MATEMATIKA 10

ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI

GEOMETRIYA

I QISM

O‘rta ta’lim muassasalarining 10-sinfi va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi muassasalari o‘quvchilari uchun darslik

1-nashri

O‘zbekiston Respublikasi Xalq ta’limi vazirligi tasdiqlagan

TOSHKENT
2017

UO‘K 51(075.3)
KBK 22.1ya721
M 54

Algebra va analiz asoslari bo‘limining mualliflari:

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov.

Geometriya bo‘limining muallifi:

B.Q. Haydarov

Taqrizchilar:

R.B. Beshimov – Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti "Geometriya va topologiya" kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari doktori.

M.D. Pardayeva – Respublika Ta’lim markazi direktorining o‘rinbosari.

D.E. Davletov – Nizomiy nomidagi TDPU "Matematika o‘qitish metodikasi" kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari nomzodi.

G‘.M. Rahimov – TIQXMMI qoshidagi akademik litsey o‘qituvchisi, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

A.A. Akmalov – Toshkent shahar XTXQTMOI prorektori, pedagogika fanlari nomzodi, dotsent.

Darslikning "Algebra va analiz asoslari" bo‘limida ishlatilgan belgilar va ularning talqini:

– masalani yechish (isbotlash) boshlandi

– masalani yechish (isbotlash) tugadi

– nazorat ishlari va test (sinov) mashqlari

– savol va topshiriqlar

– asosiy ma’lumot

– murakkabroq mashqlar

Respublika maqsadli kitob jamg‘armasi mablag‘lari hisobidan chop etildi.

ISBN 978-9943-48-595-2

I BOB

TO‘PLAMLAR. MANTIQ

1-4 TO‘PLAM TUSHUNCHASI, TO‘PLAMLAR USTIDA AMALLAR. TO‘LDIRUVCHI TO‘PLAM

To‘plam matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan bo‘lib, uni o‘zidan soddaroq tushunchalar orqali ta’riflab bo‘lmaydi. Turmushda ma’lum obyektlar majmuasini bir butun narsa deb qarashga to‘g‘ri keladi. Aytaylik, biolog biror o‘lkadagi o‘simliklar va hayvonot dunyosini o‘rganar ekan, u jonzotlarni turlar bo‘yicha, turlarni esa urug‘lar bo‘yicha sinflarga ajratib chiqadi. Har bir tur yaxlit bir butun deb qaraladigan jonzotlar majmuasidir.

To‘plam ixtiyoriy tabiatli obyektlardan tashkil topgan bo‘lishi mumkin. Masalan, Osiyo qit’asidagi barcha daryolar yoki lug‘atdagi barcha so‘zlar to‘plam bo‘la oladi.

Majmualarning matematik tavsifini berish uchun to‘plam tushunchasini taniqli nemis matematigi **G.Kantor** (1845–1918) quyidagicha kiritgan:

«To‘plam fikrda bir butun deb qaraluvchi ko‘plikdir».

To‘plamni tashkil etgan obyektlar uning *elementlari* deyiladi.

To‘plam, odatda, qulaylik uchun, lotin alifbosining bosh harflari, masalan, $A, B, C, \ldots$, uning elementlari esa kichik harflari, masalan, $a, b, c, \ldots$ bilan belgilanadi.

Elementlari $a, b, c, \ldots$ bo‘lgan A to‘plam qavslar yordamida $A = \{a, b, c, \ldots\}$ kabi yoziladi.

$\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ yozuvlar bitta to‘plamni anglatadi.

Masalan, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – o‘nlik sanoq sistemasidagi raqamlar to‘plami, $V = \{a, e, i, o, u\}$ – ingliz tilidagi unli harflar to‘plami. 10-a sinfidagi o‘quvchilar to‘plamini $\{a_1, a_2, \ldots, a_{30}\}$ bilan belgilasak, a_1 – jurnaldagi birinchi nomerli o‘quvchini, ..., a_{30} – jurnaldagi o‘ttizinchi nomerli o‘quvchini bildiradi.

x ning A to‘plamning elementi ekani $x \in A$ kabi, elementi emasligi esa $x \notin A$ kabi yoziladi va birinchi holda "*x element A ga tegishli*", ikkinchi holda "*x element A ga tegishli emas*" deb o‘qiladi.

Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ uchun $4 \in A$, ammo $9 \notin A$.

Agar to‘plamni tashkil qilgan elementlar chekli sonda bo‘lsa, bunday to‘plam **chekli to‘plam,** aks holda **cheksiz to‘plam** deyiladi.

Masalan, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ to‘plam chekli, $\mathbb{N}=\{1, 2, ..., n, ...\}$ − barcha natural sonlar to‘plami esa cheksiz to‘plamdir.

$n(A)$ deb chekli A to‘plamning barcha elementlari sonini belgilasak, $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ to‘plamning barcha elementlari soni 6 ga teng bo‘lgani uchun, $n(A)=6$ bo‘ladi.

Cheksiz to‘plamga yana bir misol sifatida 13 dan kichik bo‘lmagan barcha natural sonlar to‘plamini keltirsa bo‘ladi.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam **bo‘sh to‘plam** deyiladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi.

$\emptyset$ to‘plam ham chekli hisoblanadi va uning uchun $n(\emptyset)= 0$.

Cheksiz A to‘plam uchun $n(A)= \infty$ belgilash qabul qilingan.

Agar A to‘plamning hamma elementlari B to‘plamga tegishli bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamning **qism to‘plami** deyiladi va $A \subseteq B$ kabi yoziladi.

Bunday holatda "*A to‘plam B da yotadi*" yoki "*A to‘plam B ning qismi*" ham deb yuritiladi.

$\{a\}$ to‘plam $\emptyset$ va $\{a\}$, ya’ni ikkita qism to‘plamga ega.

$\{a, b\}$ to‘plam esa to‘rtta: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ va $\{a, b\}$ qism to‘plamlarga ega.

Masalan, $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, chunki birinchi to‘plamning hamma elementlari ikkinchi to‘plamning ham elementlari bo‘ladi.

A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlari mavjud bo‘lsa, A to‘plam B ning qism to‘plami bo‘la olmaydi va bu holat $A \not\subset B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$ bo‘lsin. $1 \notin B$ bo‘lgani uchun $A \not\subset B$.

Ravshanki, $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ munosabatlar o‘rinli.

$A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lsa, bu to‘plamlar aynan bir hil elementlardan iborat bo‘lib, ular **teng** (ustma-ust tushuvchi) **to‘plamlar** deyiladi hamda bu $A = B$ kabi yoziladi.

Masalan, muntazam uchburchaklar to‘plami barcha burchaklari o‘zaro teng bo‘lgan uchburchaklar to‘plami bilan ustma-ust tushadi. Buning sababi ixtiyoriy muntazam uchburchakning barcha burchaklari teng va aksincha, agar uchburchakda barcha burchaklar teng bo‘lsa, u muntazam bo‘ladi.

Asosiy sonli to‘plamlarni eslatib o‘tamiz:

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ – natural sonlar to‘plami; $\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ – butun sonlar to‘plami; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ – ratsional sonlar to‘plami; $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ – haqiqiy sonlar to‘plami.

To‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi

1) A, B to‘plamlarning **birlashmasi** deb bu to‘plamlardan kamida bittasining elementi bo‘lgan elementlardan tashkil topgan to‘plamga aytiladi.

A, B to‘plamlarning birlashmasi $A \cup B$ kabi belgilanadi.

Masalan, $P=\{1, 3, 4\}$ va $Q=\{2, 3, 5\}$ uchun $P \cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) A, B to‘plamlarning **kesishmasi** deb bu to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to‘plamga aytiladi.

A, B to‘plamlarning kesishmasi $A \cap B$ kabi belgilanadi.

Masalan, $P=\{1, 3, 4\}$ va $Q=\{2, 3, 5\}$ uchun $P \cap Q=\{3\}$.

Umumiy elementlarga ega bo‘lmagan ikkita to‘plam **o‘zaro kesishmaydigan** to‘plamlar deyiladi.

1-misol. $M = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ va $N = \{3, 4, 6, 9, 10\}$ to‘plamlar uchun quyidagilarni aniqlang:

a) rost yoki yolg‘on ekanini: **I** $4 \in M$; **II** $6 \notin M$;

b) to‘plamlarni toping: **I** $M \cap N$; **II** $M \cup N$;

c) rost yoki yolg‘on ekanini: **I** $M \subseteq N$; **II** $\{9, 6, 3\} \subseteq N$.

△ a) 4 soni M to‘plamning elementi bo‘lmagani uchun $4 \in M$ munosabat yolg‘on. 6 soni M to‘plamning elementi bo‘lmagani uchun $6 \notin M$ munosabat rost.

b) $M \cap N = \{3, 9\}$, chunki faqat 3 va 9 sonlarigina ikkala to‘plamning ham elementlaridir. $M \cup N$ to‘plamni topish uchun yoki M ga, yoki N ga tegishli bo‘lgan elementlarni yozamiz: $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $M \subseteq N$ munosabat yolg‘on, chunki M to‘plamda N ga tegishli bo‘lmagan elementlari bor. $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ munosabat rost, chunki N da $\{9, 6, 3\}$ to‘plam elementlari bor. ▲

Mashqlar

1. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ belgilardan foydalanib, yozing:

a) 5 soni D to‘plamning elementi;

b) 6 soni D to‘plamning elementi emas;

c) $\{2, 5\}$ to‘plam $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ to‘plamning qism to‘plami;

d) $\{3, 8, 6\}$ to‘plam $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ to‘plamning qism to‘plami emas;

2. a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;
c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to‘plamlar uchun $A \cup B$ va $A \cap B$ larni toping.

3. To‘plamlarning elementlari sonini toping:
a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$;
b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
c) $A \cap B$;
d) $A \cup B$.

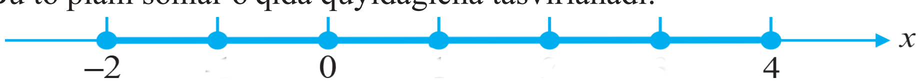
4. To‘plamlarning chekli yoki cheksiz ekanini aniqlang:
a) 10 dan katta ammo 20 dan kichik natural sonlar to‘plami;
b) 5 dan katta bo‘lgan natural sonlar to‘plami.

5. To‘plamlardan qaysilari o‘zaro kesishmaydi:
a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

Ayrim hollarda to‘plamni berish uchun uning elementlari uchun o‘rinli, boshqa elementlar uchun o‘rinli bo‘lmagan *xarakteristik xossa* ko‘rsatiladi. Agar x element *P xossaga* ega degan fikr qisqacha $P(x)$ deb yozilgan bo‘lsa, P xossaga ega bo‘lgan barcha elementlar to‘plami $\{x|P(x)\}$ ko‘rinishda belgilanadi.

Masalan, $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$ yozuv quyidagicha o‘qiladi: "–2 dan katta yoki teng hamda 4 dan kichik yoki teng bo‘lgan barcha butun sonlar to‘plami".

Bu to‘plam sonlar o‘qida quyidagicha tasvirlanadi:



Ko‘rinib turibdiki, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ va u chekli, bunda $n(A) = 7$.

Xuddi shunday $B = \{x \mid -2 \leqslant x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ yozuv quyidagicha o‘qiladi: "–2 dan katta yoki teng hamda 4 dan kichik bo‘lgan barcha haqiqiy sonlar to‘plami".

Bu to‘plam sonlar o‘qida quyidagicha tasvirlanadi:

Ko‘rinib turibdiki, $B = [-2, 4)$ va u cheksiz, bunda $n(B) = \infty$.

2-misol. $A = \{x \mid 3 < x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ bo‘lsin.

a) Bu yozuv qanday o‘qiladi?

b) Bu to‘plamning elementlarini nomma-nom yozib chiqing;

c) $n(A)$ ni toping.

a) "3 dan katta hamda 10 dan kichik yoki teng bo‘lgan barcha butun sonlar to‘plami";

b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $n(A) = 7$.

Mashqlar

6. To‘plamlardan qaysilari chekli, qaysilari cheksiz:

a) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{x \mid x \geqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$?

7. Yozuvlarni o‘qing:

a) $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{x \mid -2 < x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$;

c) $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbb{Q}\}$.

Agar mumkin bo‘lsa, shu to‘plamlar elementlarini nomma-nom yozib chiqing.

8. Quyidagi to‘plamlarni yozing:

a) "–100 dan katta hamda 100 dan kichik bo‘lgan barcha butun sonlar to‘plami";

b) "1000 dan katta bo‘lgan barcha haqiqiy sonlar to‘plami";

c) "2 dan katta yoki teng hamda 3 dan kichik yoki teng bo‘lgan barcha ratsional sonlar to‘plami".

9. Savollarga javob bering:

a) $\{a, b, c\}$ va $\{a, b, c, d\}$ to‘plamlarning barcha qism to‘plamlarini yozing. Ular nechta?

b) Agar B to‘plam n ta elementga ega bo‘lsa, u holda B to‘plam nechta qism to‘plamga ega?

10. Qaysi hollarda $A \subseteq B$ bo‘ladi?

a) $A = \varnothing$ va $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ va $B = \{8, 9\}$;

c) $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{R}\}$ va $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$;

d) $A = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Q}\}$ va $B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{R}\}$;

e) $A = \{x \mid -10 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ va $B = \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 5, z \in \mathbb{Z}\}$;

f) $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$ va $B = \{y \mid 0 < y \leqslant 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Faraz qilaylik, bizni 1 dan katta yoki teng hamda 8 dan kichik yoki teng bo‘lgan barcha natural sonlar to‘plami qiziqtirsin va biz uning qism to‘plamlarini qaramoqchimiz.

Odatda, bu holda $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$ to‘plam kiritiladi va u **universal to‘plam** deb yuritiladi.

A to‘plamning A' **to‘ldiruvchisi** deb U universal to‘plamning A ga tegishli bo‘lmagan barcha elementlari to‘plamiga aytiladi.

Masalan, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ universal to‘plam bo‘lsa, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ to‘plamning **to‘ldiruvchisi** $A' = \{2, 4, 6\}$ to‘plam bo‘ladi.

Ravshanki,
- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = U$
- $n(A) + n(A') = n(U)$,

ya’ni A va A' to‘plamlar umumiy elementlarga ega emas hamda ularni tashkil qilgan barcha elementlar U ni hosil qiladi.

3-misol. Universal to‘plam $U = \{$*barcha natural sonlar*$\}$ bo‘lsa, C' ni toping.

a) $C = \{$*barcha juft sonlar*$\}$;

b) $C = \{x \mid x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.

△ a) $C' = \{$*barcha toq natural sonlar*$\}$;

b) $C' = \{x \mid x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$. ▲

4-misol. $U = \{x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid -3 \leqslant x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ bo‘lsa, quyidagi to‘plam elementlarini yozing:

a) A; b) B; c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A' \cap B$; h) $A' \cup B'$.

△ a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$;
c) $A' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 5\}$;
d) $B' = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5\}$;
e) $A \cap B = \{1\}$;
f) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;
g) $A' \cap B = \{-3, -2, -1, 0\}$;
h) $A' \cup B' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. ▲

Mashqlar

11. C' ni toping.

a) $U = \{$*ingliz tili harflari*$\}$, $C = \{$*unli harflar*$\}$;

b) $U = \{$*butun sonlar*$\}$, $C = \{$*manfiy butun sonlar*$\}$;

c) $U = \mathbb{Z}$, $C = \{x \mid x \leqslant -5, x \in \mathbb{Z}\}$;

d) $U = \mathbb{Q}$, $C = \{x \mid x \leqslant 2$ *yoki*, $x \geqslant 8, x \in \mathbb{Q}\}$.

12. $U = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$ bo‘lsa, qo‘yidagilarni toping:

a) A; b) A'; c) B; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A \cap B'$.

13. $n(U) = 15$, $n(P) = 6$, $n(Q') = 4$ bo‘lsa, quyidagilarni toping:

a) $n(P')$; b) $n(Q)$.

14. $U = \{ x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$,
$B = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bo‘lsa, quyidagilarni toping:

a) B'; b) C'; c) A'; d) $A \cap B$;
e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$; g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

5-misol. $U = \mathbb{N}$, $P = \{4$ *soning* 50 *dan kichik bo‘lgan karralilari*$\}$ va $Q = \{6$ *soning* 50 *dan kichik bo‘lgan karralilari*$\}$ bo‘lsin.

a) P, Q to‘plamlar elementlarini yozing;
b) $P \cap Q$ ni toping;
c) $P \cup Q$ ni toping;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ tenglikning bajarilishini tekshiring.

△ a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,
$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;
b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;
c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;
d) $n(P \cup Q) = 16$ va $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Demak, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ tenglik o‘rinli ekan. ▲

Mashqlar

15. $U = N$, $P = \{25$ *dan kichik bo‘lgan tub sonlar*$\}$ va
$Q = \{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$ bo‘lsin.

a) P to‘plam elementlarini yozing;
b) $P \cap Q$ ni toping;
c) $P \cup Q$ ni toping;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(\mathrm{Q}) - n(P \cap Q)$ tenglikning bajarilishini tekshiring.

16. $U = \mathbb{N}$, $P = \{30$ *ning bo‘luvchilari*$\}$ va
$Q = \{40$ *ning bo‘luvchilari*$\}$ bo‘lsin.

a) P, Q to‘plamlarning elementlarini yozing;
b) $P \cap Q$ ni toping;
c) $P \cup Q$ ni toping;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ tenglikning bajarilishini tekshiring.

17. $U = \mathbb{N}$, $P = \{4$ *soning* 30 *va* 60 *sonlari orasidagi karralilari*$\}$ va
$Q = \{6$ *soning* 30 *va* 60 *sonlari orasidagi karralilari*$\}$ bo‘lsin.

a) P, Q to‘plamlarning elementlarini yozing;
b) $P \cap Q$ ni toping;
c) $P \cup Q$ ni toping;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ tenglikning bajarilishini tekshiring.

18. $U = \{ x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bo‘lsa, quyidagilarni toping:

a) B'; b) C'; c) A';
d) $A \cap B$; e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$;
g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

19. $U = \mathbb{Z}$, $C = \{ y \mid -4 \leqslant y \leqslant -1, y \in \mathbb{Z}\}$ va $D = \{ y \mid -7 \leqslant y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$ bo‘lsin.

a) C, D to‘plamlarning elementlarini yozing;
b) $C \cap D$ ni toping;
c) $C \cup D$ ni toping;
d) $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ tenglikning bajarilishini tekshiring.

20. $U = \mathbb{N}$, $P = \{12$ *ning bo‘luvchilari*$\}$, $Q = \{18$ *ning bo‘luvchilari*$\}$ va $R = \{27$ *ning bo‘luvchilari*$\}$ bo‘lsin.

a) P, Q, R to‘plamlarning elementlarini yozing;
b) **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$;
III $Q \cap R$; **IV** $P \cup Q$;
V $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;
c) **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup$ R,
larni toping.

21. $U = \mathbb{N}$, $A = \{4$ *soniningi* 40 *dan kichik bo‘lgan karralilari*$\}$, $B = \{6$ *sonining* 40 *dan kichik bo‘lgan karralilari*$\}$ va $C = \{12$ *sonining* 40 *dan kichik bo‘lgan karralilari*$\}$ bo‘lsin.

a) A, B, C to‘plamlarning elementlarini yozing;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$ ni toping;
d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ tenglikning bajarilishini tekshiring.

22. $U = \mathbb{N}$, $A = \{6$ *sonining* 31 *dan kichik bo‘lgan karralilari*$\}$, $B = \{30$ *ning bo‘luvchilari*$\}$ va $C = \{30$ *dan kichik bo‘lgan tub sonlar*$\}$ bo‘lsin.

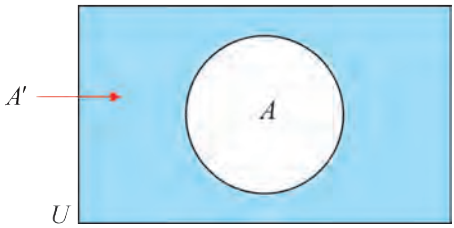
To‘plamlarning elementlarini yozing:
a) A, B, C;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$ ni toping;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ tenglikning bajarilishini tekshiring.

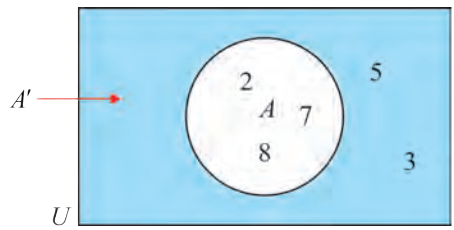
Venn diagrammalari

To‘plamlarni *Venn diagrammalari* yordamida tasvirlash maqsadga muvofiq. Venn diagrammasida U universal to‘plam – to‘g‘ri to‘rtburchak, to‘plam esa shu to‘g‘ri to‘rtburchak ichida yotgan doira kabi tasvirlanadi.

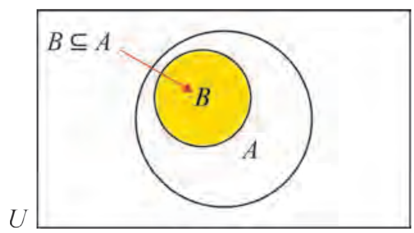
Masalan, rasmda U universal to‘plam ichida A to‘plam tasvirlangan. Aylana tashqarisidagi bo‘yalgan soha A to‘plamning A' to‘ldiruvchisini bildiradi:



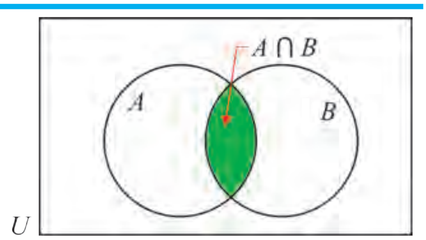
$U = \{2,3,5,7,8\}$, $A = \{2,7,8\}$ va $A' = \{3,5\}$ bo‘lsa, shu to‘plamlar Venn diagrammasida quyidagicha tasvirlanadi:



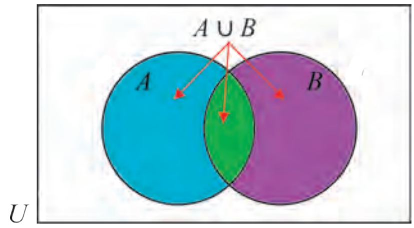
Agar $B \subseteq A$ bo‘lsa, u holda B to‘plamning ixtiyoriy elementi A to‘plamga tegishli. Demak, bunga mos Venn diagrammasida B to‘plamni ifodalovchi doira A to‘plamni ifodalovchi doira ichida yotadi:



$A \cap B$ kesishma elementlari ham A ga, ham B ga tegishli bo‘ladi. Demak, bunga mos Venn diagrammasida $A \cap B$ to‘plamni ifodalovchi bo‘yalgan soha shunday tasvirlanadi:



$A \cup B$ birlashma elementlari yoki A ga, yoki B ga, yoki ikkalasiga tegishli bo‘ladi. Demak, bunga mos Venn diagrammasida $A \cup B$ to‘plamni ifodalovchi soha quyidagicha tasvirlanadi:

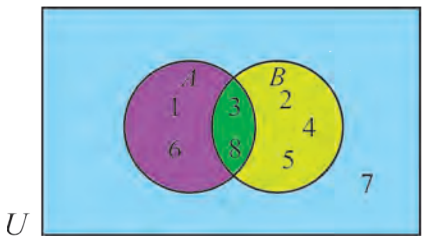


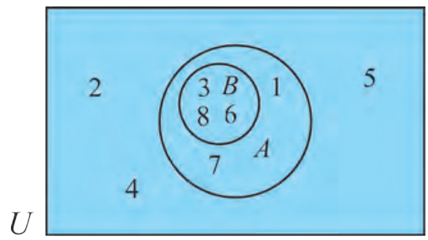
6-misol. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bo‘lsa, quyidagi to‘plamlarni Venn diagrammasida tasvirlang:

a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ va $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ va $B = \{3, 6, 8\}$.

△ a) $A \cap B = \{3, 8\}$ b) $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $B \subseteq A$





▲

Mashqlar

23. A, B to‘plamlarni Venn diagrammasida tasvirlang:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ va $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ va $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ va $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}$, $A = \{3, 4, 5, 7\}$ va $B = \{3, 5\}$.

24. $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{10$ *dan kichik bo‘lgan toq sonlar*$\}$ va $B = \{10$ *dan kichik bo‘lgan tub sonlar*$\}$ bo‘lsin.

a) A, B to‘plamlarning elementlarini yozing;

b) A, B to‘plamlarni Venn diagrammasida tasvirlang;

c) $A \cap B$ va $A \cup B$ to‘plamlarni toping.

25. $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{6$ *ning karralilari*$\}$ va $B = \{9$ *ning karralilari*$\}$ bo‘lsin.

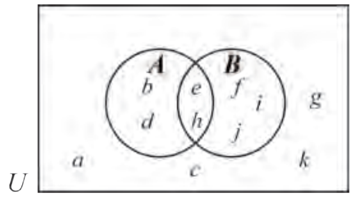
a) A, B to‘plamlarning elementlarini yozing;

b) $A \cap B$ va $A \cup B$ to‘plamlarni toping;

c) A, B to‘plamlarni Venn diagrammasida tasvirlang.

26. *A, B* to'plamlar Venn diagrammasida tasvirlangan.

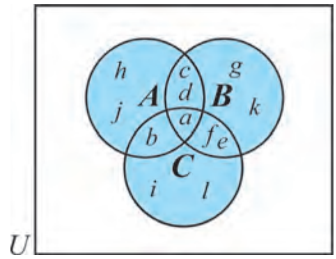
Quyidagi to'plamlarning elementlarini yozing:



II A; **II** B; **III** A'; **IV** B';
V $A \cap B$; **VI** $A \cup B$; **VII** $(A \cup B)'$; **VII** $A' \cup B'$.

27.

A, B, C to'plamlar Venn diagrammasida tasvirlangan.



a) To'plamlarning elementlarini yozing:

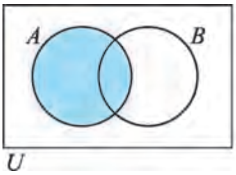
I A; **II** B;
III C; **IV** $A \cap B$;
V $A \cup B$; **VI** $B \cap C$;
VII $A \cap B \cap C$; **VII** $A \cup B \cup C$.

b) Quyidagilarni toping:

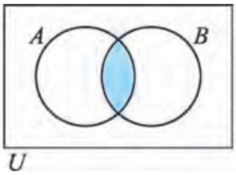
I $n(A \cup B \cup C)$;

II $n(A) + n(B) + n(C) -$
$- n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

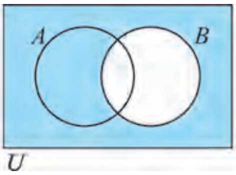
Venn diagrammasida to'plamlarni bo'yab tasvirlash mumkin.
Masalan, rasmda, mos ravishda, A, $A \cap B$, B', $A \cap B'$ to'plamlar bo'yalgan:



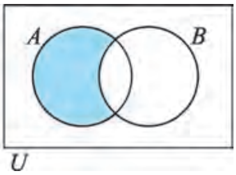
A



$A \cap B$



B'

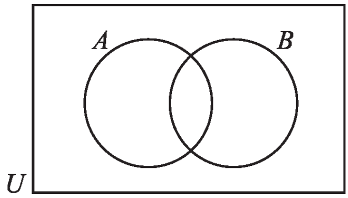


$A \cap B'$

Mashqlar

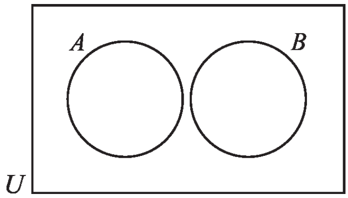
Diagrammalarni daftaringizga ko'chiring va ko'rsatilgan to'plamlarni bo'yang:

28.



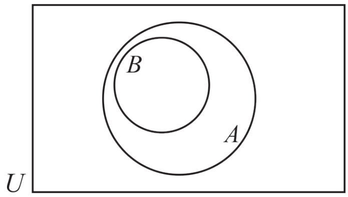
a) $A \cap B$; b) $A \cap B'$;
c) $A' \cup B$; d) $A \cup B'$;
e) $(A \cap B)'$; f) $(A \cup B)'$.

29.



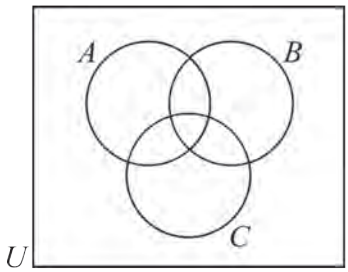
a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)$`.

30.



a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

31.



a) A; b) B';
c) $B \cap C$; d) $A \cup B$;
e) $A \cap B \cap C$; f) $A \cup B \cup C$;
g) $(A \cap B \cap C)'$; h) $(A \cup B) \cup C$;
i) $(B \cap C) \cap A$.

5-7 MULOHAZALAR. INKOR, KONYUNKSIYA VA DIZYUNKSIYA

Rost yoki yolg‘on bo‘lgan darak gap ***mulohaza*** deyiladi.

Savol shaklidagi gaplar, shaxsning munosabatini bildiruvchi darak gaplar, masalan, "Yashil rang yoqimlidir" mulohaza bo‘la olmaydi.

Ayrim mulohazalarning rost-yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanmaydi.

Masalan, "Bu yozuvchi Toshkentda tavallud topgan" mulohaza tayin bir yozuvchiga nisbatan rost, boshqasiga nisbatan yolg‘on bo‘lishi mumkin.

1-misol. Quyidagilardan qaysi biri mulohaza bo‘ladi?
Agar u mulohaza bo‘lsa, uning rost-yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanadimi?

a) $20:4=80$; b) $25\cdot 8=200$;
c) Mening qalamim qayerda?
d) Sening ko‘zlaring moviy rangda.

△ a) Bu mulohaza va u yolg‘on, chunki $20:4=5$ bo‘ladi;
b) bu mulohaza va u rost;
c) bu so‘roq gap bo‘lgani uchun, u mulohaza bo‘lmaydi;

d) bu mulohaza, uning rost-yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanmaydi, chunki ayrim insonlarga nisbatan u yolg‘on, ayrimlariga nisbatan esa rost.

Biz mulohazalarni p, q, r ... harflar bilan belgilaymiz.

Masalan, p: Seshanba kuni yomg‘ir yog‘di;
q: 20:4=5;
r: x – juft son.

Murakkabroq mulohazalarni tuzish uchun $\wedge$ (konyunksiya – "va", "ammo"), $\vee$ (dizyunksiya – "yoki"), $\neg$ (inkor – "... emas", "... noto‘g‘ri") ***mantiqiy bog‘lovchilar*** deb ataluvchi maxsus belgilardan foydalaniladi.
Ularni qarab chiqaylik.

Inkor

p mulohaza uchun "p emas" yoki "p ekani noto‘g‘ri" shakldagi mulohaza p ning ***inkori*** deyiladi va $\neg p$ kabi belgilanadi.

Masalan, p: Seshanba kuni yomg‘ir yog‘di
mulohazaning inkori
$\neg p$: Seshanba kuni yomg‘ir yog‘madi;

p: Madinaning ko‘zi moviy
mulohazaning inkori
$\neg p$: Madinaning ko‘zi moviy emas bo‘ladi.

Ravshanki, p rost bo‘lsa, $\neg p$ yolg‘on, p yolg‘on bo‘lsa $\neg p$ rost mulohaza bo‘ladi. Bu ma’lumot ***rostlik jadvali*** yordamida sharhlanadi. Bunday jadval p ga qarab yangi $\neg p$ mulohazaning rostlik qiymati rost T[1] yoki yolg‘on F[1] ligini aniqlaydi:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Mashqlar

32. Quyidagilardan qaysi biri mulohaza bo‘ladi? Agar u mulohaza bo‘lsa, uning rost-yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanadimi?

a) 11−5=7; b) 12 – juft son; c) $2 \in Q$; d) $2 \notin Q$.
e) Parallelogramm 4 ta tomonga ega;
f) 37 – tub son;
g) Sening bo‘ying necha santimetr?
h) Barcha kvadratlar to‘rtburchak;
i) Qor yog‘moqdami?
j) To‘rtburchak parallelogramm emas;
k) Sening ukang 13 yoshda;

[1] T va F harflari, mos ravishda, inglizcha "true" (rost), "false" (yolg‘on) so‘zlarining bosh harflaridir.

l) Senga tarixiy kitoblar yoqadimi?
m) Madina yaxshi kuylaydi;
n) Sen Samarqandda tug‘ilgansan;
o) Qarama-qarshi burchaklar o‘zaro teng;
p) Parallel to‘g‘ri chiziqlar kesishadi.

33. Mulohazalarning inkorini yozing. Bu mulohaza va uning inkori rost-yolg‘onligini aniqlang.

a) p: barcha to‘rtburchaklar parallelogramm bo‘ladi;
b) q: $\sqrt{5}$ – irratsional son;
c) r: 7 – ratsional son;
d) s: $23-14=12$;
e) t: $52:4=13$;
f) u: ixtiyoriy ikkita juft sonlar ayirmasi toq bo‘ladi;
g) p: ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasi doimo juft bo‘ladi;
h) q: barcha o‘tmas burchaklar o‘zaro teng;
i) r: barcha trapetsiyalar parallelogrammlardir;
j) s: agar uchburchakning ikki burchagi o‘zaro teng bo‘lsa, u teng yonli bo‘ladi;

34. $x, y \in \mathbb{R}$ bo‘lsin. Mulohazalarning inkorini yozing:

a) $x > 5$;
b) $x \geqslant 3$;
c) $y < 8$;
d) $y \leqslant 10$.

35. Berilgan r, s mulohazalar uchun s mulohaza r mulohazaning inkori bo‘ladimi?
Agar s mulohaza r mulohazaning inkori bo‘lmasa, r mulohazaning to‘g‘ri inkorini toping.

a) r: Madinaning bo‘yi 140 sm dan baland; s: Madinaning bo‘yi 140 sm dan past;
b) r: Akbar futbol bilan shug‘ullanadi; s: Akbar musiqa bilan shug‘ullanadi;
c) r: Men bugun qora choy ichdim; s: Men bugun ko‘k choy ichdim;
d) r: Men Samarqandda bo‘lganman; s: Men hech qachon Samarqandda bo‘lmaganman.

2-misol.
Mulohazaning inkorini tuzing:

a) x – qovun, $x \in \{qovunlar, tarvuzlar\}$; b) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{N}$; c) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}$;

△ a) x – tarvuz; b) $x = 1$; c) $x < 2$ va $x \in \mathbb{Z}$. ▲

Mashq

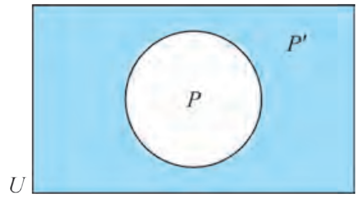
36. Mulohazaning inkorini tuzing.

a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $x \in \{otlar, qo\text{‘}ylar\}$;

c) $x \geqslant 0$, $x \geqslant \mathbb{Z}$; d) x – o‘quvchi bola, $x \in \{o\text{‘}quvchilar\}$;

e) x – o‘quvchi qiz, $x \in \{qizlar\}$.

Mulohazaning inkorini Venn diagrammasidan foydalanib ham tuzish mumkin.

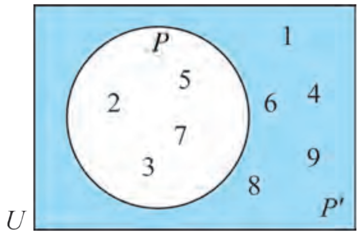


Diagrammada U – barcha sonlar to‘plami, P to‘plam p mulohazaning **rostlik to‘plami**, ya’ni u rost mulohaza bo‘ladigan x larning to‘plami, P' to‘plam deb $\neg p$ inkorning rostlik to‘plami tasvirlangan.

3-misol. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ da p: x – **tub son** mulohazani qaraylik. p va $\neg p$ ning rostlik to‘plamlarini toping.

△ P to‘plam p mulohazaning **rostlik to‘plami**, P' to‘plam $\neg p$ inkorning rostlik to‘plami bo‘lsin. U holda $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $P' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

Bu to‘plamlar Venn diagrammasida quyidagicha tasvirlanadi:



▲

Mashqlar

37. Mulohazalarning inkorini tuzing, Venn diagrammasida tasvirlang:

a) $U = \{ x \mid 20 < x < 30\}$ da p: x – tub son;

b) $U = \{ x \mid 1 < x < 10\}$ da p: x – juft son.

38. U = {10-*sinf o‘quvchilari*}, M = {*musiqa to‘garagida shug‘ullanadigan o‘quvchilar*}, O = {*orkestrda musiqa chaladigan o‘quvchilar*} bo‘lsa, quyidagi mulohazalarni Venn diagrammasida tasvirlang:

a) musiqa to‘garagida shug‘ullanadigan barcha o‘quvchilar orkestrda musiqa chaladilar;

b) orkestrda musiqa chaladigan o‘quvchilardan hech biri musiqa to‘garagida shug‘ullanmaydi;

c) orkestrda musiqa chaladigan o'quvchilarning hammasi musiqa to'garagida shug'ullanmaydi.

39. $U = \{ x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbb{N}\}$ da p: $x < 9$ mulohazani Venn diagrammasida tasvirlang va $\neg p$ inkorning rostlik to'plami elementlarini yozing.

40. $U = \{ x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ da p: x – juft son mulohazani Venn diagrammasida tasvirlang va inkorning rostlik to'plami elementlarini yozing.

Konyunksiya

Agar ikki mulohaza **"va"** so'zi bilan bog'lansa, hosil bo'lgan yangi mulohaza berilgan mulohazalar *konyunksiyasi* deyiladi.

p, q mulohazalarning konyunksiyasi $p \wedge q$ kabi belgilanadi.

Masalan,

p: Eldor tushlikda palov yedi;

q: Eldor tushlikda somsa yedi.

Mulohazalarning konyunksiyasi quyidagicha bo'ladi:

p∧q: Eldor tushlikda palov va somsa yedi.

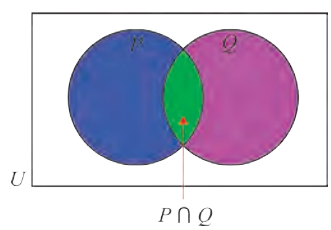
Ko'rinib turibdiki, $p \wedge q$ mulohaza Eldor tushlikda ham palov, ham somsa yeganda, ya'ni p, q mulohazalarning ikkalasi ham rost bo'lgandagina rost bo'ladi. Agar p, q mulohazalarning birortasi yolg'on bo'lsa, u holda $p \wedge q$ mulohaza rost bo'lmaydi.

p, q mulohazalarning konyunksiyasi quyidagi rostlik jadvaliga ega:

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	p, q mulohazalarning ikkalasi ham rost bo'lganda $p \wedge q$ rost bo'ladi.
T F F	F T F	F F F	p, q mulohazalarning birortasi yolg'on bo'lganda $p \wedge q$ mulohaza yolg'on bo'ladi.

Birinchi va ikkinchi ustunlar p, q mulohazalarning mumkin bo'lgan rostlik qiymatlaridan tashkil topgan.

Diagrammada P to'plam p mulohazaning, Q to'plam esa q mulohazaning rostlik to'plamlari bo'lsa, $p \wedge q$ mulohazaning rostlik to'plami ikkala mulohaza rost bo'lgan $P \cap Q$ to'plam bo'ladi:



Mashqlar

41. Quyidagi mulohazalarning konyunksiyasini yozing:

a) p: Madina – terapevt; q: Munisa – stomatolog;

b) p: x son 15 dan katta; q: x son 30 dan kichik;

c) p: havo bulutli; q: yomg‘ir yog‘moqda;

d) p: Olimning sochlari qora; q: Olimning ko‘zlari moviy.

42. $p \wedge q$ mulohazaning rost-yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) p: 5 – toq son; q: 5 – tub son;

b) p: kvadrat to‘rtta tomonga ega; q: uchburchak beshta tomonga ega;

c) p: $39 < 27$; q: $16 > 23$;

d) p: 12 soni 3 ga bo‘linadi; q: 12 soni 4 ga bo‘linadi;

e) p: $5+8 = 12$; q: $6+9 = 15$.

43. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12,\ x \in \mathbb{Z}\}$ uchun p: x –juft son, q: x soni 7 dan kichik mulohazalar berilgan.

a) Venn diagrammasida p, q mulohazalarning rostlik to‘plamlarini;

b) $p \wedge q$ mulohazaning rostlik to‘plamini tasvirlang.

Dizyunksiya

Agar ikki mulohaza **"yoki"** so‘zi bilan bog‘lansa, hosil bo‘lgan yangi mulohaza berilgan mulohazalar *dizyunksiyasi* deyiladi.

p, q mulohazalarning dizyunksiyasi $p \vee q$ kabi belgilanadi.

Masalan,

p: Eldor bugun kutubxonaga bordi; *q: Eldor bugun teatrga bordi.*

Mulohazalarning dizyunksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

p∨q: Eldor bugun yoki kutubxonaga yoki teatrga bordi.

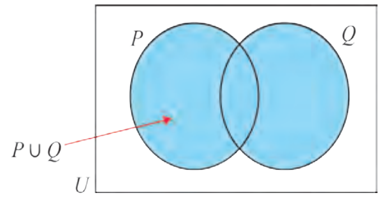
Ko‘rinib turibdiki, $p \vee q$ mulohaza Eldor bugun kutubxona yoki teatrdan biriga yoki ikkalasiga borganda rost bo‘ladi.

Agar p, q mulohazalarning ikkalasi yolg‘on bo‘lsa, u holda $p \vee q$ mulohaza rost bo‘lmaydi.

p, q mulohazalarning dizyunksiyasi quyidagi rostlik jadvaliga ega:

p	q	$p \vee q$	
T T F	T F T	T T T	p, q mulohazalarning birortasi rost bo‘lganda $p \vee q$ rost bo‘ladi.
F	F	F	p, q mulohazalarning ikkalasi yolg‘on bo‘lganda $p \vee q$ mulohaza yolg‘on bo‘ladi.

Diagrammada P to‘plam p mulohazaning, Q to‘plam esa q mulohazaning rostlik to‘plamlari bo‘lsa, $p \vee q$ mulohazaning rostlik to‘plami ulardan kamida biri rost bo‘lgan $P \cup Q$ to‘plam bo‘ladi:



Mashqlar

44. $p \vee q$ mulohazaning rost-yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) p: 24 soni 4 ga bo‘linadi, q: 24 soni 6 ga bo‘linadi;

b) p: $-8>-5$, q: $5<0$.

45. $p \vee q$ mulohazaning rost-yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) p: 5 va 9 sonlarining o‘rta arifmetigi 7 ga teng, q: 8 va 14 sonlarining o‘rta arifmetigi 10 ga teng;

b) p: $5+8 = 12$, q: $6+9 = 15$.

46. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 20, x \in \mathbb{Z}\}$ uchun:

p: x son 3 ga karrali, q: x – tub son mulohazalarni qaraylik.

a) Venn diagrammasida p, q mulohazalarning rostlik to‘plamlarini tasvirlang;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ mulohazaning rostlik to‘plamlarini tasvirlang.

47. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$ uchun:

p: x – tub son, q: x son 12 ning bo‘luvchisi mulohazalarni qaraylik.

a) Berilgan Venn diagrammasida p, q mulohazalarning rostlik to‘plamlarini tasvirlang;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ mulohazaning rostlik to‘plamlarini tasvirlang.

48. x: Sardor ertaga suzishga boradi;

y: Sardor ertaga futbolga boradi.

Quyidagilarni x, y va $\neg$, $\vee$, $\wedge$ mantiqiy bog‘lovchilar yordamida ifodalang:

a) Sardor ertaga suzishga bormaydi;

b) Sardor ertaga suzishga va futbolga boradi;

c) Sardor ertaga yoki suzishga, yoki futbolga boradi;

d) Sardor ertaga na suzishga, na futbolga boradi;

e) Sardor ertaga suzishga boradi, ammo futbolga bormaydi.

49. Gaplarni $\neg$, $\vee$, $\wedge$ mantiqiy bog‘lovchilar yordamida ifodalang:

a) Sardorga muzqaymoq va salqin ichimliklar yoqadi;

b) Sardorga muzqaymoq yoqadi, ammo salqin ichimliklar yoqmaydi;

c) x soni 10 dan katta bo‘lgan tub sondir;
d) kompyuter ishlamaydi.

50. Mulohazalar Sardorning taxminiy kun tartibini belgilaydi:
p: Sardor erta turdi;
q: Sardor nonushtaga qaymoq yedi;
r: Sardor tushlikka sho‘rva ichdi;
s: Sardor kechki ovqatga palov yedi;
u: Sardor sport bilan shug‘ullandi;
v: Sardor kitob o‘qidi.
Quyidagilarni tabiiy tilda ifodalang (ayting):
a) q; b) s; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$

8-9 MANTIQIY TENGKUCHLILIK. MANTIQIY QONUNLAR

Ma’nosiga qarab tabiiy tildagi sodda mulohazalarni harflar bilan erkin belgilab inkor, konyunksiya va dizyunksiya kabi mantiqiy bog‘lovchilar yordamida murakkabroq mulohazalarning rost-yolg‘onligiga e’tibor bermasdan simvolik (ramziy) ko‘rinishlarini tuzaylik.

Tabiiy tildagi mulohaza	Simvolik shakli
Inkor:	
1. Salim uyda **emas**.	$\neg S$
2. Mablag‘ osonlikcha topilmaydi.	$\neg M$
3. Rashidning kitob o‘qiyotganligi **noto‘g‘ri**.	$\neg R$
4. Maryam Buxorodan ekanligi **yo‘lg‘on**.	$\neg B$
Konyunksiya:	
5. Akmal va Sunnat ikkalasi o‘qituvchi.	$A \wedge S$
6. Bobir **hamda** A’lo sport bilan shug‘ullanadi.	$B \wedge A$
7. Bobir kuchli, **ammo** A’lo undan kuchliroq.	$B \wedge A$
8. Barcha media (axborot) vositalari qarshi bo‘lsa **ham**, "Barselona" futbol klubi eng yaxshi klub deb topildi.	$M \wedge B$
Dizyunksiya:	
10. Ra’no yoki metroda yoki avtobusda keladi.	$M \vee A$
11. Bobir yoki A’lo sportning bu turini tanladi.	$B \vee A$

Inkor, konyunksiya va dizyunksiya uchun rostlik jadvallarini umumlashtirib, murakkabroq mulohazalar uchun rostlik jadvallarini tuzish mumkin:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

1-misol. $p \vee \neg q$ mulohazaning rostlik jadvalini tuzing.

△ ***1-qadam***

Birinchi va ikkinchi ustunlar p va q larning mumkin bo'lgan rostlik qiymatlaridan tashkil topgan jadvalni yozamiz:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2-qadam

Uchinchi ustundagi q ning rostlik qiymatlariga qarab $\neg q$ ning rostlik qiymatlarini yozamiz:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3-qadam

To'rtinchi ustundagi p va $\neg q$ ning rostlik qiymatlariga qarab $p \vee \neg q$ ning rostlik qiymatlarini yozamiz: ▲

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Har doim rost bo'lgan mulohaza ***mantiqiy qonun yoki tavtologiya*** deyiladi. Mulohaza mantiqiy qonun ekanligini rostlik jadvali yordamida isbotlash mumkin.

2-misol. $p \vee \neg p$ mulohaza tavtologiya ekanligini isbotlang.

△ Rostlik jadvalini tuzamiz:

$p \vee \neg p$ mulohaza doimo rost qiymatlarni (uchinchi ustunga qarang) qabul qilgani bois u tavtologiya bo'ladi. ▲

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Ikkita mulohazaning rostlik jadvallaridagi mos ustunlar bir hil bo'lsa, bu mulohazalar mantiqiy **tengkuchli** deyiladi.

3-misol. $\neg(p \wedge q)$ va $\neg p \vee \neg q$ mulohazalar mantiqiy tengkuchli ekanligini isbotlang.

$\neg(p \wedge q)$ va $\neg p \vee \neg q$ mulohazalar uchun rostlik jadvallarni tuzamiz:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

$\neg(p \wedge q)$ va $\neg p \vee \neg q$ mulohazalarning rostlik jadvallaridagi mos ustunlar bir xil, demak, bu mulohazalar mantiqiy tengkuchli.
Bu munosabatni $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ kabi yozamiz.

Mashqlar

51. Mulohazalar uchun rostlik jadvallarini tuzing:
a) $\neg p \wedge q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p \vee \neg q$; d) $p \vee p$.

52. Mulohazalar tavtologiya bo‘ladimi:
a) $\neg p \wedge \neg q$; b) $(p \vee q) \vee \neg p$; c) $p \wedge \neg q$?

53. Mantiqiy tengkuchliliklarni isbotlang:
a) $\neg(\neg p) = p$; b) $p \wedge q = p$; c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$;
d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p \vee q)$.

54. Mulohazalar berilgan bo‘lsin:
p: Sardor olmani yaxshi ko‘radi;
q: Sardor uzumni yaxshi ko‘radi.
Quyidagi mulohazalarni tabiiy tilda ifodalang:
a) $p \vee q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p$; d) $\neg p \wedge \neg q$.

55. Rostlik jadvalini tuzib, $\neg(p \vee q)$ va $\neg p \wedge \neg q$ mulohazalar mantiqiy tengkuchli ekanligini isbotlang.

10-11 IMPLIKATSIYA, KONVERSIYA, INVERSIYA VA KONTRAPOZITSIYA

Implikatsiya

Ikki mulohaza "agar ... bo‘lsa, u holda …" ibora bilan bog‘lansa, u holda mulohazalar ***implikatsiyasiga*** ega bo‘lamiz.

"Agar p bo‘lsa, u holda q" implikativ mulohaza $p \Rightarrow q$ kabi belgilanadi va "p dan q kelib chiqadi", "p mulohaza q uchun yetarli", "q mulohaza p uchun zarur" ma’nolarni ham anglatadi.

Bunda p mulohaza q uchun ***yetarli shart***, q mulohaza p uchun ***zaruriy shart*** deb yuritiladi.

Masalan, p: *Sardorning televizori bor*; q: *Sardor kinoni ko'radi* mulohazalar uchun

$p \Rightarrow q$: *Sardorning televizori bo'lsa, u kinoni ko'radi*

mulohazani anglatadi.

Huddi shunday $p \Rightarrow q$: *Sardor kinoni ko'rishi uchun unda televizor bo'lishi yetarli* mulohazani hosil qilamiz.

$p \Rightarrow q$ mulohaza faqatgina p rost bo'lib, q yolg'on bo'lsa, p mulohaza rost bo'lgani uchun quyidagi rostlik jadvalini hosil qilamiz:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Sodda mulohazalar hamda mantiqiy bog'lovchilar yordamida rost-yolg'onlikka e'tibor bermasdan murakkabroq mulohazalarni tuzish mumkin.

1-misol. p: *"Anora kinofilmlarni ko'p ko'radi"*; q: *"Barno kinofilmlarni ko'p ko'radi"*; r: *"Barno imtihondan o'ta olmaydi"*; s: *"mo'jiza ro'y beradi"* mulohazalar berilgan bo'lsin.

△ U holda quyidagilarga ega bo'lamiz:

1. $p \wedge \neg q$: *"Anora kinofilmlarni ko'p ko'radi, Barno esa yo'q"*.
2. $p \Rightarrow \neg q$: *"Anora kinofilmlarni ko'p ko'rsa, Barno kinofilmlarni ko'p ko'rmaydi"*.
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: *"Barno kinofilmlarni ko'p ko'rsa, u yoki imtihondan o'ta olmaydi yoki mo'jiza ro'y beradi"*.
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: *"Barno kinofilmlarni ko'p ko'rsa va mo'jiza ro'y bermasa, u holda Barno imtihondan o'ta olmaydi"*.
5. $(q \wedge s) \vee r$: *"Yoki Barno kinofilmlarni ko'p ko'radi va mo'jiza ro'y beradi, yoki Barno imtihondan o'ta olmaydi"*. ▲

Ekvivalensiya

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ko'rinishdagi mulohaza p va q mulohazalarning ekvivalensiyasi deyiladi va $p \Leftrightarrow q$ kabi belgilanadi.

$p \Leftrightarrow q$ yozuv "p mulohaza q uchun zarur va yetarli" yoki "p mulohaza q bo'lgandagina o'rinli bo'ladi", deb o'qiladi.

2-misol. p: *x* – juft son, q: *x sonning oxirgi raqami juft* mulohazalar uchun $p \Leftrightarrow q$ mulohaza qanday o'qiladi?

△ $p \Rightarrow q$: *x juft son bo'lsa, uning oxirgi raqami juft bo'ladi*;

$q \Leftrightarrow p$: *x sonning oxirgi raqami juft bo'lsa, u juft bo'ladi.*

mulohazalarni qarasak, $p \Leftrightarrow q$ yozuv "*x* son juft bo'lishi uchun uning oxirgi raqami juft bo'lishi zarur va yetarli" yoki "*x* son uning oxirgi raqami juft bo'lgandagina juft bo'ladi" deb o'qiladi. ▲

Endi ixtiyoriy p va q mulohazalar berilgan bo‘lsa $(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$ mulohaza uchun rostlik jadvalini tuzamiz:

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Demak, $p\Leftrightarrow q$ mulohazaning rostlik jadvali quyidagicha bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, $p\Leftrightarrow q$ mulohaza p va q mulohazalarning rostlik qiymatlari bir xil (ya’ni yoki ikkalasi ham rost, yoki ikkalasi ham yolg‘on) bo‘lgandagina rost bo‘ladi.

p	q	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Mashqlar

56. Quyidagi implikativ mulohazalarda zaruriy va yetarli shartlarni aniqlang va bu mulohazalarni "zarur", "yetarli" so‘zlarini ishlatib boshqacha ifodalang:
a) agar men ertalabki avtobusga ulgurmasam, maktabga kech qolaman;
b) agar temperatura yetarlicha pasaysa, ariqdagi suv muzlab qoladi;
c) agar $x > 20$ bo‘lsa, $x > 10$ bo‘ladi;
d) agar men gol ursam, bizning jamoamiz g‘alaba qozonishi mumkin.

57. $p\Rightarrow q$ mulohazani tabiiy tilda ifodalang:
a) p: quyosh yaraqlaydi, q: men cho‘milishga boraman;
b) p: x son 6 ga bo‘linadi, q: x – juft son;
c) p: muzlatgichda tuxumlar bor, q: Madina tort pishiradi.

58. a) $p\Rightarrow \neg q$; b) $\neg q\Rightarrow \neg p$;
c) $(p\vee q)\Rightarrow p$; d) $q\wedge(p\Rightarrow q)$;
e) $p\Leftrightarrow \neg q$; f) $(p\Leftrightarrow q)\wedge \neg p$;
g) $p\Rightarrow(p\wedge\neg q)$; h) $(p\Rightarrow q) \Rightarrow\neg p$
mulohazalarning rostlik jadvallarini tuzing.

59. Mulohazalarni simvolik shaklda ifodalang:
p: yomg‘ir yog‘di, q: ko‘lmaklar paydo bo‘ldi;
a) yomg‘ir yog‘sa, ko‘lmaklar paydo bo‘ladi;
b) ko‘lmaklar paydo bo‘ldi, demak, yomg‘ir yog‘di;
c) ko‘lmaklar yo‘q;
d) yomg‘ir yog‘madi;
e) agar yomg‘ir yog‘masa, ko‘lmaklar paydo bo‘lmaydi;
f) agar ko‘lmaklar paydo bo‘lmasa, yomg‘ir yog‘magan;

g) agar koʻlmaklar paydo boʻlmasa, yomgʻir yogʻadi;
h) koʻlmaklar paydo boʻlishi uchun yomgʻir yogʻishi zarur va yetarli.

60. Rostlik jadvallarini tuzib,
$\neg p \Rightarrow q = p \vee q$;
$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ekanligini isbotlang.

61. $q \Rightarrow p$ mulohazaga mantiqiy tengkuchli mulohazani toping:
a) $p \Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$;
c) $q \Rightarrow \neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Mulohazalardan qaysilari doimo rost, doimo yolgʻon boʻladi?
a) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$; b) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$;
c) $(p \Rightarrow \neg q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

Konversiya

$p \Rightarrow q$ mulohazaning ***konversiyasi*** deb $q \Rightarrow p$ mulohazaga aytiladi.
Konversiya quyidagi rostlik jadvaliga ega:

p	q	$q \Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

3-misol.
p: uchburchak teng yonli,
q: uchburchakning ikkita burchagi teng mulohazalarni qaraylik.
$p \Rightarrow q$ mulohazani va uning konversiyasini tabiiy tilda ifodalang.

△ $p \Rightarrow q$: Agar uchburchak teng yonli boʻlsa, u holda uning ikkita burchagi teng.
$q \Rightarrow p$: Agar uchburchakning ikkita burchagi teng boʻlsa, u holda bunday uchburchak teng yonli boʻladi. ▲

Inversiya

$p \Rightarrow q$ mulohazaning ***inversiyasi*** deb $\neg p \Rightarrow \neg q$ mulohazaga aytiladi.
Inversiya quyidagi rostlik jadvaliga ega:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Bu jadval $q \Rightarrow p$ mulohazaning rostlik jadvali bilan ustma-ust tushadi, demak, konversiya va inversiya mantiqiy teng kuchli ekan.

Kontrapozitsiya

$p \Rightarrow q$ mulohazaning kontrapozitsiyasi deb $\neg q \Rightarrow \neg p$ mulohazaga aytiladi.
Kontrapozitsiya quyidagi rostlik jadvaliga ega:
Bu jadval $p \Rightarrow q$ mulohazaning rostlik jadvali bilan ustma-ust tushadi, demak, implikatsiya va kontrapozitsiya mantiqiy teng kuchli ekan.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

4-misol. "Hamma o‘qituvchilar maktab yaqinida yashaydi" mulohazaning kontrapozitsiyasini tuzing.

△ Mazkur mulohaza quyidagicha ifodalanishi mumkin: "Agar bu kishi o‘qituvchi bo‘lsa, u maktab yaqinida yashaydi".
Bu darak gap $p \Rightarrow q$ shaklga ega, bu yerda:
p: Bu kishi – o‘qituvchi, q: Bu kishi maktab yaqinida yashaydi.
$\neg q \Rightarrow \neg p$ kontrapozitsiya quyidagicha ifodalanadi:
"Agar bu kishi maktab yaqinida yashamasa, u holda u o‘qituvchi emas". ▲

5-misol. *p: Samandar kutubxonada,*
q: Samandar kitob o‘qiyapti
mulohazalarni qaraylik. Uning uchun imlikatsiya, konversiya, inversiya va kontrapozitsiyani tuzing.

△ **Implikatsiya** $p \Rightarrow q$	Samandar kutubxonada bo‘lsa, u kitob o‘qiydi.
Konversiya $q \Rightarrow p$	Samandar kitob o‘qisa, u kutubxonada bo‘ladi.
Inversiya $\neg p \Rightarrow \neg q$	Samandar kutubxonada bo‘lmasa, u kitob o‘qimaydi.
Kontrapozitsiya $\neg q \Rightarrow \neg p$	Samandar kitob o‘qimayotgan bo‘lsa, u kutubxonada bo‘lmaydi.

Aytish joizki, implikatsiya va konversiya mantiqiy teng kuchli bo‘lmaydi, chunki, masalan, Samandar kitobni sinfda o‘qishi ham mumkin. ▲

Mashqlar

63. Konversiya va inversiyani tuzing:
a) agar Diyora nimcha kiysa, u isinadi;
b) agar ikki uchburchak o‘xshash bo‘lsa, ularning mos burchaklari teng bo‘ladi;

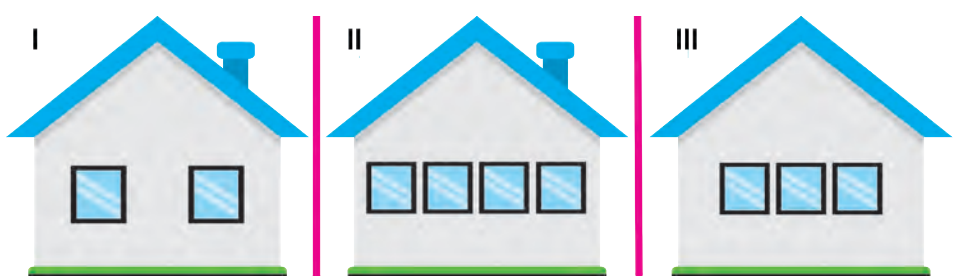
c) agar $2x^2 = 12$ bo‘lsa, u holda $x = \pm\sqrt{6}$ bo‘ladi;
d) agar Olim o‘yin o‘ynasa, u xursand bo‘ladi;
e) agar uchburchak muntazam bo‘lsa, u holda uning tomonlari teng bo‘ladi.

64. Quyidagi mulohazalarning kontrapozitsiyalarini tuzing:
a) barcha atirgullar tikonli;
b) barcha sudyalar (hakamlar) doimo to‘g‘ri qaror chiqaradilar;
c) hamma yaxshi futbolchilar to‘pni aniq nishonga tepadilar;
d) suyuqlik idishga quyilganda idishning shaklini qabul qiladi;
e) agar inson halol va o‘qimishli bo‘lsa, u muvaffaqiyat qozonadi.

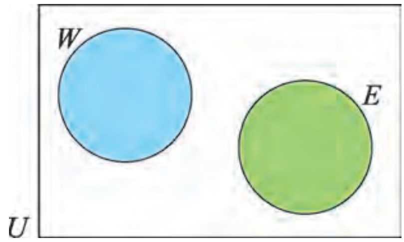
65. a) "barcha 10-sinf o‘quvchilari matematikani o‘rganadilar" mulohazaning kontrapozitsiyasini tuzing;
b) "barcha 10-sinf o‘quvchilari matematikani o‘rganadilar" mulohaza rost bo‘lsa, quyidagilar haqida qanday hukmga kelasiz:
"Shavkat – 10-sinf o‘quvchisi";
"Mirislom matematikani o‘rganmaydi";
"Doniyor ham matematikani, ham ingliz tilini o‘rganmoqda"?

66. Mulohazalarning kontrapozitsiyalarini tuzing:
a) x son 3 ga bo‘linadi $\Rightarrow x^2$ soni 9 ga bo‘linadi;
b) x sonning oxirgi raqami 2 bo‘lsa: $\Rightarrow x$ – juft son;
c) $ABCD$ – to‘g‘ri turtburchak $\Rightarrow AB \| CD$ va $AD \| BC$;
d) ABC – muntazam uchburchak $\Rightarrow \angle ABC = 60°$.

67. p: Uy eng ko‘pi bilan 3 ta derazali bo‘ladi,
q: Uy tashqariga tutun chiqaradigan mo‘riga ega
mulohazalarni qaraylik.
U holda $p \Rightarrow q$: Agar uy eng ko‘pi bilan 3 ta derazali bo‘lsa, u tashqariga tutun chiqaradigan mo‘riga ega;
a) konversiya, inversiya va kontrapozitsiyani tuzing;
b) quyidagi hollarda implikatsiya, konversiya, inversiya va kontrapozitsiya uchun rost-yolg‘onlikni aniqlang:



68. Diagrammada W – sust o‘zlashtiradigan o‘quvchilar, E esa 10-sinf o‘quvchilari to‘plamini tasvirlaydi.
Quyidagi mulohazalarni to‘ldiring:



a) .... gan sust o‘zlashtiruvchi o‘quvchilar mavjud emas;
b) .... gan 10-sinf o‘quvchilari mavjud emas;
c) agar $x \in W$ bo‘lsa, u holda ......;
d) agar $x \in E$ bo‘lsa, u holda ......;
e) c va d munosabatlar orasida qanday bog‘lanish bor?

12-13 PREDIKATLAR VA KVANTORLAR

Predikatlar va kvantorlar

Ayrim mulohazalarda o‘zgaruvchilar qatnashib, shu o‘zgaruvchilar o‘rniga aniq qiymatlarni qo‘ysak, rost-yolg‘onligi aniq bo‘lgan mulohaza hosil bo‘ladi. Bunday mulohaza ***predikat*** deyiladi.

1-misol. $P(x)$: "$x^2 > x$" predikat bo‘lsa,

$P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$ mulohazalarning rost-yolg‘onligini aniqlang.

△ $P(2)$: $2^2>2$ – rost. $P(\frac{1}{2})$: $(\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}$ – yolg‘on. $P(-\frac{1}{2})$: $(-\frac{1}{2})^2>-\frac{1}{2}$ – rost. ▲

Ayrim predikatlarda o‘zgaruvchini uning ma’nosiga qarab aniqlash mumkin.

Masalan, "Bu yozuvchi Toshkentda tug‘ilgan" va "U Toshkentda tug‘ilgan" darak gaplarda o‘zgaruvchi "Bu yozuvchi" so‘z birikmasi yoki "u" olmoshidir. Ularning o‘rniga "Abdulla Qodiriy" qiymatini qo‘ysak, "Abdulla Qodiriy Toshkentda tug‘ilgan" rost mulohazani, "Shekspir" qiymatni qo‘ysak, "Shekspir Toshkentda tug‘ilgan" yolg‘on mulohazani hosil qilamiz.

x orqali o‘zgaruvchini belgilasak, yuqoridagi darak gaplarni "x Toshkentda tug‘ilgan" shaklida yozish mumkin.

Predikatda bir yoki bir nechta o‘zgaruvchi qatnashishi mumkin, qatnashgan o‘zgaruvchilarga qarab predikat $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, ... kabi belgilanadi.

Predikatlar bilan birga $\forall$ (umumiylik kvantori, "barcha ... lar uchun") va $\exists$ (mavjudlik kvantori, "shunday ... mavjudki") maxsus belgilardan foydalanib, yangi mulohazalar hosil qilinadi. Masalan, $\forall xP(x)$ ko'rinishdagi yangi mulohaza x ning barcha qiymatlari uchun $P(x)$ ekanligini, $\exists xP(x)$ ko'rinishdagi yangi mulohaza esa x ning $P(x)$ bo'ladigan qiymati mavjudligini bildiradi.

Masalan, $P(x)$: "x Samarqandda tug'ilgan" predikatni qaraymiz. U holda $\forall xP(x)$ ko'rinishdagi yangi mulohaza "hamma Samarqandda tug'ilgan" kabi, $\exists xP(x)$ ko'rinishdagi yangi mulohaza esa "shunday kishilar mavjudki, ular Samarqandda tug'ilgan" kabi o'qiladi.

$\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$ ko'rinishdagi mulohazalarning rost-yolg'onligini aniqlash uchun misollar keltiramiz.

2-misol.
$D = \{1,2,3,4,5\}$ bo'lsa, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ mulohaza rost ekanligini isbotlang.

△ Ravshanki,
$1^2 \geqslant 1,\quad 2^2 \geqslant 2,\quad 3^2 \geqslant 3,\quad 4^2 \geqslant 4,\quad 5^2 \geqslant 5.$
Demak, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ mulohaza rost ekan. ▲

Aytish joizki, $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$ mulohaza yolg'on bo'lishini isbotlash uchun x ning u yolg'on bo'ladigan bitta qiymatini topish yetarli.

Chindan ham, $x=\frac{1}{2}$ bo'lganda $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$ bo'ladi.

x ning $\forall xP(x)$ mulohazaning yolg'onligini ko'rsatuvchi biror qiymati ***kontrmisol*** deyiladi.

3-misol. $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ mulohaza rost ekanligini isbotlang.
△ $1^2=1$ bo'lgani uchun, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ mulohaza rost ekan.
Agar $E=\{5,6,7,8\}$ bo'lsa, $\exists m \in E,\ m^2 \geqslant m$ mulohaza yolg'on, chunki
$5^2 = 25 \neq 5;\quad 6^2 = 36 \neq 6;\quad 7^2 = 49 \neq 7;\quad 8^2 = 64 \neq 8.$ ▲

Inkor amali bilan bog'liq ikkita muhim mantiqiy qonunni keltiramiz:

$$\neg(\exists xP(x)) = \forall x(\neg P(x)), \qquad \neg(\forall xP(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

Shu qonunlarning ma'nosini tushunish uchun misol keltiraylik.

$P(x)$: "x sinfdoshim a'lochi" predikatni qaraylik.

$\neg(\exists xP(x))$ yozuv "sinfdoshlarim ichida a'lochilar mavjud emas" mulohazani, $\forall x(\neg P(x))$ yozuv esa unga tengkuchli mulohaza bo'lgan "Hamma sinfdoshlarim a'lochi emas" mulohazani bildiradi.

Huddi shunday, $\neg(\forall xP(x))$ formula "Hamma sinfdoshlarim a'lochi ekanligi noto'g'ri" mulohazani, $\exists x(\neg P(x))$ formula esa unga teng kuchli mulohaza bo'lgan "Ayrim sinfdoshlarim a'lochi emas" mulohazani bildiradi.

Ravshanki, $P(x,y)$ predikatdan kvantorlar yordamida

$$\forall x P(x,y), \qquad \forall y P(x,y), \qquad \exists x P(x,y), \qquad \exists y P(x,y)$$

ko‘rinishdagi bir o‘zgaruvchili predikatlarni, ulardan esa, o‘z navbatida,

$$\forall x \exists y P(x,y), \qquad \exists y \forall x P(x,y), \qquad \exists x \forall y P(x,y), \qquad \forall y \exists x P(x,y),$$
$$\forall x \forall y P(x,y), \qquad \forall y \forall x P(x,y), \qquad \exists x \exists y P(x,y), \qquad \exists y \exists x P(x,y)$$

ko‘rinishdagi mulohazalarni qurish mumkin.

Garchi $\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall y \forall x P(x,y)$ hamda $\exists x \exists y P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$ mulohazalarning ma’nolari bir hil bo‘lsa-da, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$ mulohazalar tengkuchli emas ekan.

Masalan, $P(x,y)$: *y inson x sinfdoshimning otasi* predikatni qaraymiz.

Bu holda $\forall x \exists y P(x,y)$ = "*ixtiyoriy sinfdoshimning otasi bor*"; $\exists y \forall x P(x,y)$ "*shunday inson borki, u barcha sinfdoshlarimning otasi bo‘ladi*" mulohazalarni bildiradi.

Xuddi shunday, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$ mulohazalar tengkuchli emasligini ko‘rsatish mumkin (mustaqil ravishda misollar tuzing).

Predikatlar va kvantorlar yordamida mantiqiy qonunlarni hosil qilish mumkin.

Masalan, "Agar barcha qarg‘alar qora bo‘lsa, qora bo‘lmagan qushlarning hech biri qarg‘a emas" mulohaza

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\,(\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

mantiqiy qonunga misol bo‘la oladi.

Mashqlar

69. Mulohazalarni predikatlar va kvantorlar yordamida ifodalang:

a) ayrim qushlar ucha olmaydi;
b) ayrim yozuvchilar shoir emas;
c) ayrim pashshalar chaqmaydi;
d) hamma sayyoralar shar shaklida;
e) barcha askarlar kuchli insonlar;
f) barcha jarrohlar – shifokorlar;
g) hamma ayiqlar asalni iste’mol qiladilar;
h) har qanday doira – yassi shakl;
i) ayrim quyonlar karamni yaxshi ko‘radilar;
j) ayrim kitoblar qiziqarli;
k) hamma onalar bolalarini erkalaydilar.

Shu mulohazalarning inkorini tuzing-chi?

70. Mulohazalarni, mumkin bo‘lsa, davom ettiring:

a) hech qanday sut emizuvchi jabralardan nafas ola olmaydi. Sazan jabralardan nafas oladi. Demak, ...;

b) barcha insonlarning kamchiliklari bor. Barcha qirollar – insonlar. Demak, ...;

c) qizil rangdagi gullarning hidi yo‘q. Bu gulning hidi yo‘q. Demak...;

d) bo‘rilar qo‘zilarni eydi. Bu hayvon qo‘zini eydi. Demak...;

e) barcha sayyoralar – osmon jismlari. Oy – sayyora emas. Demak...;

f) barcha metallar elektr tokini yaxshi o‘tkazadi. Oltin – metall. Demak.... ;

g) barcha qushlar tuxum qo‘yadi. Barcha qushlar umurtqali. Demak....;

h) agar insonning temperaturasi baland bo‘lsa, u kasallangan bo‘ladi. Bu insonning temperaturasi baland. Demak...;

i) agar insonning temperaturasi baland bo‘lsa, u kasallangan bo‘ladi. Bu inson kasal emas. Demak....

71. $P(x,y)$: y inson x ning farzandi, predikatlar berilgan bo‘lsin. Mulohazalarni tabiiy tilda ifodalang:

a) $\exists z P(x,z) \wedge P(z,y)$; b) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$; c) $\forall x\ \exists y\ P(y,x)$.

72. $F(x,y)$: x inson y ni o‘z do‘sti deb hisoblaydi predikat berilgan bo‘lsin. Mulohazalarni tabiiy tilda ifodalang:

a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$;

b) $\forall x \exists y F(x,y)$;

c) $\exists y \forall x F(x,y)$;

d) $\forall x \exists y F(y,x)$;

e) $\exists y \forall x F(y,x)$;

f) $\forall y \exists x F(x,y)$;

g) $\exists x \forall x F(y,x)$.

73. $D(m,n)$: n butun son m butun songa qoldiqsiz bo‘linadi predikat berilgan bo‘lsin. Mulohazalardan qaysi biri rost:

a) $\forall m \forall n D(m,n)$;

b) $\forall n \exists m D(m,n)$;

c) $\exists m \forall n D(n,m)$;

d) $\exists n \forall m D(n,m)$;

e) $\forall n \exists m D(n,m)$;

f) $\exists m \forall n D(n,m)$,

74. Mulohazalardan qaysilari to‘g‘ri? Tegishli misollar keltiring.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$;

b) barcha boshqa sonlardan kichik bo‘lgan son mavjud;

c) agar $\forall x \exists y P(x,y)$ bo‘lsa , u holda $\exists y \forall x P(x,y)$ bo‘ladi.

14-15 TO‘G‘RI FIKR YURITISH (ARGUMENTATSIYA) QONUNLARI. SOFIZMLAR VA PARADOKSLAR

Fikrni to‘g‘ri bayon qilishga tafakkur qonunlari talablariga rioya qilgandagina erishish mumkin. ***Tafakkur qonuni*** muhokama yuritish jarayonida fikrlar (fikrlash elementlari) o‘rtasidagi mavjud zaruriy aloqalardan iborat. Tafakkur qonunlari mazmunidan kelib chiqadigan, muhokamani to‘g‘ri qurish uchun zarur bo‘lgan talablar fikrning aniq, izchil, yetarli darajada asoslangan bo‘lishidan iborat.

Hukmlarda predmet bilan uning xossasi, predmetlar o‘rtasidagi munosabatlar, predmetning mavjud bo‘lish yoki bo‘lmasligi haqidagi fikrlar tasdiq yoki inkor shaklda ifoda etiladi. Masalan, "Temir–metall" degan hukmda predmet (temir) bilan uning xossasi (metall ekanligi) o‘rtasidagi munosabat qayd etilgan. "Axloq huquqdan ilgari paydo bo‘lgan" degan hukmda esa ikkita predmet (axloq va huquq) o‘rtasidagi munosabat qayd etilgan. Mazmun jihatdan turli xil bo‘lgan bu hukmlar tuzilishiga ko‘ra bir xildir: ularda predmet haqidagi tushunchalar majmuasi (S) bilan predmet belgisi haqidagi tushuncha (R) o‘rtasidagi munosabat qayd etilgan, ya’ni R ning S ga xosligi tasdiqlangan.

Umumiy holda hukm $S \Rightarrow R$ mantiqiy shaklida ifoda etiladi.

Biz S mulohazalar majmuasini **asos**, R mulohazani esa **xulosa** deb ataymiz. Hukmda asos va xulosa "demak" bog‘lovchi so‘z bilan bog‘lanadi.

Odatda $S \Rightarrow R$ hukmda asos va xulosa gorizontal chiziq bilan bunday ajratiladi: $\frac{S}{R}$. Soddagina misolni keltiraylik.

Agar Sobir sport bilan shug‘ullansa, u sog‘lom bo‘ladi.
Sobir sport bilan shug‘ullanmoqda.
Demak, Sobir sog‘lom bo‘ladi.
Bu hukmning mantiqiy shaklini topaylik.

p: Sobir sport bilan shug‘ullanmoqda.
q: Sobir sog‘lom

mulohazalarni qarasak, hukm quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\left.\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{asos}$$
$$\overline{\quad q \quad \} \textit{ xulosa}}$$

$p \Rightarrow q$ va p mulohazalardan q mulohaza kelib chiqqani uchun, hukm $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ mantiqiy shaklga ega.

Hukmning rostlik jadvalni tuzamiz:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Natijada tavtologiyani hosil qildik. Bu holat hukmning **to‘g‘riligini** ko‘rsatmoqda, ya’ni berilgan asoslardan to‘g‘ri xulosa chiqarilganligini bildirmoqda.

1-misol. Quyidagi hukmning noto‘g‘riligini isbotlang:
Agar uchburchak uchta tomonga ega bo‘lsa, u holda 2+4=7.
Demak, uchburchak uchta tomonga ega.

Bu hukmning mantiqiy shaklini topaylik.
p: uchburchak uchta tomonga ega.
q: 2+4=7
mulohazalarni qarasak, hukm quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\left.\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{asos}$$
$$\overline{\quad q \quad} \; \} \; \textit{xulosa}$$

$p \Rightarrow q$ va q mulohazalardan p mulohaza kelib chiqqani uchun, hukm $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ mantiqiy shaklga ega.

Rostlik jadvalini tuzamiz:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Natijada tavtologiya hosil bo‘lmadi. Bu holat hukmning **noto‘g‘riligini** ko‘rsatmoqda, ya’ni berilgan asoslardan to‘g‘ri xulosa chiqarilmaganligini bildirmoqda.

Quyida biz to‘g‘ri hukmlarni (**argumentatsiya** qonunlarini) keltiramiz:

T.r	Hukm	Ma’nosi	Misol
1°.	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad p}{q}$	p to‘g‘ri bo‘lganda q to‘g‘ri bo‘lsin. Bunda p to‘g‘ri. Demak, q ham to‘g‘ri.	Agar darslikni o‘qisam, a’lo baho olaman. Darslikni o‘qidim. Demak, a’lo baho olaman.

2°.	$\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg p}{\neg q}$	*p* to‘g‘ri bo‘lganda, *q* to‘g‘ri bo‘lsin. Ammo *q* noto‘g‘ri. Demak, *p* ham noto‘g‘ri.	Agar kitob o‘qisam, a’lo baho olaman. A’lo baho olmadim. Demak, kitob o‘qimadim.
3°.	$\dfrac{p\vee q \quad \neg p}{q}$	*p* yoki *q* to‘g‘ri va *p* noto‘g‘ri bo‘lsin. Demak, *q* noto‘g‘ri.	Men yoki kitob o‘qiyman, yoki kino ko‘raman. Men kitob o‘qimadim. Demak, men kino ko‘rdim.
4°.	$\dfrac{p\Rightarrow q \quad q\Rightarrow r}{p\Rightarrow r}$	*p* dan *q* hamda *q* dan *r* kelib chiqsin. U holda *p* dan *r* kelib chiqadi.	Agar havo ochiq bo‘lsa, men sport maydonchaga boraman. Agar men sport maydonchaga borsam, futbol o‘ynayman. Demak, havo ochiq bo‘lsa, men futbol o‘ynayman.

Biz hukmlarning to‘g‘riligini isbotlashni mashq sifatida o‘quvchiga tavsiya etamiz.

Mashqlar

75. Quyidagi hukmni qaraylik:

Alijon shamollagandagina, uning tana temperaturasi baland bo‘ladi. Alijon tanasining temperaturasi baland emas.

Demak, Alijon shamollamagan.

a) hukmning mantiqiy shaklini yozing;

b) hukmning to‘g‘ri ekanligini isbotlang.

76. Hukmlarning mantiqiy shaklini yozing:

a)

I $\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$ **II** $\dfrac{p\vee q \quad \neg p}{q}$ **III** $\dfrac{p\vee q}{p}$ **IV** $\dfrac{p\Rightarrow q \quad \neg p}{\neg q}$ **V** $\dfrac{p\Rightarrow q \quad q\Rightarrow p}{p}$

b) har bir hukm uchun rostlik jadvalini yozib, ulardan qaysilari to‘g‘ri ekanligini toping.

c) tabiiy tilda ifodalanishiga misollar keltiring.

77. Mulohazalarni hukm shaklida yozing:

a) $(p\wedge q) \Rightarrow p$; c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p\Leftrightarrow q)$;

b) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$; d) $(p\wedge\neg q) \Rightarrow (\neg p\vee p)$.

Hosil bo‘lgan hukmlardan qaysilari to‘g‘ri?

78. p: x – tub son va q: x – toq son mulohazalarni qaraylik:

Quyidagi hukmlardan qaysilari to‘g‘ri?

a) Agar x – tub son bo‘lsa, u toq bo‘ladi. x – toq yoki tub son. Demak, x – toq son;

b) x – toq yoki tub, ammo bir vaqtda emas. x – toq son. Demak, x – tub son.

79. Hukm berilgan: Davron musobaqada qatnashishi uchun u yoki Singapurga, yoki Gongkongga boradi. Davron Singapurga borishi ma'lum. Demak, Davron Gongkongga bormaydi.

a) rostlik jadvali yordamida bu hukm noto'g'ri ekanligini isbotlang;
b) nega bu hukm noto'g'ri ekanligini tushuntiring.

80. Quyidagi hukmlardan qaysilari to'g'ri, qaysilari noto'g'ri:

a) Tolib soat 10.00 da yoki kinoga, yoki teatrga boradi. Tolib soat 10.00 da kinoga bormadi. Demak, Tolib soat 10.00 da teatrda bordi;
b) x soni 4 ga karrali bo'lsa, u juft son bo'ladi. x – juft son, demak, u 4 ga karrali;
c) x soni yoki 30 ning yoki 50 ning bo'luvchisi. Demak, x soni 50 ning bo'luvchisi;
d) agar ketma-ketlik arifmetik progressiya bo'lmasa, u geometrik progressiya bo'ladi. Demak, ketma-ketlik yoki arifmetik yoki geometrik progressiya bo'ladi;
e) barcha sinfdoshlarim yaxshi o'qiydi. Mahsuma yaxshi o'qiydi. Demak, Mahsuma mening sinfdoshim.

81. Mulohazalarni davom ettirib, to'g'ri hukmlarni hosil qiling:

a) Ikkalamizdan birimiz hozir stomatolog qabuliga kirishimiz kerak. Men kirmayman. Demak ....;
b) Men yoki maktabga boraman, yoki onam meni qattiq urushadi. Bugun men maktabga aniq bormayman. Demak ....;
c) Agar men masalani to'g'ri yechsam, uning javobi kitobdagi javob bilan bir xil bo'ladi. Mening natijam kitobdagi javobdan farqli. Demak ....;
d) Agar Genri uylangan bo'lsa, uning mulkiga turmush o'rtog'i ega bo'ladi. Agar uylanmagan bo'lsa, uning mulkiga akasi ega bo'ladi. Demak, uning mulkiga .....;
e) Yoki poyezd kech qolmoqda, yoki uni bekor qilishgan. Agar uni bekor qilishgan bo'lsa, men bugun hech qayerga ketmayman. Agar u kech qolayotgan bo'lsa, men ishga vaqtida bora olmayman. Demak men..........;
f) Agar 2 – tub son bo'lsa, u eng kichik tub son bo'ladi. 2 – tub son. Demak ....

Sofizmlar va paradokslar

Sofizm[2] –ataylab chiqariladigan noto'g'ri xulosa, biror tasdiqning noto'g'ri isboti. Bunda isbotdagi xato ancha ustalik bilan, bilintirmay yashiriladi.

2 Qad. yun. σόφισμα – hiyla.

Sofizmga oid masalalarni dastlab, miloddan avvalgi V asrda Qadimgi Yunonistonda yashagan matematik Zenon tuzgan.

Zenon, mashhur chopqir Axillesning oldinda sudralib ketayotgan toshbaqaga hech qachon quvib yeta olmasligini matematik mulohazalar yordamida quyidagicha "isbot" qilgan. Axilles toshbaqaga qaraganda 10 marta tezroq chopa oladi. Dastlab, toshbaqa 100 metr oldinda boʻlsin. Axilles bu 100 metrni chopib oʻtguncha, toshbaqa 10 metr ilgarilaydi. Axilles bu 10 metrni chopib oʻtguncha toshbaqa yana 1 metr siljiydi va h.k. Ular orasidagi masofa doim qisqarib boradi, lekin hech qachon nolga aylanmaydi.

Zenon masalalari cheksizlik, harakat, koinot tushunchalari bilan bogʻliq boʻlib, ular matematika va fizika fanlarining rivojida katta ahamiyatga ega boʻldi.

Ayrim sofizmlar ulugʻ ajdodlarimiz Farobiy asarlarida, Beruniy bilan Ibn Sinoning yozishmalarida muhokama qilingan.

Biz quyida eng sodda sofizmlarga misollar keltirib, ularni tushuntirishga harakat qilamiz.

2-misol. *1000 soʻm qayerga ketdi?* 3 ta doʻst oshxonada ovqatlanib boʻlishgach xizmatchi ularga 25000 soʻmlik hisobni berdi. 3 nafar doʻstning har biri 10000 soʻmdan pul berib, 30000 soʻmni xizmatchiga berishdi. Xizmatchi ularga 5000 soʻm qaytim berdi. Doʻstlar 1000 soʻmdan boʻlishib olishdi va 2000 soʻmni taksi uchun berishdi. Qaytishayotganda doʻstlardan biri hisoblay boshladi, "Har birimiz 9000 soʻmdan xarajat qildik, bu 27000 soʻm boʻladi, 2000 soʻm taksiga berdik, buni qoʻshsak 29000 soʻm boʻladi. 1000 soʻm qayerga ketdi ?"

△ Bu yerdagi asosiy xatolik hisoblashning notoʻgʻri qilinayotganida. 3 nafar doʻst 9000 soʻmdan 27000 soʻm pul toʻlashdi. Bundan 25000 soʻmini ovqatga toʻlab, 2000 soʻmini taksi uchun doʻstiga berishdi, demak, umumiy hisob 27000 soʻm boʻladi. Yuqoridagi hisoblashda 2000 soʻm 27000 soʻmning ichida yotibdi. ▲

3-misol. *"2·2=5" sofizmi:* 20−16−4=25−20−5 toʻgʻri tenglikni soddalashtiramiz:

$$2(10-8-2)=25-20-5$$
$$2\cdot2\cdot(5-4-1)=5\cdot(5-4-1)$$

Oxirgi tenglikning oʻng va chap qisimlarini umumiy (5−4−1) koʻpaytuvchiga qisqartirib, 2·2=5 tenglikni hosil qilamiz.

△ Bu yerdagi qilinayotgan asosiy "xatolik" 2·2·(5−4−1)=5·(5−4−1) tenglikning ikki qismini nolga teng boʻlgan (5−4−1) koʻpaytuvchiga qisqartirishda. ▲

Paradoks[3] – ko‘pchilik tomonidan qabul etilgan an’anaviy fikrga o‘z mazmuni yoki shakli bilan keskin zid bo‘lgan, kutilmagan mulohaza. Har qanday paradoks "shubhasiz to‘g‘ri" (asoslimi, asossizmi – bundan qat’iy nazar) hisoblangan u yoki bu fikrni inkor etishdek ko‘rinadi. "Paradoks" terminining o‘zi ham dastlab antik falsafada har qanday g‘alati, orginal fikrni ifodalash uchun ishlatilgan.

Paradokslar, odatda, mantiqiy asoslari to‘la aniqlanmagan nazariyalarda uchraydi.

4-misol

Yolg‘onchi paradoksi. "Men tasdiqlayotgan barcha narsa yolg‘on" mulohazani qaraylik.

△ Agar bu mulohaza rost bo‘lsa, bu mulohazaning ma’nosiga asosan aytilgan mulohazaning yolg‘on ekanligi haqiqat. Agar bu mulohaza yolg‘on bo‘lsa, mulohazadagi ta’kid – yolg‘on. Demak, bu mulohaza yolg‘on degan mulohaza yolg‘on, shunday ekan, bu mulohaza haqiqat. Ziddiyat. ▲

5-misol

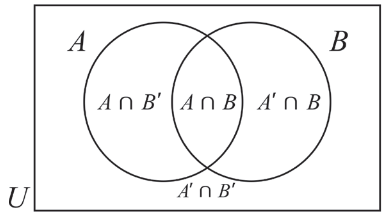
Refleksivlik paradoksi. O‘zbek tilidagi so‘zning ma’nosi o‘zida ifodalansa, uni refleksiv deb ataylik.

Masalan, "o‘zbekcha" so‘zi refleksiv, "inglizcha" so‘zi esa refleksiv emas. Huddi shunday, "o‘nta harfli" so‘zi undagi harflar soni chindan ham, 10 ga teng bo‘lgani uchun refleksiv, "oltita harfli" so‘zi esa refleksiv emas. Barcha refleksiv so‘zlar to‘plamini qaraylik. "Norefleksiv" so‘zining o‘zi refleksivmi?

△ Agar bu so‘z refleksiv bo‘lsa, u holda ma’nosiga ko‘ra, u norefleksiv. Agar bu so‘z norefleksiv bo‘lsa, u holda uning ma’nosi o‘zida ifodalangani uchun, u refleksiv bo‘ladi. Ziddiyat. ▲

16-18 MASALALAR YECHISH

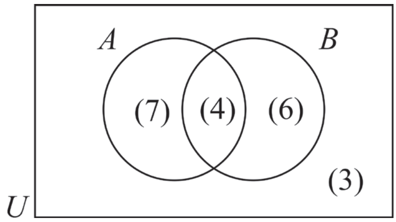
1-masala. Kesishadigan ikkita A, B to‘plamlar universal to‘plamni to‘rt qismga ajratadi:



3 Qad. yun. παράδοξος – kutilmagan, g‘alati.

Demak, universal to‘plam elementlari soni shu qismlar elementlari soni yig‘indisi ekan.

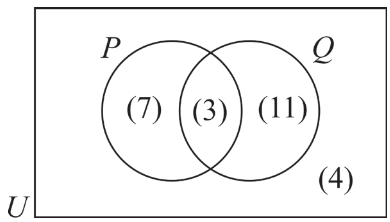
Quyidagi diagrammada universal to‘plam mos qismlarining elementlari soni qavsga olinib yozilgan:



Bu yerda, masalan, A, B to‘plamlarning ikkalasiga 4 ta element tegishli, 3 ta element esa birortasiga ham tegishli emas.

U to‘plamning ixtiyoriy elementi 4 ta qismlardan aqalli bittasiga tegishli bo‘lgani bois U to‘plam elementlarining soni 7+4+6+3=20 ga teng.

2-masala. Rasmga qarab, quyidagi to‘plamlarning elementlari sonini toping:



a) P; b) Q'; c) $P \cup Q$;

d) P ga tegishli, ammo Q ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami;

e) Q ga tegishli, ammo P ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami;

f) na P ga, na Q ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami.

a) $n(P)=7+3=10$; b) $n(Q')=7+4=11$;

c) $n(P \cup Q)=7+3+4=21$; d) $n(P$, ammo Q emas$)=7$;

e) $n(Q$, ammo P emas$)=11$.

3-masala. Agar $n(U)=30$, $n(A)=14$, $n(B)=17$ va $n(A \cap B)$ bo‘lsa,

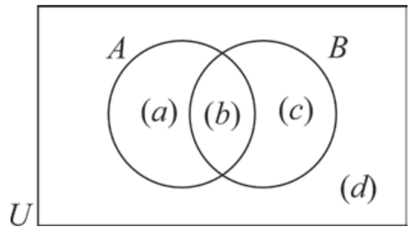
a) $n(A \cup B)$ ni toping.

b) A ga tegishli, ammo B ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami nechta elementdan tashkil topgan?

Venn diagrammasini tuzamiz:

$n(A \cap B)$ dan $b=6$; $n(A)$ dan $a+b=14$; $n(B)$ dan $b+c=17$; $n(U)$ dan $a+b+c+d=30$ tenglik kelib chiqadi.

Demak, $b=6$, $a=8$, $c=11$, $d=5$.



Diagrammadan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

a) $n(A \cup B)=a+b+c=25$;

b) A ga tegishli, ammo B ga tegishli bo‘lmagan elementlar soni $a=8$ ga teng. ▲

Mashqlar

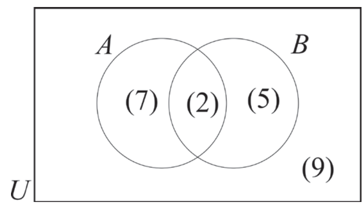
Diagrammadan foydalanib, quyidagi to‘plamlar elementlari sonini toping:

82. a) B; b) A'; c) $A \cup B$;

d) A ga tegishli, ammo B ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami;

e) B ga tegishli, ammo A ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami;

f) na A ga, na B ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami.

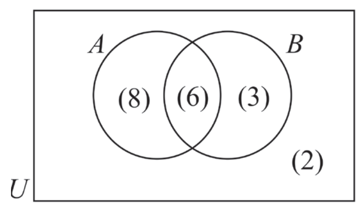


83. a) X'; b) $x \cap Y$; c) $x \cup Y$;

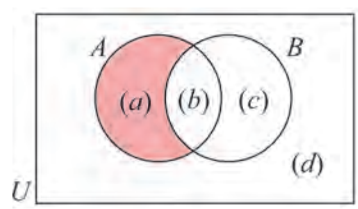
d) x ga tegishli, ammo Y ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami;

e) Y ga tegishli, ammo x ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami;

f) na x ga, na Y ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami.



84. a) $n(B)$; b) $n(A')$;
c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;
e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.



85. $n(U)=26$, $n(A)=11$, $n(B)=12$ va $n(A \cap B)=8$ bo‘lsa:

a) $n(A \cup B)$ ni toping;

b) B ga tegishli, ammo A ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami nechta elementdan tashkil topgan?

86. $n(U)=32$, $n(M)=13$, $n(M \cup N)=26$ va $n(M \cap N)=5$ bo‘lsa:

a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$ ni toping.

87. $n(U)=50$, $n(S)=30$, $n(R)=25$ va $n(R \cup S)=48$ bo‘lsa:

a) $n(R \cap S)$;

b) S ga tegishli, ammo R ga tegishli bo‘lmagan elementlar to‘plami nechta elementdan tashkil topgan?

4-masala. Sport to‘garagida qatnashgan 27 nafar o‘quvchidan 19 nafari qora sochli, 14 nafari qora ko‘zli va 11 nafari ham qora sochli, ham qora ko‘zli.

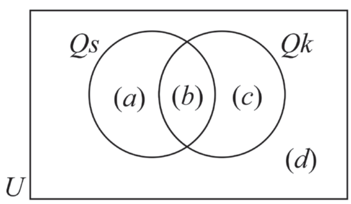
a) Bu ma’lumotni Venn diagrammasida tasvirlang va tushuntiring.

b) **I** Yo qora sochli, yo qora ko‘zli; **II** qora sochli , ammo qora ko‘zli emas o‘quvchilar nechta?

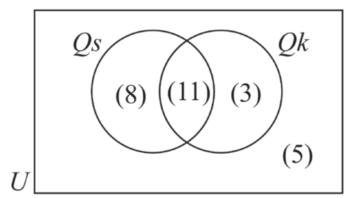
△ a) Qs – qora sochli, Qk esa qora ko‘zli o‘quvchilar to‘plami bo‘lsin. Quyidagi diagrammaga ega bo‘lamiz:

Bunda

$a+b+c+d=27$; $a+b=19$; $b+c=14$;
$b=11$; $a=8$; $c=3$; $d=5$.



Ya’ni



b) Diagrammaga qarab, quyidagilarni aniqlaymiz:

I Yo qora sochli, yo qora ko‘zli o‘quvchilar soni

$n(Qs \cap Qk)=8+11+3=22$ ta;

II qora sochli, ammo qora ko‘zli emas o‘quvchilar soni

$n(Qs \cap Qk')=8$ ta. ▲

Mashqlar

88. Badminton klubida 41 nafar qatnashchidan 31 nafari yakka tartibda va 16 nafari juftliklarda o‘ynadilar. Nechta qatnashchi ham yakka tartibda, ham juftliklarda o‘ynaganlar?

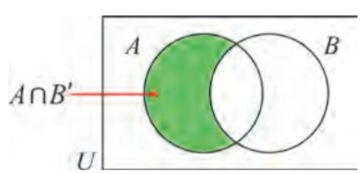
89. Korxonada 56 nafar ishchi ishlamoqda. 1 hafta ichida shulardan 47 nafari kunduzgi va 29 nafari kechki smenalarda ishladilar. Nechta ishchi ham kunduzgi, ham kechki smenada ishladilar?

90. Quyidagi Venn diagrammasiga qarab

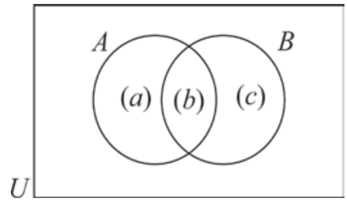
$n(A \cap B')= n(A)-n(A \cap B)$,

$n(A' \cap B)= n(B)-n(A \cap B)$

tengliklar o‘rinli ekanligi ko‘rsating.



91. Venn diagrammasidan foydalanib,
$n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
formulani keltirib chiqaring.



92. 50 ta talabadan 40 tasi ingliz tilini, 25 tasi esa nemis tilini o‘rganmoqda. Ikkala tilni ham o‘rganayotgan talaba nechta?

4-masala. Futbol musobaqasida shahardan 3 ta *A, B* va *C* jamoa qatnashmoqda. Shahar aholisining 20 foizi *A* jamoaga, 24 foizi *B* jamoaga va 28 foizi *C* jamoaga muxlislik qiladilar. Shahar aholisining 4 foizi ham *A*, ham *B* jamoaga, 5 foizi ham *A*, ham *C* jamoaga, 6 foizi esa ham *B*, ham *C* jamoaga muxlislik qiladi. Bundan tashqari, shahar aholisining 1 foizi barcha jamoalarga muxlislik qilganligi ma’lum.

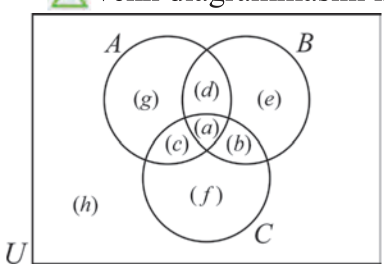
Shahar aholisining necha foizi:

a) faqat *A* jamoaga muxlislik qiladi;

b) ham *A*, ham *B* jamoaga muxlislik qilib, *C* jamoaga muxlislik qilmaydi;

c) hech qanday jamoaga muxlislik qilmaydi?

Venn diagrammasini ma’lumotlar bilan to‘ldiramiz.



$a=1$, chunki shahar aholisining 1 foizi barcha jamoalarga muxlislik qiladi.

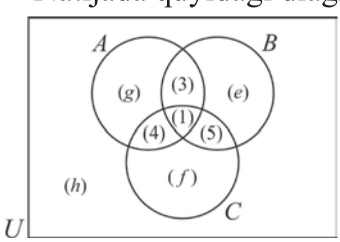
$a+d=4$, chunki shahar aholisining 4 foizi ham *A*, ham *B* jamoaga muxlislik qiladi.

$a+b=6$, chunki shahar aholisining 6 foizi ham *B*, ham *C* jamoaga muxlislik qiladi.

$a+c=5$, chunki shahar aholisining 5 foizi ham *B*, ham *C* jamoaga muhlislik qiladi.

Demak, $d=3$, $b=5$, $c=4$.

Natijada quyidagi diagramma hosil bo‘ladi:



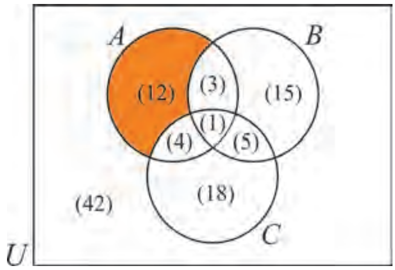
Bundan tashqari, shahar aholisining 20 foizi *A* jamoaga muxlislik qilgani uchun $g+1+4+3=20$, ya’ni $g=12$.

Xuddi shunday, shahar aholisining 24 foizi *B* jamoaga muxlislik qilgani uchun $e+1+5+3=24$, ya’ni $e=15$.

Nihoyat, shahar aholisining 28 foizi C jamoaga muxlislik qilgani uchun f+1+5+4=28, ya’ni f=18.

Shahar aholisi 100 foiz bo‘lgani uchun, hech qaysi jamoaga muxlislik qilmaganlar foizi h=42 ga teng.

a) faqat A jamoaga muxlislik qiladiganlarning foizini mos bo‘lakni bo‘yab topamiz: g=20–4–3–1=12.



b) ham A, ham B jamoaga muxlislik qilib, C jamoaga muxlislik qilmaydiganlar foizi 12+3+15=30 ga teng.

c) hech qanday jamoaga muxlislik qilmaydiganlar soni h=42 ga teng.

Mashqlar

93. Xalqaro anjumanda 58 nafar ishtirokchilar turli tillarda, jumladan 28 nafari arab, 27 nafari xitoy, 39 nafari esa ingliz tilida muloqot qila oladilar.
a) faqat xitoy tilida muloqot qila oladiganlar;
b) shu tillardan birortasida ham muloqot qila olmaydiganlar;
c) na arab, na xitoy tilda muloqot qila olmaydiganlar nechta?

94. Quyidagi mulohazalarning inkorini tuzing:
a) quyosh charaqlamoqda va havo issiq;
b) agar osmon bulutsiz bo‘lsa, men daryoga boraman;
c) yomg‘ir yog‘mayapti;
d) men yo nazorat ishiga tayyorlanaman, yo nazorat ishini yaxshi yoza olmayman;
e) ayrim o‘quvchilar iqtidorli;
f) barcha o‘quvchilar iqtidorli;
g) iqtidorli o‘quvchilar yo‘q;
h) ayrim o‘quvchilarning ko‘zlari moviy.

Mulohazalarni mantiqiy bog‘lovchilar yordamida ifodalang (**95–104**):

95. Agar talaba matematikani o‘zlashtirsa, uning tafakkuri kengayadi.

96. Agar men matematikani va chet tilini o‘zlashtirsam, men dam olishga yoki uyga, yoki toqqa ketaman.

97. Ta’til boshlangani yolg‘on.

98. Agar inson yoshligidan o‘zini boshqara olsa, u holda uning atrofidagilar undan ranjimaydilar va uni hurmat qiladilar.

99. Agar metalldan elektr toki o‘tsa, uning temperaturasi oshadi.

100. U uyga yo taksida, yo poezdda ketadi.

101. Bu mahsulot uchun qora yoki rangli metall ishlatilgan.

102. Ta’til boshlanishi uchun chorak tugashi yetarli.

103. Ta’til boshlanishi uchun chorak tugashi zarur.

104. Ta’til boshlanishi uchun chorak tugashi zarur va yetarli.

Mulohazalarni mantiqiy bog‘lovchilar yordamida ifodalang va rost-yolg‘onligini aniqlang (**105–117**):

105. Agar inson ruhiy kasal bo‘lsa, u yaqinlarini tanimaydi. Bu inson ruhiy kasal. Demak, u yaqinlarini tanimaydi.

106. Agar men senga ishonsam, sen meni aldaysan. Demak, men senga ishonmasam, sen meni alday olmaysan.

107. Ertaga biz teatrga yoki muzeyga boramiz. Agar teatrga borsak, uyga kech qaytamiz. Agar muzeyga borsak, uyga vaqtliroq yetib kelamiz. Ammo biz uyga kech qaytmaymiz. Demak, biz teatrga emas, muzeyga boramiz.

108. Agar u Alisherning otasi bo‘lsa, u Murodning otasi bo‘la olmaydi. U Alisherning va Jamshidning otasi ekanligi noto‘g‘ri ekan. U yo Jamshidning yo Murodning otasi ekanligi aniqlandi. Demak, u Alisherning otasi emas.

109. Agar hozir qish bo‘lsa, harorat past bo‘ladi. Hozir kuz bo‘lmasa, qish bo‘ladi. Hozir kuz. Demak, harorat past emas.

110. Agar Po‘lat qiziquvchan bo‘lmasa, u jurnalist bo‘lmaydi. Agar Po‘lat jurnalist bo‘lsa, u o‘qituvchi bo‘lmaydi. Po‘lat juda qiziquvchan, ammo u o‘qituvchi emas. Demak, Po‘lat – jurnalist.

111. Agar yomg‘ir yog‘sa, osmon bulutli bo‘ladi. Agar osmon bulutli bo‘lmasa, quyosh bo‘ladi. Yomgir yog‘ayapti, ammo quyosh bor. Demak, quyosh bo‘lsa, osmon bulutli bo‘lmaydi.

112. Agar Murod yana tezlikni oshirsa, uning hujjatlari olib qo‘yiladi. Agar Murod mast holda rulga o‘tirsa, u tezlikni oshirmaydi. Bugun Murod mast bo‘lmaydi va tezlikni oshirmaydi. Demak, uning hujjatlari bugun olib qo‘yilmaydi.

113. Ko‘paytirish jadvalini bilmaganlar savodsiz hisoblanadi. Alifboni bilmaganlar ham savodsiz hisoblanadi. U yo ko‘paytirish jadvalini, yo alifboni bilmaydi. Demak, u savodsiz.

114. Agar u haq bo‘lsa, men undan uzr so‘rashim kerak. Agar men haq bo‘lsam, u mendan uzr so‘rashi kerak. Ikkalamizdan bittamiz albatta uzr so‘rashi kerak. Xulosa: birimiz haq.

115. Men yo maktabga boraman, yo meni onam urishadi. Men maktabga bormayman. Demak, meni onam albatta urishadi.

116. Agar men masalani bexato yechsam, olingan natija darslikdagi javob bilan bir xil bo‘ladi. Mening natijam bilan darslikdagi javob farqlanmoqda. Demak, men masalani yechishda xatoga yo‘l qo‘yganman.

117. Fan murakkab emas yoki u yaxshi o‘qitilmoqda. Agar fan murakkab bo‘lmasa, uni o‘zlashtiraman. Agar fan yaxshi o‘qitilsa, uni o‘zlashtiraman. Demak, barcha hollarda fanni o‘zlashtiraman.

118. Rostlik jadvallari yordamida quyidagi mulohazalarning turini aniqlang va tabiiy tildagi mos darak gapga misol keltiring.

a) $p \vee q \Rightarrow p \vee q$;
b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$;
c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$;
d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$;
e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$;
f) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$.

Quyidagi mulohazalarni mantiqiy bog‘lovchilar yordamida ifodalang va rost-yolg‘onligini aniqlang:

119. Barcha delfinlar – sut emizuvchilar. Birorta ham baliq sut emizuvchi emas. Demak, birorta ham baliq delfin emas.

120. Barcha sigirlar – sut emizuvchilar. Barcha sigirlar pichanni iste’mol qiladilar. Demak, ayrim sut emizuvchilar pichanni iste’mol qiladilar.

121. Ayrim talabalar ishlaydi va ayrim talabalar yaxshi o‘qiydilar. Demak, ayrim yaxshi o‘qiydigan talabalar ichida ishlaydiganlari bor.

122. Barcha metallar qattiq shaklda. Simob – metall. Demak, simob qattiq shaklda.

123. Hech qanday metall gaz emas. Ayrim moddalar metallar. Demak, ayrim moddalar gaz emas.

124. Barcha metallar issiqlikni yaxshi o‘tkazadilar. Barcha metallar elektr tokini o‘tkazadilar. Demak, ayrim elektr o‘tkazuvchilar issiqlikni yaxshi o‘tkazadilar.

125. Ayrim erkaklar matematiklardir. Ayrim matematiklar – faylasuflardir. Demak, ayrim faylasuflar erkaklardir.

126. Barcha alpinistlar dovyurak. Ayrim alpinistlar erkaklar. Demak, ayrim erkaklar dovyurak bo‘ladi.

127. Barcha olimlar aqlli. Ayrim aqlli insonlarning tili o‘tkir. Demak, ayrim tili o‘tkirlar olimlardir.

128. Barcha chet tili o‘qituvchilari chet tilini yaxshi biladilar. Chet tilini yaxshi biladiganlarning ayrimlari matematikani yaxshi ko‘rmaydilar. Demak, matematikani yaxshi ko‘radiganlarning ayrimlari chet tili o‘qituvchlari emas.

129. Barcha kromanyonlar – agressiv (tajovuskor). Birorta neandertal kromanyon emas. Demak, hech qanday neandertal agressiv emas.

130. Ayrim sut emizuvchilar – kitlar. Barcha kitlar – yirik hayvonlar. Demak, ayrim yirik hayvonlar sut emizuvchilardir.

Matnlarni o'qing va holatni muhokama qiling (**131–138**):

131. Krit faylasufi Epimenid barcha kritliklar yolg'onchi ekanligini tasdiqladi. Epimenid rost gapirdimi?

132. Aflotun: Hozir Suqrot aytgan barcha narsa yolg'on.
Suqrot: Hozir Aflotun aytgan gap yolg'on.
Kim rost gapirdi?

133. Qog'ozning bir tomoniga: "Qog'ozning boshqa tomoniga yozilgan gap yolg'on", shu qog'ozning ikkinchi tomoniga: "Qog'ozning boshqa tomoniga yozilgan gap yolg'on" deb yozilgan. Qog'ozning qaysi tomoniga rost gap yozilgan?

134. Mashhur faylasuf Protagor Evatlni tekinga huquqqa o'rgatish uchun shogirdlikka oldi. Bunda agar Evatl o'zining birinchi sud majlisida g'olib bo'lsa, menga bir muncha pul to'laydi ma'nodagi shartnoma tuzildi.
O'qishdan so'ng Evatl ishga hech chiqmadi. Natijada uning birinchi sud majlisida qatnashish-qatnashmasligi mavhum bo'lib qoldi. Protagor o'zining shogirdi ustidan sudga shikoyat qildi. Sud jarayonidan lavha:
Protagor. Har qanday holatda bu yigit menga to'lashi kerak. Haqiqatdan ham, agar u bu sudda g'olib bo'lsa, shartnomaga ko'ra u menga to'laydi. Agar yutmasa, sud qaroriga ko'ra menga to'laydi.
Evatl. Men Protagorga hech narsa bermayman! Agar men sudda g'olib bo'lsam, g'olib bo'lgan odam sifatida hech narsa bermayman. Ammo men yutqazishga ham tayyorman. Bu holda shartnomaga ko'ra men hech narsa to'lamayman.

135. Bu qiziqarli gapda so'zlar soni yettiga teng.

136. Bu gapni o'qish ma'n etiladi.

137. Bir inson to'tiqushni sotayotganda to'tiqush ixtiyoriy tilda eshitgan har bir so'zni takrorlaydi, deb ishontirdi. Ammo sotib olingan to'tiqush hech narsa gapirmadi. Agar sotuvchi aldamaganligi ma'lum bo'lsa, holatni tushuntiring.

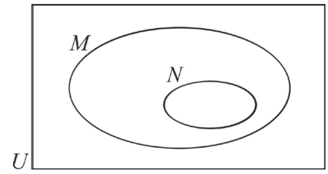
138. Doniyordagi kitoblar soni 1000 tadan ko'p.
Yo'q, undagi kitoblar 1000 tadan kam.
Unda kamida bitta kitob bor.
Shu uchta mulohazadan aqalli bittasi rost. Doniyorda nechta kitob bor?

Nazorat topshiriqlari

I variant

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
$A = \{0$ *va* 9 *orasidagi barcha juft sonlar*$\}$, $B = \{18$ *soning natural bo'luvchilari*$\}$ bo'lsa, $A \cap B$ to'plam elementlarini yozing .

2. Diagrammani daftaringizga ko'chiring va $M \cap N$ to'plamni belgilang.



3. p: x – juft son, q: x son 3 ga bo'linadi mulohazalarni qaraylik. Mulohazalarni so'zlar yordamida ifodalang.
Ular qaysi x larda rost? Yolg'on?
a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.

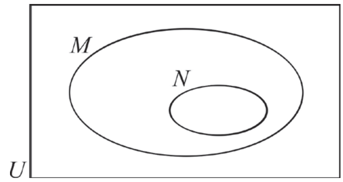
4. Quyidagilardan qaysilari mantiqiy tengkuchli?
a) $p \Rightarrow q$ va $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ va $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

5. Hukmlarning mantiqiy shakllarini yozing. Bu hukmlarning to'g'ri-noto'g'riligini tekshiring.
Agar osmon bulutli bo'lsa, men telpagimni kiyaman. Osmon bulutli. Demak, men telpagimni kiyaman.

II variant

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{0$ *va* 9 *orasidagi barcha juft sonlar*$\}$, $B = \{18$ *soning natural bo'luvchilari*$\}$ bo'lsa, $(A \cap B)'$ to'plam elementlarini yozing .

2. Diagrammani daftaringizga ko'chiring va $M \cap N'$ to'plamni belgilang.



3. p: x – juft son, q: x son 3 ga bo'linadi mulohazalarni qaraylik. Mulohazalarni so'zlar yordamida ifodalang. Ular qaysi x larda rost? Yolg'on? a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

4. Quyidagilardan qaysilari mantiqiy tengkuchli?
a) $\neg(p \wedge q)$ va $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ va $q \Rightarrow p$.

5. Hukmlarning mantiqiy shakllarini yozing. Bu hukmlarning to'g'ri-noto'g'riligini tekshiring. Barcha o'qituvchilar ilmga chanqoq. Muazzam Olimova o'qituvchi emas. Demak, Muazzam Olimova ilmga chanqoq emas.

II BOB

MOLIYAVIY MATEMATIKA ELEMENTLARI

19-21 SODDA FOIZLAR, MURAKKAB FOIZLAR

Ma'lum miqdordagi pul qarzga berilganda qarz oluvchi belgilangan muddatda qarz beruvchiga (*kreditorga*) olingan summani (qarzni) qaytarishi haqida kelishiladi.

Bundan tashqari, har bir qarz oluvchi kreditorga qo'shimcha mablag' to'lashni o'z zimmasiga oladi.

Ravshanki, qarzdor tomonidan to'lanadigan pul qarz miqdoriga, to'lash muddatiga va kreditor tomonidan daromad olish maqsadida belgilangan foiz stavkasiga bog'liq.

Kreditorning qarzdorga ma'lum miqdordagi pulni belgilangan muddatda qarzga berganligi oqibatida oladigan daromadini hisoblash uchun odatda ikki usul: **oddiy (sodda) foizlar va murakkab foizlar** usullari qo'llaniladi.

Oddiy foizlar

Oddiy foizlar – kreditorning qarzdorga ma'lum miqdordagi pulni belgilangan muddatda qarzga berganligi natijasida oladigan daromadini hisoblash usulidir.

Masalan, 2 000 000 so'm 3 yilga qarzga olinmoqda. Bunda kreditor tomonidan har yil 17 foiz stavkasi belgilandi.

Bu holda 1 yildan so'ng $\frac{17}{100}\cdot 2\,000\,000$ so'm, 3 yildan so'ng esa qo'shimcha mablag' $\frac{17}{100}\cdot 2\,000\,000\cdot 3 = 1\,020\,000$ so'm to'lanishi lozim.

Bu misoldan quyidagi **oddiy foizlar formulasi** deb ataluvchi munosabat kelib chiqadi:

$$I=\frac{Crn}{100},$$

bu yerda C – dastlab olingan qarz miqdori, I – C miqdordagi pulni ishlatgani uchun qarzdorning kreditorga to‘laydigan foiz to‘lovi. Ushbu parametr *foiz* to‘lovi yoki, soddaroq, foiz deb ham ataladi, r – har yilga belgilangan foiz stavkasi, n – yillar soni.

1-misol. 8 000 000 so‘m yiliga 7 foiz stavkasida 18 oyga olingan bo‘lsa, foiz to‘lovni hisoblang.

△ $C = 8000000, \quad r=7\%, \quad n=\frac{18}{12} = 1{,}5$ yil.

Demak, $I=\frac{Crn}{100}=\frac{8000000\cdot 7\cdot 1{,}5}{100} = 840\,000$ so‘m. ▲

2-misol. Kreditor tomonidan foiz stavkasi har yilga 8% deb belgilangan. Tadbirkor 4 yil ichida olingan qarzni va *foiz* to‘loviga qo‘shimcha 1600 AQSh dollarni to‘ladi va qarzdan qutildi. Tadbirkor qancha miqdorda qarz olgan edi?

△ Oddiy foizlar formulasiga ko‘ra

$$I=\frac{Crn}{100}, \text{ bu yerda } I=1600;\ r=8;\ n=4.$$

Demak, $1600=\frac{C\times 8\times 4}{100}$.

Bundan, C=5000 (AQSh dollari). ▲

3-misol. Bank dastlab 4000 AQSh dollari miqdorida qarz berib, 18 oyda 900 AQSh dollari daromad oldi. Agar to‘lov yilma-yil amalga oshirilgan bo‘lsa, yillik foiz stavkasi nechaga teng?

△ Oddiy foizlar formulasiga ko‘ra

$I=\frac{Crn}{100}$, bu yerda I=900; n=18 oy =1,5 yil, C=4000.

Demak, $900=\frac{4000\times r\times 1{,}5}{100}$.

Bundan, r=15%. ▲

4-misol. Kreditor dastlab 2000 AQSh dollari miqdorida qarz berib, bir necha yil mobaynida yilma-yil to‘langandan so‘ng jami bo‘lib 3000 AQSh dollarni oldi. Agar foiz stavkasi har yilga 12,5% deb belgilangan bo‘lsa, to‘lovlar necha yilda amalga oshirilgan?

Kreditor 3000–2000=1000 (AQSh dollari) miqdorida daromad olgan. Oddiy foizlar formulasiga ko‘ra

$I=\frac{Crn}{100}$, bu yerda I=1000; C=2000; r=12,5%.

Demak, $1000 = \frac{2000\times12,5\times n}{100}$

Javob: 4 yil.

Murakkab foizlar

Murakkab foiz usulining mohiyatini tushunish uchun quyidagi masalaga etibor beramiz.

5-misol.

Agar 6000 AQSh dollari miqdorida qarz yillik murakkab foiz stavkasi 8% bilan 3 yilda to‘lash sharti bilan olingan bo‘lsa, kreditor tomonidan olinadigan daromad qancha bo‘ladi?

Yillik murakkab foiz stavkasini inobatga olib, har yilgi foiz to‘lov miqdorini hisoblaymiz:

Yil	**Qarz** (1)	**Foiz to‘lovi** $=\frac{Crn}{100}$ (2)	**Balans** (1) + (2)
1	\$6000,00	\$6000,00$\times\frac{8}{100}\times$1=\$480,00	\$6480,00
2	\$6480,00	\$6480,00$\times\frac{8}{100}\times$1=\$518,40	\$6998,00
3	\$6998,00	\$6998,00$\times\frac{8}{100}\times$1=\$559,87	\$7558,27

Demak, 6000 AQSh dollari miqdordagi qarzdan qutilish uchun 3 yil mobaynida 7558,27 AQSh dollari miqdordagi to‘lovlarni amalga oshirish zarur.

Bunda kreditor \$7558,27 − \$6000 = \$1558,27 miqdorda daromad oladi. Bu daromad umumiy *murakkab foiz to‘lovi (ustama foiz)* deb yuritiladi.

Ko‘rinib turibdiki, kreditor daromadi oxirgi yilda hosil bo‘lgan balans va dastlabki qarz miqdori ayirmasiga teng ekan.

Murakkab foizlar usuli yilni yarim yilliklarga, choraklarga, oylarga, kunlarga bo‘lib qo‘llanilishi ham mumkin.

6-misol.

Agar 10000 AQSh dollari miqdorida qarz yillik murakkab foiz stavkasi 6% bilan 1 yilda choraklarga bo‘lib to‘lash sharti bilan olingan bo‘lsa, kreditor tomonidan olinadigan daromad qancha bo‘ladi?

△

Chorak	**Qarz** (1)	**Foiz to‘lovi** $= \frac{Crn}{100}$ (2)	**Balans** (1) + (2)
1	\$10000,00	$\$10000{,}00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$150{,}00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$\$10000{,}00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$152{,}25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$\$10302{,}25 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$154{,}53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$\$10456{,}78 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$156{,}85$	\$10613,63

Demak, 10000 AQSh dollari miqdordagi qarzdan qutilish uchun 1 yil mobaynida 10613,63 AQSh dollari miqdordagi to‘lovlarni amalga oshirish zarur.

Bunda kreditor 613,63 AQSh dollari miqdorda daromad oladi. ▲

Agar qarz bir necha yilga berilgan bo‘lsa, yakuniy balans quyidagicha hisoblanadi:

$$A = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,$$

bu yerda A – yakuniy balans, C – dastlab olingan qarz miqdori, r – har yilga belgilangan foiz stavkasi, n – yillar soni.

Agar qarz n yilga berilgan bo‘lsa, to‘lovlar esa har yilni k ta qismga (yarim yilliklar, choraklar, oylar va h.k.) bo‘lib amalga oshirilsa, to‘lanadigan umumiy miqdor $A = C\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

Ikkala usulda ham umumiy murakkab foiz to‘lovi (ustama foiz) $I = A - C$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

6-misolni shu formulalarga tayanib yechamiz.

C=10000, r=6, n=1, k=4.

$A = C\times\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}$; $A = 10000\times\left(1+\frac{6}{100}\right)^4$; A=10613,64.

Demak, 10000 AQSh dollari miqdordagi qarzdan qutilish uchun 1 yil mobaynida 10613,64 AQSh dollari miqdordagi to‘lovlarni amalga oshirish zarur.

Bunda kreditor 613,64 AQSh dollari miqdorda daromad oladi.

Agar bankga oddiy foiz bo‘yicha qo‘yilgan dastlabki mablag‘ C so‘m bo‘lsa, n yildan so‘ng bank mijozga $a_n = C(1+\frac{nr}{100})$ so‘m miqdorda pul to‘laydi, bunda r bankning yillik foiz stavkasi.

Agar, shu mablag‘ murakkab foiz bo‘yicha bankka qo‘yilsa, n yildan so‘ng bank mijozga $b_n = C(1+\frac{r}{100})^n$ so‘m miqdorda pul to‘laydi.

a_n – ketma-ketlikning arifmetik progressiya,

b_n – ketma-ketlikning esa geometrik progressiya tashkil qilishi ravshan.

Mashqlar

1. a) 3 000 funt sterling yillik foiz stavkasi 7% bo‘yicha 3 yilga qarzga olinsa;

b) 6100 AQSh dollari yillik foiz stavkasi 5,9% bo‘yicha 15 oyga qarzga olinsa;

c) 800 000 Yaponiya yenasi yillik foiz stavkasi 6,5% bo‘yicha 4 yil-u 7 oyga qarzga olinsa;

d) 250 000 yevro yillik foiz stavkasi 4,8% bo‘yicha 134 kunga qarzga olinsa;

kreditorga to‘lanadigan foiz to‘lovini toping.

2. 130000 AQSh dollari qarzga berilgan bo‘lsa, kreditor qaysi hollarda ko‘proq daromad oladi:
yillik foiz stavkasi 7% bo‘yicha 5 yilga,
yoki yillik foiz stavkasi 7,7% bo‘yicha 5,5 yilga belgilangandami?

3. Kreditor tomonidan foiz stavkasi har yilga 7% deb belgilangan. Tadbirkor 5 yil ichida olingan qarzini va foiz to‘loviga qo‘shimcha 910 AQSh dollarini to‘ladi va qarzdan qutildi. Tadbirkor qancha miqdorda qarz olgan?

4. Yillik foiz stavkasi 8% deb belgilangan. 3 yil ichida foiz to‘loviga qo‘shimcha 3456 funt sterling to‘langan bo‘lsa, qancha miqdorda qarz olingan?

5. Investor 21 oyda 2300 yevro daromad olmoqchi. Har yilgi foiz stavkasi 6,5% deb belgilangan bo‘lsa, investor qancha miqdorda investitsiya kiritishi lozim?

6. a) Kreditor 4500 AQSh dollari miqdorida qarz berib, 3 yilda 900 AQSh dollariga teng daromad oldi. Yillik foiz stavkasi nechaga teng?

b) Kreditor 170000 Yaponiya yenasi miqdorida qarz berib, 2 yilda 170000 Yaponiya yenasiga teng daromad oldi. Yillik foiz stavkasi nechaga teng?

7. 8 oy mobaynida 9000 AQSh dollari miqdorida qarz olinib, qarzdan tashqari qo'shimcha 700 AQSh dollari to'landi. Yillik foiz stavkasi nechaga teng?

8. Fuqaro 26 million so'm bankka qo'yib, uning hisobida 18 oyda 32 million so'm bo'lganini aniqladi. Yillik foiz stavkasi nechaga teng?

9. a) Kreditor 20000 AQSh dollari qarz berib, 5000 AQSh dollariga teng daromad oldi. Yillik foiz stavkasi 7% bo'lsa, qarz necha yilga olingan?

b) Kreditor 1200 yevro miqdorida qarz berib 487 yevro daromad oldi. Yillik foiz stavkasi 6,75% bo'lsa, qarz necha yilga olingan?

10. Mijoz bankka 9400 funt sterlingni yillik foiz stavkasi 6,75% bilan qo'ydi. 1800 funt sterling daromad olish uchun qancha vaqt kerak?

11. Agar:

a) 4500 yevro qarz yillik murakkab foiz stavkasi 7% bilan 3 yilda to'lash sharti ostida;

b) 6000 AQSh dollari qarz yillik murakkab foiz stavkasi 5% bilan 4 yilda to'lash sharti ostida;

c) 7400 funt sterling miqdorida qarz yillik murakkab foiz stavkasi 6,5% bilan 3 yilda to'lash sharti ostida olingan bo'lsa, yakuniy balansni hisoblang.

22-24 MASALALAR YECHISH

1-masala. Faraz qilaylik, tadbirkor 23000 AQSh dollari miqdorida qarzdan qutulish uchun to'lovlarni yilma-yil emas, masalan, oyma-oy teng qismlarda amalga oshirishga qaror qildi. Agar to'lov davri 6 yil, yillik foiz stavkasi 8% bo'lsa, u har oyda qanday miqdordagi to'lovlarni amalga oshirishi kerak?

1-qadam

Foiz to'lov miqdorini hisoblaymiz.

C=23 000, r=8%, n=6 bo'lgani uchun

$$I=\frac{Crn}{100}=\frac{23000\times8\times6}{100}=\$11040.$$

2-qadam

Oshgan kapital mablag' miqdorini, ya'ni umumiy to'lanadigan summani hisoblaymiz:

$$C+I=\$23000+\$11040=\$34040.$$

3-qadam

Necha oy davomida to‘lanishi kerakligini hisoblaymiz:

$$6\times12=72 \text{ oy.}$$

4-qadam

Demak, har oyida to‘lanadigan mablag‘

$$\frac{\$34040}{72}\approx \$472{,}78 \text{ ga teng.}$$

2-masala.

Agar 8800 yevro qarz yillik murakkab foiz stavkasi 4,5% bilan har yili to‘lash sharti ostida olingan bo‘lsa, kreditor tomonidan 3,5 yilda olingan daromad qancha bo‘ladi?

$C=8800$, $r=4{,}5\%$, $n=3{,}5$, $k=12\times3\frac{1}{2}=42$

Demak, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$; $A=8800\times(1+\frac{4.5}{1200})^{42}$,

$A=10298{,}08$, ya’ni $I=A-C=10298{,}08-8800=1498{,}08$

3,5 yilda olingan daromad €1498,08 ga teng.

3-masala.

Agar bankdan 50000 AQSh dollari miqdorida olingan kredit yillik murakkab foiz stavkasi 5,2% bilan har chorakda to‘lash sharti ostida olingan bo‘lsa, bankka 3 yilda qancha AQSh dollari to‘lanadi?

$A=50000$, $r=5{,}2\%$, $n=3$, $k\cdot n=4\times3=12$

Demak, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}$ $50000=C\times(1+\frac{5{,}2}{1200})^{12}$

$C=42820{,}99$. Bankka 3 yilda \$42821 to‘lanadi.

Binolar, inshootlar va imoratlar, texnik vositalar, asbob-uskuna, inventar va jihozlar, kompyuterlar va h.k. lar foydali xizmat muddati davomida eskiradi. Eskirish ulardan foydalanish vaqtida shu vositalarning texnik ishlab chiqarish xossalarini asta–sekin yo‘qotish jarayonini aks ettiradi.

Amortizatsiya iste’mol qilingan vositalar qiymatini ularning eskirishiga muvofiq ravishda mahsulot tannarxiga, davr xarajatlariga o‘tkazish, iste’mol qilingan vositalarning o‘rnini qoplash maqsadida pul fondini jamg'arish jarayonini aks ettiradi.

Amortizatsiya qiymatini hisoblash uchun quyidagi formuladan foydanalinadi:

$$A=C\times(1-\frac{r}{100})^{n},$$

bu yerda A – n ta davr qismidan keyin bo‘lgan amortizatsiya qiymati, C – dastlabки narx, r – har yilga belgilangan amortizatsiya normasi, n – davr qismlari soni (masalan, yillar).

4-masala.

Qurilish uskunasi 2400 funt sterling narxda sotib olingan. Agar amortizatsiya normasi 15% deb belgilangan bo‘lsa, uning 6 yildan keyingi qiymatini toping.

$A=C\times(1-\frac{r}{100})^n$, by yerda $C=2400$, $r=15$, $n=6$.

Demak,

$A=2400\times(1-0{,}15)^6$,

$A=2400\times(0{,}85)^6$.

Amortizatsiya qiymati taqriban 905,16 funt sterling ekanligini topamiz.

Demak, uskunaning 6 yildan keyinngi qiymati £2400 – £905,16 = £1494,84 ga teng.

Iste’mol (masalan mebel, elektron-maishiy texnika, kompyuter, avtomashina va h.k.) tovarlarni yoki uy-joyni (ipoteka) xarid qilish uchun turli kreditlarni rasmiylashtiradilar. Odatda, bunday kreditlar qisqa muddatlarga beriladi va doimiy yoki o‘zgaruvchan ustama foiz belgilanadi.

Quyida biz formulalardan foydalanmasdan tezkor hisob-kitoblar uchun kredit to‘lo‘vi jadvalini keltiramiz (1000 pul birligiga muvofiq):

Oylar	Yillik ustama foiz						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

5-misol.

Fuqaro 9200 yevro kredit oldi. Unga 12% yillik foiz to‘lovi va 3,5 yillik to‘lov muddati belgilangan. Bir oyga qancha to‘lanishi kerak? Jami bo‘lib qancha to‘lanishi kerak?

To‘lov muddati 42 oy bo‘lgani uchun jadvaldan har bir 1000 yevroga €29,2756 yevro to‘lanishi kerakligini aniqlaymiz.

Demak, 9200 yevro uchun har oyda €9200 = €29,2756×9,2

= €269,33552

≈ €269,340 to‘lanishi kerak.

Jami bo‘lib = €269,40×42

= €11314,80 to‘lanishi kerak.

Mashqlar

12. 10000 AQSh dollari miqdorida qarz 10 yilga yillik foiz stavkasi 5,75% bo‘yicha olindi. Qarz to‘lovlarini teng qismlarda har yarim yilda qanday miqdorda amalga oshirishi kerak?

13. 15000 yevro miqdoridagi qarz 36 oyga yillik foiz stavkasi 4,5% bo‘yicha olindi. Qarz to‘lovlarini teng qismlarda har chorakda qanday miqdorda berish kerak?

14. Bir kishi bankdan 8000 funt sterlingni 3,5 yilga har oyda 230 funt sterling to‘lash sharti bilan kreditga oldi. Unga qanday yillik foiz stavkasi belgilangan edi?

15. 6800 AQSh dollari miqdoridagi qarz 2,5 yilga yillik foiz stavkasi 8% bo‘yicha olindi. Qarz to‘lovlarini teng qismlarda oyma-oy to‘lash uchun har oyda qanday miqdorda berish kerak?

16. Agar

a) 950 yevro miqdoridagi qarz yillik murakkab foiz stavkasi 5,7% bilan 2 - yilning oxirida;

b) 4180 funt sterling miqdoridagi qarz yillik murakkab foiz stavkasi 5,75% bilan 3 - yilning oxirida;

c) 237000 Yaponiya yenasi miqdoridagi qarz yillik murakkab foiz stavkasi 7,3% bilan 4 - yilning oxirida

hisoblansa, umumiy murakkab foiz to‘lovini toping.

17. Maks 8500 AQSh dollari miqdoridagi bank depozitiga pul qo‘ydi. Yillik murakkab foiz stavkasini 6% belgilab, bank Maks har chorakda hisobiga pul o‘tkazmoqda. 1 yildan so‘ng Maksning hisobida qancha pul bo‘ladi?

18. Mariya 24000 funt sterlingni yillik murakkab foiz stavkasi 5% bo‘yicha bankka qo‘ydi. Har oyda bank uning hisobiga pul o‘tkazmoqda. 3 oydan so‘ng Mariyaning hisobida qancha pul bo‘ladi?

19. Kreditor 45000 AQSh dollari miqdorida yillik murakkab foiz stavkasi 8,5% bo‘yicha qarz berdi. Agar to‘lovlar

a) oddiy foizlar;
b) har yarim yilga murakkab foizlar;
c) har chorakda murakkab foizlar
bo‘yicha amalga oshirilsa, 3 yildan so‘ng olingan daromadlarni solishtiring.

20. Ofis uchun mebel 2500 yevroga xarid qilindi. Bunday vositalarning amortizatsiya normasi 15% ga teng ekanligi ma’lum. Quydagi jadvalni daftaringizga ko‘chiring va to‘ldiring.

Yillar	Amortizatsiya	Narxi
0		€2500
1	15%·€2500 = €375	
2		
3		

21. Fuqaro mebel sotib olish uchun 1200 AQSh dollari miqdorida kredit oldi. Yillik foiz stavkasi 8%, to‘lov muddati 5 yil bo‘lsa, u har oyda qancha to‘lashi kerak? Jami bo‘lib qancha mablag‘ to‘lanadi?
Kredit to‘lovi jadvalidan foydalaning.

22. Fuqaro uy-joyni ta’mirlash uchun 14000 AQSh dollari miqdorida kredit oldi. Yillik foiz stavkasi 11%, to‘lov muddati 4 yil bo‘lsa, u har oyda qancha to‘lashi kerak? Jami bo‘lib qancha mablag‘ to‘lanadi? Kredit to‘lovi jadvalidan foydalaning.

Nazorat topshiriqlari

1. Bank tomonidan har yilga foiz stavkasi 14% deb belgilangan. Tadbirkor bankdan olgan qarzini va foiz to‘loviga qo‘shimcha 16000000 so‘mni 5 yil ichida to‘ladi va qarzdan qutuldi. Tadbirkor qancha miqdorda qarz olgan?
2. Fuqaro dastlab bankka 20000000 so‘m omonatga qo‘yib, 15 oyda 900000 so‘m daromad oldi. Agar to‘lov yilma-yil amalga oshirilgan bo‘lsa, yillik foiz stavkasi nechaga teng?
3. Agar 20000000 so‘m qarz yillik murakkab foiz stavkasi 6% bilan 1 yilda choraklarga bo‘lib to‘lash sharti bilan olingan bo‘lsa, kreditor oladingan daromadi qancha bo‘ladi?
4. Djon uy-joy sotib olish uchun 5 yilga 25000 AQSh dollari miqdorida kredit olgan. Yillik murakkab foiz stavkasi 8% bo‘lsa va to‘lovlar har oyda amalga oshiriladigan bo‘lsa u har oyda qancha pul to‘lashi kerak? Kreditor qancha daromad oladi?
5. Uskuna 45000 AQSh dollariga sotib olindi va 2 yil 3 oydan so‘ng eskirish natijasida uning narxi 28500 AQSh dollariga teng. Uskunaning yillik amortizatsiya normasini toping.

III BOB

ELEMENTAR FUNKSIYALAR VA TENGLAMALAR

25-28 SODDA RATSIONAL TENGLAMALAR VA ULARNING SISTEMALARI

Agar bir tenglamaning barcha yechimlari ikkinchi tenglamaning ham yechimlari bo‘lsa, u holda ikkinchi tenglama birinchisining *natijasi* deyiladi.

Ikkita tenglamaning yechimlari to‘plamlari ustma-ust tushsa, bunday tenglamalar *tengkuchli* deyiladi.

1-misol. Tenglamalar tengkuchlimi?

1) $x + 2 = 3$ va $x + 5 = 6$; 2) $\frac{x^2 + x}{x - 1} = 0$ va $\frac{x+1}{x-1} = 0$.

△ 1) Ikkala tenglama bir hil ildizga ega: x=1. Boshqa ildizlar yo‘q bo‘lgani uchun bu tenglamalar tengkuchli.

2) Birinchi tenglama 0 ildiziga ega, ikkinchisi esa bunday ildizga ega emas. Demak, berilgan tenglamalar tengkuchli emas. ▲

x o‘zgaruvchili ikkita $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phad berilgan bo‘lsin.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ko‘rinishdagi ifoda *ratsional ifoda* deyiladi.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ – ratsional ifodalar bo‘lsa,

$$A(x)=B(x)$$

ko‘rinishdagi tenglama *ratsional tenglama* deyiladi.

Dastlab eng sodda ko‘rinishdagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \qquad (1)$$

ratsional tenglamani qaraylik.

Ma'lumki, $\frac{m}{n}$ kasr nolga teng bo'lishi uchun uning surati nolga teng bo'lishi, maxraji esa nolga teng bo'lmasligi (0 ga bo'lish mumkin emas!) zarur va yetarli.

Demak, (1) tenglamani yechish uchun $Q(x)\neq 0$ va $P(x)=0$ shartlarni bir vaqtda qanoatlantiradigan x noma'lumning barcha qiymatlarini topish zarur va yetarli.

Bu holat qisqa ko'rinishda quydagicha yoziladi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

2-misol. Tenglamani yeching:

1) $\frac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; 2) $\frac{x^2-2x+3}{x-7}=0$;

3) $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}=0$; 4) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$.

△ 1) $x^2-2x+1=0$ tenglama yagona $x=1$ ildizga ega. $x=1$ bo'lganda maxraj noldan farqli. Demak, berilgan tenglama yagona $x=1$ yechimga ega.

2) $x^2-2x+3=0$ kvadrat tenglama yechimga ega emas, chunki $D=1-3=-2<0$. Demak, berilgan tenglama ham ildizlarga ega emas.

3) $2x^2-5x+3=0$ tenglama kvadrat tenglamadir.
$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$, demak, bu tenglama ikkita ildizga ega:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}; \qquad x_1=\frac{5-1}{4}=1; \qquad x_2=\frac{5+1}{4}=1,5.$$

Ammo 1,5 soni $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}$ ifodaning maxrajini nolga aylantiradi, 1 soni esa – yo'q. Demak, berilgan tenglama yagona $x=1$ ildizga ega.

4) $(x-1)^2(x+2)=0$ tenglama 1 va -2 ikkita ildizlarga ega. Ammo 1 soni $(x-1)$ maxrajni nolga aylantiradi, -2 soni esa – yo'q. Demak, berilgan tenglama yagona $x=-2$ ildizga ega. ▲

Agar $A(x)$ yoki $B(x)$ ifodalarning kamida bittasi bir nechta ratsional ifodalar yig'indisi ko'rinishida bo'lsa, $A(x)=B(x)$ ratsional tenglamani yechish qoidasi shunday bo'lishi mumkin:

1-qadam. Tenglamaga kirgan kasrlarning umumiy maxraji topiladi;
2-qadam. Tenglamaning ikkala qismini umumiy maxrajga ko'paytiriladi;
3-qadam. Hosil bo'lgan tenglama ildizlari topiladi;
4-qadam. Topilgan ildizlardan umumiy maxrajni nolga aylantiradiganlari olib tashlanadi.

3-misol. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$ tenglamani yeching.

△ Tenglamaning ikkala qismini $2x(2-x)$ umumiy maxrajga ko'paytiramiz.

Hosil bo'lgan $4x+x(2-x)=8$ tenglamada soddalashtirishlarni bajarib, ushbu kvadrat tenglamaga kelamiz: $x^2-6x+8=0$;

$$D=9-8=1>0,$$

Demak, bu tenglama ikkita ildizga ega: $x_1=2$; $x_2=4$.

Tekshirish.

Agar $x=2$ bo'lsa, maxraj $x(2-x)=2(2-2)=0$. Ya'ni $x=2$ berilgan tenglamaning ildizi emas.

Agar $x=4$ bo'lsa, maxraj $x(2-x)=4(2-4)\neq 0$. Ya'ni $x=4$ berilgan tenglamaning ildizi. *Javob:* 4 ▲

Agar $A(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; $B(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ ko'rinishda bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}$ ko'rinishdagi ratsional tenglamani yechish uchun $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ proporsiyaning asosiy hossasidan foydalanish maqsadga muvofiq:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$$

Bunda quyidagi algoritm bo'yicha ish tutiladi:

1-qadam. $f(x)q(x)=p(x)g(x)$ tenglama ildizlari topiladi;

2-qadam. Topilgan ildizlardan $q(x), g(x)$ maxrajlarni nolga aylantiradiganlari olib tashlanadi.

4-misol. $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$ tenglamani yeching.

△ $(x-2)(x-4)=(x+2)(x+3)$; $x^2-4x-2x+8=x^2+3x+2x+6$;

$-6x+8-5x-6=0$; $-11x=-2$; $x=\frac{2}{11}$.

Agar $x=\frac{2}{11}$ bo'lsa, $x+2=\frac{2}{11}+2\neq 0$; $x-4=\frac{2}{11}-4\neq 0$.

Javob: $\frac{2}{11}$. ▲

Ayrim hollarda berilgan tenglamada qulay almashtirish bajarib, soddaroq tenglamaga kelish mumkin.

5-misol. Tenglamani yeching:

1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^4+5\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2-36=0;$ 2) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\frac{x}{x^2-2x+2}=1.$

△ 1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=t$ almashtirish bajaramiz. Bu holda $t\geqslant 0$ va tenglama $t^2+5t-36=0$ ko'rinishni oladi. Oxirgi tenglama $t=-9$ va $t=4$ ildizlarga ega, shulardan ikkinchisi musbat.

Demak, $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=4$, ya'ni $\frac{2x}{x+1}=2$ yoki $\frac{2x}{x+1}=-2$.

$\frac{2x}{x+1}=2$ tenglama yechimga ega emas, $\frac{2x}{x+1}=-2$ tenglama esa yagona $x=-0{,}5$ yechimga ega.

Javob: $x=-0{,}5$. ▲

2) Ravshanki, $x=0$ soni tenglamani qanoatlantiradi. $x\neq 0$ bo'lsin. Tenglamaning surat va maxrajini x ga bo'lsak:

$\frac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x-2+\frac{2}{x}}=1$ tenglamani hosil qilamiz.

$z=x+\frac{2}{x}-2$ almashtirishni bajarsak, berilgan tenglama

$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1$ ko'rinishni oladi.

Oxirgi tenglamani yechamiz:

$$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z}+\frac{z+1}{z(z+1)}-\frac{z(z+1)}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+5z+z+1-z^2-z}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}$$

Endi x ni topamiz.

$$x+\frac{2}{x}-2=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}-\frac{9}{5}=0 \Leftrightarrow 5x^2-3x+10=0.$$

$5x^2-9x+10=0$ kvadrat tenglamaning diskriminanti manfiy bo'lgani bois, u haqiqiy yechimga ega emas.

Javob: $x=0$. ▲

Ratsional tenglamalar sistemalari

Ratsional tenglamalardan tashkil topgan sistemalarni yechish bizga ma'lum bo'lgan qo'shish, o'rniga qo'yish va h.k. usullariga tayanadi. Bunda ishtirok etgan ratsional ifodalarning maxrajlari nolga teng bo'lmasligini qayd qilamiz.

6-misol. Sistemani yeching:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2xy-2\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15. \end{cases}$

△ 1) Birinchi tenglamada $\dfrac{x}{y}=t$ almashtirishni bajarsak, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{t}$ ($t\neq0$) bo'ladi.

$$t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2-5t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}, \\ t=-\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \text{ ya'ni } \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Bundan yoki $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ x^2-y^2=-5 \end{cases}$ sistemalarni hosil qilamiz.

Bu sistemalarni yechamiz:

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{9}{4}y^2-y^2=5 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{4}{9}y^2-y^2=5. \end{cases}$$

Birinchi sistema (3, 2), (–3, –2) yechimlarga ega, ikkinchi sistema esa yechimga ega emas.

Javob: (3; 2), (–3; –2).

2) $a=xy,\ b=\dfrac{x}{y}$ belgilash kiritaylik.

$$\begin{cases} 2a-3b=15, \\ a+b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12, \\ b=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=12, \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y, \\ y\cdot3y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y, \\ y^2=4. \end{cases}$$

Javob: (6; 2), (–6; –2).▲

Savol va topshiriqlar

1. Ratsional tenglamaga ta’rif bering.
2. Tengkuchli tenglamalarga ta’rif bering.
3. Tengkuchli tenglamalar sistemasiga misol keltiring.

Mashqlar

1. Tenglamalarni yeching (**1–2**):

a) $\dfrac{x+1}{2(x-1)}=\dfrac{9}{2(x+4)}+\dfrac{1}{x-1}$; b) $\dfrac{2y-5}{y+5}=\dfrac{3y+21}{2y-1}$; c) $\dfrac{5x-7}{x-3}=\dfrac{4x-3}{x}$;

d) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{4x}{x^2-1}$; e) $\dfrac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$; f) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x+1}=0$;

g) $\dfrac{7}{2x+9}-6=5x$; h) $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{3}{2}$; i) $\dfrac{15}{x-2}=\dfrac{14}{x}+1$.

2. a) $\dfrac{1}{x^2-12x+36}+\dfrac{12}{36-x^2}=\dfrac{1}{x+6}$; b) $\dfrac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\dfrac{6}{8c^3+1}=\dfrac{2}{2c+1}$;

c) $\dfrac{3x-2}{x-1}+\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$; d) $\dfrac{2-3x}{x+1}-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x+1}{2-3x}=\dfrac{4}{3}$;

e) $\dfrac{x-49}{x+6}+\dfrac{2x+50}{x+5}=2$; f) $\dfrac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$.

3. Tengkuchli tenglamalarni ko‘rsating:

a) $\dfrac{(5x-4)}{x+1}=0$; b) $5x-4=0$; c) $(5x-4)(x+1)=0$;

d) $10x=8$; e) $\left(x-\dfrac{4}{5}\right)(x+1)=0$; f) $6x-4=x$;

g) $x^2+2x+18=0$; h) $2x^2+2x+11=0$.

4. Tenglamalar sistemasini yeching (4–7):

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{2y+3}=3,\\[2mm] \dfrac{y}{2y+3}=-\dfrac{1}{9};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=2,\\[2mm] \dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{12}{x}+\dfrac{25}{y}=7,\\[2mm] \dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=2.\end{cases}$

5. a) $\begin{cases}\dfrac{5x}{8y}=\dfrac{8y}{5x},\\[2mm] 5x-8y=20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+\dfrac{7}{y}=11,\\[2mm] 7x+\dfrac{2}{y}=16;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{(x-9)(x-6)}{y+8}=0,\\[2mm] \dfrac{(y+8)(y-8)}{x-6}=0.\end{cases}$

6. a) $\begin{cases} 4x=\dfrac{25}{y}+15, \\ 4y=\dfrac{25}{x}+15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4x-7}=-\dfrac{y}{4x-7}, \\ 4x^2-11y+7=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{5x-4y}=\dfrac{y}{5y-4x}, \\ xy=-16. \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} (x+1)(x-8)=0, \\ \dfrac{y-3}{x+y-2}=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{y^2}, \\ xy=-8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^5}=5\dfrac{x^2}{y^4}, \\ x-5y=15. \end{cases}$.

8. Klubning zalida 320ta o‘rin bo‘lib, qatorlar bo‘yicha bir xil taqsimlangan. Har bir qatordagi o‘rinlar sonini 4 taga orttirib, yana bir qator qo‘yilgandan so‘ng zalda 420ta o‘rin bo‘ldi. Zaldagi qatorlar soni nechta bo‘ldi?

9. 108 imtihon topshiruvchi insho yozishdi. Ularga 480 varaq qog‘oz tarqatildi, shu bilan birga har bir qiz har bir o‘g‘il o‘smirga qaraganda bir varaq ortiq qog‘oz oldi. Hamma qizlar esa o‘smirlar nechta varaq qog‘oz olgan bo‘lsalar, shuncha varaq qog‘oz olishdi. Nechta qizlar va nechta o‘smirlar bo‘lgan?

29-32 SODDA IRRATSIONAL TENGLAMALAR VA ULARNING SISTEMALARI

O‘zgaruvchisi ildiz ostida qatnashgan tenglama *irratsional tenglama* deyiladi.

Irratsional tenglamalarning ba’zi turlarini yechish usullarini keltiraylik.

I $$\sqrt{f(x)}=g(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi sodda irratsional tenglamani qaraylik.

f(*x*), *g*(*x*) ifodalar nomanfiy bo‘lganida bu tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko‘tarsak, tengkuchli tenglamaga kelamiz.

$f(x)=g^2(x)\geqslant 0$ bo‘lgani uchun $f(x)$ ifoda nomanfiy bo‘ladi.

Demak, (1) tenglamani yechish

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$$

qoida bo‘yicha amalga oshiriladi.

Xuddi shunday $\sqrt[2n]{f(x)}=h(x)$ ko‘rinishdagi tenglama $\begin{cases} f(x)=h^{2n}(x), \\ h(x)\ge 0 \end{cases}$ sistemaga teng kuchli.

1-misol. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$ tenglamani yeching.

△ Tenglamani har ikki qismini kvadratga ko‘taramiz va natijada $2x-x^2=x^2-4x$ yoki $2x(x-3)=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bundan $x_1=0$, $x_2=3$ ildizlarni hosil qilamiz. $x>2$ bo‘lgani uchun $x=3$ berilgan tenglamaning yechimi. ▲

II $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ *ko‘rinishdagi tenglama.*

Ikki ifodaning ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi uchun, ulardan kamida bittasi nolga teng bo‘lishi kerak.

Demak, $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ bo‘lishi uchun yoki $g(x)=0$ tenglik yoki $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$ sistema o‘rinli bo‘lishi kerak.

Bu holat qisqacha $\left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$ kabi yoziladi.

2-misol. $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0$ tenglamani yeching.

△ $$(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Javob: –4 va 2. ▲

3-misol. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$ tenglamani yeching.

△ Berilgan tenglama $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$ shaklga keltiriladi. $\begin{cases} x=3, \\ x^2-5x+4\ge 0 \end{cases}$ sistema yechimga ega bo‘lmaganligi uchun $\sqrt{x^2-5x+4}=2$ tenglamani qarash yetarli. Bu tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko‘tarsak, unga teng kuchli bo‘lgan $x^2-5x+4=4$ tenglamani hosil qilamiz.

Javob: 0 va 5. ▲

III $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ *ko‘rinishdagi tenglama.*

Bunday tenglamalarni yechishda ildiz darajasi n sonining juft-toqligiga qaraladi va berilgan tenglamani tengkuchli tenglamaga olib kelinadi.

Agar *n - toq bo‘lsa:* $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Masalan, $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$ tenglama $f(x)=g(x)$ tenglamaga tengkuchli.

4-misol. $\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1}$ tenglamani yeching.

△ $$\sqrt[3]{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Javob: 1 va –7. ▲

Agar *n juft*, ya'ni $n=2k$ bo'lsa, berilgan tenglama ushbu sistemalarning har biriga tengkuchlidir:

$$\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\ge 0\end{cases}\quad \text{yoki}\quad \sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

Amalda shulardan osonroq bo'lganlari tanlanadi.

5-misol. $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$ tenglamani yeching.

$$\triangle\ \sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2=x,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=2,\end{array}\right.\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Javob: $x=2$. ▲

IV *O'zgaruvchilarni almashtirish.*

6-misol. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4$ tenglamani yeching.

△ $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ almashtirish kiritamiz. U holda

$$\begin{cases}u+\dfrac{3}{u}=4,\\ u>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=1,\\ u=3,\end{array}\right.\\ u>0.\end{cases}$$

Endi berilgan tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=1,\\ \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=1,2.\end{array}\right.$$

Javob: $x=2$ va $x=1,2$. ▲

7-misol. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$ tenglamani yeching.

△ $z=\sqrt{x^2+3x}$ almashtirish kiritamiz:

$$\begin{cases}z^2+z=6,\\ z\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}z=-3,\\ z=2,\end{array}\right.\\ z\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow z=2.$$

Endi berilgan tenglamaning ildizlarini topamiz.

$$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Javob: $x=-4$ va $x=21$.

Irratsional tenglamalar sistemasi

Irratsional tenglamalardan tashkil topgan sistemalarni yechish bizga ma’lum bo‘lgan qo‘shish, o‘rniga qo‘yish va h.k. usullariga tayanadi. Albatta bunda ishtirok etgan irratsional ifodalarning mavjudlik sohalarini inobatga olish kerakligini qayd qilamiz.

8-misol. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=25, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x(13-x)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x^2-13x+36=0. \end{cases}$$

Bu sistemadan (4; 9) va (9; 4) yechimlarni topamiz.

9-misol. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

$\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$ deb belgilaymiz, hamda qisqa ko‘paytirish formulasidan foydalansak:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^2-uv+v^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistemaning yechimi $u_1=1$, $v_1=2$, $u_2=2$, $v_2=1$ boladi. Bundan (1; 8) va (8; 1) yechimlarini topamiz.

10-masala.

Tekislikda $A(3; 4)$ va $B(-2; 5)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan $C(x; 0)$ nuqtani toping.

$AC=BC$ ekanidan ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko‘ra $\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(0-5)^2}$ irratsional tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamani tengkuchli tenglama xossalaridan va qisqa ko'paytirish formulalaridan foydalanib yechsak, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ yoki $-10x=4$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamaning ildizi $x=-0{,}4$ bo'ladi. Demak, izlangan nuqta $C(-0{,}4;\ 0)$ ekan.

11-masala

Tekislikda $A(-1;\ 2)$ va $B(3;\ -4)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan va $y=3x$ to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtani toping.

Shartga ko'ra izlangan nuqtaning ordinatasi $y=3x$ bo'ladi. Demak, izlanayotgan nuqta $C(x;3x)$ koordinatali nuqta ekan. $AC=BC$ ekanidan ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra, $\sqrt{(x+1)^2+(3x-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(3x+4)^2}$ irratsional tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechsak, $(x+1)^2+(3x-2)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$, yoki $-28x=20$ tenglamaga kelamiz. Oxirgi tenglamaning ildizi $x=-\frac{5}{7}$ bo'ladi. Demak, izlangan nuqta $C(-5/7;\ -15/7)$ ekan.

Javob: $C(-5/7;\ -15/7)$.

Savol va topshiriqlar

1. Irratsional tenglamaga ta'rif bering va misol keltiring.
2. Tengkuchli irratsional tenglamaga ta'rif bering.
3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a,\\ \sqrt{xy}=b\end{cases}$ ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
4. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a,\\ x+y=b\end{cases}$ ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?

Mashqlar

Tenglamani yeching (**10–19**):

10. a) $\sqrt{3x+5}=-8$; b) $\sqrt{4x-6}=9$; c) $\sqrt{5x+9}=17$; d) $\sqrt{13x+5}=-17$.

11. a) $\sqrt{12x-11}=15$; b) $\sqrt{23x+5}=-7$; c) $\sqrt{23x-7}=27$; d) $\sqrt{6x+13}=-2$.

12. a) $\sqrt{x^2-3x+1}=x+2$; b) $\sqrt{x^2+5x+2}=x+4$.

13. a) $\sqrt{x^2+7x+1}=x-1$; b) $\sqrt{x^2-6x+2}=x+5$.

14. a) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-1}$; b) $\sqrt{-2x^2-3x-2}=\sqrt{x+1}$.

15. a) $\sqrt{x^2+8x-7}=\sqrt{-x-1}$; b) $\sqrt{-x^2+3x+5}=\sqrt{x+10}$.

16. a) $x^2+3x-1+\sqrt{x^2+3x-9}=0$; b) $x^2-x-7+\sqrt{x^2-x-9}=0$.

17. a) $x^2+2x-11+\sqrt{x^2+2x-1}=0$; b) $x^2-8x+3+\sqrt{x^2-8x-7}=0$.

18. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

19. a) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+11}=5$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$.

Tenglamalar sistemasini yeching (**20–23**):

20. a) $\begin{cases} 2\sqrt{x}=3y, \\ y^2+2\sqrt{x}=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5\sqrt{x}=4y, \\ y^2+5\sqrt{x}=5. \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} x-4\sqrt{y}=1, \\ x+2y=17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2\sqrt{y}=-2, \\ x+2y=2. \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} (\sqrt{x}-5)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+5y=60; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-3)=0, \\ 3x+2y=15. \end{cases}$

23. a) $\begin{cases} 5x-3\sqrt{y}=-34, \\ 5x+3\sqrt{y}=-16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x-5\sqrt{y}=-37, \\ 6x+5\sqrt{y}=13. \end{cases}$

24. Tekislikda $A(5;\,7)$ va $B(-3;\,4)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan $C(x;\,0)$ nuqtani toping.

25. Tekislikda $A(5;\,9)$ va $B(-6;\,7)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan $C(x;\,0)$ nuqtani toping.

33–36 SODDA KO‘RSATKICHLI TENGLAMALAR VA ULARNING SISTEMALARI

Ko‘rsatkichli tenglamalar

O‘zgaruvchisi darajada qatnashgan tenglama *ko‘rsatkichli tenglama* deyiladi.

Ko‘rsatkichli tenglamalarni yechishda quyidagi ayniyatlardan foydalaniladi: $(a>0,\quad a\neq 1,\quad b>0)$

1. $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$;
2. $a^x a^y=a^{x+y}$;
3. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
4. $a^x b^x=(ab)^x$;
5. $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$;
6. $a^0=1$.

Ko‘rsatkichli tenglamalarning ba’zi turlarini yechish usullarini keltiraylik.

I *Bir hil asosga keltirish*

Bu usulda tenglama $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ko‘rinishdagi tenglamaga olib kelinadi. Bundan $f(x)=g(x)$ bo‘ladi.

1-misol. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ tenglamani yeching.

△ $\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ ekanini inobatga olib, berilgan tenglamani $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$ ko‘rinishda yozamiz.

1-ayniyatga ko‘ra $3x-7=-7x+3,\quad x=1.$

Javob: 1.▲

2-misol. $0{,}125\cdot 4^{2x-8}=\left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ tenglamani yeching.

△ Tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x} \qquad 2^{-3}\cdot 2^{2(2x-8)}=\left(2^{-2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

2-ayniyatga ko‘ra $2^{-3+2(2x-8)}=\left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$ yoki $2^{4x-19}=2^{2,5x}$.

Oxirgi tenglama $4x-19=2,5x$

tenglamaga teng kuchlidir. Bundan $x=\frac{38}{3}$.

Javob: $x=\frac{38}{3}$.▲

II *Yangi o‘zgaruvchini kiritish.*

3-misol. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ tenglamani yeching.

△ 2-ayniyatni qo‘llab, tenglamani $5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^{x}\cdot 5-250=0$ kabi yozib olamiz.

$5^x=t>0$ deb, yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. U holda $\frac{1}{5}t^2+5t-250=0$ tenglamaga kelamiz.

U $t_1=-50$, $t_2=25$ ildizlarga ega. Ammo $t_1=-50$ ildiz $t>0$ shartni qanoatlantirmaydi. Demak, $5^x=25$ va $x=2$.

Javob: $x=2$.▲

4-misol. $9^x+6^x=2\cdot 4^x$ tenglamani yeching.

△ Tenglamaning ikkala qismini $4^x\neq 0$ ga bo‘lamiz:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2 \text{ yoki } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ deb, oxirgi tenglamani $t^2 + t - 2 = 0$ ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamaning yechimlarini topamiz: $t_1=-2$, $t_2=1$.

t_1 ning qiymati uchun $t>0$ shart bajarilmaydi. Demak,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Javob: $x=0$.

5-misol. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ tenglamani yeching.

$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 1$ bo'lgani bois $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Tenglamani $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ ko'rinishda yozamiz.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0$ deylik. Bundan $\frac{1}{t} + t = 4$, ya'ni $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Oxirgi tenglama $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ ildizlarga ega.

1-hol. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}, \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}, \quad \frac{x}{2} = 1, \quad x = 2.$

2-hol. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}, \quad \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3},$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3}, \quad -\frac{x}{2} = 1, \quad x = -2.$

Javob: $x=-2$ va $x=2$.

III *Umumiy ko'paytuvchini qavslardan tashqariga chiqarish.*

6-misol. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ tenglamani yeching.

Chap tomonda 6^x ni, o'ng tarafda esa 2^x ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Natijada $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ yoki $6^x=2^x$ tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning ikkala tomonini $2^x \neq 0$ ga bo'lsak, $3^x=1$, ya'ni $x=0$ ni hosil qilamiz.

Javob: $x=0$.

Eng sodda ko'rsatkichli tenglamalar sistemasi

7-misol. Tenglamalar sistemasini yeching: $\begin{cases} 3^{x+y}=27, \\ 2^{5x-y}=8. \end{cases}$

△ Darajaning xossalariga ko'ra tenglamalar sistemasi quyidagi tenglamalar sistemasiga tengkuchli: $\begin{cases} 3^{x+y}=3^3, \\ 2^{5x-y}=2^3. \end{cases}$ Bundan $\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-y=3 \end{cases}$ sistemaga kelamiz. Uning yechimlari x=1, y=2 ekani ravshan.

Javob: x=1, y=2. ▲

8-misol. Tenglamalar sistemasini yeching: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=9, \\ 2^{7x+3y}=8. \end{cases}$

△ Darajaning xossalariga ko'ra tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=3^2, \\ 2^{7x+3y}=2^3. \end{cases}$

Oxirgi tenglamalar sistemasi esa $\begin{cases} 5x+6y=2, \\ 7x+3y=3 \end{cases}$ chiziqli sistemaga tengkuchli. Chiziqli tenglamalar sistemasining 2-tenglamasini (–2) ga ko'paytirib 1-tenglamaga qo'shsak, $-9x=-4$ tenglamani hosil qilamiz. Bundan $x=\frac{4}{9}$ ekani topiladi. Uni 2-tenglamaga qo'ysak, $\frac{28}{9}+3y=3$ yoki $3y=3-\frac{28}{9}$, yoki $3y=-\frac{1}{9}$, yoki $y=-\frac{1}{27}$ ni topamiz. *Javob:* $x=\frac{4}{9}$, $y=-\frac{1}{27}$. ▲

9-misol. Tenglamalar sistemasini yeching: $\begin{cases} 4^x+5^y=9, \\ 4^x-5^y=-1. \end{cases}$

△ $4^x=u$, $5^x=v$ belgilash kiritsak, berilgan tenglamalar sistemasi ushbu ko'rinishni oladi: $\begin{cases} u+v=9, \\ u-v=-1. \end{cases}$ Ravshanki, bu tenglamalar sistemasining yechimi u=4, v=5. U holda $4^x=4$ va $5^y=5$ tenglamalarni hosil qilamiz. Bu yerdan x=1, y=1 yechimlarni topamiz.

Javob: x=1, y=1. ▲

Mashqlar

Tenglamani yeching (**26–35**):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$;
d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^{x}=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2\cdot2^{x+2}-3\cdot2^{x+1}-5\cdot2^{x}=-6$; b) $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$;
c) $2\cdot4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot4^{x}=31$; d) $2\cdot7^{x+2}-2\cdot7^{x+1}-14\cdot7^{x}=10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$;
c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^{x}+3^{x}-6=84$; b) $25^{x}+5^{x}-30=0$;
c) $5\cdot4^{x}+2^{x}-6=0$; d) $9^{x}+3^{x}-12=0$.

30. a) $9\cdot25^{x}-7\cdot15^{x}-16\cdot9^{x}=0$; b) $7\cdot16^{x}+9\cdot12^{x}-16\cdot9^{x}=0$.

31. a) $4^{x}+7\cdot6^{x}-8\cdot9^{x}=0$; b) $9\cdot16^{x}+7\cdot12^{x}-16\cdot9^{x}=0$.

32. a) $(0{,}125)^{x-1}=\sqrt{2^{5-4x}}$; b) $\frac{4}{5}\cdot(0{,}8)^{x-1}=(1{,}25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x}=\frac{4}{16^{x}}$; b) $4^{x}-10\cdot2^{x-1}=24$.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5\cdot2^{3(x-1)}-3\cdot2^{5-3x}+7=0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$; b) $8^{x}+18^{x}=2\cdot27^{x}$.

36. Mijoz 100 000 000 so‘mni bankka yillik 22% foiz stavkasi bilan ma’lum muddatga qo‘ydi. Muddat oxirida u 221 533 456 so‘m oldi. Pul necha yilga qo‘yilgan ekanini toping.

37. Tadbirkor 10 000 000 so‘mni bankka yillik 21% foiz stavkasi bilan ma’lum muddatga qo‘ydi. Muddat oxirida u 17 715 610 so‘m oldi. Pul necha yilga qo‘yilgan ekanini toping.

38. Aholi soni yiliga 4% ortsa, necha yildan so‘ng aholi soni 3 barobar ortadi?

39. Aholi soni yiliga 2% kamaysa, necha yildan so‘ng u 10% kamayadi?

40. Tenglamalar sistemasini yeching (**40–43**):

a) $\begin{cases}3^{5x-6y}=27,\\2^{7x+3y}=32;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+16y}=81,\\2^{3x-5y}=4;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3^{x+2y}=81,\\9^{3x}\cdot3^{y}=27.\end{cases}$

41. a) $\begin{cases}3^{5x-y}=243,\\2^{7x+11y}=16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+8y}=9,\\2^{x-12y}=64;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^{x}+2^{y}=6,\\2^{x}-2^{y}=2.\end{cases}$

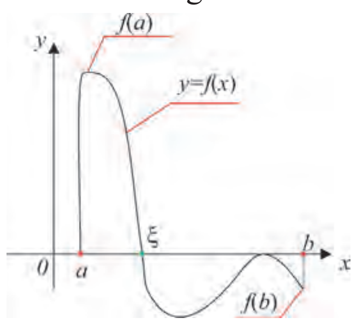
42. a) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25, \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{x+2y}=125, \\ 2^{x^2+3xy-y^2}=8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 11^x+7^y=18, \\ 11^x-7^y=4. \end{cases}$

43. a) $\begin{cases} 5^{x+y}=25, \\ 2^{x^2-3xy+2y^2}=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25, \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6^x+3^y=39, \\ 6^x\cdot 3^y=108. \end{cases}$

37-38 TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH

Agar $f(x)$ ko'phad $[a, b]$ kesma uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a)\cdot f(b)<0$ bo'lsa, bu kesma ichida $f(x)=0$ tenglamaning kamida bitta yechimi mavjud. Ya'ni, shunday $\xi\in[a, b]$ ("ksi" deb o'qiladi) mavjudki $f(\xi)=0$.

Bu tasdiq quyidagi chizmada tasvirlangan.



Tenglamaning aynan bitta ildizini o'z ichiga olgan $[a, b]$ kesmani qaraylik.

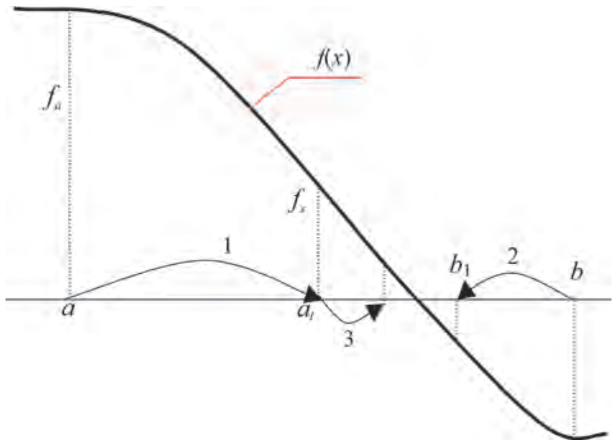
Kesmani teng ikkiga bo'lish usuli $[a, b]$ kesmani hosil bo'ladigan kesma uzunligi berilgan ε aniqlikdan kichik bo'lguncha teng ikkiga bo'lishdan iborat.

Buning uchun:

1) $x=a$ da $f(x)$ ifodaning $f_a=f(a)$ qiymati hisoblanadi.
2) kesma teng ikkiga bo'linadi, ya'ni $x=(b-a)/2$ hisoblanadi;
3) $f(x)$ ifodaning $x=(b-a)/2$ dagi f_x qiymati hisoblanadi.
4) $f_a\cdot f_x>0$ shart tekshiriladi;
5) agar bu shart bajarilsa, yangi kesmaning chap chegarasi sifatida oldingi kesmaning o'rtasi olinadi, ya'ni $a=x$, $f_a=f_x$ deb olinadi (kesmaning chap chegarasi o'rtaga o'tadi);
6) agar bu shart bajarilmasa, yangi kesmaning o'ng chegarasi o'rtaga o'tadi, ya'ni $b=x$ deb olinadi;
7) kesmani navbatdagi bo'lishdan so'ng $b-a<\varepsilon$ shart bajarilishi tekshiriladi.
8) agar bu shart bajarilsa, hisoblashlar tugatiladi. Bunda taqribiy yechim

sifatida x ning oxirgi hisoblangan qiymati olinadi. Agar bu shart bajarilmasa, mazkur algoritmning 2 - qadamiga o'tilib (qaytib), hisoblashlar davom ettiriladi.

Kesmani teng ikkiga bo'lish usulining mohiyati ushbu chizmada tasvirlangan:



Haqiqiy ildiz yotgan oraliqni topish

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ tenglama ildizi yotgan oraliqni topish uchun $A=max\{a,b,c\}$ va $B=max\{\frac{1}{c};\ \frac{a}{c};\ \frac{b}{c}\}$ hisoblanadi.

Berilgan tenglamaning ildizi uchun $\frac{1}{1+B} < |x| < 1+A$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, berilgan tenglamaning kamida 1 ta ildizi $(-1-A;\ 1+A)$ oraliqda joylashgan ekan. Bu ildizni taqriban topish uchun $-1-A<d_1<d_2<1+A$ va $f(d_1)\cdot f(d_2)=(d_1^3+ad_1^2+bd_1+c)(d_2^3+ad_2^2+bd_2+c)<0$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi d_1 va d_2 butun sonlar topiladi.

1-misol. $2x^3+3x^2+5x+1=0$ tenglama ildizi yotgan oraliqni toping.

△ Tenglamaning har ikki qismini 2 ga bo'lsak, $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$ tenglama hosil bo'ladi. $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$ bo'lgani uchun, $A=max\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\}=2{,}5$.

Demak, $x\in(-2{,}5;2{,}5)$ oraliqda tenglamaning kamida 1 ta ildizi bor. Tenglama $(0;\ 2{,}5)$ oraliqda ildizga ega emas, chunki $x_0\in(0;\ 2{,}5)$ bo'lsa, $2x_0^3+3x_0^2+5x_0+1>0$ bo'ladi. Demak, tenglama $(-2{,}5;\ 0)$ oraliqda ildizga ega ekan. Bu oraliqni kichraytirish uchun butun sonlarni olamiz, ya'ni $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$.

Endi $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$ sonlarni tenglamaga qo'yib va quyidagi shartlarni tekshirib

$$d_1^3+\frac{3}{2}d_1^2+\frac{5}{2}d_1+\frac{1}{2}=-8+6-5+0{,}5=-6{,}5<0;$$

$$d_2^3+\frac{3}{2}d_2^2+\frac{5}{2}d_2+\frac{1}{2}=-1+1{,}5-2{,}5+0{,}5=-1{,}5<0;$$

$d_3^3+\frac{3}{2}d_3^2+\frac{5}{2}d_3+\frac{1}{2}=0{,}5>0$ tenglamaning ildizi $(-1;0)$ oraliqda ekanini topamiz. ▲

Tenglamaning ildizini berilgan ε aniqlikda oraliqni teng 2 ga bo‘lib topish usuli

Yuqoridan ma’lumki, agar $(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ bo‘lsa, tenglamaning ildizi $(\alpha;\ \beta)$ oraliqda bo‘ladi. Endi $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ bo‘lsin. Agar $|\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c|<\varepsilon$ bo‘lsa, $x=\gamma$ son – tenglamaning ε aniqlikdagi ildizi. Agar $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ bo‘lsa, ildizni $(\gamma;\ \beta)$ oraliqdan qidiriladi; agar $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)<0$ bo‘lsa, ildizni $(\alpha;\ \gamma)$ oraliqdan qidiriladi. Bu jarayon to ildiz kerakli aniqlikda topilgunga qadar davom etaveradi.

2-misol.

$x^3+1{,}5x^2+2{,}5x+0{,}5=0$ tenglamaning ildizini $\varepsilon=0{,}1$ aniqlikda toping.

△ Avvalgi misoldan ma’lumki, ildiz $(-1;\ 0)$ oraliqda yotadi. $\gamma=\frac{-1+0}{2}=-0{,}5$ va $(-0{,}5)^3+1{,}5(-0{,}5)^2+2{,}5(-0{,}5)+0{,}5=-0{,}5<0$ ekanidan tenglamaning ildizi $(-0{,}5;\ 0)$ oraliqda ekan.

$\gamma=\frac{-0{,}5+0}{2}=-0{,}25$ va $|(-0{,}25)^3+1{,}5(-0{,}25)^2+2{,}5(-0{,}25)+0{,}5|=|-0{,}046|<0{,}1$ bo‘lgani uchun tenglamaning 0,1 aniqlikdagi yechimi $x=-0{,}25$ bo‘ladi. ▲

Savol va topshiriqlar

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$ tenglamaning ildizi yotgan oraliq qanday topiladi?
2. Tenglamaning ildizini berilgan ε aniqlikda oraliqni teng 2 ga bo‘lib topish usulini tushuntiring.

Mashqlar

Tenglamaning ildizi yotgan oraliqni toping (**44–47**):

44. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

45. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

46. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Tenglamaning ildizini $\varepsilon=0{,}1$ aniqlikda toping (**48–51**):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

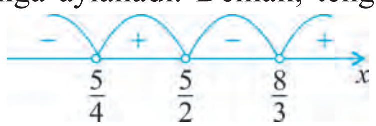
39–41 SODDA RATSIONAL TENGSIZLIKLAR VA ULARNING SISTEMALARI

Bir o'zgaruvchili ratsional tengsizliklar va ularni yechish usullari

$A(x)$ va $B(x)$ ratsional ifodalar uchun $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geqslant B(x)$, $A(x)\leqslant B(x)$ munosabatlarga x o'zgaruvchili tengsizliklar deyiladi. x ning tengsizlikni to'g'ri sonli tengsizlikka aylantiruvchi har qanday qiymati tengsizlikning yechimi deyiladi.

1-misol. Tengsizlikni yeching: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

△ Tengsizlikni oraliqlar usuli yordamida yechamiz. Bu usul bilan 9-sinfda tanishgansiz. Qavslar ichidagi ifodalarni nolga tenglab, $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$ sonlarni topamiz. Ular sonlar o'qini $(-\infty;\ \frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2};\ \frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ oraliqlarga ajratadi. Tengsizlikka $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ oraliqqa tegishli, masalan, $x=10$ sonini qo'ysak, tengsizlik to'g'ri tengsizlikga aylanadi. Demak, tengsizlik $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})\cup(\frac{8}{3};\ +\infty)$ oraliqlarda o'rinli. ▲

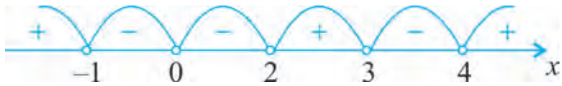


2-misol.

Tengsizlikni yeching: $\dfrac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△ $x=2$, $x=4$ sonlar tengsizlikning yechimi emas. $x\neq2$, $x\neq4$ bo'lganda $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$ bo'ladi. Shu sababli tengsizlikning har ikki qismini $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$ ga ko'paytirish natijasida berilgan tengsizlikka tengkuchli quyidagi tengsizlik hosil bo'ladi: $(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

Qavslarni nolga tenglab, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=3$, $x_6=4$ sonlarni topamiz. Natijada sonlar o'qi quyidagi oraliqlarga ajraladi: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$, (4;+∞). Bu yerda nol soni 2 marta uchraydi. Shuning uchun tengsizlik nol sonining 2 yonidagi oraliqda bir hil ishorali. Oxirgi oraliqdan chegarada yotmagan x=10 sonini olib tengsizlikka qo‘ysak, to‘g‘ri sonli tengsizlik hosil bo‘ladi. Demak, tengsizlikning yechlmi quydagi oraliqlar: $(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.



3-misol. Tengsizlikni yeching: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3}\geq 0$.

Ravshanki, $x\neq 3$ suratni nolga tenglab, $x^2-5x+4=0$, $x_1=1$, $x_2=4$ sonlarni hosil qilamiz. $x_1=1$ va $x_2=4$ sonlar tengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, sonlar o‘qi quyidagi oraliqlarga ajraladi: $(-\infty;\ 1]$, $[1;\ 3)$, $(3;\ 4]$, $[4;\ +\infty)$.

Oxirgi oraliqdan chegarada bo‘lmagan x=5 sonini olsak, to‘g‘ri sonli tengsizlik hosil bo‘ladi. Shuning uchun $[1;3)\cup[4;+\infty)$ oraliqlar tengsizlikning yechimi.

Sodda ratsional tengsizliklar sistemasi

4-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching: $\begin{cases}3x-8\leq 1,\\ 4x+3>5.\end{cases}$

Sistemaning har bir tengsizligini soddalashtirsak, $\begin{cases}3x\leq 1+8,\\ 4x>5-3,\end{cases}$ $\begin{cases}3x\leq 9,\\ 4x>2,\end{cases}$ ya’ni $\begin{cases}x\leq 3,\\ x>0.5\end{cases}$ tengsizliklarni hosil qilamiz. Demak, sistemaning yechimi $(-\infty;\ 3]$ va $(0{,}5;\ +\infty)$ oraliqlarning umumiy qismi, ya’ni $(0{,}5;\ 3]$ oraliqdan iborat ekan.

5-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching: $\begin{cases}(3-x)(4+x)\geq 0,\\ (2+x)(5-x)<0.\end{cases}$

Sistemadagi har bir tengsizlikni yechib, 1-tengsizlikning yechimi $[-4;\ 3]$ oraliq, 2-tengsizlikning yechimi esa $(-\infty;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$ oraliqlar ekanini topamiz. Demak, tengsizliklar sistemasining yechimi bu yechimlarning umumiy qismi, ya’ni $[-4;\ 2)$ oraliqdan iborat bo‘ladi.

Savol va topshiriqlar

1. Tengsizlikning yechimi nima, misollarda tushuntiring.
2. Tengkuchli tengsizliklarga misollar keltiring.
3. Eng sodda ratsional tengsizliklar sistemasini yechishni bitta misolda tushuntiring.

Mashqlar

Tengsizlikni yeching (**52–53**):

52. 1) $(x-6)(3-17x)(2x+8)\le 0$; 2) $(x^2+5x-6)(7x-11)>0$;

3) $(3+5x)(2x^2-6x+4)<0$; 4) $\frac{2x-5}{2x+1}\ge 0$;

5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\ge 0$; 6) $\frac{3x+11}{2-x}<0$;

7) $\frac{x-1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\ge 1$; 9) $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7}\le 0$; 10) $\frac{x^3-1}{2x^2-3x+1}>1$.

53. 1) $(x-5)(3-7x)(2x+8)\le 0$; 2) $(x^2-5x-6)(7x+11)>0$;

3) $(3-5x)(2x^2-4x+4)<0$; 4) $\frac{x-5}{2x+1}\ge 0$;

5) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1)\ge 0$; 6) $\frac{3x+1}{2-x}<0$;

7) $\frac{x+1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\ge 3$; 9) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-7}\le 0$; 10) $\frac{x^3+1}{2x^2-3x+1}>1$.

54. Tengsizliklar sistemasini yeching (**54–55**):

1) $\begin{cases}3x-5\le 7x,\\ 2x+1>-2x+3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}<1,\\ -\frac{5x+1}{2}-\frac{7}{3}>\frac{x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+5\le 7x,\\ 2x-1>-3x+3;\end{cases}$

55. 1) $\begin{cases}2(x-5)\le 4(x+3),\\ 2x-1>-5x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{5x}{3}-\frac{2x}{4}\ge 3\frac{1}{3},\\ 2-\frac{5-4x}{2}<\frac{6x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}6x+5\le 7x,\\ 6x-4>3x+3;\end{cases}$

42-43 SODDA IRRATSIONAL TENGSIZLIKLAR

Irratsional tengsizlik deyilganda noma'lum ildiz belgisi ostida bo'lgan tengsizlik tushuniladi.

Tengsizliklarning yechimlari to'plami, odatda, sonlarning cheksiz to'plamlaridan iborat bo'ladi, shu sababli bu sonlarni dastlabki tengsizlikka bevosita qo'yish yo'li bilan yechimlar to'plamini tekshirish, umuman aytganda mumkin emas. Javobning to'g'riligini ta'minlaydigan birgina yo'l – dastlabki tengsizlikni har qanday almashtirishda bu tengsizlikka tengkuchli tengsizlik hosil bo'lishini kuzatib borishimiz lozim.

Irratsional tengsizlnklarni yechayotganda tengsizlikning ikkala qismini toq darajaga ko'tarishda har doim dastlabki tengsizlikka tengkuchli tengsizlik hosil bo‘lishini yodda tutish lozim. Agar tengsizlikning ikkala qismi juft darajaga ko‘tarilayotgan bo‘lsa, u holda dastlabki tengsizlikka tengkuchli va o‘shanday tengsizlik ishorasiga ega bo‘lgan tengsizlik faqat dastlabki tengsizlikning ikkala qismi manfiymas bo‘lgan holdagina hosil bo‘ladi.

Irratsional tengsizlikning yechimlar to‘plamini topish uchun, odatda, tengsizliknnng ikkala qismini natural darajaga ko‘tarishga to‘g‘ri keladi. Irratsional tengsizlikni yechishning asosiy usullaridan biri bu tengkuchli ratsional tengsizliklarga keltirish usulidir.

Eng sodda irratsional tengsizliklar quyidagi ko‘rinishga ega:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ yoki $\sqrt{A(x)} \le B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ yoki $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ yoki $\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ yoki $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ irratsional tengsizlik quyidagi tengsizliklar sistemasiga tengkuchli

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} A(x) \le B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

(1) sistemadagi birinchi tengsizlik berilgan tengsizlikni kvadratga ko‘tarish natijasida hosil bo‘lgan tengsizlik, ikkinchi tengsizlik ildizning mavjudlik shartini bildiradi, uchinchi tengsizlik esa kvadratga ko‘tarish mumkinligini bildiradi.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ irratsional tengsizlikni yechish uchun quyidagi sistemani qarash zarur:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \tag{2}$$

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ irratsional tengsizlik quyidagi tengsizliklar sistemasiga tengkuchli:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

Berilgan tengsizlikning ikkala qismi barcha joiz x lar uchun nomanfiy bo‘lganligi sababli uni kvadratga ko‘tarish mumkin. (3) sistemadagi birinchi tengsizlik berilgan tengsizlikni kvadratga ko‘tarish natijasida hosil bo‘lgan tengsizlikdir. Ikkinchi tengsizlik ildizning mavjudlik shartini bildiradi. Ravshanki, $A(x) \geqslant 0$ shart albatta bajariladi.

(1)–(3) qoidalar irratsional tengsizlikni yechishning asosiy usuli hisoblanadi. Uning mohiyatini bir nechta misollarda ko‘rsatamiz.

1-misol. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{10x+5} < -3$.

△Bu tengsizlikning o‘ng qismi manfiy, shu bilan birga chap qismi joiz x lar uchun nomanfiy. Shuning uchun tengsizlik yechimga ega emas.

Javob: Yechim mavjud emas.▲

2-misol. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{3x-9} > -5$.

△Tengsizlikning o‘ng qismi manfiy, shu bilan birga chap qismi joiz x lar uchun nomanfiy. Demak, mazkur tengsizlik $x \geqslant 3$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun bajariladi.

Javob: $x \in [3;+\infty)$. ▲

3-misol. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{2x-3} < 1$.

△(1) qoidaga ko‘ra $\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$

$B(x)=1 \geq 0$ shart barcha x lar uchun bajarilganligi bois, uni alohida yozish shart emas.

Javob: $\left[\frac{3}{2};2\right)$. ▲

4-misol. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{4x-3} > 1$.

△Bu tengsizlik (2) qoida bo‘yicha yechiladi. Bu holda $B(x)=1 \geq 0$ shart barcha x lar uchun bajarilganligi bois mazkur tengsizlikka teng kuchli tengsizlikni bevosita yozishimiz mumkin: $4x-3 > 1^2$.

Javob: $x>1$. ▲

5-misol. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{x+18} < 2-x$.

△ Bu tengsizlik (1) qoida bo‘yicha yechiladi:

$$\begin{cases} x+18 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18, \\ x \leq 2, \\ x^2-5x-14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Javob: $x \in [-18;-2)$. ▲

6-misol. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

△Bu tengsizlik (2) qoida bo‘yicha yechiladi:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x^2+x-2\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+x-2>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x\ge 1,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x>2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Javob: $x\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

7-misol. Tengsizlikni yeching: $\sqrt{2x+1}>\sqrt{2-3x}$.

Bu tengsizlik (3) qoida bo‘yicha yechiladi:

$$\begin{cases}2x+1>2-3x,\\ 2-3x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{5},\\ x\le\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5}<x\le\frac{2}{3}.$$

Javob: $\frac{1}{5}<x\le\frac{2}{3}$.

8-misol. Tengsizlikni yeching: $\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+6}<1$.

Noma’lum x ning tengsizlik ma’noga ega bo‘ladigan to‘plamini topamiz:

$$\begin{cases}x^2-25\ge 0,\\ x+6\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x\ne 6\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-6,\\ -6<x\le -5.\\ x\ge 5.\end{array}\right.$$

Agar $x+6>0$ bo‘lsa, mazkur tensizlikni kvadratga ko‘tarish mumkin:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ \sqrt{x^2-25}<x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x^2-25<x^2+12x+36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\le -5,\\ x\ge 5,\end{array}\right.\\ x>-\frac{61}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{61}{12}<x\le -5,\\ x\ge 5.\end{array}\right.$$

$x<-6$ bo‘lsa, berilgan tengsizlik albatta bajariladi.

Javob: $x\in(-\infty;-6)\cup\left(-\frac{61}{12};-5\right]\cup[5;+\infty)$.

Yangi o‘zgaruvchini kiritish

Irratsional tenglamalarni yechishda qo‘llanilgan yangi o‘zgaruvchini kiritish usulini, irratsional tengsizliklarga ham tatbiq etish mumkin.

9-misol. Tengsizlikni yeching: $-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18\ge 0$.

Tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz: $-9\sqrt[4]{x}+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+18\geq 0$.

Yangi o‘zgaruvchini kiritamiz: $t=\sqrt[4]{x}$, $t\geq 0$. Bu holda

$$\begin{cases}-9t+t^2+18\geq 0,\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\geq 6,\\ t\leq 3,\end{array}\right.\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq 6,\\ 0\leq t\leq 3.\end{cases}$$

Shunday qilib:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}\geq 6,\\ 0\leq\sqrt[4]{x}\leq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 6^4,\\ 0\leq x\leq 3^4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1296,\\ 0\leq x\leq 81.\end{array}\right.$$

Javob: $x\in[0;81]\cup[1296;+\infty)$.

10-misol. Tengsizlikni yeching: $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

Yangi o‘zgaruvchini kiritamiz: $\sqrt{15-x}=t$, $t>0$.

Bu holda $x=15-t^2$ va t o‘zgaruvchiga nisbatan ratsional tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\begin{cases}\dfrac{3-(15-t^2)}{t}<1,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-t-12}{t}<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-4)(t+3)}{t},<0\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<4.$$

Bundan x ni topamiz:

$$0<\sqrt{15-x}<4\Leftrightarrow 0<15-x<16\Leftrightarrow -1<x<15.$$

Javob: $x\in(-1;15)$.

Savol va topshiriqlar

1. Irratsional tengsizlik deb nimaga aytiladi?
2. Irratsional tengsizlikni yechish jarayonida tengkuchli almashtirishga o‘tishga oid misol keltiring.
3. Yechimi bo‘lmagan irratsional tengsizlikka misol keltiring.

Mashqlar

Noma’lumlarning qaysi qiymatlarida tengsizliklar ma’noga ega? **(56–59)**

56. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-6}>10$; 2) $\sqrt[4]{18-2x}<3$.

57. 1) $\sqrt{10-\sqrt{x-5}}<27$; 2) $\sqrt{(x+3)(x-8)}>x+2$.

58. 1) $\sqrt[3]{x^2-x}>-x\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$.

59. 1) $\sqrt{x^2+3x+1}<x+1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}}\geq 2$.

Tengsizliklarni yeching (**60–66**):

60. 1) $\sqrt{2x-1}<x+2$; 2) $\sqrt{x^2-1}>x-2$.

61. 1) $\sqrt[4]{2x^2-1}\leq x$; 2) $\sqrt{x^2-x-2}\geq 2x+3$.

62. 1) $x-3<\sqrt{x^2+4x-5}$; 2) $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$.

63. 1) $\sqrt[3]{x^2+6x}>x$; 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}\geq 2$.

64. 1) $\sqrt{2x+1}>\sqrt{3-x}$; 2) $x>\sqrt{x(1+\sqrt{x(x-3)})}$.

65. 1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\geq 4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$; 2) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\geq 1$.

66. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}>8$; 2) $\sqrt[3]{x+1}\leq\sqrt[3]{5x}$.

67. Tekislikda $A(9;\,4)$, $B(-4;\,5)$, $C(x;\,y)$ nuqtalar berilgan. $AC>BC$ shartni qanoatlantiruvchi sohani toping.

68. Tekislikda $A(2;\,4)$, $B(-3;\,5)$, $C(x;\,y)$ nuqtalar berilgan. $AC>BC$ shartni qanoatlantiruvchi sohani toping.

69. Tekislikda $A(4;\,4)$, $B(-5;\,7)$, $C(x;\,y)$ nuqtalar berilgan. $AC>BC$ shartni qanoatlantiruvchi sohani toping.

70. Tekislikda $A(2;\,4)$, $B(+3;\,-5)$, $C(x;\,y)$ nuqtalar berilgan. $AC>BC$ shartni qanoatlantiruvchi sohani toping.

71. Tekislikda $A(5;\,4)$, $B(-6;\,5)$, $C(x;\,y)$ nuqtalar berilgan. $AC>BC$ shartni qanoatlantiruvchi sohani toping.

72. Tekislikda $A(8;\,4)$, $B(-7;\,5)$, $C(x;\,y)$ nuqtalar berilgan. $AC>BC$ shartni qanoatlantiruvchi sohani toping.

Nazorat test topshiriqlari

Sinov mashqlarining har biriga 4 tadan "javob" berilgan. 4 ta "javob" ning faqat bittasi to'g'ri, qolganlari esa noto'g'ri. O'quvchilardan sinov mashqlarini bajarib yoki boshqa mulohazalar yordamida ana shu to'g'ri javobni topish (uni belgilash) talab qilinadi.

1. Tengkuchli tenglamalarni ko'rsating:
1) $10x=8$; 2) $6x-4=x$; 3) $x^2+2x+18=0$.
A) 1 va 3; B) 2 va 3; C) 1 va 2; D) hammasi.

2. Tenglamaning katta ildizini toping: $(x-5)(x+4)(x-11)=0$.
A) −4; B) 5; C) 16; D) 11.

3. Bikvadrat tenglamaning ildizlari yig'indisini toping: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) −1; C) 0; D) 11/3.

4. Tenglamalar sistemasining nechta yechimi bor? $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. Tenglamani yeching: $\sqrt{5x+9}=7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

6. Tenglamalar sistemasining nechta yechimi bor? $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=11, \\ \sqrt{xy}=30. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

7. Tekislikda $A(3;\,1)$ va $B(7;\,3)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan $C(5;\,x)$ nuqtani toping.
A) (5; 2); B) (5; 3); C) (4; 2); D) (4; 3).

8. Tenglamani yeching: $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$.
A) 1; B) 2; C) −1; D) 0.

9. Tenglamaning butun ildizlarini toping: $11^{3x^2+23}=11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) −1; C) 2; D) 1 va −1.

10. Qaysidir davlat aholisi soni yiliga 3% kamaysa, necha yildan so'ng aholi soni 20% kamayadi?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.

11 Tengsizlikni yeching: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\leqslant0$.
A) [−7; 1]; B) [−7; −1]; C) [7; −1]; D) [7; 1].

12. $|x-2|\leqslant5$ tengsizlikning nechta butun yechimi bor?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.

13. Tengsizlikni yeching: $|4x-1|\leqslant-2$.
A) [−7;1]; B) [−7;−1]; C) [7;−1]; D) yechimi yo'q.

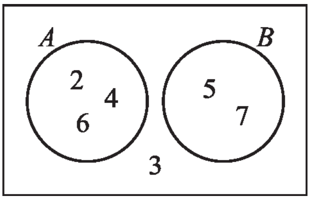
14. $\sqrt{x^2-13x+12}\le5-x$ tengsizlikning nechta butun yechimi bor?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

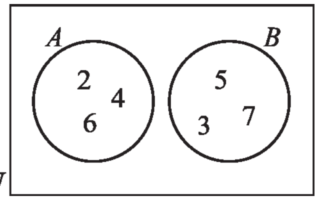
Javoblar

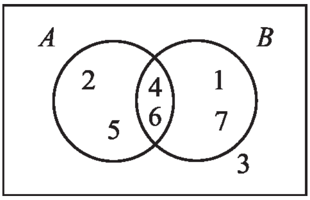
I BOB.

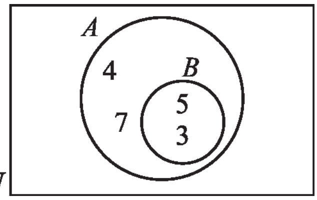
1. a) $5 \in D$; b) $6 \notin G$; c) $\{2, 5\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$; d) $\{3, 8, 6\} \subsetneq \{1,2,3,4,5,6\}$; **2.** a) **i)** {9} **ii)** {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}. b) **i)** ∅ **ii)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. c) **i)** {1, 3, 5, 7} **ii)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **3.** a) 5; b) 6; c) 2; d) 9. **4.** a) chekli; b) cheksiz. **5.** a) kesishmaydi; b) kesishadi. **6.** a) chekli; b) cheksiz; c) cheksiz; d) cheksiz. **7.** a) **i)** *A* to‘plam -1 dan katta yoki teng va 7 dan kichik yoki teng bo‘lgan butun sonlar to‘plami; **ii)** {–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **iii)** 9. b) **i)** *A* to‘plam –2 dan katta va 8 dan kichik bo‘lgan natural sonlar sonlar to‘plami; **ii)** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} **iii)** 8. c) **i)** *A* to‘plam 0 dan katta yoki teng va 1 dan kichik yoki teng bo‘lgan haqiqiy sonlar to‘plami; **ii)** mumkin emas; **iii)** cheksiz. d) **i)** *A* to‘plam 5 dan katta yoki teng va 6 dan kichik yoki teng bo‘lgan haqiqiy sonlar to‘plami; **ii)** mumkin emas; **iii)** cheksiz. **8.** a) $A=\{x|\ -100 < x < 100,\ x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A=\{x|\ x > 1000,\ x \in \mathbb{R}\}$; c) $A=\{x|\ 2 \leqslant x \leqslant 3,\ x \in \mathbb{Q}\}$. **9.** a) **i)** 8 ta: ∅, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$; **ii)** 16 ta: ∅, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$; b) 2^n. **10.** a) Ha; b) Yo‘q; c) Ha; d) Ha; e) Yo‘q; f) Yo‘q. **11.** b) $C'=\mathbb{N}$; c) $C'=\{x|\ x \geqslant -4,\ x \in \mathbb{Z}\}$; d) $C'=\{x|\ 2 < x < 8,\ x \in \mathbb{Q}\}$. **12.** a) {2, 3, 4, 5, 6, 7}; b) {0, 1, 8}; c) {5, 6, 7, 8}; d) {0, 1, 2, 3, 4}; e) {5, 6, 7}; f) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}; g) {2, 3, 4}. **13.** a) 9; b) 11. **14.** a) {1, 2, 10, 11, 12}; b) {1, 2, 3, 4, 12}; c) {1, 8, 9, 10, 11, 12}; d) {3, 4, 5, 6, 7}; e) {1, 2, 8, 9, 10, 11, 12}; f) {8, 9, 10, 11}; g) {1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}; h) {2, 10, 11}; **15.** a) *P*={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}; b) {2, 5, 11}; c) {2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23}; d) 12=9+6–3 ✓. **16.** a) *P*={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, *Q*={1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30}; b) {2, 5, 10}; c) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40}; d) 12=8+8–4 ✓. **17.** a) *P*={32, 36, 40, 44, 48, 52, 56}, *Q*={36, 42, 48, 54}; b) {36, 48}; c) {32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56}; d) 9=7+4–2 ✓. **18.** a) *R*={–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}, *S*={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; b) {0, 1, 2, 3, 4}; c) {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; d) 9=7+7–5 ✓. **19.** a) *C*={–4, –3, –2, –1}, *D*={–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; b) {–4, –3, –2, –1}; c) {–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; d) 7=4+7–4 ✓. **20.** a) *P*={1, 2, 3, 4, 6, 12}, *Q*={1, 2, 3, 5, 9, 18}, *R*={1, 3, 9, 27}. b) **i)** {1, 2, 3, 6}; **ii)** {1, 3}; **iii)** {1, 3, 9}; **iv)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18}; **v)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27}; **vi)** {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27}. c) **i)** {1, 3}; **ii)** {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27}. **21.** a) *A*={4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36}, *B*={6, 12, 18, 24, 30, 36}, *C*={12, 24, 36}. b) **i)** {12, 24, 36}; **ii)** {12, 24, 36}; **iii)** {12, 24, 36}; **iv)** {12, 24, 36}. c) {4, 6, 8, 12, 16, 18, 20 ,24, 28, 30, 32, 36}. d) 12=9+6+3–3–3–3+3 ✓. **22.** a) *A*={6, 12, 18, 24, 30}, *B*={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, *C*={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}. b) **i)** {6, 30}; **ii)** {2, 3, 5}; **iii)** ∅; **iv)** ∅. c) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30}. d) 18=5+8+10–2–3–0+0 ✓.

23.

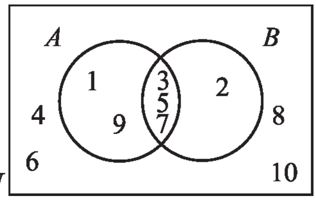
a) U


b) U


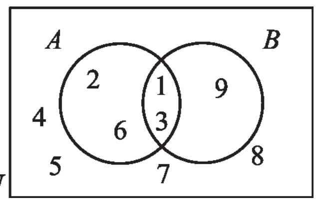
c) U


d) U


24.
a) A={1, 3, 5, 7, 9}
B={2, 3, 5, 7};
b) $A \cap B$={3, 5, 7}
$A \cup B$={1, 2, 3, 5, 7, 9};

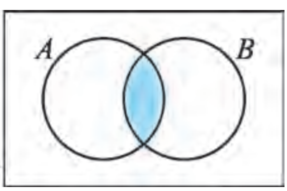
U


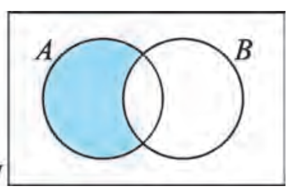
25. a) A={1, 2, 3, 6}
B={1, 3, 9};
b) $A \cap B$={1, 3}
$A \cup B$={1, 2, 3, 6, 9};

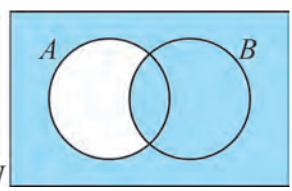
U


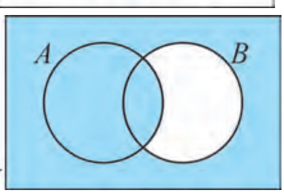
26. a) {*b, d, e, h*}; b) {*e, f, h, i, j*}; c) {*a, c, f, g, i, j, k*}; d) {*a, b, c, d, g, k*}; e) {*e, h*}; f) {*b, d, e, f, h, i, j*}; g) {*a, c, g, k*}; h) {*a, b, c, d, f, g, i, j, k*}. **27.** a) **i)** {*a, b, c, d, h, j*}; **ii)** {*a, c, d, e, f, g, k*}; **iii)** {*a, b, e, f, i, l*}; **iv)** {*a, c, d*}; **v)** {*a, b, e, f, i, l*}; **vi)** {*a, e, f*}; **vii)** {*a*}; **viii)** {*a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l*}.

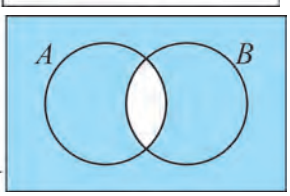
28.

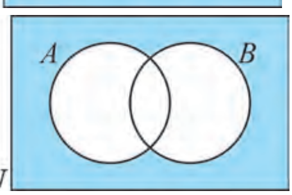
a) U


b) U


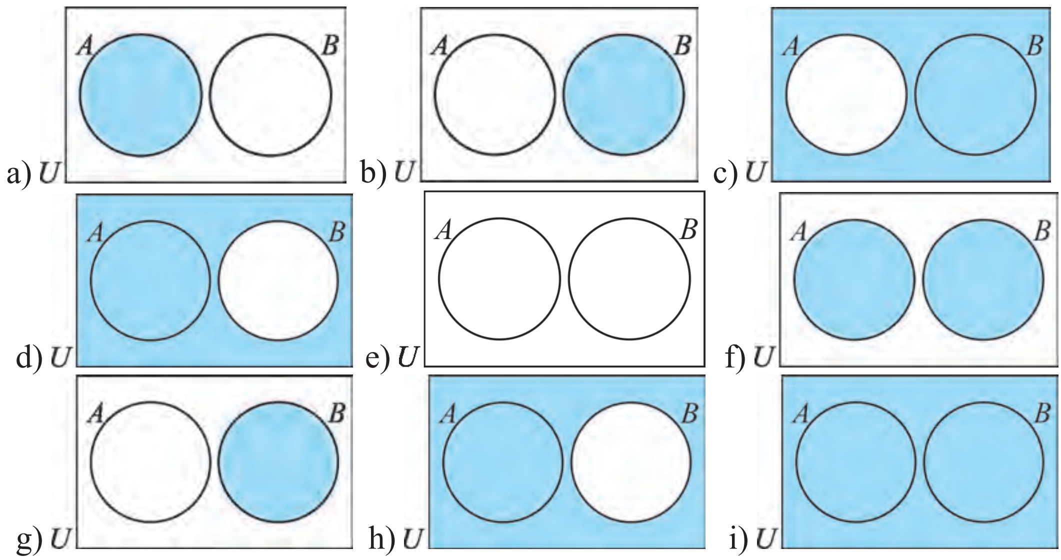
c) U


d) U


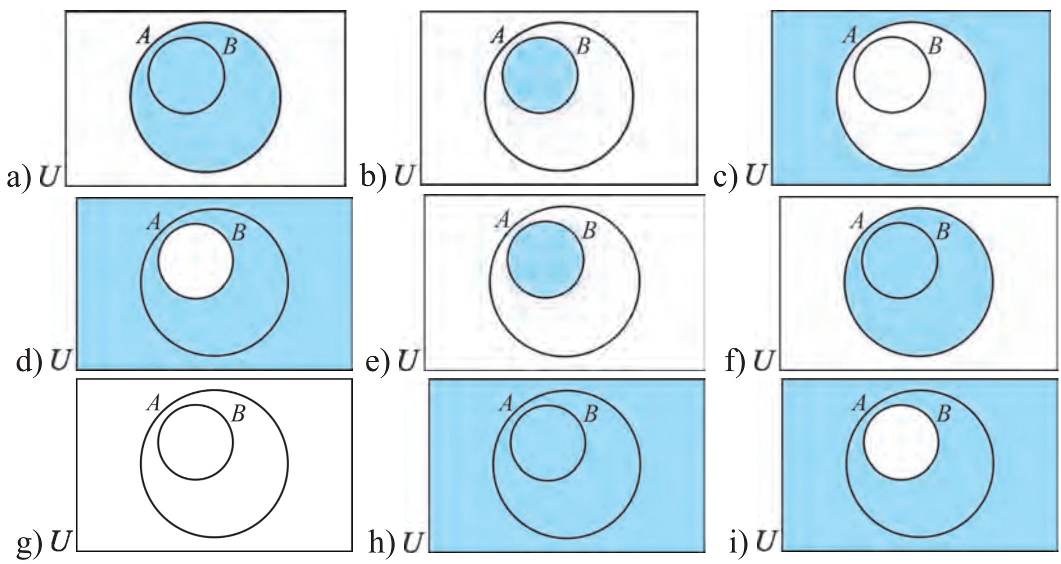
e) U


f) U


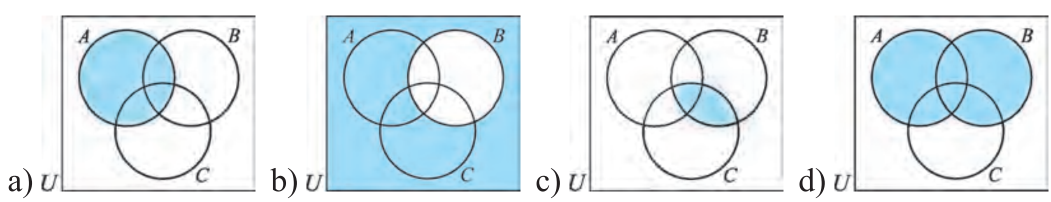
29.

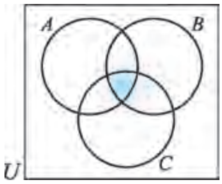

a) U
A
B
b) U
A
B
c) U
A
B
d) U
A
B
e) U
A
B
f) U
A
B
g) U
A
B
h) U
A
B
i) U
A
B

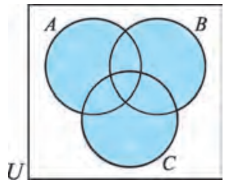
30.

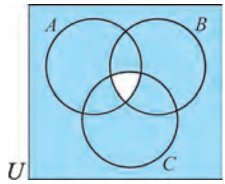

a) U
A
B
b) U
A
B
c) U
A
B
d) U
A
B
e) U
A
B
f) U
A
B
g) U
A
B
h) U
A
B
i) U
A
B

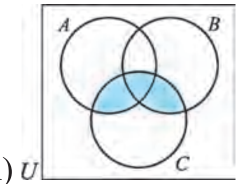
31.


a) U
A
B
C
b) U
A
B
C
c) U
A
B
C
d) U
A
B
C

e) 

f) 

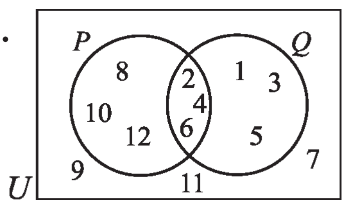
g) 

h) 

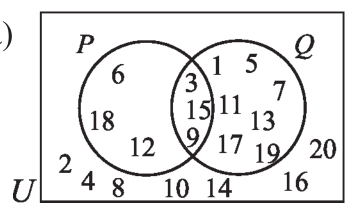
32. a) Ha, yolg‘on; b) ha, rost; c) Ha, rost; d) Ha, rost; e) Ha, rost; f) Ha, rost; g) Yo‘q; h) Ha, rost; i) Yo‘q; j) Ha, aniq emas; k) Ha, aniq emas; l) Yo‘q; m) Ha, aniq emas; n) Ha, aniq emas; o) Ha, aniq emas; p) Ha, yolg‘on. **33.** k) $\neg p$: Ayrim to‘rtburchaklar parallelogramm emas; m) $\neg r$: 7 – ratsional son emas; n) $\neg s$: $23-14\neq 12$; o) $\neg t$: $52:4\neq 13$; p) $\neg u$: Ayrim ikkita juft sonlar ayirmasi juft bo‘ladi; q) $\neg p$: Ketma-ket natural sonlar ko‘paytmasi doimo juft bo‘lmaydi; r) $\neg q$: Ayrim o‘tmas burchaklar o‘zaro teng emas; s) $\neg r$: Ayrim trapetsiyalar parallelogramm emasdir;

t) $\neg s$: Uchburchakda ikki burchagi o‘zaro teng, ammo u tengyonli emas.

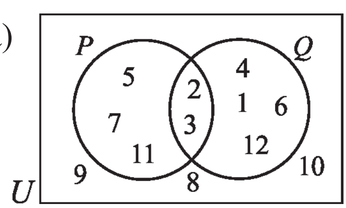
34. a) $x\geqslant 5$; b) $x<3$; c) $y\geqslant 8$; d) $y>10$; **35.** e) Yo‘q, Madinaning bo‘yi 140 sm ham bo‘lishi mumkin; f) Yo‘q; g) Ha. **36.** f) $x\geqslant 5$, $x\in\mathbb{N}$; g) x – sigir , $x\in$ {*otlar, qo‘ylar, sigirlar*}; h) $x<0$, $x\in\mathbb{Z}$; i) x – o‘quvchi qizbola, $x\in$ {*o‘quvchilar*}; j) x – o‘quvchi bo‘lmagan qizbola, $x\in$ {*qizbolalar*}. **41.** e) $p\wedge q$: Madina – terapevt , Munisa esa stomatolog; f) $p\wedge q$: 15 dan katta va 30 dan kichik; g) $p\wedge q$: havo bulutli va yomg‘ir yog‘moqda; h) $p\wedge q$: Olimning sochlari qora va ko‘zlari moviy. **42.** a) rost; b) yolg‘on; c) yolg‘on; d) rost; e) yolg‘on.

43. 

44. a) rost; b) yolg‘on.
45. a) rost; b) rost.

46. a) 

b) i) {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20};
ii) {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19};
iii) {3, 9, 15};
iv) {1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19}.

47. a) 

b) i) {2, 3};
ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12};
iii) {1, 4, 5, 6, 7, 11, 12}.

48. a) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; d) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. **50.** a) Sardor erta turdi; b) Sardor kechki ovqatga palov yedi; c) Sardor nonushtaga qaymoq yedi va sport bilan shug'ullandi; d) Sardor tushlikka shorva ichdi va kechki ovqatga palov yedi; e) Sardor yo tushlikka yo kechki ovqatga sho'rva ichdi.

51. a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. a) tavtologiya emas; b) tavtologiya; c) tavtologiya emas.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. d) quyosh yaraqlasa, men cho'milishga boraman; e) x son 6 ga bo'linsa, u juft bo'ladi; f) muzlatgichda tuxumlar bo'lsa Madina tort pishiradi.

59. a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; d) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; **63.** a) Konversiya: Agar Diyora isinsa, u jemper kiyadi; Inversiya: Agar Diyora jemper kiymasa, u isina olmaydi. b) Konversiya: Agar ikki uchburchakning mos burchaklari teng bo'lsa, ular o'hshash bo'ladi; Inversiya: Agar ikki uchburchak o'hshash bo'lmasa , ularning mos burchaklari teng bo'lmaydi. c) Agar $2x^2=12$ bo'lsa, u holda $x=\pm\sqrt{6}$ bo'ladi; Konversiya: Agar $x=\pm\sqrt{6}$ bo'lsa, u holda $2x^2=12$ bo'ladi. Inversiya: Agar $2x^2\neq12$ bo'lsa, u holda $x\neq\pm\sqrt{6}$ bo'ladi. d) Konversiya: Agar Olim xursand bo'lsa, u o'yin o'ynaydi; Inversiya: Olim o'yin o'ynamasa, u xursand bo'lmaydi.

e) Agar uchburchak muntazam bo'lsa, u holda uning tomonlari teng bo'ladi; Konversiya: Agar uchburchakning tomonlari teng bo'lsa, u muntazam bo'ladi; Inversiya: Agar uchburchak muntazam bo'lmasa, u holda uning tomonlari teng bo'lmaydi. **64.** a) Agar gul tikonli bo'lmasa u atirgul bo'lmaydi; b) To'g'ri qaror chiqara olmagan inson sudya emas;

c) to'pni aniq nishonga tepa olmaydigan inson yaxshi futbolchi bo'la olmaydi;

d) Agar modda quyilgan idish shaklini qabul qilmasa u suyuqlik emas;

e) Agar inson muvaffaqiyatli bo'lmasa, u halol va o'qimishli emas; **65.** a) matematikani o'rganmaydigan inson 10 sinf o'quvchisi emas; b) Shavkat matematikani o'rganadi; Mirislom 10 sinf o'quvchisi emas; Aniq xulosa chiqara olmaymiz. **66.** a) x^2 soni 9 ga bo'linmasa, x soni 3 ga bo'linmaydi; b) x –juft bo'lmasa, uning oxirgi raqami 2 emas; c) $AB||CD$ va $AD||BC$ bo'lmasa, $ABCD$ – to‘g‘ri to‘rtburchak emas; d) $\angle ACB \neq 60°$ bo‘lsa, ACB – muntazam uchburchak emas. **67.** **i)** Agar uy tashqariga tutun chiqaradigan trubaga ega bo‘lsa, eng ko‘pi bilan 3 ta oynali bo‘ladi; **ii)** Agar uy 3 tadan ortiq oynali bo‘lsa, u tashqariga tutun chiqaradigan trubaga ega bo‘lmaydi; **iii)** Agar uy tashqariga tutun chiqaradigan trubaga ega bo‘lmasa, eng ko‘pi bilan 3 ta oynali bo‘lmaydi; **69.** a) $\exists x\ P(x)$; b) $\exists x\ P(x)$; c) $\forall x\ P(x)$; d) $\forall x\ P(x)$; e) $\forall x\ P(x)$; f) $\forall x\ P(x)$; g) $\forall x\ P(x)$; h) $\forall x\ P(x)$; i) $\exists x\ P(x)$; j) $\exists x\ P(x)$; k) $\forall x\ P(x)$; **70.** a) Sazan sut emizuvchi emas; b) Barcha qirollarda kamchiliklar bor; f) Oltin tokni yaxshi o‘tkazadi; g) Ayrim umurtqalilar bola ochadi; h) Bu inson kasallangan. **71.** a) y x ning nevarasi; b) Har qanday insonda farzand bor; c) Har qanday inson kimningdur farzandi. **72.** a) Barcha insonlar uchun agar biri boshqasini do‘st deb hisoblasa, u ham uni do‘st deb hisoblaydi; b) Ihtiyoriy inson uchun u do‘st deb hisoblaydigan inson bor; c) Shunday inson borki, uni hamma do‘st deb hisoblaydi; d) Har qanday inson uchun uni do‘st deb hisoblaydigan insonlar bor; e) Shunday inson borki, u hammani do‘st deb hisoblaydi; f) Shunday inson borki, uni hamma do‘st deb hisoblaydi. **73.** a) Ixtiyoriy butun son uchun unga bo‘linadigan butun son mavjud; b) Shunday butun son mavjudki u barcha butun sonlarga bo‘linadi; c) Ixtiyoriy butun son uchun uning bo‘luvchisi mavjud; d) Shunday butun son mavjudki, unga barcha butun sonlar bo‘linadi; e) Ixtiyoriy butun son uchun uning bo‘luvchisi mavjud; f) Shunday butun son mavjudki, u barcha butun sonlarga bo‘linadi. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+d$; c) b; d) $a+b+c$; e) $a+c+d$; f) d. **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

II BOB.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; d) €4402.46. **3.** $2600. **4.** £14 400. **5.** €20219.78. **6.** a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9.41%. **7.** $11\frac{2}{3}\%$. **8.** 15.4%. **9.** a) 4; b)7; **11.** a) €5512.69; b) $7293.04; c) £18938.83. **12.** 787.50. **13.** €1418.75. **14.** £1660. **15.** $274.83. **16.** a) €111.39; b) £763.31; c) ¥77157. **17.** $9021.58. **18.** €301.26. **19.** a) $7650; b) $8151.65; c) $8243.81.

20.

Yillar	Amortizatsiya	Narxi
0		€2500
1	15% €2500 = €375	€2125
2	15% €2125 = €318.75	€1806.25
3	15% €1806.25 = €270.94	€1535.31

III BOB.

1. a) 5; b)–2;50; c)1;–9; d) ∅; e) –1; f)1;–0,5; g) –1; –4,7; i) –4;7;
2. a) 7; b) –0,25; c) ildizlari yo'q; e) –1;5; f) –1.
3. a) va b); a) va d); a) va f); b) va d); b) va f); d) va f); c) va e); g) va h).
4. a)(81/11;–3/11); b)(4;4); c)(9;8). **6.** b)(1;1). **7.** a) 8;–33/4.

9. 48 ta qiz va 60 ta o'smir. **11.** a) $19\frac{2}{3}$; b) ∅; c) 32; d) ∅; **13.** a) ∅; b) $-\frac{23}{16}$.

15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. **17.** b) ∅; **19.** a) 5. **21.** a) (9;4). **23.** a) (–5;9). **25.** $\frac{21}{22}$.

26. a) –0,25; b) –4/9; c) –2,5. **28.** c) ∅. d) {0;–3,5}. **29.** c) 0; d) 1. **31.** a) 0; b) 0.

37. 3 yil. **39.** 8 yil. **41.** a) $\left(\frac{69}{62};\frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **43.** a) (1;1); b) (4/3; 2/3);

53. 1) $\left[-4;\frac{3}{7}\right]\cup[5;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7};-1\right)\cup(6;+\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$;

4) $(-\infty;-0,5)\cup[5;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; 6) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$

7) (0,25;1); 8) $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup\left[\frac{16}{23};+\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7};\frac{15-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{7};\frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;

10) $(0;0,5)\cup(1;+\infty)$. **55.** 1) $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$; 2) ∅. **57.** (–∞;–3]; **59.** 1) ∅. 2) ∅.

61. 1) $[0;1)$. **63.** 1) $(-\infty;-2)\cup(0;3)$. **65.** 1) $[81;+\infty)$. **66.** 2) [0,25;+ ∞).

68. $y>5x+7$. **70.** $y<(x-2)/9$. **72.** $y>15x-3$.

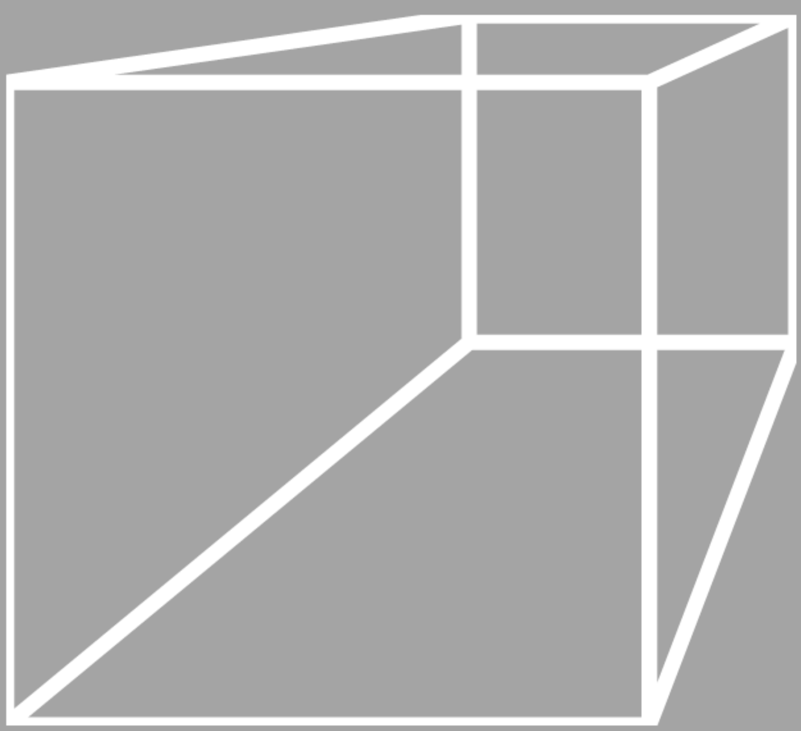
MUNDARIJA

Foydalanilgan va tavsiya etiladigan adabiyotlar

1. Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov Algebra va analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. Toshkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа. часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. A.U. Abduhamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent: "O'qituvchi", 2012.
5. Н.П. Филичева Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань". 2009.
6. М.И. Исроилов Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Г.К. Муравин Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, "Просвещение", 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
10. "Математика в школе" jurnali.
11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001 - yildan boshlab chiqa boshlagan).
12. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, "O‘qituvchi", 1979.
14. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, "O‘qituvchi", 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
16. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
17. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
18. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda va dunyoda matematik oimpiadalar.

MATEMATIKA

GEOMETRIYA



10- sinf

10- sinfda geometriyaning stereometriya qismini – fazoviy geometrik shakllarning xossalarini tizimli o‘rganishga kirishiladi. Darslikdan asosiy fazoviy shakllar, ko‘pyoqlar va aylanma jismlar va ularning asosiy xossalari, fazoda parallel va perpendikular to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar hamda ularning xossalariga doir masalalar o‘rin olgan.

“Geometriya-10” darsligida nazariy materiallar sodda va ravon tilda ifoda etishga harakat qilingan. Barcha mavzu va tushunchalar turli hayotiy misollar orqali ochib berilgan. Har bir mavzudan so‘ng keltirilgan savollar, isbotlashga, hisoblashga va yasashga doir ko‘plab masala va misollar o‘quvchini ijodiy fikrlashga undaydi, o‘zlashtirilgan bilimlarni chuqurlashtirishga va mustahkamlab borishga yordam beradi.

“Geometriya-10” darsligi umumta’lim maktablarining 10- sinf o‘quvchilariga mo‘ljallangan, undan geometriyani mustaqil o‘rganmoqchi va takrorlamoqchi bo‘lgan kitobxonlar ham foydalanishlari mumkin.

MUNDARIJA

Darslikning "Geometriya" bo‘limida ishlatilgan belgilar va ularning talqini:

– teorema tavsifi

– teorema isboti oxiri

– aksioma tavsifi

– amaliy tatbiq

– mavzu bo‘yicha savollar

– tarixiy lavhalar

– faollashtiruvchi mashg‘ulot

– geometrik boshqotirmalar

I BO'LIM

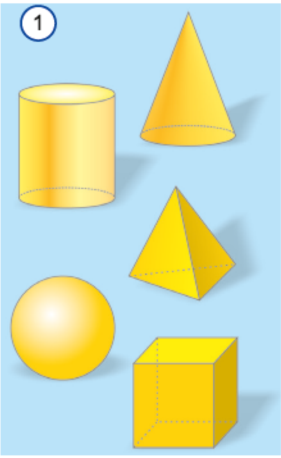
PLANIMETRIYANI TIZIMLI TAKRORLASH

1 PLANIMETRIYANING MANTIQIY TUZILISHI

Geometriya real hayotdagi predmetlarning miqdoriy ko'rsatkichlari va fazoviy shakllarini o'rganadigan fandir. Narsalarning boshqa xossalarini boshqa fanlar o'rganadi. Agar biror narsa o'rganilayotganda, uning faqat fazoviy shakli va o'lchamlari hisobga olinsa, unda *geometrik shakl* deb ataluvchi abstrakt obyektga ega bo'lamiz.

Geometriya – yunoncha so'z bo'lib, "yer o'lchash" degan ma'noni bildiradi. Maktabda o'rganiladigan geometriya qadimgi yunon olimi Evklid nomi bilan *Evklid geometriyasi* deb ataladi. Geometriya ikki qismdan: planimetriya va stereometriyadan iborat. *Planimetriya* – tekislikdagi, *stereometriya* esa fazodagi geometrik shakllarning xossalarini o'rganadi (1- rasm).

Geometrik shakllarni bir-biridan farqlash uchun ularning xususiyatlari tavsiflanadi, ya'ni ularga *ta'rif* beriladi. Lekin hamma shakllarga ham ta'rif berib bo'lmaydi. Ularning dastlaki bir nechtasini ta'rifsiz qabul qilishga majburmiz. Ularni ta'riflanmaydigan, *boshlang'ich* (*asosiy*) *geometrik shakllar* deb olamiz.



Geometriyaning mantiqan qurilishi quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1. Avval asosiy (boshlang'ich) geometrik shakllar ta'rifsiz qabul qilinadi;
2. Asosiy geometrik shakllarning asosiy xossalari isbotsiz qabul qilinadi;
3. Boshqa geometrik shakllar asosiy shakllar va

ularning xossalariga tayanib ta'riflanadi hamda ularning xossalari ungacha ma'lum xossalarga tayanib isbotlanadi.

Fanning bunday tuzilishi *aksiomatik tuzulish* deb nomlanadi. *Aksioma* deb to'g'riligi isbotsiz qabul qilinadigan xossaga aytiladi.

Shu choqqacha biz o'rgangan planimetriyaning asosiy shakllari bu nuqta va to'g'ri chiziq edi. Ularni ta'rifsiz qabul qildik. Kesma, nur, uchburchak va boshqa geometrik shakllarga esa ta'rif berdik. Shuningdek, quyidagi xossalarni (tasdiqlarni) isbotsiz aksioma sifatida qabul qildik:

I. Tegishlilik aksiomalari guruhi

1.1. *Tekislikda qanday to'g'ri chiziq olinmasin, unda bu to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan nuqtalar ham, tegishli bo'lmagan nuqtalar ham mavjud.*

1.2. *Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi.*

II. Tartib aksiomalari guruhi

2.1. *Bir to'g'ri chiziqda olingan istalgan uchta nuqtaning faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.*

2.2. *Har bir to'g'ri chiziq tekislikni ikki bo'lakka: ikkita yarimtekislikka ajratadi.*

III. O'lchash aksiomalari guruhi

3.1. *Har qanday kesma noldan farqli tayin uzunlikka ega bo'lib, u musbat son bilan ifodalanadi. Kesma uzunligi uning ixtiyoriy nuqtasi ajratgan bo'laklari uzunliklari yig'indisiga teng.*

3.2. *Har qanday burchak tayin gradus o'lchoviga ega bo'lib, uning qiymati musbat son bilan ifodalanadi. Yoyiq burchakning gradus o'lchovi* $180°$ *ga teng. Burchakning gradus o'lchovi burchak tomonlari orasidan o'tuvchi ixtiyoriy nur ajratgan burchaklar gradus o'lchovlarining yig'indisiga teng.*

IV. Teng shaklni qo'yish aksiomalari guruhi

4.1. *Ixtiyoriy nurga uning uchidan boshlab, berilgan kesmaga teng yagona kesmani qo'yish mumkin.*

4.2. *Ixtiyoriy nurdan tayin yarimtekislikka berilgan, yoyiq bo'lmagan burchakka teng yagona burchakni qo'yish mumkin.*

4.3. *Har qanday uchburchak uchun unga teng uchburchak mavjud va uni nurdan tayin yarimtekislikka yagona tarzda qo'yish mumkin.*

V. Parallellik aksiomasi

4.1. *Tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.*

Biror tasdiqning to'g'riligini mantiqiy mulohazalar yordamida keltirib chiqarish *isbot* deb ataladi. To'g'riligi isbotlash yo'li bilan asoslanadigan tasdiq esa *teorema* deb ataladi. Teorema, odatda, shart va xulosa qismlardan iborat bo‘ladi. Teoremaning birinchi – shart qismida nimalar berilgani bayon qilinadi. Ikkinchi – xulosa qismida esa nimani isbotlash lozimligi ifodalanadi.

Teoremani isbotlash – uning shartidan foydalanib, bungacha isbotlangan va qabul qilingan xossalarga tayanib, mulohaza yuritib, xulosa qismida ifodalangan jumlaning to‘g‘riligini keltirib chiqarishdir. Teoremaning shart va xulosa qismlarini aniqlashtirib olish – teoremani oydinlashtiradi, uni tushunish va isbotlash jarayonini yengillashtiradi.


Evklid
(*eramizdan avvalgi* 356–300- *yillar*)

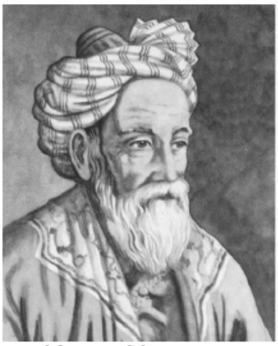
Yunon olimi Platon geometriyada ajoyib bir qonuniyatni payqagan: avval o‘rganilgan, to‘g‘riligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, mushohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarsa bo‘lar ekan. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib, qolgan xossalar teoremalar ko‘rinishida ifodalanadi va aksiomalar hamda bu paytgacha to‘g‘riligi isbotlangan xossalarga asoslanib, mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlanadi.

Mulohaza yuritish jarayonida isbotlanmagan xossalardan (garchi ularning to‘g‘riligi ochiq-oydin ko‘rinib turgan bo‘lsa ham) foydalanish taqiqlanadi.

Shunday qilib, geometriyani bir bino deb qaraydigan bo‘lsak, boshlang‘ich tushunchalar va aksiomalar uning poydevorini tashkil qiladi. Bu poydevor ustiga terulgan g‘ishtlar – ta’riflangan yangi tushunchalar va teoremalar ko‘rinishida isbotlangan xossalardan iborat bo‘ladi.

Geometriyani mustaqil fan sifatida asoslashda qadimgi yunon olimlari katta hissa qo‘shishgan. Masalan, Gippokrat Xiosskiy geometriya asoslari haqidagi dastlabki tasavvurlarini bayon etgan. Bu soha bo‘yicha asosiy ishlarni buyuk yunon olimi Evklid (eramizgacha 356 – 300-yillar) amalga oshirgan. Uning asosiy asari "Negizlar" planimetriya, stereometriya va sonlar nazariyasining ba’zi masalalarini, shuningdek, algebra, nisbatlar umumiy nazariyasi, yuz va hajmlarni hisoblash usuli hamda limitlar nazariyasi elementlarni o‘z ichiga oladi. "Negizlar" da Evklid qadimgi yunon matematikasining barcha yutuqlarini jamladi va uning rivoji uchun asos yaratdi.

"Negizlar" 13 kitobdan iborat bo‘lib, bu asar eramizdan avvalgi V – IV asrlar yunon matematiklari asarlari qayta ishlanmasidan iborat. Asarda 23 ta ta’rif, 5 ta postulat va 9 ta aksioma berilgan. Asarda to‘g‘ri to‘rtburchakka, kvadratga, aylanaga to‘g‘ri ta’riflar berilgan. Nuqta va chiziqqa quyidagi ta’riflar berilgan:



Umar Hayyom
(1048-1131)

"Nuqta deb shunday narsaga aytiladiki, u qismlarga ega emas", "Chiziq deb eni yo'q uzunlikka aytiladi".

"Negizlar"da 9 ta aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan mulohazalar bayon etilgan. Geometrik yasashlarni amalga oshirish mumkinligini bayon etuvchi matematik mulohazalar (postulat)dan quyidagi beshtasi bayon qilingan:

I. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

II. To'gri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.

III. Har qanday markazdan ixtiyoriy masofada aylana yasash mumkin.

IV. Hamma to'g 'ri burchaklar o'zaro teng.

V. Bir tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib, bir tomonli ichki burchaklar hosil qilsa va burchaklar yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lsa, mazkur to'g'ri chiziqlar davom ettirilganda ular yig'indisi ikki to'g 'ri burchakdan kichik burchaklar tomonida kesishadi.

Mazkur asar ulkan va uzoq shuhratga ega bo'ldi. Ayniqsa, V postulat katta ilmiy munozaralarga sabab bo'ldi. Agar V postulatdagi ichki almashinuvchi burchaklarni α va β desak (1-rasm), to'g'ri chiziqlar a va b bo'lsa, u holda postulat mazmuniga ko'ra $\alpha+\beta <180°$ bo'lsa, a va b to'g'ri chiziqlar kesishadi.

Postulatni isbotlash yo'lida unga tengkuchli bir qator mulohazalar paydo bo'ldi. Masalan, ingliz matematigi Yan Pleyfer (1748–1819) ning *parallellik aksiomasi* shular jumlasidandir: tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Matematik shoir astronom va faylasuf Umar G'iyosiddin Abul Faxt ibn Ibrohim Hayyom ham bu masala bilan shug'ullangan. Hayyom "Evklid kitobining kirish qismidagi qiyinchiliklarga sharhlar" nomli asarida V haqidagi postulatga to'xtalgan. U Evklidning postulati teorema ekanligini isbotlash uchun pastki asosidagi ikki burchagi to'g'ri bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni qaragan (2- rasm) va agar uning pastki ikki burchagi to'g'ri bo'lsa, yuqoridagi ikki burchagi ham to'g'ri bo'lishi lozim degan xulosaga kelgan. Umar Hayyom "Bitta to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan ikki to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqning ikkala tomonida ham kesisha olmaydi-ku", – deydi. Umar Hayyomning bu ishlaridan bexabar italiyalik matematik J. Sakkeri (1667–1733) ham V postulat bilan shug'ullanib, to'g'ri to'rtburchakka murojaat qilgan. Geometriya asoslariga bu to'g'ri to'rtburchak "Hayyom – Sakkeri to'rtburchagi" nomi bilan kirgan.

Bu muammoni buyuk rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy (1792–1856) hal qildi va noevklid geometriyasini yaratdi. Lobachevskiy birinchi marta Evklidning beshinchi postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bog‘liq emasligini isbotladi. Bu geometriya Evklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama-qarshilikka (ziddiyatlikka) duch kelishi lozim edi, chunki – ikkita geometriyaning bir vaqtda mavjud bo‘lishligi mumkin emas edi. Shunga qaramay, Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqara berdi, ular mantiqiy qarama - qarshiliklarga uchramadi. Yangi geometriya va Evklid geometriyasida birinchi to‘rtta guruh aksiomalar ustma-ust tushadi. Bu aksiomalar guruhlari va ularning natijalari absolut geometriya deb atala boshladi.

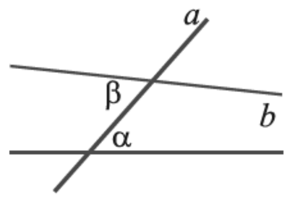
N.I.Lobachevskiy (1792–1856)

Lekin, noevklid (Lobachevskiy) geometriyasi Evklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisida π dan kichik, unda o‘xshash yoki teng bo‘lmagam uchburchaklar mavjud emas, berilgan to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar to‘plami to‘g‘ri chiziq emas, balki egri chiziq hisoblanadi va h. k.

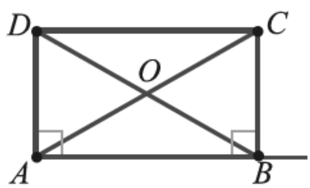
Noevklid geometriyasini yaratishga venger matematigi Yanosh Bolyai (1802– 1860) va nemis matematigi Karl Fridrix Gauss (1777–1855) lar katta hissa qo‘shganlar. Shuningdek, italyan matematigi Eujenio Beltrami (1835–1900) va nemis matematigi Bernxard Riman (1826–1866) yangi geometriya tavsifi bo‘yicha katta ishlar qildilar.

Evklid boshlab bergan aksiomatika ma’lum ma’noda nemis matematigi David Gilbert (1862–1943) va rus matematigi Veniamin Fyodorovich Kagan (1859–1953) ishlarida oxiriga yetkazildi.

1



2



Mavzuga doir savollar

1. *Geometriya aksiomalari sistemasini bayon etgan Evklid haqida nimalarni bilasiz?*
2. *Evklidning "Negizlar" asari haqida gapirib bering.*
3. *Ta’rif nima? Tekislikda qaysi shakllar asosiy (boshlang‘ich) shakllar sifatida ta’rifsiz qabul qilingan?*

4. *Teorema va aksioma bir-biridan nima bilan farq qiladi?*
5. *Planimetriya aksiomalarini sanang va sharhlang.*
6. *Geometriya fani qanday tuzilgan?*
7. *Evklidning 5-postulati nima haqda va uni nima uchun isbotlashga uringanlar?*
8. *Bu postulatni isbotlashga uringan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.*
9. *Lobachevskiy yangi geometriyaning yaratilishida qanday hissa qo'shgan?*
10. *Noevklid geometriyasini yaratgan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.*

2 GEOMETRIK MASALALAR VA ULARNI YECHISH METODLARI

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, geometriyaning eng ajoyib xususiyati bu avval o'rganilgan, to'g'riligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, mushohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarish mumkin. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib, qolgan xossalar teoremalar yoki masalalar ko'rinishida ifodalangan va aksiomalar hamda bu paytgacha to'g'riligi isbotlangan xossalarga asoslanib, mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlangan. Shu zayilda matematik yoki geometrik masalalar vujudga kelgan.

Matematik masalada nimalardir (shartlar) berilgan bo'ladi. Ulardan foydalanib, nimanidir topish (hisoblash) yoki isbotlash, yoki yasash talab qilinadi. Qo'yilgan talabni bajarish masalani yechishni bildiradi.

Geometrik masalalar qo'yilgan talabga ko'ra hisoblashga, isbotlashga, tadqiq qilishga va yasashga doir masalalarga bo'linadi.

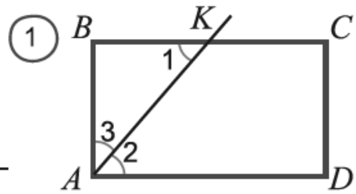
Matematik masalani yechish uchun quruq nazariyani bilish yetarli emas. Masala yechish ko'nikmasiga va tajribasiga ham ega bo'lish talab qilinadi. Bunday ko'nikmaga o'z navbatida sodda masalalardan boshlab, borgan sari murakkabroq masalalarni yechish orqali erishiladi. Shuningdek, masalalarni yechishning turli xil usullari ham bor bo'lib, ularni faqat ko'p masalalar yechish orqali o'zlashtirish mumkin. Har bir usul muayyan turkumga tegishli masalalarni yechish uchun qo'llaniladi. Qancha ko'p usullar o'zlashtirilsa, shuncha masala yechish ko'nikmalari shakllanadi.

Quyida geometrik masalalarni yechishning ba'zi mihim usullari ustida to'xtalamiz.

Masala yechish usullari tuzulishiga ko'ra, sintetik, analitik, teskarisidan faraz qilish va hokazo turlarga bo'linadi. Matematik apparatning qo'llanishiga ko'ra esa, algebraik, vektorli, koordinatali, yuzlar usuli, o'xshashlik usuli, geometrik almashtirishlar kabi turlarga bo'linadi.

Sintetik usul mohiyatan masala shartida berilganlardan foydalanib, mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjiri eng oxirgi bo‘lagi masala talabi bilan ustma-ust tushguncha davom ettiriladi.

1- misol. To‘g‘ri to‘rtburchak burchagining bissektrisasi uning tomonini 7 va 9 uzunlikdagi kesmalarga bo‘ladi (1-rasm). To‘g‘ri to‘rtburchak perimetrini toping.



Yechish. Aytaylik $ABCD$ – to‘g‘ri to‘rtburchak, AK– bissektrisa, $K \in BC$, $BK = 7$ sm, $KC = 9$ sm bo‘lsin.

1. $BC \parallel AD$ va AK kesuvchi bo‘lgani uchun: $\angle 1 = \angle 2.$ (1)
bo‘ladi, chunki bu burchaklar ichki almashinuvchi burchaklardir.
2. AK – bissektrisa: $\angle 2 = \angle 3.$ (2)
3. Unda (1) va (2) ga ko‘ra $\angle 1 = \angle 3.$
4. U holda ABK teng yonli uchburchak va $AB = BK.$ (3)
5. Bu natijadan foydalanib, hisoblashlarni amalga oshiramiz: $AB = BK = 7$ sm.
$P = 2(AB + BC) = 2\,(7+16) = 46\ (sm).$ ❑

Bu masala tayanch masalalar qatoriga kiradi, chunki ko‘pgina masalalar xuddi shu g‘oya atrofida quriladi. Parallelogramm va trapetsiya burchagining bissektrisasi bu shakllar tekisligidan teng yonli uchburchak kesib oladi. Bunday tayanch faktlarni doim yodda tutish kerak. Ular boshqa masalalarni yechayotganda juda qo‘l keladi.

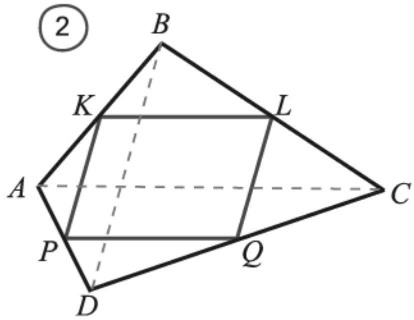
Analitik usul mohiyatan teorema (masala)ning xulosa qismida kelib chiqib, oldindan ma’lum tasdiqlardan foydalanib, mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjirining eng oxirgi bo‘lagi masala shartining natijasi ekanligini aniqlaguncha davom ettiriladi.

2- misol. Ixtiyoriy to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalari parallelogrammning uchlari bo‘lishini isbotlang.

Isbot. Aytaylik $ABCD$ – to‘rtburchak (2-rasm), $AK = KB, BL = LC, CQ = QD, AP = PD$ bo‘lsin.

To‘rtburchakning AC va BD diagonallarini o‘tkazamiz.

1. $\triangle ABC$ da KL o‘rta chiziq: $KL \parallel AC$ (1);
2. $\triangle ADC$ da PQ o‘rta chiziq: $AC \parallel PQ$ (2);
3. (1) va (2) dan: $KL \parallel PQ$ (3);
4. Yuqoridagiga o‘xshash: $KP \parallel LQ$ (4);
5. (3) va (4) dan: $KLQP$ – parallelogramm. ❑



Yuqorida ko‘rilgan sintetik va analitik usullar ***to‘g‘ri usullar*** deb ham ataladi. Masalani to‘g‘ri usullar bilan yechayotganda, avval masala mazmuni tahlil qilinadi. Tahlil natijasiga ko‘ra usuli tanlanadi. Shundan so‘ng rasm ko‘rinishida masalani yechish modeli (chizmasi) tuziladi va chizma ustida mulohaza yuritiladi. Shu tariqa mulohazalar yuritib, masalaning shartidan uning xulosa qismiga qarab borilaveradi.

Masala yechishning teskari usuli ham mavjud. U bilan ko‘p marta duch kelganmiz. U "***teskarisini faraz qilib isbotlash usu*li**" deb ataladi. Bu usulni qo‘llash algoritmini keltiramiz.

Teskarisini faraz qilib isbotlash usulini qo‘llash algoritmi

Teorema (to‘g‘ri tasdiq)	***Agar A o‘rinli bo‘lsa, B o‘rinli bo‘ladi. (A va B – qandaydir fikrlar)***
Isbot:	
Teskarisini faraz qilamiz:	Teoremada keltirilgan tasdiqning teskarisini faraz qilamiz, ya’ni teoremanig sharti bajarilsin-u, lekin xulosasi o‘rinli bo‘lmasin: ***Agar A o‘rinli bo‘lsa, B o‘rinli bo‘lmaydi.***
Mulohaza yuritamiz:	To‘g‘riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarga tayanib mantiqiy mulohaza yuritamiz.
Ziddiyatga kelamiz:	To‘g‘riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarning biriga zid bo‘lgan tasdiqqa duch kelib qolamiz.
Xulosa chiqaramiz:	Demak, farazimiz noto‘g‘ri, ya’ni berilgan teorema to‘g‘ri ekan.
Teorema isbotlandi	

3- misol. Agar ikki to‘g‘ri chiziqning har biri uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro parallel bo‘ladi.

Aytaylik, a va b to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, ularning har biri uchinchi c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin. Teoremani teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz.

3

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz: a va b to‘g‘ri chiziqlarning har biri uchinchi c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin-u, ular o‘zaro parllel bo‘lmasin, ya’ni biror A nuqtada kesishsin (3- rasmga qarang). Unda A nuqtadan c to‘g‘ri chiziqqa ikkita a va b parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tmoqda. Bu parallellik aksiomasiga zid. Ziddiyat farazimizning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi. Ya’ni a va b to‘g‘ri chiziqlarning har biri uchinchi c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro parallel bo‘ladi. ❑

Mazkur usul quyidagi mantiq qonuniga asoslangan: bir-biriga zid ikki tasdiqning faqat bittasi rost, ikkinchisi esa yolg‘on bo‘ladi, uchinchi holatning bo‘lishi mumkin emas.

Endi geometrik masalalarni yechishning boshqa usullariga to‘xtalamiz.

Algebraik usul

Geometrik masalani algebraik usul bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

1) masala mazmunini tahlil qilish va uning chizma modelini qurish;

2) noma’lumni harflar bialn belgilash;

3) masala shartini ifodalovchi tenglama yoki tenglamalar sistemasini tuzish;

4) tuzilgan tenglama yoki tenglamalar sistemasini yechish;

5) topilgan yechimni tahlil qilish;

6) javobni yozish.

4- misol. To‘g‘ri burchakli uchburchakning perimetri 36 sm ga teng. Gipotenuzaning katetga nisbati 5:3. Uchburchak tomonlarini toping.

Aytaylik, $\triangle ABC$ berilgan bo‘lib, unda $\angle C = 90°$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ bo‘lsin.

Yechish. Proporsionallik koeffitsiyentini k bilan belgilaymiz.

Unda $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagor teoremasiga ko‘ra: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ yoki $25k^2 = 9k^2+BC^2$.

Bundan, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

$P = AB + AC + BC$.

Shartga ko‘ra: $P = 36$, $5k + 3k + 4k = 36$, $k = 3$;

$AB = 5k = 15$ sm, $AC = 3k = 9$ sm, $BC = 4k = 12$ sm.

Javob: 15 sm, 9 sm, 12 sm. ❑

Yuzlar usuli

Ba’zi geometrik masalalarni yechishda yuzlarni hisoblash formulalaridan foydalanish kutilgan natijani tezda beradi. Bu holatda topish talab qilingan noma’lum masaladagi yordamchi shakllarning yuzlarini tenglashtirish natijasida hosil qilingan tenglamadan topiladi. Buni quyidagi misolda namoyish qilamiz.

5- misol. Uchburchakning tomonlari 13 sm, 14 sm va 15 sm. Uzunligi 14 ga teng tomonga tushirilgan balandlikni toping.

Aytaylik, $\triangle ABC$ berilgan bo‘lib, unda $a = 13$ sm, $b = 14$ sm, $c = 15$ sm bo‘lsin.

Yechish. $a < b$ va $b < c$, h_c – balandlik bo‘lsin.

Geron formulasiga ko‘ra: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6} = 3\cdot7\cdot4 = 84$ (sm^2).

Boshqa formula bo‘yicha: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b$; $\frac{1}{2}\, b \cdot h_b = 84$, $h_b = 12$ (sm).

Javob: 12 sm. ❑

Vektorlar usuli

Geometrik masalani vektorlar usuli bilan yechish uchun quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

1) masalani vektorlar tiliga o‘girish, ya’ni masaladagi ba’zi kattaliklarni vektor sifatida qarab, ularga doir vektorli tenglamalar tuzish;

2) vektorlarning ma’lum xossalaridan foydalanib, vektorli tenglamalarning shaklini almashtirish va noma’lumni topish;

3) vektorlar tilidan geometriya tiliga qaytish;

4) javobni yozish.

Vektor usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

a) to‘g‘ri chiziqlar (kesmalar)ning parallelligini aniqlash;

b) kesmalarni berilgan nisbatda bo‘lish;

c) uchta nuqtaning bitta to‘g‘ri chiziqda yotishini ko‘rsatish;

d) to‘rtburchakning parallelogramm (romb, trapetsiya, kvadrat, to‘g‘ri to‘rtburchak) ekanligini ko‘rsatish.

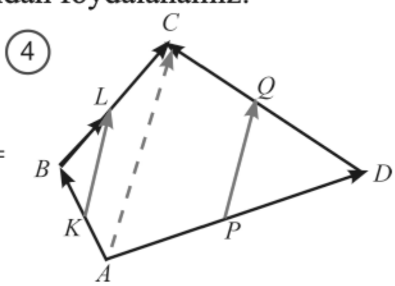
6- misol. Qavariq to‘rtburchakning tomonlari o‘rtalari parallelogramm uchlari bo‘lishini isbotlang.

Aytaylik, $ABCD$ to‘rtburchak berilgan bo‘lib, unda $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bo‘lsin (4- rasm).

Isbot. 1. Berilgan kesmalarni mos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BL}$, $\overline{KB}$ vektorlar bilan almashtirib, masalani vektor tiliga o‘tkazamiz.

2. Vektorlani qo‘shishning uchburchak qoidasidan foydalanamiz:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \qquad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$$



$\overline{KB} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$ va $\overline{BL} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ ekanligidan foydalanib, $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} + \frac{1}{2}\,\overline{BC} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$ ekanini topamiz.

Shunga o‘xshash, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$ bo‘ladi.

3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, ya’ni bu vektorlar bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng. Bu $KLQP$ to‘rtburchak parallelogramm ekanligini anglatadi. ❑

Koordinatalar usuli

Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

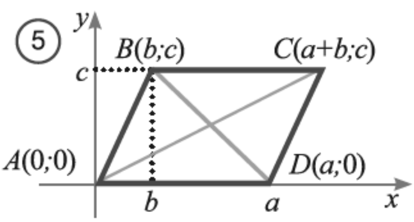
1) masala mazmunini tahlil qilish va uni koordinatalar tiliga o‘girish;
2) ifodalarning shaklini almashtirish va qiymatini hisoblash;
3) natijani geometriya tiliga o‘girish;
4) javobni yozish.

Koordinatalar usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo‘ladi: a) nuqtalarning geometrik o‘rnini topish; b) geometrik shakllarning chiziqli elementlari orasidagi bog‘lanishlarni isbotlash.

Masalani koordinatalar usuli bilan yechayotganda, koordinatalar boshini to‘g‘ri tanlash muhimdir. Berilgan shaklni koordinatalar tekisligiga shunday joylashtirish kerakki, imkoni boricha nuqtalarning koordinatalari nolga teng bo‘lsin.

7- misol. Diagonallari teng parallelogrammning to‘gri to‘rtburchak bo‘lishini isbotlang.

Isbot. Koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, parallelogrammning uchlari quyidagi koordinatalarga ega bo‘lsin (5- rasmga qarang):



$A(0; 0)$, $B(b; c)$, $C(a+b; c)$, $D(a; 0)$,

bu yerda $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

A, B, C, D nuqtalar orasidagi masofalarni ularning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}$, $BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$.

Unda $\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$

yoki $(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$. Bundan, $4ab = 0$.

Lekin $a > 0$, unda $b = 0$. Bu esa, o‘z navbatida, $B(b; c)$ nuqta Oy o‘qida yotishini anglatadi. Shuning uchun *BAD* to‘g‘ri burchak bo‘ladi.

Bundan *ABCD* parallelogramm to‘g‘ri to‘rtburchak ekanligi kelib chiqadi. ❑

Geometrik almashtirishlar usuli

Geometrik almashtirishlar usuliga burish, simmetrik akslantirishlar, parallel ko‘chirish va gomotetiya kabi almashtirishlarga asoslangan usullar kiradi. Geometrik almashtirishlar yordamida masalalarni yechish jarayonida berilgan geometrik shakllar bilan bir qatorda yangi, qo‘llanilgan geometrik almashtirish yordamida hosil qilingan shakllar ham qaraladi. Yangi shakllarning xossalari aniqlanadi va berilgan shaklga o‘tkaziladi. Shundan so‘ng masalani yechish yo‘li topiladi. Yuqorida keltirilgan barcha usullar bitta umumiy nom bilan geometrik usullar deb aytiladi.

Muhim eslatma!

Bu bo‘limdan joy olgan materiallar planimetriyani takrorlash uchun keltirilgan. Takrorlash uchun masalalar keragidan ortiq keltirilmoqda. Ularning barchasini sinfda ko‘rishning imkoni bo‘lmasligi mumkin. Bundan qat’iy nazar, ularni mustaqil yechib chiqishni maslahat beramiz. Bu sizga 10- sinfda geometriyani o‘rganishni muvaffaqiyatli davom ettirishingizga zamin yaratadi.

? *Mavzuga doir savollar*

1. *Matematik masala deganda nimani tushunasiz?*
2. *Geometrik masalaning qanday turlarini bilasiz?*
3. *Masala yechishning qanday usullarini bilasiz?*
4. *Geometrik masalani yechishning sintetik, analitik usullari haqida gapirib bering.*
5. *Masala yechishning to‘g‘ri va teskari usullari haqida nima bilasiz?*
6. *Teskarisidan faraz qilib isbotlash usulining mohiyati nimada?*
7. *Geometrik masalani algebraik usulda yechish algoritmini tushuntirib bering.*
8. *Geometrik masalani vektor usulida yechish algoritmini tushuntirib bering.*
9. *Vektor usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?*
10. *Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechish algoritmini tushuntirib bering.*
11. *Koordinatalar usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?*
12. *Geometrik almashtirishlar usulini tushuntirib bering.*

3 AMALIY MASHQ VA TATBIQLAR

1.1. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishidan to‘rtta burchak hosil bo‘ldi (1- rasm). Quyida keltirilgan jadvalda har bir shart (A – E) ga undan kelib chiquvchi xulosa (1 – 5) ni mos qo‘ying:

A) $\angle 1 = \angle 3$;
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
C) $\angle 1 = \angle 2 + 90°$;
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;
E) $\angle 3 = 90°$.

1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
3) $\angle 1$ va $\angle 4$ – qo‘shni;
4) $\angle 1$ va $\angle 3$ – o‘tkir;
5) $\angle 2$ va $\angle 4$ – vertikal.

A	
B	
C	
D	
E	

1.2. Quyida ba’zi burchaklarning gradus o‘lchovlari (1–7) berilgan. Ulardan qaysi juftlari qo‘shni bo‘lishi mumkinligini aniqlang.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28°; 6) 108°; 7) 38°.

A) 1 va 2; *B*) 2 va 6; *C*) 3 va 4; *D*) 1 va 7; *E*) 2 va 5.

1.3. Agar 2- rasmda $\angle 1 = \angle 7$ bo‘lsa, to‘g‘ri tasdiqni toping.

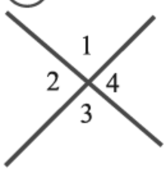
A) $a \parallel b$; *B*) $a \perp b$; *C*) *a* va *b* kesishmaydi;

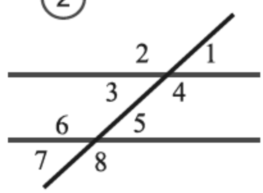
1.4. Agar 3- rasmda $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ va $\angle 2 = 72^\circ$ bo‘lsa, $\angle 3 = ?$

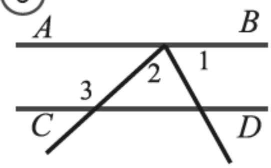
A) 72°; *B*) 144°; *C*) 108°; *D*) 36°; *E*) 124°.

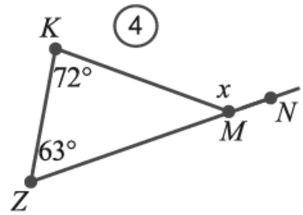
1.5. Agar teng yonli uchburchak burchaklari 3 : 4 : 3 nisbatda bo‘lsa, uning uchining bissektrisasi va yon tomoni orasidagi burchakni toping.

A) 18°; *B*) 36°; *C*) 72°; *D*) 60°; *E*) 30°.

1


2


3


4


1.6. 4- rasmda tasvirlangan *KMZ* uchburchak burchagiga tashqi bo‘lgan *KMN* burchakning gradus o‘lchovini toping.

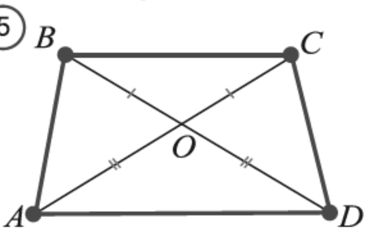
A) 135°; *B*) 108°; *C*) 45°; *D*) 125°; *E*) 117°.

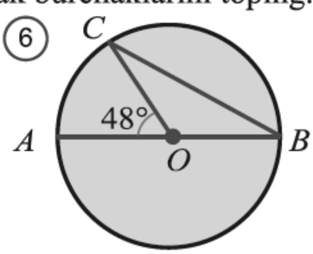
1.7. To‘g‘ri tengliklarni aniqlang (5- rasm).

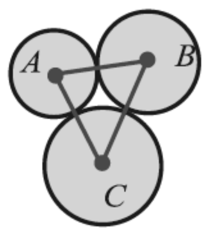
A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; *B*) $BA = CD$; *C*) $\triangle ABO = \triangle COD$;

D) $\angle AOB = \angle DOC$; *E*) $\angle BAO = \angle DCO$; *F*) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-rasmdagi *BOC* uchburchak burchaklarini toping.

5


6


7


A) 48°, 48°; 84°; *B*) 24°, 132°, 24°; *C*)132°, 48°, 48°; *E*)42°,90°,48°; *D*)48°,32°, 20°.

1.9. Uchburchakning uchlari radiuslari 6 sm, 7 sm va 8 sm bo‘lgan va jufti-jufti bilan urinadigan uchta aylana markazlarida yotibdi (7- rasm).

Bu uchburchakning perimetrni toping.

A) 28 sm; *B*) 29 sm; *C*) 27 sm; *D*) 42 sm; *E*) 21 sm.

1.10. Kvadratning tomoni $20\sqrt{2}$ ga teng. Bu kvadratga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

A) 20; *B*) $10\sqrt{2}$; *C*) 10; *D*) $5\sqrt{2}$; *E*) 5.

1.11. Trapetsiyaning bitta asosi ikkinchisidan 8 sm ga uzun, o‘rta chizig‘i esa 10 sm ga teng. Trapetsiyaning kichik asosini toping.

A) 2 sm; *B*) 4 sm; *C*) 6 sm; *D*) 8 sm; *E*) 10 sm.

1.12. Diagonallari 10 m va 36 m bo‘lgan rombning yuzini toping.

A) 90 m^2; *B*) 92 m^2; *C*) 180 m^2; *D*) 184 m^2; *E*) 36 m^2.

1.13. 8-rasmdagi *m* va *n* to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lsa, *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

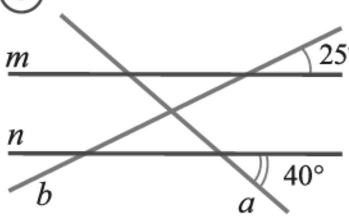
A) 50°; *B*) 80°; *C*) 100°; *D*) 65°; *E*) 115°.

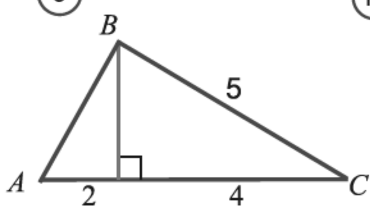
1.14. 9-rasmdagi uchburchak yuzini toping.

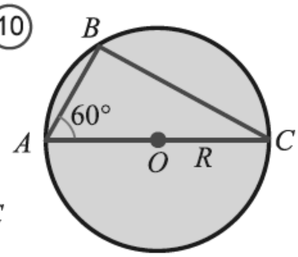
A) 6; *B*) 9; *C*) 12; *D*) 24; *E*) 30.

1.15. 10- rasmdagi *R* radiusli aylanaga ichki chizilgan *ABC* uchburchakning *BC* tomonini toping.

A) R; *B*) $R\sqrt{2}/2$; *C*) $R\sqrt{2}$; *D*) $R\sqrt{3}$; *E*) $R\sqrt{3}/2$.

8


9


10


1.16. Yuzi 9π sm^2 bo‘lgan doirani o‘rab turgan aylana uzunligini toping.

A) 3π sm; *B*) 9π sm; *C*) 12π sm; *D*) 18π sm; *E*) 6π sm.

1.17. Tomoni 6 sm ga teng bo‘lgan kvadratga ichki chizilgan doira yuzini toping.

A) 9π sm^2; *B*) 144π sm^2; *C*) 36π sm^2; *D*) 72π sm^2; *E*) 18π sm^2.

1.18. Kvadratga ichki chizilgan aylana radiusi 5 sm. Kvadrat diagonalini toping.

A) $5\sqrt{2}/2$; *B*) $5\sqrt{2}$; *C*) $5\sqrt{2}/4$; *D*) $10\sqrt{2}$; *E*) $20\sqrt{3}$.

1.19. Ichki burchaklari yig‘indisi 1600° bo‘lgan muntazam ko‘pburchakning tomonlari sonini toping.

A) 12; *B*) 14; *C*) 16; *D*) 18; *E*) 20.

1.20. Diagonallari 24 sm va 18 sm bo‘lgan rombning perimetrini toping.

A) 120 sm; *B*) 60 sm; *C*) 84 sm; *D*) 108 sm; *E*) 144 sm.

1.21. Parallelogrammning perimetri 48 dm bo‘lib, bir tomoni ikkinchisidan 8 dm ga uzun. Parallelogrammning kichik tomonini toping.

A) 8 dm; *B*) 16 dm; *C*) 6 dm; *D*) 12 dm; *E*) 10 dm.

1.22. 11- rasmdagi ABC teng yonli uchburchak tashqarisida ikkita teng ABM va CBK burchaklar qurildi. Bu burchaklar tomonlari AC tomonni, mos ravishda, M va K nuqtalarda kesib o‘tdi. MBC va KBA uchburchaklar tengligini isbotlang.

1.23. 12-rasmda tasvirlangan AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvini aniqlang. Javobingizni asoslang.

1.24. 13-rasmdagi ABC uchburchakka ichki aylana chizilgan. Aylananing N va Z urinish nuqtalari uchburchakning AB va AC tomonlarini ayirmasiga mos ravishda 3 sm va 4 sm bo‘lgan kesmalarga ajratadi ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Agar uchburchakning perimetri 28 sm bo‘lsa, uning tomonlarini toping.

1.25. Teng tomonli uchburchakka radiusi $3\sqrt{3}$ bo‘lgan aylana tashqi chizilgan. Ichki chizilgan aylana radiusini toping.

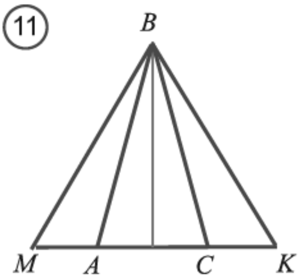
1.26. Asosidagi burchagi 30° bo‘lgan, tengyonli trapetsiyaga aylana tashqi chizilgan. Trapetsiyaning balandligi 7 sm ga teng bo‘lsa, uning o‘rta chizig‘ini toping.

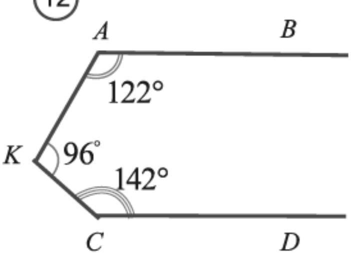
1.27. Asosidagi burchagi 150° bo‘lgan teng yonli trapetsiya aylanaga tashqi chizilgan. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i $16\sqrt{3}$ ga teng bo‘lsa, uning balandligini toping.

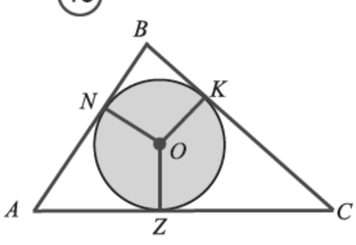
1.28. Asosi 16 sm va bu asosga tushirilgan balandligi 15 sm bo‘lgan teng yonli uchburchakning yon tomonini toping.

1.29. ABC uchburchakning AO balandligi uning BC tomonini BO va OC kesmalarga ajratadi. Agar $AB = 10\sqrt{2}$ sm, $AC = 26$ sm va $B = 45°$ bo‘lsa, OC kesma uzunligini toping.

1.30. Rombning tomoni 10 sm, diagonallaridan biri 12 sm. Rombga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

11


12


13


1.31. Radiusi 15 sm bo‘lgan aylanada uning markazidan 12 sm uzoqlikda bo‘lgan vatar o‘tkazilgan. Vatar uzunligini toping.

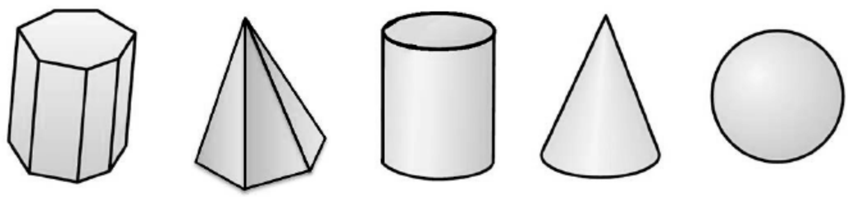
II BO‘LIM

STEREOMETRIYAGA KIRISH

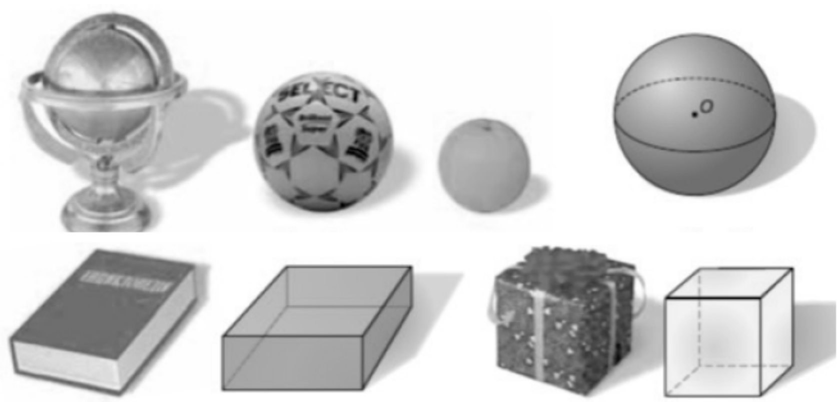
4 FAZOVIY GEOMETRIK SHAKLLAR. KO‘PYOQLAR

Ma’lumki, geometrik shakllar tekislikda to‘liq yotgan yoki yotmaganiga qarab, yassi va fazoviy shakllarga ajratiladi. Oldingi sinflarda geometriya darslarida, asosan, yassi geometrik shakllarning xossalarini o‘rgandik. 9- sinf oxirida esa ba’zi fazoviy shakllar: prizma, piramida, silindr, konus va sharning (1- rasm) xossalarini qarab chiqqan edik. Geometriyaning planimetriya bo‘limi yassi geometrik shakllarni, *stereometriya* bo‘limi esa fazoviy geometrik shakllarning (yoki jismlarning) xossalarini o‘rganadi. Stereometriya so‘zi grekchadan olingan bo‘lib, "stereos" – fazoviy, "metreo" – o‘lchayman degan ma’nolarni anglatadi.

1



2

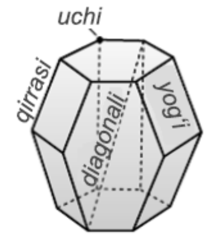


2- rasmda tevarak atrofdagi ba'zi narsalar fazoviy jismlarning timsoli sifatida ular haqida tasavvur beradi. Tevarak atrofimizdagi barcha predmetlar uch o'lchamli bo'lib, ularning shakli qaysidir fazoviy geometrik jismga o'xshab ketadi.

9- sinf oxirida bunday fazoviy jismlar bilan tanishgansiz. Stereometriya kursini tizimli ravishda o'rganishni boshlaymiz. Avval ba'zi bir fazoviy jismlar elementlari haqidagi ma'lumotlarni qisqacha eslatib o'tishni lozim topdik.

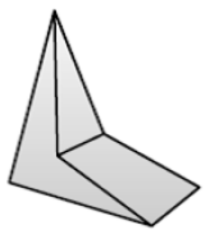
Ko'pyoq deb yassi ko'pburchaklar bilan chegaralangan jismga aytiladi. Yassi ko'pburchaklar bu *ko'pyoqning yoqlari*, ko'pburchaklarning uchlari *ko'pyoqning uchlari*, tomonlari qirralari esa *ko'pyoqning qirralari* deb ataladi. Bitta yoqqa tegishli bo'lmagan uchlarni birlashtiruvchi kesma *ko'pyoqning diagonali* deb ataladi (3-rasm).

3



Ko'pyoqning chegarasi uning *sirti* deb ataladi. Ko'pyoq sirti fazoni ikki qismga ajratadi. Ulardan cheksiz qismi *ko'pyoqning tashqi sohasi,* chekli qismi esa *ko'pyoqning ichki sohasi* deb ataladi.

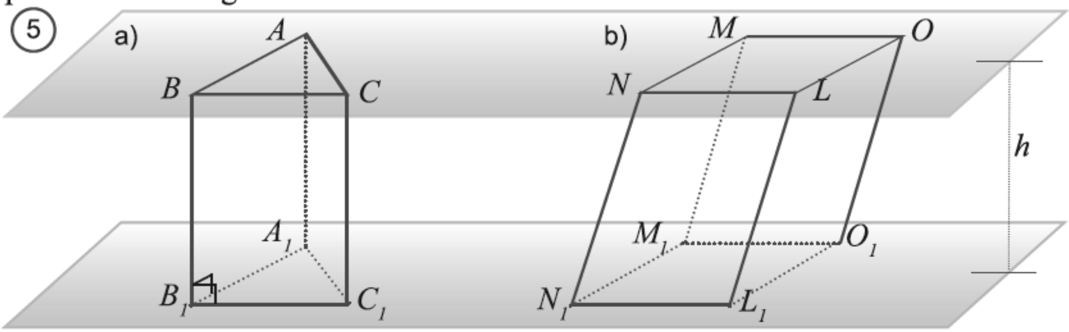
4



Ko'pyoq ixtiyoriy yog'i yotgan tekislikning bir tomonida yotsa, bunday ko'pyoq *qavariq ko'pyoq* deyiladi. Masalan, kub – qavariq ko'pyoqdir. 4- rasmda esa qavariq bo'lmagan ko'pyoq tasvirlangan. Kelgusida eng sodda qavariq ko'pyoqlar: prizma va piramidalarni o'rganamiz.

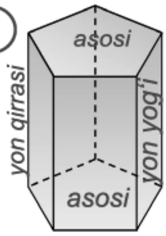
Prizma deb ikki yog'i teng ko'pburchakdan, qolgan yoqlari esa parallelogrammlardan iborat ko'pyoqqa aytiladi (5- rasm). Teng yoqlar prizmaning *asoslari*, parallelogrammlar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi (6- rasm). Asosining tomonlari soniga qarab prizmalar *uchburchakli, to'rtburchakli* va hokazo *n-burchakli prizmalar* deb yuritiladi. 5.a- rasmda uchburchakli $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 5.*b*- rasmda esa tortburchakli $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma tasvirlangan.

5

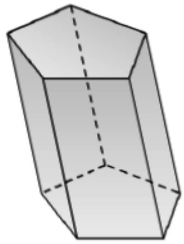


Prizma yon yoqlarining asosiga perpendikular yoki perpendikular emasligiga qarab *to'g'ri prizma* (6 - rasm) yoki *og'ma prizma* (7 - rasm) deb ataladi.

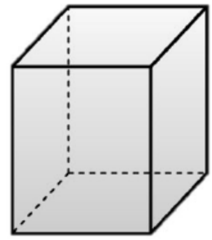
6



7



8



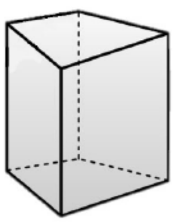
Asosi muntazam ko'pburchakdan iborat prizma *muntazam prizma* deb nomlanadi (8- rasm).

Asosi parallelogrammdan iborat prizma *parallelepiped* deb nomlanadi (9- rasm). Parallelepipedlar ham prizma kabi to'g'ri va og'ma bo'lishi mumkin. Asosi to'g'ri to'rtburchakdan iborat to'g'ri parallelepiped *to'g'ri burchakli parallelepiped* deb ataladi (10- rasm). Ravshanki, to'g'ri burchakli parallelepipedning barcha yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi.

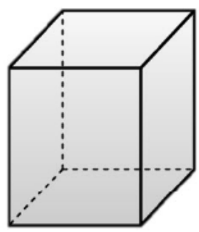
To'g'ri burchakli parallelepipedning bitta uchidan chiquvchi uchta qirrasi uning *o'lchamlari* deb nomlanadi.

O'lchamlari teng bolgan to'g'ri burchakli parallelepiped *kub* deb nomlanadi. Ravshanki, kubning barcha yoqlari teng kvadratlardan iborat bo'ladi.

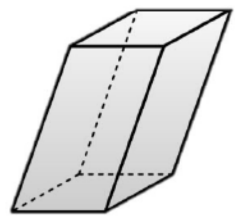
9



10

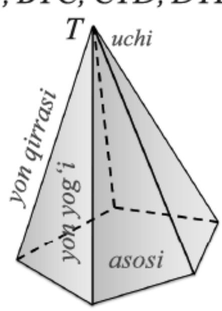


11

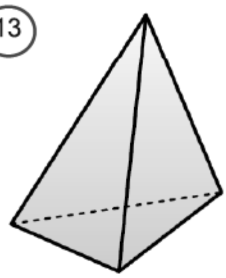


Piramida deb bir yog'i ko'pburchakdan, qolgan yoqlari esa bitta uchga ega uchburchaklardan iborat ko'pyoqqa aytiladi. Ko'pburchak piramidaning *asosi*, uchburchaklar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi. 12- rasmda *TABCDE* beshburchakli piramida tasvirlangan. *ABCDE* beshburchak piramidaning asosi, *ATB, BTC, CTD, DTE* va *ETA* uchburchaklar uning yon yoqlari, *T* esa uning uchi.

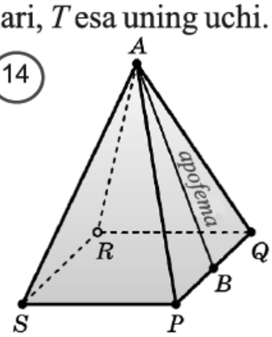
12



13



14



Asosining tomonlari soniga qarab piramidalar *uchburchakli, to'rtburchakli* va hokazo *n-burchakli piramidalar* deb yuritiladi.

13- rasmda uchburchakli, 14- rasmda esa tortburchakli piramida tasvirlangan.

Piramida yon yoqlarining asosga perpendikular yoki perpendikular emasligiga qarab *to'g'ri piramida* yoki *og'ma piramida* deb ataladi.

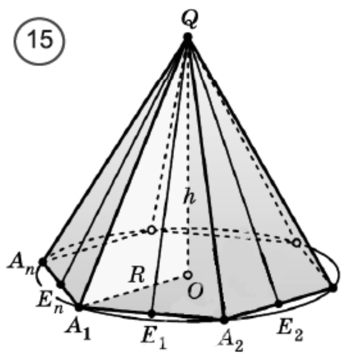
Muntazam piramida deb asosi muntazam ko'pburchak va uchidan asos markaziga tushurilgan kesma shu markazdan o'tuvchi va asos tekisligida yotuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikular bolgan piramidaga aytiladi.

Muntazam piramida yon yog'ining piramida uchidan tushirilgan balandligi uning *apofemasi* deb yuritiladi.

14 - rasmda *APQRS* to'rtburchakli muntazam piramida tasvirlangan. Undagi *AB* kesma piramida apofemalaridan biridir.

1.1- teorema: Muntazam piramidaning a) yon yoqlari; b) yon qirralari; c) apofemalari o'zaro teng.

15



Isbot. Aytaylik, $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramida, O esa piramida asosining markazi bo'lsin (15- rasm).

a) OA_1, OA_2, ... OA_n kesmalar muntazam ko'pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusidan iborat bo'lgani uchun o'zaro teng bo'ladi. To'g'ri burchakli QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n uchburchaklarda ikkita katetlar o'zaro teng bo'lgani uchun ular teng bo'ladi. Unda ularning gipotenuzalari ham teng bo'ladi: $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$.

b) $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramidaning yon qirralari o'zaro teng bo'lgani uchun uning yon yoqlari teng yonli uchburchaklardan iborat bo'ladi. Bu uchburchaklarning asoslari muntazam ko'pburchakning tomoni bo'lgani uchun o'zaro teng bo'ladi. Demak, muntazam piramidaning yon yoqlari uchta tomonlari bo'yicha o'zaro teng.

c) muntazam piramidaning yon yoqlari teng bo'lgani uchun, ularning Q uchdan tushurilgan balandliklari ham o'zaro teng bo'ladi.

Demak, muntazam piramidaning apofemalari ham o'zaro teng.❑

1.2- teorema: Muntazam piramidaning yon sirti uning asosining yarim perimetri va apofemasining ko'paytmasiga teng.

Isbot. Aytaylik, $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramida bo'lsin (15- rasm). Piramidaning yon sirti uning yon yoqlari yuzlari yig'indisiga teng. Uning yon yoqlari esa o'zaro teng bo'lgan teng yonli uchburchaklardan iborat. O'z navbatida bu uchburchaklarning balandliklari ham o'zaro teng apofemalardan iborat:

$$QE_1 = QE_2 = ... = QE_n.$$

Bulardan $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \ldots + S_{A_nQA} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 +$

$+ \ldots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \; = \frac{1}{2} QE_1 \, (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) = p \cdot a,$

bu yerda p – piramida asosisning yarimperimetri, a – piramida apofemasi. ❑

? ***Mavzu bo'yicha savollar***

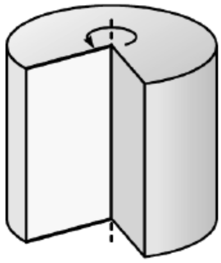
1. *Qanday geometrik shakllar a) yassi; b) fazoviy deb ataladi?*
2. *Qanday jism ko'pyoq deb ataladi? Uning elementlariga ta'rif bering.*
3. *Qanday jism prizma deb ataladi? Uning elementlariga ta'rif bering.*
4. *Qanday prizma turlarini bilasiz?*
5. *To'g'ri burchakli parallelepipedga ta'rif bering.*
6. *Qanday jism piramida deb ataladi? Uning elementlariga ta'rif bering.*
7. *Qanday piramida turlarini bilasiz?*
8. *Muntazam piramida xossalarini ayting.*

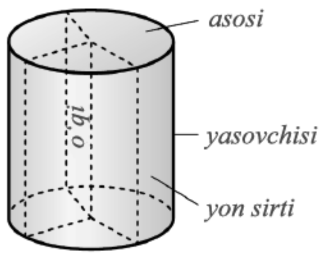
5 AYLANISH JISMLARI: SILINDR, KONUS VA SHAR

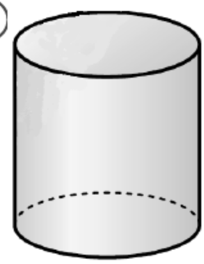
Fazoviy shakllarning yana muhim sinflaridan biri – bu aylanish jismlaridir. Ularga silinrd, konus va shar kiradi.

Tog'ri to'rtburchakni bir tomoni atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism *silindr* deb aytiladi (16 –18- rasmlar).

Bunday aylantirishda tog'ri to'rtburchakning bir tomoni qo'zg'alishsiz qoladi.

16


17


18


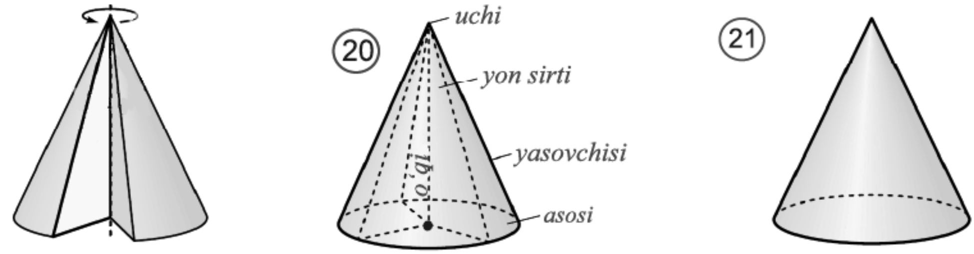
Uni *silindrning o'qi* deb ataymiz (17 - rasm).

O'qqa qarama-qarshi yotgan tomon aylanishidan hosil bo'lgan sirt *silindrning yon sirti* deb, tomonning o'zi esa *silindrning yasovchisi* deb yuritiladi.

Tog'ri to'rtburchakning qolgan tomonlarining har biri bu aylanishda doira ko'rinishidagi sirtni hosil qiladi. Bu doiralar *silindrning asoslari* deb ataladi.

Tog'ri burchakli uchburchakni bir kateti atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism *konus* deb aytiladi (19–21 - rasmlar). Bu katetni esa *konusning o'qi* deb ataymiz.

19 20 21

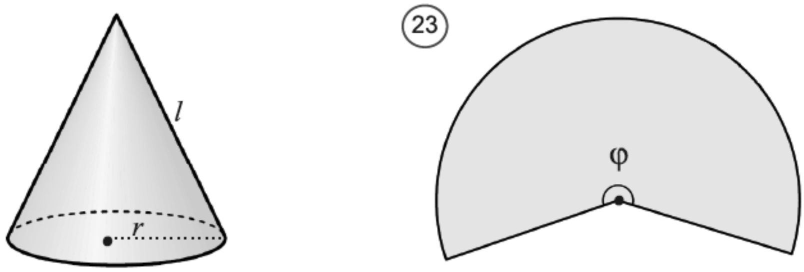


Bu aylantirishda boshqa katet hosil qilgan doira konusning *asosi,* gipotenuza hosil qilgan sirt esa *konusning yon sirti* deb, gipotenuzaning o‘zi esa *konusning yasovchisi* deb yuritiladi. Shuningdek, bu aylanishda qozg‘almasdan qolgan uchburchak uchi *konusning uchi* deb yuritiladi (20 - rasm).

1.3- teorema. Konusning yon sirti uning asosi yuzining yarmi va yasovchisining ko‘paytmasiga teng.

Isbot. Aytaylik, asosining radiusi r va yasovchisi l bo‘lgan konus berilgan bo‘lsin (22- rasm). Konus yon sirtini tekislikka yoyamiz. Natijada, radiusi l ga teng bo‘lgan doiraviy sektorga ega bo‘lamiz (23- rasm).

22 23



Bu sektorning markaziy burchagi φ ni topamiz (21- rasm). Bu markaziy burchak konus asosi aylana uzunligi – $2\pi r$ ga teng bo‘lgan sektorning aylana yoyiga tiralgan.

Ma’lumki, radiusi l bo‘lgan aylananing uzunligi $2\pi l$ ga teng bo‘lib, u 360° li markaziy burchakka tiralgan. Natijada proporsiyaga ega bo‘lamiz:

φ° li markaziy burchak – $2\pi r$ ga teng yoy;

360° li markaziy burchak – $2\pi l$ ga teng yoy.

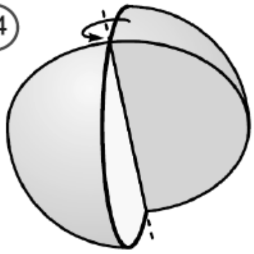
Undan $\varphi = \dfrac{360^\circ}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \dfrac{360^\circ \cdot r}{l}$.

Endi radiusi l ga teng bo‘lgan, φ burchakli S sektor yuzini topamiz:

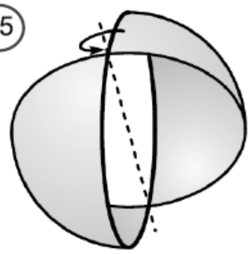
$$S = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \varphi^\circ = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ \cdot r}{l} = \pi r \cdot l. \ \square$$

Doiraning o‘z diametri atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismga *shar* deb aytiladi (24- rasm). Bu aylantirishda aylana hosil qilgan sirt *sfera* deb ataladi 25- rasmda shar tasvirlangan.

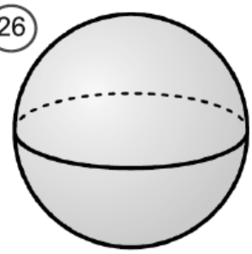
(24)



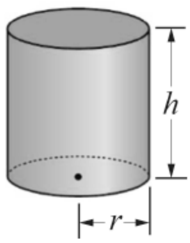
(25)

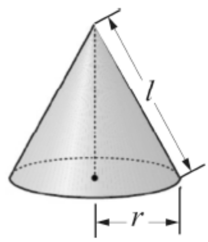


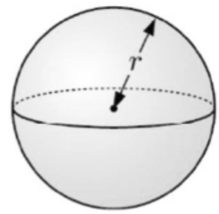
(26)



Aylanma jismlarning yon va to‘la sirtining yuzi formulalari:

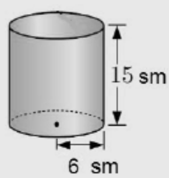


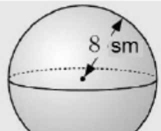


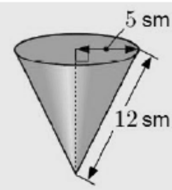


Silindr	**Konus**	**Shar**
$S_{yon} = 2\pi rh$	$S_{yon} = 2\pi rl$	$S = 4\pi r^2$
$S_{to'la} = 2S_{asos} + S_{yon}$	$S_{to'la} = S_{asos} + S_{yon}$	
$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$	$= \pi r^2 + 2\pi rl$	

Misol. Quyidagi jismlarning yon sirtining yuzini toping.







$S_{yon} = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 5 =$ $= 565,5$ sm^2	$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 =$ $= 804,2$ sm^2	$S_{to'la} = 2\pi rl + \pi r^2 =$ $= 2 \cdot 3,14 \cdot 12 + 3,14 \cdot 5^2 =$ $= 267$ sm^2.

Mavzu bo‘yicha savollar

1. Aylanma jismlarga misol keltiring.
2. Qanday jism silindr deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.
3. Qanday jism konus deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.
4. Qanday jism shar deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.

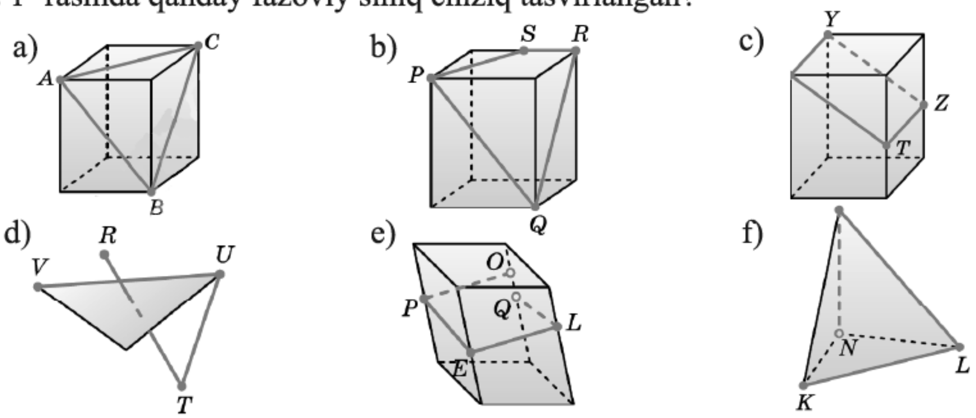
6 AMALIY MASHQ VA TATBIQLAR

2.1. To‘g‘ri prizmaning yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchak ekanligini isbotlang.

2.2. To‘g‘ri prizma yon sirti asosining perimetri va yon qirrasining ko‘paytmasiga teng ekanligini isbotlang.

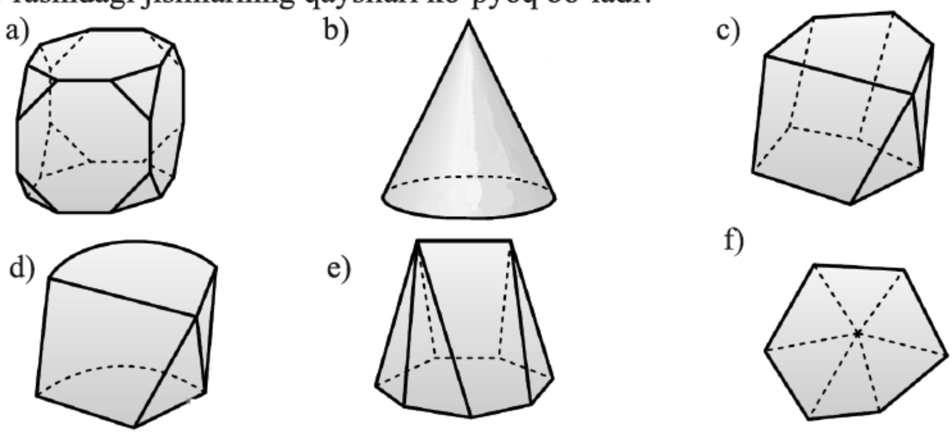
2.3. 1- rasmda qanday fazoviy siniq chiziq tasvirlangan?

1



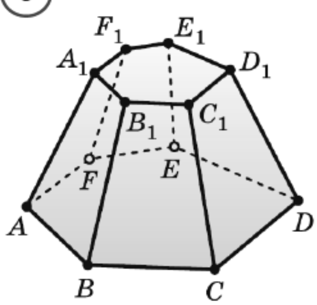
2.4. 2-rasmdagi jismlarning qaysilari ko‘pyoq bo‘ladi?

2



2.5. 3 - rasmda $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ko‘pyoq tasvirlangan. Undagi a) CD qirra umumiy bo‘lgan yoqlarni; b) DD_1 qirra umumiy bo‘lgan yoqlarni; c) E uch umumiy bo‘lgan yoqlarni; d) C_1 uch umumiy bo‘lgan yoqlarni; e) A uch umumiy bo‘lgan qirralarni; f) F_1 uch umumiy bo‘lgan qirralarni ayting.

3



2.6. To‘g‘ri parallelepipedning asosi rombdan iborat. Rombning tomoni 8 m, diagonallari esa 10 m va 24 m ga teng. Parallelepipedning to‘la sirtini toping.

2.7. *AB* va *AK* to‘g‘ri chiziqlar nechta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin?

2.8. Muntazam uchburchakli prizma asosining tomoni 6 sm, yon qirrasi esa 11 sm ga teng. Prizmaning to‘la sirtini toping.

2.9. Muntazam n-burchakli prizma asosining tomoni a, yon qirrasi h ga teng. Agar a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bo‘lsa, prizmaning yon sirti va to‘la sirtini toping.

2.10. Muntazam uchburchakli piramida apofemasi 15 ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 12 ga teng. a) piramida yon qirrasi va asosining tomonini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

2.11. Muntazam to‘rtburchakli piramida asosi 12 sm ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 16 sm ga teng. a) piramida yon qirrasi va apofemasini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

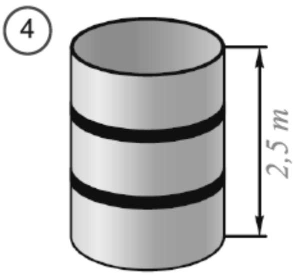
2.12*. *REFGH* piramida asosi tomonlari 10 sm va 18 sm bo‘lgan va yuzi 90 sm^2 ga teng bo‘lgan *EFGH* parallelogrammdan iborat. Piramida uchi *R* ni asos diagonallari kesishish nuqtasi *O* bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 6 sm ga teng. a) piramida yon qirralarini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

2.13*. Piramida asosi tomonlari 8 va 10 bo‘lgan va kichik diagonali 6 ga teng bo‘lgan parallelogrammdan iborat. Piramida uchini asos diagonallari kesishish nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 4 ga teng. a) piramida yon qirralarini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

2.14*. Muntazam oltiburchakli piramida asosining tomoni 10 sm ga teng. Piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi $\sqrt{69}$ ga teng. a) piramida yon qirrasi va apofemasini; b) piramida yon sirtini; c) piramirda to‘la sirtini toping.

2.15. Muntazam oltiburchakli piramida yon sirtining yuzi 150 m^2 ga, yon qirrasi esa 10 m ga teng. Piramida asosining yuzini toping.

2.16. Silindr yon sirti asosi aylanasi uzunligining silindr yasovchisiga ko‘paytmasiga teng ekanligini isbotlang.



2.17. Silindr asosining radiusi va yasovchisiga ko‘ra uning yon sirtini toping. a) 7 sm va 12 sm; b) 12 cm va 7 sm; c) 1 m va 12 m; d) 0,7 m va 1,2 m.

2.18. Silindr asosining yuzi 300π sm^2, yasovchisi 6 sm bo‘lsa, silindr asosining yuzini toping.

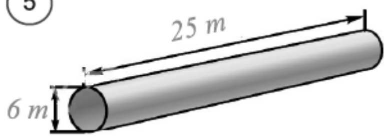
2.19. Silindr yon sirtining yuzi 90π sm^2, yasovchisi 5 sm bo‘lsa, silindrning to‘la sirti yuzini toping.

2.20. Silindr asosining diametri 1 m, yasovchisi esa asos aylana uzunligiga teng. Silindr yon sirti yuzini toping.

2.21. Silindr yasovchisi uning asosi radiusidan 12 sm ga uzun. Silindr to‘la sirtining yuzi esa 128π sm^2. Silindr asosining radiusi va yasovchisini toping.

2.22. 4- rasmda tasvirlangan silindr shaklidagi bakning har ikki tomonini bo‘yash lozim. Agar bakning balandligi 2,5 m, asosining diametri 1,2 m va bo‘yoq qatlami qalinligi 0,1 mm bo‘lsa, bakni bo‘yash uchun qancha bo‘yoq kerak bo‘ladi?

5



2.23. 5- rasmda tasvirlangan uzunligi 25 m va diametri 6 m bo‘lgan quvurni tayyorlashda necha bo‘lak tunuka kerak bo‘ladi? Tunuka bo‘laklarini bir-biriga payvandlashda quvur yon sirtining 2,5 % ga teng tunuka ishlatilishini hisobga oling.

2.24. Konus asosining radiusi 12 mm, konus uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 35 mm ga teng. Konus yon sirtini toping.

2.25. Konus asosining diametri 32 sm, konus uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 63 sm ga teng. Konus yon sirtini toping.

2.26*. Konusning yasovchisi l ga teng bo‘lib, u asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Agar a) $l = 10$ sm, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 24$ dm, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 5$ m, $\alpha = 60^\circ$ bo‘lsa, konus asosining yuzini toping.

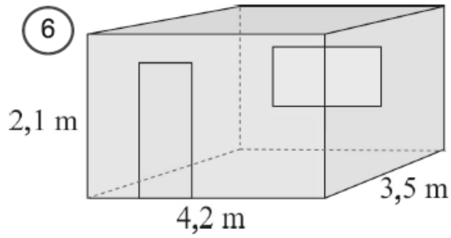
2.27*. Konusning yasovchisi l ga teng bo‘lib, u asos radiusi bilan α burchak tashkil qiladi. Agar
a) $l = 18$ sm, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 20$ dm, $\alpha = 45^\circ$;
c) $l = 2,4$ m, $\alpha = 60^\circ$ bo‘lsa, konusning to‘la sirtini toping.

2.28*. Konus asosining radiusi va yasovchisi mos ravishda a) 11 sm va 8 sm; b) 8 mm va 11 mm; c) 3 m va 18 m; d) 2,7 m va 1,2 m ga teng bo‘lsa, konus yon sirtini toping.

2.29. 6- rasmda tasvirlangan xonani ta’mirlash kerak. Xonada o‘lchamlari 8 m va 2,2 m bo‘lgan eshik va o‘lchamlari 183 sm va 91 sm bo‘lgan deraza bor. Eshikning ikki tomoni ham bo‘yalishi lozim. Jadvalda ikki xil bo‘yoqning narxlari berilgan. Bu ma’lumotlardan foydalanib, tejamli ta’mirlash uchun qancha mablag‘ kerakligini hisoblang.

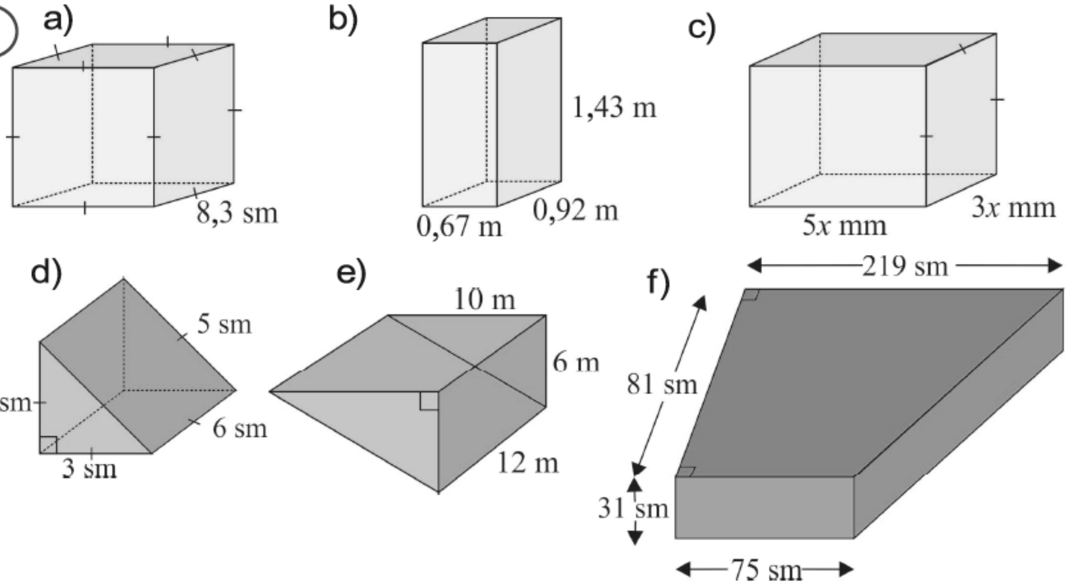
Bo‘yoq turi	Hajmi	Bo‘yash yuzi	Narxi
Devor uchun	4 l	16 m^2	3245so‘m
	2 l	8 m^2	2080so‘m
Eshik uchun	2 l	10 m^2	2360so‘m
	1 l	5 m^2	1540so‘m

6



2.30. 7- rasmdagi ma’lumotlardan foydalanib, ko‘pyoqlarning to‘la sirtini toping.

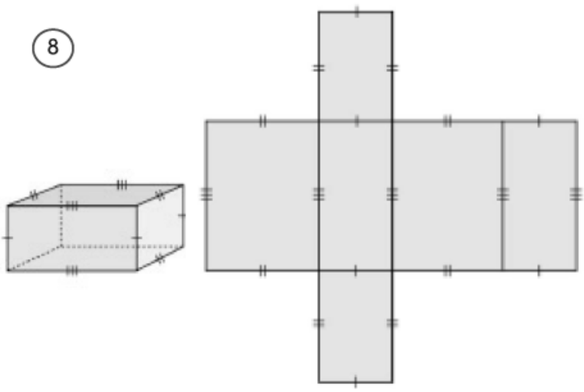
7



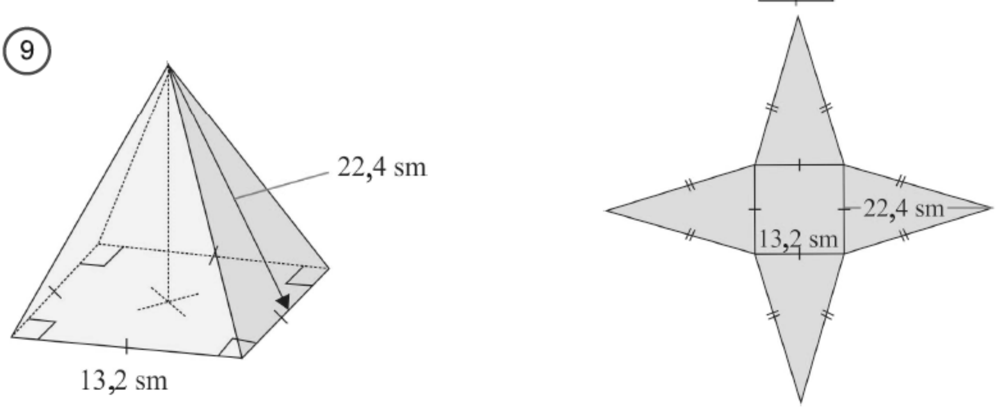
2.31. 8- rasmda tasvirlangan to‘g‘ri burchakli parallelepiped yoyilmasiga ko‘ra uning to‘la sirti formulasini toping.

2.32. 9- rasmda tasvirlangan to‘rtburchakli muntazam piramida yoyilmasiga ko‘ra uning to‘la sirti formulasini toping.

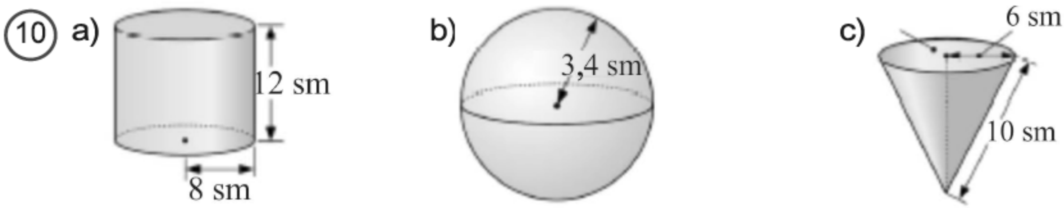
8



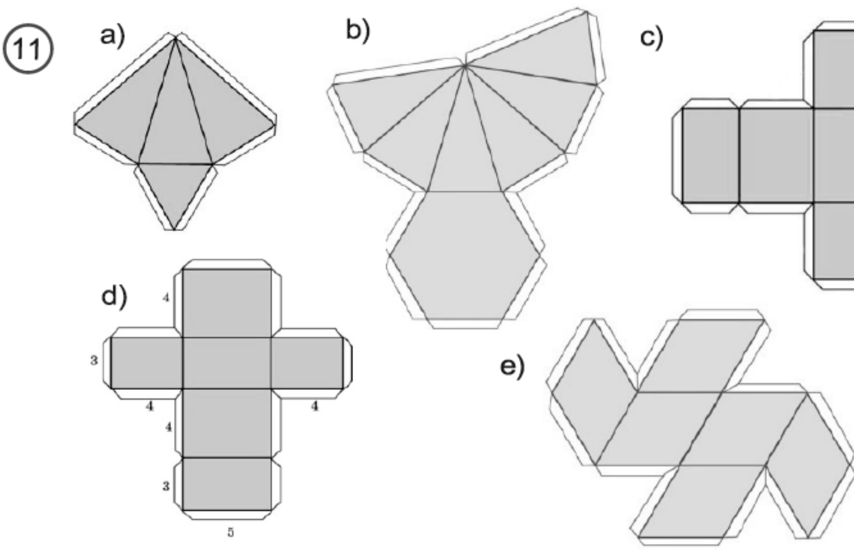
9



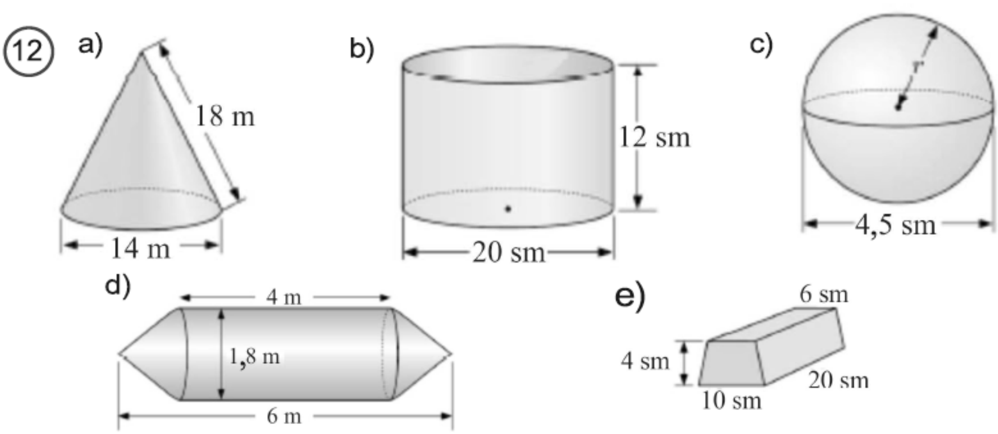
2.33. 10- rasmda tasvirlangan aylanma jismlarning to‘la sirtini toping.



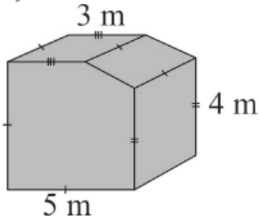
2.34. Fazoviy jismlarni yaxshiroq tasavvur qilish uchun ularning modelidan foydalangan ma’qul. Fazoviy jismlarning modelini ularning yoyilmasidan foydalanib yasash mumkin (11- rasm). Ko‘rib turganingizdek, fazoviy jismlarning yoyilmasi yassi geometrik shakllardan iborat. Quyidagi yoyilmalardan foydalanib, to‘g‘ri burchakli parallelepiped, kub va piramidalar modelini yasang.



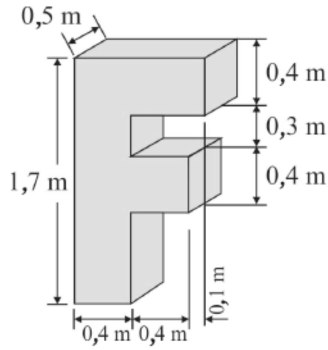
2.35. 12- rasmda tasvirlangan jismlarning to‘la sirtini toping.



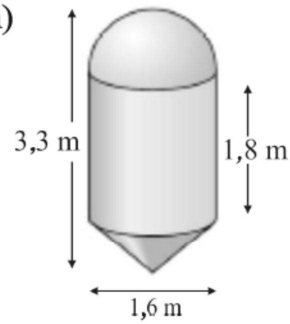
f)



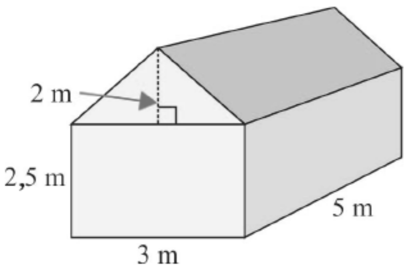
g)



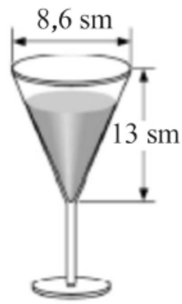
h)



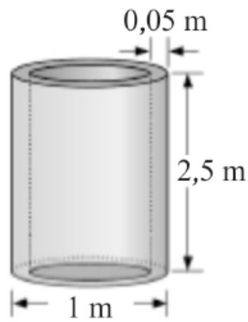
i)



j)



k)



Geometrik joziba

O'tmishda qurilgan qadimiy arxitektura yodgorliklarini qurishda ota-bobolarimiz katta geometrik bilim va salohiyatga ega bo'lishgan. Buni birgina Samarqand shahridagi Registon maydonida qurilgan tarixiy yodgorliklardan ham bilib olish mumkin (1- rasm).

Xiva shahridagi Ichanqal'a rasmida (2- rasm) qanday geometrik shakllarni ko'rayapsiz?

Toj-Mahal – dunyoning yetti mo‘jizalaridan biri (3-rasm). Hindistonning Agra shahrida Boburiy Shoh-Jahon tomonidan qurilgan qadimiy yodgorlik. Uni qurgan ustalar geometriyadan mukammal bilimga ega bo‘lganliklari kundek ravshan.

Sidney shahri opera teatri (4- rasm) – Avstraliyada qurilgan zamonaviy me’morchilik namunasi. O‘zining g‘aroyib geometrik ko‘rinishi bilan diqqatga sazovordir.

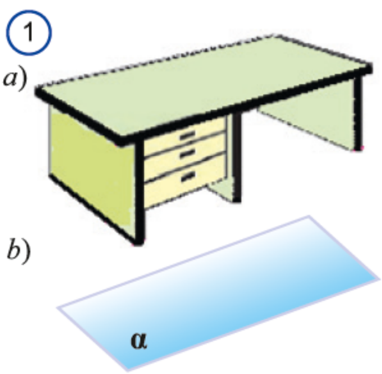
Go‘zal geometrik tasavvur egasi, iroqlik mashhur arxitektor ayol Zaha Hadidning loyihasi asosida Xitoy poytaxti Pekin shahrida qad rostlagan “Galaxy Soho” dam olish kompleksining ajabtovur ko‘rinishidan zavq olmaslikning iloji yo‘q (5- rasm).

Mamlakatimiz poytaxtida qad ko‘tarayotgan "Tashkent city" majmuasining loyihasini ko‘rib hayratlanmaslikning iloji yo‘q. Bunday g‘aroyib go‘zalliklarni yaratishda muhandis quruvchilarga qanchalik geometrik bilimlar kerak bo‘lganini tasavvur qilish mumkin (6 - rasm).

III BO‘LIM

FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

7 FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

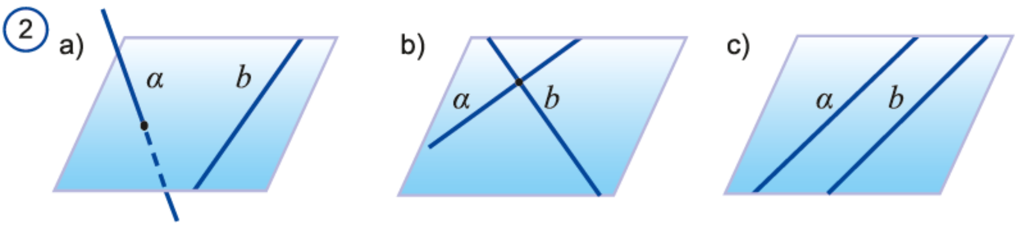


Fazodagi asosiy geometrik shakllar: nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislikdir. Tekislikni stol usti kabi tekis sirt deb tasavvur qilamiz (1.a- rasm). Tekislik ham to‘g‘ri chiziq kabi cheksizdir. Rasmda tekislikning faqat bir qisminigina (odatda parallelogramm shaklida) tasvirlaymiz (1.a- rasm). Lekin uni hamma tomonga cheksiz davom etgan deb tasavvur qilamiz va chizmada parallelogramm shaklida tasvirlaymiz (1.b- rasm). Tekisliklarni α, β, γ,... grek harflari bilan belgilaymiz.

Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotishi yoki yotmasligi mumkin (2- rasm). Fazoda bir tekislikda yotmaydigan ikki to‘g‘ri chiziqqa *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi (2.a- rasm).

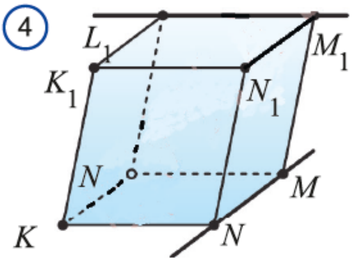
Bitta tekislikda yotgan va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar *kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi (2.b - rasm).

Bitta tekislikda yotgan va o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar esa *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi (2.c - rasm).



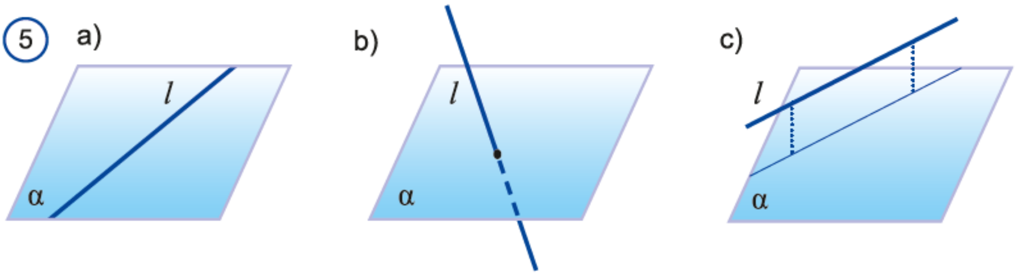
Ayqash to‘g‘ri chiziqlarga biri ko‘prikdan, ikkinchisi ko‘prik ostidan o‘tuvchi yo‘llarni timsol sifatida keltirish mumkin (3- rasm). Shuningdek, 4- rasmdagi parallelepipedning MN va L_1M_1 qirralari yotgan to‘g‘ri chiziqlar ham ayqash bo‘ladi.

3

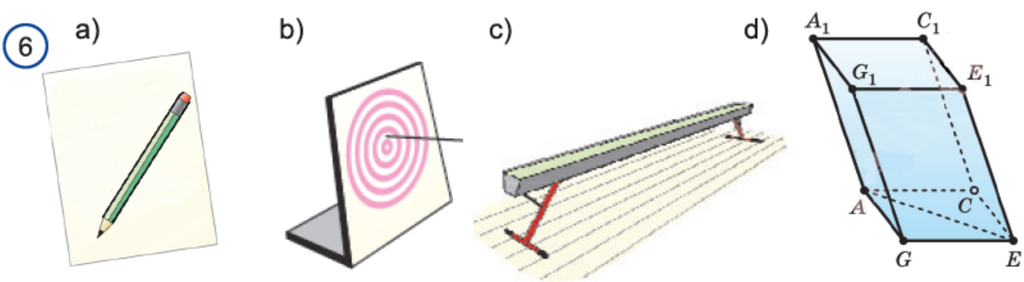

4


Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik o‘zaro qanday joylashishi mumkin?

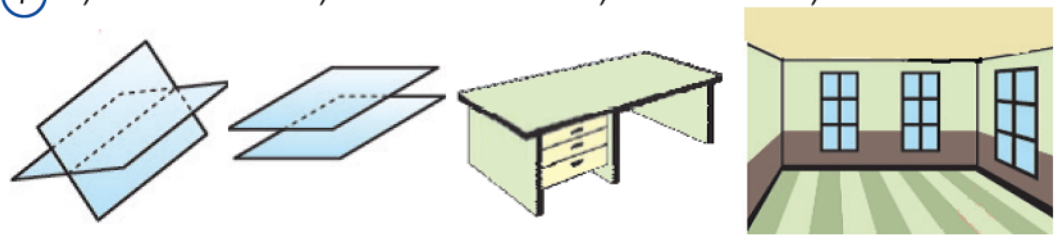
To‘g‘ri chiziq tekislikda yotishi (5.a- rasm), uni kesib o‘tishi (5.b- rasm) yoki kesib o‘tmasligi, ya’ni umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi (5.c- rasm) mumkin. Oxirgi holatda *to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel* deb ataladi.

5


Stol ustida yotgan qalam – tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziq haqida (6.a - rasm), nishonga qadalgan o‘q (6.b - rasm) – tekislikni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq haqida hamda polda turgan gimnastik yog‘och – tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq haqida (6.c - rasm) tasavvur beradi.

6


7 a) b) c) d)



Shuningdek, 6.d- rasmda tasvirlangan parallelepipedning $AGEC$ asosining diagonali AE yotgan to‘g‘ri chiziq asos tekisligida yotadi, AGA_1G_1 yoq yotgan tekislikni kesib o‘tadi hamda $A_1G_1E_1C_1$ yuqori asos tekisligiga parallel bo‘ladi.

Endi fazoda tekisliklarning o‘zaro joylashishiga oydinlik kiritaylik.

Fazoda tekisliklar biror to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishishi (7.a- rasm) yoki umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi mumkin (7.b- rasm). Shundan kelib chiqib, bu tekisliklar, mos ravishda, *kesishuvchi* yoki *parallel* tekisliklar deb ataladi.

7.c- rasmda tasvirlangan stolning ustki sirti va yon yog‘i kesishuvchi tekisliklar haqida, xonaning poli va shifti esa (7.d- rasm) parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Shuningdek, 4- rasmda tasvirlangan parallelepipedning qarama-qarshi bo‘lmagan yon yoqlari – kesishuvchi tekisliklar haqida, pastki va ustki asoslari hamda qarama-qarshi yoqlari esa parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Parallellik belgisi – "// " nafaqat parallel to‘g‘ri chiziqlarni, balki tekislikka parallel to‘g‘ri chiqizni va parallel tekisliklarni belgilashda ham ishlatiladi:

$a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ va $\alpha \parallel \beta$.

Planimetriyadagi kabi, stereometriyada ham ba’zi geometrik shakllarning xossalari isbotsiz qabul qilinadi. Fazoda tekisliklarning quyidagi xossalarini isbotsiz, S guruh aksiomalari sifatida qabul qilamiz:

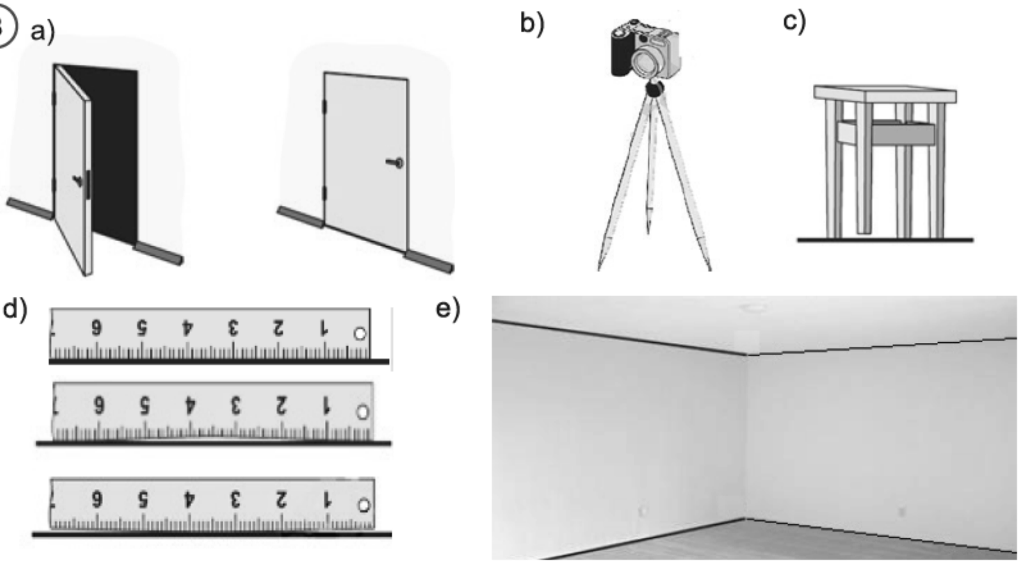
S_1 *Agar uchta nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, u holda ular orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin.*

S_2 *Agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.*

S_3 *Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda bu tekisliklar shu nuqtadan o‘tuvchi umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi.*

Faollashtiruvchi mashq. Quyidagi 8- rasmlardagi holatlarni tushuntirishda qaysi aksiomalarga tayanish mumkin?

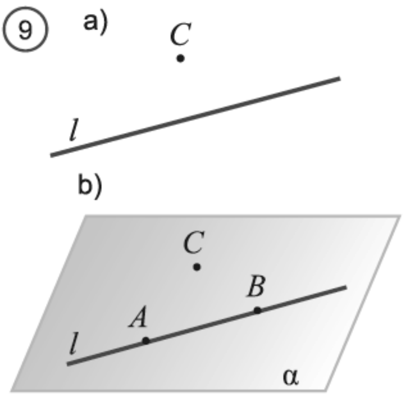
8



Planimetriyada kiritilgan aksiomalar bilan birgalikda bu uchta aksiomalar stereometriyaning asosini tashkil qiladi. Shuni eslatish lozimki, planimetriyada biz qarayotgan barcha shakllar joylashadigan bitta tekislikka ega edik. Stereometriyada esa bunday tekisliklar cheksiz ko‘p bo‘lib, ularning barchasida planemetriya aksiomalari va planimetriyada isbotlangan barcha xossalar o‘rinli bo‘ladi, deb qaraladi. Shuningdek, stereometriya kursida planimetriya aksiomalariga stereometriya nuqtai nazaridan qarashga to‘g‘ri keladi.

2.1- teorema. To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

9



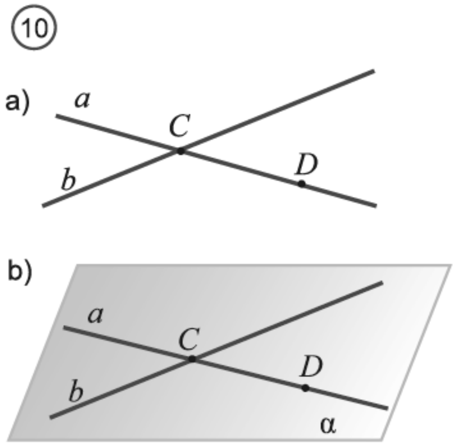
Isbot. l – berilgan to‘g‘ri chiziq, C esa unda yotmagan nuqta bo‘lsin (9.a - rasm).

Avval teorema xulosa qismida aytilgan tekislikning mavjudligini ko‘rsatamiz. l to‘g‘ri chiziqda A va B nuqtalarni olamiz. Shartga ko‘ra, A, B va C nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Unda S_1 aksiomaga ko‘ra, A, B va C nuqtalar orqali α tekislikni o‘tkazish mumkin (9.b- rasm). S_2 aksiomaga ko‘ra esa, α tekislik l to‘g‘ri chiziqdan o‘tadi.

Demak, α – izlangan tekislik ekan.

Endi bu tekislikning yagonaligini ko‘rsatamiz.

Teskarisini faraz qilamiz: l – berilgan to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan C nuqta dan yana bitta, β tekislik o‘tkazish mumkin bo‘lsin. Unda β tekislik ham A, B va C nuqtalardan o‘tadi. Lekin, S_2 aksiomaga ko‘ra uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin. Ziddiyat. Demak, farazimiz noto‘g‘ri. To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin. ❑



2.2- teorema. Berilgan kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin.

Isbot. Berilgan a va b to‘g‘ri chiziqlar C nuqtada kesishsin (10.a- rasm).

a to‘g‘ri chiziqda C nuqtadan farqli yana bitta D nuqtani olamiz. U holda, isbotlangan 1- teoremaga ko‘ra, b to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan D nuqta orqali yagona α tekislik o‘tadi (10.b- rasm). Bu tekislik a to‘g‘ri chiziqning C va D nuqtalaridan o‘tadi. Unda S_2 aksiomaga ko‘ra, α tekislik a to‘g‘ri chiziqdan ham o‘tadi.

Demak, α tekislik berlgan kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali o‘tadi.

Bu tekislikning yagonaligini mustaqil asoslang. ❑

? *Mavzuga doir savollar*

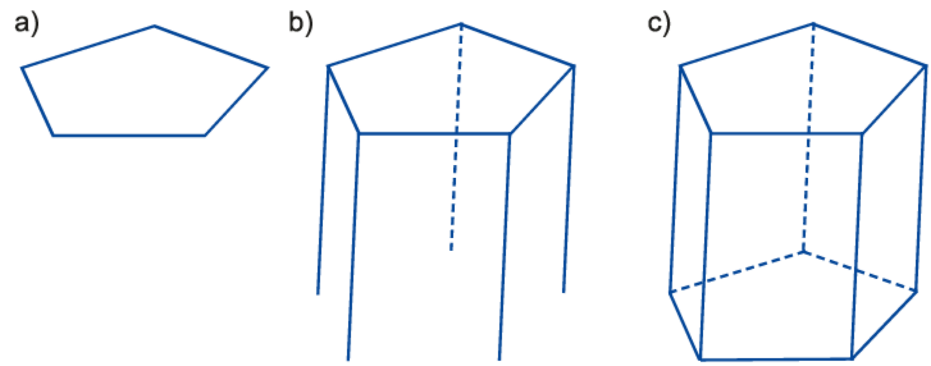
1. *Fazodagi asosiy geometrik shakllarni ayting.*
2. *S guruh aksiomalarini ayting.*
3. *Tekislikda yotuvchi qanday to‘g‘ri chiziqlar: a) kesishuvchi; b) parallel deb ataladi?*
4. *Qanday to‘g‘ri chiziqlar ayqash deb ataladi? Misollar keltiring.*
5. *Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq qanday joylashishi mumkin?*
6. *Qanday to‘g‘ri chiziqlar: a) tekislikda yotuvchi; b) tekislikka parallel deb ataladi?*
7. *Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik qanday joylashishi mumkin?*
8. *Fazoda qanday tekisliklar: a) kesishuvchi; b) parallel deb ataladi?*
9. *Fazoda ikki tekislik qanday joylashishi mumkin?*
10. *Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning xossalarini ifodalovchi aksiomalarni ayting.*
11. *Uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik xossasini ayting.*

8 KO‘PYOQLAR VA ULARNING SODDA KESIMLARINI YASASH

Geometrik masalalarni yechishda masala shartiga mos chizmani chizish juda muhim hisoblanadi. Ba’zida to‘g‘ri chizilgan chizma – masalaning "yarim yechimi" bilan tenglashtiriladi. Stereometriyada masalaning chizmasini to‘g‘ri chizish nihoyatda muhim, o‘ta mas’uliyatli va ba’zida esa murakkab ish hisoblanadi. Chunki stereometrik shakllar uch o‘lchamli bo‘lib, ularni tekislikda, daftar sahifasida tasvirlash kerak bo‘ladi. Noto‘g‘ri chizilgan chizma noto‘g‘ri yechimga yoki boshi berk ko‘chaga boshlaydi.

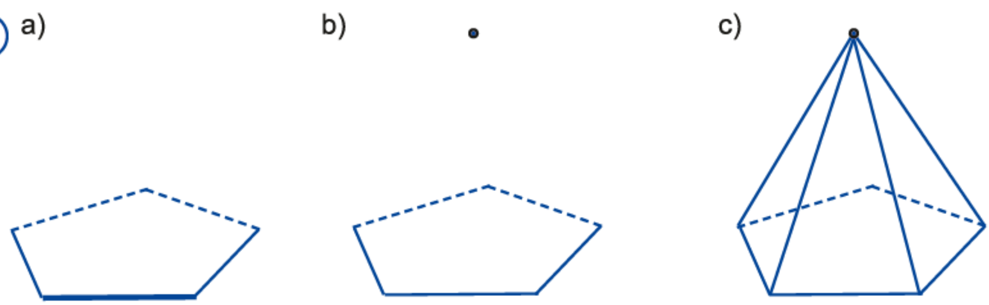
Prizmani tasvirlash quyidagi tartibda olib boriladi (11 - rasm). Oldin ko‘pburchak shaklidagi asoslaridan biri chiziladi. So‘ngra uning har bir uchidan o‘zaro parallel va teng kesmalar, ya’ni prizmaning yasovchilari chiziladi. Kesmaning oxirlari mos ravishda tutashtirib chiqiladi. Bunda ikkinchi asos paydo bo‘ladi. Chizmada prizmaning ko‘rinmaydigan qirralari shtrix-punktir chiziqlar bilan chiziladi.

11



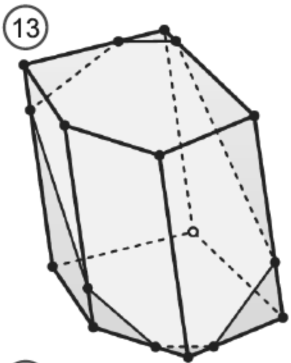
Piramidani tasvirlash ham shunga o‘xshash tartibda olib boriladi (12 - rasm). Oldin ko‘pburchak shaklidagi asosi chiziladi. So‘ngra piramida uchi belgilanib, bu nuqta asosining har bir uchi bilan tutashtirib chiqiladi. Chizmada piramidaning ko‘rinmaydigan qirralari punktir chiziqlar bilan chiziladi.

12

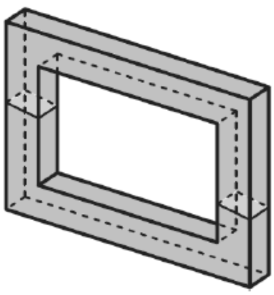


Fazoviy geometrik shakllarning o‘zaro joylashuvini to‘g‘ri tasavvur qilgandagina, uning chizmasini to‘g‘ri chizish mumkin bo‘ladi. Fazoviy shakllarning biri ko‘pyoq, ikkinchisi esa tekislik bo‘lganda, turli kesimlarni tasvirlashga to‘g‘ri keladi. Quyida ko‘pyoqlarning kesimlarini yasash bilan shug‘ullanamiz.

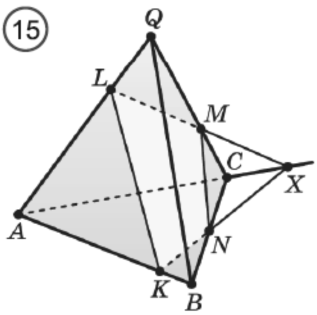
13



14



15



Aytaylik, ko‘pyoqni biror tekislik kesib o‘tgan bo‘lsin. *Ko‘pyoqning kesimi* deb ko‘pyoqning kesuvchi tekislikka tegishli nuqtalaridan iborat geometrik shaklga aytiladi.

Kesuvchi tekislik ko‘pyoq sirtini kesmalar bo‘yicha kesib o‘tadi, ko‘pyoqning kesimi esa bitta yoki bir nechta ko‘pburchaklardan iborat bo‘ladi. 13-rasmda beshburchakli prizmaning yettiburchakdan iborat kesimi tasvirlangan. 14- rasmdagi romni tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimi – ikkita to‘rtburchakdan iborat.

Ko‘pyoqning kesimini tasvirlash uchun uning yoqlari kesuvchi tekislik bilan umumiy nuqtalarini aniqlash kifoya.

1- masala. *QABC* uchburchakli piramidaning *AB, AQ* va *CQ* qirralarini, mos ravishda, *K, L* va *M* nuqtalarda kesib o‘tuvchi α tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimni yasaymiz (15 -rasm).

***Yasash*.** Kesuvchi α tekislik piramidaning *AQB* yog‘i bilan ikkita: *K* va *L* umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni *KL* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

Xuddi shunga o‘xshash, α tekislik piramidaning *AQC* yog‘i bilan ikkita: *M* va *L* umumiy nuqtalarga ega bo‘lgani uchun, bu yoqni *ML* kesma bo‘ylab kesib o‘tadi.

Kesuvchi α tekislik piramidaning *ABC* yog‘i bilan bitta *K* umumiy nuqtaga ega. Bu tekislikning *BC* qirrani kesib o‘tadigan nuqtasini topamiz.

Bu tekislikka tegishli *LM* va *AC* to‘g‘ri chiziqlarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasi *X* ni topamiz. *X* nuqta *AQC* va *ABC* tekisliklarda ham yotadi.

Kesuvchi α tekislik piramidaning *ABC* yog‘i bilan ikkita: *K* va *X* umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni *KX* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

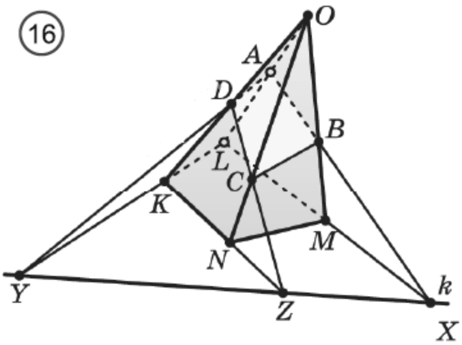
KX to‘g‘ri chiziq va *BC* yoqning kesishish nuqtasi *N* ham α tekislikda yotadi.

Demak, α tekislik *ABC* yoqni *KN* kesma bo‘yicha, *BQC* yoqni esa *MN* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

KLMN to‘rtburchak α tekislikning piramida bilan kesimidan iborat bo‘ladi. *KL* va *KN* kesmalar α tekislikning *ABQ* va *ABC* yoqlardagi *izlari* deb ataladi.

2- masala. *OKLMN* piramidaning *OL* qirrasining *A* nuqtasi va piramidaning *KLMN* asosi tekisligida yotuvchi *k* to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi *b* tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasaymiz. (16- rasm).

16

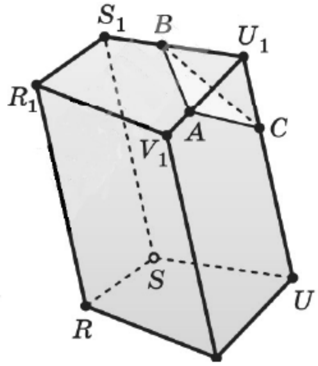


***Yasash*.** *LM* va *k* to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz. Bu nuqta *k* to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun *b* tekislikka tegishli. Shuningdek, bu nuqta *LM* to‘gri chiziqda yotgani uchun *LOM* yoqqa ham tegishli. *A* nuqta bu ikki tekislikning har ikkisiga ham tegishli. Shuning uchun, *b* tekislik *LOM* tekislikni *AX* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha, *LOM* yoqni esa *AB* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi. Bu yerda *B* nuqta *AX* va *OM* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

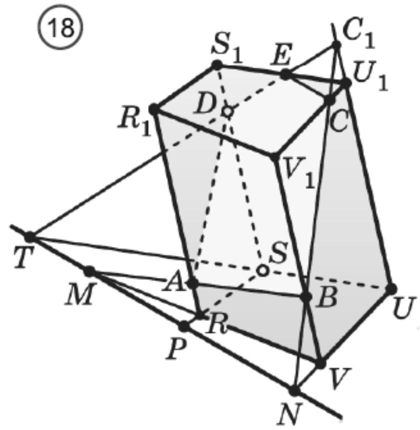
Xuddi shu kabi, β tekislikning *OLK* yoqni kesib o‘tadigan *Y* va *D* nuqtalarni va *AD* kesmani aniqlaymiz. Songra *Z* va *C* nuqtalar va *DC* va *BC* kesmalarni aniqlaymiz. Natijada, hosil bo‘lgan *ABCD* to‘rtburchak izlanayotgan kesimdan iborat bo‘ladi.

3- masala. *A, B* va *C* to‘rtburchakli prizmaning turli yoqlaridagi nuqtalari.

17



18

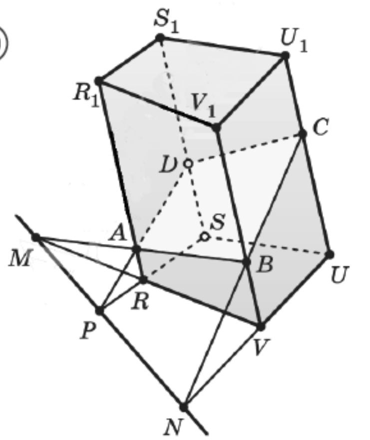


Prizmaning *ABC* tekislik bilan kesimini topamiz (17- rasm).

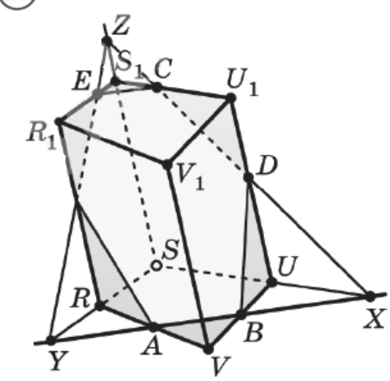
Izlanayotgan kesim *A, B* va *C* nuqtalarning to‘rtburchakli prizmaning qaysi yoqlarida va qanday yotganligiga bog‘liq bo‘ladi. 17- rasmda *A, B* va *C* nuqtalarning bitta uchdan chiquvchi yoqlarda yotgan eng sodda holat tasvirlangan.

18- rasmda tasvirlangan holatda kesimni yasash murakkabroq ish sanaladi. Qolgan holatlardagi kesimlar quyidagi 19- va 20- rasmlarda keltirilgan. Ko‘rib turganingizdek, kesim uchburchak, to‘rtburchak, beshburchak va oltiburchakdan iborat bo‘lmoqda. Bu kesimlarni yasalishini mustaqil tahlil qiling.

19



20

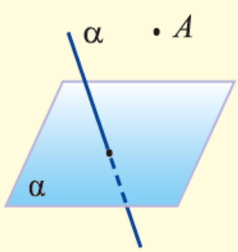
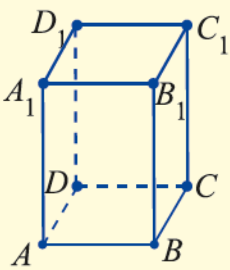
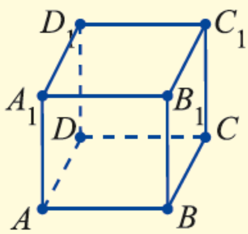
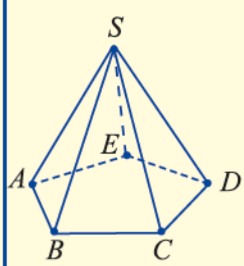


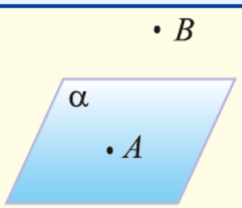
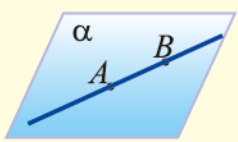
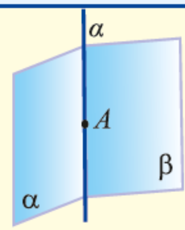
Mavzuga doir savollar

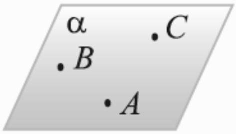
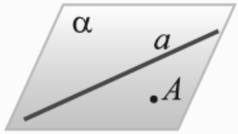
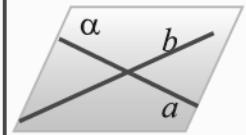
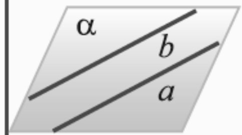
1. *Ko‘pyoqning kesimi deb nimaga aytiladi?*
2. *Ko‘pyoqning kesimi qanday shakl bo‘lishi mumkin?*
3. *Bir tekislikning ikkinchi tekislikdagi izi deb nimaga aytiladi?*
4. *To‘rtburchakli ko‘pyoqlining kesimi nimalar bo‘lishi mumkin?*

9 AMALIY MASHQ VA TATBIQLAR

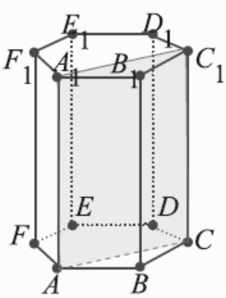
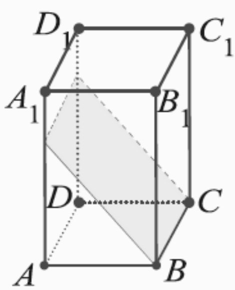
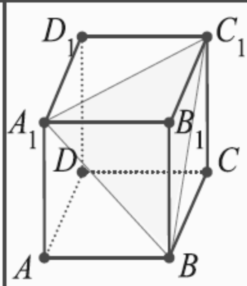
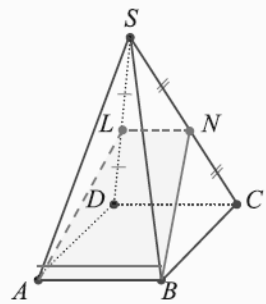
3.0. Quyidagi 3- bo‘lim bo‘yicha tayanch nazariy ma’lumotlarni qaytaring. Ular sizga o‘tilganlarni umumlashtirish va amaliy mashqlarni bajarishga yordam beradi.

Asosiy shakllar	**Ko‘pyoqlar**		
	To‘g‘ri burchakli parallelepiped	**Kub**	**Piramida**
			
A nuqta, α to‘g‘ri chiziq, *a* tekislik	Asoslari – to‘g‘ri to‘rtburchaklar, yoqlari – to‘g‘ri to‘rtburchaklar	Asoslari – kvadratlar, yoqlari – kvadratlar	Asosi – ko‘pburchak, yoqlari – uchburchak

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar		
		
Tekislikda unga tegishli bo‘lgan va tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.	Agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.	Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda ular shu nuqtadan o‘tuvchi umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi.

			
Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqta orqali	To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali	Kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq orqali	Parallel ikki to‘g‘ri chiziq orqali
... bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin			

a) jadvalda ba’zi ko‘pyoqlarning sodda kesimlari berilgan. Ularga sinchiklab qarab, bu kesimlar qanday hosil qilinishini izohlang.

Ko‘pyoqlarning sodda kesimlari			
Ko‘pburchakli prizma	**To‘g‘ri burchakli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
ACC_1 – A, C, C_1 nuqtalardan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik. ACC_1CA_1 – kesim.	CBK – K nuqta va CB to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik, $CBKM$ – kesim.	A_1BC_1 – BC_1 va BA_1 to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik, ACC_1CA_1 – kesim.	ABN – AB va LN parallel to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik, $ABNL$ – kesim.

b) jadvalning chap ustunida tekislikdagi, o‘ng ustunida esa fazodagi geometrik shakllarning bir-biriga o‘xshash ba’zi xossalari keltirilgan. Ularni ko‘z oldingizga keltiring va qanday o‘xshashlikka ega ekanligini aniqlang. Yana tekislik va fazodagi qanday o‘xshashliklarni keltirish mumkin?

Tekislikda	Fazoda
Agar to‘g‘ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular shu nuqtada kesishadi.	Agar tekisliklar umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega bo‘lsa, ular shu to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.
Tekislikning biror nuqtasidan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.	Fazoning biror to‘g‘ri chizig‘idan cheksiz ko‘p tekislik o‘tkazish mumkin.
To‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.	Tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq orqali berilgan tekislikka parallel bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.
Bitta to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro paralleldir.	Bitta tekislikka parallel tekisliklar o‘zaro paralleldir.

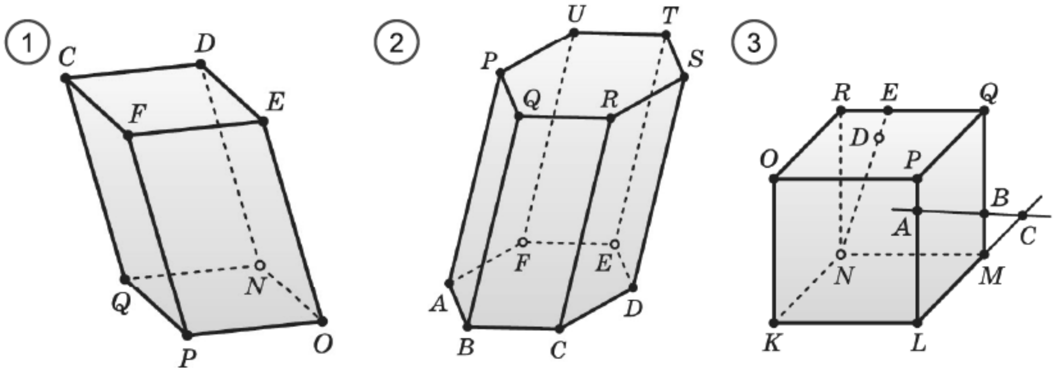
3.1. Fazoda a) ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik nechta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin?

3.2. Fazoda a) ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik; d) uchta tekislik yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkinmi?

3.3. 1- rasmda *NOPQDEFC* parallelepiped tasvirlangan. a) *CD* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; b) *FP* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; c) *CD* to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlarni; d) *FP* to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlarni; e) *CD* to‘g‘ri chiziq bilan ayqash to‘g‘ri chiziqlarni; f) *FP* to‘g‘ri chiziq bilan ayqash to‘g‘ri chiziqlarni ayting.

3.4. 2- rasmda asosi oltiburchak bo‘lgan *ABCDEFPQRSTU* parallelepiped tasvirlangan. a) *ABC* tekislik bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; b) *UTF* tekislik bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; c) *PTR* tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; d) *CDR* tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziqlarni; e) *FEC* tekislikka parallel to‘g‘ri chiziqlarni; f) *AQB* tekislikka papallel to‘g‘ri chiziqlarni ayting.

3.5. 1- rasmdagi *NOPQDEFC* parallelepipedda: a) *CQ* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi tekisliklarni; b) *OP* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi tekisliklarni; c) *NO* to‘g‘ri chiziq yotgan tekisliklarni; d) *DN* to‘g‘ri chiziq tegishli bo‘lgan tekisliklarni; e) *CF* to‘g‘ri chiziqqa parallel tekisliklarni; f) *EO* to‘g‘ri chiziqqa parallel tekisliklarni ayting.



3.6. 2- rasmda asosi oltiburchak bo‘lgan *ABCDEFPQRSTU* parallelepiped tasvirlangan. a) *UQR* tekislik bilan kesishuvchi tekisliklarni; b) *FT* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi tekisliklarni; c) *ACE* tekislikka parallel tekisliklarni; d) *ETS* tekislikka parallel tekisliklarni ayting.

3.7. 3- rasmdan foydalanib, a) *LMQ* va *NME* tekisliklarda yotuvchi nuqtalarni; b) *NR* to‘g‘ri chiziq yotgan tekisliklarni; c) *BC* to‘g‘ri chiziqning *KLN* tekislik bilan kesishish nuqtalarini; d) *PL* va *ND* to‘g‘ri chiziqlarning *OPR* tekislik bilan kesishish nuqtalarini; e) *KON* va *KLM* tekisliklar kesishadigan to‘g‘ri chiziqni; f) *PDQ* va *MNK* tekisliklar kesishadigan to‘g‘ri chiziqni; g) *AB* va *LM* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini; h) *BQ* va *MC* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini ayting.

3.8. Bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtadan tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang. Bunday tekisliklar soni nechta?

3.9. *A, B, C* va *D* nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlang.

3.10. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasidan bu to‘g‘ri chiziqlar bilan bir tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinmi? Javobingizni asoslang.

3.11. *A, B, C* nuqtalar ikkita turli tekislikning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

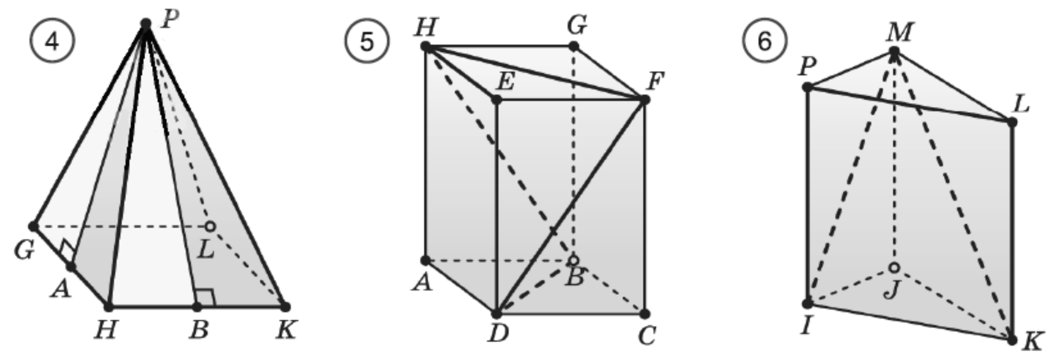
3.12. To‘g‘ri chiziq orqali ikkita turli tekislik o‘tishini isbotlang.

3.13. *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikda yotmaydi. *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlarga parallel *c* to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinmi?

3.14. Agar tekislik ikki parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesib o‘tsa, u ikkinchisini ham kesib o‘tishini isbotlang.

3.15. Ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqlardan istalgan biri orqali ikkinchisiga parallel tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

3.16. ABC uchburchak berilgan. AB to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik bu uchburchakning AC tomonini A_1 nuqtada, BC tomonni B_1 nuqtada kesib o‘tadi. A_1B_1 kesmaning uzunligini toping. Bunda: a) $AB = 15$ sm , $AA_1 : AC = 2 : 3$; b) $AB = 8$ sm, $AA_1 : AC = 5:3$; c) $B_1C = 10$ sm, $AB : BC = 4:5$; d) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.



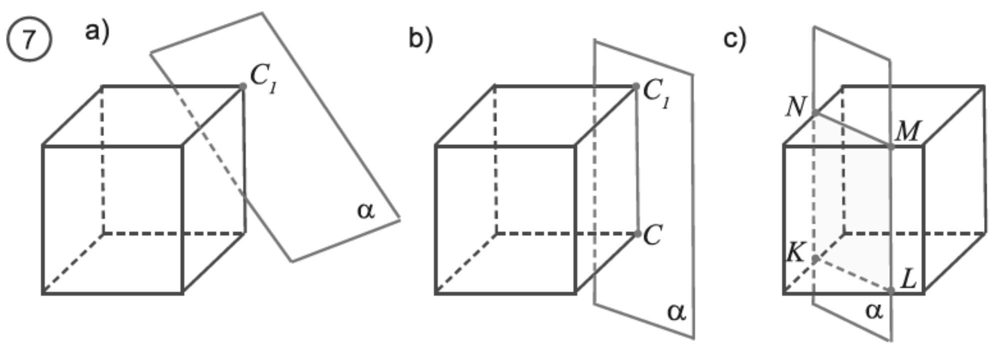
3.17. 4-rasmda to‘rtburchakli muntazam piramida berilgan. PA va PB – piramida PGH va PHK yoqlarining balandliklari bo‘lsa, $\triangle PGA = \triangle PHB$ ekanligini isbotlang.

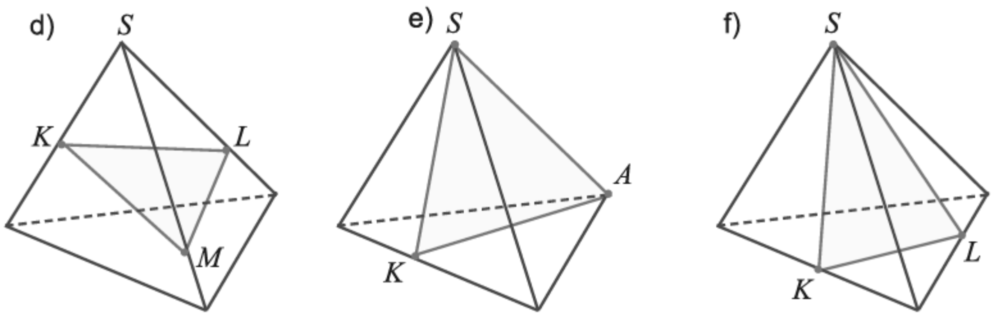
3.18. $ABCDHGFE$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedning (5- rasm) yon qirrasi 8 sm ga, asosi tomoni 6 sm ga teng kvardratdan iborat. Fazoviy $HFDBH$ siniq chiziqning uzunligini toping.

3.19. $IJKPML$ uchburchakli to‘g‘ri prizmaning (6- rasm) asosi qirrasi va yon qirrasi uzunliklari 2:3 nisbatda. Agar $IPLKMI$ fazoviy siniq chiziqning uzunligi $16+4\sqrt{13}$ ga teng bo‘lsa, prizma yon sirtining yuzini toping.

3.20. Asosi kvadrat bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepipedning yon sirti 12 sm^2 ga teng. Asosining diagonali $\sqrt{2}$ bo‘lsa, yon yog‘ining diagonalini toping.

3.21. 7- rasmda keltirilgan holatlarda fazoviy shakllarning qanday kesimi tasvirlanganligini izohlang.





3.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning AD va CD qirralarida M va N nuqtalar berilgan. Kubni MNB_1 tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasang.

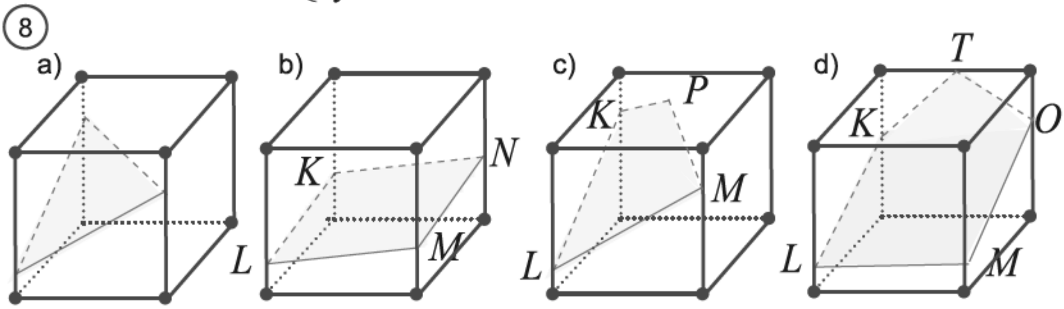
3.23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubni chizing va AB, BC va BB_1 qirralari o‘rtalari bo‘lgan M, N va L nuqtalarni belgilang. a) kubni MNL tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasang; b) MNL uchburchakning muntazam ekanligini isbotlang; c) kubning qirrasi 1 sm bo‘lsa, MNL uchburchak yuzini toping.

3.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedning qirralari $AB = 6$ sm, $AD = 6$ sm va $AA_1 = 8$ sm. Parallelepipedning BC_1D tekislik bilan kesimi teng yonli uchburchak ekanligini isbotlang va bu uchburchak balandligini toping.

3.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmani chizing . Prizmaning AD, AA_1 va DD_1 qirralari o‘rtalari bo‘lgan M, N va L nuqtalardan o‘tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

3.26. Kubni tekislik bilan kesganda kesimda 8-rasmda tasvirlangan qaysi holatlar bo‘lishi mumkin? Qaysilari bo‘lishi mumkin emas?

8

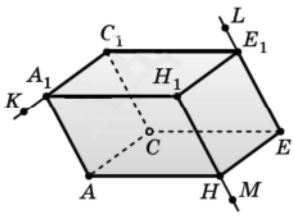


3.27. 9- rasmda berilgan ma’lumotlar asosida a) K, L va M; b) A, B va C; c) A, B va C nuqtalardan o‘tuvchi fazoviy shakllarning tegishli kesimlarini yasang.

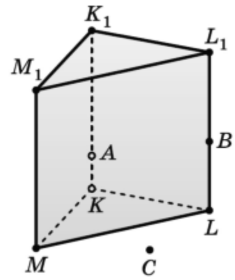
3.28. $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ prizmaning MM_1, M_1P_1 va M_1T_1 qirralarida yotgan A, B va C nuqtalar olingan (10- rasm). Prizmaning ABC tekislik bilan kesimini yasang.

3.29. Berilgan ma’lumotlar asosida 11- rasmda U, V va W, 12- rasmda A va B nuqtalardan o‘tuvchi fazoviy shakllarning tegishli kesimlarini yasang.

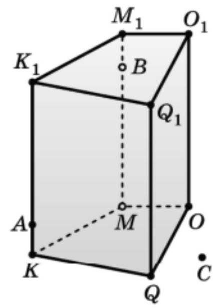
9 a)



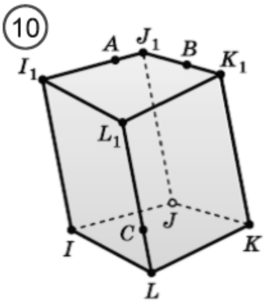
b)



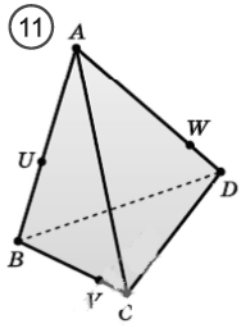
c)



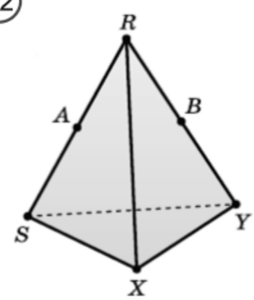
10



11



12



Tatbiqlar va amaliy kompetensiyalarni shakllantirish

1. Nima sababdan biror imorat uchun o‘ra (chuqur) qazishdan oldin belgilash ishlari tarang tortilgan ip yordamida bajariladi?

Javob: ikkita tekislik kesishmasi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

2. Gisht quyish jarayonida qolipga loy solinib, tekis yog‘och bo‘lagi qolip ustida yuritilib, loyning ortiqcha qismi sidirib olib tashlanadi. Bunda nima sababdan g‘ishtning sirti tekis chiqadi?

3. Yasalgan stulning oyoqlari bir tekislikda yotganligini tekshirish uchun duradgorlar stulning qarama-qarshi oyoqlariga ip tortib tekshiradi. Bu usulni qo‘llab ko‘ring va u nimaga asoslanganligini ayting.

Javob: ikki kesishuvchi chiziq yagona tekislikni aniqlaydi.

4. Bir bo‘lak yog‘och taxtani arralayotib, duradgor arralash sirtining tekis bo‘lishiga qanday erishadi?

Javob: yog‘och taxtaning ikki qo‘shni yoqlariga AB va AC kesmalarni chizadi va arrani imkoni boricha shu kesmalardan o‘tadigan qilib arralashni bajaradi. Natijada, ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi tekislik yagona bo‘lganligi uchun arralash sirti tekis chiqadi.

5. Fotoapparatni o‘rnatish uchun mo‘ljallangan tag moslama nima sababdan uch oyoqli qilib yasaladi?

Javob: bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tadi.

6. Duradgor ishlov berilgan taxta sirtining tekisligini qanday tekshiradi. Bu usul nimaga asoslangan?

Javob: agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikda yotsa, uning o‘zi ham butunligicha shu tekislikda yotadi.

7. Nima sababdan uch oyoqli mototsikl ikki oyoqlisiga nizbatan ancha turg‘un bo‘ladi? *Javob: bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tadi.*

8. Nima uchun ochiq eshiklar yelvizakda o‘z holicha harakatga keladi? Nima sababdan bu yopiq eshiklar bilan sodir bo‘lmaydi?

Javob: to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

9. Kesimi – tomoni 7 dm bo‘lgan kvadratdan iborat, balandligi 4 m bo‘lgan 18 ta ustunlarni qurish uchun qancha g‘isht kerak bo‘ladi? (G‘ishtning o‘lchamlari: 1:1,5:3 dm. Qurish jarayonida 5 % g‘isht chiqitga ketadi). *Javob:* 8200 *dona.*

Javoblar va ko‘rsatmalar

1.23. *AB//CD.* **1.24.** $7\frac{2}{3}$ sm, $8\frac{2}{3}$ sm. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm. **1.26.** 14 sm. **1.27.** $8\sqrt{3}$ sm. **1.28.** 17 sm. **1.29.** 24 sm. **1.30.** 4,8 sm. **1.31.** 18 sm.

2.6. 256 m^2. **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ sm^2. **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; 2000+640 tg 54°. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ sm; $18\sqrt{3}$ sm; b) $405\sqrt{3}$ sm^2; c) $648\sqrt{3}$ sm^2. **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ sm; $2\sqrt{73}$ sm; b) $48\sqrt{73}$ sm^2; c) $144+48\sqrt{73}$ sm^2. **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ m; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ m; b) 192 m^2; c) 282 m^2; **2.13.** a) 5 m; $\sqrt{89}$ m; b) $8(5+\sqrt{34})$ m^2; c) $8(11+\sqrt{34})$ m^2. **2.14.** a) 13 sm; 12 sm; b) 360 sm^2; c) $30(12+5\sqrt{3})$ sm^2. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ sm^2. **2.17.** a) 168π sm^2; b) 168π sm^2; c) $2{,}4\pi$ m^2; d) $1{,}68\pi$ m^2. **2.18.** 625π sm^2. **2.19.** 252π m^2. **2.20.** π^2 m^2. **2.21.** 4 sm; 16 sm. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** 4,83 m^2. **2.24.** 37 mm. **2.25.** 1040π sm^2. **2.26.** a) 75π sm^2; b) 288π dm^2; c) $6{,}25\pi$ m^2. **2.28.** a) 88π sm^2; b) 88π sm^2; c) 540π dm^2; d) $3{,}24\pi$ m^2;

3.18. $\sqrt{10}$ sm. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ sm. **3.20.** 72 dm^2. **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ m^2.

Darslikni tuzishda foydalanilgan va qo‘shimcha o‘rganishga tavsiya etilayotgan o‘quv-uslubiy adabiyotlari va elektron resurslar

1. A. A’zamov, B. Haydarov. «Matematika sayyorasi». Toshkent. «O‘qituvchi», 1993.
2. Y. Saitov. «Matematika va matematiklar haqida». Toshkent. «O‘qituvchi», 1992.
3. Yosh matematik qomusiy lug‘ati. Toshkent. «O‘zbekiston ensiklopediyasi», 1991.
4. S.I. Afonina. Matematika va go‘zallik, Toshkent,«O‘qituvchi», 1986.
5. R.K. Otajonov. Geometrik yasash metodlari, Toshkent, «O‘qituvchi», 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzayev. Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent, 2004 y.
7. I. Israilov, Z. Pashayev. Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. Toshkent, «O‘qituvchi», 2005 y.
8. А.В. Погорелов. "Геометрия 10–11", учебник, Москва. «Просвешение», 2009.
9. С. Атанасян. "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва.«Просвешение», 2002.
10. Я.И. Перельман. Қизиқарли геометрия, Тошкент. «Ўқитувчи», 1981.
11. Б. А. Кордемский. Математическая смекалка. Москва. «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия–10" учебник, Киев, «Генеза», 2010.
15. А.Д. Александров. "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. «Просвещение», 2013.
16. C. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
20. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
21. http://www.school.edu.ru – Umumta’lim portali (rus tilida).
22. http://mathc.chat.ru – Matematik kaleydoskop (rus tilida).
23. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida);
25. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp – Matematikadan olimpiada masalalari (rus tilida).
26. http://www.ixl.com – Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
27. http://www.mathkang.ru – "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA-10

ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI

GEOMETRIYA

I QISM

O‘rta ta’lim muassasalarining 10-sinfi va o‘rta maxsus,
kasb-hunar ta’limi muassasalari o‘quvchilari uchun darslik
1- nashri

Muharrirlar:	H.Alimov M.Raemov Y. Inog‘omov
Texnik muharrir	K. Madiarov
Kompyuterda sahifalovchi	S.G‘ofurov

Nashriyot litsenziyasi AI № 277. 15.07.2015
Bosishga ruxsat etildi 14.08.2017. Bichimi $70\times100^{1}/_{16}$
«TimesNewRoman» garniturasi.
Hajmi: 9,0 bosma tab. Nashr tab. 9,0.
Adadi 428121 nusxada
Original-maket «Extremum-press» MCHJda
tayyorlandi. 100053, Toshkent sh.
Bog‘ishamol ko‘chasi, 3. Tel: 234-44-05
O‘zbekiston matbuot va axborot agentligining «O‘qituvchi»
nashriyot-matbaa ijodiy uyi bosmaxonasida chop etildi.
100206, Toshkent sh. Yunusobod tumani,
Yangishahar ko‘chasi, 1- uy.
Buyurtma № 232-17.