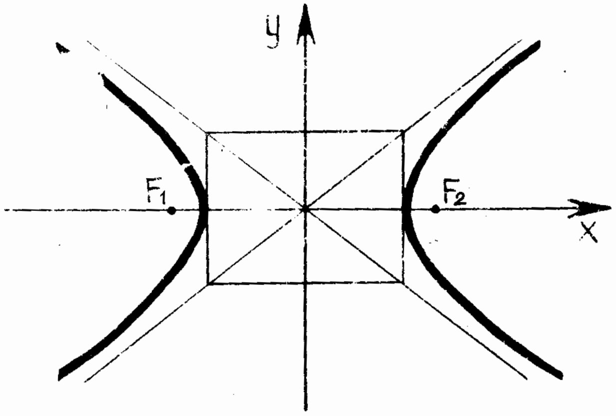
Б1я73
Н18

Х.Ҳ. НАЗАРОВ, Х.О. ОЧИЛОВА, Е.Г. ПОДГОРНОВА

ГЕОМЕТРИЯДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

1-қисм



Тақризчилар: физика математика фанлари номзоди, доцент Э. Ф. Файзибоев, физика-математика фанлари номзоди, доцент Г. Гаюпов

Махсус муҳаррир: физика-математика фанлари номзоди, доцент Н. Додажонов

Ушбу масалалар тўплами педагогика институтларининг геометрия курси бўйича янги дастурига мувофиқ тузилган бўлиб, векторлар алгебраси элементлари, текисликдаги координаталар методи, текисликнинг алмаштиришлари ва иккинчи тартибли чизиқлар назарияси, евклид ва аффин фазолардаги тўғри чизиқлар, текисликлар ва квадрикаларга доир масалаларни ўз ичига олган. Кўп масалаларнинг жавоблари кўрсатмалар билан, баъзилари муфассал ечимлари билан берилган.

Тўплам педагогика институтларининг талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ундан шунингдек университетлар талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

БИБЛИОТЕКА
У-5289

$Н\frac{1702040000-230}{353\ (04)-97}-96$

ISBN 5—645—01216—X

© «Ўқитувчи» нашриёти, 1983 й
© «Ўқитувчи» нашриёти, тузатилган нашри, 1997 й.

ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобни иккинчи нашрга тайёрлашда озгина, асосан, қуйидаги ўзгариш ва тўлдиришлар киритилди:

1. Ҳар бир бобдаги масалаларни ечишга ёрдам бериш мақсадида шу масалаларга керак бўлган назарий маълумотлар қисқача ҳолда берилди.

2. Биринчи нашрда содир бўлган баъзи камчиликлар тузатилди.

3. Геометриянинг амалда ишлатилишига доир масалалар сони бирмунча кўпайтирилди, уларга тегишли жавоб ва кўрсатмалар берилди.

4. Бир қатор параграфларга қўшимчалар киритилди, олдинги нашрда учраган хатолар тузатилади.

Иккинчи нашрга тайёрланган қўлёзмани проф. Э. Ф. Файзибоев, доц. Р. Ю. Юнусметов ўқиб чиқиб, қимматли маслаҳат бердилар; бу ўртоқларга чуқур миннатдорчилик билдирамиз.

Муаллифлар

1-бўлим

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ. ТЕКИСЛИКДАГИ ГЕОМЕТРИЯ

I боб. ВЕКТОРЛАР

1-§. ВЕКТОР. КОЛЛИНЕАР ВЕКТОРЛАР

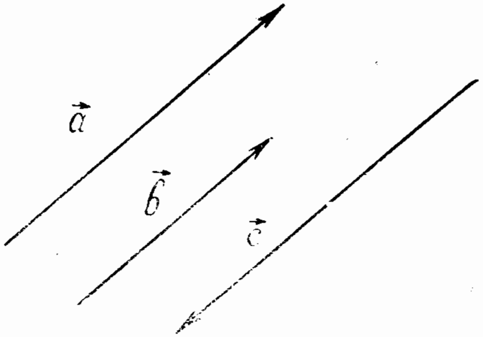
Сон қийматлари билангина аниқланадиган миқдорлар скаляр миқдор ёки қисқача скаляр деб аталади. Скаляр миқдорга кесма узунлиги, юз, ҳажм, вақт, масса, иш ва шу каби миқдорлар мисол бўла олади.

Скаляр миқдорлар билан бир қаторда бошқа хил миқдорлар ҳам борки, улар сон қийматлари билангина тўла аниқлана олмайди. Йўналган кесма, куч, тезлик ва шу каби миқдорлар бунга мисол бўла олади.

Агар кесма учларининг қайси бири биринчи ва қайси бири иккинчилиги аниқланган бўлса, бундай кесма йўналган кесма деб аталади. Йўналган кесманинг биринчи учи A унинг *боши*, иккинчи учи B эса *охири* дейилади ва $\overrightarrow{AB}$ шаклда ёзилади. Йўналган кесманинг боши ва охири бир-бири билан алмаштирилса, унинг йўналиши ўзгаради: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{AB}$ йўналган кесманинг узунлиги деб AB кесманинг узунлигига айтилади ва у $|\overrightarrow{AB}|$ кўринишда белгиланади.

Узунликлари тенг ва бир хил йўналишли барча йўналган кесмалар тўплами озод векторлар ёки қисқача вектор деб аталади. Векторлар устига стрелка қўйилган кичик лотин ҳарфлари $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$ билан белгиланади. Бу синфга тегишли ҳар бир йўналган кесма синфни тўла аниқлайди. Шунинг учун $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ бўлса, $\vec{a}$ векторни $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ кўринишда белгилаш мумкин. $\overrightarrow{AB}$ векторда A унинг боши, B эса охири деб юритилади. $\overrightarrow{AB}$ йўналган кесманинг узунлигига $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги (ёки модули) дейилади ва у $|\overrightarrow{AB}|$ кўринишда белгиланади.

Узунлиги бирга тенг бўлган вектор (ўзининг йўналишидаги) *бирлик вектори* ёки *орт* деб аталади. Боши ва охири устма-уст тушган вектор *ноль вектор* деб аталади. Ноль



1-чизма.

векторнинг узунлиги нолга тенг. Ноль-вектор ҳеч қандай йўналишга эга эмас, деб ҳисобланади.

Векторлар ётган тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлса, улар коллинеар векторлар дейилади. Коллинеар векторлар бир хил йўналишли, масалан $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ёки қарама-қарши йўналишли, масалан, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$ векторлар сингари бўлиши мумкин (1-чизма).

Икки гекторнинг тенглиги, яъни $\vec{a}=\vec{b}$ ёзув $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг битта вектор эканини ва турлича белгиланганлигини билдиради, яъни

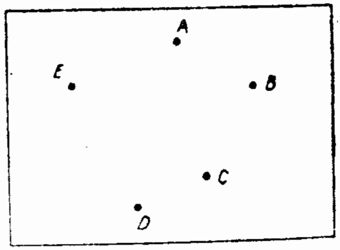
$$\vec{a}=\vec{b}\Rightarrow\left(\frac{|\bar{a}|}{\vec{a}}\overset{=}{\uparrow\uparrow}\frac{|\bar{b}|}{\vec{b}}\right).$$

1. Агар $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$ ва $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}$ эканлигини исботланг. Йўналган кесмалар ўрнига оддий кесмалар олинса, юқоридаги муносабат тўғри бўладими?

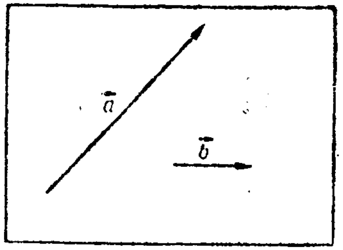
2. Агар $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ бўлса, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ бўлишини исботланг.

3. Ихтиёрий A, B, C нуқталар учун $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ шарт бажарилувчи ягона D нуқта мавжудлигини исботланг.

4. 2-чизмада кўрсатилган A, B, C, D, E нуқталарни дафтарингизда ясанг. Боши E



2-чизма.



3- чизма.

нуқтада бўлиб, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ векторларга тенг векторлар ясанг.

5. Агар M, N, P, Q нуқталар ихтиёрий $ABCD$ тўртбурчакнинг мос равишда $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA[$ томонларининг ўрталари бўлса, $\vec{MN} = \vec{QP}$ эканлигини исботланг.

6. Барча векторлар тўпламида коллинеарлик муносабати эквивалентлик муносабати бўла оладими?

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед берилган. Унинг учларидан тузилган:

1) узунликлари тенг бўлган векторларни:
2) бир хил йўналишга эга бўлган векторларни;
3) қарама-қарши йўналишга эга бўлган векторларни;
4) ўзаро тенг векторларни кўрсатинг.

8. Қарама-қарши йўналган векторлар учун транзитивлик қонуни бажариладими?

9. Қуйидаги тенгсизликлардан қайси бири 3- чизмадаги векторлар учун тўғри:

$$|\vec{a}| < |\vec{b}|, \quad \vec{a} > \vec{b}, \quad |\vec{a}| > |\vec{b}|?$$ ✓

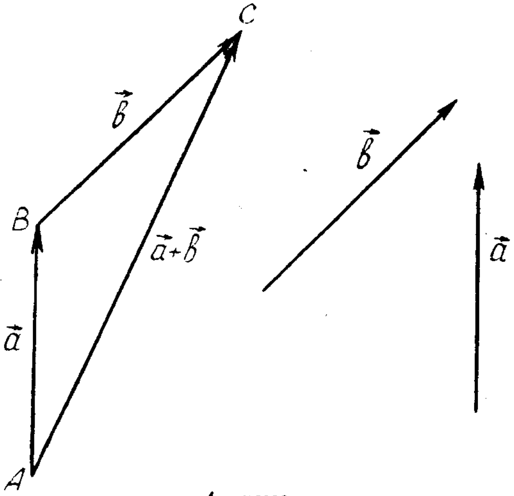
10. Агар $[MN]$ кесма ABC учбурчакнинг AC томонига параллел бўлган ўрта чизиғи, $[BD]$ унинг медианаси ва $O = (MN) \cap [BD]$ бўлса, қуйидаги векторлар жуфтлигининг қайси бирлари бир-бирига қарама-қарши йўналган бўлади:

$$\vec{OB} \text{ ва } \vec{OD};\ \vec{MN} \text{ ва } \vec{AC};\ \vec{MN} \text{ ва } \vec{CD}?$$

11. $ABCD$ трапеция берилган. $[AB]$ ва $[CD]$ лар трапециянинг асослари, M, N нуқталар эса мос равишда $[AD]$ ва $[BC]$ ён томонларнинг ўрталаридир. $\vec{AN}$ нинг $\vec{CM}$ га коллинеар эканлигини исботланг.

2- §. ВЕКТОРЛАРНИ ҚУШИШ ВА АЙИРИШ

Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг йиғиндиси деб исталган A нуқтадан $\vec{AB} = \vec{a}$ ни ясаб, унинг охири B га $\vec{BC} = \vec{b}$ векторни қўйганда боши $\vec{a}$ векторнинг боши A да, охири $\vec{b}$ векторнинг охири C да бўлган $\vec{AC} = \vec{c}$ векторга айтилади (4- чизма) ва уни қуйидагича ёзиш мумкин:



4- чизма.

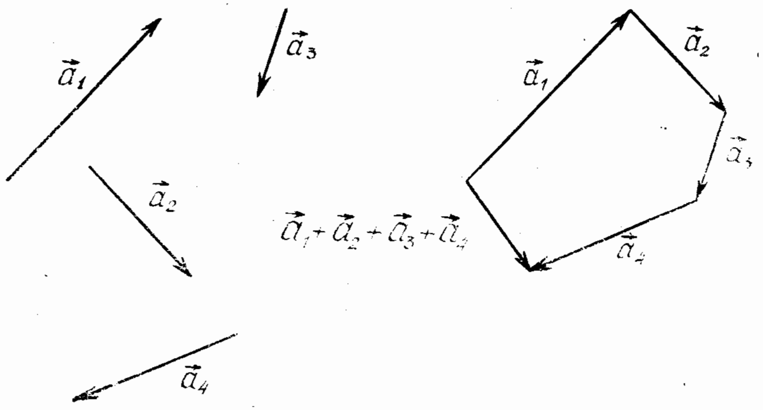
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (1) \quad \text{ёки} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c};$$

(1) тенгликни векторларни қўшишнинг «учбурчак қоидаси» дейилади.

Агар ABC учбурчакни (4- чизма) $ABCD$ параллелограммга тўлдирсак, векторларни қўшишнинг «параллелограмм қоидаси» келиб чиқади: икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторни қўшиш учун уларнинг бошларини бир нуқтага келтирамиз ва бу векторларни параллелограммнинг томонлари қилиб параллелограмм ясаймиз. Бу параллелограммнинг икки вектор бошлари бириккан учидан чиқувчи диагонали берилган икки векторнинг йиғиндиси бўлади.

Қўшилувчи векторлар сони иккитадан ортиқ ҳолда учбурчак қоидасини умумлаштириб, «кўпбурчак қоидаси»ни ҳосил қиламиз: бир неча вектор йиғиндисини ясаш учун ихтиёрий нуқтадан биринчи қўшилувчига тенг вектор ясаймиз, биринчи қўшилувчининг охиридан иккинчи қўшилувчини ясаймиз, иккинчисининг охиридан учинчи қўшилувчини ясаймиз ва ҳоказо. Биринчи қўшилувчи векторнинг бошини охирги вектор охири билан туташтирувчи вектор берилган векторлар йиғиндиси бўлади (5-чизма).

Агар қўшилувчи векторлардан охиргисининг охири



5- чизма.

биринчисининг бошига тўғри келиб қолса, йиғинди векторнинг узунлиги нолга тенг бўлади, яъни ноль-вектор бўлади.

Хусусий ҳолда $\vec{AB}+\vec{BA}=0$ ёки $\vec{AB}=-\vec{BA}$ бўлса, бундай векторлар бир-бирига қарама-қарши векторлар дейилади.

Векторларни қўшиш қуйидаги асосий қонунларга бўйсунади:

1°) ўрин алмаштириш қонунига:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

2°) группалаш (гуруҳлаш) қонунига:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c});$$

3°) $\vec{a}$ векторга ноль-вектор қўшилса, $\vec{a}$ вектор ҳосил бўлади, яъни $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

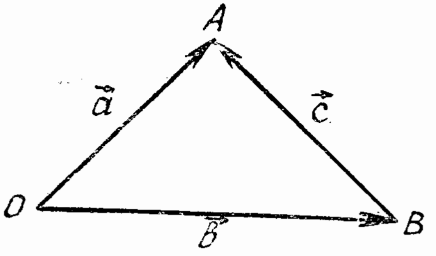
4°) $\vec{a}$ вектор учун шундай $\vec{a}'$ вектор мавжудки, унинг учун

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}.$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб $\vec{a}$ вектор билан $\vec{b}$ векторга қарама-қарши $(-\vec{b})$ векторнинг йиғиндисига айтилади. Демак, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ векторни ясаш учун $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ векторни ясаш керак экан. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг бошлари битта 0 нуқтага қўйилган бўлса (6-чизма) ҳамда $\vec{a}=\vec{OA}$ ва $\vec{b}=\vec{OB}$ деб олинса, у ҳолда

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{OA}-\vec{OB}=$$
$$=\vec{OA}+\vec{BO}=\vec{BA}$$

бўлади.



6- чизма.

12. Коллинеар бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган. $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $-\vec{b}-\vec{a}$ векторларни ясанг.

13. Ихтиёрий A, B, C нуқталар учун $\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{CB}$ тенглик ўринли эканлигини исботланг.

14. Агар $[MN]$ кесма ABC учбурчакнинг AC томонига параллел бўлган ўрта чизиғи, $[BD]$ унинг медианаси ва $O=(MN)\cap(BD)$ бўлса, қуйидаги векторлар жуфтлигининг қайси бирлари бир-бирига тенг бўлади:

$$\vec{OB} \text{ ва } \vec{OD},\ \vec{MN} \text{ ва } \vec{AC},\ \vec{MN} \text{ ва } \vec{DC}?$$

15. Ихтиёрий $ABCD$ тўртбурчак учун $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AD}+\vec{DC}$ эканлигини исботланг.

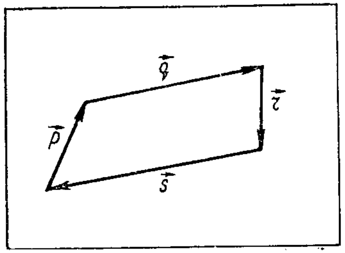
16. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун қандай шарт бажарилганда қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади (ҳар бир муносабат учун керакли шартларни топинг):

а) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
б) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;
в) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;
г) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
д) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
е) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$?

17. 7- чизмадаги $\vec{s}$ вектор $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ векторларнинг йиғиндиси бўла оладими?

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед берилган бўлса, $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$ йиғинди векторни топинг.

19. Текисликда $ABCD$ параллелограмм ва O нуқта бе-



7- чизма.

рилган. $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$ тенгликнинг ўринли - эканини исботланг.

20. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммдан фойдаланиб, $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$ муносабатнинг тўғрилигини текшириб кўринг.

21. Қуйидаги йиғиндиларни соддалаштиринг:

а) $\vec{AB}+\vec{MN}+\vec{BC}+\vec{CA}+\vec{PQ}+\vec{NM}$;

б) $\vec{FK}+\vec{MQ}+\vec{KP}+\vec{AM}+\vec{QK}+\vec{PF}$;

в) $\vec{KM}+\vec{DF}+\vec{AC}+\vec{FK}+\vec{CD}+\vec{PA}+\vec{MP}$;

г) $\vec{AB}+\vec{BA}+\vec{CD}+\vec{MN}+\vec{CD}+\vec{NM}$.

22. Қуйидаги ифодаларни соддалаштиринг:

а) $\vec{OP}-\vec{EP}+\vec{KD}-\vec{KA}$;

б) $\vec{AD}+\vec{MP}+\vec{EK}-\vec{EP}-\vec{MD}$;

в) $\vec{AC}-\vec{BC}-\vec{PM}-\vec{AP}+\vec{BM}$;

г) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}-\vec{AD}+\vec{MN}$.

23. Фазода ихтиёрий A, B, C, D нуқталар берилган бўлсин. Агар M, N нуқталар мос равишда $[AB]$ ва $[CD]$ кесмаларнинг ўртаси бўлса, $2\vec{MN}=\vec{AD}+\vec{BC}$ эканлигини исботланг.

3- §. ВЕКТОРЛАРНИ СОНГА КУПАЙТИРИШ

24. Берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўйича $2\vec{a}-3\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\frac{3}{4}\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{a}$, $-\sqrt{2}\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{b}$, $3(\vec{a}+\vec{b})$ векторларни ясанг.

25. $ABCD$ параллелограммнинг иккита қўшни томони $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, диагоналларининг кесишиш нуқтаси эса M бўлса, $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$, $\vec{MD}$ векторларни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ифодаланг.

26. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммдан фойдаланиб, қуйидаги вектор формадаги айниятларнинг тўғрилигини чизмада текширинг:

а) $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}$; б) $\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$;

в) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

27. $[AB]$ кесма берилган. Агар M нуқта $[AB]$ кесманинг ўртаси, O эса текисликдаги ихтиёрий нуқта бўлса, $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$ тенгликнинг ўринли эканлигини исботланг.

28. M нуқта ABC учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси бўлса, $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$ эканлигини исботланг.

29. Учбурчак медианаларидан тузилган векторларнинг йиғиндиси ноль-вектор эканлигини исботланг.

30. Ихтиёрий учбурчакнинг учта медианаси бўйича учбурчак ясаш мумкинлигини исботланг.

31. Ихтиёрий тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари бўлишини исботланг.

32. $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ векторлар AOB бурчакни аниқлайди. Шу бурчакнинг биссектрисаси бўйича йўналган бирор-бир векторни топинг.

33. Тўғри чизиқда A, B, C нуқталар берилган. Шу тўғри чизиқда $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{O}$ шартни қаноатлантирувчи O нуқта мавжудми?

34. $ABCD$ параллелограмм берилган бўлиб, M унинг симметрия марказидир. $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=\vec{O}$ тенглик бажарилишини исботланг.

35. $\vec{AC}=\lambda\vec{CB}$ шарт бажариладиган A, B, C нуқталар берилган. Иктиёрий O нуқта учун қуйидаги тенглик бажарилишини исботланг:

$$\vec{OC}=\frac{\vec{OA}+\lambda\vec{OB}}{1+\lambda}.$$

36. ABC учбурчак ва унинг оғирлик маркази G берилган бўлса, у ҳолда ихтиёрий M нуқта учун $\vec{MG}=\frac{1}{3}(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC})$ эканлигини исботланг.

37. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ шартни қаноатлантирувчи A, B, C нуқталар берилган. Ихтиёрий O нуқта учун

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OC}$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг.

38. A, B ва C — текисликнинг учта нуқтаси, Q эса унинг ихтиёрий тўртинчи нуқтаси ва $A \neq B$ бўлсин. C нуқтанинг (AB) тўғри чизиқда ётиши учун $\overrightarrow{QC} = \lambda\overrightarrow{QA} + (1-\lambda)\overrightarrow{QB}$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

39. Ихтиёрий учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишишини ва бу нуқтада (учидан бошлаб ҳисоблаганда) 2 : 1 нисбатда бўлинишини исбот қилинг.

40. $ABCD$ тўртбурчакнинг ўрта чизиқлари M нуқтада кесишади. Ихтиёрий O нуқта учун

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

тенглик бажарилишини исботланг.

41. $ABCDEF$ ихтиёрий олтибурчак бўлиб, U, V, W, X, Y, Z лар уларнинг мос равишда $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $]EF]$, $[FA]$ томонларининг ўрталари бўлсин, UYW ва VXZ учбурчакларнинг оғирлик марказлари устма-уст тушишини исбот қилинг.

42. ABC учбурчак текислигида ётувчи M нуқтадан унинг BC, CA, AB томонларига мос равишда параллел қилиб ўтказилган u, v, w тўғри чизиқлар уларнинг томонларини ёки давомларини мос равишда B_1, C_2 ва A_2 ҳамда C_1, B_2 ва A_1 нуқталарда $(A_1, A_2 \in (BC),\ B_1, B_2 \in (AC),\ C_1, C_2 \in (AB))$ кесади.

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{BC}} + \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{CA}} + \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\overrightarrow{AB}} = 1$$

эканлигини исботланг.

4-§. ВЕКТОР ФАЗО

Ҳар қандай хусусиятга эга бўлган элементлари вектор деб аталган бўш бўлмаган V тўплам берилган бўлсин. Бу тўплам элементларини устига стрелка қўйилган кичик лотин ҳарфлари билан белгилайлик. Бундан ташқари, ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, V нинг элементлари билан R нинг элементлари орасида маълум муносабатлар ўрнатилган бўлсин, жумладан:

I. V нинг ихтиёрий икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектори учун уларнинг йиғиндиси деб аталган, шу тўпламнинг элементидан иборат бўлган учинчи бир вектор мос келтирилган бўлсин, бу векторни $\vec{a} + \vec{b}$ кўринишда ёзамиз.

II. V нинг ихтиёрий $\vec{a}$ вектори ва ихтиёрий λ ҳақиқий сон учун V нинг шундай бир элементи мос келтирилган бўлсинки, бу элемент $\vec{a}$ векторни λ сонга кўпайтиришдан ҳосил қилинган дейилиб, уни $\lambda\vec{a}$ кўринишда ёзамиз. Бундан ташқари, бу аниқланган икки амал қуйидаги 8 та аксиомаларнинг шартларини қаноатлантирсин, яъни:

I_1. $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$ учун $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ бўлсин, яъни векторларни қўшиш коммутатив қонунига бўйсунсин.

I_2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ учун $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ бўлсин, яъни векторларни қўшиш амали гуруҳлаш қонунига бўйсунсин.

I_3. V да ноль-вектор деб аталувчи (уни биз $\vec{0}$ деб белгилаймиз) вектор мавжуд бўлиб, $\forall\, \vec{a} \in V$ учун $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ бўлсин.

I_4. V нинг ихтиёрий $\vec{a}$ вектори учун V да шундай $\vec{a}'$ вектор мавжуд бўлиб, $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$ бўлсин.

Бундай $\vec{a}'$ вектор $\vec{a}$ векторга қарама-қарши вектор деб аталади ва у $-\vec{a}$ кўринишда белгиланади.

II_1. $\forall\, \lambda \in R$ ва $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$ учун $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ бўлсин.

II_2. $\forall \lambda, \mu \in R$ ва $\forall\, \vec{a} \in V$ учун $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ бўлсин.

II_3. $\forall \lambda, \mu \in R$ ва $\forall\, \vec{a} \in V$ учун $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ бўлсин.

II_4. $\forall\, \vec{a} \in V$ учун $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ бўлсин, у ҳолда тўплам вектор (ёки чизиқли) фазо дейилади.

Агар бирор V' тўплам V нинг қисми бўлиб, унинг ўзи вектор фазо ташкил этса (V да аниқланган амалларга нисбатан), V' V нинг қисм фазоси дейилади.

43 — 52-масалаларда берилган тўпламларни вектор фазо ташкил қилиши ёки қилмаслигини текширинг.

43. V_3 — фазодаги ҳамма озод векторлар тўплами.

44. V_2 — фазонинг бирор П текислигига параллел бўлган барча векторлар тўплами.

45. V_1 — фазонинг бирор a тўғри чизиққа параллел бўлган барча векторлар тўплами.

46. L — фақат 0 дан иборат тўплам.

47. P_n — n-даражали кўпҳадлар тўплами.

48. M — элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган n та устунли ва m та сатрли барча матрицалар тўплами.

49. P_n — даражаси n дан ошмайдиган барча кўпҳадлар тўплами.

50. C — барча комплекс сонлар тўплами.

51. G — $[a, b]$ да узлуксиз функциялар тўплами.

52. $L = \{x, y, \ldots\}$ тўплам элементлари маълум тартибда олинган n та ҳақиқий сондан иборат. Масалан: $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $x_i, y_i \in R$. Бу тўпламда қўшиш амали ва сонга кўпайтириш амали қуйидагича аниқланган:

$$x + y = \{x_i + y_i\} \text{ ва } \lambda x = \{\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \lambda \in R.$$

53. 44 ва 45-масалалардаги V_1 ва V_2 вектор фазолар V_3 (43-масалага қаранг) нинг қисм фазолари эканлигини исботланг.

54. V вектор фазонинг иккита қисм фазосининг кесишмаси ҳам вектор фазо бўлишини исботланг.

55. AOB бурчак берилган. Агар M шу бурчакнинг ихтиёрий ички нуқтаси бўлса, $\vec{OM}$ векторлар тўплами вектор фазо ташкил қиладими?

56. s тўплам $(x) \leqslant 1$ шартни қаноатлантирувчи функциялар тўплами бўлса, у вектор фазо ташкил қила олмаслигини исботланг.

57. Вектор фазонинг аксиомаларидан фойдаланиб, қуйидаги теоремаларни исбот қилинг:

а) $\forall \vec{x} \in V$ учун $0\vec{x} = \vec{0}$;

б) $m \in R$, $m \neq 0$ ва $\vec{x} \in V$ берилган. Агар $m\vec{x} = \vec{0}$ бўлса, $\vec{x} = \vec{0}$;

в) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ учун $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ тенгликни қаноатлантирувчи $\vec{x}$ мавжуд.

5-§. ВЕКТОРНИНГ ЎҚДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

Ўқ деб шундай тўғри чизиққа айтиладики, унда мусбат йўналиш ва узунлик бирлиги танлаб олинган бўлади. Ўқ бирлик вектор билан тўла аниқланади.

Текисликдаги (фазодаги) ихтиёрий A нуқтанинг l ўқдаги тўғри чизиққа (П текисликка) параллел проекцияси деб A нуқтадан тўғри чизиққа (П текисликка) параллел қилиб ўтказилган m тўғри чизиқнинг (П текисликнинг) l ўқ билан кесишган A_1 нуқтасига айтилади ва у $\text{пр}\, A = A_1$ каби белгиланади. Агар хусусий ҳолда $m \perp l$ (ёки $\Pi \perp l$) бўлса, ҳосил бўлган проекциялар ортогонал проекциялар дейилади.

Агар $\vec{AB}$ берилса, унинг боши ва охирини l ўққа юқоридаги тартибда параллел проекциялаб, $\vec{A_1B_1}$ ни ҳосил қиламиз. $\vec{A_1B_1}$ ни $\vec{AB}$ нинг l ўқдаги m тўғри чизиққа (П текисликка) параллел вектор проекцияси дейилади ва қуйидагича белгиланади: $\text{пр}_l\, \vec{AB} = \vec{A_1B_1} = \lambda \vec{e}$, $\lambda \in R$; бунда

$\vec{l}$ — ўқнинг бирлик вектори, λ сони $\vec{AB}$ нинг l ўқдаги тўғри чизиққа (П текисликка) параллел скаляр проекцияси ёки қисқача, проекцияси деб аталади, демак $\lambda = \text{пр}_{\vec{l}} \vec{AB}$. $\vec{a} \neq \vec{0}$ нинг l ўқдаги ортогонал проекцияси $\vec{a}$ узунлигининг унинг l ўқ билан ташкил этган бурчаги косинусига кўпайтмасига тенг, яъни

$$\text{пр}_l\, \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi, \text{ бунда } \varphi = \widehat{(\vec{l}, \vec{a})}.$$

Векторнинг ўқдаги проекцияси қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\text{пр}_l\, (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \text{пр}_l\, \vec{a}_1 + \text{пр}_l\, \vec{a}_2 + \ldots + \text{пр}_l\, \vec{a}_n$.

2°. $\text{пр}_l\, (\lambda \vec{a}) = \lambda\, \text{пр}_l \vec{a}$, $\lambda \in R$.

58. Қуйидаги векторларнинг вектор проекциясини топинг:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\, 3\vec{a};\ \text{пр}_{\vec{2a}}\, 5\vec{a};\ \text{пр}_{\vec{-b}}\, 2\vec{b};\ \text{пр}_{-\vec{2c}}\, (-3\vec{c}).$$

(59). Қуйидаги векторларнинг проекциясини топинг:

✓ $\text{пр}_{\vec{a}}\, 3\vec{a}$, $\text{пр}_{\vec{a}}\, (-5\vec{a})$; $\text{пр}_{-\vec{3b}}\, 2\vec{b}$; $\text{пр}_{-\vec{3a}}\, (-2\vec{a})$.

60. $ABCD$ квадратда $\vec{AC}$ вектор l ўқнинг бирлик вектори бўлсин. $\vec{BA}$ ва $\vec{BC}$ векторларнинг l ўқдаги проекциясини топинг.

61. l ўқ $|\vec{OE}| = 1$ орт билан берилган. Модули тўртга тенг бўлган $\vec{b}$ вектор l ўқ билан 60° бурчак ташкил қилса, $\text{пр}_l\, \vec{b}$ ни ҳисобланг.

62. 61-масалада $(\vec{l}, \vec{b}) = 120°$ деб ҳисоблаб, $\text{пр}_l \vec{b}$ ни топинг.

БИБЛИОТЕКА
ПИ
НИЗАМИ
у-5283

63. Ихтиёрий учбурчак учун қуйидаги муносабатнинг тўғрилигини исботланг: $a = b \cos C + c \cos B$.

64. *ABCD* тетраэдрнинг $[AC]$ ва $[BD]$ қирралари тенг. $[AB]$ ва $[CD[$ қирраларнинг ўрталаридан ўтувчи тўғри чизиққа $[AB]$ ва $[CD]$ қирраларнинг проекциялари тенг бўлишини исботланг.

65. *ABCD* параллелограммнинг B, C ва D учларидан унинг текислигида ётмаган AN тўғри чизиққа $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ перпендикуляр туширилган. $[BB_1]$, $[CC_1]$ ва $[DD_1]$ кесмалар учбурчакнинг томонлари бўлишини исботланг.

6-§. ВЕКТОРЛАРНИНГ ЧИЗИҚЛИ БОҒЛАНИШИ. ВЕКТОРЛАРНИНГ БЕРИЛГАН БАЗИСГА НИСБАТАН КООРДИНАТАЛАРИ

Ихтиёрий $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ векторлар системаси ва $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин, у ҳолда $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n$ векторга $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси деб аталади.

Агар камида биттаси нолдан фарқли бўлган $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n \in R$ сонлар мавжуд бўлиб, $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$ (1) бўлса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизиқли боғлиқ, агар (1) муносабат $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонларнинг барчаси нолга тенг бўлганда бажарилса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизиқли эркли деб аталади.

Вектор фазонинг маълум тартибда олинган $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлиб, шу фазонинг ҳар бир вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лар орқали чизиқли ифодаланса, бу векторлар системаси вектор фазонинг базиси дейилади ва уни $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ кўринишда белгилаймиз. Базиснинг векторлар сони n ни вектор фазонинг ўлчови дейилади ва n ўлчовли вектор фазо V_n билан белгиланади.

Агар базиснинг ҳар бир вектори бирлик вектор бўлиб, уларнинг ҳар иккитаси ўзаро перпендикуляр бўлса, бундай базис ортонормалланган дейилади.

V_1 вектор фазода ноль бўлмаган ҳар қандай вектор базисни аниқлайди.

V_2 вектор фазода тартибланган коллинеар бўлмаган ҳар икки вектор базисни аниқлайди. V_3 да эса маълум тартибда олинган компланар бўлмаган учта $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базисни аниқлайди.

$Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ V_3 фазонинг бирорта тайин базиси бўлсин. $\forall \vec{a} \in V_3$ ни оламиз. У ҳолда шундай $x, y, z \in R$ сонлар мавжуд бўлиб, $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ бўлади.

Бу ердаги x, y, z сонлар $\vec{a}$ нинг $Б$ базисга нисбатан координаталари дейилади ва $\vec{a} = \{x, y, z\}$ кўринишда белгиланади, яъни $\vec{a} = \{x, y, z\} \Longleftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\overleftarrow{e}_3$.

66. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг коллинеар бўлиши учун улар орасида $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ чизиқли боғланиш мавжуд бўлиши зарур ва етарли эканлигини исбот қилинг, бу ерда $\alpha, \beta \in R$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

67. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ лар коллинеар бўлмаган векторлар бўлса, у ҳолда бу векторлар текислигида ётувчи ихтиёрий $\vec{c}$ векторни ягона равишда $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ кўринишда $(\alpha, \beta \in R)$ ёзиш мумкин эканлигини исботланг.

68. *ABCD* параллелограмм берилган. E ва F параллелограммнинг қарама-қарши $[BC]$ ва $[AD]$ томонларининг ўрталари, O нуқта унинг диагоналларининг кесишган нуқтаси бўлсин. $\vec{AB} = \vec{e}_1$, $\vec{AD} = \vec{e}_2$ ларни базис векторлар деб, қуйидаги векторларнинг шу базисга нисбатан координаталарини аниқланг.

а) $\vec{AC}$; б) $\vec{OD}$; в) $\vec{FC}$; г) $\vec{BC}$; д) $\vec{EO}$; е) $\vec{BD}$; ж) $\vec{EA}$.

69. Текисликда $\vec{p}\,(2, -3)$, $\vec{q}\,(1, 2)$ векторлар берилган. $\vec{a}\,(9{,}4)$ ни $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси сифатида ёзинг.

70. Текисликда бирор базисга нисбатан учта вектор ўзининг координаталари билан берилган: $\vec{a}\,(4; -2)$, $\vec{b}\,(3, 5)$, $\vec{c}\,(-2, -12)$. $\vec{c}$ векторни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ифода қилинг.

71. Текисликда қуйидаги векторлар берилган:

$$\vec{a}\,(3, -2)\ \vec{b},(-2{,}1),\ \vec{c}\,(7{,}4).$$

Базис векторлар сифатида бу векторларнииг ихтиёрий иккитасини олиб, улар орқали учинчисининг ёйилмасини ёзинг.

72. $Б = \{\vec e_1, \vec e_2\}$ базисга кўра $\vec a\ (2,1)$. Агар $\vec e'_1 = 4\vec e_1$, $\vec e_2 = -\frac{2}{3}\vec e_2$ бўлса, $\vec a$ нинг $Б' = \{\vec e_1', \vec e_2'\}$ базисга нисбатан координаталарини топинг.

73. $Б = \{\vec e_1, \vec e_2\}$ га нисбатан $\vec a\ (a_1, a_2)$, $\vec b\ (b_1, b_2)$ бўлса, $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар коллинеар бўлиши учун $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

74. Мунтазам $ABCDEF$ олтибурчак берилган. M, N, P лар мос равишда $[DE]$, $[MA]$, $[BC]$ кесмаларнинг ўртаси бўлса, $\vec{NP}$ ни $\vec{AB}$ ва $\vec{AF}$ лар орқали ифодаланг.

75. Қуйида берилган векторлар учлигидан учбурчак ясаш мумкинми?

1) $\vec a = \vec e_1 + 2\vec e_2$; $\vec b = 3\vec e_1 - 5\vec e_2$; $\vec c = -4\vec e_1 + 3\vec e_2$;

2) $\vec a = -2\vec e_1 + 3\vec e_2$; $\vec b = \vec e_1 - \vec e_2$; $\vec c = 2\vec e_2$;

3) $\vec a = 3\vec e_1$; $\vec b = -2\vec e_1 - 2\vec e_2$; $\vec c = \vec e_1 + 2\vec e_2$.

76. $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторларнинг компланар бўлиши учун улар орасида $\alpha\vec a + \beta\vec b + \gamma\vec c = 0$ чизиқли боғланишнинг мавжудлиги зарур ва етарли эканлигини исботланг, бу ерда α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$ ва $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

77. Агар $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ лар компланар бўлмаган векторлар бўлса, у ҳолда фазодаги ихтиёрий $\vec d$ векторни ягона равишда $\vec d = \alpha\vec a + \beta\vec b + \gamma\vec c$ кўринишда ёзиш мумкинлигини исботланг.

78. Учта $\vec p\ (3, -2, 1)$, $\vec q = (-1, 1 - 2)$, $\vec r = (2, 1, -3)$ вектор берилган. $\vec c\ (11, -6, 5)$ векторни $\vec p$, $\vec q$ ва $\vec r$ орқали ифода қилинг.

79. $\vec a = 2\vec e_1 + 5\vec e_2$; $\vec b = 3\vec e_1 + 4\vec e_3$; $\vec c = \vec e_1 - 5\vec e_2$ ва $\vec d = -11\vec e_1 + 5\vec e_2 + 8\vec e_3$ бўлса, $\vec d$ векторни $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторлар орқали ёйилмасини ёзинг.

80. $Б = \{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ базисга нисбатан $\vec a_1\ (0, -3, 0)$; $\vec a_2\ (-2, 0, 5)$; $\vec a_3(0, 2, -1)$; $\vec a_4(0,0,4)$; $\vec a_5(1,0,0)$, $\vec a_6(0, 1, -3)$; $\vec a_7(1, -2, 3)$; $\vec a_8(0, 0, 0)$ берилган.

1) $\vec e_2$ векторга коллинеар векторларни;

2) $\vec e_2$ ва $\vec e_3$ билан компланар бўлган векторларни кўрсатинг.

81. $ABCD$ ромбнинг диагоналларида $\vec e_1$, $\vec e_2$ бирлик векторлар олинган. Агар $|\vec{AC}| = 10$, $|\vec{BD}| = 6$ бўлса, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AD}$, $\vec{CD}$ векторларни $\vec e_1$, $\vec e_2$ орқали ифодаланг.

82. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призма берилган. Ён ёқларининг диагоналларида ясалган $\vec{AB_1}$, $\vec{BC_1}$, $\vec{CA_1}$ лар бир текисликка параллел бўла олмаслигини кўрсатинг.

7-§. КООРДИНАТАЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ВЕКТОРЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

V_3 да тайин $Б = \{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ базисга нисбатан $\vec a = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec b = \{x_2, y_2, z_2\}$ ва $\lambda \in \boldsymbol{R}$ берилган бўлсин. У ҳолда $Б$ га нисбатан $\vec a + \vec b = \{x_1 + y_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$; $\vec a - \vec b = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$; $\lambda\vec a = \{\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ бўлади.

83. Агар $\vec a_1\ (-7, 5, -2)$ бўлса, $\vec a = 3\vec a_1$ векторнинг координатасини топинг.

84. $\vec a_1\ (-7, 5, -2)$; $\vec a_2\ (-2, 1, -2)$; $\vec a_3\ (10, -6, 3)$ векторлар йиғиндисининг координаталарини топинг.

85. Агар $\vec m_1\ (2, 3, 0)$, $\vec m_2\ (0, -3, -2)$ ва $\vec m_3\ (-6, 0, 2)$ бўлса, $\vec m_1 + \vec m_2 + \vec m_3$ векторнинг $\vec e_1$ га коллинеарлигини исботланг.

86. Текисликда $Б = \{\vec e_1, \vec e_2\}$ базисни олиб, қуйидаги векторларни ясанг:

$$\vec a_1\ (1, 2),\ \vec a_2\ (0, -1),\ \vec a_3\ (-1, -3),\ \vec a_4\ (2, 0),$$
$$\vec a_5\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

87. Иккита $\vec a\ (3, 5, -2)$ ва $\vec b\ (6, -4, 1)$ вектор берилган.

$$\vec c_1 = \vec a + \vec b,\ \vec c_2 = \vec a - \vec b,\ \vec c_3 = 8\vec a + 5\vec b,\ \vec c_4 = 2\vec a - 7\vec b$$

векторларнинг координаталарини топинг.

88. $\vec a\ (1, 5)$, $\vec b\ (3, -1)$, $\vec c\ (0, 1)$ векторлар берилган. α нинг қандай қийматларида $\vec p = \vec a + \alpha\vec b$ ва $\vec q = \vec a - \vec c$ векторлар коллинеар бўлади?

89. $\vec{a}\ (2,\ -1,\ 3)$ ва $\vec{b}\ (-6,\ 3\ -9)$ векторларнинг коллинеарлигини текшириб кўринг. Уларнинг йўналиши қандай?

90. α ва β ларнинг қандай қийматларида $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$ ва $\vec{b} = \alpha\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ векторлар коллинеар бўлади?

91. $\vec{a}\ (2,\ 3,\ -1),\ \vec{b}\ (0,\ 1,\ 2),\ \vec{c}\ (1,\ 0\ -1)$ векторлар берилган. Қуйидаги векторларнинг координаталарини топинг:

$$\vec{p}_1 = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c};\quad \vec{p}_2 = \vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c};\quad \vec{p}_3 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2};$$

$$\vec{p}_4 = \frac{\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

92. $Б = \{\vec{e}_1\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ базисда $\vec{a}\ (a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}\ (b_1,\ b_2,\ b_3),\ \vec{c}\ (c_1,\ c_2,\ c_3)$ векторлар ўзининг координаталари билан берилган. Уларнинг компланар бўлиши учун

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли. эканлигини исботланг.

93. Қуйидаги векторлар учликларидан қайси бирлари компланар бўлади:

1) $\vec{a}_1\ (-3,\ 0,\ 2),\ \vec{a}_2\ (2,\ 1,\ -4),\ \vec{a}_3\left(\frac{11}{2},\ -1,\ -1\right);$

2) $\vec{b}_1\ (1,\ 0,\ 7),\ \vec{b}_2\ (1,\ 2,\ 4),\ \vec{b}_3\ (3,\ 2,\ 1);$

3) $\vec{c}_1\ (5,\ -1,\ 4),\ \vec{c}_2\ (3,\ -5,\ 2),\ \vec{c}_3\ (-1\ -23,\ -2)?$

94. Қуйидаги векторлар орасидаги чизиқли боғланишни топинг:

1 2 3

1) $\vec{a}\ (0,\ 0,\ 1),\ \vec{b}\ (1,\ 0,\ 0),\ \vec{c}\ (-2,\ 1,\ 3),$

$\vec{d}\ (-1,\ 1,\ 4);$

2) $\vec{a}\ (1,\ 3,\ 0),\ \vec{b}\ (1,\ 2,\ 3),\ \vec{c}\ (2,\ -1,\ 3);$

3) $\vec{a}\ (1,\ 2,\ 5),\ \vec{b}\ (2,\ 12,\ 6),\ \vec{c}\ (-0,\ 0,\ 2),$

$\vec{d}\ (1,\ 0,\ 4).$

8-§. ИККИТА ВЕКТОРНИНГ СКАЛЯР КУПАЙТМАСИ. ВЕКТОРЛАРНИНГ УЗУНЛИГИ ВА ВЕКТОРЛАР ОРАСИДАГИ БУРЧАКНИ ҲИСОБЛАШ

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинусини кўпайтиришдан ҳосил бўлган сонга бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси дейилади ва қуйидагича ёзилади: $\vec{a}\vec{b}$ ёки $(\vec{a},\ \vec{b})$. Бундан ташқари, $(\vec{a},\ \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\,(\widehat{a,b})$ ни $(\vec{a},\ \vec{b}) = |\vec{a}|\ \text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ деб ёзиш мумкин. Агар $\vec{a} \perp \vec{b}$ бўлса, $(\vec{a},\ \vec{b}) = 0$ бўлади.

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси қуйидагича хоссаларга эга:

1°. Ўрин алмаштириш хоссаси:

$$(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a}).$$

2°. Тақсимот хоссаси:

$$(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

3°. Сон кўпайтувчига нисбатан гуруҳлаш хоссаси:

$$(\alpha\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha\cdot(\vec{a}\vec{b}),\ \alpha \in \boldsymbol{R}.$$

Агар $Б = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ нинг базис векторлари

$$(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & \text{агар}\quad i \neq j, \\ 1, & \text{агар}\quad i = j, \end{cases}\quad ij = 1,\ 2,\ 3$$ шартни бажарса, у ортонормаланган дейилади. Шундай базисга нисбатан $\vec{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\},\ \vec{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ бўлади, $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ва $\cos\,(\widehat{a,b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

бўлади.

95. Агар $|\vec{a}| = 6\sqrt{2},\ |\vec{b}| = 5,\ (\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = 3\pi/4$ бўлса:

а) $(4\vec{a} + 7\vec{b})^2$; б) $(5\vec{a} - 3\vec{b})\,(2\vec{a} + \vec{b})$ ни;

в) $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограмм диагоналларининг узунлигини ҳисобланг.

96. $\vec{a}\,(3,\ \lambda,\ -2)$, $\vec{b}\,(5,\ -1,\ \lambda)$ векторлар λ нинг қандай қийматларида ўзаро перпендикуляр бўлади?

97. $\vec{a}\,(3,\ 1,\ -4)$ ва $\vec{b}\,(2,\ -1,\ 6)$ векторларга перпендикуляр бўлган бирлик векторни топинг.

98. $\vec{a}=-6\vec{e}_1+3\sqrt{3}\ \vec{e}_2+\vec{e}_3$ векторнинг бирлик векторини топинг.

уда **99.** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ лар $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3=\vec{0}$ шартни қаноатлантирувчи ортлар бўлса, $\vec{a}_1\vec{a}_2+\vec{a}_2\vec{a}_3+\vec{a}_1\vec{a}_3$ йиғиндини ҳисобланг.

100. Агар $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ ва $\vec{a}_3$ ўзаро перпендикуляр векторлар бўлса, $\vec{p}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3$ векторнинг узунлигини ҳисобланг.

101. Агар $\vec{a}\,(9,\ -1,\ 4)$, $\vec{b}\,(4,\ 2,\ -4)$ бўлса, $np_{\vec{a}}\vec{b}$ ни ҳисобланг.

102. $\vec{a}\,(8,\ 1,\ -4)$, $\vec{b}\ (2,\ -2,\ 1)$ векторлар орасидаги бурчакни ҳисобланг.

103. Учта $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ вектордан ҳосил қилинган $\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)-\vec{a}_2(\vec{a}\times,\vec{a}_1)$ векторнинг $\vec{a}_3$ га перпендикулярлигини исботланг.

104. Агар $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2+\vec{a}_3$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$ ва $\vec{a}_1-\vec{a}_2-\vec{a}_3$ векторларнинг модуллари бир-бирига тенг эканлигини кўрсатинг.

105. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни ўзаро перпендикуляр деб ҳисоблаб, $\vec{c}=\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}$ векторнинг модулини топинг.

106. Узунликлари тенг бўлган иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор берилган; $\vec{a}+\vec{b}$ билан $\vec{a}-\vec{b}$ нинг ўзаро перпендикулярлигини исботланг.

107. Агар ABC учбурчакда $|AC|=1,\ |BC|=2,\ \ \widehat{C}=120^\circ$ бўлса, CD медиананинг узунлигини ҳисобланг.

108. Текисликда A ва B нуқталар берилган. Текисликнинг $|\vec{CA}+\vec{CB}|=|\vec{CA}-\vec{CB}|$ шартни қаноатлантирувчи барча C нуқталари тўпламини топинг.

109. $A,\ B,\ C,\ D$ лар фазонинг иктиёрий нуқтаси бўлса, $\vec{AB}\cdot\vec{CD}+\vec{BC}\cdot\vec{AD}+\vec{CA}\cdot\vec{BD}=0$ эканлигини исботланг.

110. $\vec{P}$ ва $\vec{Q}$ кучлар бир нуқтага 120° ли бурчак остида таъсир этади: $|\vec{P}|=7,\ |\vec{Q}|=4$. Тенг таъсир этувчи куч $\vec{R}$ ни топинг.

111. Агар $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ лар ўзаро перпендикуляр бўлган бирлик векторлар бўлса, $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q},\ \ \vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$ векторлар орасидаги бурчакни ҳисобланг.

112. Ромбнинг бир учидан чиққан томонларини $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан белгилаб, ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр эканлигини исботланг.

113. Агар $\vec{a}=\vec{s}+2\vec{t}$ ва $\vec{b}=5\vec{s}-4\vec{t}$ векторларнинг ўзаро перпендикулярлиги маълум бўлса, $\vec{s}$ ва $\vec{t}$ бирлик векторлар орасидаги бурчакни топинг.

114. Параллелограммнинг диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

115. Учбурчак томонларидан иборат бўлган учта векторнинг ўзаро перпендикуляр ортлар бўйича ифодаланган ёйилмалари берилган:

$$\vec{AB}=5\vec{a}+2\vec{b};\quad \vec{BC}=2\vec{a}-4\vec{b},\ \vec{CA}=7\vec{a}+2\vec{b}.\ ABC$$

учбурчакнинг AD баландлигини топинг.

116. Агар учбурчак томонлари квадратларнинг йиғиндиси маълум бўлса, унинг медианалари квадратларининг йиғиндисини топинг.

9-§. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИНГ ЭЛЕМЕНТАР ГЕОМЕТРИЯ МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШГА ТАТБИҚИ

117. $A_1B_1C_1$ ва $A_2B_2C_2$ учбурчак медианаларининг кесишган нуқталари $P_1,\ P_2$ бўлсин, $\vec{P_1P_2}=\frac{1}{3}\,(\vec{A_1A_2}+\vec{B_1B_2}+\vec{C_1C_2})$ эканини исботланг.

118. ABC учбурчакда $A_1,\ B_1,\ C_1$ нуқталар мос равишда $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ томонларнинг ўрталари бўлсин. Ихтиёрий O нуқта учун $\vec{OA}_1+\vec{OB}_1+\vec{OC}_1=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$ тенглик бажарилишини кўрсатинг.

119. Векторларнинг скаляр кўпайтмасидан фойдаланиб, учбурчак баландликларининг бир нуқтада кесишишини исботланг.

120. Ихтиёрий $ABCD$ тўртбурчакда диагоналлари квадратларининг йиғиндиси томонлари квадратларининг йиғиндисидан диагоналларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесма квадратининг 4 бараварини айрилганига тенглигини исботланг.

121. Учбурчакда $c^2 = c^2 + b^2 - 2ab\cos C$ эканлигини исботланг, бунда a, b, c — учбурчак томонларининг узунликлари, C эса a ва b томонлар орасидаги бурчак. (Косинуслар теоремаси.)

122. Синуслар теоремаси — ихтиёрий учбурчакнинг томонлари улар қаршисида ётган бурчакларнинг синусларига пропорционал, яъни

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

эканлигини исботланг.

123. ABC учбурчакнинг A, B, C бурчаклари берилган бўлиб, M нуқта $[BC]$ томоннинг ўртаси бўлса, BAM бурчакни ҳисобланг.

124. Учбурчак ички бурчагининг биссектрисаси қаршисидаги томонни ички равишда шу томонга ёпишган томонларга пропорционал бўлган икки қисмга бўлишини исботланг.

125. AD кесма ABC учбурчак $\widehat{A}$ ички бурчагининг биссектрисаси бўлсин. Унинг узунлиги $x = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$ формула билан аниқланишини исботланг.

126. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед берилган.

$$AC_1^2 = AC^2 + AB_1^2 + AD_1^2 - (AB^2 + AD^2 + AA_1^2)$$

эканлигини исботланг.

127. Ихтиёрий тетраэдрнинг қарама-қарши қирралари орасидаги Q бурчак $\cos Q = \dfrac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}$ формула билан ҳисобланишини исботланг, бунда a ва a' қаралаётган қирраларнинг узунлиги, b ва b' ҳамда c ва c' лар қолган қарама-қарши қирраларнинг узунлиги.

128. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг қарама-қарши қирралари ўзаро перпендикулярлигини исботланг.

129. $ABCD$ тетраэдрнинг қарама-қарши қирралари $[AB]$ ва $[CD]$, $[AC]$ ва $[BD]$, $[BC]$ ва $[AD]$ ларнинг ўзаро перпендикуляр бўлиши учун $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$ шарт бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

$AB)^2-(BC-x)^2=(CA^2-x^2)$

130. Ихтиёрий ABC учбурчакда ички бурчаклар $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ бўлса, $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$ муносабат ўринли эканлигини исбот қилинг. Тенглик белгиси қачон бажарилади?

131. ABC учбурчакнинг AA_1 ва BB_1 медианалари тенг бўлса, бу учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлишини исботланг.

132. ABC тенг ёнли учбурчакда $|AB| = |BC| = 8$ бўлиб, E нуқта $[AB]$ томонни B учидан бошлаб $3:1$ нисбатда бўлади. Агар $|CA| = 12$ бўлса, $\overrightarrow{CE}$ ва $\overrightarrow{CA}$ векторлар орасидаги φ бурчакни ҳисобланг.

133. $ABCD$ қавариқ тўртбурчакнинг $[AC]$ ва $[BD]$ диагоналлари F нуқтада кесишади. Агар $|AF| = |CF| = 2$, $|BF| = 1$, $|DF| = 4$, $(\widehat{BFC}) = \pi/3$ бўлса, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{DC}$ векторлар орасидаги φ бурчакни ҳисобланг.

134. Ихтиёрий учбурчак учун томонлари унинг медианаларига тенг ва параллел бўлган учбурчак мавжудлигини кўрсатинг.

135. Агар $MNPQ$ тўртбурчакнинг томонлари кесишган A нуқта ҳамда қарама-қарши $[MN]$ ва $[PQ]$ томонларнинг ўрталари B ва C нуқталар бир тўғри чизиқда ётса, бу тўртбурчак трапеция ёки параллелограмм бўлишини исботланг.

136. A, B, C нуқталар берилган. Текисликнинг $3\overrightarrow{XA} - 2\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{0}$ шартни қаноатлантирувчи X нуқталари тўпламини топинг.

137. Тўғри бурчакли ABC учбурчак берилган ($\widehat{C} = 90°$), фазонинг $|MA|^2 + |MB|^2 = |MC|^2$ шартни қаноатлантирувчи M нуқталари тўпламини топинг.

138. Ихтиёрий ABC учбурчак берилган. Фазодаги қуйидаги шартни қаноатлантирувчи барча M нуқталар тўпламини топинг: $|MA|^2 + |MB|^2 = 2|MC|^2$.

139. Тенг ёнли бўлмаган $ABCD$ трапеция берилган бўлиб, унда $|BC| = a$, $|AD| = c$, $|AB| = d$, $|CD| = b$, $|AC| = e$, $|BD| = f$ бўлса, $\dfrac{e^2 - f^2}{b^2 - d^2} = \dfrac{a+c}{a-c}$

тенглик ўринли бўлишини исботланг.

140. Параллелепипеднинг ҳамма диагоналлари **квадратларининг йиғиндиси ҳамма қирралари квадратлари**нинг йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

141. $ABCD$ тетраэдрнинг қирралари a, b, c, m, n, k га тенг бўлса, A учидан (BCD) ёғигача бўлган масофани топинг.

142. ABC учбурчакда $[CD]$ баландлик бўлса, $\vec{CD}$ ни $\vec{CA}$ ва $\vec{CB}$ векторлар ёрдамида ифодаланг.

143. Маркази O нуқтада бўлган айланага ABC учбурчак ички чизилган. Агар H — ABC учбурчак баландликларининг кесишган нуқтаси бўлса, $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ тенглик ўринлилигини исбот қилинг.

144. Агар бирор тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг томонларини ёки уларнинг давомларини C_1, A_1, B_1 нуқталарда кесиб ўтса ($C_1 \in (AB)$, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$), у ҳолда қуйидаги (*Менелай теоремаси*) шарт бажарилишини исбот қилинг:

$$\frac{\vec{AC_1}}{\vec{BC_1}} \cdot \frac{\vec{BA_1}}{\vec{CA_1}} \cdot \frac{\vec{CB_1}}{\vec{AB_1}} = 1.$$

145. Агар ABC учбурчакнинг учларини шу учбурчак текислигида ётган O нуқта билан туташтирувчи **тўғри** чизиқлар шу уч қаршисида ётган томонларини ёки уларнинг давомларини мос равишда A_1, B_1, C_1 **нуқталарда** кесиб ўтса, у ҳолда қуйидаги тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатинг (*Чева теоремаси*):

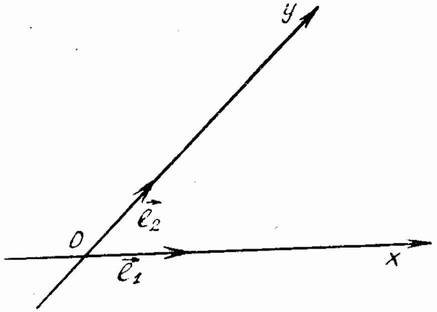
$$\frac{\vec{AC_1}}{\vec{C_1B}} \cdot \frac{\vec{BA_1}}{\vec{A_1C}} \cdot \frac{\vec{CB_1}}{\vec{B_1A}} = 1.$$

II боб

ТЕКИСЛИКДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ

10-§. ТЕКИСЛИКДА АФФИН КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Текисликда бирор O нуқтадан чиққан, коллинеар бўлмаган ихтиёрий икки $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ векторлар берилган бўлсин. Мусбат йўналишлари мос равишда $\vec{e_1}$ ва $\vec{e_2}$ векторлар билан аниқланувчи (Ox) ва (Oy) ўқлардан ташкил топган системани текисликдаги аффин координаталар системаси ёки аффин репер дейилади (8-чизма),



8- чизма.

O нуқтани координаталар боши, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ векторларни эса координат векторлар дейилади. Ox — абсцисса ўқи, Oy—ордината ўқи деб аталади. Аффин репер $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ каби белгиланади.

Текисликнинг ҳар қандай M нуқтаси учун $\vec{OM}$ векторни M нуқтанинг радиус вектори дейилади. $\vec{OM}$ учун шундай x, $y \in \boldsymbol{R}$ сонлар мавжуд бўлиб, $\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ бўлади. x M нуқтанинг $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ репердаги биринчи координатаси ёки абсциссаси дейилади, y M нуқтанинг $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ репердаги иккинчи координатаси ёки ординатаси дейилади ва $M(x, y)$ каби белгиланади. Демак, $M(x, y) \Leftrightarrow \vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} = x\vec{e_1} + + y\vec{e_2}$, бу ерда

$$x = \frac{\vec{OM_1}}{\vec{e_1}}, \quad y = \frac{\vec{OM_2}}{\vec{e_2}},$$

(Ox) ўқда ётувчи нуқталарнинг координаталари $(x, 0)$ кўринишда, (Oy) ўқда ётувчи нуқталарнинг координаталари $(0, y)$ кўринишда бўлиб, $O(0, 0)$ бўлади.

Координата ўқлари бутун текисликни 8-чизмада белгилангандек тўртта координата чоракларига ажратади. Агар $M(x, y)$ нуқта координата ўқларида ётмаса, x ва y нинг ишораларига қараб, уни қайси чоракда ётишини айтиш мумкин. Агар $x > 0$, $y > 0$ бўлса, $M \in$ I чоракда; $x < 0$, $y > 0$ бўлса, $M \in$ II чоракда; $x < 0$, $y < 0$ бўлса, $M \in$ III чоракда; $x > 0$, $y < 0$ бўлса, $M \in$ IV чоракда ётади.

Агар бирор аффин реперга нисбатан $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ нуқталар берилган бўлса, $\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ бўлади.

A, B нуқталар ва $\lambda (\lambda \neq -1)$ ҳақиқий сон берилганда $\vec{AN} = \lambda \vec{NB}$ тенгликни қаноатлантирувчи N нуқта AB кесмани λ нисбатда бўлувчи нуқта дейилади. λ сон эса A, B,

N уч нуқтанинг оддий нисбати дейилиб, $\lambda = |AB, N| = \frac{\vec{AN}}{\vec{NB}}$ кўринишда ёзилади. Агар бирор аффин реперга нисбатан $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $N(x, y)$ нуқталар берилган бўлса, у ҳолда x ва y лар

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

формулалар билан аниқланади. Хусусий ҳолда, N нуқта AB ни тенг иккига бўлса, у ҳолда $\lambda = 1$ бўлади ва

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ва } y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ га эга бўламиз.}$$

146. Аффин координаталар системасига нисбатан учларининг $A(3; 5)$, $B(-4, 6)$ ва $C(5; 3,5)$ координаталари берилган учбурчакни ясанг.

147. Қуйидаги нуқталарга (Ox) ўққа нисбатан симметрик бўлган нуқталарнинг координаталарини топинг ($\omega = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = 60°$):

а) $A(2, 3)$; б) $B(-3, 2)$; в) $C(-1, 1)$;
г) $D(-2, 5)$; д) $E(-4, 6)$.

148. Қуйидаги нуқталарга (Oy) ўққа нисбатан симметрик бўлган нуқталарнинг координаталарини топинг ($\omega = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = 60°$):

а) $A(3, 3)$, б) $B(-2, -4)$, в) $C(2, -1)$, г) $D(5, -4)$,
д) $E(-1, 1)$.

149. Қуйидаги нуқталарга координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқталарнинг координаталарини топинг:

а) $A(-1, 2$, б) $B(3, -1)$, в) $C(-2, 2)$,
г) $D(-2, 5)$, д) $E(-3, -5)$.

150. Қуйида берилган шартларга асосланиб, $M(x, y)$ нуқта координаталар системасининг қайси чорагида ётиши мумкинлигини айтинг.

а) $xy > 0$; б) $xy < 0$; в) $xy = 0$; г) $x - y = 0$.

151. Томони $a = 1$ бўлган мунтазам олтибурчак учларининг координаталарини топинг. Координаталар ўқи қилиб унинг шундай икки қўшни томонларини олингки, координаталар бошига қарама-қарши ётган учининг координаталари мусбат бўлсин.

152. **Қуйидаги векторларнинг бошлари $M(-1, 2)$** нуқтада бўлса, улар охирларининг координаталарини топинг:

$\vec{a}_1(3, 0)$, $\vec{a}_2(-5, 3)$, $\vec{a}_3(3, -2)$, $\vec{a}_4(-1, -2)$.

153. Параллелограммнинг учта A, B, C учининг координаталари бўйича тўртинчи учининг координаталарини топинг:

а) $A(1, 4)$, $B(3, -1)$, $C(0, 2)$;
б) $A(-1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(4, -1)$.

154. Агар тўртбурчакнинг учлари $A(1, -3)$, $B(8, 0)$, $C(4, 8)$ ва $D(-3, 5)$ нуқталарда бўлса, $ABCD$ параллелограмм эканлигини кўрсатинг.

155. Агар тўртбурчакнинг учлари $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, 0)$ ва $D(7, -5)$ нуқталарда бўлса, $ABCD$ трапеция эканлигини исбот қилинг.

156. Қуйидаги учта A, B, C нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётишини кўрсатинг:

а) $A(2, 1)$, $B(0; 5)$, $C(4; -3)$;
б) $A(-1, 0)$, $B(1; -2)$, $C(3; -4)$.

157. $A(2, 1)$, $B(0, 5)$, $C(4, -3)$ нуқталар берилган. (AB, C), (BC, A), (AC, B) ларни ҳисобланг.

158. $ABCD$ параллелограмм берилган, a тўғри чизиқ (AB), (AD), (AC) томонларни мос равишда E, F, G нуқталарда (бу нуқталар A, B, C, D лардан фарқли) кесса, $(BE, A) + (DF, A) = (CG, A)$ эканлигини исботланг.

22.10 **159.** Учбурчакнинг учлари берилган: $A(3, -7)$, $B(5, 2)$ ва $C(-1, 0)$. Ҳар бир томоннинг ўрта нуқтасининг координаталарини топинг.

22.10 **160.** Бир жинсли стерженнинг оғирлик маркази $M(5, 1)$ нуқтада бўлиб, учларидан бири $A(-1; -3)$ нуқтага тушади. Иккинчи учининг ўрнини топинг.

161. Учбурчак томонларининг ўрталари $M_1(3, -2)$, $M_2(1, 6)$, $M_3(-4; 2)$ нуқталарда бўлса, унинг учларини аниқланг.

162. Параллелограммнинг $A(-3, 5)$ ва $B(1, 7)$ қўшни учлари ҳамда диагоналлари кесишган $M(1, 1)$ нуқта берилган. Унинг қолган иккита учининг координаталарини топинг.

163. Учлари $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$ ва $C(1, 1)$ нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасини топинг.

164. Учбурчак оғирлик марказининг координаталари унинг учларининг координаталари билан қандай ифодаланади?

165. l тўғри чизиқда $|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5| = |A_5A_6|$ шартни қаноатлантирувчи A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 нуқталар олинган. Агар A_2 (2, 5) ва A_5 (— 1; 7) бўлса, қолган нуқталарнинг координаталарини топинг.

11-§. ТЕКИСЛИКДАГИ ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

Аффин репер $Б = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ нинг координат векторлари $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ортонормалланган базисни ташкил этса, уни тўғри бурчакли декарт координаталар системаси дейилади. Бундай реперни махсус $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ кўринишда белгилаймиз, бу ерда $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$ $(\vec{i}\,\vec{j}) = 0$ бўлади.

Тўғри бурчакли координата системаси аффин координата системасининг хусусий ҳоли бўлганлиги учун аффин реперда ўринли бўлган барча формулалар декарт реперда ҳам ўринли бўлади, лекин декарт репердаги айрим мулоҳазалар аффин реперда доимо ўринли бўлавермайди. Масалан, декарт реперда икки нуқта орасидаги масофа ва икки вектор орасидаги бурчак шундай ҳисобланадики, буларни аффин реперда бажариб бўлмайди.

Берилган $M_1(x, y)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа $\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ билан ҳисобланади. Координаталар бошидан $M(x, y)$ нуқтагача бўлган масофа қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\rho = (0, M) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

166. Декарт реперда қуйидаги нуқталарни ясанг:

A (1, 4), B (3, — 1), C (0, 2), D (— 20), F ($\sqrt{2}$, — 1).

167. Абсциссалари — 2; — 3; 0; 1; 3; 4 га тенг бўлган, ординаталари $y = x^2 + 1$ тенглама билан аниқланувчи нуқталарни топинг.

168. Координаталари қуйидаги тенгламаларни қаноатлантирувчи нуқталарни ясанг:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 8; \\ x + y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32; \\ x - y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x^2 - 4y = 0. \end{cases}$

169. M (2, —1) нуқта берилган абсциссалар ўқига нисбатан, ординаталар ўқига нисбатан, координаталар бошига нисбатан, координата бурчакларининг биссектрисаларига нисбатан берилган нуқтага симметрик бўлган нуқталарни ясанг. Бу нуқталарнинг координаталарини топинг.

170. Квадратнинг томони a га тенг бўлиб, координаталар боши унинг диагоналларининг кесишган нуқтасида жойлашган. Агар диагоналлар координата ўқларида ётса, квадрат учларининг координаталарини топинг.

22.10 **171.** Учлари A (3, 2), B (—1, —1) ва C (1, —6) нуқталарда бўлган учбурчакнинг ҳар бир томонининг узунлигини топинг.

172. Учлари P (0, 0), Q (3, 1), S (1, 7) нуқталарда жойлашган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини исботланг.

173. y нинг қандай қийматида учлари A (1, 3), B (2, —1), C (4, y) нуқталарда бўлган учбурчак тенг ёнли бўлади?

174. Ординаталар ўқида A (4; —6) нуқтадан 5 бирлик масофада турган нуқтани топинг.

175. Мунтазам олтибурчакнинг иккита A_1 (2, 0) ва A_2 (5, 3) қўшни учларини билган ҳолда, унинг марказини топинг. X, Y

22.10 **176.** Берилган учта A (2, 2); B (—5, 1) ва C (3, —5) нуқтадан баравар узоқликда бўлган нуқтани топинг.

22.10 **177.** Учлари A (4, 2), B (5, 7) ва C (—3, 4) нуқталарда бўлган учбурчакнинг ҳар бир медианасининг узунлигини топинг.

22.10 **178.** Учлари A (4, 1), B (7, 5) ва C (—4, 7) нуқталарда бўлган учбурчак берилган. A учидан ўтказилган ички биссектрисанинг $[BC]$ томон билан кесишган нуқтасини топинг.

22.10 **179.** A (—3, 5) ва B (4, 2) нуқталар берилган. Абсцисса ўқида шундай C (X, 0) нуқтани топингки, $(\widehat{ACB}) = 90°$ бўлсин.

180. Агар A (—2, 2) ва B (1, —1) нуқталар квадратнинг иккита қўшни учи бўлса, қолган учларининг координаталарини топинг.

181. Агар A (3, 2) ва C (—2, 5) нуқталар квадратнинг қарама-қарши учлари бўлса, унинг қолган учларининг координаталарини топинг.

12-§. АФФИН КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИНИ АЛМАШТИРИШ

Бирор $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ реперцан бошқа $Б' = \{0', \vec{e_1'}, \vec{e_2'}\}$ аффин реперга ўтишда биз нуқтанинг координаталарини дастлабки системага нисбатан (x, y) билан ва ўша нуқтанинг координаталарини янги системага нисбатан (x', y') билан белгилаймиз.

Агар координата ўқларининг йўналишини ўзгартирмай, координаталар боши $O' (c_1, c_2)$ нуқтага кўчирилса, у ҳолда

$$\begin{cases} x = x' + c_1, \\ y = y' + c_2 \end{cases}$$ бўлади.

Агар координаталар бошини ўзгартирмай, янги ўқлар учун $\vec{e_1'} = \{a_1, a_2\}$, $\vec{e_2'} = \{b_1, b_2\}$ лар қабул қилинса, у ҳолда

$$\begin{cases} x = a_1x' + b_1y', \\ y = a_2x' + b_2y' \end{cases}$$ бўлади.

Агар бир вақтда иккала алмаштириш қилинса, у ҳолда

$$\begin{cases} x = a_1x' + b_1y' + c_1, \\ y = a_2x' + b_2y' + c_2 \end{cases}$$ бўлиб, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлади.

Агар хусусий ҳолда $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ва $Б' = \{0', \vec{i'}, \vec{j'}\}$ бўлса, координата системасини алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади:

$$x = x' \cos \alpha - \varepsilon y' \sin \alpha + c_1,$$

$$y = x' \sin \alpha + \varepsilon y' \cos \alpha + c_2,$$

бу ерда

$i' = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, $\vec{j'} = \{-\varepsilon \sin \alpha, \varepsilon \cos \alpha\}$, $0' (c_1, c_2)$

бўлиб,

$\varepsilon = +1$ бўлганда $Б$ билан $Б'$ реперларнинг ориентацияси бир хил,

$\varepsilon = -1$ бўлганда уларнинг ориентацияси турлича бўлади.

182. Агар координата ўқларининг йўналишларини ўзгартирмай, координаталар бошини қуйидаги нуқталардан бирига кўчирилса, координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг:

$O_1 (2, 3)$, $O_2 (-4, 7)$, $O_3 (3, -9)$, $O_4 (-1, -2)$.

√**183.** M нуқта бирор координаталар системасига нисбатан $x = 7$, $y = 5$ координаталарга эга. Координаталар боши ушбу:

а) $O_1 (-1, 0)$, б) $O_2 (-1, -3)$, в) $O_3 (5, 0{,}5)$ нуқталардан бирига кўчирилса, шу нуқтанинг координаталари қандай бўлади?

184. Бир вақтнинг ўзида ҳамма нуқталарининг абсциссалари 3 бирликка камайиши ва ординаталари 2 бирликка ошиши учун координаталар системасини қандай ўзгартириш керак?

185. Бир нуқтанинг ўзи иккита турли координаталар системасига нисбатан (2, 5 ва (—3, 6) координаталарга эга. Ўқларининг йўналиши бир хил бўлган шу системалардан бири бошининг координаталарини иккинчи системага нисбатан аниқланг.

186. Қуйидаги ҳоллар учун $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ аффин репердан $Б' = \{0, \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ аффин реперга ўтиш формулаларини ёзинг:

а) $\vec{e_1'} (2,1)$, $\vec{e_2'} (-2,1)$; б) $\vec{e_1'} (1,1)$, $\vec{e_2'} (0,1)$;

в) $\vec{e_1'} (1,0)$, $\vec{e_2'} (1,1)$; г) $\vec{e_1'} (1,0)$, $\vec{e_2'} (0,1)$.

187. Қуйидаги берилганларга асосан $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ аффин репердан $Б' = \{0', \vec{e_1'} \vec{e_2'}\}$ аффин реперга ўтиш формулаларини ёзинг:

а) $\vec{e_1'} (-3,0)$; $\vec{e_2'} (1,2)$; $O' (-3,5)$;

б) $\vec{e_1'} (1,0)$; $\vec{e_2'} (0,1)$; $O' (2,0)$;

в) $\vec{e_1'} (1, 1)$; $\vec{e_2'} (1,0)$; $O' (0, -5)$,

188. $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ аффин реперга нисбатан $A (2, 1)$ ва $B (-3/2, 3)$ берилган. Координаталар боши $O' (0; 1)$ нуқтада бўлган шундай $Б' = \{0', \vec{e_1'} \vec{e_2'}\}$ реперни топингки, унда $A' (1, 0)$ ва $B' (0, 1)$ бўлсин.

√**189.** $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ аффин реперда A ва B нуқталар мос равишда (1, 1) ва (2, 2) координаталарга эга. A ва B нуқталар (1, 1) ва (1, —2) координаталарга эга бўладиган $Б' = \{0, \vec{e_1'}, \vec{e_2'}\}$ аффин репер мавжудми?

190. Агар O' (0, 1), $\vec{e_1'}$ (1, 1), $\vec{e_2'}$ (—3, 1) бўлса, $Б = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ ва $Б' = \{O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'}\}$ аффин реперларда бир хил координаталарга эга бўлган нуқтани топинг.

191. Агар координаталарни алмаштириш формулалари қуйидагича бўлса, янги координата векторларини ва янги координаталар бошининг эски реперга нисбатан координаталарини топинг:

а) $\begin{cases} x = x', \\ y = y' + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = x' + y' + 1, \\ y = x' - 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = -2x' + y' - 3, \\ y = x' + \sqrt{2}\, y' + 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = x + y - 1, \\ y' = x - 5. \end{cases}$

192. $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ декарт репер берилган. Координаталар ўқини қуйидаги бурчаклардан бирига *буришдаги* координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг:

а) 60°; б) —45°; в) 90°; г) 180°.

193. Координаталарни алмаштириш формуласи қуйидагича

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y', & - 60 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' & - 60 \end{cases}$$

бўлса, координата ўқлари қандай бурчакка бурилган?

194. $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ декарт реперга нисбатан $A\left(\sqrt{8}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва M (x, y) нуқталар берилган. Координата ўқлари координаталар бурчаги биссектрисалари билан алмаштирилганда, шу нуқталарнинг координаталарини топинг.

195. Қуйида берилганларга асосан декарт реперни алмаштириш формулаларини ёзинг:

а) $\vec{i'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, $\vec{j'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$; O' (5; —3);

б) $\vec{i'} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}\right\}$, O' (—3; $\sqrt{2}$), $\vec{j'} = \vec{j}$.

$\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ва $\{0', \vec{i'}, \vec{j'}\}$ лар бир хил ориентацияга эга;

в) $(\widehat{\vec{i}, \vec{i}}) = 30°$, O' (0, —2); $(0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ва $\{O', \vec{i'}, \vec{j'})$ лар турли ориентацияга эга.

196. Катетлари a га тенг бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак берилган. Унинг CA ва CB катетлари координаталар ўқи қилиб олинган, сўнгра абсциссалар ўқини ўзгартирмасдан, ординаталар ўқи AB гипотенуза билан алмаштирилган. Бир системадан иккинчи системага ўтишда координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг.

197. $Б = \{O, \vec{i}\ \vec{j}\}$ декарт реперда Ф фигура $xy + 3x - 2y - 6 = 0$ тенглама билан берилган. Координаталар боши O' (2; —3) нуқтага кўчирилгандан кейин Ф фигуранинг тенгламаси қандай бўлади?

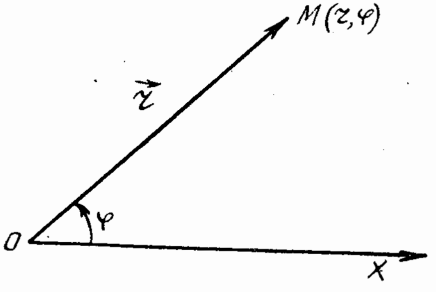
198. $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 4 = 0$ тенгламада тўғри бурчакли координаталар системасини алмаштиргандан сўнг координаталар кўпайтмаси бўлган ҳад қатнашмаслиги учун координата ўқларини қандай бурчакка буриш керак?

13- §. ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

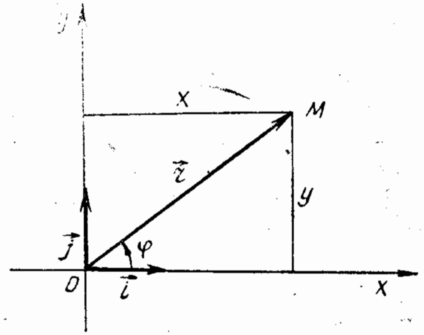
Қутб координаталар системасининг асосий элементлари нуқта ва ундан чиқувчи нур, яъни қутб O ва қутб ўқи Ox дир (9- чизма). M нуқтанинг текисликдаги ўрни бу нуқтадан қутбгача бўлган масофа — радиус-вектор r ва радиус-векторнинг қутб ўқи билан ташкил этган қутб бурчаги φ билан аниқланади ва M (r, φ) кўринишда белгиланади. Равшанки, сонларнинг ҳар қандай (r, φ) жуфти учун (бунда $r > 0$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$) текисликнинг битта нуқтаси мавжуд бўлиб, сонларнинг бу жуфти шу нуқта учун қутб координаталар бўлади. Агар юқоридаги чекланишларга риоя қилинмаса, у ҳолда биргина нуқтанинг ўзи (r, $\varphi + 2n\pi$) ёки ($-r$, $\varphi + (2n - 1)\pi$) координаталар билан аниқланади,

n — ихтиёрий бутун сон.

Текисликда $Б = \{0, \vec{i}\}$ қутб координаталар системаси берилган бўлсин. $\{0, \vec{i},$



9- чизма.



10- чизма.

$\vec{j}$ } декарт реперини 10-чизмада кўрсатилгандек танлаб олайлик. M нуқтанинг $Б = \{0, \vec{i}\}$ га нисбатан координаталари (r, φ); $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ га нисбатан (x, y) бўлсин. У ҳолда $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ формулалар нуқтанинг қутб координаталари бўйича декарт координаталарини; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ эса декарт координаталари бўйича қутб координаталарини топишга имкон беради (φ ни аниқ лашда $M(x, y)$ нинг қайси координата чорагида ётишини эътиборга олиш керак).

Қутб координаталар системаси да берилган икки нуқта $M_1(r_1, \varphi_1)$ ва $M_2(r_2 \; \varphi_2)$ орасидаги масофа $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ формула билан ҳисобланади.

199. Қуйидаги нуқталарни қутб координаталарда ясанг:

$$M_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right), \; M_2\left(2, -\frac{\pi}{2}\right), \; M_3(3, 0),$$

$$M_4(3; \pi/2), \; M_5(2, \pi), \; M_6\left(5, \frac{3\pi}{2}\right), \; M_7\left(5, -\frac{\pi}{6}\right).$$

200. Қутб ўқига нисбатан $M_1\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$ нуқталарга симметрик бўлган нуқталарнинг қутб координаталарини топинг.

201. Қутбга нисбатан $M_1\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ нуқталарга симметрик бўлган нуқталарнинг қутб координаталарини топинг.

202. Қутб бурчаклари 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90° га тенг бўлган, мос радиус-векторлари $r = 2 \sin 2\varphi$ формула бўйича ҳисобланувчи нуқталарни ясаб, уларни узлуксиз эгри чизиқ билан кетма-кет туташтиринг.

203. $Б = \{0, \vec{i}\}$ қутб координата системасига нисбатан $A\left(8, \frac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(10, \frac{5\pi}{3}\right)$, $C\left(6, -\frac{\pi}{3}\right)$ нуқталар берилган. Шу нуқталарнинг $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ декарт репердаги координаталарини топинг.

204. Декарт реперда $M(7, -7)$, $N(-5, 12)$, $P(3, 0)$, $Q(0, 4)$ нуқталар берилган. Уларнинг қутб координаталарини топинг.

205. Берилган икки нуқта орасидаги масофани ҳисобланг:

$$M_1\left(5, \frac{\pi}{4}\right) \text{ ва } M_2\left(8, -\frac{\pi}{4}\right);$$

$$N_1\left(12, -\frac{\pi}{10}\right) \text{ ва } N_2\left(3; \frac{\pi}{15}\right);$$

$$P_1\left(8, \frac{\pi}{10}\right) \text{ ва } P_2\left(6, \frac{3\pi}{5}\right).$$

206. Учлари $A\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг мунтазам эканлигини кўрсатинг.

207. Агар $A\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right)$ ва $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ нуқталар берилган бўлса, $[AB]$ кесма ўртасининг қутб координаталарини топинг.

208. Учлари $A\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(4 + \sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$ нуқталарда бўлган учбурчак тўғри бурчакли учбурчак эканлигини исботланг.

209. Қутб координаталар системасида квадратнинг иккита қарама-қарши $P\left(6, -\frac{7}{12}\pi\right)$ ва $Q\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ учлари берилган бўлса, унинг юзини ҳисобланг.

210. Агар OAB учбурчакнинг битта учи қутбда, қолган учлари $A(r_1, \varphi_1)$ ва $B(r_2, \varphi_2)$ нуқталарда жойлашган бўлса, унинг юзини ҳисобланг.

211. Учлари $A(r_1, \varphi_1)$, $B(r_2, \varphi_2)$ ва $C(r_3, \varphi_3)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

212. Учлари $A\left(6, \frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(10, \frac{\pi}{4}\right)$ ва $C\left(8; \frac{7\pi}{12}\right)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

14-§. КООРДИНАТАЛАР ОРАСИДАГИ ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Бирор Ф фигурага тегишли ҳар бир нуқтанинг координаталари $F(x, y) = 0$ тенгламани ($F(x, y) \lesseqgtr$ тенгсизликни) қаноатлантириб, Ф га тегишли бўлмаган бирорта ҳам нуқтанинг координаталари уни қаноатлантирмаса, бу тенглама (тенгсизлик) Ф фигуранинг тенгламаси (фигурани аниқловчи тенгсизлик) деб аталади.

Агар фигуранинг ҳар қандай нуқтасини шу фигурага тегишли ёки тегишли эмаслигини билиш учун нуқтанинг координаталарини тенглама (тенгсизлик) даги ўзгарувчиларнинг ўрнига қўйилади: агар бу координаталар тенгликни (тенгсизлик) ни қаноатлантирса, нуқта фигурага тегишли, қаноатлантирмаса тегишли бўлмайди.

Баъзан тенгламалар системаси билан ёки тенглама ва тенгсизликлар системаси билан ёки фақат тенгсизliklar системаси билан аниқланадиган фигураларни излашга тўғри келади. Бунда изланаётган фигура ҳар бир тенглама (ёки тенгсизлик) билан аниқланувчи фигураларнинг кесишмасидан иборат бўлади.

Агар ўнг қисми нолга тенг ёки чап қисми икки ёки бир неча кўпайтувчилардан иборат бўлган тенглама берилса, у ҳолда бу тенглама билан аниқланувчи фигура икки ёки бир неча фигураларнинг тўплами бўлади. Ҳар бир кўпайтувчини алоҳида нолга тенглаб, уларнинг тенгламаларини оламиз.

213. $A(1, 3)$, $B(2, 2)$, $C(2, -2)$, $D(3, -3)$, $E(0, -5)$ нуқталар берилган. Бу нуқталарнинг қайси бирлари $x - y = 0$ тенглама билан берилган фигурада ётади, қайси бирлари ётмайди? Буни чизмада тасвирлаб кўрсатинг.

214. Координаталар боши қуйидаги тенгламалар билан аниқланувчи қайси геометрик фигурага тегишли:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $x^2 - y^2 = 0$; в) $2x - 3y = 0$?

215. $2x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0$ тенглама билан аниқланувчи геометрик фигурага тегишли бир нечта нуқтани топинг.

216. Қуйидаги тенгламалар билан қандай нуқталар тўплами аниқланади? Уларни чизмада ясанг:

а) $x + 7 = 0$; б) $x - 4 = 0$; в) $y + 3 = 0$; г) $x = 0$;
д) $y = 0$; е) $x^2 - xy = 0$; ж) $x^2 - y^2 = 0$; з) $xy = 0$;
и) $y^2 - 9 = 0$; к) $x^2 - 8x + 15 = 0$; л) $y^2 + 5y + 4 = 0$;
м) $x^2y - 7xy + 10y = 0$; н) $y = |x|$; о) $x = |y|$;
п) $y + |x| = 0$.

217. Ушбу тенгламаларга мос чизиқларни ясанг:

а) $y - x^2$; б) $x^2 + y^2 = 1$; в) $y = x^3$; г) $y = (x - 1)^2 + 2$;
д) $x^2 - 2x + y^2 = 0$; е) $y = (x - 2)^3$.

218. Қуйидаги тенгламалар билан берилган фигураларнинг кесишган нуқталарини топинг:

а) $x^2 + y^2 = 32$ ва $x - y = 0$;
б) $x^2 - 2xy + 4x - 3 = 0$ ва $5x - 4y - 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$ ва ва $x = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$ ва $y = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 40 = 0$ ва $x^2 + y^2 = 4$.

219. Қутб координаталар системасида $M_1\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_2(2, 0)$, $M_3\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ ва $M_5\left(1, \frac{2}{3}\pi\right)$ нуқталар берилган. Бу нуқталардан қайси бири $r = 2\cos\varphi$ тенглама билан аниқланувчи фигурага тегишли?

220. Қутб координаталар системасида қуйидаги тенгламалар билан қандай геометрик фигуралар аниқланади? Уларни чизмада ясанг:

а) $r = 5$; б) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; в) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$;
г) $r\cos\varphi = 2$; д) $r\sin\varphi = 1$; е) $r = 2\varphi$.

221. Чизмада қуйидаги тенгсизликлар системаси билан аниқланувчи нуқталар тўпламини тасвирланг:

а) $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ y > 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 16, \\ x > 2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

15-§. ФИГУРА ТЕНГЛАМАСИ (ТЕНГСИЗЛИГИ) НИ УНИНГ ГЕОМЕТРИК ХОССАЛАРИ БУЙИЧА ТУЗИШ

Фигура нуқталарнинг бирор геометрик ўрни каби аниқланиши мумкин, яъни фигуранинг ҳамма нуқталарига фақат шуларга хос бўлган ва фигуранинг ҳамма нуқталарини текисликнинг қолган нуқталаридан фарқ қилувчи геометрик хосса берилиши мумкин. Ана шундай ҳолда фигуранинг тенгламаси (тенгсизлиги) ни топиш масаласи келиб чиқади. Бу масала умумий ҳолда қуйидагича ҳал қилинади. Берилган фигура ихтиёрий нуқтасининг координаталарини бирор реперга нисбатан x ва y билан белгилаб, уларни боғловчи шундай математик ифода ҳосил қиламизки, бу ифода шу фигурага тегишли ҳар қандай нуқтанинг координаталарини қўйганда ўринли бўлиб, берилган фигурага тегишли бўлмаган бирорта ҳам нуқтанинг координаталарини қўйганда ўринли бўлмайди. Одатда бундай ифода тенглама (ёки тенгсизлик) дан иборат бўлади ва у фигуранинг тенгламаси (ёки уни аниқловчи тенгсизлик) дейилади.

222—242- масалаларда нуқталар тўпламининг тенгламаси (тенгсизлиги) ни декарт реперида топинг.

222. (Ox) ўқдан 5 бирлик масофада жойлашган нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

223. (Oy) ўқдан ўнг томонда ундан 3 бирлик масофада ётган нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

224. Координата ўқларидан баравар узоқликда ётувчи нуқталар тўпламини аниқланг ва унинг тенгламасини тузинг.

225. Берилган A (2, 1) ва B (4, 1) нуқталардан баравар узоқликда ётувчи нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

226. M (—1, 3) ва N (5, —3) нуқталар берилган. $[MN]$ кесмага перпендикуляр ва уни $\lambda=2$ нисбатда бўлувчи нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

227. Нуқта шундай ҳаракат қиладики, унинг иккита кесишувчи тўғри чизиққача бўлган масофаларининг нисбати доимий бўлади. Шу нуқта траекториясининг тенгламасини топинг.

228. Учлари координаталар бошида ва P (1, 0) нуқталарда бўлган кесмани аниқловчи ифодани тузинг.

229. Маркази C (a, b) нуқтада, радиуси r га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

230. M нуқта ўзининг ҳаракатида ҳамма вақт B (4, 0) нуқтага нисбатан A (1, 0) нуқтага 2 марта яқинлигича қолади. M нуқтанинг траекторияси тенгламасини тузинг.

231. A (7, 2) ва B (1—, 2) нуқталаргача бўлган масофалари квадратларининг йиғиндиси 20 га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

232. Берилган A (0, 4) ва B (—1, 2) нуқталаргача бўлган масофалари квадратларининг айирмаси 1 га тенг бўлган нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

233. Маркази координаталар бошида ва радиуси 1 га тенг бўлган доирани аниқловчи ифодани тузинг.

234. A (3, 4) нуқтадан ўтиб, (Ox) ўққа уринувчи айланаларнинг марказларидан иборат бўлган нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

235. Агар узунлиги a га тенг кесманинг учлари тўғри бурчак томонлари бўйича ҳаракат қилса, кесманинг нуқталаридан ташкил топган тўпламнинг тенгламасини тузинг.

236. Маркази координаталар бошида, радиуси a га тенг бўлган ва ҳамма нуқталарининг ординаталари манфий бўлмаган ярим айлананинг нуқталарини аниқловчи ифодани тузинг.

237. Ҳар бир нуқтасидан берилган тўғри тўртбурчакнинг қарама-қарши учларигача бўлган масофаларининг йиғиндиси қолган икки қарама-қарши учларигача бўлган масофаларининг йиғиндисига тенг бўлган нуқталар тўпламини аниқловчи ифодани топинг.

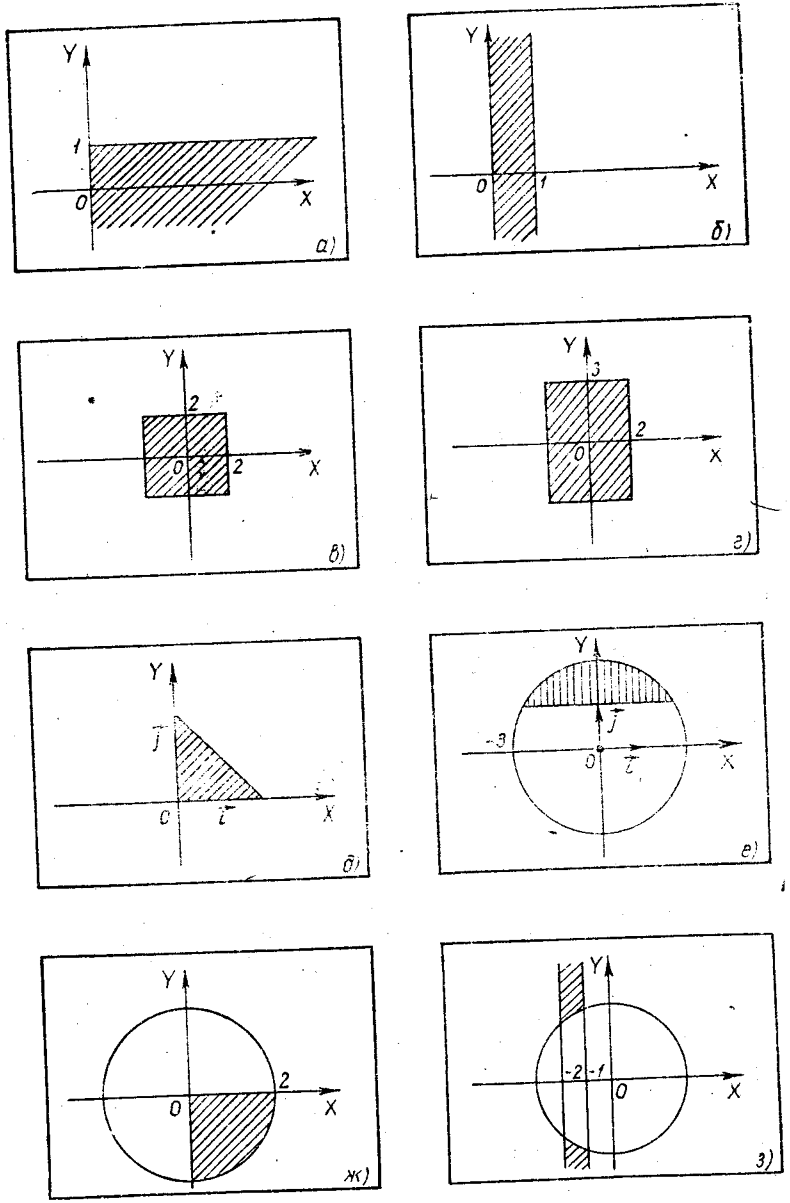
238. Узунлиги доимий бўлган кесма ўзининг учлари билан ўзаро перпендикуляр икки тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. M нуқта шу кесмани узунликлари a ва b га тенг бўлган иккита кесмага ажратади. M нуқтанинг траекториясини топинг.

239. $x=12$ тўғри чизиққа нисбатан A (3, 0) нуқтага икки марта яқин турган нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

240. A (3, 0) нуқтадан ва ордината ўқидан баравар узоқликда ётувчи нуқталар тўпламининг тенгламасини топинг.

241. A ва B нуқталар берилган. $\widehat{CAB} - \widehat{CBA} = 90^\circ$ шартни қаноатлантирувчи C нуқталар тўпламини топинг.

242. 11- чизмада берилган фигураларнинг (улар штрихланган) ҳар бирини аниқловчи тенгсизликларни ёзинг.



11- чизма.

243—252- масалалардаги нуқталар тўпламининг тенгламасини қутб координаталар системасида топинг.

243. Қутб ўқига параллел ва ундан a масофада ётувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

244. Қутб ўқига перпендикуляр бўлиб, қутб бошидан бошлаб a бирлик узунликдаги кесмани кесиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

245. A (a; a) нуқтадан ўтиб, қутб ўқи билан β бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

246. Маркази (a; 0) нуқтада ва радиуси a га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

247. Ҳар бир нуқтасидан $|AB|=2\,a$ кесманинг учларигача бўлган масофаларининг кўпайтмаси берилган a^2 сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

248. Узунлиги 2 a га тенг бўлган кесманинг учлари тўғри бурчакли декарт координаталар системасининг координата ўқлари бўйича ҳаракат қилади. Координаталар бошидан шу кесмага туширилган OM перпендикуляр асослари тўпламининг тенгламасини тузинг.

249. Маркази қутбда ва радиуси a га тенг бўлган доиранинг тенгламасини тузинг.

250. A (a, $\pi/2$) нуқтадан қутб ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Ихтиёрий $[OB]$ нур бу тўғри чизиқни B нуқтада кесади. Бу нурга B нуқтанинг иккала томонига ундан бошлаб узунлиги b га тенг бўлган $[BM]$ ва $[BM_1]$ кесмалар қўйилади. M ва M_1 нуқталар тўплами *конхоида* дейилади. Унинг тенгламасини тузинг.

251. Ҳар бир нуқтасидан F_1 (a, 0) ва F_2 (a, π) нуқталаргача бўлган масофаларининг кўпайтмаси b^2 сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни *Кассини овали* дейилади. Унинг тенгламасини тузинг.

252. (OA) нурнинг $r=a\cos\varphi$ айлана билан кесишиш нуқтасидан нурнинг иккала томонига $|AN|=|AN_1|=a$ кесмалар қўйилади. N ва N_1 нуқталарнинг геометрик ўрнига *кардиоида* дейилади. Унинг тенгламасини тузинг.

16- §. АЛГЕБРАИК ЧИЗИҚ ВА УНИНГ ТАРТИБИ

Бирор аффин реперда n- даражали алгебраик тенглама билан аниқланадиган фигурани n- тартибли алгебраик чизиқ деб аталади. Бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтишда алгебраик чизиқнинг тартиби ўзгармайди. Биринчи тартибли алгебраик чизиқларга тенгламаси $Ax+By+C=O$ кўринишда берилган тўғри чизиқлар мисол бўла олади (бу ерда $A, B, C \in R$ бўлиб, $A^2+B^2 \neq O$). Иккинчи тартибли

алгебраик чизиқларнинг умумий тенгламаси $Ax^2 + Bxy^2 +$
$+ Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ кўринишда бўлиб, бу ерда $A, B, C,$
$D, E, F \in R$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ дир. Иккинчи тартибли алгеб-
раик чизиқларга мисол қилиб, маркази (a, b) нуқтада, радиу-
си r га тенг бўлган айланани олиш мумкин. Унинг тенг-
ламаси $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ кўринишда бўлиб, бу ерда
$A = C = 1$, $B = 0$, $D = -2a$, $E = -2b$, $F = a^2 + b^2 - R^2$.
Текисликда биз биринчи ва иккинчи тартибли алгеб-
раик чизиқларни текшириш билан чекланамиз.

253. Қуйидаги берилганларга асосланиб, маркази C
нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган айлана тенглама-
сини тузинг:
а) $C(0, 1)$, $R = 3$, б) $C(-3, 5)$, $R = 4$.
254. Маркази $(2,1)$ нуқтада бўлиб, координаталар
бошидан ўтувчи айлананинг тенгламасини тузинг.
255. Диаметрининг учлари A $(2, -1)$ ва B $(4, 3)$
нуқталарда бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.
256. Радиуси 3 га тенг бўлиб, маркази (Oy) ўқда
ётган ҳамда (Ox) ўққа уринувчи айлананинг тенглама-
сини тузинг.
257. Радиуси 12 га тенг бўлиб, O $(0, 0)$ ва A $(4, 4)$
нуқталардан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.
258. M_1 $(9, 3)$, M_2 $(-3, 3)$, M_3 $(1, 1)$ нуқталардан
ўтувчи айлананинг тенгламасини тузинг.
259. Қуйидаги тенгламалар билан қандай фигуралар
аниқланади:
а) $x^2 + y^2 - 10y + 30 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 14x + 35 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 14x + 6y + 58 = 0$;
г) $4x^2 + 4y^2 + 10x - 6y + 4 = 0$;
д) $5x^2 + 5y^2 + 13x + 25y + 28 +$ [illegible] $= 0$?
$x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$
260. $A(3, 9)$ нуқтадан
айланагача бўлган энг қисқа масофани топинг.
261. Қуйидаги $A\left(-\frac{1}{2}a, \frac{7}{10}a\right)$, $B\left(\frac{1}{2}a, \frac{7}{10}a\right)$,
$C\left(-\frac{7}{10}a, -\frac{2}{5}a\right)$, $D\left(-\frac{3}{10}a, -\frac{7}{10}a\right)$ нуқталардан қайси
бирлари $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ айлананинг ичида, қайси бир-
лари унинг ташқарисида ётади?
262. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 25$ айланалар билан чегара-
ланган ҳалқанинг аналитик ифодасини ёзинг.
263. $x^2 + y^2 < x^2 - 4x + 6y$ тенгсизлик билан қандай
нуқталар тўплами аниқланади?

264. $x^2 + y^2 = R^2$ айланага $y = kx + b$ тўғри чизиқнинг уриниш шартини топинг.

265. Қуйидаги айланаларнинг ўзаро жойлашишини текширинг:

а) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ ва $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ ва $x^2 + y^2 - 10y = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$ ва $x^2 + y^2 - 10y = 0$.

266. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқ ва айлананинг ўзаро жойлашишини текширинг:

а) $y = 2x - 3$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

б) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$,

в) $y = x + 10$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

267. A, B, C параметрлар қандай шартни қаноатлантирганда $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ айлана:

а) Ox ўққа; б) Oy ўққа; в) иккала координата ўқига уринади?

268. Учлари $A(0, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг марказини топинг.

269. a_{ij} $(i, j = 0, 1, 2)$ лар қандай шартни қаноатлантирганда

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

тенглама: а) айланани; б) нуқтани; в) бўш тўпламни аниқлайди?

17-§. Аффин координаталар системасида тўғри чизиқ

Аффин координаталар системасига нисбатан биринчи даражали ҳар қандай тенгламалар тўғри чизиқни тасвирлайди ва, аксинча, ҳар қандай тўғри чизиқ аффин координаталар системасида биринчи даражали тенглама билан тасвирланади. $Ax + By + C = 0$ тенглама тўғри чизиннинг умумий тенгламаси дейилади, бу ерда A, B, $C \in$ $\in \boldsymbol{R}$ бўлиб, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Тўғри чизиқ икки шарт билан аниқланади. Тўғри чизиқнинг тенгламаси ўзгарувчи координаталардан ташқари яна бир-бирига боғлиқ бўлмаган иккита параметрга эга. Бизлар тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзиш учун тўғри чизиқ параметрларининг сон қийматларини билишимиз керак. Параметрларга турли қийматлар бериб, текисликда турли тўғри чизиқлар оламиз. Масалан, тўғри чизиқнинг вазияти унга қарашли $M_0(x_0, y_0)$ нуқта ва $\vec{s}\ \{a_1, a_2\}$ йўналтирувчи вектор билан тўла аниқланади, шунинг учун $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}$ тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади.

Бундан $\begin{cases} x = a_1 t + x_0 \\ y = a_2 t + y_0 \end{cases}$ ни ёзсак, тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини ҳосил қиламиз. $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ кўринишда бўлади. Хусусий ҳолда тўғри чизиқ Ox ўқни $(a, 0)$ нуқтада Oy ўқни $(0, b)$ нуқтада кесиб ўтса, унинг тенгламаси $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ кўринишда бўлади ва у тўғри чизиқнинг кесмалари бўйича ёзилган тенгламаси дейилади. Агар тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\{l, k\}$ бўлиб, у Oy ўқни $(0, b)$ нуқтада кесиб ўтса, унинг тенгламаси $y = kx + b$ кўринишда бўлиб, у тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади.

Агар тўғри чизиқнинг бирор кўринишдаги тенгламаси берилса, ундан бошқа кўринишдаги тенгламаларга ўтиш мураккаб эмас. Агар тўғри чизиқнинг $Ax+By+C=0$ тенгламасидаги биринчи ёки иккинчи коэффициенти 0 га тенг бўлса, тўғри чизиқ координата системасига нисбатан ўз вазифасини ўзгартиради. Масалан:

1) $C=0$ бўлса, $Ax+By=0$ тўғри чизиқ координата бошидан ўтади;

2) $A=O$ бўлса, $By+C=0$ тўғри чизиқ Ox ўққа параллел бўлади;

3) $B=0$ бўлса, $Ax+C=0$ тўғри чизиқ Oy ўққа параллел ва ҳ. к.

270. $8x-3y+2=0$ тўғри чизиқнинг M_1 (2, 6), M_2(—4, 10), M_3(—3; 2), M_4(5,14) ва M_5(1, 5) нуқталардан ўтиш ёки ўтмаслигини текшириб кўринг.

271. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $2x+3y-1=0$ берилган. Унинг параметрик тенгламаларини ёзинг.

272. Тўғри чизиқнинг $x=2-t$, $y=3+2t$ параметрик тенгламаси бўйича унинг умумий тенгламасини ёзинг.

273. Бирор аффин реперни олиб, унда қуйидаги тўғри чизиқларни ясанг:

а) $2x+3y+8=0$; б) $7x+3y=0$;
в) $x=5$; г) $y=-2$.

274. $5x+2y-10=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топинг ва уни ясанг.

275. а) $A(2, -6)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{p}=(1, -1)$ векторга параллел тўғри чизиқ;

б) координата ўқларидан мос равишда $a=3$, $b=-2$ кесмаларни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ;

в) A (3,5) нуқтадан ўтиб, Ox ўққа параллел бўлган тўғри чизиқ;

г) B (—1, 2) нуқтадан ўтиб, Oy ўққа параллел бўлган тўғри чизиқ;

д) A (0, —2) B (3, —4) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

√276. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларини топинг:

а) $3x+7y+8=0$; б) $x+5=0$; в) $2x-3y-1=0$;
г) $-x+2y-8=0$.

√277. Учлари A (—3, —2), B (1, 2), C (4, —5) нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг тенгламасини тузинг.

√278. A (2, 3) нуқтадан ўтиб, координата ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

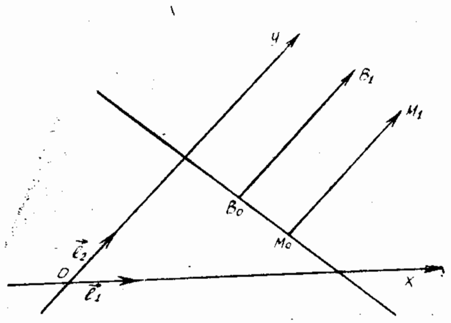
√279. M (—3, —5) нуқтадан ўтиб, $7x+4y+3=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

√280. Учлари A (—3, —2), B (1, 2), C (4, —5) нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг тенгламасини ёзинг.

281. Учлари A (0, 1), B (6, 9), C (3, —3) нуқталарда бўлган учбурчак A ички бурчаги биссектрисасининг тенгламасини тузинг.

18-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Текисликда аффин координаталар системаси $Б = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ва тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Ax+By+C=0$ берилган бўлсин. $Ax+By+C$ ифода тўғри чизиқнинг уч ҳади дейилади. Бу ифодани $P(x, y)$ деб белгилайлик: $P(x, y) = Ax + By + C$.



12- чизма.

$P(x, y)$ орқали текисликда бир қанча фигурани аниқлаш мумкин:

1. $\Phi_1 = \{M(x, y) \mid P(x, y) = 0\}$ — йўналтирувчи вектори $\vec{a} = \{-B, A\}$ бўлган тўғри чизиқ. Бу ерда $A^2 + B^2 = 0$ бўлмагани учун $\vec{b} = \{A, B\}$ a га коллинеар бўлмайди.

2. $\overrightarrow{B_0B_1} = \vec{b}$ бўлсин (12- чизма). У ҳолда

$\Phi_2 = \{M(x, y) \mid P(x, y) > 0\} = \{\Phi_1, B_1\}$ Φ_1 бўлади.

3. $\Phi_3 = \{M(x, y)(P(x, y) < 0\} = C[\Phi_1, B]$.

4. $\Phi_4 = \{M(x, y) \mid P(x, y) \geqslant 0\} = [\Phi_1, B_1]$.

5 $\Phi_5 = \{M(x, y) \mid P(x, y) \leqslant 0\} = ([\Phi_1, B_1) = \cup \Phi_1$.

6. $\Phi_6 = \{M(x, y) \mid P(x, y) \neq 0\} = \Phi_2 \cup \Phi_3 = C\Phi_3$

282. A (2, —1) ва B (3, 1) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ қуйида берилган тўғри чизиқларнинг қайси бирини кесади:

а) $x + 3y - 5 = 0$; б) $3x - y + 1 = 0$?

283. $x—3y—2=0$ тўғри чизиқ берилган. Шу тўғри чизиқнинг бир томонида ва турли томонида ётувчи бир нечта нуқтани топинг.

284. A (—1, 2), B (3, 1), C (1, 0), D (—3, 6) нуқталар ва $2x—y+5=0$ тўғри чизиқ берилган. Бу нуқталардан қайси бирлари координаталар боши билан биргаликда берилган тўғри чизиқнинг бир томонида ётади?

285. $3x—2y+12=0$ тўғри чизиқ берилган. Қуйидаги нуқталар жуфтининг қайси бирлари шу тўғри чизиқнинг турли томонида ётади:

а) $A_1(1, 0)$, $A_2(—5, 6)$; б) $B_1(0, 11)$, $B_2(—5, 0)$;
в) $C_1(1, 4)$; $C_2(—4, 2)$?

286. $x—2y+4=0$ тўғри чизиқ AB кесмани қандай нисбатда бўлади:

а) $A(—1, 5)$; $B(3, 0)$; б) $A(7, 1)$, $B(5, 2)$?

287. $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталарнинг $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқнинг турли томонида ётмаслиги учун $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) \geqslant 0$ шарт бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

288. A (4, 6), C (—2, 2), B (0, 5) нуқталар орқали ACB бурчак берилган. Шу бурчакнинг ичида ётувчи бир нечта нуқтани топинг.

289. Учлари A (—5,0), B (2,8), C (7, —3) нуқталарда бўлган учбурчакнинг ичида ва ташқарисида ётувчи бир нечта нуқтани топинг.

290. Учлари A (0, 0), B (7, —6), C (5, 0), D (8, 7) нуқталарда жойлашган тўртбурчакнинг қавариқ эмаслигини кўрсатинг.

291. Учлари A (—4, 0), B (—2, 8), C (15, 13), D (0, —3) нуқталардан иборат $ABCD$ тўртбурчак қавариқ эканлигини исботланг.

292. Агар A (—4, 0), B (—2, 8), C (12, 0), D (3, —6) бўлса, $ABCD$ тўртбурчакнинг қавариқ эканлигини кўрсатинг ва A_1 (1, 3) нуқта унинг ичида, B_1 (15, —1) нуқта эса унинг ташқарисида ётишини исботланг.

293. Текисликда декарт реперини олиб, қуйидаги тенгсизликлар системаси билан аниқланувчи фигурани топинг:

а) $\begin{cases} x - y + 5 > 0, \\ x - 7 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 4 \geqslant 0, \\ 2x - y \geqslant 0, \\ 3x + 2y - 12 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 2y + 8 \geqslant 0, \\ 3x - 2y \leqslant 0, \\ x - 2y + 4 \geqslant 0, \\ x - 2y \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + 1 > 0, \\ x - 3y - 6 < 0, \\ 2x + y - 6 > 0, \\ x + y = 4 < 0. \end{cases}$

19- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ДАСТАСИ

Агар икки тўғри чизиқ: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ берилган бўлса, уларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиш керак.

Бу тенгламаларнинг ечимлари:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}$$

ва

$$y = \frac{C_1A - C_2A_1}{A_1B_2 - A_1B_2} = \frac{\begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}$$

бўлади.

Агар $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ бўлса, тўғри чизиқлар аниқ кесишиш нуқтасига эга бўлади. Агар $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ бўлса, тўғри чизиқлар параллел ва уларнинг кесишиш нуқтаси бўлмайди. Агар $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқлар уст-ма-уст тушади ва уларнинг кесишиш нуқтаси ноаниқ бўлиб қолади.

Берилган учта тўғри чизиқ:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

бир нуқтадан ўтиши учун

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ бўлиши керак.}$$

Маркази (x_0, y_0) нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ кўринишда бўлади. $A : B$ нисбатга аниқ қиймат берсак, дастадан аниқ бир тўғри чизиқни ажратиб оламиз. Агар икки тўғри чизиқ

$$A_2x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2x + C_2 = 0$$

берилган бўлса, уларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи ҳар қандай тўғри чизиқ қуйидаги $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ тенглама билан аниқланади. Тенгламадаги параметрнинг ҳар бир қийматига дастанинг аниқ бир тўғри чизиғи мос келади; λ ни ўзгартириб, биз икки асосий тўғри чизиқ билан аниқланган дастага тегишли ҳамма тўғри чизиқларни ҳосил қиламиз.

294. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг координаталар ўқига нисбатан қандай жойлашишини текширинг ва бу тўғри чизиқларни ясанг:

а) $2x + y = 0$; б) $6x - 2y + 7 = 0$; в) $3x - 8 = 0$;
г) $3y + 1 = 0$; д) $7y = 0$; е) $-3y = 0$.

295. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топинг:

а) $3x - 5y - 21 = 0$ ва $2x - y - 7 = 0$;
б) $x + 3y - 54 = 0$ ва $3x + 9y + 7 = 0$.

296. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашишини текширинг, агар кесишса, уларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг:

а) $8x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 13 = 0$;
б) $x + y - 6 = 0$, $2x + 2y - 5 = 0$;
в) $5x - 2y + 13 = 0$; $x + 3y - 11 = 0$;
г) $x + y - 3 = 0$; $2x + 2y - 6 = 0$;
д) $x = -2$, $y - 3 = 0$;
е) $\sqrt{5x} - 3y + 1 = 0$, $5/3x - \sqrt{5y} + \frac{\sqrt{5}}{3} = 0$.

297. t нинг қандай қийматларида $3x - 8y + 1 = 0$ ва $(1 + 8)x - 2ty = 0$ тўғри чизиқлар параллел бўлади?

298. Координаталар бошидан $4x + y - 5 = 0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

299. a ва b ларнинг қандай қийматларида қуйидаги иккита тўғри чизиқ:

$$ax - 2y - 1 = 0,\ 6x - 4y - b = 0$$

а) битта умумий нуқтага эга бўлади? б) устма-уст тушади? в) кесишмайди?

300. Учбурчакнинг иккита томонининг тенгламаси: $3x - y + 8 = 0$; $3x + 5y - 1 = 0$. Медианаларининг кесишган нуқтаси $M\left(-\frac{7}{3}, -1\right)$ ни билган ҳолда, унинг учинчи томонининг тенгламасини топинг.

301. Координаталар бошидан $3x - 2y + 17 = 0$, $2x +$

$+ 3y - 6 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасигача бўлган масофани топинг.

302. Параллелограмм икки томонининг $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ тенгламалари ва битта диагоналининг $3x + 2y + 3 = 0$ тенгламаси берилган. Унинг учларининг координаталарини топинг.

303. Қуйидаги учта тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашишини текширинг:

а) $3x - y - 1 = 0;$ $2x - y + 3 = 0,$ $x - y + 7 = 0;$

б) $y = 3,$ $x - y + 5 = 0,$ $2y - 5 = 0;$

в) $3 - y + 6 = 0,$ $4x + 3y - 5 = 0,$ $2x - y + 5 = 9;$

г) $2x - y + 5 = 0,$ $x + y - 3 = 0.$ $x - y = 0;$

д) $x - y + 3 = 0,$ $1/2x - 1/2y + 3/2 = 0,$ $\sqrt{3x} + \sqrt{3y} - 3\sqrt{3} = 0;$

е) $x - y = 0,$ $2x - 2y + 3 = 0,$ $-x + y + 1 = 0.$

304. Қуйидаги учта тўғри чизиқ берилган:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2y + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Уларнинг битта нуқтадан ўтиш шартини топинг.

305. $\lambda x + \mu y + 1 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$ $x - 1 = 0$ тўғри чизиқларнинг бир нуқтадан ўтиши учун λ, μ лар қандай шартни қаноатлантириши керак?

306. $x + 2 \neq 0$; $y + 3 \neq 0$, $x + y = 0$ тўғри чизиқлар учбурчак ҳосил қиладими?

307. Маркази $(1, -6)$ нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасини ёзинг.

308. $y - x - b = 0$ тенглама дастанинг тенгламаси бўлса, унинг марказини топинг.

309. $x + 2y - 3 + \lambda(x - y + 1) = 0$ дастада $M(4, 1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни топинг.

310. $\lambda(3x - 4y + 1) + x - y = 0$ дастанинг координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиғини топинг.

311. $y = -1$ тўғри чизиқ $\lambda(x - 2y + 1) + \mu(x - 3y) = 0$ дастага тегишли бўладими?

312. $(2+3\lambda)x - (4 - 7\lambda)y + \lambda = 0$ ва $(3 - 3\mu)x + (4 - 7\mu)y + 5 = 0$ дасталарнинг умумий тўғри чизиғини топинг.

20-§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси аффин координаталар системасидагидек $Ax + By + C = 0$ кўринишда берилади. A, B, C ҳақиқий сонлар бўлиб, уларнинг учаласи бирданига нолга тенг эмас. A, B сонлар тўғри чизиқнинг нормал вектори $\vec{n}$ нинг координаталаридир.

$M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{n}(A, B)$ нормал векторга эга бўлган тўғри чизиқ

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

тенглама билан берилади.

Агар тўғри чизиқ Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил қилса, $k = \operatorname{tg}\alpha$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти дейилади. $y = kx + b$ га тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади. Бу ерда b тўғри чизиқнинг ордината ўқидан ажратган кесманинг узунлигидир.

Агар тўғри чизиқ Ox ўқни (a, O) нуқтада, Oy ўқни $(0, b)$ нуқтада кесса, унинг тенгламаси $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ кўринишда бўлиб, уни тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси дейилади.

Агар иккита g_1 ва g_2 тўғри чизиқлар мос равишда $y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ тенгламалар билан берилган бўлса, улар орасидаги бурчак $\varphi = (\widehat{g_1, g_2})$ қуйидаги формула билан топилади:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Агар $g_1 \parallel g_2$ бўлса, $k_2 = k_1$; $g_1 \perp g_2$ бўлса, $k_2 \cdot k_1 = -1$ бўлади. $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи $(M_1 M_2)$ тўғри чизиқнинг тенгламаси илгаригидек $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ бўлиб, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ шу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти бўлади. Агар тўғри чизиқ унга координаталар бошидан туширилган перпендикулярнинг узунлиги p ва шу перпендикулярнинг (Ox) ўқ билан ташкил қилган бурчаги α билан берилган бўлса, унинг тенгламаси

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ кўринишда бўлиб, тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси дейилади.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Ax + By + C = 0$ ни нормал кўринишга келтириш учун уни нормалловчи кўпайтувчи $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $(\mu C < 0)$ га кўпайтириш лозим, у ҳолда унинг тенгламаси

$$\pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} x \pm \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} \mp \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

кўринишга келади.

(x_1, y_1) нуқтанинг $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқдан четланиши δ деб қуйидаги сонга айтилади:

$$\delta = y_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p.$$

(x_0, y_0) нуқтадан $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофа d қуйидаги формула билан аниқланади:

$$d = |\delta| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|.$$

Агар тўғри чизиқ $Ax + By + C = 0$ тенглама билан берилган бўлса,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \text{ бўлади.}$$

313. а) $A(1;\ -2)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{n}\{2,\ 1\}$ га перпендикуляр бўлган;

б) B (0; 3) нуқтадан ўтиб, $2x-y+3=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган;

в) координаталар бошидан ўтиб, $2x-3y+1=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган;

г) A (1, 2) нуқтадан ўтиб, бурчак коэффициенти $k=$ $=3$ га тенг бўлган;

д) $(\widehat{\vec{i},\ \vec{j}})$ координаталар бурчагининг биссектрисаси бўлган;

е) A (3, 0) нуқтадан ўтиб, (Ox) ўқ билан 90° бурчак ташкил қилган;

ж) (Oy) ўқдан $b=-3$ кесма ажратиб, бурчак коэффициенти $k=-2$ бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

314. Тенгламалари билан берилган қуйидаги тўғри чизиқларнинг координаталар системасига нисбатан қандай жойлашишини кўрсатинг:

а) $3x - 4y = 0$; б) $4x - 2 = 0$; в) $5y+6 = 0$;
г) $3x = 0$; д) $4y = 0$.

315. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициенти ва ордината ўқидан кесган кесмасининг узунлигини топинг:

а) $4x + 5y - 9 = 0$; б) $5x + 3y = 0$; в) $y - 6 = 0$.

316. Абсцисса ўқи билан 30° бурчак ташкил қилиб, ордината ўқининг манфий йўналишидан 7 бирлик кесма ажратувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

317. $5x+2y-10=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топинг ва уни ясанг.

318. Қуйидаги тўғри чизиқларни ясанг:

а) $x - 2y + 3 = 0$; б) $3x - 4y = 0$;
в) $x = 4$; г) $y = -5/2$; д) $2x = 0$.

319. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесмалар бўйича тенгламаларини ёзинг:

а) $3x - 4y - 12 = 0$; б) $5x + 6y - 30 = 0$;
в) $y - 2x = 3$; г) $x - 5y = 1$.

320. (2, 3) нуқтадан ўтиб, координаталар ўқларидан тенг кесмаларни ажратувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

321. $2x+3y-6=0$ тўғри чизиққа: а) параллел бўлган; б) перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентини топинг.

✓ **322.** A (2, -3) нуқтадан ўтиб, $7x+4y-5=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

323. B (4, -2) нуқтадан ўтиб, $5x+2y-3=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

324. $y=5x+7$ ва $y=3x+5$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

325. Учбурчак томонларининг тенгламаси қуйидагича бўлса, унинг учларини топинг:

$$6x - 5y + 8 = 0,\ 9x + 5y - 38 = 0,$$
$$3x + 10y + 29 = 0.$$

326. M_1 (5, 6) нуқтанинг $2x-3y+6=0$ тўғри чизиқдаги проекциясини топинг.

327. $x+4y+3=0$ тўғри чизиққа нисбатан M (2, 3) нуқтага симметрик бўлган нуқтани топинг.

328. $2x-y=0$, $x+y-2=0$ тўғри чизиқлар билан аниқланувчи дастанинг $x-3y+2=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиғини топинг.

329. Учбурчакнинг учлари A (—3, —2), B (1, 2), C (4, —5) нуқталарда бўлса, унинг томонлари тенгламасини тузинг.

330. Учбурчакнинг учлари A (—3, —2), B (1, 2) C (4, —5), нуқталарда бўлса, унинг медианларининг тенгламасини тузинг.

331. Қуйидаги нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини ҳисобланг:

а) A_1 (2, —5) ва B_1 (3, 2); б) A_2 (6, —5) ва B_2 (0, 3).

332. A (—1, 2) ва B (2, 3) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

333. P (—8, 12) нуқтанинг A (2, —3), B (—5, 1) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқдаги проекциясини топинг.

334. Агар тўртбурчак томонларининг тенгламаси мос равишда $x=4$ $y=5$, $y=x$, $y=2x$ бўлса, унинг диагоналларининг тенгламасини тузинг.

335. Агар учбурчакнинг учлари A (0, 1), B (2, 0), C (3, —4) нуқталарда бўлса, унинг баландликларининг тенгламасини тузинг.

336. $x+4y-3=0$ ва $8x-y-7=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтиб, $3x-7y+6=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

337. M (—3, 2) нуқта ҳамда $5x-6y+3=0$ ва $x-4y-1=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

338. Учбурчакнинг учлари A (4, 6), B (—4, 0), C (—1, —4) нуқталарда бўлса, унинг (BN) ички биссектрисасининг тенгламасини тузинг.

339. Агар координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги 5 га тенг бўлиб, у тўғри чизиқ Ox ўқ билан $\alpha=\pi/3$ бурчак ташкил қилса, унинг тенгламасини тузинг.

340. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг тенгламаларини нормал кўринишга келтиринг:

а) $12x-5y-39=0$; б) $x+5y-4=0$;
в) $5x+2y+13=0$; г) $2y-1=0$.

341. A (1, 2) нуқтадан $4x+3y-35=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

342. $4x-3y-10=0$ ва $4x-3y-25=0$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

343. $Ax+By+C_1=0$ ва $Ax+By+C_2=0$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

344. Учлари A (—2, 3), B (—5, —1), C (4, —4) нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Шу учбурчак оғирлик марказидан (AC) томонгача бўлган масофани топинг.

345. Учбурчакнинг учлари A (—4, 2), B (7, 5), C (3, —4) нуқталарда бўлса, унинг баландликларининг узунликларини топинг.

346. $x-y+3=0$ ва $7x+y-7=0$ тўғри чизиқлар ташкил қилган бурчакларнинг биссектрисаси тенгламасини тузинг.

347. (2, 1) нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказингки, у (—3, 1) ва (1, 3) нуқталардан баравар узоқликда ўтсин.

348. M (1, 5) нуқтанинг ABC учбурчакка нисбатан қандай жойлашишини текширинг. Бунда A (2, —1). B (3, 1), C (4, 0).

349. $x-y+3=0$ ва $7x-y-7=0$ тўғри чизиқлар ташкил қилган бурчаклардан A (1, 3) нуқта тегишли бўлган биссектрисанинг тенгламасини тузинг.

350. Агар учбурчакнинг учлари A (2, —3), B (—2; —4/3), C (—74/7, —60/77) нуқталарда бўлса, унинг ички бурчакларининг биссектрисалари тенгламасини тузинг.

351. A (1, 4), B (5/4, 3/4) C (1/4, 13/4) нуқталар берилган. ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг марказини топинг.

21-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ДОИР АРАЛАШ МАСАЛАЛАР

352—355-масалалар аффин реперда қаралади.

352. Учбурчак иккита томонининг тенгламаси қуйидагича: $2x-y+8=0$ ва $3x+5y-1=0$. Агар медианаларининг кесишган нуқтаси G (—7/3, —1) бўлса, унинг учинчи томонининг тенгламасини тузинг.

353. ABC учбурчак ўзининг учларининг координаталари билан берилган: A (0, 1), B (6,9), C (3, —3). A бурчак (ички ва ташқи) биссектрисасининг тенгламасини тузинг.

354. O (—2, —5/2) нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказингки, унинг $2x-y+8=0$ ва $3x+5y-1=0$ тўғри чизиқлар орасидаги кесмаси шу нуқтада тенг иккига бўлинсин.

355. Учбурчакнинг битта учи: A (4, —5); иккита медианасининг тенгламаси: $x-11y-19=0$, $11x-y-9=0$ бўлса, учбурчак томонларининг тенгламасини тузинг.

356. Абсцисса ўқида шундай X нуқтани топингки, ундан M (1, 2) ва N (3, 4) нуқталаргача бўлган масофаларнинг йиғиндиси энг кичик бўлсин.

357. ABC учбурчакни олиб, унда баландликларнинг кесишиш нуқтаси, медианаларнинг кесишиш нуқтаси ва учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази бир тўғри чизиқда ётишини текширинг, бу ерда A (5, 8), B (—2, 9), C (—4, 5).

358. $(x+2y-7)+\lambda(3x-y+5)=0$ дастага қарашли ва шу дастани ҳосил қилувчи берилган иккита тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқни топинг.

359. $ABCD$ трапецияда: A (3, 3/4), B (—18/5, —2) ва D (0, 3). Агар AC диагональ BAD бурчакни тенг иккига бўлса, унинг C учини топинг.

360. (—3, 0), ва (3, 2) нуқталардан шундай ўзаро перпендикуляр иккита тўғри чизиқ ўтказингки, улар $x-3y=11$ тўғри чизиқда кесишсин.

361. $x+2y-11=0$ ва $2x-y-2=0$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ва координаталар бошидан 5 бирлик узоқликда ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

362. Учбурчак томонларининг тенгламаси қуйидагича: $x+2y-1=0$; $5x+4y-17=0$ ва $x-y+11=0$. Учбурчак учларининг координаталарини топмай туриб, унинг баландликларининг тенгламасини тузинг.

363. Тўғри тўртбурчак икки томонининг тенгламаси қуйидагича: $x-2y=0$, $x-2y+15=0$. Агар унинг диагоналларидан биттасининг тенгламаси $7x+y-15=0$ берилган бўлса, тўғри тўртбурчакнинг учларини топинг.

364. Учбурчакнинг иккита учи A (3, —1) ва B (5, 7) ҳамда баландликларининг кесишиш нуқтаси N (4, —1) берилган. Учбурчакнинг учинчи учининг координаталарини топинг.

365. Агар тенг ёнли трапециянинг асослари мос равишда 8 ва 4 бўлиб, ён томонлари катта асоси билан 30° бурчак ташкил қилса, унинг томонларининг тенгламасини тузинг. Координаталар ўқи сифатида катта асосни ва симметрия ўқини олинг.

366. Тенг ёнли учбурчак асосининг $x+2y=0$ тенгламаси ва битта ён томонининг $x-y+5=0$ тенгламаси берилган. Агар иккинчи ён томонининг (4, 2) нуқтадан ўтиши маълум бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

367. Агар тенг ёнли учбурчакнинг учи B (2,6) нуқтада, (AC) асосининг тенгламаси $2x+3y=0$ бўлиб, $\operatorname{tg}A=3/2$ бўлса, ён томонларининг тенгламасини тузинг.

368. Учбурчакнинг битта учи A (—3, 1), бирор медианасининг тенгламаси $6x+11y-19=0$ ҳамда баландликларидан биттасининг тенгламаси $4x-y-5=0$ берилган бўлса, унинг учларини топинг.

369. Учбурчакнинг битта учи A (—3, —2), иккита баландлигининг тенгламаси $2x+5y+1=0$; $5x-2y+11=0$ бўйича унинг қолган учларининг координаталарини топинг.

370. Учбурчакнинг иккита учи A (7, 5) ва B (—4, 7) ҳамда унинг ички бурчакларидан бирининг биссектрисасининг тенгламаси $7x+y-29=0$ берилган бўлса, учбурчак томонларининг тенгламасини топинг.

III боб. ТЕКИСЛИКНИНГ АЛМАШТИРИШЛАРИ

22-§. АКСЛАНТИРИШЛАР. АЛМАШТИРИШЛАР

Фараз қилайлик, бўш бўлмаган X ва X' тўпламлар берилган бўлсин.

X тўпламнинг ҳар бир x элементига бирор f қоидага кўра X' тўпламнинг аниқ бир x' элементи мос келтирилган бўлса, бу мосликка X тўпламни X' тўпламга акслантириш дейилади ва $f(x)=x'$ ёки $f: X\to X'$, ёки $X\xrightarrow{f}X'$ кўринишларнинг бири орқали ифодаланади. x' x нинг акси (образи), x эса x' нинг асли (прообрази) дейилади.

Биз элементлари нуқталардан иборат бўлган тўпламларни қараймиз. Агар нуқтавий тўпламнинг элементларини $A, B, C, \ldots M, \ldots$ кўринишда белгиласак, акслантиришни $f(M)=M'$ ёки $M\xrightarrow{f}M'$

деб ёза оламиз. Агар f акслантиришдаги ҳар бир акс фақат битта элементнинг акси бўлса, f — инъектив (бир қийматли) акслантириш дейилади.

Агар $f:X\Rightarrow X'$ акслантиришдаги барча акслар тўплами X' тўпламдан иборат бўлса, f — сюръектив (ёки X' тўпламга) акслантириш дейилади.

Бир вақтда ҳам инъектив, ҳам сюръектив бўлган акслантиришни биектив (ўзаро бир қийматли) акслантириш дейилади.

Агар f биектив акслантириш X тўпламни ўзига акслантирса, у ҳолда бундай акслантириш X тўпламни алмаштириш дейилади. $X=\sigma$ текисликнинг бирор f алмаштириши ва $\Phi \in \sigma$ фигура берилган бўлсин.

Φ фигурадаги барча нуқталар аксларининг тўплами Φ' ни f алмаштиришдаги Φ фигуранинг акси, Φ эса Φ' нинг прообрази (асли) дейилади.

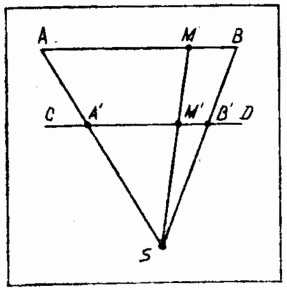
f алмаштириш ўзаро бир қийматли бўлгани сабабли $\Phi'=f(\Phi)$ фигура ягона бўлади ва аксинча, Φ' фигура ягона Φ аслга эга бўлади.

Агар f алмаштириш натижасида бирор $x \in X$ элемент $\Phi \subset X$ (фигура) ўзига ўтса, уни қўзғалмас элемент (фигура) ёки шу алмаштиришнинг инварианти дейилади.

Агар бирор алмаштириш натижасида X тўпламнинг ҳар бир элементи ўзига ўтса, у айний алмаштириш дейилади. Айний алмаштиришни E билан белгилаймиз. $f(M)=M'$ алмаштириш берилганда f нинг биективлигидан M' ни M га ўтказувчи алмаштириш ҳам мавжуд бўлиб, уни f га тескари алмаштириш дейилади ва $f^{-1}(M')=M$ кўринишда ифодаланади.

371. 1) X тўплам — $(0, r)$ айлана, X' эса айлананинг $[AB]$ диаметри бўлсин. f қоида айланадаги ҳар бир M нуқтага бу нуқтанинг $[AB]$ диаметрдаги ортогонал проекциясини мос келтирсин. f қандай акслантириш бўлади?

2) Агар X тўплам ўзининг $[AB]$ диаметрига тиралган O марказли ва r радиусли ярим айлана бўлса, юқоридаги f акслантириш қандай акслантириш бўлади?



13- чизма.

372. Иккита конгруэнт, параллел $[AB]$ ва $[CD]$ кесмалар 13-чизмадагидек жойлашган бўлиб, улар ётган текисликда S нуқта берилган. f қоида $[AB]$ тўпламнинг ҳар бир M нуқтасини бу нуқтани S билан бирлаштиришдан ҳосил бўлган $[SM]$ нурнинг $[CD]$ билан кесишишидан ҳосил бўлган M' нуқтага мос келтирсин. Бу акслантиришнинг турини аниқланг.

373. Ox ўқнинг барча нуқталаридан иборат $X=\{M(x)/-\infty<x<\infty\}$ тўплам Ox ўқнинг мусбат қисмидаги нуқталар тўплами $X'=\{M'(x')/x'\geqslant 0\}$ га координаталари $f(x)=x^2$ боғланиш билан акслантирилган: $f: x \to x^2$.
Бу акслантиришда $M_1(-3)$, $M_2(-2)$, $M_3(2)$, $M_4(3)$, $M_5(8)$, $M_6(9)$, $M_7(81)$ нуқталарнинг аксларини топинг ва шу акслантириш турини аниқланг.

374. $y=\lg x$ функция $x>0$ бўлган абсциссалар ярим ўқидаги нуқталар тўпламини $X=\{M(x)/x>0\}$ абсциссалар ўқи $X'=M'(x')/-\infty<x<\infty\}$ га акслантиради. Бу акслантиришда $M_1\left(\frac{1}{100}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{10}\right)$, $M_3(1)$, $M_4(10)$, $M_5(100)$ нуқталарнинг аксларини топинг ва шу акслантириш турини аниқланг.

375. Ox ўқда ётган нуқталар тўплами $X=\{M(x,0)/-\infty<x<\infty\}$ $y=3x$ тенглама билан ифодаланган тўғри чизиқдаги нуқталарга $f: M(x, 0) \to M'(x, 3x)$ қоида бўйича акслантирилган. f қандай акслантириш бўлади?

376. Тўғри бурчакли учбурчак олиб, унинг бир катетидаги нуқталарни бирор f қоидага кўра гипотенузадаги нуқталарга акслантиринг ва бу акслантириш қандай бўлишини аниқланг.

377. δ текисликда S марказли $P(S)$ тўғри чизиқлар дастаси ва $S \notin d$ тўғри чизиқ берилган. d тўғри чизиқни $P(S)$ дастага шундай акслантирингки, ундаги ҳар бир M нуқтага $P(S)$ дастадан битта (SM) тўғри чизиқ мос келсин. Бу акслантириш инъектив эканлигини, лекин сюръектив бўла олмаслигини исбот қилинг.

378. l тўғри чизиқ l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар кесишишидан ҳосил бўлган вертикал бурчакларнинг биссектрисаларидан бири бўлсин ва X тўплам $l_1 \cup l_2$ даги, X' тўплам эса l даги нуқталар тўплами бўлсин. $\forall M \in X$ учун M дан l га туширилган перпендикулярнинг асоси M' ни мос келтирайлик. $f(M)=M'$ акслантириш сюръектив эканлигини, лекин инъектив бўлолмаслигини исбот қилинг.

379. Текисликда $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ репер берилган бўлсин. Текисликнинг $\forall M(x, y)$ нуқтасига шундай $M'(x', y')$ нуқтани мос келтирайликки, унда $x'=-x$, $y'=-y$ бўлсин, яъни

$$f: M(x, y) \to M'(-x, -y).$$

а) бу акслантириш алмаштириш эканини кўрсатинг;
б) алмаштиришнинг инвариант нуқтаси борми? O . O
с) бу алмаштиришда $y=kx$ тўғри чизиқнинг, $x^2+y^2=1$ айлананинг, $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ айлананинг аксларини топинг.

380. a тўғри чизиқдаги нуқталар тўплами X бўлсин.

$\forall M \in a$ нуқтага f акслантиришда M га $Q \in a$ нуқтага нисбатан симметрик бўлган M' нуқта мос келсин, яъни

$$|QM| = |QM'|, \ M, Q, M' \in a; \ f(M) = M', \ f(Q) = Q$$

бўлсин. Бу акслантириш алмаштириш эканини исбот қилинг, унга тескари алмаштиришни топинг.

381. σ текисликда $\vec{a}$ вектор берилган. $\forall M \in \sigma$ нуқтани шундай M' нуқтага силжитайликки, $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ бўлсин. Бу акслантириш алмаштириш бўлишини кўрсатинг, унга тескари алмаштиришни топинг. Қандай шарт бажарилганда айний алмаштириш юз беради?

382. l тўғри чизиқ ҳамда диаметри бу тўғри чизиққа параллел бўлиб, ўзи l га уринувчи O марказли ярим айлана ω берилган. X тўплам l нинг нуқталаридан иборат, f қоида эса $\forall M \in X$ нуқтага $[MO] \cup \omega = P$ нуқтадан l га туширилган перпендикуляр асоси M' ни мос келтирсин. Бу акслантириш алмаштириш бўлолмаслигини изоҳлаб беринг.

383. X тўплам d тўғри чизиқнинг нуқталаридан иборат бўлсин. $\vec{a} \parallel d$ векторни олайлик ва $\forall M \in d$ нуқтага $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ шартни қаноатлантирувчи M' нуқтани мос келтирайлик. $f: M \rightarrow M'$ акслантириш алмаштириш бўладими? Қандай шарт бажарилганда f айний алмаштириш бўлади? f^{-1} қандай алмаштириш бўлишини кўрсатинг.

384. σ текисликда d тўғри чизиқ берилган бўлсин. f акслантириш σ нинг ҳар бир M нуқтасига ундан d га туширилган $[MN]$ перпендикулярнинг ўртаси M' ни мос келтирсин. Бу мослик алмаштириш эканини кўрсатинг, унга тескари алмаштиришни топинг.

23-§. АЛМАШТИРИШЛАР КЎПАЙТМАСИ. АЛМАШТИРИШЛАР ГУРУҲИ

Бўш бўлмаган X тўплам берилган ва унинг барча алмаштиришлари тўплами Γ_x бўлсин. Фараз қилайлик, $f, g \in \Gamma_x$ бўлиб, X нинг x, y, z элементлари учун $f(x) = y, \ g(y) = z$ бўлсин.

Кетма-кет бажарилган f ва g алмаштиришлар натижасида x элемент z элементга аксланишидан иборат бўлган алмаштиришни f ва g алмаштиришлар кўпайтмаси дейилади ва gf кўринишда ёзилади. Агар $fg = gf$ бўлса, кўпайтириш коммутатив дейилади.

Таъриф. Бирор X тўпламнинг алмаштиришлари тўплами Γ_x учун:

1) $f \in \Gamma_x$, $g \in \Gamma_x$ бўлганда $gf \in \Gamma_x$ бўлса;

2) $\forall f \in \Gamma_x$ бўлганда $f^{-1} \in \Gamma_x$ бўлса, Γ_x тўплам кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ ҳосил қилади дейилади.

Агар Γ_x гуруҳнинг бирор қисм тўплами H ўз навбатида кўпайтириш амалига нисбатан гуруҳ бўлса, у Γ_x нинг қисм гуруҳи дейилади.

385. l тўғри чизиқ ва $\vec{a} \parallel l$ вектор берилган. f алмаштириш $M \in l$ нуқтани $O \in l$ нуқтага нисбатан симметрик алмаштириб, M' га ўтказсин. g алмаштириш эса M нуқтани $\overrightarrow{MM''} = \vec{a}$ шарт асосида $M'' \in l$ га ўтказсин. gf кўпайтма коммутатив хоссага эгами?

386. П текисликда d тўғри чизиқ ва $\vec{p} \parallel d$ вектор берилган. П текисликнинг нуқталари аввал d ўққа нисбатан симметрик алмаштирилган, сўнг $\vec{p}$ вектор қадар силжитилган. Агар d га нисбатан симметрик алмаштириш f_1 $\vec{p}$ вектор қадар силжитиш f_2 бўлса, $f_2 f_1$ кўпайтма коммутатив бўладими?

387. 386- масалани $\vec{p} \perp d$ бўлган ҳол учун ечинг.

388. $\vec{a}$, $\vec{b} \parallel$ П векторлар берилган. П текисликнинг ҳар бир M' нуқтаси $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ шарт билан M' нуқтага ва $\overrightarrow{MM''} = \vec{b}$ шарт билан M'' нуқтага мос келтирилган бўлсин. Бу акслантиришларнинг ҳар бири алмаштириш эканини ва уларнинг кўпайтмаси коммутатив эканини исбот қилинг.

389. П текисликда $d_1 \parallel d_2$ тўғри чизиқлар берилган. П текисликнинг ихтиёрий нуқтаси аввал d_1 тўғри чизиққа, кейин d_2 тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштирилган: $f_1(M) = M'$, $f_2(M') = M''$. Ушбу $f_2 f_1$ алмаштириш узунлиги $2\rho(d_1, d_2)$ га тенг, берилган ўқларга перпендикуляр вектор бўйича силжитиш эканини исбот қилинг.

390. П текисликда $d_1 \perp d_2$ тўғри чизиқлар берилган. П текисликнинг ихтиёрий нуқтаси кетма-кет, бу икки тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштирилган: $f_1(M) = M'$, $f_2(M') = M''$. Ушбу $f_2 f_1 = f(M) = M''$ алмаштириш $O = d_1 \cap d_2$ нуқтага нисбатан марказий симметрик алмаштириш эканини исбот қилинг.

391. П текисликда $d_1 \not\parallel d_2$, $d_1 \perp d_2$ тўғри чизиқлар берилган. Бу тўғри чизиқларга нисбатан П текисликнинг нуқталари кетма-кет симметрик алмаштирилган: $f_1(M) = M'$, $f_2(M') = M''$. Ушбу $f_2 f_1 = f(M) = M''$ алмаштириш $O = d_1 \cup d_2$

нуқта атрофида $2(\widehat{d_1, d_2})$ бурчакка буриш эканлигини исбот қилинг.

392. Г алмаштиришлар тўплами гуруҳ ҳосил қилса, Г тўпламда айний элемент мавжудлигини исбот қилинг.

393. Г тўплам l тўғри чизиқнинг нуқталарини l га параллел барча векторлар бўйича силжитишлар тўплами бўлсин. Г тўплам гуруҳ ҳосил қиладими?

394. Г тўплам П текисликнинг нуқталарини П га параллел барча векторлар бўйича силжитишлар тўплами бўлсин. Бу тўплам гуруҳ ҳосил қилишини исбот қилинг.

395. $\Gamma = \{S_d, F_0\}$ тўпламда S_d — П текисликнинг нуқталарини тайин $d \subset П$ ўққа нисбатан симметрик алмаштириш, E_0 — айний алмаштириш бўлса, Г тўплам гуруҳ ҳосил қилишини исбот қилинг.

24-§. ҲАРАКАТ ВА УНИНГ ТУРЛАРИ

Агар σ текисликнинг бирор f алмаштиришида икки нуқта орасидаги масофа ўзгармаса, яъни $\forall M, N \in \sigma$ учун $f(M) = M'$, $f(N) = N'$ бўлиб, $MN = M'N'$ ўринли бўлса, f алмаштириш ҳаракат дейилади.

Ҳаракатнинг хоссалари

Ҳаракат алмаштириши натижасида:

1) кесма яна кесмага ўтади;
2) тўғри чизиқ яна тўғри чизиққа ўтади;
3) бурчак катталиги сақланади;
4) уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади;
5) тўғри бурчакли декарт репер шундай тўғри бурчакли декарт реперга ўтадики, мос нуқталарнинг уларга нисбатан координаталари ўзгармайди.

Агар f ҳаракат натижасида ориентация ўзгармаса, у I тур ҳаракат ўзгарса, II тур ҳаракат дейилади.

Агар $Б = (0, \vec{i}, \vec{j})$ реперда $M(x, y)$ нуқта бирор f ҳаракат натижасида $M'(x', y')$ нуқтага ўтса, бу нуқталарнинг $Б$ га нисбатан координаталари орасида қуйидаги боғланиш ўринли бўлади:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y \sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + \varepsilon y \cos a + b. \end{cases} \qquad (1)$$

Бу ерда $f(Б) = Б' = (0', \vec{i'}, \vec{j'})$ бўлиб, $Б$ реперда $0'(a, b)$, $\vec{i'}(\cos\alpha, \sin\alpha)$; $\vec{j'}(-\varepsilon\sin\alpha, \varepsilon\cos\alpha)$ бўлади. Агар $\varepsilon = +1$ бўлса, (I) I тур ҳаракатнинг, $\varepsilon = -1$ бўлса, II тур ҳаракатнинг формулалари бўлади.

Текисликнинг ҳаракатлари 5 турга ажралади: ўқли симметрия, параллел кўчириш, буриш, марказий симметрия ва сирпанувчи симметрия. П текисликда d тўғри чизиқ, M ва M' нуқталар учун $d \perp MM'$ бўлиб, d тўғри чизиқ MM' кесманинг ўртасидан ўтган бўлса, M ва M' нуқталар d тўғри чизиққа нисбатан симметрик дейилади.

d тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси ўз-ўзига симметрик бўлади. П текисликнинг ҳар бир M нуқтасига унга d га нисбатан симметрик бўлган M' нуқтани мос келтиришга ўқли симметрия дейилади. d тўғри чизиқ эса симметрия ўқи дейилади. Ўқли симметрияни S_d билан белгилаб, $S_d(M) = M'$ кўринишда ёзамиз.

Агар $Б = (0, \vec{i}, \vec{j})$ реперда $M(x, y)$, $S_d(M) = M'(x', y')$ бўлса, $d = Ox$ учун $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y; \end{cases}$ $d = Oy$ учун эса $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y \end{cases}$ муносабатлар ўринли бўлади.

П текислик ва унга параллел $\vec{a}$ вектор учун σ текисликнинг ҳар бир M нуқтасига $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ бўлган M' нуқта мос келтирилган бўлса, бу алмаштириш $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш дейилади. $\vec{a}$ вектор эса кўчириш вектори дейилади. Бу алмаштиришни $П_{\vec{a}}(M) = M'$ кўринишда ёзамиз.

Агар σ текисликда $Б = (0, \vec{i}, \vec{j})$ берилган бўлиб, унда $\vec{a}(a_1, a_2)$, $M(x, y)$, $П_{\vec{a}}(M) = M'(x', y')$ бўлса, $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$ муносабат ўринли бўлади. П текисликда O нуқта ва катталиги φ га тенг бўлган ориентирланган бурчак берилган бўлсин. П текисликнинг ҳар бир $M \neq 0$ нуқтасига шу текисликдаги $OM = OM'$, $\angle MOM' = \varphi$ шартларни қаноатлантирувчи M' нуқта мос келтирилган бўлса, бу алмаштиришга П текисликни O нуқта атрофида φ бурчакка буриш дейилади, бунда O — буриш маркази, φ — буриш бурчаги дейилади. Буришни $R_0^\varphi(M) = M'$ кўринишда ёзамиз. Буришда $R_0^\varphi(0) = 0$ бўлади, яъни буриш маркази ўзига алмашинади.

Агар σ текисликда олинган $(0, \vec{i}, \vec{j})$ реперда 0 — буриш маркази, $M(x, y)$, $R_0^\varphi(M) = M'(x', y')$ бўлса,

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$ муносабат ўринли бўлади.

$R_0^{180^\circ}$ га буришдан иборат алмаштириш марказий симметрия дейилади. Марказий симметрияни Z_0 кўринишда ёзамиз. Z_0 — марказий симметриянинг координаталардаги ифодаси $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ бўлиши буришнинг формулаларидан келиб чиқади.

σ текисликда d ўқ ва $d \parallel \vec{a}$ вектор берилганда S_d ўқли симметрия билан $\Pi_{\vec{a}}$ параллел кўчиришнинг кўпайтмасидан иборат алмаштириш сирпанувчи симметрия дейилади.

Агар сирпанувчи симметрияни f деб белгиласак, $f = \Pi_{\vec{a}} \cdot S_d$ бўлади.

σ даги $(0, \vec{i}, \vec{j})$ реперда $d = Ox$, $\vec{a}(a_1, 0)$, $M(x,y)$, $f(M) = M'(x', y')$ бўлса, $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y \end{cases}$ формулалар ўринли, агар $d = Oy$, $\vec{a}(0, a_2)$ бўлса, $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y + a_2 \end{cases}$ ўринли бўлади.

Текисликда ҳар қандай I тур ҳаракат ё айний алмаштириш, ё парллел кўчириш, ё буришдир. II тур ҳаракат эса ўқли симметрия ёки сирпанувчи симметриядан иборат.

Ўқли симметрия

396. Ўқли симметрия нималар ёрдамида берилади? Бу саволга қуйидаги иккита ясашни бажариш билан жавоб беринг:

а) d ўқ ва $M \notin a$ нуқта берилган, $S_d(M) = M'$ нуқтани ясанг;

б) берилган бир жуфт A ва A' нуқталар номаълум d ўққа нисбатан симметрик экани маълум, d ўқни ясанг.

397. S_d алмаштиришдаги инвариант нуқталар ва инвариант тўғри чизиқларни кўрсатинг.

398. d ўқ, l тўғри чизиқ, $(0, r)$ айлана ҳамда ABC учбурчак берилган. S_d алмаштиришда бу фигураларнинг аксларини топинг, бу фигуралар d ўққа нисбатан қандай жойлашганда ўзига ўтади?

399. Ўқли симметрия ҳаракат эканлигини исбот қилинг.

400—405- масалаларни $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ реперда қаранг.

400. Ўқли симметрияда ориентация сақланадими? Бу саволга ўқли симметрия формуласидан фойдаланиб жавоб беринг.

401. Учлари A (5, —2), B (4, 2), C (—3, 1) нуқталарда жойлашган учбурчакка (Ox) ва (Oy) ўқларга нисбатан симметрик бўлган фигура учларининг координаталарини ёзинг.

402. A $(x, 7)$, A' $(3, y)$ нуқталар (Oy) ўққа нисбатан симметрик экани маълум бўлса, уларнинг номаълум координатларини топинг.

403. $y = 3x + 5$ тўғри чизиққа (Ox) ва (Oy) ўқларга нисбатан симметрик бўлган фигураларнинг тенгламаларини топинг ва бу тўғри чизиқларни ясанг.

404. Симметрик мос A (1, —2), A' (3, 4) нуқталар берилган. Уларнинг симметрия ўқи тенгламасини топинг.

405. Ўқи $x - y + 4 = 0$ тўғри чизиқ билан устма-уст тушган ўқли симметриянинг аналитик ифодасини топинг.

406. Текисликда берилган M нуқтага бирор O марказли дастанинг ҳар бир чизиғига нисбатан симметрик бўлган нуқталар тўплами O нуқтадан баравар узоқликда ётишини исбот қилинг.

407. Қуйидаги фигураларнинг ҳар бири нечта симметрия ўқига эга:

а) иккита кесушувчи тўғри чизиқ; б) иккита параллел тўғри чизиқ; в) иккита нуқта; г) тўғри чизиқ ва нуқта; д) мунтазам учбурчак; е) квадрат; ж) мунтазам n бурчак; з) айлана ва нуқта; и) айлана ва тўғри чизиқ.

408. а) Фақат битта симметрия ўқига эга бўлган; б) фақат иккита симметрия ўқига эга бўлган; в) иккитадан ортиқ симметрия ўқига эга бўлган қандай фигураларни биласиз?

409. Учбурчак иккита симметрия ўқига эга бўлса, унинг учинчи симметрия ўқи борлигини исбот қилинг.

410. Фигура фақат иккита симметрия ўқига эга бўлса, улар ўзаро перпендикуляр ўқлар бўлишини исбот қилинг.

411. l тўғри чизиқ ва ундан бир томонда M ва N нуқталар берилган. l да шундай X нуқтани топингки, $|MX| + |XN|$ йиғинди энг кичик бўлсин.

412. B учидаги бурчаги тўғри бўлган ABC учбурчак берилган. AB томонга нисбатан симметрик алмаштиришни S_{AB} билан, AC томонга нисбатан симметрик алмаштиришни S_{AC} билан белгилайлик. ABC учбурчакнинг $S_{AB} \cdot S_{AC}$ ва $S_{AC} \cdot S_{AB}$ кўпайтма алмаштиришлардаги аксларини топинг. $S_{AC} \cdot S_{AB} = S_{AB} \cdot S_{AC}$ тенглик ўринлими?

413. Учлари $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ нуқталарда жойлашган учбурчак берилган. Бу учбурчакнинг:

а) (Ox) ва (Oy) ўқларга нисбатан симметрик алмаштиришлар кўпайтмаси натижасида ҳосил бўлган аксини топинг;

б) (Oy) ва (Ox) ўқларга нисбатан симметрик алмаштиришлари кўпайтмаси натижасида ҳосил бўлган аксини топинг;

в) $S_{OX} \cdot S_{OY} = S_{OY} \cdot S_{OX}$ муносабат ўринлими?

414. S_d d ўқли симметрик алмаштириш, S^{-1} эса унга тескари алмаштириш бўлсин;

1) S^{-1} ҳам d ўқли симметрик алмаштириш эканини исбот қилинг;

2) $S \cdot S^{-1}$ қандай алмаштириш бўлади?

415. $\{S_\alpha\}$ тўплам гуруҳ ташкил қиладими?

416. Текисликнинг барча ўқли симметрик алмаштиришлари тўплами гуруҳ ташкил қиладими?

417. Айланага ички чизилган ҳар қандай трапеция тенг ёнли эканини исбот қилинг.

418. Диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлган параллелограмм ромб эканини исбот қилинг.

419. Тенг ёнли трапециянинг асослари ўртасидан уларга перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ трапециянинг симметрия ўқи эканлигини исбот қилинг.

420. Тенг ёнли трапецияда унинг ён томонлари ётган тўғри чизиқлар кесишган нуқта, диагоналлари кесишган нуқта ва асосларининг ўрталари бир тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг.

421. Учбурчак баландликлари кесишган нуқтага учбурчак томонларига нисбатан симметрик бўлган нуқталар бу учбурчакка ташқи чизилган айланада ётишини исбот қилинг.

Параллел кўчириш

422. Параллел кўчириш нималар ёрдамида берилади?

а) П текисликда $\vec{a} \parallel$ П вектор ва $M \in$ П нуқта берилган. $T_{\vec{a}}(M) = M'$ ни ясанг;

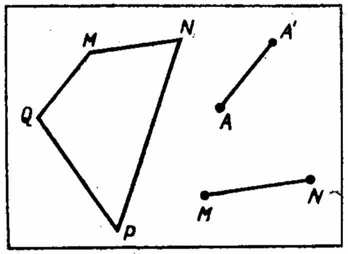
б) берилган параллел кўчиришда A ва A' лар мос нуқталар бўлса, кўчириш векторини аниқланг.

423. Параллел кўчиришда чизмада кўрсатилган A нуқта A' га ўтган:

а) берилган $[MN]$ кесма аксини топинг (14- чизма).

б) $MNPQ$ фигура аксини топинг.

424. $T_{\vec{b}}$ параллел кўчиришда инвариант нуқталар ва тўғри чизиқлар мавжудми?



14- чизма.

425. Параллел кўчириш ҳаракат эканлигини исбот қилинг.

426. $T_{\vec{p}}$ параллел кўчиришда d тўғри чизиқ ўзига параллел d' тўғри чизиққа ўтишини исбот қилинг.

427. Берилган ABC учбурчакни аввал $\vec{AB}$ йўналишда, сўнгра $\vec{CB}$ йўналишда параллел кўчиринг. Ҳосил қилинган иккита учбурчакни қандай битта параллел кўчириш билан бир-бирига мослаш мумкин?

428. a тўғри чизиқни ўзини ўзига ўтказувчи нечта параллел кўчириш мавжуд?

429. Иккита бир хил йўналган нур берилган. Уларнинг бирини иккинчисига ўтказувчи параллел кўчириш мавжудми?

430. Иккита конгруэнт айлана берилган. Бу айланалардан бирини иккинчисига ўтказувчи векторни кўрсатинг.

431. Параллел a ва b тўғри чизиқлар берилган. Қандай параллел кўчириш натижасида: а) a тўғри чизиқ b га ўтади; б) b тўғри чизиқ a га ўтади; в) a ва b тўғри чизиқлар ўз-ўзига ўтади?

432. Тенг радиусли иккита кесишувчи айлананинг марказлари орасидаги масофа a га тенг. Марказлар чизиғига параллел бўлган тўғри чизиқ айланаларни A ва B, C ва D нуқталарда кесади. $|AC|$ ни топинг.

433. Иккита параллел кўчиришнинг кўпайтмаси яна параллел кўчириш бўлишини исбот қилинг.

434. Текисликнинг барча параллел кўчиришлари тўплами гуруҳ бўлишини исбот қилинг.

435—438- масалаларни $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ реперда қаранг.

435. Берилган M (2,1) нуқтани N (4, —3) нуқтага ўтказувчи, N нуқтани M нуқтага ўтказувчи параллел кўчиришларни аниқланг.

436. Учлари A (5, —2), B(4, 2), C(—3, 1) нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Бу учбурчакни $\vec{a} = \{-3, -1\}$ вектор бўйича параллел кўчиришдаги акси учларининг координаталарини топинг.

437. $\vec{a}=\{0, 3\}$ вектор қадар параллел кўчириш натижасида $4x-2y-3=0$ тўғри чизиқ аксининг тенгламасини топинг.

438. $3x-y+2=0$ ва $5x-y+5=0$ тўғри чизиқларда шундай иккита M_1, M_2 нуқтани топингки, улар орасидаги масофа 5 бирликка тенг бўлсин ва $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \vec{i}$ бўлсин.

439. A ва B пунктлар қирғоқлари параллел бўлган каналнинг икки томонида жойлашган. Бу пунктларни бирлаштирувчи энг қисқа йўлни ҳосил қилиш учун кўприкни каналнинг қаерига қуриш лозим?

440. Ҳар қандай текис тўртбурчак томонларининг ўрталарини кетма-кет бирлаштирувчи фигура параллелограмм бўлишини исбот қилинг.

441. Тенг ёнли учбурчак асосида олинган ихтиёрий нуқтадан унинг томонларигача бўлган масофалар йиғиндиси ён томонига туширилган баландликка тенг эканини исбот қилинг.

Буриш

442. П текисликда O, M, N нуқталар, l тўғри чизиқ ва α йўналган бурчак берилган:

1) O нуқта атрофида M, N нуқталарнинг α бурчакка буришдаги аксини топинг;

2) $R_0^\alpha(M)=M'$, $R_0^\alpha(N)=N'$ нуқталар учун $|MN|=|M'N'|$ бўлишини (буриш ҳаракат эканлигини) исбот қилинг;

3) l тўғри чизиқнинг O нуқта атрофида α бурчакка буришдаги аксини топинг.

443. Буриш нималар ёрдамида берилади? Бу саволга қуйидаги ясашларни бажариш билан жавоб беринг:

1) текисликда A нуқта ва унинг номаълум нуқта атрофида 60°га бургандаги акси $R^{60°}(A)=A'$ берилган. Буриш марказини топинг;

2) A ва A' нуқталар бирор O нуқта атрофида номаълум бурчакка буришдаги мос нуқталар экани маълум. Буриш бурчагини топинг;

3) параллел бўлмаган ўзаро конгруэнт $[AB]$ ва $[A'B']$ кесмалар берилган. $[AB]$ ни $[A'B']$ га ўтказувчи буриш марказини ва буриш бурчагини топинг.

444. Текисликда A ва A' нуқталар ҳамда a тўғри чизиқ берилган. A' нуқта A нуқтанинг буришдаги акси бўлиб, буриш маркази a тўғри чизиқда ётиши маълум бўлса, буриш марказини ва буриш бурчагини топинг.

445. ABC учбурчак ва $\alpha=60°$ бурчак берилган. Бу учбурчакни:

1) медианалари кесишган нуқта атрофида;

2) BC томонида ётган нуқта атрофида α бурчакка буришдаги аксини топинг.

446. O нуқта ва l тўғри чизиқ берилган. O нуқта атрофида l тўғри чизиқни φ бурчакка буришдаги акси l' берилган l тўғри чизиқ билан φ бурчак ҳосил қилишини исбот қилинг.

447. Буришда бирор айлана инвариант фигура бўлса, шу айлана маркази буриш маркази бўлишини исбот қилинг.

448. $M(2{,}0)$, $N(-2, -5)$, $P(1\ -3)$ нуқталарнинг $Б=\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ реперда $O(0, 0)$ нуқта атрофида 90° га бургандаги аксларини топинг.

449. $Б=\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ реперда $O(0, 0)$ нуқта атрофида тенгламаси $2x-y+5=0$ бўлган l тўғри чизиқни 90° га бургандаги акси l' нинг тенгламасини топинг.

450. $R_0^\alpha \cdot R_0^\beta = R_0^{\alpha+\beta}$ тенгликни исбот қилинг.

451. Берилган нуқта атрофида барча буришлар тўплами гурух ҳосил қилишини исбот қилинг.

452. Берилган a тўғри чизиқни ўзини ўзига ўтказувчи қандай буришлар мавжуд?

453. Берилган параллелограммни ўзини ўзига ўтказувчи қандай буришлар мавжуд? Берилган мунтазам учбурчакни-чи? Саволни квадрат ва мунтазам олтибурчак учун қўйинг ва унга жавоб беринг.

454. Ўқлари φ бурчак остида кесишувчи иккита S_{d_1} ва S_{d_2} ўқли симметриянинг кўпайтмаси $d_1 \cap d_2 = 0$ нуқта атрофида 2ψ бурчакка буришдан иборат бўлишини исбот қилинг.

455. Ўзаро перпендикуляр бўлган, учлари квадратнинг қарама-қарши томонларида жойлашган кесмаларнинг конгруэнтлигини исбот қилинг.

456. $ABCD$ ромбда $\widehat{BDA}=60°$, унинг $[AB]$ ва $[BC]$ томонларида E ва F нуқталар $|AE|=|BF|$ бўладиган қилиб танланган. Ҳосил бўлган EDF учбурчак мунтазам эканлигини исбот қилинг.

457. ABC мунтазам учбурчакнинг маркази O нуқтадан ўзаро 60° ли бурчак ҳосил қилувчи икки тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқларнинг учбурчак ичига жойлашган кесмалари конгруэнт бўлишини исбот қилинг.

Марказий симметрия

458. Текисликда O ва M $(O \neq M)$ нуқталар берилган:
а) O нуқтага нисбатан M га симметрик бўлган M' нуқтани ясанг;

б) A ва A' берилган нуқталар номаълум нуқтага нисбатан симметрик экани маълум, симметрия марказини ясанг. Бу икки масаладан фойдаланиб, марказий симметрия нималар ёрдамида берилади, деган саволга жавоб беринг.

459. O нуқта ва ABC учбурчак берилган. O нуқтага нисбатан ABC учбурчакка симметрик бўлган фигурани:

а) $O = A$ ҳол учун;
б) $O \in [AC]$ ҳол учун;
в) $O \notin (\triangle ABC)$ ҳол учун ясанг.

460. Марказий симметрия натижасида нур ўзига қарама-қарши нурга ўтишини исбот қилинг.

461. Қандай икки кесма учун улардан бирини иккинчисига ўтказувчи марказий симметрия мавжуд бўлади?

462. O нуқтага нисбатан ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар симметрик бўлса, уларнинг медианалари кесишган нуқталари ҳам O га нисбатан симметрик бўлишини исбот қилинг.

463—466- масалаларни $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ реперда қаранг.

463. Формулалари $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y \end{cases}$ бўлган алмаштириш ҳаракат эканлигини исбот қилинг.

464. Марказий симметрия натижасида айлана ўзига конгруэнт бўлган айланага ўтишини аналитик усулда исбот қилинг.

465. S_{0_x}— Ox ўққа нисбатан симметрия, S_{0_y} эса Oy ўққа нисбатан симметрия, Z_0 O га нисбатан марказий симметрия бўлсин. Қуйидаги муносабатлардан қайси бири ўринли:

1. $S_{ox}\cdot Z_0 = S_{oy}$; 3. $S_{ox}\cdot Z_0 \neq Z_0\cdot S_{ox}$;
2. $S_{oy}\cdot Z_0 = S_{ox}$; 4. $S_{oy}\cdot Z_0 = Z_0\cdot S_{oy}$?

466. $Z_0\cdot Z_0 = E$, яъни Z_0 га тескари алмаштириш Z_0 нинг ўзи бўлишини исбот қилинг.

467. Текисликда O ва O' $(O \neq O')$ нуқталар берилган. $Z_0'\cdot Z_0$ кўпайтма алмаштириш параллел кўчириш эканини исбот қилинг ва кўчириш векторини кўрсатинг.

Нима учун текисликнинг барча марказий симметриялари тўплами группа ташкил эта олмайди?

468. T параллел кўчириш билан Z_0 марказий симметриянинг кўпайтмаси бирор O' нуқтага нисбатан марказий симметрия эканини исбот қилинг.

469. Текисликнинг барча параллел кўчиришлари ва марказий симметриялари тўплами группа ҳосил қиладими (олдинги масаладан фойдаланинг)?

470. Текисликда берилган O_1, O_2, O_3 нуқталарга нисбатан 3 та марказий симметрия кўпайтмаси марказий симметрия бўлишини исбот қилинг ва симметрия марказини кўрсатинг.

471. Қуйидаги фигураларнинг қайсилари симметрия марказига эга: мунтазам учбурчак, параллелограмм, тўғри тўртбурчак, трапеция, мунтазам бешбурчак, мунтазам олтибурчак, иккита кесишувчи тўғри чизиқ?

472. Мунтазам n бурчак томонларининг сони тоқ бўлганда у симметрия марказига эга эмаслигини кўрсатинг.

473. П текисликда $ABCD$ тўртбурчак ва M нуқта берилган. M нуқтага тўртбурчак томонлари ўрталарига нисбатан симметрик бўлган нуқталар параллелограммнинг учларидан иборат эканини исбот қилинг (440- масаладан фойдаланинг).

474. $ABCD$ параллелограммда диагоналларнинг кесишган нуқтаси O бўлсин. Учлари OAB, OBC, OCD, ODA учбурчакларнинг медианалари кесишган нуқталарда жойлашган тўртбурчак параллелограмм бўлишини исбот қилинг.

475. Текисликда ABC учбурчак ва M нуқта берилган. Учбурчак томонларининг ўрталарига нисбатан M нуқтага симметрик бўлган M_1, M_2, M_3 нуқталардан тузилган учбурчак ABC учбурчакка конгруэнт бўлишини исбот қилинг.

476. Радиуслари тенг бўлган иккита айлана K нуқтада ташқи уринади. Уларнинг бирида AK, иккинчисида BK ватарлар $[AK] \perp [BK]$ шартни қаноатлантирсин. (AB) тўғри чизиқ марказлар чизиғига перпендикуляр бўлишини исбот қилинг.

Сирпанувчи симметрия

477. Текисликда d ўқ, $\vec{p} \parallel d$ вектор ва M нуқта берилган. f сирпанувчи симметрияда M нуқтанинг акси бўлган M' нуқтани топинг. $f = T_{\vec{p}}\cdot S_d$ учун $T_{\vec{p}}\cdot S_d = S_d\cdot T_{\vec{p}}$ тенглик ўринли эканини кўрсатинг.

478. Сирпанувчи симметрия нималар ёрдамида бериладн? Бу саволга қуйидаги масалаларни ечиш билан жавоб беринг:

1) бир жуфт мос нуқталар ва симметрия ўқи берилган кўчириш векторини кўрсатинг;

2) бир жуфт мос нуқталар ва кўчириш вектори берилган симметрия ўқини ясанг;

3) икки жуфт мос нуқталар $A \to A'$, $B \to B'$ ва $[AB] = [A', B']$ берилган, симметрия ўқини ҳамда кўчириш векторини ясанг.

479—481- масалаларни $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ реперда қаранг.

479. $\vec{p} = \{-2, 0\}$, $d = (Ox)$ билан берилган сирпанувчи симметрияда $y = 3x + 5$ тўғри чизиқнинг ва $x^2 + y^2 = 4$ айлананинг аксини топинг.

480. $\begin{cases} x' = x + 3, \\ y' = -y \end{cases}$ формулалар билан берилган сирпанувчи симметриянинг кўчириш векторини ва симметрия ўқини топинг.

481. d ўқи $x + 7 = 0$ тўғри чизиқдан иборат, кўчириш вектори $\vec{p} = \{0,3\}$ бўлган сирпанувчи симметриянинг аналитик ифодасини топинг.

Ҳаракат

482. а) $M(x, y) \to M'(x, -y)$ алмаштириш ҳаракат эканлигини исбот қилинг.

б) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y + 1, \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \end{cases}$ формулалар билан берилган алмаштириш ҳаракат эканлигини исбот қилинг ва унинг турини аниқланг.

в) $\begin{cases} x' = \frac{12}{13} x + \frac{5}{13} y + \frac{2}{13}, \\ y' = -\frac{5}{13} x + \frac{12}{13} y - \frac{16}{13} \end{cases}$ ҳаракатнинг турини аниқланг.

483. $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y + 1, \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \end{cases}$ формулалар билан берилган ҳаракатда:

а) $f(Б') = Б'$ реперни аниқлаб, чизмада кўрсатинг;
б) $M(1, 1)$ нуқта аксининг координаталарини топинг;
в) $M'(0,1)$ нуқта аслининг координаталарини топинг.

484. $\begin{cases} x' = \frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y - 1, \\ y' = -\frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y - 15 \end{cases}$ формулалар билан берилган ҳаракат $\left(-\frac{31}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ нуқта атрофида буриш эканлигини исбот қилинг.

485. $\begin{cases} x' = \frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y + \frac{21}{5}, \\ y' = \frac{3}{5} x - \frac{4}{5} y - \frac{13}{5} \end{cases}$ формулалар билан берилган ҳаракат сирпанувчи симметрия эканини исбот қилинг.

486. $\begin{cases} x' = \frac{7}{25} x - \frac{24}{25} y + \frac{12}{5}, \\ y' = -\frac{24}{25} x - \frac{7}{25} y + \frac{16}{5} \end{cases}$ формулалар билан берилган ҳаракат ўқли симметрия эканлигини исбот қилинг.

487. Икки $[AB]$ ва $[A'B']$ кесма берилган. Агар $A(3, 4)$, $B(0, 0)$, $A'(0, 0)$, $B'(5, 0)$ экани маълум бўлса, A ни A' га, B ни B' га ўтказувчи ҳаракат формулаларини топинг.

488. ABC ва $A'B'C'$ учбурчак учларининг координаталари қуйидагича: $B(5,1)$, $A(2, -3)$, $C(0,1)$, $A'(-3, 1)$, $B'(1, 4,)$ $C'\left(-\frac{19}{5}, \frac{27}{5}\right)$. Бу учбурчакларнинг ўзаро конгруэнтлигини исбот қилинг ва $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ шартларни қаноатлантирувчи ҳаракат формулаларини топинг.

489. Марказий симметрия билан параллел кўчиришнинг кўпайтмаси қандай ҳаракатдан иборат?

490. Тоқ сондаги марказий симметриялар кўпайтмаси қандай ҳаракатдан иборат?

491. I тур ҳаракатлар тўплами гуруҳ ҳосил қилишини исбот қилинг.

492. II тур ҳаракатлар тўплами гуруҳ бўла олмаслигини кўрсатинг.

493. Берилган: а) ромбни; б) квадратни; в) тенг томонли учбурчакни ўзини ўзига ўтказувчи I ва II тур ҳаракатлар тўпламини кўрсатинг. Тўпламларнинг қайсилари гуруҳ бўлади?

25-§. УХШАШ АЛМАШТИРИШЛАР. ГОМОТЕТИЯ

$k \neq 0$ ҳақиқий сон ва σ текисликда O нуқта берилган бўлсин. O марказли k коэффициентли гомотетия деб текисликнинг шундай алмаштиришига айтиладики, унда O нуқта ўзига ўтади, $\forall M(\neq 0)\in\sigma$ нуқтага мос келувчи M' нуқта $\overrightarrow{OM'} = k\cdot\overrightarrow{OM}$ шартни қаноатлантиради.

Агар $k > 0$ бўлса, O нуқта M ва M' нуқталар орасида ётмайди, $k < 0$ бўлса, O нуқта M ва M' орасида ётади. $k = -1$ бўлганда марказий симметрия, $k = 1$ бўлганда эса айний алмаштириш юз беради. O марказли, k коэффициентли гомотетияни H_0^k кўринишда белгилаймиз.

H_0^k га тескари алмаштириш $\frac{1}{k}$ коэффициентли гомотетия бўлади, $H_0^{\frac{1}{k}} = E$ дир.

Агар σ текисликдаги $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ декарт реперда O гомотетия маркази, k гомотетия коэффициенти, $\forall M\in\sigma$ нинг координаталари (x, y), $H_0(M) = M'(x', y')$ бўлса, мос нуқталарнинг координаталари орасида $x' = kx$, $y' = ky$ боғланиш ўринли бўлади.

Гомотетик алмаштириш натижасида тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа ўтади, уч нуқтанинг оддий нисбати ўзгармайди, кесманинг узунлиги эса (k) марта ўзгаради.

УХШАШ АЛМАШТИРИШЛАР

$k > 0$ сон берилганда σ текисликнинг ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофани k марта ўзгартирувчи алмаштиришни ўхшаш алмаштириш дейилади ва у P_k кўринишда белгиланади, яъни $\forall M, N \xrightarrow{P_k} M'N'$ учун $M'N' = kMN$.

Ҳаракатни $k=1$ коэффициентли ўхшаш алмаштириш дейиш мумкин. Гомотетияда кесманинг узунлиги $|k|$ марта ўзгаргани сабабли у ҳам $|k|$ коэффициентли ўхшаш алмаштиришдир.

Умуман, ҳар қандай P_k ўхшаш алмаштириш f ҳаракат билан H^k гомотетиянинг кўпайтмасига тенг:

$$P_k = H^k \cdot f.$$

Шунинг учун ўхшаш алмаштиришда бу икки алмаштиришга умумий бўлган хоссалар сақланади: тўғри чизиқ тўғри чизиққа ўтади, параллеллик сақланади, уч нуқтанинг оддий нисбати, бурчак катталиги ўзгармайди.

Текисликда бирор $(0, \vec{i}, \vec{j})$ декарт репер берилганда унда олинган $\forall M$ нуқтанинг координаталари x, y ва ўхшаш алмаштиришдаги акси M' нинг координаталари x', y' бўлса, улар орасида қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha) + a, \\ y' = k(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha) + b, \end{cases}$$

бу ерда $\alpha = (\widehat{i, i'})$, $O'(a, b)$. Агар $\varepsilon = +1$ бўлса, ўхшаш алмаштириш I тур дейилади, $\varepsilon = -1$ бўлса, у II тур ўхшаш алмаштириш дейилади.

Гомотетия

494. Текисликда турли O, M, N нуқталар берилган. M ва N нуқталарнинг O марказли $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = \frac{3}{2}$ коэффициентли гомотетиядаги аксларини топинг, бунда гомотетия билан марказий симметрия, гомотетия билан ҳаракат қандай ўзаро боғлиқлигини аниқланг.

495. Текисликда O, M, M' нуқталар берилган. Агар $H_0^k(M) = M'$ экани маълум бўлса, гомотетия коэффициенти k ни топинг.

496. H_0^k гомотетияда кесманинг узунлиги $|k|$ марта ўзгаришини исбот қилинг.

497. $[AB]$ ва $[A'B']$ параллел кесмалар бирор H гомотетиядаги мос кесмалар экани маълум бўлса, гомотетия марказини ва берилган C учун $H(C) = C'$ нуқтани ясанг.

498. Гомотетия нималар ёрдамида берилади? Юқоридаги масалалардан фойдаланиб жавоб беринг.

499. П текисликда бирор O марказли k коэффициентли гомотетиядаги инвариант нуқталар ва тўғри чизиқларни кўрсатинг. $H_0^k(M) = M$ шартни қаноатлантирувчи гомотетия мавжудми ва бундай нуқталар тўплами қандай фигурадан иборат?

500. Гомотетияда гомотетия марказидан ўтмаган тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа ўтишини исбот қилинг.

501. H_0^k гомотетияда: 1) маркази гомотетия марказида бўлган айлананинг акси қандай фигура бўлишини; 2) маркази гомотетия марказида ётмаган айлананинг акси қандай фигура бўлишини аниқланг.

502. ABC учбурчак ва ундан ташқарида O нуқта берилган. ABC учбурчакка O нуқтага нисбатан $k=0{,}5$; $k=2$; $k=-2$ коэффициентли гомотетик фигураларни ясанг.

503. $A'B'C'$ учбурчак ABC учбурчакнинг гомотетик акси бўлса, бу учбурчакларнинг биссектрисалари параллел бўлишини исбот қилинг.

504. Ф фигура бирор O марказли k коэффициентли гомотетик алмаштириш натижасида Φ' га ўтган бўлса, Φ' фигурани Ф га ўтказувчи гомотетия ҳам мавжудлигини кўрсатинг ва унинг коэффициентини аниқланг.

505. Бирор гомотетияга тескари алмаштириш гомотетия эканини исбот қилинг.

506. O марказли, k_1 ва k_2 коэффициентли гомотетияларнинг кўпайтмаси O марказли $k = k_1 \cdot k_2$ коэффициентли гомотетия эканлигини исбот қилинг.

507. O марказли барча гомотетиялар тўплами гуруҳ ҳосил қилишини исбот қилинг.

508. O марказли k коэффициентли гомотетия H_0^k билан O марказли марказий симметрия Z_0 кўпайтмасини топинг. $Z_0 \cdot H_0^k = H_0^{-k}$ тенглик тўғрими?

509. Гомотетия билан ҳаракатнинг кўпайтмаси ҳаракат бўла оладими?

510—516- масалаларни $Б = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ реперда қаранг.

510. O гомотетия маркази, $M(3, 4)$ ва $M'(6, 8)$ лар мос нуқталар бўлса, гомотетия коэффициенти k ни топинг.

511. $\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 3y \end{cases}$ формулалар билан берилган гомотетияда:

1) $x - y + 5 = 0$ ва $y = 2x$ тўғри чизиқларнинг;

2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 24$ ва $y^2 + y^2 = 1$ айланаларнинг;

3) учлари $A(1, 3)$, $B(-2, 5)$, $C(0, 1)$ нуқталарда ётган учбурчакнинг аксларини топинг.

512. H_0^k гомотетиянинг маркази $C(a, b)$ бўлса, гомотетия формулаларини аниқланг. $k = 1$ да қандай алмаштириш юз беради?

513. $\begin{cases} x' = kx + a, \\ y' = ky + b \end{cases}$ формулалар ёрдамида берилган алмаштириш гомотетия эканлигини исбот қилинг, гомотетия марказини ва коэффициентини топинг.

514. $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + 1, \\ y' = -\dfrac{1}{2}y + 3 \end{cases}$ формулалар билан берилган гомотетияда: 1) $y = x - 5$ тўғри чизиқнинг; 2) $(x+3)^2 + y^2 = 4$ айлананинг: 3) учлари $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-1, -2)$ нуқталарда ётган учбурчакнинг аксини топинг.

515. Маркази Q (3, 6) нуқтада ётган гомотетиянинг бир жуфт мос нуқталари $A(6, 12)$, $A'(2, 4)$ берилган. Гомотетия формулаларини топинг.

516. $2x + y - 4 = 0$ тўғри чизиқда A нуқта, $3x - y + 2 = 0$ тўғри чизиқда B нуқта олинган ва $H_0^{-2}(A) = B$ экани маълум бўлса, бу нуқталарнинг координаталарини топинг.

517. Гомотетик алмаштиришдан фойдаланиб, учбурчак медианалари бир нуқтада кесишишини ва улар бу нуқтада учбурчак учидан бошлаб 2:1 нисбатда бўлинишини исбот қилинг.

518. Гомотетиядан фойдаланиб, учбурчак баландликлари бир нуқтада кесишишини исбот қилинг.

519. Трапециянинг параллел томонларининг ўрталари, диагоналлари кесишган нуқта ва параллел бўлмаган томонлари кесишган нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг.

Ўхшаш алмаштиришлар

520. а) Φ_2 фигура Φ_1 фигурага k коэффициентли ўхшаш бўлса, Φ_1 фигура Φ_2 га қандай коэффициентли ўхшаш бўлади?

б) Φ_2 фигура Ф фигурага k коэффициентли гомотетик бўлса, Ф фигура Φ_2 га қандай коэффициентли ўхшаш бўлади?

521. Ҳар доим ўхшаш бўладиган иккита фигурага мисол келтиринг.

522. Ўхшаш алмаштиришда тўғри чизиқда ётган нуқталар тўплами яна тўғри чизиқда ётган нуқталар тўпламига ўтишини исбот қилинг.

523. Қуйидаги жумлаларнинг қайсилари тўғри:

а) ҳар қандай иккита конгруэнт фигура ўхшаш;
б) ҳар қандай иккита ўхшаш фигура конгруэнт;
в) ҳар қандай иккита гомотетик фигура ўхшаш;
г) ҳар қандай иккита ўхшаш фигура гомотетик?

524. Қуйидаги жумлаларнинг қайсилари ўринли:

а) ҳар қандай иккита томонли учбурчак ўхшаш;
б) ҳар қандай иккита квадрат ўхшаш;
в) ҳар қандай иккита айлана ўхшаш;
г) ҳар қандай иккита айлана гомотетик;
д) ҳар қандай иккита айлана конгруэнт?

525. Ҳар қандай ўхшаш алмаштиришга тескари алмаштириш мавжудлигини кўрсатинг, ўхшашлик коэффициентини топинг.

526. Ҳар қандай иккита ўхшаш алмаштиришнинг кўпайтмаси ўхшаш алмаштириш эканини кўрсатинг.

527. Ўхшаш алмаштиришлар тўплами гуруҳ ҳосил қилишини исбот қилинг ва унинг қисм гуруҳларини кўрсатинг.

528—534- масалаларни $Б = (0,\ i,\ j)$ реперда қаранг.

528. $\begin{cases} x' = a_1 x - a_2 \varepsilon y + a, \\ y' = y_2 x + a_1 \varepsilon y + b \end{cases}$ $(\varepsilon = \pm 1,\ a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$

формулалар $k = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ коэффициентли ўхшаш алмаштириш эканлигини исбот қилинг.

529. $A(0,\ 1) \to A'(2;\ 2 + \sqrt{3}),\ B(1,\ 0) \to B'(3 + \sqrt{3};\ 3)$ мос нуқталари билан берилган I тур ўхшаш алмаштиришнинг формулаларини топинг.

530. $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 2, \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$ формулалар билан берилган алмаштириш ўхшаш алмаштириш эканини кўрсатинг, ўхшашлик коэффициентини ва инвариант нуқтасининг координаталарини топинг.

531. $M(x, y) \xrightarrow{f} M'(3x,\ -3y)$ алмаштириш берилган, f алмаштириш ўхшаш алмаштириш эканини исбот қилинг, координаталар текислигида бу алмаштиришнинг бир неча мос нуқталарини кўрсатинг.

532. Координаталар текислигидаги нуқталар $k=2$ коэффициентли, O_1 $(-1,\ 3)$ марказли гомотетик алмаштирилган ва ундан кейин O нуқта атрофида 30° га бурилган. Бу иккита алмаштириш натижасида ҳосил бўлган ўхшаш алмаштириш формулаларини топинг.

533. Учлари $A(0, -3),\ B(4,\ 0),\ C(1, -1),\ A'\left(-6, -\dfrac{336}{25}\right),$ $B'\left(0, -\dfrac{136}{25}\right),\ C'\left(-\dfrac{26}{5}, -\dfrac{226}{5},\right)$ нуқталарда бўлган ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар берилган, улар ўхшаш эканлигини исбот қилинг. Ўхшаш алмаштириш формулаларини топинг.

534. $A(1,\ 0) \to A'(0,\ 1),\ B(-2,\ 1) \to B'\ (-1,\ 1)$ бўлган II тур ўхшаш алмаштириш берилган. Бу алмаштиришнинг аналитик ифодасини ёзинг.

535. Текисликда берилган $Б = (0, \vec{i},\ \vec{j})$ реперлан $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = k,\ \vec{e_1} \perp \vec{e_2}$ шартларни қаноатлантирувчи $Б' = (O',\ \vec{e_1},\ \vec{e})$ реперга ўтилган. $Б$ да олинган ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтани $Б'$ даги $M'(x, y)$ га ўтказувчи алмаштириш ўхшаш алмаштириш эканлигини исбот қилинг.

536. Агар ABC ва $A'B'C'$ учбурчакларда:

1) $|A'B'| = k|AB|,\ |B'C'| = k|BC|,\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C}$ лар ўринли бўлса, бу учбурчаклар ўхшаш бўлишини;

2) $|A'B| = k|AB|,\ \ |B'C'| = k|BC|,\ \ |A'C'| = k|AC|$ лар ўринли бўлса, бу учбурчаклар ўхшаш бўлишини;

3) $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C},\ \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ бўлса, бу учбурчаклар ўхшаш бўлишини исбот қилинг.

26- §. АФФИН АЛМАШТИРИШ

Текисликда 2 та $Б = (0,\ \vec{e_1}, \vec{e_2}),\ Б' = (0',\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$ аффин реперлар берилган бўлсин. $Б$ да координаталари x, y бўлган M нуқтага $Б'$ да координаталари айнан шу x, y сонларга тенг бўлган M' нуқтани мос келтирувчи алмаштиришни аффин алмаштириш дейилади.

Агар $Б$ ва $Б'$ лар бир хил ориентацияда бўлса, аффин алмаштириш I тур, турли ориентацияда бўлса, II тур дейилади.

Агар $Б$ да M' нинг координаталари $x',\ y'$ бўлса, $M(x, y)$ ни $M'(x',\ y')$ га ўтказувчи аффин алмаштиришнинг формулалари

$$\begin{cases} x' = a_{11} y + a_{12} y + a, \\ y' = a_{21} x + a_{22} y + b \end{cases} \quad \text{бўлиб, } \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ a,\ b \in R$ бўлади. Бу ерда $O(0,\ 0)$ нинг акси $O'(a,\ b),\ \vec{e_1}(1,\ 0)$ нинг акси $\vec{e'}(a_{11},\ a_{21}),\ \vec{e_2}(0,1)$ нинг акси $\vec{e_2}(a_{12}\, a_{22})$ лардан иборат.

Аффин алмаштириш қуйидаги хоссаларга эга:

1. Параллел тўғри чизиқлар яна параллел тўғри чизиқларга ўтади.
2. Параллел кесмаларнинг нисбати сақланади.
3. Уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади.
4. Фигуралар юзларининг нисбатлари сақланади.

Агар Ф фигурани Ф′ фигурага ўтказувчи аффин алмаштириш мавжуд бўлса, бу фигуралар аффин эквивалент дейилади.

537. Аффин алмаштиришда $Б' = \{0',\ \vec{e_1'},\ \vec{e_2'}\}$ аффин репер $Б = \{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ аффин репернинг акси экани маълум бўлса;

1) A (1, 1,), B (4, 1), C (2, —3) нуқталарнинг аксларини тасвирланг;

2) $x+y+1=0$ тўғри чизиқнинг аксини тасвирланг.

538. Аффин алмаштириш қуйидаги формулалар ёрдамида берилган:

$$\begin{cases} x' = x + 5y + 3, \\ y' = 2x + y - 1. \end{cases}$$

1) M (3, 1) нуқта аксининг координаталарини топинг;

2) M' (1, 5) нуқта аслининг координаталарини топинг;

3) $x-y+3=0$ тўғри чизиқ аксининг тенгламасини топинг;

4) $x-y+3=0$ тўғри чизиқ аслининг тенгламасини топинг.

539. Қуйидаги боғланишларнинг қайсилари аффин алмаштиришдан иборат:

а) $\begin{cases} x' = x + y - 1, \\ y' = 2x + 2y + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - y + 3, \\ y' = 3x + 3y - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = x + y - 1, \\ y' = x - y + 1? \end{cases}$

540. Қуйидаги аффин алмаштиришнинг инвариант нуқтасини топинг:

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y - 11, \\ y' = 2x + 4y - 7. \end{cases}$$

541. Қуйидаги аффин алмаштиришларнинг инвариант чизиғини топинг:

а) $\begin{cases} x' = 3x + 4y - 8, \\ y' = x + 3y - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = -x - 6, \\ y' = y. \end{cases}$

542. Аффин алмаштириш уч жуфт мос нуқталари билан берилган:

$$A\ (0,\ 1) \to A'\ (1,\ 0),$$
$$B\ (1,\ 0) \to B'\ (0,\ 1),$$
$$C\ (1,\ 1) \to C'\ (1,\ 1).$$

Бу аффин алмаштиришнинг формулаларини топинг.

543. Аффин алмаштиришда учта нуқтанинг оддий нисбати сақланишини исбот қилинг.

544. Аффин алмаштириш нималар ёрдамида тўлиқ аниқланади? Бу саволга 537, 542- масалалардан фойдаланиб жавоб беринг.

545. Аффин алмаштириш уч жуфт мос нуқталари ёрдамида берилган: $A \to A'$ $B \to B'$, $C \to C'$. Берилган M нуқтанинг аксини тасвирланг.

546. Аффин алмаштиришнинг бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтаси инвариант бўлса, у айний алмаштириш бўлишини исбот қилинг.

547. Аффин алмаштиришда: а) мунтазам учбурчакнинг; б) квадратнинг; в) тўғри тўртбурчакнинг акси қандай фигура бўлади?

548. Қуйидаги тушунчаларнинг қайсилари аффин тушунча: тўғри чизиқ, кесма, кесма ўртаси, кесма узунлиги, параллел тўғри чизиқлар, перпендикуляр тўғри чизиқлар, учбурчак, тенг томонли учбурчак, тўғри бурчакли учбурак, тўртбурчак, параллелограмм, ромб, трапеция, параллел кўчириш, буриш, гомотетия, симметрия, тўғри бурчакли координаталар.

549. Аффин алмаштиришда:

1) қуйидаги фигураларнинг қайси хоссалари сақланади, қайсилари бузилади: учбурчак, параллелограмм, ромб, трапеция, айлана?

2) айлананинг ўзаро перпендикуляр диаметрлари ва уларга параллел ватарлари ўрталарини бирлаштирувчи кесмалар акслари нима бўлади?

550. Иккита аффин алмаштиришнинг кўпайтмаси яна аффин алмаштириш бўлишини исбот қилинг.

551. Текисликнинг барча аффин алмаштиришлари тўплами группа ҳосил қилишини исбот қилинг.

552. Параллел кўчириш аффин алмаштиришнинг хусусий ҳоли эканлигини кўрсатинг.

553. Ўхшаш алмаштириш. аффин алмаштиришнинг хусусий холи эканини кўрсатинг.

554. $Б = (0, \vec{i}, \vec{j})$ репердан $\vec{e}_1 = \vec{i}'$, $\vec{e}_2 = k\vec{j}$ шартлар билан $Б' = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперга ўтилган бўлсин:

1) $f\,(Б) = Б'$ алмаштириш аффин алмаштириш эканини кўрсатинг ва унинг формуласини чиқаринг;

2) бу алмаштиришнинг инвариант элементларини топинг.

555. $Б = (0, \vec{i}, \vec{e})$ да $x^2 + y^2 = a^2$ айлана берилган.

$x' = x$, $y' = \frac{b}{a} y$ шартлар билан аффин алмаштириш бажарилганда айлана аксининг тенгламасини топинг.

556. Параллелограмм ҳар бир томонининг ўртаси қаршисидаги томон учлари билан бирлаштирилганда ҳосил бўлган саккизбурчакнинг юзи параллелограмм юзининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенглигини исбот қилинг.

557. ABC учбурчакнинг $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ томонлари ётган тўғри чизиқларда шундай C_1, A_1, B_1 нуқталар олинганки, улар учун $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB_1}}$ муносабат ўринли бўлган. B_1AC_1, A_1CB_1, A_1BC_1 учбурчаклар тенгдош эканлигини исбот қилинг.

IV боб. ТЕКИСЛИКДА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

Бу бобдаги барча масалалар тўғри бурчакли декарт координаталар системасида ечилсин.

27-§. АЙЛАНА

Бизга C нуқта ва $r>0$ сон берилган бўлсин. Текисликда $|CM| = r$ шартни қаноатлантирувчи барча M нуқталар тўплами ω (C, r) айланадан иборат бўлади. Бунда C, r лар мос равишда айлананинг маркази ва радиуслaveridir. Текисликдаги тўғри бурчакли декарт координаталар системасида C (x_0, y_0), M (x, y) бўлсин. У ҳолда айлананинг тенгламаси

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad (1)$$

кўринишда бўлади. Хусусий ҳолда агар айлана маркази C координата бошида жойлашган бўлса, унда

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1')$$

бўлади. (1) тенглама айлананинг каноник кўринишдаги тенгламаси дейилади.

Фараз қилайлик, иккинчи тартибли чизиқнинг тенгламаси қуйидагича бўлсин:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Bx + 2Cy + D = 0 \qquad (2)$$

(x^2 ва y^2 ларнинг коэффициентлари бир-бирига тенг. x, y нинг коэффициенти эса нолга тенг). Тўла квадратга ажратиб, бу тенгламани

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2 \qquad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда қуйидаги 3 та ҳол бўлиши мумкин:

1) α — ҳақиқий мусбат сон, унда айлана радиуси $\sqrt{\alpha}$ га тенг бўлади;

2) $\alpha = 0$, у ҳолда (x_0, y_0) нуқта ёки радиуси нолга тенг бўлган айлана;

3) α — манфий сон бўлса, унда (3) тенглама ҳақиқий сонлар тўпламида ечимга эга эмас ёки айлана мавҳум радиусга эга дейилади.

558. Тенгламаси берилган айлананинг маркази C ва радиуси r ни топинг:

а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $(x - 2)^2 + y^2 = 9$;

в) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$; г) $4x^2 + 4(y - 1)^2 = 9$.

559. Қуйидаги тенгламаларни каноник кўринишга келтириб, C марказни ҳамда r радиусни топинг:

а) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$;
в) $x^2 - 5x + y^2 = 0$;
г) $12x^2 + 12y^2 + 24x - 36y - 9 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
е) $x^2 + y^2 + y + 1 = 0$.

560. Маркази ва радиуси қуйидагича бўлган айланаларнинг тенгламаларини тузинг:

а) $C(-1, 3)$ ва $r = 5$; б) $C\left(\frac{1}{3}, \ 0\right)$ ва $r = \sqrt{2}$.

Қуйидаги айлана тенгламасини тузинг:

в) маркази C (0, 0) нуқтада бўлиб, A (3, —4) нуқтадан ўтади;

г) маркази C (1, —3) нуқтада бўлиб, A (5,—3) нуқтадан ўтади.

561. Маркази C (1, 2) нуқтада бўлиб, $6x + 8y - 15 = 0$ тўғри чизиққа уринган айлананинг тенгламасини тузинг.

562. Диаметрининг учлари A (3, 2) ва B (—1, 6) нуқталарда жойлашган айлананинг тенгламасини тузинг.

563. Координаталари қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами текисликда қандай фигурани аниқлайди:

а) $x^2+y^2 \geqslant 4$;
б) $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$;
в) $(x-1)^2+(y+2)^2 \leqslant 1$;✓
г) $\begin{cases} x^2+y^2-4y \leqslant 0; \\ |x| \geqslant 1; \end{cases}$
д) $\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2 < 4, \\ x > y? \end{cases}$ уига

✓**564**. $A(1, 5)$, $B(7, 1)$, $C(2, 6)$ нуқталардан ўтган айлананинг тенгламасини тузинг.

✓**565**. $x^2+y^2=36$ айлана берилган. Бу айланага нисбатан қуйидаги тўғри чизиқлар қандай жойлашган:

а) $x-2y+5=0$;	в) $3x-4y+30=0$;
б) $5x-12y+26=0$;	г) $x+y-17=0$?

566 Қуйидаги айланаларга ўтказилган уринма тенгламасини тузинг:

1) уринма $x^2+y^2-2x+6y=0$ айлананинг $A(0, 0)$ нуқтасидан ўтади;

2) уринма $x^2+y^2-2x-4=0$ айлананинг $A(3, 1)$ нуқтасидан ўтади.

567. $A(1, 2)$ нуқтадан ўтиб, $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ тўғри чизиқларга уринган айлананинг тенгламасини тузинг.

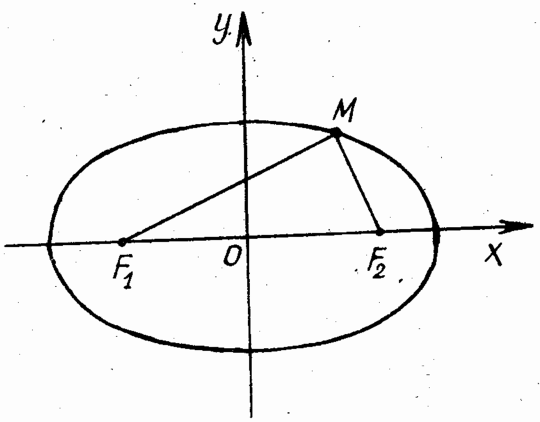
568. $A(2, 9)$ нуқтадан ўтиб, координаталар системасининг иккала ўқига уринувчи айлана тенгламасини топинг.

569. Айлана $(x-1)^2+y^2=4$ кўринишдаги тенглама билан берилган. $A\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ нуқтадан шундай ватар ўтказингки, у бу нуқтада тенг иккига бўлинсин.

570. Текисликдаги шундай S нуқталар тўпламини топингки, унинг ҳар бир $M \in S$ нуқтасидан берилган $P(-a, 0)$, $Q(a, 0)$ нуқталаргача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси m^2 га тенг бўлсин.

28-§. ЭЛЛИПС. ЭЛЛИПСНИНГ КАНОНИК ТЕНГЛАМАСИ

Бизга текисликда F_1, $F_2=2c$ шартни қаноатлантирувчи F_1, F_2 нуқталар берилган бўлсин ва a сон учун $a > c$ ўринли бўлсин. Текисликда $F_1M+F_2M=2a$ шартни қаноатлантирувчи ҳамма M нуқталар тўплами эллипсдан иборат бўлади. Бу ерда F_1, F_2 лар эллипснинг фокуслари дейилади. Ҳар доим шундай тўғри бурчакли декарт координата системаси мавжудки, бу системада эллипснинг тенгламасини



15- чизма.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=a^2-c^2)$$

кўринишда ёзиш мумкин (15- чизма).

Бу тенглама эллипснинг каноник тенгламаси дейилади. Юқоридаги тенгламадан кўринадики, Ox, Oy лар эллипснинг симметрия ўқлари (яъни ўқлари), $O(0, 0)$ нуқта эса эллипснинг симметрия маркази (яъни маркази) бўлади. a ва b мос равишда эллипснинг катта ва кичик ярим ўқларидир. $e = \frac{c}{a} < 1$ сон эллипснинг эксцентриситети, $x = \frac{a}{e}x = -\frac{a}{e}$ тўғри чизиқлар эса директрисалари бўлади.

Агар M нуқтадан эллипснинг бирорта фокусигача бўлган масофа r га ва M нуқтадан шу фокусга яқинроқ бўлган директрисагача бўлган масофа ρ га тенг бўлса, $\frac{r}{\rho} = e$ бўлганда M нуқта эллипсга тегишли бўлади ва аксинча.

Агар эллипснинг маркази $C(x_0\ y_0)$ нуқтада, ўқлари эса Ox ва Oy ўқларга параллел бўлса, у ҳолда эллипснинг тенгламаси

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

кўринишда бўлади.

571. Қуйидаги тенглама билан берилган эллипсни ясанг:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$

2) $3x^2+4y^2=12;$

3) $\frac{x^2}{4}+y^2=1;$

4) $x^2+4y^2=1;$

5) $9x^2+25y^2=1;$

6) $16x^2+y^2=16.$

572. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипснинг: 1) ярим ўқларининг; 2) фокусларининг; 3) эксцентриситетининг; 4) директрисаларининг тенгламаларини топинг.

573. Қуйидаги ҳар бир ҳол учун эллипснинг каноник тенгламасини тузинг:

1) $a=3,\ b=2;$

2) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4};$

3) фокуслар орасидаги масофа $2c=8$ бўлиб, $a=5;$

4) $b=1$, эксцентриситети $e=\frac{\sqrt{3}}{2};$

5) координаталари (3, 0) бўлган фокус билан бир томонда жойлашган директрисасининг тенгламаси $x=6$.

574. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг ҳар қандай ички $P(x_1,\ y_1)$ нуқтаси учун $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$ тенгсизлик, ҳар қандай ташқи $Q(x_2,\ y_2)$ нуқтаси учун $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1$ тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилинг.

575. $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(2, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $D(0,5)$, $E\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, \quad 1\right)$ нуқталар $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипсга нисбатан қандай жойлашганини аниқланг.

576. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг $F(c,\ 0)$ фокус нуқтасидан ўтиб, катта ўқига перпендикуляр бўлган ватарининг узунлигини топинг.

577. Қуйидаги эллипсларнинг маркази ва ярим ўқларини топинг ҳамда эллипсларни чизинг:

1) $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{9}=1;$

2) $9x^2+16y^2+18x-96y+9=0;$

3) $4x^2+9y^2+16x+18y=11;$

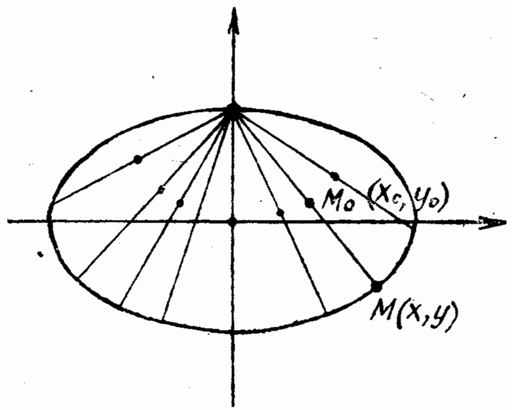
4) $9x^2+16y^2-54x+32y-47=0;$

5) $x^2+2y^2+4x-4y=0.$

578. Ҳар бир нуқтасидан $A(1;\ 0)$ нуқтагача бўлган масофа $x=0$ тўғри чизиққача бўлган масофага қараганда уч марта яқин бўлган фигуранинг тенгламасини тузинг.

579. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг кичик ярим ўқи учидан ўтган ватарларининг ўрта нуқталаридан ташкил топган фигура тенгламасини тузинг.

Кўрсатма. Одатда фигураларнинг тенгламалари аниқ масалалар бўйича тузилади. Лекин, уларни умумий қонуният асосида ҳам тузиш мумкин. Бунда $M(x,\ y)$ нуқта фигурага тегишли бўлиши учун зарур бўлган барча шартлар ёзилади ва n та ёрдамчи параметрлар киритилади. Бу шартлар $(n+1)$ та бўлгани учун биз n та параметрларга нисбатан $(n+1)$ та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Агар система ўринли бўлса, M нуқта фигурага тегишли бўлади, ва аксинча ихтиёрий n та тенгламадан киритилган параметрларни аниқлаймиз. Система ўринлилигининг шарти — қолган тенгламалар топилган



16- чизма.

параметрларни қаноатлантириш шарти бўлиб, у фигуранинг тенгламасини беради. Параметрлар киритилишида, уларни ўз ўринлари бўйича иложи борича тўғри қўйилишига ва уларга геометрик маъно беришга эътибор бериш керак. Бу масаланинг ечиш йўлини мисолда кўрайлик.

Фараз қилайлик, M_0 (x_0, y_0) нуқта фигурага тегишли бўлсин (16-чизма). Параметрлар қилиб ватарнинг иккинчи охиридаги M нуқтанинг x ва y координаталарини олайлик. Унда қуйидаги шартлар ҳосил бўлади:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $x_0=\frac{x}{2}$; 3) $y_0=\frac{y+b}{2}$. Шундай қилиб, биз уч тенгламадан иборат бўлган системани ҳосил қилдик. 2) ва 3) тенгламалардан x, y параметрларни топайлик: $x=2x_0$, $y=2y_0-b$. Буларни 1) тенгламага қўйсак,

$$\frac{4x_0^2}{a^2}+\frac{(2y_0-b)^2}{b^2}=1$$

ёки

$$\frac{x_0^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{\left(y_0-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$$

ҳосил бўлади.

580. l тўғри чизиқ ва унда O нуқта ҳамда a, b $(a>b>0)$ сонлар берилган. Шундай барча P, Q нуқталарни олайликки, улар учун $|OP|=a$, $|OQ|=b$ ўринли бўлиб, l тўғри чизиқ POQ бурчакнинг биссектрисаси бўлсин. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ шартни қаноатлантирувчи M нуқталар тўпламини топинг.

581. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсни $x^2+y^2=a^2$ айланани Ox ўққа нисбатан қисиш натижасида ҳосил қилиш мумкин эканлигини исбот қилинг.

582. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсни $x^2+y^2=a$ айлананинг қисилган акси деб олиб, унинг бир нечта нуқталарини циркуль ва чизғич ёрдамида ясанг.

583. Айлананинг параметрик кўринишдаги $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ тенгламаларидан ва қисиш алмаштиришдан фойдаланиб, эллипснинг параметрик тенгламасини тузинг.

584. Тайин кесма учлари тўғри бурчак томонларида сирпанади. Кесманинг ихтиёрий M нуқтаси бу сирпаниш натижасида қандай фигурани ҳосил қилади?

585. Маркази координаталар боши O да ва радиуслари a, b $(a>b)$ бўлган концентрик иккита $\omega_1(0, a)$ $\omega_2(0, b)$ айлана чизилган. O нуқтадан чиққан l нур ω_1 айланани A нуқтада, ω_2 айланани B нуқтада кесиб ўтади. A нуқта орқали $d_1 \parallel (Oy)$ тўғри чизиқ, B нуқта орқали эса $d_2 \parallel (Ox)$ тўғри чизиқ ўтказилган. $d_1 \cap d_2=M$ нуқта $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ кўринишда берилган эллипсга тегишли эканлигини исбот қилинг. Юқоридагиларга асосланиб, циркуль ва чизғич орқали эллипснинг бир нечта нуқтасини ясанг.

586. A (3, 0) нуқтадан ўтиб, $x^2+y^2=25$ айланага уринувчи айланалар марказлари тўпламининг тенгламасини топинг.

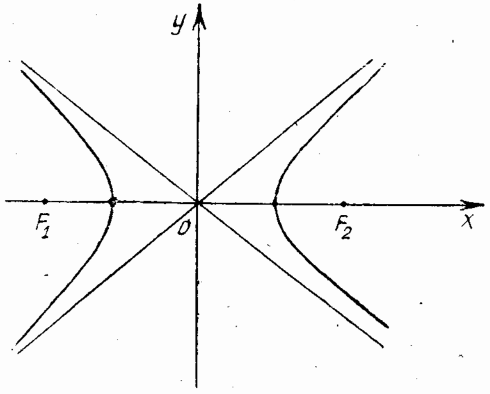
Кўрсатма. Бу масалада (кейинги масалада ҳам) геометрик нуқтаи назардан қараб қандай фигура ҳосил бўлиши мумкин эканлигини баъзан билиш мумкин. Ундан кейин тенглама тузилади. Фараз қилайлик, M марказли айлана берилган айлананинг T нуқтасига уринса, $OM+MT=5$, $MT=MA$ бўлганлиги учун $OM+MA=5$, яъни $2a=5$ тенглик бажарилганда M нуқта фокуслари O ва A нуқталар бўлган эллипсга тегишли бўлади.

587. Бири иккинчисининг ичига жойлашган иккита берилган айланага уринувчи айланалар марказлари тўпламининг тенгламасини топинг.

588. $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипснинг координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқларда ётувчи ватарларининг ҳар бирига M нуқта шундай қўйилганки, бу нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа координаталар бошидан ватарнинг охирги нуқталаригача бўлган масофаларнинг ўрта геометригидир. M нуқталар тўплами ҳосил қилган фигуранинг тенгламасини тузинг.

29-§. ГИПЕРБОЛА

Текисликда $|F_1F_2|=2c$ шартни қаноатлантирувчи 2 та F_1 ва F_2 нуқталар берилган бўлсин. Фараз қилайлик, a сон учун $a<c$ ўринли бўлсин. Текисликда $MF_1-MF_2==2a$ шартни қаноатлантирувчи ҳамма M нуқталар тўплами гиперболадан иборат бўлади. Бунда F_1 ва F_2 лар гиперболанинг фокуслари дейилади. Ҳар доим шундай тўғри бурчакли декарт координата системаси мавжудки, бу системада гиперболанинг тенгламасини $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b^2==c^2-a^2)$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама гиперболанинг каноник тенгламаси дейилади.



17- чизма.

Юқорида ёзилган тенгламадан шуни кўриш мумкинки, Ox, Oy лар гиперболанинг симметрия ўқлари (яъни ўқлари), $O(0, 0)$ нуқта эса гиперболанинг симметрия маркази (яъни маркази) бўлади, a сон ҳақиқий ярим ўқ, b сон эса мавҳум ярим ўқ бўлади. $y = \frac{b}{a}x$ ва $y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар гиперболанинг асимптоталаридир (17- чизма). Гипербола иккита тармоқдан иборат бўлади. $e = \frac{c}{a} > 1$ сон гиперболанинг эксцентриситети, $x = \frac{a}{e}$, $x = -\frac{a}{e}$ тўғри чизиқлар эса директрисалардир.

Агар M нуқтадан гиперболанинг бирорта фокусигача бўлган масофа r га ва M нуқтадан шу фокусга яқинроқ бўлган масофа ρ га тенг бўлса, у ҳолда M нуқта гиперболага тегишли бўлади, бундан $\frac{r}{\rho} = e$. Агар гиперболанинг маркази $C(x_0, y_0)$ нуқтада, ўқлари эса Ox ва Oy ўқларга параллел бўлса, унда гиперболанинг тенгламаси $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ кўринишда бўлади.

589. Қуйидаги тенгламалар билан аниқланган гиперболаларни ясанг, уларнинг ярим ўқлари ва асимптоталарининг тенгламаларини топинг:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$; 3) $\frac{(x+3)^2}{4} - y^2 = 1$.

590. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ гиперболанинг: 1) ярим ўқларини; 2) фокусларини; 3) эксцентриситетини; 4) асимптота тенгламаларини; 5) директрисалар тенгламаларини топинг.

591. Қуйидаги ҳар бир ҳол учун гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг:

1) $a = 2,\ b = 3$;
2) $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{2}{5}$;

3) фокуслари орасидаги масофа $2c = 12$ бўлиб, эксцентриситети $e = \frac{6}{5}$;

4) $A_1(4, 3)$, $A_2\left(-5, \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$ нуқталардан ўтади;

5) гипербола $M\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ нуқтадан ўтади, унинг асимптоталари тенгламаси $y = \pm\frac{2}{3}x$;

6) асимптоталари $y = \pm\frac{3}{4}x$ бўлиб, директрисалари орасидаги масофа $12\frac{4}{5}$ га тенг;

7) гипербола M_1 (4, 6) нуқтадан ўтиб, учлари орасидаги масофа 4 га тенг.

592. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг фокусидан ўтган ватари ҳақиқий ўқига перпендикуляр бўлса, бу ватарнинг узунлиги $2p$ ни топинг.

593. Қуйидаги гиперболаларнинг марказини ва ярим ўқларини топинг:

1) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;
2) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$;
3) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$;
4) $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 4 = 0$.

594. $x^2 - 4y^2 = 4$ гиперболанинг асимптоталарига параллел бўлиб, (2, —5) нуқтадан ўтган тўғри чизиқлар тенгламасини топинг.

595. $9x^2 - y^2 = 9$ гиперболанинг ҳар бир асимптотасига перпендикуляр бўлиб, (2, 1) нуқтадан ўтган тўғри чизиқларнинг тенгламасини топинг.

596. Фокуслари (0, 0) ва (6, 0) нуқталарда жойлашган, эксцентриситети эса $e = \frac{3}{2}$ бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

597. Битта учи $x^2—y^2=a^2$ гиперболада, иккита томони эса бу гиперболанинг асимптоталарида ётган тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

598. Гипербола асимптоталарини директрисалар билан кесганда ҳосил бўлган кесмалар (гипербола марказидан бошлаб ҳисоблаганда) бу гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқига тенг эканлигини исбот қилинг. Бу хоссадан фойдаланиб, гиперболанинг директрисаларини ясанг.

599. Гипербола директрисаси фокусидан унга мос бўлган асимптотага туширилган перпендикулярнинг асосидан ўтишини исбот қилинг. Бу перпендикулярнинг узунлигини топинг.

600. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг $A(a, 0)$ учидан ватарлар ўтказилган. Бу ватарларнинг ўрта нуқталари тўпламидан ташкил топган фигуранинг тенгламасини топинг.

601. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг ўнг фокусидан гиперболанинг барча нуқталарига фокаль радиус- векторлар ўтказилган. Бу радиус- векторлардан ҳосил бўлган кесмаларнинг ўрта нуқталари тўпламининг тенгламасини топинг.

602. Берилган айланага ташқи уринувчи ва берилган нуқтадан ўтувчи айланаларнинг марказлари тўплами гипербола эканлигини исбот қилинг.

603. Тенг томонли $x^2—y^2=a^2$ гипербола берилган. Агар унинг асимптоталарини янги репернинг ўқлари қилиб олинса, берилган гиперболанинг янги репердаги тенгламаси қандай бўлади?

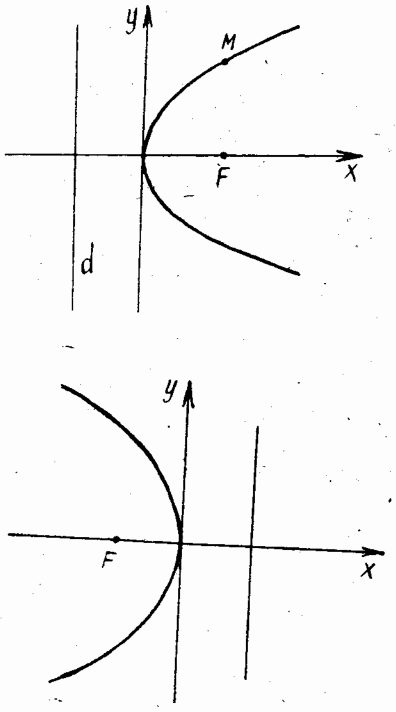
604. M (4, 2) нуқтадан ўтган барча тўғри чизиқларнинг координаталар ўқи орасида ҳосил бўлган кесмалар ўрта нуқталари тўплами тенгламасини тузинг.

30- §. ПАРАБОЛА

Фараз қилайлик, d тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ётмаган F нуқта берилган бўлсин. Текисликда берилган F (фокус) нуқтагача бўлган масофаси берилган d (директриса) тўғри чизиққача бўлган масофасига тенг бўлган барча M нуқталар тўплами параболани ташкил қилади, яъни MF M нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа $\rho(M, d)$ га тенг: $MF = \rho(M, d)$.

Ҳар доим шундай тўғри бурчакли декарт координаталар системаси мавжудки, бу системада параболанинг тенгламасини $y^2 = 2px$ ($p = \rho(F, d) > 0$, p — параболанинг параметри) кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама параболанинг каноник тенгламаси дейилади. Бу системада $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $d: x = -\frac{p}{2}$. Каноник тенгламадан кўринадики, Ox ўқ параболанинг симметрия ўқи ва параболанинг ҳамма нуқталари учун $x > 0$, яъни чизиқнинг тармоғи Ox ўқнинг мусбат йўналиши бўйича «кетган» бўлади (18- чизма). Параболанинг тармоғи кетган томонда параболанинг ўқ нурини (параболанинг ботиқ томони бўйича йўналган) l билан белгилайлик, яъни $y^2 = 2px$ тенглама билан берилган парабола учун: $l \uparrow\uparrow Ox$. Параболанинг учи парабола билан ўқнинг кесишган нуқтаси бўлади. $y^2 = 2px$ тенглама бўйича берилган параболанинг учи координата бошида жойлашган бўлади. Агар $l \uparrow\downarrow Ox$ бўлса, унда параболанинг тенгламаси $y^2 = -2px$ кўринишда бўлади. Агар параболанинг учи $C(x_0, y_0)$ нуқтада бўлса, у ҳолда: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, $l \uparrow\uparrow Ox$; $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, $l \uparrow\downarrow (Ox)$. Худди юқоридагига ўхшаш, ўқи Oy ўққа параллел бўлган (тенгламасини каноник кўринишга келтирмасдан туриб) параболани ҳам қараш мумкин.

605. Текисликда қуйидаги параболаларнинг параметри p ни топинг ҳамда бу параболаларни ясанг:
1) $y^2 = 4x$, $y^2 = 2x$; $y^2 = x$;
2) $y^2 = -x$;
3) $x^2 = 4y$, $x^2 = 2y$, $x^2 = y$;
4) $4y + x^2 = 0$;
5) $3x^2 + y = 0$.



18- чизма.

606. Қуйидагиларга асосланиб, параболанинг каноник тенгламасини тузинг:

1) фокусдан параболанинг учигача бўлган масофа 2 га тенг:

2) фокусдан директрисагача бўлган масофа 6 га тенг;

3) параболанинг учидан директрисагача бўлган масофа 1 га тенг.

607. $y^2=2px$ параболанинг фокусидан ўтказилган ватар унинг ўқига перпендикуляр. Бу ватарнинг узунлигини топинг.

608. Текисликда берилган қуйидаги параболаларнинг учларини ва параметрини топинг ҳамда бу параболаларни ясанг:

1) $(y-2)^2=4(x+1)$;
2) $(y+1)^2=-(x-2)$;
3) $(x+2)^2=2(y+1)$;
4) $(x-2)^2=-(y+3)$;
5) $y^2=2x+1$;
6) $y=2-3x^2$.

609. Қуйидаги параболаларнинг тенгламаларини соддароқ кўринишга келтиринг ва унинг учларини топинг. Параболаларни ясанг:

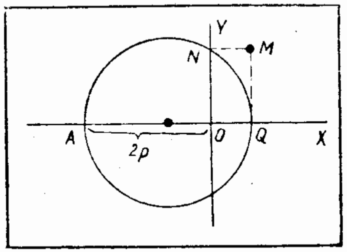
1) $y^2-2y-2x-5=0$;
2) $y^2+2x+2y-1=0$;
3) $x^2-4x-2y+10=0$;
4) $x^2-4x+2y-2=0$;
5) $x^2+4x-y+4=0$;
6) $y=2x-x^2$;
7) $x^2+3x=y$.

Кўрсатма. Аввало ўзгарувчиларни ажратамиз (бунда шундай қиламизки, квадрат ўзгарувчи олдидаги коэффициент мусбат бўлсин). Ундан кейин тўла квадратни шундай ажратамизки, қавс ичидаги x ва y олдидаги коэффициентлар 1 га тенг бўлсин. Параболанинг учи ва ўқини топамиз. Текшириш учун, параболанинг бирорта ўқ билан кесишган нуқтасини топиш мумкин. Бунда параболанинг дастлабки тенгламасидан фойдаланиш яхшироқ. Қуйидаги мисолни қарайлик:

$$y^2-2y-5-2x=0,\quad y^2-2y=2x+5,\ y^2-2y+1-1=2x+5.$$
$$(y-1)^2=2x+6,\ (y-1)^2=2(x+3).$$

Бунда $C(-3,\ 1)$ ўқ эса Ox билан бир хил йўналган, яъни $l\uparrow\uparrow Ox$. Параболанинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасини топайлик: $2x+5=0$, $x=-\frac{5}{2}$, $A\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ нуқта бўлади.

610. Циркуль ва чизғич ёрдамида параболанинг таърифидан фойдаланиб, унинг бир неча нуқталарини ясанг (параболанинг параметри берилган).



19- чизма.

611. 19- чизмада маркази (Ox) ўқда ётиб, $A(-2p,\ 0)$ нуқтадан ўтган айлана тасвирланган. N нуқта (чизмада кўрсатилгани бўйича) $y^2=2px$ тенглама билан берилган параболада ётишини исбот қилинг.

612. Қуйидаги параболаларнинг фокуслари ва директрисаларини топинг:

1) $y^2=24x$;
2) $x^2=10y$;
3) $(y-1)^2=4(x-2)$;
4) $(y-2)^2=-8(x+3)$.

613. Диаметри 20 см, чуқурлиги 10 см бўлган параболик рефлекторнинг фокуси унинг учидан қанча масофада ётади?

614. Парабола бўйича ҳаракат қилаётган тош горизонтга нисбатан ўткир бурчак бўйича отилган. У бошланғич нуқтадан 24 м узоқликка бориб тушди. Агар тошнинг энг баландликка кўтарилган жойи горизонтга нисбатан 6 метрга тенг бўлса, параболанинг параметри қандай бўлади?

615. Кавальери «лимон» сирти асоси a, баландлиги h бўлган параболик сегментнинг асос атрофида айланишидан ҳосил бўлади. Сегментдаги параболанинг параметрини топинг.

616. Қуйидаги маълумотларга асосланиб, парабола тенгламасини тузинг:

1) унинг фокуси $F(3,\ 0)$, директрисаси $x=-1$;

2) унинг учи $C(5,\ 1)$, ўқи $y=1$, парабола (Ox) ўқни $\left(\frac{11}{2},\ 0\right)$ нуқтада кесиб ўтади;

3) параболанинг ўқи (Oy)га параллел, учи C (2,5) нуқтада, (0,9) нуқта эса параболага тегишли.

617. Фонтан суви йўналиши ҳосил қилган чизиқнинг учи 4 метр баландликда, чиқаётган жойидан эса 5 метр масофада жойлашган. Фонтан суви йўналиши ҳосил қилган парабола чизиғининг параметрини топинг.

618. Бир вақтда $x^2+y^2=1$ айлана ва ордината ўқига уринган айланаларнинг марказлари тўпламининг тенгламасини тузинг.

619. A нуқтадан ўтиб, $l\,(A\notin k)$ тўғри чизиққа уринган айланаларнинг марказлари қандай фигурани ҳосил қилади?

Агар $A(4, 2)$, l тўғри чизиқ (Ox) ўқ бўлса, бу фигуранинг тенгламаси қандай бўлади?

620. $y^2=2px$ парабола ординаталарини ифодаловчи кесмаларнинг ўрта нуқталари тўпламининг тенгламасини тузинг.

621. Барча параболалар ўзаро ўхшаш эканлигини исботланг.

31-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ҚУТБ КООРДИНАТАЛАРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРИ

$O\vec{i}\,\vec{j}'$ да эллипс, гипербола, параболалар ўзларининг каноник тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y^2=2px.$$

Агар қутбни эллипснинг чап фокусига, гиперболанинг ўнг фокусига ёки параболанинг фокусига жойлаштириб, қутб ўқини Ox ўқ билан устма- уст туширсак, бундай қутб системада

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}$$

тенглама $e < 1$ бўлганда эллипснинг, $e > 1$ бўлганда гипербола ўнг тармоғининг, $e=1$ бўлганда параболанинг тенгламаси бўлади. Бу ерда эллипс ва гипербола учун $p=\frac{b^2}{a}$, парабола учун эса унинг параметридир.

622. 1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ эллипсларнинг фокусларидан бирига қутбни жойлаштириб, уларнинг қутб координаталардаги тенгламаларини топинг.

623. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболанинг ўнг фокусига қутбни жойлаштириб, ўнг тармоғининг қутб координаталардаги тенгламасини топинг.

624. $y^2=6x$, $y^2=4(x-1)$ параболаларнинг фокусига қутбни жойлаштириб, уларнинг қутб координаталардаги тенгламасини топинг.

625. 1) $O(0, 0)$; 2) $A(-a, 0)$; 3) $B(a, 0)$ нуқтага қутбни жойлаштириб, $x^2+y^2=a^2$ айлананинг қутб координаталардаги тенгламасини топинг.

626. Қуйидаги чизиқларнинг тўғри бурчакли координаталар системасидаги тенгламасини топинг:

1) $\rho=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$; 2) $\rho=\frac{4}{\sqrt{5}-\cos\varphi}$.

627. $x^2-y^2=a^2$ гиперболанинг марказини қутб, Ox ўқни қутб ўқи деб олиб, унинг қутб координаталардаги тенгламасини топинг.

628. $y^2=2px$ параболанинг учини қутб, ўқини эса қутб ўқи деб олиб, унинг қутб координаталардаги тенгламасини топинг.

629. 1) $\rho=4\cos\varphi$, 2) $\rho=-5\sin\varphi$ айланалар берилган. Координаталар бошини қутб, Ox ўқнинг мусбат йўналишини қутб ўқи деб олиб, берилган айланаларнинг тўғри бурчакли декарт системадаги тенгламаларини топинг.

32-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ УМУМИЙ НАЗАРИЯСИ

$$F(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+ \\ +a_{33}=0 \qquad (1)$$

иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламаси бўлиб, бунда a_{ij} — ҳақиқий сонлардир.

Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad s=a_{11}+a_{22},$$

бу ерда $a_{ik}=a_{ki}$.

(1) тенгламадаги $\varphi(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}$ ифода квадратик форма,

$$F_1(x, y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},$$
$$F_2(x, y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \text{ бўлсин.}$$

Тўғри бурчакли координаталар системаларини алмаштириш натижасида Δ, δ, s лар ўзгармайди.

Эгри чизиқнинг маркази

$$\begin{cases} F_1(x, y)=0, \\ F_2(x, y)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

системанинг ечимидан иборат. Ягона марказга эга бўлган эгри чизиқ марказли чизиқ дейилади. Иккинчи тартибли чизиқларнинг таснифи қуйидаги жадвалда берилган.

<table>
<tr><th>δ</th><th>δ нинг ишораси</th><th colspan="2">$\Delta \neq 0$</th><th>$\Delta = 0$</th></tr>
<tr><td>Марказли чизиқ учун</td><td>$\delta < 0$ (Гиперболик типдаги чизиқ)</td><td colspan="2">Гипербола</td><td>Икки кесишувчи ҳақиқий тўғри чизиқлар</td></tr>
<tr><td>$\delta \neq 0$</td><td>$\delta > 0$ (Эллиптик типдаги чизиқ)</td><td>Эллипс Δ ва s ҳар хил ишорали бўлса, ҳақиқий</td><td>Δ ва s бир хил ишорали бўлса, мавҳум</td><td>Иккита кесишувчи мавҳум қўшма тўғри чизиқлар</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta = 0$</td><td colspan="2">Парабола</td><td>Икки параллел тўғри чизиқлар (ҳақиқий ҳар хил, ёки ҳақиқий устма-уст тушувчи, ёки мавҳум қўшма)</td></tr>
</table>

Агар $\Delta=0$ бўлса, эгри чизиқ ажралувчи бўлиб, уни ясаш учун тенгламасининг чап томони кўпайтувчиларга ажратишдан фойдаланилади (650-масаланинг кўрсатмасига қаранг). $\Delta \neq 0$ бўлган ҳол учун эгри чизиқ тенгламасини соддалаштириш ва ясаш учун қуйидаги схемани келтирамиз:

1) Δ ва δ ларни ҳисоблаймиз;

2) квадратик форманинг характеристик тенгламаси $\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$ (3) ни ечамиз. λ_1, λ_2 унинг ечимлари бўлсин. Бу ечимларни эллипс учун $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, гипербола учун эса Δ ва λ_1 бир хил ишорали шарти билан оламиз;

3) эгри чизиқнинг $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ кўринишда каноник тенгламасини тузамиз;

4) (2) системани ечиб, эгри чизиқ маркази O нуқтанинг координаталарини топамиз;

5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$ (4) дан $\operatorname{tg}\alpha$ ни топамиз, бу ердаги α бурчак координата ўқларини $\varphi(x, y)$ квадратик формани каноник ҳолга келтирадиган буриш бурчаги;

6) O' ва $k = \operatorname{tg}\alpha$ бурчак коэффициентига асосланиб, $O'x'$ ўқнинг тенгламасини тузамиз;

7) O' нуқтани, $O'x'$ ўқни $O'y' \perp O'x'$ га асосан $O'y'$ ларни ясаймиз, $O'x'y'$ системада каноник тенгламасига кўра эгри чизиқни ясаймиз.

Парабола тенгламасини соддалаштириш ва ясашни қуйидаги схемада бажариш мумкин.

1) Δ ва δ ларни ҳисоблаймиз ($\Delta \neq 0$, $\delta = 0$);

2) $y'^2 = 2px'$; $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{s^3}}$ тенгламани тузамиз;

3) парабола ўқи d нинг тенгламасини қуйидаги формулаларнинг биридан фойдаланиб тузамиз:

$$F_1(x, y)a_{11} + F_2(x, y)a_{12} = 0,$$
$$F_1(x, y)a_{12} + F_2(x, y)a_{22} = 0; \qquad (5)$$

4) парабола билан унинг ўқи d нинг тенгламаларини биргаликда ечиб, парабола учи C нуқта координаталарини топамиз;

5) d ўқни, C нуқтани ясаймиз, параболани чизамиз.

(1) тенглама билан берилган γ эгри чизиқ ва тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Агар тўғри чизиқ γ эгри чизиқ билан иккита устма-уст тушувчи ҳақиқий нуқталарда кесишса, у γ эгри чизиққа уринма дейилади. γ нинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$F_1(x_0, y_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \qquad (6$$

Агар γ эгри чизиқ учун $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ бўлса, $\vec{p}(\alpha, \beta)$ вектор γ нинг асимптотик йўналиши дейилади. Бундай йўналиш

$$\varphi(\alpha, \beta) = a_{11}(\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 \qquad (7)$$

тенгламадан топилади.

Агар асимптотик йўналишли тўғри чизиқ γ билан умумий нуқтага эга бўлмаса, у γ нинг асимптотаси дейилади. Асимптотанинг тенгламаси қуйидагича:

$$F_1(x, y)\alpha + F_2(x, y)\beta = 0, \qquad (8)$$

бу ерда $\vec{p}$ (α, β) асимптотик йўналишдир.

$\vec{p}(\alpha, \beta)$ асимптотик йўналиш бўлмасин. $\vec{p}$ га параллел бўлган ватарлар ўрталарининг геометрик ўрнидан иборат тўғри чизиқ γ нинг $\vec{p}(\alpha, \beta)$ йўналишга қўшма диаметри дейилади. Бу диаметр тенгламаси:

$$F_1(x,\ y)\alpha + F_2(x,\ y)\beta = 0. \qquad (9)$$

Умуман, марказли чизиқнинг марказидан ўтувчи ҳар қандай тўғри чизиқ унинг диаметридир. Параболанинг ўқига параллел бўлган ҳар қандай чизиқ эса унинг диаметридир.

Агар $\vec{p}(\alpha,\ \beta)$ ва $\vec{q}(\alpha',\ \beta')$ йўналишлар учун

$$a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha'\beta + \alpha\beta') + a_{22}\beta\beta' = 0 \qquad (10)$$

тенглик ўринли бўлса, бу йўналишлар ўзаро қўшма дейилади.

Агар марказли чизиқнинг иккита диаметри учун уларнинг йўналишлари қўшма бўлса, улар қўшма диаметрлар дейилади. Қўшма диаметрларнинг ҳар бири иккинчисига параллел ватарларни тенг иккига бўлади.

Агар бирор $\vec{p}$ йўналиш ва унга перпендикуляр бўлган йўналиш γ га нисбатан ўзаро қўшма бўлса, у γ нинг бош йўналиши дейилади.

Бош йўналишлар

$$\begin{cases}(a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0,\\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0\end{cases} \qquad (11)$$

тенгламалардан топилади. Бу ерда λ (3) характеристик тенгламанинг илдизлари.

Агар эгри чизиқнинг диаметри ўзига қўшма бўлган йўналишга перпендикуляр бўлса, у бош диаметр дейилади. Эллипснинг, гиперболанинг, параболанинг симметрия ўқлари уларнинг бош диаметрларидир. Бу эгри чизиқларнинг бошқа бош диаметрлари йўқ.

630. $x^2 - y^2 = 1$ гиперболанинг қуйидаги тўғри чизиқларнинг ҳар бири билан кесишиш нуқталарини топинг:

1) $x = 2$; 2) $x = 1$; 3) $y = 2x$; 4) $y = x$; 5) $y = x - 2$.

631. $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ чизиқни қуйидаги тўғри чизиқларнинг ҳар бири билан кесишишини текширинг ва бу чизиқни ясанг: 1) $y - 1 = 0$; 2) $x + 1 = 0$; 3) $x - 2 = 0$; 4) $x - 2y - 5 = 0$; 5) $x - 2y - 1 = 0$.

632. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ эллипснинг қуйидаги тўғри чизиқлар билан кесишишини текширинг:

1) $\begin{cases}x = 2,\\ y = 1 + t;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x = 4 + 2t,\\ y = -2 + t;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x = 4\sqrt{3},\\ y = t.\end{cases}$

633. Қуйидаги эгри чизиқларнинг марказини топинг:

1) $x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 2y = 0$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;
3) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

634. B нинг қандай қийматида $x^2 \mp 2Bxy + y^2 + 10x - 2y = 0$ эгри чизиқ марказга эга бўлмайди?

635. (6, —2) нуқтадан ўтувчи, маркази координаталар бошида жойлашган, $x - 2 = 0$ тўғри чизиққа (2, 0) нуқтада уринувчи иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини топинг.

636. $xy - 6x + 2y + 3 = 0$ эгри чизиқ берилган. Координаталар бошини унинг марказига кўчириб, тенгламасини соддалаштиринг.

637. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$ эгри чизиқ берилган. Координаталар бошини унинг марказларидан бирига кўчириб, тенгламасини соддалаштиринг.

638. $x^2 + 2xy - y^2 + 4ax - 2ay + 5 = 0$ эгри чизиқнинг марказлар тўпламини топинг (a — ўзгарувчи параметр).

639. $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ эгри чизиқнинг координаталар ўқи билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмаларининг тенгламасини топинг.

640. Каноник тенгламалари билан берилган қуйидаги эгри чизиқларга $(x_0,\ y_0)$ нуқталарда ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлишини исбот қилинг:

эгри чизиқ:	уринма:
$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$	$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1;$
$y^2 = 2px;$	$yy_0 = p(x - x_0).$

641. $\begin{cases}x = x_0 + \alpha t,\\ y = y_0 + \beta t\end{cases}$ тўғри чизиқ $F(x,\ y) = 0$ умумий тенглама билан берилган γ чизиққа уринишининг зарурий ва етарли шартини топинг.

642. $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$ эгри чизиққа координаталар бошидан уринма ўтказинг.

643. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга уринишининг зарурий ва етарли шартини топинг.

644. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболага уринишининг зарурий ва етарли шартини топинг.

645. $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y^2 = 2px$ параболага уринишининг зарурий ва етарли шартини топинг.

646. $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$ эгри чизиқнинг Ox ўққа параллел ватарлари ўрталарининг тўпламини топинг.

647. $5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ эгри чизиқнинг

$x - 2y - 1 = 0$ тўғри чизиқ билан кесишишидан ҳосил бўлган ватар ўртасидан ўтувчи диаметрини топинг.

648. Каноник тенгламаси билан берилган эллипс (гипербола) ўзаро қўшма диаметрларининг бурчак коэффициентлари орасидаги боғланишни топинг.

649. $y^2 = 2px$ парабола $y = m\ (m \neq 0)$ тўғри чизиққа қўшма бўлган ватарларининг бурчак коэффициенти k ни топинг.

650. Қуйидаги тенгламалар билан берилган ажралувчан чизиқларни чап томонини кўпайтувчиларга ажратиш йўли билан ясанг:

1) $4x^2 - 9y^2 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$;
3) $x^2 - 2xy - 3y^2 + x - 3y = 0$;
4) $x^2 - xy - 2y^2 - 4x - y + 3 = 0$;
5) $x^2 - 2xy + 5x = 0$;
6) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
7) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25 = 0$;
8) $y^2 - xy - 5x + 7y + 10 = 0$;
9) $y^2 - 4xy - 5x^2 + 5x - y = 0$.

651. Қуйидаги марказли эгри чизиқлар тенгламаларини каноник ҳолга келтиринг, эски системага нисбатан каноник тенглама ифодаланган координаталар системасининг вазиятини (координаталар бошини, ўқларининг бурчак коэффициентларини) аниқланг, эгри чизиқларни ясанг:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
2) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
3) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
4) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;
5) $6xy + 8y^2 + 12x - 26y + 11 = 0$.

652. Қуйидаги параболаларнинг тенгламаларини каноник ҳолга келтиринг, парабола ўқини, унинг учини топинг, эгри чизиқларни ясанг:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;
3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;
4) $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$.

33-§. АРАЛАШ МАСАЛАЛАР

653. $A\,(4,\ 3)$ нуқтадан $x^2 + y^2 = 9$ айланага ўтказилган уринма тенгламасини топинг.

654. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипсга унинг $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$ нуқтасида уринувчи тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

655. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсга $A(-6,\ 3)$ нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг тенгламаларини топинг.

656. $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсларнинг умумий уринмалари тенгламаларини топинг.

657. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$ гиперболага унинг $(6,\ -5)$ нуқтасида уринувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини топинг.

658. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ гиперболага унинг марказидан ва ўнг фокусидан бир хил масофада ётган уринма ўтказинг.

659. $y^2 = 4x$ параболага унинг $(4,\ 4)$ нуқтасида уринма ўтказинг.

660. $y^2 = 12x$ параболадан $x - y + 7 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

661. $\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипснинг $M\,(2,\ 1)$ нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватари ётган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

662. Эллипс (гипербола)га ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг томонлари унинг ўқларига параллел эканлигини исбот қилинг.

663. $y^2 = 4x$ параболанинг $M\ (3,\ 1)$ нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватари ётган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

664. Эллипсга ташқи чизилган ромбнинг учлари эллипснинг ўқларида ётишини исбот қилинг.

665. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ эллипсга ташқи чизилган квадрат томонлари ётган тўғри чизиқ тенгламаларини топинг.

666. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^3} = 1$ эллипсга ички чизилган квадрат томони узунлигини топинг.

667. Эллипс (гипербола)нинг уринмаси уриниш нуқтасига ўтказилган фокал радиус-векторлар билан тенг бурчаклар ҳосил қилишини исбот қилинг.

668. Параболанинг ихтиёрий M нуқтасидан ўтказилган уринманинг шу нуқта фокал радиуси ва M дан парабола ўқига параллел қилиб ўтказилган нур билан тенг бурчаклар ҳосил қилишини исбот қилинг.

669. Парабола фокусидан унинг уринмаларига туширилган перпендикулярлар асосларининг тўплами парабола учига ўтказилган уринмадан иборат эканини исбот қилинг.

670. $y^2=2px$ параболага ўтказилган барча уринмаларнинг координаталар ўқи билан кесишган нуқталаридан тузилган кесмалар ўрталари тўплами тенгламасини тузинг.

671. $xy=1$ гипербола барча уринмаларига координаталар бошидан туширилган перпендикулярлар асослари тўпламининг тенгламасини тузинг.

2- бўлим

ЕВКЛИД ВА АФФИН ФАЗОЛАРДА ТЕКИСЛИКЛАР, ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА КВАДРИКАЛАР

V боб. ФАЗОДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ. ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМАЛАРИ

34-§. ФАЗОДА АФФИН КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ. КЕСМАНИ БЕРИЛГАН НИСБАТДА БЎЛИШ

Фазода бирор O нуқтадан чиқувчи 3 та нокомпланар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар системаси аффин координаталар системаси дейилади, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лар базис векторлар ёки координата векторлари, O нуқта эса координаталар боши дейилади. Координаталар системасини $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ кўринишда ёзамиз. Фазодаги ихтиёрий M нуқтани O билан туташтирувчи $\overrightarrow{OM}$ вектор M нуқтанинг радиус-вектори дейилади.

Фазодаги ҳар қандай $\vec{a}$ вектор базис векторлар орқали ягона

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

ёйилмага эга бўлиб, бу ёйилмадаги x, y, z ҳақиқий сонлар $\vec{a}$ нинг берилган базисга кўра координаталари дейилади ва $\vec{a}\,(x, y, z)$ кўринишда ёзилади.

Фазодаги ҳар қандай M нуқта учун унинг радиус-вектори $\overrightarrow{OM}$ нинг координаталарини мос келтирамиз. $\overrightarrow{OM}$ нинг координаталари бир вақтда M нуқтанинг ҳам координаталари деб қабул қилинади ва $\overrightarrow{OM}\,(x, y, z)$ бўлса, $M\,(x, y, z)$ кўринишда ёзилади, яъни

$$\overrightarrow{OM}(x, y, z) \Leftrightarrow M(x, y, z), \qquad (1)$$

бунда x сон M нуқтанинг абсциссаси, y ординатаси, z аппликатаси дейилади. $\vec{e}_1$ вектор ётган Ox, $\vec{e}_2$ ётган Oy, $\vec{e}_3$ ётган Oz тўғри чизиқларни координата ўқлари дейилиб, Ox — абсциссалар ўқи, Oy — ординаталар ўқи, Oz — аппликаталар ўқи деб аталади. Ҳар 2 та координата ўқлари битта координаталар текислигини аниқлайди. Координата текисликларини xOy, xOz, yOz деб белгиласак, бу текисликлар фазони 8 та қисмга ажратади ва улар *октантлар* деб номланади. Ҳар бир октантга тегишли нуқталар координаталарининг ишоралари бир хил бўлади, бу муносабатни қуйидаги жадвалда акс эттириш мумкин.

Октантлар Координаталар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	—	—	+	+	—	—	+
y	+	+	—	—	+	+	—	—
z	+	+	+	+	—	—	—	—

(1) дан кўринадики, фазода бирор $M(a, b, c)$ нуқтани ясаш учун $\overrightarrow{OM} = a\vec{e_1} + b\,\vec{e_2} + c\,\vec{e_3}$ векторни ясаш керак, M нинг ўрни йиғинди векторнинг охири бўлади.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталардан тузилган вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ бўлади.

Координаталари билан берилган 2 вектор йиғиндисининг координаталари қўшилувчилар мос координаталарининг йиғиндисига тенг, яъни;

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ бўлса, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + + b_2, a_3 + b_3)$ бўлади.

Вектор бирор сонга кўпайтирилса, унинг мос координаталари ҳам шу сонга кўпайтирилади:

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $m \in R$ бўлса, $\vec{b} = m\,\vec{a}$ учун $\vec{b}(ma_1, ma_2, ma_3)$ бўлади.

Агар фазода $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар ва $\overrightarrow{M_1M}:\overrightarrow{MM_2} = \lambda$ $(\lambda \neq -1, \lambda \in R)$ берилган бўлса, M нуқтанинг координаталари

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad (2)$$

формулалар билан ҳисобланади. M_1M_2 кесма ўртаси M_0 нинг координаталарини топиш учун $\lambda = 1$ деб олинади, у ҳолда $M(x_0, y_0, z_0)$ учун

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (3)$$

бўлади.

672. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда $[AA_1]$ нинг ўртаси E, $[DD_1]$ нинг ўртаси F, $[DC]$ нинг ўртаси G берилган. Қирраларда жойлашган $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$ векторларни базислар деб олиб,

1) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ $\overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{A_1G}$ векторларнинг координаталарини топинг;

2) $\{D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ координаталар системасида берилган параллелепипед учларининг координаталарини топинг.

673. Ихтиёрий $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ аффин системани тасвирланг ва унда $M(2, 3, 5)$, $A'(1, 3, 4)$, $B(-3, 4, 0)$, $C(0, 0, -6)$, $D\left(-1, -\frac{1}{2}, -3\right)$, $E(0, 5, 0)$, $F(-2, 0, 0)$ нуқталарни ясанг.

674. $OABC$ тетраэдрда $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ лар базис векторлар бўлсин. Тетраэдр тасвирини чизинг ва унда $M_1(0, 3, 0)$, $M_2(-2, 0, 1)$, $M_3(1, -1, 0)$, $M_4(4, -2, -2)$, $M_5(-1, -1, -2)$ нуқталарнинг ўрнини топинг.

675. $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ системада $A(2, 5, 4)$, $B(0, 1, 0)$, $C(4, 1, 3)$, $D(6, 5, 7)$ нуқталар берилган. $ABCD$ фигура параллелограмм эканини исбот қилинг.

676. $\overrightarrow{AB}(-3, 2, 6)$ векторнинг боши $A(-1, 0, 4)$ нуқтада жойлашган. Унинг охири бўлган B нуқтанинг кооординаталарини топинг.

677. Учлари $A(2, 0, -4)$, $B(7, -15, 16)$, $C(-1, -1, 11)$, $D(-4, 8, -1)$ нуқталарда ётган тўртбурчак трапеция эканлигини исботланг.

678. $M_1(7, 9, -8)$, $M_2(-2, 3, 4)$, $M_3(-5, 1, 8)$ нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

679. $\vec{a} = \{-2, 1, 5\}$, $\vec{b} = \{0, -2, 6\}$ векторлар берилган. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$ векторларнинг координаталарини топинг.

680. $M_5(1, -2, 5)$, $M_2(4, -2, 2)$ нуқталар берилган.

$[\overrightarrow{M_1M_2}]$ кесмани $\lambda = 1:2$ нисбатда бўлувчи $M(x, y)$ нуқтани топинг.

681. $OABC$ тетраэдрда $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ларни базис векторлар деб олиб, (ABC) ёқ медианалари кесишган нуқтанинг координаталарини топинг.

682. Учлари A (2, —1, 8), B (3, 5, —2) нуқталарда бўлган кесмани координаталар текисликларининг ҳар бири қандай нисбатда бўлишини топинг.

683. Мунтазам тетраэдрда қарама-қарши қирралар ўрталарини бирлаштирувчи кесмалар бир нуқтада кесишиб, бу нуқтада ҳар бири тенг иккига бўлинишини исбот қилинг.

684. Ҳар қандай фазовий тўртбурчакнинг қўшни томонлари ўрталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар параллелограмм ҳосил қилишини исбот қилинг.

685. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ учбурчакнинг оғирлик маркази координаталарини ҳисоблайдиган формулаларни топинг.

686. $ABCD$ тетраэдрнинг AB, AC, DB, DC қирраларининг ҳар бири M, N, P, Q нуқталарда λ нисбатда бўлинган. Координаталар усулидан фойдаланиб, $MNQP$ фигура параллелограмм эканини исбот қилинг.

35-§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Икки вектор орасидаги бурчак. Икки нуқта орасидаги масофа

Аффин координаталар системасининг базис векторлари ўзаро перпендикуляр бўлиб, уларнинг узунликлари $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ бўлса, бундай системани ортонормал система ёки тўғри бурчакли декарт координаталар системаси дейилади. Бу системани $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$ белгилаш киритиб, $Б = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ кўринишда ёзилади.

Векторнинг тўғри бурчакли координаталари унинг мос координата ўқларидаги проекцияларининг алгебраик қийматидир.

Нуқтанинг тўғри бурчакли координаталари эса модули бўйича бу нуқтанинг мос координата текислигидан узоқлигидир, масалан M (x, y, z) даги $|x|$ M нинг yOz текислигидан узоқлиги.

Агар $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ да

1) $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) берилса, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (1) бўлади;

2) $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) берилса,

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \tag{2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{3}$$

бўлади;

3) $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ берилса,

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{4}$$

ўринли бўлади.

687. Берилган $Б = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ декарт системада M (2, 3, 5) нуқтанинг ўрнини топинг, $|\overrightarrow{OM}|$ ни ҳисобланг.

688. M (x, y, z) нуқтанинг координата ўқларидан узоқлигини топинг.

689. M (12, 3,—4) нуқтанинг координаталар бошидан ва координаталар ўқларидан узоқликларини топинг.

690. 3- октантда ётган нуқтанинг координата ўқларидан узоқликлари берилган:

$$\rho(M, (Ox)) = 5,\ \rho(M, (Oy)) = 3\sqrt{5},$$

$$\rho(M, (Oz)) = 2\sqrt{13}.$$

Бу нуқта координаталарини ва унинг координаталар бошидан узоқлигини топинг.

691. Қирраси бирлик кесмага тенг бўлган кубнинг бир учидан чиққан учта қиррасини координата векторлари деб олиб, куб учларининг координаталарини топинг.

692. Координаталар усулидан фойдаланиб, қиррасининг узунлиги a бўлган кубнинг диагонали узунлигини топинг.

693. M (x, y, z) нуқтага:

а) координата ўқига;

б) координата текисликларига;

в) координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқтанинг координаталарини ёзинг.

694. Учлари A (3,—2, 5), B (0, 0, 3), C (2—1, 2) нуқталарда жойлашган учбурчакка:

а) координаталар бошига нисбатан;

б) координата ўқларига нисбатан;

в) координата текисликларига нисбатан симметрик бўлган учбурчак учларининг координаталарини топинг.

695. $M(1, -3, 1)$ ва $N(-1, -1, 0)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

696. а) (Oz) ўқда $M_1(3, -2, 5)$ ва $M_2(0, 1, -3)$ нуқталардан баравар узоқликда ётган нуқтанинг координаталарини топинг.

б) (Oy) ўқда $A(3, 1, 0)$ ва $B(-2, 4, 1)$ нуқталардан баравар узоқликда ётган нуқтанинг координаталарини топинг;

в) (xOz)-координаталар текислигида $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 0)$ ва $C(3, 1, -3)$ нуқталардан баравар узоқликда ётган нуқтанинг координаталарини топинг.

697. $A(1, 2, 3)$, $B(5, 2, 3)$, $C(2, 5, 3)$, $D(1, 2, -1)$ нуқталардан ўтувчи сферанинг маркази координаталарини ва радиусини топинг.

698. $\vec{a} = -6\vec{i} + 3\sqrt{3}\,\vec{j} + \vec{k}$ вектор йўналишидаги бирлик вектор координаталарини топинг.

699. $A(1, -2, 2)$, $B(3, 0, -4)$ нуқталар берилган бўлса, $\widehat{AOB}$ бурчакнинг биссектрисаси бўйлаб йўналган векторни топинг.

700. Қуйидаги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг:

а) $\vec{a}$ (1, 0, 5), $\vec{b}$ (— 2, 3, 4);

б) $\vec{a}\left(-2, \frac{11}{2}, 5\right)$, $\vec{b}$ (4, 2, 9).

701. $\vec{a} = 6\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = (3, 2, -1)$, $\vec{c} = (5, 5, 0)$ бўлса, $2\vec{a}^2 - 3(\vec{a}\ \vec{b}) + 4|\vec{c}|^2$ ифоданинг қийматини топинг.

702. $\vec{a}$ (1, —3, z), $\vec{b}$ (5, 4, —3) берилган. Агар бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси 6 га тенг бўлса, z ни топинг.

703. $\vec{p}$ (1, 4, —2) ва $\vec{q}$ (2, —3, —5) векторлар ўзаро перпендикуляр эканлигини исботланг.

704. M (3, —4, 7) нуқтанинг (Oz) ўқдан узоқлигини скаляр кўпайтмадан фойдаланиб ҳисобланг.

705. Шундай $\vec{p}$ бирлик вектор топингки, у $\vec{a}$ (1, 3, 5) векторга ва (Oy) ўққа перпендикуляр бўлсин.

706. Скаляр кўпайтмадан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исбот қилинг: текисликдаги иккита кесишувчи тўғри чизиқнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ шу текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади (тўғри чизиқнинг текисликка перпендикулярлик аломати).

707. Скаляр кўпайтма тушунчасидан фойдаланиб, косинуслар теоремасини исбот қилинг.

708. Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни ҳисобланг:

1) $\vec{a}$ (1, — 4, 3) ва $\vec{b}$ (—3, — 1, 4);

2) $\vec{p}$ (1, 4, — 2) ва $\vec{q}$ (2, — 3, 5);

3) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ва $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

709. Учлари $A(-9, -3, 0)$, $B(-4, 2, 1)$, $C(-2, 8; -1)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг BC томони билан AD медианаси орасидаги бурчакни топинг.

710. Кубнинг бир учидан чиққан иккита ёғи биссектрисалари орасидаги бурчакни топинг.

711. $\vec{a}$ (2, 4, — 4) векторнинг координаталар ўқи билан ҳосил қилган бурчакларини топинг.

712. Икки вектор орасидаги бурчакни ҳисоблаш формуласидан фойдаланиб, (xOz) ва (yOz) координаталар текисликлари орасидаги икки ёқли бурчакнинг 90° га тенглигини исбот қилинг.

36-§. ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОРЛИ ВА АРАЛАШ КУПАЙТМАЛАРИ

Берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг векторли кўпайтмаси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\vec{p}$ векторга айтилади:

1) $|\vec{p}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) $\vec{p} \perp \vec{a}$ ва $\vec{p} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ векторлар ўнг система ташкил этади.

Векторли кўпайтма $[\vec{a}\,\vec{b}]$ кўринишда ёзилади.

Агар $Б = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ да $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ бўлса,

$$\vec{p} = [\vec{a}\,\vec{b}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{бўлади, ёки}$$

y2 λ1

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Вектор кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ бўлганда $[\vec{a}\,\vec{b}\,] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ ўринли.

2. $[\vec{a}\,\vec{b}\,] = -[\vec{b}\,\vec{a}\,]$.

3. $[(\vec{a} + \vec{b}\,)\,\vec{c}\,] = [\vec{a}\,\vec{c}\,] + [\vec{b}\,\vec{c}\,]$.

4. $[\lambda\,\vec{a}\,\vec{b}\,] = \lambda\,[\vec{a}\,\vec{b}]$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар берилганда уларнинг аралаш кўпайтмаси деб $\vec{p} = [\vec{a}\,\vec{b}]$ вектор билан $\vec{c}$ векторнинг скаляр кўпайтмасидан чиққан сонга айтилади ва $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ кўринишда ёзилади.

Агар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар компланар бўлса, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ бўлади. Агар $Б = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$ да $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ бўлса, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ бўлади.

Аралаш кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = -\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = \ldots.$

2. $(\vec{a} + \vec{b}\,)\,\vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}$.

3. $(\lambda\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,)$.

Аралаш кўпайтманинг модули, геометрик маъносига кўра, кўпайтувчилардан тузилган параллелепипеднинг ҳажмини ифода қилади:

$$V = |\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,| \text{ (куб бирлик).}$$

Учлари $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ нуқталарда жойлашган тетраэдрнинг ҳажми қуйидагича ҳисобланади:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right| = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \text{ (куб бирлик)}$$

Учлари $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг юзи қуйидагича ҳисобланади:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\vec{AB}\cdot\vec{AC}]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}$$

(кв. бирлик)

713. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$ лар берилган бўлса, $|[a, b]|$ ни топинг.

$\boxed{\textbf{714}}$ $[(\vec{a} - \vec{b}\,)(\vec{a} + \vec{b}\,)] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,]$ айният ўринлилигини исботланг.

715. Қуйидаги векторлар вектор кўпайтмасининг координаталарини ва модулини топинг:

1) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ва $\vec{b}\,(1, 0, 5)$;

2) $\vec{a} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + \vec{k}$ ва $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.

716. $\vec{a}\,\{1, 5, -3)$ ва $\vec{b}\,(2, 3, 5)$ берилган. $[(\vec{a} - 2\vec{b}\,)(3\,\vec{a} - \vec{b}\,)]$ кўпайтмани топинг.

717. Икки векторнинг вектор кўпайтмасидан фойдаланиб, координаталари билан берилган икки векторнинг коллинеарлик шартини топинг.

718. $A(2, 4, 1)$, $B(3, 7, 5)$, $C(4, 10, 9)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

Уио √ **719.** $\vec{a}\,(1, -2, 3)$, $\vec{b}\,(-4, 0, 5)$, $\vec{q}\,(q_1, q_2, 24)$ лар берилган. Агар $\vec{q}$ вектор $\vec{p} = [\vec{a}\,\vec{b}\,]$ га коллинеар бўлса, q_1, q_2 нинг сон қийматини топинг.

720. $\vec{a}\,(2, -3, \alpha)$ ва $\vec{b}\,(\beta, 1, 2)$ векторлар α ва β нинг қандай қийматида коллинеар бўлади?

721. Томонлари қуйидаги векторлардан иборат бўлган параллелограмм юзини топинг:

а) $\vec{u}\ (0,\ 1,\ 4)$ ва $\vec{v}\ (-1,\ 2,\ 5)$;

б) $\vec{a}\ (1,\ -2,\ -5)$ ва $\vec{b}\ (0,\ 1,\ -3)$.

722. Учлари $A\ (1,\ 6,\ 4)$, $B\ (3,\ 1,\ 0)$, $C\ (4,\ -1,\ -6)$ нуқталарда жойлашган учбурчак юзини ҳисоблаб, A нуқтадан (BC) тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

723. Учлари $A\ (-1,\ 1,\ 2)$, $B\ (1,\ 1,\ 0)$, $C\ (2,\ 6,\ -2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг BH баландлигининг узунлигини топинг.

724. $[\vec{a}\,\vec{b}\,] + [\,\vec{b}\,\vec{c}\,] + [\,\vec{c}\,\vec{a}\,] = \vec{0}$ муносабатни қаноатлантирувчи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар эканлигини исбот қилинг.

725. Қуйидаги векторларнинг аралаш кўпайтмасини топинг:

а) $\vec{a}\ (1,\ 0,\ 3)$, $\vec{b}\ (1,\ -3,\ 4)$, $\vec{c}\ (-2,\ 1,\ 0)$;

б) $\vec{a}\ (5,\ -1,\ 0)$, $\vec{b}\ (-2,\ 3,\ 1)$, $\vec{c}\ (1,\ 0,\ 3)$.

726. $\vec{a}\ (-2,\ 1,\ 5)$, $\vec{b}\ (3,\ 0,\ 2)$, $\vec{c}\ (c,\ 4,\ 2)$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси 68 га тенг экани маълум бўлса, c нинг сон қийматини топинг.

727. $\vec{a}\ (4,\ -34,\ -3)$, $\vec{b}\ (3,\ -6,\ b_3)$, $\vec{c}\ (4,\ -4,\ 2)$ векторлар компланар экани маълум бўлса, b_3 ни топинг.

728. $A(1,\ -2,\ 0)$, $B(3,\ -1,\ 5)$, $C(0,\ 1,\ 1,)$, $D(2,\ 1,\ 5)$ нуқталарнинг бир текисликда ётишини исботланг.

729. Қирралари қуйидаги векторлардан иборат бўлган параллелепипед ҳажмини топинг:

1) $\vec{a_2}\ (5,\ 3\ -2)$, $\vec{b_1}\ (1,\ -4,\ 2)$, $\vec{c_1}\ (3,\ 1,\ 4)$;

2) $\vec{a_2} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b_2}\ (2,\ 1,\ 2)$, $\vec{c_2}\ (-3,\ -2,\ 5)$.

730. $\vec{AB}\ (4,\ 3,\ 0)$, $\vec{AD}\ (2,\ 1,\ 2)$, $\vec{AA_1}\ (-3,\ -2,\ 5)$ векторларга ясалган $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед ҳажмини ҳисоблаб, A_1 учидан $(ABCD)$ асосга туширилган баландлигининг узунлигини топинг.

731. Учлари $O\ (0,\ 0,\ 0,)$, $A\ (1,\ 0,\ 0)$, $B\ (0,\ 1,\ 0)$, $C\ (0,\ 0,\ 1)$ нуқталарда бўлган тетраэдр ҳажмини ҳисоблаб, OH баландлигининг узунлигини топинг.

732. $\vec{AB}\ (2,\ 0,\ 0)$, $\vec{AC}\ (3,\ 4,\ 0)$, $\vec{AD}\ (3,\ 4,\ 2)$ векторларга ясалған тетраэдр ҳажмини ҳисоблаб, D учидан (ABC) асосга туширилган баландлигининг узунлигини топинг.

733. Учлари параллелепипеднинг бир учи ва бу учи ётмаган ёқларининг марказларида ётган тетраэдр ҳажми параллелепипед ҳажмининг қандай қисмини ташкил қилишини аралаш кўпайтмадан фойдаланиб топинг.

734. Қирралари ихтиёрий параллелепипеднинг бир учидан чиққан учта ёғининг диагоналларидан иборат бўлган пирамида ҳажми параллелепипед ҳажмининг қандай қисмини ташкил қилишини аралаш кўпайтмадан фойдаланиб топинг.

735. Куб диагоналининг узунлиги a. Кубнинг икки қўшни ёғидаги кесишмайдиган диагоналлар орасидаги масофани топинг.

37-§. АФФИН КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИНИ АЛМАШТИРИШ

Фараз қилайлик, $Б = (O,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ ва $Б' = (O',\ \vec{e_1'},\ \vec{e_2'},\ \vec{e_3'})$ аффин реперлар берилган бўлсин. $Б$ дан $Б'$ га ўтишда 3 ҳол бўлади:

1. Реперларнинг бошлари ҳар хил бўлиб, координата векторлари ўзгармасин, яъни $Б = (0,\ \vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$ дан $Б' = (O',\ \vec{e_1'},\ \vec{e_2'},\ \vec{e_3'})$ га ўтайлик ва $Б$ да $O'\ (a,\ b\ c)$, $O \neq O'$ бўлсин. Агар бирор M нуқтанинг $Б$ ва $Б'$ га нисбатан координаталарини мос равишда x, y, z ва x', y', z' деб белгиласак,

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c \end{cases}$$

(1) формулалар ўринли бўлади.

2. Реперларнинг бошлари устма-уст тушиб, базис векторларнинг йўналишлари ҳар хил бўлсин, яъни $O = O'$, $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$ лар $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ орқали қуйидагича ифодаланган бўлсин:

$$\begin{aligned} \vec{e_1'} &= a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + a_{31}\vec{e_3}, \\ \vec{e_2'} &= a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + a_{32}\vec{e_3}, \\ \vec{e_3'} &= a_{13}\vec{e_1} + a_{23}\vec{e_2} + a_{33}\vec{e_3}, \end{aligned}$$

бу ерда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлади.

x, y, z ва x', y', z' лар орасидаги қуйидаги боғланишлар ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned}$$

(2) даги

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ ни алмаштириш матрицаси дейилади.

3. $Б$ ва $Б'$ лар бир-бирига нисбатан ихтиёрий вазиятда жойлашган бўлсин, яъни $Б$ га нисбатан $Б' = (0', \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ даги O' (a, b, c), $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ лар эса

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + a_{31}\vec{e_3}, \\ \vec{e_2} &= a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + a_{32}\vec{e_3}, \\ \vec{e_3} &= a_{13}\vec{e_1} + a_{23}\vec{e_2} + a_{33}\vec{e_3} \end{aligned}$$

кўринишда бўлсин. У ҳолда $M(x, y, z)_Б$ ва $M'(x', y, z')_{Б'}$ лардаги координаталар орасида қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{aligned}$$

Фазода $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базислар учун икки хил ориентация мавжуд. Агар $\vec{e_3}$ нинг учидан қаралганда $\vec{e_1}$ дан $\vec{e_2}$ га қарата қисқа бурилиш соат стрелкасига тескари бўлса, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ лар ўнг ориентацияда, аксинча бўлса, чап ориентацияда дейилади. Биз кўпинча ўнг ориентирланган фазода иш кўрамиз. (3) даги A матрицанинг детерминанти мусбат бўлса, $Б$ ва $Б'$ реперлар бир хил ориентирланган бўлади. Агар $\det A < 0$ бўлса, $Б$ ва $Б'$ лар турли ориентирланган ёки координата алмаштириш натижасида фазонинг ориентацияси ўзгарган бўлади.

Агар $Б$ ва $Б'$ ларнинг координата векторлари ортонормалланган бўлса, фазода тўғри бурчакли декарт координаталар системасини алмаштириш ҳосил бўлади. Бу алмаштиришда (3) даги коэффициентлар маълум геометрик маънодаги сонлар бўлади, яъни

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + a, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + b, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + c \end{aligned} \tag{4}$$

бўлиб, бу ерда $\alpha_i = (\widehat{\vec{e_1}, \vec{e_i'}})$ $\beta_i = (\widehat{\vec{e_2}, \vec{e_i'}})$, $\gamma_i = (\widehat{\vec{e_3}, \vec{e_i'}})$, $i = 1, 2, 3$ бўлади.

736. $Б = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ системасига нисбатан $\vec{e_1'}(1, 0, 0)$, $\vec{e_2'}(0, 1, 0)$, $\vec{e_3'}(0, 0, 1)$, $O'(1, -3, 5)$ лар берилган. $Б$ дан $Б' = (O' \vec{e_1'}, \vec{e_2}, \vec{e_3'})$ га ўтишдаги координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг. $Б$ да берилган $M(1, 1, 3)$ нуқтанинг $Б'$ даги координаталарини топинг.

737. M нуқта $Б = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ да $M(0, 1, -3)$ кўринишда, $Б' = (O', \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ да эса $M(2, -3, 5)$ кўринишда берилган бўлса, координаталар боши кўчирилган O' нуқтанинг $Б$ даги координаталарини топинг.

738. Бирор $Б = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ системага нисбатан $\vec{e_1'}(1, -3, -1)$, $\vec{e_2'}(0, 5, 1)$, $\vec{e_3'}(0, 0, 3)$ векторлар берилган. $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$ лар базис бўла олишини кўрсатинг ва $Б = (0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ дан $Б' = (O, \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$ га ўтишдаги координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг, $M(3, 1, -4)$ нинг $Б'$ даги координаталарини топинг.

739. $Б = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ да $\vec{e_1'}(1, 0, 2)$, $\vec{e_2'}(1, 0, -2)$, $\vec{e_3'}(1, 1, 1)$ векторлар берилган. $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$ система базис эканлигини кўрсатинг ва $Б' = (O, \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$ даги $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ ларнинг координаталарини топинг.

740. $OABC$ тетраэдр берилган, $\vec{OA} = \vec{e_1}$, $\vec{OB} = \vec{e_2}$, $\vec{OC} = \vec{e_3}$ деб олиб, $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ аффин системадан $O' = A$, $\vec{e_1'} = \vec{AO}$, $\vec{e_2'} = \vec{AB}$, $\vec{e_3'} = \vec{AC}$ бўлган $(O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$ системага ўтишдаги координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг.

741. $Б = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ системадан $Б' = (O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'})$ системага ўтишдаги ихтиёрий нуқтанинг бу икки системага нисбатан координаталари орасидаги боғланиш ушбу $x = x' - 2y' + 3z - 4$, $y = 5x' - y' - z'$, $z = z' + 1$ формулалар билан берилган. O' нуқтанинг ва $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$ векторларнинг $Б$ даги координаталарини топинг.

742. $Б = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ да $\vec{e_1'}(-1, 1, 0)$, $\vec{e_2'}(2, -1, 0)$,

$\vec{e}_3'$ (0, 0, 5), O' (5, 0, —2) лар берилган. $Б$ дан $Б' = (O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ га ўтишдаги координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг ва $M(1, -3, 4)_Б$, нинг $Б$ даги координаталарини топинг.

743. $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ дан $Б' = (0, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ га ўтишда $\vec{e}_i'$ лар $Б$ да қуйидагича берилган бўлсин: $\vec{e}_1'$ (4, 3, —2), $\vec{e}_2'$ (0, 1, 5), $\vec{e}_3'$ (—1, 0, 1). A (—1, 0, 27) ва B (1, 0,—1) нуқталарнинг янги системадаги координаталарини топинг.

744. $ABCD$ тетраэдр берилган, M нинг $Б = (A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ даги координаталари x, y, z ва BD нинг ўртаси O бўлса, $Б = (O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ даги координаталари x', y', z' бўлсин. $Б$ дан $Б'$ га ўтишдаги координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг.

745. $Б = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ни Oy ўқ атрофида α бурчакка соат стрелкасига тескари йўналишда буриб, $Б' = (O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ системага ўтилган. Координаталарни алмаштириш формулаларини ёзинг, $\alpha = 45°$ бўлганда $M(0, 1, -\sqrt{2})$ учун M нинг $Б$ даги координаталарини топинг.

746. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасини шундай алмаштирингки, унда $O = O'$, $Oz' = Oz$ бўлсин, $[Ox]$, $[Oy']$ нурлар эса (xOz), (yOz) координата бурчакларининг биссектрисаларидан иборат бўлиб, янги базис системасининг базис векторлари бирлик векторлар бўлсин.

747. $Б = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ни Oz атрофида соат стрелкасига тескари йўналишда α бурчакка буришдан $Б' = (O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ система ҳосил бўлган. $Б$ дан $Б'$ га ўтишдаги координата алмаштириш формулаларини топинг.

38-§. КООРДИНАТАЛАРНИ БОҒЛОВЧИ ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Уч ўзгарувчили $F(x, y, z)$ ифода берилган бўлсин. Бу ифода ўзгарувчиларнинг аниқланиш соҳасидан олинган айрим сон қийматларида мусбат, айримларида манфий ёки ноль бўлади. Агар фазода бирорта координаталар системасини олиб, x, y, z ларнинг ҳар бир сон қийматини фазодаги нуқтанинг координаталари деб фараз қилсак, у ҳолда $F(x, y, z)$ ифода айрим нуқталарнинг

координаталари учун мусбат, айримлари учун ноль ва айримлари учун манфий бўлади. Шундай қилиб, $F(x, y, z) = 0$ (1) тенглама фазода координаталари шу тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини ифода қилади, $F(x, y, z) \leqq 0$ (2) тенгсизликлар ҳам, ўз навбатида, координаталари бу тенгсизликлардан бирини қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини ифода қилади, айрим ҳолларда тўплам бир ёки бир неча нуқтадан ёки бўш тўпламдан иборат бўлиши мумкин.

$F(x, y, z) = 0$ ($\leqq 0$) тенглама (ёки тенгсизлик) координаталари шу тенгламани (тенгсизликни) қаноатлантирадиган нуқталар тўпламининг тенгламаси (тенгсизлиги) дейилади.

Кўпинча (1) тенглама билан ифодаланувчи фигура сирт бўлади.

Агар (1) тенгламанинг озод ҳади ноль бўлса, у билан ифодаланган фигура координаталар бошидан ўтади.

Агар (1) тенгламада ўзгарувчилардан бири иштирок этмаса, (1) билан ифодаланувчи фигура цилиндрик сирт дейилади, унинг ясовчиси иштирок этмаган исмли координаталар ўқига параллел бўлади.

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

тенгламалардан тузилган система улар билан ифодаланган сиртларнинг кесишиш чизиғининг тенгламалари бўлади.

Агар бирор фигура фазода геометрик хоссаси билан берилган бўлса, унга мос тенглама (тенгсизлик) ни топиш мумкин.

Фазода берилган $K(a, b, c)$ нуқтада берилган r масофада ётувчи нуқталар тўплами сфера дейилади. Сферанинг тенгламасини топиш учун ундан ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтани оламиз, таърифга кўра $KM = r$ бўлгани учун $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$ ёки $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ кўринишдаги тенглама ҳосил бўлади. Агар $K = O(0, 0, 0)$ бўлса, маркази координаталар бошида ётган сфера тенгламаси $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ дан иборатдир.

748. 1) $x = 0$, 2) $y = 0$, 3) $z = 0$ тенгламаларнинг ҳар бири $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ да қандай фигурани аниқлайди?

749 — 753- масалаларни $Б = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ системада қаранг.

749. 1) $x + 5 = 0$, $x > -5$, $x < -5$ ларнинг ҳар бири билан аниқланувчи фигураларни топинг;

2) $y = 2$ тенглама билан ифодаланувчи фигурани топинг.

3 $\begin{cases} z - 3 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ система қандай фигурани аниқлайди?

4) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 5 = 0$ тенглама қандай фигурани аниқлайди?

750. Қуйидаги тенглама ва тенгсизликларнинг ҳар бири қандай фигурани аниқлашини топинг:
1) $z = 0$; 2) $x - 4 = 0$; 3) $x^2 + 3y^2 + z^2 = 0$; 4) $y - a = 0$; 5) $x^2 + z^2 = 0$; 6) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 7) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$; 8) $x^2 + y^2 = 4$; 9) $x > 0$; 10) $xy > 0$; 11) $z - 3 > 0$; 12) $yz > 0$.

751. Қуйидаги системаларнинг ҳар бири қандай фигурани аниқлашини топинг:

1. $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ z + 4 = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} y^2 - z = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 > 1, \\ z > 0; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 2. \end{cases}$

752. 1) $x^2 - y = 0$ тенглама билан аниқланувчи фигурани топинг.

2) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ z = 4 \end{cases}$ система қандай нуқталар тўпламидан иборат?

3) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ тенгсизлик қандай фигурани ифодалайди?

4) $\begin{cases} x > 3, \\ z > 0 \end{cases}$ система билан аниқланувчи нуқталар тўпламини изоҳлаб беринг.

753. 1) $x^2 - 2x - y - z - 3 = 0$ тенглама билан аниқланувчи фигурага тегишли бир нечта нуқтанинг координаталарини топинг.

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ тенглама билан аниқланувчи фигурани топинг, бу фигуранинг координаталар ўқи билан кесишган нуқталарини кўрсатинг.

754. $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ да: 1) $x^2 + y^2 = 0$,
2) $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} = 3$ тенгламаларнинг ҳар бири қандай фигурани аниқлайди?

755. $Б = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ да маркази $K\ (3,\ 1,\ 0)$ нуқтада, радиуси $r = 5$ бўлган сфера тенгламасини топинг.

VI боб. ТЕКИСЛИК ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

39-§. ТЕКИСЛИКНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ ВА УЛАРГА БОҒЛИҚ ТЕНГЛАМАСИ

1. $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ реперда берилган $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтиб, берилган $\vec{l}\ (l_1, l_2, l_3)$, $\vec{m}\ (m_1, m_2, m_3)$, $\vec{l} \nparallel \vec{m}$ векторларга параллел бўлган текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

кўринишда бўлади ёки параметрик тенгламалари

$$\begin{cases} x = x_0 + nl_1 + vm_1, \\ y = y_0 + ul_2 + vm_2, \\ z = z_0 + ul_3 + vm_3 \end{cases} \qquad (2)$$

бўлади, бунда u ва v ($u,\ v \in R$) параметрлардир.

2. Бир тўғри чизиқда ётмаган берилган $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$, $M_3\ (x_3, y_3, z_3)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

дан иборат.

3. Агар текисликнинг Ox ўқдан кесган кесмаси a, Oy дан кесган кесмаси b, Oz дан кесган кесмаси c берилган бўлса, a, b, c лар йўналган кесмалар, уларнинг тенгламаси

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ (4) \text{ бўлади.}$$

4. $Б = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперда берилган $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтиб, берилган $\vec{n}\ (A,\ B,\ C)$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси

$$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) + C\ (z - z_0) = 0 \qquad (5)$$

кўринишда бўлади, бунда $\vec{n}$ вектор текисликнинг нормал вектори дейилади.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ (6), \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

тенглама аффин координаталар системасида текисликнинг умумий тенгламаси дейилади. Агар (6) тенгламани $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ координаталар системасида қаралса, A, B, C сонлар текислик нормал векторининг координаталаридан иборат.

Агар (6) тенгламада:

1) $A=0$ $(B, C, D \neq 0)$ бўлса, $By+Cz+D=0$ тенглама билан ифодаланган текислик (Ox) га параллел;

2) $B=0$ $(A, C, D \neq 0)$ бўлса, $Ax+Cz+D=0$ тенглама билан ифодаланган текислик (Oy) га параллел;

3) $C=0$ $(A, B, D \neq 0)$ бўлса, $Ax+By+D=0$ тенглама билан ифодаланган текислик Oz га параллел;

4) $A=0$, $B=0$, $(C, D \neq 0)$ бўлса, $Cz+D=0$ текислик xOy текисликка параллел;

5) $A=C=0$ $(B, D \neq 0)$ бўлса, $By+D=0$ текислик xOz текисликка параллел;

6) $B=C=0$ $(A, D \neq 0)$ бўлса, $Ax+D=0$ текислик yOz текисликка параллел;

7) $D=0$ бўлса $(A, B, C \neq 0)$, $Ax+By+Cz=0$ текислик координаталар бошидан ўтади;

8) $A=D=0$ $(B, C \neq 0)$ бўлса, $By+Cz=0$ текислик Ox ўқдан ўтади;

9) $B=D=0$ $(A, C \neq 0)$ бўлса, $Ax+Cz=0$ текислик Oy ўқдан ўтади.

10) $C=D=0$ $(A, B \neq 0)$ бўлса, $Ax+By=0$ текислик Oz ўқдан ўтади;

11) $A=B=D=0$ бўлса $(C \neq 0)$, $Cz=0$ ёки $z=0$ текислик xOy текислик билан устма-уст тушади;

12) $B=C=D=0$ бўлса, $Ax=0$ ёки $x=0$ текислик yOz текислик билан устма-уст тушади;

13) $A=C=D=0$ бўлса $(B \neq 0)$, $By=0$ ёки $y=0$ xOz текислик билан устма-уст тушади.

(6) тенгламанинг чап томонидан иборат бўлган $Ax+By+Cz+D$ кўпҳад ишорасининг геометрик маъносини текширайлик, $Ax+By+Cz+D=\delta$ бўлсин. Агар $\delta=0$ бўлса, $Ax+By+Cz+D=0$ фазода бирор текисликни ифода қилиши бизга маълум, агар $\delta>0$ ёки $\delta<0$ бўлса, яъни уч номаълумли чизиқли тенгсизликларнинг ҳар бири фазода α текислик билан чегараланган Φ_1 ва Φ_2 очиқ ярим фазоларни ифода қилади, $\delta \leqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ лар эса ярим фазолардан иборат. Бу ярим фазоларни аниқлашда улардан бирорта нуқта олиб, у нуқтанинг координаталари учун берилган δ кўпҳаднинг ишораси текширилади, агар ишора $\Phi \ni M_0$ (x_0, y_0, z_0) учун $Ax_0+By_0+Cz_0+D>0$ бўлса, бу ярим фазодаги барча нуқталар учун ҳам мусбат бўлади ва аксинча. Агар $D \neq 0$ бўлса, бундай нуқта сифатида координаталар бошини олиш қулайдир.

I. Қуйидаги масалаларни аффин реперда қаранг.

756. Берилган M_0 (3, —2, 1) нуқтадан ўтиб, $\vec{l}$ (1, —2, 4), $\vec{m}$ (—3, 0, 4) векторларга параллел бўлган, M_0 (0, —3, 5) нуқтадан ўтиб, $\vec{l}$ (1, —2, 0), $\vec{m}$ (1, 3, 4) векторларга параллел бўлган, M_0 (0, 0, 0) дан ўтиб, $\vec{l}$ (0, 3, 5), $\vec{m}$ (—2, 1, 1) векторларга параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

757. Берилган M_1 (x_1, y_1, z_1) ва M_2 (x_2, y_2, z_2) нуқталардан ўтиб, (Ox) ўққа параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

758. A (—1, —2, 3) ва B (4, 5, —6) нуқталардан ўтиб:

а) (Ox) ўққа параллел бўлган;

б) (Oy) ўққа параллел бўлган;

в) (Oz) ўққа параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

Уч **759.**

а) M_0 (1, 1, —3) нуқтадан ва Ox ўқдан;

б) M_0 (1, 1, —3) нуқтадан ва Oy ўқдан;

в) M_0 (1, 1, —3) нуқтадан ва Oz ўқдан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

760. M_0 (1, —2, 4) нуқтадан ва Oy ўқдан ўтувчи текислик тенгламасини топинг. Бу текисликнинг (xOz) текислиги билан кесишиш чизиғини чизинг.

761. Берилган: 1) M_1 (1, 0, 0), M_2 (—3, 2, —1), M_3 (0, —3, —4); 2) M_1 (1, 2, 3), M_2 (2, 1, 3); M_3 (0, 3, 6) нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

762. M_1 (0, 0, 1) M_2 (0, 0, 2), M_3 (a, b, c) нуқталардан ўтувчи текислик a, b, c ларнинг қандай қийматида ягона бўлади?

763. $ABCD$ тетраэдр берилган. A ни координаталар боши, $\vec{AC}=\vec{e_1}$, $\vec{AB}=\vec{e_2}$, $\vec{AD}=\vec{e_3}$ ларни координаталар векторлари деб олинг ва тетраэдр ёқлари орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

764. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг A (4, 0, 2), B (0, 5, 1), C (4, —1, 3), A_1 (3, —1, 5) учлари берилган. Параллелепипед ёқлари орқали ўтувчи текисликларнинг тенгламаларини тузинг.

765. M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), M_3 (x_3, y_3, z_3), M_4 (x_4, y_4, z_4) нуқталарнинг бир текисликда ётиш шартини топинг.

766. $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, —3, 0)$, $M_3(1, —2, 4)$, $M_4(0, 0z)$ нуқталар z нинг қандай қийматида бир текисликка тегишли бўлишини топинг.

767. $M_1(0, 0, 2)$, $M_2(0, 0, 5)$ $M_3(1, 1, 0)$, $M_4(4, 1, 2)$ нуқталар бир текисликка тегишлими?

768. $M_0(1, 1, —3)$ нуқтадан ўтиб, координаталар ўқидан 7-октантда узунликлари тенг кесмалар ажратган текислик тенгламасини топинг.

769. $M_0(1, 1, 2)$ нуқтадан ўтиб, (Ox) ўқдан $a = 5$, (Oy) ўқдан $b = |—7|$ кесма ажратган текислик тенгламасини топинг.

770. (Oz) ўққа параллел бўлиб, (Ox) дан $a = 3$, (Oy) дан $b = |—4|$ кесма ажратган текислик тенгламасини топинг.

771. $M_1(3, 5, 1)$ ва $M_2(7, 7, 8)$ нуқталардан ўтиб, (Ox) ва (Oy) ўқлардан тенг кесмалар ажратувчи текислик тенгламасини топинг.

772. $2x — y + 3z — 6 = 0$ текисликнинг кесмалар бўйича тенгламасини топинг. Бу текисликнинг координаталар системасига нисбатан вазиятини тасвирланг.

773. $2x — y — 3z — 1 = 0$ текисликка тегишли бўлган бир нечта нуқтанинг координаталарини топинг.

774. Ординатаси 3 бўлган нуқта yOz текислигига ва $x + y + z — 1 = 0$ текисликка тегишли экани маълум бўлса, унинг абсцисса ва аппликатасини топинг.

775. П текисликнинг умумий тенгламаси $2x — y + z — — 3 = 0$ бўлса, $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(—1, 2, —3)$, $M_3(5, 0, 1)$, $M_4(0, 0, —3)$ нуқталардан қайси бирлари П текисликка тегишли эканини топинг.

776. Қуйидаги текисликларнинг аффин координаталар системасидаги вазиятини аниқланг, уларнинг координаталар текислигидаги изларини топиш йўли билан бирор октантдаги бўлагини тасвирланг:

1) $2x — y + 4 = 0$;
2) $x + y + 2z = 0$;
3) $x — y + z — 2 = 0$;
4) $x + 2z = 0$;
5) $x — 4 = 0$;
6) $y + z + 1 = 0$;
7) $3y + 5 = 0$;
8) $2y — z = 0$;
9) $x = 0$.

777. Параллелепипед диагоналининг учларидан чиқувчи учта қиррасининг охирларидан ўтган икки текислик бу диагоналнi тенг уч бўлакка бўлишини исбот қилинг.

II. Қуйидаги масалаларни декарт реперда қаранг.

778. $M_0(a, b, c)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{n}(A, B, C)$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

779. $M_0(1, 3, — 1)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{n}(1, 0, — 5)$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

780. $M_0(—3, 1, 6)$ нуқтадан ўтиб: 1) Ox ўққа перпендикуляр; 2) Oy ўққа перпендикуляр; 3) Oz ўққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

781. $M_0(1, 0, 5)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{l}(1, — 1, 3)$, $\vec{m}(1, 0, — 4)$ векторларга параллел бўлган текисликнинг тенгламасини топинг.

782. $M_1(1, — 2, 0)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{p_1}(1, — 1, 1)$, $\vec{p}(—1, 3, 4)$ векторларга параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

783. Қуйидаги текисликларнинг нормал векторлари координаталарини ёзинг:

$x + y + z — 3 = 0$; $\quad x — y + 6 = 0$;
$2x — z + 1 = 0$; $\quad x + 3y + 2z = 0$.

784. Қуйидаги текисликларнинг $Б = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперга нисбатан вазиятини аниқлаб, тасвирини ясанг:

1) $2x — 3y + 6z — 12 = 0$;
2) $x + y — 5 = 0$;
3) $2x — 3y — 6 = 0$;
4) $5y + 2z — 4 = 0$;
5) $x + y + z = 0$;
6) $2y — 5 = 0$;
7) $x + 3 = 0$;
8) $5z — 7 = 0$;
9) $2x — 3y = 0$;
10) $x + 3z = 0$;
11) $2y — z = 0$;
12) $x = 0$;
13) $3y = 0$;
14) $2z = 0$.

785. Координаталар бошидан ўтиб, $2x — y + 3z — 1 = 0$ ва $x + 2y + z = 0$ текисликларга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

? **786.** $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ сферага $M_0(2, — 3, 6)$ нуқтада уринувчи текисликнинг тенгламасини топинг.

787. $A(1, —3, 1)$ ва $B(0, 2, 4)$ нуқталардан бир хил узоқликда ётган нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

788. Координаталар текисликлари ва $2x + 3y + 6z — — 18 = 0$ текислик билан чегараланган тетраэдр ҳажмини топинг.

789. Координаталар бошидан П текисликка туширилган OP перпендикулярнинг узунлиги p, унинг координаталар ўқи билан ҳосил қилган бурчаклари α, β, γ бўлган ҳолда П текисликнинг тенгламасини топинг.

790. Ён қирралари ўзаро перпендикуляр ва узунликлари a, b, c бўлган $OABC$ пирамиданинг баландлиги h га тенг бўлса, $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ тенглик ўринли бўлишини исбот қилинг.

791. $3x + y + 2z + 3 = 0$ текислик ва M_1 (1, 0, 1,), M_2 (3, —2, 5), M_3 (0, 0, —6), M_4 (—2, 5, 4) нуқталар берилган. Бу нуқталарнинг қайсилари берилган текислик билан чегараланган ярим фазоларнинг координаталар бошини ўз ичига олган қисмида ётишини аниқланг.

792. Учлари A (2, 5,—1), B (1,—5,—15), C (—2, 1, 3) нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг ҳар бири қайси координаталар текисликлари билан кесишади?

793. $x—y+z+1=0$ текислик билан ҳосил қилинган ва M (1, 1, 1,) нуқтани ўз ичига олувчи ярим фазони аниқловчи тенгсизликни ёзинг.

40-§. ФАЗОДА ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ. ИККИ ТЕКИСЛИКНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

Бирор $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ аффин реперга нисбатан Π_1 ва Π_2 текисликлар умумий тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\Pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$
$$\Pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

Маълумки, икки текислик фазода 3 хил вазиятда бўлади:

1) бир тўғри чизиқ бўйлаб кесишади;
2) ўзаро параллел бўлади;
3) устма-уст тушади.

Бу учала вазиятни уларнинг тенгламаларига нисбатан қуйидаги шартларга келтириш мумкин: агар берилган текисликлар битта тўғри чизиқ бўйлаб кесишса, уларнинг иккаласига бир вақтда тегишли бўлган нуқталар тўпламининг координаталари (1) ва (2) тенгламаларни қаноатлантиради, яъни улардан тузилган

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

система чексиз кўп ечимларга эга бўлиб, ечимлар тўпламини ифодаловчи нуқталар кесишиш чизиғида ётади:

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = d\, r = \text{ранг}\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \end{pmatrix} = R = \text{ранг}\begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \end{pmatrix} = 2\,(r = R).$$

Худди шунингдек, агар $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$ бўлса, (3) система ечимга эга эмас, $r = 1$, $R = 2$ бўлиб, икки текисликнинг параллеллик шарти $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ келиб чиқади.

Агар $\Pi_1 = \Pi_2$ бўлса, $r = R = 1$ бўлади, (3) системанинг ечимлари тўплами берилган текисликлардаги нуқталар тўпламидир ёки $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ муносабат ўринли.

Учта текисликнинг ўзаро вазияти

Бирор $Б = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ реперда учта текислик умумий тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$
$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad (2)$$
$$\Pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \qquad (3)$$

Бу текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқлаш масаласи яна уларнинг тенгламаларидан тузилган системани текширишга келтирилади:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Бу система учун

$$r = \text{ранг}\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{pmatrix}, \quad R = \text{ранг}\begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \\ A_2B_2C_2D_2 \\ A_3B_3C_3D_3 \end{pmatrix} \text{ бўлиб:}$$

1) $r = R = 3$ бўлса, (4) система ягона ечимга эга, берилган текисликлар битта нуқтада кесишади;

2) $r = 2$, $R = 3$ бўлса, (4) система ечимга эга эмас, лекин берилган текисликлар ўзаро 2 хил вазиятда бўлиши мумкин:

а) асосий матрицанинг ихтиёрий 2 йўли элементлари пропорционал бўлмаса, берилган текисликларнинг ҳар иккитаси ўзаро кесишиб, кесишиш чизиғига учинчиси параллел бўлади;

б) асосий матрицанинг ихтиёрий 2 йўли элементлари пропорционал бўлса, шу йўлларга мос келган текисликлар ўзаро параллел бўлб, учинчи текислик уларни кесади;

$-y-4z$
$-y+2z$

3) $r=2$, $R=2$ бўлсин, бунда учала текислик бир тўғри чизиқ бўйлаб кесишади;

4) $r=1$, $R=2$ бўлсин, бу ҳолда текисликлар умумий нуқтага эга эмас, лекин бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин;

а) текисликлардан иккитаси ўзаро параллел бўлиб, учинчиси улардан бири билан устма-уст тушади;

б) учаласи ўзаро параллел бўлади.

5) $r=R=1$ бўлсин, бунда берилган учта текислик устма-уст тушади.

794. Қуйидаги текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг:

а) $3x+5y+z-5=0$; $8x+7y+4z-1=0$;
б) $2x-y-z+1=0$; $x+3y+4z+5=0$;
с) $x+y+z-1=0$; $x+y+z=0$;
д) $x-3y+2z+1=0$; $2x-y+z=0$.

795. $Б=(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперда:

1) $M_0(3, -2, 5)$ нуқтадан ўтиб, $2x-y-z+3=0$ текисликка;

2) координаталар бошидан ўтиб, $x-y+3z-5=0$ текисликка;

3) $M_0(1, -1, 3)$ дан ўтиб, $2x-y+z+5=0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

796. $x-2y+4z-3=0$ ва $2x+y-4z+3=0$ текисликларнинг кесишиш чизиғига тегишли бирорта нуқтанинг координаталарини топинг.

797. $2x+5y+6z+4=0$ ва $3y+2z+6=0$ текисликларнинг кесишиш чизиғидан ва координаталар бошидан ўтган текислик тенгламасини тузинг.

798. $M(-3, 1, 0)$ нуқтадан ва $x+2y-z+4=0$, $3x-y+2z-1=0$ текисликларнинг кесишиш чизиғидан ўтган текислик тенгламасини топинг.

799. $2x-y+z-4=0$, $x+y-z-2=0$, $2x-y+3z-6=0$ текисликлар бир нуқтада кесишишини кўрсатинг ва бу нуқтанинг координаталарини топинг.

800. $x+y+z+1=0$, $x+2y+3z+4=0$, $x-y+\lambda z-1=0$ текисликлар λ нинг қандай қийматларида ягона нуқтада кесишади?

801. $x-y=0, x+y-2z+1=0$, $2x+z-4=0$ текисликларнинг кесишган нуқтаси ҳамда $M(2, 1, 7)$ ва $O(0, 0, 0)$ нуқталардан ўтган текисликнинг тенгламасини топинг.

802. $x-y-z+4=0$, $3x-z+5=0$, $5x+y-z+1=0$ текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг.

803. $x+2y-z-4=0$, $3x-2y+3z-6=0$ ва $4y-3z+3=0$ текисликлар призманинг ён ёқлари эканини кўрсатинг, биринчи иккитасининг кесишиш чизиғидан учинчисига параллел қилиб ўтказилган текислик тенгламасини топинг.

804. Қуйидаги текисликларнинг бир тўғри чизиқ бўйлаб кесишишини кўрсатинг:

1) $x-y+z+1=0$, $2x-y-3z-2=0$, $4x-3y-2=0$;
2) $11x-2y+5z-2=0$, $x-2y+3z=0$, $5x+z-1=0$.

805. Берилган тўртта $2x-y+z-2=0$, $x+2y-4z+1=0$, $x-y+z-1=0$ текисликнинг бир нуқтада кесишишини кўрсатинг ва у нуқтанинг координаталарини топинг.

806. $5x+2y-6=0$, $x+y-3z=0$, $2x-3y+z+8=0$ ва $3x+2z-1=0$ текисликлар умумий нуқтага эгами?

41-§. ТЕКИСЛИКЛАР ДАСТАСИ ВА БОҒЛАМИ

Ушбу параграфдаги масалалар бирор аффин реперда қаралади. Фазода бирор d тўғри чизиқдан ўтувчи барча текисликлар тўпламига d ўқли даста дейилади. Агар дастага тегишли икки текисликнинг

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

тенгламалари берилган бўлса, d ўқли дастанинг тенгламаси

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\ (\lambda, \mu\in R,\ \lambda^2+\mu^2\neq 0) \quad (1)$$

кўринишда бўлади.

Фазода бирор П текисликка параллел бўлган барча текисликлар тўпламига параллел текисликлар дастаси дейилади.

Агар П текислик тенгламаси

$$Ax+By+Cz+D=0$$

кўринишда бўлса,

$$Ax+By+Cz+\lambda=0 \quad (2)$$

тенглама П текисликка параллел бўлган текисликлар дастасининг тенгламасини ифода қилади.

Фазода берилган M_0 (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи барча текисликлар тўпламига M_0 марказли текисликлар боғлами дейилади.

Боғламнинг тенгламаси

$$A\ (x-x_0)+B\ (y-y_0)+C\ (z-z_0)=0 \qquad (3)$$

кўринишда бўлиб, ундаги A, B, C ўзгарувчиларнинг маълум қийматларида боғламдан маълум битта текислик тенгламаси ҳосил бўлади.

Кўпинча M_0 марказли боғламдаги ихтиёрий учта текислик тенгламаси берилган бўлса:

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$\Pi_3:\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,$$

боғламнинг тенгламаси

$$\alpha\ (A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta\ (A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma\ (A_3x+ +B_3y+C_3z+D_3)=0,\ \ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0) \qquad (4)$$

кўринишда бўлади.

807. $\lambda\ (x+y+z+1)+\mu\ (x+2y+3z-1)=0$ дастадан ихтиёрий бирорта текисликнинг тенгламасини топинг.

808. 1) $\lambda\ (2x+5y-6z+4)+\beta\ (3y+2z+6)=0$ дастага тегишли ва координаталар бошидан ўтувчи;

2) $\lambda\ (x+y+z+1)+\mu\ \ (x+2y+3z-1)=0$ дастага тегишли ва M_0 (1, 3, -2) нуқтадан ўтувчи;

3) $4x-y+3z-1=0$, $x+5y-z+2=0$ текисликлар билан аниқланувчи дастага тегишли ва M_0 (-2, 0, 1) нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

809. $5x-2y-4z+8=0$ ва $x+4y-2z-4=0$ текисликларнинг кесишиш чизиғидан ўтувчи ва $2x-y+z-+2=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг,

810. Ox ўқдан ўтувчи текисликлар дастасининг тенгламасини топинг.

811. $11x-2y+5z-2=0$ текислик $x-2y+3z=0$ ва $5x+z-1=0$ текисликларнинг кесишиш чизиғидан ўтишини исбот қилинг.

812. 1) M (-2, 3, 1) нуқтадан ўтиб, $2x-y+z+1==0$ текисликка параллел;

2) M (-3, 1, 0) нуқтадан ўтиб, $2x-y-3z+5=0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

813. $x+y-z+2=0$, $4x-3y-3z-1=0$. $2x+y++1=0$ текисликларнинг кесишган M нуқтасидан ўтиб, (xOz) текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

814. Oy ўқдан ва $x-y=0$, $x+y-2z-1=0$, $2x+z-4=0$ текисликларнинг умумий M_0 нуқтасидан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

815. γ нинг қандай қийматида $x+y+z+1=0$, $x++2y+3z+4=0$ ва $x-y+\gamma z-1=0$ текисликлар битта M_0 марказли боғлам ташкил этади?

816. $x-y=0$, $x+y-2z+1=0$, $2x-z-4=0$ текисликларнинг кесишган нуқтасидан, координаталар бошидан ва (2, 1, 7) нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

42-§. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ДА НУҚТАДАН ТЕКИСЛИККАЧА БЎЛГАН МАСОФА ВА ИККИ ТЕКИСЛИК ОРАСИДАГИ БУРЧАКНИ ҲИСОБЛАШ

1. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан тенгламаси $Ax+By+Cz++D=0$ бўлган П текисликкача бўлган масофа

$$\rho\,(M_0,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (1)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

2. $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ текисликлар орасидаги бурчак

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (2)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Икки текислик перпендикулярлигининг зарур ва етарли шарти $(\vec{n}_1\ \vec{n}_2)=0$ ёки $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ бўлишидан иборат.

817. $M(-2, 1, 3)$ нуқтадан:

а) $\Pi: 3x-6y-2z-3=0$;

б) $\Pi: 6x-3y+2z-7=0$;

в) $\Pi: 2x+2y-z-6=0$ текисликларгача масофани ҳисобланг.

818. Координаталар бошидан ўтиб, $2x-2y+z-5=0$ текисликка параллел бўлган текислик билан $M_0(4, -6, 1)$ нуқта орасидаги масофани топинг.

819. Ўзаро параллел бўлган:

1) $x-5y+2z+19=0$ ва $x-5y+2z-18=0$ текисликлар;

2) $2x+6y-3z-3=0$, $4x+12y-6z-7=0$ текисликлар;

3) $x-3y+2z+5=0$ ва $2x-6y+4z+3=0$ текисликлар орасидаги масофани ҳисобланг.

820. $x-4y-8z+5=0$ текисликдан 4 бирлик масофада ётувчи, унга параллел текислик тенгламасини топинг.

821. $6x-3y+2z-14=0$ текисликдан 3 бирлик масофада ётувчи нуқталар тўпламининг тенгламасини топинг.

822. Берилган текисликдан берилган масофада ётган нуқталар тўплами берилган текисликка паралел бўлган икки текисликдан иборат эканини исбот қилинг.

823. 1) $x+y-3=0$ ва $2x-2z+1=0$ текисликлар; 2) $2x-y+3z=0$ ва $x+4y-6z=0$ текисликлар орасидаги бурчакни ҳисобланг.

824. Ox ўқдан ўтиб, $x-2y+3z-4=0$ текислик билан 45° ли бурчак ҳосил қилувчи текисликлар тенгламаларини топинг.

825. Координаталар бошидан ўтувчи шундай текислик тенгламасини топингки, у $5x-2x+5z-10=0$ текисликка перпендикуляр ва $x-4y-8z+12=0$ текислик билан 45° ли бурчак ҳосил қилсин.

826. Берилган икки кесишувчи текисликдан баравар узоқликда ётган нуқталар тўплами берилган текисликлар орасидаги бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликдан иборат эканини исбот қилинг.

43-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТУРЛИЧА БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

1. Берилган M_0 нуқтадан ўтиб, берилган $\vec{u}$ векторга параллел бўлган u тўғри чизиқ тенгламаси

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{u} \quad (t\in R) \tag{1}$$

кўринишда бўлиб, уни u тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси дейилади, M_0 u тўғри чизиқнинг маълум нуқтаси, $\vec{u}$ вектор эса u нинг йўналтирувчи вектори дейилади.

2. Агар бирор $Б=(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ системада $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}(l, m, n)$ бўлса, (1) дан қуйидаги боғланишлар келиб чиқади:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{2}$$

(2) система u тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади. Агар (2) даги $l\cdot m\cdot n\neq 0$ (l, m, n ларнинг ҳар бири нолдан фарқли) бўлса, (2) дан

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{3}$$

тенгламалар ҳосил бўлади (3) ни u тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари дейилади.

Берилган $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{4}$$

кўринишда бўлади.

Агар u тўғри чизиқни берилган $\Pi_1\nparallel\Pi_2$ текисликларнинг кесишиш чизиғи сифатида қаралса ва бу текисликларнинг тенгламалари $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ лардан иборат бўлса, u тўғри чизиқнинг нуқталари бу тенгламалардан тузилган системанинг ечимлари тўпламидан иборат бўлиб,

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{5}$$

системани u тўғри чизиқнинг умумий тенгламалари дейилади. (2), (3), (4) ва (5) тенгламаларнинг ҳар биридан иккинчисига ўтиш мумкин. Масалан, (5) дан (3) га ўтиш учун u тўғри чизиқдаги бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта ва унинг $\vec{u}$ йўналтирувчи вектори топилади, M_0 ни топиш учун (5) системанинг бирорта (x_0, y_0, z_0) ечимини топиш қийин эмас. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ дан фойдаланиб, (5) ни қуйидагича

$$\begin{cases} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0 \end{cases}$$

ёзиб олинса, ундан

$$x-x_0=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t,\ y-y_0=\begin{vmatrix} C_1A_1 \\ C_2A_2 \end{vmatrix} t,\ z-z_0=\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix} t$$

ёки

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \tag{6}$$

ҳосил бўлади, бу эса u тўғри чизиқнинг (3) кўринишдаги тенгламаларидан иборат.

Агар юқоридаги мулоҳаза $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ системада қаралса, $\vec{n}_1 (A_1B_1C_1)$ Π_1 текисликнинг, $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ эса Π_2 текисликнинг нормал вектори бўлиб, $\vec{u}=[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2]$ демакдир.

Бирор турдаги тенгламалари билан берилган u тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтса, (0, 0, 0) нуқта унинг тенгламаларини қаноатлантиради, бундай тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

кўринишда, умумий тенгламалари

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \end{cases}$$

кўринишда (ва ҳоказо) бўлади.

Қуйидаги масалаларни $Б = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ системада қаранг.

827. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг ҳар бирининг учтадан нуқтасининг координаталарини топинг:

$$u_1: \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -3, \\ z = 3t + 2; \end{cases} \qquad u_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{1};$$

$$u_3: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

828. $M_0(-1, 3, 1)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{u}$ (3, 1, —2) векторга параллел бўлган тўғри чизиқнинг параметрик ва каноник тенгламаларини тузинг.

уйга **829.** A (0, 1, 0) нуқтадан ўтиб, Oz ўққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини тузинг.

уйга **830.** Координаталар ўқларининг параметрик тенгламаларини тузинг.

831. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ тўғри чизиқда:

1) абсциссаси учга тенг бўлган нуқтанинг координаталарини топинг;

2) аппликатаси тўртга тенг бўлган нуқтанинг координаталарини топинг;

3) бу тўғри чизиқнинг тенгламаларини икки текисликнинг кесишиш чизиғи сифатида ифодаланг.

832. Берилган $M_1(-3, 5, 1)$ ва $M_2(1, 0, -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаларини топинг.

833. $\begin{cases} y - 1 = 0, \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$ тўғри чизиқдаги абсциссаси 2 бўлган M_1 нуқта ва $M_2(-1, 3, 5)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаларини топинг.

834. Абсцисса ва ордината ўқларидан бир бирликдаги кесма кесувчи тўғри чизиқ тенгламаларини топинг.

835. $2x-3y+z+5=0$ текисликнинг координаталар текисликлари билан кесишиш чизиқларининг тенгламаларини ёзинг.

836. $2x - y + z + 1 = 0$ текислик билан $M_1(3, 2, 0)$, $M_2(1, -1, 1)$ ва $M_3(1, -3, 2)$ нуқталардан ўтувчи текислик кесишишидан ҳосил бўлган тўғри чизиқ тенгламаларини топинг.

837. u: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ тўғри чизиқ:

а) Ox ўқ билан кесишиши учун;

б) Oz ўқ билан устма-уст тушиши учун;

в) Oy ўққа параллел бўлиши учун;

г) координаталар бошидан ўтиши учун тенгламалар системасидаги коэффициентлар қандай шартларни қаноатлантириши кераклигини аниқланг.

838. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг координаталар системасига нисбатан қандай жойлашишини аниқланг:

$$u_1: \begin{cases} 2y - z + 1 = 0, \\ 3y + z + 4 = 0; \end{cases} \qquad u_3: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0; \end{cases}$$

$$u_2: \begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 5x + y = 0; \end{cases} \qquad u_4: \begin{cases} 7x + 8y - 3z + 6 = 0, \\ 3x + y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

839. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0, \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ тўғри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишишини исбот қилинг.

840. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг параметрик ва каноник тенгламаларини топинг.

$$u_1: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases} \qquad u_2: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$u_3: \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

841. $M_0(1, -3, 4)$ нуқтадан ўтиб, $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$

тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини топинг.

44-§. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ ВА ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ БУРЧАКНИ ҲИСОБЛАШ

$Б = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ системада u_1 ва u_2 тўғри чизиқлар параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$u_1: \begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \\ z = z_1 + n_1 t; \end{cases} \quad u_2: \begin{cases} x = x_2 + l_2 t, \\ y = y_2 + m_2 t, \\ z = z_2 + n_2 t. \end{cases}$$

u_1 тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{u}_1(l_1, m_1, n_1)$ ва унда ётувчи маълум нуқта $M_1(x_1, y_1, z_1)$, худди шунингдек, u_2 тўғри чизиқ учун мос равишда $\vec{u}_2(l_2, m_2, n_2)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ бўлсин.

Фазода икки тўғри чизиқ ўзаро параллел, кесишувчи ва айқаш бўлиши мумкин. Бу муносабатларни берилган тенгламаларга нисбатан қараб чиқайлик.

1. $u_1 \parallel u_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$. (1)

Агар биринчисидаги маълум M_1 нуқтанинг координаталари иккинчисининг тенгламаларини қаноатлантирса, бу икки тўғри чизиқ устма-уст тушади.

2. $u_1 \cap u_2 \neq \varnothing$, бу тўғри чизиқлар кесишиши учун улар бир текисликда ётиши керак, яъни

$$(\vec{u}_1 \vec{u}_2 \overrightarrow{M_1 M_2}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Демак, агар (2) даги детерминантнинг 1 ва 2- йўллари пропорционал бўлмаса ва (2) бажарилса, берилган тўғри чизиқлар кесишади.

3. Агар u_1 ва u_2 бир текисликда ётмаса (кесишмаса ва параллел бўлмаса), улар айқаш дейилади. u_1 ва u_2 тўғри чизиқларнинг айқашлик шарти

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

бўлади.

$\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ да берилган u_1 ва u_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак косинуси қуйидагича топилади:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (4)$$

u_1 ва u_2 тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (5)$$

кўринишда бўлади.

842. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг ўзаро вазиятини аниқланг:

1) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t \end{cases}$ ва $\begin{cases} x = 27 - 9t, \\ y = 15 - 5t, \\ z = -t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ y - 3z = 0; \end{cases}$

3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}$ ва $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$;

4) $\begin{cases} 3x - y - 5z + 7 = 0, \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$ ва $\begin{array}{l} x - 2y + z = 0, \\ 2y - 2z - 5 = 0. \end{array}$

843. Қуйидаги тўғри чизиқлар бир текисликда ётишини исбот қилинг ва бу текисликнинг тенгламасини тузинг:

$u_1: \begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -6t, \\ z = -1 - 8t \end{cases}$ ва $u_2: \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t, \\ z = 12t. \end{cases}$

844. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг ўзаро кесишишини кўрсатинг ва улар орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини тузинг:

$u_1: \begin{cases} x + z + 2 = 0, \\ 2x - y + 1 = 0; \end{cases}$ $u_2: \begin{cases} 5x + 4z + 3 = 0, \\ 2x + y + 3z = 0. \end{cases}$

845. 1) (0, 0, 1) нуқтадан ўтувчи ва

$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ 2x - y + 2z - 3 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2t, \\ z = -t - 1 \end{cases}$

тўғри чизиқларнинг ҳар бири билан кесишувчи тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларини топинг;

2) координаталар бошидан ўтувчи

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 - t, \\ z = 4 + 3t \end{cases}$$

тўғри чизиқларнинг ҳар бири билан кесишувчи тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини топинг.

846. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесишишини исбот қилинг ва кесишган нуқтасининг координаталарини топинг:

1) u_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$; u_2: $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = z + 2$;

2) v_1: $\begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ 3x + y - z + 13 = 0; \end{cases}$ v_2: $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0; \end{cases}$

3) w_1: $\begin{cases} 7x + 3y + z - 5 = 0, \\ 5y - 2z - 1 = 0; \end{cases}$ w_2: $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ 11x - 3z + 6 = 0. \end{cases}$

847. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни ҳисобланг:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+16}{-6}$ ва $\begin{cases} x = 4 + 3t, \\ y = -10, \\ z = 5 + t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

848. Учлари $A(3, -1, 0)$, $B(0, -7, 3)$, $C(-2, 1, -1)$ ва $D(3, 2, 6)$ нуқталарда ётган тетраэдрнинг қарама-қарши қирралари орасидаги бурчакни ҳисобланг.

849. $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

тўғри чизиқнинг координаталар ўқи билан ҳосил қилган бурчакларининг косинусларини топинг.

850. Кубнинг диагоналлари орасидаги бурчакнинг косинусини ҳисобланг.

45-§. ФАЗОДА ТЕКИСЛИК БИЛАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ

Бу параграфдаги масалалар $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ системада қаралади.

Фазода П: $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик ва $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

тўғри чизиқ берилган бўлсин, бу ерда $\vec{n}(A, B, C)$ — П текислик нормали, $\vec{u}(l, m, n)$ — тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — тайин нуқта.

1. Агар П текислик билан u тўғри чизиқ кесишса, уларнинг кесишган нуқтаси бир йўла иккала фигурага тегишли бўлиб, унинг координаталари текислик ва тўғри чизиқнинг тенгламаларидан тузилган системанинг ечими сифатида топилади:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}. \qquad (1)$$

t нинг қийматига мос келувчи x, y, z изланган нуқта координаталарини билдиради.

2. Агар (1) да $Al + Bm + Cn = 0$ (2) бўлса, П текислик u тўғри чизиққа параллел бўлади.

3. Агар (2) билан бирга $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ ($M_0 \in \in П$) (3) ўринли бўлса, u тўғри чизиқ П текисликда ётади.

4. Агар П текислик u тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса,

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C} \qquad (4)$$

ўринли бўлади.

П текислик билан u тўғри чизиқ орасидаги бурчак қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (5)$$

851. П: $3x + 2y - 5z - 1 = 0$ текислик билан

$$u: \begin{cases} x = 4t + 2, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасини топинг.

852. 1) u: $\frac{x+6}{-2}=\frac{y-1}{3}=z-1$ тўғри чизиқ билан П: $2x-5y+6z-1=0$ текисликнинг;

2) $\begin{cases} x=5t+2, \\ y=-8t-3, \\ z=3t+4 \end{cases}$

тўғри чизиқ билан П: $7x+y-9z+53=0$ текисликнинг ўзаро вазиятини аниқланг.

853. $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-8t-3, \\ z=\alpha t+2 \end{cases}$

тўғри чизиқ ва $3x+4y+7z-2=0$ текислик берилган. α нинг қандай қийматида тўғри чизиқ текисликка параллел бўлади?

854. Шундай тўғри чизиқ ва текислик тенгламасини ёзингки, улар: 1) ўзаро параллел бўлсин; 2) кесишсин.

855. $M(1, -1, 3)$ нуқтадан ва $x=4t$, $y=6t+5$, $z=t$ тўғри чизиқдан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

856. $\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{z}{4}$ тўғри чизиқ орқали ўтиб, $2x-y+z+1=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

857. $M_0(3, -5, 1)$ нуқтадан ўтиб, $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{5}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

858. $\frac{x-5}{6}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{2}$ тўғри чизиқ билан $4x+y-8z+16=0$ текислик орасидаги бурчакни ҳисобланг.

859. $x=y=z$ тўғри чизиқ билан координаталар текисликлари орасидаги бурчакларни ҳисобланг.

VII боб. КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

Бобнинг барча масалалари $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ системада қаралади.

46- §. СФЕРА

С нуқта ва $r>0$ сон берилганда фазодаги $CM=r$ бўлган барча *М* нуқталар тўпламига *сфера* дейилади ва уни $\omega(C, r)$ деб белгилаймиз. *С* нуқта сфера маркази, *r* эса унинг радиуси дейилади.

Агар фазодаги бирор $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперда $C(x_0, y_0, z_0)$ бўлса, сфера тенгламаси $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ (1) бўлади, бу тенгламани сферанинг нормал тенгламаси дейилади. Хусусий ҳолда, агар сфера маркази координаталар бошида бўлса, унинг тенгламаси $x^2+y^2+z^2=r^2$ (1′) дан иборат бўлади.

Агар қуйидаги уч номаълумли, иккинчи даражали алгебраик $Ax^2+Ay^2+Az^2+2Bx+2Cy+2Dz+E=0$ (2) тенглама берилган бўлса (тенгламадаги x^2, y^2, z^2 ларнинг коэффициентлари тенг), тўла квадратлар ажратиб, бу тенгламанинг кўринишини қуйидаги ҳолга келтириш мумкин:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\alpha. \qquad (3)$$

(3) тенглама:

1) α ҳақиқий сон бўлса, $\sqrt{\alpha}$ радиусли сферани;

2) $\alpha=0$ бўлса, (x_0, y_0, z_0) нуқтани;

3) α мавҳум сон бўлса, «мавҳум радиусли сфера»ни ифода қилади. 3-ҳолни бирорта ҳам ҳақиқий нуқтани ифода қилмайди, дейиш ҳам мумкин.

860. Қуйидаги тенгламалар билан берилган сфераларнинг марказини, радиусини топинг ҳамда фазодаги шу сфераларнинг тасвирини чизинг:

1) $x^2+y^2+z^2=4$;
2) $x^2+(y-2)^2+z^2=1$;
3) $x^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{1}{4}$;
4) $2x^2+2y^2+2(z-3)^2=1$;
5) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$.

861. Қуйидаги сфера тенгламаларини нормал ҳолга келтиринг, сфера марказини ва радиусини кўрсатинг:

1) $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+13=0$;
2) $x^2+y^2+z^2+2x-6y+8z+10=0$;
3) $x^2+y^2+z^2-12x-6y+37=0$;
4) $x^2+y^2+z^2-3y=0$;
5) $4x^2+4y^2+4z^2-16x-4y+8z+17=0$;
6) $x^2+y^2+z^2-4x+12y-2z+41=0$;

7) $x^2+y^2+z^2-6x+10=0$;

8) $x^2+y^2+z^2-5x+\frac{4}{3}y-\frac{\sqrt{15}}{3}z=0$.

862. Маркази:

1) $C(-1,\ 3,\ \sqrt{2})$ нуқтада ва радиуси $r=5$ бўлган;

2) $C\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 3\right)$ нуқтада ва радиуси $r=2$ бўлган;

3) $C(0,\ 0,\ 0)$ нуқтада ва $A(6,\ -2,\ 3)$ нуқтадан ўтувчи;

4) $C(-2,\ 1,\ 3)$ нуқтада ва $A(0,\ -1,\ 2)$ нуқтадан ўтувчи сфера тенгламасини топинг.

863. Маркази $C\left(2,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$ нуқтада, $4x-4y+2z+17=0$ текисликка уринувчи сфера тенгламасини топинг.

864. Диаметрининг учлари A (5, —7, 12) ва B (—1, 1, —12) нуқталарда бўлган сфера тенгламасини топинг.

865. Маркази C (6, —8, 3) нуқтада, Oz ўққа уринувчи сфера тенгламасини топинг.

866. A (2, 3, 0) нуқтада xOy текисликка $12y-5z=0$ текисликка уринувчи сферанинг марказини ва радиусини топинг.

867. Қуйидаги: 1) $2x-6y+3z-49=0$;

2) $4x-3y+101=0$;

3) $3x-2y+z+6=0$

текисликларнинг ҳар бири $x^2+y^2+z^2=49$ сферага нисбатан қандай жойлашганини аниқланг.

868. 1) $x^2+y^2+z^2=9$ сферага $A(2,\ -1,\ 2)$ нуқтада уринувчи; 2) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=49$ сферага $A(5,\ 5,\ -4)$ нуқтада уринувчи текислик тенгламасини топинг.

869. Маркази $C(4,\ 5,\ -2)$ нуқтада бўлган $\omega(C,\ r)$ сферага тенгламаси $x^2+y^2+z^2-4x-12y=0$ бўлган сфера ички уринади. $\omega(C,\ r)$ сферанинг тенгламасини топинг.

47-§. ЦИЛИНДРИК СИРТЛАР. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ КОНУС

Фазода γ эгри чизиқ ва $\vec{u}\neq\vec{0}$ вектор берилган бўлсин. γ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан $\vec{u}$ векторга параллел қилиб ўтказилган чизиқлардаги нуқталар тўпламига *цилиндрик сирт* ёки *цилиндр* дейилади. Тўғри чизиқлар цилиндрик сиртнинг *ясовчилари*, γ эгри чизиқ эса унинг *йўналтирувчиси* дейилади.

Қуйидаги **теорема** ўринли: фазода $F(x,\ y)=0$ кўринишдаги ҳар қандай тенглама ясовчилари Oz ўққа параллел йўналтирувчиси xOy текисликда $F(x,\ y)=0$ тенглама билан ифодаланувчи эгри чизиқдан иборат бўлган цилиндрик сиртни билдиради.

Худди шунингдек, теоремани $F(x,\ z)=0$ ёки $F(y,\ z)=0$ тенгламалар учун ҳам айтиш мумкин.

Одатда, иккинчи тартибли цилиндрлар, уларнинг йўналтирувчисига қараб, қуйидагича номланади:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{— эллиптик цилиндр,}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{— гиперболик цилиндр,}$$

$$y^2=2px \text{ — параболик цилиндр.}$$

Фазода γ эгри чизиқ ва O нуқта берилган бўлсин. γ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ва O нуқтадан ўтказилган тўғри чизиқлардаги нуқталар тўпламига *коник сирт* ёки *конус* дейилади. Тўғри чизиқлар конуснинг ясовчилари, γ эгри чизиқ унинг йўналтирувчиси, O нуқта конуснинг учи дейилади.

Иккинчи тартибли конус одатда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ кўринишдаги тенглама билан ифода қилинади. Унинг учи координаталар бошида, йўналтирувчиси эса $z=c$ текисликдаги

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c\end{cases} \quad \text{эллипсдан иборат.}$$

Бу конус учун Oz ўқ унинг *бўйлама ўқи* дейилади, конусни унинг учидан ўтмайдиган ўққа перпендикуляр текисликлар билан кесилганда, кесимда эллипслар чиқади, $a=b$ бўлса, айланма конус ҳосил бўлади.

Агар конуснинг учи $C(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтада бўлса, унинг тенгламаси

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$$

кўринишда бўлади.

870. Қуйидаги сиртларни $Б=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперда тасвирланг:

1) $x^2+y^2=4$;
2) $x^2+z^2=9$;
3) $x^2+y=2$;
4) $z=3y$;
5) $y=x^2$;
6) $z=x^2$;
7) $z+y^2=0$;
8) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;
9) $\frac{y^2}{4}-x^2=1$;
10) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0$.

871. Қуйидаги тенгламалар билан ифодаланган сиртларни аниқланг ва уларнинг тасвирини чизинг:

1) $z=9-y^2$;
2) $z=4-x^2$;
3) $x^2+y^2=2y$;
4) $y^2+2x+1=0$;
5) $xy=1$;
6) $x^2=3z-4$;
7) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$;
8) $x^2+4x+4z^2=0$;
9) $z^2-x^2=4$.

872. Қуйидаги ҳолларнинг ҳар бири учун цилиндр тенгламасини топинг:

1) Йўналтирувчиси xOy текисликда, маркази C (2, —1,0) ва радиуси $r=5$ бўлган айланадан иборат, ясовчилари Oz га параллел; 2) йўналтирувчиси xOz текисликда, параметри $p=1$, учи C (2, 0, 1) нуқтада, ўқи Oz ўқнинг мусбат йўналиши билан бир хил жойлашган параболадан иборат, ясовчилари Oy ўққа параллел; 3) йўналтирувчиси yOz текисликда, маркази координаталар бошида, ўқлари Ox, Oy ўқларга параллел, ярим ўқлари 3 ва 2 бўлган эллипсдан иборат, ясовчилари Ox ўққа параллел.

873. Қуйидаги цилиндрларни $Б=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ системада тасвирланг:

1) $y=\sin x$;
2) $y=\sqrt{x}$;
3) $z=x^3$;
4) $z=e^y$;
5) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

874. Қуйидаги тенгламаларнинг ҳар бири конусни ифодалашини кўрсатинг, конуснинг учини ва ўқини топиб, сиртнинг шаклини ясанг:

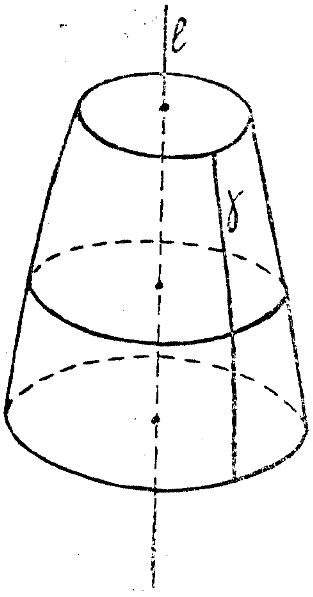
1) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=0$;
2) $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=0$;
3) $x^2-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=0$;
4) $(x-2)^2+(y-3)^2-(z-4)^2=0$.

875. $F(x, y, z)$ — функция бир жинсли бўлганда $F(x, y, z)=0$ тенглама учи координаталар бошида бўлган конусни ифода қилади ва аксинча. Шуни исбот қилинг.

876. Айланма конуснинг учи координаталар бошида, ўқи Oz бўлиб, $M(1, \sqrt{3}, -3)$ нуқта конусда ётиши маълум бўлса, унинг тенгламасини топинг.

48- §. АЙЛАНМА СИРТ

γ эгри чизиқнинг бирор l ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган Ф сиртга *айланма сирт* дейилади. Ф сирт билан l ўқдан ўтувчи текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган кесим эса Ф сиртнинг меридиани дейилади. Ф сиртни ҳосил қилиш учун унинг меридианини l ўқ атрофида айлантириш ҳам мумкин. Ф сиртнинг l га перпендикуляр текислик билан кесимини унинг параллели дейилади. Ф сиртнинг параллеллари айланалардан иборатлиги равшан (20- чизма).



20- чизма.

Айланма сиртнинг берилиши γ чизиқнинг берилишига боғлиқ. γ кўпинча икки сиртнинг кесишмаси сифатида берилади. Фазода координаталари

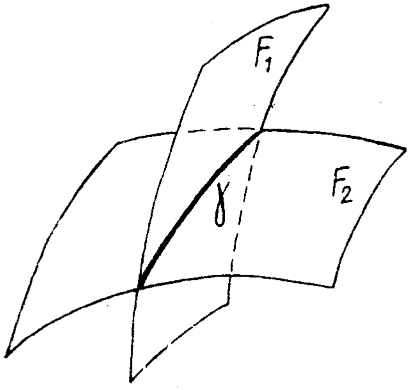
$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

системани қаноатлантирувчи $M(x, y\ z)$ нуқталар тўпламини γ чизиқ деб оламиз.

Албатта, F_1 ва F_2 функциялар ҳар қандай бўлганда ҳам айланган γ чизиқ чиқавермаслиги мумкин, бу функцияларни танлаш масаласи геометриянинг кейинги бўлимларида қаралади (21- чизма).

Агар (1) системадан $H(x, y, z)=0$ (2) натижага келинса, γ чизиқ (2) тенглама билан аниқланувчи H сиртга тегишли бўлади.

(2) тенглама $H(x, y)=0$ кўринишда бўлса, H сирт цилиндрдан иборат бўлиб, у чизиқни xOy текисликка проекцияловчи дейилади. Агар γ

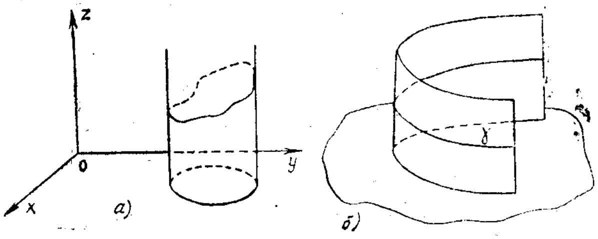


21- чизма.

эгри чизиқ цилиндрнинг ясовчисига перпендикуляр текисликда ётса, у цилиндрнинг йўналтирувчисига конгруэнт бўлади (22-*а*, *б* чизма).

γ чизиқ $\begin{cases} x = \varphi(z), \\ y = \psi(z) \end{cases}$ (3)

тенгламалар системаси билан берилган бўлсин. Бу чизиқни Oz ўқ атрофида айлантириш натижасида, тенгламаси $x^2 + y^2 = \varphi^2(z) + \psi^2(z)$ (4) бўлган Ф сирт ҳосил бўлади.



22- чизма.

877. Тенгламалари $\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2, \\ y = 0 \end{cases}$ системадан иборат бўлган γ эгри чизиқ Oz ўқ атрофида айлантирилган. Айланма сирт тенгламасини топинг, сиртнинг меридиани ва параллелларини кўрсатинг.

878. l тўғри чизиқ Oz ўқ атрофида айлантирилган.

1) l: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0; \end{cases}$ 2) l: $\begin{cases} x = \frac{1}{4} z, \\ y = 0 \end{cases}$

бўлганда ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини топинг.

879. γ чизиқ қуйидаги системалар орқали ифодаланганда унинг Oz ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт тенгламасини топинг:

1) γ: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$ 3) γ: $\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$

2) γ: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$ 4) γ: $\begin{cases} x^2 = 2pz, \ p > 0, \\ y = 0. \end{cases}$

880. 1) l: $\begin{cases} x = 1, \\ 3y - z = 0, \end{cases}$ 2) l: $\begin{cases} x = 1, \\ 3y + z = 0 \end{cases}$ кўринишда берилган l тўғри чизиқ Oz ўқ атрофида айлантирилган. Айланма сирт тенгламасини топинг.

881. l: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 2z \end{cases}$ тўғри чизиқ Oy ўқ атрофида айлантирилган. Айланма сирт тенгламасини топинг.

882. γ: $\begin{cases} z = \cos y, \\ x = 0, \end{cases}$ $0 \leqslant y \leqslant \pi$ эгри чизиқ Oz ўқ атрофида айлантирилган. Айланма сирт тенгламасини топинг.

883. γ: $\begin{cases} z^2 = 2x, \\ y = 0 \end{cases}$ параболани: 1) Oz ўқ атрофида; 2) Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини топинг.

884. 1) γ: $\begin{cases} z = \frac{1}{y}, \\ x = 0 \end{cases}$ эгри чизиқни Oz ўқ атрофида;

2) γ: $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{1 + z} \\ y = 0 \end{cases}$ эгри чизиқни Oz ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини топинг.

885. Агар: 1) γ_1: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} z, \\ y = 0 \end{cases}$ эгри чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт Φ_1, γ_2: $\begin{cases} y^2 = z, \\ x = 0 \end{cases}$ эгри чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт Φ_2 бўлса;

2) γ_1: $\begin{cases} y = 3x, \\ x = 4 \end{cases}$ эгри чизиқни Oz атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сирт Φ_1, γ_2 $\begin{cases} z = \frac{3}{5} x, \\ y = 0 \end{cases}$

эгри чизиқнинг Oz атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сирт Φ_2 бўлса, Φ_1 ва Φ_2 сиртларнинг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқни топинг.

49-§. ЭЛЛИПСОИД. ГИПЕРБОЛОИД. ПАРАБОЛОИД. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛИ ЯСОВЧИЛАР

Координаталари

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

тенгламани қаноатлантирувчи фазодаги $M(x, y, z)$ нуқталар тўпламига *эллипсоид* дейилади. Агар $a=b$ бўлса, айланма эллипсоид ҳосил бўлади.

Худди шунингдек,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

бир паллали гиперболоидни,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3)$$

икки паллали гиперболоидни ифода қилади.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ тенглама конусдан иборат бўлиб, у (2) ва (3) гиперболоидларнинг ассимптотик конуси деб аталади.

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad p,\ q>0 \qquad (4)$$

эллиптик параболоидни,

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (5)$$

гиперболик параболоидни ифода қилади. (4) да $p=q$ бўлса, айланма параболоид ҳосил бўлади. Бу сиртларни тасвирлашда уларнинг координата текисликлари ва уларга параллел текисликлар билан кесимларини топишдан фойдаланиш қулай.

Агар l тўғри чизиқ Φ иккинчи тартибли сиртга тегишли бўлса, бу тўғри чизиқ Φ сиртнинг тўғри чизиқли ясовчиси дейилади. Равшанки, иккинчи тартибли цилиндрлар ва конуслар тўғри чизиқли ясовчиларга эга. Бу сиртлардан ташқари бир паллали гиперболоид ва гиперболик параболоид ҳам тўғри чизиқли ясовчиларга эга.

Бир паллали гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ тенглама билан берилган бўлса, унинг тўғри чизиқли ясовчиларининг икки оиласи қуйидаги тенгламалар системалари билан аниқланади:

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right);\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta'\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha'\left(1+\frac{y}{b}\right).\end{cases}$$

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p,\ q>0)$ гиперболик параболоиднинг тўғри чизиқли ясовчиларининг икки оиласи эса

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha,\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha'\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta' z\\ \beta'\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha'\end{cases}$$

тенгламалар системалари билан ифодаланади, бу ерда α, β, α', β' лар камида биттаси нолдан фарқли бўлган ҳақиқий сонлар. Сиртнинг ҳар бир нуқтасидан бир оиланинг фақат битта тўғри чизиғи ўтади. Бир оилага тегишли ясовчилар кесишмайди.

866—890-масалаларда берилган тенгламалар қандай сиртни ифодалашини аниқланг, бу сиртларнинг координаталар текисликлари ва уларга параллел текисликлар билан кесимларини текширинг:

886. 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+z^2=1$; 2) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$.

887. 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1$;

3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$.

888. 1) $4(x^2+y^2)-z^2=16$;
2) $y^2-16(x^2+z^2)+16=0$;
3) $4(x^2+y^2)-z^2+16=0$;
4) $4(y^2-x^2)-z^2+16=0$.

889. 1) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=z$; 2) $z=x^2+y^2$;
3) $x^2+y^2=-z$; 4) $x^2+y^2=z+1$;
5) $x^2+y^2+z+2=0$; 6) $x^2+z^2=y-3$;
7) $(x-2)^2+z^2=-y$.

890. 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = z$, 2) $y^2 - x^2 = z$.

891. xOy текисликда Ox ва Oy ўқларнинг йўналишини $\frac{\pi}{4}$ бурчакка буриб, координата алмаштиришдан фойдаланиб, $z = \frac{xy}{k}$, $k > 0$, тенглама гиперболик параболоидни аниқлашини кўрсатинг.

892 — 906- масалаларда берилган системаларнинг геометрик маъносини аниқланг:

892. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2z. \end{cases}$

893. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 3. \end{cases}$

894. $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$

895. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9. \end{cases}$

896. $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = z + 1. \end{cases}$

897. $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = 1. \end{cases}$

898. $\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = -(z - 1), \\ x = 1. \end{cases}$

899. $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = -3$, $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.

900. $\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0, \\ y = 1. \end{cases}$

901. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ 4x^2 - 1 = 0. \end{cases}$

902. $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

903. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ x^2 + z^2 = 4y. \end{cases}$

904. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x^2 + (y - 2)^2 = z - 4. \end{cases}$

905. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - 4 = -4z. \end{cases}$

906. $\begin{cases} x^2 + (z + 1)^2 - y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

907. $\frac{x^2}{4} + y^2 - (z - 1)^2 = 1$ бир паллали гиперболоиднинг бош кесимида ҳосил бўладиган эллипс тенгламасини тузинг.

908. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0$ конуснинг қуйидаги α текисликларнинг ҳар бири билан ҳосил қилган кесимини топинг:

1) $z = 0$; 2) $x = 0$; 3) $y = 3$; 4) $z = 2$; 5) $y = \frac{3}{2} z$;

6) $2y - 3z - 6 = 0$.

909. $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y$ гиперболик параболоид билан $3x - 3y + 4z + 2 = 0$ текисликнинг кесимида ҳосил бўлган эгри чизиқни аниқланг, унинг марказини топинг.

910. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ эллипсоид билан $x + 4z - 4 = 0$ текислик кесимининг xOy текисликдаги проекциясини топинг.

911. 1) Учи координаталар бошида, ўқи Oy ўқ билан устма-уст тушган, $A_1(1, -2, 1)$ ва $A_2(-3, -3, 2)$ нуқталардан ўтувчи; 2) учи координаталар бошида, ўқи Ox дан иборат, $M_1(1, 2, 1)$ ва $M_2(2, 4, 0)$ нуқталардан ўтувчи параболоид тенгламасини тузинг.

912. Берилган α текисликдан ва $C \notin \alpha$ нуқтадан тенг масофада жойлашган нуқталар тўпламининг тенгламасини топинг.

913. Бир паллали айланма гиперболоид тўғри чизиқни у билан бир текисликда ётмаган ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт эканини исбот қилинг.

914. Ҳар иккитаси бир текисликда ётмаган қуйидаги учта

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z}{1},$$
$$\frac{x - 2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

ва

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{0} = \frac{z}{1}$$

тўғри чизиқ бўйлаб сирпанувчи тўғри чизиқли сиртнинг тенгламасини топинг.

915. $\frac{x - 2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{2}$ ва $\frac{x}{-2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 1}{2}$

тўғри чизиқлар бўйлаб бир хил ўзгармас тезлик билан иккита нуқта ҳаракатланади; бу нуқталар бир вақтда xOy текисликни кесиб, бири бу текисликдан юқорига, иккинчиси қуйига қараб ҳаракат қилади. Бу икки нуқтани бирлаштирувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган сиртни топинг.

916. Тўғри чизиқ

$$\frac{x - 6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z - 1}{1}$$

ва

$$\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$$

тўғри чизиқларни кесиб, $2x+3y-5=0$ текисликка параллел ҳолда сирпанади. Тўғри чизиқ ҳосил қилган сиртнинг тенгламасини топинг.

917. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ сиртнинг (6, 2, 8) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқли ясовчиларини топинг.

918. $4x-5y-10z-20=0$ текислик $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ бир паллали гиперболоидни унинг тўғри чизиқли ясовчилари бўйлаб кесишини исбот қилинг, бу ясовчиларнинг тенгламаларини топинг.

919. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ бир паллали гиперболоид тўғри чизиқли ясовчисининг координата текислигига ортогонал проекцияси гиперболоиднинг бу текислик билан кесимига уринма эканлигини исбот қилинг.

50-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТНИНГ УРИНМА ТЕКИСЛИГИ

Агар сирт тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$z=\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}$$

бўлса, шу сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтасида уринувчи уринма текислик тенгламаси мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}\pm\frac{zz_0}{c^2}=\pm 1,$$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}\pm\frac{zz_0}{c^2}=0,$$

$$z+z_0=\frac{xx_0}{p}\pm\frac{yy_0}{q}.$$

920. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$ сиртга (—6, 2, 6) нуқтада уринувчи текислик тенгламасини топинг.

921. $\frac{x^2}{72}+\frac{z^2}{4}=z$ параболоиднинг $x-y-2z=0$ текисликка параллел бўлган уринма текисликларини топинг.

922. $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ цилиндр уринма текислигининг *Ox*, *Oy* координаталар ўқидан кесган *a* ва *b* кесмалари $a:b=5:4$ тенгликни қаноатлантиради. Бу текисликнинг тенгламасини топинг.

923. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2=0$ конуснинг (4, —6, 4) нуқтасида уринувчи уринма текислиги тенгламасини топинг.

924. $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=z$ гиперболик параболоид ва унинг уринма текисликларидан бири $10x-2y-2z-21=0$ берилган. Уринма текислик билан сиртнинг кесишишидан ҳосил бўлган ҳар иккала тўғри чизиқнинг тенгламаларини топинг.

925. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{10}=1$ икки паллали гиперболоиднинг $\begin{cases} y=0, \\ z=1 \end{cases}$ тўғри чизиқдан ўтувчи уринма текисликларининг тенгламаларини топинг.

926. $Ax+By+Cz+D=0$ текислик қуйидаги сиртларга уринишининг зарурий ва етарли шартини келтириб чиқаринг:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид учун
$A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2=D^2$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ гиперболоид учун

$A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2=\pm D^2$. Эслатиб ўтиш лозимки, бунда агар $D=0$ бўлса, берилган текислик сиртни параллел тўғри чизиқлар бўйлаб кесиб ўтади ва фазонинг «чексиз узоқлашган» нуқтасида уринади.

3) $\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q}=z$ параболоид учун $A^2p\pm B^2q=2cD$;

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ конус учун $A^2a^2+B^2b^2=C^2c^2$, $D=0$.

927. Бир паллали гиперболоидга ўтказилган уринма текислик бу сиртни иккита тўғри чизиқли ясовчилар бўйича кесишини исбот қилинг.

928. Бир паллали гиперболоидга ўтказилган уринма текислик унинг асимптотик конусини гипербола бўйлаб кесишини исбот қилинг.

929. Агар α текислик икки қўшма гиперболоидларнинг асимптотик конусига уринса, у бир паллали гиперболоидни иккита параллел ҳақиқий тўғри чизиқлар бўйлаб, икки паллали гиперболоидни эса иккита параллел мавҳум тўғри чизиқлар бўйлаб кесади, яъни уларнинг ҳар бирига «чексиз узоқлашган» нуқтада уринади. Буни исбот қилинг.

930. Агар текислик гиперболик параболоидни унинг иккита тўғри чизиқли ясовчилари бўйлаб кесса, у бу сиртнинг уринма текислиги бўлишини исбот қилинг.

931. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ гиперболик параболоиднинг $\frac{x}{8} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{0}$ тўғри чизиқдан ўтувчи уринма текислиги тенгламасини топинг ва уринма нуқтасининг координаталарини аниқланг.

932. Агар l тўғри чизиқ Ф бир паллали гиперболоидни иккита турли ҳақиқий нуқталарда кесиб ўтса, Ф сиртга l тўғри чизиқдан ўтувчи иккита ҳақиқий уринма текислик ўтказиш мумкин. Буни исбот қилинг.

933. 1) $\frac{x}{3} = \frac{y+9}{3} = \frac{z}{1}$; 2) $\frac{x-9}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$;

3) $\frac{x}{6} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$ тўғри чизиқлар

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

бир паллали гиперболоидга нисбатан қандай жойлашганини аниқланг. Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бири орқали ўтувчи гиперболоидга уринма текисликларни топинг.

934. $M_0(-3, 1, 1)$ нуқта, l: $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ z - 9 = 0 \end{cases}$ тўғри чизиқ ва Ф: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$ эллипсоид берилган. Ф сиртнинг l тўғри чизиқ орқали ўтувчи, OM_0 кесмани кесмайдиган уринма текислигининг тенгламасини топинг.

935. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ икки паллали гиперболоиднинг уринма текислиги

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

бир паллали гиперболоидни эллипс бўйлаб кесади. Буни исбот қилинг. (Чексиз узоқлашган нуқтадаги уриниш қаралмайди.)

VIII боб. *n* ЎЛЧОВЛИ АФФИН ВА ЕВКЛИД ФАЗОЛАРИ

51-§. *n* ЎЛЧОВЛИ ВЕКТОР ФАЗО. ВЕКТОРНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

Биз I бобнинг 4-§ да вектор фазо билан танишган эдик. Агар V вектор фазо қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирса, у *n ўлчовли вектор фазо* дейилади ва V_n деб белгиланади.

III_1 — вектор фазода n та чизиқли эркли вектор мавжуд.

III_2 — вектор фазодаги ҳар қандай $(n+1)$ та векторлар системаси чизиқли боғлиқдир.

Агар V вектор фазо учун, III_{1-2} аксиомаларни қаноатлантирувчи бирор n сони мавжуд бўлмаса, у ҳолда бундай вектор фазо чексиз ўлчовли вектор фазо деб юритилади, яъни чексиз ўлчовли вектор фазода етарлича кўп векторлардан ташкил топган чизиқли эркли векторлар системасини ҳосил қилиш мумкин. Биз бундан буён чекли ўлчовли вектор фазо билан шуғулланамиз.

Вектор фазонинг қисм фазоси деб шу фазонинг шундай векторлар тўпламига айтиладики, бу тўплам ҳам векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амалларига нисбатан вектор фазо ҳосил қилади. Масалан, V_1 фазо (бунга мисол тариқасида бир тўғри чизиққа параллел бўлган барча геометрик векторлар тўпламини олиш мумкин) V_2 фазонинг (мисол тариқасида бир текисликка параллел бўлган барча геометрик векторлар тўпламини кўрсатиш мумкин) қисм фазосидир, V_2 эса ўз навбатида V_3 фазонинг (бунга мисол сифатида уч ўлчовли фазодаги барча геометрик векторлар тўпламини олиш мумкин) қисм фазосидир. n ўлчовли вектор фазонинг ихтиёрий n та чизиқли эркин векторлар системасига шу фазонинг базиси дейилади ва $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ кўринишда ёзилади. V_n нинг ихтиёрий $\vec{a}$ векторини шу фазонинг базис векторлари орқали биргина усул билан ифода қилинади:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_n \vec{e}_n.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ базисдаги $\vec{a}$ векторнинг координаталари деб аталади, у $\vec{a}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_Б$ кўринишда белгиланади. Демак:

$$\vec{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)_Б \Leftrightarrow \vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_n \vec{e}_n.$$

Агар $\vec{a}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_Б$ ва $\vec{b}(y_1, y_2, \ldots, y_n)_Б$ бўлса,

$$(\vec{a} + \vec{b})(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n) \text{ бўлади.}$$

Худди шунингдек, $k \in R$ учун $k\vec{a}(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$ бўлади. Агар V_n да иккита базис $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ ва $Б' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n)$ берилиб, $\vec{a} \in V_n$ координаталари мос равишда

$$\vec{a}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)_Б$$

ва

$$\vec{a}\,(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)_{Б'}$$

бўлиб, $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ ларнинг ҳар бирини $Б$ га нисбатан координаталари маълум бўлса, яъни

$$\vec{e}'_1(c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n_1}),$$
$$\vec{e}'_2(c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{n_2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{e}'_n(c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{nn}).$$

бўлса, $\vec{a}$ нинг $Б$ базисдаги координаталарини шу векторнинг $Б'$ базисдаги координаталари билан боғловчи формулалар (ёки вектор координаталарини алмаштириш формулалари) қуйидагича бўлади:

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n$$
$$x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2n}x'_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = c_{n_1}x'_1 + c_{n_2}x'_2 + \ldots + c_{nn}x'_n,$$

бунда

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{nl} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

V_n да ихтиёрий $\vec{b}_1(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$, $\vec{b}_2(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$, $\vec{b}_n(b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots, b_{nn})$ векторлар берилган бўлса, улар орасидаги чизиқли эркли векторларнинг сони

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{ml} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицанинг рангига тенг.

936. Берилган П текисликда ётмаган V_3 фазонинг озод векторлар тўплами вектор фазо ташкил қиладими?

937. Вектор деб ихтиёрий мусбат ҳақиқий сонни атайлик. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси деб ab сонни, $\vec{a}$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси деб $a\lambda$ сонни олайлик. Шу тўпламнинг вектор фазо ташкил қилишини кўрсатинг ва унинг ўлчовини аниқланг.

938. n-тартибли матрицалар тўплами вектор фазо ташкил қилишини кўрсатиб, унинг бирор базисини топинг.

939. Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган n та устунли, m та сатрли барча матрицалар тўплами вектор фазо ҳосил қилишини исбот қилинг ва унинг ўлчовини топинг.

940. Векторлари $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дан иборат бўлган вектор фазода $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$ (a_i лар барчаси бирданига нолга тенг бўлмаган ҳақиқий сон) шартни қаноатлантирувчи векторлар тўплами $(n - 1)$ ўлчовли фазо ташкил қилишини исботланг.

941. [0, 1] да узлуксиз бўлган барча функциялар тўплами вектор фазо ташкил қилиши, лекин унинг учун ўлчовлик аксиомаси бажарилмаслигини исботланг.

942. V_4 вектор фазода қуйидаги векторлар координаталари билан берилган:

$\vec{a}_1(-3, 4, 1, 0)$; $\vec{a}_2(-1, 2, -3, 0)$,
$\vec{a}_3(1, 1, 2, 3)$, $\vec{a}_4(2, -6, 0, 2)$.

Шу базисда қуйидаги векторларнинг координаталарини топинг:

1) $\vec{p}_1 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_4$; 2) $\vec{p}_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 + \frac{1}{4}\vec{a}_4$.

3) $\vec{p}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 3\vec{a}_4$; 4) $\vec{p}_4 = \frac{1}{3}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2 + \vec{a}_3 - \frac{1}{2}\vec{a}_4$.

943. Бирор базисда берилган қуйидаги векторлар V_4 фазонинг базисини ташкил қиладими:

а) $\vec{x}_1(1, 1, 1, 0)$, $\vec{x}_2(1, 2, 1, 1)$, $\vec{x}_3(1, 1, 2, 1)$, $\vec{x}_4(1, 3, 2, 5)$;

б) $\vec{u}_1(1, 0, 3, 3)$, $\vec{u}_2(-2, -3, -5, -4)$, $\vec{u}_3(2, 2, 5, 4)$,
$\vec{u}_4(-2, -3, -4, -4)$;

в) $\vec{v}_1(1, -1, 2, -2)$, $\vec{v}_2(3, 4, -1, -3)$, $\vec{v}_3(-5, 0, 2, 3)$,
$\vec{v}_4(3, 7, -2, 4)$?

944. $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ векторлар бирор базисга нисбатан ўзининг координаталари билан берилган:

$\vec{x}_1(2, 1, 2, 1)$, $\vec{x}_2(3, 1, 1, 1)$, $\vec{x}_3(11, 5, 3, 3)$, $\vec{x}_4(5, 2, 2, 4)$.

Бу векторларни V₄ да базис ташкил қилишини текшириб кўринг ҳамда қуйидаги векторларнинг шу базисдаги координаталарини топинг:

а) $\vec{x}(2, 1, -3, -3)$; б) $\vec{y}(1, 2, 0, -1)$; в) $\vec{z}(8, 4, 7, 6)$.

945. Агар V_4 да янги базис векторларининг эски базисга нисбатан координаталари берилган бўлса:

$\vec{e}\,'_1(0, 1, 3, 2)$, $\vec{e}\,'_2(2, 0, 4, -1)$, $\vec{e}\,'_3(1, 1, 0, -5)$,
$\vec{e}\,'_4(1, 1, 1, 1)$

бирор векторнинг эски ҳамда янги базисга нисбатан олинган координаталари орасидаги боғланишни топинг.

946. Қуйидаги векторларга тортилган қисм фазоларнинг базиси ва ўлчовини аниқланг:

а) $\vec{u}_1(2, -1, 0, 4)$, $\vec{u}_2(3, 0, 0, 1)$, $\vec{u}_3(8, -1, 0, 6)$;

б) $\vec{u}_1(1, -4, 3, 2)$, $\vec{u}_2(3, 2, -1, -4)$, $\vec{u}_3(0, 1, 2, -5)$,
$\vec{u}_4(-1, -7, 13, -7)$;

в) $\vec{u}_1(4, 6, -2, 5)$, $\vec{u}_2(-3, -5, 1, 1)$, $\vec{u}_3(7, 11, -3, 4)$,
$\vec{u}_4(5, 7, -3, 11)$;

г) $\vec{u}_1(2, 1, 3, 1)$, $\vec{u}_2(1, 2, 0, 1)$, $\vec{u}_3(-1, 1, -3, 0)$.

✓**947.** V_4 фазонинг қуйидаги векторларга тортилган L_k ва L_m қисм фазолари кесишмасининг базисларини топинг:

а) $\vec{u}_1(4, 3, -2, 1)$, $\vec{u}_2(-1, 5, 4, 3)$ ва $\vec{v}_1(3, 8, 2, -2)$; $\vec{v}_2(0, 0, 1, 4)$;

б) $\vec{v}_1(0, 0, 3, -2)$, $\vec{u}_2(0, 0, 0, 3)$, $\vec{u}_3(0, -5, 0, 0)$ ва $\vec{v}_1(0, 0, 3, 1)$, $\vec{v}_2(0, -5, 0, 3)$, $\vec{v}_3(1, 0, 0, 0)$.

948. V_3 да $\vec{e}_1(1, 0, 0)$, $\vec{e}_2(0, 1, 0)$, $\vec{e}_3(0, 0, 1)$ базис векторлари берилган. $\vec{b}$ (4, 3, 6) иштирокида янги базис тузиш учун эски базисдан қайси векторларни олиш кифоя?

949. V_3 да базис векторлар сифатида $\vec{e}_1$, $\vec{a}(0, 1, 1)$ ва $\vec{e}_3$ векторлар олинган. $\vec{b}(4, 3, 3)$ вектор иштирокида янги базис ташкил қилиш учун берилган векторлардан қайси бирини чиқариб ташлаш керак?

950. Агар V_n да $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар чизиқли эркли бўлса, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$ векторлар ҳам чизиқли эркли бўлишини исбот қилинг. $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{c}$ лар ҳам чизиқли эркли бўладими?

951. V_n да чексиз кўп базис мавжудлигини кўрсатинг.

952. Агар $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$ бўлса,

$$\vec{x}_1(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),$$

$\vec{x}_2(0,\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}),$

. . . .

$\vec{x}_n(0,\ 0,\ \ldots,\ a_{nn})$

векторларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатинг (бунда $a_{ij} \in R$).

953. Ω узлуксиз функциялар фазоси бўлсин. $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2, \ldots, f_n(t) = t^n$ векторлар системаси чизиқли эркли эканлигини кўрсатинг.

954. P — даражаси $n - 1$ дан катта бўлмаган кўпҳадлар фазоси бўлсин. У ҳолда $1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{n-1}$ векторларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатинг.

955. Вектор фазода $f_1, f_2, \ldots f_k$ векторлар системаси берилган бўлиб, $g_1, g_2, \ldots, g_e$ лар уларнинг чизиқли комбинацияси бўлсин.

1) Агар $g_1, g_2, \ldots, g_l$ лар чизиқли эркли бўлса, $l \leqslant k$;

2) агар $f_1, f_2, \ldots, f_k$ лар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $l < k$ бўлишини исбот қилинг.

956. Агар V_n нинг қисм фазоси V' нинг ўлчови V нинг ўлчовига тенг бўлса, $V' = V$ эканлигини исботланг.

957. Агар $V_1 \subset V$, $V_2 \subset V$ $(V_1 \subset V_2)$ бўлиб, $dim\, V_1 = dim\, V_2$ бўлса, $V_1 = V_2$ эканлигини исботланг.

958. n ўлчовли фазода ўлчови n дан кичик бўлган барча қисм фазолар мавжудлигини кўрсатинг.

959. Қуйидаги тўпламлар V_n нинг қисм фазоси бўладими:

1) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ $(k \leqslant n)$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат векторлар тўплами;

2) биринчи координаталари 1 га тенг бўлган векторлар тўплами;

3) барча координаталари манфий бўлмаган векторлар тўплами?

960. Қуйидаги векторлар тўплами n ўлчовли вектор фазонинг қисм фазоси эканлигини кўрсатинг ва унинг ўлчовини топинг:

а) жуфт номерли координаталари нолга тенг бўлган векторлар тўплами;

б) жуфт номерли координаталарининг йиғиндиси нолга тенг бўлган векторлар тўплами;

в) барча координаталари ўзаро тенг бўлган векторлар тўплами.

961. V_n да $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ векторлар берилган. x_1, $x_2, \ldots, x_n$ ихтиёрий ҳақиқий сонлар, лекин

$$x_{m+i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n - m).$$

Бу векторлар тўплами V_n нинг қисм фазоси бўлишини исботланг ва унинг ўлчовини топинг. Шу қисм фазо учун қуйидаги векторлар базис бўла оладими:

$\vec{a}_1(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{n-m,1}),$

$\vec{a}_2(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{n-m,2}),$

. . . .

$\vec{a}_m(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots,\ a_{n-m,\,m}\ )$?

962. Фараз қилайлик, V'_n, V''_n лар V_n вектор фазонинг қисм фазолари бўлсин. У ҳолда қисм фазоларнинг $V'_n + V''_n$ йиғиндиси деб $\vec{a} + \vec{b}$ векторлар тўпламига айтилади, бу ерда $\vec{a}$, $\vec{b}$ мос равишда V'_n, V''_n фазоларнинг ихтиёрий векторларидир. $V'_n + V''_n$ йиғинди ҳам V_n нинг қисм фазоси бўлишини исбот қилинг.

963. Агар $\vec{0}$ вектор V'_n ва V''_n қисм фазоларнинг ягона умумий элементи бўлса, $dim\,(V'_n + V''_n) = dim\, V'_n + dim\, V''_n$ эканлигини исботланг.

✓**964.** 962- масаладаги V'_n ва V''_n ларнинг кесишмаси $V' \cap \cap V''_n$ ҳам V_n нинг қисм фазоси эканлигини исбот қилинг.

965. $dim\,(V'_n \cap V''_n) \leqslant \min\,\{dim\, V'_n,\ dim\, V''_n\}$ эканлигини исботланг.

966. $dim\,(V'_n + V''_n) + dim\,(V'_n \cap V''_n) = dim\, V'_n + dim\, V''_n$ эканлигини исботланг.

967. V_4 да векторлар координаталари билан берилган. Қуйидаги ҳоллар учун берилган қисм фазоларнинг йиғиндиси ва кесишмасини топинг:

а) $(-1,\ 0,\ -2,\ 3)$, $(1,\ 2,\ -5,\ 3)$ векторларга тортилган V_2 фазо билан $(0,\ 2,\ -7,\ 6)$, $(3,\ 1,\ 0,\ 1)$ векторларга тортилган V'_2 қисм фазонинг;

б) $(-1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 2, -1)$ векторларга тортилган V_3 қисм фазо билан $(2, 6, 24, -1)$, $(1, 3, 12, 0)$ векторларга тортилган V_3' қисм фазонинг.

52-§. АФФИН ФАЗО ВА АФФИН КООРДИНАТА СИСТЕМАСИ

n ўлчовли V_n вектор фазо ва элементлари нуқталар деб аталган $\Omega = \{A, B, C, \dots\}$ тўплам берилган бўлсин. Ω тўплам билан V_n тўплам орасида шундай мослик ўрнатамизки, Ω дан маълум тартибда олинган икки M, N нуқта учун V_n дан аниқ битта $\vec{a}$ вектор мос келсин, буни $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ деб белгилайлик. Элементлари V_n фазо аксиомалари билан биргаликда яна қуйидаги аксиомаларни қаноатлантирувчи бўш бўлмаган тўплам n ўлчовли ҳақиқий аффин фазо дейилади ва у A_n билан белгиланади:

IV$_1$. $\forall M \in \Omega$ ва $\forall \vec{a} \in V_n$ учун шундай ягона $N \in \Omega$ мавжудки, унинг учун $\vec{a} \subset \overrightarrow{MN}$ бўлсин.

IV$_2$. $\forall A, B, C \in \Omega$ учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ бўлсин. A_n да ихтиёрий бир O нуқтани олайлик. V_n нинг бирор $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ базисининг барча векторлари O нуқтага қўйилган бўлсин. Натижада O нуқта ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис векторлардан иборат бўлган $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ тўплам ҳосил бўлади. Бу тўпламни аффин координата системаси ёки аффин репери деб аталиб, уни ҳам $Б = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n)$ деб белгилаймиз.

A_n да ихтиёрий M нуқтани олайлик, $\overrightarrow{OM}$ вектор M нуқтанинг радиус вектори дейилади. M нуқтанинг радиус вектори координаталарига шу нуқтанинг аффин координаталари деб аталади ва у $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўринишда белгиланади:

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \Leftrightarrow M(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

A_n даги $Б$ аффин реперига нисбатан $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(y_1, \dots, y_n)$ нуқталар берилган бўлсин, у ҳолда

$$\overrightarrow{MN}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) \text{ бўлади.}$$

Агар $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ нуқта учлари $M(x_1, \dots, x_n)$ ва $N(y_1, \dots, y_n)$ нуқталарда бўлган кесмани $\lambda \neq -1$ нисбатда бўлса, у ҳолда

$$z_1 = \frac{x_1 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \quad z_2 = \frac{x_2 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \dots, \quad z_n = \frac{x_n + \lambda y_n}{1 + \lambda}$$

бўлади. Хусусий ҳолда, P нуқта $[MN]$ нинг ўртасида бўлса,

$$z_1 = \frac{x_1 + y_1}{2}, \; z_2 = \frac{x_2 + y_2}{2}, \dots, \; z_n = \frac{x_n + y_n}{2}$$

бўлади. A_n да $Б = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $Б' = (0', \vec{e}', \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ аффин реперлари берилган бўлсин. $\forall M \in A_n$ нинг шу базислардаги координаталари мос равишда x_1. $x_2, \dots, x_n$ ва $x_1', x_2', \dots, x_n'$ бўлсин ҳамда $Б'$ репернинг элементлари $Б$ реперга нисбатан қуйидагича аниқлансин:

$$O'(c_{10}, c_{20}, \dots, c_{n0}), \; \vec{e}_1'(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}), \dots,$$
$$\vec{e}_n'(c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{nn}).$$

У ҳолда нуқтанинг аффин координаталарини алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \dots + c_{1n}x_n' + c_{10}, \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \dots + c_{2n}x_n' + c_{20}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \dots + c_{nn}x_n' + c_{n0}, \end{aligned} \tag{1}$$

бунда

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Хусусий ҳолда, $0 \neq 0'$, $\vec{e}_1' = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_2$, $\dots$, $\vec{e}_n' = \vec{e}_n$ бўлса, (1) дан нуқта координаталарини параллел кўчириш формулалари келиб чиқади:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + c_{10}, \\ x_2 = x_2' + c_{20}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = x_n' + c_{n0}. \end{cases} \qquad (2)$$

968 — 970- масалаларни ечишда аффин фазо аксиомаларидан фойдаланинг.

968. Агар $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$ бўлса, $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{MK}$ бўлишини исбот қилинг.

969. Агар $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ ва $\overrightarrow{ON'} = k \cdot \overrightarrow{ON}$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ бўлишини исбот қилинг, $k \in R$.

970. Агар $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}_2$, . . . , $\overrightarrow{M_{r-1}M_r} = \vec{u}_r$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{M_0M_r} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ . \ . \ . + \vec{u}_r$ бўлишини исбот қилинг.

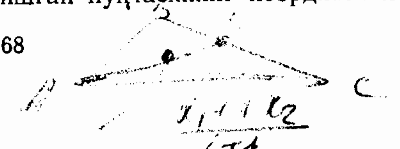
971. A_4 да $Б = (0, \ \vec{e}_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ координаталар системаси берилган бўлиб, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE}_1$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE}_2$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE}_3$, $\vec{e}_4 = \overrightarrow{OE}_4$ бўлса, O, E_i нуқталарнинг координаталарини топинг.

972. $Б = (0, \vec{e}_i)$ (бунда $i = 1, 2, \ . \ . \ . \ , 5$) даги координаталар системаси бўлсин. Агар $\overrightarrow{OE_i} = \vec{e}_i$, $\overrightarrow{OE} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_5$, $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 3\vec{e}_5$, $\overrightarrow{ON} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_1 - \vec{e}_5$, $\overrightarrow{OL} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4 + 4\vec{e}_5$, $\overrightarrow{OK} = -\vec{e}_3 - 6\vec{e}_5$ бўлса, E, M, N, L, K нуқталарнинг координаталарини топинг.

973. Агар $Б = (0, \vec{e}_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ координаталар системасига нисбатан $\overrightarrow{NM_i} = \vec{a}_i$ ва $\vec{a}_1\,(1, \ 3, 0, \ -1)$ ва $\vec{a}_2(2, \ 4, \ -1, \ 5)$, $\vec{a}_3\,(1, \ 1, \ -5, \ 2)$, $\vec{a}_4\,(4, \ 3, \ 0, \ 0)$, $\vec{a}_5\,(4, -3, \ 7, \ 2)$, $\vec{a}_6(1, \ 1, 3, \ 4)$, $N\,(1, \ -2, \ 4, \ 3)$ бўлса, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 нуқталарнинг координаталарини топинг.

974. A_4 да $M\,(2, \ 3, \ -1, 0)$ ва $N\,(0, \ 0, \ 3, \ -4)$ нуқталар берилган. MN ни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$ нисбатда бўлувчи нуқталарнинг координаталарини топинг.

975. A_5 да ABC учбурчак ўзининг учларининг координаталари билан берилган бўлса, учбурчакнинг медианалари кесишган нуқтасининг координаталарини топинг:



$A(1, \ 3, \ 4, \ -2, \ 1)$, $B(3, \ 1, \ 6, \ -2, \ 5)$, $C(5, \ -3, \ 4, \ 6, \ 3)$.

976. A_4 да $ABCD$ параллелограммнинг учта $A\,(1, \ 3, -2, \ 1)$, $B\,(4, \ -1, \ 6, \ 5)$, $C\,(8, \ -5, \ 2, \ 3)$ учи берилган. D учининг координаталарини топинг.

977. A_5 да $A\,(0, \ 3, \ -4, \ 5, \ -1)$, $B\,(1, \ 1, \ -2, \ -1, \ 5)$, $C(1, \ -7, \ 2, \ -9, \ 8)$, $D\,(-1, \ -3, \ -2, \ 3, \ -4)$ берилган. $ABCD$ тўртбурчакнинг трапеция эканлигини исботланг.

978. A_4 да $O\,(4, \ -5, \ 0, \ -6)$ нуқта ва унинг элтувчиси V_4 да $\vec{e}_1'\,(7, \ 5, \ 3, \ 1)$, $\vec{e}_2'(6, \ -4, \ 2, \ 0)$, $\vec{e}_3'(-1, \ 1, \ 0, \ 0)$, $\vec{e}_4'(3, \ -2, \ 0, \ 0)$ базис векторлар берилган. Координаталарнинг алмаштириш формулаларини ёзинг.

979.

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + 5x_2' + x_4' + 2, \\ x_2 = -2x_2' - x_3' + 3x_4' + 6, \\ x_3 = x_3' + x_4, \\ x_4 = x_1' - x_4' + 4 \end{cases}$$

тенгликларни A_4 да нуқталарнинг координаталарини алмаштириш формулалари сифатида қараш мумкинлигини кўрсатинг.

980. Қуйидагиларга асосланиб, A_5 даги нуқта координаталарининг алмаштириш формулаларини ёзинг.

1) Базис векторлар аввалги ҳолича қолиб, координаталар боши O' (4, 3, —1, 1, 5) нуқтага кўчирилади;

2) координаталар боши қўзғатилмаган, базис векторлар эса қуйидаги векторлардан иборат:

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 \ + 3\vec{e}_3, \ \vec{e}_3' = 3\,\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 5\,\vec{e}_5,$$

$$\vec{e}_4' = 2\,\vec{e}_4, \quad \vec{e}_5' = 7\,\vec{e}_5;$$

3) янги координаталар боши O' (—1,—2, —3, 0, 4) нуқтага кўчирилган, базис векторлари эса қуйидаги векторлардан иборат:

$$\vec{e}_1'\,(3, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0); \quad \vec{e}_2'\,(0, \ 5, \ 0, \ 0, \ 0);$$

$$\vec{e}_3'\,(0, \ 0, \ 4, \ 0, \ 0); \quad \vec{e}_4'\,(0, \ 0, \ 0, \ -2, \ 0);$$

$$\vec{e}_5'\,(1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1).$$

981. Қуйидаги тенгликларни нуқталарнинг координаталарини алмаштириш формулалари деб ҳисоблаш мумкинми? Агар мумкин бўлса, янги координаталар боши ва координата векторларининг эски координаталар системасига нисбатан координаталарини топинг:

а) $\begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' - x_3' + 1, \\ x_2 = 2x_1' + x_2' + x_3', \\ x_3 = x_1' - 3x_2' + 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 = x_4' + 3, \\ x_2 = x_3' + x_4', \\ x_3 = x_2' - x_1', \\ x_4 = x_1' - x_2'; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' + x_3', \\ x_2 = x_2' - x_3' - 1, \\ x_3 = x_3' + 2, \\ x_4 = x_4' - x_3' - 1, \\ x_5 = x_5' + x_4' + x_3'. \end{cases}$

982. A_5 да берилган қуйидаги нуқталар системасининг ҳар бири чизиқли эркли эканлигини кўрсатинг:

а) $M_1(1, 0, 0, 0, 0)$, $M_2(0, 2, 0, 0, 0)$, $M_3(0, 0, 1, 0,0)$, $M_4(0, 0, 0, -3, 1)$, $M_5(0, 0, 0, 0, 1)$, $M_6(0, 0, 0, 0, 0)$;

б) $M_1(2, -4, -1, 3, 0)$, $M_2(26, 7, 12, 20, 19)$, $M_3(53, 9, 31, 43, 46)$, $M_4(63, 7, 13, 53, 56)$.

53-§. *k* ЎЛЧОВЛИ ТЕКИСЛИК. ИККИ ТЕКИСЛИКНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

A_n аффин фазода $M_0, M_1, \ldots, M_n$ нуқталар системаси берилган бўлсин. Агар $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n}$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлса, берилган нуқталар системаси чизиқли эркли дейилади, акс ҳолда берилган нуқталар системаси чизиқли боғлиқ бўлади.

A_n нинг элтувчиси V_n вектор фазо бўлсин, A_n нинг қисм фазоси A_k бўлиб, унинг элтувчиси $V_k \subset V_n$ бўлсин. P нуқта A_n нинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда A_n фазодаги $\overrightarrow{AN} \in V_n$ шартни қаноатлантирувчи барча N нуқталар тўпламига *k* ўлчовли текислик деб аталади, уни Π_k деб белгилаймиз. Хусусий ҳолларда, $k = 0$ бўлса, у ҳолда Π_0 текислик битта P нуқтадан иборат бўлади, демак A_n даги ҳар бир нуқта ноль ўлчовли текислик бўлади. $k = 1$ бўлса, Π_1 бир ўлчовли текислик бўлиб, биз уни тўғри чизиқ деб атаймиз. $k = 2$ бўлса, Π_2 икки ўлчовли текислик бўлиб, биз уни бевосита текислик деб атаймиз. $k = n - 1$ бўлса, Π_{n-1} текислик гипертекислик дейилади. $k = n$ бўлганда A_n ҳам n ўлчовли текислик бўлади.

A_n да $Б = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ берилган бўлсин, у ҳолда

$$\overrightarrow{PN'} = t_1 \vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_k \vec{p}_k \tag{1}$$

га Π_k нинг вектор тенгламаси дейилади, бунда P ва чизиқли эркли $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_k$ векторлар Π_k ни аниқлайди ва $t_1, t_2, \ldots, t_k \in R$ бўлиб, N Π_k нинг ихтиёрий нуқтасидир.

Агар $Б$ базисда $\overrightarrow{ON} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_k)$, $\vec{p}_i = (u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{ni})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ бўлса, (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + t_1u_{11} + t_2u_{12} + \ldots + t_ku_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_n + t_1u_{n1} + t_2u_{n2} + \ldots + t_k u_{nk} \end{array}\right\} \tag{2}$$

(2) га Π_k нинг параметрик тенгламалари дейилади. Бундан ташқари, A_n да *k* ўлчовли текисликни ҳар бири чизиқли $(n - k)$ та биргаликда бўлган қуйидаги текисликлар системаси билан аниқлаш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} + u_{11}'x_1 + u_{12}' x_2 + \ldots + u_{1k}' x_k + a_{k+1}' = 0, \\ x_{k+2} + u_{21}' x_1 + u_{22}' x_2 + \ldots + u_{2k}' x_k + a_{k+2}' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n + u_{n-k,1}' x_1 + u_{n-k,2}' x_2 + \ldots + u_{n-k,k}' x_k + a_n' = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

A_n даги икки Π_k ва Π_s текисликларнинг ўзаро жойлашувини қуйидаги жадвал орқали аниқлаш мумкин (бунда $V = V_k \cap V_s$, $\Pi = \Pi_k \cap \Pi_s$):

$\dim V$	$\Pi = \varnothing$	$\Pi = \varnothing$
0	Π_k ва П айқаш бўлади	Π_k ва П лар битта умумий нуқтага эга
$0 < r < \min(k,s)$	$\Pi_k \nparallel \Pi_s$	$\Pi_k \cap \Pi_s = \Pi_r$
$\min(k, s)$	$\Pi_k \parallel \Pi_s$	$k < s$ бўлса, $\Pi_k < \Pi_s$ $k > s$ бўлса, $\Pi_k > \Pi_s$

983. *A, B, C* нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг:

1) $A(4, 9, 0, -2)$, $B(1, -3, -3, 1)$, $C(2, 1, -2, 0)$;
2) $A(1, 1, -1, 2)$, $B(0, -3, 0, 2)$, $C(-1, -7, 1, 6)$.

984. A_4 да берилган нуқталар системасининг қайси бирлари бир тўғри чизиқда ётади:

1) $A(3, 4, 0, 0)$, $B(4, 3, 1, 2)$, $C(5, 3, 3, 7)$;
2) $M(2, 5, -1, -2)$, $N(1, 6, -2, -4)$, $P(6, 1, 3, 6)$?

985. $A(1, 3, -1, 2)$ ва $B(-1, -2, 1, 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг координата гипертекисликлари билан кесишиш нуқтасини топинг.

986. $A(0, -1, 1, 2)$, $B(-1, 4, 0, 1)$, $C(-2, 1, -3, -1)$, $D(-1, 12, 2, 2)$ нуқталарнинг бир текисликда ётишини исботланг.

987. A_5 да $x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - x_5 = 0$ гипертекислик берилган. Шу текисликда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи бир нечта нуқтани топинг:

а) $x_1 = 60$; б) $x_2 = 9$; в) $x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

988. Қуйидаги берилганларга асосан тўғри чизиқнинг параметрик ва умумий тенгламасини тузинг:

а) A_4 да тўғри чизиқ $A(1, -1, 2, 0)$ нуқта ва $\vec{s}$ (3, 4, -1, 2) векторга тортилган:

б) A_5 да тўғри чизиқ $M(0, 1, 2, 3, 4)$ ва $N(4, 3, 2, 1, 0)$ нуқталардан ўтади.

989. Аффин фазода параметрик тенгламаси билан берилган қуйидаги текисликда бир нечта нуқта топинг:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2t_1 - t_2 + 5_3 t, \\ x_2 = t_1 + 3t_2 - t_3, \\ x_3 = 5 + 7t_1 - 4t_2 + t_3, \\ x_4 = 6 - t_1 + 3t_2 + 5t_3, \\ x_5 = 1 + 2t_1 - t_2 + t_3. \end{cases}$$

990. A_4 да текислик қуйидаги тенгламалар билан берилган:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 1 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3 = 0. \end{cases}$$

Шу текисликнинг векторли ва параметрик тенгламаларини топинг.

991. A_5 да $C_0(1, 0, 2, -1, 0)$, $C_1(1, 1, 3, 0, 0)$, $C_2(2, 0, 2, -1, 1)$ ва $C_3(1, 1, 2, 1, 3)$ нуқталардан ўтувчи текисликнинг параметрик ва умумий тенгламаларини топинг.

992. A_5 да $A_0(-2, -5, 0, -1, 3)$ нуқтадан ўтиб, йўналтирувчи қисм фазоси $\vec{u}_1(4, 3, -1, 5, 2)$ ва $\vec{u}_2 = (0, -2, 3, -4, 7)$ векторларга тортилган текисликнинг параметрик тенгламаларини топинг.

993. A_6 да $M_1(0, 2, -3, 4, 1, 6)$, $M_2(5, 4, 3, 0, -2, 1)$, $M_3(1, 3, 0, 0, -1, 2)$ нуқталарга тортилган энг кичик ўлчовли текисликнинг параметрик тенгламаларини топинг.

994. A_4 да гипертекислик $x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 + 5 = 0$ тенглама билан берилган. Унинг параметрик тенгламаларини топинг.

995. A_4 да учта гипертекислик берилган:

$$\begin{aligned} \Pi_1:&\quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0, \\ \Pi_2:&\quad x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3 = 0, \\ \Pi_3:&\quad x_1 - 12x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 8 = 0. \end{aligned}$$

Уларнинг текислик бўйича кесишишини кўрсатинг.

996. A_4 да иккита Π_2 ва Π_2' текислик берилган:

$$\Pi_2: \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 4 = 0; \end{cases} \quad \Pi_2': \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Бу текисликларнинг тўғри чизиқ бўйича кесишишини кўрсатинг ва шу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

997. A_4 да Π_1 текислик *A* нуқта ва $\vec{u}$ векторга, Π_2 текислик эса *B* нуқта ва $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ векторларга тортилган. Агар $A(0, 4, 0, 1)$, $\vec{u}(1, 0, 0, 3)$, $B(1, 1, 2, 2)$, $\vec{v}_1(0, 0, 1, 2)$, $\vec{v}_2(1, 0, -1, 2)$ бўлса, Π_1 ва Π_2 текисликларнинг ўзаро жойлашувини текширинг.

√ **998.** A_4 да Π_1 текислик $x_1+x_2-2=0$, $x_2-x_3=0$, $x_4-1=0$ тенгламалар билан ва Π_3 гипертекислик $x_1+x_2+x_3+x_4-4=0$ тенглама билан берилган бўлса, уларнинг ўзаро жойлашувини текширинг.

√ **999.** A_5 да берилган қуйидаги икки текисликнинг ўзаро жойлашувини текширинг:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - t_1 + t_2, \\ x_2 = 2 + 3t_1 - t_2, \\ x_3 = -1 + t_2, \\ x_4 = 3 - t_1 + 2t_2, \\ x_5 = -4 - 3t_2 \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 - 15 = 0. \end{cases}$$

1000. A_6 да текисликлардан биттаси ўзининг

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_5 + x_6 - 8 = 0, \\ x_2 + 4x_5 - x_6 + 10 = 0, \\ x_3 - 4x_4 + 2x_5 - 1 = 0 \end{cases}$$

тенгламалари билан, иккинчиси эса ўзининг $M_1(-3, 2, 0, 0, 0, 0)$, $M_2(1, 0, -4, -1, 0, -3)$, $M_3(0, -1, -1, 1, 1, 9)$ ва $M_4(0, 0, 0, -3, 2, 1)$ нуқталари билан берилган бўлса, уларнинг ўзаро жойлашувини текширинг.

1001. A_n да Π_m ва Π_{n-m} текисликлар битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ ва $\vec{e}_{m+1}, \vec{e}_{m+2}, \ldots, \vec{e}_n$ базислар биргаликда A_n нинг базисини, ташкил қилишини исботланг.

54-§. АФФИН АЛМАШТИРИШЛАР

A_n да икки $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ ва $Б' = (O', \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n')$ реперлар берилган бўлсин. Бу реперлар ёрдамида A_n нинг нуқталари орасида шундай f мослик ўрнатамизки, ихтиёрий $M \in A_n$ нуқта $Б$ реперда қандай координаталарга эга бўлса, унинг акси $f(M) = M'$ нуқта ҳам $Б'$ реперда худди шундай координаталарга эга бўлсин. f ўзаро бир қийматли бўлиб, A_n ни ўз-ўзига ўтказади. Шунинг учун f ни A_n нинг аффин алмаштириши дейилади.

Аффин алмаштиришлар қуйидаги хоссаларга эга:

1) f аффин алмаштиришда $\vec{a} \in A_n$ вектор шу фазонинг бирор $f(\vec{a}) = \vec{a}'$ векторига алмашади, хусусий ҳолда $f(\vec{0}) = \vec{0}$ бўлади;

2) агар $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ бўлса, $f(\vec{c}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ бўлади;

3) $f(k\vec{a}) = kf(\vec{a})$ бўлади;

4) f аффин алмаштиришда k ўлчовли текислик Π_k яна k ўлчовли Π_k текисликка алмашади;

5) f аффин алмаштиришда параллел текисликлар яна параллел текисликларга алмашади.

Агар $\forall M \in A_n$ нуқтанинг $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ реперга нисбатан координаталари $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $f(M) = M'$ нуқтанинг $Б$ га нисбатан координаталари $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ бўлса, у ҳолда f аффин алмаштиришнинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + c_1, \\ x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n' = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n + c_n; \end{cases}$$

бунда $c_1, c_2, \ldots, c_n$ лар $f(0) = 0'$ нинг, $c_{11}, c_{21}, \ldots c_{2n}$, $c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{nn}$ лар мос равишда $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i'$ ларнинг $Б$ га нисбатан координаталаридир ва

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A нинг барча алмаштиришлар тўпламини A билан белгиласак, у груҳ ҳосил қилади ва аффин груҳ деб аталади. Аффин груҳининг инвариантлари қуйидагилардан иборат:

1) текисликларнинг ўлчови;
2) учта нуқтанинг оддий нисбати;
3) параллеллик муносабати.

Параллел кўчиришлар тўплами груҳ ташкил қилиб, у аффин груҳининг қисм груҳи ҳисобланади.

Агар $\vec{u}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ вектор қадар параллел кўчириш $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нуқтани $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ нуқтага алмаштирса, унинг аналитик ифодаси

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + u_1, \\ x_2' &= x_2 + u_2, \\ &\ldots\ldots \\ x_n' &= x_n + u_n \end{aligned}$$

каби бўлади. Битта S марказли барча гомотетиялар тўплами ҳам гуруҳ ташкил этиб, у ҳам аффин гуруҳининг қисм гуруҳи ҳисобланади. $S'(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ марказли k коэффициентли гомотетия $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нуқтани $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ нуқтага алмаштирса, унинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x_1' = k(x_1 - s_1) + s_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n' = k(x_n - s_n) + s_n. \end{cases}$$

1002. Қуйидаги формулаларнинг қайси бири A_n фазонинг аффин алмаштиришлари бўлади:

A_2 да:

а) $\begin{cases} x_1' = x_1 + 1, \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = x_2 + x_1^2. \end{cases}$

A_3 да:

а) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + 3, \\ x_1' = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_3' = 3x_2 - x_3 + 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2, \\ x_2' = x_2 + x_3 - 2, \\ x_3' = x_2 - x_3. \end{cases}$

A_4 да:

а) $\begin{cases} x_1' = 3x - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 1, \\ x_2' = x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 3, \\ x_3' = x_3 + x_4 - 6, \\ x_4' = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_3 + 3, \\ x_2' = -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 1, \\ x_3' = x_1 - x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 5, \\ x_4' = 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 2. \end{cases}$

1003. A_3 да аффин алмаштириш формуласи

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4. \\ x_2' = x_1 + x_2 - 2. \\ x_3' = x_2 - x_3 \end{cases}$$

бўлса, қуйидагиларни топинг:

а) A (1, 0, 2) нуқтанинг акси;
б) B (2, 2, 0) нуқтанинг асли;
в) алмаштиришнинг қўзғалмас нуқталар тўплами;
г) $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$ текисликнинг акси.

1004. $$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3. \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3. \\ x_3' = 3x_2 - x_3 + x_4 \end{cases}$$

аффин алмаштиришга ассоцияланувчи вектор алмаштиришни топинг.

1005. Агар A_4 аффин фазосининг аффин алмаштиришига ассоцияланувчи V_4 фазонинг чизиқли алмаштириши

$$\begin{cases} u_1' = 4u_1 + 2u_2 + 3u_3 - u_4. \\ u_2' = u_2 + u_2 + u_3 + u_4, \\ u_3' = u_2 - u_3 + 2u_4, \\ u_4' = 3u_3 - 5u_4 \end{cases}$$

бўлса ҳамда:

а) координаталар боши O' (—3, 2, 3, 7) га ўтса;
б) M (5, 7, 2, 1) нуқта координаталар бошига ўтса;
в) M (4, 8, 6, 1) нуқта M' (12, 4, 6, 2) га ўтса, унинг формуласини ёзинг.

1006. A_4 да шундай алмаштиришнинг формуласини ёзингки, у O (0, 0, 0, 0), C_1 (1, 0, 0, 0), C_2 (0, 1, 0, 0), C_3 (0, 0, 1, 0) нуқталарни жойида қолдириб, C_4 (0, 0, 0, 1) нуқтасини C_4' (1, 1, 1, 1) нуқтага ўтказсин.

1007. Агар A_3 даги аффин алмаштириш Б = $(A, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ реперни Б$' = (A_1, \vec{g}_1', \vec{g}_2', \vec{g}_3')$ реперга ўтказиб, $A(3, 0, 0)$, ва A' (1 — 2,1),

$\vec{g}_1$ (0,1, —1,), $\vec{g}_1'$ (3, — 2, 0),
$\vec{g}_2$ (0, 0, 2), $\vec{g}_2'$ (2, 0, 4),
$\vec{g}_3$ (1, —1, 0), $\vec{g}_3'$ (—4, 3, —2)

бўлса, шу алмаштиришнинг аналитик ифодасини топинг.

1008. A_3 да $M_0\ (1,\ 2,\ -1)$, $M_1\ (3,\ 4,\ 2)$, $M_2\ (1,\ 4,\ -1)$, $M_3\ (4,\ 1,\ -1)$ ва $N_0\ (-1, 0, 2)$, $N_1\ (0,\ 13,\ 10)$, $N_2\ (-7,\ 2,\ 4)$, $N_3(8,\ \ 2,\ \ 2)$ нуқталар берилган. $f(M_i) = N_i$. $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ шартни қаноатлантирувчи аффин алмаштиришни топинг.

1009. A_4 да $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ гипертекисликнинг барча нуқталарини жойида қолдириб, координаталар бошини O' $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ нуқтага ўтказувчи аффин алмаштиришни топинг.

1010. A_4 да маркази $S(1,\ -3,\ 4,\ 2,)$ нуқтада, коэффициенти $k = 3$ бўлган гомотетия формуласини ёзинг.

1011. A_4 да f ва g аффин алмаштиришларнинг формулалари қуйидагича берилган:

$$f: \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - x_3 - 1, \\ x_2' = 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2, \\ x_3' = x_3 + 2x_4 - 1, \\ x_4' = 4x_4 - 2 \end{cases} \quad \text{ва } g: \begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2, \\ x_2' = 3x_2, \\ x_3' = -x_3. \\ x_4' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1. \end{cases}$$

а) $f\cdot g$; б) $g\cdot f$; в) f^{-1} ва g^{-1}; г) $(fg)^{-1}$

алмаштиришлар формуласини топинг.

1012. Қуйидаги формулалар билан берилган аффин алмаштиришлар гуруҳ ташкил қиладими:

а) $\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = x_2 + kx_1, \\ x_3' = x_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1' = x_1 + k, \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3, \\ x_4' = x_4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1' = x_2. \\ x_2' = x_1, \\ x_3' = x_3 + k, \\ x_4' = x_5, \\ x_5' = x_4? \end{cases}$

1013. Қуйидаги хоссалардан қайси бири A_n да аффин алмаштиришларнинг инварианти бўлади:

а) текисликларнинг параллеллиги;
б) текисликларнинг кесишиши;
в) текисликларнинг айқашлиги;
г) берилган кесманинг берилган нисбатда бўлиниши;
д) бирор тўпламнинг қўзғалмаслиги?

1014. Қуйидаги фигуралар аффин= эквивалент бўладими:

а) иккита ихтиёрий учбурчак;
б) иккита ихтиёрий параллелограмм;
в) иккита ихтиёрий трапеция;
г) икки ихтиёрий k ўлчовли текислик?

55-§. n ЎЛЧОВЛИ ЕВКЛИД ФАЗОСИ

Агар V_n вектор фазонинг векторлари қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтириш аксиомаларига бўйсунса, бундай фазони n ўлчовли векторли Евклид фазоси V_E деб аталади:

$V_1 \cdot \forall \vec{a},\ \vec{b} \in V_n$ учун $\vec{a},\ \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ бўлса;
$V_2 \cdot \forall \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in V_n$ учун $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ бўлса;
$V_3 \cdot \vec{a},\ \vec{b} \in V_n$ ва $\forall k \in R$ учун $k\vec{a} \cdot \vec{b} = k\ (\vec{a} \cdot \vec{b})$ бўлса;
$V_4 \cdot \vec{a} \neq \vec{0} \in V_n$ учун $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ бўлса.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак деб $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ тенглик билан аниқланадиган бурчакларнинг энг кичигига айтилади.

Ноль бўлмаган икки векторнинг ортогонал бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Фараз қилайлик, бирор ортонормалланган базисда

$$\vec{a}\ (x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ ,\ x_n) = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + \ .\ .\ .\ + x_n\,\vec{e}_n,$$
$$\vec{b}\ (y_1,\ y_2,\ .\ .\ .\ ,\ y_n) = y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + \ .\ .\ .\ + y_n\,\vec{e}_n$$

бўлсин, у ҳолда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ .\ .\ .\ + x_n y_n$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ .\ .\ .\ + x_n^2}.$$

$$\cos\,(\vec{a},\widehat{\ }\,\vec{b}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ .\ .\ .\ + x_n\,y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}$$

бўлади.

Элтувчиси V_E бўлган n ўлчовли аффин фазосига n ўлчовли евклид фазоси дейилиб, уни E_n деб белгилаймиз. Бундан кўринадики, n ўлчовли аффин фазосининг барча таъриф ва теоремалари E_n да ўз кучини сақлайди.

Бирор декарт репер $Б = (O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ .\ .\ .\ ,\ \vec{e}_n)$га нисбатан

$A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ бўлсин. У ҳолда $\rho(A, B) = |AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots, + (y_n - x_n)^2}$.

Табиийки, k ўлчовли текисликнинг таърифи ва хоссалари A_n да қандай бўлса, E_n да шундай сақланиб қолади, бундан ташқари E_n да шу хоссалар ёнига янги хоссалар қўшилади. Бу хоссалар метрик характерга эга бўлиб, уларнинг барчасини биз бу ерда келтирмаймиз. Мисол тариқасида берилган нуқтадан берилган гипертекисликкача бўлган масофа формуласини ёзайлик. Агар бирор декарт реперида $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқта ва Π_{n-1}: $a_1x_1 + a_2x_2 + + a_n x_n = 0$ гипертекислик берилган бўлса,

$$\rho(M_0, \Pi_{n-1}) = \frac{|a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \cdots + a_n x_n^0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

бўлади. E_n да бир декарт репер билан иккинчи декарт репер орасидаги боғланиш аффин реперлар орасидаги

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x'_j + a_i$$

боғланиш кабн бўлади, лекин a_{ij} лардан ташкил топган матрица ортогонал бўлади. Бошқача қилиб айтганда, улар қуйидаги шартларни бажаришлари керак:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots, + a_{1n}^2 = 1,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2 = 1,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{nn}^2 = 1,$$
$$a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + \ldots, + a_{1n}a_{2n} = 0,$$
$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + \ldots + a_{1n}a_{3n} = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{11}a_{n1} + a_{12}a_{n2} + \ldots, + a_{1n}a_{nn} = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{n-1,1}a_{n1} + a_{n-1,2}a_{n2} + \ldots + a_{n-1,n}a_{nn} = 0,$$

Б

1015. $\vec{u}, \vec{v} \in V_E$ учун $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ тенглик қачон бажарилади?

1016. Тўрт ўлчовли $\vec{V}_E$ да $\vec{u}(3, 0, 1, 0)$, $\vec{v}(3, 2, 1, 1)$, $\vec{w}(4, -2, -1, 1)$ берилган. Қуйидаги скаляр кўпайтмаларни ҳисобланг:

а) $\vec{u}^2$, $\vec{u}\vec{v}$, $\vec{u}\vec{w}$, $\vec{v}\vec{w}$;

б) $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w})$, $(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v}$;

в) $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2$.

1017. Беш ўлчовли V_E да қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг:

1) $(-2, 0, 6, 0, 3)$; 2) $(1, -3, 0, 10, 11)$;
3) $(-1, -2, 0, 2, 4)$; 4) $(4, -3, -1, 2, 2)$.

1018. Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни ҳисобланг:

а) $\vec{a}(1, 2, 2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 5, 1)$;
б) $\vec{c}(-1, 1, -1, 1, 0)$, $\vec{d}(2, 0, 1, 0, 2)$.

1019. Тўрт ўлчовли V_E да $\vec{x}(3, 0, -4, 0)$ вектор билан координата векторлари орасидаги бурчакни топинг.

1020. n ўлчовли V_E да $\vec{a} \neq \vec{0}$ берилган. Агар $(\vec{a}, \widehat{\vec{e}_i}) = \alpha_i$ бўлса ($\vec{e}_i$ — координата векторлари, $i = 1, 2, \ldots, n$), $\cos^2\alpha_1 + + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$ эканлигини исботланг.

1021. Беш ўлчовли V_E да қуйидаги векторлар жуфти берилган. Уларнинг қайси бири ўткир, тўғри, ўтмас бурчак ташкил қилишини аниқланг:

а) $\vec{p}(4, 3, -5, 1, 2)$, $\vec{q}(2, -1, 3, 0, 5)$;
б) $\vec{r}(2, -3, 0, 4, 5)$, $\vec{s}(7, 1, 6, 2, 1)$;
в) $\vec{t}(4, -6, 2, -7, 1)$, $\vec{u}(2, 1, 5 - 2, 3)$;
г) $\vec{v}(4, 3, 2, 5, 1)$, $\vec{w}(1, 5, -7, -1, 6)$.

1022. $\vec{u}(1, 3, 2, -1)$, $\vec{v}(5, 1, -4, 0)$, $\vec{w}(10, 4, 1, 14)$ векторларнинг ҳар иккитаси жуфти ортогонал эканлигига ишонч ҳосил қилиб, уларни тўрт ўлчовли V_E нинг базиси қадар тўлдиринг.

1023. V_E да векторлар координаталари билан берилган:

а) $(1, 2, -3, 4)$ ва $(6, 2, -2, -4)$;
б) $(0, 1, 0, 0)$ ва $(1, 0, 3, 5)$, Бу векторларнинг ортого-

нал эканлигини кўрсатинг ва тўла ортогонал базисгача уни тўлдиринг.

1024. Қуйидаги

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & \dots, & \vec{a}_2\vec{a}_n \\ \text{——} & \text{——} & \text{——} & \text{——} \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

матрица $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларнинг Грамм матрицаси дейилади. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларнинг чизиқли боғлиқ бўлишлиги учун фақат уларнинг Грамм матрицасининг детерменанти нолга тенг бўлишини исбот қилинг.

1025. Агар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар учун $\vec{a}^2 = 30$, $\vec{b}^2 = 50$, $\vec{c}^2 = 186$, $\vec{a}\vec{b} = 4$, $\vec{a}\vec{c} = 64$, $\vec{b}\vec{c} = 58$ бўлса, уларнинг чизиқли боғлиқ эканлигини кўрсатинг.

1026. Қуйидаги нуқталар орасидаги масофани топинг:

E_4: а) A (3, —4, 5, 1), B (2, 1, 0. —2);
б) A (—3, 6, —7, 1), B (1, 6, —4,1);
E_5: а) A (1, 0,—7, 5, 2), B (4, 5,—6, 4, 2);
б) A (16, 5, 3,—2, 7), B (10, 5,—1, 3, 5).

√**1027.** E_5 да ABC учбурчакнинг учлари A (4, 3, 3, 4, 5), B (—2, —2, 2, 5, 4), C (—1, 2, 2, 1, 5) нуқталарда бўлса, унинг томонлари ва медианаларининг узунликларини топинг.

1028. Учбурчакнинг учлари A (—11, 5, 8, 1, 4), B (—1, 5, —7, 1, —3), C (9, 5, —2, 1, 4) нуқталарда бўлса, унинг тўғри бурчакли эканлигини исбот қилинг.

1029. E_5 даги A (4, 3, 2—1, 3), B (4, —1, 5, —1, 3), C (5, 6, 6, 1, 3), D (5, 10, 3, 1, 3) нуқталар $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг учлари эканлигини кўрсатинг.

1030. E_5 да M_1 (3, 2, —1, 5, 0) ва M_2 (3, 4, 5—2, 1) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

1031. E_5 да M(3, 2, —1, 5, 0) нуқтадан ўтиб, $x_1 = 3—2t$, $x_2 = 4 + 2t$, $x_3 = 5 + 4t$, $x_4 = —2 — t$, $x_5 = 1 + 5t$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган гипертекисликнинг тенгламасини ёзинг.

Б√**1032.** M (0, —1, 2, 1) нуқтанинг $2x_1 + x_2 + x_4 — 3 = 0$ текисликдаги ортогонал проекциясини топинг.

1033. E_4 да A (1, —1, 2, 1) нуқтадан П: $x_1 + 3x_2 — x_3 — x_4 + 2 = 0$ гипертекисликкача бўлган масофани топинг.

1034. E_5 да маркази C (1, 2, 3, 1, 6) нуқтада бўлиб, M (2, 4, —1, 4, 0) нуқтадан ўтувчи гиперсферанинг тенгламасини ёзинг.

1035. Қуйида берилган матрицаларнинг қайси бири ортогонал:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & —\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & —1 \\ 0 & \frac{1}{12} & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & —\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & —\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1036. Агар эски система тўғри бурчакли декарт координаталар системаси бўлса, қуйидаги алмаштириш билан ҳосил қилинган система ҳам тўғри бурчакли декарт координаталар системаси бўладими:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{2}{7}\, x_1' + \frac{3}{7}\, x_2' + \frac{6}{7}\, x_3', \\ x_2 = 1 + \frac{6}{7}\, x_1' + \frac{2}{7}\, x_2' — \frac{3}{7}\, x_3', \\ x_3 = 3 + \frac{3}{7}\, x_1' — \frac{6}{7}\, x_2' + \frac{2}{7}\, x_3'? \end{cases}$$

1037. E_4 да янги координаталар боши ва янги координата векторлари берилган: $O'(1, 2, —3, 4)$, $\vec{e}_1'$ (—1/2, —1/2, 1/2, 1/2), $\vec{e}_2'$ (—1/2, 1/2, 1/2, —1/2), $\vec{e}_3'$(1/2, 1/2. 1/2, 1/2); $\vec{e}_4$ (1/2, —1/2, 1/2, —1/2). Агар эски система тўғри бурчакли бўлса, янгиси ҳам тўғри бурчакли бўладими?

56-§. ҲАРАКАТ. E_n НИНГ ҲАРАКАТЛАР ГУРУҲИ ВА УНИНГ ҚИСМ ГУРУҲЛАРИ

E_n даги ҳаракат ҳам худди текисликдаги ҳаракат каби таърифланади. Битта декарт координата системасида нуқта ва унинг аксларининг координаталари ушбу

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_l + b_i$$

формула билан боғланади. Бунда элементлари b_{ig} лардан иборат бўлган матрица ортогонал матрицадир. E_n да ҳам ҳаракат икки турга бўлинади: I турдаги ва II турдаги ҳаракатлар. Фазодаги ҳамма ҳаракатлар тўплами гуруҳ ташкил қилади ва у E билан белгиланади. У ҳолда I турдаги ҳаракатларни E_{I}, II турдаги ҳаракатларни E_{II} деб белгилаш мумкин. E_{I} ҳам ўз навбатида гуруҳ ташкил қилиб, у E_n нинг қисм гуруҳи бўлади. E_{I} га мисол қилиб барча параллел кўчиришлар тўпламини ёки нуқта атрофида буришни кўрсатиш мумкин. Хусусий ҳолда E_3 да қуйидаги асосий ҳаракатлар мавжуд:

1. **Текисликка нисбатан симметрия.** Агар $\Pi = (xOy)$ бўлса, унинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' \\ z = -z'. \end{cases}$$

2. **Тўғри чизиқ атрофида буриш.** Агар Oz ўқ атрофида α бурчакка бурилса, унинг аналитик ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} z' = z, \\ x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

3. **Нуқтага нисбатан симметрия.** Масалан, координата бошига нисбатан симметриянинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y, \\ z' = -z, \end{cases}$$

Юқорида баён қилинган ҳаракатларни асосий ҳаракатлар деб атадик. Буларнинг ҳар хил композициясидан E_2' нинг турли ҳаракатларини ҳосил қилиш мумкин. Масалан, винт бўйича ҳаракат тўғри чизиқ атрофида буриш билан шу тўғри чизиққа параллел вектор бўйича параллел кўчириш композицияси ёки буриш симметрияси П текисликка нисбатан симметрия билан П га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ атрофида $\alpha \neq \pi$ бурчакка буришнинг композицияси, ёки П текисликка симметрия билан a вектор $(\vec{a} \| \Pi)$ бўйича параллел кўчиришнинг композицияси — сирпанувчи симметрияни кўрсатиш мумкин ва мос равишда уларнинг аналитик ифодасини топиш мумкин.

1038. Қуйидаги вектор Евклид фазосининг алмаштиришларининг қайси бири ҳаракат бўлади:

а) $\begin{cases} x_1' = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2; \\ x_2' = -\frac{1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1' = \frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3, \\ x_2' = -\frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3, \\ x_3' = \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_3, \\ x_2' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_3, \\ x_3' = -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3; \\ x_2' = -\frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3, \\ x_3' = \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4, \\ x_2' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4, \\ x_3' = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4, \\ x_4' = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = -x_2, \\ x_3' = \frac{3}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_4 + \frac{\sqrt{6}}{4} x_5, \\ x_4' = \frac{1}{4} x_3 + \frac{3}{4} x_4 - \frac{\sqrt{6}}{4} x_5, \\ x_5' = -\frac{\sqrt{6}}{4} x_3 + \frac{\sqrt{6}}{4} x_4 + \frac{1}{2} x_5, \end{cases}$

1039. $A_0(4, 2, 1, 3)$, $A_1(5, 2, 1, 3)$, $A_2(4, 3, 1, 3)$, $A_3(4, 2, 2, 3)$, $A_4(4, 2, 1, 4)$ нуқталарни $A_0'(-1, -3, 1, 5)$, $A_1'(-1, -3, 2, 5)$, $A_2'(-1, -3, 1, 6)$, $A_3'(0, -3, 1, 5)$, $A_4'(4, -2, 1, 3)$ нуқталарга акслантирувчи ҳаракат мавжудлигини кўрсатинг ва унинг аналитик ифодасини ёзинг.

1040. Агар ҳаракат A ва B нуқталарни ўз жойида қолдирса, у ҳолда AB тўғри чизиқ қўзғалмас нуқталар тўпламидан иборат бўлишини кўрсатинг.

1041. E_3 да A ва B нуқталар координаталари орқали берилган. A нуқтани B нуқтага ўтказувчи текисликка нисбатан симметриянинг аналитик ифодасини ёзинг:

а) $A\ (0,\ 0,\ 0),\ B\ (1,\ 1,\ 1,)$; б) $A\ (2,\ 3,\ 1),\ B\ (0,\ 1,\ 3)$.

1042. Қуйида берилган текисликларга нисбатан E_3 нинг текисликка нисбатан симметриясининг аналитик ифодасини ёзинг:

1) $x + y + z - 1 = 0$; 2) $2x - y + z = 0$; 3) $Ax + By + + Cz + D = 0$.

1043. Қуйида берилган тўғри чизиқларга нисбатан ўқ симметриясининг аналитик ифодасини ёзинг:

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = -t. \end{cases}$

1044. $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + x_3^2 + (x_4 + 1)^2 = 1$ гиперсферани $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 1$ гиперсферага акслантирувчи бирор ҳаракатни топинг.

1045. E_4 да M нуқтани $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0$ текисликка нисбатан симметрик бўлган нуқтага акслантирувчи ҳаракатнинг аналитик ифодасини ёзинг.

1046. E_n нинг айний бўлмаган ҳаракати натижасида қўзғалмас нуқталарнинг (чизиқли эркли) максимал сонини топинг.

✓ **1047.** E_n нинг гипертекислик П нинг жойида қолувчи ҳаракатлар тўпламини топинг ва уни ҳаракатлар гуруҳининг қисм гуруҳи эканлигини кўрсатинг.

57-§. ЎХШАШ АЛМАШТИРИШ. ЎХШАШ АЛМАШТИРИШЛАР ГУРУҲИ, УНИНГ ҚИСМ ГУРУҲЛАРИ ВА ИНВАРИАНТЛАРИ

Агар $\forall A, B \in E_n$ ва $k > 0$ сон учун $\rho(f(A), f(B)) = k\rho(A, B)$ бўлса, f алмаштириш E_n нинг ўхшаш алмаштириши деб аталади. $k > 1$ бўлганда икки нуқта орасидаги масофа ўхшаш алмаштиришда k баробар ортади, $k < 1$ бўлганда эса k баробар камаяди. Ҳаракат $k = 1$ коэффициентли, k коэффициентли гомотетия — k коэффициентли ўхшаш алмаштириш экан. Бундан ташқари, ҳар қандай ўхшаш алмаштириш бирор гомотетия билан ҳаракатнинг композициясидан иборатдир. Ўхшаш алмаштириш натижасида учта нуқтанинг оддий нисбати сақланади, бурчакнинг катталиги ўзгармайди, текисликнинг ўлчови ҳам инвариант бўлади. $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ декарт реперида ўхшаш алмаштиришнинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x_1' = k\ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + a_1, \\ x_2' = k\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots, + a_{2n}x_n) + a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = k\ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) + a_n, \end{cases}$$

бу ерда $k > 0$, a_{ij} ортогонал матрицанинг элементларидир. E_n нинг барча ўхшаш алмаштиришлари тўплами гуруҳ ҳосил қилади ва у E_n нинг ўхшашлик гуруҳи деб аталади. Ўхшашлик гуруҳи аффин группасининг қисм гуруҳидир.

1048. Қандай шарт бажарилганда гомотетия ҳаракат бўлади? Ҳаракат бўлган гомотетиянинг хусусий ҳоллари қандай аталади?

✓**1049.** k коэффициентли ўхшаш алмаштириш натижасида векторнинг узунлиги k га, векторларнинг скаляр кўпайтмаси k^2 га кўпайишини исботланг.

1050. Ўхшаш алмаштириш натижасида векторлар орасидаги бурчакнинг ўзгармаслигини кўрсатинг.

1051. Турли марказли иккита гомотетиянинг композицияси ё гомотетия, ёки параллел кўчириш эканлигини исботланг.

1052. Қуйидаги формулаларнинг қайси бирлари E да ўхшаш алмаштиришнинг аналитик ифодаси бўлади? Ўхшаш алмаштиришнинг коэффициентини топинг:

а) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4, \\ x_3' = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1, \\ x_2' = x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 1, \\ x_3' = x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2. \end{cases}$

1053. E_4 да ўхшаш алмаштиришнинг аналитик ифодаси берилган:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 - 7, \\ x_2' = 2x_2 + x_2 + 3, \\ x_3' = \sqrt{2}\, x_3 + \sqrt{3}\, x_1 - 1, \\ x_4' = \sqrt{3}\, x_2 - \sqrt{2}\, x_4 + 2. \end{cases}$$

Ўхшаш алмаштиришнинг коэффициенти k ни аниқланг.

1054. E_3 да ўхшаш алмаштириш формулалари берилган:

$$\begin{cases} x_1' = \frac{3}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{\sqrt{6}}{2} x_3 + 3, \\ x_2' = \frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_2 + \frac{\sqrt{6}}{2} x_3 + 1, \\ x_3' = \frac{\sqrt{6}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2} x_2 + x_3 - 2; \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 1, \\ x_3' = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3. \end{cases}$$

а) Бу алмаштиришлар композициясининг аналитик ифодасини ёзинг;

б) бу алмаштиришларга тескари бўлган алмаштиришларнинг аналитик ифодасини ёзинг.

IX боб. КВАДРАТИК ФОРМАЛАР ВА КВАДРИКАЛАР

58-§. ЧИЗИҚЛИ, БИЧИЗИҚЛИ ВА КВАДРАТИК ФОРМАЛАР

Агар вектор аргументли $\varphi(\vec{x})$ скаляр функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, у чизиқли функция дейилади:

1°. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ учун $\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$,

2°. $\forall \vec{x} \in V$ ва $\forall \lambda \in R$ учун $\varphi(\lambda \vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x})$.

$\varphi(\vec{x})$ функция $\vec{x}$ нинг бирор базисга нисбатан координаталари орқали

$$\varphi(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

кўринишда ифодаланади, бунда $a_i = \varphi(\vec{e_i})$ $(i = 1, \overline{n})$ (1) ифодага чизиқли форма деб ҳам юритилади.

Икки вектор аргументли скаляр $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ функция ўзининг ҳар бир аргументига нисбатан чизиқли бўлса, у бичизиқли функция дейилади.

Агар $Б$ базисда $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $\vec{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, $a_{ij} = \varphi(\vec{e_i}, \vec{e_j})$—бичизиқли форма деб аталади, бунда a_{ij} коэффициентлардан тузилган қуйидаги квадрат матрица

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

бичизиқли форманинг матрицаси дейилади.

Агар $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ бичизиқли форма учун $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ шарт ўринли бўлса, у симметрик бичизиқли форма дейилиб, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = -\varphi(\vec{y}, \vec{x})$ бўлса, қия симметрик бичизиқли форма дейилади. M матрицанинг ранги бичизиқли форманинг ранги дейилади. Симметрик бичизиқли форма учун $a_{ij} = a_{ji}$ бўлгани учун, унинг матрицаси ҳам симметрик бўлади. Қия симметрик бичизиқли форма учун $a_{ij} = -a_{ji}$, хусусий ҳолда $a_{ii} = 0$ бўлгани учун, унинг матрицаси бош диагонал элементларининг барчаси нолга тенг бўлган матрицадан иборат бўлади.

Агар $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ симметрик бичизиқли формада $\vec{x} = \vec{y}$ бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ бичизиқли форма $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчили квадратик форма дейилади.

$\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ бичизиқли симметрик форма $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ нинг қутбий формаси деб юритилади, у қуйидагича аниқланади:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [\varphi(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) - \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})].$$

$\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик форманинг матрицаси деб, унинг қутбий бичизиқли формасининг матрицасига айтилади. Бу матрицанинг ранги квадратик форманинг ранги деб юритилади.

✓**1055.** Қуйидаги берилганларнинг қайси бири чизиқли, қайси бири бичизиқли функцияга мисол бўла олишини кўрсатинг:

а) векторнинг ўқдаги проекцияси;

б) векторнинг скаляр кўпайтмаси;

в) иккита чизиқли функциянинг кўпайтмаси:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}; \quad \psi(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}) \varphi(\vec{y});$$

г) ўзгармас вектор $\vec{a}$ билан ўзгарувчи вектор $\vec{x}$ нинг скаляр кўпайтмаси:

$$f(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x};$$

д) ўзгармас $\vec{a}$ вектор билан ўзгарувчи $\vec{x}, \vec{y}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{y});$$

е) $\forall \vec{x}, \ f(\vec{x}) = 0.$

1056. Агар $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор V_n га қарашли бўлиб, $f(\vec{x}) = x_1$ бўлса, у ҳолда $f(\vec{x})$ нинг $\vec{x}$ векторнинг чизиқли функцияси эканлигини исбот қилинг.

1057. Агар бирор $\varphi(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n$ чизиқли форма ўзгармас c сонга тенг бўлса, унинг геометрик маъносини аниқланг.

1058: Қуйидаги бичизиқли форманинг матрицасини топинг:

1) $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_n y_n$;

2) $F(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_3 y_3 + \frac{3}{2} x_1y_2 + \frac{3}{2} x_2y_1 - 3x_3y_2 - 3x_2y_2$;

3) $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + x_2y_2$.

1059. V_3 да $f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ бичизиқли форма берилган. Базис сифатида $\vec{e}_1(1, 1, 1)$, $\vec{e}_2(1, 1, -1)$, $\vec{e}_3(1, -1, -1)$ векторларни олиб, $f(\vec{x}, \vec{y})$ форманинг матрицасини топинг.

1060. V_n да бирор базисга нисбатан қуйидаги квадратик формалар берилган. Берилган базисда уларнинг матрицасини топинг ва рангини аниқланг:

а) $2x^2 + 3xy + 6y^2$; б) $3xy + 4y^2$;
в) $x^2 + 2xy + 4xz + 3y^2 + yz + 7z^2$; г) $4xy$;
д) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 2yz$.

1061. Матрицалари қуйидаги симметрик матрицаларга мос келувчи квадратик формаларни ёзинг:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1062. $F(\vec{x}) = x_1^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - 6x_2x_3$ квадратик форманинг бичизиқли қутбий формасини ёзинг.

1063. Ушбу

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2$$

бичизиқли формага мос келувчи симметрик бичизиқли $f(\vec{x}, \vec{x})$ формани топинг.

1064. Нима сабабдан қия симметрик бичизиқли формаларнинг матрицаси бош диагонал элементларининг барчаси нолга тенг бўлган матрицадан иборат бўлади?

59-§. КВАДРАТИК ФОРМАНИ НОРМАЛ КЎРИНИШГА КЕЛТИРИШ

Бирор $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ базисда квадрат форманинг кўриниши

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

бўлса, (1) ни каноник кўринишдаги квадратик форма дейилади. Квадратик форманинг матрицаси бу ҳол учун

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0, & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади.

Агар хусусий ҳолда a_{ii} коэффициентлар 1 ёки — 1 га тенг бўлиб қолса, у ҳолда квадратик форманинг кўриниши нормал ҳолда дейилади.

Квадратик формани каноник ҳолга келтириш учун «Лагранж усули» ва баъзи ҳолларда «тўлиқ квадратга келтириш» усулларидан фойдаланиш мумкин. Квадратик формани қайси усул билан каноник кўринишга келтирмайлик, унинг мусбат ва манфий индекслари ((1) кўринишдаги мусбат ва манфий ҳадлар сони) ўзгармайди. Бундан хулоса қилиб шуни айтиш керакки, квадратик форманинг каноник кўриниши турли базисларда умуман турли хил кўринишда бўлади, лекин шу квадратик форманинг нормал кўриниши барча базисларда бир хил бўлар экан (яъни индекси ўзгармас экан). Нормал кўринишга келтирилган квадратик форманинг барча ҳадларининг сони r шу форманинг ранги деб аталади.

Квадратик форманинг мусбат ҳадлар сони k дан манфий ҳадлар сони l нинг айирмаси s шу квадратик форманинг сигнатураси деб аталади. Демак, $k - l = s$, $k + l = r$ бўлгани учун $k = \frac{1}{2}(r + s)$, $l = \frac{1}{2}(r - s)$ бўлади.

Агар $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик форма $\vec{x} \neq \vec{0}$ векторлар учун доимо мусбат бўлса, бу квадратик форма мусбат аниқланган дейилади. n та ўзгарувчили квадратик форма мусбат аниқланган бўлиши учун шу форманинг мусбат ҳадларининг сони n га тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

1065. Қуйидаги квадратик формаларни «тўлиқ квадратга келтириш» усули билан каноник кўринишга келтиринг:

а) $2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_3$;
б) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$;
в) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

√**1066.** Базислардан ўтиш матрицаси

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлган алмаштириш $\varphi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = x^2 + y^2 - z^2$ форманинг кўринишини ўзгартирмаслигини кўрсатинг.

1067. Қуйидаги квадратик формаларни каноник кўринишга келтиринг ва ўзгарувчиларни алмаштириш формулаларини ёзинг:

а) $x_1x_2 + x_2x_3$;
б) $2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$;
в) $4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$;
г) $2x_2x_4 - x_3x_4$,

1068. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ квадратик формани $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2$; $x_3 = y_3$ алмаштириш ёрдамида нормал кўринишга келтириш мумкинлигини кўрсатинг.

√**1069.** Қуйидаги квадратик формаларни Лангранж усули билан нормал кўринишга келтиринг:

а) $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 10x_2x_3$;
б) $2x_1^2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3 + 16x_2x_3$;
в) $4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$;

г) $x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - x_4^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 + 2x_3x_4 + x_2x_5 - x_4x_5$,

1070. Қуйидаги квадратик шаклларни нормал кўринишга келтирувчи мос чизиқли алмаштиришларни топинг:

а) $x_1x_2 + x_2x_3$; б) $4x_1^2 + 12x_2^2 - 13x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_2x_3$;
в) $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_5$.

1071. $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ квадратик форма мусбат аниқланган бўлиши учун

$$a_{11},\ a_{22} \text{ ва } \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

сонларнинг мусбат бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

1072. Қуйидаги квадратик формаларнинг ранги ва сигнатурасини топинг:

а) $9x_1^2 + 12x_1x_2 + 79x_2^2$;
б) $2x_1^2 - 12x_1x_2 + 18x_2^2$;
в) $-2x_1^2 - 4x_1x_2 + 22x_2^2 + 12x_2x_3 + 6x_3x_1 - x_3^2$.

1073. Қуйидаги квадратик формаларнинг турини аниқланг:

а) $x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$; б) $5x_1^2 + 8x_1x_2 - x_2^2$;
в) $6x_1^2 - 8x_1x_2$; г) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$;
д) $-\frac{5}{2}x_1^2 + x_1x_3 - \frac{5}{2}x_2^2 - 3x_2x_4 - \frac{5}{2}x_3^2 - \frac{5}{2}x_4^2$;
е) $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 7x_4^2 + 4x_4x_3 + 7x_5^2$;
ж) $-2x_1^2 - 3x_2^2 + 8x_1x_3 - 8x_3^2 - 4x_4^2 + 12x_4x_5 - 9x_5^2$.

60-§. АФФИН ФАЗОСИДАГИ КВАДРИКАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАСНИФИ

n ўлчовли аффин фазосидаги бирор $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ реперда қуйидаги иккинчи тартибли алгебраик тенгламани қаноатлантирувчи A_n нинг барча нуқталар тўплами Q *квадрика* (ёки иккинчи тартибли сирт) деб аталади:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \ldots + 2a_nx_n + a_0 = 0. \quad (1)$$

Бунда $a_{ij} = a_{ji}$ бўлиб, a_{ij} дан камида биттаси нолдан фарқли. (1) тенгламани яна $\varphi_2 + 2\varphi_1 + a_0 = 0$ (2) кўринишда ҳам ёзиш мумкин, бунда

$$\varphi_2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad \varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \text{ дир.}$$

Аффин реперини алмаштириш йўли билан квадриканинг (1) тенгламасини қуйидаги уч кўринишдан бирига келтириш мумкин:

$$\text{I, } \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 1 \ (k \leqslant n, \ \varepsilon_i = \pm 1).$$
$$\text{II. } \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 0 \ (k \leqslant n, \ \varepsilon_i = \pm 1). \quad (3)$$
$$\text{III. } \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k = 2u_{k+1} \ \ (k < n, \ \ \varepsilon_i = \pm 1).$$

Q квадрикага тегишли ҳар бир нуқтага бирор S нуқтага нисбатан симметрик бўлган нуқта яна Q га тегишли бўлса, S нуқта квадриканинг симметрия маркази дейилади. (1) квадриканинг симметрия маркази S нинг координаталари $\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n$ қуйидагича тенгламалар системасини қаноатлантириши керак:

$$\begin{cases} a_{11}\overset{\circ}{x}_1 + a_{12}\overset{\circ}{x}_2 + \ldots + a_{1n}\overset{\circ}{x}_n = -a_1, \\ a_{21}\overset{\circ}{x}_1 + a_{22}\overset{\circ}{x}_2 + \ldots + a_{2n}\overset{\circ}{x}_n = -a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\overset{\circ}{x}_1 + a_{n2}\overset{\circ}{x}_2 + \ldots + a_{nn}\overset{\circ}{x}_n = -a_n. \end{cases} \quad (4)$$

Демак, квадрика марказининг мавжудлиги масаласи, (4) системанинг ечимига боғлиқ экан. (4) дан

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \text{ деб олсак,}$$

1) $\Delta \neq 0$ бўлганда, (4) система ягона ечимга, квадрика битта симметрия марказига эга бўлиб, у марказли квадрика дейилади;

2) $\Delta = 0$ бўлиб, (4) система чексиз кўп ечимга эга бўлса, квадриканинг симметрия марказлари ҳам чексиз кўп бўлиб, улар k ўлчовли текисликни ҳосил қилади;

3) $\Delta = 0$ бўлиб, (4) система биргаликда бўлмаса, квадрика битта ҳам симметрия марказига эга бўлмайди.

Кейинги 2)—3) ҳолда квадрика марказсиз дейилади.

A_n фазодаги квадрикаларни қуйидагича таснифлаш мумкин:

(3) даги I дан:

1. Агар $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = 1$ бўлса, квадриканинг тенгламаси $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 = 1$ бўлиб, у эллипсоид дейилади.

2. Агар $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = -1$ бўлса, квадриканинг тенгламаси $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 = -1$ бўлиб, у мавҳум эллипсоид дейилади.

3. Агар ε_k лар турлича бўлса, у ҳолда квадрика гиперболоид дейилади. Демак, эллипсоид ва гиперболоидлар марказли квадрикалар экан.

4. $k = n$ бўлса, (3) нинг II сидан квадриканинг тенгламаси $\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_n u_n^2 = 0$ кўринишда бўлиб, бунда $\varepsilon_i = \pm 1$.

Агар ε_i ларнинг ҳаммаси бир хил бўлмаса, квадрика конус дейилади. Конус марказли квадрика бўлиб, унинг маркази конуснинг учи дейилади. Агар $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n$ бўлса, квадрика битта нуқта (координата боши) дан иборат бўлиб, унинг учи шу нуқтада бўлган мавҳум конус дейилади.

5. Агар (3) даги III да $k = n - 1$ бўлса, у ҳолда квадриканинг тенгламаси $\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} u_{n-1}^2 = 2u_n$ бўлиб, бунда ε_i лар 1 ёки -1 га тенг. Бундай квадрикалар параболоидлар дейилади. Параболоид марказсиз квадрикадир.

6. (3) даги I, II да $k < n$, (3) даги III да $k < n - 1$ бўлса, $k = r$ ва (3) даги III да $k = r - 1$ деб олиб, квадриканинг қуйидаги тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_r u_r^2 = 1, \quad (5)$$
$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_r u_r^2 = 0, \quad (6)$$
$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_{r-1} u_{r-1}^2 = 2u_r, \quad (7)$$

бунда $r < n$ ва ε_i лар $+1$ ёки -1 га тенг. Нормал тенгламалари (5), (6) ва (7) кўринишда бўлган квадрикалар цилиндрик квадрикалар дейилади. (5), (6) квадрикаларнинг марказлари $(n - r)$ текисликни ташкил қилади, (7) квадриканинг маркази йўқ.

1074. A_3 да берилган $x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_3 + 2 = 0$ квадрика билан

$$\frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3 - 3}{3}$$

тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топинг.

1075. A_4 да берилган $x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_3x_4 + 4x_2 + 6x_4 = 10$ квадрика билан $x_1 = t - 2$, $x_2 = 2t - 1$, $x_3 = t - 2$, $x_4 = -2t + 1$ (t — параметр) тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топинг.

1076. A_4 да берилган $3x_1^2 - x_2x_4 - 2x_3x_4 - x_2 - x_4 = 0$ квадрика билан (0, 1, — 1, 0) ва (1, 3, 2, 4) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топинг.

1077. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 6 = 0 \end{cases}$

тўғри чизиқнинг A_3 да берилган $x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_3 + 2 = 0$ квадрикага тўлиқ тегишли эканини кўрсатинг.

1078. A_3 да берилган $x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 + 6x_2 - 4 = 0$ квадриканинг

$$\frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3 - 3}{1}$$

тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқли ясовчиларини топинг.

1079. A_3 да берилган $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_1 + 2x_3 = 0$ квадриканинг координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқли ясовчиларини топинг.

1080. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0$ текислик $x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_2x_3 - 6x_3 + 2 = 0$ квадрикани иккита тўғри чизиқ бўйича кесишини кўрсатинг.

1081. A_4 да $x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + 5 = 0$ квадриканинг (0, —2, 1, 3) нуқтадан ўтиб, $x_4 - 1 = 0$ текисликда ётувчи тўғри чизиқли ясовчиларини топинг.

1082. A_3 да берилган квадрикаларнинг марказларини топинг:

а) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$;

б) $4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2 - 4x_3 - 1 = 0$.

1083. A_3 да берилган $x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ квадриканинг маркази ўзига қарашли эканлигини кўрсатинг.

1084. A_n да берилган қуйидаги квадрикаларнинг марказлари йўқлигини кўрсатинг:

а) A_3: $2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 1 = 0$;

б) A_4: $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 5x_2 - x_1 + x_3 + x_4 - 4 = 0$;

в) A_5: $2x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 - 3x_2x_4 + x_2 + x_3 - 3 = 0$;

г) A_n: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_n^2 = 0$.

1085. A_3 ва A_4 даги асосий квадрикаларнинг каноник тенгламасини ёзинг.

1086. Қуйидаги берилган квадрикаларнинг тенгламасини нормал кўринишга келтириб, унинг турини аниқланг:

A_2 да:

1) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - 12 = 0$;

2) $4x_1x_2 - x_2^2 - 8x_1 + 8x_2 - 8 = 0$;

A_3 да:

1) $x_1^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 3 = 0$;

2) $x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5 = 0$.

1087. Қуйидаги квадрикаларнинг тенгламасини нормал кўринишга келтириб, турини аниқланг, янги аффин координаталар системасига ўтиш формулаларини ёзинг:

A_2 да:

1) $4x_1x_2 - 3x_2^2 + 12x_2 - 12 = 0$;

2) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 8x_1 - 24x_2 + 8 = 0$;

A_3 да:

1) $4x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 8x_1 + 20x_2 + 4x_3 + 24 = 0$;

2) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_3 - 4x_1 = 0$;

A_4 да:

1) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 = 0$;

2) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 5x_2x_4 - x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0$.

1088. A_n да берилган қуйидаги квадрикаларнинг цилиндрик квадрика эканлигини кўрсатинг:

а) A_3 да: $x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2 + 12x_3 + 10 = 0$;

б) A_4 да: $4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_4 + 2x_1 - x_2 + x_4 + 15 = 0$;

в) A_5 да: $x_1^2 + 9x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_4 + 2x_1x_4 - 6x_3x_4 + x_2 + 3x_3 + x_5 + 1 = 0$.

61-§.ОРТОГОНАЛ АЛМАШТИРИШ УСУЛИ БИЛАН КВАДРАТИК ШАҚЛНИ КАНОНИК КУРИНИШГА КЕЛТИРИШ

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j$ (1) квадрат формани $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ (2) кўринишга келтириш учун

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{n2} \dots & c_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

тенглама илдизлари λ_i ларни топиш кифоя.

(1) квадриканинг кўринишини (2) га келтирувчи ортогонал алмаштиришни топиш учун $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \dots, \vec{e_n'})$ ортонормал базисни топиш усулини кўриб чиқайлик.

Фараз қилайлик, λ_k (3) характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи бўлсин. У ҳолда λ_k га мос келувчи махсус $\vec{u}\,(u_1, u_2, \dots, u_n)$ нинг координаталарини қуйидаги тенгламалар системасидан топамиз:

$$\begin{cases} (c_{11}-\lambda_k)u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1n}u_n = 0, \\ c_{21}u_1 + (c_{22}-\lambda_k)u_2 + \dots + c_{2n}u_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \dots + (c_{nn}-\lambda_k)u_n = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Топилган $\vec{u}$ векторни унинг модули $|\vec{u}|$ га бўлиб, ортонормалланган базиснинг изланаётган векторини топамиз.

Фараз қилайлик, λ_k характеристик тенгламанинг $m > 1$ каррали илдизи бўлсин. (4) тенгламадан ҳар иккитаси ўзаро ортогонал бирлик векторларнинг координаталарини аниқловчи m та боғлиқ бўлмаган (эркин) ечимларни оламиз. Бу векторлар m ўлчовли фазо қисмининг ортонормалланган базисини ташкил этади. Шунинг учун бу векторларни V_n нинг базис векторлари қилиб олиш мумкин. Шундан сўнг $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \dots, \vec{e_n'}$ ларнинг координаталаридан фойдаланиб, *Б* дан *Б′* га ўтиш матрицасини тузамиз. Унинг транспонирланган матрицасини топсак, квадрика тенгламасини каноник кўринишга келтирувчи ортогонал алмаштириш матрицаси келиб чиқади. Масалан, ортогонал алмаштириш ёрдамида

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 \qquad (5)$$

квадратик формани каноник кўринишга келтирайлик.

Квадратик форманинг матрицаси

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

дан иборат бўлиб, характеристик тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. Бу ердан $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ эканлигини кўрамиз. Демак, квадратик форманинг кўринишини ортогонал алмаштириш ёрдами билан $6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$ кўринишга келтириш мумкин экан. Энди қайси базисда берилган квадратик форма каноник кўринишга эга бўлишини топайлик. (5) квадрика тенгламаси учун (4) кўринишдаги тенгламалар системасини ёзайлик:

$$\begin{cases} (1-\lambda)u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0, \\ 2u_1 - (2+\lambda)u_2 - 2u_3 = 0, \\ -4u_1 - 2u_2 + (1-\lambda)u_3 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

$\lambda_1 = 6$ га мос келувчи янги базиснинг $\vec{e_1'}$ векторини топайлик.

(6) да $\lambda = 6$ деб

$$\begin{cases} -5u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0, \\ 2u_1 - 8u_2 - 2u_3 = 0, \\ -4u_1 - 2u_2 - 5u_3 = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системанинг бирор ечимини олайлик, масалан, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ ва $u_3 = -2$; у ҳолда $\lambda = 6$ га мос келувчи махсус вектор $\vec{p}\,(2, 1, -2)$ бўлади.

Бу вектордан $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ ни, яъни координата вектори $\vec{e_1'}$ (2/3, 1/3, —2/3) ни топамиз.

$\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ ларга мос келувчи, янги базиснинг $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$ векторларини топайлик. (6) да $\lambda = -3$ деб

$$\begin{cases} 4u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0, \\ 2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0, \\ -4u_1 - 2u_2 + 4u_3 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу система $2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$ (7) тенгламага эквивалентдир. Бу ердан кўриниб турибдики, изланаётган $\vec{e}_2^{\,\prime}$, $\vec{e}_3^{\,\prime}$ векторлар $\vec{p}$ га перпендикулярдир, яъни $\vec{e}_1^{\,\prime}$ га ортогоналдир. Шунинг учун (7) нинг битта ечимини ихтиёрий оламиз. Агар $u_3 = u_2 = 2$ десак, у ҳолда $u_1 = 1$ бўлади. Фараз қилайлик, бу $\vec{q}(1, 2, 2)$ вектор бўлсин, у ҳолда

$$\vec{e}_2^{\,\prime} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = (1/3,\ 2/3;\ 2/3) \text{ бўлади.}$$

Энди учинчи $\vec{r}$ векторни топамиз. Бу векторнинг координаталари (7) тенгламани қаноатлантиради ҳамда $\vec{q}$ га ортогоналдир, яъни

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0, \\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 0. \end{cases}$$

Бу системанинг бирор ечими, масалан, $u_1 = 2$, $u_2 = -2$, $u_3 = 1$ $\vec{r}$ векторнинг координаталари бўлади:

$$\vec{r}(2, -2, 1)\ ,$$

бундан

$$\vec{e}_3^{\,\prime} = \frac{\vec{|r|}}{|\vec{r}|} = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right) \text{ бўлади.}$$

Янги базис вектори эски базис вектори орқали қуйидагича ифода қилинади:

$$\vec{e}_1^{\,\prime} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_2^{\,\prime} = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_3^{\,\prime} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3.$$

Изланаётган ортогонал алмаштиришнинг матрицаси шу система матрицасини транспонирлаш натижасида ҳосил бўлади, яъни

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3. \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3. \end{cases}$$

Агар x_1, x_2, x_3 ларнинг қийматларини (5) га қўйсак, у ҳолда унинг каноник кўриниши $6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$ ҳосил бўлади.

Шуни ҳам айтиш керакки, $\vec{e}_2^{\,\prime}$ векторни танлаб олиш ягона бўлмаганлиги сабабли, квадратик формани каноник кўринишга келтирувчи ортогонал алмаштиришлар чексиз кўпдир. Биз шулардан биттасини топдик холос.

1089. Қуйидаги матрицаларнинг махсус қийматлари ва векторларини топинг:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1090. Ушбу

$\begin{pmatrix} \lambda & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, λ, $m \in R$, $\lambda \neq -2$ матрица берилган. Қуйидаги ҳоллар учун матрицанинг махсус қийматлари ва векторларини топинг:

а) $\lambda \neq -1$, $m \neq 0$;
б) $\lambda = 1$, $m = 0$;
в) $\lambda \neq -1$, $m = 0$.

1091. Ортонормал базисга нисбатан Q квадриканинг тенгламаси берилган:

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 2xz + 2x - 2y + 6z + 2 = 0.$$

а) $g(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$ квадратик форманинг махсус қийматлари ва векторларини топинг;

б) Q квадриканинг маркази борлигини кўрсатинг;

в) махсус векторлардан иборат ортонормал репер тузинг. Шу реперга нисбатан квадриканинг тенгламасини ёзинг.

1092. Ортогонал алмаштиришлар ёрдамида қуйидаги квадратик формаларни каноник ҳолга келтиринг:

а) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

б) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

в) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

г) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

д) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$;

е) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;

ж) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

з) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$.

1093. $g(x, y, z) = (y - z)^2 + (1 + a)(z - x)^2 + (1 - a) \times (x - y)^2$, $a \in R$, квадратик формани каноник кўринишга келтиринг. a нинг қийматларига қараб, $g(x, y, z) = 1$ квадриканинг турларини аниқланг.

1094. Қуйидаги квадрика тенгламаларини каноник кўринишга келтириб, унинг турини аниқланг:

E_2 да:

1) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 - 7 = 0$;

2) $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + 1 = 0$;

3) $x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 + 9 = 0$;

4) $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 10x_1 + 70x_2 = 0$;

5) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 5 = 0$;

E_3 да:

1) $x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1 - 12x_2 + 18 = 0$;

2) $x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$;

3) $3x_2^2 + 12x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2 = 0$;

4) $x_1x_3 - x_2 = 0$;

5) $x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 + 9 = 0$;

6) $x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 - 2x_2 = 0$;

7) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_5 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 36x_3 + 36 = 0$

8) $x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_2 - 4x_3 - 5 = 0$;

9) $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_3 + 2x_2 - 8 = 0$.

X боб. ҚАВАРИҚ КЎПБУРЧАКЛАР ВА КЎПЁҚЛАР. МУНТАЗАМ КЎПЁҚЛАР

62-§. ҚАВАРИҚ КУПБУРЧАКЛАР ВА КУПЁҚЛАР

E_n евклид фазода берилган тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини бирлаштирувчи кесма шу тўпламга тегишли бўлса, бу тўплам *қавариқ* дейилади. (Берилган таъриф A_n аффин фазода ҳам ўринли, лекин биз бу бобдаги масалаларни евклид фазосида қараймиз). E_2 да берилган қавариқ тўплам ёпиқ бўлиб, ички нуқталарга эга бўлса, у *қавариқ фигура* дейилади. Агар E_3 да берилган қавариқ тўплам ёпиқ ва ички нуқталарга эга бўлса, у *қавариқ жисм* дейилади.

Чегараси чекли сондаги кесмалардан ёки кесмалар ва нурлардан иборат бўлган қавариқ фигура кўпбурчак дейилади, кесмалар ва нурлар томонлар ёки қирралар дейилади.

Қавариқ кўпбурчак ўз томони орқали ўтувчи тўғри чизиқдан бир томонда жойлашади, яъни у томонлари орқали ўтувчи чизиқлар билан аниқланувчи ярим текисликларнинг кесишмасидан иборатдир. Агар қавариқ жисмнинг чегараси чекли сондаги қавариқ кўпбурчаклардан иборат бўлса, у қавариқ кўпёқли дейилади, кўпбурчаклар эса унинг ёқлари дейилади. Қавариқ кўпёқ ҳар бир ёғини ўз ичига олган текисликдан бир томонда ётади, яъни у ёқларини ўз ичига олган текисликлар билан аниқланувчи ярим фазоларнинг кесишмасидир.

1095. E_2 текисликдаги декарт реперда координаталари қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тўпламларнинг қавариқлигини текширинг:

1) $x^2 + y^2 \leqslant 4$; 2) $x^2 + y^2 = 4$; 3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geqslant 1$;

4) $y > x^2$; 5) $|x| < 1$; 6) $|y| \geqslant 2$.

1096. E_3 фазодаги декарт реперда координаталари қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тўпламларнинг қавариқлигини текширинг:

1) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$; 2) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$;

3) $z > x^2 + y^2$; 4) $z = x^2 + y^2$;

5) $x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 1$.

1097. Агар тўғри чизиқ қавариқ кўпбурчак чегараси билан учта умумий нуқтага эга бўлса, кўпбурчакнинг томони бу тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг.

1098. Қавариқ кўпбурчакнинг ички бурчагининг ҳар бири π дан катта эмаслигини исбот қилинг.

1099. Текисликда қуйидаги тенгсизликлар системалари билан берилган фигураларни ясанг:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \geqslant -3, \\ y \leqslant 4, \\ y \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x \geqslant 0, \\ y - 2x \leqslant 0, \\ x \geqslant 1, \\ y \leqslant 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x - 1| \leqslant 2, \\ |y + 2| \leqslant 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant 1, \\ x + y \geqslant 3. \end{cases}$

1100. Диагоналлари кесишувчи тўртбурчак қавариқ эканлигини исбот қилинг.

1101. ABC учбурчакнинг A ва C учларидан ўтказилган медианалари F нуқтада кесишади. $ABCF$ тўртбурчак қавариқ эмаслигини исбот қилинг.

1102. Синиқ чизиқнинг узунлиги унинг боши ва охирини бирлаштирувчи кесма узунлигидан кичик эмаслигини исбот қилинг.

1103. Ёпиқ синиқ чизиқда унинг ихтиёрий икки учини бирлаштирувчи кесма узунлиги синиқ чизиқ узунлигининг ярмисидан катта эмаслигини исбот қилинг.

1104. F — чегараланган қавариқ (қавариқ бўлмаган) тўплам бўлсин. Унинг тўлдирувчиси $E_n \setminus F$ тўпламнинг қавариқлиги ҳақида нима дея оласиз?

1105. Қуйидаги фигураларнинг бирлашмасидан иборат бўлган қавариқ фигурани тасвирланг:

а) иккита учбурчак;
б) доира ва учбурчак;
в) иккита квадрат;
г) иккита тасма;
д) иккита параллелограмм;
е) иккита ярим текислик;
ж) тасма ва учбурчак;
з) иккита тетраэдр;
и) иккита шар;
к) иккита куб;

л) шар ва куб;
м) иккита қавариқ фигура;
н) иккита қавариқ бўлмаган фигура;
о) битта қавариқ ва битта қавариқ бўлмаган фигура.

1106. Қавариқ бўлмаган ва текис бўлмаган фигуранинг:

а) қавариқ фигурадан иборат кесими бўлиши;

б) чексиз кўп қавариқ фигуралардан иборат кесимларга эга бўлиши;

в) унинг ҳар бир кесими қавариқ бўлиши мумкинми?

1107. Қавариқ бўлмаган бирор фигурани текислик ёрдамида:

а) иккита қавариқ фигурага; б) иккита қавариқ бўлмаган фигурага; в) бири қавариқ, иккинчиси қавариқ бўлмаган иккита фигурага ажратиш мумкинми? Бу уч турли кесимни фақат битта фигурада ҳосил қилиш мумкинми?

1108. Текис бурчаклари қуйидагича бўлган уч ёқли бурчак мавжудми:

а) 80°, 50°, 30°;
б) 100°, 120°, 10°;
в) 125°, 120°, 115°?

1109. Уч ёқли бурчак текис бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, уларнинг ҳар бири ўткир бурчаклар бўлишини исбот қилинг.

1110. Қавариқ тўрт ёқли бурчакни текислик ёрдамида шундай кесиш мумкинки, кесимда параллелограмм ҳосил бўлади. Буни исбот қилинг.

1111. Қавариқ кўпёқнинг ихтиёрий икки ёқли бурчаги π дан катта эмаслигини исбот қилинг.

1112. Қавариқ кўпёқнинг текис бурчаклари сони билан қирралари сони орасида боғланишни тузинг.

1113. Ёқлари сони 13 та ва ҳар бир ёғидаги томонлари сони 13 та бўлган қавариқ кўпёқ мавжудми?

1114. n бурчакли призманинг диагоналлари сонини топинг.

1115. Параллелепипеднинг ҳамма диагоналлари ўзаро тенг бўлса, у тўғри бурчакли параллелепипед бўлишини исбот қилинг.

1116. Учларидан бири унга қарши турган асосининг учларидан баравар узоқликда ётган параллелепипед бўлиши мумкинми?

1117. Қирралари сони 7 га тенг бўлган қавариқ кўпёқ мавжуд эмаслигини исбот қилинг.

1118. Қирраларининг сони 7 дан катта бўлган ихтиёрий қавариқ кўпёқлар мавжудлигини исбот қилинг.

1119. Кўпёқда: а) томонларининг сони тоқ бўлган ёқлар сони жуфт эканлигини; б) учидан чиққан қирраларининг сони тоқ бўлган учлар сони жуфт эканлигини исбот қилинг.

1120. Битта ёғи ўнбурчак, иккинчи ёғи тўққизбурчак, учинчи ёғи саккизбурчак ва ҳоказо, охирги ёғи учбурчакдан иборат бўлган қавариқ кўпёқ мавжудми?

1121. Ҳар қандай қавариқ кўпёқда томонларининг сони бир хил бўлган иккита ёқ топилиши мумкинлигини исбот қилинг.

1122. Ёқлари фақат учбурчаклардан иборат бўлган кўпёқ берилган. Агар бу кўпёқнинг: а) 12 та қирраси; б) 15 та қирраси бўлса, унинг нечта учи ва нечта ёғи бор? Шундай кўпёқлардан бирини чизинг.

1123. Ёқлари фақат тўртбурчаклардан иборат кўпёқ берилган. Агар унинг: а) 12 та қарраси; б) 15 та қирраси; в) 20 та қирраси бўлса, унинг нечта учи ва нечта ёғи бор? Шундай кўпёқлардан бирини чизинг.

1124. Қавариқ кўпёқнинг ҳар бир учидан тўрттадан қирра чиққан. Агар унинг: а) қирралари 12 та; б) қирралари 20 та бўлса, унинг нечта учи ва ёғи борлигини аниқланг. Шундай кўпёқлардан бирини чизинг.

1125. Ҳар қандай қавариқ кўпёқ ё учбурчакли ёққа, ёки учта қиррани бирлаштирувчи учга эга эканлигини исбот қилинг.

1126. Ҳар бир ёғидаги томонларининг сони бештадан ортиқ бўлган қавариқ кўпёқ мавжудми?

1127. Қавариқ 300 ёқнинг ҳамма ёқлари бешбурчаклар, олтибурчаклар ёки еттибурчаклардан иборат бўлиб, ҳар бир учидан фақат учта қирра чиққан ва бешбурчакли ёқлари сони 100 та бўлса, унинг олтибурчакли ва еттибурчакли ёқлари сонини топиш мумкинми?

63-§. МУНТАЗАМ КУПЁҚЛАР

Агар қавариқ кўпёқ ёқлари томонларининг сони бир хил бўлган мунтазам кўпбурчаклардан иборат бўлса ва шу билан бирга кўпёқнинг ҳар бир учида бир хил миқдордаги қирралар учрашса, бундай қавариқ кўпёқ мунтазам кўпёқ дейилади.

Уч ўлчовли евклид фазосида мунтазам кўпёқларнинг 5 тури мавжуд бўлиб, улар тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр, икосаэдрлардир. Уларга тегишли маълумотларни қуйидаги жадвалда келтирамиз. Бу жадвалдаги n — кўпёқнинг ёғидаги қирралар сони, k — кўпёқнинг ҳар бир учидаги қирралар сони, Қ — кўпёқнинг ҳамма қирралари сони, Ё — ёқлар сони, У — учлар сони бўлиб,

$$Ё = \frac{2Қ}{n}, \qquad У = \frac{2Қ}{k}$$

Кўпёқнинг номи:	n	k	Қ	Ё	У
Тетраэдр	3	3	6	4	4
Октаэдр	3	4	12	8	6
Икосаэдр	3	5	30	20	12
Гексаэдр	4	3	12	6	8
Додекаэдр	5	3	30	12	20

Фазодаги I тур ҳаракат (силжиш) натижасида берилган кўпёқни ўз-ўзига ўтказиш кўпёқнинг ўз-ўзига жойланиши бўлади. Мунтазам кўпёқнинг ўз-ўзига жойланиш гуруҳи чеклидир.

Симметрия маркази (O нуқта) га эга бўлган кўпёқнинг ўз-ўзига жойланиш гуруҳини топиш учун l ўқ атрофида айланишини қараш керак. l ўқ учун қуйидаги ҳоллар ўринли деб қаралади:

1) l тўғри чизиқ O нуқтага нисбатан симметрик бўлган параллел ёқларнинг марказидан ўтади;

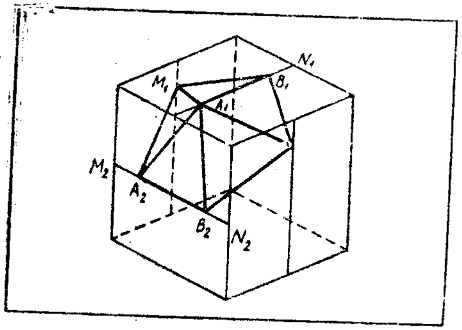
2) l тўғри чизиқ марказий симметрик бўлган қарама-қарши учларидан ўтади;

3) l тўғри чизиқ марказий симметрик бўлган қирраларнинг ўрталаридан ўтади.

1128. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг устки ва остки асосларининг айқаш диагоналлари BD ва A_1C_1 берилган. Учлари B, D, A_1, C_1 нуқталарда бўлган кўпёқнинг мунтазам тетраэдр эканлигини исботланг.

1129. Куб ёқларининг марказлари мунтазам октаэдр учлари эканлигини исботланг.

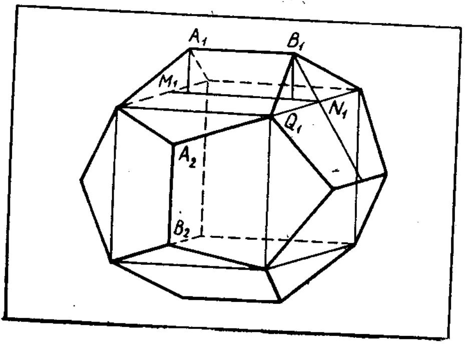
1130. Қирраси a бўлган куб ёқларининг ўрта чизиқлари M_iN_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ўтказилган. Параллел ёқларнинг ўрта чизиқлари параллел, қўшни ёқларнинг ўрта чизиқлари



23- чизма.

перпендикуляр (23- чизма). Ҳар бир M_iN_i кесмада ўрта нуқтаси M_iN_i кесманинг ўрта нуқтаси билан устма-уст тушадиган $A_iB_i(i = 1, \ldots, 6)$ кесма олиниб, унинг узунлиги x билан белгиланган. x ни A_i, $B_i(i = 1, 2, \ldots, 6)$ нуқталар мунтазам икосаэдр учлари бўладиган қилиб танлаб олиш мумкин эканлигини исботланг ва икосаэдр қиррасининг узунлиги x ни кубнинг қирраси орқали топинг.

1131. Мунтазам додекаэдрни ясаш учун A_iB_i кесмани куб устида y баландликка кўтариш мумкин (1130- масалага қаранг). A_i, B_i нуқталарнинг қавариқ қобиғини ва мос ёқларининг учларини ясаймиз. Шу тарзда ҳосил қилинган Ф кўпёқнинг учлари A_i, B_i нуқталарда, шунингдек, кубнинг учларида ҳам бўлади (24- чизма). y узунликни Ф кўпёқнинг ёқлари мунтазам бешбурчакдан, Ф кўпёқ эса додекаэдрдан иборат бўладиган қилиб танлаб олиш мумкин эканлигини исботланг, y ни куб қирраси орқали топинг.



24- чизма.

1132. Қуйидаги жадвалда мунтазам кўпёққа ташқи чизилган сфера радиуси R, ички чизилган сфера радиуси r, кўпёқнинг тўла сирти S, ҳажми V (бу ерда α— кўпёқнинг икки ёқли бурчаги) унинг қирраси a орқали ифодаланган. Бу жадвалда келтирилган формулаларнинг тўғрилигини исботланг.

	R	r	$\cos\alpha$	S	V
тетраэдр	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
куб	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	$6a^2$	a^3
октаэдр	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
додекаэдр	$\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$3a^2\sqrt{25++10\sqrt{5}}$	$\frac{a^3}{4}\sqrt{10(47+21\sqrt{5})}=$ $=\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$
икосаэдр	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}=\frac{a(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{6}a^3\cdot\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}=$ $=\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$

1133. Мунтазам октаэдр ёқларининг марказлари куб учларидан иборат эканлигини исботланг. Агар октаэдр қирраси a га тенг бўлса, кубнинг қиррасини топинг.

1134. *A* — мунтазам кўпёқнинг ихтиёрий учи бўлса, бу учдан чиқувчи қирралар охирларининг барчаси бир текисликда ётишини ва улар мунтазам кўпбурчак ташкил қилишини исботланг.

1135. Берилган мунтазам кўпёқнинг қўшни ёқлари марказлари орасидаги масофа ўзгармас бўлишини исботланг.

1136. Мунтазам икосаэдр ёқларининг марказлари мунтазам додекаэдр учлари бўлади ва аксинча. Буни исботланг.

1137. Тетраэдр ёқларининг марказлари бошқа бирор мунтазам кўпёқнинг учлари бўлади. Бу мунтазам кўпёқ қандай кўринишга эга, агар берилган тетраэдр қирраси *a* га тенг бўлса, унинг қирраси нимага тенг?

1138. Тетраэдрнинг 6 та симметрия текислигини кўрсатинг.

1139. Кубнинг 9 та симметрия текислигини кўрсатинг.

1140. Октаэдрнинг 9 та симметрия текислигини кўрсатинг.

1141. Ўзаро перпендикуляр учта текисликка нисбатан симметрия кўпайтмаси марказий симметрия бўлади. Бу жумлага асосланиб, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдрларнинг симметрия марказларга эга эканлигини исботланг.

1142. Ф — тетраэдрдан фарқли мунтазам кўпёқ бўлсин. Шу кўпёқ учун:

1) ҳар бир қирраси учун унга параллел қирра;

2) ҳар бир ёғи учун унга параллел ёқ топилишини исботланг.

1143. Мунтазам кўпёқнинг ҳар бир қирраси учун унга перпендикуляр қирра мавжудлигини исботланг.

1144. Икосаэдрнинг 15 та симметрия текислиги мавжуд. Бу текисликларни кўрсатинг.

1145. Тетраэдрнинг ўз-ўзига жойлашиш гуруҳи 12 та элементдан иборат бўлади. Бундай барча бурилишларни кўрсатинг.

1146. Куб ва октаэдрнинг ўз-ўзига жойлашиш гуруҳлари изоморф бўлади, ҳар бир гуруҳ 124 та элементга эга. Бу элементларни кўрсатинг.

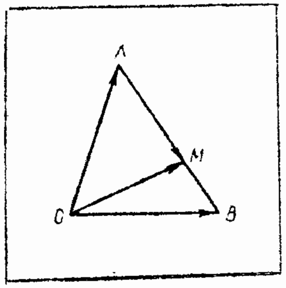
1147. Октаэдр ва икосаэдрнинг ўз-ўзига жойлашиш гуруҳлари 60 та элементга эга бўлиб, улар изоморфдир. Бу элементларни кўрсатинг.

ЖАВОБ ВА КЎРСАТМАЛАР

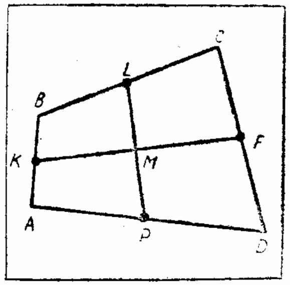
I боб

1. Тўғри бўлмайди. **6.** Йўқ. **8.** Бажарилмайди, чунки $\left.\begin{matrix}\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\\ \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ $\Rightarrow\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$. **13.** $\vec{CA}+\vec{AB}=\vec{CB}$, лекин $\vec{CA}=-\vec{AC}$, демак, $\vec{AB}-\vec{AC}=$ $=\vec{CB}$. **15.** $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$, $\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{AC}$ бўлгани учун $\vec{AB}+\vec{BC}=$ $=\vec{AD}+\vec{DC}$. **17.** Йўқ. **18.** $\vec{AC}$, **21.** а) $\vec{PQ}$; б) $\vec{AK}$; в) $\vec{CA}$; г) $\vec{O}$. **22.** а) $\vec{OE}+\vec{AD}$; б) $\vec{AK}$; в) $\vec{O}$; г) $\vec{MN}$. **23.** Кўрсатма. $\vec{MN}=\vec{MA}+$ $+\vec{AD}+\vec{DN}=\vec{MB}+\vec{BC}+\vec{CN}$ эканлигидан фойдаланинг. **25.** $\vec{MA}=$ $=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; $\vec{MB}=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$; $\vec{MC}=\frac{\vec{b}+\vec{a}}{2}$, $\vec{MD}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.

27. Кўрсатма. $\left.\begin{matrix}\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}\\ \vec{OM}=\vec{OB}+\vec{BM}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2\,\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{AM}+\vec{BM}=$ $=\vec{OA}+\vec{OB}$, чунки $\vec{AM}+\vec{BM}=\vec{O}$ (25- чизма). Демак, $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+$ $+\vec{OB})$. **30.** 29- масаладан фойдаланинг. **32.** $\vec{OM}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. **33.**



25- чизма.



26- чизма.

ҳа, $\vec{AO} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$. **34.** $\left.\begin{matrix}\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{O}\\ \vec{MB} + \vec{MD} = \vec{O}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{MA} + \vec{MC} + \vec{MB} + \vec{MD} = \vec{O}$. **36.** Кўрсатма. $\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{AG}$, $\vec{MG} = \vec{MB} + \vec{BG}$, $\vec{MG} = \vec{MC} + \vec{CG}$ тengликларнинг чап ва ўнг томонларини ҳад-ма-ҳад қўшамиз: $3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG}) \Rightarrow \vec{MG} = \frac{1}{3}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$, чунки $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{O}$ (28-масаладан фойдаланинг). **37.** Кўрсатма. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ ва $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$ эканлигидан фойдаланинг. **39.** Кўрсатма. 36-масаланинг шартидан фойдаланинг. **40.** $\forall\ O$ нуқта учун $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OL})$ ва $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})$, $\vec{OL} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$ эканлигидан фойдаланинг (26-чизма). **41.** $\forall\ O$ нуқта учун $\vec{OU} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, $\vec{OW} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$, $\vec{OV} = \frac{1}{2}(\vec{OE} + \vec{OF})$. M — оғирлик маркази бўлсин. $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OK} + \vec{OW} + \vec{OV}) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{2}(\vec{OE} + \vec{OF})\right] = \frac{1}{6}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OE})$. Худди шунингдек муносабатни VZX учбурчак учун ҳам топиш етарли (27-чизма). **43 — 46.** Ташкил қилади. **47.** Ташкил қилмайди. **48.** Ташкил қилади. **49.** Ташкил қилади. **50 — 51.** Ташкил қилади. **52.** Ташкил қилмайди. **55.** Ташкил қилмайди. **63.** Кўрсатма. ΔABC да: $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{AC}$, $\vec{c} = \vec{BA}$ бўлиб, l нинг йўналиши $\vec{a}$ вектор билан бир хил бўлсин. У ҳолда $\text{пр}_l\,\vec{a} = a$, $\text{пр}_l\,\vec{b} = b\cdot\cos C$, $\text{пр}_l\,\vec{c} = c\cdot\cos B$ бўлади. $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$ дан $a = b\cdot\cos C + c\cdot\cos B$ келиб чиқади. **64.** Кўрсатма. $|\vec{AC}| = |\vec{BD}| \Rightarrow (\vec{OC} - \vec{OA})^2 = (\vec{OD} - \vec{OB})^2$. $\forall\ O$ учун $\alpha = \text{пр}_{\vec{EF}}\vec{AB} - \text{пр}_{\vec{EF}}\vec{CD}$ дан фойдаланиб (28-чизма), $\vec{EF}\cdot\alpha = \vec{O}$ эканлигини исботлаш керак. **68.** а) $(1,\ 1)$; б) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$; г) $(0,\ 1)$; д) $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$; е) $(-1,\ 1)$; ж) $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$. **69.** $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. **70.** $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. **72.** $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$. **75.** 1) Мумкин; 2) ва 3) йўқ. **80.** 1) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_8$. **81.** $\vec{AB} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{BC} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{AD} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{CD} = -5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. **88.** $\alpha = \frac{1}{13}$. **89.** $\vec{b} = -3\vec{a}$. **90.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$. **93.** 1) ва 3) векторлар учликлари компланар бўлади. **94.** 1) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, 3) $3\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} + \vec{2c} - 4\vec{d} = \vec{O}$. **96.** $\lambda = 5$. **98.** $\frac{3}{4}\vec{e}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\vec{e}_2 + \frac{1}{8}\vec{e}_3$. **100.** $|\vec{p}| = \sqrt{\alpha_1^2 a_1^2 + \alpha_2^2 a_2^2 + \alpha_3^2 a_3^2}$. **101.** 3.

102. $\cos\varphi = \frac{10}{27}$. **103.** Берилган ифодани $\vec{a}_3$ га скаляр кўпайтириш керак.

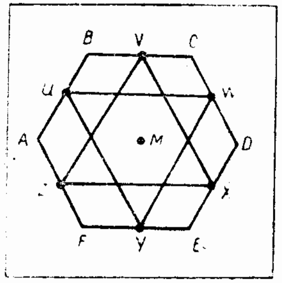
107. $|\vec{CD}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **108.** Диаметри AB дан иборат бўлган айлана.

110. $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{k}| = \sqrt{37}$. **111.** $\varphi = 45°$. **113.** $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **115.** $|\vec{AD}| = \frac{1}{5}\sqrt{740}$. **116.** $m_a^2 + m_b^2 - m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. **119.** Кўрсатма. $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{r}_3 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)\vec{r}_1 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)\vec{r}_2 = \vec{O}$ эканлигини кўрсатинг. Бу ерда $\vec{OA} = \vec{r}_1$, $\vec{OB} = \vec{r}_2$, $\vec{OC} = \vec{r}_3$ (29-чизма). **123.** Кўрсатма. $\vec{AM} \uparrow\uparrow (\vec{AB} + \vec{AC})$ бўлгани учун

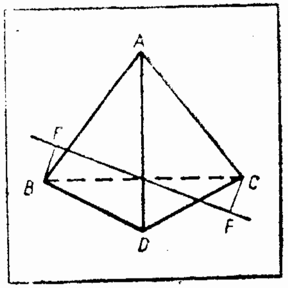
$$\cos\varphi = \frac{(\vec{AB}\,(\vec{AB} + \vec{AC}))}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AB} + \vec{AC}|} = \frac{\vec{AB}^2 + (\vec{AB},\ \vec{AC})}{c\cdot\sqrt{c^2 + b^2 + 2bc\cos A}} =$$

$$= \frac{c + b\cos A}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cdot\cos A}} \text{ ва } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} \text{ дан } \cos\varphi =$$

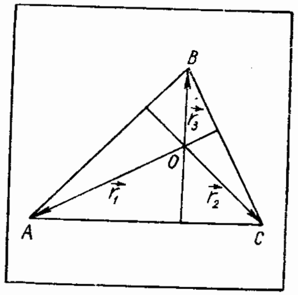
$$= \frac{\sin C + \sin B\cdot\sin A}{\sqrt{\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A}}.$$ **125.** Кўрсатма. $\frac{c}{b} =$



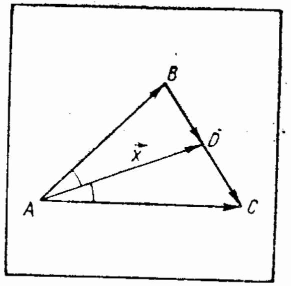
27-чизма



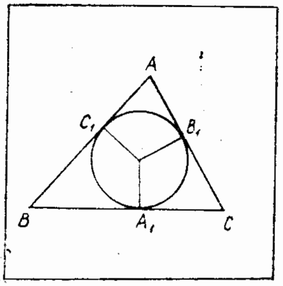
28-чизма



29- чизма.



30- чизма.



31- чизма.

$$= \frac{BD}{DC} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{\vec{x} - \vec{c}}{\vec{b} - \vec{x}} \Rightarrow \vec{x} =$$

$$= \frac{\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{b}}{\vec{b} + \vec{c}}. \quad x = \sqrt{\vec{x}^2} \text{ дан}$$

$$x = \frac{2bc \cos \dfrac{A}{2}}{b + c}$$

келиб чиқади (30- чизма). **129.** 120- масаланинг шартидан фойдаланинг. **130.** Кўрсатма. $|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}| \geqslant c$. Фараз қилайлик, $|\overrightarrow{OA_1}| = r$ (31- чизма). $(\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB_1}) = -r^2 \cos C$. $3r^2 - 2r^2 (\cos A + \cos B + \cos C) \geqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$. **132.** $\varphi = \arccos \frac{3\sqrt{7}}{8}$. **133.** $\varphi = \arccos \frac{13}{14}$

143. Кўрсатма. $OM \perp AB$, $ON \perp BC$ бўлсин. $\triangle AHC \backsim$ $\backsim \triangle NOM$ дан: $\frac{AC}{MN} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = 2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

II боб

147. $A'(5, -3)$, $B'(-1, -2)$, $C'(0, -1)$, $D'(3, -5)$, $E'(2, -6)$. **148.** $A'(-3, 6)$, $B'(2, -6)$, $C'(-2, 1)$, $D'(-5, 1)$, $E'(1, 0)$. **151.** (0, 0), (1, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (0, 1). **153.** а) (−2, 7), (4, 1), (2, −3); б) (7, 0), (1, −2), (−3, 2). **162.** (5, −3), (1, −5). **163.** (1, 2). **164.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. **165.** $A_1\left(3, \frac{13}{3}\right)$,

$A_3\left(1, \frac{17}{3}\right)$, $A_4\left(0, \frac{19}{3}\right)$, $A_6\left(-2, \frac{23}{3}\right)$. **169.** $M_1(2, 1)$, $M_2(-2, -1)$, $M_3(-2, 1)$, $M_4(1, -2)$. **170.** $A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $D\left(0, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. **171.** $AB = 5$, $BC = 13$, $AC = 8\sqrt{2}$. **172.** $|AB| = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{50}$, $BC = \sqrt{40}$; $AC^2 = AB^2 + BC^2$. **174.** $M_1(0, -3)$, $M_2(0, -9)$. **178.** $M\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$. Кўрсатма. Учбурчак бурчагининг биссектрисаси шу бурчак қаршисидаги томонни ёпишган томонларга пропорционал қисмларга ажратади. **180.** $C_1(5, 1)$, $D_1(2, 5)$ ва $C_2(-3, -5)$ $D_2(-6, -1)$. **181.** $B(2, 6)$, $D(-1, 1)$ **182.**
$\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = x' - 4, \\ y = y' + 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x = x' + 3, \\ y = y' - 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x = x' - 1, \\ y = y' - 2. \end{cases}$ **183.** б) $M'(8{,}58)$. **184.** Координаталар бошини $O'(3, -2)$ нуқтага кўчириш керак. **186.** а) $\begin{cases} x = 2x' - 2y', \\ y = x' + y'; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = x', \\ y = y'. \end{cases}$ **187.** а) $\begin{cases} x = -3x' + y' - 3, \\ y = 2y' + 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = x' + y', \\ y = x' - 5. \end{cases}$ **188.** $\vec{e}_1{}'(2{,}0)$, $\vec{e}_2{}'\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.
191. 1) $O'(0, 1)$, $\vec{e}_1{}'(1, 1)$, $\vec{e}_2{}'(0, 1)$; 3) $O'(1, -5)$, $\vec{e}_1{}'(1, 1)$, $\vec{e}_2{}'(-1{,}0)$.

192. 1) $\begin{cases} x = \dfrac{x' - y'\sqrt{3}}{2}, \\ y = \dfrac{x'\sqrt{3} + y'}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{-x' + y'}{\sqrt{2}}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -y', \\ y = x'; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -x', \\ y = -y'. \end{cases}$

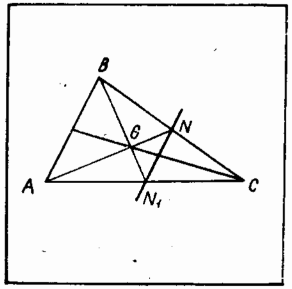
193. 60°. **195.** 3) $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y', \\ y = \dfrac{1}{2}x' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' - 2, \end{cases}$ **196.** $\begin{cases} x = x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' - a, \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \end{cases}$
(0, 0) → (a, 0).

203. $A(-4, 4\sqrt{3})$, $B(-5\sqrt{3}, 5)$, $C(3, -3\sqrt{3})$. **204.** $M(7\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $N(13, \operatorname{arctg} - 12/5)$, $P(3, 0)$, $Q(4, \pi/2)$. **205.** $\rho(P_1, P_2) = 10$. **207.** $(1, -2\pi/3)$. **211.** $S = \frac{1}{2}[r_1r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1] + r_2r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - r_1r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)]$. **212.** $S_{\Delta ABC} = 20\sqrt{3} - 9$. **214.** Координаталар боши б) ва в) геометрик ўрнига қарашли. **216.** 1), 2), 3), 4), 5), 13), 14), 15) — тўғри чизиқ; 6), 7), 8), 9), 10), 11) — икки тўғри чизиқ ва 12) учта тўғри чизиқдан иборат. **218.** 3) (0, 0); 5) чизиқлар кесишмайди. **222.** $y = 5$. **223.** $x = 3$. **224.** $|y| = |x|$. **225.** $x = 3$. **226.** $x - y = 4$. **227.** $y = cx$. Бу ерда c геометрик ўриннинг ихтиёрий нуқтасидан берилган тўғри чизиққача бўлган масофаларнинг нисбати. **228.** $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(1-x)^2+y^2} = 1$ ёки $0 \leqslant x \leqslant 1$. **229.** $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. **231.** $x^2 + y^2 = 25$. **232.** $x + 2y - 5 = 0$. **233.** $x^2 + y^2 - 1 + |x^2 + y^2 - 1| = 0$ ёки $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

235. $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$ **238.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **240.** $y^2 = 6x - 9$. **241.** $x^2 - y^2 = a^2$, бу ерда $a = \frac{1}{2}\rho(A,\ B)$. **243.** $r = \frac{a}{\sin\ \varphi}$. **249.** $r - a + |r - a| = 0$. **250.** $r = \frac{a}{\sin\ \varphi} \pm b$. **251.** $\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - 4r^2a^2\cos^2\ \varphi} = b^2$. **252.** $r = a\,(1 + \cos\ \varphi)$. **257.** $(x - 2 - 2\sqrt{17})^2 + (y - 2 + 2\sqrt{17})^2 = 144$ ва $(x - 2 + 2\sqrt{17})^2 + (y - 2 + 2\sqrt{17})^2 = 144$. **258.** $(x-3)^2 + (y-10)^2 = 85$. **259.** а) Бўш тўплам; б) айлана; в) нуқта; г), д) айлана. **260.** $\rho = 17$. **261.** A, C, D нуқталар айлана ичида, B нуқта эса ташқарисида. **262.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4. \end{cases}$ **263.** $(x+2) + (y-3)^2 = 13$ айлана билан чегараланган очиқ доира. **264.** $b^2 = R^2(1 + k^2)$. **265.** а) уринади; б) икки нуқтада кесишади; в) кесишмайди. **266.** а) Айланани кесади; б) айланага уринади; в) айланани кесмайди. **267.** а) $A^2 = 4c$, б) $B^2 = 4c$; в) $A^2 = B^2 = 4c$. **268.** $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$. **270.** M_1, M_2, M_4 нуқталар берилган тўғри чизиқда ётади, M_3, M_5 нуқталар эса ётмайди. **271.** $x = -1 - 3t$, $y = 1 + 2t$. **277.** $x + y + 1 = 0$, $3x + 7y + 23 = 0$, $7x + 3y - 13 = 0$. **278.** $x + y = 5$. **279.** $7x + 4y + 41 = 0$. **280.** $x + y + 1 = 0$, $x - 11y - 19 = 0$. $11x - y - 9 = 0$. **281.** $y - 1 = 0$. **282.** AB тўғри чизиқ $x + 3y - 5 = 0$ тўғри чизиқни кесади. **284.** A, B, C, O нуқталар тўғри чизиқнинг бир тарафида жойлашган. **285.** A_1, A_2 ва C_1, C_2. **286.** $\lambda = 1$, $\lambda = -9/5$. **288.** Кўрсатма. M нуқта ACB бурчакнинг ичида ётиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак: 1) M ва ~~A~~ BC тўғри чизиқнинг бир тарафида; 2) M ва B AC тўғри чизиқнинг бир тарафида ётишлари керак. **289.** Кўрсатма. M нуқта ABC учбурчак ичида ётиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши етарли: 1) M ва A BC тўғри чизиқнинг бир тарафида; 2) M ва B AC томоннинг бир тарафида; 3) M ва C AB томоннинг бир тарафида ётишлари керак. **290.** Кўрсатма. Энг аввал тўртбурчакнинг томонлари тенгламасини ёзинг ва ўзига қарашли бўлмаган икки учи тўртбурчакнинг бир тарафида жойлашишини кўрсатиш етарли бўлади. **293.** в) $ABCD$ параллелограмм: $A(-4,\ -2)$; $B(-2,\ 1)$; $C(2,\ 3)$; $D(4,\ 6)$; г) бўш тўплам. **295.** а) $(2,\ -3)$; б) бўш тўплам. **296.** 1) $(2,\ 5)$; 2) тўғри чизиқлар ўзаро параллел; 3) $(1,\ 4)$; 4) тўғри чизиқлар устма-уст тушади. 6) тўғри чизиқлар устма-уст тушади.

297. $t_1 = -\frac{2}{3}$, $t_2 = 2$. **298.** Кўрсатма. Изланган тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади, шунинг учун унинг тенгламасида озод ҳад бўлмайди ва тенгламаси $Ax + By = 0$ кўринишда бўлади. Изланган тўғри чизиқ берилган тўғри чизиққа параллел бўлганлиги сабабли $A = 4\lambda$, $B = \lambda$ бўлади, яъни изланган тенглама $4\lambda x + \lambda y = 0$ ёки $4x + y = 0$ бўлади. **303.** а) $(4,\ 11)$ нуқтада кесишади; б) иккитаси ўзаро параллел, учинчиси уларни кесади; в) $(-1,\ 3)$ нуқтада кесишади; г) тўғри чизиқларнинг ҳар иккитаси ўзаро кесишади, лекин улар бир нуқтадан ўтмайди; д) тўғри чизиқлар устма-уст тушади; е) тўғри чизиқлар ўзаро параллел. **305.** $3\lambda + 7\mu + 3 = 0$. **306.** Ҳа. **309.** $x + 11y - 15 = 0$. **310.** $x - y = 0$. **311.** Ҳа; бу тўғри чизиқ шу дастанинг Ox ўққа параллел бўлган тўғри чизиғидир. **312.** $\lambda = \mu = -5$. $13x + 38y + 5 = 0$. **313.** 1) $2x + y = 0$; 2) $x + 2y - 6 = 0$; 3) $2x - 3y = 0$; 4) $y - 3x = 1$; 5) $y = x$; 6) $x = 3$; 7) $y = -2x - 3$. **316.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 7$. **320.** $x + y - 5 = 0$ ва $x - y + 1 = 0$. **321.** 1) $k = -2/3$; 2) $k = 3/2$. **322.** $7x + 4y - 2 = 0$. **323.** $2x - 5y - 18 = 0$. **324.** $\operatorname{tg}\ \varphi = -1/8$. **325.** $(2,\ 4)$; $(7,\ -5)$; $(-3,\ -2)$. **326.** $M_1'(3,\ 4)$. **327.** $M_1'(0,\ -5)$. **328.** $3x - 9y + 10 = 0$. **329.** AB: $x + y + 1 = 0$; AC: $3x + 7y + 23 = 0$; BC: $7x + 3y - 13 = 0$. **330.** $x - 11y - 9 = 0$; $11x - y - 9 = 0$; $x + y + 1 = 0$. **333.** $(-12{,}5)$. **334.** $5x - 4y = 0$; $2x + 3y - 20 = 0$. **335.** $x + 4y - 4 = 0$; $x + y - 2 = 0$; $2x - y - 2 = 0$. **336.** $99x - 231y + 26 = 0$. **338.** $x + 7y + 4 = 0$. **339.** $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 5 = 0$. **341.** $d = 5$. **342.** $d = 3$. **343.** $d = |d| = \left|\pm\frac{C_2 - C_1}{A^2 + B^2}\right|$. **344.** AB: $7x + 6y - 4 = 0$; $G(-1,\ -2/3)$; $d = \frac{15}{\sqrt{85}}$. **346.** Кўрсатма. $M(x,\ y)$ биссектрисанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, у ҳолда $d_1 = \frac{|x - y + 3|}{\sqrt{2}}$; $d_2 = \frac{|7x + y - 7|}{5\sqrt{2}}$; $|d_1| = |d_2|$. Агар $d_1 = d_2 \Rightarrow 3x - y + 2 = 0$. Агар $d_1 = -d_2 \Rightarrow x + 3y - 11 = 0$

347. $2x - 3y - 1 = 0$ ва $x + y - 3 = 0$. **348.** Кўрсатма. M нуқтанинг AB, BC, CA тўғри чизиқларга нисбатан қандай жойлашганлиги текширилади. M нуқта ички B бурчакнинг вертикал бурчаги ичида жойлашган. **349.** Кўрсатма. $x + 3y - 11 = 0$, $A\,(1,\ 3)$ нуқтанинг берилган тўғри чизиқлардан оғиши ҳисобланади. Бу ерда биссектриса



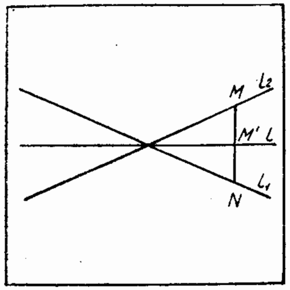
32- чизма.

шундай $M(x, y)$ нуқталарнинг геометрик ўрни бўладики, бундан тўғри чизиқларгача бўлган оғишлар абсолют қийматлари билан тенг бўлиб, ишоралари билан фарқ қилади. **350.** Кўрсатма. $91x - 7y - 82 = 0$. A бурчак биссектрисасининг тенгламасини топиш учун AB ва AC тўғри чизиқлар ташкил қилган бурчакларнинг BC томон ўртаси ётган бурчак биссектрисаси топилади (349- масалага қаранг). AA_1: $7x - 4y - 26 = 0$; BB_1: $63x + 3y + 130 = 0$. **351.** Кўрсатма. (3/4, 13/4). Айлананинг маркази учбурчакнинг ихтиёрий 2 та ички бурчак биссектрисаларининг кесишган нуқтасидан иборат бўлади (350- масалага қаранг). **352.** $3x - 8y - 14 = 0$. Кўрсатма. Энг аввал учбурчакнинг битта учини топамиз: $A(-3, 2)$. B ва C нуқталарни $\lambda = 2$ нисбатда бўлувчи BC томоннинг ўртаси $N(-2, -5/2)$ топилади. Кейин $NN_1 \parallel AB$ тўғри чизиқ нинг тенгламасини тузамиз. NN_1: $4x - 2y + 3 = 0$. Бу тўғри чизиқнинг $3x - 5y - 1 = 0$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқтаси $N_1(-1/2, 1/2)$ ни топамиз. У ҳолда N_1G: $9x - 11y + 10 = 0$. Сўнгра унинг $2x - y + 8 = 0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси $B(-6, -4)$ ни топамиз. BC томоннинг тенгламасини тузиш учун BN нинг тенгламасини топамиз. BN: $3x - 8y - 14 = 0$ (32- чизма). **353.** $y - 1 = 0$; $x = 0$. **354.** $3x - 8y - 14 = 0$. **355.** (AB): $3x + 7y + 23 = 0$, (BC): $x - y + 1 = 0$. (AC): $7x + 3y - 13 = 0$. Кўрсатма. 354- масаладан фойдаланинг. **356.** Кўрсатма. M га Ox га нисбатан симметрик бўлган нуқта M_1 ни топамиз. Сўнгра M_1N тўғри чизиқнинг Ox билан кесишган нуқтасини топамиз. Бу изланган X нуқта бўлади. **358.** $14x - 7y + 32 = 0$ ва $7x + 21y - 75 = 0$. **359.** $C(-45/13, 81/52)$. **360.** $y = 7x + 21$; $x + 7y - 17 = 0$. **361.** $2x + 4y - 25 = 0$. **363.** (2, 1); (4, 2); (−1, 7), (1, 8). **364.** (5, −5/4). **365.** $y = 0$; $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}$; $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}$. **366.** $7x - y - 26 = 0$. **367.** $x = 2$; $y = \frac{5}{12}x + \frac{31}{6}$. **368.** (5, −1); (2, 3). **369.** (2, −1). (−1, 3). **370.** $4x - 3y - 13 = 0$; $3x + 4y - 16 = 0$.

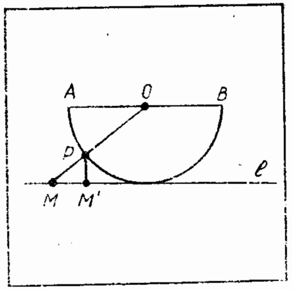
III боб

371. 1) Сюръектив; 2) Биектив. **372.** Инъектив. **373.** $M_1'(9)$, $M_2'(4)$, $M_3'(4)$, $M_4'(9)$, $M_5'(64)$, $M_6'(81)$, $M_7'(6561)$. **374.** $M_1'(-2)$, $M_2'(-1)$, $M_3'(0)$, $M_4'(1)$, $M_5'(2)$. **375.** Биектив. **378.** Агар $M \notin l_2$ нуқтадан l га туширилган MM'' перпендикуляр l_1 билан N нуқтада кесишса, $M, N \in X$ учун $f(M) = f(N) = M'$, $M' = N'$ (33- чизма). **379.** б) Координаталар боши инвариант. $y = kx$, $x^2 + y^2 = 1$ чизиқлар ўз- ўзига ўтади. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ айлана $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ айланага ўтади. **380.** f акслантириш a тўғри чизиқнинг нуқталарини O нуқтага нисбатан симметрик бўлган a тўғри чизиқдаги нуқталарга ўтказади. Демак, бу акслантириш биектив бўлиб, a ни ўз- ўзига ўтказади, шунинг учун у алмаштириш бўлади. Бундан ташқари, $f = f^{-1}$. **381.** Бу акслантириш алмаштириш бўлиб, $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш, унга тескари алмаштириш эса $-\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш бўлади, $\vec{a} = \vec{O}$ бўлганда айний алмаштириш бўлади. **382.** Бу акслантириш натижасида l тўғри чизиқдаги (34- чизма) барча нуқталар AB диаметрнинг l даги ортогонал проекцияси $[A'B']$ кесмага аксланади, демак l ўз-ўзига ўтмайди, шунинг учун алмаштириш бўлолмайди. **383.** 381- масалага қаранг.

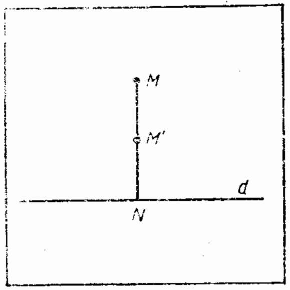
384. Бу акслантириш натижасида $\vec{NM'} = 1/2\,\vec{NM}$ шарт асосида M нуқта M' га ўтади, акслантириш биектив ва текислик нуқталарини шу текисликдаги нуқталарга ўтказади. Шунинг учун бу акслантириш алмаштириш бўлади. Бу алмаштиришни d ўққа $\frac{1}{2}$ коэффициентли қисиш дейилади. Унга тескари алмаштириш эса $\vec{NM} = 2\,\vec{NM'}$ шарт билан M' ни M га ўтказишдан иборат (35- чизма).



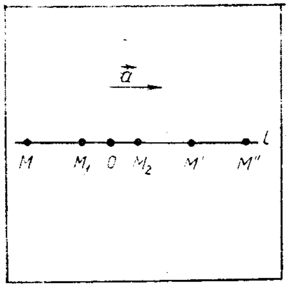
33- чизма.



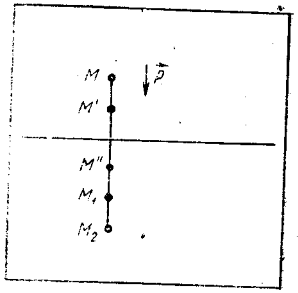
34- чизма.



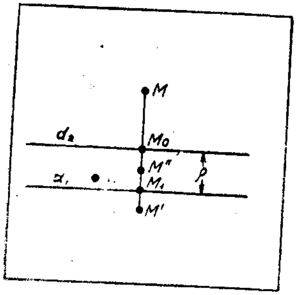
35- чизма.



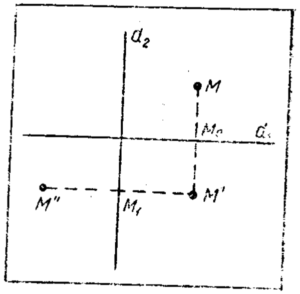
36- чизма.



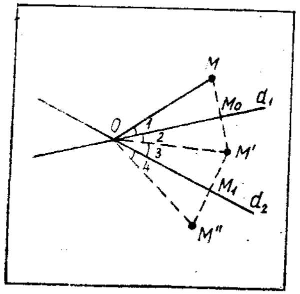
37- чизма.



38- чизма.



39- чизма.



40- чизма.

385. $\left.\begin{matrix} f(M)=M',\ g(M')=M'' \\ g(M)=M_1,\ f(M_1)=M_2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow M_2\neq$ $\neq M''$, демак, gf кўпайтма нокоммутатив (36- чизма). **386.** Қоммутатив бўлади. **387.** Кўпайтма коммутатив эмас, 37- чизмага қаранг.

$$f_1f_2(M)=M'',\quad f_2f_1(M)=M_2,$$
$$M''\neq M_2\Rightarrow f_1f_2\neq f_2f_1.$$

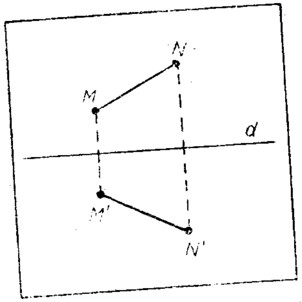
388. Векторларни қўшиш коммутатив хоссага эга эканидан фойдаланинг. **389.** К ў р с а т м а. 38-чизмадан $MM_0=$ $=M_0M'=M_0M_1+M_1M'$. $|\overrightarrow{MM''}|=$ $=MM_0+M_0M''=M_0M_1+M_1M'+M_0M''=M_0M_1+M''M_1+M_0M''=$ $=M_0M_1+M_0M_1=2\rho(d_1,\ d_2)$; $\overrightarrow{MM''}\perp d_1$. **390.** К ў р с а т м а. 39 чизмадан кўринадики, $OM_0=M_1M'=M_1M''$. $\left.\begin{matrix} M'M''=2\,OM_0 \\ OM_0 \parallel M''M' \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ $\Rightarrow OM_0$ $\triangle MM''M'$ нинг ўрта чизиғи, демак, $OM=OM''\Rightarrow M''=$ $=Z_0(M)$. **391.** 40- чизмадан кўринадики. агар $(\widehat{d_1, d_2})=\alpha$ бўлса, $\triangle OMM_0=\triangle OM_0M'\Rightarrow MO=M'O$. $\triangle OM_1M'=\triangle OM_1M''\Rightarrow M''O=M''O$,

демак, $OM=OM''$, (1) $\left.\begin{matrix} \angle 1=\angle 2 \\ \angle 3=\angle 4 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3=(\widehat{d_1, d_2})\Rightarrow$
$\Rightarrow(\widehat{\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OM''}})=2\alpha$ (2).

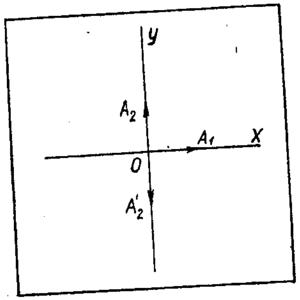
(1) ва (2) дан $f(M)=M''$ акслантириш O нуқта атрофида 2α бурчак-
ка буриш экани келиб чиқади. **392.** 2- шартга кўра Г тўпламда f ва
-1 алмаштиришлар мавжуд. 1- шартга кўра уларнинг кўпайтмаси $f\times$
$\times f^{-1}\in Г$, $ff^{-1}=E$ бўлганидан $E\in Г$ келиб чиқади. **393.** Тўплам
гуруҳ ҳсил қилади. Ҳақиқатан, $f_1-\vec{a}\parallel l$ қадар силжитиш, $f_1-\vec{b}\parallel$
$\parallel l$ вектор қадар силжитиш бўлса, $f_1\cdot f_1-(\vec{a}+\vec{b})\parallel l$ қадар сил-
житиш бўлади. f_1 га тескари алмаштириш f_1^{-1} эса $-\vec{a}\parallel l$ қадар сил-
житишдан иборат. **394.** 393- масалага ўхшаш мулоҳаза юритинг. **395.**
$S_d^{-1}=S_d$ ва $S_d\cdot E_0=S_d$ бўлгани учун Г гуруҳ ҳосил бўлади. **397.**
S_d алмаштиришда d ўқнинг ҳар бир нуқтаси инвариант, d ўқ инва-
риант ва унга перпендикуляр бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ инвариант-
дир. **399.** 41- чизмада $MN=M'N'$ кўрсатилади ёки аналитик усулда
2 нуқта орасидаги масофа сақланишини кўрсатиш мумкин. **400.** $Б=$
$=(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ реперда (42- чизма) $d=Ox$. $\vec{i}=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OA_2}$ деб ол-
сак,

$$S_{Ox}(O)=O,\quad S_{Ox}(A_1)=A_1,\ S_{Ox}(A_2)=A_2',$$
$$\overrightarrow{OA_1}\to\overrightarrow{OA_1}\Rightarrow\vec{i'}=\vec{i}\Rightarrow\vec{i}\ (1,\ 0).$$
$$\overrightarrow{OA_2}\to\overrightarrow{OA_2'}\Rightarrow\vec{j'}=-\vec{j}\Rightarrow\vec{j'}\ (0,\ -1).$$

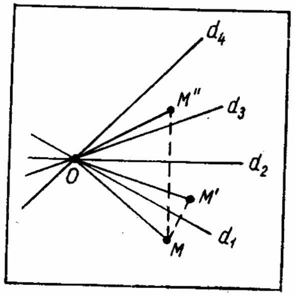
$Б=(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ дан $Б'=(O,\ \vec{i},\ \vec{j'})$ га ўтиш матрицасининг детерми-



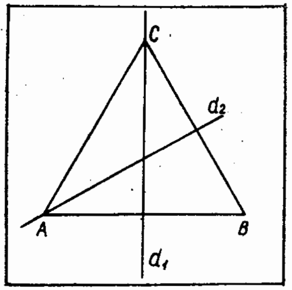
41- чизма.



42- чизма.



43- чизма.



44- чизма.

нанти: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$, демак, ориентация ўзгарар экан. **401.** 1) A' (5, 2), B' (4, — 2), C' (— 3, — 1); 2) A' (— 5, — 2), B' (— 4, 2), C' (3, 1). **402.** A (— 3, 7), A' (3, 7). **403.** S_{Ox} $(y = 3x + 5) = (y = -3x-5)$; S'_{Oy} $(y = 3x + 5) = (y = -3x + 5)$. **404.** AA' тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб, AA' кесманинг ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилади. **405.** Фараз қилайлик, бу симметрияда M (x, y) нуқта M' (x', y') га ўтсин, у ҳолда MM' нинг ўртаси $M_0\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ берилган тўғри чизиқда ётади: $\frac{x+x'}{2} - \frac{y+y'}{2} + 4 = 0 \Rightarrow x' - y' = -x + y - 8$ (1). $\overrightarrow{MM'} \parallel \overrightarrow{n}$ (1, — 1), демак, $\frac{x'-x}{1} = \frac{y'-y}{-1} \Rightarrow x' + y' = x + y$ (2); (1) ва (2) ни бирга ечсак,

$$\begin{cases} x' = y - 4, \\ y' = x + 4. \end{cases}$$

406. $S_{d_1}(M) = M' \Rightarrow OM = OM'$,
$S_{d_2}(M) = M'' \Rightarrow OM = OM''$.

. . . .

Демак, (43- чизма) $OM' = OM'' = \ldots$. **407.** 1) 2 та; 2) чексиз кўп (параллел тўғри чизиқларнинг ўртасидан уларга параллел бўлиб ўтган тўғри чизиқ ва параллел тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлган исталган тўғри чизиқ уларнинг симметрия ўқи бўла олади); 3) 2 та (берилган нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ ва учлари берилган нуқталарда ётган кесманинг ўрта перпендикуляри); 4) 1 та (берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ); 5) 3 та (ҳар бир учидан қаршисидаги томонга ўтказилган перпендикулярлар); 6) 4 та (қарама-қарши учларини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар ва қарама-қарши томонлари ўрталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар); 7) n та (агар тоқ бўлса, ҳар бир учидан қаршисидаги томонинг ўртасига туширилган перпендикулярлар, n жуфт бўлса, қарама-қарши учларини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар ва қарама-қарши томонлари ўрталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар). **409.** $\triangle ABC$ d_1 ва d_2 ўқларга нисбатан симметрик (44- чизма) бўлганидан

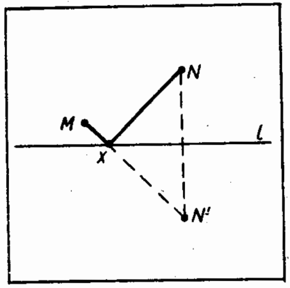
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} S_{d_1}(C) = C \\ S_{d_1}(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow AC = BC. \\ \left.\begin{array}{l} S_{d_2}(A) = A \\ S_{d_2}(B) = C \end{array}\right\} \Rightarrow AB = AC \end{array}\right\}$$

Демак, $\triangle ABC$ тенг томонли, унинг 3 та симметрия ўқи бор.

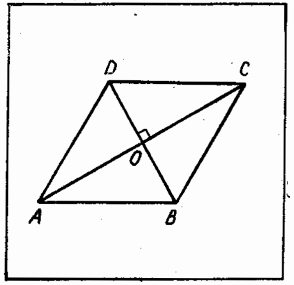
411. $S_l(N) = N'$ бўлсин. У ҳолда MN' кесманинг l билан кесишган X нуқтаси изланган нуқта бўлади (45- чизма). Чунки

$$MX + XN = MN', \quad XN = XN'$$

бўлгани учун $MX + XN = MN''$ ва у энг қисқа бўлади. **412.** $S_{AC} \cdot S_{AB} \neq S_{AB} \cdot S_{AC}$. **413.** Ўринли. **414.** $S_d \cdot S_d^{-1} = E_0$. **415.** $\{S_d\}$



45- чизма.



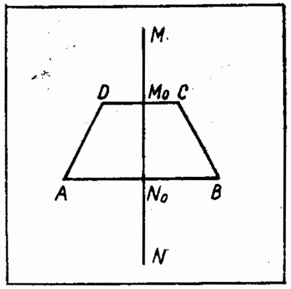
46- чизма.

гуруҳ эмас, чунки $S_d \cdot S_d^{-1} = E_0$ айний алмаштириш тўпламда йўқ. **416.** Йўқ. 389, 391- масалаларга қаранг. **417.** Кўрсатма. Айланада параллел ватарларнинг ўрталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ айлана марказидан ўтишидан фойдаланинг.

418.

$$\left.\begin{array}{l} AO = OC \\ AC \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_{DB}(A) = C \\ S_{DB}(D) = D \end{array}\right\} \Rightarrow AD = DC.$$

Демак, (46- чизма) $ABCD$ ромб. **419.** 47- чизмадан, масаланинг шартига кўра:



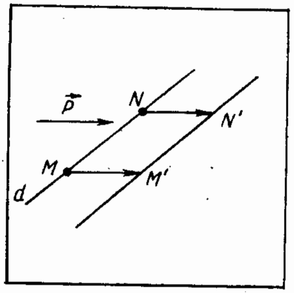
47- чизма.

$$AD = BC \ (1); \qquad DC \perp MN \ (2);$$
$$DM_0 = M_0C \ (3); \qquad AN_0 = N^0B \ (4).$$
$$\left.\begin{array}{l}((2),(3)) \Rightarrow S_{MN}(D) = C \\ ((2),(4)) \Rightarrow S_{MN}(A) = B\end{array}\right\} \Rightarrow S_{MN}(AD) = BC.$$

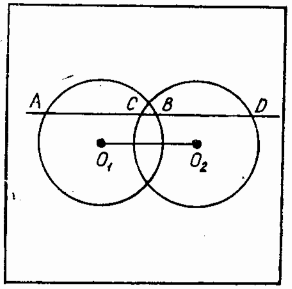
Демак, MN — $ABCD$ трапециянинг симметрия ўқи. **420.** 419- **масаладан** фойдаланинг. **422.** а) Кўчириш вектори берилиши билан; б) **бир жуфт** мос нуқталарнинг берилиши билан. **424.** $\vec{b} \neq \vec{0}$ бўлганда инвариант нуқталар йўқ, $\vec{b} \parallel d$ бўлган ҳар қандай d тўғри чизиқ инвариант. **426.** M, $N \in d$ деб олайлик,

$$\left.\begin{array}{l}T_{\vec{p}}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{p} \\ T_{\vec{p}}(N) = N' \Rightarrow \overrightarrow{NN'} = \vec{p}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

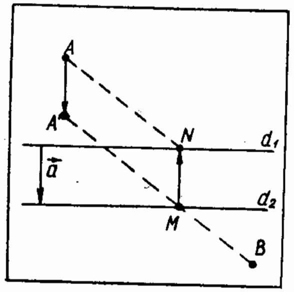
$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \Rightarrow MM'N'N$ фигура (48- чизма) параллелограмм, **демак,** $d = MN \parallel M'N' = d' \Rightarrow d \parallel d'$. **427.** $\overrightarrow{AC}$ ёки $\overrightarrow{CA}$ вектор қадар параллел кўчириб, уларнинг бирини иккинчисига ўтказиш мумкин. **428.** **Чексиз**] кўп, a тўғри чизиққа параллел кўчириш унинг ўзини ўзига ўтказади **429.** Мавжуд, нурлар бошларидан тузилган вектор кўчириш вектори бўлади. **430.** Бу айланалар марказларидан тузилган вектор. **431.** Уларнинг ҳар биридан биттадан нуқта олиб тузилган ихтиёрий вектор қадар параллел кўчириш a ни b га ёки b ни a га ўтказади. Уларга параллел бўлган ихтиёрий вектор қадар параллел кўчириш эса ҳар бир тўғри чизиқни ўзига ўтка-



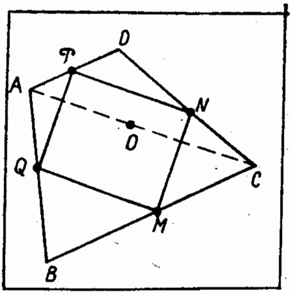
48- чизма.



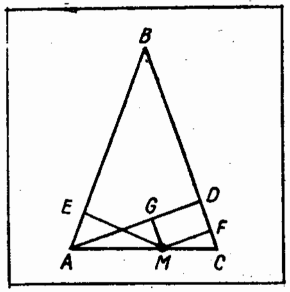
49- чизма.



50- чизма.



51- чизма.



52- чизма.

зади. **432.** $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш натижасида биринчи айлана иккинчи айланага ўтади. У ҳолда $A \xrightarrow{T_{\vec{a}}} C$, $B \xrightarrow{T_{\vec{a}}} D$ бўлиб, $BD = AC = O_1O_2$ бўлади (49- чизма). **435.** $\vec{p}(2, -4)$. $T_{\vec{p}}(M) = N$; $\vec{q}(-2{,}4)$, $T_{\vec{q}}(N) = M$. **437.** $4x - 2y + 3 = 0$. **438.** $M_1(-14, -40)$, $M_2(-9, -40)$ ёки $M_1(-9, -40)$, $M_2(-14, -40)$. Кўрсатма. $\overrightarrow{M_1M_2} = 5\vec{i}$, $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$ деб олиш ёки $\overrightarrow{M_1M_2} = -5\vec{i}$, $M_1 \in d_2$, $M_2 \in d_2$ деб олиш мумкин. **439.** Фараз қилайлик, чизмада (50- чизма) кўрсатилган d_1, d_2 тўғри чизиқлар канал қирғоқлари бўлсин, $\vec{a}$ маълум. $T_{\vec{a}}(A) = A'$ ни топиб, $A'B$ ни ўтказамиз. $A'B \cap d_2 = M$ ва $T_{\vec{a}}(M) = N$ ларни топамиз. MN кесма кўприк ўрни бўлади, чунки $A'MNA$ фигура параллелограмм бўлгани учун $A'M = AN$ ва A', M, B лар бир тўғри чизиқда ётади. **440.** P, Q, M, N лар мос равишда AD, AB, BC, CD томонларнинг ўрталари, O эса AC ўртаси бўлсин (51- чизма). AO кесмани $\overrightarrow{AP}$ ва $\overrightarrow{AQ}$ векторлар қадар параллел кўчириш натижасида

$$T_{\overrightarrow{AP}}(AO) = PN, \qquad T_{\overrightarrow{AQ}}(AO) = QM$$

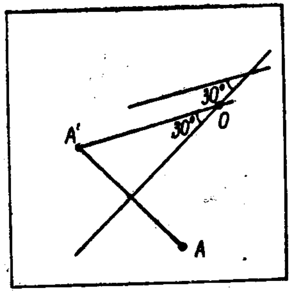
лар ҳосил бўлади ва $PN \parallel QM$, $PN = QM$. Демак, $PQMN$ фигура параллелограмм: **441.** $AB = BC$, $AC \ni M$ берилган (52- чизма)

$$T_{\overrightarrow{FD}}(MF) = GD \Rightarrow MF = GD, \qquad (1)$$

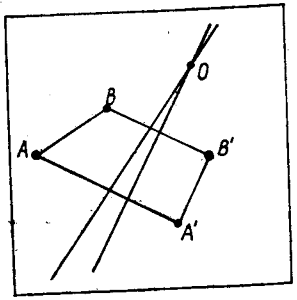
$\widehat{GMA} = \widehat{EAM}$, MA умумий гипотенуза бўлганидан:

$$\triangle AGM = \triangle AEM, \quad ME = AG. \qquad (2)$$

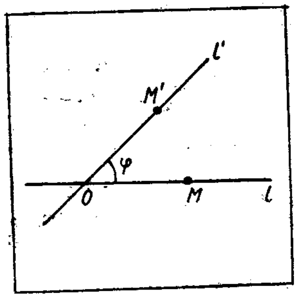
(1) ва (2) дан $EM + MF = AD$ келиб чиқади. **443.** а) A ва A' нуқталар бурищ марказидан баравар узоқликда ётгани сабабли буриш маркази AA' нинг ўрта перпендикулярида ётади, ўрта перпендикуляр MN



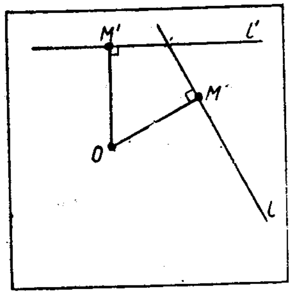
53- чизма.



54- чизма.

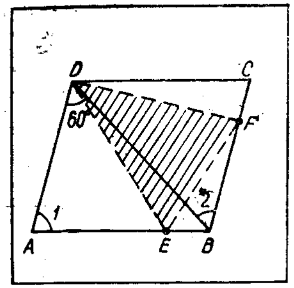


55- чизма.

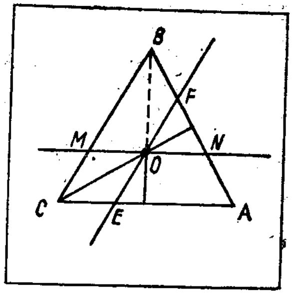


56- чизма.

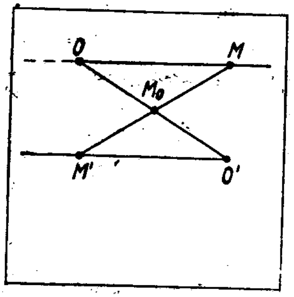
ни ясаб, унинг бирорта нуқтасида 30° ли бурчак ясаймиз ва A ёки A' дан бурчакнинг иккинчи томонига параллел ўтказамиз, бу параллел MN ни буриш марказида кесади (53- чизма); с) AA' ва BB' кесмаларнинг ўрта перпендикулярлари кесишган O нуқта буриш маркази бўлади, $\widehat{AOA'}$ буриш бурчаги (54- чизма). **446**. а) $O \in l$ бўлсин. 55- чизмадан кўринадики, $(\widehat{l, l'}) = \varphi$; б) $O \notin l$ бўлсин. Бу ҳолда буриш алмаштиришда бурчак катталиги сақланишидан фойдаланамиз. O дан l га $OM \perp l$ ўтказиб, $M \xrightarrow{R_0^{\varphi}} M'$ ни топамиз ва M' дан $OM' \perp l'$ ўтказамиз, $l' = R_0^{\varphi}(l)$ бўлади. $l \perp OM$, $l' \perp M'O$ бўлганидан $\widehat{MOM}$ ва $(\widehat{l, l'})$ бурчаклар томонлари ўзаро тик бурчаклар сифатида тенг бўлади (56- чизма). **449.** Буриш соат стрелкасига тескари йўналишда бўлганда: $x + 2y + 5 = 0$. **452.** a тўғри чизиққа тегишли исталган нуқта атрофида $\varphi = \pm\pi$ бурчакка буришлар тўғри чизиқни ўз- ўзига ўтказади. **453.** а) диагоналлари кесишган нуқта атрофида $\varphi=\pi$ бурчакка буриш натижасида параллелограмм ўз- ўзига ўтади; б) берилган мунтазам учбурчакни



57- чизма.



58- чизма.



59- чизма.

унинг медианалари кесишган нуқта атрофида 120° га буриш учбурчакни ўз- ўзига ўтказади. **455.** Иккита ҳол қаралади: 1) агар кесмалар квадратнинг маркази O нуқтада кесишса, O нуқта атрофида текисликни 90° га буришни бажариб исбот қилинади; 2) агар кесмалар O дан бошқа нуқтада кесишса, параллел кўчиришлар бажариб, уларнинг аксларини O да кесиштириб олинади, кейин буриш $R_0^{90°}$ бажарилади. **456.** E ва F нуқталар D нуқта атрофида 60° га буришдаги мос нуқталар деб олинади (57- чизма), чунки $AD = DB$, $AE = BF$, $\angle 1 = \angle 2 = 60°$ бўлишидан $DE = DF$ келиб чиқади, $\widehat{EDF} = 60°$. **457.** O нуқта атрофида 120° га буриш бажарилса:

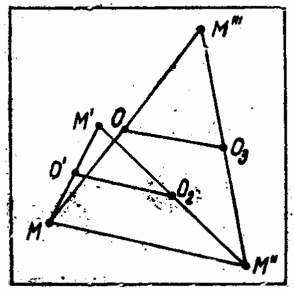
$$(A \to B,\ B \to C) \Rightarrow AB \to BC;\ \ F \to M \Rightarrow OF = OM;$$

$$BC \to CA,\ E \to N \Rightarrow OE = ON,\ \text{демак},\ OF + OE = OM + ON$$

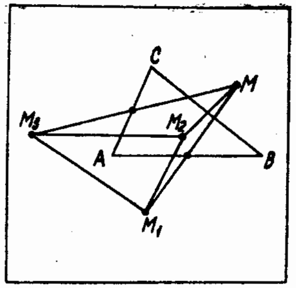
(58- чизма). **458.** Симметрия марказининг берилиши ёки бир жуфт мос нуқталар берилиши етарли. **460.** Икки ҳолни қараймиз: 1) OM нур ва O симметрия маркази бўлсин:

$$O \to O',\ M \to M';\ OM \to OM'\ \text{ва}\ \overrightarrow{OM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OM'};$$

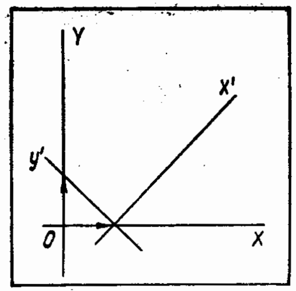
2) OM нур M_0 симметрия маркази бўлиб, $M_0 \notin OM$ бўлсин, $OMO'M'$ параллелограмм, OM ва $O'M'$ OO' дан турли томонда (59- чизма). **462.** Ҳаракатда учта нуқтанинг оддий нисбати сақланишидан фойдаланиш мумкин. **464.** Ихтиёрий айлана тенгламасини оламиз ва марказий симметрия формулаларидан фойдаланиб, айлананинг радиуси ўзгармаслигини кўрсатамиз. **465.** 1,2 лар ўринли, 3,4 лар ўринли эмас. **467.** $2\,\overrightarrow{OO'}$ вектор кўчириш вектори бўлади. Ихтиёрий иккита марказий симметрия-



60- чизма.



61- чизма.



62- чизма.

нинг кўпайтмаси параллел кўчириш бўлгани сабабли, марказий симметриялар тўплами гуруҳ бўлолмайди. **469.** Тўплам гуруҳ ҳосил қилади. **470**. 60- чизмадаги каби алмаштиришларни бажариб, $M \xrightarrow{f} M'''$ ни кузатсак, у $\overrightarrow{MM''}=2\ \overrightarrow{OO_3}$ шарт билан олинган (467-масала) O нуқтага нисбатан марказий симметрия эканини кўрамиз. $\overrightarrow{MM''}= =2\ \overrightarrow{O'O_2}$ бўлганидан $\overrightarrow{OO_3}=\overrightarrow{O'O_2}$ келиб чиқади. **471**. Параллелограмм, тўғри тўртбурчак, мунтазам олтибурчак, 2 та кесишувчи тўғри чизиқ. **474**. Мос равишда учбурчаклар медианалари кесишган нуқталарни M_1, M_2, M_3, M_4 деб белгиласак, $M_3 \xrightarrow{z_0} M_1$, $M_4 \xrightarrow{z_0} M_2$ бўлиши келиб чиқади, демак, M_1M_3, M_2M_4 лар параллелограммнинг диагоналларидир. **475.** $\triangle MM_1M_2$, $\triangle MM_2M_3$, $\triangle MM_1M_3$ ларнинг ўрта чизиқларидан фойдаланинг (61-чизма). **479**. 1) $y=-3x-11$; 2) $(x+2)^2+y^2=4$. 480. $\overrightarrow{p}(3, 0)$, $d=Ox$. **481**. $x'=-x-7$, $y'=y+3$. Кўрсатма. Аввал Oy ўқни $x+7=0$ тўғри чизиқ устига тушадиган қилиб координаталар алмаштиришни бажарамиз. **482**. а), б) ҳолларда ихтиёрий 2 нуқта орасидаги масофа ўзгармаслиги кўрсатилади, б) 1- тур ҳаракат, чунки $\varepsilon= =+1$;

в) $$\begin{cases} x'=\frac{12}{13}x-\left(-\frac{5}{13}\right)y+\frac{2}{13}, \\ y'=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{16}{13} \end{cases}$$

кўринишда ёзиб олсак, $\varepsilon=+1$, демак, 1- тур ҳаракат. **483.** 1) $\varepsilon=1$, ҳаракат 1- тур, $Б$ ва $Б'$ бир хил ориентирланган (62- чизма), $\cos\alpha=\sin\alpha= =\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $O'(1{,}0)$; 2) $M'(1, \sqrt{2})$; 3) $M(0, \sqrt{2})$.

484. $$\begin{cases} x'=\frac{3}{5}x-\left(-\frac{4}{5}\right)y-1, \\ y'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-15 \end{cases}$$

кўринишга келтирсак, бу 1- тур ҳаракат экани кўринади. 1- тур ҳаракат буриш ёки параллел кўчиришдир, шунинг учун инвариант элементларини излаймиз:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-1, \\ y=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y+5=0, \\ 4x+2y+75=0; \end{cases} \quad \delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

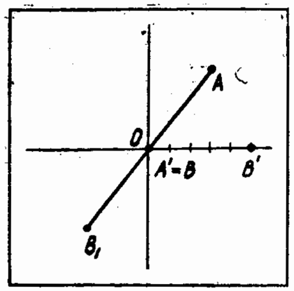
системанинг ечими ягона $\left(-\frac{31}{2}, -\frac{13}{2}\right)$, демак, ҳаракат $\left(-\frac{31}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ нуқта атрофида буриш экан. **485.** $\varepsilon=-1$, демак, 2- тур ҳаракат. У ё ўқ симметрияси, ёки сирпанувчи симметриядан иборат. Берилган алмаштиришнинг инвариант элементларини излаймиз:

$$\begin{cases} x=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{21}{5}, \\ y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y-21=0, \\ 3x-9y-13=0; \end{cases} \quad \delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}=0.$$

$\delta_x \neq 0$, $\delta_y \neq 0$, демак, ечим мавжуд эмас, инвариант элемент мавжуд эмас, ҳаракат сирпанувчи симметрия экан. **486.** Олдинги масалага ўхшаш мулоҳаза юритинг. **487**.

$$\left.\begin{matrix} A(3, 4) \xrightarrow{f} A'(0, 0) \\ B(0, 0) \xrightarrow{f} B'(5, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \text{ — ҳаракат.}$$

Ҳаракат формулаларидаги a, b, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, ε ни аниқлаймиз (63- чизма). Ҳаракат натижасида AB кесма $A'B'$ кесмага ўтгани сабабли, чизмадан кўринадики, AB ни BB_1 га параллел кўчи-



63- чизма.

риб, BB_1 ни B атрофида буриш натижасида BB' га ўтиш мумкин, демак, ориентация сақланади. $\varepsilon = 1$. У ҳолда изланаётган ҳаракат

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases} \qquad (1)$$

кўринишда бўлади. (1) да $B \to B'$ дан $a = 5$, $b = 0$ экани келиб чиқади. (1) да $A \to A'$ дан

$$\begin{cases} 3\cos\alpha - 4\sin\alpha = -5, \\ 3\sin\alpha + 4\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

га эга бўламиз ва бу системадан $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ топилади.

Демак, изланаётган ҳаракатнинг аналитик ифодаси

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 5, \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{cases}$$

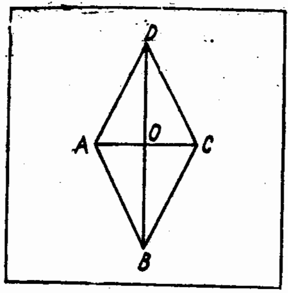
формулалардан иборат.

488. $$\begin{cases} x' = \dfrac{24}{25}x + \dfrac{7}{25}y - \dfrac{102}{25}, \\ y' = -\dfrac{7}{25}x + \dfrac{24}{25}y + \dfrac{111}{25}. \end{cases}$$

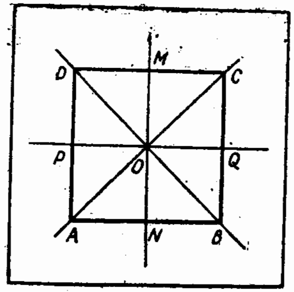
489. 1-тур ҳаракат. Кўпайтмада марказий симметрия бўлганидан ҳосил бўлган ҳаракат ҳар қандай нурнинг йўналишини қарама-қаршисига ўтказади, демак, у ҳам қандайдир марказий симметрия бўлиши керак, унинг маркази $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$ қадар берилган симметрия маркази O ни кўчиришдан ҳосил бўлади. **490.** 1-тур ҳаракат. Марказий смметриянурнинг йўналишини қарама-қаршисига ўзгартгани сабабли, тоқ сондаги марказий симметриялар кўпайтмаси натижасида нур ўзига қарама-қарши йўналишдаги нурга ўтади, демак, кўпайтма марказий симметриядан иборат. **491.** Олдинги 2 масаладан фойдаланинг. **493.** 1) Ромбни ўз-ўзига ўтказувчи ҳаракатлар тўплами $\{Z_O, S_{AC}, S_{BD}, E\}$ (64-чизма), 2) (65-чизма) $ABCD$ квадратни ўз-ўзига ўтказувчи ҳаракатлар тўплами: $\{Z_O, S'_{AC}, S'_{BD}, S_{MN}, S_{PQ}, R_O^{90°}, R_O^{-90°}, E\}$ гуруҳ ҳосил қилади; 3) (66-чизма) ABC учбурчакни ўз-ўзига ўтказувчи ҳаракатлар тўплами:

$$\{S_{AA_1}, S_{BB_1}, S_{CC_1}, R_O^{120°}, R_O^{-120°}, E\}$$

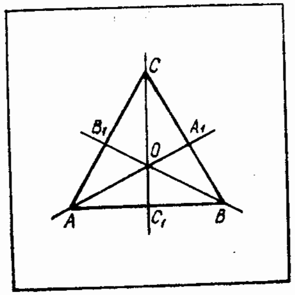
гуруҳ ташкил қилади- **494.** $k = -1$ да гомотетия марказий симметриядан иборат. $k = \pm 1$ да гомотетия ҳаракатдан иборат. **495.** $k = \dfrac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}$.



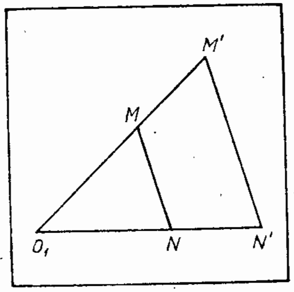
64- чизма.



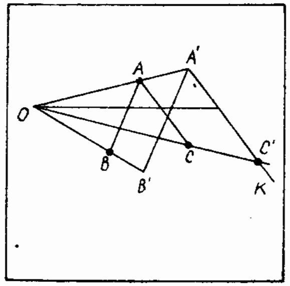
65- чизма.



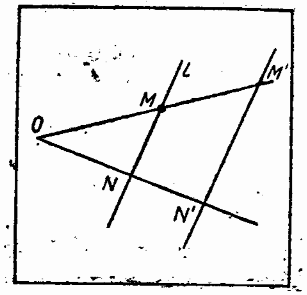
66- чизма.



67- чизма.

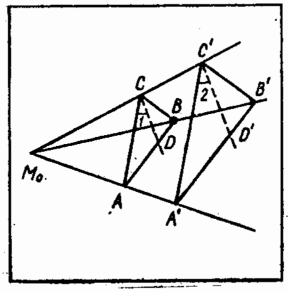


68- чизма.



69- чизма.

496 1) $k > 0$ бўлсин. M_1N берилганда $M' = H_0^k(M)$, $N' = H_0^k(N)$дан $\overrightarrow{OM'} = k\cdot\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = k\cdot ON$ (67-чизма). $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{M'N'} = k\cdot\overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N' = k\cdot MN$.



70- чизма.

2) $k<0$ ҳолни ўзингиз исбот қилинг. **497.** $AA' \cap BB' = 0$, $H(C) = C'$ ни ясаш учун $[OC)$ нурни ўтказиб, A' дан AC тўғри чизиққа параллел $A'K$ ни ўтказамиз ва $A'K \cap [OC) = C'$ ни топамиз (68- чизма). $AB = A'B'$ бўлганда масалани ўзингиз ечинг. **499.** $k = 1$ да текисликнинг ҳамма нуқталари инвариант. $k \neq 1$ да O нуқта инвариант ва O дан ўтувчи ҳар бир тўғри чизиқ инвариант. $H_0^k(M) = M$ гомотетия $k = 1$ да мавжуд, тўплам П текисликдан иборат. **500.** O нуқта, l тўғри чизиқ, $O \notin l$, k — ҳақиқий сон. $M, N \in l$ олайлик.

$$H_0^k(M) = M', \quad H_0^k(N) = N' \text{ дан}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM},\\ \overrightarrow{ON'} = k \cdot ON\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}} = \frac{\overrightarrow{ON'}}{\overrightarrow{ON}} = k, \quad \widehat{MON} = \widehat{M'ON'},$$

демак, $\triangle OMN \backsim \triangle OM'N' \Rightarrow MN \parallel M'N'$ (69- чизма). **501.** $k = 1$ да маркази гомотетия марказида ётган ва ётмаган айлана ўз- ўзига ўтади, $k \neq 1$ да эса маркази гомотетия марказида ётган айлана ўзига концентрик айланага ўтади, маркази гомотетия марказида ётмаган айлана радиуси k марта ўзгарган айланага ўтади, унинг маркази эса берилган айлана марказининг H_0^k даги аксидан иборат бўлади. **503.** Фараз қилайлик, $H(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$ бўлсин (70- чизма). ABC учбурчакда CD биссектриса аксини топамиз, $H(AB) = A'B'$, $D \in AB$ бўлгани учун $D' \in A'B'$ бўлади. $M_0D \cap A'B' = D'$ ни топамиз, бунда гомотетия хоссасига кўра $C'D' \parallel CD$, $\angle 1 = \angle 2$ эканидан фойдаланамиз. **504.** $k_1 = \frac{1}{k}$ коэффициентли гомотетия Φ' ни Φ га ўтказади. **505.** H_0^k берилган бўлсин. $\forall M$ нуқта учун $H_0^k(M) = M'$ дан таърифга кўра $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ ўринли бўлади, бундан $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OM'}$, демак, $H_0^{\frac{1}{k}}(M') = M$. **506.** $H_0^{k_1}$, $H_0^{k_2}$ берилган.

$$H_0^{k_1}(M) = M' \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = k_1 \cdot \overrightarrow{OM}, \tag{1}$$

$$H_0^{k_2}(M') = M'' \Rightarrow \overrightarrow{OM''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OM'}. \tag{2}$$

(1) ва (2) дан $\overrightarrow{OM''} = k_1 \cdot k_2 \cdot \overrightarrow{OM} \Rightarrow H_0^{k_1 \cdot k_2}(M) = M''$.

513. Гомотетия хоссасига кўра икки нуқта орасидаги масофа уларнинг мос акслари орасидаги масофадан $|k_1|$ марта фарқ қилади, формулалар учун ушбу хосса ўринли эканини кўрсатамиз:

$$M_1(x_1, y_1),\ M_1(x_2, y_2),\ M_1'(x_1', y_1'),\ M_2'(x_2', y_2') \text{ бўлсин.}$$

$$\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} =$$

$$= \sqrt{(kx_2 + a - kx_1 - a)^2 + (ky_2 + b - ky_1 - b)^2} =$$

$$= \sqrt{k^2(x_2 - x_1)^2 + k^2(y_2 - y_1)^2} = |k| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= |k| \cdot \rho(M_1, M_2).$$

Гомотетия маркази ўз- ўзига ўтади, шунинг учун унинг координаталарига нисбатан $\begin{cases} x_0' = x_0, \\ y_0' = y_0 \end{cases}$ муносабат ўринли бўлади, у ҳолда

$$\begin{cases} x_0 = kx_0 + a, \\ y_0 = ky_0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{1-k}, \\ y_0 = \dfrac{b}{1-k}. \end{cases} \tag{1}$$

(1) дан $k \neq 1$ бўлганда берилган $x' = kx + a$, $y' = ky + b$ формулалар гомотетияни ифода қилиши келиб чиқади. **514.** Берилган формулалардан $\begin{cases} x = -2x' + 2, \\ y = -2y' + 6 \end{cases}$ ларни топиб, аксларнинг тенгламаларини топамиз:

1) $y = x + \frac{9}{2}$; 2) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 1$; 3) $A'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $B'\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $C'\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

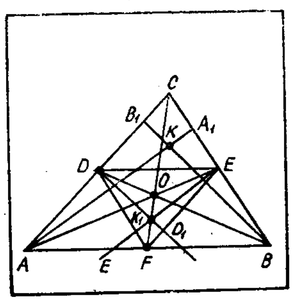
515. 513- масаладан фойдаланамиз. Фараз қилайлик, изланаётган формулалар $\begin{cases} x' = kx + a, \\ y' = ky + b \end{cases}$ бўлсин. Мос A ва A' координаталари, B ва B' координаталари қуйидаги формулаларни қаноатлантириши лозим:

$$\begin{cases} 2 = 6k + a \\ 4 = 12k + b. \end{cases} \tag{1}$$

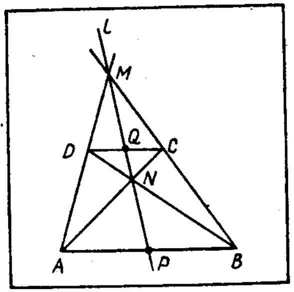
$O_1\left(\frac{a}{1-k}, \frac{b}{1-k}\right)$ бўлиши юқорида (513- масалада) чиқарилган, демак, $\frac{a}{1-k} = 3$, $\frac{b}{1-k} = 6$, $a = 1 - k$, бу қийматни (1) нинг биринчисига қўямиз: $2 = 6k + 3(1-k) \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$. У ҳолда $a = 3(1 - k) = 3\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 4$, $b = 8$. Гомотетия формулалари

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}x + 4, \\ y' = -\dfrac{1}{3}y + 8 \end{cases}$$ кўринишда бўлади.

516. Берилган гомотетия формулалари $\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky \end{cases}$ кўринишда бўлади. Масала шартига кўра $x' = -2x$, $y' = -2y$. Агар $A(x_1, y_1)$ бўлса, $B(-2x_1, -2y_1)$ бўлади. $A \in (2x + y - 4 = 0)$, $B \in (3x - y + 2 = 0)$ бўлишидан $\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 4, \\ -6x_1 + 2y_1 = -2 \end{cases}$ система келиб чиқади, унинг ечими $x_1 = 1$, $y_1 = 2$. Демак, $A(1, 2)$, $B(-2, -4)$. **517.** BD медианада уни 2 : 1 нисбатда бўлувчи O нуқтани танлаб олайлик, $H_0^{-\frac{1}{2}}(B) = D$ эканини кўрамиз (71-чизма). DE чизиқни ўтказсак, гомотетиянинг хоссасига кўра $H_0^{-\frac{1}{2}}(AB) = DE$ экани келиб чиқади. Демак, $H_0^{-\frac{1}{2}}(A) = E$ бўлиб, $O \in AE$. Худди шундай мулоҳаза юритиб, $O \in CF$ эканини чиқарамиз. **518.** 517-масалада кўрдикки, $H_0^{-\frac{1}{2}}(\triangle ABC) = \triangle EDF$ (71-чизма). $H_0^{-\frac{1}{2}}$ гомотетияда AA_1 баландликнинг акси E дан ўтувчи $EE_1 \parallel AA_1$ бўлган EE_1 тўғри чизиқдир. Худди шунингдек, $H_0^{-\frac{1}{2}}(BB_1) = DD_1$, $K = AA_1 \cap BB_1$. $K_1 = EE_1 \cap DD_1$ бўлса, $H_0^{-\frac{1}{2}}(K) = K_1$ бўлади. **519.** (72-чизма) $ABCD$ трапеция берилган бўлсин, $AB \parallel DC$ бўлгани дан шундай гомотетия мавжудки, $H_M^k(AB) = DC \Rightarrow H_M^k(P) = Q \Rightarrow$ $\Rightarrow M, P, Q$ бир тўғри чизиқда ётади. $H_N^{k_1}(B) = D$, $H_N^{k_1}(A) = C$, $H_N^{k_1}(P) = Q$ бўлишидан P, Q, N бир тўғри чизиқда ётади, демак, $M, N, P, Q \in l$. **520.** а) $1/k$ коэффициентли ўхшаш; б) $|k|$ коэффициентли ўхшаш. **521.** Ҳар қандай 2 та тенг томонли учбурчак. **522.** Фараз қилайлик, $A, B, C \in d$ ва B учун $\mu(ABC)$ бўлсин. Яъни,



71-чизма.



72-чизма.

$$AC = AB + BC; \quad A \xrightarrow{P_k} A', \; B \xrightarrow{P_k} B',$$

$$A'C' = k\,AC = k\,(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C',$$

демак, $A'C' = A'B' + B'C' \Rightarrow A', B', C' \in d'$. **523.** 1), 3) тўғри. **524.** а), б), в) тўғри. **528.** Кўрсатма. $Б = (O, \vec{i}, \vec{j})$ да $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ларни олиб, улар учун $\rho(M_1', M_2') = k \cdot \rho(M_1, M_2)$ ўринли экани кўрсатилади. **529.** Фараз қилайлик, изланган формулалар қуйидагича бўлсин: $\varepsilon = +1$,

$$\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + a, \\ y' = k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + b. \end{cases} \quad (1)$$

$$(AB = \sqrt{2}, \; A'B' = 2\sqrt{2}) \Rightarrow k = 2. \quad (2)$$

(1), (2) ва берилган мос нуқталар координаталаридан фойдаланиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} 2 = -2\sin\alpha + a, \\ 2 + \sqrt{3} = \cos\alpha + b, \\ 3 + \sqrt{3} = 2\cos\alpha + a, \\ 3 = 2\sin\alpha + b \end{cases}$$ системадан $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $a = 3$, $b = 2$ лар топилади,

демак, 1-турдаги ўхшаш алмаштириш формулалари

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 3, \\ y' = x + y\sqrt{3} + 2 \end{cases}$$ кўринишда экан.

530. Кўрсатма. $\forall M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$ ларни олиб, $M_1'M_2' = k \cdot M_1M_2$ экани кўрсатилади, сўнгра k топилади, $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1(2, 2)$. **531.** Масала шартига кўра: $M(x, y) \rightarrow M'(3x, -3y)$, $x' = 3x$, $y' = -3y$. Бу алмаштиришда 2 кўпайтувчи бор, аввал O нуқтага нисбатан $k = 3$ коэффициентли гомотетияни бажариб, сўнгра Ox га нисбатан симметрик алмаштириш натижасида $H_0^3(M) = M_1$, $S_{Ox}(M_1) = M'$ ҳосил бўлади. Демак, $f(M) = M'$ учун $f = S_{Ox} \cdot H_0^3$, яъни ўхшаш алмаштириш. **532.** Фараз қилайлик, $H_0^2(M) = M_1$, $R_0^{30°}(M) = M_1''$ бўлсин.

$$M(x, y) \xrightarrow{H_0^2} M_1(x_1, y_1), \; M_1(x_1\; y_1) \xrightarrow{R_0^{30'}} M'(x', y').$$

Масалада кўрсатилганига асосан,

$$\begin{cases}x_1 = 2x-(1-2)=2x+1,\\ y_1=2y+3(1-2)=2y-3\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1=2x+1,\\ y_1=2y-3.\end{cases}\qquad (1)$$

O нуқта атрофида 30° га буриш формулалари эса:

$$\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1,\\ y'=\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1.\end{cases}\qquad (2)$$

(1) ва (2) дан $\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}(2y-3),\\ y'=\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}(2y-3)\end{cases}$

ёки $R_0^{30^\circ}\cdot H_0^2$ кўпайтма алмаштириш учун

$$\begin{cases} x'=\sqrt{3}\cdot x-y+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right),\\ y'=x+\sqrt{3}\cdot y+\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$$ формулаларга эга бўламиз.

533. Ўхшаш алмаштириш формулалари

$$\begin{cases} x'=\frac{48}{25}x-\frac{14}{25}y-\frac{192}{25},\\ y'=\frac{14}{25}x+\frac{48}{25}y-\frac{192}{25}.\end{cases}$$

534. 2- тур ўхшаш алмаштириш бўлгани учун $\varepsilon=-1$. Ўхшаш алмаштириш формулаларини $\begin{cases}x'=k(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+a,\\ y'=k(x\sin\alpha+y\cos\alpha)+b\end{cases}$ кўринишда излаймиз. $A(1,\ 0)\to A'(0,\ 1)$, $B(-2,\ 1)\to B'(-1,\ 1)$ бўлишидан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases}k\cos\alpha+a=0,\\ k\sin\alpha+b=1,\\ -2k\cos\alpha+k\sin\alpha+a=-1,\\ -2k\sin\alpha+k\cos\alpha+b=1\end{cases}\quad \Rightarrow a=-\frac{3}{8},\ b=\frac{7}{8},\ k=\frac{\sqrt{10}}{8},\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Алмаштиришнинг аналитик ифодаси $\begin{cases}x'=\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}y+\frac{3}{8},\\ y'=\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}y+\frac{7}{8}\end{cases}$

бўлади.

535. $Б=(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ дан $Б'=(O',\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ га ўтувчи координаталарни алмаштириш формулаларини топайлик: $\vec{i}=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{e}_1=\overrightarrow{O'A'_1}$, $(\widehat{\overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{O'A'_1}})=\alpha$, $O'(a,\ b)$ бўлсин. Агар $\begin{cases}\vec{e}_1=c_{11}\vec{i}+c_{21}\vec{j},\\ \vec{e}_2=c_{12}\vec{i}+c_{22}\vec{j}\end{cases}$ деб олсак, қуйидаги кўпайтмаларни ҳисоблаш натижасида c_{ij} ларни топа оламиз:

$$\begin{cases}(\vec{e}_1,\vec{i})=c_{11}\Rightarrow c_{11}=k\cos\alpha,\\ (\vec{e}_1,\vec{j})=c_{21}\Rightarrow c_{21}=k\sin\alpha,\\ (\vec{e}_2,\vec{i})=c_{12}\Rightarrow c_{12}=\pm k\cdot\sin\alpha,\\ (\vec{e}_2,\vec{j})=c_{22}\Rightarrow c_{22}=\pm k\cdot\cos\alpha.\end{cases}\qquad (1)$$

Масаланинг шартига кўра $Б'$ системада $M'(x,\ y)$. M нуқтанинг $Б=(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ даги координаталари $x',\ y'$ бўлсин. У ҳолда $Б$ системадан $Б'$ системага ўтишдаги координаталарни алмаштириш формулаларига асосан, M' нуқтанинг эски система $Б$ даги координаталари $x',\ y'$ ва янги система $Б'$ даги координаталари $x,\ y$, улар орасида қуйидаги боғланишлар ўринли бўлади:

$$\begin{cases}x'=c_{11}x+c_{12}y+a,\\ y'=c_{21}x+c_{22}y+b\end{cases}\qquad (2)$$

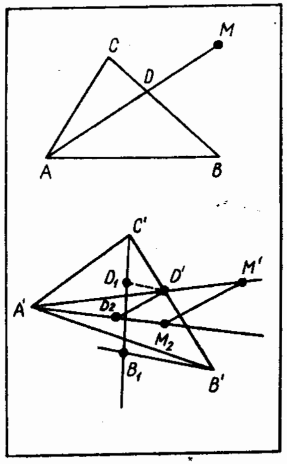
c_{ij} ларнинг (1) даги қийматларини (2) га қўйилса:

$\begin{cases}x'=k(x\cos\alpha\mp y\sin\alpha)+a,\\ y'=k(x\sin\alpha\pm y\cos\alpha)+b\end{cases}$ ҳосил бўлади. агар $\varepsilon=\pm1$ деб олинса, $\begin{cases}x'=k(x\cos\alpha-\varepsilon y\sin\alpha)+a,\\ y'=k(x\sin\alpha+\varepsilon y\cos\alpha)+b\end{cases}$ ҳосил бўлади. Бу формулалар $Б$ реперда ўхшаш алмаштиришнинг формулаларидир.

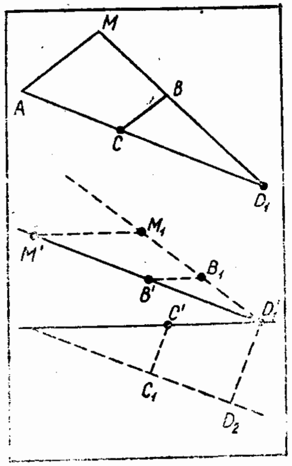
538. 1) $M'(11,6)$, $M\left(\frac{32}{9},\ -\frac{10}{9}\right)$: 3) $x-y+4=0$; 4) $x-4y-7=0$.

540. (2,1). **541.** а) $x+2y-4=0$; б) $x+3=0$. **542.** $\begin{cases}x'=y,\\ y'=x.\end{cases}$ **545.** A. B, C ва A', B', C' нуқталар берилган. Аффин алмаштиришда уч нуқтанинг оддий нисбати сақланишидан фойдаланиб ясашни бажарамиз (73-чизма). A нуқтани берилган M нуқта билан бирлаштириш натижасида ҳосил бўлган MA тўғри чизиқ билан BC нинг кесишган D нуқтасини топамиз: $D=MA\cap BC$, $(BC,\ D)=(B'C',\ D')$ бўлган D' ни ясаймиз, бунинг учун C' дан ихтиёрий нур ўтказиб, CD ва DB кесмаларни C' дан бошлаб кетма-кет жойлаштирамиз. $CD=C'D_1$, $DB=D_1B_1$, B_1B' тўғри чизиқни ўтказиб, D_1 дан унга параллел ўтказсак, $D_1E\parallel B_1B'$ тўғри чизиқ $B'C'$ ни D' да кесади: $D'=D_1D'\cup B'C'$. Худди шу усулни қўллаб, $(AD,\ M)=(A'D',\ M')$ муносабатни қаноатлантирувчи M' нуқта топилади.

Агар $AM\parallel BC\nparallel AC$ бўлса, $AC\cap BM=D_1$ нуқтани топамиз ва



73- чизма.

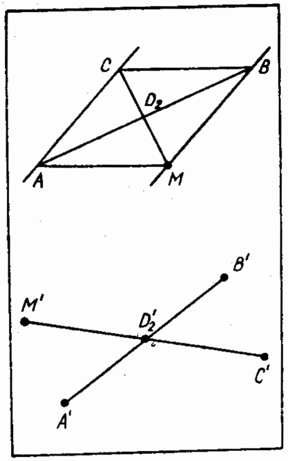


74- чизма.

$(D_1B, M) = (D_1B', M')$ муносабатни қаноатлантирувчи M' ни ясаймиз (74- чизма). (Ёрдамчи нурлар штрихларда чизилган.)

Агар $AM \parallel BC$ ва $BM \parallel AC$ бўлса, $ACBM$ параллелограммнинг диагоналлари кесишган $D_2 = AB \cap CM$ нуқта топилади. $(AD_2, B) = (A'D'_2, B')$ дан D'_2 топилади ва $(CD_2, M) = (C'D'_2, M')$ муносабатни қаноатлантирувчи M' нуқта ясалади (75- чизма). **546.** Исбот қилишда 545- масаладан фойдаланинг. **547.** а) Ихтиёрий учбурчак; б) параллелограмм; в) параллелограмм. **548.** Тўғри чизиқ, кесма ўртаси, параллел тўғри чизиқлар, учбурчак, тўртбурчак, параллелограмм, трапеция, параллел кўчириш, буриш, гомотетия, симметрия. **549.** Айлана маркази унинг аксининг марказига ўтади, айланадаги ўзаро перпендикуляр диаметрлар акс марказидан ўтувчи ихтиёрий диаметрларга ўтади, уларга параллел ватарлар яна параллел ватарларга ўтгани учун ва кесма ўртасига ўтгани учун параллел ватарлар ўрталарини бирлаштирувчи диаметр акс марказидан ўтувчи диаметрга алмашади. **554.** а) $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = k \cdot \vec{j}$ бўлгани учун $\vec{OM'} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x\vec{i} + ky\vec{j} \Rightarrow M' \quad (x, ky)_Б$, демак, $x' = x$, $y' = ky$; б) Ox ўққа перпендикуляр тўғри чизиқлар инвариант ва Ox ўқдаги барча нуқталар инвариант. **555.** $\begin{cases} x'^2 = x^2, \\ y' = \frac{b}{a} y \end{cases}$ дан $\begin{cases} x = x', \\ y = \frac{a}{b} y'; \end{cases}$

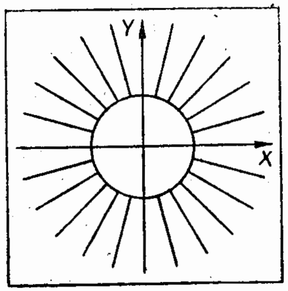
$x^2 + y^2 = a^2$ айлана аксининг тенгламаси $x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, демак, 2- тартибли чизиқ ҳосил бўлади (эллипс). **556.** Параллелограммни квадратга аффин алмаштириб, алмаштиришда юзлар нисбати сақланишидан фойдаланамиз.



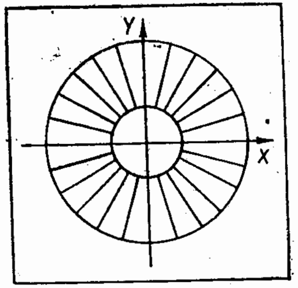
75- чизма.

IV боб

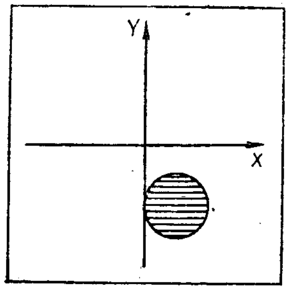
558. 1) $C\ (0, 0)$, $r = 2$; 2) $C\ (2, 0)$, $r = 3$. 3) $C\ (-1, 2)$, $r = \frac{1}{2}$; 4) $C\ (0, 1)$, $r = \frac{3}{2}$. **559.** 1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$, $C\ (2, 3)$, $r = 4$. 2) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$. $C\ (-1, 3)$, $r = 3$; 3) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$. $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $r = \frac{5}{2}$: 4) $(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$, $C\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $r = 2$; 5) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$, $C\ (1, -2)$, $r = 0$. 6) $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$; мавҳум радиусли айлана. **560.** а) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$. б) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 2$; в) $x^2 + y^2 = 25$: г) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$. **561.** $(x-$



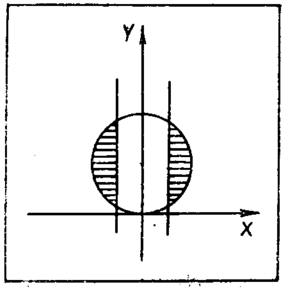
76- чизма.



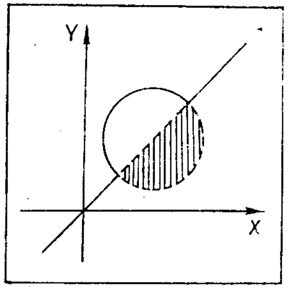
77- чизма.



78- чизма.

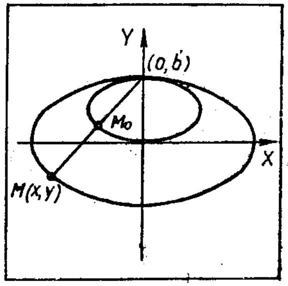


79- чизма.



80- чизма.

$-1)^2+(y-2)^2=\frac{49}{100}$. **562.** $(x-1)^2+(y-4)^2=8$. **563.** 76 — 80- чизмаларга қаранг. **564.** $(x-4)^2+(y-3)^2=13$. **565.** Кўрсатма. Айлана радиуси билан айлана марказидан тўғри чизиққача бўлган масофаларни таққосланг. а) ва б) тўғри чизиқлар айланани кесиб ўтади; в) тўғри чизиқ уринади; г) эса айлана ташқарисидан ўтади. **566.** Кўрсатма. CA радиус айлананинг A нуқтасидан ўтган уринмага перпендикуляр бўлади. 1) $x-3y=0$; 2) $2x+y-7=0$. **567.** $x^2+(y-1)^2=2$. **568.** $(x-17)^2+(y-17)^2=17^2$ ва $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **569.** $4x-2y-9=0$. **570.** $x^2+y^2=\frac{m^2-2a^2}{2}$ айлана, бунда $m>a\sqrt{2}$. **572.** $a=5$, $b=4$; 2) $F_1(-3{,}0)$, $F_2(3{,}0)$; 3) $e=\frac{3}{5}$; 4) $x=\pm\frac{25}{3}$. **573.** 1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{1/4}+\frac{y^2}{1/16}=1$ ва $4x^2+16y^2=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 4) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; 5) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$. **574.** Кўрсатма. Исбот қилиш учун $x=x_1$, $x=x_2$ тўғри чизиқларни қараш етарли. **575.** B ва E нуқталар эллипсда ётади, A ва D нуқталар эллипсда ётмайди. C—эллипснинг ички нуқтаси. **576.** $p=\frac{2b^2}{a}$. **577.** $C(-1,\ 3)$, $a=4$, $b=3$; 3) $C(-2,\ -1)$; $a=3$, $b=2$; 4) $C(3,\ -1)$, $a=4$, $b=3$; 5) $C(-2,\ 1)$, $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$. **578.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.



81- чизма.

579. Кўрсатма. Фигуралар тенгламалари қандай тузилиши тўғрисида тушунча.

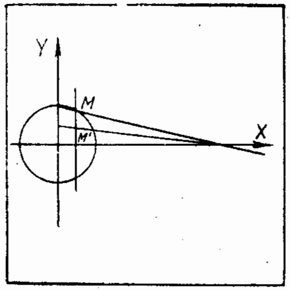
Одатда фигураларнинг тенгламалари аниқ масалалар бўйича тузилади. Лекин уларни умумий қонуният асосида ҳам тузиш мумкин. Бунда $M(x,\ y)$ нуқта фигурага тегишли бўлиши учун зарур бўлган барча шартлар ёзилади ва n та ёрдамчи параметрлар киритилади. Бу шартлар $(n+1)$ та бўлгани учун биз параметрларга нисбатан $(n+1)$ та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. M нуқта фигурага тегишли бўлади, агар система ҳам ўринли бўлса, ва аксинча, ихтиёрий n та тенгламадан киритилган параметрларни аниқлаймиз. Системанинг ўринлилик шарти—бу шарт қолган тенглама топилган параметрларни қаноатлантириш шарти бўлиб, у фигуранинг тенгламасини беради. Параметрлар киритилишида, уларни ўз ўринлари бўйича иложи борича тўғри қўйилишига ва уларга геометрик маъно беришга эътибор бериш керак.

Кўрсатма. Фараз қилайлик, $M_0(x_0,\ y_0)$ нуқта фигурага тегишли бўлсин (81- чизма). Параметрлар қилиб ватарнинг охиридаги M нуқтанинг x ва y координаталарини олайлик. Унда қуйидаги шартлар ҳосил бўлади: 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $x_0=\frac{x}{2}$; 3) $y_0=\frac{y+b}{2}$. Шундай қилиб, биз уч тенгламадан иборат бўлган системани ҳосил қилдик. 2) ва 3) тенгламалардан x, y ларни топайлик: $x=2x_0$. $y=2y_0-b$. Буларни 1) тенгламага қўйсак,

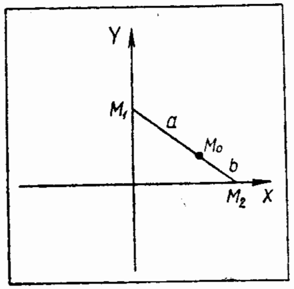
$$\frac{4x_0}{a^2}+\frac{(2y_0-b)^2}{b^2}=1 \text{ ёки } \frac{x_0^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{\left(y_0-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$$ ҳосил бўлади. *Жавоб:*

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1.$$

580. Эллипс. l қилиб абсцисса ўқини олиб, O нуқта қилиб координаталар боши қабул қилинса, у ҳолда $M(x,\ y)$ нуқталар тўпламининг тенгламасини тузиш учун $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ тенгликни координаталарда ифодалаш кифоя. $\widehat{POQ}=2\alpha$ бўлсин. $\overrightarrow{OP}(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$, $\overrightarrow{OQ}(b\cos\alpha,\ -b\sin\alpha)$ бўлганидан $\begin{cases}x=(a+b)\cos\alpha\\ y=(a-b)\sin\alpha\end{cases}$ ёки $\frac{x^2}{(a+b)^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1$ изланган тўпламнинг тенгламасидир. **581.** $x'=x$, $y'=$



82- чизма.



83- чизма.

$= \frac{b}{a} y$ қисиш алмаштиришни бажариш лозим. **582.** Фараз қилайлик, M айланага тегишли бўлсин, у ҳолда M' нуқта эллипсга тегишли бўлади. 82- чизмага қаранг. **583.** $x = a\cos t$, $y = b \sin t$, $o \leqslant t \leqslant 2\pi$. **584.** Эллипс. Агар M_0 нуқта кесманинг ўртаси бўлса, унда айлана.

Кўрсатма. Тўғри бурчакнинг томонлари қилиб координата ўқларини олинг. M_0 нуқтадан M_1M_2 нинг охирги нуқталаригача бўлган масофаларни $M_1M_0 = a$, $M_2M_0 = b$ деб белгиланг (83- чизма). **585.** Кўрсатма. l нурнинг Ox ўқдан қиялик бурчагини t билан белгилаб олсак у ҳолда M (x, y) нуқта учун $x = a\cos t$, $y = b\cos t$ бўлади. **586.** Кўрсатма. Бу масалада (кейинги масалада ҳам) геометрик нуқтаи назардан қараб қандай фигура ҳосил бўлиши мумкин эканлигини баъзан билиш мумкин. Кейин тенглама тузилади. Фараз қилайлик, M маркази айлана берилган айлананинг T нуқтасига уринсин. $OM + MT = 5$, $MT = MA$ бўлганлиги учун $OM + MA = 5$, яъни $2a = 5$ тенглик бажарилганда M нуқта фокуслари O ва A бўлган эллипсга тегишли бўлади.

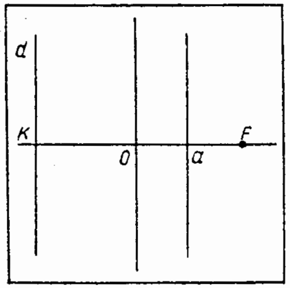
$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

587. Фараз қилайлик, ω (C, r) ички, ω (O, R) ташқи айлана бўлсин. Изланган тўплам фокуслари O ва C бўлган 2 та эллипсдан иборат бўлиб, биринчисининг катта ўқи $2a = R + r$, иккинчисининг эса $2a = R - r$ дир. **588.** $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{28} = 1$, $a = \sqrt{7} \approx 2{,}6$, $b = \frac{2\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}7$. Бунда $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leqslant 1$. **589.** 1) $a = 3$, $b = 4$, $y = \pm \frac{4}{3}x$. 2) $a = 3$, $b = 2$, $2x - 3y - 7 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$. 3) C $(-3, 0)$, $a = 2$, $b = 1$,

$y = \pm \frac{1}{2}(x+2)$. **590.** 1) $a = 5$, $b = 12$; 2) F_1 $(-13{,}0)$, F_2 $(13{,}0)$; 3) $e = \frac{13}{5}$; 4) $y = \pm \frac{12}{5}$; 5) $x = \pm \frac{25}{13}$. **591.** 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{\frac{1}{16}} - \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$; 4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$; 5) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 6) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 7) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$; **592.** $2p = \frac{2b^2}{a}$. **593.** 1) C $(1, -2)$, $a = 5$, $b = 3$; 2) C $(-1, -1)$, $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{5}$; 3) C $(-1, 2)$, $a = 2$, $b = \sqrt{8}$; 4) C $(-2, -2)$, $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$. **594.** $x - 2y - 12 = 0$, $x + 2y + 8 = 0$. **595.** $x - 3y + 1 = 0$, $x + 3y - 5 = 0$. **596.** $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. **597.** $\frac{a^2}{2}$. **598.** Кўрсатма. Асимптота ва директриса кесишган нуқтаси M нинг координаталарини топиб, унинг координаталар бошидан узоқлигини ҳисобланг. **599.** b. **600.** $\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1$.

601. $\frac{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1$. **603.** $xy = \frac{a^2}{2}$ (эски координата ўқларини $-\frac{\pi}{2}$ бурчакка буриш керак). **604.** $y = \frac{x}{x-2}$ гипербола. **606.** 1) $y^2 = 8x$; 2) $y^2 = 12x$, 3) $y^2 = 4x$. **607.** $2p$. **608.** 1) C $(-1, 2)$, $p = 2$. 2) C $(2, -1)$, $p = \frac{1}{2}$; 3) C $(-2, -1)$, $p = 1$; 4) C $(2, -3)$, $p = \frac{1}{2}$; 5) $C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $p = 1$; 6) C $(0{,}2)$, $p = \frac{1}{6}$. **609.** Кўрсатма. Аввало ўзгарувчиларни шундай ажратамизки, бунда иккинчи даражали ўзгарувчи олдидаги коэффициент мусбат бўлсин. Ундан кейин тўла квадратни шундай ажратамизки, қавс ичидаги x ва y олдидаги коэффициентлар 1 га тенг бўлсин. Параболанинг учи ва ўқини топамиз. Текшириш учун, параболанинг бирорта ўқ билан кесишган нуқтасини топиш мумкин. Бунда параболанинг дастлабки тенгламасидан фойдаланиш яхшироқ. Берилган биринчи тенгламани қарайлик:

$$y^2 - 2y - 2x - 5 = 0, \quad y^2 - 2y = 2x + 5, \quad y^2 - 2y + 1 - 1 = 2x + 5,$$
$$(y-1)^2 = 2\ (x+3).$$



84- чизма.

Бунда $C\,(-3, 1)$, ўқ эса Ox билан бир хил йўналган, параболанинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасини топайлик: $y = 0$ да $2x+5=0$, $x=-\frac{5}{2}$, демак, у $A\left(-\frac{5}{2},\ 0\right)$ нуқта бўлади. 2) $(y+1)^2=-2(x-1)$, $C\,(1,\ -1)$, 3) $(x-2)^2=2\ (y-3)$. $C\,(2,\ 3)$; 4) $(x-2)^2=-2\ (y-3)$, $C\,(2,\ 3)$; 5) $(x+2)^2=y$, $C\ (-2, 0)$; 6) $(x-1)^2=-(y-1)$, $C\,(1,\ 1)$; 7) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=y+\frac{9}{4}$; $C\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{9}{4}\right)$. **610.** $y^2=2px$ парабола $FK=p$. d директриса нуқталарини ясайлик (84- чизма). Ихтиёрий $x=a$ $(a \geqslant 0)$ тўғри чизиқ ўтказилади. Бу ўтказилган тўғри чизиқда F нуқтадан бошлаб a радиус бўйича нуқта ясаб оламиз ва ҳоказо. **612.** 1) $F\,(6,\,0)$, $x=-6$; 2) $F\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, d: $y=-\frac{5}{2}$; 3) $F\ (3,\ 1)$, d: $x=1$; 4 $F\ (-2{,}5)$, d: $x=-1$. **613.** 2,5 см. **614.** 12 м. **615.** $p=\frac{a^2}{8h}$. **616.** 1) $y^2=8\ \ (x-1)$; 2) $(y-1)^2=2\,(x-5)$; 3) $(x-2)^2=y-5$. **617.** $p=\frac{8}{9}$. **618.** Иккита парабола: $y^2=1+2x$, $y^2=1-2x$.

619. Фокуси A ва директрисаси l бўлган парабола. **622.** $y^2=\frac{1}{2}px$. **622.** 1) $\rho=\frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\varphi}$; 2) $\rho=\frac{5}{3-2\cos\varphi}$. **623**. $\rho=\frac{4}{1-\sqrt{5}\cos\alpha}$. **624.** 1) $\rho=\frac{3}{1-\cos\varphi}$; 2) $\rho=\frac{2}{1-\cos\varphi}$. **625.** 1) $\rho=a$; 2) $\rho=2a\cos\varphi$; 3) $\rho=-2a\cos\varphi$. **626.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. **627.** $\rho= =\frac{a}{\pm\sqrt{\cos 2\varphi}}$. **628.** $\rho=\frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **629.** 1) $(x-2)^2+y^2=4$; 2) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$. **630.** 1) Иккита ҳақиқий нуқта: $(2,\ \pm\sqrt{3})$; 2) иккита устма-уст тушувчи нуқта: $(1,0)$; 3) иккита мавҳум нуқта; 4) $\varnothing$; 5) асимптотик йўналишдаги тўғри чизиқ, битта нуқта $\left(\frac{5}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$.**631.** $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$ гипербола. 1) $(-1,\ 1)$ ва $(7,1)$; 2) $(-1,\ 1)$ нуқтада уринувчи тўғри чизиқ; 3) кесишиш нуқталари иккита, мавҳум. 4) асимптотик йўналишдаги тўғри чизиқ бўлиб, гиперболани биргина $(7,1)$ нуқтада кесади. **632.** 1) $M_1\ (2,\ 3)$, $M_2\ \ (2,\ -3)$; 2) $M_1=M_2\ (2, -3)$; 3) $t=\pm 2\sqrt{6}\,i$ кесишиш нуқталари иккита, мавҳум. **633.** 1) (1, 3); 2) марказсиз; 3) $x-y-3=0$ марказлар чизиғи. **634.** $B=\pm 1$. **635.** $x^2-8y^2-4=0$. **636.** $xy+15=0$. **637.** $x^2-6xy+9y^2-16= =0$. **638.** $3x-y=0$. **639.** $M_1\ (0{,}3)$, $5x+8y-24=0$; $M_2\ \ (0,\ -1)$, $5x-8y-8=0$; $N_1\ (3{,}0)$, $x+4y-3=0$; $N_2\,(2{,}0)$, $x-4y-2=0$. **641.** $[F_1\ (x_0,\ y_0)\ \alpha+F_2\ (x_0,\ y_0)\ \beta]^2=\varphi\,(\alpha,\beta)$. $F\ (x_0, y_0)$. **642.** $y=-2x$, $y=-\frac{5}{2}$. **643.** $A^2a^2+B^2b^2=C^2$. **644.** $A^2a^2-B^2b^2=C^2$. **645.** $p=2pk$.

646. $6x+7y+4=0$. **647.** $17x-4y-4=0$. **648.** Эллипс учун $k{\cdot}k'= =-\frac{b^2}{a^2}$, гипербола учун $k{\cdot}k'=\frac{b^2}{2a^2}$. **649.** $k=\frac{p}{m}$. **650.** 1) Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар: $2x-3y=0$, $2x+3y=0$. 2) Иккита параллел тўғри чизиқлар: $x-y-1=0$, $x-y+1=0$. 3) Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар. Кўрсатма. Берилган тенгламани x (ёки y) га нисбатан квадрат тенглама қилиб ечинг. Берилган эгри чизиқ икки тўғри чизиққа ажралувчан бўлгани учун илдиз остидаги ифода тўла квадратдан иборат ва $\Delta=0$.

$x^2-x\ (2y-1)-3y^2-3y=0$.

$x=\frac{2y-1\pm\sqrt{(2y-1)^2+12y^2}}{2}$, $2x=2y-1\pm(4y+1)$, бундан $x=3y$, $x=-y-1$ тўғри чизиқлар ҳосил бўлади.

4) Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар: $x=2y+3$, $x=-y+1$.
5) Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар: $x=0$, $x-2y+5=0$.
6) Иккита устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар: $x-2y=0$.
7) Иккита параллел тўғри чизиқлар: $2x-3y+5=0$, $2x-3y-5=0$.
8) Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар: $y=-5$, $y=x-2$.
9) Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар: $y=5x$, $x+y-1=0$.

651. 1) $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $O'\ (2{,}3)$, $K_{O'x'}=-\frac{1}{2}$;

2) $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{4}=1$, $O'\ (1{,}1)\ K_{O'x'}=\frac{2}{3}$;

3) $\frac{x'^2}{9}+y'^2=1$; $O'\ (1{,}1)$, $k_{O'x'}=-1$;

4) $\frac{x'^2}{4}-y'^2=1$, $O'\ (1,\ -3)$, $k_{O'x'}=-\frac{3}{4}$;

5) $x'^2-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'\ (-1,\ 2)$. $k_{O'x'}=3$.

652. 1) $y'^2=4\sqrt{2}\,x'$, $y=x-1$; $O'\ (2{,}1)$; 2) $y'^2=2\sqrt{2}\,x'$, $y=2-$

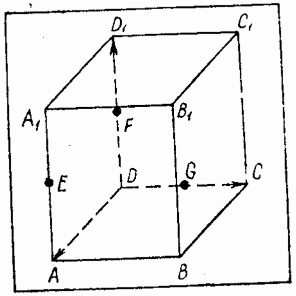
$-x$; O' (1, 1); 3) $y'^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}$ x', $y = 2x + 1$, $O'\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$. 4) $y'^2 = = \frac{1}{\sqrt{5}}$ x', $y = 2x - 1$, O' (2, 3). **653.** $y = 3$, $24x - 7y - 75 = 0$. **654.** $2\sqrt{3}\,x + y - 4 = 0$. **655.** $y = 3$, $12x + 7y + 51 = 0$. **656.** $2x + y \pm 5 = 0$, $2x - y \pm 5 = 0$. **657.** $x + y = 1$. **658.** $8x - \sqrt{11}y - 20 = 0$, $8x + \sqrt{11}y - 20 = 0$. **659.** $x - 2y + 4 = 0$. **660.** $2\sqrt{2}$. **661.** $32x + 25y - 89 = 0$. **663.** $y = 2x - 5$. **665.** $x - y \pm 3 = 0$ ва $x + y \pm 3 = 0$. **666.** $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; **667 — 668.** Кўрсатма. Фокал радиус-вектор ва уринма тўғри чизиқ тенгламаларини тузинг ва икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топишдан фойдаланинг. **669.** $y^2 = -\frac{1}{4}\,px$. **670.** $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ ёки қутб координаталарда $\rho = \pm\sqrt{2\sin 2\varphi}$ (лемниската).

V боб

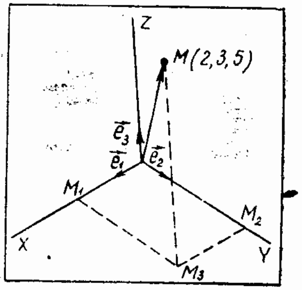
672. 85-чизмадан кўринадики: 1) $\vec{AA_1} = \vec{DD_1} \Rightarrow \vec{AA_1}$ (0, 0, 1); $\vec{BE} = = \vec{BA} + \vec{AE} = -\vec{DC} + \frac{1}{2}\ \vec{DD_1} \Rightarrow \vec{BE}\ \left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$; $\vec{B_1C_1} = \vec{AD} = = -\vec{DA} \Rightarrow \vec{B_1C_1}$ (1, 0, 0); $\vec{GD} = -\frac{1}{2}\ \vec{DC} \Rightarrow \vec{GD}\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$; $\vec{A_1G} = = -\vec{DA} + \frac{1}{2}\ \vec{DC} - \vec{DD_1} \Rightarrow \vec{A_1G}\left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$; 2) A (1, 0, 0), B (1, 1, 0), C (0, 1, 0), D (0, 0, 0), A_1 (1, 0, 1), B_1 (1, 1, 1), C_1 (0, 1, 1) D_1 (0, 0, 1). **673.** Кўрсатма. Берилган M (2, 3, 5) нуқтани тасвирлаш учун чизма текислигида O нуқта олиб, ундан чиққан учта ихтиёрий нурларда O нуқтадан бошлаб $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ векторларни қўямиз ва $\vec{OM} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$ йиғинди векторни ясаймиз:

$$\vec{OM} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 5\vec{e_3} = \vec{OM_1} + \vec{M_1M_3} + \vec{M_3M}.$$

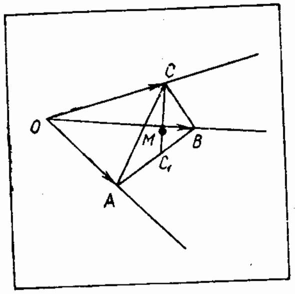
Бу йиғиндининг учидаги M нуқта изланган нуқтанинг тасвири бўлади. Қолган нуқталар ҳам шу усулда ясалади (86-чизма). **676.** B (— 4, 2, 10). **677.** $\vec{AB}$ (5, — 15, 20), $\vec{CD}$ (— 3, 9, — 12) векторлар коллинеар, чунки $\vec{CD}\,(-3, 9, -12) = \left(-\frac{3}{5}\cdot 5, -\frac{3}{5}\ (-15), -\frac{3}{5}\cdot 20\right) = -\frac{3}{5}\vec{AB}$. **678.** $\vec{M_1M_2} \parallel \vec{M_1M_3}$ эканини кўрсатсак, изланган мақсадга эришамиз. **677.** масалага ўхшаш бажарилади. **679.** $\vec{a} + \vec{b} = (-2, -1, 11)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-2, 3, -1)$, $3\vec{a} - 2\vec{b} = (-6, 7, 3)$. **680.** M (2, —2, 4). **681.** $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Координаталар системасининг берилишидан O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1) бўлади (87-чизма). $C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, M (x, y, z) учун $\vec{CM} : \vec{MC_1} = 2 = \lambda$, $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{1}{3}$ ва ҳ.к. **682.** xOy текислиги $\lambda_1 = 4$ нисбатда бўлади; yOz текислиги $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ нисбатда бўлади; xOz текислиги $\lambda_3 = \frac{1}{5}$ нисбатда бўлади. **683.** $SABC$ тетраэдрда (S, $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$) координаталар системасини олсак, A (1, 0, 0) B (0, 1, 0), C (0, 0, 1), $A_1\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ $E\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $F\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $G\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ бўлади. Қарама-қарши қирралар-



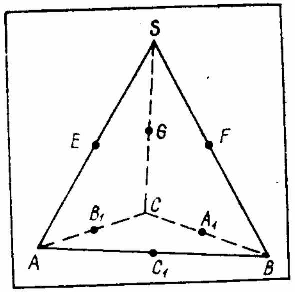
85-чизма.



86-чизма.



87-чизма.

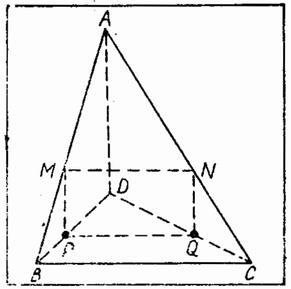


88-чизма.

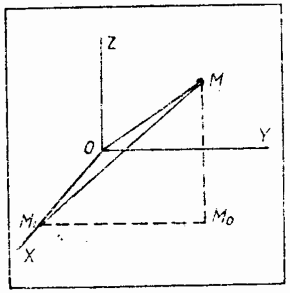
да ётган нуқталарнинг ўрталари учун $M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ нуқта (88- чизма) ягона эканини кўрсатамиз. **684**. Координаталар методидан фойдаланинг. **685.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$. **686.** Тетраэдр учлари $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ реперда D (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1) бўлади. $\overrightarrow{AB}$ ни M λ нисбатда бўлади, у ҳолда M (x, y, z) учун

$$x = \frac{1}{1+\lambda},\ y = \frac{\lambda}{1+\lambda},\ z = 0,$$

яъни $M\left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}, 0\right)$. Худди шунингдек $N\left(\frac{1}{1+\lambda}, 0, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $P\left(0, \frac{\lambda}{1+\lambda}, 0\right)$, $Q\left(0, 0, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$. $\overrightarrow{MN}\left(0, -\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $\overrightarrow{PQ}\left(0, -\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, демак, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ (89- чизма). **687.** $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{38}$. **688.** 90- чизмадан фойдаланамиз. M нуқтанинг Ox ўқдан узоқлиги M дан Ox га туширилган MM_1 перпендикулярнинг узунлигига тенг,



89- чизма.



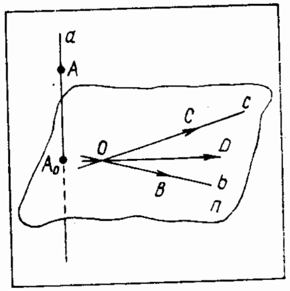
90- чизма.

$\widehat{OM_1M} = 90°$, $|OM_1| = x$, $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \rho(M, Ox) = \sqrt{y^2+z^2}$. Худди шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, $\rho(M, Oy) = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\rho(M, Oz) = \sqrt{x^2 + y^2}$ лар топилади. **692.** $d = a\sqrt{3}$. **693.** 1) $S_{Ox}\ (M) = M_1\ (x, -y, z)$, $S_{Oy}\ (M) = M_2\ (-x, y, -z)$; 2) $S_{xOy}\ (M) = M_4\ (x, y, -z)$; $S_{xOz}(M) = M_5\ (x, -y, z)$, $M_6\ (-x, y, z)$; 3) $Z_0\ (M) = M_7\ (-x, -y, -z)$. **795.** $\rho\ (M, N) = 3$ (узунлик бирл.) **696.** a) $M\left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$; б) $M_1\left(0, \frac{11}{6}, 0\right)$; в) $M_2\left(1, 0, -\frac{3}{2}\right)$. **697.** K (3, 3, 2), $r = \sqrt{6}$. **698.** $\overrightarrow{a_0}\left(-\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}\right)$

699. $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ йўналишлардаги бирлик векторларни топамиз:

$$\overrightarrow{OA_0}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \overrightarrow{OB_0}\left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right).$$

Биссектриса бўйлаб йўналган векторни $\vec{l}$ деб олсак, уни $\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OB_0}$ векторларга ясалган ромбнинг диагоналига тенг деб олиш мумкин, у ҳолда $\vec{l} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OB_0}$ бўлади, унинг координаталари эса бирлик векторлар мос координаталарининг йиғиндисига тенг бўлади:



91- чизма.

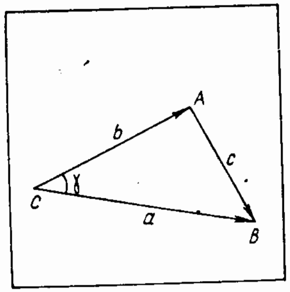
$$\vec{l}\left(\frac{14}{15}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}\right).$$

700. 1) 18; 2) 52. **701.** $2\vec{a}^2 - 3\ (\vec{a}\,\vec{b}) + 4\ |\vec{c}|^2 = 234$. **702.** $x = -\frac{13}{3}$. **704.** $\rho\ (Oz, M) = 5$. **705.** $\vec{p}\left(\pm\frac{5}{\sqrt{26}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$. **706.** Исботда 91- чизмадан фойдаланамиз. $a \perp b$, $a \perp c$, $b \cap c = 0$, a, $b \subset \Pi$ берилган. $a \perp \forall d \subset \Pi$ ни исбот қилиш керак. Исбот. a тўғри чизиқда турли A_0, A нуқталарни, $b \ni B \neq 0$, $c \in C \neq 0$ нуқталарни танлаймиз, $\overrightarrow{A_0A}$ вектор a нинг йўналтирувчи вектори, шунингдек, $\overrightarrow{OB}$ b нинг, $\overrightarrow{OC}$ c нинг йўналтирувчи вектори бўлади. Танлашимизга асосан, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$ ва $\overrightarrow{OB} \nparallel \overrightarrow{OC}$ бўлганидан уларни Π даги базис деб олиш мумкин, у ҳолда Π дан олинган ихтиёрий D нуқтани O билан бирлаштириб тузилган $\overrightarrow{OD}$ векторни $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OC}$ орқали ёйилмаси ягона

$$\overrightarrow{OD} = x\,\overrightarrow{OB} + y\,\overrightarrow{OC} \tag{1}$$

кўринишда бўлади.

Бу F (1) тенгликнинг иккала томонини $\overrightarrow{A_0A}$ векторга скаляр кўпайтирсак, $(\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{A_0A}) = x\ (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{A_0A}) + y\ (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{A_0A})$ ҳосил бўлиб, тенгликнинг ўнг томонидаги скаляр кўпайтмалар теорема шартига асосан нолга тенг демак, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{A_0A}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{A_0A}$. $D \in \Pi$ нуқта ихтиёрий бўлгани учун Π дан олинган йўналтирувчи вектори $\overrightarrow{OD}$ бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ a тўғри чизиққа перпендикуляр экан. **707.** 92- чизмадан фойдаланамиз: $\triangle ABC$ да $CB = a$, $CA = b$, $\widehat{ACB} = \varphi$ берилган. $AB = c$ ни топиш керак. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\,(\vec{a}\,\vec{b}) + \vec{b}^2 = a^2 -$



92- чизма.

$-2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi+b^2=a^2-2ab\cos\varphi+b^2;$

$c\ |\vec{c}|=AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}.$

708. $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=60^\circ$. $\cos(\widehat{\vec{p},\ \vec{q}})=-\frac{20}{\sqrt{798}}$;

$\cos\ (\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\frac{1}{2}$. **709.** $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{11}}$.

710. $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **711.** $\cos\ (\widehat{\vec{a},\ \vec{i}})=\frac{1}{3}$;

$\cos\ (\widehat{\vec{a},\ \vec{j}})=\frac{2}{3}$, $\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{k}})=-\frac{2}{3}$.

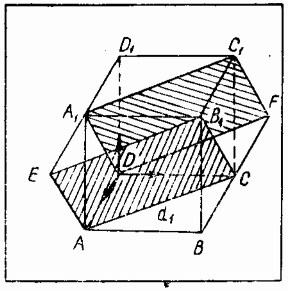
713. $|[\vec{a}\ \vec{b}]|=4$. **715.** 1) $[\vec{a}\,\vec{b}]=\vec{p_1}\ (10,\ -6,\ -2)$, $|\vec{p_1}|=\sqrt{140}$. 2) $\vec{p_2}\ (-3,\ -3,\ 3)$, $|\vec{p_2}|=3\ \sqrt{3}$. **716.** $[(\vec{a}-2\vec{b})\,(3\vec{a}-\vec{b})]=170\ \vec{i}-55\vec{j}-35\vec{k}$. **717.** Кўрсатма. $\vec{a}\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}\ (b_1,\ b_2,\ b_3)$ берилганда $\vec{a}\ \|\ \vec{b}\Rightarrow[\vec{a}\,\vec{b}]=\vec{0}$ ёки

$$\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$$

бўлиб, ундан $\vec{a}\ \|\ \vec{b}\Rightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ эканлиги келиб чиқади. **718.** Кўрсатма. $\vec{AB}\ \|\ \vec{AC}$ экани кўрсатилади. **719.** $q_1=30$, $q_2=51$. **720.** $\alpha=-6$, $\beta=-\frac{2}{3}$ бўлганда. **721.** а) $S_1=|[\vec{u}\ \vec{v}]|=\sqrt{26}$ (квадрат бирлик), б) $S_2=|[\vec{a}\ \vec{b}]|=\sqrt{131}$ (квадрат бирлик). **722.** $S_{ABC}=\frac{\sqrt{549}}{2}$ (квадрат бирлик), $\rho\ (A,\ BC)=\sqrt{\frac{549}{41}}$ (узунлик, бирлиги). **724.** Кўрсатма. $[\vec{a}\ \vec{b}]+[\vec{b}\ \vec{c}]+[\vec{c}\ \vec{a}]=\vec{0}$ муносабатнинг иккала томонини $\vec{a}$ векторга скаляр кўпайтиринг. **725.** а) $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=-19$; б) $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=40$.

726. $c=-1$. **728.** $\vec{AB}\ \vec{AC}\ \vec{AD}=0$ эканини кўрсатиш лозим. **729.** 1) $V==110$ (куб бирлик); 2) $V=11$ (куб бирлик). **730.** $V=12$ (куб бирлик); $h=\frac{3\ \sqrt{26}}{13}$ (узунлик бирлиги). **731.** $V=\frac{1}{6}$ (куб бирлик); $OH=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (узунлик бирлиги). **732.** $V=\frac{8}{3}$ (куб бирлик); $h=2$ (узунлик бирлиги).

733. Кўрсатма. Параллелепипеднинг танланган учини координаталар боши сифатида олинг ва унинг шу учдан чиққан қирраларини координата векторлари деб олинг. **734.** $\frac{1}{3}$. 733-масаладаги кўрсатмадан фойдаланинг. **735.** $\rho\ (AC,\ DA)$ ни излаймиз. Куб қирраси $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ бўлганидан $(D,\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ системада (93-чизма). $\vec{DA}\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ 0,\ 0\right)$, $\vec{AC}=\vec{DF}=\vec{DC}+\vec{CF}$, $\vec{AC}\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{a}{\sqrt{3}},\ 0\right)$, $\vec{DA_1}\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ 0,\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. Изланаётган масофа $DACFA_1\,EB_1C_1$ параллелепипеднинг $(EACB_1)$ ва (A_1DFC_1) ёқлари орасидаги масофага тенг ёки параллелепипеднинг (DFC_1A_1) ёғига туширилган баландлиги узунлигидан иборат



93- чизма.

$$V_{DACFA_1EB_1C_1}=\begin{vmatrix}\frac{a}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ -\frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{a}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}=\frac{a^3}{3\sqrt{3}};$$

$$S_{DFCA_1}=|[\vec{DF}\cdot\vec{DA_1}]|=\frac{a^2}{\sqrt{3}};$$

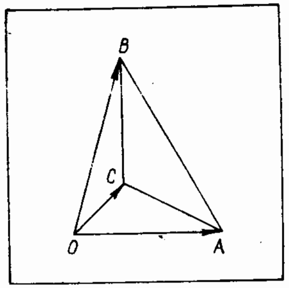
$$\rho=(AC,\ DA_1)=\frac{a^3}{3\sqrt{3}}:\frac{a^2}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}.$$

736. $\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'-3,\\ z=z'+5\end{cases}$ $Б$ да берилган M (1, 1, 3) нуқтанинг $Б'$ даги координаталари $x'=0$, $y'=4$, $z'=-2$, $M\,(0,\ 4,\ -2)$ бўлади. **737.** $0'\ (-2,\ 4,\ -8)$. **738.** Координаталарни алмаштириш формулалари $\begin{cases}x=x',\\ y=-3x'+5y',\\ z=-x'+y'+3z'\end{cases}$ кўринишда бўлади. M нуқтанинг $Б'$ даги координаталари

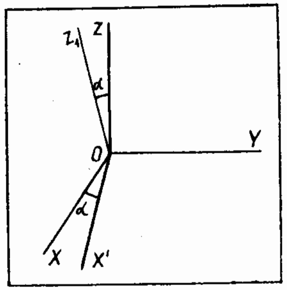
$$\begin{cases}x'=3,\\ -3x'+5y'=1,\\ -x'+y'+3z'=-4\end{cases}$$

системанинг ечимидан иборат: $M\,(3,\ 2,\ -1)_{Б'}$.

739. $\vec{e_1}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$, $\vec{e_2}\left(-\frac{3}{4},\right.$



94- чизма.



95- чизма.

$-\frac{1}{4}, \ 1\Big), \ \vec{e}_2\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$. **740.** Янги координаталар боши ва координаталар векторларининг $Б = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ даги координаталарини топамиз (94- чизма):

$\vec{OA} = \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \ O'(1, 0, 0), \ \vec{e}_2 \ (0, 1, 0), \vec{e}_3 \ (0, 0, 1),$

$\vec{e}\,'_1 = \vec{AO} = -\vec{OA} = -\vec{e}_1, \ \vec{e}\,'_1 \ (-1, 0, 0);$

$\vec{e}\,'_2 = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \ \vec{e}\,'_2 \ (-1, 1, 0):$

$\vec{e}\,'_3 = \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \ \vec{e}\,'_3 \ (-1, 0, 1).$

Демак, координаталарни алмаштириш формулалари:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + a = -x' - y' - z' + 1,$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + b = y',$$
$$z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c = z'.$$

741. $O'(-4, 0, 1), \ \vec{e}\,'_1 \ (1, 5, 0), \ \vec{e}\,'_2 \ (-2, -1, 0), \ \vec{e}\,'_3 \ (3, -1, 1).$

742. $\begin{cases} x = -x' + 2y' + 5, \\ y = x' - y', \\ z = 5z' - 2. \end{cases} \qquad M\,(0, 4, 18)_Б.$

743. $Б'$ да $A\,(-2, 6, -7), \ B\,(0, 0, -1).$

744. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-x' + y' - z' + 1), \\ y = z', \\ z = \frac{1}{2}(-x' - y' - z' + 1). \end{cases}$

745. Кўрсатма. 95- чизмадан фойдаланамиз:

$$\alpha_1 = (\widehat{Ox, Ox'}) = \alpha; \ \alpha_2 = (\widehat{Ox, Oy}) = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_3 = (\widehat{Ox, Oz'}) = \frac{3\pi}{2} + \alpha, \ \beta_1 = (\widehat{Qy, Ox'}) = \frac{\pi}{2},$$

$$\beta_2 = (\widehat{Oy, Oy'}) = 0, \ \ \beta_3 = (\widehat{Oy, Oz'}) = \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma_1 = (\widehat{Oz, Ox'}) = \frac{\pi}{2} + \alpha, \ \ \gamma_2 = (\widehat{Oz, Oy'}) = \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma_3 = (\widehat{Oz, Oz'}) = \alpha, \ \ O = O' \ (0, 0, 0).$$

У ҳолда алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади:

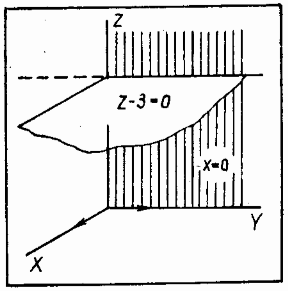
$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + a = x'\cos\alpha + z'\sin\alpha,$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + b = y',$$
$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + c = -x'\sin\alpha + z'\cos\alpha.$$

M нуқтанинг $Б$ репердаги координаталари $M\,(-1, 1, -1)$ бўлади.

746. $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{2}y' + z' \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x' = \sqrt{2}\,x, \\ y' = \sqrt{2}\,y, \\ z' = -x - y + z. \end{cases}$

747. $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \\ z = z'. \end{cases}$

748. $x = 0$ (yOz) координаталар текислиги, $y = 0$ (xOz) текислик, $z = 0$ эса xOy координаталар текислигидир. **749.** 1) $x + 5 = 0$ тенгламани қаралик, равшанки, абсциссаси -5 га тенг бўлган фазодаги барча нуқталар тўплами шу тенгламани қаноатлантиради, бундай тўплам yOz га параллел бўлиб, Ox ни $(-5, 0, 0)$ да кесиб ўтувчи текисликдан иборат бўлади. $x > -5$ тенгсизлик $x = -5$ текислик билан чегараланган ва O нуқтани ўз ичига олган очиқ ярим фазо, $x < -5$ эса O ни ўз ичига олмаган очиқ ярим фазони аниқлайди; 2) Oy дан икки бирлик кесиб, xOz га параллел бўлиб ўтган текислик; 3) 96- чизмага қаранг. $z - 3 = 0$ Oz дан уч бирлик кесиб, xOy га параллел бўлиб ўтган текислик, $x = 0$ эса yOz текислиги, улардан тузилган $\begin{cases} z - 3 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ система иккала текисликнинг кесишиш чизиғини билдиради: 4) тенгламада барча ҳадлар мусбат, ўзгарувчиларнинг бу $x^2 + y^2 + 3z^2 + 5$ ифодани нолга айлантирувчи қийматлари мавжуд эмас, фигура бўш тўплам. **750.** 1) xOy координаталар текислиги; 2) yOz га параллел, Ox дан тўрт бирлик кесма ажратувчи текислик: 3) бўш тўплам; 4) xOz га параллел; Oy дан a бирлик кесма ажратувчи текислик; 5) Oy ўқдаги нуқталар тўплами; 6) йўналтирувчиси Oz ўққа параллел бўлиб, xOy текисликда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсдаги нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами



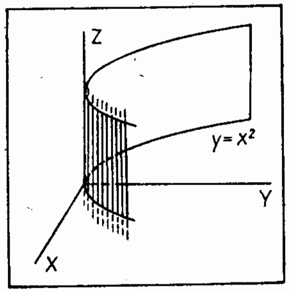
96- чизма.

(цилиндрик сирт); 7) йўналтирувчиси Oz ўққа параллел ва xOy текисликда $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ айланадаги нуқтадан ўтувчи гўғри чизиқлар тўплами; 8) йўналтирувчиси Oz ўққа параллел ва xOy текисликда $x^2-y^2=4$ гиперболадаги нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами; 9) Oy координаталар текислиги билан чегараланган Ox ўқнинг мусбат қисмини ўз ичига олган очиқ ярим фазо;

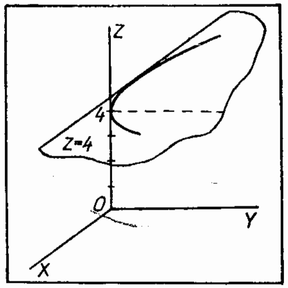
10) а) $xy>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ y>0; \end{cases}$ (1)

б) $xy>0 \Rightarrow \begin{cases} x<0, \\ y<0. \end{cases}$ (2)

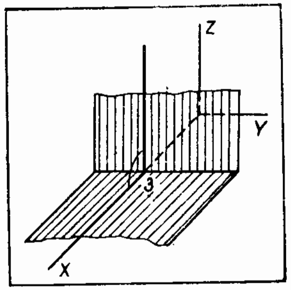
(1) система yOz ва xOz координата текисликлари билан чегараланган ва V октантдаги нуқталар тўплами; 2) эса III ва VII октантдаги нуқталар тўплами: II) $z=3$ текислик билан чегараланган Oz ўқнинг $z>3$ дан юқори қисмини ўз ичига олган очиқ ярим фазо; 12) 10) - га ўхшаш мулоҳаза юритинг. **752.** 1) $x^2-y=0$ ни $y=x^2$ деб олсак, xOy текислигида ётган $y=x^2$ параболадаги нуқталарнинг ҳар биридан ўтиб, Oz ўққа паралел бўлган тўғри чизиқлар тўпламидир (97- чизма);



97- чизма.



98- чизма.



99- чизма.

2) $\begin{cases} x^2-y=0, \\ z=4 \end{cases}$ учи Oz ўқдаги (0, 0, 4) нуқтада жойлашган ҳамда $z=4$ текисликда ётувчи парабола (98- чизма); 3) $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ тенгсизлик $x^2+y^2+z^2=4$ сфера билан чегараланган шарни ифодалайди; 4) $\begin{cases} x>3, \\ z>0; \end{cases}$ бу система $x>3$ ярим фазо билан $z>0$ ярим фазоларнинг кесишмасини аниқлайди (99- чизма). **753.** 752-масалага қаранг. 2) $A(2, 0, 0)$, $A_1(-2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $B_1(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 2)$, $C_1(0, 0, -2)$. **754.** 1) Фақат $x=0$, $y=0$ бўлгандагина $x^2+y^2=0$ бўлади, демак z ихтиёрий бўлгани учун берилган тенглама Oz ўқдаги нуқталар тўпламини аниқлайди; 2) I октантдаги нуқталар тўплами.

VI боб

756. 1) $4x+8y+3z+1=0$,

2) $8x+4y-5z+37=0$,

3) $x+5y-3z=0$.

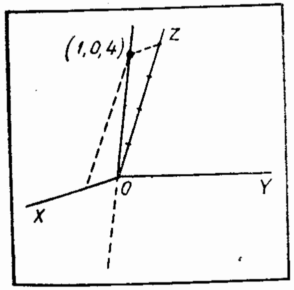
757. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$, $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \vec{e}_1$.

758. Кўрсатма. 757- масаладан фойдаланинг. а) $9y+7z-3=0$; б) $9x+5z-6=0$; с) $7x-5y-3=0$. **759.** Кўрсатма. 757- масаладан фойдаланинг: $M_1(0, 0, 0)$. а) $3y+z=0$; б) $3x+z=0$; с) $x-y=0$. **760.** $4x-z=0$ тасвири 100- чизмада кўрсатилган: xOz текислигида (0, 0, 0), (1, 0, 4) нуқталардан ўтувчи d тўғри чизиқ. **761.** 1) $11x+15y-14z-11=0$; 2) $x+y-3=0$. **762.** $ax+by=0$ тенглама билан ифодаланган текислик $a\neq 0$, $b\neq 0$ бўлганда мавжуд, чунки, агар $a=0$, $b=0$ бўлса, M_1, M_2, M_3 нуқталар Oz ўқда ётади ва масала ягона ечимга эга бўлмайди. **763.** $x+y+z-1=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

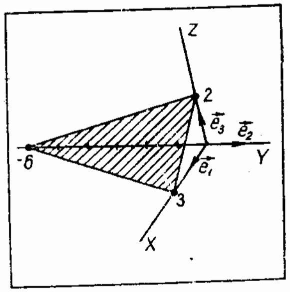
765. $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$.

766. $z=-6$ бўлганда. **768.** $x+y+z+1=0$. **769.** $14x-10y+33z-70=0$. **770.** $4x-3y-12=0$. **771.** $7x+7y-6z-50=0$.

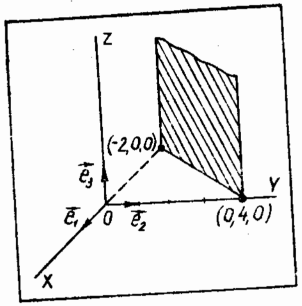
772. (101- чизма) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{2}=1$. **773.** П текислик тенгламасидаги x ва y га ихтиёрий қиймат бериб, z ни тенгламадан топилади, масалан, $x=-1$, $y=0$ бўлса, $z=1$, $M_1(-1, 0, 1)\in$ П. **774.** $y=0$,



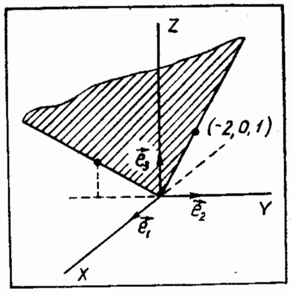
100- чизма.



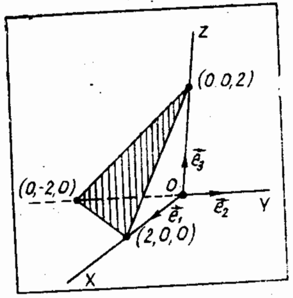
101- чизма.



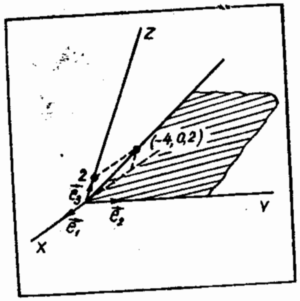
102- чизма.



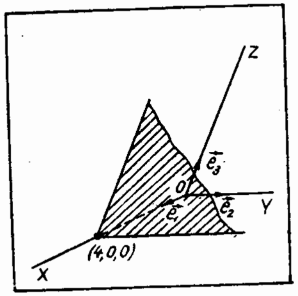
103- чизма.



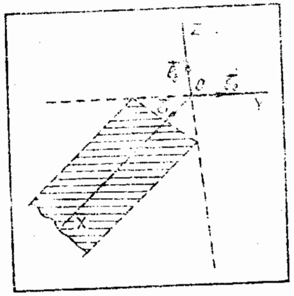
104- чизма.



105- чизма.

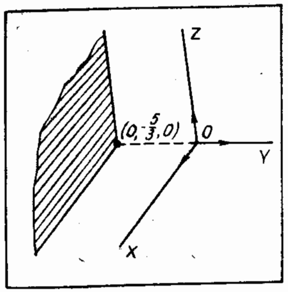


106- чизма.

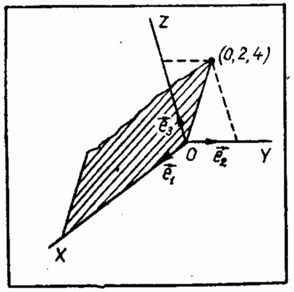


107- чизма.

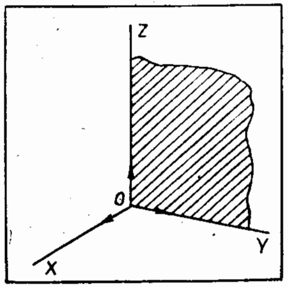
$x = 0$, $z = 1 - x - y = 1 - 3 = -2$, M_0 $(0,\ 3,\ -2) \in П$. **776.** Текисликнинг координата текисликлари билан кесишиш чизиқлари унинг излари дейилади, берилган текисликларнинг изларидан фойдаланиб, бирор октантдаги бўлакларининг тасвирларини чизамиз. 1) $2x - y + 4 = 0$ текислик Oz ўққа параллел xOy текисликни $2x - y + 4 = 0$ тўғри чизиқ бўйлаб кесади, yOz ни $y = 4$ тўғри чизиқ бўйлаб, xOz ни эса $x = -2$ тўғри чизиқ бўйлаб кесади (102- чизма); 2) $x + y + 2z = 0$ текислик координаталар бошидан ўтади. xOz текислигини $x + 2z = 0$ тўғри чизиқ бўйлаб кесади. yOz текислигини эса $y + 2z = 0$ тўғри чизиқ бўйлаб кесади. xOz ва yOz текисликлардаги изларни ясаймиз (103- чизма); 3) $x - y + z - 2 = 0$ текислик 104- чизмада тасвирланган; 4) $x + 2z = 0$ текислик Oy ўқдан ўтади. xOz текислигини бу текисликдаги $x + 2z = 0$ тўғри чизиқ бўйлаб кесади (105- чизма); 5) 106- чизмада $x - 4 = 0$ текислик тасвирланган; 6) 107- чизмада $y + z + 1 = 0$ текислик тасвирланган: 7) $3y + 5 = 0$ текислик xOz текисликка параллел ва Oy ўқдан $y = -\frac{3}{5}$ кесма кесиб ўтади (108- чизма); 8) $2y - z = 0$ текислик 109- чизмада кўрсатилган. Текислик Ox дан ўтади; 9) $x = 0$ текислик yOz нинг тенгламаси (110- чизма). **777.** Кўрсатма. $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{e}_3$ деб олиб, $Б = (A,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ системада параллелепипед учларининг координаталарини топинг ва AB_1D_1, BDG_1



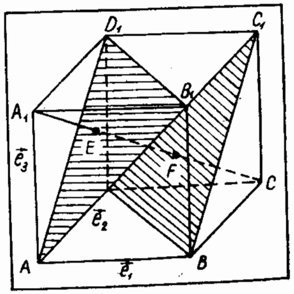
108- чизма.



109- чизма.



110- чизма.



111- чизма.

текисликларнинг тенгламаларини тузинг. A_1C диагонални $\lambda = \frac{1}{2}$ нисбатда бўлувчи E нуқтанинг, $\lambda = 2$ нисбатда бўлувчи F нуқтанинг координаталарини топинг ва $E \in AB_1D_1$, $F \in BDC_1$ эканини кўрсатинг (111-чизма). **778.** $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$. **779.** $x-5z-6=0$. **780.** 1) $x+3=0$; 2) $y-1=0$; 3) $z-6=0$. **781.** $4x+7y+z-9=0$, $(\vec{n} = [\vec{l}\,\vec{m}]$ — нормал вектор бўлади. **784.** 776-масаладан фойдаланинг. **785.** Изланаётган текисликнинг нормал вектори берилган текисликлар нормал векторларига перпендикуляр бўлгани учун уларнинг вектор кўпайтмасидан чиққан векторга коллинеар бўлади, шунинг учун нормал векторни $\vec{n} = [\vec{n}_1\vec{n}_2]$ кўринишда излаймиз: $\vec{n}(-7, 1, 5)$. Изланаётган текислик $7x-y-5z=0$ кўринишда бўлади. **786.** $M(2, -3, 6)$ берилган сферада ётади. Шунинг учун изланган уринма текисликнинг нормал векторини $\vec{n} = \overrightarrow{OM_0}$ вектор деб олиш мумкин. Изланаётган тенглама $2(x-2)-3(y+3)+6(z-6)=0$ ёки $2x-3y+6z-49=0$ кўринишда бўлади. **787.** Фазода берилган икки A ва B нуқтадан баравар узоқликда ётган нуқталар тўплами AB кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр қилиб ўтказилган текислик бўлганидан, изланган текисликнинг бошланғич нуқтаси AB кесманинг ўртаси, йўналтирувчи вектори эса $\overrightarrow{AB}$ векторнинг ўзи бўлади.

$$x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = -\frac{1}{2},\ z_0 = \frac{5}{2};\ M_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right),\ \vec{n} = \overrightarrow{AB}(1, 5, 3)$$

$1\left(x-\frac{1}{2}\right)+5\left(y+\frac{1}{2}\right)+3\left(z-\frac{5}{2}\right)=0$ ёки изланган текислик $2x+10y+6z-11=0$ кўринишда бўлади. **788.** Тетраэдр учлари берилган текисликнинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталаридан иборат ва координаталар бошида:

$$A(9, 0, 0),\quad B(0, 6, 0),\ C(0, 0, 3),\ S(0, 0, 0).$$

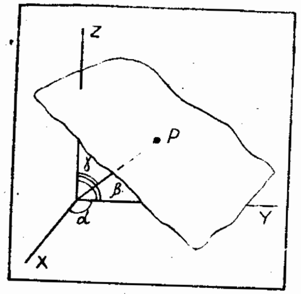
$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 9\cdot 6\cdot 3 = 27 \text{ (куб бирлик).}$$

789. $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, p_3)$ деб белгиласак, $|\vec{p}| = p$ бўлиб, $p_1 = p\cos\alpha$, $p_2 = p\cos\beta$, $p_3 = p\cos\gamma$ бўлади. $\vec{p}_0$ $\vec{p}$ вектор йўналишидаги бирлик вектор бўлса (112- чизма), $\vec{p}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ дир. $P(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{p}_0$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузамиз:

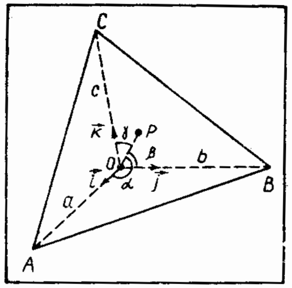
$$\cos\alpha(x-p\cos\alpha)+\cos\beta(y-p\cos\beta)+\cos\gamma(z-p\cos\gamma)=0$$

ёки

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p(\cos^2\alpha+\cos^2\beta\cos^2\gamma)=0.$$



112- чизма.



113- чизма.

$|\vec{p}_0| = 1$ бўлгани учун $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ бўлади ва изланган текислик тенгламаси $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ бўлади.

Бу тенглама П текисликнинг нормал тенгламаси дейилади. **790.** 113-чизмада кўрсатилган Б$=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперда ABC текисликнинг тенгламасини тузиб оламиз: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Агар бу тенглама иккала томонини h га кўпайтирсак,

$$\frac{h}{a}\ x+\frac{h}{b}\ y+\frac{h}{c}\ z-h=0$$

ҳосил бўлади. Берилишига кўра

$$\frac{h}{a}=\cos\alpha,\qquad \frac{h}{b}=\cos\beta,\qquad \frac{h}{c}=\cos\gamma,\qquad h=OP$$

бўлгани учун (олдинги 789- масала ечимига қаранг)

$$\frac{h^2}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

ва

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ўринли бўлади. **791.** Берилган текислик билан чегараланган, координаталар бошини ўз ичига олган ярим фазо Φ_1 $3x+y+2z+3 \geqslant 0$ тенгсизлик билан ифодаланади, у ҳолда берилган нуқталар учун $3x+y+2z+3$ ифоданинг ишорасини текширамиз:

M_1 учун $3\cdot1+0+2+3>0 \Rightarrow M_1 \in \Phi_1$
M_2 учун $3\cdot3-2+2\cdot5+3>0 \Rightarrow M_2 \in \Phi_1$,
M_3 учун $-12+3<0 \Rightarrow M_3 \notin \Phi_1$,
M_4 учун $-6+5+8+3>0 \Rightarrow M_4 \in \Phi_1$.

792. AB томон $y=0$ текислик билан кесишади, чунки A ва B нуқталарнинг ординаталари турли ишорали.

BC томон $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ координата текисликлари билан кесишади. AC томон эса $x = 0$ текислик билан кесишади. **793.** $x - y + z + 1 \geqslant 0$. **794.** 1) $r = R = 2$ берилган текисликлар тўғри чизиқ бўйлаб кесишади; 2) кесишади; 3) параллел; 4) кесишади. **795.** 1) $2x - y - z - 3 = 0$; 2) $x - y + 3z = 0$. **796.** $4x + 2y - 3z = 0$. **798.** $20x + 19y - 5z + 41 = 0$. **799.** $r = R = 3$ кесишади, кесишган нуқта M_0 (2, 1, 1). **800.** Берилган текисликлар ягона нуқтада кесишиши учун берилган тенгламалардаги номаълумлар коэффициентларидан тузилган матрица ранги учга тенг бўлиши керак, бу ҳолат

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0, \ \lambda \neq -3$$

бўлганда ўринли бўлади. **801.** $39x - 29y - 7z = 0$. **802.** $r = 2$, $R = 3$ бўлгани учун текисликлар умумий нуқтага эса эмас, лекин асосий матрицанинг ҳар қандай икки йўли элементлари пропорционал эмас, демак, берилган текисликлар иккитасининг кесишиш чизиғига учинчиси параллел. **803.** $4y - 3z - 3 = 0$. **804.** $r = R = 2$. **805.** (1, 1, 1). **806.** Йўқ. **807.** Кўрсатма. λ ва μ га бирор қиймат бериб топилади. Масалан, $\lambda = 1$, $\mu = 2$ бўлса, $x + y + z + 1 + 2x + 4y + 6z - 2 = 0$ ёки $3x + 5y + 7z - 1 = 0$ текислик берилган дастага тегишли. **808.** 1) Агар дастадан олинаётган текислик координаталар бошидан ўтса, (0, 0, 0) нуқтанинг координаталари даста тенгламасини қаноатлантиради. унга мос келган λ ва μ орасидаги боғланишни топамиз: $\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$, у ҳолда изланаётган текислик учун даста тенгламаси $\lambda (x + y + z - 1) + \lambda (x + 2y + 3z - 1) = 0$ кўринишида бўлади, $\lambda \neq 0$ бўлгани учун бу тенгламадан қуйидагига эга бўламиз: $2x + 3y + 4z = 0$. бу тенглама изланган текисликнинг тенгламаси бўлади. 2) $x + 2y + 3z - 1 = 0$; 3) $2x + 31y - 9z + 13 = 0$. **809.** Изланган текислик $\lambda (5x - 2y - 4z + 8) + \mu (x + 4y - 2z - 4) = 0$ (1) тенглама билан аниқланувчи дастага тегишли бўлганидан унинг тенгламасини дастадан олинган ихтиёрий текислик тенгламаси кўринишида ёзиб оламиз:

$$(1) \Rightarrow (5\lambda - \mu)\, x - (-2\lambda + 4\mu)\, y + (-4\lambda - 2\mu)\, z + 8\lambda - 4\mu = 0;$$

изланаётган текислик $2x - y + z - 2 = 0$ текисликка перпендикуляр бўлгани учун уларнинг нормал векторлари ўзаро перпендикуляр бўлади ва $2(5\lambda - \mu) - (-2\lambda + 4\mu) + (-4\lambda - 2\mu) = 0$ тенгликка эга бўламиз ёки бундан λ ва μ лар орасидаги $\mu = 2\lambda$ боғланиш келиб чиқади, у ҳолда изланаётган текислик тенгламасини топиш учун бу боғланишни (1) га қўйиб, $\lambda (5x - 2y - 4z + 8) + 2\lambda (x + 4y - 2z - 4) = 0$ га эга бўламиз, $\lambda \neq 0$ бўлгани учун бу тенгламадан $7x + 6y - 8z = 0$ изланган текислик тенгламаси ҳосил бўлади. **810.** $\lambda y - \mu z = 0$. **811.** Кўрсатма. Учала текислик учун $r = R - 2$ эканини кўрсатиш мумкин

812. 1) Изланаётган текислик $2x - y + z + \lambda = 0$ дастага тегишли, у M_0 $(-2, 3, 1)$ дан ўтса, $-4 - 3 + 1 + \lambda = 0$, $\lambda = 6$, демак, $2x - y + z + 6 = 0$ тенглама изланаётган текислик тенгламаси бўлади; 2) $2x - y - 3z + 7 = 0$. **813.** Кўрсатма. Боғламнинг маркази топилади: M_0 $(1, -1, 2)$. M_0 дан ўтувчи ихтиёрий текислик тенгламасини топсак, $A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 2) = 0$ бўлади. $\vec{n}\,(A, B, C) = \vec{j}\,(0, 1, 0)$ бўлгани учун $A = C = 0$, $B = 1$ деб олиш мумкин, изланган текислик тенгламаси $y + 1 = 0$ бўлади. **814.** Кўрсатма. 1) $M_0\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ берилган текисликлар кесишган нуқтаси топилади. Oy ўқдан ўтувчи дастанинг тенгламасини тузамиз, у xOy ва yOz координата текисликларининг кесишишидан ҳосил бўлади, деб қаралса, унинг тенгламаси $\lambda x + \mu z = 0$ кўринишида бўлади. Изланаётган текислик учун λ ва μ орасидаги боғланишни топсак,

$$\lambda \cdot \frac{3}{2} + \mu = 0,$$

$$\mu = -\frac{3}{2}\lambda$$

бўлади. Текислик тенгламаси эса

$$\lambda x - \frac{3\lambda}{2} z = 0, \ \lambda \neq 0$$

бўлгани учун

$$2x - 3z = 0$$

кўринишида бўлади; 2) Масалани ечишда маркази боғлам тенгламасидан фойдаланиш мумкин, унинг тенгламаси $\alpha (x - y) + \beta (x + y - 2z - 1) + \gamma (2x + z - 4) = 0$ бўлиб, бу боғламдаги ихтиёрий текислик тенгламаси $(\alpha + \beta + 2\gamma)\, x + (-\alpha + \beta)\, y + (-2\beta + \gamma)\, z - \beta - 4\gamma = 0$ бўлади. Изланаётган текислик Oy ўқдан ўтгани учун унинг тенгламасида озод ҳад ва ўзгарувчи y нинг коэффициенти нолга тенг бўлади.

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 0, \\ -\beta - 4\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta, \\ \gamma = -\dfrac{1}{4}\beta \end{cases}$$

боғланишларга эга бўламиз, уларни боғлам тенгламасига қўйиб, изланган текислик тенгламасини топамиз:

$$\beta (x - y) + \beta (x + y) - (2z - 1) - \frac{1}{4}\beta (2x + z - 4) = 0, \quad \beta \neq 0$$

бўлгани учун $4x - 4y + 4x + 4y - 8z - 4 - 2x - z + 4 = 0$ ёки $2x - 3z = 0$. **815.** $\gamma \neq 3$ бўлганда. **816.** $53x - 43y - 9z = 0$. Кўрсатма. 814-масаладаги 2-ҳолдан фойдаланинг. **817.** $\rho\,(M_0, П_1) = 3$,

$\rho(M_0, \Pi_2) = \frac{16}{7}$, $\rho(M_0, \Pi_3) = \frac{11}{3}$. **818.** $\rho(\Pi, M_0) = 7$. **819.** 1) $\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{37\sqrt{30}}{30}$; 2) $\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{1}{14}$. **820.** Изланаётган текисликдан олинган ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқта учун $\rho(M, \Pi) = \pm 4$ бўлади. У ҳолда

$$\frac{x-4y-8z+5}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}} = \pm 4$$

га эга бўламиз ёки

$$x+4y-8z+5 = \pm 36,$$

демак, ечимлар иккита бўлиб, уларнинг тенгламалари

$$x-4y-8z-31=0,$$
$$x-4y-8z+41=0$$

бўлади. **821.** $6x-3y+2z-35=0$ ва $6x-3y+2z+7=0$. **823.** 1) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 2) $\cos\varphi = -\frac{10\sqrt{722}}{371}$.

824. $2y+(6+\sqrt{42})z=0$, $2y+(6-\sqrt{42})z=0$. Кўрсатма. Изланаётган текислик тенгламасини $By+Cz=0$ кўринишда танлаймиз,

$$\frac{-2B+3C}{\sqrt{B^2+C^2}\cdot\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ўринли бўлишидан, B ва C орасидаги боғланиш топилади:

$$C_1 = \frac{6+\sqrt{42}}{2}B_1,$$

$$C_2 = \frac{6-\sqrt{42}}{2}B_2.$$

825. $x-z=0$, $x+20y+7z=0$. Кўрсатма. Текислик тенгламаси $Ax+By+Cz=0$ кўринишда изланиб, A, B, C лар орасидаги боғланиш топилади:

$$\begin{cases} 5A-2B+5C=0 \\ \dfrac{A-4B-8C}{9\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = C_1,\ B_1 = 0, \\ A_2 = \dfrac{C_2}{7},\ B_2 = \dfrac{20}{7}C_2. \end{cases}$$

827. Кўрсатма. u_1 дан нуқта топиш учун параметр t га ихтиёрий қиймат берамиз ($t \in R$), масалан, $t=1$ да $(3, -3, 5) \in u_1$ ва ҳоказо. u_2 дан нуқта излаганда $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ пропорцияни қаноатлантирувчи x, y, z ларнинг қийматини топиш керак, масалан, $x=3$, $y=3$, $z=-2$ ни олиш мумкин, $(3, 3, -2) \in u_1$ ва ҳоказо. u_3 дан нуқта излаш берилган системанинг биропта ечимини топиш демакдир.

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \text{да } z=0 \text{ бўлса, } \begin{cases} x+y-1, \\ 2x+y=0 \end{cases} \begin{matrix} x=1, \\ y=-2; \end{matrix}$$

демак, $(1, -2, 0)$ ва ҳоказо. **828.** $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2}$. **829.** Изланаётган u тўғри чизиқ Oz га параллел бўлса, $\vec{k}$ векторни u нинг йўналтирувчи вектори деб олиш мумкин, у ҳолда $A(0, 1, 0)$ дан ўтиб, $\vec{k}(0, 0, 1)$ га параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаларини тузамиз:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=1, \\ z=t. \end{cases}$$

830. Ox: $\begin{cases} x=t, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases}$ Oy: $\begin{cases} x=0, \\ y=t, \\ z=0; \end{cases}$ Oz: $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=t. \end{cases}$

831. 1) $M(3, -1, 0)$; 2) $M_1(7, 7, 4)$; 3) $\begin{cases} 2x-y-7=0, \\ y-2z+1=0. \end{cases}$

832. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{-3}$. **833.** $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+6}{11}$.

834. $\begin{cases} x=1-t, \\ y=t, \\ z=0. \end{cases}$ **835.** $\begin{cases} 2x-3y+z+5=0, \\ z=0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-y+z+5=0, \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3y+z+5=0 \\ x=0. \end{cases}$

836. $\begin{cases} 2x-y+z+1=0, \\ x-2y-4z+1=0. \end{cases}$

837. а) Берилган тўғри чизиқ Ox ўқ билан кесишиши учун унинг тенгламаларида иштирок этган ҳар бир тенглама билан ифодаланувчи текисликлар Ox ўқ билан кесишиши ва бу нуқталар устма- уст тушиши лозим, бунинг учун $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $y=z=0$ бўлади, у ҳолда берилган тенгламалар системасидан $x = -\frac{D_1}{A_1}$, $y = \frac{D_2}{A_2}$ бўлиб, $\frac{D_1}{A_1} = \frac{D_2}{A_2}$ тенглик ҳосил бўлади, бу эса u тўғри чизиқ билан кесишиш шартидир б) u тўғри чизиқ Oz ўқ билан устма- уст тушиши учун берилган текисликлар Oz дан ўтади ва демак, u нинг Oz дан ўтиши учун $D_1 = C_1 = D_2 = C_2 = 0$ бўлиши зарур ва етарли; в) $u \parallel Oy$ бўлиши учун $B_1 = B_2 = 0$ бўлиши зарур ва етарли; д) $u \ni O\ (0, 0, 0)$ бўлиши учун $D_1 = D_2 = 0$ бўлиши зарур ва етарли. **838.** $u_1 \parallel Ox$, $u_2 \parallel Oz$, $u_3 \ni O\ (0, 0, 0)$, u_4 тўғри чизиқ Oz билан кесишади. **839.** $\frac{D_1}{B_1} = \frac{D_2}{B_2} = 2$ бўлгани учун берилган тўғри чизиқ Oz ўқ билан кесишади. **840.** u_1 тўғри чизиқнинг параметрик ёки каноник тенгламаларига ўтиш учун ундан бирор M_0 нуқтанинг координаталарини ва u_1 га параллел бирор векторнинг координаталарини топиб олинади. M_0 нуқта координаталарини

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

системанинг ечими сифатида излаймиз:

$$z=1 \text{ да } \begin{cases} x+2y=0, \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

ҳосил бўлади, унинг ечими $(-2, 1)$, демак, $M_0(-2, 1, 1)$ экан. Йўналтирувчи векторни берилган тўғри чизиқ тенгламаларидаги текисликлар нормал векторларининг вектор кўпайтмаси деб қараш мумкин. У ҳолда:

$\vec{u}_1=[\vec{n}_1\vec{n}_2]=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)=(-1, 1, -1)$ бўлиб, u_1 тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари

$$\frac{x+2}{-1}=y-1=\frac{z-1}{-1}$$

кўринишда бўлади, параметрик тенгламалари эса $x=-2-t$, $y=1+t$, $z=1-t$ лардан иборат. **841.** $x=1-2t$, $y=-3+3t$, $z=4+7t$. **842.** 1) Устма-уст тушади; 2) айқаш; 3) параллел; 4) айқаш: **843.** $\vec{u}_1(4, -6, -8)$, $\vec{u}_2(-6, 9, 12)$, $M_1(2, 0, -1)\in u_1$, $M_2(7, 2, 0)\in u_2$ лар берилган, $\vec{u}_1 \| \vec{u}_2 \Rightarrow u_1 \| u_2$ бўлиб, u_1 ва u_2 тўғри чизиқлар бир текисликда ётади, бу текисликнинг тенгламасини топиш учун M_1, M_2 нуқталардан бошқа яна битта нуқта топиб, уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини тузиш мумкин, масалан, u_1 тўғри чизиқ тенгламаларида $t=\frac{1}{2}$ деб олиб, $M_3(4, -3, -5)\in u_1$ топилади, M_1, M_2, M нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламасини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad 5x-22y+19z+9=0.$$

844. $3x-y+z+3=0$ (843- масаладан фойдаланинг).

845. 1) $x=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$. **846.** 1) u_1 учун $\vec{u}_1(2, 1, 4)$, $M_0(1, 7, 3)$, u_2 тўғри чизиқ учун $\vec{u}_2(3, -2, 1)$, $M_2(6, -1, -2)$ лар маълум ва $\vec{u}_1 \| \vec{u}_2$ бўлганидан фойдаланиб, уларнинг бир текисликда ётишини текширамиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix}=0$$ демак, u_1 ва u_1 тўғри чизиқлар бир текисликда ётади, кесишади. Кесишган нуқтасининг координаталари u_1 ва u_2 тўғри чизиқларнинг тенгламаларини қаноатлантиришидан фойдаланиб, унинг

координаталарини берилган тўғри чизиқларнинг умумий тенгламаларидан тузилган системанинг ечими сифатида излаймиз, яъни уларнинг умумий тенгламаларини топиб оламиз:

$$u_1: \begin{cases} 4x-2z+2=0, \\ 4y-z-1=0; \end{cases} \quad (1)$$

$$u_2: \begin{cases} x-3z-12=0, \\ y+2z+4=0. \end{cases} \quad (2)$$

(1) ва (2) лардан тузилган қуйидаги система (3, 5, — 5) ечимга эга:

$$\begin{cases} 4x-2z+2=0, \\ 4y-z-1=0, \\ x-3z-12=0, \\ y+2z+4=0. \end{cases}$$

2) ва 3) ларда берилган тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари ва бошланғич нуқталари топилади, сўнгра уларнинг бир текисликда ётиши текширилади: 2) $V_1\cap V_2=N(-3, 0, 4)$;
3) $W_1\cap W_2=K(0, 1, 2)$.

847. 1) $(\widehat{u_1, u_2})=90^\circ$; 2) $\cos\varphi=\pm\frac{98}{195}$. **848.** $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=90^\circ$.

849. $\cos\varphi_1=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $\cos\varphi_2=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$;

$\cos\varphi_3=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$. **850.** Кўрсатма. Кубнинг бир учидан чиққан қирралари координата векторлари деб олинса, унинг учлари координаталарини топиш мумкин, кубнинг диагоналлари икки учи орқали ўтувчи тўғри чизиқ сифатида қаралиб тенгламалари тузилади, тенгламалари берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар топилади. **851.** $(6, -1, 3)$. **852.** 1) u тўғри чизиқ П текислик билан кесишади; 2) $u\subset\Pi$ (тўғри чизиқ текисликда ётади). **853.** $\alpha=\frac{29}{7}$ бўлганда тўғри чизиқ текисликка параллел. **855.** $24x-11y-30z+55=0$. **856.** Изланаётган текислик $Ax+By+Cz+D=0$ бўлсин. Берилган тўғри чизиқ бу текисликда ётганидан ва бу текислик берилган текисликка перпендикуляр бўлганидан қуйидаги муносабатлар ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} A-3B+D=0, \\ 2A-B+C=0, \\ 2A+B+4C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A-3B=-D, \\ 2A-B+C=0, \\ 2A+B+4C=0; \end{matrix}$$ бу системада A, B ва C ларнинг D орқали боғланишини топамиз:

$$A=\frac{\begin{vmatrix} -D & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{5D}{13}, \quad B=\frac{6D}{13}, \quad C=-\frac{4D}{13}.$$

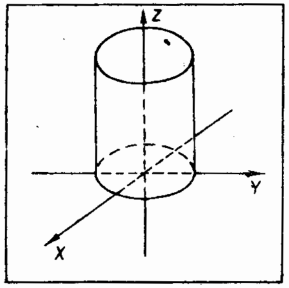
Топилганларни изланаётган текисликдаги A, B, C лар ўрнига қўйсак, $5x + 6y - 4z + 13 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. **857.** Изланаётган текислик тенгламасини $A(x - 3) + B(y + 5) + C(z - 1) = 0$ кўринишда олиш мумкин. Бу текислик берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлгани учун унинг нормал вектори тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторига параллел бўлади:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5};$$

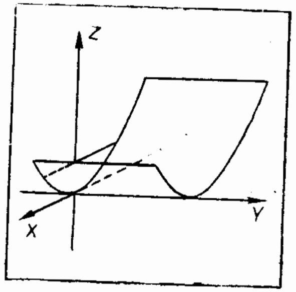
$A : B : C = 2 : 3 : 5$, демак, $2(x - 3) + 3(y + 5) + 5(z - 1) = 0$ ёки $2x + 3y + 5z + 4 = 0$ изланаётган текислик тенгламаси бўлади. **858.** *Жавоб:* 1) $\sin\varphi = \frac{5}{63}$; 2) $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

VII боб

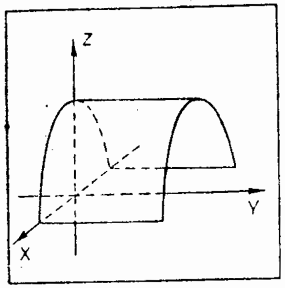
861. 1) $C(2, 3, 1)$, $r = 1$; 2) $C(-1, 3, -4)$, $r = 4$; 3) $C(6, 3, 0)$, $r = 2\sqrt{2}$; 4) $C\left(0, \frac{3}{2}; 0\right)$, $r = \frac{3}{2}$; 5) $C\left(2, -\frac{1}{2}, -1\right)$, $r = 1$; 6) $C(2, -6, 1)$, $r = 0$; 7) $C(3, 0, 0)$, $r = \sqrt{-1} = i$; 8) $C\left(\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{15}}{6}, r = \frac{4}{9}\right.$. **862.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + +z) - \sqrt{2})^2 = 25$; 2) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$; 3) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; 4) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$. **863.** $(x - 2)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 16$. **864.** $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 149$. **865.** $(x - 6)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 = 100$. **866.** $C_1(2, 3, 2)$, $r_1 = 2$; $C_2\left(2, 3, -\frac{9}{2}\right)$, $r_2 = \frac{9}{2}$. **867.** Кўрсатма. Сфера марказидан текисликкача масофани сфера радиуси билан солиштиринг. 1) Уринади; 2) кесмайди; 3) кесади. **868.** Кўрсатма. Сфера радиуси CA уринма текисликка A нуқтада перпендикуляр. 1) $2x - y + 2z - 9 = 0$; 2) $6x + 3y - 2z - 53 = 0$. **869.** $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 = 25$. **870.** 1) Ясовчилари Oz ўққа параллел, йўналтирувчиси xOy текисликда, маркази $C(0, 0, 0)$ нуқтада, радиуси 2 бўлган айланадан иборат айланма цилиндр (114- чизма); 6) ясовчилари Oy ўққа парал-



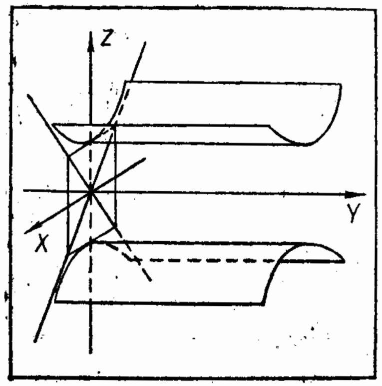
114- чизма.



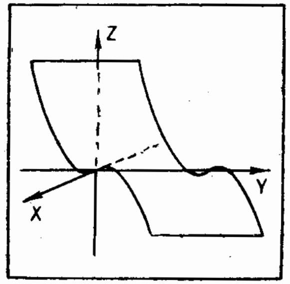
115- чизма.



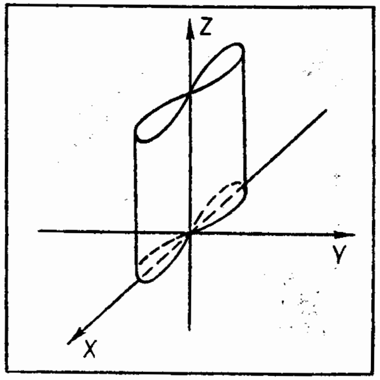
116- чизма.



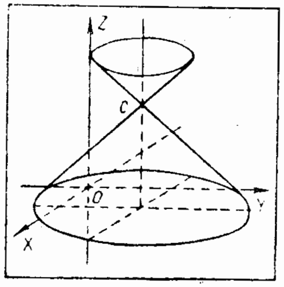
117- чизма.



118- чизма.



119- чизма.



120- чизма.

лел бўлган, йўналтирувчиси — xOz текисликда, учи координаталар бошида, ўқи Oz ўқдан иборат парабола бўлган параболик цилиндр (115-чизма). **871.** 1) Ясовчилари Ox га параллел, йўналтирувчиси yOz текисликда, учи C (0, 0, 9) нуқтада, ўқи Oz бўлган параболадан иборат параболик цилиндр (116- чизма); 9) гиперболик цилиндр (117- чизма).

872. 1) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$; 2) $(x-2)^2=2(z-1)$; 3) $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

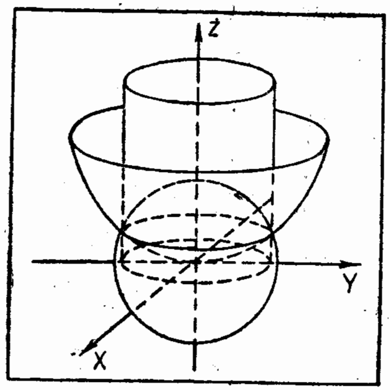
873. 3) 118- чизмага қаранг; 5) йўналтирувчиси — лемниската (119-чизма). **874.** 2) Айланма конус; 4) учи C (2, 3, 4) нуқтада, ўқи C нуқтадан ўтиб, Oz га параллел бўлган айланма конус (120- чизма). **876.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$. **877.** $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфера. Меридианлар—сферани Oz ўқдан ўтувчи текисликлар билан кесишишидан ҳосил бўлган R радиусли айланалар. Параллеллар — сферанинг Oz га перпендикуляр текисликлар билан кесишишидан ҳосил бўлган айланалар. **878.** 1) $x^2+y^2=4$ — айланма цилиндр; 2) $x^2+y^2-\frac{z^2}{1}=0$ — иккинчи тартибли конус. **879.** 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — айланма эллипсоид;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — айланма бир паллали гиперболоид;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — айланма икки паллали гиперболоид;

4) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ — айланма параболоид. **880.** 1) ва 2) $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=1$ — айланма бир паллали гиперболоид. **881.** $x^3+z^2-\frac{y^2}{4}=0$ — конус. **882.** $x^2+y^2=\arccos^2 z$—трансцендент сирт. **883.** 1) $x^2+y^2=\frac{z^4}{4}$—тўртинчи тартибли алгебраик сирт; 2) $y^2+z^2=2x$— айланма параболоид. **884.** 1) $x^2+y^2=\frac{1}{z^2}$; 2) $x^2+y^2=(1+\sqrt{1-z})^2$.

885. 1) l_1 — (0, 0, 0) нуқта, $l_2: z=4$ текисликда маркази C (0, 0, 4), радиуси $r=2$ бўлган айлана; 2) l_1 z — 3 текисликда маркази C (0, 0 3) нуқтада, радиуси $r=5$ бўлган, l_2 $z=-3$ текисликда маркази C_2 (0, 0, —3) нуқтада, радиуси $r=5$ бўлган икки айлана. **888.** 1), 2), 4) бир паллали айланма гиперболоид; 3) икки паллали гиперболоид. **891.** $x'^2+y'^2=2kz'$. Системадаги биринчи тенглама радиуси $\sqrt{3}$, маркази координаталар бошида жойлашган сферани ифода қилади, иккинчиси эса айланма параболоид, берилган система бу икки сиртнинг кесишишидан ҳосил бўлган қандайдир γ чизиқни ифода қилади. Агар берилган системадан $H(x, y, z)=0$ тенгламани ҳосил қилсак, чизиқ бу тенглама билан ифодаланган сиртга тегишли бўлиши ўз- ўзидан равшан, ҳақиқатан ҳам, биринчи тенгламадаги x^2+y^2 ўрнига $2z$ ни қўйсак, $z^2+2z=3$ ҳосил бўлади, бундан $z=1$ (айланма параболоид учун $z\geqslant 0$ бўлганидан тенгламанинг иккинчи $z=-3$ илдизини олмаймиз), демак, γ чизиқ $z=1$ текисликда ётади, $z=1$ ни берилган системадаги тенгламалардан бирига қўйсак. $x^2+y^2=2$ тенглама ҳосил бўлади, шундай қилиб γ чизиқ $x^2+y^2=2$ цилиндрда ётганини аниқладик. Бу цилиндр γ чизиқни xOy текисликка проекциялайди, γ чизиқ цилиндрнинг ясовчисига перпендикуляр бўлган $z=1$ текисликда ётганлигидан, у цилиндрнинг йўналтирувчисига конгруент бўлади (121- чизма). Демак, берилган система билан аниқланувчи γ чизиқ маркази (0, 0, 1) нуқтада, радиуси $\sqrt{2}$ бўлган айланадан иборат бўлиб, бу айлана $z=1$ текисликда ётади. Ечиш жараёни шуни кўрсатадики, γ чизиқни яна қуйидаги системаларнинг бири орқали ҳам бериш мумкин:



121- чизма.

$$\begin{cases}x^2+z^2=2,\\ z=1;\end{cases}\qquad(2)\qquad\qquad\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\ z=1;\end{cases}\qquad(3)$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=2z,\\ x^2+y^2=2;\end{cases}\qquad(4)\qquad\qquad\begin{cases}x^2+y^2=2z,\\ z=1.\end{cases}\qquad(5)$$

893. $z=3$ текисликда маркази (0, 0, 3) нуқтада, радиуси 4 бўлган айлана. **894.** $z=2$ текисликда маркази (0, 0, 2) нуқтада, радиуси 2 бўлган айлана. **895.** $z=-1$ текисликда маркази (0, 0, — 1) нуқтада, радиуси $\sqrt{8}$ бўлган айлана. **896.** Система иккита эллипсни ифодалайди, γ_1: C (0, 0, 0), $a\leqslant 4$, $b=3$ бўлиб, $z=0$ текисликда ётади; γ_2: (0, 0, 4), $a=4\sqrt{5}$, $b=3\sqrt{5}$ бўлиб, $z=4$ текисликда ётади. **897.** (1, ± 2, 0) нуқтадан ўтувчи Oz га параллел икки тўғри чизиқ. **898.** $x=1$ текисликда учи C (1, 1, 0) нуқтада, $p=\frac{1}{2}$ бўлган парабола ўқи Oz ўқнинг манфий йўналиши билан устма-уст тушади. **899.** Система икки айланани ифодалайди. γ_1: $z=2$ текисликда C_1 (0, 0, 2), $r=1$, γ_2: $z=\frac{6}{5}$ текисликда $C_2\left(0,\ 0,\ \frac{6}{5}\right)$, $r=\frac{3}{5}$. **900.** $y=1$ текисликда маркази C (0, 1, 0) нуқтада, $a=2$, $b=1$ бўлган, ҳақиқий ўқи Oz ўққа параллел, мавҳум ўқи Ox га параллел йўналган гипербола. **901.** Oz ўққа параллел бўлган тўртта чизиқ (системадаги биринчи тенглама билан берилган цилиндрнинг ясовчилари). **902.** Система иккита айланани ифодалайди, γ_1: $y = 2$ текисликда $C_1\,(0,\ 2,\ 0)$, $r = \sqrt{2}$; γ_2: $y = -2$ текисликда $C_2\,(0,\ -2,\ 0)$, $r = \sqrt{2}$. **903.** $y = 1$ текисликда маркази $C\,(0,\ 1,\ 0)$ нуқтада, радиуси 2 бўлган айлана. **904.** $y = 2$ текисликда учи $C\,(0,\ 2,\ 4)$, $p = \frac{1}{2}$, ўқи Oz нинг мусбат йўналишидан иборат бўлган парабола. **905.** $z = 0$ текисликда маркази $C\,(0,\ 0,\ 0)$ нуқтада, $r = 2$ бўлган айлана. **906.** Иккита кесишувчи тўғри чизиқ. **907.** $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$ **908.** Кўрсатма. 6) нинг ечимини топишда берилган α текислик конуснинг 5) даги ечимда ҳосил бўладиган ясовчисига параллел эканини эътиборга олиб, конус кесимлари бу ҳолда параболадан иборат эканини эсласак,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0, \\ 2y - 3z - 6 = 0 \end{cases}$$ система параболадан иборат бўлади.

Бу хулосани $O'x'y'$ координаталар текислиги α текисликдан иборат бўлувчи координата алмаштиришни бажариш билан ҳам келтириб чиқариш мумкин: 1) ва 2) кесишувчи тўғри чизиқлар; 3) иккита айлана; 4) парабола; 5) тўғри чизиқ; 6) парабола:

$$\begin{cases} x'^2 = \frac{8}{\sqrt{13}}\ y', \\ z' = 0 \end{cases}$$ бўлиб, $\vec{e'}_1\,(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e'}_2\left(0,\ \frac{3}{\sqrt{13}},\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\vec{e'}_3\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{13}},\ -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $0'\left(0,\ \frac{3}{2},\ -1\right)$. **909.** Маркази $(1,\ -1,\ -2)$ нуқтада бўлган гипербола. **910.** $x^2 + + 2y^2 - 4x = 0,\ z = 0$ эллипс. **911.** 1) $x^2 - 3z^2 = y$; 2) $\frac{y^2}{4} + z^2 = 2x$. **912.** Айланма параболоид. **913.** $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ y = a \end{cases}$ тўғри чизиқ Oz ўқ атрофида айлантирилиши натижасида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ бир паллали айланма гиперболоид ҳосил бўлади. **914.** $\frac{x}{4} + y^2 - z^2 = 1$. $l_1,\ l_2,\ l_3$ тўғри чизиқларни белгилаймиз, $l_1 \in A$ нуқтани олиб, ундан $l_1,\ l_2$ ва l_3 тўғри чизиқларни кесувчи тўғри чизиқ ўтказамиз. Бунинг учун A ва l_2 орқали α текислик ўтказиб, $\alpha \cap l_3 = B$ нуқтани топамиз. AB тўғри чизиқ берилган учала тўғри чизиқни кесади (маълумки, l_1 тўғри чизиқнинг, чекли сондаги айрим нуқталаридан бошқа барча нуқталарини A нуқта деб олиш мумкин). $A\,(x_0,\ y_0,\ z_0) \in l_1$ ёки

$$\frac{x_0}{2} = \frac{y_0 - 1}{0} = \frac{z_0}{-1}\ (*) \Rightarrow y_0 = 1,\ 2z_0 = -x_0;$$

яъни $A\left(x_0,\ 1,\ -\frac{x_0}{2}\right)$; α: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ x_0-2 & 1 & -\frac{x_0}{2} \end{vmatrix} = 0$, $B\left(\frac{4}{x_0},\ -1,\ \frac{2}{x_0}\right)$.

AB ясовчи тўғри чизиқ тенгламалари:

$$\underbrace{\frac{x - x_0}{x_0 - \frac{4}{x_0}}}_{\text{I}} = \underbrace{\frac{y - 1}{2}}_{\text{II}} = \underbrace{\frac{z + \frac{x_0}{2}}{-\frac{x_0}{2} - \frac{2}{x_0}}}_{\text{III}}\quad (**)$$

Учта x_0, y_0, z_0 номаълумли тўртта тенглик (*), (**) ҳосил бўлади. Ечиш осон бўлсин учун (**) да I ни II га ва II ни III га тенгласак: 1) $x_0^2\,(y + 1) - 2xx_0 - 4\,(y - 1) = 0$; 2) $x_0^2\,(y + 1) + 4x_0z + 4\,(y - 1) = 0$ тенгламалар ҳосил бўлади. 1) дан 2) ни айириб, қуйидагини топамиз: $x_0 = \frac{4\,(1 - y)}{x + 2z}$. Топилган x ни 1), 2) га қўйиб, ёки уларнинг йиғиндисига қўйиб, $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$ топилади. **915.** $\frac{x^2}{4} - y^2 = z$. l_1: $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = t, \\ z = 1 + 2t; \end{cases}$ $\vec{u}_1\,(2,\ 1,\ 2)$; l_2: $\begin{cases} x = -2t, \\ y = 1 - t, \\ z = -1 + 2t; \end{cases}$ $\vec{u}_2\,(-2,\ -1,\ 2)$; $A_1 = l_1 \cap xOy$, $A_2 = l_2 \cap xOy$ ларни топамиз: $A_1\left(1,\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$, $A_1\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$. Бу нуқталарни бошланғич нуқталар деб олсак, нуқталар ҳаракатланадиган нурлар учун $t \leqslant 0$, $t_2 \leqslant 0$ ва тезликлар тенг бўлганидан, $t_2 = -t$. У ҳолда

$$l_1: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -\frac{1}{2} + t, \\ z = 2t; \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = \frac{1}{2} - t_2, \\ z = 2t_2; \end{cases} \qquad \text{ёки} \quad \begin{cases} x = -1 + 2t. \\ y = \frac{1}{2} + t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

Агар $A \in l_A$, $B \in l_2$ бўлса, AB тенгламаси $\frac{x - 1 - 2t}{2} = \frac{y + \frac{1}{2} - t}{-1} =$

$= \frac{z-2t}{4t}$, бу тенгламалардан t ни йўқотиб, изланган жавобни топамиз. **917.** $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4}$ ва $\frac{x-6}{9} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-8}{20}$. **918.** $\begin{cases} y+2z=0, \\ x-5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-5z=0, \\ y+4=0. \end{cases}$ **920.** $4x-12y+9z-6=0$. **921.** $x-y-2z-2=0$. **922.** $4x+5y \pm 40=0$. **923.** $x-2y-4z=0$. **924.** $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-21}{6}$ ва $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-21}{14}$. **925.** $\pm 3y - 2z + 2 = 0$, $(0, \pm 6, 10)$. **928.** 927-масаланинг якунидан фойдаланинг.

931. $\alpha_1: x-4y-2z+6=0, \quad M_1(4, 4, -3);$
$\alpha_2: x-4y+2z-6=0, \quad M_2(-4, -4, -3).$

933. 1) $3x-2y-3z-18=0$ ва $x-3z=0$ тўғри чизиқ сиртни иккита ҳақиқий нуқтада кесади; 2) ҳақиқий текисликлар ўтказиш мумкин эмас, тўғри чизиқнинг сирт билан кесишадиган ҳақиқий нуқталари мавжуд эмас; 3) $x-2y-3z-6=0$ тўғри чизиқ сиртга уринади ва у орқали сиртга фақат биргина уринма текислик ўтказиш мумкин. **934.** $6x-3y+2z-18=0$.

VIII боб

936. Йўқ, чунки $\vec{a} \notin \Pi$, $\vec{b} \notin \Pi$ бўлса, $\vec{a}+\vec{b} \notin \Pi$ бўлиши мумкин. **937.** $r=1$. **939** $r=mn$. **942.** $\vec{p}_1(1, -6. 7, 2)$, $\vec{p}_2(1, 1, 8, 7)$, $\vec{p}_3(-2, 9, -3, 3)$, $\vec{p}_4\left(-\frac{7}{2}, \frac{13}{3}, -\frac{19}{6}, -4\right)$. **944.** $\vec{x}(-2, 0, 1, -1)$.

946. а) Кўрсатма. Бу векторлар системасидан энг кўп сондаги чизиқли эркли векторларни топиб олиш керак. Бу векторлар базисни ташкил қилиб, уларнинг сони қисм фазонинг ўлчови бўлади. Масалан:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 2.$$

лекин $\vec{u}_1$ ва $\vec{u}_2$ векторларнинг координаталаридан тузилган $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицанинг ранги 2 га тенг бўлгани учун $\vec{u}_1$ ва $\vec{u}_1$ лар қисм фазонинг базислари бўлиб, унинг ўлчови 2 га тенг бўлади; б) $r=4$; в) $r=2$. **960.** а) $\dim V = \left[\frac{n}{2}\right]$; б) $\dim V = n - \left[\frac{n}{2}\right]$; в) $\dim V = 1$. **967.** $V_G = V_1' + V_2'$, $V_n = V_1' \cap V_2'$

бўлса, а) $V_G = V_3$, $(-1, 0, -2, 3)$; $(1, 2. -5, 3)$; $(3, 1, 0, 1)$. $V_n = V_1$; $(0, -2, -7, 6)$, б) $V_G = V_4$; $V_n = V_1$, $(3, 1, 12, -1)$. **974.** $(2/3, 1, 5/3, -8/3)$, $(1, 3/2, 1, -2)$ ва $(-1, -3/2, 5, -6)$. **975.** $G\left(3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$. **976.** $D(5, -1, -6, -1)$. **978.**

$$\begin{cases} x_1 = 7x_1' + 6x_2' - x_3' + 3x_4' + 4, \\ x_2 = 5x_1' - 4x_2' + x_3' - 2x_4' - 5, \\ x_3 = 3x_1' + 2x_2'. \\ x_4 = x_1' - 6. \end{cases}$$

981. а) $O'(-1, 0, 1)$, $\vec{e}_1'(-1, 2, 1)$, $\vec{e}_2'(2, 1, -3)$, $\vec{e}_3'(-1, 1, 0)$; б) йўқ; в) $O'(0, -1, 2, -1, 0)$, $\vec{e}_1'(1, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2'(1, 1, 0, 0, 0)$; $\vec{e}_3'(1, -1, 1, -1, 1)$, $\vec{e}_4' = \vec{e}_4 + \vec{e}_5$, $\vec{e}_4'(0, 0, 0, 1, 1)$, $\vec{e}_5' = \vec{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$. **984.** 1) Ётмайди; 2) ётади. **985.** $(0, 1/2, 0, 5/2)$; $(-1/5, 0, 1/5, 13/5)$; $(5, 13, -5, 0)$. **990.**

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 3t_1 - 4t_2, \\ x_2 = 2 - t_1 + t_3, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2. \end{cases}$$

$\vec{OM} = \vec{OA} + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$, бу ерда
$\vec{OA}_1(-1, 2, 0, 0)$,
$\vec{u}_1(3, -1, 1, 0)$,
$\vec{u}_2(-4, 1, 0, 1)$.

991. $\begin{cases} x_1 = 1 + t_2, \\ x_2 = t_1 + t_3, \\ x_3 = 2 + t_1, \\ x_4 = -1 + t_1 + 2t_3. \\ x_5 = t_2 + 3t_3. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + 1 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + 5 = 0. \end{cases}$

992. Кўрсатма. $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, $\vec{AM} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$, $-\infty < t_1, t_2 < \infty$, бундан

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 4t_1, \\ x_2 = -5 + 3t_1 - 2t_2, \\ x_3 = -t_1 + 3t_2, \\ x_4 = -1 + 5t_1 - 4t_2, \\ x_5 = 3 + 2t_1 + 7t_2 \end{cases}$$

бўлади. **993.** Кўрсатма. Агар текислик $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k$ нуқталарга тортилган бўлса. шу текисликнинг йўналтирувчи қисм фазоси $\vec{M_0M_1}, \ldots, \vec{M_0M_k}$ векторларга тортилган бўлади. **994.** Кўрсатма. Фараз қилайлик, n та номаълумли r та тенгламалар системаси берилган бўлиб, $n \geqslant r$ ва $\operatorname{rang}(a_{ij}) = r$ бўлсин:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1\,n}x_n = b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r.$$

Аниқлик учун

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$x_{r+1}, \ldots, x_n$ ларга ихтиёрий қийматлар бериб, r номаълумли r та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Шу сабабли $x_{r+1}, \ldots x_n$ ларни параметр қилиб олиш мумкин. Бу масалада параметр сифатида x_2, x_3, x_4 ни олсак, яъни $x_2 = t_1$, $x_3 = t_2$, $x_4 = t_3$, у ҳолда текислик қуйидаги параметрик тенгламаларга эга бўлади:

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 3t_1 - 6t_2 + 12t_3, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = t_3. \end{cases}$$

Бу жавоб ягона эмас, чунки у параметрларни қандай қилиб танлаб олишга боғлиқ.

996. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

997. Π_1 ва Π учрашмасдир. **998.** M (1, 1, 1, 1) да кесишади. **999.** Бир нуқтада кесишади. **1002.** A_2 да а) ҳа; б) йўқ. A_3 да а) ҳа, б) ҳа; A_4 да, а) ҳа, б) йўқ. **1003.** а) A' (6, 0, -2); б) B' (-1, 2, 2); в) (-4, 2, 4); г) $x_1' - 2x_3' - 6 = 0$. **1004.** Кўрсатма. Агар аффин алмаштириш $x_i' = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + b_i$ формула билан аниқланса, у ҳолда унга ассоцияланувчи вектор алмаштириш $u_i' = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}u_i$ формула билан аниқланади.

$$\begin{cases} u_1' = u_1 - 2u_2, \\ u_2' = u_1 + u_2 + u_3, \\ u_3' = 3u_2 - u_3. \end{cases}$$

1006. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_4, \\ x_2' = x_2 + x_4, \\ x_3' = x_3 + x_4, \\ x_4' = x_4. \end{cases}$ **1007.** $\begin{cases} x_1' = 4x_2 + x_2 - 1, \\ x_2' = x_1 - 2x_2 - 5, \\ x_3' = 2x_2 + 2x_3 + 1. \end{cases}$

1009. $\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 - x_1 + 1, \\ x_2' = -x_1 - x_3 - x_4 + 1, \\ x_3' = -x_1 - x_2 - x_4 + 1, \\ x_4' = -x_1 - x_2 - x_3 + 1. \end{cases}$

1012. а) Ҳа; б) ҳа; в) йўқ. **1015.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ лар чизиқли боғлиқ бўлганда. **1016.** а) 10, 11, 8; б) 21, 2; в) -5, 105. **1017.** 1) 7; 2) 11; 3) 5; 4) $\sqrt{34}$. **1018.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{2\pi}{3}$. **1019.** $\alpha_1 = \arccos 3/5$; $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_3 = \pi - \arccos\frac{4}{5}$; $\alpha_4 = \frac{\pi}{2}$. **1021.** а) Тўғри; б) ўтмас; в) ўткир; г) ўтмас.

1022. Кўрсатма. $\vec{x}$ (x_1, x_2, x_3, x_4) векторнинг координаталари сифатида қуйидаги системанинг ихтиёрий ноль эмас ечимини олиш мумкин:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_2 + x_3 + 14x_4 = 0. \end{cases}$$

1023. 1022-масаладан фойдаланинг. Мисол тариқасида:

а) (-1, 8, 5, 0); (4, -2, 4, 3);
б) (3; 0, -1, 0); (1, 0, 3, 2)

ларни олиш мумкин. 1025. Кўрсатма. $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{c}$ ларнинг Грамм матрицасининг детерминанти 0 дан фарқли эканлигини кўрсатинг (1024-масалага қаранг).

1026. E_4: а) $\sqrt{60}$; б) 5.
E_5: а) 6; б) 9.

1027. $AB = 8$, $AC = 6$, $BC = \sqrt{34}$, $AM_3 = \frac{\sqrt{70}}{2}$, $BM_2 = 4\sqrt{2}$, $CM_1 = \sqrt{19}$.

1028. Исбот қнлиш учун $\vec{AB} = \vec{DC}$ ва $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ эканлигини кўрсатиш кифоя. **1031.** $2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$. **1032.** $\left(1, -\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$. **1033.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1034.** E_n да гиперсферанинг тенгламаси $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2$ бўлиб, бу ерда a_1, a_2, ..., a_n марказнинг координаталари, r — унинг радиусидир:

$$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2+(x_4-1)^2+(x_5-6)^2=36.$$

1035. а) ва в). **1036.** Ҳа. **1037.** Ҳа. **1038.** а) Ҳаракат; б) ҳаракат; в) ҳаракат; г) ҳаракат эмас; д) ҳаракат; е) ҳаракат.

1041. а) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x-2y-2z)+1, \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+y-2z)+1, \\ z' = \frac{1}{3}(-2x-2y+z)+1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x-2y+2z)+\frac{2}{3}, \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+y+2z)+\frac{2}{3}, \\ z' = \frac{1}{3}(2x+2y+z)+\frac{2}{3}. \end{cases}$

1043. $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x+2y-2z)+2, \\ y' = \frac{1}{3}(2x-2y-z)-3, \\ z' = -\frac{1}{3}(2x+y+2z)+1. \end{cases}$

1045. $\begin{cases} u_1' = \frac{1}{2}(u_1+u_2-u_3+u_4-1), \\ u_2' = \frac{1}{2}(u_1+u_2+u_3+u_4+1), \\ u_3' = \frac{1}{2}(-u_1+u_2+u_3+u_4-1), \\ u_4' = \frac{1}{2}(u_1-u_2+u_3+u_4)+1. \end{cases}$

1046. n та. **1047.** Айний алмаштириш ва шу гипертекисликка нисбатан симметрия. **1052.** Кўрсатма. Ўхшаш алмаштиришнинг аналитик ифодасидан кўриниб турибдики, ҳар бир йўлдаги ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларнинг квадратларининг йиғиндиси k^2 га тенг бўлиши шарт. Сўнгра улар олдидаги k^2 ни қавс ташқарисига чиқаргандан сўнг, қавс ичида қолган коэффициентларнинг ҳаммаси ортогонал матрица ташкил қилиши керак. **1053.** $k=\sqrt{5}$ (1052-масалага қаранг).

1057. A_n да гипертекислик.

1059. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ **1060.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 6 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 7 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1061. а) $2x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$;

г) $2x_1^2-2x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3+3x_2^2+5x_3^2$;

д) $3x_1^2-4x_1x_3-10x_2x_3+x_3^2$.

1062. $F(\vec{x},\ \vec{y}) = x_1y_1 - x_3y_3 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2.$

1063. $f(\vec{x},\ \vec{y}) = x_1'y_1' - 3x_1'y^2 - 5x^2y_1' + x^2y_2;$

$f(\vec{y},\ \vec{x}) = y_1'x_1' - 3y_1'x_2 - 5y^2x_1' + y^2x_2;$

$f(\vec{x},\ \vec{y}) = \frac{1}{2}\left[f(\vec{x},\ \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x})\right]$ бўлганлиги учун

$f(\vec{x},\ \vec{x}) = x_1y_1' - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + x_2y_2$ бўлади.

1065. а) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$;

б) $z_1^2-2z_2^2$;

в) $z_1^2+y_3^2$.

1067. в) $u_1^2+u_2^2-u_3^2$;

$x_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 + u_4,$

$x_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_3 - u_4,$

$x_3 = \frac{1}{2}u_2 + u_4,$

$x_4 = \frac{1}{2}u_2 - u_4$

г) $u_1^2-u_2^2$;

$x_1 = u_3,$

$x_2 = u_4,$

$x_3 = -u_1 - u_2 + 2u_4,$

$x_4 = u_1 - u_2.$

1069. а) $z_1^2-z_2^2+z_3^2$;

б) $z_1^2+z_2^2+z_3^2$;

в) $u_1^2-u_2^2+u_3^2-u_4^2$;

г) $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$.

1070. а) $\begin{cases} x_1 = u_1 - u_2 - u_3, \\ x_2 = u_1 + u_2, \\ x_3 = u_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} u_1 - u_2 + \frac{2}{3} u_3; \\ x_2 = -\frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{3} u_3, \\ x_3 = \frac{1}{3} u_3; \end{cases}$

в) $x_1 = v_1 - v_3 - v_5,\quad x_4 = v_4,$
$x_2 = v_1 - v_2,\quad x_5 = \frac{1}{2} v_5.$
$x_3 = -v_3 - v_5$

1072. а) $r = 2,\quad S = 2;$
б) $r = 1,\ S = 1;$
в) $r = 3,\ S = 2.$

1075. (3, 1, — 1, — 1) ва (1, — 3, — 3, 3). **1076.** Бўш тўплам. **1077.** Тўғри чизиқ квадриканинг тўғри чизиқли ясовчисидир.

1078. $\frac{x_1 + 2}{3} = \frac{x_2}{2} = x_3$ ва $\frac{x_1}{3} = \frac{x_2 - 2}{2} = x_3.$

1079. $x_1 = x_3 = 0$ ва $\frac{x_1}{-16} = x_2 = \frac{x_3}{8}.$

1081. $x_1 = \frac{x_2 + 2}{-1} = \frac{x_3 - 1}{0} = \frac{x_4 + 3}{3}$ ва $\frac{x_1}{0} = \frac{x_2 + 2}{-1} = \frac{x_3 - 1}{0} =$
$= \frac{x_4 + 3}{3}.$

1082. а) $C(1,\ 1,\ -1)$; б) $x_1 = 1,\ x_2 = t,\ x_3 = -t$ — марказлар тўғри чизиғи.

1086. A_2 да: 1) $z_1^2 = 2 z_2$ — парабола;
2) $y_1^2 - y_2^2 = 1$ — гипербола;
A_3 да 1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ — бир кавакли гиперболоид;
2) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$ — икки кавакли гиперболоид.

1087. A_2 да: 1) $y_1^2 - y_2^2 = 1$ — гипербола, 2) $y_1^2 = 2 y_2$ — парабола
$\begin{cases} x_1 = 3 y_1 - 3, \\ x_2 = 2 y_1 - 2 y_2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2} y_2 - 6, \\ x_2 = 1 - \frac{1}{4} y_2. \end{cases}$

A_3 да:
1) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$ — икки кавакли гиперболоид
$\begin{cases} y_1 = z_3, \\ y_2 = z_2 + 2, \\ y_3 = \frac{z_1 + 4}{4}; \end{cases}$
2) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ — конус

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = 2 y_3 - 4. \end{cases}$

A_4 да:
1) $y_1^2 - y_2^2 = 0$ — иккита кесишувчи текислик
$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_3, \\ x_2 = y_2 + y_4, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4 \end{cases}$

1089. а) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\quad \lambda_3 = -3.$
$\vec{u_1}(0,\ 1,\ 1),\ \vec{u_2}(2,\ -1,\ 0),\ \vec{u_3}(1,\ 0,\ 1).$
б) $\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 2,\quad \lambda_3 = 3;\ \vec{u_1}(1,\ 0,\ -1),\ \vec{u_2}(2,\ -1,\ 0),$
$\vec{u_3}(0,\ 1,\ 1).$
в) $\lambda = -2,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 7.$
$\vec{u_1}(3,\ -2,\ 0),\ \vec{u_2}(1,\ 0,\ 0),\ \vec{u_3}(24,\ 8,\ 9).$

1092. а) $4 y_1^2 + y_2^2 - 2 y_3^2;$
$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3, \\ y_2 = \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3, \\ y_3 = \frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_3, \end{cases}$

б) $2 y_1^2 - y_2^2 + 5 y_3^2;$
$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3, \\ y_2 = \frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3, \\ y_3 = \frac{1}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3, \end{cases}$

е) $2 x_1'^2 + 5 x_2'^2 + 8 x_3'^2;$
$\begin{cases} x_1' = \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3; \\ x_2' = -\frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3, \\ x_3' = \frac{2}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3; \end{cases}$

ж) $7 y_1^2 - 2 y_2^2 + 7 y_3^2;$
$\begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_3, \\ y_2 = \frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3, \\ y_3 = \frac{\sqrt{2}}{6} x_1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} x_3. \end{cases}$

1093. $a < -\sqrt{3}$ ёки $a > \sqrt{3}$ — гиперболик цилиндр, $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ — эллиптик цилиндр. $a = \pm\sqrt{3}$ — иккита параллел текислик.

1094. E_2 да:
1) $\frac{z_1^2}{12} + \frac{z_2^2}{2} = 1$ — эллипс.
3) $\frac{z^2}{9} - z_1^2 = 1$ — гипербола.
4) $z_2^2 = \sqrt{10}\, z_1$ — парабола.

E_3 да:

1) $z_1^2 - z_2^2 = 2z_3$ — гиперболик параболоид.

2) $z_1^2 - \frac{z_2^2}{5} = 0$ — иккита кесишувчи текислик. 3) $z_1^2 = \frac{13}{5} z_2$ — параболик цилиндр. 5) $\frac{z_2^2}{9} - z_1^2 = 1$ — гиперболик цилиндр. 8) $\frac{z_1^2}{4} + z_2 - \frac{z_3^2}{4} = 0$ — конус. 9) $\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{9} + z_2^3 = 1$ — айланма эллипсоид.

X боб

1095. а), г), д), е). **1096.** а), в). **1106.** а) Ҳа; б) Ҳа; в) Йўқ. **1107.** Ҳа. **1108.** а), б), в) мавжуд эмас. **1112.** Текис бурчаклар сони қирралар сонидан икки марта кўп. **1113.** Йўқ. **1114.** $n\ (n-1)$. **1116.** Ҳа. **1117.** Эйлер теоремасидан фойдаланиб исботланг. **1118.** 1-усул. Агар қирралар сони k жуфт бўлса, қирралари сони $2n = k$ бўлган n бурчакли пирамидани олиш етарли. Фараз қилайлик, k — тоқ бўлсин, n бурчакли пирамида олиб, асосининг учидан кичкина учбурчакли пирамида ажратилади. Ҳосил бўлган қавариқ кўпёқда $(2n+3)$ та қирра бўлиб, ундан $n = \frac{k-3}{2}$ топилади. 2-усул. $AB \parallel CD$ қирраларга эга бўлган n бурчак оламиз. Бу кўпбурчак текислигидан ташқарида PQ қирра оламиз. У $PQ \parallel AB \parallel CD$ бўлсин. P ва Q нуқталарни кўпбурчак учлари билан бирлаштириб. $2n+1$ қиррага эга бўлган қавариқ кўпёққа эга бўламиз. **1119.** Кўпёқ n та ёққа эга бўлсин. Уларни $f_1, f_2, \ldots, f_l, f_{l+1}, \ldots, f_n$ деб олайлик, мос равишда бу ёқлар $2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1, \ldots, 2\alpha_l+1$; $2\alpha_{l+1}, \ldots, 2\alpha_n$ томонлар сонига эга бўлсин, l жуфт сон эканини исбот қилиш керак. Агар ҳамма томонлар сонини қўшсак, $2k$ ҳосил бўлиб, бу ерда k — кўпёқнинг қирралари сонидан иборат бўлади.

$(2\alpha_1+1) + (2\alpha_2+1) + \ldots + (2\alpha_l+1) + 2\alpha_{l+1} + 2\alpha_{l+2} + \ldots + 2\alpha_n = 2k$. $2(\alpha_2 + \ldots + \alpha_l) + 2(\alpha_{l+1} + \ldots + \alpha_n) + l = 2k$ ва бу ердан $l = 2k - 2(\sum \alpha_i) - 2(\sum \alpha_j)$ — жуфт сон. **1120.** Йўқ. **1122.** а) $l=6, f=8$; б) $l=7, f=10$. **1123.** а) $l=8, f=6$; б) $l=10, f=7$. **1124.** а) $l=8, f=6$; в) $l=12, f=10$; бундай кўпёқ мавжуд эмас. **1125.** а) $l=6, f=8$; б) $l=10, f=12$. **1128.** $f_6=112$, $f_7=88$. **1131.** $MA_1 = B_1N_1 = \frac{a-x}{2}$; $MA_1^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, бундаги x $x^2 + ax - a^2 = 0$ тенгламани қаноатлантиради,

$x = -\frac{a}{2}\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618a$. Маълумки, x кесма узунлиги, a кесмани «ўрта ва ташқи нисбатда» бўлиш ёки машҳур «олтин кесим» натижасидир.

Шундай қилиб, кўпёқнинг ёқлари томони x дан иборат бўлган мунтазам учбурчакдан иборат бўлади. Икки ёқли бурчакларнинг конгруэнтлигини исботлаш учун қуйидагиларни эътиборга олиш керак: A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ учлари куб маркази O дан бир хил узоқлашган ва кўпёқнинг O нуқтага тортилган ёқлари учбурчакдан иборат бўлган мунтазам пирамидаларга ажратиш мумкин. **1132.** (1131-масалага қаранг). $|A_i B_i| = x$, $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. $\triangle B_1Q_1N_1$ дан $y^2 = \left[x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{a}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. Бешбурчак ҳақиқатан ҳам мунтазам, яъни унинг томонлари ва бурчаклари конгруэнт ($A_2B_1 = a$ дан фойдаланиб ҳисоблаб, охирги фикрни тасдиқлаш мумкин). Ф нинг барча учлари куб маркази O дан бир хил $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ масофада ётишлигини осон исботлаш мумкин, демак, Ф нинг ёқлари бешбурчакдан иборат. O нуқтага тортилган мунтазам пирамидаларга ажратиш мумкин. Бундан икки ёқли бурчакларнинг конгруэнтлиги келиб чиқади.

1133. Ҳисоблашларда, қирраси b — билан белгиланган, O марказли кубдан фойдаланиб ясалган кўпёқдан фойдаланиш қулайдир. Биз исботни додекаэдр ва икосаэдр учун келтирамиз. Додекаэдр. Додекаэдр қирраси (1132-масалага қаранг) $a = \frac{b}{2}(\sqrt{5}-1)$, бундан $b = \frac{2a}{\sqrt{5}-1}$.

R — куб марказидан учигача бўлган масофа, яъни $R = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$;

O нуқтани ёғининг маркази билан бирлаштирувчи кесма узунлиги r ни топиш учун бешбурчакли ёғига ташқи чизилган айлана радиуси l ни топиш керак. Ҳисоблаш учун мунтазам учбурчакнинг томонлари радиус l нинг олтин кесимидан иборат деган фактдан фойдаланиш керак: $l^2 = \frac{2a^2}{5-\sqrt{5}}$, $r^2 = R^2 - l^2$ формуладан r ни топамиз, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ни топиш учун 1133-масалада топилган y дан фойдаланамиз: $y = \frac{b}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}$, бундан $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$,

демак, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. $S = 12S_5'$, $S_5 = 5S_\triangle$, $S_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot k$, бу ерда

$k = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, $V = 12V_n$, $V_n = \frac{1}{3}\ S_5 \cdot r$.

Икосаэдр. $R = OA_i$, $R = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, бу ерда $b = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1}$; асос қирраси — a, ён қирраси R бўлган мунтазам пирамиданинг баландлиги r; $r^2 = R^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$. Бундан: $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$. Чунки $7 + 3\sqrt{5} = \frac{(3 + \sqrt{5})^2}{2}$. Жавобини бошқа формада ҳам олиш мумкин: $r = \frac{a\,(3 + \sqrt{5})}{4\sqrt{3}}$, $S = 20 \cdot S_{\triangle}$, $V = 20V_n$, $V_n = \frac{1}{3}\ S_{\triangle} \cdot r$.

1134. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **1135.** Кўрсатма. Масалани исботлашда қуйидаги фактдан фойдаланиш қулайдир: иккита A ва O нуқта берилган бўлсин, агар P ва Q нуқталар учун $PA = QA$ ва $PO = QO$ ўринли бўлса, у ҳолда P ва Q нуқталар AO га перпендикуляр бўлган битта текисликда ётади.

A нуқта, масалан, мунтазам икосаэдр учи бўлсин. A нуқтадан чиқувчи қирраларининг учлари A нуқтадан ва куб маркази O нуқтадан бир хил узоқликда ётади, демак, бир текисликда ётади ва бу текислик OA га перпендикуляр. Бу ҳолда A нуқтадан чиқувчи барча қирралар учи A нуқтада бўлган бешбурчакли мунтазам пирамида ҳосил қилиши равшан.

1136. Қўшни ёқларининг марказлари O_1 ва O_2, уларни бирлаштириб, O_1O_2 кесмани ҳосил қиламиз, кейин O_1 ва O_2 ни умумий қирранинг ўртаси H билан бирлаштирамиз. O_1H ва O_2H конгруэнт учбурчакларнинг баландликлари бўлсин, O_1HO_2 бурчак берилган мунтазам кўпёқнинг икки ёқли бурчагининг нормал кесими бўлади. Демак, шу тарзда қурилган барча учбурчаклар ва O_1HO_2 бурчаклар ўзаро конгруэнт бўлади, бунда масаланинг талаби келиб чиқади.

1137. Юқоридаги 1136-масала натижасидан ва 1135-масала муҳокамасига кўра, мунтазам икосаэдр ёқларининг (A учидан чиқувчи) марказлари бир текисликда (OA га перпендикуляр) ётади ва мунтазам бешбурчакни ташкил қилади. Бу бешбурчаклар (улар 12 та) янги кўпёқни ҳосил қилади. Икки ёқли бурчакларининг конгруэнтлигини одатдагидек, учи O нуқтада, асослари икосаэдр ёқларидан иборат пирамидаларга ажратиш йўли билан исбот қилиш мумкин. **1138.** Тетраэдр, $\frac{a}{3}$. **1142.** Куб ёқларига параллел бўлган учта симметрия текислиги куб ёрдамида қурилган октаэдр, икосаэдр ва додекаэдрларнинг симметрия текислиги бўлади. Бу текисликлар ўзаро перпендикулярдир, шунинг учун ҳам кубнинг маркази октаэдр, икосаэдр, додекаэдрларнинг маркази бўлади.

№	Кўпёқларнинг номлари	l	k	f	Биринчи кўринишдаги ўқлар, ҳаммаси бўлиб $\frac{f}{2}$ та	S	Иккинчи кўринишдаги ўқлар, ҳаммаси бўлиб $\frac{l}{2}$ та	S	Учинчи кўринишдаги ўқлар, ҳаммаси бўлиб $\frac{k}{2}$ та	S	Ўз-ўзига жойлашишларнинг умумий сони
1	Куб	8	12	6	3 та тўртинчи тартибли ўқ	9	4 та учинчи тартибли ўқ	8	6 та иккинчи тартибли ўқ	6	24
2	Октаэдр	6	12	8	4 та учинчи тартибли ўқ	8	3 та тўртинчи тартибли ўқ	9	6 та иккинчи тартибли ўқ	6	24
3	Икосаэдр	12	30	20	10 та учинчи тартибли ўқ	20	6 та бешинчи тартибли ўқ	24	15 та иккинчи тартибли ўқ	15	60
4	Додекаэдр	20	30	12	6 та бешинчи тартибли ўқ	24	10 та учинчи тартибли ўқ	20	15 та иккинчи тартибли ўқ	15	60

1143. Кўрсатма. 1142-масала натижасидан фойдаланинг. **1145.** Иккита параллел қирра орқали ўтувчи текислик икосаэдр (додекаэдр) нинг симметрия маркази бўлади.

1146. Тетраэдрнинг учини қарама-қарши ёғининг маркази билан бирлаштирувчи l тўғри чизиқ учинчи тартибли симметрия ўқи бўлади, яъни тетраэдрни l ўқ атрофида тўлиқ айлантирганда уч марта ўз-ўзи билан устма-уст тушади. 2π га бурганда айний алмаштириш билан бир хил бўлади. Шундай қилиб, l ўқ айний бўлмаган иккита буришни ҳосил қилади, бундай ўқлар тўртта, натижада 8 та ўз-ўзига жойлашишга эга бўламиз. Қарама-қарши қирралари ўрталарини бирлаштириб, иккинчи тартибли ўққа эга бўламиз. Бундай ўқлар 3 та, натижада 3 та ўз-ўзига жойлашишга эга бўламиз. Энди олинган ўз-ўзига жойлашишларга айний алмаштиришни ҳам қўшсак, $8+3+1=12$. **1147.** 1148-масалаларнинг жавоблари 283-бетдаги жадвалда берилган, бу ерда l — учлар сони, k — қирралар сони, f — кўпёқнинг ёқлари сони, S — айний бўлмаган ўз-ўзига жойлашишлар сони.

АДАБИЕТ

1. П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., «Наука», 1979.
2. Б. И. Аргунов, И. Н. Демидова, В. Н. Литвиненко. Задачник-практикум по геометрии, часть I. М., «Просвещение», 1979.
3. Б. И. Аргунов, И. В. Парнасский, О. Е. Парнасская, М. М. Циленко. Задачник-практикум по геометрии, часть II, часть III. М., «Просвещение», 1979.
4. Л. С. Атанасян. Геометрия, часть I, М., «Просвещение», 1973.
5. Л. С. Атанасян, В. А. Атанасян. Сборник задач по геометрии, часть I, М., «Просвещение», 1973.
6. В. Т. Базылов, К. И. Дуничев, В. Г. Иваницкая. Геометрия I. М., «Просвещение», 1974.
7. В. Т. Базылов, К. И. Дуничев и др. Сборник задач по геометрии, М., «Просвещение», 1980.
8. С. В. Бахвалов, П. С. Моденов, А. С. Пархоменко, Сборник задач по аналитической геометрии, М., «Наука», 1964.
9. Н. Додажонов, М. Жўраев, Геометрия I, Т., «Ўқитувчи», 1982.
10. Н. В. Ефимов. Э. Р. Розендорн. Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., «Наука», 1970.
11. В. М. Майоров, З. А. Скопец. Векторное решение геометрических задач, М., «Просвещение», 1968.
12. П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. Сборник задач по аналитической геометрии, М., «Наука», 1976.
13. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства, М., «Наука», 1968.
14. Х. Х. Назаров, Х. О. Очилова, Е. Г. Подгорнова. Геометриядан масалалар тўплами. I қисм. Т., «Ўқитувчи», 1983.

МУНДАРИЖА

1- бўлим

Вектор алгебра элементлари. Текисликдаги геометрия.

Н 18

Назаров Ҳ. Ҳ. ва бошқ.

Геометриядан масалалар тўплами. Қ. I.: Пед. ин-тлари ва университетлар учун ўқув қўлл. /Ҳ. Ҳ. Назаров, Х. О. Очилова, Е. Г. Подгорнова; (Махсус муҳаррир Н. Додажонов).— 2-тузатилган ва тўлдирилган нашр.— Т.: Ўқитувчи, 1997 .—288 б.

I.; 1,2 Автордош.

ББК 22.151я73

НАЗАРОВ ҲАМИДУЛЛА ҲОДИЕВИЧ,
ОЧИЛОВА ХАТИМА ОЧИЛОВНА,
ПОДГОРНОВА ЕЛЕНА ГАВРИЛОВНА

ГЕОМЕТРИЯДАН МАСАЛАЛАР ТУПЛАМИ

I-қисм

Педагогика институтлари ва
университетлар талабалари учун
қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1997

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррирлар: *Р. Каримов, С. Бекбоева*
Расмлар муҳаррири *М. Кудряшова*
Техн. муҳаррирлар *Т. Скиба, Э. Вильданова*
Мусаҳҳиҳ *Л. Мирзааҳмедова*

ИБ № 6774

Теришга берилди 21.12.94. **Босишга рухсат этилди** 25.10.96. **Формати** $84\times108^1/_{64}$. **Литературная гарн.** Кегли 10 шпонсиз. **Юқори босма усулида босилди. Шартли** б, л. 15,12. **Шартли** кр.-отт. 15,33. Нашр л. 11,0. **Тиражи** 2000. **Буюртма** № 2817.

«Ўқитувчи» нашриёти, Тошкент 129, **Навоий кўчаси,** 30 **Шартнома** № 09—175—94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг 1- босмахонасида босилди. Тошкент, Сағбон кўчаси, 1-берк кўчаси, 2- уй. 1997.