ОБИД КАРИМИЙ

ПЛАНИМЕТРИЯДАН ҲИСОБЛАШГА ВА ИСБОТЛАШГА ДОИР ТАНЛАНГАН МАСАЛАЛАР

ТЎЛДИРИЛГАН ВА ТУЗАТИЛГАН
ИККИНЧИ НАШРИ

ЎРТА МАКТАБ ЎҚИТУВЧИЛАРИ
ВА ОЛИЙ МАКТАБЛАР УЧУН ҚЎЛЛАНМА

Махсус редактор доцент Ҳ. А. Мустафин

„ЎҚИТУВЧИ“ НАШРИЁТИ
Тошкент — 1965

На узбекском языке

Абид Каримий

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Издательство „Учитель"—1965—Ташкент

Издание второе,
дополненное и исправленное

Редакторлар *А. Абдураҳмонов, А. Маҳдиев*
Техн. редактор *Р. Олимбоева.* Расмлар редактори *И. Исроилов*
Корректор *Ж. Нуритдинова*

Теришга берилди 10/II-1965. Босишга рухсат этилди 9/VI-1965. Қоғози $60\times90^1/_{16}$.
Физик. л. 19,0. Нашр. л. 20,43. Тиражи 7000. Р 05813.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Шартнома № 276-63. Баҳоси 61 т. Муқоваси 15 т.

ЎзССР Министрлар Совети Матбуот Давлат комитетининг 1-босмахонаси. Тошкент,
Ҳамза кўчаси, 21. 1965. Зак. № 446.

СЎЗ БОШИ

Ўқувчиларнинг умумий билимини ўстиришда геометрия фани муҳим ўрин тутса-да, кўп мактабларда уни ўқитиш сифати талаб этилган даражада деб бўлмайди. Бунинг асосий сабабларидан бири геометрия фанини ўқитишга расмиятчилик билан қараш бўлса, иккинчиси бу соҳада ишлайдиган ихтисосли кадрларнинг етишмаслиги, ўзбек тилида геометрияга доир (дарсликдан ташқари) қўшимча қўлланмаларнинг йўқлигидир. Педагогика институтларида ҳам элементар математикани ўрганишга, айниқса геометрия теоремаларини масалалар ечишга татбиқ эта билиш малакаларини яратишга кам аҳамият ва оз вақт берилади. Шу сабабли институт ўқувчилари орасида ҳам, институтни битириб чиққан ўқитувчилар ичида ҳам жиддийроқ масалаларни ечишда қийналиб қоладиганлари кўп учрайди.

Бу қўлланмани ёзишдан мақсад ана шу камчиликларни йўқотишда ўқитувчилар ва ўқувчиларга оз бўлса-да ёрдам беришдир.

Қўлланма уч қисмдан иборат:

Биринчи қисмда ёрдамчи теоремаларнинг исботи, бу теоремаларнинг масалалар ечишга татбиқ этилишига доир мисоллар, ҳисоблаш ва исбот қилишга доир геометрик масалаларни ечиш методлари ёритилган.

Иккинчи қисмда 602 та масала[1] берилган.

Ниҳоят, учинчи қисмда иккинчи қисмдаги масалаларнинг тегишли методик кўрсатмалар билан биргаликдаги ечимлари берилган.

---

[1] Масалалар асосан М. Попруженконинг „Сборник задач по геометрии“ китобидан олинди.

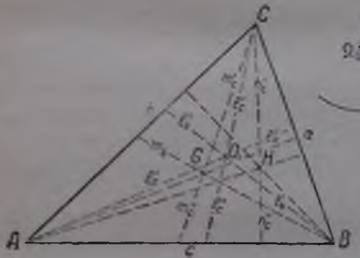
Бу қўлланмани ёзишда берган маслаҳатлари ва қимматли кўрсатмалари учун физика-математика фанлари доктори, профессор А. С. Смогоржевскийга, қимматли маслаҳати ва холис ёрдамини аямаган Ўзбекистон Фанлар Академиясининг корреспондент аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор С. Ҳ. Сирожиддинов, қўл ёзмани диққат билан кўздан кечириб, катта меҳнат сарф этган редактор, доцент Ҳ. А. Мустафин, Республика ўқув методик Совети (Ў. М. С) нинг раиси, доцент А. Л. Перельдик, кекса ўқитувчи П. А. Островский, методист С. Б. Ғофуров ва бошқаларга самимий миннатдорчилик билдираман.

Бу асардан фойдаланишда учраган камчилик ва хатоларни кўрсатиб мурожаат қилган китобхонларнинг кўрсатмаларини чуқур мамнуният билан қабул қиламан.

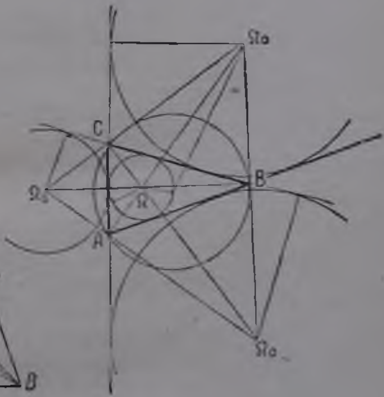
Обид Каримий.

Шартли белгилар

(1- ва 2-шаклларга қаранг)



1-шакл.



2-шакл.

Агар махсус шартлашилмаган бўлса, формулаларда ва масалаларда учбурчаклар учун қуйидаги белгилар қабул қилинган.

A, B, C — учбурчакнинг учлари.

a, b, c — томонлари ($a = BC$, $b = AC$, $c = AB$).

A, B, C ёки α, β, γ — бурчаклари.

p — ярим периметри.

h_a, h_b, h_c — баландликлари.

m_a, m_b, m_c — медианалари.

l_a, l_b, l_c — ички бурчакларнинг биссектрисалари.

l_{1a}, l_{1b}, l_{1c} — ташқи бурчакларнинг биссектрисалари.

R — ташқи чизилган айлананинг радиуси.

r — ички чизилган айлананинг радиуси.

r_a, r_b, r_c — ташқи-ички чизилган айланаларнинг радиуслари.

S — учбурчакнинг юзи.

H — баландликларнинг кесишган нуқтаси (ортомарказ).

G — медианаларнинг кесишган нуқтаси (оғирлик маркази).

O — ташқи чизилган айлананинг маркази.

Ω — ички чизилган айлананинг маркази (биссектрисаларнинг кесишган нуқтаси).

$\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c$ — ташқи-ички чизилган айланаларнинг марказлари.

O_9 — Эйлер айланасининг маркази (тўққиз нуқта айланаси).

h'_a, h'_b, h'_c — баландликларнинг кесишган нуқтасини учбурчакнинг учлари билан туташтирувчи кесмалар.

l'_a, l'_b, l'_c — биссектрисаларнинг кесишган нуқтасини учбурчакнинг учлари билан туташтирувчи кесмалар.

m'_a, m'_b, m'_c — медианаларнинг кесишган нуқтасини учбурчакнинг учлари билан туташтирувчи кесмалар.

h''_a, h''_b, h''_c — баландликларнинг ортомарказ билан учбурчакнинг томонлари орасидаги кесмалари.

l''_a, l''_b, l''_c — биссектрисаларнинг улар кесишган нуқта билан учбурчакнинг томонлари орасидаги кесмалари.

m''_a, m''_b, m''_c — медианаларнинг улар кесишган нуқта билан учбурчакнинг томонлари орасидаги кесмалари.

d_a, d_b, d_c — ташқи чизилган айлананинг марказидан учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланалар марказларигача бўлган масофалар.

k_a, k_b, k_c — ташқи чизилган айлананинг марказидан учбурчакнинг томонларигача бўлган масофалар.

g_a, g_b, g_c — ташқи чизилган айланада олинган бирор нуқтадан учбурчакнинг томонларигача бўлган масофалар.

g'_a, g'_b, g'_c — ички чизилган ёки ташқи-ички чизилган айланада олинган бирор нуқтадан учбурчакнинг томонларигача бўлган масофалар.

t_a, t_b, t_c — учбурчак текислигида ва унинг ичидаги бирор нуқтадан учбурчакнинг томонларигача бўлган масофалар.

$p = \frac{a+b+c}{2}$ — учбурчакнинг ярим периметри.

БИРИНЧИ ҚИСМ

ЁРДАМЧИ ТЕОРЕМАЛАР ВА ФОРМУЛАЛАР

§ 1. Юз ҳақидаги теоремалар

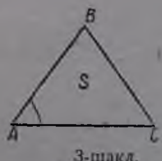
I. Агар ABC учбурчакнинг A бурчаги $A'B'C'$ учбурчакнинг A' бурчагига тенг бўлса, бу учбурчаклар юзларининг нисбати тенг бурчакларни ташкил этган томонлар кўпайтмасининг нисбатига тенгдир, яъни:

$$S : S' = bc : b'c'.$$

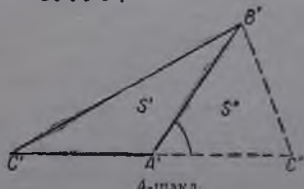
Бу маълум теоремани (Киселёв, Геометрия дарслиги, I қисм, § 259) келтиришдан мақсад шуки, биз тез-тез бу теоремага мурожаат қилиб турамиз.

II. Агар ABC учбурчакнинг A бурчаги билан $A'B'C'$ учбурчакнинг A' бурчагининг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, учбурчак юзларининг нисбати шу A ва A' бурчакларни ташкил этган томонлар кўпайтмасининг нисбатига тенгдир, яъни:

$$S : S' = bc : b'c'.$$



3-шакл.



4-шакл.

$A'B'C'$ учбурчакда $C'A'$ нинг давомида A' нуқтага нисбатан C' нуқтага симметрик қилиб, C'' нуқта оламиз. $A'C'' = A'C' = b'$. Энди B' ва C'' нуқталарни тўғри чизиқ билан туташтирамиз. Ҳосил бўлган $A'B'C''$ учбурчак (3-ва 4-шакллар) нинг юзини S'' билан белгилайлик, $\angle B'A'C'' = \angle A$ бўлганидан, I теоремага асосан:

$$S : S'' = bc : b'c'. \quad (1)$$

$A'B'C''$ ва $A'B'C'$ учбурчакларнинг асослари тенг ва баландликлари умумий бўлганидан, уларнинг юзлари тенг бўлади:

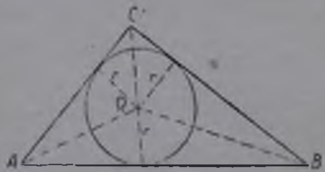
$$S'' = S'. \tag{2}$$

(2) тенгликка асосан (1) тенгликдаги S'' ўрнига S' ни қўйсак, керакли муносабат келиб чиқади.

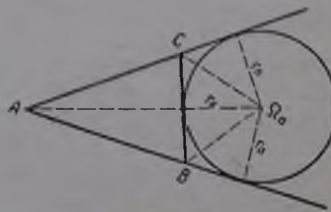
III. Ушбу:

$$S = rp = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) \tag{3}$$

муносабатлар тўғридир.



5-шакл.



6-шакл.

$BC\Omega$, $CA\Omega$, $AB\Omega$, учбурчакларнинг баландликлари r га, $BC\Omega_a$, $CA\Omega_a$, $AB\Omega_a$ учбурчакларники эса r_a га тенгдир (5- ва 6-шакллар). Шунинг учун:

$$S = BC\Omega \text{ юзи} + CA\Omega \text{ юзи} + AB\Omega \text{ юзи} = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r = rp$$

ва

$$S = CA\Omega_a \text{ юзи} + AB\Omega_a \text{ юзи} - BC\Omega_a \text{ юзи} = \frac{1}{2}(b+c-a)\cdot r_a =$$
$= r_a(p-a)$. (3) тенгликлардан:

$$r = \frac{S}{p};\ r_a = \frac{S}{p-a};\ r_b = \frac{S}{p-b};\ r_c = \frac{S}{p-c} \tag{3'}$$

тенгликлар келиб чиқади.

III a. $S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2+c^2)^2}$ (4)

муносабат ҳам тўғридир, чунки Герон формуласига асосан:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)+c][(a+b)-c][c+(a-b)][c-(a-b)]} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b^2+2ab)} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]} =$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}.$$

IV. $S = \frac{abc}{4R}$ (5)

ёки

$$R = \frac{abc}{4S} \qquad (6)$$

муносабатлар тўғридир.

ABC учбурчакнинг A учидан $AA' = h_a$ баландликни ва ташқи чизилган айлананинг AD диаметрини ўтказамиз (7-шакл). У ҳолда $\angle ADB = \angle ACB$; шунинг учун ABD ва $AA'C$ тўғри бурчакли учбурчаклар ўхшаш бўлади, демак:

$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AA'}$ ёки $\frac{2R}{c} = \frac{b}{h_a} = \frac{ba}{h_a a}$; $h_a a = 2S$ булгани учун бундан ушбу ҳосил бўлади:

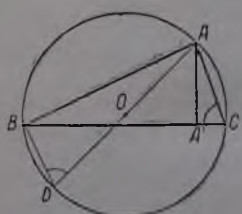
$$\frac{2R}{c} = \frac{ab}{2S}.$$

Бундан (5) ва (6) тенгликлар ўз-ўзидан келиб чиқади.

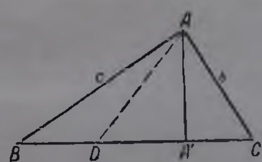
§ 2. Стюарт теоремаси

V. ***Агар D нуқта ABC учбурчакнинг BC томонида ётса, у ҳолда:***

$$AD^2 \cdot a = BD \cdot b^2 + DC \cdot c^2 - BD \cdot DC \cdot a. \qquad (7)$$



7-шакл.



8-шакл.

Агар ABC учбурчакнинг (8-шакл) бир баландлиги AA' бўлса, ADC ва ABD учбурчаклар учун

$$b^2 = AD^2 + DC^2 - 2\,DC \cdot DA'; \qquad (8)$$
$$c^2 = AD^2 + BD^2 + 2\,BD \cdot DA' \qquad (9)$$

муносабатлар тўғри бўлади. (8) тенгликнинг ҳадларини BD га ва (9) ни DC га кўпайтириб, сўнгра ҳадлаб қўшсак,

$$BD \cdot b^2 + DC \cdot c^2 = AD^2 (BD + DC) + BD \cdot DC \cdot (BD + DC)$$

ёки

$$BD \cdot b^2 + DC \cdot c^2 = AD^2 \cdot a + BD \cdot DC \cdot a.$$

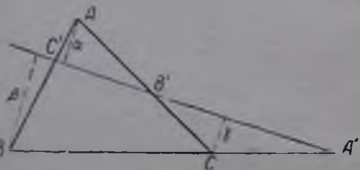
Бундан (7) формула осонгина келиб чиқади.

§ 3. Менелай теоремаси

VI. ***Агар бирор тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг AB, BC, CA томонларини ёки уларнинг давомларини C′, A′, B′ нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда:***

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1. \tag{10}$$

(Агар ҳар бир нисбатни ташкил этувчи кесмалар бир хил йўналишга эга бўлса, нисбат мусбат, қарама-қарши йўналишларга эга бўлса, манфий ҳисобланади.)



9-шакл.

Теоремада кўрсатилган кесувчи тўғри чизиққа учбурчакнинг A, B, C учларидан туширилган перпендикулярларнинг узунликларини α,β,γ билан белгилаб, мос ўхшаш учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб қуйидаги нисбатларни ёзамиз (9-шакл):

$$\frac{BA'}{A'C}=-\frac{\beta}{\gamma},\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{\gamma}{\alpha},\ \frac{AC'}{C'B}=\frac{\alpha}{\beta}. \tag{11}$$

Бу тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак, (10) муносабат келиб чиқади.

Биз теоремани кесувчи тўғри чизиқ учбурчакнинг икки томонини кесиб, учинчи томоннинг давомини кесган ҳол учун исбот қилдик. Тўғри чизиқ учбурчак учала томонининг давомларини кесган ҳолда ҳам теорема худди шу усулда исбот қилинади. Бошқача ҳолларнинг бўла олмаслигини аниқлаш қийин эмас.

VII. **Менелайнинг тескари теоремаси.** ***Агар ABC учбурчакнинг AB, BC, CA томонларида ёки уларнинг давомида мос A′, B′, C′ нуқталар олинганда***

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1$$

муносабат тўғри бўлса, бу олинган уч нуқта коллинеар бўлади (бир тўғри чизиқда ётади).

Агар учбурчакнинг AB томонини ёки унинг давомини $A'B'$ тўғри чизиқ C'' нуқтада кесади десак, бундан VI га асосан

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=-1 \tag{12}$$

ҳосил бўлади. Буни (10) билан солиштирсак, ушбу келиб чиқади:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC''}{C''B}.$$

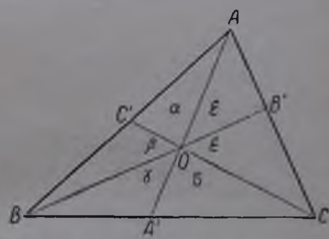
AB кесмани бир хил мусбат ёки манфий нисбатда булувчи фақат битта нуқта бўлиши мумкин, шунинг учун C' ва C'' нуқталар устма-уст тушади. Шу билан теорема исбот бўлди.

§ 4. Чева теоремаси

VIII. ***Агар O нуқта ABC учбурчакнинг ички соҳасида ётувчи ихтиёрий нуқта бўлса, AO, BO, CO тўғри чизиқлар учбурчакнинг BC, CA, AB томонларини мос равишда A′, B′, C′ нуқталарда кесса, ушбу муносабат ўринлидир:***

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1. \tag{13}$$

10-шаклда кўрсатилгани каби AA', BB', CC' тўғри чизиқлар ABC учбурчакни умумий учлари O нуқтада бўлган олтита учбурчакка ажратади. Уларнинг юзларини $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$ билан белгилайлик.



10-шакл.

$AA'B$ ва $AA'C$ учбурчаклар тенг баландликка эга бўлганидан, юзларининг нисбати $A'B$ ва $A'C$ асосларининг нисбати кабидир.

Шунга ўхшаш OBA' ва $OA'C$ учбурчаклар юзларининг нисбати уларнинг BA' ва $A'C$ асосларининг нисбатига тенг, яъни:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AA'B \text{ юзи}}{AA'C \text{ юзи}} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\delta + \varepsilon + \xi}$$

ва

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{OA'B \text{ юзи}}{OA'C \text{ юзи}} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Бу сўнгги икки пропорциядан қуйидаги ҳосила пропорция келиб чиқади:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \gamma}{\delta + \varepsilon + \xi - \delta}$$

ёки

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\alpha + \beta}{\varepsilon + \xi}. \tag{14}$$

Шунга ўхшаш:

$$\frac{B'C}{AB'} = \frac{\gamma + \delta}{\alpha + \beta} \tag{15}$$

ва
$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{\varepsilon + \xi}{\gamma + \delta}. \tag{16}$$

Агар (14), (15) ва (16) тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак, (13) муносабат ҳосил бўлади.

IX. Чеванинг тескари теоремаси. ***Агар ABC учбурчакнинг AB, BC, CA томонларида мос равишда олинган C′, A′, B′ нуқталар учун***

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \tag{17}$$

бўлса, AA′, BB′ ва CC′ тўғри чизиқлар ўзаро бир нуқтада кесишади.

AA' ва BB' тўғри чизиқлар бир-бирини O нуқтада кесиб, CO тўғри чизиқ учбурчакнинг AB томонини C'' нуқтада кесса, унда VIII теоремага асосан:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = 1. \tag{18}$$

(17) ва (18) га кўра:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC''}{C''B}.$$

Демак, C'' нуқта C' нуқта билан устма-уст тушади, шу билан теорема исбот бўлди.

Исбот қилинган VIII ва IX теоремаларни кесишиш нуқтаси O учбурчак ташқарисида (унинг текислигида) бўлган ҳол учун ҳам умумлаштириш мумкин. Бунда A', B, C' нуқталардан баъзилари учбурчак томонларининг давомида ётади.

Менелай теоремаси, одатда берилган уч нуқтанинг коллинеарлигини исбот этишда (§ 3 га қаранг) ва учбурчак томонларини бирор тўғри чизиқ кесганда ҳосил бўлган кесмаларнинг нисбатларини аниқлашда қўлланилади.

Чева теоремаси эса одатда берилган уч тўғри чизиқнинг бир нуқтада кесишишини исбот этишда ёки уч тўғри чизиқдан ҳар бири учбурчакнинг бирор учидан чиқиб, учбурчак текислигида ётган умумий бир нуқтадан ўтиб, учбурчак томонларини кесганда ҳосил бўлган кесмалар орасидаги нисбатларни аниқлашда қўлланилади.

§ 5. Учбурчакдаги баъзи бир кесмаларнинг нисбатларини ҳисоблаш

ABC учбурчакнинг BC ва CA томонларида мос равишда A' ва B' нуқталар берилган бўлиб (11-шакл), унда:

$$\frac{BA'}{A'C} = \lambda, \quad \frac{CB'}{B'A} = \mu,$$

AA' ва BB' тўғри чизиқлар O нуқтада кесишган бўлсин. AA' кесманинг O нуқта билан ҳосил қилинган бўлакларининг нисбатини топайлик. $A'B'$ кесмани ўтказсак, у ҳолда ($\triangle ABB'$ ва $\triangle B'BA'$ лар умумий BB' асосга эга бўлганидан):

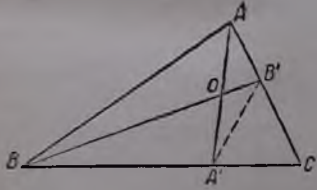
$$\frac{AO}{OA'}=\frac{\triangle ABB' \text{ юзи}}{\triangle B'BA' \text{ юзи}}=\frac{\triangle ABB' \text{ юзи}}{\triangle BB'C \text{ юзи}-\triangle B'A'C \text{ юзи}}=\frac{\dfrac{\triangle ABB' \text{ юзи}}{\triangle B'BC \text{ юзи}}}{1-\dfrac{\triangle B'A'C \text{ юзи}}{\triangle B'BC \text{ юзи}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{B'A}{CB'}}{1-\dfrac{A'C}{BA'+A'C}}=\frac{\dfrac{1}{\mu}}{1-\dfrac{1}{\lambda+1}}$$

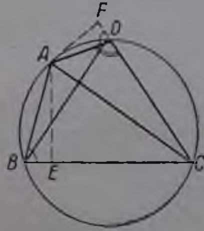
ёки

$$\frac{AO}{OA'}=\frac{\lambda+1}{\lambda\mu}. \tag{19}$$

(19) дан фойдаланиб, $\frac{AA'}{AO}$ ва $\frac{AA'}{OA'}$ нисбатларни ҳам топиш осон:



11-шакл.



12-шакл.

$$\frac{AA'}{OA}=\frac{AO+OA'}{AO}=1+\frac{\lambda\mu}{\lambda+1};\quad \frac{AA'}{OA'}=\frac{AO+OA'}{OA'}=1+\frac{\lambda+1}{\lambda\mu}$$

ёки

$$\frac{AA'}{AO}=\frac{\lambda\mu+\lambda+1}{\lambda+1}; \tag{20}$$

$$\frac{AA'}{OA'}=\frac{\lambda\mu+\lambda+1}{\lambda\mu}. \tag{21}$$

§ 6. Птоломей теоремаси

X. ***Доирага ички чизилган тўртбурчак диагоналларининг кўпайтмаси тўртбурчак қарама-қарши томонлари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.***

Ички чизилган $ABCD$ тўртбурчакнинг A учидан BC ва CD тўғри чизиқларга AE ва AF перпендикулярларни туширсак (12-шакл), ABE ва ADF ўхшаш учбурчаклардан $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF}$

ёки

$$AB\cdot DF=AD\cdot BE. \tag{22}$$

ABC ва ACD учбурчаклардан:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \mp 2 \cdot BC \cdot BE, \qquad (23)$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2 \pm 2 \cdot CD \cdot DF. \qquad (24)$$

Охирги тенгликлардаги қўш ишоралардан усткиси, B бурчак ўткир бўлган ҳолга, осткиси эса ўтмас бўлган ҳолга тўғри келади. (23) тенгликнинг ҳадларини $AD \cdot CD$ га, (24) тенгликнинг ҳадларини $AB \cdot BC$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликларни қўшсак, (22) муносабатга асосан қуйидагилар ҳосил бўлади:

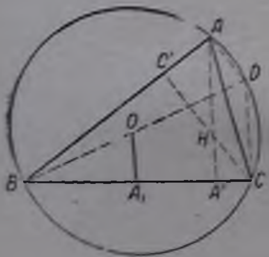
$$AC^2 \cdot (AB \cdot BC + AD \cdot CD) = AB^2 \cdot AD \cdot CD + BC^2 \cdot AD \cdot CD + CD^2 \times$$
$$\times AB \cdot BC + AD^2 \cdot AB \cdot BC = AB \cdot CD (AB \cdot AD + BC \cdot CD) +$$
$$+ AD \cdot BCAB \cdot AD + BC \cdot CD);$$

бундан:

$$AC^2 = \frac{(AB \cdot CD + AD \cdot BC) \cdot (AB \cdot AD + BC \cdot CD)}{AB \cdot BC + AD \cdot CD}), \qquad (25)$$

шунга ўхшаш:

$$BD^2 = \frac{(AB \cdot CD + AD \cdot BC)\ (AB \cdot BC + AD \cdot CD)}{AB \cdot AD + BC \cdot CD}. \qquad (26)$$



13-шакл.

(25) ва (26) тенгликларни ҳадлаб кўпайтириб, ҳосил бўлган ифоданинг иккала томонидан квадрат илдиз чиқарамиз:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \qquad (27)$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

§ 7. Тўққиз нуқта айланаси ёки Эйлер айланаси

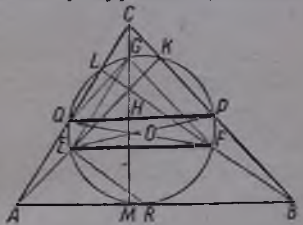
XI. ***Учбурчак баландлигининг учбурчак учидан ортомарказгача бўлган кесмаси, шу учбурчакка ташқи чизилган айлана марказидан берилган бурчак қаршисида ётган томонга қадар бўлган масофанинг икки баравариға тенг, яъни:***

$$K_a = 2k_a. \qquad (28)$$

Агар $OA_1 \perp BC$, $AA' \perp BC$ (13-шакл), ташқи чизилган айланадаги B га диаметрал қарама-қарши нуқта D ни олиб, DA, DC кесмаларни ўтказсак, унда $DC = 2 \cdot OA_1$, чунки OA_1 кесма BCD учбурчакнинг урта чизиги. $AHCD$ туртбурчак параллелограмм бўлганидан, $DC = AH$, демак: $AH = 2 \cdot OA_1$. Биз шуни исбот этмоқчи эдик.

XII. *Учбурчак томонларининг ўрталаридан, баландликларнинг асосларидан ва ортомарказ билан учбурчак учларини туташтирувчи кесмаларнинг ўрталаридан иборат бўлган тўққизта нуқта бир айланада ётади. Бу айлана тўққиз нуқта айланаси ёки Эйлер айланаси деб аталади.*

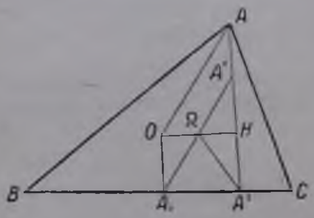
Курсатилган тўққизта нуқтанинг бир айланада ётишини исбот қилиш учун бирор ихтиёрий ABC учбурчакни (14-шакл) текширамиз. P, Q,R — учбурчак томонларининг урталари; K,L, M — баландликларнинг асослари; H — ортомарказ ва E, F, G — ортомарказ билан учбурчак учларини туташтирувчи кесмаларнинг ўрталари булсин (E, F, G нуқталар Эйлер нуқталари деб ҳам аталади). $EFPQ$ туртбурчак тўғри бурчакли тўртбурчак эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, EF кесма AB га параллел ва унинг



14-шакл.

ярмига тенг, чунки у AHB учбурчакнинг урта чизиғидир; QP ҳам AB га параллел ва унинг ярмига тенг, чунки у ACB учбурчакнинг ўрта чизиғидир. Бундан $EFPQ$ туртбурчакнинг параллелограмм экани келиб чиқади. Шу билан бирга ACH ва BCH учбурчакларнинг QE ва FP ўрта чизиқлари CM перпендикулярга параллел. CM кесма AB га перпендикуляр бўлгани учун $EFPQ$ параллелограмм тўғри бурчакли туртбурчакдир. $EFPQ$ тўғри тўртбурчак ташқарисига чизилган айлананинг маркази тўртбурчак диагоналларининг кесишиш нуқтаси O да ётади. QF ва EP диаметрларга тиралган тўғри бурчакларнинг учлари L ва K нуқталар ҳам ўша айланада ётади. QGF бурчакнинг тўғри эканини курсатамиз. Ҳақиқатан, ACH учбурчакнинг QG ўрта чизиги AK га параллел, CHB учбурчакнинг GF урта чизиғи эса CB га параллел, $AK \perp CB$ эканлигидан $QG \perp GF$ ва $\angle QGF = 90^\circ$ экани келиб чиқади. QF диаметрга тиралган QGF тўғри бурчакнинг учи сифатида G нуқта ҳам ўша айланада ётади. AHB учбурчакнинг EF урта чизиғи AB га параллел, ACB учбурчакнинг RP ўрта чизиғи (у шаклда кўрсатилмаган) AC га параллел; $BL \perp AC$ эканлигидан $\angle ERP = 90^\circ$ экани келиб чиқади. PE диаметрга тиралган ERP тўғри бурчакнинг учи R нуқта ҳам ўша айланада ётади. GER бурчак тўғри ($GE \parallel AC$ ва $ER \parallel BL$) бўлгани ва қаралаётган айланада ётгани учун G ва R нуқталар диаметрал қарама-қарши нуқталардир. У ҳолда охирги M нуқта ҳам ўша айланада ётади, чунки GMR бурчак тўғри ва GR диаметрга тиралади. Эйлер айланасининг маркази Эйлер нуқталарини мос қарама-қарши томонларнинг ўрталари билан туташтирувчи учта кесманинг умумий нуқтасидир.

Эйлер айланасининг маркази Ω нуқта, $OA_1 \perp BC$, $AA' \perp BC$ ва AH кесманинг ўртаси A'' нуқта бўлсин (15-шакл); OH, OA, A_1A'' кесмаларни чизамиз; OH ва A_1A'' ўзаро Ω нуқтада кесишиб, $OA = R$; $OA_1 \parallel AA'$; $OA_1 = AA'' = A''H$ бўлганидан [XI га асосан] AOA_1A'' тўртбурчак параллелограмм бўлади. $O\Omega A_1$ ва $H\Omega A''$ учбурчакларнинг иккитадан бурчаклари ва биттадан томонлари тенг бўлганидан:



15-шакл.

$$O\Omega = \Omega H, \ \ \Omega A_1 = \Omega A'' = \frac{R}{2}.$$

Шунингдек, Ω нуқта $A_1A'A''$ тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг ўртаси бўлганидан:

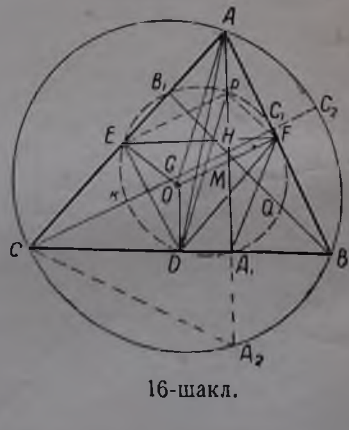
$$A'\Omega = \frac{1}{2} A_1A'' = \frac{R}{2}.$$

Ҳосил бўлган сўнгги ифодалардан кўрамизки, Эйлер айланасининг маркази ташқи чизилган айлананинг маркази билан ортомарказ орасидаги кесманинг ўрта нуқтасида бўлиб, радиуси ташқи айлана радиусининг ярмига тенгдир. Бу айлана H, O нуқталарнинг вазиятига ва R нинг миқдорига боғлиқдир.

Эйлер айланасининг хоссалари

16-шаклда ABC учбурчак ва унга ташқи чизилган айлананинг маркази O берилган. Шу O марказдан учбурчак томонларига $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ ва $OF \perp AB$ ўтказилганда ҳосил бўлган D, E ва F нуқталар учбурчак томонларини тенг иккига бўлади.

Учбурчакнинг AA_1, BB_1 ва CC_1 баландликларини чизсак, улар бирор H нуқтада кесишади. Биз бу нуқтани ортомарказ нуқта деб айтамиз. Ясашдан $DE = \frac{1}{2} AB$, DE кесма ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи экани кўринади. A_1F тўғри чизиқ ABA_1 учбурчакнинг медианаси бўлиб, гипотенузанинг ярмига тенг, яъни $A_1F = \frac{1}{2} AB$.



16-шакл.

Бундан $DE = A_1F$ экани келиб чиқади. Бундан ташқари, $EF \parallel BC$; бу ҳолда $DEFA_1$ тўртбурчак тенг ёнли трапеция бўлиб, D, E, F ва A_1 нуқталар бир айланада ётади.

Бундан *учбурчак томонларининг ўрталари* (D, E *ва* F) *дан ўтган айлана, учбурчак баландлигининг асоси A_1 дан ҳам ўтиши келиб чиқади.* Учбурчак AA_1 баландлигининг AH кесмаси ўртасини P орқали белгиласак, ясашга кўра қуйидагиларга эга бўламиз: $EP = \frac{1}{2}CH$ ва $EP \parallel CH$, шунинг учун $EP \perp AB$ бўлади. Шунингдек, $OF \perp AB$, бундан эса $EP \parallel OF$ келиб чиқади. Бу ҳолда $PF \parallel OE$ булади. Булардан $OE = PF$ ва $OF = EP$ келиб чиқади. Натижада $PF = \frac{1}{2}BH$, $OE = \frac{1}{2}BH$ ва $OF = \frac{1}{2}CH$ булади.

Биз *учбурчакка ташқи чизилган айлананинг марказидан учбурчак томонига туширилган перпендикуляр шу томонга туширилган баландликнинг учбурчак учи билан ортомарказ орасидаги бўлагининг ярмига тенг* деган натижага келамиз.

Шаклда PD—айлананинг диаметридир. DA_1P тўғри бурчакли учбурчакнинг учларидан ўтувчи айланани қарасак, $DF \parallel AC$, $PF \parallel BB_1$ (чунки $PF \parallel OE \parallel BB_1$), PFD бурчак тўғри бўлгани учун айлана F нуқтадан ҳам ўтади. Бундан, D, E, F, A, B ва C нуқталардан ўтувчи айлана P нуқтадан ҳам, яъни AH кесманинг ўртасидан ҳам ўтади деган хулоса келиб чиқади. Худди шу усул билан қаралаётган айлананинг қолган баландликларнинг BH ва CH кесмаларнинг ўрталари Q ва K нуқталарнинг ўрталаридан ҳам ўтишини кўрсатиш мумкин.

Шу билан: 1) *учбурчак томонларининг ўрталаридан*, 2) *баландликларининг асосларидан ва* 3) *ортомарказни учбурчак учлари билан туташтирувчи кесмаларнинг ўрталаридан иборат бўлган тўққизта нуқта бир айланада ётади* деган натижага эга бўламиз. Бу айлана эса тўққиз нуқта айланаси дейилади. PD кесма шу айлананинг диаметридир.

Демак, $OD = \frac{1}{2}AH = PH$ бўлиб, бунда $\triangle OMD = \triangle PMH$. ($M$ нуқта OH ва PD кесмаларнинг кесишиш нуқтаси.) Шунинг учун $DM = MP$ ва $OM = MH$, ёки *тўққиз нуқта айланасининг маркази учбурчак баландликларининг кесишган нуқтаси билан ташқи чизилган айлана марказини туташтирувчи кесманинг ўртасида ётади.* Ниҳоят, $AP = OD$ ва $AP \parallel OD$ бўлганидан $OAPD$ тўртбурчак параллелограммдир.

$DP = OA$ ёки $MP = \frac{1}{2}OA$, бу ҳолда OA кесма ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси бўлади; шунинг учун *тўққиз нуқта айланасининг радиуси ташқи чизилган айлана радиусининг ярмига тенгдир.*

Булардан ташқари яна қуйидагилар ҳам маълум:

1) ABC учбурчакнинг AD медианаси OH ни G нуқтада кесади, $OD \parallel AA_1$ бўлганидан $\triangle GOD \backsim \triangle AGH$, бундан $\frac{AG}{GD}=\frac{AH}{OD}=2$ ҳосил бўлади, ёки $GD=\frac{1}{3}AD$, яъни G нуқта учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси (оғирлик маркази)дир. Шундай қилиб, ABC учбурчакнинг оғирлик маркази G нуқта OH кесманинг устида ётади. GOD ва AGH учбурчаклар ўхшаш бўлганидан $OG=\frac{1}{3}OH$ бўлади.

2) Учбурчакнинг AA_1 баландлиги O айланани бирор A_2 нуқтада кесгунча давом эттирамиз, унда $\angle A_1AB = \angle A_1CC_1$, чунки бу икки бурчакни B бурчак, тўғри бурчакка тўлдиради. Бундан $\smile A_2B = \smile BC_2$ бўлади (C_2 нуқта CC_1 баландликнинг O марказли айлана билан кесишган нуқтасидир). Бундан $\angle BCA_2 = \angle BCC_2$ ва $\triangle A_1CH = \triangle A_1CA_2$ ҳамда $A_1A_2 = A_1H$, *ёки учбурчак баландлиги ташқи чизилган айланани кесгунча давом эттирилса, шу нуқтадан учбурчакнинг ортомаркази H гача бўлган кесма учбурчак томони билан тенг иккига бўлинади.*

Натижалар: 1) тўққиз нуқта айланаси ва H нуқтани олсак, $HA_1 \cdot HP = HB_1 \cdot HQ = HC_1 \cdot HK$ (Q ва K нуқталар HB ва HC кесмаларнинг ўртаси) бўлади; бундан $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$ экани келиб чиқади, ёки: *учбурчак баландликларининг кесишишидан ҳосил бўлган бўлакларнинг кўпайтмаси ўзаро тенгдир;*

2) тўққиз нуқта айланасига тегишли A_1, B_1 ва C_1 нуқталарни қарасак, $AB_1 \cdot AE = AF \cdot AC_1$; $BF \cdot BC_1 = BD \cdot BA_1$; $CA_1 \cdot CD = CB_1 \cdot CE$ эканини кўрамиз. Бундан ташқари, шу айтилганларга кўра, $AA_1 \cdot AP$, $BB_1 \cdot BQ$ ва $CC_1 \cdot CK$ кўпайтмалар бир-бирига тенг бўлганидан AP, BQ, CK ларни иккилантириб, AH, BH, CH лар орқали алмаштирсак, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} AA_1 \cdot AH &= 2AE \cdot AB_1 = 2AF \cdot AC_1; \\ BB_1 \cdot BH &= 2BF \cdot BC_1 = 2BD \cdot BB_1; \\ CC_1 \cdot CH &= 2CD \cdot CA_1 = 2CE \cdot CB_1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Одатдагидек учбурчак томонларини a, b ва c орқали белгиласак, $2AE = 2CE = b$; $2BF = 2AF = c$; $2BD = 2CD = a$.

У ҳолда (1) тенгликлардан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} AA_1 \cdot AH &= 2AE \cdot AB_1 = b \cdot AB_1; \\ AA_1 \cdot AH &= 2AF \cdot AC_1 = c \cdot AC_1; \\ BB_1 \cdot BH &= 2BF \cdot BC_1 = c \cdot BC_1; \\ BB_1 \cdot BH &= 2BD \cdot BA_1 = a \cdot BA_1; \\ CC_1 \cdot CH &= 2CD \cdot CA_1 = a \cdot CA_1; \\ CC_1 \cdot CH &= 2CE \cdot CB_1 = b \cdot CB_1. \end{aligned}\right| \quad (2)$$

(2) тенгликнинг мос томонларини қўшсак, $2(AA_1 \cdot AH + BB_1 \times$ $\times BH + CC_1 \cdot CH) = b(AB_1 + B_1C) + c(AC_1 + C_1B) + a(BA_1 + A_1C)$ келиб чиқади ёки ўнг томондаги қавсларнинг ўрнига уларнинг қийматлари қўйилса:

$$2(AA_1 \cdot AH + BB_1 \cdot BH + CC_1 \cdot CH) = b \cdot b + c \cdot c + a \cdot a = b^2 + c^2 + a^2$$

бўлади. Бундан:

$$AA_1 \cdot AH + BB_1 \cdot BH + CC_1 \cdot CH = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

яъни *ҳар бир баландликни унинг ортомарказ билан учбурчак учи орасидаги бўлагига кўпайтирилганда ҳосил бўлган кўпайтмалар йиғиндиси, учбурчак томонлари квадратлари йиғиндисининг ярмига тенгдир*;

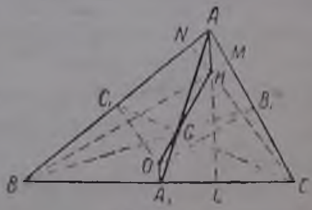
3) агар текшириш учун AHC учбурчак олинса, бу учбурчакнинг баландликлари B нуқтада кесишади ва томонларининг ўртаси E, P ва K ҳамда баландликларнинг ортомарказ билан учлар орасидаги бўлакларининг ўрталари O, F ва D нуқталарда бўлади. Шунинг учун ABC учбурчакка тегишли 9 нуқта айланаси бу AHC учбурчак учун ҳам шундай айлана бўлади. AH кесманинг ўртаси P нуқтада бўлгани учун ясалишига кўра қуйидагилар ҳосил бўлади: $EP = \frac{1}{2} CH$ ва $EP \parallel CH$, яъни $EP \perp$ $\perp AB$. Шунингдек, $OF \perp AB$, шундан $EP \parallel OF$. У ҳолда $PE \parallel OE$ бўлади. Шу усулда $OE = PF$ ва $OF = EP$ олиб, бундан $PF = \frac{1}{2} BH$; $OE = \frac{1}{2} BH$ ва $OF = \frac{1}{2} CH$ эканини кўрамиз, яъни *учбурчакка ташқи чизилган айлананинг марказидан бир томонга туширилган перпендикулярнинг узунлиги шу томонга туширилган баландликнинг ортомарказ билан учбурчак учи орасидаги бўлагининг ярмига тенг бўлади.*

Шаклдаги PD кесма айлананинг диаметри бўлиб, DA_1P тўғри бурчакдир, P, D ва A_1 нуқталардан ўтувчи айланани қарайлик, $DF \parallel AC$, $PF \parallel BB_1$ ($PF \parallel OE \parallel BB_1$), бундан $\angle PFD$ тўғри бурчак бўлиши маълум. Шунинг учун айлана F нуқтадан ҳам ўтади. Бундан D, E, F, A_1, B_1, C_1 нуқталаридан ўтувчи айлана P нуқтадан ҳам, яъни AA_1 баландлик қисмининг ўртасидан ҳам ўтади, деган хулосага келамиз.

Айлананинг, бошқа баландликлардаги Q ва K нуқталардан ўтиши ҳам худди шу усулда кўрсатилади. Шунингдек, шу айтилган айлана AHB ва BHC учбурчаклар учун ҳам 9 нуқта айланаси бўлади. Шунга кўра, ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси AHC, AHB ва BHC учбурчакларга ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари билан бир хил бўлади. Уларнинг марказини аниқлаш қулай.

§ 8. Эйлер теоремаси

XIII. ***Учбурчакнинг ортомаркази, оғирлик маркази ва учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази бир тўғри чизиқ устида ётади.***



17-шакл.

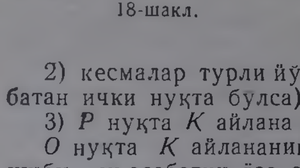
17-шаклдан $AL = h_a$, $BM = h_b$ ва $CN = h_c$, $OA_1 \perp BC$ OH, AH, AA_1 кесмаларни утказамиз. AA_1, BB_1 ва CC_1 медианалар. AA_1 ва OH тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини G деб олсак, $AH = 2 \cdot OA_1$ **(XI)**. AGH ва A_1OG учбурчаклар ухшаш ва $HG = 2 \cdot OG$, шунинг учун G нуқта AA_1 медиананинг $2:1$ нисбатда бўлади ва учбурчакнинг оғирлик маркази бўлади.

G нуқта OH тўғри чизиқ устида ётганлигидан теореманинг тўғрилиги келиб чиқади. Айтилганларга асосан $GH = 2 \cdot OG$, бундан:

XIV. ***Учбурчакнинг оғирлик маркази ортомарказ билан ташқи чизилган айлана маркази ўртасидаги масофани*** 2 : 1 ***нисбатда бўлади*** деган натижа келиб чиқади.

§ 9. Радикал ўқ ва радикал марказ

P нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар бирор K айланани A ва B, A_1 ва B_1, A_2 ва B_2,... нукталарда кесиб ўтса (18-шакл), унда $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = \ldots = PA \cdot PB$ бўлади. Бу узгармас миқдор P нуқтанинг K айланага нисбатан даражаси дейилади ва g_kP кўринишда белгиланади. g_kP миқдор иккита PA ва PB кесмаларнинг кўпайтмасига тенг бўлиб, P нуқтанинг ҳолатига қараб, турли ишора билан олинади. Агар кесмалар:



18-шакл.

1) бир хил йўналишда бўлса (P айланага нисбатан ташқи нуқта бўлса), $g_kP > 0$;

2) кесмалар турли йўналишда бўлса (P нуқта айланага нисбатан ички нуқта булса), $g_kP < 0$;

3) P нуқта K айлана устида ётса: $g_kP = 0$ бўлади.

O нуқта K айлананинг маркази, r унинг радиуси бўлса, ушбу муносабатни ёза оламиз:

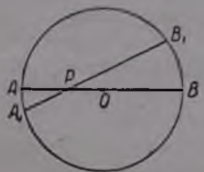
$$g_kP = PO^2 - r^2. \tag{29}$$

Ҳақиқатан:

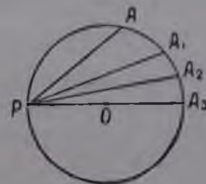
1) агар P нуқта айланага нисбатан ташқи нуқта бўлса (18-шакл), $PA = PO - r$, $PB = PO + r$ ва бу кесмалар бир хилда

йўналган бўлгани учун $g_kP = PA\cdot PB = (PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2$ бўлади. Агар $PO = d$ деб олинса, $g_kP = d^2 - r^2$. Ташқи нуқтадан айланага ўтказилган уринма ҳақидаги теоремага асосан $PK^2 = PA\cdot PB$ бўлгани учун, бу ҳолда $g_kP = PK^2$ бўлади;

2) агар P нуқта айланага нисбатан ички нуқта бўлса (19-шакл), $g_kP = -PA\cdot PB = -(AO - PO)(PO + OB) = -(r - PO)(PO + r) = PO^2 - r^2 = d^2 - r^2$;



19-шакл.

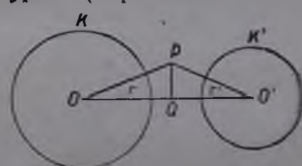


19-а-шакл.

3) агар P нуқта айланада ётса (19-a шакл), бу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқларнинг айлана билан кесишган нуқталаридан биттаси (B, B_1, B_2,...) P нуқтанинг ўзида бўлади. Шунинг учун $g_kP = PB\cdot PA = PB_1\cdot PA_1 = \ldots = PP\cdot PA = PP\cdot PA_1 = \ldots = 0\cdot PA = P\cdot PA_1 = \ldots = 0$. Иккинчи томондан, бу ҳолда $d^2 - r^2 = PO^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0$. Шундай қилиб, $g_kP = d^2 - r^2$. Демак, ихтиёрий ҳолатдаги P нуқта учун $g_kP = a^2 - r^2$ муносабат тўғри экан.

XV. ***Берилган икки айланага нисбатан тенг даражали нуқталарнинг геометрик ўрни*** (берилган икки айлананинг радикал ўқи).

Берилган икки K ва K' айланаларнинг радиуслари r ва r', марказлари O ва O' бўлсин (20-шакл). Шундай P нуқталарнинг геометрик ўрнини топиш керакки,
бўлсин.
$$g_kP = g'_kP \tag{30}$$



20-шакл.

(29) ва (30) дан:
$$PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2. \tag{31}$$

Агар $PQ \perp OO'$ бўлса, у ҳолда:
$$PO^2 - QO^2 = PO'^2 - QO'^2, \tag{32}$$
чунки Пифагор теоремасига кўра буларнинг иккаласи ҳам PQ^2 га тенг.

(31) тенгликдан (32) ни ҳадлаб айирсак:
$$QO^2 - r^2 = QO'^2 - r'^2$$
ёки
$$g_kQ = g'_k\cdot Q.$$

Бу тенгликдан Q нуқта ҳам радикал ўққа тегишли эканлиги кўринади. PQ тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий нуқтанинг ҳам радикал ўққа тегишли эканини кўрсатиш мумкин.

Марказлар чизиғида ётган ва радикал ўққа тегишли Q нуқтанинг вазияти радикал ўқнинг вазиятини тўлиқ аниқлаб беради. Изланган геометрик ўрин марказлар чизиғидаги Q нуқтадан марказлар чизиғига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқдан иборатлиги маълум бўлади.

Агар берилган икки айлана ўзаро кесишса, уларнинг радикал ўқи умумий нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқдан иборат бўлади.

Агар айланалар ўзаро уринса, уларнинг умумий уринмаси радикал ўқ бўлади.

Иккита концентрик айлананинг радикал ўқи бўлмайди, чунки бу ҳолда $PO^2 - r^2 = PO^2 - r'^2$ $(r \neq r')$ тенглама ҳосил бўлиб, бу тенгламани ҳеч кандай P нуқта қаноатлантирмайди.

XVI. ***Марказлари бир тўғри чизиқда ётмаган уч айланани иккита-иккитадан қилиб олингандаги радикал ўқлари бир нуқтада кесишади.*** (Бу нуқта уч айлананинг радикал маркази дейилади.)

Берилган айланаларни K_1, K_2, K_3 билан ва K_1, K_2 айланаларнинг радикал ўқини l_{12} орқали, K_2 ҳамда K_3 га тегишли бўлган радикал ўқни l_{23} орқали шунингдек, K_1, K_3 айланаларникини l_{13} орқали белгилайлик. l_{12} ва l_{23} тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини L десак, $g_{k_1}L = g_{k_2}L$ ва $g_{k_2}L = g_{k_3}L$; бундан $g_{k_1}L = g_{k_3}L$ келиб чиқади. Бинобарин, L нуқтанинг l_{13} тўғри чизиқда ҳам ётиши кўринади.

Агар l_{12} ва l_{23} ўзаро параллел бўлса, радикал ўқлар кесишмайди. Бунда радикал марказ чексиз узоқликдаги нуқтада ётади, дейиш мумкин.

I. ЁРДАМЧИ ТЕОРЕМАЛАРНИНГ МАСАЛАЛАР ЕЧИШГА ТАТБИҚИ

§ 10. Юзларга доир теоремаларнинг татбиқи ва бу теоремалардан чиқадиган натижалар

1. Исбот қилиш керак:

$$al_a'^2 + bl_b'^2 + cl_c'^2 = abc. \tag{33}$$

Учбурчакка ички чизилган айлана маркази Ω дан берилган учбурчакнинг BC, CA, AB томонларига ΩA_1, ΩB_1, ΩC_1 перпендикулярни туширайлик. AC томонга нисбатан Ω га симметрик Ω' нуқта олиб (21-шакл), Ω' ни A, Ω нуқталар билан туташтирсак, бунда:

$A\Omega = A\Omega' = l'_a$; $\triangle AC_1\Omega = \triangle A\Omega B_1 = \triangle AB_1\Omega'$ бўлганлигидан:

$$AC_1\Omega B_1 \text{ юзи} = A\Omega\Omega' \text{ юзи} \tag{34}$$

ABC ва $A\Omega\Omega'$ учбурчакларда $\angle BAC = \angle \Omega A\Omega'$ бўлганидан, (I) теоремага асосан:

$$\frac{A\Omega\Omega'}{S} = \frac{l'^2_a}{bc}. \tag{35}$$

(34) ва (35) тенгликлардан:

$$\frac{AC_1\Omega B_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{l'^2_a}{bc}.$$

Шунга ўхшаш:

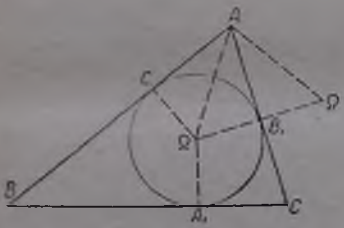
$$\frac{BA_1\Omega C_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{l'^2_b}{ac}; \quad \frac{CB_1\Omega A_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{l'^2_c}{ab},$$

бу уч тенгликдан:

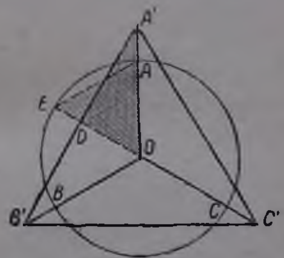
$$\frac{l'^2_a}{bc} + \frac{l'^2_b}{ac} + \frac{l'^2_c}{ab} = 1$$

ҳосил бўлади. Бундан бевосита (33) формула келиб чиқади.

2. Маркази O нуқтада ва радиуси r га тенг бўлган айлана A, B, C нуқталар билан тенг уч булакка бўлинган (22-шакл).



21-шакл.



22-шакл.

OA, OB, OC радиусларда айланага ички чизилган квадратнинг томонига тенг қилиб, OA', OB', OC' кесмалар ажратилган. $A'B'C'$ учбурчак юзининг айланага ички чизилган мунтазам олтибурчак юзига нисбатини топинг.

OC радиусга қарама-қарши йўналишдаги нур $A'B'$ кесмани D нуқтада, айлана ёйини E нуқтада кессин. Бундан I теоремага асосан:

$$\frac{A'DO \text{ юзи}}{AEO \text{ юзи}} = \frac{OA' \cdot OD}{OA \cdot OE}.$$

Бунда $OA' = r\sqrt{2}$, $OD = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, $OA = OE = r$, бундан ташқари $A'DO$ юзи $= \frac{1}{6} A'B'C'$ юзи.

Агар мунтазам олтибурчакнинг юзини Σ билан белгиласак, AEO юзи $= \frac{1}{6}\Sigma$.

Шунинг учун:

$$\frac{A'B'C' \text{ юзи}}{\Sigma} = \frac{6A'DO \text{ юзи}}{6AEO \text{ юзи}} = \frac{\frac{r\sqrt{2}\cdot r\sqrt{2}}{2}}{r^2} = 1.$$

3. ABC учбурчак оғирлик маркази G нинг учала томонидаги проекциялари G_a, G_b, G_c. Бу нуқталарни туташтиришдан ҳосил бўлган $G_aG_bG_c$ учбурчакнинг юзи топилсин.

Маълумки,

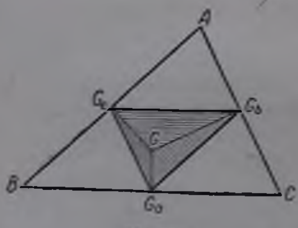
$$GG_b = \frac{h_b}{3},\ GG_c = \frac{h_c}{3},\ \angle G_cGG_b + \angle CAB = 180^\circ.$$

(23-шакл) II теоремага биноан:

$$\frac{G_cGG_b \text{ юзи}}{S} = \frac{GG_b\cdot GG_c}{AB\cdot AC} = \frac{h_b\cdot h_c}{9bc} = \frac{a^2bch_bh_c}{9a^2b^2c^2} = \frac{4S^2a^2}{9a^2b^2c^2}.$$

Бундан:

$$G_cGG_b \text{ юзи} = \frac{4S^3a^2}{9a^2b^2c^2}.$$



23-шакл.

Ишни шунга ўхшаш усулда давом эттириб, ушбуларни ҳосил этамиз:

$$G_aG_bG_c \text{ юзи} = GG_bG_c \text{ юзи} + GG_cG_a \text{ юзи} + GG_aG_b \text{ юзи} = \frac{4S^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}.$$

4. Ушбу

$$h'_bh'_c + h'_ch'_a + h'_ah'_b = 2R(h''_a + h''_b + h''_c) \tag{36}$$

муносабат исбот қилинсин.

$\angle BHC + \angle BAC = 180^\circ$ (24-шакл) экани эътиборга олинса, II теоремага асосан:

$$\frac{HBC \text{ юзи}}{S} = \frac{BH\cdot CH}{AB\cdot AC} = \frac{h'_b\, h'_c}{bc}.$$

Иккинчи томондан:

$$\frac{HBC \text{ юзи}}{S} = \frac{h''_a}{h_a},$$

демак:

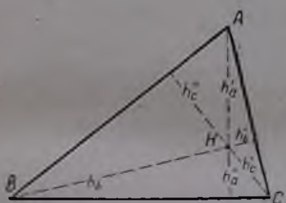
$$\frac{h'_b h'_c}{b_c} = \frac{h''_a}{h_a}.$$

Бундан (6) формула бўйича:

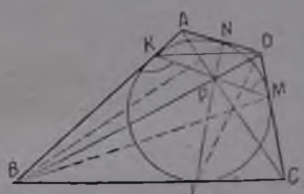
$$h'_b h'_c = \frac{h''_a bc}{h_a} = \frac{h''_a abc}{ah_a} = h''_a \cdot \frac{abc}{2S} = 2Rh''_a.$$

Бундан (36) формула осонгина келиб чиқади.

5. Томонлари AB, BC, CD, DA га тенг ва айланага ташқи чизилган $ABCD$ тўртбурчак айланага K, L, M, N нуқталарда уриниб, AC ва BD диагоналлари ўзаро P нуқтада кесишади (25-шакл).



24-шакл.



25-шакл.

KM ва LN тўғри чизиқларнинг ҳам P нуқтадан ўтишини ва $BP : PD = BK : DM$ эканини исбот этиш керак.

BKM ва DMK учбурчакларни қарасак:

$\angle BKM + \angle DMK = 180°$.

II теоремага биноан:

$$\frac{BKM \text{ юзи}}{DKM \text{ юзи}} = \frac{BK \cdot KM}{DM \cdot KM} = \frac{BK}{DM}. \tag{37}$$

Бу учбурчаклар умумий KM асосга эга бўлгани учун:

$$\frac{BMK \text{ юзи}}{DKM \text{ юзи}} = \frac{BP'}{P'D}. \tag{38}$$

(Бунда P' нуқта BD ва KM тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси деб фараз қилинади.)

BD ва KM тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси P' бўлса, (37) ва (38) га кўра:

$$\frac{BP'}{P'D} = \frac{BK}{DM}. \tag{39}$$

BD ва LN тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини S десак, BLN ва DLN учбурчаклардан:

$$\frac{BS}{SD} = \frac{BL}{DN}. \tag{40}$$

$BL=BK$ ва $DN=DM$ бўлгани учун (39) ва (40) дан ушбу тенглик ҳосил бўлади:

$$\frac{BP'}{P'D}=\frac{BS}{SD}.$$

Демак, P' ва S нуқталар устма-уст тушади ва BD диагонал KM ва LN туғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтади. Бу нуқтадан AC диагоналнинг ўтишини ҳам юқоридаги сингари исботлаш мумкин. Демак, AC, BD, KM, LM туғри чизиқлар бир нуқтада кесишади. Шартга кўра, AC ва BD тўғри чизиқлар P нуқтада кесишади. Шунинг учун, P, P', S нуқталар бир нуқтадир. Шунингдек, (39) ёки (40) тенгликлардан $BP:PD=BK:DM$ экани келиб чиқади.

6.

$$S=\sqrt{rr_ar_qr_c}.$$

Юқорида (3′) да кўрсатилган тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак:

$$rr_ar_br_c=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Бунда Герон формуласини татбиқ этсак, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$S^2=rr_ar_br_c.$$

7.

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}. \tag{41}$$

Бу муносабатни келтириб чиқаришда (3′) ни назарга олиш лозим, у ҳолда:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{ah_a}+\frac{b}{bh_b}+\frac{c}{ch_c}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

8.

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}. \tag{42}$$

Маълумки:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

9.

$$\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}=\frac{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}{h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b}. \tag{43}$$

(41) ва (42) га асосан:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}.$$

Иккинчи тенгликни биринчисига бўлсак:

$$\frac{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}=\frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r}}=1.$$

Чап томоннинг сурат ва махражининг шаклини ўзгартирамиз:

$$\frac{\frac{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}{r_ar_br_c}}{\frac{h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b}{h_ah_bh_c}}=1.$$

Бундан:

$$\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}=\frac{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}{h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b}.$$

10.

$$Rr=\frac{abc}{4p}.$$

(4) ва (6) формулаларга кўра:

$$Rr=\frac{abc}{4S}\cdot\frac{S}{p}=\frac{abc}{4p}.$$

§ 11. Стюарт теоремасининг татбиқи

11. *Учбурчак биссектрисасининг узунлиги топилсин.*

ABC учбурчакда A бурчакнинг биссектрисаси $AA'=l_a$ бўлсин (26-шакл). $BA':A'C=c:b$ ни эътиборга олиб, BA' ва $A'C$ кесмаларнинг узунлигини топамиз.

$$BA'+A'C=a$$

эканини эътиборга олсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$BA'=\frac{ac}{b+c},\quad A'C=\frac{ab}{b+c}.$$

Сўнг, V теоремага биноан:

$$l_a^2\cdot a=\frac{ab^2c}{b+c}+\frac{abc^2}{b+c}-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot a.$$

Бундай оддий алмаштиришлардан кейин

$$l_a^2=bc\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\tag{44}$$

келиб чиқади. Бу ерда $a+b+c=2p$, $b+c-a=2(p-a)$ эканини ҳисобга олсак:

$$l_a^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

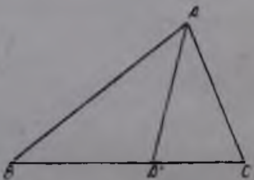
ёки

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}. \qquad (45)$$

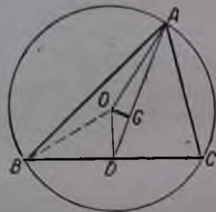
12. *Учбурчак медианасининг узунлиги топилсин.*

ABC учбурчак BC томонининг ўрта нуқтаси D бўлсин (27-шакл). У ҳолда $AD = m_a$, $BD = DC = \frac{a}{2}$ бўлиб, Стюарт теоремасига биноан:

$$m_a^2 \cdot a = \frac{a}{2} \cdot b^2 + \frac{a}{2} \cdot c^2 - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a.$$



26-шакл.



27-шакл.

Бундан:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

ёки

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}. \qquad (46)$$

13. *Учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази билан учбурчак оғирлик маркази орасидаги масофа топилсин.*

ABC учбурчак BC томонининг ўрта нуқтаси D ва изланган масофа OG (27-шакл) бўлсин. OBD учбурчакдан: $OD^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$ ва $AD = m_a$, Стюарт теоремасини татбиқ этиб, (46) формула бўйича ҳисобланса:

$$OG^2 \cdot AD = OA^2 \cdot DG + OD^2 \cdot AG - AD \cdot AG \cdot DG$$

ёки

$$OG^2 \cdot m_a = R^2 \cdot \frac{1}{3} m_a + \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} m_a - m_a \cdot \frac{1}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_a,$$

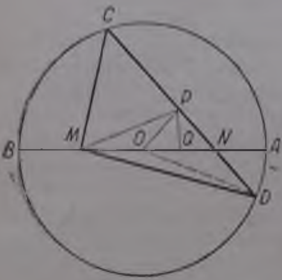
бундан:

$$OG^2 = \frac{1}{3} R^2 + \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{2}{9} m_a^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

демак:

$$OG = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

14. *Радиуси R бўлган айланага AB диаметр чизилган ва AO радиуснинг ўртаси N нуқтадан утиб, OB радиуснинг ўртаси M нуқтадан тўғри бурчак остида кўринадиган CD ватар ўтказилган. Айлананинг O марказидан CD ватаргача бўлган масофа топилсин.*



28-шакл.

CMD учбурчакнинг MP медианасини ва OPN учбурчакнинг PQ медианасини ўтказиб, $OP \perp CD$, ($OP = x$) ни ҳосил қиламиз, унда $\angle CMD = \angle OPN = 90^\circ$ бўлганидан (28-шакл):

$$MP = CP = PD = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

PON учбурчакдан:

$$PQ = OQ = QN = \frac{R}{4}.$$

Стюарт теоремаси бўйича PMQ учбурчакдан:

$$OP^2 \cdot MQ = MO \cdot PQ^2 + OQ \cdot MP^2 - MQ \cdot MO \cdot OQ$$

ёки

$$x^2 \cdot \frac{3}{4}R = \frac{R^2}{16} \cdot \frac{R}{2} + (R^2 - x^2) \cdot \frac{R}{4} - \frac{3R}{4} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{4}.$$

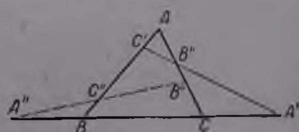
Бундан:

$$x^2 = \frac{3R^2}{16} \text{ ва } x = \frac{R\sqrt{3}}{4}.$$

§ 12. Менелай теоремасининг татбиқи

15. *Бир тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг AB, AC томонлари ва BC томоннинг давомини мос равишда A', B', C' нуқталарда кесиб ўтади. BC томонининг ўртасига нисбатан A' га симметрик A'' ва CA томонининг ўртасига нисбатан B' нуқтага симметрик B'' ва AB томонининг ўртасига нисбатан C' нуқтага симметрик C'' нуқталар олинган.*

Шу A'', B'', C'' нуқталарнинг коллинеар бўлиши, яъни уларнинг бир тўғри чизиқ устида ётишини исбот қилинг.



29-шакл.

VI теоремага асосан:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'A} = -1. \tag{47}$$

Бундан ташқари (29-шакл):

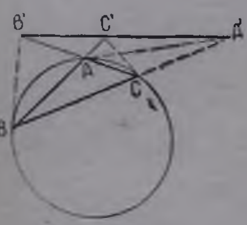
$$BA'' = A'C,\ A''C = BA',\ CB'' = B'A.$$
$$B''A = CB',\ AC'' = C'B,\ C''B = AC'.$$

Шунинг учун (47) тенгликдан:

$$\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB''}{B''A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=-1.$$

Бу сўнгги тенгликдан Менелай теоремасига биноан A'', B'' C'' нуқталар бир тўғри чизиқ устида ётиши келиб чиқади.

16. *Учбурчак учларидан ташқи чизилган айланага ўтказилган уринмаларнинг қарши томонларнинг давоми билан кесишган нуқталари коллинеардир.*



30-шакл.

ABC учбурчакнинг A, B, C учларидан ташқи чизилган айланага ўтказилган уринмалар BC, CA, AB мос қарши томонларнинг давомларини A', B', C' нуқталарда кессин (30-шакл). ABA', ACA' учбурчакларнинг ўхшашлигини назарга олсак, биринчи учбурчак BA', $A'A$, $AB=c$ томонларининг иккинчи учбурчак AA', CA', $AC=b$ томонларига нисбатидан:

$$\frac{BA'}{AA'}=\frac{AA'}{CA'}=\frac{c}{b};$$

бундан ва $CA'=-A'C$ бўлганидан:

$$\frac{BA'}{AA'}=\frac{c}{b};\quad \frac{AA'}{A'C}=-\frac{c}{b}.$$

Охирги тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак:

$$\frac{BA'}{A'C}=-\frac{c^2}{b^2}. \tag{48}$$

Шунга ўхшаш:

$$\frac{CB'}{B'A}=-\frac{a^2}{c^2},\ \frac{AC'}{C'B}=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{49}$$

(48) ва (49) тенгликлардан:

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'A}=-1$$

бўлиб, теорема исбот қилинди.

§ 13. Чева теоремасининг татбиқи

17. *Учбурчак бурчакларининг учларидан ўтувчи ва қарши томонларни ён томонларининг n-даражалари нисбатларига тенг нисбатда бўлувчи тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишиши исбот қилинсин.*

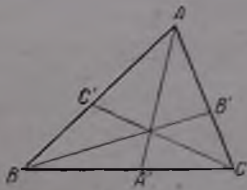
31-шаклдан: $\frac{BA'}{A'C}=\frac{c^n}{b^n},\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{a^n}{c^n},\ \frac{AC'}{C'B}=\frac{b^n}{a^n}.$

Бу тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак:

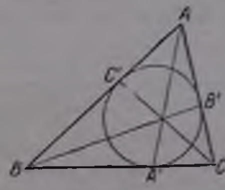
$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

ҳосил бўлади. Демак, Чева теоремасига биноан AA', BB', CC' тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади.

Агар $n = 0$ бўлса, у ҳолда A', B', C' нуқталар учбурчак томонларининг ўртасида ётиб, AA', BB', CC' тўғри чизиқлар



31-шакл.

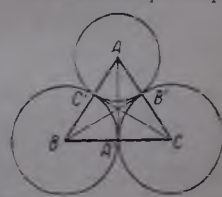


32-шакл.

учбурчакнинг медианалари бўлади. Маълумки, учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишади. Бу теореманинг хусусий ҳоли бўлади. Агар $n = 1$ булса, AA', BB', CC' лар учбурчакнинг биссектрисалари бўлади, улар ҳам ўзаро бир нуқтада кесишади.

Учбурчакнинг учидан ўтувчи тўғри чизиқ унинг томонини қолган икки томон квадратларининг нисбати каби нисбатдаги кесмаларга бўлса, бу тўғри чизиқ учбурчакнинг симедианаси дейилади. Теоремага кўра учбурчакнинг симедианалари бир нуқтада кесишади.

Симедианаларнинг кесишиш нуқтаси Л е м у а н н у қ т а с и деб аталади.



33-шакл.

18. *Айланага ташқи чизилган ABC учбурчакнинг BC, CA, AB томонлари айланага мос равишда A', B', C' нуқталарда уринади. AA', BB', CC' тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишишини исбот қилиш керак* (32-шакл).

AB' ва AC' лар бир нуқтадан ўтказилган уринмалар бўлганидан ўзаро тенг. Шунинг каби $BC' = BA'$, $CA' = CB'$; демак:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

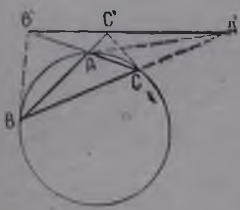
Шу билан теорема исбот этилди.

19. *Марказлари A, B, C нуқталарда бўлган айланалар жуфт-жуфти билан ўзаро ташқи уринади; B ва C айлана A' нуқтада, A ва C айлана B' нуқтада, A ва B лар C' нуқтада уринади. AA', BB', CC'* тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишишини исбот қилиш керак.

Шунинг учун (47) тенгликдан:

$$\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB''}{B''A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=-1.$$

Бу сўнгги тенгликдан Менелай теоремасига биноан A'', B'' C'' нуқталар бир тўғри чизиқ устида ётиши келиб чиқади.



30-шакл.

16. *Учбурчак учларидан ташқи чизилган айланага ўтказилган уринмаларнинг қарши томонларнинг давоми билан кесишган нуқталари коллинеардир.*

ABC учбурчакнинг A, B, C учларидан ташқи чизилган айланага ўтказилган уринмалар BC, CA, AB мос қарши томонларнинг давомларини A', B', C' нуқталарда кессин (30-шакл). ABA', ACA' учбурчакларнинг ўхшашлигини назарга олсак, биринчи учбурчак BA', $A'A$, $AB=c$ томонларининг иккинчи учбурчак AA', CA', $AC=b$ томонларига нисбатидан:

$$\frac{BA'}{AA'}=\frac{AA'}{CA'}=\frac{c}{b};$$

бундан ва $CA'=-A'C$ бўлганидан:

$$\frac{BA'}{AA'}=\frac{c}{b};\quad \frac{AA'}{A'C}=-\frac{c}{b}.$$

Охирги тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак:

$$\frac{BA'}{A'C}=-\frac{c^2}{b^2}. \tag{48}$$

Шунга ўхшаш:

$$\frac{CB'}{B'A}=-\frac{a^2}{c^2},\ \frac{AC'}{C'B}=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{49}$$

(48) ва (49) тенгликлардан:

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'A}=-1$$

бўлиб, теорема исбот қилинди.

§ 13. Чева теоремасининг татбиқи

17. *Учбурчак бурчакларининг учларидан ўтувчи ва қарши томонларни ён томонларининг n-даражалари нисбатларига тенг нисбатда бўлувчи тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишиши исбот қилинсин.*

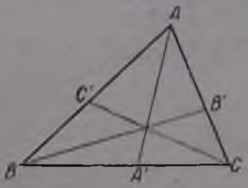
31-шаклдан: $\frac{BA'}{A'C}=\frac{c^n}{b^n},\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{a^n}{c^n},\ \frac{AC'}{C'B}=\frac{b^n}{a^n}.$

Бу тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак:

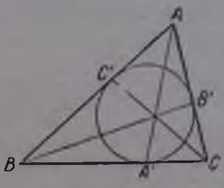
$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

ҳосил бўлади. Демак, Чева теоремасига биноан AA', BB', CC' тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади.

Агар $n=0$ бўлса, у ҳолда A', B', C' нуқталар учбурчак томонларининг ўртасида ётиб, AA', BB', CC' тўғри чизиқлар



31-шакл.

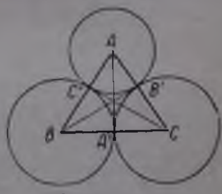


32-шакл.

учбурчакнинг медианалари бўлади. Маълумки, учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишади. Бу теореманинг хусусий ҳоли бўлади. Агар $n=1$ бўлса, AA', BB', CC' лар учбурчакнинг биссектрисалари бўлади, улар ҳам ўзаро бир нуқтада кесишади.

Учбурчакнинг учидан утувчи тўғри чизиқ унинг томонини қолган икки томон квадратларининг нисбати каби нисбатдаги кесмаларга бўлса, бу тўғри чизиқ учбурчакнинг симедианаси дейилади. Теоремага кўра учбурчакнинг симедианалари бир нуқтада кесишади.

Симедианаларнинг кесишиш нуқтаси Лемуан нуктаси деб аталади.



33-шакл.

18. *Айланага ташқи чизилган ABC учбурчакнинг BC, CA, AB томонлари айланага мос равишда A', B', C' нуқталарда уринади. AA', BB', CC' тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишишини исбот қилиш керак* (32-шакл).

AB' ва AC' лар бир нуқтадан ўтказилган уринмалар бўлганидан ўзаро тенг. Шунинг каби $BC'=BA'$, $CA'=CB'$; демак:

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

Шу билан теорема исбот этилди.

19. *Марказлари A, B, C нуқталарда бўлган айланалар жуфт-жуфти билан ўзаро ташқи уринади; B ва C айлана A' нуқтада, A ва C айлана B' нуқтада, A ва B лар C' нуқтада уринади.* AA', BB', CC' тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишишини исбот қилиш керак.

Бир айлананинг радиуслари бўлгани учун (33-шакл):

$$B'A = AC',\ C'B = BA',\ A'C = CB',$$

бундан:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

экани келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

§ 14. 5-параграфдаги формулаларнинг татбиқи

20. ABC учбурчакнинг BC, CA, AB томонларида A', B', C' нуқталар олинган ва бунда:

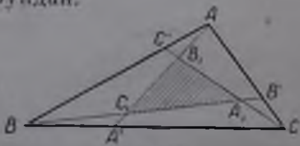
$$\frac{BA'}{A'C} = \lambda,\ \frac{CB'}{B'A} = \mu,\ \frac{AC'}{C'B} = \gamma.$$

AA', BB', CC' тўғри чизиқлар билан чегараланган $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг юзи топилсин (34-шакл).

Энг олдин ABC_1 учбурчакнинг юзини топамиз. Умумий баландликли учбурчаклар бўлгани учун:

$$\frac{ABC_1 \text{ юзи}}{ABA' \text{ юзи}} = \frac{AC_1}{AA'} \text{ ва } \frac{ABA' \text{ юзи}}{S} = \frac{BA'}{BC}.$$

Бундан:



34-шакл.

$$ABC_1 \text{ юзи} = S \cdot \frac{AC_1}{AA'} \cdot \frac{BA'}{BC}.$$

§ 5 даги (20) формуладан

$$\frac{AC_1}{AA'} = \frac{\lambda + 1}{\lambda\mu + \lambda + 1}$$

ҳосил бўлади. Шунинг каби

$$\frac{BA'}{BC} = \frac{BA'}{BA' + A'C} = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

демак:

$$ABC_1 \text{ юзи} = \frac{\lambda S}{\lambda\mu + \lambda + 1}.$$

Шунга ўхшаш:

$$BCA_1 \text{ юзи} = \frac{\mu S}{\mu\gamma + \mu + 1},\ CAB_1 \text{ юзи} = \frac{\gamma S}{\gamma\mu + \gamma + 1}.$$

Энди $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг юзини топиш осон:

$A_1\,B_1\,C_1$ юзи $= ABC$ юзи $-$ ABC_1 юзи $-$ BCA_1 юзи $-$ CAB_1 юзи $=$

$$= S - \frac{\lambda S}{\lambda\mu + \lambda + 1} - \frac{\mu S}{\mu\gamma + \mu + 1} - \frac{\gamma S}{\gamma\mu + \gamma + 1}.$$

Бундан бир неча шакл алмаштиришлар бажарилгандан сўнг:

$$A_1B_1C_1 \text{ юзи} = \frac{S(1 - \lambda\mu\gamma)^2}{(\lambda\mu + \lambda + 1)(\mu\gamma + \mu + 1)(\gamma\mu + \gamma + 1)}. \qquad (50)$$

Хусусий ҳолда $\lambda = \mu = \gamma$ бўлганда (50) формуладан:

$$A_1B_1C_1 \text{ юзи} = \frac{S(1-\lambda)^2}{\lambda^2+\lambda+1}.$$

21. ABC учбурчакнинг a, b, c томонларида мос равишда A', B', C' нуқталар олинган, бунда

$$\frac{A'B}{A'C} = u, \quad \frac{B'C}{B'A} = v, \quad \frac{C'A}{C'A} = w,$$

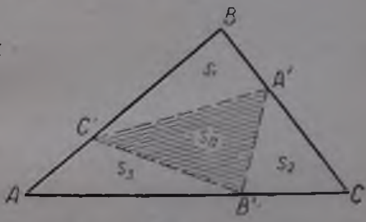
ABC учбурчакнинг юзи S га тенг бўлса, $A'B'C'$ учбурчакнинг юзини топинг.

Ечиш (35-шакл)да олинган кесмалар:

$$A'B = a_1; \ A'C = a_2; \ B'C = b_1; \ B'A = b_2; \ BC' = c_2; \ AC' = c_1;$$

учбурчаклардан $\triangle A'BC'$ юзи $= S_1$; $\triangle AB'C'$ юзи $= S_3$; $\triangle A'B'C$ юзи $= S_2$; $\triangle ABC = S$ билан белгилаймиз; кичик учбурчаклар ABC учбурчак билан умумий бурчакка эга бўлганидан:

1) $\frac{a_1 \cdot c_2}{a \cdot c} = \frac{S_1}{S}$; $\frac{a_2 \cdot b_1}{a \cdot b} = \frac{S_2}{S}$; $\frac{c_1 \cdot b_2}{c \cdot b} = \frac{S_3}{S}$;



35-шакл.

бу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшсак:

$$\frac{a_1 \cdot c_2}{a \cdot c} + \frac{a_2 \cdot b_1}{a \cdot b} + \frac{c_1 \cdot b_2}{c \cdot b} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}.$$

Агар $S_1 + S_2 + S_3 = S_b$ деб олсак, $\frac{a_1c_2b + a_2b_1c + c_1b_2a}{abc} = \frac{S_b}{S} \cdot$ (I)

2) $\frac{a_1}{a_2} = u$; $a_1 = ua_2$; $\frac{b_1}{b_2} = v$; $b_1 = v_1b_2$; $\frac{c_1}{c_2} = w$; $c_1 = wc_2$.

$$3) \left.\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 = a_2 + ua_2 = a_2\,(1+u) \\ b &= b_1 + b_2 = b_2 + vb_2 = b_2\,(1+v) \\ c &= c_1 + c_2 = c_2 + wc_3 = c_2\,(1+w). \end{aligned}\right\}$$

Буларни (I) га қўямиз:

$$4) \quad \frac{a_1c_2b_2(1+v) + a_2b_1c_2(1+w) + c_1b_2a_2(1+u)}{a_2b_2c_2(1+u)(1+v)(1+w)} =$$

$$= \frac{u(1+v) + v(1+w) + w(1+u)}{(1+u)(1+v)(1+w)} = \frac{S_b}{S}$$

ёки

$$S_b = S \cdot \frac{u(1+v) + v(1+w) + w(1+u)}{(1+u)(1+v)(1+w)} \cdot \text{(II)}$$

5) Агар изланган $\triangle A'B'C'$ нинг юзи $= S_a$ бўлса:

$$S_a = S - S_b$$

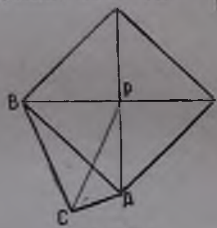
ёки

$$S_a = S - S \cdot \frac{u(1+v) + v(1+w) + w(1+u)}{(1+u)(1+v)(1+w)} = S \cdot \frac{1+uvw}{(1+u)(1+v)(1+w)}.$$

§ 15. Птоломей теоремасининг татбиқи

22. *Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг AB гипотенузасига учбурчакдан ташқарида квадрат ясалган. Квадратнинг маркази P нуқта билан тўғри бурчакнинг учи C орасидаги масофа топилсин.*

Маълумки, $BP = AP = \frac{c}{\sqrt{2}}$ (36-шакл), бу ерда c — гипотенуза.



36-шакл.

37-шакл.

$APBC$ тўртбурчакка ташқи айлана чизамиз, BCA ва APB — бурчаклар йиғиндиси 180° бўлганидан бундай айлана чизиш мумкин. Птоломей теоремасига асосан:

$$CP \cdot AB = AP \cdot BC + PB \cdot CA$$

ёки

$$CP \cdot c = \frac{ac}{\sqrt{2}} + \frac{bc}{\sqrt{2}}.$$

Бундан:

$$CP = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

23. Ушбу

$$a(k_b + k_c) + b(k_c + k_a) + c(k_a + k_b) = 2pR \qquad (51)$$

муносабат исбот этилсин.

37-шаклда кўрсатилганидек $OB_1 \perp AC$, $OC_1 \perp AB$ ўтказсак (бу ерда O — ташқи чизилган айлананинг маркази), унда $OA = R$, $OB_1 = k_b$, $OC_1 = k_c$ бўлиб, B_1C_1 учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади. Шунинг учун $B_1C_1 = \frac{a}{2}$.

AC_1OB_1 тўртбурчакка Птоломей теоремасини татбиқ этсак:

$$k_b \cdot \frac{c}{2} + k_c \cdot \frac{b}{2} = R \cdot \frac{a}{2}.$$

Бундан:

$$c \cdot k_b + b \cdot k_c = a \cdot R. \tag{52}$$

Шунга ўхшаш:

$$a \cdot k_c + ck_a = b \cdot R, \tag{53}$$
$$b \cdot k_a + a \cdot k_b = c \cdot R. \tag{54}$$

(52), (53) ва (54) тенгликларни ҳадлаб қўшсак, (51) муносабат ҳосил бўлади.

24. $ABCDEFG$ мунтазам еттибурчакнинг учлари тартиб билан $A, B, C, D, \ldots$

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \tag{55}$$

эканини исбот қилиш керак.

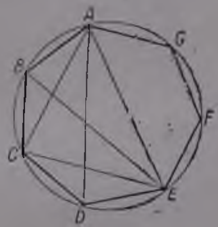
Агар $ABCE$ тўртбурчакка (38-шакл) Птоломей теоремасини татбиқ этсак:

$$AC \cdot BE = AB \cdot CE + BC \cdot AE$$

бўлади, бу ерда

$$BC = AB, \; CE = AC \text{ ва } AE = BE = AD$$

эканини эътиборга олиб,



38-шакл.

$$AC \cdot AD = AB \cdot AC + AB \cdot AD$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Буни $AB \cdot AC \cdot AD$ кўпайтмага бўлсак, (55) муносабат келиб чиқади.

Учбурчакнинг баландлиги, медианаси ва биссектрисасининг узунликларини учбурчак томонлари орқали ифодалай билиш келгуси масалаларда зарур бўлганидан қуйида уларни қандай келтириб чиқаришга тўхтаб ўтамиз.

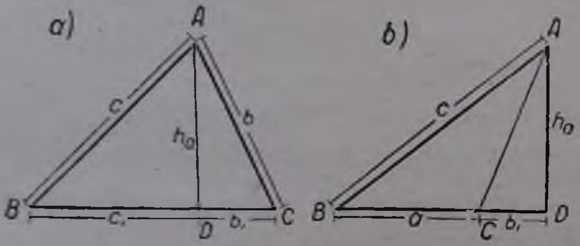
Учбурчакнинг баландлигини ҳисоблаш

25. $BC = a$ томонга туширилган баландлик h_a ни топайлик (39-a, $б$ шакллар). b нинг a томоннинг (C бурчак ўтмас бўлган ҳол) давомидаги проекциясини b_1 билан, c томоннинг проекциясини c_1 билан белгиласак, учбурчакларнинг B ўткир бурчаги қаршисида ётган b томоннинг квадрати ҳақидаги теоремага асосан:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac_1.$$

Бу тенгликдан c_1 кесмани аниқлаймиз:

$$c_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$



39-*а*, *б* шакл.

ABD тўғри бурчакли учбурчакдан баландликни аниқлаймиз:

$$h_a = \sqrt{c^2 - c_1^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{(2a)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(2ac^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

яъни

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

$a + b + c = 2p$ бўлгани учун, $a + b - c = (a + b + c) - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$. Шу сингари $a + c - b = 2(p - b)$; $b + c - a = 2(p - a)$. Биз шу шартлардан фойдаландик.

C бурчак ўткир бўлганда ҳам формула шу усулда чиқарилади. $a < b + c$ тенгсизликнинг ҳар икки томонига a қўшсак $a + a < a + b + c$, яъни $2a < 2p$, $a < p$, $p - a > 0$ ($p - b > 0$, $p - c > 0$ экани ҳам шундай кўрсатилади) бўлганидан, шу усулда чиқарилган радикал остидаги ифода мусбат бўлади.

Бир учбурчакнинг юзини унинг томонлари ва уларга туширилган баландлиги орқали қуйидагича ифодалашимиз мумкин:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Бундан:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

ёки

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a},$$

ёки

$$a:b = \frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}.$$

Шунинг учун

$$a:b:c = \frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$$

дейишимиз мумкин.

Бундан: учбурчак томонларининг нисбати шу томонларга туширилган мос баландликлар тескари қийматларига пропорционал бўлади дейишимиз мумкин.

26. ABC учбурчакда $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ бўлса, h_a, h_b, h_c ни топинг, $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ формулага

$p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$; $p - a = 8$; $p - b = 7$; $p - c = 6$ ларни қўйсак:

$$h_a = \frac{2}{13}\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{2}{13} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \approx 13.$$

Худди шу сингари $h_b = \frac{2}{14} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 = 12$;

$$h_c = \frac{2}{15} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 = 11,5.$$

26-масаланинг натижасидан фойдаланиб, қуйидаги масалани ечамиз:

27. Трапециянинг $a = 9$, $b = 4$ асослари, $c = 3$, $d = 4$ ён томонлари берилган. Унинг баландлигини топинг (40-a шакл).

Ечиш. $BE \parallel CD$ ўтказамиз. ABE учбурчакнинг баландлиги трапециянинг ҳам баландлиги бўлади.

$$a - b = 9 - 4 = 5;$$

$$p = \frac{3+4+5}{2} = 6;$$

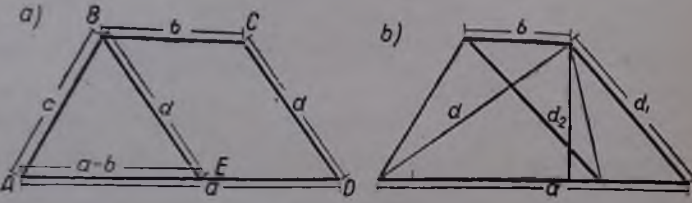
$$p - c = 6 - 3 = 3;$$

$$p - d = 6 - 4 = 2;$$

$$p - (a - b) = 6 - 5 = 1; \; h = \frac{2}{5}\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

28. Трапеция асослари a ва b; диагоналлари d_1, d_2; унинг h_a баландлигини топинг (40-*б* шакл).

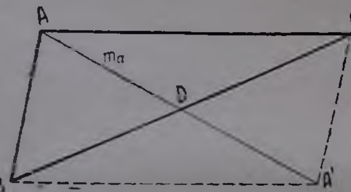
Бу масала ҳам юқоридаги сингари ечилади.



40-*а*, *б* шакл.

Медиананинг узунлиги

Учбурчак медианаларининг узунлигини қуйидагича ҳам топиш мумкин. Агар ABC учбурчакнинг a томонига туширилган m_a медиананинг узунлигини учбурчак томонлари орқали аниқлайдиган бўлсак, m_a кесманинг давомида унга тенг қилиб DA' ни қўямиз (41-шакл), A' нуқтани B ва C нуқталар билан туташтирсак, $ABA'C$ параллелограмм ҳосил бўлади. Биз бу ерда параллелограмм томонлари билан диагоналлари орасидаги маълум муносабатдан фойдаланамиз:



41-шакл.

$$a^2 = (2m_a)^2 = 2b^2 - 2c^2;\ (2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2;$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Демак:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

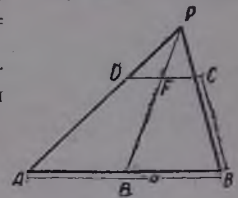
m_b, m_c ларни ҳам худди шу усулда топамиз:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Ҳосил этилган бу натижани трапецияга татбиқ этайлик.

29. $ABCD$ трапецияда $AB = a = 18$; $CD = b = 6$; $AD = c = 11$; $CB = d = 7$ экани берилган (42-шакл). Бу трапеция асосларининг ўрталарини туташтирувчи кесманинг узунлигини топинг.

Ечиш. Трапеция ён томонларининг давомлари P нуқтада кесишсин. Бундан APB ва DPC учбурчаклар ҳосил бўлади. $\triangle APB \sim \triangle DPC$ бўлганидан $\frac{AP}{PD}=\frac{AB}{DC}=$ $=\frac{18}{6}=3$ ёки $\frac{11+PD}{PD}=3$ ва $PD=5{,}5$. Худди шу хилда $PC=3{,}5$. Бунга асосан $AP=16{,}5$, $PB=10{,}5$ бўлади. $PD=\frac{1}{3}AP$, $AD=\frac{2}{3}AP$.



42-шакл.

Энди APB учбурчакдан:

$$PE=\frac{1}{2}\sqrt{16{,}5^2\cdot 2+10{,}5^2\cdot 2-16^2}=\frac{1}{2}\sqrt{441}=\frac{1}{2}\cdot 21=10{,}5.$$

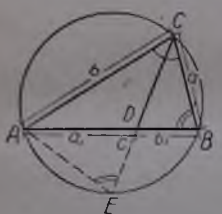
Бундан:

$$EF=\frac{2}{3}\cdot 10{,}5=\frac{21}{3}=7.$$

Биз излаган кесма 7 бирликка тенг экан.

Биссектрисанинг узунлигини ҳисоблаш

ABC учбурчакнинг C учидан ўтказилган CD биссектрисанинг узунлигини ҳисоблайлик (43-шакл). Уни β_c орқали белгилаб, A, B ва C нуқталар орқали ўтувчи айлана чизамиз. CD ни шу айлана билан E нуқтада кесишгунча давом эттирсак, ўхшаш BCD ва ACE учбурчаклар ҳосил бўлади ($\angle ACD=\angle DCB$ ва $\angle CBD=\angle CEA$).



43-шакл.

Бундан:

$$\frac{\beta_c}{a}=\frac{b}{\beta_c+x} \text{ ёки } \beta_c^2+\beta_c\cdot x=ab. \qquad (1)$$

$x=DE$ айлана ичидаги D нуқтада кесишувчи ватарлар кесмаларининг кўпайтмаси ўзаро тенг:

$$\beta_c\cdot x=a_1\cdot b_1. \qquad (2)$$

Буни (1) га қўйсак: $\beta_c^2+a_1 . b_1=ab$ ёки

$$\beta_c^2=ab-a_1b_1. \qquad (3)$$

a_1 ва b_1 ларнинг қийматини аниқлайлик.

CD биссектриса бўлганидан: $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ ёки $a_1=c-b_1$ бўлишини эътиборга олсак:

$$\frac{a}{b}=\frac{c-b_1}{b_1};\ ab_1=bc-bb_1 \qquad (4)$$

ёки $b_1(a+b)=bc$ тенгликдан $b_1=\frac{bc}{a+b}$; худди шу усулда

$$a_1=\frac{ac}{a+b}. \qquad (4')$$

Энди (4) ва (4′) ифодаларни (3) ифодага қўйсак:

$$\beta_c^2=ab-\frac{ac}{a+b}\cdot\frac{bc}{b+c}=\frac{ab[(a+b)^2-c^2]}{(a+b)^2}=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{4ab\cdot p(p-c)}{(a+b)^2} \text{ ёки } \beta_c=\frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}.$$

Худди шунингдек:

$$\beta_A=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c};\ \beta_B=\frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}.$$

ABC учбурчакда $a=5$; $b=7$; $c=6$ берилган. β_c ни топинг:

$$\beta_c=\frac{2\sqrt{a\cdot bp\cdot(p-c)}}{a+b}=\frac{2\sqrt{5\cdot7\cdot9\cdot3}}{5+7}=\frac{\sqrt{105}}{2},$$

$$\beta_c=\frac{\sqrt{105}}{2}.$$

И. ҲИСОБЛАШГА ВА ИСБОТЛАШГА ДОИР ГЕОМЕТРИК МАСАЛАЛАР ҲАҚИДА

§ 16. Масалалар ечиш усуллари тўғрисида

Геометрия дедуктив фан ҳисобланади. Уни аксиоматик тузиш учун чекли сондаги аксиомалар асос қилиб олинади (дедукция сўзи умумий ҳоллардан хусусий ҳолларга ўтиш маъносини билдиради).

Исботсиз қабул этиладиган жумлалар аксиома дейилади, бошқа геометрик жумлалар шу аксиомалардан мантиқий қонунларга асосан келтириб чиқарилади. Аксиомаларга асосан исбот қилинадиган жумлалар теоремалар деб аталади.

Бир теоремадан иккинчи бир теорема унинг хусусий ҳоли сифатида келиб чиқиши мумкин.

Бу ҳолда биринчи теореманинг мазмуни иккинчи теореманинг мазмунидан кенгроқ бўлади. Масалан, қуйидаги учта жумлани қарайлик;

1) Стюарт теоремаси;

2) $m_a^2=\frac{2(b^2+c)^2-a^2}{4}$ формула ва;

3) тўғри бурчак учидан ўтказилган медиана гипотенузанинг ярмига тенг деган теорема.

2-жумла 1-жумланинг, 3-жумла эса 2-жумланинг хусусий ҳолидир. Демак, Стюарт теоремасининг мазмуни қолган икки жумланинг мазмунига қараганда кенгроқ экан. „Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3 ва 4 га тенг бўлса, унинг гипотенузаси 5 га тенг бўлади“ деган жумла ҳам теорема бўлсада, унинг мазмуни анча тордир, шунинг учун ҳам у унчалик аҳамиятли эмас.

Мазмуни тўлиқ баён этилган теореманинг исботини масала тарзида бериш мумкин. Теореманинг мазмунини тўлиқ баён этмасдан туриб, ундан фойдаланиб масала тузиш мумкин. Юқорида айтилган мисолдаги учбурчакнинг катетлари ва гипотенузаси ҳақидаги жумладан фойдаланиб, „катетлари 3 ва 4 га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасини топинг“ деган масала тузиш мумкин. Бирор теоремани исбот қилишда бир нечта усул бўлиши мумкин бўлгани каби бирор масалани ечишда ҳам бир нечта йўл бўлиши мумкин.

Масалан, „Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган бурчакларнинг ҳар биридан катта“ деган жумла мактаб дарсликларида икки усул билан исботланади: а) параллел тўғри чизиқлар назарияси ўтилмасдан олдин бу жумла бевосита исбот қилинади, б) параллел тўғри чизиқлар ҳақидаги аксиома киритилгандан кейин бу жумла учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб исботланади.

Юқоридагиларга асосланиб, шундай хулосага келамиз: масала ечишда бизга маълум бўлган бирмунча жумлалар комплекси берилади. Бизнинг мақсад бу жумлалардан келиб чиқадиган натижаларни излаётганда бизга илгаридан маълум бўлган ва берилган теоремани бир-бирига боғлаб, улар орасидаги мантиқий алоқани топишдир. Бу боғланишнинг босқичлари қанчалик кўп бўлса масалани ечиш шунча қийинлашади. Масала ҳал қилишда ораликдаги босқичларни излаш (сўнгги босқич—масаланинг жавоби бизга номаълум бўлса ҳам), турли жумла ва натижалар орасидаги зарурий муносабатларни топишдир. Шунинг учун ҳам бу қийин ва ижодий ишдир. У биздан сабот ва ташаббус, зўр ақлий фантазия ҳамда идрок талаб этади. Масала ечишда фақат ижодий ишлар эмас, балки техник ишлар, масалан, масалага доир шакл чизиш ва ҳисоблашлар ҳам маълум даражада аҳамиятга эга бўлади. Масалани ҳал қилиш натижасида биз ўзимиз учун янги бўлган математик факт билан ошна бўламиз ва ўз билим савиямизни кенгайтирамиз.

Янги маълумотларнинг тўпланиши, масала ечишда энг қимматли материаллардан ҳисобланади. Маълум факт ва тушунчаларни ҳисобга олишимиз натижасида биз ўз малакамизни ўстириш билан бирга, бу факт ва тушунчаларнинг рационал равишда ривожланишига имкон туғилади.

Шуни айтиш керакки, ҳеч бир масалани ҳал қилишнинг ҳеч қандай умумий қоидаси (умумий ечиш йўли) йўқ. Бу ҳақда баъзи кўрсатма ва маслаҳатлар берилиши мумкин, холос.

Масалани ечишдаги усталик ҳар кимнинг билим, тажриба ва иқтидорига боғлиқдир.

Ҳар бир масалани ечиш йўллари, масаланинг мазмуни ва унинг специфик характерига қараб ошкор бўлади. Шунинг учун масалани ечишга киришишдан илгари, берилган масаланинг шартларини анализ қилиш ҳамда уни ечиш учун керак бўладиган теорема ва формулаларни аниқлаш керак.

Масалаларни турларга бўлиш ишига келсак, баъзи педагоглар масалаларни уларнинг ечилиш йўли — усулига асосан, яъни масаланинг тузилишига қараб, геометрик ўринлар методи билан, инверсия, ўхшашлик ва ҳоказо методлар билан ечиладиган турларга ажратишни тавсия этадилар. Бундай турларга бўлишда баъзи масалаларни қайси турга киритиш иши оғирлашади (чунки шундай масалалар ҳам борки, уларни методик қиммат эътибори билан тенг кучга эга бўлган бир неча усулга боғлаб ечиш мумкин). Бундан ташқари, масалалар шундай белгилар бўйича турларга бўлинганда масалани ҳал қилишда ўқувчиларнинг кўпроқ бош қотиришига, яъни „изланиш"ига ҳам эҳтиёж камаяди (чунки бу ҳолда биз қайси масалани қандай усул билан ечиш кераклигини бевосита ўзимиз кўрсатиб берган бўламиз). Демак, бундай қилинганда ўқувчиларга геометрик масалалар устида фикрлаш тўғрисида берилиши лозим бўлган методик ёрдам қимматсизлантирилади, холос. Баъзан масалаларнинг шартлари мураккаблашиб кетган ҳолларда қисқача кўрсатмалар беришга тўғри келади. Бу ҳолда бизнинг юқорида айтилган усулда турларга бўлишимиз бекорга чиқади. Шундай қилиб, геометрик масалалар шу хилда турларга ажратилса масала ечишдаги ташаббус бўғилади, масалалар тўплами устидаги ижодий иш, ҳар бир бўлимда бир турли, яъни бир қолипдаги ишга айланади. Бу билан масала ечишга бўлган ҳавас, „изланиш" каби фаолиятимиз анча бўғилади.

Группаларга ажратишнинг бу методини айниқса ҳисоблаш ва исботлашга доир масалаларни турларга ажратишга татбиқ этсак, яъни теоремаларга асосан группаларга ажратсак, группаларнинг ортиб кетиши, мавжуд теорема (Пифагор, Птоломей, Менелай, Чева...)ларнинг сонига мос ҳолда ортиб кетганлигидан катта ноқулайликка олиб келади. Бунинг устига баъзи масалаларнинг бир неча теореманинг комбинациясидан иборатлигини назарга олсак, иш янада мураккаблашади.

Агар группаларга ажратишда умумий характердаги (масалан: аналитик, ёрдамчи шакл ясашлар ва бошқа) методларни олсак, иш яна мужмаллашиб, ҳеч қандай фойда чиқмайди. (Чунки, агар биз масалани аналитик ечишни тавсия этсак, ишловчи буни бошқа қулайроқ усулда, масалан, ёрдамчи шакл ясаш билан осонгина ечиши мумкин.)

Фақат масаланинг объекти бўйича (масалан, тўғри чизиқ, учбурчак ва айланага нисбатан[1]) группалаш, яъни осон шаклдан қийинга, содда шаклдан мураккабга ўтиш, охирги шаклнинг олдин ўтилганларга боғлиқ бўлиши каби принципни олға сурамиз. Шу билан бирга биз ўз тавсифларимизда қуйидаги планни ишлатамиз: дастлаб масалани бир неча хил ечиш йўллари мавжудми эканини текширамиз. Бу бизга масалани ечиш учун лозим бўлган тушунчанинг калитини беради.

Сўнгра иш даврида масала ечишда тўпланган маълумотларимизни мустаҳкамлаш ва системалаштиришга ўтамиз. Ниҳоят, масалалар ечишдаги энг характерли йўл-йўриқлар ва усулларга тўхтаймиз.

Масала ечиш тўғрисида В. М. Брадис ва бошқалар қуйидаги мазмунда мулоҳазани баён этишади:

Масала ечиш

Аввало, „математик масала" терминининг маъносини аниқлайлик.

Мактаб математика курсининг ҳар бир бўлимига доир „масала" сўзи нима? Унга баъзи олимлар қуйидагича жавоб берадилар: „маълум фактлар (берилганлар) ёрдамида топилиши талаб қилинган фактлар орасидаги муносабатни ифода этиш масала деб аталади".

Масалага бундай таъриф берилганда кўп масала ва исботлашлар унга кирмай қолади. Масаланинг тулиқроқ таърифи қуйидагича: масала турли хилдаги математик саволлар бўлиб, унинг жавоби учун ўтган назарий материаллардан бирорта натижа, теорема ёки таърифларни соддагина қайтадан ишлаб чиқиш эмас, балки уларни ўз ўрнида келтириб фойдаланиш орқали тегишли жавобга эга бўлишдир.

Системали равишда масалалар ечиб бориш, назарияни онгли ва пухта ўзлаштиришга ёрдам беради, унинг амалий қийматини кўрсатади; шу билан бирга масала ечиш ўқувчиларнинг мантиқий тафаккурини, ижодий ташаббусини, фаҳм-фаросатларини тарбиялайди ва уларга бир қанча зарур амалий маҳорат ва малака беради.

Масала ечишда турли мақсадлар назарда тутилади. Баъзи масалалар орқали бирор назарий қонун исботланади. Ундан бирор конкрет ҳолда фойдаланиш йўллари курсатилади.

Шунинг учун ҳар бир геометрик масалани ечиш бирор геометрик теоремани исботлаш бўлиб чиқади.

Кўпинча масалалар ечиш ўтилганларни такрорлаш ёки ўқувчилар материални қай даражада ўзлаштирганликларини тек-

---

[1] Биз бу ерда китобнинг ҳар бир боби охирида шу бобдаги ва бундан илгариги бобларда берилган назарий билимни баён қиладиган ва мустаҳкамлайдиган масалаларнинг жойланиши ҳақида сўзламоқчи эмасмиз.

ширишдан иборат бўлади. Тузилишига қараб масала содда ва мураккаб бўлади.

Содда масалада шу ўтилаётган курсга доир назарий масалалардан (формула, қоида ва теоремаларни) биттасигина иштирок этган бўлади. Уни баъзан мисол ҳам деб аталади. Бунда шарт қилиб келтирилган жумла оғир бўлмаслиги керак.

Масалани ечишда бўладиган қийинчилик жумлаларнинг ўзаро комбинациясини тузиш, ҳар хил алмаштиришлар киритиш, ҳар хил қўшимча шакл элементларини ясашдан иборат бўлади. Баъзан буларни биронта формулага солиш ёки математик тил билан ифодалаш қийинчилик туғдиради.

Масала ва мисол ечиш назарияни яхши ўзлаштириш ёки бирор теореманинг амалда татбиқ этилиш йўлларини машқ қилишдир. Умуман олганда масала ечишдан мақсад математик тафаккурни ўстириш бўлиб, ижодий текшириш ишининг биринчи формасидир.

Масала ечилган бўлиши учун қуйидагилар бўлиши керак:

1. Хато бўлмаслиги; 2. Асосланган бўлиши; 3. Бутун характерни ўз ичига олган бўлиши лозим. Бу учта талаб, албатта, мавжуд бўлиши зарур. Агар бу талаблардан бирортаси бўлмаса (масалан, масаланинг ечими тўғри бўлиб, асосланмаган бўлса, ёки асосланган бўлса-ю, аммо тугал бўлмаса), унда ечим тўлиқ деб ҳисобланмайди.

Бундан ташқари, ечимни топишда қуйидагилар бўлиши талаб қилинади:

1. Ечим мумкин қадар содда бўлсин; 2. Етарли даражада тартибга солинган бўлсин; 3. Ечиш учун олинган — танланган йўл мумкин қадар равшан бўлсин; 4. Ечим умумлаштирилган бўлсин.

Бу талабларни кўздан кечирайлик.

1. Хатосиз ечиш:

Бизда дастлаб қуйидаги савол туғилади. Топилган ечимнинг тўғрилигига қандай ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бу саволни кўпинча ўқувчилар дарров китобда берилган жавобга қараш билан ҳал этадилар. Бу жуда яхши, чунки куч ва вақт тежалади. Лекин ўқувчиларга ўз-узини текширишни ўргатиш лозим. Баъзан масалаларнинг жавоби бўлмаслиги мумкин. Баъзи китоблардаги берилган жавобларда матбаа хатоси бўлиб, жавоб ва кўрсатмалар янглиш бўлиши мумкин. Шунинг учун ўқувчи — (масала ечувчи) узи фойдаланган формула ва қоидаларнинг тўғри ишлатилган-ишлатилмаганлигини текшириб кўриши, олинган жавобнинг тенглама ва масала шартига мувофиқ келиши ёки ҳосил қилинган ечимнинг талабларни қаноатлантиришини кўздан кечириши, шаклларнинг аниқлигини текшириб кўриши, ҳисоблаш ишини бошқа йўллар билан такрорлаб кўриши ва шунга ўхшаш ишларни бажариши лозим.

Масала ечувчи келиб чиққан хатонинг сабабини аниқлаб, агар бу хато назариянинг бўшлиги ёки бошқа характерли ҳоллар натижасида келиб чиққан бўлса, бу аниқланган камчиликни йўқотишга ҳаракат қилиши зарур.

2. Масалани асослаб ечиш:

Масала ечимининг тўғрилигини исботлаб бориш, масаланинг тўғри ечилганлигини аниқлаб беради. Кўпинча масала ечувчи масалани ечиб қўйган бўлса-да, уни тегишли далилларга суяниб исботлаб бера олмайди. Баъзан ўқитувчи ҳам бунга ожизлик қилиб қолади.

Асослаш, ўтилган маълум қоида, теорема ва натижаларга суяниш ёки мантиқий муҳокама юритишдан иборатдир. Ишни бажарувчи киши ҳар бир бажарган ва бажараётган ишини нима учун шундай бўлаётганлигини билиши керак. Айниқса бу ҳол геометрик масалалар ечишда муҳим ўрин тутади.

3. Ечишдаги ҳамма ҳолатлар ва характерларни кўздан кечириш:

Масала ечилиб, бир жавоб ҳосил қилингандан кейин яна бошқача жавоби ҳам бўлиши мумкинми ёки йўқми эканлигини текшириб кўриш, агар бошқа жавоблари бўлса, уларни аниқлаш ва қандай шартда бу жавоб ҳосил бўлишини кўрсатиш лозим. Айниқса, ясашга доир геометрик масалалар ечилгандан сўнг уни текшириш талаб қилинади.

4. Осонроқ ечиш йўлини қидириш:

Бир масалани турли усулда ечиш мумкин. Улар орасидан осон, тушунарлисини аниқлаш лозим. Баъзи масалаларни ечишда масалани осонгина ечишга ёрдам берувчи сунъий усуллар ва ёрдамчи шакллардан ҳам фойдаланилади.

5. Масала ечимининг ёзувини тартибга солиш:

Оддий масаланинг ечимини тартибга солиш талаб қилинмайди. Аммо ҳар хил шакллар ясаш ва турли назарий материаллар ҳамда алгебраик шакл алмаштиришлар қатнашадиган мураккаб масалаларнинг ечимини албатта тартиб билан ёзиб чиқиш талаб қилинади.

Масала ечишда илгари тартибсиз аралаш-қуралаш ҳолда қора (черновик)га ёзиб ташловчи, шаклларни ҳам тартибсиз чизиб, масалани ечиб бўлгандан сўнг уни тартибга солиб, шаклларни ҳам диққат билан қайтадан чизиб чиқувчилар бўлади. Биринчи галдаёқ барча иш тартиб билан бажарилса, ишловчининг тўғри фикрлаши учун имконият яратилади, шакл ва алгебраик ифодалар орасидаги муносабатларни топиш осонлашади.

Ечимни тартиб билан ёзиб боришда қуйидагиларни тавсия этамиз:

1) ечишда оқ ва қорани жуда эътибор билан ёзиб бориш лозим. Рақамлар, ёзилган ифодалар аниқ ва равшан бўлсин.

Шакллар пухта-аниқ қилиб чизилсин, ўринсиз ёзилган ва янглиш ҳисоблашлар булган тақдирда яхшилаб ўчириб ташлаш керак. Ҳар бир янги материал — мулоҳаза, айрим босқични ишлаганда ажратиб олиб, ишлаш, алоҳида қилиб ёзиб қўйиш керак;

2) ёзиш икки хил бўлади: бири қисқача ёзиш бўлиб, унга биринчи, иккинчи, ... ва ҳоказо иш тартиби кўрсатиб борилади. Иккинчи хил ёзиш тўла ёзиш бўлиб, нега бундайлигининг сабаблари, боғланиши ҳамда ундан келиб чиқадиган натижаларнинг ҳаммаси тўлалигича ёзиб борилади. Қисқача ёзишда жавобнинг қайси йўл билан келиб чиқиши тушунилса-да, тўла ёзувни ҳар ким, ҳар вақт ўқиб тушуна олади. Масаланинг ечиш усулини кўрсатиб бориш тушунишга ёрдам беради. Қисқа ёзишда орадаги ишда йўл қўйилган баъзи бир хато, янглиш муҳокамаларни излашда уни топиш иши қийинлашади;

3) тўла ёзиш кўп вақт олса ҳам фикрдаги тасаввурни (муҳокама қилишни) аниқ ифодалашга ўргатади. Шундай бўлсада, вақтни кўп сарф қилмаслик учун қисқароқ ёзувга секинаста ўрганиб, ёзувни камайтиришга ҳаракат қилиш керак;

4) қорадан оққа кўтариш ишига қарши курашиш керак, чунки бу иш кўп вақт олади. Баъзан муҳим масалаларни тартибга солиб кўчиришдан қутулиш учун ўйлаб тузилган қисқа ёзув билан тўла ёзиш йўллари кўрсатилган масалалар намунасини кўздан кечириб ўтиш яхши бўлади. Масала ечишда ҳар доим бир хил шаклдаги ишлаш усулидан фойдаланиш ва унга маҳкам ёпишиб олиш ярамайди (ҳатто баъзи ўқитувчилар ўқувчилар масалаларни у билгандан бошқа усулда ечса, уларга нисбатан масъулиятсизлик билан қарайдилар). Ҳар бир кишининг ўзи ижод этишига имкон бериш керак. Ўқувчилар юқори синфларга ўтган сари мустақил фикрлашга кўникиб, тўла ёзиш йўлларини танлай олади ва янги ечиш йўлларини излашга қизиқади. Шундай экан ҳар бир кишидан мустақиллик ва ижодчиликни талаб этиш керак;

5) ечимга олиб келадиган аниқ йўл.

Баъзи масалани ечиш жуда сунъий бўлади, махсус усулларга асосланиб, умумий назарияга алоқаси бўлмай қолади. Бундай усулларга қарши чиқиш ярамайди. Унга математик ижод деб қараш керак.

Баъзан кам тажрибали кишилар, ижодий ишланган қийин масалалар ечимини кўрганда ҳайратда қоладилар. Бунинг ҳеч қандай ажабланарли жойи йўқ. Кўп масала ечиб, малака ҳосил қилинса, турли мулоҳазалар, ҳар хил фикрлар туғилиб бораверади;

6) айрим масалаларни умумлаштириш.

Масалаларни умумлаштириш фойдалидир. Ҳар қандай масалани ечгандан сўнг масаланинг ифодасига турли сон қийматлар қўйиб текшириб чиқиш яхши бўлади.

Масалан, томонлари 3,4 ва 5 булган миср учбурчаги учун $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ихтиёрий бутун ва мусбат x учун $(3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2$ бўлади, бундан томонлари бутун сонлар билан ифодаланган янги Пифагор учбурчаклари топиш усули келиб чиқади.

Математик назария амалда татбиқ этилмаса (масала, мисол ечилмаса), мустаҳкамланмаган бўлади.

Ўқувчилар билан ишлаш қандай шароитда боришига эътибор бериш лозим. Бунинг учун дастлаб ўқитувчи типик масалалардан намуналар кўрсатиши керак. Бу иш пухта тайёрланган ҳолда савол-жавоб билан, пухта ўйланган методда (ўқитувчи раҳбарлигида) олиб борилади. Бунда ўқитувчи фикрни усталик билан тартибга солиши, тушунарли қилиб баён этиши лозим. Масаланинг шарти аниқ ва равшан ҳамда тартибли қилиб берилиши, ҳамма саволлар, деталлар ўқувчиларга тушунарли бўлганлигига ишонч ҳосил қилиниши керак. Буни аниқлаш учун ўқувчиларга материални қайтадан такрорлатиб чиқиш фойдали бўлади.

Масаланинг ҳаммасини диктовка қилиб ёздириб чиқиш керак эмас. Бунга кўп вақт кетади. Берилган сонларни қисқача ёзиб қўйиш кифоя. Сўнгра масалани қандай ечиш плани муҳокама қилинади. Ниҳоят, бу план амалга оширилади. Баъзан натижага тез олиб келувчи ечиш усулини таклиф этувчилар бўлса, унга тўсқинлик қилмаслик керак. Ечилишнинг турли йўлларини кўрсатиб, улардан энг қулайини танлаб олиш фойдалидир.

Қийин масалани ўқитувчи ечиб бергандан кейин бир ўқувчи уни такрорлаши, ёки ўқувчилар ечиб бўлганидан сўнг ўқитувчи яхшилаб тартибга солиб қайтадан тушунтириб берса яхши бўлади.

Ўқувчи доскада масала ечганда ҳар бир қадам музокара-муҳокама орқали олиб борилса, бу масалани ечишда ўқувчилар актив иштирок этади. Масалалар ечишнинг кўриб ўтилган усулларини пухта ўрганиш ҳамда мустаҳкамлаш мақсадида уйга мустақил иш берилади. Уйга берилган иш, синфда ишланган ишларнинг давоми, яъни унга ўхшаш бўлиши шарт. Янги материаллар эҳтиётлик билан берилади, мустақил ишлаш учун қийинлик қиладиган мураккаброқ ишлар кейинчалик берилади.

Уйга бериладиган ҳар бир мисол ва масала ўқитувчи томонидан танлаб олинган ҳамда яхши ўрганилган бўлиши керак. Масала ва мисол танлашда ўрта даражадаги ўқувчиларни назарда тутиш, жуда осон ҳам жуда ҳам қийин масалаларни олмай, кўпчилик учун ўртача қийинликдаги масалаларни танлаш зарур. Агар ҳамма учун оғир бўлган масала берилса, ўқувчилар ишлай олмайди, бу билан уларнинг масала ечишга бўлган қизиқишлари йўқолади.

Уй ишини текширишда ўқувчилар еча олмаган масалаларни ўқитувчи ишлаб, тушунтириб бериши зарур. Агар уй ишини бир неча ўқувчи ишлаб келган бўлса, ишлаган ўқувчилардан бирини доскага чиқариш ва масаланинг ечиш йўлини бошқаларга кўрсатиб ўтиш лозим.

Уй ишини текширишда ўқувчиларнинг ишини танқидий ўрганиш, ёзма берилган маълумотларни яхшилаб кўздан кечириш лозим; бунда ўқувчилар йўл қўйган камчилик ва хатоларни тузатиш, керакли қўшимчалар бўлса киритиш ёки бошқа йўл билан ишлаб кўрсатиш керак.

Ўтилган теманинг нақадар ўзлаштирилганлиги янги масалалар ишлаш орқали аниқланади. Масала ишлашда бутун синф иштирок этсин, бунда ҳар бир ўқувчи ўз фикр мулоҳазаси билан қатнашиши керак. Синфда ишланаётган ишга ўқувчилар орасида тушунмайдиганлар бўлмаслиги лозим, агар бундайлар учраб қолса буни нормал ҳол деб бўлмайди. Ҳамманинг тушуниб боришига ҳаракат қилиш зарур. Синфда кўпчиликка маълум бўлган материал устида вақт ўтказиш жуда ҳам зериктирарли ишдир.

Оғзаки ҳисоблаш иши масала ишлашда катта ўрин тутади. Алгебраик алмаштириш, арифметик амалларни оғзаки бажаришдан ташқари геометрик шакллар устидаги боғланиш, муносабатларда ҳам оғзаки иш олиб бориш диққатга сазовордир. Баъзан юқори синфларда масала ечишда оддий арифметик ҳисоблашларни ҳам доскага ёзиб ҳисоблашади. Бу, оғзаки ҳисоблашга ҳеч бир йўл бермаслик деган сўздир.

Оғзаки ҳисоблаш иккига: қисман оғзаки ҳисоблаш ва тўлиқ оғзаки ҳисоблашга булинади. Тўлиқ оғзаки ҳисоблашда берилганлар ҳамда ҳисоблаш натижаларининг ҳаммаси оғзаки бажарилади. Ҳеч нарса ёзилмайди.

Қисман оғзаки ҳисоблашда берилганлар билан охирги натижаларгина доскага ёки дафтарга ёзилади. Оғзаки ҳисоблашдан кўпинча осон масалаларни ечишда фойдаланилади. Бу масалаларни онгли ва мустақил ишлашга ўргатади. Мураккаб масалалар ечишда оралик ҳисоблашларни оғзаки бажаришни унутмаслик керак. Математиканинг ҳамма соҳасида ундан фойдаланиш лозим.

Қулингиздаги бу китоб кўпроқ мустақил ўрганишга мўлжаллаб ёзилган. Дастлаб бу китобда берилган, мактаб дарслиги ва масалалар тўпламига кирмаган назарий материалларни ўрганиб чиқиш ва уларни амалда қандай татбиқ этишни кўрсатувчи масала ва ечимларни синчиклаб ўрганиб чиқиш, ечимлари берилган бу масалаларни китобга мурожаат этмай, масала шарти бўйича мустақил қайтадан ечиб чиқиш лозим.

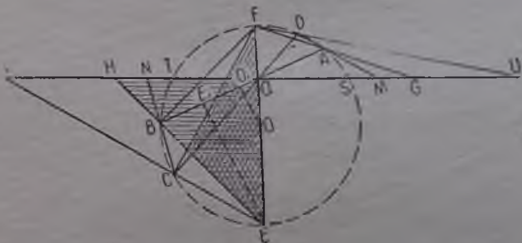
Масалада берилган шаклларни чизишда, шартга қанчалик жавоб беришини текшириб, ҳар бир навбатдаги ишни шаклга мослаб муҳокама қилиш, ўртадаги муносабатларини излаб топиш зарур. Ечилган тайёр масалаларни яхшилаб ўрганиш бизнинг оғзаки баён қилиш қобилиятимизни тараққий эттиради. Келгусида ўзимизнинг мустақил ишлашимизга йўл очади.

Кўрсатмаларга эътибор этсак, бизга шакл ёки берилганлар орасида қандай алоқа борлиги аён бўлади. Китобда келтирилган мураккаб масала ва ифодаларни том маъноси билан ўзлаштириш, уларнинг мазмунини ёритиб бора олиш малакасига эга бўлиш, бошқа ҳар хил осон ва қийин геометрик масалаларни еча билиш қобилиятини вужудга келтиради.

§ 17. Битта масалани турли йўллар билан ечиш имконияти тўғрисида

Қуйидаги иккита характерли мисолни кўриб чиқайлик.

30. Маркази O нуқтада бўлган айлананинг AB ва CD ватарлари Q нуқтада кесишади. Q нуқта O марказ билан туташ-



44-шакл.

тирилиб, CQ тўғри чизиққа Q нуқтадан перпендикуляр ўтказилган. Бу перпендикуляр айланани S ва T нуқталарда кесиб ўтади. AD ва CB тўғри чизиқлар ST тўғри чизиқ билан M, N нуқтада кесишади (S, M, A, D нуқталар CQ дан бир тарафда ётади). $SM = NT$ бўлиши исбот қилинсин.

Биз бу масалани бир неча йўл билан ечиб кўрсатамиз.

Биринчи йўл:

Ечишдаги ғоя. SM ва NT кесмаларни маълум AQ, BQ, EQ, FQ кесмалар орқали топиш (44-шакл). Ечиш қуйидагича бўлади:

$$AQ = a,\ BQ = b,\ EQ = e,\ FQ = f$$

бўлсин ва OQ диаметр айланани F ва E нуқталарда кессин. Бунда

$$ab = ef;\ QT = QS,$$

сўнгра EB, EC, FA, FD тўғри чизиқларни ўтказамиз, улар ST тўғри чизиқни H, V, G, U нуқталарда кесиб ўтсин.

Биз илгари $HQ = GQ$ ни исбот этайлик.

$OO_1 \perp AB$; $EE_1 \perp AB$ ни ўтказсак,

$$QE_1 : QE = QO_1 : QO.$$

Аммо

$$QO_1 = AO_1 - AQ = \frac{1}{2}(a+b) - a = \frac{1}{2}(b-a).$$

Шунга ўхшаш $QO = \frac{1}{2}(e-f)$ бўлади. Шунинг учун:

$$\frac{QE_1}{e} = \frac{\frac{1}{2}(b-a)}{\frac{1}{2}(e-f)}.$$

Бундан

$$QE_1 = \frac{e(b-a)}{e-f}.$$

Сўнгра

$$BE^2 = BQ^2 + EQ^2 - 2BQ \cdot QF_1 = b^2 + e^2 - 2be \cdot \frac{b-a}{e-f} =$$

$$= \frac{b^2e - b^2f + e^3 - e^2f - 2b^2e + 2abe}{e-f}$$

ва $2abe = 2e^2f$, бундан:

$$BE^2 = \frac{e^3 + e^2f - b^2e - b^2f}{e-f} = \frac{(e^2-b^2)(e+f)}{e-f}.$$

HEQ ва FEB ўхшаш учбурчаклардан: $\frac{HE}{EQ} = \frac{FE}{BE}$.

Бундан

$$HE^2 = \frac{EQ^2 \cdot FE^2}{BE^2} = \frac{e^2(e+f)^2(e-f)}{(e^2-b^2)(e+f)} = \frac{e^2(e^2-f^2)}{e^2-b^2}.$$

Ниҳоят,

$$HQ^2 = \frac{e^2(e^2-f^2)}{e^2-b^2} - e^2 = \frac{e^2(b^2-f^2)}{e^2-b^2}.$$

Яна шунга ўхшаш йўл билан GQ^2 ни ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун HQ^2 ифодадаги b ни a га, e ни f га алмаштирамиз:

$$GQ^2 = \frac{f^2(a^2-e^2)}{f^2-a^2}.$$

Бундан $a = \frac{ef}{b}$ тенгликка асосан:

$$GQ^2 = \frac{f^2\left(\frac{e^2f^2}{b^2} - e^2\right)}{f^2 - \frac{e^2f^2}{b^2}} = \frac{e^2(f^2 - b^2)}{b^2 - e^2} = HQ^2.$$

Демак,

$$GQ = HQ.$$

Шунга ўхшаш:

$$UQ = VQ.$$

Шунингдек

$$GU = HV;\ GS = HT;\ VS = UT,$$

энди

$$\angle CBE = \frac{\smile EC}{2},\ \angle CVH = \frac{\smile ES - \smile TC}{2} =$$
$$= \frac{\smile ET - \smile TC}{2} = \frac{\smile EC}{2}$$

эканини кўрамиз, бундан:

$$\angle CBE = \angle CVH.$$

Демак, $BCVH$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин. Бундан:

$$(HT - NT)(VT - NT) = NB \cdot NC$$

келиб чиқади, шу билан бирга

$$NB \cdot NC = NT \cdot (NT + TS).$$

Демак,

$$NT(NT + TS) = (HT - NT) \cdot (VT - NT)$$

ёки

$$NT(VT + TS + HT) = HT \cdot VT;$$

бундан:

$$NT = \frac{HT \cdot VT}{VS + HT}.$$

Шунга ўхшаш йўл билан $MS = \frac{GS \cdot US}{UT + GS}$, бундан эса $MS = NT$ тенглик ҳосил бўлади, биздан шуни топиш талаб қилинган эди.

2-йўл (А. Л. Перельдикники).

Ечишдаги ғоя. Шаклни Q нуқта атрофида 180° га бурамиз. Бунда M нуқта N нуқта устига тушади. Бу ҳолдан фойдаланиш мумкин: A_1 ва D_1 нуқталарни Q нуқтага нисбатан A ва

D нуқталарга симметрик қилиб оламиз (45-шакл) ва Менелай теоремасидан фойдаланиб, A_1, D_1 ва N нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исбот этамиз.

Биринчи ечишдаги белгилашлардан ташқари, $CQ = c$; $DQ = d$ лардан фойдалансак, бунда $ab = cd = ef$. Олдин $BN:CN$ нисбатни аниқлаймиз. Агар $BB' \perp OQ$, $CC' \perp OQ$ ни олсак, $BB'Q$ ва OO_1Q учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

45-шакл.

$$\frac{B'Q}{BQ} = \frac{O_1Q}{OQ} = \frac{\frac{1}{2}(b-a)}{\frac{1}{2}(e-f)}.$$

Бундан:

$$B'Q = \frac{b(b-a)}{e-f}.$$

Шунга ўхшаш:

$$C'Q = \frac{c(c-d)}{e-f}.$$

Бу ерда $CC' \parallel BB' \parallel NQ$, бундан BN ва CN кесмалар $B'Q$ ва $C'Q$ га пропорционалдир; шунга кўра:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{B'Q}{C'Q} = \frac{b(b-a)}{c(c-d)}.$$

Энди N, D_1, A_1 нуқталарнинг BCQ учбурчак томонларида ётишини текширсак, Стюарт теоремасига асосан:

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CD_1}{D_1Q} \cdot \frac{QA_1}{A_1B} = -\frac{b(b-a)}{c(c-d)} \cdot \frac{c-d}{d} \cdot \frac{a}{b-a} = -\frac{ab}{cd} = -1$$

ҳосил бўлади. Бундан N, D_1, A_1 нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини кўрамиз, яъни шу билан N нуқтанинг ўрни аниқланиб, масала ҳал этилган бўлади. $S_{A_1D_1N} = S_{ADQ}$ ва $S_{ND_1Q} = S_{MDQ}$ бўлиб, тенг MQ ва NQ кесмалардан тенг SQ ва TQ кесмалар айрилса, $SM = NT$ ҳосил бўлади. Биз шуни исбот қилмоқчи эдик.

3-йўл. (Бу рационал усулни В. А. Зморович таклиф этган.)

Ечишдаги ғоя. Масалада қатнашувчи миқдорлар орасидаги муносабатни аниқлаш, улардан SM ва NT орасидаги тенгликни келтириб чиқариш. Бу ғоя масалага Менелай теоремасини икки марта татбиқ этиш билан амалга оширилади.

AD ва BC тўғри чизиқлар L нуқтада кесишсин (46-шакл). LPN учбурчакка Менелай теоремасини татбиқ этсак:

$$DP \cdot QN \cdot BL = LA \cdot PQ \cdot BN,$$
$$DP \cdot QN \cdot CL = LD \cdot PQ \cdot CN$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликларни ҳадлаб кўпайтирсак:

$$AP \cdot DP \cdot (QN)^2 \cdot (BL \cdot CL) =$$
$$= (LA \cdot LD) \cdot (PQ)^2 \cdot BN \cdot CN. \qquad (56)$$

Шунингдек,

$$BL \cdot CL = LA \cdot LD.$$
$$AP \cdot DP = PS \cdot PT = (PQ + a)(PQ - a) = PQ^2 - a^2,$$
$$BN \cdot CN = NT \cdot NS = (NQ + a)(NQ - a) = NQ^2 - a^2,$$

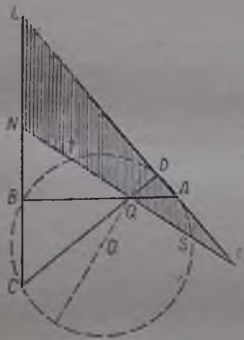
бу ерда

$$a = QS = QT,$$

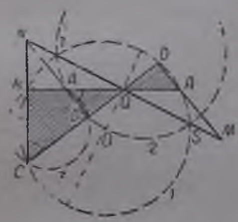
энди (56) дан $NQ^2 \cdot (PQ^2 - a^2) = (NQ^2 - a^2) \cdot PQ^2$ ёки $PQ = NQ$; бу тенгликнинг иккала томонидан $SQ = TQ$ кесма айрилса, $SM = NT$ бўлади.

Бу ечишдаги энг қийматли нарса ёрдамчи шаклларнинг талаб қилинмаслигидир.

4-йўл (А. С. Смогоржевский топган).



46-шакл.



47-шакл.

Ечишдаги ғоя. Иккинчи ечишдаги каби бу ечиш ҳам A_1, D_1, N нуқталарнинг ўзаро коллинеарлигини исбот қилишдан, яъни A_1D_1 ва BC ҳамда ST тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишишини исботлашдан иборатдир.

Берилган *(1)* айланага, ST тўғри чизиққа нисбатан симметрик қилиб, *(2)* айланани чизамиз (47-шакл). *(2)* айлана BQ кесмани A_1 ва QC кесмани D_1 нуқтада кессин. Бунда ADQ ва A_1D_1Q учбурчаклар тенг ва $\angle QCB = \angle QA_1D_1$ (чунки $\angle D_1A_1Q = \angle QAD = \angle QCB$ бўлиб, улар $\smile BD$ билан ўлчанади).

Агар $NT = SM$ бўлса, $QN = QM$ бўлиб, A_1D_1 тўғри чизиқ N нуқтадан ўтади. $\angle BCD_1 + \angle D_1A_1B = 180°$ бўлгандан A_1D_1CB тўртбурчакка ташқи ( ) айлана чизиш мумкин.

(1) ва *(2)* айлананинг радикал ўқи ST ва *(1)*, *(3)* нинг радикал ўқи BC лар N нуқтада кесишсин. Шу нуқтадан *(2)* ва *(3)* га тегишли A_1D_1 радикал ўқ ҳам ўтади. Биз шуни исбот этмоқчи эдик.

Бу ечишнинг олдингиларга қараганда соддалиги шундаки, бунда алгебраик алмаштиришлар талаб қилинмайди, ёлғиз синтетик усуллар ишлатилади.

Яна тубандагича муҳокама қилиш мумкин: NA_1 тўғри чизиқ *(2)* айланани Δ нуқтада ва *(3)* айланани Δ' нуқтада кесадиган бўлса, унда $NB \cdot NC = NA_1 \cdot N\Delta'$, $NB \cdot NC = NT \cdot NS$, $NT \cdot NS = NA_1 \cdot N\Delta$, яъни $N\Delta' = N\Delta$ ни оламиз. Шу билан Δ, Δ' ва D нуқталар устма-уст тушганлиги кўринади.

Демак, бу ҳолда ҳам радикал ўқ тушунчасидан фойдаланиш зарур бўлади.

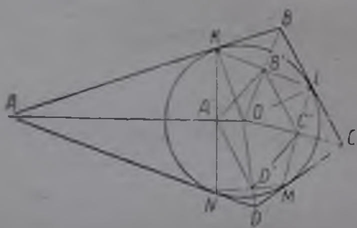
31. Маркази O да бўлган айланага ташқи $ABCD$ тўртбурчак чизилган. Бунда $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ бўлса,

$$\frac{OA}{OC} = \sqrt{\frac{ad}{bc}} \tag{57}$$

эканлиги исбот қилинсин.

1-хил ечим (В. А. Зморович таклиф этган).

Ечишдаги ғоя. Шакл элементлари орасидаги геометрик муносабатларни ҳисоблаб чиқиш.



48-шакл.

Тўртбурчакнинг AB, BC, CD, DA томонларининг айлана билан уриниш нуқталари K, L, M, N ни ўзаро туташтиришдан ҳосил бўлган $KLMN$ тўртбурчак томонларининг AO, BO, CO, DO кесмалар билан кесишган мос нуқталари A', B', C', D' бўлсин (48-шакл). Бу нуқталар NK, KL, LM, MN кесмаларнинг ўрта нуқталари бўлиб, $A'B'C'D'$ тўртбурчак параллелограмм ва

$$A'B' = C'D', \; B'C' = A'D' \tag{58}$$

бўлади. Тўғри бурчакли AOK ва COL учбурчаклардан (AOK тўғри бурчакли учбурчакда $A'O$ кесма KO катетнинг проекцияси ва COL учбурчакда OC' кесма OL катетнинг проекцияси бўлганидан):

$$OA = \frac{r^2}{OA'}, \; OC = \frac{r^2}{OC'}$$

(r — $ABCD$ тўртбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси).

Бундан:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OA'}. \tag{59}$$

A, B, C, D нуқталардан айланага ўтказилган мос уринмалар узунликларини α, β, γ, δ билан белгиласак, бунда:

$$\frac{ad}{bc} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)}{(\gamma+\beta)(\gamma+\delta)}. \tag{60}$$

AOK ва KOA' ўхшаш учбурчаклардан

$$\frac{AK}{KO}=\frac{A'K}{OA'},$$

бундан

$$\alpha=\frac{A'K\cdot KO}{AO'}=\frac{NK\cdot r}{2\cdot OA'}.$$

Шунга ўхшаш:

$$\beta=\frac{KL\cdot r}{2\cdot OB'},\ \gamma=\frac{LM\cdot r}{2\cdot OC'},\quad \delta=\frac{MN\cdot r}{2\cdot OD'}.$$

Сўнгги тенгликлар ва (60) тенгликдан:

$$\frac{ad}{bc}=\frac{\left(\frac{NK\cdot r}{2\cdot OA'}+\frac{KL\cdot r}{2\cdot OB'}\right)\left(\frac{NK\cdot r}{2\cdot OA'}+\frac{MN\cdot r}{2\cdot OD'}\right)}{\left(\frac{LM\cdot r}{2\cdot OC'}+\frac{KL\cdot r}{2\cdot OB'}\right)\left(\frac{LM\cdot r}{2\cdot OC'}+\frac{MN\cdot r}{2\cdot OD'}\right)}=$$

$$=\frac{(NK\cdot OB'+KL\cdot OA')(NK\cdot OD'+MN\cdot OA')(OC')^2}{(LM\cdot OB'+KL\cdot OC')(LM\cdot OD'+MN\cdot OC')(OA')^2}. \quad (61)$$

Энди $A'KB'O$ тўртбурчакдан Птоломей теоремаси бўйича:

$$\frac{NK}{2}\cdot OB'+\frac{KL}{2}\cdot OA'=A'B'\cdot r$$

ёки

$$NK\cdot OB'+KL\cdot OA'=2r\cdot A'B'.$$

Шунга ўхшаш:

$$NK\cdot OD'+MN\cdot OA'=2r\cdot A'D',$$
$$LM\cdot OB'+KL\cdot OC'=2r\cdot B'C',$$
$$LM\cdot OD'+MN\cdot OC'=2r\cdot C'D'.$$

Бу тенгликларни, (61) ва (58) муносабатларни эътиборга олсак

$$\frac{ad}{bc}=\frac{(OC')^2}{(OA')^2}.$$

Бу сўнгги тенгликни (59) билан таққослаб кўрсак, $\frac{OA}{OC}=$ $=\sqrt{\frac{ad}{bc}}$ келиб чиқади, биз шуни исбот қилмоқчи эдик.

2-ечим (А. С. Смогоржевский йўли).

Ечишдаги ғоя. Қаралаётган кесмаларни юзлар билан боғлаш. Кўпинча кўпайтманинг нисбати (бу жойда $ad:bc$) олинганда, уни учбурчаклар юзларининг нисбати орқали ифодалаш мумкин бўлади. Бу мулоҳаза, берилган масалани ечишда ҳам ёрдам беради. ABD ва CBD учбурчакларни қарайлик. Биринчи қарашда бундан ҳеч бир фойда йўқдек туюлади. Чунки, $\angle BAD$ ва $\angle BCD$ тенг эмас ва уларнинг йиғиндиси $180°$ эмас. Бунда I ва II теоремаларни ABD ва CBD учбурчакларга татбиқ этиш мумкин эмас.

Шундай бўлса-да, юқоридаги ғояни ёрдамчи шакллар чизиш билан юзага чиқариш мумкин.

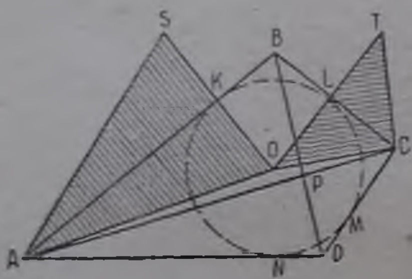
AB ва BC ларга нисбатан O нуқтага симметрик S ва T нуқталар олиб (49-шакл), 48-шаклда белгиланганн каби ABD, CBD, AOS ва COT учбурчакларнинг юзларини мос равишда S_1, S_2, Σ_1 ва Σ_2 лар орқали белгиласак:

$\angle OAS = \angle DAB$, $\angle OCT = \angle DCB$ бўлганидан:

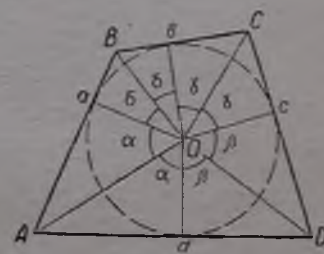
$$\frac{S_1}{\Sigma_1} = \frac{ad}{OA^2}, \quad \frac{S_2}{\Sigma_2} = \frac{bc}{OC^2}. \tag{62}$$

Сўнгра $OS = OT = 2r$, шунинг учун:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \frac{AK}{CL}. \tag{63}$$



49-шакл.



50-шакл.

Шунинг каби:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AP}{PC}. \tag{64}$$

P нуқта AC ва BD диагоналларнинг кесишган нуқтасидир. Ниҳоят (5-масалага қаранг)

$$\frac{AK}{CL} = \frac{AP}{PC}.$$

Бундан (63) ва (64) тенгликларга асосан:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Шунинг учун:

$$\frac{S_1}{\Sigma_1} = \frac{S_2}{\Sigma_2}.$$

Бундан (62) муносабатдан фойдаланиб:

$$\frac{ad}{OA^2} = \frac{bc}{OC^2} \text{ ва } \frac{OA}{OC} = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$$

ни ҳосил қиламиз. Биз шуни исбот этмоқчи эдик.

3-ечим (А. Л. Перельдикники).

$\angle COD + \angle AOB = 180^\circ$ эканлиги маълум бўлганидан:

$$\left.\begin{aligned} \frac{AOB \text{ юзи}}{COD \text{ юзи}} &= \frac{AO\cdot OB}{OC\cdot OD} \\ \frac{AOD \text{ юзи}}{COB \text{ юзи}} &= \frac{AO\cdot OD}{OC\cdot OB} \end{aligned}\right\} (A)$$

Иккинчи томондан AOB, COD, AOD ва BOC учбурчакларнинг баландликлари тенг (r) бўлганидан (50-шакл):

$$\left.\begin{aligned} \frac{AOB \text{ юзи}}{COD \text{ юзи}} &= \frac{AB\cdot r}{CD\cdot r} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{c} \\ \frac{AOD \text{ юзи}}{COD \text{ юзи}} &= \frac{AD\cdot r}{BC\cdot r} = \frac{AD}{BC} = \frac{d}{b} \end{aligned}\right\} (B)$$

(A) ва (B) тенгликларга асосан:

$$\frac{AO\cdot OB}{OC\cdot OD} = \frac{a}{c} \text{ ва } \frac{AO\cdot OD}{OC\cdot OB} = \frac{d}{b}.$$

Буларни ҳадлаб кўпайтирсак,

$$\frac{AO\cdot OB}{OC\cdot OD} \cdot \frac{OA\cdot OD}{OC\cdot OB} = \frac{a}{c}\cdot\frac{d}{b}$$

ёки $\frac{AO^2}{OC^2} = \frac{ad}{bc}$, яъни $\frac{AO}{OC} = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$ келиб чиқади.

Ечишнинг бу 3-усули қисқа, тушунарли ва жуда чиройли.

Масалани ечишда жуда содда йўлни исташимиз табиийдир. Баъзан шундай осон йўл излашда бизга узун мураккаб ечиш йўллари тўғри келиб, бундан қутулиш мумкин бўлмай қолади. Ёки масалани ечишда кўп ёрдамчи теоремаларни келтиришга тўғри келади. Қуйида шу хилдаги масалани кўриб чиқамиз.

32. Томонлари a га тенг бўлган тенг томонли учбурчак ичида M нуқта берилган. Бунда $MA = \alpha$, $MB = \beta$, $MC = \gamma$ бўлиб, шу a, α, β, γ миқдорлар орасидаги боғланиш топилсин.

Қуйидаги ғоя ечишнинг энг содда йўли бўлади:

M нуқта берилган учбурчак ичида ётганидан

$$MAB \text{ юзи} + MBC \text{ юзи} + MCA \text{ юзи} = ABC \text{ юзи}$$

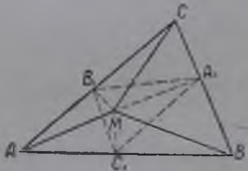
муносабатга келамиз.

Бунда Герон формуласи бўйича бирмунча алмаштириш, соддалаштиришлар бажаргандан сўнг:

$$\sqrt{(a+\alpha+\beta)(-a+\alpha+\beta)(a-\alpha+\beta)(a+\alpha-\beta)} +$$
$$+\sqrt{(a+\beta+\gamma)(-a+\beta+\gamma)(a-\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma)} +$$
$$+\sqrt{(a+\gamma+\alpha)(-a+\gamma+\alpha)(a-\gamma+\alpha)(a+\gamma-\alpha)} = a^2\sqrt{3}. \quad (65)$$

a, α, β, γ орасидаги боғланишга юзаки қараганда масала ҳал бўлган дейиш мумкин.

Лекин (65) формула бир қанча алгебраик алмаштиришлардан сўнг бирмунча содда кўринишга келса-да, уни талаб этилган боғланишни қаноатлантиради дейиш мумкин эмас, чунки M нуқта учбурчак ташқарисида бўлганда баъзи радикалларнинг олдига (—) ишора қўйишга тўғри келар эди. Радикал ишорасини йўқотиш натижасида (65) формула ихчамроқ кўринишга келади дея оламиз, лекин бунга эришиш учун оғир ҳисоблашларга олиб келадиган алмаштиришлар қилиш керак. Шу сабабдан ечишнинг бу йўлидан воз кечиш керак.



51-шакл.

Шу муносабат билан бу масаланинг қуйидаги бошқача ечилишини кўрсатамиз (51-шакл); бу усул, узун, лекин содда алгебраик алмаштиришни ўз ичига олади.

Биз $MA_1 \perp BC$, $MB_1 \perp CA$, $MC_1 \perp AB$ ларни ўтказамиз ва $AC_1 = x$, $BA_1 = y$, $CB_1 = z$, $MA_1 = \xi$, $MB_1 = \eta$, $MC_1 = \varphi$ деб белгилаймиз, MAB, MBC, MCA учбурчаклардан:

$$x = \frac{a^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2a}, \quad y = \frac{a^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2a}, \quad z = \frac{a^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2a}. \qquad (66)$$

Бундан:

$$x + y + z = \frac{3}{2} a. \qquad (67)$$

Қуйидаги тенгликни ҳам шунга ўхшаш ҳосил қиламиз:

$$\xi + \eta + \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \qquad (68)$$

Сўнгра I ва II теоремалардан $\frac{AC_1B_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{x(a-z)}{a^2}$; $\frac{BA_1C_1 \text{ юзи}}{S} =$

$$= \frac{y(a-x)}{a^2}; \quad \frac{CA_1B_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{z(a-y)}{a^2}; \quad \frac{MC_1B_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{\eta\varphi}{a^2},$$

$$\frac{MA_1C_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{\xi\varphi}{a^2}, \quad \frac{MA_1B_1 \text{ юзи}}{S} = \frac{\eta\xi}{a^2}.$$

Сўнгги тенгликларни қўшиб, сўнгра махраждан қутқазсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$a^2 = a(x + y + z) - (yz + zx + xy) + \eta\varphi + \varphi\xi + \xi\eta.$$

Бундан (67) тенгликни назарда тутсак:

$$2(yz + zx + xy) = 2(\eta\varphi + \varphi\xi + \xi\eta) + a^2. \qquad (69)$$

(67) ва (68) муносабатлардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy) = \frac{9}{4} a^2. \qquad (70)$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \varphi^2 + 2(\eta\varphi + \varphi\xi + \xi\eta) = \frac{3}{4} a^2. \qquad (71)$$

(69), (70) ва (71) тенгликлардан:

$$(x^2+y^2+z^2)+(\xi^2+\eta^2+\varphi^2)=\frac{a^2}{2}. \tag{72}$$

Бундан ташқари Пифагор теоремасига асосан:

$$(x^2+y^2+z^2)+(\eta^2+\xi^2+\varphi^2)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2. \tag{73}$$

(72) ва (73) тенгликлардан:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+a^2}{4}. \tag{74}$$

(66) ифодани (74) тенгликка қуйсак:

$$(a^2+\alpha^2-\beta^2)^2+(a^2+\beta^2-\gamma^2)^2+(a^2+\gamma^2-\alpha^2)^2=$$
$$=a^2(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2+\alpha^2)^2.$$

Буни соддалаштирсак, ушбу келиб чиқади:

$$a^4+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-a^2\alpha^2-a^2\beta^2-a^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\beta^2\gamma^2-\gamma^2\alpha^2=0.$$

§ 18. Масалаларни ечишда йўл кўрсатиши мумкин бўлган белги ва мулоҳазалар ҳақида

Масала ечишга киришишдан олдин масала шарти билан боғлиқ бўлган энг муҳим математик фактларни аниқлаш керак. Фактлар масала мазмуни билан яқиндан боғланган бўлиши лозим.

Масалани ечиш процессида ораликдаги босқичларни излашга икки йўлдан бориш мумкин: дастлабки босқич учун шартлар орасида тўғрилиги илгаридан маълум бўлган муносабатлар ёки ечими охиригача тугалланадиган жумлалар асос қилиб олинади. Мисол учун 25-масала ечимини кўрсатиш мумкин: биринчидан, масала шартидан келиб чиқадиган шакл тузилишини кўздан кечириб, унга Птоломей теоремаси татбиқ этилади. Учлари тўртбурчак томонлари ўрталарида ётган қаварик тўртбурчак параллелограмм бўлади ва ҳоказо.

Иккинчидан, $\left(\frac{OA}{OC}=\sqrt{\frac{ad}{bc}}\right)$ формулани исбот қилиш талаб этилади. Бу формуланинг тузилиши эса бизга бир қанча ёрдамчи учбурчаклар ясашни пайқашга ёрдам беради. Кейинги келтирилган масалаларни кўздан кечириб, баён этилган фикрларни деталлаштириб, йўл-йўлакай ўзига хос қатор белгиларни кўрсатиб, уларга эътибор билан муносабатда бўлиш, ечиш йўлларини излаб топишни енгиллаштиради.

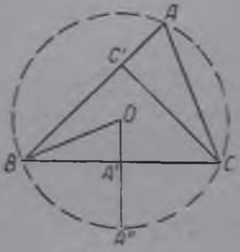
33. Ушбу

$$4(h_ak_a+h_bk_b+h_ck_c)=a^2+b^2+c^2 \tag{75}$$

тенгликнинг тўғрилиги исботлансин.

Биринчи хил ечиш. Шакл содда бўлиб, k_a миқдорни

(52-шакл) келтириб чиқариш ва бошқа муносабатларни аниқлаш учун OBA' учбурчак элементларини кўздан кечиришга тўғри келади. Маълумки, бу ерда $OB=R$, $BA'=\frac{a}{2}$ ва ниҳоят $\angle BOA' = \angle BAC$ (буларнинг ҳар иккиси $BA''C$ ёйнинг ярми билан ўлчанади).



52-шакл.

Биз олган тенглик биринчидан, Пифагор теоремасини татбиқ этиш фикрига олиб келса, иккинчидан, берилган учбурчакка ўхшаш учбурчак ясаш фойдали эканини кўрсатади. Шу билан бирга Пифагор теоремасини татбиқ этиш яхши натижа бермаслиги сезилиб турибди, чунки бу ҳолда k_a миқдор учун иррационал ифода $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$ ҳосил қилинади. Бундан ташқари, бундаги R миқдор (75) формулада қатнашмайди. Шунинг учун бошқа йўл излаймиз. $CC' \perp AB$ ясалса, ўхшаш OBA' ва ACC' учбурчаклардан $\frac{OA'}{BA'}=\frac{AC'}{CC'}$ ёки $2OA'=2k_a$, $2BA'=a$, $2AC'=\frac{b^2+c^2+a^2}{c}$ эканлигини назарда тутсак, ушбу ҳосил бўлади:

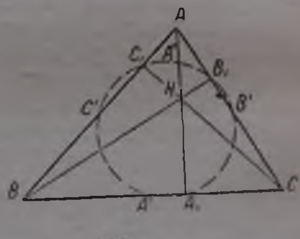
$$\frac{2k_a}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2ch_c}. \qquad (76)$$

k_a ва h_a миқдорлар орасидаги боғланишни осонгина аниқлаш мумкин. $ch_c=ah_a=2S$ тенгликларга кўра (76) дан ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$4h_ak_a=b^2+c^2-a^2.$$

Яна шу усулда қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$4h_bk_b=c^2+a^2-b^2,$$
$$4h_ck_c=a^2+b^2-c^2.$$



53-шакл.

Буларни ҳадлаб қўшсак (75) формула келиб чиқади.

Бундан ташқари яна 2 хил ечиш берамиз.

Иккинчи хил ечиш. I. ABC учбурчакка тегишли тўққиз нуқта айланасини учбурчакнинг AA_1 баландлиги A'' нуқтада кессин (53-шакл). Бунда тўққиз нуқта айланса AH кесманинг ўртасидан ўтади. Бундан $AA''=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}\cdot 2k_a=k_a$[(28) га қаранг] ёки $AA''\cdot AA_1=AC'\cdot AC_1=AB'\cdot AB_1$ (A_1, B_1, C_1 лар баландликларнинг асослари, A', B', C' лар эса учбурчак томонларининг ўрталари).

Сўнгги тенгликдан

$$h_a k_a = \frac{1}{2}\, b \cdot AB_1 = \frac{1}{2}\, c \cdot AC_1 \qquad (77)$$

ҳосил бўлади. Бундан ушбу муносабат келиб чиқади:

$$4h_a k_a = b \cdot AB_1 + c \cdot AC_1.$$

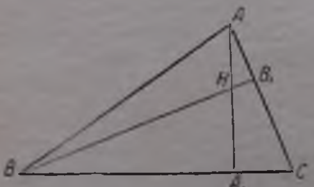
Шунингдек,

$$4h_b k_b = c \cdot BC_1 + a \cdot BA_1,$$
$$4h_c k_c = a \cdot CA_1 + b \cdot CB_1.$$

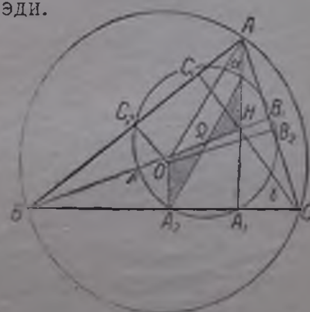
Бундан:

$$4(h_a k_a + h_b k_b + h_c k_c) = a\,(BA_1 + CA_1) + b\,(CB_1 + AB_1) + $$
$$+ c\,(AC_1 + BC_1) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Шуни исбот қилиш талаб этилган эди.



54-шакл.



55-шакл.

Учинчи хил ечиш: $AA_1 \perp BC$ ва $AB_1 \perp CA$ ни чизамиз (54-шакл). Бунда $\triangle AHB_1 \backsim \triangle ACA_1$ ва $AH = 2k_a$, демак:

$$\frac{AH}{AB_1} = \frac{AC}{AA_1} \text{ ёки } \frac{2k_a}{AB_1} = \frac{b}{h_a},$$

бундан:

$$2h_a k_a = b \cdot AB_1.$$

Бу муносабатга асосан [(77) тенгликка қаранг] яна аввалги натижага келамиз.

Туртинчи хил ечиш: I. ABC учбурчакка ташқи айлана чизамиз ва $AA_1 \perp BC$; $BB_1 \perp AC$; $CC_1 \perp AB$ ларни ўтказамиз, бунда $AA_1 = h_a$; $BB_1 = h_b$; $CC_1 = h_c$ (55-шакл);

ташқи айлананинг O марказидан $OA_2 \perp BC$; $OB_2 \perp AC$; $OC_2 \perp AB$ туширамиз (55-шакл), бунда $OA_2 = k_a$; $OB_2 = k_b$; $OC_2 = k_c$; $A_1A_2 = x$; $B_1B_2 = y$; $C_1C_2 = z$ орқали белгилаб, $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$ ва $AC_2 = BC_2$; $BA_2 = CA_2$ ва $CB_2 = AB_2$ эканлигини эсда тутиб,

II. 1) ясашдан олинган A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ва C_2 нуқталардан айлана ўтказамиз. Бунда айлана h_a, h_b, h_c ларни α, β ва γ нуқталарда кесади (яъни бу нуқталар 9 нуқта айланасига тегишли бўлади):

2) шу 9 нуқта айланаси марказини Ω билан белгиласак, $\Omega\alpha = \Omega A_2$ (X) бўлганидан $\triangle A_2O\Omega = \triangle \Omega\alpha H$, чунки $A_2O = \alpha H$ (§ 7 (28) да $A_2O = \frac{1}{2}$ AH эди, шунга кўра $A\alpha = \alpha H$), яъни:

$$A\alpha = \alpha H = OA_2 = k_a;$$

3) шаклдаги $A_2OA\alpha$ тўртбурчак параллелограмм ($A_2O \# A\alpha$) демак, $AO \# A_2\alpha = R$; $A_2\Omega = \Omega\alpha = \frac{1}{2}R$.

III. Агар Ω марказли айлананинг ташқарисидаги A нуқтадан уринма ва AA_1, AC_2 ва AB_2 кесувчилар ўтказилса, уринма ва кесувчилар ҳақидаги теоремага асосан:

$\left.\begin{matrix} A\alpha \cdot AA_1 = AC_1 \cdot AC_2 \\ A\alpha \cdot AA_1 = AB_1 \cdot AB_2 \end{matrix}\right\}$ ёки $A\alpha$ ва AA_1 ларнинг қиймати ва бошқалар қўйилса,

$$\left.\begin{matrix} k_a \cdot h_a = \left(\frac{c}{2} - z\right) \cdot \frac{c}{2} \\ k_a \cdot h_a = \left(\frac{b}{2} - y\right) \cdot \frac{b}{2} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A \text{ нуқтадан кесувчи ўтказишда,} \\ B \text{ нуқтадан кесувчи ўтказишда,} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} k_b \cdot h_b = \left(\frac{c}{2} + z\right) \cdot \frac{c}{2} \\ k_b \cdot h_b = \left(\frac{a}{2} + x\right) \cdot \frac{a}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} k_c \cdot h_c = \left(\frac{b}{2} + y\right) \cdot \frac{b}{2} \\ k_c \cdot h_c = \left(\frac{a}{2} - x\right) \cdot \frac{a}{2} \end{matrix}\right\} C \text{ нуқтадан кесувчи ўтказишда.}$$

Бу тенгликлар ҳадлаб қўшилса,

$$2\,(k_ah_a + k_bk_b + k_ch_c) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} \text{ келиб чиқади.}$$

Бундан $4\,(k_ah_a + k_bh_b + k_ch_c) = a^2 + b^2 + c^2$ ҳосил бўлади. Бу эса исбот этилиши лозим бўлган тенгликдир.

Бешинчи хил ечиш. I. O марказли айланага ички чизилган ABC учбурчакда $AD \perp BC$; $BL \perp AC$, $OE \perp BC$ ўтказилган (56-шакл). $AD = h_a$, $BL = h_b$, $OE = k_a$, $OF = K_b$, $OC = R$.

1) OCE учбурчакда

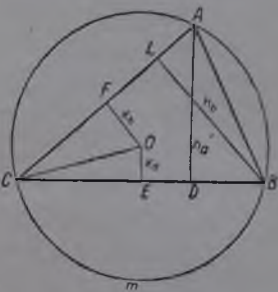
$$OE^2 = OC^2 - EC^2 \text{ ёки } k_a^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ ёки } 4\,k_a^2 = 4R^2 - a^2. \qquad (1)$$

2) OEC ва ABL учбурчакларда $\angle CAB = \angle COE$ (BmC ёйнинг ярми билан ўлчанади) ва улар тўғри бурчакли учбурчак бўлганликларидан ўхшаш (яъни $\triangle OEC \backsim \triangle ABL$), шунинг учун:

$$\frac{CO}{CE} = \frac{AB}{BL} \text{ ёки } \frac{R}{\frac{a}{2}} = \frac{c}{h_b},$$

бундан:

$$R = \frac{ac}{2h_b}. \qquad (2)$$



56-шакл.

Худди шу сингари:

$$R = \frac{bc}{2h_a}; \quad R = \frac{ab}{2h_c}.$$

3) $S = \frac{1}{2} ah_a$ дан $h_a = \frac{2S}{a}$.

(3) Буни (2) га қуйсак, унда ушбу ҳосил бўлади:

$$R = \frac{abc}{4S}. \qquad (4)$$

Буни квадратга кўтариб (1) га қўйсак:

$$4k_a^2 = \frac{4a^2b^2c^2}{16S^2} - a^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4S^2} - a^2 = \frac{a^2(b^2c^2 - 4S^2)}{4S^2}.$$

Бундан ушбуни ҳосил қиламиз: $2k_a = \frac{a}{2S}\sqrt{b^2c^2 - 4S^2}$.

Худди шу сингари:

$$2k_b = \frac{b}{2S}\sqrt{a^2c^2 - 4S^2}; \; 2k_c = \frac{c}{2S}\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}.$$

II. $4k_ah_a = 2k_a \cdot 2h_a = \frac{a}{2S}\sqrt{c^2b^2 - 4S^2} \cdot \frac{4S}{a} = 2\sqrt{c^2b^2 - 4S^2}$,

яъни: $4k_ah_a = 2\sqrt{c^2b^2 - 4S^2}$.

Худди шу сингари:

$$4k_b \cdot h_b = 2\sqrt{a^2c^2 - 4S^2} \text{ ва } 4k_ch_c = 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}. \qquad (5)$$

(5) муносабатдаги тенгликлар ҳадлаб қўшилса қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$4k_ah_a + 4k_bh_b + 4k_ch_c =$$
$$= 2\left(\sqrt{b^2c^2 - 4S^2} + \sqrt{a^2c^2 - 4S^2} + \sqrt{a^2b^2 - 4S^2}\right). \qquad (A)$$

Энди биз S ни топамиз:

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c.$$

Биз учбурчакнинг баландлигини қуйидагича аниқлаган эдик:

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Бундан ушбу ҳосил бўлади:

$$2S = ah_a = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Бунинг квадрати:

$$4S^2 = \frac{1}{4}\left[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\right]. \qquad \text{(B)}$$

(B) даги қийматни (A) га қўямиз:

$$4(k_ah_a + k_bh_b + k_ch_c) = 2\left[\sqrt{b^2c^2 - \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)}{4}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{a^2c^2 - \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)}{4}} + \sqrt{a^2b^2 - \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)}{4}}\right] =$$

$$= 2\left[\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}\right) + \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2}\right) + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Шу билан $4(k_ah_a - k_bh_b + k_ch_c) = a^2 + b^2 + c^2$ тенгликнинг тўғри эканлиги исбот этилди.

34. ABC учбурчак берилган (57-шакл). O нуқта бу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази, $OA_1 \perp BC$, $OC_1 \perp AB$ ва $OB_1 \perp AC$ бўлган ҳолда $4\left(\frac{a}{k_a} + \frac{b}{k_b} + \frac{c}{k_c}\right) = \frac{abc}{k_ak_bk_c}$ тенглик исбот қилинсин.

57-шакл.

Биринчи хил ечиш. I. 1) Агар O марказдан туширилган перпендикулярлар асоси A_1, B_1, C_1 ларни кесмалар ёрдамида ўзаро туташтирсак, 6 та учбурчак ҳосил бўлади. Булардан:

а) AB_1C_1 юзи $= BA_1C_1$ юзи $= CA_1B_1$ юзи $= A_1B_1C_1$ юзи $= \sigma$;

б) OB_1C_1 юзи $= \sigma_a$; OA_1C_1 юзи $= \sigma_b$; OA_1B_1 юзи $= \sigma_c$;

с) $\sigma = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c$.

2) $\angle C_1AB_1 + \angle C_1OB = 180°$, бундан $\frac{OC_1 \cdot OB_1}{AC_1 \cdot AB_1} = \frac{S_{\triangle\, OC_1B_1}}{S_{\triangle\, AC_1B}}$,

яъни:

$$\frac{k_b \cdot k_c}{\frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}} = \frac{\sigma_a}{\sigma}; \quad k_b \cdot k_c = \frac{bc \cdot \sigma_a}{4\sigma}.$$

Шундай қилиб, $k_b \cdot k_a = \frac{ab \cdot \sigma_c}{4\sigma}$.

II. $4\left(\frac{a}{k_a}+\frac{b}{k_b}+\frac{c}{k_c}\right)=4\left(\frac{a\cdot k_b\cdot k_c}{k_a\cdot k_b\cdot k_c}+\frac{b\cdot k_a\cdot k_c}{k_a\cdot k_b\cdot k_c}+\right.$

$$\left.+\frac{c\cdot k_a\cdot k_b}{k_c\cdot k_a\cdot k_b}\right)=4\frac{a\cdot k_b\cdot k_c+bk_ak_c+ck_ak_b}{k_ak_bk_c}=$$

$$=4\frac{\frac{abc\sigma_a}{4\sigma}+\frac{abc\sigma_b}{4\sigma}+\frac{abc\sigma_c}{4\sigma}}{k_ak_bk_c}=4\frac{abc(\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c)}{4\sigma k_ak_bk_c}=\frac{4abc\sigma}{4\sigma k_ak_bk_c}=\frac{abc}{k_ak_bk_c}.$$

Шундай қилиб: $4\left(\frac{a}{k_a}+\frac{b}{k_b}+\frac{c}{k_c}\right)=\frac{abc}{k_ak_bk_c}$ экан.

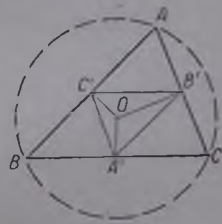
Иккинчи хил ечиш:

$$4\left(\frac{a}{k_a}+\frac{b}{k_b}+\frac{c}{k_c}\right)=\frac{abc}{k_ak_bk_c}. \tag{78}$$

муносабат исбот қилинсин.

Исбот қилинаётган тенгликни унга тенг кучли бўлган тенглик билан алмаштирамиз. Бунинг учун (78) тенгликнинг иккала томонини $\frac{k_ak_bk_c}{abc}$ га кўпайтириб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$4\left(\frac{k_bk_c}{bc}+\frac{k_ck_a}{ca}+\frac{k_ak_b}{ab}\right)=1. \tag{79}$$



58-шакл.

Энди $OA'\perp BC$, $OB'\perp CA$, $OC'\perp AB$ ларни ясаймиз (58-шакл).

Бунда:

$$\frac{OB'C'\text{ юзи}}{S}=\frac{k_bk_c}{bc};\quad \frac{OC'A'\text{ юзи}}{S}=\frac{k_ck_a}{ac};\quad \frac{OA'B'\text{ юзи}}{S}=\frac{k_ak_b}{ab}. \tag{80}$$

Бундан ташқари:

$$OB'C'\text{ юзи}+OC'A'\text{ юзи}+OA'B'\text{ юзи}=A'B'C'\text{ юзи}=\frac{1}{4}S. \tag{81}$$

(80) ва (81) тенгликдан (79) тенгликни осонгина келтириб чиқариш мумкин.

35. Ушбу тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин:

$$h_a'^2h_b'^2h_c'^2=8R^3h_a''h_b''h_c''. \tag{82}$$

Бу тенгликдаги симметрикликдан, унинг ўзини келтириб чиқариш учун фойдаланиш имкониятини қараб кўрайлик.

$h_a'^2=2Rh_a''$ тенглик тўғрими? — деган савол қўямиз.

Агар мана шу ва унга ўхшаш қилиб ёзилган тағин икки муносабат тўғри бўлса, улардан изланган муносабатни келтириб чиқарар эдик. Охирги тенгликни тўғри бурчакли учбурчак учун текширсак, унинг бажарилмаслигини сезиб қоламиз (чунки a гипотенуза бўлса, $h_a'=0$, $h_a''\neq 0$). Энди $h_b'h_c'$ кўпайтмани текшириб кўрайлик, биз бу кўпайтмани BCH учбурчак юзининг берилган ABC учбурчак юзига нисбатидан ҳосил қилишимиз мумкин (59-шакл):

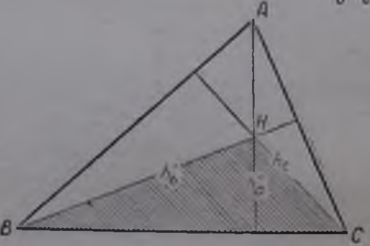
$$\frac{BCH\text{юзи}}{S} = \frac{h_b' h_c'}{bc}.$$

Аммо:

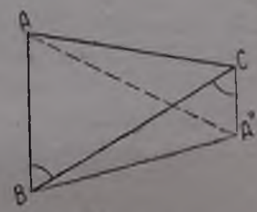
$$BCH\text{юзи} = \frac{1}{2} a h_a^{*} \text{ бўлганидан } h_b' h_c' = \frac{abch_a^{*}}{2S}. \qquad (83)$$

Бундан $R = \frac{abc}{4S}$ тенгликка кўра ушбу тенглик ҳосил бўлади:

$$h_b' h_c' = 2Rh_a^{*}. \qquad (84)$$



59-шакл.



60-шакл.

$R = \frac{abc}{4S}$ тенглик маълум бўлмаган ҳолда ҳам 4-масала орқали (83) тенгликни топиш мумкин бўлганидан, фақат шу масалани исбот этиш қолади.

36. ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар берилган. Бунда:

$$\angle A + \angle A' = 180°, \ \angle B = \angle B'$$

бўлса:

$$aa' = bb' + cc' \qquad (85)$$

бўлиши аниқлансин.

(85) тенглик бир жинсли булганидан берилган учбурчакларни ухшаш учбурчак билан алмаштириш мумкин булади.

Биз бу ерда икки хил ечишни келтирамиз.

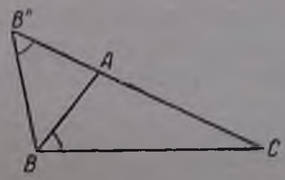
Булардан биринчиси (85) тенгликнинг Птоломей теоремасида ҳосил этилган формулага ўхшашлигига асосан, иккинчи хил ечишни учбурчаклар юзларининг нисбатидан топамиз.

Биринчи хил ечиш. Биз ABC учбурчакнинг бир тарафида $\angle BCA'' = \angle B = \angle B'$, $\angle CA''B = \angle A'$ бўладиган қилиб A'' нуқта оламиз. Бунда ABC ва $A''BC$ учбурчаклар BC дан турли тарафда ётади (60-шакл). Шу билан $\triangle A''CB \backsim \triangle A'B'C$ (шаклда $A'B'C'$ учбурчак берилмаган) бўлганидан $BC = qa'$, $CA'' = qc'$, $A''B = qb'$ бўлади (бу ерда q — пропорционаллик коэффициенти).

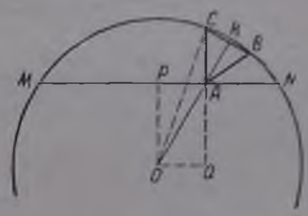
Бундан ташқари, $ABA''C$ тўртбурчак тенг ёнли трапециядир. Шунинг учун $AA'' = BC = a$. Птоломей теоремасига асосан: $AA'' \cdot BC = AB \cdot CA'' + AC \cdot BA''$ ёки $a \cdot qa' = c \cdot qc' + bq \cdot b'$.

Буни q га қисқартириб (85) формулани ҳосил қиламиз.

2-хил ечиш. ABC учбурчакнинг AC томони давомида $\angle AB''A = \angle B = \angle B'$ бўлиш шарти билан B'' нуқта оламиз (61-шакл). Бунда $\triangle AB''B \backsim \triangle A'B'C'$ ва $BB'' = qa'$, $BA = qb'$, $AB'' = qc$ (q — пропорционаллик коэффициенти).



61-шакл.



62-шакл.

Шунингдек, $\angle CB'B = \angle BAC$ эканлигини кўриш осон.

Булардан I ва II теоремага асосан:

$$\frac{ABC \text{ юзи}}{CBB'' \text{юзи}} = \frac{AB \cdot AC}{BC \cdot BB''} = \frac{qb' \cdot b}{aq \cdot a'} = \frac{bb'}{aa'};$$

$$\frac{ABB'' \text{юзи}}{CBB'' \text{юзи}} = \frac{AB'' \cdot AB}{BC \cdot BB''} = \frac{qc' \cdot c}{aq \cdot a'} = \frac{cc'}{aa'}.$$

Булардан:

$$\frac{ABC \text{ юзи}}{CBB'' \text{юзи}} + \frac{ABB'' \text{юзи}}{CBB'' \text{юзи}} = 1,$$

бу тенгликдан:

$$\frac{bb'}{aa'} + \frac{cc'}{aa'} = 1.$$

Демак, (85) формула тўғри.

37. Радиуси 2 га тенг бўлган айланага ички чизилган тенг томонли учбурчак томонига тенг ватар ёрдамида икки сегментга бўлинган. Булардан кичик сегмент ичига мунтазам учбурчак ясалган бўлиб, унинг бир томони ватарга перпендикуляр. Бу учбурчак томонининг узунлиги топилсин.

Бу масалани ечишни изланган шаклнинг схемасидан бошлаш фойдали.

Фараз этайлик, MN берилган ватар, ABC изланган учбурчак бўлсин (62-шакл).

Шаклни диққат билан кўздан кечирсак, айлананинг O марказидан чиқиб, учбурчакнинг A учидан ўтувчи OK радиус $\angle BAC$ ни тенг иккига бўлади. Демак, $\angle KAC = 30°$, $\angle MAO = \angle KAN = 60°$, энди масала осонгина ечилади.

OC радиус чизиб, AC кесмани ўтказиб, $OQ \perp AC$, $OP \perp MN$ лар олинса:

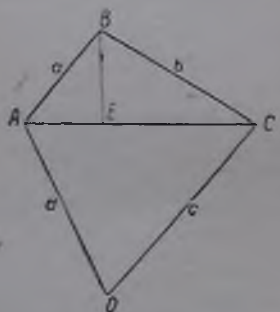
$$AQ = OP = \frac{r}{2};\ PA = OQ = \frac{r\sqrt{3}}{6};$$

$$QC = \sqrt{r^2 - \frac{3r^2}{36}} = \frac{r\sqrt{33}}{6},$$

бундан:

$$AC = QC - AQ = \frac{r\sqrt{33}}{6} - \frac{r}{2} = \frac{r(\sqrt{33}-3)}{6}.$$

38. Тўртбурчак томонларининг узунлиги кетма-кет a, b, c ва d га тенг бўлиб, бунда $a < b$, $c > d$ ва $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$. Бу тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр эканини исбот этиш талаб қилинади.



63-шакл.

ABC учбурчакни қараймиз (63-шакл). Агар $BE \perp AC$ ясалса:

$$CE = \frac{AC^2 + b^2 - a^2}{2AC}$$

ҳосил бўлади. Шунингдек, $DF \perp AC$ ни ясаш билан қуйидагини топамиз:

$$CF = \frac{AC^2 + c^2 - d^2}{2AC}.$$

(F нуқта шаклда кўрсатилмаган.)

Биз шартда берилган $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$ тенгликка асосан $CE = CF$ дея оламиз, бу E ва F нуқталарнинг устма-уст тушганлигини билдиради, бундан эса $BD \perp AC$ келиб чиқади.

§ 19. Масалалар ечиш даврида тўпланган билимларни мустаҳкамлаш ва системалаштириш тўғрисида

Масала ечишда, илгаридан ечилиб ўтилган масалалардан ҳосил булган билимлар билан муносабат боғлаб бориш фойдали эканлигига бир неча бор дуч келган эдик. Бу ҳолни яққол кўрсатиш учун юқоридаги 9 ва 31-(2-хил ечиш) масалаларнинг ечилишини эслатамиз.

9-масалани ечиш унча қийин бўлмади. Масалада берилганлар аввал 7-ва 8-масалаларда ўз вақтида исбот этилган бўлиб, шуларни ўрнига келтириб қўйиш билан кифояландик. Шунингдек, 31-масалани ечишда бизга 5-масала[1] ечимининг олдиндан маълум бўлиши катта роль ўйнайди.

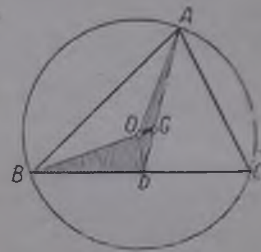
---

[1] Ҳақиқатан, 31-масала иккинчи ечимининг автори уни бошқача йўл билан топган.

Шунга ўхшаш кўп масалалар келтиришимиз мумкин эди. Лекин биз қуйидаги бирмунча масалаларни келтириш билан кифояланамиз. Булар ечиш методи ва мазмуни бўйича ўхшаш ҳамда умумий темага боғлиқ бўлиб, кейингиси олдингисининг жавоби ва мазмунига боғлиқ ҳолда жойлашгандир.

39. Учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази O билан учбурчакнинг оғирлик маркази G орасидаги масофа топилсин.

Берилган ABC учбурчакда BC томонининг ўртаси D бўлсин (64-шакл). Маълумки,



64-шакл.

$$OD = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},\ DG = \frac{1}{3} m_a,\ AG = \frac{2}{3} m_a,$$

(46) формулани эътиборга олсак ва Стюарт теоремасини AOD учбурчакнинг OG кесмасига татбиқ этсак:

$$OG^2 \cdot AD = AO^2 \cdot DG + OD^2 \cdot AG - AD \cdot AG \cdot DG$$

ёки

$$OG^2 \cdot m_a = R^2 \cdot \frac{1}{3} m_a + \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} m_a - m_a \frac{1}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_a.$$

Бундан

$$OG^2 = \frac{1}{3} R^2 + \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{2}{3} m_a^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

ва

$$OG = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}. \tag{86}$$

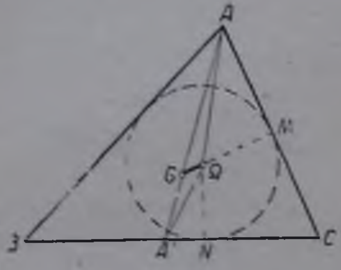
40. Учбурчакнинг оғирлик маркази G билан учбурчакка ички чизилган айлана маркази Ω орасидаги масофа топилсин.

Теорема (С. С. Бюшгенс. Аналитическая геометрия, гл. 23.); „айлана ташқарисига чизилган тўртбурчак қарши томонларининг айланага уринувчи нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқлар шу тўртбурчак диагоналлари кесишган нуқтада кесишиши“ни кўрсатади.

Бу Брианшон теоремасининг хусусий ҳоли экани унга маълум эди. Лекин Брианшон теоремаси элементар бўлмаганидан ечишни бешинчи масалага келтириб ишлаган. Бу ишни соддалаштириш мақсадида қилинган бўлса керак. (Брианшон теоремасига асосан конус кесимининг ташқарисига чизилган олтибурчакнинг қарама-қарши ётган учларини туташтирувчи тўғри чизиқлар — диагоналлар бир нуқтада кесишади.)

Хусусий ҳолда ABC тўртбурчакда (25-шакл) худди олтибурчакнинг томонлари қаторида AK, KD, BC, CM, MD ва DA кесмаларни олиб, AC, DB ва KM ларнинг бир нуқтада кесишишини кўрамиз.

Берилган ABC учбурчак BC томонининг ўртаси A' бўлсин (65-шакл). Агар $\Omega M \perp AC$, $\Omega N \perp BC$ ясалса, унда:



65-шакл.

$$\Omega M = \Omega N = r,\ BN + CN + AM = AB + MC = p,$$

$$AM = p - a,\ CN = p - c,\ \Omega A^2 = r^2 + (p-a)^2.$$

$$A'N = \frac{a}{2} - (p - c) = \frac{c-b}{2},$$

$$\Omega A'^2 = r^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2;\ AG = \frac{2}{3} m_a,$$

$$A'G = \frac{1}{3} m_a.$$

$AA'\Omega$ учбурчак ва ΩG кесмани қараб чиқамиз. Стюарт теоремасига асосан:

$$\Omega G^2 \cdot AA' = \Omega A^2 \cdot GA' + \Omega A'^2 \cdot GA - AA' \cdot GA \cdot GA'$$

ёки

$$\Omega G^2 \cdot m_a = [r^2 + (p-a)^2] \cdot \frac{1}{3} m_a + \left[r^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{2}{3} m_a - m_a \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot \frac{1}{3} m_a.$$

Бундан:

$$\Omega G^2 = \frac{1}{3}[r^2 + (p-a)^2] + \frac{2}{3}\left[r^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right] - \frac{2}{3} m_a^2 =$$

$$= r^2 + \frac{(b+c-a)^2}{12} + \frac{(c-b)^2}{6} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{18} =$$

$$= r^2 + \frac{3b^2 + 3c^2 + a^2 - 2(ab + bc + ca)}{12} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{18} =$$

$$= r^2 + \frac{4b^2 + c^2 + 2a^2 - (a+b+c)^2}{12} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{18} =$$

$$= r^2 + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - 3p^2}{9}.$$

Демак, бундан:

$$\Omega G = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3p^2}. \qquad (87)$$

41. Учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази O билан учбурчакка ички чизилган айлана маркази Ω орасидаги масофа аниқлансин.

ABC учбурчакнинг A учидан ўтказилган биссектриса $A\Omega$ ташқи чизилган айланани D нуқтада ва учбурчакнинг BC томонини A' нуқтада кессин (66-шакл). Бунда $\angle BAD = \angle A'AC$; $\angle ADB = \angle ACB$ бўлиб ABD ва $AA'C$ учбурчаклар ухшаш бўлади. Шунинг учун:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AA'},$$

бундан:

$$AD = \frac{bc}{l_a}. \tag{88}$$

Сўнгра (20) формулада $\lambda = \frac{c}{b}$, $\mu = \frac{a}{c}$ фараз этилса:

$$\frac{AA'}{A\Omega} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + 1}{\frac{c}{b} + 1}$$

ёки:

$$\frac{l_a}{A\Omega} = \frac{2p}{b+c}.$$

Бундан (88) га биноан:

$$A\Omega = \frac{l_a(b+c)}{2p} \text{ ва } D\Omega = \frac{bc}{l_a} - \frac{l_a(b+c)}{2p}.$$

Агар ташқи айлананинг MN диаметри Ω нуқтадан ўтса, бунда:

$$M\Omega \cdot \Omega N = D\Omega \cdot \Omega A$$

ёки:

$$(R + O\Omega)(R - O\Omega) = \left(\frac{bc}{l_a} - \frac{l_a(b+c)}{2p}\right) \cdot \frac{l_a(b+c)}{2p}.$$

Бундан:

$$R^2 - O\Omega^2 = \frac{bc(b+c)}{2p} - \frac{l^2_a(b+c)^2}{4p^2}.$$

Олинган сўнгги тенгликдан, (44) формулани эътиборга олсак, у ҳолда:

$$O\Omega = R^2 - \frac{bc(b+c)}{2p} + bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{4p^2} = R^2 - \frac{abc(a+b+c)}{4p^2} =$$

$$= R^2 - \frac{abc}{2p} = R^2 - 2 \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = R^2 - 2Rr.$$

Демак:

$$O\Omega = \sqrt{R^2 - 2Rr}. \tag{89}$$

42. Учбурчакка ички чизилган айлана маркази Ω дан шу учбурчакнинг ортомаркази H гача бўлган масофа топилсин.

Агар $HO\Omega$ учбурчак ва $G\Omega$ кесмага Стюарт теоремасини татбиқ этсак (67-шакл):

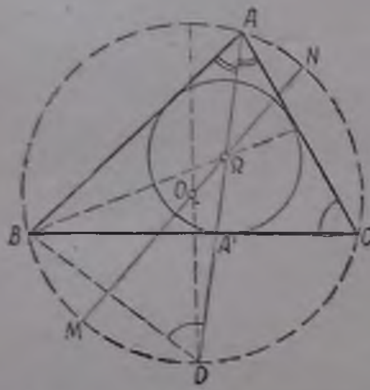
$$G\Omega^2 \cdot OH = \Omega H^2 \cdot OG + O\Omega^2 \cdot GH - OH \cdot OG \cdot GH,$$

шунингдек, XIV теоремага асосан $GH = 2 \cdot OG$, $OH = 3 \cdot OG$, унда:

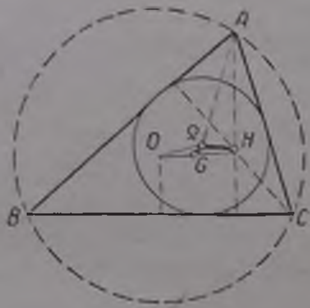
$$3 \cdot G\Omega^2 = \Omega H^2 + 2 \cdot O\Omega - 6 \cdot OG^2.$$

Бундан:

$$\Omega H^2 = 3 \cdot G\Omega^2 + 6OG^2 - 2O\Omega^2.$$



66-шакл.



67-шакл.

Бундан ва (86), (87), (89) лардан:

$$\Omega H^2 = 3r^2 + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - p^2 + 6R^2 - \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \\ - 2R^2 + 4Rr$$

ёки:

$$\Omega H = \sqrt{3r^2 + 4R^2 + 4Rr - p^2}. \qquad (90)$$

Масалалар ечиш натижасида билимимиз мустаҳкамланиб, янги қимматли маълумотлар тўпланади. Лекин масалалар ечиш иши системали равишда олиб борилмаса, у ҳолда, баъзан тасодифий фактларга дуч келиб қоламизки, улар орасида ўзаро боғланиш бўлмайди.

Масала ечишда қуйидаги системада иш кўришни тавсия қилиш мумкин:

1. Тегишли адабиёт ва материалларни текшириб чиқиб, масалалар тўплами ёки унинг бир бўлими, ёхуд математика журналидан олинган айрим масалалар, темага тегишли дарслик, мақола, лозим бўлганда жадвал ва кўрсатмали ўқув қуролларини аниқлаб чиқиш керак.

2. Масалалар тўпламида масала қандай жойлашган бўлса, шу тартиб билан ечиб бориш керак. Бунинг ичида ечилиши осонгина кўриниб турган масалаларни қолдириб ўтиш мумкин. Шунингдек, ечиш оғир бўлган баъзи масалаларни ҳам ташлаб ўтиш лозим. Бунга ортиқча вақт сарф этиб ўтирилмаса, бир

оз нарига боргандан сўнг унинг моҳияти англашилиб қолиши мумкин. Ниҳоят, ҳеч бўлмаганда, бу ҳақда маълумотли кишилардан ёрдам ёки илмий муассасалардан консультация олиш, маслаҳат сўраш лозим.[1]

3. Масалани ечгандан сўнг ечишдаги муҳим пайт ва жумлаларни танлаб, маълум тартибда белгиланган мақсадга тегишли мазмун билан ажратилган дафтарга конспект тарзида, ёки маълумот (справочник) сифатида, ёхуд умумий темани кенгайтирувчи ёзма сифатида кучириб қўйиш лозим.

Бундай ёзмалар биринчи навбатда кенг доирада қўлланиладиган теорема ва масалаларни алоҳида ечиш методларини ҳам ўз ичига олиши лозим. Бунда аҳамияти жиҳатидан унчалик муҳим бўлмаган баъзи бир нафис мазмунли жумлаларни эътиборсиз қолдирмаслик керак. Шу билан бирга темага алоқадор бўлган адабиётда кўрилган хато, камчиликларни қайд этиб ўтиш керак[2].

Юқорида келтирилган фикримизнинг далили сифатида ушбу масалаларни қараб чиқамиз.

43. Тўртбурчакларнинг учлари тўртбурчак кетма-кет томонларининг ўрталарида ётса, бундай тўртбурчак параллелограмм бўлади. Шуни исбот қилинг.

Агар $ABCD$ тўртбурчакнинг AB, BC, CD, DA томонларининг мос ўрта нуқталари K, L, M, N бўлса (68-шакл), KN ва LM кесмалар ABD ва BCD учбурчакларнинг ўрта чизиғи бўлганидан буларнинг ҳар бири BD кесманинг ярмига тенг. Шунинг учун $KN \parallel LM$ ва $KN = LM$ бўлади. Шу билан теорема исбот бўлади.

Бу теоремага бир бор (31-масаланинг биринчи ечилишига қаранг) мурожаат этган эдик. Қуйида яна бир мисолда унинг татбиқидан фойдаланиш мумкин.

44. Радиуси 5 га тенг бўлган айлана 9 га $AB = 9$ ватар ўтказилган. AB нинг устида K нуқта олинган. $AK = 7\frac{1}{2} \cdot AB$ тўғри чизиқдаги K нуқтадан $CD \perp AB$ ватар чизилган, сўнгра A нуқта билан C нуқта, шунингдек, C билан B нуқта, яна B нуқта D нуқта билан, ва D билан A тўғри чизиқ орқали туташтирилганда:

---

[1] Баъзан масала (унинг шарти ёки жавоби) матбаа хатолари билан берилган бўлиши мумкин. Бундай ҳоллар хам қийинчилик туғдиради. Шунинг учун бошқа босмалари бўлса солиштириб ёхуд бошқа усул татбиқ этиш билан шу хатоларни топиш ва тузатиш керак. Баъзан авторнинг эътибор бермаслиги натижасида баъзи масалаларнинг мазмуни янглиш бўлиб, ечилиши мумкин бўлмайди. Шунинг учун берилган масалага танқидий кўз билан қараш зарур.

[2] Адабиёт манбаларида кўрилган хатоларни авторга ёки нашриётга ёзиб маълум қилиш керак. Бу кўрсатилган танқидий огоҳлантириш билан авторнинг ишига катта маънавий ёрдам берган бўламиз.

1) ҳосил бўлган $ACBD$ тўртбурчак юзи; 2) $ACBD$ тўртбурчак томонларининг ўртасидан ўтган айлананинг юзи топилсин.

Агар M, N, P, Q нуқталар AC, CB, BD, DA томонларнинг ўрталари бўлса (68-шакл), берилган айлананинг маркази O бўлиб, $OL \perp CD$ ясалса, бунда $OD = 5$ ва $OL = \frac{1}{2}AB - KB = 3$ ҳамда $CD = 2LD = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$.

$ACBD$ тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлганидан, бу ерда $ACBD$ юзи $= \frac{1}{2}AB \cdot CD = 36$.

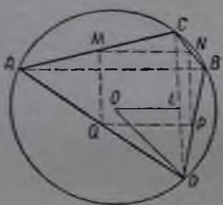
Сўнгра $MNPQ$ тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг қўшни томонлари ўзаро перпендикуляр, қарама-қарши томонлари параллел; бундан ташқари:

$$MN = \frac{1}{2}AB = 4\frac{1}{2}, \quad MQ = \frac{1}{2}CD = 4.$$

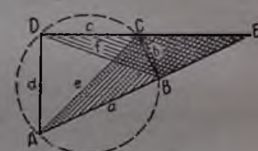
Шу билан бирга унга ташқи айлана чизиш мумкин ва унинг диаметри:

$$MP = \sqrt{4^2 + \left(4\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{145}}{2}.$$

Доиранинг юзи $= \frac{1}{4}\pi \cdot MP^2 = \frac{145}{16}\pi$.



68-шакл.



69-шакл.

45. Ички чизилган тўртбурчакнинг a, b, c, d томонлари бўйича юзини топинг.

Берилган $ABCD$ тўртбурчакда $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $DB = f$ ва бунда $d > b$ бўлсин (69-шакл).

Агар AB ва CD тўғри чизиқлар E нуқтада кесишса, AE ни x орқали, DE ни y орқали ифода қилсак, ўхшаш ACE ва DBE учбурчаклардан:

$$\frac{x}{y} = \frac{e}{f}. \tag{91}$$

Яна (25), (26) формулалардан ушбу:

$$\frac{e}{f} = \frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot DC}$$

тенгликлар келиб чиқади. (91) га асосан:

$$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}. \tag{92}$$

Бундан ташқари:

$$EA\cdot EB=ED\cdot EC$$

ёки

$$x(x-a)=y(y-c). \tag{93}$$

Фараз этайлик, $x=k(ad+bc)$, $y=k(cb+cd)$. (94)

(93) ва (94) дан x ва y ни топсак, бундан $k=\frac{d}{d^2-b^2}$.

Бундан ташқари $ABCD$ юзи $=S$; ADE юзи $=\Sigma$; BCE юзи $=\delta$ деб белгиласак:

$$S=\Sigma-\delta,\quad \frac{\delta}{\Sigma}=\frac{b^2}{d^2}.$$

Бундан:

$$S=\Sigma-\Sigma\frac{b^2}{d^2}=\Sigma\cdot\frac{d^2-b^2}{d^2}. \tag{95}$$

Сўнгра $a+b+c+d=2p$ десак, (94) ва $d=k^2(d^2+b^2)$ тенгликларни эътиборга олсак:

$$\begin{aligned}x+y+d&=2k(d+b)(p-b),\\ -x+y+d&=2k(d-b)(p-a),\\ x-y+d&=2k(d-b)(p-e),\\ x+y-d&=2k(d+b)(p-d).\end{aligned}$$

Герон формуласига биноан:

$$\Sigma=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+d)(-x+y+d)(x-y+d)(x+y-d)}=$$
$$=k^2(a^2-b^2)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}=$$
$$=\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

ниҳоят, бу ва (95) тенгликдан:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \tag{96}$$

46. Томонлари a, b, c, d бўлган тўртбурчакка ташқи ҳамда ички айлана чизиш мумкин бўлса, унинг юзи

$$S=\sqrt{abcd} \tag{97}$$

бўлиши исбот қилинсин.

Бу ҳолда (агар a ва c қарама-қарши томонлар бўлса):

$$p=a+c=b+d,\ p-a=c,\ p-b=d,\ p-c=a,\ p-d=b.$$

Бундан ва (96) формуладан бевосита (97) тенглик келиб чиқади.

(96) формула жуда куп ишлатилади, лекин шакли содда эмас. (97) формула содда ва ихчам бўлишига қарамай, кам ишлатилади.

§ 20. Масалаларни ҳисоблаб ечиш ва теоремаларни исбот қилиш методи

Масалаларни ечишда ҳар бир масала учун умумий бўлган асосий босқичларни қуйидаги схемалар бўйича ажратиб иш кўрилади.

1-босқич: **Масала мазмунини аниқлаш.**

Ишнинг бу қисмида ишловчи, ўқиб ёки тинглаб, сўнгра масала шартларини ёзиб чиқади ва бунинг устида ўйлаб, хомаки шакллар чизади, баъзан моделлар ясайди.

2-босқич. **Берилган маълумотлар билан изланган муносабатлар ёки миқдорлар, исбот қилинувчи билан маълумлар орасидаги боғланишларини изланишдан иборат.**

Бу босқич ечишдаги энг масъулиятли пайт бўлиб, умуман айтганда масала ечишдаги типик методлар билан таниш бўлиш, ҳар хил математик жумлаларнинг муносабатларини топиш малакаси, айрим теоремалар ва уларнинг комбинациясидан келиб чиқадиган кутилмаган баъзи натижаларни кўра олишдаги моҳирликка боғлиқдир.

3-босқич. **Ечимни асослаш.** Масаланинг ечимига муносабати бўлган жумлаларни исбот қилиш ва унга тегишли бўлган асосий ва ёрдамчи шакл ясашларни бажариш, уларнинг ўзаро муносабатларини аниқлаш ва энг сўнгра лозим бўлган алгебраик алмаштириш ва ҳисоблаш ишларини бажаришдан иборатдир.

4-босқич. **Ечишни танқидий кўздан кечириш.**

Бу босқич қуйидагиларни ўз ичига олади. Маълум шартга асосан, мумкин булиш-бўлмаслигини аниқлаш мақсадида ечимни текшириш. Ҳосил бўлган муносабатларнинг энг характерли қисмини топиш. Топилган ечимнинг тўлиқ ёки тўлиқ эмаслигини билиш ҳамда унинг содда — ихчам ва нафислигига баҳо бериш.

Фикрлашнинг ўзгаришига сабаб бўладиган ҳоллардан: таянилган асосларнинг очиқ эмаслиги, масалани тўла исботлаш оғир бўлиши, баъзи адабиётда математик хатоларнинг мавжуд бўлишини кўрсатиш мумкин. Юқоридаги айтилган сўзларни ойдинлаштириш учун қуйидаги икки мисолни келтирамиз.

47. Доира шаклида бўлган биллиард ичида марказдан $\frac{2}{3}$ радиус узоқликда шарча ётади. Бу шарча шундай йўналишда урилганки, у биллиард деворига уч марта тегиб, бориб-келиб,

яна аввалги ўрнида тўхтайди. Доиранинг радиуси 2 га тенг бўлса, шарча ўтган йўлнинг узунлиги топилсин.

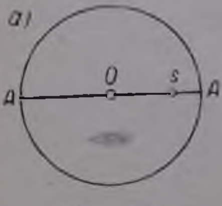
Биллиард марказини O ва шарчанинг бошланғич ўрнини (нуқта) S деб белгиласак, масаланинг шартини 4 хил ҳаракат қаноатлантиради.

Биринчи ва иккинчи ҳол: биринчида O ва S нуқтадан S (нуқта O ва A' орасида) биллиарднинг AA' диаметрини ўтказамиз (70-*а* шакл). Бунда:

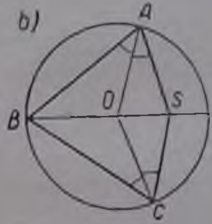
$$SA + AA' + A'A + AS = 2AA' + 2AS = 14\frac{2}{3}$$

ёки:

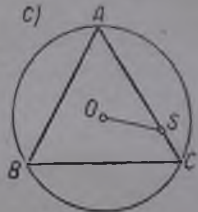
$$SA' + A'A + AA' + A'S = 2AA' + 2A'S = 9\frac{1}{3}.$$



70-*а* шакл.



70-*б* шакл.



70-*c* шакл.

Учинчи ҳол: шарнинг марказдан масофаси биллиард ичига чизилган мунтазам учбурчак томонининг марказдан бўлган энг кичик масофасидан катта. Бунда шарча 70-*б* шаклда кўрсатилган йўлда ҳаракатланиш имкониятига эга. Бу ҳолда шарча ўтган йўлининг узунлиги $6\sqrt{3}$ га тенгдир.

Тўртинчи ҳол: 70-*c* шаклда тасвир этилганча AO радиус $\angle SAB$ нинг биссектрисаси ва $AB = x$ бўлса, бунда $AS = \frac{2}{3}x$ ва (44) формулани татбиқ этсак, $AO^2 = AB \cdot AS \cdot \frac{(AB + AS)^2 - BS^2}{(AB + AS)^2}$ келиб чиқади. Бу ҳолда $BS = 3\frac{1}{3}$ бўлганидан:

$$4 = x \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{\left(\frac{5}{3}x\right)^2 - \left(3\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{3}x\right)^2}.$$

Сўнгги тенгликдан $x = \sqrt{10}$.

Шарчанинг йўли: $SA + AB + BC + CS = 3\frac{1}{3}x = \frac{10\sqrt{10}}{3}$.

Масаланинг бошқача ечими йўқлигига осонгина ишонч ҳосил этиш мумкин.

М. Попруженко ўз китобида (5-нашри № 320 ва 4-нашри № 281) фақатгина тўртинчи жавобни бериб, биз кўриб чиққан 3 хил ечим имкониятини ҳисобга олмайди.

Шу китобдан яна бир масалани келтирамиз (5-нашри № 660, 4-нашри № 570). Бунда ҳам уч хил имкониятдан фақат бири берилган.

48. Марказий бурчаги 90° ва радиуси 5 бўлган секторнинг ичига тўғри тўртбурчак ясалган. Бунинг бир томони иккинчи томонидан 6 марта катта. Шу тўғри тўртбурчакнинг томонлари топилсин.

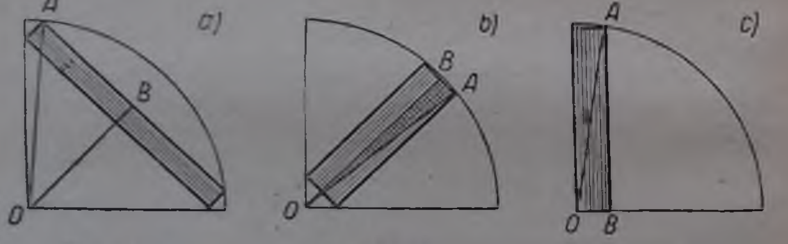
Мумкин бўлган ҳолатлар, 71-*а*, *б*, *с* шаклларда тасвир этилган.

Тўғри тўртбурчакнинг кичик томонини x билан белгиласак, биринчи ҳолда (71-*а* шакл):

$OA=5$, $AB=3x$, $OB=4x$. Бундан $9x^2+16x^2=25$ ва $x=1$, яъни кичик томони 1, катта томони 6 дир. Китобда фақат шу ҳолгина ҳисобга олинади.

Иккинчи ҳол (71-*б* шакл): $OA=5$, $AB=\frac{x}{2}$, $OB=6\frac{1}{2}x$;

$$\frac{1}{4}x^2+\frac{169}{4}x^2=25\cdot x=\sqrt{\frac{10}{17}},$$



71-*а* шакл. 71-*б* шакл. 71-*с* шакл.

яъни кичик томони $\sqrt{\frac{10}{17}}$, катта томони $6\sqrt{\frac{10}{17}}$.

Учинчи ҳол (71-*с* шакл):

$$OA=5,\ OB=x,\ AB=6x;\ x^2+36x^2=25,\ x=\frac{5}{\sqrt{37}}.$$

Демак, кичик томон $\frac{5}{\sqrt{37}}$, катта томони $\frac{30}{\sqrt{37}}$.

Масала ечиш методининг схематик обзорига келганда, энг типик методлар ҳақида хулоса чиқариш ва ҳозиргача ўрганганларимизни терминлаштириш иши қолади. Геометрик масалаларни ҳисоблаб ечиш ва теоремаларни исбот этишдаги методларни классификация қилишда тўла ва асосли бўлмаса ҳам қуйидагича ягона бир принципга келтиришни мўлжаллай оламиз.

А. Ечиш воситаларининг муносабати

Агар ечиш воситаларини муфассал равишда ишлаб чиқмасдан фақат унинг энг умумий биргалик хусусиятлари билан чегаралансак, унда ечиш методларини шундай группаларга ажратиш мумкин.

1. **Синтетик метод.** Ёлғиз геометрик жумлаларга асосланган ҳолда сонларни киритишдан қочиш ва алгебраик алмаштиришлардан холи бўлишдан иборатдир. Масалан, 30-масаланинг тўртинчи ечилиши каби.

2. **Аналитик метод.** Тенглама ва алгебраик алмаштиришлар ёрдамида сонлар ёрдами билан геометрик муносабатларни юзага чиқаришдир.

Мисол. 30-масаланинг ечилиши каби.

Миқдорий муносабатларни ўрганаётганимизда аналитик методнинг устунлигини, фазовий шаклларни ўрганишда синтетик методнинг устунлигини айтиш мумкин.

Аналитик методни татбиқ этиш етарли даражада математик билим ва малакаларнинг мавжудлигини талаб қилади; бунда кўп вақт бир хил ечиш йўли билан борилади ва ечишдаги турланиш баъзан ҳисоблаш учун оғир бўлган алгебраик алмаштиришларга олиб боради.

Синтетик методни татбиқ этиш кўпинча жуда ҳам сезгирлик талаб қилади. Аммо, у бошдан-оёқ қаторасига содда ва ихчам ечиш йўлларига олиб келади.

Геометрик масалаларни ечишда кўпинча синтетик ва аналитик методлар бирга олиб борилишини кўрамиз. Шунингдек, кўп авторлар аналитик-синтетик методлари устида гап юритадилар. Бунда ҳар хил методларнинг муносабатлари тўғрисида қуйидагича мулоҳаза бўлиши мумкин.

Улар бир-бирига боғланган ва бири иккинчисининг тўлдирувчиси бўла олади.

Ечиш воситалари мазмунининг тафсилотига келганда биз маълум асосий математик назариялар ва математик жумлалар группаси методи ҳақида гапира оламиз, масалан:

1. Ўхшашлик методи.
2. Инверсия методи.
3. Тригонометрик муносабатларни татбиқ этиш методи.

Шунингдек, айрим асосий теоремаларни татбиқ этиш методи устида:

1. Птоломей теоремаси.
2. Стюарт теоремаси.
3. Менелай теоремаси.

Асосий ва содда геометрик алмаштиришлар методлари тўғрисида:

1. Параллел кўчириш методи.
2. Симметрия методи ва бошқаларни айтиш мумкин.

В. Ечимни излаш йўллари

Излаш йўналишини тавсифловчи метод:

1. Берилган маълумдан изланганга ўтиш методи.
2. Изланганган берилган маълумга ўтиш методи.

Ёрдамчи аппаратни жалб этишни тавсифловчи метод:

1. Ёрдамчи шакл ясаш методи.
2. Ёрдамчи алгебраик алмаштириш методи.

Инверсия методи ва проектив геометриянинг асосий теоремаларини татбиқ этиш методи жуда қизиқарли иш бўлса-да, лекин уларни қараш биз мўлжаллаган иш рамкасига кирмайди.

ИККИНЧИ ҚИСМ

МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I. УЧБУРЧАКЛАР

1. Гипотенузанинг ўртаси O дан чиқарилган перпендикуляр катетлардан бирини K нуқтада, иккинчисининг давомини M нуқтада кесиб ўтади. Агар $OK = a$ ва $OM = b$ бўлса, тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари ва юзи топилсин.

2. Тенг ёнли учбурчакнинг тенг томонларидан бири 5, асоси 6. Учбурчакнинг ортомаркази (баландликларининг кесишган нуқтаси) билан оғирлик маркази орасидаги масофа топилсин.

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b га тенг. Тўғри бурчак биссектрисасининг узунлиги топилсин.

4. $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ муносабат исбот қилинсин.

5. Гипотенузага ўтказилган медиана 5 га тенг. Унинг ўртасидан чиқарилган перпендикуляр катта катетни кесади ва у $1\frac{7}{8}$ га тенг. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари ва юзи топилсин.

6. $S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_ah_bh_c}$ муносабат исбот қилинсин.

7. Учбурчакнинг учта медианаси бўйича унинг юзи ҳисоблансин.

8. Учбурчакнинг учта баландлиги бўйича унинг юзи топилсин.

9. Учбурчакнинг асоси 15 га тенг. Бу асосга тегишли баландлик ва медиана мос равишда $11\frac{1}{5}$ ва $\frac{1}{2}\sqrt{505}$ га тенг. Бошқа томонлари топилсин.

10. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг катетлари $AB = 3$ ва $AC = 4$ бўлиб, катта катетнинг ўртаси O дан чиқарилган перпендикуляр тўғри бурчакнинг учидан гипотенузага ўтказилган перпендикулярнинг давоми билан K нуқтада кесишади.

1) AOK учбурчак юзини; 2) берилган учбурчак гипотенузасининг AOK учбурчак ичида қолган қисмини; 3) CK ва BK кесмаларнинг узунликларини топинг.

11. Томонлари 4, 5 ва 6 га тенг булган учбурчак кичик бурчагининг ва унга қўшни бурчакнинг биссектрисалари ўтказилган. Қаршидаги томоннинг ўша биссектрисалар орасида қолган кесмасининг узунлиги топилсин.

12. Тенг ёнли ABC учбурчак берилган ($AB = BC$). BA ва BC томонларда $BN = BP = \frac{1}{3}AB$ кесмалар қўйилган. AP ва CN кесмалар D нуқтада кесишади. $BNDP$ тўртбурчакнинг юзини берилган учбурчак юзи орқали топинг.

13. Учбурчакнинг a ва b томонлари орасидаги бурчаги 30°. Учбурчакнинг учинчи томони ва юзи топилсин.

14. Учбурчакнинг a ва b томонлари орасидаги бурчаги 45°. Учбурчакнинг учинчи томони ва юзи топилсин.

15. Учбурчакнинг a ва b томонлари орасидаги бурчаги 60°. Учбурчакнинг учинчи томони ва юзи топилсин.

16. Учбурчакнинг a ва b томонлари орасидаги бурчаги 150°. Учбурчакнинг учинчи томони ва юзи топилсин.

17. Учбурчакнинг a ва b томонлари орасидаги бурчаги 120°. Учбурчакнинг учинчи томони ва юзи топилсин.

18. Учбурчакнинг a ва b томонлари орасидаги бурчаги 75°. Учбурчакнинг учинчи томони ва юзи топилсин.

19. Учбурчакнинг a ва b томонлари орасидаги бурчак 135°. Учбурчакнинг учинчи томони ва юзи топилсин.

20. Тенг ёнли учбурчакнинг тенг томонларидан бири a, тенг томонлар орасидаги бурчаги 144°. Учбурчакнинг юзини топинг.

21. Учбурчакнинг бир томони a, унга ёпишган бурчаклари 30° ва 45°. Қолган томонларини ва юзини топинг.

22. Туғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва $2a$ га тенг бўлиб, $2a$ га тенг катет гипотенузага перпендикуляр туғри чизиқ билан иккита тенгдош қисмга бўлинган. Шу ўтказилган туғри чизиқнинг учбурчак ичида қолган кесмасини ва кичик бурчакнинг учидан унгача булган масофани топинг.

23. Тўғри бурчакли учбурчакда кичик катет $\sqrt{3}$ га тенг. Тўғри бурчак учидан ўтказилган ва шу кичик катет билан $\frac{1}{3}d$ бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ гипотенузадан (кичик катетдан бошлаб ҳисоблаганда) унинг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг кесма ажратади. Иккинчи катетни, гипотенузани ва учбурчак юзини топинг.

24. Тенг томонли учбурчакнинг учлари учта параллел тўғри чизиқ устида ётади. Ўртадаги тўғри чизиқ қолган иккитасидан a ва b масофада ётади. Тенг томонли учбурчакнинг томони топилсин.

25. ABC учбурчакда A бурчак B бурчакдан икки марта катта, b ва c томонлари берилган. a томонни топинг.

26. $(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$
тенглик исбот қилинсин.

1 27. Учбурчакнинг томонлари 13, 14, 15 бўлиб, катта томонига ўтказилган перпендикуляр билан унинг юзи тенг иккига бўлинган. Тенг бўлувчи чизиқнинг учбурчак ичида қолган қисмини ва кичик бурчак учидан унгача бўлган масофани топинг.

28. ABC учбурчакда $AB=6$, $BC=5$, $AC=4$. A учидан бошлаб, AC ва AB томонларидан $AK=3$ ва $AL=2$ кесмалар ажратилган. $BLKC$ туртбурчакнинг периметрини ва унинг диагоналларидан ясалган тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

29. Тенг томонли учбурчакнинг томони 3. Юзи уникидан уч марта кичик бўлган иккинчи тенг томонли учбурчак унга ички чизилган. Бу учбурчакларнинг ёнма-ён учлари орасидаги масофани топинг.

21 30. ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c булиб AB ва AC томонларни кесувчи, KL кесма билан тенг периметрли ва бир хил юзли икки бўлакка булинган. AK ва AL кесмалардан ясалган тўғри тўртбурчакнинг юзини ва периметрини топинг.

31. Катетларнинг гипотенузадаги проекциялари айирмаси тўғри бурчак учидан туширилган баландлик h га тенг. Гипотенуза ва катетлар топилсин.

32. Томонлари a, b, c ва мос баландликлари h_a, h_b, h_c бўлган учбурчак берилган. Томонлари h_a, h_b ва $\frac{h_a h_b}{h_c}$ бўлган янги учбурчак ясалган. Биринчи учбурчак юзининг иккинчи учбурчак юзига нисбати топилсин.

12 33. ABC учбурчакнинг BC томонида D нуқта олинган. Бундан учбурчак икки томонига мос равишда параллел DQ ва DP тўғри чизиқлар ўтказилиб, P ва Q нуқталар туташтирилган. Агар $\triangle DQC$ юзи $=S_1$ ва $\triangle PBD$ юзи $=S_2$ бўлса, APQ учбурчакнинг юзини топинг.

34. Тўғри бурчакнинг биссектрисаси гипотенузани p ва q кесмаларга бўлади: 1) тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари; 2) гипотенузага туширилган баландлиги; 3) тўғри бурчакнинг биссектрисаси топилсин.

35. Учбурчакнинг a томонига туширилган баландликнинг шу томонга тегишли медианадаги проекциясини топинг.

36. Учбурчакнинг оғирлик марказидан баландликка туширилган перпендикуляр 6 га ва учбурчакнинг асоси 20 га тенг. Учбурчак асосидан баландлик ажратган кесмаларни аниқланг.

37. ABC учбурчакнинг AB томонида олинган D нуқтадан чиқувчи DE ва DF тўғри чизиқлар учбурчакни тенгдош уч бўлакка бўлади. $AC=30$, $AB=32$, $AD=25$ бўлса, DE ва DF тўғри чизиқларнинг ҳолатларини аниқланг.

...булади. Бу бўлакларнинг A дан бошлаб бир-бирига нисбати $1:2:3:4:5$ каби, $AB=112$, $AC=108$ ва $AD=84$ бўлса, DE, DF, DG ва DH тўғри чизиқларнинг ҳолатларини аниқланг.

39. ABC учбурчакнинг AB, BC ва CA томонларида мос равишда C_1, A_1, B_1 нуқталар шундай олинганки, $AC_1=\frac{1}{5}AB$, $BA_1=\frac{1}{5}BC$ ва $CB_1=\frac{1}{5}AC$; A_1, B_1, C_1 нуқталар кесмалар билан туташтирилган. ABC учбурчакнинг юзи S бўлса, $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг юзини топинг.

40. ABC учбурчакнинг AB, BC ва CA томонларида C_1, A_1, B_1 нуқталар шундай олинганки, $AC_1=\frac{1}{5}AB$, $BA_1=\frac{1}{5}BC$ ва $CB_1=\frac{1}{5}CA$ ABC учбурчакнинг юзи S бўлса, AA_1, BB_1 ва CC_1 тўғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

Қуйидаги (41—45) муносабатларнинг тўғрилиги исбот қилинсин:

41. $S=\frac{l_a l_{1a}(b^2-c^2)}{4bc}$, $(b>c)$.

42. $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

43. $l_{1a}=\frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$.

44. $\frac{bc}{l_a l_{1a}}-\frac{ca}{l_b l_{1b}}+\frac{ab}{l_c l_{1c}}=0$; $(a>b>c)$.

45. $4b^2c^2=l_a^2(b+c)^2+l_{1a}'(b-c)^2$.

46. Тоққа чиқиладиган йўл синиқ чизиқ шаклидаги икки қисмдан иборат. Биринчи қисм горизонт билан 30° ли, иккинчиси эса 75° ли бурчак ташкил этади. Тоғ чўққисини бошланғич нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқ горизонт билан 60° ли бурчак ташкил этади. Биринчи участканинг узунлиги 1 *км* бўлса, тоғнинг баландлигини аниқланг.

47. Агар m_c нинг c томонга туширилган проекцияси n_c билан ифодаланса, у ҳолда $a^2-b^2=2cn_c$ бўлишини исбот қилинг.

48. Айланага ички мунтазам ABC учбурчак чизилган. Бунда $AB=BC=AC=a$; BC томоннинг ўртаси D нуқтадан BC томон билан 45° ли бурчаклар ташкил этувчи иккита тўғри чизиқ ўтказилган, булар орасидаги бурчак 90°. Бу тўғри чизиқлар айланани бир йўналишда M ва N нуқталарда, иккинчи йўналишда E ва F нуқталарда кесади. MN ва EF кесмаларнинг узунликларини топинг.

49. ABC учбурчакнинг BC томонида иккита тенг томонли BCD ва BCD' учбурчаклар чизилган. Берилган учбурчакнинг томонлари a, b, c бўлса, AD ва AD' нинг узунлигини топинг.

50. ABC учбурчакнинг AB томонида $AD = AC$ ажратилиб, DC кесма ўтказилган. Бу кесманинг узунлигини учбурчак томонлари орқали топинг.

51. ABC учбурчак оғирлик маркази M дан BC томонга $ME \perp BC$, AC томонга $MF \perp AC$ ўтказилган. $ME + MF = n$ берилган. ME ва MF кесмаларнинг узунликларини топинг.

52. Тенг томонли ABC учбурчак AB томонининг ўртаси O нуқтадан AC томонни P нуқтада ва BC томоннинг давомини N нуқтада кесувчи тўғри чизиқ ўтказилган. OBN ва OPA учбурчаклар юзларининг айирмаси берилган тенг томонли учбурчакнинг юзига тенг. Тенг томонли учбурчакнинг томони $1 + \sqrt{2}$ бўлса, AP нинг узунлигини топинг.

53. Учбурчак A бурчаги биссектрисасининг шу бурчак томонларидан биридаги проекциясини топинг.

54. ABC учбурчакнинг томонлари бир турли йўналишда A_1, B_1, C_1 нуқталарга қадар шундай давом эттирилганки, $AA_1 = 3AB$, $BB_1 = 3BC$; $CC_1 = 3CA$ ҳосил бўлган. $A_1B_1C_1$ учбурчак юзининг ABC учбурчак юзига нисбатини топинг.

55. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг AB асосида K нуқта олинган ва $AK = a$, $BK = b$. Агар $AC = BC = p$ бўлса, CK кесма топилсин.

18 **56.** Учбурчакда $AB = c$, $AC = b$ ва $BC = a$. BC томонда E нуқта $BE = m$ ва $EC = n$ бўладиган қилиб олинган. AE нинг узунлигини топинг.

57. Тенг ёнли учбурчакнинг томонлари 8, 5 ва 5 бўлиб, учбурчак ичидаги бирор O нуқтадан томонларига туширилган перпендикулярлар учбурчакни тенгдош уч бўлакка бўлади. O нуқтадан учбурчакнинг асосигача ва тенг томонларидан биригача бўлган масофаларни топинг.

58. $AB = a$ кесманинг ўртаси O нуқтадан AB га перпендикуляр чиқарилган. Бу перпендикуляр устида E, F ва C нуқталар олинган бўлиб, $OF = \frac{a}{2}$, $OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$ га тенг. Бу нуқталарни кесманинг учлари билан туташтирганда ҳосил бўлган бурчаклар йиғиндиси $\angle AFB + \angle AEB + \angle ACB$ ни топинг.

59. Тенг ёнли ABC учбурчакда $AB = AC = 75$, $BC = 90$. A учидан баландлик туширилган ва унинг ўртаси O нуқта учбурчакнинг B ва C учлари билан туташтирилиб, ҳосил бўлган тўғри чизиқлар учбурчакнинг томонлари билан E ва K нуқталарда кесишгунча давом эттирилган, ҳосил бўлган $AEOK$ тўртбурчакнинг юзини топинг.

60. Деворнинг узунлигини билиш учун кузатувчи олдин деворнинг бир учидан жанубда, сўнгра иккинчи учидан ғарбда туриб қараганда, ҳар икки ҳолда девор 30° ли бурчак остида кўринган. Кузатиш нуқталари орасидаги масофа 90 метр бўлса, деворнинг узунлиги қанча бўлади?

61. Ушбу муносабатни исбот қилинг: $\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = 1$.

62. $X'X$ тўғри чизиқ устида учта A, B ва C нуқта олинган. Бунда $AB = 16\frac{1}{2}$, $BC = 7\frac{1}{2}$ ҳамда $X'X$ тўғри чизиқдан ташқарида P нуқта берилган бўлиб, $\angle PAX = \frac{\angle PBX}{2} = \frac{\angle PCX}{3}$; P нуқтадан $X'X$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

63. Учбурчакнинг B ва C учларидан A бурчакнинг биссектрисасига перпендикулярлар туширилган. Шу перпендикулярларнинг узунликларини топинг.

64. Тенг ёнли учбурчакнинг AB ва AC тенг ёнларидан $AB_1 = AC_1 = \frac{h}{\sqrt{3}}$ кесмалар ажратилган, бунда h—A учидан туширилган баландлик. B_1 ва C_1 нуқталардан улар ўтган томонларга чиқарилган перпендикулярлар O нуқтада кесишади, шу O нуқтадан асосга OA_1 перпендикуляр туширилган. Ҳосил булган AB_1OC_1, BB_1OA_1, OA_1CC_1 тўртбурчаклар юзларининг нисбати топилсин.

65. Учбурчакнинг томонлари 13, 20 ва 21. Катта бурчакнинг биссектрисасига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ учбурчакни икки тенгдош бўлакка бўлади. Учбурчакнинг катта томонидан бу тўғри чизиқ билан ажратилган кесмаларнинг узунликларини топинг.

66. Учбурчакнинг асосини $m:n$ нисбатда бўлувчи D нуқтадан унинг бошқа икки томонига параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказилган. Учбурчакнинг юзи S бўлса, учбурчакдан ажратилган булакларнинг юзларини топинг.

67. Тенг томонли учбурчакнинг бир томонига перпендикуляр ва узунлиги p га тенг бўлган кесма олинган. Олинган кесманинг учбурчак томонларидаги проекцияларининг йиғиндисини топинг.

68. ABC учбурчакнинг AB томонидаги K нуқтадан AC томонга параллел KP ва CB томонга параллел KN тўғри чизиқлар ўтказилиб, улар AC ва CB томонлар билан кесишгунча давом эттирилган; натижада NP тўғри чизиқ AB га параллел булган. Берилган учбурчакнинг томонлари 13, 14 ва 15 булса, KNP учбурчакнинг юзини топинг.

69. Берилган учбурчакнинг томонлари 36, 29 ва 25 га тенг. Катта томоннинг ўртаси O нуқтадан иккала кичик томонга OK ва ON перпендикулярлар туширилган ва уларнинг асослари туташтирилган. ONK учбурчакнинг юзи топилсин.

70. Учбурчак ичидаги нуқтадан учбурчакнинг a, b, c томонларига p_1, p_2, p_3 перпендикулярлар ўтказилиб, уларнинг

асослари туташтирилган. Перпендикулярларнинг асосларини туташтиришдан ҳосил булган учбурчакнинг юзини топинг.

71. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва катетларига квадратлар чизилган (учбурчакнинг ташқарисида) ва уларнинг озод учлари туташтирилган. Учбурчакнинг юзи $= S$ ва гипотенузаси $= a$ бўлса, ҳосил бўлган шаклнинг юзини топинг.

72. AB кесма ва унинг уртаси O нуқта берилган. OB кесмада C нуқта ва AB кесманинг давомида D нуқта $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$ муносабат бажариладиган қилиб олинган. Агар $OC = k$ ва $OD = m$ бўлса, AB нинг узунлиги x топилсин.

73. Баландлиги h га тенг бўлган учбурчакнинг юзи асосига параллел тўғри чизиқ билан четки ва ўрта нисбатда бўлинган. Кичик учбурчакнинг баландлигини топинг (учбурчакнинг катта қисми трапециядан иборат).

74. ABC учбурчакда CC_1 ва AA_1 баландликлар ўтказилган. $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$ булса, A_1C_1B учбурчакнинг юзини топинг.

75. Учбурчакда учала баландликнинг асослари ўзаро туташтирилган. Бундан ҳосил бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.

76. Учбурчак ичида олинган нуқтадан учбурчакнинг томонларига параллел учта тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиклар учбурчакни олти булакка бўлади, булардан учтаси учбурчак бўлиб, уларнинг юзлари S_1, S_2, S_3 га тенг. Берилган учбурчакнинг юзини топинг.

77. MON тўғри бурчакка тенг томонли ички ABC учбурчак чизилган, унинг A учи бурчакнинг MO томонида, B учи унинг ON томонида ётади. C учи эса бурчакнинг биссектрисасида бўлиб, бурчак учидан d масофада ётади. Учбурчак томонини топинг.

78. Учбурчакнинг a ва b томонлари ҳамда учинчи томонга тегишли m_c медианаси буйича унинг юзини топинг.

79. Ўткир бурчакли учбурчакнинг томонлари a, b, c га тенг. $h_a \cdot HA + h_b \cdot HB + h_c \cdot HC$ ифодани ҳисобланг. Бу ерда H — ортомарказ.

80. Маркази O да бўлган айланага ички ABC учбурчак чизилган. Учбурчакнинг баландликлари H нуқтада кесишади. a томонга туширилган баландликнинг юқори қисми h'_a ни айлана марказидан BC томонгача булган $ON = k_a$ масофа орқали ифодаланг.

81. Агар ABC учбурчакда A ва B бурчакларнинг ички биссектрисалари AA_1 ва BB_1 булса ва улар Ω нуқтада кесишса, $OA_1 = \frac{a}{2p} AA_1$ булишини исбот қилинг.

82. Учбурчак бир бурчагининг ички ва қолган икки бурчагининг ташқи биссектрисалари бир нуқтада кесишади. Шуни исбот қилинг.

83. ABC учбурчакда $AE \perp BC$, $BD \perp AC$, $AE = h_a$, $AO = h'_a$, $OE = h''_a$ (AE ва BD нинг кесишган нуқтаси O). h''_a нинг узунлигини учбурчак юзи ва томонлари орқали топинг.

84. Учбурчак ичида ётган бир нуқтадан учбурчак томонларига перпендикулярлар туширилса, учбурчак томонлари олтита кесмага бўлинади. Булардан ёндашмаган учта кесма квадратларининг йиғиндиси, бошқа учтасининг квадратлари йиғиндисига тенглигини кўрсатинг.

85. 84-теоремага тескари теоремани исбот қилинг.

86. 85-масаладан фойдаланиб, учбурчак томонларининг ўрталаридан уларга перпендикуляр қилиб чиқарилган тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишишини исбот қилинг.

87. M, N ва P нуқталарнинг ABC учбурчак a томонидан узоқликлари d'_a, d''_a ва d'''_a; b томонидан узоқликлари эса d'_b, d''_b ва d'''_b орқали белгиланган, қандай шарт бажарилганда M, N ва P нуқталар бир тўғри чизиқда ётади?

88. 56-масалада $m + n = a$ бўлиб, $ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna$ топилган эди. Энди $\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\beta}$ деб олиб, x^2 ни аниқловчи формуланинг шаклини алмаштиринг (m ва n ни α ва β билан алмаштиринг).

89. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг AC диагонали чизилган ва ACD учбурчак AC диагонали атрофида, ўқ атрофида айлангандек, 180° га айлантирилганда D нуқта D' нуқтага келиб тушган. $AB = 3$ ва $BC = 4$ бўлса, B ва D' учлар орасидаги масофа топилсин.

90. Периметри $2p$, гипотенузага туширилган баландлиги h бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларини топинг.

91. Чева теоремасидан фойдаланиб, учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишишини исбот қилинг.

92. ABC учбурчакда AA_1, BB_1 ва CC_1 биссектрисалар ўтказилса, унда $AB_1 = \frac{bc}{a+c}$; $B_1C = \frac{ab}{a+c}$; $CA_1 = \frac{ab}{b+c}$; $A_1B = \frac{ac}{b+c}$; $AC_1 = \frac{bc}{a+b}$ ва $BC_1 = \frac{ac}{a+b}$ бўлади. Шуни исбот қилинг.

93. Учбурчакнинг учала баландлиги бир нуқтада кесишишини Чева теоремасидан фойдаланиб исбот қилинг.

94. Учбурчакнинг учала учидан чиқувчи тўғри чизиқлардан ҳар бири қаршисида ётган томонни ўша томон учларидаги бурчакларга пропорционал бўлакларга бўлса, улар бир нуқтада кесишади. Исбот қилинг.

95. ABC учбурчакда BC томонга антипараллел ихтиёрий $B'C'$ кесма ўтказилган, унинг ўртаси O нуқта A билан туташтирилган ва AO ни BC билан α нуқтада кесишгунча давом эттирилган. $B\alpha$ ва $C\alpha$ кесмаларнинг нисбатини ҳамда узунликларини топинг.

96. Учбурчак симедианасининг узунлигини унинг томонлари орқали аниқланг.

97. Катетлари a ва b бўлган тўғри бурчакли учбурчакда, тўғри бурчак учидан ўтказилган симедианани топинг.

98. ABC учбурчакнинг AA_1 медианаси, $A\alpha$ симедианаси ва $A_1A\alpha$ бурчакни тенг бўлувчи AN тўғри чизиқ ўтказилган, BN нинг CN га нисбатини топинг.

99. Учбурчакнинг учта симедианаси бир нуқтада кесишади. (Бу нуқта Лемуан нуқтаси деб аталади.) Шуни ҳисоблаш йўли билан исбот қилинг.

100. Учбурчакнинг Лемуан нуқтаси K дан учбурчакнинг ҳар бир томонигача бўлган масофани топинг.

101. ABC учбурчакнинг Лемуан нуқтаси K нинг учбурчак томонларидаги проекциялари K_a, K_b ва K_c дан иборат (K_a—BC томондаги проекция ва ҳоказо). $K_aK_bK_c$ учбурчакнинг юзини топинг.

102. ABC учбурчакда AA_1 медиана, $A\alpha$ симедиана ва $A_1A\alpha$ бурчакнинг $A\omega$ биссектрисаси ўтказилган. $B\omega$ ва $C\omega$ кесмаларнинг нисбати топилсин.

103. ABC учбурчакнинг уч томонига перпендикулярлар чиқарилган: BC томонга α нуқтадан (α—A учидан ўтказилган симедиананинг BC томон билан кесишган нуқтаси), AB томонга B нуқтадан ва AC томонга C нуқтадан. Биринчи перпендикуляр иккинчи перпендикуляр билан B' нуқтада, биринчи—учинчи билан эса C' нуқтада кесишади. BB' нинг CC' га нисбати топилсин.

104. ABC учбурчакнинг BC асосида P нуқта олинган. Агар $AB^2+AC^2=2AP^3+BP^2+CP^2$ муносабат бажарилса, P нуқтанинг ҳолатини аниқланг.

105. Учбурчакнинг ичидаги исталган нуқтадан унинг томонларига мос равишда параллел учта тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқларнинг учбурчак томонлари орасида қолган a', b', c' кесмалари ушбу

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=2$$

шартни қаноатлантиришини исбот қилинг.

106. Учбурчак ичида олинган P нуқтадан унинг уч томонига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Учбурчак томонларининг бу параллеллар орасида қолган кесмалари ўзаро тенгдир. Параллелларнинг узунликларини топинг.

107. Учбурчак ичидаги H нуқтадан учбурчак томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Бу тўғри чизиқларнинг учбурчак томонлари орасида қолган a_1, b_1, c_1 кесмалари мос томонлар квадратларига пропорционал бўлса, шу кесмаларнинг узунликларини ва уларнинг учбурчакнинг мос учларидан узоқлигини аниқланг.

108. 107-масалада олинган учбурчакда O нуқта ёрдами билан ҳосил бўлган AOB, AOC ва BOC учбурчаклар юзларини топинг.

109. Учбурчак ичида олинган P_1 нуқтадан унинг уч томонига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Бу тўғри чизиқларнинг учбурчак томонлари орасида қолган кесмалари ўзаро тенг. Уларнинг узунликларини топинг.

110. P ва P_1 нуқталар (106 ва 109-масалага қаранг) ва учбурчакнинг оғирлик маркази бир тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг. Оғирлик маркази P ва P_1 орасидаги масофани қандай нисбатда бўлади?

111. ABC учбурчакнинг ички биссектрисаларининг кесишган нуқтаси O билан, иккита ташқи ва бир ички биссектрисаларининг кесишган O_1 нуқтаси орасидаги OO_1 масофани топинг.

112. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари $AB = 3$, $AC = 4$. A учидан гипотенузада икки K ва P нуқта олинган; бунда $BK = 1$ ва $\angle CAP = \angle BAK$. CP нинг узунлигини топинг.

113. ABC тўғри бурчакли учбурчакда C — тўғри бурчак. C дан гипотенузага CK перпендикуляр туширилган. K дан AC ва CB катетларга KT ва KP перпендикулярлар туширилган. $BP = m$ ва $AT = n$ берилган бўлса, гипотенузанинг узунлиги x ни топинг.

114. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ясалган тенг томонли учбурчакнинг юзи тўғри бурчакли учбурчак юзидан икки марта катта. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг нисбатини топинг.

115. Тенг ёнли ABC учбурчакда $AB = AC = 5$, $BC + DC = 9\frac{3}{5}$ (бу ерда D нуқта B нуқтанинг AB даги проекцияси). BC томоннинг узунлигини топинг.

116. $S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$ тенглик фақат учбурчак тенг томонли бўлгандагина тўғри бўлишини исбот қилинг.

117. Ўткир бурчакли учбурчакда

$$2\left(h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c\right) = a^2 + b^2 + c^2$$

бўлишини кўрсатинг.

118. $S = \frac{1}{4}\left(ah'_a + bh'_b + ch'_c\right)$ муносабатнинг тўғрилигини исбот қилинг.

119. Тенг ёнли тўғри бурчакли ABC учбурчак ўзининг AC катети ўртаси E нуқта атрофида 45° га айлантирилиб, янги $A_1B_1C_1$ ҳолатига келтирилган. Ҳар иккала учбурчак учун умумий бул-

ган кўп бурчакли шакл юзининг берилган учбурчак юзига нисбатини топинг.

120. ABC учбурчакнинг учларидан унинг томонларига перпендикулярлар ($DE \perp BC$; $EF \perp AC$; $FD \perp AB$) ўтказилган. Улар ўзаро кесишиб янги EFD учбурчак ҳосил қилади. Унинг томонларини ва юзини топинг.

121. $h'_a h''_a = h'_b h''_b = h'_c h''_c$ муносабатларнинг туғрилигини исбот қилинг.

21 122. Катетлари a бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак тўгри бурчаги учи атрофида олдинги ҳолатига нисбатан $30°$ га бурилган. Тўгри бурчакли учбурчакнинг иккала вазиятидаги умумий қисмнинг юзини топинг.

123. ABC учбурчакда $b = c$. Унинг a томонида олинган бирор нуқтадан қолган томонларигача бўлган масофаларнинг йиғиндисини топинг.

124. Тенг томонли учбурчакнинг BA ва AC томонларидан $BC' = AB' = 2$ кесмалар ажратилган. B' ва C' нуқталар туташтирилган ва $B'C'$ тўгри чизиқ AC томон билан A' нуқтада кесишгунча давом эттирилган. $BC = 5$ бўлса, CA' ни топинг.

125. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси a бўлса, $S = p(p-a) = (p-b)(p-c)$ булишини исбот қилинг.

126. O нуқта ABC бурчак текислигида ва унинг ичида ётади. AO, BO ва CO тўғри чизиқлар учбурчакнинг a, b ва c томонларини мос равишда A', B', C' нуқталарда кесади

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

бўлишини исбот қилинг.

127. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг BC асосига $BCDE$ квадрат ясалганда учбурчак билан квадрат юзи тенг ($S_{ABC} = S_{BCDE}$) бўлади. AC ён томоннинг BC асосга нисбати топилсин.

128. ABC учбурчакнинг A бурчаги биссектрисасида ихтиёрий M нуқта олинган ва ундан AC томонга MN перпендикуляр туширилса, тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Шу учбурчак катетларининг нисбати $\frac{MN}{AN}$ ни аниқланг.

129. AB вертикал миноранинг B учига BC вертикал ёғоч қўйилган. Ердаги M нуқтадан B ва C нуқталарга қаралганда MB ва MC чизиқлар горизонтал текислик билан $30°$ ва $60°$ ли бурчаклар ташкил қилади. Шу BC ёғоч узунлигининг AB баландликка нисбати $\left(\frac{BC}{AB}\right)$ топилсин.

130. ABC учбурчакнинг BC томонида ихтиёрий D нуқта олиниб, ABD ва ACD учбурчакларга ташқи доиралар чизилган. Бу доиралар юзларининг нисбатини топинг.

131. ABC учбурчакда $\angle B = \angle C + 90°$; $AD \perp BC$, $AD = h$; $DB = m$; $DC = d$ бўлса, $h^2 = m \cdot d$ эканлигини исбот қилинг.

132. ABC учбурчакда $\angle B - \angle C = 90^\circ$ бўлса, $\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2}$ бўлади. Буни исбот қилинг.

133. ABC учбурчакда A бурчакнинг ички биссектрисаси $AE = l$ ва ташқи биссектрисаси $AF = l_1$ ўтказилган; учбурчак томонларининг нисбати $\frac{AB}{AC} = k$ бўлса, ABC учбурчакнинг юзи топилсин.

134. Иккита тенг эмас учбурчакда учта бурчаги ўзаро тенг бўлиб, иккита томони ўзаро тенг бўлиши мумкинми? Бундай учбурчаклар мос томонларининг нисбати қандай ораликдаги қийматлар қабул қилади?

135. Тўғри бурчакли учбурчакда A ўткир бурчагининг биссектрисаси қаршисида ётган томони $2 : \sqrt{3}$ нисбатда бўлса, шу A ўткир бурчак 30° га тенг бўлади. Исбот қилинг.

136. Иккита тўғри бурчакли ўхшаш учбурчакда гипотенузаларининг кўпайтмаси, бошқа мос томонлар кўпайтмаларнинг йиғиндисига тенгдир. Исбот қилинг.

137. Учбурчакнинг томонлари 4, 5 ва 6 сонларга пропорционал. Унинг энг катта бурчаги энг кичик бурчагидан 2 марта катталигини исбот қилинг.

138. ABC учбурчакнинг юзи S; ортомарказ H ва ABH учбурчак юзи S_1 га тенг. L нуқта CH кесмада ёки унинг давомида бўлса, ABL тўғри бурчакли учбурчакнинг юзини топинг.

139—140. ABC учбурчакда $AB = c$, $AC = b$ берилган. Шу учбурчакнинг A учидан BC томонга AD ва AE кесувчилар ўтказилган. $BE = CD$ ва $AD = p$ ва $AE = q$ бўлса, a нинг узунлигини топинг.

141. ABD тўғри бурчак ичидаги ихтиёрий O нуқтадан ABD бурчакни кесувчи BOB' тўғри чизиқ ўтказилган. Олинган O нуқтани бурчакнинг A учи билан туташтирсак, AOB ва AOB' учбурчаклар ҳосил бўлади. AOB нинг юзи S ва AOD юзи S_1 бўлса, $\frac{1}{S} + \frac{1}{S_1}$ ўзгармас миқдор (constanta) бўлади. Исбот қилинг.

142. ABC учбурчак бурчаклари биссектрисаларининг қарши томонлари билан кесишган нуқталари A', B' ва C'. ABC учбурчак юзининг $A'B'C'$ учбурчак юзига нисбати топилсин.

143. Тўғри бурчакли ABC учбурчакда катетларининг йиғиндиси p га тенг ($b + c = p$). D ва E нуқталар гипотенузани тенг уч бўлакка бўлади. Бу нуқталарни учбурчакнинг A учи билан туташтирувчи AD ва AE кесмаларнинг йиғиндиси m га тенг бўлса, a гипотенузани топинг.

144. $l_a' = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}$. Буни исбот қилинг.

145. $al_a'^2 + bl_b'^2 + cl_c'^2 = abc$ ни исбот қилинг.

146. $\frac{l_a' l_b' l_c'}{l_a'' l_b'' l_c''} = \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$. Буни исбот қилинг.

147. ABC учбурчакда $AB = c$, BC нинг AC даги проекцияси p, AC нинг BC даги проекцияси q бўлса, BC ва AC ни аниқланг.

148. ABC учбурчакда $AP \perp BC$, шу AP кесманинг AB томондаги проекцияси AD, AC томондаги проекцияси AE, DE кесманинг узунлигини ва A нуқтадан DE тўғри чизиққача булган масофани топинг.

18 149. Тўғри бурчакнинг биссектрисаси (p) гипотенузани чет ва урта нисбатда бўлади. Катетларни топинг.

150. Туғри бурчакли ABC учбурчакнинг оғирлик маркази G нуқтадан учбурчак учларигача бўлган $AG (=t)$; $CG (=r)$ ва $BG (=q)$ масофаларни учбурчак томонлари орқали аниқланг ва $5t^2 = q^2 + r^2$ эканини кўрсатинг.

151. ABC учбурчакнинг томонларида ташқи томонда учта мунтазам учбурчак ясалиб, уларнинг марказлари кесмалар билан туташтирилганда янги учбурчак ҳосил бўлган. Унинг томонларини топинг.

152. ABC учбурчакда $BC = 2AC$. Бу учбурчакнинг AD медианаси, AB томон ва ADC учбурчакнинг медианаси AE дан ҳосил бўлган BAE бурчакни тенг иккига бўлишини исбот қилинг.

153. ABC учбурчакда $a = 14$, $h_a = 12$, $b + c = 28$. b ва c ни топинг.

154. $S = \frac{l_a l_b l_c (b+c)(c+a)(a+b)}{8abcp}$. Бу муносабатнинг тўғрилигини исбот қилинг.

155. $S = \sqrt{\frac{l_{1a} l_{1b} l_{1c} (b-a)(a-c)(a-b)p}{8abc}}$ эканини $(a > b > c)$ исбот қилинг.

156. Фақат тенг ёнли учбурчак икки ички бурчагининг биссектрисаси тенг бўлиши мумкин. Буни ҳисоблаш билан исбот қилинг.

157. 1) ABC учбурчакнинг AC томонига параллел қилиб MN ўрта чизиқ ўтказилган ва ўрта чизиқнинг M ва N учларидан $ML \perp AC$ ва $NF \perp AC$ туширилганда $MNFL$ тўғри тўртбурчак ҳосил бўлади. 2) ABC учбурчакнинг B учидан AC томонга параллел KE тўғри чизиқ ўтказилган ва ML ҳамда FN тўғри чизиқлар KE билан кесишгунча давом эттирилиб, $MNEK$ тўғри тўртбурчак ҳосил қилинган, бу тўртбурчак $MNFL$ тўртбурчакка тенг бўлади. Бу иккала тўртбурчак юзининг йиғиндиси берилган ABC учбурчак юзига тенг бўлишини кўрсатинг.

158. ABC учбурчак G оғирлик марказининг учбурчак томонларидаги проекциялари G_a, G_b ва G_c бўлса, шу нуқталарни туташтиришдан ҳосил бўлган $G_aG_bG_c$ учбурчакнинг юзини топинг.

159. ABC тенг томонли учбурчак томонларига квадратлар ясалган; уларнинг марказлари A_1, B_1, C_1 нуқталарда. $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC}$ нисбатни топинг.

160. ABC учбурчакнинг BC томонига параллел ва уни кесувчи B_1C_1 тўғри чизиқ ўтказилган. Учбурчакнинг юзи $= S$ ва AB_1C_1 учбурчакнинг юзи S_1; AB_1C учбурчакнинг юзини топинг.

161. ABC учбурчакда BC га параллел B_1C_1 кесма шундай ўтказилганки, $B_1C_1 = BB_1 + CC_1$ муносабат бажарилади. AB_1 ва B_1C_1 ни учбурчакнинг томонлари орқали топинг.

162. Учбурчакнинг a ва b томонлари берилган ва $m_a \perp m_b$. Учбурчакнинг учинчи томонини топинг.

163. ABC учбурчакнинг BD ва CE баландликлари ўзаро тенг ва улар учбурчак ичидаги H нуқтада кесишади. $BH = 3HD$; $CH = 3HE$ ва $BC = 2$. Шу учбурчакнинг бошқа томонларини, баландликларини ва юзини топинг.

164. Тенг ёнли тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг AB ва AC катетларидан BD ва AE қисмлар ажратилган; улар ўзаро тенг ва ҳар бири катетнинг учдан бирига баравар, сўнгра B ва D нуқталар E билан туташтирилган. ADE бурчакнинг EBC бурчакка тенглиги исбот қилинсин.

165. Учбурчакда

$$a = 5,$$
$$b - c = 2,$$
$$\angle B = 2\angle C$$

экани маълум, b ва c томонларни ҳисобланг.

166. Учбурчакнинг икки томони b ва $c\,(b > c)$ ва a томоннинг A бурчак ички ва ташқи биссектрисалари орасида қолған d кесмаси бўйича учбурчак ясалмоқчи, бунда d нинг узунлигини ихтиёрий танлаб олиш мумкинми?

167. ABC учбурчак A бурчагининг ички биссектрисаси қарши BC томонни D нуқтада кесади. Шу D нуқтада AD га перпендикуляр қилиб, EF тўғри чизиқ ўтказилган ва бу EF тўғри чизиқ билан AB томон E нуқтада, AC томон F нуқтада кесишади. AE ва AF кесмаларнинг узунлигини топинг.

168. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан AD баландлик ўтказилган. Баландликда ва катетларда $AA' = BB' = CC' = 1$ кесмалар ажратилган.

$AB = 3$, $AC = 4$ бўлса, $A'B'C'$ учбурчакнинг юзини топинг.

169. 168-масалани $AA' = BB' = CC' = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ шартда ечинг.

170. ABC учбурчакда $\angle C = 120°$.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

B бурчакни аниқланг.

171. ABC учбурчак C бурчагининг томонлари ташқарига c узунлигида, B бурчагининг томонлари b узунлигида, A бурчагининг томонлари a узунлигида узайтирилган. Шу хилда узайтириш билан ташқи соҳада олти нуқта танлаб олиниб, уларни туташтириш натижасида олти бурчакли шакл ҳосил қилинган. Шу шаклнинг юзини топинг.

18 172. Тўғри бурчакли ABC учбурчакда A ўткир бурчак учидан чиқувчи ва C учидан AB томонга туширилган перпендикулярни M нуқтада тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқ BC томонни N нуқтада кесади. $BC = a$, $CD = h$ бўлса, ҳосил бўлган CN ва NB кесмаларнинг нисбатини аниқланг.

173. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчак учи C дан гипотенузага CD перпендикуляр туширилган, CD кесма D_1 нуқтагача ўз узунлиги қадар давом эттирилган, сўнгра D_1 нуқта учбурчакнинг A учи билан бирлаштирилиб, у учбурчак CB томонининг давоми билан F нуқтада кесиштирилган. Агар учбурчакда $BC = a$, $CD = h$ бўлса, CF кесманинг узунлигини топинг.

174. ABC учбурчакда $AB = AC$, AH — баландлик. $\frac{BC}{AH} = \frac{9}{8}$. AH да M нуқта шундай олинганки, $\frac{MH}{AH} = \frac{3}{5}$ ва M нуқтадан AH билан $45°$ ли бурчак ясовчи иккита тўғри чизиқ ўтказилса, ABC учбурчак тўрт қисмга ажралади. Шу қисмларнинг ўзаро тенгдошлиги исбот қилинсин.

175. ABC учбурчакнинг ички биссектрисалари қаршисида ётган томонларни A_1, B_1 ва C_1 нуқталарда кесади. A_1, B_1 ва C_1 нуқталарга мос равишда A, B ва C нуқталарга нисбатан симметрик қилиб, A_2, B_2 ва C_2 нуқталар олинган ва улар ўзаро бирлаштирилиб янги $A_2B_2C_2$ учбурчак ҳосил қилинган. $A_2B_2C_2$ учбурчак юзини топинг.

176. 175-масалани A_2, B_2 ва C_2 нуқталар A, B, C нуқталарга A_1, B_1, C_1 марказларга нисбатан симметрик бўлган ҳол учун ечинг.

177. Тенг томонли ABC учбурчакнинг AB ва BC томонларида E ва D нуқталар олинган. Агар $BD = \frac{1}{3} BC$; $AE = ED$ бўлса, $EC = EB + BD$ бўлишини исбот қилинг.

178. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар учун $\angle A + \angle A_1 = 90°$ бўлса, $\left(\frac{S}{bc}\right)^2 + \left(\frac{S_1}{b_1c_1}\right)^2 = \frac{1}{4}$ эканини исбот қилинг.

179. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $\angle A + \angle A_1 = 180°$ ва $\angle B = \angle B_1$ бўлса, $aa_1 = bb_1 + cc_1$ тенглик бажарилишини исбот қилинг.

180. H, M ва D учбурчакнинг бир учидан чиққан баландлик, медиана ва биссектриса асосларидан иборат, агар $HD =$

$= 3MD$ бўлса, ABC учбурчакнинг томонлари арифметик пропорция тузади. Шуни исбот қилинг.

181. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчаклари 15° ва 75° га тенг бўлганда, катетларининг кўпайтмаси гипотенуза ярмининг квадратига тенг бўлади. Шуни исбот қилинг.

182. ABC учбурчак баландликларининг асослари A_1, B_1 ва C_1. $AB \cdot AC_1 + BC \cdot BA_1 + CA \cdot CA_1 = AB \cdot BC_1 + BC \cdot CA_1 + CA \cdot AB_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ муносабатнинг туғрилигини исбот қилинг.

183. ABC учбурчакнинг b ва c томонлари ва A бурчагининг биссектрисаси l_a бўйича учинчи a томонини ва учбурчакнинг юзини ҳисобланг. Масаланинг мумкинлик шарти қандай?

184. ABC учбурчак ташқи бурчакларининг биссектрисалари ўзаро A', B' ва C' нуқталарда кесишади ва $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$ берилган. ABC учбурчакнинг a, b ва c томонларини ҳисобланг.

185. Учбурчак ички бурчакларининг биссектрисалари кесишган нуқта биссектрисаларнинг ҳар бирини қандай нисбатда булади?

186. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси a, тўғри бурчагининг биссектрисаси катетларидан бирига тенг. Иккинчи катетини топинг.

187. Ихтиёрий ABC учбурчакнинг A учидан BC томонга иккита AD ва AE тўғри чизиқ утказилган; улардан биринчиси AB томон билан $\angle C$ га тенг бурчак ҳосил қилади; иккинчиси AC томон билан $\angle B$ га тенг бурчак ҳосил қилади. ADE учбурчакнинг тенг ёнли эканлиги исбот қилинсин.

188. ABC учбурчакнинг BC томони ўртасидан A бурчагининг биссектрисасига перпендикуляр ўтказилса, бу перпендикуляр AB ва AC томонларининг ҳар бирида иккита кесма ҳосил қилади. Бу кесмалар мос равишда $\frac{AB + AC}{2}$ ва $\frac{AB - AC}{2}$ га тенг эканлиги исбот қилинсин.

II. ТЎРТБУРЧАКЛАР

1. Параллелограмм, ромб, тўғри тўртбурчак, квадратлар

189. Катта томони $2\sqrt{13}$, кичик диагонали кичик томонига перпендикуляр ва асосига ёпишган бурчакларининг нисбати 5 бўлган параллелограммнинг кичик томонини, юзини ҳамда юзи шу параллелограммнинг юзига тенг бўлган тенг томонли учбурчакнинг томонини топинг.

190. ABC учбурчакнинг a асосида шундай нуқта топилсинки, бу нуқтадан учбурчак томонларига параллел тўғри чи-

зиқлар ўтказишдан ҳосил булган параллелограммнинг юзи учбурчак юзидан уч марта кичик бўлсин.

191. Асоси 16, баландлиги 4 бўлган учбурчакка юзи 12 га тенг бўлган тўғри ички тўртбурчак ясалган. Шу тўғри тўртбурчак томонларини топинг.

21 192. $ABCD$ параллелограммнинг AB томони 108 га, BC томони 136 га тенг. Бу параллелограмм AE ва AF тўғри чизиқлар билан (B дан бошлаб) юзлари 2:3:7 нисбатда бўлган уч бўлакка бўлинган. AE ва AF тўғри чизиқларнинг ҳолатини аниқланг.

193. $ABCD$ параллелограммда $AB=108$ ва $AD=136$ бўлиб, AE ва AF тўғри чизиқлар билан унинг юзи (B дан бошлаб) 3:17:4 нисбатда уч бўлакка бўлинган. AE ва AF тўғри чизиқларнинг ҳолатини аниқланг.

194. $ABCD$ параллелограммнинг $AD=a$ томонида K нуқта олинган, бунда $AK=k$; шу нуқтадан қарши томонга, параллелограммнинг юзини $m:n$ нисбатида бўлувчи KX тўғри чизиқ ўтказилган. BX ни топинг.

18 195. $ABCD$ параллелограмм юзи AB томонининг ўртаси O нуқтадан ўтказилган OK ва ON тўғри чизиқлар билан (D нуқтадан бошлаб) 4:3:1 нисбатда бўлинган. Шу OK ва ON тўғри чизиқлар ҳолатини аниқланг.

196. Томонлари 13, 14 ва 15 бўлган учбурчакка ички ромб чизилган; ромбнинг бир бурчаги, учбурчакнинг узунлиги 15 бўлган томони қаршисида ётган бурчаги билан устма-уст тушади. Ромбнинг диагоналларини ва томонини топинг.

197. Тўғри тўртбурчак томонлари 1 ва 2. Бу тўртбурчак бурчакларининг биссектрисалари, қаршисида ётган томон билан кесишгунча давом эттирилганда тўртбурчак ҳосил қилади. Бу тўртбурчак томонларини, диагоналларини ва юзини топинг.

198. Томонлари 4, 5 ва 6 бўлган учбурчакка ички параллелограмм чизилган. Унинг периметри 9 бўлиб, бир бурчаги учбурчакнинг ўрта томони қаршисида ётган бурчаги билан умумийдир. Параллелограммнинг томонларини топинг.

199. Тўғри тўртбурчакнинг катта томонида олинган бир нуқтадан, тенг бўлмаган икки томон тенг бурчак остида кўринади. Томонларнинг узунлиги 63 ва 65 га тенг бўлса, бу нуқтадан тўртбурчакнинг бир кичик томонигача бўлган масофа қанча?

200. Тўғри бурчакли учбурчакнинг a гипотенузасига ўтказилган перпендикуляр катетлардан бирини B нуқтада, иккинчисининг давомини C нуқтада ва гипотенузани унинг ўртасидан k масофада ётган D нуқтада кесади. DB ва DC кесмаларга ясалган тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

201. Тўғри бурчакли учбурчакка ички квадрат чизилган; бунинг бир томони гипотенузада ётади. Учбурчакнинг бир ўткир бурчагидан квадратнинг энг яқин учигача бўлган масофа

m ва иккинчи ўткир бурчагидан квадратнинг энг яқин учигача бўлган масофа n га тенг. Квадратнинг юзини топинг.

202. Томонлари 13, 14, 15 бўлган учбурчакка ички тўғри тўртбурчак чизилган. Унинг бир диагонали учбурчакнинг кичик томонига параллел ва бир томони учбурчакнинг катта томонига параллелдир. Тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

✓**203.** ABC учбурчакка ички параллелограмм чизилган. B бурчаги ҳар икки шакл учун умумий. B учидан ўтмайдиган диагонали AB томонга перпендикуляр; $BC = a$, $AB = c$ ва BC нинг AB даги проекцияси c_1. Параллелограммнинг томонларини топинг.

204. Тўғри тўртбурчакнинг икки учидан диагоналига туширилган перпендикулярлар унинг диагоналини тенг уч бўлакка бўлган. Тўғри тўртбурчакнинг бир томони $\sqrt{2}$. Иккинчи томонини топинг.

205. Томони a га тенг бўлган квадратнинг қарама-қарши томонларида иккита тенг томонли (ички) учбурчак ясалган. Бу учбурчаклар томонларининг кесишишидан тўрт бурчакли шакл ҳосил бўлади. Бу қандай шакл экани аниқлансин ва томонлари, бурчаклари ва юзи топилсин.

206. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг AB томонида бир K нуқта олинган, бунда AB томон $AK:KB = 3:4$ нисбатда иккига бўлинган. Шу хилда CD томонда M нуқта олиниб, бу томон $DM:MC = 5:3$ нисбатда икки бўлакка бўлинган. MK кесма билан тўғри тўртбурчакнинг юзи қандай нисбатда бўлинишини топинг.

207. $ABCD$ параллелограммнинг AB, BC, CD ва DA томонларида олинган E, F, G, H нуқталар туташтирилиб $EFGH$ тўртбурчак ҳосил қилинган,

$$AE = a_1,\ EB = a_2;\ BF = b_1,\ FC = b_2;\ CG = c_1;\ GD = c_2;$$
$$DH = d_1,\ HA = d_2 \text{ ва } AB = a,\ BC = b$$

бўлса, бу тўртбурчак юзининг параллелограмм юзига нисбатини топинг.

208. $ABCD$ параллелограммнинг томонлари бир хилда $m:n$ нисбатда бўлинган ва E, F, G, H бўлиниш нуқталари мос равишда C, D, A, B нуқталар билан туташтирилган. 1) AG, CE,... ва бошқа тўғри чизиқлардаги кесмаларнинг нисбатини; 2) параллелограммнинг юзи S бўлса, унинг бўлинишидан ҳосил бўлган шаклларнинг юзларини топинг.

209. $ABCD$ параллелограммнинг CD томонида ётган F' нуқтадан ўтказилган кесувчи AB томоннинг давомини F нуқтада, AD ни E нуқтада, BD диагонални G нуқтада, BC нинг давомини E' нуқтада, AC нинг давомини G' нуқтада кесади. Бунда:

$$BC = b, \; EE' = d, \; DE = m, \; CE' = n.$$

Кесувчининг ҳамма кесмалари топилсин.

210. Квадратга ички тенг томонли учбурчак чизилган. Учбурчакнинг бир учи квадратнинг бир томонининг ўртасида ётади. Шу учбурчак юзининг квадрат юзига нисбати топилсин.

211. Томонлари 3 : 4 нисбатда бўлган тўғри тўртбурчакка томони 25 бўлган ички ромб чизилган. Бу ромбнинг юзи топилсин.

1 212. Томони a бўлган квадрат берилган. Квадратнинг қарама-қарши учлари икки тенг ромбнинг учларидир. Ҳар бир ромбнинг юзи квадрат юзининг ярмига тенг бўлса, иккала ромб умумий қисмининг юзини топинг.

213. Квадратга ички тенг томонли учбурчак чизилган. Унинг бир учи квадратнинг учида ётади. Учбурчак юзининг квадрат юзига нисбати топилсин.

214. $ABCD$ параллелограммнинг AC диагонали чизилган, бу диагонал устида олинган ҳар бир нуқтадан AB ва AD томонларгача бўлган масофалар, шу томонлар узунликларига тескари пропорционал бўлади. Шуни кўрсатинг.

21 **215.** Параллелограмм ўз диагоналига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ билан икки бўлакка бўлинган. Булардан бирининг юзи иккинчисидан 2 марта катта. Бўлувчи чизиқнинг ҳолатини топинг.

216. Томонлари a бўлган квадрат томонларининг ўрталари қаршидаги учлар билан туташтирилган. Бу тўғри чизиқлар ўзаро кесишиб, 8 бурчакли шакл ясайди. Бу шаклнинг юзини топинг.

217. $ABCD$ параллелограммда AD томоннинг ўртаси E бўлиб, $\angle A = 60°$, $BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $CE = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Параллелограммнинг томонларини топинг.

12 218. Томонлари a бўлган квадратнинг ички соҳасида унинг тўртала томонига мунтазам учбурчаклар ясалган. Буларнинг тўртта учи квадратнинг ичида, қолган учлари квадрат учларида ётади. Учбурчакларнинг умумий қисмидан иборат бўлган 8 учли юлдузнинг юзини топинг.

219. Томонлари a, b бўлган $ABCD$ параллелограммнинг A учидан BC ва CD томонлари ёки уларнинг давоми билан M ва N нуқталарда учрашувчи ANM кесувчи тўғри чизиқ ўтказилган. Бунда $BM \cdot DN = ab$ бўлишини исбот қилинг.

220. Тўғри тўртбурчакнинг ярми ўзига ўхшаш (ярмини олишда диагоналларининг кесишган нуқтасидан бир томонига параллел тўғри чизиқ ўтказилади). Тўғри тўртбурчакнинг

томонлари ва диагонали қандай сонларга пропорционал экани топилсин.

221. $ABCD$ ромбнинг AC диагоналида ихтиёрий P нуқта олинган ва бу нуқта B уч билан туташтирилган. Бунда $AP \cdot PC = AB^2 - PB^2$ булиши исбот қилинсин.

222. Томонлари a га тенг бўлган квадратга ички тўғри тўртбурчак чизилган. Тўртбурчакнинг томонлари квадрат диагоналларига параллел. Тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати k га тенг. Шу тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

2. Трапециялар

223. Тенг ёнли (симметрик) трапециянинг диагонали катта асоси a га, асосларининг айирмаси k га тенг. Трапеция ён томонини топинг.

224. Трапециянинг томонлари a, b, c, d (d ва c параллел) берилган, унинг параллел томонлари ўрталарини туташтирувчи кесманинг узунлиги топилсин.

225. Трапециянинг асослари a ва b ($<a$). Параллел булмаган томонлари ўзаро кесишгунча давом эттирилган ва уларнинг кесишган нуқтасидан асосларга параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Бу чизиқнинг трапеция диагоналлари давоми орасида қолган кисмининг узунлиги топилсин.

/226. Трапециянинг асослари 3 ва 12 бўлиб, унинг асосларига параллел бўлган MN тўғри чизиқ уни иккита ўхшаш трапецияга булади. Кесувчи MN чизиқ узунлигини топинг.

227. Трапециянинг асослари 24 ва 12, асосларига параллел қилиб ўтказилган MN тўғри чизиқ кичик асосдан бошлаб ён томонни 3:5 нисбатда бўлади. Шу MN кесманинг узунлигини топинг.

228. Учбурчак томонлари 52, 56 ва 60 га тенг. Унинг катта томонига параллел тўғри чизиқ ўтказилганда ҳосил бўлган трапециянинг периметри 156 га тенг. Шу трапеция юзини топинг.

229. Тўғри бурчакли трапециянинг катта асоси a; баландлиги h ва ўткир бурчаги 60°. Трапециянинг юзини топинг.

230. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; қолган томонлари ўзаро тенг ва диагонали катта асосига баравар; 1) трапециянинг қолган томонларини, 2) трапециянинг бурчакларини, 3) диагоналларининг ўзаро кесишгандаги кесмаларини топинг.

231. $ABCD$ трапеция берилган бўлиб, унинг AC ва AD диагоналлари O нуқтада кесишади. AOD ва BOC учбурчакларнинг юзлари p^2 ва q^2 га тенглиги маълум: 1) трапеция AD ва BC асосларининг нисбати, 2) AOB ва COD учбурчакларнинг юзлари, 3) трапециянинг юзи топилсин.

232. $ABCD$ трапецияда ён томонларидан бири $CD=12$, бунга иккинчи ён томон ўртасидан $EF = 8\frac{1}{3}$ перпендикуляр ($EF \perp CD$) ўтказилган. Шу $ABCD$ трапеция юзига тенгдош бўлган квадратнинг томонини топинг.

233. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси a га тенг. Унинг туртала томонининг урталарини кетма-кет туташтиришда квадрат ҳосил бўлган. Унинг томони b га тенг. Шу трапециянинг юзини ва қолган томонларини топинг.

234. Диагоналлари бир-бирига перпендикуляр ва баландлиги h бўлган симметрик трапециянинг юзини топинг.

235. Тўғри бурчакли трапециянинг катта ён томони асосларининг йиғиндисига тенг, баландлиги $h=10$. Трапециянинг асосларига ясалган тўртбурчакнинг юзини топинг.

236. Диагоналлари 113 ва 17, баландлиги 15 булган трапециянинг юзи топилсин.

237. Асослари a ва b бўлган трапециянинг асосига параллел бўлган ва трапеция юзини тенг иккига бўлувчи кесманинг узунлигини топинг.

238. Трапециянинг ўрта чизиғи 7,5; диагоналларидан бири 6 бўлиб, у диагонал трапецияни иккита ўхшаш учбурчакка бўлади. Трапециянинг асосларини топинг.

239. Трапециянинг асослари 5 ва 3 га тенг. Асосларга параллел бўлган EF кесма уни (катта асосдан бошлаб) $7:12$ нисбатда бўлади. EF нинг узунлигини топинг.

240. ABC учбурчакнинг юзи S, AB томони c, шу AB томонда $AK=BH=m<\frac{c}{2}$ кесмалар ажратилган. Сўнгра K ва H нукталардан BC асосга параллел HP ва KM туғри чизиқлар ўтказилган. Шу параллел чизиқлар орасида қолган $MKHP$ трапециянинг юзини топинг.

241. ABC учбурчак берилган, унинг юзи S; BC томонга параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ учбурчак икки томонининг ҳар бирини $m:n$ нисбатда бўлади. A учидан BC томонни $p:q$ нисбатда бўлувчи иккинчи тўғри чизиқ ўтказилган. Учбурчакнинг шу икки тўғри чизиқ билан бўлинган қисмларининг юзларини топинг.

242. Трапециянинг асослари a ва b бўлиб, диагоналларининг кесишган нуқтасидан асосига параллел тўғри чизиқ ўтказилган, унинг узунлигини $2x$ деб олсак, x ни томонлари билан боғловчи муносабатни топинг.

243. Томонлари a, b, c, d [b ва d томонлари параллел, $b>d$] бўлган трапециянинг m ва n диагоналларини унинг томонлари орқали ҳисобланг.

244. Томонлари a, b, c, d [b ва d параллел, $b>d$] бўлган трапециянинг тўртала томони орқали унинг юзини топинг.

245. Трапециянинг ўрта чизиғи унинг юзини (катта асосдан ҳисоблаганда) 3 : 2 нисбатда бўлади. Унинг асосларининг нисбатини топинг.

246. A ва B нуқталар XY тўғри чизиқнинг бир томонида бўлиб, ундан 6 ва 10 бирлик узоқликда ётади. A ва B нуқталардан ўзаро параллел тўғри чизиқлар ўтказилган, улар XY ни M ва N нуқталарда кесади. $MN=9$. $ABNM$ трапециянинг юзини топинг.

247. ABC учбурчакнинг C ва B учларидан мос равишда AB ва AC томонларига параллел CL ва BH тўғри чизиқлар ўтказилган. Бу параллел чизиқлар учбурчакнинг ички соҳасида A учидан $k\,(k<h_a)$ масофада BC асосга параллел қилиб ўтказилган HL тўғри чизиқ билан H ва L нуқталарда кесишади. $BCLH$ трапеция юзини топинг.

248. Асоси a ва b бўлган трапециянинг диагоналлари кесишган нуқтасидан асосларига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Бу чизиқ трапецияни икки қисмга ажратади. Бу қисмлар юзларининг нисбатини топинг.

249. Кичик асоси $DC=b$, катта асоси $AB=a$ бўлган трапеция кичик асосининг давомида P нуқта шундай олинганки, AP тўғри чизиқ трапецияни иккита тенгдош қисмга ажратади. CP ни топинг.

3. Ихтиёрий тўртбурчаклар

250. $ABCD$ квадрат берилган, унинг томони a. Томонларида $AA'=AA''=BB'=BB''=CC'=CC''=DD'=DD''=k<a$ узунлигида кесмалар олинган. $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ тўғри чизиқлар ўзаро кесишгунча давом эттирилган. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг юзини топинг.

251. Ўтган масаладаги шартга асосланиб, шундай k миқдорни аниқлангки, унда $A''B'B''C'C''D'D''A'$ саккизбурчак мунтазам бўлсин ва унинг юзини топинг.

252. Тўртбурчакнинг кетма-кет томонлари a, b, c ва d, $b>a$, $c>d$ ва $b^2-a^2=c^2-d^2$.

Тўртбурчак диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлишини исбот қилинг.

253. Тўртбурчакнинг томонлари билан диагоналлари орасидаги боғланишни топинг. [a, b, c, d — томонлар, e ва f — диагоналлар.]

254. 253-масаланинг ечимидан фойдаланиб, айланага ички чизилган тўртбурчакнинг диагоналларини томонлари орқали ифодаланг.

255. ABC учбурчакнинг юзи S га тенг. Унинг BD ва CE медианаларининг ўрталари M ҳамда N нуқталар $BMNC$ тўртбурчакнинг юзини топинг.

256. *ABCDEF* олтибурчакда:

$$AB = CD = EF = b,$$
$$BC = DE = FA = a$$

ва ҳамма бурчаклари ўзаро тенг. Олтибурчакнинг юзини ҳисобланг.

III. АЙЛАНАЛАР

257. Икки концентрик айлананинг радиуслари мос равишда 8 ва 15. Радиусларнинг давомида марказдан 17 бирлик масофада бир нуқта олинган. Бу нуқтадан ҳар иккала айланага уринмалар ўтказилган. Бу уринмаларнинг уриниш нуқталари орасидаги масофани топинг.

1 **258.** Радиуси бирга тенг булган O айланадаги OP радиуснинг ўртасидан унга перпендикуляр қилиб AB ватар чизилган. A ва O нуқталар туташтирилиб, O марказдан AO га перпендикуляр қилиб OC радиус ўтказилган ҳамда A ни марказ ва AC ни радиус қилиб, AB ни D нуқтада кесиб ўтувчи ёй чизилган. Сўнгра BP ватардан BD га тенг BQ кесма ажратилиб, бундан қолган PQ бўлагини диаметр қилиб айлана чизилган ва бу айланага B нуқтадан уринма ўтказилган. Бу уринманинг узунлигини топинг.

259. Икки айлана бир-бирига ортогонал (яъни уларнинг кесишган нуқтасидан ўтган уринмалар ўзаро перпендикуляр); айланаларнинг радиуслари 24 ва 7: 1) марказлар орасидаги масофа, 2) умумий ватар, 3) умумий ташқи уринма топилсин.

260. Радиуслари 2 ва 3 булган икки айлана ички уринади. Кичик айлананинг марказидан марказлар чизиғига ўтказилган перпендикуляр катта айланани кесиб ўтади. Кесишиш нуқтасидан кичик айланага уринмалар ўтказилган. Бу уринмалар орасидаги бурчак топилсин.

261. $AB = 6$ диаметр билан чегараланган ярим айланада OA ва OB диаметрларда ички ярим айланалар ясалган. Бу учала ярим айланага уринувчи айлананинг радиусини ҳисобланг.

262. Радиуси r бўлган айланада ўзаро перпендикуляр AB ва CD диаметрлар ўтказилган. C нуқтадан CA радиус билан AKB ёй чизилган $AKBD$ ҳилол (ойча) га тенгдош бўлган квадратнинг томони топилсин.

263. Радиуси $1+\sqrt{5}$ бўлган айланада AB диаметр ва CB уринма берилган. Шундай айлана чизилганки, у AB диаметрнинг A учидан ўтиб, BC га уринади ва унинг маркази биринчи айланада ётади. Унинг радиусини топинг.

264. Радиуси r бўлган айланада $108°$ ли ёйни тортиб турувчи ватар чизилган. Шу ватарнинг узунлигини топинг.

265. Радиуси r бўлган айланага тўртта тенг ички айлана чизилган. Бу айланалар ўзаро ва берилган айланага уринади.

Юзи шу тўрт айлана юзлари йиғиндисига тенг айлананинг радиусини топинг.

266. Радиуси бир бирликка тенг бўлган ва ташқи уринувчи икки айлананинг марказларидан ўтувчи ва радиуси 2 га тенг бўлган учинчи айлана чизилган, маркази кейинги айлана устида бўлган ва илгариги икки айланага уринувчи айланалар ўтказилган, бу айланаларнинг радиуслари топилсин.

267. Айлана, тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиқда ётувчи B нуқта берилган: 1) берилган айлананинг радиуси 1 га тенг, 2) берилган айлана марказидан берилган тўғри чизиққача бўлган масофа 3 га тенг ва 3) берилган айлана марказининг берилган тўғри чизиқдаги проекцияси билан B нуқта орасидаги масофа 10 га тенг. Берилган айланага ва берилган тўғри чизиққа B нуқтада уринувчи доираларнинг юзларини топинг.

268. Радиуслари 4 ва 9 бўлган икки айлана ташқи уринади. Бу икки айланага ва уларнинг умумий ташқи уринмасига уринувчи айланалар радиусларини топинг.

269. Радиуси r бўлган айланага n та тенг ички айлана чизилган; ҳар бир айлана икки ёнидагига ва берилган айланага уринади. Берилган айланага ички чизилган мунтазам n бурчак томони a бўлса, чизилган айланалар радиусларини аниқланг.

270. Ярим айлананинг AB диаметрида C нуқта шундай олинганки, $AC = 2r_1$ ва $CB = 2r_2$; AC ва CB ни диаметр қилиб ярим айланалар чизилган. Бу учта ярим айланага уринувчи айлананинг радиуси (x) ни ҳисобланг.

271. Радиуслари 3 ва 1 бўлган икки айлана ташқи A нуқтада уринади. Уларга ташқи умумий BC уринма ўтказилган. ABC шаклнинг юзини топинг.

272. Айлананинг диаметри учларидан ва айланадаги бошқа бир нуқтадан айланага уринмалар ўтказилган ва улар ўзаро кесиштирилган. Кейинги уринманинг диаметрнинг учларидан ўтказилган уринмалар орасида қолган кесмаси уриниш нуқтасида 12:3 нисбатда бўлинади. Берилган айлананинг радиусини топинг.

273. Радиуси r бўлган ярим айлана учта тенг секторга бўлинган ва бўлиниш нуқталари диаметрнинг бир учи билан туташтирилган. Шундаги икки ватар ва улар орасида қолган ёй билан чегараланган шакл юзини топинг.

274. Радиуслари r ва r_1 бўлган икки айлана $60°$ ли бурчак остида кесишади. Бу икки айланага умумий уринма ўтказилган. Умумий уринма ва берилган икки айланага уринувчи учинчи айлана чизилган, шу айлана радиусини топинг.

275. Радиуси r бўлган доира ташқаридан тўрт тенг доира билан ўралган. Улар ўзаро ва берилган доирага уринади. Шу доиралардан бирининг юзини топинг.

276. Радиуси r булган айлана ташқаридан уч тенг айлана билан уралган. Улар ўзаро ва берилган айланага уринади. Шу айланалардан бирининг радиусини топинг.

277. Радиуслари 2 ва 1 бўлган икки айлананинг марказлари орасидаги масофа 6. Учинчи айлана бу икки айланани тўғри бурчак остида кесади. Унинг маркази берилган айланалар марказларини туташтирувчи тўғри чизиқда ётади. Учинчи айлана билан чегараланган доиранинг юзини топинг.

278. Бир бурчак ичига учта ички айлана чизилган; ўртадаги айлана икки четдаги айланага уринади. Четдаги айланаларнинг радиуслари R ва r га тенг. Ўртадаги айлананинг радиусини топинг.

279. Радиуси $\sqrt{2}$ бўлган айлана иккинчи бир айлананинг ҳамма нуқталаридан тўғри бурчак остида кўринади. Бу айлананинг радиусини топинг.

280. Радиуслари 2 ва $\frac{2}{3}$ бўлган икки айлана ички уринади. Бу икки айланага ва уларнинг марказини туташтирувчи тўғри чизиққа уринувчи учинчи айлананинг радиусини топинг.

281. Радиуси 3 бўлган айлананинг маркази радиуси 5 га тенг бўлган иккинчи айланада ётади. Катта айлананинг маркази (O) дан кичик айланага уринувчи диаметр утказилган. Кичик айлананинг уриниш нуқтасидан утказилган радиуси умумий ватарни K нуқтада кесади. OK нинг узунлигини топинг.

282. Бир айлананинг бир-бирига перпендикуляр булган OA ва OB радиуслари мос равишда A_1 ва B_1 нуқтагача давом эттирилган, бунда $OA = 2{,}5$, $AA_1 = 0{,}5$ ва $BB_1 = 1{,}5$, A_1B_1 туғри чизиқ берилган айланани кесадими? Агар кесса, бу туғри чизиқдан айлана билан ажратилган ватарнинг узунлиги нимага тенг?

283. Радиуси r бўлган айланада бир-бирига перпендикуляр бўлган OA ва OB радиуслар A_1 ва B_1 нуқталаргача давом эттирилган, бунда $AA_1 = BB_1 = \frac{r}{4}$ бўлиб, A_1B_1 тўғри чизиқ айланани M ва N нуқталарда кесади (M нуқта A_1 га яқин). OA устида $OK = \frac{r}{4}$ масофада K нуқта олинган. KM нинг узунлигини топинг.

284. Радиуслари 2 ва 1 бўлган икки айлананинг марказлари орасидаги масофа 5. Учинчи айлананинг маркази аввалги икки айлана марказлари билан бир тўғри чизиқ устида ётади; учинчи айлана катта айланани тўғри бурчак остида ва кичик айланани диаметри бўйича кесади. Учинчи айлана марказининг ҳолатини ва унинг радиусини аниқланг.

285. Радиуслари 2 ва 1 бўлган икки айлананинг марказлари орасидаги масофа 5. Учинчи айлана буларни диаметрлари бўйича кесади. Учала айлананинг марказлари бир тўғри чизиқ устида ётади. Катта айлананинг марказидан учинчи айлананинг марказигача бўлган масофа ва учинчи айлана билан чегараланган доиранинг юзи топилсин.

286. Маркази O ва радиуси 5 бўлган айланада ўзаро перпендикуляр AB ва CD ватарлар ўтказилган. OB радиуснинг давоми билан OA радиус CD ватарни тенг уч бўлакка бўлади. $AB = 8$ бўлса, CD ватарнинг марказдан узоқлиги топилсин.

287. Радиуслари $R = 11$ бўлган икки тенг айлананинг марказлари орасидаги масофа 60. Марказлар чизиғида ётган N нуқтадан иккала айланага ўтказилган уринмалар ўзаро тўғри бурчак ясайди. N нуқтадан марказлар чизиғининг ўртасигача бўлган масофа топилсин.

288. Ярим айлананинг $AB = 4$ диаметрида $AC = \frac{1}{2}$ бўлиш шарти билан C нуқта олинган ва AC ни диаметр қилиб ярим айлана чизилган. Юқорида айтилган иккала ярим айланага ва C нуқтада диаметрга перпендикуляр қилиб чизилган ярим ватарга уринувчи айлананинг радиусини топинг.

289. Радиуси 1 га тенг ва маркази O нуқтада бўлган айлана берилган. Унинг A нуқтасидан уринма ўтказилган. AOB диаметр устида $AP = \frac{7}{6}$ масофада P нуқта олинган ва P нуқтани марказ қилиб радиуси 4 бўлган айлана чизилган. Бу айлана уринмани H нуқтада кесади. Агар H ни B билан туташтирсак, бу тўғри чизиқ радиуси 1 бўлган айланани K нуқтада кесиб ўтади. Радиуси 1 бўлган айлана юзи билан томони AK га тенг бўлган квадрат юзи орасидаги айирмани топинг.

290. Радиуслари 5 ва 3 бўлган икки айлананинг марказлари орасидаги масофа 28. Марказлар чизиғи устида кичик айлана марказидан 5 бирлик масофада ётган нуқтадан иккала айланага ўтказилган кесувчи айланаларда тенг ватарлар ҳосил қилади. Марказлардан бу ватарларгача бўлган масофалар топилсин

291. Радиуслари $\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1, 3 - \sqrt{3}$ бўлган уч айлана жуфт-жуфти билан ташқи уринади. Шу айланалар орасида қолган эгри чизиқли учбурчакнинг юзини топинг.

292. Тўғри бурчакнинг бир томонида тўғри бурчак учидан 6 ва 24 масофада икки нуқта олинган. Бу икки нуқтадан ўтиб, тўғри бурчакнинг иккинчи томонига уринувчи айлананинг радиусини топинг ва тўғри бурчак учидан уриниш нуқтасигача бўлган масофани ҳисобланг.

293. Марказлари O ва O_1 бўлган айланаларнинг радиуслари r ва R бўлсин. Уларнинг марказлари орасидаги масофа d, айланалар ташқарисида A нуқта олинган ва ундан айланага тенг уринмалар ўтказилган. Бу A нуқтадан марказлар чизиғига AK перпендикуляр туширилган. OK ва O_1K кесмаларнинг узунлиги топилсин.

294. $AB=1$ кесмани ватар деб олиб, унинг учларидан икки ёй ўтказилган. Бунда ҳосил бўлган сегментларнинг бирига ички чизилган ҳамма бурчаклар $135°$ га, иккинчи сегментга ички чизилган ҳамма бурчаклар $120°$ га тенг. Бу икки ёй орасида қолган шаклнинг [ҳилол (ойча)] юзини топинг.

295. Радиуси 4 бўлган айланага AB ватар ўтказилган. Ватар узунлиги билан B нуқтадан, A дан ўтказилган уринмагача бўлган масофанинг йиғиндиси 6 га тенг. AB ватарнинг узунлиги топилсин.

296. Радиуслари 10 ва 5 бўлган икки айлананинг марказлари орасидаги масофа 113. Марказлар чизиғи устида шундай нуқта топиш керакки, ундан иккала айлана тенг бурчак остида кўринсин ва бу нуқтадан кўринган ватарлар узунликлари аниқлансин.

297. Радиуси r бўлган квадрант $\left(\frac{1}{4}\text{ доира}\right)$ нинг радиусларида иккита ички ярим доира чизилган. Квадрантнинг бу ярим доиралар ташқарисида қолган қисмининг юзи топилсин.

298. $AB=2r$ диаметр билан чегараланган ярим айлананинг N нуқтасидан уринма ўтказилган, бу уринма диаметр давомини P нуқтада кесади. $AN=2NP$ бўлса, AN нинг диаметрдаги проекцияси топилсин.

299. Радиуси r бўлган айлана устида ўзгармас узунликдаги ватарнинг A ва B учлари сирғаниб ҳаракатланса, ватарда олинган ихтиёрий C нуқта айлана чизади. Агар $AC=a$ ва $BC=b$ бўлса, берилган айлана билан C нуқта чизган айлана орасидаги ҳалқанинг юзини топинг.

300. $AB=R$ кесма радиуси R бўлган айлананинг A нуқтасида унга доимо уринма бўлган ҳолда узлуксиз ҳаракат қилади. Уриниш нуқтаси айлана устида $30°$ га ҳаракатланган деб фараз қилиб, AB кесма чизган шаклнинг юзини топинг.

301. Радиуси R бўлган айлананинг O марказидан AOB диаметр ўтказилган ва AO радиуснинг ўртаси N нуқтадан шундай ватар ўтказилганки, бу ватар OB радиуснинг ўртаси M нуқтадан тўғри бурчак остида кўринади. Марказдан шу ватаргача бўлган масофа топилсин.

302. Радиуси R ва $\frac{R}{4}$ бўлган икки айлана A нуқтада ички уринади. Катта айлананинг марказидан кичик айланага уринувчи BC диаметр ва A уриниш нуқтаси орқали BA ҳамда CA тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил бўлган ABC учбурчак юзини топинг.

303. Марказлари A, B ва C нуқталарда радиуслари a, b ва c бўлган учта айлана жуфт-жуфти билан ташқи уринади. A ва B марказли айланаларга ўтказилган умумий уринма, A ва C марказли айланаларга ўтказилган умумий уринмалар ўзаро параллел. B ва C нуқталардан, A марказли айлананинг A ва B

айланаларнинг умумий уринмасига перпендикуляр бўлган диаметригача бўлган масофалар p ва q. Бунда $pq = 2a^2 - 8bc$ бўлишини исбот қилинг.

304. Маркази O нуқтада ва радиуси r бўлган айланада (A нуқтадан турли томонда) AB ва AC ватарлар ўтказилган. Бунда AB ватар $60°$ ли ёйни ва AC ватар $90°$ ли ёйни тортиб туради. A, O нуқталар ва AB ватарнинг ўртаси M нуқтадан айлана ўтказилганда бу айлана BC ватарни K ва P нуқталарда кесиб ўтади. AK ва AP ни топинг.

305. Диаметри $AB = 2R$ бўлган ярим айлананинг диаметрига перпендикуляр қилиб OC радиус ўтказилган. AC ёйда шундай M нуқта топиш керакки, унинг диаметрдаги P проекцияси билан MB ва CO тўғри чизиқлар кесишган D нуқтани туташтирувчи тўғри чизиқ MB га перпендикуляр бўлсин.

306. Маркази O ва радиуси R бўлган айланада марказдан $OA = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ масофада CD ватар ўтказилган. OC радиус ташқи томонга $CE = 2R$ га давом эттирилган ва C, D, E нуқталар орқали айлана ўтказилган. 1) Шу айлана радиусини топинг, 2) CDE айлананинг E нуқтасида ўтказилган уринма қаралаётган иккала айланага умумий уринма булишини кўрсатинг.

307. Радиуслари R ва r бўлган икки айлана ташқи уринади. Уларнинг уриниш нуқтасидан умумий ташқи уринмагача бўлган масофани топинг.

308. Радиуслари R ва r бўлган икки айлана ташқи уринади. Уларнинг марказлар чизигини диаметр қилиб учинчи айлана чизилган. Сўнгра аввалги икки айланага ташқи, учинчи айланага эса ички уринувчи тўртинчи айлана чизилган. Унинг радиуси x ни топинг.

309. O марказли айлана иккинчи бир айлананинг O_1 марказидан утади. Иккала айланага утказилган умумий ташқи уринмалар O марказли айланага A ва B нуқталарда уринади. AB тўғри чизиқ O_1 марказли айланага уринишини исбот қилинг.

310. Бир айлананинг радиуси иккинчи айлананинг радиусидан икки марта катта; уларнинг бири иккинчисининг ташқарисида ётади. Уларнинг ички умумий уринмалари ўзаро $60°$ ли бурчак ясайди. Ташқи умумий уринманинг ички умумий уринмага нисбатини топинг.

311. Учта айлана берилган. Улар жуф-жуфти билан бирбирига ташқи уринади; уларнинг радиуслари r_1, r_2, r_3. Учала айланага уринувчи айлананинг радиусини топинг.

312. Радиуслари R ва r бўлган икки айлана ташқи равишда A нуқтада уринади. Радиуси r бўлган айланада A нуқтага диаметрал қарама-қарши бўлган B нуқта олинган ва бу нуқтадан уринма ўтказилган. Берилган иккала айланага ва B нуқтадан ўтувчи уринмага уринувчи айлананинг радиусини ҳисобланг.

313. Берилган икки нуқтагача масофаларининг $m:n$ ($m \neq n$) нисбати ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни айланадир, $AB = a$ фараз қилиб, шу айлананинг радиусини топинг.

314. Радиуслари r, r_1 ва R бўлган учта айлана жуфт-жуфти билан ташқи уринади. Аввалги икки айланага умумий ташқи уринмадан учинчи айлана ажратган ватарнинг узунлигини топинг.

315. Айлана радиусининг ўртасидан радиус билан $45°$ ли бурчак ташкил этувчи икки тўғри чизиқ ўтказилган. Берилган айланага ва ясалган икки тўғри чизиққа уринувчи ҳамма айланаларнинг радиусларини ҳисобланг.

316. Радиуслари R ва r бўлган икки айлана C нуқтада уринади. Уларга AB умумий ташқи уринма ўтказилган. A ва B уриниш нуқталари. ABC учбурчакнинг томонларини ҳисобланг.

317. Айлананинг маркази O нуқтадан $2R$ масофада ётувчи A нуқтадан айланага шундай ABN кесувчи ўтказилганки, BN ни диаметр қилиб, айлана чизилганда, у AO га P нуқтада уринади. AP ва BN ни аниқланг.

318. A ва B нуқталарни марказ қилиб, $AB = R$ радиус билан икки айлана чизилган. Булар ўзаро K ва H нуқталарда кесишади. Бу сўнгги икки нуқтадан тўртта HAL, HBM, KAP ва KBN диаметрлар ўтказилган. Сўнгра K марказдан KP радиус билан PN ёй, H марказдан HL радиус билан LM ёй чизилган. Бундан овал шакли ҳосил бўлган. Унинг юзини топинг.

319. Айлананинг бир нуқтасидан чиққан иккита ватарнинг узунликлари a ва b. Улардан бирининг (a) ўртасидан иккинчиси (b) гача бўлган масофа d маълум бўлса, айлананинг радиусини топинг.

320. Маркази O нуқтада бўлган айлана диаметрининг давомида ўзгарувчи M нуқта олинган. Бу нуқтадан айланага уринма ўтказилган. Уринмада шундай P нуқталарнинг геометрик ўрнини топиш керакки, бунда $PM = MO$ бўлсин.

321. Айлана ичида олинган нуқтадан бир-бирига перпендикуляр иккита ватар ўтказилган. Уларнинг учларини туташтиришдан ҳосил бўлган тўртбурчакда бир-бирига қарама-қарши ётган томонлар квадратларининг йиғиндиси диаметрнинг квадратига тенглиги исбот қилинсин.

322. AB ёйнинг ўртаси (C нуқта) дан ихтиёрий икки тўғри чизиқ ўтказилган. Булар айланани D ва E нуқталарда ҳамда AB ватарни G ва F нуқталарда кесади. $DEFG$ тўртбурчак ташқарисига айлана чизиш мумкинлигини исбот қилинг.

323. Доира диаметрининг A ва B учларидан AC ва BD ватарлар ўтказилган. Улар доира ичида P нуқтада кесишади. $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$ эканини исбот қилиш керак.

324. Бир бурчакнинг ичига уч айлана чизилиб, уларнинг икки четдагилари ўртадагининг марказидан ўтади. Четдагиларнинг радиуслари R ва r бўлса, ўртадаги айлананинг радиусини топинг.

325. Диаметри AB га тенг бўлган айлана берилган. Бу айлананинг A ва B нуқталарида уринмалар утказилган. Бу уринмалар учинчи ўзгарувчи уринма билан P ва N нуқталарда кесишади: 1) $AP \cdot BN$ кўпайтма ўзгармас миқдор бўлишини кўрсатинг, 2) PN^2 нинг минимумини аниқланг.

326. Радиуси R бўлган айланага ташқи A нуқтадан AB ва AC уринмалар ўтказилган. B дан AC га перпендикуляр қилиб $BD = a$ чизилган. AB, AC ва BC ни ҳисобланг.

327. Марказлари O ва O_1 бўлган икки айланада бир-бирига перпендикуляр икки радиус OA ва O_1A_1 ўтказилган. Сўнгра AA_1 ва OO_1 кесмалар M ва I нуқталарда тенг иккига бўлинган. Берилган айланаларнинг радиуслари R ва R_1 бўлса, MI кесма узунлигини топинг.

IV. АЙЛАНА ВА КЎПБУРЧАКЛАРНИНГ БИРГАЛИКДА ҚАРАЛИШИ

1. Айлана ва учбурчак

328. Томонлари a бўлган мунтазам учбурчакка ички доира чизилган. Сўнгра шу учбурчак ичига биринчи доирага ва учбурчак томонларига уринувчи учта доира чизилган. Яна шу хилда кейинги доира билан учбурчак томонларига уринувчи учта доира чизилган ва ҳоказо...

Шу ҳамма доиралар юзларининг йиғиндисини топинг.

329. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3 ва 4. Кичик катетнинг ўртасидан ўтиб, гипотенузанинг ўртасига уринадиган, маркази эса иккинчи катет устида жойлашган доиранинг юзини топинг.

330. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана гипотенузани a ва b кесмаларга бўлади. Учбурчак юзини топинг.

331. Ҳар қандай учбурчакда $bc=2Rh_a$ бўлишини исбот қилинг.

332. Тенг ёнли ABC учбурчакда

$$BC = 24, \ AB = AC = 13.$$

AB га B нуқтада, AC га C нуқтада уринувчи айлананинг радиусини топинг.

333. Учбурчакка ташқи-ички чизилган айлана[1] радиусини шу учбурчак томонлари орқали ҳисобланг.

Қуйидаги тенгликлар (334—341) исбот қилинсин.

334. $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$

---

[1] Учбурчакнинг ташқарисида бўлиб, унинг бир томонига ва қолган икки томонининг давомларига уринган айлана *ташқи-ички чизилган айлана* деб аталади.

335. $S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$.

336. $S = rr_a \cdot \sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}}$.

337. $S = \frac{rr_a(r_b + r_c)}{a}$.

338. $S = \frac{arr_a}{r_a - r}$.

339. $S = \frac{ar_b r_c}{r_b + r_c}$.

340. $S = \frac{(a-b)r_a r_b}{r_a - r_b}$.

341. $S = \frac{(a+b)rr_c}{r + r_c}$.

342. ABC учбурчакка ташқи-ички уринувчи айлана чизилган. Бу айлана AC ва AB томонларнинг давомларига P ва N нуқталарда уринади. $AB = 13$, $AC = 20$ ва $BC = 21$ бўлса, APN учбурчакнинг юзини топинг.

343. Тенг ёнли учбурчак асосини ватар қилиб тенг ёнларга уринувчи айлана чизилган. Учбурчакнинг асоси 80 ва баландлиги 9 бўлса, айлананинг узунлигини топинг.

344. Радиуси 2 бўлган айлананинг маркази тўғри бурчакнинг бир томонида ва унинг учидан 23 бирлик узоқликда ётади. Бу айланага ва тўғри бурчакнинг томонларига уринувчи икки айлана чизилган. Уларнинг радиусларини ҳамда учлари шу айланалар марказларидан иборат бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

345. Томонлари a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакка ички айлана чизилган. Маркази учбурчак учида, радиуси учбурчак томонининг ярмига тенг бўлган иккинчи айлана чизилган. Иккала айлана умумий қисмининг юзини топинг.

346. Катетлари a ва b, гипотенузаси c бўлган тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини шу томонлар орқали ифода қилинг.

347. Учбурчакнинг бир томони a, қолган икки томонининг айирмаси l ва шу томонларга туширилган мос баландликларнинг айирмаси m. Бу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

348. Ҳар қандай учбурчакда ҳам $rr_a = (p-b)(p-c)$ муносабат тўғри эканини кўрсатинг.

349. Ҳар қандай учбурчакда ҳам $Rr_a = \frac{abc}{4(p-a)}$ муносабат тўғри бўлишини исботланг.

350. Ушбу $a^2 + (r_a - r)^2 = 4R(r_a - r)$ тенгликни исбот қилинг.

351. Исбот қилинг: $r_a r_b - rr_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

352. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b. Тўғри бурчакнинг учидан гипотенузага туширилган перпендикулярнинг гипотенузадан ажратган кесмаларини диаметр қилиб ички ярим айланалар чизилган. Катетларнинг бу ярим айланалар ичида қолган қисмларини топинг.

353. Тўғри бурчакли учбурчакнинг учларини марказлар қилиб шундай айланалар чизилганки, улардан марказлари ўткир бурчаклар учларида бўлганлари ўзаро ташқи, маркази тўғри бурчак учида бўлган айлана билан эса ички уринади. Агар учбурчакнинг гипотенузаси 10, бир ўткир бурчаги 30° бўлса: 1) айланаларнинг радиусларини, 2) учлари уриниш нуқталаридан иборат бўлган эгри чизиқли учбурчакнинг юзини топинг.

354. Исбот қилинсин: $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$.

355. Ҳар қандай учбурчакда $Rr = \frac{abc}{4p}$ бўлади. Шуни исбот қилинг.

356. $p^2r = r_a r_b r_c$ муносабатни келтириб чиқаринг.

357. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$ муносабатни исбот қилинг.

358. Ярим доиранинг диаметри $2r$ да тенг томонли учбурчак ясалган. Учбурчакнинг доира ташқарисида қолган қисмининг юзини топинг.

359. Томонлари a бўлган тенг томонли учбурчакнинг томонларини диаметр қилиб ички ярим доиралар чизилган. Учбурчак ичида ҳосил бўлган эгри чизиқли учбурчакнинг юзини топинг.

360. Тенг томонли учбурчакка радиуси r бўлган ташқи айлана чизилган. Берилган айланага ва учбурчакнинг икки томонига ёки уларнинг давомига уринувчи учта айлананинг радиусларини топинг.

361. Исбот қилинсин:

$$h_a + h_b + h_c = \frac{ab + bc + ac}{2R}.$$

362. Томонлари 13, 14 ва 15 га тенг бўлган учбурчакка ички айлана чизилган. Шу айлана билан концентрик ва радиуси 5 га тенг бўлган иккинчи айлана чизилса, учбурчак томонларини кесиб ўтади. Шу айлананинг учбурчак томонларидан ажратган ватарларининг узунликларини топинг.

363. Томонлари a, b ва c бўлган учбурчак берилган. Шундай айлана чизилганки, у айлана учбурчакнинг a ва b томонларига ички уринади ва унинг маркази учбурчакнинг учинчи томонида ётади. Шу айлана радиусини топинг.

364. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси r, гипотенузага уринувчи ташқи-ички чизилган айлананинг радиуси r'. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзини топинг.

365. ABC учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланаларнинг радиуслари R ва r ҳамда учбурчакнинг ярим периметри p берилган. Томонлари $AB+BC$, $AB+AC$ ва $AC+BC$ булган янги учбурчак ясалмоқчи. Бундай учбурчакни ҳамма вақт ясаш мумкинми? Унинг юзини ва унга ички чизилган айлананинг радиусини топинг.

366. Томонлари 18 бўлган мунтазам учбурчакнинг икки томонига ва бу учбурчакка ички чизилган айланага уринувчи доиранинг юзини топинг.

Қуйидаги тенгликларни исбот қилинг:

367. $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$.

368. $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$.

369. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг диаметрини учбурчакнинг бир бурчагидан ўтказилган баландлиги, медианаси ва биссектрисаси орқали ифода қилинг.

370. Томонлари 13, 14 ва 15 бўлган учбурчакка ички чизилган айлана маркази билан катта томонига ташқи ички чизилган айлана маркази орасидаги масофа топилсин.

371. Учбурчакка ички чизилган айлана учбурчак бир томонини уриниш нуқтасида m ва n бўлакларга ажратади. Бўлакларга ажралган томон қаршисидаги бурчак 60° га тенг, шу учбурчак юзини топинг.

372. Радиуслари 1 ва 2 бўлган икки айлана ташқи уринади. Уларнинг уриниш нуқтасидан иккала айланага умумий кесувчи ўтказилган. Кесувчидан катта айлана ажратган ватар кичик айлананинг радиусига тенг. Томонлари, кесувчидан кичик айлана ажратган ватарга тенг бўлган мунтазам учбурчакнинг юзини топинг.

373. Томонлари $\sqrt{39}$ бўлган мунтазам учбурчакка ички айлана чизилган. Учбурчакнинг бир томонини ватар қилиб, шу айлананинг юзини тенг иккига бўлувчи айлана чизилган. Бу айлананинг радиусини топинг.

374. Томонлари 17, 17 ва 16 бўлган учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар марказлари орасидаги масофа топилсин.

375. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3 ва 4. Бунга ички ва ташқи чизилган айланалар марказлари орасидаги масофа топилсин.

376. Тенг ёнли тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг AB гипотенузаси $BK=AB$ қадар узайтирилган. K нуқта C нуқта билан туташтирилган. C ни марказ қилиб, BC радиус билан чизилган айлана CK ни N нуқтада кесади. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети r бўлса, NK нинг узунлигини топинг.

377. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлик h ва ички чизилган айлананинг радиуси r маълум. Уч-

бурчакнинг томонлари ва ташқи чизилган айлананинг радиуси топилсин. Қандай шартда ташқи айлананинг маркази ички айланада ётади?

378. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 2 a ва ички айлананинг радиуси r маълум. Ташқи чизилган айлананинг радиуси R топилсин. a ни ўзгарувчи, r ни ўзгармас ҳисоблаб, R нинг энг кичик қиймати аниқлансин.

379. Тўғри бурчакли учбурчак катетлари 3 ва 4 га тенг. Айлана шу учбурчакнинг ҳар бир учидан 60° ли бурчак остида кўринади. Шу айлана марказининг ҳолатини ва радиусининг узунлигини аниқланг.

380. Учбурчакнинг a томони 45° ли бурчак қаршисида ётади. Учбурчакка ташқи айлана чизилган. Шу айланага ташқи чизилган мунтазам олтибурчакнинг юзини топинг.

381. Учбурчакнинг a томони 30° ли бурчак қаршисида ётади. Учбурчакка ташқи чизилган айланага ички чизилган мунтазам саккизбурчакнинг юзини топинг.

382. AB диаметр билан чегараланган ярим айланага $AC=a$, $AD=b$ ватарлар чизилган. Диаметрда ACD учбурчакнинг A бурчагидан ўтказилган баландлик (h) нинг узунлиги қадар AK кесма олинган. K нуқтадан диаметрга чиқарилган перпендикуляр айланани K' нуқтада кесади. AK' кесманинг узунлигини топинг.

383. $\frac{h_a+h_b}{r_c}+\frac{h_a+h_c}{r_a}+\frac{h_c+h_a}{r_b}=6$. Бу муносабатнинг тўғрилиги исбот қилинсин.

384. Қуйидаги муносабатнинг тўғрилигини исбот қилинг:

$$\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}=\frac{r_br_c+r_cr_a+r_ar_b}{h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b}.$$

385. $r_a+r_b+r_c=4R+r$. Бу муносабатнинг тўғрилиги исбот қилинсин.

386. Учбурчакнинг бир томонида квадрат, иккинчи томонида тенг томонли учбурчак, учинчи томонида ярим доира ясалганда уларнинг юзлари ўзаро тенг бўлса, учбурчак томонлари ўзаро қандай нисбатда бўлади?

387. Радиуси $18\frac{1}{8}$ булган айланага ички чизилган ўткир бурчакли учбурчакнинг икки томони 25 ва 29 га тенг. Учбурчакнинг учинчи томонини ва юзини топинг.

388. Қуйидаги муносабатларнинг тўғрилигини исбот қилинг:
$a(k_b+k_c)+b(k_c+k_a)+c(k_a+k_b)=2pR$.

389. $4(k_bk_c+k_ak_c+k_ak_b)=(bc+ac+ab)-4R(R+r)$.

390. Учбурчакка ташқи-ички чизилган айланаларнинг томонлар билан уриниш нуқталарини учбурчакнинг уларга қарши ётган учлари билан туташтирувчи тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади. Буни ҳисоблаш билан исбот қилинг.

391. Учбурчак томонларининг ўрталари тўғри чизиқлар билан туташтирилса, янги учбурчак ҳосил бўлади. Унга ички чизилган айлана марказидан берилган учбурчак томонларигача бўлган масофалар аниқлансин.

392. Учбурчакка ташқи-ички чизилган айланаларнинг уриниш нуқталарини учбурчак учлари билан туташтирувчи тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан учбурчак томонларигача бўлган масофалар топилсин.

393. Учбурчакнинг ортомаркази, оғирлик маркази ва унга ташқи чизилган айлананинг марказлари бир тўғри чизиқ устида ётишини ҳисоблаш билан кўрсатинг. Оғирлик маркази ортомарказ билан ташқи айлана маркази орасидаги масофани қандай нисбатда бўлишини топинг.

394. Учбурчакнинг оғирлик маркази, ички чизилган айлана маркази ва учбурчакка ташқи-ички чизилган айланаларнинг томонлар билан уриниш нуқталарини учбурчак учлари билан туташтирувчи трансверсал чизиқларнинг кесишиш нуқталари бир тўғри чизиқ устида ётишини ҳисоблаш йули билан кўрсатинг. Оғирлик маркази айтилган бошқа нуқталар орасидаги масофани қандай нисбатда бўлишини топинг.

395. Учбурчакда: 1) оғирлик маркази, 2) ички чизилган айлана маркази, 3) учлари учбурчак томонларининг ўрталаридан иборат бўлган учбурчакка тегишли ички айлана маркази бир тўғри чизиқ устида ётишини ҳисоблаш йўли билан кўрсатинг. Оғирлик маркази қолган нуқталар орасидаги масофани қандай нисбатда бўлишини топинг.

396. Икки айлана A ва B нуқталарда кесишади. A дан айланаларни C ва D нуқталарда кесиб ўтадиган кесувчи ўтказилган; CBD бурчак A нуқтадан ўтказилган ҳар қандай кесувчи учун ўзгармас миқдор эканлиги исбот қилинсин.

397. Учбурчакнинг оғирлик маркази G билан ички чизилган айлана маркази O_1 орасидаги масофани аниқланг.

398. $9\cdot GO_1^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr$ тенгликни исбот қилинг.

399. Учбурчакнинг ортомаркази билан ташқи чизилган айлана маркази орасидаги масофани топинг.

400. Ташқи чизилган айлананинг радиуси R ва ички чизилган айлананинг радиуси r буйича ташқи айлана маркази O ва ички айлана маркази O_1 орасидаги масофани топинг.

401. Учбурчакка ички чизилган айлана маркази O_1 билан ортомарказ H орасидаги масофани топинг.

402. Учбурчакнинг A учи билан унинг қаршисида ётган томонга тегишли ташқи-ички чизилган айлана маркази Ω_a орасидаги масофа топилсин.

403. Ташқи-ички айлана маркази Ω_a билан ортомаркази H орасидаги масофа топилсин.

404. $9\cdot G\Omega^2 = p^2 + 6r_a^2 - r^2 + 4R(3r_a - r)$ исбот қилинсин.

405. Ички чизилган айлана маркази Ω билан тўққиз нуқта айланасининг маркази O_9 орасидаги масофа аниқлансин.

406. Тўққиз нуқта айланасининг маркази O_9 билан ташқи-ички чизилган айлана маркази Ω_a орасидаги масофа топилсин.

407. ABC учбурчакнинг A учи билан унинг қаршисида ётган томонга уринувчи ташқи-ички чизилган айлана маркази Ω_a орасидаги масофа топилсин.

408. $\Omega_a\Omega_b^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2$ эканлиги исбот қилинсин.

409. $GO_1^2 + G\Omega_a^2 + G\Omega_b^2 + G\Omega_c^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

410. $HO_1^2 + H\Omega_a^2 + H\Omega_b^2 + H\Omega_c^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

411. Тўққиз нуқта айланаси ички чизилган айланага ва ташқи-ички чизилган учта айланага уринишини 405 ва 406-масалаларнинг натижалари сифатида келтириб чиқаринг (Фейербах теоремаси).

412—417-тенгликларнинг тўғрилиги исбот қилинсин.

412. $\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a + r_b + r_c}\right) = 4$.

413. $a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$.

414. $O_1\Omega_a \cdot O_1\Omega_b \cdot O_1\Omega_c = 16R^2r$.

415. $A\Omega_a \cdot B\Omega_b \cdot C\Omega_c = 4Rp^2$.

416. $\Omega_b\Omega_c \cdot \Omega_c\Omega_a + \Omega_a\Omega_b = 16R^2p$.

417. $\Omega_b\Omega_c^2 + \Omega_c\Omega_a^2 + \Omega_a\Omega_b^2 = 8R(r_a + r_b + r_c)$.

418. Ташқи чизилган айланадаги ҳар қандай нуқтадан учбурчак томонларига туширилган перпендикулярларнинг асослари бир тўғри чизиқ устида (Симпсон тўғри чизиғида) ётади. Шуни исбот қилинг.

Қуйидаги 419—423-тенгликларни исбот қилинг:

419. $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2$.

420. $3\,(d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 4 \cdot OH^2$.

421. $h'_a + h'_b + h'_c = 2(R + r)$ ёки $k_a + k_b + k_c = R + r$.

422. $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 4R^2 + h'^2_a + h'^2_b + h'^2_c$.

423. $h'_bh'_c + h'_ch'_a + h'_ah'_b = 2R(h''_a + h''_b + h''_c)$.

424. Учбурчак баландликларининг асосларини тўғри чизиқлар билан туташтирамиз, биринчи учбурчакнинг баландликлари ҳосил бўлган янги учбурчакнинг биссектрисалари булади. Шуни исбот қилинг.

425. Учбурчакка ички чизилган айлана маркази билан учбурчак учларини туташтирувчи кесмалар узунликларини топинг.

426. Тенг томонли ABC учбурчакка ташқи чизилган айланадаги ихтиёрий нуқтани учбурчакнинг учлари билан туташтирувчи кесмалардан энг каттаси қолган иккитасининг йиғиндисига тенг эканлиги исбот этилсин.

427. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг тўғри бурчаги учи (A) дан BC гипотенузага ($AD \perp BC$) баландлик туширилганда ABD ва ACD учбурчаклар ҳосил бўлади. ABD учбурчакка r_1 радиусли ва ADC учбурчакка r_2 радиусли ички айлана чизилган. ABC учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

428. $a^2 + h_a'^2 = b^2 + h_b'^2 = c^2 + h_c'^2 = 4R^2$ тенгликни исбот қилинг.

429. $4(k_a^2 + k_b^2 + k_c^2) = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ тенгликни исбот қилинг.

430. Квадрат икки диагонали билан тўртта учбурчакка бўлинади. Шу учбурчакларга ташқи ва ички айланалар чизилган. Бу айланаларнинг марказларини туташтириш натижасида квадратлар ҳосил бўлади. Шу квадратлар юзларининг нисбатини топинг.

Қуйидаги 431—435-тенгликлар исбот қилинсин.

431. $S = 2R^2 \cdot \frac{h_a h_b h_c}{abc}$.

432. $r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = p^2$.

433. $r^3 = \frac{abc}{(a+b+c)^3} h_a h_b h_c$.

434. $\frac{R}{r} = \frac{1}{4}\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right)$.

435. $a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{p}$.

436. Маркази O ва радиуси R бўлган айлана берилган. Унинг бир OI радиусини диаметр қилиб иккинчи айлана чизилган ва O нуқтадан биринчи айлана билан B нуқтада, иккинчи айлана билан A нуқтада учрашувчи кесувчи ўтказилган. $OA = \frac{R}{4}$, A ва B нуқталарда айланаларга ўтказилган уринмалар C нуқтада кесишади. ABC учбурчакнинг AC томонига туширилган баландлигини ва AC томонини топинг.

437. $\frac{bc}{A\Omega_a^2} + \frac{ac}{B\Omega_b^2} + \frac{ab}{C\Omega_c^2} = 1$. Исбот қилинг.

438. $\frac{A\Omega^2}{bc} + \frac{B\Omega^2}{ac} + \frac{C\Omega^2}{ab} = 1$. Исбот қилинг.

439. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига уринувчи ташқи-ички чизилган айлананинг радиуси r. Периметри тўғри бурчакли учбурчак периметрига тенг бўлган квадрат юзини аниқланг.

Қуйидаги муносабатлар исбот қилинсин:

440. $S = r_a r_b \sqrt{\frac{\Omega_a \Omega_b^2}{(r_a + r_b)} - 1}$.

441. m_a медиананинг исталган нуқтасидан b ва c томонларгача бўлган масофалар шу томонларга тескари пропорционалдир.

442. $a^2+b^2+c^2+r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=16R^2$.

443. $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{2}{h_a}$.

444. $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$.

445. Радиуси R бўлган айлана ташқарисига бир бурчаги 120° бўлган тенг ёнли учбурчак чизилган. Унинг томонларини аниқланг.

446. Радиуси 5 *см* ва 2 *см* бўлган икки айлананинг умумий ташқи уринмаси умумий ички уринмасидан $1\frac{1}{2}$ марта катта. Бу айланалар марказлар чизиғининг узунлигини топинг.

447. Сегментнинг периметри p га тенг бўлиб, ёйи 120° га тенг. Сегментнинг юзини топинг.

448. $\frac{(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)}{r_br_c+r_cc_a+r_ar_b}=4R$.

449. $\sqrt{\frac{rr_br_c}{r_a}}+\sqrt{\frac{rr_ar_c}{r_b}}+\sqrt{\frac{rr_ar_b}{r_c}}=p$.

450. ABC учбурчакнинг A учидан ўтказилган медианасининг давоми ташқи чизилган айланани A_1 нуқтада кесади. Шу AA_1 кесманинг узунлигини топинг.

451. Тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлана радиуси r, тенг томонларидан бирига уринувчи ташқи-ички чизилган айлана радиуси r'. Тенг ёнли учбурчак асосини топинг.

452. Ушбу тенгликни исбот қилинг:

$$k_a=\frac{r+r_b+r_c-r_a}{4}.$$

453. Ушбу тенгликни исбот қилинг:

$$\frac{R}{2r}=\frac{p^2}{h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b}.$$

454. ABC учбурчакнинг A учидан ва AC томонининг ўртаси O нуқтадан BC томонга ёки унинг давомига уринувчи айланалар ўтказилган. Учбурчакнинг томонлари: $AC=30$, $AB=26$ ва $BC=28$. Бу айланаларнинг радиусларини топинг.

455. Марказлари O_1, O_2, O_3 ва радиуслари R_1, R_2 ва R_3 бўлган уч айлана жуфт-жуфти билан ташқи уринади. $O_1O_2O_3$ учбурчак юзи S га тенг; a, b, c унинг томонлари, уларнинг уриниш нуқталарини туташтирувчи учбурчакнинг юзи S_a га тенг.

$$\frac{S_a}{S}=1-\frac{R_1^2}{bc}-\frac{R_2^2}{ac}-\frac{R_3^2}{ab}=2\frac{R_1R_2R_3}{abc}$$

эканини исбот қилинг.

456. Исбот қилинг:

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}Rh_ah_bh_c}.$$

457. Исбот қилинг:

$$\frac{l_a' l_b' l_c'}{r} = \frac{abc}{p}.$$

458. NBM тенг томонли ва NAM тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчаклар умумий $NM = b$ асосга эга бўлиб, тенг ёнли учбурчак тўғри бурчагининг A учи тенг томонли учбурчакнинг BO баландлигида ётади. B нуқтадан BN радиус билан NCM ёй ва A нуқтадан AN радиус билан NDM ёй чизилган. Ҳосил бўлган $NCMD$ ойчанинг юзи топилсин.

459. Томонлари $2a$ бўлган мунтазам учбурчак учларидан радиуслари a бўлган учта айлана чизилган. Сўнгра бу уч айланага уринувчи яна икки айлана чизилган. Уларнинг радиусларини топинг.

460. Мунтазам ABC учбурчак берилган; BC га нисбатан A нуқтага симметрик M нуқта олиб, шу нуқтадан BC радиус билан айлана чизилган. Бу айланада ихтиёрий P нуқта олинса, бунда: $PA^2 = PB^2 + PC^2$ бўлади. Шуни исбот қилинг.

461. Исбот қилинг:

$$k_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + k_b\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + k_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 3R.$$

462. Томонлари $2a$ бўлган мунтазам ABC учбурчакка икки ёй чизилган. Улар A ва B нуқталардан ўтиб, бири BC ва CA томонларга уринади, иккинчиси A ва B бурчакларнинг биссектрисаларига A ва B нуқталарда уринади. Бунда: 1) бу ёйларнинг ҳар бирида неча градус борлигини, 2) ёйларнинг радиусларини, 3) ёйлар орасида қолган юзни аниқланг.

Ушбу (463—465) муносабатлар исбот қилинсин:

463. $\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}.$

464. $\frac{C\Omega \cdot C\Omega_c}{B\Omega \cdot B\Omega_b} = \frac{b}{c}.$

465. $A\Omega \cdot A\Omega_a = bc.$

466. Берилган иккита ABC ва $A'B'C'$ учбурчакда $\angle B = \angle C$; $\angle A = 3\angle B$; $\angle B' = \angle C'$; $2\angle A = 3\angle B'$; $BC = A'B' = a$. Бу учбурчакларга ташқи чизилган айланалар радиусларининг тенглиги исбот қилинсин ва бу радиуслар ҳисоблансин.

467. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи 6 га тенг. Катетлардан бирига уринувчи ташқи-ички чизилган айлана радиуси 3 га тенг. Учбурчак томонларини топинг.

468. $a\sqrt{x^2 - a^2} + b\sqrt{x^2 - b^2} + c\sqrt{x^2 - c^2} = \frac{2abc}{x}$ тенгламани геометрик муҳокама йўли билан ечинг.

469. Тенг ёнли ABC учбурчакда $BC = 6$, $AB = AC = 10$. Учбурчакка ички айлана чизилган. У учбурчакнинг асосига

D нуқтада, AB томонига E нуқтада уринади. E ва D тўғри чизиқ AC нинг давоми билан H нуқтада кесишади. AH кесманинг узунлигини топинг.

470. ABC учбурчак A бурчагининг ички биссектрисаси қарши томонни D нуқтада ва ташқи айланани E нуқтада кесади. $AE:ED$ нисбатни аниқланг.

471. Катетлари 3 ва 4 бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг катта катетига уринувчи, маркази гипотенузада бўлган ва қаршидаги ўткир бурчак учидан утувчи айлана чизилган. Айлананинг радиусини топинг.

472. Гипотенузаси бир катетидан икки марта катта бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи S. Учлари берилган тўғри бурчакли учбурчакка ташқи-ички чизилган айланаларнинг марказларидан иборат бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

473. Учбурчакка ички чизилган айлана марказининг учбурчак томонларидаги проекциялари P_a, P_b, P_c. $P_aP_bP_c$ учбурчакнинг юзини топинг.

474. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи 6, ташқи чизилган айлананинг радиуси 2,5 булса, катетларнинг ўрталаридан ўтувчи ва гипотенузага уринувчи айлананинг радиусини топинг.

475. Тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакнинг ўткир бурчаги учи орқали қаршидаги катетнинг давомига уринувчи ва гипотенузанинг ўртасидан ўтувчи айлана чизилган. Учбурчакларнинг катетлари a га тенг бўлса, айлананинг юзини ҳисобланг.

476. Ушбуни исбот қилинг:

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}.$$

477. ABC учбурчакка ташқи чизилган айланага A нуқтада ўтказилган уринма BC томоннинг давомини T нуқтада кесади. BT ва AT ни аниқланг.

478. Ушбу муносабатни исбот қилинг:

$$A\Omega^2+B\Omega^2+C\Omega^2=bc+ac+ab-12Rr.$$

479. Ушбуни исбот қилинг: $A\Omega \cdot B\Omega \cdot C\Omega = 4Rr^2$.

480. Учта концентрик айлананинг радиуслари $3, 2\sqrt{3}$ ва 6. Кичик айланага ўтказилган ихтиёрий уринма ўртадаги айланани B нуқтада, ташқи айланани C[1] нуқтада кесиб утади, бунда B ва C нуқталар уриниш нуқтаси A дан турли тарафда деб фараз қилинади. B ва C нуқталарни O билан туташтиришдан ҳосил бўлган BOC учбурчакнинг бурчакларини ва BC томонини топинг.

---

[1] Иккинчи кесишув нуқталари қаралмайди.

481. Радиуси R бўлган айланага тенг ёнли тўғри бурчакли ички учбурчак чизилган. Учбурчакнинг тенг томонларига ва биринчи айланага уринувчи иккинчи айлана чизилган. Иккинчи айлананинг радиусини топинг.

482. AB диаметрли ярим айланага ички ABC тенг ёнли учбурчак чизилган. A нуқта BC ватарнинг ўртаси D билан туташтирилиб, ярим айланани E нуқтада кесгунча давом эттирилган; E нуқтадан BC томонга ($EF \perp BC$) перпендикуляр туширилган. $CF = 3EF$ тенглик исбот қилинсин.

483. ABC учбурчакда Эйлер тўғри чизиғи a томонга параллел. Берилган R радиус ва a кесма бўйича h_a ни топинг.

484. 483-масала шартлари бажарилганда: $bc = 3R\sqrt{4R^2 - a^2}$ булишини кўрсатинг.

485. Тўғри бурчакли учбурчакнинг оғирлик маркази ички чизилган айлана устида ётади. Катетларининг нисбатини топинг.

486. ABC мунтазам учбурчакка ташқи чизилган айлананинг CD ватари k га тенг бўлиб, AB томонни 3:2 нисбатда бўлади. Айлананинг радиусини топинг.

487. Радиуси 9 га тенг бўлган айланага ички тенг ёнли учбурчак чизилган, айлана марказидан учбурчак томонларигача масофалар йиғиндиси 11,5 га тенг. Айлана марказидан тенг томонлардан биригача бўлган масофани топинг.

488. ABC учбурчак AB томонининг ўртаси M; қолган томонлари a ва b га тенг. CMB, CMA ва CBA учбурчакларга ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари R_1, R_2 ва R бўлиб, бунда $\frac{R_1 + R_2}{R} = n$.

m_c медианани топинг.

489. Учбурчак ички бурчагининг биссектрисаси AA', биссектрисаларнинг кесишган нуқтаси $\Omega' \cdot \Omega A \cdot \Omega A'$ кўпайтмани ҳисобланг.

490. ABC учбурчакда $h_a = r_a$ бўлса, $l_a^2 = \frac{3}{4}bc$ булади. Масаланинг мумкинлик шартлари текширилсин.

491. Учбурчакнинг A учидан ҳамда AB ва AC томонларнинг ўрталаридан ўтиб, учинчи томонга P нуқтада уринувчи айлана берилган. Бунда AP кесма BP ва CP кесмалар орасида ўрта пропорционал эканлиги исбот қилинсин.

492. Параллел бўлмаган AB ва CD кесмалар берилган. Шундай M нуқталарнинг геометрик ўрни топилсинки, бунда MAB ва MCD учбурчак юзларининг йиғиндиси ёки айирмаси берилган миқдорга тенг бўлсин.

493. Тўртбурчак диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқ, тўртбурчак қарама-қарши томонларининг кесишган нуқталарини туташтирувчи кесманинг ўртасидан утади. Шуни исбот қилинг.

494. Доирага ташқи чизилган тўртбурчак диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқ ички айлананинг марказидан ўтиши исбот қилинсин.

2. Айлана ва кўпбурчаклар

495. Радиуси 1 га тенг бўлган ярим доирага ички чизилган трапециянинг периметри 5 га тенг. Унинг бир асоси диаметрда ётади. Бу трапециянинг томонларини ва юзини ҳисобланг.

496. Бир бурчакка ички чизилган r радиусли айлананинг уриниш нуқталарини туташтирувчи ватар a га тенг. Бу ватарга параллел қилиб икки уринма ўтказишдан трапеция ҳосил бўлади. Унинг юзини топинг.

497. Ромб ўзининг диагонали билан иккита тенг томонли учбурчакка ажралади, ромбга ички чизилган айлананинг радиуси бирга тенг. Ромбнинг томонини аниқланг.

498. Ромбнинг диагоналлари 6 ва 8 га тенг. Унга ички чизилган доиранинг юзини топинг.

499. Томонлари 4 га тенг булган $ABCD$ квадрат берилган. Унинг AD томонидан $AK=1$ бўлган K нуқта олиниб, C ва K нуқталар туташтирилган. Сўнгра CK кесмага B нуқтадан BT перпендикуляр туширилган. BT нинг узунлигини ва $BTKA$ тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

500. Квадратнинг бир учидан квадрат томонининг ярмига тенг радиус билан айлана чизилган, қўшни учдан айланага уринма утказилган. Бу уринма квадратнинг юзини қандай нисбатда бўлади?

501. Тенг ёнли трапециянинг параллел бўлмаган томонлари 5, асослари 1 ва 7 га тенг. Шу трапецияга ташқи чизилган доиранинг юзини топинг.

502. Параллел томонлари 8 ва 2 бўлган симметрик трапецияга ички айлана чизилган. Унинг радиусини топинг.

503. Радиуси r бўлган ярим доирага ички квадрат чизилган. Квадратнинг юзини топинг.

504. Радиуслари r бўлган икки тенг айлана бир-бирини кесади. Уларнинг марказлари орасидаги масофа r га тенг. Иккала айлананинг умумий қисмига квадрат ясалган. Унинг томонини топинг.

505. Асослари 6 ва 21 ҳамда бир ён томони 14 бўлган трапецияга ички айлана чизилган. Шу айлананинг радиусини топинг

506. Радиуси r бўлган ярим доирага ички $ACDB$ тўртбурчак чизилган. Бунда $AB=2r$, $AC=r$, $BD=r\sqrt{2}$. AB нинг CD йўналишдаги проекциясини топинг.

507. Узунлиги $2a$ га тенг бўлган кесма тенг иккига бўлинган. Унинг бир бўлагига квадрат, иккинчи бўлагига тенг томонли учбурчак чизилган. Квадратнинг ва учбурчакнинг тўғри чизиқ ташқарисида ётган учларини туташтириб, беш бурчакли шакл ҳосил қилинган. Бешбурчак томонларини, диагоналларини, бурчакларини ва юзини ҳамда учбурчакка ташқи чизилган айлана билан квадрат томонида ажратилган ватар узунлигини топинг.

508. Квадратнинг икки қўшни томонида ташқи ярим айлана чизилган. Ярим айланаларга ўз диаметрига параллел қилиб уринмалар ўтказилган. Квадрат томони $2a$ га тенг бўлса, шу икки ярим айланага ва уринмаларга уринувчи айлананинг радиусини топинг.

509. Томонлари 13, 14 ва 15 бўлган учбурчакнинг оғирлик марказидан икки кичик томонига перпендикуляр туширилган, бунда тўртбурчак ҳосил бўлган. Унинг: 1) томонларини, 2) диагоналларини, 3) унга ташқи чизилган айлананинг радиусини ва 4) тўртбурчакнинг юзини топинг.

510. Радиуси 2 га тенг бўлган доирага юзи 20 бўлган симметрик ташқи трапеция ясалган. Трапециянинг томонларини топинг.

511. Ярим доирага ички чизилган тўртбурчакнинг томонларидан бири диаметрга, қолганлари эса кетма-кет $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ ва 6 га тенг. Доиранинг радиусини топинг.

512. Радиуси $\sqrt{3}$ бўлган доирага мунтазам ички учбурчак чизилган. Икки томонни тортиб турувчи ёйларнинг ўрталарини туташтирувчи кесма ўтказилган. Бу кесманинг узунлигини ва бу кесмадан учбурчак томонлари билан ажралган кесмалар узунликларини топинг.

513. Квадратнинг кетма-кет икки учидан айлана ўтказилган. Учинчи учидан бу айланага ўтказилган уринманинг узунлиги квадрат томонининг икки ҳиссасига тенг. Квадратнинг юзи 10. Айлананинг радиусини топинг.

514. Радиуси 1 га тенг бўлган доирада иккита ёйга тегишли a ва b ватарлар берилган. Бу ёйлар айирмасига тенг бўлган ёйга тегишли ватарни топинг.

515. Бирлик радиусли айланада a ва b ватарлар берилган. Шу ватарларга тегишли ёйлар йиғиндисига тенг ёйни тортиб турувчи ватарнинг узунлигини топинг.

516. Радиуси 1 га тенг бўлган доирада 210° ли ёйга тегишли ватарни топинг.

517. Радиуслари r га тенг бўлган иккита тенг айлананинг марказлари орасидаги масофа d га тенг. Ҳар бир айлананинг марказидан иккинчи айланага ўтказилган уринмалар кесишишидан ҳосил бўлган ромбнинг томонини ва юзини топинг.

518. Айланага ички чизилган $ABCD$ тўртбурчакнинг AB ва CD томонлари ўзаро E нуқтада кесишгунча давом эттирилган. Агар тўртбурчак томонлари $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ ва $AD=d$

($d > b$) бўлса, ҳосил бўлган ADE учбурчак томонларини топинг.

519. Радиуси R га тенг бўлган ярим айланага $ACDB$ ички тўртбурчак чизилган. Унинг AB томони айлана диаметридир, $AC + BD = 2R$. Тўртбурчакнинг диагоналлари O нуқтада кесишади. Бунда $AO = a$; $OB = b$ бўлса, тўртбурчак томонларини ва AOB учбурчакнинг юзини топинг.

520. Ички чизилган тўртбурчакнинг тўрт томони (a, b, c ва d) бўйича тўртбурчак юзини топинг.

521. Ички тўртбурчак юзини унинг a, b, c ва d томонлари ва m, n диагоналларидан бири ҳамда ташқи чизилган айлананинг радиуси R орқали ифодаланг. Бу ифодалардан фойдаланиб ички чизилган тўртбурчакнинг диагоналлари нисбатини топинг (қарама-қарши томонлари a, c ва b, d).

522. Томонлари a, b, c ва d бўлган тўртбурчакка ташқи ва ички айланалар чизиш мумкин. Унинг юзини топинг.

523. Ички чизилган тўртбурчак томонлари a, b, c ва d бўйича унинг диагоналларини топинг.

524. Ёйи $120°$ ли сегментга ички квадрат чизилган. Доиранинг радиуси $\sqrt{19} + 2$. Квадратнинг томонини аниқланг.

525. Ярим доира AB тўғри чизиқ билан кесилган ва тўғри чизиққа MN диаметр учларидан $MK = p$, $MP = q$ перпендикулярлар туширилган. KA ва AP кесмаларда ясалган тўғри тўртбурчак юзини топинг.

526. Радиуси R бўлган айлананинг диаметрида тенг томонли учбурчак ясалган. Учбурчакнинг айлана ташқарисидаги учи радиуснинг ўртаси (учбурчакнинг асосида) билан туташтирилган ва ҳосил бўлган тўғри чизиқ айлана билан кесишгунча давом эттирилган. Кесишиш нуқтаси билан диаметрнинг яқин турган учини туташтирувчи ватарнинг узунлигини топинг.

527. Айлана квадратнинг икки қўшни томонига уринади ва учинчи томонини узунликлари 8 ва 17 бўлган кесмаларга ажратади. Бу айлананинг радиусини топинг.

528. Айланага ички чизилган тенг томонли учбурчакнинг бир томони билан айланадан ажратилган кичик сегментга ички мунтазам учбурчак чизилган. Бунинг бир томони сегмент ватарига перпендикуляр. Агар айлананинг радиуси r бўлса, мунтазам учбурчак томонларини аниқланг.

529. Радиуси R бўлган AOB квадрантда AB ватардан k масофада AB га параллел кесувчи ўтказилган. Бу кесувчи AO ва OB радиуслар давомини C ва D нуқталарда ва квадрант ёйини E ва F нуқталарда кесади. Олинган E (C га яқин турган) нуқтадан CD га ўтказилган перпендикуляр AO ни G нуқтада кесади. DG нинг узунлигини топинг.

530. Радиуси r бўлган айланага тенг ёнли ташқи трапеция чизилган, унинг кичик асоси $2a$. Трапециянинг диагоналларини топинг.

531. Радиуси r бўлган айланага мос томонлари ўзаро перпендикуляр бўлган иккита тенг тўғри тўртбурчак ясалган. Уларнинг тенг бўлмаган томонларининг нисбати 2 га тенг бўлса, иккала тўғри тўртбурчак умумий қисмининг юзини топинг.

532. Симметрик трапециянинг баландлиги h; унинг BD диагонали BC томонига перпендикуляр. AD ва BC томонларни диаметр қилиб чизилган айланалар бир-бирига ташқи уринади. AB ва CD асосларни аниқланг.

533. Радиуси R га тенг бўлган айланага ички мунтазам саккиз бурчакли юлдуз чизилган. Унинг юзини топинг.

534. Квадратнинг тўрт томонини диаметр қилиб, ички томонга ярим айланалар чизилган, бундан тўрт япроқли шакл ҳосил бўлган. Квадратнинг томони $2a$ бўлса, бу шаклнинг юзини топинг.

535—536. Радиуслари R ва r бўлган икки айланага умумий ташқи уринмалар ўтказилган. Бу уринмалар ва уриниш нуқталарни туташтирувчи ватарлардан ҳосил бўлган трапециянинг юзини топинг.

537. Радиуси 5 га тенг бўлган айланада $AB = 9$ ватар ўтказилган. AB да $BK = 7\frac{1}{2}$ га тенг масофада K нуқта олинган. K нуқтадан AB кесмага перпендикуляр CD ватар чизилган. Сўнгра A нуқта билан C, C билан B, B билан D ва D билан A нуқталар тўғри чизиқлар билан туташтирилган:

1) ҳосил бўлган $ACBD$ тўртбурчакнинг юзини;

2) шу тўртбурчак томонларининг ўртасидан ўтган доиранинг юзини топинг.

538. Радиуси R бўлган айлананинг OA радиусида шундай B нуқта олинганки, бунда $OB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; B нуқтадан OA радиусга перпендикуляр DC ватар ўтказилган. Сўнгра D нуқтада айланага DE уринма ўтказилган, бу уринма OA радиуснинг давоми билан E нуқтада кесишади ва BE тўғри чизиқни диаметр қилиб I марказли айлана чизилган, у биринчи айлана билан F ва G нуқталарда кесишади: 1) иккала айлана умумий ватарининг узунлигини; 2) $IFOG$ тўртбурчак юзининг BDE учбурчак юзига нисбатини топиш талаб этилади.

539. R радиусли айланага ички $ABCD$ тўртбурчак чизилган. Бунда $\smile AB = 60°$, $\smile BC = 90°$, $\smile CD = 120°$:

1) тўртбурчак томонларини топиш; 2) унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр эканлигини исбот қилиш; 3) диагонал кесмаларини ва уларнинг ўзларини ҳисоблаш; 4) тўртбурчакнинг юзини топиш талаб этилади.

540. Радиуси R га тенг бўлган O марказли айлананинг A нуқтасида айланага уринма ўтказилган. Бу уринмада AP кесма қўйилган, P нуқта O марказ билан туташтирилиб, OP тўғри чизиқ айланани D нуқтада кесгунча давом эттирилган. Шу D

нуқтада айланага иккинчи уринма ўтказилган ва у, AP уринма давомини E нуқтада кесгунча давом эттирилган. OPA учбурчак юзи $ODEA$ тўртбурчак юзига тенг бўлиш шартидан AP кесманинг узунлигини топинг.

541. R радиусли айланага ташқи $ABCD$ туртбурчак чизилган, унинг AC диагонали O марказдан ўтади, $AO = 2R$, $\angle A + \angle C = 180°$:

1) B ва D бурчакларни; 2) I нуқта AB томоннинг уриниш нуқтаси бўлган ҳолда, AOI учбурчак юзини; 3) тўртбурчак юзини; 4) тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топиш талаб қилинади.

542. Радиуси r га тенг бўлган айланага ташқи тўртбурчак чизилган. Унинг томонлари тартиб билан a, b, c ва d га тенг. Ички чизилган айлананинг уриниш нуқталари тўртбурчак томонларида ҳосил қилган кесмаларни топинг.

543. Бир айлана тўғри бурчакли трапециянинг параллел бўлмаган AA' ва BB' томонларига ҳамда $A'B'$ катта асосига уринади. Иккинчи айлана трапециянинг параллел бўлмаган томонларига ва AB кичик асосига уринади. Шу айланаларга умумий ички уринма трапециянинг асосларига параллел бўлиб, трапециянинг асослари a, b бўлса: 1) трапециянинг қолган икки томонини; 2) айланалар радиусларини; 3) асосларга параллел ички умумий уринманинг томонлар орасида қолган кесмасини; 4) асосларга параллел бўлмаган ички умумий уринманинг томонлар орасида қолган кесмасини; 5) трапециянинг асосига перпендикуляр бўлган томонларнинг кейинги уринма билан бўлинган кесмаларини; 6) A ва A' нуқталардан ўтиб, BB' томонга уринувчи айлананинг радиусини топинг.

544. Ички чизилган $ABCD$ тўртбурчакда $AB = \frac{1}{2} AD$, $BC = \frac{1}{2} CD$, бунда $AB = a$ ва $AC = b$ маълум. BC ни ҳисобланг. Қандай ҳолда AB, тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади?

545. Тўғри бурчакли трапециянинг баландлиги $2h$. Унинг асосига оғма томонини диаметр қилиб айлана чизилганда айлана қарама-қарши томонга уринади. Томонлари шу трапеция асосларидан иборат бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

546. Квадратнинг ҳар бир учидан унинг томонига тенг бўлган r радиус билан ички соҳага тўртдан бир айланага тенг ёйлар чизилган. Бу ёйлар кесишиб, эгри чизиқли тўртбурчак шакл ясайди. Бу шаклнинг юзини топинг.

547. Трапециянинг диагоналларини диаметр қилиб айланалар чизилган. Трапециянинг диагоналлари $2a$ ва $2a_1$ бўлиб, асосларининг айирмаси $2k$. Бу айланалар умумий ватарининг узунлигини топинг.

548. Радиуси r га тенг бўлган айлана A, B ва C нуқталар билан тенг уч бўлакка бўлинган. OA, OB ва OC радиуслар йўналишлари айланага ички чизилган квадрат томонига тенг бўлган AO_1, OB_1 ва OC_1 кесмалар қўйилган. $A_1B_1C_1$ учбурчак юзининг ички чизилган мунтазам олтибурчак юзига нисбати топилсин.

549. Радиуси R бўлган айланада $45°$ ли ёйга тегишли AB ватар AP диаметрнинг ўртаси O нуқтадан унга чиқарилган перпендикуляр билан K нуқтада кесишгунча давом эттирилган. B нуқтадан AP ва BC перпендикуляр туширилган. $OCBK$ трапециянинг юзини топинг.

550. Радиуси $\sqrt{6}$ бўлган айланага ички чизилган мунтазам олтибурчакнинг AB томони ва ташқи чизилган мунтазам олтибурчакнинг AB га параллел бўлган $A'B'$ томони давом эттирилса, айлананинг марказидан AB га қўшни томонга туширилган перпендикуляр давоми билан C ва C' нуқталарда кесишади. A ва A' нуқталар тўғри чизиқ билан туташтирилган. $AA'CC'$ трапециянинг юзи топилсин.

551. DF—айлананинг ватари бўлиб, у мунтазам ички учбурчакнинг томонига тенг; айлананинг DC диаметри $2\sqrt{3}$; AB уринма DF га параллел (AB ва DF марказдан бир тарафда ётади); A—уринманинг DC диаметр давоми билан кесишган нуқтаси; B уринманинг FC тўғри чизиқнинг давоми билан кесишган нуқтаси. $ADFB$ трапециянинг юзи топилсин.

552. Агар тенг ёнли трапецияга ички айлана чизиш мумкин бўлса, трапециянинг баландлиги асосларнинг ўрта геометрик қийматига, ён томони эса асосларнинг ўрта арифметик қийматига тенг бўлади. Шуни кўрсатинг.

553. Қандай шарт бажарилганда бурчакларининг учлари, симметрик трапеция томонларининг ўрталарида бўлган тўртбурчак квадрат бўлади?

554. Ички чизилган $ABCD$ тўртбурчакда $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. B ва D нуқталар тўғри чизиқ билан туташтирилган; ҳосил бўлган BCD учбурчакни ўз ўрнидан олиб, ташқи томондан BC ни BA устига шундай қўйилганки, B нуқта ўз жойида қолган, C нуқта эса BA даги E нуқтага келиб тушган ($BC<BA$). Бунда D нуқта F вазиятни олади. BF тўғри чизиқ AD нинг давоми билан G нуқтада кесишгунча давом эттирилган. AG кесмани ва $\frac{BD}{BC}$ нисбатни топинг.

555. Марказий бурчаги $60°$ ва радиуси $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ бўлган секторга ички чизилган квадратнинг томони топилсин.

556. Радиуси 5 га тенг бўлган секторнинг марказий бурчаги $90°$ га тенг. Унга ички тўғри тўртбурчак чизилган, унинг томонларидан бири иккинчисидан 6 марта катта. Шу тўғри тўртбурчак томонларини топинг.

557. Томонлари a бўлган $ABCD$ квадрат берилган, унинг диагоналлари O нуқтада кесишади. AOB, BOC, COD, DOA, ABC, BCD, CDA ва DAB учбурчакларга ички чизилган айланаларнинг марказлари бирор саккизбурчакнинг учларини аниқлайди. Унинг юзини топинг.

558. Радиуси R бўлган ярим айлана AB диаметрга чизилган бўлиб, айланага ички чизилган квадрат томонига тенг бўлган AC ватар ва ички мунтазам учбурчак томонига тенг бўлган AD ватар ўтказилган. CD ватарнинг узунлиги ва ACD шаклнинг юзи топилсин.

559. Радиуси R бўлган айланага ички $ABCD$ квадрат чизилган. D дан айланага ўтказилган уринма AB нинг давоми билан E нуқтада кесишади. E нуқтани C билан туташтирувчи EC тўғри чизиқ BD ни M нуқтада кесиб ўтади. Ҳосил бўлган $ABMC$ шаклнинг юзи топилсин.

560. $ABCD$ квадратга радиуси 2 га тенг бўлган ички айлана чизилган. Бу айланага ихтиёрий уринма ўтказилганда, у BC томонни P нуқтада, DC томонни Q нуқтада кесади. Ҳосил бўлган APQ учбурчакнинг юзи ўзгармас миқдор эканлигини исбот қилинг.

V. МУНТАЗАМ КЎПБУРЧАКЛАР

Қуйидаги 561 — 566-масалаларда радиуси r бўлган доирага ички чизилган мунтазам кўпбурчакларнинг юзларини топиш талаб қилинади:

561. Учбурчакнинг.
562. Квадратнинг.
563. Бешбурчакнинг.
564. Олтибурчакнинг.
565. Саккизбурчакнинг.
566. Ўнбурчакнинг.

Қуйидаги 567 — 572-масалаларда радиуси r бўлган доирага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчаклар юзларини топиш талаб қилинади:

567. Учбурчакнинг.
568. Квадратнинг.
569. Бешбурчакнинг.
570. Олтибурчакнинг.
571. Саккизбурчакнинг.
572. Ўнбурчакнинг.

Қуйидаги 573 — 578-масалаларда радиуси r бўлган доирага ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг томони a бўйича кўпбурчак юзини топиш талаб қилинади:

573. Учбурчакнинг.
574. Бешбурчакнинг.
575. Олтибурчакнинг.

576. Саккизбурчакнинг.
577. Ўнбурчакнинг.
578. Ўниккибурчакнинг.

Қуйидаги 579—582-масалаларда мунтазам кўпбурчакнинг берилган юзи S бўйича унинг томонини топинг.

579. Учбурчакнинг.
580. Олтибурчакнинг.
581. Саккизбурчакнинг.
582. Ўниккибурчакнинг.

Қуйидаги 583—585-масалаларда кўпбурчакнинг берилган юзи S бўйича ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг:

583. Бешбурчакнинг.
584. Саккизбурчакнинг.
585. Ўнбурчакнинг.

586. Агар мунтазам кўпбурчакнинг учлари кетма-кет A, B, C ва D ларда бўлса, унда $AC^2 - AB^2 = AB \cdot AD$ бўлади. Шуни исбот қилинг.

587. Икки мунтазам кўпбурчакнинг томонлари тенг бўлиб, биринчисининг ички бурчаклари иккинчисиникидан 2 марта катта. Бу кўпбурчаклар юзларининг нисбати топилсин.

588. Томонлари n ва $2n$ бўлган мунтазам ички кўпбурчакнинг юзлари S ва S_1 маълум бўлган ҳолда, томонлари $4n$ бўлган мунтазам ички кўпбурчакнинг юзи S_2 ни топинг.

589. Мунтазам кўпбурчакда иккитадан қўшни томонларни тортиб турувчи диагоналлар ўтказилган, улар ўзаро кесишиб, томонлар сони берилган кўпбурчакникича бўлган янги мунтазам кўпбурчак ҳосил қилади. Ҳосил бўлган мунтазам кўпбурчакнинг юзини топинг.

590. Мунтазам саккизбурчакнинг иккита параллел томони ва уларнинг учларини туташтирувчи икки диагоналдан ҳосил бўлган шаклнинг юзини топинг. Саккизбурчакнинг томони

$$\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

591. $ABCD$ квадрат томонларининг ўрталари O_1, O_2, O_3, O_4 ($O_1 - AB$ нинг ўртаси, $O_2 - BC$ нинг ўртаси ва шу каби), AO_2, BO_3, CO_4, DO_1 тўғри чизиқлар ўзаро кесишиб, тўртбурчак ҳосил қилади. Квадратнинг томони $\sqrt{5}$. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг турини ва юзини аниқланг.

592. Радиуси r бўлган доирага ички чизилган мунтазам 15 бурчак томонининг узунлигини топинг.

593. Квадратнинг ташқарисига, квадрат томонларини асос қилиб, мунтазам учбурчаклар чизилган. Сўнгра уларнинг ташқи учлари туташтирилган. Квадратнинг томони a га тенг бўлса, ҳосил бўлган шаклга тенгдош бўлган мунтазам 12 бурчакнинг томонини топинг.

594. Мунтазам 6 бурчакнинг учларини биттадан оралатиб туташтириш натижасида ҳосил бўлган тўғри чизиқ кесмалари бир-бири билан кесишиб иккинчи мунтазам 6 бурчак ҳосил қилади. Агар унинг юзи $\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, биринчи мунтазам 6 бурчакка ташқи чизилган доиранинг юзини топинг.

595. Юзи 8 бўлган $ABCD$ параллелограмм ичида ихтиёрий O нуқта олиниб, бу нуқта параллелограмм учлари билан туташтирилган. Юзи ҳосил бўлган AOB ва COD учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенгдош бўлган мунтазам саккизбурчакнинг томонини топинг.

596. Томонлари a бўлган мунтазам олтибурчак юзи, бир учидан чиққан тўғри чизиқ билан 2 : 3 нисбатда бўлинган. Бўлувчи чизиқнинг узунлигини топинг.

597. Томонлари a бўлган мунтазам 6 бурчакнинг ичига 5 бурчакли шакл ясалган. Унинг бир учидан бошқа ҳамма учлари олтибурчак томонларининг ўрталарида ётади, бир учи эса иккала шакл учун умумий. Бешбурчакнинг томонларини ва юзини топинг.

598. Томонлари a ва b ($a > b$) бўлган иккита тенг тўғри тўртбурчак бир-бирининг устига концентрик ҳолда шундай қўйилганки, уларнинг тенг томонлари ўзаро перпендикуляр бўлиб, крест шакли ҳосил бўлган. Бу крестнинг қўшни учларини туташтиришдан 8 бурчакли шакл ҳосил бўлган. Унинг юзини топинг. Қандай шартда бу 8 бурчак мунтазам бўлади?

599. Томони a бўлган мунтазам олтибурчак, бир томонига перпендикуляр йўналишда олтибурчак апофемасининг узунлиги қадар масофага параллел кўчирилган. Мунтазам олтибурчакнинг иккала ҳолатидаги умумий қисмининг юзини топинг.

600. Мунтазам олтибурчакнинг ҳамма томонлари бир хил айланиш йўналишларида, томонларидан уч ҳисса узун бўлган миқдорга давом эттирилган. Сўнгги нуқталар кесмалар билан туташтирилган. Ҳосил бўлган шакл юзининг берилган олтибурчак юзига нисбатини топинг.

601. Мунтазам 7 бурчакнинг учлари тартиб билан A, B, C, ва D бўлган ҳолда $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ бўлиши исбот қилинсин.

602. Радиуси r бўлган айлана тенг 10 бўлакка бўлиниб, бўлиниш нуқталаридан биринчи нуқта тўртинчи билан, тўртинчи нуқта еттинчи билан, еттинчи нуқта ўнинчи билан, ўнинчи нуқта учинчи билан ва ҳоказо туташтирилса, ўнта қавариқ, ўнта ботиқ бурчакка эга бўлган йигирма бурчакли шакл ҳосил бўлади. Шу шаклнинг юзини топинг.

УЧИНЧИ ҚИСМ

ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМА ВА ЕЧИМЛАР

1. УЧБУРЧАКЛАР

1. Ечиш (72-шакл). Биттадан ўткир бурчаги тенг бўлган тўғри бурчакли BOK ва MOA учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

1) $BO:OK = MO:OA$ ёки $AO \cdot OB = OK \cdot MO$, яъни $AO^2 = OK \cdot OM$, бундан $AO = \sqrt{ab}$ ва $AB = 2\sqrt{ab}$.

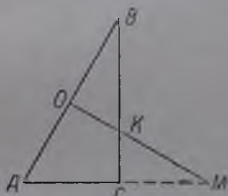
2) BOK учбурчакдан:

$$BK = \sqrt{BO^2 + OK^2} = \sqrt{ab + a^2} = \sqrt{a(a+b)}.$$

3) $MK = MO - OK = b - a$.

4) $\triangle OBK \backsim \triangle MCK$ бўлганидан $\frac{CK}{KM} = \frac{OK}{BK}$, бундан:

$$CK = \frac{OK \cdot KM}{BK} = (b-a) \cdot \sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$



72-шакл.

5) $BC = BK + KC = \sqrt{a(a+b)} + (b-a)\sqrt{\frac{a}{a+b}} = \frac{2b}{a+b}\sqrt{a(a+b)}.$

6) $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4ab - \frac{4b^2}{(a+b)^2}\,a(a+b)} = 2a\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$

7) $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{ab(a+b)}{a+b}} = \frac{2ab}{a+b}\sqrt{ab}.$

2. $\frac{11}{12}$.

3. Ечиш. 73-шаклда кўрсатилган CD ни топиш керак.

1) CD—учбурчак C бурчагининг биссектрисаси бўлганидан:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}; \quad (AD = kb;\ BD = ka).$$

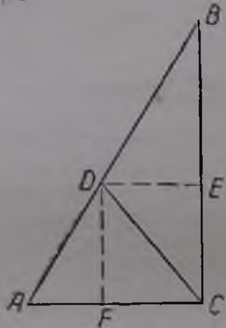
2) $DF \perp AC$, бундан: $\triangle ADF \backsim \triangle ABC$; $\frac{DF}{AD} = \frac{BC}{AB}$;

$$DF = \frac{BC \cdot AD}{AB} = \frac{a \cdot kb}{AD + DB} = \frac{kab}{ka + kb} = \frac{kab}{k(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$$

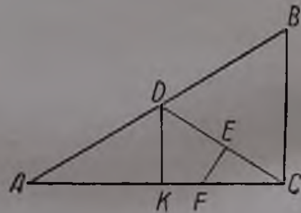
(пропорция бўйича $AD = kb$; $BD = ka$).

3) $DE = \frac{ab}{a+b}$ · $FDEC$ квадрат бўлганидан $DE = DF = \frac{ab}{a+b}$.

4) Пифагор теоремаси бўйича $\triangle DCE$ дан $DC = \sqrt{2\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2} = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$ булади.



73-шакл.



74-шакл.

4. *Кўрсатма.* Учбурчак ясаб, уни параллелограммгача тўлдирамиз.

5. Ечиш (74-шакл). 1) $DK \perp AC$ ўтказсак, ўхшаш CKD ва CEF тўғри бурчакли учбурчаклар ҳосил бўлади.

Бундан: $\frac{DK}{DC} = \frac{EF}{FC}$; $DK = DC \cdot \frac{EF}{FC} = 5 \cdot \frac{\frac{7}{8}}{\frac{25}{8}} = \frac{75 \cdot 8}{8 \cdot 25} = 3$; $DK = 3$

$\left(FC = \sqrt{EC^2 + EF^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{225}{64}} = \sqrt{\frac{625}{64}} = \frac{25}{8}\right.$; $\left.FC = \frac{25}{8}\right)$;

2) DK — ўрта чизиқ. $(AK = KC)$, $KC = \sqrt{CD^2 - DK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$; $KC = 4$, $AC = 2 \cdot KC = 8$;

3) $\triangle ABC \backsim \triangle ADK$; бундан $\frac{BC}{DK} = \frac{AC}{AK}$; $BC = DK \cdot \frac{AC}{AK} = 3 \cdot \frac{8}{4} = 6$;

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.

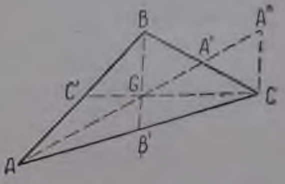
6. Исбот.

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.$$

Бу тенгликларни кўпайтирсак, $S^3 = \frac{1}{8} abch_ah_bh_c$, бундан $S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{abch_ah_bh_c}$ ҳосил бўлади.

7. Ечиш (75-шакл). 1) Учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси G бўлсин; медиана учбурчакнинг юзини тенг иккига бўлганидан: $\triangle ABA'$ юзи $=$ $= \triangle ACA'$ юзи ва $\triangle BGA'$ юзи $=$ $= \triangle CGA'$ юзи, бундан $\triangle AGC$ юзи $= \triangle CGB$ юзи $= \triangle AGB$ юзи;

2) AA' медиана GA' қадар A'' нуқтагача узайтирилиб, A'' нуқта C билан туташтирилса, $\triangle A'A''C =$ $= \triangle A'GB$ ва $\triangle BGC = \triangle GCA''$ бўлади;



75-шакл.

3) $\triangle GCA''$ да $CG = \frac{2}{3} m_c$; $A''C = \frac{2}{3} m_b$; $A''G = \frac{2}{3} m_a$.

Герон формуласига кўра:

$$p = \frac{CG + A''G + A'C}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{m_a + m_b + m_c}{2} = \frac{2}{3} M;$$

бу ерда:

$$M = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}.$$

Бундан:

$$S_{A''CG} = \sqrt{\frac{2}{3} M\cdot\frac{2}{3}(M - m_a)\cdot\frac{2}{3}(M - m_b)\cdot\frac{2}{3}(M - m_c)} =$$
$$= \frac{4}{9}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}.$$

4) $S_{ABC} = 3\cdot S_{A''CG} = \frac{3}{4}\sqrt{M(M - m_a)(M - m_b)(M - m_c)}$.

8. Ечиш (76-шакл). Учбурчакнинг юзини аниқлашдаги $\frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$ формуладан фойдаланамиз, бундан $ah_a = bh_b = ch_c$ бўлиб, $b = \frac{ah_a}{h_b}$; $c = \frac{ah_a}{h_c}$ олинади. Бизда ярим периметр, $p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{ah_a}{h_b} + \frac{ah_a}{h_c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ah_a}{h_a} + \frac{ah_a}{h_b} + \frac{ah_a}{h_c}\right) = \frac{ah_a}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{ah_a}{2}(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1})$,

бундаги $h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1} = 2H$ деб олинса, $p = \frac{ah_a}{2}(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1})$ ифодани $p = \frac{ah_a}{2}\cdot 2H = ah_aH$ деб ёзамиз, $p = ah_aH$.

$p - a$ қиймати: $p - a = ah_aH - a = ah_aH - \frac{ah_a}{h_a} = ah_a(H - h_a^{-1})$, шу хилда яна $p-b=ah_a(H-h_b^{-1})$; $p-c=ah_a(H-h_c^{-1})$ булади. Булар Герон формуласига қўйилса:

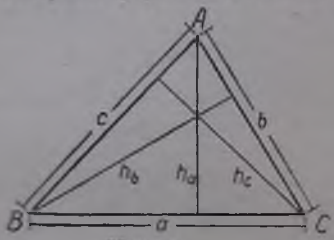
$$S=\sqrt{ah_aH\cdot ah_a(H-h_a^{-1})\cdot ah_a(H-h_b^{-1})\cdot ah_a(H-h_c^{-1})}=$$
$$=a^2h_a^2\sqrt{H(H-h_a^{-1})\cdot(H-h_b^{-1})\cdot(H-h_c^{-1})}.$$

Натижада $ah_a=2S$ бўлганидан $\frac{1}{S}=$

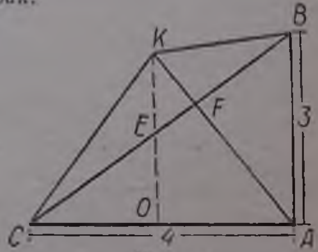
$$=\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})}.$$

9. 13 ва 14.

10. 77-шаклдаги AOK учбурчак юзини, EF, CK ва BK кесмаларнинг узунлигини топиш керак.



76-шакл.



77-шакл.

Ечиш:

1) $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{9+16}=5$; $BC=5$;

2) $\triangle ABC \backsim \triangle FAC$, бундан:

а) $\frac{CF}{AC}=\frac{AC}{BC}$; $CF=\frac{AC^2}{BC}=\frac{16}{5}$; $CF=\frac{16}{5}$;

б) $\frac{AF}{AC}=\frac{AB}{BC}$; $AF=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$; $AF=\frac{12}{5}$;

3) $\triangle ABC \backsim \triangle OAK$, бундан:

а) $\frac{OK}{AO}=\frac{AC}{AB}$; $OK=\frac{AO\cdot AC}{AB}=\frac{8}{3}$; $OK=\frac{8}{3}$;

б) $\frac{AK}{AO}=\frac{BC}{AB}$; $AK=\frac{AO\cdot BC}{AB}=\frac{10}{3}$; $AK=\frac{10}{3}$;

4) $\triangle OEC \backsim \triangle ABC$, бундан:

а) $\frac{CE}{CO}=\frac{CB}{AC}$; $CE=\frac{OC\cdot CB}{AC}=\frac{5}{2}$; $CE=\frac{5}{2}$;

б) $\frac{EO}{CO}=\frac{AB}{AC}$; $EO=\frac{AB\cdot CO}{AC}=\frac{3}{4}$; $EO=\frac{3}{4}$;

5) $EF=CF-CE=\frac{16}{5}-\frac{5}{2}=\frac{7}{10}$; $EF=0{,}7$;

6) $S_{AOK}=\frac{AO\cdot OK}{2}=\frac{8}{3}$; $S_{AOK}=\frac{8}{3}$;

7) $CK=AK$ (кесма ўртасидан чиқарилган перпендикулярдаги нуқтани кесманинг икки учи билан туташтирувчи оғмалар), демак, $CK=\frac{10}{3}$.

8) $KF = AK - AF = \frac{10}{3} - \frac{12}{5} = \frac{14}{15}$; $KF = \frac{14}{15}$;

9) $BF = CB - CF = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$; $BF = \frac{9}{5}$;

10) $BK = \sqrt{KF^2 + BF^2} = \sqrt{\left(\frac{14}{15}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{925}{225}} = \frac{1}{3}\sqrt{37}$;

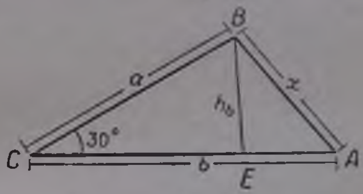
$BK = \frac{1}{3}\sqrt{37}$.

11. $21\frac{9}{11}$.

Кўрсатма. $6^2 < 5^2 + 4^2$ бўлганидан учбурчак ўткир бурчаклидир. Учбурчак кичик бурчагининг учидан қарши томонига перпендикуляр тушириб, ўша томонда ҳосил бўлган кесмаларни излаймиз.

12. $BNDP$ юзи $= \frac{1}{6}$ ABC юзи.

13. Ечиш (78-шакл). 1) Тўғри бурчакли BCE учбурчакда BE ($30°$ ли бурчак қаршисидаги) катет бўлганидан:



78-шакл.

$$h_b = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$$

ёки

$$h_b^2 = \frac{a^2}{4}. \tag{1}$$

$CE = m$ десак, ўша учбурчакдан:

2) $h_b^2 = a^2 - m^2$. (2)

(1) ва (2) дан:

$$\frac{a^2}{4} = a^2 - m^2; \quad m^2 = \frac{3}{4}a^2 \text{ ва } m = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

3) $\triangle ABE$ дан $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ёки $x^2 = (b - m)^2 + h_b^2 =$
$= \left(b - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}$, яъни $x =$
$= \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}$.

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$, яъни $S_{ABC} = \frac{ab}{4}$.

14. $\sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}}$; $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

15. $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$; $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

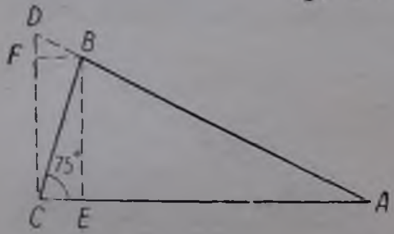
16. $\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$; $\frac{ab}{4}$.

17. $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$; $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

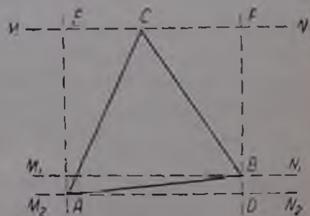
18. Ечиш (79-шакл). $CB = a$; $AC = b$; $\angle BCA = 75°$ бўлса, $\angle BCA$ нинг C учидан $CD \perp AC$ ўтказиб, $\angle BCA$ ни $90°$ га тўлдирилса ва ёрдамчи бурчак CD томонини BA нинг давоми билан кесишгунча давом эттириб, $BF \parallel AC$ ва $BE \perp AC$ чизилса, бунда:

1) $CE = BF = \frac{1}{2} a_{12} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (a_{12} — ички чизилган мунтазам 12 бурчак томони);

2) $BE = \sqrt{a^2 - CE^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$;



79-шакл.



80-шакл.

3) $EA = b - CE = b - \frac{1}{2} a\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{2b - a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;

бинобарин: $BA = \sqrt{EA^2 + EB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + 4b^2 - 2ab(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$;

$S = \frac{1}{2} BE \cdot AC = \frac{ab(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{8}$.

19. $\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}}$; $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

20. $\frac{a^2}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. *Кўрсатма.* Тенг ёнлардан бирини ўз йўналишида давом эттириб, 144° ли бурчакни 180° га тўлдирамиз, шу томонга иккинчи бурчак учидан перпендикуляр туширамиз.

21. $a(\sqrt{3} - 1)$; $\frac{a}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

22. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $a\sqrt{2}$.

23. 2; $\sqrt{7}$; $\sqrt{3}$.

24. Ечиш (80-шакл). $BD = a$; $BF = b$; $AB = BC = AC = x$ бўлсин;

1) ABD учбурчакда $AD = \sqrt{x^2 - a^2}$;

2) BCF „ $CF = \sqrt{x^2 - b^2}$;

3) ACE „ $CE = \sqrt{x^2 - (a+b)^2}$;

4) $AD = EF$ ёки $AD = FC + CE$; юқоридаги қийматлар ўрнига қўйилса:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - (a+b)^2}.$$

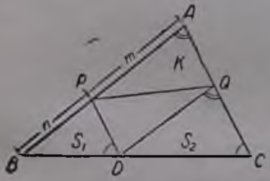
Бундан:

$$x = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}.$$

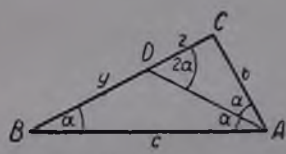
25. 1-хил ечиш (80-*а* шакл).
$AE \perp BC$; $ED = n$ бўлсин.
1) AD биссектриса $(AD = DB = m)$, чунки $\angle B = \angle BAD$.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{DC} = \frac{c}{b}; \ \frac{m}{a-m} = \frac{c}{b}; \ mb = ac - mc;$$

$$m(b + c) = ac; \ m = \frac{ac}{b+c}. \qquad (1)$$



80-*а* шакл.



80-*б* шакл.

2) ABE; AED ва AEC учбурчакларнинг ҳар бири тўғри бурчакли, $AE = h$; $\triangle ABE$ дан: $AE^2 = AB^2 - BE^2$, $h^2 = c^2 - (m-n)^2$;
$\triangle AED$ дан:

$AE^2 = AD^2 - ED^2$, $h^2 = m^2 - n^2$;
$\triangle AEC$ дан:
$AE^2 = AC^2 - EC^2$, $h^2 = b^2 - [a - (m-n)]^2$;

$$m^2 - n^2 = c^2 - (m-n)^2; \ 2m^2 = 2mn + c^2; \ n = \frac{2m^2 - c^2}{2m}. \qquad (2)$$

$$m^2 - n^2 = b^2 - [a - (m-n)]^2; \ 2m^2 - 2a(m-n) - 2mn = b^2 - a^2;$$

$$2m^2 - 2a\left(m - \frac{2m^2 - c^2}{2m}\right) - 2m\,\frac{2m^2 - c^2}{2m} = b^2 - a^2 \cdot 2m^2 - \frac{ac^2}{m} - 2m^2 +$$

$$+ c^2 = b^2 - a^2; \ \frac{ac^2}{m} = a^2 + c^2 - b^2; \ m = \frac{ac^2}{a^2 + c^2 - b^2}. \qquad (3)$$

$$\frac{ac}{b+c} = \frac{ac^2}{a^2 + c^2 - b^2} \ ((1) \text{ ва } (3) \text{ дан}), \ \frac{1}{b+c} = \frac{c}{a^2 + c^2 - b^2};$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = bc + c^2, \ a^2 = b^2 + bc; \ a = \sqrt{b^2 + bc}.$$

2-хил ечиш (80-*б* шакл). Бу усулни Ҳ. А. Мустафин таклиф қилган.

A бурчакнинг AD биссектрисасини чизамиз. $BD = y$ ва $DC = z$ десак, $\triangle ABC \backsim \triangle DAC$ дан: $\frac{z}{y} = \frac{b}{c}$ ва $\frac{y+z}{b} = \frac{b}{z}$ бўлганидан:

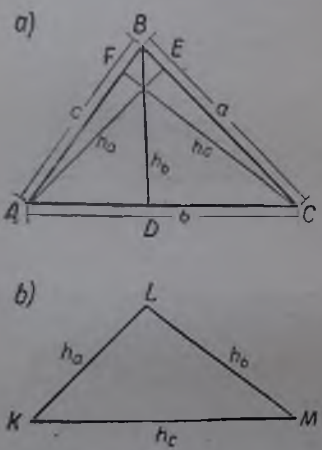
$$z = \frac{b}{c}y;\ zy + z^2 = b^2;\ \frac{b}{c}y^2 + \frac{b^2}{c^2}y^2 = b^2;$$

$$(bc + b^2)y^2 = b^2c^2;\quad y^2 = \frac{b^2c^2}{bc + b^2} = \frac{bc^2}{b+c};\ y = c\sqrt{\frac{b}{b+c}};$$

$$z = b\sqrt{\frac{b}{b+c}};\quad a = BC = z + y = (b+c)\sqrt{\frac{b}{b+c}} =$$

$$= \sqrt{b^2 + bc}.$$

$$a = \sqrt{b^2 + bc}.$$



81-а, б шакл.

26. *Курсатма.* $h_a = \frac{2S}{a}$.

27. $4\sqrt{7}$; $3\sqrt{7}$.

28. 12,5; 16,5.

29. 2 ёки 1.

30. $\frac{bc}{2}$ ва $2p$.

31. $a = \frac{h}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; $b = \frac{h}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; $c = h\sqrt{5}$.

32. Ечиш (81-*а*, *б* шакл).

$$S_{ABC} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

ёки

$$\frac{h_a}{\frac{1}{a}} = \frac{h_b}{\frac{1}{b}} = \frac{h_c}{\frac{1}{c}} = 2S.$$

Бундан:

$$h_a = \frac{2S}{a};\quad h_b = \frac{2S}{b};\quad h_c = \frac{2S}{c}. \quad (1)$$

Иккинчи учбурчакнинг учинчи томонини шулар билан ифодаласак:

$$\frac{h_a \cdot h_b}{h_c} = \frac{\frac{2S}{a}\cdot\frac{2S}{b}}{\frac{2S}{c}} = \frac{2cS}{ab}. \quad (2)$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

га ўхшаш

$$a_1 + b_1 + c_1 = h_a + h_b + \frac{h_a \cdot h_b}{h_c} = 2p_1$$

десак:

$$2p_1 = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2Sc}{ab} = \frac{2aS + 2bS + 2cS}{ab} = \frac{2S(a+b+c)}{ab}.$$

Бундан:

$$p_1 = \frac{S(a+b+c)}{ab} = \frac{2pS}{ab},$$

яъни

$$p_1 = \frac{2pS}{ab}.$$

У ҳолда

$$p_1 - h_a = \frac{2pS}{ab} - \frac{2S}{a} = \frac{2S(p-b)}{ab};$$

шу хилда

$$p_1 - b = \frac{2S(p-a)}{ab};$$

$$p_1 - \frac{h_a \cdot h_b}{h_c} = \frac{2pS}{ab} - \frac{\frac{2S}{a} \cdot \frac{2S}{b}}{\frac{2S}{c}} = \frac{2pS}{ab} - \frac{2cS}{ab} = \frac{2S(p-c)}{ab}.$$

Бундан:

$$S_{II} = S_{KLM} = \sqrt{p_1(p_1 - h_a)(p_1 - h_b)\left((p_1 - \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2Sp}{ab} \cdot \frac{2S(p-a)}{ab} \cdot \frac{2S(p-b)}{ab} \cdot \frac{2S(p-c)}{ab}} =$$

$$= \frac{4S^2}{a^2b^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4S^2}{a^2b^2} \cdot S = \frac{4S^3}{a^2b^2},$$

яъни

$$S_{II} = \frac{4S^3}{a^2b^2},$$

бундан

$$\frac{S_{II}}{S} = \frac{4S^2}{a^2b^2}. \tag{3}$$

Бизда $S_I = S = \frac{bh_b}{2}$ ва $S_I^2 = \frac{b^2h_b^2}{4}$, бу ва (3) тенгликка кўра қуйидагини ёза оламиз:

$$\frac{S_{II}}{S_I} = 4\left(\frac{b^2h_b^2}{4}\right) : a^2b^2 = \frac{b^2 \cdot h_b^2}{a^2b^2} = \frac{h_b^2}{a^2}$$

ёки

$$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{a^2}{h_b^2}.$$

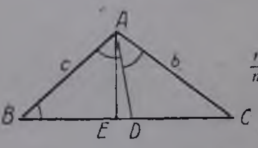
33. 1-хил ечиш (82-шакл). Шаклдаги $BP = n$, $PA = m$ бўлсин ($AB = n + m$). $\triangle BPD$ юзи $= S_1$, $\triangle DQC$ юзи $= S_2$, $\diamond PDQA$ юзи $= K$ десак,

1) $\triangle BPD \backsim \triangle DQC$ дан:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{n^2}{m^2} \tag{1}$$

ёки

$$\frac{n}{m} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \tag{2}$$



82-шакл.

2) $\triangle QDC \backsim \triangle ABC$ дан:

$$\frac{S_2}{S_{ABC}} = \frac{m^2}{(m+n)^2}. \quad S_{ABC} = S_1 + S_2 + K$$

бўлгани учун:

$$\frac{S_2}{S_1 + S_2 + K} = \frac{m^2}{(m+n)^2}. \tag{3}$$

Энди (1) дан $S_1 = \frac{n^2}{m^2} S_2$ ни ёзиб уни (3) ифодадаги S_1 ўрнига қўйсак:

$$\frac{S_2}{\frac{n^2}{m^2} S_2 + S_2 + K} = \frac{m^2}{(m+n)^2}$$

ёки

$$\frac{S_2 \cdot m^2}{S_2 (n^2 + m^2) Km^2} = \frac{m^2}{(m+n)^2}.$$

Бундан:

$$\frac{S_2}{S_2 (m^2 + n^2) + Km^2} = \frac{1}{(m+n)^2}.$$

Бундан эса

$$\frac{S_2 (m^2 + n^2) + Km^2}{S_2} = (m+n)^2$$

ёки

$$m^2 + n^2 + \frac{Km^2}{S_2} = m^2 + n^2 + 2mn,$$

яъни

$$\frac{Km^2}{S_2} = 2mn$$

ва

$$\frac{Km}{S_2} = 2n; \quad K = \frac{2nS_2}{m}; \; S_{APQ} = \frac{1}{2} K.$$

APQ учбурчакнинг изланган юзи $= \frac{nS_2}{m}$, яъни

$$S = \frac{nS_2}{m} = \frac{n}{m} S_2$$

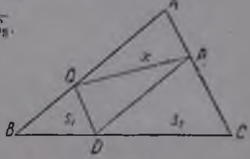
(2) ифодага асосан:

$$S = \sqrt{\frac{S_1}{S_2} \cdot S_2} = \sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2^2}{S_2}} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Ниҳоят:

$$S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

2-хил ечиш (83-шакл).



83-шакл.

ABC учбурчак AQP, DQP, DBQ ва DPC учбурчакларга бўлинганда $\triangle AQP$ юзи $= x$, $\triangle BQD$ юзи $= S_1$; $\triangle DPC$ юзи $= S_2$ десак, $\triangle AQP \backsim \triangle BQD$ (мос томонлари параллел) бўлганидан

$$\frac{x}{S_1} = \frac{AQ^2}{BQ^2}. \qquad (1)$$

Шу сингари $\triangle AQP \backsim \triangle DPC$ дан $\frac{x}{S_2} = \frac{AP^2}{PC^2}$. (2)

(1) ва (2) ни ҳадлаб кўпайтирсак, $\frac{x^2}{S_1 S_2} = \frac{AQ^2}{BQ^2} \cdot \frac{AP^2}{PC^2}$ (3)

$AQ = PD$ ва $AP = QD$ бўлганидан: $\frac{x^2}{S_1 S_2} = \frac{PD^2}{BQ^2} \cdot \frac{QD^2}{PC^2}$. (4)

$\triangle BQD \backsim \triangle DPC$ дан $\frac{PD}{BQ} = \frac{PC}{QD}$

ёки

$$\frac{PD}{BQ} \cdot \frac{QD}{PC} = 1. \qquad (5)$$

(4) ва (5) дан:

$$\frac{x^2}{S_1 S_2} = \left(\frac{PD}{BQ} \cdot \frac{QD}{PC}\right)^2 = 1,$$

яъни

$$\frac{x^2}{S_1 \cdot S_2} = 1$$

ёки

$$x^2 = S_1 \cdot S_2, \text{ бундан } x = \sqrt{S_1 S_2}.$$

34. $\frac{p(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$; $\frac{q(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$; $\frac{pq(p+q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$; $\frac{pq\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

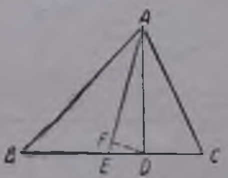
35. Ечиш (84-шакл). Агар $AD = h$; $AE = m_a$ бўлса, $h_a = \frac{2S}{a}$ ва $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. $DF \perp AE$. Шу сабабли тўғри бурчакли ADE, AFD учбурчаклар ўхшаш бўлиб, $\frac{AF}{h_a} = \frac{h_a}{m_a}$, бундан, $AF = \frac{h_a^2}{m_a}$ ёки $AF = \frac{8S^2}{a^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 + a^2}}$.

36. 1 ва 19.

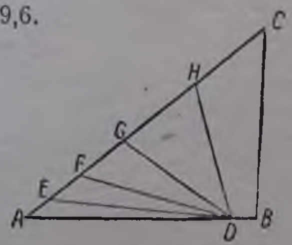
37. $AE = 12{,}8$; $AF = 25{,}6$.

38. Ечиш (85-шакл). $AE = x$; $AF = y$; $AG = z$; $AH = u$ деб олайлик. Умумий бурчакка эга учбурчаклар юзига доир I теоремага кўра:

1) $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{x\cdot 84}{112\cdot 108}$; $\frac{1}{15} = \frac{x}{4\cdot 36}$; $x = 9{,}6$.



84-шакл.



85-шакл.

(ABC учбурчак 1:2:3:4:5 нисбатларда ҳаммаси бўлиб 15 бўлакка бўлинган);

2) $\frac{S_{ADF}}{S_{ABC}} = \frac{y\cdot 84}{112\cdot 108}$; $\frac{3}{15} = \frac{y}{4\cdot 36}$; $y = \frac{4\cdot 36}{5} = 28{,}8$; $y = 28{,}8$;

3) $\frac{S_{ADG}}{S_{ABC}} = \frac{z\cdot 84}{112\cdot 108}$; $\frac{6}{15} = \frac{z}{4\cdot 36}$; $\frac{2}{5} = \frac{z}{4\cdot 36}$; $z = \frac{2\cdot 4\cdot 36}{5} = 57{,}6$; $z = 57{,}6$.

4) $\frac{S_{ADH}}{S_{ABC}} = \frac{u\cdot 84}{112\cdot 108}$; $\frac{10}{15} = \frac{u}{4\cdot 36}$; $u = \frac{2\cdot 4\cdot 36}{3} = 96$; $u = 96$.

Демак, $x = 9{,}6$; $y = 28{,}8$; $z = 57{,}6$; $u = 96$.

39. $\frac{13}{25}S$.

40. $\frac{3}{7}S$. *Кўрсатма.* AA_1 ва BB_1 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси N; BB_1 ва CC_1 ларнинг кесишиш нуқтаси P; CC_1 ва AA_1 ларнинг кесишиш нуқтаси Q билан белгиланса, унда:

$$S_{QNP} = S_{ABC} - S_{AQC} - S_{BPC} - S_{ANB}.$$

Масалан, S_{AQC} ни топиш учун $\frac{S_{AQC}}{S_{BQC}}$ ва $\frac{S_{AQC}}{S_{AQB}}$ нисбатларни топамиз, бу ерда

$$S_{ABC} = S_{AQC} + S_{BQC} + S_{AQB}$$

эканини эътиборга оламиз.

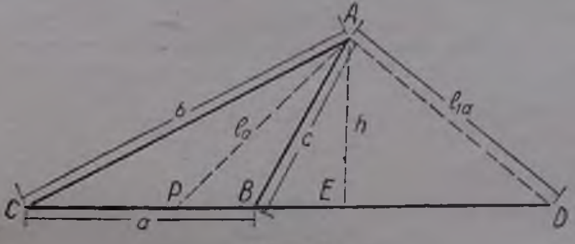
41. Ечиш (86-шакл). ABC учбурчакда $AP = l_a$ ички биссектриса, $AD = l_{1a}$ ташқи биссектриса.

а) Биссектрисага доир теоремага асосан:

1) $\frac{AC}{AB} = \frac{CP}{PB}$ ёки $\frac{CP}{PB} = \frac{b}{c}$; $PB = \frac{c}{b}\cdot CP$. (1)

Шаклдан: $PC = a - PB$. Буни (1) га қўйсак, унда $PB = \frac{c}{b}(a - PB)$ ёки $PB = \frac{ac}{b+c}$. Сўнгра $PC = a - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c}$.

2) Ташқи биссектрисаға доир теоремага кўра: $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$; шаклдан: $CD = a + BD$, демак, $\frac{a+BD}{BD} = \frac{b}{c}$ бўлиб, $BD = \frac{ac}{b-c}$.



86-шакл.

3) $PD = PB + BD = \frac{ac}{b+c} + \frac{ac}{b-c} = \frac{ac(b-c+b+c)}{b^2-c^2} = \frac{2abc}{b^2-c^2}$,

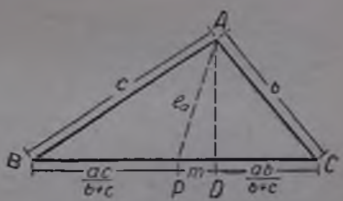
яъни $PD = \frac{2abc}{b^2-c^2}$.

б) $S_{ADP} = \frac{1}{2}PDh = \frac{1}{2}l_a \cdot l_{1a}$ (чунки $l_a \perp l_{1a}$), бундан $PDh = l_a \cdot l_{1a}$. Шундай қилиб,

$$h_a = \frac{l_a \cdot l_{1a}}{PD} = \frac{l_a \cdot l_{1a}}{\frac{2abc}{b^2-c^2}} = \frac{l_a \cdot l_{1a}(b^2-c^2)}{2abc},$$

яъни

$$h_a = \frac{l_a \cdot l_{1a}(b^2-c^2)}{2abc}.$$



87-шакл.

в) $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}a \times \frac{l_a \cdot l_{1a}(b^2-c^2)}{2abc} = \frac{l_a \cdot l_{1a}(b^2-c^2)}{4cb}$,

демак:

$$S = \frac{l_a \cdot l_{1a}(b^2-c^2)}{4bc} \quad (b > c).$$

42. Ечиш (87-шакл). 1) Ўтмас бурчакли ABP учбурчакда:

$$c^2 = l_a^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + 2\left(\frac{ac}{b+c}\right) \cdot m, \ (PD = m) \quad (1)$$

2) Ўткир бурчакли ACP учбурчакда

$$b^2 = l_a^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - 2\left(\frac{ab}{b+c}\right) \cdot m. \quad (2)$$

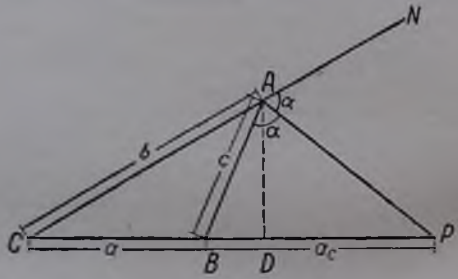
(1) ни c га, (2) ни b га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликларни ҳадлаб қўшсак, $bc(b+c) = l_a^2(b+c) + a^2bc \cdot \frac{b+c}{(b+c)^2}$.

Бундан:

$$l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right] =$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a) \text{ ёки } l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

43. Ечиш (88-шакл). ABC учбурчакни чизиб, унинг A учидан BAN бурчакнинг AP биссектрисасини ўтказамиз, ABP уч-



88-шакл.

бурчакнинг A учидан BC томонга AD баландлик туширамиз. Бунда олинган кесмани $BD = x$ десак,

1) $\triangle ABC$ дан $b^2 = c^2 + a^2 + 2ax$, (1)

2) $\triangle ABP$ дан $l_{1a}^2 = c^2 + \frac{a^2c^2}{(b-c)^2} - 2\frac{ac}{b-c}x$. (2)

(1) ни $\frac{c}{b-c}$ га ва (2) ни 1 га кўпайтириб ҳадлаб қўшсак:

$$l_{1a}^2 + \frac{cb^2}{b-c} = c^2 + \frac{a^2c}{b-c} + \frac{a^2c^2}{(b-c)^2}\,\frac{c^3}{b-c} \text{ ёки } l_{1a}^2 = c^2 + \frac{a^2c + c^3}{b-c} + \frac{a^2c^2}{(b-c)^2} -$$

$$- \frac{cb^2}{b-c} = \frac{c}{(b-c)^2}\left[c(b-c)^2 + (a^2 + c^2 - b^2)(b-c) + a^2c\right] =$$

$$= \frac{c}{(b-c)^2}(b^2c - 2bc^2 + c^3 + a^2c + bc^2 + a^2b - b^3 - c^3 - a^2c + b^2c) =$$

$$= \frac{bc}{(b-c)^2}(a^2 + 2bc - b^2 - c^2) = \frac{bc}{(b-c)^2}(a+b-c)(a-b+c) =$$

$$= \frac{4bc}{(b-c)^2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2} \cdot \frac{(a-b+c)}{2} = \frac{4bc}{(b-c)^2}(p-c)(p-b).$$

Бундан: $l_{1a} = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$.

44. *Кўрсатма.* 42—43-масалалардаги формулалардан фойдаланамиз.

46. $H=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ *км.*

47. *Кўрсатма.* Учбурчак томонининг квадрати ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

48. Ечиш (89-шакл). ABC учбурчакда $AB=BC=AC=a$ берилган.

$$h=AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Айлананинг радиуси

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Изланган $MN=y$; $EF=x$ бўлса,

$ML=LN=LD=\frac{y}{2}$; $Ep=pF=pD=\frac{x}{2}$.

89-шакл.

I. Биз AL; Lq; Ap ва pq ларни излаймиз.

1) $AL=h-\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{2}-\frac{y}{2}=\frac{a\sqrt{3}-y}{2}$,

2) $Lq=2r-AL=\frac{2\sqrt{3}a}{3}-\frac{a\sqrt{3}-y}{2}=\frac{a\sqrt{3}+3y}{6}$,

3) $Ap=h+\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{x}{2}=\frac{a\sqrt{3}+x}{2}$,

4) $pq=2r-Ap=\frac{2\sqrt{3}a}{3}-\frac{a\sqrt{3}+x}{2}=\frac{a\sqrt{3}-3x}{6}$.

II. Энди айлана ичида олинган L ва p нуқталарда кесишган ватарлар кўпайтмасини қараймиз:

1) $AL\cdot Lq=ML\cdot LN$ ёки $\frac{a\sqrt{3}-y}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}+3y}{6}=\frac{y^2}{4}$,

$(a\sqrt{3}-y)(a\sqrt{3}+3y)=3y^2$; $6y^2-2\sqrt{3}ay-3a^2=0$;

$y=\frac{a\sqrt{3}(1\pm\sqrt{7})}{6}$.

2) $Ap\cdot pq=Ep\cdot pF$; $\frac{a\sqrt{3}+x}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}-3x}{6}=\frac{x^2}{4}$,

$$6x^2+2a\sqrt{3}y-3a^2=0.$$

$$x=\frac{-a\sqrt{3}(1\pm\sqrt{7})}{6}.$$

49. Ечиш (90-шакл). ABC учбурчак BC томонининг икки тарафига тенг томонли BCD (чизмада бу учбурчакнинг DC томони кўрсатилмаган) ва BCD' учбурчаклар ясаб, D ва

D' нуқталар туташтирилса, бу чизиқ BC томонни M нуқтада кесиб ўтади. Учбурчакнинг A учидан $AA' \perp BC$ ўтказилса, бунда:

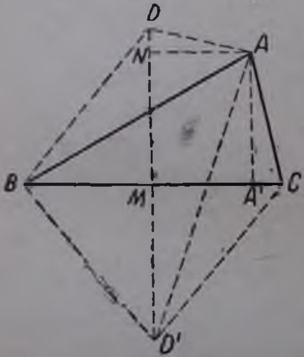
$$AA' = h_a;\ DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ва

$$A'C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a};$$

сўнгра

$$AN = MA' = \frac{a}{2} - A'C = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a}.$$



90-шакл.

ADN ва $AD'N$ учбурчаклардан AD ва AD' ларнинг қийматларини ифода қилсак:

$$AD^2(AD'^2) = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \mp h_a\right)^2 + \left(\frac{c^2 - b^2}{2a}\right)^2 =$$

$$= \frac{3a^2}{4} \mp ah_a\sqrt{3} + h_a^2 + \left(\frac{c^2 - b^2}{2a}\right)^2;$$

сўнгра

$$h_a a = 2S \text{ ва } h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 =$$

$$= b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}(b^2 - c^2) - \left(\frac{b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

бўлганидан

$$AD^2(AD'^2) = \frac{3a^2}{4} \mp 2S\sqrt{3} + \frac{b^2}{2} -$$

$$- \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \mp 2S\sqrt{3} = k^2 \mp 2S\sqrt{3}$$

(бунда $a^2 + b^2 + c^2 = 2k^2$ олинган). Демак:

$$AD(AD') = \sqrt{k^2 \mp 2S\sqrt{3}},$$

яъни

$$AD = \sqrt{k^2 - 2S\sqrt{3}}$$

ва

$$AD' = \sqrt{k^2 + 2S\sqrt{3}}.$$

50. $2\sqrt{\frac{b(p-b)(p-c)}{c}}$. *Курсатма.* Стюарт теоремаси татбиқ этилсин.

51. $ME = \frac{an}{a+b}$; $MF = \frac{bn}{a+b}$.

52. Ечиш (91-шакл). I. N нуқтадан AC нинг давомига $ND=h$ перпендикуляр туширамиз. $AP=x$; $PC=a-x$ бўлса, шарт бўйича

$$S_{OBN}-S_{AOP}=S_{ABC}=S,$$

бундан

$$S_{PNC}=2S=(a-x)\cdot\frac{h}{2}. \qquad (1)$$

$S_{AON}=S_{OBN}$ бўлганидан

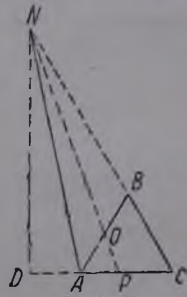
$$S_{APN}=S_{AOP}+S_{AON}=S_{OBN}+S_{AOP}$$

ва

$$S_{OBN}=S_{AOP}+S_{ABC}$$

бундан

$$S_{APN}=S_{AOP}+S+S_{AOP}=S+2\cdot S_{AOP}, \qquad (2)$$



91-шакл.

ABC ва AOP учбурчаклар умумий A бурчакка эга бўлганидан

$$\frac{S_{AOP}}{S}=\frac{AO\cdot AP}{AB\cdot AC}=\frac{\frac{a}{2}\cdot x}{a\cdot a}=\frac{x}{2a}$$

ёки

$$S_{AOP}=\frac{S\cdot x}{2a} \qquad (3)$$

(3) тенгликдан (2) га қўйилса,

$$S_{APN}=S\cdot\frac{a+x}{a} \qquad (4)$$

келиб чиқади.

Шаклдан маълум бўлишича:

$$S_{APN}=\frac{hx}{2}.$$

(4) ва (5) тенгликлардан:

$$\frac{h\cdot x}{2}=\frac{S(a+x)}{a}$$

ёки

$$\frac{h}{2}=\frac{S(a+x)}{ax} \qquad (6)$$

(6) тенглик (1) га қўйилса,

$$2S=(a-x)\cdot\frac{S(a+x)}{ax},$$

бундан:

$$x=a(\sqrt{2}-1). \qquad (7)$$

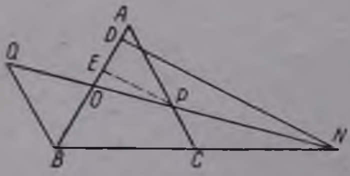
Шарт бўйича a нинг берилган қиймати (7) га қўйилса:

$$x=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1, \text{ яъни } AP=1.$$

II. P ва N нуқталар O дан бир тарафда ётган ҳол.

1) (92-a шакл). (А. С. Смогоржевский томонидан тақдим этилган.) $AB = BC = CA = a$; $AO = OB = \frac{a}{2}$; $AP = x$; $BN = z$; $BQ \parallel AC$; $BQ = AP = x$. BQN ва CPN ўхшаш учбурчаклардан $\frac{QB}{PC} = \frac{BN}{CN}$ ёки $\frac{x}{a-x} = \frac{z}{z-a}$; бундан:

$$z = \frac{ax}{2x-a}. \qquad (1)$$



92-a шакл.

$ND \perp AB$ ва $PE \perp AB$ ўтказсак, бунда AND ва APE тўғри бурчакли учбурчакларда 60° ли бурчак қаршисида ётганликлари учун

$ND = \frac{z\sqrt{3}}{2}$; $PE = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ бўлади, сўнгра

$$\left.\begin{aligned} S_{BON} &= \frac{BO \cdot ND}{2} = \frac{a \cdot z\sqrt{3}}{8}, \\ S_{AOP} &= \frac{AO \cdot PE}{2} = \frac{a \cdot x\sqrt{3}}{8}, \\ S_{ABC} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Шартга кўра: $S_{BON} - S_{AOP} = S_{ABC}$, (2) га кўра: $\frac{az\sqrt{3}}{8} - \frac{ax\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ бўлиб, бундан $z - x = 2a$ ёки (1) ни назарга олсак:

$$\frac{ax}{2x-a} - x = 2a$$

ёки

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

ва

$$x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62a$$

келиб чиқади.

2) (92-б шакл). (А. Л. Перельдик тақдим этган.)

$$AB = BC = CA = a \qquad (1)$$

$$S_{BON} - S_{OPA} = S_{ABC} = S, \qquad (2)$$

(2) тенгликка

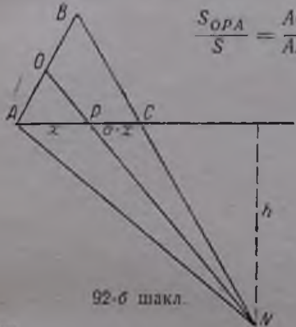
$$S_{BON} = S_{PNC} + S_{OBCP}; \; S_{ABC} = S_{OPA} + S_{OBCP}$$

ларни қўйсак,

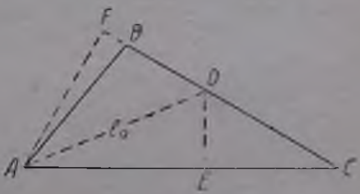
$$S_{PNC} = 2S_{OPA} \tag{3}$$

ҳосил бўлади.

$$\frac{S_{OPA}}{S} = \frac{AO \cdot AP}{AB \cdot AC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot x}{a^2} = \frac{x}{2a}$$



92-б шакл.



92-в шакл.

ёки

$$S_{OPA} = \frac{xS}{2a}. \tag{4}$$

(4) га асосан (3)

$$S_{PNC} = 2S_{OPA} = 2\frac{xS}{2a} = \frac{xS}{a}. \tag{5}$$

$$S_{AON} = S_{BON}$$

бўлганидан:

$$S_{APN} = S_{AON} - S_{OPA} = S_{BON} - S_{OPA}$$

бўлгани учун

$$S_{APN} = S_{ABC} = S$$

бўлади.

$$S_{APN} = \frac{xh}{2}$$

бўлганидан:

$$S = \frac{xh}{2}; \frac{h}{2} = \frac{S}{x}; \tag{6}$$

$$S_{PNC} = \frac{(a-x)\,h}{2}. \tag{7}$$

(6) даги $\frac{h}{2}$ ни (7) га қўйсак, $S_{PNC} = (a-x)\frac{S}{x}$ бўлади.

(3) ва (4) га кўра $\frac{(a-x)\,S}{x} = \frac{xS}{a}$, бундан $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a \approx$ $\approx 0,62\,a$ чиқади.

53. Ечиш (92-*в* шакл). 1) AD биссектриса бўлгани учун:

$$BD = \frac{ac}{b+c}; \; DC = \frac{ab}{b+c}.$$

42-масаладан:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-c)}.$$

2) l_a — биссектрисанинг b томондаги проекциясини топамиз:

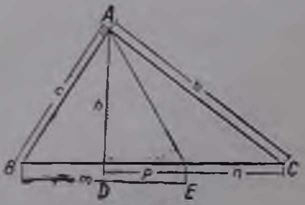
$$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AC \cdot AE,$$

бундан:

$$AE = \frac{AD^2 + AC^2 - DC^2}{2AC} = \left[bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} + b^2 - \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}\right] : 2b =$$

$$= \frac{1}{2}\left[c \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} + b - \frac{a^2b}{(b+c)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(b+c)^2 - a^2}{b+c} = \frac{2p(p-a)}{b+c}.$$



93-шакл.

54. 19.

55. $CK = \sqrt{p^2 - ab}.$

56. Ечиш (93-шакл).

A дан AD баландлик туширамиз ва DE ни p билан белгилаймиз.

1) $\triangle ABC$ дан $h = \sqrt{c^2 - (m-p)^2}$. (1)

2) $\triangle ADC$ дан $h = \sqrt{b^2 - (n+p)^2}$; (2)

(1) ва (2) дан $\sqrt{c^2 - (m-p)^2} = \sqrt{b^2 - (n+p)^2}$;

$$2p(m+n) = m^2 - n^2 + b^2 - c^2;$$

$$p = \frac{m^2 - n^2 + b^2 - c^2}{2(m+n)} = \frac{m^2 - n^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

3) $\triangle ABE$ да $c^2 = AE^2 + m^2 - 2mp$; $(AE = x)$

$$x^2 = c^2 - m^2 + 2mp = c^2 - m^2 + 2m \cdot \frac{m^2 - n^2 + b^2 - c^2}{2a} =$$

$$= \frac{nc^2 - m^2n - mn^2 + mb^2}{m+n},$$

$$x^2 = \frac{mb^2 + nc^2 - mn(m+n)}{m+n} = \frac{mb^2 + nc^2 - mna}{a},$$

$$x = \sqrt{\frac{mb^2 + nc^2 - mna}{a}}.$$

57. Асосидан масофаси $= \frac{1}{3}(9 - 5\sqrt{3})$.

58. $\angle HFB + \angle AEB + \angle ABC = 180°$;
($\angle AFB = 90°$; $\angle AEB = 60°$; $\angle ACB = 30°$.

59. Ечиш (94-шакл). $EF \perp BC$ ўтказамиз.

$AD = H$; $EF = h$; $OD = \frac{H}{2}$; $FC = n$ десак,

1) $\triangle BOD \backsim \triangle BEF$ дан:

$$\frac{EF}{OD} = \frac{BF}{BD};\quad \frac{h}{\frac{H}{2}} = \frac{a-n}{\frac{a}{2}};$$

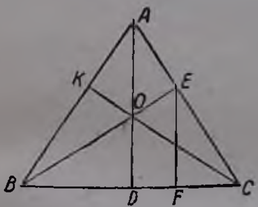
$H = \sqrt{75^2 - 45^2} = 60$ бўлгани учун $h = \frac{90 - n}{45} \cdot 30 = \frac{2}{3}(90 - n)$;

2) $\triangle ADC \backsim \triangle EFC$ дан:

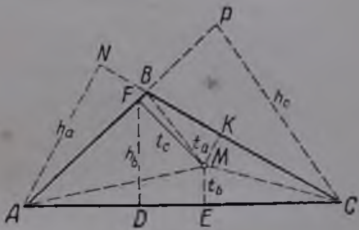
$$\frac{EF}{AD} = \frac{FC}{CD}; \ \frac{h}{H} = \frac{n}{\frac{90}{2}}; \ h = \frac{4}{3}n;$$

3) $\frac{2}{3}(90 - n) = \frac{4}{3}n$ тенгламадан $n = 30$;

4) $h = \frac{4}{3}n = \frac{4}{3} \cdot 30 = 40$;



94-шакл.



95-шакл.

5) $S_{BCE} = S_{BKC} = \frac{1}{2}ah = 1800$;

6) $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot H = 2700$;

7) $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 90 = 1350$;

8) $S_{AEOK} = S_{ABC} + S_{BOC} - 2S_{BEC} = 2700 + 1350 - 2 \cdot 1800 = 450$.

$$S_{AEOK} = 450.$$

60. $30\sqrt{3}$ *м. Кўрсатма.* Кузатиш йўналишларидан иккитаси ўзаро перпендикуляр.

61. Ечиш (95-шакл). t_a, t_b, t_c учбурчак ичида олинган ихтиёрий M нуқтанинг учбурчак томонларигача масофаларидан иборат.

1) $S_{ABC} = S_{AMC} + S_{AMB} + S_{BMC}$ ёки $S = S_1 + S_2 + S_3$;

2) $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ ёки $h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}; h_c = \frac{2S}{c}$; шунга ўхшаш:

3) $S_1 = \frac{t_a \cdot a}{2}, S_2 = \frac{t_b \cdot b}{2}; S_3 = \frac{t_c \cdot c}{2}$ ёки $t_a = \frac{2S_1}{a}; t_b = \frac{2S_2}{b}$; $t_c = \frac{2S_3}{c}$.

4) Булардан:

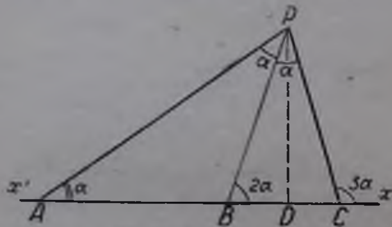
$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=\frac{2S_1}{a}:\frac{2S}{a}+\frac{2S_2}{b}:\frac{2S}{b}+$$
$$+\frac{2S_3}{c}:\frac{2S}{c}=\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S}=\frac{S}{S}=1,$$

яъни $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$ тенглик келиб чиқади.

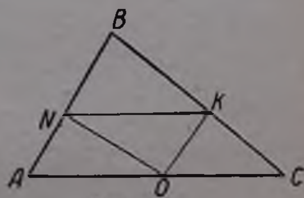
62. Ечиш (96-шакл). Шартни кўриб чиқсак: $\angle PAC=\angle CPB$ ва $\angle CPA=\angle PBC$ бўлиб, $\triangle PBC \backsim \triangle APC$; бундан:

$$\frac{AP}{PC}=\frac{PB}{BC}=\frac{16{,}5}{7{,}5}=\frac{11}{5}, \text{ яъни } AP=\frac{11}{5}PC. \quad (1)$$

$$\frac{AP}{AC}=\frac{BP}{PC};\ \frac{AP}{24}=\frac{16{,}5}{PC}, \text{ яъни } AP=\frac{396}{PC}. \quad (2)$$



96-шакл.



97-шакл.

(1) ва (2) тенгликлардан $\frac{11}{5}PC=\frac{396}{PC}$, яъни $PC^2=\frac{396\cdot 5}{11}=180$; демак: $PC=\sqrt{180}$ ва $AP=\frac{11}{5}\sqrt{180}$.

Сўнгра P нуқтадан $x'x$ га $PD=h$ баландлик тушириб, $BD=x$ десак,

$$\triangle APB \text{ дан: } AP^2=AB^2+PB^2+2\cdot AB\cdot BD.$$

Ёки $\left(\frac{11}{5}\sqrt{180}\right)^2=16{,}5^2+16{,}5^2+2\cdot 16{,}5x$ бўлиб, $x=9{,}9$.

$\triangle PBD$ дан $h=\sqrt{16{,}5-x^2}=\sqrt{272{,}25-98{,}01}=\sqrt{174{,}24}=$ $=13{,}2$. Демак, P нуқтадан $x'x$ гача бўлган масофа $=13{,}2$.

63. $\sqrt{\frac{c(p-b)(p-c)}{b}}$; $\sqrt{\frac{b(p-b)(p-c)}{c}}$.

64. Бу ҳамма тўртбурчаклар тенгдош.

65. Бу кесмалардан бири $\frac{7}{11}\sqrt{330}$.

66. $\frac{n^2S}{(m+n)^2}$; $\frac{m^2S}{(m+n)^2}$; $\frac{2mnS}{(m+n)^2}$.

67. $p\sqrt{3}$.

68. 21.

69. Ечиш (97-шакл). 1) Герон формуласига биноан $S_{ABC}=$ $=360$.

2) Тенг асосларга эга бўлганидан $S_{ABO} = S_{OBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ (шаклда BO кесма кўрсатилмаган) ёки $OK = \frac{360}{29}$; $ON = \frac{360}{25}$, бундан $S_{OBC} = \frac{OK \cdot BC}{2} = \frac{OK \cdot 29}{2} = 180$ ва $S_{ABC} = \frac{ON \cdot AB}{2} =$ $= \frac{ON \cdot 25}{2} = 180$.

3) $\angle NOK + \angle NBK = 180°$ бўлганидан, учбурчаклар юзларининг нисбати, бу бурчакларни ўз ичига олган томонлар кўпайтмасининг нисбатига тенгдир, яъни:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ONK}} = \frac{AB \cdot BC}{ON \cdot OK} \text{ ёки } \frac{360}{S_{ONK}} = \frac{25 \cdot 29}{\frac{360}{25} \cdot \frac{360}{29}},$$

бундан:

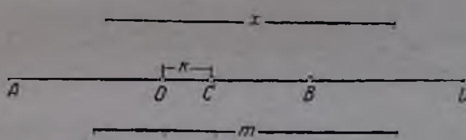
$$S_{ONK} = 88\frac{3208}{4205}.$$

70. $\left(\frac{p_1p_2}{ab} + \frac{p_2p_3}{bc} + \frac{p_1p_3}{ac}\right) S$.

Кўрсатма. O нуқтадан туширилган перпендикулярнинг асосларини туташтиришдан ҳосил бўлган кичик учбурчак уч қисмга бўлинади. Булардан ҳар бирида ABC ва OB_1C_1 учбурчакдаги каби $\angle B_1OC_1 + \angle B_1AC_1 = 180°$ бўлганидан, уларнинг юзларининг нисбати олинади.

71. $4S + 2a^2$.

72. Ечиш (98-шакл). $AB = x$ десак,



98-шакл.

I. 1) $\begin{cases} AC + BC = x, \\ AC - BC = 2k; \end{cases}$ 2) $AB - BD = x$;

3) $BD = m - \frac{x}{2}$; 4) $BC = \frac{x}{2} - k$.

II. $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ дан ҳосила пропорция $\frac{AC - BC}{BC} = \frac{AD - BD}{BD}$ тузиб, тегишли қийматларни ёзсак:

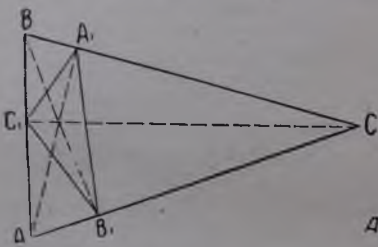
$$\frac{2k}{\frac{x}{2} - k} = \frac{x}{m - \frac{x}{2}}; \text{ бундан } x = 2\sqrt{mk}.$$

73. $\frac{h}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

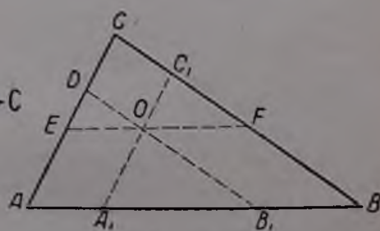
74. $12\frac{72}{169}$.

75. Ечиш (99-шакл). $\triangle ABC$ да $AA_1 \perp BC$; $BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$ бўлса, тўғри бурчакли $\triangle AA_1B \backsim \triangle CC_1B$, бундан $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$ ёки $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$, бундан ташқари $\angle B$ умумий бўлгани учун $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$. Шунга асосан: $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B}$ ёки $A_1C_1 = \frac{b}{c}x$; $(A_1B = x)$. x нинг қийматини топиш учун учбурчак томони квадратининг формуласидан фойдаланамиз. Бунда $\triangle ABC$ дан $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Бу қиймат x нинг ўрнига қўйилса:

$$A_1C_1 = b_1 = \frac{b}{c} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2(a^2 + c^2 - b^2)}{2abc}.$$



99-шакл.



100-шакл.

Шунга ўхшаш:

$$a_1 = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc} \quad \text{ва} \quad c_1 = \frac{c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{2abc};$$

булардан:

$$2p_1 = a_1 + b_1 + c_1 = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} =$$

$$= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{2abc} = \frac{16S^2}{2abc} = \frac{8S^2}{abc}.$$

76. Ечиш (100-шакл). O — $\triangle ABC$ ичидаги ихтиёрий нуқта, $EF \parallel AB$; $A_1C_1 \parallel AC$ ва $B_1D \parallel BC$ олиб, $S_{ABC} = S$, $S_{EOD} = S_1$, $S_{FOC_1} = S_2$ ва $S_{A_1OB_1} = S_3$ ҳамда $OE = AA_1 = x$, $OF = AB_1 = z$ ва $A_1B_1 = y$ бўлса, бунда $c = x + y + z$ бўлади.

Томонлари ўзаро параллел бўлганидан:

1) $\triangle ODE \backsim \triangle ABC$ бўлиб $\frac{x^2}{c^2} = \frac{S_1}{S}$, яъни $x = \frac{c}{S}\sqrt{S_1 \cdot S}$;

2) $\triangle OFC_1 \backsim \triangle ABC$ бўлиб, $\frac{z^2}{c^2} = \frac{S_2}{S}$, яъни $z = \frac{c}{S}\sqrt{S_2 \cdot S}$;

3) $\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle ABC$ бўлиб, $\frac{y^2}{c^2} = \frac{S_3}{S}$, яъни $y = \frac{c}{S}\sqrt{S_3 \cdot S}$; бу-

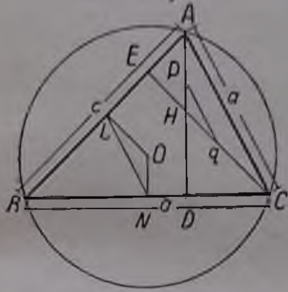
лардан:

$$c = x + y + z = \frac{c}{S}(\sqrt{S_1 S} + \sqrt{S_2 \cdot S} + \sqrt{S_3 \cdot S}),$$

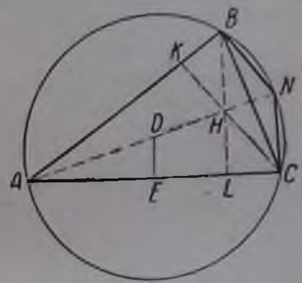
бундан:

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \text{ ёки } S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

77. $a = d\,(\sqrt{3} - 1)$.



101-шакл.



102-шакл.

78. $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2m_c)}$; бунда $2p = a + b + 2m_c$.

79. $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

80. I хил ечиш (101-шакл).

Айлананинг O марказидан $ON \perp BC$, учбурчакнинг A учидан $AD \perp BC_1$ ўтказиб, $AD = h_a$ деб, $h_a = 2.\ k_a$ бўлишини кўрсатамиз.

1) $\triangle ABC$ нинг ўрта чизиғи $NL = \frac{1}{2}AC$,

2) $\triangle AHC$ нинг ўрта чизиғи $pq = \frac{1}{2}AC$,

3) $AH \parallel ON$; $HC \parallel OL$; $Pq \mathrel{\#} NL$, демак, $\triangle ONL = \triangle HPq$, яъни $ON = HP$ ёки $ON = \frac{1}{2}AH$; $k_a = \frac{1}{2}h'_a\ (AH = h'_a)$.

Шу билан $h'_a = 2k_a$ ҳосил бўлади.

II хил ечиш (102-шакл).

1) Айлананинг AN диаметрини ўтказиб, N ва C нуқталарни туташтирсак, тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Бунда: $\triangle ANC \backsim \triangle AOE$ ва $OE = \frac{1}{2}NC$ (OE ўрта чизиқ), яъни $NC = 2k_a$.

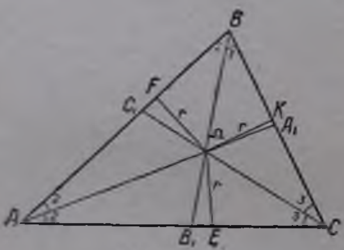
2) $\angle ABN = 90°$; $CK \parallel NB$. Демак, $NBHC$ тўртбурчак параллелограмм булиб, $NC = BH$ $(BN = h'_b)$. Шу билан $BH = 2 \cdot OE$, яъни $h'_b = 2k_b$; $h'_a = 2k_a$; $h'_c = 2k_c$ дир.

81. Ечиш (103-шакл). Айтилган ички биссектрисаларнинг кесишган нуқтаси Ω бўлсин. Биз $A\Omega C$ ва ABC учбурчаклар юзларининг нисбатини ёзсак, унда:

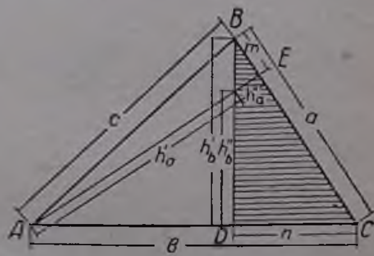
$$\frac{S_{A\Omega C}}{S_{ABC}}=\frac{\Omega B_1}{BB_1} \text{ ёки } \frac{\Omega B_1}{BB_1}=\frac{S_{A\Omega C}}{S_{A\Omega C}+S_{B\Omega C}+S_{A\Omega B}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}rb}{\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc}=\frac{b}{a+b+c}=\frac{b}{2p},$$

яъни $\Omega B_1=\frac{b}{2p}\cdot BB_1$. Шу хилда $\Omega A_1=\frac{a}{2p}AA_1$; $\Omega C_1=\frac{c}{2p}CC_1$.



103-шакл.



104-шакл.

82. *Кўрсатма.* Ички ва ташқи чизилган биссектрисаларнинг кесишиш нуқтаси O билан A, B, C нуқталар туташтирилганда ҳосил бўлган учбурчаклар юзининг нисбатини томонлари билан боғловчи ифодалардан фойдаланамиз.

83. Ечиш (104-шакл). 1) $BE=m$ десак, ABC учбурчакдаги B бурчак қаршисидаги томонни аниқлаш формуласидан $m=$ $=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

2) Умумий ўткир бурчакка эга тўғри бурчакли учбурчаклар бўлганидан $\triangle BEO \backsim \triangle BDC$.

Бундан: а) $h'_b : m = a : h_b$; $h'_b=\frac{a\cdot m}{h_b}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{4S}$, $\left(h_b=\frac{2S}{b}\right)$.

демак, $h'_b=\frac{b(b^2+c^2-b^2)}{4S}$; шунга ўхшаш $h'_a=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}$.

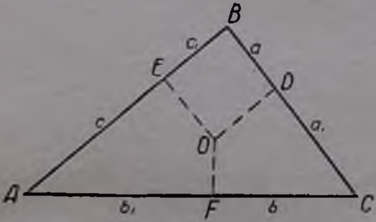
б) $\frac{BO}{OE}=\frac{BC}{CD}$; $\frac{h'_b}{h''_a}=\frac{a}{n}$; $h''_a=\frac{n\cdot h'_b}{a}=\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{8aS}$.

Умумий ҳолда: $h''_a=\pm\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}{8aS}$.

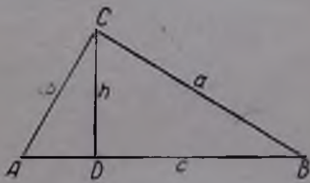
Шу хилда: $h''_b=\pm\frac{(c^2+b^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}{8bS}$.

84. *Кўрсатма.* Учбурчакнинг учларини олинган нуқта билан туташтириб, ҳосил бўлган учбурчакларга Пифагор теоремасини татбиқ этамиз.

85. Ечиш (105-шакл). $\triangle ABC$ нинг AB томонида E, BC томонида D ва AC томонида F нуқталар олинганда, учбурчак томонларидаги кесмалар орасида $a^2+b^2+c^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2$ тенглик мавжуд бўлганда D, E, F нуқталардан учбурчак томонла-



105-шакл.



106-шакл.

рига чиқарилган перпендикуляр бир нуқтада кесишмасдан уч нуқтада кесишса, иккитасининг кесишиш нуқтасидан учинчи томонга перпендикуляр тушириб 84-масалага биноан $a^2+b^2+c^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2$ ва $a^2+b^2+p^2=a_1^2+b_1^2+p_1^2$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Уларнинг шакли алмаштириб ёзилса:

$$a^2+b^2-a_1^2-b_1^2=c_1^2=c^2 \text{ ва } a^2+b^2-a_1^2-b_1^2=p_1^2-p^2,$$

бундан

$$c_1^2-c^2=p_1^2-p^2 \text{ ёки } (c_1-c)(c_1+c)=(p_1-p)(p_1+p). \quad (1)$$

Масаланинг шартига кўра:

$$c_1+c=p_1+p \quad (2)$$

бўлганидан, (1) дан:

$$c_1-c=p_1-p. \quad (3)$$

Бу сўнгги икки тенгликни қўшсак ва айирсак $2p_1=2c_1$ ва $2p=2c$, яъни $p_1=c_1$ келиб чиқади, бу эса учала перпендикулярнинг бир нуқтада кесишганлигини кўрсатади.

87. $\dfrac{d'_a-d_a}{d''_a-d_a}=\dfrac{d'_b-d_b}{d''_b-d_b}$ шарт бажарилганда. Учбурчак томонларига туширилган параллел кесмаларнинг пропорционаллигидан фойдаланилади.

88. $x^2=\dfrac{b^2\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{c^2\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{a^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$.

90. Ечиш (106-шакл). Шартга кўра $a+b+c=2p$. Бундан $a+b=2p-c$ бўлиб, иккала томонни квадратга кўтарсак, $a^2+b^2+2ab=(2p-c)^2$; аммо $a^2+b^2=c^2$ ва $ab=ch$.

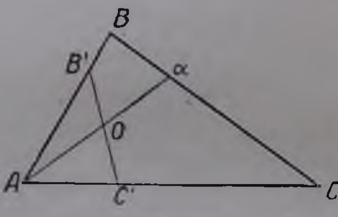
Шунинг учун $c^2 + 2ch = 4p^2 - 4pc + c^2$. Бундан $c = \frac{2p^2}{h + 2p}$.
Энди биз $a + b = \frac{2p(h+p)}{h+2p}$ ва $ab = \frac{2p^2h}{h+2p}$ ларни ҳосил қиламиз.

Натижада a ва b лар $x^2 - \frac{2p(h+p)}{h+2p}x + \frac{2p^2h}{h+2p} = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлади. Бунда $c = \frac{2p^2}{h+2p}$,

$$a = \frac{p}{h+2p}\left[h + p + \sqrt{(p-h)^2 - 2h^2}\right]$$

$b = \frac{p}{h+2p}\left[h + p - \sqrt{(p-h)^2 - 2h^2}\right]$. Масала $(p-h)^2 \geqslant 2h^2$ бўлгандагина ечимга эга бўлади.

91. *Кўрсатма.* Чева теоремасини исбот қилгандагидай иш кўрамиз.



107-шакл.

92. *Кўрсатма.* Чева теоремасини татбиқ этамиз.

94. *Кўрсатма.* Чева теоремасидан фойдаланамиз.

95. Ечиш (107-шакл). ABC учбурчакда $B'C'$ тўғри чизиқ BC га антипараллел чизиқ, яъни $\angle ABC = \angle AC'B'$, $A\alpha$ тўғри чизиқ симедиана, яъни $OC' = OB'$. $B\alpha$ ва $C\alpha$ кесмаларни ва $\frac{B\alpha}{C\alpha}$ нисбатни топиш керак.

$\triangle A\alpha B$ ва $\triangle AC\alpha$ ларнинг баландликлари бир хил бўлганидан:

$$\frac{S_{A\alpha B}}{S_{AC\alpha}} = \frac{B\alpha}{C\alpha}. \qquad (1)$$

Умумий бурчакка эга бўлган $\triangle AB\alpha$ ва $\triangle AOB'$ юзларининг нисбати:

$$\frac{S_{AB\alpha}}{S_{AOB'}} = \frac{A\alpha \cdot c}{AO \cdot AB'} \quad \text{ёки} \quad S_{AB\alpha} = S_{AOB'} \cdot \frac{A\alpha \cdot c}{AO \cdot AB'}. \qquad (2)$$

Шунингдек, $\angle \alpha AC$ умумий бўлганидан $\triangle AC\alpha$ ва $\triangle AOC'$ юзларининг нисбати:

$$\frac{S_{AC\alpha}}{S_{AOC'}} = \frac{A\alpha \cdot b}{AO \cdot AC'} \quad \text{ёки} \quad S_{AC\alpha} = S_{AOC'} \cdot \frac{A\alpha \cdot b}{AO \cdot AC'}. \qquad (3)$$

Ҳосил қилинган (2) тенгликни (3) га бўлсак ($S_{AOB'} = S_{AOC'}$ бўлганидан)

$$\frac{S_{AB\alpha}}{S_{AC\alpha}} = \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{c}{b}. \qquad (4)$$

$\triangle ABC$ ва $\triangle AB'C'$ ларда $\angle B = \angle C'$ ва $\angle A$ умумий бўлганидан $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$, бундан:

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}. \qquad (5)$$

(4) ва (5) га кўра:

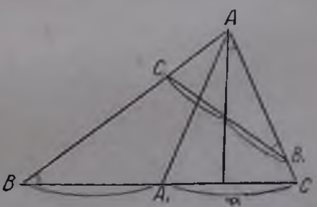
$$\frac{S_{ABa}}{S_{ACa}} = \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad (6)$$

бу тенглик (1) билан солиштирилса, $\frac{Ba}{Ca} = \frac{c^2}{b^2}$ келиб чиқади. Яъни кесмаларнинг нисбати буларга ёпишган томонлар квадратларининг нисбатига тенг.

Агар $Ba = x$; $Ca = y$ десак, $x + y = a$; $\frac{x}{y} = \frac{c^2}{b^2}$; бундан:

$$x = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}; \quad y = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}.$$

Изоҳ. Агар $(B'C')$ тўғри чизиқ учбурчак бурчагининг ($\angle A$ нинг) икки томонини ёки уларнинг давомини кесиб ўтиш натижасида шу томонлардан бири билан ҳосил қилинган бурчак иккинчи ва учинчи томон орасидаги бурчакка тенг бўлса, $(B'C')$ тўғри чизиқ учинчи (BC) томонга нисбатан *антипараллел* деб аталади. Aa тўғри чизиқ BC томонга нисбатан учбурчак *симедианаси* деб аталади. *Медиана*— BC га параллел ватарлар ўрталарининг геометрик ўрнидир. *Симедиана* эса, BC га нисбатан антипараллел булган ватарлар ўрталарининг геометрик ўрнидир.



108-шакл.

Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчагининг симедианаси шу бурчакнинг баландлиги, биссектрисаси ва медианаси билан устма-уст тушади.

96. Ечиш. 1-усул. (108-шакл.) Агар B_1C_1 кесма BC га нисбатан антипараллел бўлса, унда AB_1C_1 учбурчакнинг медианаси ABC учбурчакнинг симедианаси ва, аксинча, ABC учбурчакнинг медианаси AB_1C_1 учбурчакнинг симедианаси бўлади. Шунга кўра, $\angle BAA_1 = \angle CA\alpha$ бўлади.

1) $\frac{S_{ABC}}{S_{ACa}} = \frac{BC}{aC} = \frac{Ba + aC}{aC} = \frac{Ba}{aC} + 1$ (95-масалада $\frac{Ba}{aC} = \frac{c^2}{b^2}$ бўлган эди. Шуни назарда тутамиз) ёки $\frac{Ba}{aC} + 1 = \frac{c^2}{b^2} + 1 + \frac{b^2 + c^2}{b^2}$ бўлиб, натижада:

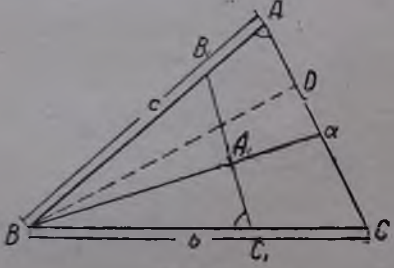
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACa}} = \frac{b^2 + c^2}{b^2}$$

ёки

$$\frac{S}{S_{AC\alpha}} = \frac{b^2+c^2}{b^2} \text{ ва } S_{AC\alpha} = \frac{Sb^2}{b^2+c^2}. \qquad (1)$$

$$S_{ABA_1} = \frac{1}{2}S. \qquad (2)$$

(AA_1 кесма BAC учбурчакнинг медианаси.)



109-шакл.

(1) ни (2) га бўлсак,

$$\frac{S_{AC\alpha}}{S_{ABA_1}} = \frac{2b^2}{b^2+c^2}. \qquad (3)$$

Иккинчи томонидан $\angle CA\alpha = \angle BAA_1$ бўлганидан:

$$\frac{S_{AC\alpha}}{S_{ABA_1}} = \frac{b\cdot A\alpha}{c\cdot m_a}. \qquad (4)$$

(3) ва (4) ни эътиборга олсак,

$$\frac{b\cdot A\alpha}{c\cdot m_a} = \frac{2b^2}{b^2+c^2}$$

ёки

$$A\alpha = \frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot m_a = \frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} =$$

$$= \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \text{ демак, } A\alpha = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

2-усул (109-шакл). $A\alpha = C_м$; $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$; $AD \perp BC$ ва 95-масаладан:

$$B\alpha = \frac{ac^2}{b^2+c^2};\ C\alpha = \frac{ab^2}{b^2+c^2}.$$

Учбурчак томонлари квадратининг формуласига кўра $\triangle AB\alpha$ дан:

1) $c^2 = c_м + B\alpha^2 + 2B\alpha\cdot D\alpha$ $\qquad$ $C\alpha$ тенгламаларнинг 1-сини

$\triangle AC\alpha$: 2) $b^2 = C_м^2 + C\alpha^2 + 2C\alpha\cdot B\alpha$ $\qquad$ $C\alpha$ ва 2-сини $B\alpha$ га кўпайтириб, ҳадлаб қўшамиз.

$$b^2B\alpha + c^2C\alpha = C_м^2\,(B\alpha + C\alpha) + B\alpha\cdot C\alpha\,(B\alpha + C\alpha)$$

ёки $b^2B\alpha + c^2C\alpha = aC_м^2 + aB\alpha\cdot C\alpha$, бундан:

$$C_м^2 = \frac{b^2\cdot B\alpha + c^2\cdot C\alpha}{a} - B\alpha\cdot C\alpha = \frac{b^2\cdot ac^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{c^2\cdot ab^2}{a(b^2+c^2)} -$$

$$-\frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)} = \frac{b^2c^2(b^2+c^2) + b^2c^2(b^2+c^2) - a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} = \frac{b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)}{(b^2+c^2)^2}.$$

Демак,

$$C_м = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

97. Тўғри бурчакдан гипотенузага туширилган перпендикулярдан иборат; 95-масалага қаранг.

98. $\frac{c}{b}$. Бундан нима хулоса чиқариш мумкин?

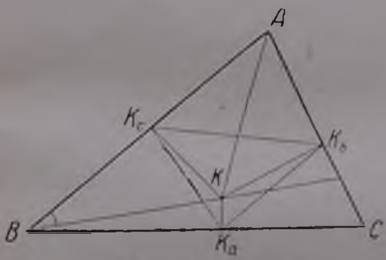
Кўрсатма. 95-масалага қаранг.

99. *Кўрсатма.* 95-масалага қаранг.

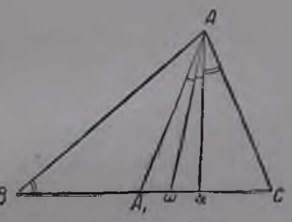
100. $KK_c = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$. *Кўрсатма.* 99-масалага қаранг.

101. Ечиш (110-шакл). ABC ва K_bKK_a учбурчакларда $\angle K_bKK_a + \angle BCA = 2d$. Илгари курганимиздек:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{K_bKK_a}} = \frac{a\cdot b}{K_bK\cdot K_aK} \text{ ёки } S_{K_bKK_a} = \frac{K_bK\cdot KK_a}{ab}\cdot S.$$



110-шакл.



111-шакл.

100-масалага кўра, $KK_a = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$; $KK_b = \frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}$.

Шунга кўра

$$S_{K_bKK_a} = \frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}\cdot\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}\cdot\frac{S}{ab} = \frac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

худди шу каби

$$S_{K_aKK_c} = \frac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}; \quad S_{K_bKK_c} = \frac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

бўлганидан

$$S_{K_aK_bK_c} = S_{K_aKK_b} + S_{K_bKK_c} + S_{K_cKK_a} = \frac{4S^3+4S^3+4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2} =$$

$$= \frac{12S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}, \text{ яъни } S_{K_aK_bK_c} = \frac{12S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

102. Ечиш (111-шакл). Учбурчакда A бурчакнинг AA_1 медианаси, $A\alpha$ симедианаси ва $A_1A\alpha$ бурчакнинг $A\omega$ биссектрисасини ўтказсак, унда:

I. 1) $\alpha C = \frac{ab^2}{b^2+c^2}$; 2) $A_1\alpha = \frac{a}{2} - \frac{ab^2}{b^2+c^2} = \frac{a(c^2-b^2)}{2(b^2+c^2)}$; 3) $AA_1 = m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; 4) $A\alpha = C_м = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

5) $A_1A\alpha$ учбурчакда $A\omega$ биссектриса бўлганидан: $\frac{A\alpha}{AA_1} = \frac{\omega\alpha}{A_1\omega}$ ёки $\frac{A\alpha}{AA_1} + 1 = \frac{\omega\alpha}{B_1\omega} + 1$; $\frac{A\alpha + AA_1}{AA_1} = \frac{\omega\alpha + A_1\omega}{A_1\omega}$; $\frac{C_м + m_a}{m_a} = \frac{A_1\alpha}{A_1\omega}$, бундан: $A_1\omega = \frac{A_1\alpha \cdot m_a}{m_a + C_м}$.

II. $A_1A\alpha$ учбурчакдан.

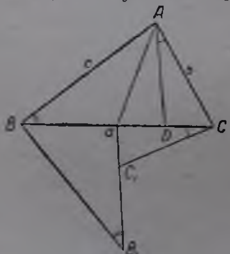
$$\frac{A_1\omega}{\omega\alpha} = \frac{AA_1}{A\alpha} = \frac{b^2+c^2}{2bc}.$$

Бундан:

$$\omega\alpha = \frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot A_1\omega = \frac{2bc}{b^2+c^2}\cdot\frac{a(c-b)}{2(c+b)} = \frac{abc(c-b)}{(b+c)(b^2+c^2)}.$$

III. 1) $\omega c = \omega\alpha + \alpha c = \frac{abc(c-b)}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{ab^2}{b^2+c^2} = \frac{c^2-cb+b^2+bc}{(b+c)(b^2+c^2)} \times ab = \frac{ab}{b+c}$.

2) $\omega B = a - \omega c = a - \frac{ab}{b+c} = \frac{ac}{b+c}$. Бундан: $\frac{\omega B}{\omega C} = \frac{ac}{b+c} = \frac{ab}{b+c} = \frac{c}{b}$, яъни $\frac{\omega B}{\omega C} = \frac{c}{b}$.



112-шакл.

103. Ечиш (112-шакл). Ёрдамчи $AD \perp BC$ ўтказамиз. Бунда 4 та тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади: 1) ABD ва $BB_1\alpha$ учбурчаклардан $\angle \alpha BB_1 + \angle AB\alpha = 90°$, шунга кўра $\triangle ABD \backsim \triangle BB_1\alpha$ бундан $\frac{BB_1}{c} = \frac{B\alpha}{AD}$, яъни $BB_1 = c\cdot\frac{B\alpha}{h_a}$.

2) ADC ва $C\alpha C_1$ учбурчакларда $\angle CAD + \angle DCC_1 = 90°$. Шунга кўра $\triangle ADC \backsim \triangle C\alpha C_1$; $\frac{CC_1}{b} = \frac{\alpha C}{AD}$, яъни $CC_1 = b\cdot\frac{C\alpha}{h_a}$.

Бундан:

$$\frac{BB_1}{CC_1} = c\cdot\frac{B\alpha}{h_a} : b\cdot\frac{C\alpha}{h_a} = \frac{C}{B}\cdot\frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{c}{b}\cdot\frac{c^2}{b^2} = \frac{c^3}{b^3}, \text{ яъни } \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{c^3}{b^3}.$$

104. $BP = PC$ ёки P нуқта A дан туширилган перпендикулярнинг асосида ётади.

105. I хил ечилиши (113-шакл).

1) $A_1A_2 \parallel BC$; $B_1B_2 \parallel AC$; $C_1C_2 \parallel AB$.

$A_1A_2 = a'$; $B_1B_2 = b'$; $C_1C_2 = c'$.

$A_1B = c$; $AB_2 = c_2$; $c_1 + c_2 = c'$.

бўлса,

$$A_1A = AB - A_1B = c - c_1;\ BB_2 = AB - AB_2 = c - c_2.$$

2) $\triangle AA_1A_2 \backsim \triangle ABC$ бўлганидан,

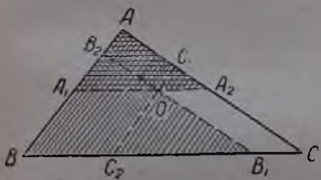
$$\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{AA_1}{AB} \text{ ёки } \frac{a'}{a} = \frac{c-c_1}{c};\ \frac{a'}{a} = 1 - \frac{c_1}{c};\ \frac{a'}{a} + \frac{c_1}{c} = 1. \qquad (1)$$

3) $\triangle ABC \backsim \triangle BB_1B_2$ бўлганидан $\frac{B_1B_2}{AC} = \frac{BB_2}{AB}$ ёки

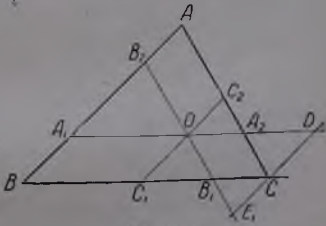
$$\frac{b'}{b} = \frac{c-c_2}{c};\ \frac{b'}{b} = 1 - \frac{c_2}{c};\ \frac{b'}{b} + \frac{c_2}{c} = 1. \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгликларни қўшсак, $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c_1+c_2}{c} = 2$ ёки

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2.$$



113-шакл.



114-шакл.

II хил ечилиши (114-шакл).

1) $A_1A_2 = a_1;\ B_1B_2 = b_1;\ C_1C_2 = c_1;\ ED \parallel AB;$

$$A_1D = BC = a;\ B_2E = AC = b.$$

$\triangle A_2CD \backsim \triangle B_1CE \backsim \triangle ABC$ (томонлари параллел учбурчаклар)дан

$$\frac{A_2D}{CD} = \frac{a}{c};\ \frac{B_1E}{EC} = \frac{b}{c} \text{ ёки } A_2D = CD \cdot \frac{a}{c};\ B_1E = EC \cdot \frac{b}{c}.$$

2) $\frac{A_1D}{a} + \frac{B_2E}{b} = 2$ ёки $\frac{A_1A_2 + A_2D}{a} + \frac{B_2B_1 + B_1E}{b} = \frac{a_1}{a} + \frac{A_2D}{a} +$

$+ \frac{b_1}{b} + \frac{B_1E}{b} = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{CD}{c} + \frac{EC}{c} = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{ED}{c} = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c},$

яъни
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 2.$$

106. $\frac{a^2(b+c)}{ab+ca+bc};\ \frac{b^2(a+c)}{ab+ac+bc};\ \frac{c^2(a+b)}{ab+ac+bc}.$

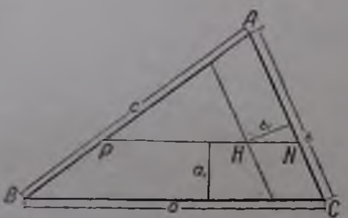
Кўрсатма. 105-масалага қаранг.

107. Ечиш (115-шакл).

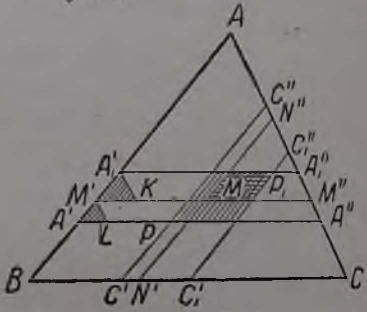
1) $\frac{a_1}{a^2}=\frac{b_1}{b^2}=\frac{c_1}{c^2}=k$ десак, унда $a_1=ka^2$; $b_1=kb^2$; $c_1=kc^2$ бўлади. Буларни (105-масаладаги $\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=2$) тенгликка қўйсак, $\frac{ka^2}{a}+\frac{kb^2}{b}+\frac{kc^2}{c}=2$ ёки $ka+kb+kc=2$,

$$k=\frac{2}{a+b+c}=\frac{2}{2p}=\frac{1}{p};\ k=\frac{1}{p}\text{ бўлганидан, } a_1=\frac{a^2}{p};\ b_1=\frac{b^2}{p};$$

$$c_1=\frac{c^2}{p}\text{ ҳосил бўлади.}$$



115-шакл.



116-шакл.

2) $PHN \parallel BC$ ўтказамиз. ABC ва APN учбурчаклар ўхшаш, уларнинг баландликларини H ва h орқали белгиласак, $\frac{h}{H}=\frac{a_1}{a}$, $h=H\frac{a_1}{a}$ (1) ABC учбурчакдан $H=\frac{2S}{2a}$ ни (1) тенгликка қўйсак, $h=\frac{2S}{a}\cdot\frac{a_1}{a}=\frac{2S\cdot a^2}{a\cdot ap}=\frac{2S}{p}$, яъни $h=\frac{2S}{p}$.

108. $S_{BOC}=\frac{S(p-a)}{p}$; $S_{BOA}=\frac{S(p-c)}{p}$; $S_{AOC}=\frac{S(p-b)}{p}$.

109. $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$. *Кўрсатма.* 105-масалага қаранг.

110. Ечиш (116-шакл). 106-масалага асосан

$$A'A''=\frac{a^2(b+c)}{ab+ac+bc}. \tag{1}$$

109-масалага асосан

$$A_1'A_1''=\frac{2abc}{ab+ac+bc}. \tag{2}$$

$M'M''$ — медианаларнинг кесишган нуқтасидан ўтган параллел бўлганидан:

$$M'M''=\frac{2}{3}a. \tag{3}$$

$M'L \parallel A_1'K \parallel AC$ ўтказилса, (1) ва (3) га кўра $A'L = A'A'' -$

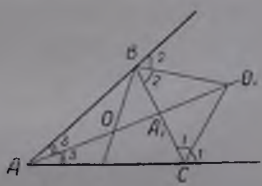
$$- M'M'' = \frac{a^2(b+c)}{ab+ac+bc} - \frac{2}{3}a = \frac{a(ab+ac-2bc)}{3(ab+ac+bc)}. \qquad (4)$$

(2) ва (3) га асосан:

$$M'K = M'M'' - A_1'A_1'' = \frac{2}{3}a - \frac{2abc}{ab+ac+bc} = 2\cdot\frac{a(ab+ac-2bc)}{3(ab+ac+bc)} =$$

$$= 2\cdot A'L \text{ ёки } \frac{A'L}{M'K} = \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Томонлари ўзаро параллел бўлганидан $\triangle A_1'M'K \backsim \triangle M'A'L$, бунда (4) ва (5) ни эътиборга олинса, $\frac{A'M}{M'A_2'} = \frac{A'L}{M'K} = \frac{1}{2}$; шу каби $\frac{C'N'}{N'C_1} = \frac{1}{2}$. Бунга кўра PP_1 ва MP_1 параллелограммларнинг бир учи умумий бўлиб, мос томонлари параллел ва пропорционал бўлади ҳамда уларнинг диагоналлари бир тўғри чизиқ устида, яъни P, P_1 нуқталар ва M оғирлик маркази бир тўғри чизиқда ётади. $PM : MP_1$ нисбатнинг ўхшашлик коэффициенти $1:2$ га тенг бўлади.



117-шакл.

111. Ечиш (117-шакл). 1) $AA_1 = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ (биссектриса узунлиги). 2) 81-масаладан:

$$A_1O = \frac{a}{2p}\cdot AA_1 = \frac{a}{2p}\cdot\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} = \frac{a}{p(b+c)}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

3) $AO = AA_1 - A_1O = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} - \frac{a}{p(b+c)}\sqrt{bcp(p-a)} =$

$$= \frac{\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}\cdot\left(2 - \frac{a}{p}\right) = \frac{\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}\cdot\frac{b+c}{p} = \frac{\sqrt{bcp(p-a)}}{p}.$$

4) 82-масаладан: $AO_1 = \frac{2p-a}{2(p-a)}\cdot AA_1 = \frac{2p-a}{2(p-a)}\cdot$

$$\cdot\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{2p-a}{(p-a)(b+c)}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Ниҳоят:

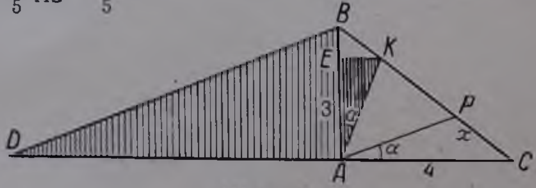
$$OO_1 = AO_1 - AO = \frac{2p-a}{(p-a)(b+c)}\sqrt{bcp(p-a)} - \frac{1}{p}\sqrt{bcp(p-a)} =$$

$$= \sqrt{bcp(p-a)}\cdot\left[\frac{2p-a}{(p-a)(b+c)} - \frac{1}{p}\right] = \frac{2a}{p(p-a)}\sqrt{bcp(p-a)},$$

яъни

$$OO_1 = \frac{2a}{p(p-a)}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

112. Ечиш (118-шакл). $BD \parallel AP$ ни ўтказиб, AC нинг тескари давомини у билан D нуқтада кесишгунча давом эттирилса ва K нуқтадан $KE \parallel AC$ ўтказилса, бунда $\triangle ABC \backsim \triangle EBK$ ва $BK = \frac{1}{5} BC$ бўлади. Бундан $BE = \frac{1}{5} AB = \frac{3}{5}$, $AE = \frac{4}{5} AB = \frac{12}{5}$ ва $EK = \frac{1}{5} AC = \frac{4}{5}$.

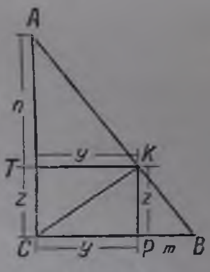


118-шакл.

Шу каби $\triangle ABD \backsim \triangle AEK$; бундан $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EK}$ ёки $AD = AB \times$ $\times \frac{AE}{EK} = 3 \cdot \frac{\frac{12}{5}}{\frac{4}{5}} = 9$.

Сўнгра $\triangle BDC \backsim \triangle APC$ дан $\frac{PC}{BC} = \frac{AC}{DC}$ ёки $PC = BC \cdot \frac{AC}{DC} =$ $= 5 \cdot \frac{4}{13} = \frac{20}{13} = 1\frac{7}{13}$, яъни $PC = 1\frac{7}{13}$.

113. Ечиш (119-шакл). $CP = y$; $CT = z$ деб олсак, $\triangle ATK \backsim$ $\backsim \triangle KPB$ дан: 1) $\frac{n}{y} = \frac{z}{m}$; $z = \frac{mn}{y}$. Тўғри бурчакли CKB учбурчакда:



119-шакл.

$$CK^2 = CP \cdot CB \text{ ёки } CK^2 = y(y+m). \qquad (1)$$

Худди шу каби тўғри бурчакли CKA учбурчакда:

$$CK^2 = z(z+n). \qquad (2)$$

(1) ва (2) дан:

$$y(y+m) = z(z+n); \qquad (3)$$

2) тўғри бурчакли CKB учбурчакда KP гипотенузага туширилган перпендикуляр бўлганидан ва бу учбурчак ATK учбурчакка ўхшаш бўлганидан:

$$\frac{n}{y} = \frac{z}{m}; z = \frac{mn}{y}. \qquad (4)$$

(4) ни (3) га қўйсак, $y(y+m) = \frac{mn}{y}\left[\frac{mn}{y} + n\right]$;

$y^3 = mn^2$; $y = m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}$. Шу каби $z = n^{\frac{1}{3}} m^{\frac{2}{3}}$.

3) $CB = y + n = m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} + m = m^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{2}{3}} + m^{\frac{2}{3}})$; $CB^2 =$
$= m^{\frac{2}{3}}(n^{\frac{2}{3}} + m^{\frac{2}{3}})^2$. $AC = z + n = n^{\frac{1}{3}} m^{\frac{2}{3}} + n = n^{\frac{1}{3}}(m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})$;

$$AC^2 = n^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^2.$$

4) ABC учбурчакдан $AB^2 = AC^2 + BC^2 = n^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^2 +$
$+ m^{\frac{2}{3}}(m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^2 = (m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^2(m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}) = (m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^3$,
яъни

$$x^2 = (m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}})^3 \text{ ёки } x^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}.$$

114. $\sqrt{3}$.
115. 6.
116. Ечиш. Китобнинг назария қисмида берилган ушбу

$$S = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{2b} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2} =$$
$$= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

формулани олиб, берилганга тенглаштирамиз:

$$\frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Бундан·

$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3}$$

ёки

$$12a^2b^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

ёки

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$$

ёки

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0.$$

Бу квадратлар йиғиндиси 0 га тенг бўлиши учун фақат $a = b = c$ бўлиши лозим.

117. *Кўрсатма.* Птоломей теоремасидан ва учбурчак томонларининг квадратлари ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.
118. *Кўрсатма.* 80-масалага қаранг.
119. Ечиш (120-шакл).

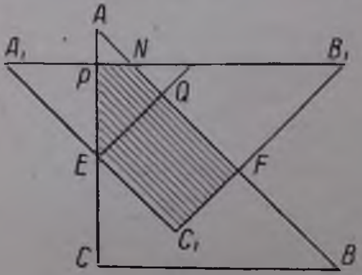
I. 1) шарт бўйича: $EC_1 = \frac{1}{2} a$; $(AC = BC = a)$, $A_1E = \frac{1}{2} a$; $\left(AE = \frac{1}{2} a\right)$.

2) A_1PE учбурчак ҳам тенг ёнли (асосига ёпишган бурчаклари 45° ли) бўлганидан, $A_1P = PE = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

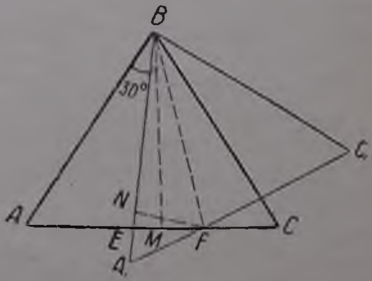
3) $AP = AE - PE = \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{4}$.

4) $EQ \perp AB$; $EQ = C_1F = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ ва $AQ = EQ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

5) $AF = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a(2+\sqrt{2})}{4}$.



120-шакл.



121-шакл.

II. 1) $S_{\text{трап}\,(AEC_1F)} = \frac{1}{2}(AF + C_1E)\cdot EQ = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a}{2}\right]\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2}{16}(2\sqrt{2}+1)$.

2) $S_{APN} = \frac{1}{2}AP\cdot PN = \frac{1}{2}AP^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{a(2-\sqrt{2})}{4}\right]^2 = \frac{a^2}{16}(3-2\sqrt{2})$; $(AP = PN)$

3) $S_{\text{кўпбур}\,(EPNFC_1)} = S_{\text{трап}.} - S_{\triangle\,APN} = \frac{a^2}{16}(2\sqrt{2}-1) - \frac{a}{16}(3-2\sqrt{2}) = \frac{a^2}{8}(2\sqrt{2}-1)$;

$$S_1 = \frac{a^2}{8}(2\sqrt{2}-1).\ \text{Шунингдек: } S = \frac{a^2}{2}.$$

Буларнинг нисбати:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}.$$

120. $DE = \frac{a^2+b^2+c^2}{2h_a}$; юзи $= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{16S}$.

121. *Кўрсатма.* Тўққиз нуқта айланаси ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

122. Ечиш (121-шакл). Тенг ёнли учбурчакда $AB=BC=a$; бурилиш бурчаги $\angle ABE = 30°$ ҳамда $\triangle BEF$ да $EB \perp NF$ ва

$BM \perp EF$ ўтказсак, $BM = H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $FN = h$; $BF = l$; $EF = n$ десак, E ўткир бурчак тўғри бурчакли EFN ва BME учбурчакларнинг умумий бурчаги бўлганидан, улар ухшаш булади; бунда

$$\frac{BF}{BM} = \frac{EF}{NF} \text{ ёки } \frac{l}{H} = \frac{n}{\frac{1}{2}l};$$

бундан:

$$l^2 = 2nH. \qquad (1)$$

Тўғри бурчакли учбурчак BEM дан:

$$l^2 = H^2 + \frac{n^2}{4}. \qquad (2)$$

Ҳосил қилинган (1) ва (2) тенгликлардан $2n \cdot H = l^2 + \frac{n^2}{4}$ бундан $H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ бўлганидан, $n = a\sqrt{2}\,(2 \pm \sqrt{3})$.

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \cdot Hn = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}\,(2 \pm \sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(2 \pm \sqrt{3}).$$

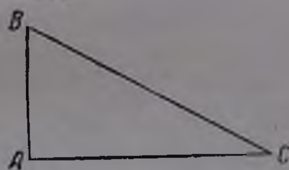
Демак:

$\triangle EBF = \triangle EBL$ бўлганидан $S_{BEFL} = a^2(2 \pm \sqrt{3})$.

123. h_b.

124. 9.

125. Ечиш (122-шакл). Агар гипотенуза a, катетлар b ва c булса:



122-шакл.

$$S_{\triangle} = p\,(p-a) = (p-b)\,(p-c),$$

чунки Пифагор теоремасига асосан

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (1)$$

ва периметри $2p$ бўлганидан

$$p \cdot (p-a) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4}. \qquad (2)$$

$$(p-b)\,(p-c) = \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4}. \qquad (3)$$

(1) ни (2) ва (3) га қўйилса:

$$p\,(p-a) = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4} = \frac{a^2-a^2+2bc}{4} = \frac{bc}{2}.$$

$$(p-b)\,(p-c) = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4} = \frac{a^2-(b^2+c^2)+2bc}{4} =$$

$$= \frac{a^2-b^2+2bc}{4} = \frac{bc}{2}.$$

Бу тенглик тўғри бурчакли учбурчак юзининг катетлар орқали ифодасидир. Демак:

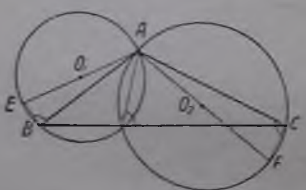
$$S_{\triangle} = p(p-a) = (p-b)(p-c) = \frac{ab}{2}.$$

127. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

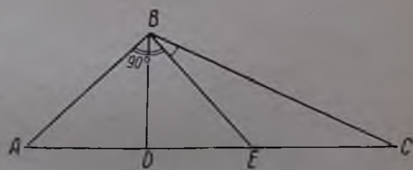
128. $\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(b-a)}}$.

129. 2.

130. Е ч и ш (123-шакл). Учбурчакнинг A учидан AF ва AE диаметрларни ўтказиб, F нуқтани C билан, E нуқтани B билан туташтирсак, тўғри бурчакли ABE ва ACF учбурчаклар ҳосил бўлади. Булардан:



123-шакл.



124-шакл.

1) $\angle AEB + \angle ADB = 180°$ (ички чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари);

2) $\angle ADB + \angle ADC = 180°$ (қўшни бурчаклар);

3) $\angle ADC = \angle AFC$ (бир ёйга тиралган):

4) $\triangle ABE \backsim \triangle AFC$; бундан $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$ ёки $\frac{2r}{2R} = \frac{c}{b}$; $\frac{r}{R} = \frac{c}{b}$ шу билан $\frac{S_{O_1 \text{айлана}}}{S_{O_2 \text{айлана}}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{c^2}{b^2}$, демак, $\frac{S_{O_1 \text{айлана}}}{S_{O_2 \text{айлана}}} = \frac{c^2}{b^2}$.

131. *Кўрсатма.* $\triangle ADC \backsim \triangle BDA$ эканлигини аниқлаш, сўнгра улар томонларининг пропорционаллигидан фойдаланилсин.

132. Е ч и ш (124-шакл).

I у с у л. 1) $\angle ABC - \angle ACB = 90°$ берилса, унда $\angle ABE = 90°$ $(\angle EBC = \angle ECB)$;

2) ўтмас бурчакли BEC учбурчакдан $BC^2 = BE^2 + EC^2 + 2EC \cdot DE$ ($DE = e$; $BE = EC = x$ олинса) $a^2 = x^2 + x^2 + 2xe$ ёзамиз, ёки

$$a^2 = 2x^2 + 2xe; \qquad (1)$$

3) тўғри бурчакли ABE учбурчакда $BD \perp AE$ ўтказилса, $\triangle ABE \backsim \triangle DBE$ дан:

$$\frac{DE}{BE}=\frac{BE}{AE};\ (AE=b-x)\ \text{ёки}\ \frac{e}{x}=\frac{x}{b-x};\ e=\frac{x^2}{b-x};\qquad (2)$$

4) тўғри бурчакли ABE учбурчакдан: $BE^2=AE^2-AB^2$ ёки

$$x^2=(b-x)^2-e^2\ \text{ёки}\ x^2=b^2-2bx+x^2-c^2;\ x=\frac{b^2-c^2}{2b}.\qquad (3)$$

(1) га (2) ни қўйсак:

$$a^2=2x^2+2x\left(\frac{x^2}{b-x}\right)=2x^2\left(1+\frac{2x}{b-x}\right);\ a^2=2x^2\left(1+\frac{2x}{b-x}\right).\qquad (4)$$

(4) тенгликдаги x ўрнига унинг (3) даги қийматини қўйсак:

$$a^2=2\left(\frac{b^2-c^2}{2b}\right)^2\left[1+\frac{2\cdot\frac{b^2-c^2}{2b}}{b-\frac{b^2-c^2}{2b}}\right];\ a^2=\frac{(b^2-c^2)^2}{2b^2}\left(1+\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\right)^2$$

ёки $a^2=\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2}$. Бундан: $\frac{1}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}$ ёки 2 га кўпайтирсак:

$\frac{2}{a^2}=\frac{2b^2+2c^2}{(b^2-c^2)^2}$,

$$\frac{2}{a^2}=\frac{2b^2+2bc-2bc+c^2}{(b^2-c^2)^2}=\frac{b^2+2bc+c^2+b^2-2bc+c^2}{(b^2-c^2)^2}=$$

$$=\frac{(b+c)^2+(b-c)^2}{(b^2-c^2)^2}=\frac{(b+c)^2+(b-c)^2}{(b+c)^2(b-c)^2}=\frac{(b+c)^2}{(b+c)^2(b-c)^2}+$$

$$+\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2(b-c)^2}=\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}.$$

Демак,

$$\frac{2}{a^2}=\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}.$$

133. $S_{ABC}=\frac{ll_1(k^2-1)}{4k}$.

134. Текшириш. 1) агар учбурчакларнинг учта бурчаги мос равишда бир-бирига тенг бўлса, улар ўзаро ўхшаш бўлади, у ҳолда учбурчакларнинг томонларини a, b ва c ҳамда a_1, b_1 ва c_1 орқали белгиланса,

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k;\qquad (1)$$

2) учбурчакларнинг икки томони тенг бўлса (масалан, $a=b$; $b_1=c$ десак), (1) пропорцияни

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k\left(=\frac{c}{c_1}\right)\qquad (2)$$

кўринишда ёза оламиз. Бундан $c=\frac{b^2}{a}$;

3) $c<a+b$ тенгсизликни $\frac{b^2}{a}<a+b$ деб ёзиш мумкин. Бундан $a^2+ab-b^2>0$ ни ҳосил қилиб, b^2 га бўлсак $\frac{a^2}{b^2}+\frac{ab}{b^2}-$ $-\frac{b^2}{b^2}>0$ ёки $\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}-1>0$ тенгсизлик келиб чиқади. $\frac{a}{b}=k$

бўлгани учун: $k^2 + k - 1 > 0$; $k^2 + k^2 - 1 = 0$ бўлади Тенгламанинг илдизлари $k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $k_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; $k_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. $(k - k_1)(k - k_2) > 0$ бўлиши учун $k > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ бўлиши лозим;

4) k учун бошқа чегараларни $a - b < c$ тенгсизликдан фойдаланиб топамиз. c нинг қийматини қўйсак, $a - b < \frac{b^2}{a}$ ёки $a^2 - ab^2 - b^2 < 0$ келиб чиқади. Бундан $k^2 - k - 1 < 0$, буни ҳам $(k - k_1)(k - k_2) < 0$ кўринишда ёзилганда $\left(k_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ k_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ тенгсизлик $k < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ ечимга эга бўлади, $\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx \frac{3,2361}{2}$; $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx \frac{1,2361}{2}$ бўлганидан $0{,}618 < k < 1{,}618$ оралиқда бўлади. Агар $k = 1{,}5$ десак, $c = \frac{b^2}{a}$; $\frac{a}{b} = k$ лардан фойдаланилганда $\frac{b}{a} = \frac{1}{k} = \frac{1}{1,5} = 0{,}66$, яъни $c = 0{,}66\,b$ ёки $\frac{c}{b} = 0{,}66$ келиб чиқади.

Мисол учун биз $a = 8$ олсак, $b = 12$; $c = \frac{12^2}{8} = \frac{12}{8} = 18$, демак, $a = 8$; $b = 12$ ва $c = 18$ бўлиб, $a_1 = b = 12$; яъни $a_1 = 12$; $b_1 = c = 18$; $b_1 = 18$ ва (2) дан $c_1 = \frac{c^2}{b}$ ифода бўйича $c_1 = \frac{18^2}{12} = 27$ келиб чиқади. Демак, $a_1 = 12$; $b_1 = 18$ ва $c_1 = 27$ бўлади.

Эслатма. k учун 1 қиймат олинмайди, чунки бу ҳолда учбурчаклар ўзаро тенг бўлиб қолади. Шунга кура $0{,}618 < k < 1{,}618$ орасидаги бошқа қийматларни олганимизда уч бурчаги ва икки томони тенг бўлган турли томонли иккита учбурчак ҳосил қилиш мумкин бўлар экан.

135. *Курсатма.* Пифагор теоремасидан фойдаланилади.

137. *Курсатма.* Ўртанча бурчак учидан қарши томонга перпендикуляр тушириб, бу перпендикулярга нисбатан кичик томонга симметрик чизиқ ўтказамиз.

125-шакл.

138. $\sqrt{S \cdot S_1}$ (125-шакл).

Кўрсатма. $\triangle ABC$ га ташқи айлана ҳамда учбурчакнинг AB томонига $\angle C$ дан тушган баландлик билан L нуқтада кесишувчи ярим айлана чизамиз. Кесишган ватарлар кесмаларининг кўпайтмаси ўзаро тенглигидан фойдаланамиз.

139—140. $a = \frac{2(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - p^2 - q^2)}{(b^2 - c^2)^2 - (p^2 - q^2)^2}$.

Кўрсатма. Учбурчак юзини топинг:

$$S_\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

формулани $\triangle ABE$ ва $\triangle ACD$ га татбиқ этинг.

141. $\frac{1}{S} + \frac{1}{S_1} = \frac{2}{OC \cdot OC_1} = \text{const}.$

Кўрсатма. $\triangle ABB_1 \backsim \triangle CBO$ бўлгани учун томонлари пропорционал.

142. $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{2abc}$.

143. Ечиш (126-шакл). $AE = x$, $AD = y$ десак, $x + y = m$ бўлади.

1. Шартга кўра:

$$b + c = p, \qquad (1)$$

$$x + y = m. \qquad (2)$$

2. ABC учбурчак билан унинг AE кесувчисига ва ўша учбурчак билан унинг AD кесувчига Стюарт теоремасини татбиқ этсак:

$$4b^2 + c^2 = 9x^2, \qquad (3)$$

$$4c^2 + b^2 = 9y^2. \qquad (4)$$

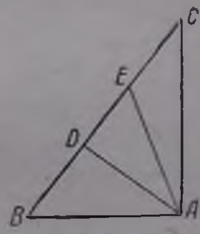
(1) дан c ни олиб квадратга кўтарсак, $c^2 = b^2 - 2cp + p^2$. Буни (3) га қўйсак,

$$5b^2 - 2bp + p^2 = 9x^2. \qquad (5)$$

(2) дан y ни топиб квадратга кўтариб, унинг ва c^2 нинг қийматини (4) га қўйсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$5b^2 - 8bp + 4p^2 = 9x^2 - 18mx + 9m^2. \qquad (6)$$

(6) тенгликдан (5) ни айириб, натижани 3 га бўлиб x ни топамиз:



126-шакл.

$$x = \frac{3m^2 + 2bp - p^2}{6m}.$$

Бу ифодани квадратга кўтариб, (5) га қўямиз:

$$5b^2 - 2bp + p^2 = 9 \cdot \frac{3m^2 + 2bp - p^2}{36m^2}.$$

Бундан

$$b^2 - bp - \frac{p^4 - 10p^2 + 9m^4}{9(5m^2 - p^2)} = 0.$$

Вьет теоремасига кўра: $b_1 + b_2 = p$. Юқорида $b + c = p$ берилган эди. Шунга кўра $b_1 = b$; $b_2 = c$ бўлади. Бундан:

$$b \cdot c = -\frac{p^4 - 10p^2m^2 + 9m^4}{4(5m^2 - p^2)}.$$

Пифагор теоремаси бўйича

$$a^2 = b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc = p^2 + \frac{p^4 - 10p^2m^2 + 9m^4}{2(5m^2 - p^2)} = \frac{9m^4 - p^4}{2(5m^2 - p^2)}.$$

Бундан эса

$$a^2 = \frac{p^2 - 9m^4}{2(p^2 - 5m)^2}$$

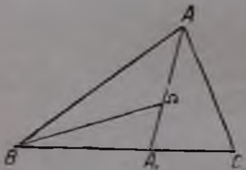
144. Ечиш (127-шакл). 1) $\triangle ABC$ да $AA_1 = l_a$, $A\Omega = l'_a$; $A_1B = \frac{ac}{b+c} = t$, $B\Omega = h'_b$; $A\Omega = h'_a$ ва $l'_a = A_1\Omega$

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \text{ (42-масаладан);}$$

2) $AB\Omega$, $A_1B\Omega$ учбурчакларда $\angle A_1B\Omega = \angle AB\Omega$, бу икки учбурчак баландлиги умумий ва у h га тенг

$$\frac{S_{AB\Omega}}{S_{\Omega BA_1}} = \frac{c \cdot l'_b}{t \cdot l_b} = \frac{l'_a}{l_a} \text{ ёки } \frac{l'_a}{l_a} = \frac{c}{t}; \ \frac{l_a}{l_a + l'_a} = \frac{c}{c+t}; \ \frac{l'_a}{l_a} = \frac{c}{c+t}; \text{ яъни}$$

$$\frac{l'_a}{l_a} = \frac{c}{c + \frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{b+c}{2p}, \ l'_a = l_a\frac{b+c}{2p} =$$



127-шакл.

$$= \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}\cdot\frac{b+c}{2p} = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}.$$

Демак:

$$l'_a = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}.$$

145. *Кўрсатма.* Медианаларнинг кесишиш нуқтаси O га AC томонга нисбатан симметрик бўлган Ω нуқта олиб, уни A нуқта билан туташтирсак учбурчак ҳосил бўлади. O нуқтадан AB ва AC томонга OC_1 ва OA_1 перпендикулярлар ўтказиб, ҳосил бўлган AC_1OB_1 тўртбурчак ва $AO\Omega$ учбурчак юзларининг нисбатини томонлар кўпайтмалари нисбати орқали ифодалаймиз.

147. $a = \frac{p(pq + \sqrt{p^2q^2 + c^2(p^2+q^2)})}{p^2+q^2}$,

$$b^2 = \frac{q(pq + \sqrt{p^2q^2 + c^2(p^2+q^2)})}{p^2+q^2}.$$

148. $DE = \frac{S}{R}$; $AQ = \frac{h_a^2}{2R}$.

149. Ечиш (128-шакл). ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг BC гипотенузасидаги бўлиниш нуқтаси D дан $DE \parallel AB$ ўтказамиз. Бунда $ED = EA = x$ ва $EC = y$; $CD = t$; $DB = \omega$; $AD = p$ десак, тўғри бурчакли AED учбурчакдан $p^2 = 2x^2$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}p$.

$$b = x + y \text{ дан } y = \frac{2b - \sqrt{2}\cdot p}{2}.$$

1) AD кесма A бурчакнинг биссектрисаси бўлганидан:

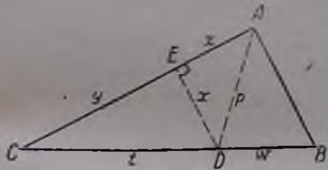
$$\omega = \frac{ac}{b+c}, \quad t = \frac{ab}{b+c}.$$

2) $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$. Демак:

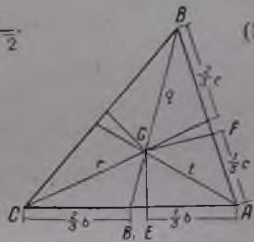
$$\frac{c}{b} = \frac{x}{y},$$

бундан

$$c = \frac{bp\sqrt{2}}{2b - p\sqrt{2}}. \qquad (1)$$



128-шакл.



129-шакл.

Шарт бўйича

$$\frac{a}{t} = \frac{t}{\omega}$$

ёки

$$t^2 = a\omega.$$

Бунга t ва ω нинг қийматлари қўйилса:

$$\frac{b^2 - c^2}{bc} = 1. \qquad (2)$$

Олинган (1) ва (2) тенгликлардан $\frac{(2b - p\sqrt{2})^2}{b^2 p\sqrt{2}} = 1$ ёки

$$b = \frac{p(3\sqrt{2} + \sqrt{10})}{4}.$$

150. Ечиш (129-шакл). A—тўғри бурчак бўлсин. G нуқта ABC учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси бўлганидан, $BG = q = \frac{2}{3} = BB_1$. Шунга асосан ABA_1 учбурчакдан $GF = \frac{2}{3} AB_1$ ёки $GF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} b = \frac{b}{3}$, яъни $GF = \frac{b}{3}$; шу хилда $GE = \frac{c}{3}$. $AF = \frac{1}{3}\ c$; $(AF = GE)$; $AE = \frac{1}{3}\ b$ $(AE = GF)$. Демак, t нинг b ва c томонлардаги проекциялари $\text{пр}_c t = \frac{c}{3}$; $\text{пр}_b t = \frac{b}{3}$ бўлади.

AGE учбурчакдан:

$$t^2 = \left(\frac{c}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{9}$$

ёки

$$9t^2 = b^2 + c^2 \cdot \quad \angle A = 90^\circ$$

бўлгани учун

$$b^2 + c^2 = a^2$$

бўлади. Бундан:

$$9t^2 = a^2; \ t = \frac{a}{3}.$$

II. 1) BGF учбурчакда $BF = \frac{2}{3}c$; $GF = EA = \frac{1}{3}b$. Пифагор теоремасига кўра

$$q = \sqrt{BF^2 + GF^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}c\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4c^2+b^2}; \ q = \frac{1}{3}\sqrt{4c^2+b^2}.$$

2) CGE учбурчакдан:

$$r = \frac{1}{3}\sqrt{4b^2 + c^2}.$$

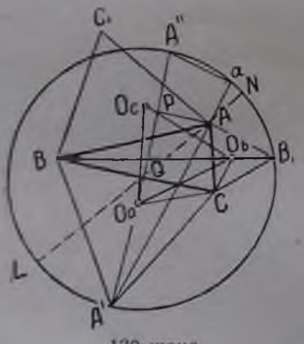
Бу учала кесманинг ўзаро боғланишига келсак,

3) $$q^2 + r^2 = \frac{4c^2 + b^2 + 4b^2 + c^2}{9} = \frac{5(b^2 + c^2)}{9} = \frac{5a^2}{9} = 5.\left(\frac{a}{3}\right)^2 = 5t^2.$$

Бундан:

$$q^2 + r^2 = 5t^2.$$

151. Ечиш (130-шакл). ABC учбурчакнинг BC томонида чизилган ташқи $A'BC$ учбурчакнинг учидан $A'Q = h_a$ баландлик ўтказиб, уни тескари йўналишда $QA'' = A'Q$ миқдорга узайтирамиз, сўнгра $A'A''$ ни диаметр қилиб айлана чизамиз. Учбурчакнинг A учи билан диаметрнинг A' ва A'' нуқталари туташтирилса, $\triangle AA'A''$ ҳосил бўлади.



130-шакл.

1. Биз $AA'A''$ учбурчак $A'A''$ ва AA' томонларини топайлик:

AA' томонини топиш учун: $AP \perp A'A''$ туширсак, $\triangle AA'A''$ дан:

$$AA'^2 = A'A''^2 + AA''^2 - 2A'A'' \cdot A''P. \quad (1)$$

$A'A''$ ва $A''P$ ни аниқлаб бу тенгликка қўямиз.

Шаклдан: $PQ = H_a$; $A''Q = \frac{1}{2} A'A''$,

$$A''P = A''Q - PQ = \frac{1}{2}A'A'' - PQ = \frac{1}{2}A'A'' - H_a. \quad (2)$$

(2) ни (1) га қўйсак: $AA'^2 = A'A''^2 + AA''^2 - 2A'A'' \times$
$$\times \left(\frac{1}{2} A'A'' - H_a\right) = AA''^2 + 2A'A'' \cdot H_a. \qquad (3)$$

$A'A'' = a\sqrt{3}$ бўлганидан, $(A'A'' = 2h_a = a\sqrt{3})$.
$$AA'^2 = AA''^2 + 2A'A'' \cdot H_a = AA''^2 + 2a\sqrt{3} \cdot H_a = AA''^2 + 4\sqrt{3} \cdot S$$
ёки
$$AA'^2 - AA''^2 = 4\sqrt{3}\,S. \qquad (4)$$

2) $A'A''$ ни топиш учун $A'A\alpha \perp A''\alpha$ деб олсак:
$$A'A''^2 = AA'^2 + AA''^2 \cdot 2AA' \cdot A\alpha$$
ёки
$$AA'^2 + AA''^2 = A'A''^2 - 2AA' \cdot A\alpha. \qquad (5)$$

Айлана маркази Q нуқтадан A бурчак учидан ўтувчи умумий LN диаметр чизсак AA_1, $A\alpha$, AL ва AN кесмалар айлана ичидаги бир нуқтада кесишувчи ватарлар бўлганидан:
$$AA' \cdot A\alpha = AL \cdot AN. \qquad (6)$$
Бу кесмалар:
$$AL = AQ + QL = m_a + h_a. \qquad (7)$$
$$AN = NQ - AQ = h_a - m_a. \qquad (8)$$
Шунинг учун:
$$AL \cdot AN = h_a^2 - m_a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}\right) = \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{2} \qquad (9)$$
ёки
$$AA' \cdot A\alpha = \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{2}. \qquad (10)$$

Буни (5) га қўйиб, $A'A'' = a\sqrt{3}$ эканини назарга олсак:
$$AA'^2 + AA''^2 = 3a^2 - 2 \cdot \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$
ёки
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2k \text{ десак, } AA'^2 + AA''^2 = 2k^2. \qquad (11)$$

(4) ва (10) ни биргаликда ечсак:
$$AA'^2 - AA''^2 = 4\sqrt{3}S;\ AA'^2 + AA''^2 = 2k^2,$$
бундан:
$$AA' = \sqrt{k^2 + 2\sqrt{3} \cdot S}. \qquad (12)$$

II. a томонга чизилган учбурчакнинг маркази O_a ва b томонга чизилган учбурчакнинг маркази O_b ва шу каби c томонга чизилган айлана маркази O_c бўлган ҳолда олинган нуқталардан ҳосил бўлган $O_aO_bO_c$ ва $AA'C$ учбурчакларни текшириб кўрамиз. a, b, c ва h_a, h_b, h_c лар мунтазам учбурчакнинг томонлари ва баландликлари бўлганидан $\frac{h_a}{a} = \frac{h_b}{b}$.

$\angle ACA'$ ва $\angle O_aCO_b$ ларнинг ҳар бири $\angle BCA$ га $60°$ бурчак қўшилишидан ҳосил бўлган. Демак, $\angle A'CA = \angle O_aCO_b$. Шунга кўра $\triangle AA'C \backsim \triangle O_aO_bC$. Шунинг учун

$$\frac{O_aC}{O_bC} = \frac{A'C}{AC} = \frac{a}{b},$$

шу сингари

$$\frac{O_aO_b}{O_aC} = \frac{AA'}{A'C}$$

ёки

$$O_aO_b = O_aC \cdot \frac{AA'}{A'C}. \qquad (13)$$

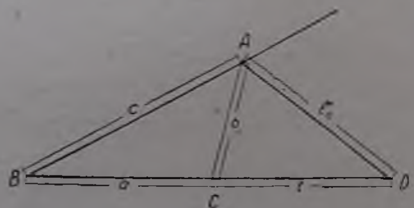
Бунда

$$O_aC = \frac{2}{3}h_a = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ AA' = \sqrt{k^2 + 2S\sqrt{3}} \text{ ва } A'C = a$$

бўлганидан, (13) ифодадан:

$$O_aO_b = \frac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{k^2 + 2S\sqrt{3}}}{3a} = \frac{1}{3}\sqrt{3k^2 + 6S\sqrt{3}}.$$

O_aO_c ва O_bO_c томонларни топсак ҳам шундай натижа чиқади, яъни $O_aO_c = O_bO_c = O_aO_b$ бўлади. Бу $O_aO_bO_c$ учбурчакнинг мунтазам эканини кўрсатади.



131-шакл.

152. *Кўрсатма.* $DF \perp AC$ ўтказиб, ҳосил бўлган шаклни текширамиз.

153. $b = 15$; $c = 13$.

154. *Кўрсатма.* 42-масалага қаранг.

155. Ечиш (131-шакл). 1) ABC учбурчак ташқи бурчагининг биссектрисаси l_a' бўлганидан ушбу муносабатни ёза оламиз:

$$\frac{c}{b} = \frac{a+t}{t};\ t = \frac{ab}{c-b}; \qquad (1)$$

2) Стюарт теоремасига кўра:

$$c^2 \cdot t + l_a'^2 \cdot a - b^2(a+t) = (a+t) \cdot a \cdot t. \qquad (2)$$

(1) дан (2) га қўйсак,

$$l_a'^2 = \frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}$$

ёки

$$l_a' = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.$$

Шунга ўхшаш:

$$l_b' = \frac{2}{a+c}\sqrt{ac(p-a)(p-c)};\ l_c' = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}.$$

Буларни ҳадлаб кўпайтирсак:

$$l_a' \cdot l_b' \cdot l_c' = \frac{8abc(p-a)(p-b)(p-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{8abc \cdot S^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ёки

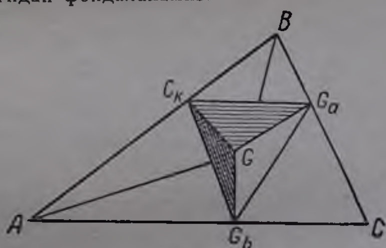
$$S = \sqrt{\frac{l_a' \cdot l_b' \cdot l_c'(p-a)(p-b)(p-c)}{8abc}}.$$

156. *Курсатма.* $l_c^2 = l_b^2$ ўрнига тегишли қийматларни қўйиб, $a=b$ тенгликни келтириб чиқарамиз. Масалан, $l_c^2 = l_b^2$ га

$$l_c^2 = ab \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2},\ l_b^2 = ac\frac{(a+c)^2 - b^2}{(a+c)^2} \text{ ни}$$

қўйиб, $a = b$ эканини топамиз.

157. *Кўрсатма.* Ҳосил бўлган икки жуфт учбурчакларнинг тенглигидан фойдаланамиз.



132-шакл.

158. Ечиш (132-шакл) 1) $GG_a = \frac{1}{3}h_a$; $GG_b = \frac{1}{3}h_b$; $GG_k = \frac{1}{3}h_c$. 2) $\angle ABC + \angle G_aGG_k = 180^\circ$ бўлгани учун $\frac{S_{GG_aG_k}}{S_{ABC}} =$

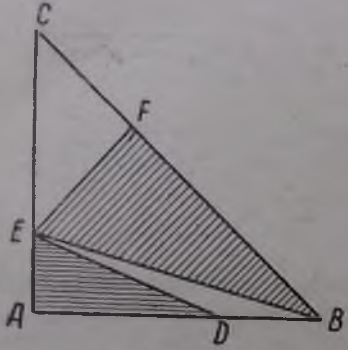
$$= \frac{GG_a \cdot GG_k}{a \cdot c} = \frac{h_a \cdot h_c}{9ac} = \frac{h_a h_c ac}{9a^2c^2} = \frac{4S^2}{9a^2c^2};$$

$$\frac{S_{GG_aG_b}}{S_{ABC}}=\frac{4S^2}{9a^2b^2} \text{ ва } \frac{S_{GG_bG_c}}{S_{ABC}}=\frac{4S^2}{9b^2c^2} \text{ ҳамда } S_{GG_aG_c}=\frac{4S^3}{9a^2c^2}$$

ва шунга ўхшаш бўлади, чунки $S_{ABC}=S$. Натижада

$$S_{G_aG_bG_c}=S_{GG_aG_b}+S_{GG_bG_c}+S_{GG_aG_c}=\frac{4S^3}{9a^2b^2}+\frac{4S^3}{9a^2c^2}+\frac{4S^3}{9b^2c^2}=$$

$$=\frac{4S^3c^2+4S^3b^2+4S^3a^2}{9a^2b^2c^2}=\frac{4S^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}.$$



133-шакл.

159. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

160. $\sqrt{SS_1}$.

161. $\frac{a(c+b)}{2p}$; $\frac{a(c+b)}{2p}$.

162. $c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

163. $AB=\sqrt{3}$; $AC=\sqrt{3}$;

$h_b=h_c=\frac{2}{3}\sqrt{6}$; $h_a=\sqrt{2}$; $S=\sqrt{2}$.

164. Ечиш (133-шакл). 1) E нуқтадан $EF\perp BC$ ўтказамиз. Бунда $EC=\frac{2}{3}AC$ бўлганидан $EF=\frac{2}{3}h_a$;

2) h_a тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакнинг BC томонига мос баландлиги бўлганидан: $h_a=\frac{1}{2}BC$; шу ҳолда тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг ён томонлари $EF=CF$ бўлиб, $EF=\frac{2}{3}h_a=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{3}BC$ ва $BF=\frac{2}{3}BC$. Демак, $\frac{BF}{EF}=\frac{2}{3}BC:$ $:\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2$.

Шу сабабли тўғри бурчакли BEF, DAE учбурчаклар ўхшаш ва $\angle FBE=\angle EDA$.

165. 4 ва 6.

166. Ечиш (134-шакл). Биссектрисалар орасида қолган кесма $d=A'A''=A'B+BA''$ бўлсин; бунда $A'B=\frac{ac}{b+c}$; $BA''=\frac{ac}{b-c}$. Бинобарин:

$$d=\frac{2abc}{b^2-c^2}. \qquad (1)$$

Маълумки, учбурчакда $b-c<a<b+c$, бу тенгсизлик (1) га кўпайтирилса,

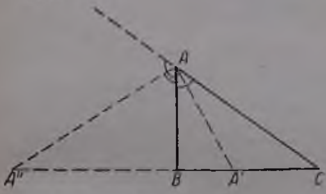
$$\frac{2abc(b-c)}{b^2-c^2}<d\cdot a<\frac{2abc(b+c)}{b^2-c^2}$$

ёки

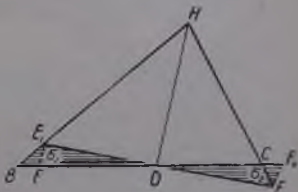
$$\frac{2\,bc}{b+c} < d < \frac{2\,bc}{b-c}$$

ҳосил бўлади, бу эса d нинг қандай чегарада ўзгаришини кўрсатади.

167. Ечиш (135-шакл). 1) $S_{HBD} = S_1$; $S_{HCD} = S_2$; $S_{BDE} = \sigma_1$; $S_{DCE} = \sigma_2$.



134-шакл.



135-шакл.

Ясашга кўра: ($HD \perp EF$ ва $\angle EHD = \angle DHF$ бўлганидан, $\triangle EHF$ тенг ёнли) $S_{HDE} = S_{HDE} (= \Sigma)$ бўлсин;

2) юқоридаги учбурчакларнинг баландликлари умумий бўлганидан, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{c}{b}$ (1); $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{c}{b}$ (2); булардан $S_2 = \frac{bS_1}{c}$; $\sigma_2 = \frac{b\sigma_1}{c}$;

3) $\Sigma = S_1 - \sigma_1$ (3); $\Sigma = S_2 + \sigma_2$ (4); (3) ва (4) дан $S_1 - \sigma_1 = S_2 + \sigma_2$

ёки

$$S_1 - \sigma_1 = \frac{bS_1}{c} + \frac{b\sigma}{c} = \frac{b}{c}(S_1 + \sigma_1)$$

ёки $(c-b)S_1 = (c+b)\sigma_1$, бундан

$$\sigma_1 = \frac{c-b}{c+b} \cdot S_1. \qquad (5)$$

(5) ни (3) га қўйсак, $\Sigma = S_1 - \sigma_1 = \frac{2b}{c+b} \cdot S_1$.

Шундай қилиб, 4) $\frac{\Sigma}{S_1} = \frac{HE}{HB}$; $HE = \frac{\Sigma}{S_1}$. $HB = \frac{2b}{c+b} \cdot c$ ёки

$$HE = \frac{2bc}{b+c},$$

бундан

$$\frac{1}{HE} = \frac{b+c}{2bc}$$

ёки

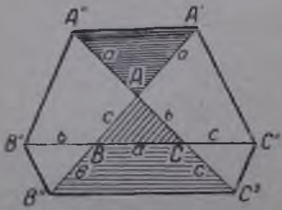
$$\frac{1}{HE} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{bc} + \frac{c}{bc}\right)$$

ёки

$$\frac{1}{HE}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{HF}\text{ ҳам шунга тенг}\right).$$

168. 1,2.
169. 0. Бундан қандай хулоса чиқади?
170. 45°.
171. Ечиш (136-шакл). Олинган шаклда $AA'=AA''=a$;

$$BB'=BB''=b;\ CC'=CC''=c.\ S_{ABC}=s;$$



136-шакл.

$$A'A''B'B''C'C''\text{ юзи}=S.$$

Учбурчаклар тенг бурчакларга эга бўлгани учун:

1) $\frac{S_{AA'A''}}{S_{ABC}}=\frac{a^2}{bc}$ ёки $S_{AA'A''}=s\cdot\frac{a^2}{bc}$.

Шунга ўхшаш:

$$S_{CC'C''}=s\cdot\frac{c^2}{ab}\quad S_{BB'B''}=s\cdot\frac{b^2}{ac}.$$

2) $\frac{S_{AC'B''}}{S_{ABC}}=\frac{(b+c)^2}{bc}$ ёки $S_{AC'B''}=s\cdot\frac{(b+c)^2}{bc}$.

Яна:

$$S_{CB'A''}=s\cdot\frac{(a+b)^2}{ab}\text{ ва }S_{BA'C''}=s\cdot\frac{(a+c)^2}{ac}.$$

Изланган шаклнинг юзи:

3) $S=s\left[\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{ab}+\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(a+c)^2}{ac}+\frac{(b+c)^2}{bc}\right]-2S=$

$$=s\cdot\frac{4abc+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}.$$

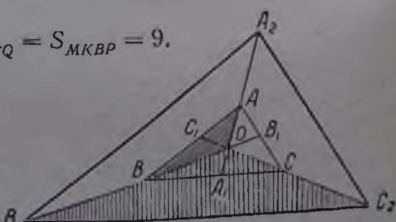
172. $\frac{CN}{NB}=\frac{h^2}{a^2}$; 95-масалага қаранг.

173. $BF=\frac{a^3}{2h^2-a^2}$.

174. $S_{PQM}=S_{AKML}=S_{MLCQ}=S_{MKBP}=9$.

175. I. ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусини r десак (137-шакл), $\triangle BOC$ юзи $=\frac{1}{2}ar$; илгаридан маълумки, $S_\triangle=$ $=rp$, бундан:

$$r=\frac{S}{p}.$$



137-шакл.

Шунга кўра:

$$S_{BOC}=\frac{aS}{2p},$$

2) ABC учбурчакда $OB=l'_b$; $BB_1=l_b$. Маълум бўлишича: $l'_b=\sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}}$; $l_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{ac(p-b)}$. Шунга кўра:

$$\frac{OB}{BB_1}=\frac{l'_b}{l_b}=\frac{\frac{\sqrt{ac(p-b)}}{p}}{\frac{2\sqrt{ac(p-b)}}{a+c}}=\frac{a+c}{2p},$$

яъни

$$\frac{OB}{BB_1}=\frac{a+c}{2p}. \qquad (1)$$

3) (1) ифодадан $\frac{BB_1}{OB}=\frac{2p}{a+c}$, бунинг икки томонига 1 қўшилса, $\frac{BB_1}{OB}+1=\frac{2p}{a+c}+1$; ясашдан $BB_1=BB_2$ бўлганидан, $\frac{BB_1+OB}{OB}=\frac{2p}{a+c}+1$ ни $\frac{BB_2+OB}{OB}=\frac{OB_2}{OB}$ деб ёзиш мумкин бўлади, яъни

$$\frac{OB_2}{OB}=\frac{2p}{a+c}+1=\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+c}=\frac{b+2(a+c)}{a+c}=\frac{b}{a+c}+2.$$

Шу билан $\frac{OB_2}{OB}=\frac{b}{a+c}+2$.

Демак:

$$\frac{OB_2}{OB}=\frac{b}{a+c}+2;$$

шу сингари $\frac{OC_2}{OC}=\frac{c}{a+b}+2$.

II. Энди учбурчаклар юзларининг нисбатини ёзамиз:

1) $\frac{S_{OB_2C_2}}{S_{OBC}}=\frac{OB_2\cdot OC_2}{OB\cdot OC}=\frac{OB_2}{OB}\cdot\frac{OC_2}{OC}=\left(\frac{b}{a+c}+2\right)\left(\frac{c}{a+b}+2\right)$;

бундан:

$$S_{OB_2C_2}=S_{OBC}\cdot\frac{OB_2\cdot OC_2}{OB\cdot OC}=\frac{aS}{2p}\left(\frac{b}{a+c}+2\right)\left(\frac{c}{a+b}+2\right).$$

Бу ифода ўнг томонининг шаклини алмаштирсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$S_{OB_2C_2}=\frac{2aS}{p}+\frac{S}{p}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ac}{a+b}\right)+\frac{abcS}{2p(a+b)(a+c)}.$$

Шунга ўхшаш:

$$S_{OC_2A_2}=\frac{2bS}{p}+\frac{S}{p}\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{a+b}\right)+\frac{abcS}{2p(a+b)(b+c)}$$

ва

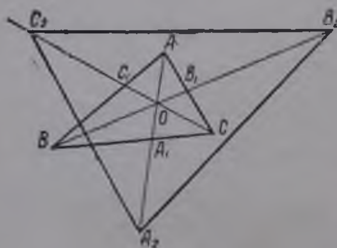
$$S_{OA_2B_2} = \frac{2cS}{p} + \frac{S}{p}\left(\frac{ac}{b+c} + \frac{bc}{a+c}\right) + \frac{abcS}{2p\,(a+c)\,(b+c)}.$$

Буларни ҳадлаб қўшамиз:

$$S_{A_2B_2C_2} = 4S + 2S + \frac{2abcS}{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)}.$$

Агар $S_{A_2B_2C_2} = \Delta$ десак,

$$\frac{\Delta}{S} = 6 + \frac{2abc}{(a+b)\,(b+c)\,(a+c)}.$$



138-шакл.

176. Ечиш (138-шакл). I. Биссектрисалар ва уларнинг бўлакларига доир формулалардан:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)};\quad l'_a = \sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}};$$

$$l''_a = l_a - l'_a = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}}$$

ларни ёзиш мумкин. Бошқа томонларга тегишли биссектрисалар ва уларнинг бўлакларини ҳам шу хилда ёза оламиз. 175-масалада кўрсатилганидек, қуйидагиларни ёзамиз:

2) $S_{OBC} = \frac{aS}{2p}$; $S_{OAB} = \frac{cS}{2p}$; $S_{OAC} = \frac{bS}{2p}$.

Шаклдан:

$$OA_2 = l_a + l''_a;\quad OC_2 = l_c + l''_c.$$

Булар қуйидагича бўлади:

3) $OA_2 = l_a + l''_a = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}} + \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)} =$

$$= \frac{\sqrt{bcp\,(p-a)}}{b+c}\left(\frac{a}{p} + 2\right) = \frac{2p+a}{b+c}\cdot\sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}}.$$

Ушбуни ҳам шунга ўхшаш ёзиш мумкин:

$$OC_2 = l_c + l''_c = \frac{2p+c}{a+b}\cdot\sqrt{\frac{ab\,(p-c)}{p}}.$$

II. OA_2C_2 ва OAC учбурчакларнинг бурчаклари тенг бўлганидан:

$$\frac{S_{OA_2C_2}}{S_{OAC}} = \frac{OA_2\cdot OC_2}{OA\cdot OC} = \frac{2p+a}{b+c}\cdot\frac{\sqrt{bc+(p-a)}}{p}\cdot\frac{2p+c}{a+b}\cdot\frac{\sqrt{ab\,(p-c)}}{p}:$$

$$:\frac{\sqrt{bc\,(p-a)}}{p}\cdot\frac{\sqrt{ab\,(p-c)}}{p} = \frac{(2p+a)\,(2p+c)\sqrt{bc\,(p-a)}\cdot\sqrt{ab\,(p-c)}}{p^2\,(a+b)\,(b+c)}:$$

$$:\frac{\sqrt{bc(p-a)}\cdot\sqrt{ab(p-c)}}{p^2}=\frac{(2p+a)(2p+c)}{(a+b)(b+c)}=\frac{2p+a}{b+c}\cdot\frac{2p+c}{a+b}=$$

$$=\left(\frac{2a}{b+c}+1\right)\cdot\left(\frac{2c}{a+b}+1\right)$$

ёки

$$S_{OA_2C_2}=S_{OAC}\cdot\left(\frac{2a}{b+c}+1\right)\left(\frac{2c}{a+b}+1\right)=\frac{bS}{2p}\left(\frac{2a}{b+c}+1\right)\left(\frac{2c}{a+b}+1\right)=$$

$$=\frac{bS}{2p}+\frac{bS}{p}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right)+\frac{4abcS}{(a+b)(b+c)}. \qquad (1)$$

Шу каби:

$$S_{OA_2B_2}=\frac{cS}{2p}+\frac{S}{p}\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{a+c}\right)+\frac{4abcS}{(b+c)(a+c)}. \qquad (2)$$

$$S_{OB_2C_2}=\frac{aS}{2p}+\frac{S}{p}\cdot\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ac}{a+c}\right)+\frac{4abcS}{(c+b)(a+c)}. \qquad (3)$$

(1), (2) ва (3) тенгликларни ҳадлаб қўшсак:

$$S_{A_2B_2C_2}=S+\frac{S}{p}\left[\frac{c(a+b)}{a+b}+\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{b+c}\right]+$$

$$+\frac{4abcS(a+c+a+b+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}=S+2S+\frac{8abcS}{(a+b)(a+c)(b+c)}=$$

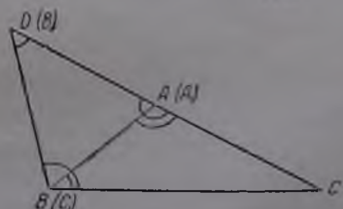
$$=3S+\frac{8abcS}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Агар $S_{A_2B_2C_2}$ ни Δ орқали белгиласак:

$$\frac{\Delta}{S}=3+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

177. $BD=\frac{1}{3}$; $EB=\frac{8}{15}$; $EC=\frac{1}{3}+\frac{8}{15}=\frac{13}{15}$.

178. *Кўрсатма.* ABC учбурчакнинг A бурчаги ёнига A_1 бурчакни қўйсак (A_1B_1 ва AB — умумий томон), $90°$ ли бурчак ҳосил бўлади. B, B_1 учлардан қарши томонларга AD ва A_1D_1 перпендикулярлар ўтказсак, бунда ҳосил бўлган ABD ва $A_1B_1D_1$ учбурчаклар юзларининг нисбатларидан исботланувчи тенгликни келтириб чиқариш мумкин.



139-шакл.

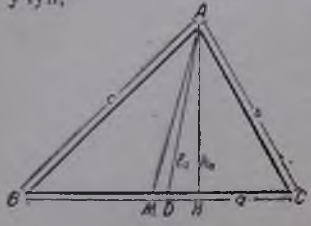
179. Ечиш (139-шакл). Агар бир жинсли $aa_1=bb_1+cc_1$ тенглик ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар учун бажарилса, $A_1B_1C_1$ учбурчак ўзига ўхшаш бошқа учбурчак билан алмаштирилганда ҳам у бажарилиши кўринади. $A_1B_1C_1$ учбурчакка ўхшаш шундай $A_2B_2C_2$ учбурчак оламизки, унинг B_1 бурчакка мос B_2 бурчаги қаршисидаги томони AB га тенг бўлсин. Кейинги учбурчакни шаклда кўрсатилганидек, ABC учбурчакка ёндош қилиб жойлаштирамиз (у ADB ҳолатни эгаллайди). Бундан $\angle CAB = \angle ADB + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABD = \angle DBC$ экани келиб чиқади.

$\angle DAB + \angle DBC = 180°$ бўлгани учун

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AD \cdot AB}{BC \cdot BD} = \frac{c_2 \cdot c}{a \cdot a_2} = \frac{c_2 \cdot c}{a_2 \cdot a}. \qquad (1)$$

ABC ва BCD учбурчаклар тенг бурчакларга эга бўлгани учун;

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AC \cdot AB}{BC \cdot BD} = \frac{b_2 \cdot b}{a \cdot a_2} = \frac{b_2 \cdot b}{a_2 \cdot a}. \qquad (2)$$



140-шакл.

(1) ва (2) ни ҳадлаб қўшсак,

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} + \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{S_{BCD}}{S_{BCD}} = 1$$

ёки

$$\frac{c_2 c}{a_2 a} + \frac{b_2 b}{a_2 a} = 1.$$

Бундан:

$$b_2 b + c_2 c = a_2 a.$$

180. Ечиш (140-шакл). 1) $CH = x$ десак, бу AC нинг BC даги проекцияси бўлганидан, $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$. BD ва CD кесмалар l_a биссектрисанинг BC томондан ажратган кесмалари бўлганидан:

$$CD = \frac{ab}{b + c} \text{ ва } BD = \frac{ac}{b + c} \text{ ҳамда } BM = MC = \frac{a}{2}.$$

2) $HD = CD - CH = \frac{ab}{b + c} - x = \frac{ab}{b + c} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, (1)

$$DM = MC - CD = \frac{a}{2} - \frac{ab}{b + c}; \qquad (2)$$

шартга кўра:

$$HD = 3 \cdot MD,$$

яъни

$$\frac{ab}{b + c} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = 3\left(\frac{a}{2} - \frac{ab}{b + c}\right)$$

ёки

$$2a^2 b - (a^2 + b^2 - c^2)(b + c) = 3a^2 (b + c) - 6a^2 b$$

ёки

$$2a^2 b + 6a^2 b - a^2(b + c) - 3a^2(b + c) - (b^2 - c^2) \cdot (b + c) = 0$$

ёки

$$8a^2 b - 4a^2(b + c) - (b - c)(b + c)^2 = 0$$

ёки

$$4a^2(2b - b - c) - (b - c)(b + c)^2 = 0$$

ёки

$$4a^2 - (b + c)^2 = 0,$$

бундан

$$(2a + b + c)\,(2a - b - c) = 0.$$

Бу кўпайтмада албатта, $2a + b + c \neq 0$, демак, $2a - b - c = 0$. Шундай қилиб, $a - b = c - a$ ёки $b - a = a - c$ бўлганидан, улар ўзаро арифметик прогрессия ташкил этади.

141-шакл.

181. *Кўрсатма.* 75° ли бурчакни 15° ва 60° ли бурчакларга ажратиб, ўткир бурчаги 30° бўлган тўғри бурчакли ва тенг ёнли учбурчаклардан фойдаланамиз.

182. *Кўрсатма.* Ўткир бурчак қаршисида ётган томон квадратининг формуласидан фойдаланамиз.

183. $a^2 = \frac{(b+c)^2(bc - l_a^2)}{bc}$;

$S = \frac{l_a(b+c)}{4bc}\sqrt{4b^2c^2 - l_a^2(b+c)^2}$.

184. Ечиш (141-шакл). Учбурчак ички ва ташқи бурчакларининг биссектрисалари ўзаро перпендикуляр бўлганидан:

$$\angle A'BB' = \angle A'CC' = \angle A'AB' = 90°.$$

Шунга кўра умумий A' ўткир бурчакка эга бўлгани учун $\triangle A'CC' \backsim \triangle A'BB'$, бундан: $\frac{A'C}{A'C'} = \frac{A'B}{A'B'}$ ёки $\frac{A'C}{A'B} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

Демак, A бурчаги умумий, мос томонлари пропорционал бўлгани сабабли $\triangle A'BC \backsim \triangle A'B'C'$, бундан:

$$\frac{A'B}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

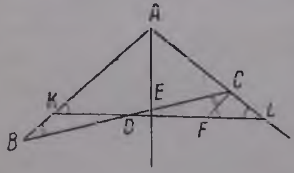
ёки $a = a' \cdot \frac{AB}{c'}$ бўлади.

Учбурчак томонининг квадрати ҳақидаги формуладан ($A'B'C'$ учбурчак a' томонининг квадрати учун) $A'B = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'}$ бўлгани сабабли $a = a' \cdot \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}$.

185. $\frac{l_a}{l'_a} = \frac{b+c}{a}$; $\frac{l_b}{l'_b} = \frac{a+c}{b}$; $\frac{l_c}{l'_c} = \frac{a+b}{c}$.

186. $\frac{a}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. *Кўрсатма.* 53-масалага қаранг.

188. Ечиш (142-шакл). ABC учбурчак BC томонининг ўртаси D нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ AE биссектрисага перпендикуляр бўлиб, AB ва AC ларни K ва L нуқталарда кессин. AKL учбурчакнинг биссектрисаси баландлиги билан уст-ма-уст тушгани учун $AK = AL$ ва $\angle AKL = \angle ALK$ бўлади. $CF \parallel AB$ ўтказсак, бунда BDK ва CDF учбурчаклар тенг бўлади, чунки $CF \parallel AB$ бўлганидан $BK = CF$. Сўнгра $\angle CFL = \angle AKL = \angle ALF$ ва бундан $BK = CL$. Бундан эса $CF = CL$.



142-шакл.

Шу сингари $AB = AK + BK$; $AC = AL - CL = AK - BK$ эканидан $AK = AL = \frac{1}{2}(AB + AC)$;

$$BK = CL = \frac{1}{2}(AB - AC).$$

II. ТЎРТБУРЧАКЛАР

1. Параллелограмм, ромб, тўғри тўртбурчак ва квадратлар

189. $\sqrt{39}$; $13\sqrt{3}$; $2\sqrt{13}$.

190. Асосининг ўртасидан изланган нуқтагача бўлган масофа $\frac{a}{6}\sqrt{3}$.

191. 3 ва 4; 1 ва 12.

192. $BE = 45\frac{1}{3}$; $BF = 113\frac{1}{3}$. *Кўрсатма.* Ҳаммаси $2+3+7 = 12$ бўлиб, параллелограмм юзининг ярми 6 улуш бўлади.

193. $BE = 34$; $CF = 72$.

194. $\frac{2am}{m+n} - k$.

195. OK кесманинг K учи DC кесманинг устида, ON кесманинг N учи BC кесманинг ўртасида ётади.

196. Бир диагонали $\frac{28\sqrt{13}}{9}$; бир томони $6\frac{20}{27}$.

Кўрсатма. Умумий бурчакнинг биссектрисасини олиб, унинг асосидан учбурчак томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз.

197. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $d = 1$; $S = \frac{1}{2}$.

198. $1\frac{1}{2}$ ва 3.

199. 16.

Кўрсатма. Айтилган нуқтадан ўтказилган тўғри чизиқлар билан тўртбурчакнинг катта томони тенг ёнли учбурчак ҳосил қилади.

200. $\frac{a^2}{4} - k^2$.

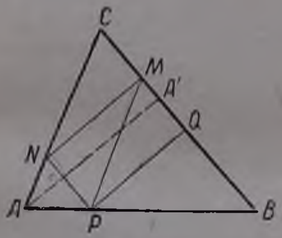
201. mn.

202. Ечиш (143-шакл). Шартга кўра, $MP \parallel AC$; $NP \parallel BC$, бунда $AA' \perp BC$ олинса, $PNMC$ параллелограмм ва $PNMQ$ тўғри тўртбурчак буйича

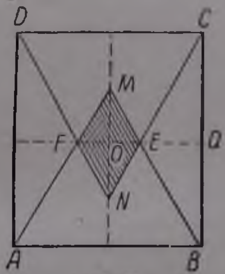
$$CM = MQ = NP = x \text{ ва } MP = CN = y;$$

$$AA' = h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{15}\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{56}{5}$$

$$\text{ва } A'C = \sqrt{AC^2 - AA'^2} = \frac{33}{5}.$$



143-шакл.



144-шакл.

1) $\triangle ABC \backsim \triangle MPB$ бўлганидан, $\frac{MP}{MB} = \frac{AC}{BC}$ ёки

$$\frac{y}{15-x} = \frac{13}{15};$$

бундан
$$13x + 15y = 13\cdot 15. \quad (1)$$

2) $\triangle AA'C \backsim \triangle MNC$ бўлганидан, $\frac{MC}{CN} = \frac{A'C}{AC}$

ёки

$$\frac{x}{y} = \frac{33}{5} : 13.$$

Бундан:

$$65x - 33y = 0. \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалар бирликда ечилса, $x = 4\frac{7}{12}$; $y = \frac{65\cdot 5}{36}$.

Буларга асосан:

$$MN = \sqrt{MP^2 - NP^2} = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{65\cdot 5}{36}\right)^2 - \left(\frac{55}{12}\right)^2} = 7\frac{7}{9}.$$

203. $\frac{ac_1}{c + c_1}$; $\frac{ac}{c + c_1}$.

204. 2.

205. Ечиш (144-шакл). Ясалган учбурчаклар учлари M ва N ҳамда томонларининг ўзаро кесишган нуқталари E ва F

бўлсин. E ва F нуқталардан квадратнинг томонларини кесувчи тўғри чизиқ ўтказиб, масалани еча бошлаймиз.

1) олинган $EMFN$ шаклда $\angle M = \angle N = 60^\circ$ бўлганидан, $\angle E = \angle F = 120^\circ$.

2) $CQ = \frac{a}{2}$ ва $\angle ECQ = 30^\circ$ ҳамда $EQ = \frac{1}{2} EC$ бўлганидан $QE = PE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

3) $EF = a - 2QE = a - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}(3 - \sqrt{3})$. Сўнгра $EF = ME = MF = EN = FN$ ва $\angle ENF = \angle EMF$ бўлганидан, шаклимиз ромб бўлади.

4) Ромбнинг юзи $= EF \cdot MO$;

бунда

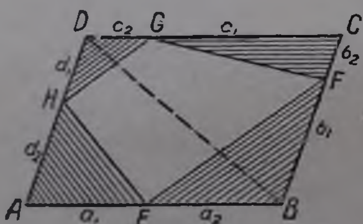
$$MO = \sqrt{ME^2 - OE^2} = \sqrt{\left[\frac{a}{3}(3-\sqrt{3})\right]^2 - \left[\frac{a}{6}(3-\sqrt{3})\right]^2} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{6}(3-\sqrt{3}),$$

демак, ромбнинг юзи $\frac{a^2}{3}(2\sqrt{3} - 3)$.

206. $S_1 : S_2 = 59 : 53$.

207. Е ч и ш (145-шакл). Бу ерда биттадан бурчаги умумий (тенг) бўлган учбурчакларнинг юзлари ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. 1) A умумий бурчак бўлгани учун:



145-шакл.

$$\frac{S_{AEH}}{S_{ABD}} = \frac{AE \cdot AH}{AB \cdot AD} = \frac{a_1 \cdot d_2}{ab}$$

ёки

$$S_{AEH} = \frac{S}{2} \cdot \frac{a_1 \cdot d_2}{ab};$$

B умумий бурчак бўлгани учун:

$$\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \frac{BE \cdot BF}{AB \cdot BC} = \frac{a_2 \cdot b_1}{ab}$$

ёки

$$S_{EBF} = \frac{S}{2} \cdot \frac{a_2 \cdot b_1}{ab};$$

C умумий бурчак бўлгани учун:

$$\frac{S_{FCG}}{S_{BCD}} = \frac{CF \cdot CG}{BC \cdot CD} = \frac{b_2 \cdot c_1}{ab}$$

ёки

$$S_{FCG} = \frac{S}{2} \cdot \frac{b_2 \cdot c_1}{ab}.$$

D умумий бурчак бўлгани учун:

$$\frac{S_{HDG}}{S_{ACD}}=\frac{DH\cdot DG}{AD\cdot DC}=\frac{c_2d_1}{ab}$$

ёки

$$S_{HDG}=\frac{S}{2}\cdot\frac{c_2\cdot d_1}{ab}.$$

Буларнинг йиғиндиси:

$$S_1=S_{AEH}+S_{BEF}+S_{CFG}+S_{DHG}=\frac{S}{2}\cdot\left(\frac{a_1d_2+a_2b_1+b_2c_1+c_2d_1}{ab}\right).$$

Изланган шакл юзини S_2 десак, унда

$$S_2=S-S_1=S-\frac{S}{2}\,\frac{a_1d_2+a_2b_1+b_2c_1+c_2d_1}{ab}=$$

$$=S\cdot\frac{2ab-a_1d_2-a_2b_1-b_2c_1-c_2d_1}{2ab},$$

бундан:

$$\frac{S_2}{S}=\frac{2ab-a_1d_2-a_2b_1-b_2c_1-c_2d_1}{2ab}.$$

208. Ечиш (146-шакл). Шарт буйича

$$\frac{AH}{AD}=\frac{BE}{EA}=\frac{CF}{FB}=\frac{DG}{CG}=\frac{n}{m}.\quad \triangle ALD \text{ да } TH \parallel LD:$$

$$\frac{AT}{TL}=\frac{n}{m}$$

ёки

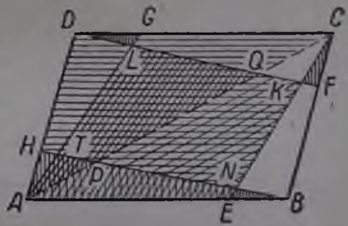
$$\frac{AT}{TL}=\frac{n\,(m+n)}{m\,(m+n)} \qquad (1)$$

деб ёзиш мумкин. Сунгра $\triangle ATB \backsim \triangle GLD$, шунинг учун

$$\frac{AT}{LG}=\frac{AB}{DG}=\frac{m+n}{n}$$

ёки

$$\frac{AT}{LG}=\frac{n\,(m+n)}{n^2} \qquad (2)$$



146-шакл.

деб ёза оламиз. (1) ва (2) дан:

$$\frac{AT}{TL}:\frac{AT}{LG}=\frac{n}{m}:\frac{m+n}{n},$$

бундан:

$$\frac{TL}{LG}=\frac{m(m+n)}{n^2}.$$

$$\frac{AG}{LG}=\frac{AT+TL+LG}{LG}=\frac{AT}{LG}+\frac{TL}{LG}+\frac{LG}{LG}=$$

$$=\frac{n\,(m+n)}{n^2}+\frac{m\,(m+n)}{n^2}+1=\frac{m^2+2mn+2n^2}{n^2}.$$

ёки бу нисбатларнинг тескари қийматларини ёзсак:

$$\frac{LG}{AG}=\frac{n^2}{m^2+2mn+2n^2}.$$

Кетма-кет пропорциялардан:

$$AT:TL:LG:AG=n(m+n):m(m+n):n^2:(m^2+2mn+2n^2).$$

II. $S_{ADC}=\frac{1}{2}\ S_{\text{параллелограмм}}=\frac{1}{2}S.$

D бурчак умумий бўлганидан:

$$\frac{S_{ADG}}{S_{ADC}}=\frac{n}{m+n}$$

ёки

$$S_{ADG}=S_{ADC}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{1}{2}S\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{nS}{2(m+n)}.$$

Шу каби:

$$\frac{S_{DGL}}{S_{ADG}}=\frac{LG}{AG}$$

ёки

$$S_{DGL}=S_{ADG}\cdot\frac{LG}{AG}=\frac{nS}{2(m+n)}\times$$

$$\times\frac{n^2}{m^2+2mn+2n^2}=\frac{n^3S}{2(m+n)[(m+n)^2+n^2]}. \quad (3)$$

III. Шаклдан:

$$S_{ADL}=S_{ADG}-S_{ALG}=\frac{nS}{2(m+n)}-\frac{n^3S}{2(m+n)[(m+n)^2+n^2]}=$$

$$=\frac{nS(m+n)}{2[(m+n)^2+n^2]}.$$

Ўхшаш учбурчаклардан:

$$\frac{S_{ATH}}{S_{ALD}}=\frac{n^2}{(m+n)^2}$$

ёки

$$S_{ATH}=S_{ADL}\cdot\frac{n^2}{(m+n)^2}=\frac{nS(m+n)}{2[(m+n)^2+n^2]}\cdot\frac{n^2}{(m+n)^2}=$$

$$=\frac{n^3S}{2(m+n)[(m+n)^2+n^2]}. \quad (4)$$

Ҳосил қилинган (3) ва (4) тенгликлардан $S_{DGL}=S_{ATH}$ эканлиги маълум булади. Агар $DLTH$ тўртбурчакнинг юзини ҳисобласак:

$$S_{DLTH}=S_{ALD}-S_{ATH}=\frac{nS(m+n)}{2[(m+n)^2+n^2]}-$$

$$-\frac{n^3S}{2(m+n)[(m+n)^2+n^2]}=\frac{mnS(m+2n)}{2(m+n)[(m+n)^2+n^2]}.$$

IV. Энди T_{NLK} параллелограммнинг юзини ҳисоблаймиз:

$$S_{THKL} = S_{ABCD} - 4\cdot S_{ALD} - S - 4\cdot\frac{nS(m+n)}{2[(m+n)^2+n^2]} = \frac{m^2S}{n^2+(m+n)^2}.$$

209. Ечиш (147-шакл).

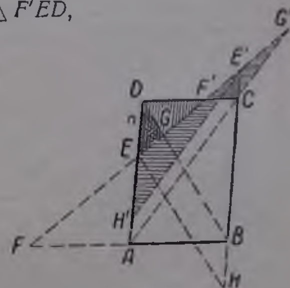
Бурчаклари тенг бўлганидан:

$$\triangle F'E'C \backsim \triangle F'ED,$$

бундан:

$$\frac{EF'}{E'F'} = \frac{ED}{E'C} \text{ ёки } \frac{EF'}{E'F'} = \frac{m}{n}; \qquad (1)$$

$$EF' + F'E' = EE' = d. \qquad (2)$$



147-шакл.

(1) ва (2) тенгликдан:

$E'F' = \frac{nd}{m+n}$, $EF' = \frac{md}{m+n}$. Вертикал бурчакка эга бўлганидан:

$$\triangle AEF \backsim \triangle F'ED,$$

шунга кўра:

$$\frac{EF}{EF'} = \frac{AE}{ED} \text{ ёки } \frac{EF}{EF'} = \frac{b-m}{m},$$

бундан:

$$EF = EF'\cdot\frac{b-m}{m} = \frac{md}{m+n}\cdot\frac{b-m}{m} = \frac{d(b-m)}{m+n}.$$

II. Агар $EH \parallel DB$ ўтказилса, $BH = m$ ҳамда $\triangle DEG \backsim \triangle E'GB$, шунингдек, $\triangle DEG \sim \triangle E'EH$ бўлганидан,

$$\frac{EG}{ED} = \frac{EE'}{HE'}$$

ёки

$$\frac{EG}{BH} = \frac{EE'}{HE'}$$

ёки

$$EG = BH\cdot\frac{EE'}{HE'} = m\cdot\frac{d}{m+b+n} = \frac{md}{m+b+n}.$$

III. Яна $E'H' \parallel AC$ ўтказамиз, $AH' = E'C = n$ ҳамда $\triangle G'E'C \backsim \backsim \triangle E'EH'$, бундан:

$$\frac{E'G'}{E'C} = \frac{E'E}{EH'}$$

ёки

$$\frac{G'E'}{AH'} = \frac{E'E}{EH'}$$

ва

$$G'E' = AH'\cdot\frac{EE'}{EH'}$$

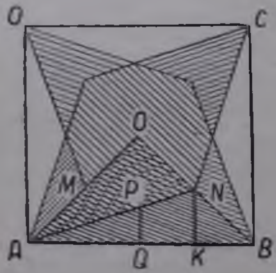
ёки

$$G'E' = \frac{nd}{b-(m+n)}.$$

210. $S_{\Delta} : S_{кв.} = \sqrt{3} : 4$.

211. 600.

212. Ечиш (148-шакл). Агар ромбнинг юзи квадрат юзининг ярмига тенг бўлса, $S_{ABN} = S_{AON}$ дейиш мумкин. Унда бу учбурчакларнинг баландлиги умумий бўлганидан асослари $ON = NB = \frac{1}{4}\ BD$ (O — квадратнинг маркази) бўлади.



148-шакл.

$NK \perp AB$ ўтказилса, $BK = \frac{1}{4}\ a$ ва NBK учбурчак тенг ёнли бўлганидан $NK = KB = \frac{1}{4}a$; $AK = \frac{3}{4}a$, $AQ = \frac{1}{2}\ a$ ва

$$PQ = \frac{2}{3}NK = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\ a = \frac{1}{6}a.$$

Буларга асосан, шакл парчаларининг юзларини излаймиз:

$$S_{ABN} = \frac{1}{2}\ AB\cdot NK = \frac{1}{2}\ a\cdot\frac{1}{4}\ a = \frac{a^2}{8};$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\ AB\cdot PQ = \frac{1}{2}\ a\cdot\frac{1}{6}\ a = \frac{a^2}{12};$$

$$S_{PBN} = S_{ABN} - S_{ABP} = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{24};$$

$$S_{MPNO} = S_{ABO} - S_{ABN} - S_{APM} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{24} = \frac{a^2}{12}.$$

Иккала ромбнинг умумий қисми бўлган саккизбурчакнинг юзи (S) шундай тўртта S_{MPNO} шаклнинг юзига тенг бўлганидан:

$$S = 4\cdot\frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3}.$$

213. $2\sqrt{3} - 3$.

214. *Кўрсатма.* Учбурчаклар ўхшашлиги ва тенглигига асосланиб ечилади.

215. Параллелограммнинг катта томони a даги кесма x бўлса, у ҳолда $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, кичик томонидаги кесма $\frac{b}{3}\sqrt{6}$.

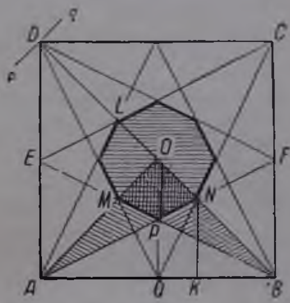
216. Ечиш (149-шакл). I. 1) CE ва AF параллел кесмаларнинг BD диаметр билан кесишишидан ҳосил бўлган ADN ва EDL учбурчакларда $AN \parallel EL$ бўлиб, улар умумий ADB бурчакка эга бўлганидан ўхшаш бўлади. Бундан: $\frac{DL}{DN} = \frac{DF}{DA} = \frac{1}{2}$, яъни $DL = \frac{1}{2}\ DN$. L нуқта DN кесманинг ўртаси. Шу хилда N нуқта BL кесманинг ўртаси бўлиб, $BN = NL = LD$ ҳосил бўлади.

2) N нуқтадан AB га перпендикуляр ($NK \perp AB$) ўтказсак; ҳосил бўлган $\triangle BNK \backsim \triangle ABD$ бўлганидан, $\frac{KN}{AD} = \frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$, яъни $NK = \frac{1}{3}\ AD = \frac{1}{3}\ a$ бўлади. Демак, $NK = \frac{1}{3}\ a$.

3) BE ва AF кесмаларнинг кесишиш P нуқтасидан $PQ \perp AB$ туширилганда $\triangle APQ \backsim \triangle AFB$ ҳосил бўлади. Бундан:

$$\frac{PQ}{BF} = \frac{AQ}{AB} = \frac{1}{2};$$

$$PQ = \frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4}\ a.$$



149-шакл.

Демак:

$$PQ = \frac{1}{4} a.$$

II. 1) $S_{AOB} = \frac{1}{2}\ QO \cdot AB =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\ a = \frac{a^2}{4};$$

$$S_{AOB} = \frac{a^2}{4}.$$

2) $S_{ABN} = \frac{1}{2}\ NK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3}\ a = \frac{a^2}{6};$

$$S_{ABN} = \frac{a^2}{6}.$$

3) $S_{ABP} = \frac{1}{2}\ PQ \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4}\ a = \frac{a^2}{8};$

$$S_{ABN} = \frac{a^2}{8}.$$

4) $S_{BPN} = S_{ABN} - S_{ABP} = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{8} = \frac{4a^2 - 3a^2}{24} = \frac{a^2}{4}.$

Демак:

$$S_{BPN} = \frac{a^2}{24}.$$

5) $S_{\text{кўпбур.}}\ MPNO = S_{AOB} - S_{ABN} - S_{BPN} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{24} = \frac{a^2}{24},$ яъни $S_{MPNO} = \frac{a^2}{24}$. Шунга кўра изланган 8 бурчакнинг юзи шундай 4 та кўпбурчак юзига тенг бўлганидан $S_{8\ \text{бур.}} = 4 \cdot \frac{a^2}{24} = \frac{a^2}{6}$. Натижада $S_{8\ \text{бур.}} = \frac{a^2}{6}$ бўлади.

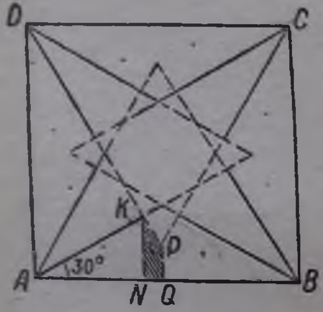
217. 2 ва $\frac{1}{2}$; 1 ва 1.

218. Ечиш (150-шакл.) Квадратнинг DC томонига ясалган учбурчак билан AD томонига ясалган учбурчак томонларининг кесишиш нуқтаси K бўлиб, DC томонга ясалган учбурчакнинг учини P десак, бу нуқтадан AB томонга туширилган перпендикуляр AB билан Q нуқтада кесишади, бу ҳолда $\triangle AKD$ да $\angle ADK = 30°$, бундан:

$$AK = \frac{1}{2} AD = \frac{a}{2}.$$

$\triangle AKN$ да $\angle KAN = 30°$, бундан:

$$KN = \frac{1}{2} AK = \frac{a}{4};$$



150-шакл.

буларга асосан тўғри бурчакли AKN учбурчакнинг учинчи томони $AN = \frac{\sqrt{3}}{4} a$; бинобарин:

$$NQ = AQ - AN = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} a = \\ = \frac{a}{4}(2 - \sqrt{3}).$$

Катетлар $AK = AQ = \frac{1}{2} a$ ва AP умумий томон ва ҳар бири тўғри бурчакли бўлганидан $\triangle AKP = \triangle APQ$.

Шу сабабли:

$$KP = PQ = PD - KD = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2},$$

чунки ADK учбурчакда $KD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Булардан фойдаланиб, шакл бўлагининг юзини излаймиз:

$$S_{AKN} = \frac{1}{2} AN \cdot KN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{32}.$$

$$S_{QNPK} = \frac{1}{2} NQ(PQ + KN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4}(2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{a(5 - 2\sqrt{3})}{4} = \\ = \frac{16 - 9\sqrt{3}}{32} a^2.$$

$$S_{AQPK} = S_{AKN} + S_{KNQP} = \frac{\sqrt{3}}{32} a^2 + \frac{16 - 9\sqrt{3}}{32} a^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} a^2.$$

Агар квадратнинг юзидан $AQPK$ шакл юзининг саккиз ҳиссасини олиб ташласак, изланган шаклнинг юзи келиб чиқади, яъни:

$$S_{8\ \text{бур.}} = a^2 - 8 \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{4} a^2 = a^2(2\sqrt{3} - 3),$$

220. $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

222. Ечиш (151-шакл). Шартга кўра:

1) $\frac{AE}{EB}=\frac{HE}{EF}=k;$ (1)

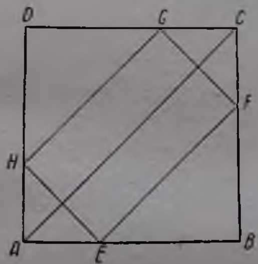
2) $AE+EB=a.$ (2)

(1) ва (2) тенгламаларни биргаликда ечсак:

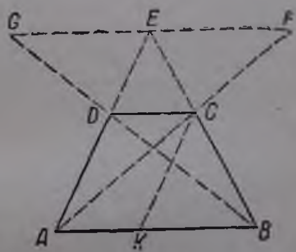
$$AE=\frac{ak}{1+k};\quad EB=\frac{a}{1+k};$$

3) AEH учбурчакдан: $EH=AE\sqrt{2}=\frac{ak\sqrt{2}}{1+k};$

BEF учбурчакдан: $EF=EB\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{1+k}.$



151-шакл.



152-шакл.

Бундан тўғри тўртбурчакнинг юзи:

$$S=EH\cdot EF=\frac{ak\sqrt{2}}{1+k}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{1+k}=\frac{2a^2k}{(1+k)^2},$$

яъни

$$S=2a^2\cdot\frac{k}{(1+k)^2}.$$

223. $CB=\sqrt{ak}.$

224. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{(c-d)^2}{4}}$. *Кўрсатма.* Параллел бўлган кичик томон ўртасидан ён томонларга параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказамиз.

225. Ечиш (152-шакл). $\triangle AEF \backsim \triangle ADC$ бўлганидан $\frac{EF}{DC}=\frac{AE}{AD}$, бундан:

$$EF=DC\cdot\frac{AE}{AD}=b\frac{AE}{AD}. \quad (1)$$

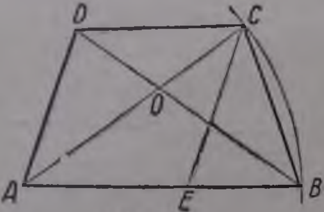
Агар $CK \parallel AE$ ўтказилса, $\triangle ABE \backsim \triangle BKC$ бўлиб, бундан:

$$\frac{AE}{KC}=\frac{AB}{BK} \text{ ёки } \frac{AE}{AD}=\frac{a}{a-b}. \quad (2)$$

(2) тенгликдаги $\frac{AE}{AD} = \frac{a}{a-b}$ қиймат (1) ифодага қўйилса:

$$EF = \frac{ab}{a-b}. \tag{3}$$

AEF ва BEG учбурчакларнинг баландлиги тенг, уларнинг асосларидан тенг узоқликда ва асосга параллел ётган CD кесма ҳар иккиси учун умумий бўлганидан $GE = EF$.



153-шакл.

Демак: $GF = 2EF = \frac{2ab}{a-b}$.

226. $MN = 6$.

227. $MN = 16\frac{1}{2}$.

228. $S_{\text{трапеция}} = 1260$.

229. $\frac{(6a - h\sqrt{3})\,h}{6}$.

230. Ечиш (153-шакл). I. 1) Шартга кўра: $AB = AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ва $AD = DC = CB = x$.

Агар $CE \parallel AD$ ўтказилса, $AE = CE = x$; $BE = a - x$ бўлади.

2) ABC ва EBC учбурчаклар тенг ёнли бўлиб, асосларидаги бурчаги ($\angle B$) умумий бўлганидан:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BE} \text{ ёки } \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x};\ x = a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

бунга a нинг қиймати қўйилса:

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1;\ x = 1.$$

II. 1) Агар A нуқтани марказ қилиб $AB = a$ радиус билан айлана чизсак, $BC = x = a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ бўлганидан у a_{10} га, яъни айланага ички чизилган мунтазам 10 бурчакнинг бир томонига тенг бўлади. Унинг марказий бурчаги $\angle BAC = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$; бундан тенг ёнли ABC учбурчакнинг асосидаги бурчаклар $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$, яъни трапециянинг асосидаги бир бурчак 72° экани келиб чиқади. Демак, иккинчиси $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ бўлиши керак.

2) AO ва OC кесмаларни ҳам y ва $a - y$ билан белгиласак, AOB ва COD учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC};\ \frac{y}{a-y} = \frac{a}{x} \text{ ёки } \frac{y}{a-y} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}};$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \text{ ва } y = \frac{2a}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1;\ y = 1.$$

231. Ечиш (154-шакл). Шартга кўра:

$$\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}}=\frac{p^2}{q^2} \qquad (1)$$

ва ўхшаш бўлганидан

$$\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}}=\frac{(AD)^2}{(BC)^2}=\frac{(AO)^2}{(OC)^2}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) га асосан

$$\frac{(AD)^2}{(BC)^2}=\frac{(AO)^2}{(OC)^2}=\frac{p^2}{q^2} \qquad (3)$$

ёки

$$\frac{AD}{BC}=\frac{AO}{OC}=\frac{p}{q}. \qquad (4)$$

$S_{ABD}=S_{ADC}$. Буларнинг ҳар биридан S_{AOD} айрилса, $S_{DOC}=S_{AOB}$ бўлади. Баландликлари тенг бўлганидан:

$$\frac{S_{AOD}}{S_{DOC}}=\frac{AO}{OC}$$

га кўра

$$\frac{S_{AOD}}{S_{DOC}}=\frac{p}{q}$$

154-шакл.

ёки

$$S_{DOC}=S_{AOD}\cdot\frac{q}{p};$$

бунга шартда берилган S_{AOD} нинг қиймати қўйилса:

$$S_{DOC}=p^2\frac{q}{p}=pq.$$

Демак:

$$S_{ABCD}=S_{AOD}+S_{BOC}+S_{AOB}+S_{DOC}=$$
$$=p^2+q^2+pq+pq=p^2+q^2+2pq=(p+q)^2.$$

232. $a_4=10$.

233. $S_{\text{трапеция}}=2b^2$; кичик асоси $DC=2b\sqrt{2}-a$.

234. h^2.

235. Асослари x ва y билан белгиланса:

$$S_{\text{тўртбурчак}}=xy=25.$$

236. 900.

237. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

238. 12 ва 3.

239. $EF=\frac{1}{3}\sqrt{113}$.

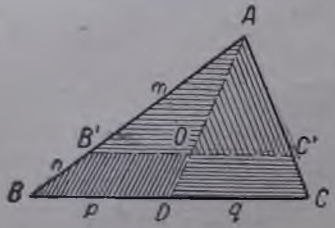
240. $S_{MKHP\ (\text{трапеция})}=S_{ABC}\cdot\frac{c-2m}{c}$.

241. Ечиш (155-шакл). Шарт бўйича:

$$S_{ABC} = S; \ \frac{BD}{DC} = \frac{p}{q} \text{ ва } \frac{AB'}{B'B} = \frac{m}{n}.$$

Шунга асосан шаклнинг юзини текширамиз.

I. ABC ва $AB'C'$ учбурчаклар ўхшаш бўлганидан:



155-шакл.

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{m^2}{(m+n)^2}$$

ёки

$$S_{AB'C'} = S\frac{m^2}{(m+n)^2}. \qquad (1)$$

ABD ва ABC учбурчакларнинг баландликлари тенг бўлганидан:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{p}{p+q},$$

бундан:

$$S_{ABD} = S\cdot\frac{p}{p+q} = \frac{pS}{p+q}, \qquad (2)$$

сўнгра тўртбурчакнинг юзи қуйидагича ифода этилади:

$$S_{BCC'B'} = S_{ABC} - S_{AB'C'} = S - S\cdot\frac{m^2}{(m+n)^2} = S\frac{n(2m+n)}{(m+n)^2}. \qquad (3)$$

II. $AB'O$ ва $AB'C'$ учбурчакларнинг баландликлари тенг бўлганидан:

$$\frac{S_{AB'O}}{S_{AB'C'}} = \frac{B'O}{B'C'} = \frac{p}{p+q},$$

бундан:

$$S_{AB'O} = S_{AB'C'}\cdot\frac{B'O}{B'C'} = \frac{m^2S}{(m+n)^2}\cdot\frac{p}{p+q} = S\cdot\frac{m^2p}{(m+n)^2(p+q)}. \qquad (4)$$

(1) ва (4) тенгликлардан:

$$S_{AOC'} = S_{AB'C'} - S_{AB'O'} = S\cdot\frac{m^2}{(m+n)^2} - S\frac{pm^2}{(m+n)^2(p+q)} =$$
$$= S\cdot\frac{qm^2}{(m+n)^2(p+q)}. \qquad (5)$$

Шу каби:

$$S_{B'BDO} = S_{ABD} - S_{AB'O} = \frac{pS}{p+q} - \frac{pSm^2}{(p+q)(m+n)^2} =$$
$$= S\cdot\frac{pn(2m+n)}{(m+n)^2(p+q)}. \qquad (6)$$

(3) ва (6) тенгликлардан:

$$S_{DCC'O} = S_{BCC'B'} - S_{BDOB'} = S\cdot\frac{n(2m+n)}{(m+n)^2} - S\cdot\frac{pn(2m+n)}{(m+n)^2(p+q)} =$$
$$= S\frac{nq(2m+n)}{(m+n)^2(p+q)}.$$

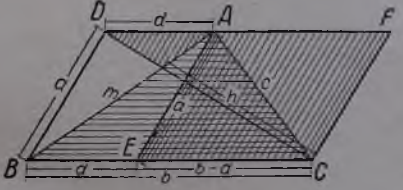
242. $\frac{1}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$.

243. Ечиш (156-шакл). 1) ABC учбурчакда $AE \parallel BD$ ўтказсак, Стюарт теоремасига кўра:

$$AB^2 \cdot EC + AC^2 \cdot BE - AE^2 \cdot BC = BC \cdot BE \cdot EC$$

ёки

$$m^2(b-d) + c^2d - a^2b = bd(b-d),$$



156-шакл.

бундан:

$$m = \sqrt{\frac{bd(b-d) + a^2b - c^2d}{b-d}} = \sqrt{\frac{b(a^2-d^2) + d(b^2-c^2)}{b-d}}. \qquad (1)$$

Шу каби

2) $CF \parallel BD$ ўтказсак, $\triangle DCF$ учбурчакдан яна Стюарт теоремасига кўра:

$$CD^2 \cdot AF + CF^2 \cdot AD - AC^2 \cdot DF = AD \cdot AF \cdot DF$$

(бу ерда $FC = a$; $HF = b - d$)

ёки

$$n^2(b-d) + a^2d - c^2b = bd(b-d)$$

ёки

$$n^2(b-d) = c^2b - a^2d + db^2 - bd^2,$$

бундан:

$$n = \sqrt{\frac{d(b^2-a^2) + b(c^2-d^2)}{b-d}}.$$

244.

$\frac{b+d}{4(b-d)}\sqrt{(a+b+c-d)(a-b+c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c-d)}$.

Кўрсатма. Кичик асосининг учидан ён томонига параллел тўғри чизиқ ўтказиб, олинган учбурчакка Герон формуласини татбиқ этиш билан трапеция юзини излаймиз.

245. 7 : 3.

246. 72.

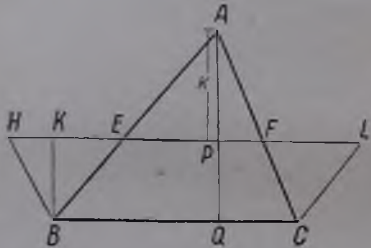
247. Ечиш (157-шакл). 1) Изланган $BCLH$ трапециянинг юзи:

$$S_{\text{трап.}} = S_{ABC} - S_{AEF} + S_{HBE} + S_{CLF}. \qquad (1)$$

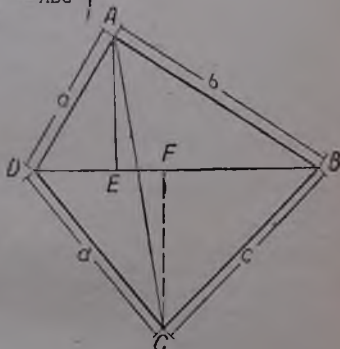
2) $\triangle ABC \backsim \triangle AEF \backsim \triangle HBE \backsim \triangle CLF$ (бу ерда $\angle ABH = \angle BAC = \angle ACL$ ва томонлари параллел) шунга кўра:

$$\left.\begin{aligned} &3)\ \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{k^2}{h^2} \text{ ёки } S_{AEF} = \frac{k^2}{h^2}\cdot S_{ABC}. \\ &\frac{S_{HBE}}{S_{ABC}} = \frac{(h-k)^2}{h^2};\ S_{HBE} = \frac{(h-k)^2}{h^2}\cdot S_{ABC}. \\ &\frac{S_{CLF}}{S_{ABC}} = \frac{(h-k)^2}{h^2};\ S_{LF} = \frac{(h-k)^2}{h^2}\cdot S_{ABC}. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Бу ифодаларни (1) га қўйсак:



157-шакл.



158-шакл.

$$S_{\text{трап.}} = S_{ABC} - S_{ABC}\left[\frac{k^2}{h^2} - \frac{(h-k)^2}{h^2} - \frac{(h-k)^2}{h^2}\right] =$$
$$= S_{ABC}\left[1 - \frac{k^2}{h^2} + 2\cdot\frac{(h-k)^2}{h^2}\right] = \frac{ah}{2}\cdot\frac{h^2 - k^2 + 2(h-k)^2}{h^2} =$$
$$= \frac{a(h-k)(3h-k)}{h^2}.$$

Демак,
$$S_{\text{трап.}} = \frac{a}{2h}(h-k)(3h-k).$$

248. $\frac{(a+3b)a^2}{(b+3a)b^2}$.

249. $CP = a\cdot\frac{a-h}{a+b}$.

250. 2. $(a-k)^2$.

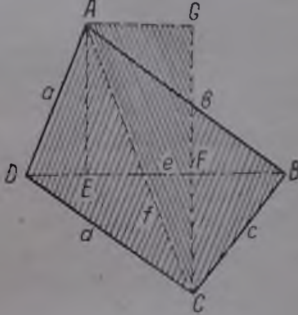
251. $k = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$; $S = 2a^2(\sqrt{2}-1)$.

252. *Исбот* (158-шакл). Тўртбурчакнинг BD диагоналига A учидан $AE \perp BD$ ва C учидан $CF \perp BD$ туширамиз. У ҳолда ABD ва CBD учбурчаклардан:

$$DE = \frac{a^2 + BD^2 - b^2}{2BD}, \qquad (1)$$

$$DF = \frac{d^2 + BD - c^2}{2BD}. \qquad (2)$$

Шартга кўра $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$ бўлганидан, (1) ва (2) га кўра $DE = DF$. Демак, E ва F нуқталар шаклида кўрсатилганича ҳар хил бўлмасдан, бир-бирининг устига тушади. Бошқача айтганда, CF ва AE перпендикуляр чизиқлар бир тўғри чизиқ устида, яъни AC тўғри чизиқ устида ётади. Шундай қилиб, $AC \perp BD$ ва талаб қилинган нарса исбот этилди.



159-шакл.

253. Ечиш (159-шакл). Қисқалик учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$a^2 + b^2 = m; \qquad c^2 + d^2 = n;$$
$$a^2 - b^2 = p; \qquad d^2 - c^2 = q.$$

Тўртбурчакнинг BD диагоналига A ва C учлардан $AE \perp BD$ ва $CF \perp BD$ ларни туширамиз. Сўнгра $AE = FG$ $(AG = EF)$ шарт билан G нуқта оламиз. A ва G нуқталарни туташтирамиз, ABD учбурчакдан:

$$ED = \frac{a^2 + e^2 - b^2}{2e} = \frac{p + e^2}{2e}. \qquad (1)$$

CBD учбурчакдан:

$$FD = \frac{d^2 + e^2 - c^2}{2e} = \frac{q + e^2}{2e}. \qquad (2)$$

Ҳосил қилинган (1) ва (2) тенгликлардан:

$$EF = DF - DE = \frac{q - p}{2e}. \qquad (3)$$

Пифагор теоремасига асосан, AED учбурчакдан:

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{p + e^2}{2e}\right)^2} = \frac{1}{2e}\sqrt{-e^4 - 2e^2m - p^2}. \qquad (4)$$

CFD учбурчакдан:

$$CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{q + e^2}{2e}\right)^2} = \frac{1}{2e}\sqrt{-e^4 + 2e^2n - q^2}. \qquad (5)$$

AGC учбурчакдан:

$$AC^2 = AG^2 + CG^2 = EF^2 + (CF + FG)^2 = EF^2 + (CF + AE)^2. \qquad (6)$$

Бу тенгликка (3), (4) ва (5) ларда хосил қилинган қийматларни қўйсак:

$$AC^2 = f^2 = \left(\frac{q - p}{2e}\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{-e^4 + 2e^2n - q^2}}{2e} + \frac{\sqrt{-e^4 + 2e^2m - p^2}}{2e}\right]^2$$

ёки

$$4e^2f^2 - (q - p)^2 = (\sqrt{-e^4 + 2e^2n - q^2} + \sqrt{-e^4 + 2e^2m - p^2})^2. \qquad (7)$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб, иккига бўлиб, ихчамлаб рационал ҳадларни бир томонга кўчирсак,

$$2e^2f^2 + e^4 - e^2(m+n) + pq =$$
$$= \sqrt{-e^4 - 2e^2n - q^2} \cdot \sqrt{-e^4 + 2e^2m - p^2}$$

ҳосил бўлади, унинг иккала томонини яна бир марта квадратга кўтариб ихчамласак:

$$4e^4f^4 + e^4[(m+n)^2 + 2pq - p^2 - q^2 - 4mn] + e^2[2(mq^2 + np^2) -$$
$$- 2pq(m+n)] + 4e^6f^2 - 4e^4f^2(m+n) + 4e^2f^2pq = 0. \quad (8)$$

Ўрта қавслар ичидаги ифодаларнинг шаклини алмаштирсак:

$$(m+n)^2 + 2pq - p^2 - q^2 - 4mn = (m-n)^2 - (p-q)^2 =$$
$$= (m-n+p-q)(m-n-p+q) = 4(a^2-d^2)(b^2-c^2) =$$
$$= -4(a^2c^2 + b^2e^2 - a^2b^2 - d^2d^2). \quad (9)$$

$$2(mq^2 + np^2) - 2pq(m+n) = 2mq(q-p) + 2np(p-q) =$$
$$= 2(p-q)(np-mq) = 4(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)(a^2c^2 - b^2d^2) =$$
$$= 4(a^4c^2 + a^2c^4 + b^4d^2 + b^2d^4 - a^2b^2c^2 - a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2 - b^2c^2d^2). \quad (10)$$

Шарт бўйича $m+n$ ва nq ларнинг қийматини ҳамда (9) ва (10) ифодаларни (8) ифодада ўрнига қўйиб, $4e^2$ га қисқартилса:

$$e^4f^2 + e^2f^4 - f^2e^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - e^2(a^2c^2 + b^2d^2 - a^2b^2 -$$
$$- c^2d^2) - f^2(a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2) + (a^4c^2 + a^2c^4 + b^4d^2 +$$
$$+ b^2d^4) - (a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2) = 0. \quad (11)$$

(11) тенгликни қисқа шаклда қуйидагича ёзамиз:

$$f^2e^4 + e^2f^4 - Me^2f^2 - Ne^2 - Pf^2 + Q - R = 0. \quad (12)$$

Бунда:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = M,$$
$$a^2c^2 + b^2d^2 - a^2b^2 - c^2d^2 = N,$$
$$a^2c^2 + b^2d^2 - a^2d^2 - b^2c^2 = P,$$
$$a^2c^4 + a^4c^2 + d^2b^4 + b^2d^4 = Q,$$

$a^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 = R$ деб олинди.

Тўртбурчакнинг томонлари билан диагоналлари орасидаги муносабат мана шундан иборат.

254. Ечиш. Агар тўртбурчак ички чизилган бўлса, унда Птоломей теоремасига асосан:

$$ef = ac + bd.$$

1) 253-масаланинг жавобидаги:

$$f^2e^4 - Ne^2 = e^2[(f^2e^2 - N) = e^2[(ac + bd)^2 - N] =$$
$$= e^2(a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 - N) = e^2[a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 -$$

$$-(a^2c^2+b^2d^2-a^2b^2-c^2d^2)]=e^2(a^2c^2+2abcd+b^2d^2-a^2c^2-$$
$$-b^2d^2+a^2b^2+c^2d^2)=e^2(a^2b^2+2abcd+c^2d^2)=e^2(ab+cd)^2,$$

яъни

$$f^2e^4-Ne^2=e^2(ab+cd)^2. \qquad (1)$$

$$2)\ e^2f^4-pf^2=f^2(ef^2-p)=f^2[(ac+bd)^2-p]=$$
$$=f^2(a^2c^2+2abcd+b^2d^2-p)=f^2[a^2c^2+$$
$$+2abcd+b^2d^2-(a^2c^2+b^2d^2-a^2d^2-b^2c^2)]=$$
$$=f^2(ad+bc)^2,$$

яъни $ef^4-pf^2=f^2(ad+bc)^2$ (253-масалада берилган изоҳдаги p нинг қийматига қаранг). (2)

3) Энди тенгликда қолган ҳадлар:

$$-Me^2f^2+Q-R=-(a^2b^2+c^2+d^2)(ac+bd)^2+$$
$$+Q-R=-(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+$$
$$+Q-R=-a^4c^2-a^2b^2c^2-a^2c^4-a^2c^2d^2-2a^3bcd-$$
$$-2ab^3cd-2abc^3d-2abcd^3-a^2b^2d^2-b^4d^2-$$
$$-b^2c^2d^2-b^2d^4+a^2c^4+a^4c^2+b^2d^4+b^4d^2-a^2c^2d^2-$$
$$-a^2b^2d^2-a^2b^2c^2-b^2c^2d^2=-2\{a^2bc(ad+bc)+$$
$$+ab^2d(ad+bc)+ac^2d(ad+bc)+bcd^2(ad+bc)\}=$$
$$=-2(ad+bc)(a^2bc+ab^2d+ac^2d+bca^2)=$$
$$=-2(ad+bc)\{ab(ac+bd)+cd(ac+bd)\}=$$
$$=-2(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)=-2(ab+cd)(ad+bc)\cdot ef,$$

яъни

$$-Me^2f^2+Q-R=-2(ab+cd)(ad+bc)ef. \qquad (3)$$

(1), (2) ва (3) ларда ҳосил қилинган натижаларни 253-масаладаги

$f^2e^4+e^2f^4-Me^2f^2-Ne^2-pf^2+Q-R=0$ ифодага қўйилса

$$e^2(ab+cd)^2-2(ab+cd)(ad+bc)ef+f^2(ad+bc)^2=0,$$

бундан:

$$[e(ab+cd)-f(ad+bc)]^2=0$$

ёки

$$e(ab+cd)=f(ad+bc).$$

Бу тенгликдан $\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$ экани келиб чиқади. Агар шу тенглик билан Птоломей теоремасидаги тенгламани биргаликда ечсак:

$$e^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

255. $S_{\text{тўртбурч}}=\frac{5}{16}S.$

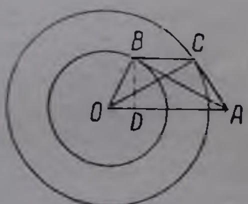
256. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+4ab+b^2)$. *Кўрсатма.* Бир томонга ёпишган бурчак учларидан томонларига параллел бўлган диагоналлар ўтказиб, шаклни учбурчак ва параллелограммларга ажратамиз.

Айлана

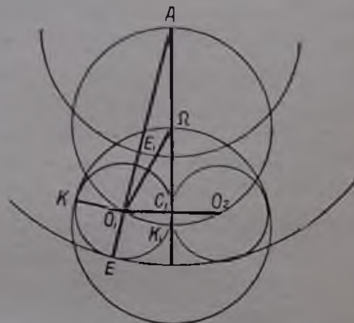
257 (160-шакл). $9\frac{8}{17}$.

258. $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. *Кўрсатма.* Энг сўнгги айланага кесувчи ва уринма ҳақидаги теоремани татбиқ этамиз.

259. 25; 13; 44; $4\sqrt{21}$.
260. 90°.
261. 1.
262. r.
263. 4.



160-шакл.



161-шакл.

264. $\frac{r(1+\sqrt{5})}{2}$. *Кўрсатма.* Энг олдин 108° ли бурчакка тегишли ватарни топамиз.

265. $2r(\sqrt{2}-1)$. *Кўрсатма.* Иккита кичик айлана ва катта айлана марказларини туташтириб, учбурчак ҳосил қиламиз.

266 (161-шакл). 1) $AE=\sqrt{6}+\sqrt{2}+1$,
2) $AE_1=\sqrt{6}+\sqrt{2}-1$.

267. Ечиш (162-шакл). Бу масалада икки ҳол бўлиши мумкин. O_1 марказли айланага ташқи уринувчи $OF=y$ ва x радиусли айлана.

I. $\triangle O_1O'E$ да $O_1E=10$; $O_1O'=x+1$; $O'E=x-3$ бўлиб, $O'O_1^2=O_1E^2+O'E^2$, яъни $(x+1)^2=(x-3)^2+10^2$ ва $x=\frac{27}{2}$.

O' марказли доиранинг юзи:

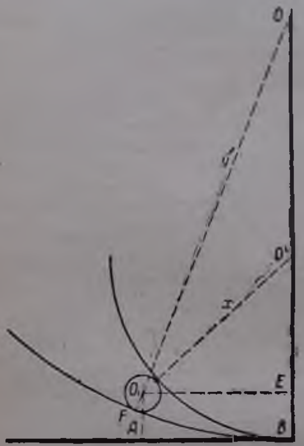
$$S_1=x^2\pi=\left(\frac{27}{3}\right)\frac{2}{\pi}=\frac{729}{4}\pi;\ S_1=\frac{729}{4}\pi.$$

II. $\triangle OO_1E$ да $OE=y-3$; $OO_1=y-1$; $O_1E=10$.

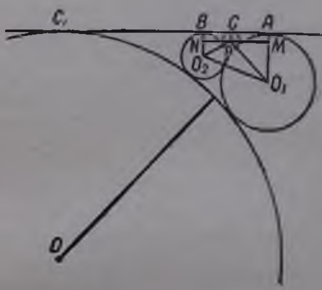
Бундан $O_1O^2=OE^2+O_1E^2$; $(y-1)^2=(y-3)^2+10^2$, яъни $y=27$.

O марказли доиранинг юзи $S_2 = 27^2 \cdot \pi = 729\pi$, демак, $S_2 = 729\pi$.

268. Ечиш (163-шакл). Уринма берилган айланаларга A ва B нуқталарда уринса, унинг узунлиги $AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Берилган айланага уринувчи айлана AB кесмага C нуқтада уринса, бунда ҳосил бўлган кесмаларни $AC = y$, $CB = 12 - y$; $C\Omega = x$ билан белгилаб, сўнгги Ω айлананинг марказидан $MN \parallel AB$ ўтказамиз ва ҳосил бўлган $O_1\Omega M$ учбурчакдан



162-шакл.



163-шакл.

$$O_1\Omega^2 = \Omega M^2 + MO_1^2 \text{ ёки } (9 + x)^2 = (9 - x)^2 + y^2 \qquad (1)$$

ва $O_2\Omega N$ учбурчакдан

$$O_2\Omega^2 = \Omega N^2 + NO_2^2$$

ёки

$$(4 + x)^2 = (12 - y)^2 + (4 - x)^2. \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалар биргаликда ечилса:

$$y_1 = \frac{36}{5};\ y_2 = 36;\ x_1 = 1{,}44;\ x_2 = 36.$$

Масалада x ва y учун иккита қиймат ҳосил бўлишига сабаб, изланувчи айлананинг AB тўғри чизиққа уриниш нуқтаси AB кесмадан ташқарида ёки AB кесмада бўлиши мумкинлигидадир.

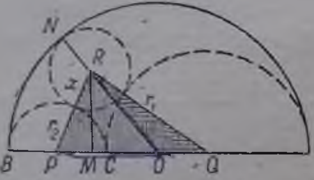
269. $\frac{ar}{a + 2r}$.

270. Ечиш (164-шакл). Катта айлананинг маркази O ва ясалган уринувчи айлана маркази R орқали ON радиус ўтказамиз ва $RM \perp AB$ ўтказиб, R нуқтани берилган иккала ярим айлана марказлари P ва Q билан туташтиришдан ҳосил бўлган POR учбурчакдан:

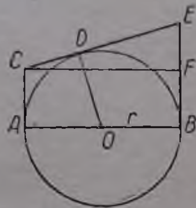
$$OM=\frac{OR^2+OP^2-RP^2}{2\cdot OP}=\frac{(r_1+r_2-x)^2+r_1^2-(r_2+x)^2}{2r_1} \qquad (1)$$

ва QOR учбурчакдан:

$$OM=\frac{RQ^2-OR^2-OQ^2}{2\cdot OQ}=\frac{(r_1+x)^2-(r_1+r_2-x)^2-r_2^2}{2r_2}. \qquad (2)$$



164-шакл.



165-шакл.

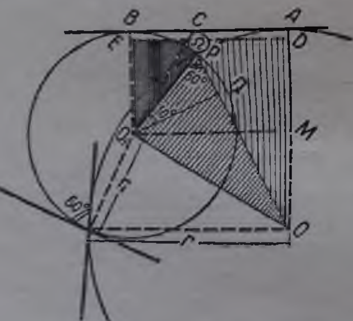
(1) ва (2) тенгликлардан:

$$\frac{(r_1+r_2-x)^2+r_1^2-(r_2+x)^2}{2r_1}=\frac{(r_1+x)^2-(r_1+r_2-x)^2-r_2^2}{2r_2}.$$

Бу тенглама ечилса:

$$x=\frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}.$$

Изоҳ. $CQ=r_1$, $PC=r_2$, $AO=OB=R=r_1+r_2$, бундан $OQ=r_2$, $OP=r_1$ ва $PR=x+r_2$; $RQ=x+r_1$; $OR=r_1+r_2-x$.



166-шакл.

271. $\frac{24\sqrt{3}-11\pi}{6}$.

272. $r=6$. 165-шаклга қаранг.

273. $\frac{\pi r^2}{6}$. *Кўрсатма.* Ярим айлананинг бўлиниш нуқталари билан диаметр учини ва айлана марказини туташтиришдан ҳосил бўлган учбурчаклар тенгдош бўлади.

274. Ечиш (166-шакл). 1) Изланган доиранинг маркази Ω ва радиуси ρ бўлсин. P нуқта O_1 ва O марказли айланаларнинг кесишган нуқтаси. $\angle OPO_1=60°$, $OP=r$; $O_1P=r_1$;

$$PQ = \frac{1}{2} r_1 \, (O_1Q \perp OP; \ \angle \, QO_1P = 30^\circ);$$
$$O\Omega = r + \rho; \ OD = r - \rho; \ O_1\Omega = r_1 + \rho;$$
$$O_1E = r_1 - \rho; \ OM = r - r_1.$$
$O_1M \perp OA$; $\triangle \, OO_1P$ ни ясаймиз.
$$OO_1^2 = OP^2 + O_1P^2 - 2 \cdot OP \cdot PQ$$
ёки
$$OO_1^2 = r^2 + r_1^2 - 2r \cdot \frac{1}{2} r_1 = r^2 + r_1^2 - rr_1,$$
яъни
$$OO_1^2 = r^2 + r_1^2 - rr_1.$$
2) $\triangle \, OO_1M$ дан:
$$O_1M = \sqrt{OO_1^2 - OM^2} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - rr_1 - (r - r_1)^2} = \sqrt{rr_1},$$
яъни
$$O_1M = AB = \sqrt{rr_1}.$$
Агар $AC = x$ десак, $CB = \sqrt{rr_1} - x$ булиб, $OD\Omega$ ва $O_1E\Omega$ учбурчаклардан қуйидагиларни ёзиш мумкин.

3) $OD\Omega$ учбурчакдан:
$$D\Omega^2 = O\Omega^2 - OD^2 \text{ ёки}$$
$$x^2 = (r + \rho)^2 - (r - \rho)^2 \text{ ёки } x^2 = 4r\rho. \qquad (1)$$
$O_1E\Omega$ учбурчакдан $E\Omega^2 = O_1\Omega^2 - O_1E^2$ ёки
$$(\sqrt{rr_1} - x)^2 = (r_1 + \rho^2) - (r_1 - \rho)^2 \text{ ёки } (\sqrt{rr_1} - x)^2 = 4r_1\rho. \qquad (2)$$
Буларда $D\Omega = AC$ ва $E\Omega = BC$. (1) ва (2) дан:
$$r\,(\sqrt{rr_1} - x)^2 = r_1x^2,$$
бундан:
$$(r - r_1)\,x^2 - 2rx\sqrt{rr_1} + r^2r_1 = 0.$$
$$x = \frac{r\sqrt{rr_1} - \sqrt{r^3r_1 - r^2r_1(r - r_1)}}{r - r_1} = \frac{r\sqrt{r_1}\,(\sqrt{r} - \sqrt{r_1})}{r - r_1} =$$
$$= \frac{r\sqrt{r_1}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_1}}.$$

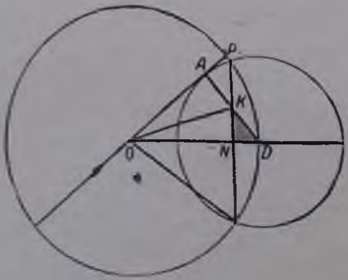
Радикални минус ишора билан олиш керак. Бунда изланган доира шарт буйича берилган айлана ва умумий уринма орасидаги шакл билан чегараланади (268-масалага қаранг).
$$x = AC = \frac{r\sqrt{r_1}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_1}} \text{ ни (1) га қўйсак:}$$
$$\left(\frac{r\sqrt{r_1}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_1}}\right)^2 = 4r\rho \text{ ҳосил бўлади.}$$

Бундан:

$$\rho = \frac{rr_1}{4(\sqrt{r} + \sqrt{r_1})^2}.$$

Агар $\angle OPO_1 = 120^\circ$ бўлса, унда:

$$\rho = \frac{3rr_1}{4(\sqrt{r} + \sqrt{r_1})^2}.$$



167-шакл.

275. $\pi(3 + 2\sqrt{2})r^2$.
276. $(2\sqrt{3} + 3)r$.
277. $6{,}5625\pi$.
278. $\sqrt{Rr}$.
279. 2.
280. 1.
281. Ечиш (167-шакл).
1) $OD = 5$; $AD = 3$ бўлса, $AO = 4$.
2) $\triangle ODP$ дан:

$$DN = \frac{OD^2 + DP^2 - OP^2}{2 \cdot OD} = \frac{DP^2}{2 \cdot OD}; \ (OD = OP)$$

ёки

$$DN = \frac{9}{10} \text{ ва } ON = OD - DN = 5 - \frac{9}{10} = \frac{41}{10};$$

$$ON = \frac{41}{10} = 4{,}1.$$

3) $\triangle DNK \backsim \triangle DAO$. Бундан: $\frac{NK}{DN} = \frac{AO}{AD}$ ёки $\frac{NK}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{3}$;

$$NK = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} = 1{,}2.$$

4) OKN учбурчакдан: $OK = \sqrt{ON^2 + NK^2} = \sqrt{4{,}1^2 + 1{,}2^2} =$ $= \sqrt{18{,}25} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{73}$. $OK = \frac{1}{2}\sqrt{73}$.

282. 1,4.

283. $r \cdot \frac{\sqrt{12 - \sqrt{7}}}{4}$.

284. Учинчи айлананинг радиуси $\sqrt{5}$; маркази аввалги айлаларнинг марказлар чизиғини $3:2$ нисбатда бўлади.

285. 2,2; $8{,}84\pi$.

286. $\frac{20\sqrt{57}}{97}$.

287. $5\sqrt{14}$.

288. 0,21875.

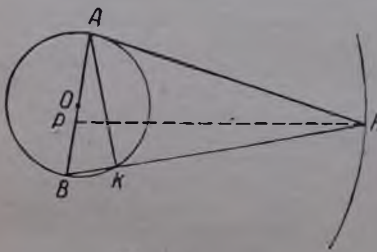
289. Ечиш (168-шакл).

1) $\triangle APH$ дан:

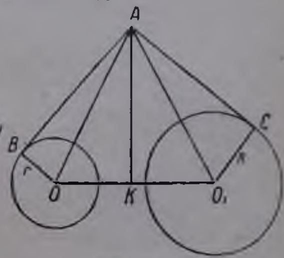
$$AH^2 = PH^2 - AP^2 \text{ ёки } AH^2 = 16 - \frac{49}{36} = \frac{527}{36}.$$

2) ABH учбурчакдан:

$$BH^2 = AB^2 + AH^2 = \frac{527}{36} + 4 = \frac{671}{36}.$$



168-шакл.



169-шакл.

3) $\triangle ABK \backsim \triangle ABH$; $\frac{AK}{AH} = \frac{AB}{BH}$ ёки $AK^2 = \frac{AH^2 \cdot AB^2}{BH^2} = \frac{527 \cdot 4 \cdot 36}{36 \cdot 671} = \frac{2108}{671}$.

4) Бунда радиуси 1 бирлик бўлган айлананинг юзи π.

5) Томони AK бўлган квадратнинг юзи $\frac{2\,108}{671}$.

6) Булар орасидаги айирма $\pi - \frac{2\,108}{671} < 0{,}0001$ келиб чиқади.

290. $\frac{23}{21}\sqrt{14}$; $\frac{5}{21}\sqrt{14}$.

291. $\frac{6\sqrt{3} - 2\pi(5 - 2\sqrt{3})}{3}$. *Курсатма.* Айланалар марказларини туташтиришдан ҳосил бўлган учбурчак томонларини аниқлаб, сектор бурчакларини топамиз.

292. 15 ва 12.

293. Ечиш (169-шакл). Шартга кура A нуқтадан O ва O_1 айланаларга ўтказилган $AB = AC$ уринмалар тенг бўлганидан A дан марказлар чизиғига туширилган AK перпендикуляр радикал ўқ бўлади, яъни:

$$g_o A = g_{o_1} A \text{ ёки } AO^2 - r^2 = AO_1^2 - R^2,$$

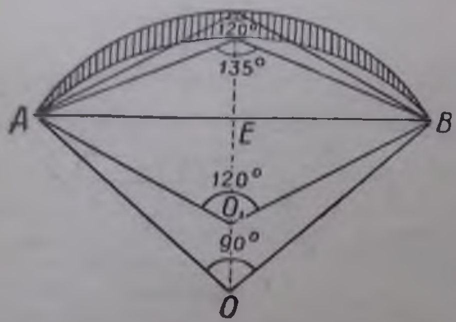
бундан:

$$AO_1^2 - AO^2 = R^2 - r^2 = \text{const}.$$

Сўнгра AOK ва AO_1K учбурчаклардан:

$AO^2 = OK^2 + AK^2$ ва $AO_1^2 = O_1K^2 + AK^2$. Биринчи тенгликдан иккинчини ҳадлаб айирсак, $AO_1^2 - AO^2 = O_1K^2 - OK^2$ бўлганидан,

OK ни $OO_1 - O_1K = d - O_1K$ орқали ифода қилсак, $AO_1^2 - AO^2 = O_1K^2 - (d - O_1K)^2$; бу алгебраик алмаштириш сўнгида $AO_1^2 - AO^2 = d^2 - 2d \cdot O_1K$ бўлиб, бундан: $O_1K = \frac{d^2 - (AO_1^2 - AO^2)}{2d}$ келиб чиқади. Бу ерда тенглама ўнг томонидаги сон ўзгармас, чунки d миқдори берилган икки айлана марказлар чизиғи бўлганидан ўзгармас миқдор, юқорида кўрсатилганидек $AO_1^2 - AO^2$ миқдор ҳам ўзгармас эди.



170-шакл.

Шундай қилиб, A нуқтанинг марказлар чизиғидаги проекцияси бўлган K нуқтадан ҳар бир айлана марказигача бўлган масофа ўзгармас миқдор бўлади.

294. Ечиш (170-шакл). Олинган ватар икки айланага тегишли бўлиб, O марказли айланадан 90° ли ёйни, O_1 марказли айланадан 120° ли ёйни тортиб туради. Айланалар марказидан AB ватарга туширилган перпендикуляр AB ни E нуқтада кесади, шунинг учун

$$\triangle OBE \text{ да } \angle EOB = \angle OBE = 45°.$$

Бундан:

$$OE = BE = \frac{1}{2} \text{ ва } OB = R = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Демак,

$$S_{AOB \text{ сект.}} = \frac{1}{4} R^2\pi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{8} \pi. \quad (1)$$

$$S = S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгликлардан сегмент юзини топамиз:

$$S_{\text{сегм.}} = S_{\text{сект.}} - S = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}. \quad (3)$$

Шундай мулоҳаза юритсак,

$$\triangle O_1BE \text{ да } \angle EO_1B = 60°; \ \angle O_1BE = 30°.$$

Шунга кўра:

$$O_1E = \frac{1}{2} O_1B = \frac{1}{2} r, \text{ бу ерда } r = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ва } O_1E = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$S_{AO_1B \text{ сект.}} = \frac{1}{3} r^2\pi = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{9} \pi. \quad (4)$$

$$S_{AO_1B} = \frac{1}{2} O_1E \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}. \quad (5)$$

(4) ва (5) тенгликлардан бу айланага тегишли сегмент юзи топилади, яъни

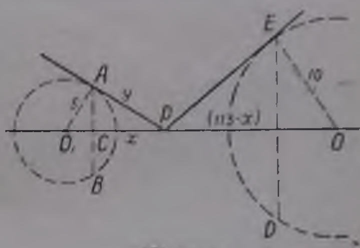
$$S_{\text{сегм.}} = \frac{1}{9}\pi - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36}. \qquad (6)$$

Энди ойчанинг юзини (3) ва (6) тенгликлардан топиш мумкин:

$$S_{\text{ойча}} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36} - \frac{\pi - 2}{8} = \frac{18 - 6\sqrt{3} - \pi}{72}.$$

295. 4.

296. Е ч и ш (171-шакл). Марказлар чизигидаги нуқта P, катта айлана маркази O, кичик айлана маркази O_1 ва кичик айлананинг ватари AB, катта айлананинг ватари ED бўлиб, кичик айлана ватари марказлар чизигини C нуқтада кессин. Бунда $O_1P = x$; $PO = 113 - x$, $PC = l$, $PA = y$, $AB = 2p$, $AC = p$ десак, $\triangle O_1AP \backsim \triangle PEO$ бўлганидан:



171-шакл.

$$\frac{x}{113 - x} = \frac{5}{10}; \quad x = \frac{113}{3}; \quad AO_1P$$

учбурчакдан:

$$y = \sqrt{PO_1^2 - AO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{113}{3}\right)^2 - 5^2} = \frac{112}{3};$$

$\triangle APO_1 \backsim \triangle APC$, бундан $\frac{y}{x} = \frac{l}{y}$ ёки $l = \frac{y^2}{x}$.

ACP учбурчакдан:

$$p = \sqrt{y^2 - l^2} = \sqrt{y^2 - \left(\frac{y^2}{x}\right)^2} = \frac{y}{x}\sqrt{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{112}{3} \cdot \frac{3}{113}\sqrt{\left(\frac{113}{3}\right)^2 - \left(\frac{112}{3}\right)^2} = \frac{112 \cdot 5}{113}.$$

Демак;

$$2p = AB = 2 \cdot \frac{112 \cdot 5}{113} = \frac{1120}{113} = 9\frac{103}{113}.$$

297. $\frac{\pi - 2}{8} \cdot r^2$. *Кўрсатма.* Изланган юз квадрант ватари билан ҳосил бўлган катта айлана сегменти ва иккита кичик айлана сегменти орасидаги айирмадан иборатдир.

298. $r\sqrt{3}$. *Кўрсатма.* AN ватар диаметр билан ўзининг диаметрдаги проекцияси орасида ўрта пропорционалдир.

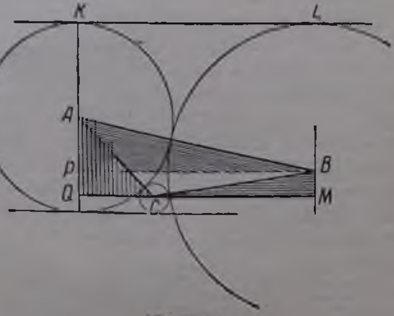
299. $\pi \cdot ab$. *Кўрсатма.* Айлана марказидан ватарга перпендикуляр (OB) тушириб, B ва C нуқталарни марказ билан туташтириб, OC кесма узунлигини излаймиз.

300. $\frac{\pi r^3}{12}$.

301. Ечиш (172-шакл). 1) $MO = ON = \frac{R}{2}$; $OQ = \frac{R}{4}$ қилиб оламиз. Шарт бўйича $\angle CMD = 90°$; $OP \perp CD$ ўтказиб, $OP = x$ десак.

2) Тўғри бурчакли MCD учбурчакда P нуқта гипотенузанинг ўртаси, яъни у учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази бўлганидан: $MP = CP = PD$.

172-шакл.



173-шакл.

3) OPD учбурчакдан: $PD = \sqrt{OD^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$.

4) OPN учбурчак тўғри бурчакли бўлиб, Q нуқта гипотенузанинг ўртаси, яъни ташқи айлана маркази бўлганидан:

$$QP = OQ = QN = \frac{R}{4}.$$

5) Стюарт теоремаси бўйича MPQ учбурчакдан:

$$MP^2 \cdot OQ + PQ^2 \cdot MO - OP^2 \cdot QM = MO \cdot OQ \cdot MQ$$

ёки

$$(R^2 - x^2) \cdot \frac{R}{4} + \frac{R^2}{16} \cdot \frac{R}{2} - x^2 \cdot \frac{3}{4} R = \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{4} \cdot \frac{3R}{4}.$$

Буни $\frac{R}{4}$ га қисқартсак:

$$R^2 - x^2 + \frac{R^2}{8} - 3x^2 = \frac{3R^2}{8}.$$

Бундан:

$$\frac{3R^2}{4} = 4x^2 \text{ ёки } x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

302. $\frac{R^2}{3}$.

303. 173-шаклдан фойдаланинг.

304. Ечиш (174-шакл).

1) $\angle AMO = 90^\circ$ булганидан, AO кесма O_1 марказли айлананинг диаметри бўлади. $AN \perp BC$ туширилса, ABC бурчак 90° ли ёйга тиралганлигидан у 45° ли бўлади. ANB тўғри бурчакли учбурчакнинг иккинчи бурчаги ($\angle A$) ҳам 45° ли бўлиб, $AN = BN$. ACB бурчак 60° ли ёйга тиралганлиги учун 30° га тенг. $AB = a_6 = r$; $AC = a_4 = r\sqrt{2}$. ABN учбурчакдан;

$$AN = BN = \frac{\sqrt{2}}{2} r; \; BC = a_3 = r\sqrt{3};$$

$$CN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{6}.$$

Шу ҳолда

$$BC = BN + NC = \frac{\sqrt{2}}{2} r + \frac{r}{2}\sqrt{6} = \frac{r}{2}\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3}),$$

яъни

$$CN = \frac{r}{2}\sqrt{6}; \; BC = \frac{\sqrt{2}}{2} r\,(1 + \sqrt{3}). \qquad (A)$$

2) Агар $BK = x$; $KP = y$ ва $PC = z$ десак:

$$BC = x + y + z. \qquad (1)$$

3) O_1 марказли айланада BA ва BP кесувчилар ўтказсак, унда

$$BK \cdot BP = AB \cdot MB$$

ёки

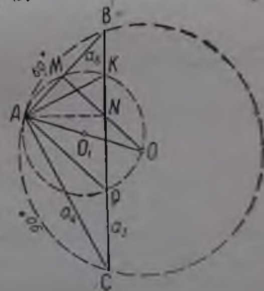
$$x(x + y) = r \cdot \frac{1}{2} \cdot r. \qquad (2)$$

4) Бунда CO ва CK кесмалар O_1 марказли айланада уринма ва кесувчи чизиқ бўлганидан:

$$CK \cdot CP = CO^2,$$

яъни

$$z(z + y) = r^2. \qquad (3)$$



174-шакл.

(2) ва (3) тенгламаларни биргаликда ечиб ва

$x + y + z = a$; $x + y = a - z$; $z + y = a - x$ эканини эътиборга олсак.

$$x(a - z) = \frac{1}{2} r^2; \; z(a - x) = r^2 \text{ ва } z = \frac{r^2}{a - x};$$

$$x\left(a - \frac{r^2}{a - x}\right) = \frac{r^2}{2}$$

ёки

$$2ax^2 - (2a^2 - r^2)x + ar^2 = 0.$$

Бундан:

$$x = \frac{2a^2 - r^2 - \sqrt{(2a^2 - r^2)^2 - 8a^2r^2}}{4a} \qquad (B)$$

(радикални минус ишора билан олиш керак). (A) ифодада $a = \frac{\sqrt{2}}{2} r(1 + \sqrt{3})$ эди. Бундан $a^2 = r^2(2 + \sqrt{3})$ бўлиб, уни (B) даги $(2a^2 - r^2)$ га қўйсак:

$$2a^2 - r^2 = r^2(3 + 2\sqrt{3}).$$

Бундан:

$$(2a^2 - r^2)^2 = r^4(3 + 2\sqrt{3})^2,$$

шу усулда

$$x = r \cdot \frac{r + 2\sqrt{3} - \sqrt{5 + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}$$

эканини топамиз.

5) Энди ABK учбурчакдан:

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2BK \cdot BN$$

ёки

$$AK^2 = r^2 + x^2 - 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} r \quad \text{ёки} \quad \frac{AK^2}{r^2} = \frac{x^2 - rx\sqrt{2} + r^2}{r^2} =$$

$$= \frac{8(1+\sqrt{3})^2 + (3+2\sqrt{3} - \sqrt{5+4\sqrt{3}})^2 - 2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})(3+2\sqrt{3} - \sqrt{5+\sqrt{3}})\sqrt{2}}{8(1+\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{11 + 6\sqrt{3} - \sqrt{5 + 4\sqrt{3}}}{8(2 + \sqrt{3})} = \frac{(11 + 6\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{(5 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^2}}{8} =$$

$$= \frac{4 + \sqrt{2} - \sqrt{(5 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})}}{8} = \frac{8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{8\sqrt{3} - 13}}{16}.$$

Демак:

$$AK = \frac{r}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{8\sqrt{3} - 13}}.$$

Агар (B) тенгликда радикал (+) ишора билан олинса, унда $x > r$ бўлади, бунинг эса бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли Попруженкода радикал остида олинган иккинчи ишора нотўғри.

305. $PB = R\sqrt{2}.$

306. Ечиш (175-шакл).

1) Янги чизилган айлана маркази Ω нуқта бўлсин. Бу нуқтадан CE ватарга $\Omega F \perp CE$ ўтказамиз.

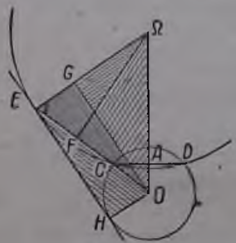
2) $\triangle \Omega FO \backsim \triangle CAO$ (бир ўткир бурчаги умумий бўлган тўғри бурчакли учбурчаклар), бундан:

$$\frac{\Omega F}{FO} = \frac{CA}{OA} \quad \text{ёки} \quad \frac{\Omega F}{2R} = \frac{R\frac{\sqrt{6}}{3}}{R\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}, \text{ яъни } \Omega F = 2R\sqrt{2}.$$

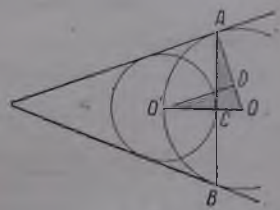
3) $\triangle \Omega EF$ дан янги айлананинг радиуси $\Omega E = \sqrt{\Omega F^2 + EF^2} = \sqrt{8R^2 + R^2} = 3R$, яъни $\Omega E = 3R$.

4) $OG \perp E\Omega$ ўтказилса, $\triangle \Omega EF = \triangle OEG$ бўлади (чунки уларда E — умумий бурчак, $\Omega E = OE = 3R$ ва улар тўғри бурчакли). У ҳолда $EG = EF = R$ бўлади.

5) $OH \parallel EG$ ва E дан Ω айланаға EH уринма ўтказилса, $OGEH$ тўғри туртбурчак бўлади. $OH = GE = R$ ва $OH \perp EH$ бўлгани учун EH биринчи айланага ҳам уринма бўлади.



175-шакл.



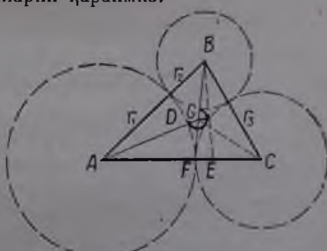
176-шакл.

307. $\frac{2Rr}{R + r}$. *Кўрсатма.* Айланаларнинг уриниш нуқтасидан умумий ташқи уринмага параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, ҳосил бўлган ўхшаш учбурчакларни қараймиз.

308. $\frac{1}{2x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$.

309. 176-шаклга қаранг.

310. $\sqrt{\frac{11}{3}}$ ёки $\sqrt{\frac{35}{27}}$.



177-шакл.

311. Ечиш (177-шакл). Берилган айланаларнинг марказлари A, B, C бўлиб, изланган айлананинг маркази D бўлсин. A, B, C нуқталарни туташтирсак ABC учбурчак ҳосил бўлади. Сўнгра B ва D нуқталардан AC томонга BE ва DF перпендикулярларни, D нуқтадан BE га DG перпендикулярни ўтказсак, ABC ва ADC учбурчаклардан қуйидагилар ҳосил бўлади; ABC учбурчакдан:

$$AE = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC} = \frac{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 + r_3)^2 - (r_2 + r_3)^2}{2(r_1 + r_3)} =$$

$$= r_1 + \frac{r_2(r_1 - r_3)}{r_1 + r_3}. \qquad (1)$$

ADC учбурчакдан:

$$AF = \frac{AD^2 + AC^2 - DC^2}{2AC} = \frac{(r_1 + x)^2 + (r_1 + r)^2 - (r_3 + x)^2}{2(r_1 + r_3)} =$$
$$= r_1 + \frac{x(r_1 - r_3)}{r_1 + r_3}.$$

BDG учбурчакдан:

$$BD^2 = BG^2 + DG^2 = (BE - DF)^2 + (AE - AF)^2 =$$
$$= BE^2 - 2BE \cdot DF + DF^2 + AE^2 - 2AE \cdot AF + AF^2 =$$
$$= (BE^2 + AE^2) + (DF^2 + AF^2) - 2AE \cdot AF - 2BE \cdot DF =$$
$$= AB^2 + AD^2 - 2AE \cdot AF - 2BE \cdot DF.$$

Бу тенгликдан $BE \cdot DF$ ни аниқлаймиз:

$$BE \cdot DF = \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2 - 2AE \cdot AF) = \frac{1}{2}\Big\{(r_1 + r_2)^2 +$$
$$+ (r_1 + x)^2 - (r_2 + x)^2 - 2\left[r_1 + \frac{r_2(r_1 - r_3)}{r_1 + r_3}\right] \cdot \left[r_1 + \frac{x(r_1 - r_3)}{r_1 + r_3}\right]\Big\} =$$
$$= 2 \cdot \frac{\left[r_1 r_3 (r_1 + r_3) - r_2 (r_1^2 + r_3^2)\right] x + r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_3)}{(r_1 + r_3)^2}. \qquad (3)$$

Сўнгра ABE ва DAF тўғри бурчакли учбурчаклардан BE^2, DF^2 ларни топамиз. ABE учбурчакдан:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = (r_1 + r_2)^2 - \left[r_1 + \frac{r_2(r_1 - r_3)}{r_1 + r_3}\right]^2 =$$
$$= \frac{4r_1 r_3\left[r_2^2 + r_2(r_1 + r_3)\right]}{(r_1 + r_3)^2}. \qquad (4)$$

(4) дан: $BE = \frac{2}{(r_1 + r_3)}\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}$ ни топа оламиз.

ADF учбурчакдан:

$$DF^2 = AD^2 - AF^2 = (r_1 + x)^2 - \left[r_1 + \frac{x(r_1 - r_3)}{r_1 + r_3}\right]^2 =$$
$$= \frac{4r_1 r_3\left[x^2 + x(r_1 + r_3)\right]}{(r_1 + r_3)^2}. \qquad (5)$$

(4) ва (5) тенгликларни ҳадлаб кўпайтирамиз:

$$BE^2 \cdot DF^2 = \frac{4r_1 r_3\left[r_2^2 + r_2(r_1 + r_3)\right]}{(r_1 + r_3)^2} \cdot \frac{4r_1 r_3\left[x^2 + x(r_1 + r_3)\right]}{(r_1 + r_3)^2}. \qquad (6)$$

Агар (3) ва (6) тенгламаларни биргаликда ечсак ва $\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)} = S$ деб олсак, x нинг қийматлари:

$$x_1 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 + 2S}; \quad x_2 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 - 2S}.$$

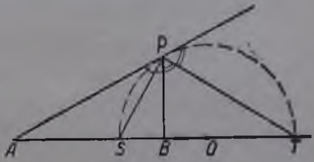
ABC учбурчакнинг юзини (4) да ҳосил қилинган тенгликни эътиборга олиб топамиз:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2}(r_1 + r_3) \cdot \frac{2}{(r_1 + r_3)}\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)} =$$
$$= \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}.$$

312. $x_1 = r + \frac{r^2}{R}$; $x_2 = R + r$. *Кўрсатма.* Учала айлана марказларини туташтиришдан ҳосил бўлган учбурчакда, уринувчи айлана марказидан баландлик тушириб, Пифагор теоремасидан фойдаланамиз.

313. Ечиш (178-шакл). Берилган нуқталар A, B ва улар орасидаги масофа a бўлсин. Агар айланада бирор P нуқта олсак, унда

$$AP : PB = m : n.$$



178-шакл.

APB бурчакнинг ички ва ташқи биссектрисалари (PS ва PT) ни чизамиз. P нуқта айланада, ST диаметр бўлиб, $SB=x$, $BT = y$ десак:

$$\frac{AS}{BS} = \frac{a-x}{x} = \frac{m}{n}.$$

Бундан:

$$x = \frac{an}{m+n}; \quad \frac{AT}{BT} = \frac{a+y}{y} = \frac{m}{n} \text{ дан эса}$$

$$y = \frac{an}{m-n}.$$

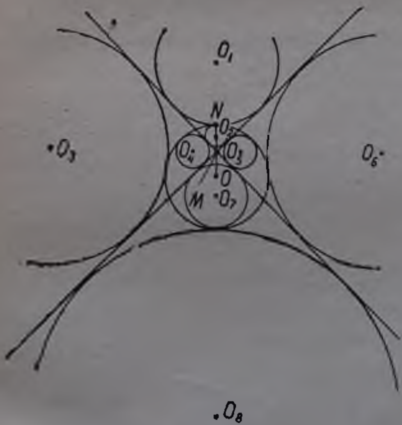
Маълумки, $ST = 2r$ ёки $r = \frac{ST}{2}$, бунга асосан:

$$r = \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{an}{m+n} + \frac{an}{m-n}\right) = \frac{amn}{m^2-n^2}.$$

314. $\frac{4R}{r+r_1} \cdot \sqrt{rr_1}$.

Кўрсатма. Учинчи айлана марказидан ватарга ҳамда бошқа икки айлананинг марказлар чизиғига перпендикулярлар туширамиз.

315. Ечиш (179-шакл). Берилган айлана радиусининг ўртаси M, бу нуқтадан ўтувчи икки чизиққа ва берилган айланага уринувчи айланалар марказлари $O_1, O_2 \ldots, O_8$ бўлса, бунда O_4, O_5 ва O_3, O_6 айланалар ўзаро тенг бўлганидан, бизга олтита айлананинг радиусларини топиш керак бўлади.



179-шакл.

1) O_2 айлана радиусини x десак, $O_2M = x\sqrt{2}$, бунда берилган айлана радиусининг ярми $MN = \frac{R}{2} = x + x\sqrt{2}$, бундан:

$$x = \frac{R}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

2) O_1 айлана радиуси x_1 бўлса, $O_1M = x_1 + \frac{R}{2}$; шаклдан $O_1M = x_1\sqrt{2}$. Демак, $x_1 + \frac{R}{2} = x_1\sqrt{2}$ ёки $x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{2}+1)$; x ва x_1 ни биргаликда ифода этсак:

$$(x,\ x_1) = \frac{R}{2}(\sqrt{2} \mp 1).$$

3) O_7 айлананинг радиусини y десак, $O_7M = \frac{3}{2}R - y$, шаклдан:

$$O_7M = y\sqrt{2}, \text{ булардан } y\sqrt{2} = \frac{3}{2}R - y$$

ёки

$$y = \frac{3R}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{3R(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

4) O_8 марказли айлана радиуси y_1 бўлса, $O_8M = \frac{3}{2}R + y_1$, шаклдан $O_8M = y_1\sqrt{2}$ бўлиб, $y_1\sqrt{2} = \frac{3}{2}R + y_1$ ёки

$$y_1 = \frac{3R}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{3R(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

O_7 ва O_8 марказли айланаларнинг радиусларини биргаликда ифода этсак:

$$(y,\ y_1) = \frac{3}{2}R(\sqrt{2} \mp 1).$$

5) O_6 марказли айлана радиуси r ни топиш учун MOO_6 учбурчакни қараймиз. Бунда $OO_6^2 = OM^2 + MO_6^2$
ёки

$$(R+r)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (r\sqrt{2})^2,$$

яъни

$$r = \frac{R}{2}(2+\sqrt{7}).$$

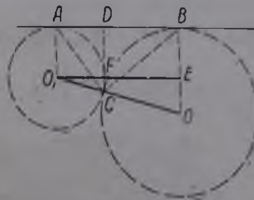
6) O_5 марказли айлана радиуси r_1 ни MOO_5 учбурчакдан топамиз. Бунда $OO_5^2 = OM^2 + MO_5^2$ ёки $(R-r_1)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (r_1\sqrt{2})^2$ ёки $r_1^2 + 2r_1R - \frac{3}{4}R^2 = 0$, бундан

$$r_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{7}-2).$$

Ҳосил этилган муносабатлардан O_5 ва O_6 марказли айланалар радиусларини биргаликда ифода қилинса:

$$(r,\ r_1) = \frac{R}{2}(\sqrt{7} \mp 2).$$

316. Ечиш (180-шакл). Кичик айлананинг маркази O_1 дан катта айлана радиуси OB га $O_1E \perp OB$ ўтказамиз. Ҳосил булган O_1OE учбурчакда:



180-шакл.

1) $O_1O = R + r_1$, $OE = R - r$ ва

$$O_1E = \sqrt{OO_1^2 - OE^2} =$$
$$= \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr},$$

яъни $AB = O_1E$ бўлганидан:

$$AB = 2\sqrt{Rr}.$$

2) $O_1C = r$, $OE = R - r$ бўлиб, $CF = t$ дейилса, $\triangle O_1CF \backsim \triangle O_1OE$, бундан:

$$\frac{O_1C}{O_1O} = \frac{CF}{OE} \text{ ёки } \frac{r}{R+r} = \frac{t}{R-r};\ t = \frac{r(R-r)}{R+r}.$$

Шаклдан $CD = r + t$ ёки $CD = \frac{2Rr}{R+r}$; $\triangle O_1CF$ дан:

$$O_1F = \sqrt{r^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2(R-r)^2}{(R+r)^2}} = \frac{2r}{R+r}\sqrt{Rr};$$

$AD = O_1F$ бўлганидан

$$AD = \frac{2r}{R+r}\sqrt{Rr}.$$

3) ADC учбурчакдан:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{4r^3R}{(R+r)^2} + \frac{4R^2r^2}{(R+r)^2}} = 2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}.$$

Юқоридаги муносабатлардан:

$$BD = AB - AD = 2\sqrt{Rr} - \frac{2r}{R+r}\sqrt{Rr} = \frac{2R}{R+r}\sqrt{Rr}.$$

4) DBC учбурчакдан:

$$BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{4R^2r^2}{(R+r)^2} + \frac{4R^3r}{(R+r)^2}} = 2R\sqrt{\frac{r(R+r)}{(R+r)^2}} =$$
$$= 2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}.$$

317. $R\sqrt{3}$; $2R\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$.

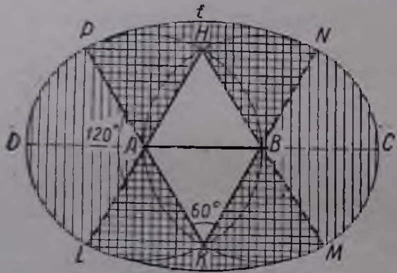
318. $\frac{R^2(4\pi - \sqrt{3})}{2}$. 181-шаклдан фойдаланинг.

319. Ечиш (182-шакл). Агар $AD = d$; $AP = \frac{a}{2}$; $BP = \frac{b}{2}$ бўлса,

$$PD = \sqrt{AP^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4d^2}.$$

Шунингдек, ватарларнинг ўрталарини туташтирувчи кесма $AB = c$ бўлса,

$$c^2 = a^2 + BD^2 = d^2 + (PB - PD)^2 = d^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4d^2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 - 4d^2}\right).$$



181-шакл.

182-шакл.

$AOBP$ тўртбурчакда $\angle OAP = \angle OBP = 90°$ ва $\angle AOB + \angle BPA = 180°$. Демак, унга ташқи айлана чизиш мумкин. Бу ерда Птоломей теоремасини татбиқ этсак:

$$AB \cdot OP = OB \cdot AP + AO \cdot PB \text{ ёки } OP = \frac{OB \cdot AP + AO \cdot PB}{AB}$$

ёки

$$R = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}}{c} = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}}{4c}.$$

Буни квадратга кўтарсак:

$$R^2 = \frac{a^2(4R^2 - b^2) + b^2(4R^2 - a^2) + 2ab\sqrt{(4R^2 - a^2)(4R^2 - b^2)}}{16c^2}.$$

Бунга (1) дан c^2 нинг қийматини қўйиб, касрдан қутқарсак:

$$64d^2R^4 + 8a^2b\sqrt{a^2 - 4d^2} \cdot R^2 - 4a^2(a^2 + b^2)R^2 = 0,$$

буни $4R^2$ га қисқартиб, R^2 ни топсак:

$$R^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2 - 2b\sqrt{a^2 - 4d^2})}{16d^2}$$

ёки бундан:

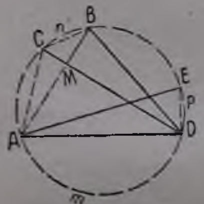
$$R=\frac{a}{4d}\sqrt{a^2+b^2-2b\sqrt{a^2-4d^2}}.$$

320. *Кўрсатма.* P нуқтадан берилган диаметргача бўлган масофа айлана радиусига тенг.

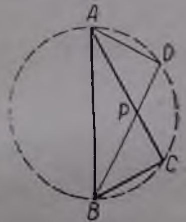
321. Ечиш (183-шакл). Берилган M нуқтада кесишувчи ватарлар AB ва CD бўлсин. Бунда $\angle AMD=90°$ бўлганидан:

$$\frac{\smile AmD+\smile CnB}{2}=90° \text{ ва } \smile AmD+\smile CnD=180°.$$

Агар AmD ёй билан умумий нуқтага эга бўлмаган DpE ёйга тенг бўлган CnB ёйни чизсак, у ҳолда DE ватар BC ватарга тенг. ADE ёй 180° ва AE ватар берилган айлана диаметри



183-шакл.



184-шакл.

бўлади. Тўғри бурчакли ADE учбурчакдан $DE=CB$ тенгликни назарда тутиб, $AD^2+CB^2=AE^2$ тенгликни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш $AC^2+BD^2=AE^2$ келиб чиқади.

323. Ечиш (184-шакл). APB ўтмас бурчак бўлса, унда учбурчак томонларининг квадратлари ҳақидаги теоремани ABP учбурчакда ўтмас бурчак қаршисидаги томонга 2 марта татбиқ этсак:

$$AB^2=AP^2+BP^2+2AP\cdot PC;$$
$$AB^2=AP^2+BP^2+2BP\cdot PD.$$

Бундан:

$$AB^2=AP^2+BP^2+AP\cdot PC+BP\cdot PD=AP(AP+PC)+$$
$$+BP(BP+PD)=AP\cdot AC+BP\cdot BD.$$

Биз шуни исбот қилмоқчи эдик.

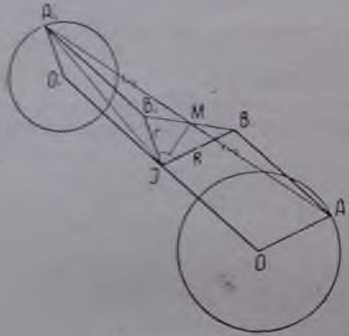
324. $\frac{2Rr}{R+r}$.

325. 1) $AP\cdot BN=R^2$.
2) $\min PN^2=4R^2$.

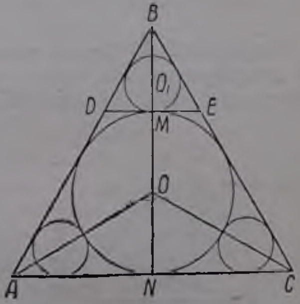
326. $\frac{R}{2R-a}\sqrt{a(2R-a)}$; $\sqrt{2aR}$.

Курсатма. Айлананинг O марказидан BD га перпендикуляр ўтказиб, тўғри бурчакли ўхшаш учбурчаклар ҳосил қиламиз.

327. Е ч и ш (185-шакл). $AO \parallel IB$ ва $A_1O_1 \parallel IB_1$ чизсак, унда $AB = OI = O_1I = A_1B_1$. Шулардан $AB \parallel A_1B_1$ ва $\angle MAB = \angle MA_1B_1$. Бинобарин, $\triangle ABM$ ва $\triangle A_1B_1M$ лар тенг бўлиб, натижада M нуқта тўғри бурчакли $\triangle BB_1I$ нинг гипотенузасининг ўртаси



185-шакл.



186-шакл.

$(BM = MB_1)$ ва IM кесма учбурчакнинг BB_1 томонига туширилган медиана бўлганидан:

$IM = \frac{1}{2} BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + R_1^2}$ ҳосил бўлади ($OA = R$, $O_1A_1 = R_1$ олинган эди).

328. Е ч и ш (186-шакл). Биринчи доиранинг O маркази $BN = h$ баландликни $BO : ON = 2 : 1$ нисбатда бўлади. Демак, MN диаметр $\frac{2}{3}h$ ни ташкил этиб, $BM = \frac{1}{3}h$ бўлади. BDE учбурчак баландлиги ABC учбурчак h баландлигининг учдан бирига тенг. Демак, $r_1 = O_1M$ радиус $r = ON$ дан уч марта кичик. Шунга кўра O марказли доира юзи $S\left[S = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}\right]$ бўлса, унда O_1 марказли доира юзи $S_1 = \frac{1}{3^2}S$. Лекин шундай доиралар учта бўлганидан уларнинг умумий юзи $Q_1 = \frac{1}{3}S$ бўлади. Шу хилда муҳокама қилиб, кейинги учта доира юзи топилади. $Q_2 = \frac{1}{3}$, $Q_1 = \frac{1}{3^2}S$ ва ҳоказо. Демак, $S + Q_1 + Q_2 + Q_3 + {} + \ldots = S\frac{1}{3}S + \frac{1}{3^2}S + \frac{1}{3^3}S + \ldots$ агар биринчи ҳадни эътиборга олмасак, кейинги йиғинди камаювчи геометрик прогрессия

ташкил этади $\left(a_1 = \frac{1}{3}S;\ q = \frac{1}{3^2}\right)$. Бу прогрессиянинг йиғиндиси $\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}S}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{8}S$. Бунга тағин S ни қўшсак, $\frac{11}{8}S = \frac{11}{96}\pi a^2$ ни ҳосил қиламиз.

329. $S = \frac{25}{9}\pi$.

330. $S = ab$.

332. 31,2.

333. $\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$.

334. Бизга маълум бўлишича

$$r = \frac{S}{p};\ r_a = \frac{S}{p-a};\ r_b = \frac{S}{p-b};\ r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Бу тенгликлар ҳадма-ҳад кўпайтирилса:

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^4}{S^2} = S^2$$

ёки

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = S^2.$$

Бундан:

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

336. 1) $rr_a = \frac{S^2}{p(p-a)}$;

2) $r_a - r = \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p} = \frac{aS}{p(p-a)}$;

3) $4R - r_a + r = \frac{abc}{S} - (r_a - r) = \frac{abc}{S} - \frac{aS}{p(p-a)} =$
$= \frac{a}{Sp(p-a)}[bcp(p-a) - S^2] = \frac{a}{Sp(p-a)}[bcp(p-a) - p(p-a) \times$
$\times (p-b)(p-c)] = \frac{a}{S}[bc - (p-b)(p-c)] = \frac{a}{S}(bc - p^2 + pc +$
$+ pb - bc) = \frac{ap}{S}(b + c - p) = \frac{ap}{S}\left(b + c - \frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{ap}{S} \cdot \frac{b+c-a}{2} =$
$= \frac{ap}{S}(p-a) = \frac{ap(p-a)}{S}$, яъни $4R - r_a + r = \frac{ap(p-a)}{S}$.

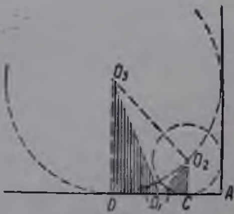
4) $rr_a\sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}} = rr_a\frac{\sqrt{4R - r_a + r}}{\sqrt{r_a - r}} = \frac{S^2}{p(p-a)} \times$
$\times \frac{\sqrt{\frac{ap(p-a)}{S}}}{\sqrt{\frac{aS}{p(p-a)}}} = \frac{S^2}{p(p-a)} \cdot \sqrt{\frac{ap(p-a)}{S} \cdot \frac{p(p-a)}{aS}} = \frac{S^2}{p(p-a)} \times$
$\times \frac{p(p-a)}{S} = S$, яъни:

$$S = rr_a\sqrt{\frac{4R - r_a + r}{r_a - r}}.$$

342. $353\frac{37}{130}$.

343. $\frac{3280\pi}{9}$.

344. Ечиш (187-шакл). Берилган айлана маркази O_1 тўғри бурчак томонларига ва берилган айланага уринувчи айланалар марказлари O_2 ва O_3 бўлсин. O_2 ва O_3 дан тўғри бурчак томонига O_2C ва O_3D перпендикулярларни туширсак: 1) O_2CO_1 учбурчакдан $O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2$ ёки $(23 - r)^2 + r^2 = (r + 2)^2$. Бундан $r_1 = 35$, $r_2 = 15$ бўлиб булар ички ва ташқи уринувчи айланалар радиусларини кўрсатади. Демак, $AC = 15$; $AD = 35$; $O_1C = 8$; $O_1D = 12$.



187-шакл.

2) Учбурчаклар юзини ҳисобласак:

$$S_{O_1CO_2} = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 8 = 60 \text{ ва } S_{O_1DO_3} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 35 = 210.$$

3) Трапециянинг юзи:

$$S_{CO_2O_3D} = \frac{CO_2 + DO_3}{2}\cdot CO_1 = \frac{15 + 35}{2}\cdot 20 = 500.$$

4) Сўнгра изланган учбурчак юзи:

$$S_{O_1O_2O_3} = S_{CO_2O_3D} - (S_{O_2CO_2} + S_{O_1DO_3}) = 500 - (60 + 210) = 230.$$

345. $\frac{a^2(5\pi - 6\sqrt{3})}{72}$.

346. $\frac{ab}{a+b+c}$.

347. $\frac{ai}{2m}$.

350. Ечиш. $a^2 + (r_a - r)^2 = a^2 + \left(\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}\right)^2 = a^2 +$

$$+ S^2\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p}\right)^2 = a^2 + S^2\cdot\frac{a^2}{(p-a)^2\cdot p^2} = a^2\left[1 + \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)^2}\right] =$$

$$= a^2\frac{p(p-a) + (p-c)(p-b)}{p(p-a)} = a^2\cdot\frac{2p^2 - p(a+b+c) + bc}{p(p-a)} =$$

$$= a^2\cdot\frac{2p^2 - 2p^2 + bc}{p(p-a)} = abc\cdot\frac{a}{p(p-a)} = abc\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p}\right) =$$

$$= 4\cdot\frac{abc}{4S}\left(\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}\right) = 4R(r_a - r).$$

Демак, $a^2 + (r_a - r)^2 = 4R(r_a - r)$ келиб чиқади.

351. Исбот:

$$r_ar_b - rr_c = \frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b} - \frac{S}{p}\cdot\frac{S}{p-c} = S^2\left[\frac{p(p-c)-(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right] =$$

$$= \frac{S^2}{S^2}(p^2 - pc - p^2 + pb + pa - ab) = p(a+b-c) - ab =$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c) - ab = \frac{a^2+b^2-c^2}{2},$$

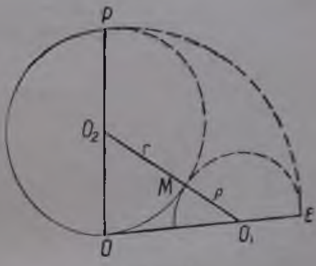
яъни:

$$r_a\cdot r_b - rr_c = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

352. $\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}.$

353. Ечиш (188-шакл). Шаклдан кўрамизки, $r + \rho = 10$,

$$OO_2 = R - r = 5,\ OO_1 = R - \rho = 5\sqrt{3}.$$



188-шакл

Бундан:

$$2R - (r+\rho) = 5(1+\sqrt{3}),$$
$$r + \rho = 10$$

бўлгани учун

$$R = \frac{5(1+\sqrt{3})+10}{2} = \frac{5(3+\sqrt{3})}{2}.$$

У ҳолда $r = R - 5 = \frac{5(1+\sqrt{3})}{2}$.

$$\rho = R - 5\sqrt{3} = \frac{5(3-\sqrt{3})}{2}.$$

$$S_{MPE} = S_{OPE} - S_{OO_1O_2} - S_{O_2MP} - S_{O_1ME} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{5(3+\sqrt{3})}{2}\right]^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi\left[\frac{5(1+\sqrt{3})}{2}\right]^2 - \frac{5}{12}\pi\left[\frac{5(3-\sqrt{3})}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{25}{6}(5\pi\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 5\pi).$$

$$S_{MPE} = \frac{25}{6}(5\pi\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 5\pi).$$

354. Исбот. $p^2 + r^2 + 4Rr = p^2 + \frac{S^2}{p^2} + \frac{abc}{S}\cdot\frac{S}{p} =$

$$= p^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)+abc}{p} = p^2 +$$

$$+ \frac{p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ac) - abc + abc}{p} =$$

$$= p^2 + \frac{p^3 - 2p^3 + p(ab+bc+ac)}{p} =$$

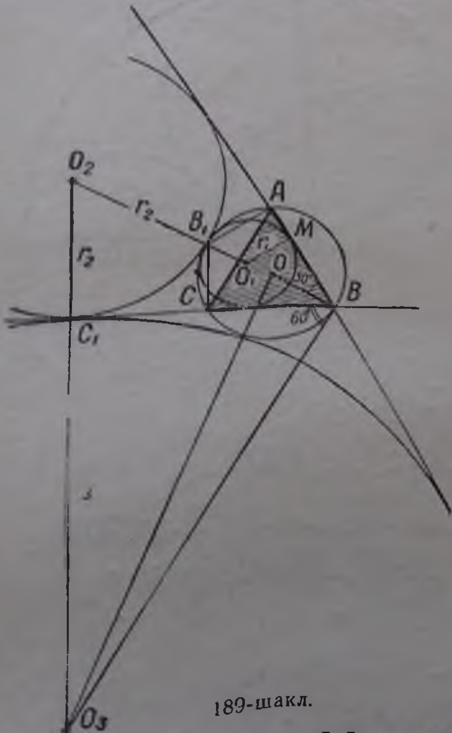
$$= p^2 - p^2 + ab + bc + ac = ab + bc + ac.$$

355. *Кўрсатма.* R ва r нинг қийматларини учбурчакнинг томонлари ва юзининг қийматлари орқали оламиз.

357. Исбот. $a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac-2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=4p^2-2(ab+bc+ac)=4p^2-2(p^2+r^2+4Rr)=4p^2-2p^2-2r^2-8Rr=2p^2-2r^2-8Rr$, яъни:

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$$

(354-масалага асосан $ab+bc+ac=p^2+r^2+4Rr$ олинди).



189-шакл.

358. $\frac{r^2(3\sqrt{3}-\pi)}{6}$.

359. $\frac{a^2(\pi-\sqrt{3})}{8}$.

360. Ечиш (189-шакл). Шаклдан $OB_1=OB=r$; $O_1B_1=O_1M=r_1$; $O_2B_1=O_2C_1=r_2$; $O_3C_1=r_3$ бўлса:

1) $\triangle BO_1M \backsim \triangle BB_1A$ дан:

$$\frac{O_1M}{O_1B}=\frac{B_1A}{B_1B} \text{ ёки } \frac{r_2}{2r-r_1}=\frac{r}{2r}.$$

Бунда $r_1=\frac{2}{3}r$.

2) $\triangle BCB_1 \backsim \triangle BC_1O_2$ дан:

$$\frac{O_2C_1}{O_2B}=\frac{B_1C}{B_1B} \text{ ёки } \frac{r_2}{r_2+2r}=\frac{r}{2r}.$$

Бундан $r_2=2r$.

3) $\triangle O_2BC_1 \backsim \triangle BO_3O_2$ дан:

190-шакл.

$$\frac{O_2B}{O_2C_1}=\frac{O_2O_3}{O_1B} \text{ ёки } \frac{r_2+2r}{r_2}=\frac{r_2+r_3}{r_2+2r}.$$

Бундан $r_3=6r$.

361. Ечиш. $h_a+h_b+h_c=\frac{h_a\cdot abc}{abc}+\frac{h_b\cdot abc}{abc}+\frac{h_c\cdot abc}{abc}=\frac{2S(bc+ac+ab)}{abc}=(ab+ac+bc):\frac{abc}{2S}=\frac{ab+ac+bc}{2R}$.

6 (190-шаклга қаранг.)

363. $\frac{2S}{a+b}$.

364. rr'.

Кўрсатма. $r' = r_c$ ва учбурчакда $p = r + c$ лигини аниқланг.

365. Ечиш (191-шакл). 1) Бундай учбурчакни ясаш ҳамма вақт мумкин, чунки ясаб бўлиш шарти, яъни бир томони қолган икки томони йиғиндисидан кичик, айирмасидан катта деган шарт бажарилади.

2) Бу учбурчакнинг томонлари:

$$a' = AC + AB = b + c;$$
$$b' = BC + AB = a + c;$$
$$c' = BC + AC = a + b,$$

яъни $p' = 2p = a + b + c$, бундан $p' - b' = b$; $p' - a' = a$; $p' - c' = c$.

191-шакл.

192-шакл.

Демак:

$$S' = \sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')} = \sqrt{2p \cdot abc} =$$
$$= \sqrt{2p \cdot \frac{abc}{4S} \cdot 4S} = \sqrt{2p \cdot R \cdot 4S} = 2\sqrt{2pR \cdot rp} = 2p\sqrt{2Rr},$$

бундан:

$$r_1 = \frac{S'}{p'} = \frac{2p\sqrt{2Rr}}{2p} = \sqrt{2Rr}.$$

366. 3π.

367. *Кўрсатма.* Ҳар бир касрнинг сурат ва махражи мос равишда a, b ва c ларга кўпайтирилади.

368. *Кўрсатма.* r_a, r_b ва r_c нинг қийматлари $\frac{S}{p-a} \dots$ лардан фойдаланамиз.

369. Ечиш (192-шакл). Медиана $AD = m$, биссектриса $AE = l$, баландлик $AF = h$ десак, $NP \parallel BC$ олсак, $EF = \sqrt{l^2 - h^2}$; $NP = DF = \sqrt{m^2 - h^2}$. Сўнгра тўғри бурчакли учбурчаклар $\triangle AMN \backsim \triangle AEP \backsim \triangle ANP$, бундан:

1) $\frac{AN}{AE}=\frac{NP}{EF}$, $AN=AE\cdot\frac{NP}{EF}=l\sqrt{\frac{m^2-h^2}{l^2-h^2}}$.

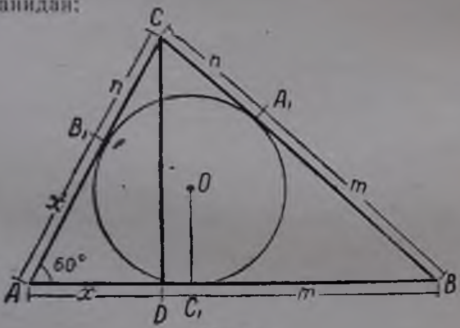
2) $\frac{MN}{AN}=\frac{AE}{AF}$; $MN=AN\cdot\frac{AE}{AF}=l\cdot\sqrt{\frac{m^2-h^2}{l^2-h^2}}\cdot\frac{l}{h}=\frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{m^2-h^2}{l^2-h^2}}$.

370. $5\sqrt{13}$.

371. Ечиш (193-шакл). 1) ABC учбурчакда AD кесма AC томоннинг проекцияси, шунинг учун:

$$AD=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB}. \quad (1)$$

AD кесма ACD учбурчакда $30°$ ли бурчак қаршисида ётган катет бўлганидан:



193-шакл.

$$AD=\frac{x+n}{2} \quad (2)$$

бўлади.

(1) ва (2) дан:

$$\frac{x+n}{2}=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB}$$

ёки

$$\frac{n+x}{2}=\frac{(n+x)^2+(m+x)^2-(m+n)^2}{2(m+x)}$$

ёки

$$(m+x)(n+x)=(n+x)^2+(m+n)^2-(m+n)^2.$$

Бу тенгликнинг иккала томонидан $2(m+x)\cdot(n+x)$ ни айирсак, унда:

$$-(m+x)(n+x)=(m+x)^2-2(m+x)(n+x)+(n+x)^2-(m+n)^2$$

ёки

$$-(m+n)(n+x)=[(m+x)-(n+x)]^2-(m+n)^2$$

ёки

$$-(m+x)(n+x)=(m+x-n-x)^2-(m+n)^2,$$

ёки

$$(m+x)(n+x)=-(n-m)^2+(n+m)^2$$

ёки

$$(m+x)(n+x)=4mn \qquad (3)$$

келиб чиқади.

2) ADC учбурчакда CD 60° ли бурчак қаршисидаги катет бўлганидан $CD=\frac{(n+x)\sqrt{3}}{2}$.

3) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}(x+m)\frac{(x+n)\sqrt{3}}{2}=\frac{(x+m)(x+n)\sqrt{3}}{4}$. (4)

(4) га (3) даги қиймат қўйилса:

$$S_{ABC}=\frac{1}{4}(x+m)(x+n)\sqrt{3}=\frac{1}{4}\cdot 4mn\sqrt{3}=mn\sqrt{3}$$

чиқади.

Демак:

$$S=mn\sqrt{3}.$$

372. $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

373. 3,25.

374. $\frac{17}{30}$.

375. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

376. $r(\sqrt{5}-1)$.

377. Ечиш (194-шакл). $\Omega E=r$; $OB=R$; $AD=h$ бўлса:

$$AE=\sqrt{(h-r)^2-r^2}=\sqrt{h(h-2r)}.$$

1) $\triangle ADC \backsim \triangle A\Omega E$,

бундан:

$$\frac{DC}{AD}=\frac{\Omega E}{AE};\ DC=AD\cdot\frac{A\Omega}{AE}=\frac{h\cdot r}{\sqrt{h(h-2r)}}$$

ёки

$$BC=2\cdot DC=\frac{2hr}{\sqrt{h(h-2r)}}.$$

2) ADC учбурчакдан:

$$AB=AC=\sqrt{h^2+DC^2}=\sqrt{h^2+\frac{r^2h^2}{h(h-2r)}}=\frac{h(h-r)}{\sqrt{h(h-2r)}}.$$

3) OBD учбурчакдан:

$$OB^2=OD^2+BD^2 \text{ ёки } R^2=(h-R)^2+BD^2,$$

бундан:

$$2Rh=h^2+BD^2=h^2+CD^2=h^2+\frac{r^2h^2}{h(h-2r)}=\frac{h(h-r)^2}{h-2r}.$$

Демак:

$$R=\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}.$$

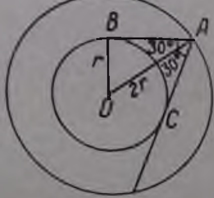
4) Ташқи чизилган айлананинг маркази ички чизилган айлана устида бўлиши учун $R+2r=h$ булиши керак. Бу тенгликка R нинг юқоридаги қиймати қўйилса:

$$\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}=h-2r \text{ ёки } (h-r)^2=2(h-2r)^2,$$

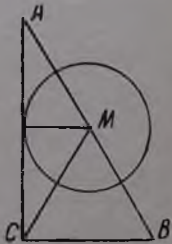
бундан:

$$h-r=(h-2r)\sqrt{2} \text{ ёки } \frac{h}{r}=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=3+\sqrt{2}$$

194-шакл.



195-шакл.



196-шакл.

бўлиб, қўйилган шартни қаноатлантириш учун зарур бўлган h ва r орасидаги муносабат келиб чиқади.

378. $\frac{(a^2+r^2)^2}{4r^2(a^2-r^2)}$; $R_{\min}=2r$.

379. Ечиш (195-шакл). Агар учбурчак катетлари 3 ва 4 бўлса, гипотенузаси 5 булади. Берилган ABC учбурчакка ташқи айлана чизсак, унинг маркази гипотенуза ўртаси M нуқтада ва радиуси $\frac{5}{2}$ га тенг бўлади.

Изланган айлана A, B, C нуқталардан 60° ли бурчак остида кўрингани учун, у ташқи чизилган айланага концентрик булиши ва унинг ичида ётиши керак.

Ташқи нуқтадан айлана 60° ли бурчак остида кўриниши учун нуқтанинг марказгача масофаси айлана радиусидан 2 марта катта бўлиши керак (195-шакл). Шунинг учун изланган айлананинг радиуси ABC айлана радиусидан 2 марта кичик, яъни $\frac{5}{2}:2=1,25$ бўлади.

Шундай қилиб, изланган айлананинг маркази гипотенуза ўртасида ётади ва радиуси 1,25 га тенг (196- шакл).

380. $a^2\sqrt{3}$.

Курсатма. BC томон $=a_4$. Бу орқали a_6 ва b_6 ни топамиз.

381. $2a^2\sqrt{2}$.

Кўрсатма. BC томон $= a_6$.

382. $\sqrt{ab}$.

Кўрсатма. AK' кесма диаметр ва диаметрдаги ўз проекцияси орасида ўрта пропорционалдир.

383. Ечиш.

$$\frac{h_a+h_b}{r_c}+\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_a+h_c}{r_b}=\frac{h_a+h_b}{r_c}+\frac{h_c}{r_c}+\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_c+h_a}{r_b}+$$

$$+\frac{h_b}{r_b}-\left(\frac{h_c}{r_c}+\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}\right)=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)-$$

$$-\left(\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}+\frac{h_c}{r_c}\right)=\left(\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)\left(\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}\right)-$$

$$-\left(\frac{p-a}{S}h_a+\frac{p-b}{S}h_b+\frac{p-c}{S}h_c\right)=2S\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\times$$

$$\times\frac{p-a+p-b+p-c}{S}-\left[\frac{(p-a)2S}{S\cdot a}+\frac{(p-b)2S}{Sb}+\frac{(p-c)2S}{Sc}\right]=$$

$$=2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{3p-(a+b+c)}{S}-2\left(\frac{p-a}{a}+\frac{p-b}{b}+\frac{p-c}{c}\right)=$$

$$=2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{(3p-2p)}{S}-2\left(\frac{p-a}{a}+\frac{a}{a}+\frac{p-b}{b}+\frac{b}{b}+\right.$$

$$\left.+\frac{p-c}{c}+\frac{c}{c}\right)+2\left(\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}\right)=2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-$$

$$-2\left(\frac{p}{a}+\frac{p}{b}+\frac{p}{c}\right)+2\cdot 3=2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-$$

$$-2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+2\cdot 3=6.$$

384. *Кўрсатма.* Тенгликнинг иккала томонидаги касрларнинг суратини $r_ar_br_c$ га ва махражини $h_ah_bh_c$ га булиш воситаси билан иш кўрамиз.

385. Ечиш. $r_a+r_b+r_c-r=\dfrac{S}{p-a}+\dfrac{S}{p-b}+\dfrac{S}{p-c}-\dfrac{S}{p}=$

$$=S\cdot\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-c)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{S}[p^3-p^2(b+c)+$$

$$+pbc+p^3-p^2(a+c)+pac+p^3-p^2(a+b)+pab-p^3+$$

$$+p^2(a+b+c)-p(ab+bc+ac)+abc]=\frac{1}{S}[2p^3-p^2(a+b+$$

$$+c)+abc]=\frac{1}{S}(2p^3-2p^3+abc)=\frac{abc}{S}=4R.$$

Демак:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$

ёки

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

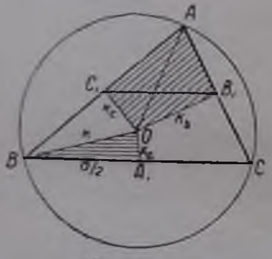
келиб чиқади.

386. $\sqrt[4]{3\pi^2}$; $2\sqrt{\pi}$; $\sqrt[4]{12}$.

387. Учинчи томони $= 36$, юзи $= 360$.

388 (197-шакл). AB_1OC_1 тўртбурчакда $AO = R$; $C_1B_1 = \frac{a}{2}$. $\angle AC_1O + \angle AB_1O = 180°$ бўлгани учун бу тўртбурчакка Птоломей теоремасини татбиқ этиш мумкин:

$$AC_1 \cdot OB_1 + AB_1 \cdot OC_1 = AO \cdot B_1C_1 \text{ ёки } \frac{c}{2} \cdot k_b + \frac{b}{2} k_c = \frac{a}{2} R.$$



197-шакл.

Бундан:

$$ck_b + bk_c = aR.$$

Шунга ўхшаш:

$$bk_a + ak_b = cR.$$
$$ak_c + ck_a = bR.$$

Охирги учта тенгликни ҳадма-ҳад қўшсак:

$$a(k_b + k_c) + b(k_a + k_c) + c(k_a + k_b) = R(a + b + c)$$

ёки

$$a(k_b + k_c) + b(k_a + k_c) + c(k_a + k_b) = 2pR.$$

389. $4(k_bk_c + k_ak_c + k_ak_b) = (ab + ac + bc) - 4R(R + r)$ тенгликни исбот қилиш учун аввал

$$k_a + k_b + k_c = R + r \quad (1)$$

тенгликни исбот қиламиз, бунинг учун олдинги масалада исбот этилган:

$$a(k_b + k_c) + b(k_a + k_c) + c(k_a + k_b) = 2pR$$

тенгликнинг иккала томонига $2S$ ни қўшамиз:

$$2S + a(k_b + k_c) + b(k_a + k_c) + c(k_a + k_b) = 2pR + 2S. \quad (2)$$

Бизга

$$\text{ва } \left.\begin{aligned} &1)\ 2S = ak_a + bk_b + ck_c \\ &2)\ 2S = 2pr \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

маълум.

(2) даги $2S$ ўрнига чапда (3) дан биринчи ифодани ва ўнгда иккинчисини қўйсак, унда $ak_a + bk_b + ck_c + a(k_b + k_c) +$

$+ b(k_a + k_c) + c(k_a + k_b) = 2pR + 2pr$ олинади. Бунинг шакли алмаштирилса:

$$ak_a + a(k_b + k_c) + bk_b + b(k_a + k_c) + ck_c + c(k_a + k_b) = \\ = 2pR + 2pr$$

ёки

$$a(k_a + k_b + k_c) + b(k_a + k_b + k_c) + c(k_a + k_b + k_c) = 2pR + 2pr,$$

ёки

$$(k_a + k_b + k_c)(a + b + c) = 2pR + 2pr = 2p(R + r),$$

ёки

$$(k_a + k_b + k_c) \cdot 2p = 2p(R + r),$$

ёки $2p \neq 0$ бўлгани учун $k_a + k_b + k_c = R + r$ келиб чиқади.

Энди $k_a + k_b + k_c = R + r$ тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$k_a^2 + k_b^2 + k_c^2 + 2k_ak_b + 2k_ak_c + 2k_bk_c = R^2 + 2Rr + r^2.$$

Бундан:

$$2(k_ak_b + k_a \cdot k_c + k_bk_c) = R^2 + 2Rr + r^2 - k_a^2 - k_b^2 - k_c^2 \quad (4)$$

ни ҳосил қиламиз. Ўтган 388-масаладаги шаклдан:

$$R^2 - k_a^2 = \frac{a^2}{4}$$

маълум. Шунга ўхшаш:

$$R^2 - k_b^2 = \frac{b^2}{4} \text{ ва } R^2 - k_c^2 = \frac{c^2}{4}$$

ёки

$$k_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}; \quad k_b^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} \text{ ва } k_c = R^2 - \frac{c^2}{4}. \quad (5)$$

$$r = \frac{S}{p} \text{ дан } r^2 = \frac{S^2}{p^2} \quad (6)$$

ёзсак, (4) нинг ўнг томонига (5) ва (6) дан қўйилса,

$$D = 2Rr + \frac{S^2}{p^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - 2R^2$$

ҳосил бўлади, бу ерда қисқалик учун D орқали $2(k_ak_b + k_ak_c + k_bk_c)$ белгиланди.

$$D = 2Rr + \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} - 2R^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

ёки

$$D = 2Rr + \frac{p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab + ac + bc) - abc}{p} - 2R^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$

ёки

$$D = 2Rr + p^2 - p(a + b + c) + (a + b + c) - \frac{abc}{p} - \\ - 2R^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$

ёки

$$D = 2Rr + p^2 - \frac{(a+b+c)^2}{2} + (ab+ac+bc) - \frac{abc}{S} \cdot \frac{S}{p} -$$

$$- 2R^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{4},$$

ёки

$$D = 2Rr + p^2 - \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{2} + (ab+ac+bc) -$$

$$- 4Rr - 2R^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{4},$$

ёки

$$D = 2Rr - 4Rr + p^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - (ab+ac+bc) + (ab+ac+bc) -$$

$$- 2R^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{4},$$

$$D = -2Rr + p^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{4} - 2R^2,$$

$$p^2 - \frac{ab+ac+bc}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 - \frac{ab+bc+ac}{2} =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{4} - \frac{ab+ac+bc}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$

бўлганидан:

$$D = -2Rr + p^2 - \left(p^2 - \frac{ab+ac+bc}{2}\right) - 2R^2$$

ёки

$$D = -2Rr + \frac{ab+ac+bc}{2} - 2R^2,$$

ёки

$$D = \frac{1}{2}(ab+ac+bc) - 2R(R+r).$$

Буни 2 га купайтирсак,

$$2D = ab + ac + bc - 4R(R+r)$$

чиқади. Яъни:

$$4(k_a k_b + k_a k_c + k_b k_c) = ab + ac + bc - 4R(R+r).$$

390. Ечиш (197*а*-шакл). Шаклдан кўринишича:

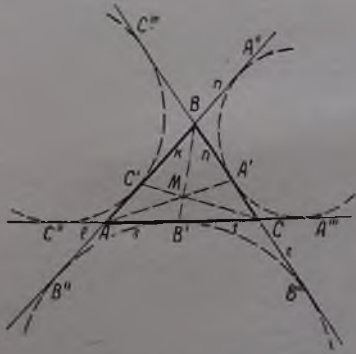
1) $AB' = AB'' = s;\ AC' = AC'' = l;\ B'C = B'''C = t;$
$BC' = BC''' = k;\ A'C = A'''C = m;\ A'B = A''B = n.$

2) $CC'' = CC''' = p;\ CC'' + CC''' = 2p.$
$BB'' = BB''' = p;\ BB'' + BB''' = 2p.$
$AA'' = AA''' = p;\ AA'' + AA''' = 2p.$

3) $\left.\begin{array}{l} AA'' = c + n = p;\ n = p - c \\ AA''' = b + m = p;\ m = p - b \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} BB'' = c + s = p;\ s = p - c \\ BB''' = a + t = p;\ t = p - a \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} CC'' = b + l = p;\ l = p - b \\ CC''' = a + k = p;\ k = p - a \end{array}\right\}$



197-а шакл.

4) Энди Чева теоремасини татбиқ этиб $AB'\cdot CA'\cdot BC'$ ва $AC'\cdot BA'\cdot CB'$ ларнинг қийматларини топамиз.

Улар мос равишда $s\cdot m\cdot k$ ва $l\cdot n\cdot t$ га тенг. Кейинги кўпайтмаларнинг иккаласи ҳам $(p-a)(p-b)(p-c)$ га тенг бўлиб, $AB'\cdot CA'\cdot BC' = AC'\cdot BA'\cdot CB'$ тенглик, яъни $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A} = 1$ тўғри бўлади. Шунинг учун AA', BB' ва CC' тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади.

391. Ечиш (198-шакл). Берилган учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази O ва радиуси R, иккинчи айлана маркази Ω ва радиуси r бўлсин.

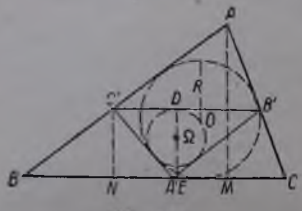
$A'B'C'$ учбурчакнинг томонлари ABC учбурчак томонларининг ярмига тенг. Шунинг учун:

$$r = \frac{1}{2}R,\ h = \frac{1}{2}H.$$

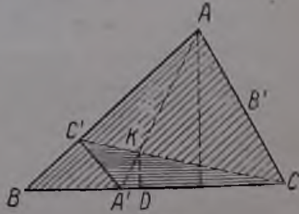
ABC учбурчакнинг BC асосига перпендикуляр қилиб туширилган кесма $\Omega E = h - r = \frac{1}{2}(H - R) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}\cdot S - \frac{S}{p}\right) = \frac{S(b+c)}{2ap}$.

Қолган иккита масофа $\frac{S(a+c)}{2bp}$ ва $\frac{S(a+b)}{2cp}$ бўлади.

392. Ечиш (199-шакл). 390-масалага биноан:



198-шакл.



199-шакл.

$$BC' = CB' = p - a;$$
$$AC' = CA' = p - b;$$
$$AB' = A'B = p - c.$$

Учбурчаклар тенг баландликка эга бўлганидан

$$\frac{S_{ACC'}}{S_{ABC}} = \frac{p-b}{c} \quad \text{ёки} \quad S_{ACC'} = S\cdot\frac{p-b}{c} \tag{1}$$

ва

$$\frac{S_{BCC'}}{S_{ABC}} = \frac{p-a}{c} \quad \text{ёки} \quad S_{BCC'} = S\frac{p-a}{c} \tag{2}$$

яна

$$\frac{S_{A'CC'}}{S_{BCC'}} = \frac{p-b}{a} \quad \text{ёки} \quad S_{A'CC'} = S_{BCC'}\frac{p-b}{a} = S\frac{p-a}{c}\cdot\frac{p-b}{a}. \tag{3}$$

(1) ва (3) дан ва учбурчакларнинг асоси умумийлигидан:

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{S_{ACC'}}{S_{A'CC'}} = \frac{a}{p-a}, \quad \text{шунга кўра} \quad \frac{KA'}{AA'} = \frac{p-a}{p}; \tag{4}$$

бинобарин:

$$\frac{KD}{h_a} = \frac{KA'}{AA'} = \frac{p-a}{p};$$

$$KD = \frac{h_a(p-a)}{p} = \frac{ah_a(p-a)}{ap} = \frac{2S(p-a)}{ap}. \tag{5}$$

393. Ечиш (200-шакл). 1) $AH = h'_a$; $AF = h_a$; $GE = \frac{1}{3} h_a$ (G — оғирлик маркази); $OD = k_a = \frac{1}{2} h'_a$; $OE' = DE$; $GF_1 = EF$.

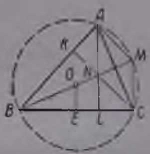
2) $\triangle DGE \backsim \triangle GF_1A$ бўлганидан

$$\frac{DE}{GF_1} = \frac{DG}{GA} = \frac{1}{2}, \text{ яъни } \frac{OE_1}{GF_1} = \frac{DE}{EF} = \frac{DG}{GA} = \frac{1}{2}.$$

3) $HF = h_a - h'_a$.

4) $GE_1 = GE - OD = GE - EE_1$ ёки $GE_1 = \frac{1}{3} h_a - \frac{1}{2} h'_a = \frac{1}{6} h_a = \frac{1}{6}(2h_a - 3h'_a)$.

200-шакл.



201-шакл.

5) $HF_1 = AF - AH - FF_1$ ёки $HF_1 = h_a - h'_a - \frac{1}{3} h_a = \frac{2}{3} h_a - h'_a = \frac{1}{3}(2h_a - 3h'_a)$.

6) $\frac{GE_1}{HF_1} = \frac{1}{6}(2h_a - 3h'_a) : \frac{1}{3}(2h_a - 3h'_a) = \frac{1}{2}$.

Шундан:

$$\frac{OE_1}{GF_1} = \frac{GE_1}{HF_1} = \frac{1}{2},$$

бинобарин:

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}.$$

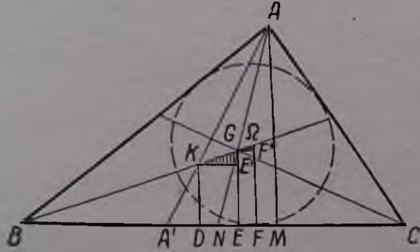
Илова (201-шакл). Ички чизилган ABC учбурчакда N — ортомарказ, O — ташқи айлана маркази, $OE \perp BC$; $AL \perp BC$ олиниб $OE = k_a$, $AN = h'_a$ бўлса, $h'_a = 2k_a$ ни исбот қилиш керак.

Исбот. Айланага BM диаметрни ўтказиб, M нуқта A ва C учлар билан бирлаштирилса:

1) $\angle BAM = \angle BCM = 90°$ ва $OE \parallel MC \parallel AL$ бўлиб, тўғри бурчакли BMC ва BOE учбурчакларда $OE = \frac{1}{2} MC$ (OE ўрта чизиқ) ва $MC = 2k_a$.

2) $CK \parallel MA$; $MC \parallel AN$ бўлганидан $AMCN$ тўртбурчак параллелограмм, яъни $MC = AN$ $(AN = h'_a)$, демак, $AN = 2 \cdot OE$ ёки $h'_a = 2k_a$.

394. Ечиш (202-шакл). Шаклда кўрилганича, Ω — ички айлана маркази. G — оғирлик маркази, K — учбурчакка ташқи томондан уринган айланаларнинг уриниш нуқталарига бурчак учидан чизилган трансверсал чизиқларнинг кесишган нуқтаси



202-шакл.

бўлса, бу нуқталардан учбурчакнинг BC асосига перпендикуляр $AM \perp BC$; $\Omega F \perp BC$; $GE \perp BC$; $KD \perp BC$ ўтказилса, 392-масалага биноан:

$$KD = \frac{2S(p-a)}{ap}. \tag{1}$$

Оғирлик марказидан туширилган перпендикуляр

$$GE = \frac{1}{3} h_a = \frac{ah_a}{3a} = \frac{2S}{3a}. \tag{2}$$

Ички чизилган айлана радиуси бўлгани учун:

$$\Omega F = r = \frac{S}{p}. \tag{3}$$

GE дан олинган кесма:

$$GE' = GE - EE' = GE - KD = \frac{2S}{3a} - \frac{2S(p-a)}{ap} = \frac{2S(3a-2p)}{3ap} \tag{4}$$

Айлана радиусидан олинган кесма

$$\Omega F' = \Omega F - GE = \frac{S}{p} - \frac{2S}{3a} = \frac{S}{3ap}(3a-2p). \tag{5}$$

(5) тенглик (4) га булинса:

$$\frac{\Omega F'}{GE'} = \frac{S}{3ap}(3a-2p) : \frac{2S(3a-2p)}{3ap} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

$\triangle ABC$ да AB нинг проекцияси бўлганидан:

$$BM = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}. \tag{7}$$

390-масалага асосан:

$$BA' = p - c. \tag{8}$$

Асосдаги кесмалардан:

$$A'M = BM - BA' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} - (p - c) = \frac{p(c - b)}{a}. \tag{9}$$

$\triangle A'KD \backsim \triangle A'AM$ дан $\frac{A'D}{A'K} = \frac{A'M}{AA'}$ ёки 392-масаладаги $\frac{A'K}{AA'} = \frac{p-a}{a}$ га биноан:

$$A'D = A'M \cdot \frac{A'K}{AA'} = \frac{p(c-b)}{a} \cdot \frac{p-a}{a} = \frac{(c-b)(p-a)}{a}. \tag{10}$$

Шу билан (8) ва (10) дан:

$$BD = BA' + A'D = p - c + \frac{(c-b)(p-a)}{a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - 2a(c-b)}{2a} \tag{11}$$

$$BE = BN + NE = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\left(BM - \frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} - \frac{a}{2}\right) = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{6a}. \tag{12}$$

$$DE = BE - BD = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{6a} - \frac{a^2 + c^2 - b^2 - 2a(c-b)}{2a} =$$

$$= \frac{(c-b)(3a - b - c)}{3a}. \tag{13}$$

$$BF = p - b. \tag{14}$$

$$EF = BF - BE = p - b - \frac{3a + c^2 - b^2}{6a} = \frac{(c-b)(3a-b-c)}{6a}. \tag{15}$$

$\triangle KGE' \backsim \triangle G\Omega F'$, бундан $\frac{KG}{G\Omega} = \frac{KE'}{GF'}$ ёки

$$\frac{KG}{G\Omega} = \frac{DE}{EF} = \frac{(c-b)(3a-b-c)}{3a} : \frac{(c-b)(3a-b-c)}{6a} = 2.$$

Демак:

$$\frac{KG}{G\Omega} = 2,$$

бундан:

$$\frac{G\Omega}{KG} = \frac{1}{2}.$$

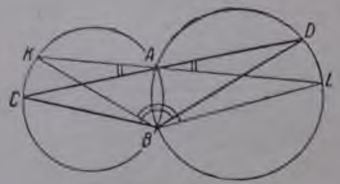
395. $\frac{1}{2}$. *Кўрсатма.* 391 ва 394-масалаларга қаранг.

396. Исбот (203-шакл). Исбот этиш учун $\angle KAC$ ва $\angle DAL$ ни олиб кўрамиз. Булар вертикал бурчаклар бўлганидан тенг бўлиб, улар $\smile KC$ ва $\smile DL$ ларнинг ярми билан ўлчанганлигидан $\smile KC = \smile DL$ келиб чиқади (яъни градуслари тенг бўлади). Биз $\angle KBD$ га $\angle KBC$ ни қўшсак, $\angle KBL$ келиб чиқади. $\angle CBD = \angle KBL, \ldots$ бўлиб масала исбот этилади.

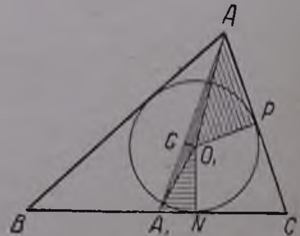
Исбот. $\angle C = \angle K$ ва $\angle D = \angle L$ бўлганида $\triangle CBD$ ва $\triangle KBL$ лар икки тенг бурчакка эга бўлганидан $\angle CBD = \angle KBL$ бўлиб, масала исбот этилади.

397. Ечиш (204-шакл). 1) $AP = p - a$; $CN = p - c$; AA_1O_1 учбурчакда GO_1 кесувчи чизиқ. Стюарт теоремасига асосан:

$$O_1G^2 \cdot AA_1 = O_1A^2 \cdot GA_1 + O_1A_1^2 \cdot AG - AA_1 \cdot AG \cdot A_1G.$$



203-шакл.



204-шакл.

Бу ерда $\triangle APO_1$ дан $O_1A^2 = r^2 + (p-a)^2$;

$\triangle A_1O_1N$ дан $A_1N = \frac{a}{2} - (p-c) = \frac{c-b}{2}$; $O_1A_1^2 = r^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2$.

Натижада:

$$O_1G^2 \cdot m_a = [r^2 + (p-a)^2] \cdot \frac{1}{3} m_a + \left[r^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{2}{3} m_a - $$
$$- m_a \cdot \frac{1}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_a$$

ёки

$$O_1G^2 = \frac{1}{3}\left[r^2 + (p-a)^2\right] + \frac{2}{3}\left[r^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2\right] - \frac{2}{9} m_a^2 = r^2 +$$
$$+ \frac{2(c^2 - 2bc + b^2)}{12} + \frac{(b+c-a)^2}{12} - \frac{2}{9} \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} =$$
$$= r^2 + \frac{3b^2 + 3c^2 + a^2 - 2(ab + bc + ac)}{12} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{18} =$$
$$= r^2 + \frac{4b^2 + 4c^2 + 2a^2 - (a+b+c)^2}{12} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{18} = r^2 + \frac{2b^2 + 2c^2 + a^2 - 2p^2}{6} -$$
$$- \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{18} = r^2 + \frac{4b^2 + 4c^2 + 4a^2 - 6p^2}{18} = \frac{1}{9}\left[9r^2 + 2(a^2 +\right.$$
$$\left. + b^2 + c^2) - 3p^2\right].$$

Шу билан $O_1G = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3p^2}$ келиб чиқади.

398. *Кўрсатма.* 397 ва 354-масалаларга қаранг.

399. $\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$.

Кўрсатма. 393 ва 396-масалаларга қаранг.

400. Е ч и ш (205-шакл). 1) $ED \perp BC$; $AF \perp BC$ ўтказамиз, шунда

$$\triangle ADE \backsim \triangle FAA_1;\ \frac{AD}{DE}=\frac{AF}{AA_1};\ AD = DE\cdot\frac{AF}{AA_1} = 2R\frac{h_a}{l_a} = 2R\cdot\frac{ah_a}{al_a} =$$

$$= 2R\frac{2S}{al_a} = \frac{abc}{2S}\cdot\frac{2S}{al_a} = \frac{bc}{l_a};\ AD = \frac{bc}{l_a}$$

олинади.

2) AA_1C учбурчакда O_1C биссектриса, бунда $\frac{A_1O_1}{AO_1}=\frac{A_1C}{AC}$. AA_1 ҳам ABC учбурчакда A бурчакнинг биссектрисаси. Бундан: $A_1C = \frac{ab}{b+c}$, шунинг учун:

205-шакл.

$$A_1O_1 = AO_1\cdot\frac{A_1C}{AC} = AO_1\cdot\frac{\frac{ab}{b+c}}{b} = AO_1\cdot\frac{a}{b+c}$$

ёки

$$\frac{A_1O_1}{AO_1} = \frac{a}{b+c}$$

ёки

$$\frac{A_1O_1}{AO_1} + 1 = \frac{a}{b+c} + 1.$$

$$\frac{A_1O_1 + AO_1}{AO_1} = \frac{a+b+c}{b+c} \text{ ёки } \frac{l_a}{AO_1} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Бундан:

$$AO_1 = \frac{l_a(b+c)}{a+b+c};\ DO = AD - AO_1 = \frac{bc}{l_a} - \frac{l_a(b+c)}{a+b+c} =$$

$$= \frac{bc}{l_a} - \frac{l_a(b+c)}{2p},$$

яъни:

$$DO_1 = \frac{bc}{l_a} - \frac{l_a(b+c)}{2p}.$$

3) Ташқи чизилган айлана учун MN ва AD кесмалар O_1 нуқтадан ўтувчи ватарлар, шунга кўра $MO_1\cdot O_1N = DO_1\cdot O_1A$ ёки

$$(R+OO_1)(R-OO_1) = \left[\frac{bc}{l_a} - \frac{l_a(b+c)}{2p}\right]\frac{l_a(b+c)}{2p}$$

ёки

$$R^2 - OO_1^2 = \frac{bc(b+c)}{2p} - \frac{(b+c)^2 l_a^2}{4p^2}.$$

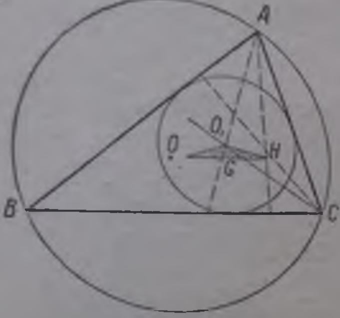
Илгаридан бизга маълум:

$$l_a^2 = bc\,\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}.$$

Шунга кўра:

$$R^2 - OO_1^2 = \frac{bc(b+c)}{2p} - bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{4p^2};\ R^2 - OO_1^2 =$$

$$= bc\frac{(b+c)(a+b+c) - (b+c)^2 + a^2}{4p^2}.$$



206-шакл.

$$R^2 - OO_1^2 = bc\frac{a(a+b+c)}{4p^2} =$$

$$= \frac{abc}{2p} = 2\frac{abc}{4S}\,\frac{S}{p}$$

ёки

$$R^2 - OO_1^2 = 2Rr.$$

Бундан $OO_1^2 = R^2 - 2Rr$ олиниб, натижада $OO_1 = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ келиб чиқади.

401. Ечиш (206-шакл). 1) OO_1H учбурчакни куздан кечирсак, Стюарт теоремасига кура:

$$OG^2 \cdot OH = O_1H^2 \cdot OG + OO_1^2 \cdot GH - OG \cdot GH \cdot OH$$

$O_1G = \frac{1}{3}OH$; $GH = \frac{2}{3}OH$; шунга кўра, OH ни нолдан фарқли деб, OH га қисқартирсак:

$$O_1G^2 = O_1H \cdot \frac{1}{3} + O_1O^2\frac{2}{3} - \frac{2}{3}OH^2.$$

Бундан:

$$(OH)^2 = 3(O_1G)^2 + \frac{2}{3}OH^2 - 2OO_1^2$$

(397, 399 ва 402-масалаларга кўра:

$$O_1H^2 = 3r^2 + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - p^2 + 6R^2 -$$

$$- \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 2R^2 + 4Rr$$

ёки

$$(O_1H)^2 = 3r^2 + 4R^2 + 4Rr - p^2$$

ёки (357-масаладан)

$$p^2 - r^2 - 4Rr = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

ни алмаштирсак

$$O_1H^2 = 2r^2 + 4R^2 - (p^2 - r^2 - 4Rr) = 2r^2 + 4R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

ёки

$$O_1H = \sqrt{4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

ҳосил бўлади.

Изоҳ. Учбурчак тенг томонли бўлсагина OH нолга тенг бўлади. Бу ҳолда изланган O_1H масофа ҳам нолга тенг бўлади ва ҳосил бўлган формула ҳам ноль беради.

402. Ечиш (207-шакл).

$A\Omega_a D$ учбурчакдан:

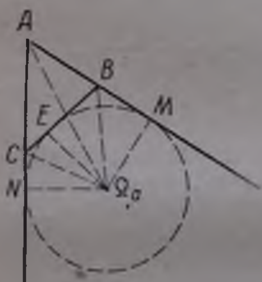
$$A\Omega_a^2 = AD^2 + \Omega D^2. \qquad (1)$$

Шаклдан кўринишича $\Omega_a D = r_a$, $AD = AE = p$ бўлиб, буларни (1) га қўйсак:

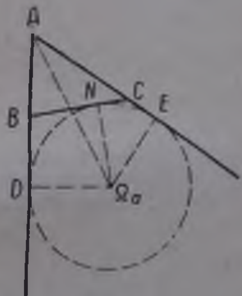
$$A\Omega_a^2 = p^2 + r_a^2 = p^2 + \frac{S^2}{(p-a)^2} = p^2 + \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a} = \frac{pbc}{p-a},$$

бундан:

$$A\Omega_a = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}.$$



207-шакл.



208-шакл.

Илова (208-шакл). 1) $CE = CN$, $BM = BE$, $BC = BE + BC = a$, $BM + CN = a$, $AM = AB + BM = AB + BE$, $AN = AC + CN = AC + CE$, $AM + AN = 2p$ $(AM = AN = p)$.

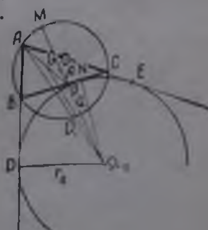
2) $S_{AM\Omega_a N} = 2S_{AM\Omega_a} = 2\cdot\frac{1}{2}\,p\cdot r_a = p\cdot r_a$.

3) $S_{BM\Omega_a NC} = 2S_{B\Omega_a C} = 2\cdot\frac{1}{2}\,ar_a = ar_a$.

4) $S_{ABC} = pr_a - ar_a = r_a(p-a)$.

Бундан:

$$r_a = \frac{S}{p-a}.$$



209-шакл.

403. Ечиш (209-шакл).

I. 402-масалага асосан $A\Omega_a^2 = \frac{pbc}{p-a}$ эди.

II. $\Omega_a G$ ни излаймиз. Бизга маълум бўлишича:

$$NC = p - b;\quad A'N = \frac{a}{2} - (p-b) = \frac{b-c}{2}.$$

$A'\Omega_a N$ учбурчакдан $A'\Omega_a^2 = N\Omega_a^2 + A'N^2$ ёки $A'\Omega_a^2 = r_a^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ ҳамда $AA' = m_a$ бўлиб, $A\Omega_a A'$ учбурчакдан Стюарт теоремасига биноан:

$$\Omega_a G^2 \cdot m_a = A\Omega_a^2 \cdot \frac{1}{3} m_a + \Omega_a A'^2 \cdot \frac{2}{3} m_a - \frac{1}{3} m_a \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot m_a$$

ёки

$$\Omega_a G^2 = \frac{1}{3}(p^2 + r_a^2) + \frac{2}{3}\left[r_a^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2\right] - \frac{2}{9} m_a^2 = r_a^2 +$$

$$+ \frac{(a+b+c)^2}{12} + \frac{2(b-c)^2}{12} - \frac{2b^2+2c^2-a^2}{18} = \frac{9r_a^2 + 2(a^2+b^2+c^2) - 3(p-a)^2}{9}.$$

Бундан:

$$\Omega_a G = \frac{1}{3}\sqrt{9r_a^2 + 2(a^2+b^2+c^2) - 3(p-a)^2}$$

келиб чиқади.

III. $O\Omega_a^2$ ни топиш керак.

$\Omega_a M$ ва $\Omega_a A$ кесмалар O марказли айлананинг кесувчилари бўлганидан, уларнинг бутун қисмларининг ташқи қисмларига кўпайтмалари тенг, яъни:

$$\Omega_a M \cdot \Omega_a Q = \Omega_a D_1 \cdot \Omega_a A$$

ёки

$$(O\Omega_a + R)(O\Omega_a - R) = A\Omega_a (A\Omega_a - AD_1).$$

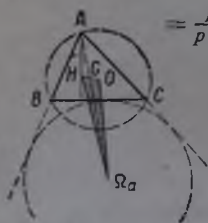
Агарда I қисмдаги (45) ва (88) дан:

$$AD_1 = \frac{b+c}{2}\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$$

нинг қийматини ва 402-масаладан $A\Omega_a$ қийматини қўйсак:

$$O\Omega_a^2 - R^2 = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}\left(\sqrt{\frac{pbc}{p-a}} - \frac{b+c}{2}\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}\right) =$$

$$= \frac{pbc}{p-a} - \frac{bc(b+c)}{2(p-a)} = \frac{abc}{2(p-a)} = 2\frac{abc}{4S}\cdot\frac{S}{p-a} = 2Rr_a.$$



210-шакл.

Демак,

$$O\Omega_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

IV. $H\Omega_a$ ни топиш учун шаклни қайтадан чизамиз (210-шакл). Стюарт теоремасини татбиқ этиш учун $H\Omega_a O$ учбурчакда $\Omega_a G$ тўғри чизиқни ўтказсак

$$\Omega_a G^2 \cdot OH = H\Omega_a^2 \cdot OG + O\Omega_a^2 \cdot HG - OH \cdot GH \cdot OG$$

ёки

$$\Omega_a G\cdot OH = H\Omega_a^2\cdot\frac{1}{3}OH + O\Omega_a^2\cdot\frac{2}{3}OH - \frac{2}{9}OH^3.$$

Бу тенгликни OH га қисқартириб, учга кўпайтириш билан $H\Omega_a^2$ ни топсак:

$$H\Omega_a^2 = 3\cdot\Omega_a G^2 + \frac{2}{3}OH^2 - 2O\Omega_a^2,$$

бундан:

$$H\Omega_a^2 = \frac{1}{3}[9r_a^2 + 2(a^2+b^2+c^2) - 3(p-a)^2] + \frac{2}{3}[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] - 2R^2 - 4Rr_a = 3r_a^2 + 4R^2 - (p-a)^2 - 4Rr_a.$$

Агарда бу ифодадан $r_a^2 - (p-a)^2 - 4Rr_a^2$ ни ажратиб шаклини алмаштирсак:

$$r_a^2 - (p-a)^2 - 4Rr_a = \frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)} - (p-a)^2 - \frac{abc}{p-a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

(бу ерда $a(p-b)(p-c) - abc = -ap(p-a)$ га келтирилди). Демак,

$$H\Omega_a^2 = 3r_a^2 + 4R^2 - (p-a)^2 - 4Rr_a = 4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

бундан:

$$H\Omega_a = \sqrt{4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

404. Ечиш. 403-масаланинг ечимига кўра:

1) $G\Omega_a^2\cdot HO = H\Omega_a^2\cdot\frac{1}{3}HO + O\Omega_a^2\cdot\frac{2}{3}HO - \frac{2}{9}HO^3$ олинади ёки, бундан:

$$G\Omega_a^2 = \frac{1}{3}H\Omega_a^2 + \frac{2}{3}O\Omega_a^2 - \frac{2}{9}HO^2$$

олсак, 403-масаладан:

$$H\Omega_a^2 = 4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

бўлади.

2) $O\Omega_a^2 = R^2 + 2Rr$ (403-масаладан).

3) $HO^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$ (399-масаладан) қийматлар келтириб қўйилса:

$$G\Omega_a^2 = \frac{1}{3}\left[4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right] + \frac{2}{3}(R^2 + 2Rr_a) - \frac{2}{9}[9R^2 - (a^2+b^2+c^2)]$$

ёки

$$9G\Omega_a^2 = 3\left(4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) + 6(R^2 + 2Rr_a) -$$

$$-2[9R^2 - (a^2+b^2+c^2)] = 12R^2 + 6r_a^2 - \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) +$$

$$+ 6R^2 + 12Rr_a - 18R^2 + 2(a^2+b^2+c^2) = 6r_a^2 +$$

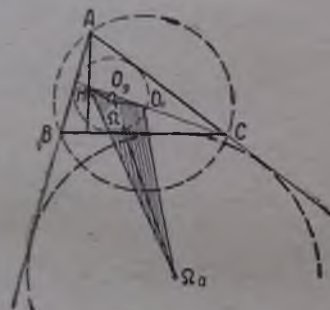
$$+ \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 12Rr_a = 6r_a^2 + (p^2 - r^2 - 4Rr) + 12Rr_a =$$

$$= p^2 + 6r_a^2 - r^2 + 4R(3r_a - r)$$

(357-масалада $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 = 8Rr$). Демак,

$$9G\Omega_a^2 = p^2 + 6r_a^2 - r^2 + 4R(3r_a - r)$$

келиб чиқади.



211-шакл.

405. Ечиш (211-шакл). Тўққиз нуқта айланасининг маркази O_9 учбурчак баландликларининг кесишган нуқтаси (H) билан ташқи чизилган айлана маркази (O) оралигида ётади. Биз излаган ΩO_9 кесма $H\Omega O$ учбурчакнинг медианасидан иборат, шунинг учун:

$$\Omega O_9^2 = \frac{2H\Omega^2 + 2O\Omega^2 - OH^2}{4} =$$

$$= \frac{[8R^2 + 4r^2 - (a^2+b^2+c^2)] + (2R^2 - 4Rr) - [9R^2 - (a^2+b^2+c^2)]}{4} =$$

$$= \frac{R^2 - 4Rr + 4r^2}{4} = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

Бундан:

$$\Omega O_9 = \frac{R}{2} - r.$$

406. Ечиш (405-масала шаклидан фойдаланамиз). $\Omega_a HO$ учбурчакдан $\Omega_a O_9$ медиана бўлганидан:

$$\Omega_a O_9 = \frac{2H\Omega_a^2 + 2O\Omega_a^2 - OH^2}{4}.$$

Учбурчакнинг ортомаркази билан ташқи чизилган айлана маркази орасидаги HO масофани излашда (396-масалада) I қисм, 39-масаладаги

$$OG=\frac{1}{3}\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}$$

ни 393-масаладаги $HO=3OG$ га қўйсак:

$$HO=\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}.$$

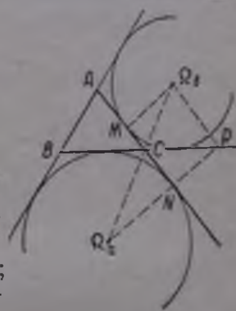
$O\Omega_a^2$ ва $H\Omega_a^2$ ларнинг қиймати 403-масаладан келтириб ёзилса:

$$\Omega_aO_9^2=\frac{[8R^2+4r^2-(a^2+b^2+c^2)]+(2R^2+4Rr_a)-[9R^2-(a^2+b^2+c^2)]}{4}=$$

$$=\left(\frac{R}{2}+r\right)^2,$$

бундан:

$$\Omega_aO_9=\frac{R}{2}+r.$$



212-шакл.

407. $A\Omega_a=\sqrt{\frac{pbc}{p-a}}$. *Кўрсатма.* Бу масалани ечишда 403-масаланинг 1-қисмидан фойдаланамиз.

408. Ечиш (212-шакл). 1) $AM=p-c$; $AN=p$; $\Omega_bP=MN=AN-AM=p-(p-c)=c$; яъни:

$\Omega_bP=c$. $\Omega_aP=\Omega_aN+M\Omega_b=r_a+r_b$, яъни:

$$\Omega_aP=r_a+r_b.$$

2) $\Omega_a\Omega_b\,P$ учбурчакдан

$$\Omega_a\Omega_b^2=\Omega_aP^2+\Omega_bP^2,$$

яъни:

$$\Omega_a\Omega_b^2=(r_a+r_b)^2+c^2.$$

409. I. 385 ва 405-масалаларга асосан $r_a+r_b+r_c=4R+r$ ни ёки $r_a+r_b+r_c-r=4R$ ни олиб, икки томонини квадратга кўтариб, $(r_a+r_b+r_c-r)^2=16\ R^2$ ни оламиз. Бундан:

$$r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2+2(r_ar_b-rr_c)+2(r_br_c-rr_a)+2(r_ar_c-rr_b)=$$
$$=16R^2. \qquad (1)$$

351-масалада олинган натижадан

$$\left.\begin{aligned}2(r_ar_b-rr_c)&=a^2+b^2-c^2\\2(r_br_c-rr_a)&=-a^2+b^2+c^2\\2(r_cr_a-rr_b)&=a^2-b^2+c^2\end{aligned}\right\}$$

ларни ёза оламиз. Буларни юқоридаги (1) га қўйиб, сўнгра ихчамласак:

$r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2+(a^2+b^2-c^2)+(-a^2+b^2+c^2)+(a^2-b^2+c^2)=16R^2$ ёки $r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=16\,R^2-(a^2+b^2+c^2)$ келиб чиқади.

II. Энди биз 397-масаладан:

$O_1G = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3p^2}$ ва 403-масаладан

$\Omega_a G = \frac{1}{3}\sqrt{9r_a^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3(p - a)^2}$ ни олсак, аналогия билан

$$O_1G^2 + \Omega_a G^2 + \Omega_b G^2 + \Omega_c G^2 = r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + \frac{8}{9}(a^2+b^2+c^2) -$$

$$- \frac{1}{3}\left[p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2\right] =$$

$$= 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{8}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{3}\left[4p^2 - 2p(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2\right] = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{8}{9}(a^2 + b^2 + c^2) -$$

$$- \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{3}(4p^2 - 4p^2) = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

яъни $O_1G^2 + \Omega_a G^2 + \Omega_b G^2 + \Omega_c G^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ келиб чиқади.

410. $HO_1^2 + H\Omega_a^2 + H\Omega_b^2 + H\Omega_c^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

Юқоридаги 401-масаладаги $HO_1 = \sqrt{4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$ ва 403-масаладаги $H\Omega_a = \sqrt{4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$ ҳамда 409-масаладаги (1) тенгликдан фойдалансак, $HO_1^2 + H\Omega_a^2 + H\Omega_b^2 + H\Omega_c^2 = 4R^2 + 2r^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 4R^2 + 2r_a^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 4R^2 + 2r_b^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 4R^2 + 2r_c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 16R^2 + 2(r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 16R^2 + 32R^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$.

Шу билан

$$HO_1^2 + H\Omega_a^2 + H\Omega_b^2 + H\Omega_c^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

келиб чиқади.

411. Ўтган 405 ва 406-масалалардан фойдаланиб 9 нуқта айланаси, ички чизилган айланага ва учта ташқи-ички чизилган айланага уринишини шундай кўрсатамиз:

1) Ҳақиқатан 405-масалада $\frac{R}{2} - r$ ички чизилган айлана билан 9 нуқта айланасининг марказлари орасидаги масофадан иборатдир.

$\frac{R}{2}$ бўлса, 9 нуқта айланасининг радиуси бўлиб, r — ички чизилган айлана радиусидир. Биз $\frac{R}{2}$ ни ρ билан ифодаласак, $\frac{R}{2} - r = \rho - r$ бўлади. Бу икки айлананинг ички уриниш шартидан иборат бўлади, яъни ички чизилган айлана 9 нуқта айланасига ички уринган бўлади, яъни $O_9O_1 = \rho - r$ бўлади.

2) 406-масалада топилган миқдор 9 нуқта айланаси билан ташқи-ички уринувчи айланалар марказлари орасидаги масофадан иборат бўлиб у $\frac{R}{2} + r$ ёки I ҳолдаги шарт бўйича $\rho + r$ бўлади. Бу ҳолат ташқи-ички уринувчи айланада бўлади. Демак, $\Omega_a O_9 = \rho + r$, яъни ташқи-ички уринувчи айлана 9 нуқта айланасига ташқи уринади

412. $\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}$ ифодани ўзгартириб ёзамиз:

$$1)\ \frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{ar_br_c + br_ar_c + cr_ar_b}{r_a\cdot r_b\cdot r_c} =$$

$$= \frac{\frac{aS^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{bS^2}{(p-a)(p-c)} + \frac{cS^2}{(p-a)(p-b)}}{\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}} =$$

$$= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}\left[\frac{a}{(p-b)(p-c)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{c}{(p-a)(p-b)}\right] =$$

$$= \frac{a(p-a) + b(p-b) + c(p-c)}{S} = \frac{p(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2)}{S} =$$

$$= \frac{2p^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr)}{S} = \frac{2r^2 + 8Rr}{S} = \frac{2r}{S}(r + 4R).$$

2) 385-масалага асосан:

$$\frac{a+b+c}{r_a + r_b + r_c} = \frac{2p}{4R + r}.$$

У ҳолда:

$$3)\qquad \left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\right) = \frac{2r}{S}(4R + r)\ \frac{2p}{4R + r} =$$

$$= \frac{4pr}{S} = \frac{4S}{S} = 4.$$

Демак,

$$\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} = \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\right) = 4$$

бўлиб, тенгликнинг тўғрилиги исбот этилди.

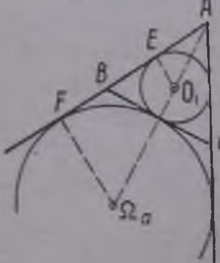
414. Ечиш (213-шакл 1) Ички чизилган айлананинг маркази O_1 ва ташқи-ички чизилган айлана маркази Ω_a бўлса, бу марказларни учбурчакнинг A учи билан туташтирсак, бунда

$O_1\Omega_a = A\Omega_a - AO_1 = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}} - \frac{l_a(b+c)}{2p}$ (AO_1 ва $A\Omega_a$ лар 413-масала ҳамда I қисм 41-масаладан аниқланади).

Шундан:

$$O_1\Omega_a = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}} - \frac{l_a(b+c)}{2p} = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}} - \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}} =$$

$$= \frac{a}{p(p-a)}\sqrt{pbc(p-a)}$$



213-шакл.

(I қисм, 42-масалада кўрсатилганча:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}\Big).$$

2) Шунга ўхшаш муҳокама билан:

$$O_1\Omega_a \cdot O_1\Omega_b \cdot O_1\Omega_c =$$

$$= \frac{a}{p(p-a)}\sqrt{pbc(p-a)} \cdot \frac{b}{p(p-b)}$$

$$\sqrt{pac(p-b)} \cdot \frac{c}{p(p-c)}\sqrt{pab(p-c)} =$$

$$= \frac{a^2b^2c^2p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^3(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2b^2c^2S}{pS^2} = 16\left(\frac{abc}{4S}\right)^2 \cdot \frac{S}{p} = 16R^2r.$$

416. Ечиш. 408-масаладан $\Omega_a\Omega_b^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2$, бундан: $\Omega_a\Omega_b^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2 = \left(\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b}\right)^2 + c^2 =$

$$= S^2\left[\frac{2p-(a+b)}{(p-a)(p-b)}\right] + c^2 = \frac{c^2p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)} + c^2 =$$

$$= \frac{4abc^2}{4(p-a)(p-b)}, \text{ яъни:}$$

$$\Omega_a\Omega_b = \sqrt{\frac{abc^2}{(p-a)(p-b)}}.$$

Шунга ўхшаш:

$$\Omega_a\Omega_c = \sqrt{\frac{ab^2c}{(p-a)(p-c)}}; \quad \Omega_b\Omega_c = \sqrt{\frac{a^2bc}{(p-b)(p-c)}}.$$

Булардан:

$$\Omega_a\Omega_b \cdot \Omega_a\Omega_c \cdot \Omega_b\Omega_c = \sqrt{\frac{a^4b^4c^4}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}} =$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{pa^2b^2c^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

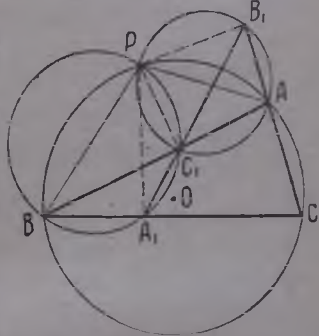
$$= \frac{p(abc)^2}{S^2} = 16p\left(\frac{abc}{4S}\right)^2 = 16pR^2.$$

418. Ечиш (214-шакл). 1) ABC учбурчакка ташқи чизилган O марказли айлана устидаги P нуқтадан AB, BC ва AC

томонларга $PA_1 \perp BC$; $PC_1 \perp AB$ ва $PB_1 \perp AC$ перпендикулярларни ўтказамиз. Унда PB_1AC_1 ва PBA_1C_1 тўртбурчаклар ҳосил бўлади.

Бу тўртбурчакларда $\angle PB_1A$ ва $\angle PC_1A$ лар $90°$ ли қарама-қарши бурчаклар бўлиб, йиғиндиси $180°$ бўлганидан PB_1AC_1 тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин. Худди шу йўл билан PBA_1C_1 тўртбурчакка ҳам ташқи айлана чизиш мумкин ($\angle BC_1P$ ва $\angle BA_1P$ лар $90°$ ли).

2) Энди биз PB_1AC_1 тўртбурчакда B_1C_1 ва PA диагоналларни ўтказиб, учбурчаклар ҳосил қиламиз. Худди шу йўлда PBA_1C_1 тўртбурчакда BC_1 ва PA_1 диагоналлари орқали учбурчаклар ҳосил қилинади.



214-шакл.

3) APB_1 ва AC_1B_1 учбурчакларда $\angle AC_1B_1 = \angle APB_1$ (улар $\smile AB_1$ нинг ярми билан ўлчанади). Шу хилда BPA_1 ва BC_1A_1 учбурчакларда $\angle BPA_1 = \angle BC_1A_1$ (улар $\smile A_1B$ нинг ярми билан ўлчанади).

4) Бизга $\angle APB_1$ ва $\angle A_1PB$ ларнинг тенглигини исбот қилиш керак. PB_1CA_1 тўртбурчакда $\angle PB_1C = \angle PA_1C = 90°$ бўлганидан қолган икки қарама-қарши бурчак ($\angle A_1PB_1 + \angle A_1CB_1 = 180°$), яъни бошқа PB_1CA тўртбурчакда $\angle C + \angle B_1PA_1 = 180°$, шундан $\angle BPA = \angle A_1PB_1$ келиб чиқади. Бу тенг бурчакларни бошқача ёзсак,

$$\left.\begin{array}{l}\angle BPA = \angle A_1PA + \angle BPA_1 \\ \angle A_1PB_1 = \angle APB_1 + \angle A_1PA\end{array}\right\} \quad \text{бўлади,}$$

яъни:

$$\angle A_1PA + \angle BPA_1 = \angle APB_1 + \angle A_1PA$$

ёки

$$\angle BPA_1 = \angle APB_1$$

келиб чиқади.

5) Шунга қараганда $\angle B_1PA = \angle BPA_1 + \angle B_1C_1A = \angle BC_1A$. Демак, учлари бир нуқтада бўлиб, бир томони бир тўғри чизиқда ётган икки тенг бурчак $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$ бўлганидан, уларнинг иккинчи томонлари ҳам бир тўғри чизиқ устида ётиши керак бўлиб, учта перпендикулярларнинг A_1, C_1 ва B_1 асослари бир тўғри чизиқ устида жойлашади.

419. Ечиш. Бу ерда $d = OO_1$; $d_a = O\Omega_a$; $d_b = O\Omega_b$; $d_c = O\Omega_c$.

1) 397-масаладан $d^2 = OO_1^2 = R^2 - 2Rr$;

2) 403-масаладан $d_a^2 = O\Omega_a^2 = R^2 + 2Rr_a;$

$$d_b^2 = O\Omega_b^2 = R^2 + 2Rr_b;$$

$$d_c^2 = O\Omega_c^2 = R^2 + 2Rr_c.$$ Булардан:

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d^2 = 4R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c - r) =$$

$$= 4R^2 + 2R\left(\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p}\right) = 4R^2 +$$

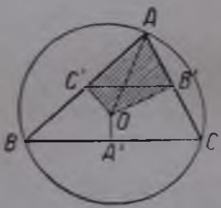
$$+ \frac{2R}{S}[p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) -$$

$$- (p-a)(p-b)(p-c)] = 4R^2 + \frac{2R}{S}\{p(p-c)[2p-b-a] +$$

$$+ (p-a)(p-b)[p-p+c]\} = 4R^2 + \frac{2Rc}{S}[p^2 - pc + p^2 -$$

$$- p(a+b) + ab] = 4R^2 + \frac{2Rc}{S}(2p^2 - 2p^2 + ab) = 4R^2 + \frac{2abcR}{S} =$$

$$= 4R^2 + 8R\cdot\frac{abc}{4S} = 12R^2.$$



215-шакл.

Демак, $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2$ келиб чиқади.

420. *Кўрсатма.* 399 ва 419-масалаларга қаранг.

421. Ечиш (215-шакл). Ташқи чизилган айлана марказидан учбурчак томонларига $OA' = k_a$, $OB' = k_b$, $OC' = k_c$ перпендикулярларни ўтказамиз, бунда ҳосил бўлган тўртбурчакларда Птоломей теоремасини татбиқ этсак:

$AB'OC'$ тўртбурчакда: $k_b\cdot\frac{c}{2} + k_c\frac{b}{2} = R\frac{a}{2}$ ёки $c\cdot k_b + bk_c = aR$. Шунга ўхшаш:

$$ak_b + bk_a = cR \text{ ва } ck_a + ak_c = bR,$$

буларнинг шаклини алмаштириш билан:

$$bk_c + ck_b + ak_a - ak_a = aR,$$
$$ck_a + ak_c + bk_b - bk_b = bR,$$
$$ak_b + bk_a + ck_c - ck_c = cR.$$

Буларни бирга қўшсак:

$$2p(k_a + k_b + k_c) - ak_a - bk_b - ck_c = 2pR.$$

Шаклдан маълум бўлишича:

$$ak_a + bk_b + ck_c = 2S.$$

Бунинг қийматини ўрнига қўйсак:

$$2p(k_a + k_b + k_c) - 2S = 2pR$$

ёки

$$k_a + k_b + k_c - \frac{S}{p} = R,$$

ёки

$$k_a + k_b + k_c - r = R,$$

ёки

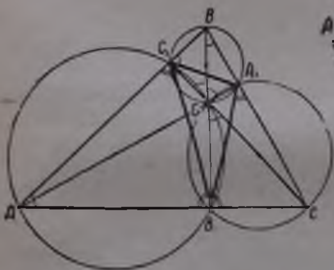
$$k_a + k_b + k_c = R + r.$$

Сўнгра 393-масала иловасидаги $h_a = 2k_a$ муносабатга кўра:

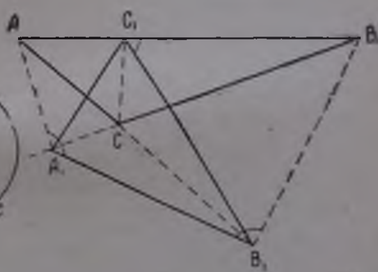
$$h_a + h_b + h_c = 2(R + r).$$

422. *Кўрсатма.* 351 ва 409-масалаларга қаранг.

423. *Кўрсатма.* Бир учбурчакнинг бир бурчаги билан иккинчи учбурчакнинг бир бурчаги йиғиндиси 180° бўлган икки учбурчак юзларининг нисбатидан фойдаланамиз.



216-шакл.



216-а шакл.

424. Ечиш (216-шакл). Берилган ABC учбурчакнинг A, B ва C учларидан қаршисида ётган томонларга перпендикулярлар ўтказамиз. Бу перпендикулярларнинг асослари тўғри чизиқлар орқали туташтирилса, янги $A_1B_1C_1$ учбурчак ҳосил бўлади. Бу учбурчакка ҳозирги AA_1, BB_1 ва CC_1 тўғри чизиқ кесмалари биссектриса бўлишини исбот қилиш керак.

I. AC_1GB_1, B_1GA_1C ва A_1GC_1B тўртбурчаклар қарама-қарши икки бурчаги тўғри бурчак бўлганидан уларга ташқи айланалар чизиш мумкин, яъни ҳар бир тўртбурчак ички чизилган тўртбурчак бўлади. Шунга кўра:

$\angle AGC_1 = \angle AB_1C_1$ (чунки $\smile AC_1$ нинг ярми билан ўлчанади).

$\angle CGA_1 = \angle CB_1A_1$ ($\smile A_1C$ нинг ярми билан ўлчанади).

$\angle AGC_1 = \angle A_1GC$ (вертикал бурчаклар бўлганидан).

Шунга асосан $\angle AB_1C_1 = \angle CB_1A_1$ келиб чиқади. AC томонга BB_1 перпендикуляр бўлганидан $\angle BB_1C = \angle BB_1A = 90°$ бўлиб, бу тенг бурчаклардан бошқа тенг бурчаклар айирилса, унда яна айирмалар тенг бўлади: $\angle BB_1A - \angle AB_1C_1 = \angle BB_1C - \angle CB_1A_1$, яъни $\angle C_1B_1B = \angle BB_1A_1$ бўлиб, BB_1 тўғри чизиқ $\angle A_1B_1C_1$ га биссектриса бўлади.

Қолган иккита ички чизилган тўртбурчакдан фойдаланиб, AA_1 ва CC_1 ларнинг ҳам $A_1B_1C_1$ учбурчак учун биссектриса бўлишини исбот қила оламиз. AA_1, BB_1, CC_1 баландликлар $A_1B_1C_1$ учбурчак бурчаклари учун ички биссектрисалар бўлиши шарт эмас. Масалан, 416-*a* шаклда AA_1, BB_1 баландликлар мос бурчакларнинг ташқи биссектрисалари, CC_1 эса ички биссектрисадир.

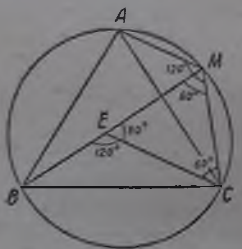
425. 400-масаланинг ечимига ва 42-масалага кўра:

$$AO_1 = \frac{l_a(b+c)}{2p} = \frac{1}{b+c}\sqrt{4bcp(p-a)}\,\frac{b+c}{2p} = \sqrt{bc\frac{p-a}{p}},$$

шунга ўхшаш:

$$BO_1 = \sqrt{ac\cdot\frac{p-b}{p}};\quad CO_1 = \sqrt{ab\cdot\frac{p-c}{p}}.$$

426. Ечиш (217-шакл). ABC учбурчакда $AB = BC = AC$ ва учбурчакка ташқи чизилган айланада M нуқта берилган. Бу M нуқтадан MA, MB ва MC кесмалар ўтказилган. Шунда $MB > MA$, $MB > MC$ ва $MB = MA + MC$ бўлишини исбот қиламиз.



217-шакл.

Исбот. $AB = BC = AC = a$; $MC = b$, $MA = c$ ва $MB = d$ десак, унда MB кесма устида $ME = MC$ кесма олиб, E ни C билан бирлаштирсак, MEC учбурчак ҳосил бўлади. MEC учбурчакда $ME = MC = b$ бўлганидан тенг ёнли учбурчак асосига ёпишган бурчаклар ўзаро тенг бўлганидан $\angle MEC = \angle ECM$. Ундан ташқари $\angle BMC = 60°$, чунки у, $\smile BC = 120°$ ёйга тиралади. Шундан $\angle MCE = \angle MEC = 60°$ бўлиб, $\angle CEB = 120°$ бўлади. 240° ли ёйга тиралгани учун $\angle AMC = 120°$. Биз AMC ва BEC учбурчакларни текширсак, улар тенг бўлади, чунки $AC = BC = a$; $MC = EC = b$; $\angle MAC = \angle MBC$ ($\smile MC$ нинг ярми билан ўлчанади) бўлганидан бу иккала учбурчак бир-бирига тенг бўлади. Шундан $BE = MC = c$ олинади. $MA = EB$; $MC = ME$ тенгликларни тараф-тарафига қўшсак, унда $AM + MC = BE + EM = MB$ олинади. Биз мана шу тенгликни излаган эдик.

427. Ечиш (218-шакл).

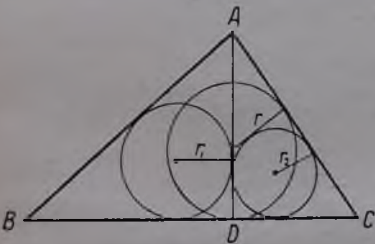
$\triangle ABC \backsim \triangle ABD \backsim \triangle ACD$. Бундан $\frac{AB}{BC} = \frac{r_1}{r}$; $\frac{AC}{BC} = \frac{r_2}{r}$, буларни квадратга кутариб, ҳадма-ҳад қушсак:

$$\frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1, \text{ яъни } \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 =$$

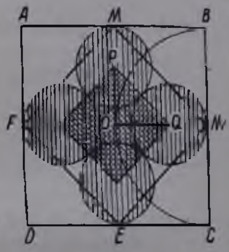
$$= \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} = 1; \text{ бундан:}$$

$r_1^2 + r_2^2 = r^2$ бўлиб, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ келиб чиқади.

428. *Кўрсатма.* 393-масалага қаранг.



218-шакл.



219-шакл.

430. Е ч и ш (219-шакл). 1) Берилган катта квадратнинг томони 1 га тенг бўлса, унда ўртача квадратнинг томони $\frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлиб, унинг юзи $= \frac{1}{2}$, яъни $S_1 = \frac{1}{2}$ бўлади.

2) Кичик айланаларнинг радиусларини r деб олсак, $PQ = 2r$, $OP = r\sqrt{2}$. $OM = OP + r = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1)$, яна $OM = \frac{1}{2}$ бўлганидан $r\ (\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{2}$;

$$r = \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}. \text{ Бундан } r^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} \text{ бўлади.}$$

3) $S_{\text{кич. кв.}} = PQ^2 = 4r^2 = 4\,\frac{3-2\sqrt{2}}{4} = 3 - 2\sqrt{2}$.

$$4)\quad \frac{S_1}{S_{\text{кич. кв.}}} = \frac{1}{2} : (3 - 2\sqrt{2}) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{S_1}{S_{\text{кич. кв.}}} =$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2}) \text{ олинади.}$$

432. I қисмдаги III дан r_a, r_b, r_c ларнинг қийматларини олиб исбот қилинаётган тенгликнинг чап томонга қўямиз. У ҳолда

$$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c + \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{S^2}{(p-a)(p-c)} + $$
$$+ \frac{S^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{S^2[(p-c)+(p-b)+(p-a)]}{(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{S^2[3p-(a+b+c)]}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2(3p-2p)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^2 p}{(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{S^2p^2}{S^2} = p^2$$

бўлиб, тенгликларнинг тўғрилиги исбот этилади.

433. *Кўрсатма.* $r = \frac{S}{p}$.

434. Ечиш. $R = \frac{abc}{4S}$ ва $r = \frac{S}{p}$ га асослансак:

$$\frac{R}{r} = \frac{abc}{4S} : \frac{S}{p} = \frac{pabc}{4S^2} = \frac{p^3 Sabc}{4S^3p^2} = \frac{Sabc}{4p^2 \cdot \frac{S^3}{p^3}} = \frac{Sabc}{4p^2r^3} = \frac{S^3abc}{4p^2S^2r^3} =$$
$$= \frac{1}{4r^3}\left[\frac{S^3abc}{p^2 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}\right] = \frac{1}{4r^3}\left[\frac{aS}{p(p-a)} \cdot \frac{bS}{p(p-b)} \times\right.$$
$$\left.\times \frac{cS}{p(p-c)}\right] = \frac{1}{4r^3}\left[\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p}\right] \cdot \left[\frac{S}{p-b} - \frac{S}{p}\right] \cdot \left[\frac{S}{p-c} - \frac{S}{p}\right] =$$
$$= \frac{1}{4r^3}(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_a - r}{r} \cdot \frac{r_b - r}{r} \cdot \frac{r_c - r}{r} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right).$$

435. *Кўрсатма.* a ни ёрдамчи ифода $\left[a = a + 2p - 2p = \frac{S^2(2p + a - 2p)}{S^2} = \ldots\right]$ билан алмаштирамиз.

436. $\frac{3}{16}R$; $0{,}2R\sqrt{15}$.

437. *Кўрсатма.* **407**-масалага қаранг.

438. *Кўрсатма.* **397**-масалага қаранг.

439. $\frac{1}{4}r^2$.

440. 1) $\Omega_a\Omega_b^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2$ (**408**-масалага қаранг).

2) $$r_a r_b\sqrt{\frac{(r_a+r_b)^2 + c^2}{(r_a+r_b)^2} - 1} = r_a r_b\sqrt{\frac{(r_a+r_b)^2}{(r_a+r_b)^2} + \frac{c^2}{(r_a+r_b)^2} - 1} =$$
$$= r_a r_b\sqrt{1 + \frac{c^2}{(r_a+r_b)^2} - 1} = \frac{r_a r_b c}{r_a + r_b} = \frac{\frac{cS^2}{(p-a)(p-b)}}{S\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b}\right)} =$$
$$= \frac{cS}{2p-a-b} = \frac{cS}{c} = S$$ олинади. Шу билан $S = r_a r_b\sqrt{\frac{\Omega_a\Omega_b^2}{(r_a+r_b)^2} - 1}$ келиб чиқади.

441. m_a медиананинг асоси A_1 дан AB ва AC томонларга перпендикулярлар туширамиз. ABA_1 ва ACC_1 учбурчакларнинг тенгдошлигидан фойдаланамиз.

442. *Кўрсатма.* 432-масалага қаранг.

445. $AB = BC = \frac{2R(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}$; $AC = 2R(\sqrt{3}+2)$.

446. $O_1O_2 = 9$ *см.*

447. $S = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}$.

448. 1) $(r_a + r_c)(r_c + r_b)(r_a + r_b) = \left(\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-a}\right)\left(\frac{S}{p-c} + \right.$

$$\left. + \frac{S}{p-a}\right)\left(\frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b}\right) = S^3\left[\frac{p-c+p-b}{(p-b)(p-c)}\right]\left[\frac{p-a+p-c}{(p-a)(p-c)}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{p-b+p-a}{(p-a)(p-b)}\right] = S^3\frac{(2p-2p+a)(2p-2p+b)(2p-2p+c)}{(p-b)^2(p-c)^2(p-a)^2} =$$

$$= S^3\frac{abc}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} = \frac{p^2S^3abc}{p^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} =$$

$$= \frac{p^2S^3abc}{S^4} = \frac{p^2abc}{S}.$$

2) $r_br_c + r_ar_c + r_ar_b = p^2$ (432-масалага қаранг).

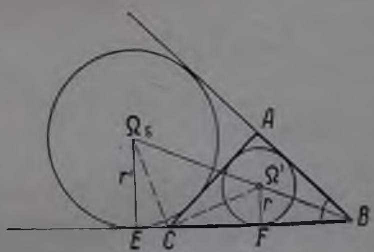
3) $\frac{(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b)}{r_br_c + r_cr_a + r_ar_b} = \frac{\frac{p^2abc}{S}}{p^2} = \frac{abc}{S} = 4\frac{abc}{4S} = 4R$,

бўлиб, айният тўғрилиги исбот қилинади.

449. *Кўрсатма.* I қисм § 10 даги 6 га қаранг.

450. $AA_1 = \frac{4m_a^2 + a^2}{4m_a}$.

Кўрсатма. Айлана ичида олинган бир нуқтадан ўтган ватарлар кесмаларини қаранг.



220-шакл.

451. Ечиш (220-шакл). Мос томонлари перпендикуляр бўлган тўғри бурчакли учбурчаклар бўлганидан $\triangle E\Omega_bC \backsim \triangle C\Omega F$

$$\frac{\Omega_bE}{EC} = \frac{CF}{F\Omega} \text{ ёки } \frac{r'}{y} = \frac{x}{r}; \quad y = \frac{rr'}{x}. \qquad (1)$$

$$(y = EC;\ x = CF;\ CB = 2x).$$

Шунинг каби $\triangle B\Omega F \backsim \triangle B\Omega_bE$ бўлганидан

$$\frac{BF}{BE} = \frac{\Omega F}{\Omega_bE}, \quad \frac{x}{2x+y} = \frac{r}{r'},$$

бундан

$$y = \frac{x(r' - 2r)}{r}. \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгликлардан

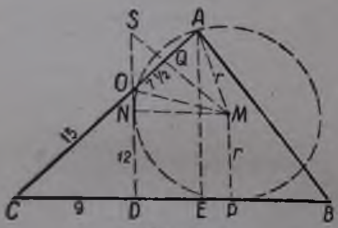
$$\frac{rr'}{x} = \frac{x(r'-2r)}{r},$$

бундан

$$x = r'\sqrt{\frac{r'}{r' - 2r}},$$

бинобарин:

$$BC = 2r\sqrt{\frac{r'}{r' - 2r}}.$$



221-шакл.

452. *Кўрсатма.* I қисм § 1 даги III формула ва 351, 443 ва 444-масалаларга қаранг.

453. *Кўрсатма.* Ёрдамчи кўпайтувчилар билан ифоданинг шаклини алмаштирамиз. Масалан:

$$h_a h_b = \frac{ah_a \cdot bh_b}{ab} = \frac{4S^2}{ab} \text{ каби.}$$

454 Ечиш (221-шакл). Учбурчакнинг A учидан асосига AE перпендикуляр туширсак:

$$AE = h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{28}\sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 24.$$

Учбурчак AC томонининг айланада ётувчи ўртаси O нуқтадан туширилган перпендикуляр

$$OD = \frac{1}{2}h_a = 12 \ (AO = OC = 15).$$

OCD учбурчакдан: $CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$

$MQ \perp AO$ булганидан: $OQ = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}\cdot 15 = 7\frac{1}{2}.$

Учбурчакларнинг томонлари бир-бирига перпендикуляр ёки параллел бўлганидан $\triangle COD \backsim \triangle SOQ \backsim \triangle SMN$; бунга асосан:

$$OS = \frac{75}{8}.$$

$$ON = OD - ND = 12 - r.$$

$$SN = SO + ON = \frac{75}{8} + 12 - r = \frac{171}{8} - r.$$

$\triangle CDO \backsim \triangle SNM$ дан $\frac{MN}{NS}=\frac{OD}{CD}=\frac{4}{3}$ ёки $MN = NS\cdot\frac{4}{3}$,

$$\text{ёки}\quad MN=\left(\frac{171}{8}-r\right)\cdot\frac{4}{3}=\frac{57}{2}-\frac{4}{3}r.$$

$\triangle MON$ дан $OM^2 = MN^2 + ON^2$ ёки $(12-r)^2+\left(\frac{57}{2}-\frac{4}{3}\right)^2=r^2$.

Бундан $16r^2 - 2\cdot 450\,r + 9\left(144+\frac{57^2}{4}\right)=0$ бўлиб,

$$r_{1,2}=\frac{450\pm\sqrt{450^2-16\cdot 9\left(144-\frac{57^2}{4}\right)}}{16}=\frac{45(5\pm 2\sqrt{2})}{8}.$$

455. Ечиш (222-шакл). Изланган учбурчак юзини S_a десак, бу жойда $c=R_1+R_2$; $b=R_1+R_3$; $a=R_2+R_3$ бўлганидан 90-масалага биноан

$$u=\frac{R_1}{R_2},\quad v=\frac{R_2}{R_3},\quad w=\frac{R_3}{R_1}$$

бўлиб ва $S_{MNP}=S_a$ нинг икки хил кўринишидаги қийматидан:

1) $S_a=\frac{(1+uvw)\,S}{(1+u)(1+v)(1+w)}$ га асосан

$$S_a=\frac{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2}{R_3}\cdot\frac{R_3}{R_1}\right)S}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)\left(1+\frac{R_3}{R_1}\right)}=2\cdot\frac{R_1R_2R_3}{abc}=S$$

ёки

$$\frac{S_a}{S}=2\cdot\frac{R_1R_2R_3}{abc}. \qquad \text{(I)}$$

2) $S_a=S\left[1-\frac{u(1+v)+v(1+w)+w(1+u)}{(1+u)(1+v)(1+w)}\right]$

ёки

$$S_a=S\left[1-\frac{\frac{R_1}{R_2}}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)}-\frac{\frac{R_2}{R_3}}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{R_3}{R_1}}{\left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)\left(1+\frac{R_3}{R_1}\right)}\right]=S\cdot\left[1-\frac{\frac{R_1}{R_2}}{\frac{bc}{R_1R_2}}-\frac{\frac{R_2}{R_3}}{\frac{ac}{R_2R_3}}-\frac{\frac{R_3}{R_1}}{\frac{ab}{R_1R_3}}\right]=$$

$$=S\left[1-\frac{R_1^2}{bc}-\frac{R_2^2}{ac}-\frac{R_3^2}{ab}\right],$$

ёки бундан:

$$\frac{S_a}{S}=1-\frac{R_1^2}{bc}-\frac{R_2^2}{ac}-\frac{R_3^2}{ab}. \qquad \text{(II)}$$

(I) ва (II) дан масаланинг ечими келиб чиқади.

458. $\frac{b^2}{24}(\sqrt{3}-\pi-6)$.

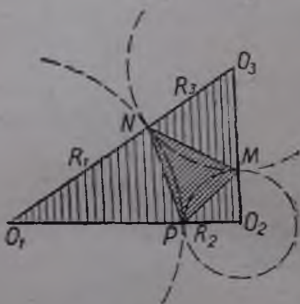
Кўрсатма. Тенг томонли учбурчак томонлари b бўйича секторларнинг юзларини топамиз.

459. $\frac{a}{6}(2\sqrt{3}+9)$; $\frac{a}{6}(2\sqrt{3}-3)$.

460. *Кўрсатма.* Учбурчак томонларининг квадратлари ҳақидаги теорема татбиқ этилади.

461. *Кўрсатма.* 37-шаклдаги AC_1OB_1 туртбурчакдан Птоломей теоремаси бўйича $\frac{b}{2}k_c+\frac{c}{2}k_b=\frac{a}{2}R$, бундан:

$$\frac{c}{a}k_b+\frac{b}{a}k_c=R \text{ ва бошқалар.}$$



222-шакл.

223-шакл.

462. Ечиш (223-шакл)

$$\left.\begin{array}{l}\smile AmB=\alpha\\ \smile AnB=\beta\end{array}\right\}\text{ ва }\left.\begin{array}{l}O'B=r\\ OB=R\end{array}\right\}$$

бўлсин.

$$\angle AO'B=180°-\angle C=120°;\ (\angle C=60°).$$

$\angle AOB=180°-\angle APB=180°-120°=60°$ бўлганидан:

1) $\angle ACB=\frac{360°-2\smile AmB}{2}$ ёки $60°=\frac{360°-2\alpha}{2}$; $\alpha=120°$.

2) $\angle APB=\frac{360°-2\smile AnB}{2}$ ёки $120°=\frac{360°-2\beta}{2}$; $\beta=60°$.

3) $\triangle O'BC$ да $\angle O'CB=30°$; $O'B=\frac{1}{2}O'C$ ва $O'B^2=O'C^2-BC^2$ ёки $r^2=(2r)^2-(2a)^2$; $r=\frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

4) $\triangle OBD$ да $\angle DOB=30°$; $BD=\frac{1}{2}OB$ ва $OB^2=DB^2+OD^2$; ёки бундан $BD=a$; $OB=2a$ бўлганидан $R=2a$.

5) $S_{AmBO'\text{сект.}} = \frac{1}{3} r^2\pi = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} a^2\pi = \frac{4a^2\pi}{9}$

$$S_{AO'B} = \frac{1}{2}\cdot O'D\cdot AB = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$(O'D = \sqrt{r^2 - a^2} = \frac{a}{3}\sqrt{3}).$$

$$S_{AmB\ \text{сегм.}} = S_{AmBO\ \text{сект.}} - S_{\triangle AO'B} = \frac{4}{9} a^2\pi.$$

$$-\frac{a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\pi - 3\sqrt{3}\,a^2}{9}.$$

6) $S_{AnBO\ \text{сект.}} = \frac{1}{6} R^2\pi = \frac{1}{6}\, 4a^2\pi = \frac{2}{3}\, a^2\pi$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\, OD\cdot AB = \frac{1}{2}\, a\sqrt{3}\cdot 2a = a^2\sqrt{3}.$$

$$S_{AnB\ \text{сегм.}} = S_{AnBO\ \text{сект.}} - S_{\triangle AOB} = \frac{2}{3}\, a^2\pi -$$

$$- a^2\sqrt{3} = \frac{2a^2\pi - 3\sqrt{3}\, a^2}{3}.$$

7) $S_{AmBn\ (\text{ойча})} = S_{AmB\ \text{сект.}} - S_{AnB\ \text{сект.}} = \frac{4a^2\pi - 3\sqrt{3}\, a^2}{9} -$

$$-\frac{2a^2\pi - 3\sqrt{3}\, a^2}{3} = \frac{2a^2}{9}\ (3\sqrt{3} - \pi).$$

464. 1) 397 ва 425-масалаларга асосланиб, аналогия билан

$$CO_1 = \sqrt{ab\cdot\frac{p-c}{p}}.$$

2) 403 ва 407-масалаларга асосланиб, аналогия билан $C\Omega_c = \sqrt{\frac{pab}{p-c}}$ ёзамиз. Шунга кўра BO_1 ва $B\Omega_b$ ларни ҳам ёзиб чиқиб, уринларига қўйсак:

$$\frac{CO_1\cdot C\Omega_c}{BO_1\cdot B\Omega_b} = \frac{\sqrt{ab\,\frac{p-c}{b}}\cdot\sqrt{\frac{pab}{p-c}}}{\sqrt{ac\,\frac{p-b}{p}}\cdot\sqrt{\frac{pac}{p-b}}} = \frac{\sqrt{\frac{a^2b^2p\,(p-c)}{p(p-c)}}}{\sqrt{\frac{a^2c^2p(p-b)}{p\,(p-b)}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{a^2c^2}} = \frac{b}{c}.$$

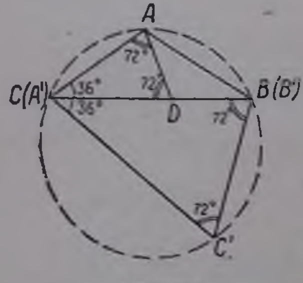
Демак:

$$\frac{CO_1\cdot C\Omega_c}{BO_1\cdot B\Omega_b} = \frac{b}{c}$$

келиб чиқади.

466. Ечиш (224-шакл). Шартда берилганларга кўра $\angle A + \angle B + \angle C = 3\angle B + \angle B + \angle B = 5\angle B = 180°$, бундан $\angle B = \angle C = 36°$, $\angle A = 108°$ ва $\angle B' = \angle C' = 72°$ ларни топамиз.

Шунинг учун $3\angle B' = 216°$ ҳамда $\angle A + \angle C' = 108° + 72° = 180°$. Шунга кўра $ABC'C$ тўртбурчак ташқарисига айлана чизиш мумкин, яъни $R = R'$ бўлади. Агарда $CD = AC = AB$ олинса, бунда $\angle CAD = \angle ADC = 72°$, $\angle DAB = 36°$ ва $\triangle ABD \backsim \triangle ABC$ бўлиб



225-шакл.

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}. \qquad (1)$$

Агарда $AB = CD = x$ бўлса, $BD = a - x$ бўлади. (1) тенгликдан

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$$

ёки

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

ёки

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Бунга асосан

$$h_a = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{4}} = a\,\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

бўлиб,

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Ташқи чизилган айлана радиуси:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\frac{a^3}{4}(6 - 2\sqrt{5})}{a^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} =$$

$$= a\,\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = a\,\frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10}$$

467. $a = 3$; $b = 4$.

468. $a\sqrt{x^2 - a^2} + b\sqrt{x^2 - b^2} + c\sqrt{x^2 - c^2} = \frac{2abc}{x}$ тенглик ҳақида қуйидаги геометрик муҳокамани юритиш мумкин:

1) $\sqrt{x^2 - a^2}$ ифода биронта тўғри бурчакли учбурчакда бир катетнинг қийматини кўрсатади. Бунда x — тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси, a — иккинчи катет бўлади;

2) Учбурчакка ташқи чизилган айлана учун $4k_a^2 = 4R^2 - a^2$ муносабатни биламиз. Бу ерда $2R = x$ гипотенуза, a — бир катет, $2k_a$ — иккинчи катет бўлишига асосланиб, $\sqrt{x^2 - a^2} = 2k_a$ тенгликни ёза оламиз. Ёки $x^2 - a^2 = 4k_a^2$ бўлади. Шунга асосан: $a\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot 2k_a$ десак, аналогия билан $b\sqrt{x^2 - b^2} = b \cdot 2k_b$

ва

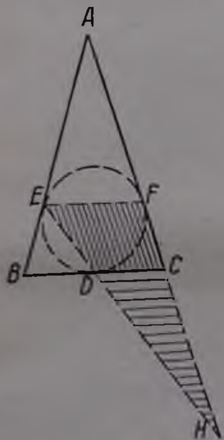
$c\sqrt{x^2-c^2}=c\cdot 2k_c$ бўлади. $a\sqrt{x^2-a^2}+b\sqrt{x^2-b^2}+$
$+c\sqrt{x^2-c^2}=2(ak_a+bk_b+ck_c)=2(2S_1+2S_2+2S_3)=$
$=2\cdot 2S=4S$ (бу ерда $\triangle ABC$ юзи $=S=S_1+S_2+S_3$ йиғиндидан иборат). Демак:

$$a\sqrt{x^2-a^2}+b\sqrt{x^2-b^2}+c\sqrt{x^2-c^2}=4S. \qquad (1)$$

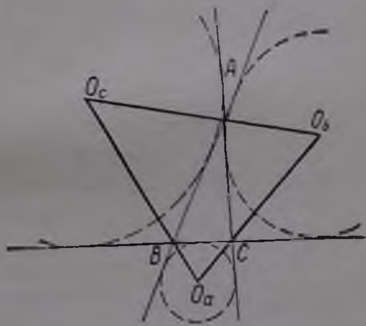
3) $\frac{2abc}{x}=\frac{2abc}{2R}=4\frac{abc}{4R}=4S.$ (2)

Натижада (1) ва (2) тенгликларга асосан бизга керак бўлган айният исбот бўлади.

469. $17\frac{1}{2}$ (225-шакл).



225-шакл.



226-шакл.

470. $\frac{(b+c)^2}{a^2}$.

471. $1\frac{7}{8}$.

472. Ечиш (226-шакл). Шартга асосан $BC=a$; $AB=c=2a$,

$$AC=b=a\sqrt{3} \text{ ва } S=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

$$p=\frac{3a+a\sqrt{3}}{2};\ p-a=\frac{a+a\sqrt{3}}{2};\ p-b=\frac{3a-a\sqrt{3}}{2};$$

$$p-c=\frac{-a+a\sqrt{3}}{2}.$$

Шулардан:

$$(p-a)(p-b)=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2;$$

$$(p-a)(p-c)=\frac{a^2}{2};$$

$$(p-b)(p-c)=\frac{2\sqrt{3}a^2-3a^2}{2}.$$

416-масалага биноан:

$$a_1=O_aO_b=\sqrt{\frac{abc^2}{(p-a)(p-b)}}=\sqrt{\frac{a\cdot a\sqrt{3}\cdot 4a^2}{\sqrt{3}a^2}}=$$
$$=\sqrt{2\cdot 4a^2}=2a\sqrt{2};$$

$$b_1=O_aO_c=\sqrt{\frac{acb^2}{(p-a)(p-c)}}=\sqrt{\frac{a\cdot 2a\cdot 3a^2}{\frac{a^2}{2}}}=2a\sqrt{3};$$

$$c_1=O_bO_c=\sqrt{\frac{bca^2}{(p-b)(p-c)}}=\sqrt{\frac{a^2\cdot 2a\cdot a\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{3}a^2-3a^2}{2}}}=a\sqrt{6}+a\sqrt{2}.$$

$$p_1=\frac{a_1+b_1+c_1}{2}=\frac{3a\sqrt{2}+2a\sqrt{3}+a\sqrt{6}}{2};$$

$$p_1-a_1=\frac{2a\sqrt{3}+a\sqrt{6}-a\sqrt{2}}{2};$$

$$p_1-b_1=\frac{3a\sqrt{2}-2a\sqrt{3}+a\sqrt{6}}{2};$$

$$p_1-c_1=\frac{a\sqrt{2}+2a\sqrt{3}-a\sqrt{6}}{2};$$

$$S_{\triangle(O_aO_bO_c)}=\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}=$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(3a\sqrt{2}+a\sqrt{6})^2-(2a\sqrt{3})^2][(2\sqrt{3}a)^2-(a\sqrt{2}+a\sqrt{6})^2]}=$$
$$=a^2(3+\sqrt{3})=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot 2(\sqrt{3}+1)=S^*\cdot 2(\sqrt{3}+1)=$$
$$=2(\sqrt{3}+1)S. \qquad (2)$$

473. $\frac{4S^3}{abc(a+b+c)}$.

474. (227-шакл.) $1\frac{241}{960}\approx 1{,}251$.

475. $\rho^2\pi=\frac{25a^2}{4}\cdot\pi$.

477. $\frac{abc}{b^2-c^2}$; $\frac{ac^2}{b^2-c^2}$.

---

* Бу ерда (2) ифодага (1) $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ ни қўйиб, $S_{O_aO_bO_c}=2(\sqrt{3}+1)\cdot S$ олинди.

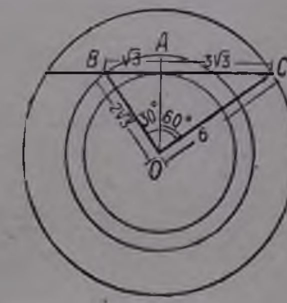
480. 30°; 60°; 90°; $4\sqrt{3}$. (228-шакл.)

481. $2R(\sqrt{2}-1)$.

482. *Кўрсатма.* 1) AD медианани,
2) $\triangle ACD\backsim\triangle DEB$ дан DE ни,
3) $\triangle BDE$ да $EF\perp DB$ олиб

$\frac{DF}{DE}=\frac{DE}{BD}$ дан DF, CF, EF ларни аниқлаймиз.

227-шакл.



228-шакл.

483. $\frac{3}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$.

484. *Кўрсатма.* Эйлер теоремасидан фойдаланамиз.

485. Е ч и ш (229-шакл). I. Агарда $C'C$ медиана бўлса,

$$AC'=BC'=\frac{c}{2}. \qquad (1)$$

CD баландлик бўлса, $BD=\frac{a^2}{c}$, (2)

бунда шаклдан:

$$DC'=\frac{c}{2}-\frac{a^2}{c}=\frac{c^2-2a^2}{2c}=\frac{(a^2+b^2)-2a^2}{2c}=\frac{b^2-a^2}{2c}. \qquad (3)$$

$$DF=\frac{2}{3}DC'=\frac{b^2-a^2}{3c}. \qquad (4)$$

$$BF=BD+DF=\frac{a^2}{c}+\frac{b^2-a^2}{3c}=\frac{3a^2+b^2}{3c}=\frac{c^2+a^2}{3c}. \qquad (5)$$

$$BE=p-b \text{ (392-масала)}. \qquad (6)$$

$$MG=EF=\frac{c^2+a^2}{3c}-(p-b)=\frac{c^2+a^2}{3c}-\frac{a-b+c}{2}=$$
$$=\frac{2c^2+2a^2-3ac+3bc-3c^2}{6c}=\frac{a^2-3ac+3bc-b^2}{6c}=$$
$$=\frac{a^2-b^2}{6c}-\frac{a-b}{2}. \qquad (7)$$

Медианаларнинг кесишган нуқтасидан туширилган перпендикуляр бўлганидан:

$$GF = \frac{1}{3} h_c = \frac{c \cdot h_c}{3c} = \frac{ab}{3c}. \tag{8}$$

$$\Omega M = r - \frac{ab}{3c}. \tag{9}$$

II. Маълумки, $\triangle \Omega GM$ да $\Omega G^2 = MG^2 + \Omega M^2$ ёки (6) ва (8) га кўра

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{6c} - \frac{a - b}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{ab}{3c}\right)^2 = r^2 \tag{10}$$

ёки

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{36c^2} - \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{6c} + \frac{(a - b)^2}{4} + r^2 - \frac{2rab}{3c} + \frac{a^2b^2}{9c^2} = r^2$$

ёки

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{36c^2} + \frac{a^2b^2}{9c^2} - \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{6c} + \frac{(a - b)^2}{4} - \frac{2rab}{3c} = 0,$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{2p}$$

бўлганидан:

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{36c^2} - \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{6c} + \frac{(a - b)^2}{4} - \frac{a^2b^3}{3pc} = 0,$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

бўлганидан:

$$\frac{(a^2 + b^2)}{36} - \frac{(a^2 - b^3)(a - b)}{6c} + \frac{(a - b)^2}{4} - \frac{a^2b^2}{3pc} = 0;$$

36 га кўпайтириб, ҳамма жойда c нинг қиймати ўрнига қўйилса:

$$a^2 + b^2 - 6 \cdot \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 9(a - b)^2 -$$

$$- 12 \frac{a^2b^2}{\frac{1}{2}(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})\sqrt{a^2 + b^2}} = 0;$$

бу тенгламани соддалаштиргандан кейин:

$$16a^4 - 48a^3b + 41a^2b^2 - 48ab^3 + 16b^4 = 0.$$

Буни b^4 га бўлсак:

$$16\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 48\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 41\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 48\left(\frac{a}{b}\right) + 16 = 0. \tag{11}$$

Агарда $\frac{a}{b} = x$ десак:

$$16x^4 - 48x^3 + 41x^2 + 48x + 16 = 0. \tag{12}$$

Бу симметрик тенгламани ечсак:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3(2\pm\sqrt{3})}{4} \qquad (13)$$

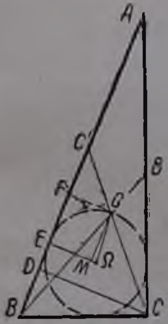
чиқади.

Бу ерда $+$ ишорали қийматни олишимиз керак.

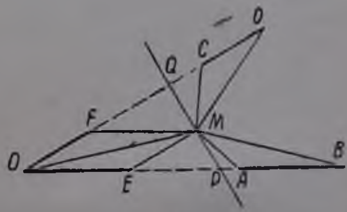
$\frac{3(2+\sqrt{3})}{4}>2$ бўлганидан x учун ҳақиқий қиймат келиб чиқади.

Бундан:

$$x=\frac{a}{b}=\frac{6+3\sqrt{3}\pm\sqrt{36\sqrt{3}-1}}{8}. \qquad (14)$$



229-шакл.



230-шакл.

Радикал остидаги ифода ҳам (13) да мусбат ишорали қиймат олиниши керак эканлигини тасдиқ этади.

486. $\frac{k\sqrt{37}}{15}$.

487. 8,5 ёки 3,5.

488. $\frac{nab}{a+b}$.

489. $\frac{abc(b+c-a)}{(b+c)(a+b+c)}$.

491. Эслатма. Учбурчакнинг томонлари орасида қандай муносабат мавжуд бўлса, масала шартида кўрсатилган хосса ўринли бўлади? A бурчак ўтмас ёки тўғри бўлиши мумкинми?

492. Ечиш (230-шакл). Бизга AB ва CD кесмалар ҳамда ихтиёрий M нуқта берилган бўлиб, AB, CD чизиқларнинг кесишган нуқтаси O бўлсин. OC ва AO тўғри чизиқлар устида $OE=AB$ ва $OE=CD$ кесмалар олинса, у ҳолда AB, CD, OF ва OE кесмалар учларини туташтиришдан ҳосил бўлган учбурчаклардан:

$$S_{ABM}+S_{CDM}=S_{OEM}+S_{OFM}=S_{OEMF}$$

бўлади.

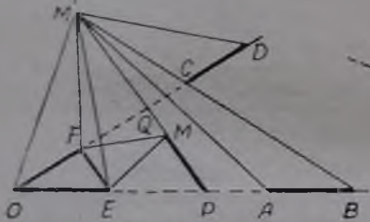
Агарда M нуқта $\angle AOC$ ичида бўлиб, шу M нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ устида EF га параллел ҳолда ҳаракат этса, унда $OEMF$ тўртбурчакнинг юзи ўзгармас миқдор бўлиб қола беради.

Ҳақиқатда ҳам бундай ҳолда EFM учбурчак юзи ўзгасмай қолади ва $\triangle OEF$ нинг юзи ҳар вақт ўзгармас миқдор бўлади.

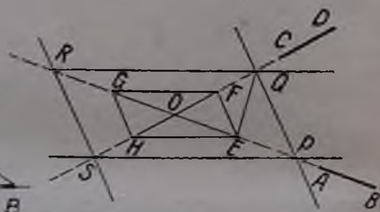
Агарда PQ кесманинг давомида M' нуқтани олсак, бунда (231-шакл):

$$S_{ABM'} - S_{CDM'} = S_{OEM'} - S_{OFM'} = S_{EM'F} = S_{EMF}$$

бўлади. (Бу шаклимизда Q нуқта M' ва P нуқталар орасида ётади. Агарда P нуқта M' ва Q нуқталар оралигида бўлса, юқоридагига ўхшаш яна $S_{CDM'} - S_{ABM'} = S_{OEMF}$ ни оламиз.) Шунинг каби агарда $OEMF$ тўртбурчакнинг юзи берилган ўзгармас миқдор S га тенг бўлса, бунда изланган геометрик



231-шакл.



232-шакл

ўрин PQ тўғри чизиқда бўлиб, M нуқта PQ кесма устида ётса, (CDM ва ABM) учбурчаклар юзларининг йиғиндиси олинади.

Агарда M нуқта PQ нинг давомида ётса, шу учбурчаклар юзларининг айирмаси олинади.

AO ва CO тўғри чизиқларда мос ҳолда $AB = OG$ ва $OD = OH$ кесмаларни ола биламиз (232-шакл), шунингдек ушбу мулоҳазага мувофиқ AB ва CD кесмалар жуфтни OE ва OH ёки OG ва OF, ёки OG ва OH кесмалар жуфтларининг исталгани билан алмаштириш мумкин бўлади. Бинобарин, изланган геометрик ўрин $PQRC$ параллелограммнинг томонлари устида ётади ($PQRS$ ва $EFGH$ параллелограммлар ўхшаш ва ўхшаш жойлашган).

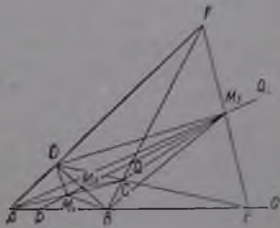
Агарда $|S_{ABM} \pm S_{CDM}| = S$ бўлиши лозим бўлса, бунда Q нинг ўрнини (232-шакл) шундай олиш лозимки, $S_{OEQ} = S$ шарти бажарилсин.

493. Агарда AC, BD, EF кесмаларнинг ўрталари M_1, M_2, M_3 (233-шакл) бўлса, $S_{M_1CD} = \frac{1}{2}\ S_{ACD},\ S_{M_1AB} = \frac{1}{2}\ S_{CAB}$ га эга

бўламиз. Булар ҳадлаб қўшилса: $S_{M_1AB}+S_{M_1CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ ни оламиз. Шунинг каби $S_{M_2AB}+S_{M_2CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, сўнгра:

$$S_{M_3AB}=\frac{1}{2}S_{FAB}.$$

$S_{M_3CD}=\frac{1}{2}S_{FCD}$ булади, чунки M_3AB учбурчак FAB учбурчак билан умумий AB асосга эга булиб, баландлиги икки марта кичикдир. Шунингдек M_3CD учбурчак FCD учбурчак билан умумий CD асосга эга бўлиб, баландлиги икки марта кичикдир. Буларни ҳадлаб айирсак:



233-шакл.

$$S_{M_3AB}-S_{M_3CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

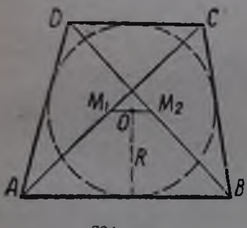
келиб чиқади. Олинган муносабатлардан:

$$S_{M_1AB}+S_{M_1CD}=S_{M_2AB}+S_{M_2CD}=$$
$$=\frac{1}{2}S_{ABCD};\ S_{M_3AB}-S_{M_3CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Ўтганларни кўздан кечирсак, унда M_1, M_2 нуқталар AED бурчак ичида бўлиб, M_3 нуқта бу бурчакка ёпишган DEG бурчак ичида ётади. Шунга кўра 492-масала бўйича M_1, M_2 нуқталар $\angle AED$ ичидаги M нуқталарнинг геометрик ўрни бўлган PQ да ётганидан:

$$S_{M_3AB}-S_{M_3CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Шунингдек M_3 нуқта DEG бурчакнинг ичидаги M нуқталарнинг геометрик ўрни бўлган PQ чизиғининг давоми QQ' кесмаси устида ётганидан:



234-шакл.

$$S_{AM_3B}-S_{M_3CD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Булар кўрсатадики, ҳақиқатан ҳам M_1, M_2, M_3 нуқталар 492-масалага асосан бир PQQ' тўғри чизиқ устида ётади.

494. Агарда $ABCD$ — айлана ташқарисига чизилган тўртбурчак бўлиб (234-шакл) M_1 ва M_2 нуқталар унинг AC ва BD диагоналларининг ўрталари ҳамда O нуқта ички чизилган айлананинг марказидан иборат бўлса, $ABCD$ тўртбурчак ромб бўлганда M_1, M_2 ва O нуқталар бир-бирининг устига тушади, шунинг учун M_1 ва M_2 нуқталардан ўтувчи ҳар қандай тўғри чизиқ O нуқтадан ўтади. Биз тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари параллел бўлмаган ҳолни текширамиз. Бунда AB ва CD томонлар параллел бўлмаса, M_1 ва M_2 нуқталарга 493-масалани татбиқ қилсак,

$$S_{M_1AB} + S_{M_1CD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}; \; S_{M_2AB} + S_{M_2CD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

O нуқта учун ҳам $S_{ABO} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ тўғрилигини исбот этамиз. Агарда айлананинг радиуси R бўлса:

$$S_{ABO} + S_{OCD} = \frac{1}{2} R \cdot AB + \frac{1}{2} R \cdot CD = \frac{1}{2} R \; (AB + CD),$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} R \cdot (AB + BC + CD + DA).$$

Ташқи тўртбурчак томонлари бўлганидан $AB+CD=AD+BC$, бундан $AB + CD = \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DA)$. Шунга кура

$$S_{AOB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

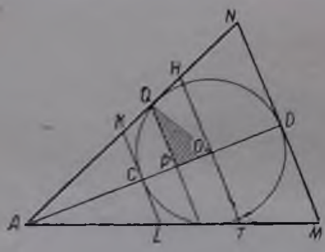
Исбот қилинган муносабатларга биноан:

$$S_{M_1AB} + S_{M_1CD} = S_{M_2AB} + S_{M_2CD} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Шуни ҳам айтиш керакки, M_1, M_2 ва O нуқталар $ABCD$ тўртбурчакнинг ичида, яъни улар AB ва CD тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган бурчак ичида ётади. Бинобарин, 492-масалага асосан M_1, M_2 ва O нуқталар айтиб ўтилган бурчак орасида ётган M нуқталарнинг геометрик ўрни бўлган кесмада ётади ва бу M нуқталар учун

$$S_{AMB} + S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

тенглик мавжуддир.



235-шакл.

495. $1; \; 1; 1; \; 2; \; \frac{3\sqrt{3}}{3}$.

496. Ечиш (235-шакл). 1) $\angle HOQ = \angle OQP$ (ички алмашинувчи бурчаклар) $\angle QPO = \angle OQH = 90°$ бўлганидан: $\triangle OQP \backsim \triangle HQO$, шундан $\frac{OH}{OQ} = \frac{OQ}{PQ}$ ёки $OH = \frac{OQ^2}{PQ} = \frac{2r^2}{Q}$. Шаклда $OD \perp HT$ бўлганидан $HT = 2 \; OH$ ёки $HT = \frac{4r^2}{a}$.

2) HT—трапециянинг ўрта чизиги бўлса, CD — баландлиги бўлади.

Шунга асосан:

$$S_{KLMN\ (\text{трапеция})} = HT \cdot CD = HT \cdot 2r = \frac{4r^2}{a} \cdot 2r = \frac{8r^3}{a}.$$

Демак,

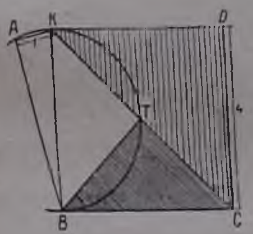
$$S_{\text{трапеция}} = \frac{8r^3}{a}.$$

497. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

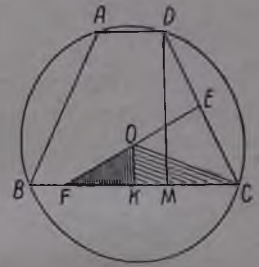
498. $5{,}76\pi$.

499. Ечиш (236-шакл) 1) Шарт бўйича $AD = 4$, $AK = 1$; $KD = 3$; $CK = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Шундан $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.



236-шакл.



237-шакл.

2) $\frac{BK}{2} = R = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

3) $\angle TBC = \angle KCD$ (томонлари перпендикуляр).

Шундан:

$$\frac{BT}{BC} = \frac{CD}{CK}; \quad BT = \frac{BC \cdot CD}{CK} = \frac{4 \cdot 4}{5} = \frac{16}{5}.$$

Демак, $BT = \frac{16}{5}$.

500. $(1 + \sqrt{12}) : 11$.

501. (237-шакл.) 1) Трапеция асосига баландлик $DM \perp BC$ ўтказамиз. Унда $DM = h = \sqrt{DC^2 - MC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ $\left(MC = \frac{7 - 1}{2} = 3\right)$.

2) $\triangle DCM \backsim \triangle FEC \backsim \triangle FOK$ дан $\frac{FC}{CE} = \frac{DC}{CM}$;

$$FC = \frac{DC}{CM} \cdot CE = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}; \quad EC = \frac{1}{2} DC = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

3) $\frac{OK}{FK} = \frac{EC}{EF}$; $OK = FK \cdot \frac{EC}{EF} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{2}$; $OK = \frac{1}{2}$;

4) $R = OC = \sqrt{CK^2 + OK^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$

5) $S_{\text{айлана}} = R^2\pi = \frac{25}{2}\pi$; демак, $S = 12{,}5$ бўлади.

502. 2.

503. $\frac{4r^2}{5}$.

504. $\frac{r(\sqrt{7}-1)}{2}$.

505. 5,6.

506. Ечиш (238-шакл). AB нинг проекциясини олиш учун CD давомига A ва B нуқталардан AM ва BN перпендикулярларни туширамиз. Олинган MN кесма изланган проекция бўлади. Шарт бўйича:

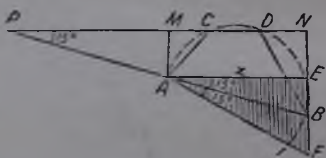
$$\smile AC = 60° \text{ бўлгани учун } AC = r.$$

$$\smile DB = 90° \text{ бўлгани учун } BD = r\sqrt{2}.$$

Агарда CD ва AB кесмалар бир-бирини P нуқтада кесгунча давом эттирилса, бундан:

$$\angle P = \frac{\smile BD - \smile AC}{2} = \frac{90° - 60°}{2} = 15°.$$

Агарда A нуқтадан BN га AE перпендикулярни туширсак, $\angle BAE = 15°$ бўлади. Биз AB билан $15°$ ли бурчак ясовчи AF тўғри чизиқни BN нинг давоми билан кесишгунча узайтирсак, AB диаметри AEF учбурчакнинг биссектрисаси бўлади.



238-шакл.

Тўғри бурчакли $\triangle AEF$ да $\angle A = 30°$ бўлганида $EF = \frac{1}{2}AF$, шунга кўра $AE = x$ бўлса, $EF = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ва $AF = \frac{2x}{\sqrt{3}}$.

53-масала бўйича l_a биссектриса узунлиги формуласи

$$l_a^2 = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} \text{ га биноан: } 4r^2 = \frac{2x^2}{\sqrt{3}} \frac{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{3}}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

$$\left(\text{бунда } b = x,\ c = \frac{2x}{\sqrt{3}};\ a = \frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

$$x^2 = r^2\,\frac{7 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}},$$

бундан:

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

507. Ечиш (239-шакл). Шарт бўйича ECB учбурчак тенг ёнли $EC = DC$; $\angle ECB = 90°$; $\angle DCB = 60°$, $\angle ECD = 30°$ бўлганидан:

1) $\angle CED = \angle EDC = \frac{180° - 30°}{2} = \frac{150°}{2} = 75°$.

Шундан $\angle EDB = 135°$; $(75° + 60° = 135°)$.

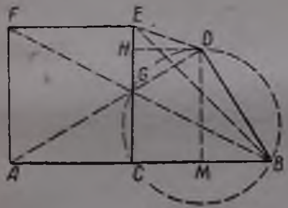
2) EDH учбурчакда $ED^2 = EH^2 + DH^2$; $(HD \perp EC)$ ёки

$$ED^2 = \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2 - a^2\sqrt{3} = a^2(2 - \sqrt{3})$$

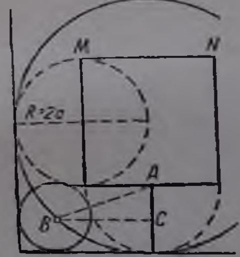
$$\left[EH = EC - HC;\ HC = DM = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3};\ EC = a\right].$$

3) ACD учбурчак тенг ёнли $(AC = CD)$, $\angle ACD = 120°$;

$$\angle CAD = \angle CDA = \frac{60°}{2} = 30°.$$



239-шакл.



240-шакл.

Шунинг учун 60° ли бурчакнинг ёйи бўлганидан CG ватар r га тенг бўлади.

BCD учбурчакнинг ташқи чизилган айлана радиуси $= \frac{a\sqrt{3}}{3}$ бўлганидан $CG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ келиб чиқади, яъни $a = r\sqrt{3}$;

$r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ бўлади.

508. Ечиш (240-шакл). 1) $MN = 2a$; $AB = a + r$; $AC = a - r$, $BC = 2a - r$;

2) $\triangle ABC$ да $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ёки $(a - r)^2 + (2a - r)^2 = (a + r)^2$; бундан: $r = 2a(2 - \sqrt{3})$;

3) агар уринувчи айлана, ярим айланаларга ташқаридан уринса, унда $r = 2a$ бўлади.

509. Ечиш (241-шакл). Медианаларнинг кесишган нуқтаси O бўлганидан:

$$AO = \frac{2}{3} m_a; \; CO = \frac{2}{3} m_c; \; BO = \frac{2}{3} m_b.$$

Агарда $EF = z$; $AE = y$; $AF = x$; $OE = q$ ва $OF = p$ бўлса, тўғри бурчакли учбурчаклардан:

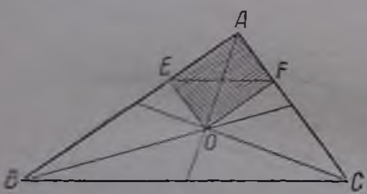
$$p^2 = AO^2 - x^2 = OC^2 - (14 - x)^2. \quad (1)$$

Бундан $\left(\frac{2}{3} m_a\right) - x^2 = \left(\frac{2}{3} m_e\right) - (14 - x)^2$ ёки m_a ва m_c нинг қийматларини қўйиб чиқиш билан:

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\right)^2 - x^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\right)^2 - (14 - x)^2,$$

сўнгра a, b ва c нинг қийматларини қўйиш ҳамда бир қанча шакл алмаштиришлардан кейин



241 шакл.

$$x = AF = 6\frac{1}{3}, \quad (2)$$

яна $AO = \frac{2}{3} m_a$ бўлганидан:

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{2 \cdot 14^2 + 2 \cdot 13^2 - 15^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{505} \quad (3)$$

чиқади. Олинган (2) ва (3) ни (1) га қўйсак,

$$p^2 = AO^2 - x^2 = \frac{505}{9} - \left(\frac{19}{3}\right)^2 = \frac{144}{9},$$

$$p = OF = 4. \quad (4)$$

Худди шу йўл билан борганда тўғри бурчакли OBE учбурчакдан

$$q^2 = OB^2 - (13 - y)^2 = AO^2 - y^2, \quad (5)$$

бундан

$$\left(\frac{2}{3} m_b\right)^2 - (13 - y)^2 = \left(\frac{2}{3} m_a\right)^2 - y^2$$

ёки

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}\right)^2 - (13 - y)^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\Big)^2 - y^2.$$

Бундан, шакл алмаштиришлар натижасида:

$$y = AE = 6\frac{5}{39} \quad (6)$$

чиқади. Топилган AO ва y ни (5) га қўйсак:

$$q^2 = AO^2 - y^2 = \frac{505}{9} - \left(\frac{339}{39}\right)^2 = \frac{3136}{13^2},$$

бундан:

$$q = OE = 4\frac{4}{13}. \qquad (7)$$

$AEOF$ тўртбурчакда Птоломей теоремасига биноан:

$$AO \cdot z = q \cdot x + p \cdot y$$

ёки

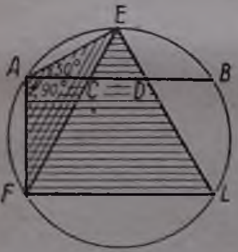
$$\sqrt{\frac{505}{3}} \cdot z = \frac{56}{13} \cdot \frac{19}{3} + 4\cdot\frac{239}{9},$$

бундан:

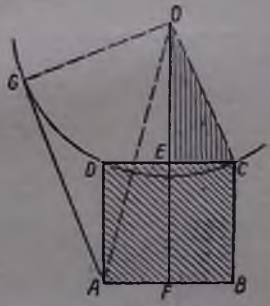
$$z = \frac{4}{13}\sqrt{505}. \qquad (8)$$

Тўртбурчакнинг юзи:

$$S = \frac{OE \cdot AE}{2} + \frac{OF \cdot AF}{2} = \frac{\frac{56}{13} \cdot \frac{239}{39}}{2} + \frac{4 \cdot \frac{19}{3}}{2} = 25\frac{439}{507}. \qquad (9)$$



242-шакл.



243-шакл.

Бу тўртбурчакка ташқи чизилган айлана диаметри AO бўлганидан, унинг радиуси:

$$r = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{505} = \frac{1}{6}\sqrt{505}. \qquad (10)$$

510. 8, 2, 5.
511. 5.
512. 3, 1 (242-шакл).
513. Ечиш (243-шакл). 1) $AB = a$; $OG = r$ бўлса, унда OEC учбурчакдан $OE = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$;

2) AOG ва AOF учбурчаклардан $AO^2 = OG^2 + AG^2 = AF^2 + OF^2$

ёки

$$r^2+4a^2=\frac{a^2}{4}+\left(a+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}\right)^2$$

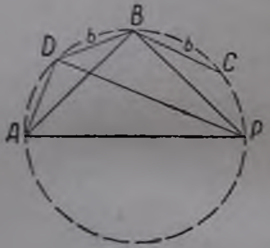
ёки

$$\sqrt{4r^2-a^2}=3a;\ \ 4r^2=10a^2.$$

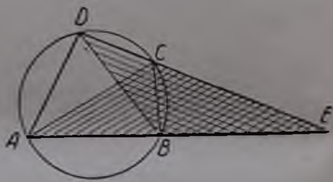
Шарт бўйича $S=a^2=10$ эди. Бундан $4r^2=10\cdot 10$; $r^2=25$ ва $r=5$ келиб чиқади.

514. Ечиш (244-шакл). Берилган ёйлар: $AB=a$; $BC=b$ бўлсин. A нуқтадан айлананинг AP диаметрни ўтказиб, бунинг P учини B билан туташтирамиз. Сўнгра B нуқтанинг иккинчи томони $BD=BC$ ватарни олиб, D нуқтани A ва P нуқталар билан бирлаштирсак, Птоломей теоремасига биноан $ADBP$ тўртбурчакдан

$$AB\cdot PD=AD\cdot PB+BD\cdot AP. \tag{1}$$



244-шакл.



245-шакл.

Бу ерда $AP=2$; $AB=a$; $DB=b$; $AD=x$; $PD=\sqrt{4-x^2}$; $PB=\sqrt{4-a^2}$ бўлганидан (1) ни $a\cdot\sqrt{4-x^2}=x\cdot\sqrt{4-a^2}+2b$ шаклида ёза оламиз. Бундан:

$$x=\frac{1}{2}\left(-b\sqrt{4-b^2}+a\sqrt{4-a^2}\right).$$

515. $\frac{1}{2}\left(b\sqrt{4-b^2}+a\sqrt{4-a^2}\right)$ (244-шакл).

516. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. *Курсатма.* 506-масалага қаранг.

517. $\frac{d^2}{2\sqrt{d^2-r^2}}$, $\frac{d^2r}{2\sqrt{d^2-r^2}}$.

518. Ечиш (245-шакл). Бу масалани ечишда 254-масаланинг ечилишидан фойдаланиш керак.

Айтайлик, $AC=c$; $BD=f$; $AE=x$; $ED=y$ бўлсин. Бу ерда 1) $\triangle AEC \backsim \triangle DEB$ (иккитадан бурчаги тенг):

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{DB}\ \text{ёки}\ \frac{AE}{DE}=\frac{AC}{DB},$$

яъни:

$$\frac{x}{y} = \frac{e}{f}$$

$\left(254\text{-масалада } \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}\right)$, демак:

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

бундан ташқари:

$$AE \cdot BE = DE \cdot CE \text{ ёки } x(x - a) = y(y - c); \qquad (1)$$

2) вақтинча биз

$$x = z(ad + bc); \ y = z(ab + cd) \qquad (2)$$

деб фараз этсак, (2) ва (1) дан:

$$z(ad + bc)[z(ad + bc) - a] = z(ab + cd)[z(ab + cd) - c]$$

ёки

$$z(ad + bc)^2 - a(ad + bc) = z(ab + cd)^2 - c(ab + cd).$$

Бундан:

$$z(a^2d^2 + b^2c^2 - a^2b^2 - c^2d^2) = a^2d^2 + abc - abc - c^2d^2$$

ёки

$$z[a^2(a^2 - c^2) - b^2(a^2 - b^2)] = d(a^2 - c^2).$$

Бундан:

$$z = \frac{d}{d^2 - b^2};$$

3) (2) дан $AE = x = \frac{d}{d^2 - b^2}(ad + cb) = \frac{d(ad + cb)}{d^2 - b^2}$.

$$DE = y = \frac{d}{d^2 - b^2}(ab + cd) = \frac{d(ab + cd)}{d^2 - b^2}$$

олинади. Демак,

$$AE = \frac{d(ad + bc)}{a^2 - b^2}; \ DE = \frac{d(ab + cd)}{d^2 - b^2}$$

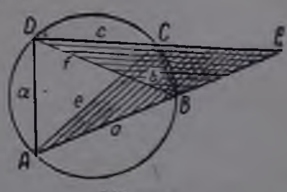
келиб чиқади.

519. $AB = 2R$ (шартдан); $BC = \frac{2R}{a + b}\sqrt{b^2 + 2ab}$.

$AC = \frac{2Ra}{a + b}$; $BD = \frac{2Rb}{a + b}$; $S = \frac{abR}{a + b}$.

520 (246-шакл). 518-масаладаги шакл ва ундаги жавобни келтирамиз.

1) $ABCD$ тўртбурчакнинг юзи $= S$, $\triangle AED$ нинг юзи $= \Sigma$, $\triangle BEC$ учбурчакнинг юзи $= \sigma$ десак, бунда $S = \Sigma - \sigma$ бўлади.



246-шакл.

Шунингдек $\triangle AED \backsim \triangle CEB$ бўлиб, бундан $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{b^2}{d^2}$ (бу ерда $\angle AED$ — умумий) $\sigma = \Sigma \cdot \frac{b^2}{d^2}$. Шунга кўра:

$$S = \Sigma - \Sigma \frac{b^2}{d^2} = \frac{d^2 - b^2}{d^2} \cdot \Sigma. \qquad (1)$$

2) Биз Σ миқдорни топишда Герон формуласидан фойдаланамиз. Агар $\frac{d^2}{d^2 - b^2}$ ни k орқали белгиласак, унда $AE = k\,(ad + bc)$; $DE = k\,(ab + cd)$; $AD = d = k\,(d^2 - b^2)$ бўлиб, буларнинг йиғиндисидан:

3) $AE + DE + AD = k\,(ad + bc + ab + cd + d^2 - b^2) = k[(b + d)a + (b + d)c + (b + d)(d - b)] = k\,(b + d)(a - b + c + d) = 2k\,(b + d)(p - b)$ (бу ерда $2p = a + b + c + d$ деб олинди).

4) $AE + ED - AD = k\,(ad + bc + ab + cd - d^2 + b^2) = k\,[(b + d)\,a + (b + d)\,c + (b + d)(b - d)] = k\,(b + d)(a + b + c - d) = 2k\,(b + d)(p - d)$.

5) $AE - ED + AD = k\,(ad + bc - ab - cd + d^2 - b^2) = k\,[a\,(d - b) - c\,(d - b) + (d + c)(d - b)] = k\,(d - b)(a + b - c + d) = 2k\,(d - b)(p - c)$.

6) $DE + AD - AE = k\,(-ad - bc + ab + cd + d^2 - b^2) = k\,[-a\,(d - b) + c\,(d - b) + (d + b)(d - b)] = k\,(d - b)(-a + b + c + d) = 2k\,(d - b)(p - a)$, бундан:

$$\Sigma = \frac{1}{4}\sqrt{(AE + ED + AD)(-AE + ED + AD)(AE - ED + AD)(AE + ED - AD)} =$$

$$= k^2\,(d^2 - b^2)\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)} =$$

$$= \frac{d^2}{d^2 - b^2}\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

бўлиб, бундан (1) тенглик бўйича натижада:

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

га эга бўламиз.

521. $\frac{n\,(ad + bc)}{4R}$ ёки $\frac{m\,(ab + cd)}{4R}$; $\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$.

Кўрсатма. Ташқи айлананинг радиуси формуласи $\left(R = \frac{ab}{2h_c}\right)$ ни назарга оламиз.

522. $S = \sqrt{abcd}$.

523. Ечиш. 254-масалада ички чизилган тўртбурчак томонлари ва диагоналлари учун

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \qquad (1)$$

олинган эди.

Птоломей теоремасини татбиқ этсак,

$$ef = a \cdot c + b \cdot d \tag{2}$$

тенглиги келиб чиқади. Бу (1) ва (2) тенгламалар биргаликда ечилса,

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \text{ ва } e = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}.$$

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{bc + ad} \text{ ва } f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{bc + ad}}$$

келиб чиқади.

524. 3.

525. pq. *Кўрсатма.* Айлана ташқарисидаги нуқтадан ўтган кесувчи ҳақидаги теоремани назарга оламиз.

526. Ечиш (247-шакл). 1) Тенг томонли учбурчак баландлиги:

$$OC = h = R\sqrt{3}. \text{ Шарт бўйича } OD = DB = \frac{R}{2}.$$

$$2)\ \triangle DEF \backsim \triangle DOC;\ \frac{EF}{DF} = \frac{CO}{OD} = \frac{R\sqrt{3}}{\frac{R}{2}} = 2\sqrt{3}, \text{ яъни:}$$

$\frac{EF}{DF} = 2\sqrt{3};\ EF = DF \cdot 2\sqrt{3}.$

3) DEF учбурчакдан $OF^2 + EF^2 = OE^2$ ёки $(OD + DF)^2 + EF^2 = OE^2$, ёки $\left(\frac{R}{2} + DF\right)^2 + 12DF^2 = R^2$; $52DF^2 + 4R \cdot DF - 3R^2 = 0$,

ёки $DF = \frac{-2R + \sqrt{4R^2 + 156R^2}}{52} = R \cdot \frac{-1 + \sqrt{40}}{26}$, яъни:

$$DF = R \cdot \frac{-1 + \sqrt{40}}{26}.$$

$$4)\ OF = OD + DF = \frac{R}{2} + R \cdot \frac{-1 + \sqrt{40}}{26} = R\frac{6 + \sqrt{10}}{13}.$$

5) OBE учбурчакдан $BE^2 = OE^2 + OB^2 - 2 \cdot OB \cdot OF$ ёки

$$BE^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \frac{6 + \sqrt{10}}{13} = 2R^2\frac{7 - \sqrt{10}}{13} = R^2 \cdot \frac{14 - \sqrt{40}}{13}.$$

Бундан:

$$BE = R\sqrt{\frac{14 - \sqrt{40}}{13}} \text{ келиб чиқади.}$$

527. 53 ёки 13.

528. (248-шакл.) $\frac{r(\sqrt{33} - 3)}{6}$.

529. Ечиш (249-шакл). A нуқтадан CD га AH перпендикулярни туширсак, тенг ёнли тўғри бурчакли ACH учбурчакдан $AH = EC = k$; $AC = k\sqrt{2}$. Шунинг каби $AB = R\sqrt{2}$, бундан:

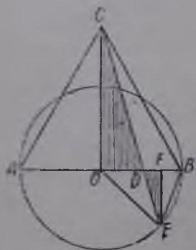
$$CD = AB + 2HC = AB + 2k = R\sqrt{2} + 2k. \tag{1}$$

Тўғри бурчакли DEG учбурчакда $DE = x\,(= FC)$;

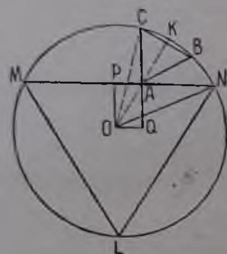
$$EG = y\,(= EC) \text{ десак, } CD = x + y. \qquad (2)$$

Олинган (1) ва (2) дан:

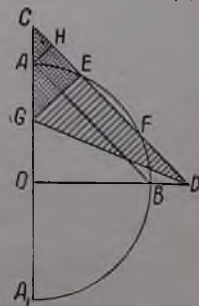
$$x + y = R\sqrt{2} + 2. \qquad (3)$$



247-шакл.



248-шакл.



249-шакл.

Айланага ўтказилган кесувчи ҳақидаги теоремага биноан:

$$CE \cdot CF = CA \cdot CA_1 = xy \text{ ёки } xy = (2R + k\sqrt{2})\,k\sqrt{2}. \qquad (4)$$

$$GD^2 = GE^2 + ED^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy =$$
$$= (R\sqrt{2} + 2k)^2 - 2\sqrt{2}\,(2R + k\sqrt{2})\,k = 2R^2.$$

Бундан $GD = R\sqrt{2}$, бу ифода k га боғлиқ эмас.

530. $\dfrac{\sqrt{r^4 + 6r^2a^2 + a^4}}{a}$.

531. $0{,}8r^2$.

532. $h\sqrt{\sqrt{5} + 2}$; $h\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

533. $S_{8\ \text{бурч}} = 4R^2(\sqrt{2} - 1)$. (250-шакл.)

534. $2a^2(\pi - 2)$.

535 — 536. Ечиш (251-шакл). Шакл бўйича $OL = x$; $O'N = r$; $OM = R$; $OO' = R + r$; $MN = O'E = p$; $ML = q$; $NF = t$; $LF = h$; $OE = R - r$ бўлса, умумий ўткир бурчакка эга бўлган тўғри бурчакли учбурчаклар $\triangle OO'E \backsim \triangle OML$, бундан:

$$\frac{OO'}{OE} = \frac{OM}{OL}$$

ёки

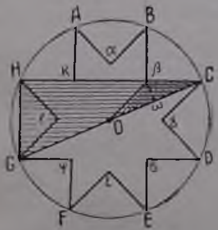
$$\frac{R + r}{R - r} = \frac{R}{x}; \quad x = \frac{R(R - r)}{R + r}. \qquad (1)$$

Тўғри бурчакли MLO учбурчакдан:

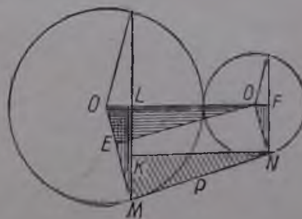
$$ML^2 = q^2 = R^2 - x^2 = \frac{R^2}{(R+r)^2} \cdot 4Rr$$

ёки

$$q = \frac{2R}{R+r}\sqrt{2Rr} \tag{2}$$



250-шакл.



251-шакл.

Тўғри бурчакли $EO'O$ учбурчакдан:

$$O'E^2 = p^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$$

ёки

$$p = 2\sqrt{Rr}. \tag{3}$$

Ўткир бурчакларнинг томонлари ўзаро перпендикуляр бўлган тўғри бурчакли учбурчаклар бўлганидан $\triangle OLM \backsim \triangle MNK$ бўлиб, бундан:

$$\frac{NK}{NM} = \frac{ML}{MO} \text{ ёки } \frac{h}{p} = \frac{q}{R};$$

$$h = \frac{pq}{R} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R} \cdot \frac{2R}{R+r}\sqrt{Rr} = \frac{4Rr}{R+r}. \tag{4}$$

Шунинг каби $\triangle O'NF \backsim \triangle OML$ бўлганидан:

$$\frac{NF}{O'N} = \frac{LM}{MO}$$

ёки

$$\frac{t}{r} = \frac{q}{R};\ t = \frac{r}{R} \cdot q = \frac{r}{R} \cdot \frac{2R}{R+r}\sqrt{Rr} = \frac{2r}{R+r}\sqrt{Rr}.$$

Шунга кўра трапециянинг юзи:

$$S = (t+q)\,h = \left(\frac{2r\sqrt{Rr}}{R+r} + \frac{2R\sqrt{Rr}}{R+r}\right) \cdot \frac{4Rr}{R+r} = \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

келиб чиқади.

537. Тўртбурчак юзи $= 36$.

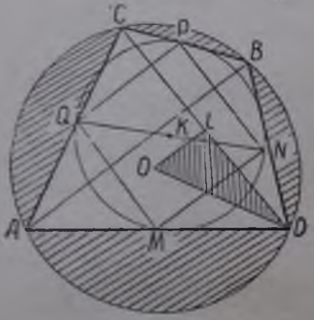
$$S_{\text{айлана}} = \frac{45}{16}\pi \quad \text{(252-шакл).}$$

538. Ечиш (253-шакл). Тўғри бурчакли BOD учбурчакда:

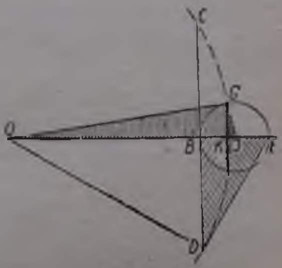
$$BD=\sqrt{OD^2-OB^2}=\sqrt{R^2-\frac{3R^2}{4}}=\frac{R}{2}.$$

Демак, бу кўрсатадики, $\angle ODB=60°$; $\angle BOD=30°$, бундан:

$$\angle BDE=30° \text{ ва } BE=\frac{1}{2}DE.$$



252-шакл.



253-шакл.

Агарда $DE=x$ бўлса, тўғри бурчакли BED учбурчакда:

$$ED^2-BE^2=BD^2,$$

бундан:

$$x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{R^2}{4} \text{ ва } x=\frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Бунга кўра:

$$BE=\frac{R\sqrt{3}}{6};\ JE=BJ=\frac{R\sqrt{3}}{12} \text{ ва } OJ=OB+BJ=$$

$$=\frac{R\sqrt{3}}{2}+\frac{R\sqrt{3}}{12}=\frac{7R\sqrt{3}}{12}.$$

OGJ учбурчакда $OG=R$; $OJ=\frac{7R\sqrt{3}}{12}$ бўлганидан $GJ=\frac{R\sqrt{3}}{12}$, бундан:

$$p=\frac{OE+OG+GE}{2}=\frac{R}{2}+\frac{R\sqrt{3}}{3} \text{ ва } S_{OGJ}=\frac{R^2\sqrt{3}}{24}$$

келиб чиқади.

Шунингдек $S_{OGJ}=\frac{OJ\cdot GF}{4}=S$ дан $S_{OGJF}=2S$.

$$GF=\frac{4S}{OJ}=\frac{R^2\sqrt{3}}{6}:\frac{7R\sqrt{3}}{12}=\frac{2R}{7}.$$

Энг сўнг

$$S_{BDE}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{6}=\frac{R^2\sqrt{3}}{24}=S$$

олиниб, натижада булардан:

$$\frac{S_{OOJF}}{S_{BDE}}=\frac{2S}{S}=2.$$

539. $\frac{R\sqrt{6}}{2}$; $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2}$; R; $\frac{R(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$; $\frac{R^2(2+\sqrt{3})}{2}$.

540. $2R\sqrt{2}$.

254-шакл.

541. Ечиш (254-шакл). 1) агар $AO=2R$ бўлса, AOJ учбурчакда $\angle AOJ=30°$; $\angle ACB=60°$; $\angle CBA=90°$; яъни $\angle CBA=\angle CDA=90°$; $\left(\frac{\angle BCD}{2}+\frac{\angle BAD}{2}=90°;\ \frac{BAD}{2}=30°;\ \frac{\angle BCD}{2}=60°\right)$.

2) AOJ учбурчакда $AJ=\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3}$; $AJ=R\sqrt{3}$.

$$S_{AOJ}=\frac{1}{2}\cdot AJ\cdot OJ=\frac{1}{2}R\sqrt{3}.\ R=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2;\ S_{AOJ}=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

3) OEC учбурчакда $EC=x$ бўлса, $\triangle OEC\backsim\triangle ACB$ дан:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{OE}{EC},\text{ яъни }\frac{AJ+JB}{AE+EC}=\frac{OE}{EC}\text{ ёки}$$

$$\frac{R\sqrt{3}+R}{R+x}=\frac{R}{x};$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}R;\ BC=R+\frac{\sqrt{3}}{3}R=\frac{R}{3}(3+\sqrt{3}),$$

$$AB=R+R\sqrt{3}=R(1+\sqrt{3}).$$

4) $S_{ABC}=S_{ADC}$; $S_{ABCD}=AB\cdot BC=R(1+\sqrt{3})\times\frac{R}{3}(3+2\sqrt{3})=\frac{R^2}{3}(6+4\sqrt{3})=\frac{2R^2}{3}(3+2\sqrt{3})$.

яъни:

$$S_{ABCD}=\frac{2R^2(3+2\sqrt{3})}{3}.$$

5) $OC=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{3}}=\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$; $AC=2R+\frac{2\sqrt{3}}{3}R=\frac{2R}{3}(3+\sqrt{3})$.

Бизга маълум:

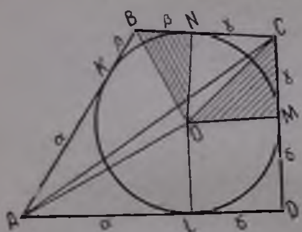
$$R_1=\frac{abc}{4S}=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S}=\frac{1}{4S}\cdot AB\cdot AC\cdot BC=\frac{1\cdot 3}{4R^2(3+2\sqrt{3})}\cdot R(1+\sqrt{3})\times$$

$$\times\frac{R}{3}(3+\sqrt{3})\cdot\frac{2R}{3}(3+\sqrt{3})=\frac{(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})^2\cdot 2R}{4\cdot 3(3+2\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2\cdot 6\cdot R(5+3\sqrt{3})}{3\cdot 4(3+2\sqrt{3})}=\frac{R(5+3\sqrt{3})}{2\sqrt{3}+3}=\frac{R(5+3\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)}{12-9}=$$

$$=\frac{R(3+\sqrt{3})}{3}.$$

Демак, $R_1=\frac{R(3+\sqrt{3})}{3}$. (Бу ерда R_1 тўртбурчакка ташқи чизилган айлана радиусидир.)



255-шакл.

542. Ечиш (255-шакл). 1) I қисм 31-масалада шунга яқин иш кўрилган эди: бу ерда биз яна қуйидагича белгилаб чиқамиз:

$$AK=AL=\alpha;\ BK=BN=\beta;$$
$$CN=CM=\gamma;$$

$DM=DL=\delta$ десак, $\alpha+\beta=a$; $\beta+\gamma=b$ бўлиб, бундан: $a-b=$ $=\alpha-\gamma$ ва $\gamma=\alpha-a+b$ олинади.

2) AOL ва COM учбурчаклардан:

$$AO^2=\alpha^2+r^2;\ OC^2=\gamma^2+r^2. \qquad (1)$$

Юқорида сўзланган масаладаги натижада

$$\frac{AO^2}{CO^2}=\frac{ad}{bc}\ \text{эди.} \qquad (2)$$

(2) дан (1) га қўйсак, $\frac{\alpha^2+r^2}{\gamma^2+r^2}=\frac{ad}{bc}$ ёки

$$\alpha^2bc+r^2bc=\gamma^2ad+r^2ad;\ \alpha^2bc+r^2bc=(\alpha+b-a)^2ad+r^2ad,$$

ёки

$$\alpha^2(ad-bc)-2\alpha\cdot ad(a-b)+(a-c)^2ad+r^2(ad-bc)=0. \qquad (3)$$

Агар

а) $a+c=b+d=p$ десак, унда:

$$ad-bc=ad-db+db-bc=d(a-b)+b(d-c)=$$
$$=d(a-b)+b(a-b)=(a-b)(d+b)=p(a-b). \qquad (4)$$

(4) ва (3) дан [(3) тенгликни $(a-b)$ га қисқартиргандан сўнг]:

б) $p\alpha^2-2\alpha ad+(a-b)ad+pr^2=0;$

бундан:

$$\alpha=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-p(a-b)ad-p^2r^2}}{p}. \qquad (A)$$

Шунингдек:

с) $a^2d^2 - p(a-b)ad = ad[ad - (b+d)(a-b)] = ad[ad - ab + b^2 - ad + bd] = abd(b+d-a) = abcd.$

Шундан ва (A) дан: $\alpha = \frac{ad \pm \sqrt{abcd - p^2r^2}}{p}$ олинади. Агарда $\gamma = \alpha - a + b$ га α нинг қийматини қўйилса:

3) $\gamma = \alpha - a + b = \frac{ad \pm \sqrt{abcd - p^2r^2}}{p} - a + b =$

$$= \frac{ad \pm \sqrt{abcd - pr^2} - (a-b)(b+d)}{p} = \frac{\pm \sqrt{abcd - pr^2} + (b+d-a)}{p} =$$

$= \frac{\pm \sqrt{abcd - pr^2} + bc}{p}$, яъни $\gamma = \frac{bc \pm \sqrt{abcd - pr^2}}{p}$ чиқади.

4) Айтилган масалада

$$\frac{BO^2}{OD^2} = \frac{ab}{cd} \tag{1}$$

эди. Шаклдан:

$$BO^2 = r^2 + \beta^2; \; OD^2 = r^2 + \delta^2 \tag{2}$$

ёзилади ($\triangle OBN$ ва $\triangle ODM$ дан). (1) га (2) ни қўйилса:

$$\frac{r^2 + \beta^2}{r^2 + \delta^2} = \frac{ab}{cd}$$

ёки

$$r^2 + d^2 + \beta^2cd = r^2ab + \delta^2ab \tag{3}$$

оламиз.

5) $\beta + \gamma = b$; $\gamma + \delta = c$ бўлиб, бундан:

$$b - c = \beta - \delta; \; \delta = \beta - (b - c) \tag{4}$$

(4) ни (3) га қўйсак:

$$r^2cd + \beta^2cd = r^2ab + [\beta - (b-c)]^2ab$$

ёки

$$r^2cd + \beta^2cd = r^2ab + \beta^2ab - 2\beta(b-c)ab + (b-c)^2ab,$$

ёки

$$\beta^2(ab - cd) - 2\beta ab(b-c) + (b-c)^2ab + r^2(ab - cd) = 0; \tag{5}$$

6) $ab - cd = ab - bd + bd - cd = b(a-d) + d(b-c) =$

$$= b(b-c) + d(b-c) = (b-c)(b+d) = (b-c)p \tag{6}$$

чиқади.

$a + c = b + d = p$ ва $a - d = b - c$ эди. (6) ни (5) га қўямиз, унда:

7) $\beta^2p(b-c) - 2\beta ab(b-c) + (b-c)^2ab + r^2p(b-c) = 0.$

Буни $(b-c)$ га қисқартирсак,

$$\beta^2p - 2\beta ac + (b-c)ab + r^2p = 0.$$

Бундан:

$$\beta = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - pab - r^2p^2}}{p} = \frac{ab \pm \sqrt{abcd - r^2p^2}}{p},$$

яъни:

$$\beta = \frac{ab \pm \sqrt{abcd - r^2p^2}}{p}$$

чиқади, чунки:

$$a^2b^2 - abp\,(b-c) = ab\,[ab - p\,(b-c)] = ab\,[ac - (a+c)\,(b-c)] =$$
$$= ab\,(ab - bc - ab + ac + c^2) = ab\,(ac + c^2 - bc) = abc\,(a + c -$$
$$- b) = abcd \text{ ва } (d = a + c - b).$$

8) $\delta = \beta - (b - c) = \frac{ab \pm \sqrt{abcd - r^2p^2}}{p} - (b - c) =$

$$= \frac{ab \pm \sqrt{abcd - r^2p^2} - (a+c)\,(b-c)}{p} = \frac{ac - bc + c^2 \pm \sqrt{abcd - r^2p^2}}{p} =$$

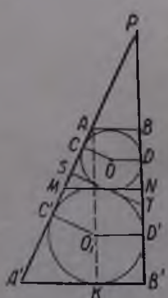
$= \frac{c\,(a + c - b) \mp \sqrt{abcd - r^2p^2}}{p} = \frac{cd \pm \sqrt{abcd - r^2p^2}}{p}$ чиқади, яъни:

$\delta = \frac{cd \pm \sqrt{abcd - r^2p^2}}{p}$ бўлади.

Агарда $\sqrt{abcd - r^2p^2} = M$ орқали кўрсатилса, унда:

$$\alpha = \frac{ad \pm M}{p};\ \beta = \frac{ab \pm M}{p};\ \gamma = \frac{bc \pm M}{p} \text{ ва } \delta = \frac{cd \pm M}{p}$$

ҳолга келади.



256-шакл.

543. Ечиш (256-шакл). Агарда айланалар радиусларини r ва r' десак, бунда $CC' = DD' = r + r'$ яна $A'C' = a - r'$ бўлганидан $AA' = A'C' + C'C + AC = a - r' + + b - r + r + r' = a + b$ ва $A'K = a - b$ бўйича $AA'K$ учбурчакдан:

$$BB' = AK = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}.$$

Трапеция $A'B'P$ учбурчакка тўлдирилса, бунда $\triangle A'B'P \backsim \triangle AA'K$ ва $AK = BB'$ бўлганидан $\frac{A'P}{A'A} = \frac{B'A'}{A'K'}$ ёки

$$A'P = \frac{A'B' \cdot AA'}{A'K} = \frac{a\,(a+b)}{a-b}.$$

Шунингдек:

$$\frac{B'P}{A'B'} = \frac{BB'}{A'K}$$

ёки

$$B'P = \frac{A'B' \cdot BB'}{AK} = \frac{2a\sqrt{ab}}{a-b}$$

$$S_{A'B'P} = \frac{1}{2} A'B' \cdot B'P = \frac{a^2\sqrt{ab}}{a-b}$$

ва бу учбурчакда

$$p = \frac{1}{2}\,(A'P + B'P + A'B') = \frac{1}{2}\left[\frac{a\,(a+b)}{a-b} + \frac{2a\sqrt{ab}}{a-b} + a\right] =$$
$$= \frac{a^2 + a\sqrt{ab}}{a-b},$$

бундан:

$$r' = \frac{S}{p} = \frac{a^2\sqrt{ab}}{a-b} : \frac{a^2 + a\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

шартга кўра бизга маълум бўлишича

$$BB' = 2\,(r + r') \text{ ёки } r + r' = \frac{1}{2} BB' = \sqrt{ab};$$

бундан:

$$r = \sqrt{ab} - r' = \sqrt{ab} - \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

$\triangle PMN \backsim \triangle PA'B'$ бўлганидан $\frac{MN}{A'B'} = \frac{r}{r'}$ ёки

$$MN = a \cdot \frac{r}{r'} = a \cdot \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab}$$

ҳамда $MN \perp BB'$ ва $ST \perp AA'$, $C'S = r'$, $A'C' = a - r'$ бўлиши сабабидан,

натижада:

$$A'S = A'C' + C'S = a - r' + r' = a; \text{ яъни } A'S = A'B'.$$

Бундан:

$$B'T = ST = \sqrt{ab} = \frac{1}{2} BB'.$$

$A'B'BA$ тўртбурчакнинг ўрта чизиғи $\frac{a+b}{2}$, шунингдек $AA' = a + b$; изланган айлананинг маркази AA' кесманинг ўртаси бўлиб, радиуси:

$$R = \frac{a+b}{2}.$$

544. $\sqrt{\frac{5b^2 - 8a^2}{8}}$; $7b^2 = 16a^2$.

Кўрсатма. Тўртбурчакни учбурчакларга ажратиб, учбурчак томонларининг квадратлари ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз.

545. h^2.

546. Ечиш (257-шакл). LKD учбурчакда $LK = \frac{1}{2} LD$ бўлганидан:

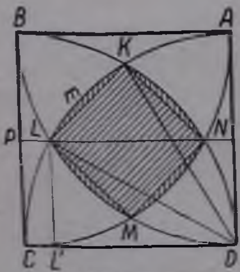
$$\angle LDK = 30^\circ.$$

Демак:

$$S_{\text{сект.}\ (DKmL)} = \frac{\pi r^2}{12} \qquad (1)$$

ва

$$S_{DKL} = \frac{1}{2} \cdot LD \cdot h = \frac{1}{2} r \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{4} r^2. \qquad (2)$$



257-шакл.

(1) ва (2) га кўра:

$$S_{\text{сегм.}(KLm)} = \frac{\pi r^2}{12} - \frac{1}{4} r^2 = \frac{r^2}{12} (\pi - 3). \qquad (3)$$

$\triangle DLL'$ дан $DL' = \sqrt{DL^2 - LL'^2} =$

$$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}. \qquad (4)$$

$$PL = CL' = DC - DL'$$

бўлганидан:

$$LP = r - \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r(2-\sqrt{3})}{2}. \qquad (5)$$

Шунга кўра $KLMN$ квадратнинг диагонали:

$$LN = r - 2\left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = r(\sqrt{3} - 1). \qquad (6)$$

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} LN^2 = \frac{1}{2} [r(\sqrt{3} - 1)]^2 = \frac{1}{2} [r^2 (3 - 2\sqrt{3} + 1)] =$$

$$= \frac{1}{2} r^2 (4 - 2\sqrt{3}). \qquad (7)$$

Олинган шакл юзи:

$$S = S_{LMNK\ (\text{кв.})} + 4 \cdot S_{KLM\ (\text{сегм.})} = \frac{r^2}{2}(4 - 2\sqrt{3}) + 4 \cdot \frac{r^2}{12}(\pi - 3) =$$

$$= \frac{r^2}{2}(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{r^2}{3}(\pi - 3) = \frac{r^2}{3}(3 - 3\sqrt{3} + \pi). \qquad (8)$$

547. $\frac{4S}{k}$. Бу ерда S томонлари a, a' ва k бўлган учбурчакнинг юзидан иборат.

Кўрсатма. Диагоналларнинг ўрталарини бирлаштирувчи кесмалар учлари айланаларнинг кесишган нуқтаси билан бирлаштирилса, тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Унинг юзини аниқлаймиз.

548. 1.

549. $\frac{3 + \sqrt{2}}{4} r^2$.

550. Ечиш (258-шакл). Шарт бўйича $r = \sqrt{6}$; $\angle OAC = 60°$; $AOC = 90°$, $\angle ACO = 30°$ бўлганидан:

$$AC = 2 \cdot AO = 2r. \qquad (1)$$

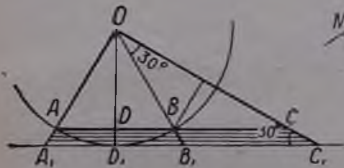
A_1OC_1 учбурчакдан:

$$A_1B_1 = A_1O = b = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

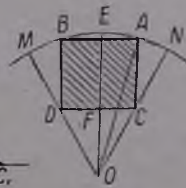
ва

$$A_1C_1 = 2A_1B_1 = \frac{4r\sqrt{3}}{3}.$$

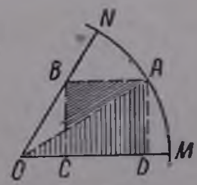
$$DD_1 = OD_1 - OD = r - \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right).$$



258-шакл.



259-*а* шакл.



259-*б* шакл.

Сунгра изланган:

$$S_{AA_1C_1C} = \left(\frac{AC + A_1C_1}{2}\right)\cdot DD_1 = \left(r + \frac{2r}{3}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{r}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3}.$$

551. $\frac{15}{8}\sqrt{3}$.

552. $h = \sqrt{ab}$; $c = \frac{a+b}{2}$.

553. $2c^2 = a^2 + b^2$, бу ерда a, b — асослар, c — ён томон.

554. $\frac{b}{a}$; $\frac{ac}{b}$.

555. Ечиш (259-*а* шакл). I. 1) $AB = a$; $AO = r$ бўлса, бунда $EO = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ (AOE учбурчакда $OE^2 = AO^2 - AE^2$; $OE^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}$);

2) OFC учбурчакда $\angle FOC = 30°$, $\angle FCO = 60°$, яъни $FC = \frac{1}{2}CO$; $FC = \frac{a}{2}$; $OC = a$. Шундан:

$$OF = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3};\ OE = EF + FO = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}.$$

Шунинг учун:

3) $\frac{a}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right) = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$; $\frac{a^2}{4}\left(7 + 4\sqrt{3}\right) = r^2 - \frac{a^2}{4}$;

$\frac{a^2}{4}\left(8 + 4\sqrt{3}\right) = r^2$;

$$a^2\left(2 + \sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{3};\ a^2 = 1;\ a = 1.$$

II. 259-*б* шакл.

Агарда квадрат сектор томонига ясалса, бунда:

1) AOD учбурчакдан $OD=\sqrt{r^2-a^2}$;

2) OBC учбурчакда $\angle BOC=60°$; $\angle OBC=30°$, яъни:

$$OC=\frac{1}{2}OB=x;$$

$$x^2=4x^2-a^2;\ 3x^2=a^2;\ x=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Шундан:

$$OD=a+\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{3}(3+\sqrt{3});$$

3) $\frac{a}{3}(3+\sqrt{3})=\sqrt{r^2-a^2}$; $\frac{a^2}{3}(4+2\sqrt{3})=r^2-a^2$;

$$\frac{a^2}{3}(7+2\sqrt{3})=r^2;\ a^2=\frac{3r^2}{7+2\sqrt{3}};\ a=r\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{r\sqrt{3(7+2\sqrt{3})}}{7+2\sqrt{3}}=r\cdot\frac{(7-2\sqrt{3})\sqrt{21+6\sqrt{3}}}{37}=$$

$$=r\cdot\frac{(7-2\sqrt{3})\left(\sqrt{42+2\sqrt{333}}+\sqrt{42-2\sqrt{333}}\right)}{37\cdot 2}=$$

$$=\cdot\frac{\left(\sqrt{42+2\sqrt{333}}+\sqrt{42-2\sqrt{333}}\right)-2\sqrt{126+6\sqrt{333}}-2\sqrt{126-6\sqrt{333}})}{37\cdot 2}.$$

Шундан:

$$a=\sqrt{2+\sqrt{3}}\times$$

$$\times\frac{7\left(\sqrt{42+2\sqrt{333}}+\sqrt{42-2\sqrt{333}}\right)-2\left(\sqrt{126+6\sqrt{333}}+\sqrt{126-6\sqrt{333}}\right)}{74};$$

яъни $a=\frac{2(21\sqrt{3}-38)}{37}$ келиб чиқади.

556. $\sqrt{\frac{10}{17}}$; $6\sqrt{\frac{10}{17}}$.

557. Ечиш (260-шакл). ACD учбурчакда K марказли ички чизилган айлананинг радиуси $=R$; $S_{ACD}=S$ ва ярим периметри:

$$p=\frac{AD+DC+AC}{2}=\frac{2a+a\sqrt{2}}{2}=a+\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Шакл бўйича $OK=R$ бўлиб, $S=\frac{a^2}{2}$, бунда:

$$OK=\frac{S}{p}=\frac{\frac{a^2}{2}}{a+\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{a}{2}(2-\sqrt{2}). \qquad (1)$$

$$FL=LI=r;\ \angle LOK=45° \text{ ва } OL=OK.$$

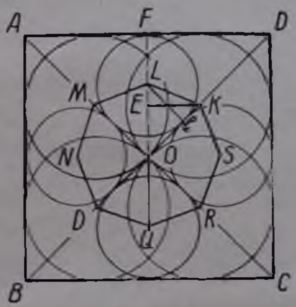
OLl учбурчакдан $OK^2 = 2r^2$; $r = \frac{OK\sqrt{2}}{2}$.

яъни OEK учбурчакда $\angle EOK = \angle EKO$; $OK^2 = 2 \cdot EK^2$ ёки:

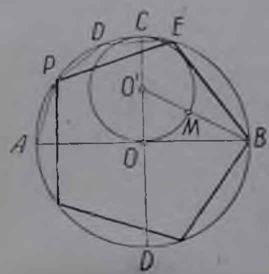
$$EK = OK \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгликдан:

$$FL = KE = OK \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1). \tag{3}$$



26)-шакл.



26і-шакл.

Шаклдан:

$$LO = FO - FL = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1) = \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1). \tag{4}$$

(1) ва (4) тенгликлардан: $OK = LO$.
Буларга асосан:

$$S = S_{OKL} = \frac{1}{2} LO \cdot KE = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}(\sqrt{2}-1) \cdot \frac{a}{2}(2-\sqrt{2}) =$$
$$= \frac{a^2}{8}(3\sqrt{2}-4).$$

Саккиз бурчакли шакл шундай 8 та учбурчакка тенг бўлганидан:

$$S_{8\text{-бур.}} = 8 \cdot S = 8 \cdot \frac{a^2}{8}(3\sqrt{2}-4) = a^2(3\sqrt{3}-4).$$

558. $\frac{R^2}{12}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$; $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

Кўрсатма. Олинган тўртбурчакда BC ва AD диагоналларини олиб, Птоломей теоремасини татбиқ этамиз.

559. $\frac{3}{2}R^2$.

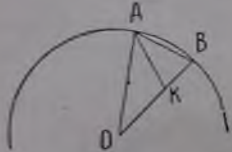
560. r^2.

561. $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$.

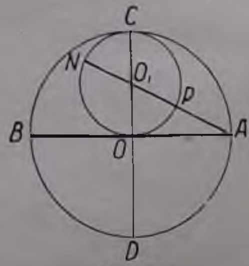
562. $2r^2$.

563. Ёрдамчи маълумот (261-шакл). Энг олдин ички мунтазам 10-бурчак ясаб, сўнгра бундан ички мунтазам 5-бурчак ҳосил қиламиз.

Ярим айлананинг OC радиусини диаметр қилиб O' марказли айлана чизамиз. Олинган O' нуқтани AB диаметрнинг B учи билан туташтирсак, бунда $O'B$ кесма O' марказли айланани M нуқтада кесиб ўтади. Бунда олинган BM тўғри чизиқ кесмаси биз излаган мунтазам 10-бурчакнинг бир томонидан иборат



262-шакл.



263-шакл.

бўлади. Бу кесмага тенг ватар айланага 10 марта жойлашади, яъни бу билан айлана тенг 10 бўлакка бўлинади. Агарда бу бўлиниш нуқталарни биттадан оралаб туташтирсак, ички мунтазам бешбурчак ҳосил бўлади.

Энди ички мунтазам 10-бурчак томонининг радиусга бўлган муносабатини ва қийматини топамиз. 262-шаклдан: 1) AOB тенг ёнли учбурчакда:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ;\ AO = BO = r.$$

Бунда $\angle A$ нинг AK биссектрисасини чизсак, иккита тенг ёнли $\triangle AOK$ ва $\triangle ABK$ ҳосил бўлади. Бунда $AB=AK=OK=a_{10}$ бўлади. AK учбурчакнинг биссектрисаси бўлганидан $\frac{AB}{AO}=\frac{BK}{OK}$ ёки $\frac{a_{10}}{r}=\frac{r-a_{10}}{a_{10}}$, бундан $r(r-a_{10})=a_{10}^2$ бўлиб, a_{10} айлана радиуси r нинг четки ва ўрта нисбатда бўлувчи кесмалардан иборат эканлиги маълум бўлади;

2) 263-шаклда $AP=x$; $PN=CO=r$; O_1 марказли айланадан ташқарида олинган A нуқтадан айланага AO уринмани ва AN кесувчини ўтказсак, бунда $AO^2=AP\cdot AN$ ёки $r^2=x(r+x)$, бундан $r(r-x)=x^2$. Бундан маълум бўладики, олинган AP кесма ҳақиқатан ҳам радиусни четки ва ўрта нисбатда бўлув-

чи кесмалардан иборатдир, яъни $x = a_{10}$; унинг қиймати $x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{-r \pm r\sqrt{5}}{2}$ бўлиб:

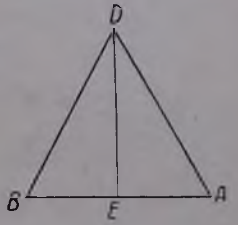
$$x = a_{10} = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \qquad (1)$$

(Бунда фақат мусбат қиймат олинади.)

II. Бунга кўра a_5 ни излаймиз.

1) (264-шакл) мунтазам кўпбурчак томонларини иккилантириш формуласига биноан:

$$a_{10} = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_5^2}{4r^2}}} \qquad (2)$$



264-шакл.

бўлиб, (1) ва (2) дан:

$$r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_5^2}{4r^2}}}$$

ёзилса, бундан:

$$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

келиб чиқади;

2) шаклнинг $\frac{1}{5}$ қисми бўлган BOA учбурчак юзини топамиз:

AOB учбурчакда $AB = a_5$; $AE = \frac{a_5}{2} = \frac{r}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$

Бу ерда:

$$OE = h = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{10}(10 - 2\sqrt{5})} =$$
$$= \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}};$$

3) учбурчакнинг юзи:

$$S_{BOA} = \frac{1}{2} a_5 h_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times$$
$$\times \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

4) бундан ички мунтазам бешбурчакнинг юзи:

$$S_{м.\ 5\ б.} = 5 \cdot S_{\Delta} = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

564. $\frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}.$

565. $2r^2\sqrt{2}.$

566. $\frac{5}{4} r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$

Кўрсатма. 563-масалага қаранг.

567. $3r^2\sqrt{3}$.

Кўрсатма. $b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$ формуладан фойдаланамиз.

568. $4r^2$.

569. $5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

570. $2r^2\sqrt{3}$.

571. $8r^2(\sqrt{2}-1)$.

572. $2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.

Кўрсатма. 567-масалага қаранг.

573. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

574. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.

575. $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

576. $2a^2(1+\sqrt{2})$.

577. $\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

578. $3a^2(2+\sqrt{3})$.

579. $\sqrt[4]{\frac{16}{3}S^2}$.

580. $\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$.

581. $\sqrt{S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)}$.

582. $\sqrt{\frac{S}{3}(2-\sqrt{3})}$.

583. $\sqrt{\frac{2}{5}\cdot S\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}$.

Кўрсатма. 563-масалага қаранг.

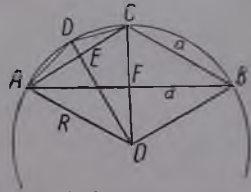
584. $\sqrt{\frac{S}{2\sqrt{2}}}$.

585. $\sqrt{\frac{1}{5}\cdot S\cdot\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}}$.

586. *Кўрсатма.* Птоломей теоремасини татбиқ этамиз.

587. Ечиш. 1) Мунтазам учбурчак, квадрат, бешбурчак... ларнинг ички бурчаклари: 60°, 90°, 108°... га тенг бўлиб, булардан квадратнинг бурчаги иккиланганда тўғри чизиққа айланиб кетади, ёлғиз учбурчакнинг ички бурчагигина масалани қаноатлантириши мумкин.

2) Учбурчакнинг ички бурчаги иккиланса $60°\cdot 2 = 120°$ бўлиб, бу мунтазам олтибурчакнинг ички бурчаги бўлади. Мунтазам учбурчакнинг юзи билан мунтазам олтибурчак юзларининг нисбати 1 : 6 каби бўлади, чунки томонлари R бўлган мунтазам олтибурчак, томонлари R бўлган 6 та мунтазам учбурчакка ажралади.



265-шакл.

588. Ечиш (265-шакл). $AB = a_n = \alpha$, $AC = a_{2n} = a$ бўлсин; бунда иккилантириш формуласига биноан $a^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \alpha^2}$ бўлиб,

$$\alpha = \frac{a}{R}\sqrt{4R^2 - a^2}, \qquad (1)$$

AOC учбурчак, томонлари $2n$ бўлган ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг $\frac{1}{2n}$ қисми бўлганидан:

$$\frac{S_1}{2n} = \frac{S_{AOC}}{1} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot OE = \frac{1}{2}a\cdot\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4}\cdot\sqrt{4R^2 - a^2}$$

ёки

$$\frac{S_1}{n} = \frac{a}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}. \qquad (2)$$

Шунга ўхшаш:

$$\frac{S}{n} = \frac{S_{AOB}}{1} = \frac{1}{2}AB\cdot OF = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{4R^2 - \alpha^2}. \qquad (3)$$

(3) ифодага (1) ни қўйсак:

$$\frac{S}{n} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{4R^2 - \alpha^2} = \frac{\alpha}{4}\sqrt{4R^2 - \frac{a^2}{R^2}(4R^2 - a^2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{a}{R}\sqrt{4R^2 - a^2}\sqrt{4R^2 - \frac{a^2}{R^2}(4R^2 - a^2)} =$$

$$= \frac{a}{4R^2}(2R^2 - a^2)\sqrt{4R^2 - a^2}. \qquad (4)$$

Худди шу йўлда:

$$\frac{S_2}{4n} = \frac{S_{AOD}}{1} = \frac{1}{2}OD\cdot AE = \frac{1}{2}R\cdot\frac{a}{2} = \frac{aR}{4}$$

ёки

$$aR = \frac{S_2}{n}. \qquad (5)$$

(4) тенглик (2) га асосан алмаштирилса:

$$\frac{S}{n}=\frac{1}{R^2}(2R^2-a^2)\frac{S_1}{2n}$$

ёки

$$S=S_1-\frac{a^2S_1}{2R^2} \quad \text{ёки} \quad \frac{a}{R}=\sqrt{\frac{2(S_1-S)}{S_1}}. \tag{6}$$

(5) ва (6) тенгликлар кўпайтирилса:

$$a^2=\frac{S_2}{n}\sqrt{\frac{2(S_1-S)}{S_1}}. \tag{7}$$

(5) ни (6) га бўлинса

$$R^2=\frac{S_2}{n}\sqrt{\frac{S_1}{2(S_1-S)}} \tag{8}$$

ҳосил бўлади. Демак:

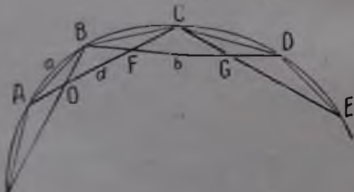
$$\frac{S_1}{2n}=\frac{a}{4}\sqrt{4R^2-a^2}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S_2}{n}\sqrt{\frac{2(S_1-S)}{S_1}}}\cdot\sqrt{\frac{4S_2}{n}\sqrt{\frac{S_1}{2(S_1-S)}}-}$$
$$\overline{-\frac{S_2}{n}\sqrt{\frac{2(S_1-S)}{S_1}}};$$

бундан:

$$S_1=\frac{S_2}{2}\sqrt{\frac{2(S_1+S)}{S_1}} \quad \text{ёки} \quad 2S_2^3=S_2^2(S+S_1)$$

бўлиб, натижада:

$$S_2^2=\frac{2S_1^3}{S+S_1}.$$



266-шакл.

589. Ечиш (266-шакл). Берилган мунтазам m-бурчакнинг томонлари $(AB, BC, CD, \ldots)=a$, диагоналлари $(AC, BD, CE, \ldots)=\alpha$ ва юзи $=$ $=S$ бўлиб, изланган мунтазам m-бурчакнинг томонлари $(OF, FG\ldots)=b$ ва юзи $=\Sigma$ бўлса, 588-масалага биноан:

$$\alpha^2=\frac{a^2}{r^2}(4r^2-a^2). \tag{1}$$

Сўнгра $\triangle BCF \backsim \triangle ABC$ бўлганидан $\frac{BF}{BC}=\frac{BC}{AC}$ ёки

$$\frac{BF}{a}=\frac{a}{\alpha},$$

бундан:

$$BF=\frac{a^2}{\alpha}. \tag{2}$$

Шаклдан:

$$FG=b=\alpha-2BF=\alpha-\frac{2a^2}{\alpha}=\frac{\alpha^2-2a^2}{\alpha}. \tag{3}$$

Кўпбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{\Sigma}{S}=\frac{b^2}{a^2}$,

$$\Sigma = S\frac{b^2}{a^2}. \qquad (4)$$

Учбурчаклардан бирини юзи $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ah$, бунда:

$$h=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2}$$

бўлганидан:

$$S_{\triangle}=\frac{a}{4}\sqrt{4R^2-a^2}. \qquad (5)$$

Мунтазам кўпбурчакнинг юзи m дона шундай учбурчак юзларининг йиғиндисидан иборат бўлганидан:

$$S=m\,\frac{a}{4}\sqrt{4r^2-a^2}. \qquad (6)$$

Ниҳоят, (1), (3) ва (6) дан (4) ифоданинг қиймати:

$$\Sigma=\frac{b^2}{a^2}\frac{ma}{4}\sqrt{4r^2-a^2}=\frac{1}{a^2}\frac{(a^2-2a^2)^2}{a^2}\cdot\frac{ma}{4}\sqrt{4r^2-a^2}=$$
$$=\frac{ma\,(2r^2-a^2)^2}{4r^2\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

590. 1.

591. 1.

592. Е ч и ш (267-шакл). Мунтазам ўнбешбурчакнинг бир томони билан тортилиб турган ёй $\alpha=\frac{360^\circ}{15}=24^\circ$. Агарда 60° ли AC ёйдан 36° ли AB ёйни айирсак AB ватар a_{10} ва BC ватар a_{15} бўлади.

$$AB=a_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1);\ AC=a_6=r \text{ ва } CD=a_3=r\sqrt{3}.$$

Сўнгра ABD учбурчакдан:

$$BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=\sqrt{4r^2-\frac{r^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Энди $ABCD$ тўртбурчакка Птоломей теоремасини татбиқ этсак,

$$BC\cdot AD=AC\cdot BD-AB\cdot CD$$

ёки

$$a_{15}\cdot 2r=r\,\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-r\sqrt{3}\cdot\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1),$$

бундан:

$$a_{15}=\frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

593. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

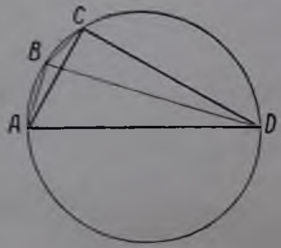
594. $S=\pi$. *Кўрсатма.* 584-масалага қаранг.

595. $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$.

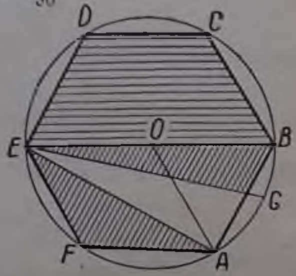
596. Ечиш (268-шакл).

1) Шартга кўра $S_{AGEF}:S_{BCDEG}=2:3$. Қисқалик учун $S_A:S_B$ деб ва $2:3$ ни $12:18$ деб олсак $S_A:S_B=12:18$ ёки $\frac{S_A+S_B}{S_B}=\frac{12+18}{18}=\frac{30}{18}$ бўлишидан $S_A+S_B=S_{\text{м. 6 бур.}}$

$$\frac{S_A}{S}=\frac{12}{30};\quad \frac{S_B}{S}=\frac{18}{30}$$



267-шакл.



268-шакл.

бўлади.

2) $S_{OAFE}=\frac{1}{3}\cdot S$ ва $S_{AEF}=\frac{1}{2}S_{OAFE}=\frac{1}{6}S$.

3) $S_{BEG}=\frac{1}{2}(S_Б-S_A)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)\cdot S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}S=\frac{1}{10}S$.

4) $S_{AEG}=S_{AGBEF}-(S_{AEF}+S_{BEG})=\frac{7}{3}S$.

5) $AG:BG=7:3$;

$$\frac{AG+BG}{AG}=\frac{7+3}{7}$$

ёки

$$\frac{AB}{AG}=\frac{10}{7};\quad \frac{a}{AG}=\frac{10}{7};\quad AG=0{,}7a.$$

6) $AE=a_3=a\sqrt{3}$; $\triangle AEG$ дан $EG=\sqrt{AG^2+AE^2}=$ $=\sqrt{(0{,}7a)^2+(a\sqrt{3})^2}=\sqrt{3{,}49a^2}=r\sqrt{\frac{349}{100}}=\frac{a}{10}\sqrt{349}$, яъни:

$$EG=\frac{a}{10}\sqrt{349}.$$

597. Ечиш (269-шакл). CMH учбурчакда $\angle C=120°$ бўлганидан $MH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; айлананинг E нуқтасига ўтказилган уринма

CD тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб, улар P нуқтада кесишади. Бунда $HP = r$ бўлганидан:

$$HP = a \text{ ва } DP = \frac{a}{2}. \qquad (1)$$

HDE учбурчакдан $HE^2 = DE^2 + DH^2 + 2HD \cdot DP = a^2 +$

$$+ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{7}{4}a^2$$

ёки:

$$HE = \frac{a}{2}\sqrt{7}. \qquad (2)$$

Тенг ёнли учбурчакнинг томонлари $MH = OH = PE = x$ бўлса, PHE учбурчакдан:

$$PE = \sqrt{HE^2 - HP^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{4} - a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}. \qquad (3)$$

KHE учбурчакнинг юзини $PE \cdot HP$ кўринишида ифода қилиш мумкин, яъни:

$$S_{KHE} = PE \cdot HP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \qquad (4)$$

OKL ва AOB учбурчакларнинг ухшашлигидан фойдаланиб:

$$OQ = h = \frac{3}{4}a \qquad (5)$$

ни топиш мумкин. Тўрт бурчакли шакллардан:

$$S_{HMLK} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot x = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4}a = \frac{9a^2\sqrt{3}}{16}. \qquad (6)$$

Беш бурчакли шаклнинг юзи (4) ва (6) нинг йиғиндисидан иборат бўлганидан:

$$S_{5\ \text{бур.}} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{17a^2\sqrt{3}}{16}.$$

598. $\frac{1}{2}(a^2 + 2ab - b^2)$; $\frac{a}{b} = \sqrt{2} + 1$.

599. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$.

600. (270-шакл.) 1) $S_{\text{мун. 6 бур}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$$\left(S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot OG \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right);$$

мунтазам олтибурчакнинг юзи $= 6 \cdot S_{OBC} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ бўлади.

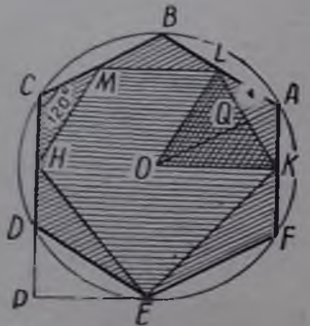
2) $AB = a_6$; $AK = 4a$; $AK \perp NP$; $\triangle BMP$ дан:

$$NP = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = \sqrt{16a^2 - 4a^2} = \sqrt{12a^2} = 2a\sqrt{3}.$$

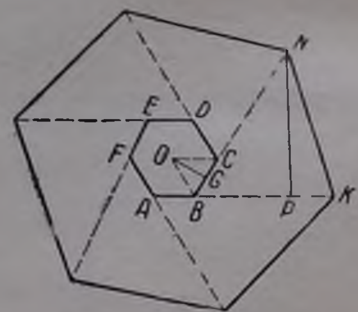
3) $S_{BKN} = \frac{1}{2} NP \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 3a = 3a^2\sqrt{3}.$

Бизда $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ эди, унда $S_{BKN} = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\sqrt{3}$; яъни: $S_{BKN} = 2 \cdot S$ бўлади.

4) Ҳосил бўлган шаклнинг юзи $\Sigma = 6 \cdot S_{BKM} + S_{\text{мун 6 бур.}} = 6 \cdot 2S + S = 12S + S = 13S.$



269-шакл.



270-шакл.

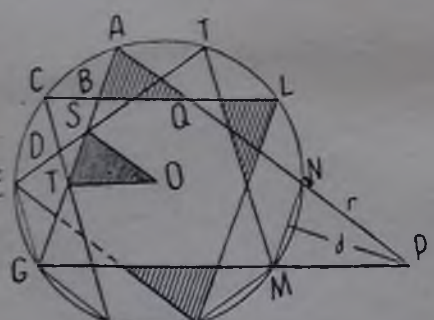
Демак, ҳосил бўлган шаклнинг юзи $\Sigma = 13S$ бўлади.

601. *Кўрсатма.* Ҳосил бўлган тўртбурчакка Птоломей теоремасини татбиқ этамиз.

602. Ечиш (271-шакл). Шаклдан кўрамизки:

1) $\angle QAB = \angle ABQ = \angle OST = \angle PNM = \angle PMN = 72^\circ$ ва

$$\triangle QAB \backsim \triangle OST \backsim \triangle PAG \backsim \triangle PNM.$$



271-шакл.

Бунинг устига QAB ва OST учбурчакларнинг баландликлари AL кесманинг ярмига тенг бўлиб, бу бурчаклар тенгдир.

Агарда шаклнинг юзини S десак, унинг қиймати ABQ учбурчак юзидан 20 марта катта, яъни $S = 20 \cdot S_{ABQ}$.

2) Шартда берилишича $MN = a_{10}$, $\angle PMN = 72^\circ$, бундан $MP = r$. Агарда $AG = GM = x$ десак, PNM ва PAG ўхшаш учбурчаклардан:

$$\frac{x}{x+r} = \frac{a_{10}}{r} \text{ ёки } \frac{x}{x+r} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2r}, \text{ бундан } x = \frac{r}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Энди QAB учбурчакнинг баландлигини изласак:

$$h=\frac{1}{2}AL=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-\frac{r^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2}=$$
$$=\frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

PMN учбурчакнинг γ баландлиги:

$$\gamma=\sqrt{r^2-\frac{a_{10}^2}{4}}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{16}(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

ABQ ва MNP учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{AB}{h}=\frac{MN}{\gamma}$, бундан:

$$AB=\frac{h\cdot a_{10}}{\gamma}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=\frac{r}{2}(3-\sqrt{5});$$

сўнгра:

$$S=2\cdot\frac{AB\cdot h}{2}=10\cdot\frac{r}{2}(3-\sqrt{5})\cdot\frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{5r^2}{2}\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

АДАБИЁТ

Қўлланмани тузишда қуйидаги адабиётлардан фойдаланилди:

М. Попруженко — Сборник геометрических задач.
Делоне и Житомирский — Геометрические задачи.
Ж. Адамар — Элементарная геометрия (I қисм).
А. Киселев — Геометрия (Планиметрия).
Д. И. Перепелкин — Курс элементарной геометрии (I қисм). Планиметрия.
Р. В. Гангнус ва Ю. О. Гурвиц — Геометрия. (Планиметрия қисми.)
А. Н. Перепелкина и С. И. Новоселов — Геометрия и тригонометрия.
З. А. Скопец и В. И. Жаров — Задачи и геометрические теоремы.
Проф. И. Ф. Четверухин — Геометрияда ясаш методлари.
В. М. Брадис — Методика преподавания математики в средней школе.
С. Е. Ляпина — Методика преподавания математики.
С. А. Гастеева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпина, М. М. Шидловская — Математика ўқитиш методикаси.
С. С. Бюшгенс — Аналитическая геометрия.
Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин — Элементар математикадан масалалар тўплами. Т., „Ўқитувчи", 1964.
Н. Н. Никитин — Геометрия.

МУНДАРИЖА