ГМУРМАН В. Е.

ЭХТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА.

1977

Гмурман В. Е.
Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Русча тўлдирилган 4-нашридан тарж., Инж-экон. ин-тлари студентлари учун ўқув қўлланма.
Т., «Ўқитувчи», 1977.
368 б.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика.

517.8

Ушбу китоб эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўйича янги программанинг барча материалини ўз ичига олади. Унга қуйидаги боблар янгидан қўшилган; кўрсаткичли тақсимот, статистик гипотезаларнинг статистик текширилиши, бир факторли дисперсион анализ. Экспериментал маълумотларни ишлаб чиқишнинг статистик методларига катта эътибор берилган; қулай ҳисоблаш жадваллари келтирилган. Ҳар бир боб охирида масалалар жавоблари билан берилган.

Китоб инженерлик-экономика институтлари ва факультетлари студентлари учун мўлжалланган, шунингдек, у амалий масалаларни ечишда эҳтимолий ва статистик методларни татбиқ этадиган инженерлар ва экономистлар учун ҳам фойдали бўлади.

$Г \frac{20203 - 106}{353 (06) - 77} 144 - 77$

КИРИШ

Эҳтимоллар назарияси предмети. Биз кузатадиган ҳодисаларни (воқеаларни) қуйидаги уч турга ажратиш мумкин: муқаррар, рўй бермайдиган ва тасодифий ҳодисалар (воқеалар).

Муқаррар ҳодиса деб тайин шартлар тўплами S бажарилганда албатта рўй берадиган ҳодисага айтилади.

Масалан, агар идишдаги сув нормал атмосфера босими остида ва температураси 20° бўлса, у ҳолда «идишдаги сув суюқ ҳолатда» ҳодисаси муқаррар ҳодисадир. Бу мисолда берилган атмосфера босими ва сув температураси шартлар тўплами S ни ташкил этади.

Мумкин бўлмаган ҳодиса деб шартлар тўплами S бажарилганда мутлақо рўй бермайдиган ҳодисага айтилади.

Масалан, юқоридаги мисолнинг шартлари тўплами бажарилганда «идишдаги сув қаттиқ ҳолатда» ҳодисаси мутлақо рўй бермайди.

Тасодифий ҳодиса деб шартлар тўплами S бажарилганда рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодисага айтилади.

Масалан, танга ташланганда, у ё гербли томони, ёки ёзувли томони билан тушиши мумкин. Шу сабабли «танга ташланганда гербли томони билан тушди» ҳодисаси тасодифийдир.

Ҳар қандай тасодифий ҳодиса, жумладан, танганинг гербли томони тушиши жуда кўп тасодифий сабаблар таъсири натижасидир (бизнинг мисолда тангани отишга сарфланган куч, танга шакли ва бошқалар). Бу сабабларнинг ҳаммаси натижага қай даражада таъсир қилишини ҳисобга олишнинг имкони йўқ, чунки улар жуда кўп бўлиб, уларнинг таъсир қилиш қонунлари эса номаълум. Шу сабабли эҳтимоллар назарияси бир алоҳида ҳодисанинг рўй бериш

Эҳтимоллар назарияси ривожининг кейинги босқичи Яков Бернулли (1654 — 1705) номи билан боғлиқ. У исботлаган теорема кейинчалик «катта сонлар қонуни» номини олган бўлиб, олдинроқ йиғилган фактларнинг биринчи назарий асосланиши эди.

Эҳтимоллар назариясининг кейинги ютуқлари Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон ва бошқалар номи билан боғлиқдир.

Эҳтимоллар назарияси ривожининг янги, айниқса самарадор даври П. Л. Чебишев (1821 — 1894) ва унинг шогирдлари А. А. Марков (1856 — 1922), А. М. Ляпунов (1857 — 1918) номлари билан боғлиқ. Бу даврда эҳтимоллар назарияси уйғунлашган математик фан бўлиб қолди. Унинг кейинги ривожланиши аввало рус ва совет математикларининг (С. Н. Бернштейн, В. И. Романовский А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В Смирнов ва бошқалар) номлари билан боғлиқ. Ҳозирги вақтда эҳтимоллар назариясининг янги йўналишларини барпо қилишда етакчи роль совет математикларига мансуб.

3-мисол. *И*ккита пул-буюм лотереяси сотиб олинган. Қуйидаги ҳодисаларнинг биттаси ва фақат биттаси албатта рўй беради: «ютуқ биринчи билетга чиқди, иккинчисига чиқмади», «ютуқ биринчи билетга чиқмади, иккинчисига чиқди», «ютуқ иккала билетга чиқди», «ютуқ иккала билетга ҳам чиқмади». Булар ягона мумкин бўлган ҳодисалар.

4-мисол. Мерган нишонга қарата ўқ узди. Қуйидаги иккита ҳодисадан бири албатта рўй беради: нишонга ўқ тегиши, ўқнинг нишонга тегмаслиги. Булар ягона мумкин бўлган ҳодисалар.

Агар бир нечта ҳодисалардан ҳеч бирини бошқаларига нисбатан рўй бериши мумкинроқ дейишга асос бўлмаса, улар *тенг имкониятли* ҳодисалар дейилади.

5-мисол. Танга ташлаганда гербли томон тушиши ва ёзувли томон тушиши тенг имкониятли ҳодисалар. Ҳақиқатан ҳам, танга бир жинсли материалдан тайёрланган, тўғри цилиндрик шаклга эга ва унинг ўймакорлиги танганинг у ёки бу томони билан тушишига таъсир қилмайди деб фараз қилинади.

6-мисол. Ўйин соққаси ташланганда у ёки бу сондаги очколар тушиши тенг имкониятли ҳодисалардир. Ҳақиқатан ҳам, соққа бир жинсли материалдан ишланган мунтазам кўпёқ шаклига эга ва унга очколарнинг ёзилганлиги у ёки бу ёғи билан тушишига таъсир қилмайди деб фараз қилинади.

3-§. Эҳтимолнинг классик таърифи

Эҳтимол тушунчаси эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан биридир. Бу тушунчанинг бир нечта таърифи мавжуд. Бу ерда эҳтимолнинг классик таъриф деб аталадиган таърифи берилади. Кейинчалик (6-§) бу таърифнинг бўш томонларини кўрсатиб, эҳтимолнинг классик таърифидаги камчиликлардан қутулишга имкон берадиган бошқа (статистик) таърифини келтирамиз.

Мисол кўрайлик. Айтайлик, яшикда яхшилаб аралаштирилган 6 та бир хил шар бўлиб, улардан 2 таси қизил, 3 таси кўк ва 1 таси оқ бўлсин. Шубҳасиз, яшикдан таваккалига рангли шар (яъни қизил ёки кўк шар) олиниш имконияти оқ шар олиниш имкониятидан кўпроқ. Бу имкониятни сон билан характерлаш мумкинми? Ҳа, мумкин экан. Мана шу сон ҳодисанинг эҳтимоли деб аталади. Шундай натижалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли деб фараз қилинади.

Эҳтимолнинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. *Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, агар ҳодиса муқаррар бўлса, у ҳолда синашнинг ҳар бир элементар натижаси шу ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $m = n$, ва демак,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, агар ҳодиса рўй бермайдиган бўлса, у ҳолда тажрибанинг ҳеч бир элементар натижаси бу ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирмайди. Бу ҳолда $m = 0$, ва демак,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли мусбат сон бўлиб, у ноль ва бир орасида бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, тасодифий ҳодисанинг рўй беришига синашнинг барча элементар натижаларининг бир қисмигина қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $0 < m < n$, шунинг учун $0 < \frac{m}{n} < 1$, ва демак,

$$0 < P(A) < 1.$$

Шундай қилиб, исталган ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Кейинчалик, кўп мисолларнинг ечилишини анчагина соддалаштирадиган теоремалар кўрсатилади. Ҳозирча эса ечилишида эҳтимолнинг таърифидангина фойдаланиладиган мисоллар келтирамиз.

4-§. Эҳтимолларни бевосита ҳисоблашга доир мисоллар

1-мисол. Телефонда номер тера туриб, абонент битта рақамни эсидан чиқариб қўйди ва уни таваккалига терди. Керакли рақам терилганлик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. *A* орқали керакли рақам терилганлик ҳодисасини белгилаймиз.

Масаланинг тўғри ечилиши. Синашнинг тенг имкониятли натижаларининг жами сони $6 \cdot 6 = 36$ га тенг (бир соққада тушган ҳар бир очко иккинчи соққадаги ҳамма очколар билан биргаликда чиқиши мумкин). Бу натижалар ичида A ҳодисага фақат 3 та натижа қулайлик туғдиради: (1; 3), (3; 1), (2; 2) (қавс ичида тушган очколар сони кўрсатилган). Демак, изланаётган эҳтимол:

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

4-мисол. 10 та деталдан иборат партияда 7 та стандарт деталь бор. Таваккалига олинган олтита деталдан роса 4 таси стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Синашнинг мумкин бўлган элементар натижалари жами сони 10 та деталдан 6 тасини олиш усуллари сонига, яъни 10 та элементни 6 тадан группалаш сонига (C^6_{10}) тенг.

Бизни қизиқтираётган A ҳодисага — олинган 6 та деталдан роса 4 таси стандарт бўлишига қулайлик туғдирувчи натижалар сонини ҳисоблаймиз: 7 та стандарт деталдан 4 та стандарт детални C^4_7 та усул билан олиш мумкин; бунда қолган $6 - 4 = 2$ та деталь ностандарт бўлиши лозим; 2 та ностандарт детални $10 - 7 = 3$ та ностандарт деталдан C^2_3 та усул билан олиш мумкин. Демак, қулайлик туғдирувчи натижалар сони $C^4_7 \cdot C^2_3$ га тенг.

Изланаётган эҳтимол ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сонининг барча элементар натижалар сонига нисбатига тенг:

$$P(A) = \frac{C^4_7 \cdot C^2_3}{C^6_{10}} = \frac{1}{2}.$$

5-§. Нисбий частота. Нисбий частотанинг турғунлиги

Нисбий частота эҳтимол билан бир қаторда эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари жумласига киради.

Ҳодисанинг нисбий частотаси деб, ҳодиса рўй берган синашлар сонининг аслида ўтказилган жами синашлар сонига нисбатига айтилади.

Шундай қилиб, A ҳодисанинг нисбий частотаси қуйидаги формула билан аниқланади:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

Турли мамлакатлардаги статистик маълумотлар нисбий частотанинг тахминан шу қийматини беришини айтиб ўтамиз.

4-мисол. Танга ташлаш тажрибалари кўп карра ўтказилиб, уларда гербли томон тушиш сони саналган. Бир нечта тажрибаларнинг натижалари 1-жадвалда берилган.

1-жадвал

Танга ташлашлар сони	Гербли томон тушишлар сони	Нисбий частота
4 040	2 048	0,5069
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Бу ерда нисбий частоталар 0 5 сонидан салгина, шу билан бирга синашлар сони қанча катта бўлса, шунча кам фарқ қилади. Масалан, четланиш 4040 та синашда 0,0069 га, 24000 та синашда эса 0,0005 га тенг. Танга ташлашда гербли томон тушиш эҳтимоли 0,5 га тенглигини эътиборга олсак, нисбий частота эҳтимол атрофида тебранишига яна бир карра ишонч ҳосил қиламиз.

6-§. Эҳтимолнинг классик таърифининг чекланганлиги. Статистик эҳтимол

Эҳтимолнинг «классик» таърифида синашнинг элементар натижалари сони чекли деб фараз қилинади. Амалиётда эса мумкин бўлган натижалари сони чексиз бўлган синашлар анча кўп учраб туради. Бундай ҳолларда классик таърифни қўллаб бўлмайди. Шу ҳолнинг ўзи ҳам классик таърифнинг чекланганлигини кўрсатади. Тўғри, бу камчиликни эҳтимол таърифини тегишлича умумлаштириш йўли билан бартараф қилиш мумкин.

Классик таърифнинг энг бўш томони шундаки, кўпинча синаш натижасини элементар ҳодисалар тўплами сифатида тасвирлаб бўлмайди. Элементар ҳодисаларни тенг имкониятли деб ҳисоблашга асос бўла оладиган шартларни кўрсатиш эса ундан ҳам қийин. Одатда элементар натижаларнинг тенг имкониятлилиги ҳақида симметрияга асосланиб хулоса чиқарилади. Масалан, соққа ташлашда бундай ҳол соққа мунтазам кўпёқли (куб) бўлганда бўлади. Аммо сим-

8. Қулфнинг умумий ўқида бешта диск бор. Уларнинг ҳар бири турли ҳарфлар ёзилган олтита секторга бўлинган. Ҳар бир диск қулфнинг корпусига нисбатан тайин бир вазиятда бўлгандагина қулф очилади. Дискларни ихтиёрий равишда ўрнатилганда қулфни очиш мумкин бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = \frac{1}{6^5}$.

9. 8 та турли китоб битта токчага таваккалига териб қўйилади. Тайин иккита китоб ёнма-ён бўлиб қолиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $p = \frac{7 \cdot 2! \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4}$.

10 Кутубхонада 10 та турли китоб бор, бунда бешта китобнинг ҳар бири 4 сўмдан, учта китоб бир сўмдан, иккита китоб 3 сўмдан туради. Таваккалига олинган иккита китобнинг баҳоси 5 сўм бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = \frac{C^1_5 \cdot C^1_3 + C^1_2 \cdot C^2_3}{C^2_{10}} = \frac{7}{9}$.

11. 100 деталли партиядан техникавий контрол бўлими 5 та ностандарт деталь топди. Ностандарт деталлар чиқишининг нисбий частотаси нимага тенг?

Жавоби. $W = 0{,}05$.

12. Милтиқдан ўқ узишда нишонга тегишнинг нисбий частотаси 0,85 га тенглиги аниқланди. Агар жами 120 та ўқ узилган бўлса, нишонга теккан ўқлар сонини топинг.

Жавоби. 102 та.

Иккинчи боб

ЭҲТИМОЛЛАРНИ ҚЎШИШ ТЕОРЕМАСИ

1-§. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси

А ва *В* *ҳодисаларнинг йиғиндиси* $A + B$ деб, *А* ҳодиса ёки *В* ҳодисанинг, ё бу иккала ҳодисанинг ҳам рўй беришидан иборат ҳодисага айтилади.

Масалан, тўпдан иккита снаряд отилган бўлиб, *А* биринчи отишда нишонга тегиш, *В* иккинчи отишда нишонга тегиш ҳодисалари бўлса, у ҳолда $A + B$ биринчи отишда ёки иккинчи отишда ёки иккала отишда ҳам нишонга тегиш ҳодисаси бўлади.

Исботи. Учта ҳодиса: A, B ва C ни қарайлик. Қаралаётган ҳодисаларнинг ҳар иккитаси биргаликда бўлмаганлигини учун учта ҳодиса: A, B ва C дан бирининг рўй бериши $A+B$ ва C ҳодисалардан бирининг рўй бериши билан тенг кучли, шунинг учун юқоридаги теоремага асосан

$$P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C).$$

Ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ихтиёрий сондаги ҳодисалар учун исбот математик индукция методи билан ўтказилади.

1-мисол. Яшикда 30 та шар бор, улардан 10 таси қизил, 5 таси кўк ва 15 таси оқ. Рангли шар чиқиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Рангли шар чиқиши ё қизил шар, ёки кўк шар чиқишини билдиради.

Қизил шар чиқиш (A ҳодиса) эҳтимоли.

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Кўк шар чиқиш (B ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

A ва B ҳодисалар биргаликда эмас (бир рангли шар чиқиши бошқа рангли шар чиқишини йўққа чиқаради), шунинг учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин.

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

2-мисол. Мерган учта соҳага ажратилган нишонга қарата ўқ узмоқда. Ўқнинг биринчи соҳага тегиш эҳтимоли 0,45, иккинчи соҳага тегиш эҳтимоли 0,35. Мерганнинг битта ўқ узишда ё биринчи соҳага, ёки иккинчи соҳага теккизиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A — «мерган биринчи соҳага теккизди» ва B — «мерган иккинчи соҳага теккизди» ҳодисалари биргаликда эмас (ўқнинг бир соҳага тегиши бошқа соҳага тегишини йўққа чиқаради), шунинг учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин.

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0,45+0,35=0,80.$$

ланса, у ҳолда иккинчисини $\overline{A}$ билан белгилаш қабул қилинган.

1-мисол. Нишонга қарата ўқ узишда нишонга тегиш ва тегмаслик қарама-қарши ҳодисалардир. Агар A нишонга тегиш бўлса, у ҳолда $\overline{A}$ нишонга тегмаслик бўлади.

2-мисол. Яшикдан таваккалига деталь олинган. «Стандарт деталь чиқди» ва «ностандарт деталь чиқди» ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир.

Теорема. *Қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг;*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Исботи. Қарама-қарши ҳодисалар тўла группа ташкил этади, тўла группа ташкил этувчи ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси эса бирга тенг (2-§).

1-эслатма. Қарама-қарши иккита ҳодисадан бирининг эҳтимоли p орқали белгиланса, иккинчи ҳодисанинг эҳтимоли q орқали белгиланади. Шундай қилиб, юқоридаги теоремага асосан

$$p + q = 1.$$

3-мисол. Бирор кунда ёғингарчилик бўлиш эҳтимоли $p = 0,7$. Шу куни ҳаво очиқ бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. «Ёғингарчилик бўлади» ва «ҳаво очиқ бўлади» ҳодисалари ўзаро қарама-қарши ҳодисалардир, шунинг учун изланаётган эҳтимол:

$$q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3.$$

2-эслатма. A ҳодисанинг эҳтимолини топишга доир масалаларда кўпинча аввал $\overline{A}$ ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаш, кейин эса изланаётган эҳтимолни қуйидаги формула орқали топиш қулай бўлади:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

4-мисол. Яшикда n та деталь бўлиб, шулардан m таси стандарт. Таваккалига олинган k та деталь орасида камида битта стандарт деталь бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. «Олинган деталларнинг ичида камида биттаси «стандарт» ва «олинган деталларнинг ичида битта ҳам стандарт деталь йўқ» ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир. Биринчи ҳодисани A орқали, иккинчисини эса $\overline{A}$ орқали белгилаймиз.

Кўриниб турибдики,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Ҳодисанинг амалда рўй бериши мумкин эмас деб ҳисоблашга имкон берадиган (берилган тайин масалада) етарли даражада кичик эҳтимолга *қийматдорлик даражаси* дейилади. Практикада одатда 0,01 билан 0,05 орасидаги қийматдорлик даражаси олинади. 0,01 га тенг қийматдорлик даражаси бир процентли, 0,02 га тенг қийматдорлик даражаси икки процентли дейилади ва ҳ.к.

Бу ерда кўрилган принцип фақат кичик эҳтимолли ҳодисалар тўғрисида эмас, балки эҳтимоли бирга яқин бўлган ҳодисалар тўғрисида ҳам башорат қилишга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, агар A ҳодисанинг эҳтимоли нолга яқин бўлса, у ҳолда қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодисанинг эҳтимоли бирга яқин бўлади. Иккинчи томондан, A ҳодисанинг рўй бермаслиги қарама-қарши $\bar{A}$ ҳодисанинг рўй беришини англатади. Шундай қилиб, кичик эҳтимолли ҳодисаларнинг амалда мумкинмаслик принципидан татбиқлар учун муҳим бўлган қуйидаги натижа келиб чиқади: *агар тасодифий ҳодиса бирга яқин эҳтимолга эга бўлса, у ҳолда ягона тажрибада бу ҳодиса амалда рўй беради деб ҳисоблаш мумкин.* Бу ерда ҳам қайси эҳтимолни бирга яқин деб ҳисоблаш лозимлиги ҳақидаги савол масаланинг мазмунига боғлиқлиги ўз-ўзидан равшандир.

Масалалар

1. Пул-буюм лотереясининг ҳар 10 000 та билетига 150 та буюм ва 50 та пул ютуқлари ўйналади. Битта лотереяси бор кишига пулми ёки буюмми, барибир ютуқ чиқиш эҳтимоли қанчага тенг?

Жавоби. $p = 0,02$.

2. Мерганнинг битта ўқ узишда 10 очко уриш эҳтимоли 0,1 га, 9 очко уриш эҳтимоли 0,3 га, 8 ёки ундан кам очко уриш эҳтимоли 0,6 га тенг. Мерганнинг битта ўқ узишда камида 9 очко уриш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $p = 0,4$.

3. 10 та деталли партияда 8 та стандарт деталь бор. Таваккалига олинган иккита деталдан камида бири стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби $p = \frac{44}{45}$.

4. Яшикдаги 10 та деталь орасида 2 таси ностандарт. Таваккалига олинган 6 та деталь орасида ностандарт деталь биттадан ортиқ бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби $p = \frac{2}{3}$.

3-мисол. Танга 3 марта ташланган. A, B, C мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи синашда гербли томон тушиш ҳодисаси бўлсин. Равшанки; кўрилаётган ҳодисалардан ҳар иккитаси (яъни A ва B, A ва C B ва C) боғлиқ эмас. Шундай қилиб, A, B ва C жуфт-жуфт эркли.

Агар икки ҳодисадан бирининг рўй бериш эҳтимоли иккинчи ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлса, бу ҳодисалар *боғлиқ* дейилади.

4-мисол. Яшикда 100 та деталь бор, шулардан 80 таси стандарт, 20 таси ностандарт. Таваккалига битта деталь олиниб, у яшикка қайтариб солинмайди. Агар стандарт деталь олинган (A ҳодиса) бўлса, у ҳолда иккинчи синашда стандарт деталь чиқиш (B ҳодиса) эҳтимоли $P(B) = 79/99$ га тенг; агар биринчи синашда ностандарт деталь олинган бўлса, у ҳолда $P(B) = 80/99$.

Шундай қилиб, B ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли A ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ. A ва B ҳодисалар—боғлиқ.

2-§. Эркли ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси

A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб, бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган AB ҳодисага айтилади.

Масалан, агар яшикда 1-завод ва 2-заводда ишлаб чиқарилган деталлар бўлиб, A — стандарт деталь чиқиши, B — деталь 1-заводда ишлаб чиқарилган бўлса, у ҳолда AB 1-заводнинг стандарт детали чиқиши бўлади.

Бир нечта ҳодисанинг кўпайтмаси деб, бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. Масалан, ABC ҳодиса A, B ва C ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат.

A ва B ҳодисалар эркли бўлиб, уларнинг эҳтимоллари маълум бўлсин. A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолини қандай топиш мумкин? Бу саволга қуйидаги кўпайтириш теоремаси жавоб беради.

Теорема. *Иккита эркли ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг эҳтимоллари кўпайтмаси тенг:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Исботи. Белгилашлар киритамиз:

Айтилганларни мисолда тушунтирамиз. Яшикда 4 та шар бор, улардан биттаси қизил рангга (A), 1 таси кўк рангга (B), 1 таси қора рангга (C), 1 таси эса шу учала рангга (ABC) бўялган. Яшикдан олинган шарнинг қизил рангли бўлиш эҳтимоли $P(A)$ қанчага тенг? Тўртта шардан иккитаси қизил рангли бўлгани учун $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$ ни топамиз.

Олинган шар кўк рангли бўлсин, яъни B ҳодиса рўй берган бўлсин, деб фараз қилайлик. Олинган шар қизил рангли бўлиш эҳтимоли энди ўзгарадими ёки йўқми, яъни A ҳодисанинг эҳтимоли ўзгарадими? Кўк рангли иккита шардан биттасида қизил ранг ҳам бор, шунинг учун A ҳодисанинг эҳтимоли аввалгидек $\frac{1}{2}$ га тенг. Шундай қилиб, A ва B ҳодисалар эркли.

Шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, A ва C, B ва C эркли ҳодисалар эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, A, B, C ҳодисалар жуфт-жуфт эркли.

Бу ҳодисалар биргаликда боғлиқмас бўладими? Йўқ, бундай бўлмас экан. Ҳақиқатан ҳам, олинган шар икки рангли, масалан, кўк ва қора рангли бўлсин. Шу шар қизил рангга ҳам эга бўлиш эҳтимоли қанчага тенг? Фақат битта шар учала рангга бўялгани учун олинган шар қизил рангга ҳам эга. Шундай қилиб, B ва C ҳодисалар рўй берган деб фараз қилсак, у ҳолда A ҳодиса албатта рўй беради деган хулосага келдик. Демак, бу ҳодиса муқаррар ва унинг эҳтимоли ($\frac{1}{2}$ га эмас) бирга тенг.

Шундай қилиб, жуфт-жуфт эркли бўлган A, B ва C ҳодисалар биргаликда эркли эмас экан.

Энди кўпайтириш теоремасидан келиб чиқадиган натижани келтирамиз:

Натижа. *Биргаликда боғлиқ бўлмаган бир нечта ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг.*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Исботи. Учта A, B ва C ҳодисани кўрайлик. A, B ва C ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериши AB ва C ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериши билан тенг кучлидир, шунинг учун

$$P(ABC) = P(AB \cdot C).$$

Иккинчи яшикдан стандарт деталь олинганлик (B ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(B) = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

Учинчи яшик стандарт деталь олинганлик (C ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(C) = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

A, B ва C ҳодисалар биргаликда боғлиқмас бўлгани учун изланаётган эҳтимол (кўпайтириш теоремасига асосан) қуйидагига тенг:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Қўшиш ва кўпайтириш теоремаларини биргаликда қўлланишига доир мисол келтирамиз.

3-мисол. A_1, A_2, A_3 эркли ҳодисаларнинг эҳтимоллари мос равишда p_1, p_2, p_3 га тенг. Шу ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шуни айтиб ўтамизки, масалан фақат биринчи A_1 ҳодисанинг рўй бериши $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ (биринчи ҳодиса рўй берди ва иккинчи, учинчи ҳодисалар рўй бермади) ҳодисанинг рўй бериши билан тенг кучлидир.

Белгилашлар киритамиз:

B_1—фақат A_1 ҳодиса рўй берди, яъни $B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

B_2—фақат A_2 ҳодиса рўй берди, яъни $B_2 = A_2\overline{A}_1\overline{A}_3$;

B_3—фақат A_3 ҳодиса рўй берди, яъни $B_3 = A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$;

Шундай қилиб, A_1, A_2, A_3 ҳодисалардан фақат биттасининг рўй бериш эҳтимолини топиш учун B_1, B_2, B_3 ҳодисалардан қайсиниси бўлса ҳам барибир, биттасининг рўй бериш эҳтимоли $P(B_1 + B_2 + B_3)$ ни излаймиз.

B_1, B_2, B_3 ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун қўшиш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3). \qquad (*)$$

B_1, B_2, B_3 ҳодисалардан ҳар бирининг эҳтимолини топиш қолди.

A_1, A_2, A_3 ҳодисалар эркли, демак, A_1, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ ҳодисалар ҳам эркли, шунинг учун уларга кўпайтириш теоремасини қўллаш мумкин:

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)\,P(\overline{A}_2)\,P(\overline{A}_3) = p_1q_2q_3.$$

ёки

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$$

Хусусий ҳол. *Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар р га тенг бўлган бир хил эҳтимолга эга бўлса, у ҳолда шу ҳодисалардан камида биттасининг рўй бериш эҳтимоли:*

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (**)$$

1-мисол. Учта тўпдан ўқ узилганда нишонга тегиш эҳтимоллари қуйидагича: $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}9$. Учала тўпдан бир марта бир йўла отилганда, нишонга камида бир маротаба тегиш ҳодисасининг (A) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Ҳар бир тўпдан отилган ўқнинг нишонга тегиши бошқа тўплардан отиш натижаларига боғлиқ эмас, шунинг учун қаралаётган A_1 (биринчи тўпдан отилганда нишонга тегиш), A_2 (иккинчи тўпдан отилганда нишонга тегиш), A_3 (учинчи тўпдан отилганда нишонга тегиш) ҳодисалар биргаликда боғлиқ эмас.

A_1, A_2, A_3 ҳодисаларга қарама-қарши ҳодисаларнинг эҳтимоллари (яъни нишонга тегмаслик эҳтимоллари) мос равишда қуйидагига тенг:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

2-мисол. Босмахонада 4 та ясси босма машинаси бор. Ҳар бир машинанинг тайин вақтда ишлаб турганлиги эҳтимоли 0,9 га тенг. Тайин вақтда камида битта машина ишлаб турганлиги (A ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. «Машина ишлаб турибди» ва «машина ишламаётибди» (тайин вақтда) ҳодисалари қарама-қарши бўлгани учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг:

$$p + q = 1.$$

Бундан, тайин вақтда машина ишлаётганлиги эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}1^4 = 0{,}9999.$$

ёки

$$q^3 = 1 - 0{,}936 = 0{,}064.$$

Бундан

$$q = \sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4.$$

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$p = 1 - q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

4- §. Шартли эҳтимол

A ва *B* ҳодисалар боғлиқ бўлсин. Ҳодисаларнинг боғлиқлиги таърифига кўра бу ҳодисалардан бирининг рўй бериш эҳтимоли иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига боғлиқдир. Шунинг учун бизни, масалан, *B* ҳодисанинг эҳтимоли қизиқтираётган бўлса, у ҳолда *A* ҳодиса рўй берган ёки бермаганлигини билиш муҳимдир.

Шартли эҳтимол $P_A(B)$ деб, *B* ҳодисанинг *A* ҳодиса рўй берди деган фаразда ҳисобланган эҳтимолига айтилади.

Мисол. Яшикда 3 та оқ ва 3 та қора шар бор. Яшикдан икки марта таваккалига биттадан шар олинади. Олинган шар яшикка қайтариб солинмайди. Агар биринчи синашда қора шар чиққан бўлса (*A* ҳодиса), иккинчи синашда оқ шар чиқиш (*B* ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Биринчи синашдан сўнг яшикдан 5 та шар қолди, улардан 3 таси оқ шар. Изланаётган шартли эҳтимол қуйидагига тенг:

$$P_A(B) = \frac{3}{5}.$$

Эслатма. Эркли ҳодисалар таърифига кўра улардан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш эҳтимолини ўзгартирмайди. Шу сабабли эркли ҳодисалар учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$P_A(B) = P(B) \text{ ва } P_B(A) = P(A).$$

Шундай қилиб, эркли ҳодисаларнинг шартли эҳтимоллари уларнинг шартсиз эҳтимолларига тенг.

5- §. Боғлиқ ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремаси

A ва *B* ҳодисалар боғлиқ бўлиб, $P(A)$ ва $P_A(B)$ эҳтимоллар маълум бўлсин. Бу ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолини, яъни бир вақтда ҳам *A* ҳодиса, ҳам *B*

Хусусан, учта боғлиқ ҳодиса учун қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Шуни қайд қилиб ўтамизки, ҳодисалар ихтиёрий тартибда олиниши мумкин, яъни қайси ҳодисани биринчи, иккинчи ва ҳ. к. деб ҳисоблашнинг фарқи йўқ.

Ихтиёрий n учун исбот математик индукция методи билан олиб борилади.

1-мисол. Йиғувчида 3 та коник, 7 та эллиптик валчалар бор. Йиғувчи таваккалига битта валча, кейин эса яна битта валча олди. Олинган валчалардан биринчиси коник валча, иккинчиси эса эллиптик валча бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Олинган валчалардан биринчиси коник валча бўлиш (A ҳодиса) эҳтимоли:

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

Иккинчи валча эллиптик кўринишда бўлишининг биринчи валча коник кўринишда деган фаразда ҳисобланган, эҳтимоли, яъни шартли эҳтимол қуйидагига тенг

$$P_A(B) = \frac{7}{9}.$$

Изланаётган эҳтимол боғлиқ ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш теоремасига асосан қуйидагига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

Белгилашларни сақлаган ҳолда, $P(B) = \frac{7}{10}$, $P_B(A) = \frac{3}{9}$, $P(B) \cdot P_B(A) = \frac{7}{30}$ эканлигини осонгина топамиз, булар ўз навбатида (***) тенгликнинг ўринли эканлигини яққол кўрсатади.

2-мисол. Яшикда 5 та оқ, 4 та қора ва 3 та кўк шар бор. Ҳар бир синаш яшикдан битта шар олишдан иборат, олинган шар яшикка қайтариб солинмайди. Биринчи синашда оқ шар чиқиш (A ҳодиса), иккинчисида қора шар чиқиш (B ҳодиса) ва учинчисида кўк шар чиқиш (C ҳодиса) эҳтимолини топинг.

5. Учта ўйин соққаси ташланганда камида битта соққада 6 очко тушиш (A ҳодиса) эҳтимоли қанчага тенг?

Жавоби. $\frac{91}{216}$.

6. Корхона тайёрлаган маҳсулотнинг 95% и стандарт, шундан 86% и биринчи сортли. Шу корхонада тайёрланган маҳсулотдан таваккалига олинган биттаси биринчи сорт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,817.

7. Танга бир томони билан кетма-кет икки марта тушгунча ташланади. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолларини топинг: а) тажриба олтинчи отишгача тугайди; б) тангани жуфт марта ташлаш лозим бўлади.

Жавоби. а) $\frac{15}{16}$; б) $\frac{2}{3}$.

8. 1, 2, 3, 4, 5 рақамлардан аввал битта рақам, кейин қолган тўртта рақамдан иккинчи рақам олинади. Мумкин бўлган 20 та натижа тенг имкониятли деб ҳисобланади. а) биринчи олишда; б) иккинчи олишда, в) иккала олишда тоқ рақам чиқиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{5}$;

в) $\frac{3}{10}$.

9. Мерганнинг битта ўқ узишда 10 га теккизиш эҳтимоли $p = 0{,}6$. Мерган 0,8 дан кичик бўлмаган эҳтимол билан камида бир марта ўнга теккизиш учун нечта ўқ узиши керак?

Жавоби. $n \geqslant 2$.

10. Учта электр лампа занжирга кетма-кет уланган. Тармоқдаги кучланиш номиналдан ортиб кетганда ҳар битта (исталган) лампанинг куйиш эҳтимоли 0,6 га тенг. Кучланиш юқори бўлганда занжирдан ток ўтмаслик эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,936.

11. A ҳодисанинг иккита эркли синашда камида бир марта рўй бериш эҳтимоли 0,75 га тенг. A ҳодисанинг битта синашда рўй бериш эҳтимолини топинг (ҳодисанинг иккала синашда ҳам рўй бериш эҳтимоли бир хил деб ҳисобланади).

Жавоби. 0,5.

12. A спорт жамиятининг A_1, A_2, A_3 командалари B жамиятнинг мос равишда уч командаси билан мусобақалашади. A жамият командаларининг B жамият командалари билан учрашувда ютиш эҳтимоллари; A_1 билан B_1 нинг учрашувида 0,8; A_2 билан B_2 нинг учрашувида 0,4; A_3 билан B_3 нинг учрашувида 0,4. Ютиш учун уч ўйиндан камида иккитасида ғолиб чиқиш керак (дуранг натижалар

эҳтимоли берилган бўлсин. A ва B ҳодисалардан камида биттасининг рўй беришидан иборат бўлган $A+B$ ҳодисанинг эҳтимолини қандай топиш мумкин? Бу саволга биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремаси жавоб беради.

Теорема. *Биргаликда бўлган иккита ҳодисадан камида биттасининг рўй бериш эҳтимоли шу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимолини айрилганига тенг:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Исботи. A ва B ҳодисалар биргаликда бўлгани сабабли $A+B$ ҳодисанинг рўй бериши учун қуйидаги учта биргаликда бўлмаган ҳодисадан биттаси рўй бериши керак: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ ёки AB. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасига кўра

$$P(A+B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB). \qquad (*)$$

A ҳодиса рўй бериши учун биргаликда бўлмаган $A\bar{B}$ ва AB ҳодисаларнинг биттаси рўй бериши керак. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини қўшиш теоремасига кўра

$$P(A)=P(A\bar{B})+P(AB).$$

Бундан

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB). \qquad (**)$$

Шунга ўхшаш қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(B)=P(A\bar{B})+P(AB).$$

Бундан

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB). \qquad (***)$$

(**) ва (***) тенгликларни (*) га қўйиб, натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (****)$$

1-эслатма. Ҳосил қилинган формулани қўллашда A ва B ҳодисалар ўзаро эркли ҳам, боғлиқ ҳам бўлиши мумкин эканлигини назарда тутиш керак.

Эркли ҳодисалар учун

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B);$$

боғлиқ ҳодисалар учун

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B).$$

лини қандай топиш мумкин? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Тўла группа ташкил этувчи биргаликда бўлмаган* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *ҳодисалардан биттасининг рўй берганлик шартидагина рўй берадиган* A *ҳодисанинг эҳтимоли шу ҳодисалардан ҳар бирининг эҳтимолини* A *ҳодисанинг мос шартли эҳтимолига кўпайтмалари йиғиндисига тенг:*

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(B) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

Бу формула «тўла эҳтимол формуласи» дейилади.

Исботи. Шартга кўра A ҳодиса рўй бериши учун биргаликда бўлмаган $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ҳодисаларнинг биттаси рўй берган бўлиши керак. Бошқача қилиб айтганда, A ҳодисанинг рўй бериши биргаликда бўлмаган B_1A, B_2A, ..., B_nA ҳодисаларнинг қайси бири бўлса ҳам, биттасининг рўй беришини билдиради. A ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаш учун қўшиш теоремасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA). \qquad (*)$$

Ҳар бир қўшилувчини ҳисоблаш лозим. Боғлиқ ҳодисалар эҳтимоллари учун кўпайтириш формуласига асосан

$$P(B_1A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A); \quad P(B_2A) = P(B_2)\cdot P_{B_2}(A); \ \ldots ;$$

$$P(B_nA) = P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Бу тенгликларнинг ўнг томонидаги ифодаларни (*) муносабатга қўйиб, тўла эҳтимол формуласини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{Bn}(A).$$

1-мисол. Икки тўда деталлар бор. Биринчи тўдадаги деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,8 га, иккинчи тўдадаги деталнинг стандарт бўлиши эса 0,9 га тенг. Таваккалига (таваккалига танланган тўдадан) олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A ҳодиса орқали стандарт деталь олинишини белгилаймиз.

Деталь ё биринчи тўдадан (B_1 ҳодиса), ёки иккинчи тўдадан (B_2 ҳодиса) олинган бўлиши мумкин.

Деталь биринчи тўдадан олинган бўлиш эҳтимоли:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Иккинчи қутидан биринчи қутига ностандарт лампа олиб қўйилганлик шартида биринчи қутидан стандарт лампа олинишининг шартли эҳтимоли қуйидагига тенг:

$$P_{B_2}(A_2) = \frac{18}{21}.$$

Изланаётган эҳтимол, яъни биринчи қутидан стандарт лампа олиниш эҳтимоли тўла эҳтимол формуласига асосан қуйидагига тенг:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) =$$
$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9.$$

3-§. Гипотезалар эҳтимоли. Бейес формуласи

Фараз қилайлик, A ҳодиса тўла группа ташкил этувчи биргаликда бўлмаган B_1, B_2 ... , B_n ҳодисалардан бири рўй бериш шартидагина рўй бериши мумкин бўлсин. Бу ҳодисаларнинг қайси бири рўй бериши аввалдан номаълум бўлгани сабабли улар *гипотезалар* дейилади. A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли тўла эҳтимол формуласига асосан аниқланади (2-§):

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots +$$
$$+ P(B_n) \cdot P_{B_n}(A). \qquad (*)$$

Фараз қилайлик, синаш ўтказилган бўлиб, унинг натижасида A ҳодиса рўй берган бўлсин. Гипотезаларнинг эҳтимоллари қандай ўзгарганлигини (A ҳодиса рўй берганлиги сабабли) аниқлаш масаласини қўяйлик. Бошқача айтганда,

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\ \dots,\ P_A(B_n)$$

шартли эҳтимолларни излаймиз.

Аввал $P_A(B_1)$ шартли эҳтимолни топамиз. Кўпайтириш теоремасига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(AB_1) = P(A) \cdot P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A).$$

Бундан

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

$P(B_2) = 0{,}4$ (деталнинг иккинчи контролёрга тушиш эҳтимоли);

$P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (биринчи контролёрнинг яроқли детални стандарт деб қабул қилиш эҳтимоли);

$P_{B_2}(A) = 0{,}98$ (иккинчи контролёрнинг яроқли детални стандарт деб қабул қилиш эҳтимоли).

Изланаётган эҳтимол:

$$P_A(B_1) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98} \approx 0{,}59.$$

Кўриниб турибдики, синашгача B_1 гипотезанинг эҳтимоли 0,6 га тенг эди синаш натижаси маълум бўлгандан сўнг эса шу гипотезанинг эҳтимоли (аниқроғи, шартли эҳтимоли) ўзгарди ва 0,59 га тенг бўлди. Шундай қилиб, Бейес формуласи қаралаётган гипотезанинг эҳтимолини қайта баҳолашга имкон берди.

Масалалар

1. Иккита мерган биттадан ўқ узишди. Биринчи мерганнинг нишонга теккизиш эҳтимоли 0,7 га, иккинчисиники эса 0,6 га тенг. Мергандардан ақалли биттаси нишонга теккизганлиги эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,88.

2. Йиғувчида 1-заводда тайёрланган 16 та деталь, 2-заводда тайёрланган 4 та деталь бор. Таваккалига 2 та деталь олинди. Улардан ақалли биттасини 1-завод тайёрлаганлиги эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{92}{95}$.

3. Спортчилар группасида 20 чанғичи, 6 велосипедчи ва 4 югурувчи бор. Саралаш нормасини бажариш эҳтимоли чанғичи учун 0,9, велосипедчи учун 0,8, югурувчи учун 0,75. Таваккалига ажратилган спортчининг нормани бажара олиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,86.

4. Йиғувчига 1-заводда тайёрланган деталлардан 3 яшик, 2-заводда тайёрланган деталлардан 2 яшик келтирилди. 1-заводдан келтирилган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,8 га, 2-заводдан келтирилган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоли 0,9 га тенг. Йиғувчи таваккалига бир яшикни танлаб, ундан таваккалига битта деталь олди. Олинган деталнинг стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,84.

5. Биринчи яшикда 20 та деталь бўлиб, улардан 15 таси стандарт; иккинчи яшикда 30 та деталь бўлиб, улардан 24 таси стандарт; учинчи яшикда 10 та деталь бўлиб, улардан 6 таси стандарт. Таваккалига

эҳтимоли мос равишда 0,9; 0,7 ва 0,8 га тенг. Таваккалига танланган студент мусобақа натижасида терма команда составига олинди. Студентнинг қайси группага тегишли бўлиш эҳтимоли каттароқ?

Жавоби. Биринчи, иккинчи, учинчи группанинг студенти танланган бўлиш эҳтимоли мос равишда $\frac{18}{59}$, $\frac{21}{59}$, $\frac{20}{59}$ га тенг.

13. Корхона маҳсулотининг стандартлилик талабига жавоб бериш эҳтимоли 0,96 га тенг. Маҳсулотнинг стандартлигини текширишнинг соддалаштирилган системаси таклиф қилинган бўлиб, у стандарт маҳсулотни 0,98 эҳтимол билан стандарт деб, ностандарт маҳсулотни эса 0,05 эҳтимол билан стандарт деб топади. Текширишда стандарт деб топилган маҳсулотнинг ҳақиқатан ҳам стандарт бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,998.

Бешинчи боб

СИНАШЛАРНИНГ ТАКРОРЛАНИШИ

1- §. Бернулли формуласи

Агар бир нечта синаш ўтказилаётган бўлиб, ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бошқа синаш натижаларига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай синашлар A *ҳодисага нисбатан эркли* дейилади.

Ҳар хил эркли синашларда A ҳодиса ё ҳар хил эҳтимолга, ёки бир хил эҳтимолга эга бўлиши мумкин. Биз бундан кейин A ҳодиса бир хил эҳтимолга эга бўлган эркли синашларни текширамиз.

Биз қуйида ҳар бири содда ҳодиса деб аталадиган бир нечта содда ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган мураккаб ҳодиса тушунчасидан фойдаланамиз.

Фараз қилайлик, n та ўзаро эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса ё рўй бериши, ёки рўй бермаслиги мумкин бўлсин. A ҳодисанинг эҳтимоли ҳар бир синашда бир хил, чунончи p га тенг деб ҳисоблаймиз. Демак, ҳар бир синашда A ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли ҳам ўзгармас ва $q = 1 - p$ га тенг.

n та синашда A ҳодисанинг роса k марта рўй бериши, ва демак, $n-k$ марта рўй бермаслик эҳтимолини ҳисоблашни ўз олдимизга мақсад қилиб қўяйлик.

Шуни айтиб ўтиш муҳимки, A ҳодисанинг k марта аниқ бир кетма-кетликда рўй бериши талаб қилинмайди. Масалан, Яқин 6 сутканинг 4 суткаси давомида электр энергия сарфининг нормадан ортиб кетмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. 6 сутканинг ҳар бирида электр энергиянинг нормада сарфланиш эҳтимоли ўзгармас ва $p = 0,75$ га тенг. Демак, ҳар бир суткада электр энергиянинг нормадан ортиқ сарфланиш эҳтимоли ҳам ўзгармас ва $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25$ га тенг.

Изланаётган эҳтимол Бернулли формуласига кўра қуйидагига тенг:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(0,75)^4\cdot(0,25)^2 = 0,30.$$

2- §. Лапласнинг локал теоремаси

Юқорида биз n та синашда ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимолини ҳисоблашга имкон берадиган Бернулли формуласини келтириб чиқардик. Формулани келтириб чиқаришда ҳодисанинг ҳар бир синашда рўй бериш эҳтимоли ўзгармас деб фараз қилдик.

Осонгина кўриш мумкинки, Бернулли формуласини n нинг катта қийматларида қўллаш қийин, чунки формула катта сонлар устида амаллар бажаришни талаб қилади. Масалан, $n = 50$, $k = 30$, $p = 0,1$ бўлса, у ҳолда $P_{50}(30)$ эҳтимолни ҳисоблаш учун $P_{50}(30) = \frac{50!}{30!\,20!}(0,1)^{30}\cdot(0,9)^{20}$ ифодани ҳисоблашга тўғри келади, бу ерда $50! = 30414093\cdot 10^{57}$, $30! = 26525\,286\cdot 10^{25}$, $20! = 24\,329\,020\cdot 10^{11}$. Тўғри, факториаллар логарифмлари махсус жадвалларидан фойдаланиб, бу ҳисобларни бир оз соддалаштириш мумкин. Аммо бу йўл ҳам узундан узоқ ҳисоблашларни талаб қилади, ундан ташқари, у жиддий камчиликка эга: жадваллар логарифмларнинг тақрибий қийматларидан тузилган, шунинг учун ҳисоблашларда хатолар йиғилиб боради; пировардида ҳисобланган натижа ҳақиқий натижадан анча фарқ қилиши мумкин.

Бундай савол туғилиши табиий: бизни қизиқтираётган эҳтимолни Бернулли формуласини қўлламасдан ҳисоблаш ҳам мумкинми? Ҳа, мумкин экан. Лапласнинг локал теоремаси синашлар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг n та тажрибада роса k марта рўй бериш эҳтимолини тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик* формула беради.

---

* Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$ бўлса, $\varphi(x)$ функция $f(x)$ фунциянинг асимптотик яқинлашиши дейилади.

x нинг масала маълумотлари орқали аниқланадиган қийматини ҳисоблаймиз;

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0.$$

Жадвалдан (1-илова) $\varphi(0) = 0,3989$ эканлигини топамиз.

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

Бернулли формуласи ҳам тахминан шу натижага олиб келади (ҳисоблашлар узундан-узоқ бўлгани учун келтирилмади):

$$P_{400}(80) = 0,0498.$$

2-мисол. Мерганнинг ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли $p = 0,75$. Мерган 10 та ўқ узганда 8 та ўқни нишонга теккизиш эҳтимолини топинг

Ечилиши. Шартга кўра $n = 10$; $k = 8$; $p = 0,75$; $q = 0,25$. Лапласнинг асимптотик формуласидан фойдаланамиз:

$$P_{10}(8) \simeq \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \cdot \varphi(x) = 0,7301 \cdot \varphi(x).$$

x нинг масала маълумотлари бўйича аниқланадиган қийматини ҳисоблаймиз:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25} \approx 0,36.$$

Жадвалдан (1-илова) $\varphi(0,36) = 0,3739$ ни топамиз.

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{10}(8) = 0,7301 \cdot 0,3739 = 0,273.$$

Бернулли формуласи бошқа натижага, чунончи $P_{10}(8) = 0,282$ га олиб келади. Жавобларнинг бунчалик катта фарқ қилиши бу мисолда n кичик қийматга эгалиги билан тушунтирилади (Лаплас формуласи n нинг катта қийматларидагина яхши яқинлашиш беради).

3-§. Лапласнинг интеграл теоремаси

Яна фараз қилайлик, n тажриба ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва p га $(0<p<1)$ тенг бўлсин. n та тажрибада A ҳодисанинг камида k_1 та за кўпи билан k_2 марта рўй бериш бу ерда $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ ва $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Лапласнинг интеграл теоремасини қўллашга доир мисоллар келтирамиз.

Мисол. Деталнинг техникавий контроль бўлими (ОТК) текширмаган бўлиш эҳтимоли $p = 0{,}2$. Тасодифан олинган 400 та деталдан 70 тадан 100 тагачасини ОТК текширмаган бўлиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$.

Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланамиз:

$$P_{400}\ (70{,}100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Интеграллашнинг юқори ва қуйи чегараларини ҳисоблаймиз:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_{400}(70{,}100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

Жадвалдан (2-илова) қуйидагини топамиз:

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938;\ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Изланаётган эҳтимол:

$$P_{400}(70{,}100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Эслатма. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли ўзгармас ва p га тенг бўлган n та эркли синашда A ҳодисанинг рўй бериш сонини m орқали белгилаймиз. Агар m сон k_1 дан k_2 гача ўзгарса, у ҳолда $\frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ каср $\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = x'$ дан $\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = x''$ гача ўзгаради. Демак, Лапласнинг интеграл теоремасини қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$P\left(x' \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x''\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Қуйида шу кўринишда ёзишдан фойдаланамиз.

Ниҳоят, қавс ичидаги тенгсизликларни уларга тенг кучли бўлган дастлабки тенгсизлик билан алмаштириб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)\simeq 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Шундай қилиб,

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon$$

тенгсизликнинг рўй бериш эҳтимоли тақрибан Лаплас функциясининг $x=\varepsilon\sqrt{\frac{p}{pq}}$ даги иккиланган $2\Phi(x)$ қийматига тенг.

1-мисол. Деталнинг ностандарт бўлиш эҳтимоли $p = 0,1$. Тасодифан олинган 400 та деталь ичида ностандарт деталлар бўлиши нисбий частотасининг $p=0,1$ эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $n=400$; $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$.

$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\leqslant 0,03\right)$ эҳтимолни топиш талаб қилинади. $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ формуладан фойдаланиб,

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\leqslant 0,03\right)\approx 2\,\Phi\left((0,03\sqrt{\frac{400}{0,1\cdot 0,9}}\right)=2\Phi\,(2)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Жадвалдан (2-илова) $\Phi(2)=0,4772$ эканлигини топамиз. Демак, $2\Phi(2)=0,9544$.

Шундай қилиб, изланаётган эҳтимол тақрибан 0,9544 га тенг. Ҳосил қилинган натижанинг маъноси қуйидагича: агар етарли даражада кўп марта текшириш ўтказилиб, ҳар бир текширишда 400 тадан деталь олинса, у ҳолда бу текширишларнинг тахминан 95,44% ида нисбий частотанинг ўзгармас $p=0,1$ эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмайди.

2-мисол. Деталнинг ностандарт бўлиш эҳтимоли $p = 0,1$. 0,9544 эҳтимол билан (олинган деталлар ичида) ностандарт деталлар чиқиши нисбий частотасининг ўзгармас p эҳтимолдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта эмас дея олиш учун қанча деталь олиниши керак?

2. Агар ҳар бир синашда A ходисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,3 га тенг бўлса, бешта эркли синашда ҳодисанинг камида икки марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = 0,472.$

3. B ҳодиса A ҳодиса камида икки марта рўй берган ҳолда рўй беради. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,4 га тенг бўлган 6 та эркли синаш ўтказилган бўлса, B ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] = 0,767.$

4. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,1 га тенг бўлган 8 та эркли синаш ўтказилган. A ҳодисанинг камида икки марта рўй бериш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $P = 1 - [P_8(0) + P_8(1)] = 0,19.$

5. Танга 6 марта ташланган. Гербли томон а) кўпи билан бир марта тушиш, б) камида икки марта тушиш эҳтимолини топинг.

Жавоби а) $P = P_6(0) + P_6(1) = \frac{7}{64};$

б) $P = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] = \frac{57}{64}.$

6. Тўпдан битта ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоли $p = 0,9$. Нишонга k $(k \geqslant 1)$ та ўқ текканда унинг яксон бўлиш эҳтимоли $1 - q^k$ га тенг. Агар иккита ўқ узилган бўлса, нишоннинг яксон бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. 0,9639.

Кўрсатма. Бернулли формуласи ва тўла эҳтимол формуласидан фойдаланинг.

7. Агар синашнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,2 га тенг бўлса, 400 та синашда шу ҳодисанинг роса 104 марта рўй бериш эҳтимолини тақрибан топинг.

Жавоби. $P_{400}(104) = 0,0006.$

8. Мерганнинг битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоли 0,75 га тенг, 100 та ўқ узилганда нишонга теккан ўқлар сони а) 70 дан кам эмас ва 80 дан кўп эмас, б) 70 дан кўп эмас бўлиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. а) $P_{100}(70,80) = 2\Phi(1,15) = 0,7498;$

б) $P_{100}(0,70) = -\Phi(1,15) + 0,5 = 0,1251.$

9. 10000 та эркли синашнинг ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $p = 0,75$. Ҳодиса рўй бериши нисбий частотасининг ҳодиса

Иккинчи қисм

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

Олтинчи боб

ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ ТУРЛАРИ. ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ БЕРИЛИШИ

1-§. Тасодифий миқдор

Китобнинг биринчи қисмидаёқ у ёки бу сон чиқишидан иборат бўлган ҳодисалар келтирилди. Масалан, ўйин соққасини ташлаганда 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлар чиқиши мумкин эди. Чиққан очколар сонини аввалдан айтиб бўлмайди, чунки у тўла-тўкис инобатга олиб бўлмайдиган кўп тасодифий сабабларга боғлиқдир. Шу маънода очколар сони тасодифий миқдордир; 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлар бу миқдорнинг *мумкин бўлган қийматларидир.*

Тасодифий миқдор деб, аввалдан номаълум бўлган ва олдиндан инобатга олиб бўлмайдиган тасодифий сабабларга боғлиқ бўлган ҳамда синаш натижасида битта мумкин бўлган қиймат қабул қилувчи миқдорга айтилади.

1-мисол. 100 та чақалоқ ичида ўғил болалар сони 0, 1, 2, ..., 100 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдордир.

2-мисол. Тўпдан отилган снаряднинг учиб ўтган масофаси тасодифий миқдордир. Ҳақиқатан ҳам, масофа фақат нишонга олувчи асбобнинг ўрнатилишигагина боғлиқ бўлмай, балки аввалдан тўла-тўкис ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча бошқа сабабларга (шамолнинг кучи ва йўналиши, ҳарорат ва бошқаларга) ҳам боғлиқ. Бу миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бирор (a, b) оралиққа тегишлидир.

Биз бундан кейин тасодифий миқдорларни X, Y, Z бош ҳарфлар билан, уларнинг мумкин бўлган қийматларини тегишли x, y, z кичик ҳарфлар билан белгилаймиз. Масалан, X тасодифий миқдор учта қиймат олиши мумкин бўлса, улар бундай белгиланади: x_1, x_2, x_3.

2-§. Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар

Юқорида келтирилган мисолларга қайтайлик. Улардан биринчисида X тасодифий миқдор қуйидаги мумкин бўлган қийматлардан бирини қабул қилиши мумкин эди: 0, 1, 2, Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунининг жадвал орқали берилишида жадвалнинг биринчи сатри мумкин бўлган қийматлардан иккинчи сатри эса уларнинг эҳтимолларидан тузилади:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Битта синашда тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматлардан биттасини ва фақат биттасини кабул қилишини назарда тутиб, $X = x_1$, $X = x_2$, $\dots$, $X = x_n$ ҳодисалар тўла группа ташкил килади, деган хулосага келамиз; демак, бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси, яъни жадвалнинг иккинчи сатридаги эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

Мисол. Пул лотереясида 100 та билет чиқарилган. Битта 50 сўмлик ютуқ ва ўнта 1 сўмлик ютуқ ўйналмоқда. X тасодифий миқдор—битта лотереяси бор киши ютуқлари тақсимот қонунини топинг.

Ечилиши. X нинг мумкин бўлган қийматларини ёзамиз:

$$x_1 = 50,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимоллари қуйидагича:

$$p_1 = 0{,}01,\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0{,}89.$$

Изланаётган тақсимот конунини ёзамиз:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Текшириш. $0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}89 = 1.$

Равшанлик мақсадида дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини график усулда тасвирлаш ҳам мумкин, бунинг учун тўғри бурчакли координата системасида (x_i, p_i) нуқталар ясалади, кейин уларни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирилади Ҳосил қилинган шакл *тақсимот кўпбурчаги* дейилади.

4- §. Биномиал тақсимот

Фараз қилайлик, n та эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлсин. Ҳар бир синашда ҳодисанинг рўй бериши ўзгармас ва p га тенг (демак, ҳодисанинг рўй

Ечилиши. Тангани ҳар ташлашда гербли томон тушиш эҳтимоли $p=\frac{1}{2}$, демак, гербли томон тушмаслик эҳтимоли $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Тангани икки марта ташлаганимизда гербли томони ё 2 марта, ёки бир марта тушиши мумкин, ёки гербли томон мутлақо тушмаслиги мумкин. Шундай қилиб, X нинг мумкин бўлган қийматлари қуйидагича:

$$x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=0.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолларини Бернулли формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$P_2(2)=C_2^2p^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25;$$

$$P_2(1)=C_2^1pq=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}5,$$

$$P_2(0)=C_2^0q^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25$$

Изланаётган тақсимот қонунини ёзамиз:

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Текшириш: $0{,}25+0{,}5+0{,}5=1.$

5- §. Пуассон тақсимоти

Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлган n та эркли синаш ўтказилаётган бўлсин. Бу синашларда ҳодисанинг k марта бериш эҳтимолини топиш учун Бернулли формуласидан фойдаланилади. Агар n катта бўлса, Лапласнинг асимптотик формуласидан фойдаланилади. Аммо ҳодисанинг эҳтимоли кичик ($p\leqslant0{,}1$) бўлса, бу формула ярокли эмас. Бундай ҳолларда (n катта, p кичик) Пуассоннинг асимптотик формуласига мурожаат қилинади.

Шундай қилиб, ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли жуда кичик бўлган жуда кўп синашлар ўтказилганда ҳодисанинг роса k марта рўй бериш эҳтимолини топиш масаласини қўяйлик.

Муҳим шарт қўяйлик: np кўпайтма ўзгармас қийматини сақлаб қолади, чунончи $np=\lambda$. Кейинчалик кўрсатилишича (VII боб, 5- §), бу синашларнинг ҳар хил сериясида, яъни n

Изланаётган эҳтимол Пуассон тақсимотига кўра тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_{5000}(3)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6e}\simeq 0{,}06.$$

6-§. Ҳодисаларнинг энг содда оқими

Вақтнинг тасодифий моментларида рўй берувчи ҳодисаларни қараймиз.

Ҳодисалар оқими деб, вақтнинг тасодифий моментларида рўй берувчи ҳодисалар кетма-кетлигига айтилади. Оқимга мисол сифатида қуйидагиларни олиш мумкин: АТС га, тез ёрдам пунктига чақириқларнинг келиши, аэропортга самолётларнинг қўниши, маиший хизмат кўрсатиш корхоналарига клиентларнинг келиши, элементларнинг ишдан чиқиш кетма-кетликлари ва бошқалар.

Оқимларга мансуб бўлган хусусиятлар ичида стационарлик, сўнг-таъсирнинг йўқлиги ва ординарлик хоссаларини ажратамиз.

Стационарлик хоссаси исталган вақт оралиғида k та ҳодиса рўй бериш эҳтимоли k га ва вақт оралиғининг узунлиги t га боғлиқ бўлиб, унинг саноқ бошига боғлиқ бўлмаслиги билан характерланади. Бунда турли вақт оралиқлари кесишмайди деб фараз қилинади. Масалан, k та ҳодисанинг давомийлиги $t=6$ вақт бирлигига тенг бўлган (1; 7), (10; 16), $(T+6)$ вақт оралиқларида рўй бериш эҳтимоллари ўзаро тенгдир.

Шундай қилиб, агар оқим стационарлик хоссасига эга бўлса, у ҳолда давомийлиги t га тенг бўлган вақт оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли k ва t нинг функцияси бўлади.

«Сўнг таъсирнинг йўқлиги» *хоссаси* исталган вақт оралиғида k та ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли кўрилаётган оралиқ бошланишидан аввалги вақт моментларида ҳодисалар рўй берганлиги ёки рўй бермаганлигига боғлиқ эмаслиги билан характерланади. Бошқача қилиб айтганда, исталган вақт оралиғида k та ҳодиса рўй беришининг кўрилаётган оралиқнинг бошланишидан аввал нима бўлганлиги тўғрисида исталган тахминда (нечта ҳодиса рўй берган) улар қандай кетма-кетликха рўй берган) ҳисобланган шартли эҳтимоли шартсиз эҳтимолига тенг. Шундай килиб, оқимнинг аввалги тарихи (аҳволи) ҳодиса-

риш эҳтимоли k ва t нинг функцияси бўлади, бу эса стационарлик хоссасини характерлайди.

Формулада қаралаётган вақт оралиғичинг бошланишидан аввалги информациядан фойдаланилмайди, бу эса сўнгтаъсирнинг йўқлиги хоссасини характерлайди.

Формула ординарлик хоссасини акслантиришига ишонч ҳосил қилайлик. $k = 0$ ва $k = 1$ деб, мос равишда ҳодисаларнинг рўй бермаслик ва битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолларини топамиз:

$$P_t\ (0) = e^{-\lambda t}, \quad P_t\ (1) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Демак, биттадан кўп ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли қуйидагича бўлади:

$$P_t\ (k > 1) = 1 - [P_t\ (0) + P_t\ (1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}].$$

Қуйидаги

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \ldots$$

ёйилмадан фойдаланиб, элементар алмаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P_t\ (k > 1) = \frac{(\lambda t)^2}{2} + \ldots.$$

P_t (1) ва P_t $(k > 1)$ ни солиштириб кўрсак, t нинг кичик қийматларида биттадан кўп ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоли битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолидан ҳисобга олмаса ҳам бўладиган даражада кичик, деган хулосага келамиз, бу эса ординарлик хоссасини характерлайди.

Шундай қилиб, Пуассон формуласини энг оддий оқимнинг математик модели деб ҳисоблаш мумкин.

Мисол. Бир минутда АТС га ўртача иккита чақириқ келади. 5 минут ичида а) 2 та чақириқ келиш; б) иккитадан кам чақириқ келиш, с) камида иккита чақириқ келиш эҳтимолларини топинг. Чақириқлар оқимини энг оддий деб ҳисобланади.

Ечилиши Шартга кўра $\lambda = 2$, $t = 5$, $k = 2$. Пуассон формуласидан фойдаланамиз:

$$P_t\ (k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

а) изланаётган эҳтимол, яъни 5 минут ичида 2 та чақириқ келиш эҳтимоли:

$$P_5\ (2) = \frac{10^2 \cdot c^{-10}}{2!} = \frac{100 \cdot 0{,}000045}{2} = 0{,}000025.$$

тенг. Қуйидаги иккита ҳодисадан қайсиниси каттароқ эҳтимолга эга: бир минут давомида 3 абонент қўнғироқ қилади; 4 абонент қўнғироқ қилади?

Жавоби. P_{100} (3) = 0,18; P_{100} (4) = 0,09.

7. Машинкада босилган 1000 бетли қўл ёзма 1000 та хатога эга. Таваккалига олинган саҳифа: а) камида битта хатога, б) роса 2 та хатога, в) камида иккита хатога эга бўлиш эҳтимолини топинг. Хатолар сони Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб ҳисобланади.

Жавоби. а) $P = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$;
б) P_{1000} (2) = 0,18395;
в) $P = 0{,}2642$.

8. АТС га бир минут давомида ўртача бешта чақириқ келади. 4 минут давомида; а) 2 та чақириқ, б) иккитадан кам чақириқ, в) камида иккита чақириқ келиш эҳтимолини топинг.

Кўрсатма: $e^{-10} = 0{,}000045$.

Жавоби. а) 0,000025,
б) 0,000495;
в) 0,999505.

Еттинчи боб

ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ МАТЕМАТИК КУТИЛИШИ

1-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари

Юқорида айтилганлардан, тақсимот қонуни тасодифий миқдорни тўлиқ характерлашини биламиз. Лекин кўпинча тақсимот қонуни номаълум бўлиб, кам маълумотлар билан чекланишга тўғри келади. Баъзан ҳатто тасодифий миқдорни йиғма тасвирлайдиган сонлардан фойдаланиш қулайроқ бўлади: бундай сонлар *тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари* дейилади. Муҳим сонли характеристикалар жумласига математик кутилиш тегишлидир.

Математик кутилиш тақрибан тасодифий миқдорнинг ўртача қийматига тенг, бу кейинроқ кўрсатилади.

Кўп масалаларни ҳал этишда математик кутилишни билиш кифоя. Масалан, агар биринчи мерган урган очколарнинг математик кутилиши иккинчи мерган урган очколарнинг математик кутилишидан катталиги маълум бўлса, у ва $x_2 = 0$ (A ҳодиса рўй бермади) $q = 1 - p$ эҳтимол билан. Изланаётган математик кутилиш қуйидагига тенг:

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Шундай қилиб, битта синашда ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши шу ҳодисанинг эҳтимолига тенг. Бу натижадан қуйида фойдаланилади.

3-§. Математик кутилишнинг эҳтимолий маънсси

Фараз қилайликки, n та синаш ўтказилган бўлиб, уларда X тасодифий миқдор m_1 марта x_1 қиймат, m_2 марта x_2 қиймат, ..., m_k марта x_k киймат қабул қилган, шу билан бирга $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$ бўлсин. У ҳолда X қабул қилган барча қийматлар йиғиндиси қуйидагига тенг:

$$x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_km_k$$

Тасодифий миқдор қабул қилган барча қийматларнинг арифметик ўртача қиймати $\overline{X}$ ни топайлик, бунинг учун топилган йиғиндини синашларнинг жами сонига бўламиз:

$$\overline{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_km_k}{n}$$

ёки

$$\overline{X} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + ... + x_k \frac{m_k}{n}. \qquad (*)$$

$\frac{m_1}{n}$ нисбат x_1 қийматнинг W_1 нисбий частотаси, $\frac{m_2}{n}$ нисбат x_2 қийматнинг W_2 нисбий частотаси ва ҳ. к. эканлигини инобатга олиб, (*) муносабатни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\overline{X} = x_1W_1 + x_2W_2 + ... + x_kW_k. \qquad (**)$$

Синашлар сони етарлича катта деб фараз қилайлик. У ҳолда нисбий частота тақрибан ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолига тенг (бу IX боб, 6-§ да исботланади):

$$W_1 \simeq p_1; W_2 \simeq p_2, \ ..., W_k \simeq p_k.$$

(**) муносабатда нисбий частоталарни мос эҳтимоллар билан алмаштириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{X} \simeq x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_kp_k.$$

Бу тақрибий тенгликнинг ўнг томони $M(X)$ дир.

матларини C ўзгармасга кўпайтмаларига тенг; CXнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари X нинг мумкин бўлган тегишли қийматларининг эҳтимолларига тенг. Масалан, мумкин бўлган x_1 қийматнинг эҳтимоли p_1 га тенг бўлса, у ҳолда CX миқдорнинг Cx_1 қийматни қабул қилиш эҳтимоли ҳам p_1 га тенг бўлади.

2-хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Исботи. X тасодифий миқдор қуйидагича эҳтимолларнинг тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

$$\begin{array}{llll} X & x_1 & x_2 \; \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 \; \ldots & p_n. \end{array}$$

1-эслатмани инобатга олиб, CX тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзамиз:

$$\begin{array}{llll} CX & Cx_1 & Cx_2 \; \ldots & Cx_n \\ p & p_1 & p_2 \; \ldots & p_n. \end{array}$$

CX тасодифий миқдорнинг математик кутилиши:

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n =$$

$$= C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = CM(X).$$

Шундай қилиб,

$$M(CX) = CM(X).$$

2-эслатма. Кейинги хоссага ўтишдан аввал қуйидаги тушунчани айтиб ўтайлик: иккита тасодифий миқдордан бирининг тақсимот қонуни иккинчисининг қандай қиймат қабул қилганлигига боғлиқ бўлмаса, бу тасодифий миқдорлар *эркли* дейилади. Агар бир нечта тасодифий миқдорлардан ихтиёрий сондагисининг тақсимот қонунлари қолганларининг қандай қиймат қабул қилганлигига боғлиқ бўлмаса, улар *ўзаро эркли* тасодифий миқдорлар дейилади.

3-эслатма. Эркли X ва Y тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси деб, шундай XY тасодифий миқдорга айтамизки, унинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига кўпайтирилганига тенг; XY кўпайтманинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари кўпайтувчиларнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари кўпайтмасига тенг. Масалан, мумкин бўлган x_1 қийматнинг эҳтимоли p_1 га, мумкин бўлган y_1 қийматнинг эҳтимоли g_1 га тенг бўлса, у ҳолда мумкин бўлган x_1y_1 қийматнинг эҳтимоли p_1g_1 га тенг бўлади.

3-хосса. *Иккита эркли X ва Y тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши уларнинг математик кутилишлари кўпайтмасига тенг:*

$$M(XY) = M(X)\, M(Y).$$

Ечилиши. Берилган миқдорларнинг ҳар бирининг математик кутилишини топамиз:

$$M(X) = 5\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 = 4{,}4;$$

$$M(Y) = 7\cdot 0{,}8 + 9\cdot 0{,}2 = 7{,}4.$$

X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлганлиги учун изланаётган математик кутилиш қуйидагига тенг:

$$M(XY) = M(X)\,M(Y) = 4{,}4\cdot 7{,}4 = 32{,}56.$$

4-эслатма. X ва Y тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси деб шундай $X+Y$ тасодифий миқдорга айтиладики, унинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати билан Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати йиғиндиларига тенг; $X+Y$ нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимоллари эркли X ва Y миқдорлар учун қўшилувчиларни эҳтимоллари кўпайтмасига тенг; боғлиқ тасодифий миқдорлар учун бир қўшилувчининг эҳтимолини иккинчисининг шартли эҳтимолига кўпайтмасига тенг.

Қуйидаги хосса эркли тасодифий миқдорлар учун ҳам, боғлиқ тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринлидир.

4-хосса. *Иккита тасодифий миқдор йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлар йиғиндисига тенг:*

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Исботи. X ва Y тасодифий миқдорлар қуйидаги тақсимот қонунлар орқали берилган бўлсин*:

X	x_1	x_2	Y	y_1	y_2
p	p_1	p_2	g	g_1	g_2

$X+Y$ нинг барча мумкин бўлган қийматларини тузамиз, бунинг учун X нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини қўшамиз: x_1+y_1, x_1+y_2, x_2+y_1 ва x_2+y_2 ни ҳосил қиламиз. Бу қийматларнинг эҳтимолларини мос равишда p_{11}, p_{12}, p_{21} ва p_{22} орқали белгилаймиз.

$X+Y$ миқдорнинг математик кутилиши мумкин бўлган

---

* Мулоҳазаларни соддалаштириш мақсадида, биз фақат иккитадан қиймат қабул қилиши мумкин тасодифий микдорларни қараймиз. Умумий ҳол шунга ўхшаш исботланади.

тимол билан ва 0 ни (нишонга тегмаган ҳолда) $q_1 = 1 - -p_1 = 0{,}6$ эҳтимол билан.

Биринчи ўқ узишда нишонга тегиш сонининг математик кутилиши нишонга тегиш эҳтимолига, яъни $M(X_1) = 0{,}4$ га тенг (69- бет, 2-мисолга қаранг).

Иккинчи ва учинчи ўқ узишда нишонга тегиш сонининг математик кутилишларини шунга ўхшаш топамиз:

$$M(X_2) = 0{,}3, \qquad M(X_3) = 0{,}6.$$

Нишонга тегишнинг жами сони ҳам тасодифий миқдор бўлиб, у учта ўқ узишнинг ҳар бирида нишонга тегишлар йиғиндисидан иборат:

$$X = X_1 + X_2 + X_3.$$

Изланаётган математик кутилишни йиғиндининг математик кутилиши ҳақидаги теоремага асосан топамиз:

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + X_3) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) =$$
$$= 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1{,}3 \text{ (та нишонга тегиш).}$$

2-мисол. Иккита ўйин соққаси ташланганда тушиши мумкин бўлган очколар йиғиндисининг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Биринчи соққада тушиши мумкин бўлган очколар сонини X орқали, иккинчисиникини Y орқали белгилаймиз. Бу миқдорларнинг мумкин бўлган қийматлари бир хил бўлиб, улар 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 га тенг, шу билан бирга бу қийматлардан ҳар бирининг эҳтимоли $\frac{1}{6}$ га тенг.

Биринчи соққада тушиши мумкин бўлган очколар сонининг математик кутилишини топамиз:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \quad \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

$M(Y) = \frac{7}{2}$ эканлиги ҳам равшан.

Изланаётган математик кутилиш:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

Ечилиши. Ҳар бир ўқ узишда нишонга тегиш ёки тегмаслик бошқа отишлар натижасига боғлиқ эмас, шунинг учун кўрилаётган ҳодисалар эрклидир ва, демак, изланаётган математик кутилиш:

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ (та нишонга тегиш).}$$

Масалалар

1. Дискрет тасодифий миқдорнинг

X	6	3	1
p	0,2	0,3	0,5

тақсимот қонунини билган ҳолда унинг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 2,6.

2. Нишонга қарата 4 та ўқ узилди, уларнинг тегиш эҳтимоллари $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,5$ ва $p_4 = 0,7$. Нишонга тегиш жами сонининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 2,2 та нишонга тегиш.

3. Дискрет эркли тасодифий миқдорлар қуйидаги тақсимот қонунлари орқали берилган:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7.

XY кўпайтманинг математик кутилишини икки усул билан: 1) XY нинг тақсимот қонунини тузиб; 2) 3-хоссадан фойдаланиб топинг.

Жавоби. 1,53.

4. X ва Y дискрет тасодифий миқдорлар 3-масаладаги тақсимот қонунлари орқали берилган. $X+Y$ йиғиндининг математик кутилишини икки усулда: 1) $X+Y$ нинг тақсимот қонунини тузиб; 2) 4-хоссадан фойдаланиб топинг.

Жавоби. 2,65.

5. Деталнинг ишончлилигини текшириш вақтида унинг бузилиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Агар 10 та деталь синалаётган бўлса, бузилган деталлар сонининг математик кутилишини топинг.

Жовоби. 2 та деталь

6. Иккита ўйин соққаси бир марта ташланганда чиқадиган очколар кўпайтмасининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 12,25 очко.

7. 20 та лотерея билети сотиб олинган. Битта билетга ютуқ чиқиш эҳтимоли 0,3 га тенг бўлса, ютуқ чиқадиган лотерея билетлар сонининг математик кутилишини топинг.

Жавоби. 6 та билет.

2-§. Тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши

Айтайлик, X — тасодифий миқдор, $M(X)$ унинг математик кутилиши бўлсин. Янги тасодифий миқдор сифатида $X-M(X)$ айирмани қараймиз.

Четланиш деб, тасодифий миқдор билан унинг математик кутилиши орасидаги фарққа айтилади.

X нинг тақсимот қонуни маълум бўлсин:

$$\begin{array}{lllll} X & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n . \end{array}$$

Четланишнинг тақсимот қонунини ёзамиз. Четланиш $x_1-M(X)$ қиймат қабул қилиши учун тасодифий миқдор x_1 қиймат қабул қилиши кифоя. Бу ҳодисанинг эҳтимоли эса p_1 га тенг; демак, четланишнинг ҳам $x_1-M(X)$ қиймат қабул қилиш эҳтимоли p_1 га тенг. Четланишнинг бошқа мумкин бўлган қийматлари учун ҳам юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар ўринли.

Шундай қилиб, четланиш қуйидаги тақсимот қонунига эга.

$$\begin{array}{ccccc} X-M(X) & x_1-M(X) & x_2-M(X) & \ldots & x_n-M(X) \\ p & p_1 & p_2 & \ldots & p_n . \end{array}$$

Четланишнинг кейинчалик қўлланадиган муҳим хоссасини келтирамиз.

Теорема. *Четланишнинг математик кутилиши нолга тенг:*

$$M[X-M(X)]=0.$$

Исботи. Математик кутилишининг хоссаларидан (айирманинг математик кутилиши математик кутилишлар айирмасига тенг, ўзгармас соннинг математик кутилиши ўша ўзгармаснинг ўзига тенг) фойдаланиб ва $M(X)$ ўзгармас эканлигини назарда тутиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M[X-M(X)]=M(X)-M[M(X)]=M(X)-M(X)=0.$$

3-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси.

Практикада кўпинча тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини унинг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш талаб қилинади. Масалан, артиллерияда отилган снарядлар уриб туширилиши лозим бўлган нишон атрофига қанчалик яқин тушишини билиш муҳимдир.

Шундай қилиб, дисперсияни ҳисоблаш учун четланиш квадратининг мумкин бўлган қийматларини уларнинг эҳтимолларига кўпайтмалари йиғиндисини ҳисоблаш кифоя.

Эслатма. Таърифдан дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси ўзгармас миқдор эканлиги келиб чиқади. Кейинчалик, ўқувчи узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси ҳам ўзгармас миқдор эканлигини билиб олади.

Мисол. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2.

Ечилиши. Математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Четланиш квадратининг мумкин бўлган барча қийматларини топамиз:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69;$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09;$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Четланиш квадратининг тақсимот қонунини ёзамиз:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2.

Таърифга кўра дисперсия қуйидагига тенг:

$$D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01.$$

Кўриб турибмизки, дисперсияни таърифга асосланиб ҳисоблаш нисбатан узундан-узоқ экан. Кейинги параграфда мақсадга анча тезроқ олиб келадиган формула кўрсатилади.

4- §. Дисперсияни ҳисоблаш учун формула

Дисперсияни ҳисоблашда қуйидаги теоремадан фойдаланиш кўпинча қулай бўлади.

Теорема. *Дисперсия X миқдор квадратининг математик кутилишидан X нинг математик кутилиши квадратини айирилганига тенг:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Исботи. $M(X)$ математик кутилиш ўзгармас миқдор, демак, $2M(X)$ ва $M^2(X)$ ҳам ўзгармас миқдорлардир. Буни нинг ўша қийматларининг эҳтимолларидан катта бўлиб, X нинг «яқин» қийматларининг эҳтимоллари Y нинг шу қийматларининг эҳтимолларидан кичик бўлса, у ҳолда равшанки X нинг дисперсияси Y нинг дисперсиясидан катта бўлади.

Буни кўрсатувчи мисол келтирамиз.

2- мисол. Қуйидаги тақсимот қонунлари орқали берилган тасодифий миқдорларнинг дисперсияларини таққосланг:

X	-1	1	2	3	Y	-1	1	2	3
p	0,48	0,01	0,09	0,42	p	0,19	0,51	0,25	0,05

Ечилиши. Қуйидагиларга осон ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$M(X) = M(Y) = 0{,}97;$$

$$D(X) \simeq 3{,}69, \quad D(Y) \simeq 1{,}21.$$

Шундай қилиб, X ва Y нинг мумкин бўлган қийматлари ҳамда математик кутилишлари бир хил, аммо дисперсиялари ҳар хил, шу билан бирга $D(X) > D(Y)$.

Бундай натижани ҳисобламасдан ҳам, тақсимот қонунларининг ўзидан кўра билиш мумкин эди.

5- §. Дисперсиянинг хоссалари

1- хосса. *C ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг:*

$$D(C) = 0.$$

Исботи. Дисперсия таърифига кўра:

$$D(C) = M\{[C - M(C)]^2\}.$$

Математик кутилишнинг биринчи хоссасидан (ўзгармаснинг математик кутилиши унинг ўзига тенг) фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(C) = M[(C - C)^2] = M(0) = 0.$$

Шундай қилиб,

$$D(C) = 0.$$

Ўзгармас миқдор ҳамма вақт бир хил қиймат сақлашини, ва демак тарқоқликка эга эмаслигини инобатга олсак, бу хосса ойдин бўлиб қолади.

2- хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Масалан, учта қўшилувчи учун

$$D(X+Y+Z)=D[X+(Y+Z)]=D(X)+D(Y+Z)=$$
$$=D(X)+D(Y)+D(Z).$$

Ихтиёрий сондаги қўшилувчилар учун исбот математик индукция методи билан олиб борилади.

2-натижа. *Ўзгармас миқдор билан тасодифий миқдор йиғиндисининг дисперсияси тасодифий миқдорнинг дисперсиясига тенг*:

$$D(C+X)=D(X).$$

Исботи. C ва X миқдорлар ўзаро эркли, шунинг учун учинчи хоссага асосан:

$$D(C+X)=D(C)+D(X).$$

Биринчи хоссага асосан $D(C)=0$. Демак,

$$D(C+X)=D(X).$$

X ва $X+C$ миқдорлар фақат саноқ боши билан фарқ қилиши, ва демак, улар ўзларининг математик кутилишлари атрофида бир хил тарқоқлигини эътиборга олсак, хосса тушунарли бўлади.

4-хосса. *Иккита эркли тасодифий миқдор айирмасининг дисперсияси уларнинг дисперсиялари йиғиндисига тенг*:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Исботи. Учинчи хоссага асосан:

$$D(X-Y)=D(X)+D(-Y).$$

Иккинчи хоссага асосан:

$$D(X-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)$$

ёки

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

6-§. Эркли синашларда ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсияси

Ҳар биридан A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бир хил бўлган n та эркли синаш ўтказилаётган бўлсин. Бу синашларда ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсияси қанчага тенг? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

параметрли биномиал тақсимотнинг дисперсияси npq кўпайтмага тенг.

Мисол. Ҳар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,6 га тенг бўлган 10 та эркли синаш ўтказилмоқда. X тасодифий миқдор — бу синашларда ҳодисанинг рўй бериш сони дисперсиясини ҳисобланг.

Ечилиши. Шартга кўра $n = 10$, $p = 0,6$. Ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли:

$$q = 1 - 0,6 = 0,4.$$

Изланаётган дисперсия:

$$D(X) = npq = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 2,4.$$

7-§. Ўртача квадратик четланиш

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини унинг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш учун дисперсиядан ташқари яна баъзи-бир бошқа характеристикалар ҳам хизмат қилади. Улар жумласига ўртача квадратик четланиш киради.

X тасодифий миқдорнинг *ўртача квадратик четланиши* деб, дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсиянинг ўлчамлиги тасодифий миқдор ўлчамлигининг квадратига тенглигини кўрсатиш қийин эмас. Ўртача квадратик четланиш дисперсиядан олинган квадрат илдизга тенг бўлгани учун $\sigma(X)$ нинг ўлчамлиги X нинг ўлчамлиги билан бир хил бўлади. Шу сабабли тарқоқлик баҳоси ўлчамлиги тасодифий миқдор ўлчамлиги билан бир хил бўлиши мақсадга мувофиқ бўлган ҳолларда дисперсия эмас, балки ўртача квадратик четланиш ҳисобланади. Масалан, X чизиқли метрларда ўлчанса, у ҳолда $\sigma(X)$ ҳам чизиқли метрларда ўлчанади, $D(X)$ эса квадрат метрларда ўлчанади.

Мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни орқали берилган.

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5.

$\sigma(X)$ ўртача квадратик четланишни топинг.

9- §. Бир хил тақсимланган ўзаро эркли тасодифий миқдорлар

Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни бўйича унинг сонли характеристикаларини топиш мумкинлиги энди бизга маълум. Бундан, агар бир нечта тасодифий миқдорлар бир хил тақсимот қонунига эга бўлса, у ҳолда уларнинг сонли характеристикалари бир хил бўлиши келиб чиқади.

Бир хил тақсимланган ва демак, бир хил характеристикаларга (математик кутилиш, дисперсия ва бошқалар) эга бўлган ўзаро эркли n та X_1, X_2, ..., X_n тасодифий миқдорларни қарайлик. Шу миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг сонли характеристикаларини ўрганиш катта аҳамиятга эга, биз бу параграфда шу масала билан шуғулланамиз.

Қаралаётган тасодифий миқдорларнинг арифметик қийматини $\overline{X}$ орқали белгилаймиз:

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$$

Қуйидаги уч ҳолат $\overline{X}$ арифметик ўртача қийматнинг сонли характеристикалари билан ҳар бир алоҳида миқдорнинг тегишли характеристикалари орасида алоқа ўрнатади.

1. Ўзаро эркли ва бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг математик кутилиши ҳар бир миқдорнинг математик кутилиши а га тенг:

$$\overline{M}(X)=a$$

Исботи. Математик кутилиш хоссаларидан (ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин; йиғиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=$$

$$=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}.$$

Миқдорлардан ҳар бирининг математик кутилиши a га тенглигини назарга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(\overline{X})=\frac{na}{n}=a.$$

сонларнинг арифметик ўртача қийматини топиб, уни ўлчанаётган катталикнинг тақрибий қиймати сифатида олинади. Ўлчашлар бир хил шароитда бажарилади деб, қуйидагиларни исботланг:

а) арифметик ўртача қиймат айрим ўлчашларга нисбатан ишончлироқ натижа беради;

б) ўлчашлар сони ортиши билан бу натижанинг ишончлилиги ортади.

Ечилиши. а) Маълумки, айрим ўлчашлар ўлчанаётган катталикнинг ҳар хил қийматини беради. Ҳар бир ўлчашнинг натижаси кўп тасодифий сабабларга (ҳароратнинг ўзгариши, асбобнинг тебраниши ва шунга ўхшашларга) боғлиқ бўлиб, бу сабабларни аввалдан тўла-тўкис ҳисобга олиб бўлмайди. Шунинг учун, n та айрим ўлчаш натижасини X_1, X_2 ..., X_n (индекс ўлчаш номерини билдиради) тасодифий миқдорлар сифатида қарашга ҳақлимиз. Бу миқдорларнинг эҳтимоллари тақсимоти бир хил (ўлчашлар бир хил методика бўйича ва бир хил асбоблар билан ўтказилади), демак, улар бир хил сонли характеристикаларга эга; бундан ташқари, улар ўзаро эркли (ҳар бир айрим ўлчашнинг натижаси қолганларининг натижасига боғлиқ эмас).

Бундай миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг тарқоқлиги айрим миқдорларнинг тарқоқлигидан кам бўлиши бизга маълум. Бошқача айтганда, ўлчашларнинг арифметик ўртача қиймати ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматига айрим ўлчаш натижасига нисбатан яқинроқ бўлади. Бу эса бир неча ўлчашларнинг арифметик ўртача қиймати айрим ўлчашларга нисбатан ишончлироқ натижа беришини англатади.

б) Тасодифий миқдорларнинг сони ортиши билан уларнинг арифметик ўртача қийматининг тарқоқлиги камайиб бориши бизга маълум. Бу эса ўлчашлар сони ортиши билан уларнинг арифметик ўртача қиймати ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматидан борган сари камроқ фарқ қилади, демакдир. Шундай қилиб, ўлчашлар сонини орттириб, ишончлироқ натижа олинади.

Масалан, айрим ўлчашнинг ўртача квадратик четланиши $\sigma = 6$ *м* бўлиб, жами $n = 36$ та ўлчашлар ўтказилган бўлса, у ҳолда бу ўлчашларнинг арифметик ўртача қийматининг ўртача квадратик четланиши фақат 1 *м* га тенг. Ҳақиқатан,

$$\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.$$

Жумладан

$$\nu_1 = M(X),$$
$$\nu_2 = M(X^2).$$

Бу моментлардан фойдаланиб, дисперсияни ҳисоблаш $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$D\ (X) = \nu_2 - \nu^2_1. \qquad (*)$$

X тасодифий миқдорнинг моментларидан ташқари $X - M(X)$ четланиш моментларини ҳам текшириш мақсадга мувофиқдир.

X тасодифий миқдорнинг k-тартибли марказий моменти деб, $(X - M(X))^k$ миқдорнинг математик кутилишига айтилади:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

Жумладан,

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0, \qquad (**)$$
$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D\ (X). \qquad (***)$$

Бошланғич ва марказий моментларни боғловчи муносабатларни келтириб чиқариш осон.

Масалан, (*) ва (***) ни солиштириб,

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu^2_1$$

ни ҳосил қиламиз.

Марказий момент таърифи ва математик кутилиш хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларни ҳосил қилиш осон:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu^3_1,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu^2_1 - 3\nu^4_1.$$

Юқорироқ тартибли моментлар кам ишлатилади.

Эслатма. Бу ерда кўрилган моментлар *назарий моментлар* деб аталади. Кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланадиган моментлар назарий моментлардан фарқли ўлароқ *эмпирик моментлар* деб аталади. Эмпирик моментлар таърифлари кейинроқ берилади (XVII боб, 2- §).

Масалалар

1. Иккита эркли тасодифий миқдорнинг дисперсиялари маълум: $D(X) = 4$, $D(Y) = 3$. Бу миқдорлар йиғиндисининг дисперсиясини топинг.

Жавоби. 7.

11. Ўзаро эркли, бир хил тақсимланган 9 та тасодифий миқдордан ҳар бирининг дисперсияси 36 га тенг. Бу миқдор арифметик ўртача қийматининг дисперсиясини топинг.

12. Ўзаро эркли, бир хил тақсимланган 16 та тасодифий миқдордан ҳар бирининг ўртача квадратик четланиши 10 га тенг. Бу миқдорлар арифметик ўртача қийматининг ўртача квадратик четланишини топинг.

Жавоби. 2,5.

Тўққизинчи боб

КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ

1- §. Дастлабки изоҳлар

Маълумки, тасодифий миқдор синаш якунида мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан ишонч билан айтиб бўлмайди, чунки у ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча тасодифий сабабларга боғлиқ бўлиб, биз уларни ҳисобга ололмаймиз. Ҳар бир тасодифий миқдор ҳақида ана шу маънода жуда кам маълумотга эга бўлганимиз учун етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси тўғрисида ҳам бирор нарса айта олишимиз қийиндек кўринади. Аслида эса бу ундай эмас. Бирор нисбатан кенг шартлар остида етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тасодифийлик характери деярли йўқолар ва у қонуниятга айланиб қолар экан.

Практика учун жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликдаги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келадиган шартларни билиш жуда катта аҳамиятга эга, чунки бу ҳодисаларнинг қандай ривожланишини кўра билишга имкон беради. Бу шартлар умумий ном билан катта сонлар қонуни деб юритиладиган теоремаларда кўрсатилади. Булар жумласига Чебишев ва Бернулли теоремалари (бошқа теоремалар ҳам бор, лекин улар бу ерда қаралмайди) мансуб, Чебишев теоремаси катта сонлар қонунининг энг умумийси, Бернулли теоремаси эса энг соддасидир. Бу теоремаларни исботлашда Чебишев тенгсизлигидан фойдаланамиз.

2- §. Чебишев тенгсизлиги

Чебишев тенгсизлиги дискрет ва узлуксуз тасодифий миқдорлар учун ўринли. Соддалаштириш мақсадида биз бу тенгсизликни дискрет миқдорлар учун исботлаймиз.

жадвалида мумкин бўлган қийматлар шу тартибда белгилаб чиқилган дейиш мумкин). Шундай қилиб,

$$D(X) \geqslant [x_{k+1} - M(X)]^2 p_{k+1} + [x_{k+2} - M(X)]^2 p_{k+2} + \\ + \dots + [x_n - M(X)]^2 p_n .$$

$|x_j - M(X)| > \varepsilon$ $(j = k+1, k+2, \dots, n)$ тенгсизликнинг иккала томони ҳам мусбат, шунинг учун уларни квадратга ошириб, тенг кучли $|x_j - M(X)|^2 \geqslant \varepsilon^2$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан фойдаланиб ва қолган йиғиндидаги ҳар бир $|x_j - M(X)|^2$ кўпайтувчини ε^2 билан алмаштириб (бундан тенгсизлик фақат кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) \geqslant \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + \,..\, + p_n). \qquad (**)$$

Қўшиш теоремасига кўра $p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n$ эҳтимоллар йиғиндиси X тасодифий миқдор $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$ қийматларнинг, қайсиниси бўлса, бирини қабул қилиш эҳтимоли бўлиб, уларнинг ҳар бирида хам четланиш $|x_j - M(X)| \geqslant \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантиради. Бундан $p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots, + p_n$ йиғинди

$$P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon)$$

эҳтимолни ифодалаши келиб чиқади. Бу мулоҳаза (**) тенгсизликни бундай ёзишга имкон беради:

$$D(X) \geqslant \varepsilon^2 \cdot P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon)$$

ёки

$$P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (***)$$

(***) ни (*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Эслатма. Практика учун Чебишев тенгсизлигининг аҳамияти чекланган, чунки кўп ҳолларда у қўпол, баъзан эса тривиал (аҳамияти бўлмаган) баҳо беради. Масалан, агар $D(X) > \varepsilon^2$, ва демак, $\frac{D(X)}{\varepsilon^2} > 1$ бўлса, у ҳолда $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} < 0$; шундай қилиб, бу ҳолда Чебишев тенгсизлиги четланишнинг эҳтимоли манфий эмаслигини билдиради, бу эса шундоқ ҳам равшан, чунки ҳар қандай эҳтимол манфий бўлмаган сон билан ифодаланади.

$\overline{X}$ тасодифий миқдорга Чебишев тенгсизлигини қўллаймиз:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)\right|<\varepsilon\right)\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

ёки (*) муносабатни қўлласак:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-$$

$$-\frac{D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}. \qquad (**)$$

Дисперсиянинг хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин; эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсиялари йиғиндисига тенг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^2}.$$

Шартга кўра ҳамма тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари C ўзгармас сон билан чегараланган, яъни

$$D(X_1)\leqslant C;\ D(X_2)\leqslant C;\ \ldots;\ D(X_n)\leqslant C$$

тенгсизликлар ўринли, шунинг учун

$$\frac{D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)}{n^n}\leqslant\frac{C+C+\cdots+C}{n^2}=\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Шундай қилиб,

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\leqslant\frac{C}{n}. \qquad (***)$$

(***) нинг ўнг томонини (**) қўйиб (бундан (**) тенгсизлик фақат кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\left[\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

4-§. Чебишев теоремасининг моҳияти

Исботланган теореманинг моҳияти бундай: айрим эркли тасодифий миқдорлар ўз математик кутилишларидан анча фарқ қиладиган қийматлар қабул қилса-да етарлича катта сондаги тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати катта эҳтимоллик билан тайин ўзгармас сонга, чунончи $\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}$ сонга (ёки, хусусий ҳолда a сонга) яқин қийматларни катта эҳтимол билан қабул қилади. Бошқача сўз билан айтганда, айрим тасодифий миқдорлар анчагина сочилган бўлиши мумкин, лекин уларнинг арифметик ўртача қиймати кам тарқоқ бўлади.

Шундай қилиб, ҳар бир тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматлардан қайсинисини қабул қилишини аввалдан айтиб бўлмайди, аммо уларнинг арифметик ўртача қиймати қандай қиймат қабул қилишини олдиндан кўра билиш мумкин.

Шундай қилиб, етарлича катта сондаги эркли тасодифий миқдорларнинг (дисперсиялари текис чегараланган) арифметик ўртача қиймати тасодифийлик характерини йўқотади. Бу бундай изоҳланади: ҳар бир миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин, аммо арифметик ўртача қийматда улар ўзаро йўқолиб кетади.

Чебишев теоремаси фақат дискрет тасодифий миқдорлар учун эмас балки узлуксиз миқдорлар учун ҳам ўринли; у диалектик материализмнинг тасодифийлик ва зарурият орасидаги боғланиш ҳақидаги таълимотини тасдиқловчи ёрқин мисолдир.

5-§. Чебишев теоремасининг практика учун аҳамияти

Чебишев теоремасининг амалий масалаларни ҳал этишда қўлланишига доир мисоллар келтирамиз.

Одатда бирор физикавий катталикни ўлчаш учун бир нечта ўлчашлар ўтказилади ва уларнинг арифметик ўртача қиймати изланаётган ўлчам сифатида қабул қилинади. Қандай шартларда бундай ўлчаш усулини тўғри деб ҳисоблаш мумкин? Бу саволга Чебишев теоремаси (унинг хусусий ҳоли) жавоб беради.

Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир ўлчаш натижаларини X_1, X_2, ..., X_n тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу тасодифий бўлса ҳам, тутам етарлича кўп сондаги юзлаб толалардан иборатдир.

Бошқа мисол сифатида доннинг сифатини ундан озгинасини татиб кўришга асосланиб уни сифатини билишни олиш мумкин. Бу ҳолда ҳам таваккалига олинган донлар сони ҳамма дон сонидан анча кичик бўлса-да, лекин ўз-ўзи учун етарлича кўп.

Мана шу келтирилган мисолларнинг ўзидан, Чебишев теоремаси практика учун бебаҳо аҳамиятга эга деб хулоса чиқариш мумкин.

6- §. Бернулли теоремаси

n та эркли синаш ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлсин. Ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси тахминан қандай бўлишини аввалдан кўра билиш мумкинми? Бу саволга Яков Бернулли томонидан исботланган теорема (1713 йилда нашр этилган) ижобий жавоб беради, бу теорема «катта сонлар қонуни» номи билан юритилади; у эҳтимоллар назариясининг фан сифатида шаклланишига асос солди. Бернуллининг исботи мураккаб эди. Теореманинг содда исботини П. Л. Чебишев 1846 йилда баён этган.

Бернулли теоремаси. *Агар n та эркли синашнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ўзгармас ва синашлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частотанинг p эҳтимолдан четланиши абсолют қиймат бўйича исталганча кичик бўлиш эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.*

Бошқача қилиб айтганда, агар ε исталганча кичик мусбат сон бўлса, у ҳолда теорема шартлари бажарилганда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Исботи. X_1 орқали (дискрет тасодифий миқдор) биринчи синашда, X_2 орқали иккинчи синашда, .., X_n орқали n-синашда ҳодисанинг рўй бериш сонини белгилаймиз.

Равшанки, бу миқдорларнинг ҳар бири фақат иккита қиймат: 1 ни (A ҳодиса рўй берди) p эҳтимол билан, ва 0 ни (ҳодиса рўй бермади) $1 - p = q$ эҳтимол билан қабул қилиши мумкин.

Бу тенгликни ҳисобга олиб, узил-кесил

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Эслатма. Бернулли теоремасига асосланиб, синашлар сони ортиши билан нисбий частота албатта p эҳтимолга интилади, деб хулоса чиқариш нотўғри бўлар эди; бошқача қилиб айтганда, Бернулли теоремасидан $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = p$ тенглик келиб чиқмайди. Теоремада фақат тажрибалар сони етарлича катта бўлганда нисбий частотанинг ҳар бир синашда ҳодиса рўй беришининг ўзгармас эҳтимолидан исталганча кам фарқ қилиши эҳтимоли тўғрисида сўз боради.

Шундай қилиб, $\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг p эҳтимолга интилиши математик анализдаги маънода интилишдан фарқ қилади. Бу фарқни таъкидлаш мақсадида «эҳтимол бўйича яқинлашиш» тушунчаси киритилади. Аниқроғи, кўрсатилган интилиш турлари орасидаги фарқ қуйидагидан иборат: агар $\frac{m}{n}$ нисбат $n\to\infty$ да математик анализдаги интилиш маъносида p га интилса, у ҳолда $n = N$ учун ва ундан кейинги барча n лар учун албатта $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади; агарда $\frac{m}{n}$ нисбат $n\to\infty$ да p га эҳтимол бўйича интилса, у ҳолда n нинг айрим қийматларида тенгсизлик бажарилмай қолиши мумкин.

Шундай қилиб, Бернулли теоремасига кўра $n\to\infty$ да нисбий частота p га эҳтимол бўйича интилади. Бернулли теоремаси қисқача қуйидагича ёзилади:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{эҳт}} p.$$

Кўриниб турибдики, Бернулли теоремаси синашлар сони етарлича кўп бўлганда нисбий частота нима учун турғунлик хоссасига эга бўлишини тушунтиради ва эҳтимолнинг статистик таърифини (1-боб, 5—6-§§) асослайди.

Масалалар

1. «Эҳтимол бўйича интилиш» тушунчасидан фойдаланиб, Чебишев теоремасини таърифланг ва ёзинг.

2. Агар $D(X) = 0{,}001$ бўлса, $|X - M(X)| < 0{,}1$ нинг эҳтимолини Чебишев тенгсизлиги бўйича баҳоланг.

Жавоби. $P \geqslant 0{,}9$.

3. Қуйидагилар берилган: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 0{,}9$; $D(X) = 0{,}004$. Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, ε ни топинг.

Жавоби. 0,2.

2-§. Интеграл функциянинг хоссалари

1-хосса. *Интеграл функциянинг қийматлари* $[0,1]$ *кесмага тегишли:*

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1.$$

Исботи. Бу хосса интеграл функцияни эҳтимол сифатида таърифланишидан келиб чиқади: эҳтимол ҳамма вақт манфий бўлмаган ва бирдан катта бўлмаган сондир.

2-хосса. $F(x)$ *камаймайдиган функция, яъни агар* $x_2 > x_1$ *бўлса, у ҳолда* $F(x_2) \geqslant F(x_1)$.

Исботи. $x_2 > x_1$ бўлсин. X миқдор x_2 дан кичик қиймат қабул қилишидан иборат ҳодисани қуйидаги иккита биргаликда бўлмаган ҳодисага ажратиш мумкин: 1) X миқдор x_1 дан кичик қийматни $P(X < x_1)$ эҳтимол билан қабул қилади; 2) X миқдор $x_1 \leqslant X \leqslant x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматни $P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2)$ эҳтимол билан қабул қилади. Қўшиш теоремасига асосан:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2).$$

Бундан

$$P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2)$$

ёки

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leqslant X < x_2). \qquad (*)$$

Ҳар қандай эҳтимол манфий бўлмаган сон бўлгани учун $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$ ёки $F(x_2) \geqslant F(x_1)$. Исботланиши лозим бўлган муносабатни ҳосил қилдик.

1-натижа. *Тасодифий миқдорнинг* $(a\ b)$ *интервалда ётувчи қийматни қабул қилиш эҳтимоли интеграл функциянинг шу интервалдаги орттирмасига тенг:*

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Бу муҳим натижа (**) формулада $x_2 = b$ ва $x_1 = a$ деб олинса, ҳосил бўлади.

Мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги интеграл функция билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} x \leqslant -1 \text{ да } 0; \\ -1 < x \leqslant 3 \text{ да } \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}; \\ x > 3 \text{ да } 1. \end{cases}$$

ган чегарадан чиқиб кетмаслик эҳтимоли қизиқиш уйғотади, аммо деталь ўлчамининг лойиҳадаги ўлчам билан устма-уст тушиш эҳтимоли масаласи қўйилмайди.

Шуни айтиб ўтиш керакки, $P(X = x_1)$ эҳтимолнинг нолга тенглигидан $X = x_1$ ҳодиса (агар эҳтимолнинг классик таърифи билан чегараланиб қолинган бўлмаса, албатта) рўй бермайди деб ўйлаш нотўғри бўлади. Ҳақиқатан ҳам, синаш натижасида тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматларидан бирортасини албатта қабул қилади; шулар ичида x_1 ҳам бўлиши мумкин.

3-хосса. *Агар тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда*

$$1)\ x \leqslant a \text{ да } F(x) = 0;$$
$$2)\ x \geqslant b \text{ да } F(x) = 1.$$

Исботи. 1) $x_1 \leqslant a$ бўлсин. У ҳолда $X < x_1$ ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса (чунки шартга кўра X миқдор x_1 дан кичик қийматларни қабул қилмайди) ва демак, унинг эҳтимоли нолга тенг.

2) $x_2 \geqslant b$ бўлсин. У ҳолда $X < x_2$ муқаррар ҳодиса бўлади, (чунки X нинг барча мумкин бўлган қийматлари x_2 дан кичик) ва демак, унинг эҳтимоли бирга тенг.

Натижа. *Агар узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун x ўқда жойлашган бўлса, у ҳолда қуйидаги лимит муносабатлар ўринли;*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

3-§. Интеграл функциянинг графиги

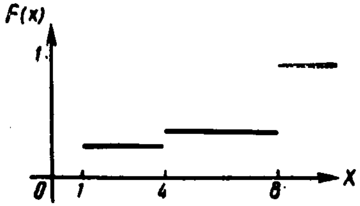
Исботланган хоссалар узлуксиз тасодифий миқдор интеграл функциясининг графиги қандай кўринишда бўлишини тасвирлашга имкон беради.

График $y = 0$, $y = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган полоса ичида жойлашган (биринчи хосса).

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари жойлашган (a, b) интервалда x нинг ўсиши билан график «тепага» кўтарилади» (иккинчи хосса).

$x \leqslant a$ да графикнинг ординаталари нолга тенг; $x \geqslant b$ да графикнинг ординаталари бирга тенг (учинчи хосса).

Узлуксиз тасодифий миқдор интеграл функциясининг графиги 1-расмда тасвирланган.



2- расм.

Масалалар

1. X тасодифий миқдор интеграл функция орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant -1 \text{ да } & 0, \\ -1<x\leqslant 2 \text{ да } & \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}; \\ x>2 \text{ да } & 1. \end{cases}$$

Синаш натижасида X миқдор (0, 1) интервалда ётган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби. $\frac{1}{3}$.

2. X тасодифий микдор интеграл функция орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant 2 \text{ да } & 0; \\ 2<x\leqslant 4 \text{ да } & \frac{1}{2}x-1; \\ x>4 \text{ да } & 1. \end{cases}$$

Синаш натижасида X миқдор (2; 3) интервалда ётган қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг:

Жавоби. $\frac{1}{2}$.

3. X дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни орқали берилган:

X	2	6	10
P	0,5	0,3	0,1.

Интеграл функциянинг графигини ясанг.

Ньютон—Лейбниц формуласига асосан:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

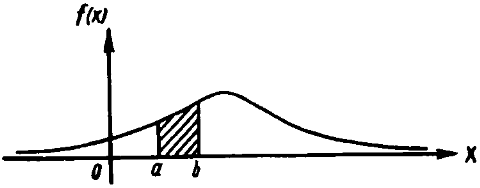
Шундай қилиб,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Ҳосил қилинган натижани геометрик нуқтаи-назардан бундай талқин қилиш мумкин: узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a, b) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли x ўқ, $f(x)$ тақсимот эгри чизиғи ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзига тенг (3- расм).



3- расм.

Эслатма. Хусусий ҳолда, $f(x)$ жуфт функция бўлиб, интервалнинг чегаралари координаталар бошига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда

$$P(-a < X < a) = P(|x| < a) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Мисол. X тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0 < x \leqslant 1 \text{ да } 2x; \\ x > 1 \text{ да } 0. \end{cases}$$

Мисол. Берилган дифференциал функция бўйича интеграл функцияни топинг:

$$f(x)=\begin{cases} x\leqslant a \text{ да} & 0; \\ a<x\leqslant b \text{ да} & \frac{1}{b-a}; \\ x>b \text{ да} & 0. \end{cases}$$

Топилган функциянинг графигини ясанг.

Ечилиши. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ формуладан фойдаланамиз.

Агар $x\leqslant a$ бўлса, у ҳолда $f(x)=0$ ва демак, $F(x)=0$. Агар $a<x\leqslant b$ бўлса, у ҳолда $f(x)=\frac{1}{a-b}$ ва, демак,

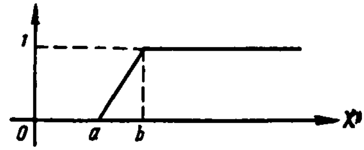
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{a} 0\,dx+\int\limits_{a}^{x}\frac{dx}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Агар $x>b$ бўлса, у ҳолда

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a} 0\,dx+\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{b-a}+\int\limits_{b}^{x} 0\,dx=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Шундай қилиб, изланаётган интеграл функцияни аналитик кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant a & \text{да} & 0; \\ a<x\leqslant b & \text{да} & \frac{x-a}{b-a}; \\ x>b & \text{да} & 1. \end{cases}$$



4- расм.

Бу функциянинг графиги 4- расмда тасвирланган.

тенглик бажарилишини талаб қилиш керак. Бундан

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}}}.$$

Аниқмас интегрални топайлик:

$$\int \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = \int \frac{e^{x} dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^{x}.$$

Қуйидаги хосмас интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} = \lim_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{0} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} + \lim_{c \to 0} \int\limits_{0}^{C} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}} =$$

$$= \lim_{b \to -\infty} (-\operatorname{arctg} e^{b}) + \lim_{c \to \infty} (\operatorname{arctg} e^{c}) = \frac{\pi}{2}.$$

Шундай қилиб, изланаётган параметр:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

5- §. Дифференциал функциянинг эҳтимолий маъноси

Фараз қилайлик, $F(x)$ узлуксиз X тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси бўлсин. Дифференциал функция таърифига кўра $f(x) = F'(x)$, ёки бошқача кўринишда

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Бизга маълумки, $F(x + \Delta x) - F(x)$ айирма X нинг $(x,\ x + \Delta x)$ оралиққа тегишли қийматни қабул қилиш эҳтимолини аниқлайди. Шундай қилиб, узлуксиз тасодифий миқдорнинг $(x,\ x + \Delta x)$ оралиққа тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини шу оралиқ узунлигига нисбатининг лимити ($\Delta x \to 0$ да) дифференциал функциянинг шу x нуқтадаги қийматига тенг экан.

6- §. Эҳтимолларнинг текис тақсимот қонуни

Практика қўядиган масалаларни ҳал этишда узлуксиз тасодифий миқдорларнинг турли тақсимот қонунлари билан иш кўришга тўғри келади. Бу тақсимотларнинг дифференциал функцияларини ҳам тақсимот қонунлари дейилади. Масалан, кўпинча, текис ва нормал тақсимотлар учраб туради. Бу параграфда текис тақсимот қонунини қараймиз. Нормал тақсимот қонунига навбатдаги боб бағишланган.

Эҳтимолларнинг *текис тақсимоти* деб, тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари тегишли бўлган интервалда дифференциал функцияси ўзгармас бўлган тасодифий миқдор тақсимотига айтилади.

Текис тақсимланган узлуксиз тасодифий миқдорга мисол келтирамиз.

Мисол. Ўлчаш асбоби бирор бирликда градуслаб чиқилган. Ҳисобни энг яқин бутун бўлинмагача яхлитлаш хатосини, иккита қўшни бўлинма орасидаги ихтиёрий қийматни ўзгармас эҳтимоли зичлиги билан қабул қилувчи X тасодифий миқдор сифатида қараш мумкин. Шундай қилиб, X текис тақсимотга эга.

Текис тақсимотнинг дифференциал функциясини топамиз: бунда тасодифий миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалда ва шу оралиқда дифференциал функция ўзгармас деб ҳисоблаймиз: $f(x) = C$.

Шартга кўра X (a, b) интервалдан ташқаридаги қийматларни қабул қилмайди, шунинг учун $x < a$ ва $x > b$ бўлганда $f(x) = 0$ бўлади.

Ўзгармаснинг қийматини топайлик. Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлгани учун қуйидаги тенглик бажарилиши керак.

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \text{ ёки } \int_a^b C\,dx = 1.$$

Бундан

$$C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a}.$$

Шундай қилиб, текис тақсимот қонунининг дифференциал функциясини аналитик кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

3. X тасодифий миқдор интеграл функция орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant 0 & \text{да } 0; \\ 0<x\leqslant 1 & \text{да } x; \\ x>1 & \text{да } 1. \end{cases}$$

Дифференциал функцияни топинг.

Жавоби.

$$f(x)=\begin{cases} x\leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0<x<1 \text{ да } 1, \\ x>1 \text{ да } 0. \end{cases}$$

4. X тасодифий миқдор интеграл функцияси орқали берилган:

$$F(x)=\begin{cases} x\leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0<x\leqslant \pi \text{ да } \frac{1}{2}(1-\cos x); \\ x\geqslant \pi \text{ да } 1. \end{cases}$$

Дифференциал функцияни топинг.

Жавоби.

$$f(x)=\begin{cases} x\leqslant 0 \text{ да } 0; \\ 0<x\leqslant \pi \text{ да} \frac{1}{2}\sin x; \\ x>\pi \text{ да } 0\cdot \end{cases}$$

Ўн иккинчи боб

НОРМАЛ ТАҚСИМОТ

1- §. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари

Дискрет миқдорларнинг сонли характеристикалари таърифларини узлуксиз миқдорга ҳам тарқатамиз. Математик кутилишдан бошлаймиз.

X узлуксиз тасодифий миқдор $f(x)$ дифференциал функция орқали берилган бўлсин. Айтайлик, X нинг мумкин бўлган барча қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлсин. Бу кесмани узунликлари Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n бўлган n та қисмий кесмага бўламиз ва уларнинг ҳар бирида ихтиёрий x_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ нуқта танлаймиз. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилишини дискрет ҳолдагига ўхшаш аниқлашни кўзда тутиб, мумкин бўлган x_i қийматларни уларнинг Δx_i интервалга тушиш эҳтимолларига ($f(x)\,\Delta x_i$ кўпайтма X нинг Δx интервалга тушиш эҳтимолига тақрибан тенг) кўпайтмалари йиғиндиларини тузамиз:

$$\sum x_i \cdot f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши дискрет миқдор учун бўлгани каби

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

тенглик билан аниқланади.

1-эслатма. Дискрет миқдорларнинг математик кутилиши ва дисперсияси хоссалари узлуксиз миқдорлар учун ҳам сақланишини исботлаш мумкин.

2-эслатма. Дисперсияни ҳисоблаш учун қулай бўлган ушбу формулаларни осон ҳосил қилиш мумкин:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

Мисол. Ушбу интеграл функция билан берилган X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг:

$$F(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 & \text{да} \quad 0, \\ 0 < x \leqslant 1 & \text{да} \quad x, \\ x > 1 & \text{да} \quad 1. \end{cases}$$

Ечилиши. Дифференциал функцияни топамиз:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 & \text{да} \quad 0, \\ 0 < x < 1 & \text{да} \quad 1, \\ x > 1 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

Математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Дисперсияни топамиз:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

2- §. Нормал тақсимот

Нормал тақсимот деб

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Янги $z=\frac{x-a}{\sigma}$ ўзгарувчи киритамиз Бундан $x-a=\sigma z$, $dx=\sigma dz$. Янги интеграллаш чегаралари олдингиларга тенглигини эътиборга олиб,

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} z\cdot ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

ни ҳосил қиламиз: $u=z$, $dv=ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$ деб бўлаклаб интеграллаш натижасида

$$D(X)=\sigma^2$$

ни топамиз. Демак,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma.$$

Шундай қилиб, **нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши σ параметрга тенг**

1- эслатма. Умумий нормал тақсимот деб ихтиёрий a ва σ $(\sigma>0)$ параметрли нормал тақсимотга айтилади.

Нормаланган нормал тақсимот деб $a=0$ ва $\sigma=1$ параметрли нормал тақсимотга айтилади. Масалан, X a ва σ параметрли нормал миқдор бўлса, у ҳолда $U=\frac{X-a}{\sigma}$ нормаланган нормал миқдор бўлади, шу билан бирга $M(U)=0$, $\sigma(U)=1$. Нормаланган тақсимотнинг дифференциал функцияси

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Бу функциянинг қийматлари жадвали тузилган (1- илова).

2- эслатма. Умумий нормал тақсимотнинг интеграл функцияси (XI боб, 3- §)

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz,$$

нормаланган нормал миқдорнинг интеграл функцияси

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

$F_0(x)$ функциянинг қийматлари жадвали тузилган. $F(x)=F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ эканлигини текшириш осон.

4. Функциянинг экстремумини текширамиз. Биринчи ҳосилани топамиз:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$x = a$ да $y' = 0$, $x < a$ да $y' > 0$, $x > a$ да $y' < 0$ лигини кўриш осон. Демак, функция $x = a$ да максимумга эга бўлиб, у $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ га тенг.

5. Функциянинг аналитик ифодасида $(x—a)$ айирма квадратда, яъни функция графиги $x = a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик.

6. Функциянинг букилиш нуқтасини текширамиз. Иккинчи ҳосилани топамиз:

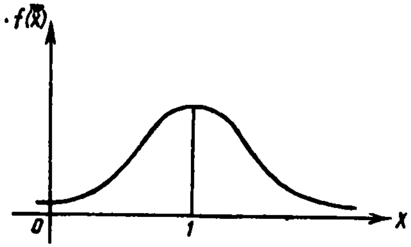
$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

Иккинчи ҳосила $x = a + \sigma$ ва $x = a - \sigma$ да нолга тенг, бу нуқталардан ўтишда эса ишораси ўзгаришини кўриш осон (функция иккала нуқтада ҳам $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ га тенг). Шундай қилиб, графикнинг

$$\left(a - \sigma, \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right) \text{ ва } \left(a + \sigma, \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$$

нуқталари букилиш нуқталардир.

7- расмда нормал эгри чизиқ $a = 1$ ва $\sigma = 2$ ҳолда тасвирланган.



7- расм.

$a=0$ ва $\sigma=1$ бўлгандаги $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ нормал эгри чизиқ *нормаланган* деб аталади.

5-§. Нормал тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тушиш эҳтимоли

Биз энди агар X тасодифий миқдор $f(x)$ дифференциал функция орқали берилган бўлса, у ҳолда X нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли бундайлигини биламиз.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

X тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин, у ҳолда X нинг (α, β) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоли

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

га тенг.

Бу формулани тайёр жадваллардан фойдаланиш мумкин бўладиган қилиб ўзгартирамиз. Иккинчи $z=\frac{x-a}{\sigma}$ ўзгарувчини киритамиз. Бундан $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$. Интеграллашнинг янги чегараларини топамиз. Агар $x=\alpha$ бўлса, у ҳолда $z=\frac{\alpha-a}{\sigma}$; агар $x=\beta$ бўлса, у ҳолда $z=\frac{\beta-a}{\sigma}$.

Шундай қилиб,

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}(\sigma dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

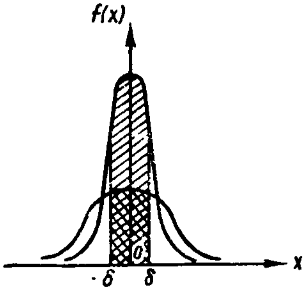
тенгсизликни эътиборга олиб (Лаплас функцияси тоқдир),

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Жумладан $a=0$ да

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

9- расмда агар иккита тасодифий миқдор нормал тақсимланган ва $a=0$ бўлса, у ҳолда $(-\delta, \delta)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишнинг эҳтимоли σ қиймати кичикроқ бўлган тасодифий миқдорда каттадир. Бу факт σ параметрнинг эҳтимолий маъносига бутунлай тўғри келади (σ ўртача квадратик четланиш бўлиб, у тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилиши атрофида тарқоқлигини характерлайди).



9- расм

Эслатма. $|X-a|<\delta$ ва $|X-a|\geqslant\delta$ тенгсизликларнинг юз беришдан иборат ҳодисалар, равшанки, қарама-қаршидир. Шунинг учун, агар $|X-a|<\delta$ ҳодисанинг юз бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, у ҳолда $|X-a|\geqslant\delta$ тенгсизликнинг эҳтимоли $1-p$ га тенг.

Мисол X тасодифий миқдор нормал тақсимланган. X нинг математик кутилиши ва ўртача квадратик четланиши мос равишда 20 ва 10 га тенг. Четланиш абсолют қиймати бўйича 3 дан кичик бўлишининг эҳтимолини топинг.

Ечилиши.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $\delta=3$, $a=20$, $\sigma=10$. Демак,

$$P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)=2\Phi(0,3).$$

Жадвалдан (2- илова) $\Phi(0,3)=0,1179$ ни топамиз. Изланаётган эҳтимол:

$$P(|X-20|<3)=0,2358.$$

миқдор жуда катта сондаги ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар йиғиндисидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирининг йиғиндига таъсири жуда кичик бўлса, у ҳолда X нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлади.

Практикада худди шундай тасодифий миқдорлар энг кўп учрайди. Айтилганларни тушунтирадиган мисол келтирамиз.

Мисол. Бирор физикавий катталик ўлчанаётган бўлсин. Ҳар қандай ўлчаш ҳам ўлчанаётган катталикнинг тақрибий қийматинигина беради, чунки ўлчаш натижасига ҳар хил тасодифий факторлар (температура, асбобнинг тебранишлари, намлик ва бошқалар) таъсир қилади. Бу факторларнинг ҳар бири жуда кам «хусусий хатони» юзага келтиради. Аммо бу факторларнинг сони жуда катта бўлгани учун уларнинг биргаликда таъсири сезиларли «жами хатони» юзага келтиради.

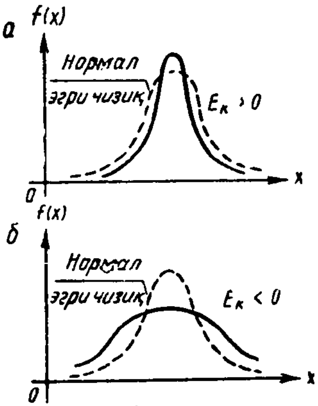
Жами хатони катта сондаги ўзаро боғлиқ бўлмаган хусусий хатолар йиғиндиси деб қараётиб, жами хато нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга деб хулоса чиқаришга ҳақлимиз, тажриба бундай хулосанинг тўғрилигини тасдиқлайди.

9-§. Назарий тақсимотнинг нормал тақсимотдан четланишини баҳолаш. Асимметрия ва эксцесс

Нисбий частоталар тақсимоти *эмпирик тақсимот* деб аталади. Эмпирик тақсимотларни математик статистика ўрганади.

Эҳтимоллар тақсимоти *назарий тақсимот* деб аталади. Назарий тақсимотларни эҳтимоллар назариясида ўрганилади. Бу параграфда назарий тақсимотлар қаралади.

Нормал тақсимотдан фарқ қиладиган тақсимотларни ўрганишда бу фарқни миқдор жиҳатдан баҳолаш зарурати юзага келади. Шу мақсадда махсус характеристикалар, жумладан, асимметрия ва эксцесс тушунчалари киритилади. Нормал тақсимот учун бу характеристикалар нолга тенг. Шу сабабли, агар ўрганилаётган тақсимот учун ассимметрия ва эксцесс унча катта бўлмаган қийматларга эга бўлса, у ҳолда бу тақсимотнинг нормал тақсимотга яқинлигини тахмин қилиш мумкин. Аксинча, асимметрия ва эксцесс-



11-расм

Назарий тақсимот эксцесси деб

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

тенглик билан аниқланадиган характеристикага айтилади.

Нормал тақсимот учун $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, бинобарин, эксцесс нолга тенг. Шу сабабли, агар бирор тақсимотнинг эксцесси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу тақсимот эгри чизиғи нормал эгри чизиқдан фарқ қилади: агар эксцесс мусбат бўлса, у ҳолда эгри чизиқ нормал эгри чизиққа қараганда баландроқ» ва «ўткирроқ» учга эга бўлади (11-а расм), агар эксцесс манфий бўлса, у ҳолда тақсосланаётган эгри чизиқ нормал эгри чизиққа қараганда пастроқ ва «яссироқ» учга эга бўлади (11-б расм). Бунда нормал ва назарий тақсимотлар бир хил математик кутилишлар ва дисперсияларга эга деб ҳисобланади.

10-§. Бир тасодифий аргумент функцияси ва унинг тақсимоти

Аввало, бундан буён «эҳтимолларнинг тақсимот қонуни» дейиш ўрнига, кўпинча, қисқа қилиб «тақсимот» дейишимизни айтиб ўтамиз.

Агар X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига Y тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган битта қиймати мос келса, у ҳолда Y ни X тасодифий аргументнинг функцияси дейилади:

$$Y = \varphi(X).$$

Энди дискрет ва узлуксиз аргумент тақсимоти бўйича функция тақсимотини қандай топиш кўрсатилади.

1. X аргумент—дискрет тасодифий миқдор бўлсин.

а) Агар X аргументнинг мумкин бўлган турли қийматларига Y функциянинг мумкин бўлган турли қийматлари мос келса, у ҳолда X ва Y нинг мос қийматларининг эҳтимоллари ўзаро тенг бўлади.

Ечилиши. $y = x^3$ функция дифференциалланувчи ва қатъий ўсувчи бўлгани учун юқоридаги

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)| \qquad (*)$$

формулани қўлланиш мумкин. $y = x^3$ га тескари функцияни топамиз:

$$\psi(y) = x = y^{\frac{1}{3}}.$$

$f(\psi(y))$ ни топамиз. Шартга кўра

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

шу сабабли

$$f[\psi(y)] = f\left(y^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}. \qquad (**)$$

Тескари функциянинг y бўйича ҳосиласини топамиз:

$$\psi'(y) = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}. \qquad (***)$$

Изланаётган дифференциал функцияни топамиз, бунинг учун (**) ва (***) ни (*) га қўямиз:

$$g(y) = \frac{1}{3\sigma y^{\frac{2}{3}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}.$$

Эслатма. (*) формуладан фойдаланиб, нормал тақсимланган X аргументнинг $Y = AX + B$ чизиқли функцияси нормал тақсимланганлигини исботлаш мумкин. Шу билан бирга Y нинг математик кутилишини топиш учун функция ифодасида X нинг ўрнига унинг a математик кутилишини қўйиш лозим:

$$M(Y) = Aa + B;$$

Y нинг ўртача квадратик четланишини топиш учун X аргументнинг ўртача квадратик четланишини X олдидаги коэффициентнинг модулига кўпайтириш лозим:

$$\sigma(Y) = |A| \cdot \sigma(X).$$

Ечилиши. Y нинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$\varphi(1) = 1^2 + 1 = 2;\ \ \varphi(3) = 3^2 + 1 = 10;\ \ \varphi(5) = 5^2 + 1 = 26.$$

Функциянинг изланаётган математик кутилиши

$$M[X^2 + 1] = 2\cdot 0{,}2 + 10\cdot 0{,}5 + 26\cdot 0{,}3 = 13{,}2.$$

2. X аргумент $f(x)$ дифференциал функция орқали берилган узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин. $Y=\varphi(X)$ функциянинг математик кутилишини топиш учун аввал Y миқдорнинг $g(y)$ дифференциал функциясини топиш, кейин эса

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot g(y)dy$$

формуладан фойдаланиш мумкин. Лекин $g(y)$ дифференциал функцияни излаш қийинлашадиган бўлса, у ҳолда $g(X)$ нинг математик кутилишини бевосита

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$$

формула орқали топиш мумкин. Жумладан, X нинг мумкин бўлган қийматлари $(a,\ b)$ интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$M[\varphi(X)] = \int_{a}^{b} \varphi(x)f(x)dx. \qquad (**)$$

Буни исботлаб ўтирмасдан, шуни қайд қиламизки, унинг исботи (*) формула исботига ўхшаш: қўшишни интеграллашга, эҳтимолни эҳтимол $f(x)\Delta x$ элементига алмаштирилади.

2-мисол. Узлуксиз X тасодифий миқдор $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда $f(x) = \sin x$ дифференциал функция орқали берилган; $f(x) = 0$ — интервалдан ташқарида. $Y = \varphi(X) = X^2$ функциянинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. (**) формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра

$$f(x) = \sin x,\ \ \varphi(x) = x^2,\ \ a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}.$$

Ечилиши. Z нинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган қийматларининг ҳар бири билан Y нинг мумкин бўлган барча қийматлари йиғиндисидир:

$$z_1 = 1 + 3 = 4;\ z_2 = 1 + 4 = 5;\ z_3 = 2 + 3 = 5;\ z_4 = 2 + 4 = 6.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолларини топамиз.

$Z = 4$ бўлиши учун X миқдор $x_1 = 1$ қиймат ва Y миқдор $y_1 = 3$ қиймат қабул қилиши етарли. Мумкин бўлган бу қийматларнинг эҳтимоллари мос равишда 0,4 ва 0,2 га тенг.

X ва Y аргументлар эркли бўлгани учун $X = 1$ ва $Y = 3$ ҳодисалар ҳам эркли, бинобарин уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли (яъни $Z = 1 + 3 = 4$ ҳодиса эҳтимоли) кўпайтириш теоремасига кўра $0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$ га тенг.

Шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$P(Z = 1 + 4 = 5) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32;$$
$$P(Z = 2 + 3 = 5) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12;$$
$$P(Z = 2 + 4 = 6) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

Изланаётган тақсимотни, аввал биргаликда бўлмаган $Z = z_2$, $Z = z_3$ ҳодисаларнинг эҳтимолларини жамлаб $(0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44)$ топамиз:

Z	4	5	6
p	0,08	0,44	0,48.

Контроль қилиш: $0{,}08 + 0{,}44 + 0{,}48 = 1$.

2. X ва Y — узлуксиз тасодифий миқдорлар бўлсин. Қуйидаги исботланган: агар X ва Y эркли бўлса, у ҳолда $Z = X + Y$ йиғиндининг $g(z)$ дифференциал функцияси (аргументлардан камида биттасининг дифференциал функцияси $(-\infty, \infty)$ интервалда битта формула орқали берилган деган шарт остида)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x)\,dx \qquad (*)$$

тенгликдан ёки унга тенг кучли

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y) f_2(y)\,dy \qquad (**)$$

тенгликдан топилиши мумкин, бу ерда f_1, f_2 — аргументларнинг дифференциал функциялари.

Ечилиши. Аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий бўлмаганлиги учун (***) формуладан фойдаланамиз:

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx = \int_0^z \left[\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right]\left[\frac{1}{4}e^{-\frac{z-x}{4}}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{12}e^{-\frac{z}{4}}\int_0^z e^{-\frac{x}{12}}dx = e^{-\frac{z}{4}}\left(1 - e^{-\frac{z}{12}}\right).$$

Бу ерда $z \geqslant 0$ эканлигини айтиб ўтамиз, чунки $Z=X+Y$ ва шартга кўра X ва Y нинг мумкин бўлган қийматлари манфий эмас.

Контрол қилиш мақсадида китобхонга

$$\int_0^\infty g(z)dz = 1$$

эканлигига ишонч ҳосил қилишни тавсия қиламиз.

Бундан кейин келадиган параграфларда нормал тақсимот билан боғланган тақсимотлар қисқача тавсифланган, улардан математик статистикани баён қилишда фойдаланилади.

13-§. χ^2 тақсимот

Айтайлик, X_i ($i = 1,2, \ldots, n$) эркли нормал тасодифий миқдорлар бўлиб, шу билан бирга уларнинг ҳар бирини математик кутилиши 0 га, ўртача квадратик четланиши эса бирга тенг бўлсин У ҳолда бу миқдорлар квадратлари йиғиндиси

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

$k=n$ эркинлик (озодлик) даражали (эркинлик даражаси $k=n$ бўлган) χ^2 қонун («хи квадрат») бўйича тақсимланган, агар бу миқдорлар битта чизиқли муносабат билан боғланган, масалан, $\sum X_i = n\overline{X}$ бўлса, у ҳолда эркинлик даражалари сони $k=n-1$ бўлади.

Бу тақсимотнинг дифференциал функцияси

$$F = \frac{\frac{U}{k_1}}{\frac{V}{k_2}} \qquad (*)$$

миқдор Фишер—Снедекорнинг k_1 ва k_2 эркинлик даражали F тақсимоти деб аталадиган тақсимотга эга (уни баъзан V^2 орқали белгиланади).

F тақсимотнинг дифференциал функцияси:

$$f(x) = \begin{cases} x \leqslant 0 \text{ да } & 0, \\ x > 0 \text{ да } & C_0 \dfrac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_1 + k_2 x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}} \end{cases}$$

бу ерда

$$C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) \cdot k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}.$$

Бу ердан кўриниб турибдики, F тақсимот иккита параметр — эркинлик даражаси сонлари орқали аниқланади. Бу тақсимот ҳақида қўшимча маълумотлар келгусида келтирилади (XVIII боб, 8-§).

Мисоллар

1. X тасодифий миқдорнинг дифференциал функциясини билган холда, унинг математик кутилиши ва дисперсиясини топинг:

а) $-1 < x < 1$ да $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, x нинг қолган қийматларида $f(x) = 0$.

б) $a - l \leqslant x \leqslant a + l$ да $f(x) = \dfrac{1}{2l}$, x нинг қолган қийматларида $f(x) = 0$.

Жавоби. а) $M(X) = 0$, $D(X) = \dfrac{1}{2}$; б) $M(X) = a$, $D(X) = \dfrac{l^2}{3}$.

2. X тасодифий миқдор нормал тақсимланган. Бу миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда 6 ва 2 га тенг. Синаш натижасида X миқдор (4; 8) интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Жавоби: 0,6826.

3. Тасодифий миқдор нормал тақсимланган. Бу миқдорнинг ўртача квадратик четланиши 0,4 га тенг. Бу миқдорни унинг математик кути-

Бу қонунларнинг композициясини, яъни $Z = X + Y$ тасодифий миқдорнинг дифференциал функцияси топинг.

$$Жавоби.\ g(z) = \begin{cases} z \geqslant 0 \text{ да} & \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{5}} \left(1 - e^{-\frac{2z}{15}}\right), \\ z < 0 \text{ да} & 0. \end{cases}$$

Ўн учинчи боб

КЎРСАТКИЧЛИ ТАҚСИМОТ

1-§. Кўрсаткичли тақсимот таърифи

Кўрсаткичли (экспоненциал) тақсимот деб

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } 0, \\ x \geqslant 0 \text{ да } \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$$

(бу ерда λ — ўзгармас мусбат катталик) дифференциал функция билан тасвирланадиган эҳтимоллар тақсимотига айтилади.

Кўрсаткичли тақсимот битта λ параметр билан аниқланишини кўриб турибмиз. Кўрсаткичли тақсимотнинг бу хусусияти унинг кўп сондаги параметрларга боғлиқ тақсимотларга қараганда устунлигини кўрсатиб турибди. Одатда параметрлар номаълум бўлиб, уларни баҳолашга (тақрибий қийматларини) топишга тўғри келади; иккита ёки учта ва ҳ. к. параметрларни баҳолашдан кўра битта параметрни баҳолаш осонлиги ўз-ўзидан равшан. Кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган узлуксиз тасодифий миқдорга мисол бўлиб, энг оддий оқим иккита кетма-кет ҳодисасининг рўй бериши орасидаги вақт тақсимоти (5- § га қаранг) хизмат қилиши мумкин.

Кўрсаткичли тақсимотнинг интеграл функциясини топамиз (XI боб, 3- §):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx = \int_{-\infty} 0 \cdot dx = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-x}.$$

Кўрсаткичли тақсимотни биз дифференциал функция ёрдамида аниқладик, уни интеграл функция ёрдамида ҳам аниқлаш мумкинлиги тушунарли.

Мисол. Узлуксиз X тасодифий миқдор

$$x \geqslant 0 \text{ да } f(x) = 2e^{-2x}, \quad x < 0 \text{ да } f(x) = 0$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. Синаш натижасида X миқдорнинг (0,3; 1) интервалга тушиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. Шартга кўра $\lambda = 2$. (*) формуладан фойдаланамиз:

$$P(0{,}3 < X < 1) = e^{-(2 \cdot 0{,}3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = e^{-0{,}6} - e^{-2} =$$
$$= 0{,}54881 - 0{,}13534 \simeq 0{,}41.$$

3- §. Кўрсаткичли тақсимотнинг сон характеристикалари

Узлуксиз X тасодифий миқдор

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ да } 0, \\ x \geqslant 0 \text{ да } \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлсин.

Математик кутилишни топамиз (XII боб, 1-§):

$$M(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx.$$

Бўлаклаб интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad (*)$$

Шундай қилиб, кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилиши λ параметрга тескари катталикка тенг.

Дисперсияни топамиз (XII боб, 1-§):

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 f(x)\, dx - [M(X)]^2 = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Демак,

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4- §. Ишончлилик функцияси

Бирор қурилмани у «оддий» ёки «мураккаб» бўлишидан қатъи назар элемент деб атаймиз.

Айтайлик, элемент вақтнинг $t_0 = 0$ моментида ишлай бошласин, вақт ўтиши билан эса ишдан чиқсин. T орқали тасодифий миқдор—элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтини белгилаймиз. Агар элемент t дан кичик вақт бузилмасдан (бузилгунга қадар) ишлаган бўлса, у ҳолда t вақт ичида бузилиш рўй беради.

Шундай қилиб, ушбу

$$F(t) = P(T < t)$$

интеграл функция t вақт ичида ишдан чиқиш эҳтимолини аниқлайди. Демак, шу t вақт ичида бузилмасдан ишлаш эҳтимоли, яъни $T > t$ қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоли

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \qquad (*)$$

га тенг.

$R(t)$ *ишончлилик функцияси* деб элементнинг t вақт ичида бузилмасдан ишлаш эқтимолини аниқлайдиган функцияга айтилади:

$$R(t) = P(T > t).$$

5- §. Ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни

Кўпинча, элементнинг бузилмасдан ишлаш вақтининг давомийлиги кўрсаткичли тақсимотга эга. Унинг интеграл функцияси:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Демак, элементнинг бузилмасдан ишлаш вақти кўрсаткичли тақсимланган ҳолда ишончлилик функцияси олдинги параграфнинг (*) муносабатига асосан

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

кўринишга эга.

Ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни деб

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad (*)$$

тенглик билан аниқланадиган ишончлилик функциясига айтилади: бу ерда λ ишдан чиқиш интенсивлиги.

Ишончлилик функцияси таърифидан (4- §) келиб чиққанидек, бу формула агар элементнинг бузилмасдан ишлаш вақти

$$P(A)=e^{-\lambda t_0},\ P(B)=e^{-\lambda t},$$

$$P(AB)=e^{-\lambda(t_0+t)}=e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}.$$

Элемент ўтган $(0,\ t_0)$ интервалда бузилмасдан ишлади деган шартда унинг $(t_0,\ t_0+t)$ интервалда бузилмасдан ишлашининг шартли эҳтимолини топамиз (III боб, 5- §, 2- эслатма):

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}}=e^{-\lambda t}.$$

Бу ердан кўрамизки, ҳосил қилинган формула t_0 ни ўз ичига олмасдан, балки фақат t ни ўз ичига олади. Бу эса элементнинг ўтган интервалда ишлаш вақти кейинги интервалда бузилмасдан ишлаш эҳтимолининг катталигига таъсир қилмасдан, балки кейинги интервалнинг узунлигигагина боғлиқлигини билдиради, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Ҳосил қилинган натижани бир оз бошқачароқ ҳам таърифлаш мумкин.

$P(B)=e^{-\lambda t}$ ва $P_A(B)=e^{-\lambda t}$ эҳтимолларни таққослаб, бундай хулосага келамиз: элементнинг узунлиги t бўлган интервалда бузилмасдан ишлашининг олдинги интервалда бузилмасдан ишлади деган фараз остида ҳисобланган шартли эҳтимоли шартсиз эҳтимолга тенг.

Шундай қилиб, ишончлиликнинг кўрсаткичли қонуни бўлган ҳолда элементнинг «ўтмишда» бузилмасдан ишлаши унинг «яқин келажакда» бузилмасдан ишлаш эҳтимолига таъсир қилмайди.

Эслатма. Фақат кўрсаткичли тақсимот текширилаётган хоссага эгалигини исботлаш мумкин. Шунинг учун агар амалда ўрганилаётган тасодифий миқдор бу хоссага эга бўлса, у ҳолда у кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган бўлади. Масалан, метеоритлар фазода ва вақт бўйича текис тақсимланган деб фараз қилинганда, метеоритнинг космик кемага урилиш эҳтимоли қаралаётган вақт интервалининг бошланишидан аввал метеоритлар космик кемага урилган ёки урилмаганлигига боғлиқ эмас. Бинобарин, метеоритларнинг космик кемага урилиш вақтининг тасодифий моментлари кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган.

Масалалар

1. Агар кўрсаткичли тақсимотнинг параметри $\lambda=5$ бўлса, унинг дифференциал ва интеграл функцияларини ёзинг.

Жавоби. $x\geqslant 0$ да $f(x)=5e^{-5x}$; $x\leqslant 0$ да $f(x)=0$; $F(x)=1-e^{-5x}$.

лиги X ва эни Y бўлса, у ҳолда икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорга эга бўламиз; агар плитканинг баландлиги Z ҳам контрол қилинадиган бўлса, у ҳолда уч ўлчовли (X, Y, Z) миқдорга эга бўламиз.

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорни геометрик нуқтаи назардан ё текисликдаги M (X, Y) тасодифий нуқта (яъни тасодифий координатали нуқта) деб ёки $\overline{OM}$ тасодифий вектор деб талқин қилиш мумкин. Уч ўлчовли тасодифий миқдорни геометрик нуқтаи назардан уч ўлчовли фазода $M(X, Y, Z)$ нуқта сифатида ёки $\overline{OM}$ вектор сифатида талқин қилиш мумкин.

Дискрет (бу катталикларни ташкил этувчилари дискрет) ва узлуксиз (бу катталикларни ташкил этувчилари узлуксиз) кўп ўлчовли тасодифий миқдорларни бир-биридан фарқлантириш мақсадга мувофиқдир.

2-§. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари (яъни (x_i, y_j) сонлар жуфти) ва уларнинг $p(x_i, y_j)$ $i = 1,\ 2.\ \ldots.\ n,\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ m)$ эҳтимоллари рўйхати бу миқдорнинг *тақсимот қонуни* деб аталади.

Тақсимот қонуни одатда икки томонли жадвал кўринишида берилади (2-жадвал).

2-жадвал

X Y	x_1	x_2	. .	x_i	. . .	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$		$p(x_i, y_1)$		$p(x_n, y_1)$
. . .	. . .	. . .	. .	. . .	. . .	. . .
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	. . .	$p(x_i, y_j)$	. . .	$p(x_n, y_j)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	. . .	$p(x_i, y_m)$	. . .	$p(x_n, y_m)$

Жадвалнинг биринчи сатри X ташкил этувчининг мумкин бўлган барча қийматларини, биринчи устуни эса Y ташкил этувчининг мумкин бўлган барча қийматларини ўз

Эҳтимолларни сатрлар бўйича жамлаб, Y нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолларини ҳосил қиламиз: $p(y_1) = 0,60$; $p(y_2) = 0,40$. Y ташкил этувчининг тақсимот қонунини ёзамиз.

Y	y_1	y_2
p	0,60	0,40.

Текшириш: $0,60 + 0,40 = 1$.

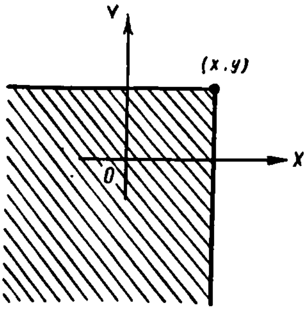
3-§ Икки ўлчовли тасодифий миқдор тақсимотининг интеграл функцияси

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорни (дискретми ёки узлуксизми, бунинг фарқи йўқ) қараймиз. x ва y ҳақиқий сонлар жуфти бўлсин. X миқдор x дан кичик қиймат қабул қилиши ва бунда Y миқдор y дан кичик қиймат қабул қилишдан иборат ҳодиса эҳтимолини $F(x, y)$ орқали белгилаймиз. Агар x ва y ўзгарадиган бўлса, у ҳолда, умуман айтганда, $F(x, y)$ ҳам ўзгаради, яъни $F(x, y)$ эҳтимол x ва y нинг функциясидир.

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор *тақсимотининг интеграл функцияси* деб x ва y сонларнинг ҳар бир жуфти учун X миқдор x дан кичик қиймат қабул қилиши ва бунда Y миқдор y дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимолини аниқлайдиган $F(x, y)$ функцияга айтилади, яъни

$$F(x, y) = P\ (X < x,\ Y < y).$$

Геометрик нуқтаи назардан бу тенгликни бундай талқин қилиш мумкин: $F(x, y)$ функция (X, Y) тасодифий миқдорнинг учи (x, y) нуқтада бўлиб, бу учдан чапда ва пастда жойлашган чексиз квадратга тушиш эҳтимолидир (13-расм).



13- расм

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорнинг интеграл функцияси маълум:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\ \mathrm{arctg}\ \frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

Қўшиш теоремасига кўра

$$P(X < x_2,\ Y < y) = P(X < x_1,\ Y < y) +$$
$$+ P(x_1 \leqslant X < x_2,\ Y < y.)$$

Бу ердан

$$P(X_2 < x_2.\ Y < y) - P(X < x_1,\ Y < y) =$$
$$= P(x_1 \leqslant X < x_2,\ Y < y)$$

ёки

$$F(x_2,\ y) - F(x_1,\ y)) = P(x_1 \leqslant X < x_2,\ Y < y).$$

Исталган эҳтимол манфий бўлмаган сон бўлгани учун

$$F(x_2,\ y) - F(x_1,\ y) \geqslant 0$$

ёки

$$F(x_2,\ y) \geqslant F(x_1,\ y);$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Агар интеграл функцияни геометрик нуқтаи назардан тасодифий нуқтанинг учи $(x,\ y)$ бўлган квадрантга тушиш эҳтимоли сифатида талқин этилишидан фойдаланиладиган бўлса, юқоридаги хосса янада тушунарли бўлади (13-расм). x ортиши билан бу квадрантнинг ўнг чегараси ўнгга томон сурилади; бунда тасодифий миқдорнинг «янги» квадрантга тушиш эҳтимоли камаймаслиги аниқ.

$F(x,\ y)$ функция y аргумент бўйича камаймайдиган функция эканлиги ҳам шунга ўхшаш исботланади.

3-хосса. Ушбу лимит муносабатлар ўринли:

$$1)\ F(-\infty,\ y) = 0, \quad 3)\ F(-\infty, -\infty) = 0,$$
$$2)\ F(x, -\infty) = 0, \quad 4)\ F(\infty, \infty) = 1.$$

Исботи. 1) $F(-\infty,\ y)$ ушбу $X < -\infty$ ва $Y < y$ ҳодисанинг эҳтимоли; лекин бундай ҳодиса рўй бера олмайди (чунки $X < -\infty$ ҳодиса рўй бера олмайди); бинобарин, бу ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг.

Агар геометрик интерпретацияга мурожаат қилинадиган бўлса, у ҳолда хосса янада ойдинлашади: $x \to -\infty$ да чексиз квадрантнинг (13-расм) ўнг чегараси чапга томон чексиз сурилади ва бунда тасодифий нуқтанинг бу квадрантга тушиш эҳтимоли нолга интилади.

2) $Y < -\infty$ ҳодиса рўй бера олмайди, шунинг учун $F(x, -\infty) = 0$.

3) $X < -\infty$ ва $Y < -\infty$ рўй бермайдиган ҳодиса; шунинг учун $F(-\infty, -\infty) = 0$.

расм) тушиш эҳтимолини айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(x_1 < X < x_2,\ Y < y) = F(x_2,\ y) - F(x_1,\ y).$$

Шунга ўхшаш

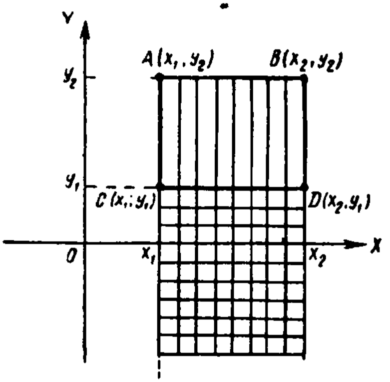
$$P(X < x,\ y_1 < Y < y_2) = F(x,\ y_2) - F(x,\ y_1)$$

га эгамиз.

Шундай қилиб, тасодифий нуқтанинг ярим полосага тушиш эҳтимоли интеграл функциянинг аргументларидан бири бўйича орттирмасига тенг.

6- §. Тасодифий нуқтанинг тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоли

Томонлари координата ўқларига параллел бўлган *ABCD* тўғри тўртбурчакни қараймиз (15-расм). Унинг томонлари тенгламалари қуйидагича бўлсин:



15- расм

$$X = x_1,\ X = x_2,\ Y = y_1 \text{ ва } Y = y_2.$$

(X,Y) тасодифий нуқтанинг бу тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топамиз. Изланаётган эҳтимолни, масалан, бундай топиш мумкин: тасодифий нуқтанинг вертикал штрихланган *AB* ярим полосага тушиш эҳтимолидан (бу эҳтимол $F(x_2,\ y_2) - F(x_1,\ y_2)$ га тенг) нуқтанинг горизонтал штрихланган *CD* полосага тушиш эҳтимолини (бу эҳтимол $F(x_2,\ y_1) - F(x_1,\ y_1)$ га тенг) айириш лозим:

$$P(x_1 < X < x_2,\ \ y_1 < Y < y_2) = [F(x_2,\ \ y_2) - F(x_1,\ \ y_2)] - [F(x_2,\ y_1) - F(x_1,\ y_1)]. \qquad (*)$$

Геометрик нуқтаи назардан бу функцияни сирт сифатида талқин қилиш мумкин. У *тақсимот сирти* деб аталади.

Мисол. (X, Y) тасодифий миқдорлар системасининг маълум

$$F(x,\ y)=\sin x\cdot\sin y\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

интеграл функцияси бўйича унинг $f(x,\ y)$ дифференциал функциясини топинг.

Ечилиши. Тасодифий миқдорлар системасининг дифференциал функцияси таърифига кўра

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\ \partial y}.$$

Интеграл функциядан x бўйича олинган хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos x\cdot\sin y.$$

Ҳосил қилинган натижадан y бўйича олинган хусусий ҳосилани топамиз, натижада изланаётган дифференциал функцияни топамиз:

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\ \partial y}=\cos x\cdot\cos y\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

8- §. Тақсимотнинг интеграл функциясини маълум дифференциал функция бўйича топиш

$f(x,y)$ дифференциал функцияни билган ҳолда $F(x,y)$ интеграл функцияни

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,\ y)\ dx\ dy$$

формула бўйича топиш мумкин: бу бевосита дифференциал функция таърифидан келиб чиқади.

Мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор тақсимотининг интеграл функциясини берилган $f(x,\ y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ дифференциал функция бўйича топинг.

Ечилиши. $F(x,\ y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x}(x,\ y)\ dxdy$ формуладан

Бундан

$$F''_{xy}\ (\xi,\ \eta) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x\cdot\Delta y} \qquad (*)$$

ёки

$$f\ (\xi,\ \eta) = \frac{P_{ABCD}}{\Delta x\cdot\Delta y}. \qquad (**)$$

$\Delta x\cdot\Delta y$ кўпайтма *ABCD* тўғри тўртбурчак юзига тенглигини эътиборга олиб, ушбу хулосага келамиз: $f\ (\xi,\ \eta)$ функция тасодифий нуқтанинг *ABCD* тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолининг бу тўғри тўртбурчак юзига нисбатидир.

Энди (**) тенгликда $\Delta x\to 0$ ва $\Delta y\to 0$ да лимитга ўтамиз. У ҳолда $\xi\to x$, $\eta\to y$, ва демак, $f\ (\xi,\ \eta) = f\ (x,\ y)$.

Шундай қилиб, $f\ (x,\ y)$ функцияни тасодифий нуқтанинг (томонлари Δx ва Δy бўлган) тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини бу тўғри тўртбурчак юзига нисбатининг тўғри тўртбурчакнинг иккала томони нолга интилгандаги лимити деб қараш мумкин.

10- §. Тасодифий нуқтанинг ихтиёрий соҳага тушиш эҳтимоли

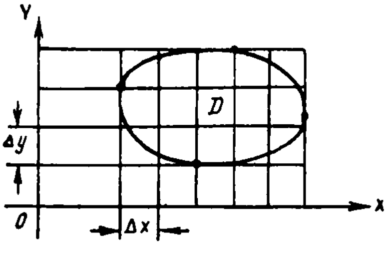
9- § даги (**) муносабатни бундай ёзамиз:

$$f\ (\xi,\ \eta)\cdot\Delta x\cdot\Delta y = P_{ABCD}.$$

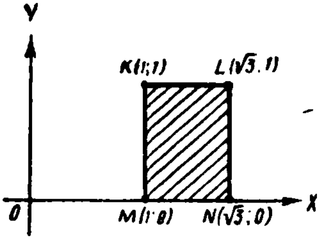
Бундан қуйидагича хулосага келамиз: $f\ (\xi,\ \eta)\cdot\Delta x\cdot\Delta y$ кўпайтма тасодифий нуқтанинг томонлари Δx ва Δy бўлган тўртбурчакка тушиш эҳтимолидир.

XOY текисликда ихтиёрий *D* соҳа берилган бўлсин. Тасодифий нуқтанинг бу соҳага тушишидан иборат ҳодисани бундай белгилаймиз:

$$(X,\ Y)\subset D.$$



17- расм



18- расм

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+y^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\right]dy = \frac{1}{\pi^2}\cdot\operatorname{arctg}x\,\Big|_1^{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{arc\,tg}y\,\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{48}.$$

11 §. Икки ўлчовли тасодифий миқдор дифференциал функциясининг хоссалари

1- хосса. *Дифференциал функция манфий эмас:*

$$f(x,\ y) \geqslant 0.$$

Исботи. Тасодифий нуқтанинг томонлари Δx ва Δy бўлган тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоли манфий бўлмаган сондир; бу тўғри тўртбурчакнинг юзи — мусбат сон. Бинобарин, бу иккита соннинг нисбати ва уларнинг ($\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ даги) лимити манфий бўлмаган сондир, яъни

$$f(x,\ y) \geqslant 0.$$

Бу хосса $F(x,\ y)$ функция ўз аргументларининг камаймайдиган функцияси (4- §) эканлигидан бевосита келиб чиқишини қайд қилиб ўтамиз.

2- хосса. *Дифференциал функциядан олинган чегаралари чексиз икки каррали хосмас интеграл бирга тенг:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\ dxdy = 1.$$

ёки

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy. \qquad (*)$$

Y ташкил этувчининг дифференциал функцияси ҳам шунга ўхшаш топилади:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx. \qquad (**)$$

Шундай қилиб, *системанинг ташкил этувчиларидан бирининг дифференциал функцияси система дифференциал функциясидан олинган чегаралари чексиз хосмас интегралга тенг, бунда интеграллаш ўзгарувчиси иккинчи ташкил этувчига мос келади.*

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор ушбу дифференциал функция орқали берилган:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 & \text{да} \quad \frac{1}{6\pi}, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

X ва Y ташкил этувчиларнинг дифференциал функцияларини топинг.

Ечилиши. X ташкил этувчининг дифференциал функциясини (*) формула бўйича топамиз:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6\pi} dy = \frac{1}{6\pi} \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{6\pi} \int_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Шундай қилиб,

$$f_1(x) = \begin{cases} |x| < 3 & \text{да,} \quad \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, \\ |x| \geqslant 3 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

Шунга ўхшаш, (**) фурмуладан фойдаланиб, Y ташкил этувчиниг дифференциал функциясини топамиз:

$$f_2(y) = \begin{cases} |y| < 2 & \text{да} \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}, \\ |y| \geqslant 2 & \text{да} \quad 0. \end{cases}$$

Y ташкил этувчининг шартли тақсимоти шунга ўхшаш аниқланади.

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда, ташкил этувчиларнинг шартли тақсимот қонунларини (*) формуладан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин. Масалан X нинг $Y = y_1$ ҳодиса рўй берди деган шартли тақсимот қонуни ушбу формуладан топилиши мумкин:

$$p(x_i|y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

X ташкил этувчининг шартли тақсимот қонунлари умумий ҳолда ушбу муносабат орқали аниқланади:

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}\,. \qquad (**).$$

Y ташкил этувчининг шартли тақсимот қонунлари шунга ўхшаш аниқланади:

$$p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}\,. \qquad (***).$$

Эслатма. Шартли тақсимот эҳтимоллари йиғиндиси 1 га тенг. Ҳақиқатан, тайин y_j да $\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(y_j)$ бўлгани учун (2- §)

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i| y_j| = \sum_{i=1}^{n} \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(y_j)}{p(y_j)} = 1.$$

Тайин x_i да

$$\sum_{i=1}^{m} p(y_j|x_i) = 1$$

эканлиги шунга ўхшаш исботланади.

Шартли тақсимотларнинг бу хоссасидан ҳисоблашларни текширишда фойдаланилади.

Мисол. Икки ўлчовли тасодифий миқдор 4- жадвал билан берилган.

4-жадвал

Y \ X	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

X ташкил этувчининг Y ташкил этувчи y_1 қиймат қабул қилди деган шартда шартли тақсимот қонунини топинг.

Агар системанинг $f(x, y)$ дифференциал функцияси маълум бўлса, у ҳолда ташкил этувчиларнинг шартли дифференциал функциялари (*) ва (**) га (170-бет) кўра ушбу формулалар бўйича топилиши мумкин:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx}, \qquad (***)$$

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy}. \qquad (****)$$

(*) ва (**) формулаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$f(x, y) = f_2(y)\cdot\varphi(x \mid y), \qquad f(x, y) = f_1(x)\cdot\psi(y \mid x).$$

Бу ердан ушбу хулосага келамиз: тасодифий миқдорлар системаси ташкил этувчиларидан бирининг тақсимот қонунини иккинчи ташкил этувчининг шартли тақсимот қонунига кўпайтириб, тасодифий миқдорлар системасининг тақсимот қонунини топамиз.

Ҳар қандай дифференциал функция каби шартли дифференциал функциялар ҳам қуйидаги хоссаларга эга:

$$\varphi(x \mid y) \geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x \mid y)\,dx = 1;$$

$$\psi(y \mid x) \geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(y \mid x)\,dy = 1.$$

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 < r^2 \text{ да } \frac{1}{\pi r^2}, \\ x^2 + y^2 > r^2 \text{ да } 0. \end{cases}$$

дифференциал функция орқали берилган.

Ташкил этувчилар эҳтимоллари тақсимот қонунларининг шартли дифференциал функцияларини топинг.

Ечилиши. X ташкил этувчининг шартли дифференциал функциясини (***) формула бўйича топамиз:

$$|x| < \sqrt{r^2 - y^2} \text{ да}$$

5-жадвал

Y \ X	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Y ташкил этувчининг $X = x_1 = 1$ даги шартли математик кутилишини топинг.

Ечилиши. $p(x_1)$ ни топамиз; бунинг учун 5-жадвалнинг биринчи устунида жойлашган эҳтимолларни қўшамиз:

$$p(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0.45.$$

Y миқдорнинг $X = x_1 = 1$ даги эҳтимоллари шартли тақсимотини (13-§) топамиз:

$$p(y_1 \mid x_1) = \frac{p(x_1,\ y_1)}{p(x_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{1}{3};$$

$$p(y_2 \mid x_1) = \frac{p(x_2,\ y_2)}{p(x_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}45} = \frac{2}{3}.$$

Изланаётган шартли математик кутилишни (*) формула бўйича топамиз:

$$M(Y \mid X = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j\, p(y_j \mid x_1) = y_1 \cdot p(y_1 \mid x_1) +$$

$$+ y_2 \cdot p(y_2 \mid x_1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

16-§. Боғлиқ ва эркли тасодифий миқдорлар

Агар иккита тасодифий миқдордан бирининг тақсимот функцияси иккинчи миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини қабул қилганига боғлиқ бўлмаса, уларни эркли деб атаган эдик. Бу таърифдан эркли миқдорларнинг шартли тақсимотлари уларнинг шартсиз тақсимотига тенглиги келиб чиқади.

Тасодифий миқдорлар эрклилигининг зарур ва етарли шартларини келтирамиз.

Теорема. *X ва Y тасодифий миқдорлар эркли бўлиши учун $(X,\ Y)$ системанинг интеграл функцияси ташкил этувчиларнинг интеграл функциялари кўпайтмасига тенг бўлиши зарур ва етарли:*

$$F(x,\ y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Бу ердан (олдинги теоремага асосан) X ва Y эркли деган хулоса чиқар миз.

Эслатма. Юқорида келтирилган шартлар зарур ва етарли бўлгани учун эркли тасодифий миқдорларга янги таърифлар бериш мумкин:

1) агар иккита тасодифий миқдор системасининг интеграл функцияси ташкил этувчиларнинг интеграл функциялари кўпайтмасига тенг бўлса, бу миқдорлар эркли деб аталади.

2) агар иккита узлуксиз тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси ташкил этувчиларнинг дифференциал функциялари кўпайтмасига тенг бўлса, бу миқдорлар эркли деб аталади.

17- §. Икки тасодифий миқдор системасининг сонли характеристикалари. Корреляция моменти. Корреляция коэффициенти

Иккита тасодифий миқдорлар системасини тавсифлаш учун ташкил этувчиларнинг математик кутилишлари ва дисперсияларидан ташқари бошқа характеристикалардан ҳам фойдаланилади. Булар жумласига корреляция моменти ва корреляция коэффициенти киради.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг μ_{xy} *корреляцион моменти* деб бу миқдорлар четланишлари кўпайтмасининг математик кутилишига айтилади:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Дискрет миқдорлар корреляцион моментларини ҳисоблаш учун

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p(x_i, y_j)$$

формуладан, узлуксиз миқдорлар учун эса

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(y)) f(x, y)\, dxdy$$

формуладан фойдаланилади.

Корреляцион момент X ва Y миқдорлар орасидаги боғланишни характерлаш учун хизмат қилади. Қуйида агар X ва Y миқдорлар эркли бўлса, у ҳолда корреляцион момент нолга тенг бўлиши кўрсатилади, бинобарин, агар корреляцион моментлар нолга тенг бўлмаса, у ҳолда X ва Y боғлиқ тасодифий миқдорлардир.

Эркли тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффициенти нолга тенглиги равшан (чунки $\mu_{xy} = 0$).

Эслатма. Эҳтимоллар назариясининг кўпгина масалаларида X тасодифий миқдор ўрнига нормаланган X' миқдорни текшириш мақсадга мувофиқдир. X' миқдор четланишнинг ўртача квадратик четланишга нисбати сифатида аниқланади:

$$X' = \frac{X - M(X)}{\sigma_x}.$$

Нормаланган миқдор 0 га тенг математик кутилишга ва 1 га тенг дисперсияга эга. Дарҳақиқат, математик кутилиш ва дисперсия хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$M(X') = M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma_x}\cdot M[X - M(X)] = \frac{1}{\sigma_x}\cdot 0 = 0;$$

$$D(X') = D\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sigma^2{}_x}\cdot D(X - M(X)) = \frac{D(X)}{\sigma_x^2} = 1.$$

r_{xy} корреляция коэффициенти X' ва Y' нормаланган миқдорларнинг корреляцион моментига тенглигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$r_{xy} = \frac{M[(X - M(X))\cdot(Y - M(Y))]}{\sigma_x\ \sigma_y} = M\left[\frac{X - M(X)}{\sigma_x}\cdot\frac{Y - M(Y)}{\sigma_y}\right] =$$
$$= M(X'\cdot Y') = \mu_{x'y'}.$$

18-§. Тасодифий миқдорларнинг корреляцияланганлиги ва боғлиқлиги

Агар X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляцион моменти (ёки корреляция коэффициенти) нолдан фарқли бўлса, улар *корреляцияланган* деб аталади; агар X ва Y нинг корреляцион моменти нолга тенг бўлса, улар *корреляцияланмаган* деб аталади.

Иккита корреляцияланган миқдор, шунингдек, боғлиқ ҳамдир. Дарҳақиқат, тескарисини фараз қиладиган бўлсак, $\mu_{xy} = 0$ деган хулосага келишимиз лозим, бу эса шартга зид, чунки корреляцияланган миқдорлар учун $\mu_{xy} \neq 0$.

Бунга тескари мулоҳаза ҳар доим ҳам ўринли бўлавермайди, яъни агар иккита миқдор боғлиқ бўлса, улар корреляцияланган ҳам, корреляцияланмаган ҳам бўлиши мумкин. Бошқача айтганда, иккита боғлиқ миқдорнинг корреляцион моменти нолга тенг бўлмаслиги мумкин, аммо у нолга тенг бўлиб қолиши ҳам мумкин.

Шундай қилиб, иккита тасодифий миқдорнинг корреляцияланганидан уларнинг боғлиқлиги келиб чиқади, аммо бу миқдорларнинг боғлиқлигидан уларнинг корреляцияланлиги ҳали келиб чиқмайди. Иккита миқдорнинг эрклилигидан уларнинг корреляцияланмаганлиги келиб чиқади, аммо бу миқдорларнинг корреляцияланмаганлигидан уларнинг эрклилиги ҳақида ҳали хулоса чиқариш мумкин эмас.

Бироқ нормал тақсимланган миқдорларнинг корреляцияланмаганлигидан уларнинг эрклигиги келиб чиқишини айтиб ўтамиз. Бу даъвони кейинги параграфда исботланади.

19-§. Текисликда нормал тақсимот қонуни

Практикада кўпинча нормал тақсимланган икки ўлчовли тасодифий миқдорлар учрайди.

Текисликда *нормал тақсимот қонуни* деб дифференциал функцияси

$$f(x\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\cdot\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}-2\rho_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]}. \qquad (*)$$

бўлган икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимотига айтилади.

Текисликда нормал тақсимот қонуни бешта параметр a_1, a_2, σ_x, σ_y ва ρ_{xy} орқали аниқланишини кўриб турибмиз. Бу параметрлар қуйидагича эҳтимолий маънога эгалигини исботлаш мумкин:

a_1, a_2 — математик кутилишлар;

σ_x, σ_y — ўрта квадратик четланишлар;

ρ_{xy} эса X ва Y миқдорларнинг корреляция коэффициенти.

Агар икки ўлчовли нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг ташкил этувчилари корреляцияланмаган бўлса, у ҳолда улар эркли эканлигига ишонч ҳосил қилайлик. Ҳақиқатан, X ва Y корреляцияланмаган бўлсин. У ҳолда (*) формулада $\rho_{xy}=0$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\ \sigma_y}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}\right]}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}}=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

интеграл функциясига кўра унинг дифференциал функциясини топинг.

Жавоби. $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6\,e^{-(2x+3y)}$.

5. $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак ичида иккита тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси $f(x,y) = C\sin(x+y)$; тўғри тўртбурчакдан ташқарида эса $f(x,y) = 0$. а) C миқдорни топинг; б) системанинг интеграл функциясини топинг.

Жавоби. а) $C = 0{,}5$; б) $F(x,y) = 0{,}5[\sin x + \sin y -$
$$- \sin(x+y)]\left(0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

6. Иккита тасодифий миқдор системаси текис тақсимланган:

$$x = 4,\ x = 6,\ y = 10,\ y = 15$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда дифференциал функция ўзгармас қийматга эга, бу тўғри тўртбурчакдан ташқарида эса нолга тенг. а) дифференциал функцияни топинг; б) системанинг интеграл функциясини топинг.

Жавоби. а) $f(x,y) = \begin{cases} \text{тўғри тўртбурчакдан ташқарида } 0, \\ \text{тўғри тўртбурчак ичида } 0{,}1. \end{cases}$

б) $F(x,y) = \frac{(x-4)(y-10)}{10}$.

7. Иккита тасодифий миқдор системасининг дифференциал функцияси $f(x,y) = \frac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}$. а) C катталикни топинг; б) системанинг интеграл функциясини топинг.

Жавоби. $C = \frac{6}{\pi^2}$; б) $F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\times$
$$\times\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

8 Икки ўлчовли тасодифий миқдор

$$f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\,e^{-4x^2 - 6xy - 9y^2}$$

дифференциал функция орқали берилган. Ташкил этувчиларнинг шартли тақсимот қонунларини топинг.

Жавоби. $\varphi(x,y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\left(2x + \frac{3}{2}y\right)^2}$,

$$\psi(y,x) = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(x+3y)^2}$$

могоров, Н. В. Смирнов), шунингдек, инглиз олимлари (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон), америка олимлари (Ю. Нейман, А. Вальд) энг кўп ҳисса қўшдилар.

3- § Бош ва танланма тўпламлар

Бир жинсли объектлар тўпламини бу объектларни характерловчи бирор сифат ёки сон белгига нисбатан ўрганиш талаб қилинсин. Масалан, агар бирор хил деталлар партияси бўлса, у ҳолда деталнинг сифат белгиси бўлиб, унинг стандартлиги, сон белгиси бўлиб эса деталнинг ўлчами хизмат қилиши мумкин.

Баъзан ялпи текшириш ўтказилади, яъни тўпламдаги объектларнинг ҳар бирини ўрганилаётган белгига нисбатан текширилади. Лекин ялпи текшириш амалда нисбатан кам қўлланилади. Масалан тўплам жуда кўп (жуда катта сондаги) объектларни ўз ичига олган бўлса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказиш жисмонан мумкин эмас. Бундай ҳолларда тўпламдан чекли сондаги объектлар тасодифий равишда олинади ва уларни ўрганилади.

Танланма тўплам, ёки оддий қилиб, *танланма* деб тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади

Бош тўплам деб танланма ажратиладиган объектлар тўпламига айтилади.

Тўплам (бош ёки танланма тўплами) *ҳажми* деб бу тўпламдаги объектлар сонига айтилади. Масалан, 1000 та деталдан текшириш учун 100 та деталь олинган бўлса, у ҳолда бош тўплам ҳажми $N = 1000$, танланма ҳажми эса $n = 100$.

Эслатма. Бош тўплам кўпинча чекли сондаги элементларни ўз ичига олади. Аммо бу сон анча катта бўлса, у ҳолда ҳисоблашларни соддалаштириш ёки назарий хулосаларни ихчамлаш мақсадини кўзда тутиб, баъзан бош тўплам чексиз кўп сондаги объектлардан иборат деб фараз қилинади. Бундай йўл қўйиш шу билан оқланадики (анча катта ҳажмли) бош тўплам ҳажмини орттириш танланма маълумотларини ишлаб чиқиш нитижаларига амалда таъсир этмайди.

4 - §. Такрор ва нотакрор танланмалар. Репрезентатив танланма

Танланмани тузишда икки хил йўл тутиш мумкин: объект танланиб ва унинг устида кузатиш ўтказилгандан сўнг, у бош тўпламга қайтарилиши ёки қайтарилмаслиги

Бош тўпламдан элементлар битталаб олинадиган танлаш *оддий тасодифий* танлаш дейилади. Оддий танлашни турли усуллар билан амалга ошириш мумкин. Масалан, N ҳажмли бош тўпламдан n та объект танлашда қуйидагича йўл тутилади. Карточкалар олиб, уларни 1 дан N гача номерланади. Сўнгра уларни яхшилаб аралаштириб, таваккалига битта карточка олинади, шу олинган карточка билан бир хил номерли объект текширилади. Кейин карточка дастага қайтарилади ва процесс такрорланади, яъни карточкалар аралаштириб, улардан бири таваккалига олинади ва ҳ. к. n марта шундай қилинади; натижада n ҳажмли оддий такрор тасодифий танланма ҳосил қилинади.

Агар олинган карточкалар қайтарилмаса, у ҳолда танланма оддий нотакрор тасодифий танланма бўлади.

Бош танланманинг ҳажми катта бўлганда тасвирланган бу процесс кўп меҳнат талаб қилади. Бундай ҳолда «тасодифий сонлар»нинг тайёр жадвалидан фойдаланилади, уларда сонлар тасодифий тартибда жойлашган бўлади. Номерланган бош тўпламдан масалан, 50 та объект олиш учун тасодифий сонлар жадвалининг ихтиёрий саҳифасини очиб, ундан бир варақайига 50 та сон ёзиб олинади; танланмага номерлари ёзиб олинган сонлар билан бир хил объектлар киритилади. Агар жадвалнинг тасодифий сони N дан катта бўлса, у ҳолда бундай сон тушириб қолдирилади. Такрорсиз танланма бўлган ҳолда жадвалнинг илгари учраган сонлари ҳам тушириб қолдирилади.

Типик танлаш деб, шундай танлашга айтиладики, бунда объектлар бутун бош тўпламдан эмас, балки унинг «типик» қисмларидан олинади. Масалан, деталлар бир нечта станокда тайёрланаётган бўлса, у ҳолда танлаш барча деталлар тўплам дан эмас, балки ҳар бир станок маҳсулотидан айрим олинади. Типик танлашдан текширилаётган белги бош тўпламнинг турли типик қисмларида сезиларли ўзгариб турганда фойдаланилади. Масалан, маҳсулот бир нечта машиналарда тайёрланаётган бўлиб, машиналар орасида унча - мунча эскирганлари бўлса, у ҳолда типик танлашдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Механик танлаш деб, шундай танлашга айтиладики, бунда бош тўплам танланмага нечта объект кириши лозим бўлса, шунча группага механик равишда ажратилади ва ҳар бир группадан биттадан объект танланади.

Масалан, станокда тайёрланган деталларнинг 20 % ини ажратиб олиш лозим бўлса, у ҳолда ҳар бир бешинчи де-

Шуни қайд қилиб ўтамизки, *тақсимот* дейилганда эҳтимоллар [назариясида тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимоллари орасидаги мослик, математик статистикада эса кузатилган варианталар ва уларнинг частоталари ёки нисбий частоталари орасидаги мослик тушунилади.

Мисол. Ҳажми 20 бўлган танланманинг частоталари тақсимоти берилган:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7.

Нисбий частоталар тақсимотини ёзинг.

Ечилиши. Нисбий частоталарни топамиз. Бунинг учун частоталарни танланма ҳажмига бўламиз:

$$W_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15, \quad W_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50, \quad W_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Нисбий частоталар тақсимотини ёзамиз:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,5	0,35

Контрол қилиш: $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1$.

7-§. Тақсимотнинг эмпирик функцияси

Айтайлик, X сон белги частоталарининг статистик тақсимоти маълум бўлсин. Қуйидагича белгилашлар киритамиз: n_x — белгининг x дан кичик қиймати кузатилган кузатишлар сони; n — кузатишларнинг умумий сони (танланма ҳажми).

Равшанки, $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси $\frac{n_x}{n}$ га тенг. Агар x ўзгарадиган бўлса, у ҳолда умуман айтганда, нисбий частотаси ҳам ўзгаради, яъни $\frac{n_x}{n}$ нисбий частота x нинг функциясидир. Бу функция эмпирик (тажриба йўли) йўл билан топиладиган бўлгани учун у эмпирик функция дейилади.

Тақсимотнинг эмпирик функцияси (танланманинг тақсимот функцияси) деб ҳар бир x қиймати учун X x ҳодисанинг эҳтимолини аниқлайдиган $F^*(x)$ функцияга айтилади. Шундай қилиб, таърифга кўра

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

$X < 6$ қиймат, хусусан, $x_1 = 2$ қиймат 12 марта кузатилган, демак,

$$2 < x \leqslant 6 \quad \text{да} \quad F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2.$$

$X < 10$ қийматлар, жумладан $x_1 = 2$ ва $x_2 = 6$ қийматлар $12 + 18 = 30$ марта кузатилган; демак,

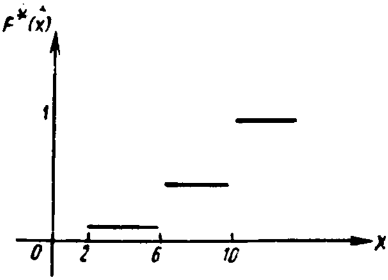
$$6 < x \leqslant 10 \quad \text{да} \quad F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5.$$

$X = 10$ энг катта варианта бўлгани учун

$$x > 10 \text{ да } F^*(x) = 1.$$

Изланаётган эмпирик функция:

$$F^*(x) = \begin{cases} x \leqslant 2 & \text{да} \quad 0, \\ 2 < x \leqslant 6 & \text{да} \quad 0{,}2, \\ 6 < x \leqslant 10 & \text{да} \quad 0{,}5, \\ x > 10 & \text{да} \quad 1. \end{cases}$$



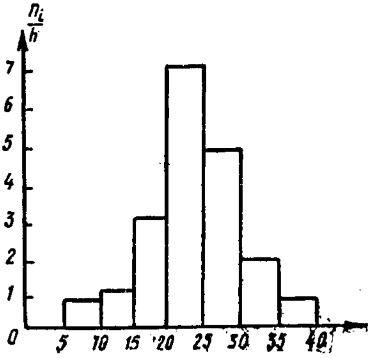
19- расм

Бу функциянинг графиги 19 - расмда тасвирланган.

8 - §. Полигон ва гистограмма

Кўргазмалилик мақсадида статистик тақсимотнинг турли графиклари, жумладан, полигон ва гистограммаси ясалади.

Частоталар полигони деб, кесмалари (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k) нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади. Полигонни ясаш учун абсциссалар ўқига x_i варианталарни, ординаталар ўқига эса уларга мос n_i частоталарни қўйиб чиқилади. Сўнгра (x_i, n_i) нуқталарни тўғри чизиқ



21- расм.

21-расмда 6-жадвалда келтирилган $n = 100$ ҳажмли тақсимот частоталари гистограммаси тасвирланган.

6-жадвал

Узунлиги $h = 5$ бўлган қисмий интервал	n_i интервал варианталари частоталарининг йиғиндиси	частота зичлиги $\frac{n_i}{h}$
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{W_i}{n}$ нисбатга (нисбий частота зичлигига) тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади.

Нисбий частоталар полигонини ясаш учун абсциссалар ўқига қисмий интервалларни қўйиб чиқилади, уларнинг тепасидан эса $\frac{W_i}{h}$ масофада абсциссалар ўқига паралле кесмалар ўтказилади. i-қисмий тўғри тўртбурчакнинг юзи $h \cdot \frac{W_i}{h}$ га, яъни i-интервалга тушган варианталарнинг нисбий частоталари йиғиндисига тенг. Демак, нисбий олинган $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматлари бўлади (бу ерда ва бундан кейин кузатишлар ўзаро боғлиқмас деб фараз қилинади). Баҳоланаётган белги худди шу маълумотлар орқали ифодаланади.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ни эркли $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар деб қараб, назарий тақсимот номаълум параметрининг статистик баҳосини топиш, бу демак, кузатилаётган тасодифий миқдорлар орқали шундай функцияни топишдирки, у баҳоланаётган параметрнинг тақрибий қийматини беради. Масалан, нормал тақсимотнинг математик кутилишини баҳолаш учун ушбу

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

функция (белгининг кузатиладиган қийматларининг арифметик ўртаси) хизмат қилади (бу кейинроқ кўрсатилади).

Шундай қилиб, назарий тақсимот номаълум параметрининг *статистик баҳоси* деб кузатилган тасодифий миқдорлардан тузилган функцияга айтилади.

2-§. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар

Статистик баҳолар баҳоланаётган параметрларнинг «яхши» яқинлашишларини бериши учун улар маълум талабларни қаноатлантиришлари лозим. Қуйида шу талаблар кўрсатилган.

Θ^* назарий тақсимот Θ номаълум параметрининг статистик баҳоси бўлсин. n ҳажмли танланма бўйича Θ^*_1 баҳо топилган бўлсин. Тажрибани такрорлаймиз, яъни бош тўпламдан ўша ҳажмли иккинчи танланмани оламиз ва ундаги маълумотлар бўйича Θ^*_2 баҳони топамиз. Тажрибани кўп марта такрорлаб, $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots, \Theta_k^*$ сонларни ҳосил қиламиз, улар, умуман айтганда, ўзаро ҳар хил бўлади. Шундай қилиб, Θ^* баҳони тасодифий миқдор, $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots, \Theta_k^*$ сонларни эса унинг мумкин бўлган қийматлари сифатида қараш мумкин.

Θ^* баҳо Θ нинг тақрибий қийматини ортиғи билан беради деб фараз қилайлик; у ҳолда танланмадаги маълумотлар бўйича топилган ҳар бир Θ_i^* ($i = 1, 2, \ldots, k$) сон ҳақиқий Θ^* қийматдан катта бўлади. Бу ҳолда Θ^* тасодифий миқдорнинг математик кутилиши (ўртача қиймати) ҳам Θ дан катта бўлади, яъни $M(\Theta^*) > \Theta$. Агар Θ^* қиймат баҳониками билан берадиган бўлса, равшанки, $M(\Theta^*) < \Theta$.

3-§. Бош ўртача қиймат

Айтайлик, дискрет бош тўплам X сон белгига нисбатан ўрганилаётган бўлсин.

Бош ўртача қиймат $\overline{X}_Б$ деб бош тўплам белгиси қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча x_1, x_2, ..., x_N қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$\overline{x}_Б = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}.$$

Агар белгининг x_1, x_2, ..., x_k қийматлари мос равишда N_1, N_2, ..., N_k частоталарга эга, шу билан бирга $N_1 + N_2 \ldots + N_k = N$ бўлса, у ҳолда

$$\overline{x}_Б = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_k N_k}{N},$$

яъни бош ўртача қиймат белгининг (вазнлари тегишли частоталарга тенг бўлган) қийматларининг вазний ўртача қийматидир.

Эслатма. N ҳажмли бош тўплам X белгининг x_1, x_2, ..., x_N га тенг турли қийматларига эга бўлган объектлардан иборат бўлсин. Бу тўпламдан таваккалига битта объект олинади деб фараз қилайлик. Белгининг масалан, x_1 қийматига эга бўлган объект олиниши эҳтимоли $\frac{1}{N}$ га тенглиги равшан. Худди шу эҳтимол билан исталган бошқа объект ҳам олиниши мумкин. Шундай қилиб, X белгининг

катталигини мумкин бўлган x_1, x_2, ..., x_N қийматлари бир хил $\frac{1}{N}$ эҳтимолга эга бўлган тасодифий миқдор деб қараш мумкин. M(X) математик кутилишни топамиз:

$$M(X) = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \cdot \frac{1}{N} + \ldots + x_N \cdot \frac{1}{N} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \overline{x}_Б.$$

Шундай қилиб, бош тўпламнинг текширилаётган X белгиси тасодифий миқдор деб қараладиган бўлса, у ҳолда белгининг математик кутилиши шу белгининг бош ўртача қийматига тенг:

$$M(X) = \overline{x}_Б.$$

(уни танланма тақсимот дейилади) сон характеристикалари, жумладан, танланма тақсимотининг математик кутилиши ва дисперсияси ҳақида сўз юритиш мумкин.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, назарий мулоҳазаларда X белгининг боғлиқ бўлмаган кузатишлар натижасида ҳосил қилинган x_1, x_2, ..., x_n танланма қийматларини ҳам X билан бир хил тақсимотга эга бўлган, ва демак, ўшандай сон характеристикаларига эга бўлган x_1, x_2, ..., x_n тасодифий миқдорлар деб қаралади.

5 - §. Бош ўртача қийматни ўртача танланма қиймат бўйича баҳолаш. Ўртача танланма қийматларнинг турғунлиги

Айтайлик, бош тўпламдан (X сон белги устида боғлиқ бўлмаган кузатишлар ўтказиш натижасида) белгининг қийматлари x_1, x_2, ..., x_n бўлган n ҳажмли такрорий танланма олинган бўлсин. Мулоҳазаларнинг умумийлигини камайтирмасдан, белгининг қийматларини турли деб ҳисоблаймиз. Айтайлик, $\overline{x}_Б$ ўртача бош қиймат номаълум бўлиб, уни танланмадаги маълумотлар бўйича баҳолаш талаб қилинсин. Ўртача бош қийматнинг баҳоси сифатида ўртача танланма

$$\overline{x}_Т = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

қиймат қабул қилинади.

$\overline{x}_Т$ силжимаган баҳо эканлигига ишонч ҳосил қиламиз, яъни бу баҳонинг математик кутилиши $\overline{x}_Б$ га тенг эканлигини кўрсатамиз. $\overline{x}_Т$ ни тасодифий миқдор, x_1, x_2, ..., x_n эркли, бир хил тақсимланган X_1, X_2, ..., X_n тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу миқдорлар бир хил тақсимланганлиги учун улар бир хил сон характеристикаларга, жумладан, бир хил математик кутилишга эга, уни a орқали белгилаймиз. Бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг арифметик ўртача қийматининг математик кутилиши биттасининг математик кутилишига тенг (VIII боб, 9 - §.) бўлгани учун:

$$M(\overline{x}_Б) = M\left[\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right] = a. \qquad (*)$$

X_1, X_2, ..., X_n миқдорларнинг ҳар бири ва бош тўплам (уни ҳам тасодифий миқдор сифатида қараймиз) бир хил тақсимотга эга эканлигини эътиборга оладиган бўлсак, бу ўртача бош қийматдан иккинчисига қараганда камроқ фарқ қилади.

Эслатма. Биз танланмани такрор (қайтариладиган) деб фараз қилдик. Аммо нотакрор танланманинг ҳажми бош тўплам ҳажмидан анча кичик бўладиган бўлса, юқорида ҳосил қилинган хулосалар бу танланмалар учун ҳам қўлланилиши мумкин. Бу қоидадан амалда кўп фойдаланилади.

6-§. Группавий ва умумий ўртача қийматлар

Тўпламнинг (бош тўплammи ёки танланма тўплами, бунинг фарқи йўқ) сон белгиси x нинг барча қийматлари бир нечта группаларга ажратилган бўлсин. Ҳар бир группани мустақил тўплам сифатида қараб, унинг арифметик ўртача қийматини топиш мумкин.

Группавий ўртача қиймат деб белгининг группага тегишли қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Энди бутун тўпламнинг ўртача қиймати учун махсус термин киритиш мақсадга мувофиқ.

Умумий ўртача қиймат $\overline{x}$ деб белгининг бутун тўпламга тегишли қийматларининг ўртача арифметик қийматига айтилади.

Группавий ўртача қийматларни ва группаларнинг ҳажмларини билган ҳолда умумий ўртача қийматни топиш мумкин: *умумий ўртача қиймат группавий ўртача қийматларни группаларининг вазнлари бўйича вазний ўртача арифметик* қийматига тенг.

Бунинг исботини келтирмасдан, уни тушунтирадиган мисол билан чекланамиз.

Мисол. Қуйидаги иккита группадан тузилган тўпламнинг умумий ўртача қийматини топинг:

Группа	биринчиси		иккинчиси	
Белгининг қиймати	1	6	1	
Частота	10	15	20	5
Ҳажм	$10+15=25$		$20+30=50$	30

Ечилиши. Группавий ўртача қийматларни топамиз:

$$\overline{x}_1 = \frac{10\cdot 1+15\cdot 6}{25} = 4;$$

$$\overline{x}_2 = \frac{20\cdot 1+30\cdot 5}{50} = 3,4.$$

Мисол. X сон белгининг тақсимоти берилган:

x_i	1	2	3
n_i	10	4	6.

Четланишларнинг тегишли частоталарга кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенглигига ишонч ҳосил қилинг.

Ечилиши. Умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{x} = \frac{10\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot 3}{20} = 1,8.$$

Четланишларнинг тегишли частоталарга кўпайтмалари йиғиндисини топамиз:

$$\sum n_i (x_i - \bar{x}) = 10\cdot(1-1,8)+4\cdot(2-1,8)+6\cdot(3-1,8)=8-8=0.$$

8-§. Бош дисперсия

Бош тўплам X сон белгисини ўзининг ўртача қиймати атрофида сочилишини характерлаш мақсадида йиғма характеристика—бош дисперсия тушунчаси киритилади.

Бош дисперсия $D_Б$ деб бош тўплам белгис қийматларини уларнинг ўртача қиймати $\bar{x}_Б$ дан четланишлари квадратларининг *ўртача арифметик қийматига* айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча $x_1, x_2, \ldots, x_N$ қийматлари турлича бўлса, у ҳолда

$$D_Б = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_Б)^2}{N}.$$

Агар белгининг $x_1, x_2, \ldots, x_k$ қийматлари мос равишда $N_1, N_2, \ldots, N_k$ частоталарга эга, шу билан бирга $N_1 + N_2 + \ldots$ $\ldots + N_k = N$ бўлса, у ҳолда

$$D_Б = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \bar{x}_Б)^2}{N},$$

яъни бош дисперсия вазнлари тегишли частоталарга тенг бўлган четланишлар квадратларининг вазний ўртача қийматидир.

Мисол. Бош тўплам қуйидаги тақсимот жадвали билан берилган:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3.

яъни танланма дисперсия вазнлари тегишли частоталарга тенг бўлган четланишларнинг вазний ўртача қийматидир.

Мисол. Танланма тўплам ушбу тақсимот жадвали орқали берилган

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Танланма дисперсияни топинг.

Ечилиши. Ўртача танланма қийматни (4- §) топамиз:

$$\overline{x}_т = \frac{20\cdot 1+15\cdot 2+10\cdot 3+5\cdot 4}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Танланма дисперсияни топамиз:

$$D_т = \frac{20\ (1-2)^2+15\cdot(2-2)^2+10\cdot(3-2)^2+5\cdot(4-2)^2}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Танланма тўплам белгиси қийматларини унинг ўртача қиймати атрофида сочилишини характерлаш учун дисперсиядан ташқари йиғма характеристика—ўртача квадратик четланишдан фойдаланилади.

Танланма ўртача квадратик четланиш (стандарт) деб танланма дисперсиясидан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_т = \sqrt{D_т}.$$

10-§. Дисперсияни ҳисоблаш учун формула

Дисперсияни ҳисоблашни (танланма дисперсиями, бош дисперсиями, бунинг фарқи йўқ) қуйидаги теоремадан фойдаланиб, соддалаштириш мумкин.

Теорема. *Дисперсия белгининг қийматлари квадратларининг ўртача қийматидан умумий ўртача қиймат квадратини айирилганига тенг:*

$$D = \overline{x^2} - [\overline{x}\,]^2.$$

Исботи. Теореманинг исботи қуйидаги алмаштиришлардан келиб чиқади:

$$D = \frac{\sum n_i(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum n_i(x_i^{\ 2}-2x_i\,\overline{x}+[\overline{x}\,]^2)}{n} =$$

$$= \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x}\,\frac{\sum n_i x_i}{n} + [\overline{x}]^2\frac{\sum n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\,\overline{x}\cdot\overline{x} + [\overline{x}[^2 =$$

$$= \overline{x^2} - [\,\overline{x}\,]^2.$$

1-мисол. Қуйидаги иккита группадан иборат тўпламнинг группавий дисперсияларини топинг:

Биринчи группа		Иккинчи группа	
x_i	n_i	x_i	n_i
2	1	3	2
4	7	8	3
5	2		
$N_1 = \sum n_i = 10$		$N_2 = \sum n_i = 5.$	

Ечилиши. Группавий ўртача қийматларни топамиз:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{1\cdot 2 + 7\cdot 4 + 2\cdot 5}{10} = 4;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 8}{5} = 6.$$

Изланаётган группавий дисперсияларни топамиз:

$$D_{1\text{гр}} = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_i)^2}{N_1} = \frac{1\cdot(2-4)^2 + 7\cdot(4-4)^2 + 2\cdot(5-4)^2}{10} =$$

$$= 0{,}6;$$

$$D_{2\text{гр}} = \frac{2\cdot(3-6)^2 + 3\cdot(8-6)^2}{5} = 6.$$

Ҳар бир группанинг дисперсиясини билган ҳолда уларнинг арифметик ўртача қийматини топиш мумкин.

Группаичи дисперсия деб группавий дисперсияларнинг группалар ҳажмларига тенг бўлган вазнлар билан олинган арифметик ўртача қийматига айтилади:

$$D_{\text{гр.ичи}} = \frac{\sum N_j D_{j\text{гр}}}{n},$$

бу ерда N_j сон j группа ҳажми;

$n = \sum\limits_{j=1}^{k} N_j$ — бутун тўплам ҳажми.

2-мисол. 1-мисолдаги маълумотлар бўйича группаичи дисперсияни топинг.

Ечилиши. Изланаётган группаичи дисперсия қуйидагига тенг:

$$D_{\text{гр.ичи}} = \frac{N_1 D_{1\text{гр}} + N_2 D_{2\text{гр}}}{n} = \frac{10\cdot 0,6 + 5\cdot 6}{15} = \frac{12}{5}.$$

Ечилиши. Умумий ўртача қиймат $\frac{14}{3}$ га тенглигини эътиборга олиб, изланаётган умумий дисперсияни топамиз:

$$D_{\text{ум.}} = \frac{1\cdot\left(2-\frac{14}{3}\right)^2+7\cdot\left(4-\frac{14}{3}\right)^2+2\cdot\left(5-\frac{14}{3}\right)^2}{15}+$$

$$+\frac{2\cdot\left(2-\frac{14}{3}\right)^2+3\cdot\left(8-\frac{14}{3}\right)^2}{15}=\frac{148}{45}.$$

Эслатма. Топилган умумий дисперсия группаичи ва группааро дисперсиялар йиғиндисига тенг:

$$D_{\text{ум}}=\frac{148}{45};$$

$$D_{\text{гр.ичи}}+D_{\text{гр.аро}}=\frac{12}{5}+\frac{8}{9}=\frac{148}{45}.$$

Бундай қонуният исталган тўплам учун тўғри эканлиги кейинги параграфда исботланади.

12-§. Дисперсияларни қўшиш

Теорема. Агар тўплам бир нечта группалардан иборат бўлса, у ҳолда умумий дисперсия группаичи ва группааро дисперсиялар йиғиндисига тенг:

$$D_{\text{ум}}=D_{\text{гр.ичи}}+D_{\text{гр.аро}}.$$

Исботи. Исботни соддалаштириш учун X белгининг қийматлари тўплами қуйидаги иккита группага ажратилган деб ҳисоблаймиз:

Группа	биринчиси	иккинчиси
Белги қиймати	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_2$
Частота	$m_1\ m_2$	$n_1\ n_2$
Группа ҳажми	$N_1=m_1+m_2$	$N_2=n_1+n_2$
Группавий ўртача қиймат	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
Группавий дисперсия	$D_{1\text{гр}}$	$D_{2\text{гр}}$
Бутун тўплам ҳажми	$n=N_1+N_2$	

Ёзишни қулайлаштириш мақсадида йиғинди белгиси $\sum\limits_{i=1}^{2}$ ўрнига $\sum$ белгини ёзамиз. Масалан, $\sum m_i=\sum\limits_{i=1}^{2} m_i=$ $=m_1+m_2=N_1$.

Исботланган теоремани яққол тасаввур қилишга ёрдам берадиган мисол олдинги параграфда келтирилган.

Эслатма. Теорема фақат назарий аҳамиятга эга бўлмасдан, балки муҳим амалий аҳамиятга ҳам эга. Масалан, кузатишлар натижасида белгининг бир нечта группа қийматлари ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда умумий дисперсияни ҳисоблаш учун группаларни ягона тўпламга бирлаштирмаслик ҳам мумкин. Иккинчи томондан, тўплам катта ҳажмга эга бўлса, у ҳолда уни бир нечта группага ажратиш мақсадга мувофиқ. У ҳолда ҳам, бу ҳолда ҳам умумий дисперсияларни ҳисоблаш айрим группаларнинг дисперсияларини ҳисоблаш билан алмаштирилади, бу эса ҳисоблашларни соддалаштиради.

13- §. Бош дисперсияни тузатилган танланма дисперсия орқали баҳолаш

Бош тўпламдан X сон белги устида n та ўзаро боғлиқ бўлмаган кузатиш ўтказиш натижасида n ҳажмли такрорий танланма олинган бўлсин:

белги қийматлари	x_1,	x_2,	...,	x_k,
частотаси	n_1,	n_2,	...,	n_k,
шу билан бирга	$n_1 +$	$n_2 +$	$\ldots +$	$n_k = n$.

Номаълум $D_Б$ бош дисперсияни танланмадаги маълумотлар бўйича баҳолаш (тақрибан топиш) талаб қилинади. Агар бош дисперсиянинг баҳоси сифатида танланма дисперсияни қабул қилинадиган бўлса, у ҳолда бу баҳо систематик хатоларга олиб келади; у бош дисперсиянинг камайган қийматларини беради. Бу нарса танланма дисперсия бош дисперсия $D_Б$ нинг силжиган баҳоси бўлиши (буни исботлаш мумкин) билан тушунтирилади, бошқача сўз билан айтганда, танланма дисперсиянинг математик кутилиши баҳоланаётган бош дисперсияга тенг бўлмасдан, балки

$$M[D_т] = \frac{n-1}{n} D_Б$$

га тенг.

Танланма дисперсияни унинг математик кутилиши бош дисперсияга тенг бўладиган қилиб осонгина «тузатиш» мумкин. Бунинг учун $D_т$ ни $\frac{n}{n-1}$ касрга кўпайтириш кифоя. Буни бажариб «тузатилган дисперсияни» ҳосил қиламиз, уни одатда s^2 орқали белгиланади:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_т = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_т})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x}_т)^2}{n-1}.$$

ланма ҳажми унча катта бўлмаганда интервал баҳолардан фойдаланиш лозим.

Интервал баҳо деб иккита сон — интервалнинг учлари билан аниқланадиган бахога айтилади. Интервал баҳолар баҳоларнинг аниқлиги ва ишончлигини (бу тушунчаларнинг маъноси қуйида ойдинлашади) баҳолашга имкон беради.

Танланма маълумотлари бўйича топилган Θ^* статистик характеристика Θ номаълум параметрнинг баҳоси бўлиб хизмат қилсин. Θ ни ўзгармас сон деб ҳисоблаймиз (Θ тасодифий миқдор ҳам бўлиши мумкин). $|\Theta - \Theta^*|$ айирманинг абсолют катталиги қанчалик кичик бўлса Θ^* баҳо Θ параметрни шунчалик аниқ баҳолаши равшан. Бошқача сўз билан айтганда, $\delta > 0$ ва $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ бўлса, у ҳолда δ қанчалик кичик бўлса, Θ^* баҳо шунча аниқдир. Шундай қилиб, δ сон *баҳонинг аниқлигини* характерлайди.

Лекин статистик методлар Θ^* баҳо $|\Theta - \Theta^* < \delta$ тенгсизликни қаноатлантиради деб қатъий даъво қилишга имкон бермайди; бу тенгсизлик амалга ошадиган γ эҳтимол ҳақидагина гапириш мумкин.

Θ баҳонинг Θ^* бўйича *ишончлилиги (ишончли эҳтимол)* деб $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ тенгсизликнинг амалга ошиш эҳтимоли γ га айтилади. Одатда баҳонинг ишончлилиги олдиндан берилади, бунда γ сифатида бир сонига яқин сон олинади. Кўпинча ишончлиликни 0,95; 0,99 ва 0,999 қилиб берилади.

Айтайлик, $|\Theta - \Theta^*| < \delta$ бўлиш эҳтимоли γ га тенг бўлсин:

$$P[|\Theta - \Theta^*| < \delta] = \gamma.$$

$|\Theta - \Theta^*| < \delta$ тенгсизликни унга тенг кучли

$$-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta \text{ ёки } \Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta$$

қўш тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P\ [\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta] = \gamma$$

га эга бўламиз. Бу муносабатни бундай тушуниш лозим: $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ интервалнинг номаълум Θ параметрни ўз ичига олиш (қоплаш) эҳтимоли γ га тенг.

Ишончли интервал деб номаълум параметрни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ интервалга айтилади.

Эслатма. $(\Theta^* - \delta,\ \Theta^* + \delta)$ интервал тасодифий учларга эга (улар ишончли чегаралар дейилади). Дарҳақиқат, турли танланмаларда формулада (XII боб, 6-§) X ни $\overline{X}$ га ва σ ни $\sigma\ (\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ га алмаштириб,

$$P(|\overline{X}-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Сўнгги тенгликдан $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ни топиб, қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < t\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

P эҳтимол γ га тенглигини эътиборга олиб (ишчи формулани ҳосил қилиш учун танланма ўртача қийматни яна $\overline{x}$ орқали белгилаймиз), узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(\overline{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma\ .$$

Ҳосил қилинган бу муносабатнинг маъноси қуйидагича: γ ишонч билан айтиш мумкинки, $\left(\overline{x} - t\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ишончли интервал номаълум a параметрни қоплайди: баҳонинг аниқлиги $\delta = t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Шундай қилиб, юқорида қўйилган масала тўлиқ ечилди. t сон $2\Phi(t) = \gamma$ ёки $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ тенгликдан аниқланишини айтиб ўтамиз: Лаплас функцияси жадвали (2-илова) бўйича Лаплас функциясининг $\frac{\gamma}{2}$ га тенг қиймати мос келадиган t аргумент қиймати топилади.

1-Эслатма. $|\overline{x}-a| < t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ баҳо классик деб аталади. Классик баҳонинг аниқлигини кўрсатувчи $\delta = t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ формуладан қуйидаги хулосаларга келиш мумкин:

1) танланма ҳажми n нинг ортиши билан δ сон камаяди, бинобарин, баҳонинг аниқлиги ортади;

2) $\gamma = 2\Phi(t)$ баҳо ишончлилигининг ортиши t нинг ортишига ($\Phi(t)$ ўсувчи функция), ва демак, δ нинг ҳам ортишига олиб келади

кўп сонда танланмалар олинган бўлса, у ҳолда уларнинг 95% и шундай ишончли интервалларни аниқлайдики, бу интервалларда параметр ҳақиқатан ҳам ётади; 5% ҳоллардагина у ишончли интервал чегарасидан четда ётиши мумкин.

2-эслатма. Агар математик кутилишни олдиндан берилган δ аниқлик ва γ ишончлилик билан баҳолаш талаб қилинса, у ҳолда бу аниқликни таъминлаб берадиган минимал ҳажмли танланманинг ҳажмини

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$$

формуладан топилади ($\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ тенгликнинг натижаси).

16-§ Нормал тақсимот математик кутилишини σ номаълум бўлганда баҳолаш учун ишончли интерваллар

Айтайлик, бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган, шу билан бирга σ ўртача квадратик четланиш номаълум бўлсин. Номаълум a математик кутилишни ишончли интерваллар ёрдамида баҳолаш талаб қилинади. Равшанки, бу ўринда олдинги параграф натижаларидан фойдаланиб бўлмайди, чунки у ерда σ маълум деб фараз қилинган эди.

Танланма маълумотлари бўйича шундай

$$T = \frac{\bar{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

тасодифий миқдорни (унинг қийматларини t орқали белгилаймиз) тузиш мумкин эканки, у $k = n - 1$ озодлик даражали Стьюдент тақсимотига эга бўлар экан (параграф охиридаги тушунтиришга қаранг) бу ерда $\bar{X}$ — танланма ўртача қиймат, S — «тузатилган» ўртача квадратик четланиш, n — танланма ҳажми.

Дифференциал функция

$$S(t, n) = B_n \left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

бу ерда

$$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Шундай қилиб, a номаълум параметр 0,95 ишончлилик билан $19{,}77 < a < 20{,}626$ ишончли интервалда ётади.

Эслатма. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

лимит муносабатлардан танланма ҳажми чексиз ортганда Стьюдент тақсимоти нормал тақсимотга интилиши келиб чиқади. Шу сабабли $n > 30$ да Стьюдент тақсимоти ўрнига нормал тақсимотдан фойдаланиш мумкин.

Лекин қуйидагини таъкидлаб ўтиш айниқса муҳим: кичик танланмаларда ($n < 30$), айниқса, n нинг кичик қийматларида тақсимотни нормал тақсимотга алмаштириш қўпол хатоларга, чунончи, ишончли интервални асоссиз торайишига, яъни баҳо аниқлигининг ортишига олиб келади. Масалан, агар $n = 5$ ва $\gamma = 0{,}99$ бўлса, у ҳолда Стьюдент тақсимотидан фойдаланиб, $t_\gamma = 4{,}6$ ни, Лаплас функциясидан фойдаланиб эса $t_\gamma = 2{,}58$ ни топамиз, демак, кейинги ҳолда ишончли интервал Стьюдент тақсимоти бўйича топилган интервалдан торроқ бўлиб чиқди.

Стьюдент тақсимоти танланма кичик бўлганда унча аниқ бўлмаган натижалар бериш ҳолати Стьюдент тақсимотининг кучсизлигидан дарак бермасдан, балки кичик танланма бизни қизиқтираётган белги ҳақида кам информацияга эгалиги билан тушунтирилади.

Тушунтириш. Илгари кўрсатилган эдики (XII боб, 14-§), Z нормал миқдор, шу билан бирга $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$ бўлиб, V эса Z га боғлиқ бўлмаган миқдор бўлиб, k озодлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \qquad (*)$$

миқдор k эркинлик даражали Стьюдент қонун бўйича тақсимланган.

Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган, шу билан бирга $M(X) = a$, $\sigma(X) = \sigma$ бўлсин. Агар бу тўпламдан n ҳажмли танланмалар олиниб, улар бўйича танланма ўртача қийматлар топиладиган бўлса, у ҳолда танланишга ҳақлимиз. Бошқача сўз билан айтганда, ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматини алоҳида ўлчашлар натижаларининг арифметик ўртача қиймати бўйича ишончли интерваллар ёрдамида баҳолаш мумкин. Одатда σ номаълум бўлгани учун 16- § формулаларидан фойдаланиш лозим.

Мисол. Физик миқдорни эркли, тенг (бир хил) аниқликдаги 9 та ўлчаш маълумотлари бўйича айрим ўлчашларнинг арифметик ўртача қиймати $\overline{x} = 42{,}319$ ва «тузатилган» ўртача квадратик четланиш $s = 5{,}0$ топилган. Ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қийматини $\gamma = 0{,}95$ ишончлилик билан баҳолаш талаб қилинади.

Ечилиши. Ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати унинг математик кутилишига тенг. Шу сабабли масала математик кутилиш a ни (σ номаълум бўлганда) берилган $\gamma = 0{,}95$ ишончлилик билан қоплайдиган

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$$

интервал ёрдамида баҳолашга келтирилади.

Жадвалдан (3- илова) фойдаланиб, $\gamma = 0{,}95$ ва $n = 9$ бўйича $t_\gamma = 2{,}31$ ни топамиз.

Баҳонинг аниқлигини топамиз:

$$t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}31 \cdot \frac{5}{9} = 3{,}85.$$

Ишончлилик чегараларини топамиз:

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 42{,}319 - 3{,}85 = 36{,}469;$$

$$\overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 42{,}319 + 3{,}85 = 46{,}169.$$

Шундай қилиб, ўлчанаётган миқдорнинг ҳақиқий қиймати 0,95 ишончлилик билан ушбу интервалда ётади:

$$38.469 < a < 46{,}169.$$

18- §. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши σ ни баҳолаш учун ишончли интерваллар

Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган бўлсин. Бош ўртача крадратик четланиш σ ни «тузатилган» ўртача квадратик четланиш s орқали баҳолаш талаб қиликўринишни оладиган қилиб, ўзгартирамиз Бу тенгсизликнинг эҳтимоли берилган γ эҳтимолга тенг (XI боб, 2-§), яъни

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} R(\chi, n)\, d\chi = \gamma.$$

$q < 1$ деб фараз қилиб, (*) тенгсизликни бундай ёзамиз:

$$\frac{1}{S(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{S(1-q)}.$$

Бу тенгсизликнинг барча ҳадларини $S\sqrt{n-1}$ га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma} \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$$

ёки

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Бу тенгсизлик, бинобарин, унга тенг кучли (*) тенгсизликнинг бажарилиш эҳтимоли

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} R(\chi, n) d\chi = \gamma$$

га тенг. Бу тенгламадан берилган n ва γ бўйича q ни топиш мумкин. q ни амалда топишда жадвалдан фойдаланилади (4-илова).

s ни танланма бўйича ва q ни жадвал бўйича топиб, σ ни берилган γ ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални, чунончи,

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$$

интервални топамиз.

1-мисол. Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимланган. $n = 25$ ҳажмли танланма бўйича «тузатилган» ўртача квадратик четланиш $s = 0{,}8$ топилган. Бош ўртача квадратик четланиш σ ни 0,95 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли интервални топинг.

$$f(x)=\frac{x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

ёки, $k = n - 1$ ўрнига қўйишдан сўнг,

$$f(x)=\frac{x^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

$\chi = \varphi(X) = \sqrt{X}$ $(\chi > 0)$ функциянинг тақсимотини топиш учун ушбу

$$g(y) = f[\psi(y)]\cdot[\psi'(y)]$$

формуладан (XII боб, 10-§) фойдаланамиз. Бундан тескари функция

$$x = \psi'(\chi) = \chi^2$$

ва

$$\psi'(\chi) = 2\chi.$$

Сўнгра $\chi > 0$ бўлгани учун $|\psi'(\chi)| = 2\chi$. Демак,

$$g(\chi) = f[\psi(\chi)]\cdot|\psi'(\chi)| = \frac{(\chi^2)^{\frac{n-3}{2}}\cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot 2\chi.$$

Элементар алмаштиришлар бажариб ва белгиларни ўзгартириб ($g(\chi)$ ни $R(\chi,n)$ га алмаштирамиз), узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R(\chi,n) = \frac{\chi^{n-2}e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

19-§. Ўлчашлар аниқлигининг баҳолари

Хатолар назариясида ўлчашлар аниқлигини (асбобларнинг аниқлигини) ўлчашлардаги тасодифий хатоларнинг ўртача квадратик четланиши σ ёрдамида характерлаш қабул

Вариация қулочи R деб энг кичик ва энг катта варианталар айирмасига айтилади:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Масалан,

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 10$$

қатор учун қулоч $10 - 1 = 9$ га тенг.

Қулоч вариацион қатор тарқоқлигининг энг содда характеристикасидир.

Ўртача абсолют четланиш Θ деб абсолют четланишларнинг ўртача арифметик қийматига айтилади:

$$\Theta = \frac{\sum n_i \left| x_i - \bar{x}_{\text{т}} \right|}{\sum n_i}.$$

Масалан,

$$\begin{array}{lcccc} x_i & 1 & 3 & 6 & 16 \\ n_i & 4 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

қатор учун:

$$\bar{x}_T = \frac{4 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 16}{4 + 10 + 5 + 1} = \frac{80}{20} = 4;$$

$$\Theta = \frac{4 \cdot |1 - 4| + 10 \cdot |3 - 4| + 5 \cdot |6 - 4| + 1 \cdot |16 - 4|}{20} = 2{,}2.$$

Ўртача абсолют четланиш вариацион қатор тарқоқлигининг характеристикаси бўлиб хизмат қилади.

Вариация коэффициенти V деб ўртача танланма квадратик четланишнинг ўртача танланма қийматга нисбатининг процентларда ифодаланганига айтилади:

$$V = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\bar{x}_{\text{т}}} \cdot 100\,\%.$$

Вариация коэффициенти иккита вариацион қаторнинг тарқоқлик катталигини таққослаш учун хизмат қилади: вариацион қаторлардан вариация коэффициенти катта бўлгани кўпроқ тарқоқликка эга.

Эслатма. Юқорида вариацион қатор танланма маълумотлари бўйича тузилган деб фараз қилинди. Шу сабабли тавсифланган барча характеристикалар *танланма* характеристикалар дейилади; агар вариацион қатор бош тўплам маълумотлари бўйича тузилган бўлса, у ҳолда характеристикалар *бош* характеристикалар дейилади.

8—9 масалаларда нормал тақсимланган белги танланмасининг ўртача квадратик четланиши, ўртача танланма қиймати ва ҳажми берилган. Номаълум математик кутилишни берилган ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли интервалларни топинг.

8. $\sigma = 2,\ \bar{x}_T=5,40,\ n=10,\ \gamma=0,95.$

Жавоби. $4,16<a<6,64.$

9. $\sigma=3,\ \bar{x}_T=20,12,\ n=25,\ \gamma=0,99$

Жавоби. $18,57<a<21,67.$

10. Нормал тақсимланган белги математик кутилишининг танланма ўртача қиймат бўйича баҳосининг $\gamma=0,95$ ишончлилик билан аниқлиги 0,2 га тенг бўладиган танланманинг минимал хажмини топинг. Ўртача квадратик четланиш 2 га тенг.

Кўрсатма. 15- § даги 2- эслатмага қаранг.

Жавоби. $n=385.$

11—12- масалаларда нормал тақсимланган белгининг «тузатилган» ўртача квадратик четланиши, танланма ўртача қиймати ва кичик танланмасининг ҳажми берилган. Стьюдент тақсимотидан фойдаланиб, номаълум математик кутилишни берилган ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли интервалларни топинг.

11. $s=1,5,\ \bar{x}_T=16,8,\ n=12,\ \gamma=0,95.$

Жавоби. $15,85<a<17,75.$

12. $s=2,4\ \ \bar{x}_T=14,2,\ n=9,\ \gamma=0,99.$

Жавоби. $11,512<a<16,888.$

13. Физик катталик устида бир хил аниқликдаги, боғлиқ бўлмаган 16 ўлчаш маълумотлари бўйича $\bar{x}_T = 23,161$ ва $s = 0,400$ топилган. Ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати a ни ва ўлчаш аниқлиги σ ни 0,95 ишончлилик билан баҳолаш талаб этилади.

Жавоби. $22,948<a<23,374;$
$0,224<\sigma<0,576.$

Ўн еттинчи боб

ТАНЛАНМАНИНГ ЙИҒМА ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ

1- §. Шартли варианталар

Фараз қилайлик, танланманинг варианталари ортиб бориш тартибида, яъни вариацион қатор кўринишида жойлашган бўлсин.

Тенг узоқликдаги варианталар деб h айирмали арифметик прогрессия ташкил этадиган варианталарга айтилади.

Кўриб турибмизки, шартли варианталар унча катта бўлмаган бутун сонлардир. Улар билан операциялар бажариш бошланғич варианталардагига қараганда осонроқ, албатта.

2-§. Оддий, бошланғич ва марказий эмпирик моментлар

Танланманинг йиғма характеристикаларини ҳисоблашда эмпирик моментлардан фойдаланиш қулайдир. Уларнинг таърифлари тегишли назарий моментларнинг таърифларига (VIII боб, 10-§) ўхшаш. Эмпирик моментлар назарий моментлардан фарқли равишда кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланади.

k-тартибли оддий эмпирик момент деб $x_i - c$ айирмалар k-даражаларининг ўртача қийматига айтилади:

$$M_k' = \frac{\sum n_i (x_i - c)^k}{n},$$

бу ерда x_i — кузатиладиган варианта,

n_i — вариантанинг частотаси,

$n = \sum n_i$ — танланма ҳажми,

c — ихтиёрий ўзгармас сон (сохта ноль).

k-тартибли бошланғич эмпирик момент деб $c=0$ бўлгандаги k-тартибли оддий моментга айтилади:

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

Хусусан,

$$M_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \overline{x}_{\text{T}},$$

яъни биринчи тартибли бошланғич эмпирик момент танланма ўртача қийматга тенг.

k-тартибли марказий эмпирик момент деб $c = \overline{x}_{\text{T}}$ бўлгандаги k-тартибли оддий моментга айтилади:

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_{\text{T}})^k}{n}.$$

Хусусан,

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_{\text{T}})^2}{n} = D_{\text{T}}, \qquad (*)$$

яъни иккинчи тартибли марказий эмпирик момент танланма дисперсияга тенг.

Оддий моментларни топгандан сўнг эса олдинги параграфдаги (**) ва (***) тенгликлар бўйича марказий моментларни осонгина топиш мумкин. Пировардида, марказий моментларни шартли моментлар орқали ифодалайдиган ва ҳисоблашлар учун қулай бўлган ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$m_2 = [M_2^* - (M_1^*)^2]\,h^2; \qquad (**)$$

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= [M_3^* - 3\,M_2^*M_1^* + 2\,(M_1^*)^3]\,h^3; \\ m_4 &= [M_4^* - 4\,M_3^*M_1^* + 6\,M_2^*(M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4]\,h^4 \end{aligned}\right\} \quad (***)$$

Жумладан, (**) га ва олдинги параграфдаги (*) муносабатга асосан танланма дисперсияни биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментлар бўйича ҳисоблаш формуласини ҳосил қиламиз:

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2]\,h^2. \qquad (****)$$

Марказий моментларни шартли моментлар бўйича ҳисоблаш техникаси келгусида баён қилинади.

4-§. Танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар методи

Кўпайтмалар методи тенг узоқликдаги вариантали вариацион қаторнинг турли тартибли шартли моментларини ҳисоблашнинг қулай усулини беради. Шартли моментларни билган ҳолда эса бизни қизиқтираётган бошланғич ва марказий эмпирик моментларни топиш қийин эмас Жумладан, кўпайтмалар методи ёрдамида танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблаш қулай. Бунда ҳисоблаш жадвалидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ; у бундай тузилади:

1) жадвалнинг биринчи устунига танланма (дастлабки) варианталар ортиб бориш тартибида ёзилади;

2) иккинчи устунга варианталарнинг частоталари ёзилади; ҳамма частоталар жамланади ва уларнинг йиғиндиси (танланма ҳажми n) устуннинг пастки катагига ёзилади;

3) учинчи устунга шартли варианталар $u_i = \frac{x_i - C}{h}$ ёзилади, бунда сохта ноль C сифатида энг катта частотали варианта танланади, исталган иккита қўшни варианта орасидаги айирма h га тенг деб фараз қилинади; амалда эса учинчи устун бундай тўлдирилади: энг катта частотани ўз

Ниҳоят, 3-§ даги (*) ва (****) формулалар бўйича танланма ўртача қиймат ва танланма дисперсия ҳисобланади:

$$\bar{x}_T = M_1^* \cdot h + C,$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

Мисол. Кўпайтмалар методи ёрдамида қуйидаги статистик тақсимотнинг танланма ўртача қийматини ва танланма дисперсиясини топинг:

варианталар:	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
частоталар	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Ечилиши. Ҳисоблаш жадвалини тузамиз, бунинг учун:

1) варианталарни биринчи устунга ёзамиз;

2) частоталарни иккинчи устунга ёзамиз; частоталар йиғиндисини (100 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

3) сохта ноль сифатида 11,0 вариантани танлаймиз (бу варианта энг катта частотага эга); учинчи устуннинг энг катта частотани ўз ичига олган сатрга тегишли катагига 0 ёзамиз; нолнинг устига кетма-кет —1, —2, —3, —4 ни, нолнинг тагига 1, 2, 3, 4, 5 ни ёзамиз;

4) частоталарнинг шартли варианталарга кўпайтмаларини тўртинчи устунга ёзамиз, манфий сонлар йиғиндисини (—46) ни алоҳида, мусбат сонлар йиғиндисини (103 ни) алоҳида топамиз; бу сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндисини (57 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

5) частоталарнинг шартли варианталарнинг квадратларига кўпайтмаларини бешинчи устунга ёзамиз, бу устуннинг сонлари йиғиндисини (383 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз;

6) частоталарнинг биттага орттирилган шартли варианталарнинг квадратларига кўпайтмаларини олтинчи контрол устунга ёзамиз; бу устуннинг сонлари йиғиндисини (597 ни) устуннинг пастки катагига ёзамиз.

Натижада 7-ҳисоблаш жадвалини ҳосил қиламиз.

Контроль: $\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 383 + 2 \cdot 57 + 100 = 597$

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597.$$

Ҳисоблаш тўғри бажарилган.

Биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0,57;$$

лари (дастлабки варианталар) кирган интервални бир нечта тенг қисмий интервалларга бўлинади (амалда ҳар бир интервалга камида 8—10 тадан дастлабки варианта кириши керак). Сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади, ана шулар тенг узоқликдаги варианталар кетма-кетлигини ҳосил қилади.

Ҳар бир «янги» вариантанинг (қисмий интервал ўртасининг) частотаси сифатида тегишли қисмий интервалга кирган дастлабки варианталарнинг жами сони қабул қилинади.

Равшанки, дастлабки варианталарни қисмий интервалларнинг ўрталари билан алмаштириш хатоларга олиб келади (қисмий интервалнинг чап ярмидаги дастлабки варианталар ортади, ўнг ярмидаги дастлабки варианталар эса камаяди), аммо бу хатолар асосан йўқолади, чунки улар турли ишораларга эга.

Мисол. $n = 100$ ҳажмли танланма тўплам 8-жадвал билан берилган:

8-жадвал

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3
1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Тенг узоқликдаги варианталар тақсимотини тузинг.

Ечилиши. 1,00—1,50 интервални, масалан, қуйидаги 5 та қисмий интервалга бўламиз: 1,00—1,10; 1,10—1,20; 1,20—1,30, 1,30—1,40; 1,40—1,50. Қисмий интервалларнинг ўрталарини янги y_i варианталар сифатида олиб, тенг узоқликдаги варианталарни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = 1{,}05;\ y_2 = 1{,}15;\ y_3 = 1{,}25;\ y_4 = 1{,}35;\ y_5 = 1{,}45,$$

y_1 вариантанинг частотасини топамиз:

$$n_1 = 1+3+6+4+2+\frac{4}{2} = 18$$

ланади, яъни X миқдор тахмин қилинаётган қонун бўйича тақсимланган бўлса, у кузатилаётган қийматларнинг ҳар бирини неча марта қабул қилиши лозимлиги назарий жиҳатдан топилади.

Текисловчи (назарий) частоталар деб, кузатилаётган эмпирик частоталардан фарқли, назарий (ҳисоблаш билан) топилган n'_i частоталарга айтилади.

Текисловчи частоталар

$$n'_i = nP_i$$

тенглик бўйича топилади бу ерда n — кузатишлар сони, P_i — тасодифий X миқдор тахмин қилинаётган тақсимотга эга деган фаразда кузатиладиган x_i қийматнинг эҳтимоли. Бу формула эркли синашларда ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши ҳақидаги теоремадан (VII боб, 5-§) келиб чиқади.

Шундай қилиб, дискрет тақсимотнинг кузатиладиган x_i қийматининг текисловчи частотаси синашлар сонини бу кузатиладиган қийматнинг эҳтимолига кўпайтмасига тенг.

Мисол. $n = 520$ та синашдан иборат эксперимент ўтказилиб, синашларнинг ҳар бирида бирор ҳодисанинг рўй беришлари сони x_i қайд қилинган; натижада қуйидаги эмпирик тақсимот ҳосил қилинган:

кузатилган қиймат	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
эмпирик частота	n_i	120	167	130	69	27	5	1	1.

X тасодифий миқдор (бош тўплам) Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деган тахминда текисловчи частоталар n'_i ларни топинг.

Ечилиши. Пуассон қонунини аниқлайдиган λ параметр, маълумки, бу тақсимотнинг математик кутилишига тенг. Математик кутилишнинг баҳоси сифатида танланма ўртача қиймат олингани учун (XVI боб, 5-§) λ нинг баҳоси сифатида ҳам танланма ўртача қиймат $\bar{x}_{\text{т}}$ ни олиш мумкин. Танланма ўртача қиймат 1,5 га тенглигини масала шартига кўра осонгина топиш мумкин: бинобарин, $\lambda = 1,5$ деб қабул қилиш мумкин.

Шундай қилиб, ушбу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

тенглик бўйича топилади, бу ерда n—синашлар сони, P_i— тасодифий X миқдор тахмин қилинаётган тақсимотга эга деган фаразда X нинг i-қисмий интервалга тушиш эҳтимоли.

Жумладан, X тасодифий миқдор (бош тўплам) нормал тақсимланган деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда текисловчи частоталар

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_т} \varphi(u_i) \qquad (*)$$

формула бўйича топилиши мумкин, бу ерда n — синашлар сони (танланма ҳажми), h — қисмий интервалнинг узунлиги, $\sigma_т$ — танланма ўртача квадратик четланиш, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_т}{\sigma_т}$ (x_i сон i-қисмий интервалнинг ўртаси),

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(*) формуланинг қўлланилишига доир мисол 7-§ да келтирилади.

Тушунтириш. (*) формуланинг келиб чиқишини тушунтирайлик. Умумий нормал тақсимотнинг дифференциал функциясини ёзамиз:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (**)$$

$a=0$ ва $\sigma=1$ да нормаланган тақсимотнинг

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

дифференциал функциясини ёки, аргументни белгилашни ўзгартириб,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

ни ҳосил қиламиз. $u = \frac{x-a}{\sigma}$ деб,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (***)$$

2) назарий эгри чизиқнинг y_i ординаталарини (текисловчи частоталарни) $y_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_т} \cdot \varphi(u_i)$ формула бўйича топилади, бу ерда n — кузатилаётган частоталар йиғиндиси, h — иккита қўшни варианта орасидаги айирма, $u_i = \frac{x_i - \overline{x}_т}{\sigma_т}$ ва

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}};$$

3) тўғри бурчакли координаталар системасида (x_i, y_i) нуқталар ясалади ва улар силлиқ чизиқ билан туташтирилади.

Текисловчи частоталарнинг кузатилаётган частоталарга яқинлиги текширилаётган белги нормал тақсимланган деган тахминни тасдиқлайди.

Мисол. Ушбу тақсимот бўйича нормал эгри чизиқни ясанг.

варианта x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55
частота n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4.

Ечилиши. Кўпайтмалар методидан (4-§) фойдаланиб, $\overline{x}_т = 34{,}7$, $\sigma_т = 7{,}38$ ни топамиз.

Текисловчи частоталарни топамиз (9-жадвалга қаранг).

9-жадвал

x_i	n_i	$x_i - \overline{x}_T$	$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_T}{\sigma_T}$	$\rho(u_i)$	$y_i = \frac{n.h.}{\sigma_T} \varphi(u_i) = 248 \cdot \varphi(u_i)$
15	6	—19,7	—2,67	0,0113	3
20	13	—14,7	—1,99	0,0551	14
25	38	—9,7	—1,31	0,1691	42
30	74	—4,7	—0,63	0,3271	82
35	106	0,3	0,05	0,3984	99
40	85	5,3	0,73	0,3056	76
45	30	10,3	1,41	0,1476	37
50	10	15,3	2,09	0,0449	11
55	4	20,3	2,77	0,0086	2
	$n=366$				$\sum y_i=366$

22-расмда текисловчи частоталар (улар доирачалар билан белгиланган) бўйича нормал (назарий) эгри чизиқ ва

Эмпирик тақсимотнинг эксцесси ушбу тенглик билан аниқланади:

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma^4_{\text{т}}} = 3,$$

бу ерда m_4 — тўртинчи тартибли марказий эмпирик момент.

m_3 ва m_4 моментларни 3-§ даги (***) формуладан фойдаланиб кўпайтмалар методи (4-§) билан ҳисоблаш қулай.

Мисол. Ушбу эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг:

варианта	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
частота	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1.

Ечилиши. Кўпайтмалар методидан фойдаланамиз, бунинг учун ҳисоблаш жадвалини тузамиз. Жадвалнинг 1—5 устунлари қандай тўлдирилиши 4-§да кўрсатилгани учун қисқача тушунтиришлар билан чекланамиз. 6-устунни тўлдириш учун 3- ва 5- устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириб чиқиш қулай; 7-устунни тўлдириш учун 3- ва 6- устунларнинг ҳар бир сатридаги сонларни кўпайтириб чиқиш қулай. 8- устун ҳисоблашларни ушбу айният бўйича контрол қилиш учун хизмат қилади:

$$\sum n_i (u_i + 1)^4 = \sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + \\ + 4 \sum n_i u_i + n.$$

Юқоридагиларни 10-ҳисоблаш жадвалида келтирамиз.

Контрол: $\sum n_i (u_i + 1)^4 = 9141.$

$$\sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + 4 \sum n_i u_i + n = \\ = 4079 + 4 \cdot 609 + 6 \cdot 383 + 4 \cdot 57 + 100 = 9141.$$

Йиғиндиларнинг бир хиллиги ҳисоблашлар тўғри бажарилгани ҳақида дарак беради.

Қаралаётган тақсимот учун 4-§ даги мисолда қуйидагилар топилган эди:

$$M_1^* = 0,57; \quad M_2^* = 3,38; \quad D_{\text{т}} = 0,14;$$

демак,

$$\sigma_{\text{т}} = \sqrt{0,14}.$$

$$= [40,79 - 4\cdot 0,57\cdot 6.09 + 6(0,57)^2\cdot 3,83 -$$
$$- 3\cdot(0,57^4)]\cdot 0,2^4 = 0,054.$$

Асимметрия в эксцессни топамиз:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_т} = -\frac{0,0007}{(\sqrt{0,14})^3} = -0,01;$$
$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_т^4} - 3 = \frac{0,054}{(\sqrt{0,14})^3} - 3 = -0,24.$$

Эслатма. Кичик ҳажмли танланмалар бўлган ҳолда асимметрия ва эксцессинг баҳоларига мурожаат қилишда эҳтиёт бўлиш керак ва бу баҳоларнинг аниқлигини топиш лозим (қаранг: Н. В. Смирнов и И. В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. «Наука», 1965, 277-бет).

Масалалар

1—2-масалаларда танланма вариантлар ва уларнинг частоталари келтирилган. Кўпайтмалар методидан фойдаланиб, танланма ўртача қийматни ва дисперсияни топинг.

1. x_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
n_i	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5.

Жавоби. $\overline{x}_т = 11,19$,
$D_т = 0,19$.

2. x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2.

Жавоби. $\overline{x}_т = 90,72$,
$D_т = 17,20$.

3. Ушбу эмпирик тақсимотнинг асимметрияси ва эксцессини топинг:

x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6.

Жавоби. $a_s = -0,0006$,
$e_k = 0,00004$.

Ўн саккизинчи боб

КОРРЕЛЯЦИЯ НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Функционал, статистик ва корреляцион боғланишлар

Кўп масалаларда ўрганилаётган Y тасодифий миқдорнинг битта ёки бир нечта бошқа миқдорларга боғлиқлигини аниқлаш ва баҳолаш талаб қилинади. Аввал Y нинг битта тасо-

2- §. Шартли ўртача қийматлар. Корреляцион боғлиқлик

Корреляцион боғлиқлик таърифини аниқлаштирамиз, бунинг учун шартли ўртача қиймат тушунчасини киритамиз.

Айтайлик, Y тасодифий миқдор ва X тасодифий миқдор орасидаги боғланиш ўрганилаётган бўлсин. X нинг ҳар бир қийматига Y нинг бир нечта қиймати мос келсин. Масалан, $x_1 = 2$ да Y миқдор $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$ қийматлар олган бўлсин. Бу сонларнинг арифметик ўртача қийматини топамиз:

$$\overline{y_2} = \frac{5+6+10}{3} = 7.$$

$\overline{y}_2$ сон шартли ўртача қиймат дейилади; y ҳарфи устидаги чизиқча арифметик ўртача қиймат белгиси бўлиб хизмат қилади, 2 сони эса Y нинг $x_1 = 2$ га мос қийматлари қаралаётганини кўрсатади.

Олдинги параграфдаги мисолга нисбатан олганда, бу маълумотларни бундай талқин қилиш мумкин: учта бир хил участканинг ҳар бирига 4 бирликдан ўғит солинди ва мос равишда 5, 6 ва 10 бирликдан дон олинди; ўртача ҳосил 7 бирлик бўлади.

Шартли ўртача қиймат $\overline{y}_x$ деб Y нинг $X = x$ қийматга мос қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Агар ҳар бир x қийматга шартли ўртача қийматнинг битта қиймати мос келса, у холда, равшанки, шартли ўртача қиймат x нинг функциясидир; бу ҳолда Y тасодифий миқдор X миқдорга корреляцион боғлиқ дейилади.

Y нинг X га корреляцион боғлиқлиги деб, $\overline{y}_x$ шартли ўртача қийматнинг x га функционал боғлиқлигига айтилади:

$$\overline{y}_x = f(x). \qquad (*)$$

(*) тенглама Y нинг X га *регрессия тенгламаси* дейилади; $f(x)$ функция Y нинг X га *регрессияси*, унинг графиги эса Y нинг X га *регрессия чизиғи* дейилади.

$\overline{x}_y$ шартли ўртача қиймат ва X нинг Y га корреляцион боғлиқлиги шунга ўхшаш аниқланади.

$\overline{x}_y$ *шартли ўртача қиймат* деб X нинг $Y = y$ га мос қийматларининг арифметик ўртача қийматига айтилади.

Фараз қилайлик, бу тўғри чизиқларнинг тенгламаларини топиш учун n та синов ўтказилган бўлиб, натижада n_i та сон жуфти топилган бўлсин:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Кузатилаётган сон жуфтларини (X, Y) тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари бош тўпламидан олинган тасодофий танланма сифатида қараш мумкин бўлгани учун бу маълумотлар бўйича топилган катталиклар ва тенгламаларга *танланма* номи қўшилади.

Аниқлик учун, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини излаймиз.

Энг содда ҳолни қарайлик: X белгининг турли x қийматлари ва Y белгининг уларга мос y қийматлари бир мартадан кузатилган бўлсин. Бундай маълумотларни группалашнинг зарурати йўқ. Шунингдек, шартли ўртача қийматдан фойдаланишга ҳам ҳожат йўқ, шунинг учун изланаётган

$$\overline{y}_x = kx + b$$

тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$Y = kx + b.$$

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг бурчак коэффициентини Y нинг X га *танланма регрессия коэффициенти* дейиш ва уни ρ_{yx} орқали белгилаш қабул қилинган.

Шундай қилиб, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг

$$Y = \rho_{yx}x + b \qquad (*)$$

кўринишдаги танланма тенгламасини излаймиз.

Ўз олдимизга ρ_{yx} ва b параметрларни шундай танлашни вазифа қилиб қўяйликки, кузатиш маълумотлари бўйича XOY текисликда ясалган (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) нуқталар иложи борича $(*)$ тўғри чизиқ яқинида ётсин.

Бу талабнинг маъносини аниқлаштирамиз. Ушбу

$$Y_i - y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

айирмани четланиш деб атаймиз, бу ерда Y_i — $(*)$ тенглама бўйича ҳисобланган ва кузатилаётган x_i қийматга мос ордината, y_i эса x_i га мос кузатилаётган ордината.

ρ_{yx} ва b параметрларни четланишларнинг квадратлари йиғиндиси минимал бўладиган қилиб танлаймиз (энг кичик квадратлар методининг мазмуни шундан иборат).

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1.50	1,75	2,25.

Ечилиши. 11-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

11-жадвал

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8,15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$

Изланаётган параметрларни топамиз, бунинг учун жадвал бўйича ҳисобланган йиғиндиларни (***) муносабатларга қўямиз:

$$\rho_{yx} = \frac{5\cdot 26,975 - 15\cdot 8,15}{5\cdot 57,5 - 15^2} = 0,202;$$

$$b = \frac{57,5\cdot 8,15 - 15\cdot 26,975}{62,5} = 1,024.$$

Изланаётган регрессия тенгламасини ёзамиз:

$$Y = 0,202x + 1,024.$$

Бу тенглама бўйича ҳисобланган Y_i қийматлар кузатилган y_i қийматлар билан қанчалик яхши мос келиши ҳақида тасаввур ҳосил қилиш учун $Y_i - y_i$ четланишларни топамиз. Ҳисоблаш натижалари 12-жадвалда келтирилган.

12-жадвал

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	—0,024
1,50	1,327	1,40	—0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,933	1,75	0,083
5,00	2,034	2,25	—0,216

чакнинг биринчи сатридаги частоталар йиғиндиси $n_y = 5 + 7 + 14 = 26$; бу сон Y белгининг 0,4 га тенг қиймати (X белгининг турли қийматлари билан биргаликда) 26 марта кузатилганини англатади.

Сўнгги сатрда устунлардаги частоталарнинг йиғиндилари ёзилган. Масалан, 8 сони X белгининг 10 га тенг қиймати (Y белгининг турли қийматлари билан биргаликда) 8 марта кузатилганини кўрсатади.

Жадвалнинг пастки ўнг бурчагида жойлашган катакка барча частоталар йиғиндиси (жами кузатишлар сони n) ёзилган. Равшанки, $\sum n_x = \sum n_y = n$. Бизнинг мисолда

$$\sum n_x = 8 + 21 + 13 + 18 = 60$$

ва

$$\sum n_y = 26 + 12 + 22 = 60.$$

6-§. Регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини группаланган маълумотлар бўйича топиш. Танланма корреляция коэффициенти

4-§ да Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг параметрларини аниқлаш учун ушбу тенгламалар системаси ҳосил қилинган эди:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sum x^2\right) \rho_{yx} + \left(\sum x\right) b &= \sum xy; \\ \left(\sum x\right) \rho_{yx} + nb &= \sum y. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

X нинг қийматлари ва Y нинг уларга мос қийматлари бир мартадан кузатилган деб фараз қилинган эди. Энди эса кўп сонли маълумотлар олинган (изланаётган параметрларни амалда қониқарли баҳолаш учун камида 50 та кузатиш ўтказилиши лозим), улар орасида такрорланадиганлари бор ва улар корреляцион жадвал кўринишида группаланган деб фараз қилайлик. (*) системани корреляцион жадвал маълумотларини акс эттирадиган қилиб ёзамиз. Ушбу айниятлардан фойдаланамиз:

$$\sum x = n\bar{x} \qquad \left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ нинг натижаси}\right);$$

$$\sum y = n\bar{y} \qquad \left(\bar{y} = \frac{\sum y}{n} \text{ нинг натижаси}\right);$$

$$\sum x^2 = n\overline{x^2} \qquad \left(\overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n} \text{ нинг натижаси}\right);$$

ёки

$$\rho_{yx} = r_{\text{т}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонини (***) га қўйиб, Y нинг X га регрессия тўғри чизиги танланма тенгламасини ушбу

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{\text{т}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \overline{x})$$

кўринишда ҳосил қиламиз.

1-эслатма. X нинг Y га регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламаси ҳам шунга ўхшаш топилади:

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_{\text{т}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \overline{y}),$$

бу ерда

$$r_{\text{т}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy}.$$

2-эслатма. Регрессия тўғри чизиқлари тенгламалари янада симметрик кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\frac{\overline{y}_x - \overline{y}}{\sigma_y} = r_{\text{т}} \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x};$$

$$\frac{\overline{x}_y - \overline{x}}{\sigma_x} = r_{\text{т}} \frac{y - \overline{y}}{\sigma_y}.$$

3-эслатма. Танланма корреляция коэффициенти алоҳида ҳам муҳим аҳамиятга эга. Юқоридагидан келиб чиқишича, танланма корреляция коэффициенти

$$r_{\text{т}} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n \sigma_x \sigma_y}$$

тенглик билан аниқланади, бу ерда x, y лар X ва Y белгиларнинг варианталари (кузатилган қийматлари);

n_{xy} — кузатилган (x, y) варианта жуфтининг частотаси,

n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси);

$\overline{x}$, $\overline{y}$ — танланма ўртача қийматлар;

σ_x, σ_y — танланма ўртача квадратик четланишлар.

7-§. Танланма корреляция коэффициентининг хоссалари

Танланма корреляция коэффициентининг хоссаларини келтирамиз, булардан эса у чизиқли корреляцион боғланишнинг зичлигини баҳолаш учун хизмат қилиши келиб чиқади.

Шу қаралаётган ҳолда регрессия тўғри чизиқлари тегишли координата ўқларига параллел эканлиги равшан.

Эслатма. Агар танланма корреляция коэффициенти нолга тенг бўлса, у ҳолда X ва Y белгилар ночизиқли корреляцион ва ҳатто функционал боғланиш билан боғланган бўлиши мумкин.

3. *Агар танланма корреляция коэффициентининг абсолют қиймати бирга тенг бўлса, у ҳолда белгиларнинг кузатилаётган қийматлари чизиқли функционал боғланиш билан боғланган.*

Агар $|r_т| = 1$ бўлса, у ҳолда $S_y = D_y(1 - r_т^2) = 0$. Бу ердан ушбу тенглик келиб чиқишини кўрсатиш мумкин:

$$y - \overline{y} - r_т \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) = 0$$

Кўриб турибмизки, кузатилаётган исталган (x, y) сон жуфти x ва y га нисбатан чизиқли бўлган бу тенгламани қаноатлантиради, яъни белгининг танланмадаги қийматлари чизиқли функционал боғланиш билан боғланган. Бу ердан ҳали белгилар бош тўпламда ҳам чизиқли функционал боғланиш билан боғланган деган ишонч билан хулоса чиқариш мумкин эмаслигини қайд қилиб ўтамиз (катта ҳажмли репрезентатив танланма бўлганда нормал тақсимланган бош тўпламда белгилар орасидаги боғланиш чизиқлига яқин ва ҳатто чизиқли бўлади).

4. *Танланма корреляция коэффициентининг абсолют қиймати ортиб борган сари чизиқли корреляцион боғланиш янада зичроқ бўла боради ва $|r_т| = 1$ да функционал боғланишга ўтади.*

Исботи. Ушбу

$$S_y = D_y(1 - r_т^2), \qquad S_x = D_x(1 - r_т^2)$$

формулалардан кўриниб турибдики, $r_т$ нинг абсолют қиймати ортиши билан S_y ва S_x дисперсиялар камаяди, яъни белгиларнинг кузатилаётган қийматларининг шартли ўртача қийматлар атрофида тарқоқлиги камаяди, ана шунинг ўзи эса белгилар орасидаги зичлик ортишини ва $|r_т| = 1$ да 3-хоссадан келиб чиқишича, функционал боғланишга ўтишини англатади.

Келтирилган хоссалардан $r_т$ нинг маъноси келиб чиқади: *танланма корреляция коэффициенти танланмада сон белгилар орасидаги чизиқли боғланиш зичлигини характерлайди: $|r_т|$ катталик 1 га қанча яқин бўлса, боғла-*

коэффициенти ушбу формула бўйича ҳисобланади (шартли варианталарга ўтиш $r_\text{т}$ катталикни ўзгартирмайди):

$$r_\text{т} = \frac{\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\bar{v}}{n\,\sigma_u\,\sigma_v}$$

$\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u, σ_v катталиклар кўпайтмалар методи (XVII боб, 4-§) бўйича ҳисобланиши мумкин. Энди $\sum n_{uv} uv$ ни ҳисоблаш усулини кўрсатиш қолди. *Тўрт майдон усули* худди шу мақсадга хизмат қилади. Усулнинг номи энг катта частотани ўз ичига олган катакда кесишадиган сатр ва устун корреляцион жадвални *майдонлар* деб аталадиган тўрт қисмга бўлиши билан боғлиқ. Майдонлар 14-жадвалда кўрсатилганидек номерланади.

14-жадвал

u v		0	
	I		II
0		Энг кат. частота	
	III		IV

Ҳисоблаш қандай олиб борилишини кўрсатамиз, бунинг учун ҳозирча I майдон билан чекланамиз. Айтайлик, 14-жадвалнинг биринчи майдонидан иборат қисми 15-жадвал кўринишида тасвирланган бўлсин.

15-жадвал

u v	−3	−2	−1
−2	5	1	—
−1	—	20	23

u ва v варианталар жуфтлари кўпайтмаларини топамиз ва уларни тегишли частоталарни ўз ичига олган катакларнинг юқоридаги ўнг бурчакларга жойлаштирамиз. $u =$

гини тушунтирамиз (яққоллик мақсадида ҳисоблаш биринчи майдон учунгина олиб борилади).

17- жадвал

u v	−3	−2	−1	0		I	II
−2	6 5	4 7	—			58	
−1	—	2 20	1 23		II	63	
0				Энг кат. частота		III	IV
		III			IV		
I	30	68	23	II		121	II
III				IV		III	IV

Биринчи майдоннинг сатрлари бўйича n_{uv} ва uv ларнинг кўпайтмалари йиғиндиларини топамиз ($5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 = 58$; $20 \cdot 2 + 23 \cdot 1 = 63$) ва уларни қўшимча I устунга жойлаштирамиз.

Биринчи майдоннинг устунлари бўйича n_{uv} ва uv ларнинг кўпайтмалари йиғиндиларини топамиз ($5 \cdot 6 = 30$; $7 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 68$; $23 \cdot 1 = 23$) ва уларни қўшимча I устунга жойлаштирамиз.

I қўшимча устундаги сонлар йиғиндисини топамиз ($58 + 63 = 121$) ва уни (жадвалнинг пастки ўнг бурчагидаги) биринчи якуний катакка ёзамиз.

Контрол қилиш мақсадида қўшимча сатрнинг барча сонларини қўшамиз ($30 + 68 + 23 = 121$).

Қолган майдонлар бўйича ҳисоблаш ҳам шунга ўхшаш олиб борилади.

Мисол. 18- корреляцион жадвалда берилган маълумотлар бўйича танланма корреляция коэффициентини топинг.

Ечилиши. Шартли вариантларга ўтамиз: $u = \frac{x - c_1}{h_1} = \frac{x - 40}{10}$ (c_1 сохта ноль сифатида энг катта частотага эга ва σ_v ни эса ушбу формулалардан (XVI боб, 10-§) фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}, \quad \sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}.$$

$\overline{u}$ ва $\overline{v}$ ни топамиз:

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u u}{n} =$$

$$= \frac{5\cdot(-3) + 27\cdot(-1) + 63\cdot(-2) + 29\cdot 1 + 9\cdot 2}{200} = -0\ 425;$$

$$\overline{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{12\cdot(-2) + 43\cdot(-1) + 47\cdot 1 + 19\cdot 2}{200} = 0{,}09;$$

Ёрдамчи $\overline{u^2}$ миқдорни, кейин эса σ_u ни ҳисоблаймиз:

$$\overline{u^2} = \frac{5\cdot 9 + 27\cdot 1 + 63\cdot 4 + 29\cdot 1 + 9\cdot 4}{200} = 1\ 405;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u}^2 - (\overline{u})^2} = \sqrt{1{,}405 - 0{,}425^2} = 1{,}106.$$

Шунга ўхшаш $\sigma_v = 1{,}209$ ни ҳосил қиламиз.

$\sum n_{uv} uv$ ни тўрт майдон усули билан топамиз, бунинг учун 20-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

19-жадвал

v \ u	—3	—2	—1	0	1	2	n_v
—2	5	7	—	—	—	—	12
—1	—	20	20	—	—	—	43
0	—	—	30	47	2	—	79
1	—	—	10	11	20	6	47
2	—	—	—	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	$n=200$

$r_т$ ни топишда $\bar{u}$, $\bar{v}$, σ_u ва σ_v ҳисобланган бўлгани учун ушбу формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир:

$$\sigma_x = h_1 \sigma_u, \qquad \sigma_y = h_2 \sigma_v, \qquad \bar{x} = \bar{u}\ h_1 + c_1, \qquad \bar{y} = \bar{v}\ h_2 + c_2.$$

Бу ерда олдинги параграфдаги белгилашлар сақланди. Китобхонга бу формулаларни мустақил келтириб чиқаришни тавсия қиламиз.

Мисол. Олдинги параграфдаги мисолнинг 18-корреляцион жадвалидаги маълумотлари бўйича Y нинг X га регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасини топинг.

Ечилиши. Изланаётган тенгламани умумий кўринишда ёзамиз:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_т \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}). \qquad (*)$$

Корреляция коэффициенти олдинги параграфда ҳисобланган эди. $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x ва σ_y ни топсак бўлди:

$$\bar{x} = \bar{u}\ h_1 + c_1 = -0{,}425 \cdot 10 + 40 = 35{,}75;$$

$$\bar{y} = \bar{v}\ h_2 + c_2 = 0{,}09 \cdot 10 + 35 = 35{,}9;$$

$$\sigma_x = \sigma_u\ h_1 = 1{,}106 \cdot 10 = 11{,}06;$$

$$\sigma_y = \sigma_v\ h_2 = 1{,}209 \cdot 10 = 12{,}09.$$

Топилганларни (*) га қўйиб, изланаётган

$$\bar{y}_x - 35{,}9 = 0{,}603 \frac{12{,}09}{11{,}06}(x - 35{,}75)$$

тенгламани, ёки узил-кесил

$$\bar{y}_x = 0{,}659\, x + 12{,}34$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Энди: а) бу тенглама бўйича ҳисобланган б) корреляцион жадвал бўйича шартли ўртача қийматларни таққослаймиз: Масалан, $x=30$ да:

$$\text{а)}\ \bar{y}_{30} = 0{,}659 \cdot 30 + 12{,}34 = 32{,}11;$$

$$\text{б)}\ \bar{y}_{30} = \frac{23 \cdot 25 + 30 \cdot 35 + 10 \cdot 45}{63} = 32{,}94.$$

Кўриб турибмизки, ҳисобланган ва кузатилган шартли ўртача қийматларнинг мос келиши қониқарлидир, иккинчи группанинг группавий ўртача қиймати;

$$\bar{y}_{9} = \frac{13\cdot 3+7\cdot 5}{20} = 3{,}7.$$

Y белгининг барча қийматлари группаларга ажратилгани учун белгининг умумий дисперсиясини группаичи ва группааро дисперсиялар йиғиндиси кўринишида тасвирлаш мумкин (XVI боб, 12-§):

$$D_{ум} = D_{гр.ичи} + D_{гр.аро}\,. \qquad (*)$$

Қуйидаги даъволарнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз:

1) агар Y белги X билан функционал боғланиш орқали боғланган бўлса, у ҳолда

$$\frac{D_{гр.\ аро}}{D_{ум}} = 1;$$

2) агар Y белги X билан корреляцион боғланиш орқали боғланган бўлса, у ҳолда

$$\frac{D_{гр.\ аро}}{D_{ум}} < 1.$$

Исботи. Агар Y белги X га функционал боғланиш билан боғланган бўлса, у ҳолда X нинг тайин қийматига Y нинг битта қиймати мос келади. Бундай ҳолда ҳар бир группада Y нинг ўзаро тенг қийматлари бўлади*, шунинг учун ҳар бир группанинг группавий дисперсияси нолга тенг. Демак, группавий дисперсияларнинг (группаларнинг ҳажмлари бўйича вазний) арифметик ўртача қиймати, яъни группаичи дисперсия $D_{гр\ ичи} = 0$ ва (*) тенглик

$$D_{ум} = D_{гр.\ аро}$$

кўринишни олади, бу ердан

$$\frac{D_{гр.\ аро}}{D_{ум}} = 1.$$

2) агар Y белги X га корреляцион боғланиш билан боғланган бўлса, у ҳолда X нинг тайин қийматига Y нинг, умуман айтганда, турли (группа ташкил қиладиган) қийматлари мос келади. Бундай ҳолда группанинг ҳар бир

---

* Масалан, $x_1=3$ қийматга $y_1=7$ мос келиб, шу билан бирга $x_1=3$ қиймат 5 марта кузатилган бўлса, у ҳолда группада 5 та $y_1=7$ қиймат бўлади.

бу ерда

$$\sigma_{\overline{y}_x} = \sqrt{D_{\text{гр. ар}}} = \sqrt{\frac{\sum n_x(\overline{y}_x - \overline{y})^2}{n}};$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_{y_{\text{ум}}}} = \sqrt{\frac{\sum n_y(y - \overline{y})^2}{n}},$$

бу ерда n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси);

n_x — X белги x қийматининг частотаси;

n_y — Y белги y қийматининг частотаси;

$\overline{y}$ — Y белгининг умумий ўртача қиймати,

$\overline{y}_x$ — белгининг шартли ўртача қиймати.

X нинг Y га танланма корреляцион нисбати шунга ўхшаш аниқланади:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x}_y}}{\sigma_x}.$$

Мисол. 22-корреляцион жадвал маълумотлари бўйича η_{yx} ни топинг.

22-жадвал.

X / Y	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	—	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y}_x$	21	15	20	

Ечилиши. Умумий ўртача қийматни топамиз:

$$\overline{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{38\cdot 15 + 12\cdot 25}{50} = 17,4.$$

Иккала қўшилувчи ҳам манфиймас ва уларнинг йиғиндиси бирга тенг бўлгани учун уларнинг ҳар бири ҳам бирдан ортиқ бўлмайди, хусусан

$$\eta^2 \leqslant 1.$$

$\eta \geqslant 0$ эканлигини эътиборга олиб, бундай хулосага келамиз:

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

2. *Агар* $\eta = 0$ *бўлса, у ҳолда* Y *белги ҳам* X *белги билан корреляцион боғланиш билан боғланмаган.*

Исботи. Шартга кўра

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{гр.аро}}}{\sigma_{\text{ум}}} = 0,$$

бу ердан

$$\sigma_{\text{гр.аро}} = 0,$$

ва демак.

$$D_{\text{гр.аро}} = 0.$$

Группааро дисперсия $\bar{y}_x$ шартли (группавий) ўртача қийматларнинг $\bar{y}$ умумий ўртача қийматга нисбатан дисперсиясидир.

Группааро дисперсиянинг нолга тенглиги шартли ўртача қийматлар X белгининг барча қийматларида (умумий ўртача қийматга тенг бўлган) ўзгармас қийматини сақлашини билдиради. Бошқача сўз билан айтганда, $\eta = 0$ бўлганда шартли ўртача қиймат X нинг функцияси эмас, ва демак, Y белги X белгига корреляцион боғланиш билан боғланмаган.

1-*эслатма.* Тескари даъвони ҳам исботлаш мумкин: агар Y белги X белгига корреляцион боғланиш билан боғланмаган бўлса, у ҳолда $\eta = 0$.

3. *Агар* $\eta = 1$ *бўлса, у ҳолда* Y *белги* X *белгига функционал боғланиш билан боғланган.*

Исботи. Шартга кўра

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{гр.аро}}}{\sigma_{\text{ум}}} = 1.$$

Бу ердан

$$\sigma_{\text{ум}} = \sigma_{\text{гр.аро}}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб,

$$D_{\text{ум}} = D_{\text{гр.аро}} \qquad (*)$$

ёки

$$D_{\text{гр.ичи}} = D_{\text{ум}}(1 - \eta^2).$$

Агар $\eta \to 1$ бўлса, у ҳолда $D_{\text{гр.ичи}} \to 0$, демак, нолга группавий дисперсияларнинг ҳар бири ҳам интилади. Бошқача сўз билан айтганда, η нинг ортиши билан Y нинг X нинг тайин қийматига мос қийматлари бир-биридан борган сари кам фарқланади ва Y нинг X га боғлиқлиги борган сари зичлашиб, $\eta = 1$ бўлганда функционал боғланишга ўтади.

Юқоридаги мулоҳазаларда корреляцион боғланиш шакли ҳақида ҳеч қандай тахмин қилинмагани учун η *нисбат исталган кўринишдаги боғланиш*, шу *жумладан, чизиқли боғланиш зичлигининг ҳам ўлчови бўлиб хизмат қилади.* Корреляцион нисбатнинг фақат чизиқли боғланишнинг зичлигини баҳолайдиган корреляция коэффициентидан устунлиги ҳам ана шундадир Шу билан бир қаторда корреляцион нисбат *камчиликка* ҳам эга; у кузатиш маълумотлари бўйича топилган нуқталар тайин кўринишдаги эгри чизиққа, масалан, параболага, гиперболага ва ҳ. к. га қанчалик яқин жойлашганлиги ҳақида сўз юритишга имкон бермайди. Бу нарса корреляцион нисбатни таърифлашда боғланиш шакли эътиборга олинмаганлиги билан изоҳланади.

14- §. Эгри чизиқли корреляциянинг энг содда ҳоллари

Агар регрессия графиги $\overline{y}_x = f(x)$ ёки $\overline{x}_y = \varphi(y)$ эгри чизиқ билан тасвирланадиган бўлса, корреляция *эгри чизиқли* дейилади.

Масалан, Y нинг X га регрессия функциялари қуйидаги кўринишларда бўлиши мумкин:

$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ (иккинчи тартибли параболик корреляция);

$\overline{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (учинчи тартибли параболик корреляция);

$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b$ (гиперболик корреляция).

Эгри чизиқли корреляция назарияси чизиқли корреляция назарияси қайси масалаларни ҳал қилса, шу масалаларни (корреляцион боғланиш шакли ва зичлигини аниқлаш) ҳал қилади.

Мисол. 23-корреляцион жадвалдаги маълумотлар бўйича Y нинг X га $\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ кўринишдаги танланма регрессия тенгламасини топинг.

24-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

24-жадвалнинг пастки сатридаги сонларни (йиғиндиларни) (**) га қўйиб, система ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} 74{,}98\,A + 67\ 48\,B + 60{,}89\,C = 413{,}93, \\ 67{,}48\,A + 60{,}89\,B + 55{,}10\,C = 373{,}30, \\ 60{,}89\,A + 55{,}10\,B + 50\,C = 337{,}59. \end{aligned}\right\}$$

24-жадвал

x	n_x	$\overline{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y}_x$	$n_x \overline{y}_x x$	$n_x \overline{y}_x x^2$
1	8	6	8	8	8	8	48	48	48
1,1	33	6,73	86,3	39,93	43,93	48,32	222,09	244,30	268,73
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50	81	97,20
Σ	50	—	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59	373,30	413,93

Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$A = 1{,}94,\ B = 2{,}98,\ C = 1{,}10.$$

Изланаётган регрессия тенгламасини ёзамиз:

$$\overline{y}_x = 1{,}94x^2 + 2{,}98x + 1{,}10.$$

Бу тенглама бўйича ҳисобланган шартли ўртача қийматлар корреляцион жадвалдаги шартли ўртача қийматлардан сал фарқ қилишига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. Масалан, $x_1 = 1$ да: жадвал бўйича $y_1 = 6$; тенглама бўйича $y_1 = 1\ 94 + 2{,}98 + 1{,}10 = 6{,}02$. Шундай қилиб, топилган тенглама кузатиш (танланма) маълумотлари билан яхши мос келади.

Z ва X (Y ўзгармас бўлганда), Z ва Y (X ўзгармас бўлганда) орасидаги боғланиш зичлиги мос равишда ушбу *хусусий танланма корреляция коэффициентлари* билан баҳоланади:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{yz}^2\right)}};$$

$$r_{yz}(x) = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{xz}^2\right)}}.$$

Бу коэффициентлар оддий танланма корреляция коэффициенти эга бўлган ўша хоссаларга ва ўша маънога эга, яъни улар белгилар орасидаги чизиқли боғланишни баҳолаш учун хизмат килади.

Масалалар.

1 — 2-масалаларда корреляцион жадваллар берилган: а) $r_т$ ни; б) регрессия тўғри чизиқлари танланма тенгламаларини; в) η_{yx} ва η_{xy} ни топинг.

1.

Y \ X	5	10	15	20	n_y	$\overline{x}_y$
10	2	—	—	—	2	5
20	5	4	1	—	10	8
30	3	8	6	3	20	12,25
40	—	3	6	6	15	16
50	—	—	2	1	3	16,67
n_x	10	15	15	10	$n = 50$	
$\overline{y}_x$	21	29,33	36	38		

Жавоби. а) 0 636; б) $\overline{y}_x = 1,17x + 16,78$; $\overline{x}_y = 0,345y + 1,67$; в) $\eta_{yx} = 0,656$, $\eta_{xy} = 0,651$.

4.

$Y \backslash X$	1	2	n_y
2	30	1	31
6	1	18	19
n_x	31	19	$n = 50$

Жавоби. $\overline{y}_x = 0,39x^2 + 2,49x - 0,75.$

Ўн тўққизинчи боб

СТАТИСТИК ГИПОТЕЗАЛАРНИНГ СТАТИСТИК ТЕКШИРИЛИШИ

1- §. Статистик гипотеза. Ноль ва конкурент, оддий ва мураккаб гипотезалар

Кўпинча бош тўплам тақсимот қонунини билиш зарур бўлади. Агар тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин кўринишга (уни A деб атаймиз) эга деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда қуйидаги гипотеза илгари сурилади; бош тўплам A қонун бўйича тақсимланган. Шундай қилиб бу гипотезада гап *тахмин қилинаётган тақсимотнинг кўриниши* ҳақида бормоқда.

Тақсимот қонуни маълум, унинг параметрлари эса номаълум бўлган ҳол бўлиши мумкин. Агар Θ номаълум параметр тайин Θ_0 қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда ушбу гипотеза олға сурилади: $\Theta=\Theta_0$. Шундай қилиб бу гипотезада гап маълум тақсимот параметрининг тахмин қилинаётган катталиги ҳақида бормоқда.

Бошқача гипотезалар ҳам бўлиши мумкин: икки ёки бир неча тақсимот параметрларининг тенглиги ҳақида, тўпламларнинг эрклилиги ҳақида ва бошқа кўп гипотезалар.

Статистик гипотеза деб номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақида ёки маълум тақсимотларнинг параметрлари ҳақидаги гипотезага айтилади.

ҳам *статистик текшириш* дейилади. Гипотезани статистик текшириш натижасида икки ҳолда нотўғри қарорга келиниши, яъни икки турдаги хатога йўл қўйилиши мумкин.

Биринчи тур хато шундан иборатки, бунда тўғри гипотеза рад қилинади.

Иккинчи тур хато шундан иборатки, бунда нотўғри гипотеза қабул қилинади.

Бу хатоларнинг оқибатлари ҳар хил бўлиши мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз. Масалан, «бинони қуриш давом эттирилсин» деган тўғри қарор рад этилган бўлса, у ҳолда биринчи тур бу хато моддий зарарга олиб келади; агар бинонинг ағдарилиб тушиш хавфига қарамасдан «қурилиш давом эттирилсин» деган қарор қабул қилинган бўлса, у ҳолда иккинчи тур бу хато кишиларнинг ҳалокатига олиб келиши мумкин. Албатта, биринчи тур хато иккинчи тур хатога қараганда оғирроқ оқибатларга олиб келадиган мисоллар ҳам келтириш мумкин.

1-эслатма. Тўғри қарор ҳам икки ҳолда қабул қилиниши мумкин:

1) гипотеза қабул қилинади, у аслида ҳам тўғри эди;
2) гипотеза рад қилинади; у аслида ҳам нотўғри эди.

2-эслатма. Биринчи тур хатога йўл қўйиш эҳтимолини α орқали белгилаш қабул қилинган; у *қийматдорлик даражаси* дейилади. Қийматдорлик даражаси кўпинча 0,05 ёки 0,01 га тенг қилиб олинади. Агар, масалан, қийматдорлик даражаси 0,05 га тенг қилиб олинадиган бўлса, у ҳолда бу юзта ҳолдан бештасида биз биринчи тур хатога йўл қўйишимиз (тўғри гипотезани рад қилишимиз) мумкинлигини англатади.

3-§. Нолинчи гипотезани текширишнинг статистик критерийси. Критерийнинг кузатиладиган қиймати

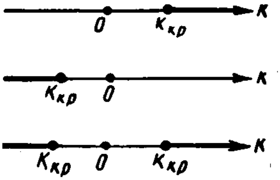
Нолинчи гипотезани текшириш мақсадида махсус танланган ва аниқ ёки тақрибий тақсимоти маълум бўлган тасодифий миқдор ишлатилади. Бу миқдорни, агар у нормал тақсимланган бўлса, U ёки Z орқали, Фишер — Снедекор қонуни бўйича тақсимланган бўлса, F ёки v^2 орқали, Стьюдент қонуни бўйича тақсимланган бўлса, T орқали, «хи квадрат» қонуни бўйича тақсимланган бўлса, χ^2 орқали белгиланади ва ҳ. к. Ушбу параграфда тақсимотнинг кўриниши эътиборга олинмагани учун бу миқдорни, умумийлик нуқтаи назаридан, K орқали белгилаймиз.

Статистик критерий (ёки оддийгина *критерий*) деб нолинчи гипотезани текшириш учун хизмат қиладиган K тасодифий миқдорга айтилади.

гипотезанинг қабул қилиниш соҳасига тегишли бўлса, гипотеза қабул қилинади.

K критерий бир ўлчовли тасодифий миқдор бўлгани учун унинг мумкин бўлган барча қийматлари бирор интервалга тегишли бўлади. Шу сабабли критик соҳа ва гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси ҳам интерваллар бўлади ва демак, уларни ажратиб турадиган нуқталар мавжуд.

Критик нуқталар (чегаралар) $k_{кр}$ деб критик соҳани гипотезанинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадиган нуқталарга айтилади.



23- расм.

Бир томонлама (ўнг томонлама ва чап томонлама) ва икки томонлама критик соҳалар фарқ қилинади.

Ўнг томонлама критик соҳа деб $K > k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — мусбат сон (23-*а* расм).

Чап томонлама критик соҳа деб $K < k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — манфий сон (23-*б* расм).

Бир томонлама критик соҳа деб ўнг томонлама ёки чап томонлама критик соҳага айтилади.

Икки томонлама критик соҳа деб $K < k_1$, $K > k_2$ тенгсизликлар билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_2 > k_1$.

Хусусан, критик нуқталар нолга нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда икки томонлама критик соҳа ($k_{кр} > 0$ деган фаразда)

$$K < -k_{кр}, \quad K > k_{кр}$$

тенгсизликлар ёки унга тенг кучли $|K| > k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланади (23-*в* расм).

5- §. Ўнг томонлама критик соҳани топиш

Критик соҳани қандай топиш керак? Бу масалага асосли жавоб бериш анча мураккаб назарияни жалб қилишни талаб этилади. Биз унинг элементлари билан чекланамиз. Аниқлик учун,

$$K > k_{кр},$$

бу ерда $k_{кр} > 0$

зани рад қилиб, биринчи тур хатога йўл қўйилади. Бундай хатонинг эҳтимоли α қийматдорлик даражасига тенг. Шундай қилиб, (*) талабдан фойдаланишда, биз α эҳтимол билан биринчи тур хатога йўл қўйиш хавфига эгамиз.

Бу ўринда шуни қайд қилиб ўтамизки, маҳсулот сифатини контрол қилишга доир китобларда яроқли буюмларни яроқсиз деб тан олиш эҳтимоли «ишлаб чиқарувчининг таваккали», яроқсиз партияни қилиш эҳтимоли эса «истеъмолчининг таваккали» дейилади.

3-эслатма. Айтайлик, нолинчи гипотеза қабул қилинган бўлсин. Шу билан у исботланди деб ўйлаш хато бўлади. Ҳақиқатан ҳам, маълумки, бир умумий тахминни тасдиқлайдиган битта мисол ҳали уни исботламайди. Шу сабабли бундай дейиш тўғрироқ бўлади: «кузатиш маълумотлари нолинчи гипотезага мувофиқ келади ва демак, уни рад қилишга асос бўла олмайди».

Практикада гипотезани катта ишонч билан қабул қилиш учун бошқа усуллар билан текширилади ёки танланма ҳажмини орттириб, эксперимент такрорланади.

Гипотезани қабул қилишдан кўра кўпроқ рад этишга ҳаракат қилинади. Ҳақиқатан, маълумки бирор умумий даъвони рад қилиш учун бу даъвога зид бўлган битта мисол келтириш кифоя. Агар критерийнинг кузатилаётган қиймати критик соҳага тегишли бўлса, у ҳолда шу фактнинг ўзи нолинчи гипотезага зид бўлган мисолдир, демак, бу мисол гипотезани рад қилишга имкон беради.

6-§. Чап томонлама ва икки томонлама критик соҳаларни излаш

Чап томонлама ёки икки томонлама критик соҳаларни излаш (ўнг томонлама соҳа учун бўлгани каби) тегишли критик нуқталарни топишга келтирилади.

Чап томонлама критик соҳа $K < k_{кр}$ ($k_{кр} < 0$) тенгсизлик билан аниқланади (4-§).

Критик нуқта қуйидаги талабга асосланиб топилади: нолинчи гипотеза ўринли бўлганда критерийнинг $k_{кр}$ дан кичик қиймат қабул қилиш эҳтимоли қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha.$$

Икки томонлама критик соҳа $K < k_1$, $K > k_2$ тенгсизликлар билан аниқланади (4-§).

Критик нуқталар қуйидаги талабга асосланиб топилади: нолинчи гипотеза ўринли бўлганда критерийнинг k_1 дан кичик ёки k_2 дан катта қиймат қабул қилиш эҳтимоллари йиғиндиси қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha. \qquad (*)$$

қабул қилинган, аслида конкурент гипотеза ўринли эди» ҳодисасининг эҳтимоли бўлса, у ҳолда қарама-қарши ҳодиса «нолинчи гипотеза рад қилинган, шу билан бирга конкурент гипотеза ўринли»нинг эҳтимоли, яъни критерийнинг қуввати $1-\beta$ га тенг.

Айтайлик, $1-\beta$ қувват ортсин; демак, иккинчи тур хатога йўл қўйиш эҳтимоли камаяди. Шундай қилиб, қувват қанча катта бўлса, иккинчи тур хатога йўл қўйиш эҳтимоли шунча кичик бўлади.

Шундай қилиб, қийматдорлик даражаси танланган бўлса, у ҳолда критик соҳани критерий қуввати максимал бўладиган қилиб тузиш керак. Бу талабнинг бажарилиши иккинчи тур хато минимал бўлишини таъминлайди, бу эса албатта, мақсадга мувофиқдир.

1-эслатма. «Иккинчи тур хатога йўл қўйилган» ҳодисасининг эҳтимоли β га тенг бўлгани учун қарама-қарши «иккинчи тур хатога йўл қўйилмаган» ҳодисасининг эҳтимоли $1-\beta$ га, яъни критерий қувватига тенг. Бу ердан шу нарса келиб чиқадики, критерий қуввати иккинчи тур хатога йўл қўймаслик эҳтимолидир.

2-эслатма. Равшанки, биринчи ва иккинчи тур хатолар эҳтимоллари қанча кичик бўлса, критик соҳа шунча «яхшидир». Лекин танланма ҳажми берилганда α ва β ни бир вақтда камайтириш мумкин эмас. α камайтириладиган бўлса, β ортади. Масалан, агар $\alpha=0$ қабул қилинадиган бўлса, у ҳолда барча гипотезалар, шу жумладан, нотўғрилари ҳам қабул қилинади, яъни иккинчи тур хато эҳтимоли β ортади.

α ни мақсадга энг мувофиқ бўладиган қилиб қандай танлаш мумкин? Бу саволга бериладиган жавоб ҳар бир конкрет масала учун хатолар «оқибатларининг оғирлигига» боғлиқ. Масалан, биринчи тур хато кўп исрофга, иккинчи тур хато эса кам исрофга сабаб бўлса, у ҳолда иложи борича кичикроқ α олиш лозим.

Агар α танланган бўлса, у ҳолда тўлароқ курсларда баён этилган Ю. Нейман ва Э. Пирсон теоремаларидан фойдаланиб, шундай критик соҳа тузиш мумкинки, унинг учун β минимал, ва демак, критерий қуввати максимал бўлади.

3-эслатма. Биринчи ва иккинчи тур хатолар эҳтимолларини камайтиришнинг бирдан-бир йўли танланмалар ҳажмини орттиришдан иборат.

8-§. Нормал бош тўпламларнинг икки дисперсиясини таққослаш

Амалда дисперсияларни таққослаш масаласи приборлар, асбоблар, ўлчаш методларининг аниқлигини таққослаш талаб этилганда юзага келади. Равшанки, прибор, асбоб ва методлар орасида ўлчаш натижаларининг энг кам тарқоқ бўлишини яъни энг кичик дисперсияни таъминлайдигани маъқулроқдир, каттасининг кичигига нисбатини, яъни

$$F=\frac{s^2\text{кат}}{s^2\text{кич}}$$

тасодифий миқдорни оламиз.

F миқдор нолинчи гипотеза ўринли деган шартда $k_1=$ $=n_1-1$ ва $k_2=n_2-1$ озодлик даражали Фишер — Снедекор тақсимотига эга (XII боб, 15- §), бу ерда n_1 — танланма ҳажми, у бўйича катта тузатилган дисперсия ҳисобланган. n_2 — танланма ҳажми, у бўйича кичик дисперсия топилган;

Фишер — Снедекор тақсимоти фақат озодлик даражалари сонига боғлиқ бўлиб, бошқа параметрларга боғлиқ эмаслигини эслатиб ўтамиз.

Критик соҳа конкурент гипотеза кўринишига боғлиқ равишда тузилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0:D(X)=D(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1:D(X)>D(Y)$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб бир томонлама, чунончи, ўнг томонлама критик соҳа тузилади: F критерийнинг изланаётган критик соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P[F>F_{\text{кр}}(\alpha,k_1,\ k_2)]=\alpha.$$

$F_{\text{кр}}(\alpha,k_1,k_2)$ критик нуқта Фишер — Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан (7-илова) топилади, у ҳолда ўнг томонлама критик соҳа

$$F>F_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан; нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса

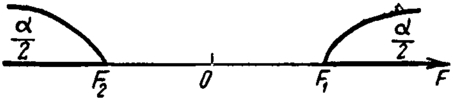
$$F<F_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган тузатилган дисперсиялардан каттасининг кичигига нисбатини $F_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

1- қоида. Берилган қийматдорлик даражасида нормал тўпламлар бош дисперсияларининг тенглиги ҳақида $H_0:D(X)=D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза

Критик соҳанинг чегараларини қандай танлаш керак? Маълум бўлишича, энг катта қувватга (критерийнинг конкурент гипотеза ўринли бўлганда критик соҳага тушиш эҳтимолига) критерийнинг критик соҳанинг иккита интервалдан ҳар бирига тушиш эҳтимоли $\frac{\alpha}{2}$ га тенг бўлганда эришилар экан.



24- расм.

Шундай қилиб, критик соҳанинг чап чегарасини F_1 орқали, ўнг чегарасини F_2 орқали белгиласак, у ҳолда ушбу муносабатлар ўринли бўлиши лозим (24- расм).

$$P(F < F_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(F > F_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Кўриб турибмизки,

$$F < F_1, \quad F > F_2$$

критик соҳани, шунингдек,

$$F_1 < F < F_2$$

нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳасини топиш учун критик нуқталарни топиш кифоя. Критик нуқталарни амалда қандай топиш керак?

Ўнг критик $F_2 = F_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$ нуқтани бевосита Фишер—Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан $\frac{\alpha}{2}$ қийматдорлик даражаси ва k_1, k_2 озодлик даражалари сонлари бўйича топилади.

Аммо чап критик нуқталарни бу жадвал ўз ичига олмайди, шу сабабли F_1 ни бевосита жадвалдан топиш мумкин эмас.

Бу қийинчиликни бартараф этишга имкон берадиган усул мавжуд. Лекин биз уни баён қилмаймиз, чунки чап критик нуқтани топмаслик ҳам мумкин F критерийнинг икки томонлама критик соҳага қабул қилинган қийматдорлик даражаси α га тенг эҳтимол билан тушишини қандай таъминлашни баён қилиш билан чекланамиз.

$$F_{\text{кузат}} = \frac{1,23}{0,41} = 3.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $D(X) \neq D(Y)$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Жадвалдан, берилган қийматдорлик даражасидан икки марта кичик даража, яъни $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$ ва $k_1 = 10-1=9$, $k_2 = 18 - 1 = 17$ озодлик даражалари сони бўйича $F_{\text{кр}}(0,05; 9; 17) = 2,50$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} > F_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад қиламиз. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим. Масалан, агар қаралаётган дисперсиялар икки ўлчаш методининг аниқликларини характерласа, у ҳолда бу методлардан кичик дисперсияга эга бўлганлигини маъқул кўриш лозим.

9- §. Нормал тўпламнинг тузатилган танланма дисперсиясини гипотетик бош дисперсияси билан таққослаш

Айтайлик, бош тўплам нормал тақсимланган, шу билан бирга бош дисперсия номаълум бўлса-да, лекин у гипотетик (тахмин қилинган) σ_0^2 қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлсин. Практикада σ_0^2 олдинги тажриба асосида ёки назарий белгиланади.

Айтайлик, бош тўпламдан n ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $k = n - 1$ озодлик даражали S^2 тузатилган танланма дисперсия топилган бўлсин. Тузатилган дисперсия бўйича берилган қийматдорлик даражасида қаралаётган тўпламнинг бош дисперсияси σ_0^2 гипотетик қийматга тенглигидан иборат бўлган нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

S^2 дисперсия бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси эканлигини ҳисобга олиб, нолинчи гипотезани бундай ёзиш мумкин:

$$H_0 : M(S^2) = \sigma_0^2.$$

Шундай қилиб, тузатилган дисперсиянинг математик кутилиши бош дисперсиянинг гипотетик қийматига тенглигини текшириб кўриш талаб қилинади. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма ва гипотетик бош

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $\chi^2_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

1-қоида. Берилган α кийматдорлик даражасида нормал тўплам номаълум дисперсиясининг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0: \sigma = \sigma_0^2$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилган қиймати $\chi^2_{\text{кузат}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ни ҳисоблаш ва χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси ва $k = n - 1$ озодлик даражаси сони бўйича $\chi^2_{\text{кр}}$ (α, k) нуқтани топиш лозим.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад қилишга асос йўқ.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

1-мисол. Нормал бош тўпламдан $n = 13$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $s^2 = 14{,}6$ тузатилган танланма дисперсия топилган. 0,01 қийматдорлик даражасида $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза сифатида $H_1: \sigma^2 > 12$ ни қабул қилиб, текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилган қийматини топамиз:

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(13-1)\cdot 14{,}6}{12} = 14{,}6.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $\sigma^2 > 12$ кўринишга эга, шунинг учун критик соҳа ўнг томонламадир.

Жадвалдан (5- илова) 0,01 кийматдорлик даражаси ва $k = n - 1 = 13 - 1 = 12$ озодлик даражалари сони бўйича $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 12) = 26{,}2$ критик нуқтани топамиз.

$\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган дисперсия (14,6) ва гипотетик бош дисперсия (12) орасидаги фарқ муҳим эмас.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$. Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

Бу ҳолда қуйидаги талабга асосланиб, икки томонлама критик соҳа тузилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{чап кр}}$ ёки $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{ўнг кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

2-мисол. Нормал бош тўпламдан $n = 13$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $S^2 = 10{,}3$ тузатилган танланма дисперсия топилган. 0,02 қийматдорлик даражасида $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 12$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза сифатида $H_1: \sigma^2 \neq 12$ ни олиб, текшириш талаб қилинади.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётған қийматини топамиз:

$$\chi^2_{\text{кузат}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(12-1)\cdot 10{,}3}{12} = 10{,}3.$$

Конкурент гипотеза $\sigma^2 \neq 12$ кўринишда бўлгани учун критик соҳа икки томонламадир.

Жадвал бўйича (5-илова) критик нуқталарни топамиз: чап критик нуқта: $\chi^2_{\text{кр}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k\right) = \chi^2_{\text{кр}}\left(1 - \frac{0{,}02}{2}, 12\right) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}99;\ 12) = 3{,}57$ ва ўнг критик нуқта: $\chi^2_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right) = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 12) = 26{,}2.$

Критерийнинг кузатилган қиймати гипотезанинг қабул қилиниш соҳасига тегишли бўлганлиги учун $(3{,}57 < 10{,}3 < 26{,}2)$ гипотезани рад қилишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиянинг (10,3) гипотетик бош дисперсиядан (12) фарқи муҳим эмас.

3-ҳол. Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.

3-қоида. Конкурент гипотеза $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ бўлганда $\chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha, k)$ критик нуқта топилади.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}(1 - \alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотеза рад қилинади.

Эслатма. Агар D_T танланма дисперсия топилган бўлса, у ҳолда критерий сифатида $k = n - 1$ озодлик даражали χ^2 тақсимотга эга бўлган $\chi^{21} = \frac{n D_T}{\sigma_0^2}$ тасодифий миқдор қабул қилинади ёки $s^2 = \frac{n}{n-1} D_T$ га ўтилади.

хиллиги билан изоҳланади. Масалан, A физикавий катталикни ўлчаш натижаларининг $\bar{x}$ арифметик ўртача қиймати B физикавий катталикни ўлчаш натижаларининг $\bar{y}$ арифметик ўртача қийматидан муҳим фарқ қилса, бу нарса бу катталикларнинг ҳақиқий ўлчамлари (математик кутилишлари) ҳар хиллигини англатади.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma(\bar{X} - \bar{Y})} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. Бу миқдор — тасодифий, чунки турли тажрибаларда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ турли, олдиндан маълум бўлган қийматлар қабул қилади.

Тушунтириш. Ўртача квадратик четланиш таърифига кўра

$$\sigma = (\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{D(\bar{X} - \bar{Y})}.$$

4- хоссага (VIII боб, 5- §) кўра $D(\bar{X} - \bar{Y}) = D(X) + D(\bar{Y})$.

(*) формулага (VIII боб, 9- §) кўра

$$D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}, \quad D(\bar{Y}) = \frac{D(\bar{Y})}{m}.$$

Демак,

$$\sigma(\bar{X} - \bar{Y}) = \sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}.$$

Z критерий — нормаланган нормал тасодифий миқдор. Дарҳақиқат, Z миқдор нормал тақсимланган, чунки у нормал тақсимланган $\bar{X}$ ва $\bar{Y}$ тасодифий миқдорнинг чизиқли комбинацияси; бу миқдорларнинг ўзлари нормал бош тўпламлардан олинган танланмалар бўйича топилган ўртача қийматлар сифатида нормал тақсимланган; Z шунинг учун ҳам нормалланган миқдорки, нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $M(Z) = 0$, танланмалар эркли бўлгани учун $\sigma(Z) = 1$.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ равишда тузилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$, конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Бу ҳолда икки томонлама критик соҳани қуйидаги талабга асосланиб қурилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин.

интервалларга ажратсак, у ҳолда қўшиш теоремасига асосан

$$P(0 < Z < z_{\text{кр}}) + P(Z > z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2}. \qquad (***)$$

(*) ва (**) га асосан

$$\Phi(z_{\text{кр}}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Бу ердан қуйидаги хулосага келамиз: икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегарасини ($z_{\text{кр}}$) топиш учун Лаплас функциясининг шундай аргументини топиш керакки, унга функциянинг $\frac{1-\alpha}{2}$ га тенг қиймати мос келсин.

У ҳолда икки томонлама критик соҳа ушбу

$$Z < -z_{\text{кр}}, \qquad Z > z_{\text{кр}}$$

тенгсизликлар ёки уларга тенг кучли

$$|Z| > z_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса ушбу

$$-z_{\text{кр}} < Z < z_{\text{кр}}$$

тенгсизлик, ёки унга тенг кучли

$$|Z| < z_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Критерийнинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $Z_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

1-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари маълум бўлган иккита бош тўплам математик кутилишларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текшириш учун критерийнинг кузатилган қиймати

$Z_{\text{кузат}} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{(DX)}{n} + \dfrac{D(Y)}{m}}}$ ни ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвалидан критик нуқтани $\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}$ тенглик бўйича топиш лозим.

$$P(Z>z_{\text{кр}})=\alpha. \qquad (****)$$

Критик нуқтани Лаплас функцияси ёрдамида қандай топишни кўрсатамиз. (***) муносабатдан фойдаланамиз:

$$P(0<Z<z_{\text{кр}})+P(Z>z_{\text{кр}})=\frac{1}{2}.$$

(**) ва (****) га асосан:

$$\Phi(z_{\text{кр}})+\alpha=\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\Phi(z_{\text{кр}})=\frac{1-2\alpha}{2}.$$

Бу ердан бундай хулосага келамиз: ўнг томонлама критик соҳанинг чегарасини ($z_{\text{кр}}$) топиш учун Лаплас функциясининг шундай аргументини топиш керакки, унга функциянинг $\frac{1-2\alpha}{2}$ га тенг қиймати мос келсин. У ҳолда ўнг томонлама критик соҳа $Z>z_{\text{кр}}$ тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса $Z<z_{\text{кр}}$ тенгсизлик билан аниқланади.

2-қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида дисперсиялари маълум бўлган иккита нормал бош тўплам математик кутилишларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: M(X)=M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X)>M(Y)$ бўлганда текшириш учун критерийнинг

$$Z_{\text{кузат}}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n}+\frac{D(Y)}{m}}}$$

кузатилган қийматини ҳисоблаш ва Лаплас функцияси жадвалидан $\Phi(z_{\text{кр}})=\frac{1-2\alpha}{2}$ тенглик бўйича критик нуқтани топиш лозим.

Агар $Z_{\text{кузат}}<z_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{\text{кузат}}>z_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2-мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган $n=10$ ва $m=10$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\bar{x}=14{,}3$ ва $\bar{y}=12{,}2$ танланма ўртача қийматлар топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X)=22$, $D(Y)=18$. Берилган 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: M(X)=M(Y)$ гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X)>M(Y)$ бўлганда текширинг.

Агар $Z_{\text{кузат}} > -z_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{\text{кузат}} < -z_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3-мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган $n = 50$ ва $m = 50$ ҳажмли эркли танланмалар бўйича $\overline{x} = 142$ ва $\overline{y} = 150$ танланма ўртача қийматлар топилган. Бош дисперсиялар маълум: $D(X) = 28{,}2$; $D(Y) = 22{,}8$. Берилган 0,01 қийматдорлик даражасида $H_0 : M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : M(X) < M(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Масаладаги маълумотларни критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаш формуласига қўйиб, $Z_{\text{кузат}} = -8$ ни ҳосил қиламиз.

Шартга кўра конкурент гипотеза $M(X) < M(Y)$ кўринишга эга, шу сабабли критик соҳа чап томонламадир.

$z_{\text{кр}}$ «ёрдамчи нуқтани» ушбу тенгсизлик бўйича топамиз:

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}01}{2} = 0{,}49.$$

Лаплас функцияси жадвалидан $z_{\text{кр}} = 2{,}33$ ни топамиз. Демак $z'_{\text{кр}} = -z_{\text{кр}} = -2{,}33$.

$Z_{\text{кузат}} < -z_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, $\overline{x}$ танланма ўртача қийматнинг $\overline{y}$ танланма ўртача қийматдан кичиклиги муҳим.

11-§. Ихтиёрий тақсимланган бош тўпламларнинг иккита ўртача қийматини таққослаш (катта эркли танланмалар)

Олдинги параграфда X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, уларнинг дисперсиялари эса маълум деб фараз қилинган эди. Бу фаразда ҳамда ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги гипотеза ўринли ва танланмалар эркли бўлганда Z критерий 0 ва 1 параметрли нормал қонун бўйича аниқ тақсимланган.

Юқорида келтирилган талаблардан ақалли биттаси бажарилмаса, 10-§ да баён қилинган, ўртача қийматларни таққослаш методини қўлланиб бўлмайди.

Лекин агар эркли танланмалар катта ҳажмли (ҳар бирининг ҳажми 30 дан кичик эмас) бўлса, у ҳолда танланма ўртача қийматлар тақрибан нормал тақсимланган, танланма дисперсиялар эса бош дисперсияларнинг анча яхши (ду-

Лаплас функцияси жадвалидан $z_{кр}=1{,}64$ ни топамиз. $Z_{кузат}>z_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим.

12- §. Дисперсиялари номаълум ва бир хил бўлган нормал бош тўпламларнинг иккита ўртача қийматини таққослаш (кичик эркли танланмалар)

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, шу билан бирга уларнинг дисперсиялари номаълум бўлсин. Масалан, кичик ҳажмли танланмалар бўйича бош дисперсиялар учун яхши баҳолар олиш мумкин эмас. Шу сабабли ўртача қийматларни тақослашнинг 11- § да баён қилинган методини бу ерда қўллаб бўлмайди.

Аммо юқоридагиларга қўшимча равишда номаълум бош дисперсиялар ўзаро тенг деб фараз қиладиган бўлсак, у ҳолда ўртача қийматларни таққослаш критерийсини (Стьюдент критерийсини) яратиш мумкин. Масалан, битта станокда тайёрланган икки партия деталларнинг ўртача ўлчамлари таққосланаётган бўлса, у ҳолда контроль қилинаётган ўлчамларнинг дисперсиялари бир хил деб тахмин қилиниши табиий.

Агар дисперсиялар бир хил деб ҳисоблашга асос йўқ бўлса, у ҳолда ўртача қийматларини таққослашдан олдин Фишер—Снедекор критерийсидан (8- §) фойдаланиб, бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги гипотезани текшириб кўриш лозим бўлади.

Шундай қилиб, бош дисперсиялар бир хил деган фаразда $H_0: M(X)=M(Y)$ нолинчи гипотезани текшириб кўриш талаб қилинади. Бошқача сўз билан айтганда, кичик n ва m ҳажмли эркли танланмалар бўйича топилган $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб этилади.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. T миқдор нолинчи гипотеза ўринли бўлганда Стьюдентнинг $k=n+m-2$ озодлик даражали t-тақсимотига эга эканлиги исботланган.

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ҳамда Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан берилган α қийматдорлик даражаси (жадвалнинг юқори сатрида жойлашган) ва $k = n + m - 2$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)$ нуқтани топиш лозим.

Агар $|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотезани рад қилишга асос йўқ.

Агар $|T_{\text{кузат}}| > t_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Мисол. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n=5$ ва $m=6$ кичик ҳажмли эркли танланмалар бўйича $\overline{x} = 3,3$, $\overline{y} = 2,48$ танланма ўртача қийматлар ва тузатилган $s_X^2=0,25$ ва $s_Y^2 = 0,108$ дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Танланма дисперсиялар ҳар хил бўлгани туфайли даставвал бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани Фишер—Снедекор критерийсидан (8-§) фойдаланиб текширамиз.

Катта тузатилган дисперсиянинг кичигига нисбатини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{0,25}{0,108} = 2,31.$$

s_X^2 дисперсия s_Y^2 дисперсиядан анча катта, шу сабабли конкурент гипотеза сифатида $H_1: D(X) > D(Y)$ гипотезани қабул қиламиз. Бу ҳолда критик соҳа ўнг томонламадир. Жадвалдан $\alpha = 0,05$ қийматдорлик даражаси ва $k_1 = 5-1=4$, $k_2 = 6-1=5$ озодлик даражалари сонлари бўйича $F_{\text{кр}}(0,05;\ 4;\ 5) = 5,19$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} < F_{\text{кр}}$ бўлгани учун бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Бош дисперсиялар тенглиги ҳақидаги тахмин бажарилгани учун ўртача қийматларни таққослаймиз.

Стьюдент критерийсининг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{ns_X^2 + ms_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Бу формулага кирган катталикларнинг сон қийматларини қўйиб, $T_{\text{кузат}} = 3,27$ ни ҳосил қиламиз.

13- §. Нормал тўпламнинг танланма ўртача қиймати билан гипотетик бош ўртача қийматини таққослаш.

А. Бош тўпламнинг дисперсияси маълум. Айтайлик, X бош тўплам нормал тақсимланган, шу билан бирга бош ўртача қиймат a номаълум бўлса-да, лекин у a_0 гипотетик (тахмин қилинаётган) қийматга тенг дейишга асос бор бўлсин. Масалан, X станок-автомат тайёрлайдиган деталлар партиясидаги x_i ўлчамлар тўплами бўлса, у ҳолда бу ўлчамларнинг a бош ўртача қиймати лойиҳадаги a_0 ўлчамга тенг деб тахмин қилиш мумкин. Бу тахминни текшириш учун $\bar{x}$ танланма ўртача қиймат топилади ҳамда $\bar{x}$ ва a_0 фарқи муҳим ёки муҳим эмаслиги текширилади. Агар фарқ муҳим бўлмаса станок ўртача олганда лойиҳадаги ўлчамни таъминлайди, агар фарқ муҳим бўлса, у ҳолда станокни созлаш лозим бўлади.

Фараз қилайлик, бош тўпламнинг дисперсияси, масалан, аввалги тажрибадан маълум ёки назарий топилган ёки катта ҳажмли танланма бўйича ҳисобланган бўлсин (катта танланма бўйича дисперсиянинг етарлича яхши баҳосини ҳосил қилиш мумкин).

Шундай қилиб, нормал бош тўпламдан n ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\bar{x}$ танланма ўртача қиймат топилган, шу билан бирга σ^2 бош дисперсия маълум бўлсин. Танланма ўртача қиймат бўйича берилган қийматдорлик даражасида a бош ўртача қийматнинг a_0 гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0{:}\,a = a_0$ нолинчи гипотезани текшириш талаб этилади.

Танланма ўртача қиймат бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳоси (XVI боб, 5 - §) яъни $M(\bar{X}) = a_0$ эканлигини назарда тутиб, нолинчи гипотезани қуйидагича ёзиш мумкин: $M(\bar{X}) = a_0$.

Шундай қилиб, танланма ўртача қийматнинг математик кутилиши бош ўртача қийматга тенглигини текшириш талаб этилади. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ва бош ўртача қийматларнинг фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш лозим.

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$$

Агар $U_{\text{кузат}} < -u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1- мисол. Ўртача квадратик четланиши $\sigma = 0{,}36$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан $n = 36$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\overline{x} = 21{,}6$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0 : a = a_0 = 21$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : a \neq 21$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$U_{\text{кузат}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(21{,}6 - 21)\sqrt{36}}{0{,}36} = 10.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $a \neq a_0$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенглик орқали топамиз:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}05}{2} = 0{,}475.$$

Лаплас функцияси жадвали бўйича $u_{\text{кр}} = 1{,}96$ ни топамиз. $U_{\text{кузат}} > u_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қиймат билан гипотетик бош ўртача қиймат орасидаги фарқ муҳим.

2- мисол. 1- мисол маълумотлари бўйича H_0: $a = 21$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $a > 21$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Конкурент гипотеза $a > 21$ кўринишда бўлгани учун критик соҳа ўнг томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенгликдан топамиз:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45.$$

Лаплас функцияси жадвалидан $u_{\text{кр}} = 1{,}65$ ни топамиз. $U_{\text{кузат}} = 10 > u_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этамиз; танланма ўртача қиймат ва гипотетик бош ўртача қиймат орасидаги фарқ муҳим.

Шуни қайд қиламизки, бу ўринда нолинчи гипотезани дарҳол рад этиш мумкин эди, чунки у 1- мисолда икки томонлама критик соҳа бўлганда рад этилган эди. Бу тўлиқ ечилишни бу ерда таълим мақсадида келтирдик.

Б. Бош тўпламнинг дисперсияси номаълум. Агар бош тўпламнинг дисперсияси номаълум бўлса (масалан, кичик

Агар $T_{\text{кузат}} > -t_{\text{ўнг кр.}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $T_{\text{кузат}} < -t_{\text{ўнг кр.}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3- мисол. Нормал бош тўпламдан олинган $n = 20$ ҳажмли танланма бўйича $\overline{x} = 16$ танланма ўртача қиймат ва $s = 4{,}5$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0 : a = a_0 = 15$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1 : a \neq 15$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(16 - 15)\cdot\sqrt{20}}{4{,}5} = 0{,}99.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $a \neq a_0$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан юқори сатрда жойлашган $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ва $k = 20 - 1 = 19$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том. кр}}\,(0{,}05;\, 19) = 2{,}09$ критик нуқтани топамиз.

$|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том. кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ, танланма ўртача қийматнинг гипотетик бош ўртача қийматдан фарқи муҳим эмас.

14- §. Икки томонлама критик соҳа ва ишончли интервал орасида боғланиш

Осонгина кўрсатиш мумкинки, икки томонлама критик соҳани α қийматдорлик даражасида излаётганда, тегишли $\gamma = 1 - \alpha$ ишончлилик билан ишончли интервални ҳам топилади. Масалан, 13- § да $H_0 : a = a_0$ гипотезани $H_1 : a \neq a_0$ да текширилаётганда биз $U = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma}$ критерийнинг икки томонлама критик соҳага тушиш эҳтимоли α қийматдорлик даражасига тенг бўлсин деб талаб қилдик, демак, критерийнинг гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси $(-u_{\text{кр}},\, u_{\text{кр}})$ га тушиш эҳтимоли $1 - \alpha = \gamma$ га тенг. Бошқача сўз билан айтганда, γ ишончлилик билан

$$-u_{\text{кр}} < \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma} < u_{\text{кр}}$$

бу ерда $u_{кр}$ ушбу $\Phi(u_{кр}) = \frac{\gamma}{2} = \frac{1-\alpha}{2}$ тенгликдан топилади.

Агар σ номаълум, лекин унинг баҳоси s топилган бўлса, у ҳолда (13-§, *Б*)

$$n = \frac{t^2_{\text{икки том кр}}(\alpha, k)\cdot s^2}{\delta^2}.$$

16-§. Критерий қувватини излашга доир мисол

Критерийнинг қувватини топишга доир мисолнинг ечилишини келтирамиз.

Мисол. Ўртача квадратик чекланиши $\sigma = 10$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан олинган $n = 25$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{x} = 18$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида қуйидагилар талаб қилинади:

а) агар бош ўртача қийматнинг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги $H_0: a = a_0 = 20$ гипотеза конкурент гипотеза $H_1: a < 20$ бўлганда текширилаётган бўлса, критик соҳани топинг;

б) $a_0 = 16$ да текшириш критерийси қувватини топинг

Ечилиши. а) конкурент гипотеза $a < a_0$ кўринишда бўлгани сабабли критик соҳа чап томонламадир.

3-қоидадан (13-§, *А*) фойдаланиб, критик нуқтани топамиз: $u'_{кр} = -1,65$. Демак, чап томонлама критик соҳа $U < -1,65$ тенгсизлик билан ёки муфассалроқ ёзсак,

$$\frac{(\bar{x}-20)\sqrt{25}}{10} < -1,65$$

билан аниқланади, бу ердан $x < 16,7$.

Танланма ўртача қийматнинг бу қийматларида нолинчи гипотеза рад этилади; шу маънода $\bar{x} = 16,7$ ни танланма ўртача қийматнинг критик қиймати деб қараш мумкин.

б) қаралаётган критерийнинг қувватини ҳисоблаш учун, аввал унинг қийматини конкурент гипотеза ўринли шартда, (яъни $a_0 = 16$) $\bar{x} = 16,7$ деб топамиз:

$$U = \frac{(\bar{x}-a_0\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(16,7-16)\sqrt{25}}{10} = 0,35.$$

Бу ердан кўриниб турибдики, агар $\bar{x} < 16,7$ бўлса, у ҳолда $U < 0,35$. $\bar{x} < 16,7$ бўлганда нолинчи гипотеза рад қилингани учун у, шунингдек, $U < 0,35$ да рад этилади потезани конкурент гипотеза $H_1: M(\overline{X}) \neq M(\overline{Y})$ бўлганда бир хил ҳажмли иккита боғлиқ танланма бўйича текшириш талаб қилинади.

Иккита ўртача қийматни таққослаш ҳақидаги бу масалани битта танланма ўртача қийматни бош ўртача қийматнинг гипотетик қийматига тенглиги ҳақида 13- §, *Б* да ҳал қилинган масалага келтирамиз.

Бу мақсадда $D_i = X_i - Y_i$ айирмалар—тасодифий миқдорларни ва уларнинг ўртача қийматини киритамиз:

$$\overline{D} = \frac{\Sigma D_i}{n} = \frac{\Sigma (X_i - Y_i)}{n} = \frac{\Sigma X_i}{n} - \frac{\Sigma Y_i}{n} = \overline{X} - \overline{Y}.$$

Агар нолинчи гипотеза ўринли, яъни $M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ бўлса, у ҳолда $M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$, ва демак,

$$M(\overline{D}) = M(\overline{X} - \overline{Y}) = M(\overline{X}) - M(\overline{Y}) = 0.$$

Шундай қилиб, $H_0: M(\overline{X}) = M(\overline{Y})$ нолинчи гипотезани бундай ёзиш мумкин:

$$H_0: M(\overline{D}) = 0.$$

У ҳолда конкурент гипотеза қуйидаги кўринишни олади:

$$H_1: M(\overline{D}) \neq 0.$$

1- эслатма. Бундан буён кузатилаётган $x_i - y_i$ нотасодифий айирмаларни $D_i = X_i - Y_i$ тасодифий айирмалардан фарқли ўлароқ d_i орқали белгилаймиз. Шунга ўхшаш, бу айирмаларнинг $\sum \frac{d_i}{n}$ танланма ўртача қийматини $\overline{D}$ тасодифий миқдордан фарқли ўлароқ $\overline{d}$ орқали белгилаймиз.

Шундай қилиб, иккита $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ ўртача қийматни таққослаш битта $\overline{d}$ танланма ўртача қийматни бош ўртача қийматнинг $M(\overline{D}) = a_0 = 0$ гипотетик қиймати билан таққослашга келтирилди. Бу масала олдин, 13- §, Б да ҳал қилинган эди, шу сабабли нолинчи гипотезани текшириш қоидасини ва мисол келтирамиз.

2- эслатма. Юқорида баён қилинганч бўйича,

$$T_{\text{кузат}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{s}$$

$\sum d_i^2 = 1 + 1 + 4 + 1 = 7$ ва $\sum d_i = -3$ лигини назарда тутиб, «тузатилган» ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{[\sum d_i]^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{7 - \frac{9}{5}}{5-1}} = \sqrt{1,3}.$$

Критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаймиз:

$$T_{\text{кузат}} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s_d} = -\frac{0,6\sqrt{5}}{\sqrt{1,3}} = -1,18.$$

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан жадвалнинг юқори сатрига жойлаштирилган 0,05 қийматдорлик даражаси ва $k = 5 - 1 = 4$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{\text{икки том. кр}}(0,05, 4) = 2,78$ критик нуқтани топамиз.

$|T_{\text{кузат}}| < t_{\text{икки том. кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, ўлчаш натижаларининг фарқи муҳим эмас.

18- §. Кузатилаётган нисбий частотани ходиса рўй беришининг гипотетик эҳтимоли билан таққослаш

Етарлича катта n сондаги эркли синовлар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида ҳодисанинг p рўй бериш эҳтимоли ўзгармас, лекин номаълум бўлсин. Бу синовлар бўйича $\frac{m}{n}$ нисбий частота топилган бўлсин. Номаълум эҳтимол p_0 гипотетик қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлсин. Берилган α қийматдорлик даражасида номаълум p эҳтимол p_0 гипотетик эҳтимолга тенглигидан иборат нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади.

Эҳтимол нисбий частота бўйича баҳолангани учун қаралаётган масалани бундай таърифлаш мумкин: кузатилаётган нисбий частота ва гипотетик эҳтимол фарқининг муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб қилинади.

Нолинчи гипотезани текшириш критейриси сифатида

$$U = \frac{\left(\frac{M}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз, бу ерда $q_0 = 1 - p_0$. U миқдор нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $M(U) = 0$, Агар $|U_{\text{кузат}}| > u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2- қоида. Конкурент гипотеза $H_1: p > p_0$ бўлганда ўнг томонлама критик соҳанинг критик нуқтаси $\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2}$ тенгликдан топилади.

Агар $U_{\text{кузат}} < u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{\text{кузат}} > u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

3- қоида. Конкурент гипотеза $H_1: p < p_0$ бўлганда $u_{\text{кр}}$ критик нукта 2- қоида бўйича топилади, кейин эса чап томонлама критик соҳанинг чегараси $u'_{\text{кр}} = -u_{\text{кр}}$ деб олинади.

Агар $U_{\text{кузат}} > -u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $U_{\text{кузат}} < -u_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2- эслатма. Қониқарли натижаларни $np_0q_0 > 9$ тенгсизликнинг бажарилиши таъминлайди.

Мисол. 100 та эркли танланма бўйича 0,08 нисбий частота топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида $H_0: p = p_0 = 0{,}12$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: p \neq 0{,}12$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$U_{\text{кузат}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0.08 - 0{,}12)\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}12 \cdot 0{,}88}} = -1{,}23.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $p \neq p_0$ кўринишга эга. Шу сабабли, критик соҳа икки томонламадир.

Критик нуқтани ушбу тенгликдан топамиз:

$$\Phi(u_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}05}{6} = 0{,}475.$$

Лаплас функцияси жадвали бўйича $u_{\text{кр}} = 1{,}96$ ни топамиз.

$|U_{\text{кузат}}| < u_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача айтганда, кузатилаётган нисбий частотанинг гипотетик эҳтимолдан фарқи муҳим эмас.

бу ерда $V = 2{,}303\ \left[k = \lg \overline{s^2} - \sum_{i=1}^{l} k_i \lg s_i^2\right]$,

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)}\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right].$$

Бартлет шу нарсани аниқлаганки, агар барча $k_i > 2$ бўлса, B тасодифий миқдор нолинчи гипотеза ўринли бўлганда $l-1$ озодлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланади. $k_i = n_i - 1$ эканлигини ҳисобга олиб, $n_i - 1 > 2$ ёки $k_i > 3$ деган хулосага келамиз, яъни танланмаларни ҳар бирининг ҳажми 4 дан кичик бўлмаслиги лозим.

Критик соҳа қуйидаги талабга асосланиб, ўнг томонлама қилиб қурилади: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли нолинчи гипотеза ўринли деб тахмин қилинганда қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлсин:

$$P\left[B > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha,\ l-1\right] = \alpha$$

$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha,\ l-1)$ критик нуқта жадвалдан (5- илова) α қийматдорлик даражаси ва $k = l-1$ озодлик даражалари сони бўйича топилади. Унда критик соҳа

$$B > \chi^2_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса

$$B < \chi^2_{\text{кр}}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Бартлет критерийсининг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $B_{\text{кузат}}$ орқали белгилаймиз ва нолинчи гипотезани текшириш қоидасини таърифлаймиз.

Қоида Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тўпламлар дисперсияларининг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш учун Бартлет критерийсининг кузатилган қийматини ҳисоблаш ва χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha,\ l-1)$ критик нуқтани топиш лозим.

Агар $B_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $B_{\text{кузат}} > \chi^2_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1- эслатма. C ўзгармасни ҳисоблашга шошилмаслик керак. Аввал V ни топиш ва $\chi^2_{\text{кр}}$ билан солиштириш лозим. Агар $V < \chi^2_{\text{кр}}$

$$V = 2{,}303\,[k \lg \bar{s^2} - \sum k_i \lg s_i^2] =$$
$$= 2{,}203\,[50 \cdot 1{,}5795 - 22{,}5305] = 1{,}02.$$

Жадвалдан (5- илова) 0,05 қийматдорлик даражаси ва $l - 1 = 4 - 1 = 3$ озодлик даражалари сони бўйича $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 3) = 7{,}8$ критик нуқтани топамиз.

$V < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлгани учун $B_{\text{кузат}} = \frac{V}{C} < \chi^2_{\text{кр}}$ (чунки $C > 1$), ва демак, дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим эмас.

3- эслатма. Агар бош дисперсияни баҳолаш талаб қилинса, у ҳолда дисперсиянинг бир жинслилиги шартида унинг баҳоси учун тузатилган дисперсияларнинг озодлик даражалари сони бўйича вазний арифметик ўртача қийматини, яъни

$$\bar{s^2} = \frac{\sum k_i s_i^2}{k}$$

ни олиш мақсадга мувофиқдир. Масалан, қаралган мисолда бош дисперсиянинг баҳоси сифатида 0,3798 ни қабул қилиш мақсадга мувофиқ.

20- §. Нормал бош тўпламларнинг дисперсияларини бир хил ҳажмли танланмалар бўйича таққослаш. Кочрен критерийси

Айтайлик, $X_1, X_2, \ldots, X_l$ бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан бир хил n ҳажмли l та танланма олинган ва улар бўйича $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлсин, уларнинг озодлик даражалари сони бир хил: $k = n - 1$.

Тузатилган дисперсиялар бўйича берилган α қийматдорлик даражасида қаралаётган тўпламлар бош дисперсияларнинг ўзаро тенглигидан иборат нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади:

$$H_0: D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l).$$

Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини текшириш талаб қилинади.

Қоида. Берилган α қийматдорлик даражасида нормал тақсимланган тўпламлар дисперсияларининг бир жинслилиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун критерийнинг кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ва жадвал бўйича критик нуқтани топиш лозим.

Агар $G_{\text{кузат}} < G_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $G_{\text{кузат}} > G_{\text{кр}}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Эслатма. Агар бош дисперсияни баҳолаш талаб қилинса, у ҳолда дисперсияларнинг бир жинслилиги шартида дисперсия баҳоси учун тузатилган танланма дисперсияларнинг арифметик ўртача қийматини олиш мақсадга мувофиқдир.

Мисол. Нормал бош тўпламлардан олинган бир хил $n = 17$ ҳажмли эркли танланмалар бўйича тузатилган дисперсиялар топилган: 0,26; 0,36; 0,40; 0,42. Қуйидагилар талаб қилинади:

а) 0,05 қийматдорлик даражасида бош дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш (критик соҳа ўнг томонлама); б) бош дисперсияни баҳолаш.

Ечилиши. а) Кочрен критерийсининг кузатилаётган қийматини — максимал тузатилган дисперсиянинг барча дисперсиялар йиғиндисига нисбатини топамиз:

$$G_{\text{кузат}} = \frac{0,42}{0,26 + 0,36 + 0,40 + 0,42} = 0,2917.$$

Жадвалдан (330-бетдаги изоҳга қаранг) 0,05 қийматдорлик даражаси, $k = 17 - 1 = 16$ озодлик даражалари сони ва танланмалар сони $l = 4$ бўйича $G_{\text{кр}}(0,05;\ 16;\ 4) = 0,4366$ критик нуқтани топамиз.

$G < G_{\text{кр}}$ бўлгани учун дисперсияларнинг бир жинслилиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, тузатилган танланма дисперсиялар фарқи муҳим эмас;

б) нолинчи гипотеза ўринли бўлгани учун бош дисперсиянинг баҳоси сифатида тузатилган дисперсияларнинг арифметик ўртача қийматини топамиз:

$$\sigma^2 = \frac{0,26 + 0,36 + 0,40 + 0,42}{4} = 0,36.$$

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш ва Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари жадвалидан икки томонлама критик соҳа учун берилган қийматдорлик даражаси ва $k=n-2$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{кр}$ (α, k) нуқтани топиш лозим.

Агар $|T_{кузат}| < t_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|T_{кузат}| > t_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Мисол. Икки ўлчовли (X, Y) нормал тўпламдан олинган $n=122$ ҳажмли танланма бўйича $r_т=0,4$ танланма корреляция коэффициенти топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1{:}r_Б \neq 0$ бўлганда текширинг.

Ечилиши. Критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз.

$$T_{кузат}=\frac{r_т\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_т^2}}=\frac{0,4\sqrt{122-2}}{\sqrt{1-0,4^2}}=4,78.$$

Шартга кўра конкурент гипотеза $r_Б \neq 0$ кўринишда, шу сабабли критик соҳа икки томонламадир.

Икки томонлама критик соҳа учун жадвалдан (6-илова) 0,05 қийматдорлик даражаси ва $k=122-2=120$ озодлик даражалари сони бўйича $t_{кр}$ (0,05; 120) = 1,98 критик нуқтани топамиз.

$T_{кузат} > t_{кр}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад қиламиз. Бошқача сўз билан айтганда, танланма корреляция коэффициентининг нолдан фарқи муҳим, яъни X ва Y корреляцияланган.

22-§. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш. Пирсоннинг мувофиқлик критерийси

Олдинги параграфларда бош тўпламнинг тақсимот қонуни маълум деб фараз қилинган эди.

Агар тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин кўринишга эга (уни A деб айтайлик) деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда қуйидаги нолинчи гипотеза текширилади: бош тўплам A қонун бўйича тақсимланган.

Номаълум тақсимотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш тақсимот параметрлари ҳақидаги гипотезани текшириш каби, яъни махсус танланган

Нолинчи гипотезани текшириш критерийси сифатида

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}. \qquad (*)$$

тасодифий миқдорни қабул қиламиз. Бу миқдор тасодифий, чунки у турли тажрибаларда ҳар хил, олдиндан маълум бўлмаган қийматлар қабул қилади. Равшанки, эмпирик ва назарий частоталар қанча кам фарқ қилса, χ^2 критерийнинг катталиги ҳам шунча кичик ва демак, у маълум даражада эмпирик ва назарий тақсимотларнинг яқинлигини характерлайди.

Частоталар айирмаларини квадратларга кўтариш билан мусбат ва манфий айирмаларнинг ўзаро йўқолиш имконияти йўқолишини айтиб ўтамиз. n_i' га бўлиш билан ҳар бир қўшилувчини камайтиришга эришилади: акс ҳолда йиғинди шунчалик катта бўлиб қолар эдики, нолинчи гипотезани ҳатто у тўғри бўлганда ҳам рад этишга олиб келар эди. Албатта, бу мулоҳазалар танланган критерийни асослаш эмас, тушунтиришдир.

Шу нарса исботланганки, $n \to \infty$ да тасодифий миқдорнинг (*) тақсимот қонуни бош тўплам қайси тақсимот қонунига бўйсунганлигидан қатъи назар, k озодлик даражали χ^2 тақсимот қонунига интилади. Шу сабабли, (*) тасодифий миқдор χ^2 орқали белгиланган, критерийнинг ўзи эса «хи квадрат» мувофиқлик критерийси дейилади.

Озодлик даражалари сони $k = s - 1 - r$ тенглик бўйича топилади, бу ерда s — танланмадаги группалар (қисмий интерваллар) сони, r — тахмин қилинаётган тақсимотнинг танланма маълумотлари бўйича баҳоланган параметрлар сони.

Хусусан, тахмин қилинаётган тақсимот нормал бўлса, у ҳолда иккита параметр (математик кутилиш ва ўртача квадратик четланиш) баҳоланади, шу сабабли $r = 2$ ва озодлик даражалари сони

$$k = s - 1 - r = s - 1 - 2 = s - 3.$$

Агар бош тўплам, масалан, Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб тахмин қилинаётган бўлса, у ҳолда битта λ параметр баҳоланади ва шу сабабли $r = 1$ ва $k = s - 2$.

Бир томонлама критерий нолинчи гипотезани икки томонлама критерийга қараганда «қатъият билан» рад этгани учун қуйидаги талабга асосланиб, ўнг томонлама критик соҳа қурамиз: критерийнинг бу соҳага тушиш эҳтимоли но-

Китобхонга бу алмаштиришни мустақил бажаришни тасвия қиламиз, бунинг учун (**) да частоталар айирмасини квадратга кўтариш, натижани n_i' га бўлиш ва $\sum n_i = n$, $\sum n_i' = n$ ни ҳисобга олиш лозим.

Мисол. 0,05 қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текширинг. Эмпирик ва назарий частоталар маълум:

эмпирик частоталар: 6 13 38 74 106 85 30 14,
назарий частоталар: 3 14 42 82 96 76 37 13.

Ечилиши. $\chi^2_{\text{кузат}}$ ни ҳисоблаймиз, бунинг учун 26-ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

26- жадвал

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	—1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	—4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	—8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	—7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{\text{кузат}}=7,19$		373,19

Контрол қилиш: $\chi^2_{\text{кузат}} = 7,19$;

$$\sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 373,19 - 366 = 7,19.$$

Ҳисоблаш тўғри бажарилган.

Танланмада группалар сони $s = 8$ лигини эътиборга олиб, озодлик даражалари сонини топамиз: $k = 8 - 3 = 5$.

χ^2 тақсимотнинг критик нуқталари жадвалидан (5- илова) 0,05 қийматдорлик даражаси, $k = 5$ озодлик даражалар сони бўйича $\chi^2_{\text{кр}}$ (0,05; 5) = 11,1 ни топамиз.

$\chi^2_{\text{кузат}} < \chi^2_{\text{кр}}$ бўлгани учун нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Бошқача сўз билан айтганда, эмпирик ва назарий ҳисобланади, ва ниҳоят, изланаётган $n_i' = np_i$ назарий частоталар ҳисобланади.

Мисол. Бош тўплам нормал тақсимланган деган тахминда назарий частоталарни $n = 200$ ҳажмли танланманинг интервал тақсимоти бўйича топинг (27- жадвал).

27- жадвал

интервал номери	интервал чегаралари		Частота	интервал номери	интервал чегаралари		Частота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				
							$n=200$

Ечилиши. 1. Интервалнинг ўрталари $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ни топамиз. Масалан, $x_1^* = \frac{4+6}{2} = 5$. Шунга ўхшаш иш юритиб, тенг узоқликда турган x_i^* варианталар ва уларга тегишли n_i частоталар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13.

2. Танланма ўртача қиймат ва танланма ўртача квадратик четланишни кўпайтмалар методидан фойдаланиб топамиз:

$$\overline{x^*} = 12,63, \quad \sigma^* = 4,695.$$

3. $\overline{x^*} = 12,63$, $\sigma^* = 4,695$, $\frac{1}{\sigma^*} = 0,213$ ни ҳисобга олиб, (z_i, z_{i+1}) интервалларни топамиз, бунинг учун 28- ҳисоблаш жадвалини тузамиз.

тенглиги ҳақидаги H_0: $D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $D(X) > D(Y)$ бўлганда текширинг;

а) $n_1 = 21$, $n_2 = 16$, $s_X^2 = 3,6$ $s_Y^2 = 2,4$, $\alpha = 0,05$;

б) $n_1 = 13$, $n_2 = 18$, $s_X^2 = 0,72$, $s_Y^2 = 0,20$, $\alpha = 0,01$.

Жавоби. а) $F_{\text{кузат}} = 1,5$; $F_{\text{кр}}$ $(0,05,\ 20;\ 15) = 2,33$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ; б) $F_{\text{кузат}} = 3,6$; $F_{\text{кр}}$ $(0,01;\ 12;\ 17) = 3,46$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

2. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган n ва m ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ танланма ўртача қийматлар топилган. $D(X)$ ва $D(Y)$ бош дисперсиялар маълум. α қийматдорлик даражасида математик кутилишлар тенглиги ҳақидаги H_0: $M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текширинг.

а) $n = 30$, $m = 20$, $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$, $\alpha = 0,05$;

б) $n = 50$, $m = 40$, $D(X) = 50$, $D(Y) = 120$, $\alpha = 0,01$.

Жавоби. а) $Z_{\text{кузат}} = 1$, $z_{\text{кр}} = 1,96$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. б) $Z_{\text{кузат}} = 10$; $z_{\text{кр}} = 2,58$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

3. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган $n = 5$ ва $m = 6$ ҳажмли иккита эркли танланма бўйича $\bar{x} = 15,9$, $\bar{y} = 14,1$ танланма ўртача қийматлар ва $s_X^2 = 14,76$, $s_Y^2 = 4,92$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида математик кутилишлар тенглиги ҳақидаги H_0: $M(X) = M(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$ бўлганда текширинг.

Кўрсатма. Аввал дисперсияларни таққосланг.

Жавоби. $T_{\text{кузат}} = 0,88$, $t_{\text{кр}} = (0,05;\ 9) = 2,26$. нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

4. Ўртача квадратик четланиши $\sigma = 2,1$ маълум бўлган нормал бош тўпламдан $n = 49$ ҳажмли танланма олинган ва у бўйича $\bar{x} = 4,5$ танланма ўртача қиймат топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида математик кутилишнинг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги H_0: $a = 3$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза H_1: $a \neq 3$ бўлганда текширинг.

Жавоби. $U_{\text{кузат}} = 5$, $u_{\text{кр}} = 1,96$. Нолинчи гипотеза рад этилади.

5. Нормал бош тўпламдан олинган $n = 16$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{x} = 12,4$ танланма ўртача қиймат ва $s = 1,2$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида математик кутилишнинг гипотетик қийматга тенглиги ҳақидаги H_0: $a = 11,8$ нолинчи гипотеза конкурент гипотеза H_1: $a \neq 11,8$ бўлганда текширинг.

Жавоби. $T_{\text{кузат}} = 2$, $t_{\text{кр}}$ $(0,05;\ 15) = 2,13$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

в) эмпирик частоталар:	5	13	12	44	8	12	6
назарий частоталар:	2	20	12	35	15	10	6

Жавоби. $\chi^2_{кузат} = 2,5$, $\chi^2_{кр}$ $(0,05; 4) = 9,5$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ б) $\chi^2_{кузат} = 3$, $\chi^2_{кр}$ $(0,05; 7) = 14,1$. Нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. в) $\chi^2_{кузат} = 13$, $\chi^2_{кр}$ $(0,05; 4) = 9,5$. Гипотеза рад этилади.

Йигирманчи боб

БИР ФАКТОРЛИ ДИСПЕРСИОН АНАЛИЗ

1-§. Бир нечта ўртача қийматларни таққослаш. Дисперсион анализ ҳақида тушунча

Айтайлик, X_1, X_2, .., X_p бош тўпламлар нормал тақсимланган ҳамда номаълум бўлса-да, лекин бир хил дисперсияга эга бўлсин; математик кутилишлар ҳам номаълум бўлса-да, лекин улар ҳар хил бўлиши мумкин. Берилган қийматдорлик даражасида барча математик кутилишлар тенглиги ҳақидаги

$$H_0: M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_p)$$

нолинчи гипотезани танланма ўртача қийматлар бўйича текшириш талаб қилинади. Бошқача сўз билан айтганда, танланма ўртача қийматлар фарқи муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш талаб этилади. Бир неча ($p > 2$) ўртача қийматларни таққослаш учун уларни иккита-иккитадан таққослаш кифоядек туюлиши мумкин. масалан, ўртача қийматлар сони ортиши билан улар орасидаги энг катта фарқ ҳам ортади, яъни танланманинг ўртача қиймати янги тажрибадан аввал ҳосил қилинган ўрта қийматларнинг энг каттасидан катта ёки энг кичигидан кичик бўлиб чиқиши мумкин. Шу сабабли бир нечта ўртача қийматларни таққослаш учун бошқача методдан фойдаланилади. Бу метод дисперсияларни таққослашга асосланган ва шу сабабли *дисперсион анализ* деб аталган (у асосан инглиз статистиги Р. Фишер ишларида ривожлантирилган).

Практикада дисперсион анализ p та F_1, F_2, ..., F_p даражага эга бўлган F сифат факторнинг ўрганилаётган X миқдорга таъсири муҳим ёки муҳим эмаслигини аниқлаш учун қўлланилади. Масалан, энг кўп ҳосил олишда ўғитларнинг қайси тури самаралироқ эканлиги талаб қилинса, у ҳолда F фактор—ўғит, унинг даражалари эса ўғит турлари бўлади.

30- жадвал

Синаш номерлари	Фактор даражалари F_j			
	F_1	F_2	...	F_p
1 2 ... q	x_{11} x_{21} ... x_{q1}	x_{12} x_{22} ... x_{q2}	... ...	x_{1p} x_{2p} ... x_{qp}
Группавий ўртача қийматлар	$\bar{x}_{\text{гр}1}$	$\bar{x}_{\text{гр}2}$	...	$\bar{x}_{\text{гр}\,p}$

Таърифга кўра қуйидагиларни киритамиз.

$$S_{\text{ум}} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij} - \bar{x})^2$$

(кузатилаётган қийматларнинг $\bar{x}$ умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратларнинг *умумий йиғиндиси*).

$$S_{\text{факт}} = q\sum_{j=1}^{p}(\bar{x}_{\text{гр}j} - \bar{x})^2$$

(группавий ўрта қийматларнинг умумий ўртача қийматидан четланишлари квадратларнинг *фактор йиғиндиси*, у «группалар орасида» тарқоқликни характерлайди).

$$S_{\text{қолд}} = \sum_{i=1}^{q}(x_{i1} - \bar{x}_{\text{гр}1})^2 + \sum_{i=1}^{q}(x_{i2} - \bar{x}_{\text{гр}2})^2 + \ldots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q}(x_{ip} - \bar{x}_{\text{гр}\,p})^2$$

(группадаги кузатилаётган қийматларнинг ўзининг группавий ўртача қийматдан четланишлари квадратларнинг *қолдиқ йиғиндиси*, у «группалар ичидаги» тарқоқликни характерлайди).

Амалда қолдиқ йиғинди ушбу тенглик бўйича (3- §, натижа) топилади:

$$S_{\text{қолд}} = S_{\text{ум}} - S_{\text{факт}}.$$

Тушунтиришлар.

1. $S_{факт}$ F факторнинг таъсирини характерлашига ишонч ҳосил қилайлик. Айтайлик, фактор X га муҳим таъсир кўрсатсин. $У$ ҳолда белгининг битта тайин даражада кузатилган қийматлари группаси, умуман айтганда, бошқа даражалардаги кузатиш группаларидан фарқ қилади. Демак, группавий ўртача қийматлар ҳам фарқ қилади, шу билан бирга фактор таъсири қанча катта бўлса, улар умумий ўртача қиймат атрофида шунча кўп тарқоқ бўлади. Бу ердан фактор таъсирини баҳолаш учун группавий ўртача қийматларнинг умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратлари йиғиндисини тузиш мақсадга мувофиқлиги (мусбат ва манфий четланишларнинг ўзаро йўқолиб кетишини бартараф қилиш мақсадида четланиш квадратга кўтарилади) келиб чиқади. Бу йиғиндини q га кўпайтириб $S_{факт}$ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $S_{факт}$ факторнинг таъсирини характерлайди.

2. $S_{қолд}$ тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиришига ишонч ҳосил қиламиз. Бир группадаги кузатишлар фарқ қилмаслиги керакдек бўлиб кўринади. Лекин X га F фактордан ташқари тасодифий сабаблар ҳам таъсир кўрсатгани учун — битта группадаги кузатишлар, умуман айтганда, турли ва демак, ўзининг группавий ўртача қиймати атрофида тарқоқ бўлади. Бу ердан тасодифий сабабларни баҳолаш учун ҳар бир группанинг кузатилаётган қийматларини уларнинг ўз группавий ўртача қийматидан четланишлари квадратлари йиғиндисини яъни $S_{қолд}$ ни тузиш мақсадга мувофиқлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $S_{қолд}$ тасодифий сабаблар таъсирини характерлайди.

3. $S_{ум}$ ҳам фактор, ҳам тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиришига ишонч ҳосил қиламиз. Барча кузатишларни ягона тўплам сифатида қараймиз. Белгининг кузатилаётган қийматлари фактор ва тасодифий сабаблари натижасида ҳар хил. Бу таъсирни баҳолаш учун кузатилаётган қийматларнинг умумий ўртача қийматдан четланишлари квадратлари йиғиндисини, яъни $S_{ум}$ ни тузатиш мақсадга мувофиқдир.

Шундай қилиб, $S_{ум}$ фактор ва тасодифий сабаблар таъсирини характерлайди.

Фактор йиғинди фактор таъсирини, қолдиқ йиғинди эса тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиришини яққол кўрсатадиган мисол келтирамиз.

Қолдиқ йиғинди:

$$S_{\text{қолд}} = (x_{11} - \bar{x}_{1\text{гр}})^2 + (x_{21} - \bar{x}_{1\text{гр}})^2 + (x_{12} - \bar{x}_{2\text{гр}})^2 + (x_{22} - \bar{x}_{2\text{гр}})^2.$$

Қавслар ичидаги катталикларни ўрнига қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S_{\text{қолд}} = [(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\alpha_2 - \alpha)^2] + [(\beta_1 - \beta)^2 + (\beta_2 - \beta)^2].$$

Кўриниб турибдики, $S_{\text{қолд}}$ ўлчашларнинг тасодифий хатолари билан аниқланади, ва демак, у тасодифий сабаблар таъсирини ҳақиқатан ҳам акс эттиради.

Эслатма. $S_{\text{қолд}}$ тасодифий сабаблар томонидан вужудга келтирилиши, шунингдек, ушбу тенгликдан хам (3-§, натижа) келиб чиқади.

$$S_{\text{қолд}} = S_{\text{ум}} - S_{\text{факт}}.$$

Дарҳақиқат, $S_{\text{ум}}$ фактор ва тасодифий сабаблар таъсири натижасидир, $S_{\text{факт}}$ ни айириш билан, биз фактор таъсирини йўқотамиз. Демак, «қолган қисм» тасодифий сабаблар таъсирини акс эттиради.

3-§. Умумий, фактор ва қолдиқ йиғиндилар орасидаги боғланиш

Қуйидагини кўрсатамиз: $S_{\text{ум}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{қолд}}$. Келтириб чиқаришни соддалаштириш мақсадида иккита даража ($p=2$) ва ҳар бир даражада иккита синов ($q=2$) билан чекланамиз. Синов натижаларини 31-жадвал кўринишида тасвирлаймиз.

31-жадвал

Синаш номери	Фактор даражалари, F_j	
	F_1	F_2
1	x_{11}	x_{12}
2	x_{21}	x_{22}
$\bar{x}_{j\text{гр}}$	$\bar{x}_{1\text{гр}}$	$\bar{x}_{2\text{гр}}$

у ҳолда

$$S_{\text{ум}} = (x_{11} - \bar{x})^2 + (x_{21} - \bar{x})^2 + (x_{12} - \bar{x})^2 + (x_{22} - \bar{x})^2.$$

5- §. Бир нечта ўртача қийматларни дисперсион анализ методи билан таққослаш

1- § да қўйилган масалага қайтайлик: берилган қийматдорлик даражасида номаълум, лекин бир хил дисперсияли нормал тўпламларнинг бир нечта ($p>2$) ўртача қийматларининг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текширинг. Бу масалани ҳал этишнинг фактор ва қолдиқ дисперсияларини Фишер—Снедекор критерийси (XIX боб, 8- §) бўйича таққослашга келтирилишини кўрсатамиз.

1. Бир нечта ўртача қийматлар (уларни бундан кейин группавий деб атаймиз) тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза тўғри бўлсин. Бу ҳолда фактор ва қолдиқ дисперсиялар номаълум бош дисперсиянинг силжимаган баҳолари (4- §) бўлади, ва демак, уларнинг фарқи муҳим эмас. Агар бу баҳоларни F критерий бўйича таққосланса, у ҳолда бу критерий фактор ва қолдиқ дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани қабул қилиш лозимлигини кўрсатиши равшан.

Шундай қилиб, группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза тўғри бўлса, у ҳолда фактор ва қолдиқ дисперсиялар тенглиги ҳақидаги гипотеза ҳам тўғри бўлади.

2. Группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза нотўғри (ёлғон) бўлсин. Бу ҳолда группавий ўртача қийматлар орасидаги фарқ ортиши билан фактор дисперсия, у билан бирга $F_{\text{кузат}} = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{қолд}}}$ нисбат ҳам орта боради. Натижада $F_{\text{кузат}}$ қиймат $F_{\text{кр}}$ дан катта бўлади, ва демак, дисперсиялар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза рад этилади.

Шундай қилиб, группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги гипотеза нотўғри бўлса, у ҳолда фактор ва қолдиқ дисперсиялар тенглиги ҳақидаги гипотеза ҳам нотўғри бўлади.

Қарама-қаршисини фараз қилиш йўли билан қуйидаги тескари даъволарнинг ўринли эканлигини кўрсатиш осон: дисперсиялар ҳақидаги гипотезанинг тўғрилигидан (нотўғрилигидан) ўртача қийматлар ҳақидаги гипотезанинг тўғрилиги (нотўғрилиги) келиб чиқади.

Шундай қилиб, бир хил дисперсияли нормал тўпламларнинг группавий ўртача қийматлари тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш учун фактор ва қолдиқ

33-жадвал

Синаш номери	Фактор даражалари, F_j						
	F_1		F_2		F_3		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1	—1	1	0	0	—10	100	
2	0	0	2	4	—8	64	
3	4	16	4	16	—2	4	
4	5	25	6	36	0	0	
$S_j = \sum_{i=1}^{4} y_{ij}^2$		42		56		168	$\sum S_j = 266$
T_j	8		12		—20		$\sum T_j = 0$
T_j^2	64		144		400		$\sum T_j^2 = 608$

Четланишлар квадратларининг колдиқ йиғиндисини топамиз:

$$S_{\text{қолд}} = S_{\text{ум}} - S_{\text{факт}} = 266 - 152 = 114.$$

Фактор ва қолдиқ дисперсияларни топамиз:

$$s_{\text{факт}}^2 = \frac{S}{p-1} = \frac{152}{3-1} = 76;$$

$$s_{\text{қолд}}^2 = \frac{S_{\text{қолд}}}{p(q-1)} = \frac{114}{3(4-1)} = \frac{114}{9} = 12{,}67.$$

Фактор ва қолдиқ дисперсияларни F критерий (XIX боб, 8-§) бўйича таққослаймиз, бунинг учун критерийнинг кузатилаётган қийматини топамиз:

$$F_{\text{кузат}} = \frac{s_{\text{факт}}^2}{s_{\text{қолд}}^2} = \frac{76}{12{,}67} = 6.$$

Суратнинг озодлик даражалари сони $k_1 = 2$, махражники эса $k_2 = 9$ эканлигини, қийматдорлик даражаси $\alpha = 0{,}05$ эканлигини ҳисобга олиб, жадвалдан $F_{\text{кр}}(0{,}05;\ 2;\ 9) = 4{,}26$ критик нуқтани топамиз.

$F_{\text{кузат}} > F_{\text{кр}}$ бўлгани учун группавий ўртача қийматлар тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этамиз. Бошқача айтганда группавий ўртача қийматларнинг фарқи «умуман» муҳим. Агар ўртача қийматларни жуфт-жуфт таққос-

1- илова

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция қийматлари жадвали

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Давоми

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4842	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4387	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

3- илова

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ қийматлар жадвали

γ n	0,95	0,99	0,999	γ n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Давоми

Озодлик даражалар сони, k	Қийматдорлик даражаси, α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

6- илова

Стьюдент тақсимотининг критик нуқталари

Озодлик даражалар сони, k	α қийматдорлик даражаси (икки томонлама критик соҳа)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79

7- илова

Фишер—Снедекорнинг F тақсимоти критик нуқталари

(k_1— катта дисперсиянинг озодлик даражалар сони),
(k_2— кичик дисперсиянинг озодлик даражалар сони)

$\alpha = 0{,}01$ қийматдорлик даражаси

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5695	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,85	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45