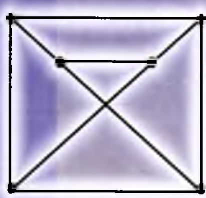
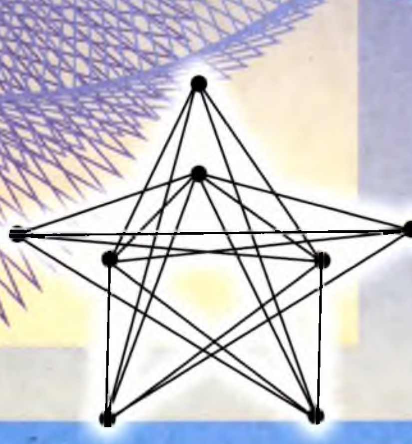
H. TO'RAYEV, I. AZIZOV, S. OTAQULOV

KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI



$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

H. TO'RAYEV, I. AZIZOV, S. OTAQULOV

KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI

Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma

Toshkent — «ILM ZIYO» — 2009

22.141
T97

O'quv qo'llanmada to'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari, kombinatorikada qo'llaniladigan usul va qoidalar, asosiy kombinatsiyalar, Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, Fibonachchi sonlari, bo'laklashlar, hosil qiluvchi funksiyalar, graflar nazariyasi elementlari, jumladan, grafning berilish usullari, graflar ustida amallar, marshrutlar va zanjirlar, Eyler va Gamilton graflari, daraxtlar, tarmoqlar, maksimal oqim haqidagi masala keltirilgan.

O'quv qo'llanma universitet va pedagogika institutlarida bakalavriatning 5480100 — «Amaliy matematika va informatika» yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan. Shuningdek, bakalavriatning 5460100 — «Matematika», 5140100 — «Matematika va informatika», 5521900 — «Informatika va informatsion texnologiyalar» yo'nalishlari va magistraturaning, 5A480103 — «Amaliy matematika va informatsion texnologiyalar», 5A480104 — «Matematik modellash», 5A480108 — «Optimallashtirish va optimal boshqaruv», 5A480105 — «Tizimli tahlil va operatsiyalar tadqiqoti» mutaxassisliklari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalar foydalanishi mumkin.

Professor H.T. TO'RAYEVning umumiy tahriri ostida

Mas'ul muharrir: **A. M. MUSAYEV** — TATUning Samarqand filiali dotsenti.

Taqrizchilar: **M.M. KOMILOV** — TATU kafedrasi mudiri, O'zR FA akademigi, professor; **Sh. FARMONOV** — O'zMU professori, O'zR FA akademigi; **A. SOLEYEV** — SamDU kafedrasi mudiri, professor.

ISBN 978—9943—303—85—0

To'ra, Aziz va Otaqul bobolarning xotirasiga bag'ishlaymiz

SO'ZBOSHI

Biz, ko'pincha, narsa va hodisalarning xossalarini o'rganish jarayonida o'rganilayotgan obyekt elementlarini bir-birlari bilan taqqoslaymiz, ularni birgalikda qarab yoki elementlarni bo'laklarga ajratib, turli xulosalar qilishga harakat qilamiz. *Kombinatorikada* chekli to'plamni qismlarga ajratish, ularni o'rinlash va o'zaro joylash bilan bog'liq muammolar o'rganiladi. *Graflar nazariyasi* esa, boshqotirmalar va qiziqarli o'yinlarni o'rganish jarayonida paydo bo'lib, hozirgi vaqtda graf tushunchasi yordamida yo'llar, elektrik, informatsion va boshqa tarmoqlar, geografik xaritalar, kimyoviy birlashmalar, odamlar va jamiyatlar orasidagi munosabatlar bilan bog'liq hamda boshqa ko'plab masalalarni hal qilish mumkin. Graflar nazariyasi informatsion texnologiyalar rivojida muhim ahamiyatga ega bo'lgan diskret matematikaning bir turidir.

O'quv qo'llanmaning asosi sifatida mualliflar tomonidan 1973-yildan boshlab, Alisher Navoiy nomli Samarqand davlat universitetida «Diskret matematika va matematik mantiq», «Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanlari bo'yicha o'qilayotgan ma'ruzalar olingan bo'lib, u to'rt bobdan iborat.

Birinchi bobda to'plamlar nazariyasining paydo bo'lishi haqidagi ayrim tarixiy ma'lumotlar, to'plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar, to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'ldiruvchi to'plam, to'plamlar algebrasining asosiy qonunlari, kortej haqida tushuncha, Dekart ko'paytmasi va u bilan bog'liq ba'zi tushunchalar bayon etiladi.

Ikkinchi bob kombinatorika predmetiga bag'ishlangan bo'lib, unda kombinatorika paydo bo'lishining qisqacha tarixi, kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar hamda betakror va takrorli o'rin almashtirish, o'rinlashtirish, guruhlash kabi kombinatsiyalarga oid ma'lumotlar keltiriladi. Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsiyentlarning xossalari, ko'phad formulasi, Fibonachchi sonlari va ularning sodda xossalari, bo'laklashlar va ularning ba'zi xususiyatlari, Ferrers diagrammasi, hosil qiluvchi funksiyalarning xossalari va ularning kombinatorikada qo'llanilishi ham shu bobda bayon qilinadi.

Uchinchi bobda graflar nazariyasi elementlari qaraladi. Dastlab graflar haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlar, grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar hamda graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi yoritiladi. Grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi, Eyler va Gamilton graflari, grafda masofa tushunchasi, minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni ushbu bobda bayon qilinadi. Shu bobda tarmoq tushunchasi, maksimal oqim haqidagi masala va uni hal qilish uchun Ford algoritmi ham keltirilgan.

To'rtinchi bobda kombinatorika masalalarining algoritmi va dasturi bayon etilgan.

Nazariy masalalarni bayon etishda misollardan keng foydalanilgan, har bir paragrafning oxirida muammoli masala va topshiriqlar hamda mustaqil ishlash uchun savollar berilgan.

O'quv qo'llanmani tayyorlashda L. Eyler, S. V. Yablonskiy, N. Y. Vilenkin, N. N. Vorobyov, A. Kofman, V. Lipskiy, V. A. Yemelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov, R. I. Tishkevich, D. Knut, R. Uilson, O. Ore, A. A. Zikov, A. Soleyev, F. Xarari, Y. M. Yerusalimskiy, S. K. Lando kabi xorijiy va o'zbekistonlik olimlarning darslik, o'quv qo'llanma va ilmiy maqolalaridan foydalanildi.

Talabalarga tavsiya etilayotgan ushbu o'quv qo'llanma «Diskret matematika va matematik mantiq», «Kombinatorika va graflar nazariyasi» fanlari bo'yicha Davlat ta'lim standartida ko'rsatilgan o'quv dasturlariga va uzluksiz ta'lim tizimi uchun o'quv adabiyotlarining yangi avlodini yaratish konsepsiyasiga to'liq javob beradi.

Kombinatorika va graflar nazariyasi bo'yicha ushbu o'quv qo'llanma birinchi marta o'zbek tilida yozilganligi uchun, tabiiyki, u kamchiliklardan xoli emas. Mualliflar o'quv qo'llanma haqidagi tanqidiy fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qilib, oldindan tashakkur izhor etishadi.

O‘quv qo‘llanmaning birinchi bobidagi 1—3-paragraflar H. To‘rayev va I. Azizovlar, ikkinchi bobidagi 6—7-paragraflar va uchinchi bobidagi 8-paragraf I. Azizov va S. Otaqulovlar, qolgan barcha paragraflar I. Azizov tomonidan yozilgan.

O‘quv qo‘llanmaning qo‘lyozmasi bilan mufassal tanishib, uni yaxshilash bo‘yicha foydali maslahatlarini bergan taqrizchilar O‘zR FA akademigi M.M. Komilov, O‘zR FA akademigi Sh. Farmonov, professor A. Soleyev hamda mas’ul muharrir, dotsent A. M. Musayevga o‘z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Mualliflar

I bob. UMUMIY TUSHUNCHALAR

Ushbu bobda to'plamlar nazariyasining paydo bo'lishi haqidagi ayrim tarixiy ma'lumotlar, to'plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar, to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'ldiruvchi to'plam, to'plamlar algebrasining asosiy qonunlari, kortej haqida tushuncha, Dekart ko'paytmasi va u bilan bog'liq ba'zi amallar bayon etiladi.

1-§. To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchalari

To'plam, to'plamning elementlari, chekli to'plam, cheksiz to'plam, to'plamlarning tengligi, qism to'plam, xos qism to'plam, refleksivlik, bo'sh to'plam, to'plamning quvvati, paradoks, aksioma, aksiomatik nazariya, tanlash aksiomasi, hajmiylik aksiomasi, bo'sh to'plam aksiomasi, juftlik aksiomasi, Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimi, tartiblanmagan juftlik, tranzitivlik, o'zaro ekvivalent tasdiqlar.

1.1. To'plamlar nazariyasining paydo bo'lishi. Matematikada, shu jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida ham, turli *to'plamlar* bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, kutubxonadagi barcha kitoblar to'plami, to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami, suvda hayot kechiruvchi tirik organizmlar to'plami, natural sonlar to'plami, koinotdagi yulduzlar to'plami, to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to'plami va hokazo.

To'plamlar nazariyasiga fan sifatida XIX asrning oxirida matematikani standartlashtirish bo'yicha o'z dasturini taklif etgan Kantor[1] tomonidan asos solingan, deb hisoblansa-da, to'plamlar bilan Kantordan oldinroq Bolsano[2] shug'ullangan.

---

[1] *Kantor* (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845 (Sankt-Peterburg)— 1918) — olmon matematigi.

[2] *Bolsano* (Bernard Bolzano, 1781—1848) — chex matematigi va faylasufi.

Kantorning fikricha, istalgan matematik obyekt (shu jumladan, to'plamning o'zi ham) qandaydir to'plamga tegishli bo'lishi shart. Berilgan xossaga ega bo'lgan barcha obyektlar majmuasi uchun umumiy nomni Kantor to'plam, deb tushungan edi. Umuman olganda, to'plam tushunchasiga qat'iy ta'rif berilmaydi, chunki uni boshqa soddaroq tushuncha orqali ifodalab bo'lmaydi. Masalan, to'plamni matematik ibora sifatida tushuntirishda Kantor ham to'plam so'ziga sinonim bo'lgan «majmua» so'zidan foydalangan.

Georg Kantor

Umuman olganda, to'plam so'zining lug'aviy ma'nosiga ko'ra, uni tashkil etuvchilarni bir joyga to'plash (yig'ish, jamlash) tushunilsa-da, matematikada to'plam deganda, bunday yig'ish talab etilmaydi, balki bu tashkil etuvchilarni birgalikda to'plam sifatida qarash uchun ularning barchasiga tegishli qandaydir umumiy xossa (belgi)ning mavjudligi yetarlidir.

To'plamni tashkil etuvchilar shu *to'plamning elementlari*, deb ataladi. To'plamlar nazariyasida to'plamning elementlari bir-biridan farqli, deb hisoblanadi, ya'ni muayyan bir *to'plamning elementlari takrorlanmaydi.*

To'plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Birinchi holda *chekli to'plamga*, ikkinchi holda esa *cheksiz to'plamga* ega bo'lamiz.

To'plamlarni belgilashda, odatda, lotin yoki yunon alifbosining bosh harflari, uning elementlari uchun esa kichik harflari qo'llaniladi. To'plamni tashkil etuvchi elementlar figurali qavslar orasiga olinib ifodalanishi mumkin. Masalan, A to'plamning $a,b,c,d,..., z$ elementlardan tuzilganligini $A=\{a,b,c,d,..., z\}$ ko'rinishda yozish mumkin. Ko'pincha (masalan, cheksiz to'plam yoki to'plamning elementlari juda ko'p bo'lgan holda) to'plamni belgilashda figurali qavslar orasida, avvalo, to'plamni tashkil etuvchi elementning umumiy belgisi yozilib, undan so'ng «|» yoki «:» belgisi qo'yiladi, keyin esa, ifodalanayotgan to'plamning barcha elementlariga xos shartlar yoziladi. Bunda, yozuvni murakkablashtirmaslik maqsadida, ba'zi qisqartirishlarga yoki tushuntiruvchi so'zlarning qavslardan tashqarida yozilishiga yo'l qo'yiladi. Masalan, toq natural sonlar to'plamini B, deb belgilasak, uni $B=\{m|m=2n-1\}$, bunda

n — natural son yoki $B = \{m | m = 2n - 1, n \in N\}$[1] ko‘rinishda yozish mumkin.

1.2. To‘plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar. XX asrning boshiga kelib, Kantorning matematikani standartlashtirish bo‘yicha dasturining asosi bo‘lgan va «to‘plamlarning sodda nazariyasi» deb ham ataluvchi to‘plamlar nazariyasi mukammal emasligi ma’lum bo‘ldi. To‘plamlarning sodda nazariyasini o‘rganish jarayonida Rassel[2] paradoksga[3] kelib qoldi. Kantorning to‘plamlar nazariyasi ichki ziddiyatga ega ekanligi *Rassel paradoksi* sifatida ifodalangan.

Rassel paradoksi. Faraz qilaylik, K — o‘zini element sifatida o‘zida saqlamagan barcha to‘plamlar to‘plami bo‘lsin. U holda, K — o‘zini element sifatida saqlaydimi? Agar bu savolga «ha» deb javob berilsa, K to‘plamning aniqlanishiga ko‘ra, u K ning elementi bo‘lmasligi kerak — ziddiyat. Agar «yo‘q» deb javob berilsa, yana K to‘plamning aniqlanishiga ko‘ra, u to‘plam sifatida K ning elementi bo‘lishi kerak — yana ziddiyat.

Hozirgi zamon to‘plamlar nazariyasi aksiomalar[4] tizimiga asoslangandir. Qandaydir aksiomalarga asoslangan nazariya *aksiomatik nazariya*, deb yuritiladi. To‘plamlarning aksiomatik nazariyasida bunday aksiomalar tizimi sifatida standart tizim hisoblangan Sermelo[5]-Frenkel[6] aksiomalari tizimini keltirish mumkin. To‘plamlar nazariyasida, ko‘pincha, bu tizimga *tanlash aksiomasi*, deb ataluvchi aksiomani ham qo‘shib olib, *tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimi* bilan ish ko‘riladi. Bu aksiomalar tizimidan tashqari boshqa aksiomalar tizimlaridan ham foydalaniladi. Masalan, fon Neyman[7]-Berneys[8]-Gyodel[9] tizimi.

---

[1] N — natural sonlar to‘plami (kitobning oxiridagi asosiy belgilashlarga qarang).

[2] *Rassel* (Bertrand Arthur William Russell, 1872—1970) — mashhur ingliz faylasufi, 1950-yilda adabiyot sohasida Nobel mukofotiga sazovar bo‘lgan.

[3] *Paradoks* (yunoncha παραδοξοζ so‘zi kutilmagan, tushunarsiz, g‘ayrioddiy, taajjubli ma’nolarini beradi) — mantiqiy nuqtayi nazardan formal ravishda to‘g‘ri fikrlab, bir-biriga zid bo‘lgan natijalarni hosil qilish.

[4] *Aksioma* — isbotsiz qabul qilinadigan tasdiq.

[5] *Sermelo* (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871—1953) — olmon matematigi.

[6] *Frenkel* (Adolf Abraham Halevi Fraenkel, אברהם הלוי (אדולף) פרנקל, 1891—1965) — olmon va isroil matematigi.

[7] *Fon Neyman* (John von Neyman, 1903 (Budapesht) — 1957) — AQSH matematigi, iqtisodchisi.

[8] *Berneys* (Paul Isaak Bernays, 1888 (London) — 1977) — Shveysariya matematigi.

[9] *Gyodel* (Kurt Gödel, 1906 (Brno) — 1978) — AQSH matematigi.

Quyida tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimiga kiruvchi ba'zi aksiomalarni keltiramiz.

Hajmiylik aksiomasi. Ikki to'plam faqat va faqat aynan bir xil elementlardan iborat bo'lsagina teng bo'ladi.

Bo'sh to'plam aksiomasi. Bironta ham elementga ega bo'lmagan to'plam, ya'ni *bo'sh to'plam* mavjud. Bo'sh to'plam uchun $\varnothing$ belgisi qo'llaniladi.

Juftlik aksiomasi. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun shunday C to'plam mavjudki, bu to'plam elementlari faqat A va B to'plamlardan iboratdir (ya'ni A va B to'plamlar Cning yagona elementlaridir). C to'plam $\{A, B\}$ ko'rinishda belgilanadi. Ushbu $\{A, B\}$ ifoda A va B ning *tartiblanmagan juftligi*, deb ataladi. Agar A va B va to'plamlar teng bo'lsa, u holda C bitta elementdan iboratdir.

Tanlash aksiomasi. Bo'sh bo'lmagan va o'zaro kesishmaydigan to'plamlar majmuasidagi har bir to'plamdan bittadan «vakil» — element tanlab, shu elementlar to'plami Cni tuzish mumkin. X to'plam shu majmuaning qanday elementi bo'lishidan qat'i nazar X va C to'plamlar faqatgina bitta umumiy elementga ega bo'ladi.

Albatta, bu aksiomalar (xuddi shuningdek, tanlash aksiomasi qatnashgan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimining boshqa aksiomalari ham) bizga o'z-o'zidan oydin bo'lgan tasdiqlarga o'xshab tuyiladi, chunki bizning tafakkurimiz to'plamlar majmuasini chekli deb tasavvur qilishga o'rgangan. To'plamlar majmuasi chekli bo'lgan holda, masalan, tanlash aksiomasini tushunish qiyin emas. Tanlash aksiomasi cheksiz to'plamlar uchun qo'llansa, ba'zan, tortishuvlarga sabab bo'luvchi juda qiziq tasdiqlar vujudga keladi. Bu fikrni tasdiqlash maqsadida Banax[1]-Tarskiy[2] paradoksi (sharning ikkilanishi) va Xausdorf[3] paradoksi mavjudligini ta'kidlaymiz.

Yuqorida keltirilgan aksiomalardan, jumladan, hajmiylik aksiomasidan, to'plamlar bo'yicha ko'plab tasdiqlarni isbotlashda foydalanamiz. Hajmiylik aksiomasini boshqacha ifodalash ham mumkin. A to'plamning har bir elementi B to'plamda ham mavjud va, aksincha, B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham

---

[1] *Banax* (Banach Stefan, Банах Стефан, 1892—1945) — Polsha va Ukraina matematigi.

[2] *Tarskiy* (Tarski Alfred, 1902—1983) — Polsha va AQSH mantiqchisi, matematigi.

[3] *Xausdorf* (Felix Hausdorff, 1868—1942) — olmon matematigi.

mavjud bo'lsa, u holda A va B to'plamlar tengdir. A va B *to'plamlarning tengligini* $A=B$ yoki $B=A$ ko'rinishda ifodalaymiz. Aslida, $A=B$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlar aynan bitta to'plamning har xil belgilanishidir. Masalan, o'nlik sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 1, 3, 5, 7 yoki 9 raqamlaridan biri bo'lgan natural sonlar to'plamini A bilan, birni qo'shganda ikkiga qoldiqsiz bo'linadigan natural sonlar to'plamini esa B bilan belgilasak, u holda $A=B$ bo'ladi. $A=B$ yozuv to'plamlardagi elementlarning qaysi tartibda joylashishiga bog'liq emas. Albatta, to'plamdagi elementlarni qaysi tartibda qo'yish masalasi ham dolzarbdir.

A va B to'plamlar teng bo'lmasa, u holda bu holat $A \neq B$ yoki $B \neq A$ ko'rinishda ifodalanadi.

To'plamlar nazariyasida quvvat eng muhim tushunchalardan biri bo'lib, u to'plamlarni taqqoslashda katta ahamiyatga egadir. To'plamning quvvati tushunchasi, uning chekli yoki cheksiz bo'lishiga qarab ta'riflanadi. Quvvat tushunchasi to'g'risida batafsil ma'lumotni to'plamlar nazariyasiga bag'ishlangan manbalardan topish mumkin (masalan, [30—33]). Kombinatorika va graflar nazariyasida, asosan, chekli to'plamlar bilan ish ko'riladi. Shu sababli, to'plamning quvvati tushunchasini faqat chekli to'plamlar uchun keltirish bilan chegaralanamiz.

Chekli to'plamning elementlari soniga shu *to'plamning quvvati* deyiladi. Berilgan A to'plamning quvvati $|A|$ ko'rinishda belgilanadi.

1-misol. Ushbu to'plamlar berilgan bo'lsin: $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $D=\{1,2,3,\ldots,n\}$, $E=\{m|m=2z\}$, $F=\{2,3,5,7,\ldots,p,\ldots\}$, bu yerda, n — natural son, z— butun son, p — tub son. Berilgan oltita to'plamdan to'rttasi — A, B, C va D to'plamlar chekli, E va F to'plamlar esa cheksiz to'plamlardir. Bundan tashqari, $|A|=1$, $|B|=2$, $|C|=5$ va $|D|=n$. ■

Berilgan A to'plamga a element tegishliligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko'rinishda belgilanadi va «a tegishli A» deb o'qiladi. «Tegishli» iborasining o'rniga, ba'zan, «qarashli» yoki «taalluqli» iborasi ham qo'llaniladi. Qandaydir b ning A to'plamga tegishli emasligi, ya'ni b ning A to'plam elementi bo'lmasligi $b \overline{\in} A$, $b \notin A$ yoki $A \not\ni b$, ko'rinishda yoziladi. Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ to'plam uchun $4 \in A$, $6 \in A$ va $10 \in A$ (bularni umumlashtirib, $4, 6, 10 \in A$ ko'rinishda yozish ham mumkin), lekin $12 \notin A$ va $14 \notin A$ (ya'ni $12, 14 \notin A$).

Tabiiyki, turli to'plamlar uchun umumiy elementlar mavjud bo'lishi mumkin. Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ va $B=\{1, 2, 3,$

4, 5, 6, 7, 8} to‘plamlarda 2, 4, 6, 8 elementlar har ikki to‘plamda ham mavjuddir.

Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham bor bo‘lsa, u holda B to‘plam A to‘plamning *qism to‘plami*, deb aytiladi. B to‘plam A to‘plamning qism to‘plami ekanligi $B \subseteq A$ yoki $A \supseteq B$ ko‘rinishda belgilanadi. Tabiiyki, bu belgilashlar A va B to‘plamlarning teng bo‘lgan holini ham nazarda tutadi. $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lishidan $A=B$ kelib chiqadi. Bu tenglik to‘plamning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘la olishi mumkinligini ko‘rsatadi, ya’ni $A \subseteq A$ (yoki $A \supseteq A$) ko‘rinishdagi yozuv ham ma’noga egadir. Har qanday to‘plamning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘la olishi to‘plamlarning *refleksivlik xossasi*, deb ataladi.

B to‘plamning hamma elementlari A to‘plamda bor bo‘lib, shu bilan birga, A to‘plamda B ga kirmagan element(lar) ham topilsa, u holda B to‘plam A to‘plamning *xos qism to‘plami* deyiladi. B to‘plam A to‘plamning xos qism to‘plami bo‘lishi $B \subset A$ yoki $A \supset B$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ta’kidlash kerakki, $A \subset A$ yoki $A \supset A$ deb yozish mumkin emas (qiyoslang: a haqiqiy son bo‘lsa, u holda $a < a$ yoki $a > a$ yozuv noto‘g‘ri). Shuning uchun, bu holatni ifodalash maqsadida, har qanday to‘plam «o‘zi o‘zining xosmas qismi» degan iboradan foydalaniladi.

To‘plamlar nazariyasida bo‘sh to‘plam har qanday bo‘sh bo‘lmagan A to‘plamning qism to‘plami, deb qaraladi, ya’ni $\varnothing \subset A$. Tabiiyki, bo‘sh to‘plamning quvvati nolga teng, ammo bo‘sh to‘plamning yagona element sifatida saqlovchi to‘plamning quvvati birga tengdir, ya’ni $|\varnothing|=0$, lekin $|\{\varnothing\}|=1$.

Qandaydir a tasdiqning o‘rinli bo‘lishidan boshqa b tasdiqning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqsa, bu holat $a \Rightarrow b$, deb belgilanadi. Masalan, $(A \subseteq B$ *va* $B \subseteq A) \Rightarrow A=B$. Agar a va b tasdiqlar uchun $a \Rightarrow b$ va $b \Rightarrow a$ bo‘lsa, bu tasdiqlar *o‘zaro ekvivalent tasdiqlar*, deb ataladi. a va b tasdiqlarning o‘zaro ekvivalentligi $a \Leftrightarrow b$ deb belgilanadi (masalan, [14] kitobning mulohazalar algebrasi qismiga qarang).

2-misol. N natural sonlar to‘plami R haqiqiy sonlar to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi: $N \subseteq R$. ■

3-misol. Nukus shahridagi barcha talabalar to‘plami O‘zbekistondagi barcha talabalar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

4-misol. O‘nli sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 0, 2, 4, 6 yoki 8 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plami ikkiga qoldiqsiz bo'linadigan natural sonlar to'plamining qism to'plamidir. ■

5-misol. $A=\{a, b, c, d, e\}$ to'plam uchun $B=\{a\}$, $C=\{a, b\}$ to'plamlarning har biri xos qism to'plamdir. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Juft sonlar to'plamini ifodalashning Siz bilgan usullarini keltiring.
2. $\{a,b\}\in\{\{a,b,c\}, \{b,d\}, a,b\ \{b,c\}\}$ tasdiqning to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshiring va javobingizni izohlang.
3. $\{\{a,b\}, \{b,c\}\}\neq\{a,b,c\}$ munosabatni isbotlang.
4. $x^2-10x+21=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari to'plamini A bilan va $B=\{3, 7\}$ deb belgilasak, $A=B$ bo'lishini ko'rsating.
5. $\varnothing=\{\varnothing\}$ va $\varnothing\neq\{\varnothing\}$ munosabatlardan to'g'risini ko'rsating.
6. $A\subseteq\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$ munosabatni isbotlang.
7. Bironta ham elementga ega bo'lmagan to'plam yagona ekanligini isbotlang.
8. Bir vaqtning o'zida $A\in B$, $B\in C$ va $A\notin C$ xususiyatlarga ega bo'lgan A, B va C to'plamlarga misol keltiring.
9. Quyida keltirilgan to'plamlarning har birini so'zlar vositasida ifodalang:

a) $\{x\in N \mid x$ 3 ga va 5 ga qoldiqsiz bo'linadi$\}$;

b) $\{x\in Z \mid 0<x<9\}$;

d) $\{x : x=x_1$ yoki $x=x_2$ yoki $x=x_3$ yoki $x=x_4\}$;

e) $\left\{\sqrt{x} : x - \text{tub son}\right\}$;

f) $\{(x, y) \mid x, y\in R, x^2+y^2\leq 1\}$;

g) $B=\{x\in A : x$ — yoshi yigirma birdan oshmagan talaba$\}$, bunda A —Toshkent shahridagi talabalar to'plami.

10. Sonlarning kerakli xossalarini qo'llab, quyida keltirilgan tasdiqlarni isbotlang:

a) $\{x\in N \mid$ qandaydir y uchun $x=15y\}=$
$=\{x\in N \mid$ qandaydir n va m uchun $x=3n$ va $x=5m\}$;

b) $\{x\in R \mid$ qandaydir $y\in R$ uchun $x=y^2\}=\{x\in R \mid x\geq 0\}$.

11. Ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) agar $A\subseteq B$ va $B\subseteq C$ bo'lsa, u holda $A\subseteq C$ munosabat o'rinlidir (bu munosabat to'plamlarning *tranzitivlik* xossasi, deb ataladi);

b) agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ bo‘lsa, u holda $A \subset C$ munosabat o‘rinlidir;

d) agar $A \subset B$ va $B \subset C$ bo‘lsa, u holda $A \subset C$ munosabat o‘rinlidir;

e) agar $A \subset B$ va $B \subseteq C$ bo‘lsa, u holda $A \subset C$ munosabat o‘rinlidir.

12. Ixtiyoriy A_1, A_2, ..., A_n to‘plamlar uchun quyidagini isbotlang:

$$A_1=A_2=\ldots=A_n \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_1.$$

13. «Paradoksiya» mamlakatida shunday farmon e’lon qilindi: «Mamlakatdagi barcha shaharlar hokimlari o‘zlari hokimlik qilayotgan shaharlarda yashashlari taqiqlanadi, ular maxsus hokimlar shahrida yashashlari shart». Shu farmonga ko‘ra, shaharning hokimi qayerda yashashi lozim? Bu savolga javob berishga urinib ko‘ring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Kimlar to‘plamlar nazariyasining asoschilari hisoblanadi?
2. Nega to‘plam tushunchasiga ta’rif berilmaydi?
3. Chekli va cheksiz to‘plamlar bir-biridan qanday farqlanadi?
4. To‘plamlarni belgilashda qaysi usullardan foydalaniladi?
5. Rassel paradoksini bilasizmi?
6. To‘plamlar aksiomatik nazariyasining mohiyati nimadan iborat?
7. Hajmiylik aksiomasi nimadan iborat?
8. Bo‘sh to‘plam aksiomasi qanday ifodalanadi?
9. Juftlik aksiomasi nimani bildiradi?
10. Tanlash aksiomasi qanday ifodalanadi?
11. Hajmiylik aksiomasini qanday tatbiq qilish mumkin?
12. Qaysi holda ikkita to‘plam teng bo‘ladi?
13. Chekli to‘plamning quvvati deganda nima tushuniladi?
14. Xos va xosmas qism to‘plamlarning bir-biridan farqi nimada?
15. O‘zaro ekvivalent tasdiqlar deganda nimani tushunasiz?

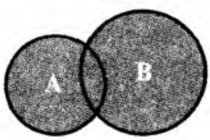
2-§. To‘plamlar ustida amallar

To‘plam, element, to‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi va ayirmasi, to‘ldiruvchi va universal to‘plam, o‘zaro kesishadigan va kesishmaydigan to‘plamlar, universum, bulean.

2.1. To'plamlar birlashmasi. Har qanday ikkita to'plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan tuzilgan to'plamga shu *to'plamlarning birlashmasi* (yoki *yig'indisi*), deb aytiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, to'plamlarning umumiy elementlari shu to'plamlar birlashmasiga faqat bir martadan kiritiladi. Berilgan to'plamlar birlashmasidagi har qanday element shu to'plamlarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishlidir. A va B to'plamlarning birlashmasi $A \cup B$ kabi belgilanadi. Bu yerda, «A va B to'plamlarga birlashma amalini qo'llab (yoki A va B to'plamlar ustida birlashma amali bajarilib), $A \cup B$ to'plam hosil qilindi» deyish mumkin. 1-shaklda A va B to'plamlar doira ko'rinishida, $A \cup B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

$A \cup B$



1-shakl.

1-misol. $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c\}$ va $C = \{e,f,k\}$ bo'lsin. U holda $E = A \cup B = \{a, b, c\}$, $E \cup C = \{a,b,c,e,f,k\}$, $C \cup B = \{a,b,c,e, f, k\}$, $A \cup C = \{a,b,e,f,k\}$ bo'ladi. ■

2-misol. O'zbekiston Respublikasining 16 dan 25 yoshgacha bo'lgan fuqarolari to'plamini A bilan, yoshi 21 dan 30 gacha bo'lgan fuqarolari to'plamini esa B bilan belgilasak, A va B to'plamlarning $A \cup B$ birlashmasi O'zbekiston Respublikasining 16 dan 30 yoshgacha bo'lgan fuqarolari to'plamini tashkil etadi. ■

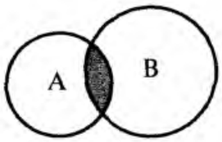
3-misol. $N \cup R = R$. ■

Shuni ta'kidlash kerakki, to'plamlar bilan bog'liq tushunchalar va ular ustidagi amallar, mos ravishda, sonlar bilan bog'liq tushunchalar va oddiy arifmetik amallar bilan qiyoslanadi. Jumladan, to'plamlar yig'indisi (birlashmasi)ni topish sonlarni qo'shish bilan qiyoslanadi. Bunday qiyoslashlar, ko'pincha, bir-biriga o'xshash natijalarning mavjudligini ko'rsatadi, ba'zan esa ular to'plamlarning farqli xususiyatlarga egaligini namoyon etadi. Masalan, ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$ va $B \cup A = B$ bo'ladi, lekin ixtiyoriy a va b sonlar uchun $a \leq b$ bo'lgan holda $a+b=b$ va $b+a=b$ tengliklar bajarilmasligi mumkin, ular faqat $a=0$ bo'lsagina o'rinlidir.

2.2. To'plamlar kesishmasi. Har qanday ikkita to'plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to'plamga *to'plamlarning kesishmasi* (yoki *ko'paytmasi*) deyiladi.

Berilgan A va B to'plamlarning kesishmasi $A \cap B$ kabi belgilanadi. Bu yerda «A va B to'plamlarga kesishma amalini qo'llab, $A \cap B$ to'plam hosil qilindi» deyish mumkin. 2-shaklda A va B to'plamlar doira ko'rinishida, $A \cap B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

$A \cap B$



2-shakl.

To'plamlar ustidagi amallarning yuqorida ta'kidlangan o'ziga xos xususiyatlari to'plamlar ko'paytmasi (kesishmasi)ni topishda ham namoyon bo'ladi. Masalan, $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $A \cap B = A$ va $B \cap A = A$ bo'ladi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan ikkita to'plamning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi tabiiydir. Kesishmasi bo'sh bo'lgan to'plamlar *o'zaro kesishmaydigan*, kesishmasi bo'sh bo'lmagan to'plamlar esa *o'zaro kesishadigan to'plamlar*, deb ataladi.

4-misol. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ va $C = \{e,f,k\}$ bo'lsa, u holda $D = A \cap B = \{a,b,c\}$, $D \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $D \cap B = \{a,b,c\}$ bo'ladi. ■

5-misol. 2-misolda aniqlangan A va B to'plamlarga kesishma amalini qo'llasak, O'zbekiston Respublikasining 21 dan 25 yoshgacha bo'lgan fuqarolari to'plami ($A \cap B$ to'plam) hosil bo'ladi. Bu yerda A va B to'plamlar o'zaro kesishadigan to'plamlardir. ■

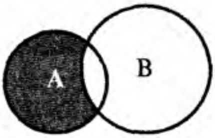
6-misol. $N \cap R = N$. ■

7-misol. Dunyo bo'yicha 2005-yilda tug'ilgan bolalar to'plamini T_5 bilan, 2006-yilda tug'ilgan bolalar to'plamini esa T_6 bilan belgilasak, u holda $T_5 \cap T_6 = \varnothing$ bo'ladi. Demak, T_5 va T_6 to'plamlar o'zaro kesishmaydigan to'plamlardir. ■

2.3. To'plamlar ayirmasi. Ixtiyoriy A va B to'plamlar berilgan bo'lsin. A to'plamning B to'plamda bo'lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to'plamni hosil qilish *A to'plamdan B to'plamni ayirish* deb, tuzilgan to'plam esa shu *A va B to'plamlarning ayirmasi*, deb ataladi.

A to'plamdan B to'plamni ayirish natijasida hosil bo'lgan to'plam, ya'ni A va B to'plamlarning ayirmasi $A \setminus B$ yoki $A - B$ ko'rinishida belgilanadi. Bu yerda «A to'plamdan B to'plamni ayirish amalini qo'llab, $A \setminus B$ to'plam hosil qilindi» deyish

$A\backslash B$



3-shakl.

mumkin. 3-shaklda va A va B to'plamlar doira ko'rinishida, $A\backslash B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda $A\backslash B=\varnothing$ va $B\backslash A=\varnothing$ bo'lishi ta'rifdan bevosita kelib chiqadi.

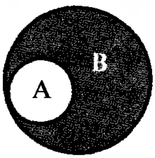
8-misol. 1-misoldagidek, $A = \{a,b\}$, $B = \{a, b, c\}$ va $C = \{e, f, k\}$ bo'lsa, u holda $A\backslash B=\varnothing$, $B\backslash A=\{c\}$, $B\backslash C=\varnothing$ bo'ladi. ■

9-misol. A va B to'plamlar 2-misoldagidek aniqlangan bo'lsin. U holda, A to'plamdan B to'plamning ayirmasi $A\backslash B$. O'zbekiston Respublikasidagi yoshi 16 dan 21 yoshgacha bo'lgan fuqarolari to'plamini, B to'plamdan A to'plamning ayirmasi $B\backslash A$ esa O'zbekiston Respublikasining 25 dan 30 yoshgacha bo'lgan fuqarolari to'plamini anglatadi. ■

10-misol. $R\backslash N$ ayirma tarkibida natural sonlar qatnashmagan barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir va $N\backslash R=\varnothing$. ■

2.4. To'ldiruvchi to'plam. Faraz qilaylik, A va B to'plamlar berilgan va $A \subseteq B$ bo'lsin. Bu holda B to'plamning A to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan $B\backslash A$ to'plam *A to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami*, deb ataladi.

$\overline{A}_B$



4-shakl.

A to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami, odatda, $\overline{A}_B$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda «$\overline{A}_B$ to'plam A to'plamni B to'plamgacha to'ldiradi» yoki «A to'plamni B to'plamgacha to'ldirish amalini qo'llab, $\overline{A}_B$ to'plam hosil qilindi», deyish mumkin. 4-shaklda A to'plam kichik doira, B to'plam katta doira ko'rinishida, $\overline{A}_B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

To'plamlar ustidagi yuqorida keltirilgan birlashma, kesishma va to'ldiruvchi to'plam tushunchalari ta'riflarini bevosita qo'llab, $A \cup \overline{A}_B = B$, $A \cup \overline{A}_B = \varnothing$, $A \setminus \overline{A}_B = A$ va $\overline{A}_B \setminus A = \overline{A}_B$ tengliklarni hosil qilish qiyin emas.

11-misol. Barcha juft sonlar to'plamini $A=\{2,4,...,2n,...\}$ ($n\in N$) deb belgilasak, A to'plamni N to'plamgacha to'ldirish amalini qo'llab $\overline{A}_N=\{1,3,...,2n-1,...\}$ to'plamni, ya'ni barcha toq sonlar to'plamini hosil qilamiz. Demak, jami toq sonlar to'plami barcha juft sonlar to'plamini natural sonlar to'plamigacha to'ldiradi. Xuddi shunga o'xshash, barcha toq sonlar to'plamini natural sonlar to'plamigacha to'ldirish amalini qo'llab, barcha juft sonlar to'plamini hosil qilish mumkin. ■

2.5. Universal to'plam va bulean[1] tushunchalari. To'plamlar nazariyasida, odatda, to'plamlar orasidagi turli munosabatlarni hisobga olishga to'g'ri keladi. Masalan, qaralayotgan to'plamlarning barchasi qandaydir boshqa bir to'plamning qism to'plami bo'lishi mumkin. Bu holda qaralayotgan barcha to'plamlarni o'zida qism to'plam sifatida saqlovchi to'plamga ***universal to'plam***, deb aytiladi.

Universal to'plam, odatda, U deb belgilanadi. Universal to'plamni ***universum***, deb ham atashadi.

Shuni ta'kidlash kerakki, universal to'plam tushunchasi nisbiy tushunchadir. Masalan, O'zbekiston sharoitida aholi bilan bog'liq qandaydir masala qaralayotgan bo'lsa, u holda O'zbekiston aholisi to'plamini universal to'plam, deb qarash mumkin. O'z navbatida, O'zbekiston aholisi to'plami dunyo aholisi to'plamining qism to'plamidir.

Universal to'plamning ta'rifiga binoan, uning hamma qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qismi bor: bittasi universal to'plamning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam. Tabiiyki, universal to'plamning qolgan barcha qism to'plamlari xos qism to'plamlaridir.

Ko'pincha, berilgan «A to'plamning universal to'plamgacha to'ldiruvchisi» deyish o'rniga, qisqa qilib, berilgan «A to'plamning to'ldiruvchisi», deb aytiladi va $\overline{A}$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda «$\overline{A}$ to'plam A to'plamni to'ldiradi» yoki «$\overline{A}$ to'plam A to'plamdan to'ldirish amalini qo'llab hosil qilindi», deyish mumkin.

To'plamlar nazariyasida bulean tushunchasi kiritilgan bo'lib, u muhim tushunchalardan biri hisoblanadi. Berilgan A to'plamning

[1] Bu ibora ingliz matematigi va mantiqchisi Jorj Bul (George Boole, 1815—1864) sharafiga shunday nomlangan.

barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam *A to'plamning buleani* (*A to'plam uchun bulean*), deb ataladi.

A to'plamning buleani 2^A ko'rinishda belgilanadi[1].

12-misol. To'rtta elementga ega $A=\{a,b,c,d\}$ to'plam uchun 2^A bulean o'n oltita element-to'plamlardan iborat bo'ladi:

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}.$$

Ravshanki, $|A|=4$ va $|2^A|=16$. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{d,e,f,g\}$ va $C=\{a,f,g,k,c\}$ to'plamlardan har ikkitasining kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.
2. Markazlari bitta nuqtada joylashgan hamda radiuslari 1 va 3 ga teng doiralar nuqtalaridan iborat to'plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.
3. To'plamlarning ayirmasi bilan bog'liq masala o'ylab toping va uni hal qiling.
4. Ushbu amallar natijalarini aniqlang: $\varnothing\cap\{\varnothing\}$, $\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$, $\{\varnothing\}\cup\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\varnothing$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}-\{\{\varnothing\}\}$.
5. Ixtiyoriy A to'plam uchun $A\cup\varnothing$, $A\cap\varnothing$, $A-\varnothing$, $A-A$, $\varnothing-A$ to'plamlarni aniqlang.
6. $A—B=B—A$ tenglik o'rinli bo'ladigan A va B to'plamlarga misollar keltiring.
7. O'zaro kesishmaydigan to'plamlar bilan bog'liq masala o'ylab toping va uni hal qiling.
8. O'zaro kesishadigan to'plamlar bilan bog'liq masala o'ylab toping va uni hal qiling.
9. Ixtiyoriy A to'plam uchun $A\cup\overline{A}=\overline{A}\cup A=U$ bo'lishini ko'rsating.
10. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o'rinli bo'lishini ko'rsating:

[1] Bunday belgilashni izohlovchi ma'lumotlar II bobning 1-paragrafida keltiriladi.

a) $A \setminus B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$;

b) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ — a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing \Rightarrow A = B$;

e) $A = B \Rightarrow A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$ — d) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

f) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, ya'ni ayirish amali kesishma va to'ldirish amallari yordamida ifodalanishi mumkin;

g) $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B$.

11. Chekli A va B to'plamlar uchun $|A|, |B|, |A \cup B|$ va $|A \cap B|$ va sonlar orasidagi bog'lanishni toping.

12. Ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) $A \cup B \subseteq C \Rightarrow (A \subseteq C$ va $B \subseteq C)$;

b) $(A \subseteq C$ va $B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$ — a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $A \subseteq B \cap C \Rightarrow (A \subseteq B$ va $A \subseteq C)$;

e) $(A \subseteq B$ va $A \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq B \cap C$ — d) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

f) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;

g) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;

h) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;

i) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

13. 12-topshiriqning f), g), h) va i) bandlaridagi tasdiqlarga teskari tasdiqlarni tahlil qiling va ular bajarilmaydigan hollarda A, B va C to'plamlarga misol keltiring.

14. Ixtiyoriy a, b va c sonlar uchun to'g'ri bo'lgan $a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c$, $a \leq b \Leftrightarrow a-c \leq b-c$ va $a \leq b \Leftrightarrow c-b \leq c-a$ munosabatlardagi a, b va c sonlarni A, B va C to'plamlar bilan, «$\leq$», «$+$» va «$-$» belgilarni «$\subseteq$», «$\cup$» va «$\setminus$» belgilar bilan mos ravishda almashtirib, hosil bo'lgan munosabatlarning to'g'riligini tahlil qiling.

15. $B = \{x \in N | x$ 3 ga bo'linadi$\}$ bo'lsin. N to'plamni universal to'plam, deb hisoblab, $\overline{B}$ to'plamni toping.

16. Natural, butun, haqiqiy va irratsional sonlar to‘plamlari bilan bog‘liq universal to‘plamlarga misollar keltiring.
17. $A=\{a,b,c,d,e\}$ to‘plam uchun 2^A buleanni aniqlang.
18. Bir uyda yashovchi oilada ota (t), ona (n) va to‘rt farzand (1,2,3,4) bo‘lsa, oila a’zolarining uyda bo‘lishlari vaziyatlariga mos barcha imkoniyatlarni to‘plamlar ko‘rinishida yozing va bu imkoniyatlar to‘plamlari to‘plamining quvvatini aniqlang.
19. Universal to‘plam tushunchasi bilan bog‘liq masala o‘ylab toping va uni hal qiling.
20. Bulean tushunchasi bilan bog‘liq masala o‘ylab toping va uni hal qiling.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. To‘plamlarning birlashmasi qanday amalga oshiriladi?
2. Qanday to‘plamga to‘plamlarning kesishmasi deb aytiladi?
3. O‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar deganda nimani tushunasiz?
4. Qanday to‘plamlarga o‘zaro kesishadigan to‘plamlar deb aytiladi?
5. To‘plamlarning ayirmasi nima?
6. A to‘plamni B to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam deganda nimani tushunasiz?
7. Qanday to‘plamga universal to‘plam deb aytiladi?
8. Bulean deganda nimani tushunasiz?

3-§. To‘plamlar algebrasi

Idempotentlik, kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik, de-Morgan va yutilish qonunlari, to‘plam, element, algebra, ikki taraflama tenglik, o‘zaro ikki taraflama tengliklar.

3.1. Asosiy qonunlar. To‘plamlar algebrasida, umuman olganda, sonlar algebrasidagi munosabatlarga o‘xshash munosabatlar qaraladi. To‘plamlar algebrasidagi munosabatlar universal to‘plam va uning xos qism to‘plamlarining qanday bo‘lishidan qat’i nazar, o‘z kuchini saqlaydi. Bu yerda, asosan, birlashma, kesishma, ayirma va to‘ldirish amallari o‘rtasidagi o‘zaro munosabatlar muhim hisoblanadi.

To‘plamlar nazariyasidagi munosabatlar, ko‘pincha, tengliklar ko‘rinishida namoyon bo‘ladi. Bu yerda tengliklarni isbotlashda hajmiylik aksiomasidan foydalangan holda quyidagicha mulohaza yuritish usuli ko‘p qo‘llaniladi. Agar tenglikning chap tomonidagi to‘plamga tegishli ixtiyoriy element uning o‘ng tomonidagi to‘plamda ham topilib va, aksincha, tenglikning o‘ng tomonidagi to‘plamga tegishli ixtiyoriy element uning chap tomonidagi to‘plamda ham bor bo‘lsa, u holda bu tenglik to‘g‘ridir. Boshqacha aytganda, ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun tenglikni isbotlash $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ munosabatlarning to‘g‘riligini ko‘rsatishga tengkuchlidir.

Odatda, to‘plamlar algebrasidagi «$\cup$», «$\cap$» va «\» belgilar bilan ifodalanuvchi birlashma, kesishma va ayirma amallari, bo‘sh ($\varnothing$) va universal (U) top‘lamlar hamda xos ($\subseteq$) va xosmas ($\subset$) qism to‘plamlar, mos ravishda, sonlar algebrasidagi «+», «×» va «—» belgilar bilan ifodalanuvchi qo‘shish, ko‘paytirish va ayirish amallari, nol (0) va bir (1) sonlar hamda katta emas ($\leq$) va kichik ($<$) munosabatlari bilan qiyoslanadi.

To‘plamlar ustida munosabatlarni ifodalovchi asosiy tengliklarni qarab chiqamiz.

1-teorema. Universal to‘plam U va uning ixtiyoriy qism to‘plami A uchun quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

1. (*Nolning xossalari*). $A \cup \varnothing = A$, $\varnothing \cup A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cap A = \varnothing$.

2. (*Birning xossalari*). $A \cap U = A$, $U \cap A = A$, $A \cup U = U$, $U \cup A = U$.

3. (*Idempotentlik*[1] *qonuni*). $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

4. (*Nol va birning bog‘liqligi xossasi*). $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$.

5. (*Involyutivlik qonuni* [2]). $A=A$.

Isboti. Bu tengliklarni isbotlash uchun, yuqorida ta’kidlaganimizdek, hajmiylik aksiomasidan foydalanamiz. Shuni e’tiborga olsak, isbotlanishi kerak bo‘lgan barcha tengliklar to‘plamlarning birlashmasi, kesishmasi va to‘ldiruvchisi ta’riflaridan bevosita kelib

[1] «Idempotens» so‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, «*idem*» — shunday, «*potens*» — kuchli, ya’ni «o‘sha kuchga ega» yoki «o‘sha darajani saqlovchi» ma’nosini beradi.

[2] Bu qonunni falsafadagi «inkorni inkor qilish qonuni» bilan qiyoslash mumkin.

chiqadi. Bu yerda faqat oxirgi tenglikning isbotini to'liq keltirish bilan chegaralanamiz.

A to'plam U universal to'plamning ixtiyoriy qism to'plami va $\overline{\overline{A}}$ to'plam $\overline{A}$ to'plamning to'ldiruvchisi bo'lgani uchun, $\overline{\overline{A}}$ to'plamning hech qaysi elementi $\overline{A}$ to'plamga tegishli emas. Demak, $\overline{\overline{A}}$ to'plamning barcha elementlari A to'plamga tegishlidir, ya'ni $\overline{\overline{A}} \subseteq A$. Aksincha, A to'plamning hech qaysi elementi $\overline{A}$ to'plamga tegishli emas, demak, A to'plamning barcha elementlari $\overline{\overline{A}}$ to'plamga tegishlidir, ya'ni $A \subseteq \overline{\overline{A}}$. Shuning uchun, $\overline{\overline{A}} = A$. ■

2-teorema (**birlashmaga nisbatan kommutativlik qonuni**). *Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A \cup B = B \cup A$ tenglik*[1] *o'rinlidir.*

Isboti. To'plamlarning birlashmasiga berilgan ta'rifga ko'ra, $A \cup B$ to'plamning har bir elementi yo A to'plamda, yoki B to'plamda topiladi, chunki $A \cup B$ to'plam A va B to'plamning barcha elementlarida takrorlanmasdan tuzilgan. Yana o'sha ta'rifga ko'ra, $B \cup A$ to'plam ham A va B to'plamlarning barcha elementlaridan takrorlanmasdan tuzilganligi uchun $A \cup B$ to'plamning har bir elementi $B \cup A$ to'plamga ham tegishli bo'ladi. Xuddi shunday mulohazalarni $B \cup A$ to'plam uchun yuritib, uning har bir elementi $A \cup B$ to'plamda ham bor bo'lishini aniqlaymiz. Demak, $A \cup B = B \cup A$. ■

3-teorema (**birlashmaga nisbatan assotsiativlik qonuni**). *Ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ tenglik*[2] *o'rinlidir.*

Isboti. $(A \cup B) \cup C$ to'plamning ixtiyoriy elementi x bo'lsin. Birlashmaning ta'rifini qo'llasak, quyidagilarga ega bo'lamiz: $x \in (A \cup B)$ yoki $x \in C$. $x \in (A \cup B)$ munosabatdan $x \in A$ yoki $x \in B$

---

[1] Bu tenglik o'rin almashtirish qonuni deb ham ataladi.
[2] Bu tenglik guruhlash qonuni deb ham ataladi.

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ yoki $x \in (B \cup C)$. Shuning uchun $x \in A \cup (B \cup C)$. Xuddi shunday mulohaza yuritib, $A \cup (B \cup C)$ to'plamning ixtiyoriy elementi $(A \cup B) \cup C$ to'plamning ham elementi bo'lishini aniqlaymiz. Demak, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. ■

Birlashmaga nisbatan assotsiativlik qonuniga ko'ra A, B va C to'plamlarga birlashma amalini qanday tartibda qo'llashning ahamiyati yo'q. Shuning uchun A, B va C to'plamlarga birlashma amalini qo'llash natijasida hosil bo'lgan to'plamni $A \cup B \cup C$, deb belgilash ham mumkin.

Ikkita to'plamning birlashmasi amaliga berilgan ta'rif ixtiyoriy chekli sondagi to'plamlarning birlashmasi uchun ham qo'llanilishi mumkin[1]: har qanday chekli sondagi to'plamlarning barcha elementlaridan takrorlanmasdan tuzilgan to'plamga shu to'plamlarning birlashmasi, deb aytiladi. $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlarning birlashmasini $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ yoki $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan.

Birlashmaga nisbatan kommutativlik qonuniga ko'ra, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ birlashma to'plamni quyidagi usul bilan ham tashkil etish mumkin. Oldin berilgan $A_1, A_2, ..., A$ to'plamlardan ixtiyoriy ikkitasining, masalan, A_{i_1} va A_{i_2} to'plamlarning birlashmasini tuzish, keyin $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ to'plam bilan A_{i_1} va A_{i_2} to'plamlardan boshqa ixtiyoriy to'plamning birlashmasini tuzish va hokazo, ketma-ket birlashma to'plamlarni tuzish natijasida $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlarning $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ birlashmasini hosil qilish mumkin.

Har biri chekli bo'lgan $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar uchun $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ munosabat o'rinlidir. Bu munosabat berilgan to'plamlarning hech bo'lmaganda ikkitasi umumiy elementga ega

[1] Umuman olganda, birlashma va kesishma amallari binar (ikki o'rinli) amallar hisoblanadi.

bo‘lsagina qat’iy tengsizlik ko‘rinishda va berilgan to‘plamlarning barcha mumkin bo‘lgan juftlari umumiy elementga ega bo‘lmasagina tenglik ko‘rinishda bajariladi. Bu tasdiqlar kombinatorikaga bag‘ishlangan II bobning 1-paragrafidagi 5-teoremadan kelib chiqadi.

1-misol. $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{e,f,k\}$ va $D=\{i,j\}$ bo‘lsin. U holda $E=B\cup C\cup D=\{a,b,c,e,f,k,i,j\}$ va $F=A\cup B\cup C\cup D=\{a,b,c,e,f,k,i,j\}$ bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, $E=F$. Bu yerdagi barcha to‘plamlarning quvvatlarini aniqlaymiz: $|A|=2$, $|B|=3$, $|C|=3$, $|D|=2$, $|E|=8$ va $|F|=8$. Ular uchun $|E|=8<|A|+|B|+|C|+|D|=10$ (A va B to‘plamlarda ikkita umumiy a va b elementlar bor) va $|F|=8=|B|+|C|+|D|$ (B bilan C, C bilan D va B bilan D juftliklar umumiy elementga ega emas). ■

4-teorema (**kesishmaga nisbatan kommutativlik qonuni**). *Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A\cap B=B\cap A$ tenglik o‘rinlidir.*

Isboti. To‘plamlarning kesishmasi ta’rifiga ko‘ra, $A\cap B$ to‘plamning har bir elementi A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli. Xuddi shuningdek, $B\cap A$ to‘plam A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tuzilganligi uchun $A\cap B$ to‘plamning har bir elementi $B\cap A$ to‘plamda ham topiladi. Shu kabi mulohazalar asosida $B\cap A$ to‘plamning har bir elementi $A\cap B$ to‘plamda ham bor bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Demak, $A\cap B=B\cap A$. ■

5-teorema (**kesishmaga nisbatan assotsiativlik qonuni**). *Ixtiyoriy A, B va C to‘plamlar uchun $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ tenglik o‘rinlidir.*

Isboti. $(A\cap B)\cap C$ to‘plamning ixtiyoriy x elementini qaraymiz. To‘plamlar kesishmasining ta’rifiga asosan, $x\in(A\cap B)$ va $x\in C$. Bu yerdan $x\in A$, $x\in B$ va $x\in C$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x\in A$ va $x\in(B\cap C)$ bo‘ladi. Demak, $x\in A\cap(B\cap C)$. Xuddi shunga o‘xshash mulohaza yuritib, $A\cap(B\cap C)$ to‘plamning ixtiyoriy elementi $(A\cap B)\cap C$ to‘plamning ham elementi bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. Demak, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$. ■

Kesishmaga nisbatan assotsiativlik qonuniga ko‘ra A, B va C to‘plamlarga kesishma amalini qanday tartibda qo‘llashning ahamiyati yo‘q. Shuning uchun A, B va C to‘plamlarning kesishmasini $A \cap B \cap C$, deb belgilash ham mumkin.

Ikkita to‘plamning kesishmasi tushunchasiga berilgan ta’rif ixtiyoriy chekli sondagi to‘plamlarning kesishmasi uchun ham qo‘llanilishi mumkin: har qanday chekli sondagi to‘plamlarning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to‘plamga shu to‘plamlarning kesishmasi, deb aytiladi. A_1, $A_2,\ldots$, A_n to‘plamlarning kesishmasi uchun $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ yoki $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ko‘rinishdagi belgilash qabul qilingan.

Kesishmaga nisbatan kommutativlik qonuniga ko‘ra, A_1, $A_2,\ldots$, A_n to‘plamlarning $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ kesishmasini ikkita to‘plam kesishmasi amalini istalgan tartibda ketma-ket qo‘llab hosil qilish mumkin: dastlab berilgan A_1, $A_2,\ldots$, A_n to‘plamlardan ixtiyoriy ikkitasining, masalan, A_{i_1} va A_{i_2} to‘plamlarning kesishmasini tuzish, keyin $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ to‘plam bilan A_{i_1} va A_{i_2} to‘plamlardan boshqa ixtiyoriy to‘plamning kesishmasini tuzish va hokazo, shunday davom etib, A_1, $A_2,\ldots$, A_n to‘plamlarning kesishmasini hosil qilish mumkin.

Chekli A_1, $A_2,\ldots$, A_n to‘plamlar uchun $\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \leq \min_{1 \leq i \leq n} |A_i|$ munosabat o‘rinlidir. Berilgan to‘plamlardan birontasi qolgan barcha to‘plamlarning qism to‘plami bo‘lsagina, bu munosabatda tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ to‘plam berilgan barcha A_1, $A_2,\ldots$, A_n to‘plamlarning xos qism to‘plami bo‘lsagina, yuqoridagi munosabat qat’iy tengsizlik ko‘rinishida bajariladi. Kombinatorikaga oid tushunchalar yordamida $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ to‘plamning quvvatini hisoblash formulasi II bobning 1-paragrafidagi 7-teoremada keltiriladi.

2-misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $A \cap B = \{a,b,c\}$, $A \cap B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ bo‘ladi. Osonlik bilan ko‘rish mumkinki, $|A \cap B| = 3 = \min\{|A|, |B|\}$, chunki $|A|=3$, $|B|=4$ va $A \subset B$. Bundan tashqari, $|A \cap B \cap C| = |\varnothing| = 0 <$ $< \min\{|A|, |B|, |C|\} = 3$. ■

3-misol. Eramizning i-yilida butun dunyoda tug'ilgan bolalar to'plamini T_i bilan va n bilan $n \geq 2$ shartni qanoatlantiruvchi natural sonni belgilasak, u holda $\bigcap_{i=2001}^{2000+n} T_i = \varnothing$ bo'ladi. ■

6-teorema (**birlashmaga nisbatan distributivlik qonuni**). *Ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *tenglik*[1] *o'rinlidir.*

Isboti. $A \cup (B \cap C)$ to'plamning ixtiyoriy x elementini qaraymiz. Birlashmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in A$ yoki $x \in (B \cap C)$ bo'ladi. Kesishmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in (B \cap C)$ munosabatdan $x \in B$ va $x \in C$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x \in A$ yoki $x \in B$ va (shu bilan birga) $x \in A$ yoki $x \in C$. Birlashmaning ta'rifiga asosan, $x \in (A \cup B)$ va $x \in (A \cup C)$. Demak, kesishmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ to'plamning ixtiyoriy x elementini qaraymiz. Kesishmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in (A \cup B)$ va $x \in (A \cup C)$ bo'ladi. U holda, birlashmaning ta'rifiga asosan, $x \in A$ yoki $x \in B$ va (shu bilan birga) $x \in A$ yoki $x \in C$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ yoki x element B va C to'plamlarga tegishlidir. Shuning uchun, kesishmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in A$ yoki $x \in (B \cap C)$. Birlashmaning ta'rifiga asosan, $x \in A \cup (B \cup C)$ bo'ladi. ■

Zarur mulohazalar yuritib, birlashmaga nisbatan distributivlik qonunini quyidagicha umumlashtirish mumkin.

Ixtiyoriy A, B_1, B_2,...,B_n to'plamlar uchun:

$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$ *tenglik o'rinlidir.*

7-teorema (**kesishmaga nisbatan distributivlik qonuni**). *Ixtiyoriy A, B va C to'plamlar uchun* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *tenglik*[2] *o'rinlidir.*

Isboti. $A \cap (B \cup C)$ to'plamning ixtiyoriy elementi x bo'lsin. U holda, kesishmaning ta'rifiga asosan, $x \in A$ va $x \in (B \cap C)$ bo'ladi.

---

[1] Bu tenglik birlashmaga nisbatan taqsimot qonuni deb ham ataladi.
[2] Bu tenglik kesishmaga nisbatan taqsimot qonuni deb ham ataladi.

Birlashmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in (B \cap C)$ munosabatdan $x \in B$ yoki $x \in C$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in A$ va $x \in C$. Bu yerdan esa $x \in (A \cap B)$ yoki $x \in (A \cap C)$ ekanligi kelib chiqadi. Birlashmaning ta'rifiga ko'ra, oxirgi mulohazadan $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ bo'lishini aniqlaymiz.

Endi $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ to'plamning ixtiyoriy elementi x bo'lsin. Birlashmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in (A \cap B)$ yoki $x \in (A \cap C)$ bo'ladi. Bu yerdan, kesishmaning ta'rifiga asosan, $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in A$ va $x \in C$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ va (shu bilan birga) $x \in B$ yoki $x \in C$. Shuning uchun, $x \in A$ va (birlashmaning ta'rifiga ko'ra) $x \in (B \cup C)$. Bu yerdan, kesishmaning ta'rifiga asosan, $x \in A \cap (B \cup C)$. ■

Zarur mulohazalar yuritib kesishmaga nisbatan distributivlik qonunini quyidagicha umumlashtirish mumkin.

Ixtiyoriy A, B_1, $B_2, \ldots, B_n$ to'plamlar uchun:

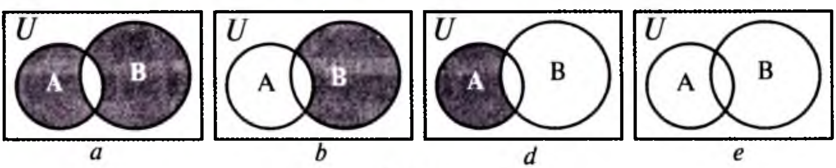
$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cup B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

tenglik o'rinlidir.

8-teorema. U universal to'plamning ixtiyoriy A va B qism to'plamlari uchun $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. A va B to'plamlar U universal to'plamning ixtiyoriy qism to'plamlari bo'lsin. Teoremani isbotlashda 5-shakldan foydalanamiz. Shaklda U universal to'plam to'g'ri to'rtburchak ko'rinishda, A va B to'plamlar esa doiralar sifatida tasvirlangan. 5-*a* shakldagi U to'plamning bo'yalmagan qismi $A \cap B$ to'plamga, bo'yalgan qismi esa $\overline{A \cap B}$ to'plamga mos keladi.

$\overline{A \cap B}$ to'plamning ixtiyoriy elementini x bilan belgilaymiz. To'ldiruvchi to'plamning ta'rifiga ko'ra, $x \in U$ va $x \notin A \cap B$, ya'ni



5-shakl.

U to'plamning x elementi, bir vaqtning o'zida, ham A to'plamning, ham B to'plamning elementi bo'la olmaydi. Bu yerda uchta hol bor:

1) $x \notin A$ (5-*b* shaklga qarang);
2) $x \notin B$ (5-*d* shaklga qarang);
3) $x \notin A$ va $x \notin B$ (5-*e* shaklga qarang).

1) holda $x \in \overline{A}$, 2) holda $x \in \overline{B}$, 3) holda esa $x \in \overline{A}$ va $x \in \overline{B}$ bo'lishini topamiz. Shuning uchun birlashmaning ta'rifiga ko'ra, $x \in A \cup B$ bo'ladi.

Endi $A \cup B$ to'plamning ixtiyoriy elementi x bo'lsin. Bu holda $x \in A$ yoki $x \in B$. Bu natijadan $x \notin A$ yoki $x \notin B$ bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun $x \notin U$ va $x \notin A \cap B$. Demak, $x \in \overline{A \cap B}$. ■

9-teorema. U universal to'plamning ixtiyoriy A va B qism to'plamlari uchun $A \cup B = \overline{A} \cap \overline{B}$ *tenglik o'rinlidir.*

Isboti. A va B to'plamlar U universal to'plamning ixtiyoriy qism to'plamlari bo'lsin. $\overline{A \cup B}$ to'plamning ixtiyoriy elementini x bilan belgilaymiz. x element 5-*e* shaklda to'g'ri to'rtburchakning bo'yalgan qismida yotadi. $x \in A \cup B$ munosabatdan $x \notin U$ va $x \notin A \cup B$ bo'lishi kelib chiqadi. $x \notin A \cup B$ munosabat va birlashmaning ta'rifiga asosan, x element A to'plamga ham (5-*b* shaklga qarang), B to'plamga ham (5-*d* shaklga qarang) tegishli emas, ya'ni $x \in U$, $x \notin A$ va $x \notin B$. Bu yerdan $x \in A$ va $x \in B$ munosabatlar o'rinliligini topamiz. Shunday qilib, kesishmaning ta'rifiga asosan, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Endi $A \cap B$ to'plamning ixtiyoriy elementi x bo'lsin. Bu holda, kesishmaning ta'rifiga binoan, $x \in \overline{A}$ va $x \in \overline{B}$ bo'ladi. Bu yerdan, to'ldiruvchi to'plamning ta'rifiga ko'ra, $x \notin A$ va $x \notin B$ bo'lishini topamiz. Demak, qaralayotgan x element bir vaqtning o'zida A to'plamga ham, B to'plamga ham tegishli emas. Shuning uchun, birlashmaning ta'rifiga ko'ra, $x \notin A \cup B$ bo'ladi. Shunday qilib, to'ldiruvchi to'plamning ta'rifiga asosan, $x \in A \cap B$. ■

Yuqorida isbotlangan 8- va 9-teoremalardagi $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ va $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \subset$ tengliklar **de-Morgan**[1] **qonunlari**, deb ataladi.

10-teorema. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A\cup = (A \cap B) = A$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. Ixtiyoriy A va B to'plamlar U universal to'plamning qism to'plamlari bo'lsin. $A \cap U = A$ bo'lgani uchun 1-teoremaga (1-bandiga qarang) asosan, $A\cup = (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$ munosabat o'rinlidir. Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi ifoda uchun kesishmaga nisbatan distributivlik qonunini qo'llab, uni $A \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B)$ ko'rinishga keltiramiz. Endi $U \cup B = U$ va $A \cap U = A$ tengliklarni e'tiborga olsak, $A\cup = (A \cap B) = A \cap U = A$ kelib chiqadi. ■

11-teorema. Ixtiyoriy A va B to'plamlar uchun $A \cap (A \cap B) = A$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. Avvalo, kesishmaga nisbatan distributivlik qonunini, keyin esa idempotentlik qonunini qo'llasak, isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikning chap tomoni uchun:

$$A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B)$$

munosabatlar o'rinli bo'lishini aniqlaymiz. 10-teoremaga asosan, $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$. ■

10- va 11-teoremalarda isbotlangan $A \cup (A \cap B) = A$ va $A \cap (A \cup B) = A$ tengliklar **yutilish qonunlari**, deb ataladi.

Yuqorida isbotlangan teoremalarda keltirilgan tengliklar tahlil qilinganda, ularning ba'zi xususiyatlarini payqash mumkin. Masalan, 6- va 7-, 8- va 9- hamda 10- va 11-teoremalardagi tengliklarning biri ikkinchisidan $\cup$ va $\cap$ va belgilarni o'zaro almashtirish yordamida hosil qilinishi mumkin. Xuddi shunday, nolning xossalari bilan birning xossalari to'g'risida ham quyidagilarni aytish mumkin: bu xossalarni ifodalovchi tengliklarning biri ikkinchisidan $\cup$ va $\cap$ belgilarni o'zaro almashtirish hamda $\varnothing$ va U belgilarni o'zaro almashtirish natijasida kelib chiqadi.

---

[1] *De-Morgan* (Augustus de-Morgan, 1806 (Hindiston) — 1871) — ingliz matematigi.

To‘plamlar algebrasida agar biron tenglikdan shu tenglikdagi (bor bo‘lsa) $\cup$ belgisini $\cap$ belgisiga, $\cap$ni $\cup$ ga, $\varnothing$ni Uga, Uni $\varnothing$ga birdaniga almashtirish natijasida boshqa tenglikni hosil qilish mumkin bo‘lsa, u holda hosil qilingan tenglik dastlabki tenglikka **ikki taraflama (qo‘shma) tenglik**, deb ataladi.

Ravshanki, biron tenglikka ikki taraflama hisoblangan tenglik uchun ikki taraflama tenglik dastlabki tenglik bilan bir xil bo‘ladi. Shuning uchun bu tengliklar **o‘zaro ikki taraflama (qo‘shma) tengliklar**, deb ataladi. Masalan, nolning xossasini ifodalovchi $A \cup \varnothing = A$ va birning xossasini ifodalovchi $A \cap U = A$ tengliklar o‘zaro ikki taraflama (qo‘shma) tengliklardir.

3.2. Ekvivalent tasdiqlar. To‘plamlar algebrasining asosiy qonunlariga qo‘shimcha quyidagi teoremani keltiramiz.

12-teorema. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:

1) $A \subseteq B$; 2) $A \cap B = A$; 3) $A \cup B = B$.

Isboti. 1. Teoremaning 1) tasdig‘i o‘rinli bo‘lsin. U holda $A \cap B = A$ munosabat to‘g‘rligini isbotlaymiz. Avvalo, to‘plamlarning kesishmasi ta’rifiga ko‘ra, $A \cap B \subseteq A$ bo‘ladi. Endi A to‘plamning ixtiyoriy elementini x bilan belgilaymiz. U holda $A \subseteq B \Rightarrow x \in B$. Demak, to‘plamlarning kesishmasi ta’rifiga ko‘ra, $x \in A \cap B$, ya’ni $A \subseteq A \cap B$. Shunday qilib, $A \cap B \subseteq A$ va $A \subseteq A \cap B$ bo‘lganidan $A \cap B = A$ o‘rinlidir.

2. $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$ bo‘lishini isbotlash uchun, avvalo, $A \cup B$ ifodadagi A to‘plamning o‘rniga unga teng bo‘lgan $A \cap B$ to‘plamni qo‘yib, $(A \cap B) \cup B$ ifodani hosil qilamiz. So‘ngra, bu ifodaga birlashmaga nisbatan distributivlik qonunini qo‘llab, $(A \cup B) \cap (B \cup B)$ ifodani hosil qilamiz. Idempotentlik qonuniga asosan, $B = B \cup B$ o‘rinlidir. Shuning uchun $(A \cup B) \cap (B \cup B)$ ifodani $(A \cup B) \cap B$ ko‘rinishda yozish mumkin. Oxirgi ifoda yutilish qonuniga asosan, B ga teng. Demak, $A \cup B = B$.

3. $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$ munosabatni tekshiramiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $A \cup B = B$ tenglik o‘rinli bo‘lsa-da, A to‘plam

B to'plamning qism to'plami bo'lmasin. U holda A to'plam tarkibida B to'plamga tegishli bo'lmagan hech bo'lmasa bitta x element topiladi, ya'ni $x \in A$ va $x \notin B$. To'plamlarning birlashmasi ta'rifiga asosan, $x \in A$ bo'lganidan $x \in A \cup B$ munosabat o'rinlidir. $A \cup B = B$ tenglikdan $x \in B$ kelib chiqadi. Hosil bo'lgan ziddiyat, ya'ni ham $x \notin B$, ham $x \in B$ bo'lishi qilgan farazimizning noto'g'riligini isbotlaydi. Demak, $A \cup B = B$ tenglikdan $A \subseteq B$ munosabat kelib chiqadi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Yuqorida isbotlangan teoremalardan mumkin qadar kam foydalangan holda quyidagi tengliklarni isbot qiling:

a) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = U$;

b) $(A \cap B \cap C \cap X) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (C \cap X) = C$.

2. U universal to'plamning A va B qism to'plamlari bo'lsin. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) ixtiyoriy A to'plam uchun $A \cup B = A \Rightarrow B = \varnothing$;

b) ixtiyoriy A to'plam uchun $A \cap B = A \Rightarrow B = U$;

d) agar $A \cup B = U$ va $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda $B = \overline{A}$ va $A = B$ bo'ladi.

3. Quyidagi tengliklarni isbot qiling:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

d) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

e) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

f) $A \cap B = A \cup (B \setminus A)$;

g) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

h) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

i) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

j) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

k) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

l) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

m) $(A \cup B) \setminus C) = (A \setminus C) \cup (B \cap C)$;

n) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$.

4. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating:

a) $(A \setminus B) \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$;

b) $B \subseteq A \Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$ — a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;

d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

5. Ushbu paragrafda isbotlangan teoremalardagi tengliklarni tahlil qiling va o‘zaro ikki taraflama (qo‘shma) bo‘ladigan tengliklarni aniqlang.

6. $|A|=n$, $|B|=k$, $A \subset C \subset B$ va $A \subseteq D \subseteq B$ bo‘lsa, n, k, $|C|$ va $|D|$ sonlarni solishtiring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Idempotentlik qonuni qanday ifodalanadi?
2. Involutivlik qonuni nimani anglatadi?
3. Birlashmaga nisbatan kommutativlik qonunini qanday tushunasiz?
4. Birlashmaga nisbatan assotsiativlik qonuni deganda nimani tushunasiz?
5. Kesishmaga nisbatan kommutativlik qonuni bilan assotsiativlik qonuni bir-biridan nima bilan farq qiladi?
6. Birlashmaga nisbatan distributivlik qonuni bilan kesishmaga nisbatan distributivlik qonunining qanday o‘xshashligi bor?
7. De-Morgan qonunlarini bilasizmi?
8. Yutilish qonunlarida nima «yutiladi»?
9. Bir-biriga o‘xshash tengliklar deganda nimani tushunasiz?
10. Ikki taraflama (qo‘shma) tengliklar deb qanday tengliklarga aytiladi?
11. Qanday tengliklarga o‘zaro ikki taraflama (qo‘shma) tengliklar deymiz?
12. Ekvivalent tasdiqlar deganda nimani tushunasiz?

4-§. Kortejlar[1]

To'plam, element, elementar kortej, kortej, kortejning uzunligi, vektor, juftlik, uchlik, to'rtlik, n-lik, komponenta, koordinata, Dekart ko'paytmasi, to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi, to'plamning darajasi, Dekart ko'paytmalarining kesishmasi va birlashmasi, bo'sh Dekart ko'paytmasi, n-darajali munosabat, n-ar munosabat, Morze alifbosi.

4.1. Kortej tushunchasi. Matemetikada, jumladan, kombinatorika va graflar nazariyasida, to'plam tushunchasi bilan bir qatorda, kortej tushunchasi alohida o'rin tutadi. Turli xossalarga ega bo'lgan obyektlar bilan ish ko'rganda, kortej tushunchasidan foydalanish mumkin. Kortej tushunchasi yordamida kombinatorikaning ko'plab tushunchalari tabiiy ravishda oson anglanadi. Kortej tushunchasini o'rganishdan oldin to'plamning elementlari takrorlanmasligini eslatib o'tamiz.

Ixtiyoriy A_1, A_2,...A_n to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarning ixtiyoriy biridan, masalan, A_{i_1} to'plamdan qandaydir a_{i_1} elementni, A_{i_1} to'plamdan boshqa istalgan A_{i_2} to'plamning qandaydir a_{i_2} elementini va hokazo, oxirgi A_{i_n} to'plamdan qandaydir a_{i_n} elementni olamiz. Bu elementlarni ularning berilgan to'plamlardan olinishi tartibida joylashtirib $< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ tuzilmaga ega bo'lamiz. Bu tuzilmada har bir element o'zining qat'iy joylashish o'rniga ega. Shunday usul bilan boshqa tuzilmalarni ham hosil qilish mumkin. Bu tuzilmalarning har biri *elementar kortej* (qisqacha, *kortej*), deb ataladi. Kortejni boshqa usullar yordamida ham tashkil qilish mumkin. Masalan, faqat bitta to'plam elementlaridan (hattoki, bu to'plam yagona elementli bo'lsa ham) foydalanib, tarkibida elementlari ko'p bo'lgan kortej tuzish mumkin. Kortejlarni belgilashda, ko'pincha, lotin yoki yunon alifbosining bosh harflaridan foydalaniladi.

A_1, A_2,..., A_n to'plamlar ixtiyoriy bo'lgani uchun bu to'plamlar umumiy elementlarga ega bo'lishi ehtimoldan xoli emas. Demak,

---

[1] *Kortej* (cortége) — fransuzcha so'z bo'lib, tantanali yurish ma'nosini beradi.

umuman olganda, $K=<a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}>$ kortej tarkibidagi **element-lar takrorlanishi mumkin**. Berilgan K kortejga a element tegishliligi $a\in K$ yoki $K\ni a$ koʻrinishda belgilanadi.

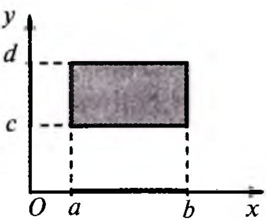
Ba'zi hollarda kortej iborasining oʻrniga *vektor* yoki uning *uzunligini* e'tiborga olgan holda *juftlik* (uzunligi ikkiga teng kortej), *uchlik, toʻrtlik* va hokazo n-lik (uzunligi n ga teng kortej) iboralari ham ishlatiladi. Uzunligi n boʻlgan kortej *n oʻrinli kortej,* deb ham ataladi. Kortejni tashkil etuvchi elementlar soni, ya'ni kortejning uzunligi shu *kortejning quvvati*, deb ataladi. Berilgan K kortejning uzunligi (quvvati) $|K|$ koʻrinishda belgilanadi.

Kortej tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkinligidan, ularning kortejda tutgan *oʻrinlari* muhim hisoblanadi. Shuning uchun kortejning muayyan elementi nazarda tutilganda, uning oʻrnini aniqlovchi raqam hisobga olinishi kerak.

Uzunliklari teng boʻlgan ikkita kortejning mos oʻrinlaridagi elementlari aynan bir xil boʻlsagina, bu *kortejlar teng*, deb ataladi. Kortejni tashkil qiluvchi elementlar, uning *komponentalari* yoki *koordinatalari*, deb ataladi. Ba'zan, kortejni tashkil qiluvchi elementlar uchun, qisqacha qilib, *kortejning elementlari* iborasi ham qoʻllaniladi.

Tabiiyki, uzunliklari teng boʻlmagan kortejlar teng emas. Kortejlar teng boʻlishi uchun ularning mos komponentalari oʻzaro bir xil boʻlishi shart. Masalan, toʻrt komponentali $<1,\{a,b\}, c,\{2,5,4\}>$ va $<1,\{b,a\}, c,\{5,2,4\}>$ kortejlar oʻzaro tengdir, chunki ularning toq oʻrinlaridagi komponentalari aynan bir xil va juft oʻrinlarida turgan komponentalari esa toʻplamlar sifatida bir-biriga teng boʻlgani uchun aynan bir xildir.

1-misol. $X=\{a,b\}$, $Y=\{b,c,d\}$ va $Z=\{e\}$ toʻplamlar uchun ularning berilish tartibiga (X,Y,Z) mos keluvchi hamda har bir toʻplamdan faqat bittadan element olish sharti bilan tuzilgan barcha elementar kortejlar quyidagilardir: $<a,b,e>$, $<a,c,e>$, $<a,d,e>$, $<b,b,e>$, $<b,c,e>$, $<b,d,e>$. ■



6-shakl.

2-misol. Toʻgʻri burchakli xOy Dekart koordinatalari sistemasining abssissalar va ordinatalar oʻqlariga ikkita $[a,b]$ va $[c,d]$ kesmalar 6-shakldagidek joylashtirilgan boʻlsin. U holda shakldagi boʻyalgan toʻgʻri toʻrtburchak va uning chegaralaridagi barcha nuqtalarning koordinatalariga mos qilib tuzilgan (*x*,*y*) juftliklar kortejlardan iborat bo'ladi. Ta'kidlaymizki, bu yerda kortejlar cheksiz ko'pdir. ■

3-misol. 1835-yilda S. Morze[1] tomonidan yaratilgan matnli ma'lumotni kodlash sistemasi (**Morze alifbosi**) bir asrdan ko'p davr mobaynida ma'lumot uzatishda asosiy sistema bo'lib keldi. Bu sistemada faqat ikkita bir-biridan farqli elementlar — nuqta «•» (qisqa signal) va tire «—» (uzun signal) bo'lib, ular yordamida matndagi belgilar (harflar, raqamlar va boshq.) kodlanadi. Bunday usulda tuzilgan har bir kodni kortej, deb hisoblash mumkin. Morze alifbosida uzunliklari birdan oltigacha bo'lgan kortejlar bor. ■

4-misol. O'zbekiston Respublikasida shaxsiy avtomobillarni davlat ro'yxatiga olishda yetti o'rinli kortejlardan foydalaniladi. Har bir kortejdagi dastlabki ikki o'ringa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 raqamlar, uchinchi o'ringa lotin alifbosining 26 harfidan bittasi va qolgan to'rt o'ringa raqamlar joylashtiriladi. Bunday usulda tuzilgan har bir ro'yxatga olish belgisini kortej, deb hisoblash mumkin. Tabiiyki, bu yerda raqamlar takrorlanishlari mumkin. Masalan, 2-shakldа tasvirlangan ro'yxatga olish belgisiga mos keluvchi <1,4,C,2,9,9,3> kortejda 9 raqami ikki marta yozilgan. ■

$\boxed{\text{14C2993}}$

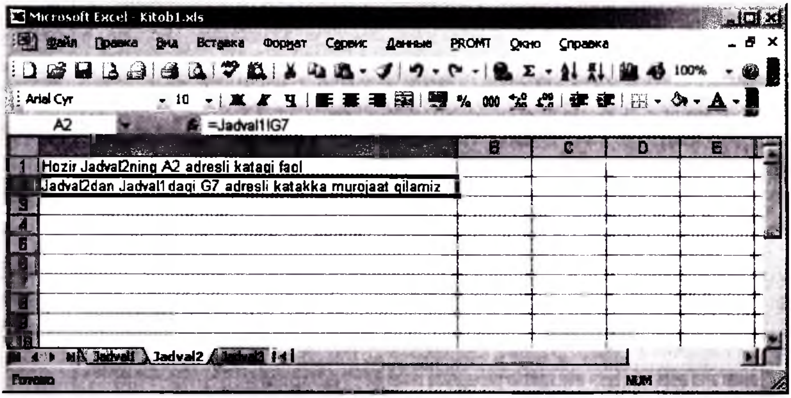
7-shakl.

5-misol. Microsoft (MS) Office tarkibiga kiruvchi MS Excel sistemasida ma'lumotlar elektron jadvallardagi kataklarga joylashtiriladi. Foydalanuvchi bu jadvallarni turli nomlar bilan belgilab, ma'lumotlarni fayl shaklida kompyuter xotirasida saqlashi mumkin. Har bir elektron jadval ustunlar va satrlarga ega. MS Excel sistemasida ustunlar (jami 256 ta) lotin alifbosi tartibida oldin «A» dan «Z»gacha bitta harf bilan, keyin «AA» dan «IV» gacha ikkita harflar bilan, satrlar esa 1dan 65536 gacha sonlar bilan belgilanadi. Bu yerda, jadvallar nomlari,uning ustunlari va satrlari to'plamlaridan bittadan elementni tartib bilan olib uch o'rinli kortej tuzish mumkin. Bunday usul vositasida tuzilgan uch o'rinli barcha kortejlar soni $k=$"jadvallar soni"$\times 65536 \times 256$ bo'ladi. MS Excel sistemasida bu kortejlardan elektron jadvallardagi kataklarning adreslari sifatida foydalaniladi. Masalan, nomi *Jadval* bo'lgan elektron jadvalning *G* harfi bilan belgilangan ustuni va 7 raqami bilan belgilangan satri kesishgan joyidagi katakka <*Jadval, G,7*>ko'rinishdagi kortej mos keladi. Bu katakning MS Excel

---

[1] *Semyuel Finli Briz Morze* (Samuel Finley Breese Morse, 1791—1872)—AQSH kashfiyotchisi va rassomi.

sistemasidagi adresi *Jadval1!G7* ko‘rinishga ega bo‘lib, unga *Kitob.xls* nomli faylning *Jadval2* elektron jadvalidan murojaat qilish 8-shaklda tasvirlangan. ■



8-shakl.

4.2. To‘plamlarning Dekart[1] *ko‘paytmasi va u bilan bog‘liq ba’zi amallar.* Yuqorida turli tabiatli to‘plamlar yordamida aniqlanuvchi kortej tushunchasi bilan tanishdik. O‘z navbatida, bu tushunchadan foydalanib, to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi tushunchasini kiritish mumkin.

Tartiblangan $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar elementlaridan tuzilgan n o‘rinli barcha kortejlar to‘plamiga shu *to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi* (qisqacha, *Dekart ko‘paytmasi*), deb ataladi.

Ba’zan to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi iborasi o‘rniga *to‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi* iborasidan ham foydalaniladi. Tartiblangan $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ yoki $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{< a_1, a_2, ..., a_n > | \, a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}.$$

To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi tushunchasining aniqlanishida bu ko‘paytmada qatnashuvchi to‘plamlarning soni ham muhim hisoblanadi. Zarur bo‘lganda, n ta to‘plamlarning Dekart

[1] *Rene Dekart* (Renè Descartes, 1596—1650) — fransuz matematigi va faylasufi.

ko‘paytmasi iborasi o‘rniga n **o‘rinli Dekart ko‘paytmasi** iborasi ham qo‘llaniladi.

Tabiiyki, agar $A_1, A_2, \ldots A_n$ to‘plamlarning birortasi bo‘sh to‘plam bo‘lsa, u holda ulardan foydalanib birorta ham kortej tuzish imkoniyati yo‘q. Demak, tarkibida hech bo‘lmasa, bitta bo‘sh to‘plam qatnashgan $A_1, A_2, \ldots A_n$ to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi ham bo‘sh to‘plamdir, ya’ni $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \varnothing$.

Dekart ko‘paytmasidan to‘plamlar bilan bog‘liq murakkab tuzilmalarni hosil qilishda va ularda ko‘paytma tushunchasini aniqlashda foydalaniladi. Ammo bunday hollarda aniqlangan ko‘paytirish amali Dekart ko‘paytmasining xossalaridan farqli xossalarga ham ega bo‘lishi mumkin. Jumladan, tuzilmalardan birontasi bo‘sh to‘plam bo‘lsa-da, ularning ko‘paytmasi bo‘sh bo‘lmagan hollar bor. Masalan, III bobning 3-paragrafida keltirilgan graflarni ko‘paytirish amali shunday xususiyatga ega.

To‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi tushunchasidan foydalanib, *to‘plamning darajasi* tushunchasi $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ marta}$ formula asosida kiritiladi. Masalan, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$. Umuman olganda, $A^n = A \times A^{n-1}$.

n o‘rinli $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ va $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ Dekart ko‘paytmalari berilgan bo‘lsin. Agar $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_2, \ldots, A_n \subseteq B_n$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda A Dekart ko‘paytmasi B *Dekart ko‘paytmasining qismi* deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.

To‘plamlarning n o‘rinli Dekart ko‘paytmasi ta’rifidan foydalanib va II bobning 1-paragrafida keltirilgan umumlashgan ko‘paytirish qoidasi asosida $\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$ tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. Bu munosabatdan, xususiy holda, ixtiyoriy n natural son va chekli A to‘plam uchun $|A^n| = |A|^n$ tenglikning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi (II bobning 1-paragrafidagi 7-muammoli topshiriqqa qarang).

6-misol. Ma’lumotlar bazalarini boshqarish tizimlarida (MBBTda) n-**darajali munosabat** (n-**ar munosabat**) deganda, $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ Dekart ko‘paytmasining biror qismi tushuniladi. Ma’lumotlar bazalarini boshqarishning relatsion[1] nazariyasi

---

[1] Bu so‘z ingliz tilidagi «relation» so‘zidan olingan bo‘lib, munosabat ma’nosini anglatadi.

negizida yotuvchi munosabat tushunchasidan foydalanish g'oyasini 1970-yilda E. Kodd[1] taklif qilgan edi. Umuman olganda, MBBTdagi munosabat tushunchasi biz, odatda, jadval deb yuritadigan ma'lumotlar to'plamiga mos keladi. Har bir jadval nomga, sarlavhaga va asosiy qismga (tanaga) ega, deb hisoblanadi. Bu yerda, jadvalning sarlavhasi va uning tanasidan o'rin olgan har bir satridagi ma'lumotlarni kortejlar, deb qarash mumkin. Jadvaldagi har bir satrning biror ustun bilan kesishgan joyi (katagi) ma'lumot tashuvchi sifatida shu satrga mos kortejning komponentalaridan biridir. MBBTda kortejlar deganda, jadvalning tanasidagi satrlar tushuniladi.

Xuddi odatdagi jadvaldagidek, MBBTda ham munosabat (jadval)ning har bir ustuniga nom beriladi va bu nomlar jadvalning sarlavhasini tashkil etishadi. Masalan, 1-jadvaldagi «TALABA» nomli munosabat «Tartib raqami», «Familiyasi», «Ismi», «Jinsi», «Tug'ilgan yili» va «O'qishga kirgan yili» kabi komponentalari bo'lgan kortej bilan aniqlanuvchi sarlavhaga ega. Bu munosabatda MBBT ma'nosida to'rtta kortej bor. Shu kortejlardan biri <1, Rahimova, Dilafruz, Ayol, 1982, 2005> ko'rinishga ega. ■

1-jadval

TALABA

Tartib raqami	Familiyasi	Ismi	Jinsi	Tug'ilgan yili	O'qishga kirgan yili
1	Rahimova	Dulafruz	Ayol	1982	2005
2	Islomov	Rustam	Erkak	1985	2006
3	Isroilova	Gulsara	Ayol	1985	2005
4	Oqilova	Robiya	Ayol	1987	2006

Dekart ko'paytmasi berilgan to'plamlardan foydalanib tuziluvchi qandaydir to'plamni aniqlagani sababli to'plamlar ustidagi amallar Dekart ko'paytmalari uchun ham qo'llanilishi mumkin. Bu yerda, odatda, Dekart ko'paytmasining tuzilishidagi o'ziga xoslikni hisobga olishga to'g'ri keladi.

O'rinlari soni teng bo'lgan $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ va $B = \prod_{i=1}^{n} B_i$ **Dekart ko'paytmalarning** $A \cup B$ **birlashmasini** qandaydir top'lamlarning

[1] *Kodd* (Edgar Frank «Ted» Codd, 1923—2003)— ingliz informatigi.

Dekart ko'paytmasi, deb qarash mumkinmi, savoli tug'iladi. Tushunarliki, agar bu Dekart ko'paytmasini tashkil qiluvchi to'plamlarni birlashtirilayotgan Dekart ko'paytmalar mos o'rinlaridagi to'plamlarning birlashmalari sifatida aniqlash mumkin bo'lsa, u holda yuqoridagi savolga ijobiy javob berilgan bo'ladi. Ammo, umumiy holda A_i va B_i to'plamlarni birlashtirib hosil qilingan Dekart ko'paytmasining tarkibiga birlashtirilayotgan A va B Dekart ko'paytmalarning ikkalasida ham mavjud bo'lmagan elementar kortejlar ham kirib qolishi mumkin. Shuning uchun $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$ va $B=\prod_{i=1}^{n} B_i$ Dekart ko'paytmalarining birlashmasi $A \cup B$ uchun $\prod_{i=1}^{n} A_i \cup \prod_{i=1}^{n} B_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} (A_i \cup B_i)$ munosabat o'rinlidir. Albatta, bu munosabat tenglik sifatida namoyon bo'ladigan hollar ham bor. Masalan, ikkita A va B Dekart ko'paytmalari uchun $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$ bo'ladi.

7-misol. Ikkita $A=\{a,c,1,\otimes\}\times\{1,\Delta\}\times\{\otimes,\Delta\}$ va $B=\{b,c,1\}\times \times\{2,a,\Delta\}\times\{\otimes\}$ Dekart ko'paytmalari berilgan bo'lsin. U holda

$$\begin{gathered}
A=\{<a,1,\otimes>,<a,1,\Delta>,<a,\Delta,\otimes>,<a,\Delta,\Delta>,\\
<c,1,\otimes>,<c,1,\Delta>,<c,\Delta,\otimes>,<c,\Delta,\Delta>,\\
<1,1,\otimes>,<1,1,\Delta>,<1,\Delta,\otimes>,<1,\Delta,\Delta>,\\
<\otimes,1,\otimes>,<\otimes,1,\Delta>,<\otimes,\Delta,\otimes>,<\otimes,\Delta,\Delta>\},\\
B=\{<b,2,\otimes>,<b,a,\otimes>,<b,\Delta,\otimes>,\\
<c,2,\otimes>,<c,a,\otimes>,<c,\Delta,\otimes>,\\
<1,2,\otimes>,<1,a,\otimes>,<1,\Delta,\otimes>\}
\end{gathered}$$

bo'lgani uchun $A \cup B$ to'plamda 23 ta kortej bo'lib, bu kortejlar

$$(\{a,c,1,\otimes\} \cup \{b,c,1\}) \times (\{1,\Delta\}) \cup \{2,a,\Delta\}) \times (\{\otimes,\Delta\} \cup \{\otimes\})$$

Dekart ko'paytmasi tarkibida qatnashadi. Lekin bu Dekart ko'paytmasini $\{a,b,c,1,\otimes\}\times\{a,1,2,\Delta\}\times\{\otimes,\Delta\}$ ko'rinishida yozsak, uning tarkibida 40 ta kortej bo'lishini ko'rish qiyin emas. Demak, $A \cup B \subset \{a,b,c,1,\otimes\} \times \{a,1,2,\Delta\} \times \{\otimes,\Delta\}$.

8-misol. Dekart ko'paytmalarning birlashmasi amaliga o'xshash amalga misol qilib MBBTda (6-misolga qarang) standart til sifatida qabul qilingan SQL (*Structured Query Language*) tilida sarlavhalari mos keluvchi ikkita *A* va *B* munosabatlarni (jadvallarni) birlashtirishda qo'llaniladigan «*A UNION B*» operatori bajaradigan amalni keltirish mumkin. SQL tilida sarlavhalari mos keluvchi *A* va *B* munosabatlarga *A UNION B* birlashtirish operatorini qo'llash natijasida sarlavhasi *A* va *B* munosabatlardagidek bo'lgan yangi munosabat hosil bo'ladi. Bu munosabatning asosiy qismi berilgan *A* va *B* munosabatlardagi kortejlar to'plamlarining birlashmasidan iborat. Masalan, 2-jadvaldagi *Y* nomli va 3-jadvaldagi *Z* nomli munosabatlarga birlastirish operatorini *Y UNION Z* ko'rinishda qo'llab, 4-jadvaldagi *YUZ* nomli munosabatga ega bo'lamiz. ■

2-jadval

Y munosabati

Bo'lim raqami	Familiyasi	Ismi	Ish haqi
1	Abdullayeva	Nazokat	100000
2	Hojiyev	Tolib	120000
3	O'rinboyev	Erkin	93000
4	Islomov	Davronqul	132000

3-jadval

Z munosabati

Bo'lim raqami	Familiyasi	Ismi	Ish haqi
1	Abdullayeva	Nazokat	100000
2	Shodiyev	Usmon	125000
3	O'rinboyev	Erkin	93000
4	Mo'minov	Muhiddin	127000

n o‘rinli ikkita $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$ va $B=\prod_{i=1}^{n} B_i$ Dekart ko‘paytmalar berilgan bo‘lsin. Bu *A* va *B Dekart ko‘paytmalarining* $A \cap B$ *kesishmasi*

$$A \cap B=\prod_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i)$$ formula yordamida aniqlanadi.

9-misol. Ikkita $\{1,3,4\}\times\{2,3\}\times\{2,3,5\}$ va $\{1,2,3,4\}\times\{1,3,4\}\times\{2,3,4\}$ Dekart ko‘paytmalari berilgan bo‘lsin. U holda Dekart ko‘paytmalarning kesishmasini aniqlash formulasiga asosan:

$$(\{1,3,4\}\times\{2,3\}\times\{2,3,5\} \cap (\{1,2,3,4\}\times\{1,3,4\}\times\{2,3,4\})=$$

$$=(\{1,3,4\} \cap \{1,2,3,4\})\times(\{2,3\} \cap \{1,3,4\})\times(\{2,3,5\}\times\{2,3,4\})=$$

$$=\{1,3,4\}\times\{3\}\times\{2,3\}.$$

Hosil bo‘lgan Dekart ko‘paytmasi quyidagi oltita elementar kortejlardan tashkil topishi ravshandir: <1,3,2>, <1,3,3>, <3,3,2>,<3,3,3>, <4,3,2>, <4,3,3>. Albatta, bu natijani har bir Dekart ko‘paytmasidagi elementar kortejlarni yozib (birinchisida 18 ta, ikkinchisida esa 36 ta elementar kortej mavjud), keyin bu kortejlardan ikkala Dekart ko‘paytmasida ham bor bo‘lganlarini olish usuli bilan ham hosil qilish mumkin. Lekin, bu usul ancha ko‘p ish bajarishni talab qiladi. ■

4-jadval

YUZ munosabati

Bo‘lim raqami	Familiyasi	Ismi	Ish haqi
1	Abdullayeva	Nazokat	100000
2	Hojiyev	Tolib	120000
3	O‘rinboyev	Erkin	93000
4	Islomov	Davronqul	132000
2	Shodiyev	Usmon	125000
4	O‘rinboyev	Erkin	93000
5	Mo‘minov	Muhiddin	127000

10-misol. Dekart ko'paytmalar kesishmasini aniqlash formulasidan foydalanish bu kesishmaning bo'sh to'plam bo'lib qoladigan hollar uchun yanada ahamiyatlidir. Masalan,

$$(\{a,c,d\}\times\{b,c\}\times\{b,c,e\})\cap(\{a,b,d\}\times\{a,d\}\times\{b,c,d\})=$$

$$=\{a,d\}\times\varnothing\times\{b,c\}=\varnothing. \blacksquare$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $<\{a,b\},c,d>=<\{b,a\},c,d>$ tenglik o'rinli bo'lishini izohlang.
2. $<a,<b,c>,d>$ va $<a,<c,b>,d>$ kortejlarni solishtiring.
3. Universitetning xazinasidan oylik maoshini olish maqsadida navbatda turgan olti kishidan uch nafari assistent (a), ikki nafari dotsent (d) va biri professor (p) bo'lsa, bu kishilar navbatda turishining mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlarini aniqlang va bu imkoniyatlarga mos kortejlarni yozing.
4. Morze alifbosida qo'llaniladigan nuqta va tire belgilaridan foydalanib, 1, 2, 3 va 4 o'rinli barcha kortejlarni tuzing.
5. Dekart ko'paytmalarining birlashmasi va kesishmasi amallarining qo'llanilishiga doir amaliy misollar keltiring.

Mustaqil ishlash uchun savollar

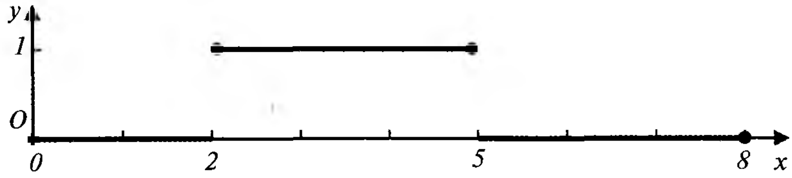
1. Kortej tushunchasining mohiyati nimadan iborat?
2. To'plam va kortej tushunchalari bir-biridan nima bilan farq qiladi?
3. Kortejning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
4. Qanday kortejlar teng deb ataladi?
5. Kortejning koordinatalari nima?
6. Kortejning koordinatasi kortej bo'lishi mumkinmi?
7. Dekart ko'paytmasi deganda nimani tushunasiz?
8. Dekart ko'paytmasining qismi nima?
9. To'plamning darajasi tushunchasi qanday aniqlanadi?
10. Dekart ko'paytmalarining birlashmasi tushunchasi uchun qanday munosabatni yozish mumkin?
11. Dekart ko'paytmalarining kesishmasi qanday formula yordamida aniqlanadi?

5-§. Fazzi to'plamlar

To'plam. Element. Universal to'plam. Fazzi to'plam. A'zolik funksiyasi. O'tish nuqtasi. Fazzi to'plamning balandligi. Bo'sh, qism, normal, subnormal, unimodal, bir-birini to'ldiruvchi fazzi to'plamlar. To'ldirish, birlashma, kesishma va ayirma amallari.

5.1. Asosiy tushuncha va ta'riflar. To'plamlar nazariyasini o'rganishda davom etib quyidagi misolni qarab chiqamiz.

1-misol. [0, 8] segmentda joylashgan haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plam U universal to'plam sifatida qabul qilinsa, A=[2, 5] to'plam uchun $A \subset U$ bo'lishi ravshandir. 1-shaklda Oxy Dekart



1-shakl.

koordinatalari sistemasi tasvirlangan bo'lib, Ox sonlar o'qining [0, 8] segmentida joylashgan [0, 2) va [5, 8] to'plamlarning har bir x nuqtasiga Oy sonlar o'qining 0 hamda [2, 5] to'plamning har bir x nuqtasiga 1 qiymati mos qo'yilgan, ya'ni

$$y=\begin{cases} 1, x\in U, x\in A \text{ bo'lganda}, \\ 0, x\in U, x\notin A \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

Agar y ni x ning U to'plamda aniqlangan $y=y(x)$ funksiyasi deb hisoblasak, u holda $y(x)$ funksiya $x\in U$ elementning A to'plamga tegishli bo'lish-bo'lmasligi xossasini (xususiyatini, xarakterini, xarakteristikasini) ifodalaydi.

Endi O'zbekiston Respublikasining o'rta yoshli fuqarolari to'plamini qaraymiz. Agar, shartli ravishda, yoshi 25 dan 45 gacha bo'lgan fuqarolarni o'rta yoshli deb hisoblasak, bu yerda ham Dekart koordinatalari sistemasidan foydalanib, O'zbekiston Respublikasi fuqarolarining tug'ilgan kunlariga qarab, bugungi kun uchun ularning yoshlarini aniqlash va 1-shaklda tasvirlangan grafikka o'xshash grafik hosil qilish mumkin. Lekin bu o'rinda qiziq savol paydo bo'ladi: «Bugun 25 yoshga to'lgan fuqaro kecha yosh edi, endi o'rta yoshli yoki bugun 45 yoshini nishonlagan o'rta yoshli fuqaro ertaga qari bo'lib qoladimi?» Bu savolga matematik nuqtayi nazardan qat'iy javob beriladigan bo'lsa (masalan, statistik ma'lumotlar uchun), «albatta, ha», ammo unga hayotiy nuqtayi nazardan yondashilsa, «albatta, yo'q» javobi berilishi tabiiydir. ■

Bu misoldan ko'rinib turibdiki, ba'zan, to'plam elementlarining shu to'plamga tegishliligini aniqlaganda vaziyatni qandaydir ma'noda «yumshatuvchi» usuldan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Ya'ni to'plam elementlarining shu to'plamga tegishliligini emas, tegishlilik darajasini aniqlash ko'p vaziyatlarda to'g'ri qarorlar qabul qilish uchun ma'qul hisoblanadi. Boshqacha aytganda, «Qandaydir narsa, predmet va shunga o'xshashlar biror to'plamga tegishlimi?» degan savolga ma'nosi nuqtayi nazardan bir-biriga zid bo'lgan ikkita «tegishli» yoki «tegishli emas» javoblardan biri o'rniga bu narsaning o'sha to'plamga tegishliligi darajasini ifodalovchi qiymat o'zida ko'proq ma'lumotni saqlashi ravshandir.

1965-yilda Lutfi Ali-Asqar Zoda[1] «Information and Control» jurnalida «Fuzzy sets» nomli maqolasini e'lon qilgandan so'ng yuqoridagiga o'xshash ko'plab savollarga javob topildi. Bundan tashqari, bu ilmiy ish nafaqat to'plamlar nazariyasida, shuningdek, matematikaning boshqa sohalarida ham, hozirgi davrda «Informatika», deb yuritiluvchi fan sohasida ham burilish yasalishiga sabab bo'ldi. Lutfi Zodaning yuqorida zikr etilgan maqolasi va uning o'sha mavzuga bag'ishlangan keyingi ilmiy ishlari dunyoning turli mamlakatlari tillariga tarjima qilindi va o'rganildi. Dastlabki yillarda bu ilmiy ishlar «haqiqatga zid», «hech qanday ilmiy asosga ega emas» deganlar ham bo'ldi. Hozirgi davrda asosida Lutfi Zoda g'oyalari yotuvchi turli yo'nalishlar bo'yicha muvaffaqiyatli ilmiy va amaliy ishlar olib borilmoqda.

Lutfi Zoda

1-ta'rif. $(\mu_A(x),x)$ ko'rinishdagi juftliklar to'plami berilgan X universal to'plamda aniqlangan A ***fazzi to'plam*** *deb ataladi, bunda $x \in X$ va $(\mu_A(x)$ — qiymatlari sohasi [0, 1] bo'lgan, a'zolik funksiyasi, deb ataluvchi funksiya.*

[1] Bu AQSH matematigi va informatigining ism-sharifi inglizcha Lotfi Asker Zadeh (qisqacha Lotfi Zadeh), forscha لطفی علی‌عسکرزاده shaklda yoziladi. U 1921-yilda Bokuda tug'ilgan. Otasi eronlik ozarbayjon, onasi rus. Oilasi bilan 1932-yilda Eronga, 1944-yilda esa AQSHga ko'chib borgan.

Bu ta'rifda «fazzi to'plam» iborasi ingliz tilidagi «fuzzy set» iborasi tarkibiga kiruvchi «fuzzy» so'zini o'zbek tiliga tarjima qilmasdan berildi. Buning sababi shuki, ingliz tilining «fuzzy» so'zi juda ko'p, jumladan, yumshoq, mayin, momiqday, tivitli, parli, ochiq-oydin emas, aniq emas, noaniq, sof emas, tiniq emas, yorqin emas, oydun emas, g'ayrioddiy, xira, mujmal, oshkor emas, g'ira-shira, cho'ziluvchan, qarovsiz qoldirilgan, tashlab qo'yilgan, xarob, tashlandiq, o'tkazib yuborilgan, kabi ma'nolarda ishlatiladi. Albatta, sanab o'tilganlarning har birini ingliz tilidagi «fuzzy» so'zining o'rniga qo'yib atama yasash mumkin. Lekin, bizning fikrimizcha, bunday atamalarning hech qaysisi «fuzzy set» atamasining asl ma'nosini bermaydi. Ozarbayjon tiliga ingliz tilidagi «fuzzy» so'zi «qeyri-səlis» shaklda tarjima qilingan. Fors tilida «fuzzy set» atamasi bilan bog'liq ishlarda « مجموع فازی » («majmuayi fazzi») shakli ko'p qo'llaniladi. Rus tilida yozilgan ishlarga murojaat qiladigan bo'lsak, «fuzzy set» iborasi dastlab «расплывчатое множество» shaklda ishlatilgan bo'lsa, keyinchalik «нечеткое множество» iborasidan foydalanish odat tusiga kirdi.

1-ta'rifga ko'ra berilgan X universal to'plamda aniqlangan fazzi to'plam uchun «X to'plamning x elementi shu fazzi to'plamga tegishlimi?» degan savolga bir qiymatli «ha» yoki «yo'q» javobi berilmaydi. Fazzi to'plam ta'rifida keltirilgan a'zolik funksiyasi x elementning shu fazzi to'plamga a'zolik (tegishlilik, taalluqlilik) xususiyatini (xarakteristikasini) qandaydir ma'noda yumshatuvchi vosita hisoblanadi. Bu yerda a'zolik funksiyasi iborasi o'rniga *xarakteristik funksiyasi, tegishlilik funksiyasi* yoki *taalluqlilik funksiyasi* iborasidan ham foydalanish mumkin. A'zolik $\mu_A(x)$ funksiyasining universal to'plamdagi muayyan x element uchun aniqlangan qiymati x ning A fazzi to'plamga *a'zolik (tegishlilik, taalluqlilik) darajasini* ifodalaydi.

Agar universal to'plamning qandaydir x elementi uchun ($\mu_A(x)$ funksiya 0 qiymat qabul qilsa, shu x berilgan A fazzi to'plamga so'zsiz (shubhasiz, mutlaqo) a'zo emas (tegishli emas, taalluqli emas), 0 qiymat qabul qilganda esa, u A to'plamning so'zsiz a'zosi deb hisoblanadi.

1-ta'rifdan ko'rinib turibdiki, biz ilgari o'rganib kelgan «oddiy» to'plamlar sinfi fazzi to'plamlar sinfining bir qismidir. Haqiqatan ham, agar B qandaydir X universal to'plamda berilgan oddiy to'plam ($B \subseteq X$) bo'lsa, u holda

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1, \text{agar } x\in X \text{ va } x\in B \text{ bo'lsa,}\\ 0, \text{agar } x\in X \text{ va } x\notin B \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$

funksiya B to'plamning a'zolik funksiyasi bo'ladi.

2-ta'rif. Agar berilgan X universal to'plamda $\mu_A(x)$ a'zolik funksiyasi bilan aniqlangan A fazzi to'plam barcha $x \in X$ elementlar uchun $\mu_A(x)=0$ shartni qanoatlantirsa, u holda A ***bo'sh*** *fazzi to'plam, deb ataladi.*

Bo'sh fazzi to'plamni belgilashda odatdagi $\varnothing$ belgi qo'llaniladi.

Fazzi to'plamning berilishi ko'p jihatdan a'zolik funksiyasining aniqlanishiga bog'liq bo'lgani uchun bu o'rinda subyektiv fikr o'z ta'sirini o'tkazishi tabiiydir. Odatda, fazzi to'plamlarni aniqlashda soddaroq a'zolik funksiyalari bilan ish ko'rishga harakat qilinadi.

Fazzi to'plamlarni ifodalashda turli usullar uchraydi, jumladan, Lutfi Zodaning fazzi to'plamlarga oid ilmiy ishlarida quyidagi atamalar va belgilashlar qo'llanilgan.

Agar $\mu_A : X \to [0,1]$ a'zolik funksiyasi X universal to'plamning har bir x elementiga $[0,1]$ oraliqdan olingan qandaydir $\mu_A(x)$ qiymat mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda *A fazzi qism to'plam* berilgan, deb hisoblanadi. X to'plamning $\mu_A(x)>0$ bo'lgan barcha x elementlari to'plami A fazzi qism to'plamning *tashuvchisi,* deb ataladi. Tashuvchisi faqat bir nuqtadan iborat fazzi to'plam *bir nuqtali fazzi to'plam,* deb ataladi. Agar A — tashuvchisi x nuqta bo'lgan bir nuqtali fazzi to'plam bo'lsa, u holda bu to'plam $A=\mu/x$ ko'rinishda belgilanadi, bu yerda μ — x ning A ga a'zolik darajasi. U holda bitta x elementdan tashkil topgan oddiy to'plamni $1/x$ deb yozish mumkin.

X to'plamning $\mu_A(x)= 0{,}5$ shartni qanoatlantiruvchi x elementi A ning *o'tish nuqtasi*, deb ataladi.

Berilgan X universal to'plamda $\mu_A(x)$ a'zolik funsiyasi bilan aniqlangan A fazzi to'plamni uning bir nuqtali fazzi to'plamlari birlashmasi sifatida

$$A=\int_U \mu_A(x)/x$$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda integral belgisi $\mu_A(x)/x$ ko'rinishdagi bir nuqtali fazzi to'plamlari birlashmasi amalini (birgalikda deb hisoblashni) anglatadi. Agar A ning tashuvchisi chekli sondagi elementlardan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi integral belgisi o'rniga yig'indi belgisini qo'yish mumkin:

$$A=\mu_1/x_1+\mu_2/x_2+\ldots+\mu_n/x_n \text{ yoki } A=\sum_{i=1}^{n}\mu_1/x_1,$$

bu yerda ham yig'indi belgisi qo'shish amalini emas, bir nuqtali fazzi to'plamlar birlashmasi amalini anglatadi, μ_i ($i= 1,2,\ldots,n$) —x_i elementning A to'plamga a'zolik darajasi. Berilgan A fazzi to'plamni

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \end{array}$$

ko‘rinishda ham belgilash mumkin. Oxirgi belgilash ehtimollar nazariyasidagi tasodifiy miqdorni belgilashni eslatsa-da, fazzi to‘plam tushunchasini tasodifiy miqdor tushunchasi bilan tenglashtirib bo‘lmaydi.

2-misol. Universal to‘plam sifatida $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ to‘plam berilgan va unda A fazzi to‘plamning $\mu_A(x)$ a’zolik funksiyasi $\mu_A(x_1)= 0{,}4$, $\mu_A(x_2)=1$, $\mu_A(x_3)=0$, $\mu_A(x_4)=0{,}9$, $\mu_A(x_5)=0{,}5$ tengliklar vositasida aniqlangan bo‘lsin. Berilgan A fazzi to‘plamni quyidagi shakllarda ifodalash mumkin:

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0{,}4 & 1 & 0 & 0{,}9 & 0{,}5 \end{array}$$

$$A= \{0{,}4/x_1;\ 1/x_2;\ 0/x_3;\ 0{,}9/x_4;\ 0{,}5/x_5\},$$

$$A= \{0{,}4/x_1+ 1/x_2+ 0/x_3+ 0{,}9/x_4+ 0{,}5/x_5\}. \ \blacksquare$$

3-ta’rif. $\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)$ *kattalik berilgan X universal to‘plamda $\mu_A(x)$ a’zolik funsiyasi bilan aniqlangan A fazzi to‘plamning* ***balandligi,*** *deb ataladi.*

4-ta’rif. Balandligi 1ga teng fazzi to‘plam ***normal,*** *balandligi 1dan kichik fazzi to‘plam esa* ***subnormal*** *fazzi to‘plam, deb ataladi.*

5-ta’rif. Agar berilgan X universal to‘plamda $\mu_A(x)$ a’zolik funsiyasi bilan aniqlangan A fazzi to‘plam uchun faqat bitta $x\in X$ elementda $\mu_A(x)=1$ bo‘lsa, u holda A ***unimodal*** *fazzi to‘plam, deb ataladi.*

Berilgan X universal to‘plamda $\mu_A(x)$ a’zolik funsiyasi bilan aniqlangan bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy A subnormal fazzi to‘plamni

$\mu_A(x) := \dfrac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)}$ formuladan foydalanib normal fazzi to‘plam

qilib ifodalash imkoniyati bor.

X universal to‘plamda, mos ravishda, $\mu_A(x)$ va $\mu_B(x)$ a’zolik funsiyalari bilan aniqlangan A va B fazzi to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

6-ta'rif. Agar barcha $x \in X$ elementlar uchun $\mu_A(x)=\mu_B(x)$ tenglik bajarilsa, u holda A va B fazzi to'plamlar o'zaro teng, deb ataladi.

Fazzi to'plamlarning o'zaro tengligi iborasi o'rniga, ba'zan, *ekvivalentligi* iborasi ham qo'llaniladi. A va B fazzi to'plamlarning o'zaro tengligi, odatdagidek, $A = B$, ekvivalentligi esa $A \sim B$ shaklda belgilanadi.

7-ta'rif. Agar barcha $x \in X$ elementlar uchun $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ tengsizlik bajarilsa, A fazzi to'plam B fazzi to'plamning qism to'plami deb ataladi.

Agar A fazzi to'plam B fazzi to'plamning qism to'plami bo'lsa, u holda $A \subseteq B$ deb yoziladi va A (fazzi to'plam) B da (fazzi to'plamda) *yotadi* yoki B A ni *o'z ichiga oladi (qamraydi)*, deb o'qiladi. Masalan, «juda katta sonlar» fazzi to'plami «katta sonlar» fazzi to'plamini o'z ichiga oladi.

8-ta'rif. Agar barcha $x \in X$ elementlar uchun $\mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$ tenglik bajarilsa, u holda A va B fazzi to'plamlar bir-birini to'ldiradi, deb ataladi.

Bir-birini to'ldiruvchi A va B fazzi to'plamlar uchun $B=\overline{A}$ yoki $A=\overline{B}$ belgilashlardan foydalanish mumkin.

3-misol. {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} universal to'plam bo'lsin. Bu to'plamda A=«Bir nechta» fazzi to'plami quyidagicha aniqlanishi va ifodalanishi mumkin:

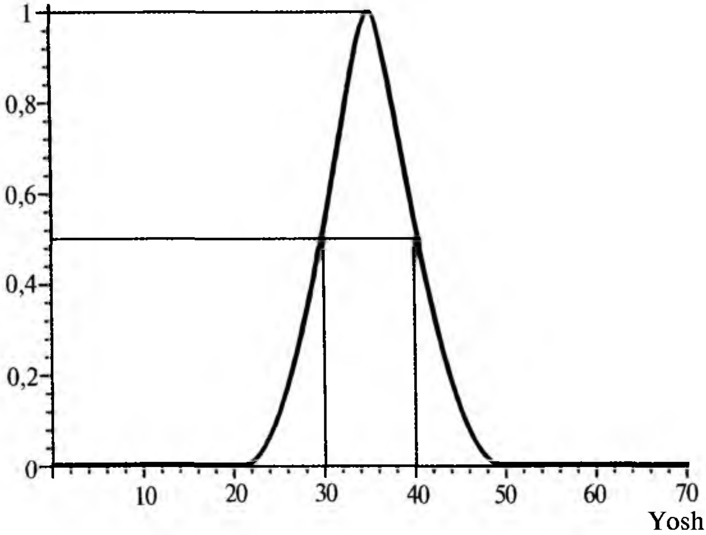
$$A = 0{,}5/3+0{,}8/4+1/5+1/6+0{,}8/7+0{,}5/8. \blacksquare$$

4-misol. $\{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ universal to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamda aniqlangan «Oz» fazzi to'plami uchun a'zolik funksiyasini, masalan, $\mu_{«Oz»}(n)=\dfrac{1}{1+(0{,}1n)^2}$ ko'rinishda ifodalash mumkin. ■

5-misol. 1-misoldagi vaziyatga qaytib, universal to'plam sifatida [0, 70] segmentni qaraymiz. O'zbekiston Respublikasining o'rta yoshli fuqarolari to'plamini o'rganish uchun «O'rta yosh» fazzi to'plamini aniqlash mumkin. Bu yerda a'zolik funksiyasi sifatida, masalan, grafigi 2- shaklda tasvirlangan quyidagi funksiyani keltirsa bo'ladi:

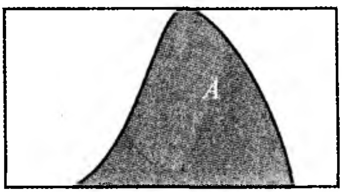
$$\mu_{«\text{O'rta yosh}»}(x)=\begin{cases} 0, \text{agar } 0\leq x\leq 20 \text{ yoki } 50<x\leq 70 \text{ bo'lsa}, \\ 0{,}005\cdot(x-20)^2, \text{agar } 20<x\leq 30 \text{ bo'lsa}, \\ 1/(1+((x-35)/5)^2), \text{agar } 30<x\leq 40 \text{ bo'lsa}, \\ 0{,}005\cdot(x-50)^2, \text{agar } 40<x\leq 50 \text{ bo'lsa}. \end{cases}$$

«O‘rta yosh» uchun a’zolik funksiyasi grafigi



2-shakl.

«O‘rta yosh» fazzi to‘plamining tashuvchisi (20, 50) to‘plamdir. Uning ikkita x_1=30 va x_3=40 o‘tish nuqtalari bor. $\sup\mu\, x\in[0, 70]_{«O‘rta\ yosh»}(x)=\mu_{«O‘rta\ yosh»}(35)=1$ bo‘lgani uchun «O‘rta yosh» fazzi to‘plamining balandligi 1 ga teng, ya’ni u normal fazzi to‘plamdir. Bu to‘plam unimodal fazzi to‘plamdir, chunki uning a’zolik funksiyasi faqat bitta x=35 nuqtada 1 qiymat qabul qiladi. ■



3-shakl.

Fazzi to‘plamning mohiyatini yaxshiroq anglash maqsadida, uni, odatda, shartli ravishda, 3-shakldagiga oxshash tasvirlashadi. Bu shaklda to‘g‘ri to‘rtburchak universal to‘plamga, egri chiziq A fazzi to‘plam uchun a’zolik funksiyasiga mos keladi, fazzi to‘plamning o‘zi esa bo‘yab tasvirlangan.

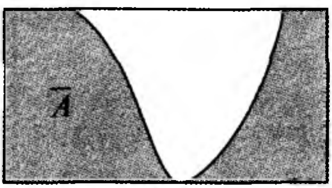
5.2. Fazzi to‘plamlar ustida amallar. Fazzi to‘plamlar ustida turli amallar bajarish mumkin. Bu amallar odatdagi so‘zlashuv tilida uchraydigan ayrim iboralar bilan bog‘liqdir. Bunday iboralar jumlasiga «emas», «va», «yoki», «ancha», «sal», «sal-pal», «o‘ta», «juda», «uncha-muncha», «sezilarli (darajada)», «ko‘plab», «ko‘proq», «ozgina», «g‘ira-shira», «yaxshi», «yaxshiroq», «yomon», «yomonroq», «o‘xshash», «qariyb» va boshqalar kiradi. Bu iboralarning ba’zilari vaziyatni yetarli darajada aniq ifodalaydi, masalan, «emas» so‘zi o‘zidan oldin kelgan so‘zni inkor qiladi. Lekin, bu iboralarning ko‘pchlilgi u bilan bog‘liq so‘zni (sifatni, xossani) qay darajada kuchaytirishi yoki susaytirishini anglash uchun vaziyatni e’tiborga olish kerak bo‘ladi.

Quyida fazzi to‘plamlar ustida bajarish mumkin bo‘lgan ba’zi amallar keltiriladi. Albatta, bu amallar ma’noga ega bo‘lishlari uchun muayyan shartlar bajarilishi kerak, masalan, qaralayotgan fazzi to‘plamlar bitta universal to‘plamda aniqlangan bo‘lishi kerak. Bundan buyon fazzi to‘plamlar bilan ish ko‘rganda, zarur bo‘lmasa, universal to‘plamning berilishiga to‘xtalmaymiz.

A va B fazzi to‘plamlar, mos ravishda, $\mu_A(x)$ va $\mu_B(x)$ a’zolik funksiyalari bilan berilgan bo‘lsin.

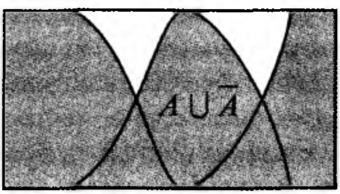
9-ta’rif. Agar $B=\overline{A}$ bo‘lsa, u holda B fazzi to‘plam A fazzi to‘plamdan to‘ldirish amalini qo‘llash natijasida hosil qilindi, deb aytiladi.

To‘ldirish amaliga «emas» bog‘lovchisini mos qo‘yish mumkin. 9-ta’rifga ko‘ra agar berilgan A fazzi to‘plamdan to‘ldirish amalini qo‘llash natijasida $\overline{A}$ fazzi to‘plam hosil qilingan bo‘lsa, u holda $\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x)$ bo‘ladi. 3-shaklda keltirilgan A fazzi to‘plamdan to‘ldirish amalini qo‘llash natijasida hosil qilingan $\overline{A}$ fazzi to‘plam 4-shaklda tasvirlangan.



4-shakl.

*10-ta’rif. A’zolik funksiyasi $\mu_{A\cup B}=\max(\mu_A(x),\mu_B(x))$ bo‘lgan $A\cup B$ fazzi to‘plam berilgan A va B fazzi to‘plamlarning **birlashmasi**, deb ataladi.*



5-shakl.

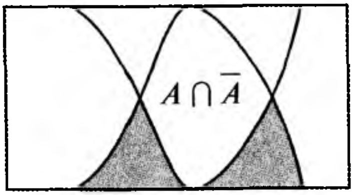
Odatda, «berilgan A va B fazzi to‘plamlarga *birlashma* amalini qo‘llab $A\cup B$ fazzi to‘plam hosil qilindi», deb yuritiladi. Birlashma amaliga «yoki» bog‘lovchisini mos qo‘yish mumkin. 3- va 4- shakllarda keltirilgan A va $\overline{A}$ fazzi to‘plamlarning $A\cup A$ birlashmasi 5-shaklda tasvirlangan.

11-ta'rif. A'zolik funksiyasi

$$\mu_{A\cup B} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

bo'lgan *$A \cap B$ fazzi to'plam berilgan A va B fazzi to'plamlarning kesishmasi, deb ataladi.*

11-ta'rifdan ko'rinib turibdiki, berilgan A va B fazzi to'plamlarning kesishmasini belgilashda ham yangilik yo'q, bu yerda odatdagi $A \cap B$ ifoda qo'llaniladi. $A \cap B$ yozuv «A va B fazzi to'plamlarga *kesishma* amalini qo'llab $A \cap B$ fazzi to'plam hosil qilindi», deb o'qiladi. Kesishma amaliga «va» bog'lovchisini mos qo'yish mumkin. 6-shaklda tasvirlangan fazzi to'plam 3- va 4-shakllarda keltirilgan A va B fazzi to'plamlarning $A \cap \overline{A}$ kesishmasidir.



6-shakl.

6-misol. 4-misolda keltirilgan «Oz» fazzi to'plamga to'ldirish amalini qo'llab $\{0,1,2,3,...,n,...\}$ universal to'plamda aniqlangan «Oz emas» fazzi to'plamni hosil qilish mumkin. U holda «Oz emas» fazzi to'plamining a'zolik funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$\mu_{«Oz\,emas»}(n) = 1 - \mu_{«Oz»}(n) = 1 - \frac{1}{1+(0{,}1n)^2} = \frac{(0{,}1n)^2}{1+(0{,}1n)^2}. \blacksquare$$

12-ta'rif. A'zolik funksiyasi

$$\mu_{A\setminus B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), \textit{agar } \mu_A(x) \geq \mu_B(x) > 0 \textit{ bo'lsa}, \\ 0, \textit{aks holda}, \end{cases}$$

bo'lgan $A\setminus B$ fazzi to'plam berilgan A va B fazzi to'plamlarning ayirmasi deb ataladi.

Fazzi to'plamlar ustida yuqorida bayon qilingan amallardan tashqari, *kuchli birlashma, algebraik yig'indi, kuchli kesishma, algebraik ko'paytma, Dekart ko'paytma, kosentrlash (jipslash), cho'zish, songa ko'paytirish* va boshqa turli amallar ham kiritilgan.

5.3. Fazzi to'plamlarning asosiy xossalari. Berilgan X universal to'plamda aniqlangan ixtiyoriy A, B va C fazzi to'plamlar uchun quyidagi xossalar o'rinlidir.

1. Kommutativlik.

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

2. Assotsiativlik.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Idempotentlik.

$$A \cup A = A, A \cap A = A.$$

4. Distributivlik.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5. Nolning xossalari.

$$A \cup \varnothing = A, \varnothing \cup A = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad \varnothing \cap A = \varnothing.$$

6. Birning xossalari.

$$A \cap X = A, \quad X \cap A = A, \quad A \cup X = X, \quad X \cup A = X.$$

7. De-Morgan qonunlari.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

8. Involutivlik qonuni.

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Tabiiyki, bu xossalarning har birini qat'iy isbotlash mumkin. Distributivlik xossasini ifodalovchi tengliklardan faqat birinchisining, ya'ni $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ tenglikning *isbotini* keltiramiz. Qolgan barcha tengliklarning isbotini o'quvchiga topshiriq sifatida havola qilamiz.

Fazzi to'plamlarning tengligi, birlashmasi va kesishmasi ta'riflariga ko'ra ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\min\{\mu_A(x), \ \max\{\mu_B(x), \ \mu_C(x)\}\} =$$
$$= \ \max\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\}$$

tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatish zarur.

Faraz qilaylik, $a = \mu_A(x)$, $b = \mu_B(x)$, $c = \mu_C(x)$ bo'lsin. a, b va c sonlar uchun quyidagi 15 holdan biri ro'y berishi muqarrardir:

1) $a>b>c$;	2) $a>b=c$;	3) $a=b>c$;
4) $a=b=c$;	5) $a>c>b$;	6) $a>c=b$;
7) $a=c>b$;	8) $b>a>c$;	9) $b>a=c$;
10) $b>c>a$;	11) $b>c=a$;	12) $b=c>a$;
13) $c>a>b$;	14) $c>a=b$;	15) $c>b>a$.

Har bir hol uchun yuqoridagi tenglik o'rinlidir:

1) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=b$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=b$;

2) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=b=c$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=b=c$;

3) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=b=a$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=b=a$;

4) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a=b=c$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a=b=c$;

5) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,c\}=a$;

6) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$;

7) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=c$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=c$;

8) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=b=c$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{b,c\}=b=c$;

9) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a=c$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{b,a\}=a=c$;

10) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$;

11) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a=c$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a=c$;

12) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,b\}=a$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$;

13) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{b,a\}=a$;

14) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a=b$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a=b$;

15) $\min\{a,\max\{b,c\}\}=\min\{a,c\}=a$,
$\max\{\min\{a,b\},\ \min\{a,c\}\}=\max\{a,a\}=a$. ■

Ta'kidlaymizki, oddiy to'plamlardan farqli o'laroq, fazzi to'plamlar uchun, umumiy holda, $A\cup\overline{A}\neq X$, $A\cap\overline{A}\neq\varnothing$ (5- va 6-shakllarga qarang).

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Universal to'plam $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ shaklda berilgan va unda A fazzi to'plamning $\mu_A(x)$ a'zolik funksiyasi $\mu_A(x_1)=0,3$, $\mu_A(x_2)=0$, $\mu_A(x_3)=0,5$, $\mu_A(x_4)=0,9$, $\mu_A(x_5)=1$, $\mu_A(x_6)=0,8$

tengliklar vositasida aniqlangan bo‘lsin. Yuqorida bayon qilingan belgilashlardan foydalanib berilgan A fazzi to‘plamni ifodalang. A fazzi to‘plam misolida fazzi to‘plam tashuvchisi, o‘tish nuqtasi, balandligi va unimodal fazzi to‘plam kabi tushunchalarni o‘rganing. A fazzi to‘plamning normal yoki subnormal bo‘lishini tekshiring. $\overline{A}$ to‘ldiruvchi fazzi toplamni aniqlang.

2. Universal to‘plam $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ shaklda berilgan va unda

$$A = 0{,}4/x_1 + 0{,}2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$$
$$B = 0{,}7/x_1 + 0{,}9/x_2 + 0{,}1/x_3 + 1/x_4$$
$$C = 0{,}1/x_1 + 1/x_2 + 0{,}2/x_3 + 0{,}9/x_4$$

fazzi toplamlar aniqlangan bo‘lsin.

a) Bu fazzi to‘plamlarning barcha juftlari uchun orasiga «$\subseteq$» belgisini qo‘yish mumkin bo‘lganlarini aniqlang.

b) Bu fazzi to‘plamlarning har biri uchun to‘ldiruvchi fazzi toplamni aniqlang.

d) Bu fazzi to‘plamlarning barcha juftlari uchun birlashma, kesishma va ayirma amallarini qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan fazzi to‘plamlarni toping.

3. X=(50, 100) universal to‘plamda aniqlangan A=«Qari» fazzi to‘plamning a’zolik funksiyasi

$$\mu_{\text{«Qari»}}(x) = (1 + ((x - 50)/5)^{-2})^{-1}$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin.

a) A fazzi to‘plamning balandligini topib uning normal fazzi to‘plam emasligini ko‘rsating.

b) A fazzi to‘plam uchun o‘tish nuqtasini toping.

d) A ning unimodal fazzi to‘plam bo‘lish-bo‘lmasligini tekshiring.

4. «1 ga yaqin miqdor» va «1 ga juda yaqin miqdor» fazzi to‘plamlarini aniqlang va ulardan foydalanib nazariy ma’lumotlarni talqin qiling.

5. Fazzi to‘plamlarning asosiy xossalarini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qaysi maqola fazzi to‘plamlar bilan bog‘liq ilmiy ishlarning paydo bo‘lishiga asos bo‘ldi?
2. Fazzi to‘plam nima?
3. A’zolik funksiyasi deganda nimani tushunasiz?

4. Fazzi qism to'plamning tashuvchisi nima?
5. Fazzi to'plamning o'tish nuqtasi qanday aniqlanadi?
6. Fazzi to'plamlarni ifodalashning qanday usullarini bilasiz?
7. Fazzi to'plamning balandligi deganda nimani tushunasiz?
8. Bo'sh fazzi to'plam qanday aniqlanadi?
9. Normal va subnormal fazzi to'plamlar bir-biridan qanday farqlanadi?
10. Unimodal fazzi to'plam bo'sh fazzi to'plam bo'lishi mumkinmi?
11. Qanday shartlar bajarilsa, berilgan fazzi to'plamlar o'zaro teng deb hisoblanadi?
12. Qism fazzi to'plam tushunchasi qanday aniqlanadi?
13. Bir-birini to'ldiruvchi fazzi to'plamlar uchun a'zolik funksiyalari o'zaro qanday munosabatda bo'ladi?
14. Berilgan fazzi to'plamlar birlashmasi bilan ularning kesishmasi bir-biridan qanday farqlanadi?
15. Fazzi to'plamlarning qanday xossalarini bilasiz?
16. Oddiy to'plamlar uchun o'rinli, lekin fazzi to'plamlar uchun o'rinli bo'lmagan tenglik topa olasizmi?

6-§. Munosabatlar

Munosabat. Tartiblangan juftlik. Unar, binar va n-ar munosabatlar. Aniqlanish va qiymatlar sohalari. Refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar. Ekvivalentlik sinfi. Funksiya. Funksiyalar tengligi. Bir qiymatli va teskari funksiyalar. Superpozitsiya. Funksiyalarning funksiyasi. Antisimmetrik va irrefleksiv munosabatlar. Tartiblash, qisman tartiblash va chiziqli tartiblash munosabatlari. Qisman tartiblangan to'plam.

6.1. Binar munosabat. Diskret matematikada fundamental tushunchalardan biri bo'lgan *munosabat* tushunchasi predmetlar (narsalar) va tushunchalar orasidagi aloqani ifodalaydi. Quyidagi to'liqsiz gaplar munosabatlarga misol bo'la oladi:

... kichik ... dan, ... teng ... ga, ... bo'linadi ... ga va hokazo.

Odatda, munosabat tushunchasi to'plamlar nazariyasi nuqtayi nazaridan turib o'rganiladi. Munosabat tushunchasiga aniqlik kiritish uchun *tartiblangan juftlik* tushunchasini o'rganamiz.

1-ta'rif. Ma'lum tartibda joylashgan ikki predmetdan tuzilgan kortej tartiblangan juftlik, deb ataladi.

Odatda, tartiblangan juftlik quyidagi xususiyatlarga ega, deb faraz qilinadi:

1) ixtiyoriy x va y predmetlar uchun $<x,y>$ kabi belgilanadigan muayyan obyekt mavjud bo'lib, har bir x va y predmetlarga yagona tartiblangan $<x,y>$ juftlik mos keladi ($<x,y>$ yozuv «x va y ning tartiblangan juftligi» deb o'qiladi);

2) agar ikkita $<x,y>$ va $<u,v>$ tartiblangan juftlik uchun $x=u$ va $y=v$ bo'lsa, u holda $<x,y>=<u,v>$ bo'ladi.

$<x,y>$ tartiblangan juftlik $<x,y>=\{\{x\},\{x,y\}\}$ ko'rinishdagi to'plamdir, ya'ni u shunday ikki elementli to'plamki, uning bir elementi $\{x, y\}$ tartibsiz juftlikdan iborat, boshqa $\{x\}$ elementi esa, shu tartibsiz juftlikning qaysi hadi birinchi hisoblanishi kerakligini ko'rsatadi.

Tartiblangan juftliklardan birgalikda *tartiblangan juftliklar to'plamini* tashkil etishadi.

2-ta'rif. $<x,y>$ tartiblangan juftlikdagi x uning birinchi koordinatasi, y esa ikkinchi koordinatasi, deb ataladi.

Tartiblangan juftliklar atamasi asosida *tartiblangan n-liklarni* aniqlash mumkin. x, y va z predmetlarning tartiblangan uchligi $<x,y,z>$ quyidagi tartiblangan juftliklar shaklida aniqlanadi: $<<x, y>,z>$. Xuddi shu kabi $x_1, x_2,...,x_n$ predmetlarning tartiblangan n-ligi $<x_1, x_2,...x_n>$, ta'rifga asosan, $<<x_1, x_2,...,x_{n-1}>, x_n>$ tarzda aniqlanadi.

Matematik mantiqda *n-ar munosabat* tartiblangan n-liklar to'plami sifatida aniqlanadi. Ba'zan n-ar munosabat iborasi o'rniga *n o'rinli munosabat* iborasi qo'llaniladi. Agar munosabat bir o'rinli bo'lsa, u holda u *unar munosabat*, ikki o'rinli bo'lganda esa *binar munosabat*, deb ataladi. Unar munosabat *xossa* (*xususiyat*) deb ham yuritiladi. Adabiyotda, ko'pincha, 3-ar munosabat *ternar munosabat*, deb nomlanadi.

1-misol. $\{<2,4>,<5,6>,<7,6>,<8,8>\}$ tartiblangan juftliklar to'plami binar munosabatdir. ■

2-misol. Agar ρ ayniyat munosabatini bildirsa, u holda $<x, y> \in \rho$ yozuv $x=y$ ayniyatni bildiradi. ■

3-misol. Agar ρ onalik munosabatini bildirsa, u holda <Xurshida, Iroda>$\in \rho$ yozuv Xurshida Irodaning onasi ekanligini bildiradi. ■

4-misol. Ternar munosabatga butun sonlar to'plamida aniqlangan qo'shish amalini misol qilib keltirsa bo'ladi. ■

Bundan keyin binar munosabat atamasi o'rnida, qisqalik uchun, munosabat atamasini ishlatamiz.

3-ta'rif. Agar ρ biror munosabatni ifodalasa, u holda $<x, y> \in \rho$ va $x\rho y$ ifodalar o'zaro almashuvchi ifodalar deb ataladi.

$x\rho y$ ifoda (yozuv) «infiks yozuvi» deb yuritiladi va x (predmet) y (predmet)ga nisbatan ρ munosabatda, deb o'qiladi. Odatdagi $x=y$, $x<y$, $x\equiv y$ belgilashlar (yozuvlar) $x\rho y$ ifodadan kelib chiqqan deb hisoblash mumkin.

$\{x/x \in A\}$ yozuvni, to'plamlar nazariyasidagi kabi, «shunday x lar to'plamiki, $x \in A$» deb tushunamiz.

4-ta'rif. $\{x$ /ayrim y uchun $<x, y> \in \rho\}$ to'plam ρ munosabatning aniqlanish sohasi deb ataladi va D_ρ kabi belgilanadi.

5-ta'rif. $\{y$ /ayrim x uchun $<x, y> \in \rho\}$ to'plam ρ munosabatning qiymatlar sohasi, deb ataladi va R_ρ kabi belgilanadi.

Boshqacha qilib aytganda, ρ munosabatning aniqlanish sohasi shu ρ munosabatning birinchi koordinatalaridan tashkil topgan to'plamdir, ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam esa, uning qiymatlar sohasidir.

5-misol. $\{<2,4>, <3,3>, <6,7>\}$ ko'rinishdagi ρ munosabat berilgan bo'lsin. U holda $D_\rho=\{2,3,6\}$, $R_\rho= \{4,3,7\}$. ■

Tartiblangan juftliklar to'plami tushunchasidan foydalanib, Dekart ko'paytmasini (ushbu bobning 4-paragrafiga qarang) boshqacha ham aniqlash mumkin. Agar x biror X to'plamning elementi, y esa Y to'plamning elementi bo'lsa, u holda tartiblangan $<x, y>$ juftliklar C to'plami X va Y to'plamlarning Dekart ko'paytmasi deyiladi:

$$C=X\times Y=\{<x, y>/x\in X, y\in Y\}.$$

Har bir ρ munosabat $X\times Y$ to'g'ri ko'paytmaning qism to'plami bo'ladi va $X\supseteq D_\rho$, $Y\supseteq R_\rho$.

6-ta'rif. Agar $\rho \subseteq X\times Y$ bo'lsa, u holda ρ shu X dan Y ga bo'lgan munosabat, deb ataladi.

7-ta'rif. Agar $\rho \subseteq X\times Y$ va $Z \supseteq X\cup Y$ bo'lsa, u holda ρ dan Z ga bo'lgan munosabat, deb ataladi.

8-ta'rif. Z dan Z ga bo'lgan munosabat Z ichidagi munosabat, deb ataladi.

9-ta'rif. X to'plam ichidagi $X\times X$ munosabat X ichidagi universal munosabat, deb ataladi.

10-ta'rif. $\{<x,x>/ x\in X\}$ munosabat X ichidagi ayniyat munosabati, deb ataladi va i_x yoki i simvoli bilan belgilanadi.

Ixtiyoriy X to'plamining x va y elementlari uchun xi_xy ifoda $x=y$ bilan teng kuchlidir.

A to'plam va ρ munosabat berilgan bo'lsin. U holda $\rho\{A\}=\{y/A$ ning ayrim x lari uchun $x\rho y\}$ bo'ladi.

11-ta'rif. $\rho\{A\}$ to'plam A to'plam elementlarining ρ-obrazlari to'plami, deb ataladi.

6-misol. $y=2x+1$ tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziqni $\{\langle x,y\rangle \in R\times R/y=2x+1\}$, ushbu $y<x$ tengsizlikni esa $\{\langle x,y\rangle \in R\times R/ y<x\}$ shaklda ifodalash mumkin. ■

6.2. Ekvivalentlik munosabati. Munosabatlar turli xossalarga ega bo'lishi mumkin. Matematikada quyidagi 12- ta'rifda ko'rsatilgan uchta xossaga ega bo'lgan munosabatlar ko'p uchragani uchun ularga maxsus nom berilgan.

12-ta'rif. X to'plamning ixtiyoriy x elementi uchun:

agar $x\rho x$ bo'lsa, u holda ρ munosabat X to'plamidagi refleksiv munosabat;

agar $x\rho y$ dan $y\rho x$ kelib chiqsa, u holda ρ munosabat simmetrik munosabat;

agar $x\rho y$ va $y\rho z$ dan $x\rho z$ kelib chiqsa, u holda ρ munosabat tranzitiv munosabat, deb ataladi.

13-ta'rif. Agar biror to'plamdagi munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo'lsa, u holda bunday munosabat shu to'plamdagi ekvivalentlik munosabati, deb ataladi.

Agar ρ munosabat X to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsa, u holda $D_\rho=X$ bo'lishi ravshandir.

7-misol. Quyidagi har bir munosabat muayyan to'plamdagi ekvivalentlik munosabatiga misol bo'la oladi.

1. Istalgan to'plamdagi tenglik munosabati.
2. Tekislikda joylashgan barcha uchburchaklar to'plamidagi o'xshashlik munosabati.
3. Butun sonlar to'plamidagi n modul bo'yicha taqqoslash munosabati.
4. O'zbekiston Respublikasida yashovchi odamlar to'plamidagi «bir uyda yashovchilar» munosabati. ■

Ekvivalentlik munosabati ushbu asosiy xususiyatga ega: u to'plamni kesishmaydigan qism to'plamlarga bo'ladi. Masalan, 7-misolning 4-bandidagi «bir uyda yashovchilar» munosabati O'zbekiston Respublikasida yashovchi odamlar to'plamini bir-biri bilan kesishmaydigan «bir uyda yashovchilar» va «qolganlar» qism to'plamlariga bo'ladi. Bu aytilganlarni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

14-ta'rif. ρ biror X to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsin. Agar X to'plamning A qism to'plamida shunday x element topilib, $A=\{y / x \rho y\}$ bo'lsa, u holda A qism to'plam ekvivalentlik sinfi yoki ekvivalentlik ρ -sinfi deb ataladi.

Keltirilgan ta'rifga asosan, X to'plamning A qism to'plami ekvivalentlik sinfi bo'lishi uchun X to'plamning $A=\rho\,[\{x\}]$ tenglikni qanoatlantiruvchi x elementi mavjud bo'lishi yetarli va zarurdir. Agar ρ munosabat to'g'risida hech qanday shubha tug'ilmaydigan bo'lsa, u holda X to'plamdagi x elementlarning ρ -obrazlari to'plami $[x]$ shaklida belgilanadi (ya'ni $\rho\,[\{x\}]=[x]$) va bu to'plam *x yuzaga keltirgan ekvivalentlik sinfi*, deb ataladi. Ekvivalentlik sinfi quyidagi ikki xususiyatga ega:

1) $x \in [x]$ — bir sinfning hamma elementlari o'zaro ekvivalentdir;

2) agar $x \rho y$ bo'lsa, u holda $[x]=[y]$.

1-xossa ekvivalentlik munosabatining refleksivlik xususiyatidan kelib chiqadi.

2-xossani isbotlaymiaz. $x \rho y$ bo'lsin, ya'ni x element y elementga ekvivalent bo'lsin, u holda $[y] \subseteq [x]$. Haqiqatan ham, $z \subseteq [y]$ (ya'ni $y \rho z$) munosabatdan va $x \rho y$ bo'lganligi uchun ρ munosabatining tranzitiv xususiyatiga asosan, $x \rho z$ kelib chiqadi, ya'ni $z \in [x]$. Ekvivalentlik munosabatining simmetriklik xossasidan foydalanib $[x] \subseteq [y]$ bo'lishini isbot qilish mumkin. Demak, $[x] = [y]$.

6.3. Funksiya tushunchasi. Funksiyalar superpozitsiyasi. Funksiya tushunchasini yuqorida o'rganilgan atamalar orqali aniqlaymiz. *Funksiya* shunday munosabatki, uning turli elementlarining (juftliklarining) birinchi koordinatalari hech qachon o'zaro teng bo'lmaydi. *Funksiyaning grafigi* tartiblangan juftliklar to'plamidan iborat. Funksiya bilan uning grafigi orasida hech qanday farq yo'q.

Shunday qilib, f munosabat quyidagi talablarni qanoatlantirgandagina funksiya bo'la oladi:

1) f ning elementlari faqat tartiblangan juftliklardan iborat;

2) agar $\langle x,y \rangle$ va $\langle x,z \rangle$ elementlar f ning elementlari bo'lsa, u holda $y=z$ bo'ladi.

8-misol. $\{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$ shaklda berilgan s munosabat funksiyadir va $D_s = \{1,2,3\}$, $R_s=\{2,4\}$. ■

9-misol. $\{\langle 3,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 4,6 \rangle\}$ munosabat funksiya bo'la olmaydi, chunki $\langle 3,4 \rangle$ va $\langle 3,5 \rangle$ elementlarining birinchi koordinatalari o'zaro teng. ■

10-misol. $\{<x, x^2+x+1>/x \in R\}$ funksiyadir, chunki agar $x=u$ bo'lsa, u holda $x^2+x+1=u^2+u+1$. ■

11-misol. $\{<x^2, x>/x \in R\}$ munosabat funksiya bo'la olmaydi, chunki uning birinchi koordinatalari o'zaro teng bo'lgan elementlari (masalan, $<1,1>$ va $<1,-1>$) mavjud. ■

15-ta'rif. Agar f funksiya va $<x,y> \in f$ (ya'ni xfy) bo'lsa, u holda x berilgan f funksiyaning argumenti, y esa shu funksiyaning x argumentdagi qiymati yoki x elementining obrazi, deb ataladi.

x argumentning f funksiyasini belgilash uchun xf, $f(x)$, fx yoki x^f yozuvlardan foydalaniladi. $f(x)$ yozuvni $f(x)=f[\{x\}]$ deb, ya'ni x elementning f-obrazlari to'plami, deb qarash mumkin.

Berilgan f va g funksiyalar bir xil elementlardan tuzilgan bo'lsa, bunday funksiyalar teng bo'ladi ($f=g$), ya'ni boshqacha qilib aytganda, $D_f=D_g$ va barcha x argumentlar uchun $f(x)=g(x)$ bo'l-sagina, $f=g$ bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasi va shu sohaning har bir elementi uchun funksiyaning qiymati berilishi kerak.

12-misol. Berilgan f funksiya uchun $\{<x, x^2+x+1>/x \in R\}$ dan $f(x)=x^2+x+1$ kelib chiqadi. ■

Agar f funksiyaning aniqlanish sohasi $R_f \in Y$ bo'lsa, u holda funksiyaning o'zgarish sohasi Y to'plami ichida bo'ladi, deb yuritiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f: X \to Y \text{ yoki } X \xrightarrow{f} Y$$

Yuqorida ko'rsatilgan hamma f to'plam $X \times Y$ to'plamning qism to'plami bo'ladi, uni Y^x deb belgilaymiz.

Agar $X=\varnothing$ bo'lsa, u holda Y^x faqatgina bir elementdan iborat bo'ladi va u $X \times Y$ to'plamning bo'sh qism to'plamidir. Agar $Y=\varnothing$ va bo'lsa, u holda $Y^x=\varnothing$.

16-ta'rif. Agar f funksiya uchun $x_1 \neq x_2$ bo'lishidan $f(x_1) \neq f(x_2)$ kelib chiqsa, u holda f bir qiymatli funksiya deb ataladi.

17-ta'rif. Berilgan f va g funksiyalarning superpozitsiyasi deb $g \circ f = \{<x, z> /$ shunday y borki, xfy va $ygz\}$ to'plamga aytiladi.

Berilgan f va g funksiyalarning $g \circ f$ superpozitsiyasi ham funksiya bo'ladi. f va g funksiyalarning $z=g \circ f$ superpozitsiyasini $z=g(f(x))$ ko'rinishda yozish mumkin. Superpozitsiyaga berilgan funksiyalar ustida bajarilayotgan amal, deb qarasa bo'ladi. Funksiyalarning superpozitsiyasi *funksiyalarning funksiyasi* deb ham ataladi.

13-misol. $y=\sin x$ va $z=\ln y$ bo‘lsin, u holda $z=\ln \sin x$ funksiya $\sin x$ va $\ln y$ funksiyalarning superpozitsiyasidir. ■

Superpozitsiya amali assotsiativlik qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni ixtiyoriy g, f va h funksiyalar uchun quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$g\circ f(f\circ h)=(g\circ f)\circ h.$$

Agar $f:X\rightarrow Y$ va $g:Y\rightarrow Z$ bo‘lsa, u holda $g\circ f:X\rightarrow Z$ va $(g\circ f):(x)=g(f(x))$ bo‘ladi.

18-ta’rif. Agar f bir qiymatli funksiya bo‘lsa, u holda f funksiyadan koordinatalarining o‘rinlarini almashtirish natijasida hosil bo‘ladigan funksiya f funksiyasiga teskari funksiya, deb ataladi va f^{-1} *kabi belgilanadi.*

Faqatgina bir qiymatli funksiyalar uchun bajariladigan f^{-1} amaliga *qaytarish amali* deyiladi.

f^{-1} funksiyaning aniqlanish sohasi uchun $D_{f^{-1}}=R_f$, o‘zgarish sohasi uchun esa $R_{f^{-1}}=D_f$ o‘rinlidir.

6.4. Tartiblash munosabati. Endi tartiblash munosabatini o‘rganamiz.

19-ta’rif. Berilgan X to‘plamdagi x va y elementlar uchun $y\rho x$ *munosabat o‘rniga* $x\rho y$ *munosabat o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatuvchi munosabat tartiblash munosabati, deb ataladi.*

Tartiblash munosabati yordamida elementlarni qanday tartibda qo‘yish masalasini hal etish mumkin. Haqiqiy sonlar to‘plami uchun $<$, $\leq$, $>$,$\geq$ munosabatlar tartiblash munosabatlariga misol bo‘la oladi. To‘plamlar sistemasi uchun xuddi shunga o‘xshash vazifani $\subset$, $\subseteq$ munosabatlar o‘ynaydi (ushbu bobning 3-paragrafiga qarang).

20-ta’rif. Agar X to‘plamining ixtiyoriy x va y elementlari uchun bir vaqtda $x\rho y$ *va* $y\rho x$ *bajarilishidan* $x=y$ *bo‘lishi kelib chiqsa, u holda bunday ρ munosabat antisimmetrik munosabat, deb ataladi.*

21-ta’rif. X to‘plam ichida refleksivlik, antisimmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo‘lgan ρ munosabat X to‘plamdagi qisman tartiblash munosabati, deb ataladi. Har qanday refleksiv va tranzitiv munosabat tartiblash munosabati, deb ataladi.

Qisman tartiblash munosabati odatdagi «$\leq$» simvol bilan belgilanadi. Agar $\leq$ munosabati X to‘plamni qisman tartiblasa, u holda X to‘plamning istalgan x va y elementlari uchun $x\leq y$ munosabat bajarilishi ham, bajarilmasligi ham mumkin. Agar $x\leq y$ va $x\neq y$ bo‘lsa, u holda $x<y$ deb yoziladi va «x (element) y (element)dan kichik» yoki «x (element) y (element)dan oldin keladi», deb o‘qiladi.

22-ta'rif. X to'plamning har qanday x elementi uchun $x\rho x$ munosabat bajarilmasa, u holda ρ shu X to'plamdagi irrefleksiv munosabat, deb ataladi.

Agar $\leq$ munosabat X to'plamdagi qisman tartiblash munosabati bo'lsa, u holda $<$ munosabat X to'plamidagi irrefleksiv va tranzitiv munosabat bo'ladi.

23-ta'rif. Qisman tartiblash ρ munosabatning (o'zgarish sohasi bilan ustma-ust tushuvchi) aniqlanish sohasiga qarashli ixtiyoriy turli x va y elementlari uchun yo $x\rho y$, yoki $y\rho x$ o'rinli bo'lsa, bunday munosabat chiziqli (oddiy) tartiblash munosabati, deb ataladi.

Haqiqiy sonlarni qiymatlariga qarab tartiblash chiziqli tartiblash munosabatiga misol bo'la oladi.

24-ta'rif. Agar biror X to'plamda qisman tartiblash munosabati $\leq$ berilgan bo'lsa, u holda bu to'plam qisman tartiblangan to'plam, deb ataladi va u $<X, \leq>$ tartiblangan juftlikdan iborat bo'ladi.

25-ta'rif. Agar biror X to'plamda chiziqli (oddiy) tartiblash munosabati $\leq$ berilgan bo'lsa, u holda bu to'plam chiziqli (oddiy) tartiblangan to'plam, deb ataladi va u $< X, \leq >$ tartiblangan juftlikdan iborat bo'ladi.

Masalan, agar f to'plamlar sistemasi bo'lsa, u holda $<f, \subseteq>$ qisman tartiblangan to'plam bo'ladi.

X to'plamining $\leq$ tartiblash munosabati va X' to'plamining $\leq'$ tartiblash munosabati berilgan bo'lsin. Agar $f: X \to X'$ funksiya uchun $x \leq y$ dan $f(x) \leq' f(y)$ kelib chiqsa, u holda bu funksiya X to'plamining $\leq$ tartiblash munosabatiga va X' to'plamining $\leq'$ tartiblash munosabatiga nisbatan *tartibini saqlaydi,* deb hisoblanadi. Agar X va X' to'plamlar orasida shunday o'zaro bir qiymatli moslik topilsaki, uning o'zi ham, teskarisi ham tartibni saqlasa, u holda bu o'zaro bir qiymatli moslik qisman tartiblangan $< X, \leq >$ va $< X', \leq' >$ to'plamlar orasidagi *izomorfizmdir.*

Endi qisman tartiblangan to'plamlar bilan bog'liq bir necha tushunchalarni o'rganamiz. Agar X to'plamning barcha x elementlari uchun $y \leq x$ bo'lsa, u holda uning y elementi X to'plamning $\leq$ qisman tartiblash munosabatiga nisbatan *eng kichik elementi,* deb ataladi. Agar shunday element mavjud bo'lsa, u holda u yagonadir. Agar X to'plamning hech qaysi x elementi uchun $x < y$ munosabat bajarilmasa, u holda uning y elementi X to'plamning $\leq$ qisman tartiblash munosabatiga nisbatan *minimal elementi*, deb ataladi. Ravshanki, berilgan to'plamda minimal element yagona bo'lmasligi ham mumkin.

Agar har qanday $x \in X$ uchun $x \leq y$ bo'lsa, u holda X to'plamning y elementi shu to'plamning $\leq$ munosabatiga nisbatan *eng katta elementi,* deb aytiladi. Agar shunday element mavjud bo'lsa, u yagonadir. X to'plamning hech qaysi x elementi uchun $x > y$ munosabat bajarilmasa, u holda X to'plamning y elementi shu to'plamning $\leq$ munosabatiga nisbatan *maksimal elementi,* deb ataladi.

Agar X to'plamning bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy qism to'plami eng kichik elementga ega bo'lsa, u holda $< X, \leq >$ qisman tartiblangan *to'plam to'liq tartiblangan to'plam,* deb ataladi. Odatdagi tartibga ega $\{0; 1, 2,...\}$ (manfiymas butun sonlar) to'plam to'liq tartiblangan to'plamga misol bo'la oladi.

$< X, \leq >$ qisman tartiblangan va $A \subseteq X$ bo'lsin. Agar istalgan $a \in X$ uchun $a \leq x$ bajarilsa, u holda X to'plamning x elementi A to'plamning *yuqori chegarasi,* deb ataladi. Xuddi shu kabi, agar istalgan $a \in A$ uchun $x \leq a$ bajarilsa, u holda X to'plamning x elementi A to'plamning *quyi chegarasi,* deb ataladi.

Agar M tartiblangan to'plam bo'lsa, u holda uning M^1 qism to'plami ham tartiblangan bo'ladi. Agar bu tartiblangan to'plam chiziqli bo'lsa, u holda M^1 qism to'plam M to'plamning *zanjiri* deyiladi. $l = |M^1| - 1$ ifoda *zanjirning uzunligi* deb ataladi, bu yerda $|M^1|$ — chiziqli tartiblangan M^1 qism to'plamning *quvvati.* l uzunlikdagi har bir zanjir $1,2,...,l+1$ butun sonli zanjirga izomorfdir.

M to'plamning eng katta elementini m_i bilan va eng kichik elementini m_0 bilan belgilaymiz.

M tartiblangan to'plam m_i elementining *balandligi* $d(m_i)$ deb $m_0 < m_1 < m_2 < ... m_i$ (M to'plamning) zanjirlar uzunligining maksimumiga (l_{max}) aytiladi. M tartiblangan to'plam *uzunligi* $d(M)$ deb M to'plamdagi zanjirlar uzunligining maksimumiga aytiladi, ya'ni tartiblangan M to'plamning uzunligi $d(M)$ uning elementlari balandligi $d(m_i)$ ning maksimumiga teng: $d(M)=\max d_i(m_i)$, $m_i \in M$.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Tenglamasi $y = 2x+1$ ko'rinishda bo'lgan to'g'ri chiziqni $\{<x,y> \in R \times R / y = 2x+1\}$ va $y < x$ munosabatini $\{<x,y> \in R \times R / y < x\}$ shakllarda yozish mumkinligini tushuntiring.
2. $\{<2,4>, <5,6>, <7,6>, <8,8>\}\}$ tartiblangan juftliklar to'plami binar munosabati bo'lishi yoki bo'lmasligini tekshiring.

3. $\{<1,2>, <2,2>, <3,4>\}$ funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.
4. $\{<3,4>, <3,5>, <4,6>\}$ munosabat funksiya bo'lishi yoki bo'lmasligini tekshiring.
5. $\{<x, x^2+x+1>/x \in R\}$ funksiya bo'lishini isbotlang.
6. $\{<x^2, x>/x \in R\}$ funksiya bo'la olmasligini isbotlang.
7. Bul algebrasining Kantor algebrasiga izomorf ekanligini isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Munosabatlar tushunchasi nimani ifodalaydi?
2. Binar munosabat deb nimaga aytiladi?
3. Ekvivalentlik munosabati nima?
4. Qanday munosabatlar refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar deb ataladi?
5. Funksiya tushunchasini bilasizmi?
6. Funksiyalar superpozitsiyasi deganda nimani tushunasiz?
7. Tartiblash munosabatini qanday tushunasiz?

7-§. Fazzi munosabatlar

To'plam. Element. Dekart ko'paytmasi. Munosabat. Fazzi to'plam. Fazzi munosabat. Fazzi munosabatning qismi, to'ldiruvchisi. Fazzi munosabatlarning birlashmasi, kesishmasi, algebraik ko'paytmasi, algebraik yig'indisi, kompozitsiyasi.

7.1. Fazzi munosabat tushunchasi. I bobning 5-paragrafida fazzi to'plam tushunchasi o'rganilgan edi. Endi fazzi munosabat tushunchasini kiritamiz. Berilgan $X_1, X_2,..., X_n$ universal to'plamlarning Dekart ko'paytmasi $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ bo'lsin.

1-ta'rif. X Dekart ko'paytmasining fazzi qism to'plami $X_1, X_2,..., X_n$ to'plamlarda aniqlangan n-ar fazzi munosabat deb ataladi.

Ko'pincha «n-ar fazzi munosabat» iborasidagi «n-ar» tushirib qoldiriladi. Fazzi munosabatlarni belgilashda turli usullardan foydalaniladi. Fazzi to'plam tushunchasi ta'rifiga ko'ra, $R: (X_1, X_2,...,X_n) \to [0,1]$ fazzi munosabatni aniqlovchi fazzi to'plamning $\mu_R(x_1, x_2,..., x_n)$ a'zolik funksiyasi qiymati $(x_1, x_2,..., x_n)$ $(x_i \in X_i, i=\overline{1,n})$ elementlar orasidagi n-ar *R fazzi munosabatning bajarilish darajasini* ifodalaydi.

$n = 2$ bo'lgan holda X va Y to'plamlarda aniqlangan R: $X\times Y \to$ $\to [0,1]$ fazzi munosabat $X\times Y$ Dekart ko'paytmasining har bir (x, y) elementiga $\mu_R(x, y)\in[0,1]$ kattalikni mos qo'yadi. $X=Y$ bo'lganda, R: $X\times X \to [0,1]$ fazzi munosabat X to'plamda aniqlangan, deb yuritiladi.

1-misol. 1. $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ va $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ to'plamlarda aniqlangan XMY fazzi munosabat (aniqrog'i, uni aniqlovch fazzi to'plam a'zolik funksiyasi), masalan, 1-jadvaldagidek berilishi mumkin.

1-jadval

XMY	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,5	0,1	0,3
x_2	0	0,8	1	0,7
x_3	0	0	0,6	1

2. $X=\{0,1,2,3\}$ to'plamda aniqlangan «$x \approx y$» («x taqriban y ga teng») fazzi munosabatni, masalan, qiymatlari quyidagi matritsada berilgan $\mu_{«x\approx y»}(x, y)$ a'zolik funksiyasi vositasida ifodalash mumkin.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} & \leftarrow y \quad x\downarrow \\ \mu_{«x\approx y»}(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 1 & 0,8 \\ 0,1 & 0,3 & 0,8 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

3. Agar universal to'plam $X=[0, 3]$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda «$x \approx y$» fazzi munosabat uchun a'zolik funksiyasi sifatida, masalan, $\mu_{«x\approx y»}(x, y) = e^{-0,2(x-y)2}$ funksiya olinishi mumkin. ■

A'zolik funksiyasi $\mu_R(x, y)$ bo'lgan R fazzi munosabat berilgan bo'lsa, a'zolik funksiyasi quyidagicha aniqlangan munosabat **fazzi munosabatga yaqin oddiy munosabat** (uni $\underline{R}$ deb belgilaymiz) sifatida qaralishi mumkin:

$$\mu_{\underline{R}}(x,y)=\begin{cases} 0, \mu_R(x,y)<0,5 \text{ bo'lganda}, \\ 1, \mu_R(x,y)>0,5 \text{ bo'lganda}, \\ 0 \text{ yoki } 1, \mu_R(x,y)=0,5 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

Ko‘pchilik hollarda $\mu_R(x, y)$=0,5 bo‘lganda, $\mu_{\underline{R}}(x, y) = 0$ deb olinadi.

X va Y to‘plamlarda aniqlangan hamda $\mu_R(x, y)$ a’zolik funksiyasi bilan ifodalanuvchi XRY fazzi munosabat berilgan bo‘lsin.

2-ta’rif. $X \times Y$ Dekart ko‘paytmasining $\mu_R(x, y) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (x, y) elementlaridan tashkil topgan $S(R)$ to‘plam XRY fazzi munosabatning tashuvchisi, deb ataladi.

3-ta’rif. A’zolik funksiyasi $1- \mu_R(x, y)$ bo‘lgan $\overline{R}$ fazzi munosabat R fazzi munosabatning to‘ldiruvchisi, deb ataladi.

2-misol. [0, 5] to‘plamda aniqlangan va

$$\mu_{«x \approx y»}(x, y) = \begin{cases} e^{-5(x-y)^2}, |x-y| \leq 2 \text{ bo‘lganda,} \\ 0, \text{ aks holda,} \end{cases}$$

a’zolik funksiyasi bilan ifodalanuvchi «$x \approx y$» («x taqriban y ga teng») fazzi munosabatni M bilan belgilaymiz. U holda M fazzi munosabatning tashuvchisi

$$S(M) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, \ 0 \leq y \leq 5, \ |x-y| \leq 2\}$$

to‘plam bo‘ladi. M fazzi munosabatning to‘ldiruvchisi $\overline{M}$ fazzi munosabat « x taqriban y ga teng emas», deb ifodalanishi mumkin.

3-ta’rifga ko‘ra, $\overline{M}$ fazzi munosabatning a’zolik funksiyasi

$$\mu_{\overline{M}}(x, y) = \begin{cases} 1-e^{-5(x-y)^2}, |x-y| \leq 2 \text{ bo‘lganda,} \\ 1, \text{ aks holda,} \end{cases}$$

va 2-ta’rifga ko‘ra, $S(\overline{M}) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, \ 0 \leq y \leq 5, \ x \neq y\}$ bo‘ladi. ■

4-ta’rif. Agar $X \times Y$ Dekart ko‘paytmasining barcha (x, y) elementlari uchun $\mu_{R_1}(x, y) = \mu_{R_2}(x, y)$ tenglik bajarilsa, u holda XR_1Y va XR_2Y fazzi munosabatlar o‘zaro ekvivalent deb ataladi.

Berilgan R_1 va R_2 fazzi munosabatning o‘zaro ekvivalentligi $R_1 = R_2$ (ba’zan $R_1 \sim R_2$) shaklda belgilanadi va «ekvivalent» iborasi o‘rnida «teng» iborasi ham qo‘llanilishi mumkin.

5-ta’rif. Agar $X \times Y$ Dekart ko‘paytmasining barcha (x, y) elementlari uchun $\mu_{R_1}(x, y) \geq \mu_{R_2}(x, y)$ tengsizlik bajarilsa, u holda XR_1Y fazzi munosabat XR_2Y fazzi munosabatning qismi, deb ataladi.

R_1 fazzi munosabat R_2 fazzi munosabatning qismi bo‘lishi $R_1 \subseteq R_2$ ko‘rinishda yoziladi va «R_1 fazzi munosabat R_2 fazzi munosabatda yotadi» yoki «R_2 (fazzi munosabat) R_1 ni (fazzi munosabatni) o‘z ichiga oladi (qamraydi)», deb o‘qiladi.

3-misol. $[0, \infty]$ to‘plamda aniqlangan hamda mos ravishda

$$\mu_{R_1}(x,y)=\begin{cases}0, & x>y \text{ bo‘lganda,}\\ 1-e^{-k_1(x-y)^2}, & y\geq x \text{ bo‘lganda,}\end{cases}$$

$$\mu_{R_2}(x,y)=\begin{cases}0, & x>y \text{ bo‘lganda,}\\ 1-e^{-k_2(x-y)^2}, & y\geq x \text{ bo‘lganda,}\end{cases}$$

a’zolik funksiyalari bilan ifodalanuvchi $y>>x$ («y son x sondan juda katta») tipidagi ikkita R_1 va R_2 fazzi munosabatlar berilgan bo‘lsin. Ravshanki, agar $k_2\geq k_1$ bo‘lsa, u holda R_1 fazzi munosabat R_2 fazzi munosabatning qismi bo‘ladi. ■

7.2. Fazzi munosabatlar ustida amallar. Fazzi munosabatlar ustida turli amallar bajarish mumkin. Bu yerda bunday amallardan ba’zilari bilan tanishamiz.

X va Y to‘plamlarda aniqlangan, mos ravishda, $\mu_{R_1}(x,y)$ va $\mu_{R_2}(x,y)$ va a’zolik funksiyalari bilan ifodalanuvchi ikkita R_1 va R_2 fazzi munosabatlar berilgan bo‘lsin.

6-ta’rif. A’zolik funksiyasi $\max\{\mu_{R_1}(x,y),\ \mu_{R_2}(x,y)\}$ *bo‘lgan* $R_1\cup R_2$ *fazzi munosabat* R_1 *va* R_2 *fazzi munosabatlarning birlashmasi, deb ataladi.*

7-ta’rif. A’zolik funksiyasi $\min\{\mu_{R_1}(x,y),\ \mu_{R_2}(x,y)\}$ *bo‘lgan* $R_1\cap R_2$ *fazzi munosabat* R_1 *va* R_2 *fazzi munosabatlarning kesishmasi, deb ataladi.*

4-misol. $X=\{x_1, x_2\}$ va $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$ to‘plamlarda aniqlangan XM_1Y va XM_2Y fazzi munosabatlar $\mu_{M_1}(x,y)$ va $\mu_{M_2}(x,y)$ a’zolik funksiyalari, mos ravishda, 1- va 2-jadvallarda berilgan:

1- jadval

$\mu_{M_1}(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,1	0,8
x_2	1	0,7	0,2

2-jadval

$\mu_{M_2}(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	0,8
x_2	0,3	0,6	0,5

Berilgan fazzi munosabatlar $B=M_1\cup M_2$ birlashmasi va $K=M_1\cap M_2$ kesishmasining $\mu_B(x,y)$ va $\mu_K(x,y)$ a’zolik funksiyalarini, mos ravishda, 3- va 4-jadvallardagidek ifodalash mumkin. ■

3-jadval

$\mu_B(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,9	0,8
x_2	1	0,7	0,5

4-jadval

$\mu_K(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,1	0,8
x_2	0,3	0,6	0,2

8-ta'rif. A'zolik funksiyasi $\mu_{R_1}(x,y)$ va $\mu_{R_2}(x,y)$ bo'lgan $R_1 \cdot R_2$ fazzi munosabat R_1 va R_2 fazzi munosabatlarning algebraik ko'paytmasi, deb ataladi.

9-ta'rif. A'zolik funksiyasi

$$\mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(x,y) - \mu_{R_1}(x,y)\mu_{R_2}(x,y)$$

bo'lgan $R_1 \hat{+} R_2$ fazzi munosabat R_1 va *R_2 fazzi munosabatlarning algebraik yig'indisi, deb ataladi.*

5-misol. 4-misolda berilgan M_1 va M_2 fazzi munosabatlarning algebraik ko'paytmasi $A = M_1 \cdot M_2$ va algebraik yig'indisi bo'lgan $C = M_1 \hat{+} M_2$ fazzi munosabatlar $\mu_A(x,y)$ va $\mu_C(x,y)$ a'zolik funksiyalari, mos ravishda, 5- va 6-jadvallarda berilgan. ■

5-jadval

$\mu_A(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,14	0,09	0,64
x_2	0,3	0,42	0,1

6-jadval

$\mu_C(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,76	0,91	0,96
x_2	1	0,88	0,6

Fazzi munosabatlar ustida yuqorida kiritilgan amallar distributivlik xossalariga ega, ya'ni X va Y to'plamlarda aniqlangan ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun quyidagilar o'rinlidir:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$.
4. $A \cdot (B \cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$.
5. $A \hat{+} (B \cup C) = (A \hat{+} B) \cup (A \hat{+} C)$.
6. $A \hat{+} (B \cap C) = (A \hat{+} B) \cap (A \hat{+} C)$.

Bu xossalardan faqat 1-sini isbotlash bilan kifoyalanamiz.

1-xossaning isboti. $X\times Y$ Dekart ko‘paytmasining barcha elementlari uchun

$$\min\{\mu_A(x, y), \max\{\mu_B(x, y), \mu_C(x, y)\}\}=$$

$$= \max\{\min\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\}\min\{\mu_A(x, y),\mu_C(x, y)\}\}$$

tenglik bajarilishini ko‘rsatish kerak. (x,y) — Dekart ko‘paytmasining ixtiyoriy elementi hamda $a = \mu_A(x, y)$, $b = \mu_B(x, y)$ va $c = \mu_C(x, y)$ bo‘lsin. Ushbu bobning 5-paragrafidagi fazzi to‘plamlar uchun distributivlik xossasini ifodalovchi $A\cap(B\cup C)=$ $=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ tenglikni isbot qilishdagidek bu yerda ham mumkin bo‘lgan 15 holdan biri ro‘y berishi mumkin. Mumkin bo‘lgan barcha 15 holda ham isbotlanishi kerak bo‘lgan tenglik to‘g‘ri. ■

Qolgan xossalarining isboti o‘quvchiga havola qilinadi.

10-ta’rif. X va Z *to‘plamlarda aniqlangan, a’zolik funksiyasi*

$$\max \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, z)\}$$

bo‘lgan $R_1\circ R_2$ *fazzi munosabat* X *va* Y *to‘plamlarda aniqlangan* R_1 *hamda* X *va* Y *to‘plamlarda aniqlangan* R_2 *fazzi munosabatlarning kompozitsiyasi, deb ataladi.*

5-misol. $X= \{x_1, x_2\}$, $Y= \{y_1, y_2, y_3\}$ va $Z= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. A’zolik funksiyalari, mos ravishda, 7-, 8-jadvallarda ifodalangan X va Y to‘plamlarda aniqlangan XF_1Y hamda Y va Z to‘plamlarda aniqlangan XF_2Y fazzi munosabatlarning $K=F_1\circ F_2$ kompozitsiyasini (X va Z to‘plamlarda aniqlangan XKZ fazzi munosabatni) topamiz:

7-jadval

$\mu_{F_1}(x,y)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,8
x_2	0,5	0	0,2

8-jadval

$\mu_{F_2}(x,y)$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0	0,5	0,1	0,8
y_2	0,3	0,2	0,6	0,5
y_3	1	0	0,5	0,1

1) $\mu_K(x_1, z_1) = \max\{\min\{\mu_{F_1}(x_1, y_1),\mu_{F_2}(y_1, z_1)\},$

$\min\{\mu_{F_1}(x_1, y_2),\mu_{F_2}(y_2, z_1)\}, \min\{\mu_{F_1}(x_1, y_3),\mu_{F_2}(y_3, z_1)\}\}=$

$= \max\{\min\{0,1;0\}, \min\{0,7;0,3\}, \min\{0,8;1\}\}=$

$= \max\{0;0,3;0,8\}=0,8;$

2) $\mu_K(x_1, z_2) = \max\{\min\{0,1;0,5\},\ \min\{0,7;0,2\},\ \min\{0,8;0\}\}=$
$=\max\{0,1;0,2;0\}= 0,2;$

3) $\mu_K(x_1, z_3) =0,6;$ 4) $\mu_K(x_1, z_4) = 0,5;$ 5) $\mu_K(x_2, z_1) = 0,2;$

6) $\mu_K(x_2, z_2) =0,5;$ 7) $\mu_K(x_2, z_3) =0,2;$ 8) $\mu_K(x_2, z_4) = 0,5.$

Bu qiymatlarni 9-jadvalga joylashtiramiz. ■

9-jadval

$\mu_K(x,y)$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,8	0,2	0,6	0,5
x_2	0,2	0,5	0,2	0,5

Kompozitsiya amalining xossalari sifatida quyidagilarni keltiramiz. Ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun quyidagilar o'rinlidir.

1. Assotsiativlik: $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$.
2. Birlashmaga nisbatan distributivlik:

$$A \circ (B \cup C) = (A \circ B) \cup (A \circ C).$$

3. Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $R \circ A \subseteq R \circ B$ bo'ladi.

Ta'kidlaymizki, kompozitsiya amali uchun kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli emas, ya'ni, umuman olganda, $A \circ (B \cap C)$ va $(A \circ B) \cap (A \circ C)$ va fazzi munosabatlar o'zaro ekvivalent emas.

10-ta'rifdagi a'zolik funksiya ko'rinishiga asoslanib, uni *(max,min)-kompozitsiya,* deb ham atashadi. Agar 10-ta'rifdagi a'zolik funksiyasi boshqacha, masalan, $\max\{\mu_{R_1}(x, y)\,\mu_{R_2}(x,y)\}$ ko'rinishda ifodalansa, u holda *(max,*)-kompozitsiya* tushunchasi hosil bo'ladi.

Fazzi to'plam va fazzi munosabat bilan bog'liq matematik nazariya matematikaga bir qator tushunchalarning kirib kelishiga asos bo'lib xizmat qildi. *Fazzi xulosalar, fazzi qiymatlar* va ular ustida amallar, *yumshoq hisoblashlar* (soft computing), *lingvistik o'zgaruvchilar, fazzi mantiq* va hokazolar shunday tushunchalar jumlasidandir.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Fazzi munosabatlar ustida amallarning distributivligini ifodalovchi 2—6-xossalarni isbotlang.
2. Fazzi munosabatlar uchun de-Morgan qonunlarini tekshirib ko‘ring.
3. Ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun $A\cdot(B\hat{+}C)=$ $=(A\cdot B)\hat{+}(A\cdot C)$ o‘rinli bo‘lish shartini toping.
4. Ixtiyoriy A, B va C fazzi munosabatlar uchun $(A\hat{+}B)\hat{+}C=$ $=A\hat{+}(B\hat{+}C)$ o‘rinli bo‘lishini isbotlang.
5. Kompozitsiya amalining xossalari isbotlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. n-ar fazzi munosabat nima?
2. Fazzi munosabatning bajarilish darajasi deganda nimani tushunasiz?
3. Fazzi munosabatga yaqin oddiy munosabat qanday aniqlanadi?
4. Fazzi munosabatning tashuvchisi qanday to‘plam?
5. Fazzi munosabatning to‘ldiruvchisi nima?
6. Fazzi munosabatlarning birlashmasi va kesishmasi qanday aniqlanadi?
7. Fazzi munosabatlar algebraik ko‘paytmasi, yig‘indisi uchun a’zolik funksiyalari ko‘rinishini bilasizmi?
8. Fazzi munosabatlar ustida bajariladigan amallarning distributivlik bilan bog‘liq qanday xossalari bor?
9. Fazzi munosabatlar kompozitsiyasini topish uchun a’zolik funksiyalari qiymatlari ustida qanday amallar bajariladi?
10. Fazzi munosabatlar kompozitsiyasi uchun kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi o‘rinli emasligining sababi nimada?

II bob. KOMBINATORIKA

Ushbu bobda kombinatorikaning paydo bo'lishi haqidagi qisqacha tarixiy ma'lumotlar, kombinatorikada qo'llaniladigan usul va qoidalar hamda kombinatsiyalar, jumladan, takrorlanuvchi elementlari bo'lmagan (betakror) va takrorli o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar, guruhlashlarga oid ma'lumotlar keltiriladi. Paskal uchburchagi, Nyuton binomi, binomial koeffitsiyentlarning xossalari, ko'phad formulasi, Fibonachchi sonlari va ularning sodda xossalari, bo'laklashlar va ularning ba'zi xususiyatlari, Ferrers diagrammasi, hosil qiluvchi funksiyalarning xossalari va ularning kombinatorikada qo'llanilishi ham bayon qilinadi.

1-§. Kombinatorika haqida umumiy tushunchalar

Kombinatorika, to'plam, element, tartiblash, kombinatsiya[1], *kombinatorik tuzilma, birlashma, kesishma, kortej, figurali sonlar, matematik induksiya usuli, qo'shish va ko'paytirish qoidalari, kiritish va chiqarish qoidasi, umumlashgan qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari, bulean.*

1.1. Kombinatorika predmeti va paydo bo'lish tarixi. Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, *kombinatorika*, deb ataluvchi bo'limida chekli yoki muayyan ma'noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to'plamni (bu to'plamning elementlari qanday bo'lishining ahamiyati yo'q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshq.) qismlarga ajratish, ularni o'rinlash va o'zaro joylash, ya'ni *kombinatsiyalar, kombinatorik tuzilmalar* bilan bog'liq masalalar o'rganiladi. Hozirgi vaqtda kombinatorikaga oid ma'lumotlar

[1] Bu so'z lotincha «combinatio» so'zidan olingan bo'lib, birikma, birlashma, tuzilma, tutashma ma'nolarini anglatadi.

inson faoliyatining turli sohalarida qo'llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko'ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.

Blez Paskal

To'plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to'plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to'plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To'plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo'qligini tekshirish, bor bo'lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o'rganish hamda bu usullarni biror parametr bo'yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.

Kombinatorikaning ba'zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma'lum edi. Ular hozirgi vaqtda guruhlashlar, deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya[1] o'zining ilmiy tadqiqotlarida guruhlash va o'rin almashtirishlarni qo'llagan. Tarixiy ma'lumotlarga ko'ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she'riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar. O'rta Osiyo va G'arbiy Yevropada yashab ijod qilgan olimlarning kombinatorikaga oid ishlari haqida ushbu bobning 3-paragrafida ma'lumot keltirilgan.

Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o'yinlarini tahlil qilish bilan bog'liq. Ba'zi atoqli matematiklar, masalan, B. Paskal[2], Yakob Bernulli[3], L. Eyler[4], P. L. Chebishev[5] turli o'yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o'yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qaror qabul qilishda kombinatorikani qo'llashgan.

---

[1] *Bxaskara Acharya* (1114—1178-yildan keyin) — hindistonlik matematik va astronom.

[2] *Paskal* (Pascal Blez, 1623—1662) — fransuz faylasufi, yozuvchisi, matematigi va fizigi.

[3] *Bernulli Yakob* (1654—1705) — Shveysariya matematigi.

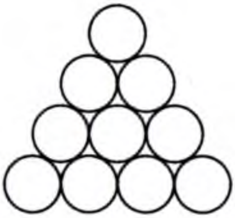
[4] *Eyler* (Euler Leonard, 1707—1783) — mashhur matematik, mexanik va fizik.

[5] *Chebishev* (Чебышев Пафнутий Львович, 1821—1894) — rus matematigi va mexanigi.

XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo'nalishi sifatida shakllana boshladi. B. Paskal o'zining «Arifmetik uchburchak haqida traktat» va «Sonli tartiblar haqida traktat» (1665-y.) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsiyentlar, deb ataluvchi sonlar haqidagi ma'lumotlarni keltirgan. P. Ferma[1] esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog'lanish borligini bilgan.


Leonard Eyler

Figurali sonlar quyidagicha aniqlanadi. Birinchi tartibli figurali sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, ... (ya'ni natural sonlar); ikkinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si dastlabki ikkita natural sonlar yig'indisi (3), 3-si dastlabki uchta natural sonlar yig'indisi (6) va hokazo (1, 3, 6, 10, 15, ...); uchinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si birinchi ikkita ikkinchi tartibli figurali sonlar yig'indisi (4), 3-si birinchi uchta ikkinchi tartibli figurali sonlar yig'indisi (10) va hokazo (1, 4, 10, 20, 35, ...); va hokazo.


9-shakl.

1-misol. Tekislikda radiuslari o'zaro teng bo'lgan aylanalar bir-biriga uringan holda yuqoridan 1-qatorda bitta, 2-qatorda ikkita, 3-qatorda uchta va hokazo, joylashtirilgan bo'lsin. Masalan, aylanalar bunday joylashuvining dastlabki to'rt qatori 1-shaklda tasvirlangan. Bu yerda, qatorlardagi aylanalar sonlari ketma-ketligi birinchi tartibli figurali sonlarni tashkil qiladi. Bu tuzilmadan foydalanib ikkinchi tartibli figurali sonlarni quyidagicha hosil qilish mumkin. Dastlab 1-qatordagi aylanalar soni (1), keyin dastlabki ikkita qatordagi aylanalar soni (3), undan keyin dastlabki uchta qatordagi aylanalar soni (6) va hokazo. ■


Gotfrid Leybnis

«Kombinatorika» iborasi G. Leybnisning[2] «Kombinatorik san'at haqidagi mulohazalar»

---

[1] *Ferma* (Fermat Pyer, 1601—1665) — fransuz matematigi va huquqshunosi.

[2] *Leybnis* (Leibniz Gotfrid Vilgelm, 1646—1716) — olmon faylasufi, matematigi, fizigi, kashfiyotchisi, huquqshunosi, tarixchisi va tilchisi.

nomli asarida birinchi bor 1665-yilda keltirilgan. Bu asarda birlashmalar nazariyasi ilmiy jihatdan ilk bor asoslangan. O‘rinlashtirishlarni o‘rganish bilan birinchi bo‘lib Yakob Bernulli shug‘ullangan va bu haqdagi ma’lumotlarni 1713-yilda bosilib chiqqan «Ars conjectandi» (Bashorat qilish san’ati) nomli kitobining ikkinchi qismida bayon qilgan. Hozirgi vaqtda kombinatorikada qo‘llanilayotgan belgilashlar XIX asrga kelib shakllandi.

Kombinatsiya — bu kombinatorikaning asosiy tushunchasi. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to‘plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning *o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va guruhlashlar*, deb ataluvchi asosiy ko‘rinishlari o‘rganiladi.

1.2. Kombinatorikada ko‘p qo‘llaniladigan usul va qoidalar. Kombinatorika va graflar nazariyasida tasdiqlarni isbotlashning samarali usullaridan biri bo‘lgan *matematik induksiya usuli* ko‘p qo‘llaniladi. Bu usulning ketma-ket bajariladigan ikkita qismi bo‘lib, ular quyidagi umumiy g‘oyaga asoslanadi.

Faraz qilaylik, isbotlanishi kerak bo‘lgan tasdiq birorta xususiy $n=n_0$qiymat (masalan, $n_0=1$) uchun to‘g‘ri bo‘lsin (usulning bu qismi *baza* yoki asos, deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n=k>n_0$ uchun to‘g‘riligidan uning $n=k+1$ uchun to‘g‘riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n \geq n_0$ son uchun to‘g‘ri bo‘ladi (*induksion o‘tish*).

2-misol. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Baza: $n=1$ bo‘lsin, u holda yuqoridagi tenglik to‘g‘ri ekanligi ravshan: $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Induksion o‘tish: isbotlanish kerak bo‘lgan tenglik $n=k>1$ uchun to‘g‘ri, ya’ni

$$1^{2+}2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin. Bu tenglikning chap va o‘ng tomonlariga $(k+1)^2$ ifodani qo‘shib, uni

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

ko'rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o'ng tomonida quyidagicha o'zgartirishlarni bajaramiz:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Demak,

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikning bo'lgan holidir. ■

Shuni ta'kidlash kerakki, biron tasdiqni isbotlash uchun matematik induksiya usuli qo'llanilganda, bu usulning ikkala qismini ham tekshirib ko'rish muhimdir, ya'ni baza va induksion o'tish, albatta, tekshirilishi shart. Ulardan biri tekshirilmasa noto'g'ri natijalar hosil bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari, baza birorta xususiy qiymatdan boshqa ko'p, hattoki, juda ko'p xususiy hollar uchun tekshirilib, ijobiy natija olinganda ham, bu hollarni umumlashtiruvchi natijaviy tasdiq noto'g'ri bo'lib chiqishi mumkin. Bu mulohazalarning o'rinli ekanligini quyida keltirilgan misollar ko'rsatadi.

3-misol. «Ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ son 2 ga qoldiqsiz bo'linadi», degan tasdiqni tekshirishda matematik induksiya usulining baza qismi talabini bajarmasdan faqat induksion o'tishni tekshiramiz.

Bu tasdiq $n=k>1$ uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni $2k-1$ son 2 ga qoldiqsiz bo'linsin, deb faraz qilamiz. U holda $(2k-1)+2$ son ham, qo'shiluvchilarining har biri 2 ga qoldiqsiz bo'linganligi sababli, 2 ga qoldiqsiz bo'linadi. Shuning uchun $(2k-1)+2=2(k+1)-1$ tenglik asosida $(2k+1)-1$ son 2 ga qoldiqsiz bo'linadi, degan xulosa kelib chiqadi. Demak, yuqoridagi tasdiq $n=k+1$ uchun to'g'ri, ya'ni induksion o'tish bajarildi, deb hisoblash mumkin.

Shunday qilib, matematik induksiya usulining baza qismini tekshirmasdan «ixtiyoriy natural n son uchun $2n-1$ son 2 ga qoldiqsiz bo'linadi», deb xulosa qilish noto'g'ridir, chunki ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ sonni 2 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi. ■

4-misol. «Ixtiyoriy n natural son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir», degan tasdiqni tekshirish maqsadida matematik induksiya usulining faqat baza qismi talabini dastlabki 15 ta natural sonlar uchun bajaramiz.

$n=1$ bo'lganda $n^2+n+17=1^2+1+17=19$ tub son hosil bo'ladi.

$n=\overline{2,15}$ bo'lganda ham n^2+n+17 ifodaning qiymati sifatida 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227 va 257 tub sonlarni hosil qilamiz.

Induksion o'tishni tekshirmasdan «ixtiyoriy natural n son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sondir», degan xulosa qilish noto'g'ridir, chunki, masalan, agar $n=16$ bo'lsa, u holda bu ifodaning qiymati murakkab sondir: $n^2+n+17=16^2+16+17=289+17\cdot17$. ■

5-misol. Biror n natural son uchun $991n^2+1$ son butun sonning kvadrati bo'ladimi? Bu savolga javob berish uchun, n ning dastlabki o'n, yuz, ming, million, milliard, hattoki, trillionta qiymatlari uchun $991n^2+1$ ifoda tekshirilganda, uning qiymatlaridan birortasi ham butun son kvadrati bo'lmasligi qayd etilgan. Shunday bo'lishiga qaramasdan bu tasdiq asosida, induksion o'tishni bajarmasdan, «ixtiyoriy natural n son uchun $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo'lmaydi», deb xulosa qilish mumkin emas. $991n^2+1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo'ladigan n natural sonning borligi va bunday sonning eng kichigini o'nli sanoq sistemasida yozganda 29 ta (!) raqam bilan ifodalanishi kompyuter yordamida aniqlangan (*[34]ga qarang*). ■

Matematik induksiya usulining tatbiqiga yana bir misol sifatida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1-teorema. Ixtiyoriy chekli A to'plam uchun $|2^A|=2^{|A|}$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. Matematik induksiya usulini berilgan to'plamning quvvati bo'yicha qo'llaymiz.

Baza. Dastlab A to'plamning elementlari soni nolga teng, ya'ni $|A|=0$ bo'lganda teoremaning tasdig'i bajarilishini ko'rsatamiz. $A_0=\varnothing$ bo'lsin. U holda $A=A_0$ uchun $|A|=0$, $2^A=2^\varnothing=\{\varnothing\}$ va $|2^\varnothing|=|\{\varnothing\}|=1=2^0=2^{|\varnothing|}$ bo'ladi. Demak, teoremaning tasdig'i $|A|=0$ bo'lgan hol uchun to'g'ridir.

Induksion o'tish. Chekli k elementli ixtiyoriy A_k to'plam uchun teoremaning tasdig'i to'g'ri bo'lsin, ya'ni $A=A_k$ bo'lganda $|2^A|=2^{|A|}$ tenglik bajarilsin. $k+1$ elementli A_{k+1} to'plamni qaraymiz. Ravshanki, $A=A_{k+1}$ uchun $|A|=k+1$ bo'ladi. Qaralayotgan A to'plamning ixtiyoriy a elementi uchun 2^A bulean to'plamni o'zaro kesishmaydigan ikkita $B_a^- = \{X \mid X \subset 2^A, a \notin X\}$ va $B_a^+ = \{X \mid X \subset 2^A, a \in X\}$ to'plamlar birlashmasi sifatida yozish mumkin. Demak, $|2^A| = |B_a^-| + |B_a^+|$.

Tuzilishiga ko'ra, B_a^- to'plam k elementli to'plamning buleanidan iborat. Shuning uchun, induksion o'tish faraziga ko'ra, $|B_a^-| = 2^k$ bo'ladi. B_a^+ to'plam esa B_a^- to'plamning har bir element-to'plamiga a elementni kiritish yordamida hosil qilingan. Bundan $|B_a^+| = |B_a^-| = 2^k$ kelib chiqadi. Demak, $|A|=k+1$ bo'lgan hol uchun

$$|2^A| = |B_a^-| + |B_a^+| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}. \blacksquare$$

Ushbu bobning 3-paragrafida 1-teoremaning kombinatorik tushunchalarga asoslangan boshqa isboti keltiriladi.

Berilgan chekli A to'plamning buleani uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan toplam bo'lgani sababli 1-teoremada isbotlangan $|2A|=2^{|A|}$ tenglik A to'plamning buleanini 2^A ko'rinishda belgilashga asos bo'la oladi.

Kombinatorikada sodda, o'z-o'zidan ravshan bo'lgan, ammo muhim qoidalar bor. Bunday qoidalar sifatida qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari, deb ataluvchi qoidalarni ko'rsatish mumkin.

m ta elementli A to'plam va n ta elementli B to'plamlar berilgan bo'lib, ular kesishmasin. **Qo'shish qoidasiga** ko'ra, A yoki B to'plamga tegishli bo'ladigan birorta elementni tanlash imkoniyatlari soni $(m+n)$ga tengdir. «**Yoki**» **qoidasi** deb ham ataluvchi bu qoida mazmunini quyidagi teorema orqali ham ifodalash mumkin.

2-teorema. Agar ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda $|A \cup B| = |A| + |B|$ bo'ladi.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. ■

Demak, qo'shish qoidasiga ko'ra, kesishmaydigan ikkita to'plam birlashmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining yig'indisiga tengdir.

Ko'paytirish qoidasiga asosan, m ta elementli A va n ta elementli B to'plamlarning elementlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha $<a,b>$ ($a\in A$, $b\in B$) kortejlar (juftliklar) soni mn ga teng. Bu qoida **«va» qoidasi** deb ham ataladi. Uni quyidagi teorema ko'rinishida ifodalash ham mumkin.

3-teorema. Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A\times B|=|A|\cdot|B|$ *tenglik o'rinlidir.*

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. ■

Demak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, ixtiyoriy ikkita chekli to'plam Dekart ko'paytmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining ko'paytmasiga tengdir.

Umumiy holda, agar chekli A va B to'plamlar hech bo'lmaganda bitta umumiy elementga ega bo'lsa, u holda $|A|+|B|$ yig'indining qiymatini aniqlashda $A\cup B$ to'plamning ba'zi elementlarini, aniqrog'i, $A\cap B$ to'plamning elementlarini ikki marta hisobga olishga to'g'ri keladi. Bu mulohaza asosida quyidagi tasdiqqa kelamiz.

4-teorema. Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ *tenglik o'rinlidir.*

Isboti. Osonlik bilan ko'rish mumkinki:

a) $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$ va $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$;

b) $B=(A\cap B)\cup(B\setminus A)$ va $(A\cap B)\cap\setminus(B\setminus A)=\varnothing$.

Bu munosabatlarga 2-teoremani qo'llasak, mos ravishda, $|A\cup B|=|A|+|B\setminus A|$ va $|B|=|A\cap B|+|B\setminus A|$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikni hosil qilish qiyin emas. ■

4-teoremaning tasdig'ini umumiy holda ikkita chekli to'plamlar birlashmasining quvvatini hisoblash qoidasi deyish mumkin. Bu qoidaning ma'nosidan kelib chiqqan holda, uni *kiritish va chiqarish qoidasi,* deb atash qabul qilingan.

Ravshanki, 4-teoremada keltirilgan tenglikdan foydalanib |A|, |B|, $|A\cup B|$ va $|A\cap B|$ miqdorlarning ixtiyoriy uchtasi ma'lum bo'lganda to'rtinchisini hisoblash formulasini hosil qilish mumkin.

Yuqorida bayon qilingan ikkita to'plam uchun qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalarini chekli sondagi istalgan chekli to'plamlar uchun umumlashtirish mumkin.

Avvalo, kiritish va chiqarish qoidasining umumlashmasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz:

5-teorema **(umumlashgan kiritish va chiqarish qoidasi)**. *Ixtiyoriy chekli* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots |A_n| -$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

munosabat o'rinlidir.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $k=1$ bo'lgan hol uchun teoremaning tasdig'i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i 3-teoremaga asosan to'g'ri.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $n=k$ uchun to'g'ri, ya'ni

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| -$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{k-1} \cap A_k| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| -$$
$$- \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Tasdiqning $n=k+1$ bo'lgan holda to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Avvalo, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, A_{k+1}$ to'plamlarning $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}$ birlashmasini $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}$ ko'rinishda ifodalaymiz. So'ngra 3-teoremani va kesishmaga nisbatan umumlashgan distributivlik qonunini qo'llab hamda teorema tasdig'ining $n=k$ uchun to'g'riligini hisobga olib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k| +$$
$$+ |A_{k+1}| - |(A_1 \cap A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) \cap A_{k+1}| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots$$
$$\ldots - |A_{k-1} \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots$$
$$\ldots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| - \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$
$$\ldots \cap A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup$$
$$(A_3 \cap A_{k+1}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{k+1})|.$$

Bu ifodadagi oxirgi ayriluvchi $A_i \cap A_{k+1}$ $(i=1,2,3,...k)$ ko'rinishdagi k ta to'plamlar birlashmasining quvvatini ifodalaydi. Shuning uchun, induksiya faraziga ko'ra, bu ayriluvchini quyidagicha yozish mumkin:

$$
\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup (A_3 \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_k \cap A_{k+1})| = \\
&= |A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1}| + ... + |A_k \cap A_{k+1}| - \\
&- |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1})| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1}) - \\
&\quad - ... - |(A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| + \\
&\quad + |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})| + \\
&\quad + |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_4 \cap A_{k+1})| + ... + \\
&\quad + |(A_{k-2} \cap A_{k+1}) \cap (A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| - \\
&- ... + (-1)^{k-1} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap ... \cap (A_k \cap A_{k+1})| = \\
&= |A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1})| + ... + |A_k \cap A_{k+1}| - \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}| - |A_1 \cap A_3 \cap A_{k+1})| - ... - |A_1 \cap A_k \cap A_{k+1}| + \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{k+1}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_{k+1})| + ... + \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_k \cap A_{k+1}| + ... + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k A_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Bu ifodani o'z o'rniga qo'yib

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + ... + |A_k| + |A_{k+1}| - \\
&\qquad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - ... - |A_k \cap A_{k+1}| + \\
&\qquad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}| - \\
&\qquad - ... + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

tenglikni hosil qilamiz. ■

6-teorema (**umumlashgan qo'shish qoidasi**). *Juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$$

tenglik o'rinlidir.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra, barcha $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, indekslar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo'lgani sababli 5-teorema asosida kerakli tenglikni hosil qilamiz. ■

7-teorema. Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| = |A_1|+|A_2|+|A_3|+\dots+|A_n|-$$
$$-|A_1 \cup A_2| - |A_1 \cup A_3| - \dots - |A_{n-1} \cup A_n| +$$
$$+|A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_1 \cup A_2 \cup A_4| + \dots + |A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n| -$$
$$-\dots+(-1)^{n-1}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

munosabat o'rinlidir.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi. ■

8-teorema **(umumlashgan ko'paytirish qoidasi)**. *Elementlari soni, mos ravishda, $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ bo'lgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ to'plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan k uzunlikka ega kortejlar soni $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ga tengdir.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $k=1$ bo'lgan hol uchun teoremaning tasdig'i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i yuqorida keltirilgan ikkita to'plam uchun ko'paytirish qoidasidan kelib chiqadi.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $k=s$ $(s=\overline{1,k-1})$ uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni $A_1, A_2, \dots, A_s$ to'plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan s uzunlikdagi kortejlar soni $n_1 n_2 \dots n_s$ bo'lsin, deb faraz qilamiz. Teorema tasdig'ining $k=s+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz.

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{s+1}$ to'plamlardan faqat bittadan element olib, uzunligi (s+1) ga teng bo'lgan kortejlar sonini aniqlash uchun turlicha usullardan foydalanish mumkin. Bu yerda quyidagi usul bilan kerakli natijani olsa bo'ladi. Dastlab uzunligi birga teng bo'lgan kortejlarni tuzamiz. Uzunligi birga teng bo'lgan kortejlar berilgan to'plamlarning ixtiyoriy biridan faqat bitta elementni tanlash yordamida tuzilishi ravshan. Tabiiyki, agar uzunligi birga teng kortejlar $A_1=\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}\}$ to'plamning elementlaridan tuzilsa, bunday kortejlar soni n_1 ga tengdir.

Uzunligi birga teng kortejlardan ixtiyoriy birini, masalan, a_{11}ni olib, uning o'ng tomoniga A_1 to'plamdan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_2=\{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n_2}\}$ to'plamning elementlaridan birini joylashtirib, birinchi koordinatasi a_{11} bo'lgan uzunligi ikkiga teng $n_2$ta kortejlar hosil qilamiz. Uzunligi birga teng kortej sifatida n_1 ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini hisobga olib, hammasi bo'lib uzunligi ikkiga teng $n_1 n_2$ ta kortejlarga ega bo'lamiz.

Uzunligi ikkiga teng kortejlarning har biriga o'ng tomondan A_1 va A_2 to'plamlardan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_3=\{a_{31},a_{32},...,a_{3n_3}\}$ to'plamning n_3 ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi uchga teng n_3 ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda uzunligi ikkiga teng kortej sifatida n_1n_2 ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olib, uzunligi uchga teng $n_1n_2n_3$ ta kortejlarni hosil qilamiz.

Kortejlar hosil qilish jarayonini yuqoridagiga o'xshash mulohazalar bilan davom ettirib, bu kortejlarning har biriga o'ng tomondan $A_1, A_2,..., A_s$ to'plamlardan boshqa $A_{s+1}=\{a_{(s+1)^1}, a_{(s+1)^2}, ..., a_{(s+1)_{n_s}}\}$ to'plamning n_{s+1} ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi $(s+1)$ga teng bo'lgan n_{s+1} ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda ham uzunligi s ga teng kortej sifatida $n_1n_2...n_s$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olamiz. Shunday qilib, $n_1n_2...n_s$ marta n_{s+1} ta kortej hosil bo'ldi. Demak, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan kortejlar $n_1n_2...n_sn_{s+1}$ tadir. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Uchinchi tartibli figurali sonlar qatnashgan amaliy misol keltiring.
2. 1, 3, 6 va 8 raqamlaridan foydalanib, o'nli sanoq tizimida bir, ikki, uch, to'rt xonali barcha sonlarni yozing.
3. Matematik induksiya usuli yordamida arifmetik va geometrik progressiyalarning umumiy hadlari hamda dastlabki n ta hadlari yig'indisini topish formulalarini isbotlang.
4. Matematik induksiya usulini qo'llab, quyidagi formulalarni isbotlang:

a) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n},$$

b) $$\sin x+\sin(x+h)+...+\sin(x+nh)=\frac{\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)},$$

bu yerda, $h\neq 2\pi k,\ k\in Z.$

5. Matematik induksiya usulidan foydalanib, quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) ixtiyoriy $n \in N$ uchun $11^{n+2}+12^{2n+1}$ son 133 ga qoldiqsiz bo'linadi;

b) $11a^2-14a+3 \geq 0$ (a—butun son) tengsizlik o'rinlidir;

d) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$ tengsizlik o'rinlidir, bu yerda $n \in N$ va $n \geq 2$.

6. $2^n>n^2$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha natural n sonlarni toping.

7. Ixtiyoriy n natural son va chekli A to'plam uchun $|A^n|=|A|^n$ tenglikning o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlang.

8. Yetti so'mdan ortiq butun son bilan ifodalanuvchi pul to'lovini faqat 3 so'mlik va 5 so'mliklar bilan amalga oshirish mumkinligini isbotlang.

9. «Kombinatorika» so'zidan bitta unli yoki undosh harf tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

10. 13 nafar qiz va 12 nafar o'g'il boladan tashkil topgan talabalar guruhidan bir nafar talaba tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

11. Qiroatxonada har biri ikki o'rinli stollar to'rt qatorga sakkiztadan joylashtirilgan. Haftaning yakshanba kunidan tashqari har kuni qiroatxona o'quvchilarga sakkiz soat xizmat ko'rsatadi. Qiroatxonaning bir haftada o'quvchilarga mumkin bo'lgan eng ko'p xizmat ko'rsatish vaqtini (o'rin×soat birligida) toping.

12. Agar A va B shaharlarni to'rtta yo'l, B va C shaharlarni esa uchta yo'l bog'lasa, u holda A shahardan B shahar orqali C shaharga borish imkoniyatlari sonini aniqlang.

13. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

14. Shaxmat taxtasiga oq va qora ruxlarni bir-biriga hujum qilmaydigan holda joylashtirish imkoniyatlari sonini toping.

15. Yakkamualliflikda yozilgan Ahmedovning n_A ta, Botirovning n_B ta va Davronovning n_D ta kitoblardan:

a) bitta kitobni, b) turli mualliflarning ikkita kitobini;

d) turli mualliflarning uchta kitobini tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.

16. Agar tarkibida n ta savoli bo'lgan so'rovnomaning har bir savoliga

a) «ha» yoki «yo'q», b) «ha», «yo'q», «bilmayman» degan javobni yozish mumkin bo'lsa, u holda so'rovnomaning savollariga berish mumkin bo'lgan barcha javoblar imkoniyatlari sonini aniqlang.

17. Universitetning «Matematik modellashtirish» kafedrasida 12 nafar professor-o'qituvchi bo'lib, ularning har biri o'zbek va rus tillaridan tashqari, yana hech bo'lmasa bitta chet tilini biladi. Professor-o'qituvchilarning 10 nafari tojik, 7 nafari ingliz, 6 nafari esa olmon tilini biladi. Agar professor-o'qituvchilarning 5 nafari tojik va ingliz, 4 nafari tojik va olmon hamda 3 nafari ingliz va olmon tillarini bilsa, u holda o'zbek va rus tillaridan tashqari: a) uchala chet tilini; b) ikkita chet tilini; d) faqat ingliz tilini biladigan professor-o'qituvchilar sonini aniqlang.

18. Quyidagi formulani isbotlang:

$$\max(a_1,...,a_n)=a_1+...+a_n-\min(a_1,a_2)-...-\min(a_{n-1},a_n)+$$

$$+\min(a_1,a_2,a_3)+...+\min(a_{n-2},a_{n-1},a_n)-...+(-1)^{n-1}\min(a_1,...,a_n).$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Kombinatorika predmeti nima?
2. Kombinatorika sohasida ilmiy tadqiqotlar olib borgan qaysi olimlarni bilasiz?
3. Kombinatorika matematikaning alohida ilmiy yo'nalishi sifatida qachon shakllandi?
4. Figurali sonlar deganda nimani tushunasiz?
5. «Kombinatorika» iborasi kim tomonidan qachon kiritilgan?
6. Matematik induksiya usulidan foydalanib, tasdiq qanday isbotlanadi?
7. Qo'shish va ko'paytirish qoidalari qanday ifodalanadi?
8. Umumlashgan qo'shish va ko'paytirish qoidalarini bilasizmi?

2-§. Asosiy kombinatsiyalar

To'plam, element, kombinatsiya, o'rin almashtirish, betakror o'rin almashtirish, o'rin almashtirishlar soni, o'rinlashtirish, o'rinlashtirishlar soni, gruppalash, gruppalashlar soni, ko'paytirish qoidasi, matematik induksiya usuli, faktorial.

2.1. O'rin almashtirishlar. Elementlari $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ bo'lgan to'plamni qaraymiz. Bu to'plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n; \quad a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n; \quad a_2, a_3, a_1, \ldots, a_n.$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to'plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarning joylashish o'rinlari bilan farq qiladilar. Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ to'plam elementlarining *o'rin almashtirishi*, deb ataladi.

Aslida «o'rin almashtirish» iborasi to'plam elementlarining o'rinlarini o'zgartirish harakatini anglatsa-da, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo'lgan tuzilma sifatida qo'llaymiz. Bu iboradan uning asl ma'nosida ham foydalanamiz.

O'rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida «,» (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o'rinlidir.

To'plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o'rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rin almashtirishlarni *betakror (takrorli emas) o'rin almashtirishlar*, deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4-paragrafida takrorli o'rin almashtirishlar ko'riladi.

Berilgan n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar sonini P_n bilan belgilash qabul qilingan[1].

Bitta elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta a ko'rinishdagi o'rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1=1$.

Ikkita elementli $\{a,b\}$ to'plam elementlaridan o'rin almashtirishlarni bitta elementli $\{a\}$ to'plam uchun a o'rin almashtirishidan foydalanib, quyidagini tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa, ab o'rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o'rin almashtirishga ega bo'lamiz. Demak, ko'paytirish qoidasiga (ushbu bobning 1-paragrafiga qarang) binoan, ikkita o'rin almashtirish bor: $P_2=2=1\cdot 2$.

---

[1] Fransuzcha «*permution*» so'zi o'rin almashtirish ma'nosini bildiradi.

Uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun o'rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a,b\}$ to'plam uchun tuzilgan ab va ba o'rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to'plamning c elementini ab va ba o'rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko'paytirish qoidasini qo'llasak, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun oltita ($P_3=6=1\cdot 2\cdot 3$) har xil o'rin almashtirishlar hosil bo'lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

To'rtta elementli $\{a,b,c,d\}$ to'plamni qarab, uchta elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun tuzilgan oltita o'rin almashtirishlarning har biriga d elementni to'rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, $P_4=24=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ bo'lishini topamiz. Bu yerda barcha o'rin almashtirishlar quyidagilardir:

$$\begin{array}{llll} abcd, & abdc, & adbc, & dabc, \\ acbd, & acdb, & adcb, & dacb, \\ cabd, & cadb, & cdab, & dcab, \\ bacd, & badc, & bdac, & dbac, \\ bcad, & bcda, & bdca, & dbca, \\ cbad, & cbda, & cdba, & dcba. \end{array}$$

Shu tarzda davom etib «n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo'lgan barcha natural sonlarning ko'paytmasiga teng» deb faraz qilish mumkin: $P_n=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot(n-1)n$. Bu farazning to'g'riligi quyidagi 1-teoremada isbot qilinadi.

Dastlabki n ta natural sonlar ko'paytmasini $n!$ ko'rinishida[1] belgilash qabul qilingan, ya'ni $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n=n!$. $n!$ belgisidan bunday ma'noda birinchi bo'lib K. Kramp[2] 1808-yilda nashr etilgan algebra bo'yicha qo'llanmada foydalangan.

$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ ifodada $n=1$ bo'lganda faqat 1 soni ishtirok etadi, shuning uchun, ta'rif sifatida $1!=1$ deb hisoblash qabul qilingan. Bundan tashqari, $n=0$ bo'lganda esa $n!$ ifoda umuman ma'nosini yo'qotadi. Lekin, ta'rif sifatida $0!=1$ deb qabul qilinadi.

---

[1] «*En faktorial*» deb o'qiladi; faktorial so'zi lotincha «*factor*» so'zidan olingan bo'lib, ko'paytuvchi ma'nosini anglatadi.

[2] *Kristian Kramp* (Chiristian, 1760—1826) — olmon matematigi. Asosiy ishlari kombinatorika, geometriya va algebraga bag'ishlangan.

1-teorema. Elementlari soni n ta bo'lgan to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni n! ga teng, ya'ni $P_n=n!$

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Asos to'g'riligini, ya'ni teoremaning tasdig'i $n=1$ uchun to'g'riligini yuqorida ko'rdik. Induksion o'tish uchun teoremaning tasdig'i biron natural $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin, deb faraz qilamiz, ya'ni $P_k=k!$ bo'lsin. Ravshanki, $(k+1)$ ta elementli to'plamni k ta elementli to'plamga yangi $(k+1)$ — elementni kiritish yordamida hosil qilish mumkin. Bu $(k+1)$ — elementni k elementli to'plam uchun barcha $k!$ ta o'rin almashtirishlarning har biriga quyidagicha $(k+1)$ xil usul bilan kiritish mumkin:

1-elementdan oldin;

1- va 2-elementlar orasiga;

2- va 3-elementlar orasiga;

....

$(k—1)$- va k — elementlar orasiga;

k — elementdan keyin.

Shunday qilib, ko'paytirish qoidasiga binoan, $(k+1)$ ta elementli to'plam uchun jami $k!(k+1)=(k+1)!$ ta o'rin almashtirishlar hosil bo'ladi, ya'ni $P_{k+1}=(k+1)!$ ■

1-misol. Besh tomoshabinning besh o'rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a,b,c,d,e harflar bilan belgilasak, u holda $T=\{a,b,c,d,e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1-teoremaga asosan, $P_5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ bo'ladi. Demak, besh tomoshabinning besh o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120 ga teng. ■

2-misol. Shaxmat bo'yicha musobaqada har birining tarkibida to'rt o'yinchi bo'lgan ikki jamoa ishtirok etmoqda. Har bir jamoa rahbariga to'rt shaxmat taxtasida o'yinlar o'tkazish uchun o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir jamoa a'zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n=n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4=4!=24$. Jamoalardagi o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo'lganligidan, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni 24·24=576 bo'ladi. ■

2.2. O'rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1,a_2,a_3,...a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Shu to'plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1},a_{i_2},...a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) **n ta elementdan m tadan o'rinlashtirish**, deb ataladi.

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo'lgan ikkita har xil o'rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladilar. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar uchun $m \leq n$ bo'lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o'rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rinlashtirishlarni *betakror (takrorli emas) o'rinlashtirishlar*, deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4-paragrafida takrorli o'rinlashtirishlar ko'riladi.

Berilgan n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi[1].

Ravshanki, berilgan n ta $a_1,a_2,a_3,..., a_n$ elementlardan bittadan o'rinlashtirishlar n ta bo'ladi (bular: a_1; a_2; va hokazo, a_n), ya'ni $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o'rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o'rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo'ladi. Natijada, ko'paytirish qoidasiga binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo'lgan n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchtadan o'rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoni bor. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra, natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo'lgan n ta elementdan uchtadan o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

[1] Fransuzcha «*arrangement*» so'zi o'rinlashtirish ma'nosini beradi.

Shunga o‘xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to‘rttadan, beshtadan va hokazo o‘rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2-teorema. n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko‘paytmasiga tengdir, ya’ni $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$.

Isboti. n — ixtiyoriy natural son bo‘lsin. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llab, teorema tasdig‘ining n dan oshmaydigan ixtiyoriy m natural son uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz (ya’ni induksiyani m bo‘yicha bajaramiz).

Baza: yuqorida $A_n^1 = n$ ekanligi aniqlangan edi, ya’ni teorema tasdig‘i m=1 uchun to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish: $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formula $m=k<n$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, deb faraz qilamiz va uning $m=k+1$ uchun ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. n ta elementdan (k+1) tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy bittasini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o‘rinlashtirishning birinchi elementi sifatida berilgan $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ to‘plamning istalgan elementini, masalan, $a_1$ni tuzilayotgan o‘rinlashtirishga joylashtiramiz. Undan keyin umumiy soni A_{n-1}^k ga teng bo‘lgan (n—1) ta elementdan k tadan o‘rinlashtirishlarning ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 dan iborat bo‘lgan barcha n ta elementdan (k+1) tadan o‘rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^k ga tengdir. Bunday o‘rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ to‘plamning ixtiyoriy elementini tanlash mumkinligini e’tiborga olsak, ko‘paytirish qoidasiga binoan, berilgan n ta elementdan (k+1) tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagicha aniqlanishi kelib chiqadi:

$$A_n^{k+1} = nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)...((n-1)-k+1) =$$
$$= n(n-1)...(n-(k+1)+1).$$

Bu munosabat isbotlanayotgan formulaning $m=k+1$ uchun to‘g‘riligini ko‘rsatadi. ■

3-misol. Guruh 25 talabadan tashkil topgan bo‘lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25 ta elementli talabalar to‘plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo‘yicha vakili) qism to‘plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25 ta elementdan uchtadan o‘rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo‘yilgan savolga javob topish maqsadida 2-teoremadagi isbotlangan formulani n=25 va m=3 bo‘lgan holda qo‘llab, $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800 ta imkoniyat mavjud. ■

$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formulani $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ ko‘rinishda ham yozish mumkin. Haqiqatan ham,

$$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \frac{n(n-1)...(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Yuqorida ta’kidlanganidek, n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar n elementli to‘plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarining joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to‘plamlaridan iboratdir. Agar bu o‘rinlashtirishlarda n ta elementli to‘plamning barcha elementlari qatnashsa (ya’ni m=n bo‘lsa), n ta elementli to‘plam uchun barcha o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lishi tabiiydir. Shu tufayli, o‘rin almashtirishlarning oldin keltirilgan ta’rifiga ekvivalent quyidagi ta’rifni ham berish mumkin.

n ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar, deb n ta elementdan n tadan o‘rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o‘zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O‘rin almashtirishlarning bu ta’rifiga asoslanib, n ta elementli to‘plam uchun o‘rin almashtirishlar soni formulasini o‘rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...(n-(n-1)) = n(n-1)...2\cdot 1 = n!$$

yoki $P_n = A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} - n!$

2.3. Gruppalashlar. $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu n elementli to'plamning elementlaridan m ta elementga ega qism to'plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar. Bunday m ta elementli qism to'plamlarning har biriga *n ta elementdan m tadan gruppalash*, deb ataladi.

n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz[1].

Gruppalashlar sonini $\binom{m}{n}$ yoki $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi. Gruppalash ta'rifidan $1 \le m \le n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o'rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o'zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralayotgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni *betakror (takrorli emas) gruppalash*, deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4-paragrafida takrorli gruppalashlar o'rganiladi.

Bir (n=1) elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta gruppalash mavjud, u ham bo'lsa, bir (m=1) elementlidir: a. Demak, $C_1^1 = 1$.

Ikki (n=2) elementli $\{a,b\}$ to'plam uchun bittadan (m=1) gruppalashlar ikkita (a va b), ikkitadan (m=2) gruppalashlar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1 = 2$, $C_2^2 = 1$.

Uch (n=3) elementli $\{a,b,c\}$ to'plam uchun gruppalashlar: bittadan (m=1)— a,b va c (uchta); ikkitadan (m=2)—ab,ac,bc (uchta); uchtadan (m=3) — abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$.

To'rtta (n=4) elementdan tashkil topgan $\{a,b,c,d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan gruppalashlar: bittadan — a,b,c va d (to'rtta); ikkitadan — ab, ac, ad, bc, bd, cd (oltita); uchtadan — abc, abd, acd, bcd (to'rtta); to'rttadan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$.

Yuqoridagi mulohazalar gruppalashlar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasa-da, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni

[1] Fransuzcha «*combinatsion*» so'zi gruppalash ma'nosini beradi.

o‘z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin, degan yoki n ta elementdan bittadan n ta gruppalash bor, degan xulosalar ustida o‘ylab ko‘rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha gruppalashlarning har birida elementlarning o‘rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta elementdan m tadan barcha o‘rinlashtirishlar hosil bo‘ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta gruppalashning har biridagi m ta elementdan $P_m = m!$ ta o‘rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo‘lganligi tufayli, ko‘paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to‘g‘ridir. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$$

formula o‘rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3-teorema. n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni eng kattasi n ga teng bo‘lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko‘paytmasiga nisbati kabidir: $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$.

4-misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo‘limida 15 ishchi bor. Ko‘p qavatli uyning eshiklarini ta’mirlash uchun 3 duradgorni tanlash zarur. Agar bo‘limdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli bo‘lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo‘limdagi har bir duradgor ta’mirlash ishini bajarishga layoqatli bo‘lgani uchun, bu masalani hal qilishda gruppalashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda, $n=15$, $m=3$ va $C_{15}^3 = \dfrac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 455$. Demak, 15 duradgor orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ekan. ■

Agar ta’rif sifatida $C_n^0 = 1$ qabul qilinsa, n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni uchun yuqorida keltirilgan formula $m=0$ bo‘lgan holda ham to‘g‘ri bo‘ladi: $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$. Tabiiyki,

n ta elementdan barcha elementlarni o‘z ichiga oladigan faqat bitta gruppalash tashkil etish mumkin: $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

Gruppalashlar sonini hisoblash uchun $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^m = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}$ ko‘rinishdagi formulalardan ham foydalanish mumkin. Bu formulalar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\frac{n!}{m!}}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-(n-m))!}}{(n-m)!} = \frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}} = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1\cdot 2\cdot ...(n-m)}.$$

Ixtiyoriy natural n soni uchun gruppalashlar soni bir qator xossalarga ega, masalan,

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, ..., n),$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

Haqiqatan ham,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-(m-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1}\right) =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1)-(m+1)!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Shaxmat taxtasiga 8 ta ruxni bir-biriga hujum qilmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?
2. Ma'noga ega bo'lmaganlarini ham e'tiborga olgan holda *a*, *i*, *t*, *r* harflaridan 4 harfli nechta so'z tuzish mumkin?
3. 9 nafar kishining rais, rais o'rinbosari, kotib va ish yurituvchi vazifalariga tayinlanish imkoniyatlarini toping.
4. Turli 5 rangdagi bo'yoqlardan 3 xil rangli bo'yoq tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
5. Musobaqada 10 jamoa ishtirok etayotgan bo'lsa, ulardan uchtasi oltin, kumush va bronza medallarini olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
6. Kutubxonada 6 tilning har biridan boshqalariga bevosita tarjima qilish uchun yetarli lug'atlar mavjud. Tillar soni 10 ta bo'lganda, kutubxonaga yana qancha lug'at kerak?
7. Do'konda 10 xil qo'g'irchoqlar sotilayotgan bo'lsin. 8 dona turli qo'g'irchoqni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
8. Barcha raqamlari turlicha bo'lgan 7 sonli telefon raqamlari sonini toping.
9. Har bir yigit faqat bitta qizni o'yinga taklif qilish sharti bilan 4 yigit 6 qizni taklif etayotgan bo'lsa, bunday takliflar sonini toping.
10. Bir kishida 7 ta, boshqasida esa 9 ta kitob bor. Ular bir-biri bilan ikkitadan kitob almashishmoqchi. Kitob almashishlar sonini aniqlang.
11. 28 dona domino soqqalarini 4 o'yinchiga teng taqsimlash imkoniyatlari sonini toping.
12. Temiryo'l vagoni kupesida bir-biriga qarama-qarshi o'tirishga mo'ljallangan va har birida 5 ta o'rin bo'lgan 2 ta o'rindiq bor. 10 nafar yo'lovchilardan 4 tasi poyezdning yurishi yo'nalishiga qarab, boshqa 3 tasi teskari yo'nalishga qarab o'tirishni xohlaydi, qolgan 3 tasi uchun esa qaysi yo'nalishga qarab o'tirishning farqi yo'q. Yo'lovchilarni o'rindiqlarga joylashtirishlar imkoniyatlari sonini aniqlang.
13. Beshta har xil bayroqchani istalgan son va tartibda ko'tarib hosil qilish mumkin bo'lgan turli signallar sonini aniqlang.
14. Qavariq o'nburchak diagonallari sonini aniqlang.
15. Tekislikda har uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmagan to'qqizta nuqta berilgan. Agar bu nuqtalarning har uchtasidan birgina aylana o'tkazish mumkin bo'lsa, berilgan nuqtalardan nechta aylana o'tkazish mumkinligini aniqlang.

16. Quyidagi ayniyatlarni isbot qiling:

a) $C_m^k + C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^{k-2} = C_{m+1}^k$; b) $C_n^i C_i^m = C_n^m + C_{n-m}^{i-m}$;

d) $A_{m+1}^{k+1} = (m+1)A_m^k$; e) $\dfrac{P_n}{C_n^k P_k} = P_{n-k}$;

f) $A_{m+2}^{k+1} = A_n^k + 2kA_n^{k-1} + k(k-1)A_n^{k-2}$.

17. Quyidagi tenglamalarni hal qiling:

a) $C_{25}^x = C_{25}^{x-3}$; b) $A_x^3 + A_{x+1}^2 = \dfrac{3}{7}A_{x+2}^3$; d) $20C_{2x}^{x-1} = 77C_{2x-22}^x$;

e) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; f) $C_{x-1}^{x-4} - \dfrac{1}{8}P_5 = C_{x-2}^{x-5}$; g) $8C_{x+1}^5 = 3A_x^3$.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. O'rin almashtirishlar sonini qanday hisoblash mumkin?
2. O'rinlashtirishlar soni formulasini isbotlay olasizmi?
3. O'rin almashtirish va o'rinlashtirish orasida qanday farq bor?
4. Gruppalashlar tushunchasi va gruppalashlar soni formulasi.
5. Gruppalashlar sonining qanday xossalari bor?
6. O'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar sonlari orasida qanday munosabatlarni bilasiz?

3-§. Paskal uchburchagi. Nyuton binomi[1]

Gruppalash, gruppalashlar soni, Paskal uchburchagi, arifmetik uchburchak, ikkita son yig'indisining natural darajasi, butun sonning istalgan natural ko'rsatkichli ildizi, qisqa ko'paytirish formulalari, yig'indining bikvadrati, matematik induksiya, Nyuton binomi, binomial koeffitsiyentlar, Koshi ayniyati.

3.1. Paskal uchburchagi haqida umumiy ma'lumotlar. Berilgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni C_n^m uchun bir necha qatorlarni 1-jadvaldagidek yozamiz:

[1] «*Binom*» so'zi ikkihad ma'nosini anglatadi.

1-jadval

n	Gruppalashlar soni $C_n^m (m=\overline{0,n})$
1	$C_1^0=1,\ C_1^1=1$
2	$C_2^0=1,\ C_2^1=2,\ C_2^2=1$
3	$C_3^0=1,\ C_3^1=3,\ C_3^2=3,\ C_3^3=1$
4	$C_4^0=1,\ C_4^1=4,\ C_4^2=6,\ C_4^3=4,\ C_4^4=1$
5	$C_5^0=1,\ C_5^1=5,\ C_5^2=10,\ C_5^3=10,\ C_5^4=5,\ C_5^5=1$
...	....

Bu jadvalda gruppalashlar sonining quyidagi xossalarini kuzatish mumkin:

— har bir qatorning chetlarida birlar joylashgan (bu tasdiq $C_n^0=C_n^0=1$ formula bilan ifodalanadi, ushbu bobning 2-paragrafiga qarang);

— har bir qatordagi C_n^m sonlar qatorning teng o'rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan, ya'ni qatorning boshidan va oxiridan baravar uzoqlikda turgan sonlar o'zaro teng ($C_n^m=C_n^{n-m}$);

— ikkinchi qatordan boshlab har bir qatordagi birlardan tashqari ixtiyoriy son bu qatordan yuqorida joylashgan qatordagi biri shu son ustida, ikkinchisi esa undan chapda joylashgan ikkita gruppalashlar sonining yig'indisiga teng ($C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+=C_n^{m+1}$);

— har bir qatordagi C_n^m sonlar shu qator teng o'rtasigacha o'sib, so'ng kamayadi (3.3-band, 5-xossaga qarang).

Ta'rif sifatida $C_0^0=1$ deb qabul qilinsa va bu son yuqoridagi jadvalning $n=1$ raqamli qatoridan oldin $n=0$ raqamli qatori sifatida joylashtirilsa, uchburchak figurasiga o'xshash 1-shakldagi sonlar jadvalini hosil qilish mumkin.

1-shakldagi sonlar jadvali *Paskal uchburchagi*, deb ataladi. Bu jadval *arifmetik uchburchak* nomi bilan ham yuritiladi. Uning Paskal nomi bilan atalishiga qaramasdan, bunday sonlar jadvali juda qadimdan dunyoning turli mintaqalarida, jumladan, Sharq mamlakatlarida ham ma'lum bo'lgan. Masalan, Erondagi Tus shahrida (hozirgi Mashhadda) yashab ijod qilgan Nosir at-Tusiy[1] XIII asrda bu jadvaldan foydalanib, berilgan ikkita son yig'indisining natural darajasini hisoblash usulini o'zining ilmiy ishlarida keltirgan bo'lsa, g'arbda Al-Koshiy nomi bilan mashhur samarqandlik olim Ali Qushchi[2] butun sonning istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizi qiymatini taqribiy hisoblashda bu jadvaldan foydalana bilganligi haqida ma'lumotlar bor. Keyinchalik G'arbiy Yevropada bu sonlar uchburchagi haqida M. Shtifel[3] arifmetika bo'yicha qo'llanmalarida yozgan va u ham butun sondan istalgan natural ko'rsatkichli arifmetik ildizning taqribiy qiymatini hisoblashda bu uchburchakdan foydalana bilgan. 1556-yilda bu sonlar jadvali bilan N. Tartalya[4], keyinroq logarifmik lineyka ijodkori U. Otred[5] (1631-yil) ham shug'ullangan. 1654-yilga kelib, B. Paskal o'zining «Arifmetik uchburchak haqidagi traktat» nomli asarida bu sonlar jadvali haqidagi ma'lumotlarni e'lon qildi.

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

10-shakl.

Paskal uchburchagidagi qatorlar istalgancha davom ettirilishi mumkin. Shunisi qiziqki, Paskal uchburchagi yordamida istalgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini faqat qo'shish amali yordamida hosil qilish mumkin (ushbu bobning 2-paragrafdagi C_n^m sonni hisoblash $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^m = \frac{n(n-1)...(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... (n-m)!}$ va $C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m}$ formulalariga qarang). Bu amal $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ formulaga asoslanadi.

---

[1] *At-Tusiy* (Nosir ad-Din-Muhammad ibn Muhammad ibn-al-Hasan, 1201—1274) — Eron astronomi va matematigi.

[2] *Ali Qushchi* (Jamshid ibn Ma'sud, tug'ilgan yili noma'lum—taxminan 1436 yoki 1437-yilda vafot etgan)—o'zbek matematigi va astronomi, 1420—1430-yillarda Samarqandda Mirzo Ulug'bek rasadxonasida yashagan.

[3] *Shtifel Mixel* (Michel, 1487—1567) — olmon matematigi.

[4] *Tartalya Nikkolo* (Tartalia Nic-colo, 1499-yil atrofida tug'ilgan — 1557) — italyan matematigi va mexanigi.

[5] *Otred Uilyam* (Outred William, 1574—1660) — ingliz matematigi.

Paskal uchburchagi ko'plab ajoyib xossalarga ega. B. Paskal yuqorida zikr etilgan traktatda: «Bu xossalarning haqiqatan ham bitmas-tuganmasligi naqadar ajoyibdir» deb yozgan edi. Ushbu paragrafning 3.3-bandida Paskal uchburchagining ba'zi xossalari keltirilgan.

3.2. Nyuton binomi haqida umumiy ma'lumotlar. O'rta maktab matematikasi kursidan quyidagi ikkita qisqa ko'paytirish formulalarini eslaylik:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ — yig'indining kvadrati;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ — yig'indining kubi.

Yig'indining navbatdagi ikkita, ya'ni 4- va 5-darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$

$$(a+b)^5=(a+b)(a+b)^4=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Shunday qilib, *yig'indining bikvadrati* (ya'ni to'rtinchi darajasi)

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

va yig'indining beshinchi darajasi

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

formulalariga ega bo'lamiz.

Yuqorida keltirilgan yig'indining kvadrati, kubi, bikvadrati va beshinchi darajasi formulalari o'ng tomonlaridagi ko'phad koeffitsiyentlari Paskal uchburchagining mos qatorlaridagi C_n^m ($n=2,3,4,5$) sonlar ekanligini payqash qiyin emas.

1-teorema. Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

formula o'rinlidir.

Isboti. Matematik induksiya usulini qo'llaymiz.

Baza: $n=1$ bo'lganda formula to'g'ri: $(a+b)^1=a+b$.

Induksion o'tish: isbotlanishi kerak bo'lgan formula $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\ldots+C_k^{k-1}ab^{k-1}+b^k.$$

Formula $n=k+1$ bo'lganda ham to'g'ri ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan ham, $C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$ formuladan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^{k}=$$

$$=(a+b)(a^{k}+C_{k}^{1}a^{k-1}b+C_{k}^{2}a^{k-2}b^{2}+\ldots+C_{k}^{k-1}ab^{k-1}+b^{k})=$$

$$=a^{k+1}+C_{k}^{1}a^{k}b+C_{k}^{2}a^{k-1}b^{2}+\ldots+C_{k}^{k}ab^{k}+$$

$$=C_{k}^{0}a^{k}b+C_{k}^{1}a^{k-1}b^{2}+\ldots+C_{k}^{k-1}ab^{k}+b^{k+1}=$$

$$=a^{k+1}+(C_{k}^{0}+C_{k}^{1})a^{k}b+(C_{k}^{1}+C_{k}^{2})a^{k-1}+b^{2}+\ldots$$

$$\ldots+(C_{k}^{k-1}+C_{k}^{k})ab^{k}+b^{k+1}=$$

$$=a^{k+1}+C_{k+1}^{1}a^{k}b+C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2}+\ldots+C_{k+1}^{k}ab^{k}+b^{k+1}. \blacksquare$$

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko'phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) *Nyuton*[1] *binomi*, deb ataladi. Umuman olganda, «Nyuton binomi» iborasiga tanqidiy nuqtayi nazardan yondashilsa, undagi har ikki so'zga nisbatan ham shubha tug'iladi: birinchidan, $(a+b)^n$ ifoda birdan katta natural n sonlar uchun binom (ya'ni ikkihad) emas; ikkinchidan, natural sonlar uchun bu ifodaning yoyilmasi Nyutongacha ma'lum edi[2].

Greklar $(a+b)^n$ ifodaning qatorga yoyilmasini n ning faqat $n=2$ bo'lgan holida (ya'ni yig'indi kvadratining formulasini) bilar edilar. Umar Xayyom[3] va Ali Qushchi $(a+b)^n$ ifodani $n>2$ bo'lgan natural sonlar uchun ham qatorga yoya bilganlar. Nyuton esa 1767-yilda yoyilma formulasini isbotsiz manfiy va kasr n sonlar uchun ham qo'llagan. L. Eyler 1774-yilda Nyuton binomi formulasini kasr n sonlar uchun isbotladi, K. Makloren[4] esa bu formulani darajaning ratsional ko'rsatkichlari uchun qo'lladi. Nihoyat, 1825-yilda N. Abel[5] daraja ko'rsatkichining istalgan kompleks qiymatlari uchun binom haqidagi teoremani isbotladi.

C_n^m sonlarni *binomial koeffitsiyentlar*, deb ham atashadi. Bunday ta'rif bu koeffitsiyentlarning Nyuton binomi formulasida tutgan o'rniga qarab berilgan bo'lib, C_n^m son

---

[1] *Isaak Nyuton* (Newton, 1643—1727) — ingliz fizigi, mexanigi va matematigi.
[2] Ushbu paragrafning 3.1-bandidagi xronologik ma'lumotlarga qarang.
[3] *Umar Xayyom (*G'iyosiddin Abulfath Umar ibn Ibrohim Xayyom Nishopuriy, عمر خيام, 1048 — Nishopur —1131)— fors shoiri, matematigi va faylasufi.
[4] *Makloren Kolin* (Maclaurin Colin, 1698—1746) — Shotlandiya matematigi.
[5] *Abel Nils Xenrik* (Niels Henric, 1802—1829) — Norvegiya matematigi.

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

yoyilmadagi $a^{n-m}b^m$ ifodaning koeffitsiyentidir.

2-teorema. Barcha haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun

$$(a-b)^n=\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$$

formula o'rinlidir.

Isboti. Nyuton binomi formulasida b ni $(-b)$ ga almashtirsak, kerakli formulani hosil qilamiz. ■

1-misol. Oxirgi formuladan xususiy holda quyidagi qisqa ko'paytirish formulalari kelib chiqadi:

$n=2$ bo'lganda ayirmaning kvadrati formulasi

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

$n=3$ bo'lganda ayirmaning kubi formulasi

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2+b^3. \blacksquare$$

Nyuton binomi formulasini kombinatorik amallar yordamida ham hosil qilish mumkin.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy $a, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sonlar uchun $(a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n)$ ifodani

$$(a+b_1)(a+b_2)\ldots(a+b_n)=a^n+a^{n-1}(b_1+b_2+\ldots+b_n)+$$
$$+a^{n-2}(b_1b_2+b_1b_3+\ldots+b_{n-1}b_n)+$$
$$+a^{n-3}(b_1b_2b_3+\ldots+b_{n-2}b_{n-1}b_n)+\ldots+b_1b_2\ldots b_n.$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglikning o'ng tomonida joylashgan a^n oldidagi koeffitsiyent birga ($1=C_n^0$) teng. Birinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar soni n ga ($n=C_n^1$) tengligi yaqqol ko'rinib turibdi. Ikkinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (n ta) elementlardan ikkitadan ko'paytmalar (soni C_n^2 ga teng gruppalashlar) ekanligini ham payqash qiyin emas. Uchinchi qavslar ichidagi qo'shiluvchilar esa o'sha n ta elementlardan uchtadan ko'paytmalar bo'lib, ularning soni C_n^3 ga teng va hokazo. Oxirgi qo'shiluvchi oldidagi koeffitsiyent birga ($1=C_n^n$) teng. Yuqoridagi tenglikda $b_1=b_2=\ldots=b_n=b$ deb olsak, Nyuton binomi formulasini hosil qilamiz.

3.3. Binomial koeffitsiyentlarning xossalari. Binomial koeffitsiyentlarning ba'zi xossalarini keltiramiz. Bu xossalar bevosita gruppalashlarga oid bo'lib, tabiiyki, ular Paskal uchburchagining xossalarini ham ifodalaydi.

1-xossa. $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m}=\frac{n-m}{m+1}\,(m=0,1,2,...,n-1)$ *tenglik o'rinlidir.*

Haqiqatan ham,

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m}=\frac{\dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}}{\dfrac{n!}{m!(n-m)!}}=\frac{m!(n-m)!}{(m+1)!(n-m-1)!}=$$

$$=\frac{m!(n-m-1)!(n-m)}{m!(m+1)!(n-m-1)!}=\frac{(n-m)}{m+1}. \blacksquare$$

Bu xossa binomial koeffitsiyentlar qatoridagi istalgan ketma-ket ikki elementning biri ma'lum bo'lsa, boshqasini osonlik bilan hisoblash mumkinligini ko'rsatadi:

$$C_n^{m+1}=\frac{n-m}{m+1}C_n^m,\quad C_n^m=\frac{m+m}{n-m}C_n^{m+1},$$

bu yerda, $m=0,1,2,...,n-1$.

2-xossa. Ixtiyoriy natural n son uchun barcha C_n^m $(m=\overline{0,n})$ *binomial koeffitsiyentlar yig'indisi* 2^n *ga teng, ya'ni*

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida $a=b=1$ deb olganda hosil bo'ladi. ■

3-xossa. Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisiga teng.

Haqiqatan ham, Nyuton binomi formulasida $a=1$ va $b=-1$ deb olganda,

$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+...+(-1)^n+C_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan xossadagi tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi. ■

2- va 3-xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

4-xossa. n natural sondan oshmaydigan eng katta toq m son uchun $C_n^1+C_n^3+...+C_n^m=2^{n-1}$ *tenglik hamda n sondan oshmaydigan eng katta juft m son uchun* $C_n^0+C_n^2+...+C_n^m=2^{n-1}$ *tenglik o'rinlidir.*

5-xossa. Toq n son uchun

$$C_n^0<C_n^1<...<C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n-1}{2}+1},\quad C_n^{\frac{n-1}{2}+1}>C_n^{\frac{n-1}{2}+2}>...>C_n^n,$$

juft n son uchun esa

$$C_n^0<C_n^1<...<C_n^{\frac{n}{2}},\quad C_n^{\frac{n}{2}}>C_n^{\frac{n}{2}+1}>...>C_n^n,$$

munosabatlar o'rinlidir.

Haqiqatan ham, $m<\frac{n-1}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy natural n va m sonlar uchun $\frac{n-m}{m+1}>1$ tengsizlik o'rinlidir, $m>\frac{n-1}{2}$ bo'lganda esa $\frac{n-m}{m+1}<1$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu yerda, $C_n^{m+1}\frac{n-m}{m+1}>C_n^m$ formulani (1-xossaga qarang) qo'llab, xossadagi barcha tengsizliklarni hosil qilamiz.

Agar n toq son bo'lsa, $m=\frac{n-1}{2}$ butun son bo'lib, $\frac{n-m}{m+1}=$

$\frac{n-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}+1}=\frac{2n-n+1}{n-1+2}=\frac{n+1}{n+1}=1$ munosabat o'rinlidir. Demak, $C_n^{m+1}=\frac{n-m}{m+1}C_n^m$ formuladan $m=\frac{n-1}{2}$ bo'lganda $C_n^{\frac{n-1}{2}+1}=C_n^{\frac{n-1}{2}}$ tenglik kelib chiqadi. ■

Binomial koeffitsiyentlarning 5-xossasi Paskal uchburchagining yuqorida keltirilgan xossalari tasdig'i bo'lib, unga ko'ra binomial koeffitsiyentlar oldin $C_n^0=1$ dan $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ gacha[1] o'sadi, keyin esa

[1] $[a]$ yozuvi a sonning butun qismini anglatadi.

$C_n^n = 1$ gacha kamayadi hamda n toq bo'lganda, binomial koeffitsiyentlar qatorining o'rtasidagi ikkita hadi tengdir va n juft bo'lganda, uning o'rtadagisi hadi eng katta va yagonadir.

Quyidagi 6—8-xossalar o'rinlidir:

6-xossa. $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^{n+} = C_{n+k+1}^{n+1}.$

7-xossa. $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$

8-xossa. $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$

Oxirgi tenglik ***Koshi*[1] *ayniyati*,** deb aytiladi.

Endi bu uchta xossalarni isbotlaymiz. Dastlab 6-xossaning isbotini keltiramiz. Birinchidan,

$$s = (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+k}$$

ko'phad uchun Nyuton binomi formulasini qo'llab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$s = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m + \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m x^m + \ldots + \sum_{m=0}^{n+k} C_{n+k}^m x^m.$$

Bu yerdan, s ko'phaddagi x^n ifodaning koeffitsiyenti

$$C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^n$$

yig'indiga tengligini aniqlash mumkin.

Ikkinchidan, $s = (1+x)^n(1+(1+x)+\ldots+(1+x)^k)$ ifodani geometrik progressiya hadlari yig'indisi formulasiga binoan, quyidagicha ham yozish mumkin:

$$s = (1+x)^n \frac{(1+x)^{k+1} - 1}{1+x-1} = \frac{1}{x}\left((1+x)^{n+k+1} - (1-x)^n\right).$$

Bu yerda ham Nyuton binomi formulasini qo'llab, hosil bo'lgan ko'phadning x^n daraja qatnashgan hadi koeffitsiyenti C_{n+k+1}^{n+1} ekanligini ko'rish mumkin. Keltirilgan bu mulohazalar asosida 6-xossadagi tenglikka ega bo'lamiz. ■

Ravshanki, $C_n^m = C_n^{n-m}$ formula e'tiborga olinsa, 7-xossa 8- xossadan $m = k = n$ bo'lganda xususiy hol sifatida kelib chiqadi. Shuning

[1] *Koshi* (Cauchy Ogyusten Lui, 1789—1857) — fransuz matematigi.

uchun faqat 8-xossaning isbotini keltirish bilan chegaralanamiz.

Birinchidan, Nyuton binomi formulasiga ko'ra,

$$(1+x)^n=\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s,\quad (1+x)^m=\sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t,\quad (1+x)^{n+m}=\sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$$

tengliklarga, bulardan esa $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$ bo'lgani uchun $\sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s \sum_{t=0}^{m} C_m^t x^t = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p$ tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikning har ikki tomonidagi x^k (k=0,1,...,min(m,n)) daraja koeffitsiyentlarini bir-biriga tenglashtirsak, isbotlanishi kerak bo'lgan formulani hosil qilamiz. ■

Albatta, yuqoridagi uch xossa boshqa usullar bilan ham isbotlanishi mumkin. Quyida 8-xossaning kombinatorik tahlilga asoslangan isboti keltirilgan.

2-misol. Koshi ayniyatini kombinatorik tahlilga asoslangan holda isbotlaymiz. n nafar o'g'il va m qiz boladan tashkil topgan talabalar guruhidan k (k=0,1,...,min(m,n)) talaba tanlash zarur bo'lsin. $n+m$ talabalardan k talabani C_{n+m}^k xil usul bilan tanlash mumkinligi ravshan.

Boshqa tomondan olib qaraganda, $n+m$ talabalardan iborat to'plamdan tanlanadigan barcha k elementli qism to'plamlarni ularning tarkibidagi o'g'il bolalar soniga qarab, sinflarga ajratishning quyidagicha imkoniyati bor. Tarkibida s $(0 \le s \le k)$ o'g'il bola bo'lgan k elementli qism to'plamni oldin C_n^s xil usul bilan tanlab, keyin (k—s) qizlarni C_m^{k-s} xil usullardan birontasi yordamida tanlash mumkin. Demak, tarkibida s o'g'il bola bo'lgan k talabadan iborat qism to'plamlar soni, ko'paytirish qoidasiga asosan, $C_n^s C_m^{k-s}$ songa tengdir. Noldan k gacha bo'lgan barcha butun s sonlar uchun barcha kombinatsiyalar hosil qilgan holda bu kombinatsiyalarga mos ko'paytmalarni yig'ib, Koshi ayniyatining chap tomonini hosil qilamiz. ■

Binomial koeffitsiyentlarning yuqorida keltirilgan xossalarini tahlil qilish natijasida ularning turli sohalardagi tadbiqlari doirasining kengligini payqash mumkin. Misol sifatida to'plamlar nazariyasiga tatbiqini qaraymiz.

3-misol. Chekli A to'plam 2^A buleanining elementlari va bu elementlar soni bilan binomial koeffitsiyentlarning uzviy bog'lanishi bor. Bu bog'lanishni quyidagicha ifodalash mumkin. Chekli A to'plam 2^A buleani tarkibidagi elementlar A to'plamning qism to'plamlaridan iborat bo'lgani uchun, shu qism to'plamlarni quvvatlari bo'yicha $(|A|+1)$ ta guruhga ajratish mumkin. Tushunarliki, bu yerda k raqamli guruh ($k=\overline{0,|A|}$) quvvati k ga teng bo'lgan barcha qism to'plamlardan tashkil topadi va undagi qism to'plamlar soni C_n^k ga teng. Bu mulohazani hisobga olgan holda 2-xossa yordamida ushbu bobning 1-paragrafidagi 1-teoremaning boshqa bir isbotiga ega bo'lamiz. ■

Binomial koeffitsiyentlarning yana bir xossasi ushbu bobning 7-paragrafida isbotlanadi.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Binomial koeffitsiyentlarning xossalaridan foydalanib, quyidagi formulalarni isbotlang:

a) $1^2+2^2+...+m^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$;

b) $1^3+2^3+...+m^3=\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}$.

2. n dona bir xil sharlar orasidan toq sondagi, $n\geq 2$ bo'lganda esa juft sondagi sharlarni tanlash imkoniyati sonlarini aniqlang.
3. Binomial koeffitsiyentlarning quyidagi xossalarini isbotlang:

a) $\sum\limits_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$;

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(-1)^k C_n^k = 0$;

e) $n! = n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + ... +$

$+(n-1)^{n-2}C_n^{n-2}2^n + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \quad (n\in N)$;

f) $n^m = C_n^1(n-1)^m - C_n^2(n-2)^m + ... +$

$+(-1)^{n-3}C_n^{n-2}2^m+(-1)^{n-2}C_n^{n-1}, \quad m<n, (m,n\in N).$

4. Quyidagi yig'indilarni hisoblang:

a) $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n;$

b) $C_n^2+2C_n^3+3C_n^4+...+(n-1)C_n^n;$

d) $C_n^0+3C_n^1+5C_n^2+...+(2n+1)C_n^n.$

5. Binomial koeffitsiyentlarning yuqorida keltirilgan xossalaridan farqli bironta xossasini topishga harakat qiling.
6. Ixtiyoriy A chekli to'plamning juft quvvatli qism to'plamlari to'plamining quvvati shu A to'plamning toq quvvatli qism to'plamlari to'plamining quvvatiga tengligini isbotlang.
7. Quvvati 100 ga teng bo'lgan to'plamning 40 elementli qism to'plamlari soni bilan shu to'plamning 60 elementli qism to'plamlari sonini solishtiring.
8. Figurali sonlarning Paskal uchburchagidagi o'rnini aniqlang.
9. Paskal uchburchagi yordamida ixtiyoriy k-tartibli figurali sonlarning dastlabki n tasi yig'indisini hisoblash formulasini toping va bu formulani matematik induksiya usuli yordamida isbot qiling.
10. Paskal uchburchagidan foydalanib 11^n $(n\in N)$ ifodaning qiymatini hisoblash formulasini keltirib chiqaring va bu formulani isbot qiling.
11. Paskal uchburchagining ixtiyoriy n-satridan yuqorida joylashgan elementlari yig'indisini hisoblash formulasini ifodalang va bu formulani isbot qiling.
12. Paskal uchburchagining bir necha o'n qatorini yozib, undagi ikkiga, uchga, beshga qoldiqsiz bo'linadiganlarini ajrating.
13. Paskal uchburchagining 256-qatorida qancha toq son borligini aniqlang.
14. Paskal uchburchagidan foydalanib, $\sin nx$ va $\cos nx$ ifodalarni $\sin x$ va $\cos x$ orqali ifodalash formulalarini keltirib chiqaring.
15. Paskal uchburchagini sinchkovlik bilan tekshirib, undagi sonlarning dastlabki bir necha tub sonlarga (masalan, 2, 3, 5, 7, 11) bo'linadiganlarining o'rinlarini aniqlang.
16. Paskal uchburchagidagi juft va toq sonlarning joylashuvini tekshiring.
17. Paskal uchburchagining kitobda bayon qilinmagan xossalarini topishga urinib ko'ring.

1. Paskal uchburchagi deganda nimani tushunasiz?
2. Paskal uchburchagining qanday xossalarini bilasiz?
3. B. Paskalgacha Paskal uchburchagidan foydalangan sharq va g'arb olimlaridan kimlarni bilasiz?
4. Nyuton binomi formulasini qanday qo'llash mumkin?
5. Nyuton binomi formulasini Isaak Nyutondan oldin kimlar qo'llagan?
6. Nima uchun binomial koeffitsiyentlarning xossalari Paskal uchburchagining xossalari ham hisoblanadi?
7. Nyuton binomi formulasini kombinatorik tahlil yordamida isbot qilganda qanday tushunchalar qo'llaniladi?
8. Koshi ayniyatining kombinatorik tushunchalarga asoslangan isbotini bilasizmi?
9. Nima uchun gruppalashlar sonlarini binomial koeffitsiyentlar deb ham atashadi?
10. Nima uchun 7-xossa 8-xossaning xususiy holi bo'ladi?
11. Binomial koeffitsiyentlarning ushbu o'quv qo'llanmada bayon etilmagan yana qanday xossalarini bilasiz?

4-§. Takrorli kombinatsiyalar

Kombinatsiya, takrorlanish, birlashmalar, takrorli o'rin almashtirish, o'rinlashtirish va gruppalashlar, ko'phad formulasi, ko'phadiy koeffitsiyentlar, umumlashgan Nyuton binomi.

4.1. Takrorli o'rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari, tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan boshqa birlashmalar ham o'rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar.

Avval o'rganilgan o'rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o'rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo'lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o'rinlari almashtirilishi natijasida yangi o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o'zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o'rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo'ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, bir xil n_k ta k-tur elementlar bo'lsin, bu yerda, n_1, n_2, ...n_k — hech bo'lmaganda bittasi 1 dan farqli natural sonlar. Bu n ta elementlarning o'rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan kortejlar (kombinatsiyalar) *takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar* (qisqacha, *takrorli o'rin almashtirishlar*), deb ataladi.

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, n_k ta k-tur bir xil elementlar bo'lgan takrorli o'rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1, n_2,...,n_k)$ bilan belgilaymiz.

1-teorema. Takrorli o'rin almashtirishlar soni uchun

$$C_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!, n_2!, ...n_k!}$$

formula o'rinlidir, bu yerda $n_1+n_2+...+n_k=n$ — elementlar soni, k— turlar soni.

Isboti. Har bir o'rin almashtirishdagi elementlar soni n_1+ $+n_2+...+n_k=n$ ga teng. Bu n ta elementlarni quyidagi tartibda joylashtirib, o'rin almashtirishlardan birini qaraymiz: birinchi bo'lib barcha n_1 ta birinchi tur, ulardan keyin barcha n_2 ta ikkinchi tur va hokazo, oxirida barcha n_n ta k-tur elementlar joylashgan bo'lsin. Qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda birinchi tur elementlar soni n_1 ga teng bo'lgani uchun ularning mumkin bo'lgan hamma o'rin almashtirishlari soni $n_1!$ ga teng. Ammo bu elementlar bir-biridan farq qilmaganligi sababli, ularning o'rinlarini almashtirish natijasida, yangi takrorli o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi.

Qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar soni $n_2!$ bo'lib, bu yerda ham bir-biridan farq qilmagan elementlar o'rinlarini almashtirishlar jarayonida yangi takrorli o'rin almashtirish hosil qilinmaydi. Ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar birinchi tur elementlarning o'rin almashtirishlariga bog'liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkinligini ta'kidlaymiz.

Uchinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar soni $n_3!$ bo'lib, ularning ham hech qaysi biri yangi takrorli o'rin almashtirish hosil qilmaydi. Bu o'rin almashtirishlar $n_1!$ ta birinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlarga va $n_2!$ ta ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlarga, jami, ko'paytirish qoidasiga asosan, $n_1!\, n_2!$ ta o'rin almashtirishlarga bog'liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Shunday davom etib, qaralayotgan takrorli o‘rin almashtirishda oxirgi k- tur elementlar o‘rinlarini almashtiramiz. Bunday o‘rin almashtirishlar soni $n_k!$ ga teng bo‘lib, bu o‘rin almashtirishlar ham yangi takrorli o‘rin almashtirishni hosil qilmaydi. Bu o‘rin almashtirishlarni birinchi tur, ikkinchi tur va hokazo $(k-1)$ tur elementlarning jami soni, umumlashgan ko‘paytirish qoidasiga asosan, $n_1!\, n_2! ... n_{k-1}!$ bo‘lgan o‘rin almashtirishlariga bog‘liqsiz ravishda bajarish mumkin.

Shunday qilib, $n_1!$ ta o‘rin almashtirishlarni har birida $n_1!\, n_2! ... n_k!$ tadan bir xil o‘rin almashtirishlar bo‘lgan qismlarga ajratildi, deb hisoblash mumkin. Demak, biz izlagan takrorli o‘rin almashtirishlar soni $C_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! ... n_k!}$ bo‘ladi, bunda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. ■

1-misol. Ikkita a, bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o‘rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi (k=3) harflar soni beshga teng (n=5) bo‘lib, $n_1=2$ (ikkita a), $n_2=1$ (bitta b) va $n_3=2$ (ikkita c). Dastlabki ikki harfning (xuddi shuningdek, oxirgi ikki harfning ham) o‘rnini o‘zaro almashtirsak, yangi o‘rin almashtirishlar hosil bo‘lmaydi. Barcha takrorli o‘rin almashtirishlar soni

$C_5(2,1,2) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2} = 30$ bo‘ladi. Bu o‘ttizta o‘rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

$$\begin{gathered} aabcc,\ aacbc,\ aaccb, abacc, abcac, abcca, \\ acabc, acacb, acbac, acbca, accab, accba, \\ baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa, \\ caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba, \\ cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa. \ ■ \end{gathered}$$

4.2. Takrorli o‘rinlashtirishlar. n ta elementlardan tashkil topgan to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element xohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo‘lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin. Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri *n ta turli elementlardan* *takrorlanuvchi elementlar qatnashgan m tadan o'rinlashtirish* (qisqacha, *takrorli o'rinlashtirish*), deb ataladi.

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

2-teorema. n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya'ni $\overline{A}_n^m = n^m$.

Isboti. Berilgan n uchun takrorli o'rinlashtirishdagi elementlar soni m bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llaymiz. Baza: takrorli o'rinlashtirishlar $m=1$ bo'lganda, bitta elementdan tuzilishi ravshan. Tabiiyki, bunda hech qanaqa takrorlanish haqida gap bo'lishi mumkin emas. Bu holda elementlar soni n bo'lgani uchun takrorli o'rinlashtirishlar soni ham n ga teng: $\overline{A}_n^1 = n = n^1$.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $m=k$ bo'lganda to'g'ri, ya'ni $\overline{A}_n^k = n^k$ bo'lsin. Bu tasdiq $m=k+1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun n ta turli elementlardan k tadan takrorli o'rinlashtirishning istalgan birini olib, unga n elementli to'plamning ixtiyoriy bitta elementini $(k+1)$-element sifatida kiritamiz. Natijada qandaydir $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishni paydo qilamiz. Tabiiyki, qaralayotgan k tadan o'rinlashtirishlarning har biridan yangi n ta $(k+1)$tadan takrorli o'rinlashtirishlar hosil qilish mumkin. Shunday usul bilan ishni davom ettirsak, barcha mumkin bo'lgan $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz, bu yerda bironta ham $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishlar qolib ketmaydi va hech qaysi ilgari ko'rilgan $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirish qaytadan paydo bo'lmaydi. Ko'paytirish qoidasiga asosan, n ta turli elementlardan $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni k tadan takrorli o'rinlashtirishlar soniga nisbatan n marta ortiqdir, ya'ni $\overline{A}_n^{k+1} = n\overline{A}_n^k = nn^k = n^{k+1}$.

2-misol. Oila a'zolari besh kishidan iborat bo'lib, ular ikki ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo'laklash), bunda oilaning har bir a'zosi har ikki ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a'zolariga bu ishni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a'zolarini a, b, c, d va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo'lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o'rinlashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc,$$
$$cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo'lib 25 ta ($\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$) takrorli o'rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a'zolariga ikki ishni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni 25 dir. ■

3-misol. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqami ikki qismdan iborat: lotin alifbosining ikkita harfi va yetti xonali son. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining barcha mumkin bo'lgan raqamlari sonini aniqlang.

Lotin alifbosidagi yigirma oltita turli harflar yordamida 676 ta ($\overline{A}_{26}^2 = 26^2 = 676$) ikkitadan takrorli o'rinlashtirishlar tashkil etish mumkin. O'nta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 va 9 raqamlardan esa 10.000.000 ta ($\overline{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000$) turli yetti xonali raqamlarni (bu raqamlarda dastlabki nollar tashlab yuborilmaydi) hosil qilish mumkin. Shunday qilib, O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqamlari soni 6.760.000.000 ga ($\overline{A}_{26}^2 \overline{A}_{10}^7 = 6760000000$) teng. ■

4.3. Takrorli gruppalashlar. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi e'tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz. Bunaqa birlashmalar *n ta turli elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar* (qisqacha, *takrorli gruppalashlar*), deb ataladi.

n ta elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar ta'rifidan ko'rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-biridan hech bo'lmasa, bitta elementi bilan farq qiladi.

n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini $\overline{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3-teorema. n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni C_{n+m-1}^m ga teng, ya'ni $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Isboti. $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to'plam uchun n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar sonini aniqlash zarur. Har bir takrorli gruppalashdagi elementlarni n ta qismga shunday bo'lish mumkinki, har bir i-bo'lakda a_i element qanchadir marta qatnashadi yoki biron marta ham qatnashmaydi. Har bir shunday gruppalashni nol va birlardan iborat kod yordamida quyidagicha shifrlaymiz: har bir a_i element o‘rniga bu element i - bo‘lakda necha marta qatnashsa, shuncha birlar yozamiz (tabiiyki, bu element biron marta ham qatnashmasligi mumkin, u holda hech narsa yozilmaydi); turli bo‘lak elementlarini bir-biridan nollar bilan ajratamiz (bu yerda yonma-yon joylashgan nollar hosil bo‘lishi mumkin — bu nollar mos elementlarning gruppalashda qatnashmaganligini anglatadi). Masalan, $\{a,b,c,d,e,f\}$ to‘plam elementlaridan tuzilgan 6 ta elementdan 9 tadan takrorli *bbbcddddf* gruppalashga 01110101111001 shifr, 6 ta elementdan 12 tadan takrorli *aaaabeeeeeff* gruppalashga esa 1111010011111011 shifr, aksincha, 10100011110 shifrga 6 ta elementdan 6 tadan takrorli *abeeee* gruppalash mos keladi.

Shunday qilib, n ta elementdan m tadan har bir takrorli gruppalash uchun qandaydir m ta birlar va $(n—1)$ ta nollardan iborat ketma-ketlikni va, aksincha, m ta birlar va $(n—1)$ ta nollardan tashkil topgan har bir ketma-ketlik uchun n ta elementdan m tadan biror takrorli gruppalashni mos qo‘ygan bo‘lamiz (bir qiymatli moslik o‘rnatildi). Binobarin, n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni $(n—1)$ ta nol va m ta birlardan tashkil topgan kortej elementlaridan tuzilgan takrorli o‘rin almashtirishlar soniga, ya’ni $C_{n+m-1}(m, n-1)$ga tengdir. Demak,

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}(m, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)} = C_{n+m-1}^m. \blacksquare$$

4-misol. Har birining yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5 va 6 soni yozilgan kub shaklidagi ikkita soqqani tashlaganda, jami nechta sonlar juftligini hosil qilish mumkin?

Soqqalarni tashlaganda jami quyidagi 21 imkoniyatlardan biri ro‘y beradi:

$$\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,2\rangle,$$
$$\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,$$
$$\langle 3,6\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 6,6\rangle.$$

Bu juftliklar oltita elementdan ikkitadan takrorli gruppalashlarni tashkil etadi. Ularning soni 3-teoremaga asosan, $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ bo‘ladi. ■

4.4. Ko‘phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya’ni

$(a_1+a_2+...+a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qarab chiqamiz. Buning uchun ifodani n ta bir xil ifodalar ko'paytmasi, ya'ni

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + ... + a_m)(a_1 + a_2 + ... + a_m)...(a_1 + a_2 + ... + a_m)}_{m \text{ ta ko'paytuvchi}}$$

shaklida yozib, qavslarni ochamiz va o'xshash hadlarni ixchamlaymiz. Natijada, $(a_1+a_2+...+a_m)^n$ ifodaning yoyilmasi hosil bo'ladi. Yoyilmaning tarkibidagi qo'shiluvchilarning har birida $a_1,a_2+,...,a_m$ elementlardan tashkil topgan takrorli o'rin almashtirishlar bor, bu yerda har bir qo'shiluvchi qandaydir koeffitsiyent va n ta elementlarning $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko'rinishdagi ko'paytmasidan iboratdir. Yoyilmadagi $a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$ ko'paytmaning koeffitsiyentini aniqlash uchun n ta $(n=n_1+n_2+...+n_m)$ elementli takrorli o'rin almashtirishlar sonini topish kerak, ya'ni $C_n(n_1, n_2,...,n_m)$ sonni hisoblash kerak. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

4-teorema. Ixtiyoriy haqiqiy $a_1, a_2,...,a_m$ va natural n sonlar uchun

$$(a_1+a_2+...a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_m=n} C_n(n_1, n_2, ..., n_m)a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_m^{n_m}$$

formula o'rinlidir, bu formulaning o'ng tomonidagi yig'indi $n_1+n_2+...+n_m= n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1,n_2,...,n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi.

Isbotlangan oxirgi tenglik *ko'phad formulasi* yoki *umumlashgan Nyuton binomi formulasi*, deb ataladi. $C_n(n_1+n_2,...,n_m)$ sonlarni *ko'phadiy koeffitsiyentlar*, deb ataymiz.

C_n^k binomial koeffitsiyent $C_n(n_1,n_2,...,n_m)$ ko'phadiy koeffitsiyentning $m=2$ bo'lgandagi xususiy holidir. Haqiqatan ham, $n_1+n_2=n$ tenglikda $n_1=k$ deb olsak, u holda $n_2=n—n_1=n—k$ va

$$C_n(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$ bo'ladi.

5-misol. $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasini toping. Avvalo, 3 sonini bo'laklaymiz, ya'ni 3 ni mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar bilan manfiymas butun sonlar yig'indisi shaklida yozamiz:

$3=3+0+0,\ 3=2+1+0,\ 3=2+0+1,\ 3=1+2+0,\ 3=1+1+1,$
$3=1+2+0,\ 3=0+3+0,\ 3=0+2+1,\ 3=0+1+2,\ 3=0+0+3.$

Demak, ko'phad formulasiga ko'ra,

$$(a+b+c)^3=C_3(3,0,0)a^3+C_3(2,1,0)a^2b+C_3(2,0,1)a^2c+$$
$$+C_3(1,2,0)ab^2+C_3(1,1,1)abc+C_3(1,0,2)ac^2+C_3(0,3,0)b^3+$$
$$+C_3(0,2,1)b^2c+C_3(0,1,2)bc^2+C_3(0,0,3)c^3.$$

Takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ formulasini qo'llab, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$(a+b+c)^3=$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3. \blacksquare$$

Ko'phad yoyilmasining hadlarini yozganda, shunga e'tibor berish kerakki, agar $n_1,n_2,\ldots,n_m$ $(n_1+n_2+\ldots+n_m=n)$ sonlar $k_1,k_2,\ldots,k_m$ $(k_1+k_2+\ldots+k_m=n)$ sonlarning o'rin almashtirishlari yordamida hosil qilinishi mumkin bo'lsa, u holda $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_m^{n_m}$ va $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_m^{k_m}$ hadlarning koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'ladi. Shuning uchun n sonining $n=n_1+n_2+\ldots+n_m$ ko'rinishda ifodalanishlaridan qandaydir shartni bajaradigan birortasini, masalan, $n_1\geq n_2\geq\ldots\geq n_m$ (yoki $n_1\leq n_2\leq\ldots\leq n_m$) shartni qanoatlantiradiganini topib, unga mos $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_m^{n_m}$ ifodada daraja ko'rsatkichlarini mumkin bo'lgan barcha usullar bilan almashtirish kerak bo'ladi.

Masalan, 5-misoldagi a^2b, a^2c, ab^2, ac^2, b^2c va bc^2 hadlarning ko'phadiy koeffitsiyentlari o'zaro tengdir. Yuqorida ko'rsatilgan shart asosida 3 sonini manfiymas butun sonlar yigindisi ko'rinishida bo'laklashning 3 imkoniyati bor: 3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=1+1+1. Shuning uchun, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasida uch xil turli koeffitsiyentlarga egamiz: $C_3(3,0,0)=1$, $C_3(2,1,0)=3$ va $C_3(1,1,1)=6$. Demak,

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+$$
$$+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Ko'phad formulasi yordamida ko'phadiy koeffitsiyentlarning, ya'ni $C_n(n_1,n_2,\ldots,n_m)$ sonlarning ba'zi xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Masalan,

$$\sum_{n=n_1+n_2+\ldots+n_m} C_n(n_1,n_2,\ldots,n_m)=m^n,$$

bu yerda, yig'indi $n_1+n_2+...+n_m=n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1,n_2,...,n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi va qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinadi.

Haqiqatan ham, agar ko'phad formulasida $a_1=a_2=...=a_m=1$ deb olsak, kerakli tenglikni hosil qilamiz.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. To'la o'yin qartalari (13x4=52 ta) orasidan turli bo'lgan va bir-biridan farq qiluvchi 4 ta qartani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
2. Matematika so'zidagi harflar o'rinlarini almashtirib, ma'noga ega bo'lmaganlarini ham e'tiborga olganda, tuzish mumkin bo'lgan barcha so'zlar sonini toping.
3. Shaxmat taxtasining bir qatoriga shoh, farzin, 2 dona rux, 2 dona fil va 2 dona otni joylashtirishlar sonini aniqlang.
4. 0 raqami birinchi raqam sifatida kelganda, uni tashlab yuborilish qoidasiga amal qilib 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha olti xonali sonlar qancha?
5. 1, 2, 3, 4, 5 sonlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha uch xonali sonlar qancha?
6. Shirinlik sotiladigan do'konda 4 xil shirinlik bo'lsa, 7 dona shirinlikni sotib olish imkoniyatlari sonini aniqlang.
7. Beshta turli o'rindiqlar va yettita turli rangdagi materiallar bor. Har bir o'rindiqni faqat bir xil rangdagi material bilan qoplash sharti bilan o'rindiqlarga material qoplash imkoniyatlari sonini toping.
8. Homiylar teleshouda qatnashayotgan o'yinchilarga qahva qaynatgichlar, dazmollar, uyali telefon apparatlari va duxilar sovg'a qilishmoqchi. 9 o'yinchiga bittadan sovg'a berish imkoniyatlari sonini toping.
9. Turli 5 ta qalam va 6 ta ruchkadan 2 ta qalam va 4 ta ruchkani tanlash imkoniyatlari sonini aniqlang.
10. 36 ta o'yin qartasini 4 o'yinchiga teng bo'lib berganda, mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar sonini hisoblang.
11. Fermada 20 bosh qo'y va 24 bosh sigir bor. Bir boshdan qo'y va sigir tanlash imkoniyatlari soni bilan bir boshdan qo'y va sigir tanlangandan so'ng qolgan hayvonlar orasidan yana bir boshdan qo'y va sigir tanlash imkoniyatlari sonini solishtiring.

12. Toq raqamdan boshlanuvchi juft besh xonali sonlar nechta?
13. Qirra uzunliklari 1 dan 10 gacha sonlar bilan ifodalanadigan turli to‘g‘ri burchakli parallelepipedlar sonini hisoblang.
14. Yetti talabani yotoqxonadagi bir, ikki va to‘rt o‘rinli xonalarga joylashtirish imkoniyatlari sonini aniqlang.
15. Agar to‘qqiz qavatli binoning birinchi qavatida turgan liftda uch yo‘lovchi yuqoriga ko‘tarilayotgan va yo‘lovchilarning ixtiyoriysi binoning birinchidan yuqoridagi ixtiyoriy qavatida liftdan tushib qolishi mumkin bo‘lsa, u holda liftning yo‘lovchilardan bo‘shab qolish imkoniyatlari sonini aniqlang.
16. $(a+b+c+d)^4$ ifodaning yoyilmasini toping.
17. $(1+x+y)^{20}$ ifoda yoyilmasidagi x^4y^8 qatnashgan had koeffitsiyentini aniqlang.
18. O‘nli sanoq tizimida yozilgan olti xonali sonlar orasida:
    a) bir xil raqamlari borlari,
    b) raqamlari qat’iy o‘sish tartibida joylashganlari,
    d) rosa uchta juft raqamga egalari,
    e) ikkitadan kam bo‘lmagan juft raqamga egalari,
    f) raqamlari yig‘indisi juft son bo‘lganlari sonini aniqlang.
19. $x_1+x_2+...+x_m=n$ $(m, n\in N,\ m\leq n)$ tenglamaning:
    a) manfiymas butun; b) natural yechimlarini topish masalasini tahlil qiling.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rin almashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
2. Takrorli o‘rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib, takrorlanishi bo‘lmagan o‘rin almashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
3. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o‘rinlashtirishlar takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlardan nimasi bilan farq qiladi?
4. Takrorli o‘rinlashtirishlar soni formulasidan foydalanib, takrorlanishi bo‘lmagan o‘rinlashtirishlar sonini hisoblash mumkinmi?
5. Takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppalashlar takrorlanishi bo‘lmagan gruppalashlardan nimasi bilan farq qiladi?

6. Takrorli gruppalashlar soni formulasini isbotlashda qanday usuldan foydalanilgan?
7. Takrorli o'rin almashtirishlar soni formulasidan foydalanib, takrorlanishi bo'lmagan gruppalashlar sonini hisoblash mumkinmi?
8. Ko'phad formulasining Nyuton binomi formulasidan qanday farqi bor?
9. Ko'phadiy koeffitsiyentlarning qanday xossalarini bilasiz?

5-§. Fibonachchi sonlari

Sonli ketma-ketlik, rekurrent tenglik, Fibonachchi qatori, Fibonachchi sonlari, umumlashgan Fibonachchi qatori, binomial koeffitsiyentlar, Paskal uchburchagi, matematik induksiya usuli, Bine formulasi, oltin kesim, logarifmik spiral.

5.1. Fibonachchi[1] *sonlarining ta'rifi.* Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikdagi elementlarning uchinchisidan boshlab, har biri o'zidan oldingi ikkita elementning yig'indisiga teng, ya'ni $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ bo'lsin. Ravshanki, bu ketma-ketlikni tashkil qilishda uning dastlabki ikkita hadi muhim bo'lib, keyingi barcha hadlari rekurrent[2] tenglik vositasida aniqlanadi. $u_1 = u_2 = 1$ bo'lganda yuqorida keltirilgan ketma-ketlik *Fibonachchi qatori*, uning hadlari esa *Fibonachchi sonlari,* deb ataladi.

Tabiiyki, Fibonachchi qatoridagi Fibonachchi sonlarini aniqlash jarayoni cheksizdir. Fibonachchi sonlarining dastlabki 24 tasi quyida keltirilgan:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368.

«Fibonachchi sonlari» iborasi birinchi bo'lib, XIX asrda Eduard Lyuka[3] tomonidan qiziqarli matematikaga bag'ishlab yozilgan

---

[1] *Fibonachchi Pizanskiy* (Fibonacci Leonardo Pisano, 1180—1240) — italyan matematigi.

[2] «Recurrens» lotincha so'z bo'lib, o'ziga qaytaruvchi ma'nosini beradi.

[3] *Lyuka* yoki *Lukas* (Lucas François Édouard Anatole, 1842—1891) — fransuz matematigi.

asarda qo‘llanilgan. Fibonachchi (bu italyancha «filius Bonacci» so‘zlaridan qisqartirilib tuzilgan bo‘lib, Bonachchining o‘g‘li ma’nosini anglatadi) Italiyadagi Piza shahrida XII—XIII asrlarda yashagan Leonardo Pizanskiyning boshqacha ismidir (laqabidir). Bonachchi Italiya va Jazoirda savdo-sotiq bilan shug‘ullangan. Leonardo boshlang‘ich ma’lumotni Jazoirda olgan bo‘lib, u o‘zining arab o‘qituvchilaridan hind pozitsion o‘nlik sanoq tizimi[1] va nolni o‘rgangan edi. Fibonachchi «Liber abaci» («Abak haqidagi kitob» — 1202-yilda yozilgan bo‘lib, 1228-yildagi qo‘lyozma nusxasi saqlangan) nomli kitobida arifmetika va algebra bo‘yicha o‘z davrining deyarli barcha ma’lumotlarini bayon qilgan. Xususan, o‘sha kitobda hozir butun dunyoda ommabop hisoblangan «arab» raqamlari bayon qilingan. Qo‘lyozmaning (1228-yil) 123—124-sahifalarida uy quyonlarining ko‘payishi haqidagi quyidagi masala bayon qilingan.

«Bir kishi bir juft quyonni ko‘paytirish maqsadida saqlagan bo‘lsin. Quyonning tabiati shundayki, har bir juft quyon bir oyda boshqa bir juft quyonni dunyoga keltiradi va yangi paydo bo‘lgan juft quyonlar ikkinchi oydan boshlab nasl bera boshlaydilar. Bir yildan so‘ng dastlabki juft quyonlarning ko‘payishi natijasida necha juft quyon vujudga keladi?»

Bu masalani yechish jarayonida Fibonachchi dastlabki yilning har bir oyi uchun quyonlar juftlari sonini aniqlagan. Bu sonlar 1-jadvalda keltirilgan. «Liber abaci»dan bu masala yechimi bayonining so‘nggi satrlarini keltiramiz: «...Oxirgi oyda tug‘ilgan yangi 144 juft quyonlar qo‘shilsa 377 juft quyon hosil bo‘ladi. Shuncha juft quyon bir yil davomida bir juft quyondan ko‘payar ekan». Quyonlar haqidagi masalada uchragan sonlar Fibonachchi qatorining dastlabki sonlari ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi.

Fibonachchining o‘zi Fibonachchi qatorining xossalarini o‘rganish bilan shug‘ullanmagan deb hisoblashadi (har ehtimolga qarshi, bizgacha yetib kelgan bunday izlanishlar haqida ma’lumotlar yo‘qligini ta’kidlaymiz). XIX asr boshlarida Fibonachchi qatorining turli xossalariga bag‘ishlangan ilmiy ishlar soni «Fibonachchi quyonlari sonidek o‘sgan».

Eduard Lyuka ixtiyoriy u_1 va u_2 sonlardan boshlanuvchi hamda $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ $(n \geq 3)$ rekurrent tenglik bilan aniqlanuvchi sonlar qatorini umumlashgan *Fibonachchi qatori*, deb nomlagan.

---

[1] Bu tizim haqidagi ma’lumot G‘arbga arablar orqali o‘tganligi sababli uni, ba’zan yanglish ravishda «arab pozitsion o‘nlik sanoq tizimi» deyishadi.

1-jadval

O‘tgan oylar soni	Tug‘ilgan juft quyonlar	Jami juftlar
0	0	1
1	1	2
2	1	3
3	2	5
4	3	8
5	5	13
6	8	21
7	13	34
8	21	55
9	34	89
10	55	144
11	89	233
12	144	377

5.2. Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari. Fibonachchi sonlari juda ko‘plab qiziqarli xossalarga ega. Quyida bu xossalardan ba’zilarini keltiramiz.

1-xossa. Dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig‘indisi (u_{n+2}—1) ga teng, ya’ni

$$u_1+u_2+\ldots+u_{n+2}-1.$$

Haqiqatan ham, Fibonachchi sonlarining ta’rifiga ko‘ra

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=(u_3-u_2)+(u_4-u_3)+\ldots+(u_{n+1}-u_n)+(u_{n+2}-u_{n+1})=$$

$$=u_{n+2}-u_2=u_{n+2}-1. \blacksquare$$

2-xossa. Toq raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yigindisi u_{2n} ga teng, ya’ni

$$u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}.$$

Ravshanki,

$$u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n-1}=$$

$$=u_2+(u_4-u_2)+(u_6-u_4)+\ldots+(u_{2n}-u_{2n-2})=u_{2n}. \blacksquare$$

3-xossa. Juft raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig‘indisi (u_{n+2}—1) ga teng, ya’ni

$$u_2+u_4+u_6+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1.$$

Bu xossani isbotlash uchun, 1-xossaga ko‘ra,

$$u_1+u_2+\ldots+u_{2n}=u_{2n+2}-1$$

tenglik o‘rinli ekanligini va 2-xossani hisobga olish kifoya:

$$u_2+u_4+u_6+\ldots+u_{2n}=(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{2n})-$$

$$-(u_1+u_3+u_5+\ldots+u_{2n-1})=$$

$$=u_{2n+2}-1-u_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n}-1=u_{2n+1}-1. \blacksquare$$

Yuqorida isbotlangan 1- va 2-xossalardan foydalanib, Fibonachchi sonlarining ishorasi almashuvchi qatori yig‘indisi haqidagi quyidagi xossasini ham isbotlash mumkin.

4-xossa. Dastlabki n *ta Fibonachchi sonlari uchun*

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1$$

tenglik o‘rinlidir.

5-xossa. Dastlabki n ta Fibonachchi sonlari kvadratlarining yig‘indisi $u_n u_{n+1}$ ga teng, ya’ni

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_n u_{n+1}.$$

Haqiqatan ham, Fibbonachi qatorining ta’rifiga ko‘ra, $u_1^2=u_1u_2$ bo‘ladi va birdan katta ixtiyoriy natural n son uchun

$$u_n^2=u_nu_n=u_n(u_{n+1}-u_{n-1})=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n$$

tenglik o‘rinlidir. Shuning uchun

$$u_1^2=u_2^2+\ldots+u_n^2=u_1u_2+u_2u_3-u_1u_2+$$

$$+\ldots+u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n=u_nu_{n+1}. \blacksquare$$

6-xossa. Ixtiyoriy u_n *Fibonachchi sonining kvadrati bilan* $u_{n-1}u_{n+1}$ *ko‘paytma orasidagi farq birga teng, ya’ni*

$$u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=(-1)^{n+1}.$$

Bu xossani matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. Baza: $n=2$ uchun

$$u_2^2-u_1u_3=1^2-1\cdot 2=-1=(-1)^{2+1} \text{ — tasdiq to‘g‘ri.}$$

Induksion o‘tish: bu xossa $n=k\geq 2$ uchun to‘g‘ri, ya’ni $u_k^2-u_{k-1}u_{k+1}=(-1)^{k+1}$ yoki $u_k^2=u_{k-1}u_{k+1}+(-1)^{k+1}$ bo‘lsin. Oxirgi tenglikning har ikki tomoniga u_ku_{k+1} ifodani qo‘shsak,

$$u_k^2 = u_k u_{k+1} = u_{k-1}u_{k+1} + u_k u_{k+1} + (-1)^{k+1}$$

tenglik va bu tenglikdan

$$u_k(u_k + u_{k+1}) = u_{k+1}(u_{k-1} + u_k) + (-1)^{k+1}$$

kelib chiqadi. Fibonachchi qatorining aniqlanishidan foydalanib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$u_k u_{k+2} = u_{k+1}u_{k+1} + (-1)^{k+1},$$

$$-u_{k+1}^2 + u_k u_{k+2} = (-1)^{k+1}.$$

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini (—1) ga ko'paytirsak, $u_{k+1}^2 - u_{(k+1)-1}u_{(k+1)+1} = (-1)^{(k+1)^{+1}}$ tenglik hosil bo'ladi. ■

Matematik induksiya usulini qo'llab $u_1, u_2, \ldots$ Fibonachchi sonlarining quyidagi 7—10-xossalarini ham isbotlash mumkin:

7-xossa. $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2.$

8-xossa. $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \ldots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1.$

9-xossa. $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \ldots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3).$

10-xossa. $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2.$

Endi Fibonachchi sonlarining binomial koeffitsiyentlar (Paskal uchburchagi) bilan bog'lanishini ifodalovchi xossani o'rganamiz.

11-xossa. Fibonachchi soni u_n $(n \in N)$ uchun $u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^k$ *tenglik o'rinlidir.*

Bu xossani isbotlash uchun u_n $(n=1,2,\ldots)$ sonlardan tuzilgan $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ketma-ketlikning Fibonachchi qatori bo'lishini ko'rsatish kifoya. Buning uchun esa

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{1-1}{2}\right]} C_{1-k-1}^k = \sum_{k=0}^{0} C_{-k}^k = C_0^0 = 1,$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{2-1}{2}\right]} C_{2-k-1}^k = \sum_{k=0}^{0} C_{1-k}^k = C_1^0 = 1$$

ekanligini ta'kidlab, $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ketma-ketlik uchun $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ $(n \geq 2)$ rekurrent tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz.

Agar n juft son ($n = 2s$, $s \in N$) bo'lsa, u holda

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} = \sum_{k=0}^{s} C_{n-k}^{k},$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^{k} = \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-1}^{k},$$

$$u_{n-1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_{n-k-2}^{k} = \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-2}^{k}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklardan foydalanib,

$$u_n + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-1}^{k} + \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k-2}^{k} = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k-1}^{k} + \sum_{p=1}^{s} C_{n-p-1}^{p-1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k-1}^{k} + \sum_{p=0}^{s-1} C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-s-1}^{s-1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{s-1} (C_{n-k-1}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1}) + C_{n-s-1}^{s-1}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Binomial koeffitsiyentlarning $C_{n-k-1}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1} = C_{n-k}^{k}$ xossasiga binoan

$$u_n + u_{n-1} = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k}^{k} + C_{n-s-1}^{s-1} = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k}^{k} + C_{2s-s-1}^{s-1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k}^{k} + C_{s-1}^{s-1} = C_{n-k}^{0} + \sum_{k=1}^{s-1} C_{n-k}^{k} + C_{s}^{s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} C_{n-k}^{k} + C_{n-s}^{s} = \sum_{k=0}^{s} C_{n-k}^{k} = u_{n+1}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

n toq son bo'lganda ham, yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ $(n \geq 2)$ tenglikning to'g'riligini ko'rsatish mumkin.

Demak, Fibonachchi qatorining ta'rifiga asosan, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ketma-ketligi Fibonachchi qatoridir. ■

Yuqorida ta'kidlanganidek, $u_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-k-1}^{k}$ tenglik Fibonachchi sonlari bilan Paskal uchburchagi orasida bog'lanishni ifodalaydi. 1-shaklda tasvirlangan Paskal uchburchagidagi shtrixli chiziqlar bo'ylab joylashgan sonlar yig'indisi Fibonachchi sonlarini tashkil etadi.

12-xossa. Fibonachchi soni u_n $(n \in N)$ *uchun*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$ *tenglik o'rinlidir.*

Bu xossani isbotlash maqsadida, avvalo, α haqiqiy son uchun $\alpha^2 = 1+\alpha$ tenglik o'rinli bo'lsin, deb faraz qilib, α^3, α^4, α^5, α^6 va hokazo darajalarni α orqali ifodalaymiz:

$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(1+\alpha) = 1+2\alpha,$$

$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(1+2\alpha) = 2+3\alpha,$$

$$\alpha^5 = \alpha\alpha^4 = \alpha(2+3\alpha) = 3+5\alpha,$$

$$\alpha^6 = \alpha\alpha^5 = \alpha(3+5\alpha) = 5+8\alpha \text{ va hokazo.}$$

Bu ifodalardan ko'rinib turibdiki, ulardagi ozod hadlar ham, α ning koeffitsiyentlari ham Fibonachchi sonlaridan iboratdir.

Matematik induksiya usulidan foydalanib, agar u_n Fibonachchi soni bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun $\alpha^n = u_{n-1} + u_n\alpha$ formulaning to'g'riligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, $n=2$ bo'lganda $\alpha^2 = u_1 + u_2\alpha = 1+\alpha$ tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni baza bajarildi (1-shakl).

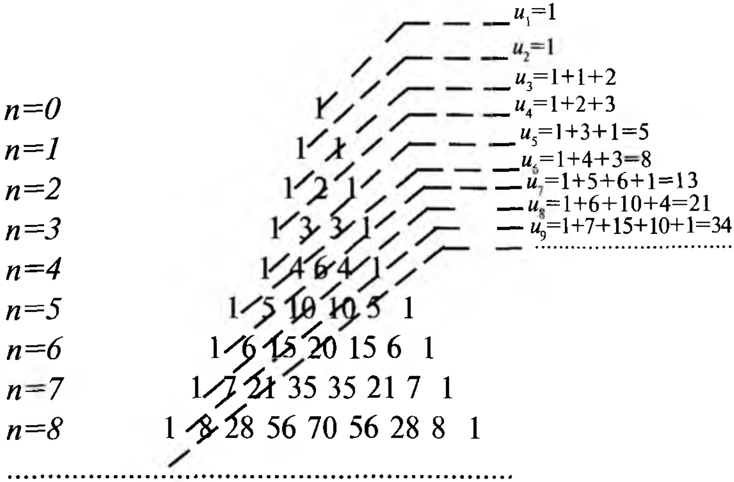
Induksion o'tish: $n=k$ bo'lgan hol uchun $\alpha^k = u_{k-1} + u_k\alpha$ formula to'g'ri bo'lsin. U holda $n=k+1$ bo'lganda, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\alpha^{k+1} = \alpha\alpha^k = \alpha(u_{k-1} + u_k\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k\alpha^2 =$$

$$= u_{k-1}\alpha + u_k(1+\alpha) = u_{k-1}\alpha + u_k + u_k\alpha =$$

$$= u_k + (u_{k-1} + u_k)\alpha = u_k + u_{k+1}\alpha.$$

Demak, $\alpha^{k+1} = u_k + u_{k+1}\alpha$.



1-shakl.

Shunday qilib, $\alpha^2=1+\alpha$ va ixtiyoriy $n \geq 2$ natural sonlar uchun u_n Fibonachchi soni bo‘lsa, u holda $\alpha^n=u_{n-1}+u_n\alpha$ formula to‘g‘ri ekanligi isbotlandi.

Endi $\alpha^2=1+\alpha$ tenglikni kvadrat tenglama sifatida qarab, uning biri musbat, ikkinchisi manfiy ikkita $\alpha_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ va $\alpha_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ildizlarini topamiz. $\alpha^n=u_{n-1}+u_n\alpha$ formulaga ko‘ra,

$$\begin{cases} \alpha_1^n = u_{n-1} + u_n\alpha_1 \\ \alpha_2^n = u_{n-1} + u_n\alpha_2. \end{cases}$$

Bu tengliklarni u_{n-1} va u_n noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasi deb qaraymiz va uni hal qilib, 12-xossaning isbotiga ega bo‘lamiz. ■

Shunisi ajoyibki, 12-xossaga binoan, butun qiymatli u_n son irratsional sonlardan iborat bo‘lgan kvadrat ildizlar orqali ifodalanmoqda. 12-xossani ifodalovchi tenglik *Bine*[1] *formulasi*, deb ataladi.

Kesmani bo‘laklarga bo‘lishda *oltin kesim* tushunchasini eslaylik. Berilgan kesmaning oltin kesimi deb uni shunday ikki qismga ajratish tushuniladiki, bu yerda butun kesma uzunligining katta qism uzunligiga nisbati va katta qism uzunligining kichik qism

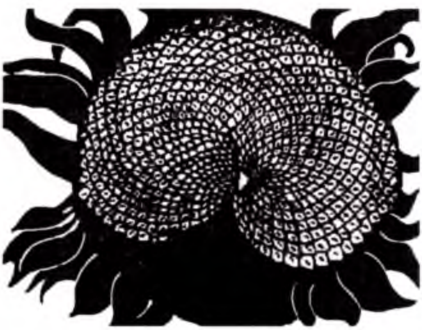
---

[1] *Bine* (Binet Jak-Filipp, 1786—1857) — fransuz matematigi va astronomi.

uzunligiga nisbati o'zaro tengdir. Bu nisbatning qiymati α ga teng bo'lishini aniqlash qiyin emas. «Oltin kesim» iborasining mazmuni shu bilan ham tasdiqlanadiki, masalan, tomonlari uzunliklarining nisbati $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ songa yaqin bo'lgan to'g'ri to'rtburchak inson ko'ziga yoqimli bo'lib ko'rinishi qadim zamonlardayoq ma'lum bo'lgan. Yana shunisi ham qiziqarliki, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\alpha_2$.

Hayratlanarlisi shuki, Fibonachchi sonlari tabiatning turli narsa va hodisalarida kutilmaganda namoyon bo'lishadi. Masalan, ular kungaboqarning urug'lari joylashgan «savat»ida osonlik bilan sanab aniqlash mumkin bo'lgan spirallar (aniqrog'i spirallar yoylari) sonlari sifatida paydo bo'ladi (2-shaklga qarang). Kungaboqarning urug'lari joylashgan savatida logarifmik spirallarning[1] ikki oilasini kuzatish mumkin. Bu oilalardan birining spirallari aylanishi soat millari yo'nalishida, ikkinchisiniki esa teskari yo'nalishda bo'ladi.

Botanikada spirallar oilalarining bunday joylashishini *fillotaksis*[2], deb atashadi. Oilalardagi spirallar sonlari Fibonachchi qatorida ketma-ket joylashgan ikkita Fibonachchi sonlaridan iborat bo'lishadi. Ular kungaboqar savatining kattaligiga qarab, 34 va 55 yoki 55 va 89, yoki 89 va 144 bo'lgan Fibonachchi sonlari juftliklarini tashkil etishadi. Tabiatda, hattoki, spirallar sonlari 144 va 233 bo'lgan ulkan kungaboqar savati ham uchraydi! Kungaboqar fillotaksisi va Fibonachchi sonlari orasidagi bu aloqani birinchi bo'lib E. Lyuka e'lon qilgan edi.



2-shakl.

---

[1] Logarifmik spiral, bu qutb koordinatalar tizimidagi tenglamasi $\rho = ae^{k\varphi}$ bo'lgan egri chiziqdir, bunda $a>0$, $-\infty<\varphi<+\infty$. Bu egri chiziq koordinatalar boshidan chiquvchi barcha nurlarni o'zgarmas α burchak ostida kesib o'tadi va $k=ctg\alpha$ bo'ladi.

[2] Yunon tilida bu so'z bargning tuzilishi ma'nosini beradi.

1-misol. Elementlari 0 va 1 raqamlaridan iborat bo'lib, ikkita 1 raqami yonma-yon joylashmaydigan kortejlarni qaraymiz. Shunday tartibda tuziladigan n uzunlikka ega barcha kortejlar soni c_n Fibonachchi qatorining (n+2)- hadiga tengligini, ya'ni $c_n=u_{n+2}$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Buning uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=1$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda misol shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita (<0> va <1>) kortejlar tuzish mumkin, ya'ni $c_1=2$. Fibonachchi qatorining tuzilishiga asosan, $n=1$ bo'lgan hol uchun $u_{n+2}=u_{1+2}=$ $=u_3=2$. Demak, $n=1$ bo'lganda $c_n=u_{n+2}$ tasdiq to'g'ri.

Induksion o'tish: $n=k$ bo'lganda misol shartlarini qanoatlantiruvchi kortejlar soni uchun isbotlanayotgan tenglik o'rinli bo'lsin, ya'ni $c_k=u_{k+2}$. Bu tenglikning $n=k+1$ uchun ham to'g'riligini ko'rsatamiz. Ravshanki, uzunligi $n=k+1$ bo'lgan barcha kortejlarni, tuzilishiga ko'ra, ikki guruhga quyidagicha ajratish mumkin.

Birinchi guruhga talab qilingan shartlar asosida tuzilgan va uzunligi k ga teng kortejlarning har biriga o'ng tomondan 0 raqamini joylashtirish usuli bilan hosil qilingan kortejlarni kiritamiz. Shuning uchun, birinchi guruhdagi kortejlar soni uzunligi k ga teng kortejlar soniga teng. Bu yerda induksiya farazini hisobga olsak, birinchi guruhda u_{k+2} ta kortejlar bor degan xulosaga kelamiz.

Ikkinchi guruhga oxirgi elementi 1 raqamidan iborat bo'lgan kortejlarni kiritamiz. Kortejlarni tuzishning misolda talab qilinayotgan shartiga ko'ra, ikkinchi guruhdagi har bir kortejda oxirgi 1 raqamidan oldin faqat 0 raqami joylashishi mumkinligi kelib chiqadi. Shuning uchun, ikkinchi guruhdagi kortejlarni uzunligi (k—1) ga teng bo'lgan va talab qilingan shartlar asosida tuzilgan kortejlarning har biriga o'ng tomondan 0, 1 raqamlarini (aynan shu tartibda) joylashtirib hosil qilish mumkin. Demak, induksion farazni hisobga olsak, ikkinchi guruhdagi kortejlar soni u_{k+1} bo'ladi.

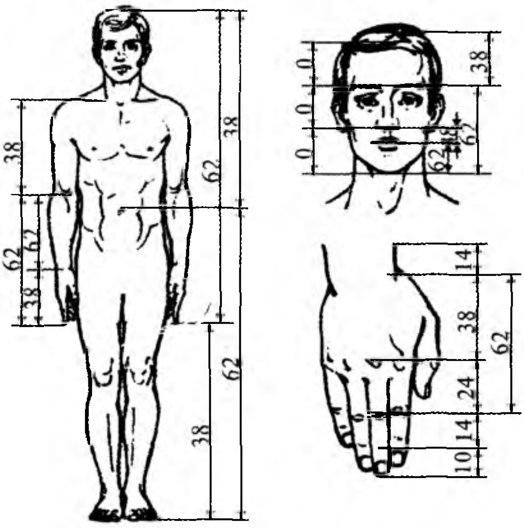
Shunday qilib, $k+1$ uzunlikka ega barcha kortejlar soni $c_{k+1}=u_{k+1}+u_{k+2}$. Fibonachchi qatorining aniqlanishiga ko'ra, $u_{k+1}+u_{k+2}=u_{k+3}$. Bu yerdan $c_{k+1}=u_{k+3}=u_{(k+1)+2}$. ■

2-misol. Oltin kesim juda qadimdan ma'lum bo'lgan. Bu tushunchadan qadimgi yunonlar haykaltaroshlikda, suv saqlashga mo'ljallangan xum idishlarni yasashda foydalana bilishgan. 1854-yilda

A. Seyzing[1] oltin kesim tushunchasini qayta «ochib», bu tushunchani absolutlashtirishga uringan. U o‘z asarlaridan birida «oltin kesim tabiatning barcha hodisalarida va san’atda universal kesimdir», deb e’lon qilgan. Bunday xulosaga A. Seyzing tabiatda uchraydigan turli hodisa va jarayonlarni tahlil qilish asosida, jumladan, qushlarning tuxumlari, o‘simliklar, hayvonlar, turli tovushlar, insonlar tomonidan yaratilgan binolar, idishlar, she’riy-musiqiy asarlar va boshqalarni kuzatish hamda zarur hisoblashlarni bajarish asosida kelgan.

A. Seyzing ikki mingga yaqin odamning badan o‘lchovlarini olib, bu qiymatlar asosida o‘rtacha statistik qiymatlarni hisoblagan. Qilingan hisoblashlarga ko‘ra, erkak kishining badanidagi katta o‘lchovning kichik o‘lchovga nisbati (3-shaklda o‘lchovlar butundan foiz miqdorda berilgan) 13:5=1,625, ayollar uchun bu ko‘rsatkich 8:5=1,6, chaqaloqlar uchun esa 1:1 kabi bo‘lishi aniqlangan. Inson bolasi 13 yoshga kelganda bu nisbat 1,6 bo‘lishi, 21 yoshda esa proporsiya insonning jinsiga qarab yuqorida ta’kidlangan nisbatga yaqin bo‘lar ekan. Bu yerdagi nisbatlarda qatnashayotgan sonlar va insonning yoshlari (13 va 21) Fibonachchi qatori sonlaridir. ■

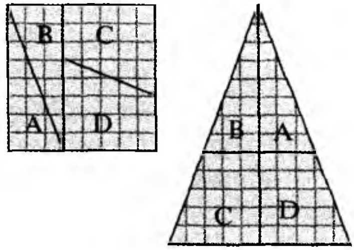
3-misol. Tomoni 8 birlik kvadratni (yuzasi 64 kv. birlik) 4-shaklda ko‘rsatilgandek 4 bo‘lakka (*A*, *B*, *C* va *D*) ajratib, bu 4 bo‘laklardan



3-shakl.

[1] *Seyzing* (Zeising) Adolf — olmon shoiri va faylasufi (1810—1876).

shaklning o‘ng tomonidagi figurani yasash mumkin. Yasalgan figurani uchburchak deb hisoblab, uning yuzasi hisoblansa 65 kv. birlik (dastlabki yuzaga qaraganda 1 kv. birlik ortiq!) javob hosil bo‘lishi tabiiydir. Tomoni 13 kv. birlik bilan ham xuddi shunga o‘xshash ishlarni bajarib, 169 kv. birlik yuzadan 168 kv. birlik



4-shakl.

(dastlabki yuzaga qaraganda 1 kv. birlik kam!) yuzani «hosil qilish» mumkin. Bu yerdagi xatoni aniqlash o‘quvchiga havola qilinadi[1]. Shunisi qiziqki, bo‘laklanayotgan kvadrat tomoni va bo‘laklashda qatnashayotgan sonlar uchta ketma-ket Fibonachchi sonlaridan iboratdir. Tabiiyki, yoqoridagi usul yordamida istalgan uchta ketma-ket Fibonachchi sonlaridan foydalanib yuqoridagiga o‘xshash istalgancha jumboqlar tuzish mumkin. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Fibonachchi sonlarining quyidagi xossalarini isbot qiling:

a) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$; b) $u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = u_n u_{n+3}$;

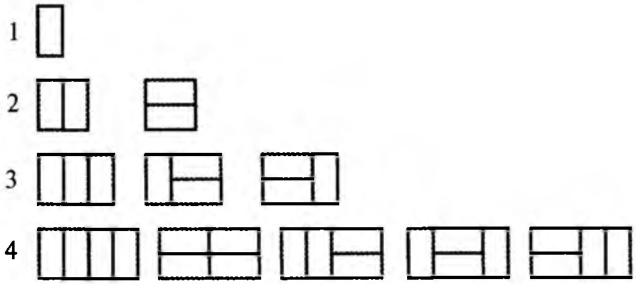
d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$;

f) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, g) $u_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \ldots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \ldots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}$,

bu yerda determinantning o‘lchovi $n \times n$, i — kompleks sonni ifodalashda ishlatiladigan mavhum birlik ($i = \sqrt{-1}$).

[1] *Fibonachchi* sonlarining 6-xossasiga e’tibor bering.

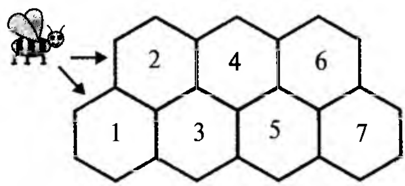
2. Qurilishda uzunligi enidan ikki baravar katta bo'lgan g'isht ko'p qo'llaniladi. Bunday g'ishtlardan bir g'isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari g'ishtlar soni 1, 2, 3 va 4 bo'lgan hollar uchun 5-shaklda keltirilgan. n ta g'ishtlardan bir g'isht kengligiga ega devor qurish imkoniyatlari sonini aniqlang.



5-shakl.

3. Xonada o'tirishga mo'ljallangan n ta o'rin bor. Bu o'rinlarda o'tirishi kerak bo'lgan kishilarni ikki guruhga ajratish mumkin: do'stlar (1) va dushmanlar (0). Agar $n=1$ bo'lsa, u holda bitta o'ringa bir kishini o'tqazish imkoniyatlari soni ikkiga tengligi ravshan (bu o'ringa yo do'stlar, yo dushmanlar guruhiga tegishli bir kishi o'tiradi). n kishini hech qaysi ikki dushman yonma-yon o'tirmaslik sharti bilan o'rinlarga o'tkazish imkoniyatlari sonini aniqlang.

4. Asalari 1 yoki 2 raqamli xonachadan harakatlanishni boshlagan bo'lsin (6-shakl). Asalari faqat o'ng tomondagi qo'shni xonachaga o'tishi mumkin bo'lsa, uning n raqamli xonachaga kelishi imkoniyatlari sonini aniqlang[1].



6-shakl.

[1] 1 raqamli xonachaga borishning faqat bir imkoniyati bor. 2 raqamli xonachaga borishda ikki imkoniyatdan foydalanish mumkin: bevosita o'sha xonachaning o'ziga yoki 1—2 yo'l bilan. 3 xonachaga borish yo'llari esa uchta: 1—2—3, 1—3 va 2—3.

1. Fibonachchi sonlari haqidagi dastlabki ma'lumotni Leonardo Pizanskiy qaysi asarida keltirgan?
2. Tarkibida dastlabki n ta Fibonachchi sonlari ishtirok etgan qanday formulalarni bilasiz?
3. Juft raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig'indisi formulasi qanday keltirib chiqariladi?
4. Toq raqamli dastlabki n ta Fibonachchi sonlarining yig'indisi formulasini isbotlay olasizmi?
5. Bir-biriga qo'shni bo'lgan uchta Fibonachchi sonlarining qanday xossalarni bilasiz?
6. Fibonachchi sonlarining Paskal uchburchagi bilan bog'lanishini ifodalovchi formula qanday isbotlanadi?
7. Bine formulasining tarkibida qanday irratsional son bor?
8. Siz tabiatda Fibonachchi sonlarining uchrashiga kitobda bayon qilinmagan misol keltira olasizmi?

6-§. Bo'laklashlar kombinatorikasi

Bo'laklash, ko'phad formulasi, natural son, yig'indi, qo'shiluvchi, qo'shiluvchilar tartibi, diagrammali usul, Ferrers diagrammasi, normal Ferrers diagrammasi, diagrammaning transpozitsiyasi, ikki yoqlama diagrammalar, qo'shma diagrammalar, qo'shma bo'laklashlar.

6.1. Bo'laklashlar ta'rifi. Kombinatorikada o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar tushunchalari yordamida yechiladigan masalalar bilan bir qatorda, *bo'laklashlarga* doir masalalar ham qaraladi. Bunday masalalar turli vaziyatlarda paydo bo'lishlari mumkin. Masalan, qutiga predmetlarni joylashda, axborotni uzatishda, pulni maydalashda, ko'phad formulasidan foydalanish uchun daraja ko'rsatkichini bo'laklashda va hokazo.

Bo'laklashlarga doir masalalar orasida natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash masalasi alohida o'rin tutadi. Bu masalaning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan natural n sonni $a_1, a_2, ..., a_k$ natural sonlar yig'indisi ko'rinishda ifodalash imkoniyatlari qancha? Bu masala turli shartlarda qaralishi mumkin. Masalan:

— qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinishi yoki olinmasligi mumkin;

— bo‘laklashlarda faqat juft yoki toq sondagi qo‘shiluvchilar qatnashish sharti qo‘yilishi mumkin;

— qo‘shiluvchilar bir-biridan farqli yoki ixtiyoriy deb hisoblanishi mumkin va hokazo.

Tabiiyki, bo‘laklashlarga doir kombinatorik masalalarni yechishda, bo‘laklanayotgan son o‘rniga undan kichikroq son(lar)ni bo‘laklash yoki qaralayotgan bo‘laklashni kamroq sondagi qo‘shiluvchilari bo‘lgan bo‘laklashga keltirish usuli qo‘llanilishi maqsadga muvofiqdir.

Natural n sonni ixtiyoriy k ta (k — natural son, $k \leq n$) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ natural sonlar yig‘indisi, ya’ni $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ ko‘rinishda tasvirlashga *n sonni k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklash* (qisqacha, *bo‘laklash*), deb ataladi.

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, bo‘laklash masalasini ikki vaziyatda, ya’ni qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan yoki olinmagan hollarda qarash mumkin. Kombinatorik nuqtayi nazardan olganda har ikki hol ham qiziqarlidir.

Bo‘laklash masalasini, avvalo, *qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan* holda qaraymiz. Bu holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $B(n, k)$ bilan va shu sonning barcha bo‘laklanishlari sonini $B(n)$ bilan belgilasak, ravshanki, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} B(n, k)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1-misol. Faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari sonini aniqlash talab etilgan bo‘lsin.

Tabiiyki, har bir qadamda faqat bittadan pog‘onani bosib o‘tib, zinapoyani 5 qadamda hatlab o‘tish mumkin. Bu harakatni 5 sonning $5=1+1+1+1+1$ ko‘rinishda bo‘laklanishi kabi ifodalab, $B(5,5)=1$ ekanligini qayd etamiz. Zinapoyani 4 qadamda ham hatlab o‘tish mumkin, bu ishning $B(5,4)=4$ imkoniyati bor: $5=2+1+1+1$, $5=1+2+1+1$, $5=1+1+2+1$ va $5=1+1+1+2$. Shu usulda davom etib, 3 qadam uchun $B(5,3)=6$ ta — $5=3+1+1$, $5=1+3+1$, $5=1+1+3$, $5=2+2+1$, $5=2+1+2$, $5=1+2+2$ hamda 2 qadam uchun $B(5,2)=4$ ta — $5=4+1$, $5=3+2$, $5=2+3$, $5=1+4$ tengliklarni yozamiz. Endi barcha pog‘onalarni bir qadamda hatlab o‘tishga $B(5,1)=1$ imkoniyat va $5=5$ tenglik mos kelishini e’tiborga olsak, mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlarni bayon qilgan bo‘lamiz.

Shunday qilib, faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari soni

$$B(5)=B(5,1)+\ B(5,2)+B(5,3)+B(5,4)+B(5,5)=16$$

bo‘ladi. ■

Endi $B(n,k)$ va $B(n)$ miqdorlarni hisoblash formulalarini topish bilan shug‘ullanamiz.

Dastlab $n=1$ bo‘lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, birni natural sonlar yig‘indisi qilib bo‘laklash haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Shunday bo‘lishiga qaramasdan, birni faqat bitta qo‘shiluvchidan iborat deb qarab, yuqorida berilgan ta’rifga mos keluvchi $B(1,1) = 1 = C_0^0 = C_{1-1}^0 = C_{n-1}^0$ ta bo‘laklashga ega bo‘lamiz. Jami bo‘laklashlar soni $B(1) = B(1,1) = C_{n-1}^0 = 2^{n-1}$ bo‘ladi[1] .

$n=2$ bo‘lgan holda $k=2$ qo‘shiluvchili $B(2,1) = 1 = C_1^0 = C_{2-1}^0 = = C_{n-1}^0$ ta (2=2) va $k=2$ qo‘shiluvchili $B(2,2) = 1 = C_1^1 = C_{2-1}^0 = C_{n-1}^1$ ta (2=1+1) bo‘laklashlarga ega bo‘lamiz. Bu hol uchun jami bo‘laklashlar soni

$$B(2) = B(2,1) + B(2,2) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 = 2^{n-1}.$$

Agar $n=3$ bo‘lsa, u holda $k=1$ qo‘shiluvchili $B(3,1) = 1 = C_2^0 = = C_{3-1}^0 = C_{n-1}^0$ ta (3=3), $k=1$ qo‘shiluvchili $B(3,2) = 2 = C_2^1 = C_{3-1}^1 = = C_{n-1}^1$ ta (3=2+1=1+2) va $k=3$ qo‘shiluvchili $B(3,3) = 1 = C_2^2 = C_{3-1}^2 = = C_{n-1}^2$ ta (3=1+1+1) bo‘laklashlar bor. Bu holda jami bo‘laklashlar soni uchun

$$B(3) = B(3,1) + B(3,2) + B(3,3) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 = 2^{n-1}$$

tenglik o‘rinlidir.

Shunday davom etib, «istalgan n natural sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni $(n—1\ )$ ta elementdan $(k—1)$ talab gruppalashlar soniga teng, ya’ni $B(n,k) = C_{n-1}^{k-1}$» degan farazga

---

[1] Bu yerda va bundan keyin binomial koeffitsiyentlarning ixtiyoriy natural n uchun $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ bo‘lishi haqidagi xossasidan foydalanamiz.

kelish mumkin. Agar bu faraz tasdiqlansa, binomial koeffitsiyentlarning yig'indisi haqidagi xossasiga ko'ra, $B(n)\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} = 2^{n-1}$ bo'ladi.

1-teorema. Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni (n—1) ta elementdan (k—1) talab gruppalashlar soniga teng, ya'ni $B(n,k) = C_{n-1}^{k-1}$.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi.

Yuqorida bayon etilgan mulohazalar yordamida va 1-teoremaga tayangan holda isbotlash osonligini ta'kidlab, quyidagi teoremani boshqa usul bilan isbotlaymiz.

2-teorema. Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda ixtiyoriy n natural sonning barcha bo'laklanishlari soni 2^{n-1} ga teng, ya'ni $B(n)=2^{n-1}$.

Isboti. Natural n sonning barcha bo'laklanishlari to'plamini $S(n)$ deb, shu n sonning birinchi qo'shiluvchisi i ga (i=1,2,...,n) teng bo'lgan bo'laklanishlari to'plamini esa $S_i(n)$ bilan belgilaymiz.

Tushunarliki, $S(n) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(n)$ bo'ladi. Agar $S_i(n)$ to'plam elementlari sonini $Q_i(n)$ deb belgilasak, yuqoridagi tenglikka asosan, $B(n) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(n)$ bo'ladi. Endi $Q_i(n)=B(n-i)$ (i=1,2,...,n—1) va tengliklarni hisobga olib,

$$Q_n(n) = 1B(n) = \sum_{i=1}^{n-1} B(n-i) + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} B(i)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik ixtiyoriy n natural son uchun to'g'ri. Shuning uchun, bu tenglikdagi n ni (n+1) ga almashtirib,

$$B(n+1) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} B(i) + B(n) = B(n) + B(n) = 2B(n),$$

ya'ni $B(n+1)=2B(n)$ (n=1,2,...) ko'rinishdagi rekurrent munosabatni hosil qilamiz. Bu rekurrent munosabat ketma-ket qo'llanilsa, $B(n)=2^{n-1}$ kelib chiqadi. ■

2-misol. To'qqiz qavatli binoning birinchi qavatidan sakkiz kishi liftda yuqoriga ko'tarilayotgan bo'lsin. Agar to'qqizinchi qavatga liftdagilarning faqat bittasi chiqishi shart bo'lsa, lift yo'lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari sonini aniqlang.

Masalaning shartiga binoan, liftdagi sakkiz kishidan faqat bir kishi to'qqizinchi qavatga chiqishi shart bo'lgani uchun, qolgan yetti kishining ikkinchi qavatdan sakkizinchi qavatgacha chiqishining ko'p imkoniyatlari bor. Bu imkoniyatlar soni liftning birinchi va to'qqizinchi qavatlar orasidagi to'xtashlar soniga bog'liq bo'lib, yettining barcha bo'laklanishlari yordamida ifodalanishi mumkin. Masalan, lift binoning ikkinchi qavatidan sakkizinchi qavatigacha faqat bir marta to'xtab, liftdagi yetti kishi tushib qolgan bo'lsa, u holda bu hodisa $7=7$ ko'rinishdagi bo'laklash vositasida ifodalanadi; agar to'qqizinchi qavatgacha lift ikki marta to'xtab, oldin uch kishi, keyin to'rt kishi tushib qolgan bo'lsa, bu holatga $7=3+4$ ko'rinishdagi bo'laklash mos keladi va hokazo.

2-teoremadan foydalanib, yettining barcha bo'laklanishlari soni $2^{7-1}=2^6=64$ ekanligini topamiz. Demak, agar to'qqizinchi qavatga faqat bir kishi chiqishi shart bo'lsa, u holda lift yo'lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari soni 64 ga tengdir. Agar hal qilingan masalada to'qqizinchi qavatga faqat bir kishining chiqishi sharti bo'lmasa edi, u holda sakkizning barcha bo'laklanishlari sonini topishga to'g'ri kelar edi. ■

Endi natural sonlarni *qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan* vaziyatda bo'laklash masalasi bilan shug'ullanamiz.

Odatda, natural n sonning ixtiyoriy k ta (k — natural son, $k \le n$) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ qo'shiluvchilarga bo'laklanishini qandaydir shartlarga, masalan, $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_k$ yoki $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k$ tengsizliklarga bo'ysunadigan qilib olish qulay bo'ladi.

Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari sonini $R(n,k)$ bilan, uning barcha bo'laklanishlari sonini esa $R(n)$ bilan belgilaymiz.

Bundan keyin, bo'laklash deganda qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holdagi bo'laklashni nazarda tutamiz.

Tabiiyki, quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$R(n) = \sum_{k=1}^{n} R(n,k).$$

Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $R(1)=1$, $R(2)=2$, $R(3)=3$, $R(4)=5$, $R(5)=7$, $R(6)=11$, $R(7)=15$.

3-misol. 8 uchun barcha bo'laklashlar 1-jadvalda ifodalangan. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, 8 uchun, hammasi bo'lib, 22 bo'laklash imkoniyati bor:

$$R(8)=\sum_{k=1}^{8} R(8,k)=1+4+5+5+3+2+1+1=22. \blacksquare$$

1-jadval

Qo'shiluvchilar soni	Bo'laklanishlar	Bo'laklanishlar soni
1	8=8	R(8, 1)=1
2	8=7+1=6+2=5+3=4+4	R(8, 2)=4
3	8=6+1+1=5+2+1=4+3+1= =4+2+2=3+3+2	R(8, 3)=5
4	8=5+1+1+1=4+2+1+1=3+3+1+1= =3+2+2+1=2+2+2+2	R(8, 4)=5
5	8=4+1+1+1+1=3+2+1+1+1= =2+2+2+1+1	R(8, 5)=3
6	8=3+1+1+1+1+1=2+2+1+1+1+1	R(8, 6)=2
7	8=2+1+1+1+1+1+1	R(8, 7)=1
8	8=1+1+1+1+1+1+1+1	R(8, 8)=1

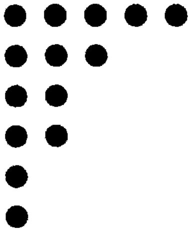
Albatta, yuqorida keltirilgan formula yordamida ixtiyory natural n uchun uning barcha bo'laklanishlari sonini aniqlash mumkin. Lekin n yetarlicha katta qiymatga ega bo'lganda, bu formuladan foydalanish juda ko'p hisoblashlar bajarishni taqozo qiladi. Ushbu bobning navbatdagi 7-paragrafida $R(n)$ ning qiymatini hisoblash uchun boshqacha yo'l borligi ko'rsatilgan.

6.2. Ferrers[1] *diagrammasi.* Natural n sonni k ta $a_1, a_2, ..., a_k$ natural qo'shiluvchilarning yig'indisi qilib bo'laklashga mos *Ferrers diagrammasi* k ta qatordan tashkil topgan bo'lib, uning (yuqoridan pastga qarab hisoblaganda) i-qatorida a_i ta nuqta mavjud bo'ladi.

Ferrers diagrammasi tushunchasiga asoslangan *diagrammali usul*, deb ataluvchi usul sonlarni qo'shiluvchilar yig'indisi qilib bo'laklash masalalarini tahlil qilishda keng qo'llaniladi.

Bo'laklashda qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmaganligi sababli Ferrers diagrammasini tuzishda, odatda, uning qatorlaridagi nuqtalar soni yuqoridan pastga qarab o'shmaydigan, ya'ni $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k$ shart bajariladigan (yoki kamaymaydigan, ya'ni $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ shart

[1] *Ferrers* (Norman Makleod, 1829 — taxminan 1894-yildan so'ng vafot etgan) — ingliz matematigi.



1-shakl.

bajariladigan) tartibga rioya qilinadi. Bundan tashqari, qatorlardagi nuqtalar diagrammaning vertikal ustunlarini tashkil etadigan qilib tuziladi. Shunday tartibda tuzilgan diagramma *normal Ferrers diagrammasi*, deb ataladi.

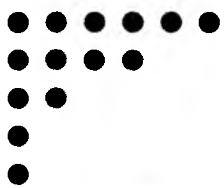
4-misol. 14=5+3+2+2+1+1 bo‘laklashga 1-shaklda tasvirlangan Ferrers diagrammasi mos keladi. Bu diagramma normal Ferrers diagrammasidir. ■

Ixtiyoriy bo‘laklashga mos keluvchi normal Ferrers diagrammasining qatorlarini ustun, ustunlarini esa qator qilib o‘zgartirilsa (ya’ni diagramma transponirlansa), tabiiyki, yana normal Ferrers diagrammasi hosil bo‘ladi. Bu hosil bo‘lgan diagrammaga dastlabki *diagrammaning transpozitsiyasi* (yoki *ikkilanma diagrammasi*), deb ataladi.

Norman Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi natijasida hosil bo‘lgan ikkilanma diagramma transponirlansa, dastlabki diagramma hosil bo‘lishi ravshandir. Demak, istalgan son uchun tuzilgan barcha diagrammalarni o‘zaro ikkilanma bo‘lgan diagrammalar juftlariga ajratish mumkin. Shuni e’tiborga olish kerakki, ba’zi diagrammalar o‘z-o‘ziga ikkilanma bo‘ladi, shuning uchun ular ikki bir xil diagrammalar juftini tashkil etadi, deb hisoblash mumkin.

Ikkilanma diagrammalarni *qo‘shma diagrammalar* deb, ularga mos keluvchi bo‘laklashlarni esa *qo‘shma bo‘laklashlar*, deb ham ataydilar.

5-misol. 4-misolda qaralgan 14=5+3+2+2+1+1 bo‘laklashga mos Ferrers diagrammasiga qo‘shma diagrammani 2-shakldagidek tasvirlash mumkin. Mos qo‘shma bo‘laklash esa: 14=6+4+2+1+1. ■



2-shakl.

6.3. Bo‘laklashlarning xossalari. Quyidagi uchta 3-5-teoremalar bo‘laklashlarning ba’zi xossalarini ifodalaydi.

3-teorema. Ixtiyoriy n natural sonning har xil natural qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni shu sonning toq qo‘shiluvchlarga bo‘laklanishlari soniga teng.

Isboti. n natural sonning $b_1, b_2, \ldots, b_p$ toq qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan ixtiyoriy birini qaraymiz:

$$n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{r_1} + \underbrace{b_2 + b_2 + \ldots + b_2}_{r_2} + \ldots + \underbrace{b_p + b_p + \ldots + b_p}_{r_p},$$

bu yerda har bir b_i ($i=\overline{1,p}$) qo‘shiluvchi bo‘laklanishda r_i ($1\leq r_i\leq n$) marta qatnashadi. r_i sonning ikkilik sanoq sistemasidagi $r_i=2^{q_{i1}}+2^{q_{i2}}+...+2^{q_{is}}$ tasvirlanishini yozamiz, bunda $q_{i1}>q_{i2}>...$ $...>q_{is}\geq 0$ qandaydir (s ta) butun sonlar.

Qaralayotgan n sonning yuqoridagi bo‘laklanishida r_i ta b_i qo‘shiluvchilarni bir-biridan farqli $b_i2^{q_{i1}},b_i2^{q_{i2}},...,b_i2^{q_{is}}$ qo‘shiluvchilarga almashtiramiz. Tabiiyki, bunday almashtirish r_i ta b_i qo‘shiluvchilar yig‘indisining qiymatini o‘zgartirmaydi. Shu jarayonni barcha $i=1,2,...,p$ qiymatlar uchun takrorlab va qo‘shiluvchilarning mos qiymatlarini yozib, n sonning har xil qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan birini hosil qilamiz, chunki b_i, b_j sonlarning toqligi tufayli $b_i2^{q_i}\neq b_j2^{q_j}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, n sonning toq qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan har biriga shu sonning har xil qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlaridan biri mos kelishi isbotlandi. Bu tasdiqning teskarisini ham isbotlash mumkin. ■

6-misol. 3-misolda 8 ning barcha bo‘laklashlari keltirilgan va bu bo‘laklashlar soni 22 ga tengligi ko‘rsatilgan edi. 22 ta bo‘laklashlardan oltitasi har xil qo‘shiluvchilardan tuzilgan. Xuddi shuncha toq qo‘shiluvchili bo‘laklashlar mavjud. 3-teoremaning isbotidagidek mulohaza yuritib, 8 ning har xil qo‘shiluvchili va toq qo‘shiluvchili barcha bo‘laklanishlari orasidagi bir qiymatli moslikni ko‘rsatish mumkin.

Haqiqatan ham,

$$8=7+1=7\cdot1+1\cdot1=7\cdot2^0+1\cdot2^0=7+1,$$

$$8=5+3=5\cdot1+3\cdot1=5\cdot2^0+3\cdot2^0=5+3,$$

$$8=5+1+1+1=5\cdot1+1\cdot3=5\cdot2^0+1\cdot(2^1+2^0)=$$

$$=5\cdot2^0+1\cdot2^1+1\cdot2^0=5+2+1,$$

$$8=3+3+1+1=3\cdot2+1\cdot2=3\cdot2^1+1\cdot2^1=6+2,$$

$$8=3+1+1+1+1+1=3\cdot1+1\cdot5=3\cdot2^0+1\cdot(2^2+2^0)=$$

$$=3\cdot2^0+1\cdot2^2+1\cdot2^0=3+4+1,$$

$$8=1+1+1+1+1+1+1+1=1\cdot8=1\cdot2^3=8.\ ■$$

Diagrammali usul yordamida bo'laklashlarning turli xossalarini osonlik bilan isbotlash mumkin. Quyida shunday xossalardan ikkitasini ifodalovchi 4- va 5-teoremani keltiramiz.

4-teorema. Ixtiyoriy n natural sonni k ta natural qo'shiluvchilarga bo'laklashlar soni shu n sonning eng katta qo'shiluvchisi k ga teng bo'lgan bo'laklanishlari soniga teng.

Isboti. Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi tushunchasi yordamida natural n sonning k ta natural qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari va shu sonning eng katta qo'shiluvchisi k ga teng bo'lgan bo'laklanishlari orasida bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin. Bu bir qiymatli moslikka ko'ra, teoremaning tasdig'i to'g'ridir. ■

7-misol. 3-misoldan ma'lumki, 8 uchun uchta qo'shiluvchili beshta bo'laklash mavjud, bu son uchun qo'shiluvchilarning eng kattasi uchga teng bo'lgan bo'laklashlar ham beshtadir. 2-jadvalda bu bo'laklashlar bir-biriga mos ravishda ikki ustun qilib keltirilgan.

2-jadval

8 sonining 3 ta qo'shiluvchili bo'laklanishlari	8 sonining eng katta qo'shiluvchisi 3 ga teng bo'laklanishlari
6+1+1	3+1+1+1+1+1
5+2+1	3+2+1+1+1
4+3+1	3+2+2+1
4+2+2	3+3+1+1
3+3+2	3+3+2

5-teorema. Ixtiyoriy n natural sonning hech bir qo'shiluvchisi k dan oshmaydigan bo'laklanishlari soni $(n+k)$ sonining k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlar soniga teng.

Isboti. Birinchidan, shuni ta'kidlash lozimki, Ferrers diagrammasining transpozitsiyasi n sonning hech bir qo'shiluvchisi k dan oshmaydigan bo'laklanishlari bilan shu sonning k tadan oshmaydigan qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi. Bu bir qiymatli moslik asosida n sonning hech bir qo'shiluvchisi k dan oshmaydigan barcha bo'laklanishlari soni shu n sonning k tadan oshmaydigan qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soniga teng, deb xulosa qilish mumkin.

Ikkinchi tomondan, n sonning k tadan oshmaydigan qo'shiluvchilarga bo'laklanishiga mos Ferrers diagrammasi n ta nuqtadan tashkil topgan bo'lib, ular k tadan oshmaydigan qatorlarda joylashgan bo'ladi. Bunday diagrammalarning har biriga k ta nuqtadan tuzilgan ustunni chap tomondan joylashtirsak, k ta qatorga va $(n+k)$ ta nuqtali diagrammaga ega bo'lamiz. Aksincha, $(n+k)$ ta nuqtali har bir Ferrers diagrammasidan k ta qatorga ega birinchi ustunni olib tashlasak, n ta nuqtadan tashkil topgan va qatorlari soni k tadan ko'p bo'lmagan diagrammani hosil qilamiz.

Ko'rsatilgan bu ikki turdagi diagrammalar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik n sonni qo'shiluvchilari k tadan oshmaydigan bo'laklashlar soni $R(n+k,\ k)$ ifodaga tengligini tasdiqlaydi. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda 6, 7 va 8 ni natural sonlar yig'indisi ko'rinishida ifodalang hamda $B(6)$, $B(7)$ va $B(8)$ larning qiymatlarini aniqlang.
2. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda 9 ning barcha bo'laklanishlarini yozing va $R(9)$ ni hisoblang.
3. Bozorda dehqon 15 qovunni 7 xaridorga donabay sotdi. Agar navbatdagi har bir savdoda dehqonning sotgan qovunlari soni oldingi savdodagiga qaraganda kamaymagan bo'lsa, u holda barcha savdolarda sotilishi mumkin bo'lgan qovun sonlarining barcha imkoniyatlarini toping.
4. Odatda, biron qarorni ko'pchilik bo'lib qabul qilish maqsadida ovoz berganda, «tarafdor» va «qarshi» ovozlar sonlari o'zaro teng bo'lmasligi uchun a'zolari 3 nafardan kam bo'lmagan toq sondagi ekspertlar komissiyasi tuziladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi 17 ekspertdan tashkil qilinishi mumkin bo'lgan komissiyalar sonini hisoblang.
5. Kichik bir qishloqda hammasi bo'lib 22 bosh qoramol bor va har bir oilada hech bo'lmasa bir bosh qoramol topiladi. Bu qishloqning hech qaysi oilasida uch boshdan ko'p qoramol bo'lmasa, qishloqdagi qoramollarning oilalar orasida taqsimlanishining barcha imkoniyatlarini (variantlarini) aniqlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash masalasining mohiyati nimadan iborat?

2. Natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida tasvirlash masalasi qanday shartlarda qaralishi mumkin?
3. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni $B(n,k)$ bilan shu sonning barcha bo'laklanishlari soni $B(n)$ orasida qanday munosabat bor?
4. Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari sonini hisoblash formulasini bilasizmi?
5. Qo'shiluvchilar tartibini e'tiborga olgan holda istalgan n natural sonning barcha bo'laklanishlari sonini qanday hisoblash mumkin?
6. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni $R(n,k)$ bilan, uning barcha bo'laklanishlari soni $R(n)$ orasida qanday munosabat bor?
7. Ferrers diagrammasi nima?
8. Diagrammali usul deganda nimani tushunasiz?
9. Normal Ferrers diagrammasi nima?
10. Ikkilanma Ferrers diagrammasi qanday tuziladi?
11. Qo'shma bo'laklash nima?
12. Ixtiyoriy n natural sonning har xil natural qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni bilan shu sonning toq qo'shiluvchlarga bo'laklanishlari soni orasida qanday bog'lanish bor?
13. Ixtiyoriy n natural sonni k ta natural qo'shiluvchilarga bo'laklashlar soni bilan shu n sonning eng katta qo'shiluvchisi k ga teng bo'lgan bo'laklanishlari soni orasidagi bog'lanish qanday ifodalanadi?
14. Ixtiyoriy n natural sonning hech bir qo'shiluvchisi k dan oshmaydigan bo'laklanishlari soni bilan $(n+k)$ sonining k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlar soni orasida qanday bog'lanish bor?

7-§. Hosil qiluvchi funksiyalar

Sonlar ketma-ketligi, qator, qatorning yaqinlashishi, xususiy yig'indi, yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi, funksional qator, darajali qator, kombinatorik obyekt, funksiya, hosil qiluvchi funksiya, binomial koeffitsiyent, Nyuton binomi, Fibonachchi sonlari, Bine formulasi, Eyler ayniyati.

7.1. Hosil qiluvchi funksiyalarning ta'rifi. Hosil qiluvchi funksiyalarning ta'rifi uchun zarur bo'lgan ayrim tushunchalarni matematik analiz kursidan keltiramiz. Quyidagi chekli sonlarning cheksiz ketma-ketligi berilgan bo'lsin:

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots .$$

Shu ketma-ketlik yordamida tuzilgan

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

ifoda *sonli cheksiz qator* yoki, *qisqacha*, *qator* deb, $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ chekli sonlar esa qatorning *hadlari*, deb ataladi. $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ yig'indiga qatorning *xususiy yig'indisi* deyiladi.

Agar qatorning xususiy yig'indilaridan tuzilgan $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u holda *qator yaqinlashuvchi* va bu limitning qiymati yaqinlashuvchi *qator yig'indisi*, deb ataladi.

Agar xususiy yig'indilar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lmasa, u holda *qator uzoqlashuvchi* deyiladi.

Yuqorida keltirilgan sonli cheksiz qator tushunchasida qatorning $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ hadlari sonlar emas, balki qandaydir x o'zgaruvchiga bog'liq chekli qiymatlar qabul qiluvchi $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ funksiyalardan iborat bo'lsa, u holda bu funksiyalarning cheksiz yig'indisini ifodalovchi

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

funksional qator tushunchasiga ega bo'lamiz.

Amaliy masalalarni hal qilishda funksional qatorlar sinfiga tegishli bo'lgan darajali qatorlar muhim ahamiyatga ega. *Darajali qator*

$$a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

ko'rinishga ega bo'lgan funksional qatordan iboratdir, bu yerda, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ berilgan chekli o'zgarmas koeffitsiyentlarni, x esa qator o'zgaruvchisini ifodalaydi.

Tushunarliki, o'zgaruvchisi nolga teng bo'lgan har qanday darajali qator yaqinlashuvchidir. Odatda, darajali qator o'zgaruvchining ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, boshqalarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi. Ammo, shunday darajali qatorlar borki, ular o'zgaruvchi qanday qiymatga ega bo'lishidan qat'i nazar, yaqinlashuvchi yoki o'zgaruvchining noldan boshqa barcha qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

Kombinatorikada qator tushunchasi kombinatorik obyektlar tufayli vujudga kelgan ketma-ketliklar bilan ishlash uchun kerakli qurol sifatida qo'llaniladi. Masalan, agar bo'laklash masalasi qaralayotgan bo'lsa, bunday sonlar ketma-ketligining elementlari qilib, n natural sonni qo'shiluvchilar yig'indisi sifatida bo'laklashlar soni $R(n)$ ni olish mumkin.

Agar darajali qator vositasida chekli sonlarning $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ cheksiz ketma-ketligiga haqiqiy yoki kompleks o'zgaruvchili qandaydir funksiya mos qo'yilishi mumkin bo'lsa, u holda ketma-ketliklar ustida bajariladigan ba'zi amallarni ularga mos funksiyalar ustida bajarish imkoniyati paydo bo'ladi.

Darajali qator yig'indisini ifodalovchi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

funksiya $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ketma-ketlikning *hosil qiluvchi funksiyasi*, deb ataladi.

Bu yerda, $f(x)$ funksiyani aniqlovchi qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun x o'zgaruvchining haqiqiy yoki kompleks qiymatli bo'lishi muhim ahamiyatga ega emas.

Matematik tahlil kursidan ma'lumki, agar $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ darajali qator $x=0$ nuqtaning qandaydir atrofida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(k=0,1,2,...)$ formula o'rinli bo'ladi, bu yerda, $f^{(k)}(0)$ ifoda $f(x)$ funksiyadan olingan k-tartibli hosilasining $x=0$ nuqtadagi qiymatidir.

1-misol. Hadlari faqat birlardan iborat bo'lgan $1,1,...,1,...$ sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Haqiqatan ham, $1,1,...,1,...$ sonlar ketma-ketligiga

$$1+x+x^2+...+x^n+...$$

darajali qator mos keladi va bu darajali qatorning hadlari maxraji x ga teng bo'lgan

$$1, x, x^2, ..., x^n, ...$$

ko'rinishdagi geometrik progressiyadan iboratdir. Elementar matematika kursidan ma'lumki, bu progressiya $|x|<1$ bo'lganda, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya bo'ladi va uning barcha hadlari yig'indisi

$$1+x+x^2+...+x^n+...\frac{1}{1-x}$$

formula bilan ifodalanadi. ■

2-misol. 1-misoldagidek mulohaza yuritib, har qanday chekli a songa mos keluvchi $1, a, a^2, ..., an, ...$ sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=\frac{1}{1-ax}$ ko'rinishda bo'lishini aniqlash mumkin. ■

7.2. Hosil qiluvchi funksiyalarning oddiy xossalari. Hosil qiluvchi funksiyalar bir qator xossalarga ega. Biz quyida shunday xossalardan ba'zilarini oddiy xossalar sifatida keltiramiz. Ular hosil qiluvchi funksiyalarni tuzish hamda ulardan amaliy masalalarni hal etishda ko'mak berishadi.

1-xossa. Agar $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_a(x)$ va $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_b(x)$ bo'lsa, u holda

$$a_0 \pm b_0,\ a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ ...,\ a_n \pm b_n,\ ...$$

ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=f_a(x) \pm f_b(x)$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, $f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ va $f_b(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ bo'lgani uchun, darajali qatorlarni hadlab qo'shib (ayirib),

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = f_a(x) \pm f_b(x)$$

munosabatni hosil qilamiz. ■

2-xossa. Agar $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_a(x)$ va $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_b(x)$ bo'lsa, u holda elementlari $d_n \doteq \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-1}$ *(n=0,1,2,...) sonlardan iborat bo'lgan $d_0, d_1, d_2, ..., d_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=f_a(x)f_b(x)$ bo'ladi.*

Haqiqatan ham, ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi ta'rifiga ko'ra,

$$f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

$$f_b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

bo'lgani uchun quyidagi tengliklar ketma-ketligi o'rinlidir:

$$f_a(x)f_b(x) = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)x^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} d_k x^k = \sum_{k=0}^{n} d_k x^k = f(x). \blacksquare$$

Ayrim ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini avvaldan ma'lum bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalarga mos darajali qatorni hadlab differensiallash amali yordamida topish mumkin.

3-misol. Ushbu 0,1,2,3,... ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, qaralayotgan ketma-ketlikka $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k$ ko'rinishdagi darajali qator mos keladi. Darajali qatorni hadlab, differensiallash amalini $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ qatorga qo'llab va $|x|<1$ bo'lgan hol uchun o'rinli $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ tenglikni hisobga olib, quyidagi tengliklar ketma-ketligini yozamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(x^k\right) =$$

$$= x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}. \blacksquare$$

Umuman olganda, hosil qiluvchi funksiyalarni tuzishda darajali qatorni hadlab, differensiallash amalidan foydalanish quyidagi xossaga tayanadi.

3-xossa. Agar $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_a(x)$ bo'lsa, u holda elementlari $b_n=(n+1)a_{n+1}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ sonlardan iborat $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_b(x) = \dfrac{df_a(x)}{dx}$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, hosil qiluvchi funksiyaning ta'rifidan va darajali qatorni hadlab, differensiallash haqidagi xossaga ko'ra,

$$f_b(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k=\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k-1}x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_{k+1}x^{k+1}\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_s x^s)$$

tengliklar o'rinlidir. a_0 o'zgarmasning hosilasi nolga teng ekanligini e'tiborga olib,

$$f_b(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_s x^s\right)=\frac{da_0}{dx}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_s x^s)=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=\frac{df_a(x)}{dx}$$

munosabatni hosil qilamiz. ■

4-misol. 1,2,3,4,... ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasini topish talab etilsin.

Hosil qiluvchi funksiya ta'rifiga ko'ra, izlanayotgan funksiya $\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)x^k$ darajali qatorning yig'indisidan iboratdir. 1-xossaga ko'ra, qaralayotgan ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi 1,1,...,1,... va 0,1,2,3,... ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalari yig'indisidan iboratdir. 1- va 3-misollar natijalaridan foydalanib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}kx^k=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Demak, 1,2,3,4,... ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ bo'ladi. ■

7.3. Hosil qiluvchi funksiyalarning kombinatorikaga tatbiqi. Hosil qiluvchi funksiyaning ta'rifi va xossalaridan ko'rinadiki, ketma-ketliklar bilan bog'liq bo'lgan xilma-xil masalalarni o'rganish va ularni hal qilishda bu funksiyalardan foydalanish mumkin. Bu o'rinda, ayniqsa, kombinatorik amallar bilan bog'liq ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalari alohida qiziqish uyg'otishini ta'kidlaymiz. Hosil qiluvchi funksiyalarning kombinatorikaga tatbiqini ko'rsatish maqsadida, avvalo, quyidagi misolni qaraymiz:

5-misol. Berilgan chekli, butun va manfiymas s son uchun hadlari $a_n = \begin{cases} C_s^n, & 0 \le n \le s, \\ 0, & s < n, \end{cases}$ formula asosida aniqlangan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin, bu yerda, $C_s^n = \dfrac{s!}{n!(s-n)!}$ — binomial koeffitsiyentlar. Bu sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasini topish talab etilsin.

Nyuton binomi formulasiga ko'ra,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{s} C_s^n x^n = (1+x)^s$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Demak, berilgan butun $s \ge 0$ son uchun $C_s^0, C_s^1, C_s^2, \ldots, C_s^s$, $0, 0, \ldots, 0, \ldots$ ko'rinishdagi sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=(1+x)^s$ ko'rinishga egadir. ■

Yuqorida, aniqrog'i, ushbu bobning 3-paragrafida binomial koeffitsiyentlarning xossalari ko'rilgan edi. Quyidagi teorema ularning xossalaridan yana birini ifodalaydi.

1-teorema. Ixtiyoriy natural m, n va $k \le m+n$ sonlar uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$\sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k.$$

Isboti. Elementlari, mos ravishda, quyidagi tengliklar bilan aniqlangan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ va $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ketma-ketliklarni qaraymiz:

$$a_n = \begin{cases} C_n^i, & 0 \le i \le n, \\ 0, & i > n, \end{cases} \qquad b_i = \begin{cases} C_m^i, & 0 \le i \le m, \\ 0, & i > m. \end{cases}$$

5-misolni hisobga olsak, bu ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyalari, mos ravishda, $f_a(x)=(1+x)^n$ va $f_b(x)=(1+x)^m$ ko'rinishda bo'ladi. Hosil qiluvchi funksiyalarning 2-xossasiga ko'ra,

$f_a(x) f_b(x) = \sum_{s=0}^{\infty} d_s x^s$ bo'ladi, bunda $d_s = \sum_{i=0}^{s} a_i b_{s-i}$ $(s=0,1,2,\ldots)$.

Ushbu $k \le m+n$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k natural sonni olamiz. Qaralayotgan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ va $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ketma-ketlikning aniqlanishiga ko'ra, $i>n$ shart bajarilganda $a_i=0$ va $k-i>m$ shart bajarilganda esa $b_{k-i}=0$ bo'lgani uchun

$$d_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=\sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)}a_ib_{k-1}=\sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)}C_n^iC_m^{k-1}$$

munosabat o'rinlidir.

Boshqa tomondan olib qaraganda,

$$f_a(x)f_b(x)=(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}=\sum_{i=0}^{n+m}C_{n+m}^ix^i.$$

Agar $\gamma_i=\begin{cases}C_{n+m}^i, & 0\le i\le n+m,\\ 0, & i>n+m,\end{cases}$ deb olsak, u holda yuqorida hosil qilingan $f_a(x)f_b(x)=\sum_{i=0}^{n+m}C_{n+m}^ix^i$ tenglikni $f_a(x)f_b(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_ix^i$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu, o'z navbatida, $f_a(x)f_b(x)$ funksiya $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi ekanligini ko'rsatadi.

Hosil qiluvchi funksiyalarning 2-xossasiga ko'ra, $f_a(x)f_b(x)$ funksiya hadlari $k\le n+m$ bo'lganda $d_k=\sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)}C_n^iC_m^{k-1}$ tenglik bilan, $k>n+m$ bo'lganda esa nollardan iborat ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi ekanligi yuqorida ko'rsatilgan edi.

Shunday qilib,

$$\sum_{k=0}^{n+m}C_{n+m}^kx^k=\sum_{k=0}^{n+m}\sum_{s=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)}C_n^sC_m^{k-s}x^k.$$

Bu tenglik x o'zgaruvchining barcha qiymatlarida to'g'ri bo'lganligidan, isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikni hosil qilamiz. ■

Fibonachchi qatoridagi birinchi haddan oldin $u_0=0$ sonni qo'yib[1],

$$u_0=0,\ u_1=1,\ u_n=u_{n-2}+u_{n-1},\ n\ge 2,$$

ketma-ketlikning (umumlashgan Fibonachchi sonlari ketma-ketligining) $u(x)$ hosil qiluvchi funksiyani topamiz.

---

[1] Fibonachchi qatorini chap tomonga ham istagancha davom ettirish mumkin. Tabiiyki, bunday ish ko'rilganda, har qadamda hosil bo'lgan ketma-ketlik qandaydir bir umumlashgan Fibonachchi qatori bo'laveradi.

Buning uchun, dastlab, quyidagi tengliklar ketma-ketligini yozamiz:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_kx^k=x+\sum_{k=2}^{s}u_kx^k=x+\sum_{k=2}^{\infty}(u_{k-2}+u_{k-1})x^k=$$

$$=x+\sum_{k=2}^{\infty}u_{k-2}x^k+\sum_{k=2}^{\infty}u_{k-1}x^k=x+x^2\sum_{s=0}^{\infty}u_sx^s+x\sum_{p=0}^{\infty}u_px^p=$$

$$=x+x^2u(x)+xu(x).$$

Endi hosil bo'lgan $u(x)=x+x^2u(x)+xu(x)$ tenglikni $u(x)$ funksiyaga nisbatan tenglama deb qarab,

$$u_0=0,\ u_1=1,\ u_n=u_{n-2}+u_{n-1},\ n\geq 2,$$

ketma-ketlikni $u(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ hosil qiluvchi funksiyaga ega bo'lamiz.

II bobning 5-paragrafida isbotlangan (Fibonachchi sonlarini hisoblashga mo'ljallangan) Bine formulasini n=0,1,2,... hol uchun umumlashgan Fibonachchi sonlari ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasidan foydalanib, yana bir marta isbotlaymiz.

2-teorema. Fibonachchi soni u_n $(n=0,1,2,\ldots)$ uchun $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ *tenglik o'rinlidir.*

Isboti. Avvalo, noma'lum koeffitsiyentlar usulini qo'llab va $u(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ funksiyaning kasr ko'rinishda ekanligini e'tiborga olib, uni ikkita kasr yig'indisi qilib tasvirlaymiz. Bu ishni amalga oshirish uchun, oldin, $1-x-x^2=0$ kvadrat tenglamaning x_1 va x_2 ildizlarini topamiz: $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Agar $\alpha=-x_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ va $\beta=-x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ deb belgilasak, u holda $\alpha+\beta=1$ va $\alpha\beta=-1$ bo'lishi ravshandir. Endi $1-x-x^2$ kvadrat uchhadni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$1-x-x^2=-(x+\alpha)(x+\beta)=\alpha\beta(x+\alpha)(x+\beta)=$$

$$=(\beta x+\alpha\beta)(\alpha x+\alpha\beta)=(\beta x-1)(\alpha x-1)=(1-\alpha x)(1-\beta x).$$

Shunday qilib,

$$u(x)=\frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x},$$

bu yerda, A va B noma'lum koeffitsiyentlardir. Kasrlarni qo'shish amalini bajarib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A+B-(A\beta+B\alpha)x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}.$$

Bu yerdan $1—x—x^2$ kvadrat uchhadning noldan farqli barcha qiymatlarida

$$x=A+B—(A\beta+B\alpha)x$$

bo'lishi kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning chap va o'ng tomonlaridagi x o'zgaruvchining mos darajalari koeffitsiyentlarni tenglashtirsak, A va B noma'lumlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A\beta+B\alpha=-1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $A=\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ va $B=\frac{1}{\beta-\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ekanligini topamiz.

Demak,

$$u(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\alpha x}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\beta x}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right).$$

2-misol asosida

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n-\beta^n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n$$

munosabatga ega bo'lamiz. Endi $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ ekanligini eslasak, $u_0=0$ va $u_1=1$ shartlar bilan aniqlanuvchi u_n, $n=0,1,2,\ldots$, umumlashgan Fibonachchi sonlari uchun Bine formulasi o'rinli bo'lishi tasdiqlanadi. ■

Endi qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning natural qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari sonlaridan tashkil topgan[1]

$$R(0), R(1), R(2), R(3),..., R(n),...$$

ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi hisoblangan

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R(n)x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^5 + 12x^6 + ...$$

darajali qatorni qaraymiz.

L. Eyler $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...(1-x^n)$ ko'rinishdagi ko'paytmalarni natural n uchun tekshirib, 1748-yilda

$$\varphi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \left(x^{\frac{3m^2-m}{2}} + x^{\frac{3m^2+m}{2}} \right)$$

formulani isbotlagan edi. Bu formula *Eyler ayniyati*, deb ataladi.

3-teorema. $\varphi(x)\, r(x)=1$.

Isboti. $1+x+x^2+...+x^n+...=\dfrac{1}{1-x}$ tenglikdan foydalanib (1-misolga qarang),

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot...\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot...=$$

$$=(1+x+x^2+x^3+...)(1+x^2+x^4+x^6+...)\times...$$

$$...\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+...)...$$

munosobatga ega bo'lamiz. Oxirgi ko'paytmadagi qavslarni ochganda, mumkin bo'lgan barcha $x^{a_1}x^{2a_2}...x^{ka_k}=x^{a_1+2a_2+...+ka_k}$ ko'rinishdagi ifodalar yig'indisi hosil bo'ladi, bu yerda, $a_1,a_2,...,a_k$ — butun manfiymas sonlar. Shuning uchun, n sonni $a_1+2a_2+...+ka_k$ ko'rinishda ifodalash imkoniyatlari soni qancha bo'lsa, o'shancha marta bu yig'indida x^n qatnashadi.

$$a_1+2a_2+...+ka_k=\underbrace{1+...+1}_{a_1 \text{ marta}}+\underbrace{2+...+2}_{a_2 \text{ marta}}+...+\underbrace{k+...+k}_{a_k \text{ marta}}$$

yozuvdan ko'rinib turibdiki, n sonni $a_1+2a_2+...+ka_k$ ko'rinishda ifodalash imkoniyatlari soni shu sonning qo'shiluvchilar tartibi

[1] Bu yerda yozuvning ixchamligi nuqtayi nazaridan (0 natural sonlar to'plamiga tegishli bo'lmagani uchun $R(0)$ yozuv ma'noga ega bo'lmasa-da) $R(0)=1$ qabul qilindi.

e'tiborga olinmagan holda barcha bo'laklanishlari soniga, ya'ni $R(n)$ ga tengdir. Bu tasdiq $\frac{1}{\varphi(x)} = r(x)$ tenglikning to'g'riligini isbotlaydi. ■

Eyler ayniyatini e'tiborga olgan holda $\varphi(x)r(x)=1$ tenglikni

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\dots)\times$$
$$\times\ (R(0)+R(1)x+R(2)x^2+R(3)x^3+\dots+\mathrm{R}(n)x^n+\dots)=1$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglikning chap tomonidagi qavslarni ochib va $x, x^2, x^3,\dots,x^n$ ifodalarning koeffitsiyentlarini nolga tenglashtirib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$R(1)-R(0)=0,$$
$$R(2)-R(1)-R(0)=0,$$
$$R(3)-R(2)-R(1)=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$R(n)-R(n-1)-R(n-2)+R(n-5)+R(n-7)+\dots$$
$$\dots+(-1)^m R\left(n-\frac{3m^2-m}{2}\right)+(-1)^m R\left(n-\frac{3m^2+m}{2}\right)+\dots=0,$$

bu yerda barcha $s<0$ uchun $R(c)=0$.

Demak, qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning natural qo'shiluvchilarga barcha bo'laklanishlari soni $R(n)$ uchun

$$R(n)=R(n-1)+R(n-2)-R(n-5)-R(n-7)+\dots$$
$$\dots+(-1)^{m+1} R\left(n-\frac{3m^2-m}{2}\right)+(-1)^{m+1} R\left(n-\frac{3m^2+m}{2}\right)+\dots$$

formulaga ega bo'ldik. Topilgan formula yordamida $R(1)=1$, $R(2)=2$, $R(3)=3$, $R(4)=5$, $R(5)=7$, $R(6)=11$, $R(7)=15$, $R(8)=22$ bo'lishini osongina hisoblab, bu formulani qo'llash natural n sonning barcha bo'laklanishlari soni uchun ushbu bobning 6-paragrafida keltirilgan $R(n)=\sum_{k=1}^{n} R(n,k)$ formulani qo'llash bilan taqqoslanganda, hisoblash ishlarining keskin kamayganiga guvoh bo'lamiz.

1. Quyidagi ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini toping:

a) $1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,...$; b) $1^2,2^2,3^2,4^2,...$; d) $1,\ \frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},...$;

e) $1,0,1,0,1,0,...$; f) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...$; g) $1,0,-\frac{1}{3!},0\frac{1}{5!},....$

2. Har qanday chekli a songa mos keluvchi $1,a,a^2,...,a^n,...$ va $1,1,...,1,...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyalardan foydalanib, $0,a-1,a^2-1,...,a^n-1,...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasini toping.
3. $a_0,a_1,a_2,a_3,...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)$ bo'lsin. Quyidagi ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyalarini aniqlang:

a) $a_0+a_1,a_1+a_2,a_2+a_3,...$; b) $a_0,a_0+a_1,a_0+a_1+a_2,...$;

d) $a_0,a_2,a_4,a_6,...$; e) $a_0,a_1b,a_2b^2,a_3b^3,...$, b — ixtiyoriy chekli son.

4. Hosil qiluvchi funksiyalarning oddiy xossalarini qo'llab, bir necha sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyalarini toping.
5. Quyidagi rekurrent formulalar bilan berilgan ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyalarini va ketma-ketlik elementlarining aniq ifodalarini toping:

a) $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n,\ a_0=a_1=1$;

b) $a_{n+3}=-3a_{n+2}-3a_{n+1}-a_n,\ a_0=1,\ a_1=a_2=0$;

d) $a_{n+3}=-\frac{3}{2}a_{n+2}-\frac{1}{2}a_n,\ a_0=0,\ a_1=1\ a_2=2.$

6. Bine formulasidan foydalanib, Fibonachchi qatoridagi o'n ikkinchi elementni aniqlang.
7. Fibonachchi sonlarining ushbu bobdagi 5-paragrafda keltirilgan 1-, 2-, 3- va 5-xossalarini $u_0=0,\ u_1=1,$ $u_n=u_{n-2}+u_{n-1}$ $(n\geq 2)$ ketma-ketlikining hosil qiluvchi funksiyasidan foydalangan holda isbotlang.
8. Isbotlang: a) $R(20)=627$; b) $R(21)=792$; d) $R(22)=1002$.

1. Sonli cheksiz qator deganda nimani tushunasiz?
2. Qatorning xususiy yig'indisi qanday tuziladi?
3. Qanday qator yaqinlashuvchi deb ataladi?
4. Qator uzoqlashuvchi bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
5. Funksional qator sonli qatordan nima bilan farq qiladi?
6. Darajali qator qanday ko'rinishga ega?
7. Ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi deganda nimani tushunasiz?
8. Hosil qiluvchi funksiyalarning xossalaridan qaysilarni bilasiz?
9. Berilgan chekli va butun $s \geq 0$ son uchun

   $C_{s,}^{0}\ C_{s,}^{1}\ C_{s}^{2}, \ldots, C_{s,}^{s}\ 0, 0, \ldots, 0 \ldots$. ko'rinishdagi sonlar ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasi qanday ko'rinishga ega?
10. Hosil qiluvchi funksiyalarning xossalaridan foydalanib, binomial koeffitsiyentlarning xossalarini o'rganish mumkinmi?
11. Fibonachchi qatoriga mos ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasini topa olasizmi?
12. Fibonachchi sonlarini hisoblashga mo'ljallangan Bine formulasini Fibonachchi sonlari ketma-ketligining hosil qiluvchi funksiyasidan foydalanib isbotlash mumkinmi?
13. Eyler ayniyati qaysi formula bilan ifodalanadi?
14. Qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning natural qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari sonini hisoblashning qanday formulalarini bilasiz?

III bob. GRAFLAR NAZARIYASI

Ushbu bobda graflar nazariyasi elementlari qaraladi. Dastlab graflar haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlar, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar, graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi yoritiladi. So'ngra grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi tushunchasi, Eyler va Gamilton graflari, graflarda masofa tushunchasi, minimal masofali yo'l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni bayon qilinadi. Tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar, maksimal oqim haqidagi masala va bu masalalarni hal qilish uchun Ford algoritmi ham ushbu bobda keltiriladi.

1-§. Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari

Graf, uch, qirra, yoy, yo'nalish, orgraf, qo'shni uchlar, yakkalangan uch, karrali qirralar, multigraf, psevdograf, nolgraf, to'la, belgilangan va izomorf graflar, grafning geometrik ifodalanishi, uchlar, qirralar va yoylar insidentligi.

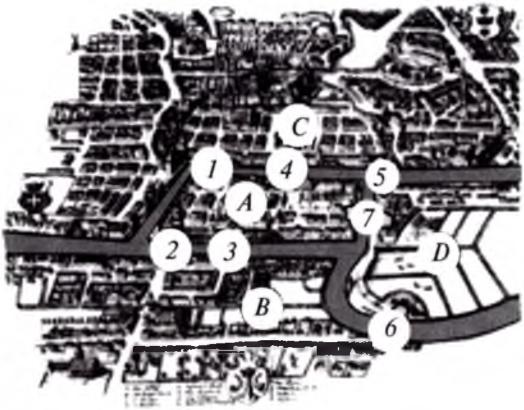
1.1. Graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar. 1736-yilda L. Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg[1] ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yetti ko'prikning joylashuvi 1-shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan

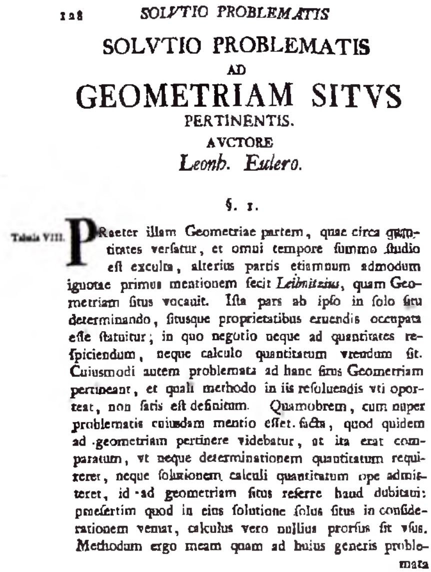
---

[1] Kyonisberg (Königsberg) — bu shahar 1255-yilda asoslangan bo'lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg'oqlarida joylashgan. 1946-yildan boshlab, Kaliningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibida.

va qurilishi tartibida 1, 2, 3, 4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o‘sha davrda to‘rt — *A*, *B*, *C* va *D* qismga bo‘lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib, yetti ko‘prikdan faqat bir martadan o‘tib, yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut (hozirgi vaqtda graflar nazariyasida bu marshrut Eyler sikli nomi bilan yuritiladi, ushbu bobning 5-paragrafiga qarang) mavjudligi shartlari ham topildi. Bu natijalar e’lon qilingan tarixiy ilmiy ishning birinchi sahifasi 2-shaklda keltirilgan. L. Eylerning bu maqolasi yuz yildan ko‘p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo‘yicha yagona ilmiy ish bo‘lib keldi.



1-shakl.



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

2-shakl.

XIX asrning o‘rtalarida graflar nazariyasi bilan bog‘liq tadqiqotlar G. Kirxgof[1] va A. Keli[2] ishlarida paydo bo‘ldi. «Graf» iborasi D. Kyonig[3] tomonidan 1936-yilda graflar nazariyasiga bag‘ishlangan dastlabki darslikda[4] uchraydi.

---

[1] *Kirxgof* (Kirchhoff Gustav Robert, 1824—1887) — olmon faylasufi, fizigi.
[2] *Keli yoki Keyli* (Cayley Artur, 1821—1895) — ingliz matematigi.
[3] *Kyonig* (Dénes König, 1884—1944) — venger matematigi.
[4] Bu darslik olmon tilida yozilgan.

Denes Kyonig

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'ymlar; yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va kompyuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

1.2. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar. Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $<v_1,v_2>$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf deb shunday $<V, U>$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va U $-<v_1,v_2>$ $(v_1 \in V,\ v_2 \in V)$ ko'rinishdagi juftliklar korteji[1] bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

Bundan buyon grafni belgilashda $<V, U>$ yozuv o'rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko'rsatish muhim bo'lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi bilan belgilaymiz.

$G=(V, U)$ graf berilgan bo'lsin. V to'plamning elementlariga G **grafning uchlari**, V to'plamning o'ziga esa, **graf uchlari to'plami** deyiladi.

Graflar nazariyasida «uch» iborasi o'rniga, ba'zan, **tugun** yoki **nuqta** iborasi ham qo'llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba'zi iboralari bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta'riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

$G=(V, U)$ grafning ta'rifiga ko'ra, U bo'sh kortej bo'lishi ham mumkin. Agar U bo'sh bo'lmasa, u holda bu kortej (a,b) $(a \in V,\ b \in V)$ ko'rinishdagi juftliklardan[2] tashkil topadi, bunda

[1] Bundan keyin «juftliklar korteji» iborasi o'rniga, qisqacha kortej iborasini qo'llaymiz.

[2] Bu yerda ham juftlik (kortej)ning odatdagi $<a, b>$ yozuvi o'rniga (a,b) yozuvidan foydalanamiz.

$a=b$ bo'lishi hamda ixtiyoriy (a,b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin.

$(a,b)\in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog'liq holda, ya'ni yo'nalishning borligi yoki yo'qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a,b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya'ni $(a,b)=$ $=(b,a)$ bo'lsa, (a,b) juftlikka *yo'naltirilmagan (oriyentirlanmagan) qirra* (yoki, qisqacha, *qirra*) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya'ni $(a,b)\neq(b, a)$ bo'lsa, u holda (a,b) juftlikka *yoy* yoki *yo'naltirilgan (oriyentirlangan) qirra* deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo *grafning qirralari korteji* yo *yoylari korteji*, yoki *qirralari va yoylari korteji*, deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirra (yoy)lari uning *elementlari*, deb ataladi. $G=(V, U)$ graf elementlarining soni $(|V|+|U|)$ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V|\neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan.

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a,b) yoki ab, yoki $(a; b)$ ko'rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $(\overrightarrow{a,b})$ yoki $(\overleftarrow{a,b})$, qirra uchun $(\overleftrightarrow{a,b})$, yoy yoki qirra uchun u (ya'ni uchlari ko'rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko'rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko'rsatish tartibi muhim ekanligini ta'kidlaymiz, ya'ni (a,b) va (b,a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a,b) ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, u holda a uning *boshlang'ich uchi*, b esa *oxirgi uchi*, deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a,b) ko'rinishda yozilsa, u haqida *a uchdan chiquvchi (boshlanuvchi)* va *b uchga kiruvchi* (*uchda tugovchi*) yoy, deb aytish ham odat tusiga kirgan.

Qirra uchun uning (a,b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol o'ynamaydi va a va b elementlar *qirraning uchlari* yoki *chetlari*, deb ataladi.

Agar grafda yo (a,b) qirra, yo (a,b) yoy, yoki (b,a) yoy topilsa, u holda *a va b uchlar tutashtirilgan* deyiladi. Agar grafning ikki uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo'lsa, u holda ular *qo'shni uchlar* deb, aks holda esa, *qo'shni bo'lmagan uchlar,* deb aytiladi.

Grafning ikki uchi qo'shni bo'lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi *qirraga (yoyga) insident*, o'z navbatida, qirra yoki yoy bu *uchlarga insident* deyiladi. Grafda ikki qirra (yoy) umumiy chetga ega bo‘lsa, ular *qo‘shni qirralar (yoylar)* deyiladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, qo‘shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi. Ba’zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya’ni *uchlar soni* m va *qirralar (yoylar) soni* n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m, n) *-graf,* deb ataydilar.

Agar $G=(V,U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo‘lsa, u holda *yo‘naltirilmagan (oriyentirlanmagan)* va faqat yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) qirralardan (ya’ni yoylardan) tashkil topgan bo‘lsa, u holda u *yo‘naltirilgan (oriyentirlangan) graf,* deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, *orgraf,* deb ham ataladi.

Qator hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo‘lgan graflar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday graflar *aralash graflar,* deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ graf (orgraf)ning U korteji tarkibida $V\times V$ to‘plamdan olingan takrorlanuvchi elementlar bo‘lsa, u holda ular *karrali* yoki *parallel qirralar (yoylar),* deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo‘lgan graf *multigraf* deyiladi.

Ikkala chetki (boshlang‘ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy), ya’ni grafning $(a, a)\in U$ elementi *sirtmoq,* deb ataladi. Sirtmoq, odatda, yo‘naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo‘lgan graf *psevdograf* deyiladi.

Umumiy holda uchlar to‘plami V va (yoki) qirralar (yoylar, qirra va yoylar) korteji U cheksiz ko‘p elementli bo‘lishi mumkin. Bundan keyin V to‘plam va U kortej faqat chekli bo‘lgan $G=(V,U)$ graflarni qaraymiz. Bunday graflar *chekli graflar,* deb ataladi.

Hech qanaqa qirra (yoy) bilan bog‘lanmagan uch *yakkalangan (ajralgan, xolis, yalang‘och) uch,* deb ataladi.

Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya’ni grafda qirralar va yoylar bo‘lmasa) *nolgraf* yoki *bo‘sh graf,* deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan bo‘sh grafni O_m yoki N_m kabi belgilash qabul qilingan.

Istalgan ikki uchi qo‘shni bo‘lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf *to‘la graf,* deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo‘lgan to‘la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $C_m^2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ bo‘ladi.

Agar orgrafning istalgan ikki uchini har bir yo'nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo'lsa, u holda unga *to'la orgraf,* deb ataladi. Ravshanki, to'la grafdagi qirralarning har birini ikki (yo'nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo'lgan) yoyga almashtirilsa, natijada to'la orgraf hosil bo'ladi. Shuning uchun, to'la orgrafdagi yoylar soni oriyentirlanmagan to'la grafdagi qirralar sonidan ikki baravar ko'pdir, ya'ni uchlari m ta bo'lgan to'la orgrafdagi yoylar soni $2C_m^2 = m(m-1)$ bo'ladi.

Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1,2,...,m$ sonlari mos qo'yilgan bo'lsa, u *belgilangan graf,* deb ataladi.

Agar $G=(V,U)$ va $G'=(V', U')$ graflarning uchlari to'plamlari, ya'ni V va V' to'plamlar orasida uchlarning qo'shnilik munosabatini saqlaydigan o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, u holda G va G' graflar *izomorf graflar*, deb ataladi. Bu ta'rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin: agar $\forall x, y \in V$ va ularga mos bo'lgan $x',y' \in V'$ $(x \leftrightarrow y,\ x' \leftrightarrow y')$ uchun $xy \leftrightarrow x'y'$ $(xy \in U,\ x'y' \in U')$ bo'lsa, u holda G va G' graflar izomorfdir. Agar izomorf graflardan biri oriyentirlangan bo'lsa, u holda ikkinchisi ham, albatta, oriyentirlangan bo'lishi va ulardagi mos yoylarning yo'nalishlari ham bir-birlariga mos bo'lishi shart.

Graf uchiga insident qirralar soni shu *uchning lokal darajasi* yoki qisqacha *darajasi* yoki *valentligi*, deb ataladi. Grafdagi a uchning darajasini $\rho(a)$ bilan belgilaymiz.

Sirtmoqqa insident bo'lgan uchning darajasini aniqlashda shuni e'tiborga olish kerakki, qaralayotgan masalaga bog'liq holda sirtmoqni bitta qirra deb ham, ikkita qirra deb ham hisoblash mumkin. Ravshanki, ajralgan uchning darajasi nolga teng. Darajasi birga teng uch *chetki* (yoki *osilgan*) *uch*, deb ataladi. Chetki (osilgan) uchga insident qirra ham *chetki* (yoki *osilgan*) *qirra*, deb ataladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo'lsa, u holda bunday graf *r darajali regular graf*, deb ataladi. Uch darajali regular graf *kubik* (yoki *uch valentli*) *graf*, deb ataladi. O_m graf nol darajali regular graf ekanligini, K_m esa $(m-1)$ darajali regular graf ekanligini ta'kidlaymiz.

Ko'rinib turibdiki, oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalarining yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo'ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra hisobda ikki marta qatnashadi. Shunday qilib, XVIII asrdayoq L. Eyler tomonidan isbotlangan quyidagi tasdiq o'rinlidir.

1-lemma («ko'rishishlar» haqida). Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng.

Agar grafning uchlar to'plamini o'zaro kesishmaydigan shunday ikki qism to'plamlar (bo'laklar)ga ajratish mumkin bo'lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to'plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to'plamdan olingan biron uch bilan tutashtiradigan bo'lsa, u holda bunday graf *ikki bo'lakli graf* (*bixromatik* yoki *Kyonig grafi*), deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, ikki bo'lakli grafning har bir bo'lagidagi ixtiyoriy ikki uch qo'shni bo'la olmaydi. Biron bo'lagida faqat bir uch bo'lgan to'la ikki bo'lakli graf *yulduz*, deb ataladi.

Agar ikki bo'lakli grafning turli bo'laklariga tegishli istalgan ikki uchi qo'shni bo'lsa, u holda bu graf *to'la ikki bo'lakli graf,* deb ataladi. To'la ikki bo'lakli grafni $K_{m,n}$ bilan belgilaymiz, bu yerda, m va n bilan grafning bo'laklaridagi uchlar sonlari belgilangan. $K_{m,n}=(V,U)$ graf uchun $|V|=m+n$ va $|U|=mn$ bo'lishi ravshan, bu yerda $|V|$ — $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ — uning qirralari soni.

Grafning ikki bo'lakli graf bo'lishi haqidagi ba'zi qo'shimcha ma'lumotlar (Kyonig teoremasi) ushbu bobning 4-paragrafida keltirilgan. Ikkidan katta ixtiyoriy natural k son uchun k *bo'lakli graf* tushunchasini ham kiritish mumkin.

1-misol. O'zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to'plamini V bilan, shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib-qo'nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf, deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib-qo'nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo'lishi mumkin, agar qandaydir sababga ko'ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo'nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi. ■

2-misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biron idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo'ling[1]. 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi

[1] Bu masalani fransuz shoiri va yozuvchisi Bashe de Mezeriakning (1587—1638) matematikaga bag'ishlangan asarlarida topish mumkin.

suyuqlik hajmini, mos ravishda, a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyuqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $\langle a,b,c\rangle$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko‘ra, a, b va c o‘zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \leq a \leq 8$, $0 \leq b \leq 5$ va $0 \leq c \leq 3$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi holatlar quyidagilardir:

$$\langle 8,0,0\rangle,\ \langle 7,1,0\rangle,\ \langle 7,0,1\rangle,\ \langle 6,2,0\rangle,\ \langle 6,1,1\rangle,\ \langle 6,0,2\rangle,$$
$$\langle 5,3,0\rangle,\ \langle 5,2,1\rangle,\ \langle 5,1,2\rangle,\ \langle 5,0,3\rangle,\ \langle 4,4,0\rangle,\ \langle 4,3,1\rangle,$$
$$\langle 4,2,2\rangle,\ \langle 4,1,3\rangle,\ \langle 3,5,0\rangle,\ \langle 3,4,1\rangle,\ \langle 3,3,2\rangle,\ \langle 3,2,3\rangle,$$
$$\langle 2,5,1\rangle,\ \langle 2,4,2\rangle,\ \langle 2,3,3\rangle,\ \langle 1,5,2\rangle,\ \langle 1,4,3\rangle,\ \langle 0,5,3\rangle.$$

Holatlar to‘plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birontasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o‘tishi mumkin. Ta’kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birontasiga bevosita yoki bilvosita o‘tish imkoniyati mavjud bo‘lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o‘tishlari to‘plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo‘lgan (V,U) juftlikni graf, deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o‘tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V,U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $\langle 8,0,0\rangle$, oxirgi hadi esa $\langle 4,4,0\rangle$ bo‘lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$$\langle 8,0,0\rangle,\ \langle 5,0,3\rangle,\ \langle 5,3,0\rangle,\ \langle 2,3,3\rangle,\ \langle 2,5,1\rangle,$$
$$\langle 7,0,1\rangle,\ \langle 7,1,0\rangle,\ \langle 4,1,3\rangle,\ \langle 4,4,0\rangle. \ ■$$

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Graf tushunchasini qo‘llash mumkin bo‘lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.
2. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.
3. Biron idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish uchun tuzilgan graf elementlarini tahlil qiling va bu masalaning mumkin qadar qisqa yechimini toping.
4. Ko‘rishishlar haqidagi lemmaning qo‘llanilishiga doir amaliy misol keltiring.

5. Kubik graf bilan bog'liq amaliy misollar keltiring.
6. Qadimgi boshqotirma masala: biron idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmli idishlar yordamida teng ikki qismga ajrating[1]. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.
7. Qadimgi boshqotirma masala: yo'lovchi daryodan bo'ri, qo'y va bir bog' pichanni olib o'tishi kerak, lekin u qayiqda o'zi bilan faqat bitta narsani olib o'tish imkoniyatiga ega. Agar sohilda bo'ri va qo'y birga qolsa, bo'ri qo'yni, qo'y va pichan birga qolganda esa, qo'y pichanni yeb qo'yadi. Yo'lovchi narsalarni daryoning bir sohilidan ikkinchi sohiliga olib o'tishni ularning butunligini saqlagan holda amalga oshirishi kerak. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib, uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.
8. Barcha belgilangan (m, n) graflar sonini aniqlang.
9. O'zaro izomorf bo'lmagan: a) uchta, b) to'rtta, d) beshta uchga ega barcha belgilangan $G=(V,U)$ graflar uchun V to'plam va U kortejlarni aniqlang.
10. Shaxmat o'yinida donalarning taxtada joylashuvi va o'yin navbati birgalikda vaziyatni tashkil etadi. Barcha vaziyatlar to'plamini graf uchlari to'plami deb qarasak, vaziyatlarning biridan boshqasiga mumkin bo'lgan o'tishlar (yurishlar) grafning qirralari yoki yoylariga mos keladi, deb hisoblash mumkin. Shaxmat o'yinining qoidalariga rioya qilgan holda yuqorida bayon qilingan grafning shaxmat o'yinidagi dastlabki vaziyatni ham o'z ichiga oluvchi qandaydir oltita vaziyatlariga mos uchlari va bu uchlarni bog'lovchi qirra hamda yoylarini aniqlang.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qanday masalaning qo'yilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo bo'lishiga asos bo'ldi?
2. «Graf» iborasi birinchi bo'lib kim tomonidan va qachon kiritilgan?
3. Grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini bilasizmi?

---

[1] Bu masalani fransuz matematigi va fizigi S. Puasson (1781—1840) ishlarida topish mumkin.

4. Grafning abstrakt ta'rifidagi juftlikni tashkil etuvchilar bir-biridan nima bilan farq qiladi?
5. Grafning uchi deganda nimani tushunasiz?
6. Grafning qirrasi nima?
7. Grafning elementlari deganda nimani tushunasiz?
8. Grafdagi yoy bilan qirra bir-biridan nima bilan farq qiladi?
9. Qanday holda uchlar tutashtirilgan deyiladi?
10. Qo'shni uchlarning qo'shni bo'lmagan uchlardan qanday farqi bor?
11. Insidentlik tushunchasini bilasizmi?
12. Yo'naltirilmagan graf va orgraf bir-biridan nima bilan farq qiladi?
13. Karrali yoki parallel qirralar (yoylar) deganda nimani tushunasiz?
14. Multigraf, psevdograf, nolgraf, to'la, aralash va belgilangan graflar bir-biridan nima bilan farq qiladi?
15. Sirtmoq deganda grafning qanday elementi tushuniladi?
16. Grafning qanday elementi yakkalangan (ajralgan, xolis, yalang'och) uch, deb ataladi?
17. Izomorf graflar deganda nimani tushunasiz?
18. Grafdagi uchning lokal darajasi (darajasi, valentligi) qanday aniqlanadi?
19. Qanday holda r darajali regular graf kubik graf bo'ladi?
20. Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig'indisi bilan uning qirralari soni orasida qanday bog'lanish bor?
21. Qanday holda Kyonig grafi yulduz, deb ataladi?
22. To'la ikki bo'lakli grafning uchlari va qirralari sonlarini qanday hisoblab topish mumkin?
23. k bo'lakli graf nima?

2-§. Graflarning berilish usullari

Graf, orgraf, uch, qirra, yoy, sirtmoq, karrali qirralar, uchning lokal darajasi, multigraf, ko'phad, grafning uchlari qo'shniligi matritsasi, oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo'shniligi matritsasi, oriyentirlangan grafning uchlari qo'shniligi matritsasi, sirtmoqsiz orgraf uchlari qo'shniligi matritsasi, grafning qirralari qo'shniligi matritsasi, insidentlik matritsasi.

2.1. Grafning geometrik ifodalanishi. Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o'rganish va bu xossalarni amalda qo'llash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tug'dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi mumkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga — *grafning ko'rgazmali tasviriga* ega bo'lamiz. Agar uchlar to'plami va bu uchlarning tutashishlarini ko'rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo'lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog'ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.

Shuni ta'kidlaymizki, ba'zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to'g'ri yoki egri bo'lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo'lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo'nalishga ega bo'lsa (ya'ni u yoy bo'lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo'nalish biron usul bilan, masalan, strelka bilan ko'rsatiladi.

Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biron diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo'lmasa, bunday diagramma *grafning geometrik ifodalanishi* deyiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta'rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta'rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o'zaro izomorf bo'ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

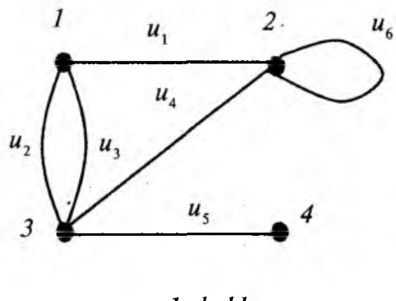
1-teorema. Har qanday chekli grafni 3 o'lchovli Evklid[1] *fazosida*[2] *geometrik ifodalash mumkin.*

Isboti. Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta'rifiga binoan, uning hech bo'lmasa, bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo'lsa, u holda uni 3 o'lchovli Evklid fazosining biron nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko'p bo'lsa, u holda ularni uch o'lchovli Evklid fazosidagi biror to'g'ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to'g'ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarimtekisliklarni o'tkazamiz (graf chekli bo'lgani uchun buning imkoniyati bor). Har bir qirrani (yoyni) unga mos yarimtekislikda, chetlari mos uchlarni ifodalovchi nuqtalarda bo'lgan hamda bu to'g'ri chiziq bilan boshqa umumiy nuqtasi bo'lmagan qandaydir chiziq vositasida ifodalaymiz. Yarimtekisliklarning tuzilishiga ko'ra, bu chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega emas. ■

Shuni ham ta'kidlash kerakki, 1-teoremadagi 3 ni 2 ga almashtirib bo'lmaydi, chunki tekislikda qirralari (yoylari)ni ifodalovchi kesishmaydigan (aniqrog'i, chetki nuqtalaridan boshqa umumiy nuqtalari bo'lmagan) chiziqlar yordamida tasvirlash imkoniyati faqat ba'zi graflargagina xos, ya'ni har qanday grafning 2 o'lchovli Evklid fazosida (tekislikda) geometrik ifodalanishi mavjud bo'lavermaydi.

Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

1-misol. 1-shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan G graf belgilangan graf bo'lib, 4 ta uch va 6 ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6>$, $u_1=(1,2)$,



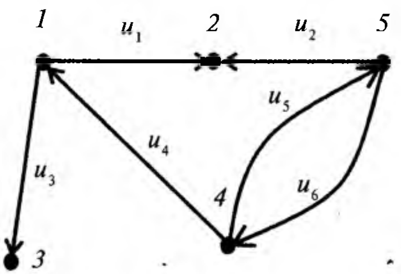
1-shakl.

[1] *Evklid* (Ευκλειδηζ, eramizdan oldingi III asrda yashagan) — qadimgi yunon olimi.

[2] n o'lchovli Evklid fazosida ikkita $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$ vektor orasidagi masofa (metrika) $d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$ formula bo'yicha aniqlanadi.

$u_2=u_3=(1, 3)$, $u_4=(2, 3)$, $u_5=(3, 4)$, $u_6=(2, 2)$. G grafning barcha u_i $(i=\overline{1,6})$ qirralari oriyentirlanmagan (chunki uchlarini tutashtiruvchi chiziqlarda yo'nalish ko'rsatilmagan) bo'lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog'i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo'shni, 1 va 4 uchlar esa qo'shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda, u_4 va u_5 qirralar qo'shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo'shni emas. ■

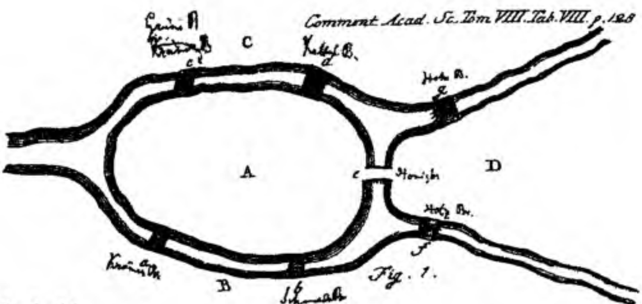
2-misol. Geometrik ifodalanishi 2-shakldagi ko'rinishda bo'lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda o'n bitta element bor: 5 ta uch va 6 ta yoy, ya'ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2), (1,3), (5,2), (4,1), (4,5), (5,4)>$ yoki $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$. Berilgan G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo'q. Bu grafning (1,3) yoyi uchun 1 boshlang'ich, 3 uch esa oxirgi uchdir. ■



2-shakl.

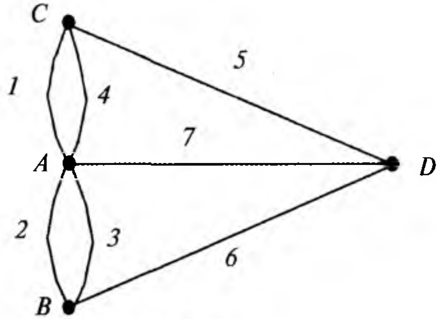
3-misol. XVIII asrda Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va L. Eyler tomonidan yechlishi graflarning matematik nazariyasi paydo bo'lishiga xizmat qilganligi yuqorida ta'kidlangan edi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko'priklar joylashuvi 3-shaklda tasvirlangan (bu shakl L. Eylerning birinchi sahifasi ushbu bobning 1-paragrafda keltirilgan ilmiy ishidan olindi).



3-shakl.

Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalada quyidagi savolga javob berish so'raladi: «Shaharning to'rt A, B, C va D qismidan birida joylashgan uydan chiqib, yetti ko'prikning har biridan faqat bir marta o'tgan holda yana o'sha uyga qaytib kelish mumkinmi?»



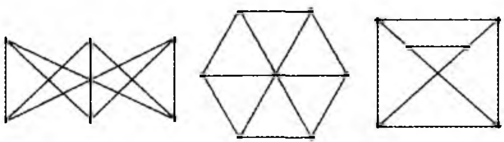
4-shakl.

Bu savolga javob izlash maqsadida ko'priklardan o'tishlar muhimligini e'tiborga olgan holda qo'yilgan masalani tahlil qilish uchun 4-shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu grafning uchlari shaharning A, B, C va D qismlariga, qirralari esa ko'priklarga mos keladi. Qaralayotgan graf oriyentirlanmagan graf bo'lib, 4 ta uch va 7 ta qirradan tashkil topgan. Uning qirralari orasida karralilari bor, lekin sirtmoqlar yo'q.

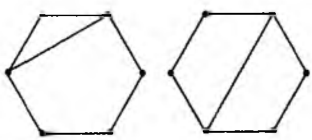
Kyonigsberg shahridagi ko'priklardan faqat bir marta o'tgan holda yurish boshlangan joyga qaytib kelish muammosi, 4-shakldagi grafdan foydalangan holda ushbu bobning 5-paragrafida hal qilinadi. ■

4-misol. 5-shaklda tasvirlangan graflar bir-biriga izomorfdir. ■

5-misol. 6-shaklda tasvirlangan graflarning har biri olti uch va yetti qirraga ega bo'lib, ular izomorf emas. ■



5-shakl.



6-shakl.

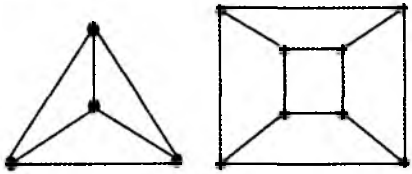
Hammasi bo'lib, beshta *qavariq muntazam ko'pyoqli* mavjudligi qadimdan ma'lum (Evklid isbotlagan): *tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr* va *ikosaedr*. Bu ko'pyoqlilarning umumiy nomi ham bor — *Platon*[1] *jismlari*. Shunisi qiziqki, barcha Platon jismlariga

[1] *Platon* (Πλάτων, eramizdan oldingi 428 yoki 427-yil — eramizdan oldingi 348 yoki 347-yil) — yunon faylasufi.

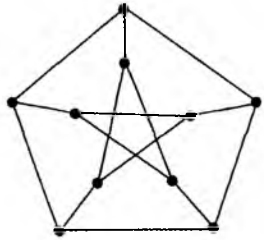
mos graflar tekislikda geometrik ifodalanadi. Masalan, tetraedr va kubga mos graflarning geometrik ifodalanishi 7-shaklda tasvirlangan.

Darvoqe, Platon jismlaridan tetraedr, kub va dodekaedr kubik grafga misol bo'ladi.

Petersen[1] *grafi*[2] deb ataluvchi 8-shaklda tasvirlangan graf ham kubik grafdir.



7-shakl.



8-shakl.

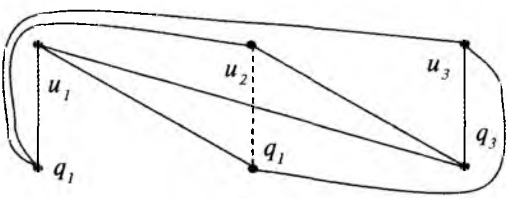
Agar graf tekislikda geometrik ifodalanishga ega bo'lsa, u holda bunday graf *tekis* (*yassi*) *graf,* deb ataladi. Bunday graf *tekislikda yotuvchi graf* deb ham atalishi mumkin.

Boshqacha aytganda, tekis grafning barcha uchlari bir tekislikda yotadi hamda barcha qirralari (yoylari) o'sha tekislikda yotuvchi o'zaro kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar bo'lib, ular faqat o'zlari insident bo'lgan uchlardagina umumiy nuqtalarga ega.

Platon jismlariga mos barcha graflar tekis graflardir. Tekis grafga izomorf graf *planar graf,* deb ataladi.

Tekis bo'lmagan grafga ajoyib misol uch *uy va uch quduq haqidagi boshqotirma masalaga* mos grafdir. Uchta u_1, u_2, u_3 uy va uchta q_1, q_2, q_3 quduq bor. Har bir uydan har bir quduqqa ixtiyoriy ikkitasi kesishmaydigan qilib uzluksiz yo'lakchalar o'tkazish mumkinmi?

Qog'ozda masala shartini qanoatlantiradigan grafni chizishga urinishlar muvaffaqiyatsiz tugaydi. Shunday urinishlardan biri 9-shaklda keltirilgan.



9-shakl.

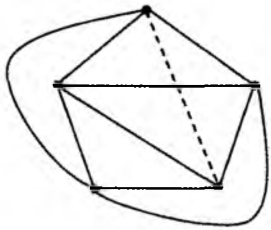
---

[1] *Petersen* (Julius Peter Christian, 1839—1910) — Daniya matematigi.

[2] Bu graf haqidagi dastlabki ma'lumot 1891-yilda e'lon qilingan. J. Petersen, Die Theorie der regulären graphs, Acta Math. 15 (1891) 193—220.

Darvoqe, uch uy va uch quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf har bir bo‘lagida uchtadan uchi bo‘lgan ikki bo‘lakli to‘la grafga misol bo‘la oladi.

Tekis bo‘lmagan grafga yana bir misol beshta uchga ega bo‘lgan to‘la graf — K_5 grafdir. Bu grafning o‘nta qirralari borligi ravshan. Bu yerda ham K_5 grafni hech qaysi ikkita qirralari kesishmaydigan qilib tekislikda chizish muvaffaqiyatsiz tugaydi. 10-shaklda K_5 grafning to‘qqizta qirrasi kesishmaydigan uzluksiz chiziqlar qilib chizilgan, lekin o‘ninchi chiziq esa uzilishlarga ega, unga tekislikda «joy yo‘q»!



10-shakl.

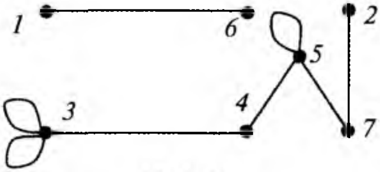
2.2. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishi. Grafni maxsus turdagi ko‘phad yordamida ham berish mumkinligini ta’kidlaymiz. Uchlari to‘plami $V=\{v_1,v_2, ..., v_m\}$ bo‘lgan G graf berilgan bo‘lsin. G grafning yakkalangan uchlari yo‘q deb faraz qilamiz. Bu graf m ta $x_1,x_2,...x_m$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq

$$f(G)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_m^{\sigma_m}\prod_{i<j}(x_j-x_i)^{a_{ij}}$$

ko‘rinishdagi ko‘phad yordamida tasvirlash mumkin, bu yerda ko‘paytma $i<j$ shartni qanoatlantiruvchi barcha (i, j) juftlar bo‘yicha amalga oshiriladi, x_i o‘zgaruvchi $v_1\in V$ uchga mos keladi, α_{ij} — v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi qirralar soni, σ_i — v_i uchdagi sirtmoqlar soni.

$f(G)$ ko‘phad G grafga izomorflik aniqligida mos kelishini isbotlash mumkin.

6-misol. 11-shaklda tasvirlangan G grafga mos ko‘phadni aniqlaymiz. Berilgan oriyentirlanmagan grafda yettita uch va sakkizta qirra bor. Uning har bir uchiga bitta x_i (i =1,2,...,7) o‘zgaruvchini mos qilib qo‘yamiz. G grafda karrali qirralari yo‘q, uning uchta qirrasi sirtmoqlardan iborat bo‘lib, ulardan ikkitasi 3 uchga, biri esa 5 uchga insidentdir. Shuning uchun $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\sigma_6=\sigma_7=0$, $\sigma_3=2$, $\sigma_5=1$; $\alpha_{16}=\alpha_{27}=\alpha_{34}=\alpha_{45}=\alpha_{57}=1$, qolgan barcha $\alpha_{ij}=0$ bo‘ladi. Berilgan G grafga mos ko‘phad



11-shakl.

$$f(G)=x_3^2x_5(x_6-x_1)(x_7-x_2)(x_4-x_3)(x_5-x_4)(x_7-x_5)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. ■

7-misol. $f(G)=x_2(x_2-x_1)(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)(x_4-x_3)$ ko‘phadga mos keluvchi grafning geometrik tasvirini topamiz. Bu ko‘phadning tarkibiga ko‘ra, unga mos keluvchi oriyentirlanmagan grafda 4 ta uch va 6 ta qirra bo‘lib, bu qirralardan ikkitasi karrali ($\alpha_{13}=2$) va bittasi sirtmoq ($\sigma_2=1$) ekanligini ta’kidlaymiz. Berilgan grafning geometrik tasvirlanishlaridan biri 1-shaklda keltirilgan. ■

2.3. Qo‘shnilik matritsalari. Endi grafning boshqa bir berilish usuli negizida yotuvchi *graf uchlari qo‘shniligi matritsasi* tushunchasini qarab chiqamiz.

$G=(V,U)$ — uchlari soni m ga teng bo‘lgan belgilangan, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf bo‘lsin.

Elementlari

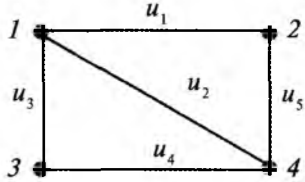
$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ agar } i \text{ va } j \text{ uchlar qo‘shni bo‘lsa,}\\ 0, \text{ aks holda}\end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,m)$ matritsani grafning uchlari qo‘shniligi matritsasi, deb ataymiz.

Bu ta’rifdan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo‘lmagan graf uchlari qo‘shniligi matritsasining bosh diagonalida faqat nollar bo‘lishi, satrlaridagi birlar soni esa mos uchlarning darajalariga tengligi kelib chiqadi.

8-misol. 12-shaklda tasvirlangan grafgning uchlari qo‘shniligi matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$



12-shakl.

ko‘rinishda bo‘ladi. ■

Uchlari soni m ga teng bo‘lgan belgilangan *oriyentirlangan* $G=(V,U)$ *grafning uchlari qo‘shniligi* $m\times m$*-matritsasi,* deb elementlari

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ agar } (i,j)\in U \text{ bo‘lsa,}\\ 0, \text{ aks holda,}\end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,m)$ matritsaga aytiladi.

9-misol. 12-shaklda tasvirlangan orgrafning uchlari qo'shniligi matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Endi G uchlari $1,2,...,m$ bo'lgan belgilangan oriyentirlanmagan multigraf bo'lsin. a_{ij} elementlari G grafning i va j uchlarini tutashtiruvchi qirralar soniga teng bo'lgan $A=(a_{ij})$ $(i, j=1,2,..., m)$ matritsa *oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo'shniligi matritsasi,* deb ataladi.

10-misol. 12-shaklda tasvirlangan oriyentirlanmagan multigraf uchlari qo'shniligi matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Karrali yoylari bo'lgan *sirtmoqsiz orgraf uchlari qo'shniligi matritsasi* tushunchasini ham yuqoridagiga o'xshash ta'riflash mumkin.

2-teorema. Graflar faqat va faqat uchlari qo'shniligi matritsalari bir-birlaridan satrlarining o'rinlarini va ustunlarining o'rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo'lsagina izomorf bo'lishadi.

Isboti. Abstrakt grafga, uning uchlarini belgilashga (raqamlashga) bog'liq ravishda, turlicha qo'shnilik matritsalari mos kelishi tabiiydir. Bu matritsalarni solishtirish maqsadida har birining m ta uchlari bo'lgan ixtiyoriy ikkita belgilangan, o'zaro izomorf G va H graflarni qaraymiz. G va H graflar uchlariga mos qo'yilgan belgilar turlicha va ulardan biri boshqasidan uchlarning qo'shniligini saqlovchi qandaydir f qoidani qo'llab hosil qilingan bo'lsin, ya'ni H grafdagi $f(u_i)$ va $f(u_j)$ uchlar faqat va faqat G grafning u_i va u_j uchlari qo'shni bo'lsagina qo'shni bo'lsin. G grafning uchlari qo'shniligi matritsasini $A=(a_{ij})$ $(i, j=1,2,..., m)$ bilan H grafning uchlari qo'shniligi matritsasini esa $B=(b_{ij})$ $(i, j=1,2,..., m)$ bilan belgilasak, $b_{f(i)f(j)}=a_{ij}$ o'rinli bo'ladi. ■

Shunday qilib, manfiymas butun sonlardan tashkil topgan va graf uchun uchlari qo'shniligi matritsasi bo'lgan kvadrat matritsa bilan graf orasida bir qiymatli moslik (izomorflik aniqligida) bor degan xulosa va bundan, graflar nazariyasi bo'yicha izlanishlar maxsus shartlarni qanoatlantiruvchi matritsalarni tadqiq qilishga keltirilishi mumkinligi kelib chiqadi.

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ $(n \geq 1)$ qirralarga ega yakkalangan uchlari, sirtmoq va karrali qirralari bo'lmagan graf uchun elementlari

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ agar } u_i \text{ va } u_j \text{ qirralar umumiy uchga ega bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } u_i = u_j \text{ bo'lsa yoki ularning umumiy uchi bo'lmasa,} \end{cases}$$

quyidagicha aniqlangan $C=(c_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n)$ $n \times n$-matritsa *grafning qirralari qo'shniligi matritsasi*, deb ataladi.

11-misol. 12-shaklda tasvirlangan grafda 5 ta qirra bo'lib, uning qirralari qo'shniligi matritsasi

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga egadir. ■

Ravshanki, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf qirralari qo'shniligi matritsasi bosh diagonalga nisbatan simmetrik kvadrat matritsadir va uning bosh diagonali nollardan iborat.

2.4. Insidentlik matritsalari. Uchlari $1,2,\ldots,m$ va qirralari $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $(n \geq 1)$ bo'lgan belgilangan graf berilgan bo'lsin. Bu grafning uchlariga satrlari, qirralariga esa ustunlari mos keluvchi va elementlari

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga insident bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga insident bo'lmasa,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$ matritsa grafning *insidentlik matritsasi*, deb ataladi.

12-misol. 12-shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Endi uchlari $1,2,...,m$ va qirralari $u_1,u_2,...,u_n$ $(n\geq1)$ bo'lgan belgilangan sirtmoqsiz orgrafni qaraymiz. Elementlari

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning boshlang'ich uchi bo'lsa,} \\ -1 \text{ agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning oxirgi uchi bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } i \text{ uch va } u_j \text{ yoy insident bo'lmasa,} \end{cases}$$

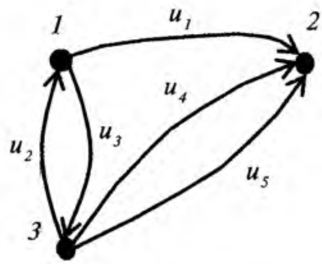
ko'rinishda aniqlangan $B=(b_{ij})$ $(i=1,2,..., m, j=1,2,..., n)$ matritsaga grafning *insidentlik matritsasi,* deb ataladi.

13-misol. 13-shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

3-teorema. Graflar (orgraflar) faqat va faqat insidentlik matritsalari bir-birlaridan satrlarining o'rinlarini va ustunlarining o'rinlarini mos almashtirishlar yordamida hosil bo'lsagina izomorf bo'ladi.

Isboti. 2-teoremaning isbotiga o'xshash bajariladi. ■

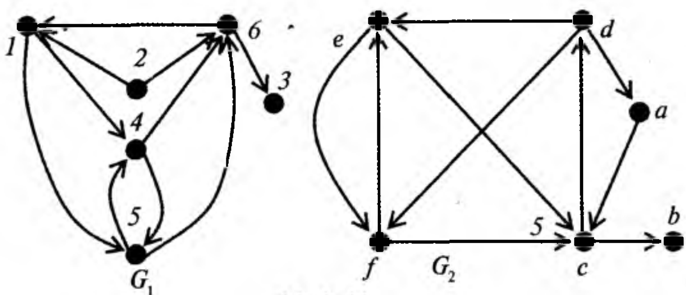


13-shakl.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Grafning abstrakt ta'rifi yordamida biron grafni ifodalang va unga izomorf grafni qog'ozda tasvirlang.
2. Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiring.
3. Har qanday chekli grafni 3 o'lchovli Evklid fazosida qirralariga to'gri chiziq kesmalari mos keladigan qilib geometrik ifodalash mumkinligini isbotlang.

4. Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida mavjud yetti ko‘prikdan (3-shakl) tashqari, shaharning B va C qismlarini bevosita tutashtiruvchi sakkizinchi ko‘prik ham bor deb hisoblab, bunday qo‘shimcha shartga ega Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos graf tuzing, uni geometrik ifodalang va tahlil qiling.
5. Uchlari va qirralari sonlari mos ravishda teng bo‘lib, o‘zaro izomorf bo‘lmagan graflarga misollar keltiring.
6. Barcha Platon jismlariga mos tekis graflarni geometrik ifodalang.
7. Biron idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo‘lish haqidagi boshqotirma masalani hal qilish maqsadida ushbu bobning 1-paragrafida tuzilgan grafni geometrik ifodalang.
8. Uchlari va qirralari sonlari turlicha bo‘lgan va tarkibida sirtmoqlari va karrali qirralari bor graflarni geometrik ifodalang, ularning har biriga mos maxsus ko‘phadlarni, uchlari qo‘shniligi, qirralari qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.
9. 14-shaklda tasvirlangan G_1 va G_2 graflarning izomorfligini isbotlang.



14-shakl.

10. Uchlari qo‘shniligi matritsalari quyida berilgan graflarni geometrik ifodalang, ularga mos maxsus ko‘phad, qirralar qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing:

$$a\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad b\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad d\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. To‘la grafga mos keluvchi uchlar qo‘shniligi matritsasini tahlil qiling.
12. Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaga mos grafning uchlari qo‘shniligi matritsasini tuzing.
13. K_3, K_4, va $K_{3,3}$ graflarga mos uchlari qo‘shniligi, qirralari qo‘shniligi va insidentlik matritsalarni yozing.
14. Siz yashayotgan aholi punkti yoki uning bir qismida joylashgan yo‘llar va chorrahalar bilan bog‘liq biron masalani graflar yordamida hal qiling.
15. Uchlari soni yettidan oshmagan barcha kubik graflarning geometrik ifodalanishi yordamida ularga mos uchlar qo‘shniligi matritsalarini tuzing.
16. To‘qqizta uchga ega bo‘lgan barcha ikki, uch va to‘rt bo‘lakli to‘la graflarga mos uchlar qo‘shniligi matritsalarini tuzing.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Grafning ko‘rgazmali tasviri deganda nimani tushunasiz?
2. Nima uchun izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin?
3. Qanday grafni 3 o‘lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkin?
4. Har qanday chekli grafni 2 o‘lchovli Evklid fazosida geometrik ifodalash mumkinmi?
5. Petersen grafi qanday geometrik ifodalanishga ega?
6. Grafning maxsus turdagi ko‘phad yordamida berilishini bilasizmi?
7. Grafning uchlari qo‘shniligi matritsasi qanday tuziladi?
8. Grafning qirralari qo‘shniligi matritsasi qanday tuziladi?
9. Grafning insidentlik matritsasi deganda nimani tushunasiz?
10. Graflar izomorfligining qanday zarur va yetarli shartlarini bilasiz?
11. O‘zaro izomorf bo‘lmagan sakkizta uchga ega barcha kubik graflarning geometrik ifodalanishini aniqlang.

3-§. Graflar ustida amallar

Graf, uch, qirra, graflarni birlashtirish, grafdan uchni, qirrani, yoyni olib tashlash, qism graf, to‘ldiruvchi graf, grafga uchni, qirrani, yoyni qo‘shish, qirrani ikkiga bo‘lish, izomorf va gomeomorf graflar, bo‘linish grafi, graflarning birlqshmasi, dizyunkt birlashma, graflarning birikmasi, graflarning ko‘paytmasi, n o‘lchovli kub.

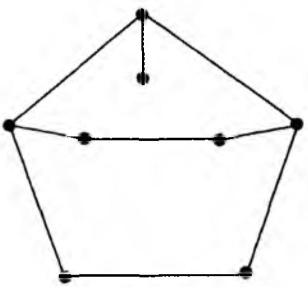
3.1. Graflar ustida sodda amallar. Graflar ustida turli amallar bajarish mumkin, masalan, graflarni birlashtirish, biriktirish, ko'paytirish, grafni qismlarga ajratish va hokazo.

Eng sodda amallardan biri sifatida grafdan *uchni olib tashlash* amalini keltirsa bo'ladi. Bu amalni qo'llash berilgan grafning uchlari to'plamidan biron element yo'qotish (olib tashlash)ni anglatadi. Natijada uchlari soni bittaga kamaygan yangi graf hosil bo'ladi. Albatta, bu amalni uchlari soni ikkitadan kam bo'lmagan graflar uchun qo'llash mumkin bo'lib, uni bajarish jarayonida olib tashlanayotgan uch bilan birgalikda shu uchga insident bo'lgan barcha qirralar (yoylar) ham olib tashlanadi.

Eng sodda amallar qatoriga grafdan *qirrani (yoyni) olib tashlash* amalini ham kiritish mumkin. Bu amalga ko'ra, berilgan grafning qirralari (yoylari) to'plamidan birorta element yo'qotiladi (olib tashlanadi). Berilgan grafdan qirrani (yoyni) olib tashlayotganda shu qirraga (yoyga) insident uchlarni grafda qoldirish ham, yo'qotish ham mumkin. Bu yerda vaziyatga qarab ish yuritiladi.

$G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflar berilgan bo'lsin. Agar $V\subseteq V'$ va G grafning barcha qirralari (yoylari) G' grafning ham qirralari (yoylari), ya'ni $U\subseteq U'$ bo'lsa, u holda G graf G' grafning *qism grafi*, deb ataladi.

1-misol. 1-shaklda Petersen grafining (ushbu bobning 2-paragrafidagi 8-shaklga qarang) qism graflaridan biri tasvirlangan. ■



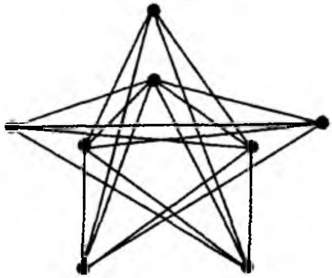
1-shakl.

Agar G graf karrali qirralarga ega bo'lmasa, u holda uchlari G grafning barcha uchlaridan iborat bo'lgan shunday yagona $\overline{G}$ graf mavjudki, $\overline{G}$ grafdagi barcha juft uchlar faqat va faqat G grafda qo'shni bo'lmagandagina qo'shnidir. Bunday $\overline{G}$ graf berilgan G grafning *to'ldiruvchi grafi,* deb ataladi.

Berilgan graf uchun to'ldiruvchi grafni qurish jarayonini ham graflar ustida bajariladigan amallar qatoriga kiritish mumkin. G graf uchun *to'ldiruvchi grafni qurish* amalini qo'llash natijasida $\overline{G}$ graf hosil bo'ladi. Isbotlash mumkinki, $\overline{\overline{G}}=G$ munosabat o'rinlidir.

2-misol. 2-shaklda tasvirlangan graf 1-shaklda ifodalangan graf uchun to'ldiruvchi grafdir.

Graflar ustida shunday amallarni bajarish mumkinki, ular elementlari soni berilgan grafdagidan koʻproq boʻlgan boshqa graflarning hosil boʻlishiga olib keladi. Bunday amallar qatoriga *uchni qoʻshish amali* yoki *qirrani (yoyni) qoʻshish amalini* kiritish mumkin.



2-shakl.

Grafga yangi uchni qoʻshish turlicha usul bilan amalga oshirilishi mumkin. Masalan, yangi v uchni berilgan grafga qoʻshish shu grafning v_1 va v_2 uchlariga insident boʻlgan qandaydir u qirrasiga qoʻshish orqali quyidagicha ikki bosqichda bajarilishi mumkin:

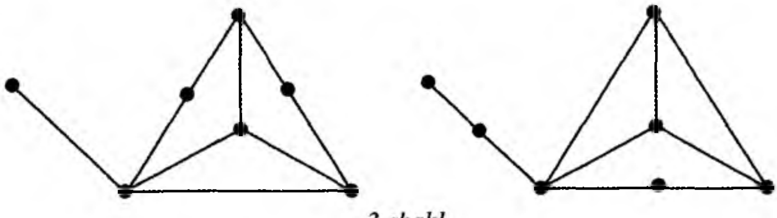
1) u qirra berilgan grafdan olib tashlanadi;

2) hosil boʻlgan grafga ikkita yangi qirralar: v va v_1 uchlarga insident u_1 qirra hamda v va v_2 uchlarga insident u_2 qirra qoʻshiladi.

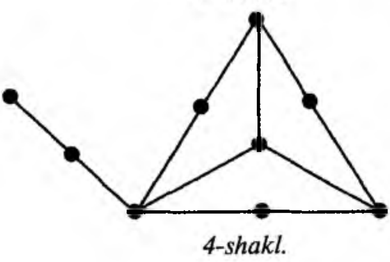
Bu jarayon grafda *qirraga darajasi 2 boʻlgan yangi uchni qoʻshish (kiritish)* yoki *qirrani ikkiga boʻlish amali,* deb ataladi.

Agar G graf G' grafdan qirrani ikkiga boʻlish amalini chekli marta ketma-ket qoʻllash vositasida hosil qilingan boʻlsa, u holda G graf G' *grafning boʻlinish grafi,* deb ataladi. Boʻlinish graflari izomorf boʻlgan graflar *gomeomorf graflar,* deb ataladi.

3-shaklda tasvirlangan graflar izomorf emas, lekin ular gomeomorf, chunki bu graflarning har biri 4-shaklda tasvirlangan boʻlinish grafiga ega.



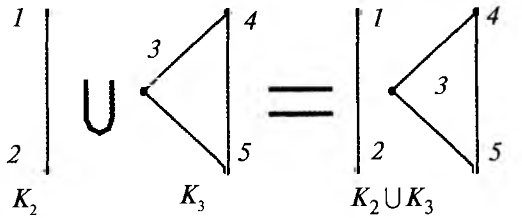
3-shakl.



4-shakl.

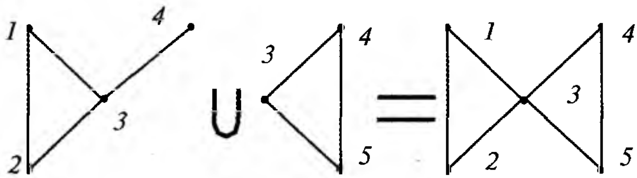
3.2. Graflarni birlashtirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. Uchlari to'plami $V=V_1\cup V_2$ va qirralari (yoylari) korteji $U=U_1\cup U_2$ kabi aniqlangan[1] $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 *graflarning birlashmasi (uyushmasi)* deb ataladi va $G=G_1\cup G_2$ ko'rinishda belgilanadi.

3-misol. 5-shaklda uchlari to'plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birlashmasi amali tasvirlangan. ■



5-shakl.

4-misol. Uchlari to'plamlari kesishadigan graflarning birlashmasi amali 6-shaklda tasvirlangan. ■



6-shakl.

Agar birlashtirilayotgan graflarning uchlari to'plamlari kesishmasa, u holda bu graflarning birlashmasi *dizyunkt birlashma,* deb ataladi. Masalan, 5-shaklda tasvirlangan birlashma dizyunkt, 6-shakldagi birlashma esa dizyunkt emas.

3.3. Graflarni biriktirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. G_1 va G_2 graflar birlashtirilishi hamda G_1 grafning har bir uchi G_2 grafning har bir uchi bilan qirra vositasida tutashtirilishi natijasida hosil bo'lgan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 *graf-*

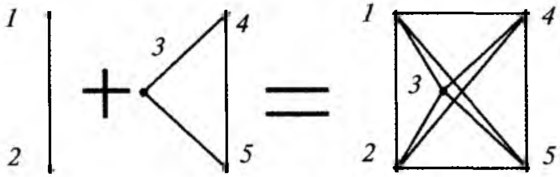
---

[1] Bu yerda birlashma «$\cup$» amali V ning to'plam, U ning esa kortej ekanligini e'tiborga olgan holda amalga oshiriladi.

larning birikmasi (tutashmasi) deb ataladi va $G=G_1+G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.

5-misol. Uch uy va uch quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf (ushbu bobning 2-paragrafidagi 9-shaklga qarang) uchlari to‘plamlari kesishmaydigan ikkita (O_3) nolgraflarning birikmasidir. ■

6-misol. 7-shaklda uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birikmasi amali tasvirlangan. ■



7-shakl.

Agar uchlari to‘plamlari kesishmasi bo‘sh bo‘lmagan graflarni biriktirish zarur bo‘lsa, u holda hal qilinayotgan masala xossalarini e’tiborga olib ish ko‘rish kerakligini ta’kidlaymiz.

3.4. Graflarni ko‘paytirish. $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_1=(V_2,U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. Uchlari to‘plami $V=V_1\times V_2$ bo‘lgan $G=(V,U)$ grafning qirralari (yoylari) kortejini quyidagicha aniqlaymiz: agar $v_1'=v_1''$ va $(v_2',v_2'')\in U_2$ yoki $v_2'=v_2''$ va $(v_1',v_1'')\in U_1$ bo‘lsa, u holda $(v',v'')\in U$ bo‘ladi, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1, v_2', v_2''\in V_2$, $v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$. Shunday usul bilan hosil qilingan $G=(V,U)$ graf G_1 va G_2 *graflarning ko‘paytmasi* deb ataladi va $G=G_1\times G_2$ kabi belgilanadi.

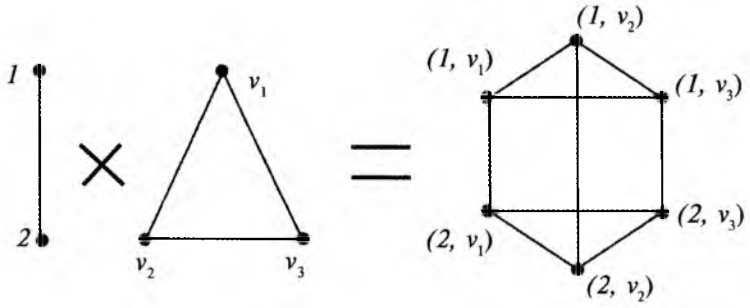
Graflarning ko‘paytmasi ta’rifiga asosan, berilgan $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflarning ko‘paytmasi hisoblangan G grafdagi:

— uchlar (v_1, v_2) yoki (v_2, v_1) ko‘rinishdagi juftliklardan iboratdir, bu yerda $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$;

— $v'=(v_1',v_2')\in V$ va $v''=(v_1'',v_2'')\in V$ uchlar faqat va faqat shu holda qo‘shni bo‘ladilarki, qachonki bu uchlarni (juftliklarni) tashkil qiluvchi elementlarning biri unga mos element bilan ustma-ust tushgan holda boshqa elementlar o‘z grafida qo‘shni bo‘lishsa, bu yerda $v_1',v_1''\in V_1, v_2', v_2''\in V_2$;

— $|V_1|=m_1$, $|V_2|=m_2$, $|U_1|=n_1$ va $|U_2|=n_2$ munosabatlardan $|V|=m_1m_2$ va $|U|=m_1n_2+m_2n_1$ bo‘lishi kelib chiqadi.

7-misol. 8-shaklda uchlari to'plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning ko'paytmasi amali tasvirlangan. ■



8-shakl.

I bobning 4-paragrafida ta'kidlanganidek, Dekart ko'paytmalar bilan bog'liq tuzilmalar ustida bajariladigan amallar boshqalaridan o'ziga xosligi bilan ajralib turadi. Bu o'ziga xoslik graflarni ko'paytirish amalida namoyon bo'ladi. Aniqrog'i, graflar ko'paytmasida qatnashgan bironta grafning qirralari korteji bo'sh bo'lsa-da, ko'paytirish amalini qo'llash natijasida hosil bo'lgan grafning qirralari korteji bo'sh bo'lmasligi ham mumkin. Haqiqatan ham, yuqorida keltirilgan graflarning ko'paytmasi ta'rifidan kelib chiqadiki, agar $G=(V,U)$ graf $G_1=(V_1,U_1)$ va $G_2=(V_2,U_2)$ graflarning ko'paytmasi, ya'ni $G=G_1\times G_2$ bo'lsa, u holda $V=V_1\times V_2$ bo'ladi va U kortej elementlari bilan $(V_1\times U_2)(U_1\times V_2)$ birlashma elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Shuning uchun, agar, masalan, $U_1=\varnothing$, $U_2=\varnothing$ bo'lsa, u holda $(V_1\times U_2)\cup(U_1\times V_2)=V_1\times U_2\equiv\varnothing$ bo'ladi, chunki grafning ta'rifiga ko'ra, $V_1\neq\varnothing$. Demak, $U\neq\varnothing$, ya'ni G_1 bo'sh graf bo'lsa-da, $G=G_1\times G_2$ bo'sh bo'lmagan grafdir.

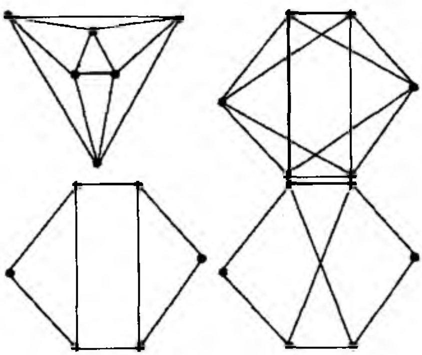
Graflarni ko'paytirish amalini takror qo'llash usuli bilan graflar nazariyasining muhim sinfini tashkil etuvchi n o'lchovli kublarni aniqlash mumkin. *n o'lchovli kub* (Q_n) uchlari soni ikkiga teng bo'lgan to'la graf K_2 yordamida quyidagi rekurrent formula bilan aniqlanadi:

$$Q_1=K_2,\ \ Q_n=\mathrm{K}_2\times Q_{n-1}.$$

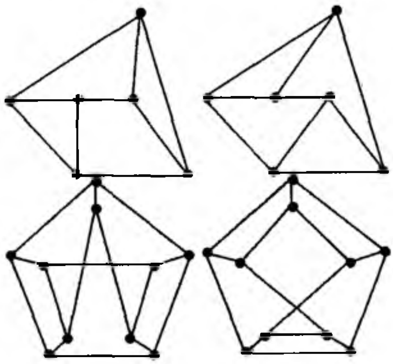
Yuqorida graflar ustidagi ba'zi amallar haqida qisqacha ma'lumot berildi. Shuni ta'kidlash lozimki, graflar ustida bundan boshqa bir qator amallar ham bor.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 9- va 10-shakllarda tasvirlangan sakkizta graflar orasidan o'zaro izomorf bo'lgan graflar juftlarini aniqlang.



9-shakl.



10-shakl.

2. 9-shaklda tasvirlangan to'rt grafning har biri uchun uchni olib tashlash va qirrani olib tashlash amallarini qo'llang.
3. 10-shaklda tasvirlangan to'rt grafning har biri uchun uchtadan qism graf va to'ldiruvchi grafni tuzing.
4. Gomeomorf va gomeomorf bo'lmagan graflarga misollar keltiring.
5. K_3 va K_4 graflarning birlashmasini toping (bunda graflar uchlari to'plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).
6. Ikkita K_3 graflarning birikmasini toping (bunda graflar uchlari to'plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).
7. Graflarni ko'paytirish amalini qo'llab, $O_3 \times O_4$, $O_3 \times K_3$, $O_4 \times K_3$ va $K_3 \times K_3$ graflarni toping.
8. $K_{1,2}$ va $K_{2,3}$ graflarning geometrik ifodalanishidan foydalanib ular ustida birlashma, birikma va ko'paytma amallarini bajaring (bunda graflar uchlari to'plamlari kesishadigan va kesishmaydigan hollarni alohida qarang).

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Grafdan uchni olib tashlash amali qanday bajariladi?
2. Grafdan qirra (yoy)ni olib tashlash amali qanday bajariladi?
3. Qism graf deganda nima tushuniladi?

4. To'ldiruvchi graf deb qanday grafga aytiladi?
5. Grafga yangi uchni qo'shish amalini bajarishning qanday usullarini bilasiz?
6. Berilgan grafning bo'linish grafi qanday tuziladi?
7. Qanday graflar gomeomorf graflar deb ataladi?
8. Berilgan graflarning birlashmasi (uyushmasi) qanday hosil qilinadi?
9. Berilgan graflarning dizyunkt birlashmasi natijasida hosil bo'lgan graf uchlarining soni haqida nima deyish mumkin?
10. Graflarning birlashmasi (uyushmasi) amali bilan ularning birikmasi (tutashmasi) amali orasida qanday o'xshashlik va farqlar bor?
11. Berilgan ikki grafning ko'paytmasi qanday hosil qilinadi?
12. Berilgan graf bilan nol graf ko'paytmasi haqida nima deyish mumkin?
13. Graflar ko'paytmasida qatnashgan bironta grafning qirralari korteji bo'sh bo'lsa-da, ko'paytirish amalini qo'llash natijasida hosil bo'lgan grafning qirralari korteji bo'sh bo'lmasligi mumkinmi?

4-§. Marshrutlar va zanjirlar

Graf, uch, qirra, marshrut, boshlang'ich uch, oxirgi uch, ichki uch, oraliq uch, ikki tomonlama cheksiz marshrut, bir tomonlama cheksiz marshrut, notrivial marshrut, nol marshrut, marshrutning uzunligi, zanjir, oddiy zanjir, yopiq zanjir, sikl, oriyentirlangan marshrut, yo'l, kontur, bog'langan uchlar, uchlarni bog'lovchi marshrut, bog'lamli graf, bog'lamlilik komponentalari, ekvivalentlik munosabati, dizyunktiv birlashma, ajratuvchi qirralar, kesim, ko'prik, ko'ndalangiga izlash.

4.1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar. Uchlari to'plami $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ va qirralar korteji $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ bo'lgan oriyentirlanmagan $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu G grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo'shni qirralari umumiy chetki uchga ega

$$(...,v_{i_1},u_{j_1},v_{i_2},u_{j_2},v_{j_3},...)$$

ko'rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi *marshrut*, deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi $(...,v_{i_1},v_{i_2},...)$ yoki qirralari ketma-ketligini $(...,u_{j_1},u_{j_2},...)$ ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo'lmasa, bu uchni marshrutning *boshlang'ich uchi* deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo'lmaganda esa, uni marshrutning *oxirgi uchi,* deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang'ich uchi v_p va oxirgi uchi v_q bo'lsa, u holda uni *v_p uchdan v_q uchga yo'nalgan marshrut* yoki *chetlari v_p va v_q bo'lgan marshrut,* deb ataladi.

Marshrutdagi ikki qo'shni qirraga tegishli uch *ichki uch* yoki *oraliq uch,* deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo'lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o'zida, uning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi bo'lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo'lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

— boshlang'ich uchga ham, oxirgi uchga ham ega bo'lmasligi mumkin (bunday marshrut *ikki tomonlama cheksiz marshrut,* deb ataladi);

— boshlang'ich uchga ega bo'lib, oxirgi uchga ega bo'lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo'lib, boshlang'ich uchga ega bo'lmasligi mumkin (*bir tomonlama cheksiz marshrut*);

— yagona qirradan iborat bo'lishi mumkin (*notrivial marshrut*);

— bironta ham qirraga ega bo'lmasligi mumkin (*nol marshrut* yoki *trivial marshrut*).

Marshrutning uzunligi deb undagi qirralar soniga aytiladi. Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga *zanjir,* deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo'lsa, u holda uni *oddiy zanjir*, deb ataydilar.

Berilgan $(v_1,v_2,..., v_s)$ zanjir yoki oddiy zanjir uchun $v_1=v_s$ bo'lsa, u *yopiq zanjir,* deb ataladi. Hech bo'lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir *sikl,* deb ataladi. Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir. Tushunarliki, grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

1-misol. Ushbu bobning 2-paragrafidagi 1-shaklda tasvirlangan graf uchun

$$(3,u_4,2,u_1,1,u_1,2,u_6,2,u_4,3,u_5,4)$$

ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo'nalgan marshrutdir, bunda 3 — boshlang'ich uch, 4 — oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6a teng bo'lib, u zanjir bo'la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda.

Yana o'sha graf uchun (3,2,1,3) zanjirning oxirgi bo'g'ini sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysisi olinishiga bog'liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir. ■

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo'nalishi (oriyentatsiyasi)ni inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi *oriyentirlangan marshrut,* deb ataladi. Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o'xshash *yo'l* (yoki *oriyentirlangan zanjir*) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang'ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir *kontur*, deb ataladi.

2-misol. Ushbu bobning 2-paragrafidagi 2-shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Uning uch va qirralaridan tuzilgan

$$(3,u_3,1,u_4,4,u_5,5,u_2,2,u_1,1)$$

ketma-ketlik oriyentirlanmagan marshrut va zanjirdir, lekin u oddiy zanjir bo'la olmaydi. Bu ketma-ketlik oriyentirlangan marshrut ham bo'la olmaydi, chunki unda marshrut yo'nalishiga teskari yo'nalishga ega yoylar bor (u_3,u_4,u_1).

Qaralayotgan graf uchun (u_6,u_5,u_2) ketma-ketlik oriyentirlangan marshrutni tashkil etadi. Bu marshrut yo'ldir, lekin u kontur emas. Berilgan grafda faqat bitta kontur bo'lib, bu konturni $(4,u_5,5,u_6,4)$ yoki $(5,u_6,4,u_5,5)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. ■

1-teorema. Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bu graf siklga ega.

Isboti. Agar grafda sirtmoqlar yoki karrali qirralar bo'lsa, teoremaning tasdig'i to'g'riligi ravshandir. Shuning uchun teorema tasdig'ini graf sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $v \in V$ berilgan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan $G=(V,U)$ grafning ixtiyoriy uchi bo'lsin. Qaralayotgan

v uchga qo'shni v_1 uchni va bu uchga v dan farqli boshqa qo'shni v_2 uchni, v_2 uchga esa v_1 dan farqli boshqa qo'shni v_3 uchni va hokazo, v_i uchga v_{i-1} dan farqli boshqa qo'shni v_{i+1} uchni va hokazo, tanlab,

$$((v,v_1),\ (v_1,v_2),\ (v_2,v_3),...,(v_{i-1},v_i),\ (v_i,\ v_{i+1}),...)$$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartlariga ko'ra, yuqoridagi jarayonni amalga oshirish va talab etilgan xossaga ega v_{i+1} uchni topish mumkinligini ta'kidlaymiz.

Grafning uchlari to'plami V chekli to'plam bo'lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so'ng, albatta, oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majbur bo'lamiz. Agar v_k uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan dastlabki uch bo'lsa, ketma-ketlikka qirralar qo'shish jarayonini to'xtatamiz, chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining v_k uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan sikldir. ■

4.2. Grafning bog'lamliligi tushunchasi. Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari a va b uchlardan iborat marshrut topilsa, bu a va b uchlar *bog'langan* deb, marshrutning o'zi esa a va b *uchlarni bog'lovchi marshrut,* deb ataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog'lovchi marshrut biron a_i uchdan bir necha marta o'tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o'rniga marshrutda faqat a_i uch qoldiriladi) yana o'sha uchlarni bog'lovchi oddiy zanjir ko'rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog'langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo'glangan bo'ladi, degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikki uchi bog'langan graf *bog'lamli graf,* deb ataladi.

Agar grafdagi ikki uchni biron oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu ikki uch *ekvivalent (bog'langan)* deyiladi. Bunday uchlar to'plami grafda *ekvivalentlik munosabati* bilan aniqlangan, deb hisoblanadi. Uchlar to'plami bo'yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni *bog'lamlilik komponentalari* (qisqacha, *komponentalari*) deb ataluvchi bog'lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf bog'lamlilik komponentalariga bo'laklandi (ajratildi) deb aytish mumkin. Isbotlash mumkinki, har qanday graf o'zining bog'lamlilik komponentalarining dizyunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi mumkin, bunda grafning bog'lamlilik komponentalariga bo'laklanishi bir qiymatli aniqlanadi.

Keyingi ma'lumotlarni bayon etish uchun *yoq* tushunchasi zarur bo'ladi. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi grafni qaraymiz. Bu grafga tegishli bo'lmagan (ya'ni grafning hech qaysi uchi bilan ustma-ust tushmaydigan va uning hech qaysi qirrasida yotmaydigan) biron A nuqtani hech qaysi nuqtasi grafga tegishli bo'lmagan uzluksiz chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lgan barcha nuqtalar to'plami grafning A nuqtani o'zida saqlovchi *yog'i*, deb ataladi.

Yoq tushunchasiga berilgan ta'rifga ko'ra, yoq grafning geometrik ifodalanishi yordamida tekislikning «qirqib» olinadigan qismidan iboratdir. Tekislikda geometrik ifodalanuvchi ixtiyoriy grafning hech bo'lmaganda bitta yog'i bo'lishi va uning bitta yog'i chegaraga ega emasligi (cheksizligi) o'z-o'zidan ravshandir.

2-teorema (Eyler, 1752). Tekis va bog'lamli $G=(V,U)$ graf uchun $m+r=2+n$ tenglik o'rinlidir, bu yerda $m=|V|$, $n=|U|$, r — yoqlar soni.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini grafdagi qirralar soni n bo'yicha qo'llaymiz. Induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'iga ko'ra $m+r=2$ bo'lishi kerak. Haqiqatan ham, G tekis va bog'lamli graf bo'lgani uchun, u yagona uchdan tashkil topadi va bu uch yagona (cheksiz) yoqda yotadi, ya'ni $m=1$ va $r=1$. Demak, bu holda teoremaning tasdig'i to'g'ridir.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin, deb faraz qilib, uning $n=k+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Farazimizga ko'ra, $m+r=2+k$ tenglik o'rinlidir. k ta qirraga ega G tekis va bog'lamli grafga $(k+1)$- qirrani (uni e bilan belgilaymiz) shunday qo'shish kerakki, bunda e qirra G graf joylashgan tekislikda yotsin va hosil bo'lgan graf ham bog'lamli bo'lsin. Bu amalni bajarganda quyidagi uchta holdan biri ro'y beradi:

1) qo'shilayotgan qirra sirtmoqdir — bu holda e qirra, albatta, G grafdagi uchlardan biriga insident bo'lib, yoqlardan birida yotadi va bu yoqni ikkiga (sirtmoq yotgan yoqning sirtmoq chizig'i bilan chegaralangan ichki va tashqi qismlari) ajratadi, ya'ni uchlar soni o'zgarmaydi, yoqlar soni esa birga oshadi: $m+r+1=2+k+1$;

2) qo'shilayotgan qirra G grafda bor bo'lgan ikki uchni tutashtiradi — bu holda ham grafning biron (e qirra yotgan) yog'i ikkiga ajraladi, uchlari soni esa o'zgarmaydi: $m+r+1=2+k+1$;

3) qo'shilayotgan qirra sirtmoq emas va u G grafdagi uchlardan faqat bittasiga insidentdir — bu holda grafning biron yog'ida e qirraga insident bo'lgan bitta boshqa uch yasaladi (grafning uchlari soni

bittaga oshadi) va e qirra joylashgan yoq yaxlitlikni saqlagan holda e qirrani o'z ichiga oladi (yoqlar soni o'zgarmaydi): $m+1+r=2+k+1$. ■

2-teoremaning tasdig'idagi $m+r=2+n$ tenglik *Eyler formulasi*, deb ataladi.

Eyler formulasi stereometriyada ham qo'llaniladi: uchlari m ta, yoqlari r ta va qirralari n ta ixtiyoriy ko'pyoqli uchun Eyler formulasi o'rinlidir. Bu tasdiqning negizida isboti o'quvchiga havola qilinayotgan quyidagi tasdiq yotadi: *stereometriyada berilgan ta'rifga ko'ra, aniqlangan ixtiyoriy ko'pyoqliga mos tekis izomorf graf mavjuddir.*

Eyler teoremasidan bir qator natijalar kelib chiqadi. Masalan, bu teoremadan foydalanib, uni osonlik bilan bog'lamli bo'lmagan graflar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin.

1-natija. Tekis $G=(V,U)$ graf uchun $m+r=1+n+k$ tenglik o'rinlidir, bunda $m=|V|$, $n=|U|$, r — yoqlar soni, k — bog'lamlilik komponentalar soni.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi ■.

2-natija. Karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz tekis (m,n) -graf uchun $n\leq 3m-6$ tengsizlik o'rinlidir.

Isboti. Haqiqatan ham, har bir yoq hech bo'lmaqanda uchta qirra bilan chegaralanganligi va yoqlarni chegaralovchi qirralarni sanaganda har bir qirra ikki marta hisobda qatnashganligi uchun $3r\leq 2n$ tengsizlik o'rinlidir (ta'kidlaymizki, agar grafda uchta uch va ikkita qirra bo'lsa, u holda $n\leq 3m-6$ tengsizlik bajariladi). $3r\leq 2n$ tengsizlikdan Eyler formulasini $r=2+n-m$ ko'rinishda qo'llab, $n\leq 3m-6$ tengsizlikni hosil qilamiz. ■

Ushbu bobning 2-paragrafida K_5 va $K_{3,3}$ graflarning planar emasligi ta'kidlangan (isbotsiz keltirilgan) edi. Endi bu tasdiqlarni qat'iy isbotlash mumkin.

3-teorema. K_5 graf planar emas.

Isboti. K_5 planar graf bo'lsin, deb faraz qilamiz. Planar graf uchun $n\leq 3m-6$ tengsizlik o'rinlidir. K_5 graf uchun $m=5$ va $n=10$ bo'lganligidan bu tengsizlik $10\leq 9$ ko'rinishdagi noto'g'ri munosabatga olib keladi. Demak, K_5 graf planar emas. ■

4-teorema. $K_{3,3}$ graf planar emas.

Isboti. $K_{3,3}$ planar graf bo'lsin, deb faraz qilamiz. Bu grafda 6 ta uch ($m=6$) va 9 ta qirra ($n=9$) bo'lgani uchun, Eyler teoremasiga ko'ra, unda 5 ta ($r=2+n-m=2+9-6=5$) yoq bo'lishi kerak. $K_{3,3}$ grafning har bir yog'i kamida to'rtta qirra bilan chegaralanganligi sababli bu graf uchun $4r\leq 2n$ tengsizlik o'rinlidir. Lekin bu tengsizlik

$K_{3,3}$ graf uchun $20 \leq 18$ ko'rinishdagi noto'g'ri munosabatga olib keladi. Demak, $K_{3,3}$ graf planar emas. ■

Isbotlash mumkinki, quyidagi tasdiq o'rinlidir.

5-teorema. Agar biron graf K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf bo'lgan qism grafga ega bo'lsa, u holda bu graf tekislikda yotuvchi bo'lmaydi.

1930-yilda K. Kuratovskiy[1] bu tasdiqqa teskari tasdiqni isbot qildi: *agar graf tekislikda yotuvchi bo'lmasa, u holda u K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf bo'lgan qism grafga ega bo'ladi.* Umuman olganda, graflarning planarligi haqidagi bu asosiy natija K. Kuratovskiydan oldin 1922-yilda L.S.Pontryagin[2] tomonidan isbotlangan, lekin bu natija o'sha vaqtda matbuotda e'lon qilinmagan edi.

6-teorema (Pontryagin-Kuratovskiy). Graf planar bo'lishi uchun u K_5 yoki $K_{3,3}$ grafga gomeomorf qism graflarga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti topshiriq sifatida o'quvchiga havola qilinadi. ■

7-teorema. Agar karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz grafda m ta uch, n ta qirrali va k ta bog'lamlilik komponentalari bo'lsa, u holda quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$m-k \leq n \leq \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$$

Isboti. Avval qirralar soni n bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llab, $m-k \leq n$ tengsizlikni isbotlaymiz. Agar grafda qirralar bo'lmasa (ya'ni matematik induksiya usulining bazasi sifatida $n=0$ deb olinsa), u holda grafdagi uchlar soni uning bog'lamlilik komponentalari soniga tengdir: $k=m$. Demak, $n=0$ bo'lganda, $m-k \leq n$ munosabat to'g'ridir.

Induksion o'tish. Grafdagi qirralar sonini n_0 bilan belgilab, bu son minimal bo'lsin, ya'ni grafdan istalgan qirrani olib tashlash amali bog'lamlilik komponentalari soni o'zgargan graf hosil qilsin, deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, matematik induksiya usuli talabiga binoan $n=n_0$ uchun isbotlanishi kerak bo'lgan tengsizlik o'rinli bo'lsin, deb faraz qilamiz. Tabiiyki, bu holda grafdan istalgan qirrani olib tashlasak (bunda olib tashlangan qirraning chetlaridagi uchlar grafga tegishli bo'lib qolaveradi), hosil bo'lgan grafning

---

[1] *Kuratovskiy* (Kuratowski Kazimej, 1896—1980) — polyak matematigi.

[2] *Pontryagin Lev Semyonovich* (Понтрягин Лев Семенович, 1908—1988) — rus matematigi, akademik.

uchlari soni m ga, qirralari soni (n_0—1)ga, bog'lamlilik komponentalari soni esa (k+1)ga teng bo'ladi.

Induksiya faraziga binoan $m-(k+1)\leq n_0-1$ tengsizlik o'rinlidir. Bu tengsizlikdan $m-k\leq n_0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $m-k\leq n$ tengsizlik isbotlandi.

Endi $n\leq\dfrac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun grafning har bir bog'lamlilik komponentasi to'la graf bo'lsin deb faraz qilamiz. Berilgan grafning uchlari soni, mos ravishda, m_i va m_j bo'lgan ikkita bog'lamlilik komponentalari D_i va D_j graflardan iborat bo'lsin, bu yerda, $m_i\geq m_j>1$. Tushunarliki, D_i va D_j graflarning uchlari umumiy soni (m_i+m_j) ga tengdir. Bu D_i va D_j graflarni uchlari sonlari, mos ravishda, (m_i+1) va (m_j—1) bo'lgan to'la graflar bilan almashtirsak, uchlar umumiy soni o'zgarmaydi, lekin qirralarning umumiy soni $(C^2_{m_{i+1}}+C^2_{m_{j-1}})-(C^2_{m_i}+C^2_{m_j})$ miqdorga o'zgaradi. Oxirgi ifodaning ko'rinishini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$(C^2_{m_{i+1}}+C^2_{m_{j-1}})-(C^2_{m_i}+C^2_{m_j})=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(m_i+1)m_i+(m_j-1)(m_j-2)-m_i(m_i-1)-m_j(m_j-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(m_i^2+m_i+m_j^2-m_j-2m_j+2-m_i^2+m_i-m_j^2+m_j)=$$

$$=m_i-m_j+1>0.$$

Shunday qilib, uchlari soni m va bog'lamlilik komponentalari soni k bo'lgan grafda maksimal sondagi qirralar bo'lishi uchun u (k—1) ta yakkalangan uchlar va (m—k+1) ta uchga ega to'la graf birlashmasidan tashkil topishi kerak ekan. Bu yerdan isbotlanishi kerak bo'lgan tengsizlik kelib chiqadi. ■

7-teoremaning tatbiqi sifatida quyidagi tasdiqni keltiramiz.

3-natija. m ta uchga ega, qirralari soni $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$ *dan katta, karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz graf bog'lamlidir.*

Isboti. Birinchidan, agar sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan grafning bog'lamlilik komponentalari soni k ga teng bo'lsa ($k\in N$), u holda, 7-teoremaga binoan, bunday grafning qirralari soni $\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$ dan katta emas. Ikkinchidan,

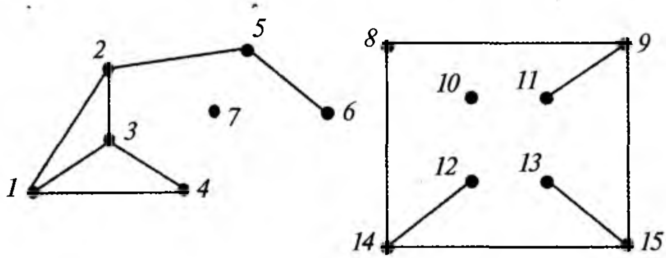
$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}<\frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$$

tengsizlik faqat k=1 bo‘lsagina to‘g‘ridir. ■

Tabiiyki, bog‘lamli grafdan qirrani yoki bir necha qirralarni olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Agar bog‘lamli grafdan qirrani olib tashlash amali grafning bog‘lamlilik xususiyatini buzsa, u holda bunday qirrani *ajratuvchi qirra*, deb ataymiz.

Ravshanki, berilgan bog‘lamli grafda ajratuvchi qirralar ko‘p bo‘lishlari mumkin. Ajratuvchi qirralar to‘plamining hech qaysi qism to‘plami elementlari ajratuvchi qirralar bo‘lmasa, bu qirralar to‘plamini *kesim* deb ataymiz. Grafdan kesimga tegishli qirralar olib tashlansa, natijada ikki bog‘lamli komponentalari bo‘lgan graf hosil bo‘lishi ravshandir. Agar kesim yagona qirradan iborat bo‘lsa, u holda bu qirra *ko‘prik,* deb ataladi.

3-misol. 1-shaklda tasvirlangan (15,14)-grafni G bilan belgilaymiz.



1-shakl.

Bu graf bog‘lamli graf emas, uning to‘rtta bog‘lamli komponentalari bor: $G=G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, bu yerda G_1 — uchlari to‘plami $\{1,2,3,4,5,6\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan (6,7)-graf, G_2 — bitta 7 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_3 ham bitta 10 belgili uchga ega oriyentirlanmagan (1,0)-graf, G_4 esa uchlari to‘plami $\{8,9,10,11,12,13,14,15\}$ bo‘lgan oriyentirlanmagan (7,7)-grafdir. Agar G grafning G_4 bog‘lamli komponentasini alohida graf deb qarasak, bu grafda $\{(8,9), (14,15)\}$ ko‘rinishdagi ajratuvchi qirralar to‘plamini ko‘rsatish mumkin. Bu qirralar kesimni tashkil etadi. G grafning G_1 va G_4 bog‘lamli komponentalari ko‘priklarga egadir. Masalan, (2,5) va (5,6) qirralar G_1 graf uchun ko‘priklardir. ■

Endi D. Kyonig tomonidan 1936-yilda isbotlangan ushbu teoremani grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshirish alomati (mezoni) sifatida keltiramiz.

8-teorema (D. Kyonig). Grafning ikki bo‘lakli bo‘lishi uchun uning tarkibida uzunligi toq son bilan ifodalanuvchi sikl bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.

Isboti o‘quvchiga havola qilinadi. ■

Berilgan $G=(V,U)$ grafning ikki bo‘lakliligini aniqlashning sodda usuli bor. Bu usul *ko‘ndalangiga izlash,* deb ataluvchi soddagina izlash g‘oyasiga asoslangan.

Ko‘ndalangiga izlash usuliga ko‘ra, grafning uchlari 0,1,2,3,... raqamlar bilan quyidagi qoida bo‘yicha belgilanadi. Dastlab grafning ixtiyoriy uchi 0 raqami bilan belgilab olinadi. Shu 0 belgili uchga qo‘shni barcha uchlarga 1 belgisi qo‘yiladi. Endi 1 belgili har bir uchga qo‘shni uchlarni aniqlab, ular orasidagi belgisi yo‘q uchlarga 2 belgisini qo‘aymiz. Keyin 2 belgisiga ega barcha uchlarni aniqlab, ular uchun ham yuqoridagiga o‘xshash ish yuritamiz. Bu jarayonni mumkin bo‘lgan qadar davom ettiramiz. Tushunarliki, agar G graf bog‘lamli bo‘lsa, u holda ko‘ndalangiga izlash usuli grafning barcha uchlarini raqamlab chiqish imkonini beradi.

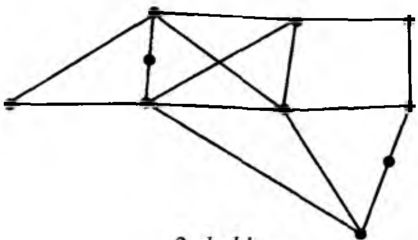
Bog‘lamli graf uchlarini belgilash jarayoni tugagandan so‘ng, uning uchlari to‘plami Vni ikkita V_j va V_j to‘plamga quyidagicha ajratamiz: juft raqamli uchlarni V_j to‘plamga, qolgan uchlarni esa V_q to‘plamga kiritamiz (0 raqamli uch V_j to‘plamga kiritiladi). G grafning ikkala uchi ham V_j to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini U_j bilan, uning ikkala uchi ham V_q to‘plamga tegishli barcha qirralari kortejini esa U_q bilan belgilaymiz. Agar U_j va U_q kortejlar bo‘sh bo‘lsa, u holda berilgan G graf ikki bo‘laklidir, aks holda, u ikki bo‘lakli emas.

Hozirgacha $k>2$ bo‘lgan hol uchun grafning k bo‘lakliligini aniqlash bo‘yicha oddiy usul topilmagan.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Elementlari siz yashayotgan aholi punktidagi chorraha va yo‘llarga mos keluvchi grafni geometrik ifodalab, bu grafda marshrutlar, zanjirlar, oddiy zanjirlar va sikllarni aniqlang.

2. Ixtiyoriy graf uchun yo shu grafning o‘zi, yoki uning to‘ldiruvchi grafi bo‘g‘lamli bo‘lishini isbotlang.
3. Agar G bog‘lamli graf va uning qandaydir sikliga tegishli qirrasi u bo‘lsa, u holda G grafdan u qirrani olib tashlash natijasida hosil bo‘lgan graf bog‘lamli bo‘lishini isbotlang.
4. 2-shaklda tasvirlangan graf uchun uchlar, qirralar va yoqlar sonini aniqlang hamda Eyler formulasi va Eyler teoremasining 2-natijasidagi tengsizlik o‘rinliligini tekshiring.



2-shakl.

5. Eyler teoremasining 1-natijasida ifodalangan tengsizlikni 1-shaklda tasvirlangan graf uchun tekshirib ko‘ring.
6. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasini isbotini o‘rganing.
7. Agar 1-topshiriqni bajarish natijasida hosil bo‘lgan grafda ajratuvchi qirra(lar), kesim(lar) va ko‘prik(lar):
   a) topilsa, u holda ularni aniqlang;
   b) topilmasa, u holda bu grafga yangi elementlarni shunday qo‘shingki, natijada ajratuvchi qirra(lari), kesim(lari) va ko‘prik(lari) topiladigan graf hosil bo‘lsin.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Graflarda marshrut deganda nimani tushunasiz?
2. Marshrutdagi boshlang‘ich, oraliq va oxirgi uchlarning bir-biridan qanday farqlari bor?
3. Qanday marshrutlar cheksiz marshrutlar deb ataladi?
4. Notrivial marshrut bilan nol marshrutning bir-biridan farqi nimada?
5. Marshrutning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
6. Zanjir nima?
7. Oddiy va yopiq zanjirlarning bir-biridan farqi nimada?
8. Yo‘l, kontur deganda nimani tushunasiz?
9. Qanday zanjir sikl deb ataladi va qanday graf siklga ega?

10. Qanday uchlar bog'langan deb ataladi?
11. Bog'lamli graf deganda nimani tushunasiz?
12. Bog'lamlilik komponentasi grafning qanday xususiyat(lar)ini ifodalaydi?
13. Grafning yog'i deganda nimani tushunasiz?
14. Eyler formulasi grafning qanday xossasini ifodalaydi?
15. Eyler formulasi bog'lamli bo'lmagan graflar uchun qanday umumlashtiriladi?
16. Nima uchun K_5 va $K_{3,3}$ graflar planar emas?
17. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasi nimani ifodalaydi?
18. Karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz grafda uchlar, qirralar va bog'lamlilik komponentalari orasida tengsizliklar bilan ifodalanuvchi qanday munosabat o'rinli?
19. Sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan grafning bog'lamlilik sharti nimadan iborat?
20. Grafdagi qanday qirralar ajratuvchi qirralar deb ataladi?
21. Kesim va ko'prik tushunchalarining farqi nimada?
22. Ko'ndalangiga izlash usuli qanday amalga oshiriladi?

5-§. Eyler va Gamilton graflari

Graf, uch, qirra, sikl, Eyler zanjiri, Eyler sikli, Eyler grafi, yarim Eyler grafi, oriyentirlangan Eyler yo'li, oriyentirlangan Eyler grafi, Flyori algoritmi, Gamilton zanjiri, Gamilton sikli, Gamilton grafi, yarim Gamilton grafi, kommivoyajer masalasi.

5.1. Eyler graflari. Graflar nazariyasining shakllanishi Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masala bilan bog'liq ekanligi yaxshi ma'lum. L. Eyler 1736-yilda bu masalaning yechimga ega emasligini isbotladi. U graflar nazariyasining ancha umumiy hisoblangan quyidagi savoliga ham javob topdi: qanday shartlar bajarilganda, bog'lamli grafda barcha qirralardan faqat bir marta o'tadigan sikl mavjud bo'ladi?

Grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o'tadigan zanjir *Eyler zanjiri,* deb ataladi. Yopiq Eyler zanjiriga (ya'ni *Eyler sikliga*) ega graf *Eyler grafi,* deb ataladi. Agar grafda yopiq bo'lmagan Eyler zanjiri topilsa, u holda bunday graf *yarim Eyler grafi*, deb ataladi.

1-teorema. Bog'lamli graf Eyler grafi bo'lishi uchun undagi barcha uchlarning darajalari juft bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. G Eyler grafida C — Eyler sikli bo'lsin. U holda C sikl bo'ylab harakatlanganda grafning har bir uchidan o'tish uchun bir juft qirradan foydalaniladi — bu qirralardan biri uchga kirish uchun, ikkinchisi esa uchdan chiqish uchun zarur bo'ladi. Bu yerda har bir uch darajasining juftligi C sikldagi har bir qirraning bir marta uchrashi mumkinligidan kelib chiqadi.

Yetarliligi. Endi G grafning har bir uchi darajasi juft bo'lsin, deb faraz qilamiz. G graf bog'lamli bo'lgani uchun undagi har bir uchning darajasi ikkidan kichik emas. Ma'lumki, agar grafda har bir uchning darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bunday graf tarkibida sikl mavjud (ushbu bobning 4-paragrafidagi 1-teoremaga qarang).

Demak, G grafning qirralaridan tashkil etilgan qandaydir C_1 sikl bor. Bu siklni uning ixtiyoriy v_1 uchidan boshlab quramiz. Dastlab v_1 uchga insident bo'lgan ixtiyoriy bir qirrani tanlab, bu qirra bo'ylab harakatlanamiz va uning boshqa uchiga o'tamiz. Har safar, imkoniyati boricha, yangi qirra tanlab va bu qirradan o'tib, uning boshqa uchiga boramiz. Shuni ta'kidlash zarurki, bunday o'tishlar jarayonida faqat qirraning yangisini tanlashga harakat qilinadi, uchlar esa istalgancha takrorlanishi mumkin.

Har bir uchga insident qirralar soni juft bo'lgani uchun C_1 siklni qurish jarayoni faqat v_1 uchga borgandagina tugaydi. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o'tadi yoki

2) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o'tmaydi.

Birinchi holda teorema isbotlandi deyish mumkin. Ikkinchi holda G grafdan C_1 siklga tegishli barcha qirralarni olib tashlaymiz va natijada hosil bo'lgan grafni C_1 deb belgilaymiz. Bu yerda yakkalanib qolgan uchlarni olib tashlash yoki olib tashlamaslik muhim emas. Agar yakkalanib qolgan uchlar olib tashlanmasa, natijada bog'lamli bo'lmagan G_1 grafni hosil qilishimiz ham mumkin. Grafdan qirralarni bunday olib tashlash amali, tabiiyki, grafning qirralari sonini kamaytiradi, lekin grafdagi uchlarning darajalari juftligi xossasini o'zgartirmaydi.

G grafning bog'lamliligiga ko'ra, C_1 sikl va G_1 graf hech bo'lmasa, bitta umumiy uchga ega bo'lishlari kerak. Shu sababli, C_1 siklda G_1 grafning qirralariga ham insident bo'lgan qandaydir v_2 uch bor. Bu v_2 uchdan boshlab faqat G_1 grafning qirralaridan tashkil topgan yangi C' siklni qurish mumkin. C' siklni qurish jarayoni faqat v_2 uchga kelib tugashi mumkin.

Oldin qurilgan C_1 siklni ikki qismga ajratamiz:

1) C_1 siklning v_1 uchidan boshlanib v_2 uchida tugovchi qismi (bu oddiy zanjirni $C_1(v_1,v_2)$ bilan belgilaymiz) va

2) C_1 siklning v_2 uchidan boshlanib, v_1 uchida tugovchi qolgan qismi $(C_1(v_2,v_1))$.

U holda v_1 uchdan boshlab $C_1(v_1,v_2)$ zanjirning qirralari bo'ylab v_2 uchga boruvchi, keyin C' siklning barcha qirralaridan o'tuvchi va, nihoyat, $C_1(v_2,v_1)$ zanjirning qirralari bo'ylab v_1 uchga qaytib keluvchi yangi

$$C_2=C_1(v_1,v_2)\cup C'\cup C_1(v_2,v_1)$$

siklni hosil qilish mumkin.

Agar C_2 sikl Eyler sikli bo'lsa, teoremaning tasdig'i isbotlandi desa bo'ladi. Aks holda yuqorida bayon etilgan jarayonni takrorlaymiz.

Berilgan G grafdagi qirralar soni chekli bo'lganligidan, bu jarayon chekli jarayondir. Bu jarayonni yetarlicha takrorlagandan so'ng, albatta, u Eyler siklini qurish bilan yakunlanadi. ■

1-natija. Bog'lamli graf yarim Eyler grafi bo'lishi uchun undagi ikkitadan ko'p bo'lmagan uchning darajalari toq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti 1-teoremaning isbotidan ba'zi o'zgartirishlar natijasida hosil qilinishi mumkin. ■

1-teorema asosida Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaning (ushbu bobning 1-paragrafiga qarang) yechimi mavjud emas, degan xulosaga kelamiz, ya'ni Kyonigsberg shahrining ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib, Pregel daryosi ustiga qurilgan yetti ko'prikdan faqat bir martadan o'tgan holda yana o'sha uyga qaytib kelish mumkin emas.

Oriyentirlangan graflarda oriyentirlangan Eyler yo'lini izlash bilan shug'ullanish mumkin. Har bir yoydan faqat bir marta o'tadigan yo'l **oriyentirlangan Eyler yo'li,** deb ataladi. Tarkibida oriyentirlangan Eyler yo'li bor bo'lgan oriyentirlangan graf **oriyentirlangan Eyler grafi**, deb ataladi.

Endi qirralari soni n ga teng bo'lgan berilgan Eyler grafida Eyler zanjirini tuzishning **Flyori algoritmini**[1] keltiramiz. Bu

[1] Bu algoritm E. Lyuka tomonidan e'lon qilingan. (Lucas, E. Récréations Mathématiqques. Paris: Gautheir-Villas, 1891).

algoritmga ko‘ra, grafning qirralari Eyler siklida uchrashi tartibi bo‘yicha 1 dan n gacha raqamlab chiqiladi.

Berilgan Eyler grafi uchun Flyori algoritmiga binoan quyidagi ikkita qoida asosida ishlar ketma-ket bajariladi:

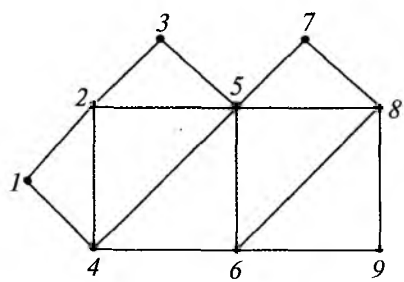
1. Grafning ixtiyoriy v uchidan boshlab, bu uchga insident bo‘lgan istalgan qirraga (masalan, vv' qirraga) 1 raqami beriladi. Bu qirra grafdan olib tashlanadi va v uchdan v' uchga (ya’ni olib tashlangan qirraga insident uchga) o‘tiladi.

2. Oxirgi o‘tishdan oldingi o‘tish natijasida hosil bo‘lgan uch w bo‘lsin va oxirgi o‘tishda biror qirraga k raqami berilgan deylik. w uchga insident istalgan qirra imkoniyati boricha shunday tanlanadiki, bu qirrani olib tashlash grafdagi bog‘lamlilikni buzmasin. Tanlangan qirraga navbatdagi $(k+1)$ raqami beriladi va bu qirra grafdan olib tashlanadi. ■

Flyori algoritmiga ko‘ra, ish yuritish Eyler grafi uchun doimo chekli jarayon ekanligi va bu jarayon doimo grafdan barcha qirralarning olib tashlanishi, ya’ni Eyler zanjirini tuzish bilan tugashi isbotlangan. Shuni ham ta’kidlash kerakki, Flyori algoritmini qo‘llash jarayonida qirralarni tanlash imkoniyatlari ko‘p bo‘lgani uchun, bunday vaziyatlarda, algoritmni qo‘llash mavjud Eyler sikllaridan birini topish bilan cheklanadi. Tushunarliki, Flyori algoritmini takror qo‘llab (bunda qirralarni tanlash jaroyoni algoritmini avvalgi qo‘llashlardagidek aynan takrorlanmasligi kerak) grafda mavjud bo‘lgan barcha Eyler sikllarini topish mumkin.

1-misol. 1-shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Avvalo, bu grafning Eyler grafi bo‘lishi shartini, ya’ni 1-teorema shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

Berilgan grafda to‘qqizta uch bo‘lib, 1, 3, 7, 9 belgili uchlarning darajasi ikkiga, 2, 4, 6, 8 belgili uchlarning darajasi to‘rtga, 5 belgili uchning darajasi esa oltiga teng. Xullas, bu grafdagi barcha uchlarning darajalari juftdir. Shuning uchun, 1-teoremaga ko‘ra, 1-shaklda tasvirlangan graf Eyler grafidir va uning tarkibida Eyler sikli mavjud.



1-shakl.

Berilgan grafga flyori algoritmini qo‘llab, mavjud Eyler sikllaridan birini aniqlaymiz. Dastlabki uch sifatida grafdagi 1 belgili uch olingan bo‘lsin. Bu uchdan ikki yo‘nalishda: (1;2) qirra bo‘ylab yoki (1;4) qirra bo‘ylab harakatlanish mumkin. Masalan, (1;2) qirra bo‘ylab harakatlanib 2 belgili uchga o‘tamiz. Endi harakatni 3 yo‘nalishda: yo (2;3) qirra bo‘ylab, yo (2;4) qirra bo‘ylab, yoki (2;5) qirra bo‘ylab davom ettirish mumkin. Aytaylik, (2;3) qirra bo‘ylab harakatlanib 3 belgili uchga o‘tgan bo‘laylik. Shu usulda davom etish mumkin bo‘lgan Eyler sikllaridan birini, masalan, quyidagi siklni hosil qilamiz:

$$((1,2),\ (2,3),(3,5),\ (5,4),\ (4,6),\ (6,9),\ (9,8),\ (8,6),$$
$$(6,5),(5,8),\ (8,7),\ (7,5),\ (5,2),\ (2,4),(4,1)).\ \blacksquare$$

5.2. Gamilton[1] *graflari.* Graflar nazariyasining natijalari muayyan shartlarni qanoatlantiruvchi marshrutlarni topish masalasiga keltiriluvchi bir qator muammolarni hal etishda qo‘llanilishi mumkin. Shunday muammolardan biri sifatida Uilyam Gamilton nomi bilan bog‘liq masalani keltiramiz. U. Gamilton dodekaedrni tekshirib, uning har bir uchidan faqat bir marta o‘tadigan siklni izlab topgan va shu asosda 1859-yilda «Olam bo‘ylab sayohat» nomli o‘yinni topgan.

Grafning har bir uchidan faqat bir marta o‘tadigan zanjir *Gamilton zanjiri,* deb ataladi. Yopiq Gamilton zanjiriga (ya’ni *Gamilton sikliga*) ega graf *Gamilton grafi,* deb ataladi. Agar grafda yopiq bo‘lmagan Gamilton zanjiri topilsa, u holda bunday graf *yarim Gamilton grafi,* deb ataladi.

Uilyam Gamilton

Oriyentirlangan graflarda ham grafning har bir uchidan faqat bir marta o‘tuvchi oriyentirlangan sikllarni qarash mumkin.

Eyler va Gamilton graflari bir-birlariga o‘xshash ta’riflansa-da, grafning Gamilton grafi ekanligini tasdiqlaydigan alomat (mezon) topish masalasi ancha murakkab hisoblanadi. Hozirgi vaqtgacha graflar nazariyasida grafning Gamilton grafi ekan-

---

[1] *Gamilton* (William Rowan Hamilton, 1805—1865) — Irlandiya matematigi, fizigi va astronomi.

ligini tasdiqlovchi shartlarni o'rganish bo'yicha izlanishlar davom etib, bu sohadagi ishlar hanuzgacha dolzarbligini yo'qotmasdan kelmoqda.

Qandaydir shartlarga bo'ysunuvchi graflarda Gamilton sikli mavjudligi haqida bir necha tasdiqlar mavjud. Qator hollarda bu tasdiqlarning isbotlari konstruktiv bo'lganligidan, Gamilton siklini tuzishga doir samarali algoritmlar ham yaratilgan. 1952-yilda G. E. Dirak[1] quyidagi teoremani isbotladi.

2-teorema (Dirak). Uchlari soni uchtadan kam bo'lmagan grafdagi istalgan uchning darajasi uchlar sonining yarmidan kam bo'lmasa, bu graf Gamilton grafi bo'ladi.

Isboti[2]. Uchlari soni $m \geq 3$ bo'lgan graf berilgan bo'lsin. Bu grafning istalgan v uchi uchun $\rho(v) \geq \frac{m}{2}$ shart bajarilsa-da, u Gamilton grafi bo'lmasin, deb faraz qilamiz.

Tabiiyki, istalgan grafga yetarlicha sondagi yangi uchlarni qo'shib olib, bu uchlarning har birini grafdagi har bir uch bilan qirra orqali tutashtirsak, berilgan grafdan Gamilton grafini hosil qilish mumkin. Bu usul bilan berilgan grafdan Gamilton grafini hosil qilish uchun qo'shilayotgan zarur uchlarning minimal sonini $k > 0$ bilan belgilaymiz.

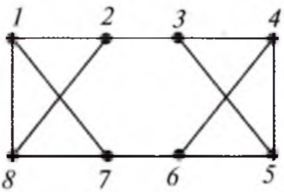
Yuqorida bayon qilingan usulni qo'llash natijasida hosil bo'lgan grafdagi uchlardan tashkil topgan $(v_1, w, v_2, ..., v_1)$ ketma-ketlik biron Gamilton sikli bo'lsin, bunda v_1, v_2 — berilgan grafning uchlari, w esa qo'shib olingan uchlardan biri. Tushunarliki, v_2 uch v_1 uchga qo'shni emas, aks holda siklni tuzishda w uchni ishlatmasligimiz mumkin bo'lar edi. Bu esa k sonining minimalligiga ziddir.

Agar grafdagi v_1' uch v_1 uch bilan qo'shni, v_2' uch esa v_2 uch bilan qo'shni bo'lsa, v_2' uch siklda v_1' uchdan bevosita keyingi uch bo'la olmaydi, chunki bu holda $(v_1, w, v_2, ..., v_1', v_2', ..., v_1)$ siklni $(v_1, v_1', ..., v_2, v_2', ..., v_1)$ siklga almashtirish mumkin. Natijada hosil bo'lgan grafning v_2 uchga qo'shni bo'lmagan uchlari soni v_1 uchga qo'shni uchlari sonidan kichik emasligi (ya'ni bu son kamida

---

[1] *Dirak* (Dirac Gabriel Andrew, 1925—1984) — Daniya matematigi.
[2] Dirak teoremasining bu isboti D.J. Nyuman tomonidan keltirilgan.

$\left(\frac{m}{2}+k\right)$ ga teng ekanligi) ravshan. Boshqa tomondan esa hosil bo‘lgan grafning v_2 uchga qo‘shni uchlari soni kamida $\left(\frac{m}{2}+k\right)$ ga tengligi ko‘rinib turibdi. Hosil bo‘lgan grafning har bir uchi bir vaqtning o‘zida v_2 uchga qo‘shni ham, qo‘shnimas ham bo‘lishi mumkin emasligidan hosil bo‘lgan graf uchlarining umumiy soni $(m+k)$ ushbu $2\left(\frac{m}{2}+k\right)= m+2k$ sondan kichik emas, ya’ni $m+k \geq m+2k$. Oxirgi tengsizlik faqat k=0 bo‘lgandagina to‘g‘ridir. Bu esa k>0 shartiga ziddir. ■



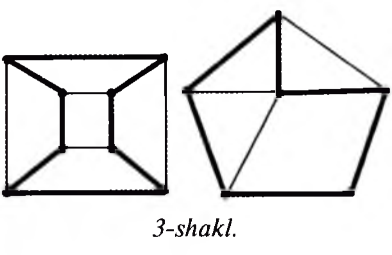
2-shakl.

Dirak teoremasi shartlari berilgan grafning Gamilton grafi bo‘lishi uchun yetarli, lekin ular zaruriy emas. Bu tasdiq to‘g‘ri ekanligini 2-shaklda tasvirlangan graf misolida ko‘ramiz. Bu grafda sakkizta uch bo‘lib (m=8 ≥3), har bir v ($v=\overline{1,8}$) uchning darajasi 3 ga teng: $\rho(v)$=3. Dirak teoremasidagi $\rho(v)\geq\frac{m}{2}$ shart grafdagi hech qaysi uch uchun bajarilmasa ham, bu grafda (1,2,3,4,5,6, 7,8,1) ko‘rinishdagi Gamilton sikli bor bo‘lgani uchun u Gamilton grafidir.

1960-yilda O. Ore[1] quyidagi teoremani isbotladi.

3-teorema (Ore). Agar uchlari soni m ga (m>2) teng bo‘lgan grafdagi qo‘shni bo‘lmagan ixtiyoriy uchlar darajalari yig‘ndisi m dan kam bo‘lmasa, u holda bu graf Gamilton grafi bo‘ladi.

Isboti o‘quvchiga topshiriq sifatida beriladi.



3-shakl.

2-misol. 3-shaklda tasvirlangan graflar Gamilton graflariga misol bo‘la oladilar. Bir qarashdayoq sezish mumkinki, bu graflarning har birida bir nechtadan Gamilton sikllari mavjud. Mumkin bo‘lgan ba’zi Gamilton sikllari shaklda qalin chiziqlar bilan ifodalangan. ■

[1] *Ore* (Oysten, 1899—1968) — Norvegiya matematigi.

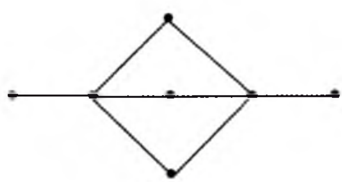
3-misol. Shaxmat o‘yinidagi otning yurishi haqidagi Eyler masalasi deb ataluvchi quyidagi masalani qaraymiz. Shaxmat taxtasidagi istalgan katakda turgan shaxmat oti uchun yurishlarning shunday ketma-ketligini tuzingki, u barcha kataklardan faqat bir martadan o‘tsin va yurish boshlangan katakka qaytib kelsin. Bu masalani hal qilish maqsadida tuzilgan graf (shaxmat taxtasidagi kataklarga grafning uchlari, otning yurishlariga esa uning qirralari mos qo‘yilishi nazarda tutilmoqda) ham Gamilton grafiga misol bo‘la oladi. Bu masalaning yechimlaridan biri 4-shaklda keltirilgan. ■

4-misol. 5- shaklda tasvirlangan grafda Gamilton zanjiri mavjud emas. Berilgan grafda Gamilton zanjirining mavjudligi shartlarni o‘rganish bo‘yicha izlanishlar davom etayotganligi va bu sohadagi ishlar bugungi kunda ham dolzarbligini yo‘qotmaganligi yuqorida qayd etilgan edi. Grafdagi uchlar soni m ning qiymatiga nisbatan ko‘phad bilan chegaralangan sondagi qadam ishlatib istalgan grafda Gamilton zanjiri mavjudligini tekshiradigan algoritm hozirgacha topilmagan. Shuning uchun ham Gamilton zanjirini topish masalasi graflar nazariyasida markaziy masalalardan biri bo‘lib qolmoqda, Albatta, grafdagi m ta uchlarning $m!$ ta turli ketma-ketliklarini (aniqrog‘i, takrorlanmaydigan o‘rin almashtirishlarini) tuzib grafda Gamilton zanjiri mavjudligi masalasini hal qilish mumkin. Shunday bo‘lishiga qaramasdan, barcha $m!$ ta o‘rin almashtirishlarini bajarmasdan qadamlar sonini jiddiy qisqartiradigan umumiy algoritm bor.

8	56	41	58	35	50	39	60	33
7	47	44	55	40	59	34	51	38
6	42	57	46	49	36	53	32	61
5	45	48	43	54	31	62	37	52
4	20	5	30	63	22	11	16	13
3	29	64	21	4	17	14	25	10
2	6	19	2	27	8	23	12	15
1	1	28	7	18	3	26	9	24
	A	B	C	D	E	F	G	H

4-shakl.

Grafda Gamilton zanjirini topish masalasi quyidagi *kommivoyajer*[1] *masalasi* deb ataluvchi masalada oshkora



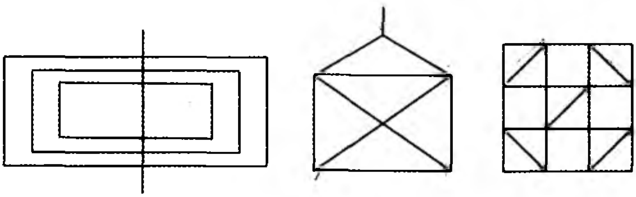
5-shakl.

[1] Kommiovoyajer — sayohatchi reklamachi, gumashta.

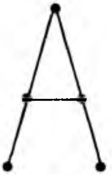
namoyon bo'ladi. Bir-birlari bilan yo'llar (graf qirralari) vositasida bog'langan shaharlar (graf uchlari) tarmog'i berilgan bo'lib, shaharlarning har bir (a,b) jufti uchun masofa (uni $\mu(a,b)$ bilan belgilaymiz) mos qo'yilgan hamda o'zaro bog'lanmagan shaharlar orasidagi masofa cheksiz katta deb hisoblaymiz. Kommivoyajer uchun shunday Gamilton sikli topish kerakki, $\sum_{i=0}^{n-1}\mu(a_i,a_{i+1})$ ifodaning qiymati minimal bo'lsin, bu yerda a_i – tarmoqdagi i = shahar ($i=\overline{0,n}$). Boshqacha aytganda, kommivoyajerning biron shahardan chiqib va qolgan barcha shaharlardan faqat bir martadan o'tib, yana dastlabki shaharga qaytishi imkonini beruvchi eng kichik umumiy uzunlikka ega bolgan yo'lni topish kerak.

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Yarim Eyler grafi bo'lib, Eyler grafi bo'la olmaydigan grafga misol keltiring. Sababini tushuntiring.
2. 6-shaklda tasvirlangan uchta grafni (bu graflarda qirralarga kesmalar, kesmalarning kesishish nuqtalariga esa uchlar mos qo'yilgan deb hisoblanadi) tekshirib, ularning Eyler grafi bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlang. Eyler grafi bo'lganlarining har biridagi Eyler sikllaridan bir nechasini toping. Eyler grafi bo'lmaganlarining yarim Eyler grafi bo'lishi yoki bo'lmasligini tekshiring.



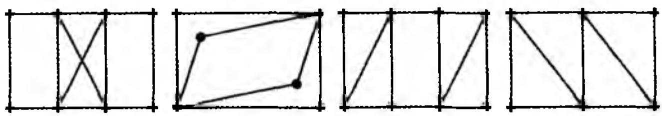
6-shakl.



7-shakl.

3. 3-, 5- va 6-shaklda tasvirlangan graflar orasida qalamni qog'ozdan ko'tarmasdan har bir kesmani faqat bir marta chizib (kesmalarning uchlari bundan mustasno) chiqish mumkin bo'lganlarini aniqlang.
4. Lotin alifbosi bosma harflarning har biriga graf sifatida qarab (masalan, A harfiga mos graf 7-shaklda tasvirlangan), ular orasidan Eyler grafi bo'la olmaydiganlarini aniqlang.

5. K_n grafning Eyler grafi bo‘lishi shartlarini toping.
6. Berilgan n ta elementli to‘plam uchun tuzilgan barcha $n!$ ta o‘rin almashtirishlarning har biriga grafning uchi mos qo‘yilgan bo‘lsin. Agar biron o‘rin almashtirishdan undagi ikkita elementning o‘rinlarini almashtirib, boshqa o‘rin almashtirishni hosil qilish mumkin bo‘lsa, u holda bu harakatga grafning qirrasini mos qo‘yamiz. Shunday usul bilan tuzilgan graf Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.
7. K_n grafning Gamilton grafi bo‘lishi shartlarini aniqlang.
8. 8-shaklda tasvirlangan to‘rt grafning har biri Eyler grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.
9. 8-shaklda tasvirlangan to‘rt grafning har biri Gamilton grafi bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.



8-shakl.

10. Dirak teoremasini qo‘llab $K_{3,3}$ grafning Gamilton grafi bo‘lishini isbotlang.
11. Ore teoremasining isbotini o‘rganing (masalan, [9] kitobga qarang).

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Eyler zanjiri deb nimaga aytiladi?
2. Yarim Eyler grafi Eyler grafidan nimasi bilan farqi qiladi?
3. Berilgan graf Eyler grafi bo‘lishligining zaruriy va yetarli sharti qanday ifodalanadi?
4. Berilgan graf yarim Eyler grafi bo‘lishligining zaruriy va yetarli sharti qanday ifodalanadi?
5. Oriyentirlangan Eyler grafi qanday aniqlanadi?
6. Berilgan Eyler grafi uchun Flyori algoritmiga ko‘ra qanday qoida bo‘yicha ishlar ketma-ket bajariladi?
7. Gamilton zanjiri deb nimaga aytiladi?
8. Qanday grafga Gamilton grafi deb aytiladi?
9. Eyler va Gamilton graflarining o‘xshashligi va farqi bormi?
10. Berilgan graf Gamilton grafi bo‘lishining yetarli shartlari haqidagi Dirak teoremasi qanday ifodalanadi?

11. Ore teoremasida berilgan graf Gamilton grafi bo'lishining qanday yetarli shartlari keltirilgan?
12. Eyler va Gamilton graflari qo'llanilib hal qilinadigan qanday amaliy masalalarga misol keltira olasiz?
13. Kubik graf Eyler grafi bo'la oladimi?

6-§. Grafning metrik xarakteristikalari

Graf, uch, qirra, uchlar orasidagi masofa, zanjir, oddiy zanjir, metrika aksiomalari, uchburchak tengsizligi, uchning ekssentrisiteti, grafning diametri, diametral zanjir, grafning radiusi, grafning markazi, markaziy uch, radial oddiy zanjir, qirraning (yoyning) uzunligi, additivlik, zanjirning (yo'lning) uzunligi, minimal uzunlikka ega yo'l, Deykstra algoritmi.

6.1. Graflarda masofa tushunchasi. Bog'lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu grafda har qanday ikkita v_1 va v_2 uchlar bog'langan bo'lgani uchun chetlari v_1 va v_2 uchlardan iborat bo'lgan hech bo'lmasa bir marshrut bor. v_1 va v_2 uchlarni bog'lovchi eng qisqa (v_1,v_2) marshrutning uzunligi v_1 va v_2 *uchlar orasidagi masofa,* deb ataladi va u $d(v_1,v_2)$ bilan belgilanadi. Ravshanki, eng qisqa marshrut oddiy zanjirdir. Tabiiy ravishda $d(v,v)=0$ deb qabul qilamiz.

Shuni ta'kidlash kerakki, graflarda masofa tushunchasini boshqa usul bilan ham aniqlash mumkin.

Yuqoridagi usul bilan aniqlangan masofa *metrika aksiomalari* deb ataluvchi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $d(v_1,v_2)\geq 0$;
2) $v_1=v_2$ bo'lgandagina $d(v_1,v_2)=0$ bo'ladi;
3) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_1)$;
4) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_3)\geq d(v_1,v_3)$.

Oxirgi aksioma *uchburchak tengsizligi,* deb ataladi.

Bog'lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. G grafning ixtiyoriy $v\in V$ uchi uchun aniqlangan

$$e(v)=\max_{w\in V} d(v,w)$$

miqdor shu v *uchning ekssentrisiteti,* deb ataladi.

Bog'lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kattasi (maksimali) shu *grafning diametri,* deb ataladi.

G grafning diametri, odatda, $d(G)$ bilan belgilanadi:

$$d(G)=\max_{w\in V} e(v).$$

Diametr bu grafning istalgan ikki uchi orasidagi mumkin bo‘lgan eng katta masofadir, ya’ni $d(G)=\max_{v_1, v_2\in V} d(v_1, v_2)$.

Uzunligi $d(G)$ ga teng bo‘lgan oddiy zanjir *diametral zanjir,* deb ataladi. Tabiiyki, grafda diametral zanjir yagona bo‘lmasligi mumkin.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kichigi (minimali) shu *grafning radiusi,* deb ataladi.

G grafning radiusi, odatda, $r(G)$ bilan belgilanadi:

$r(G)=\min_{v\in V} e(v)$. Ravshanki, $r(G)=\min_{v_1\in V}\max_{v_2\in V} d(v_1, v_2)$.

Bog‘lamli G grafdagi ekssentrisiteti radiusga teng v_0 uch *grafning markazi (markaziy uchi),* deb ataladi.

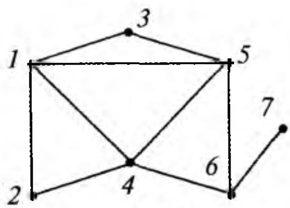
Agar v_0 uch G grafning markazi bo‘lsa, u holda $e(v_0)=\min_{v\in V} e(v)$ bo‘ladi, ya’ni grafning markaziy uchi minimal ekssentrisitetga egadir.

Agar grafning markazidan boshqa biron uchigacha bo‘lgan oddiy zanjir eng uzun masofaga ega bo‘lsa, u holda bu zanjir *radial oddiy zanjir,* deb ataladi.

Tabiiyki, grafning radiusi uning diametridan katta emas va graf bittadan ko‘p markazga ega bo‘lishi ham mumkin. Bundan tashqari, grafning barcha uchlari uning markaziy uchlari bo‘lishi ham mumkin.

Grafning markaziy uchlarini topish bilan bog‘liq masalalar aholiga xizmat ko‘rsatadigan qandaydir obyektning (kasalxona, maktab va shu kabilarning) joylashish o‘rnini aniqlash bilan bog‘liq muammolarni hal qilishda qo‘llanilishi mumkin. Ta’kidlash kerakki, muayyan vaziyatlarda, ko‘pincha, boshqa holatlarni, jumladan, obyektgacha borish vaqti, punktlar orasidagi masofa va shu kabilarni hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Bunday vaziyatlarda *joylashtirishning minimaks masalalari,* deb ataluvchi masalalar vujudga keladi.

1-misol. 1-shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda $d(1,6)=2$, $d(2,7)=3$, $d(G)=3$; (1,4,6,7) va (1,5,6,7) zanjirlar



1-shakl.

diametral zanjirlardir, (1,3) va (1,3,5,6,7) zanjirlar esa diametral zanjirlar bo'la olmaydi. Berilgan grafda 4, 5 va 6 belgili uchlar markazlar bo 'lib, $r(G)=2$ hamda (6,7) va (6,4,1) radial oddiy zanjirlardir. ■

6.2. Minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala. Berilgan bog'lamli grafning har bir qirrasiga (agar berilgan graf oriyentirlangan bo'lsa — yoyiga) qandaydir haqiqiy son mos qo'yib, bu sonni **qirraning (yoyning) uzunligi,** deb ataymiz. Qirraning (yoyning) uzunligi *additivlik* xossasiga ega deb faraz qilamiz, ya'ni qirralar (yoylar) yordamida tuzilgan *zanjirning (yo'lning) uzunligi* shu zanjirni (yo'lni) tashkil etuvchi qirralar (yoylar) uzunliklari yig'indisiga tengdir.

Tabiiyki, qirraning yoki yoyning uzunligi tushunchasi yechilayotgan masalaning mohiyatiga qarab, muayyan bir ma'noga ega bo'lishi mumkin. Masalan, ikki shahar orasidagi masofa, qandaydir operatsiyani bajarish uchun zarur mablag' (xarajatlar) yoki vaqt va boshqalar. Shu nuqtayi nazardan, umuman olganda, bu yerda manfiy uzunlikka ega yoki uzunligi nolga teng qirra (yoy) ham ma'noga ega deb hisoblanadi.

Amaliyotda uchraydigan ko'plab masalalarda marshrut uzunligi maksimallashtirilishi yoki minimallashtirilishi talab etiladi. Shunday masalalardan biriga, aniqrog'i, kommivoyajer masalasiga Gamilton graflari bilan shug'ullanganda duch kelgan edik (ushbu bobning 5-paragrafiga qarang).

$G=(V,U)$ oriyentirlangan graf berilgan bo'lsin, bu yerda $V=\{1,2,...,m\}$. G grafning biron $s\in V$ uchidan boshqa $t\in V$ uchiga boruvchi yo'llar orasida uzunligi eng kichik bo'lganini topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Bu masalani *minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala,* deb ataymiz. Quyida bu masalaning umumlashmasi hisoblangan masalani qarab, uni ham o'sha nom bilan ataymiz.

Grafdagi (i,j) yoyning uzunligini c_{ij} bilan belgilab, $C=(c_{ij})$, $i,j=\overline{1,m}$, matritsa berilgan deb hisoblaymiz. Yuqorida ta'kidlaganlarimizga ko'ra, C matritsaning c_{ij} elementlari orasida manfiylari yoki nolga tenglari ham bo'lishi mumkin. Agar grafda biron i uchdan chiqib, j uchga kiruvchi yoy mavjud bo'lmasa, u holda bu yoyning uzunligini cheksiz katta deb qabul qilamiz ($c_{ij}=\infty$). Bundan tashqari, G grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud emas, deb hisoblaymiz, chunki aks holda uzunligi eng kichik bo‘lgan yo‘l mavjud emas[1].

Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra[2] tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz), grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi *Deykstra algoritmi* keltirilgan.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1=0$ qiymatni mos qo‘yib, bu uchni dastlab $R\neq\varnothing$ deb qabul qilingan R to‘plamga kiritamiz: $R=\{1\}$. $\overline{R}=V\setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R,\overline{R})$ bo‘lsin. Har bir $(i,j)\in(R,\overline{R})$ yoy uchun $h_{ij}=\varepsilon_i+c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda, ε_i deb $i\in R$ uchga mos qo‘yilgan qiymat (grafning 1 belgili uchidan chiqib i belgili uchigacha eng qisqa yo‘l uzunligi) belgilangan.

$\varepsilon_j=\min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R,\overline{R})$ to‘plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni (i, j) yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j\in\overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo‘yamiz. ε_j qiymat mos qo‘yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib, R to‘plamga kiritamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha (i, j) yoylar uchun $\varepsilon_i+c_{ij}\geq\varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik o‘rinli bo‘lmagan (ya’ni $\varepsilon_{j_*}>\varepsilon_i+c_{ij_*}$ bo‘lgan) barcha j_* belgili uchlarning har biriga mos qo‘yilgan eski ε_{j_*} qiymat o‘rniga yangi $\varepsilon_i+c_{ij_*}$ qiymatni mos qo‘yamiz va (i,j_*) yoyni

---

[1] Agar grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud bo‘lsa, u holda grafning qandaydir s uchidan shu siklning biron i uchiga o‘tib, keyin esa sikl bo‘ylab harakatlanib, i uchga istagancha marta qaytish mumkin bo‘lganligidan, istagancha kichik uzunlikka ega yo‘l tuzish mumkin.

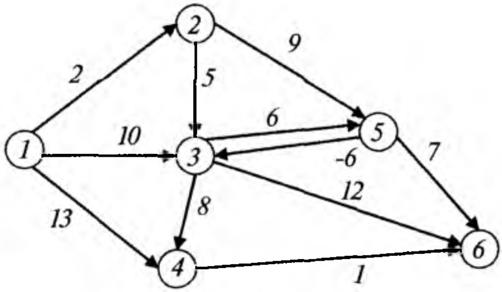
[2] *Deykstra Edsger Vayb* (Dijkstra Wybe, 1930—2002) — golland matematigi.

ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

Uchlarga qiymat mos qo'yish jarayonini oxirgi (k belgili) uchga qiymat mos qo'yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgili uchidan (manbadan) chiqib, uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo'l uzunligi ε_k bo'ladi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab, ajratilgan yoylar yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda uning 1 belgili uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1 belgili uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo'l(lar)ni topamiz. ■

2-misol. 2-shaklda tasvirlangan orgrafda oltita uch (V={1,2,3,4,5,6}) va o'n bitta yoy bo'lib, har bir yoy uzunligi uning yoniga yozilgan. Ko'rinib turibdiki, berilgan grafda manfiy uzunlikka ega (5,3) yoy ham bor. Isbotlash mumkinki, bu grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud emas.



2-shakl.

Yuqorida bayon qilingan Deykstra algoritmini berilgan grafga qo'llab, eng qisqa uzunlikka ega yo'lni topish bilan shug'ullanamiz.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1=0$ qiymatni mos qo'yamiz va $R=\{1\}$ to'plamga ega bo'lamiz. Shuning uchun, $\overline{R}=V\setminus R=\{2,3,4,5,6\}$ bo'ladi.

Umumiy qadam. 1-iteratsiya. $R=\{1\}$ va $\overline{R}=\{2,3,4,5,6\}$ bo'lgani uchun boshlang'ich uchi R to'plamga tegishli, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to'plam elementi bo'lgan barcha yoylar to'plami $(R,\overline{R})=\{(1,2),$ $(1,3),(1,4)\}$ ga ega bo'lamiz. $(R,\overline{R})$ to'plamga tegishli bo'lgan har bir yoy uchun h_{ij} ning qiymatlarini topamiz:

(1,2) yoy uchun $h_{12}=\varepsilon_1+c_{12}=0+2=2$;
(1,3) yoy uchun $h_{13}=\varepsilon_1+c_{13}=0+10=10$;
(1,4) yoy uchun $h_{14}=\varepsilon_1+c_{14}=0+13=13$.

Bu h_{12}, h_{13} va h_{14} miqdorlar orasida eng kichigi h_{12} bo'lgani uchun (1,2) yoyni ajratamiz (3-shaklda bu yoy qalin chiziq bilan belgilangan) va 2 belgili uchga $\varepsilon_2=2$ qiymatni mos qo'yamiz. Algoritmga ko'ra 2 uchni $\overline{R}$ to'plamdan chiqarib, R to'plamga kiritamiz. Natijada[1] $R=\{1,2\}$ va $\overline{R}=\{3,4,5,6\}$ to'plamlarga ega bo'lamiz.

Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan bitta (1,2) yoy bo'lgani uchun faqat bitta $\varepsilon_1+c_{12}\geq\varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Bu tengsizlik $0+2\geq 2$ ko'rinishdagi to'g'ri munosabatdan iborat bo'lgani uchun 2-iteratsiyaga o'tamiz.

2-iteratsiya. $(R,\overline{R})=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,5)\}$ bo'lgani sababli $h_{13}=10$, $h_{14}=13$, $h_{23}=7$ va $h_{25}=11$ qiymatlarni va $\min\{h_{13},h_{14},h_{23},h_{25}\}=$ $=h_{23}=7$ ekanligini aniqlaymiz. Bu yerda eng kichik qiymat (2,3) yoyga mos keladi. Shuning uchun, (2,3) yoyni ajratamiz va $\varepsilon_3=7$ qiymatni 3 belgili uchga mos qo'yamiz. 3 belgili uchni $\overline{R}$ to'plamdan chiqarib, R to'plamga kiritgandan so'ng $R=\{1,2,3\}$ va $\overline{R}=\{4,5,6\}$ to'plamlar hosil bo'ladi.

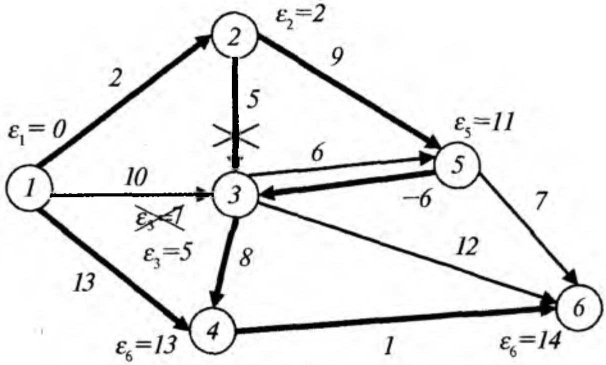
Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan uchta (1,2), (1,3) va (2,3) yoylardan birinchisi uchun $\varepsilon_1+c_{12}\geq\varepsilon_2$ tengsizlikning bajarilishi 1-iteratsiyada tekshirilganligi va ε_1, ε_2 qiymatlarning o'zgarmaganligi sababli faqat ikkinchi va uchinchi yoylarga mos $\varepsilon_1+c_{13}\geq\varepsilon_3$ va $\varepsilon_2+c_{23}\geq\varepsilon_3$ munosabatlarni tekshirish kifoya. Bu munosabatlar $0+10\geq 7$ va $2+5\geq 7$ ko'rinishda bajariladi. Shuning uchun 3-iteratsiyaga o'tamiz.

3-iteratsiya. Boshlang'ich uchi $R=\{1,2,3\}$ to'plamga tegishli, oxiri esa $\overline{R}=\{4,5,6\}$ to'plamga tegishli bo'lgan yoylar to'rtta: (1,4), (2,5), (3,4) va (3,5). Shu yoylarga mos h_{ij} ning qiymatlari $h_{14}=13$, $h_{25}=11$, $h_{34}=15$, $h_{35}=13$ va, shuning uchun, $\min\{h_{14},h_{25},h_{34},h_{35}\}=$ $=h_{25}=11$ bo'ladi. Demak, bu iteratsiyada (2,5) yoyni ajratamiz va $\varepsilon_5=11$ deb olamiz. Endi, algoritmga ko'ra, $R=\{1,2,3,5\}$ va $\overline{R}=\{4,6\}$ to'plamlarni hosil qilamiz.

---

[1] Yozuvning ixchamligi nuqtayi nazaridan bu yerda va bundan keyin hosil bo'lgan to'plamlar uchun R va $\overline{R}$ belgilar qoldiriladi.

Ikkala uchi ham R to'plamga tegishli bo'lgan yoylar oltita: (1,2), (2,3), (1,3), (2,5), (3,5) va (5,3). Bu yoylarning har biri uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshirishimiz kerak. Lekin, 1- va 2-iteratsiyalarda (1,2), (2,3) va (1,3) yoylar uchun bu ish bajarilganligi sababli tekshirishni tarkibida 5 belgili uch qatnashgan (2,5), (3,5) va (5,3) yoylar uchun amalga oshirib, quyidagilarga ega bo'lamiz: (2,5) yoy uchun $\varepsilon_2 + c_{25} \geq \varepsilon_5$ munosabat to'g'ri $(2+9 \geq 11)$, (3,5) yoy uchun $\varepsilon_3 + c_{35} \geq \varepsilon_5$ munosabat to'g'ri $(7+6 \geq 11)$, lekin (5,3) yoy uchun $\varepsilon_5 + c_{53} \geq \varepsilon_3$ munosabat noto'g'ri $(11+(-6)=5<7)$. Oxirgi munosabatni hisobga olib, algoritmga ko'ra, $\varepsilon_3=7$ o'rniga $\varepsilon_3=5$ deb olamiz va (5,3) yoyni ajratilgan deb, ilgari ajratilgan (2,3) yoyni esa ajratilmagan deb hisoblaymiz (3-shaklda $\varepsilon_3=7$ yozuvning va (2,3) yoyning qalin chiziq'i ustiga ajratilganlikni inkor qiluvchi $\times$ belgisi qo'yilgan).



3-shakl.

4-iteratsiya. $R=\{1,2,3,5\}$, $\overline{R}=\{4,6\}$ bo'lgani uchun $(R,\overline{R})=\{(1,4),(3,4),(3,6),(5,6)\}$ va $h_{14}=13$, $h_{34}=13$, $h_{36}=17$, $h_{56}=18$ hamda $\min\{h_{14}, h_{34}, h_{36}, h_{56}\}$ bo'ladi. Demak, (1,4) va (3,4) yoylarni ajratamiz hamda 4 belgili uchga $\varepsilon_4=13$ qiymatni mos qo'yamiz. Natijada $R=\{1,2,3,5,4\}$, $\overline{R}=\{6\}$ to'plamlarga ega bo'lamiz.

$\varepsilon_i + c_{ij} \geq \varepsilon_j$ munosabatning to'g'riligi (1,3), (1,4), (2,3), (3,5), (5,3) va (3,4) yoylar uchun tekshirilib ko'rilganda, uning barcha yoylar uchun bajarilishi ma'lum bo'ladi.

5-iteratsiya. Endi $(R,\overline{R})=\{(3,6),(4,6),(5,6)\}$ bo'lgani uchun $h_{36}=17$, $h_{46}=14$, $h_{56}=18$ va $\min\{h_{36}, h_{46}, h_{56}\}=h_{46}=14$ bo'ladi. Bu yerda minimum (4,6) yoyda erishilgani uchun uni ajratib, orgrafning oxirgi 6 belgili uchiga $\varepsilon_6=14$ qiymatni mos qo'yamiz.

Oxirgi qadam. Berilgan orgrafda 1 belgili uchdan 6 belgili uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo'l(lar)ni topish maqsadida, algoritmga asosan, grafning oxirgi 6 belgili uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda harakatlanib, uning 1 belgili uchiga kelishimiz kerak. 6 belgili uchga kiruvchi uch yoydan faqat bittasi ((4,6) yoy) ajratilgan bo'lgani uchun (4,6) yoy yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda harakat qilib, 6 belgili uchdan 4 belgili uchga kelamiz. 4 belgili uchga kiruvchi ikkala ((1,4) va (3,4)) yoylar ham ajratilgan bo'lgani uchun biz tuzmoqchi bo'lgan eng qisqa uzunlikka ega yo'l yagona emas.

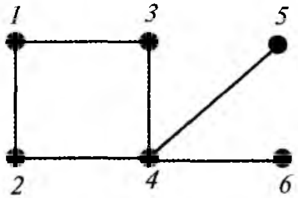
Agar harakatni (1,4) yoy yo'nalishiga teskari yo'nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 1 belgili uchga kelib, eng qisqa uzunlikka ega yo'llardan biri bo'lgan $\mu_1=(1,4,6)$ marshrutni topamiz.

Agarda harakatni (3,4) yoy yo'nalishiga teskari yo'nalishda davom ettirsak, u holda 4 belgili uchdan 3 belgili uchga kelamiz. 3 belgili uchga kiruvchi ikkita yoydan faqat bittasi ((5,3) yoy) ajratilgan bo'lgani uchun 3 belgili uchdan 5 belgili uchga kelamiz. Shu usulda davom etsak, oldin 2 belgili, keyin esa 1 belgili uchga o'tib, mumkin bo'lgan eng qisqa uzunlikka ega bo'lgan yo'llardan ikkinchisini, ya'ni $\mu_2=(1,2,5,3,4,6)$ marshrutni aniqlaymiz.

Shunday qilib, 2-shaklda tasvirlangan grafda eng qisqa uzunlikka ega μ_1 va μ_2 yo'llar borligini aniqladik. Bu yo'llarning har biri minimal $\varepsilon_6=14$ uzunlikka ega. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 4-shaklda tasvirlangan grafning diametri, radiusi va markaz(lar)ini toping.



4-shakl.

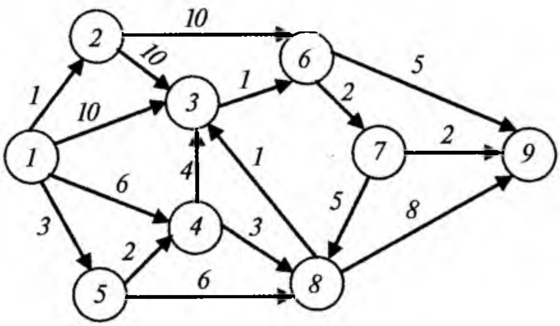
2. Petersen grafining markazini toping.
3. Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaga mos grafning diametri va markazini toping.
4. Uch uy va uch quduq haqidagi masalaga mos grafning diametri va radiusini toping.
5. Insidentlik matritsasi quyida berilgan grafning diametri, radiusi va markaz(lar)ini aniqlang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Uchlari to'plamlari kesishmaydigan K_3 va O_4 graflarga birikma amalini qo'llash natijasida hosil bo'lgan grafning diametri va radiusini aniqlang.
7. Qirralari qo'shniligi matritsasi quyida berilgan graflarning radiuslarini aniqlang:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Deykstra algoritmini 5-shaklda tasvirlangan grafga qo'llab, eng qisqa uzunlikka ega yo'lni toping.



5-shakl.

9. Siz yashayotgan hududda har bir aholi punktidan boshqasiga bevosita borish mumkin bo'lgan yo'llarni va ularning uzunliklarini aniqlang. Bu ma'lumotlarga mos keluvchi graf

tuzing va Deykstra algoritmini qo'llab, o'zingiz yashayotgan aholi punktidan boshqa aholi punktiga borish mumkin bo'lgan yo'llarning eng qisqa uzunlikka ega bo'lganlarini toping.

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Graf uchlari orasidagi masofa deb nimaga aytiladi?
2. Graf uchlari orasidagi masofa metrikaning qanday aksiomalarini qanoatlantiradi?
3. Metrika aksiomalarining qaysi biri uchburchak tengsizligi aksiomasi, deb ataladi?
4. Graf uchining ekssentrisiteti deganda nimani tushunasiz?
5. Grafning diametri deb nimaga aytiladi?
6. Diametral zanjir nima?
7. Grafning radiusi qanday aniqlanadi?
8. Grafning markazi yagona uchdan iborat bo'lmasligi mumkinmi?
9. Grafning radial oddiy zanjiri qanday topiladi?
10. Graf qirrasining (yoyining) uzunligi deganda nimani tushunasiz?
11. Additivlik xossasini qanday tushunasiz?
12. Grafdagi zanjir (yo'l)ning uzunligi qanday aniqlanadi?
13. Qanday masalaga minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala deb aytiladi?
14. Agar grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl bor bo'lsa, u holda Deykstra algoritmini qo'llab minimal uzunlikka ega yo'lni topish mumkinmi?
15. Deykstra algoritmining umumiy qadamida qanday ishlar amalga oshiriladi?

7-§. Daraxtlar

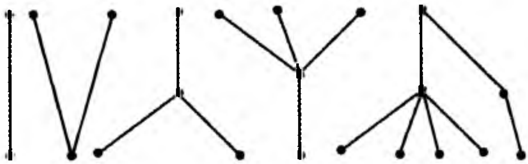
Graf, uch, qirra, daraxt, o'rmon, asiklik graf, marshrut, sikl, zanjir, oddiy zanjir, ko'prik, grafning sinch daraxti, grafning sinch o'rmoni, grafning siklomatik soni.

7.1. Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar. Siklga ega bo'lmagan oriyentirlanmagan bog'lamli graf daraxt, deb ataladi[1]. Ta'rifga ko'ra, daraxt sirtmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega bo'lmagan oriyentirlanmagan graf *o'rmon (asiklik graf),* deb ataladi.

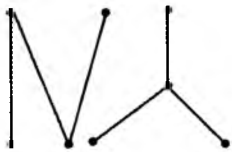
[1] Oriyentirlangan daraxt tushunchasini ham kiritish mumkin.

1-misol. 1-shaklda bog‘lamli komponentali soni beshga teng bo‘lgan graf tasvirlangan bo‘lib, u o‘rmondir. Bu grafdagi bog‘lamli komponentalarning har biri daraxtdir. ■

2-misol. 2-shaklda to‘rtta uchga ega bir-biriga izomorf bo‘lmagan barcha (ular bor-yog‘i ikkita) daraxtlarning geometrik ifodalanishi tasvirlangan. ■



1-shakl.



2-shakl.

Beshta uchga ega bir-biriga izomorf bo‘lmagan barcha daraxtlar uchta, oltita uchga ega bunday barcha daraxtlar esa oltita ekanligini ko‘rsatish qiyin emas.

Daraxt tushunchasiga boshqacha ham ta’rif berish mumkin. Umuman olganda, $G(m,n)$-graf uchun *daraxtlar haqidagi asosiy teorema,* deb ataluvchi quyidagi teorema o‘rinlidir.

1-teorema. Uchlari soni m va qirralari soni n bo‘lgan G graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:

1) G daraxtdir;

2) *G asiklikdir va* $n=m-1$;

3) *G bog‘lamlidir va* $n=m-1$;

4) G bog‘lamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash amalini qo‘llash natijasida bog‘lamli bo‘lmagan graf hosil bo‘ladi, ya’ni Gning har bir qirrasi ko‘prikdir;

5) G grafning o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtiriladi;

6) G asiklik bo‘lib, uning qo‘shni bo‘lmagan ikki uchini qirra bilan tutashtirish amalini qo‘llash natijasida faqat bir siklga ega bo‘lgan graf hosil bo‘ladi.

Isboti. Teoremaning 1) tasdig‘idan uning 2) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. *G* graf daraxt bo‘lsin. Daraxtning ta’rifiga ko‘ra, u asiklik bo‘lishini ta’kidlab, *m* bo‘yicha matematik induksiya usulini qo‘llaymiz.

Matematik induksiya usulining bazasi: agar $m=1$ bo‘lsa, u holda *G* daraxt faqat bitta uchdan tashkil topgan bo‘ladi. Tabiiyki, agar bitta uchga ega bo‘lgan grafda sikl bo‘lmasa, u holda unda birorta ham qirra yo‘q, ya’ni n=0. Demak, bu holda tasdiq to‘g‘ridir.

Induksion o‘tish: G daraxt uchun $k \geq 2$ va $m=k$ bo‘lganda, 2) tasdiq o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilamiz. Endi uchlari soni $m=k+1$ va qirralari soni n bo‘lgan daraxtni qaraymiz. Bu daraxtning ixtiyoriy qirrasini (v_1, v_2) bilan belgilab, undan bu qirrani olib tashlasak, v_1 uchdan v_2 uchgacha marshruti (aniqrog‘i, zanjiri) mavjud bo‘lmagan grafni hosil qilamiz, chunki agar hosil bo‘lgan grafda bunday zanjir bor bo‘lsa edi, u holda G daraxtda sikl topilar edi. Bunday bo‘lishi esa mumkin emas.

Hosil bo‘lgan graf ikkita G_1 va G_2 bog‘lamli komponentalardan iborat bo‘lib, bu komponentalarning har biri daraxtdir. Yana shuni ham e’tiborga olish kerakki, G_1 va G_2 daraxtlarning har biridagi uchlar soni k dan oshmaydi.

Matematik induksiya usuliga ko‘ra, bu daraxtlarning har birida qirralar soni uning uchlari sonidan bitta kam bo‘lishini ta’kidlaymiz, ya’ni G_1 graf (m, n)-graf bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinlidir: $n=n_1+n_2+1$, $k+1=m_1+m_2$ va $n_i=m_i-1$ $(i=1,2)$. Bu tengliklardan

$$n=n_1+n_2+1=m_1-1+m_2-1+1= (m_1+m_2)-1= (k+1)-1$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $m=k+1$ bo‘lganda ham $n=m-1$ tenglik o‘rinlidir. Bu esa, matematik induksiya usuliga ko‘ra, kerakli tasdiqning isbotlanganligini anglatadi.

Endi daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 2) tasdig‘idan uning 3) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf asiklik, ya’ni u siklga ega bo‘lmagan graf va $n=m-1$ bo‘lsin. G grafning bog‘lamli bo‘lishini isbotlash kerak.

Agar G graf bog‘lamli bo‘lmasa, u holda uni har bir bog‘lamli komponentasi siklsiz graf G_i (ya’ni daraxt) bo‘lgan qandaydir k ta $(k>1)$ graflar dizyunktiv birlashmasi sifatida $G=\bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i$ tenglik bilan ifodalash mumkin. Har bir $i=\overline{1,k}$ uchun G_i graf daraxt bo‘lgani uchun, yuqorida isbotlangan tasdiqqa ko‘ra, agar unda m_i ta uch va n_i ta qirra bo‘lsa, u holda G_i asiklikdir va $n_i=m_i-1$ tenglik o‘rinlidir. Tushunarliki, $m=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ va $n=\sum\limits_{i=1}^{k} n_i$. Demak,

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i=\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=\sum_{i=1}^{k} m_i-k=m-k,$$

ya'ni G graf uchlarining umumiy soni undagi qirralar umumiy sonidan k ta ortiqdir. Bu esa, $k>1$ bo'lgani uchun, $n=m-1$ tenglikka ziddir. Zarur tasdiq isbotlandi.

Teoremaning 3) tasdig'idan uning 4) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G — bog'lamli graf va $n=m-1$ bo'lsin. Avvalo, k ta bog'lamlilik komponentalariga ega karrali qirralari bo'lmagan sirtmoqsiz (m,n)-graf uchun

$$m-k \leq n \leq \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$$

munosabat o'rinli bo'lishini eslatamiz (ushbu bobning 4-paragrafidagi 7-teoremaga qarang).

$n=m-1$ bo'lgani sababli G bog'lamli grafdan istalgan qirra olib tashlansa, natijada m ta uch va $(m-2)$ ta qirralari bo'lgan graf hosil bo'ladiki, bunday graf $m-k \leq n$ shartga binoan bog'lamli bo'la olmaydi. Kerakli tasdiq isbotlandi.

Daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 4) tasdig'idan uning 5) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G bog'lamli graf va uning har bir qirrasi ko'prik bo'lsin, deb faraz qilib, bu grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi mumkinligini ko'rsatamiz. G bog'lamli graf bo'lgani uchun, uning istalgan ikki uchi hech bo'lmasa, bitta oddiy zanjir vositasida tutashtiriladi.

Agar qandaydir ikki uch bittadan ko'p, masalan, ikkita turli oddiy zanjir vositasida tutashtirilishi imkoniyati bo'lsa, u holda bu uchlarning biridan zanjirlarning birontasi bo'ylab harakatlanib ikkinchi uchga, keyin bu uchdan ikkinchi zanjir bo'ylab harakatlanib dastlabki uchga qaytish imkoniyati bor bo'lar edi. Ya'ni qaralayotgan grafda sikl topilar edi.

Tabiiyki, tarkibida sikl mavjud bo'lgan grafning siklga tegishli istalgan bitta qirrasini olib tashlash uning bog'lamliligi xossasini o'zgartirmaydi, ya'ni bu holda grafning siklga tegishli istalgan qirrasi ko'prik bo'lmaydi. Bu esa qilingan farazga ziddir. Teoremaning 4) tasdig'idan uning 5) tasdig'i kelib chiqishi isbotlandi.

Endi teoremaning 5) tasdig'idan uning 6) tasdig'i kelib chiqishini ko'rsatamiz. Berilgan G grafning o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikki uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi mumkin bo‘lsin. Teskarisini, ya’ni G graf asiklik emas, deb faraz qilamiz. Bu holda, G da sikl topiladi va undagi ixtiyoriy siklga tegishli istalgan turli ikkita uchni kamida ikkita oddiy zanjir vositasida tutashtirish imkoniyati bor. Bu esa G grafning o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikki uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi shartiga ziddir.

G grafninng qo‘shni bo‘lmagan v_1 va v_2 uchlarini qirra bilan tutashtirish amalini qo‘llash natijasida faqat bitta siklga ega bo‘lgan graf hosil bo‘lishini ko‘rsatamiz. Shartga binoan, qaralayotgan v_1 va v_2 uchlarni faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin. Oddiy zanjir ta’rifiga ko‘ra esa, bu zanjir tarkibida sikl yo‘q. Shuning uchun v_1 va v_2 uchlarni G grafning tarkibida bo‘lmagan (v_1, v_2) qirra bilan tutashtirish, albatta, tarkibida sikl topiladigan va bu sikl yagona bo‘lgan grafni hosil qiladi. Teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishi ham isbotlandi.

Nihoyat, 1-teoremaning 6) tasdig‘idagi shartlar bajarilsa, G grafning daraxt bo‘lishini, ya’ni teoremaning 1) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, asiklik G graf bog‘lamli bo‘lmasin. U holda bu grafning ixtiyoriy bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uchni uning boshqa bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uch bilan qirra vositasida tutashtirish amalini qo‘llash natijasida tarkibida sikl bo‘lgan graf hosil bo‘lmaydi. Bu esa 6) tasdiqning ikkinchi qismiga ziddir. ■

1-natija. Bittadan ko‘p uchga ega bo‘lgan istalgan daraxtda hech bo‘lmasa, ikkita darajasi birga teng uchlar mavjud.

Isboti. Haqiqatan ham, agar $v_1, v_2, \ldots, v_m$ berilgan daraxtning uchlari bo‘lsa, «ko‘rishishlar» haqidagi lemmaga binoan $\sum_{i=1}^{m} \rho(v_i) = 2(m-1)$ tenglik o‘rinlidir. Daraxtning ta’rifiga ko‘ra, u bog‘lamlidir, shuning uchun $\rho(v_i) \geq 1$ $(i=\overline{1,m})$. Bundan yuqoridagi tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun $\rho(v_1), \rho(v_2), \ldots, \rho(v_m)$ ketma-ketlikdagi hech bo‘lmaganda, ikkita son birga teng bo‘lishi kelib chiqadi. ■

2-natija. m ta uch va k ta bog‘lamli komponentali o‘rmondagi qirralar soni $(m-k)$ ga tengdir.

Isboti. 1-teorema isbotining 2) tasdiqdan 3) tasdiq kelib chiqishiga bag‘ishlangan qismiga qarang. ■

2-teorema. Istalgan daraxtning markazi uning bitta uchidan yoki ikkita qo‘shni uchlaridan iborat bo‘ladi.

Isboti. Agar daraxt bitta uch yoki ikkita qo'shni uch va ularni turashtiruvch qirradan tashkil topgan bo'lsa, teorema tasdig'i to'g'riligi oydindir.

G daraxt tarkibida ikkitadan ko'p uch bor, deb faraz qilamiz. G daraxtdagi darajalari birga teng barcha uchlarni (ya'ni daraxtning barcha chetki uchlarini) bu uchlarga insident barcha qirralar (ya'ni daraxtning barcha chetki qirralari) bilan birgalikda G daraxtdan olib tashlaymiz. Natijada uchlari va qirralari soni berilgan G daraxtdagi uchlar va qirralar sonidan kam bo'lgan qandaydir G' daraxtni hosil qilamiz. G' daraxtdagi har bir uch ekssentritsiteti G daraxtdagi mos uch ekssentritsitetidan bitta kam bo'lishi va bu daraxtlarning markazlari ustma-ust tushishi ravshandir.

Berilgan graf chekli bo'lgani uchun, yuqoridagi bayon etilgan jarayonni yetarlicha marta takrorlash natijasida bitta uch yoki ikkita qo'shni uch va ularni tutashtiruvch qirradan tashkil topgan qandaydir daraxtni hosil qilamiz. ■

Uchlari soni ma'lum, o'zaro izomorf bo'lmagan va qandaydir shartlarni qanoatlantiruvchi daraxtlar sonini aniqlash masalasi daraxtlarni o'rganishda muhim masala hisoblanadi. Yuqorida 4, 5 va 6 ta uchlarga ega o'zaro izomorf bo'lmagan daraxtlar, mos ravishda, 2, 3 va 6 ta ekanligi ta'kidlangan edi. A. Keli uglerod atomlari soni berilgan va C_nH_{2n+2} ko'rinishdagi kimyoviy formula bilan ifodalanuvchi to'yingan uglevodorodlar sonini topish masalasini har bir uchining darajasi bir yoki to'rt bo'lgan daraxtlar sonini topish masalasiga keltirib hal qilgan. Quyidagi teorema Keli nomi bilan yuritiladi.

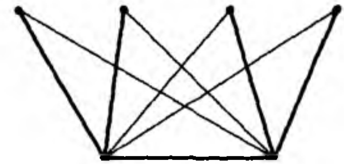
3-teorema (Keli). Uchlari soni m bo'lgan belgilangan daraxtlar soni m^{m-2} ga teng.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi.

7.2. Grafning siklomatik soni. Faraz qilaylik, G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan qandaydir bog'lamli graf bo'lsin. Bu grafdan uning biron sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash natijasida hosil bo'lgan graf bog'lamli graf bo'lishi ravshandir. Grafdan uning biron sikliga tegishli bitta qirrasini olib tashlash amalini hosil bo'lgan graflarga, imkoni boricha, ketma-ket qo'llash natijasida G grafning barcha uchlarini bog'lovchi graf-daraxtni hosil qilish mumkin. Bunday daraxt *G grafning sinch daraxti (sinchi, karkasi, qovurg'asi),* deb ataladi.

Tabiiyki, bitta grafning bir necha sinch daraxtlari mavjud bo'lishi mumkin.

2-misol. 3-shaklda tasvirlangan graf sinchlaridan birining qirralari berilgan grafning boshqa qirralariga qaraganda qalinroq chiziqlar vositasida ifodalangan. ■



2-shakl.

Endi G sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan m ta uch, n ta qirra va k ta bog'lamli komponentalardan tashkil topgan graf bo'lsin. Agar yuqorida tavsiflangan usul yordamida G grafdan qirralarni ketma-ket olib tashlash amalini qo'llash natijasida uning har bir komponentasi bog'lamliligi buzilmasa, u holda berilgan *G grafning sinch o'rmoni* deb ataluvchi grafni hosil qilish mumkin.

Berilgan G grafdan uning sinch o'rmonini hosil qilish maqsadida olib tashlanishi kerak bo'lgan qirralar soni $\lambda=\lambda(G)$ bu qirralarni olib tashlash tartibiga bog'liq emasligi va $\lambda=n-m+k$ bo'lishi ravshandir. Qaralayotgan G graf uchun $m-k\leq n$ tengsizlik o'rinli bo'lganligidan, $\lambda(G)\geq 0$ bo'ladi. $\lambda(G)$ sonni *G grafning siklomatik soni (siklik rangi),* deb ataymiz.

Grafning siklomatik soni tushunchasi, qandaydir ma'noda, grafning bog'lamlilik darajasini aniqlovchi vositadir. Ravshanki, daraxt uchun $\lambda=0$ bo'ladi (1-teoremaga qarang).

Grafning o'rmon bo'lishi uchun uning siklomatik soni nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (2-natijaga qarang).

Grafning yagona siklga ega bo'lishi uchun uning siklomatik soni birga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Qirralari soni uchlari sonidan kichik bo'lmagan graf siklga egadir. Bu tasdiqlar ham 1-teoremaning natijalaridir.

3-misol. 3-shaklda tasvirlangan graf (6,9)-graf bo'lib, uning bog'lamlilik komponentalari soni birga teng. Bu grafning siklomatik sonini aniqlasak, $\lambda=9-6+1=4$ bo'ladi. Olib tashlangan qirralar 3-shaklda ingichka chiziqlar bilan ifodalangan. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Bir-biriga izomorf bo'lmagan:
a) oltita, b) yettita, d) sakkizta, e) to'qqizta uchga ega barcha daraxtlarni geometrik ifodalang.
2. 1-shaklda tasvirlangan o'rmondagi daraxtlarning har biri uchun markaz(lar) bo'luvchi uchlarni toping.
3. Keli teoremasining isbotini o'rganing (masalan, [*10*] *kitobga qarang).*

4. Uchlari uchta va to‘rtta bo‘lgan barcha belgilangan daraxtlarni geometrik ifodalang.
5. Petersen grafining sinch daraxtlaridan birini aniqlang.
6. $K_{4,5}$ grafning sinch daraxtlaridan bir nechasini toping.
7. 12 ta uchi, 10 ta qirrasi va 3 ta bog‘lamli komponentasi bo‘lgan, sirtmoqsiz, karrali qirralari bo‘lmagan grafning sinch o‘rmonini hosil qilish uchun uning nechta qirrasini olib tashlash kerakligini aniqlang.
8. Insidentlik matritsalari quyida berilgan graflarning siklomatik sonlarini toping:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Uchlari qo‘shniligi matritsalari quyida berilgan graflarning sinch daraxtlaridan bir nechasini toping:

$$a)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qanday grafga daraxt deyiladi?
2. O‘rmon deb nimaga aytiladi?
3. O‘rmon bilan daraxt bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
4. Daraxtning uchlari va qirralari sonlari orasida qanday bog‘lanish bor?
5. Daraxtdan biron qirra olib tashlansa, natijada qanday xossalarga ega bo‘lgan graf hosil bo‘ladi?
6. Daraxtning har bir qirrasi haqida nima deyish mumkin?

7. Daraxtdagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchini nechta oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin?
8. O‘rmondagi o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uch oddiy zanjir bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘lishi mumkin?
9. Daraxtning qo‘shni bo‘lmagan ikki uchini qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?
10. O‘rmondagi qo‘shni bo‘lmagan ikki uchni qirra bilan tutashtirilsa, natijada qanday graf hosil bo‘ladi?
11. Bittadan ko‘p uchga ega bo‘lgan istalgan daraxtda qancha darajasi birga teng uchlar bor?
12. m ta uch va k ta bog‘lamli komponentasi bo‘lgan o‘rmonda qancha qirra bor?
13. Istalgan daraxtning markazi haqida nima deyish mumkin?
14. Grafning sinch daraxti deganda nimani tushunasiz?
15. Petersen grafidan bog‘lamlilikni buzmasdan nechta qirrani olib tashlash mumkin?
16. Oktaedrga mos grafdan bog‘lamlilikni buzmasdan nechta qirrani olib tashlash mumkin?
17. Grafning siklomatik soni qanday aniqlanadi?
18. Berilgan graf o‘rmon bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti siklomatik son orqali qanday ifodalanadi?
19. Graf yagona siklga ega bo‘lishining siklomatik son tushunchasi yordamida ifodalanuvchi qanday zaruriy va yetarli shartini bilasiz?

8-§. Tarmoqlar

Graf, uch, qirra, orgraf, yoy, tarmoq, to‘plam, blok-sxema, gipergraf, bog‘lamli tarmoq, sirtmoq, yoyning o‘tkazish qobiliyati, uchning chiqish va kirish yarimdarajalari, manba, o‘pqon, tarmoqdagi oqim, yoy bo‘ylab oqim, tarmoqdagi oqim miqdori, maksimal oqim, to‘yingan, to‘yinmagan, to‘g‘ri va teskari yoylar, zanjir, tarmoqning «tor joyi», kesim, manbani o‘pqondan ajratuvchi kesim, kesimning o‘tkazish qobiliyati, minimal kesim.

8.1. Tarmoq tushunchasi. Graflar nazariyasida hozirgacha ba’zi iboralar bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmaganligini qayd qilgan edik. Bu fikr graflar nazariyasining *tarmoq* va tarmoqqa oid tushunchalari bilan ish ko'rganda yaqqol namoyan bo'ladi. Ba'zan, «tarmoq» iborasi o'rniga «to'r» iborasini ham qo'llaydilar. Masalan, S.V. Yablonskiyning 1986-yilda bosilib chiqqan «Введение в дискретную математику» («Diskret matematikaga kirish») nomli o'quv qo'llanmasida ([1]da) graf tushunchasi umumlashtirilib, tarmoqning quyidagi ta'rifi berilgan va «tarmoq» tushunchasi xususida fikrlar ham bayon qilingan.

«Berilgan $M = \{a_1, a_2,...\}$ to'plam va har bir E_i elementi M dan olingan $R = \{E_0; E_1, E_2...\}$ majmuani (naborni) *tarmoq,* deb ataymiz va $M(E_0; E_1, E_2...)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $E_i = (a_{v_1(i)}, a_{v_2(i)}, ...)$. M to'plamning obyektlari tarmoq *uchlari* deb, E_0 majmuadagi obyektlar esa *tarmoq qutblari,* deb ataladi».

Yuqorida eslatilgan kitobda ta'kidlanishicha: «Adabiyotda tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar ham uchraydi, masalan, «*blok-sxema*» tushunchasi, «*gipergraf*» tushunchasi. Blok-sxema tushunchasi tarmoq tushunchasidan oldin paydo bo'lgan, gipergraf tushunchasi esa keyinroq».

Gipergraf tushunchasi — bu graf tushunchasining shunday umumlashmasiki, bunda qirralar nafaqat ikki elementli bo'lishi, ular uchlar to'plamining istalgan qism to'plamlari bo'lishi ham mumkin.

Graf tushunchasining turli umumlashmalarini ma'qullagan hamda bunday umumlashmalar turli masalalarni hal etishda zarur qurol sifatida ishlatilishini ta'kidlagan holda [10] kitobdagi tarmoq tushunchasining bir-biriga ekvivalent bo'lgan quyidagi ikki ta'rifini keltiramiz:

1) har bir a yoyiga $\psi(a)$ manfiymas haqiqiy son mos qo'yilgan N orgraf *tarmoq,* deb ataladi;

2) *tarmoq* deb shunday (D, ψ) juftlikka aytiladiki, bunda $D = (V, U)$ — orgraf, ψ esa D orgrafning yoylari to'plamini manfiymas haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya.

8.2. Tarmoqdagi oqimlar. Graflar (orgraflar) bilan bog'liq ko'plab tushunchalarni osonlik bilan tarmoqlar uchun ko'chirish mumkin.

$T=(G, b)$ tarmoq berilgan bo'lsin, bu yerda, $G=(V, U)$ — bog'lamli graf (yoki orgraf, yo bo'lmasa, aralash graf), b esa G grafning yoylarini manfiymas b_{ij} $(v_1, v_j \in V)$ haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya. G grafda sirtmoq va karrali qirra va/yoki yoylar bo'lmasin deb faraz qilamiz. Ikkita v_i va v_j uchlarni tutashtiruvchi oriyentirlanmagan yoyni (qirrani) ikkita oriyentirlangan yoylarga almashtirish mumkin, deb hisoblaymiz. Shuning uchun bundan buyon G grafni orgraf, deb hisoblash mumkin.

Ta'kidlaymizki, «tarmoq» tushunchasi har bir yoyga bir necha sonlarni mos qo'yish imkoniyatini beradi, graf (orgraf)da esa yoy faqatgina mos uchlarning tutashtirilgan yoki tutashtirilmaganligini aniqlaydi, xolos. Har bir (v_i, v_j) yoyga manfiymas b_{ij} sonni mos qo'yib, bu sonni *yoyning o'tkazish qobiliyati,* deb ataymiz. Tarmoqning har bir $v \in V$ uchi uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz: *v uchning chiqish yarimdarajasi* $\vec{\rho}(v)$ — bu v uchdan chiquvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi, *v uchning kirish yarimdarajasi* $\overleftarrow{\rho}(v)$ — bu v uchga kiruvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi.

«Ko'rishishlar» haqidagi lemma bu yerda quyidagicha ifodalanadi: *tarmoqning barcha uchlari chiqish yarimdarajalari yig'indisi ularning kirish yarimdarajalari yig'indisiga tengdir.*

Grafning uchlari orasida kirish yarimdarajalari nolga teng bo'lganlari guruhini ajratamiz. Bu guruhga tegishli uchlarning har biri *manba*, deb ataladi. Shunga o'xshash, orgrafning chiqish yarimdarajalari nolga teng bo'lgan uchlari guruhini ham ajratish mumkin. Bu guguhga tegishli har bir uch *o'pqon,* deb ataladi.

Faraz qilaylik, G orgraf faqat bitta v_s manbaga va faqat bitta v_t o'pqonga ega bo'lsin. Bir necha manba va/yoki o'pqonga ega bo'lgan tarmoqning orgrafiga yangi elementlar qo'shib olish yo'li bilan yuqoridagi xususiy holga osonlik bilan keltiriladi[1].

G orgrafning har bir (v_i, v_j) yoyiga manfiymas x_{ij} sonlar mos qo'yilgan bo'lib, biron $p \geq 0$ uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $$\sum_{(v_i, v_k) \in U} x_{ik} - \sum_{(v_k, v_j) \in U} x_{kj} = \begin{cases} -p, \text{agar } k = s \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{agar } k \neq s \text{ va } k \neq t \text{ bo'lsa,} \\ p, \text{agar } k = t \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

2) G orgrafda mavjud barcha (v_i, v_j) yoylar uchun $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$.

---

[1] Masalan, agar manbalar bittadan ko'p bo'lsa, u holda yangi (qalbaki) manba tarmoqqa kiritiladi va grafning qalbaki manbaga mos yangi uchi uning haqiqiy manbalariga mos uchlari bilan yoylar vositasida tutashtiriladi. O'pqonlar ko'p bo'lganda ham shunga o'xshash ish amalga oshiriladi.

Bu shartlar bajarilganda $X=\{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$ to'plamga T tarmoqdagi v_s manbadan v_t o'pqonga yo'nalgan *oqim* deb, p miqdorga esa, bu *X oqimning miqdori,* deb ataladi. 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi har bir x_{ij} songa (v_i, v_j) *yoy bo'ylab oqim* yoki *yoy oqimi* deyiladi.

Yuqoridagi 1) shartga ko'ra, manba va o'pqondan farqli istalgan uchga «kiruvchi» oqim shu uchdan «chiquvchi» oqimga tengdir, 2) shartga ko'ra esa, istalgan yoy bo'ylab oqim miqdori shu yoyning o'tkazish qobiliyatidan oshmaydi. 1) shartdan ko'rinib turibdiki, manbaga insident yoylar bo'yicha oqimlar yig'indisi o'pqonga insident yoylar bo'yicha oqimlar yig'indisiga tengdir:

$$\sum_{(v_s, v_j) \in U} x_{sj} = \sum_{(v_i, v_t) \in U} x_{it} = p.$$

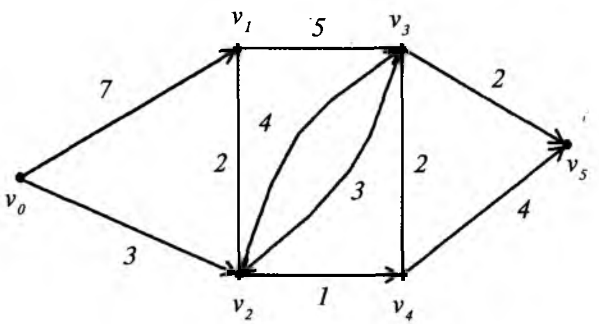
1-misol. 1-shaklda manbasi v_0 va o'pqoni v_5 bo'lgan $T=(G,b)$ tarmoq tasvirlangan bo'lib, uning yoylari yoniga mos o'tkazish qobiliyatlari yozilgan, bunda $G=(V,U)$,

$$V=\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$$U=\{(\overline{v_0, v_1}), (\overline{v_0, v_2}), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (\overline{v_2, v_3}),$$
$$(\overline{v_2, v_3}), (\overline{v_2, v_4}), (v_3, v_4), (\overline{v_3, v_5}), (\overline{v_4, v_5})\}.$$

Bu tarmoq uchun $b_{01}=7$, $b_{02}=3$, $b_{12}=2$, $b_{13}=5$, $b_{21}=2$, $b_{23}=4$, $b_{24}=1$, $b_{31}=5$, $b_{32}=3$, $b_{34}=2$, $b_{35}=2$, $b_{43}=2$, $b_{45}=4$ ekanligi shakldan ko'rinib turibdi.

Tarmoqning har bir uchi uchun chiqish yarimdarajalari va kirish yarimdarajalarini aniqlaymiz: $\vec{\rho}(v_0)= 10$, $\vec{\rho}(v_1)= 7$, $\vec{\rho}(v_2)= 7$,



1-shakl.

$$\vec{\rho}(v_3)=12, \vec{\rho}(v_4)=6, \vec{\rho}(v_5)=0, \overleftarrow{\rho}(v_0)=0, \overleftarrow{\rho}(v_1)=14,$$

$$\overleftarrow{\rho}(v_2)=8, \overleftarrow{\rho}(v_3)=11, \overleftarrow{\rho}(v_4)=3, \overleftarrow{\rho}(v_5)=6.$$

Berilgan T tarmoq orqali v_0 manbadan v_5 o'pqonga 4 kattalikka ega bo'lgan X^1 oqimni quyidagi sonlar to'plami bilan ifodalash mumkin: $x_{01}=2$, $x_{02}=2$, $x_{12}=0$, $x_{13}=2$, $x_{21}=0$, $x_{23}=1$, $x_{24}=1$, $x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{34}=2$, $x_{35}=1$, $x_{43}=0$, $x_{45}=3$. Qaralayotgan X^1 oqimning miqdori $p_1=x_{01}+x_{02}=x_{35}+x_{45}=4$. ■

Tarmoq bo'ylab o'tkazish mumkin bo'lgan oqimlar orasida miqdori eng katta (maksimal) oqimni topish amaliyot nuqtayi nazaridan katta ahamiyatga egadir. Bunday oqimlar *maksimal oqimlar,* deb ataladi. 1-misolda keltirilgan oqim maksimal oqim emas, chunki berilgan tarmoq uchun miqdori 5 bo'lgan oqim bor (ushbu paragrafning oxiriga qarang). Albatta, umumiy holda tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo'lishi mumkin.

Maksimal oqimni o'rganishda quyidagi tushunchalarni kiritish maqsadga muvofiqdir. *To'yingan yoy* — bu yoy bo'ylab oqim miqdori uning o'tkazish qobiliyatiga teng, *to'yinmagan yoy* — bu yoy bo'ylab oqim miqdori uning o'tkazish qobiliyatidan kichik.

2-misol. 1-misolda qaralgan tarmoq uchun aniqlangan X^1 oqimda $x_{01}=2<b_{01}=7$ va $x_{24}=1=b_{24}$ bo'lgani uchun (v_0, v_1) to'yinmagan, (v_2, v_4) esa to'yingan yoylardir. ■

Tarmoqdagi oqimlarni o'rganishda, *zanjir* tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Bu yerda zanjir deganda tarmoqdagi yo'nalishi e'tiborga olinmasdan bir-biriga ulangan yoylar ketma-ketligini tushunamiz. Biron zanjirga tegishli yoyning yo'nalishi zanjirdagi uchlar ketma-ketligini o'tish yo'nalishiga mos tushsa, bu yoyni *to'g'ri yoy* deb, aks holda esa, uni *teskari yoy* deb ataymiz.

Tarmoqdagi oqimlarni tadqiq qilganda kesim tushunchasi ham muhim hisoblanadi. T tarmoqning G orgrafi uchlari to'plami V ni o'zaro kesishmaydigan hamda har biri bo'sh bo'lmagan ikkita R va $\overline{R}$ qism to'plamlarga ajratamiz, ya'ni $V=R\cup\overline{R}$, $R\cap\overline{R}=\varnothing$, $R\neq\varnothing$ va $\overline{R}\neq\varnothing$.

Boshlang'ich uchi R to'plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to'plamga tegishli bo'lgan barcha yoylar to'plamini *kesim* deb ataymiz. Kesimni $(R,\overline{R})$ bilan belgilaymiz.

Agar $(R, \overline{R})$ kesim bo'lib, v_s manba R to'plamga, v_t o'pqon esa $\overline{R}$ to'plamga tegishli bo'lsa, u holda $(R, \overline{R})$ ga v_s *manbani* v_t *o'pqondan ajratuvchi* (yoki *ayiruvchi*) *kesim*, deb ataladi.

Har bir kesimga qiymati kesimni tashkil etuvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisiga teng bo'lgan va *kesimning o'tkazish qobiliyati* (yoki *miqdori*) deb ataluvchi $b\,(R, \overline{R})$ son mos qo'yilishi mumkin:

$$b(R, \overline{R}) = \sum_{v_i \in R, v_j \in \overline{R}} b_{ij}.$$

Barcha mumkin bo'lgan kesimlar ichida o'tkazish qobiliyati eng kichik bo'lganini *minimal kesim*, deb ataymiz.

Tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo'lishi mumkin ekanligini yuqorida ta'kidlagan edik. Xuddi shunga o'xshash, tarmoqda bir necha turli minimal kesimlar bo'lishi ham mumkin.

Ravshanki, agar tarmoq boshlang'ich uchi v_s manbada va oxirgi uchi v_t o'pqonda bo'lgan zanjirdangina iborat bo'lsa, bu tarmoq bo'ylab o'tkazish mumkin bo'lgan maksimal oqim qiymati shu zanjirni tashkil etuvchi yoylarning o'tkazish qobiliyatlarining minimal qiymati bilan chegaralangan bo'ladi. Shu tufayli, bu yerda, minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan yoy *tarmoqning (zanjirning) «tor joyi»* deb atalishi joyizdir.

Tarmoqdagi v_s manbani v_t o'pqondan ajratuvchi $(R, \overline{R})$ kesim iborasi istalgan tarmoqda «tor joy» iborasining o'xshashi sifatida qaralishi mumkin.

Faraz qilaylik, $X=\{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in v\}$ — T tarmoqdagi qandaydir oqim bo'lsin. Bu tarmoqdagi v_s uchdan v_t uchga yo'nalgan biron μ *yo'l bo'ylab oqim* shu yo'l yoylaridagi oqimlarning eng kichik qiymati sifatida aniqlanadi:

$$p(\mu, X) = \min_{(v_i, v_j) \in \mu} x_{ij}.$$

Tabiiyki, tarmoqdagi X oqimning miqdori $p(X)$ uchun

$$p(X) = \sum_{\mu \in M} p(\mu, X)$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda, $M-G-$ orgrafdagi v_s uchdan v_t uchga yo'nalgan barcha yo'llar to'plamidan iborat.

Kesimning ta'rifidan ko'rinib turibdiki, v_s uchdan v_t uchga olib boruvchi ixtiyoriy μ yo'l shu v_s va v_t uchlarni ajratuvchi har qanday $(R,\overline{R})$ kesimning hech bo'lmaganda bitta yoyini o'zida saqlaydi. Shuning uchun, agar ixtiyoriy $(R,\overline{R})$ kesimning barcha yoylarini tarmoqdan olib tashlasak, u holda G orgrafda v_s uchdan v_t uchga boradigan bironta ham yo'l (va, demak, oqim ham) mavjud bo'lmaydi.

Demak, yuqorida aytilganlarni hisobga olib tarmoqdagi oqim miqdori $p(X)$ bilan ixtiyoriy $(R,\overline{R})$ kesimning o'tkazish qobiliyati $b(R,\overline{R})$ uzviy bog'langan, degan xulosaga kelish mumkin. Bu bog'lanish quyidagi teoremada o'zining aniq ifodasini topgan.

1-teorema. $T=(G,\ b)$ tarmoqdagi ixtiyoriy X oqim miqdori $p(X)$ shu tarmoqdagi v_s manba va v_t o'pqonni ajratuvchi har qanday $(R,\overline{R})$ kesimning o'tkazish qobiliyatidan oshmaydi, ya'ni $p(X)\leq b(R,\overline{R})$.

Isboti. $T=(G,\ b)$ tarmoqdagi X oqim ta'rifidan bevosita quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$p(X)=\sum_{(v_s,v_j)\in U} x_{sj},\ 0=\sum_{(v_i,v_k)\in U} x_{ik}-\sum_{(v_k,v_j)\in U} x_{kj},\ v_k\in R.$$

Bu tengliklarning mos tomonlaridagi ifodalarni qo'shib va o'xshash hadlarini ixchamlab,

$$p(X)=\sum_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R})} x_{ij}-\sum_{v_j\in\overline{R},v_i\in R} x_{ji}$$

tenglikni olamiz. 2) shartni va $\sum\limits_{v_j\in R,v_i\in R} x_{ji}\geq 0$ ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan $p(X)\leq\sum\limits_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R})} b_{ij}=b(R,\overline{R})$ munosabat kelib chiqadi. ■

1955-yilda L. R. Ford[1] va D. R. Falkerson[2] tomonidan *maksimal oqim va minimal kesim haqidagi teorema,* deb ataluvchi quyidagi teorema isbotlangan.

---

[1] Bu yerda bir xil *Lester Randolph Ford* ism-sharifga ega AQSH matematiklari ota-bola L.R. Fordlarning kichigi (1927-yilda tug'ilgan) nazarda tutilgan.

[2] *D.R. Falkerson* (Delbert Ray Fulkerson, 1924—1976) — matematik.

2-teorema (Ford-Falkerson). Istalgan tarmoqda manbadan o‘pqonga maksimal oqimning miqdori manbani o‘pqondan ajratuvchi minimal kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng.

Isboti. $T=(G, b)$ tarmoq, $G=(V,U)$ orgraf, $v_s \in V$ manba, $v_t \in V$ o‘pqon va berilgan tarmoqdagi maksimal oqimning miqdori bo‘lsin. Agar tarmoqda shunday $X^* = \{x_{ij}^* | (v_i, v_j) \in U\}$ oqim topilsaki, uning $p^*=p(X^*)$ miqdori biror $(R^*, \overline{R^*})$ kesimning o‘tkazish qobiliyatiga teng bo‘lsa, 1-teoremadan shu X^* maksimal oqim, $(R^*, \overline{R^*})$ esa minimal kesim bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, teorema isbotiga ega bo‘lish uchun $p^* = b(R^*, \overline{R^*})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni qurish mumkinligini ko‘rsatish yetarli.

Bunday kesimni qurish maqsadida tarkibida, albatta, v_s uch bor bo‘lgan, lekin v_t uchni saqlamaydigan R^* to‘plamni aniqlash zarur. Bu R^* to‘plam v_s uchdan chiquvchi zanjir bilan tutashtirish mumkin bo‘lgan uchlar to‘plamidan iborat bo‘ladi. V to‘plamning qolgan uchlari $\overline{R^*}$ to‘plamni tashkil etadi.

$X^* = \{x_{ij}^* | (v_i, v_j) \in U\}$ maksimal oqim bo‘lsin, deb faraz qilamiz. Shu oqimga mos $\overline{R^*}$ to‘plamning elementlarini ketma-ket ravishda quyidagi qoida bo‘yicha aniqlaymiz:

— $v_s \in R^*$;

— agar $v_i \in R^*$ va $x_{ij}^* < b_{ij}$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$;

— agar $v_i \in R^*$ va $x_{ji}^* > 0$ bo‘lsa, u holda $v_j \in R^*$.

Agar R^* to‘plamni aniqlash jarayonida v_t uchni R^* to‘plamga kiritish imkoniyati topilmasa, ya’ni $v_t \notin R^*$ bo‘lsa, u holda izlanayotgan $(R^*, \overline{R^*})$ kesimni qurish mumkin bo‘ladi.

Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $v_t \in R^*$ bo‘lsin. U holda R^* to‘plamning aniqlanish qoidasiga asoslanib, shunday $\mu=(v_s, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}, v_t)$ zanjirni qurish mumkinki, uning barcha to‘g‘ri yoylari oqimga to‘yinmagan, teskari yoylarida esa oqim musbat bo‘ladi. μ zanjirning barcha to‘g‘ri yoylari to‘plamini $U_+(\mu)$, teskari yoylari to‘plamini esa $U_-(\mu)$ deb belgilaymiz.

Quyidagi miqdorlarni qaraymiz: $\vec{\varepsilon}=\min\limits_{(v_i,v_j)\in U_+(\mu)}(b_{ij}-x_{ij}^*)$,

$\overleftarrow{\varepsilon}=\min\limits_{(v_i,v_j)\in U_-(\mu)}x_{ij}^*$. Tushunarliki, $\varepsilon=\min(\vec{\varepsilon},\overleftarrow{\varepsilon})>0$ bo‘ladi. Agar μ yo‘lning barcha to‘g‘ri yoylarida oqim ε miqdorga oshirilib, uning barcha teskari yoylarida esa ε miqdorga kamaytirilsa, u holda tarmoqdagi oqim miqdori ε ga ortadi. Bu esa x^* oqimning maksimal oqim ekanligiga ziddir. Olingan qarama-qarshilik $v_t\in R^*$ ekanligini ko‘rsatadi.

Endi yuqorida bayon qilingan qoidani ketma-ket qo‘llab, hosil qilingan R^* to‘plam uchun $\overline{R^*}=V\setminus R^*$ deb olsak, G orgrafning R^* to‘plamga tegishli uchlarning biridan chiqib $\overline{R^*}$ to‘plamga tegishli uchlarning biriga kiruvchi barcha yoylari to‘plami $(R^*,\overline{R^*})$ kesimni tashkil etadi.

R^* to‘plamning aniqlanishiga asosan, barcha $(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})$ yoylar oqimga to‘yingan $(x_{ij}^*=b_{ij})$, $\overline{R^*}$ to‘plamga tegishli uchlardan chiqib, R^* to‘plamga tegishli uchlarga kiruvchi barcha $(v_j,v_i)\in U$ yoylarda esa oqim nolga teng $(x_{ij}^*=0)$ bo‘ladi. Shuning uchun, 1-teoremaning isbotida hosil qilingan

$$p(X)=\sum_{(v_i,v_j)\in(R,\overline{R}),}x_{ij}-\sum_{v_j\in\overline{R},v_i\in R}x_{ij}$$

formulaga ko‘ra,

$$p^*=p^*(X)=\sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})}x_{ij}^*=\sum_{(v_i,v_j)\in(R^*,\overline{R^*})}b_{ij}=b(R^*,\overline{R^*})$$

munosabatni olamiz. Demak, qurilgan $(R^*,\overline{R^*})$ kesim uchun $p^*=b(R^*,\overline{R^*})$ tenglik bajariladi. Bu yerdan, yuqoridagi eslatilgan mulohazalarga ko‘ra, teorema isbotiga ega bo‘lamiz. ■

8.3. Ford algoritmi. $T=(G,b)$ tarmoqni qaraymiz, bu yerda, $G=(V,U)$ – orgraf, b esa G orgrafning yoylarini manfiymas $b_{ij}(v_i,v_j\in V)$ haqiqiy sonlar to‘plamiga akslantiruvchi funksiya.

G orgraf faqat bitta manbaga va faqat bitta o‘pqonga ega bo‘lsin, deb faraz qilamiz. Maksimal oqim va minimal kesim haqidagi Ford-

Falkerson teoremasining yuqorida keltirilgan isboti tarmoqdagi maksimal oqimni topish algoritmini tuzish nuqtayi nazaridan konstruktivdir.

T tarmoqning uchlariga, ya'ni V to'plam elementlariga $0,1,2,...,m$ raqamlarni mos qo'yib, tarmoqning manbayi 0 uch, o'pqoni esa m uch bo'lsin, deb hisoblaymiz. Bu tarmoqda Ford tomonidan taklif etilgan maksimal oqimni topish algoritmi bilan tanishamiz. *Ford algoritmining* jadvallar bilan ish ko'riladigan jarayoni dastlabki, umumiy (takrorlanuvchi) va yakuniy qadamlardan iborat bo'lib, u quyida keltirilgan.

Dastlabki qadam. O'lchamlari $(m+1)\times(m+1)$ bo'lgan jadvalni quyidagicha tuzamiz. Agar (i, j) yoyning o'tkazish qobiliyati b_{ij} noldan katta va unga simmetrik (j, i) yoyining o'tkazish qobiliyati b_{ji} nolga teng bo'lsa, u holda jadvalning (i, j) katagiga b_{ij} sonni, uning asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik (j, i) katagiga esa, nolni yozamiz. Agar $b_{ij}=b_{ji}=0$ bo'lsa, u holda jadvalning (i, j) va (j, i) kataklari bo'sh qoldiriladi.

Umumiy qadam. 1. Tarmoqning manbayidan o'pqoniga o'tkazish xususiyati noldan katta bo'lgan yo'l izlaymiz. Buning uchun jadvalning tarmoqdagi 0 uchga mos keluvchi ustuniga «*» belgisini qo'yamiz. Jadvalning 0 uchga mos satridan $b_{0j}>0$ ($j=\overline{1,m}$) elementlarni topib, bu elementlar joylashgan ustunlarni 0 raqami bilan belgilaymiz.

Natijada tarmoqning musbat o'tkazish xususiyatiga ega bo'lgan barcha $(0, j)$ yoylari aniqlanadi. Bu yoylar manbadan o'pqonga boruvchi yo'lning dastlabki yoylaridir.

Belgiga ega ustunlar raqamlari bilan bir xil raqamli satrlarning har birini ketma-ket tekshirib chiqamiz. Tekshirish jarayonida har bir shunday satrda, masalan, jadvalning uchga mos satrida belgiga ega bo'lmagan ustunlarda $b_{ij}>0$ elementlarni izlaymiz va shunday element(lar) topilsa bu element(lar) joylashgan ustun(lar)ni tekshirilayotgan satr raqami (ya'ni i) bilan belgilaymiz.

Shu tarzda davom ettirilsa, natijada manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish xususiyatli izlangan yo'lning navbatdagi yoylari bo'lib xizmat qilishi mumkin bo'lgan yoylar topilgan bo'ladi. Jadvaldagi belgiga ega ustunlar raqamlariga mos raqamli tarmoqning uchlariga to'gri keluvchi satrlarni tekshirish jarayonini quyidagi mumkin bo'lgan hollardan biri amalga oshguncha davom ettiramiz:

a) jadvalning o'pqonga mos ustuni belgilandi;

b) jadvalning yangi ustunlarini (shu jumladan, o'pqonga mos ustunini ham) belgilash imkoniyati yo'q.

Agar a) hol ro'y bersa, u holda tarmoqda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish xususiyatiga ega bo'lgan biron μ yo'l bor. Bu yo'l quyidagicha aniqlanadi.

Jadvalning o'pqonga mos m ustunining belgisi k bo'lsin deb faraz qilaylik. Demak, μ yo'lda m uchdan oldingi uch k uchdir. Jadvalning k uchga mos satri va m uchga mos ustuni kesishgan (k, m) katagidagi b_{km} elementiga «—» belgisi (b_{km}^{-}), shu katakka asosiy diagonalga nisbatan simmetrik hisoblangan (m, k) katakdagi b_{km} elementga esa «+» belgisi (b_{mk}^{+}) qo'yamiz.

Endi jadvalning k uchga mos ustuni belgisi r raqami bo'lsin, deb faraz qilamiz. Jadvaldagi b_{mk}^{+} elementdan jadvalning k uchga mos ustuni bo'ylab harakatlanib, uning r uchga mos satriga o'tamiz va b_{rk} elementga «—» belgi, asosiy diagonalga nisbatan simmetrik b_{kr} elementga esa «+» belgi qo'yamiz. «+» va «—» belgilar qo'yish jarayonini manbaga mos 0 satrga kelib undagi mos elementga «—» belgi, simmetrik elementga esa «+» belgi qo'yguncha davom ettiramiz. Umumiy qadamning 2-bandiga o'tamiz.

Agar b) hol bajarilsa, bu holda manbadan o'pqonga boruvchi musbat o'tkazish xususiyatiga ega bo'lgan boshqa yo'l yo'q. Shuning uchun umumiy qadamni bajarish jarayoni tugaydi.

Jadvalning belgilangan ustunlariga mos orgrafning uchlari minimal o'tkazish qobiliyatiga ega bo'lgan $(R^*, \overline{R^*})$ kesim uchun R to'plamni tashkil etadi, orgrafning qolgan uchlari esa $\overline{R}$ to'plamga tegishlidir. $i \in R$ uchdan chiquvchi va $j \in \overline{R}$ uchga kiruvchi barcha (i, j) yoylar to'plami berilgan tarmoq uchun minimal kesimdir. Yakuniy qadamga o'tamiz.

2. Topilgan μ yo'l o'tkazish xususiyatining θ qiymatini topamiz. Tabiiyki, θ son μ yo'lni tashkil etuvchi yoylar o'tkazish xususiyatlarining eng kichigiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\theta = \min_{(i,j)\in\mu} b_{ij}^{-}.$$

Umumiy qadamning 3-bandiga o'tamiz.

3. Topilgan μ yo'lga tegishli yoylarning va ularga simmetrik yoylarning qolgan o'tkazish xususiyatlarini aniqlaymiz. Buning uchun jadvalning «—» belgisi bo'lgan b_{ij}^{-} elementlaridan θ sonni

ayirib, «+» belgili $\overset{+}{b_{ij}}$ elementlariga esa θ sonni qo‘shib, natijalarni jadvaldagi mos o‘rinlariga yozamiz. Jadvalning «—» yoki «+» belgisi bo‘lmagan elementlari o‘zgarmaydi. Jadvaldagi barcha belgilarni olib tashlaymiz. Natijada o‘tkazish xususiyatlari o‘zgargan tarmoqqa mos va dastlabki jadvalga o‘xshash bo‘lgan yangi jadvalni hosil qilamiz. Umumiy qadamning 1-bandiga o‘tamiz.

Yakuniy qadam. Dastlabki jadvalning elementlaridan oxirgi qadamda hosil bo‘lgan jadvalning mos elementlarini ayiramiz. Natijada musbat elementlari (i, j) yoyning mos x_{ij} oqim miqdorlariga teng bo‘lgan, elementlari esa asosiy diagonaliga nisbatan simmetrik joylashgan oxirgi jadvalni hosil qilamiz. Tarmoqdagi maksimal oqim miqdori p oxirgi jadvalning manbaga mos satri yoki o‘pqonga mos ustuni elementlari yig‘indisiga, ya’ni

$$p=\sum_{j=1}^{m} x_{0j}=\sum_{i=0}^{m-1} x_{im}.$$

Bu maksimal oqim qiymatini umumiy qadamni bajarish jarayonlarida aniqlangan barcha θ sonlarni qo‘shib ham hosil qilish mumkin. ■

3-misol. 1-misolda qaralgan tarmoq uchun v_0 manbadan v_5 o‘pqonga maksimal oqimni topish uchun Ford algoritmini qo‘llaymiz. Ford algoritmining dastlabki qadami va umumiy qadamining 1-bandini bajarib, 1-jadvalni hosil qilamiz.

Umumiy qadamning 2-bandini bajarsak, θ_1=min{7, 5, 2}=2 qiymatni topamiz. Endi umumiy qadamning 3-bandini bajarib 2-jadvalni va algoritmni qo‘llashda davom etib, 3- va 4-jadvallarni navbatma-navbat tuzamiz:

— 2-jadval uchun θ_2=min{3, 1, 4}=1;

— 3-jadval uchun θ_3=min{5, 3, 2, 3}=2.

1-jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(2)	(3)
	0	1	2	3	4	5
0		7^-	3			
1	0^+		2	5^-		
2	0	2		4	1	
3		5^+	3		2	2^-
4			0	2		4
5				0^+	0	

2-jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(2)	(4)
	0	1	2	3	4	5
0		5	3^-			
1	2		2	3		
2	0^+	2		4	1^-	
3		7	3		2	0
4			0^+	2		4^-
5				2	0^+	

3-jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)	(3)	(4)
	0	1	2	3	4	5
0		5^-	2			
1	2^+		2	3^-		
2	1	2		4	0	
3		7^+	3		2^-	0
4			1	2^+		3^-
5				2	1^+	

4-jadval

	(*)	(0)	(0)	(1)		
	0	1	2	3	4	5
0		3	2			
1	4		2	1		
2	1	2		4	0	
3		9	3		0	0
4			1	4		1
5				2	3	

5-jadval

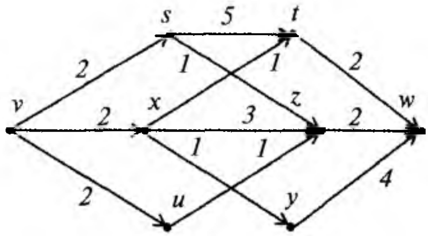
	0	1	2	3	4	5
0		4	1			
1	–4		0	4		
2	–1	0		0	1	
3		–4	0		2	2
4			–1	–2		3
5				–2	–3	

Demak, qaralayotgan tarmoqda quyida aniqlanuvchi 5 kattalikka ega oqim maksimal oqimdir: $x_{01}=4$, $x_{02}=1$, $x_{12}=0$, $x_{13}=4$, $x_{21}=0$, $x_{23}=0$, $x_{24}=1$, $x_{31}=0$, $x_{32}=0$, $x_{34}=2$, $x_{35}=2$, $x_{43}=0$, $x_{45}=3$.

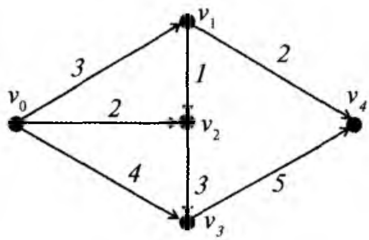
Minimal kesim sifatida tarkibidagi R va $\overline{R}$ qism to'plamlari $R=\{0, 1, 2, 3\}$ va $\overline{R}=\{4,5\}$ ko'rinishda aniqlangan $(R,\overline{R})$ kesimni ko'rsatish mumkin. Bu kesim (2, 4), (3, 4) va (3, 5) yoylardan tashkil topishi ravshan. ■

Muammoli masala va topshiriqlar

1. 2-shaklda tasvirlangan tarmoqda v uchni manba, w uchni esa o'pqon deb hisoblab, undagi bir necha oqimni aniqlang.



2-shakl.



3-shakl.

2. Ford algoritmni qo'llab 3-shaklda tasvirlangan tarmoq uchun v_0 dan v_4 ga maksimal oqimni aniqlang.
3. Ford algoritmni qo'llab 2-shaklda tasvirlangan tarmoq uchun v dan w ga maksimal oqimni aniqlang.
4. $T=(G, b)$ tarmoqda $G=(V, U)$, $V=\{a_0, a_1,..., a_n\}$, U — yoylar korteji, b_{ij} — (a_i, a_j) yoyning o'tkazish xususiyati, $X=\{x_{ij}:(a_i, a_j)\in U\}$ esa maksimal oqim bo'lsin. U vaqtda hech bo'lmaganda bitta $(a_i, a_j)\in U$ yoy topilib, shu yoy uchun $x_{ij} = b_{ij}$ tenglik bajarilishini ko'rsating.
5. $T=(G, b)$ tarmoqda $G=(V, U)$, $V=\{a_0, a_1,..., a_n\}$, a_0 — manba, a_n — o'pqon, U —yoylar korteji, b_{ij} — (a_i, a_j) yoyning o'tkazish xususiyati va $X=\{x_{ij}:(a_i, a_j)\in U\}$ biror oqim bo'lsin. Agar a_0 va a_n ni bog'lovchi zanjirning barcha (a_i, a_j) to'g'ri yoylarida $x_{ij}< b_{ij}$ va barcha teskari yoylarda esa $x_{ij}> 0$ bo'lsa, u holda bu zanjirga X oqimni *orttiruvchi yo'l* deymiz. Berilgan X oqimning maksimal oqim bo'lishi uchun uni orttiruvchi yo'lning topilmasligi zarur va yetarli ekanligini ko'rsating.

1. Graf tushunchasi qanday umumlashtirilishi mumkin?
2. Tarmoqdagi oqim deganda nimani tushunasiz?
3. Yoyning o'tkazish xususiyati nima?
4. Graf uchlarining chiqish va kirish yarimdarajalari deb nimaga aytiladi?
5. Tarmoqda manba va o'pqon deganda nimani tushunasiz?
6. Yoy bo'ylab oqim nima?
7. Tarmoqdagi oqim miqdori qanday aniqlanadi?
8. Tarmoqdagi maksimal oqim deganda nimani tushunasiz?
9. To'yingan yoy bilan to'yinmagan yoy bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
10. To'g'ri yoy bilan teskari yoy orasida qanday farq bor?
11. Tarmoqdagi manbani o'pqondan ajratuvchi kesim qanday aniqlanadi?
12. Tarmoqdagi minimal kesim deganda nimani tushunasiz?
13. Ford-Falkerson teoremasiga ko'ra, istalgan tarmoqda manbadan o'pqonga maksimal oqimning miqdori nimaga teng?
14. Tarmoqdagi maksimal oqimni topishga mo'ljallangan Ford algoritmning jadvallar bilan ish ko'radigan jarayoni qanday qadamlardan iborat?

IV bob. KOMBINATORIKA MASALALARINING ALGORITMI VA DASTURI

Ushbu bobda kombinatorika masalalaridan takrorlanmaydigan hamda takrorli o'rinlashtirish, o'rin almashtirish amallarini tahlil qilish, o'rinlashtirish va o'rin almashtirishni taqqoslashlarning xossalarini namoyish qiluvchi algoritmlar va ushbu masalalarga tuzilgan dasturlar keltirilgan. Bundan tashqari, Maple tizimida kombinatorika masalalarini yechish jarayoni Fibonachchi sonlarining oddiy xossalari misolida keltirilgan.

1-§. Takrorli o'rinlashtirish amalini tahlil qilish algoritmi va dasturi

Kombinatorika chekli to'plamlarning oldindan berilgan ba'zi xususiyatlariga ega bo'lgan elementlarini qayta hisoblash va sanab o'tishni amalga oshiradi. Qayta hisoblash bilan sanab o'tishning farqini quyidagi misoldan ko'rish mumkin. Milliondan ortiq aholisi bo'lgan shaharlarni bir mamalakat miqyosida hisoblab chiqish — bu biron sonni aytish demakdir, bunday shaharlarni sanab o'tish esa, bu shaharlarning ro'yxatini aniqlashdir. Kombinatorikaning algoritmlari to'plamlar elementlarini sanab o'tish masalasini tez hal qilishga imkon beradi. Sanash masalalarining ba'zilari EHMsiz hosil qiluvchi funksiyasi yordamida hal etiladi (энумератор yordamida), lekin hammasi ham emas. Bundan tashqari, hosil qiluvchi funksiyasidan foydalanish, algoritm va dastur, uni tahrir qilishdan ko'ra ko'proq vaqt oladi. Kerak bo'lganda qayta hisoblash masalalari ham kombinatorikaning algoritmlari yordamida yechilishi mumkin, vaholanki, qayta hisoblashning masalalari, asosan, EHMsiz hal etiladi. Shuni unutmaslik kerakki, algoritmlar qayta hisoblashning muayyan masalasi uchun javobni sonlarda beradi, nazariya bo'lsa, qayta hisoblash masalalari guruhlarini birlashtiruvchi formulalarda beradi.

n ta elementdan iborat chekli to'plamning *r* ta elementlarini tanlash ((*n*, *r*)-yozuv bilan belgilanadi) masalasini ko'rib chiqamiz. Tartiblangan to'plamdan (*n*,*r*)- tanlash, *n* ta elementdan *r* tadan o'rinlashtirish deyiladi, tartiblanmagan to'plamdan (*n*,*r*)- tanlash *n* ta elementdan *r* bo'yicha gruppalash deyiladi. Tabiiyki, aynan o'sha *n* elementlardan *r* bo'yicha gruppalashga qaraganda, o'rinlashtirish ko'proq bo'ladi. Bundan tashqari, (*n*,*r*)-tanlashda elementlar takrorlangani va takrorlanmagani bo'lishi mumkin. (*n*,*r*)-tanlashda takrorli o'rinlashtirishlarning soni $\overline{A_n^r}$ orqali belgilanadi va u *nr* ga teng, ya'ni $\overline{A_n^r} = nr$ (II bobdagi 4-paragrafning 2-bandiga qarang).

(*n*,*r*)_*o'rin* dasturi barcha n^r takrorli o'rinlashtirishlarni hosil qilib beradi:

```
program (n,r)_o'rin;
const n=5; r=3;
var i,j,k,a:integer;
begin
   a:=n;for i:=2 to r do a:=a*i;
  for i:=1 to a do
   begin
    k:=i-1;
     for j:=1 to r do
     begin
       write((k mod n)+1); k:=k div n;
     end;
    write(' ');
   end;
  writeln;
end.
```

Bu yerda *a* o'zgaruvchining qiymati takrorli o'rinlashtirishlarning n^r soniga teng. Bu yerda *n* ta butun sonlardan iborat to'plamdan 1 dan *n* gacha bo'lgan sonlar tanlanadi. Agar to'plam *b* [1] dan *b* [*n*] gacha bo'lgan *n* ta elementdan iborat bo'lsa, u holda dastur quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

```
program (n,r)_o'rin2;
const n=5; r=3;
var i,j,a,k:integer;b:array[1..n] of integer;
begin
   a:=n; for i:=2 to r do a:=a*n;
   for i:=1 to n do read(b[i]); readln;
```

```
  for i:=1 to a do
    begin
      k:=i-1;
        for j:=1 to r do
        begin
            write(b[(k mod n)+1]:1); k:=k div n;
        end;
      write(' ');
    end;
  writeln;
end.
```

Bu yerda massiv *b* butun sonlar to'plamidan iborat, biroq u haqiqiy, mantiqiy, simvolli, harfli va h.k. o'zgaruvchilar to'plami ham bo'lishi mumkin. *b* to'plamning har bir elementi va uning o'zi ham massiv, to'plam, satr va h.k. bo'lishi mumkin. Ko'rinib turibdiki, *(n,r)_o'rin2* dasturida *(n,r)_o'rin* dasturiga qaraganda, faqat *b* massivning kiritilishi qo'shimcha bo'ldi va ekranda ularni joylashtirish o'zgardi. Bu kabi o'zgarishlarni istalgan dasturga kiritish qiyin emas. Shuning uchun ish davomida qulaylik bo'lishi uchun, faqat 1 dan *n* gacha butun sonlar to'plamidan *(n,r)*-tanlash bajariladi.

(n,r)_o'rin dasturining ishlashi natijasida *n*-lik sanoq sistemasidagi hamma *r*-xonali sonlar hosil qilinadi, bunda xonadagi qiymatlar bir birlikka kattalashtirilgan boladi. Masalan, $\bar{A}_5^3$ uchun natija quyidagi ko'rinishda bo'ladi: 111 211 311 411 511 121 ... 521 131... 551 112 ... 555. Bu yerda hammasi bo'lib 125 (5^3) ta uch xonali sonlar hosil qilinadi. Har bir xonada qiymatlar 1 dan 5 gacha o'zgaradi. Bunday ketma-ketlik EHMsiz oson tuziladi va *(n,r)_o'rin* dasturi bu maqsadda tuzilmadi. Dasturning barcha takrorli n^r o'rinlashtirishlarni chiqarmasdan, balki muayyan xususiyatga ega bo'lganlarini chiqaradigan qilib tuzish qiyin emas. Masalan, xonadagi qiymatlar yig'indisi muayyan songa teng (katta, kichik) bo'lgan takrorli o'rinlashtirishlarni aniqlaydigan dasturni tuzish mumkin.

$\bar{A}_5^3$ uchun xonalardagi qiymatlar yig'indisi 8 ga teng bo'lgan takrorli o'rinlashtirishlarni chiqaruvchi dastur quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

program *(n,r)_o'rin3*;

```
const n=5; r=3;
var i,j,a,k,s,p:integer;
begin
  a:=n; for i:=2 to r do a:=a*n;
  for i:=1 to a do
   begin
     k:=i-1;s:=0;
      for j:=1 to r do
      begin
         s:=s+(k mod n)+1; k:=k div n;
      end;
     if s=8 then
      begin
         k:=i-1;for j:=1 to r do
         begin
            write(((k mod n)+1):1); k:=k div n;
         end;
        write(' ');
      end;
   end;
  writeln;
end.
```

Bu yerda s o'zgaruvchi — xonalardagi qiymatlar yig'indisi. (n,r)-o'rinlashtirishda xonalardagi qiymatlariga qo'yiladigan shartlar turlicha bo'lishi mumkin. $n>r$ bo'lganda takrorli o'rinlashtirishlarga yana bir misol keltiramiz: o'z xonalarida to'plamning hamma n elementlari qatnashadigan takrorli o'rinlashtirishlarni chiqarish kerak bo'lsin. $\bar{A}_5^3$ uchun dastur quyidagicha bo'ladi:

```
program (n,r)_o'rin4;
const n=3; r=5;
var i,j,a,k,s:integer;d:array[1..n] of integer;
begin
  a:=n; for i:=2 to r do a:=a*n;
  for i:=1 to a do
   begin
      k:=i-1;for j:=1 to n do d[j]:=0;for j:=1 to r do
     begin
        d[(k mod n)+1]:=1; k:=k div n;
     end;
```

```
          s:=d[1]; for j:=2 to n do s:=s*d[j];
        if s=1 then
          begin
            k:=i-1;for j:=1 to r do
            begin
              write(((k mod n)+1):1); k:=k div n;
            end;
           write(' ');
          end;
        end;
      writeln;
    end.
```

Bu yerda d-yordamchi massiv boʻlib, agar toʻplamning *i* elementi tanlashda ishtirok etsa, u holda d[i]=1, aks holda d[i]=0 boʻladi. (n,r)-oʻrinlashtirishdagi xonalar qiymatlariga qoʻyiladigan shartlar toʻgʻri (korrektli) boʻlishi kerak, ya'ni bunaqa oʻrinlashtirish mavjud boʻlmagan holat uchramasligi kerak. Masalan, (5,3)-oʻrinlashtirishda xonalar qiymati yigʻindisi 15 dan katta boʻlgan takrorli (5,3) oʻrinlashtirish mavjud emas.

(5,3) takrorli oʻrinlashtirish misolida qayta hisoblash masalasini koʻrib chiqamiz. Navbatdagi dastur oʻrinlashtirishdagi xonalar qiymatining yigʻindisi 8 ga teng boʻlgan oʻrinlashtirishlar qanchaligini aniqlaydi.

```
program (n,r)_o'rin4;
const n=5; r=3;
var i,j,a,k,s,p:integer;
begin
  p:=0;a:=n; for i:=2 to r do a:=a*n;
  for i:=1 to a do
   begin
     k:=i-1;s:=0;
      for j:=1 to r do
      begin
        s:=s+(k mod n)+1; k:=k div n;
      end;
     if s=8 then p:=p+1;
   end;
  writeln('p=',p:8);
end.
```

Bu yerda s xonalardagi qiymatlar yig'indisi, p berilgan shartni qanoatlantiruvchi o'rinlashtirishlar soni. Hosil qiluvchi funksiyasi yordamida berish mumkin bo'lgan shartlarning hammasini dasturda berish mumkin, biroq buning aksini iloji yo'q.

Enumerator va denumeratorlar (hosil qiluvchi funksiyalar) tanlashda to'plam elementlarining mavjud yoki mavjud emasligini istalgan to'g'ri shartlarning kombinatsiyasi mavjudligini hisobga olish imkonini beradi. Shunday qilib, tanlashda xonalar qiymatlari yig'indisiga qo'yiladigan shartlarni hosil qiluvchi funksiyasi yordamida hisobga olib yechishning iloji yo'q. O'rinlashtirishlar uchun enumeratorlar mavjud emas, gruppalash uchun esa bor.

Qayta hisoblash uchun hosil qiluvchi funksiyalari (denumeratorlar) o'rinlashtirishlar uchun ham, gruppalash uchun ham mavjud.

Endi o'rinlashtirishlarda to'plam elementlarining takrorlanishsiz joylashishini ko'rib chiqamiz. Takrorlanmaydigan (n,r)-o'rinlashtirishlar soni A_n^r bilan belgilanadi va $n!/(n-r)!$ ga teng, ya'ni $A_n^r = n!/(n-r)!$ (II bobdagi 2-paragrafning 2.2-bandiga qarang). Bu yerda r qat'iy ravishda n dan katta emas, lekin takrorli o'rinlashtirishlarda n va r istalgan butun sonlar bo'lishi mumkin.

(n,r)_o'rin5 dasturi barcha takrorlanmaydigan (n,r)-o'rinlashtirishlarni hosil qiladi:

```
program (n,r)_o'rin5;
const n=5; r=3;
var i,j,k,l,a,f:integer; m:array[1..n] of integer;
begin
  a:=1;for i:=n-r+1 to n do a:=a*i;
  for i:=1 to a do
   begin
     k:=i-1; for j:=1 to n do m[j]:=j;
     for j:=1 to r do
     begin
       l:=k mod (n-j+1)+1; k:=k div (n-j+1);
        write(m[l]:1); for f:=1 to n-j do m[f]:=m[f+1];
     end;
    write('_ ');
   end;
  writeln;
end.
```

Bu yerda a, xuddi avvalgidek o'rinlashtirishlarning umumiy soni. O'rinlashtirishning i nomeri bo'yicha uning ko'rinishi hosil qilinadi. M[1...n]- yordamchi massiv bo'lib, o'rinlashtirishda xonalardagi qiymatlar takrorlanmasligi uchun kerak. *(n,r)_o'rin* dasturi n^r formulaga asoslangani kabi, *(n,r)_o'rin5* dasturi n!/(n-r)! formulaga asoslangan. Bu yerda 1 dan r gacha o'zgaradigan *j* bo'yicha sikldagi l o'zgaruvchi 1 dan (*n-j*+1) gacha o'zgaradi, *(n,r)_o'rin* dasturida esa, bu o'zgarish j ga bog'liq emas edi va l o'zgaruvchi 1 dan *n* gacha o'zgarar edi.

O'rinlashtirishda xonalar qiymatining takrorlanishidan qochish uchun *j* bo'yicha 2 dan *r* gacha siklning har bir navbatdagi qadamida xonalar qiymatini hosil qiluvchi oldingi qadamdagi qiymatni olish uchun berilgan elementlar sonidan bitta kam bo'lgan, to'plam elementlari sonidan olinadi. Birinchi qadamda birinchi xona qiymatlari barcha *n*- elementli to'plamdan olinadi, ikkinchi qadamda- (*n*-1) elementlardan olinadi, ..., *r*- qadamda (*n-r*+1) elementlar to'plamidan olinadi.

j-xonaga to'plamning 1-qiymati qabul qildirilgandan keyin, to'plamning (1+1)-dan (*n-j*) gacha barcha elementlari bir element oldinga siljiydi.

Navbatdagi (*j*+1)-xona aniqlashda M[1]=*m*[1+1],...,*m*[*n-j* +1]. (*n-j*)-element oxirida joylashadi. Shunday qilib, to'plamning 1-elementi yo'q qilinadi, keyingi xonalar qiymatlarini aniqlashda u ko'rib chiqilmaydi. To'plam elementlari qiymatlarini yo'qotish orqali amalga oshiriladigan bunday siljish dastur ishlashining vaqtini ko'paytiradi.

Dasturni to'plam elementlariga qo'yiladigan shartlar asosida murakkablashtirish mumkin. Takrorli o'rinlashtirishlar xonalariga qiymatlar yig'indisi tengligiga qo'yiladigan shartlar to'g'ri bo'lishi mumkin, takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlarning $r < n$ bo'lgandagi barcha *n* elementlariga qo'yiladigan shartlar mavjud emas.

2-§. Gruppalash amalini tahlil qilish algoritmi va dasturi

Endi takrorlanmaydigan gruppalash amalini tahlil qilish algoritmi va dasturini ko'rib o'tamiz. Takrorlanmaydigan (*n*,*r*)- gruppalashlar soni C_n^r orqali belgilanadi va u *n*!/((*n-r*)!*r*!) ga teng bo'ladi, ya'ni C_n^r — *n*!/((*n-r*)!*r*!) (II bobdagi 2-paragrafning 2.3-bandiga qarang). Bizning maqsadimiz, oldingidek I gruppalashlar nomeri bo'yicha gruppalashga kiruvchi barcha qiymatlarni olish mumkin. Masalan, barcha takrorlanmaydigan (5,3) gruppalashlarni sanab o'tamiz : 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345. Bunday gruppalashlar 10 ta $10=5!/(3!2!)=C^3_5$.

Sezamizki, *j*-xonada (*j*=1,2,3) qiymat (*n*-*r*+*j*) dan katta emas. Takrorlanmaydigan (5,3) gruppalash uchun *j*=3 bo'lganda (oxirgi xona) qiymat beshdan katta emas, *j*=2 da to'rtdan katta emas, *j*=1 bo'lganda uchdan katta emas. Dastur navbatdagi gruppalashni oldingisidan tuzadi, birinchisi bo'lsa (1,2,...,*r*) beriladi.

Dastur gruppalashdan eng oxirgi *r*- xonadan boshlab, xonadagi barcha qiymatlarni ko'rib chiqadi. *m*[*j*] qiymati (*n*+*j*-*r*) dan kichik bo'lgan *j* xona barcha takrorlanishsiz gruppalashlar uchun (oxirgisidan tashqari) doim mavjud bo'ladi.

Ayni misoldagi oxirgi gruppalash bizni qiziqtirmaydi, negaki, undan so'ng gruppalash yo'q. Gruppalashlar oxiridan boshlab, bunday *j* xonani topganimizdan keyin, undagi *m*[*j*] qiymat bir qiymatga ko'payadi, navbatdagi (*j*+1) xonadagi qiymat esa yangi m [*j*] dan bir qiymatga ko'p bo'ladi. Oxirgi *r*-xona qiymati yangi m [*j*] qiymatdan (*r*-*j*) ga ko'p bo'ladi. Soch dasturi takrorlanmaydigan barcha (*n*,*r*) gruppalashlarni sanab chiqadi:

```
program soch;
const n=5; r=3;
var i,j,l,c,f:integer; m:array[1..n] of integer;
begin
  c:=r+1; for i:=r+2 to n do c:=c*i;
  f:=1;for i:=2 to n-r do f:=f*i;c:=c div f;
  for i:=1 to n do
   begin
      m[i]:=i; if i<=r then write(m[i]:1);
   end;
  write('  '); for i:=2 to c do
   begin
     f:=0; j:=r; repeat
       if m[j]<(n-r+j) then
       begin
           m[j]:=m[j]+1; for l:=j+1 to r do
          m[l]:=m[j]+l-j; f:=1;
       end;
     j:=j-1;
      until f=1; for j:=1 to r do write(m[j]:1); write('  ');
   end;
  writeln;
end.
```

Bu yerda, c — gruppalashlarning umumiy soni, m [1...n]-xonadagi qiymatlar massivi, 1-gruppalashdagi kerakli xonasini topishni bildiradigan bayroq. Bu masala rekursiv *nab protsedurasi* yordamida yechilishi mumkin:

```
program soch1;
const n=5; r=3;
var i,j,c,f:integer; m:array[1..n] of integer;
protcedure nab(p:integer);
begin
   m[p]:=m[p]+1; if m[p]>n-r+p then
    begin
      f:=p-1;nab(f);
    end;
end;
begin
   c:=r+1; for i:=r+2 to n do c:=c*i;
   f:=1;for i:=2 to n-r do f:=f*i;c:=c div f;
   for i:=1 to n do
    begin
       m[i]:=i; if i<=r then write(m[i]:1);
    end;
   write('  '); for i:=2 to c do
    begin
        f:=r; nab(f); for j:=f+1 to r do m[j]:=m[j-1]+1;
        for j:=1 to r do write(m[j]:1); write('  ');
    end;
  writeln;
end.
```

Bu yerda, f-gruppalashdagi kerakli xona nomeri. *Soch* va *soch 1* dasturlaridagi algoritm bir xil, lekin natija (realizatsiya) turlicha. Barcha takrorli gruppalashlarni hisoblab o'tish uchun $\overline{C_n^r} = C_{n+r-1}^r$ formuladan foydalanamiz (II bobdagi 2-paragrafning 2.3-bandiga qarang). Buning uchun butun sonlarni n elementli to'plamini $(n+1)$ dan $(n+r-1)$ gacha qiymat oladigan $(r-1)$ ga ko'paytiramiz. Takrorli gruppalashdagi ko'paytirilgan to'plamdan $(n+1)$ ga teng elementga yig'ish, gruppalashdagi birinchi xona joylashgan elementni ikkilanganligini (dubshravakie elementa) bildiradi. Takrorli gruppalashlarning ko'paytirilgan to'plamidan $(n+j)$ ga teng element, gruppalashda j-xonada joylashgan elementni ikkilantirilganligini (дубшравакие) bildiradi. Agar oxirgi xonadagi element ($n+r-1$) ga teng bo‘lsa, u holda oxirgi r-xonada undan oldin qanday element bo‘lgan bo‘lsa, shu element bo‘lishi kerak. Gruppalashdagi birinchi xona qiymatlari $(n-r-1)-r+1=n$ dan katta emas, ya’ni kattalashtirilgan to‘plamdagi ikkilangan elementlar hech qachon birinchi xonada joylashmaydi. Ikkinchi xonada ($n+1$) ga teng bo‘lgan ikkilangan birinchi element joylashishi mumkin. Gruppalashdagi uchinchi xonada ikkilantirishning ($n+1$) va ($n+2$) ga teng ikki elementi joylashishi mumkin. Agar gruppalashning birinchi xonasida son, boshqa xonalarga ikkilantirishning elementlari bo‘lsa, u holda gruppalash birinchi xonasidagi qiymatlarga teng bir xil r qiymatlardan iborat bo‘ladi. *Sochp* dasturi takrorli barcha (n,r) gruppalashlarni sanab o‘tadi:

```
program sochp;
const n=5; r=3;
var i,j,l,c,f:integer; m:array[1..(n+r-1)] of integer;
mp:array[1..r] of integer;
begin
  c:=r+1; for i:=r+2 to n+r-1 do c:=c*i;
  f:=1;for i:=2 to n-1 do f:=f*i;c:=c div f;
  for i:=1 to n+r-1 do
   begin
     m[i]:=i; if i<=r then write(m[i]:1);
   end;
  write('  '); for i:=2 to c do
   begin
    f:=0; j:=r; repeat
      if m[j]<(n-1+j) then
      begin
          m[j]:=m[j]+1; for l:=j+1 to r do
        m[l]:=m[j]+l-j; f:=1;
      end;
     j:=j-1;
     until f=1; for j:=1 to r do
     begin
        mp[j]:=m[j]; if m[j]>n then
        mp[j]:=mp[m[j]-n];write(mp[j]:1);
     end;
    write(' ');
   end;
  writeln;
end.
```

$C_n^{-r} = C_{n+r-1}^r$ formulani chiqarish usuliga asoslangan algoritmni ham taklif qilish mumkin. Bu yerda har bir (n,r)—takrorli gruppalashga mos ravishda r-nollar va $(n-1)$ birlardan tashkil topgan $(n+r-1)$ uzunlikning ikkilik vektori qo'yiladi. Birinchi birdan oldin turadigan nollar soni (n,r)—takrorli gruppalashga kiruvchi n qiymatlar soniga teng. *M/n*: n=5, r=3 bo'lganda (5,3)-takrorli gruppalash {2,2,4} ko'rinishda bo'ladi, bu holda 7 uzunlikning ikkilik vektori 1001101 bo'ladi; {1,5,5} uchun — 0111100 bo'ladi. (n,r) — takrorli gruppalashlar va $(n-1)$ gruppalashdagi hamda r- nollarga ega ikkilik vektorlar o'rtasidagi mutanosiblik o'zaro bir xil ahamiyatli.

Boshqa tomondan, r-nollar va $(n-1)$ birliklarga ega ikkilik vektorlar soni $((n+r-1)$,r)—takrorlanmaydigan gruppalashlar $(n+r-1)$ ikkilik vektor uzunligidagi nolli xona nomerlaridan iborat bo'ladi. 1001101 ikkilik vektor uchun yuqorida keltirilgan misollar uchun (7,3)—takrorlanmaydigan gruppalash {2,3,6} ko'rinishda bo'ladi, 01111000 uchun esa {1,6,7} bo'ladi. Bundan chiqadiki dastur {2,3,6} ni {2,2,4} ga, {1.6.6} ni {1,5,5} ga o'girishi kerak. *Sochp1* dasturi $((n+r-1),r)$—takrorlanmaydigan gruppalashni (n,r)—takrorli gruppalashga o'giradi.

```
program sochp1;
const n=5; r=3;
var i,j,l,c,f:integer; m:array[1..r] of integer;
begin
   c:=r+1; for i:=r+2 to n+r-1 do c:=c*i;
   f:=1;for i:=2 to n-1 do f:=f*i;c:=c div f;
   for i:=1 to n do
    begin
       m[i]:=i; if i<=r then write((m[i]-i+1):1);
    end;
   write(' '); for i:=2 to c do
    begin
      f:=0; j:=r; repeat
        if m[j]<(n-1+j) then
        begin
           m[j]:=m[j]+1; for l:=j+1 to r do
          m[l]:=m[j]+l-j; f:=1;
        end;
      j:=j-1;
```

```
    until f=1; for j:=1 to r do write((m[j]-j+1):1); write(' ');
   end;
  writeln;
end.
```

Bu yerda **soch** dasturiga qaraganda, ekranga chiqarish o'zgartirilgan va n o'rniga $n+r-1$ qo'yilgan. Ekranga chiqarishda $m[i]$ (i=1...r) o'rniga **soch** dasturida ($m[i]-i+1$) chiqariladi. Birinchi (i=1) xonalardagi qiymatlar (n,r)—takrorli gruppalash va (($n+r-1$)—takrorlanmaydigan gruppalashlar uchun bir xil bo'ladi, ammo ixtiyoriy i uchun esa bu gruppalashlarning i-xonasidagi qiymatlar farq qiladi va u i ga teng. *Sochp* va *sochp1* dastrulari ham ekranga chiqishi bilan farqlanadi va ularning tezligi bir xil. Biroq kimga bir algoritm tushunarli bo'lsa, kimgadir ikkinchisi.

ASOSIY BELGILASHLAR

Kitobda quyidagi asosiy belgilashlar qabul qilingan

N — natural sonlar to'plami.
Z — butun sonlar to'plami.
R — haqiqiy sonlar to'plami.
$\varnothing$ — bo'sh to'plam.
U — universal to'plam.
$|A|$ — A to'plamning quvvati.
$\bigcup$ — birlashma belgisi.
$\bigcap$ — kesishma belgisi.
$A \setminus B$ — A to'plamdan B to'plamni ayirish natijasida hosil bo'lgan to'plam.
$\overline{A_B}$ — A to'plamni B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam.
$\overline{A}$ — A to'plamni U universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam.
2^A — A to'plam uchun bulean.
P_n — n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni.
A_n^m — n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni.
C_n^m — n ta elementdan m tadan gruppalashlar soni.
$C_n(n, n_2, \ldots, n_k)$ — n ta komponentali kortej uchun takrorli o'rin almashtirishlar soni $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$.
$\overline{A}_n^m$ — n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni.
$\overline{C}_n^m$ — n ta elementdan m tadan takrorli gruppalashlar soni.
$B(n, k)$ — qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni.
$B(n)$ — qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olingan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga barcha bo'laklanishlari soni.
$R(n,k)$ — qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning k ta qo'shiluvchilarga bo'laklanishlari soni.
$R(n)$ — qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinmagan holda natural n sonning barcha bo'laklanishlari soni.
$\blacksquare$ — teorema, natija, lemma, xossaning isboti yoki misol, algoritm tugaganligi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *С. В. Яблонский.* Введение в дискретную математику. М., «Наука», 1986.
2. *Н. Я. Виленкин.* Комбинаторика. М., «Наука», 1969.
3. *Н. Н. Воробьев* . Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1969.
4. *В. А. Успенский.* Треугольник Паскаля. М., «Наука», 1966.
5. *А. Кофман.* Введение в прикладную комбинаторику. М., «Наука», 1975.
6. *В. Липский.* Комбинаторика для программистов. М., «Мир», 1988.
7. *Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., «Мир», 1980.
8. *Д. Кнут.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. 1976, т. 2. 1977, т. 3. 1977.
9. Лекции по теории графов. М., «Наука», 1990.
10. *Р. Уилсон.* Введение в теорию графов. М., «Наука», 1980.
11. *О. Оре.* Теория графов. М., «Наука», 1980.
12. *А. А. Зыков.* Основы теории графов. М., «Наука», 1987.
13. *Ф. Харари.* Теория графов. М., «Мир», 1973.
14. *T. To'rayev.* Matematik mantiq va diskret matematika. T., «O'qituvchi», 2003.
15. *П. П. Гаврилов, А.А. Сапоженко.* Сборник задач по дискретной математике. М., 1977.
16. *В. А. Евстигнеев.* Применение теории графов в программировании. М., «Наука», 1985.
17. *Л. Е. Захарова.* Алгоритмы дискретной математики. Учебное пособие. М., Изд-во Московского Государственного института электроники и математики, 2002.
18. *M. A. Sobirov.* Matematik fanlardan ruscha-o'zbekcha lug'at. T., «O'qituvchi», 1983.
19. *Ф.А. Новиков.* Дискретная математика для программистов. СПб., «Питер», 2000.
20. *О. П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский.* Дискретная математика для инженера. 2-е изд. М., «Энергоатомиздат», 1988.
21. *Д. Кук, Г. Бейз.* Компьютерная математика. М., «Наука», 1990.
22. *Л. Т. Кузин.* Основы кибернетики. Том 2. М., «Энергия», 1979.
23. *Э. Мендельсон.* Введение в математическую логику. М., «Наука», 1971.
24. *С. Клини.* Математическая логика. М., «Мир», 1973.
25. *И. Гроссман, В. Магнус.* Группы и графы. М., «Мир», 1971.
26. *Euler L.* (Leonb Eulero) Solvtio problematis ad geometriam sitvs pertinentis. Comment Academiae Sci I. Petropolitanue, 8, 1736.

27. *А. Ю. Пушников.* Введение в системы управления базами данных. Часть 1. Реляционная модель данных. Учебное пособие. Изд-е Башкирского ун-та, Уфа, 1999.

28. *E. F. Codd.* A relational model of data for large shared data banks. Communications of the ACM, 1970. Vol. 13, No. 6, June 1970.

29. *Lucas, E.* Récréations Mathématiqques. Paris: Gautheir-Villas, 1891.

30. *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1989.

31. *И.П. Нотансон.* Теория функцй вещественной переменной. М., «Наука», 1974.

32. *И. П. Макаров.* Дополнительные главы математического анализа. М., «Просвещение», 1988.

33. *G. A. Sarimsoqov.* Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. T., «O'qituvchi», 1968.

34. *Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М., «Наука», 1976.

35. *Я.М. Ерусалимский.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения. М., «Вузовская книга», 2000.

36. *Soleev A.* Ordering in Complicated Problems. In 14-th British Combinatorical Conference. Keele, GB, July, 1993. Abstracts.

37. Квант. 1978, № 8.

38. *С.К. Ландо.* Лекции о производящих функциях. 2-е изд. М., МЦНМО, 2004.

39. *Р. Стенли.* Перечислительная комбинаторика. М., «Мир», 1990.

40. *Омар Хайям.* Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда. М., Издательство восточной литературы, 1961.

41. *С.Б. Морочник, Б.А. Розенфельд.* Омар Хайям — поэт, мыслитель, учёный. «Таджикгосиздат», 1957.

MUNDARIJA

II bob. KOMBINATORIKA

III bob. GRAFLAR NAZARIYASI

HOTAM JO'RAYEV, ISMOIL AZIZOV, SALIM OTAQULOV

KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI

Oliq o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma

Toshkent — «ILM ZIYO» — 2009

Muharrir *I. Usmonov*
Badiiy muharrir *Sh. Odilov*
Texnik muharrir *F. Samadov*
Musahhih *M. Ibrohimova*

2009-yil 3-sentabrda chop etishga ruxsat berildi. Bichimi $60\times90\ ^1/_{16}$.
«Tayms» harfida terilib, ofset usulida chop etildi. Nashr tabog'i 15,5.
Bosma tabog'i 16,0. 1000 nusxa. Bahosi shartnoma asosida.
Buyurtma № 202

«ILM ZIYO» nashriyot uyi, Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30-uy.
Shartnoma № 14—2009.

"KO'HI-NUR" MCH bosmaxonasida matn chop etildi.
Toshkent sh. "Mashinasozlar" mavzesi, 4.

"PAPER MAX" XK bosmaxonasida muqovalandi.
Toshkent sh., Sarikul ko'chasi, 34a.

T97 JAMOA. Kombinatorika va graflar nazariyasi.
Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma. —
T.: «ILM ZIYO», 2009. — 256b

I. Muallifdosh.

BBK22141ya73+22. 176ya73

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

....

ISBN 978-9943-303-85-0

9 789943 303850

«ILM ZIYO»