111 — buyurtma 150 nusha. Hajmi 5,7 b.t.
2005 yil 21 oktyabrda bosishga puxsat etildi.
Nizomiy nomidagi TDPU Pizografida
nashr qilindi.

R.Yunusmetov., I.Raxmonov.,
D.Qo`chqorova.

GEOMETRIYA - I

Toshkent – 2005

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

GEOMETRIYA - I

(ma'ruzalar matni)

Toshkent – 2005

KIRISH

Talabalarga havola qilinayotgan bu ma'ruza (qo'llanma) matnlari pedagogika universitetining «matematika-informatika», «fizika-informatika» va «fizika-astronomiya» mutaxassisliklariga mo'ljallangan geometriyadan birinchi semestrda o'tiladigan ma'ruzalarni o'z ichiga oladi.

Kitob bakalavrlar uchun tuzilgan dastur asosida yaratildi.

Qo'llanmaga mualliflarning Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat pedagogika Universitetining fizika-matematika fakultetida ko'p yillar davomida o'qilgan ma'ruzalar asos qilib olindi.

Mazkur kitob 17 ta ma'ruzadan iborat bo'lib, 1, 2, 3 – ma'ruzalarda vektor algebrasini elementlari bayon qilingan, 4, 6 – ma'ruzalarda affin va Dekart koordinatalar sistemalari kiritilib ularga bog'liq masalalar qaralgan. 7-ma'ruzada qutb koordinatalar sistemasi kiritilib unga bog'liq bo'lgan masalalar echildi. 8 – ma'ruzada koordinatalarni bog'lovchi tenglama va tengsizliklarning geometrik ma'nosi o'rganiladi. Shuningdek, algebraik chiziq va uning tartibi haqida so'z yuritiladi.

9, 10 – ma'ruzalarda to'g'ri chiziqlar nazariyasi o'rganiladi.

11. 14 – ma'ruzalar tekislikdagi akslantirish va almashtirishlarga bag'ishlanadi.chiziqlar va ularning xossalari o'rganiladi.

15-17 ma'ruzalarda ikkinchi tartibli

Har bir ma'ruzadan keyin o'tilgan mashg'ulotlarni tekshirish uchun savol va mashqlar berilgan.

Bu kitobni yaratishda faol qatnashgan universitet «matematika va uni o'qitish metodikasi» kafedrasi a'zolariga minnatdorchilik izhor qilamiz.

Mualliflar.

1 - ma'ruza

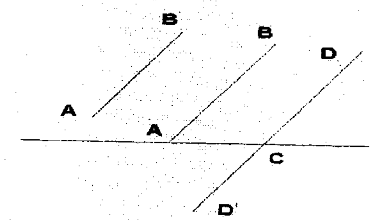
Ma'ruza rejasi

1. Vektor.
2. Vektorlarni qo'shish va ayirish.
3. Vektorlarning songa ko'paytirish.
4. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.

1. Vektor. Maktab geometriyasida kesma deb, to'g'ri chiziqning berilgan ikkita A va B nuqtalari orasida yotgan hamma nuqtalardan iborat qismiga aytiladi. A va B nuqtalar kesmaning uchlari deyiladi. Kesma o'z uchlarini ko'rsatish bilan belgilanadi «AB kesma», AB va BA kesmalar geometrik nuqtai nazardan bitta kesmani bildiradi, agar ularning yo'nalishlarini e'tiborga olsak ular turli kesmalar bo'ladi.

1 - ta'rif. Agar berilgan kesmaning uchlari tartiblangan bo'lsa, u holda bunday kesma ***yo'nalgan kesma*** deyiladi. Yo'nalgan kesmaning birinchi uchi uning ***boshi***, ikkinchi uchi esa ***oxiri*** deyiladi.

Boshi A va oxiri B nuqtada bo'lgan yo'nalgan kesmani AB bilan belgilaymiz (1-chizma).



1-чизма

Yo'nalgan $\overline{AB}$ kesmaning ***uzunligi*** deb, AB kesma uzunligiga aytiladi va |AB| yoki AB bilan belgilanadi.

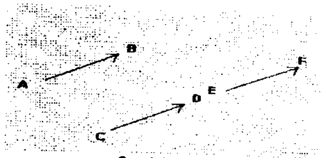
2 - ta'rif. Agar AB va CD nurlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalgan bo'lsa, AB,CD yo'nalgan kesmalar bir xil (***qarama-qarshi***) ***yo'nalishli*** deyiladi.

3 - ta'rif. Uzunliklari teng yo'nalish bir xil bo'lgan barcha yo'nalgan kesmalar to'plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi.

Vektor ustiga "→" belgi qo'yilgan kichik lotin harflari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$... bilan yoki qo'yiq qilib yozilgan kichik lotin harflari bilan belgilanadi.

Vektor so'zi lotincha vector – so'zidan olingan bo'lib, tashuvchi, olib yuruvchi degan ma'noni bildiradi.

Ta'rifdan vektor, uzunliklari teng bir xil yo'nalgan kesmalar to'plamidan iborat, ekanligi ravshan. Bu to'plamga tegishli har bir yo'nalgan kesma to'plamni to'liq aniqlaydi. Shuning uchun agar $\overline{AB} \in a$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ko'rinishda yozishimiz mumkin.



2-chizma

A nuqta $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshi, B nuqta esa $\overrightarrow{AB}$ vektorning oxiri deyiladi. Yo'nalgan AB kesmaning uzunligi $\overrightarrow{AB}$ vektor uzunligi, yoki moduli deyiladi va $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishida belgilanadi.

4 - ta'rif. Uzunligi birga teng bo'lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.

5 - ta'rif. Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.

Nol vektor $\vec{0}$ ko'rinishida yoki $\overrightarrow{AA}$, yoki $\overrightarrow{BB}$ ko'rinishida belgilanadi. Nol vektor yo'nalishi (aniq emas) aniqlanmagan.

6 - ta'rif. Agar $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} \in \vec{b}$ yo'nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli bo'lsa, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ bir xil (qaram-qarshi) yo'nalishli deb aytiladi.

Agar $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ lar bir xil yo'nalishli bo'lsa $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ ko'rinishida, qarama – qarshi yo'nalishda bo'lsa $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ ko'rinishda belgilaymiz.

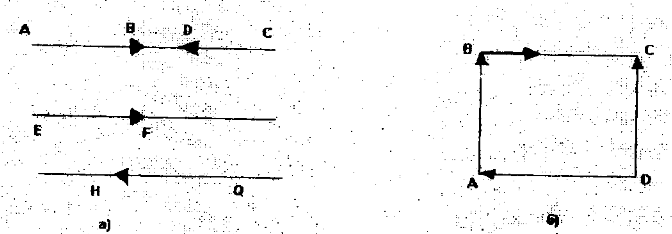
7 - ta'rif. Agar ikkita $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, u holda bu vektorlarning kolleniar vektorlar deyiladi.

8 - ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa:

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng ;

2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishida yoziladi.

1. Agar uchta vektor bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa, u holda bunday vektorlarni komplanar vektorlar deyiladi.



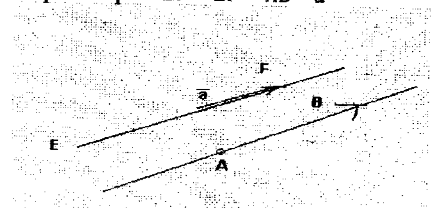
3-chizma

3-chizmada parallel to'g'ri chiziqlarda va ABCD kvadrat tomonlarida yotuvchi vektorlar ko'rsatilgan: 1) bularning qaysi juftlari bir xil yo'nalishga va qaysi juftlar qarama-qarshi yo'nalishga ega, 2) qaysi juftlari kolleniar bo'ladi, 3) qaysi juftlari teng, qaysi juftlari teng emas.

2. Vektorlarni qo'shish va ayirish.

Tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$ va A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtadan $\overrightarrow{EF}$ to'g'ri chiziqqa parallel d to'g'ri chiziq o'tkazamiz. (4-chizma)

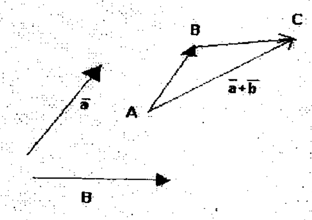
A nuqtadan ko'rsatilgan yo'nalishda $\vec{a}$ uzunligi o'lchab qo'yib B nuqtani topamiz. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$



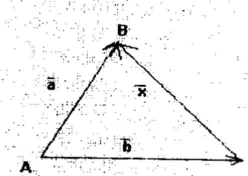
4-chizma

Shunday qilib $\vec{a}$ ni A nuqtaga qo'ydik. Ya'ni ko'chirdik.

9-Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ larning yig'indisi deb, ixtiyoriy A nuqtadan $\vec{a}$ ni qo'yib, uning oxiri B nuqtaga $\vec{b}$ ni qo'yganda boshi $\vec{a}$ ning bosh A dan oxiri $\vec{b}$ ning oxiri C nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AC}$ ga aytiladi, (5- chizma) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ bilan belgilanadi.



5-chizma



6-chizma

Vektorlarni qo'shish ta'rifdan istalgan A , B va C uch nuqta uchun

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi.

10 - Ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ larning ayirmasi deb, shunday $\vec{X}$ vektorga aytiladiki, ular uchun; (6- chizma) $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$, bundan $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$.

Ikkita vektorning ayirmasi hamma vaqt mavjud va bir qiymatli aniqlanishini isbotlash mumkin.

3. **11 - Ta'rif.** $\vec{a} \neq \vec{0}$ ning $\alpha \in R$ songa ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi. ($\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a}$ yoziladi).

1) $|\vec{P}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{p}$ vektor $\vec{a}$ ga kolleniar.

3) Agar $\alpha > 0$ bo'lsa $\vec{p}$ va $\vec{a}$ lar bir xil yo'nalishda, agar $\alpha < O$ bo'lsa, $\vec{p}$ va $\vec{a}$ lar qarama- qarshi yo'nalgan bo'ladi.

Teorema. Vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

1°. $\vec a+\vec b=\vec b+\vec a$ (qo'shishga nisbatan kommutativ)

2°. $(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c)$ (qo'shishga nisbatan assotsiativ)

3°. Ixtiyoriy $\vec a$ uchun shunday O mavjudki ular uchun: $\vec a+0=\vec a$.

4°. Har bir $\vec a$ uchun shunday $-\vec a$ mavjudki ular uchun: $\vec a+(-\vec a)=0$ (bunda $-\vec a$ ni $\vec a$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi).

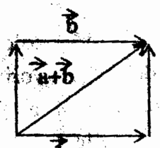
5°. Itiyoriy ikki haqiqiy son α, β va ixtiyoriy $\vec a$ uchun: $(\alpha+\beta)\vec a=\alpha\vec a+\beta\vec a$

6°. Ixtiyoriy ikki haqiqiy α, β son va ixtiyoriy $\vec a$ uchun: $\alpha(\beta\vec a)=(\alpha\beta)\vec a$

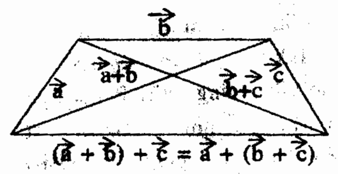
7°. Ixtiyoriy α son va ixtiyoriy $\vec a$, $\vec b$ lar uchun: $\alpha(\vec a+\vec b)=\alpha\vec a+\alpha\vec b$

8°. Ixtiyoriy $\vec a$ uchun: $1\vec a=\vec a$

Isbot. 1, 2 xossalarning isbotini 7, 8 chizmalardan ko'rish mumkin.



7 - chizma



8 - chizma

3° va 8° xossalar ravshan. 4° ga qaraylik. Agar $\vec a=\overline{MN}$ bo'lsa, $-\vec a$ sifatida $\overline{NM}$ ni olish mumkin. Vektorlarni qo'shish ta'rifga asosan

$\vec a+(-\vec a)=\overline{MN}+\overline{NM}=\overline{MM}=\vec 0$

5°, 6°, 7° xossalarni talabalar mustaqil ish sifatida o'rganadi.

4. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi.

Ixtiyoriy $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_n$ (1.1) vektorlar sistemasi va $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

$$\bar P=\alpha_1\bar a_1+\alpha_2\bar a_2+\ldots+\alpha_n\bar a_n \qquad (1.2)$$

vektorni berilgan (1.1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Bunda p vektor (1.1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalangan deyiladi, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar chiziqli kombinatsiya koeffitsentlari deyiladi.

12-ta'rif. Agar koeffitsentlarning kamida bittasi noldan farqi bo'lganda

$$\bar p=0 \qquad (1.3)$$

bo'lsa, u holda (1.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqli deyiladi.

Agar (1.3) tenglik $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlarning hamma nolga teng bo'lganda o'rinli bo'lsa, (1.1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

1-teorema. Agar (1.1) vektorlar sistemasining biror vektori nol vektor bo'lsa, u holda bu vektor sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot. $\bar a_k=\bar 0$ bo'lsin, u holda $\bar a_k\neq\bar 0$, $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=\alpha_{k+1}=\ldots\alpha_n=0$ sonlar uchun (1.3) munosabat o'rinli bo'ladi. Demak, ta'rifga asosan (1.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

Quyidagi teoremalarni talabalar o'zlari isbotlasin.

2-teorema. Agar (1.1) vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, sistemaning kamida bitta vektori uning qolgan vektorlari orqali chiziqli ifodalanadi.

3-teorema. Ikkita vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning kolleniar bo'lishi zarur va yetarli.

4-teorema. Uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va yetarli.

Tekshirish uchun savol va mashqlar

1. Agar $\vec a$ va $\vec b$ vektorlar kolleniar bo'lsa, ular bir xil yo'nalishli bo'ladimi?
2. Agar $\vec a$ va $\vec b$ vektorlar bir xil yo'nalishli bo'lsa, ular kollinear bo'ladimi?
3. Vektorlar va kesma nimasi bilan farq qiladi?
4. Vektorlarni nuqtaga ko'chirish qanday bajariladi?
5. Vektorlarni qo'shishni va ayirishni ta'riflang?
6. Vektorni songa ko'paytirish deb nimaga aytiladi?
7. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi haqida nimalarni bilasiz?
8. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlarning ta'rifini ayting?
9. Tekislikda $\bar p(2;-3)$ $\bar q(1;2)$ vektorlar berilgan $\bar a$ (5, 4) vektorni $\bar p$ va $\bar q$ vektorlar orqali ifodalang.
10. $\bar e_1$, $\bar e_2$ bazisga nisbatan $\bar a(x_1, y_1)$, $\bar b(x_2, y_2)$ berilgan bo'lsa, vektorlarning kolleniar bo'lish uchun $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Isbotlang.
11. Uchta $\bar p(3,-2,1)$ $\bar q(-1;4,-2)$, $\bar z(2,1,-3)$ vektorlar berilgan. $\bar c(11,-6,-3)$ vektorni p, q va z vektorlar orqali ifoda qiling.

Adabiyotlar. {1}, {1-6, 8} - §, {2}, {2-6} - §

2 - ma'ruza.

Ma'ruza rejasi.

1. Vektor fazo tushunchasi;
2. Vektor fazoning bazisi;
3. Vektorning bazisga nisbatan koordinatalar va ularning xossalari.

1. Vektor fazo tushunchasi.

Fazodagi barcha vektorlar to'plamini V bilan belgilaymiz, unda vektorni qo'shish va ayirish vektorlarni songa ko'paytirish amallari aniqlangan.

V-Teoremada aytilgan sakkizta xossani qoniqtirsa, u holda V vektorlar to'plamini vektor fazo yoki chiziqli fazo deyiladi.

2. Vektor fazoning bazisi

Vektor fazoda ma'lum tartibda olingan chiziqli erkli vektorlar

$$\bar e_1, \bar e_2, \ldots, \bar e_n \qquad (2.1)$$

berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Vektor fazoning har bir vektori (2.1) vektor sistemasi orqali chiziqli ifodalansa, (2.1) sistema vektor fazo bazisi deyiladi.

Ya'ni $\forall\vec{a}\in V$, $\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_n\vec{e}_n$

Ta'rif. Agar bazis vektorlarning har bir vektori birlik vektor bo'lib, ularning har ikkitasi o'zaro perpendikulyar bo'lsa, bunday bazisni ortogonal bazis deyiladi.

Bazis vektorlar soni vektor fazoning o'lchovi deyiladi.

3. Vektorlarning bazisga nisbatan koordinatalari va ularning xossalari.

V_3 uch o'lchovli chiziqli fazo va uning bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlari berilgan bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra bu fazoning har bir vektorini masalan $\forall\vec{a}\in V$ vektorni

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3 \qquad (2.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $x, y, z\in R$

(2.2) ifodani $\vec{a}$ ning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlar bo'yicha yoyilmasi deyiladi.

Teorema. Vektor fazoning ixtiyoriy vektori tanlab olingan bazis vektorlarga nisbatan yagona yoyilmaga ega.

Isbot. Faraz qilaylik, $\vec{a}$, bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektor bo'yicha

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3 \qquad (2.3)$$

yoyilmadan tashqari, ikkinchi bir

$$\vec{a}=x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3 \qquad (2.4)$$

yoyilmaga ham ega bo'lsin. (2.3) tenglikdan (2.4) tenglikni hadlab ayirib quyidagiga ega bo'lamiz $(x-x')\vec{e}_1+(y-y')\vec{e}_2+(z-z')\vec{e}_3=\vec{0}$.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar chiziqli erkli bo'lgani uchun: $x-x'=0$, $y-y'=0$, $z-z'=0$. Bundan $x=x'$, $y=y'$, $z=z'=0$ demak, yoyilma yagona.

(2.3) yoyilmadagi x, y, z haqiqiy sonlar $\vec{a}$ vektorning $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bazis vektorga nisbatan koordinatalari deyiladi va $\vec{a}(x:y:z)$. Shunday qilib $\vec{a}(x:y:z)\Leftrightarrow\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$

Natija. Nol vektorning har qanday bazisga nisbatan koordinatalari nolga teng: (0, 0, 0).

V_3 vektor fazoda $\vec{a}$ va b vektorlar ~~o'zining~~ bazis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vektorlarga nisbatan Ushbu koordinatalarga ega bo'lsin:

$\vec{a}(x_1:y_1:z_1)\Leftrightarrow\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$

$\vec{b}(x_2:y_2:z_2)\Leftrightarrow\vec{b}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$

1. $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarni qo'shamiz (ayiramiz).

$\vec{a}\pm\vec{b}=x_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_3\vec{e}_3+(x_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_3\vec{e}_3)$

Bu tenglikdan vektorlarni qo'shish (ayirish) xossalariga ko'ra

$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2)\vec{e}_1+(y_1\pm y_2)\vec{e}_2+(z_1\pm z_2)\vec{e}_3$.

Bundan $(\vec{a}\pm\vec{b})\{(x_1\pm x_2);\ (y_1\pm y_2);\ (z_1\pm z_2)\}$

Demak, ikki vektor yig'indisining (ayirmasining) koordinatalari qo'shiluvchi (ayriluvchi) vektorlar mos koordinatalarning yig'indisidan (ayirmasidan) iborat.

2. $\vec{a}$ ning λ songa ko'paytmasining ya'ni $\vec{p}=\lambda\vec{a}$ koordinatalari $\vec{p}=\lambda\vec{a}=(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$

Masala: ABCD tetraedrning qirralaridan iborat $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ larni bazis vektor deb olib, $\overline{BC}$ ning shu vektorga nisbatan koordinatalarini toping.

Yechish $\overline{AB}=e_1$, $\overline{AC}=e_2$ va $\overline{AD}=e_3$ belgilaymiz.

$\overline{BC}=-\overline{AB}+\overline{AC}=\vec{e}_2-\vec{e}_1=-\vec{e}_1+\vec{e}_2=(-1)\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3$ $\overline{BC}(-1;\ 1;\ 0)$.

Misollar. $\vec{a}(3,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}(-1,\ 0,\ -2)$ va $\vec{c}(1,\ 2,\ 0)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $3\vec{a}$, $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlang.

Yechish ~~$\vec{a}+\vec{b}=(3+(-1))$;~~ ~~$(-2)+0$;~~ $(\vec{a}+\vec{b})(2;\ -2;\ -1)$; $\vec{b}-\vec{c}$ vektor koordinatalar $(\vec{b}-\vec{c})(-2;\ -2;\ -2)$; ~~$3\vec{a}(3;\ -2;\ 1)$~~ $3\vec{a}(9;\ -6;\ 3)$;

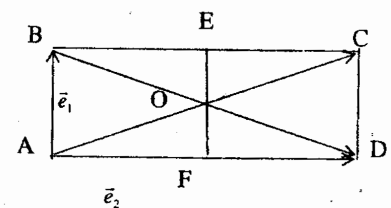
$\vec{p}=(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-3\vec{c})(3-\frac{1}{2}-3;\ -2+\frac{1}{2}\cdot0-3\cdot2;\ 1+\frac{1}{2}(-1)-3\cdot0)$

bundan $\vec{p}(-\frac{1}{2},\ -8,\ 0)$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. Vektor fazo deb nimaga aytiladi?
2. Bazis vektorni ta'riflang.
3. Vektor koordinatalari deb nimaga aytiladi?
4. ABCD – parallelogramm berilgan E va F qarama-qarshi tomonlar BC va AD ning o'rta nuqtalari bo'lsin, diagonallarining kesishgan nuqtalar – O. $\overline{AB}=e_1$, $\overline{AD}=e_2$ bazis vektorlar bo'lsin deb, quyidagi vektorlarning koordinatalarini aniqlang: (10-chizma).

   Bazis 1) $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 2) $\overline{OD}$; 3) $\overline{FC}$; 4) $\overline{BC}$; 5) $\overline{EO}$; 6) $\overline{EA}$



10-chizma

5. $\vec{a}_1(1,1)$, $\vec{a}_2(2,1)$, $\vec{a}_3(-3,2)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}=2\vec{a}_1-3\vec{a}_2+\vec{a}_3$ vektorning koordinatalarini aniqlang.

   Javob: $\vec{p}(-7;\ 1)$

6. Tekislikdagi $\vec{u}(2,\ 1)$ va $\vec{v}(1,\ 0)$ vektorlar berilgan, $\vec{p}(9.1)$ vektor $\vec{u}$ va $\vec{v}$ vektor bo'yicha yoyilgan, yoyilmaning koeffitsientlarini aniqlang. $(\vec{p}=x\vec{u}+y\vec{v})$

   Javob: $\vec{p}(1;\ 7)$

7. Koordinatalari bilan berilgan $\bar{a}(x_1, y_1)$ va $\bar{b}(x_2, y_2)$ vektorlar kolleniar bo'lishi uchun, ularning koordinatalarning proportsional bo'lishi zarur va yetarli ekanini isbotlang.

8. Quyidagi ~~juft~~ vektorlarning kollinear juftlarini ajrating.

1) $\bar{a}(1, 2)$: $\bar{b}(2, 3)$ 2) $\bar{a}(-\sqrt{2}, 3)$: $\bar{b}(2\sqrt{2}, -6)$ 3) $\bar{a}(0, 5)$: $\bar{b}(0, 7)$

Javob: 1. kolleniar emas;
2. kollinear;
3. kolleniar.

9. $\bar{a}(1, 5)$, $\bar{b}(3, -1)$ va $\bar{c}(0, 1)$ vektorlar berilgan.

$\bar{p} = \bar{a} + x\bar{b}$, x ning qanday qiymatida bu vektor $\bar{q} = \bar{a} - \bar{c}$ vektorga kolleniar bo'ladi.

Javob: $x = \frac{1}{13}$

Adabiyotlar. {1}, (9-11)-§, 7-§, 9-§.

3-ma'ruza

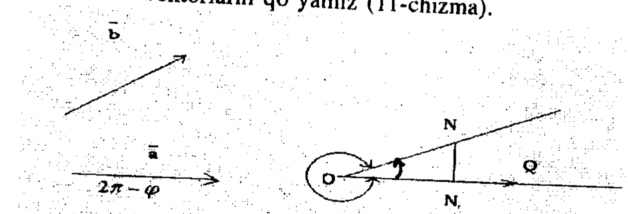
Maьruza rejasi

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va uning xossalari.
2. Koordinatalar bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasi.
3. Vektorni geometriya kursidagi masalalarni yechishga tadbiqi.

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Yuqorida, vektorlar ustidagi chiziqli amallar: vektorni qo'shish va ayirish, vektorlarni songa ko'paytirish amallari bilan tanishdik. Endi chiziqli bo'lmagan Yangi amal, vektorni skalyar ko'paytirish amali bilan tanishaylik.

Fazoda (yoki tekislikda) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. O nuqtaga $\bar{a} = \overline{ON}$, $\bar{b} = \overline{ON}$ vektorlarni qo'yamiz (11-chizma).



11-chizma

OQN nuqtalar orqali aniqlangan tekislikda, OQ va ON nurlar yordamida ikkita burchak aniqlanadi, bulardan biri φ ikkinchisi $2\pi - \varphi$.

Bu burchaklarning eng kichigini $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb aytiladi va $(\bar{a}\,\bar{b}) = \varphi$ ko'rinishda belgilaymiz.

1-tarif. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ **vektorlarning** uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb aytiladi.

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\bar{a}\cdot\bar{b}$ yoki $(\bar{a}\bar{b})$ ko'rinishida yoziladi.

Ta'rifga ko'ra $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$ (3.1)

Misol. $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$ bo'lib, $\varphi = 60^0$ bo'lsa, $\bar{a}\cdot\bar{b}$ ni toping.

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi = 3\cdot 4\cos 60^0 = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 6$

Natija. Nol vektorning har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Skalyar ko'paytma xossalari

1^0. Ixtiyoriy ikkita vektor uchun: $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$;

2^0. Ixtiyoriy uchta $\bar{a}$, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar uchun $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$;

3^0. Ixtiyoriy ikkita $\bar{a}$, $\bar{b}$ **vektorlar va** ixtiyoriy haqiqiy son uchun: $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$;

4^0. Ixtiyoriy $\bar{a}$ vektor uchun $\bar{a}\,\bar{a} = |\bar{a}|^2$

$\bar{a}\,\bar{a}$ coni $\bar{a}$ vektorning skalyar kvadrati deyiladi. $\bar{a}$ bilan belgilanadi. $\sqrt{\bar{a}^2}$ soni $\bar{a}$ vektorning uzunligi deyiladi va $|\bar{a}|$ bilan belgilanadi.

5^0. Agar $\bar{a}=0$ bo'lsa, $\bar{a}^2=0$.

Isbot. 1^0-xossani isbotlaylik.

Ta'rifga ko'ra $\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b} &= |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})\\ \bar{b}\cdot\bar{a} &= |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\bar{b}\wedge\bar{a})\end{aligned}$.

Kosinus juft funktsiya ekanini e'tiborga olsak, u holda $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$.

3^0-xossa, skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = |\lambda\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\lambda\bar{a}, \bar{b})$, lekin $|\lambda\bar{a}| = |\lambda|\cdot|\bar{a}|$ va $\cos(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \cos(\bar{a}\,\bar{b})$. Shuning uchun $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

4^0-xossa skalyar ko'paytma ta'rifdan

$\bar{a}\,\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos(\bar{a}\wedge\bar{a}) = |\bar{a}|^2\cos 0^0 = |\bar{a}|^2$. $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'lsa, skalyar ko'paytma nolga teng: $\bar{a}\perp\bar{b} \Rightarrow \bar{a}\bar{b} = 0$ (3.2)

Buning isboti ta'rifdan kelib chiqadi.

Ortanormallangan $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bazis uchun

$$\bar{e}_i\bar{e}_j = \begin{cases}0, & i \neq j\\ 1, & i = j\end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (3.3)$$

Haqiqatan skalyar ko'paytma ta'rifidan

$\bar{e}_i\bar{e}_j = |\bar{e}_i|\,|\bar{e}_j|\cos(\bar{e}_i\wedge\bar{e}_j) = 1\cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Xususiy holat

$\bar{e}_i\bar{e}_j = |\bar{e}_i|^2 = 1$ (3.4)

2. Koordinatalari berilgan vektorlar skalyar ko'paytmasi

bilan

Uch o'lchovli vektor fazoda ortonormal bazis $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ berilgan bo'lsin, bu bazisga nisbatan $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ koordinatalarga ega:

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3$$
$$\bar{b} = x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3$$

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblashda (3.2) va (3.4) larni e'tiborga olsak, quyidagilarga ega bo'lamiz.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)\cdot(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlarning mos koordinatalari ko'paytmasining yig'indisiga teng. Ya'ni:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3.5)$$

Natijalar. 1. $\vec{a}(x,\ y,\ z)$ vektor uzunligi

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}} \qquad (3.6)$$

2. Ikki $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak (3.1) ga ko'ra

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (3.7)$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor koordinatalar bilan berilgan bo'lsa, bu vektorlar orasidagi burchak ushbu formula bilan aniqlanadi.

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}+z_2^{\ 2}}} \qquad (3.8)$$

1-misol. $\vec{a}(2,\ 3,\ 3)$ $\vec{b}(3,\ 1,\ -3)$ $\vec{c}(2,\ 0,\ -2)$ vektorlarning qaysi jufti perpendikulyar?

Yechish $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ skalyar ko'paytmalarini tekshiramiz:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3+3\cdot1+3\cdot(-3)=0$ $\quad\vec{a}\cdot\vec{c}=4+0-6=-2$ $\quad\vec{b}\cdot\vec{c}=6+0+6=12$

Bundan $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2-misol. $\vec{a}(1,\ -1,\ 0)$ $\vec{b}(1,\ -2,\ 2)$ vektor orasidagi burchakni toping.

Yechish (3.8) formuladan foydalanamiz.

$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{1+2+0}{\sqrt{1+1+0}\cdot\sqrt{1+4+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bundan $(\vec{a}\wedge\vec{b})=\varphi=45^0$.

3. Maktab geometriya kursidagi masalalarni yechishga tadbiqi

Biz yuqorida bayon qilingan vektorlar algebrani elementar geometriyaning bir qator teoremalarini isbot qilishda va masalalarini yechishda muvaffaqiyatli qo'llash mumkin.

Vektorlar algebrasini maktab geometriyasining masalalarini yechishga tadbiqini ko'rib chiqaylik.

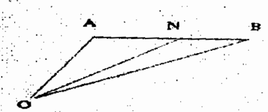
1-masala. AB kesmani o'rta nuqtasi N, O fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \qquad (3.9)$$

ekanligini isbotlang.

Isbot. Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak qoidasiga asosan (12-chizma) $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{NB}$;

bu tengliklarni qo'shib,



12-chizma

$2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{NB})$, $\quad\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

Shunday qilib, (3.9) formula o'rinli.

2-masala. N nuqta ABC uchburchakning og'irlik markazi bo'lsin, fazoda ixtiyoriy O nuqta olib

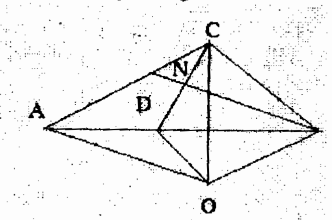
$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \qquad (3.10)$$

ekanligini isbotlang.

Isboti. D nuqta AB kesmaning o'rta nuqtasi uchburchak qoidasiga asosan (13-chizma)

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN}$; $\quad\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD})$ bo'lgani uchun

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$

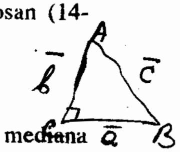


13-chizma

(3.9) formuladan va $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ vektor qiymatidan foydalanib, (3.10) formulani hosil qilamiz.

3-masala. C burchagi to'g'ri bo'lgan ABC uchburchak uchun Pifagor teoremasini isbotlang.

Isbot. $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ belgilaylik. Uchburchak qoidasiga asosan (14-chizma) $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ bu tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko'tarib topamiz.

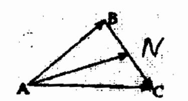


$\vec{c}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}$ $\quad\angle C=90^0$ bo'lgani uchun $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Shunday qilib, $\vec{c}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}$.

4-masala. ABC uchburchakning AB=c, AC=b va $\angle A$ berilsa m_a mediana uzunligini hisoblang.

Isbot. N nuqta $\overline{BC}$ kesmaning o'rta nuqtasi bo'lsa, (3.9) ga ko'ra bu tenglikni kvadratga ko'tarib quyidagiga ega bo'lamiz. (15-chizma)



15-chizma.

$$\overline{AN}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}+\overline{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\overline{AB}\cdot\overline{AC}) \quad |\overline{AB}|=c, \quad |\overline{AC}|=b, \quad |\overline{BC}|=a$$

belgilasak (15-chizma).

$$\overline{AN} = m_a = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}\ .$$

5 - masala. ABC uchburchak va fazoda O nuqta berilgan bo'lsin. O nuqta uchburchakning og'irlik markazi bo'lishi uchun $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. N nuqta ABC uchburchakning ogirlik markazi bo'lsin (13 chizma). Agar O nuqta N nuqta bilan ustma - ust tushsa, u holda $\overline{ON}=\bar{0}$, (3.10) formuladan foydalansak $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$ ega bo'lamiz.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. Skalyar ko'paytma, vektorlar ustidagi chiziqli amaldan farqini tushuntiring?
2. Skalyar ko'paytma ta'rifini ayting.
3. Skalyar ko'paytma xossalarini ayting.
4. Ortogonal bazis haqida nimalarni bilasiz?
5. Koordinatalar bilan berilgan vektorning skalyar ko'paytmasi.
6. Koordinatalari bilan berilgan vektor xossalari.

7. 1-masala. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi $\varphi=\frac{2}{3}\pi$, $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$ bo'lsa, quyidagilarni hisoblang: 1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $\bar{a}^2$; 3) $\bar{b}^2$; 4) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; 5) $(3\bar{a}-2\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$.
Javob: 1)- 6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) - 16.

8. 2-masala $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$ berilgan. α ning qanday qiymatida $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ va $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.
Javob: $\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

9. 3-masala. $\bar{a}+\bar{b}$ va $\bar{a}-\bar{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchun $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlar qanday shartlari qanoatlantirishi kerak.
Javob: $\bar{a}$ = $\bar{b}$.

10. 4- masala $\bar{a}(4;-2-4)$ va $\bar{b}(6;-3;2)$ vektorlar berilgan: 1) $\bar{a}$ $\bar{b}$; 2) $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlar orasidan burchak 3) $\sqrt{\bar{b}^2}$; 4)(2 $\bar{a}$-3$\bar{b}$) ($\bar{a}$+2$\bar{b}$).
Javob: 1) 22; 2)~~6~~; 3) 7; 4) - 200 2) $\arccos\frac{4}{21}$

Adabiyot { 1 }, 12 - §, 13 -§. { 2 }, 8 - §, 9 - §.

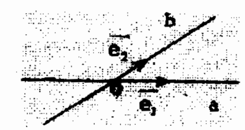
4- ma'ruza

Ma'ruza rejasi

1.Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi.
2.Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
3.To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.
4.Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi.

1.Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi

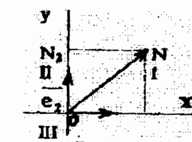
Tekislikda O nuqtaga qo'yilgan ikkita $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ bazis vektorlar berilgan bo'lsin (16-chizma). Bu vektorlar orqali o'tuvchi a va b to'g'ri chiziqlarni olamiz ($a\cap b=0$).



16-chizma.

1 - **Ta'rif.** Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ vektorlar bilan aniqlanuvchi a va b to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistema tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va 0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ yoki (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) ko'rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ vektorlarni koordinat vektorlar deyiladi; a to'g'ri chiziqni Ox bilan belgilab abtsissalar o'qi, b to'g'ri chiziqni esa Oy bilan belgilab ordinatalar o'qi deb ataladi.

Tekislikda (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikda birorta N nuqtani olaylik (17- chizma) ON vektorni N nuqtaning *radius* vektori deyiladi.



17-chizma.

$\overline{ON}$ vektorni hamma vaqt bazis vektorlari buyicha yoyib yozish mumkin:

$\overline{ON}=x\bar{e}_1+y\bar{e}_2$ (4.1)

$x, y\in R$. x, y sonlar ON radius vektorning koordinatalari deyiladi,

$\overline{ON}(x;y)$ yoziladi.

Radius –vektorning x, y koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi N(x, y) belgilaymiz. Bunda x soni N nuqtaning abtsissasi yoki birinchi koordinatasi, y son esa N nuqtaning ordinatasi yoki ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Xullas, tekislikda affin koordinatalar sistemasi berilsa, istalgan N nuqtaga uning koordinatalari bo'lmish bir juft $x, y\in R^2=R\times R$ sonlar mos keladi, aksincha, ma'lum tartibda olingan $x, y\in R$ sonlari, koordinatalari shu sonlardan iborat bitta N nuqta mos keladi.

Haqiqatan, tekislikda (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin (17-chizma) abtsissalar o'qiga O nuqtadan boshlab $\overline{ON_1}=x\bar{e}_1$ vektorni, ordinatalar o'qiga esa $\overline{ON_2}=y\bar{e}_2$ vektorlarni qo'yib, N_1 va N_2 nuqtalardan Oy va Ox o'qlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, ularning kesishgan nuqtasi izlanayotgan N nuqta bo'ladi, chunki $\overline{ON}=\overline{ON_1}+\overline{ON_2}=x\bar{e}_1+y\bar{e}_2$

Shunday qilib, (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) ga nisbatan

$$N(x,y)\Leftrightarrow\overline{ON}=x\bar{e}_1+y\bar{e}_2 \qquad (4.1)$$

Agar x=0 bo'lsa $\overline{ON}=y\bar{e}_2\Rightarrow\overline{ON}\parallel\bar{e}_2\Rightarrow N\in oy$

Agar y=0 bo'lsa $N\in ox$, ya'ni ox o'qida yotadi.

Shunday qilib, abtsissa o'qida yotgan nuqta koordinatalari (x, 0) va ordinata o'qida yotgan nuqtaning koordinatalar (0, y) bo'ladi. Koordinatalar boshining koordinatalari O(0, 0) bo'ladi.

Koordinat o'qlari tekislikni to'rtta qismga ajratadi. Har bir qismni chorak deyiladi.

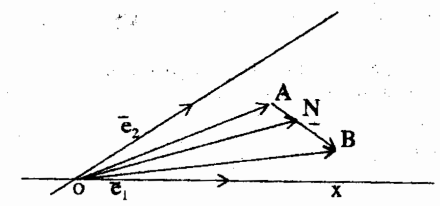
M(x, y) nuqta koordinat o'qlarda yotmasa uning qaysi chorakda yotishini x, y sonlarning ishorasiga qarab aniqlash mumkin.

1-masala. AB vektorlarining boshi $A(x_1, y_1)$ va oxiri $B(x_2, y_2)$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatasini toping.

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$$

Yechish: $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 - (y_2 - y_1)\vec{e}_2$ bundan

$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$



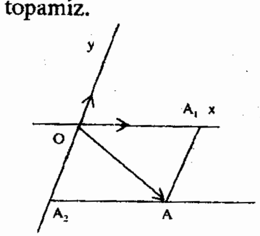
18-chizma

2-misol. Affin koordinatalar sistemasi berilgan A(3, -3), B(0, 3), C(-2, 0) nuqtalarni yasang.

Yechish. A nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{OA} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ vektorni yasaymiz.

Buning uchun 0 nuqtadan boshlab $\vec{e}_1$ vektorga kollinear $\overrightarrow{OA_1} = 3\vec{e}_1$ vektorni, $\vec{e}_2$ ga kollinear $\overrightarrow{OA_2} = -3\vec{e}_2$ vektorlarni yasaymiz.

Bu vektorlarning yig'indisini yasasak OA vektoriga ega bo'lamiz va A nuqtani topamiz.



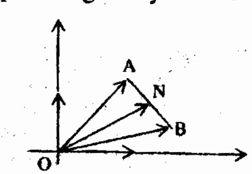
19-chizma

2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

Tekislikni A va B nuqtalar va $\lambda \neq -1$ haqiqiy son berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar
$$\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{NB} \qquad (4.2)$$
shart o'rinli bo'lsa, u holda N nuqta AB kesma berilgan λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

λ sonni uchta A, B, N nuqtalarning oddiy nisbati deyiladi va λ=(AB,



20-chizma

N) ko'rinishda yoziladi.

Agar $\lambda>0$ bo'lsa, $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{NB}$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'ladi, $N\in\overline{AB}$ kesmada yotadi, agar $\lambda<0$ bo'lsa, $N\notin\overline{AB}$. $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{NB}$ vektorlarning ishoralari har xil bo'ladi.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $N(x, y)$ koordinatalarga ega bo'lsin. Bo'luvchi N nuqtani koordinatalarini topaylik.

$\overrightarrow{AN}(x-x_1,\ y-y_1)$, $\overrightarrow{NB}(x_2-x,\ y_2-y)$

(4.2) formuladan foydalanib yozamiz.

$x-x_1=\lambda(x_2-x_1)$

$y-y_1=\lambda(y_2-y_1)$

Bundan:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (4.3)$$

(4.3) formula berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatalarini topish formulasi.

Agar $\lambda=1$ teng bo'lsa, N nuqta berilgan kesmani teng ikkiga bo'ladi. Ya'ni

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (4.4)$$

1-misol. Uchlari A(1, 2), B(0, 5), C(-2, 3) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning medianalar kesishgan nuqtasini toping.

Yechish AD mediana D(x, y) nuqta BC tomon o'rta nuqtasi $x_D=-1$, $y_D=4$, D(-1, 4).

Uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi O(x, y) bo'lsin, u holda

$$\frac{AO}{OD}=\lambda=2:1,\ \lambda=2$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{1+2(-1)}{3}=-\frac{1}{3}$$

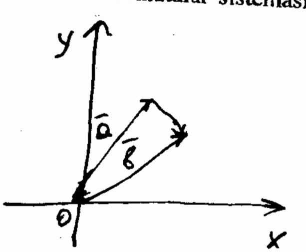
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+2\cdot 4}{3}=\frac{10}{3}$$

Demak, $O(-\frac{1}{3},\ \frac{10}{3})$.

4. To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi.

Affin koordinatalar sistemasining $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ koordinat vektori ortogonal bazisni tashkil qilsa, ya'ni $\bar{e}_1\perp\bar{e}_2$, $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=1$ bo'lsa, u holda affin koordinatalar sistemasi dekart koordinatalar sistemasi bo'ladi. Bunday koordinatalar sistemasini (o, i, j) ko'rinishida belgilaymiz (21-chizma). Bu yerda $i^2=j^2=1$, $i\times j=0$.

Dekart koordinat sistemasi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi bo'lgani uchun affin koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rinli mulohazalar Dekart koordinatalar sistemasida ham o'z kuchini saqlaydi.



Javob: $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Adabiyot. {1}, 14-§, 15-§, 16-§, {2}, 11-§, 12-§.

5-ma'ruza

Ma'ruza rejasi.

1. Ikki nuqta orasidagi masofa.
2. Tekislik yo'nalishi (orientatsiyasi).
3. Yo'nalishli tekislikdagi ikki vektor orasidagi burchak.

1. Ikki nuqta orasidagi masofa.

Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar (o, i, j) sistemasi berilgan bo'lsin. Bu koordinatalar sistemasiga nisbatan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar koordinatalari bilan berilgan (21-chizma).

$$\overrightarrow{OA}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j} \qquad (5.1)$$
$$\overrightarrow{OB}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}$$
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}.$$

Bundan $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

Ikkita A va B nuqtalar orasidagi masofa deb, $\overrightarrow{AB}$ vektor modulga $|\overrightarrow{AB}|$ aytiladi va $\rho(A,B)=AB=|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishida yoziladi.

$$\rho(A,\ B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (5.2)$$

Shunday A va B nuqta orasidagi masofa (5.2) formula bilan hisoblanadi.

1-masala. A(-1, 0) va B(2, 3) nuqtalar orasidagi masofani hisoblang.

Yechish (5.2) formuladan topamiz.

$\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(2-(-1))^2+(3-0)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$.

2-masala. Uchlarining koordinatalari to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida A(3, 2), B(6, 5), C(1, 10) bo'lgan. Uchburchakning to'g'ri burchakli uchburchak ekanligini isbotlang.

Yechish Uchburchak tomonlarini topamiz.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(6-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(1-6)^2+(10-5)^2}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(1-3)^2+(10-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+9^2}=2\sqrt{17}$

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2$ ikkinchi tomondan

$\overrightarrow{AB}(3,3)$, $\overrightarrow{BC}(-5,5)$ $\qquad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-15+15=0$, $\angle B=90^0$.

2. Tekislikning yo'nalishi (orientatsiyasi).

Ikki o'lchovli V vektor fazoning ikkita bazisi $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2)$, $(\bar{e}'_1,\ \bar{e}'_2)$ bo'lsin. Ikkinchi bazis vektorlari birinchi bazis vektorlar bo'yicha yoyib yozamiz.

$$\bar{e}'_1=a_1\bar{e}_1+b_1\bar{e}_2 \qquad (5.3)$$
$$\bar{e}'_2=a_2\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2$$

$\bar{e}'_1$ va $\bar{e}'_2$ vektorlarining koordinatalaridan $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$ jadval tuzamiz, bu jadvalni ikkinchi tartibli kvadratik matritsa deyiladi.

Bu matritsani birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi deb ham ataladi.

$$C=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

a_1b_2-b_1a_2 son matritsa determinanti deyiladi va uni

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2 \qquad (5.5)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Agar $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ $a_1b_2-b_1a_2=0$ bundan $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$, $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$. Demak, bazis $\bar{e}_1=\lambda\bar{e}_2$. Bu esa ($\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$) bazis vektorlarning kollinearligi kelib chiqadi.

V_2 fazo cheksiz bazislar mavjud bulardan ikkitasini olaylik va ularni $B_1(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $B_2(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$ bilan belgilaylik.

1-ta'rif. Agar B_1 bazisdan B_2 bazisga o'tish matritsasining determinanti $\Delta>0$ bo'lsa, B_1 va B_2 bazislar bir xil yo'nalishli yoki bir xil ismli deyiladi. Agar $\Delta<0$ bo'lsa, B_1 va B_2 lar har xil yo'nalishli yoki har xil ismli deyiladi.

Bu kiritilgan yangi tushuncha ushbu xossalarga ega:

1^0. Ixtiyoriy B o'z-o'ziga bir xil ismlidir.

Haqiqatan, B= ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) bazis vektorni o'zini – o'zi bilan yoyib yozamiz.

$\bar{e}_1'=1\bar{e}_1+0\bar{e}_2$;

$\bar{e}_2'=0\bar{e}_1+1\bar{e}_2$.

$Б\to Б$ o'tish matritsasi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lib, uning determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1>0$$

2^0. Agar B_1 va B_2 lar bir xil ismli bo'lsa, B_2 va B_1 lar ham bir xil ismlidir.

3^0. Agar B_1 bazis bilan B_2 bazis va B_2 bazis bilan B_3 bazislar bir xil ismli bo'lsa, u holda B_1 va B_3 bazislar ham bir xil ismli bo'ladi.

2^0, 3^0 xossalarning isboti o'quvchilarga havola qilamiz.

Tekislikdagi barcha bazislarni bir ismlilik tushunchasiga asoslanib, ikki sinfga ajratiladi, bu sinflarning biriga tegishli barcha bazislar o'zaro bir ismli bo'lib, har xil sinfga tegishli ikki bazis bir ismli bo'lmaydi.

Shu sinflarning har biri orientatsiya (yo'nalish) deb aytiladi, undagi bazislarni orientatsiyalangan bazislar deyiladi.

Ba'zan bu sinflarni bir – biridan farqlash uchun o'ng orientatsiya yoki chap orientatsiyalangan deb yuritiladi.

Bazis orientatsiyasi ma'lum bo'lgan tekislik orientatsiyalangan (yo'nalishga ega) tekislik deyiladi.

Agar B=($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$), B^1=($\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$) bazislar bir xil (qarama-qarshi) orientatsiyalangan bo'lsa, (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) va (0, $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$) koordinatalar sistemasi bir xil (qarama-qarshi) orientatsiyalangan deyiladi.

Odatda (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) koordinatalar sistemasi $\bar{e}_1$ vektorni 0 nuqta atrofida $\bar{e}_2$ vektor ustiga tushishi uchun qisqa yo'l bo'yicha burish soat mili harakatga teskari bo'lsa, musbat orientatsiyali deyiladi.

3-misol. Tekislikda (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) va (0, $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$) affin koordinatalar sistemasi berilgan. 0=0, $\bar{e}_1'=\bar{e}_1$, $\bar{e}_2'=-\bar{e}_2$ bo'lsa, koordinatalar sistemasini yo'nalishlarini aniqlang.

Yechish $\bar{e}_1'=1\bar{e}_1-0\bar{e}_2$;
$\bar{e}_2'=0\bar{e}_1-1\bar{e}_2$.

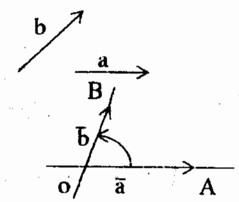
B bazisdan B^1 bazisga o'tish matritsasining determinanti, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1<0$.

Demak, (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$), (0, $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$) affin koordinatalar sistemasi qarama –qarshi yo'nalgan 22-chizmada (0, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$) va (0, $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$) affin koordinatalar sistemasi bir xil orientatsiyalangan.

22-chizma

3. Yo'nalishli tekislikdagi ikki vektor orasidagi burchak.

Tekislikda nol bo'lmagan ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar berilgan bo'lsa, bu vektorlarni O nuqtaga ko'chirib, $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$. Hosil bo'lgan $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ nurlar orasida burchak $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak deyiladi (23-chizma) va $(\bar{a}\hat{}\bar{b})$ ko'rinishida belgilaymiz.



23-chizma

Ixtiyoriy ikkita vektor uchun $0\le(\bar{a}\hat{}\bar{b})\le\pi$ orientatsiyalangan tekislikda yo'nalishga ega bo'lgan burchak tushunchasini kiritaylik.

Tekislikda $\bar{a}$ va $\bar{b}$ nol bo'lmagan vektorlar berilgan, agar bu vektorlarni tartiblasak, ya'ni $\bar{a}$ vektorni birinchi $\bar{b}$ vektorni ikkinchi deb olsak ($\bar{a}\neq\lambda\bar{b}$), u holda $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak yo'nalgan burchak deb aytiladi va $(\bar{a}\hat{}\bar{b})$ ko'rinishida yoziladi.

Agar $\bar a$, $\bar b$ vektorlar o'ng bazisni tashkil qilsa $(\bar a\wedge\bar b)$, u holda $(\bar a\wedge\bar b)>0$ bo'lib, chap bazisni tashkil qilsa - $(\bar a\wedge\bar b)$ bo'ladi.

Agar $\bar a\uparrow\uparrow\bar b$ bo'lsa, $(\bar a\wedge\bar b)=0$, agar $\bar a\downarrow\uparrow\bar b$ bo'lsa $(\bar a\wedge\bar b)=\pi$.

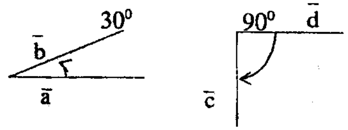
Shunday qilib, $\bar a\neq 0$ $\bar b\neq 0)$ vektorlar uchun $-\pi\le(\bar a\wedge\bar b)\le\pi$.

24-chizmada $\bar a$, $\bar b$ vektorlar o'ng bazisni $\bar c$, $\bar d$ vektorlar chap bazisni tashkil qiladi. $(\bar a\wedge\bar b)=30$, $(\bar c\wedge\bar d)=-90$ (24-chizma).

Vaholanki, $(\bar a\wedge\bar b)=-(\bar b\wedge\bar a)$

$\sin(\bar a\wedge\bar b)=-\sin(\bar b\wedge\bar a)$

$\cos(\bar a\wedge\bar b)=\cos(\bar b\wedge\bar a)$



24-chizma

4-masala. Ortogonal $\bar i$, $\bar j$ bazisgacha nisbatan $\bar a(a_1,\ a_2)$ $\bar b(b_1,\ b_2)$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan $(\bar a\wedge\bar b)$ yo'nalishli burchakni toping.

Yechish Bu masalani yechish uchun $\cos(\bar a\wedge\bar b)$ va $\sin(\bar a\wedge\bar b)$ larni topish yetarlidir. $(\bar a\wedge\bar b)=\varphi$, $(\bar i\wedge\bar a)=\varphi_1$ $(\bar i\wedge\bar b)=\varphi_2$ (24-chizma).

U holda

$$\cos\varphi=\cos((\bar a\wedge\bar i)+(\bar i\wedge\bar b))=\cos((\bar i\wedge\bar b)-(\bar i\wedge\bar a))=\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\sin\varphi=\sin((\bar a\wedge\bar i)+(\bar i\wedge\bar b))=\sin((\bar i\wedge\bar b)-(\bar i\wedge\bar a))=\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

Shunday qilib,

$$\cos\varphi=\cos\varphi_2\cos\varphi_1+\sin\varphi_2\sin\varphi_1$$

$$\sin\varphi=\sin\varphi_2\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\sin\varphi_1$$

$$a_1=|\bar a|\cos\varphi_1 \qquad a_2=|\bar a|\sin\varphi_2$$

$$b_1=|\bar b|\cos\varphi_2, \qquad b_2=|\bar b|\sin\varphi_1$$

Bulardan $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2,\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$ qiymatlarini (5.6) ga qo'yib topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\bar a||\bar b|} \qquad \sin\varphi=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{|\bar a||\bar b|} \qquad (5.7)$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. Ikki nuqta orasidagi masofa deb nimaga aytiladi?
2. Ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasini chiqaring.
3. O'tish matritsasi deb nimaga aytiladi?
4. Bir xil ismli bazis deb nimaga aytiladi?
5. O'ng va chap sistemalar nima?
6. Orientatsiyalangan bazis deb nimaga aytiladi?
7. O'ng va chap orientatsiya deb nimaga aytiladi?

Adabiyot {1}, 16-§, 17-§, {2}, 13-§, 14-§.

6 - ma'ruza

Ma'ruza rejasi

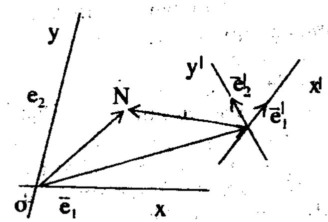
1. Affin koordinatalar sistemasini almashtirish.
2. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.

1. Affin koordinatalar sistemasini almashtirish.

Geometrik obrazlarni soddalashtirish uchun ko'pincha bir koordinatalar sistemasidan boshqa koordinatalar sistemasiga o'tishga to'g'ri keladi. Bu esa bir nuqtaning har xil sistemadagi koordinatalarni bog'lovchi formulalarni topish masalasini keltirib chiqaradi.

Tekislikda ikkita $(0,\ \bar e_1,\ \bar e_2)$ va $(0,\ \bar e_1',\ \bar e_2')$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin (25-chizma).

Qulaylik uchun birinchisini eski, ikkinchisini yangi affin koordinatalar sistemasi deb olamiz. Bundan tashqari, yangi koordinatalar sistemasining vaziyati eski koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan bo'lsin.



25-chizma

$$\bar e_1'(c_{11},\ c_{21}),\ \bar e_2'(c_{12},\ c_{22}),\ o'(x_0,\ y_0).\ C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21}\\ c_{12} & c_{22}\end{pmatrix} \qquad (6.1)$$

Ta'rifga ko'ra ushbuni yoza olamiz.

$$\bar e_1'=c_{11}\bar e_1+c_{21}\bar e_2;$$

$$\bar e_2'=c_{12}\bar e_1+c_{22}\bar e_2. \qquad o'=x_0\bar e_1+y_0\bar e_2 \qquad (6.2)$$

Bizning maqsadimiz N nuqtaning eski koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini x, y larni, shu nuqtaning yangi koordinatalar sistemasidagi x', y' koordinatlar orqali ifodalashdir.

Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak qoidasiga asosan

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'N}$ $\quad\overrightarrow{ON}=x\bar e_1+y\bar e_2$ (25 - chizma).

Bundan, $x\bar e_1+y\bar e_2=\overrightarrow{OO'}+x'\bar e_1'+y'\bar e_2'$.

(6.2) dan foydalanib, $x\bar e_1+y\bar e_2=x_0\bar e_1+y_0\bar e_2+(c_{11}x'+c_{12}y')\bar e_1+(c_{21}x'+c_{22}y')\bar e_2$

$\bar e_1$ va $\bar e_2$ vektorlar kolleniar emasligidan foydalanib quyidagi formulani yozamiz.

$$x=c_{11}x'+c_{12}y'+x_0$$

$$y=c_{21}x'+c_{22}y'+y_0 \qquad (6.4)$$

(6.3) formuladan affin koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi deyiladi. Bu formulaning chap tomonining koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa

$$C'=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21}\\ c_{12} & c_{22}\end{pmatrix} \qquad (6.5)$$

C' matritsa C matritsani transponirlash natijasida hosil qilingan. Matritsa determinanti $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ (6.6)

chunki $\vec{e}_1'$ va $\vec{e}_2'$ vektorlar bazis vektorlar.

(6.4) ni hamma vaqt x', y' larga nisbatan yechish mumkin. Bu esa N nuqtaning yangi koordinatalar sistemasidagi x', y' larni shu nuqtaning eski sistemasidagi x, u koordinatalar orqali ifodalash mumkinligini ko'rsatadi.

Quyidagi xususiy holni qaraymiz:

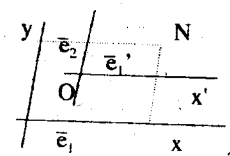
1. $O \neq O'$ $\vec{e}_1'(c_{11}, c_{21}) = \vec{e}_1(1, 0)$

$\vec{e}_2'(c_{12}, c_{22}) = \vec{e}_2(0, 1)$ bundan $s_{11}=1$, $s_{21}=0$, $s_{12}=0$, $s_{22}=1$ bu topilgan qiymatlarni (6.4) formulaga qo'yib (26-chizma)

$x=x'+x_0;$

$y=y'+y_0.$ (6.7)

koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish formulasiga ega bo'lamiz.



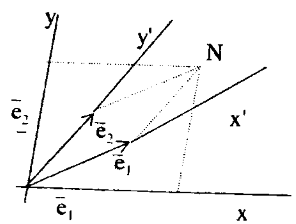
26-chizma

2. O=O' bo'lib, bazis vektorlar turlicha bo'lsin (27-chizma), u holda $x_0=y_0=0$ bo'lib,

$x = c_{11}x' + c_{12}y'$

$y = c_{21}x' + c_{22}y'$ (6.8)

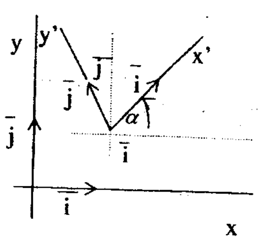
formulaga ega bo'lamiz.



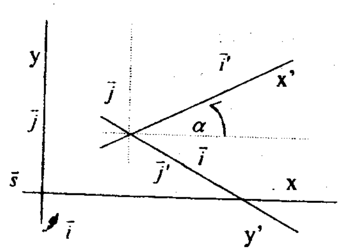
27-chizma

2. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.

Endi dekart koordinatalar sistemasini almashtirishga to'xtaymiz. Bir to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidan ikkinchi dekart koordinatalar sistemasiga o'tishda (6.4) formuladan foydalanamiz, lekin o'tish matritsasining s_{ij} (i, j=1,2) elementlariga qo'shimcha shartlar qo'yiladi.



28-chizma



29-chizma

Tekislikda $(o, \bar{i}, \bar{j})$ - eski $(o, \bar{i}', \bar{j}')$ - yangi dekart koordinatalar sistemasi bo'lsin.

$$\bar{i}' = c_{11}\bar{i} + c_{21}\bar{j}$$
$$\bar{j}' = c_{12}\bar{i} + c_{22}\bar{j} \qquad (6.6)$$

$(\bar{i} \wedge \bar{i}') = \alpha$ bo'lsin, bu yerda ikki hol o'rinli bo'ladi.

1. Eski va yangi koordinatalar sistemasi bir xil yo'nalishga ega (29-chizma).

$(\bar{i}' \wedge \bar{j}') = 90^0 + \alpha, \quad (\bar{i} \wedge \bar{j}) = 90^0 - \alpha, \quad (\bar{j} \wedge \bar{j}') = \alpha$

(6.6) tenglikni navbat bilan $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$c_{11} = \bar{i}' \cdot j = \cos(i' \wedge j) = \cos\alpha \qquad c_{21} = \bar{i}' \cdot j = \cos(i' \wedge j) = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$c_{12} = \bar{j}' \cdot i = \cos(\bar{j}' \wedge i) = \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha, \quad c_{22} = \cos\alpha$

topilgan qiymatlarni (6.4) ga qo'yib,

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \qquad (6.7)$$

Yo'nalishlari bir xil bo'lgan dekart koordinatalar sistemasini almashtirish formulasiga ega bo'lamiz.

2. Eski va yangi koordinatalar sistemasi turli yo'nalishga ega (29-chizma).

$(\bar{j}' \wedge \bar{i}) = 270^0 + \alpha, \quad (\bar{i}' \wedge \bar{j}) = 90^0 - \alpha, \quad (\bar{j} \wedge \bar{j}') = 180^0 + \alpha$

Buni e'tiborga olib, (6.6) ni $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlarga navbati bilan ko'paytirsak, ushbuga ega bo'lamiz.

$c_{11} = \bar{i}' \cdot j = \cos\alpha \qquad c_{21} = \bar{i}' \cdot j = \cos(i' \wedge j) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$c_{12} = \bar{j}' \cdot i = \cos(\bar{j}' \wedge i) = \cos(270^0 + \alpha) = \sin\alpha, \quad c_{22} = \cos(\bar{j}' \wedge \bar{j}) = \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$

Topilgan qiymatlarni (6.4) ga qo'yib,

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0$$
$$y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0 \qquad (6.8)$$

Yo'nalishlari har xil bo'lgan dekart koordinatalar sistemasini almashtirish formulasiga ega bo'lamiz.

(6.7) va (6.8) formulalarni bitta

$$x = x'\cos\alpha + \varepsilon y'\sin\alpha + x_0$$
$$y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0 \qquad (6.9)$$

formulaga birlashtirish mumkin, bu yerda $\varepsilon = \pm 1$, yo'nalishlar bir xil bo'lsa $\varepsilon = +1$, agar har xil bo'lsa $\varepsilon = -1$ ga teng.

1-misol. Ikkita $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ va $(0, \bar{e}_1', \bar{e}_2')$ affin reperlar berilgan bo'lib, bunda $o'(1, 2)$, $\bar{e}_1(-1, 1)$, $\bar{e}_2(2, -1)$ bo'lsin. N nuqtaning eski reperga nisbatan koordinatalar x= 2, y=1 ekanligi ma'lumligini bilgan holda bu nuqtaning yangi reperga nisbatan x', y' koordinatalarini toping.

Yechish Berilgan: $s_{11}=-1$, $s_{21}=1$, $s_{12}=2$, $s_{22}=-1$, $x_0=1$, $u_0=2$. Bu nuqtalarni (6.4) ga qo'yib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$x = -x' + 2y' + 1 \qquad \begin{cases} -x' + 2y' = 1 \\ x' - y' = -1 \end{cases}$$
$$y = x' - y' + 2$$

bu sistemani yechib x'=2, y'=0.

Yangi sistemada N nuqtaning koordinatalari x'=2, y'=0.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. N^1=L(N) eski va yangi affin koordinatalar sistemasi.
2. Yangi koordinatalar sistemasining eski koordinatalar sistemasiga nisbatan berilishini tushuntiring.
3. O'tish matritsasi va uning determinanti.
4. Matritsa determinanti nega nolga teng emas tushuntiring.
5. Affin koordinatalarni almashtirish formulasi.
6. Affin almashtirishning xususiy hollari.
7. To'g'ri burchakli dekart koordinatalarni almashtirishning birinchi holi.
8. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini almashtirish, ikkinchi holi.
9. Quyidagi hollar uchun $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ affin koordinatalar $(0, \bar{e}_1', \bar{e}_2')$ affin koordinatalar sistemasiga o'tish formulasini yozing.
   1) $\bar{e}_1'(2, -1)$, $\bar{e}_2'(-2, 1)$;
   2) $\bar{e}_1'(1, 1)$, $\bar{e}_2'(0, 1)$.
   1 javob: $\begin{array}{l} x = 2x' - 2y' \\ y = x' + y' \end{array}$
10. $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan A(2; 1) va $V(-\frac{3}{2}; 3)$ berilgan. Koordinatalar boshi O'(0; 1) nuqtada bo'lgan shunday $(0, \bar{e}_1', \bar{e}_2')$ reperni topingki, unda A(1; 0) va V(0; 1) bo'lsin.
11. $(o, \bar{i}, \bar{j})$ dekart koordinatalar sistemasi berilgan. Koordinata o'qlarini quyidagi burchaklarning biriga burishda koordinatalarni almashtirish formulasini yozing.
    1) 60^0; 2) -45^0; 3) 90^0; 4) 180^0.
12. Quyidag~~ilar~~ berilganlarga asosan dekart koordinatalar sistemasini almashtirishlar formulasini yozing.
    1) $\bar{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}, \quad \bar{j}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}, \quad O'(5, -3)$
    2) $\bar{i}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{10}; \frac{7\sqrt{2}}{1}\right), \quad O'(-3, \sqrt{2}), \ \bar{j}' = \bar{j}$.

Koordinatalar sistemasining arentatsiyalari bir xil.

Adabiyot {1}, 18-§, 19-§, {2}, 15-§.

7-ma'ruza

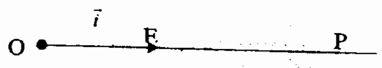
Ma'ruza rejasi

1. Qutb koordinatalar sistemasi.
2. Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish.
3. Qutb koordinatalari bilan berilgan ikkita nuqta orasidagi bog'lanish.

1. Qutb koordinatalar sistemasi.

Geometriyada affin, to'g'ri burchakli dekart koordinatalar bilan bir qatorda qutb koordinatalari ham qaraladi. Ko'plab tadqiqotlarda va egri chiziqning muhim sinflarini o'rganishda qutb koordinatalar sistemasi qo'l kelmoqda.

Shu sistema bilan tanishaylik. Yo'nalish tekislikda 0 nuqta va bu nuqtadan chiquvchi OP nur va OP nurda yotuvchi $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$ birlik vektor olamiz (30- chizma).



30 - chizma.

Hosil bo'lgan geometrik obraz qutb koordinatalar sistemasi deyiladi va (0, i) ko'rinishda belgilanadi.

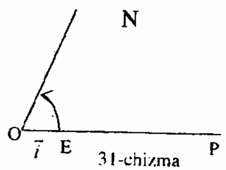
O nuqtani qutb boshi, OP nur esa qutb o'qi deyiladi.

Tekislikda (0, i) qutb koordinatalar sistemasi va ixtiyoriy N nuqta berilgan bo'lsin, bu nuqtaning tekislikdagi vaziyatini ma'lum tartibda olingan ikkita son:

1) OE birlik kesmada o'lchangan $\rho = |ON|$ masofa (31 - chizma).

2) OP nur ON nurning ustiga tushishi uchun burilishi kerak bo'lgan yo'nalishli $\varphi = (i\hat{\ }ON)$ burchak bilan to'liq aniqlanadi.

ρ, N nuqtaning qutb radius φ ni N nuqtaning qutb burchagi deyiladi, ularni birgalikda N nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va (ρ, φ) ko'rinishda yoziladi. O nuqta uchun $\rho = 0$, φ - aniqlanmagan.

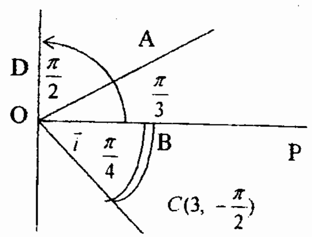


31-chizma

Agar $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ o'zgarsa, tekislikni har bir nuqtasi qutb koordinatalar bilan ta'minlanadi.

1-misol. $A(2; \frac{\pi}{3})$, $B(1; 0)$, $C(3; \frac{\pi}{4})$, $D(1; \frac{\pi}{2})$. 32- chizmada berilgan nuqtalar tasvirlangan.

Ravshanki, har qanday (ρ, φ) juft haqiqiy sonlar uchun tekislikning bitta nuqtasi mavjud bo'lib, bu sonlar shu nuqtaning koordinatalari bo'ladi. Ammo bir nuqtaning o'ziga cheksiz ko'p sonlar mos keladi. Chunki, N nuqtaning koordinatalari $\rho = a > 0$, $\varphi = \alpha$ bo'lsa, $\rho = a$, $\varphi = \alpha + 2\pi k$ (bu yerda k=0, 1...). Juftlari ham shu N nuqtaning koordinatalari bo'ladi, chunki ON



32 - chizma

nur OP qutb o'qini α burchakka qadar burishdan hosil bo'ladi deb faraz qilinsin, u holda OP nurni $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ qadar burishdan ham o'sha nurning o'zini hosil qilish mumkin.

N nuqtaning qutb burchagi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar orasidan $-\pi \le \varphi < \pi$ tengsizlikni qanoatlantiradigan aniq bir qiymati OP nurni ON nurni ustiga tushishi uchun burish kerak bo'lgan burchak olinadi. ON nur OP nurga

qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, 180^0 ga ikki yo'nalishda burish mumkin, bu vaqtda qutb burchagining bosh qiymati uchun $\varphi = \pi$ qabul qilinadi.

2. Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish.

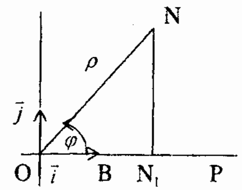
Tekislikda $(0, \vec{i})$ qutb koordinatalar sistemasi berilgan. Koordinatalar boshi qutb boshi bilan, absissalar o'qining musbat qismi qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan musbat yo'nalishli $(0, \vec{i}, \vec{j})$ dekart reperini kiritamiz (33-chizma).

Tekislikdagi N nuqtaning qutb koordinatalar ρ, φ dekart koordinatalari x, y bo'lsin.

To'g'ri burchakli ONN_1 uchburchakdan

$$x = \rho\cos\varphi \qquad (7.1)$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

Nuqtaning qutb koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning dekart koordinatalari (7.1) formuladan topiladi.



33-chizma

Agar N nuqtaning dekart koordinatalari ma'lum bo'lsa, uning qutb koordinatalarini ushbu

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{y}{x};$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (7.2)$$

formuladan topiladi.

Eslatma. N nuqtaning dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tishda $tg\varphi = \frac{y}{x}$ formula qutb burchagini qiymatini to'liq aniqlaydi, chunki buning uchun yana φ ning miqdori musbat yoki manfiy ekanligini ham bilish kerak. Odatda bu N nuqtaning qaysi chorakda joylashishiga qarab aniqlanadi. Masalan, (7.2) formulada x=3, y=3 bo'lsa, tgφ = 1 bo'lib, φ=45^0. Lekin, x=-3, y=-3 bo'lganda ham tgφ = 1 bo'lib, 45^0 emas, 135^0 bo'lishi kerak, chunki (-3; -3) nuqta uchinchi chorakda joylashgan φ burchakning qiymati va ishorasini $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ ga qarab aniqlash qulayroq.

3. Ikki nuqta orasidagi masofa.

Qutb koordinatalari bilan $N_1(\rho_1, \varphi_1)$ va $N_2(\rho_2, \varphi_2)$ nuqtalar orasidagi masofani hisoblash formulasini chiqaraylik.

Tekislikdagi N_1 va N_2 nuqtalarning dekart koordinatalari $N_1(x_1, y_1)$ va $N_2(x_2, y_2)$ bo'lsin. (7.1) formulaga ko'ra

$$x_1 = \rho_1\cos\varphi_1 \qquad x_2 = \rho_2\cos\varphi_2$$
$$\text{va}$$
$$y_1 = \rho_1\sin\varphi_1 \qquad y_2 = \rho_2\sin\varphi_2$$

U holda

$$N_1N_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\rho_2\cos\varphi_2 - \rho_1\cos\varphi_1)^2 + (\rho_2\sin\varphi_2 - \rho_1\sin\varphi_1)^2} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (7.3)$$

(7.3) qutb koordinatalar bilan berilgan ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasi.

1-masala. Dekart koordinatalar sistemasida A(7, -7), N(-5, 12), P(3, 0) nuqtalar berilgan. Ularning qutb koordinatalarini toping?

Yechish Bu masalani yechishda (7.2) formuladan foydalanamiz.

$A(7,\ -7),\ \rho=\sqrt{7^2+(-7)^2}=7\sqrt{2} \qquad tg\varphi=\frac{-7}{7}=-1,\ \ \varphi=\frac{3\pi}{4}$

$N(-5;\ 12),\ \rho=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13 \qquad tg\varphi=-\frac{12}{5},\ \ \varphi=arctg(-\frac{12}{5})$

$m(3;\ 0),\ \ \rho=\sqrt{3^2}=3 \qquad tg\varphi=\frac{0}{3}=0,\ \ \varphi=0$

2-masala. Uchlarini $A(5;\ \frac{\pi}{2}),\ B(8;\ \frac{5\pi}{6})$ va $C(3;\ \frac{7\pi}{6})$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning muntazam ekanligini isbotlang.

Yechish Uchburchakning muntazam ekanligini isbotlash uchun AB=BC=AC ni isbotlash etarli. Buning uchun (7.3) formuladan

$$AB=\sqrt{5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2})}=\sqrt{25+64-80\cdot\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{89-80\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$$

$$AC=\sqrt{5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\cos(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{2})}=\sqrt{25+9-30\cdot\cos(-\frac{2\pi}{3})}=\sqrt{25-30(-\frac{1}{2})}=\sqrt{49}=7$$

$$BC=\sqrt{64+9-2\cdot8\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{73-24}=\sqrt{49}=7$$

Demak, AB=AC=BC ekan, ABC uchburchak muntazam.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. Qutb koordinatalar sistemasini kiritishdan maqsad nima?
2. Qutb koordinatalar sistemasini ta'riflang.
3. Nuqtaning qutb koordinatalaridan Dekart koordinatalariga o'tish formulasini yozing.
4. Nuqtaning dekart koordinatalardan qutb koordinatalarga o'tish formulasini yozing.
5. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasini chiqaring.
6. Quyidagi nuqtalar orasidagi masofani aniqlang.

   a) $\left(5;\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(3;\ -\frac{\pi}{6}\right)$ б) $\left(4;\ \frac{11\pi}{6}\right),\ \left(3,\ \frac{\pi}{9}\right)$ в) $\left(4;\ \frac{\pi}{5}\right),\ \left(6,\ \frac{6\pi}{5}\right)$

   Javob: a) $\sqrt{19}$; b) 5; v) 10
7. Uchlari $A\left(2\sqrt{3};\ \frac{\pi}{3}\right), B\left(\sqrt{3};\frac{2\pi}{3}\right)\ C\left(4+\sqrt{3};\ \frac{2}{3}\pi\right)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak to'g'ri burchakli uchburchak ekanligini isbotlang.

Adabiyot. {1}, 20-§, 22-§, {2}, 16-§, 17-§.

8-ma'ruza

Ma'ruza rejasi

1. Koordinatalarni bog'lovchi tenglamalar:

2. Tengsizliklarning geometrik ma'nosi.

1. Tekislikda koordinatalar sistemasi berilsa, tekislik nuqtalari bilan RxR=R^2 haqiqiy sonlar to'plami orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Tekislikda $(0,\ \bar{e}_1,\ \bar{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi olib, x, y o'zgaruvchilarni kamida birini o'z ichiga olgan F(x, y) ifoda berilgan bo'lsin. Agar $x=x_0$, $y=y_0$ sonlar uchun $F(x_0,\ y_0)$ ifoda ma'noga ega bo'lsa, u holda x_0, y_0 sonlar F(x, y) ifodani aniqlanish sohasiga tegishli deyiladi. Bunday sonlarning har bir jufti berilgan koordinatalar sistemasida aniq bitta nuqtani aniqlaydi. Barcha bunday nuqtalar to'plami tekislikdagi biror geometrik shakldan iborat. Bu figura butun tekislikdan yoki uning biror qismidan, ba'zan bo'sh to'plamdan iborat bo'ladi.

1-masala. $F(x,\ y)=\frac{x}{y}-1$ ifoda $y\neq0$ bo'lganda ma'noga ega bo'lib, uning aniqlanish sohasi tekislikning OX o'qida yotmagan barcha nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi.

2-masala. $F(x,\ y)=\sqrt{-(x^2+y^2+1)}$ ifoda x, y haqiqiy sonlarning har qanday qiymatlarida ma'noga ega emas.

Ushbu

$$F(x,\ y)=0\quad (F(x,\ y)\vee0) \qquad (8.1)$$

ko'rinishdagi tenglama (tengsizliklarni) qaraymiz. $(>,<,\geq,\leq)$ belgilarning hammasini bitta $\vee$ belgi bilan belgilaymiz.

Agar $x=x_0$, $u=u_0$ sonlarni (8.1) dagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'ysak, uni to'g'ri tenglikka (tengsizlikka) aylantirsa, bu sonlar (8.1) tenglamaning (tengsizlikning) yechimi deyiladi.

3-masala. F(x, y)=3x+2y-2=0, x=4, y=-5 sonlar tenglamaning yechimi bo'ladi, chunki bu sonlar tenglamani qanoatlantiradi x=5, y=7 sonlar tenglamani qanoatlantirmaydi, demak tenglama yechimi bo'lolmaydi.

4-masala. F(x, y)=3x+2y>1 olaylik x=4, y=-5 sonlar 3x+2y>1 tengsizlik yechimi bo'ladi, chunki bu sonlarni tengsizlikdagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'ysak,

$3\cdot4+2\cdot(-5)>1,\quad 2>1$

x=4, y=-6 sonlar tengsizlikning yechimi bo'la olmaydi, chunki bu sonlarni tengsizlikdagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'yganda 0>1 bo'ladi.

(8.1) tenglamaning (tengsizlikning) barcha yechimlar to'plami tekislikda biror figurani aniqlaydi. Endi figuraning tenglamasi (figurani aniqlovchi tengsizlik) tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Agar F figuraga tegishli har bir nuqtaning koordinatalari F(x, y)=0 tenglamani $(F(x,\ y)\vee0)$ (tengsizlikni) qanoatlantirsa, F ga tegishli bo'lmagan (birorta ham) nuqtaning koordinatalari uni qanoatlantirmasa, bu tenglama (tengsizlik) *figuraning tenglamasi (figurani aniqlovchi tengsizlik)* deb ataladi.

Agar figuraning tenglamasi (figurani aniqlovchi tengsizlik) ma'lum bo'lsa, tekislikning qanday nuqtasi shu figuraga tegishli yoki tegishli emasligi masalasini hal qilish mumkin.

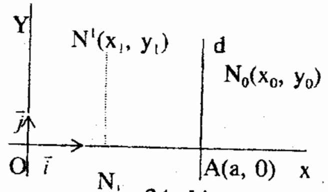
Geometrik shakllarni koordinatalar metodi bilan o'rganishda ushbu ikkita masalaga amal qilinadi:

1) Figura xossalari berilsa, bu figurani aniqlovchi analitik shart yoziladi.

2) Agar figurani aniqlovchi analitik shartlar yozilsa, uning geometrik xossalari o'rganiladi.

Birinchi muammoni echuvchi masalani ko'rib chiqaylik.

1-misol. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida, A(a, 0) nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qiga parallel (34-chizma) bo'lgan d to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.



34-chizma

Yechish Tekislikdagi N(x, y) nuqta d to'g'ri chiziqda yotishi uchun

x=a (8.2)

bo'lishi zarur va yetarlidir.

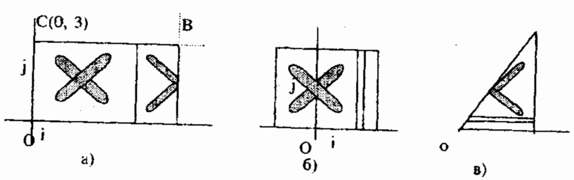
Haqiqatan, agar $N_0(x_0, y_0)$ nuqta d to'g'ri chiziqda yotsa, u holda A nuqta N_0 nuqtaning OX o'qdagi proektsiyasi bo'ladi, shuning uchun N_0 va A nuqtalar bir xil proektsiyalarga ega bo'ladi, ya'ni x_0=a.

N_0 nuqtaning koordinatalari (8.2) tenglamani qanoatlantiradi.

Agar $N^1(x_1, y_1)$ nuqta d to'g'ri chiziqda yotmasa, u holda uning OX o'qdagi proektsiyasi N^1_1 nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushmaydi (35-chizma), shuning uchun $x_1 \neq a$, demak, N' nuqtaning koordinatalari (8.2) tenglamani qanoatlantirmaydi.

Shunday qilib, (8.2) tenglama d to'g'ri chiziqning tenglamasi ekanligi isbotlandi.

5-masala. 35-chizmada shtrixlar bilan tasvirlangan har bir figurani aniqlovchi analitik shartlarni toping (koordinatalar sistemasi chizmada ko'rsatilgan).



35-chizma

iski

Yechish: 35,a chizmada ikkita tasmaning kesishdan hosil bo'lgan OABC to'g'ri burchakli to'rtburchak tasvirlangan.

Birinchi tasmani I bilan, ikkinchi tasmani II bilan belgilaymiz. Birinchi tasma OC va AB to'g'ri chiziqlilar bilan chegaralangan, bu tasmaga qarashli N(x,y) nuqta koordinatalari:

$$0 \le x \le 5$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

II tasma OA va CB to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan, bu tasmaga qarashli N(x,y) nuqtaning koordinatalar:

$$0 \le y \le 3$$

tengsizlikni qanoatlantirishishi zarur va yetarlidir.

Shunday qilib, OABC to'g'ri burchakni aniqlovchi shartlar ushbu:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasiga keltiriladi.

35,b chizmada yarim tekislik tasvirlangan. Bu yarim tekislik va faqat ordinatalari musbat bo'lgan nuqtalargina tegishli bo'ladi. Bu fugurani aniqlovchi tengsizlik $y \ge 0$ ko'rinishda bo'ladi.

35,v chizmada $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasining bita koordinata burchagi tasvirlangan. N(x,y) nuqta bu figuraga tegishli bo'lishi uchun, N nuqtaning har bir koordinatlari manfiy bo'lmasligi zarur va yetarlidir, ya'ni $y \ge 0$.

2) Yuqorida qo'yilgan ikkinchi muammoni hal qiluvchi masalani ko'raylik.

3-masala. F figuraning

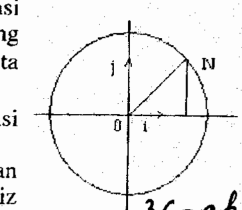
$$x^2 + y^2 = 4 \qquad (8.3)$$

tenglamasi berilgan. Uning xossalarini o'rganib qanday chiziq ekanligini aniqlang.

Yechish: Agar N(x,y) nuqta F ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, uning koordinatalari (8.3_ tenglamaning qanoatlantirishi kerak. $ON^2 = x^2 + y^2$ bo'lsa, u holda N nuqta uchun $ON^2 = 4$ yoki $ON = 2$.

Shunday qilib, F figuraning ixtiyoriy nuqtasi koordinatalr boshidan $ON = r = 2$ uzoqlikda yotadi.

Ya'ni markazi koordinatalar boshida radiusi r bo'lgan aylanada yotadi. Bu aylanani S(0,r) ko'rinishda belgilaymiz (36-chizma).



36-chizma

Agar $N_1(x_1, y_1)$ nuqta F ga tegishli bo'lmasa, u holda $x_1^2 + y_1^2 \neq 4$.

36-chizma

Ya'ni, $ON_1 \neq 2$. Bu esa $N_1 \notin S(0,r)$.

Shunday qilib, (8.4) tenglama bilan berilgan F figura S(0,r) aylanadan iborat.

5-masala. $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ koordinatalvar sistemasida

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

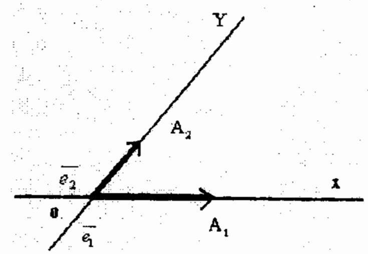
tenglama bilan berilgan F shaklni aniqlang.

Yechish Tekislikning ixtiyoriy N(x,y) nuqtasining koordinatasi haqiqiy sonlardan iborat, u holda $x^2 \ge 0$, $y^2 \ge 0$. Shuning uchun tekislikning ixtiyoriy nuqtasida $x^2+y^2+1>0$. Demak, tekislikda koordinatalari $x^2+y^2+1=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi birorta ham nuqta yo'q. F bo'sh to'plam.

Tekislikda $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin.

x,u larning kamida bittasi o'z ichiga oluvchi F(x,y) ifoda tekislikda bir necha figuralrni aniqlashga imkon beradi.

~~x,u larning kamida bittasi o'z ichiga oluvchi F(x,y) ifoda tekislikda bir nechta figuralarni aniqlashga imkon beradi.~~



37-chizma

1. F_1={N(x,y) | F(x,y)=0},

(koordinatalari F(x.y)=0 tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to'plami);

2. $F_2=\{N(x,y) \mid F(x,y)>0\}$;
3. $F_3=\{N(x,y) \mid F(x,y)<0\}$;
4. $F_4=\{N(x,y) \mid F(x,y)\geq 0\} \Rightarrow F_4 = F_1 \cup F_2$;
5. $F_5=\{N(x,y) \mid F(x,y)\leq 0\} \Rightarrow F_5 = F_1 \cup F_3$;
6. $F_6=\{N(x,y) \mid F(x,y)\neq 0\} \Rightarrow F_6 = F_2 \cup F_2$.

7 - masala. F(x,y) = y bo'lsin. U holda:
$F_1=\{N(x,y) \mid y=0\}$ - OX absissa o'qi.
$F_2=\{N(x,y) \mid y>0\}$ - $[OA_1,A_2)\backslash(OA_1)]$ ya'ni OX o'qi kirmagan A_2 nuqta yotgan yarim tekislik.

$F_3=\{N(x,y) \mid y<0\}$ - OX o'qi kirmagan V nuqta yotgan ikkinchi yarim tekislik.

$F_4=\{N(x,y) \mid y\geq 0\}$ - OX o'qni va A_2 nuqtani o'z ichiga oluvchi yarim tekislik.

$F_5=\{N(x,y) \mid y\leq 0)$ - OX o'qni va V nuqtani o'z ichiga oluvchi yarim tekislik.

2. Algebraik chiziq va uning tartibi.

Tekislikdagi geometriyani koordinatlar metodi bilan o'rganishda ko'pincha figura sifatida chiziq olinadi. Masalan, to'g'ri chiziq, aylana, parabola, sinusoida va hokazo chiziqlar.

Chiziq tushunchasiga qat'iy ta'rifni keyinroq beramiz.

Ta'rif. Tekislikdagi biror affin koordinatalar sistemusid F(x,y)=0 tenglamaning chap tomoni ~~f~~ x,y larga nisbatan algebraik ko'phad, ya'ni $a_{ij}x^ix^j$ ko'rinishdagi hadlarning algebraik yig'indisidan iborat bo'lsa, bu tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalar tuplami algebraik chiziq, tenglama esa algebraik tenglama deyiladi.

i,j manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lib i+j son $a_{ij}x^ix^j$ hadning darajasi deyiladi. i,j darajalar yig'indisi maksimal qiymati F(x,y) ko'phad darajasi deyiladi.

Shu bilan bir vaqtda

$$F(x,y) = 0 \qquad (8.4)$$

tenglamaning ham darajasi deyiladi, bu daraja (8.4) tenglama bilan aniqlangan chiziq tartibi deb ham yuritiladi.

Ta'rif. Biror affin koordinatalar sistemasida n-darajali algebraik tenglama bilan aniqlangan figura n-tartibli algebraik chiziq deb aytiladi.

Biz tekislikdagi birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar bilan shug'ullanamiz.

Teorema. Bir affin koordinatalar sistemasidan ikkinchi koordinatalar sistemasiga o'tishda chiziqning algebraikligi va tartibi o'zgarmaydi.

Isboti talabalarga havola.

Algebraik bo'lmagan barcha chiziqlar trantsendent chiziqlar deb aytiladi.

Algebraik bo'lmagan chiziqlarga misollar sifatida ushbu tenglamalar bilan berilgan chiziqlarni ko'rsatish mumkin.

y-sinx=0, y-tgx=0, y-lgx=0, $y - a^x = 0$.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. Tekislikdagi koordinatalar sistemasini kiritishdan maqsad nima?
2. Figura tenglamasi deb nimaga aytiladi?

3. Figurani aniqlovchi tengsizlik deb nimaga aytiladi?
4. Figurani o'rganishda ikkita masalaga amal qilinadi, ular qanday masalalar?
5. Algebraik chiziq deb nimaga aytiladi?
6. Algebraik chiziqni tartibi deb nimaga aytiladi?
7. Chiziqning algebraikligi va tartibi, bir koordinatalar sistemasidan ikkinchi koordinatalar sistemasiga o'tishda o'zgaradimi?
8. Quyidagi tenglamalar bilan berilgan figuralarning kesishgan nuqtalarini toping:
   a) $x^2 + y^2 = 32$ *va* $x - y = 0$;
   b) $x^2 - 2xy + 4x - 3 = 0$ *va* $5x - 4y - 1 = 0$;
   s) $x^2+y^2-12x+16y = 0$ *va* $x=0$.
9. Quyidagi tengsizliklar sistemasi bilan aniqlanuvchi nuqtalar to'plamini chizmada tasvirlang.
   a) $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\leq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ v) $\begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -y\leq y\leq 1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} |x|\leq 2 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2\leq 25 \\ x\geq 0 \end{cases}$
10. Berilgan A(2,1) va B(4,1) nuqtalardan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtalar to'plamining tenglamasini tuzing.
11. Tekislikdagi A(3,0) nuqtadan va ordinata o'qidan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtalar to'plamining tenglamasini tuzing.

Adabiyot

[1], 22-§, 23-§. [2], 18-§, 19-§.

9- ma'ruza
Ma'ruza rejasi

1. To'g'ri chiziqning turli tenglamalari.
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tekshirish.

1. To'g'ri chiziq ta'riflanmaydigan tushuncha.

To'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ixtiyoriy nol bo'lmagan vektor to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

a) bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektori ~~bilan~~ berilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

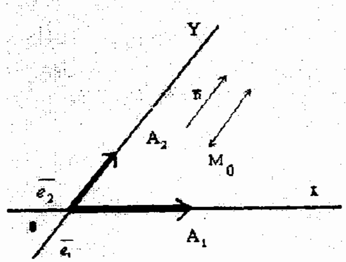
Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ berilgan bo'lsin.

Tekislikdagi d to'g'ri chiziq o'zining $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi va yo'naltiruvchi $\vec{a}(a_1,a_2)$ vektorning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. d to'g'ri chiziq tenglamasini yozaylik, ma'lumki tekislikdagi biror N(x,y) nuqta d to'g'ri chiziqda yotishi uchun $\overline{M_0N}$ vektor $\vec{a}$ vektorga kolleniar bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\overline{M_0N} = \lambda\,\vec{a} \quad (9.1)$$

bundan

$$x=x_0+\lambda a_1; \qquad (9.2)$$
$$y=y_0+\lambda a_2$$



λ - haqiqiy soni parametr deb aytiladi.

(9.1) tenglama d to'g'ri chiziqning vektor parametrik tenglamasi (9.2) tenglama d to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi.

(9.2) tenglamadan ushbu,

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2} \qquad (9.3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (9.3) ni to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi. Undan

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0$$
$$a_2x-a_1y+(a_1y_0-a_2x_0)=0 \qquad (9.3)$$

Bu yerda a_1 va a_2 lardan kamida bittasi noldan farqli, shu sababli (9.4) birinchi darajali tenglamadir.

Shuning bilan, ushbu muhim xulosaga keldik:

Har qanday to'g'ri chiziq birinchi tartibli algebraik chiziqdir.

b) Ikki nuqtasi bilan berilgan to'g'ri chiziq.

Affin koordinatalar sistemasiga nisbatan d to'g'ri chiziqning $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalari berilgan bo'lsin. M_1M_2=d to'g'ri chiziq tenglamasini yozaylik. d to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ vektorni olsak, (9.3) ga asosan d to'g'ri chiziq tenglamasi ushbu

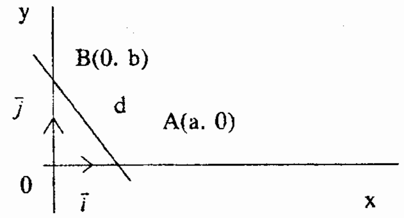
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (9.5)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

v) To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

To'g'ri chiziq OX o'qini A(a,0) nuqtada OY o'qini B(0,b) nuqtada kessin, u holda ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi (9.5) dan foydalansak (39-chizma)

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}, \text{ yoki } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (9.5)$$



39'-chizma

(9.5) da a,b sonlar to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari (9.5) ni to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi.

g) To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Ordinata o'qini kesuvchi d to'g'ri chiziq olaylik. Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\bar{a}(a_1,a_2)$ bo'lsa, $\bar{a}$ va $\overline{e_2}$ vektorlar kolleniar bo'lmaydi, shuning uchun $a_1\neq 0$.

Ta'rif. $k=\frac{a_2}{a_1}$ soni d to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi.

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti yo'naltiruvchi vektorni tanlab olinishiga bog'liq bo'lmasligini isbotlash mumkin.

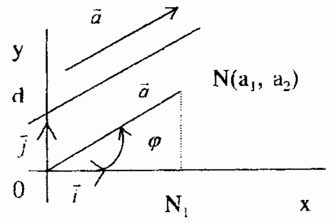
Burchak koeffitsientining geometrik ma'nosini bilish uchun to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi $(0,\bar{i},\ \bar{j})$ ni olamiz.

$a_1=|\bar{a}|\cos\varphi,$

$a_2=|\bar{a}|\sin\varphi, \qquad (\bar{i}\wedge\bar{a})=\varphi$

demak,

$$k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{|\bar{a}|\sin\varphi}{|\bar{a}|\cos\varphi}=tg\varphi \qquad (9.6)$$



40-chizma

Shunday qilib k son $\varphi=(\bar{i}\wedge\bar{a})$ burchak yo'nalishini aniqlaydi. Shuning uchun k ni d to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi.

Biror affin koordinatalar sistemasida berilgan d to'g'ri chiziq tenglamasini yozaylik.

d to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti k ga teng.

Shuning uchun $\bar{a}(a_1,a_2)=a_1\left(1,\frac{a_2}{a_1}\right)=\bar{P}(1,k)$ vektor d to'g'ri chiziqqa parallel.

Demak, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tib $\bar{p}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing degan masalaga keladi. (9.4) ga ko'ra

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (9.7)$$

to'g'ri chiziqni burchak koeffitsienti tenglamasi.

To'g'ri chiziqning turli tenglamalariga doir masalalar echamiz:

1-masala. $M_0(1,-3)$ nuqtadan o'tuvchi $\bar{P}(2,-5)$ vektorga perallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish (9.3) formuladan foydalanamiz.

$a_1=2,\ a_2=-5,\ x_0=1,\ y_0=0.$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-5};\quad -5x+5=2y+6$$

yoki $5x+2y+1=0$.

2-masala. Ushbu $M_1(1,-3)$, $M_2(3,7)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri, chiziq tenglamasini yozing.

Yechish (9.5) formulaga koordinatalarning qiymatlarini qo'yib, ushbuga

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+3}{7+3};\quad 10x-20=y+3$$

yoki

10x-y-23=0.

2. Biz yuqorida ko'rib o'tgan barcha to'g'ri chiziq tenglamalar koordinatalar sistemasiga nisbatan birinchi darajali tenglamalardir.

Ularni umumiy holda

$$Ax + By + C = 0 \qquad (9,8)$$

ko'rinishda yozish mumkin. A va B lar bir vaqtda nolga teng emas.

Teorema. Barcha affin koordinatalarga nisbatan birinchi darajali $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan berilgan chiziq, yo'naltiruvchi vektori $\bar{p}(-B,A)$ bo'lgan to'g'ri chiziqdan iborat.

Isbot. d - (9,8) tenglama berilgan chiziq $M_0(x_0,y_0)\in d$ bo'lsa, bu nuqta koordinatalari (9,8) tenglamani qanoatlantiradi:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \qquad (9,9)$$

Bunday nuqta hamisha mavjud, chunki A va B lar bir vaqtda nolga teng emas. (9,9) tenglamada C ni topib (9,8) tenglamaga qo'yamiz va d chiziq tenglamasini $Ax + By - A_0 - By_0 = 0$

yoki $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0 \qquad (9,10)$

ko'rinishda hosil qilamiz.

Bu tenglama (9,4) tenglamaga ekvivalent (o'xshash) demak, (9,10) tenglama $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori P(- B,A) dan iborat to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

(9,8) tenglamasini to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

3-masala. Uchlarining koordinatalari A(-3,-1), B(2,3), C(2,1) nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak berilgan. Uchburchakning A uchidan BC tomonga parallel bo'lib o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini **tuzing.**

Yechish Izlangan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb BC(0,-2) olish mumkin, u holda A=-2, B=0. To'g'ri chiziqning A(-3,-1) nuqtadan o'tishini e'tiborga olsak

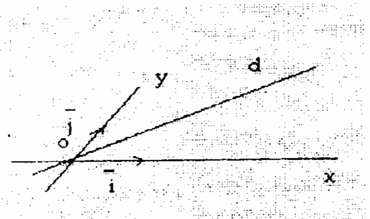
$$-2(-3)+0(-1)+c = 0,\ c = -6$$

A,B,C larning qiymatini (9,8)ga qo'ysak izlangan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

$$x + 3 = 0$$

3. To'g'ri chiziqning umumiy (9,8) tenglamasini tekshiraylik, ya'ni A,B,C larning ba'zi birlari nolga aylanganda to'g'ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylanishini o'rganaylik:

1. C = 0 bo'lsa, (9,8) tenglama ushbu $Ax + By = 0$ ko'rinishni oladi, 0 nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, demak, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi va aksincha $O\in d$ bundan $A\cdot 0+B\cdot 0+C = 0 \Rightarrow C = 0$ (41-chizma).



41-чизма

Shunday qilib (9,8) to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tishi uchun C=0 bo'lishi zarur va yetarlidir.

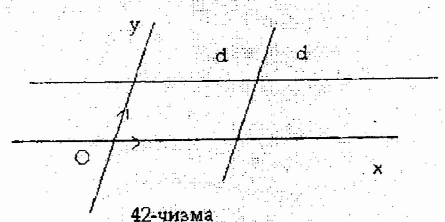
2. A=0 bo'lsin, (9,8) => By+C=0. R(-B,0). Bu yo'naltiruvchi vektor e_1 koordinat vektorga kollinear, demak, d||OX,

$$y=-\frac{C}{B},\ -\frac{C}{B}=b,\ y=b.$$

Shunday qilib, y = b tenglama ordinata o'qidan b kesma ajratgan va ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq (42-chizma).

Agar A=0, C=0 => By=0 => y=0, demak, d to'g'ri chiziq OX o'qi bilan ustma-ust tushadi.

4. B = 0 bo'lsa, bunda 2-holdagiga o'xshash d to'g'ri chiziq OY o'qqa parallel joylashadi (42-chizma) va bu holda C=0 bulsa, (Ax=0 => x=0) d to'g'ri chiziq OY o'qi bilan ustma-ust tushadi.



42-чизма

Tekshirish uchun savol va mashqlar.

1. To'g'ri chiziqning turli tenglamalarini ayting.
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb nimaga aytiladi?
3. Umumiy tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorini ayting.
4. Agar C = 0 bo'lsa, d to'g'ri chiziq qanday vaziyatda bo'ladi?
5. Agar A = 0 bo'lsa, d to'g'ri chiziq qanday vaziyatda bo'ladi?
6. Agar B= 0 bo'lsa, d to'gri chiziq qanday vaziyatda bo'ladi?
7. 1) x+2y-3=0. 2) y=2x+1 tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqni yasang.
8. To'g'ri chiziqning 8x-3y+2=0 umumiy tenglamasi berilgan. Uning parametrik tenglamasini yozing.
9. Quyidagi berilganlarga ko'ra to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:
   a) A(2,-6) nuqtadan o'tib, P(1,-1) vektorga parallel to'g'ri chiziq;
   b) Koordinata o'qlaridan mos ravishda a=3, b=-2 kesmalar kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq;
   s) A(3,5) nuqtadan o'tib, OX o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq;

d) B(-1,2) nuqtadan o'tib, OY o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq;
e) A(0,-2) va B(3,-4) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

10. Uchlari A(-3,-2), B(1,2), C(4,-5) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan (to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida):
   1. Uchburchakni yasang.
   2. Uchburchak tomonlar orasidagi masofani toping.
   3. Uchburchak tomonlar tenglamalarini yozing.
   4. A uchidan chiqqan mediana yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
   5. A uchidan chiqqan balandlik yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
   6. Uchburchak yuzini hisoblang.

Adabiyot

[1], 24,25-§, [2], 20,21-§.

10- ma'ruza
Ma'ruza rejasi

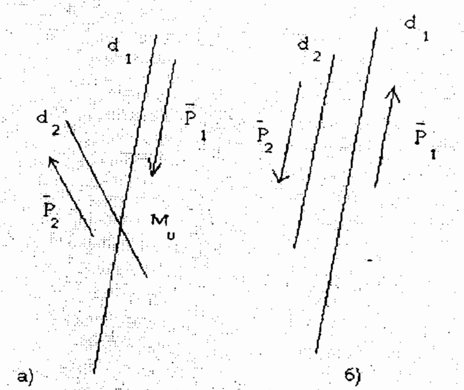
1. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi. To'g'ri chiziqlar dastasi.
2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

1.Affin koordinatalar sistemasida tekislikdagi ikkita d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar

$$d_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0; \quad (10.1)$$
$$d_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0. \quad (10.2)$$

tenglamalar bilan berilgan. d_1 to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektori $P_1(-B_1,A_1)$, d_2 to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektori $P_2(-B_2,A_2)$.

d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishida quyidagi hollar yuz berishi mumkin:



43-чизма

1) P_1 va P_2 vektorlar kolleniar emas. Bu holda d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kesishadi. Aksincha, d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kesishsa P_1 va P_2 lar kolleniar bo'lmaydi. Nokolleniarlik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow d_1 \nparallel d_2 \qquad (10.3)$$

(10.3) d_1, d_2 to'g'ri chiziqlarning kesishish sharti. Kesishish nuqtasining koordinatalarini topish uchun (10.1), (10.2) tenglamalarni sistema qilib yechish kerak.

2) P_1 va P_2 vektorlar kolleniar. Bu holda $d_1 \| d_2$. Aksincha, $d_1 \| d_2$ bo'lsa, P_1 va P_2 lar kolleniar bo'ladi. Kolleniarlik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2 \qquad (10.4)$$

Ikkita d_1, d_2 to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti.

3) (10.1) va (10.2) tenglamalar bitta d to'g'ri chiziqni aniqlasin. P_1 va P_2 lar kolleniar bo'ladi:

$$A_1=\lambda A_2;$$
$$B_1=\lambda B_2. \qquad (10.5)$$

$M_0(x_0,y_0)\in d$ bo'lsa, u holda

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0;$$
$$A_2x_0+B_2y_0+C_2=0. \qquad (10.6)$$

(10.5), (10.6) lardan $C_1=\lambda C_2$ tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib $A_1=\lambda A_2$; $B_1=\lambda B_2$; $B_1=\lambda B_2$.

Bundan $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (10.7)$$

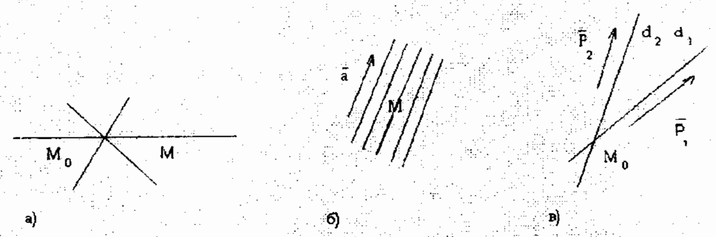
(10.7) ikkita to'g'ri chiziqning ustma-ust tushish sharti.

Ta'rif. Tekislikdagi berilgan M_0 nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plamini to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi.

M_0 nuqtani dastaning markazi deyiladi.

To'g'ri chiziqlar dastasi uning markazi M_0 nuqtaning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. Tekislikning ixtiyoriy $M \neq M_0$ nuqtasidan dastaning faqat bitta to'g'ri chizig'i o'tadi (44-chizma).

Ta'rif. Biror a vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar to'plamini parallel to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi.



44 - чизма

Parallel to'g'ri chiziqlar dastasi, dasta to'g'ri chiziqlariga parallel a vektorning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

Dasta tenglamasi bilan tanishaylik.

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (10,8)$$

tenglama (x_0,y_0) nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsienti k bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi. k ni parametr va (x_0,y_0) nuqtani markaz deb olsak, (10.8) tenglama to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi bo'ladi.

Dasta bu dastagi tegishli ikki to'g'ri chiziqning berilishi bilan aniqlanadi.

M_0 nuqgada kesishuvchi ikkita d_1 va d_2 to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

d_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$;

d_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$. (10.9)

Bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha,\beta\in R$ sonlarni olib (10.9) ga ko'paytirib ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (10.10)$$

Bu tenglama M_0 nuqtadan o'tuvchi to'gri chiziqni aniqlaydi. (10.10) tenglama bir vaqtda nolga teng bo'lmagan har qanday α,β larda dastani ifodalaydi.

Parallel to'g'ri chiziqlar dastasi (44.6-chizma) ifodalovchi tenglamani qaraylik. Parallel to'g'ri chiziqlar dastasi $P_0(-B_0,A_0)$ vektor bilan aniqlangan bo'lsin, u holda

$$A_0x + B_0y+C = 0 \qquad (10.11)$$

tenglama dastani ifodalaydi. Bu yerda C har qanday haqiqiy qiymatni qabul qiladi.

1-masala. Markazi koordinatalar boshida bo'lgan dastaning A(-1,2) nuqtadan o'tgan to'g'ri chizigni toping.

Yechish (10.8) formuladan foydalanamiz.

$y-0=k(x-0)$ yoki $y=kx$

tenglama bilan ifodalanadi. Dastaning A(-1,2) nuqtadan o'tgan to'g'ri chizig'i 2=k(-1); bundan k = 2.

Demak y=kx dastaning A(-1,2) nuqtadan o'tgan to'g'ri chizig'i y=2x tenglamaga mos keladi.

2. Tekislikdagi to'g'ri burchakli dekart koordinatalar $(0,i,j)$ sistemasi berilgan bo'lsin. Bu koordinatalar sistemasiga nisbatan d_1 va d_2 to'g'ri chiziq tenglamalari

d_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$;

d_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. (10.12)

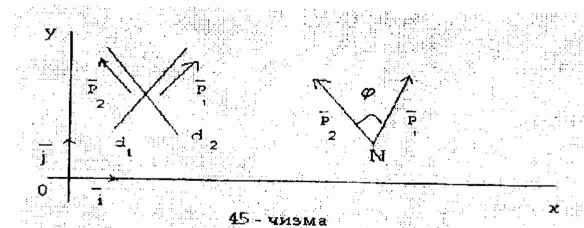
bilan berilgan bo'lsin.

d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari mos ravishda $P_1(-B_1,A_1)$, $P_2(-B_2,A_2)$ lardan iborat.

Ta'rif. Ikkita to'gri chiziq orasidagi burchak deb, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlar orasidagi burchakka aytiladi (45-chizma) $\varphi=(P_1\hat{\ }P_2)$.

$$P_1\cdot P_2 = |P_1||P_2|\cos\varphi. \quad \cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (10.13)$$

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak (10.13) formula bilan hisoblanadi.



45 - чизма

Xususiy holda $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow \overline{P_1}\overline{P_2}$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (10.14)$$

Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti.

To'g'ri burchak dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar o'zlarining burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

d_1: $y = k_1x + b_1$;

d_2: $y = k_2x + b_2$. (10.15)

Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash formulasini chiqaraylik.

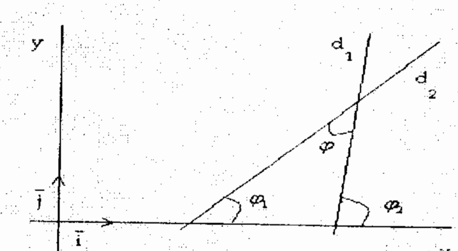
d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarni absissa o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchaklarni mos ravishda φ_1 va φ_2 bilan belgilaymiz (46-chizma), y holda

$k_1=tg\varphi_1$, $k_2=tg\varphi_2$ va $(P_1\hat{\ }P_2)=\varphi$, $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

$$tg\varphi = tg(\varphi_2-\varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1+tg\varphi_1\cdot tg\varphi_2}$$

bundan

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \qquad (10.16)$$



46 - чизма

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni hisoblash formulasi.

$d_1\perp d_2$ bo'lgan holda $\varphi_2=\frac{\pi}{2}+\varphi_1$, deyish mumkin. Bundan

$tg\varphi_2 = tg(\frac{\pi}{2}+\varphi_1) = -ctg\varphi_1$ yoki

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_1k_2=-1 \qquad (10.17)$$

(10.17) tenglik d_1d_2 to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti. Agar $d_1\parallel d_2$ bulsa $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ yoki $k_2 - k_1 = 0$

$$k_2 = k_1 \qquad (10,18)$$

d_1, d_2 to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti.

2-masala. d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar

$d_1: x + 7y - 5 = 0,$

$d_2: 3x - 4y + 20 = 0.$

tenglamalar berilgan, ular orasidagi burchakni toping.

Yechish d_1 to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_1 = -\frac{1}{7}$, d_2 to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_2 = -\frac{3}{4}$, (10,16) formulaga ko'ra

$$tg\varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = 1$$

Demak, $\varphi = 45°$.

3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasini chiqaraylik.

Tekislikdagi d to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi bilan

d: $Ax + By + C = 0$ (10.19)

berilgan bo'lsin. P(-B,A) yo'naltiruvchi vektori.

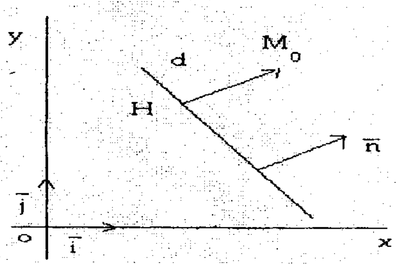
Ta'rif. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori ga perpendikulyar har qanday vektorni bu to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi.

n(A,B) vektor d to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi. Haqiqatan ham, p va n vektorlarning skalyar ko'paytmasi:

$p \cdot n = -BA + AB = 0 \Leftrightarrow n \perp p.$

Demak, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidagi A,B sonlar shu tartibda olingan shu tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziq normal vektorining koordinatalarini bildiradi.

d to'g'ri chiziq (10,19) tenglama bilan, va to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_0(x_0,y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtada d to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tushuramiz va uning asosini H bilan belgilaymiz (47-chizma).



47-чизма

M_0H vektor uzunligini M_0 nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa deyiladi va $\rho(M_0,d)$ ko'rinishda yozamiz.

Agar $M_0 \in d$ bo'lsa, $\rho(M_0,d) = 0$ bo'ladi. $M_0 \notin d$, u holda $\rho(M_0,d) = |HM_0|$. n vektor d to'g'ri chiziqning normal vektori bo'lgani uchun HM_0 vektorga kolleniar.

Vektorning skalyar ko'paytmasi ta'rifga ko'ra

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot n = |\overrightarrow{HM_0}||\bar{n}|\cos(\overrightarrow{HM_0},\bar{n}) = \rho(M_0,d)|n|(\pm 1)$$

Shunday qilib, $p(M_0,d) = \frac{|HM_0 \cdot n|}{|n|}$ (10.20)

H nuqtaning koordinatalari $H(x_1,y_1)$ bo'lsa,

$\overrightarrow{HM_0}(x_0-x_1,\ y_0-y_1)n = A(x_0-x_1) + B(y_0-y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)$ u holda $Ax_1 + By_1 + C = 0$ bundan $C = -(Ax_1 + By_1)$

$\overrightarrow{HM_0} \cdot n = Ax_0 + By_0 + C$, $|n| = \sqrt{A^2 + B^2}$ ekanligini e'tiborga olib (10.20) formulani quyidagicha yozamiz.

$$p(M_0,d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (10.21)$$

Bu formula berilgan nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasi.

3-masala. Koordinatalar boshi O(0,0) dan $3x-4y-2=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping. (10.21) formuladan

$$p(M_0,d) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2|}{5} = \frac{2}{5}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. Ikkita to'g'ri chiziq qanday joylashishi mumkin?
2. To'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushish shartini ayting.
3. To'g'ri chiziqning qanday dastalari mavjud ta'rifini ayting.
4. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?
5. To'g'ri chiziqning normal vektori deb nimaga aytiladi?
6. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa haqida nima bilasiz?
7. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini tekshiring, agar kesishsa, ularning kesishgan nuqtasining koordinatalarink toping:
   a) $8x-3y-1=0$, $4x+y-13=0$ b) $x+y-6=0$, $2x+2y-5=0$ v) $8x-3y-1=0$, $x+3y-11=0$
   Javob: a) (2,5); b)to'g'ri chiziqlar parallel; v) (-1,4).
8. Koordinatalar boshidan $4x+y-5=0$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazing. Javob: $4x+y=0$
9. Markazi (1,-6) nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziq dastasining tenglamasini yozing.
10. Quyidagi to'g'ri chiziqlarni yasang:
    a) $x-2y+3=0$ b) $3x+4y=0$
    v) $x=4$ g) $2x=0$
11. A(2,-3) nuqtadan o'tib, $7x+4y-5=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
12. $y=5x+7$ va $y=3x+5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Adabiyot

[1], 27,28,29-§, [2], 22,32,24-§

11- ma'ruza
Ma'ruza rejasi

1. To'plamni akslantirish. Misollar
2. Almashtirishlar va unga misollar
3. Almashtirishlar gruppasi va qism gruppalari

1. Tabiatda, fan va texnikada hamma vaqt shunday hodisalar uchraydiki uning ta'sirida u yoki bu narsalar o'zining tashqi ko'rinishini, o'lchamlarini va fazodagi vaziyatlarini o'zgartiradi. Masalan, shamol ta'sirida daraxtlar egiladi, metallar issiqdan kengayadi, mayatnik tebranib turadi. Bu hamma hollarda narsalar almashadi deb aytiladi.

Geometriyada bir F figurani F' figuraga almashtirishda figuraning oraliqdagi o'zgarishlarini e'tiborga olinmaydi, faqat boshlangich va oxirgi vaziyatlari o'rganiladi.

Tekislikdagi har bir figurani nuqtalar to'plami deb olamiz.

Bo'sh bo'lmagan ikkita X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar X to'plamning har bir x elementiga Y to'plamning aniq bir y elementini mos qo'yuvchi f qonun yoki qoida berilsa, u holda X to'plamni Y to'plamga ***akslantirish*** *berilgan* deyiladi.

Ushbu ta'rif bilan akslantirishning berilipsh ifodalanadi.

2-ta'rif. Agar X to'plamning har bir x elementiga Y to'plamning aniq bir u elementini mos qo'yuvchi qonun yoki qoida berilsa, u holda X to'plamni Y to'plamga *akslantirish berilgan* deyiladi.

«f qoida X to'plamni Y to'plamga akslantiradi» degan jumlani

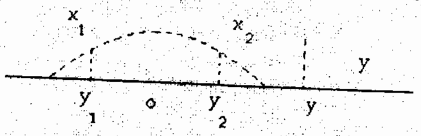
$f:X\to Y$ yoki $X\xrightarrow{f}Y$ ko'rinishda yozamiz. $y=f(x)$ elementni x elementning f akslantirishdagi *aksi* (obrazi), x ni esa y elementning *asli* (proobrazi) deyiladi.

1-misol. Shaxmat donalari X to'plam va shaxmat taxtasidagi kataklari Y to'plam berilgan bo'lsin. Shaxmat donalarini taxtaga terish f_1 bilan X to'plamni Y to'plamga akslantirish o'rnatiladi, ya'ni $f_1:X\to Y$.

$f:X\to Y$ akslantirishning muhim xususiy hollari bilan tanishamiz.

1. Agar ixtiyori x_1, $x_2\in X$ elementlar uchun $x_1\neq x_2\to f(x_1)\neq f(x_2)$ bo'lsa, u holda X to'plamni Y to'plam ichiga akslantirish yoki in'ektsiya deyiladi.

2-misol. Yarim aylanani X to'plam deb, yarim aylana diametri orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqni Y to'plam deb olaylik (48-chizma). f_2-qoida X to'plam nuqtalarini Y to'plam nuqtalariga ortogonal proektsiyalarini olsak X to'plam Y to'plam ichiga bir qiymatli akslanadi (Bunda $x_1\neq x_2 = y_1\neq y_2$ bo'lib, $f_2:X\to Y$).



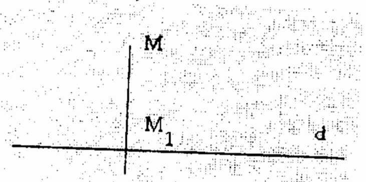
48 - чизма

2. Agar f akslantirishda obrazlar to'plami Y to'plamdan iborat bo'lsa, ya'ni $f(X)=Y$ bo'lsa, u holda $f:X\to Y$ akslantirish X to'plamni Y to'plam ustiga akslantirish yoki *syur'ektsiya* deyiladi.

Ya'ni f akslantirishda Y to'plamning har bir y elementi X to'plamning biror x elementining aksi (obrazi) bo'lsa f akslantirishni X to'plamni Y to'plam ustiga akslantirish yoki *syur'ektsiya* deyiladi.

3-misol. σ-tekislikda d to'g'ri chiziq berilgan. Tekislikning har bir M nuqtasiga uning d to'g'ri chiziqdagi ortogonal proektsiyasi M_1 nuqtani mos qo'yamiz. Natijada $f_3:\sigma\to d$ akslantirishga ega bo'lamiz. f_3 akslantirish

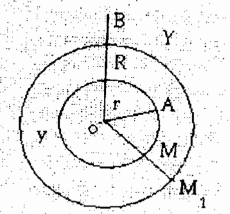
syurektsiya bo'ladi, chunki d to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi obrazga (aksiga) ega (49-chizma).



49 - чизма

3. Agar $f:X\to Y$ akslantirish bir vaqtda ham *inektiv* ham *syurektiv* bo'lsa, u holda f akslantirishni *o'zaro bir qiymatli* akslantirish yoki *biektiv* akslantirish deyiladi.

4-misol. Tekislikda o markazli, r va R radiusli ikkita kontsentrik aylanalar berilgan. (50-chizma). r radiusli aylananing nuqtalar to'plamini X, R. radiusli aylananing nuqtalar to'plami Y bo'lsin.



50 - чизма

f_1 qoida sifatida o nuqtadan chiquvchi nurlarni olaylik. X to'plamning har bir M nuqtasi Y to'plamning OM nurida yotuvchi M_1 nuqtasiga mos keladi. Natijada $f:X\to Y$ akslantirishga ega bo'lamiz. Bu akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'ladi.

$f:Y\to X$ biektiv akslantirish bo'lsin.

3-ta'rif. f o'zaro bir qiymatli akslantirish berilgan va har qanday $x\in X$ element uchun $y = f(x)$ bo'lsin. U holda $F^{I}(y)=x$ qonuni bilan bajarilgan $f^{-1}:X\to Y$ akslantirish f ga *teskari* ***akslantirish*** deyiladi. f biektiv bo'lgani uchun f^{-1} akslantirish mavjud ham biektiv bo'ladi.

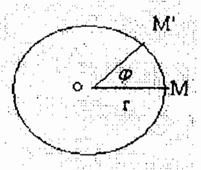
4-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy X to'plamni o'z-o'ziga bir qiymatli akslanritish, X to'plamni *almashtirish* deyiladi.

f akslanritish X to'plamning biror almashtirishi bo'lsin, unga teskari f^{-1} akslantirish, ya'ni har bir $x'\in X$ elementni uning asli $x\in X$ ga o'tkazadigan akslantirish ham X to'plam almashtirishi bo'ladi. Uni f almashtirishga *teskari almashtirish* deyiladi.

Agar biror $x\in X$ elementi uchun $f(x)=x$ bo'lsa, ya'ni f almashtirishda x element o'z-o'ziga o'tsa, u holda bunday x elementni *qo'zgalmas* yoki *invariant* element deyiladi.

4'-ta'rif. Agar X to'plamning ixtiyoriy element uchun $f(x)=x$ bo'lsa, u holda $f:X\to X$ almashtirishni *ayni almashtirish* deyiladi. E bilan ~~boshlanadi.~~ belgilanadi

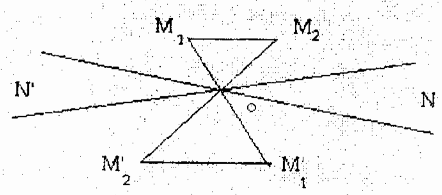
5-misol. Yo'nalishli σ tekislikka S(0,2) aylana berilgan bo'lsin. φ-yo'nalishli burchak $-\pi<\varphi<\pi$, $f:S\to S$ aylanani o'z-o'ziga akslantirishni olaylik. f akslantirish O nuqta atrofida φ burchakka burishdan iborat, bunda har bir M nuqta O nuqta atrofida $\angle MOM^{1} = \varphi$ burchakka burib M^{1} nuqta mos qo'yiladi.



51 - чизма

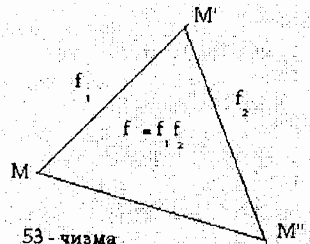
6-masala. σ tekislik nuqtalarini shu tekislik nuqtalariga almashtiraylik.

Tekislikda O nuqta berilgan bo'lsin. Tekislikning har bir M nuqtasini O nuqtaga nisbatan simmetrik M^{1} nuqta topiladi (52-chizma). Shunday qilib $f:\sigma\to\sigma$ almashtirishga ega bo'lamiz.



52 - чизма

3. Tekislikdagi barcha almashtirishlar to'plamini C bilan belgilaylik, bu to'plamga qarashli ixtiyoriy ikkita $f_1,f_2\in G$ almashtirishlari bo'lsin. Bunda f(M)=M' nuqtaga f(M')=M'' nuqtaga o'tkazsa (53-chizma), u holda f_1 va f_2 almashtirishlar yangi bir f(M)=M'' o'tkazuvchi yangi almashtirishni vujudga keltiradi.



53 - чизма

4^2-ta'rif. Agar f_1 almashtirish $f_1(M)=M'$ nuqtaga f_2 almashtirish $f_2(M')=M''$ nuqtaga o'tkazsa, u holda $f(M)=M''$ o'tkazuvchi f almashtirishni f_1 va f_2 almashtirishlarni *kompozitsiyasi (eki ko'paytmasi)* deyiladi. $f=f_2{}^{\circ}f_1$ yoki $f=f_2f_1$ ko'rinishda yoziladi.

7-misol. Agar E - ayniy almashtirish bo'lsa, u holda

f E = E f = f,

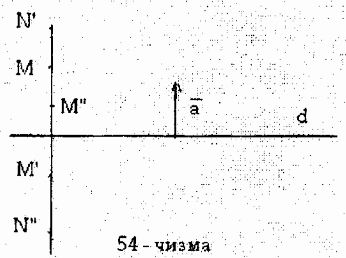
E(M) = M, va f(M)=M', u holda $M \xrightarrow{f\cdot E} M'$ va $M \xrightarrow{E\cdot f} M'$

8-misol. Agar $f_2 = f_1^{-1}$ bo'lsa, u holda har bir M nuqta uchun $f_1f_1^{-1}$ kompozitsiya ayni almashtirish bo'ladi.

9-misol. f_1-d to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish f_2-d to'g'ri chiziqqa perpendikulyar a vektor qadar ko'chirish (54-chizma) bo'lsin. $f_2f_1\neq f_1\cdot f_2$ isbotlang.

Isboti. Tekisliknnig ixtiyoriy M nuqtasi d to'g'ri chiziqqa nisbatan f_1 simmetrik almashtirib M' nuqtani topamiz (54-rasm).

Tekislikda a vektor qadar f_2 parallel ko'chirish M' nuqtani M" nuqtaga o'tkazadi. Bu akslantirishlar ko'paytmasi $f_2f_1=f_1M$ nuqtani M" nuqtaga o'tkazadi. Ya'ni f(M) = M". Tekislikda a vektor qadar f_2 parallel ko'chgan M nuqtani N' nuqtaga o'tkazadi. d to'g'ri chiziqqa nisbatan f_1 simmetrik almashtirish esa N' nuqtani N" nuqtaga o'tkazadi.



54 - чизма

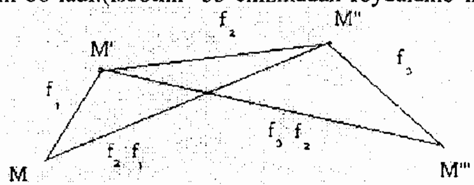
Ularning ko'paytmasi ya'ni $f = f_1f_2$, almashtirish M nuqtani M" nuqtaga o'tkazadi (54-chizma). M"≠N"

Demak bu misolda $f_2f_1\neq f_1f_2$. Umuman almashtirishlar kompozitsiyasi kommutativlik xossasiga ega emas.

Teorema. Almashtirishlarni kupaytirish assotsiativlik qonuniga bo'yso'nadi, ya'ni G to'plamning ixtiyoriy f_1,f_2,f_3 almashtirishlar uchun hamma vaqt

$$f_3(f_2f_1)=(f_3f_2)f_1 \qquad (11.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.(isbotini 55-chizmadan foydalanib mustaqil isbotlang)



55 - чизма

3. Talabalarga gruppa tushunchasi algebradan ma'lum. Bo'sh bo'lmagan G to'plam va unda o binar munosabat aniqlangan bo'lsin.

(G,o) jufti quyidagi uchta shartni (aksiomani) qanoatlantirsa gruppa tashkil qiladi:

1. Ixtiyoriy uchta $a,b,c\in C$ elementlar uchun ao(boc) = (aob)oc (binar munosabat assotsiativ)

2. Ixtiyoriy $a \in G$ element uchun shunday e element mavjudki, ular uchun:

$$aoe = a \text{ (neytral element)}$$

3. Ixtiyoriy $a \in C$ elementga shunday a^1 element mavjudki, ular uchun:

$$aoa' = e.$$

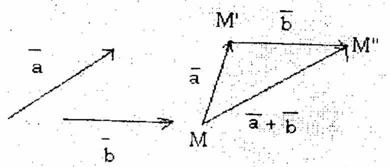
Algebra kursida neytral elementning yagonaligi isbotlanadi.

Geometriyada binar munosabat o'rnida ko'paytma yoki kompozitsiya olinadi a b ko'rinishda yoziladi. Neytral element sifatida e bilan belgilab, *birlik element* deb yuritiladi. Simmetrik elementni almashtirishda *teskari element* deyiladi. Masalan, a elementga teskari element a^{-1} belgilanadi.

G almashtirishlar to'plami gruppa tashkil qilishi uchun 2,3 aksiomalarning bajarilishi etarli birinchi shart akslantirishlar uchun teorema sifatida isbotlangan.

5-ta'rif. Agar G gruppadan olingan ixtiyoriy ikki f_1, f_2 almashtirishlari uchun 1) f_1 va f_2 almashtirishlar ko'paytmasi $f_2 f_1 \in G$ bo'lsa, 2) har bir $f \in G$ almashtirishga teskari f^1 almashtirish ham G ga tegishli bo'lsa, G to'plamni *almashtirishlar gruppasi* deyiladi.

10-misol. Tekislikdagi barcha parallel ko'chirishlar to'plami P bo'lsin, $f_1, f_2 \in P$. f_1 almashtirish $\bar{a}$ vektor qadar parallel ko'chirish f_2 almashtirish $\bar{b}$ vektor qadar parallel ko'chirish bo'lsin, tekislikning ixtiyoriy M nuqtasi $f_1(M)=M'$ nuqtaga, $f_2(M) = M''$ nuqtaga o'tkazadi (56-chizma). f_1, f_2 almashtirishlar ko'paytmasi $f=f_2 f_1$, $f(M)=M''$ nuqtaga o'tkazadi.



56 - чизма

Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra $MM'' = MM' + M'M'' = \bar{a} + \bar{b} = c$ ya'ni $MM'' =$

f kompozitsiya c vektor qadar parallel ko'chirishdan iborat bo'ladi.

Endi f_1 parallel ko'chirishga teskari almashtirishni bajaraylik. f_1 almashtirish a vektor qadar parallel ko'chirish bo'lgani uchun unga teskari almashtirish a vektor qadar parallel ko'chirishdir.

Shunday qilib,

1) $\forall f_1, f_2 \subset P \Rightarrow f_2 f_1 \in P$, 2) $f_1 \in P \Rightarrow f^{-1} \in P$

Demak P to'plam gruppa tashkil qiladi.

Endi G almashtirishlar to'plami H esa G to'plamning qismiy to'plami bo'lsin.

6-ta'rif. Agar 1) H ning ixtiyoriy ikkita almashtirishlarining ko'paytmasi H ga tegishli. 2) H ning har bir almashtirishiga teskari a.lmashtirish H ga tegishli bo'lsa, H to'plam gruppa tashkil qiladi. Bu gruppa G gruppaning *qism gruppasi* deyiladi

Tekshirish uchun savol va mashqlar

1. Tabiatdan almashtirishlarga misollar keltiring.
2. Akslantirish deb nimaga aytiladi?
3. Akslantirishlarning xususiy hollarini ayting.
4. Akslantirish xususiy hollarini misollar bilan tushuntiring.
5. Teskari almashtirish deb nimaga aytiladi?
6. Ayni almashtirish deb nimaga aytiladi?
7. Almashtirishlar ko'paytmasi deb nimaga aytlladi?
8. Umuman $f_2 f_1 \neq f_1 f_2$ ekanligini tushuntiring.
9. Almashtirishlar ko'paytmasi assotsitiv qonunga egami?
10. Almashtirishlar gruppasi deb nimaga aytiladi?
11. Almashtirishlarning qism gruppasi deb nimaga aytiladi?

12- ma'ruza

Ma'ruza rejasi

1. Tekislikda harakat va uning xossalari
2. Harakatning sodda turlari
3. Harakatning analitik ifodasi

1. Maktab geometriya kursida eng sodda almashtirishlar bilan tanishish ko'zda tutiladi, ular: parallel ko'chirish, simmetriya burish va o'xshash almashtirishlardan iborat.

Parallel ko'chirish, simmetriya va burish barchasi adabiyotlarda bitta «harakat», yoki «siljitish» yoki «izometriya» deb aytiladi.

1-ta'rif. Tekislikning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofani o'zgartirmaydigan almashtirish «*harakat*» yoki «izometriya» deyiladi.

Harakatni L orqali belgilaymiz. Tekislikning har kanday ikki M,N nuqtasi uchun

$(M,N) = (L(M), L(N))$ $(M^1 = L(M)$ $N^1 = L(N))$

Harakat hossalarini ko'rib chiqaylik.

1°. Harakat kesmani o'ziga teng kesmaga o'tkazadi.

2°. Harakat bir to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtani, yana bir to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtaga o'tkazadi.

3°. Harakat to'g'ri chiziqni, to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

4°. Harakat nurni nurga o'tkazadi.

5°. Harakat~~da~~ burchak kattaligani o'zgartirmaydi.

6°. Harakat, parallel to'g'ri chiziqlarni ya'ni parallel to'g'ri chiziqlarga o'tkazadi.

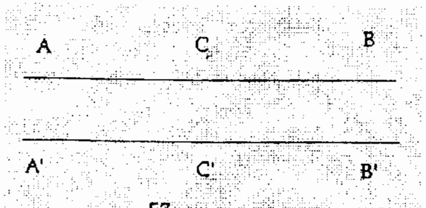
7°. Harakat ko'pburchakni yana ko'pburchakka o'tkazadi (bunda mos burchaklarning kattaligi, tomonlarining uzunliklari o'zgarmaydi)

8°. Harakat aylanani yana aylanaga o'tkazadi, bunda aylana radiuslari o'zgarmaydi.

9°. Tekislikdagi harakatlar to'plami gruppa tashkil qiladi

Isboti: 1° xossani isbotlaylik. Tekislikda ikkita A va B nuqtalarni olaylik. Harakat $L(A)=A'$, $L(B)=B'$ o'tkazsin.

Agar $c \in AB$ bo'lsa, u holda (57-chizma)



57 - чизма

P(AC)+P(CB)=P(AB) (12.1)

Harakat ta'rifiga asosan

P(A'C') + P(C'B') = P(A'B') (12.2)

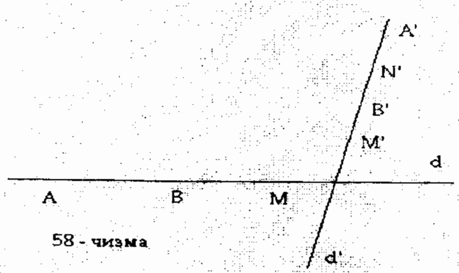
bu esa C'∈A'B' ko'rsatadi.

Aksincha, agar qandaydir C' nuqta C'∈A'B' bo'lsa, u holda (12.2) tenglik o'rinli bo'ladi, bundan (12.1) tenglikning o'rinligini, undan esa C∈AB bo'ladi.

2° isbotini ko'rib chiqaylik. A, B, C bir to'g'ri chiziq nuqtalari bo'lsin, harakatda ularga A', B', C' nuqtalar mos kelsin. Aniqlik uchun C nuqta A va B nuqtalar orasida yotsin deylik. U holda 1° xossaga asosan C'∈A'B' da yotadi. Demak, A', B', C' nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi.

Nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotish xossasini *kolleniarlik munosabati* deyiladi. Kollinearlik munosabatini saqlovchi almashtirish kollineatsiya deyiladi. Demak, tekislikdagi harakat kollineatsiyadan iborat bo'ladi.

3° Tekislikda L-harakat va ijtiyoriy d to'g'ri chiziq berigan bo'lsin. d to'g'ri chiziqda yotuvchi ikkita A va B nuqtalarni olamiz. Harakat L(A)=A', L(B)=B'. A' va B' nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni d' bilan belgilaymiz



58 - чизма

(58-chizma).

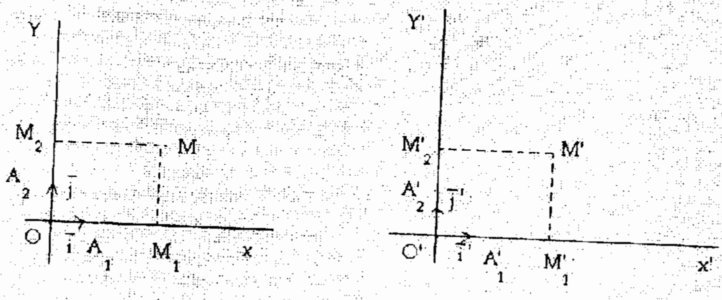
Agar M nuqta d to'g'ri chiziqqa qarashli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u holda 1° xossaga ko'ra L(M)=M'∈d'.

4°-9° larni talabalar mustaqil ish sifatida o'rganiladi.

2-ta'rif. Agar ikki figuradan birini ikkinchisiga o'tkazadigan harakat mavjud bo'lsa, bu figuralar *kongruent* deyiladi. Bu kongruent figuralar tekislikdagi vaziyatlari bilan farq qiladi xolos.

Teorema. Tekislikdagi L harakat P to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini, P' to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga o'tkazsa, M'=L(M) nuqtaning P' koordinatalar sistemasidagi koordinatalari M nuqtaning P to'g'ri burchakli koordinatalar bilan bir xil bo'ladi (59-chizma).

Isbot. P(0,i,j) tekislikdagi to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi. L(o) = o', $L(A_1)=A_1{}'$, $L(A_2)=A_2{}'$ o'tkaziladi. Yuqoridagi xossalarga asosan O'_1, A'_1 va A'_2 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi va $\angle A'_2O'A'_1=90^0$. Demak P' dekart koordinatalar sistemasi.



59 - чизма

Tekislikda ixtiyoriy M nuqtasini P ga nisbatan koordinatalari x,y bo'lsin.

$$x = \frac{OM_1}{OA_1} = -\frac{M_1O}{OA_1} = -(M_1A_1O)$$

$$y = \frac{OM_2}{OA_2} = -\frac{M_2O}{OA_2} = -(M_2A_2O)$$

M' nuqtaning P' nisbatan koordinatalar uchun x',y' bo'lsin

$$x' = \frac{O'M'_1}{O'A'_1} = -\frac{M'_1O'}{O'A'_1} = -(M'_1A'_1O')$$

$$y' = \frac{O'M'_2}{O'A'_2} = -\frac{M'_2O'}{O'A'_2} = -(M'_2A'_2O')$$

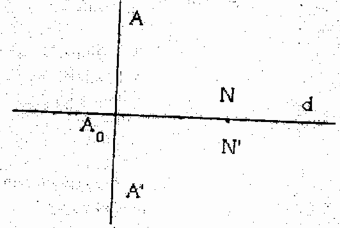
$(M,A,O) = (M'_1A'_1O')$, $(M_2A_2O) = (M'_2A'_2O')$ tekisliklardan x=x', y = y'.

2. Harakatning eng sodda turlarini ko'rib chiqaylik,

a) To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya (S_d)

Tekislikda d to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Tekislikdagi A, A' nuqtalar uchun AA' kesma d ga perpendikulyar bo'lib, AA' kesmaning o'rtasi d to'g'ri chizig'ida yotsa, u holda bu nuqtalar *d to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik* deb ataladi va S_d ko'rinishda yoziladi.



60 - чизма

d to'g'ri chiziqni *simmetriya o'qi* deyiladi. Agar biror nuqta $N \in d$ bo'lsa, u holda N=N' (60-chizma) ya'ni d to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tadigan qo'sh nuqtadan iborat bo'ladi.

Tekislikda bulardan tashqari bunday xossaga ega bo'lgan nuqta mavjud emas.

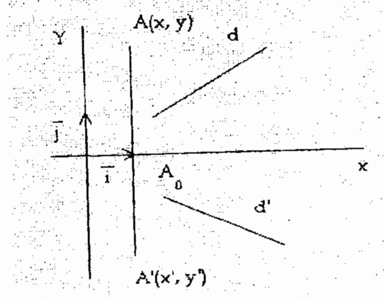
To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish quyidagi xossalarga ega: 1° simmetrik almashtirish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi. 2° ikki nuqta orasidagi masofani saqlaydi.

Koordinatalar metodidan foydalanib isbotlaymiz.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasining Ox o'qini simmetriya o'qi deb olsak, A(x,y) nuqtaning aksi A'(x',y') bo'ladi (61-chizma). Bunda

$$x' = x, \quad y' = -y. \qquad (12.1)$$

(12.1) Ox o'qiga nisbatan simmetrik almashtirish formulasi.



61-чизма

Simmetrik almashtirish xossalarini ko'raylik.

1°. Simmetrik almashtirish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi. Agar d to'g'ri chiziq tenglamasini Ax+By+C=0 berilsa, uning d^1 aksini (12.2) almashtirishdan foydalanib topamiz,

$Ax^1-By^1+C=0$

2°. Ikki nuqta orasidagi masofa o'zgarmaydi. Tekislikning ixtiyoriy ikkita $A(x_1,y_1)$ va B(x,y) nuqtalar esa, ularning aksi bo'lsin. (12.1) formulani e'tiborga ~~olib, hisoblaymiz~~ olsak $A'(x_1,-y_1)$, $B'(x_2,-y_2)$ bo'ladi

$$A'B' = \sqrt{(x_2^1-x_1^1)^2+(y_2^1-y_2^1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(-y_2-(-y_1))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2} = AB$$

(12.1) almashtirishda ikki nuqta orasidagi masofa o'zgarmaydi.

Demak simmetrik almashtirish harakatdir.

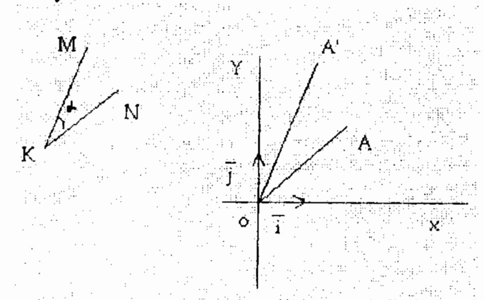
4-ta'rif. Agar biror F figura d to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tsa, u holda d to'g'ri chiziq bu figuraning *simmetriya o'qi* deyiladi.

b) *Parallel ko'chirish* ($T\bar{a}$). Tekislikda $\bar{a} \neq 0$ vektor berilgan.

5-ta'rif. Tekislikning har bir A nuqtasiga

$$AA' = \bar{a} \qquad (12.2)$$

shartni qanoatlantiruvchi A^1 nuqtani mos keltirishga tekislikdagi $\bar{a}$ *vektor qadar parallel ko'chirish* deyiladi. Uni $T\bar{a}$ ko'rinishda belgilanadi. $\bar{a}$ vektorni *ko'chirish vektori* deyiladi.



62-чизма

Ta'rifga ko'ra, $T\bar{a}$ parallel ko'chirish tekislikning barcha nuqtalarini $\bar{a}$ vektor yo'nalishida $|\bar{a}|$ masofaga siljitadi.

Parallel ko'chirish quyidagi xossalarga ega:

1^0. Parallel ko'chirish, to'g'ri chiziqni unga parallel to'g'ri chiziqqa o'tkaziladi.

2^0. Parallel ko'chirishda ikki nuqta orasidagi masofaga o'zgarmaydi.

Isbot: 1^0. Xossani isbotlaylik.

Agar $A^1(x^1_1;y^1_1)$ nuqta A(x;y) nuqtaning aksi bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $AA' = \bar{a}$ (12.3)

Bunda $\bar{a}$ (x_0,y_0) va AA'(x'-x,y'-y) koordinatalarga ega. (12.2) dan:

$x'-x = x_0$, $x'=x+x_0$,

$y'-y = y_0$, ya'ni $y'=y-y_0$ (12.4.)

Parallel ko'chirish formulasiga ega bo'lamiz.

1^0. Tekislikda d to'g'ri chiziq Ax + By+C = 0 tenglama bilan berilgan bo'lsin. (12.4) formuladan foydalanib d to'g'ri chiziqni $\bar{a}$ vektor qadar parallel ko'chiramiz. Ya'ni $x = x_1-x_0$, $y=y_1-y_0$ qiymatlarni d to'g'ri chiziq tenglamasiga qo'yib:

d^1: $Ax^1+By^1+(C-Ax_0-By_0)=0$ (12.5)

birinchi darajali tenglamaga ega bo'ldik, bu (12.5) tenglama to'g'ri chiziq tenglamasi, $d_1 \parallel d_2$

Demak $T\bar{a}$ (d) = d^1 to'g'ri chiziq.

2°. Ikkita ixtiyoriy $A(x_1;x_2)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalarning obrazlari $A^1(x^1_1,y^1_1)$ va $B^1(x^1_2,y^1_2)$ bo'lsin, u holda

$x^1_1=x_1+x_0$, $x^1_2=x_2+x_0$;

$y^1_1=y_1+y_0$, $y^1_2=y_2+y_0$ (12.6)

Ikkita A^1 va B^1 nuqtalar orasidagi masofani (12.6) formulani e'tiborga olib hisoblasak,

$$A^1B^1 = \sqrt{(x_2^1-x_1^1)^2+(y_2^1-y_1^1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = AB$$

Demak parallel ko'chirish harakat.

v) Burish (P^a)

Tekislikda yo'nalishga ega bo'lgan α burchak berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Tekislikning har bir A nuqtasiga ushbu

1. $\rho(O,A)=\rho(O,A^1)$;

2. $\angle A0A^1=\angle NKM=\alpha$;

(62-chizma) shartlarni qanoatlantiruvchi A^1 nuqtani mos keltiruvchi almashtirishga O nuqta atrofida berilgan α burchakka burish deyiladi.

O nuqta burish markazi, α burish burchagi deyiladi.

Tekislikdagi O nuqta atrofidagi α burchakka burish R^{α}_0 bilan belgilanadi.

P^{α}_0 burish quyidagi xossalarga ega:

1°. Burish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

2°. Ikki nuqta orasidagi masofa o'zgarmaydi.

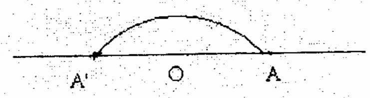
Bu xossalarni koordinatalar metodi bilan isbotlash mumkin.

Burish ham harakat bo'ladi.

g) Markaziy simmetriya (S_0)

7-ta'rif. Tekislikdagi biror O nuqta atrofida α=180° ga burish O nuqtaga nisbatan simmetriya yoki markaziy simmetriya deyiladi va S_0 bilan belgilanadi (63-chizma). O nuqta simmetriya markazi deyiladi.

Markaziy simmetrik almashtirishda simmetriya markazi O nuqta A nuqta va uning aksi A^1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi va $OA\equiv OA^1$.



63 - чизма

Markaziy simmetrik almashtirishning harakat ekanligini isbotlash qiyin emas.

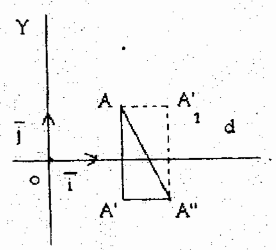
8-ta'rif. Agar birorta figura O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tsa, u holda O nuqta figuraning simmetriya markazi deyiladi.

d) Sirpanuvchi simmetriya.

Tekislikda S_d simmetriya Tp (p≠0 p‖d) parallel ko'chirish berilgan.

9-ta'rif. $F=T_pS_d$ almashtirish kompozitsiyasi sirpanuvchi simmetriya deyiladi (64-chizma).

Agar $S_d(A)=A'$ va $T_p(A')=A''$ o'tkazsa $p(x_0,0)$ ko'chiruvchi vektor u holda $f(A)=A''$ o'tkazadi.



64 - чизма

Agar $Tp(A)=A'_1$ va $S(A'_1)=A''$ o'tkazsa $f(A)=A''$ ga o'tkazadi (64-chizma).

Demak $TpS_d=S_dT_P$ simmetriya kommutativlik xossasiga ega.

Sirpanuvchi simmetriya, agar $A(x,y)$, $A^1(x^1,y^1)$ $A^{11}(x^{11},y^{11})$ koordinatalarga ega, d = Ox bo'lsa:

$$S_{Ox}:\begin{cases} x^1 = x \\ y^1 = y \end{cases} \qquad T_p:\begin{cases} x^{11} = x^1 + x_0 \\ y^{11} = y^1 \end{cases}$$

bundan $f:\begin{cases} x^{11} = x + x_0; \\ y^{11} = -y \end{cases}$ (12.6)

Sirpanuvchi simmetriya formulasi. Yuqoridagi ko'rilgan xossalar ham sirpanuvchi simmetriya uchun o'rnili bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

(12.6) formuladan ε=-1 ekanligi ma'lum. Demak, sirpanuvchi simmetriya ikkinchi tur harakat.

3. Harakatning analitik ifodasi

To'g'ri burchakli dekard koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi (6.9) dan foydalanamiz.

Teorema. Tekislikdagi ixtiyoriy nuqta va uning aksini koordinatalri

$x=x^1\cos\alpha-\varepsilon y^1\sin\alpha+x_0$,

$y=x^1\sin\alpha+\varepsilon y^1\cos\alpha+y_0$ (12.7)

formula bilan bog'langan bo'lsa, u holda bu formula tekislikdagi harakatni aniqlaydi.

Isboti. 1. Tekislikning ixtiyoriy A nuqtasini (12.7) formula yordamida A^1 nuqtaga o'tkazuvchi f almashtirish bir qiymatli.

Haqiqatan ham, (12.7) formulada determinant

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha \end{vmatrix} = \varepsilon(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\varepsilon\neq 0;$$

agar x,y larni berilgan deb olsak, (12.7) tenglamalar sistemasini x,y larga nisbatan bir qiymatli echimga ega. Shu bilan har bir $A^1(x^1,y^1)$ nuqta bitta faqat bitta M(x,y) nuqtaga ega bo'ladi.

Demak (12.7) formula tekislikdagi birorta f bir qiymatli almashtirishni aniqlaydi.

2. Tekislikdagi $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ nuqtalar ularning aksi $A_1(x^1_1,y^1_1)$ va $B_1(x^1_2,y^1_2)$ bo'lsin. (12.7) almashtirishga ko'ra ushbu koordinatalarga ega bo'ladi:

$x^1_1=x_1\cos\alpha-\varepsilon y_1\sin\alpha+x_0$,

$y^1_1=x_1\sin\alpha+\varepsilon y_1\cos\alpha+y_0$

$x^1_1=x_2\cos\alpha-\varepsilon y_2\sin\alpha+x_0$,

$y^1_1=x_2\sin\alpha+\varepsilon y_2\cos\alpha+y_0$

u holda

$$A^1B^1=\sqrt{(x^1_2-x^1_1)^2+(y^1_2-y^1_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(x_2-x_1)^2+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=AB,$$ bunda ε=+1

(12.7) almashtirish ta'rifga ko'ra harakat bo'ladi.

Shunday qilib tekislikdagi harakat (12.7) formula bilan aniqlanadi va uni harakatning analitik ifodasi deyiladi.

6-ta'rif. Tekislikning har bir A nuqtasiga ushbu

1. $\rho(0,A)=\rho(O,A^1)$;

2. $<A0A^1=<NKM=\alpha$;

(62-chizma) shartlarni qanoatlantiruvchi A^1 nuqtani mos keltiruvchi almashtirishga O nuqta atrofida berilgan α burchakka burish deyiladi.

O nuqta burish markazi, α burish burchagi deyiladi.

Tekislikdagi O nuqta atrofidagi α burchakka burish P^{α}_0 bilan belgilanadi.

P^{α}_0 burish quyidagi xossalarga ega:

1°. Burish to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazadi.

2°. Ikki nuqta orasidagi masofa o'zgarmaydi.

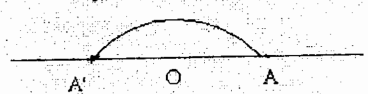
Bu xossalarni koordinatalar metodi bilan isbotlash mumkin.

Burish ham harakat bo'ladi.

g) Markaziy simmetriya (S_0)

7-ta'rif. Tekislikdagi biror O nuqta atrofida α=180° ga burish O nuqtaga nisbatan simmetriya yoki markaziy simmetriya deyiladi va S_0 bilan belgilanadi (63-chizma). O nuqta simmetriya markazi deyiladi.

Markaziy simmetrik almashtirishda simmetriya markazi O nuqta A nuqta va uning aksi A^1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotadi va $OA=OA^1$.



63 - чизма

Markaziy simmetrik almashtirishning harakat ekanligini isbotlash qiyin emas.

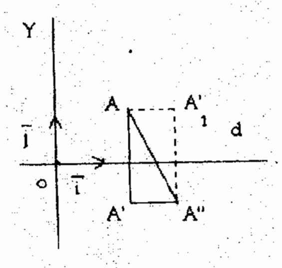
8-ta'rif. Agar birorta figura O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirishda o'z-o'ziga o'tsa, u holda O nuqta figuraning simmetriya markazi deyiladi.

d) Sirpanuvchi simmetriya.

Tekislikda S_d simmetriya Tp (p≠0 p‖d) parallel ko'chirish berilgan.

9-ta'rif. $F=T_pS_d$ almashtirish kompozitsiyasi sirpanuvchi simmetriya deyiladi (64-chizma).

Agar $S_d(A)=A'$ va $T_p(A')=A''$ o'tkazsa $p(x_0,0)$ ko'chiruvchi vektor u holda $f(A)=A''$ o'tkazadi.



64 - чизма

Agar $Tp(A)=A'_1$ va $S(A'_1)=A''$ o'tkazsa $f(A)=A''$ ga o'tkazadi (64-chizma).

Demak $TpS_d=S_dT_P$ simmetriya kommutativlik xossasiga ega.

Sirpanuvchi simmetriya, agar $A(x,y)$, $A^1(x^1,y^1)$ $A^{11}(x^{11},y^{11})$ koordinatalarga ega, d = Ox bo'lsa:

$$S_{0x}:\begin{cases}x^1=x\\ y^1=y\end{cases}\qquad T_p:\begin{cases}x^{11}=x^1+x_0\\ y^{11}=y^1\end{cases}$$

$$\text{bundan } f:\begin{cases}x^{11}=x+x_0;\\ y^{11}=-y\end{cases}\qquad (12.6)$$

Sirpanuvchi simmetriya formulasi. Yuqoridagi ko'rilgan xossalar ham sirpanuvchi simmetriya uchun o'rnili bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

(12.6) formuladan ε=-1 ekanligi ma'lum. Demak, sirpanuvchi simmetriya ikkinchi tur harakat.

3. Harakatning analitik ifodasi

To'g'ri burchakli dekard koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi (6.9) dan foydalanamiz.

Teorema. Tekislikdagi ixtiyoriy nuqta va uning aksini koordinatalri

$$x=x^1\cos\alpha-\varepsilon y^1\sin\alpha+x_0,$$

$$y=x^1\sin\alpha+\varepsilon y^1\cos\alpha+y_0 \qquad (12.7)$$

formula bilan bog'langan bo'lsa, u holda bu formula tekislikdagi harakatni aniqlaydi.

Isboti. 1. Tekislikning ixtiyoriy A nuqtasini (12.7) formula yordamida A^1 nuqtaga o'tkazuvchi f almashtirish bir qiymatli.

Haqiqatan ham, (12.7) formulada determinant

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\varepsilon\sin\alpha\\ \sin\alpha & \varepsilon\cos\alpha\end{vmatrix}=\varepsilon(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\varepsilon\neq 0;$$

agar x,y larni berilgan deb olsak, (12.7) tenglamalar sistemasini x,y larga nisbatan bir qiymatli echimga ega. Shu bilan har bir $A^1(x^1,y^1)$ nuqta bitta faqat bitta ad M(x,y) nuqtaga ega bo'ladi.

Demak (12.7) formula tekislikdagi birorta f bir qiymatli almashtirishni aniqlaydi.

2. Tekislikdagi $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ nuqtalar ularning aksi $A_1(x^1_1,y^1_1)$ va $B_1(x^1_2,y^1_2)$ bo'lsin. (12.7) almashtirishga ko'ra ushbu koordinatalarga ega bo'ladi:

$x^1_1=x_1\cos\alpha-\varepsilon y_1\sin\alpha+x_0,$

$y^1_1=x_1\sin\alpha+\varepsilon y_1\cos\alpha+y_0$

$x^1_1=x_2\cos\alpha-\varepsilon y_2\sin\alpha+x_0,$

$y^1_1=x_2\sin\alpha+\varepsilon y_2\cos\alpha+y_0$

u holda

$$A^1B^1=\sqrt{(x_2^1-x_1^1)^2+(y_2^1-y_1^1)^2}=$$

$$=\sqrt{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(x_2-x_1)^2+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=AB,\ \text{bunda } \varepsilon=+1$$

(12.7) almashtirish ta'rifga ko'ra harakat bo'ladi.

Shunday qilib tekislikdagi harakat (12.7) formula bilan aniqlanadi va uni harakatning analitik ifodasi deyiladi.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar.

1. Harakat ta'rifini ayting, misollar keltiring.
2. Harakat xossalarini ayting.
3. Kolleniarlik munosabatini tushuntirib bering.
4. O'q simmetriyasini ta'riflang va misollar keltiring.
5. Parallel ko'chirishni ta'riflang, misollar keltiring.
6. Burishni ta'riflab misollar keltiring.
7. Markaziy simmetriya deb nimaga aytiladi?
8. Sirpanuvchi simmetriya deb nimaga aytiladi?
9. Simmetriya, parallel ko'chirish, burish, markaziy simmetriya va sirpanuvchi simmetriyalarning harakat ekanligani isbotlang.
10. Quyidagi hollar uchun (O,e_1,e_2) affin reperidan (O,e_1e_2) reperga o'tish formulasini yozing (affin koordinatalar sistemasi - reper)

a) $e_1(2,1)$; $e'_2(-2,1)$ b) $e'(1,1)$, $e'_2(0,1)$

Javob: a) $x=2x'-2y'$, $Y=x'+y'$; b) $x = x'$, $y = x'+y$

11. $(O, e_1\ e_2)$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan $A(2,1)$ va $B(-\frac{3}{2};2)$ berilgan. Koordinatalar boshi $O'(0;1)$ nuqtada bo'lgan shunday $(O', e'_1\ e'_2)$ koordinatalar sisitemasini topingki $A(1,0)$ va $B(0,1)$ bo'lsin.

Javob: $e_1(2,0)$, $e_2(-\frac{3}{2};2)$

12. Quyidagi burchaklar berilgan burish formulasini yozing. a) 60^0, b) 45^0, v) 90^o
13. Quyidagi~~larga~~ berilganlarga asosan affin almashtirish formulasini yozing.

a) $e'_1(4,3)$, $e'_2(0,5)$, $O'(3,-1)$;

b) $e'_1(1,0)$, $e'_2(0,1)$, $O'(2,5)$.

14. Quyida berilgan har bir hol uchun dekart koordinatalar sistemasini almashtirish formulasini yozing.

a) $i' = \frac{\sqrt{2}}{10}i + \frac{7\sqrt{2}}{10}j$, $0'(-3,\sqrt{2})$ koordinata sistemalarning yo'nalishlari bir xil.

b) $<(i'i) = 30^0$, $0'(0,-2)$; $(0,i,j)$ va $(0', i', j')$ koordinata sistemalar turli yo'nalishda

v) $i' = \frac{1}{\sqrt{5}}i - \frac{2}{\sqrt{5}}j$, $0'(2,-12)$ koordinatalar sistemasining yo'nalishi har xil

Javob:

a) $x = \frac{\sqrt{2}}{10}x' - \frac{7\sqrt{2}}{10}y' - 26$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}y' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 12$

b) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$, $y = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2$

v) $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 2$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 12$

Adabiyot: [1] 33, 34, 35-§, [2] 41, 42-§

13- ma'ruza

Ma'ruza rejasi

1. O'xshash almashtirish va uning xossalari.
2. Gomotetiya va uning xossalari.
3. O'xshash almashtirishlar gruppasi va uning qism gruppalari.

1. Shu vaqtgacha tekislikdagi figuralarning shakllari va o'lchamlarini o'zgartmaydigan almashtirishlar bilan shug'ullanib keldik.

Endi biz tekislikdagi figuralarning shakllari o'zgarmay faqat o'lchamlarini o'zgartiruvchi almashtirishlar bilan shug'ullanamiz.

1-ta'rif. Tekislikdagi ixtiyoriy A va B nuqtalarga

$$\rho\ (A',B')=K\rho\ (A,B) \quad (k>0) \quad (14.1)$$

shartni qanoatlantiruvchi A' va B' nuqtalarni mos qo'yuvchi almashtirishni k>0 koeffitsientli o'xshash almashtirish deyiladi va R^K bilan belgilanadi. k soni o'xshashlik koeffitsienti deyiladi.

Tekislikdagi o'xshash almashtirish k>0 son martaba o'zgaradi.

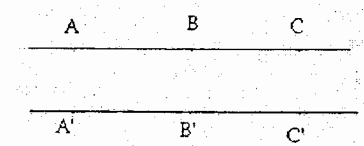
Tekislikdagi har bir harakatni k = 1 teng bo'lgandagi o'xshash almashtirish deb qarash mumkin.

2-ta'rif. Agar f figurani uning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofani k>0 son martaba o'zgartiradigan qilib F' figura bir qiymatli almashtirish mavjud bo'lsa, F' figara F figuraga k koeffitsientli o'xshash deyiladi. $R^K(F) = F'$ (yoki F F').

O'xshash almashtirishning ba'zi bir xossalari bilan tanishib chiqaylik.

1°. O'xshash almashtirish nuqtalarning kolleniarligini va nuqtalarning to'g'ri chiziqda joylashish tartibini saqlaydi. Haqiqatan, B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsa, u holda

$$\rho\ (A,C) = \rho\ (A,B) + \rho\ (B,C)$$



68- чизма

1-ta'rifga ko'ra A, B va C nuqtalarning aksi A', B' va C' nuqtalar bo'ladi: $\rho(A',C')=k\rho(A,C)=k(\rho(A,B)+\rho(B,C))=k\rho(A,B)+k\rho(B,C)=\rho(A',B')+\rho(B',C')$

Demak, $\rho\ (A',C') = \rho\ (A',B') + \rho\ (B',C')$ munosabat A', B' va C' nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotishini va B' nuqtaning A' va C' nuqtalar orasida yotishini ko'rsatadi.

2°. O'xshash almashtirishda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqta, yana bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtaga o'tadi.

Haqiqatan, teskarisini (ya'ni bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtaga o'tadi) faraz qilsak teskari o'xshash almashtirish kolleniarlik munosabatini buzadi.

3°. O'xshash almashtirish, to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqga, kesmani-kesmaga, nurni-nurga, burchakni-burchakka, ko'pburchakni-ko'pburchakka aylanani aylanaga o'tkazadi.

4°. O'xshash almashtirishda burchak kattaligi o'zgarmaydi.

3°, 4° xossalarni isbotini talabalarga havola qilamiz.

2. Gomotetiya

O'xshash almashtirishning biri gomotetiyadir (grekcha «omo» o'xshash va "temos" joylanish).

2-ta'rif. Tekislikdagi har bir A nuqtaga

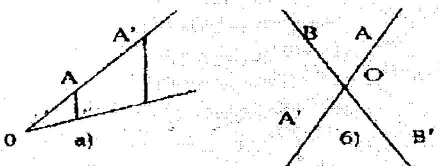
$$OA' = kOA \qquad (14.2)$$

shartni qanoatlantiruvchi A' nuqtani mos keltiradigan almashtirishni $k \neq 0$ koeffitsientli va 0 markazli gomotetik almashtirish qisqacha gomotetiya deyiladi. O markazi $k \neq 0$ koeffitsientli gomotetiya G_0^K ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rifdan gomotetiyaning ko'plab xossalarini chiqarish mumkin biz ularning ba'zi birlariga to'xtalamiz:

1°. Gomotetiya o'zaro bir qiymatli almashtirish.

Haqiqatan, agar A nuqta k koeffitsient berilsa A' nuqta $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ vector yordamida bir qiymatli aniqlanadi, ya'ni $G_0^K(A) = A'$



69-чизма.

Aksincha, agar A' nuqta, gomotetiya markazi O nuqta va k- koeffitsient berilgan bo'lsa, u holda OA' vektor bir qiymatli aniqlanadi, demak $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{K}\overrightarrow{OA}$ bundan A nuqta aniqlanadi (69. a - chizma).

2°. Gomotetiya mos nuqtalar va gomotetiya da markazi bir to'g'ri chiziqda yotadi (69 a,b) chizma).

Bu $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OA'}$ vektorlarning kolleniarligadan bevosita kelib chiqadi. Agar k>0 bo'lsa, $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OA'}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'ladi, demak, A nuqta va uni aksi (obrazi) A' nuqta, markazdan bir tomonda yotadi. Agar k<0 bo'lsa, $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OA'}$ vektorlar qarama - qarshi yo'nalgan bo'ladi, demak, A va A' nuqtalar O nuqtaning turli tomonlarida yotadi.

3°. Gomotetiya nuqtalarning kolleniarligini saqlaydi.

4°. Agar $G_0^K(A)=A'$, $G_0^K(B) = B'$ o'tkazsa, $\rho(A', B') = k\rho(A, B)$.

Buning isboti 3° xossadan bevosita kelib chiqadi.

5°. Agar $G_0^K(A)=A'$, $G_0^K(B) = B'$ o'tsa, AB to'g'ri chiziq A'B' to'g'ri chiziqga parallel bo'ladi. Ya'ni AB//A'B'.

Buni o'rinliligi A'B' = kAB dan bevosita kelib chiqadi.

3. Tekislikdagi barcha o'xshash almashtirishlar to'plamini R orqali belgilaylik. Ixtiyoriy ikkita R^{K_1}, $R^{K_2} \in R$ o'xshash almashtirishlar tekislikning ikkita M va N nuqtalarini $P^{K_1}(M)=M'$, $P^{K_1}(N)=N'$ nuqtalarga R^K o'xshash almashtirish M', N' nuqtalarni $r^{h2}(M^k) = M''R^{K_1}(N^1) = M''$ o'tkazsa, u holda ta'rifga ko'ra

$$\rho(M',N') = k_1\rho(M,N)$$

$$\rho(M'',N'') = k_2\rho(M',N') \qquad (14.3)$$

Tekislikdagi R^{K_1} R^{K_2} almashtirish MN nuqtalarny M'', N'' nuqtalarga o'tkazadi. (14,3) ga ko'ra

$$\rho(M'',N'') = k_1k_2\rho(M,N) \qquad (14,4)$$

shartni ham qanoatlantiradi. Demak, $P^K = P^{K_2} P^{K_1}$ ni $k = k_1k_2$ koeffitsientli o'xshash almashtirish bo'ladi, demak, $R^K \in R$.

Har qanday R^K o'xshash almashtirish teskari f^{-1} almashtirish M', N' nuqtalarni M, N nuqtalarga o'tkazsin, (14,3) dan

$$\rho(M,N) = \frac{1}{k_1}\rho(M',N')$$

bundan f^{-1} almashtirish $\frac{1}{k_1}$ koeffitsientli o'xshash almashtirish ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib:

1. $\cancel{P^{K_1}, P^{K_2} \in P \Rightarrow P^{K_1} P^{K_2} \in P}$ $R^{K_1} R^{K_2} \in R \Longleftrightarrow R^{K_1} R^{K_2} \in R$
2. $P^{K_1} \in P$, $f^{-1} = P^{1/K_1} \in P$

Demak, P to'plam gruppa tashkil qiladi. Bu gruppani o'xshash almashtirish gruppasi deb aytamiz.

Har bir o'xshash almashtirish burchakni o'ziga teng burchakka o'tkazadi, ya'ni burchak kattaligini o'zgartmaydi.

O'xshash almashtirishlar R gruppasini qism gruppasi bilan tanishaylik:

Agar k = 1 bo'lsa, u holda o'xshash almashtirish harakat bo'ladi. Harakat gruppasi o'xshash almashtiripshing qism gruppasi bo'ladi.

Gomotetiya ham gruppa tashkil qiladi, bu gruppa o'xshash almashtirish gruppasining qism gruppasi bo'ladi.

Isbotni talabalarga havola qilamiz.

Tekshirish uchun savol va mashqlar.

1. Qanday almashtirishda figura shaklini va faqat shaklini o'zgartmaydi?
2. O'xshash almashtirishga ta'rif bering va misollar keltiring.
3. O'xshashlik koeffitsienti deb nimaga aytiladi? Nima uchun k>0 bo'lishi shart?
4. O'xshash almashtirishning xossalari.
5. O'xshash figaralar deb qanday figaralarga aytiladi.
6. Gomotetiyaga ta'rif bering, misollar keltiring.
7. Gomotetiya xossalarini ayting.
8. O'xshash almashtirishlar gruppasi va uning qism gruppalari.
9. Agar F_1 F_2 va F_2 F_3 bo'lsa, u holda F_1 F_3 ni isbotlang.

10. ABC uchburchak va undan tashqarida 0 nuqta berilgan. ABC uchburchakni O nuqtaga nisbatan k=1/2; k = 2; K = -1 koeffitsient bilan gomotetik almashtiring.

11. Biror gomotetiyaga teskari almashtirsh gomotetiya ekanini isbotlang.

12. O markazli k_1 va k_2 koeffitsientli gomotetiyalar ko'paytmasi gruppa tashkil qiladi.

13. Quyidagi jumlalarning qaysilari to'g'ri:

a) har qanday teng ikkita figura o'xshash.

b) har qanday ikkita o'xshash figura teng.

s) har qanday ikkita gomotetik figura o'xshash.

14 - ma'ruza

Ma'ruza rejasi

1. O'xshash almashtirish-gomotetiya bilan harakat kupaytmasi.
2. Gomotetiya va o'xshash almashtirishning analitk ifodasi.
3. Almashtirishlarni masalalar yechishga tadbiqi.

1. Tekislikda P^k o'xshash almashtirish va G_0^K gomotetiya berilgan bo'lsin.

1-teorema. P^k o'xshash almashtirish G_0^k gomotetik almashtirish bilan L harakat ko'paytmasidan iborat.

Isboti. P^k o'xshash almashtirish tekislikning ixtiyoriy ikkita M va N nuqtalarini $P^K(M)=M'$, $R^K(N)=N'$ nuqnalarga o'tkazsa, u holda

ρ (M',K')=kρ (M,N)   (15,1)

Tekislikning biror O nuqtasiga nisbatan gomotetik G_0^k almashtirish $G_0^k(M)=M''$ $G_0^k(N)=N''$ bo'lsa, gomotetiya ta'rifiga ko'ra M"N" = krMN (70-chizma) bundan,

ρ (M",N")=kρ (M,N) (15,2)

(15,1) va (15,2) dan L(M')=M", L(N') = N" o'tkazadi (70-chizma).

ρ (M',N') =ρ(M",N") (15,3)

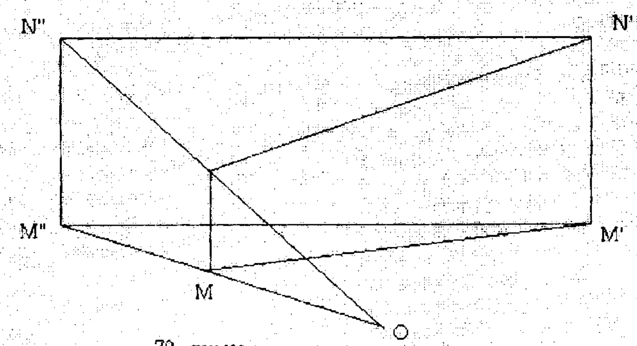
Demak, R^k=L G_0^k (70-chizma)

G_0^k almashtirishdagi teskari almashtirish i geometrik almashtirish bo'lib, $G_0^{1/k}(M'')=M$, $G_0^{1/k}(N'')=N$

Avval $G_0^{1/k}$ almashtirishni R^K almashtirishni bajarsak,

$$P^K\left(\tilde{A}_0^{\frac{1}{k}}(M'')\right) = P^K(M) = M'$$

$$P^K\left(\tilde{A}_0^{\frac{1}{k}}(N'')\right) = P^K(N) = N' \qquad \text{(70-chizma)}$$



70 - чизма

shu bilan birga ρ (M",N") = ρ (M',N'), bundan $P^K*G_0^k$ ko'paytma harakat ekanini ko'ramiz. Demak, biz quyidagi natijaga ega bo'ldik.

Natija. Tekislikdagi O markazli $\frac{1}{k}$ koeffitsientli gomotetiya bilan k koeffitsientli o'xshash almashtirish kompozitsiyasi harakatdir. Bundan

$P^k * G_0^k = L$

$P^k = L * G_0^k$

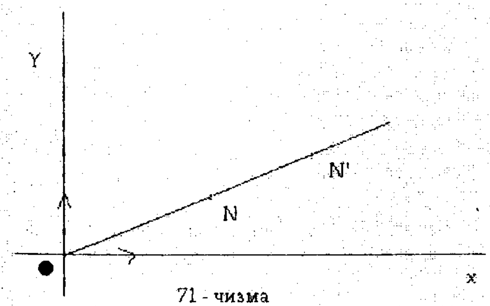
2. Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Markazi koordinatalar boshida K≠0 koeffitsientli G_0^k gomotetik almashtirish tekislikning ixtiyoriy N(x,y) nuqtasini $G^k_0(N)=N'(x',u')$ nuqtasiga o'tkazsin (71-chizma). Gomotetiya ta'rifiga ko'ra ON' = kON bundan

x' = kx;

y' = ky   (15.4)

(15.4) formula markazi koordinatalar boshida bo'lgan k koeffitsientli gomotetiyaning analitik ifodasi.

Markazi O'(a,b) nuqtada bo'lgan G_0^K gomotetik almashtirish formulasini chiqaraylik.



71 - чизма

Buning uchun (xoy) to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan (x'o'y') to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasiga e'tibor beraylik. (72-chizma).

Yangi (x'o'y') koordinatalar sistemasida N(X;Y), N'(X';Y') koordinatalarga ega bo'lsin.

$G_{0'}^{K}(N) = N' \Rightarrow O'N' = kON$, bundan

$X' = kX$;

$Y' = kY$.

Parallel ko'chirish formulasidan foydalansak

$X = x-a$; $X'=x'-a$

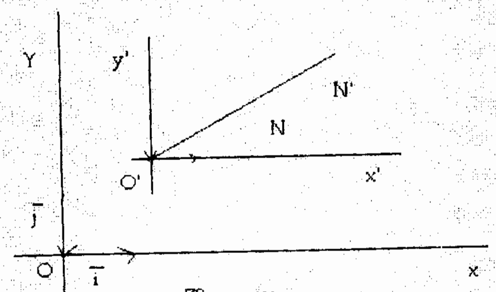
$Y = u-b$; $Y' = y'-b$ (15.6)

(15,5) va (15,6) lardan foydalanib,

$x' = kx + a(1-k)$;

$y' = ky + b(1-k)$ (15.7)

Bu formula markazi O' nuqtada k koeffitsientli gomotetiyaning analitik formulasi.



72 - чизма

Agar k=1 bo'lsa, (15,7) formulada x'=x; y'=y ayni almashtirish formulasi hosil bo'ladi.

P^K o'xshash almashtirishning analitik ifodasini topaylik. Yuqoridagi 1-georemaga ko'ra P^K ni gomotetiya va harakat kompozitsiyasi sifatida qarash mumkin, ya'ni

$P^K = L\ G^K$

Koordinatalar boshini G^k gomotetiya markazi M(x,y) nuqtaning aksini $G_0^K(M) = N'(x',y')$ deb olsak u holda

$$\begin{cases} x^* = kx \\ y^* = ky \end{cases} \quad (15.8)$$

L(N*)=N'(x',y') o'tkazsin, harakat formulasidan foydalanib ushbu:

$$\begin{cases} x' = x^*\cos\alpha \pm y'\sin\alpha + a \\ y' = x^*\sin\alpha \pm y'\cos\alpha + b \end{cases} \quad (15,9)$$

bu yerda a,b lar O nuqta aksining koordinatalari. Ya'ni L(0) = O'(a;b).

Shunday qilib quyidagi teoremaga ega bo'ldik.

2-teorema. Tekislikdagi har bir o'xshash almashtirish, to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida,

$$\begin{cases} x' = k(\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha) + a \\ y' = k(\sin\alpha + e\sin\alpha) + b \end{cases} \quad (15.10)$$

formula bilan ifodalanadi.

Teskari teorema ham o'rinli bo'ladi:

$x' = a_1x - a_2\varepsilon y + a$;

3-teorema. $\begin{cases} x' = a_1x - a_2\varepsilon y + a \\ y' = a_2x + a_1\varepsilon y + b \end{cases}$ (15,11)

bunda $\varepsilon=\pm1$ va $a_1^2+a_2^2=0$, formula $K=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ koeffitsientli o'xshash almashtirishni aniqlaydi.

Isboti. (15,11) formula N(x,y) nuqtaga mos N'(x',y') nuqtani bir qiymatli aniqlab qolmay, balki N'(x',y') nuqta berilsa N(x,y) nuqtani ham bir qiymatli aniqlash mumkin, chunki

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2\varepsilon \\ a2 & a1\varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon(a_1^2+a_2^2) \neq 0$$

Agar $A(x_1;x_2) \to A'(x';y')$, $B(x_2;y_2) \to B'(x';y')$ nuqtaga almashtirilsa, u holda

$$AB = \sqrt{(x_2^1-x_1^1)^2+(y_2^1-y_1^1)^2} = \sqrt{(a_1(x_2-x_1)+a_2\varepsilon(y_2-y_1))^2} =$$

$$= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(x_2-x_1)^2+\varepsilon^2(a_1^2+a_2^2)(y_2-y_1)^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2+a_2^2}\,AB$$

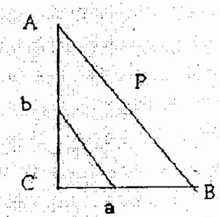
Demak, ixtiyoriy A, B nuqtalar va ularning A', B' obrazlari uchun

$$\rho\ (A',B') = k\rho\ (A,B)$$

Agar $a_2 = 0$ bo'lsa (15,11) formula harakatni aniqlaydi. Buning to'g'riligini o'quvchilar o'zlari isbotlashi mumkin.

3. O'xshash almashtirish, isbotlashga, yasashga, hisoblashga doir masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

1-masala. ABC to'g'ri burchakli uchburchakni a va b katetlarini diametr qilib chizilgan aylanalarning kesishgan C va P nuqtalari orasidagi masofani toping (73-chizma).



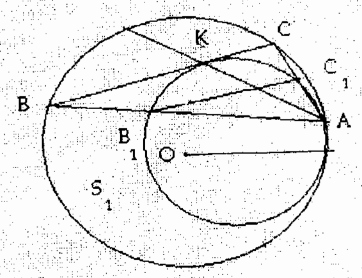
73-чизма

Yechish 73-chizmaga e'tibor bersak $\angle BPC = \angle APC = 90°$ ekanligini ko'ramiz, chunki bu burchaklar BC va CA diametrlarga tiralgan. Shunday qilib $\angle APB = 180°$, B, P va A nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotish bilan birgalikda P nuqta, C uchidan gbpotenuza tushirilgan perpendikulyar asosi.

$\angle BCP = \angle CAP$, $\Delta PBC\ \Delta CBA$ bundan

$\frac{CP}{BC} = \frac{CA}{AB}$, yoki $\frac{CP}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $CP = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2-masala. Ikkita $S_1(o,r)$ va $S_2(o_1,r_1)$ aylanalar A nuqtada ichki urinadi (74-chizma). S_1 ichki aylananing ixtiyoriy K nuqtasiga BC urinma kesma o'tkazilgan (74-chizma).



74-чизма

Bu kesmani K nuqta BK va KS kesmalarga ajratadi. Bu kesmalar urinish nuqtadan bir xil burchak ostida ko'rinishini isbotlang.

Isboti. $G_A^K(O)=O_1$ gomotetiya olamiz. Bu gomotetiyada $G_A^K(O)=S_1$ o'tadi, $G_A^K(AB)=AB$, $G_A^K(AC)=AC$ to'g'ri chiziqlar o'z-o'ziga o'tadi.

$G_A^K(B) = B_1$ $G_A^K(C) = C_1$ => $G_A^K(AB)=B_1C_1$. Bundan $AB \| B_1C$ kelib chiqadi. Agar urinma vatarga parallel bo'lsa, urinish nuqtasi vatarni tortib turgan yoyni teng ikkiga bo'ladi. Bundan <CAK = <KAB kelib chiqadi.

Tekshirish uchun savollar va misollar.

1. $P^K = L\ G_0^K$ tenglikni so'z bilan ifodalang.
2. Yuqoridagi tenglikni to'g'ri ekanligani isbotlang.
3. $G^K = L\ P_0^K$ formulani so'z bilan ifodalang.
4. 3 dagi formulaning o'rinli bo'lishini isbotlang.
5. Gomotetiyaning analitik ifodasini yozing.
6. Gomotetiya markazi $O \neq O'$ bo'lmagan holdagi analitik ifoda qanday bo'ladi?
7. O'xshash almashtirishning analitik ifodasini yozing.
8. $A(0,1) \to A'(2,2+\sqrt{3})$, $B(1,0) \to B'(3+\sqrt{3};3)$ mos nuqtalar bilan berilgan o'xshash almashtirish formulalarini toping.

Javob: $x'=x\sqrt{3}-y+3$; $y= x+y\sqrt{3}+2$ bilan

9. Quyidagi formula ~~berilgan~~ almashtirish o'xshash almashtirish ekanini ko'rsating, K ni va invariant nuqtasining koordinataloarini toping.

Ko'rsatma. Ixtiyoriy ikkita $M_1(x_1, y_1) \to M'_1(x'_1, y'_1)$ $M_2(x_2, y_2) \to M'_2(x'_2, y'_2)$ nuqtalar uchun $M'_1M'_2 = kM_1M_2$ ko'rsatib, so'ngra $K=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1(2, 2)$.

10. Ikkita burchagi, uchinchi burchak bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

Adabiyot [1],41, 42. [2], 46,47-pr.

15 - ma'ruza

Ma'ruza rejasi

1. Aylananing umumiy tenglamasi
2. Ellips, ellipsning xossalari, ellipsni yasash.
3. Ellipsning parametrik tenglamasi, ellipsning urinmasi.

Aylana maktab geometriya kursidagi ko`plab masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shuning uchun qaralayotgan paragrafda aylananing analitik ifodasini berib, masalalar yechishga tadbiq qilamiz.

Ta'rif. Tekislikda berilgan nuqtadan berilgan masofada yotuvchi nuqtalarning (to`plamini ) geometrik o`rnini aylana deyiladi.

Ta'rifda aytilgan nuqtani aylana markazi, berilgan masofani aylana radiusi deyiladi va r bilan belgilaymiz.

To`g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi (Oij) berilgan bo`lsin. Tekislikdagi ixtiyoriy N(x,y) nuqta aylanada yotishi uchun

$$|\overline{CN}|=r \qquad (15.1)$$

shart o`rinli bo`lishi lozim. Bu yerda M(a,b) aylana markazi

(15.1) dan:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

bundan,

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \qquad (15.2)$$

markazi C(a,b) nuqtada radiusi r ga teng bo`lgan aylananing **u m u m i y t e n g l a m a s i** deyiladi.

Agar a=b=0 bo`lsa, M nuqta koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi. (15.2) tenglama,

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (15.3)$$

ko`rinishda bo`ladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida bo`lgan aylananing **N o r m a l t e n g l a m a s i** deyiladi.

(15.2) dan qavslarni ochib chiqsak, quyidagi hosil bo`ladi:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$$

$-2a=D$, $-2d=E$, $a^2+b^2-r^2=F$ bilan belgilasak aylana tenglamasi

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (15.4)$$

ko`rinishga keladi. (15.4) tenglamaga e'tibor bersak, ikkinchi tartibli algebraik chiziq aylana tenglamasi bo`lishi uchun: a) o`zgaruvchi koordinatalar ko`paytmasi xy qatnashmasligi, b) x^2 va y^2 oldidagi koeffitsientlar teng bo`lishi kerak, degan xulosaga kelamiz.

Masala. 1. Koordinatalari (15.4) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o`rnini tekshiring.

Yechish (15.4) tenglamaning ko`rinishini

$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4}+F-\frac{D^2}{4}-\frac{E^2}{4}=0$$

yoki

$$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}=\frac{\rho}{2} \qquad (15.5)$$

o`zgartirish mumkin. Bu yerda $p=D^2+B^2-4F$.

Quyidagi xollardan biri bo`lishi mumkin:

1.$D^2+B^2-4F > 0$ bo`lsa, (15.5) tenglama markazi $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$ nuqtada radiusi

$r=\frac{\sqrt{D^2+B^2-4F}}{2}$ teng aylana tenglamasidir.

2.$D^2+E^2-4F = 0$ bo`lsa, (15.5) tenglamani bittagina $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$ nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, geometrik o`rin bitta nuqtadan iborat bo`ladi.
3.$D^2+E^2-4F < 0$ bo`lsa, u holda koordinatalari (15.5) tenglamani qanoatlantiruvchi bitta ham haqiqiy nuqta mavjud emas.

2-Masala. quyida berilgan tenglamalarning qaysi birlari aylanani aniqlaydi. Agar tenglamalar aylanani aniqlasa, uning markazining koordinatalarini va radiusini toping.

a) $x^2+y^2-4x+8y+4=0$;
b) $x^2+2y^2-4x=0$;
v) $x^2+y^2-3=0$;
g) $4x^2+4y^2-4x+8y+5=0$.

Yechish. hamma hol uchun $p=D^2+E^2-4F$.
a) $p=(-4)^2+8^2-4\cdot4=64$, $(x-2)+(y+4)=16$.
Bu markazi M(2;-4) nuqtada radiusi $r=4$ bo`lgan aylanani aniqlaydi.
b) x^2, y^2 lar oldidagi koeffitsientlari teng emas, demak bu tenglama aylanani aniqlamaydi.
v) $\rho=0+0+4\bullet3=12>0$.

Tenglamalar markazi koordinatalar boshida radiusi $r=\frac{\sqrt{p}}{2}=\sqrt{3}$ bo`lgan aylanani ifodalaydi.

g) berilgan tenglamada x^2 va y^2 larning oldidagi koeffitsientlar bir-biriga teng shartga ko`ra aylanani ifodalaydi. Uning markazi va radiusini topaylik. Tenglamani 4 ga bo`lib,

$$x^2+y^2-x+2y+\frac{5}{4}=0$$

$\rho=D^2+E^2-4F=1+4=5\neq0$. Shunday qilib, tenglama faqat bitta $(\frac{1}{2};1)$

nuqtani aniqlaydi.

Ellips.

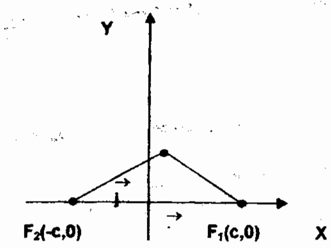
T a ' r i f. Ellips deb tekislikdagi shunday nuqtalarning geometrik o`rniga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha bo`lgan masofalari yig'indisi berilgan PQ kesma uzunligiga teng bo'lib, $PQ > F_1F_2$.

Fokuslar orasidagi masofani $F_1F_2=2c$, $PQ=2a$ deb olamiz.

Ta'rifga asosan $a>c$ bo`ladi.

Agar F_1 va F_2 nuqtalar ustma-ust tushsa, u holda ta'rifga ko`ra ellips radiusi a ga teng aylana bo`ladi. Bu holda ellipsning fokuslari aylana markazi bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, aylana ellipsning xususiy holidir.

Ellipsning F_1F_2 fokuslari orasidagi masofani ellipsning fokal masofasi deyiladi. N nuqta ellips nuqtasi bo`lsin, u holda F_1N va F_2N kesimalarni **N nuqtaning fokal radiusi** deyiladi. $r_1=F_1N$, $r_2=F_2N$ bilan belgilaymiz (**75-chizma**).



75-chizma

Ixtiyoriy N nuqta ellipsda yotsa, ta'rifga ko`ra

$$F_1N + F_2N = 2a,$$

yoki

$$r_1+r_2=2a \qquad (15.6)$$

(15.6) ellipsning ta'rifidan bevosita kelib chiqqan tenglamasi.

Ellipsning to`g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini topaylik.

Buning uchun dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha tanlab olamiz. F_1F_2 to'g'ri chiziq bilan Ox absissa o`qi ustma-ust tushsin. $F_1F_2$ – kesmani O o`rta nuqtasi bo`lsin.

U holda fokuslar $F_1(c,o)$ va $F_2(-c,o)$ koordinatalarga N(x,y) koordinatalarga ega bo`ladi. Tekislikdagi ixtiyoriy N nuqtaning fokal radiuslari quyidagilarga teng:

$$r_1=F_1N=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad r_2=F_2N=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (15.7)$$

Topilgan qiymatlarni (15.6) tenglikka qo`yib tapamiz

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

Bu tenglamani

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ko`rinishda** yozib olib, tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko`tarib, **ixchamlab quyidagini hosil qilamiz,

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx,$$

Yana kvadratga ko`tarib ixchamlasak

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

(15.8)

$a>c \Rightarrow a^2>c^2$, demak $a^2-c^2>0$ bu soni

$$b^2=a^2-c^2$$
(15.9)

kabi belgilab olsak (15.8) tenglama

$$b^2x^2+ay^2=a^2b^2$$
(15.10)

ko`rinishga keladi. (15.10) ni $a^2b^2$ ga bo`lib ushbu tenglamaga ega bo`lamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
(15.11)

Shunday qilib, γ ellipsning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari (15.11) tenglamani qanoatlantirishi isbotlandi.

Endi teskari jumlani isbotlaylik. Koordinatalari (15.11) tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy N nuqtani ellipsda yotishini isbotlaymiz.

(15.11) tenglikdan $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ qiymatini (15.7) ga qo`yib, (15.9) ni hisobga olsak, ushbuga ega bo`lamiz:

$$r_1=F_1N=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|,$$

$$r_2=F_2N=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

(15.11) tenglamada, agar $|x|\le a$ va $0<\frac{c}{a}<1$ bo`lsa, u holda $a-\frac{c}{a}x>0$, $a+\frac{c}{a}x>0$, shuning uchun

$$r_1=F_1N=a-\frac{c}{a}x,\quad r_2=F_2N=a+\frac{c}{a}x$$

$r_1=a-\frac{c}{a}x$, $r_2=a+\frac{c}{a}x$

Demak, $r_1+r_2=2a$. Ya'ni koordinatalari (15.11) tenglamani qanoatlantiruvchi N nuqta ellipsda yotadi.

(15.11) tenglama ellipsning **kanonik tenglamasi** deyiladi. Ammo (15.11) ko`rinishdagi tenglama bilan aniqlanagan ellips shunday joylashishi mumkinki bu holoda uni fokuslari Oy o`qda yotishi o`z-o`zidan ravshan u vaqtda b >a va OB=b kesma uning katta yarim o`qi bo`ladi. Ammo, har qanday holda ham absissalar o`qidagi OA kesmaning uzunligi a bilan belgilanadi ordinatalar o`qidagi OB kesmaning uzunligi b bilan belgilanadi.

Ellipsning xossalari.

Bu yerda ellipsning xossalarini o`rganib, uning shaklini chizamiz.

1°. (15.11) tenglamadan ellipsning kanonik tenglamasiga ko'ra ikkinchi tartibli chiziq ekanligi ko`rinadi.

2°. Agar $N(x,y)\in\gamma$ bo`lsa, u holda x,y koordinatalar (15.11) tenglamani qanoatlantiradi, shuning uchun $x^2\le a^2$, $y^2\le b^2$, demak

$$-a\le x\le a,\ -b\le x\le b$$

Ya'ni ellipsning hamma nuqtalari tomonlari 2a va 2b dan iborat bo`lgan $N_1N_2N_3N_4$ to`g'ri to'rtburchak ichida joylashgan (76-chizma).

3°. Agar $N(x,y)\in\gamma$ bo`lsa, u holda $N'(-x,-y)\in\gamma$, shuning uchun O nuqta ellipsning yagona **simmetriya markazi** bo`ladi

Agar $N(x,y)\in\gamma$, u holda $N'(-x,y)$ va $N'(x,-y)$ nuqtalar ham ellipsda yotadi. Chunki ellips ikkinchi tartibli chiziq. Demak, Ox va Oy o`qlari ellipsning **simmetriya o`qlari** bo`ladi. Ellips aylanadan farqli o`laroq boshqa simmetriya o`qlarga ega emas.

4°. Ellipcning koordinata o`qlari bilan kesishgan nuqtalarini topaylik:

a) y=0, (15.11) $\Rightarrow x^2=a^2$, $x=\pm a$ demak, Ox o`qi ellipsni $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesadi

b) x=0, (15.11) $\Rightarrow y^2=b^2$, $y=\pm b$. Oy o'qi ellipsni $B_1(0,b)$ va $B_2(0,-b)$ nuqtalarda kesadi. Bu nuqtalarni ellipsning **uchlari** deyiladi. A_1A_2 va B_1B_2 kesmalar mos ravishda ellipsning **katta va kichik o`qlari** deyiladi. Bu kesmalar O nuqtada teng ikkiga bo`linadi. $OA_1=OA_2=a$, $OB_1=OB_2=b$ bu kesmalarni mos ravishda ellipsning **katta va kichik yarim o`qlari** deyiladi.

Yuqoridagi ellipsning xossalarini hisobga olib (15.11) tenglama bilan berilgan ellipsni chizish uchun birinchi chorakdagi bir nechta nuqtalarini topib, birinchi chorakdagi qismini chizamiz. qolgan bo`laklarini simmetrik almashtirib topamiz (77-chizma).

Birinchi chorakda N(x,y) nuqta uchun x>0, y>0: $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. N nuqtaning absissasi x, 0 dan a gacha o`sganda, ordinatasi y b dan 0 gacha kamayib boradi.

E k s t s e n t r i s i t e t.

T a ' r i f. Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning ellipsning katta o`qi uzunligiga nisbati shu ellipsning ekstsentrisiteti deb ataladi. Ekstsentrisitet e harfi bilan belgilanadi.

$$e=\frac{2c}{2a},\quad e=\frac{c}{a} \qquad (15.12)$$

c-fokal masofa, a- katta yarim o`q. Shuning uchun 0<e<1.

har bir ellipsning ekstsentrisitenti birdan kichik.

Ekstsentrisitet nolga teng bo`lishi uchun c=0 bo`lishi zarur va yetarlidir.

Bunda ellips aylana bo`lib qoladi.

$c^2 = a^2 - b^2$ ekanligini nazarda tutamiz, shu sababli

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

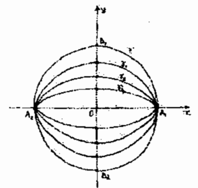
bundan

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\quad \text{va}\quad \frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2};$$

Demak, ekstsentrisitet ellipsning o`qlarining nisbati bilan aniqlanadi, o`qlarning nisbati esa, o`z navbatida ekstsentrisitet bilan aniqlanadi. Shunday qilib, **ekstsentrisitet ellipsning shaklini xarakterlaydi**. Ekstsentrisitet birga qancha yaqin bo`lsa, $1-e^2$ shunchalik kichik, ya'ni $\frac{b}{a}$ nisbat shunchalik kichik bo`ladi.

Demak, ekstsentrisitet qanchalik katta bo`lsa, ellips shunchalik cho`ziq bo`ladi.

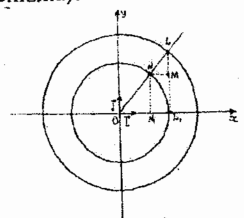
Aylana bo`lgan holda b=a va ektsentrisitetlari $e_1<e_2<e_3$. tensizlikni qanoatlantiruvchi ellipslar 78-chizmada tasvirlangan.



78-chizma

Ellipsni yasash. Ellipsning parametrik tenglamasi

Kanonik tenglamasi bilan berilgan ellipsni sirkul va chizg'ich yordamida yasashni ko`raylik. Buning uchun ellipsning a>b yarim o`qlarini radius, koordinatalar boshini markaz qilib ikkita kontsentrik S_1 va S_2 aylanalar chizamiz (79-chizma).



79-chizma

O nuqta orqali ixtiyoriy d to`g'ri chiziq o`tkazamiz. Uning Ox o`qi bilan hosil qilgan burchagini t bilan belgilaylik, d to`g'ri chiziqning S_1 va S_2 aylanalar bilan kesishgan nuqtalarni mos ravishda L_1L' va N_1N' bilan belgilaylik, ~~L_1 va~~ L' nuqtalardan Oy o`qqa $N_1$N' nuqtalardan Ox o`qqa parallel to`g'ri chiziqlar o`tkazsak, ular ~~mos ravishda M va~~ M' nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarning ellipsda yotishini isbotlaymiz.

N(bcost,bsint), L(acost,asint), M(x,y) koordinatalarga ega. Bu nuqtalarning absissa va ordinatalariga e'tibor bersak

$$x=a\cos t$$
$$y=b\sin t \qquad (15.13)$$

ekanligini ko`ramiz. (15.13) tenglamani quyidagicha yoza olamiz.

$$\frac{x}{a}=\cos t,\ \frac{y}{b}=\sin t$$

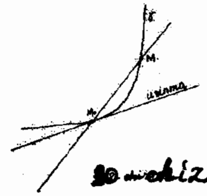
bu tenglikning har ikkala tomonini kvadratga ko`tarib qo`shsak, ushbu tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (15.14)$$

Demak, M nuqta ellipsga tegishli ekan. Xuddi shunga o`xshash M' nuqtaning ham ellipsga tegishli ekanligini isbotlash mumkin.79-chizmada ellipsni yasash usuli ko`rsatilgan.

Ellipsning urinmasi

Ta'rif. γ chiziqning M_0 nuqtasiga o`tkazilgan urinmasi deb $M_0M$ kesuvchining M nuqtaga chiziq bo`ylab M_0 ga intilgandagi limitiga urinma deb aytiladi (80-chizma).



80-chizma

(15.11) ellipsning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi orqali o`tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Ellipsning $M_0(x_0,y_0)$ nuqtasi orqali o`tgan to`g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$x=x_0+\alpha t$$
$$y=y_0+\beta t \qquad (15.15)$$

Bu to`g'ri chiziq bilan ellipsning kesishgan nuqtalarini topaylik. Buning uchun x,y larning qiymatlarini ellips tenglamasiga qo`yib hosil bo`lgan t ga nisbatan hosil bo`lgan tenglamani echamiz.

$\frac{(x-\alpha t)^2}{a^2}+\frac{(y_0+\beta t)^2}{b^2}=1$ M_0 nuqta ellipsda yotgani uchun, uning koorodinatalari (15.11) tenglamani qanoatlantiradi, shuning uchun yuqoridagi tenglama

$$\left(\frac{2\alpha x_0}{a^2}+\frac{2\beta y_0}{b^2}\right)t-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2=0$$

Bu tenglamani yechib ellipsning (15.15) to`g'ri chiziq bilan kesishish parametrini t ni topamiz.

$$t_1=0,\ t_2=-\left(\frac{2\alpha x_0}{a^2}+\frac{2\beta y_0}{b^2}\right):\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right).$$

Ixtiyoriy to`g'ri chiziq uchun $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\neq 0$, shuning uchun $t_2$ hamma vaqt mavjud $t_1=0$ M. nuqtaning parametr ekanligi ravshan. Agar ikkinchi kesishish nuqtasi $M^0$, $M_0$ ga intilsa $t_2$ parametr nolga intiladi. (15.15) to`g'ri chiziq urinma tenglamasi bo`lishi uchun

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}+\frac{\beta y_0}{b^2}=0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix}=0$$

o`rinli bo`lishi zarur va yetarli.

Shunday qilib, urinma $p\left(-\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)$ vektorga parallel va

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -\frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2} \end{vmatrix}=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{xx_0}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$$

$(x_0, y_0)\in g$ bo`lgani uchun $-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=-1$ va oxirgi bo'lib

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad (15.16)$$

tenglamaga ega bo'lamiz

Shunday qilib, ushbu natijaga kelamiz.

Natija. Ellips har bir $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada (15.16) tenglama bilan aniqlangan urinmaga ega.

1-misol. Agar quyidagilar berilgan bo`lsa, ellipsning kanonik tenglamasinin tuzing.

a)ellips uchlarining koordinatalari $A_1(5,0)$, $A_2(-5,0)$, $B_1(0,3)$, $B_2(0,-3)$

b) ekstsentrisitet $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$, katta yarim o`q a=3

v) fokal masofa 2c=8, kichik yarim o`q b=4

Yechish. a) katta yarim o`q a=5, kichik yarim o`q b=3 teng, ellips ushbu

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

kanonik tenglama bilan aniqlanadi.

b) $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, a=3, shuning uchun $c=\sqrt{3}$. $b^2=a^2-c^2=9-3=6$, $b=\sqrt{6}$. Shuning uchun ellips $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ kanonik tenglama bilan aniqlanadi.

v) c=4, $a^2=b^2+c^2=16+16=32$, $a=4\sqrt{2}$. Biz ellipsning ushbu kanonik tenglamasiga $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$ ega bo`lamiz.

2-misol. a) $16x^2+25y^2-400=0$

v) $9x^2+25y^2-225=0$

Yechish. 1) $16x^2+25y^2-400=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ bu yerda a=5, b=4, $c=\sqrt{25-16}=3$, $e_1=\frac{3}{5}$.

2) $9x^2+25y^2-225=0$, bundan $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ bu yerda a=5, b=3, $c=\sqrt{25-9}=4$, $e_2=\frac{4}{5}$.

$e_1<e_2$ birinchi ellips ikkinchiga nisbatan o`zining katta o`qiga siqilgan, ya'ni cho`ziqroq.

3-misol. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsning $M_0(1,\frac{4\sqrt{2}}{3})$ nuqtasiga urinma o`tkazing.

Yechish. M_0 nuqta ellipsda yotadi. Uning koordinatalari (15.16) tenglamaga qo`yib urinma tenglamasini topamiz.

$\frac{x}{9}+\frac{y\bullet 4\sqrt{2}}{3\bullet 4}=1$ yoki $x+3\sqrt{2}y-9=0$.

Savollar va masalalar.

1.Ellipsni ta'riflang

2.Ellipsning xossalarini ayting

3.Ellipsni har xil yasash usullarini ko`rsating

4.Ellipsning ekstsentrisitetini ta'riflang. U ellipsning shakliga qanday ta'sir qiladi.

5.Ellipsning urinmasi deb nimaga aytiladi.

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning uchlari A_1, A_2 va B_1, B_2 nuqtalarda ellipsning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofani hisoblang.

Javoblar: $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$, $A_1B_1=A_1B_2=A_2B_1=A_2B_2=\sqrt{a^2+b^2}$

7. Quyidagilar berilganda ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

1) yarim o`qlari a=5 va b=2
2) katta o`qi 10 ga fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng
3) kichik o`qi 24 ga fokuslari orasidagi masofa 10 ga teng
4) fokuslar orasidagi masofa 6 ga ekstsentrisiteti $e=\frac{3}{5}$
5) katta o`qi 20 ekstsentrisiteti $e=\frac{3}{5}$

8.Fokuslari ordinatalar o`qida, koordinatalar boshiga simmetrik bo`lgan va bundan tashqari quyidagi berilgan holda ellipsning kanonik tenglamasini tuzing. (Bu holda ham ellipsning kanonik tenglamasining ko`rinishi o`zgarmaydi lekin b>a shart o`rinli bo`ladi.

a) yarim o`qlari a=2, b=7

b) katta o`qi 10 ga teng fokuslari orasidagi masofa 2c=8

v) fokuslar orasidagi masofa 2c=24 va ekstsentrisitet $e=\frac{12}{13}$

g) kichik o`qi 16, ekstsentrisitet $e=\frac{3}{5}$

9. $9x^2+25y^2=225$ ellips berilgan. 1) uning yarim o`qi, 2) estsentrisiteti, 3) fokuslarini toping.

10.Ikkita uchi $9x^2+5y^2=1$ ellips fokuslarida, qolgan ikkita uchi kichik o`qining uchlarida bo`lgan to`rtburchakning yuzlarini toping. Javob. $\frac{4\sqrt{5}}{45}$

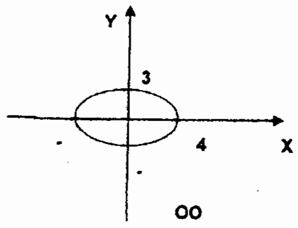
11. $A_1(-2,3)$, $A_2(2,-2)$, $A_3(2,-4)$, $A_4(-1, 3)$, $A_5(-4,3)$, $A_6(3,-1)$, $A_7(3,-2)$, $A_8(2,1)$, $A_9(015)$, $A_{10}(0,-16)$ nuqtalarning $8x^2+5y^2=77$ ellips bilan vaziyatini aniqlang

Javob: A_1 va A_6 ellipsda yotadi, A_2, A_4 va A_8 ellips ichida, A_3, A_5, A_7, A_9 va A_{10} ellipsdan tashqarida yotadi.

12.Ushbu funktsiyalar qaysi chiziqlarni aniqlaydi. 1) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$,

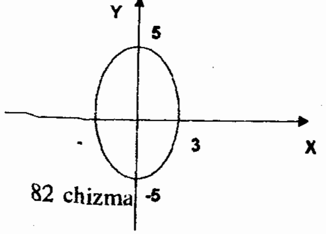
2) $y=-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$, 3) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$, 4) $x=\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}$.

Javob. 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning yuqori yarim tekislikka joylashgan qismi (81-chizma).



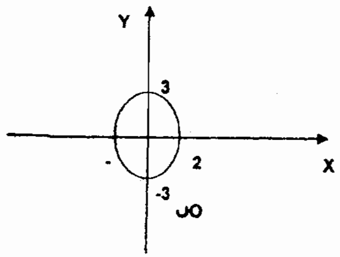
81-chizma

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ellipsning pastki yarim tekislikdagi qismi (82-chizma).



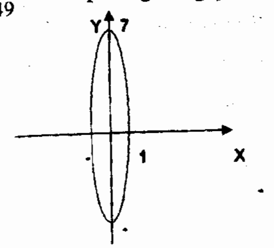
82 chizma

3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning chap yarim tekislikdagi qismi (83-chizma).



83-chizma

4) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{49}=1$ ellipsning o`ng yarim tekislikdagi qismi (84-chizma).



84-chizma

13. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ellipsning birinchi fokusgacha bo`lgan masofasi 14 ga teng bo`lgan nuqtasini toping. Javob. $(-5,\ 3\sqrt{3})$

14. yarim o`qlari a,b dan markazi$M_0$ $(x_0,y_0)$ nuqtada, simmetriya o`qlari, koordinat o`qlariga parallel bo`lgan ellips tenglamasini tuzing. Javob. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

15.Absissa o`qiga A(3,0) nuqtada ordinata o`qiga B(0,-4) nuqtada urinuvchi ellipsning tenglamasiin tuzing, uning simmetriya o`qlari koordinata o`qlariga parallel. Javob. $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$

16. Quyida berilgan har bir tenglama ellipsni aniqlaydi. Markazining koordinatalarini yarim o`qlarni, ekstsentrisitetini aniqlang.
1)$5x^2+9x^2-30x+18y+9=0$,2)$16x^2+25x^2+32x-100y-284=0$.
Javob.1)S(3,-1)yarim o`qlar $a=3, b=\sqrt{5}$, $e=\frac{2}{3}$. 2) C(-1,2) yarim o`qlar a=5, b=4, $e=\frac{3}{5}$

17. Quyida berilgan to`g'ri chiziq va ellipsning o`zaro vaziyatini tekshiring (kesishadi, urinadi, kesishmaydi). 1) 2x-y-3=0, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. 2) 2x+y-10=0, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. 3) 3x+2y-20=0, $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$. Javob. 1) to`g'ri chiziq ellipsni kesadi. 2) to`g'ri chiziq ellips bilan kesishmaydi. 3) to`ri chiziq ellipsga urinadi.

18.$x^2+y^2=a$ aylanani Ox o`qqa qisqartirib akslantirganda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bo`lishini isbotlang.

19. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellipsga C(10,-1) nuqta orqali o`tuvchi urinma o`tkazing.

Javob. $\frac{1+\sqrt{7}}{20}x+\frac{\sqrt{7}-1}{16}y=1, \frac{1-\sqrt{7}}{20}x-\frac{1+\sqrt{7}}{16}y=1$

20.y=-x+m to`g'ri chiziq, m ning qanday qiymatlarida $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ellips bilan 1) kesishadi, 2) urinadi, 3) kesishmaydi. Javob. 1)|m|<5 bo`lganda ellips bilan kesishadi, 2) m=±5 bo`lganda urinadi, 3) |m|>5 bo`lganda kesishmaydi.

16 - ma'ruza

Ma'ruza rejasi

1. Giperbola ta'rifi, xossalari
2. Giperbolaning assimptotalari
3. Giperbola urinmasi

Ta'rif. Tekislikda har bir nuqtasidan *fokuslar* deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo`lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo`lgan nuqtalarning geometrik o`rniga *giperbola* deb ataladi. Berilgan kesma uzunligi fokuslar orasidagi masofadan kichik.

Ta'rifda aytilgan kesma uzunligini $2a$ fokuslari orasidagi masofani fokal masofa deb 2c bilan belgilaymiz, ta'rifga ko`ra

$$2a<2c \quad \Rightarrow \quad a<c \qquad (16.1)$$

a>0, c>0, F_1 va F_2 nuqtalar ustma-ust tushmaydi deb faraz qilamiz.

Giperbolaning N nuqtasidan fokuslarigacha bo`lgan masofalarni $g_1=F_1N$, $g_2=F_2N$ larni N nuqtaning fokal radiusi deyiladi.

Giperbolaning ta'rifiga ko`ra giperbola tenglamasi

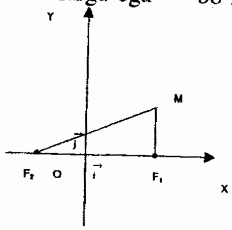
$$|F_1N-F_2N|=2a$$

yoki

$$|g_1-g_2|=2a \qquad (16.2)$$

Giperbola to`g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini chiqarish uchun, koordinatalar sistemasini ellips bilan ish ko`rgandek qilib tanlaymiz.

$F_1F_2=2c$ bo`lgani uchun olingan koordinatalar sistemasida $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, N(x,y) kordinatalarga ega bo`ladi (85-chizma).



85-chizma

U holada

$$r_1=F_1N=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad r_2=F_2N=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (16.3)$$

Giperbola ta'rifiga ko`ra ya'ni (16.2) formaulaga asosan

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$ ni hosil qilamiz.

bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

bu tenglamani kvadratga oshirib quyidagiga ega bo`lamiz

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

yana kvadratga oshirib ba'zi bir almashtirishlarni bajarib, quyidagilarni yozamiz

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (16.4)$$

$$b^2=c^2-a^2>0 \qquad (16.5)$$

belgilab, bu belgilanishlarni e'tiborga olsak

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (16.6)$$

ega bo`lamiz.

Shunday qilib, giperbola ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari (16.6) tenglamani qanoatalntiradi.

Endi teskari jumlani isbotlaylik. Ya'ni koordinatalari (16.6) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta giperbolada yotishini isbotlaylik.

(16.3) formuladagi y^2 ning qiymatini (16.6) formuladan topib qo`yamiz va (16.5) ni e'tiborga olsak ushbu tengliklarga ega bo`lamiz

$$r_1=\left|\frac{c}{a}x-a\right| \quad r_2=\left|\frac{c}{a}x+a\right|$$

(16.6) dan $|x|\geq a$. Bundan tashqari $x\geq a$, $\frac{c}{a}>1$ bo'lsa, u holda $r_1=\frac{c}{a}x-a>0$, $r_2=\frac{c}{a}x+a>0$, bo'lib $r_1=\frac{c}{a}x-a$, $r_2=\frac{c}{a}x+a$, $x\leq 0$ da

$r_1=a-\frac{c}{a}x$ $r_2=-(\frac{c}{a}x+a)$ bo'ladi.

Demak, $|g_1-g_2|=2a$ ya'ni M nuqta giperbolada yotadi. Shunday qilib, (16.6) tenglama giperbolaning sodda tenglamasi yoki giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

Giperbolaning xossalalari

Giperbolaning geometrik xossalarini o`rganish va uni yasash uchun (16.6) tenglamadan foydalanamiz. Ellips tenglamasi ustida olib borgan muhokamalarni takrorlab giperbolaning koordinatalar boshi, koordinatalar o`qlariga nisbatan simmetrikligini aniqlanadi.

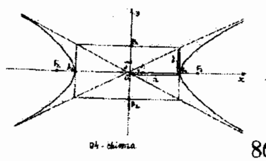
Giperbola Ox o`qi bilan $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nuqtalarda kesishadi. (16.6) tenglama bilan aniqlangan giperbola Oy o`qi bilan kesishmaydi. Giperbola Oy o`qi bilan $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ mavxum nuqtalarda kesishadi deb kelishib olamiz.

A_1, A_2 nuqtalar giperbola uchlari deyiladi. Giperbolaning uchlari orasidagi masofa giperbolaning haqiqiy o`qi deyiladi.

B_1, B_2 nuqtalarni giperbolaning mavhum uchlari deyiladi. $B_1B_2=2b$ kesmani giperbolaning mavhum o`qi deyiladi. a va b larni mos ravishda haqiqiy va mavhum yarim o`qlar deyiladi.

Agar N(x,y) nuqta giperbolada yotsa, (16.6) tenglamadan: $|x|\geq a$. demak

$x=\pm a$ to`g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tasmada (polosa) da giperbolaning birorta ham nuqtasi yo`q (86-chizma).



86-chizma

Giperbola tenglamasini y ga nisbatan echaylik

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (16.7)$$

bu tenlamaga e'tibor bersak x o`zgaruvchi a dan $+\infty$ gacha o`sib borganda va –a dan $-\infty$ gacha kamayganda, y miqdor $-\infty<y<+\infty$ oraliqda o`zgaradi. Demak, giperbola ikki qismdan iborat bo`lib 86-chizmada shtrixlangan sohalarda yotadi.

Ularni giperbolaning tarmoqlari deyiladi.

Giperbolaning o`ng tarmog'i $/x/\geq a$ yarim tekislikda chap yarim tarmogi $x<-a$ yarim tekislikda yotadi.

Giperbolaning asimptotalari.

Giperbolaning shaklini aniq tasvirlash uchun yassi chiziqning asimptotasi tushunchasini kiritamiz. Bizga λ chiziqni kesmaydigan d to`gri chiziq berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Agar $N\in\lambda$ nuqta shu λ chiziq bo`yicha harakat qilganda uning d to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofasi nolga intilsa, to`g'ri chizik λ chizining asimptotasi deyiladi.

Giperbola markazidan o`tuvchi d to`g'ri chiziq

$$x=a_1t$$
$$y=a_2t \qquad (16.8)$$

parametrik tenglamasi bilan berilgan. (16.6) va (16.8) tenglamalarni sistema qilib echamiz

$$\left(\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}\right)t^2=1 \qquad (16.9)$$

1) agar $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}>0$ bo`lsa, (16.9) tenglama $t_{1,2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{a_1^2b^2-a_2^2a^2}}$

demak , d **to`g'ri** chiziq giperbola bilan ikkita $N_1(a_1t,\ a_2t)$ va $N_2(a_1t_2,\ -a_2t_2)$ nuqtalarda kesishadi.

2. Agar $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}<0$ bo`lsa, u holda d to`g'ri chiziq giperbolani kesmaydi.

Xususan, $\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{a_2^2}{b^2}=0$, u holda $\frac{a_2}{a_1}=\pm\frac{b}{a}$. d_1: $y=\frac{b}{a}x$, d_2: $y=-\frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlangan d_1, d_2 to`g'ri chiziqlar giperbola assimptotalari deyiladi.

Giperbola koordinatalar o`qlariga nisbatan simmetrik bo`lgani uchun uning birinchi choragidagi qismni olamiz.

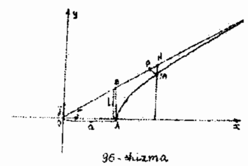
Agar x>0 bo`lsa, giperbolaning birinchi chorakdagi qismini aniqlaydi

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Giperbolaga tegishli $N_1(x,y)$ nuqtani va d_1 to`g'ri chiziqqa tegishli $N_2(x,y)$ nuqtani olaylik.

$$(y_1=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ y_2=\frac{b}{a}x) \Rightarrow y_2>y_1$$

Demak, giperbola uning asimptotalar hosil qilgan vertikal burchaklardan fokuslarini o`z ichiga oluvchi sohada yotadi (87-chizma).



87-chizma

Endi ordinatalarning farqiga e'tibor beraylik.

$$y_2-y_1=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Agar $N\in g$ nuqtaning absissasi x>0 cheksiz ortib borsa, y_2-y_1 ayirma monoton kamayib boradi. Nolga intildi va N nuqta giperbolani A_1 uchidan chiqib assimptota cheksiz yaqinlashib boradi.

Giperbola tasviri 87-chizmada berilgan.

Agar giperbolaning yarim o`qlari teng bo`lsa, bunday giperbolani teng tomonli deyiladi. Teng tomonli giperbolaning assimptotalari perpendikulyar bo`ladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$x^2-y^2=a^2$$

ko`rinishda yoziladi.

Ushbu

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (16.10)$$

tenglama fokal o`qi Oy da yotuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi deb aytiladi. ~~(96-chizma)~~.

Ayni bir koordinatalar sistemasida a va b larning ayni bir qiymatida

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

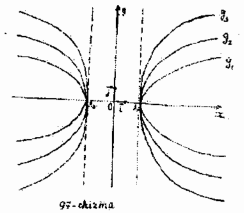
tenglamalar bilan aniqlangan ikki giperbola o`zaro **qo`shma giperbola** deb aytiladi.

Ta'rif. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofani haqiqiy o`q uzunligiga nisbati giperbolaning **ekstsentrisiteti** deyiladi.

$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ bunda $c>a \Rightarrow$ $e>1$

ekstsentrisitet giperbolaning shaklini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. haqiqatan ham $e=\frac{c}{a}$ dan c=ea, $b^2=c^2-a^2$ ga qo`ysak $b^2=a^2(e^2-1)$ yoki $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$ bo`lib, bunga asosan, ekstsentrisitet qanchalik kichik, ya'ni $e\to 1$ bo`lsa, $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo`ladi, ya'ni $\frac{b}{a}\to 0$ bo`ladi (bu yerda a-sonst deb faraz qilinadi). Giperbola o`zining haqiqiy o`qiga siqilgan bo`ladi.

Aksincha, e kattalashib borsa $\frac{b}{a}$ ham kattalashib giperbola tarmoqlariga kengayib boradi.



88-chizma

88-chizmada g_1, g_2, g_3 giperbolalar tasvirlangan bo`lib, ularning $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ ekstsentrisitetlari uchun $e_1<e_2<e_3$ tengsizliklar o`rinli.

Giperbola urinmasi.

Giperbolaning ixtiyoriy $N_0(x_0, y_0)$ nuqtasiga o`tkazilgan urinmasining tenglamasini tuzamiz.

Giperbolaning M_0 nuqtasi orqali o`tuvchi d to`g'ri chiziq o`zining parametrik

$$X=x_0+\alpha t,\quad Y=y_0+\beta t \qquad (16.11)$$

Tenglama bilan berilgan bo`lsin.

Bu to`g'ri chiziqning giperbola bilan kesishish parametrini topaylik. Buning uchun (16.11) dan x va u larning qiymatlarini giperbola tenglamasiga qo`yib, (ellips uchun qilingan ishlarni e'tiborga olib) ushbu tenglikka ega bo`lamiz

$$\left(\frac{2\alpha x_0}{a^2}-\frac{2\beta y_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2=0$$

ellips singari bu yerda ham, to`g'ri chiziq giperbolaga urinma bo`lishi uchun

$$\frac{\alpha x_0}{a^2}-\frac{\beta y_0}{b^2}=0 \text{ yoki } \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2}\end{vmatrix}=0$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Shunday qilib, urinma $\left(\frac{y_0}{b^2},\frac{x_0}{a^2}\right)$ vektorga parallel va

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0\\ \frac{y_0}{b^2} & \frac{x_0}{a^2}\end{vmatrix}=0$$

tenglamaga ega bo`ladi. Bu tenglikda ba'zi bir elementar almashtirishlarni bajarib

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \qquad (16.12)$$

urinma tenglamasiga ega bo`lamiz.

1-misol. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ giperbolaning $M_0(8, 5\sqrt{3})$ nuqtasiga urinma o`tkazing.

Yechish. M_0 nuqta giperbolada yotadi. $M_0(8, 5\sqrt{3})$ nuqta koordinatalari va a, b larning qiymatlarini(27) tenglamaga qo`yib topamiz.

$$\frac{x\bullet 8}{16}-\frac{y\bullet 5\sqrt{3}}{25}=1 \text{ yoki } 5x-2\sqrt{3}u-10=0.$$

Giperbolani yasash. Agar giperbola fokuslari F_1 va F_2 lar va haqiqiy A_1A_2 o`qlari berilsa, giperbolani qanday yasash mumkin ekanligini ko`raylik (98-chizma). F_1 nuqtani markaz qilib ixtiyoriy radius bilan $S_1(F_1, t)$ aylana chizamiz. F_2 nuqtani markaz qilib $At+A_1A_2$ kesmani radius qilib $S_2(F_2, A_1A_2)$ aylana chizamiz. Bu aylanalarning kesishgan nuqtalarini giperbolada yotadi. Bu usulni bir nechta marta takrorlab, giperbolaga qarashli ko`plab nuqtalarni topamiz. Topilgan nuqtalarni birlashtirsa, giperbola bitta tarmog'ini hosil qilamiz. $S_3(F_2, t)$ va aylana $S_4(F_1, A_1A_2)$ larning kesishgan nuqtalarini topib giperbolani ikkinchi tarmoG'ini yasaymiz.

Savollar va masalalar.

1.Giperbolani ta'riflang.
2.Ellips va giperbola ta'riflari orasidagi farq nimada?
3.Giperbola xossalarini ayting.
4.Ellips va giperbola qaysi xossalari bilan farqlanadi?
5.Giperbola ekstsentrisitetini ta'riflang va u giperbola shakliga qanday ta'sir qiladi?
6.Giperbola urinmasini ta'riflab, tenglamasini yozing.
7.Fokuslari absissa o`qiga joylashgan, koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo`lgan, ulardan tashqari quyidagilar berilsa, giperbolalarning kanonik tenglamasini tuzing; 2a=0, 2b=8 fokuslar orasidagi masofa 2c=10 va mavhum o`qi 2b=8 fokuslari orasidagi 2c=6 va ekstsentrisiteti e=3/2,2a=16 o`qi ekstsentrisiteti e=5/4,asimptota $y=\pm\frac{4}{3}x$ va fokuslari orasidagi masofa 2c=20
8.Fokuslari ordinata o`qiga joylashgan koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo`lgan, ulardan tashqari quyidagilar berilgan giperbolalarning kanonik tenglamalarini tuzing.
1)ularning yarim o`qlari a=6, b=18 (a yarim o`q absissa o`qiga joylashgan).
Javob. $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{324}=1$

2)fokuslari orasidagi masofa $2c=10$ va ekstsentrisitet $e=5/2$.

Javob. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$

3)asimptota tenglamasi $y=\pm\frac{12}{5}x$ va uchlarining orasidagi masofasi 48.

Javob. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$

9.Agar giperbola simmetriya markazi $S(x_0, y_0)$ nuqtada, o`qlari esa Ox va Oy larga parallel bo`lsa, unda giperbolaning tenglamasi $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ ko`rinishda bo`lishini isbotlang.

10. Quiydagi tenlamalar bilan aniqlangan giperbolani yasang, uning yarim o`qlarini va asimptotalarining tenglamalarini toping;

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, 2) $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$, 3) $\frac{(x+3)^2}{4}-y^2=1$.

11. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ giperbola asimptotasi bilan $9x+2y-24=0$ hosil qilgan uchburchak yuzini hisoblang. Javob. 12 kv.bir.

12. Quyidagi tenglamalar qanday chiziqlarni aniqlaydi?

1) $y=+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$, 2) $y=-3\sqrt{x^2+1}$, 3) $y=-\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}$, 4)$y=+\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$.

Javob. 1) giperbolaning yuqori yarim tekislikdagi qismi .
2) giperbolaning pastki yarim tekislikda joylashgan qismi.
3) giperbolaning chap yarim tekislikda joylashgan qismi .
4) giperbolaning ustki yarim tekislikda joylashgan qismi .

13.$N_0(-5,\frac{9}{4})$ nuqtaning $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbolada yotishiga ishonch hosil qiling. N nuqtaning fokal radiusini toping.

Javob. $r_1=2\frac{1}{4}$, $r_2=10\frac{1}{4}$.

14.Markazi $C(x_0, y_0)$ yarim o`qlari a, v berilsa, giperbola tenglamasini tuzing. 1) giperbola o`qi Ox parallel, 2) giperbola o`qi Ou ga parallel.

Javob. 1) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, 2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$

15.Quyidagi tenglamalarning har biri giperbola ekanligiga ishonch hosil qilib, ularning markazlarining koordinatalarini, yarim o`qlari, ekstsentrisitetini, asimptota tenglamalarini toping.

Javob. 1) C(2,-3), a=v, b=4, e=5/3, asimptota tenglamasi $4x-3y-17=0$. 2) S(-5,1), a=8, b=6, e=1,25, asimptotalar tenglamasi $3x+4y+11=0$, $3x-4y+19=0$, 3) S(2,-1), a=3, b=4, e=1b25, asimptota tenglamalari $4x+3y-5=0$, $4x-3y-11=0$.

16. Quyidagi berilgan to`g'ri chiziq bilan giperbolaning vaziyatlarini tekshiring.

1) $x-y-3=0$, $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$, 2) $x-2y+1=0$, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$,3) $7x-5y=0$,$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

Javob. 1) giperbolaga urinadi, 2) giperbolani ikki nuqtada kesadi, 3) giperbolani kesmaydi.

17.$xx^2-y^2=a^2$ tenglama giperbola berilgan. Uning asimptotalarini yangi koordinata sistemasi o'qlari deb olib, yangi sistemadagi koordinatalarni toping. Javob. agar eski koordinatalar sistemasi $a=-45^0$ burchak giperbola $xy=\frac{a^2}{2}$; agar $a=45^0$ burchak $xy=-\frac{a^2}{2}$.

18. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$giperbolaga shunday urinma o`tkazingki, u $4x+3y-7$ to`g'ri chiziqqa perpendikulyar bo`lsin. Javob. $3x-4y-10=0$, $3x-4y+10=0$.

19.$9x^2-y^2=9$ giperbolaning har bir asimptotasiga perpendikulyar bo`lib, N(2,1) nuqtadan o`tgan to`g'ri chiziq tenglamasini toping. Javob. $x-3y+1=0$, $x+3y-5=0$.

20.Fokuslari (0,0) va (6,0) nuqtalarda joylashgan, ekstsentrisiteti esa $e=3/2$ bo`lgan giperbola tenglamasini tuzing. Javob. $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

21. $\frac{x}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$giperbolaning A(a,0) uchidan vatar o`tkazilgan. Bu vatarning o`rta nuqtalarining geometrik o`rni tenglamasini tuzing. Javob. $\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2}-\frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2}=1$.

17 - ma'ruza

Ma'ruza rejasi
1. Parabola
2. Parabola xossalari va shakli
3. Parabola urinmasi. Parabolani yasash

Ta'rif. Tekislikdagi har bir nuqtadan berilgan nuqtagacha va berilgan to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofalari o`zaro teng bo`lgan barcha nuqtalarning geometrik o`rni **parabola** deyiladi.

Berilgan nuqta berilgan to`g'ri chiziqda yotmaydi deb olamiz. Berilgan F nuqta **parabola fokusi**, berilgan d to`g'ri chiziq **parabola direktrisasi** deyiladi.

Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo`lgan masofani FL=p harfi yordamida belgilaymiz va uni **parabolaning parametri** deb ataymiz. N nuqtadan d to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofani q=NM bilan N va F nuqtalar orasidagi masofani r=NF bilan belgilaymiz va buni **parabolaning fokal radiusi** deymiz. Ta'rifga binoan, parabola tenglamasi

$$NM=NF$$

yoki $r=q$ (17.1)

Parabolani to`g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini chiqarish uchun, tekislikda to`g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi o`qlarini maxsus joylashtiramiz. Chunonchi, absissa o`qini fokus orqali direktrissaga perpendikulyar qilib o`tkazamiz

Koordinatalar boshini fokus bilan direktrisa orasidagi masofaning o`rtasiga joylashtiramiz.

Tekislikdagi ixtiyoriy N nuqtaning koordinatalarini x,y deb olamiz. (17.1) tenglikdan r va q o`zgaruvchilarni ularning x,y koordinatalari bilan berilgan ifodalarga almashtirish kerak. F fokusning koordinatalari ($\frac{p}{2}$, 0) ekanligini e'tiborga olib ushbuni topamiz;

$$FN=r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} \qquad (17.2)$$

N nuqtadan d direktrisaga tushirilgan perpendikulyarning asosini M bilan belgilaymiz. Mnuqtaning koordinatalari ($-\frac{p}{2}$,y) ekanligi ravshan. Bundan ushbuni hosil qilamiz;

$$NM=q=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2} \qquad (17.3)$$

(ildiz chiqarishda $x+\frac{p}{2}$ ni o`z ishorasi bilan oldik, chunki x musbat son). Bu N(x,y) nuqta direktrisascining fokus tomonida bo`lishdan kelib chiqadi, ya'ni $x>-\frac{p}{2}$ bo`lishi kerak, bundan $x+\frac{p}{2}>0$. (17.1) tenglikda r va q larning (17.2) va (17.3) ifodalari bilan almashtirsak,

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=x+\frac{p}{2} \qquad (17.4)$$

Bu parabolaning to`g'ri burchakli dekard koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir. Chunki N(x,y) nuqtaning koordinatalari N nuqta berilgan parabolada yotgan holdagina tenglamani qanoatlantiradi.

Parabola tenglamasini sodda ko`rnishga ya'ni kanonik ko`rinishga keltirish uchun (17.4) tenglamani ikkala qismini kvadratga ko`taramiz.

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4} \qquad (17.5)$$

yoki

$$y^2=2px \qquad (17.6)$$

(17.6) tenglamani (17.4) ning natijasi sifatida keltirib chiqardik. O'z navbatida (17.4) tenglamani ham (17.6) tenglamaning natijasi sifatida chiqarish mumkinligini ko`rsatish oson. Haqiqatan, (17.6) tenglamadan to'g'ridan-to'g'ri (17.5) tenglama keltirib chiqariladi. So`ngra (17.5) tenglamadan ushbu hosil bo`ladi;

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\pm(x+\frac{p}{2})$$

Agar x,y (17.6) tenglamani qanoatlantirsa, bu yerda faqat musbat ishora olishini ko`rsatish kerak. Ammo bu ravshan chunki, (17.6) tenglamadan $x=\frac{y^2}{2p}$, demak, x<0, shu sababli $x+\frac{p}{2}$ musbat sondir. Biz (17.4) tenglamaga kelamiz.

(17.4) va (17.6) tenglamalarning har biri ikkinchisining natijasi bo`lganligidan ular **ekvivalentdir.**

Bunda (17.6) tenglama parabola tenglamasi bo`ladi degan natijaga kelamiz. Bu tenglamani **parabolaning kanonik tenglamasi** deyiladi.

Parabola xossalari va shakli.

Yuqoridagi (17.6) tenglama bilan berilgan parabola xossalarini o`rganib tasvirini yasaymiz.

1^0. $y^2>0$ va p>0 bo`lgani uchun (17.6) tenglamada x≥0 bo`lishi kerak. Bundan barcha nuqtalari o'ng yarim tekislikda yotishi kelib chiqadi.

2^0. Agar x=0, (17.6) dan y=0 ekanligi kelib chiqadi. Parabola koordinatalar boshidan o`tadi. Koordinatalar boshi parabolaning **uchi** deyiladi.

3^0. O`zgaruvchi x>0 qiymatiga y ning ishoralari qarama-qarshi, ammo absolyut miqdori teng bo`lgan ikki qiymati mos keladi. Bundan parabolaning 0x o`qqa nisbatan simmetrik ekanligi aniqlanadi. 0x o`qi parabolaning **simmetriya o'qi** deyiladi.

4^0. (17.6) ⇒ $y=\pm\sqrt{2px}$, bundan ko`rinadiki x ortib borsa, |y| ham ortib boradi. Ya'ni $x\to+\infty$, $|y|\to+\infty$. Ko`rsatilgan xossalarga asosalanib parabolaning shaklini chizamiz (104-chizma).

Parabolaning tenglamasini hosil qilish uchun dekart koordinatalar sistemasini maxsus tanlandi. Agar dekart koordinatalar sistemasini boshqacha tanlab olsak, albatta parabola tenglamasi ham (17.6) ko`rinishdan farq qiladi.

Agar parabola tenglamasi $x^2=2py$ ko`rinishda bo`lsa, koordinatalar sistemasiga nisbatan 105-chizmada ko`rsatilgandek joylashgan bo`ladi.

Agar parabola tenglamasi

$y^2=-2px$, $x^2=-2py$

ko`rinishda bo`lsa, koordinatalar sistemasiga nisbatan mos ravishda 106 va 107-chizmalarda ko`rsatilgandek joylashgan bo`ladi.

Parabola ekstsentrisiteti.

Ta'rif. Parabolaning istalgan nuqtasidan fokusgacha bo`lgan masofani bu nuqtadan direktrisagacha bo`lgan masofaga nisbatga teng songa, parabolaning **ekstsentrisiteti** deyiladi.

$$E=\frac{r}{q}=1$$

Misol. $y^2=4x$ parabolaning fokal radiusining uzunligi 26 ga teng bo`lgan nuqtani toping.

Yechish. Izlangan N(x,y) nuqta uchun ta'rifga ko`ra r=FN=26, 2p=4, p=2. $F(\frac{p}{2},0)$ ⇒ F(1,0), $26=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+4x}$. Bundan $x^2+2x-675=0$, kvadrat tenglamani yechib, $x_1=25$, $x_2=-27$ ildizlarni topamiz. $x_2=-27$ ildiz chet ildiz, chunki $y^2=4x$ parabolaning hamma nuqtalarining absissasi musbat. $y^2=4\bullet25=100$, $u_1=10$, $u_2=-10$ topamiz.

Shunday qilib izlangan nuqta ikkita ekan $N_1(25,10)$, $N_2(25,-10)$.

Parabola urinmasi.

Parabolaga tegishli $N_0(x_0,y_0)$ nuqta berilgan bo`lsin. Bu nuqtaga o`tkazilgan urinma tenglamasini tuzamiz.

$N_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o`tuvchi to`g'ri chiziq o`zining

$$X=x_0+\alpha t$$
$$Y=y_0+\beta t \qquad (17.7)$$

parametrik tenglamasi bilan berilgan bo`lsin. To`g'ri chiziqning parabola bilan kesishish nuqtasining parametrini aniqlaylik. Buning uchun (17.7) dagi x,y larni (17.6) parabola tenglamasiga qo`yib hosil bo`lgan tenglamani t ga nisbatan echiladi.

$$\beta^2t^2+2(y_0\beta-p\alpha)t=0$$

yuqorida ko`rib o`tilgan ma'lumotlarga ko`ra to`g'ri chiziq parabolaga urinma bo`lishi uchun $y_0\beta-p\alpha=0$ yoki

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ y_0 & p\end{vmatrix}=0$$

shartning o`rinli bo`lishi zarur va yetarlidir.

Shunday qilib, $\vec{m}(y_0,p)$ vektorga parallel N_0 nuqtaga o`tkazilgan urinma tenglamasi

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0\\ y_0 & p\end{vmatrix}=0$$

bu tenglikni sodda almashtishlar bajarib ushbuga ega bo`lamiz

$$yy_0=p(x+x_0) \qquad (17.8)$$

bu tenglama parabolaning $N_0(x_0,y_0)$ nuqtasiga o`tkazilgan **urinma** tenglamasi deyiladi.

Misol. $y^2=9x$ parabolaning $N_0(1,-3)$ nuqtasiga o`tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

Yechish. N_0 nuqta parabolada yotishidan foydalanib, $(-3)^2=2r\cdot 1 \Rightarrow 2r=9$; $r=\frac{9}{2}$. (17.8) formuladan foydalanib $y(-3)=\frac{9}{2}(x+1)$, ya'ni $3x+2y+3=0$ urnima tenglamasini yozamiz.

Parbolani yasash.

Parabola berilgan bo`lsin, uni yasash uchun avvalo uning direktrisasi va fokuslarni yasab olamiz (108-chizma). Ox o`qida koordinatalar boshidan o`ng va chap tomonlarga $\frac{p}{2}$ kesmani qo`yib, F fokus va M nuqtalarni yasaymiz (OF=OM). M nuqtadan absissaga perpendikulyar **d** to`g'ri chiziq o`tkazib, direktrisani yasaymiz.

Direktrisaga parallel va har biri oldingisidan $\frac{p}{2}$ masofada turuvchi ko`plab 108-chizmada ko`rsatilgandek to`g'ri chiziqlarni o`tkazamiz. Radiusi direktrisadan mos to`g'ri chiziqqacha bo`lgan masofadan, markazi F fokusda bo`lgan aylana bilan bu to'g'ri chiziqlarning har biri ikkitadan nuqtada kesishadi. Bunday nuqtalar to`plami paraboladan iborat bo`ladi.

Y=ax²+bx+c tenglama bilan berilgan parabola.

Ushbu

$$Y=ax^2+bx+c \qquad (17.9)$$

tenglama bilan berilagan chiziqni o`rganaylik.

Tenglamani o`ng tomonini to`la kvadratga ajrataylik

$$Y=a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{2a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Bundan

$$y-\frac{4ac-b^2}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2 \qquad (152)$$

$$x=x'-\frac{b}{2a}, \qquad y=y'+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

almashtirishni bajarib O nuqtani $O'(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ nuqtaga parallel ko`chiramiz.

Yangi koordinatalar sistemasi (x'o'y') ga nisbatan $y'=ax'^2$ yoki $x'^2=\frac{1}{a}y'$

$p=\frac{1}{2|a|}$ belgilash kiritib, $x'^2=2py'$ tenglamaga ega bo`lamiz. Bu tenglama simmetriya o`qi O'Y' va uchi $O'(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ nuqtadan iborat bo`lgan parabolani ifodalaydi. 109-chizmada (17.9) parabolaning a parametri musbat bo`lgan holida, 110-chizma (17.9) paraboalning a parametri manfiy bo`lgan hollari tasvirlangan.

Misol. $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$ parabola tenglamasini kanonik ko`rinishga keltiring va yangi koordinatalar boshining koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani ushbu ko`rinishda yozamiz;

$$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+1 \quad \text{yoki} \quad y-1=\frac{1}{2}(x+2)^2$$

Koordinatalar boshini

$$X=x'-2$$
$$Y=y'+1$$

Parallel ko`chirish yordamida $O\to O'(-2,1)$ nuqtaga ko`chiramiz. Yangi koordinatalar sistemasida parabola tenglamasi

$$Y'=\frac{1}{2}x'^2 \quad \text{yoki} \quad -x'^2=2y'$$

kanonik ko`rinishga ega bo`ladi.

Savollar va masalalar.

Parabolani ta'riflang.
Parabola xossalarini ayting.
Ellips, giperbola va parabolalarning ekstsentrisitetlarini solishtirib fikringizni ayting.
Parabolani turli uslubda yasashlarni ko`rsating.
Parabola urinmaisni ta'riflang, tenglamasini yozing.

Uchi koordinatalar boshida va quyidagilar berilgan holda parabola tenglamasini tuzing va shaklini yasang;

Ox o`qiga nisbatan simmetrik, o`ng yarim tekislikda joylashgan parametri p=3 :

Ox o`qiga nisbatan simmetrik, o`ng yarim tekislikda joylashgan parametri p=0.5 :

Oy o`qiga nisbatan simmetrik bo`lib yuqori yarim tekislikda joylashgan, parametri p=1/4 :

Oy o`qiga nisbatan simmetrik, pastki tekislikda joylashgan parametri p=3 .

7. Uchi koordinatalar boshida bo`lgan va quyidagilarni bilgan holda parabola tenglamasini tuzing;

Ox o`qiga nisbatan simmetrik, A(9,6) nuqtadan o`tadi :
Ox o`qiga nisbatan simmetrik, B(-1,3) nuqtadan o`tadi :
Oy o`qiga nisbatan simmetrik, C(1,1) nuqtadan o`tadi :
Oy o`qiga nisbatan simmetrik, D(4,-8) nuqtadan o`tadi .

8.Quyidagi tenglamalar qanday chiziqlarni aniqlaydi;

$y=+2\sqrt{x}$, 2) $y=+\sqrt{-x}$, 3) $y=-3\sqrt{-2x}$, 4) $y=-2\sqrt{x}$, 5) $x=+\sqrt{5y}$, $x=-5\sqrt{-y}$.

Javob. 1) $y^2=4x$ parabolaning birinchi chorakdagi qismi , 2) $y^2=-x$ parabolaning ikkinchi chorakdagi qismi 3) $y^2=-18x$ parabolaning uchinchi chorakdagi qismi , 4) $y^2=4x$ parabolaning to`rtinchi chorakdagi qismi, 5) $x^2=5y$ parabolaning birinchi chorakdagi qismi.

9.$y^2=2px$ parabolining fokusidan o`tkazilgan vatar uning o`qiga perpendikulyar. Bu vatarning uzunligini toping. Javob. 2p

10. Quyidagi parabolaning uchlarini va parametrini toping va parabola tasvirini yasang.

1) $(y-2)^2=4(x+1)$, 2) $(y+1)^2=-(x-2)$, 3) $(x+2)^2=2(y+1)$,
4) $(x-2)^2=-(y+3)$.

Javob. 1) C(-1,2), p=2, 2) C(2,-1), p=1/2, 3) C(-2,-1), p=1, 4) C(2,-3)

11.p parametrli parabolaga ichki chizilgan ABC muntazam uchburchak tomonini aniqlang, parabola uchi uchburchakning bitta uchi bilan ustma-ust tushsin. Javob. $4\sqrt{3}$p

12. $y^2=20x$, parabolaning N nuqtasining fokal radiusini toping, agar N nuqtanig absissasi 7 ga teng bo`lsa. Javob. 12

13. $y^2=16x$, parabolada fokal radiusi 13 ga teng bo`lgan nuqtaning koordinatalarini aniqlang. Javob. (9,12), (9,-1)

14.$y^2=6x$ parabolaning, 3x-2y+6=0 to`g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini toping. Javob (-4,6) to`g'ri chiziq parabolaga urinadi.

15. Quyida parabola va to`g'ri chiziq tenglamalari berilgan. Bu chiziqlarning o`zaro vaziyatlarini tekshiring.

x-y+2=0, $y^2=8x$
8x+3y-15=0, $x^2=-3y$
5x-y-15=0, $y^2=-5x$

Javob. 1) parabolaga urinadi, 2) parabola bilan ikki nuqtada kesishadi, 3) parabola bilan kesishmaydi.

16. $y^2=8x$ parabolaga shunday urinma o`tkazingki u 2x+2y-3=0 to`g'ri chiziqqa parallel bo`lsin. Javob. x+y+2=0.

17. $y^2=16x$ parabolaga shunday urinma o`tkazingki u 2x+4y+7=0 to`g'ri chiziqqa perpendikulyar bo`lsin. Javob. 2x-y-16=0.

18.$y^2=36x$ parabolaga A(2,9) nuqta orqali urinma o`tkazing. Javob. 3x-y+3=0.

19. $y^2=12x$ parabola nuqtasidan x-y+7=0 to`g'ri chiziqqacha bo`lgan eng qisqa masofani toping. Javob. $2\sqrt{2}$. Ko`rsatma. Berilgan to`g'ri chiziqqa parallel to`g'ri chiziq o`tkazing.

$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$ giperbola bilan $y^2=3x$ parabolaning kesishgan nuqtalarini toping. Javob. $(10,-\sqrt{30})$, $(10, \sqrt{30})$, $(2,\sqrt{6})$, $(2,-\sqrt{6})$.

Adabiyotlar:

1. N.D.Dadajonov, M.Sh.Jo'raeva. Geometriya. 1-qism. Toshkent, «O'qituvchi» 1996 y.
2. L.S.Atanosyan, B.T.Bazilev. Geometriya. Chast 1. M: Prosvesheniye 1986 g.
3. X.X.Nazarov, X.O.Ochilova, E.G.Podgornova. Geometriyadan masalalar to'plami. 1-qism. Toshkent. O'qituvchi 1997 y.
4. A.V.Pogarelov. Geometriya (7-11 sinflar) Toshkent. O'qituvchi 1994 y.

Mundarija

Qutb koordinatalar sistemasi. Nuqta va dekart koordinatalar orasidagi bog'lanish

8-ma'ruza

Koordinatalarni bog'lovchi tenglama va tengsizliklarning geometrik ma'nosi. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tekshirish

9-ma'ruza

To'g'ri chiziqning turli tenglamalari. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tekshirish.

10-ma'ruza

Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi. To'g'ri chiziqlar dastasi.
Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

11-ma'ruza

To'plamni akslantirish. Misollar. Almashtirishlar va unga doirmisollar.
Almashtirishlar gruppasi va qism gruppalari

12-ma'ruza

Tekislikdagi harakat va uning xossalari. Harakatni sodda turlari.
Harakatning analitik ifodasi

13-ma'ruza

O'xshash almashtirish va uning xossalari. Gomotetiya va uning xossalari.
O'xshash almashtirishlar gruppasi va uning qism gruppalari

14-ma'ruza

O'xshash almashtirish - gomotetiya bilan harakat ko'paytmasi sifatida.
Gomotetiya
va o'xshash almashtirishlarning analitik ifodasi.

15-ma'ruza

Aylananing umumiy tenglamasi, ellips, ellipsning xossalari, ellipsni yasash.
Ellipsning parametrik tenglamasi, ellipsning urinmasi

16-ma'ruza

Giperbola, giperbolaning xossalari, giperbolaning assimptotalari, giperbola urinmasi

17-ma'ruza

Parabola, Parabola xossalari va shakli. Parabola urinmasi. Parabolani yasash