^5+x^3)-(x^4+x^2+1)=x^3(x^4+x^2+1)-$$
$$-(x^4+x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^3-1)=((x^2+1)^2-$$
$$-x^2)(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Кўпҳад деб нимага айтилади?
2. Қандай кўпҳадлар тенг кўпҳадлар дейилади?
3. Кўпҳадларни қўшиш, айириш, кўпайтириш қоидалари қандай?
4. Кўпҳадни кўпҳадга бутун сон марта бўлиш амали нимадан иборат?
5. Кўпҳадни кўпҳадга қолдиқли бўлиш амали нимадан иборат?
6. «Бурчакли бўлиш» га мисол келтиринг.
7. Кўпҳаднинг илдизи дейилганда нимани тушунилади?
8. Безу теоремасини исботланг.
9. Безу теоремасидан келиб чиқадиган натижани ифодаланг.
10. Алгебранинг асосий теоремасини ифодаланг.
11. Кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш ҳақидаги теоремани исботланг.
12. Кўпҳаднинг қандай илдизлари каррали илдизлар дейилади? Мисол келтиринг.
13. Комплекс қўшма илдизлар ҳақида гапириб беринг.
14. Кўпҳадни чизиқли ва квадрат учҳад кўринишдаги ҳақиқий кўпайтувчиларга ажратиш (ёйиш) жараёнини тавсифлаб беринг. Мисол келтиринг.

6-боб

БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ ИНТЕГРАЛ ҲИСОБИ

1-§. Бошланғич функция

Дифференциал ҳисобнинг асосий вазифаси берилган $F(x)$ функцияга кўра унинг ҳосиласи $F'(x)=f(x)$ ни ёки дифференциали $F'(x)\,dx=f(x)\,dx$ ни топишдир.

Интеграл ҳисобнинг асосий вазифаси бунинг тескариси бўлиб, $F(x)$ функцияни унинг маълум $f(x)$ ҳосиласига ёки $f(x)\,dx$ дифференциалига кўра топишдан иборат. Бу икки амал ўзаро тескари амаллардир.

Таъриф. Бирор оралиқда аниқланган $f(x)$ функция учун бу оралиқнинг ҳамма қийматларида

$$F'(x)=f(x) \text{ ёки } d\,F(x)=f(x)\,dx$$

шарт бажарилса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг *бошланғич функцияси* дейилади.

1-мисол. $F(x)=\sin x$ функция бутун сонлар тўғри чизиғида $f(x)=\cos x$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки x нинг истаган қийматида

$$F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$$

ёки

$$dF(x)=d(\sin x)=\cos x\,dx=f(x)\,dx$$

тенглик тўғри бўлади.

2-мисол. $F(x)=x^3$ функция сонлар тўғри чизиғининг ҳамма нуқталарида $f(x)=3x^2$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки x нинг истаган қийматида унинг ҳосиласига нисбатан

$$F'(x)=3x^2=f(x),$$

дифференциалига нисбатан

$$dF(x)=3x^2dx=f(x)\,dx$$

тенглик тўғри бўлади.

Берилган функциянинг бошланғич функциясини топиш масаласи бир қийматли ҳал қилинмайди. Ҳақиқатан ҳам, агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошлангич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x)+C$ функция ҳам (бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон) $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, чунки C нинг истаган қиймати учун $(F(x)+C)'=f(x)$ бўлади. Масалан, 1-мисолда $f(x)=\cos x$ функциянинг бошланғич функцияси фақат $\sin x$ эмас, балки $\sin x+C$ функция ҳам бўлади, чунки $(\sin x+C)'=\cos x$. Худди шундай, 2-мисолда $f(x)=3x^2$ функциянинг бошланғич функцияси фақат x^3 эмас, балки x^3+C функция ҳам бўлади, чунки

$$(x^3+C)'=3x^2.$$

Энди, агар $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ бўлса, у ҳолда $F(x)+C$ функциялар тўплами $f(x)$ нинг ҳамма бошлангич функцияларини ўз ичига олади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон.

Бу қуйидаги леммадан келиб чиқади.

Лемма. *Агар $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функция $f(x)$ нинг икки бошланғич функциялари бўлса, у ҳолда $\Phi(x)=F(x)+C$ бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон.*

Исботи. $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функциялари бўлгани учун

$$F'(x)=f(x) \quad \text{ва} \quad \Phi'(x)=f(x)$$

тенгликлар тўғри бўлади. Ёрдамчи $R(x)$ функцияни киритамиз:

$$R(x)=\Phi(x)-F(x).$$

Унинг ҳосиласи x нинг ҳамма қийматларида нолга тенг, ҳақиқатан ҳам,

$$R'(x)=[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Лекин $R'(x)=0$ тенгликдан $R(x)$ нинг ўзгармас сон экани келиб чиқади. Фараз қилайлик, x_0 — аргументнинг тайинланган қиймати, x эса унинг истаган қиймати бўлсин. $[x_0, x]$ оралиқда Лагранж формуласини тузамиз:

$$R(x)-R(x_0)=R'(\xi)(x-x_0), \tag{1.1}$$

бунда ξ — x_0 ва x орасидаги бирор қиймат $(x_0<\xi<x)$.

Биз $R'(x)=0$ тенглик x нинг ҳамма қийматида, шу жумладан, ξ да ҳам, $R'(\xi)=0$ бўлгани учун

$$R(x)-R(x_0)=0, \text{ яъни } R(x)=R(x_0)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ҳолда $R(x)$ функциянинг қиймати x нинг ҳамма қийматида бир хил бўлишини билдиради, яъни $R(x)$ функция $C=R(x_0)$ доимий қийматини сақлайди. Шундай қилиб, $R(x)=C$ ёки $\Phi(x)-F(x)=C$.

Бундан $\Phi(x)=F(x)+C$ экани келиб чиқади, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Исботланган леммадан, берилган функциянинг иккита бошланғич функцияси бир-биридан фақат ўзгармас сонга фарқ қилиши мумкин, яъни агар бирор $F(x)$ бошланғич функция маълум бўлса, у ҳолда қолган ҳамма бошланғич функциялар $F(x)+C$ формула билан ифодаланади.

2-§. Аниқмас интеграл ва унинг хоссалари

Таъриф. Агар $F(x)$ функция бирор оралиқда $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x)+C$ (бунда C — ихтиёрий доимий) функциялар тўплами шу кесмада $f(x)$ функциянинг *аниқмас интеграли* дейилади ва

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

каби белгиланади. Бу ерда $f(x)$ — интеграл остидаги функция, $f(x)\,dx$ — интеграл остидаги ифода; x — интеграллаш ўзгарувчиси, $\int$ белги интеграл дейилади.

Аниқмас интегрални топиш жараёни ёки берилган функциянинг бошланғич функциясини топиш жараёни интеграллаш дейилади. Кесмада узлуксиз бўлган истаган функция шу оралиқда бошланғич функцияга эга, демак, аниқмас интегралга ҳам эга эканини исботсиз айтиб ўтамиз.

1-мисол. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, чунки $(\sin x)' = \cos x$.

2-мисол. $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, чунки $(x^3)' = 3x^2$.

Бошланғич функцияларнинг графиги интеграл эгри чизиғи дейилади, шунинг учун аниқмас интеграл геометрик жиҳатдан ихтиёрий C ўзгармасга боғлиқ бўлган ҳамма эгри чизиқлар тўпламини ифодалайди (143-шакл).

3-мисол. $\int 2x dx = x^2 + C$, чунки $(x^2)' = 2x$. Бошланғич функциялардан бири $F(x) = x^2$ нинг графиги парабола бўлади. $F(x) + C = x^2 + C$ аниқмас интеграл — параболалар тўплами бўлиб, уни ихтиёрий C га турли қийматлар бериб ҳосил қилиш мумкин.

Бу тўпламни $F(x) = x^2$ нинг графигини Oy ўқи бўйича параллел суриш йўли билан ясаш мумкин.

Аниқмас интегралнинг хоссаларини қараб чиқишга ўтамиз:

I. Аниқмас интегралнинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг, яъни

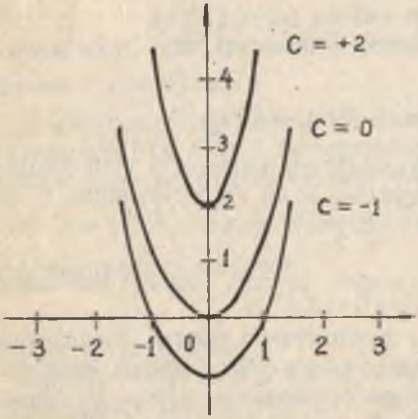
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

II. Аниқмас интегралнинг дифференциали интеграл белгиси остидаги ифодага тенг, яъни

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

III. Бирор функциянинг ҳосиласидан олинган аниқмас интеграл шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг, яъни

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$



143-шакл.

IV. Бирор функциянинг дифференциалидан олинган аниқмас интеграл шу функция билан ихтиёрий ўзгармаснинг йиғиндисига тенг, яъни

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Келтирилган хоссалардан келиб чиқадики, бири иккинчисидан кейин бажариладиган дифференциаллаш ва интеграллаш амаллари бир-бирининг натижаларини йўқотади (бу ҳол уларнинг ўзаро тескари амаллар эканини тасдиқлайди).

Келтирилган хоссалардан бирини, масалан, I хоссани исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

II, III, IV хоссалар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

V. Ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси ташқарисига чиқариш мумкин, яъни агар $k = \text{const} \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

VI. Чекли сондаги функцияларнинг алгебраик йиғиндисидан олинган аниқмас интеграл шу функцияларнинг ҳар биридан олинган аниқмас интегралларнинг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right) dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx.$$

Энди, V хоссани исботлаймиз.

Ҳақиқатан ҳам, агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, яъни $F'(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда $kF(x)$ функция $k \cdot f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, чунки

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x),$$

бунда $k = \text{const} \neq 0$. Бундан

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + \overline{C} = k\left(F(x) + \frac{\overline{C}}{k}\right) = k(F(x) + C) = k\int f(x)\,dx$$

келиб чиқади, бу ерда $C = \dfrac{\overline{C}}{k}$.

VI хоссани ҳам шунга ўхшаш исботлаш мумкин.

VII. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса, яъни

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

бўлса, у ҳолда

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

тенглик тўғри бўлади, бу ерда $u = u(x)$ x нинг дифференциалланувчи функцияси. Бу хосса интеграллаш формулаларининг *инвариантлиги* дейилади.

Масалан, агар

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

бўлса, у ҳолда

$$\int \cos x^2 \cdot dx^2 = \sin x^2 + C$$

бўлади. Натижанинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун тенгламанинг чап қисмининг ва ўнг қисмининг дифференциалини ҳисоблаш етарли (II хосса). Ҳақиқатан ҳам,

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 \, dx^2$$

ва

$$d\left(\int \cos x^2 dx^2\right) = \cos x^2 dx^2.$$

3- §. Асосий формулалар жадвали

Интеграллаш дифференциаллашга тескари амал бўлгани учун асосий интеграллаш формулаларини бевосита топиш мумкин, бунда VII инвариантлик хоссасини ҳисобга олиш керак.

Ҳамма формулаларда u ҳарфи билан ёки эркли ўзгарувчи, ёки эркли ўзгарувчининг бирор кесмада дифференциалланувчи ихтиёрий $u = u(x)$ функцияси белгиланади. Қуйида келтирилган интеграллар *интеграллар жадвали* дейилади.

1. $\int du = u + C.$
2. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $(\alpha \neq -1).$
3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$
7. $\int e^u du = e^u + C.$
8. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
9. $\int \cos u du = \sin u + C.$
10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
12. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$
13. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$
14. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$
15. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$
16. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$
17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a}| + C.$

4- §. Интеграллашнинг энг оддий усуллари

Интеграллашнинг иккита энг оддий усулини қараб чиқамиз: *бевосита интеграллаш ва дифференциал белгиси остига киритиш.*

I. Бевосита интеграллаш усули интеграл белгиси остидаги функцияни алмаштириш, V ва VI хоссаларни қўлланиш, шунингдек, интеграллашнинг асосий формулалари жадвалидан фойдаланишдан иборат.

1- мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Ечиш. Суратни махражга бўлиб, кейин эса V ва VI хоссаларни қўлланиб, интеграл белгиси остидаги функцияни алмаштирамиз ва интеграллар жадвалидан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx +$$

$$+5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C_1 + 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2 - 2\sqrt{x} + C_3 =$$

$$= 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5} + \frac{5}{3}x - 1\right) + C, \quad C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Эслатма. Ҳар бир интегрални ҳисоблагандан сўнг ихтиёрий ўзгармасларни қўйиш (мисолда қилинганидек) шарт эмас: одатда ҳамма ихтиёрий доимийлар жамланади ва битта C ҳарфи билан белгиланган жамлаш натижаси, дарҳол охирги натижага ёзилади.

II. Дифференциал белгиси остига киритиш усули интеграл остидаги ифодани алмаштиришдан иборат. Масалан:

$$dx = d(x+a), \quad dx = \frac{1}{k}\,d(kx) = \frac{1}{k}\,d(kx+a),$$

$xdx = \frac{1}{2}\,dx^2$, $\cos xdx = d(\sin x)$, $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ ва ҳ. к.

2- мисол. $\int (x+2)^{100}\,dx$ интегрални топинг.

Ечиш. $dx = d(x+2)$ бўлгани учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int (x+2)^{100}\,dx = \int (x+2)^{100}\,d(x+2) = \frac{(x+2)^{101}}{101} + C.$$

3- мисол. $\int \cos 5\,xdx$ интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл белгиси остидаги ифодани 5 га кўпайтирамиз ва бўламиз. 5 кўпайтувчини дифференциал белгиси остига киритамиз:

$$dx = \frac{1}{5}\cdot d\ (5x).$$

Қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \cos 5\,xdx = \frac{1}{5}\int \cos 5xd\,(5x) = \frac{\sin 5x}{5} + C.$$

4- мисол. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ интегрални топинг.

Ечиш. Касрнинг сурат ва махражини 2 га кўпайтирамиз. $2x$ кўпайтувчини дифференциал белгиси остига киритамиз:

$$xdx = \frac{1}{2}\cdot 2xdx = \frac{1}{2}\,d\,(x^2) = \frac{1}{2}\,d\,(x^2+1).$$

Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+1} + C =$$
$$= \sqrt{x^2+1} + C.$$

5- мисол. $\int \frac{dx}{3x-2}$ интегрални топинг.

Ечиш. Касрнинг сурат ва махражини 3 га кўпайтирамиз. $3x$ ни дифференциал белгиси остига киритамиз:

$$\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\,(3x)}{3x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\,(3x-2)}{3x-2} = \frac{1}{3}\,\ln|3x-2| + C.$$

Эслатма. Интеграл остидаги функциянинг сурати махражининг ҳосиласига тенг бўлса, у ҳолда интеграл махражнинг абсолют қиймати логарифмига тенг бўлади.

Масалан,

$$\int \mathrm{ctg}\,xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx =$$
$$= \int \frac{d\,(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

5- §. Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш

Интеграллашнинг яна бир усули билан танишамиз. Жадвалга кирмаган $\int f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш керак бўлсин. x ни t эркли ўзгарувчининг бирор дифференциалланувчи функцияси орқали ифодалаб, интеграллашнинг янги t ўзгарувчисини киритамиз: $x = \varphi(t)$, бунга тескари $t = \psi(x)$ функция мавжуд бўлсин, у ҳолда

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

бўлиб,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{5.1}$$

эканини исботлаймиз. Бу тенгликни қуйидагича тушунамиз: тенгликнинг ўнг қисмида интеграллашдан сўнг эски x ўзгарувчига қайтиш керак.

Исботлаш учун (5.1) тенгликнинг чап ва ўнг қисмидан олинган дифференциални топамиз, бунда 2- § даги II хоссадан фойдаланамиз. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \tag{5.2}$$

$$d\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\right) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = f(x)\,dx. \tag{5.3}$$

(5.2) ва (5.3) формулаларни таққослаб (5.1) тенгликнинг чап ва ўнг қисмларининг дифференциаллари тенг эканини кўрамиз. Бу эса бошланғич функциялар фақат ўзгармас қўшилувчига фарқ қилиши мумкинлигини англатади. (5.1) формуланинг тўғрилиги исботланди.

Мисол. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ интегрални топинг.

Ечиш. $x+1=t^2$ деб белгилаймиз, бунда $x=t^2-1$ ва $dx = 2t\,dt$ бўлади. Интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз. Бундан

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int\frac{2t\,dt}{(t^2-1)\cdot t} = 2\int\frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$

6- §. Бўлаклаб интеграллаш

Интеграллашнинг яна бир усулини қараб чиқамиз, у икки функциянинг кўпайтмасини дифференциаллаш формуласидан келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ — x нинг дифференциалланувчи функциялари бўлсин. Бу функциялар кўпайтмасининг дифференциалини топамиз:

$$d(u\cdot v) = vdu + udv,$$

бундан

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Охирги тенгликнинг иккала қисмини интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

ёки

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{6.1}$$

(6.1) формула *бўлаклаб интеграллаш* формуласи дейилади.

Одатда, (6.1) формула остидаги функция турли синфдаги даражали ва кўрсаткичли, даражали ва тригонометрик, тригонометрик ва кўрсаткичли ва ҳоказо функцияларнинг кўпайтмаси сифатида ифодалангандагина қўлланилади. Бунда интегралларнинг икки турини ажратиб кўрсатиш мумкин, улар учун нимани u деб ва нимани dv деб қабул қилиш кераклигини кўрсатиш мумкин.

Биринчи турга $P_n(x)$ кўпҳаднинг кўрсаткичли ёки тригонометрик функцияга кўпайтмасини ўз ичига олган интеграллар киради. Бу ерда u орқали $P_n(x)$ кўпҳад белгиланади, қолган ҳамма ифода эса dv орқали белгиланади.

Иккинчи турга $P_n(x)$ кўпҳаднинг логарифмик ёки тескари тригонометрик функцияга кўпайтмаси қатнашган интеграллар киради. Бу ҳолда dv билан $P_n(x)\,dx$ ифода белгиланади, қолган ҳамма ифода эса u билан белгиланади.

1- мисол. $\int xe^{-x}\,dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл биринчи турга тегишли. Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$u = x,\ dv = e^{-x}\,dx.$$

Бундан du ва v ни топамиз:

$$du = dx,\ v = \int e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\,d(-x) = -e^{-x}$$

(v ни топишда ўзгармас C ни ёзиш керак эмас, уни биз охирги натижада ёзамиз).

(6.1) формулани тузамиз:

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = C - xe^{-x} - e^{-x}.$$

Келтирилган турлар бўлаклаб интеграллаш қоидасини қўллаш мумкин бўлган ҳамма ҳолларни ўз ичига олмайди, албатта.

Бу формула такроран бир неча марта қўлланилиши мумкинлигини айтиб ўтамиз.

2- мисол. $\int \ln^2 x dx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$\int \ln^2 x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C =$$
$$= x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C.$$

Кўпинча шундай интеграллар ҳам учрайдики, бунда (6.1) формулани такроран қўллаш натижасида дастлабки интеграл ҳосил бўлади. Бу ҳолда ҳосил қилинган тенгламани дастлабки интегралга нисбатан ечиш керак.

3- мисол. $I = \int e^x \cos x dx$ интегрални топинг.

Ечиш.

$$I = \int e^x \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, & v = \sin x \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx. \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right\} =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) - I.$$

Ҳосил қилинган $I = e^x (\sin x + \cos x) - I$ муносабатдан

$$2I = e^x (\sin x + \cos x).$$

эканини топамиз, бундан қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Берилган функциянинг бошланғич функцияси деб нимага айтилади? Мисоллар келтиринг.
2. Бошланғич функциялар ҳақидаги леммаларни исботланг.
3. Берилган функциянинг аниқмас интеграли деб нимага айтилади?
4. Аниқмас интегралнинг энг оддий хоссаларини ифодаланг ва исботланг.
5. Аниқмас интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласини чиқаринг. Мисоллар келтиринг.
6. Бўлаклаб интеграллаш усули ёрдамида амалга ошириш мақсадга мувофиқ бўлган интегралларнинг турларини айтинг.
7. Аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш усули нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.
8. 1685—1700, 1709—1720, 1832—1850, 1860—1885- масалаларни ечинг.

7- §. Каср-рационал функцияни оддий касрларга ажратиш

Бу параграфда келтирилган маълумотлар бизга асосан каср-рационал функцияларни интеграллашда керак бўлади.

Маълумки,

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

функция даражали кўпҳад дейилади, бунда $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$—кўпҳаднинг коэффициентлари, n — даража кўрсаткичи.

Таъриф. Икки кўпҳаднинг нисбати *каср-рационал функция* ёки *рационал каср* дейилади:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}.$$

Агар $m < n$ бўлса, у ҳолда рационал каср *тўғри*, агар $m \geqslant n$ бўлса, у ҳолда рационал каср нотўғри каср бўлади.

$R(x)$ рационал каср нотўғри бўлган ҳолларда касрнинг $Q_m(x)$ суратини $P_n(x)$ махражига одатдагидек бўлиш йўли билан унинг бутун қисмини ажратиш керак:

$$\begin{array}{r|l} Q_m(x) & P_n(x) \\ \cline{2-2} \overline{\cdots\cdots} & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

$q(x)$ бўлинма ва $r(x)$ қолдиқ кўпҳад бўлади, бунда $r(x)$ қолдиқнинг даражаси $P_n(x)$ бўлувчининг даражасидан кичикдир.

$Q_m(x)$ бўлинувчи $P_n(x)$ бўлувчи ҳамда $q(x)$ бўлинманинг кўпайтмаси билан $r(x)$ қолдиқнинг йиғиндисига тенг бўлгани учун

$$Q_m(x) = P_n(x) \cdot q(x) + r(x)$$

ёки

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$$

айниятни ҳосил қиламиз, бу ерда $q(x)$ — бутун қисм деб аталувчи кўпҳад, $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ тўғри каср, чунки $r(x)$ қолдиқнинг даражаси $P_n(x)$ нинг даражасидан кичик.

Шундай қилиб, нотўғри рационал каср бўлган ҳолда ундан $q(x)$ бутун қисмни ва $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ тўғри касрни ажратиш мумкин. Бинобарин, нотўғри рационал касрни интеграллаш кўпҳадни ва тўғри рационал касрни интеграллашга келтирилади.

1- мисол. Ушбу

$$R(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^2 + x - 2}$$

нотўғри рационал касрдан бутун қисмини ажратинг.

Ечиш. $R(x)$ рационал каср нотўғри каср, чунки суратнинг даражаси махражнинг даражасидан катта $(4 > 2)$. Кўпҳадларни бўлиш қоидаси бўйича суратни махражга бўламиз:

$$\begin{array}{rl|l} - & 2x^4 - 3x^3 + 1 & x^2 + x - 2 \\ \cline{3-3} & 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 5x + 9 \\ \cline{2-2} - & -5x^3 + 4x^2 + 1 & \\ & -5x^3 - 5x^2 + 10x & \\ \cline{2-2} - & 9x^2 - 10x + 1 & \\ & 9x^2 + 9x - 18 & \\ \cline{2-2} & -19x + 19 & \end{array}$$

Шундай қилиб,

$$R(x) = 2x^2 - 5x + 9 + \frac{-19x + 19}{x^2 + x - 2}$$

ни ҳосил қиламиз. Масала ечилди.

Таъриф. Қуйидагича касрлар *энг содда рационал касрлар* дейилади:

I. $\frac{A}{x - \alpha}$.

II. $\frac{A}{(x - \alpha)^k} \cdot (k \geqslant 2$ ва бутун).

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (махражнинг дискриминанти $D<0$).

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$ ($s \geqslant 2$ ва бутун, $D<0$),

бу ерда A, B — бирор ҳақиқий коэффициентлар α, p, q лар ҳам ҳақиқий сонлар.

Ушбу

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

тўғри рационал касрни қараб чиқамиз, бу касрнинг $P_n(x)$ махражи

$$(x-\alpha)^k, \ (x^2+px+q)^s$$

кўринишдаги чизиқли ва квадрат кўпайтувчиларга ёйилади, бунда $(x-\alpha)^k$ кўринишдаги кўпайтувчи k карраликдаги ҳақиқий илдизга мос келади, $(x^2+px+q)^s$ кўринишдаги кўпайтувчи s карраликдаги комплекс-қўшма илдизларга мос келади (дискриминант $D<0$):

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\ \dots\ (x-\alpha_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\times$$
$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ \dots\ (x^2+p_lx+q_l)^{s_l}. \qquad (7.1)$$

Қуйидаги теорема ўринли:

Теорема. *Ҳар қандай*

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

рационал касрни, бунда $P_n(x)$ нинг махражи (7.1) *формула бўйича кўпайтувчиларга ажратилган,* I, II, III, IV *турдаги оддий касрларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин. Бунда:*

а) (7.1) *ёйилманинг $(x-\alpha)$ кўринишдаги кўпайтувчисига* I *турдаги битта*

$$\frac{A}{x-\alpha}$$

каср мос келади;

б) (7.1) *ёйилманинг $(x-\alpha)^k$ кўринишдаги кўпайтувчисига* I *ва* II *турдаги k та каср мос келади:*

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{A_3}{(x-\alpha)^{k-2}}+\ \dots\ +\frac{A_k}{(x-\alpha)};$$

в) (7.1) *ёйилманинг (x^2+px+q) кўринишдаги кўпайтувчисига* III *турдаги каср мос келади:*

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q};$$

г) (7.1) *ёйилманинг $(x^2+px+q)^s$ кўринишдаги кўпайтувчисига* III *ва* IV *турдаги s та каср мос келади:*

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^s}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\ \dots\ +\frac{A_sx+B_s}{x^2+px+q}.$$

Тўғри рационал касрнинг оддий касрлар йиғиндисига ёйилмасида A, B коэффициентларни аниқлаш учун турли хил усуллар мавжуд, улардан биттасини мисолларда тушунтирамиз: сон қийматларни ўрнига қўйиш усули ва номаълум коэффициентлар усули.

2- мисол. Ушбу

$$R(x)=\frac{x+2}{x^3-x}$$

рационал касрни оддий касрлар йиғиндисига ажратинг.

Ечиш. $R(x)$ рационал каср тўғри каср, чунки суратнинг даражаси махражнинг даражасидан кичик $(1<3)$. Касрнинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^3-x=x\ (x^2-1)=x\ (x-1)\ (x+1).$$

Келтирилган теоремага асосан $R(x)$ касрни оддий касрларга ажратиш бундай кўринишда бўлиши керак:

$$R(x)=\frac{x+2}{x\ (x-1)\ (x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1}. \qquad (7.2)$$

A, B, D коэффициентларни топишга киришамиз. (7.2) тенгликнинг ўнг қисмини умумий махражга келтирамиз ва ҳосил қилинган тенгликнинг иккала қисмида махражни ташлаб юборамиз. Бу амаллар натижаси қуйидаги тенгликдан иборат бўлади:

$$x+2=A\ (x-1)\ (x+1)+Bx\ (x+1)+Dx\ (x-1). \qquad (7.3)$$

x ўзгарувчига исталган учта ҳақиқий сонли қиймат бериб, A, B, D ларга нисбатан учта номаълумли учта тенглама системасини ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, номаълум A, B, D коэффициентларни топамиз. Сонли қийматларни ўрнига қўйиш усули ана шундан иборат. Агар x ўзгарувчига махражнинг илдизлари қиймати кетма-кет берилса, янада содда тенгламаларни ҳосил қиламиз, чунки уларда ҳар гал фақат битта номаълум A, B ёки D қолади.

Ҳақиқатан ҳам, x ўзгарувчига дастлабки (7.2) каср махражининг илдизлари—0, 1 — 1 қийматларни берамиз. Агар $x=0$ бўлса, (7.3) дан $2=A\ (-1)\cdot$ни топамиз, бундан $A=-2$. Агар $x=1$ бўлса, $3=$ $=B\cdot 1\,(1+1)$ ни топамиз, бундан $B=\frac{3}{2}$.

Агар $x=-1$ бўлса, $1=D\ (-1)\ (-1-1)$ бўлади, бундан $D=\ \frac{1}{2}$.

Энди (7.2) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$R(x)=\frac{x+2}{x\,(x^2-1)}=\frac{-2}{x}+\frac{3}{2\,(\alpha-1)}+\frac{1}{2\,(x+1)}.$$

3- мисол. Ушбу

$$\frac{x^2-3}{x\ (x-2)^2}$$

рационал касрни оддий касрлар йиғиндисига ажратинг.

Ечиш. Бу тўғри каср, унинг махражи кўпайтувчиларга ажратилган, шунинг учун келтирилган теоремага асосан

$$\frac{x^2-3}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{D}{x-2}$$

бўлади. Бу ерда 0 — махражнинг оддий илдизи, 2 сони эса икки каррали илдиздир ($k=2$). Ёйилманинг A, B ва D коэффициентларини топиш учун тенгликнинг ўнг қисмини умумий махражга келтирамиз ва тенгликнинг иккала қисмидан бир хил махражларни ташлаб юборамиз.

$$x^2-3=A(x-2)^2+Bx+Dx(x-2). \qquad (7.4)$$

x ўзгарувчига махражнинг илдизларига тенг қийматларни бериб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

Агар $x=0$ бўлса, (7.4) дан $-3=A(0-2)^2$ ни ҳосил қиламиз, бундан $A=-\frac{3}{4}$;

агар $x=2$ бўлса, у ҳолда (7.4) дан $1=2B$ га эга бўламиз, бундан $B=\frac{1}{2}$.

D коэффициентини топиш қолади, бироқ махражнинг илдизлари қиймати етишмайди. Шу сабабли уни топиш учун бошқа усулдан: номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланамиз; бу усулга кўра (7.4) айниятнинг чап ва ўнг қисмларида x ўзгарувчининг тенг даражалари олдида турган коэффициентлар ўзаро тенглаштирилади.

Мазкур ҳолда x^2 олдидаги коэффициентларни таққослаймиз:

$1=A+D$, бундан $D=1-A=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$.

Энди берилган касрнинг оддий касрлар йиғиндисига ёйилмасини ёзиш мумкин:

$$\frac{x^2-3}{x(x-2)^2}=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\frac{7}{4(x-2)}.$$

4- мисол. Ушбу

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2-x+1)}$$

рационал касрни оддий касрлар йиғиндисига ажратинг.

Ечиш. Бу тўғри каср, унинг махражи кўпайтувчиларга ажратилган: чизиқли $(x+2)$ ва манфий дискриминантли ($D=-3<0$) квадрат учҳад (x^2-x+1) кўпайтувчиларга ажратилган. Берилган касрни оддий касрлар йиғиндисига ажратамиз:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}. \qquad (7.5)$$

(7.5) тенгликдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x-1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+2).$$

(7.5) касрнинг махражи фақат битта $x = -2$ ҳақиқий илдизга эга. Шунинг учун сонли қийматларни ва номаълум коэффициентларни ўрнига қўйиш усулларидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва ундан эса A, B, C коэффициентларни топамиз:

$$\begin{array}{r|ll} x = -2 \text{ да} & -3 = 7A, & \text{бундан } A = -\frac{3}{7}, \\ x^2 & 0 = A + B, & \text{бундан } B = -A = \frac{3}{7}, \\ x & 1 = -A + 2B + C, & \text{бундан } C = 1 + A - 2B = -\frac{2}{7}. \end{array}$$

Шундай қилиб, (7.5) бундай ёзилади:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x^2-x+1)} = -\frac{3}{7(x+2)} + \frac{3x-2}{7(x^2-x+1)}.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай рационал каср тўғри каср дейилади? Қандай рационал каср нотўғри каср дейилади?
2. Нотўғри рационал касрдан бутун қисми қандай ажратилади?
3. Қандай рационал касрлар энг содда каср дейилади?
4. Тўғри рационал каср оддий касрлар йиғиндисига қандай ажратилади?
5. Номаълум коэффициентлар усулини мисолда тавсифланг.
6. Сонли қийматларни ўрнига қўйиш усулини мисолда тавсифланг.

8- §. Энг содда рационал касрларни интеграллаш

I ва II турдаги оддий касрларни интеграллаш жадвал интегралларига осон келтирилади:

$$\text{I.} \quad \int \frac{A dx}{x-\alpha} = A \int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A \ln|x-\alpha| + C.$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{A dx}{(x-\alpha)^k} = A \int (x-\alpha)^{-k} d(x-\alpha) = A \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C.$$

III турдаги интегралларни кўриб чиқамиз:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx, \text{ бунда } D = \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Суратда касрнинг махражидан олинган ҳосилани ажратамиз:

$$(x^2+px+q)' = 2x+p.$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Интеграллардан биринчиси $\ln|x^2+px+q|$ га тенг. Иккинчи интегрални ҳисоблаш учун махражда тўлиқ квадратни ажратамиз:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

бу ерда $q-\frac{p^2}{4}>0$, чунки шартга кўра дискриминант $D=\frac{p^2}{4}-q<0$. Демак, иккинчи интеграл жадвал интегралига келади. Юқорида айтилганларни инобатга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, агар III турдаги касрни интеграллашда $A=0$ бўлса, суратда махражнинг ҳосиласини ажратиш шарт эмас, махражда дарҳол тўлиқ квадрат ажратиш керак.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I=\int\frac{3x+8}{x^2+4x+8}\,dx.$$

Ечиш. Суратда махражнинг ҳосиласини ажратамиз: $(x^2+4x+8)'=2x+4$.

$$I=\int\frac{3x+8}{x^2+4x+8}\,dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-\frac{3}{2}\cdot4+8}{x^2+4x+8}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx+2\int\frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Биринчи интеграл $\ln|x^2+4x+8|$ га тенг. Иккинчи интегралнинг махражида тўлиқ квадрат ажратамиз:

$$(x^2+4x+8)=(x+2)^2-4+8=(x+2)^2+2^2.$$

Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I = \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8| + 2\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8| + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2} + C.$$

2- **мисол.** Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int\frac{dx}{x^2-6x+14}.$$

Ечиш. $A=0$ бўлгани учун махражда тўлиқ квадратни ажратишдан бошлаймиз:

$$x^2-6x+14 = (x-3)^2-9+14 = (x-3)^2+(\sqrt{5})^2.$$

Бундан

$$I = \int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{\sqrt{5}} + C.$$

Энди IV турдаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n},\quad \text{бунда } D=\frac{p^2}{4}-q<0.$$

Яна суратда x^2+px+q учҳаднинг ҳосиласини ажратишдан бошлаймиз:

$$(x^2+px+q)' = 2x+p.$$

$$\text{IV.}\ \int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}.$$

Биринчи интеграл дарҳол ҳисобланади:

$$\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int(x^2+px+q)^{-n}d(x^2+px+q) =$$

$$= \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

Иккинчи интегралга келсак, $\left(x+\frac{p}{2}\right)=t,\ dx=dt$ белгилаш киритиб, $0<q-\frac{p^2}{4}=a^2$ деб уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2+a^2)^{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^n}. \qquad (8.1)$$

Охирги интегралга бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз: $u = t$, $dv = \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}$ деб оламиз, шундан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$du = dt,\ v = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}.$$

Шундай қилиб, (8.1) формуладаги охирги интеграл бундай ёзилади:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}.$$

Агар энди

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

деб белгиласак, оддий алмаштиришлардан сўнг (8.1) формула ушбу кўринишни олади:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$$

ёки

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)\,a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right). \qquad (8.2)$$

Бу формула бўйича I_{n-1} ни I_{n-2} орқали ифодалаймиз, сўнгра I_{n-2} ни I_{n-3} орқали ифодалаймиз ва ҳоказо. Бу жараён қуйидаги интегрални ҳосил қилгунимизча давом этади:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{t}{a} + C.$$

(8.2) формула келтириш ёки рекуррент (қайтувчан) формула дейилади. Бундай номланишига сабаб I_n дан I_{n-1} га, кейин эса I_{n-2} га қайтишга тўғри келади ва ҳоказо.

Шуни айтиб ўтиш керакки, агар IV турдаги касрларни интеграллашда $A = 0$ бўлса, у ҳолда суратда (x^2+px+q) учҳаддан ҳосила ажратиш керак эмас, балки дарҳол махражда тўлиқ квадрат ажратиш керак.

3- мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

Ечиш. Учҳаддан тўлиқ квадрат ажратамиз:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)=t$ алмаштиришни бажариб ва $a^2=\frac{3}{4}$ деб белгилаб,

$$I=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}=I_2$$

ни ҳосил қиламиз. (8.2) формула бўйича қуйидагиларни топамиз:

$$I=I_2=\frac{1}{2(2-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{2-1}}+(2\cdot2-3)I_1\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+I_1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

x ўзгарувчига қайтиб,

$$I=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

ни ҳосил қиламиз.

4-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Ечиш. (8.2) формула бўйича топамиз:

$$I=I_3=\frac{1}{2(3-1)^1}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}+(2\cdot3-3)I_2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}+3I_2\right), \tag{8.3}$$

бунда

$$I_2=\frac{1}{2(2-1)}\left(\frac{x}{1+x^2}+(2\cdot2-3)I_1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg}x\right)+C. \tag{8.4}$$

I_2 нинг қийматини (8.4) формуладан (8.3) формулага қўйиб, ҳосил қиламиз:

$$I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}x\right)+C.$$

9-§. Рационал каср функцияларини интеграллаш

7- § ва 8- § да айтилганлардан

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{P_n(x)}$$

нотўғри рационал касрни интеграллаш масаласи $q(x)$ кўпҳадни интеграллашга (унинг интеграли жадвал интеграли бўлади), $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ тўғри рационал касрни интеграллашга келтирилади, бу эса аслида I, II, III ва IV турдаги касрларнинг интегралларини топишга келтирилади.

Шундай қилиб, рационал касрни интеграллаш учун қуйидагилар керак:

1) унинг тўғри ёки нотўғри каср эканини текшириш; акс ҳолда (яъни нотўғри каср бўлганда) олдин бутун қисми ажратилади, шундан кейин кўпҳад (бутун қисм) ва тўғри рационал каср ҳосил қилинади;

2) тўғри рационал касрни I, II, III ва IV турдаги энг оддий касрлар йиғиндисига 7- § да ифодаланган теоремага мувофиқ ажратиш;

3) ёйилманинг коэффициентларини топиш;

4) интеграллашга киришиш.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\frac{(x^2+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)}.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция — тўғри рационал каср, уни I турдаги содда касрлар йиғиндисига ажратамиз. Натижада

$$\frac{x^2+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+2}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$x^2+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Dx(x-1).$$

A, B, D коэффициентларни топиш учун қийматларни ўрнига қўйиш усулидан фойдаланамиз:

$x=0$ бўлганда $3=-2A$, бундан $A=-\frac{3}{2}$;

$x=1$ бўлганда $4=3B$, бундан $B=\frac{4}{3}$;

$x=-2$ бўлганда $7=6D$, бундан $D=\frac{7}{6}$.

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{(x^2+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{4}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+$$
$$+\frac{7}{6}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{6}\ln|x+2|+C.$$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\frac{(x^3-3x^2)\,dx}{(x+1)^3(x-2)}.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция тўғри рационал каср, уни I ва II турдаги содда касрлар йиғиндисига ажратамиз:

$$\frac{x^3-3x^2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)}+\frac{E}{x-2},$$

бундан

$$x^3-3x^2=A(x-2)+B(x-2)(x+1)+D(x-2)(x+1)^2+$$
$$+E(x+1)^3.$$

Қийматларни ўрнига қўйиш ва номаълум коэффициентлар усулларини аралаш қўлланиб, A, B, D ва E коэффициентларни топамиз:

$x=-1$ да $-4=-3A$, бундан $A=\frac{4}{3}$;

$x=2$ да $-4=27E$, бундан $E=-\frac{4}{27}$;

x^3 лар олдидаги коэффициентдан $1=D+E$, бундан $D=1-$ $-E=\frac{31}{27}$;

x^2 лар олдидаги коэффициентдан $-3=B+3E$, бундан

$$B=-3-3E=-\frac{23}{9}.$$

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{(x^3-3x^2)\,dx}{(x+1)^3\,(x-2)}=\frac{4}{3}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^3}-\frac{23}{9}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{31}{27}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-$$
$$-\frac{4}{27}\int\frac{d(x-2)}{x-2}=-\frac{2}{3(x+1)^2}+\frac{23}{9(x+1)}+\frac{1}{27}\ln\left|\frac{(x+1)^{31}}{(x-2)^4}\right|+C.$$

3-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+4)}.$$

Ечиш. Интеграл остидаги каср — тўғри каср, уни I ва III турдаги содда рационал касрлар йиғиндисига ажратамиз:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2+4},$$

бундан

$$x=A(x^2+4)+(Bx+D)(x+1).$$

Коэффициентларни топишнинг юқорида кўрсатилган усулларини аралаш қўлланиб, A, B ва D ни топамиз:

$$\begin{array}{r|l} x=-1 & -1=5A, \text{ бундан } A=-\frac{1}{5}; \\ x^2 & 0=A+B, \text{ бундан } B=\frac{1}{5}; \\ x & 1=B+D, \text{ бундан } D=1-B=\frac{4}{5}. \end{array}$$

Шундай қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}=-\frac{1}{5}\int\frac{d(x+1)}{x+1}+\int\frac{\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+4}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{1}{5}\int\frac{xdx}{x^2+4}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{1}{10}\ln|x^2+4|+\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C.$$

4-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\frac{x^3+3x-2}{(x-2)(x^2+4x+8)^2}\,dx.$$

Ечиш. Интеграл остидаги каср — тўғри каср, уни I, III ва IV турдаги оддий касрларнинг йиғиндисига ажратамиз:

$$\frac{x^3+3x-2}{(x-2)(x^2+4x+8)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+D}{(x^2+4x+8)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+4x+8},$$

бундан:

$$x^3+3x-2=A(x^2+4x+8)^2+(Bx+D)(x-2)+$$

$$+(Ex+F)(x-2)(x^2+4x+8).$$

Коэффициентларни аниқлашдаги юқоридаги усуллардан фойдаланиб ва уларни аралаш қўлланиб, A, B, D, E ва F ни топамиз:

$$\begin{array}{r|ll} x=2 & 12=20A, & \text{бундан } A=\frac{3}{5}; \\ x^4 & 0=A+E, & \text{бундан } E=-\frac{3}{5}; \\ x^3 & 1=8A+F+2E, & \text{бундан } F=-\frac{13}{5}; \\ x^2 & 0=32A+B+2F, & \text{бундан } B=-14; \\ x & 3=64A-2B+D-16E, & \text{бундан } D=-73. \end{array}$$

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{(x^3+3x-2)\,dx}{(x-2)(x^2+4x+8)^2}=\frac{3}{5}\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\int\frac{(-14x-73)\,dx}{(x^2+4x+8)^2}-$$

$$-\frac{1}{5}\int\frac{(3x+13)\,dx}{x^2+4x+8}=\frac{3}{5}\ln|x-2|-\int\frac{7(2x+4)+45}{(x^2+4x+8)^2}\,dx-$$

$$-\frac{1}{5}\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)+7}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{5}\ln|x-2|-7\int\frac{(2x+4)\,dx}{(x^2+4x+8)^2}-$$

$$-45\int\frac{dx}{(x^2+4x+8)^2}-\frac{3}{10}\ln|x^2+4x+8|-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=$$

$$=\frac{3}{5}\ln|x-2|+\frac{7}{(x^2+4x+8)}-45\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2+2^2)^2}-$$

$$-\frac{3}{10}\ln|x^2+4x+8|-\frac{7}{10}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2}+C.$$

Қолган

$$\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2+2^2)^2}$$

интегрални $x+2=t$, $a^2=2^2$, $n=2$ деб фараз қилиб, (8.2) рекуррент формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}=\frac{1}{2\cdot 2^2}\left(\frac{t}{t^2+2^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right).$$

Шундай қилиб, охирида қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{(x^2+3x-2)\,dx}{(x-2)(x^2+4x+8)^2}=\frac{3}{5}\ln|x-2|+\frac{7}{x^2+4x+8}-$$

$$-\frac{45}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+4x+8}+\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}\right)-\frac{3}{10}\ln|x^2+4x+8|-$$

$$-\frac{7}{10}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C=\frac{3}{10}\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+8}\right|+\frac{-45x-34}{8(x^2+4x+8)}-$$

$$-\frac{281}{80}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$$

Шундай қилиб, биз исталган рационал касрни интеграллаш масаласи оддий касрларни интеграллашга келтирилишини кўрдик. Натижа рационал касрлар, логарифмлар ва арктангенслар билан ифодаланишини аниқладик.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. I ва II турдаги содда рационал касрлар қандай интегралланади? Мисоллар келтиринг.
2. III турдаги оддий рационал каср қандай интегралланади? Мисол келтиринг.
3. IV турдаги оддий рационал каср қандай интегралланади? Мисол келтиринг.
4. $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ кўринишдаги интегралларни топиш учун рекуррент формула келтириб чиқаринг. Мисол келтиринг.
5. Рационал касрни энг содда касрларга ажратиб, интеграллаш усулини тавсифланг. Мисол келтиринг.
6. 2012 — 2016, 2022 — 2526, 2036 — 2040, 2048 — 2052-масалаларни ечинг.

10- §. Тригонометрик функциялар қатнашган ифодаларни интеграллаш

Фараз қилайлик, фақат тригонометрик функцияларга рационал равишда боғлиқ бўлган ифода берилган бўлсин. Уни доим $\sin x$ ва $\cos x$ нинг рационал функцияси деб ҳисоблаш мумкин, чунки ҳамма тригонометрик функцияларни $\sin x$ ва $\cos x$ орқали рационал равишда ифодалаш мумкин. Бу ифодани $R(\sin x, \cos x)$ орқали белгилаймиз.

Ушбу

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

турдаги интегрални

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$$

ўрнига қўйиш билан доим z ўзгарувчили рационал функциянинг интегралига алмаштириш мумкин. Интегрални бундай алмаштириш *рационаллаштириш* дейилади.

Ҳақиқатан,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2}.$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ x=2\operatorname{arctg} z,\ dx=\frac{2dz}{1+z^2},$$

шунинг учун

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2dz}{1+z^2}=\int R_1(z)\,dz,$$

бунда $R_1(z)$ — z ўзгарувчили рационал функция.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$$

ўрнига қўйиш $R(\sin x, \cos x)$ кўринишдаги ҳар қандай функцияни интеграллашга имкон беради, шунинг учун у универсал тригонометрик алмаштириш дейилади. Лекин амалиётда бу алмаштириш кўпинча анча мураккаб рационал функцияга олиб келади. Шунинг учун баъзан ундан фойдаланмасдан анча содда ўрнига қўйишлардан фойдаланилади.

1) Агар $R(\sin x, \cos x)$ функция $\sin x$ га нисбатан тоқ бўлса, яъни

$$R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда

$$z=\cos x,\ dz=-\sin x\,dx$$

ўрнига қўйиш бу функцияни рационаллаштиради.

2) Агар $R(\sin x,\ \cos x)$ функция $\cos x$ га нисбатан тоқ бўлса, яъни

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x,\ \cos x)$$

бўлса, у ҳолда

$$z = \sin x\,,\ dz = \cos x\,dx$$

ўрнига қўйиш бу функцияни рационаллаштиради.

3) Агар $R(\sin x,\ \cos x)$ функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт бўлса, яъни

$$R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x)$$

бўлса, у ҳолда

$$z = \operatorname{tg} x,\ dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

ўрнига қўйиш бу функцияни рационаллаштиради. Бу ҳолда

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{z^2}{1+z^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+z^2}.$$

1-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$$

интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Универсал $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4\cdot\frac{2z}{1+z^2} + 3\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2} + 5} = \int \frac{2dz}{2z^2+8z+8} =$$

$$= \int \frac{dz}{(z+2)^2} = -\frac{1}{z+2} + C = C - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}.$$

2-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Интеграл белгиси остидаги функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функциядир, шунинг учун $\operatorname{tg} x = z$ ўрнига қўйишни бажарамиз. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\frac{1}{2}+z^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}z + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

3-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I=\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ га нисбатан тоқ функция, чунки $\sin x$ ни $-\sin x$ га алмаштирганда функция ишорасини ўзгартиради. Шунинг учун бу ерда

$$\cos x=z,\ \sin xdx=-dz$$

ўрнига қўйиш ўринлидир. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin xdx}{2+\cos x}=\int\frac{-(1-z^2)dz}{2+z}=\int\frac{z^2-1}{z+2}dz=$$

$$=\int\left(z-2+\frac{3}{z+2}\right)dz=\frac{z^2}{2}-2z+3\ln|z+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-$$

$$-2\cos x+3\ln|2+\cos x|+C.$$

4) Агар $R(\sin x,\ \cos x)$ функция $\sin x$ ва $\cos x$ даражаларининг кўпайтмаси бўлса, яъни агар

$$\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx$$

интегралга эга бўлсак, у ҳолда m ва n (бутун сонлар) даражаларга боғлиқ ҳолда турли ўрнига қўйишлар ўринли бўлади.

а) Агар $n>0$ ва тоқ бўлса, у ҳолда

$$\cos x=z,\ \sin xdx=-dz$$

ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

б) Агар $m>0$ ва тоқ бўлса, у ҳолда

$$\sin x=z,\ \cos xdx=dz$$

ўрнига қўйиш ҳам интегрални рационаллаштиради.

4-мисол. Ушбу

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\cos x=z$, $\sin xdz=-dz$ ўрнига қўйиш ёрдамида қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin xdx}{\cos^4 x}=\int\frac{-(1-z^2)dz}{z^4}=-\int\frac{dz}{z^4}+\int\frac{dz}{z^2}=$$

$$=\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{z}+C=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

в) Агар иккала n ва m кўрсаткичлар жуфт ва номанфий бўлса, у ҳолда тригонометриядан маълум бўлган

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

даражани пасайтириш формулаларидан фойдаланиб, а), б) ёки яна в) ҳолни ҳосил қиламиз.

5-мисол. Ушбу

$$I = \int \sin^4 x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Даражани пасайтириш формуласини қўлланамиз:

$$I = \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

г) Агар $m + n = -2k \leqslant 0$ (жуфт, номусбат) бўлса, у ҳолда $\mathrm{tg} x = z$ ёки $z = \mathrm{ctg} x$ ўрнига қўйиш интегрални даражали функцияларнинг интеграллари йиғиндисига олиб келади.

Агар бунда $m < 0$ ва $n < 0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги сунъий усулни қўлланиш мумкин: суратда турган бирни $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^s$ билан ифодалаб, рационал функцияларни интеграллашга келамиз, бунда

$$s = -\frac{|m+n|}{2} - 1.$$

6-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x}.$$

Ечиш. Бу ерда $n = -3$, $m = -1$, $m + n = -4 < 0$, $s = 1$.

$$I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} =$$

$$= 2 \int \frac{dx}{\sin 2x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = \ln|\mathrm{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

7-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

Ечиш. Бу ерда $n = 2$, $m = -6$, $n + m = -4 < 0$. Қуйидаги алмаштиришни қўлланамиз:

$$\mathrm{tg} x = z, \quad x = \mathrm{arctg} z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} = \mathrm{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^4 x}\right) = \mathrm{tg}^2 x \cdot (1 + \mathrm{tg}^2 x)^2 = z^2 (1 + z^2)^2.$$

Натижада

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int z^2 (1 + z^2)^2 \cdot \frac{dz}{1+z^2} = \int z^2 (1 + z^2)\, dz =$$

$$= \int z^2 dz + \int z^4 dz = \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + C = \frac{1}{3} \mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5} \mathrm{tg}^5 x + C.$$

8-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \mathrm{ctg}^4 x dx.$$

Ечиш. Бу ерда $\mathrm{ctg}^4 x = \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}$, шунинг учун $m = 4$, $n = -4$, $m + n = 0$. Ушбу

$$\mathrm{ctg}x = z, \quad x = \mathrm{arcctg}z, \ dx = -\frac{dz}{1 + z^2}$$

алмаштиришни қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I = -\int z^4 \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = -\int \frac{(z^4 - 1) + 1}{1 + z^2} dz = -\int (z^2 - 1) dz -$$

$$-\int \frac{dz}{1 + z^2} = -\frac{z^3}{3} + z + \mathrm{arcctg}z + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + \mathrm{ctg}x + x + C.$$

9-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^6 x}.$$

Ечиш. Бу ерда $n = 0$, $m = -6$, $m + n = -6 < 0$. Ўрнига қўйишни қўлланамиз:

$$\mathrm{tg}x = z, \ \cos^2 x = \frac{1}{1 + z^2}, \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dz.$$

Бундан

$$I = \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + z^2)^2 dz = \int (1 + 2z^2 + z^4) dz =$$

$$= z + \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + C = \mathrm{tg}x + \frac{2}{3} \mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5} \mathrm{tg}^5 x + C.$$

д) Агар даражалардан бири нолга тенг, иккинчиси манфий тоқ сон бўлса, у ҳолда

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = z$$

универсал ўрнига қўйишни бажарсак, у даражали функцияларни интеграллашга олиб келади.

10-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Ечиш. Қуйидаги ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = z, \ dx = \frac{2dz}{1 + z^2}, \ \sin x = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I = \int \frac{2(1+z^2)^3}{(1+z^2)\cdot(2z)^3}\cdot dz = \frac{1}{4}\int \frac{(1+z^2)^2}{z^3}\, dz = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + z\right) dz =$$

$$= -\frac{1}{8z^4} + \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{z^2}{8} + C = -\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| +$$

$$+ \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

5) Ниҳоят, қуйидаги кўринишдаги интегралларни қараб чиқамиз:

$$\int \cos nx\cdot\cos mx dx,$$

$$\int \sin nx\cdot\cos mx dx,$$

$$\int \sin nx\cdot\sin mx dx.$$

Улар тригонометрик функцияларнинг кўпайтмасини йиғиндига алмаштирувчи маълум формулалар ёрдамида олинади:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

11-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int \sin 3x\cdot\cos 2x dx.$$

Ечиш. Интеграл белгиси остидаги функцияни йиғиндига алмаштирамиз:

$$\frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\, dx = C - \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x.$$

11-§. Баъзи иррационал ифодаларни интеграллаш

Алгебраик иррационалликни ўз ичига олган баъзи интегралларни ўзгарувчини тегишлича алмаштиргандан сўнг рационал функцияларнинг интегралларига келтириш мумкин.

$$1)\ \int R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}},\ x^{\frac{m_2}{n_2}},\ \ldots,\ x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

турдаги интеграл (бунда R — эркли x ўзгарувчининг каср даражаларининг рационал функцияси)

$$x = z^s,\quad dx = sz^{s-1}dz$$

ўрнига қўйиш ёрдамида рационаллаштирилади, бу ерда s $n_1, n_2, \ldots, n_k$ сонларнинг энг кичик умумий карралиси.

2) Ушбу

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

турдаги интеграл $\left(\text{бунда } R\ \frac{ax+b}{cx+d}\right.$ кўринишдаги каср-чизиқли функциянинг каср даражаларининг рационал функцияси)

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^s$$

ўрнига қўйиш ёрдамида рационаллаштирилади, бу ерда s $n_1, n_2, \ldots, n_k$ сонларнинг энг кичик умумий карралиси.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}\, dx.$$

Ечиш. 3 ва 6 сонларнинг энг кичик умумий карралиси 6 га тенг, шунинг учун

$$x = z^6, \quad dx = 6z^5dz, \quad z = \sqrt[6]{x}$$

ўрнига қўйишни бажарамиз. Натижада:

$$I = 6\int \frac{(z^6 + z^4 + z)\cdot z^5dz}{z^6\ (1 + z^2)} = 6\int \frac{z^5 + z^3 + 1}{1 + z^2}\, dz = 6\int \left(z^3 + \frac{1}{1 + z^3}\right) dz =$$

$$= 6\frac{z^4}{4} + 6\operatorname{arctg} z + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\, dx.$$

Ечиш. 2 ва 3 сонларнинг энг кичик умумий карралиси 6 га тенг, шунинг учун

$$2x - 3 = z^6, \quad dx = 3z^5dz, \quad z = \sqrt[6]{2x-3}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада:

$$I = 3\int \frac{z^3\cdot z^5dz}{z^2+1} = 3\int \frac{z^8dz}{z^2+1} = 3\int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz =$$

$$= 3\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z\right) + C = \frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x-3)^7} -$$

$$-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x-3)^5} + \sqrt{2x-3} - 3\sqrt[6]{2x-3} + 3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x-3} + C.$$

3-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int \frac{2}{(2-x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\, dx.$$

Ечиш. $\frac{2-x}{2+x} = z^3$ ўрнига қўйишни киритамиз, бундан:

$$x = \frac{2-2z^3}{1+z^3}, \quad dx = \frac{-12z^2dz}{(1+z^3)^2}, \quad 2-x = \frac{4z^3}{1+z^3}.$$

Демак,

$$I = \int \frac{-2\,(1+z^3)^2 \cdot z \cdot 12z^2dz}{16z^6\,(1+z^3)^2} = -\frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^3} = \frac{3}{4z^2} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}$ иррационал ифодага боғлиқ бўлган бир нечта оддий интегралларни қараб чиқамиз:

а) Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

турдаги интегрални квадрат учҳадда тўлиқ квадрат ажратгандан сўнг 18 ёки 19-тартибли (3-§) жадвал интегралга келтириш мумкин.

4-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}.$$

Ечиш. $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 2^2$ учҳадда иккиҳад квадратини ажратамиз. Жадвал интегрални ҳосил қиламиз:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} = \ln|(x-2) + \sqrt{(x-2)^2+4}| + C.$$

5-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{6-x^2-4x}}.$$

Ечиш. Квадрат учҳаддан иккиҳад квадратини ажратамиз:

$$6 - x^2 - 4x = 10 - (x^2 + 4x + 4) = 10 - (x+2)^2.$$

Сўнгра қуйидаги жадвал интегрални ҳосил қиламиз:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{10-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{\sqrt{10}} + C.$$

б) Ушбу

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

кўринишдаги интегрални суратда квадрат учҳаднинг ҳосиласини ажратгандан кейин

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

иккита интегралга ажратиш мумкин:

бири — даражали функциядан олинган интеграл;

иккинчиси — аввалги а) бандда қараб чиқилган интеграл.

6-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{(4x - 3)\,dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}$$

интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Суратда илдиз остидаги ифоданинг ҳосиласини ажратамиз:

$$(x^2 - 6x + 10)' = 2x - 6.$$

Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I = \int \frac{2\,(2x - 6) - 3 + 12}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}\,dx = 2\int \frac{(2x - 6)\,dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} +$$

$$+ 9\int \frac{d\,(x - 3)}{\sqrt{(x - 3)^2 + 1}} = 4\sqrt{x^2 - 6x + 10} + 9\ln|\,x - 3 +$$

$$+ \sqrt{x^2 - 6x + 10}\,| + C.$$

в) Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

турдаги интегрални, агар $z = \dfrac{1}{x - \alpha}$ ўрнига қўйиш амалга оширилса, а) бандда қараб чиқилган интегралга келтириш мумкин.

7-мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}.$$

Ечиш. Ўрнига қўйишни бажарамиз:

$$z = \frac{1}{x},\ x = \frac{1}{z},\ dx = -\frac{dz}{z^2}.$$

Сўнгра ушбуни ҳосил қиламиз:

$$I = -\int \frac{dz}{z^2\cdot\frac{1}{z}\sqrt{\frac{5 - 2z + z^2}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{5 - 2z + z^2}} =$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{(z - 1)^2 + 4}} = C - \ln|\,z - 1 + \sqrt{5 - 2z + z^2}\,| =$$

$$= C - \ln\left|\frac{1}{x} - 1 + \sqrt{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right| = C - \ln\left|\frac{1 - x + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{x}\right|.$$

4) Ниҳоят, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ иррационал ифодага рационал боғлиқ бўлган янада умумий кўринишдаги интегрални қараб чиқамиз:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

Квадрат учҳаддан тўлиқ квадрат ажратгандан сўнг

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a},$$

ушбу $x+\frac{b}{2a}=z$, $dx=dz$ белгилашни киритиб, дастлабки интегрални a ва (b^2-4ac) нинг ишораларига боғлиқ ҳолда қуйидаги кўринишдаги интеграллардан бирини топишга келтириш мумкин:

а) агар $a>0$ ва $b^2-4ac<0$ бўлса, у ҳолда

$$\int R_1\left(z, \sqrt{m^2+n^2z^2}\right) dz,$$

бу ерда $n^2=a$, $m^2=-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$;

б) агар $a>0$, $b^2-4ac>0$ бўлса, у ҳолда

$$\int R_2\left(z, \sqrt{n^2z^2-m^2}\right) dz$$

бўлади, бу ерда

$$n^2=a,\ m^2=\frac{b^2-4ac}{4a}>0;$$

в) агар $a<0$ ва $b^2-4ac>0$ бўлса, у ҳолда

$$\int R_3\left(z, \sqrt{m^2-n^2z^2}\right) dz$$

бўлади, бу ерда

$$n^2=-a,\ m^2=-\frac{b^2-4ac}{4a}>0.$$

Бу интеграллар

$$\int R(\sin t; \cos t)\, dt$$

кўринишдаги интегралларга қуйидаги ўрнига қўйишлар ёрдамида келтирилиши мумкин, бу ўрнига қўйишлар *тригонометрик ўрнига қўйиш* дейилади:

а) $z=\frac{m}{n}\operatorname{tg}t$, $dz=\frac{m}{n}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}$,

б) $z=\frac{m}{n}\sec t$, $dz=\frac{m}{n}\cdot\sec t\cdot\operatorname{tg}t\,dt$,

в) $z=\frac{m}{n}\sin t$, $dz=\frac{m}{n}\cos t\,dt$.

8-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}.$$

Ечиш. Квадрат учҳаддан тўлиқ квадрат ажратамиз:

$$5+2x+x^2=(x+1)^2+4.$$

Фараз қилайлик,

$$x+1=z,\quad dx=dz$$

бўлсин, у ҳолда

$$I=\int\frac{dz}{\sqrt{(4+z^2)^3}}.$$

а) кўринишдаги интегрални ҳосил қиламиз. Ўрнига қўйишни бажарамиз:

$$z=2\mathrm{tg}t,\quad dz=\frac{2dt}{\cos^2t},\quad 4+z^2=4+4\mathrm{tg}^2t=\frac{4}{\cos^2t}.$$

Шундай қилиб,

$$I=\int\frac{2dt}{\cos^2t\sqrt{\frac{4^3}{\cos^6t}}}=\frac{1}{4}\int\cos t dt=\frac{1}{4}\sin t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2t}}+C=\frac{z}{4\sqrt{4+z^2}}+C=$$

$$=\frac{x+1}{4\sqrt{(x+1)^2+4}}+C=\frac{x+1}{4\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

9-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$I=\int\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ечиш. в) кўринишдаги интегралга эга бўламиз. Ушбу

$$x=\sin t,\quad dx=\cos t dt,\quad 1-x^2=\cos^2t$$

ўрнига қўйишни бажарамиз. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I=\int\cos^2t dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos2t)\ dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin2t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$ кўринишдаги интегралларни топиш усулларини кўрсатинг, бунда R — рационал функция. Мисоллар келтиринг.
2. $\int \sin^n x\cdot\cos^m x dx$ кўринишдаги интегралларни топиш усулларини баён қилинг, бу ерда m,n — бутун сонлар. Мисоллар келтиринг.
3. Қуйидаги кўринишдаги интегралларни топиш усулларини баён қилинг:

$$\int R\left(x,x^{\frac{m_1}{n_1}},x^{\frac{m_2}{n_2}},\dots,x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

бунда R — рационал функция, m, n — бутун сонлар. Мисоллар келтиринг.

4. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ кўринишдаги интегрални топиш усулларини баён қилинг. Мисоллар келтиринг.

5. Қуйидаги кўринишдаги интегралларни топиш усулларини баён қилинг:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx, \ \int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\, dx,$$
$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\, dx, \ \int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\, dx.]$$

Мисоллар келтиринг.

6. 2090 — 2119, 2068 — 2075, 1890 — 1901- масалаларни ечинг.

12-§. Аниқ интеграл

Аниқ интеграл — математик анализнинг энг муҳим тушунчаларидан биридир. Юзларни, ёйларнинг узунликларини, ҳажмларни, ишни, инерция моментларини ва ҳоказоларни ҳисоблаш масаласи у билан боғлиқ.

$[a, b]$ кесмада $y = f(x)$ узлуксиз функция берилган бўлсин. Қуйидаги амалларни бажарамиз:

1) $[a, b]$ кесмани қуйидаги нуқталар билан n та қисмга бўламиз, уларни қисмий интерваллар деб атаймиз:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

2) Қисмий интервалларнинг узунликларини бундай белгилаймиз:

$$\Delta x_1 = x_1 - a, \ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ \ldots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}.$$

3) Ҳар бир қисмий интервалнинг ичида биттадан ихтиёрий нуқта танлаб оламиз:

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_i, \ \ldots, \ \xi_n.$$

4) Танланган нуқталарда берилган функциянинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$f(\xi_1), \ f(\xi_2), \ \ldots, \ f(\xi_i), \ \ldots, \ f(\xi_n).$$

5) Функциянинг ҳисобланган қийматларининг тегишли қисмий интервалнинг узунлигига кўпайтмасини тузамиз:

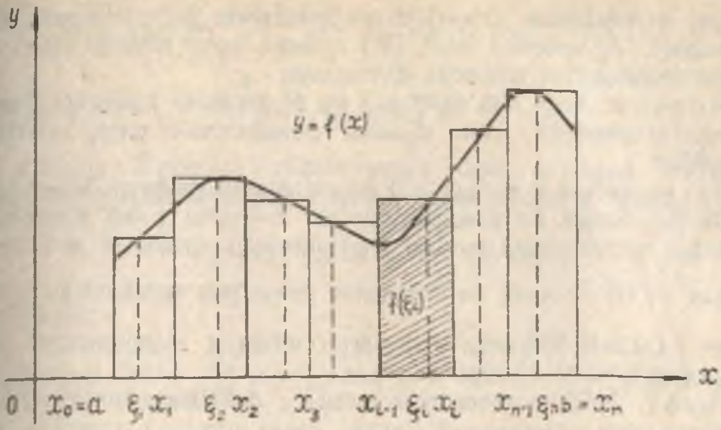
$$f(\xi_1)\,\Delta x_1, \ f(\xi_2)\,\Delta x_2, \ \ldots, \ f(\xi_i)\,\Delta x_i, \ \ldots, \ f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

6) Тузилган кўпайтмаларни қўшамиз ва йиғиндини σ билан белгилаймиз:

$$\sigma = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\,\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

σ йиғинди $f(x)$ функция учун $[a, b]$ кесмада тузилган интеграл йиғинди деб аталади. σ интеграл йиғинди қисқача бундай ёзилади:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$



144- шакл.

Интеграл йиғиндининг геометрик маъноси равшан: агар $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда σ — асослари $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$ ва баландликлари мос равишда

$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_i),\ \ldots,\ f(\xi_n)$$

бўлган тўғри тўртбурчак юзларининг йиғиндисидан иборат (144-шакл).

Энди бўлишлар сони n ни орттира борамиз ($n \to \infty$) ва бунда энг катта интервалнинг узунлиги нолга интилади, яъни $\max \Delta x_i \to 0$ деб фараз қиламиз.

Ушбу таърифни беришимиз мумкин:

Таъриф. Агар σ интеграл йиғинди $[a, b]$ кесмани қисмий $[x_{i-1}, x_i]$ кесмаларга ажратиш усулига ва уларнинг ҳар биридан ξ_i нуқтани танлаш усулига боғлиқ бўлмайдиган чекли сонга интилса, у ҳолда шу сон $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функциядан олинган *аниқ интеграл* дейилади ва бундай белгиланади:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

(«$f(x)$ дан x бўйича a дан b гача олинган аниқ интеграл» деб ўқилади.) Бу ерда $f(x)$ — интеграл остидаги функция, $[a; b]$ кесма — интеграллаш оралиғи, a ва b сонлар интеграллашнинг қуйи ва юқори чегараси дейилади.

Шундай қилиб, аниқ интегралнинг таърифидан ва белгиланишидан қуйидагича эканини ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Аниқ интегралнинг таърифидан кўринадики, аниқ интеграл ҳамма вақт мавжуд бўлавермас экан. Биз қуйида аниқ интегралнинг мавжудлик теоремасини исботсиз келтирамиз.

Теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у интегралланувчидир, яъни бундай функциянинг аниқ интеграли мавжуддир.*

Агар юқоридан $y = f(x) \geqslant 0$ функциянинг графиги билан, қуйидан Ox ўқи билан, ён томонлардан эса $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳани эгри чизиқли трапеция деб атасак, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ аниқ интегралнинг геометрик маъноси аниқ бўлиб қолади: $f(x) \geqslant 0$ бўлганда у шу эгри чизиқли трапециянинг юзига сон жиҳатдан тенг бўлади.

1-изоҳ. Аниқ интегралнинг қиймати функциянинг кўринишига ва интеграллаш чегараларига боғлиқ, аммо интеграл остидаги ифода ҳарфга боғлиқ эмас. Масалан:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(z)\,dz.$$

2-изоҳ. Аниқ интегралнинг чегаралари алмаштирилса, интегралнинг ишораси ўзгаради:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

3-изоҳ. Агар аниқ интегралнинг чегаралари тенг бўлса, ҳар қандай функция учун ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ҳақиқатан ҳам, геометрик нуқтаи назардан эгри чизиқли трапеция асосининг узунлиги нолга тенг бўлса, унинг юзи ҳам нолга тенг бўлиши ўз-ўзидан равшан.

13-§. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари

Аниқ интегралнинг хоссаларини исботлашда аниқ интегралнинг таърифи ва лимитларнинг хоссаларидан фойдаланамиз.

1-хосса. Бир нечта функциянинг алгебраик йиғиндисининг аниқ интеграли қўшилувчилар интегралларининг йиғиндисига тенг.

Икки қўшилувчи бўлган ҳол билан чекланамиз:

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Исботи.

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm \varphi(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

2-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин: агар $k = \mathrm{const}$ бўлса, у ҳолда

$$x \int_a^b k \cdot f(x)\, d\text{к} = k \int_a^b f(x)\, dx.$$

Исботи.

$$\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\,\Delta x_i = k \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= k \int_a^b f(x)\, dx.$$

3-хосса. Агар $[a, b]$ кесмада функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда бу функция аниқ интегралининг ишораси функция ишораси билан бир хил бўлади, яъни:

а) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0;$$

б) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant 0.$$

Исботи. г) $\Delta x_i \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ бўлгани учун

$$f(\xi_i) \geqslant 0 \; (i = \overline{1,n}).$$

Шунинг учун $f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0$, ва демак, $\sigma \geqslant 0$. Бундан

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0 \quad (\lambda = \max \Delta x_i)$$

эканини ҳосил қиламиз, чунки номанфий ўзгарувчининг лимити ҳам номанфийдир.

Шундай қилиб,

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$$

ни ҳосил қиламиз. б) ҳол худди шунга ўхшаш исботланади.

4-хосса. Агар $[a, b]$ кесмада икки $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функция

$$f(x) \geqslant \varphi(x)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Исботи. Шартга кўра $f(x) \geqslant \varphi(x)$ бўлгани учун $f(x) - \varphi(x) \geqslant 0$ бўлади ва 3-хоссага кўра

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx \geqslant 0$$

ни ёзиш мумкин, бундан

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \geqslant 0$$

экани келиб чиқади ва ниҳоят:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

5-хосса. Агар $[a;\, b]$ кесма бир неча қисмга бўлинса, у ҳолда $[a,\, b]$ кесма бўйича аниқ интеграл ҳар бир қисм бўйича олинган аниқ интеграллар йиғиндисига тенг.

$[a,\, b]$ кесма икки қисмга бўлинган ҳол билангина чекланамиз, яъни агар $a < c < b$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Исботи. Интеграл йиғиндининг лимити $[a;\, b]$ кесмани бўлакларга бўлиш усулига боғлиқ бўлмагани учун $x = c$ нуқтани бўлиниш нуқталари қаторига киритамиз. $[a;\, b]$ кесмадаги ҳамма интеграл йиғиндини иккита йиғиндига: $[a,\, c]$ ва $[c,\, b]$ кесмага мос йиғиндига бўламиз. У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{a}^{c} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{c}^{b} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Бу тенгликда $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

c нуқта $[a;\, b]$ кесма ташқарисида ётганда ҳам формула тўғри бўлиб қолади.

6-хосса. Агар m ва M сонлар $f(x)$ функциянинг $[a,\, b]$ кесмада энг кичик ва энг катта қиймати бўлса, у ҳолда

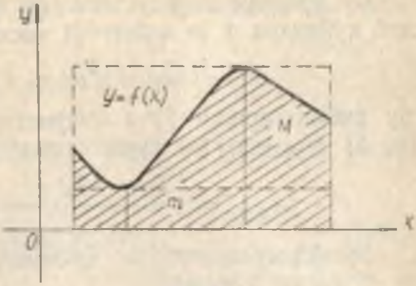
$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a).$$

Исботи. Шартга кўра

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

экани келиб чиқади. 4-хоссага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx. \qquad (13.1)$$



145- шакл.

Бироқ

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a),$$

$$\int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a)$$

бўлгани учун (13.1) тенгсизлик

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

кўринишни олади (145-шакл). Бу хосса аниқ интегрални *баҳолаш ҳақидаги теорема* дейилади.

14-§. Ўртача қиймат ҳақидаги теорема

n та $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар берилган бўлса, бу сонларнинг ўрта арифметик қиймати деб

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

сонга айтилади.

Энди $[a, b]$ кесмада узлуксиз $y=f(x)$ функцияни қарайлик. Унинг шу кесмадаги ўртача қийматини топамиз. Бунинг учун кесмани

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots,\ x_n = b$$

нуқталар билан n та тенг қисмга бўламиз. Ҳар бир бўлакнинг узунлиги

$$\frac{b-a}{n} = x_1 - a = x_2 - x_1 = \ldots = x_i - x_{i-1} = \ldots = b - x_{n-1}$$

ёки

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_i = \ldots = \Delta x_n$$

га тенг. Ҳар бир бўлакнинг ичида биттадан нуқта оламиз:

$$\xi_1 \in \Delta x_1,\ \xi_2 \in \Delta x_2,\ \ldots,\ \xi_i \in \Delta x_i,\ \ldots,\ \xi_n \in \Delta x_n.$$

Бу нуқталарда берилган $f(x)$ функциянинг қийматларини ҳисоблаб қуйидаги n та қийматни ҳосил қиламиз:

$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_i),\ \ldots,\ f(\xi_n).$$

Бу қийматларнинг ўрта арифметик қийматини ҳисоблаймиз ва уни $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг *ўртача қиймати* деб атаймиз:

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{f(\xi_1)+f(\xi_3)+\ldots+f(\xi_i)+\ldots+f(\xi_n)}{n}.$$

Бу формуланинг ўнг қисмини $(b-a)$ катталикка кўпайтирамиз ва бўламиз, бундан:

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}\left(f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(\xi_i)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n}\right)$$

ёки

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}(f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n).$$

Буни қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Демак $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция учун интеграл йиғиндисини ҳосил қиламиз. Энди $n \to \infty$ да $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ бўлгандаги лимитга ўтамиз, бундан

$$\lim_{\lambda\to 0} f_{\text{ўрт.}} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \frac{1}{b-a}$$

ёки

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$$

Бинобарин, $[a; b]$ кесмада функциянинг ўртача қиймати шу кесмада бу функциянинг аниқ интегралини кесма узунлигига бўлинганига тенг. Қуйидаги теоремани исбот қилайлик.

Ўртача қиймат ҳақидаги теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлса, бу кесманинг ичида шундай $x = c$ нуқта топиладики, бу нуқтада функциянинг қиймати унинг шу кесмадаги ўртача қийматига тенг бўлади, яъни $f(c) = f_{\text{ўрт.}}$.*

Исботи. Фараз қилайлик m ва M сонлар $f(x)$ узлуксиз функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қиймати бўлсин.

Аниқ интегрални баҳолаш ҳақидаги хоссага кўра қуйидаги қўш тенгсизлик тўғри:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Тенгсизликнинг ҳамма қисмларини $b-a>0$ га бўламиз, натижада

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M \tag{14.1}$$

ни ҳосил қиламиз. Ушбу

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

белгилашни киритиб, (14.1) қўш тенгсизликни қайта ёзамиз:

$$m \leqslant \mu \leqslant M.$$

$f(x)$ функция $[a;\, b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун у m ва M орасидаги ҳамма оралиқ қийматларни қабул қилади. Демак, бирор $x=c$ қийматда

$$\mu = f(c)$$

бўлади, яъни

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{14.2}$$

ёки

$$f(c) = f_{\text{ўрт.}}\bullet$$

Теорема исбот бўлди.

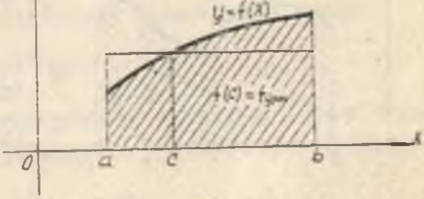
(14.2) формулани бундай ўзгартириб ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

ёки

$$\int_a^b f(x)\,dx = f_{\text{ўрт.}}\cdot(b-a).$$

Ўртача қиймат ҳақидаги теореманинг геометрик маъноси қуйидагича: юқоридан $f(x)$ интегралости функциянинг графиги билан чегараланган $(b-a)$ асосли эгри чизиқли трапециянинг юзи ўшандай асосли ва баландлиги функциянинг ўртача қийматига тенг тўғри тўртбурчакнинг юзига тенгдош (146- шакл).



146- шакл.

Бу нуқталарда берилган $f(x)$ функциянинг қийматларини ҳисоблаб қуйидаги n та қийматни ҳосил қиламиз:

$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_i),\ \ldots,\ f(\xi_n).$$

Бу қийматларнинг ўрта арифметик қийматини ҳисоблаймиз ва уни $[a,\ b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг *ўртача қиймати* деб атаймиз:

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_i)+\ldots+f(\xi_n)}{n}.$$

Бу формуланинг ўнг қисмини $(b-a)$ катталикка кўпайтирамиз ва бўламиз, бундан:

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}\left(f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \ldots + \right.$$

$$\left. + f(\xi_i)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n}\right)$$

ёки

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}(f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n).$$

Буни қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Демак $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция учун интеграл йиғиндисини ҳосил қиламиз. Энди $n\to\infty$ да $\lambda = \max\Delta x_i \to 0$ бўлгандаги лимитга ўтамиз, бундан

$$\lim_{\lambda\to 0} f_{\text{ўрт.}} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \frac{1}{b-a}$$

ёки

$$f_{\text{ўрт.}} = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$$

Бинобарин, $[a;\ b]$ кесмада функциянинг ўртача қиймати шу кесмада бу функциянинг аниқ интегралини кесма узунлигига бўлинганига тенг. Қуйидаги теоремани исбот қилайлик.

Ўртача қиймат ҳақидаги теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз бўлса, бу кесманинг ичида шундай $x = c$ нуқта топиладики, бу нуқтада функциянинг қиймати унинг шу кесмадаги ўртача қийматига тенг бўлади, яъни $f(c) = f_{\text{ўрт.}}$.*

Исботи. Фараз қилайлик m ва M сонлар $f(x)$ узлуксиз функциянинг $[a,\ b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қиймати бўлсин.

Аниқ интегрални баҳолаш ҳақидаги хоссага кўра қуйидаги қўш тенгсизлик тўғри:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Тенгсизликнинг ҳамма қисмларини $b-a>0$ га бўламиз, натижада

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M \tag{14.1}$$

ни ҳосил қиламиз. Ушбу

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

белгилашни киритиб, (14.1) қўш тенгсизликни қайта ёзамиз:

$$m \leqslant \mu \leqslant M.$$

$f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун у m ва M орасидаги ҳамма оралиқ қийматларни қабул қилади. Демак, бирор $x=c$ қийматда

$$\mu = f(c)$$

бўлади, яъни

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{14.2}$$

ёки

$$f(c) = f_{\text{ўрт.}}.$$

Теорема исбот бўлди.

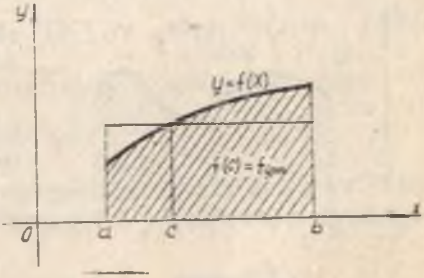
(14.2) формулани бундай ўзгартириб ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

ёки

$$\int_a^b f(x)\,dx = f_{\text{ўрт.}} \cdot (b-a).$$

Ўртача қиймат ҳақидаги теореманинг геометрик маъноси қуйидагича: юқоридан $f(x)$ интегралости функциянинг графиги билан чегараланган $(b-a)$ асосли эгри чизиқли трапециянинг юзи ўшандай асосли ва баландлиги функциянинг ўртача қийматига тенг тўғри тўртбурчакнинг юзига тенгдош (146- шакл).



146- шакл.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Берилган кесмада берилган функциянинг аниқ интеграли деб нимага айтилади?
2. Аниқ интегралнинг мавжудлик теоремаси нимадан иборат?
3. Аниқ интегралнинг геометрик маъноси қандай?
4. Аниқ интегралнинг энг содда хоссаларини ифодаланг ва исботланг.
5. Аниқ интеграл ишорасининг сақланиши хоссаси нимадан иборат?
6. Аниқ интегрални баҳолаш ҳақидаги теоремани ифодаланг ва исботланг. Унинг геометрик маъноси нимадан иборат?
7. Функциянинг кесмадаги ўртача қиймати нима?
8. Ўртача қиймат ҳақидаги теоремани ифодаланг ва исботланг. Унинг геометрик маъноси нимадан иборат?
9. 2296 — 2300, 2322, 2323, 2326, 2327-масалаларни ечинг.

15-§. Интегралнинг юқори чегараси бўйича ҳосила

Агар аниқ интегралда интеграллашнинг қуйи чегараси a ни тайин қилиб белгиланса ва юқори чегараси x эса ўзгарувчи бўлса, у ҳолда интегралнинг қиймати ҳам x ўзгарувчининг функцияси бўлади. Бу функцияни $\Phi(x)$ билан белгилаймиз:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b].$$

Теорема. *Агар $f(t)$ функция $t = x$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ функциянинг ҳосиласи интегралости функциясининг юқори чегарадаги қийматига тенг, яъни*

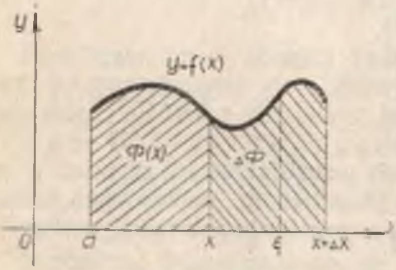
$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x) \text{ ёки } \Phi'(x) = f(x).$$

Исботи. x аргументга Δx орттирма берамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

$\Phi(x)$ функциянинг орттирмаси қуйидагига тенг бўлади (147-шакл):

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (15.1)$$



147-шакл.

Ўртача қиймат ҳақидаги теоремани (14-§) (15.1) интегралга қўллаймиз,

$$\Delta\Phi = f(c)\,\Delta x, \qquad (15.2)$$

бунда c нуқта x ва $x + \Delta x$ лар орасида жойлашган.

(15.2) тенгликнинг ўнг ва чап қисмларини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c),$$

кейин $\Delta x \to 0$ бўлганда лимитга ўтиб, ушбу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

ни ҳосил қиламиз, бироқ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \Phi'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x),$$

чунки $\Delta x \to 0$ бўлганда $c \to x$ ва $f(t)$ функция $t = x$ да узлуксиз.

Шундай қилиб,

$$\Phi'(x) = f(x) \quad \text{ёки} \quad \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Теоремадан $\Phi(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси экани келиб чиқади, чунки $\Phi'(x) = f(x)$.

16-§. Аниқ интеграл ҳисобнинг асосий формуласи

(Ньютон — Лейбниц формуласи)

Аниқ интегралларни интеграл йиғиндининг лимити сифатида бевосита ҳисоблаш кўп ҳолларда жуда қийин, узоқ ҳисоблашларни талаб қилади ва амалда жуда кам қўлланилади. Интегралларни топиш формуласи Ньютон — Лейбниц теоремаси билан берилади.

Теорема. *Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ аниқ интеграл бошланғич функциянинг интеграллаш оралиғидаги орттирмасига тенг, яъни*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{16.1}$$

(16.1) тенглик аниқ интегрални ҳисоблашнинг *асосий формуласи* (*Ньютон — Лейбниц формуласи*) дейилади.

Исботи. Теорема шартига кўра $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функциясидир. Лекин 15-§ га кўра $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ функция ҳам $f(x)$ функция учун бошланғич функциядир, чунки

$$\Phi'(x) = f(x).$$

1-§ дан маълумки, берилган функциянинг иккита исталган бошланғич функциялари бир-биридан ўзгармас C қўшилувчига фарқ қилади, яъни

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Шунинг учун, бундай ёзиш мумкин:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

C ни тегишлича танлаганда x нинг ҳамма қийматларида тўғри бўлган айниятни ҳосил қилдик. C ўзгармас миқдорни аниқлаш учун бу тенгликда $x = a$ деб оламиз:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C.$$

Бироқ $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, шунинг учун $F(a) + C = 0$ тенгламага эга бўламиз, бундан $C = — F(a)$ эканини топамиз. Демак,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) — F(a).$$

Энди $x = b$ десак, Ньютон — Лейбниц формуласини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) — F(a)$$

ёки интеграл ўзгарувчисининг белгиланишини x га алмаштириб,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) — F(a)$$

ни ҳосил қиламиз. Агар

$$F(b) — F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

белгилаш киритилса, охирги формулани бундай қайта ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) — F(a).$$

$F(x)\Big|_a^b$ белги қўш ўрнига қўйиш белгиси дейилади.

Шундай қилиб, аниқ интегрални бевосита интеграл йиғинди лимити сифатида эмас, балки Ньютон — Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун аввал интеграл остидаги функциянинг бошланғич функциясини топиш керак, кейин эса интеграллаш интервалида унинг орттирмасини ҳисоблаш керак.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int_0^\pi \cos x\,dx.$$

Ечиш. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x \Big|_{0}^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0.$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Ечиш. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_{0}^{1} = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}.$

3-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ечиш. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} =$

$= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1.$

17-§. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$$

интеграл берилган бўлсин, бунда $f(x)$ $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция. $x = \varphi(t)$ деб олиб, ўзгарувчини алмаштирамиз, бунда $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз, $\varphi'(t)$ ҳосила ҳам бу кесмада узлуксиз бўлсин. Фараз қилайлик, $x = \varphi(t)$ функция α ва β ни мос равишда a ва b га ўтказади, яъни

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Бу шартлар бажарилганда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \qquad (17.1)$$

формула ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $F(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ функция учун бошланғич функция бўлади (бу 5-§ да исботланган эди). (17.1) формуланинг ўнг ва чап қисмларига Ньютон — Лейбниц формуласини қўллаймиз:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = F(x) \Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a);$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Ҳосил бўлган ифодаларнинг ўнг қисмлари ўзаро тенг, демак, чап томонлари ҳам тенг.

Аниқ интегрални (17.1) формула бўйича ҳисоблашда янги ўзгарувчидан эски ўзгарувчига қайтиш керак эмас, балки янги ўзгарувчининг чегараларини кейинги бошланғич функцияга қўйиш керак.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}.$$

Ечиш. $x+1=t^2$ формула бўйича ўзгарувчини алмаштирамиз, бундан:

$$x = t^2 - 1 \text{ ва } dx = 2t\,dt.$$

Интеграллашнинг янги чегараларини аниқлаймиз:

$x = 3$ бўлганда $t = 2$,

$x = 8$ бўлганда $t = 3$.

$$\int_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \int_{2}^{3} \frac{(t^2-1)\cdot 2\,t dt}{t} = 2\int_{2}^{3} (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_{2}^{3} =$$

$$= 2\left(6 - \frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ечиш. $x = \sin t$ деб алмаштирсак,

$$dx = \cos t\,dt, \quad 1 - x^2 = \cos^2 t$$

бўлади. Янги интеграллаш чегараларини аниқлаймиз:

$x = 0$ бўлганда $t = 0$,

$x = 1$ бўлганда $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi^1}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

18-§. Аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш

Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар $[a; b]$ кесмада дифференциалланувчи функциялар бўлсин. Уларнинг кўпайтмасини тузамиз ва ҳосиласини ҳисоблаймиз.

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

тенгликнинг иккала қисмини a дан b гача интеграллаймиз:

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b v'u\,dx. \qquad (18.1)$$

$$\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b, \quad u'dx = du, \ v'dx = dv$$

бўлгани учун (18.1) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,d\,v.$$

Бундан

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,d\,u. \qquad (18.2)$$

Бу формула *аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int_0^1 x e^{-x}\,dx.$$

Ечиш. $u = x$, $dv = e^{-x} - dx$ деб олайлик. Бундан $du = dx$, $v = \int e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\,d(-x) = -e^{-x}$.
(18.2) формула бўйича қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} -$$

$$-e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

Ечиш.

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x, \\ dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \quad v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 1 - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Аниқ интегралнинг юқори ўзгарувчи чегараси бўйича ҳосиласи нимага тенг? Тегишли теоремани исботланг.
2. Ньютон — Лейбниц формуласини ёзинг ва исботланг. Мисоллар келтиринг.
3. Аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш усули нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.
4. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш усули нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.
5. 2231 — 2268, 2275 — 2295- масалаларни ечинг.

16 §. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

Ҳар қандай узлуксиз функция учун ҳам унинг бошланғич функцияси чекли элементар функциядан иборат бўлавермайди. Бу каби аниқ интегралларни Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб ҳисоблаб бўлмайди. Бундай ҳолларда тақрибий ҳисоблаш усулларидан фойдаланилади. Аниқ интегралнинг интеграл йиғиндининг лимити сифатидаги таърифидан ва аниқ интегралнинг геометрик маъносидан келиб чиқиб бир нечта усулни баён қиламиз.

1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлсин. Ушбу

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

аниқ интегрални ҳисоблаш талаб қилинади. $[a; b]$ кесмани

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n = b$$

нуқталар билан n та тенг қисмга бўламиз.

Ҳар бир бўлакнинг узунлиги

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

бўлиши аниқ.

$f(x)$ функциянинг $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ ,\ \ldots,\ x_n$ нуқталардаги қийматини

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_i,\ \ldots,\ y_n$$

билан белгилаймиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_i = f(x_i),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

Қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_i\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Delta x,$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_i\Delta x + \ldots + y_n\Delta x = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x.$$

Бу йиғиндилардан ҳар бири $[a;\ b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси бўлиши равшан ва шунинг учун тақрибан интегрални ифодалайди:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_i + \ldots + y_{n-1}) = $$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i. \qquad (19.1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_i + \ldots + y_n) = $$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (19.2)$$

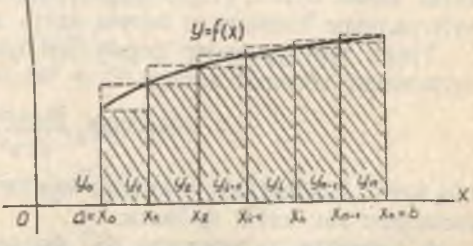
Биз аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг *тўғри тўртбурчак формуласини* ҳосил қилдик.

Агар $f(x) \geqslant 0$ ва $f(x)$ ўсувчи бўлса, у ҳолда (19.1) формула «ички» тўғри тўртбурчаклардан тузилган поғонали фигуранинг юзини ифодалайди, (19.2) формула эса «ташқи» тўғри тўртбурчаклардан тузилган поғонали фигуранинг юзини ифодалайди (148-шакл).

Тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича интегрални тақрибий ҳисоблашда йўл қўйиладиган хато бўлишлар сони n қанча катта бўлса, шунча кам бўлади, яъни $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ бўлиниш қадами қанча кичик бўлса, шунча кам бўлади. Тўғри тўртбурчаклар формуласининг абсолют хатоси (исботлаш мумкин)

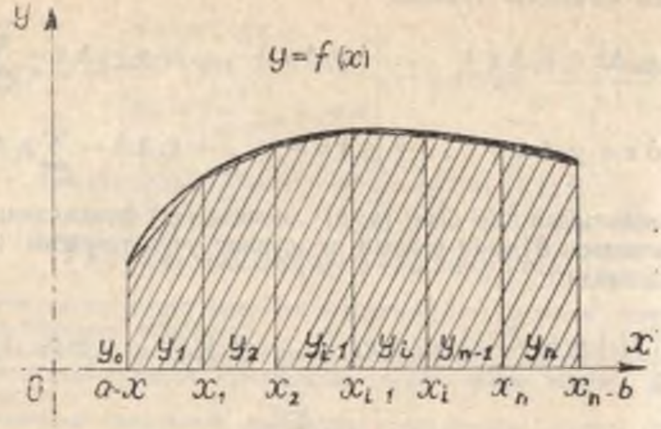
$$M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{4n} \qquad (19.3)$$

дан катта эмас, бу ерда M_1 $|f'(x)|$ нинг $[a,\ b]$ кесмадаги энг катта қиймати.



148-шакл.

2. Трапециялар формуласи. $[a,\ b]$ кесмани бўлишни аввалгидек қолдира-



149- шакл.

миз, лекин Δx хусусий интервалга мос келувчи $y = f(x)$ чизиқнинг ҳар бир ёйини бу ёйнинг четки нуқталарини туташтирувчи ватар билан алмаштирамиз. Бу берилган эгри чизиқли трапециянинг n та тўғри чизиқли трапециялар юзларининг йиғиндиси билан алмаштирилганини билдиради (149- шакл).

Бундай фигуранинг юзи эгри чизиқли трапециянинг юзини тўғри тўртбурчаклардан тузилган поғонали фигуранинг юзига қараганда анча аниқ ифодалаши геометрик жиҳатдан равшандир.

Хусусий интервалда ясалган ҳар бир трапециянинг юзи шу интервалда ясалган тегишли тўғри тўртбурчакларнинг юзлари йиғиндисининг ярмига тенг бўлгани учун бу юзларни қўшиб,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_i + \ldots + y_{n-1}\right) \tag{19.4}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу *трапециялар формуласидир.*

n сони қанча катта бўлса ва $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ бўлиниш қадами қанчалик кичик бўлса, (19.4) формуланинг ўнг қисмида ёзилган йиғинди интегралнинг қийматини шунча катта аниқлик билан беради.

Тўғри тўртбурчаклар формуласи ҳолидаги каби трапециялар формуласининг абсолют хатоси

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \tag{19.5}$$

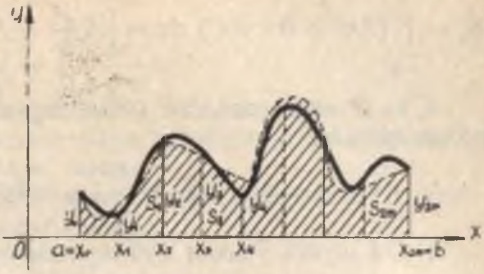
дан катта эмаслигини исботлаш мумкин, бунда M_2 $|f''(x)|$ нинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

3. Симпсон формуласи. Бу формула 1 ва 2- бандда кўрилган формулаларга қараганда янада аниқ натижаларга олиб келади. $[a, b]$

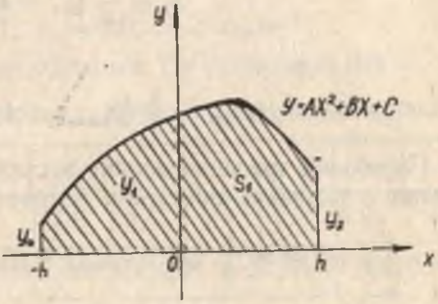
кесмани $n = 2m$ та жуфт миқдордаги тенг қисмларга бўламиз. Учта нуқта оламиз: $(x_0;\ y_0)$, $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ ва бу нуқталар орқали парабола ўтказамиз:

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

бу парабола билан $y = f(x)$ функциянинг $[x_0,\ x_2]$ кесмадаги графигини алмаштирамиз. Худди шунга ўхшаш $y = f(x)$ функциянинг графиги $[x_2,\ x_4]$, $[x_4,\ x_6]$ ва бошқа кесмаларда ўзгартирилади. Шундай қилиб берилган $y = f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини бу кесмаларда параболалар билан чегараланган эгри чизиқли трапециялар юзларининг йиғиндиси билан алмаштирамиз (150- шакл).



150- шакл.



151- шакл.

Бундай эгри чизиқли трапециялар *параболик трапециялар* дейилади.

Парабола тенгламасининг A, B, C коэффициентлари параболанинг берилган учта нуқтадан ўтиши шартидан аниқланади. Ҳисоблашларнинг қулай бўлиши учун координаталар бошини ўқларнинг йўналишини ўзгартирмасдан $[x_0,\ x_2]$ кесманинг ўртасига жойлаштирамиз (151- шакл).

A, B, C коэффициентларни параболанинг

$$(-h;\ y_0),\ (0;\ y_1),\ (h;\ y_2)$$

нуқталаридан ўтиши шартидан топамиз, бу ерда

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b--a}{2m},$$

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C,$$

$$y_1 = C,$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, аниқлаймиз:

$$A = \frac{1}{2h^2}\,(y_0 - 2y_1 + y_2),\ C = y_1,\ B = \frac{1}{2h}\,(y_2 - y_0).$$

Энди параболик трапециянинг S юзини аниқ интеграл ёрдамида аниқлаймиз:

$$S_1 = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2+6C).$$

A ва C нинг топилган қийматларини ўрнига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S_1 \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Худди шунга ўхшаш қуйидагиларни топиш мумкин:

$$S_2 = \frac{h}{3}\,(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$S_3 = \frac{h}{3}\,(y_4 + 4y_5 + y_6),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{2m} = \frac{h}{3}\,(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Параболик трапецияларнинг юзларини қўшиб, изланаётган интегралнинг тақрибий қийматини берувчи ифодани ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + y_{2m} + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) +$$
$$+ 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})),$$

бунда

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{2m}.$$

Шундай қилиб, интегрални тақрибий ҳисоблашнинг Симпсон формуласи (параболик трапециялар формуласи) бундай кўринишни олади

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\,(y_0 + y_{2m} + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) +$$
$$+ 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})). \qquad (19.6)$$

Агар $f(x)$ функция $[a;\,b]$ кесмада тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда Симпсон формуласининг абсолют хатоси

$$M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \qquad (19.7)$$

дан катта бўлмайди, бу ерда M_4 $|f^{\mathrm{IV}}(x)|$ нинг $[a,\ b]$ кесмадаги энг катта қиймати.

n^4 катталик n^2 га қараганда тезроқ ўсгани учун (19.6) Симпсон формуласининг хатолиги n ортиши билан (19.5) трапециялар формуласи хатоликларига қараганда анча тез камаяди. Симпсон формуласининг трапециялар формуласига қараганда каттароқ аниқлик билан олишга имкон бериши шу билан тушунтирилади.

Мисол. Ушбу

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

интегралнинг тақрибий қийматини тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари бўйича топинг.

Ечиш. Аввал берилган интегралнинг аниқ қийматини Ньютон—Лейбниц формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}69315.$$

[0,1] кесмани

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}2,\ \ldots,\ x_{10} = 1$$

нуқталар билан ўнта тенг қисмга бўламиз. Бу нуқталарда $f(x) = \frac{1}{1+x}$ функциянинг қийматини ҳисоблаймиз. Қуйидаги жадвални тузамиз:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	1,0000	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

а) Тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича.

$$n = 10,\ \Delta x = \frac{1-0}{10} = 0{,}1.$$

(19.1) формула бўйича ортиғи билан ҳосил қиламиз:

$$I \approx 0{,}1\ (1{,}0000 + 0{,}9091 + \ldots + 0{,}5263) = 0{,}71877.$$

(19.2) формула бўйича ками билан ҳосил қиламиз:

$$I \approx 0{,}1\ (0{,}9091 + 0{,}8333 + \ldots + 0{,}5000) = 0{,}66877.$$

Ҳосил қилинган натижанинг хатосини (19.3) формула бўйича баҳолаймиз:

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ бўлгани учун

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

бўлади. [0, 1] кесмада $|f'(x)| \leqslant 1$ га эга бўламиз, шунинг учун $M_1 = 1$. Демак, ҳосил қилинган натижанинг хатоси

$$\frac{M_1\,(b-a)^2}{4n} = \frac{1}{4\cdot 10} = 0{,}025$$

катталикдан ортмайди. Абсолют хато, яъни 0,69315 аниқ натижа билан 0,66877 тақрибий натижа орасидаги айирманинг абсолют катталиги 0,02435 га тенг. У 0,025 дан кичик. Бу олинган хатолик баҳосига мос келади.

б) Трапециялар формуласи бўйича. $n = 10$ бўлганда (19.4) формула бўйича

$$I \approx 0,1\left(\frac{1,0000+0,5000}{2}+0,9091+\ldots+0,5263\right)=0,69377$$

ни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган натижанинг хатосини (19.5) формула бўйича баҳолаймиз. $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ бўлгани учун $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ бўлади. $[0;\ 1]$ кесмада $|f''(x)| \leqslant 2$ га эга бўламиз, демак $M_2 = 2$. Шунинг учун олинган натижанинг хатоси

$$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}=\frac{2}{12\cdot 100}=\frac{1}{600}<0,002$$

катталикдан ортиқ бўлмайди.

Интегралнинг 0,69315 аниқ қиймати билан 0,69377 тақрибий қиймати орасидаги абсолют хато 0,00062 га тенг. Бу хатоликнинг олинган баҳосига мос келади.

в) Симпсон формуласи бўйича. $n = 2m = 10$ бўлганда $\Delta x = \frac{b-a}{3\cdot n} = \frac{1}{30}$, (19.6) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I \approx \frac{1}{30}\cdot(1,0000+0,5000+4\,(0,9091+0,7692+0,6667+0,5882+$$
$$+0,5263)+2\,(0,8333+0,7143+0,6250+0,5556))=0,693146.$$

Ҳосил қилинган натижанинг хатосини (19.7) формула бўйича баҳолаймиз. $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ бўлгани учун $f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$ ва $f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$ бўлади. $[0;\ 1]$ кесмада $|f^{\mathrm{IV}}(x)| \leqslant 24$ га эга бўламиз, демак $M_4 = 24$.

Шунинг учун ҳосил қилинган натижанинг хатоси

$$\frac{M_4\ (b-a)^5}{2880\cdot 10^4}=\frac{24}{2880\cdot 10000}\approx 0,000008$$

катталикдан ортмайди. Аниқ 0,69315 ва тақрибий 0,693146 натижалар орасидаги абсолют хато 0,000004 га тенг. Бу олинган хатолик баҳосидан кичикдир.

Учала натижани аниқ қиймат билан таққослаб, Симпсон формуласи трапециялар формуласидан ва айниқса, тўғри тўртбурчаклар формуласидан анча аниқ экан деган хулосага келамиз.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун тўғри тўртбурчаклар формуласини ёзинг. Мисол келтиринг.
2. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун трапециялар формуласини ёзинг. Мисол келтиринг.
3. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун Симпсон формуласини ёзинг. Мисол келтиринг.
4. 2347, 2348, 2350, 2351- масалаларни ечинг.

20-§. Аниқ интегралнинг геометрияга татбиқи

1. Ясси фигуралар юзларини ҳисоблаш.

а) Фигуралар юзларини Декарт координаталар системасида ҳисоблаш. 12-§ дан маълумки, агар $[a; b]$ кесмада функция $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқи ва $x = a$ ҳамда $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

га тенг бўлади. Агар $[a; b]$ кесмада $f(x) \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда аниқ интеграл $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$ бўлади (12-§, 3-хосса).

Абсолют катталигига кўра у тегишли трапециянинг юзига тенг:

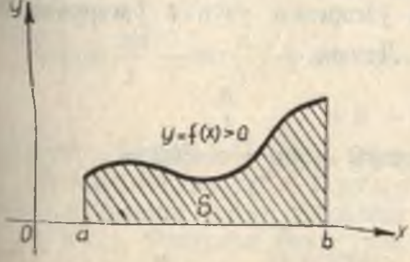
$$S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўз ишорасини чекли сон марта алмаштирса, у ҳолда бутун кесма бўйича олинган интегрални хусусий кесмалар бўйича олинган интеграллар йиғиндисига бўламиз. $f(x) > 0$ бўлган кесмаларда интеграл мусбат бўлади (152-шакл). $f(x) < 0$ бўлган кесмаларда интеграл манфий бўлади (153-шакл). Бутун кесма бўйича олинган интеграл Ox ўқидан юқорида ва қуйида ётувчи юзларнинг тегишли алгебраик йиғиндисини беради (154-шакл). Юзларнинг йиғиндисини ҳосил қилиш учун кўрсатилган кесмалар бўйича олинган интегралларнинг абсолют катталиклари йиғиндисини топиш ёки

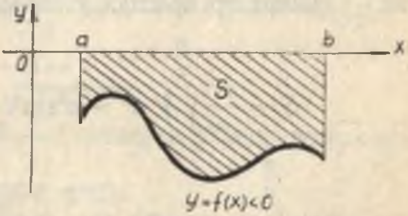
$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

интегрални ҳисоблашни кўрайлик.

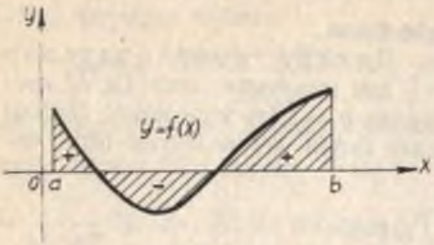
Агар $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ эгри чизиқлар ҳамда $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш керак бўлса (155-шакл), у ҳолда



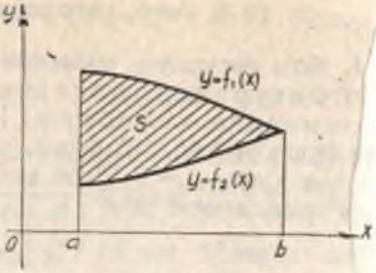
152-шакл.



153-шакл.



154- шакл.



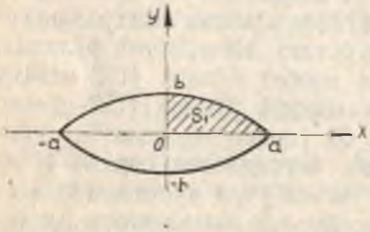
155- шакл.

$$f_1(x) \geqslant f_2(x)$$

шарт бажарилган фигуранинг юзи қуйидагига тенг:

$$S = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx.$$

1-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



156- шакл.

Ечиш. Эллипснинг координата ўқларига нисбатан симметриясидан фойдаланиб изланаётган фигуранинг юзи

$$S = 4S_1$$

эканини топамиз (156- шакл), шунинг учун

$$S = 4\int_0^a y\,dx,$$

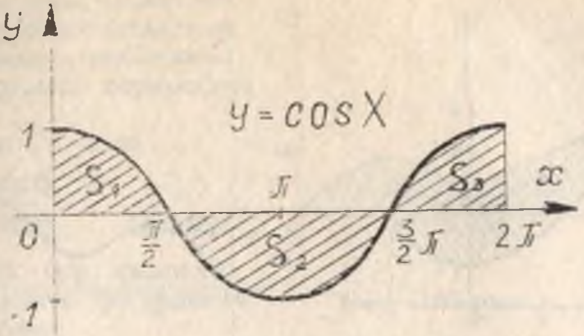
бунда $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ эллипснинг I чоракдаги тенгламаси. Шундай қилиб,

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

$x = a\sin t$ деб олиб, $dx = a\cos t\,dt$ ни ҳосил қиламиз. x ўзгарувчи $x = 0$ ва $x = a$ қийматлар орасида ўзгаргани учун t ўзгарувчи 0 ва $\frac{\pi}{2}$ қийматлар орасида ўзгаради. Демак,

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = 2ab\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$



157- шакл.

Шундай қилиб, эллипс билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \pi ab \text{ (кв. бирл.)}$$

га тенг. Хусусан, агар $a = b$ бўлса, доиранинг юзини ҳосил қиламиз:

$$S = \pi a^2 \text{ (кв.бирл.).}$$

2-мисол. $y = \cos x$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг, бунда $x \in [0,\ 2\pi]$.

Ечиш. $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ва $x \in \left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$ да $\cos x \geqslant 0$ ҳамда $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ да $\cos x \leqslant 0$ бўлгани учун (157-шакл)

$$S = \int_0^{2\pi} |\cos x|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 +$$

$$+ \left|\sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}\right| + \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - 0 + |-1 - 1| +$$

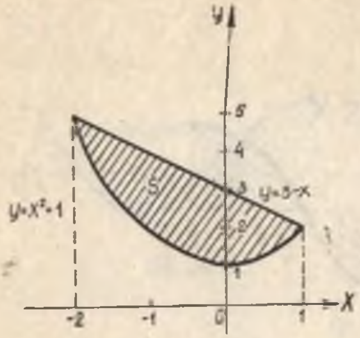
$$+ 0 - (-1) = 4$$

бўлади. Демак, $S = 4$ (кв. бирл.).

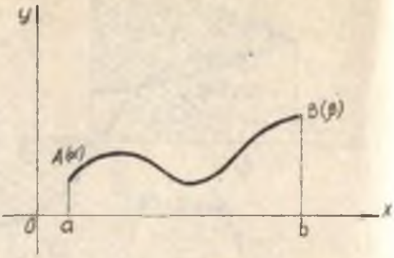
3-мисол. $y = x^2 + 1$ ва $y = 3 - x$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Фигурани ясаш учун аввал ушбу

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3 - x \end{cases}$$



158- шакл.



159- шакл.

системани ечиб, чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (158-шакл). Бундан $x^2+x-2=0$ ни ҳосил қиламиз. Тенгламани ечиб, $x_1=-2$, $x_2=1$ илдизларни топамиз. Мос ҳолда $y_1=5$, $y_2=2$. Демак, берилган чизиқлар: $A\,(-2;\,5)$, $B\,(1;\,2)$ нуқталарда кесишади. Демак,

$$S=\int_{-2}^{1}(3-x)\;dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)\;dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\;dx=$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2}\text{ (кв.бирл.)}.$$

Агар эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\x=\psi(t)\end{cases}$$

параметрик шаклда берилган чизиқ билан чегараланган бўлса (бунда $t\in[\alpha,\beta]$ ва $\varphi\,(\alpha)=a$, $\varphi\,(\beta)=b$), у ҳолда бу тенгламалар $[a,\,b]$ кесмадаги бирор $y=f\,(x)$ функцияни аниқлайди (159-шакл). Бинобарин, эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S=\int_{a}^{b}ydx$$

формула бўйича ҳисобланиши мумкин. Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$x=\varphi\,(t),\;dx=\varphi'\,(t)\,dt,$$
$$y=f\,(x)=f\,(\varphi\,(t))=\psi(t),$$
$$a=\varphi\,(\alpha),\;b=\varphi\,(\beta).$$

Шундай қилиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi\,(t)\cdot\varphi'\,(t)\,dt.$$

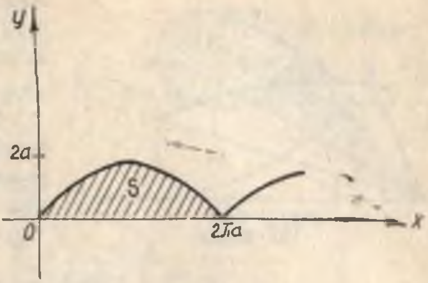
Бу формула чизиқ параметрик тенгламалар билан берилганда эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш формуласидир.

4-мисол. Ox ўқ ва

$x = a\,(t - \sin t)$,

$y = a\,(1 - \cos t)$, $\qquad t \in [0, 2\pi]$

циклоиданинг бир аркаси билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.



160- шакл.

Ечиш. Шу фигурани ясаймиз (160- шакл). Изланаётган фигуранинг S юзи $\int\limits_0^{2\pi a} y dx$ га тенг. Бу интегралда ўзгарувчини алмаштирамиз, бунда

$$x = a\,(t - \sin t), \quad dx = a\,(1 - \cos t)\,dt,$$
$$y = a\,(1 - \cos t)$$

деб оламиз. Циклоиданинг тенгламаларидан, x ўзгарувчининг 0 дан $2\pi a$ гача ўзгариши t параметрнинг 0 дан 2π гача ўзгаришига мос келиши келиб чиқади. Шундай қилиб, қуйидагиларни топамиз:

$$S = \int\limits_0^{2\pi a} y dx = \int\limits_0^{2\pi} a^2\,(1 - \cos t)^2\,dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2.$$

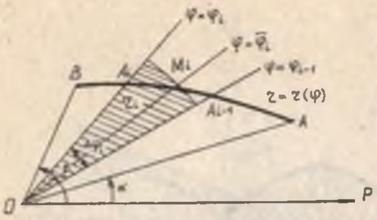
Демак, изланаётган фигуранинг юзи $S = 3\pi a^2$ (кв.бирл.).

б) Фигуралар юзларини қутб координаталарда ҳисоблаш. AB эгри чизиқ қутб координаталарида ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$)

$$\rho = \rho\,(\varphi)$$

формула билан берилган бўлсин, бунда $\rho\,(\varphi)$ функция $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз.

$\rho = \rho\,(\varphi)$ тенглама билан берилган эгри чизиқ ва қутб ўқлари билан α ҳамда β бурчак ҳосил қилувчи икки $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ нур билан чегараланган фигурани *эгри чизиқли сектор* деб атаймиз. Бу секторнинг юзини аниқлаймиз. Бунинг учун фигурани $\varphi = \alpha$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2, \ldots, \varphi = \varphi_i, \ldots, \varphi_n = \beta$ нурлар билан n та ихтиёрий қисм-



161-шакл.

ларга бўламиз (161-шакл). Ўтказилган нурлар орасидаги бурчакларни $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$ лар билан белгилаймиз.

Фараз қилайлик, S — бутун эгри чизиқли секторнинг юзи, ΔS_i эса $\varphi=\varphi_{i-1}$, $\varphi=\varphi_i$ нурлар билан чегараланган кичик эгри чизиқли секторнинг юзи бўлсин. У ҳолда

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i.$$

ΔS_i юзни ҳисоблаймиз. Бунинг учун ҳар бир кичик секторнинг ичида $\varphi=\bar{\varphi}_i$ нур $(\varphi_{i-1}\leqslant\bar{\varphi}_i\leqslant\varphi_i)$ ўтказамиз. Нурнинг эгри чизиқ билан кесишган нуқтасини M_i билгн белгилаймиз. У ҳолда $OM_i=$ $=\rho\,(\bar{\varphi}_i)=\rho_i$. Ҳар бир кичик $A_{i-1}OA_i$ эгри чизиқли секторни $\rho_i=$ $=\rho\,(\bar{\varphi}_i)$ радиус билан чизилган ташқи доиравий секторга алмаштирамиз.

Ҳар бир шундай доиравий секторнинг юзи

$$\frac{1}{2}\,\rho_i^2\,\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\,\rho^2\,(\bar{\varphi}_i)\,\Delta\varphi_i$$

га тенг ва кичик эгри чизиқли сектор юзининг тақрибий қийматини беради:

$$\Delta S_i\approx\frac{1}{2}\,\rho^2\,(\bar{\varphi}_i)\,\Delta\varphi_i.$$

У ҳолда ҳамма эгри чизиқли секторнинг S юзи тақрибан

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2\,(\bar{\varphi}_i)\,\Delta\varphi_i$$

га тенг бўлади. S юзнинг аниқ қиймати бу йиғиндининг $\Delta\varphi_i\to 0$ бўлгандаги лимитига тенг бўлади. Аммо бу йиғинди $[\alpha, \beta]$ кесмада $\rho^2\,(\varphi)$ функция учун интеграл йиғинди бўлади, шунинг учун унинг $\max\Delta\varphi_i\to 0$ бўлгандаги лимити аниқ интегралдир:

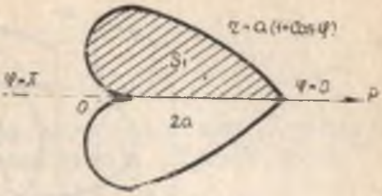
$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,(\varphi)\,d\varphi.$$

Демак, эгри чизиқли секторнинг S юзи ҳам шу аниқ интегралга тенг:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi.$$

5-мисол. $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ кардиоида билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

Ечиш. Шу чизиқ билан чегараланган фигурани ясаймиз (162-шакл). Чизмадаги эгри чизиқнинг симметриклигидан изланаётган фигуранинг S юзи



162- шакл.

$$S = 2S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\varphi$$

га тенглиги келиб чиқади, бунда φ ўзгарувчи $\alpha = 0$ қийматдан $\beta = \pi$ қийматгача ўзгаради.

Юзни ҳисоблаймиз:

$$S = \int\limits_0^{\pi} a^2\,(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Демак, изланаётган фигуранинг юзи қуйидагига тенг:

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2 \text{ (кв.бирл.)}.$$

2. Аниқ интегралнинг жисмлар ҳажмини хисоблашга татбиқи.

а) Жисмнинг ҳажмини кўндаланг кесимнинг юзи бўйича ҳисоблаш.

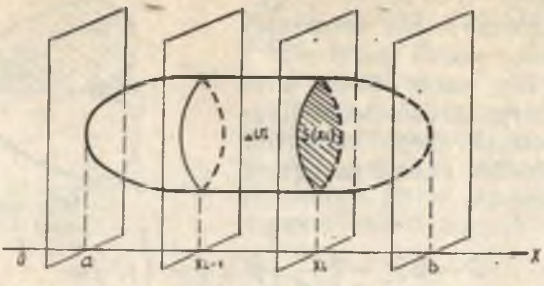
V ҳажми ҳисоблаб топилиши керак бўлган бирор жисмни қараб чиқамиз. Бу жисмнинг Ox ўқига перпендикуляр текислик билан кесимининг юзи маълум бўлсин. Бу юз кесувчи текисликнинг вазиятига боғлиқ бўлади, албатта, яъни x нинг функцияси бўлади: $S = S(x)$. Фараз қилайлик, $S(x)$ узлуксиз функция бўлсин. Берилган жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш учун бундай иш қиламиз. $[a, b]$ кесмани

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots,\ x_n = b$$

нуқталар билан ихтиёрий бўлакка бўламиз ва бу нуқталар орқали Ox ўқига перпендикуляр текисликлар ўтказамиз (163-шакл). Бу текисликлар жисмни n та қатламга ажратади, уларнинг ҳажмларини

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \ldots,\ \Delta V_i,\ \ldots,\ \Delta V_n$$

билан белгилаймиз. У ҳолда $V = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i$ бўлиши равшан, x_{i-1} ва x_i абс-



163- шакл.

циссали кесимлар ҳосил қилган қатламлардан бирини қараб чиқамиз. Унинг ΔV_i ҳажми баландлиги $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, асоси бирор ξ_i абсциссали жисмнинг кесими билан мос тушадиган тўғри цилиндрнинг ҳажмига тақрибан тенг, бунда $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ ва шунинг учун ҳам $S(\xi_i)$ юзга эга бўлади.

Бундай цилиндрнинг ҳажми $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ га тенг. Шундай қилиб, $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\,\Delta x_i$. Шунинг учун бутун жисмнинг ҳажми учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Жисм ҳажмининг аниқ қиймати $\Delta x_i \to 0$ бўлганда шу йиғиндининг лимитига тенг бўлади. Лекин бу йиғинди $[a, b]$ кесмада $S(x)$ функция учун интеграл йиғинди бўлади, шунинг учун $\max \Delta x_i \to 0$ бўлганда унинг лимити

$$\int_a^b S(x)\,dx$$

аниқ интеграл бўлади. Бинобарин, жисмнинг V ҳажми ҳам сон жиҳатдан шу аниқ интегралга тенг бўлади:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

6-мисол. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эллипсоид билан чегараланган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Эллипсоиднинг Ox ўқига перпендикуляр ва Oyz координаталар текислигидан x бирлик масофада ётувчи текислик билан кесимида

$$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,,\quad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

ярим ўқли

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади. Лекин бундай эллипснинг юзи $S=\pi b_1\cdot c_1$ бўлади, бу 20- § даги 1-мисолдан келиб чиқади. Шунинг учун

$$S(x)=\pi b\cdot c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Эллипснинг ҳажми қуйидагига тенг бўлади:

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b\cdot c\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=$$

$$=\pi bc\cdot\left(a-\frac{a}{3}+a-\frac{a}{3}\right)=\pi bc\cdot a\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

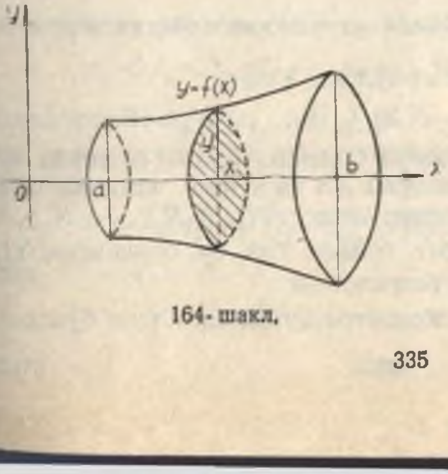
Шундай қилиб, $V=\frac{4}{3}\pi abc$ (куб. бирл.). Хусусан, агар $a=b=c$ бўлса, шарнинг ҳажмини ҳосил қиламиз: $V=\frac{4}{3}\pi a^3$ (куб. бирл.).

б) Айланиш жисмларининг ҳажмини ҳисоблаш. Агар қаралаётган жисм $y=f(x)$ чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлса, Ox ўқига перпендикуляр x абсциссали кесим доирадан иборат бўлиб, унинг радиуси $y=f(x)$ ординатага мос келади (164-шакл).

Бу ҳолда $S(x)=\pi y^2$ ёки $S(x)=\pi(f(x))^2$ ва Ox ўқи атрофида айланаётган жисмнинг ҳажми формуласига келамиз:

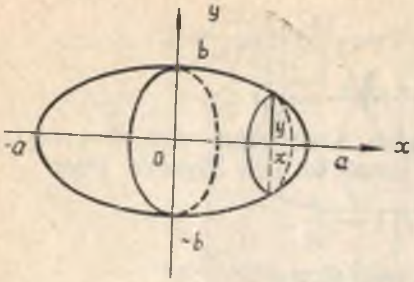
$$V=\pi\int_a^b y^2dx \text{ ёки } V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Oy ўқи атрофида айланаётган жисмнинг ҳажми формуласи ҳам худди шунга ўхшаш ҳосил қилиниши мумкин (165-шакл):



164- шакл.

165- шакл.



166- шакл.

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy \text{ ёки}$$

$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 \, dy,$$

бунда $x = \varphi(y)$ айланиш жисмини ҳосил қилувчи чизиқнинг тенгламаси, $c \leqslant y \leqslant d$.

1-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсни Ox ўқи ва Oy ўқи атрофида айлантириш билан ҳосил қилинган жисмларнинг ҳажмларини ҳисобланг.

Ечиш. Эллипснинг тенгламасидан қуйидагилар келиб чиқади (166- шакл):

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ ва } x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2).$$

Жисмнинг симметриясига кўра қуйидагини ёзиш мумкин:

$$V = 2V_1 = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2 \text{ (куб бирл.).}$$

Эллипсни Oy ўқи атрофида айлантириш билан ҳосил қилинган жисмнинг ҳажмини шунга ўхшаш ҳисоблаш мумкин:

$$V = 2V_1 = 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2)\, dy =$$

$$= 2\pi \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_a^b = \frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^3 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} a^2 b \text{ (куб бирл.).}$$

21-§. Ясси эгри чизиқ кесмаси узунлигини аниқ ҳисоблаш

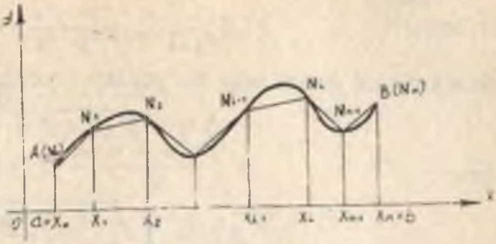
AB ясси эгри чизиқ берилган бўлсин. Уни

$$A = N_0,\ N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_{i-1},\ N_i,\ \ldots,\ N_n = B$$

нуқталар билан ихтиёрий n бўлакка бўламиз. Қўшни бўлиниш нуқталарини кесмалар билан туташтириб AB ёйга ички чизилган синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқ AN_1, N_1N_2, ..., $N_{i-1}N_i$, ..., $N_{n-1}B$ бўғинлардан иборат бўлади, биз бу бўғинларни Δl_1, Δl_2, ..., Δl_i, ..., Δl_n билан белгилаймиз.

У ҳолда синиқ чизиқнинг периметри қуйидагига тенг бўлади:

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$



167- шакл.

Эгри чизиқ бўғинлари сони n нинг ортиши ва бу бўғинлари узунлиги Δl_i нинг камайиши билан бу периметрнинг лимити AB эгри чизиқнинг узунлигига яқинлашиши равшан. Шунинг учун қуйидагича таъриф берамиз.

Таъриф. AB эгри чизиқнинг l *узунлиги* деб AB эгри чизиққа ички чизилган синиқ чизиқ периметрининг синиқ чизиқ бўғинлари сони чексиз ортганда ва энг катта бўғиннинг узунлиги нолга интилгандаги лимитига айтилади:

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \Delta l_i. \tag{21.1}$$

Бунда (21.1) лимит мавжуд ва у ички чизилган синиқ чизиқнинг танланишига боғлиқ эмас деб, фараз қилинади.

(21.1) лимитга эга бўлган эгри чизиқлар *тўғриланувчи эгри чизиқлар* дейилади.

AB эгри чизиқ $y = f(x)$ тенглама билан берилган бўлсин, бу ерда $x \in [a, b]$. Агар $f(x)$ функция $f'(x)$ функция билан бирга $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда AB эгри чизиқнинг l узунлиги қуйидаги формула билан ифодаланишини исботлаймиз:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{21.2}$$

AB эгри чизиқнинг

$$A = N_0,\ N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_{i-1},\ N_i,\ \ldots,\ N_n = B$$

бўлиниш нуқталари мос равишда

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ \ldots,\ x_n = b$$

абсциссаларга эга бўлсин (167- шакл), бунда

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n.$$

Текисликдаги $N_{i-1}(x_{i-1}; y_{i-1})$ ва $N_i(x_i; y_i)$ нуқталар орасидаги масофа формуласига кўра синиқ чизиқнинг i- бўғини узунлиги қуйидагига тенг:

$$\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

бу ерда

$$y_i = f(x_i), \quad y_{i-1} = f(x_{i-1}).$$

Ушбу

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \; y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$$

белгилашни киритамиз ва шулар асосида қайта ёзамиз:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

ёки

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

Лагранжнинг $[x_{i-1}, x_i]$ кесмага қўлланган чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i), \text{ бунда } x_{i-1} < \xi_i < x_i .$$

Шунинг учун Δl_i бўғиннинг узунлигини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i .$$

Шундай қилиб, синиқ чизиқнинг периметри қуйидагича бўлади:

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i . \qquad (21.3)$$

Бу йиғинди $[a, b]$ кесмада $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ функция учун тузилган интеграл йиғинди бўлади. $f'(x)$ функциянинг узлуксизлигидан бу функция шу кесмада узлуксиз бўлади, шунинг учун $\max \Delta x_i \to 0$ да аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра (21.3) интеграл йиғинди ушбу

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

аниқ интегралга тенг лимитга эга бўлади. Иккинчи томондан l эгри чизиқнинг узунлиги (21.3) синиқ чизиқ l_n периметрининг $\max \Delta l_i \to 0$ даги лимитига тенг. Бироқ

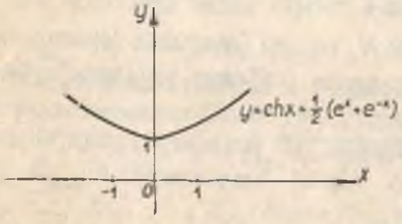
$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

бўлгани учун $\Delta l_i \to 0$ да $\Delta x_i \to 0$ бўлади. Шунинг учун қуйидагига эга бўламиз:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \qquad (21.4)$$

1-мисол. Занжир чизиқ ёйи узунлигини ҳисобланг:



168- шакл.

$$y = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in [0,1] \qquad \text{(168-расм).}$$

Ечиш. Топамиз: $y' = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Демак, $1 + (y')^2 = 1 + \mathrm{sh}^2x = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \mathrm{ch}^2x.$$

(21.4) формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\mathrm{ch}^2x}\, dx = \int_0^1 \mathrm{ch}x dx =$$

$$= \mathrm{sh}x \Big|_0^1 = \mathrm{sh}1 - \mathrm{sh}0 = \mathrm{sh}1 \approx 1,17.$$

Шундай қилиб, $l \approx 1,17$ (узунлик бирл.). AB эгри чизиқ ушбу параметрик тенглама билан берилган бўлсин:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Бунда $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар ҳамда уларнинг ҳосилалари узлуксиз деб фараз қиламиз. (21.4) интегралда $x = x(t)$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. Бунда $y = y(t)$ бўлгани учун параметрик кўринишда берилган функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра ушбуни топамиз:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} .$$

$dx = x'(t)\, dt$ эканини эътиборга олиб, (21.4) формулада ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot x'(t)\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt,$$

бунда

$$a = x(\alpha), \quad b = x(\beta).$$

Шундай қилиб, параметрик формула билан берилган эгри чизиқ узунлигини ҳисоблаш формуласига эга бўламиз:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \qquad (21.5)$$

2-мисол. Циклоида битта арки узунлигини ҳисобланг:

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a\,(1-\cos t),$$

бу ерда $0 < t \leqslant 2\pi$.

Ечиш. $\dot{x} = a\,(1-\cos t)$,

$$\dot{y} = a\sin t$$

бўлгани учун

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{a^2\,(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} =$$
$$= a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} = a\sqrt{2\,(1-\cos t)} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

x ўзгарувчи 0 дан $2\pi a$ гача ўзгарганда t параметр 0 дан 2π гача ўзгаради. Демак, эгри чизиқнинг узунлиги қуйидагича бўлади:

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\;dt = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$
$$= 4a + 4a = 8a \text{ (узунлик бирл.)}$$

(20-§ даги 3-мисолга доир чизма).

Энди қутб координатада $\rho = \rho\,(\varphi)$, бунда $\varphi \in [\alpha, \beta]$ тенглама билан берилган эгри чизиқ узунлиги учун ифода тузамиз. Бунда $\rho\,(\varphi)$ ва $\rho'\,(\varphi)$ $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз деб фараз қиламиз. Қутб координатадан тўғри бурчакли координатага ўтамиз. Параметр сифатида қутб бурчаги φ ни олиб, бу эгри чизиқни параметрик кўринишда бериш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, қутб ва декарт координаталари орасида

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

боғланиш мавжуд бўлгани учун $\rho = \rho\,(\varphi)$ эканини эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = \rho\,(\varphi)\,\cos\varphi, \quad y = \rho\,(\varphi)\sin\varphi.$$
$$x'_\varphi = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \quad y'_\varphi = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi$$

бўлгани учун (21.5) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2}\;d\varphi =$$
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2}\;d\varphi.$$

Соддалаштиргандан сўнг

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \qquad (21.6)$$

3-мисол. $\rho = a\,(1+\cos\varphi)$ кардиоиданинг узунлигини ҳисобланг:

Ечиш. Кардиоиданинг қутб координатасига нисбатан симметрик эканлиги 20-§ нинг 4-мисолидаги чизмадан кўриниб турибди. Қутб бурчаги φ ни 0 дан π гача ўзгартириш билан биз (21.6) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2(1+\cos\varphi)'^2}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a \text{ (узунлик бирл.).}$$

22-§. Эгри чизиқ ёйи узунлигининг дифференциали

Ёй узунлиги учун (21.4) формулада интеграллашнинг қуйи чегараси a ўзгармасдан, интеграллаш юқори чегараси ўзгарсин. Уни x ҳарфи билан, интеграллаш ўзгарувчисини t ҳарфи билан белгилаймиз. Равшанки, l ёйнинг узунлиги интеграллаш юқори чегарасининг функцияси бўлади, шунинг учун (21.4) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'^2(t)}\, dt.$$

Интеграллаш чегарасининг аниқ интегралнинг юқори ўзгарувчи бўйича ҳосиласи ҳақидаги теоремаси (15-§) ни қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

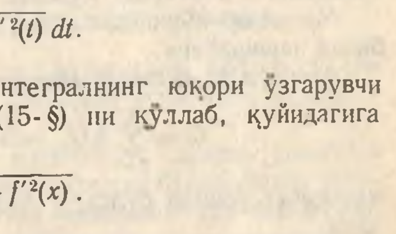
$$l'(x) = \sqrt{1+f'^2(x)}.$$

Бундан эгри чизиқ ёйи узунлигининг дифференциалини топамиз:

$$dl = l'(x)\,dx = \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ бўлгани учун $dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx,$

$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$



169-шакл.

Бу формуладан фойдаланиб ва dy дифференциал функция уринма ординатасининг орттирмасига тенглигини ҳисобга олиб, эгри чизиқ ёйи узунлиги дифференциалининг қуйидаги геометрик маъносига келамиз:

dl эгри чизиқ ёйи узунлигининг дифференциали уринманинг x абсциссали M уриниш нуқтасидан $x+\Delta x = x+dx$ абсциссали N нуқтагача бўлган кесмаси узунлигига тенг (169-шакл).

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Чизиқлар параметрик тенгламалар билан берилган ҳолда ясси фигураларнинг юзи Декарт координаталарда қандай ҳисобланади?
2. Қутб координаталар системасида берилган эгри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли секторнинг юзини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
3. Жисмнинг маълум кўндаланг кесими юзи бўйича ҳажмини ҳисоблаш учун формула келтириб чиқаринг. Мисол келтиринг.
4. Айланиш жисмлари ҳажмини ҳисоблаш учун формула келтириб чиқаринг.
5. Декарт координаталарида эгри чизиқ ёйи узунлигини ҳисоблаш учун формула келтириб чиқаринг. Мисол келтиринг.
6. Қутб координаталарида эгри чизиқ ёйи узунлигини ҳисоблаш учун формула келтириб чиқаринг. Мисол келтиринг.
7. Параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиқ ёйи узунлигини ҳисоблаш учун формула келтириб чиқаринг. Мисол келтиринг.
8. Ёйнинг дифференциали учун формула келтириб чиқаринг. Унинг геометрик маъноси нимадан иборат?
9. 2455 — 2460, 2490 — 2500, 2507 — 2510, 2519 — 2525, 2531 — 2535, 2545— — 2547, 2555 — 2560- масалаларни ечинг.

23- §. Аниқ интегралнинг механика ва физика масалаларини ечишга татбиқи

Механика ва физиканинг кўпгина масалаларини аниқ интегрални ҳисоблашга келтириш мумкин.

Мисоллар кўришдан аввал аддитив ва чизиқли миқдор тушунчаси билан танишайлик.

Агар $[a, b]$ кесмани ихтиёрий равишда n та қисмга бўлганимизда

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_n$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда Q миқдор *аддитив миқдор* дейилади.

Агар $[x_{i-1}, x_i]$ кесмага мос ΔQ_i миқдор кесманинг узунлиги $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ га тақрибан пропорционал бўлса, яъни

$$\Delta Q_i \approx k \Delta x_i \tag{23.1}$$

бўлса, у ҳолда ΔQ_i миқдор *чизиқли миқдор* дейилади, бунда k миқдор x ўзгарувчининг $k = \varphi(x)$ узлуксиз функцияси, шунинг учун (23.1) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta Q_i \approx \varphi(x_i) \Delta x_i .$$

Шундай қилиб, аддитив ва чизиқли бўлган Q миқдор учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

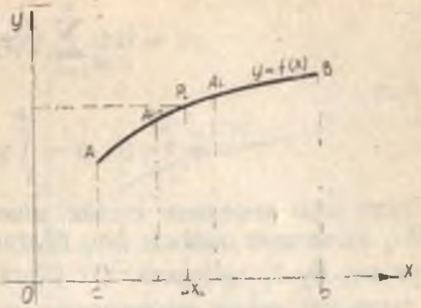
$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \Delta x_i .$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонида $\varphi(x)$ функция учун интеграл йиғинди турибди. $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ да лимитга ўтиб миқдорнинг аниқ интеграл орқали ифодаланган аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \Delta x_i = \int_a^b \varphi(x)\, dx .$$

Интеграл остидаги $\varphi(x)\,dx$ миқдор Q миқдорнинг элементи дейилади ва у $dQ = \varphi(x)\,dx$ билан белгиланади. Агар элемент ифодаси топилган бўлса, интеграл йиғинди тузмасдан ва лимитни ҳисобламай туриб Q миқдорни ҳисоблаш мумкин. Бунда dQ элементдан олинган аниқ интегрални ҳисоблаш етарли:

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$



170- шакл.

Энди аниқ масалаларни кўришга ўтайлик.

1. **Эгри чизиқ ва текис шаклнинг статик моментлари.** Бирор l ўқдан r масофада бўлган m массали моддий нуқтанинг l ўқига нисбатан статик моменти деб, $M_l = mr$ миқдорга айтилади.

Текисликдаги l ўқдан $r_1, r_2, \ldots, r_n$ масофада бўлган мос равишда $m_1, m_2, \ldots, m_n$ массали n та моддий нуқталарнинг l ўққа нисбатан статик моменти деб $M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$ миқдорга айтилади.

Охирги тенглик статик моментнинг аддитивлик хоссасига эга эканлигини кўрсатади, ва демак, уни ҳисоблаш учун аниқ интегралдан фойдаланиш мумкин.

а) Эгри чизиқнинг статик моменти. Фараз қилайлик Oxy текислигида моддий AB эгри чизиқ берилган бўлиб, унинг тенгламаси $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ бўлсин. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги чизиқли зичлик $\gamma = \gamma(x)$ x ўзгарувчининг узлуксиз функцияси бўлсин (170- шакл).

Берилган эгри чизиқнинг Ox ўқига нисбатан статик моменти M_x ни ҳисоблаш учун уни n та кичик бўлакчаларга бўламиз: Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. Ҳар бир кичик Δl_i $(i = \overline{1,n})$ бўлакчада ихтиёрий $P_i(x_i, y_i)$ нуқта танлаймиз. Зичликни ҳар бир кичик Δl_i бўлакчада ўзгармас ва унинг P_i нуқтадаги қийматига тенг деб, Δl_i бўлакчанинг массаси Δm_i учун қуйидаги тақрибий ифодани ҳосил қиламиз:

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i)\,\Delta l_i. \tag{23.2}$$

У ҳолда AB эгри чизиқнинг массаси m учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\,\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot \Delta x_i.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $\gamma(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}$ функция учун интеграл йиғинди турибди. Шунинг учун $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ да лимитга ўтиб моддий AB эгри чизиқ массасининг аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} \gamma(x_i)\,\Delta l_i = \int_a^b \gamma(x)\,dl$$

ёки

$$m = \int_a^b \gamma(x)\,dl = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx. \qquad (23.3)$$

Энди эгри чизиқнинг статик моментини топишга ўтайлик. Ҳар бир Δl_i бўлакчани массаси Δm_i бўлган моддий P_i нуқта билан алмаштирамиз. Бу P_i нуқтанинг Ox ўқига нисбатан статик моменти Δl_i бўлакчанинг статик моментининг тақрибий қийматини беради:

$$(M_x)_i \approx y_i\,\Delta m_i \approx y_i \gamma(x_i)\,\Delta l_i.$$

AB эгри чизиқнинг M_x статик моменти Δl_i бўлакчаларнинг статик моментларининг йиғиндисига тенг бўлгани сабабли (аддитивлик хоссасига кўра) M_x учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\,y_i\,\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\,y_i \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

Ҳосил қилинган тенгликнинг ўнг томонида

$$\gamma(x)\,y \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}$$

функция учун интеграл йиғинди турибди. $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ да лимитга ўтсак, эгри чизиқнинг Ox ўқига нисбатан статик моментини ҳосил қиламиз:

$$M_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} \gamma(x_i)\,y_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

ёки

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) \cdot y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Бу формулани қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M_x = \int_a^b \gamma(x)\,y\,dl. \qquad (23.4)$$

бу ерда $y = f(x)$ AB чизиқнинг тенгламаси,

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Юқоридаги каби мулоҳазалар асосида AB эгри чизиқнинг Oy ўқига нисбатан статик моменти

$$M_y = \int_a^b \gamma(x)\,x\,dl \qquad (23.5)$$

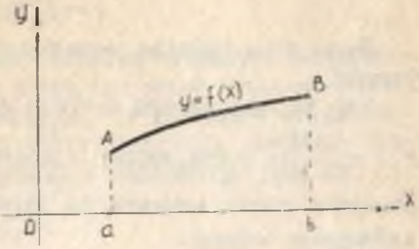
бўлишини кўриш қийин эмас.

Агар моддий эгри чизиқ бир жинсли бўлса, унинг зичлиги $\gamma(x) = \gamma$ ўзгармас сон бўлади. Шу сабабли статик моментлар учун (23.4) ва (23.5) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$M_x = \gamma \int_a^b ydl, \quad M_y = \gamma \int_a^b xdl,$$

бунда

$$y = f(x), \; dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$



171-шакл.

б) **Текис шаклнинг статик моменти.** Oxy текисликда $y = f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқи ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция берилган бўлсин. Бу шаклнинг зичлиги ҳар бир нуқтада x координатанинг берилган $\gamma(x)$ узлуксиз функцияси бўлсин (171-шакл).

Берилган шаклнинг Ox ўқига нисбатан M_x статик моментини топиш учун уни Oy ўқига параллел чизиқлар билан n та кичик Δs_1, Δs_2, . . . , Δs_n юзчаларга бўламиз (юзчаларнинг кенглиги мос равишда Δx_1, Δx_2, . . . , Δx_n). Ҳар бир Δs_i юзчанинг зичлиги ўзгармас ва у берилган зичликнинг $P_i\left(x_i, \frac{y_i}{2}\right)$ нуқтадаги қийматига тенг деб ҳисобласак, Δs_i юзчанинг массаси учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i) \cdot \Delta s_i,$$

бунда

$$\Delta s_i \approx y_i \Delta x_i. \tag{23.6}$$

У ҳолда эгри чизиқли трапециянинг массаси m қуйидагича бўлади:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\; y_i \,\Delta x_i.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $\gamma(x) \cdot y$ функция учун интеграл йиғинди турибди. Шунинг учун $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ да лимитга ўтиб эгри чизиқли трапециянинг аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \Delta s_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\, y_i \,\Delta x_i$$

ёки

$$m = \int_a \gamma(x) ydx, \tag{23.7}$$

бунда

$$y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b.$$

Энди эгри чизиқли трапециянинг статик моментини ҳисоблашга ўтамиз.

Ҳар бир Δs_i юзчани массаси Δm_i ((23.6) га қаранг) бўлган моддий $P_i\left(x_i;\ \frac{y_i}{2}\right)$ нуқта билан алмаштирамиз. Бу нуқтанинг Ox ўқига нисбатан статик моменти Δs_i юзчанинг статик моментининг тақрибий қийматини беради:

$$(M_x)_i \approx \frac{y_i}{2}\cdot \Delta m_i \approx \gamma(x_i)\ \frac{y_i}{2}\ \Delta s_i \approx \gamma(x_i)\ \frac{y_i^2}{2}\ \Delta x_i.$$

Эгри чизиқли трапециянинг M_x статик моменти Δs_i юзчаларнинг статик моментларининг йиғиндисига тенг бўлгани учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\cdot \frac{y_i^2}{2}\ \Delta x_i.$$

Бу ифоданинг ўнг томонида $\frac{1}{2}\ \gamma(x)\, y^2$ функция учун интеграл йиғинди турибди. Шунинг учун $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ да лимитга ўтиб эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқига нисбатан статик моментининг аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$M_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\ \frac{y_i^2}{2}\ \Delta x_i$$

ёки

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\, y^2\, dx, \tag{23.8}$$

бунда

$$y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b.$$

Юқоридаги каби мулоҳазалар асосида эгри чизиқли трапециянинг Oy ўқига нисбатан статик моментини ҳисоблаш учун қуйидаги

$$M_y = \int_a^b \gamma(x)\, x\cdot y dx \tag{23.9}$$

формулани ҳосил қилиш мумкин.

Агар эгри чизиқли трапеция бир жинсли бўлса, зичлик $\gamma(x) = \gamma$ ўзгармас сон бўлади, ва демак, (23.8), (23.9) формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$M_x = \frac{1}{2}\ \gamma \int_a^b y^2\ dx,\quad M_y = \gamma \int_a^b xy\ dx,$$

бунда

$$y = f(x).$$

2. Эгри чизиқ ва текис шаклнинг оғирлик маркази. Механикадан маълумки, агар шаклнинг (эгри чизиқ ёки текис шаклнинг) массасини бирор $P_0(x_0, y_0)$ нуқтага жамласак, бу шаклнинг ўққа нисбатан статик моменти $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг ўша ўққа нисбатан статик моментига тенг бўлади, яъни қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\begin{cases} M_x = y_0 m, \\ M_y = x_0 m, \end{cases} \qquad (23.10)$$

бунда m — $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги масса. Бундай нуқта текис шаклнинг оғирлик маркази дейилади. (23.10) формуладан оғирлик маркази $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг координаталарини топамиз:

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m}. \qquad (23.11)$$

(23.11) формулаларни эгри чизиққа ва эгри чизиқли трапецияга қўллаймиз.

а) Эгри чизиқнинг оғирлик маркази. $a \leqslant x \leqslant b$ даги $y = f(x)$ эгри чизиқ учун m, M_x ва M_y лар учун ифодаларни (23.3), (23.4) ва (23.5) формулалардан оламиз ва уларни (23.11) га қўйиб, эгри чизиқнинг оғирлик маркази координаталарини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = \frac{\int\limits_a^b x\gamma(x)\,dl}{\int\limits_a^b \gamma(x)\,dl}, \quad y_0 = \frac{\int\limits_a^b y\,\gamma(x)\,dl}{\int\limits_a^b \gamma(x)\,dl}, \qquad (23.12)$$

бунда $y = f(x)$—эгри чизиқ тенгламаси, $dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ — ёй элементи, $\gamma(x)$ — эгри чизиқнинг зичлиги.

Агар зичлик функцияси $\gamma(x) = \gamma$ ўзгармас сон бўлса, (23.12) ифодалар қуйидагича бўлади:

$$x_0 = \frac{\int\limits_a^b x\,dl}{\int\limits_a^b dl}, \quad y_0 = \frac{\int\limits_a^b y\,dl}{\int\limits_a^b dl}. \qquad (22.13)$$

б) Эгри чизиқли трапециянинг оғирлик маркази. $y = f(x)$ чизиқ Ox ўқи ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция учун m, M_x, M_y ларнинг ифодаларини (23.7), (23.8) ва (23.9) формулалардан олиб, уларни (23.11) га қўйиб, эгри чизиқли трапециянинг оғирлик марказининг координаталарини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = \frac{\int\limits_a^b \gamma(x)\, xydx}{\int\limits_a^b \gamma(x)\cdot ydx}, \quad y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma(x)\, y^2\, dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)\, ydx}, \tag{23.14}$$

бунда $\gamma(x)$ текис шакл зичлиги.

Агар зичлик ўзгармас миқдор бўлса, текис шакл бир жинсли ва (23.14) формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_0 = \frac{\int\limits_a^b xydx}{\int\limits_a^b ydx}, \quad y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2dx}{\int\limits_a^b ydx}. \tag{23.15}$$

3. Ишни ҳисоблаш. Моддий нуқта ўзгарувчан $\vec{F}$ куч таъсирида тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилаётган бўлсин. Ox ўқини нуқта ҳаракатланаётган тўғри чизиқ бўйлаб жойлаштирамиз. Нуқтанинг бошланғич вазиятига $x = a$, охирги вазиятига эса $x = b$ координата мос келсин. $\vec{F}$ куч нуқтадан нуқтага узлуксиз ўзгара борсин, яъни x координатанинг узлуксиз функцияси бўлсин: $\vec{F} = \vec{F}(x)$. $[a, b]$ кесмани узунликлари мос равишда Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ бўлган n та интервалга бўлайлик. Ҳар бир қисмий интервалда ихтиёрий $P_i(x_i)$ нуқталарни танлаймиз. Ҳар бир қисмий интервалда кучни ўзгармас ва у $\vec{F}$ нинг танланган P_i нуқтадаги қийматига тенг деб, кучнинг i-интервалда бажарган иши ΔA_i учун тақрибий қийматни ҳосил қиламиз:

$$\Delta A_i \approx \vec{F}(x_i)\,\Delta x_i.$$

Демак, $\vec{F}$ кучнинг $[a, b]$ кесмада бажарган иши

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i)\,\Delta x_i.$$

Ифоданинг ўнг томонида $\vec{F}(x)$ функция учун интеграл йиғинди турибди. $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ да лимитга ўтиб $\vec{F}(x)$ кучнинг $[a, b]$ кесмада бажарган ишининг аниқ қийматини ҳосил қиламиз:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{a=1}^{n} \vec{F}(x_i)\,\Delta x_i$$

ёки

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx. \tag{23.16}$$

1-мисол. Координата ўқларига нисбатан $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $|x|\leqslant R$, ярим айлананинг статик моментларини топинг.

Ечиш. $\gamma=1$ деб ҳисоблаб, статик моментларни (23.4), (23.5) формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$M_x=\int_{-R}^{R} y\,dl=\int_{-R}^{R} y\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad M_y=\int_{-R}^{R} x\,dl=\int_{-R}^{R} x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ бўлганлиги учун $dl=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Шундай қилиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M_x=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=R\int_{-R}^{R}dx=Rx\Big|_{-R}^{R}=2R^2,$$

$$M_y=\int_{-R}^{R}\frac{x\cdot R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=-R\sqrt{R^2-x^2}\Big|_{-R}^{R}=0.$$

2-мисол. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг координата ўқларига нисбатан статик моментларини ҳисобланг.

Ечиш. $\gamma=1$ деб статик моментларни (23.8) ва (23.9) формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=-\frac{ab^2}{6}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\Big|_0^a=\frac{ab^2}{6},$$

$$M_y=\int_0^a xy\,dx=\int_0^a x\cdot b\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{b}{a}\int_0^a(ax-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{b}{a}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{a^2b}{6}.$$

3-мисол. $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $|x|\leqslant R$ ярим айлананинг оғирлик марказини топинг.

Ечиш. $\gamma=1$ деб оғирлик марказининг координаталарини (23.12) формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$x_0=\frac{\int_{-R}^{R}x\,dl}{\int_{-R}^{R}dl},\quad y_0=\frac{\int_{-R}^{R}y\,dl}{\int_{-R}^{R}dl},$$

бунда $dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$ (1-мисолдан).

Қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$\int_{-R}^{R} dl = R\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = R\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_{-R}^{R} = R\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = R\pi.$$

$$M_y = \int_{-R}^{R} x\,dl = 0 \text{ (1- мисолдан)},$$

$$M_x = \int_{-R}^{R} y\,dl = 2R^2 \text{ (1- мисолдан)}.$$

Шундай қилиб, ярим айлана оғирлик марказининг координаталари:

$$x_0 = 0,\ y_0 = \frac{2R}{\pi}.$$

4-мисол. 2-мисолдаги учбурчакнинг оғирлик марказини топинг.

Ечиш. $\gamma = 1$ деб учбурчакнинг оғирлик марказини (23.14) формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$x_0 = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx},\quad y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx}{\int_0^a y\,dx}.$$

Ҳисоблаймиз:

$$\int_0^a y\,dx = \int_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right)dx = b\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)\Bigg|_0^a = b\left(a-\frac{a}{2}\right) = \frac{ab}{2}.$$

$\left(\int_0^a y\,dx = S_\Delta\right.$ бўлгани учун учбурчакнинг юзини аниқ интегралдан фойдаланмай туриб ҳам ҳисоблаш мумкин эди).

$$M_y = \int_0^a xy\,dx = \frac{a^2b}{6} \text{ (2- мисолдан)},$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{ab^2}{6} \text{ (2- мисолдан)}.$$

Шундай қилиб, 2-мисолдаги учбурчакнинг оғирлик марказининг координаталари

$$x_0 = \frac{a}{3},\ y_0 = \frac{b}{3}.$$

5-мисол. Агар пружина 1 Н куч остида 1 см чўзилиши маълум бўлса, уни 4 см чўзиш учун қанча иш бажариш керак?

Ечиш. Гук қонунига кўра пружинани x м га чўзувчи куч $F = kx$. Пропорционаллик коэффициенти k ни берилган шартлардан топамиз: агар $x = 0{,}01$ м бўлса $F = 1$ Н, демак, $k = \frac{1}{0{,}01} = 100$ ва $F = 100\ x$. У ҳолда иш (23.16) формуладан топилади:

$$A = \int_{0}^{0{,}01} 100\ xdx = 50 \cdot x^2 \Big|_{0}^{0{,}04} = 0{,}08\ (\text{Ж}).$$

24-§. Хосмас интеграллар

Аниқ интеграл тушунчасини келтириб чиқаришда биз интеграл остидаги функциянинг берилган кесмада узлуксизлиги шартидан келиб чиққан эдик. Шу билан бирга бу шартни қаноатлантирмайдиган интегралларни аниқлашнинг зарурлиги билан боғлиқ масалалар учрайди. Бундай интеграллар хосмас интеграллар деб аталади. Хосмас интегралларнинг иккита турини кўриб чиқамиз.

1. Чегараси чексиз хосмас интеграллар.

Таъриф. Ярим $[a, +\infty)$ интервалда узлуксиз бўлган функциянинг *хосмас интеграли* қуйидагича белгиланади:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

ва ушбу тенглик билан аниқланади:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx. \qquad (24.1)$$

Агар (24.1) формулада ўнгда турган лимит мавжуд бўлса, у ҳолда хосмас интеграл *яқинлашувчи* дейилади. Бу лимит интегралнинг қиймати сифатида қабул қилинади.

Агарда кўрсатилган лимит мавжуд бўлмаса, хосмас интеграл *узоқлашувчи* деб аталади.

Агар интеграл остидаги $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функция маълум бўлса, у ҳолда хосмас интегралнинг яқинлашувчими ёки йўқми эканини аниқлаш мумкин. Ньютон — Лейбниц формулалари ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} F(x) \Big|_{a}^{b} = \lim_{b \to +\infty} [F(b) - F(a)] =$$
$$= F(+\infty) - F(a).$$

Шундай қилиб, агар $x \to +\infty$ да $F(x)$ бошланғич функциянинг лимити мавжуд бўлса (биз уни $F(+\infty)$ билан белгиладик), у ҳолда хосмас интеграл яқинлашувчи, агар бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

1-мисол. $f(x) = e^{-kx}$ функция учун

$$F(x) = -\frac{1}{k} e^{-kx}$$

функция бошланғич функция бўлади.

Ньютон — Лейбниц формуласини қўллаймиз:

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-kx}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\right)\Bigg|_{0}^{b}=-\frac{1}{k}\lim_{b\to+\infty}(e^{-kb}-1).$$

Агар $k>0$ бўлса, $I=\frac{1}{k}$ интеграл яқинлашувчи.

Агар $k\leqslant 0$ бўлса, $I=\infty$ интеграл узоқлашувчи.

2-мисол. Ушбу

$$I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^m},\qquad m=\mathrm{const}$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. Агар $m=1$ бўлса, у ҳолда узоқлашувчи интегралга эга бўламиз, чунки

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Bigg|_{1}^{+\infty}=\ln(+\infty)-\ln 1=\infty.$$

Агар $m\neq 1$ бўлса,

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^m}=\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\Bigg|_{1}^{+\infty}$$

га эга бўламиз.

$m>1$ да $1-m<0$ бўлади ва $x\to+\infty$ да бошланғич функция нолга интилади, $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^m}=\frac{1}{m-1}$ интеграл яқинлашувчи.

$m<1$ да кўрсаткич $1-m>0$ ва $x\to+\infty$ да бошланғич функция чексизликка интилади, яъни $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^m}=\infty$ интеграл узоқлашувчи.

Шундай қилиб, ушбу

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^m}$$

хосмас интеграл $m>1$ да яқинлашувчи, $m\leqslant 1$ да узоқлашувчи бўлади.

Хосмас интеграл $(-\infty,\ b]$ ярим чексиз интервалда ҳам шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx=F(b)-F(-\infty),$$

бу ерда $F(-\infty)$ $F(x)$ бошланғич функциянинг $x\to-\infty$ даги лимити.

Агар $f(x)$ функция бутун сонлар ўқида узлуксиз бўлса, у ҳолда умумлашган хосмас интеграл қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (24.2)$$

бу ерда c — ихтиёрий тайинланган нуқта.

Агар (24.2) формулада ўнг томонда турган иккала интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда чап томондаги хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. (24.2) формулада $c = 0$ деб фараз қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Тенгликнинг ўнг қисмидаги хосмас интеграллар яқинлашувчи бўлади, чунки

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{0} = \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\, x \Big|_{0}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Шунинг учун ушбуга эга бўламиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Интеграл яқинлашувчи ва унинг қиймати π га тенг.

4-мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $c = 0$ да (24.2) формулани қўллаймиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^x\,dx.$$

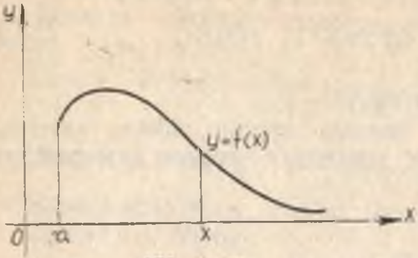
Бироқ

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = e^x \Big|_{-\infty}^{0} = e^0 - e^{-\infty} = 1$$

интеграл яқинлашувчи,

$$\int_0^{\infty} e^x\,dx = e^x \Big|_0^{+\infty} = e^{+\infty} - e^0 = \infty$$

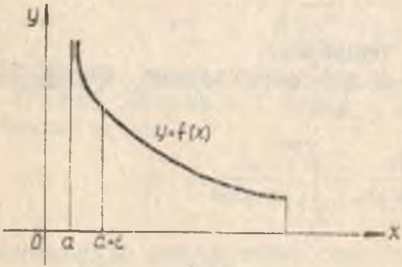
интеграл эса узоқлашувчи, шунинг учун $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx$ узоқлашувчи.



172- шакл.

Аниқ интегралнинг энг содда хоссалари ҳеч қандай ўзгаришсиз яқинлашувчи хосмас интегралга ўтишини эслатиб ўтамиз. Уларга маълум геометрик маъно бериш мумкин. Масалан, $y = f(x) > 0$ бўлсин ва унинг графиги чексиз $[a, +\infty)$ асосли эгри чизиқли трапеция билан чегараланган бўлсин (172- шакл).

Агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда интегралнинг қиймати чексиз эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлади.



173- шакл.

2. Чексиз функцияларнинг хосмас интеграллари.

Таъриф. $(a, b]$ интервалда узлуксиз ва $x = a$ да аниқланмаган ёки узилишга эга бўлган $f(x)$ функциянинг (173- шакл) *хосмас интеграли* қуйидагича белгиланади:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ва ушбу тенглик билан аниқланади:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \qquad (24.3)$$

Агар (24.3) формулада ўнгда турган лимит мавжуд бўлса, у ҳолда хосмас интеграл *яқинлашувчи* дейилади.

Агар кўрсатилган лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда хосмас интеграл *узоқлашувчи* дейилади.

Агар интеграл остидаги $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функция маълум бўлса, у ҳолда Ньютон — Лейбниц формуласини қўллаш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(b) - F(a+\varepsilon)] =$$

$$= F(b) - F(a).$$

Шундай қилиб, агар $x \to a$ да $F(x)$ бошланғич функциянинг лимити мавжуд бўлса (биз уни $F(a)$ билан белгиладик), у ҳолда хосмас интеграл яқинлашувчи, агарда бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

$[a, b)$ интервалда узлуксиз ва $x = b$ да аниқланмаган ёки II тур узилишга эга бўлган $f(x)$ функциянинг хосмас интеграли ҳам шунга ўхшаш аниқланади:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (F(b-\varepsilon) - F(a)) = F(b) - F(a),$$

бу ерда $F(b) - F(x)$ бошланғич функциянинг $x \to b$ даги лимити.

Агарда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг бирор-бир $x = c$ оралиқ нуқтасида чексиз узилишга эга ёки аниқланмаган бўлса, у ҳолда хосмас интеграл қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (24.4)$$

Агар (24.4) формуланинг ўнг томонида турган интеграллардан ақалли биттаси узоқлашувчи бўлса, у ҳолда хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

Агар (24.4) нинг ўнг томонидаги иккала интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда тенгликнинг чап томонидаги хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x \to 0$ да $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$. $x = 0$ нуқта $[0, 4]$ кесманинг чап охирида ётади. Шунинг учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^4 = 4 - 0 = 4.$$

Интеграл яқинлашувчи.

6-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x \quad 1$ да $f(x) = \frac{1}{1-x} \to \infty$. $x = 1$ нуқта $[0, 1]$ кесманинг ўнг охирида ётади. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\ln|1-x| \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln 1 \right].$$

Бироқ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

Шунинг учун кўрсатилган интеграл узоқлашувчи.

7-мисол. Ушбу

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x \to 0$ да $f(x) = \frac{1}{x^2} \to \infty$. $x = 0$ нуқта $[-1, 1]$ кесманинг ичида ётади. (24.4) формулани қўллаймиз:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Ўнг томондаги иккала хосмас интеграл ҳам узоқлашувчи, чунки

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{0} = -\infty - 1 = -\infty,$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{0}^{1} = -1 + \infty = +\infty.$$

Демак, кўрсатилган хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

8-мисол. Ушбу

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x \to 0$ да $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \to \infty$. $x = 0$ нуқта $[-1, 8]$ кесманинг ичида жойлашган. (24.4) формулани қўллаймиз:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ўнг томондаги иккала интеграл ҳам яқинлашувчи, чунки

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x}\,\Big|_{-1}^{0} = 0+3=3,$$

$$\int_{0}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x}\,\Big|_{0}^{8} = 6.$$

Шунинг учун $\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3+6=9$ га эга бўламиз, яъни хосмас интеграл яқинлашувчи.

Яқинлашувчи хосмас интеграл маълум геометрик маънога эга. Масалан, $y=f(x)>0$ функция $[a, b]$ ярим интервалда узлуксиз ва $x\to a$ да чексиз функция бўлсин, яъни $x=a$ нуқтада вертикал асимптотага эга бўлсин. У ҳолда бу функциянинг графиги, $[a, b]$ кесма ва $x=a$ асимптота билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи чексиз бўлади (173-шакл).

Агар $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, унинг қиймати эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлади.

3. Таққослаш теоремалари. Агар функцияларнинг бошланғичлари номаълум бўлса, у ҳолда хосмас интегралларнинг яқинлашувчанлиги ҳақидаги масалани ҳал қилиш қийин бўлади. Бундай ҳолларда баъзида бошланғични билишни талаб этмайдиган махсус аломатлардан фойдаланиб, интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини аниқлашга муваффақ бўлинади.

Ушбу

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

кўринишдаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчанлик аломатини кўриб чиқамиз.

Таққослаш теоремаси. *Агар* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функциялар* $[a, +\infty)$ *интервалда узлуксиз бўлса ва унда ушбу*

$$0\leqslant f(x)\leqslant \varphi(x)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда

а) *агар*

$$\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади;

б) *агар*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

интеграл узоқлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исботи. а) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи ва M га тенг бўлсин, яъни таърифга кўра

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)\,dx = M.$$

Шартга кўра $\varphi(x) \geqslant 0$ бўлгани учун геометрик нуқтаи назардан b нинг ўсиши билан

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

интегралнинг ўсиши равшан. Лекин лимитга эга бўлган ўсувчи функция шу лимит билан чегараланади, яъни

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M.$$

13-§ даги тенгсизликларнинг интегралланувчанлиги ҳақидаги 4-хоссага кўра

$$f(x) \leqslant \varphi(x).$$

Шартдан

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant M$$

келиб чиқишини ёзиш мумкин. Бу интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M,$$

яъни чегараланганлигини билдиради. Бироқ, агар ўсувчи функция чегараланган бўлса, у ҳолда у лимитга эга бўлади. $\int_a^b f(x)\,dx$ функция ўсувчи, чунки $f(x) \geqslant 0$ да чегараланган, демак, у лимитга эга. Демак, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи.

б) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ функция узоқлашувчи бўлсин. У ҳолда $\int_a^b f(x)\,dx$ ўсувчи функция чексизликка интилади. Бироқ

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

бўлгани учун $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ функция ҳам чексизликка интилади, яъни

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

интеграл узоқлашувчи бўлади. Теорема тўла исботланди. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

кўринишдаги интеграл учун ҳам теорема шунга ўхшаш ифодаланади

Таққослаш функциялари сифатида кўпинча кўрсаткичли e^{-kx} функция (1-мисол) ва даражали функциялар (2-мисол) қўлланилади.

9-мисол. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

функциянинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x > 1$ да

$$0 < e^{-x^2} < e^{-x}$$

тенгсизлик ўринли, демак, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ интеграл яқинлашувчи, чунки $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ интеграл яқинлашувчидир (1-мисол). $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ интегралнинг ҳам яқинлашувчи эканини исботлаш мумкин. e^{-x^2} функциянинг жуфтлигидан

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx$$

функция ҳам яқинлашувчи бўлади. Шундай қилиб,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

10-мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. Барча $x \geqslant 1$ ларда ушбу тенгсизлик ўринли:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}.$$

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/6}}$ интеграл яқинлашувчи, чунки 2-мисолда $m > 1$ да интеграллар яқинлашувчи эди. (Бизнинг ҳолда $m = \frac{7}{6} > 1$.) Демак, таққослаш теоремасига кўра

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+x^2}}$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x > 1$ бўлганда ушбу тенгсизлик ўринли:

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{\sqrt{x}}{x+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Лекин $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ интеграл узоқлашувчи (2-мисолда $m = \frac{1}{2} < 1$). Таққослаш теоремасига кўра

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

4. Абсолют ва шартли яқинлашувчанлик. Таққослаш теоремаси фақат номанфий функцияларга тегишли. Ишорасини сақламайдиган функцияларнинг хосмас интегралларини излашни баъзида номанфий функция бўлган ҳолга олиб келишга имкон берадиган аломатни келтирамиз.

Агар

$$\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

Бунда охирги интеграл *абсолют яқинлашувчи интеграл* деб аталади.

Агарда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

интеграл яқинлашувчи,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

интеграл эса узоқлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

интеграл *шартли яқинлашувчи интеграл* деб аталади.

11-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$$

интегралларнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функциялар ушбу шартларни қаноатлантиради:

$$\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл яқинлашувчи (3-мисол), шунинг учун

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| dx, \quad \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| dx$$

интеграллар яқинлашувчи бўлади.

Демак, берилган хосмас интеграллар абсолют яқинлашувчи бўлади.

12-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

интегралнинг шартли яқинлашувчи эканини исботлаш мумкин.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Берилган функцияларнинг чегаралари чексиз хосмас интеграллари деб нимага айтилади? Унинг геометрик маъносини айтинг. Яқинлашувчи ва узоқлашувчи интегралга мисоллар келтиринг.
2. Чегараланмаган функцияларнинг хосмас интеграллари деб нимага айтилади? Унинг геометрик маъносини айтинг. Яқинлашувчи ва узоқлашувчи интегралга мисоллар келтиринг.
3. Хосмас интеграллар учун таққослаш теоремасини айтинг ва уни исботланг. Мисоллар келтиринг.
4. Қандай хосмас интеграл абсолют яқинлашувчи интеграл деб аталади? Қандай интеграл шартли яқинлашувчи интеграл деб аталади?
5. 2366 — 2417-масалаларни ечинг.

7-боб

БИР НЕЧА ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯСИ

1-§. Бир неча ўзгарувчининг функцияси ва унинг аниқланиш соҳаси

Кўпгина ҳодисаларни ўрганишда икки, уч ва ундан кўп ўзгарувчининг функцияси билан иш кўришга тўғри келади.

Таъриф. Агар бирор D тўпламнинг ҳар бир (x, y) ҳақиқий сонлар жуфтлиги бирор қоида билан E тўпламдаги ягона z ҳақиқий сонга мос қўйилган бўлса, у ҳолда тўпламда *икки ўзгарувчининг функцияси аниқланган* деб аталади.

Бу ерда x ва y *эркли ўзгарувчилар ёки аргументлар*, z эса *эрксиз ўзгарувчи ёки функция* деб аталади.

Икки ўзгарувчининг функцияси қуйидаги кўринишларда белгиланади:

$$z = f(x, y), \quad z = z(x, y) \text{ ва ҳ. к.}$$

D тўплам бу функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади. z ўзгарувчининг қийматлари тўплами E функциянинг *ўзгариш соҳаси (қийматлар тўплами)* дейилади.

$z = f(x, y)$ функциянинг аргументларнинг тайинланган $x = x_0$ ва $y = y_0$ сонли қийматларида қабул қиладиган z_0 хусусий қийматини топиш учун у қуйидагича ёзилади:

$$z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \text{ ёки } z_0 = f(x_0, y_0).$$

Масалан, $x = -1$ ва $y = 2$ да $z = x^2 + y^2$ функциянинг қиймати қуйидагига тенг:

$$z\Big|_{\substack{x=-1\\ y=2}} = f(-1, 2) = (-1)^2 + (2)^2 = 5.$$

Геометрик нуқтаи назардан тўғри бурчакли координаталар системасида ҳақиқий сонларнинг ҳар бир (x, y) жуфтига x ва y координатали текисликнинг ягона P нуқтаси мос келади; аксинча, текисликнинг ҳар бир $P(x, y)$ нуқтасига ҳақиқий сонларнинг ягона (x, y) жуфти мос келади. Бу муносабат билан икки ўзгарувчининг функциясини $P(x, y)$ нуқтанинг функцияси сифатида қараш мумкин. Шундай қилиб, $z = f(x, y)$ ўрнига $z = f(P)$ ёзиш мумкин. У ҳолда икки ўзгарувчи функциясининг аниқланиш соҳаси D текисликнинг бирор нуқталари тўплами ёки бутун текислик бўлади.

Уч ўзгарувчининг функциясига ҳам шунга ўхшаш таъриф бериш мумкин:

Таъриф. Агар бирор D тўпламнинг ҳар бир (x, y, z) ҳақиқий сонлар учлиги бирор қоида билан E тўпламдаги ягона u ҳақиқий сонга мос қўйилган бўлса, у ҳолда D тўпламда *уч ўзгарувчининг функцияси аниқланган* деб айтилади.

Бу ерда x, y, z *эркли ўзгарувчилар* ёки *аргументлар*, u эса *эрксиз ўзгарувчи* ёки *функция* деб аталади. Уч ўзгарувчининг функцияси бундай белгиланади:

$$u = f(x, y, z), \quad u = u(x, y, z) \text{ ва ҳ. к.}$$

D тўплам бу функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади. u ўзгарувчининг қийматлари тўплами E эса функциянинг *ўзгариш соҳаси (қийматлар тўплами)* дейилади.

Геометрик нуқтаи назардан тўғри бурчакли координаталар системасида ҳақиқий сонларнинг ҳар бир (x, y, z) учлигига x, y ва z координатали фазонинг ягона P нуқтаси мос келади ва аксинча. Шунинг учун уч ўзгарувчининг функциясини $P(x, y, z)$ нуқтанинг функцияси сифатида қараш мумкин. Шундай қилиб, $u = f(x, y, z)$ ўрнига $z = f(P)$ ёзиш мумкин. У ҳолда уч ўзгарувчи функциясининг аниқланиш соҳаси фазонинг бирор нуқталари тўплами ёки бутун фазо бўлади.

Тўрт ўзгарувчининг ва умуман n ўзгарувчининг функциясига ҳам шунга ўхшаш таъриф бериш мумкин.

n ўзгарувчи функциясининг аниқланиш соҳаси n та ҳақиқий соннинг $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системасидан тузилган D тўплам бўлади. n та ўзгарувчининг функцияси қуйидагича белгиланади:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ ва ҳ. к.}$$

Тўртта ва ундан ортиқ ўзгарувчига боғлиқ функцияларнинг аниқланиш соҳасини чизмаларда кўргазмали намойиш этиш мумкин эмас. Бироқ геометрия атамаларини давом эттира бориб, $n \geqslant 4$ да n ўзгарувчининг функциясини бирор n ўлчовли фазо $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нуқтасининг функцияси сифатида қараш мумкин. У ҳолда $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ўрнига $y = f(P)$ ёзиш мумкин.

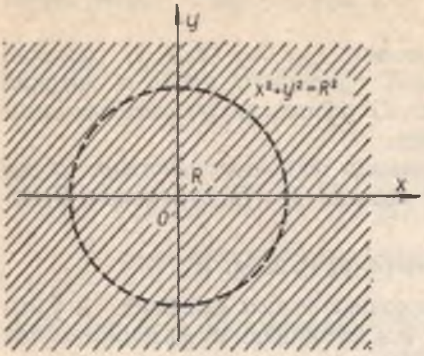
Бир неча ўзгарувчининг функцияси турлича усуллар билан берилиши мумкин. Биз мисолларда унинг аналитик усулда берилишидан фойдаланамиз. Бунда функция формула ёрдамида берилади. Бу ҳолда функцияларнинг аниқланиш соҳаси бу формула маънога эга бўладиган барча нуқталар тўплами ҳисобланади.

1-мисол. Ушбу

$$z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$$

функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси $\frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$ ифода аниқланган нуқталар тўплами, яъни $R^2 - x^2 - y^2 \neq 0$ ёки $x^2 + y^2 \neq$



174- шакл.

$\neq R^2$ бажариладиган нуқталар тўплами бўлади. Бу тўпламга текисликнинг $x^2+y^2=R^2$ айлана нуқталаридан ташқари ҳамма нуқталари тегишли бўлади (174- шакл).

2-мисол. Ушбу

$$z=\ln(y^2-4x+8)$$

функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси $\ln(y^2-4x+8)$ ифода аниқланган нуқталар тўплами, яъни $y^2-4x+8>0$ ёки $y^2>4(x-2)$ тенгсизлик бажариладиган нуқталар тўплами бўлади. Бу тўпламга текисликнинг $y^2=4(x-2)$ параболада ва унинг ички қисмида ётмаган барча нуқталари тегишли бўлади (175- шакл).

3-мисол. Ушбу

$$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$$

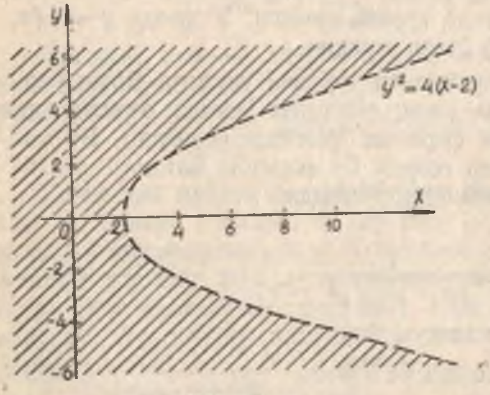
функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Функция

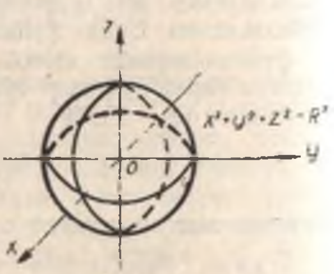
$$R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0 \quad \text{ёки} \quad x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$$

шартларда аниқланган. Функциянинг аниқланиш соҳаси фазонинг $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфера ичида (сфера нуқталари ҳам киради) ётган нуқталари тўплами бўлади (176- шакл).

Икки ўзгарувчининг $z=f(x, y)$ функциясининг геометрик тасвири, умуман айтганда, уч ўлчовли фазодаги сирт бўлади. Бу сирт $z=f(x, y)$ функциянинг графиги дейилади. I бобда биз баъзи сирт-



175- шакл.



176- шакл.

ларни кўриб ўтдик. Масалан, $z = ax + by + c$ функциянинг графиги текислик бўлади; $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ функциянинг графиги эллиптик параболоид бўлади. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферанинг юқори қисми $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ функциянинг графиги бўлади ва ҳ. к.

Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчининг функциясини геометрик тасвирлаш мумкин эмас.

2-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг лимити, узлуксизлиги

Функциянинг лимити ва узлуксизлиги тушунчаларини кўришдан олдин, берилган нуқтанинг δ-атрофи тушунчасини киритамиз.

Таъриф. $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг δ-*атрофи* деб координаталари қуйидаги шартни қаноатлантирувчи $P(x, y)$ нуқталар тўпламига айтилади:

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ ёки қисқача $\rho(P; P_0) < \delta$, бу ерда $\rho(P; P_0)$ белги билан P ва P_0 нуқталар орасидаги масофа белгиланган.

Шундай қилиб, P_0 нуқтанинг δ-атрофи бу P_0 марказли δ радиусли доиранинг ичида ётувчи барча P нуқталардир (177-шакл).

Фазодаги $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг δ-атрофи ҳам шунга ўхшаш таърифланади. Равшанки, бу радиуси δ га тенг ва маркази P_0 нуқтада бўлган ушбу

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^3 + (z - z_0)^2} < \delta \text{ ёки } \rho(P; P_0) < \delta$$

шартни қаноатлантирувчи шарнинг ички нуқталари бўлади.

n ўлчовли ($n > 3$ да) фазода $P_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ нуқтанинг δ-атрофи шунга ўхшаш таърифланади.

Таъриф. Агар икки ўзгарувчининг $z = f(x, y) = f(P)$ функцияси P_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлса (P_0 нуқтанинг ўзида аниқланмаган бўлиши мумкин) ва агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилсаки,

$$\rho(P; P_0) < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $P(x, y)$ нуқталар учун

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \text{ (ёки } |f(P) - A| < \varepsilon)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда A ўзгармас сон $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги лимити дейилади.

Агар A сони $z = f(x, y) = f(P)$ функциянинг $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ даги лимити бўлса, у ҳолда бундай ёзилади:

177-шакл.

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A \text{ ёки } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A,$$

чунки $P(x, y) \to P(x_0, y_0)$ бўлганда $x \to x_0$, $y \to y_0$ бўлади.

Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчининг функцияси лимитининг таърифи шунга ўхшаш киритилади.

Агар бир неча ўзгарувчи функциясининг лимити нолга тенг бўлса, у ҳолда у *чексиз кичик* деб айтилади.

Бир ўзгарувчининг функцияси учун лимитлар ҳақидаги барча асосий теоремалар (2-боб, 4-§) бир неча ўзгарувчининг функцияси учун ҳам ўринлилигича қолишини айтиб ўтамиз.

Таъриф. Агар $z = f(x, y) = f(P)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада ҳамда унинг атрофида аниқланган ва

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0) \quad \left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)\right) \tag{2.1}$$

бўлса, яъни функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги лимити функциянинг шу нуқтадаги қийматига тенг бўлса, у ҳолда бу функция $P_0(x_0, y_0)$ *нуқтада узлуксиз* дейилади.

Бу таърифга «$\varepsilon - \delta$» тилидаги қуйидаги таъриф тенг кучли.

Таъриф. Агар $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада аниқланган бўлса ва агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжуд бўлсаки,

$$\rho(P; P_0) < \delta$$

шартни қаноатлантирувчи барча $P(x, y)$ нуқталар учун

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad (|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon)$$

тенгсизлик бажарилса, $z = f(x, y) = f(P)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ *нуқтада узлуксиз* дейилади.

Функциянинг нуқтадаги узлуксизлигининг биринчи таърифига тенг кучли яна бир таърифини келтирамиз. Бунинг учун (2.1) тенгликни унга тенг кучли

$$\lim_{P\to P_0} \left(f(P) - f(P_0)\right) = 0 \left(\text{ёки } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0\right) \tag{2.2}$$

тенглик билан алмаштирамиз. Белгилаш киритамиз:

$$x - x_0 = \Delta x, \quad y - y_0 = \Delta y$$
$$f(P) - f(P_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta z .$$

Δz ни $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги *тўлиқ орттирмаси* деб атаймиз, у функциянинг $P(x, y)$ ва $P_0(x_0, y_0)$ нуқталардаги қийматлари айирмасига тенг. Киритилган белгилашлардан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y,$$
$$z = f(x, y), \quad z_0 + \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$
$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Равшанки, $P \to P_0$ бўлганда $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ бўлади, яъни $x \to x_0$, $y \to y_0$. (2.2) шартдан $\Delta z \to 0$ бўлиши келиб чиқади. Энди узлуксизликнинг юқорида айтиб ўтилган биринчи таърифига тенг кучли яна бир таърифини ифодалаш мумкин.

Таъриф. Агар $z = f(x, y) = f(P)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлса, ҳамда агар аргументларнинг Δx ва Δy чексиз кичик орттирмаларига функциянинг Δz чексиз кичик тўлиқ орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

бўлса, у ҳолда бу функция шу нуқтада *узлуксиз* дейилади.

Узлуксизлик шартлари бажарилмаган нуқталар *узилиш нуқталари* деб аталади. Икки ўзгарувчининг функциялари узилиш нуқталари бутун чизиқни ҳосил қилиши мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

Ечиш. Функция $x = 0$ ва $y = 0$ координатали нуқталардан ташқари ҳамма нуқталарда аниқланган ва узлуксиздир. $O\ (0,\ 0)$ координата боши узилиш нуқтаси бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$z = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

Ечиш. Функция координаталари $x^2 - y^2 = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи нуқталардан ташқари ҳамма нуқталарда аниқланган ва узлуксиздир. Бу — координата бурчакларининг иккита $y = x$ ва $y = -x$ биссектрисалари тенгламасидир. У ёки бу биссектрисага тегишли ҳар бир нуқта функциянинг узилиш нуқтаси бўлади. Шундай қилиб, узилиш нуқталари иккита узилиш чизиғини ҳосил қилади.

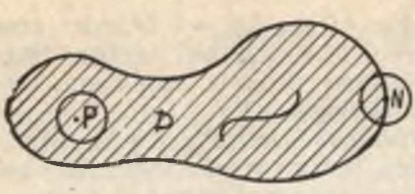
Икки ўзгарувчининг узлуксиз функцияси бир ўзгарувчининг узлуксиз функцияси эга бўлган асосий хоссаларга эга бўлади.

Бирор тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган $z = f(x, y) = f(P)$ функция шу тўпламда узлуксиз дейилади. Баъзи таърифларни келтирамиз.

Таъриф. Агар текислик нуқталарининг D тўпламидаги ихтиёрий икки нуқтани шу тўплам нуқталаридан ташкил топган, узлуксиз чизиқ билан туташтириш мумкин бўлса, у ҳолда бу D тўплам *боғламли тўплам* деб аталади.

Масалан, доира — боғламли тўплам, умумий нуқтага эга бўлмаган иккита доира эса боғламли тўплам эмас.

Таъриф. Агар P нуқтанинг берилган тўпламнинг нуқталаридан ташкил топган δ-атрофи мавжуд бўлса, у ҳолда P нуқта шу



178- шакл.

тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади (178- шакл).

Таъриф. Агар N нуқтанинг ихтиёрий δ- атрофида берилган тўпламга тегишли бўлган нуқталар ҳам, бу тўпламга тегишли бўлмаган нуқталар ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда N нуқта берилган тўпламнинг *чегаравий нуқтаси* деб аталади. Тўпламнинг барча чегаравий нуқталари тўплами унинг L *чегараси* дейилади (178- шаклдаги L чизиқ).

Таъриф. Фақат ички нуқталардан ташкил топган D тўплам *очиқ тўплам* деб аталади.

Таъриф. Боғламли очиқ D тўплам *очиқ соҳа* ёки *соҳа* деб аталади.

Масалан, учбурчак, доира ва ҳоказоларнинг ички нуқталари соҳа бўлади.

Таъриф. Соҳа ва унинг чегарасидан ташкил топган нуқталар тўплами *ёпиқ соҳа* деб аталади.

Таъриф. D тўпламни ўз ичига олувчи доира мавжуд бўлса, у ҳолда бу тўплам *чегараланган тўплам* деб аталади.

Энди ёпиқ чегараланган соҳада узлуксиз бўлган икки ўзгарувчининг функцияси асосий хоссаларини келтирамиз.

Бирор D ёпиқ соҳада узлуксиз бўлган $f(P)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда:

1. $f(P)$ функция бу соҳада чегараланган, яъни шундай $k > 0$ сони мавжудки, D соҳанинг барча P нуқталари учун ушбу тенгсизлик ўринли:

$$|f(P)| \leqslant k;$$

2. D соҳада $f(P)$ функция ўзининг энг катта қиймати M га ва энг кичик қиймати m га эришади;

3. D соҳада $f(P)$ функция энг катта M ва энг кичик m қийматлари орасидаги барча оралиқ қийматларни қабул қилади.

Ихтиёрий сондаги эркли ўзгарувчи функциясининг узлуксизлиги ва хоссалари шунга ўхшаш таърифланади.

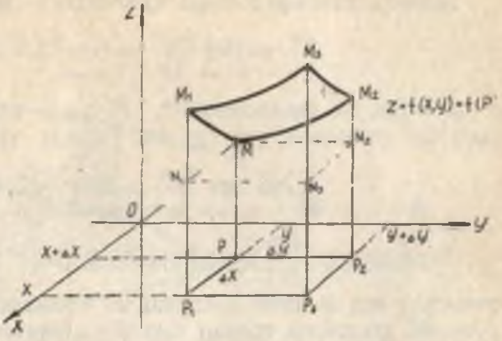
3- §. Функциянинг хусусий ҳосилалари

Графиги бирор сирт бўлган икки ўзгарувчининг $z = f(x, y) = f(P)$ функциясини қараймиз (179- шакл).

x ўзгарувчига $P(x, y)$ нуқтада Δx орттирма берамиз, y ўзгарувчини эса ўзгаришсиз қолдирамиз. $P_1(x + \Delta x, y)$ нуқтани ҳосил қиламиз. P ва P_1 нуқталарга сиртда $M(x, y, z)$ ва $M_1(x + \Delta x, y, z_1)$ нуқталар мос келади, бу ерда $z_1 = f(P_1) = f(x + \Delta x, y)$, (шаклда бу $P_1M_1 = z_1$ кесма). У ҳолда

$$\Delta_x z = f(P_1) - f(P) \text{ ёки } \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (3.1)$$

айирма $z = f(x, y) = f(P)$ функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги x *ўзга-*



179- шакл.

рувчи бўйича хусусий орттирмаси деб аталади (шаклда бу $N_1M_1 = \Delta_x z$ кесма).

Шунга ўхшаш агар фақат y ўзгарувчига Δy орттирма берилиб, x ўзгаришсиз қолдирилса, у ҳолда $P_2(x, y + \Delta y)$ нуқта ҳосил бўлади, бу нуқтага сиртда $M_2(x, y + \Delta y, z_2)$ мос келади, бу ерда $z_2 = f(P_2) = f(x, y + \Delta y)$ (шаклда бу $P_2M_2 = z_2$ кесма). У ҳолда

$$\Delta_y z = f(P_2) - f(P) \text{ ёки } \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (3.2)$$

айирма $z = f(x, y) = f(P)$ функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги *y ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси* деб аталади (шаклда бу $N_2M_2 = \Delta_y z$ кесма).

Ниҳоят, иккала x ва y ўзгарувчи мос равишда Δx ва Δy орттирма олсин. У ҳолда $P(x, y)$ нуқта $P_3(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқтага ўтади, бу нуқтага сиртда $M_3(x + \Delta x, y + \Delta y, z_3)$ нуқта мос келади, бу ерда $z_3 = f(P_3) = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Ушбу

$$\Delta z = f(P_3) - f(P_1) \text{ ёки } \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (3.3)$$

айирмани биз 2-§ да учратган эдик, у $z = f(x, y)$ функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги *тўлиқ орттирмаси* деб аталади (шаклда бу $N_3M_3 = \Delta z$ кесма).

(3.1), (3.2) ва (3.3) формулалардан функциянинг тўлиқ орттирмаси, умуман айтганда, бу функциянинг хусусий орттирмалари йиғиндисига тенг эмаслиги келиб чиқади, яъни

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

$z = f(x, y)$ функциянинг x ўзгарувчи бўйича $\Delta_x z$ орттирмасининг шу ўзгарувчининг Δx орттирмасига нисбатини қараймиз:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Таъриф. Агар нисбатнинг $\Delta x \to 0$ даги лимити мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимит $z = f(x, y)$ функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги *x ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи* деб аталади ва бундай белгиланади:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x(x, y).$$

Демак, таърифга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}.$$

$z=f(x, y)$ функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги *y ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи* ҳам шунга ўхшаш таърифланади:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}.$$

Таърифдан $\frac{\partial z}{\partial x}$ ни топишда y нинг ўзгаришсиз қолиши, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топишда эса x нинг ўзгаришсиз қолиши келиб чиқади. Бунинг учун хусусий ҳосилани топиш бир ўзгарувчили функция ҳосиласини топиш қоидаси ва формуласи асосида ўтказилади, фақат бунда ҳосила айнан қайси ўзгарувчи бўйича топилаётганини ёдда сақлаш керак,

Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосиласи шунга ўхшаш таърифланади ва ҳисобланади.

1-мисол. Ушбу

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. y ни ўзгармас деб ҳисоблаб, $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

x ни ўзгармас деб ҳисоблаб, $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2-мисол. Ушбу

$$u=x^5-y^4+5z^3$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. y ва z ларни ўзгармас деб ҳисоблаб, $\frac{\partial u}{\partial x}$ хусусий ҳосилани топамиз:

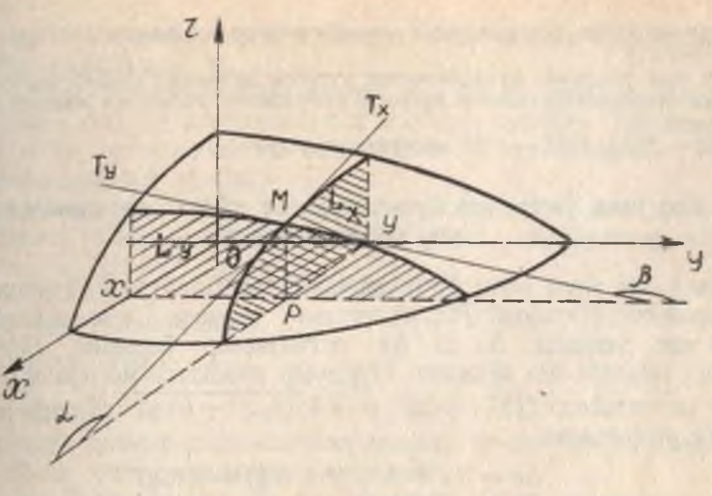
$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4.$$

x ва z ларни ўзгармас деб ҳисоблаб, $\frac{\partial u}{\partial y}$ хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4y^3.$$

x ва y ларни ўзгармас деб ҳисоблаб, $\frac{\partial u}{\partial z}$ хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=15z^2.$$



180- шакл.

Икки ўзгарувчининг $z = f(x, y)$ функцияси учун унинг хусусий ҳосиласининг геометрик маъносини аниқлаш қийин эмас. Бу функциянинг геометрик тасвири сиртдан иборат эди.

y ни ўзгармас деб ҳисоблаб, Oxz координата текислигига параллел мос текислик билан сирт кесишмасида ясси эгри чизиқ L_x ни ҳосил қиламиз. Бу эгри чизиққа M нуқтада T_xM уринма Ox ўқи билан α бурчак ҳосил қилади. Бир ўзгарувчининг функцияси ҳосиласининг геометрик маъносига асосан (y— ўзгармас)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha = k_x \qquad (3.4)$$

га эга бўламиз, бу ерда k_x MT_x уринманинг Ox ўқига нисбатан бурчак коэффициенти (180- шакл).

Шунга ўхшаш x ни ўзгармас деб ҳисоблаб Oyz координата текислигига параллел мос текислик билан сирт кесишмасида ясси эгри чизиқ L_y ни ҳосил қиламиз. Бу эгри чизиққа M нуқтада T_yM уринма Oy ўқи билан β бурчак ҳосил қилади. Шундай қилиб,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta = k_y$$

га эга бўламиз, бу ерда k_y M_yT уринманинг Oy ўқига нисбатан бурчак коэффициенти.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Икки ўзгарувчининг функцияси, унинг аниқланиш соҳаси деб нимага айтилади? Бу тушунчаларнинг геометрик талқинини беринг.
2. Уч ўзгарувчининг функцияси, унинг аниқланиш соҳаси деб нимага айтилади? Бу функциянинг аниқланиш соҳасини геометрик нуқтаи назардан қандай талқин қилиш мумкин?
3. Икки ўзгарувчи функциясининг нуқтадаги лимити деб нимага айтилади?
4. Қачон икки ўзгарувчининг функцияси нуқтада, соҳада узлуксиз дейилади?

5. Икки ўзгарувчи функциясининг узилиш нуқтаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
6. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосиласига таъриф беринг.
7. Икки ўзгарувчи функцияси хусусий ҳосиласининг геометрик маъноси нимадан иборат?
8. 2983 — 3002, 3037 — 3084- масалаларни ечинг.

4-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг тўлиқ орттирмаси ва тўлиқ дифференциали

Соддалик учун икки ўзгарувчининг $z = f(x, y) = f(P)$ функциясини қараймиз. Ихтиёрий $P(x, y)$ нуқтани оламиз, x ва y ўзгарувчиларга мос равишда Δx ва Δy орттирмалар берамиз. $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқтага эга бўламиз. Нуқталар орасидаги масофани ρ ҳарфи билан белгилаймиз (181-шакл). $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ бўлиши равшан. $z = f(x, y)$ функция

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$$

формула билан аниқланадиган Δz тўлиқ орттирмага эга бўлади.

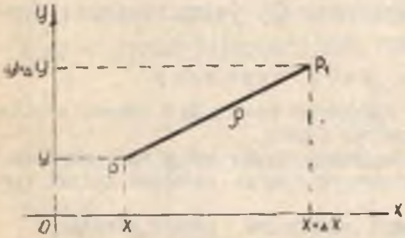
Таъриф. Агар $z = f(x, y)$ функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги тўлиқ орттирмасини

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \tag{4.1}$$

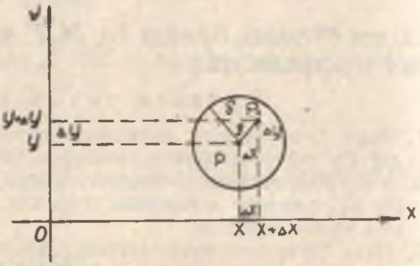
кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу функция $P(x, y)$ нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади, бу ерда A, B Δx ва Δy га боғлиқ бўлмаган сонлар, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ эса $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да чексиз кичик функция, аниқроғи, $\alpha(\Delta x, \Delta y)P(x, y)$ ва $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нуқталар орасидаги ρ масофага қараганда юқори тартибли чексиз кичик миқдордир (182-шакл), яъни

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \left(\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}\right)}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0. \tag{4.2}$$

Бу таърифдан агар функция нуқтада дифференциалланувчи бўлса, унинг тўла дифференциалини иккита қўшилувчининг йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин экани келиб чиқади: улардан бири — $A\Delta x + B\Delta y$ Δx, Δy га нисбатан чизиқли ифоданинг бош бўлаги, иккинчиси Δx ва Δy га нисбатан чизиқли бўлмаган ифода, у нолга



181- шакл,



182- шакл.

Δx ва Δy га нисбатан тезроқ интилади, яъни юқори тартибли чексиз кичик миқдордир.

Таъриф. Дифференциалланувчан $z = f(x, y)$ функциянинг аргументларнинг Δx, Δy орттирмаларига нисбатан чизиқли ифодаси бўлган Δz тўлиқ орттирмасининг бош бўлаги бу функциянинг *тўлиқ дифференциали* деб аталади.

Шундай қилиб, $z = f(x, y)$ функция $P(x, y)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда унинг dz тўлиқ дифференциали ушбу

$$dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y \tag{4.3}$$

формула билан аниқланади.

1-мисол. Ушбу

$$z = x^2 + y^2$$

функциянинг дифференциалланувчи эканига ишонч ҳосил қилинг. Унинг тўлиқ дифференциалини ҳисобланг.

Ечиш. Функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги тўлиқ орттирмасини топамиз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 -$$
$$- x^2 - y^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 - y^2 =$$
$$= (2x\,\Delta x + 2y\,\Delta y) + ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2).$$

$z = x^2 + y^2$ функциянинг Δz тўлиқ орттирмаси икки қисмдан иборатлигини кўрамиз: Δx ва Δy нинг чизиқли ифодаси $(2x\,\Delta x + 2y\,\Delta y)$ бош қисм, Δx за Δy нинг чизиқли бўлмаган ифодаси $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. $\alpha(\Delta x, \Delta y) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ ни ρ га бўламиз ва бу нисбатнинг лимитини $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ да, ва демак, $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ да ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho = 0.$$

Бу натижа $\alpha(\Delta x, \Delta y) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ катталик ρ га нисбатан анча юқори тартибли чексиз кичик катталик эканини билдиради.

Демак, $z = x^2 + y^2$ функциянинг Δz тўлиқ орттирмаси (4.1) формулага бўйсунади, шунинг учун бу функция дифференциалланувчи ва унинг dz тўлиқ дифференциали $2x\,\Delta x + 2y\,\Delta y$ га тенг.

Теорема (дифференциалланувчанликнинг зарурий шарти). *Агар $z = f(x, y)$ функция $P(x, y)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда у шу нуқтада $f'_x(x, y)$ ва $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлади, бунда*

$$A = f'_x(x, y), \quad B = f'_y(x, y).$$

Исботи. $z = f(x, y)$ функция $P(x, y)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлгани учун (4.1) муносабат ўринли бўлади, яъни ихтиёрий етарлича кичик Δx ва Δy ларда

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y).$$

Хусусан, у $\Delta y = 0$ ва $\Delta x \neq 0$ да ҳам ўринли бўлади. Бу ҳолда Δz тўлиқ орттирма $\Delta_x z$ хусусий орттирма бўлиб қолади ва (4.1) муносабат

$$\Delta_x z = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)$$

кўринишни олади. Охирги тенгликнинг иккала қисмини Δx га бўламиз ва $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(A + \frac{\alpha(\Delta x, 0)}{\Delta x}\right) = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x, 0)}{\Delta x}. \tag{4.4}$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0$ эканини кўрсатиш қолади.

Ҳақиқатан ҳам, $\Delta y = 0$ бўлгани учун $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2} = |\Delta x|$ бўлади, демак,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x, 0)}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x, 0)}{\pm\rho} = 0,$$

чунки $z = f(x, y)$ дифференциалланувчи функция, шунинг учун (4.2) шарт бажарилади. Бу натижани (4.4) га қўйиб

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$$

га эга бўламиз.

Бироқ, иккинчи томондан, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x, y)$, шунинг учун $P(x,y)$ нуқтада

$$f'_x(x, y) = A$$

хусусий ҳосила мавжуд. $P(x, y)$ нуқтада

$$f'_y(x, y) = B$$

хусусий ҳосиланинг мавжуд бўлишини ҳам шунга ўхшаш исботлаш мумкин.

(4.1) ва (4.3) формулаларда A ва B катталикларни хусусий ҳосилаларга алмаштириб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{4.5}$$

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y. \tag{4.6}$$

Охирги формула функциянинг тўлиқ дифференциали билан унинг хусусий ҳосилалари ўртасида боғланиш ўрнатади: функциянинг тўлиқ дифференциали хусусий ҳосилаларнинг мос аргументлар орттирмасига кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

Лекин эркли ўзгарувчиларнинг дифференциаллари уларнинг дифференциалларига бевосита тенг, яъни

$$\Delta x = dx,\ \Delta y = dy,$$

шунинг учун (4.6) формула ушбу кўринишда ёзилади:

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy. \tag{4.7}$$

$f'_x(x, y)dx$ ва $f'_y(x, y)\,dy$ қўшилувчилар *хусусий дифференциаллар* деб аталади, улар мос равишда d_xz ва d_yz билан белгиланади.

Шундай қилиб, ушбуга эга бўламиз:

$$dz = d_xz + d_yz,$$

яъни функциянинг дифференциали унинг хусусий дифференциаллари йиғиндисига тенг.

(4.5) ва (4.6) муносабатлардан

$$\Delta z = dz + \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

экани келиб чиқади. Бу ерда $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ ρ га нисбатан анча юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Шунинг учун кичик ρ ларда (яъни Δx ва Δy ларда) бу қўшилувчини ҳисобга олмаслигимиз мумкин, у ҳолда ушбу тақрибий формулага эга бўламиз:

$$\Delta z \approx dz$$

ёки

$$\Delta z \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y. \tag{4.8}$$

Бу формула дифференциалланувчи функциянинг тўлиқ орттирмасини унинг тўлиқ дифференциали билан тахминан алмаштиришга имкон беради. Шунинг учун бу формуладан тақрибий ҳисоблашларда фойдаланилади, чунки дифференциални ҳисоблаш тўлиқ орттирмани ҳисоблашга нисбатан осонроқ.

Бироқ

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

шунинг учун (4.8) тақрибий ҳисоблаш формуласи тугал маънода қуйидаги кўринишни олади:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \tag{4.9}$$

ёки

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\,\Delta x + f'(x, y)\,\Delta y.$$

5-§. Дифференциалланувчанликнинг етарли шарти

(4.9) формула $z = f(x, y)$ функция $P(x, y)$ нуқтада дифференциалланувчи, демак, у бу нуқтада хусусий ҳосилаларга (яъни тўлиқ дифференциалга) эга бўлиши керак, деб фараз қилиниб олинган эди. Лекин тескари даъво, умуман айтганда, нотўғри, яъни нуқтада хусусий ҳосилаларнинг мавжуд бўлишидан функциянинг дифференциалланувчанлиги келиб чиқмайди. Қуйидаги теоремада биз дифференциалланувчанликнинг етарли шартини ифодалаймиз ва исботлаймиз.

Теорема (дифференциалланувчанликнинг етарли шарти). *Агар $z = f(x, y)$ функция $P(x, y)$ нуқтанинг бирор δ атрофида хусусий ҳосилаларга эга бўлса ва бу ҳосилалар нуқтанинг ўзида узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада дифференциалланувчи бўлади.*

Исботи. x ва y ўзгарувчиларга мос равишда шундай кичик Δx ва Δy орттирмалар берайликки $P_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ нуқта $P(x,\ y)$ нуқтанинг кўрсатилган δ-атрофидан чиқиб кетмасин. Функциянинг

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$$

тўлиқ орттирмасини

$$\Delta z = [f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y)] + \\ + [f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)] \tag{5.1}$$

кўринишга алмаштирамиз.

Биринчи квадрат қавсдаги айирмани x ўзгарувчили $f(x,\ y+\Delta y)$ функциянинг орттирмаси сифатида қараш мумкин, чунки иккинчи аргумент ўзининг $y+\Delta y$ га тенг қийматини сақлайди. Худди шунингдек, иккинчи квадрат қавсдаги айирмани y ўзгарувчили $f(x,\ y)$ функциянинг орттирмаси сифатида қараш мумкин, чунки иккинчи аргумент ўзининг x га тенг қийматини сақлайди. Теорема шартига кўра функция $f'_x(x,\ y+\Delta y)$ ва $f'_y(x,\ y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлгани учун Лагранж теоремасини қўлланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) = f'_x(\xi,\ y+\Delta y)\,\Delta x, \tag{5.2}$$

бунда

$$x < \xi < x+\Delta x,$$

$$f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) = f'_y(x,\ \eta)\,\Delta y, \tag{5.3}$$

бунда

$$y < \eta < y+\Delta y.$$

Теорема шартига кўра хусусий ҳосилалар $P(x,\ y)$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ (\xi\to x)}} f'_x(\xi,\ y+\Delta y) = f'_x(x,\ y), \tag{5.4}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ (\eta\to y)}} f'_y(x,\ \eta) = f'_y(x,\ y). \tag{5.5}$$

Лимитнинг маълум хоссасидан фойдалансак, (5.4) ва (5.5) тенгликлар қуйидагиларга тенг бўлади:

$$f'_x(\xi,\ y+\Delta y) = f'_x(x,\ y) + \alpha_1(\Delta x,\ \Delta y),$$

$$f'_y(x,\ \eta) = f'_y(x,\ y) + \alpha_2(\Delta x,\ \Delta y),$$

бу ерда $\alpha_1(\Delta x,\ \Delta y)$ ва $\alpha_2(\Delta x,\ \Delta y)$ $\Delta x\to 0$ ва $\Delta y\to 0$ да чексиз кичик функциялар.

$f'_x(\xi,\ y+\Delta y)$ ва $f'_y(x,\ \eta)$ ифодаларнинг қийматларини (5.2) ва (5.3) муносабатларга, кейин (5.1) муносабатга қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta z = f'_x(x,\ y)\Delta x + f'_y(x,\ y)\Delta y + \alpha(\Delta x,\ \Delta y), \tag{5.6}$$

бу ерда $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$. $|\Delta x| \leqslant \rho$ ва $|\Delta y| \leqslant \rho$ бўлгани учун (буни шаклдан кўриш мумкин)

$$|\alpha(\Delta x, \Delta y)| = |\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1(\Delta x, \Delta y)|\,|\Delta x| + |\alpha_2(\Delta x, \Delta y)|\,|\Delta y| \leqslant \rho(|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)| +$$
$$+ |\alpha_2(\Delta x, \Delta y)|).$$

Демак,

$$\frac{|\alpha(\Delta x, \Delta y)|}{\rho} \leqslant |\alpha_1(\Delta x, \Delta y)| + |\alpha_2(\Delta x, \Delta y)|.$$

$\rho \to 0$ да (ёки $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да) $\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\alpha_2(\Delta x, \Delta y) \to 0$ бўлгани учун

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \left(\begin{smallmatrix}\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0\end{smallmatrix}\right)}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$$

бўлади, яъни $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ ρ га нисбатан анча юқори тартибли чексиз кичик миқдордир. Шунинг учун (5.6) тенгликнинг ўнг қисмидаги дастлабки икки қўшилувчининг йиғиндиси Δx ва Δy га нисбатан чизиқли ифода бўлади ва таърифга кўра функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги дифференциалини ифодалайди. Шундай қилиб, функциянинг дифференциалланувчанлиги исботланди.

1-мисол. Ушбу

$$z = x^2 + y^2$$

функциянинг дифференциалланувчанлигини текшириб кўринг. Унинг тўлиқ дифференциалини ҳисобланг.

Ечиш. Мисолни ечиш учун дифференциалланувчанликнинг етарли шартининг бажарилиш-бажарилмаслигини текшириш керак. Хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x, y) = 2x, \; f'_y(x, y) = 2y.$$

Улар бутун Oxy текисликда узлуксиз функциялар бўлади. Шунинг учун $z = x^2 + y^2$ функция бу текисликнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи ва dz тўлиқ дифференциал мавжуд, бунда

$$dz = 2x\,\Delta x + 2y\,\Delta y$$

ёки

$$dz = 2\,x\,dx + 2y\,dy.$$

Биз бу мисолда функциянинг дифференциалланувчанлигини аниқлаш учун исботланган теореманинг муҳимлигига ишонч ҳосил қилдик, чунки хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлигини текшириш содда бўлгани ҳолда, таъриф ёрдамида функциянинг дифференциалланувчанлигини бевосита текшириш (4-§, 1-мисол) анча мураккабдир.

2-мисол. $1{,}03^{3{,}001}$ катталикни тўлиқ дифференциал ёрдамида тақрибан ҳисобланг.

Ечиш. Ушбу

$$f(x, y) = x^y$$

функцияни қараймиз.

$x = 1$, $y = 3$ десак, у ҳолда $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = 0{,}001$ бўлади. $P(1, 3)$ нуқтада дифференциалланувчанликнинг етарли шарти бажарилиш-бажарилмаслигини текширамиз. Бунинг учун хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x,\ y) = yx^{y-1},\ f'_y(x, y) = x^y \ln x.$$

$P(1,3)$ нуқтада иккала ҳосила ҳам узлуксиз, демак, $f(x, y) = x^y$ функция бу нуқтада дифференциалланувчи. Бу функция учун (4.9) тақрибий формулани қўллаймиз:

$$(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\, \Delta\, y.$$

Энди

$$x = 1,\ y = 3,\ \Delta x = 0{,}03,\ \Delta y = 0{,}001$$

деймиз. Демак, қуйидагига эга бўламиз:

$$(1{,}03)^{3{,}001} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}03 + 1^3\ \ln\ 1 \cdot 0{,}001\ = 1{,}09.$$

Хотима қилиб шуни таъкидлаймизки, уч ва ундан ортиқ ўзгарувчи функциясининг дифференциалланувчанлиги ҳам икки ўзгарувчи функциясининг дифференциалланувчанлиги каби киритилади. Уч ва ундан ортиқ ўзгарувчининг функцияси учун ҳам шунга ўхшаш теоремалар ўринли.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай икки ўзгарувчининг функцияси нуқтада дифференциалланувчи функция деб аталади?
2. Икки ўзгарувчи функциясининг дифференциалланувчанлигининг зарурий шартини айтинг ва исботланг.
3. Икки ўзгарувчи функциясининг нуқтадаги тўлиқ дифференциалига таъриф беринг.
4. Функциянинг тўлиқ дифференциали унинг хусусий ҳосилалари орқали қандай ифодаланади?
5. Икки ўзгарувчи функциясининг дифференциалланувчанлигининг етарли шартини айтинг ва исботланг.
6. Функциянинг тўлиқ дифференциали хусусий дифференциаллар орқали қандай ифодаланади?
7. Функциянинг тўлиқ дифференциали унинг қийматини тақрибий ҳисоблаш учун қандай қўлланилади?
8. 3101 — 3109, 3112 — 3115-масалаларни ечинг.

6-§. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Икки ўзгарувчининг $z = f(u,\ v)$ дифференциалланувчи функцияси берилган бўлсин. u, v аргументлар ҳам x эркли ўзгарувчининг дифференциалланувчи функциялари бўлсин, яъни

$$u = u(x) \text{ ва } v = v(x).$$

У ҳолда

$$z = f(u(x),\ v(x)) = F(x)$$

функция x эркли ўзгарувчининг мураккаб функцияси, u ва v

аргументлар — оралиқ ўзгарувчилар бўлади. x ўзгарувчига ихтиёрий Δx орттирма берамиз, у ҳолда u ва v ўзгарувчилар мос равишда Δu ва Δv орттирма олади, z функция ўз навбатида

$$\Delta z = f(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - f(u,\ v)$$

тўлиқ орттирма олади.

$z = f(u,\ v)$ функция дифференциалланувчи бўлгани учун Δz тўлиқ орттирмани x ва y ҳарфларни мос равишда u ва v билан алмаштириб (4.5) шаклида ёзиш мумкин:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha(\Delta u,\ \Delta v), \tag{6.1}$$

бу ерда $\alpha(\Delta u,\ \Delta v)$ $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдордир, яъни

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\rho} = 0. \tag{6.2}$$

(6.2) тенгликнинг иккала қисмини Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\Delta x}$$

ва $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial v}{\partial x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\Delta x}, \tag{6.3}$$

бу ерда $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ хусусий ҳосилалар лимит белгисидан ташқарига чиқарилган, чунки улар Δx га боғлиқ эмас. $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар дифференциалланувчи, шунинг учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}. \tag{6.4}$$

$\frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\Delta x}$ муносабатнинг лимитини топиш қолди. Бунинг учун уни қуйидаги кўринишда тасвирлаймиз:

$$\frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\Delta x} = \frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta x} = \frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}. \tag{6.5}$$

$u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар дифференциалланувчи бўлгани учун улар узлуксиздир, шунинг учун $\Delta x \to 0$ да $\Delta u \to 0$ ва $\Delta v \to 0$, демак, $\Delta x \to 0$ да $\rho \to 0$. Бундан $\Delta x \to 0$ да (6.5) даги биринчи кўпайтувчи $\frac{\alpha(\Delta u,\ \Delta v)}{\rho} \to 0$. $\Delta x \to 0$ да иккинчи кўпайтувчи $\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}$ маълум $\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$ сонга интилади.

Шундай қилиб, (6.5) муносабатда $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta u, \Delta v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta u, \Delta v)}{\rho} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha(\Delta u, \Delta v)}{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} = 0. \qquad (6.6)$$

Бундан (6.3) нинг ўнг қисмининг $\Delta x \to 0$ даги лимити мавжуд. Демак, чап қисмининг лимити ҳам мавжуд

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx}. \qquad (6.7)$$

(6.4), (6.6), (6.7) формулаларни ҳисобга олиб, (6.3) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \qquad (6.8)$$

Бу формулани ихтиёрий сондаги аргументларнинг мураккаб функцияси ҳоли учун ҳам умумлаштириш мумкин.

1-мисол. Агар $u = \ln x$, $v = \sin x$ бўлса, $z = u^2 + v$ мураккаб функциянинг $\frac{dz}{dx}$ ҳосиласини топинг.

Ечиш. $\frac{dz}{dx}$ ни топиш учун (6.8) формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{dz}{dx} = 2u \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \cos x = \frac{2 \ln x}{x} + \cos x.$$

2-мисол. Агар $u = x^3$, $v = \sin 3x$, $w = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ бўлса $z = e^{u-2v+3w}$ мураккаб функциянинг $\frac{dz}{dx}$ ҳосиласини топинг.

Ечиш. z функция учта ўзгарувчига боғлиқ, (6.8) формула бу ҳолда қуйидагича бўлади:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}.$$

Бу формуладан $\frac{dz}{dx}$ ни топишда фойдаланамиз:

$$\frac{dz}{dx} = e^{u-2v+3w} \cdot 3x^2 + e^{u-2v+3w} \cdot (-2) \cdot \cos 3x \cdot 3 +$$

$$+ e^{u-2v+3w} \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{u-2v+3w} \cdot \left(3x^2 - 6\cos 3x -\right.$$

$$\left. - \frac{3}{x^2 + 1}\right) = e^{x^3 - 2\sin 3x + 3\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} \left(3x^2 - 6\cos 3x - \frac{3}{x^2 + 1}\right).$$

(6.8) формуланинг икки ўзгарувчининг функцияси ушбу $z = f(x, y)$, бу ерда $y = y(x)$, кўринишга эга бўлгандаги хусусий ҳолини, яъни

$$z = f(x, y(x)) = F(x)$$

битта x эркли ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлган ҳолни қараймиз.

(6.8) формулага асосан ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

лекин $\frac{dx}{dx} = 1$ бўлгани учун

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (6.9)$$

Бу функция икки ўзгарувчи функциясининг $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосиласини ва бир ўзгарувчи мураккаб функциясининг $\frac{dz}{dx}$ ҳосиласини ўз ичига олади. Бу охирги $\frac{dz}{dx}$ ҳосила тўлиқ ҳосила деб аталади. (6.9) формулани ихтиёрий сондаги аргумент функцияси бўлган ҳол учун умумлаштириш мумкин.

3-мисол. Агар $y = x^3$ бўлса,

$$z = \ln\left(e^x + e^y\right)$$

функциянинг $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ва $\frac{dz}{dx}$ тўлиқ ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Аввал $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x + e^{x^3}}.$$

(6.9) формуладан фойдаланиб тўлиқ ҳосилани ҳам топамиз:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^y \cdot 3x^2 =$$

$$= \frac{e^x + 3x^2 e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + 3x^2 e^{x^3}}{e^x + e^{x^3}}.$$

Энди z иккита эркли x ва y ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлган анча умумий ҳолни қараймиз, яъни $z = f(u, v)$, бу ерда $u = u(x, y)$ ва $v = v(x, y)$.

Шундай қилиб,

$$z = f(u(x, y), v(x, y)) = F(x, y).$$

Ҳамма функциялар дифференциалланувчи деб фараз қиламиз. Хусусий ҳосилани, масалан, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ни топиш учун y аргументни ўзгармас деб ҳисоблаш керак, у ҳолда u ва v фақат биргина x ўзгарувчининг функциялари бўлиб қолади. Биз юқорида қараган ҳолимизга келдик. Бунда фарқ фақат шундаки (6.8) формуладаги $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ ва $\frac{dv}{dx}$ ҳосилалар $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial v}{\partial x}$ хусусий ҳосилалар билан алмашган.

Шундай қилиб, умумий формулага эга бўламиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (6.10)$$

$\frac{\partial z}{dy}$ хусусий ҳосила учун ҳам шунга ўхшаш формулани ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (6.11)$$

Шундай қилиб, мураккаб функциянинг хусусий ҳосиласи берилган функциянинг оралиқ аргументлар бўйича хусусий ҳосилалари билан бу аргументларнинг мос номдаги эркли ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалари кўпайтмаси йиғиндисига тенг.

Ифодаланган қоида ихтиёрий сондаги эркли ўзгарувчилар функцияси учун ва ихтиёрий сондаги оралиқ ўзгарувчиларда ҳам тўғри бўлади.

4-мисол. Агар $u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$ бўлса,

$$z=u^2\ln v$$

мураккаб функциянинг $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. (6.9) ва (6.10) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\ln v\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}(-2)=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

7-§. Тўлиқ дифференциал шаклининг инвариантлиги

Эркли ўзгарувчилар тўлиқ дифференциалларини аргументлари оралиқ функциялар бўлган мураккаб функциялар билан таққослаймиз.

Агар $z=f(u, v)$ бўлса, бу ерда u ва v эркли ўзгарувчилар, у ҳолда унинг тўлиқ дифференциали (4.6) формула бўйича ҳисобланади:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv. \qquad (7.1)$$

Энди $z=f(u, v)$, бироқ $u=u(x, y)$ ва $v=v(x, y)$ оралиқ аргументлар бўлсин. Бундан, $z\,x$ ва y эркли ўзгарувчиларнинг функцияси бўлади. (4.6) формула бўйича қуйидагига эга бўламиз:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy.$$

Бу ерда $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни (6.10) ва (6.11) формулалар бўйича алмаштирамиз:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy.$$

Қавсларни очамиз ва қўшилувчиларни қайтадан гуруҳлаймиз:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right).$$

Қавслардаги ифодалар мос равишда du ва dv тўлиқ дифференциалларга тенг. Демак, ушбуга эга бўламиз:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv, \tag{7.2}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}\, dx + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy.$$

(7.1) ва (7.2) формулаларни таққослаш билан қуйидаги муҳим хулосани чиқарамиз: dz тўлиқ дифференциал аргументлар эркли ўзгарувчи бўлиши ёки эркли ўзгарувчиларнинг функциялари бўлишидан қатъи назар айни бир шаклни сақлайди. Тўлиқ дифференциал шаклининг бу хоссаси унинг шаклининг инвариантлиги деб аталади. Уни ихтиёрий сондаги ўзгарувчилар ҳоли учун умумлаштириш мумкин.

8-§. Ошкормас функциялар

Икки x ва y ўзгарувчини боғловчи ушбу

$$F(x, y) = 0 \tag{8.1}$$

тенгламани қараймиз. Агар x нинг бирор тўпламдаги ҳар бир қийматига x билан бирга (8.1) тенгламани қаноатлантирувчи ягона y қиймат мос келса, (8.1) тенглама бу тўпламда $y = \varphi(x)$ *ошкормас* функцияни аниқлайди.

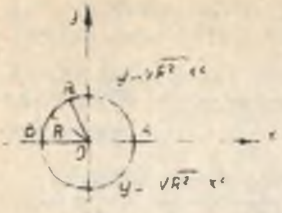
Шундай қилиб, x нинг y ошкормас функцияси x га нисбатан ечилмаган тенглама билан аниқланади. Ошкормас функциядан фарқли ўлароқ x га нисбатан ечилган $y = f(x)$ тенглама билан берилган функция *ошкор* функция деб аталади.

Масалан,

$$e^{2y} - x^3 - 1 = 0$$

тенглама барча $x > -1$ лар учун x га нисбатан y функцияни ошкормас аниқлайди. Уни y га нисбатан ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y = \frac{1}{2}\ln(x^3 + 1).$$



183- шакл.

Бу формула бизга y ни x га нисбатан ошкор функция сифатида беради.

Ушбу

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

тенглама эса иккита функцияни ошкормас аниқлайди (183- шакл):

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{ва} \quad y = -\sqrt{R^3 - x^2}$$

Бироқ ошкормас кўринишда берилган ҳар қандай функцияни ҳам ошкор кўринишда тасвирлаб бўлавермайди. Масалан, ушбу

$$y - x - \frac{1}{2}\sin y = 0,$$

$$x - x^3 y - \ln y = 0$$

тенгламалар билан берилган функцияларни y га нисбатан ечиб бўлмайди, тўғри, улардан биринчисини x га нисбатан ечиш мумкин. Шунинг учун

$$y - x - \frac{1}{2}\sin y = 0$$

тенглама y га нисбатан x функцияни ошкормас аниқлайди.

Баъзи ҳолларда $F(x, y) = 0$ кўринишдаги тенглама ошкормас функцияни умуман аниқламаслиги мумкин. Масалан, ушбу

$$x^2 + y^2 + R^2 = 0$$

тенглама ҳеч қандай x ва y ҳақиқий сонларда бажарилмайди, демак, у ҳеч қандай функцияни аниқламайди.

1. Мавжудлик теоремаси. Қандай шартларда $F(x, y) = 0$ тенглама ҳақиқатан y ни x га нисбатан ошкормас функция сифатида аниқлайди дейиш мумкинлигини кўрсатамиз. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради, биз уни исботсиз келтирамиз.

Ошкормас функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теорема. *Агар $F(x, y)$ функция ҳамда унинг $F'_x(x, y)$* ва *$F'_y(x,y)$ хусусий ҳосилалари $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда ушбу*

$$F(x, y) = 0$$

тенглама бу атрофда x_0 нуқтани ўз ичига олувчи бирор интервалда узлуксиз ва дифференциалланувчи ягона

$$y = \varphi(x)$$

ошкормас функцияни аниқлайди, бунда $\varphi(x_0) = y_0$.

График нуқтаи назаридан бу $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг атрофида $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган эгри чизиқ узлуксиз ва дифференциалланувчи $y=\varphi(x)$ функциянинг графигини ифодалашини англатади. Масалан, ушбу

$$F(x, y)=x^2+y^2-R^2=0$$

тенглама айланани аниқлайди.

Айлананинг ихтиёрий $P_0(x_0, y_0)$ нуқтасида $(y_0\neq 0)$ теореманинг шарти бажарилади:

$$F(x_0, y_0)=x_0^2+y_0^2-R^2=0,\ F'_y(x_0, y_0)=2y_0\neq 0.$$

Шунинг учун ушбу

$$y>0 \quad \text{да} \quad y=+\sqrt{R^2-x^2},$$

$$y<0 \quad \text{да} \quad y=-\sqrt{R^2-x^2}$$

функция берилган тенгламани қаноатлантирувчи ягона узлуксиз функция бўлади. $A(R;\ 0)$ ва $B(-R;\ 0)$ нуқталарда $(y_0=0)$ тенгламанинг шарти бузилади: $F'_y(\pm R, 0)=0$ ҳамда $x=R$ ва $x=-R$ да иккала узлуксиз $y=+\sqrt{R^2-x^2}$ ва $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ ечимлар нолга айланади. Агар бу нуқталарда

$$F'_x(\pm R, 0)=\pm 2R\neq 0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда, аксинча, x ни y га нисбатан ягона узлуксиз функция кўринишида ифодалаш мумкин:

$$x>0 \quad \text{да} \quad x=+\sqrt{R^2-y^2},$$

$$x<0 \quad \text{да} \quad x=-\sqrt{R^2-y^2}.$$

Икки ўзгарувчининг ошкормас функцияси ҳам шунга ўхшаш учта ўзгарувчи миқдорларни боғловчи

$$F(x, y, z)=0$$

тенглама кўринишида аниқланади. Юқорида келтирилган мавжудлик теоремасига ўхшаш теорема ўринли бўлади.

Теорема. *Агар $F(x, y, z)$ функция ва унинг $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ хусусий ҳосилалари $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $F(x_0, y_0, z_0)=0$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $F(x, y, z)=0$ тенглама $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг (x_0, y_0) нуқтани ўз ичига олувчи бирор атрофда узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлган ягона $z=\varphi(x, y)$ ошкормас функцияни аниқлайди, бунда*

$$z_0=\varphi(x_0, y_0).$$

Энди ошкормас функциянинг дифференциалланувчанлик масаласини қараймиз.

2. Ошкормас функциянинг ҳосиласи. Ошкормас функция

$$F(x, y) = 0$$

берилган бўлсин ва бу тенглама y ни бирор $y = \varphi(x)$ функция сифатида аниқласин. $F(x, y)$ функция ошкормас функциянинг мавжудлик теоремаси шартларини қаноатлантирсин. Агар тенгламада y ўрнига $\varphi(x)$ функцияни қўйсак, у ҳолда ушбу

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

айниятни ҳосил қиламиз.

Демак, x бўйича $F(x, y)$ функциядан ҳосила ҳам (бу ерда $y = \varphi(x)$) нолга тенг бўлиши керак. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси ((6.9) формула) бўйича дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ёки

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_x = 0,$$

бундан

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{8.2}$$

1-мисол. Ушбу

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

тенглама билан берилган ошкормас функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. Мавжудлик теоремасининг шарти

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

функция учун бажарилишини текширамиз.

Функция бутун текисликда аниқланган ва узлуксиздир. Унинг хусусий ҳосилалари

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay = 3(x^2 - ay),$$

$$F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax = 3(y^2 - ax)$$

ҳам бутун текисликда узлуксиз. Шунинг учун $F'_y(x, y) = 3(y^2 - ax) \neq 0$ бўладиган нуқталарда x га нисбатан y функция (8.2) формула билан ҳисобланиладиган y'_x ҳосилага эга:

$$y'_x = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Энди учта ўзгарувчини боғлайдиган

$$F(x, y, z) = 0$$

тенгламани қараймиз. Унинг учун ошкормас функциянинг мавжудлик теоремаси шартлари бажарилади ва у z ни бирор $z = \varphi(x, y)$ функция сифатида аниқлайди деб фараз қилайлик.

Биринчи ҳолда (8.2) формулани келтириб чиқаришда қандай йул тутган бўлсак, шундай йўл тутамиз. Тенгламада z нинг ўрнига $\varphi(x, y)$ функцияни қўямиз ва қуйидаги айниятни ҳосил қиламиз:

$$F(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0.$$

Демак, $F(x, y, z)$ функциядан x ва y бўйича хусусий ҳосилалар ҳам (бунда $z = \varphi(x, y)$) нолга тенг бўлиши керак. Дифференциаллаб топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ёки

$$F'_x(x, y, z) + F'_z(x, y, z) \cdot z'_x = 0,$$

$$F'_y(x, y, z) + F'_z(x, y, z) \cdot z'_y = 0,$$

бундан

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{8.3}$$

2-мисол. Ушбу

$$e^z - xyz = 0$$

тенглама билан берилган ошкормас функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. $F(x, y, z) = e^z - xyz$ функция ҳамма ерда аниқланган ва узлуксиздир. Унинг хусусий ҳосилалари

$$F'_x(x, y, z) = -yz,$$

$$F'_y(x, y, z) = -xz,$$

$$F'_z(x, y, z) = e^z - xy$$

ҳамма ерда узлуксиз функциялар бўлади. Шунинг учун $F'_z(x, y, z) = e^z - xy \neq 0$ бўладиган нуқталарда z функция (8.3) формула билан ҳисобланиладиган z'_x ва z'_y хусусий ҳосилаларга эга бўлади:

$$z'_x = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy},$$

$$z'_y = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

Ихтиёрий сондаги ўзгарувчиларнинг ошкормас функцияси шунга ўхшаш аниқланади ва уларнинг хусусий ҳосилалари топилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. $z = f(u, v)$ мураккаб функциянинг, бу ерда $u = u(x)$ ва $v = v(x)$, $\frac{dz}{dx}$ ҳосиласини топиш учун формула келтириб чиқаринг.
2. $z = f(x, y)$ мураккаб функциянинг, бу ерда $y = y(x)$, $\frac{dz}{dx}$ тўла ҳосилани ҳисоблаш учун формула ёзинг.
3. $z = f(u, v)$ мураккаб функциянинг, бу ерда $u = u(x)$ ва $v = v(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларни топиш учун формула келтириб чиқаринг.
4. Икки ўзгарувчининг функцияси тўлиқ дифференциали шаклининг инвариантлик хоссаси нимадан иборат? Бу хоссани бир неча ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳол учун умумлаштиринг.
5. Ошкормас функциянинг мавжудлик теоремасини айтинг.
6. $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган $y = \varphi(x)$ ошкормас функцияни дифференциаллаш формуласини келтириб чиқаринг.
7. $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан берилган $z = \varphi(x, y)$ ошкормас функциянинг хусусий ҳосилалари формулаларини келтириб чиқаринг.
8. 3124 — 3136, 3145 — 3155, 3161 — 3164-масалаларни ечинг.

9-§. Сиртга уринма текислик

Фазода бирор-бир сиртни ифодалаши мумкин бўлган икки ўзгарувчининг

$$z = f(x, y)$$

функциясини қарайлик.

Таъриф. Сиртга $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада *уринма текислик* деб сиртда ётган чизиқларга уринма бўлган барча тўғри чизиқлар жойлашган текисликка айтилади. $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта *уриниш нуқтаси* дейилади.

Таъриф. Уриниш нуқтасида уринма текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ шу нуқтада сиртга ўтказилган *нормал* деб аталади.

Уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузиш.

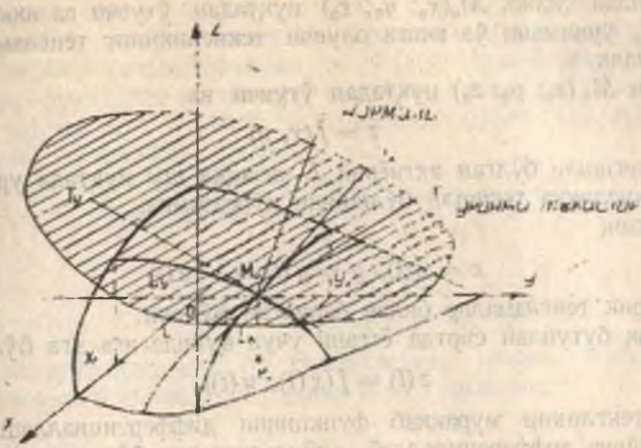
1. Уринма текисликнинг тенгламасини келтириб чиқариш учун бундай иш тутамиз.

$z = f(x, y)$ функцияни ифодаловчи сиртнинг $y = y_0$ ва $x = x_0$ текисликлар билан кесимини қараймиз. Берилган сиртда ҳосил бўлган L_x ва L_y ясси чизиқларга $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада M_0T_x ва M_0T_y уринмалар ўтказамиз. Бу икки тўғри чизиқ $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтадан ўтувчи бирор текисликни аниқлайди. Бу текисликнинг тенгламасини қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0). \qquad (9.1)$$

A ва B коэффициентларни текислик ўз ичига M_0T_x ва M_0T_y уринмаларни олиши шартидан топамиз (184-шакл).

Ҳақиқатан ҳам, M_0T_x уринма Oxz координата текислигига параллел $y = y_0$ текисликда ётгани учун (бунда Ox ўққа нисбатан



184- шакл.

унинг k_x бурчак коэффициенти $k_x = f'_x(x_0, y_0)$ га тенг ((3.4) формулага қаранг) бу уринманинг тенгламаси

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0), \\ y = y_0 \end{cases} \tag{9.2}$$

бўлади. M_0T_y уринманинг тенгламасини шунга ўхшаш топамиз:

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \end{cases} \tag{9.3}$$

чунки унинг Oy ўққа нисбатан k_y коэффициенти $k_y = f'_y(x_0, y_0)$ га тенг ((3.5) формулага қаранг).

Иккала M_0T_x ва M_0T_y тўғри чизиқ (9.1) текисликда ётади, шунинг учун бу тўғри чизиқ нуқталарининг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантириши керак. (9.1) тенгламага $z - z_0$ ва $y = y_0$ нинг (9.2) тенгламадаги қийматларини қўйиб, кейин $z - z_0$ ва $x = x_0$ нинг (9.3) тенгламадаги қийматларини қўйиб A ва B учун қийматлар ҳосил қиламиз:

$$A = f'_x(x_0, y_0), \quad B = f'_y(x_0, y_0).$$

(9.1) тенгламада A ва B коэффициентларни топилган қийматларига алмаштирамиз:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{9.4}$$

ёки

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Шундай қилиб, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадан ўтувчи ва иккита M_0T_x ва M_0T_y уринмани ўз ичига олувчи текисликнинг тенгламасини ҳосил қилдик.

Энди $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадан ўтувчи ва

$$z = f(x, y)$$

сиртга тегишли бўлган ихтиёрий L чизиққа шу нуқтада уринма ҳам (9.4) текисликка тегишли бўлишини кўрсатамиз.

L чизиқ

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин.

Чизиқ бутунлай сиртда ётгани учун қуйидагига эга бўламиз:

$$z(t) = f(x(t),\ y(t)).$$

Бу тенгликни мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси (6-§) бўйича дифференциаллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$z'(t) = f'_x(x, y)\cdot x'(t) + f'_y(x, y)\cdot y'(t)$$

ёки

$$f'_x(x, y)\,x'(t) + f'_y(x, y)\cdot y'(t_0) - z'(t) = 0.$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта t_0 параметрнинг қийматига мос келсин. У ҳолда охирги тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$f'_x(x_0, y_0)\,x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\,y'(t_0) - z'(t_0) = 0. \qquad (9.5)$$

Бу ерда $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, (-1) (9.4) текисликнинг нормал вектор проекцияси бўлади:

$$\vec{n} = \left\{ f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1 \right\}.$$

$x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ лар эса M_0 нуқтада L чизиққа уринманинг йўналтирувчи вектори проекцияси бўлади (5-боб, 5-§ га қаранг):

$$\vec{s} = \left\{ x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0) \right\}.$$

(9.5) тенглик бу векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлишини кўрсатади

$$\vec{n}\cdot\vec{s} = 0.$$

Демак, бу векторлар перпендикуляр экан. Бу, M_0 нуқтадан ўтувчи ва берилган сиртда ётувчи чизиқларга барча уринма тўғри чизиқлар (9.4) текисликка тегишли эканини англатади. Бу эса (9.4) тенглама сиртга $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада ўтказилган уринма текисликнинг тенгламаси эканини англатади.

Агар сирт тенгламаси z га нисбатан ечилмаган умумий кўринишдаги

$$F(x, y, z) = 0$$

тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда $F(x, y, z)$ функция $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтанинг атрофида ошкормас функциянинг мавжудлик теоремаси шартларини қаноатлантиради ва $F(x, y, z) = 0$ тенглама z ни x ва y нинг функцияси сифатида аниқлайди, яъни $z = f(x, y)$, бунда $z_0 = f(x_0, y_0)$ деб фараз қилиб, (8.3) формула бўйича $(x_0; y_0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Хусусий ҳосилаларнинг бу қийматларини уринма текисликнинг (9.4) тенгламасига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}\cdot(x - x_0) - \frac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Ошкормас функциянинг мавжудлик теоремаси шартига кўра $F'_z(M_0) = F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ бўлгани учун охирги тенгламани қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \qquad (9.6)$$

Сирт умумий кўринишдаги тенгламалар билан берилган ҳолда уринма текисликнинг тенгламаси шундай кўринишни олади. (9.6) уринма текисликнинг тенгламаси фақат $F'_z(M_0) \neq 0$ бўлганда маънога эга бўлади. *Бу, уринма текислик Ох ўқига параллел эканини англатади.*

2. Сиртга ўтказилган нормал чизиқнинг тенгламасини келтириб чиқариш учун аналитик геометриядан текислик (уринма текислик) ва тўғри чизиқ (нормал) нинг перпендикулярлиги шартини эслаш етарли: текисликнинг нормал вектори ва тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори мос проекцияларининг пропорционаллиги (яъни бу векторларнинг коллинеарлиги).

Агар сирт

$$z = f(x, y)$$

тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда $\vec{n} = \{f'_x(x_0, y_0), \ f'_y(x_0, y_0), -1\}$ — уринма текисликнинг $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадаги нормал вектори (9.4) дан келиб чиқади. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ уриниш нуқтасидаги нормалнинг $\vec{s}$ йўналтирувчи вектори сифатида $\vec{n}$ векторни олиш мумкин, чунки улар коллинеардир. $\vec{s} = \vec{n}$.

Шундай қилиб, сиртга $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтада нормалнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (9.7)$$

Агарда сирт

$$F(x, y, z) = 0$$

тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда (9.6) дан уринма текисликнинг нормал вектори

$$\vec{n} = \{F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\}$$

бўлиши келиб чиқади. Лекин сиртга M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада нормалнинг йўналтирувчи вектори ҳам худди шундай бўлади:

$$\vec{s} = \{F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\}.$$

Демак, шу нормалнинг бу ҳолдаги тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \tag{9.8}$$

1-мисол. Ушбу

$$z = e^{xy}$$

сиртга M_0 (0; 1; 1) нуқтада уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бундай белгилаймиз: $f(x, y) = e^{xy}$. Хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x, y) = e^{xy} \cdot y, \quad f'_y = e^{xy} \cdot x.$$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ бўлгани учун хусусий ҳосилаларнинг берилган нуқтадаги қийматларини ҳосил қиламиз:

$$f'_x(0,1) = 1, \quad f'_y(0,1) = 0.$$

Уларни (9.4) га қўйиб уринма текисликнинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$1(x - 0) + 0(y - 1) - (z - 1) = 0$$

ёки

$$x - z + 1 = 0.$$

Уринма текислик Oy ўқига параллел.

Хусусий ҳосилаларнинг қийматларини (9.7) га қўйиб, нормалнинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - 1}{1}.$$

Бу тенгламадан кўринадики, нормал Oy ўқига перпендикуляр экан.

2-мисол. Ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

сферага M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2)$ нуқтада уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бундай белгилаймиз: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. $M_0 (x_0; y_0; z_0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x (M_0) = 2x_0,\ F'_y (M_0) = 2y_0,\ F'_z (M_0) = 2z_0.$$

Бу қийматларни (9.6) ва (9.8) га қўямиз. Сферага M_0 нуқтада уринма текисликнинг

$$2x_0 (x - x_0) + 2y_0 (y - y_0) + 2z_0 (z - z_0) = 0,$$

ёки

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

ёки

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = R^2$$

тенгламасини ва сферага шу нуқтада нормалнинг

$$\frac{x - x_0}{2x_0} = \frac{y - y_0}{2y_0} = \frac{z - z_0}{2z_0},$$

ёки

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0},$$

ёки

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$$

тенгламасини ҳосил қиламиз. Бундан шунингдек, берилган сферага нормал координата бошидан ўтиши, яъни нормал сферанинг радиуси бўлиши келиб чиқади.

10-§. Икки ўзгарувчи функцияси тўлиқ дифференциалининг геометрик маъноси

Фазода бирор-бир сиртни ифодаловчи

$$z = f(x, y)$$

функцияни қарайлик. Бу сиртда $M_0 (x_0; y_0; z_0)$ нуқтани оламиз. Тўлиқ дифференциалнинг $P_0 (x_0; y_0)$ нуқтадаги

$$dz = f'_x (x_0, y_0)\, \Delta x + f'_y (x_0, y_0)\, \Delta y$$

ифодасини уринма текисликнинг $M_0 (x_0; y_0; z_0)$ нуқтадаги

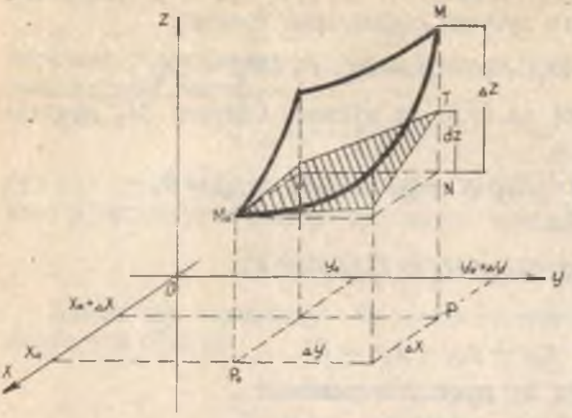
$$z - z_0 = f'_x (x_0, y_0)\, (x - x_0) + f'_y (x_0, y_0)\, (y - y_0)$$

тенгламаси билан taққослаймиз.

$x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$ бўлгани учун уринманинг тенгламаси

$$z - z_0 = f'_x (x_0, y_0)\, \Delta x + f'_y (x_0, y_0)\, \Delta y$$

кўринишни олади.



185- шакл.

Бу тенгламанинг ўнг қисми dz тўлиқ дифференциалнинг ўнг қисмига тенг. Демак, бу ифодаларнинг чап қисмлари ҳам тенг, яъни

$$dz = z - z_0.$$

Бу ерда z_0 M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ уриниш нуқтаси аппликатаси, z— уринма текислик ихтиёрий нуқтасининг аппликатаси, $z - z_0$ — уринма текислик уриниш нуқтаси аппликаталарининг орттирмалари.

Шундай қилиб, $z = f\ (x, y)$ функциянинг $P_0\ (x_0, y_0)$ нуқтадаги dz тўлиқ дифференциали $z = f\ (x, y)$ сиртга унинг $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текисликнинг уриниш нуқтаси аппликаталарининг орттирмаларини тасвирлайди. Тўлиқ дифференциалнинг геометрик маъноси мана шундан иборат (185- шакл).

$x_0\, \Delta x$ орттирма, $y_0\, \Delta y$ орттирма олганда $z_0 = f\ (x_0, y_0)$ функция MN кесма билан ифодаланувчи Δz орттирма олиши, dz дифференциал — NT кесма билан — уринма текисликнинг уриниш нуқтасидаги аппликаталар орттирмаси билан ифодаланиши шаклдан кўриниб турибди. Тўлиқ дифференциал билан функциянинг орттирмаси орасидаги фарқ, яъни $\Delta z - dz$ айирма сирт ва уринма текислик орасида жойлашган MT кесма билан тасвирланган.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Сиртга унинг берилган нуқтасида уринма текислик деб нимага айтилади?
2. Сиртга унинг берилган нуқтасида ўтказилган нормал чизиқ деб нимага айтилади?
3. $z = f\ (x, y)$ сиртга $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ нуқтада уринма текислик тенгламасини келтириб чиқаринг.
4. $z = f\ (x, y)$ сиртга $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ нуқтада ўтказилган нормал чизиқнинг тенгламасини келтириб чиқаринг.
5. $F\ (x, y, z) = 0$ сиртга $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ нуқтада уринма текисликнинг тенгламасини ёзинг.
6. $F\ (x, y, z) = 0$ сиртга $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ нуқтада ўтказилган нормал чизиқнинг тенгламасини ёзинг.
7. $z = f\ (x, y)$ функция тўлиқ дифференциалининг геометрик маъноси қандай?
8. 3410 — 3420- масалаларни ечинг.

11-§. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар

Бирор $P\ (x, y)$ нуқтада ва унинг атрофида аниқланган $z = f\ (x, y)$ функцияни қараймиз. Бу атрофнинг ҳар бир нуқтасида x ва y ўзгарувчилар бўйича

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

хусусий ҳосилалар мавжуд деб фараз қилайлик. Уларни *биринчи тартибли хусусий ҳосилалар* (ёки *биринчи хусусий ҳосилалар*) деб атаймиз. Бу ҳосилалар x ва y эркли ўзгарувчиларнинг функцияларини ифодалайди.

Таъриф. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан x ва y ўзгарувчилар бўйича олинган хусусий ҳосилалар, агар улар мавжуд бўлса, *иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар* (ёки *иккинчи хусусий ҳосилалар*) деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y), \quad z''_{x^2} = f''_{x^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y),$$

$$z''_{y^2} = f''_{y^2}(x, y).$$

Тўртта иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлдик.

$f''_{xy}(x, y)$ ва $f''_{yx}(x, y)$ хусусий ҳосилалар *аралаш хусусий ҳосилалар* деб аталади. $f''_{xy}(x, y)$ ҳосила дастлаб x бўйича, кейин y бўйича дифференциаллаш билан, $f''_{yx}(x, y)$ эса, аксинча, дастлаб y бўйича, кейин x бўйича дифференциаллаш билан ҳосил қилинади.

1-мисол. Ушбу

$$z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Бундай белгилаймиз: $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$.

Аввал биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + y^2 - 5y^3, \quad f'_y(x, y) = 2xy - 15xy^2 + 5y^4.$$

$f'_x(x, y)$ ҳосилани x бўйича ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$f''_{x^2}(x, y) = 6x, \quad f''_{xy}(x, y) = 2y - 15y^2.$$

$f'_y(x, y)$ ҳосилани x бўйича ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$f''_{yx}(x, y) = 2y - 15y^2, \quad f''_{y^2}(x, y) = 2x - 30xy + 20y^3.$$

Аралаш ҳосилалар тенг бўлиб чиқишини таъкидлаймиз. Бу ҳар доим ҳам мумкинми?

Бу саволга дифференциаллаш натижасининг унинг тартибига боғлиқмаслиги ҳақидаги қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Агар $f''_{xy}(x, y)$ ва $f''_{yx}(x, y)$ аралаш ҳосилалар $P(x; y)$ нуқтанинг бирор δ-атрофида мавжуд ва шу нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда улар шу нуқтада ўзаро тенг бўлади, яъни*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Исботи. Ушбу

$$A = [f\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f\,(x+\Delta x,\ y)] - [f\,(x,\ y+\Delta y) - \\ - f\,(x,\ y)] \qquad (11.1)$$

ифодани қараймиз, бу ерда Δx ва Δy лар шундай кичикки,

$$P_1\ (x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$

нуқта $P\ (x,\ y)$ нуқтанинг δ- атрофида ётади. Ёрдамчи биргина x ўзгарувчининг дифференциалланувчи функциясини қараймиз:

$$\varphi\,(x) = f\,(x,\ y+\Delta y) - f\,(x,\ y).$$

У ҳолда (11.1) ифодани $[x,\ x+\Delta x]$ кесмада $\varphi\ (x)$ функциянинг орттирмаси сифатида қараш мумкин:

$$A = \Delta\varphi = \varphi\,(x+\Delta x) - \varphi\,(x).$$

Бу айирмага Лагранж теоремасини қўллаймиз:

$$A = \Delta\varphi = \varphi'\ (\overline{x})\ \Delta x = [f'_x\,(\overline{x},\ y+\Delta y) - f'_x\,(\overline{x},\ y)]\ \Delta x,$$

бу ерда

$$x < \overline{x} < x+\Delta x.$$

Квадрат қавс ичида турган ифодани биргина y ўзгарувчининг $[y,\ y+\Delta y]$ кесмада дифференциалланувчи $f'_x\,(\overline{x},\ y)$ функциясининг орттирмаси сифатида қараш мумкин. Бу айирмага яна бир марта Лагранж теоремасини қўллаймиз:

$$A = f''_{xy}\ (\overline{x},\ \overline{y})\ \Delta x\,\Delta y, \qquad (11.2)$$

бу ерда

$$y < \overline{y} < y+\Delta y.$$

Агар энди биргина y ўзгарувчининг ёрдамчи

$$\psi\,(y) = f\,(x+\Delta x,\ y) - f\,(x,\ y)$$

функцияси киритилса, у ҳолда (11.1) ифодани бу функциянинг $[y,\ y+\Delta y]$ кесмадаги орттирмаси сифатида қараш мумкин:

$$A = \Delta\psi = \psi\,(y+\Delta y) - \psi\,(y).$$

Бу айирмага $[y,\ y+\Delta y]$ кесмада Лагранж теоремасини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A = \Delta\psi = \psi'\ (\overline{\overline{y}})\ \Delta y = [f'_y\ (x+\Delta x,\ \overline{\overline{y}}) - f'_y\ (x,\ \overline{\overline{y}})]\ \Delta y,$$

бу ерда

$$y < \overline{\overline{y}} < y+\Delta y.$$

Квадрат қавс ичида турган айирмага яна Лагранж теоремасини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A = f''_{yx}\ (\overline{\overline{x}},\ \overline{\overline{y}})\ \Delta x\,\Delta y, \qquad (11.3)$$

бу ерда

$$x < \bar{\bar{x}} < x + \Delta x.$$

(11.2) ва (11.3) формулаларни таққослаб,

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \qquad (11.4)$$

тенгликка эга бўламиз. (11.4) тенгликда лимитга ўтамиз.

Агар $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ бўлса, у ҳолда $\bar{x} \to x$, $\bar{\bar{x}} \to x$, чунки $\bar{x}$ ва x $[x, x + \Delta x]$ кесмага тегишли; $\bar{y} \to y$ ва $\bar{\bar{y}} \to y$, чунки $\bar{y}$ ва $\bar{\bar{y}}$ $[y, y + \Delta y]$ кесмага тегишли. Бунда $f''_{x}(x, y)$ ва $f''_{yx}(x, y)$ хусусий ҳосилаларнинг $P(x, y)$ нуқтада узлуксизлигини ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\bar{x} \to x \\ \bar{y} \to y}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = \lim_{\substack{\bar{\bar{x}} \to x \\ \bar{\bar{y}} \to y}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x, y)$$

ёки

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Теорема исботланди. Кўриб турибмизки, хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлик шарти муҳим шарт экан.

Агар бу шарт бажарилмаса, у ҳолда теорема ўринли бўлмай қолиши мумкин.

Шундай қилиб, икки ўзгарувчининг функцияси кўрсатилган шартларда аслида, тўртта эмас, учта хусусий ҳосилага эга бўлади:

$$f''_{x^2}(x, y), \ f''_{xy}(x, y), \ f''_{y^2}(x, y).$$

Учинчи тартибли хусусий ҳосилалар ҳам шунга ўхшаш киритилади.

Таъриф. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилалар *учинчи тартибли хусусий ҳосилалар* (ёки *учинчи хусусий ҳосилалар*) деб аталади.

Аралаш ҳосилаларнинг тенглиги ҳақидаги теорема ҳам ўринлилигича қолади. Демак, агар бу теореманинг шарти бажарилса, икки ўзгарувчининг функцияси олтита эмас, тўртта аралаш хусусий ҳосилага эга бўлади

$$f'''_{x^3}(x, y), \ f'''_{x^2y}(x, y) \ f'''_{xy^2}(x, y), \ f'''_{y^3}(x, y).$$

Икки ўзгарувчи функциясининг n-тартибли ҳосилалари (ёки n-хусусий ҳосилалар) шунга ўхшаш таърифланади. Улар учун аралаш ҳосилаларнинг тенглиги ҳақидаги исботланган теорема ўринлилигича қолади. Бунда n-тартибли хусусий ҳосилаларнинг сони $(n + 1)$ га тенг бўлишини текшириб кўриш мумкин.

2-мисол. Ушбу

$$z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$$

функциянинг учинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечиш. Бундай белгилаймиз: $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. 1-мисолда иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар топилган эди:

$$f''_{x^2}(x, y) = 6x; \quad f''_{xy}(x, y) = 2y - 15y^2; \quad f''_{y^2}(x, y) = 2x - 30xy + 20y^3.$$

Учинчи тартибли хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'''_{x^3}(x, y) = 6, \quad f'''_{x^2y}(x, y) = 0, \quad f'''_{xy^2}(x, y) = 2 - 30y,$$

$$f'''_{y^3}(x, y) = 60y^2 - 30x.$$

Ихтиёрий сондаги эркли ўзгарувчиларга боғлиқ функциялар учун юқори тартибли хусусий ҳосилалар шунга ўхшаш таърифланади. Бу ерда ҳам дифференциаллаш натижаси дифференциаллаш кетма-кетлигига (тартибига) боғлиқ эмаслиги ҳақидаги теорема ўринли бўлади. Масалан, агар $u = f(x, y, z)$ бўлса, у ҳолда

$$f'''_{xyz}(x, y, z) = f'''_{xzy}(x, y, z) = f'''_{zxy}(x, y, z) = f'''_{yxz}(x, y, z) =$$
$$= f'''_{yzx}(x, y, z) = f'''_{zyx}(x, y, z).$$

3-мисол. Ушбу

$$u = e^{xyz}$$

функциянинг $f'''_{x^2y}(x, y, z)$ хусусий ҳосиласини топинг.

Ечиш. Бундай белгилаймиз: $f(x, y, z) = e^{xyz}$. Кўрсатилган учинчи тартибли ҳосилани топиш учун тўртта биринчи, иккинчи, учинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг ҳаммасини топиш умуман шарт эмас. Қуйидагича иш тутиш етарли:

$$f'_x(x, y, z) = e^{xyz} \cdot yz,$$

$$f''_{x^2}(x, y, z) = e^{xyz} \cdot y^2z^2,$$

$$f'''_{x^2y}(x, y, z) = e^{xyz} \cdot xy^2z^3 + 2yz^2e^{xyz} = e^{xyz} \cdot yz^2(xyz + 2).$$

Шундай қилиб, кўрсатилган хусусий ҳосилага эга бўлдик.

12-§. Юқори тартибли тўлиқ дифференциаллар

Биз энди функциянинг $P(x, y)$ нуқтадаги тўлиқ дифференциали (4-§) қуйидаги кўринишга эга бўлишини биламиз:

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.$$

Уни *биринчи тартибли тўлиқ дифференциал* (ёки *биринчи дифференциал*) деб атаймиз. У x ва y эркли ўзгарувчиларга ҳамда x ва y ларга боғлиқ бўлмаган dx ва dy ўзгармас катталикларга боғлиқ.

Таъриф. *Иккинчи тартибли тўлиқ дифференциал* (ёки *иккинчи дифференциал*) деб биринчи тартибли тўлиқ дифференциалдан олинган дифференциалга айтилади. Иккинчи тартибли тўлиқ дифференциал d^2z каби белгиланади.

Шундай қилиб, таърифга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$d\,(dz) = d^2z = d\,[f'_x\,(x,\,y)\,dx + f'_y\,(x,\,y)\,dy] = [f'_x\,(x,\,y)\,dx +$$

$$+ f'_y\,(x,\,y)\,dy]'_x\,dx + [f'_x\,(x,\,y)\,dx + f'_y\,(x,\,y)\,dy]'_y\,dy =$$

$$= f''_{x^2}\,(x,\,y)\,(dx)^2 + f''_{yx}\,(x,\,y)\,dydx + f''_{xy}\,(x,\,y)\,dxdy + f''_{y^2}\,(x,\,y)\,(d\,y)^2.$$

Агар $f''_{yx}\,(x,\,y)$ ва $f''_{xy}\,(x,\,y)$ узлуксиз бўлса, у ҳолда иккинчи тартибли тўлиқ дифференциал d^2z нинг ифодаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$d^2z = f''_{x^2}\,(x,\,y)\,dx^2 + 2f''_{xy}\,(x,\,y)\,dxdy + f''_{y^2}\,(x,\,y)\,dy^2. \qquad (12.1)$$

Бу ерда $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

Таъриф. *Учинчи тартибли тўлиқ дифференциал* (ёки *учинчи дифференциал*) деб иккинчи тартибли тўлиқ дифференциалдан олинган дифференциалга айтилади. Учинчи тартибли тўлиқ дифференциал d^3z каби белгиланади.

Ушбу

$$d^3z = f'''_{x^3}\,(x,\,y)\,dx^3 + 3f'''_{x^2y}\,(x,\,y)\,dx^2dy + 3f'''_{xy^2}\,(x,\,y)\,dxdy^2 +$$

$$+ f'''_{y^3}\,(x,\,y)\,dy^3 \qquad (12.2)$$

формуланинг тўғри эканини кўрсатиш мумкин.

Иккинчи ва учинчи тартибли дифференциалларнинг формулалари иккинчи ва учинчи даражали иккиҳадларнинг ёйилмасини эслатишини таъкидлаймиз:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

n-тартибли тўлиқ дифференциал (ёки *n-дифференциал*) шунга ўхшаш таърифланади ва d^nz каби белгиланади. d^nz нинг ифодаси n-даражали иккиҳаднинг Ньютон формуласи бўйича ёйилмасини эслатади:

$$d^nz = f^{(n)}_{x^n}\,(x,\,y)\,dx^n + nf^{(n)}_{x^{n-1}y}\,(x,\,y)\,dx^{n-1}\,dy +$$

$$+ \ldots + \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}\,f^{(n)}_{x^{n-k}y^k}\,(x,\,y)\,dx^{n-k}\,dy^k +$$

$$+ \ldots + f^{(n)}_{y^n}\,(x,\,y)\,dy^n.$$

Шунинг учун d^nz нинг ифодасини ёдда сақлаш қулай бўлиши учун уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n \cdot f\,(x,\,y).$$

$f\,(x,\,y)$ мураккаб функция бўлганда юқоридаги белгилаш формуласи ўринли эмас.

1-мисол. Ушбу

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

функция учун d^2z ни топинг.

Ечиш. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ каби белгилаймиз ва (12.1) формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун дастлаб барча иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$f'_x(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$f''_{x^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy}(x, y) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{y^2}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Демак,

$$d^2z = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dx^2 - 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy^2 =$$

$$= \frac{2}{(x^2+y^2)^2}(xydx^2 - (x^2-y^2)\,dxdy - xydy^2).$$

2-мисол. Ушбу

$$z = \sin(2x + y)$$

учун d^3z ни топинг.

Ечиш. Бундай белгилаймиз: $f(x, y) = \sin(2x + y)$. (12.2) формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун дастлаб барча учинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз. Ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} &f'_x(x, y) = 2\cos(2x + y), && f'_y(x, y) = \cos(2x + y),\\ &f''_{x^2}(x, y) = -4\sin(2x + y), && f''_{xy}(x, y) = -2\sin(2x + y),\\ &f'''_{x^3}(x, y) = -8\cos(2x + y), && f''_{y^2}(x, y) = -\sin(2x + y),\\ &f'''_{x^2y}(x, y) = -4\cos(2x + y), && f'''_{y^3}(x, y) = -\cos(2x + y),\\ & && f'''_{xy^2}(x, y) = -2\cos(2x + y). \end{aligned}$$

Демак,

$$d^3z = -8\cos(2x + y)\,dx^3 - 3\cdot 4\cos(2x + y)\,dx^2dy -$$

$$- 3\cdot 2\cos(2x + y)\,dxdy^2 - \cos(2x + y)\,dy^3 =$$

$$= -\cos(2x + y)\,[8dx^3 + 12dx^2dy + 6dxdy^2 + dy^3].$$

13-§. Бир неча ўзгарувчининг функцияси учун Тейлор формуласи

Бир ўзгарувчининг функциясини кўпҳад ва бирор қолдиқ ҳаднинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин экани маълум. Икки ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳолда шунга ўхшаш муносабат ўринли бўлади.

Ушбу теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Агар $z = f(x, y)$ функция ўзининг $(n+1)$-тартибгача ($(n+1)$-тартиблиси ҳам) хусусий ҳосилалари $P_0(x, y)$ нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз бўлса ва агар $P(x+\Delta x, y+\Delta y)$ нуқта шу атрофга тегишли бўлса, бу функциянинг $P_0(x, y)$ нуқтадаги $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ орттирмасини қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:*

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) =$$

$$= df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \frac{1}{3!} d^3 f(x, y) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\overline{x}, \overline{y}),$$

бу ерда

$$x < \overline{x} < x + \Delta x, \quad y < \overline{y} < y + \Delta y.$$

Исботи. t эркли ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлган

$$F(t) = f(x + t\Delta x, y + t\Delta y)$$

ёрдамчи функцияни киритамиз, бунда t нинг қиймати $[0, 1]$ кесмага тегишли, функция эса бу кесмада $(n+1)$-ҳосилага эга. Бу функцияни t ўзгарувчи бўйича $(n+1)$ марта дифференциаллаймиз. Ушбуга эга бўламиз:

$$F'(t) = f'_x(x + t\Delta x, y + t\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\,\Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x + t\Delta x, y + t\Delta y),$$

$$F''(t) = f''_{x^2}(x + t\Delta x, y + t\Delta y) \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x + t\Delta x,$$

$$y + t\Delta y)\,\Delta x \cdot \Delta y + f''_{y^2}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\,\Delta y^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x + t\Delta x, y + t\Delta y).$$

Шунга ўхшаш қуйидагини топамиз:

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x + t\Delta x, y + t\Delta y),$$

$$F^{(n+1)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x + t\Delta x, y + t\Delta y).$$

Маклорен формуласи (3-боб (22.1) формула) нинг биргина t ўзгарувчининг функцияси сифатидаги $F(t)$ функцияга келамиз:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \frac{F''(0)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{F^{(n+1)}(\overline{t})}{(n+1)!} t^{n+1},$$

бу ерда $0 < \overline{t} < t$.

Бу ёйилмада $t = 1$ деб фараз қилиб, ушбуга эга бўламиз:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\bar{t})}{(n+1)!}, \quad (13.1)$$

бу ерда $0 < \bar{t} < 1$.

$F(1)$, $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, ... $F^{(n)}(0)$, $F^{(n+1)}(\bar{t})$ ларни ҳисоблаймиз.

$$F(1) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y),\ F(0) = f(x, y),$$

$$F'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x, y) = df(x, y),$$

$$F''(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x, y) = d^2 f(x, y),$$

. . . .

$$F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x, y) = d^n f(x, y),$$

$$F^{(n+1)}(\bar{t}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x + \bar{t}\Delta x,\ y + \bar{t}\Delta y) =$$

$$= d^{n+1} f(x + \bar{t}\Delta x,\ y + \bar{t}\Delta y),$$

бу ерда $0 < \bar{t} < 1$.

$\bar{x} = x + \bar{t}\Delta x$, $\bar{y} = y + \bar{t}\Delta y$ белгилаш киритиб, бу қийматларни (13.1) формулага қўйиб, ушбуга эга бўламиз:

$$F(1) - F(0) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y) =$$

$$= df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \frac{1}{3!} d^3 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{(n+!)!} \cdot d^{n+1} f(\bar{x}, \bar{y}),$$

бу ерда

$$x < \bar{x} < x + \Delta x,\quad y < \bar{y} < y + \Delta y.$$

Формула исботланди, у икки ўзгарувчининг функцияси учун *Тейлор формуласи* дейилади. Уни бошқача кўринишга келтирамиз. Бунинг учун P_0 нуқтанинг x ва y координаталарини 0 индекслар билан белгилаймиз, яъни $P_0(x_0, y_0)$, у ҳолда P нуқтанинг $x + \Delta x$ ва $y + \Delta y$ координаталари $x_0 + \Delta x$ ва $y_0 + \Delta y$ бўлади, яъни $P(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$. Уларни бундай белгилаймиз: $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Янги белгилашларда Тейлор формуласи бундай ёзилади:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\bar{x}, \bar{y}), \quad (13.2)$$

бу ерда

$$x_0 < \bar{x} < x,\quad y_0 < \bar{y} < y.$$

Ушбу

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1} f\,(\overline{x},\ \overline{y})$$

ифода *қолдиқ ҳад* деб аталади.

Икки ўзгарувчининг функцияси учун Тейлор формуласи (13.2) бир ўзгарувчининг функцияси учун Тейлор формуласи (3-бобдаги (21.13) формула) ни эслатади. Тўғри, агар (13.2) формуладаги $f\,(x, y)$ функция дифференциали учун ифодани ёзсак, у ҳолда бир ўзгарувчининг функцияси учун ҳосил қилинган формулага нисбатан анча узундан-узоқ формулани ҳосил қиламиз.

$n = 0$ да (13.2) дан Лагранж (чекли орттирмалар) формуласини ҳосил қиламиз:

$$f\,(x, y) - f\,(x_0, y_0) = df\,(\overline{x}, \overline{y})$$

ёки

$$f\,(x, y) - f\,(x_0, y_0) = f'_x\,(\overline{x}, \overline{y})\,\Delta x + f'_y\,(\overline{x}, \overline{y})\,\Delta y,$$

бу ерда $x_0 < \overline{x} < x,\ y_0 < \overline{y} < y$.

Мисол. Ушбу

$$z = f\,(x, y) = x^y$$

функцияни учинчи тартибли ҳадларигача (учинчи тартибли ҳадларини ҳам) топиб, Тейлор формуласига кўра $(x - 1)$ ва $(y - 1)$ даражалар бўйича ёзинг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $x_0 = 1$ ва $y_0 = 1$. Функциянинг учинчи тартибгача хусусий ҳосилаларини, дифференциалларини топамиз:

$$f(x,\ y) = x^y\ ,\quad f'_x\,(x,\ y) = yx^{y-1},\quad f'_y\,(x,\ y) = x^y\,\mathrm{lu}\ x;$$

$$f(1{,}1) = 1,\qquad f'_x\,(1{,}1) = 1,\qquad f'_y\,(1{,}1) = 0;$$

$$df\,(1{,}1) = x - 1.$$

$$f''_{x^2}(x, y) = y\,(y - 1)\,x^{y-2},\quad f''_{xy}(x, y) = x^{y-1}(1 + y \ln x),$$

$$f''_{y^2}(x, y) = x^y\ \ln^2 x;$$

$$f''_{x^2}(1,\ 1) = 0,\ f''_{xy}(1,\ 1) = 1,\quad f''_{y^2}(1,\ 1) = 0;$$

$$d^2 f\,(1,\ 1) = 2\,(x - 1)\,(y - 1),$$

$$f'''_{x^3}\,(x, y) = y\,(y-1)\,(y-2)\,x^{y-3},\quad f'''_{x^2y}(x, y) = x^{y-2}\,(2y - 1 + y\,(y - 1) \ln x),$$

$$f'''_{y^3}\,(x, y) = x^y \ln^3 x,\quad f'''_{xy^2}(x, y) = x^{y-1} \ln x\,(2 + y \ln x);$$

$$f'''_{x^3}\,(1,\ 1) = 0\quad f'''_{xy^2}(1,\ 1) = 0,\quad f'''_{x^2y}\,(1,\ 1) = 1,\quad f'''_{y^3}\,(1,\ 1) = 0\,;$$

$$d^3 f\,(1,\ 1) = 3\,(x - 1)^2\,(y - 1).$$

$n = 3$ да Тейлор формуласи қуйидаги кўринишга эга:

$$f\,(x, y) = f\,(1,\ 1) + df\,(1,\ 1) + \frac{1}{2!}\,d^2 f\,(1,\ 1) + \frac{1}{3!}\,d^3 f\,(1,\ 1) + R_3.$$

Дифференциалларнинг топилган қийматларини формулага қўйгандан кейин қуйидаги тугал кўринишга эга бўламиз:

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3,$$

бу ерда

$$R_2 = \frac{1}{4!} d^4 f(\bar{x}, \bar{y}), \quad x < \bar{x} < 1, \quad y < \bar{y} < 1.$$

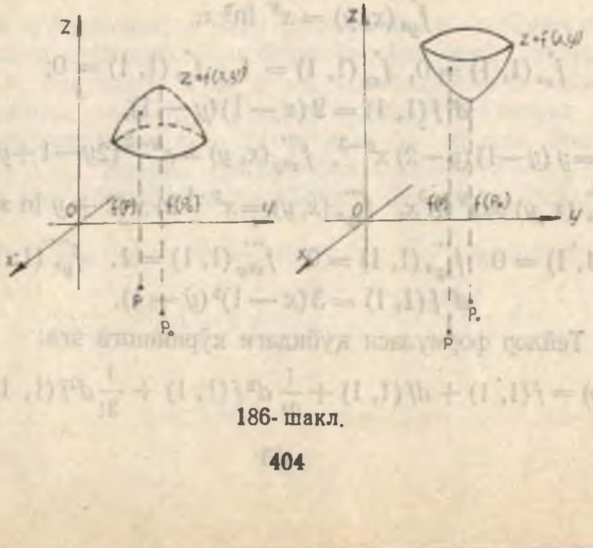
Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Икки ўзгарувчининг функцияси учун n-тартибли хусусий ҳосиланинг таърифини беринг.
2. Икки ўзгарувчи функциясининг иккинчи тартибли аралаш хусусий ҳосилаларининг тенглиги ҳақидаги теоремани айтинг ва исботланг.
3. Кўп ўзгарувчининг функцияси учун n-тартибли хусусий ҳосиланинг таърифини беринг.
4. Кўп ўзгарувчининг функцияси учун аралаш хусусий ҳосилаларнинг тенглиги ҳақидаги теоремани айтинг.
5. Икки ўзгарувчи функциясининг иккинчи тартибли тўлиқ дифференциали таърифини беринг ва уни топиш учун формула келтириб чиқаринг.
6. Икки ўзгарувчи функциясининг учинчи тартибли тўлиқ дифференциали таърифини беринг ва уни топиш учун формула келтириб чиқаринг.
7. Икки ўзгарувчи функциясининг n-тартибли тўлиқ дифференциали таърифини беринг ва уни топиш учун формула келтириб чиқаринг.
8. Икки ўзгарувчининг функцияси учун Тейлор формуласини келтириб чиқаринг.
9. 3118 — 3198, 3219 — 3229, 3249 — 3251-масалаларни ечинг.

14-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг экстремумлари

Дастлаб икки ўзгарувчининг функциясини қараймаз. Бундай функциялар учун экстремум нуқталарининг таърифи бир ўзгарувчи функциясининг экстремум нуқталари таърифига ўхшаш бўлади.

Таъриф. Агар $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги қиймати унинг шу нуқтанинг бирор атрофига тегишли ихтиёрий $P(x, y)$ нуқтадаги қийматидан катта (кичик) бўлса, $P_0(x_0, y_0)$ нуқта *максимум (минимум) нуқта* дейилади (186-шакл).



186-шакл.

Максимум ва минимум нуқталар *экстремум* нуқталар дейилади. Бундай ҳолда $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада экстремум (максимум ёки минимум) га эришади, дейилади.

Функциянинг экстремум нуқтадаги қиймати, яъни $z_0=f(x_0, y_0)$ функциянинг *экстремал қиймати* дейилади.

Максимум бўлган ҳолда	Минимум бўлган ҳолда
$f(P_0)>f(P)$	$f(P_0)<f(P)$
ёки	ёки
$f(x_0, y_0)>f(x, y)$	$f(x_0, y_0)<f(x, y)$.

Агар тенгсизликнинг чап қисмидаги ифодани ўнг қисмига ўтказсак, у ҳолда максимум бўлган ҳолда

$$\Delta z=f(P)-f(P_0)=f(x, y)-f(x_0, y_0)<0$$

га, минимум бўлган ҳолда

$$\Delta z=f(P)-f(P_0)=f(x, y)-f(x_0, y_0)>0$$

га эга бўламиз.

Шундай қилиб, максимум бўлган ҳолда функциянинг тўлиқ орттирмаси манфий ($\Delta z<0$), минимум бўлган ҳолда эса функциянинг тўлиқ орттирмаси мусбат ($\Delta z>0$) бўлади. Тескари даъво ҳам ўринли.

Ихтиёрий сондаги эркли ўзгарувчининг функцияси учун ҳам экстремум тушунчаси шунга ўхшаш киритилади.

15-§. Экстремумнинг зарурий шарти

$z=f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги экстремумга эришишидаги зарурий шартни ўрганишга ўтамиз.

Теорема. (Экстремумнинг зарурий шарти.) *Агар дифференциалланувчи функция* $z=f(x, y)$ $P_0(x_0, y_0)$ *нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда унинг шу нуқтадаги хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлиши зарур:*

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \quad f'_y(x_0, y_0)=0.$$

Исботи. $z=f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада экстремумга эришсин. У ҳолда ўзгармас $y=y_0$ да $z=f(x, y_0)$ функция биргина x ўзгарувчининг функцияси сифатида $x=x_0$ да экстремумга эга бўлади. Маълумки, бир ўзгарувчи функцияси экстремумининг зарурий шарти $f(x, y_0)$ функциянинг $x=x_0$ даги ҳосиласи нолга тенг бўлишидан иборат (4-боб, 3-§), яъни

$$f'_x(x_0, y_0)=0.$$

Шунга ўхшаш $x=x_0$ да биргина y ўзгарувчига боғлиқ $f(x_0, y)$ функция шартга кўра $y=y_0$ да экстремумга эга бўлади. Шунинг учун бир ўзгарувчи функцияси экстремумининг зарурий шартидан келиб чиққан ҳолда $z = f(x_0, y)$ функциянинг $y = y_0$ даги ҳосиласи нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Шуни исботлаш талаб этилган эди.

$z = f(x, y)$ сиртга уринма текисликнинг тенгламаси (9.4) кўринишга эга:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Агар P_0 (x_0, y_0) нуқта экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ ва } f'_y(x_0, y_0) = 0$$

бўлади, шунинг учун экстремум нуқтаси учун уринма текислик тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$z - z_0 = 0 \text{ ва } z = z_0.$$

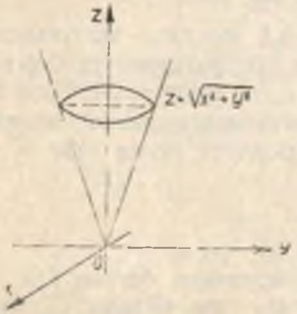
Шундай қилиб, биз қуйидаги натижага эга бўлдик: экстремум нуқталарида уринма текислик Oxy координата текислигига параллел бўлади. Икки ўзгарувчининг дифференциалланувчи функцияси экстремуми зарурий шартининг геометрик маъноси мана шундан иборат.

Функция дифференциалланувчи бўлмаган нуқталар ҳам узлуксиз функциянинг экстремум нуқталари бўлиши мумкин (яъни хусусий ҳосилалардан ақалли биттаси мавжуд бўлмаслиги ёки чексизликка тенг бўлиши мумкин) эканини исботсиз таъкидлаймиз. Масалан, ушбу

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функция координата бошида минимумга эга бўлиши равшан, лекин у бу нуқтада дифференциалланувчи эмас. Бу функциянинг графиги — учи координата бошида бўлган ва ўқи Oz ўқи билан устма-уст тушувчи доиравий конус (187- шакл).

Таъриф. Хусусий ҳосилалар нолга тенг бўладиган, мавжуд бўлмайдиган ёки чексизликка тенг бўладиган нуқталар *критик нуқталар* деб аталади.



187- шакл.

Функциянинг критик нуқталарини топиш учун унинг иккала хусусий ҳосиласини нолга тенглаш ва ҳосил бўлган икки ўзгарувчили иккита тенглама системасини ечиш керак. Бундан ташқари, хусусий ҳосилалари мавжуд бўлмайдиган нуқталарни топиш ҳам керак.

1- мисол. Ушбу

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

функциянинг критик нуқталарини топинг.

Ечиш. Бундай белгилаймиз: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Функция ҳамма ерда аниқланган. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Улар Oxy текисликнинг ҳамма ерида аниқланган. Шунинг учун критик нуқталарни топишда хусусий ҳосилаларни нолга тенглаш етарли. Ушбу тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \text{ёки} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламадан y номаълумни йўқотиш билан системани ечамиз:

$$\begin{cases} x = x^4 \\ y = x^2 \end{cases} \text{ёки} \quad \begin{cases} x(x^3 - 1) = 0, \\ \quad y = x^2 \end{cases} \text{ёки} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \ x_2 = 1, \\ \ y = x^2. \end{cases}$$

y нинг мос қийматлари $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ бўлади.

Иккита критик нуқтага эга бўламиз:

$$P_0(0; 0) \text{ ва } P_1(1; 1).$$

2-мисол. Ушбу

$$z = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$$

функциянинг критик нуқталарини топинг.

Ечиш. Функция ҳамма ерда аниқланган. Бундай белгилаймиз:

$f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f'_x(x, y) = -\frac{4x}{3}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{4y}{3}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}}.$$

$x = 0$ ва $y = 0$ да иккала ҳосила ҳам мавжуд эмас. Бу критик нуқта. Бу $P(0, 0)$ нуқтада функция дифференциалланувчи эмас.

Ихтиёрий сондаги ўзгарувчи функцияси экстремумининг зарурий шарти ва шундай функциялар учун критик нуқталар шунга ўхшаш ифодаланади.

16-§. Бир неча ўзгарувчи функцияси максимум ва минимумининг етарли шарти

Бир ўзгарувчининг функцияси учун бўлгани каби кўп ўзгарувчининг функцияси бўлган ҳолда ҳам экстремумнинг зарурий шарти етарли шарт бўлмайди. Бу, критик нуқталар экстремум нуқталар бўлиши шарт эмаслигини англатади. Шунинг учун критик нуқталарни экстремум бўлиши мумкин бўлган нуқталар деб атаймиз.

Етарли шартни ўрнатишга ўтамиз. Бу шарт бажарилганда функция экстремумга эришади.

Теорема. (Экстремумнинг етарли шарти.) Агар $z=f(x, y)$ *функция* $P_0(x_0, y_0)$ *критик нуқтада ва унинг бирор атрофида иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бундан ташқари, бу нуқтадаги хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлса:*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

у ҳолда $P_0(x_0, y_0)$ *нуқтада*

1) *агар* $\Delta > 0$ *бўлса, экстремум мавжуд, бунда*

а) *агар* $A > 0$ *бўлса, минимум;*

б) *агар* $A < 0$ *бўлса, максимум;*

2) *агар* $\Delta < 0$ *бўлса, экстремум йўқ;*

3) *агар* $\Delta = 0$ *бўлса, экстремум бўлиши ҳам ва бўлмаслиги ҳам мумкин. Бу ерда* $\Delta = AC - B^2$ *бўлиб,* $A = f''_{x^2}$, $B = f''_{xy}$, $C = f''_{y^2}$.

Исботи. $n = 1$ да Тейлор формуласи (13.2) ни ёзамиз. Ушбу

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2f(\bar{x}, \bar{y}) \qquad (16.1)$$

га эга бўламиз, бунда $x_0 < \bar{x} < x$, $y_0 < \bar{y} < y$. Бу формулада

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = 0$$

(чунки шартга кўра $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$),

$$d^2f(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{x^2}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x^2 + 2f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y + f''_{y^2}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y^2.$$

Буни ҳисобга олиб ва

$$A_1 = f''_{x^2}(\bar{x}, \bar{y}), \; B_1 = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}), \; C_1 = f''_{y^2}(\bar{x}, \bar{y})$$

деб фараз қилиб, (16.1) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}[A_1 \Delta x^2 + 2B_1 \Delta x \Delta y + C_1 \Delta y^2]. \quad (16,2)$$

$P_0(x_0, y_0)$ нуқтада иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлигидан ушбуга эга бўламиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} A_1 = \lim_{\substack{\bar{x} \to x_0 \\ \bar{y} \to y_0}} f''_{x^2}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{x^2}(x_0, y_0) = A,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} B_1 = \lim_{\substack{\bar{x} \to x_0 \\ \bar{y} \to y_0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy}(x_0, y_0) = B,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} C_1 = \lim_{\substack{\bar{x} \to x_0 \\ \bar{y} \to y_0}} f''_{y^2}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{y^2}(x_0, y_0) = C.$$

Демак,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A_1C_1-B_1^2)=AC-B^2=\Delta.$$

Кўрсатилган хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлигидан $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг (яъни кичик Δx ва Δy ларда) A_1 нинг ишораси A нинг ишораси билан, B_1 нинг ишораси B нинг ишораси билан, C_1 нинг ишораси C нинг ишораси билан, ва ниҳоят, $A_1C_1-B_1^2$ нинг ишораси $AC-B^2$ нинг ишораси билан мос келадиган етарлича кичик атрофи мавжуд экани келиб чиқади.

(16.2) ифодага қайтамиз. $A_1\neq 0$ деб фараз қилиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\Delta z=\frac{1}{2!\,A_1}[A_1^2\,\Delta x^2+2\,A_1B_1\,\Delta x\Delta y+A_1C_1\Delta y^2].$$

Тенглик ўнг қисмида тўлиқ квадрат ажратамиз:

$$\Delta z=\frac{1}{2!\,A_1}[(A_1\,\Delta x+B_1\,\Delta y)^2+(A_1C_1-B_1^2)\,\Delta y^2]. \qquad (16.3)$$

Функция Δz орттирмасининг A ва $\Delta=AC-B^2$ ларнинг ишораларига боғлиқ ишорасини излаймиз.

1) $\Delta=AC-B^2>0$ бўлсин. У ҳолда, юқорида айтилганидек, иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлигидан $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида $A_1C_1-B_1^2>0$ бўлади. Демак, (16.3) ифодада квадрат қавс мусбат ва унинг ишораси A_1 нинг ишорасига боғлиқ.

а) $A>0$ бўлса, у ҳолда етарлича кичик Δx ва Δy лар учун (яъни $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида)

$$A'>0.$$

У ҳолда (16.3) ифода ҳам мусбат, яъни

$$\Delta z>0, \text{ яъни } f(x, y)-f(x_0, y_0)>0,$$

бундан

$$f(x, y)>f(x_0, y_0)$$

экани келиб чиқади. Демак, $P_0(x_0, y_0)$ нуқтада *минимумга* эга бўламиз.

б) Агар $A<0$ бўлса, $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида $A_1<0$ бўлади. У ҳолда (16.3) ифода ҳам манфий, яъни

$$\Delta z<0 \quad \text{ёки} \quad f(x, y)-f(x_0, y_0)<0.$$

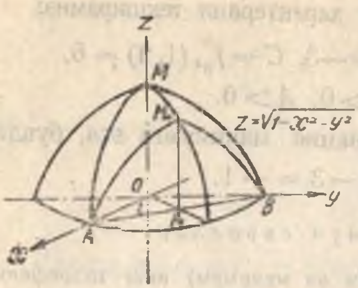
Бундан

$$f(x, y)<f(x_0, y_0)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $P_0(y_0, y_0)$ нуқтада *максимумга* эга бўламиз.

2) $\Delta=AC-B^2<0$ бўлсин, у ҳолда, юқорида айтилганидек, $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида $A_1C_1-B_1^2<0$ бўлади.



188- шакл.

Геометрик нуқтаи назардан бу чизиқнинг нуқталари учун энг катта қийматга A ва B нуқталар орасида ётган $P_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ нуқтада эришиш равшан. Бу $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функциянинг берилган $x+y-1=0$ чизиқдаги шартли экстремум нуқтаси бўлади. Бу P_0 нуқтага сиртда M_0 нуқта мос келади. P_0 нуқтадаги шартли экстремум шартсиз экстремум билан устма-уст тушмаслиги шаклдан кўриниб турибди.

Амалда шартли экстремум нуқталарини топиш учун олдин боғлаш тенгламасида y ни x орқали ошкор ифодалаш керак:

$$y=y(x).$$

Кейин $z=f(x, y)$ функциянинг ифодасида y ўрнига $y(x)$ функцияни қўйиб, бир ўзгарувчининг функциясини ҳосил қиламиз:

$$z=f(x, y(x))=F(x).$$

x нинг бу функция экстремумга эришадиган қийматларини аниқлаймиз, кейин боғлаш тенгламасидан y нинг мос қийматини топамиз.

Кўриб чиқилган ярим сферага доир мисолда $x+y-1=0$ боғлаш тенгламасидан $y=1-x$ ни ҳосил қиламиз. y нинг қийматини ярим сферанинг тенгламасига қўямиз. Ушбуга эга бўламиз:

$$z=\sqrt{1-x^2-(1-x)^2}=\sqrt{2x-2x^2}.$$

Бу функция $x=\frac{1}{2}$ да максимумга эришишини осон аниқлаш мумкин. Боғлаш тенгламасидан $y=\frac{1}{2}$ ни топамиз. Шартли экстремум нуқтаси $P_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ни топдик.

Боғлаш тенгламасини

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

параметрик тенгламалар билан ифодалаш мумкин бўлган ҳолда ҳам шартли экстремумга доир масала осон ечилади.

Бунинг учун x ва y ифодаларни берилган $z=f(x, y)$ функцияга қўйиш етарли. Ва яна бир ўзгарувчи функциясининг экстремумини излашга доир масалага келамиз.

18- §. Лагранж кўпайтувчилари усули

Агар боғлаш тенгламаси анча мураккаб кўринишга эга бўлса ва бир ўзгарувчини иккинчиси орқали ошкор ифодалаш мумкин бўлмаса, у ҳолда шартли экстремумни топиш масаласи анча қийин бўлади. Шартли экстремумларни топишдаги Лагранж кўпайтувчилари усулини кўрсатамиз.

x ва y

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (18.1)$$

тенглама (боғлаш тенгламаси) билан боғланганлик шартида

$$z = f(x, y)$$

функциянинг экстремумини топиш талаб этилаётган бўлсин.

Шартли экстремум нуқталарида экстремумнинг зарурий шарти бажарилиши керак; яъни z функциянинг тўлиқ ҳосиласи нолга тенг бўлиши керак:

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (18.2)$$

(18.1) тенгликдан $\frac{dy}{dx}$ ни топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}.$$

Ҳосиланинг топилган қийматини (18.2) тенгламага қўямиз. Ушбуга эга бўламиз:

$$f'_x(x, y) - f'_y(x, y)\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} = 0.$$

Бу тенгламани янги қўшимча номаълум λ ни киритиб ва пропорция кўринишида ёзиб, қулай шаклга келтирамиз:

$$\frac{f'_x(x, y)}{\varphi'_x(x, y)} = \frac{f'_y(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} = -\lambda,$$

бу ерда «—» ишора қулайлик учун қўйилган. Бу тенгламалардан қуйидаги системага келиш осон:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (18.3)$$

x ва y координаталар боғланиш тенгламасини ҳам қаноатлантириши керак бўлгани учун (18.3) тенгламалар системаси (18.1) боғланиш тенгламаси билан биргаликда учта: x, y, λ номаълумли учта тенглама системасини ҳосил қилади.

Бу системани қуйидаги қоида ёрдамида эслаб қолиш қулай: $z = f(x, y)$ функциянинг $\varphi(x, y) = 0$ боғланиш тенгламаси ўринли бўлганда шартли экстремуми бўлиши мумкин бўлган нуқталарини топиш учун қуйидаги ёрдамчи функцияни киритиш керак:

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

(бу ерда λ бирорта ўзгармас) ва унинг x, y, λ бўйича хусусий ҳосилаларини нолга тенглаб, ҳосил бўлган учта (18.3) ва (18.1) тенгламалардан x, y ва ёрдамчи кўпайтувчи λ ни топиш керак.

Шартли эктремумни топишнинг баён этилган усули *Лагранж кўпайтувчилари усули*, $\Phi(x, y, \lambda)$ функция эса *Лагранж функцияси* дейилади.

Шундай қилиб, шартли экстремумни топишни $\Phi(x, y, \lambda)$ Лагранж функциясининг оддий экстремумга текширишга келтириш мумкин. (18.3) ва (18.1) тенгламалар эса бу функция экстремуми мавжуд бўлишининг зарурий шарти бўлиб хизмат қилади. Шартли экстемум нуқталари учун етарли шартларни келтирмаймиз. Масаланинг тайин шартларидан топилган нуқта нима бўлишини билиб олиш мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$z = xy$$

функциянинг x ва y лар $2x+3y-5=0$ тенглама билан боғланганлик шарти остидаги экстремумини топинг.

Ечиш. Ушбу Лагранж функциясини қараймиз:

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 5).$$

x, y, λ лар бўйича хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\Phi'_x(x, y, \lambda) = y + 2\lambda,$$
$$\Phi'_y(x, y, \lambda) = x + 3\lambda,$$
$$\Phi'_\lambda(x, y, \lambda) = 2x + 3y - 5.$$

Ушбу

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан $\lambda = -\frac{5}{12}$, $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{6}$ ларни топамиз. $P\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$ нуқтада $z = xy$ функция энг катта қиймат $z_{\max} = \frac{25}{24}$ га эришишини кўриш мумкин, чунки $2x + 3y - 5 = 0$ тўғри чизиқнинг (бу ерда $x = 0$, $y = \frac{5}{3}$ ва $x = \frac{5}{2}$, $y = 0$) нуқталарида $z = 0$.

Лагранж кўпайтувчилар усулини исталган сондаги ўзгарувчили функцияларнинг шартли экстремумини топишга татбиқ этиш мумкин.

Масалан, n ўзгарувчили $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг ўзгарувчилари ушбу m та ($m < n$)

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

тенгламалар билан боғланган деган шарт остидаги экстремумини топиш талаб этилган бўлса,

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Лагранж функциясини тузиш ва унинг $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ бўйича хусусий ҳосилаларини нолга тенглаш керак. Ҳосил бўлган $m+n$ та тенгламадан ёрдамчи ўзгарувчи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ лар ва $x_1, x_2, \ldots, x$ лар аниқланади.

19- §. Икки ўзгарувчи функциясининг ёпиқ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматлари

Маълумки, (7- боб, 2- §) ёпиқ, чегараланган D соҳада узлуксиз $z = f(x, y)$ функция бу соҳада ҳеч бўлмаганда бир мартадан ўзининг энг катта қиймати M ва энг кичик қиймати m ни қабул қилади. Агар бу қийматларнинг бирортасига функция D соҳанинг ичида эришса, равшанки, улар экстремал қийматлар билан бир хил бўлади. Агар функция бу қийматларни соҳа чегараси L га тегишли баъзи нуқталарда қабул қилса, равшанки, улар экстремал нуқталар билан бир хил бўлмайди.

Шундай қилиб, ёпиқ соҳада узлуксиз функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун:

1) соҳа ичида жойлашган критик нуқталарни топиш ва функциянинг бу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш;

2) соҳа чегарасида жойлашган критик нуқталарни топиш ва функциянинг бу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш;

3) функциянинг соҳа чегарасининг турли қисмлари туташган нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш;

4) топилган барча қийматлар ичидан энг каттаси M ва энг кичиги m ни танлаш керак.

1- мисол. Ушбу

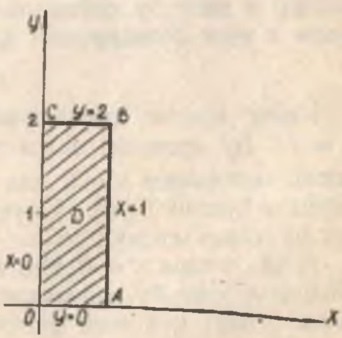
$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y = f(x, y)$$

функциянинг $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ ва $y = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ёпиқ соҳадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг.

Ечиш. Берилган тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳани ясаймиз. Бу ерда D соҳа тўғри тўртбурчакдан иборат (189- шакл).

1. Соҳанинг ичидаги критик нуқталарни топамиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$f'_x(x, y) = 2x + 2y - 4,$$
$$f'_y(x, y) = 2x + 8.$$



189- шакл.

Экстремум мавжуд бўлишининг зарурий шартига кўра бу хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлиши керак. Қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0, \\ 2x + 8 = 0, \end{cases}$$

бу системани ечиб, $x = -4$ ва $y = 6$ ни топамиз.

$P_1(-4;6)$ нуқта функциянинг критик нуқтаси, бироқ D соҳага тегишли эмас. Шундай қилиб, D соҳа ичида критик нуқталар мавжуд эмас, бинобарин, функция соҳа ичида ўзининг энг катта қийматига ҳам, энг кичик қийматига ҳам эришмайди.

2. Соҳанинг тўртта кесмадан иборат чегарасида ётган критик нуқталарни топамиз. Лагранж усулини татбиқ қилишга ҳожат бўлмаган экстремумини текширишга доир содда масалани ечишга тўғри келади.

а) OA чегара $y=0$ тенглама (боғланиш тенгламаси) билан аниқланади, y нинг бу қийматини берилган функцияга қўйиб, бир ўзгарувчи x нинг функциясини ҳосил қиламиз:

$$z = x^2 - 4x.$$

Бу функциянинг критик нуқталарини топамиз. Қуйидагига эга бўламиз: $z'_x = 2x - 4$. Бу ҳосилани нолга тенглаб, $x = 2$ ни топамиз. Боғланиш тенгламаси $y = 0$ дан фойдаланиб, P_2 (2; 0) нуқта ҳам соҳага тегишли эмаслигини кўрамиз. Демак, OA чизиқда функция экстремумга эга эмас.

б) AB чегара $x = 1$ тенглама (боғланиш тенгламаси) билан аниқланади. x нинг бу қийматини берилган функцияга қўйиб, бир ўзгарувчи y нинг функциясини ҳосил қиламиз:

$$z = 10y - 3.$$

Унинг критик нуқталарини топамиз. Қуйидагига эга бўламиз: $z'_y = 10$.

Ҳосила нолга тенг бўлмагани учун функция AB чизиқда критик нуқталарга эга бўлмайди.

в) BC чегара $y = 2$ тенглама (боғланиш тенгламаси) билан аниқланади. y нинг бу қийматини берилган функцияга қўйиб, бир ўзгарувчи x нинг функциясини ҳосил қиламиз:

$$z = x^2 + 16.$$

Унинг критик нуқталарини топамиз. Қуйидагига эга бўламиз: $z'_x = 2x$. Бу ҳосилани нолга тенглаб, $x = 0$ ни ҳосил қиламиз. Боғланиш тенгламаси $y = 2$ дан фойдаланиб, BC чегаранинг чап учига тегишли бўлган P_3 (0; 2) нуқтани топамиз. Демак, соҳа ичида критик нуқталар мавжуд эмас.

г) OC чегара $x = 0$ тенглама (боғланиш тенгламаси) билан аниқланади. x нинг бу қийматини берилган функцияга қўйиб, бир ўзгарувчи y нинг қуйидаги функциясини ҳосил қиламиз:

$$z = 8y.$$

Унинг критик нуқталарини топамиз. Қуйидагига эга бўламиз: $z'_y = 8$. Ҳосила нолга тенг бўлмагани учун функция OC чизиқда критик нуқталарга эга бўлмайди.

Шундай қилиб, соҳа ичида ҳам, соҳа чегарасида ҳам бирорта критик нуқта топмадик.

3. Функциянинг соҳа чегарасининг турли қисмлари туташадиган нуқталаридаги қийматларини топамиз. Бундай нуқталар тўртта.

$$A\ (1;\ 0); \qquad B\ (1;\ 2); \qquad C\ (0;\ 2); \qquad O\ (0;\ 0).$$

$$f\ (1,\ 0) = -3,\ f\ (1,\ 2) = 17,\ f\ (0,\ 2) = 16,\ f\ (0,\ 0) = 0.$$

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари чегаралар туташган нуқталардан топилади.

Шундай қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$M = z_{\text{энг катта}} = f\ (1,\ 2) = 17,\ m = z_{\text{энг кичик}} = f\ (1,\ 0) = -3.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. $z = f\,(x,\ y)$ функциянинг L чизиқдаги шартли экстремум нуқталарига таъриф беринг.
2. Шартли экстремум нуқталарини топиш усулларини кўрсатинг.
3. Икки ўзгарувчи функциясининг шартли экстремум нуқталарини топишнинг Лагранж кўпайтувчилари усулини баён қилинг.
4. Исталган сондаги ўзгарувчи функциясининг шартли экстремум нуқталарини топишнинг Лагранж кўпайтувчилари усулини баён қилинг.
5. Икки ўзгарувчи функциясининг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш усулини тавсифланг.
6. 3279—3285, 3291—3295- масалаларни ечинг.

8-боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган физик масалалар

Табиатшунослик ва техниканинг кўпгина масалалари қаралаётган ҳодиса ёки жараённи тавсифлайдиган номаълум функцияни топишга келтирилади. Бир нечта мисол кўрамиз.

1-мисол. Массаси m бўлган моддий нуқта оғирлик кучи таъсирида эркин тушмоқда. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, бу моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини топинг.

Ечиш. Моддий нуқтанинг вазияти $OM=s$ координата билан аниқланиб, у t вақтга боғлиқ равишда ўзгаради (190-шакл). Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра:

$$ma=F,$$

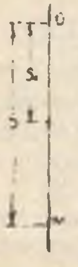
бу ерда m — моддий нуқтанинг массаси, a — моддий нуқтанинг тезланиши, F — таъсир этувчи куч. Шартга кўра моддий нуқтага фақат оғирлик кучи таъсир этади, демак, $F=mg$, бу ерда g — оғирлик кучи тезланиши, a тезланиш эса йўлдан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиладан иборат, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg \text{ ёки } \frac{d^2s}{dt^2}=g. \qquad (1.1)$$

(1.1) тенглик номаълум функция $s=s(t)$ нинг иккинчи тартибли ҳосиласини ўз ичига олган тенгламадан иборатдир. Мазкур ҳолда изланаётган функцияни икки марта t бўйича интеграллаб топиш осон:

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1, \qquad (1.2)$$

$$s=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2. \qquad (1.3)$$



190-шакл.

(1.3) тенглик биз излаётган ҳаракатнинг умумий қонунини беради, унда иккита интеграллаш доимийси: C_1 ва C_2 қатнашади. Уларни нуқтанинг бошланғич ҳолати ва бошлангич тезлигини билган ҳолда аниқлаш мумкин.

Бошланғич $t = 0$ моментда моддий нуқтанинг тезлиги v_0 га, унинг саноқ боши 0 дан узоқлиги эса s_0 га тенг бўлсин дейлик. $\frac{ds}{dt}$ тезликни ифодалагани учун (1.2) дан $C_1 = v_0$ ни, (1.3) дан эса $C_2 = s_0$ ни топамиз. (1.3) ҳаракат қонунининг хусусий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0t + s_0.$$

2-мисол. Радийнинг емирилиши шундай борадики, емирилиш тезлиги радийнинг бошланғич миқдорига пропорционал бўлади. Агар 1600 йилдан кейин мавжуд радий миқдорининг ярми қолиши маълум бўлса, радий миқдорининг вақт ўтиши билан ўзгаришини ифодаловчи қонунни топинг.

Ечиш. Айтайлик, x — радий миқдори ва t вақт (йилларда) бўлсин. x нинг t га боғланиши $x = x(t)$ ни топиш керак. Тенгламани дарҳол масала шартига асосан тузамиз, унга асосан ўзгариш тезлиги вақт бўйича ҳосиладан иборатдир:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти. Уни қуйидаги кўринишда қайта ёзамиз: $\frac{dx}{x} = kdt$ ва $d(\ln x) = d(kt)$ дифференциаллар тенглигидан функцияларнинг ўзлари ўзгармасга фарқ қилади деган хулосага келамиз:

$$\ln x = kt + C. \tag{1.4}$$

(1.4) тенгликда битта ихтиёрий ўзгармас бор. Уни топиш учун бошланғич моментда ($t = 0$ да) радий миқдори $x = x_0$ деб фараз қиламиз. Бу қийматни (1.4) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln x_0 = C.$$

Шундай қилиб, $\ln \frac{x}{x_0} = kt$; бундан радий миқдорининг вақт ўтиши билан ўзгаришини ифодаловчи қонунни ҳосил қиламиз:

$$x = x_0e^{kt}. \tag{1.5}$$

k коэффициентни $t = 1600$ да $x = \frac{x_0}{2}$ бўлиши шартидан топамиз. Бу қийматларни (1.5) га қўйиб,

$$\frac{1}{2} = e^{1600\,k}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан $1600k = -\ln 2$ ёки

$$k = -\frac{\ln 2}{1600} = -0,00043.$$

Демак, изланаётган (1.5) функция қуйидаги кўринишни олади:

$$x = x_0e^{-0,00043\,t}.$$

2-§. Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий тушунчалари

Таъриф. Эркли ўзгарувчи ва номаълум функция ҳамда унинг ҳосилалари ёки дифференциалларини боғловчи муносабат *дифференциал тенглама* дейилади.

Агар номаълум функция фақат битта ўзгарувчига боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенглама *оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Агар номаълум функция икки ёки ундан ортиқ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенглама *хусусий ҳосилали дифференциал тенглама* дейилади.

Таъриф. Дифференциал тенгламага кирган ҳосилаларнинг энг юқори тартиби *тенгламанинг тартиби* дейилади.

1-мисол. Ушбу $y'' - y' \cos x - x^2 y = 0$ дифференциал тенглама иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама.

2-мисол. Ушбу $x(1 - y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$ дифференциал тенглама биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама.

3-мисол. Ушбу $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ дифференциал тенглама биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама.

Юқоридаги дастлабки иккита мисолда y — номаълум функция, x эса эркин ўзгарувчи, учинчи мисолда эса номаълум функция z иккита x ва y ўзгарувчига боғлиқдир.

n-тартибли оддий дифференциал тенглама умумий кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (2.1)$$

Бу ерда x — эркли ўзгарувчи, y — номаълум функция ва $y', \ldots, y^{(n)}$ лар номаълум функциянинг ҳосилаларидир. Хусусий ҳолларда n-тартибли тенгламада n дан паст тартибли ҳосилалар иштирок этмаслиги мумкин, шунингдек, номаълум функциянинг ўзи ёки эркли ўзгарувчи ҳам бўлмаслиги мумкин.

Таъриф. Дифференциал тенгламанинг ечими ёки интеграли деб тенгламага қўйганда уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай дифференциалланувчи $y = \varphi(x)$ функцияга айтилади.

4-мисол. Ушбу $y = 3e^x$ ва $y = 4e^{-x}$ функциялар $y'' - y = 0$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини текширинг.

Ечиш. 1) $y = 3e^x$ функцияни текширамиз. y' ва y'' ларни топамиз: $y' = 3e^x$, $y'' = 3e^x$.

Буларни берилган тенгламага қўямиз:

$$3e^x - 3e^x = 0, \ 0 = 0.$$

Демак, $y = 3e^x$ функция $y'' - y = 0$ тенгламанинг ечими экан.

2) Худди шундай ишларни иккинчи функция учун ҳам бажарамиз:

$$y = 4e^{-x}, \quad y' = -4e^{-x}, \quad y'' = 4e^{-x},$$

$$4e^{-x} - 4e^{-x} = 0, \; 0 = 0.$$

Демак, $y = 4e^{-x}$ функция ҳам $y'' - y = 0$ тенгламанинг ечими бўлар экан.

Таъриф. Дифференциал тенглама ечимининг графиги *интеграл эгри чизиқ* дейилади.

Дифференциал тенгламанинг ечимини топиш жараёни кўпинча интеграллаш билан боғлиқ бўлгани учун бу жараён *дифференциал тенгламани интеграллаш* деб юритилади.

3- §. Биринчи тартибли дифференциал тенглама

Ушбу $F(x, y, y') = 0$ тенглама *умумий кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенглама деб* аталади.

Агар уни y' га нисбатан ечиш мумкин бўлса бу қуйидагича ёзилади:

$$y' = f(x, y).$$

Ҳосилага нисбатан ёзилган бу шаклдан дифференциаллар иштирок этган шаклга ўтиш осон:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

бу ёзув *симметрик ёзув* деб аталади, чунки бу ерда x ва y ўзгарувчилар тенг ҳуқуқлидир. Келгусида қайси шакл қулай бўлса, ўшандан фойдаланамиз.

Дифференциал тенгламани, умуман айтганда, битта функция эмас, балки функцияларнинг бутун бир тўплами қаноатлантириши мумкин. Улардан бирини ажратиб кўрсатиш учун унинг аргументнинг бирорта қийматига мос қийматини кўрсатиш керак, яъни $x = x_0$ бўлганда $y = y_0$ кўринишдаги шарт берилиши керак. Бу шарт *бошланғич шарт* дейилади, у кўпинча қуйидагича ёзилади:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

Таъриф. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $y = \varphi(x, C)$, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон, функцияга айтилади:

а) у ихтиёрий ўзгармас C нинг ҳар қандай қийматида дифференциал тенгламани қаноатлантиради;

б) бошланғич $y\big|_{x=x_0} = y_0$ шарт ҳар қандай бўлганда ҳам, ихтиёрий ўзгармас C нинг шундай C_0 қийматини топиш мумкинки, $y = \varphi(x, C_0)$ функция берилган бошланғич шартни қаноатлантиради, яъни

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0).$$

Таъриф. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимидан ихтиёрий ўзгармаснинг мумкин бўлган қийматларида ҳосил қилинадиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

Умумий ечимни ошкормас ҳолда аниқлайдиган $\varphi(x, y, \overline{C}) = 0$ муносабат *умумий интеграл* деб аталади.

Хусусий интеграл деб, умумий интегралдан ихтиёрий ўзгармаснинг мумкин бўлган қийматида ҳосил бўладиган ечимга айтилади.

Умумий ечим (умумий интеграл) геометрик жиҳатдан битта C параметрга боғлиқ интеграл эгри чизиқлар оиласи кўринишида тасвирланади. Хусусий ечим (хусусий интеграл) бу оиланинг интеграл чизиқларидан биридир.

Дифференциал тенгламаларнинг ечимларини топишнинг ягона усули мавжуд эмас, шунинг учун дифференциал тенгламаларнинг айрим турларини қараб чиқишга ўтамиз, уларнинг умумий ечимларини топиш интегралларни ҳисоблашнинг одатдаги, оддий амалларига келтирилади.

1. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар. Дифференциал тенгламанинг энг содда тури ўзгарувчилари ажралган тенгламадир:

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0. \tag{3.1}$$

Унинг ўзига хос томони шундаки, dx нинг олдидаги кўпайтувчи фақат x га боғлиқ бўлиши мумкин бўлган функция, dy нинг олдидаги кўпайтувчи эса фақат y га боғлиқ бўлиши мумкин бўлган функциядир. Бу тенгламанинг умумий интегралини уни ҳадлаб интеграллаш орқали ҳосил қилишимиз мумкинлигини исботлаш мумкин:

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

Ихтиёрий ўзгармасни берилган тенглама учун қулай бўлган исталган кўринишда олиш мумкин.

1-мисол. Ўзгарувчилари ажралган қуйидаги тенглама берилган:

$$xdx + ydy = 0.$$

Уни интеграллаб, умумий интегрални топамиз:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \overline{C}.$$

$2\overline{C} = C^2$ деб белгилаб, $x^2 + y^2 = C^2$ га эга бўламиз.

Бу — маркази координата бошида, радиуси C бўлган концентрик айланалар оиласидан иборатдир.

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0 \tag{3.2}$$

кўринишдаги дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама дейилади.

(3.2) тенгламани $N_1(y)\cdot M_2(x) \neq 0$ ифодага бўлиб, уни ўзгарувчилари ажралган (3.1) тенгламага келтириш мумкин;

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0.$$

Буни интеграллаб, умумий интегрални ҳосил қиламиз.

Эслатма. Ушбу

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

кўринишдаги тенглама ҳам ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Унинг ўзига хос томони шундаки, унинг ўнг томони ҳар бири битта x ёки y ўзгарувчига боғлиқ бўлган кўпайтувчиларга ажралган.

$y' = \frac{dy}{dx}$ деб ўзгартириб ва тенгламанинг чап ҳамда ўнг томонларини dx га кўпайтириб (3.2) кўринишдаги қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$dy = f_1(x)\cdot f_2(y)\,dx,$$

бундан

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx.$$

Интегралласак $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C$ бўлади.

2-мисол. Қуйидаги дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$x(1+y^3)\,dx - y^2(1+x^2)\,dy = 0.$$

Ечиш. Тенгламани $(1+x^2)(1+y^3)\neq 0$ га бўлиб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{xdx}{1+x^2} - \frac{y^2dy}{1+y^3} = 0.$$

Интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{3}\ln|1+y^3| = \frac{1}{6}\ln C.$$

Келгуси ўзгартиришларни осонлаштириш учун ихтиёрий ўзгармас сифатида $\frac{1}{6}\ln C$ олинди. Юқоридаги ифодани потенцирлаб, умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2} = C.$$

3-мисол. Ушбу $y'y = \frac{e^x}{1+e^x}$ дифференциал тенгламанинг $y|_{x=0} = \sqrt{2}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш $y' = \frac{dy}{dx}$ деймиз ва dx га кўпайтириб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$ydy = \frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

Интеграллаб, умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + \ln C.$$

Энди умумий ечимни топиш мумкин:

$$y = \sqrt{2\ln C\cdot(1+e^x)}. \qquad (3.3)$$

Хусусий ечимни топиш учун бошланғич шартдан фойдаланиб, ихтиёрий ўзгармаснинг қийматини аниқлаймиз. (3.3) умумий ечимга $x = 0$, $y = \sqrt{2}$ ни қўйиб, $\sqrt{2} = \sqrt{2\ln(2C)}$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $C = \frac{e}{2}$. Демак, изланаётган хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = \sqrt{2\ln\frac{e}{2}(1+e^x)}.$$

2. Бир жинсли дифференциал тенгламалар. Энг аввал бир жинсли функцияга таъриф берамиз.

Таъриф. Агар $f(x, y)$ функцияда x ва y ўзгарувчиларни мос равишда tx ва ty га алмаштирганда (бу ерда t — ихтиёрий параметр) t^n га кўпайтирилган яна ўша функция ҳосил бўлса, яъни

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

шарт бажарилса, $f(x, y)$ функция *n ўлчовли бир жинсли функция* деб аталади.

4-мисол. $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ функция бир ўлчовли бир жинсли функциядир, чунки

$$f(tx, ty) = \sqrt{t^2x^2+t^2y^2} = t\sqrt{x^2+y^2} = tf(x, y).$$

5-мисол. Ушбу $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ функция нол ўлчовли бир жинсли функция, чунки

$$f(tx, ty) = \frac{tx-ty}{tx+ty} = \frac{x-y}{x+y}, \text{ яъни } f(tx, ty) = f(x, y)$$

ёки

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y).$$

$f(tx, ty) = f(x, y)$ шартга бўйсунадиган нол ўлчовли бир жинсли функция $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ кўринишда ёзилиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, t параметрни ихтиёрий танлаб олиш мумкин бўлгани учун $t = \frac{1}{x}$ деб оламиз. У ҳолда

$$f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Биз қуйида нол ўлчовли бир жинсли функция билан иш кўрамиз.

Таъриф. Агар биринчи тартибли $y'=f(x,\ y)$ дифференциал тенгламанинг ўнг томони x ва y га нисбатан нол ўлчовли бир жинсли функция бўлса, бундай тенглама *бир жинсли тенглама* дейилади.

Шундай қилиб, бир жинсли тенгламани

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.4}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бир жинсли (3.4) тенгламани $\frac{y}{x} = u(x)$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш мумкин, у ҳолда $y = u \cdot x$, бу ерда u — янги изланаётган функция. Кейинги тенгликни дифференциаллаб, $y' = u'x + u$ ни ҳосил қиламиз. y ва y' нинг қийматларини (3.4) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз. Ушбу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани олдик: $u'x = \varphi(u) - u$ ёки дифференциалларда: $xdu = (\varphi(u) - u)\,dx$. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Интеграллашдан кейин u ўрнига $\frac{y}{x}$ нисбатни қўйиб, (3.4) тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Ушбу

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{3.5}$$

тенгламада $M(x,\ y)$, $N(x,\ y)$ лар бир хил ўлчовли бир жинсли функциялар бўлгандагина (3.5) тенглама бир жинсли тенглама бўлади. Бу — иккита бир хил ўлчовли бир жинсли функцияларнинг нисбати нол ўлчовли бир жинсли функция бўлишидан келиб чиқади.

(3.5) кўринишдаги тенгламани ечиш учун уни дастлаб (3.4) кўринишга келтириш керак:

$$y' = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Масалан, $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2\,yx\,dx = 0$ тенглама бир жинслидир, чунки $y^2 - 3x^2$ ва $2xy$ функциялар икки ўлчовли бир жинслидир. Тенгламани ечишга киришишдан аввал уни ҳосилага нисбатан ечилган шаклга келтириш керак:

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$$

6-мисол. Ушбу

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \text{ ёки } y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ўнг томони нол ўлчовли бир жинсли функциядан иборат. $\frac{y}{x} = u$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда $y = ux$, $y' = u'x + u$. y ва y' нинг қийматини тенгламага қўямиз:

$$u'x + u = u + \sqrt{1 - u^2}, \; u'x = \sqrt{1 - u^2}.$$

Қуйидаги ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Интеграллаб, топамиз: $\arcsin u = \ln x + \ln C$. Бу ердан $u = \sin(\ln Cx)$. Энди $\frac{y}{x} = u$ деб ўрнига қўйсак, $\frac{y}{x} = \sin(\ln Cx)$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан y ни x орқали ифодалаш осон: $y = x\sin(\ln Cx)$. Умумий ечимни топдик.

3. Бир жинсли тенгламаларга келтириладиган тенгламалар. Бир жинсли тенгламаларга қуйидаги кўринишдаги тенгламалар келтирилади:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}. \tag{3.6}$$

Агар $c = c_1 = 0$ бўлса, (3.6) тенглама бир жинсли бўлади. Айтайлик, $c \neq 0$, $c_1 \neq 0$ ёки улардан бири нолдан фарқли бўлсин. Ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha, \\ y = y_1 + \beta, \end{cases} \tag{3.7}$$

У ҳолда $dx = dx_1$, $dy = dy_1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$. Буларни (3.6) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + a\alpha + by_1 + b\beta + c}{a_1x_1 + a_1\alpha + b_1y_1 + b_1\beta + e_1}$$

ёки

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{(ax_1 + by_1) + (a\alpha + b\beta + c)}{(a_1x_1 + b_1y_1) + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}. \tag{3.8}$$

Қуйидаги тенгликлар бажарилса, юқоридаги (3.8) тенглама бир жинсли бўлади:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Бу системани α ва β га нисбатан ечиб, α ва β нинг (3.7) ўрнига қўйиш (3.6) тенгламани бир жинсли қиладиган қийматларини аниқлаймиз.

Агар $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ бўлса, (3.9) система ечимга эга бўлмайди. Бундай ҳолда (3.6) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага

$$z = ax + by$$

ўрнига қўйиш орқали келтирилади.

(3.6) тенгламани интеграллашда қўлланилган усул $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ (бу ерда f — ихтиёрий функция) тенгламани интеграллашда ҳам қўлланилади.

7-мисол. Ушбу $y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$ тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Детерминант: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha, \\ y = y_1 + \beta. \end{cases}$$

У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + \alpha + \beta - 3}{x_1 - y_1 + \alpha - \beta - 1}.$$

Энди $\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0, \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases}$ системани ечиб, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ эканини топамиз. Натижада бир жинсли $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$ тенгламага эга бўламиз, уни $\frac{y_1}{x_1} = u$ ўрнига қўйиш ёрдамида ечамиз, демак,

$$y_1 = ux_1,$$
$$y_1' = u'x_1 + u,$$
$$u'x_1 + u = \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Соддалаштиришлардан сўнг ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1 + u^2}{1 - u} \text{ ёки } \frac{1 - u}{1 + u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Тенгламани интеграллаб, топамиз:

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln|1 + u^2| = \ln|x_1| + \ln|C| \text{ ёки } Cx_1\sqrt{1 + u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}.$$

$u = \frac{y_1}{x_1}$ ни ўрнига қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1}}.$$

Ниҳоят, $x_1=x-2$, $y_1=y-1$ алмаштиришларни бажариб, x ва y ўзгарувчиларга ўтамиз:

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

8-мисол. Ушбу

$$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Детерминант: $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$, демак, тенгламани $\begin{cases}x=x_1+\alpha,\\ y=y_1+\beta\end{cases}$ ўрнига қўйиш ёрдамида ечиш мумкин эмас. Бу тенгламани $2x+y=z$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирамиз, у ҳолда $y'=z'-2$ десак, тенглама $z'-2=\frac{z-1}{2z+5}$ ёки $z'=\frac{5z+9}{2z+5}$ кўринишга келади. Уни ечиб топамиз: $\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+C$. Энди $z=2x+y$ алмаштириш бажариб, x ва y ўзгарувчиларга ўтамиз:

$$10y-5x=\bar{C}-7\ln|10x+5y+9|.$$

4. Чизиқли тенгламалар

Таъриф. Номаълум функция ва унинг ҳосиласига нисбатан чизиқли (биринчи даражали) бўлган тенгламалар *биринчи тартибли чизиқли тенгламалар* деб аталади. Чизиқли тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{3.10}$$

бу ерда $P(x)$, $Q(x)$ лар x нинг маълум узлуксиз функциялари (ёки ўзгармасдир).

Агар тенгламанинг ўнг томони $Q(x)\equiv 0$ бўлса, (3.10) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлади. $Q(x)\not\equiv 0$ деб фараз қиламиз. (3.10) тенгламанинг ечимини x нинг иккита функцияси кўпайтмаси кўринишида излаймиз:

$$y=u(x)\cdot v(x). \tag{3.11}$$

Бу функцияларнинг бирини ихтиёрий қилиб олиш мумкин, иккинчиси эса (3.10) тенглама асосида аниқланади. (3.11) дан y' ни ҳисоблаймиз:

$$y'=u'v+v'u.$$

y ва y' ни (3.10) тенгламага қўямиз, натижада у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u'v+u(v'+Pv)u=Q. \tag{3.12}$$

Функциялардан бирини ихтиёрий танлаб олиш мумкин бўлгани учун v функцияни қавс ичида турган ифода нолга тенг бўладиган қилиб оламиз, яъни

$$v' + Pv = 0 \tag{3.13}$$

бўлишини талаб қиламиз. У ҳолда u функцияни топиш учун (3.12) дан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$u'v = Q. \tag{3.14}$$

Дастлаб (3.13) тенгламадан v ни топамиз. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dv}{dx} = -Pv \text{ ёки } \frac{dv}{v} = -P\,dx, \text{ бу ердан}$$

$$\ln v = -\int P\,dx + \ln C, \text{ бу ердан } v = C\,e^{-\int Pdx}.$$

Бизга (3.13) тенгламанинг нолдан фарқли бирорта ечими зарур, шунинг учун $C = 1$ деб оламиз. У ҳолда v функция учун

$$v = e^{-\int P\,dx} \tag{3.15}$$

ни оламиз. Бу ерда $\int Pdx$ — бирорта бошланғич функция v нинг (3.15) дан топилган қийматини (3.14) тенгламага қўйиб, u функция учун ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$u'e^{-\int P\,dx} = Q.$$

Бу тенгламани ечамиз:

$$du = Q \cdot e^{\int Pdx}\,dx,$$

$$u = \int Q \cdot e^{\int P\,dx} \cdot dx + C. \tag{3.16}$$

(3.15) ва (3.16) формулалар u ва v нинг x орқали ифодаларини беради. u ва v ни (3.11) формулага қўйиб, узил-кесил умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(C + \int Qe^{\int P\,dx} \cdot dx\right).$$

9-мисол. Ушбу чизиқли тенгламани ечинг:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}.$$

Ечиш. $y = u \cdot v$ деймиз, у ҳолда $y' = u'v + v'u$ бўлиб, қуйидагига эгамиз:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

ёки

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}. \tag{3.17}$$

$v' + \frac{v}{x} = 0$ бўлсин, у ҳолда $u'v = \frac{\sin x}{x}$. Булардан биринчисини ечамиз: $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, демак, $\ln v = -\ln x$, яъни $v = \frac{1}{x}$.

$v = \frac{1}{x}$ ни (3.17) тенгламага қўямиз: $u'v = \frac{\sin x}{x}$. Бу ердан $u' = \sin x$, $du = \sin x\, dx$, демак, $u = -\cos x + C$. Шундай қилиб, $v = \frac{1}{x}$, $u = -\cos x + C$. Узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x}(C - \cos x).$$

5. Бернулли тенгламаси. Ушбу

$$y' + Py = Qy^n$$

кўринишдаги тенгламани қараймиз, бунда P ва Q лар x нинг узлуксизлик функциялари ҳамда $n \neq 0$ ва $n \neq 1$. Бу тенглама *Бернулли тенгламаси* деб аталади ва у қуйидагича алмаштириш ёрдамида чизиқли тенгламага келтирилади.

Тенгламанинг барча ҳадларини y^n га бўламиз:

$$y^{-n} y' + Py^{-n+1} = Q. \tag{3.18}$$

Энди $z = y^{-n+1}$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$z' = (-n+1)\, y^{-n} \cdot y'.$$

Бу қийматларни (3.18) тенгламага қўйсак,

$$z' + (-n+1)\, Pz = (-n+1)\, Q$$

чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Бунинг умумий интегралини топиб ҳамда z ўрнига y^{-n+1} ифодани қўйиб, Бернулли тенгламасининг умумий интегралини топамиз.

Эслатма. Бернулли тенгламасидан $n=0$ бўлганда чизиқли тенглама, $n=1$ бўлганда эса ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил бўлади.

Бернулли тенгламасини бевосита $y = u \cdot v$ ўрнига қўйиш орқали ечиш ҳам мумкин.

6. Тўлиқ дифференциалли тенглама

Таъриф. Агар

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{3.19}$$

тенгламанинг чап қисми бирорта $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, яъни

$$du = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \tag{3.20}$$

бўлса, (3.19) тенглама *тўлиқ дифференциалли тенглама* дейилади. Бироқ, функциянинг тўлиқ дифференциали

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (3.21)$$

формула бўйича ҳисобланиши маълум. У ҳолда (3.20) ва (3.21) ларни таққослаб,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \qquad (3.22)$$

эканини топамиз. Биринчи муносабатни y бўйича, иккинчисини эса x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Бу ердан иккинчи тартибли ҳосилалар узлуксиз бўлгани учун:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (3.23)$$

Демак (3.19) тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиши учун (3.23) шарт бажарилиши керак.

10-мисол. Ушбу

$$(2x^3 - xy^2)\, dx + (2y^3 - x^2y)\, dy = 0$$

тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиш-бўлмаслигини текширинг.

Ечиш. (3.23) шартни текширамиз. $M(x, y)$ $N(x, y)$ ларни ёзамиз:

$$M(x, y) = 2x^3 - xy^2, \ N(x, y) = 2y^3 - x^2y.$$

Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy, \ \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy.$$

Бу ердан $\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{\partial N}{\partial x}$ экани келиб чиқади; шарт бажариляпти, демак, берилган тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама экан.

(3.19) тенглама ва (3.20) шартга қайтайлик. Уларни бирлаштириб, $du = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ ёки $du = 0$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан берилган тенгламанинг умумий интеграли $u(x, y) = C$ экани келиб чиқади, бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас. $u(x, y)$ ни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, у ҳолда $dy = 0$, натижада (3.20) қуйидагича ёзилади:

$$du = M(x, y)\, dx.$$

x бўйича интеграллаб.

$$u = \int M(x, y)\, dx + \varphi(y) \qquad (3.24)$$

ни топамиз. Бу ерда $\varphi(y)$ номаълум функция. Интеграллаш доимийси y га боғлиқ бўлиши мумкин, чунки x бўйича интеграллашда y ни ўзгармас деб ҳисобладик. Энди $\varphi(y)$ ни (3.24) нинг иккинчи муносабати бажариладиган қилиб танлаймиз. Бунинг учун (3.24) ни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x, y)$ га тенглаймиз:

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Бу ердан $\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$. Энди y бўйича интеграллаб топамиз: $\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + \overline{C}$. Шундай қилиб, $u(x, y)$ функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u = (x, y) = \int M(x,y)dx + \int \left(N(x, y) \right) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx)\, dy + \overline{C}.$$

Бу ифодани ихтиёрий ўзгармасга тенглаб, берилган тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз.

11- мисол. Биз юқорида

$$(2x^3 - xy^2)\, dx + (2y^3 - x^2y)\, dy = 0$$

тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама эканини кўрдик, чунки $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ эди, шунинг учун $du = (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$. $u(x, y)$ функцияни топамиз. y ни ўзгармас деб оламиз, у ҳолда $dy = 0$. Демак, $du = (2x^3 - xy^2)\, dx$. Бундан $u = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y)$. Энди $\varphi(y)$ ни $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ деган шартда аниқлаймиз: $-\frac{2x^2y}{2} + \varphi'(y) = 2y^3 - x^2y$, бу ердан $\varphi'(y) = 2y^3$ ёки $\varphi(y) = \frac{y^4}{2} + \overline{C}$,

$$u(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \overline{C}.$$

$u(x, y) = C$ бўлгани учун берилган тенгламанинг умумий интеграли қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} = C.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
2. Дифференциал тенгламанинг тартиби деб нимага айтилади?
3. Дифференциал тенгламани ечиш нима?
4. Интеграл эгри чизиқ нима?
5. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечими деб нимага айтилади?
6. Хусусий ечим нима? Биринчи тартибли тенглама учун бошланғич шарт нимадан иборат?
7. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг хусусий ва умумий ечимининг геометрик маъноси (талқини) қандай?
8. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага таъриф беринг ва уни интеграллаш усулларини кўрсатинг.
9. Қандай функция бир жинсли функция дейилади?
10. Қандай биринчи тартибли дифференциал тенглама бир жинсли тенглама дейилади? У қандай ечилади?
11. Қандай тенгламаларни бир жинсли тенгламаларга келтириш мумкин? Улар қандай ечилади?

12. Биринчи тартибли кандай тенглама чизиқли дифференциал тенглама дейилади? Уни ечиш усулини баён килинг.
13. Бернулли тенгламаси деб қандай тенгламага айтилади?
14. Биринчи тартибли қандай тенглама тўлиқ дифференциал тенглама дейилади? Уни ечиш усулини баён килинг.
15. 3901—3918, 3934—3948, 4025—4027- масалаларни ечинг.

4- §. Қоши масаласи

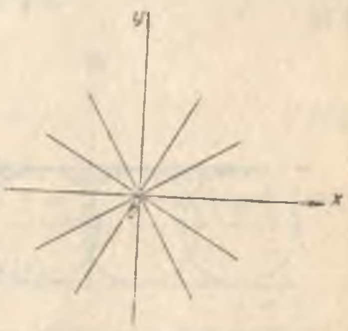
Дифференциал тенгламанинг берилган $y|_{x=x_0}=y_0$ бошлангич шарт бўйича хусусий ечимини топиш масаласи Коши масаласи дейилади. $y|_{x=x_0}=y_0$ бошлангич шартнинг берилиши изланаётган хусусий ечимга мос интеграл эгри чизиқ ўтиши керак бўлган $P_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг берилишини билдиради. Шундай қилиб, Қоши масаласини ечиш — интеграл эгри чизиқлар оиласи орасидан берилган нуқтадан ўтадиганини танлаб олиш демакдир. Қоши масаласининг геометрик маъноси ана шундай. Бу масала ҳар доим ҳам ечимга эгами? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради (исботни келтирмай, теорема баёни билан чекланамиз).

Теорема. (Қоши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаси.) *Агар* $f(x, y)$ *функция ва унинг* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *хусусий ҳосиласи* $P_0(x_0, y_0)$ *нуқтани ўз ичига олган бирор D соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда* $y' = f(x, y)$ *дифференциал тенгламанинг* $x = x_0$ *да* $y = y_0$, *яъни* $\varphi(x_0) = y_0$ *шартни қаноатлантирувчи* $y = \varphi(x)$ *ечими мавжуддир ва бу ечим ягонадир.*

Бу геометрик жиҳатдан қуйидагини билдиради: теореманинг шартлари бажариладиган ҳар бир нуқта орқали ягона интеграл эгри чизиқ ўтади.

Теореманинг шартлари бузиладиган нуқталар *махсус нуқталар* дейилади. Махсус нуқталар орқали ё бирорта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмайди, ё бир нечта чизиқ ўтади. Масалан, $y' = \frac{y}{x}$ тенглама $y = Cx$ умумий ечимга эга, бу интеграл эгри чизиқ оиласи — координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасидир.

$x = 0$ да (ординаталар ўқида) ва $O(0,0)$ нуқтада теорема шарти бузилади. Текисликнинг, кўрсатилган нуқталардан ташқари, исталган нуқтаси орқали $y = Cx$ оиланинг бир тўғри чизиғи ўтади. Теорема шарти бузилган $O(0, 0)$ нуқта орқали чексиз кўп тўғри чизиқ ўтади. Oy ўқининг бошқа нуқталари орқали битта ҳам тўғри чизиқ ўтмайди (191- шакл).



191- шакл.

5- §. Дифференциал тегламанинг махсус ечими тушунчаси

Таъриф. Дифференциал тенгламада унинг умумий ечимидан ихтиёрий ўзгармаснинг ҳеч бир қийматида ҳосил қилиниши мумкин бўлмаган ечими *махсус ечим* дейилади.

Махсус ечимнинг графиги умумий ечимга кирган интеграл эгри чизиқларнинг ўрамаси деб аталувчи чизиқдан иборатдир. Бу чизиқ ўзининг ҳар бир нуқтасида оиланинг у ёки бу интеграл эгри чизиғига уринади, шу билан бирга ўраманинг турли нуқталарида оиланинг турли интеграл эгри чизиқлари уринади.

Демак, ўраманинг (махсус ечимнинг) ҳар бир нуқтаси орқали энг камида иккитадан интеграл эгри чизиғи ўтади, яъни унинг ҳар бир нуқтасида ечимнинг ягоналиги бузилади. Бундай нуқталарни биз махсус нуқталар деб атадик. Шундай қилиб, махсус ечим махсус нуқталардан иборатдир.

Агар $F(x, y, y') = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий интеграли $\Phi(x, y, C) = 0$ бўлса, ўрамани топиш учун қуйидаги тенгламалар системаси хизмат қилади:

$$\begin{cases}\Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0.\end{cases} \tag{5.1}$$

Бу ерда C ни йўқотиб, $y = \varphi(x)$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар бу функция дифференциал тенгламани қаноатлантирса ва $\Phi(x, y, C) = 0$ оилага тегишли бўлмаса, у ҳолда у тенгламанинг махсус ечими бўлиб, унинг графиги $\Phi(x, y, C) = 0$ оиланинг ўрамасидан иборат бўлади.

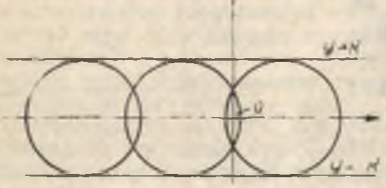
1- мисол. Ушбу $y^2(1 + y'^2) = R^2$ тенгламанинг махсус ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг умумий интегралини топамиз. Бунинг учун уни y' га нисбатан ечамиз ва ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$y' = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}, \quad \frac{y\,dy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

Интеграллаб, топамиз:

$$\mp\sqrt{R^2 - y^2} = x - C.$$



192- шакл.

Квадратга кўтаргандан кейин умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Интеграл эгри чизиқлар оиласи— радиуси R, маркази абсциссалар ўқида бўлган айланалар оиласидан иборат (192- шакл). Ўрамани топамиз. Бунинг учун (5.1) системани тузамиз:

$$\begin{cases}(x-C)^2+y^2=R^2,\\ -2(x-C)=0.\end{cases}$$

Бу ердан C ни йўқотиб, $y^2=R^2$ ёки $y=\pm R$ ни топамиз. Айланалар оиласининг ўрамаси $y=\pm R$ тўғри чизиқлар жуфти бўлади. $y=\pm R$ функция берилган тенгламани қаноатлантиради. Демак, $y=\pm R$ — махсус ечим.

6- §. Клеро тенгламаси

Қуйидаги

$$y=xy'+\psi(y') \tag{6.1}$$

тенглама *Клеро тенгламаси* дейилади, бунда $\psi(y')$ y' нинг функцияси. Тенгламани ечиш учун $y'=p(x)$ белгилаш киритамиз. У ҳолда (6.1) тенглама

$$y=xp+\psi(p) \tag{6.2}$$

кўринишга келади. Бу тенгламани, $p'=\frac{dp}{dx}$ эканини ҳисобга олиб, дифференциаллаймиз:

$$[p=p+x\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}.$$

Бундан

$$x\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx}=0$$

ёки

$$\frac{dp}{dx}(x+\psi'(p))=0. \tag{6.3}$$

Бу тенглама

$$\frac{dp}{dx}=0 \tag{6.4}$$

ёки

$$x+\psi'(p)=0 \tag{6.5}$$

бўлган ҳолда айниятга айланади. Ҳар икки ҳолни қараймиз.

а) (6.4) тенгламани интеграллаймиз; $p=C$, C — ихтиёрий ўзгармас. Энди қуйидаги

$$\begin{cases}y=xp+\psi(p),\\ p=C\end{cases}$$

тенгламалар системасидан p параметрни йўқотсак, берилган (6.2) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y=Cx+\psi(C). \tag{6.6}$$

Геометрик нуқтаи назардан бу ечим тўғри чизиқлар оиласини ташкил этади.

Ҳосил қилинган ечимни (6.2) тенглама билан солиштириб, Клеро тенгламасининг умумий ечими ундаги y' ҳосилани ихтиёрий ўзгармас C га алмаштириш орқали ҳосил қилинишини кўрамиз.

б) (6.5) тенгламадан p ни x нинг функцияси (яъни $p = p(x)$) сифатида топамиз. Қуйидаги

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p), \\ p = p(x) \end{cases}$$

тенгламалар системасидан p параметрни йўқотиб

$$y = xp(x) + \psi(p(x)) \tag{6.7}$$

функцияни ҳосил қиламиз. Бу функция (6.1) тенгламанинг ечимидир. Ҳақиқатдан ҳам, бунга ишонч ҳосил қилиш учун (6.7) дан y' ни топамиз:

$$y' = p(x) + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p(x)) \cdot \frac{dp}{dx}$$

ёки

$$y' = p + (x + \psi'(p))\frac{dp}{dx}.$$

(6.5) га кўра охирги ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$y' = p. \tag{6.8}$$

Энди y ва y' нинг (6.7) ва (6.8) формуладаги қийматларини (6.1) тенгламага қўйсак,

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p)$$

айният ҳосил бўлади. Демак (6.7) ҳақиқатдан ҳам берилган тенгламанинг ечими экан. Бу ечимни (6.6) умумий ечимдан C нинг бирорта ҳам қийматида ҳосил қилиб бўлмайди. Маълумки, бундай ечимлар махсус ечимлар дейилади. Кўряпмизки бундай ечимни

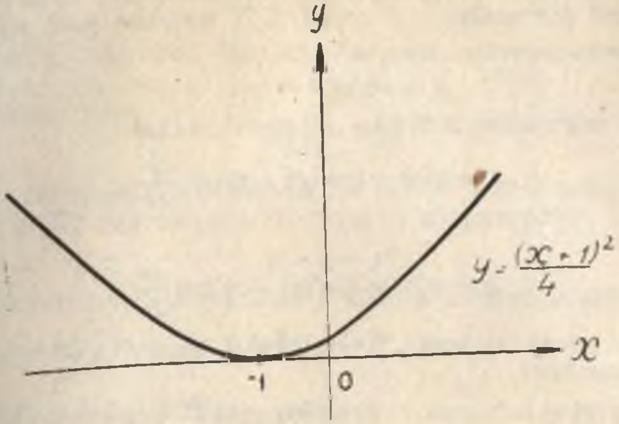
$$\begin{cases} y = xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) = 0 \end{cases}$$

системадан ёки қуйидаги

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C), \\ x + \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан C ни йўқотиб ҳосил қилиш мумкин. Маълумки, бу ечим $y = Cx + \psi(C)$ умумий ечимнинг ўрамасини аниқлайди. Демак, Клеро тенгламасининг махсус ечими $y = Cx + \psi(C)$ тўғри чизиқлар оиласининг ўрамасини аниқлайди.

Шундай қилиб Клеро тенгламасини ечиш учун аввало берилган тенгламада y' ни C га алмаштириб унинг умумий ечимини топиш керак:



193- шакл.

$$y = Cx + \psi(C).$$

Шундан сўнг қуйидаги

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C), \\ x + \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

системадан C ни йўқотиб, махсус ечимни (унинг графиги интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси бўлади) топиш керак.

Мисол. Ушбу

$$y = xy' + (y' - y'^2)$$

Клеро тенгламасининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг умумий ечимини y' ни C билан алмаштириб топамиз:

$$y = Cx + C - C^2.$$

Бу тенгламани C бўйича дифференциаллаймиз:

$$0 = x + 1 - 2C.$$

Қуйидаги

$$\begin{cases} y = Cx + C - C^2, \\ 0 = x + 1 - 2C \end{cases}$$

системадан C ни йўқотиб

$$y = \frac{1}{4}(x+1)^2$$

махсус ечимни ҳосил қиламиз. У парабола бўлиб, $y = Cx + C - C^2$ умумий ечимлар оиласининг ўрамасини ташкил қилади (193- шакл).

7- §. Лагранж тенгламаси

Ушбу

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{7.1}$$

тенглама *Лагранж тенгламаси* дейилади, бунда $\varphi(y')$, $\psi(y')$ лар y' нинг маълум функциялари.

Бундай тенглама ҳам p параметр киритиш усули билан ечилади. $y' = p(x)$ деб белгилаймиз. У ҳолда (6.7) тенглама ушбу кўринишга келади:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{7.2}$$

Охирги тенгламани x бўйича дифференциаллаб

$$p = \varphi(p) + (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$p - \varphi(p) = (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} \tag{7.3}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $p - \varphi(p) \neq 0$ ва $p - \varphi(p) = 0$ бўлган ҳолларни қараймиз.

а) $p - \varphi(p) \neq 0$ бўлсин. (7.3) тенгламани $\frac{dx}{dp}$ га нисбатан очиб қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Ҳосил қилинган тенглама x ва $\frac{dx}{dp}$ га нисбатан чизиқлидир ва демак

$$x = \Phi(p, C) \tag{7.4}$$

умумий ечимга эга. (7.4) ни (7.2) га қўйиб, y ни p ва C орқали ифодалаймиз:

$$y = \Phi(p, C)\varphi(p) + \psi(p) = f(p, C). \tag{7.5}$$

(7.4) ва (7.5) бизга Лагранж тенгламасининг умумий ечимини параметрик кўринишда беради:

$$\begin{cases} x = \Phi(p, C), \\ y = f(p, C). \end{cases}$$

Бу системада p параметрни йўқотиб Лагранж тенгламасининг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$F(x, y, C) = 0.$$

Тенгламанинг умумий ечимидан ҳосил бўлмайдиган махсус ечими бўлиши мумкин.

б) $p - \varphi(p) = 0$ бўлсин, яъни бирор $p = p_0$ да $\varphi(p_0) = p_0$ бўлсин. Ушбу

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ p = p_0 \end{cases}$$

системада p ни йўқотиб

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$$

ечимни ҳосил қиламиз. Бу эса Лагранж тенгламасининг махсус ечимидир.

Мисол. Ушбу

$$y = x + y'^3$$

Лагранж тенгламасининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

Ечиш. Бу тенгламада y' ни $p(x)$ га алмаштириб

$$y = x + p^3 \tag{7.6}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Уни x бўйича дифференциаллаймиз:

$p = 1 + 3p^2 \frac{dp}{dx}$. Бундан $p - 1 = 3p^2 \frac{dp}{dx}$.

а) Агар $p - 1 \neq 0$ бўлса, ушбу

$$dx = \frac{3p^2}{p-1}\, dp$$

тенгламани интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = 3\left(\ln|p-1| + p + \frac{p^2}{2}\right) + C. \tag{7.7}$$

x нинг ҳосил қилинган ифодасини (5.13) га қўямиз:

$$y = 3\left(\ln|p-1| + p + \frac{p^2}{2}\right) + C + p^3.$$

(7.6) ва (7.7) лар Лагранж тенгламасининг умумий ечимини параметр кўринишда беради.

б) Агар $p - 1 = 0$ бўлса, $p = 1$ қийматни (7.6) тенгламага қўйиб

$$y = x + 1$$

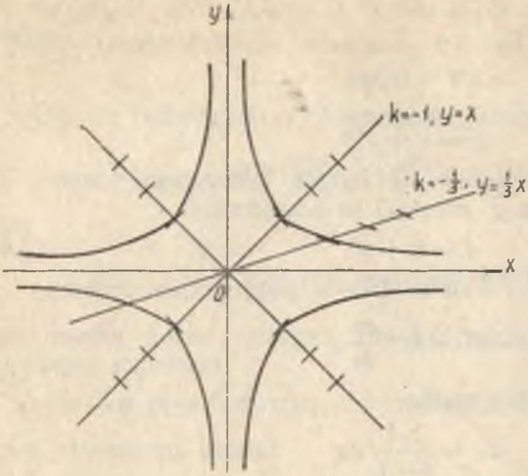
махсус ечимни ҳосил қиламиз.

8- §. Изоклинлар усули

Агар биринчи тартибли дифференциал тенгламани интеграллашнинг юқорида таҳлил қилинган усулларидан ҳеч бири мақсадга эриштирмаса ёки мураккаб ҳисоблашлар талаб қилинса, тақрибий ечишга мурожаат қилиш мумкин. График усул — *изоклинлар усулини* баён қиламиз.

Ушбу $y' = f(x, y)$ дифференциал тенглама Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаси ўринли бўлган D соҳанинг ҳар бир $P(x, y)$ нуқтасида y' ҳосиланинг қийматини, яъни бу нуқта орқали ўтувчи интеграл эгри чизиққа уринманинг бурчак коэффициенти $k = \operatorname{tg}\alpha = y'$ ни аниқлайди. Бу миқдорни график тарзда бурчак коэффициенти $y' = f(x, y) = k$ га тенг тўғри чизиқ кесмаси орқали тасвирлаш мумкин.

Ҳар бир нуқтасида бирорта скаляр миқдорнинг қиймати берилган соҳа бу *миқдорнинг скаляр майдони* дейилади. Бизнинг ҳолда $y' = f(x, y)$ дифференциал тенглама Oxy текисликда йўналишлар май-



194- шакл.

донини аниқлайди. Геометрик нуқтаи назардан дифференциал тенгламани интеграллаш шундай эгри чизиқларни топишдан иборатки, уларга ўтказилган уринмаларнинг йўналишлари тегишли нуқталардаги майдон йўналиши билан бир хилдир.

Майдон йўналишлари бир хил бўлган ($y' = k$ — const) нуқталар тўплами тенгламанинг *изоклини* дейилади. Равшанки, $y' = f(x, y)$ дифференциал тенглама учун изоклин тенгламаси $f(x, y) = k$ бўлади. k нинг турли қийматларида турли изоклинларни ҳосил қиламиз. Изоклинлар оиласини ясаб, интеграл эгри чизиқлар оиласини тақрибий ясаш мумкин.

Мисол. Ушбу $y' = -\frac{y}{x}$ дифференциал тенглама учун изоклинлар, йўналишлар майдонини ясанг. Тенгламани ечмасдан интеграл эгри чизиқларни ясанг.

Ечиш. Изоклинлар тенгламалари: $-\frac{y}{x} = k$ ёки $y = -kx$— булар 194- шаклда кўрсатилган тўғри чизиқлар оиласидир.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Биринчи тартибли дифференциал тенглама учун Коши масаласини ифодаланг ва унинг геометрик талқинини беринг.
2. Биринчи тартибли дифференциал тенглама учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремасини ифодаланг. Бу теореманинг геометрик талқини қандай?
3. Биринчи тартибли дифференциал тенглама учун қандай нуқталар махсус нуқталар бўлади?
4. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг махсус ечими деб нимага айтилади?
5. Клеро тенгламасининг умумий ва махсус ечимлари қандай топилади?
6. Лагранж тенгламасининг умумий ва махсус ечимлари қандай топилади?
7. Биринчи тартибли тенглама интеграл эгри чизиғини ясашнинг изоклинлар усулини баён қилинг.
8. 3954—3968, 4038—4044, 4050—4057- масалаларни ечинг.

9- §. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар

Биринчи тартибдан юқори бўлган барча дифференциал тенгламалар юқори тартибли дифференциал тенгламалар дейилади. n- тартибли тенглама $y^{(n)}$ ҳосиладан ташқари эркли ўзгарувчини ҳамда қуйи тартибли ҳосилаларни ҳам ўз ичига олиши мумкин, бинобарин, бундай тенгламанинг умумий кўриниши

$$F(x, y, y', y'', \ \ldots, \ y^{(n)}) = 0 \qquad (9.1)$$

ёки, агар мумкин бўлса, юқори ҳосилага нисбатан ечилган

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \ \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (9.2)$$

шаклда бўлиши мумкин.

1. Коши масаласи. Умуман олганда, дифференциал тенгламани функцияларнинг бутун бир системаси қаноатлантириши мумкин. Тайин ечимни ажратиб кўрсатиш учун қўшимча шартлар ҳам керак бўлади. Масалан, n-тартибли тенглама учун бирор $x = x_0$ нуқтада изланаётган y функциянинг қиймати ва унинг $n - 1$-тартибгача барча ҳосилаларининг қийматлари берилади, яъни

$$\begin{aligned} & y\,|_{x=x_0} = y_0, \\ & y'|_{x=x_0} = y'_0, \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \qquad (9.3)$$

(9.3) сонлар системаси n-тартибли дифференциал тенглама учун бошланғич шартлар дейилади.

(9.1) ёки (9.2) тенгламанинг (9.3) бошланғич шартлар системасини қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш масаласи Коши масаласи дейилади.

Агар иккинчи тартибли

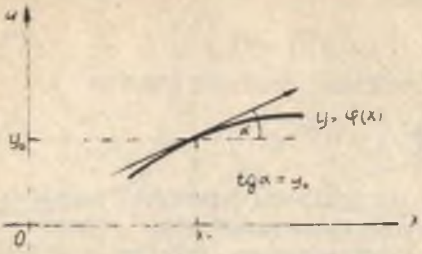
$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ ёки } y'' = f(x, y, y') \qquad (9.4)$$

тенглама қараладиган бўлса, у ҳолда $x = x_0$ да ечим учун бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$\left\{ \begin{aligned} & y\,|_{x=x_0} = y_0, \\ & y'\,|_{x=x_0} = y'_0, \end{aligned} \right.$$

бу ерда x_0, y_0, y'_0 — берилган сонлар. Бу шартларнинг геометрик маъноси қуйидагича: Текисликнинг берилган $P_0(x_0, y_0)$ нуқтасида бу нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиққа ўтказилган уринма бурчак коэффициенти y'_0 ҳам берилган. Шундай қилиб (9.4) дифференциал тенглама учун Коши масаласини ечиш — бу шундай $y = \varphi(x)$ интеграл эгри чизиқни топиш демакки, у $P_0(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтади ва бу нуқтада уринманинг бурчак коэффициенти берилган y'_0 га тенг бўлади. Иккинчи тартибли дифференциал тенглама учун Коши масаласининг геометрик маъноси ана шундай.

2. Дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар тўғрисида тушунча. (9.1) ёки (9.2) тенгламалар учун ўрганиладиган масалалар Коши масаласи билан чекланмайди. Кўпгина физика ва техника масалалари кўпинча бошланғич шарт-



195- шакл.

ларга эмас, балки бошқа турдаги қўшимча шартларга олиб келади. Бундай шартларни чегаравий шартлар деб аташ қабул қилинган. Масалан, изланаётган функциянинг бир нечта нуқтадаги қиймати маълум бўлганда дифференциал тенгламанинг ечимини топиш талаб этилади. Бу шартларни қаноатлантирадиган бундай ечимни топиш масаласи *чегаравий масала* дейилади. Бундай масалалар, умуман айтганда, бошланғич шартли масала, яъни Коши масаласига нисбатан мураккаброқдир. Шу масалаларга қайтамиз. Коши масаласи қандай шартларда ечимга эга бўлади, деган саволга қуйидаги теоремадан жавоб топамиз.

3. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги тўғрисидаги теорема. *Агар* $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$ *нуқтани ўз ичига олган бирор D соҳада* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ *функция узлуксиз ва узлуксиз* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

тенгламанинг

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

шартларни қаноатлантирадиган $y=\varphi(x)$ *ечими мавжуд бўлиб, бу ечим ягона бўлади.*

Бу теорема Коши масаласи ечимга эга бўлишининг етарли шартларини тайинлайди. Агар қаралаётган тенглама иккинчи тартибли, яъни $y''=f(x, y, y')$ кўринишда бўлса, у ҳолда маълумки, $y|_{x=x_0} = y_0$ ва $y'|_{x=x_0} = y_0'$ шартлар P_0 (x_0, y_0) нуқтани аниқлаб, унинг бу нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиғига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти y_0' берилган бўлади. Бу ҳолда теорема шартлари бажарилганда уринманинг y_0' бурчак коэффициенти маълум бўлган берилган P_0 (x_0, y_0) нуқтадан битта интеграл эгри чизиғи ўтади. Теореманинг геометрик маъноси ана шундадир (195-шакл).

4. Умумий ва хусусий ечим тўғрисида тушунча

Таъриф. (9.2) дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб, тенгламанинг тартиби қанча бўлса, шунча ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлган шундай $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ функцияга айтиладики, бу функция учун қуйидаги шартлар бажарилади:

а) у $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ихтиёрий ўзгармасларнинг исталган қийматларида (9.2) тенгламани қаноатлантиради;

б) бошланғич (9.3) шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам, ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ қийматларини топиш мумкинки, бу қийматларда $y = \varphi(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n)$ ечим (9.3) бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Умумий ечимдан ихтиёрий ўзгармасларнинг маълум қийматларида ҳосил бўладиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

10- §. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган тенгламалар

n-тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаш усулларини баён қилишга ўтамиз. Интеграллашнинг асосий усули тартибини пасайтириш, яъни берилган тенгламанинг ўзгарувчиларини тартиби уларникидан пастроқ бўлган ўзгарувчилар билан алмаштириш орқали берилган тенгламани бошқа тенгламага келтириш усулидир. Бироқ тартибни пасайриришга ҳар доим ҳам эришилавермайди. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган тенгламаларнинг баъзи турларини кўриб чиқамиз.

1. Ушбу

$$y^{(n)} = f(x) \tag{10.1}$$

кўринишдаги тенглама. Бундай тенгламаларнинг ўзига хос томони шундаки, унинг ўнг томони фақат x га боғлиқ. Бундай тенгламанинг тартиби бевосита кетма-кет интеграллаш йўли билан пасайтирилади. (10.1)дан бевосита қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Шу тарзда талаб қилинган марта интеграллаб, (10.1) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз.

1-мисол. Ушбу $y''' = \sin x - \cos x$ тенгламанинг $y\,|_{x=0} = 1$, $y'\,|_{x=0} = -1$, $y''\,|_{x=0} = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Дастлаб $y''' = \sin x - \cos x$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Кетма-кет уч марта интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y'' = -\cos x - \sin x + C_1,$$

$$y' = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \cos x + \sin x + C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

C_1, C_2, C_3 ларни бошланғич шартлардан топамиз:

$$0 = -1 - 0 + C_1,$$

$$-1 = -0 + 1 + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

$$1 = 1 + 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3.$$

Қуйидагиларга эга бўламиз: $C_1 = 1$, $C_2 = -2$, $C_3 = 0$. Шундай қилиб изланаётган хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$y = \cos x + \sin x + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

2. Ушбу

$$y^{(n)} = f\,(x,\ y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots,\ y^{(n-1)}) \qquad (10.2)$$

кўринишидаги тенглама. Унинг ўзига хос томони — тенгламанинг ўнг томонида ошкор изланаётган y функция ва унинг $(k-1)$-тартибгача ҳосилаларининг иштирок этмаслигидир. Бундай тенгламанинг тартиби қуйидаги алмаштириш орқали k бирликка пасайтирилади: $y^{(k)} = p\,(x)$, бу ерда $p = p\,(x)$ — янги изланаётган функция. (10.2) тенглама бундай алмаштиришдан сўнг қуйидаги кўринишга келади:

$$p^{(n-k)} = f\,(x,\ p,\ p',\ p'', \ldots,\ p^{(n-k-1)}).$$

$(n-k)$-тартибли тенгламани ҳосил қилдик. Бу тенгламани интеграллаб, янги изланаётган функцияни аниқлаймиз:

$$p = \varphi\,(x,\ C_1,\ C_2, \ldots,\ C_{n-k}),$$

сўнгра $y^{(k)} = \varphi\,(x,\ C_1,\ C_2, \ldots,\ C_{n-k})$ тенгламани k марта интеграллаб, умумий ечимни топамиз.

2-мисол. Ушбу

$$y^{IV} = \sqrt{y'''}$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y''' = p(x)$ деймиз, у ҳолда $y^{IV} = p'$, берилган тенглама $p' = \sqrt{p}$ кўринишга келади. Ўзгарувчилари ажраладиган функцияга нисбатан биринчи тартибли тенгламани ҳосил қилдик: $\frac{dp}{dx} = \sqrt{p}$ ёки $\frac{dp}{\sqrt{p}} = dx$. Интеграллаб, топамиз:

$$2\sqrt{p} = x + C_1 \text{ ёки } p = \frac{1}{4}\,(x + C_1)^2.$$

Демак, $y''' = \frac{1}{4}\,(x + C_1)^2$, бу ердан

$$y'' = \frac{1}{12}\,(x + C_1)^3 + C_2,$$

$$y' = \frac{1}{48}\,(x + C_1)^4 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{1}{240}\,(x + C_1)^5 + C_2\,\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Эслатма. Бундай кўринишдаги тенгламаларнинг хусусий ҳоли изланаётган функция ошкор қатнашмаган иккинчи тартибли $y''=f(x, y')$ тенгламадир. Бу ерда $y'=p(x)$ ўрнига қўйиш ёрдамида тартиб бир бирликка пасайтирилади.

3-мисол. Ушбу $y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$ тенгламанинг $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=3$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Умумий ечимни топамиз: $y'=p(x)$ алмаштириш бажарамиз, бу ердан $y''=p'(x)$. Натижада ўзгарувчилари ажраладиган қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз: $p'=\frac{2xp}{1+x^2}$ ёки $\frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{1+x^2}$, бу ердан $\ln p=\ln|1+x^2|+\ln C_1$ ёки $p=C_1(1+x^2)$. Ўз навбатида бу ердан: $y'=C_1(1+x^2)$ ва $y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$.

C_1 ва C_2 ларни топиш учун бошланғич шартлардан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} 3=C_1\cdot 1, \\ 1=C_1\cdot 0+C_2. \end{cases}$$

Бу ердан $C_1=3$, $C_2=1$. Демак,

$$y=3\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+1$$

хусусий ечим бўлади.

3) Ушбу

$$y^{(n)}=f\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{10.3}$$

кўринишидаги тенглама. Унинг ўзига хос томони — тенгламанинг ўнг томонида эркли ўзгарувчи x ошкор қатнашмайди. $y'=p(y)$ ўрнига қўйиш (10.3) тенгламанинг тартибини бир бирликка пасайтиришга имкон беради. Бунда янги эркли ўзгарувчи сифатида y ни қабул қиламиз, янги изланаётган p функция y га боғлиқ бўлади, яъни $p=p(y)$. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра топамиз:

$$y'=\frac{dy}{dx}=p,$$

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'\cdot p,$$

$$y'''=\frac{d}{dx}(p'p)=\frac{d}{dy}(p'p)\cdot\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dp'}{dy}\cdot p+p'\frac{dp}{dy}\right)\cdot p=$$

$$=(p''p+p'\cdot p')p=p''p^2+(p')^2p \text{ ва ҳ. к.}$$

$y', y'', \ldots y^{(n)}$ ларни (10.3) тенгламага қўйиб, $n-1$-тартибли тенгламага эга бўламиз.

4-мисол. Ушбу $y''+y'^2=2e^{-y}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y'=p(y)$, $y''=p'\cdot p$ деб, Бернулли тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$pp' + p^2 = 2e^{-y} \text{ ёки } p' + p = \frac{2e^{-y}}{p}.$$

$p = u \cdot v$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз, бу ердан $p' = u'v + uv'$. Кейинги тенглама қуйидагича ёзилади:

$$u'v + uv' + uv = \frac{2e^{-y}}{u \cdot v} \text{ ёки } u'v + (v' + v)\,u = \frac{2e^{-y}}{uv}.$$

v функцияни шундай танлаймизки, қавс ичида турган ифода нолга тенг бўлсин:

$$v' + v = 0. \tag{10.4}$$

У ҳолда

$$u'v = \frac{2e^{-y}}{uv}. \tag{10.5}$$

(10.4) тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{dv}{v} = -dy \text{ ёки } \ln v = -y, \text{ бу ердан}$$

$$v = e^{-y}. \tag{10.6}$$

(10.6) ни (10.5) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$uu' = \frac{2e^{-y}}{e^{-2y}} \text{ ёки } udu = 2e^{y}\,dy, \text{ бундан интеграллаб, топамиз:}$$

$$\frac{u^2}{2} = 2e^{y} + C_1$$

ёки

$$u = \pm\sqrt{4e^{y} + 2C_1}. \tag{10.7}$$

Топилган u ва v функциялар бўйича ((10.6) ва (10.7) формулалар) изланаётган p оралиқ функцияни тузамиз:

$$p = u \cdot v = \pm e^{-y}\sqrt{4e^{y} + 2C_1}$$

ёки

$$p = \pm\sqrt{4e^{-y} + 2\,C_1 e^{-2y}}.$$

$p = \frac{dy}{dx}$ алмаштириш бажариб, ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + 2C_1 e^{-2y}}.$$

Буни интеграллаб, умумий интегрални топамиз:

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + 2C_1} = x + C_2$$

ёки

$$(x + C_2)^2 = e^{y} + \overline{C}_1, \text{ бу ерда } \overline{C}_1 = \frac{C_1}{2}.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. n-тартибли дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
2. n-тартибли тенгламанинг бошланғич шартлари нимадан иборат?
3. Иккинчи тартибли тенглама бошланғич шартларининг геометрик маъноси қандай?
4. n-тартибли тенгламалар учун Коши масаласини таърифланг.
5. Иккинчи тартибли тенглама учун Коши масаласининг геометрик маъноси қандай?
6. n-тартибли тенглама учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремасини ифодаланг. Иккинчи тартибли тенглама учун бу теореманинг геометрик маъноси қандай?
7. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги тенгламани ечиш усулини баён қилинг.
8. $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n-1)})$ кўринишдаги тенгламани ечиш усулини баён қилинг.
9. $y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ кўринишдаги тенгламани ечиш усулини баён қилинг.
10. 4155 — 4180, 4189 — 4195, 4208 — 4217-масалаларни ечинг.

11-§. Юқори тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

Таъриф. Агар n-тартибли дифференциал тенгламада изланаётган функция ва унинг ҳосилалари биринчи даражада қатнашса, бундай тенглама *чизиқли* дейилади. n-тартибли чизиқли дифференциал тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x),$$

бу ерда $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots$, $a_n(x)$ лар x нинг маълум узлуксиз функциялари (хусусий ҳолда улар ўзгармас сонлар бўлиши мумкин). Бу функциялар тенгламанинг *коэффициентлари* дейилади, шу билан бирга $a_0(x) = 1$ (агар у 1 га тенг бўлмаса, тенгламанинг ҳамма ҳадларини унга бўлишимиз мумкин).

$f(x)$ функция *озод ҳад* ёки тенгламанинг *ўнг томони* дейилади.

Агар $f(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x) \tag{11.1}$$

тенглама чизиқли бир жинсли бўлмаган (ёки ўнг томонли, ёки озод ҳадли) тенглама дейилади.

Агар $f(x) \equiv 0$ бўлса, (11.1) тенглама

$$y^{(n)} + a_1(x)\; y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\; y = 0 \tag{11.2}$$

кўринишга эга бўлиб, *чизиқли бир жинсли* тенглама (ёки ўнг томонсиз, ёки озод ҳади бўлмаган тенглама) дейилади. (11.2) тенгламанинг чап томони y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ га нисбатан бир жинслидир.

12-§. Чизиқли дифференциал операторнинг хоссалари

(11.2) тенгламанинг чап томонини

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n\,(x)\, y \qquad (12.1)$$

орқали белгилаймиз. Шу билан бирга $a_i(x)$ функцияларда x аргументни қисқалик учун ёзмаймиз. Бу ифодани y функциянинг *чизиқли дифференциал оператори* деб атаймиз.

$L[y]$ чизиқли дифференциал операторни $f(x)$ функциянинг ўхшаши деб қараш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция x сонга янги $f(x)$ сонни мос қўяди, $L[y]$ оператор эса y функцияга янги $L[y]$ функцияни мос қўяди.

1-мисол. Агар $L[y] = y'' - xy' + 2y$ бўлса, $y = x^3$ учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L[x^3] = (x^3)'' - x(x^3)' + 2x^3 = 6x - 3x^2 \cdot x + 2x^3 = 6x - x^3,$$

яъни $y = x^3$ функцияга $L[y] = 6x - x^3$ функция мос қўйилади. $y = \sin x$ функция учун эса қуйидагига эгамиз:

$$L[\sin x] = (\sin x)'' - x(\sin x)' + 2\sin x =$$
$$= -\sin x - x\cos x + 2\sin x = \sin x - x\cos x.$$

2-мисол. $L[y] = y'' + xy$ бўлсин. У ҳолда $y = x^3$ учун қуйидагига эгамиз:

$$L[x^3] = (x^3)'' + x(x^3) = 6x + x^4.$$

$y = \sin x$ функция учун эса:

$$L[\sin x] = -\sin x + x\sin x.$$

$L[y]$ чизиқли дифференциал оператор қуйидаги иккита асосий хоссага эга.

1) Ўзгармас кўпайтувчини оператор белгиси ташқарисига чиқариш мумкин, яъни

$$L[Cy] = CL[y],$$

бу ерда y — исталган, n марта дифференциалланувчи функция; C — ўзгармас.

Ҳақиқатан ҳам, (12.1) оператор белгисининг мазмунини очсак:

$$L[Cy] = (Cy)^{(n)} + a_1(Cy)^{(n-1)} + a_2(Cy)^{(n-2)} + \ldots + a_n Cy =$$
$$= Cy^{(n)} + a_1 Cy^{(n-1)} + a_2 \cdot Cy^{(n-2)} + \ldots + a_n Cy =$$
$$= C\left(y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y\right) = CL[y].$$

Бу хосса операторнинг *бир жинслилик* хоссаси дейилади.

2) Иккита функция йиғиндисининг оператори ҳар қайси қўшилувчининг операторлари йиғиндисига тенг, яъни

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],$$

бу ерда y_1, y_2 — исталган, n марта дифференциалланувчи функциялар. Ҳақиқатан ҳам,

$$L[y_1+y_2]=(y_1+y_2)^{(n)}+a_1(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+ \\ +a_{n-1}(y_1+y_2)'+a_n(y_1+y_2).$$

Йиғиндининг ҳосиласи ҳосилалар йиғиндисига тенг бўлгани учун, бу ердан топамиз:

$$L[y_1+y_2]=(y_1^{(n)}+y_2^{(n)})+a_1\left(y_1^{(n-1)}+y_2^{(n-1)}\right)+\ldots+a_n(y_1'+y_2')= \\ =(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\ldots+a_ny_1')+(y_2^{(n)}+a_1y_2^{(n-1)}+\ldots+ \\ +a_ny_2)=L[y_1]+L[y_2].$$

Бу хосса операторнинг аддитивлик хоссаси дейилади. Равшанки, у фақат иккита эмас, балки исталган чекли сондаги қўшилувчилар учун ҳам ўринлидир.

13-§. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар, уларнинг ечимлари хоссалари

(12.1) чизиқли дифференциал оператордан фойдаланиб, (11.2) чизиқли тенгламани

$$L[y]=0 \tag{13.1}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, бу тенгламанинг ечими шундай y функциядан иборатки, унга $L[y]$ оператор нол сонини мос қўяди. Энди чизиқли бир жинсли (11.2) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари ҳақидаги теоремаларни қараймиз. Бунда операторнинг олдинги параграфда кўриб чиқилган хоссаларидан фойдаланамиз.

1-теорема. *Агар y_1 функция* (11.2) *тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда Cy_1 функция ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исботи. Агар y_1 (11.2) тенгламанинг ечими бўлса, (13.1) тенгликка кўра: $L[y_1]=0$. Бироқ, чизиқли операторнинг бир жинслилигига кўра: $L[Cy_1]=CL[y_1]$, яъни $L[Cy_1]=0$. Кейинги тенглик Cy_1 функция ҳам (11.2) тенгламани қаноатлантиришини, яъни унинг ечими бўлишини билдиради .

2-теорема. *Агар y_1* ва *y_2* (11.2) *тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда y_1+y_2 функция ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исботи. Агар y_1 ва y_2 (11.2) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда (13.1) тенгликка кўра қуйидагига эгамиз:

$$L[y_1]=0 \text{ ва } L[y_2]=0.$$

Бироқ, операторнинг аддитивлик хоссасига кўра: $L[y_1+y_2]=$ $=L[y_1]+L[y_2]$, яъни $L[y_1+y_2]=0$. Бу y_1+y_2 (11.2) тенгламани қаноатлантиришини, яъни унинг ечими бўлишини билдиради.

Натижа. Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — (11.2) чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлса, у ҳолда уларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

ҳам берилган тенгламанинг ечими бўлади.

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ ифода n та ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олади ва n-тартибли дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Ихтиёрий ўзгармаслар қатнашган бу ечим умумий ечим бўлиши учун ихтиёрий ўзгармасларни улар бошланғич шартларнинг исталган берилган системасини қаноатлантирадиган ягона усул билан танлаш имконияти мавжуд бўлиши керак. Бундай имконият мавжудми ёки йўқми эканини аниқлаш учун функцияларнинг чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли (боғлиқ эмаслик) тушунчаларини киритиш керак бўлади.

14-§. Чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли функциялар системалари

1-таъриф. Агар бир вақтда нолга тенг бўлмаган n та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар мавжуд бўлиб, барча $x \in [a, b]$ лар учун

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \qquad (14.1)$$

айний муносабат бажарилса, $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар системаси $[a, b]$ кесмада *чизиқли боғлиқ* дейилади.

Агар, масалан, $\alpha_n \neq 0$ деб фараз қилсак, (14.1) муносабатни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1},$$

бу ерда

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \ldots, \beta_{n-1} = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

Шунинг учун функциялар системасининг чизиқли боғлиқлиги системанинг функцияларидан ҳеч бўлмаганда биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлишини билдиради. Хусусан, иккита: y_1 ва y_2 функция $y_2 = \beta y_1$ ёки $\frac{y_2}{y_1} = \beta$, яъни уларнинг нисбати ўзгармас сон бўлганда чизиқли боғлиқ бўлади.

2-таъриф. Агар $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ муносабат фақат

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

шартда бажарилса, $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар системаси *чизиқли эркли* дейилади.

Хусусан, иккита: y_1 ва y_2 функция $\frac{y_2}{y_1} \neq \alpha$, яъни уларнинг нисбати ўзгармас сонга тенг бўлмаганда чизиқли эркли бўлади.

1-мисол. Ушбу $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = a$ функциялар системаси барча $x \in (-\infty, +\infty)$ лар учун чизиқли боғлиқ. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -\frac{1}{a}$ да исталган учун қуйидагига эгамиз:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0.$$

2-мисол. Ушбу

$$y_1 = \cos^2 x,\ y_2 = \sin^2 x,\ y_3 = e^x,\ y_4 = \sin 2x,\ y_5 = \cos 2x,\ y_6 = \ln x$$

функциялар системаси чизиқли боғлиқ. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_5 = -1$ да исталган x учун қуйидагига эгамиз:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 + \alpha_5 y_5 + \alpha_6 y_6 = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos 2x = 0.$$

3-мисол. Ушбу

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ \ldots,\ y_{n+1} = x^n$$

функциялар системаси чизиқли эркли.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

тенглик x нинг n дан катта бўлмаган қийматлари (n-даражали тенглама илдизлари) учун ўринли. Қолган ҳолларда тенглик $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$ бўлганда ўринли.

4-мисол. Ушбу $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ функциялар системаси чизиқли эркли. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0$ тенглик $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлганда ўринли. Функциялар сони иккита бўлганда уларнинг чизиқли эрклилигини бу функцияларнинг нисбатидан фойдаланиб аниқлаш мумкин. $\frac{y_1}{y_2} = \operatorname{tg} x$ бўлиб, барча x лар учун ўзгармас сон бўлмагани сабабли $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ лар чизиқли эркли.

15-§. Вронский детерминанти. Функциялар системасининг чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли бўлиш шартлари

Бирор функциялар системасининг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли эканлигини аниқлашга имкон берадиган аломат (белги) ларни қараш зарурати туғилади.

Таъриф. $n-1$ марта дифференциалланувчи $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар системасининг *Вронский детерминанти* ёки *вронскиани* деб қуйидаги детерминантга айтилади:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминант x нинг функцияси бўлиб, $W = W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ каби белгиланади. У функцияларнинг чизиқли боғлиқ ёки эркли эканини ўрганиш воситаси бўлиб хизмат қилади.

Теорема. *Агар $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар системаси чизиқли боғлиқ бўлса, бу системанинг Вронский детерминанти $W(x)$ функция аниқланган барча нуқталарда айнан нолга тенг бўлади.*

Исботи. $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар системаси чизиқли боғлиқ бўлгани учун

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

тенглик ўринли, бунда ҳамма коэффициентлар бараварига нолга тенг эмас, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ лар ичида нолдан фарқлилари мавжуд. Тенглик функция аниқланган ҳамма нуқталарда ўринли. Бу тенгликни $n-1$ марта дифференциаллаб, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларга нисбатан n та алгебраик тенгламаларнинг чизиқли бир жинсли системасини ҳосил қиламиз. У қуйидагидан иборат:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Бу системанинг коэффициентлари бараварига нолга тенг бўлмагани учун (шартга кўра) бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Бу—$y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар системасининг Вронский детерминантидан иборатдир. Демак, функция аниқланган исталган нуқта учун $W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$. Теорема исботланди.

Изоҳ. Теоремадан функция аниқланган нуқталарнинг ҳеч бўлмаганда биттасида $W \neq 0$ бўлса, $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар системаси бу соҳада чизиқли эркли бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $e^{k_3 x}$ функциялар системаси k_1, k_2, k_3 лар турлича бўлганда барча x лар учун чизиқли эркли эканини кўрсатинг.

Ечиш. Вронский детерминантини тузамиз ва уни ҳисоблаймиз:

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x} \\ k_1^2\,e^{k_1x} & k_2^2\,e^{k_2x} & k_3^2\,e^{k_3x} \end{vmatrix} = e^{k_1x}\cdot e^{k_2x}\cdot e^{k_3x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)\,x}\begin{vmatrix} k_2-k_1 & k_3-k_1 \\ k_2^2-k_1^2 & k_3^2-k_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)\,x}\begin{vmatrix} k_2-k_1 & k_3-k_1 \\ (k_2-k_1)(k_2+k_1) & (k_3-k_1)(k_3+k_1) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1+k_2+k_3)\,x}\cdot(k_2-k_1)(k_3-k_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_2+k_1 & k_3+k_1 \end{vmatrix} =$$

$= e^{(k_1+k_2+k_3)\,x}\cdot(k_2-k_1)\cdot(k_3-k_1)\cdot(k_3-k_2) \neq 0$ (барча x лар учун).

Демак, k_1, k_2, k_3 лар турлича бўлганда e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x} функциялар системаси барча x лар учун чизиқли эрклидир.

Изоҳ. Агар $k_1, k_2, \ldots, k_n$ лар турлича сонлар бўлса,

$$e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ \ldots\ e^{k_n\,x}$$

функциялар системаси ҳам чизиқли эркли эканини худди юқоридагига ўхшаш исботлаш мумкин.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. n-тартибли чизиқли дифференциал тенгламага таъриф беринг.
2. Қачон n-тартибли чизиқли тенглама бир жинсли, бир жинсли бўлмаган тенглама дейилади?
3. Чизиқли дифференциал операторга таъриф беринг.
4. Чизиқли дифференциал операторнинг хоссаларини айтинг ва уларни исботланг.
5. Чизиқли бир жинсли тенглама хусусий ечимларининг хоссалари нимадан иборат?
6. Қандай функциялар системаси чизиқли эркли, қандай системаси чизиқли боғлиқ дейилади?
7. Вронский детерминанти деб нимага айтилади?
8. Функциялар системасининг чизиқли боғлиқ бўлиш шартларини ифодаланг ва исботланг.
9. Функциялар системасининг чизиқли эркли бўлиш шартларини ифодаланг.
10. Ушбу

$$\cos\beta x,\ x\cos\beta x,\ x^2\cos\beta x,\ \ldots\ ,\ x^m\cos\beta x$$

функциялар системаси чизиқли эркли эканини исботланг.

11. Ушбу

$$\sin\beta x,\ x\sin\beta x,\ x^2\sin\beta x,\ \ldots,\ x^m\sin\beta x$$

функциялар системаси чизиқли эркли эканини исботланг (учта функция билан чекланинг).

12. Ушбу

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots,\ x^m e^{kx}$$

функциялар системаси чизиқли эркли эканини исботланг (учта функция билан чекланинг).

16- §. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар, улар ечимларининг чизиқли эркли бўлиш шартлари

n- тартибли чизиқли бир жинсли ушбу дифференциал тенгламага яна мурожаат қиламиз:

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = 0. \qquad (16.1)$$

Бу тенгламани чизиқли дифференциал оператор ёрдамида $L[y] = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Айтайлик, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ лар бу тенгламанинг ечимлари бўлиб, бу функциялар бирор соҳада дифференциалланувчи бўлсин. Бу ечимларнинг чизиқли эркли бўлиш шартини топамиз.

Теорема. *Агар $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ функциялар чизиқли эркли ва* (16.1) *чизиқли бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг Вронский детерминанти тенгламанинг коэффициентлари аниқланган соҳанинг ҳеч бир нуқтасида нолга тенг бўлмайди.*

Исботи. Дастлаб, $y \equiv 0$ функция (16.1) тенгламанинг ечими бўлишини ва қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантиришини қайд қилиб ўтамиз:

$$y\Big|_{x=x_0} = 0,\ y'\Big|_{x=x_0} = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = 0, \qquad (16.2)$$

бу ерда x_0 — тенгламанинг коэффициентлари аниқланган соҳанинг нуқтаси.

Исботлашга ўтамиз. Тескарисини фараз қиламиз. Бирорта x_0 нуқтада Вронский детерминанти нолга тенг бўлсин дейлик.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминанти $W(x_0)$ бўлган алгебраик бир жинсли тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \qquad (16.3)$$

Бу системанинг детерминанти $W(x_0)=0$ бўлгани учун у нол бўлмаган ечимга эга, яъни α_i $(i=\overline{1,n})$ ларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ лар ёрдамида ечимларнинг чизиқли комбинациясини тузамиз. Ушбу функцияни ҳосил қиламиз:

$$\overline{y}(x)=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x),$$

бу ерда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. (16.1) тенглама ечимларнинг чизиқли комбинацияси бўлган $\overline{y}(x)$ функциянинг ўзи ҳам унинг ечими бўлади (мазкур бобнинг 13-§ идаги натижага кўра). Бундан ташқари $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (16.3) системанинг ечими бўлгани учун $\overline{y}(x)$ (16.2) бошланғич шартларни қаноатлантиради.

$$\overline{y}(x_0)=0, \quad \overline{y}'(x_0)=0, \ \ldots, \ \overline{y}^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Бироқ бу бошлангич шартларни (16.1) тенгламанинг ечими бўлган $y\equiv 0$ (айнан нолга тенг) функция ҳам қаноатлантиради. У ҳолда берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимнинг ягоналигига кўра:

$$\overline{y}(x)\equiv 0$$

ёки

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0.$$

Биз $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функциялар чизиқли эркли деган хулосага келдик, бу эса шартга зиддир. Бу зиддият теоремани исботлайди.

Натижа. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлган $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функциялар системасининг Вронский детерминанти ё айнан нолга тенг, ё ҳеч бир нуқтада нолга тенг бўлмайди. Бу $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ечимлар системаси ё чизиқли боғлиқ, ё чизиқли эркли бўлишидан келиб чиқади.

17-§. Ечимларнинг фундаментал системаси, чизиқли бир жинсли тенглама умумий ечимининг структураси

Таъриф. n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг n та чизиқли эркли ечимлари системаси унинг *фундаментал системаси* дейилади.

Теорема. *n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг n та ечими унинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этиши учун уларнинг Вронский детерминанти нолдан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир.*

Ҳар қандай чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама чексиз кўп фундаментал ечимлар системасига эга бўлишини кўрсатиш мумкин.

Ечимларнинг фундаментал системаси тушунчаси ва Вронский детерминанти тўғрисидаги қараб чиқилган теоремалардан фойдаланиб, қандай ҳолда чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини хусусий ечимлардан тузиш мумкин деган саволга жавоб бериш мумкин.

Бу саволга чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама умумий ечимининг структураси тўғрисидаги қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$—чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама ечимларининг фундаментал системаси бўлса, у ҳолда бу тенгламанинг умумий ечими бу ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади, яъни*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{17.1}$$

бу ерда $C_1, C_2, \ldots, C_n$—ихтиёрий ўзгармаслар.

Исботи. 13-§ даги 1 ва 2-теоремалардан келиб чиқадиган натижаларга асосан (17.1) функция чизиқли бир жинсли тенгламанинг ечими бўлади. У ечим умумий бўлишини исботлаш учун ушбу

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{17.2}$$

бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай қийматларини топиш мумкинки, уларга мос хусусий ечим берилган бошланғич шартларни қаноатлантиришини кўрсатиш етарлидир. (17.1) функция (17.2) бошланғич шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \ldots + C_n y_{n0}' = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{17.3}$$

Бу ерда

$$y_{10}, \ y_{10}', \ \ldots, \ y_{10}^{(n-1)}$$

орқали y_1 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати;

$y_{20}, \ y_{20}', \ \ldots, \ y_{20}^{(n-1)}$ орқали y_2 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати ва ҳ. к.

$y_{n0}, \ y_{n0}', \ \ldots, \ y_{n0}^{(n-1)}$ орқали y_n функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати белгиланган.

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ номаълумларга нисбатан алгебраик чизиқли тенгламаларнинг (17.3) системасини ҳосил қилдик. Бу системанинг детерминанти $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаментал ечимлар системасининг x_0 нуқтадаги Вронский детерминантидан, яъни $W(x_0)$ дан иборат бўлади. 16-§ даги теоремага кўра бу детерминант нолга тенг эмас.

Демак, (17.3) система ягона ечимга эга, яъни шундай $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \dots, \overline{C}_n$ сонлар тўпламига эгаки, буларда $y = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2 + \dots + \overline{C}_n y_n$ ечим (17.2) бошланғич шартларни қаноатлантиради. Шундай қилиб, агар $y_1, y_2, \dots, y_n$ — чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлса, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ функция бу тенгламанинг умумий ечими бўлиши исбот қилинди.

18- §. Остроградский — Лиувилл формуласи

Остроградский — Лиувилл формуласи чизиқли бир жинсли тенглама ечимлари системасининг Вронский детерминанти билан бу тенгламанинг коэффициентларини боғлайди. Бу формулани келтириб чиқаришни иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенглама бўлган хусусий ҳол учун кўрсатамиз. Тенгламанинг кўриниши:

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0.$$

Агар y_1 ва y_2 — фундаментал система бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 = 0. \end{cases}$$

Биринчи тенгликнинг ҳадларини y_2 га, иккинчи тенгликнинг ҳадларини y_1 га кўпайтириб ва иккинчисидан биринчисини айириб, топамиз:

$$\left(y_1 y_2'' - y_1'' y_2\right) + a_1(x)\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = 0. \qquad (18.1)$$

Бу ерда $y_1 y_2' - y_1' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(x)$ — y_1, y_2 фундаментал ечимлар системасининг Вронский детерминанти. $y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = W'(x)$ — бу детерминантнинг ҳосиласи. Демак, (18.1) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$W'(x) + a_1(x) W(x) = 0. \qquad (18.2)$$

(18.2) тенгламанинг умумий ечимини ўзгарувчиларни ажратиб топамиз:

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -a_1(x)\,dx, \qquad W(x) \neq 0,$$

чунки y_1, y_2 ечимлар системаси фундаменталдир. Интеграллаймиз:

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}. \qquad (18.3)$$

Энди (18.2) тенгламанинг

$$W(x_0) = W_0$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топамиз. Уларни (18.3) умумий ечимга қўйиб, топамиз:

$$W_0 = Ce^{\left(-\int a_1(x)\,dx\right)}\Big|_{x=x_0}. \tag{18.4}$$

(18.3) ифодани (18.4) га бўламиз:

$$\frac{W(x)}{W_0} = \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{e^{\left(-\int a_1(x)\,dx\right)}\Big|_{x=x_0}}.$$

Бу ердан

$$W(x) = W_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx} \tag{18.5}$$

экани равшан.

(18.5) формула Остроградский — Лиувилл формуласидир, у иккинчи тартибли тенглама учун келтириб чиқарилди, бироқ у исталган тартибли тенгламалар учун ҳам ўринлидир. Бу формуладан, масалан, $W(x)$ ё айнан нолга тенг экани, ё ҳеч бир нуқтада нолга тенг бўлмаслиги келиб чиқади.

(18.5) формула иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламанинг битта хусусий ечими маълум бўлганда унинг умумий ечимини топишга имкон беради.

Мисол. Ушбу $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ тенгламанинг $y_1 = e^x$ ечими маълум бўлса, унинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламани x га бўлиб, қайта ёзамиз:

$$y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{y}{x} = 0.$$

(18.3) формулада Вронский детерминантини унинг қиймати билан алмаштирамиз, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$y_2'y_1 - y_2y_1' = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}.$$

Бу ердан

$$y_2'e^x - y_2e^x = Ce^{-\int -\frac{1+x}{x}dx}$$

$\left(\text{чунки } y_1 = e^x,\ y_1' = e^x,\ a_1(x) = -\frac{1+x}{x}\right)$ ёки

$$e^x(y_2' - y_2) = C\,e^{\ln x + x}.$$

$e^{\ln x} = x$ бўлгани учун e^x га қисқартирсак, охирги тенгламадан:

$$y_2' - y_2 = C\,x.$$

Бу тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топамиз. У биринчи тартибли, чизиқлидир. Қуйидагича алмаштирамиз:

$y_2 = u\cdot v$, $y_2' = u'v + v'u$, натижада $u'v + uv' - uv = Cx$, бу ердан $u'v + u(v' - v) = Cx$. Энди $v' - v = 0$ деймиз, у ҳолда $u'v = Cx$. Биринчи тенгламани ечиб, $v = e^x$ ни, иккинчи тенгламани ечиб, $u = C_1 - Ce^{-x}(x+1)$ ни топамиз. u, v функцияларни y_2 га қўямиз:

$$y_2 = uv = e^x(C_1 - Ce^{-x}(x+1)).$$

Хусусуй ечимни излаётганимиз учун $C_1 = 0$, $C = -1$ деб, $y_2 = x + 1$ ни ҳосил қиламиз. Иккита: $y_1 = e^x$, $y_2 = x + 1$ хусусий ечимлар $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{x+1} \neq \text{const}$ бўлгани учун чизиқли эркли. Улар фундаментал система ташкил этади, шунинг учун берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^x + C_2(x+1)$$

функциядан иборат бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. n-тартибли чизиқли бир жинсли тенглама ечимлари системасининг чизиқли эркли бўлиш шартини ифодаланг ва исботланг.
2. Чизиқли бир жинсли тенглама ечимларининг фундаментал системаси деб нимага айтилади?
3. Чизиқли бир жинсли тенглама умумий ечимининг структураси тўғрисидаги теоремани ифодаланг ва исботланг.
4. Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенглама бўлган ҳол учун Остроградский — Лиувилл формуласини келтириб чиқаринг.
5. 4238—4241-масалаларни ечинг.

19-§. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар

Чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг коэффициентлари ўзгармас бўлган хусусий ҳолни қараймиз. Бундай тенгламалардан кўп фойдаланилади. Соддалик учун аввал иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламани муфассал кўриб чиқамиз, унинг натижаларини n-тартибли тенгламалар учун умумлаштирамиз.

1. Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламалар. Ушбу ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламани қараймиз:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{19.1}$$

бу ерда p, q — ўзгармас ҳақиқий сонлар. Чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг умумий назариясидан (16—18-§ лар) бундай тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг хусусий ечимлари фундаментал системасини топиш етарли экани келиб чиқади. Иккинчи тартибли тенглама бўлган ҳолда фундаментал система иккита чизиқли эркли хусусий ечимдан иборат бўлади. (19.1) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини қандай топиш мумкинлигини кўрсатамиз. Бу тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = e^{kx} \qquad (19.2)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда k — ўзгармас.

Бу функцияни икки марта дифференциаллаймиз:

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}.$$

y, y', y'' ларни (19.1) тенгламага қўйиб, топамиз:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0. \qquad (19.3)$$

Бу ерда e^{kx} — кўпайтувчи x нинг ҳеч қандай қийматида нолга тенг бўлмайди. Шунинг учун e^{kx} га қисқартириб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (19.4)$$

Шундай қилиб, k сони (19.4) тенгламанинг илдизи бўлганда ва фақат шундагина y функция ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли (19.1) дифференциал тенгламани қаноатлантиради.

(19.4) алгебраик тенглама берилган дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. У (19.1) дифференциал тенгламадан унда изланаётган функциянинг ҳосилаларини номаълум k нинг тегишли даражалари билан алмаштиришдан ҳосил қилинади, бунда функциянинг ўзи (нолинчи тартибли ҳосила каби) k номаълумнинг нолинчи даражаси, яъни бир билан алмаштирилади. Характеристик тенгламанинг илдизлари k_1 ва k_2 сонлари бўлади:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ ва } k = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}.$$

Бунда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

а) k_1 ва k_2 — ҳақиқий ва ҳар хил сонлар, яъни $k_1 \neq k_2$;

б) k_1 ва k_2 — ҳақиқий ва тенг сонлар, яъни $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$;

в) k_1 ва k_2 — комплекс сонлар, яъни $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, бу ерда

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Ҳар қайси ҳолни алоҳида-алоҳида қараймиз.

а) *Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил*: $k_1 \neq k_2$. Бу ҳолда хусусий ечимлар (19.2) формулага кўра $y_1 = e^{k_1x}$ ва $y_2 = e^{k_2x}$ функциялар бўлади.

Бу иккита y_1 ва y_2 ечимнинг чизиқли эрклилигини текшириш қолади. 14-§ даги таърифдан бунинг учун y_1 ва y_2 функцияларнинг нисбатини тузиш кераклиги келиб чиқади. Агар бу нисбат x нинг барча қийматлари учун ўзгармас сон бўлса, y_1 ва y_2 функциялар чизиқли боғлиқ, акс ҳолда улар чизиқли эркли бўлади. Демак, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{x(k_1 - k_2)} \neq \text{const}$, чунки k_1 ва k_2 лар шартга кўра ҳар хил. Шундай қилиб, $y_1 = e^{k_1x}$ ва $y_2 =$

$= e^{k_2x}$ ечимлар чизиқли эркли, демак, улар (19.1) тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этади. Демак, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

берилган тенгламанинг умумий ечимини беради.

1-мисол. Ушбу $y'' - 3y' + 2y = 0$ дифференциал тенглама учун характеристик тенглама $k^2 - 3k + 2 = 0$ кўринишга эга бўлади. Унинг илдизлари: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Фундаментал ечимлар системаси: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

б) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва тенг. $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Битта хусусий ечим: $y_1 = e^{k_1x}$ юқоридаги мулоҳазалар асосида ҳосил қилинади. e^{k_2x} функция иккинчи хусусий ечим сифатида қаралиши мумкин эмас, чунки $e^{k_2x} = e^{k_1x}$. Шундай хусусий ечим топиш керакки, у биринчи ечим $y_1 = e^{k_1x}$ билан чизиқли эркли бўлсин. Иккинчи ечим $y_2 = xe^{k_1x}$ функция бўлиши мумкинлигини кўрсатайлик. У y_1 билан чизиқли эркли, чунки

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{k_1x}}{e^{k_1x}} = x \neq \text{const}.$$

Бу $y_2 = xe^{k_1x}$ функция (19.1) тенгламани қаноатлантиришини текшириш қолди. Уни икки марта дифференциаллаймиз:

$$y_2' = e^{k_1x}(1 + k_1x),$$
$$y_2'' = e^{k_1x}(k_1^2x + 2k_1).$$

y_2, y_2', y_2'' ларни берилган (19.1) тенгламага қўямиз:

$$e^{k_1x}[(k_1^2x + 2k_1) + p(1 + k_1x) + qx] = 0.$$

Қўшилувчиларни қайта гуруҳлаймиз ва $e^{k_1x} \neq 0$ га қисқартирамиз:

$$x(k_1^2 + pk_1 + q) + (2k_1 + p) = 0. \qquad (19.5)$$

k_1 — (19.4) характеристик тенгламанинг илдизи бўлгани учун (19.5) даги биринчи қавс айнан нолга тенг, яъни $k_1^2 + pk_1 + q = 0$. k_1 — каррали илдиз, яъни $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ёки $2k_1 = -p$ бўлгани учун (19.5) даги иккинчи қавс ҳам айнан нолга тенг, яъни $2k_1 + p = 0$. Демак, $y_2 = xe^{k_1x}$функция (19.1) тенгламанинг ечими бўлади ва $y_1 = e^{k_1x}$ билан чизиқли эркли. Шундай қилиб, $y_1 = e^{k_1x}$ ва $y_2 = xe^{k_1x}$ ечимлар (19.1) тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этади. Демак, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$$

бу тенгламанинг умумий ечимини беради.

2-мисол. Ушбу $y'' + 4y' + 4y = 0$ дифференциал тенглама учун характеристик тенглама $k^2 + 4k + 4 = 0$ кўринишда бўлади. Унинг илдизлари: $k_1 = k_2 = -2$. Фундаментал ечимлар системаси $y_1 = e^{-2x}$ ва $y_2 = xe^{-2x}$. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x).$$

в) Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс, қўшма: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Бу ерда $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Хусусий ечимларни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$y_1 = e^{k_1x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x},$$
$$y_2 = e^{k_2x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}. \qquad (19.6)$$

(19.6) ифодага ушбу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Эйлер формуласини татбиқ қилиб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ic^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Маълумки, бир жинсли тенглама ечимларининг чизиқли комбинацияси ҳам тенгламанинг ечими бўлади. Шунинг учун қуйидаги

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \bar{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

функциялар ҳам (19.1) тенгламанинг ечимлари бўлади. Улар чизиқли эркли, чунки: $\frac{\bar{y}_1}{y_2} = \operatorname{ctg}\beta x \neq \text{const}$. Демак, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ функциялар (19.1) тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этади. Шундай қилиб, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

берилган тенгламанинг умумий ечимини беради.

3-мисол. Ушбу $y'' - 4y' + 13y = 0$ дифференциал тенглама учун характеристик тенглама $k^2 - 4k + 13 = 0$ бўлади. Унинг илдизлари: $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$; $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Ечимларнинг фундаментал системаси: $y_1 = e^{2x}\cos 3x$, $y_2 = e^{2x}\sin 3x$. Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

2. Ўзгармас коэффициентли n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Ушбу ўзгармас коэффициентли n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани қараймиз:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{19.7}$$

бу ерда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ўзгармас сонлар. Бу тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг фундаментал ечимлар системасини топиш етарлидир. n-тартибли дифференциал тенглама бўлган ҳолда фундаментал система n та чизиқли эркли ечимлардан иборат бўлади. Хусусий ечимни $y = e^{kx}$ кўринишда излаймиз. Бу функцияни n марта дифференциаллаб, y ва унинг $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ҳосилаларини (19.7) тенгламага қўйиб, қуйидаги алгебраик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Бу тенглама (19.7) дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси дейилади. Характеристик тенглама n та илдизга эга: $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламага ўхшаш бу ҳолда ҳам характеристик тенглама илдизларининг характерига кўра уларга мос хусусий ечимлар қандай боғланишга эга эканини кўрсатамиз.

а) Характеристик тенгламанинг ҳар бир ҳақиқий содда k илдизига e^{kx} хусусий ечим мос келади;

б) ҳар бир s каррали ҳақиқий k илдизга s та чизиқли эркли $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{s-1}e^{kx}$ ечимлар мос келади;

в) комплекс қўшма содда илдизларнинг ҳар бир $k_1 = \alpha + i\beta$ ва $k_2 = \alpha - i\beta$ жуфтига иккита чизиқли эркли $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ва $e^{\alpha x}\sin\beta x$ хусусий ечим мос келади;

г) карралиги r бўлган комплекс қўшма илдизларнинг ҳар бир $k_1 = \alpha + i\beta$ ва $k_2 = \alpha - i\beta$ жуфтига $2r$ та чизиқли эркли хусусий ечимлар мос келади:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\quad x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Характеристик тенгламанинг даражаси ёки чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг тартиби қандай бўлса, хусусий ечимлар шунча бўлади. Ечимларнинг чизиқли эрклилигини Вронский детерминанти ёрдамида исботлаш мумкин. Фундаментал ечимлар системасини кўриб, уларнинг чизиқли комбинациясини тузамиз:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

бу (19.7) чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади. Бу ерда $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — ихтиёрий ўзгармаслар.

4-мисол. Ушбу $y^{\mathrm{IV}} - y = 0$ дифференциал тенглама учун характеристик тенглама $k^4 - 1 = 0$ кўринишга эгадир. Унинг илдизлари $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Фундаментал ечимлар системаси $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$. Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

5-мисол. Ушбу $y^{V} - 2y^{IV} + 2y^{III} = 0$ тенглама учун характеристик тенглама $k^5 - 2k^4 + 2k^3 = 0$ кўринишга эга. Унинг илдизлари: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 1 + i$, $k_5 = 1 - i$. Демак, тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x \cos x + C_5 e^x \sin x.$$

6-мисол. Ушбу $y^{V} + 8y^{III} + 16y^{I} = 0$ тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^5 + 8k^3 + 16k = 0$ кўринишда бўлиб, унинг илдизлари $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 2i$, $k_{4,5} = -2i$ бўлади. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \cos 2x + C_5 x \sin 2x.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани ечиш усулини баён қилинг. Характеристик тенглама деб нимага айтилади ва у қандай тузилади?
2. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламанинг характеристик тенглама илдизлари ҳақиқий бўлганда умумий ечимини топиш формуласини келтириб чиқаринг. Мисол келтиринг.
3. 2-топшириқни характеристик тенглама илдизлари тенг бўлган ҳол учун бажаринг.
4. Худди шунинг ўзини комплекс илдизлар бўлган ҳол учун бажаринг.
5. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли n-тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими характеристик тенглама илдизларига боғлиқ ҳолда қандай тузилади?
6. 4251—4264, 4301—4310-масалаларни ечинг.

20-§. Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар

Бир жинсли бўлмаган ёки ўнг томони берилган дифференциал тенглама деб

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) y = f(x) \qquad (20.1)$$

кўринишдаги дифференциал тенгламага айтилади. Чизиқли дифференциал операторнинг ифодасидан фойдаланиб, (20.1) тенгламани

$$L[y] = f(x) \qquad (20.2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу — бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими шундай функция эканини билдирадики, унга $L[y]$ чизиқли оператор берилган $f(x)$ функцияни мос қўяди.

(20.2) тенглама билан бир қаторда

$$L[y] = 0 \qquad (20.3)$$

тенгламани ҳам қараймиз. Бу тенглама берилган бир жинсли бўлмаган тенгламага мос бир жинсли тенглама дейилади.

1. Умумий ечимнинг структураси. Қуйидаги теорема чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама умумий ечимининг структурасини аниқлашга ёрдам беради.

1-теорема. *Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бу тенгламанинг хусусий ечими ва мос бир жинсли тенламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборат.*

Исботи. Бу (20.2) тенгламанинг бирорта хусусий ечимини $\bar{y}$ орқали, бу тенгламага мос бир жинсли (20.3) тенгламанинг умумий ечимини Y орқали белгилаймиз. Бу белгилашларга кўра қуйидагини ёзиш мумкин:

$$L[\bar{y}] = f(x), \ L[Y] = 0.$$

Энди бу ечимларнинг йиғиндисини тузамиз:

$$y = Y + \bar{y}. \qquad (20.4)$$

Бу функцияни (20.1) тенгламага қўйиб, операторнинг аддитивлик хоссасини эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$L[y] = L[Y + \bar{y}] = L[Y] + L[\bar{y}] = f(x) + 0 = f(x).$$

Шундай қилиб, $y = Y + \bar{y}$ функция берилган (20.2) тенгламани қаноатлантиради, яъни унинг ечими бўлади. Энди (20.4) ифода умумий ечим эканини исботлаш қолди.

Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар бир жинсли (20.3) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этса, у ҳолда унинг умумий ечими бу функцияларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади:

$$Y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

бу ерда $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — ихтиёрий ўзгармаслар.

У ҳолда (20.4) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = \bar{y} + C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n. \qquad (20.5)$$

(20.5) ифода (20.2) тенгламанинг умумий ечими эканини кўрсатиш учун ушбу

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (20.6)$$

бошланғич шартлар қандай бўлишидан қатъи назар $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай қийматларини топиш мумкинки, ўзгармасларнинг бу қийматларида (20.5) ечим берилган (20.6) бошланғич шартларни қаноатлантиришини кўрсатиш керак, яъни умумий ечимдан берилган бошланғич шартларда уларга мос хусусий ечимни ажратиб олиш мумкин эканлигини кўрсатиш керак.

(20.5) функция (20.6) бошланғич шартларни қаноатлантирсин:

$$\bar{y}_0 + C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \dots + C_n y_{n0} = y_0,$$
$$\bar{y}_0' + C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \dots + C_n y_{n0}' = y_0',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\bar{y}_0^{(n-1)} + C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \dots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

ёки

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \dots + C_n y_{n0} = y_0 - \bar{y}_0,$$
$$C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \dots + C_n y_{n0}' = y_0' - \bar{y}_0',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \dots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - \bar{y}_0^{(n-1)}. \quad (20.7)$$

Бу ерда

$\bar{y}_0, \bar{y}_0', \dots, \bar{y}_0^{(n-1)}$ орқали $\bar{y}$ функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати;

$y_{10}, y_{10}', \dots, y_{10}^{(n-1)}$ орқали y_1 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати;

$y_{20}, y_{20}', \dots, y_{20}^{(n-1)}$ орқали y_2 функция ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати ва ҳ. к.;

$y_{n0}, y_{n0}', \dots, y^{(n-1)}$ орқали y функциянинг ва унинг ҳосилаларининг $x = x_0$ нуқтадаги қиймати белгиланган.

Натижада $C_1, C_2, \dots, C_n$ номаълумларга нисбатан n та алгебраик тенгламалар системаси (20.7) ни ҳосил қиламиз. Агар бу системанинг бош детерминанти нолга тенг бўлмаса, система ягона ечимга эга бўлади. Бироқ, системанинг бош детерминанти $y_1, y_2, \dots, y_n$ фундаментал ечимлар системасининг Вронский детерминантидан иборатдир:

$$\Delta = W[y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}] = W(x_0).$$

Бу детерминант нолдан фарқли, чунки $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар чизиқли эркли. Шундай қилиб, (20.7) система ечимга эга, у ягона ечимга эга бўлиб, бу ечим Крамер формуласи ёки Гаусс усули ёрдамида аниқланади.

Бу ердан (20.5) функция ёки (20.4) қаралаётган (20.1) ёки (20.2) дифференциал тенгламанинг умумий ечими экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани ечишда бир жинсли тенгламани ечишга нисбатан фарқ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топишдан иборат экан.

Хусусий ечимларни топишда қуйидаги теоремадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

2-теорема. *Агар бир жинсли бўлмаган* (20.1) *ва* (20.2) *тенгламанинг ўнг томони иккита функциянинг йиғиндисидан иборат бўлса, яъни*

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

бўлса, у ҳолда бундай тенгламанинг хусусий ечимини ўнг томонлари $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ бўлган мос тенгламаларнинг хусусий ечимлари йиғиндиси сифатида ҳосил қилиш мумкин.

Исботи. Ушбу

$$L[y_1] = f_1(x) \text{ ва } L[y_2] = f_2(x)$$

тенгламаларни қараймиз. Айтайлик, $\bar{y}_1$ ва $\bar{y}_2$ функциялар мос равишда бу тенгламаларни қаноатлантирсин, яъни

$$L[\bar{y}_1] = f_1(x) \text{ ва } L[\bar{y}_2] = f_2(x).$$

Чизиқли дифференциал операторнинг аддитивлик хоссасига кўра:

$$L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] + L[\bar{y}_2] = f_1(x) + f_2(x),$$

яъни $L[\bar{y}] = f_1(x) + f_2(x)$ бўлгани учун $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ функция (20.2) тенгламани қаноатлантиради. Теорема исботланди.

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг умумий усулини кўрсатамиз.

2. Лагранжнинг ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули. (20.3) бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини тузамиз:

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n .$$

Бир жинсли бўлмаган (20.2) тенгламанинг хусусий ечимини C_1, $C_2, \ldots, C_n$ ларни x нинг функцияси деб, юқоридаги шаклда, яъни

$$\bar{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n \tag{20.8}$$

кўринишда излаймиз. Бу функцияларни шундай топиш талаб қилинадики, (20.8) ечим (20.2) тенгламани қаноатлантирсин.

Қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned} &C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ &C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ &C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{aligned} \tag{20.9}$$

Номаълум C_1', $C_2', \ldots, C_n'$ лардан иборат бу тенгламалар системаси ечимга эга, чунки системанинг C_1', $C_2', \ldots, C_n'$ ларнинг олдиларидаги коэффициентлардан тузилган бош детерминанти чизиқли эркли $y_1, y_2, \ldots, y_n$ хусусий ечимларнинг Вронский детерминантидан иборатдир. Маълумки, бундай детерминант чизиқли эркли функциялар учун нолдан фарқлидир.

Шундай қилиб, (20.9) система C_1', $C_2', \ldots, C_n'$ функцияларга нисбатан ечилиши мумкин. Уларни топиб, интеграллаймиз:

$$C_1 = \int C_1' \, dx + \bar{C}_1,$$

$$C_2 = \int C_2' \, dx + \overline{C}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_n = \int C_n' \, dx + \overline{C}_n,$$

бу ерда $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ — интеграллаш ўзгармаслари.

Энди

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{20.10}$$

бир жинсли бўлмаган (18.2) тенгламанинг умумий ечими эканини исботлаймиз.

(20.10) ифодани n марта дифференциаллаймиз, бунда ҳар гал (20.9) тенгликни эътиборга оламиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \overline{y} &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \\ \overline{y}' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{y}^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}, \\ \overline{y}^{(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + f(x). \end{aligned}$$

Биринчи, иккинчи, ..., ниҳоят, сўнгги тенгламанинг ҳадларини мос равишда $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ ларга кўпайтирамиз ва қўшиб, $L[\overline{y}] = f(x)$ ни ҳосил қиламиз, чунки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ бир жинсли (20.3) тенгламанинг хусусий ечими ва шунинг учун

$$L[y_1] = 0, \; L[y_2] = 0, \; \ldots, \; L[y_n] = 0.$$

Демак,

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

функция бир жинсли бўлмаган (20.2) тенгламанинг ечими бўлади, бу ерда $C_1, C_2, \ldots, C_n$ лар (20.9) дан аниқланган функциялар. Бу ечим n та $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ. Демак, бу ечим умумий ечимдан иборат бўлади.

1-мисол. Ушбу дифференциал тенгламани ечинг:

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^3 + k = 0$, $k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$ илдизларга эга. Мос бир жинсли тенгламанинг ечими:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

яъни

$$y_1 = 1, \; y_2 = \cos x, \; y_3 = \sin x.$$

Хусусий ечимни ҳам шу кўринишда излаймиз. Бундай тенглама учун (20.9) система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0,$$

$$-C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0,$$
$$-C_2' \cos x - C_3' \sin x = \operatorname{tg} x.$$

Иккинчи тенгламанинг иккала қисмини $\sin x$ га, учинчи тенгламанинг иккала қисмини эса $\cos x$ га кўпайтириб, қўшсак $C_2' = -\sin x$ ни ҳосил қиламиз. У ҳолда иккинчи тенгламадан $C_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ келиб чиқади. Биринчи ва учинчи тенгламаларнинг иккала қисмларини қўшиб, $C_1' = \operatorname{tg} x$ ни топамиз. Интеграллаш қуйидагини беради:

$$C_1 = -\ln|\cos x| + \bar{C}_1, \quad C_2 = \cos x + \bar{C}_2,$$
$$C_2 = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + \bar{C}_3.$$

Бу ердан берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$y = -\ln|\cos x| + \bar{C}_1 + \cos^2 x + \bar{C}_2 \cos x + \sin^2 x -$$
$$- \sin x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + \bar{C}_3 \sin x$$

ёки

$$y = \bar{\bar{C}}_1 + \bar{C}_2 \cos x + \bar{C}_3 \sin x - \ln|\cos x| - \sin x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|,$$

бу ерда $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ бўлгани учун $\bar{\bar{C}}_1 = \bar{C}_1 + 1$.

2-мисол. Ушбу дифференциал тенгламани ечинг: $y'' - \frac{1}{x} y' = x$. Бу тенгламанинг коэффициентлари доимий эмас.

а) Мос бир жинсли дифференциал тенглама $y'' - \frac{1}{x} y' = 0$ ёки $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$ нинг умумий ечимини излаймиз. Мос бир жинсли дифференциал тенгламадан:

$\ln y' = \ln x + \ln C_1$ ёки $y' = C_1 x$. Интеграллаб, топамиз: $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$, бу ерда $\bar{C}_1 = \frac{C_1}{2}$. Шундай қилиб, фундаментал система: $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$ дан иборат.

б) Хусусий ечимни ўша кўринишда излаймиз. (20.9) системани тузамиз:

$$\begin{cases} C_1' x^2 + C_2' = 0, \\ C_1' 2x + 0 = x. \end{cases}$$

Бу ердан $C_1' = \frac{1}{2}$, $C_2' = -\frac{x^2}{2}$. Интеграллаймиз:

$$C_1 = \frac{1}{2} x + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \overline{C}_1\right)x^2 + C_2 - \frac{x^3}{6} = \overline{C}_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими тўғрисидаги теоремани ифодаланг ва исботланг.
2. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ўнг томони маълум функцияларнинг йиғиндиси кўринишида тасвирланганда унинг хусусий ечими қандай тузилади?
3. Ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули нимадан иборат?
4. 4280—4282, 4314—4316- масалаларни ечинг.

21- §. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар

Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламаларнинг коэффициентлари ўзгармаслар бўлган хусусий ҳолни қараймиз.

Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламани ечиш бир жинсли тенгламани ечишдан бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топиш билан фарқ қилади. Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг аниқмас коэффициентлар усулини қарашга ўтамиз. Бу усул ўнг томони махсус кўринишда бўлган тенгламалар учун татбиқ қилинади. Агар тенгламанинг ўнг томонида кўрсаткичли функциялар, синуслар, косинуслар, кўпҳадлар ёки уларнинг бутун рационал комбинациялари иштирок этаётган бўлса, бу усул бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишга имкон беради. Бунда, табиийки, хусусий ечимни ўнг томоннинг шаклига ўхшаш шаклда излаш керак бўлади. Бундан ташқари, хусусий ечимнинг шакли тенгламанинг чап томонига ҳам боғлиқдир.

Аввал иккинчи тартибли дифференциал тенгламани муфассал қараб чиқамиз, сўнгра унинг натижаларини n- тартибли дифференциал тенгламалар учун умумлаштирамиз.

1. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар. Ушбу иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламани қараймиз:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (21.1)$$

бу ерда p, q — ўзгармас сонлар.

Ушбу

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (21.2)$$

берилган бир жинсли бўлмаган (21.1) дифференциал тенгламага мос чизиқли бир жинсли

$$y'' + py' + qy = 0$$

дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси бўлади. $f(x)$ функцияни қуйидагича ёзиш мумкин бўлсин:

$$f(x) = e^{\gamma x}\,[P_n(x)\cos\delta x + Q_m(x)\,\sin\delta x], \tag{21.3}$$

бу ерда γ, δ — маълум сонлар, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — маълум кўпҳадлар. Бу функциянинг хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз.

1. $\gamma = 0$, $\delta = 0$ бўлсин, у ҳолда $f(x) = P_n(x)$, бу ерда $P_n(x)$ n-даражали кўпҳад. $\bar{y}$ хусусий ечимни n-даражали ушбу кўпҳад кўринишида излаймиз:

$$\bar{y} = R_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n, \tag{21.4}$$

бу ерда A_0, A_1, A_2, . . . , A_n — топилиши керак бўлган номаълум коэффициентлар. Уларни $\bar{y} = R_n(x)$ функция (21.1) тенгламани айнан қаноатлантириши шартидан аниқлаймиз. (21.4) ифодани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\bar{y}' = R_n'(x) = nA_0x^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \ldots + A_{n-1},$$
$$\bar{y}'' = R_n''(x) = n(n-1)A_0x^{n-2} +$$
$$+ (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + \ldots + 2A_{n-2}.$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ларни (21.1) дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R_n'' + pR_n' + qR_n = P_n(x), \tag{21.5}$$

бу ерда R_n— n-даражали кўпҳад; R_n' — $(n-1)$-даражали кўпҳад; R_n'' — $(n-2)$-даражали кўпҳад.

Мумкин бўлган ҳолларни қараб чиқамиз.

а) $q \neq 0$ бўлсин (яъни характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$), у ҳолда (21.5) тенгликнинг чап ва ўнг томонларида n-даражали кўпҳадлар туради. x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, $(n+1)$ та A_0, A_1, A_2, . . . , A_n номаълум коэффициентларни аниқлаш учун $n+1$ та тенгламадан иборат системани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий ечим $\bar{y} = R_n(x)$ кўринишда бўлади.

б) $q = 0$, $p \neq 0$ ((21.2) характеристик тенгламанинг илдизлари: $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$) бўлсин. Агар хусусий ечим яна $\bar{y} = R_n(x)$ шаклда изланса, (21.5) тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$R_n'' + pR_n' = P_n(x). \tag{21.6}$$

Чап томонда $(n-1)$-даражали кўпҳад, ўнг томонда эса n-даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч қандай A_0, A_1, . . . , A_n ларда (21.6) айният бўла олмайди. Шунинг учун хусусий ечимни номаълум коэффициентлар сонини оширмай $(n+1)$-даражали кўпҳад кўринишида олиш керак. Бунинг учун $R_n(x)$ ни x га кўпайтириш етарли. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий ечим $\bar{y} = xR_n(x)$ кўринишга эга бўлади.

в) $q = 0$, $p = 0$ ((21.2) характеристик тенгламанинг илдизлари: $k_1 = k_2 = 0$) бўлсин. Агар хусусий ечимни $\bar{y} = R_n(x)$ шаклда излайдиган бўлсак, (21.5) тенглик қуйидаги кўринишда бўлади:

$$R_n'' = P_n(x). \tag{21.7}$$

Чап томонда $(n-2)$-даражали кўпҳад, ўнг томонда эса n-даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч бир $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ларда (21.7) айният бўла олмайди. Шунинг учун хусусий ечимни номаълум коэффициентлар сонини оширмай $(n-2)$-даражали кўпҳад шаклида олиш керак. Бунинг учун $R_n(x)$ ни x^2 га кўпайтириш етарли. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий ечим $\bar{y} = x^2 R_n(x)$ кўринишда бўлади.

Хулоса. а) Агар 0 сони характеристик тенгламанинг илдизлари билан устма-уст тушмаса, $\bar{y} = R_n(x)$ бўлади.

б) Агар 0 сони характеристик тенгламанинг битта илдизи билан устма-уст тушса, $\bar{y} = xR_n(x)$ бўлади.

в) Агар 0 сони характеристик тенгламанинг иккала илдизи билан устма-уст тушса, $\bar{y} = x^2 R_n(x)$ бўлади.

1-мисол. Ушбу $y''+4y'+3y=x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. а) $k^2+4k+3=0$ характеристик тенглама $k_1=-1$, $k_2=-3$ илдизларга эга. Бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$$

кўринишда бўлади.

б) Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = x = P_1(x)$ кўринишга эга, шу билан бирга 0 сони характеристик тенгламанинг ҳеч қайси илдизи билан устма-уст тушмайди, шунинг учун хусусий ечимни $\bar{y} = Ax+B$ кўринишда излаймиз. Номаълум A ва B ларни топиш учун y функциянинг ва унинг ҳосилаларининг ифодаларини берилган тенгламага қўямиз ва чап ҳамда ўнг томондаги коэффициентларни таққослаймиз. Бунинг учун $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ларнинг ифодаларини ва уларнинг тенгламага кирган коэффициентларини ёзиб чиқамиз. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \bar{y} = Ax + B, \\ 4 & \bar{y}' = A, \\ 1 & \bar{y}'' = 0. \end{array}$$

Ҳисоблашларни бажариб, $3(Ax+B) + 4A = x$ га эга бўламиз. Бу ердан коэффициентларни тенглаб,

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ 3B + 4A = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{4}{9}$ ларни топамиз. Шундай қилиб, хусусий ечим $\bar{y} = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$ бўлади. Умумий ечим эса $y = Y + \bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$ дан иборат бўлади.

II. $\sigma = 0$ бўлсин, у ҳолда $f(x) = e^{\gamma x}P_n(x)$, бу ерда γ — маълум сон, $P_n(x)$ эса n-даражали маълум кўпҳад. Дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини

$$\bar{y} = e^{\gamma x}R_n(x) \tag{21.8}$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $R_n(x)$ — юқоридагига ўхшаш n-даражали кўпҳад, унинг коэффициентлари $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — номаълумлар. Уларни $\bar{y} = e^{\gamma x}R_n(x)$ функция (21.8) тенгламани айнан қаноатлантириши керак деган шартдан аниқлаймиз. (21.8) ифодани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\bar{y}' = e^{\gamma x}\left(R_n' + \gamma R_n\right),$$

$$\bar{y}'' = e^{\gamma x}\left(R_n'' + 2\gamma R_n' + \gamma^2 R_n\right).$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ ларни (21.1) тенгламага қўйиб,

$$R_n'' + (2\gamma + p)R_n' + \left(\gamma^2 + p\gamma + q\right)R_n = P_n(x) \tag{21.9}$$

ни ҳосил қиламиз. Мумкин бўлган ҳолларни қараб чиқамиз.

а) γ (21.2) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмасин (яъни $\gamma \neq k_1$, $\gamma \neq k_2$). У ҳолда (21.9) тенгликнинг чап ва ўнг томонида n-даражали кўпҳадлар туради. x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, $(n+1)$ та $A_0, A_1, \ldots, A_n$ номаълумларни аниқлаш учун $n+1$ та тенгламадан иборат системани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, бу ҳолда дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\bar{y} = e^{\gamma x}R_n(x)$$

кўринишда бўлади.

б) γ (21.2) характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи бўлсин (яъни $\gamma = k_1$, $\gamma \neq k_2$, ёки $\gamma \neq k_1$, $\gamma = k_2$).

Агар хусусий ечим $\bar{y} = e^{\gamma x}R_n(x)$ кўринишда изланадиган бўлса, у ҳолда (21.9) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_n'' + (2\gamma + p)R_n' = P_n(x). \tag{21.10}$$

Бу ерда чап томонда $(n-1)$-даражали кўпҳад, ўнг томонда эса

n-даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч қандай $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ларда (21.10) айният бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун хусусий ечимда номаълум коэффициентлар сонини оширмасдан $R_n(x)$ ўрнига $xR_n(x)$ кўпҳадни олиш керак. Шундай қилиб, бу ҳолда дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\overline{y} = xe^{\gamma x} \cdot R_n(x)$$

кўринишда бўлади.

в) γ (21.2) характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлсин (яъни $\gamma = k_1 = k_2$). Агар хусусий ечим $\overline{y} = e^{\gamma x} R_n(x)$ шаклда изланса, у ҳолда (21.9) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R_n'' = P_n(x). \qquad (21.11)$$

Бу ерда чап томонда $(n-2)$-даражали кўпҳад, ўнг томонда эса n-даражали кўпҳад турибди. Демак, ҳеч қандай $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ларда (21.11) айният бўла олмайди. Шунинг учун хусусий ечимда номаълум коэффициентлар сонини оширмасдан $R_n(x)$ ўрнига $x^2 \cdot R_n(x)$ кўпҳадни олиш керак. Шундай қилиб, бу ҳолда дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\overline{y} = x^2 e^{\gamma x} R_n(x)$$

кўринишда бўлади.

Хулоса. а) Агар $\gamma \neq k_1, k_2$ бўлса, $\overline{y} = e^{\gamma x} R_n(x)$.

б) Агар $\gamma = k_1 \neq k_2$ бўлса, $\overline{y} = xe^{\gamma x} R_n(x)$.

в) Агар $\gamma = k_1 = k_2$ бўлса, $\overline{y} = x^2 e^{\gamma x} R_n(x)$.

2-мисол. Ушбу

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(3x - 2)$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш. а) $k^2 - 5k + 6 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ илдизларга эга. Мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = e^{2x}(3x - 2) = e^{\gamma x} R_1(x)$ кўринишга эга. Бунда $\gamma = 2 = k_1$, шунинг учун хусусий ечим: $\overline{y} = x(Ax + B)e^{2x}$ кўринишда бўлади. Бундан $\overline{y}', \overline{y}''$ ларни топамиз:

$$\overline{y}' = e^{2x}\left(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B\right), \quad \overline{y}'' = e^{2x}\left(4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A\right).$$

Берилган дифференциал тенгламага $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$x^2(6A-10A+4A)+x(6B-10B-10A+4B+8A)+$$
$$+(-5B+4B+2A)=3x-2.$$

x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаймиз, натижада:

$$\left.\begin{array}{l|l} x & -2A=3, \\ x^0 & 2A-B=-2 \end{array}\right\}.$$

Системани ечиб, $A=-\frac{3}{2}$, $B=-1$ ларни топамиз. Демак, хусусий ечим $\overline{y}=e^{2x}\left(-\frac{3}{2}x^2-x\right)$ кўринишда, умумий ечим эса

$$y=Y+\overline{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+e^{2x}\left(-\frac{3}{2}x^2-x\right)$$

кўринишда бўлади.

III. γ, $\delta\neq0$ бўлсин, у ҳолда

$$f(x)=e^{\gamma x}\left[P_n(x)\cos\delta x+Q_m(x)\sin\delta x\right].$$

Хусусан, агар $P_n(x)\equiv0$ бўлса, $f(x)=e^{\gamma x}Q_m(x)\sin\delta x$; агар $Q_m(x)=$ $=0$ бўлса, у ҳолда $f(x)=e^{\gamma x}P_n(x)\cos\delta x$. Юқоридаги (I, II ҳоллар) га ўхшаш мулоҳазалардан қуйидаги хулосаларга келамиз:

а) Агар $\gamma+i\delta\neq k_1$, k_2 бўлса (k_1, k_2 — характеристик тенглама илдизлари), у ҳолда хусусий ечимни ўнг томон шаклида излаш керак:

$$\overline{y}=e^{\gamma x}\left[u(x)\cos\delta x+v(x)\sin\delta x\right],$$

бу ерда $u(x)$, $v(x)$ — номаълум коэффициентли кўпҳадлар бўлиб, бу коэффициентлар $\overline{y}$ берилган (21.1) дифференциал тенгламани қаноатлантириши керак деган шартдан топилади. $u(x)$ ва $v(x)$ кўпҳадларнинг даражаси берилган $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг эканини қайд қиламиз.

б) Агар $\gamma+i\delta=k_1$ бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y}=xe^{\gamma x}\left[u(x)\cos\delta x+v(x)\sin\delta x\right]$$

кўринишда излаш керак.

$f(x)$ функцияда синус ёки косинус иштирок этмаганда ҳам хусусий ечимнинг шакли сақланишини қайд қилиб ўтамиз. Қаралаётган ҳол учун хусусий ҳолни, яъни

$$f(x)=M\cos\delta x+N\sin\delta x$$

бўлган ҳолни қарайлик, бу ерда M, N — ўзгармас сонлар.

а) агар $\delta i \neq k_1$, k_2 бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y} = A\cos\delta x + B\sin\delta x$$

кўринишда излаш керак, бу ерда A, B — номаълум коэффициентлар;

б) агар $\delta i = k_1 \neq k_2$ бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y} = x(A\cos\delta x + B\sin\delta x)$$

кўринишда излаш керак.

3-мисол. Ушбу $y'' - 2y' + y = \sin x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. а) $k^2 - 2k + 1 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = k_2 = 1$ илдизларга эга. Мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y = e^x(C_1 + C_2x)$$

бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = \sin x = M\cos\delta x + N\sin\delta x$ кўринишга эга. Бунда $\delta i = i \neq k_1$, k_2. Шунинг учун хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\overline{y} = A\sin x + B\cos x,$$

$\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни топамиз.

$$\overline{y}' = A\cos x - B\sin x, \quad \overline{y}'' = -A\sin x - B\cos x.$$

$\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни берилган дифференциал тенгламага қўйиб, топамиз:

$$(A + 2B - A)\sin x + (B - 2A - B)\cos x = \sin x.$$

$\sin x$ ва $\cos x$ лар олдидаги коэффициентларни таққослаб, топамиз:

$$\begin{array}{r|l} \sin x & 2B = 1, \\ \cos x & -2A = 0. \end{array}$$

Бу ердан $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Демак, тенгламанинг хусусий ечими: $\overline{y} = \frac{1}{2}\cos x$. Умумий ечими: $y = Y + \overline{y}$. Шунинг учун:

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}\cos x.$$

4-мисол. $y'' + 4y = \cos 2x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. а) $k^2 + 4 = 0$ характеристик тенглама $k_{1,2} = \pm 2i$ илдизларга эга, бу ердан $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x) = \cos 2x = M\cos\delta x + N\sin\delta x$ кўринишга эга. Бунда: $\delta i = 2i = k_1 \neq k_2$. Шунинг учун хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаш керак:

$$\overline{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

$\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни топамиз:

$$\overline{y}' = (A + 2Bx)\cos 2x + (B - 2Ax)\sin 2x,$$

$$\overline{y}'' = (2B + 2B - 4Ax)\cos 2x + (-2A - 2A - 4Bx)\sin 2x.$$

$\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ ларни дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(4Ax + 2B + 2B - 4Ax)\cos 2x + (4Bx -$$
$$- 2A - 2A - 4Bx)\sin 2x = \cos 2x.$$

$\sin 2x$, $\cos 2x$ ларнинг олдидаги коэффициентларни тенглаб:

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & \ \ 4B = 1, \\ \sin 2x & -4A = 0 \end{array}$$

$A = 0$, $B = \frac{1}{4}$ эканини топамиз. Хусусий ечим:

$$\overline{y} = \frac{1}{4}\,x\sin 2x.$$

У ҳолда дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = Y + \overline{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\,x\sin 2x$$

бўлади.

2. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган n-тартибли дифференциал тенгламалар. Ушбу ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган n-тартибли дифференциал тенгламани қараймиз:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (21.12)$$

бу ерда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ўзгармас сонлар. Мос бир жинсли

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (21.13)$$

дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

бўлсин. (21.12) тенгламанинг умумий ечими $y = Y + \overline{y}$ каби тузилиши маълум, бу ерда Y — мос бир жинсли (21.13) дифференциал тенгламанинг умумий ечими, $\overline{y}$ эса берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими. $f(x)$ функция махсус (21.3) кўринишга эга бўлган ҳолда хусусий ечимни ҳам ўша (21.3) шаклда излаш керак. (21.3) кўринишнинг хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз ва хусусий ечим шаклини тузиш қоидаларини келтирамиз.

I. $f(x)=P_n(x)$ бўлсин, бу ерда $P_n(x)$ маълум кўпҳад. Агар 0 сони характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган ечими бўлса, хусусий ечимни $\overline{y}=x^r R_n(x)$ шаклда излаш керак, бу ерда $R_n(x)$ — кўпҳад бўлиб, унинг даражаси $P_n(x)$ нинг даражаси билан бир хил, лекин коэффициентлари номаълум.

II. $f(x)e^{\gamma x}=P_n(x)$ бўлсин, бу ерда γ — ўзгармас сон. Агар γ сон характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y}=x^r e^{\gamma x}R_n(x)$$

шаклда излаш керак, бу ерда $R_n(x)$ ҳам $P_n(x)$ билан даражаси бир хил бўлган кўпҳад.

III. $f(x)=M\cos\delta x+N\sin\delta x$ бўлсин, бу ерда M, N, δ — ўзгармас сонлар. Агар δi сон характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y}=x^r(A\cos\delta x+B\sin\delta x)$$

шаклда излаш керак, бу ерда A, B — номаълум ўзгармас коэффициентлар, $f(x)$ функцияда фақат синус ёки фақат косинус қатнашган, яъни $f(x)=M\cos\delta x$ ёки $f(x)=N\sin\delta x$ ҳолда ҳам хусусий ечимнинг бу шакли сақланиб қолади.

IV. $f(x)=e^{\gamma x}\left[P_n(x)\cos\delta x+Q_m(x)\sin\delta x\right]$ бўлсин, бу ерда γ, δ — ўзгармас сонлар, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — маълум кўпҳадлар. Агар $\gamma+$ $+i\delta$ сон характеристик тенгламанинг карралиги r бўлган илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$\overline{y}=x^r e^{\gamma x}[u(x)\cos\delta x+v(x)\sin\delta x]$$

кўринишда излаш керак, бу ерда $u(x)$, $v(x)$ — коэффициентлари номаълум кўпҳадлар бўлиб, уларнинг даражаси $P_n(x)$, $Q_m(x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг. Хусусий ечимнинг бу шакли $f(x)$ функцияда фақат синус ёки фақат косинус қатнашган, яъни

$$f(x)=e^{\gamma x}P_n(x)\cos\delta x \quad \text{ёки} \quad f(x)=e^{\gamma x}Q_m(x)\sin\delta x$$

бўлганда ҳам сақланади.

IV ҳол аввалги I, II, III ҳолларни умумлаштиришини кўриш осон.

5-мисол. Ушбу $y^{\mathrm{IV}}-y=x^3+1$ дифференциал тенгламани ечинг.

Ечиш. а) $k^4-1=0$ характеристик тенглама $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$ илдизларга эга. Бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

кўринишда бўлади.

б) Дифференциал тенгламанинг ўнг томони $f(x)=x^3+1=$ $=P_3(x)$ кўринишга эга. 0 сони характеристик тенгламанинг ҳеч қайси илдизига тенг эмас, шунинг учун $r=0$. Хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз. Ҳосилаларни топамиз:

$$\overline{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D, \qquad \overline{y}^{\mathrm{III}}=6A,$$

$$\overline{y}'=3Ax^2+2Bx+C, \qquad \overline{y}^{\mathrm{IV}}=0.$$

$$\overline{y}''=6Ax+2B,$$

Ушбу тенгликка эга бўламиз:

$-Ax^3-Bx^2-Cx-D=x^3+1$. Бу ердан $A=-1$, $B=C=0$, $D=-1$. Хусусий ечим: $\overline{y}=-x^3-1$. Демак, умумий ечим:

$$y=Y+\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^3-1.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли дифференциал тенглама ($f(x)=P_n(x)$ кўпхад бўлганда) хусусий ечимини топиш қоидасини баён қилинг. Мисоллар келтиринг.
2. Юқоридагини $f(x)=e^{\gamma x}P_n(x)$ бўлган ҳол учун бажаринг.
3. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини тенгламанинг ўнг томони

$$f(x)=e^{\gamma x}\left[P_n(x)\cos\delta x+Q_m(x)\sin\delta x\right]$$

кўринишда бўлган ҳол учун топиш қоидасини ифодаланг. Мисоллар келтиринг.
4. Юқоридагини $f(x)=M\cos\delta x+N\sin\delta x$ бўлган ҳол учун бажаринг.
5. Чизиқли бир жинсли бўлмаган n-тартибли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини $f(x)=P_n(x)$ бўлган ҳол учун топиш қоидасини ифодаланг. Мисоллар келтиринг.
6. Худди шунинг ўзини $f(x)=e^{\gamma x}P_n(x)$ бўлган ҳол учун ифодаланг.
7. Худди шунинг ўзини $f(x)=M\cos\delta x+N\sin\delta x$ бўлган ҳол учун ифодаланг.
8. Худди шунинг ўзини $f(x)=e^{\gamma x}\left[P_n(x)\cos\delta x+Q_m(x)\sin\delta x\right]$ бўлган ҳол учун ифодаланг.
9. 4268—4279, 4314—4320-масалаларни ечинг.

22-§. Дифференциал тенгламалар системалари

Баъзи жараён ёки ҳодисаларни тавсифлаш учун кўпинча бир нечта функция талаб қилинади. Бу функцияларни излаш бир нечта дифференциал тенгламаларга олиб келиши мумкин ва бу тенгламалар система ташкил этади.

Бир аргументга боғлиқ бўлган n та номаълум функциядан иборат дифференциал тенгламалар системаси умумий ҳолда қуйидаги кўринишга эга:

$$F_1\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n,\, y_1',\, y_2',\, \ldots,\, y_n'\right)=0,$$

$$F_2\left(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n,\, y_1',\, y_2',\, \ldots,\, y_n'\right)=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0.$$

Бу ерда $y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ лар x га боғлиқ бўлган номаълум функциялар ва уларнинг ҳосилалари.

Биз 1-тартибли, ҳосилага нисбатан ечилган оддий дифференциал тенгламаларнинг энг содда системасини ўрганамиз.

1. Нормал системалар. Ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламалар системаси нормал система дейилади. Бундай система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (22.1)$$

Нормал системанинг хусусиятлари:

а) системага кирувчи барча тенгламалар биринчи тартибли тенгламалардир;

б) тенгламаларнинг ўнг томонлари ҳосилаларга боглиқ эмас.

(22.1) тенгламалар системасини қаноатлантирадиган $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялар системаси бу *системанинг ечими* дейилади.

(22.1) тенгламалар системаси учун Коши масаласи шундай ечимни топишдан иборатки, $x = x_0$ да берилган қуйидаги қийматларни қабул қилсин:

$$y_1\Big|_{x=x_0} = y_{10},\ y_2\Big|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n\Big|_{x=x_0} = y_{n0}. \qquad (22.2)$$

Бу қийматлар (22.1) тенгламалар системасининг бошланғич шартлари дейилади. Уларнинг сони номаълум функциялар сони билан бир хил.

(22.1) нормал система учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги тўғрисидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Агар (22.1) нормал система тенгламаларининг ўнг томонлари ўзларининг хусусий ҳосилалари билан биргаликда $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ қийматларнинг атрофида узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

шартларни қаноатлантирувчи ягона $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ечим мавжуддир.

(22.1) нормал системанинг умумий ечими деб, n та ихтиёрий $C_1, C_2, \dots, C_n$ ўзгармасларга боғлиқ бўлган ушбу функциялар системасига айтилади:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{array}\right. \qquad (22.3)$$

Бу система қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

а) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ларнинг ҳар қандай мумкин бўлган қийматлари а (22.3) функциялар системаси (22.1) тенгламалар системасини қаноатлантириши керак;

б) Коши теоремаси шартлари бажариладиган соҳада (22.3) функциялар системаси Коши масаласини ечади, яъни (22.3) бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ қийматларини топиш мумкинки,

$$\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1\left(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n\right), \\ y_2 = \varphi_2\left(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\left(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n\right) \end{array}$$

функциялар системаси берилган (22.2) бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Умумий ечимдан ихтиёрий ўзгармасларнинг мумкин бўлган баъзи қийматларида ҳосил бўладиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

2. Нормал системани чиқариш усули билан ечиш. n та дифференциал тенгламадан иборат нормал системани қўшимча функция киритиш орқали битта n-тартибли дифференциал тенгламадан ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

тенглама юқори ҳосиласига нисбатан ечилган n-тартибли дифференциал тенглама бўлсин. Қуйидагича фараз қиламиз:

$$\begin{array}{l} y = y_1 \\ y' = y_1' = y_2 \\ y'' = y_2' = y_3 \\ \ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n \\ y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{array}$$

Шундай қилиб, битта n-тартибли тенгламадан биринчи тартибли n та дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси ҳосил бўлади:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
y_3' &= y_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{aligned}
$$

Умуман айтганда, тескариси ҳам тўғри. Биринчи тартибли n та дифференциал тенгламанинг нормал системаси битта n-тартибли дифференциал тенгламага эквивалентдир. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системасини интеграллаш усулларидан бири — **чиқариш усули** ана шунга асосланган. Ҳақиқатан ҳам, (22.1) системанинг тенгламаларидан биринчисини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot y_n' .$$

$y_1', y_2', \ldots, y_n'$ ҳосилаларни уларнинг (22.1) даги $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n$ лар орқали ифодалари билан алмаштириб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Ҳосил қилинган тенгламани дифференциаллаб, яна юқоридагидек йўл тутиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Худди шундай давом эттириб, охирида қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Шундай қилиб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$
\begin{cases}
y_1' = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\
y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).
\end{cases}
\tag{22.4}
$$

Бу системанинг дастлабки $n - 1$ та тенгламасидан, умуман айтганда, $n - 1$ та $y_2, y_3, \ldots, y_n$ номаълум функцияларни y функция ва унинг ҳосилалари (($n - 1$) тартибгача, у ҳам киради) орқали ифодалаш мумкин. Бу ифодаларни (22.4) тенгламаларнинг энг охиргисига қўйиб, номаълум функция y_1 га нисбатан n-тартибли битта дифференциал тенгламага келамиз:

$$y_1^{(n)} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right).$$

Бу тенгламани ечиб, y_1 ни топамиз:

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Қолган функцияларни топиш учун топилган y_1 функцияни ва унинг ҳосилаларини $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ларнинг ифодаларига қўямиз. Натижада қуйидаги функциялар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Бу система (22.1) нормал системанинг изланаётган ечимини аниқлайди.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z}, \\ z' = y \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системасини ечинг, бу ерда эркли ўзгарувчи x.

Ечиш. Системанинг иккинчи тенгламасини x бўйича дифференциаллаб, $z'' = y'$ ни ҳосил қиламиз. y' ни унинг биринчи тенгламадаги ифодаси билан алмаштириб, $z'' = \frac{y^2}{z}$ ни оламиз. Иккинчи тенгламага кўра y ни z' билан алмаштириб, бир номаълумли, иккинчи тартибли қуйидаги тенгламага келамиз:

$$z'' = \frac{(z')^2}{z}.$$

Бу тенгламада эркли ўзгарувчи ошкор ҳолда иштирок этмайди, шунинг учун унинг тартибини пасайтириш мумкин. Бироқ, уни

$$zz'' - (z')^2 = 0$$

кўринишда ёзиб ва иккала қисмини z^2 га бўлиб, чап томони аниқ ҳосиладан иборат эканини кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = \frac{zz'' - (z')^2}{z^2},$$

натижада тенгламамиз $\left(\frac{z'}{z}\right)' = 0$ кўринишга эга бўлади, бу ердан $\frac{z'}{z} = C_1$ ёки $z' = C_1 z$. Ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб, бу ердан z ни оламиз:

$$z = C_2 e^{C_1 x}.$$

$y = z'$ бўлгани сабабли z учун топилган ифодани дифференциаллаб, $y = C_1C_2e^{C_1x}$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, системанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$y = C_1C_2e^{C_1x}, \quad z = C_2e^{C_1x}.$$

2-мисол. Ушбу дифференциал тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = 2y - z. \end{cases}$$

Системанинг

$$y\Big|_{x=0} = 2\sqrt{3}, \; z\Big|_{x=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Иккинчи тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз: $z''=2y'-z'$. y' ни биринчи тенгламага кўра $y+z$ билан алмаштирамиз:

$$z'' = 2(y + z) - z' \text{ ёки } z'' = 2y + 2z - z'.$$

Иккинчи тенгламага кўра $2y$ ни $z'+z$ га алмаштирамиз: $z''=3z$. Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани ҳосил қилдик: $z''-3z=0$. Унинг характеристик тенгламаси $k^2-3=0$ бўлиб, у $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = -\sqrt{3}$ илдизларга эга. Умумий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$z = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2e^{-\sqrt{3}x}.$$

Уни x бўйича дифференциаллаб, $z' = C_1\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}x} - C_2\sqrt{3}\,e^{-\sqrt{3}x}$ ни ҳосил қиламиз. Иккинчи тенгламага кўра $y = \frac{1}{2}(z' + z)$ бўлгани учун

$$y = \frac{C_1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)e^{\sqrt{3}x} + \frac{C_2}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}x}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, системанинг умумий ечими топилди:

$$y = C_1\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{\sqrt{3}x} + C_2\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{-\sqrt{3}x},$$

$$z = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2e^{-\sqrt{3}x}.$$

Хусусий ечимни топиш учун C_1 ва C_2 ларнинг уларга мос қийматларини бошланғич шартлардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{cases} C_1\frac{1+\sqrt{3}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,, \\ C_1+C_2=0. \end{cases}$$

Бу ердан $C_1 = 2$, $C_2 = -2$. Демак, берилган системанинг хусусий ечими қуйидаги функциялар системасидан иборат бўлади:

$$y=\left(1+\sqrt{3}\right)e^{\sqrt{3}x}-\left(1-\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}x}=2\operatorname{sh}\sqrt{3}x+$$
$$+2\sqrt{3}\operatorname{ch}\sqrt{3}x,$$

$$z=2e^{\sqrt{3}x}-2e^{-\sqrt{3}x}=4\operatorname{sh}\sqrt{3}\,x.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дифференциал тенгламалар системаси деб нимага айтилади?
2. Дифференциал тенгламалар системасининг ечими деб нимага айтилади?
3. Қандай дифференциал тенгламалар системаси нормал система дейилади?
4. Дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласи қандай ифодаланади?
5. Дифференциал тенгламалар нормал системасининг умумий ечими қандай кўринишга эга?
6. Нормал система ечимининг мавжудлик теоремасини ифодаланг.
7. n-тартибли дифференциал тенгламани n та дифференциал тенгламанинг нормал системасига келтириш усулини тавсифланг.
8. Нормал системани юқори тартибли битта тенгламага келтириш усулини тавсифланг.
9. 4324—4339-масалаларни ечинг.

АДАБИЁТ

Асосий адабиёт

1. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., «Наука», 1980.
2. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1980.
3. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного, т. I, II. М., «Наука», 1978.
4. Н. С. Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб, 1-том. Т., «Ўқитувчи», 1972.
5. Н. С. Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб, 2-том. Т., «Ўқитувчи», 1974.
6. Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. М., «Высшая школа», 1981, т I, II.
7. В. Н. Минорский. Олий математикадан масалалар тўплами. Т., «Ўқигувчи», 1963 йил ва кейинги нашрлари.
8. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. А. В. Ефимов ва Л. П. Демидович таҳрири остида. М., «Наука», 1981.
9. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. А. В. Ефимов ва Б. П. Демидович таҳрири остида. М., «Наука», 1981.
10. А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1980.
11. Т. А. Азларов, Х. Мансуров. Математик анализ. 1-қисм, Т., «Ўқитувчи», 1986.
12. Т. А. Азларов, Ҳ. Мансуров. Математик анализ. 2-қисм. Т., «Ўкитувчи», 1989.
13. М. С. Салоҳитдинов, Г. Н. Насритдинов. Оддий дифференциал тенгламалар, Т., «Ўқитувчи», 1982.
14. Т. А. Саримсоқов. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси, Т., «Ўқитувчи», 1982.
15. В. К. Қобулов. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси, Т., «Ўқитувчи», 1976.
16. Л. А. Кузнецов. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М., «Высшая школа», 1983.

Қўшимча адабиёт

1. В. Н. Смирнов. Курс высшей математики. М., «Наука», 1974. т. 1,2.
2. Г. П. Толстов. Элементы математического анализа. М., «Наука», 1974. т. 1,2.

3. Д. В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. М., «Наука», 1986.
4. Г. Н. Берман. Сборник задач по математическому анализу. М., «Наука», 1985.
5. Э. Ф. Файзибоев, Н. М. Цирмиракас. Интеграл ҳисоб курсидан амалий машғулотлар. Т., «Ўқитувчи». 1982.
6. М. В. Федерюк. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1980.
7. А. П. Карташов, Б. Л. Рождественский. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М., «Наука», 1980.
8. А. В. Ефимов. Математический анализ (специальные разделы). М., «Высшая школа», 1980, ч. 1.
9. А. В. Ефимов, Ю. Г. Золотарев, В. М. Терпигорова. Математический анализ (специальные разделы). М., «Высшая школа», 1980. ч 2.
10. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1974.

МУНДАРИЖА

2-боб. **Математик анализга кириш** . . . 119

С 73

Соатов Ё. У.
Олий математика: Олий техника ўқув юрт
учун дарслик: Икки жилдлик / В. Қ. Қобу-
лов умумий таҳрири остида; [Таҳрир ҳайъати:
М. Жўраев ва бошқ.]. Ж. I.— Т.: Ўқитувчи
1992.—496 б.

Саатов Я. У. Высшая математика. Т. I.

ББК 22.11я73

На узбекском языке

ЯЛКИН УЧКУНОВИЧ СААТОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ТОМ I

Учебник для студентов высших технических учебных заведений

Ташкент «Ўқитувчи» 1992

Муҳаррирлар: *Н. Ғоипов, Х. Алимов*

Расмлар муҳаррири *Н. Сучкова*

Техмуҳаррир *Т. Скиба*

Мусаҳҳиҳа *М. Минаҳмедова*

ИБ № 5580

Теришга берилди 14.02.92. Босишга рухсат этилди 18.08.92. Бичими $60\times90^1/_{16}$. Тип. қоғози Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 31. Шартли кр-отт. 31,19. Нашр л. 28,49. 13000 нусхада босилди. Буюртм № 2178.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09 — 278 — 90.

Ўзбекистон Республикаси. Матбуот давлат комитетининг Тошполиграфкомбинати. Тошкен Навоий кўчаси, 30. 1992.

Ташполиграфкомбинат Государственного комитета Республики Узбекистан по печати. Ташкент, Навои, 30.