Н.П. АНТОНОВ, М.Я. ВИГОДСКИЙ,
В.В. НИКИТИН, А.И. САНКИН

ЭЛЕМЕНТАР МАТЕМАТИКА МАСАЛАЛАРИ ТЎПЛАМИ

„ЎРТА ВА ОЛИЙ МАКТАБ“

келган бир неча масалани ечгандан кейин, уларни ечишда қийналмаслигига кўзи етса, у ҳолда бир неча масалани ташлаб кетиши мумкин; нечта масалани ташлаб кетиш кераклигини масалаларнинг шартларини ва ечилишларини тезгина кўздан кечириб аниқлаш мумкин.

РУСЧА ТЎРТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг бу тўртинчи нашри олдинги нашридан ўзгаришсиз босилган бўлса ҳам, унда масалаларнинг ечилиши тўғрисидаги китобхонларнинг баъзи мулоҳазаларини ҳисобга олишга, шунингдек, олдинги нашрларидан топилган хатоларни тузатишга имкон туғилди. Китобнинг текстини анчагина ўзгартириш ҳақидаги талабларни бажо келтиришни китобнинг кейинги нашрига қолдиришга тўғри келди.

Бу китобнинг тузувчилари китоб ҳақидаги ўз фикр ва мулоҳазаларини юборган ҳамма шахсларга чуқур миннатдорчиликларини билдирадилар. Китобнинг иккинчи нашрига берилган сўзбошида номлари зикр қилинган шахслардан ташқари Э. Бабушкин (Москва), Бровак (Москва), Б. А. Добровольский (Лабинск), А. Коба (Ленинград), В. Кравченко (Волгоград), Г. Кубицкий (Вильнюс), В. И. Лисов (Донец), Р. М. Нахумович (Боку), Э. Панов (Куйбишев), Ч. А. Старчевский, Теплова (Кемерово), А. Г. Филайович (София, Болгария), В. Ф. Фоминков (Запорожье), Г. М. Хованов, А. Шильникова (Киров) ва С. Шмелькин (Ленинград) ўртоқларга ташаккур изҳор қиламиз.

РУСЧА ОЛТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг бу нашрида баъзи масалаларнинг баёни бирмунча аниқлаштирилди, изоҳларга бир қанча қўшимчалар киритилди.

Китобнинг тузувчилари китоб ҳақида ўз мулоҳазаларини юборган шахсларга чуқур миннатдорчиликларини билдирадилар. Китобнинг иккинчи ва тўртинчи нашрларидаги сўз бошида номлари зикр қилинган шахслардан ташқари М. Архарова (Таганрог), Ю. Заколоднин (Горький), В. Ф. Клопков (Москва), В. С. Кузьмин (Львов), А. Лежнев, В. В. Турчанинов (Харьков) ва А. Шевченко (Одесса) ўртоқларга ташаккур изҳор қиламиз.

Яна ўзларининг фикр ва истакларини билдирмоқчи бўлган кикобхонларга олдиндан миннатдорчилик изҳор қиламиз.

Ўз истак ва мулоҳазаларингизни қуйидаги адресга юборишингизни илтимос қиламиз: Москва В-71, Ленинградский проспект 15. „Физматгиз“.

Н. Антонов, М. Выгодский, В. Никитин.

СПРАВКА УЧУН ФОРМУЛАЛАР

I. Арифметика ва алгебра

Пропорциялар

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ пропорцияда; a ва d — четки ҳадлар, b ва c ўрта ҳадлар. Пропорциянинг асосий хоссаси $a \cdot d = b \cdot c$.

2. Пропорция ҳадларининг ўринларини алмаштириш:

$$\text{а) } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \quad \text{б) } \frac{d}{b}=\frac{c}{a}; \quad \text{в) } \frac{a}{c}=\frac{b}{d}; \quad \text{г) } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

3. Ҳосила пропорциялар: пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ берилган, қуйидаги пропорциялар тўғридир:

$$\text{а) } \frac{a \pm b}{a}=\frac{c \pm d}{c}; \qquad \text{б) } \frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Даражалар билан амаллар

1. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$, яъни $a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n$.

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, яъни $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. 3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

4. $a^m : a^n = a^{m-n}$. 5. $1 : a^n = a^0 : a^n = a^{-n}$.

6. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Илдизлар билан амаллар*)

1. $\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$, яъни $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} =$
$= \sqrt[m]{a \cdot b \cdot c}$.

2. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, яъни $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.

3. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, яъни $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. 4. $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p = \sqrt[m]{a^{np}}$.

5. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$, яъни $\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$.

---

*) Илдизлар — арифметик илдизлар деб фараз қилинади. 102-104-бетларга қаранг.

СПРАВКА УЧУН ФОРМУЛАЛАР

Квадрат тенгламалар

1. $x^2 + px + q = 0$ кўринишидаги тенглама ушбу

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$ формула билан ечилади.

2. $ax^2 + bx + c = 0$ кўринишидаги тенглама

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ формула билан ечилади.

3. $ax^2 + 2kx + c = 0$ кўринишдаги тенглама

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \quad \overline{k^2 - ac}}{a}$$ формула билан ечилади.

4. Агар x_1 ва x_2 сонлар $x^2 + px + q = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, $x_1 + x_2 = -p$ ва $x_1 \cdot x_2 = q$.

5. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, бунда x_1 ва x_2 сонлар $x^2 + px + q = 0$ тенгламанинг илдизларидир.

6. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, бунда x_1 ва x_2 сонлар $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизларидир.

Прогрессиялар (35-бетга қаранг)

Логарифмлар*)

1. $\log_a N = x$ ёзуви $a^x = N$ ёзуви билан тенг қийматли, шунинг учун $a^{\log_a N} = N$ айният ҳосил бўлади.

2. $\log_a a = 1$. 3. $\log_a 1 = 0$. 4. $\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$.

5. $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$. 6. $\log_a (N^m) = m \log_a N$.

7. $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m} \log_a N$.

8. Асоси b бўлган логарифмлар системасидан асоси a бўлган системага ўтиш модули ҳақида 163—165-бетларга қаранг.

Бирлашмалар

1. $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$. 2. $P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m = m!$

3. $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$. 4. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Ньютон биноми

1. $$(x + a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m.$$

---

*) a (логарифм асоси) ва N — мусбат сонлар ва бунда a 1 дан фарқли деб фараз қилинади.

2. Ёйилманинг умумий ҳади: $T_{k+1} = C_m^k \; a^k \; x^{m-k}$.

3. $1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-2} + C_m^{m-1} + 1 = 2^m$.

4. $1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots \pm 1 = 0$.

II. Геометрия ва тригонометрия

Айлананинг ва айлана ёйининг узунлиги

$C = 2\pi R$; $l = \frac{\pi R a}{180} = R\alpha$ (a — ёйнинг градус ўлчови, α — радиан ўлчови).

Юзлар

Учбурчак: $S = \frac{ah}{2}$ (a — асос, h — баландлик)

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p — ярим периметр, a, b ва c — томонлар);
$S = \frac{ab \sin C}{2}$.

Тенг томонли учбурчак учун $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a — учбурчакнинг томони).

Параллелограмм: $S = bh$ (b — асос, h — баландлик).

Ромб: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ (d_1 ва d_2 — диагоналлар).

Трапеция: $S = \frac{a+b}{2} h$ (a ва b — асослар, h — баландлик). $S = mh$ (m — ўрта чизиқ).

Мунтазам кўпбурчак: $S = \frac{Pa}{2}$ (P — периметр, a — апофема).

Доира: $S = \pi R^2$.

Доиравий сектор: $S = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2\alpha}{2} = \frac{\pi R^2 a}{360}$ (a — сектор ёйининг градус ўлчови, α — радиан ўлчови, l — сектор ёйининг узунлиги).

Сиртлар

Призма: $S_{ён} = Pl$ (P — перпендикуляр кесимининг периметри, l — ён қирраси).

Мунтазам пирамида: $S_{ён} = \frac{Pa}{2}$ (P — асосининг периметри, a — апофемаси).

Мунтазам кесик пирамида $S_{ён} = \frac{P_1 + P_2}{2} a$ (P_1 ва P_2 — асосларининг периметрлари, a — апофемаси).

Цилиндр: $S_{ён} = 2\pi RH$.

Конус: $S_{ён} = \pi Rl$ (l — ясовчиси).

Кесик конус: $S_{ён} = \pi (R_1 + R_2)\, l$.

Шар: $S = 4\pi R^2$

СПРАВКА УЧУН ФОРМУЛАЛАР

Ҳажмлар

Призма: $V = SH$ (S — асосининг юзи, H — баландлиги).

Пирамида: $V = \frac{SH}{3}$.

Кесик пирамида: $V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Цилиндр: $V = \pi R^2 H$.

Конус: $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$.

Кесик конус: $V = \frac{\pi H}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$.

Шар: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Бурчакнинг градус ўлчовини радиан ўлчовига ва радиан ўлчовини градус ўлчовига айлантириш.

$\alpha = \frac{\pi \cdot a^\circ}{180^\circ}$, $a^\circ = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ (α — бурчакнинг радиан ўлчови, a — градус ўлчови).

Қўшиш формулалари

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.
3. $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$.

Иккиланган ва ярим бурчаклар

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.
3. $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$
4. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$,
5. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$.
6. $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$.
7. $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.
8. $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Тригонометрик ифодаларни логорифмлаш учун қулай шаклга келтириш

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

5. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

6. $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$ 7. $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$

Баъзи муҳим муносабатлар

1. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$

2. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$

3. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$

Тўғри бурчакли учбурчак элементлари орасидаги муносабатлар

(a, b — катетлари; c — гипотенузаси; A, B — ўткир бурчаклари; C — тўғри бурчаги).

1. $a = c\sin A = c\cos B.$ 2. $b = c\sin B = c\cos A.$
3. $a = b\operatorname{tg} A = b\operatorname{ctg} B.$ 4. $b = a\operatorname{tg} B = a\operatorname{ctg} A.$

Ихтиёрий учбурчак элементлари орасидаги муносабатлар

(a, b, c — томонлар; A, B, C — бурчаклар)

1. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (синуслар теоремаси).

2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (косинуслар теоремаси).

3. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$ (тангенслар теоремаси).

Тескари тригонометрик функцияларнинг қийматлари орасидаги муносабатлар

($\arcsin x$; $\arccos x$; $\operatorname{arctg} x$ — тегишли тескари тригонометрик функцияларнинг бош қийматлари)

1. $\operatorname{Arcsin} x = k\pi + (-1)^k \arcsin x.$ 2. $\operatorname{Arccos} x = 2\pi k \pm \arccos x.$
3, $\operatorname{Arctg} x = \pi k + \operatorname{arctg} x$; k — ихтиёрий бутун (мусбат ёки манфий) сон.

МАСАЛАЛАР

БИРИНЧИ ҚИСМ
АРИФМЕТИКА ВА АЛГЕБРА

I-БОБ
АРИФМЕТИК ҲИСОБЛАШЛАР

1. $\dfrac{\left(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}.$

2. $\dfrac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}.$

3. $\dfrac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0{,}0001 : 0{,}005}.$

4. $\left(\dfrac{0{,}012}{5} + \dfrac{0{,}04104}{5{,}4}\right)\cdot 4560 - 42\dfrac{1}{3}.$

5. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0{,}04}.$

6. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0{,}002}.$

7. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4} + 0{,}373}{0{,}2}.$

8. $\dfrac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3} + 0{,}6}{0{,}2}.$

9. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6} - 6\frac{1}{27} - 5\frac{1}{4}\right)\cdot 13{,}5 + 0{,}111}{0{,}02}.$

10. $\dfrac{\left(1\frac{1}{12} + 2\frac{5}{32} + \frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5} + 2{,}13}{0{,}4}.$

11. $\dfrac{6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14})\cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25):2{,}5}.$

12. $$\frac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}.$$

13. $$\frac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}.$$

14. $$\frac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0{,}8+2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}.$$

15. $$\frac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\cdot 4{,}5}{0{,}04}.$$

16. $$\frac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\frac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}.$$

17. $$\frac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)\cdot 1\frac{9}{11}\right]\cdot 4{,}2}{0{,}008}.$$

18. $$\left[\frac{\left(2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{\left(2{,}75-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-0{,}45}\right]:\frac{67}{200}.$$

19. $$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\frac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right]:2\frac{1}{20}.$$

20. $$26:\left[\frac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\frac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right]+\frac{2}{3}:\frac{4}{21}.$$

21. $$\frac{3:\frac{2}{5}-0{,}09:\left(0{,}15:2\frac{1}{2}\right)}{0{,}32\cdot 6+0{,}03-(5{,}3-3{,}88)+0{,}67}.$$

22. $$1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right).$$

23. $$\left(10:2\frac{2}{3}+7{,}5:10\right)\cdot\left(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0{,}25+\frac{157}{360}\right).$$

24. $$\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39.$$

25. $$1{,}7:\frac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}-\left(0{,}5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right).$$

26. $$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}+0{,}228:\left[\left(1{,}5291-\frac{14{,}53662}{3-0{,}095}\cdot 0{,}305\right):0{,}12\right].$$

27. $\left\{\frac{8{,}8077}{20-[28{,}2:(13{,}333\cdot 0{,}3+0{,}0001)]\cdot 2{,}004}+4{,}9\right\}\cdot\frac{5}{32}.$

28. $\frac{\left|\left(6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9\right)\cdot 0{,}2+0{,}15\right|:0{,}02}{\left(2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}1\right)\cdot\frac{1}{33}}.$

29. $6:\frac{1}{3}-0{,}8:\frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}.$

30. $\frac{\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1{,}75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80}-0{,}0325\right):400}:(6{,}79:0{,}7+0{,}3).$

31. $\frac{4{,}5:\left|47{,}375-\left(26\frac{1}{3}-18\cdot 0{,}75\right)\cdot 2{,}4:0{,}88\right|}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}$

32. 3,6 проценти

$$\frac{3+4{,}2\cdot 0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}$$

бўлган сон топилсин.

33. Ҳисоблансин:

$\left(46\frac{2}{25}:12+41\frac{23}{35}:260\frac{5}{14}+800:12\frac{28}{31}\right)\cdot\frac{0{,}8\cdot 7{,}2\cdot 4{,}5\cdot 1{,}3}{6{,}5\cdot 2{,}7\cdot 1{,}92}.$

34. Ҳисоблансин:

$\left[15:\frac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005):0{,}01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}\right]\left(0{,}645:0{,}3-1\frac{107}{180}\right)\left(4:6{,}25-\right.$

$\left.-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdot 1{,}96\right).$

35. Ҳисоблансин:

$\left[\left(7\frac{2}{3}-6\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{14}\right):\left(8\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}-1\frac{1}{6}\right)+\right.$

$\left.+\frac{7}{18}\cdot\frac{14}{27}\right]\left(\frac{5}{6}-0{,}75\right)\cdot\frac{20{,}4\cdot 4{,}8\cdot 6{,}5}{22{,}1\cdot 1{,}2}.$

36. Ҳисоблансин:

$$\frac{2{,}045\cdot 0{,}033+10{,}518395-0{,}464774:0{,}0562}{0{,}003092:0{,}0001-5{,}188}.$$

37. Ҳисоблансин:

$\left(7\frac{1}{9}-2\frac{14}{15}\right):\left(2\frac{2}{3}+1\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{20}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{14}\right).$

38. Ҳисоблансин:

$$\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:0,16\right\}.$$

39. Ҳисоблансин: $\dfrac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4-\frac{3}{4}}:31.$

40. Ҳисоблансин:

$$\frac{0,8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1,25\right)}{0,64-\frac{1}{25}}+\frac{\left(1,08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+(1,2\cdot 0,5):\frac{4}{5}.$$

41. Ҳисоблансин:

$$\left[41\frac{29}{72}-\left(18\frac{7}{8}-5\frac{1}{4}\right)\left(10\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}\right)\right]:22\frac{7}{18}.$$

42. Ҳисоблансин:

$$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0,003}{\left[\left(3\frac{1}{20}-2,65\right)4\right]:\frac{1}{5}}-\frac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:62\frac{1}{20}+17,81:0,0137.$$

43. x ҳисоблансин:

$$5\frac{4}{7}:\left\{x:1,3+8,4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left[6-\frac{(2,3+5:6,25)\cdot 7}{8\cdot 0,0125+6,9}\right]\right\}=1\frac{1}{14}.$$

44. x ҳисоблансин:

$$\frac{\left[\left(4,625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):x+(2,5:1,25):6,75\right]:1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0,375\right):0,125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0,358-1,4796:13,7)}=\frac{17}{27}.$$

45. x топилсин:

$$\frac{(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2-1,4):\frac{3}{7}}+x+8\frac{9}{11}-\frac{(1,6+154,66:70,3):1,9}{\left(2\frac{2}{5}-1,3\right):4,3}=2,625.$$

2-БОБ

АЛГЕБРАИК ШАКЛ АЛМАШТИРИШЛАР

Қуйидаги ифодалар соддалаштирилсин:

✓ 46. $(a^2-b^2-c^2+2bc):\dfrac{a+b-c}{a+b+c};$

натижа $a=8,6$; $b=\sqrt{3}$; $c=3\frac{1}{3}$ бўлганда ҳисоблансин.

47. $\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}.$

48. $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right).$

49. $\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\frac{3x-6}{x-2}\right).$

50. $\left(\frac{2a+10}{3a-1}+\frac{130-a}{1-3a}+\frac{30}{a}-3\right)\cdot\frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}.$

51. $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}.$

52. $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}.$

53. $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right].$

54. $\left[\frac{a-1}{a^2-2a+1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+2}\right]\times$

$\times\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}.$

55. $\left[\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right]:\left[\frac{5}{x^2+1}+\right.$

$\left.+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right]$

56. $\left(\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}.$

57. $\frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right].$

58. $\frac{2a^2(b+c)^{2n}-\frac{1}{2}}{an^2-a^3-2a^2-a}:\frac{2a(b+c)^n-1}{a^2c-a(nc-c)}.$

59. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}.$

60. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right];$

$x=\frac{1}{a-1}$ бўлганда натижа ҳисоблансин.

61. $\left[\frac{2+ba^{-1}}{a+2b}-6b(4b^2-a^2)^{-1}\right]:\left(2a^nb+3a^{n+1}-\frac{6a^{n+2}}{2a-b}\right)^{-1}.$

62 ¹). $\frac{\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right]a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}.$

---

[1] Бундан кейинги масалаларни ечишга киришишдан олдин 102—104-бетлардаги изоҳлар билан танишиб чиқилсин.

63. $\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}.$

64. $\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}.$

65. $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)\cdot(a^2-1)\cdot(1+2a+a^2)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}.$

66. $\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}.$

67. $ab\sqrt[n]{a^{1-n}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}}\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}.$

68. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)(\sqrt{6}+11).$

69. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right).$

70. $\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}}+\frac{1}{b+\sqrt{a}}\right):\frac{\sqrt[-2]{\frac{1}{9}a^{-2}b^{-1}}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}.$

71. $\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}-\frac{1}{a}.$

72. Қуйидаги ифодaнинг

$$\frac{xy-\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}}$$

$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$ $(a\geqslant 1,\ b\geqslant 1)$ бўлгандаги қиймати топилсин.

73. Қуйидаги ифодaнинг

$$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$$

$x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$, $|m|<1$ бўлгандаги қийматини топинг.

Ифодалар соддалаштирилсин:

74. $\frac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}},$

$x=\frac{2mn}{n^2+1}$, бунда $m>0,\ 0<n<1.$

75. $\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$,

$c = 2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$, бунда $k > 1$.

76. $$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{2^{-2}}{a}\right)\left[(a-1)\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2-1)(a-1)}}\right].$$

77. $\left(2\sqrt{x^4-a^2x^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{1-a^2x^{-2}}}\right)\cdot\frac{(x^2a^{-2}-4+4a^2x^{-2})^{-\frac{1}{2}}}{2ax(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}$.

78. $\dfrac{a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$.

79. $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$.

80. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\frac{a}{2}\cdot\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$.

81. $2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\frac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

82. Ҳисоблансин:

$$\left[a^{-\frac{3}{2}}b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3;$$

бунда $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

83. $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ ифоданинг

$a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ ва $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$ бўлгандаги қиймати ҳисоблансин.

Ифодалар соддалаштирилсин:

84. $\frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$.

85. $\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$.

86. $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

87. $\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{1}{x^{1,5}-1}$.

88. $\left(2^{\frac{3}{2}}+27y^{\frac{3}{5}}\right):\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right]$.

89. Айният исботлансин:

$$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0.$$

90. Ҳисоблансин: $\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$;

бунда $a=1,2$ ва $b=\frac{3}{5}$.

Ифодалар соддалаштирилсин:

91. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\right.$

$$\left.-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right);$$

$a=54$ ва $b=6$ бўлганда натижа ҳисоблансин:

92. $\frac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}$.

93. $a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1+\left[a(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2}\cdot\frac{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-a^2}$

94. $$\frac{x^{\frac{5}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)(x^2+1)}-\left(x-\frac{x^3}{1+x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2\sqrt{(1+x^2)^{-1}}-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}.$$

95. $$(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}+$$
$$+R^2\frac{(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(R^2-x^2)\left[1+\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x}\right)^{-2}\right]}.$$

96. $$\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}(p^{-1}+q^{-1})+\frac{2}{\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^3}\cdot\left(p^{-\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

97. $$\left[\frac{\left(a+\sqrt[3]{a^2x}\right):\left(x+\sqrt[3]{ax^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^6.$$

98. $$\left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2\,\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}.$$

99. $$\left[\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2.$$

100. $$\left[(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right)\right].$$

101. $$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

102. $$\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

103. $$\left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}.$$

104. $$x^3\left[\frac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}.$$

105. $$\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}.$$

106. $$\frac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$$

107. $\left\{\sqrt{1+\left[\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^{2}}\right\}^{-6}-\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}.$

108. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\frac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$

109. $\left[\frac{\sqrt[6]{a^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[6]{x}\right]^3+4(x+1)+\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+1\right)^2.$

110. $\left[\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}.$

111. $\sqrt[-\frac{1}{2}]{\sqrt{a}}\left[\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right]^2.$

112. $\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^3+2x+a}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^3-x-2a}\right]^3+\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)^{\frac{2}{3}}:a}.$

113. $\left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]:\frac{(4b)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$

114. $\left(\frac{a-4b}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}-6b}-\frac{a-9b}{a+6(ab)^{\frac{1}{2}}+9b}\right)\cdot\frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}.$

115. $\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$

116. $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$

117. $\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](ab)^{-\frac{1}{2}}.$

118. $\left[\frac{\frac{1}{a}-a}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-1\right)}+\sqrt[3]{a}\right]^{-3}.$

119. $\left[\frac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{a+\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{x}\right]\cdot\left[\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)^2\right].$

120. $\Bigg[\Bigg(\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\Bigg):\ a+\sqrt[6]{a^3b^2}\Big)-\sqrt[3]{b}\Bigg]^2.$

121. $\left[\dfrac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4.$

122. $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$

123. $\sqrt{a}\left[\dfrac{a+\sqrt[4]{a^3b^2}+b\sqrt[4]{ab^2}+b^2}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^2}-b\right]^{-1}+\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}-1}.$

124. $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$

125. $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}.$

126. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\,\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}.$

127. $\dfrac{\sqrt{a^3b}\,\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\sqrt{ab}}-$

$$-a^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2}:\frac{a+b}{3a-ab}-\frac{ab}{a+b}\right).$$

128. $\left|\dfrac{10x^2+3ax}{4x^2-a^2}+\dfrac{bx-x^2-ax+ab}{2x+a}:(b-x)-2\right|\times$

$$\times\left[\frac{(a+2x)^{-\frac{1}{2}}+(2x-a)^{\frac{1}{2}}}{(4x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]^2.$$

129. $\left|\dfrac{x+4}{2x^2-2x-4}+\dfrac{x+2}{2(x^2+3x+2)}\right|\sqrt{2}x-$

$$-\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}-\frac{x+6}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right):\left(x^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

130. $\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{(1+x)^{-\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-2}+$

$$+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2-4x}-\frac{5}{x^2-3x-4}\right).$$

131. $$\frac{a^2\sqrt{ab^{-1}}\sqrt[3]{b^2\sqrt{ab}}-2\sqrt{a^3b}\sqrt[6]{ab^5}}{(a^2-ab-2b^2)\sqrt[3]{a^5b}}-$$
$$-\frac{a-3}{a+2b}\left[\frac{a+2b}{a^2+ab-3a-3b}-(a-1)(a^2-4a+3)^{-1}\right].$$

132. $$\frac{\sqrt{a\sqrt{ab}}-(ab)^{\frac{3}{4}}:\sqrt{a}}{(a^2-b^2)a^{-1}}\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)+$$
$$+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{2a+2b}{a-4b}+\frac{a+3b}{2a+2b}-\frac{a^2+21ab}{2a^2-6ab-8b^2}\right).$$

133. $$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab}\sqrt{a}\right)^2}{ab\sqrt[6]{ab}}+4\right]:\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+$$
$$+\frac{b^2-4a^2}{4a}\cdot\left(\frac{1}{b^2+3ab+2a^2}-\frac{3}{2a^2+ab-b^2}\right).$$

134. $$\frac{4(2ab)^{\frac{3}{4}}(a+2b)^{-1}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}:\frac{\sqrt{2b\sqrt{2ab}}+\sqrt[4]{2a^3b}}{\sqrt{2ab}}-$$
$$-6\left(\frac{a}{6a-48b}-\frac{2b}{3a-6b}-\frac{8b^2}{a^2-10ab+16b^2}\right).$$

3-БОБ

АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР

Тенгламалар ечилсин:

135. $\frac{6b+7a}{6b}-\frac{3ay}{2b^2}=1-\frac{ay}{b^2-ab}.$

136. $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$

137. $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3.$

138. $\frac{c+3z}{4c^2+6cd}-\frac{c-2z}{9d^2-6cd}=\frac{2c+z}{4c^2-9d^2}.$

139. $\frac{x-1}{n-1}+\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n}.$

140. $\frac{3ab+1}{a}x=\frac{3ab}{a+1}+\frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}+\frac{a^2}{(a+1)^3}.$

141. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$

142. $\frac{x+m}{a+b}-\frac{ax}{(a+b)^2}=\frac{am}{a^2-b^2}-\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}.$

143. $\frac{m}{z}+\frac{z}{m}+\frac{m(z-m)}{z(z+m)}-\frac{z(z+m)}{m(z-m)}=\frac{mz}{m^2-z^2}-2.$

✓ 144. $\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}.$

145. $\frac{an}{a-x}+\frac{(a+n)(anx+nx^2+x^3)}{x^3+nx^2-a^2x-a^2n}=\frac{ax}{n+x}+\frac{nx^2}{x^2-a^2}.$

146. $\left(\frac{a+1}{ax+1}+\frac{x+1}{x+a^{-1}}-1\right):\left[\frac{a+1}{(x+a^{-1})a}-\right.$

$$\left.-\frac{a(x+1)}{ax+1}+1\right]=\frac{x}{2}.$$

147. $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}-\frac{a-x}{ax-x^2-a^2}=\frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}.$

148. $a(\sqrt{x}-a)-b(\sqrt{x}-b)+a+b=\sqrt{x}.$

149. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0.$

150. $\frac{2x}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4(x^2-b^2)}.$

151. $1-\frac{2a}{x-a}=\frac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}.$

152. $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}+\frac{x}{bc}.$

153. $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}.$

154. $\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}.$

155. $\frac{a-x^2}{(a-x)^2}-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}.$

156. $1-\frac{2b}{x-a}=\frac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}.$

157. $\frac{1}{2n+nx}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2(n+3)}{x^3-4x}.$

158. $\frac{a+x-2n}{2a-n}-\frac{a-2n}{x}=1.$

159. $\frac{a}{nx-x}-\frac{a-1}{x^2-2nx^2+n^2x^2}=1.$

160. $\frac{\left(\frac{a-x}{x}\right)^2-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2}{x^2+a^2-2ax}=\frac{5}{9x^2}.$

161. $\frac{x+x^2}{1-x^2}:\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}=\frac{ab}{(b-a)^2}.$

162. Қуйидаги ифода чизиқли кўпайтувчиларга ажратилсин:

$$11x-3x^2+70.$$

163. $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ ифода иккита кўпайтувчига ажратилсин, уларнинг йиғиндиси $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ га тенг бўлсин.

164. $15x^3 + x^2 - 2x$ ифода кўпайтувчиларга ажратилсин.

165. $x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$ ифода кўпайтувчиларга ажратилсин.

165а. Ушбу тенглама ечилсин.

$$(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2).$$

166. Илдизлари $\frac{a}{b}$ ва $\frac{b}{a}$ сонларидан иборат бўлган квадрат тенглама ёзилсин.

167. Илдизлари $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ ва $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$ сонларидан иборат бўлган квадрат тенглама тузилсин.

168. Илдизлари $\frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - b}}$ бўлган квадрат тенглама тузилсин.

169. $x^2 + px + 12 = 0$ квадрат тенгламанинг x_1 ва x_2 илдизлари $x_1 - x_2 = 1$ хоссага эга. Коэффициенти p топилсин.

170. $5x^2 - kx + 1 = 0$ тенглама илдизларининг айирмаси бирга тенг. k топилсин.

171. $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ тенгламанинг x_1 ва x_2 илдизлари йиғиндиси $x_1^2 + x_2^2 = 1,75$. a нинг қиймати топилсин.

172. $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари p ва q га тенг бўлса, унинг коэффициентлари топилсин.

173. $ax^3 + bx + c = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2. Илдизлари $\frac{x_1}{x_2}$ ва $\frac{x_2}{x_1}$ бўлган квадрат тенглама тузилсин.

174. Қуйидаги квадрат тенглама берилган:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Янги квадрат тенглама тузинг, унинг илдизлари:

1) берилган тенгламанинг илдизларидан икки марта катта бўлсин.

2) берилган тенгламанинг илдизларига тескари бўлсин.

175. Илдизлари $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенглама илдизларининг кубларига тенг бўлган квадрат тенглама тузинг.

176. Илдизлари квадратларининг йиғиндиси 50 га, илдизларининг кўпайтмаси 144 га тенг бўлган биквадрат тенглама тузинг.

177. $4x^4-24x^3+57x^2+18x-45=0$ тенгламанинг илдизларидан бири $3+i\sqrt{6}$, унинг ҳамма илдизлари топилсин.

178. $6x^3-7x^2-16x+m=0$ тенгламанинг илдизларидан бири 2 га тенглиги маълум бўлса, шу тенгламанинг озод ҳади аниқлансин. Қолган иккита илдизи топилсин.

179. 2 ва 3 сонлари

$$2x^3+mx^2-13x+n=0$$

тенгламанинг илдизлари бўлса, m ва n аниқлансин ҳамда тенгламанинг учинчи илдизи топилсин.

180. a ҳарфининг қандай сон қийматларида

$$x^2+2ax\sqrt{a^2-3}+4=0$$

тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг бўлади?

180a. $x^2+2mx+m^2-1=0$ тенгламанинг иккала издизи -2 билан 4 орасида бўлиши учун, m сони қандай ораликда ўзгариши керак?

Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

181. $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2.$

182. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2.$

183. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2.$

184. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7.$

185. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1.$

186. $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2.$

187. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$

188. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$

189. $\frac{3+x}{3x}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}}.$

190. $\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}.$

191. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}.$

192. $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}.$

193. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{x}.$

194. $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{28}.$

195. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

196. $\frac{\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}=\frac{27}{x}.$

197. $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}.$

198. $\frac{\sqrt{1+a^{-2}x^2}-xa^{-1}}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}+xa^{-1}}=\frac{1}{4}.$

199. $\frac{\sqrt{1+a^2x^2}-ax}{\sqrt{1+a^2x^2}+ax}=\frac{1}{c^2}.$

200. $\frac{x+c+\sqrt{x^2-c^2}}{x+c-\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{9(x+c)}{8c}.$

201. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

202. $2\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}.$

203. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b.$

204. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}.$

205. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}.$

206. $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}.$

207. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12.$

208. $(x-1)^{\frac{1}{2}}+6(x-1)^{\frac{1}{4}}=16.$

209. $\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}=-\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}.$

210. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$

211. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}.$

212. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3.$

213. $2\sqrt[3]{z^2}-3\sqrt[3]{z}=20.$

214. $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0.$

215. $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}.$

216. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$

217. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

218. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8.$

219. $\dfrac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b.$

220. $\dfrac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\sqrt{\dfrac{2-x}{2}}.$

221. $\dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\dfrac{1-\sqrt{x}}{2}.$

222. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7.$

223. $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

224. $\sqrt{y^2+4y+8}+\sqrt{y^2+4y+4}=\sqrt{2(y^2+4y+6)}.$

Тенгламалар системаси ечилсин:

225. $\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2), \\ x+y=6. \end{cases}$

226. $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

227. $\begin{cases} x+y^2=7, \\ xy^2=12. \end{cases}$

228. $\begin{cases} x^2-y=23, \\ x^2y=50. \end{cases}$

229. $\begin{cases} (x^2-y^2)xy=180, \\ x^2-xy-y^2=-11. \end{cases}$

230. $\begin{cases} 3x^2-2xy+5y^2-35=0, \\ 5x^2-10y^2-5=0. \end{cases}$

231. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5}{2}xy, \\ x-y=\dfrac{1}{4}xy. \end{cases}$

232. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4. \end{cases}$

233. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x-y=1. \end{cases}$

234. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}, \\ x^2-y^2=7. \end{cases}$

235. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^m\cdot\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=c, \\ \left(\dfrac{x}{b}\right)^n\cdot\left(\dfrac{y}{a}\right)^m=d, \end{cases}$

($a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ ва $m\neq n$ деб ҳисоблаб, мусбат ечимлар билан чекланилсин).

236. $$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

237. $$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy\,(x + y) = -2 \end{cases}$$

(ҳақиқий ечимлар билан чекланилсин).

238. $$\begin{cases} xy\,(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

239. $$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = 5\,\dfrac{1}{5}, \\ xy = 6. \end{cases}$$

240. $$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$$

241. $$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 30, \\ 2x - 3y + 5z - 2u = 3, \\ 3x + 4y - 2z - u = 1, \\ 4x - y + 6z - 3u = 8. \end{cases}$$

242. $$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

243. $$\begin{cases} \sqrt{4x + y - 3z + 7} = 2, \\ \sqrt[3]{2y + 5x + z + 25{,}5} = 3, \\ \sqrt{y + z} - \sqrt{6x} = 0. \end{cases}$$

244. $$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61, \\ xy + xz = 2yz. \end{cases}$$

245. $$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ xy + yz + zx = 47, \\ (z - x)(z - y) = 2. \end{cases}$$

246. $$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0. \end{cases}$$

247. $$\begin{cases} \dfrac{12}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=5, \\ \dfrac{8}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{10}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}}=6. \end{cases}$$

248. $$\begin{cases} x+y-2\sqrt{xy}=4, \\ x+y=10. \end{cases}$$

249. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x}{x+y}}-2+\sqrt{\dfrac{x+y}{3x}}=0, \\ xy-54=x+y. \end{cases}$$

250. $$\begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{17}=0, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6. \end{cases}$$

251. $$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\sqrt{a}, \\ \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=(\sqrt{41}-3)a. \end{cases}$$

252. $$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y, \\ x^4-y^4=144a^4. \end{cases}$$

253. $$\begin{cases} x^2+xy+y^2=84, \\ x+\sqrt{xy}+y=14. \end{cases}$$

253а. m нинг

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy), \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳақиқий ечимга эга бўладиган ҳамма қийматлари топилсин.

4-БОБ

ЛОГАРИФМИК ВА КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

x ни жадвалдан фойдаланмасдан топинг:

254. $x=10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$.

255. $x=100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}$.

256. $x = \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

257. $x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 5}$.

Тенгламалар ечилсин:

258. $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$.

259. $\log_a \{1 + \log_b [1 + \log_c (1 + \log_p x)]\} = 0$.

260. $\log_4 \{2 \log_3 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$.

261. $\log_2 (x + 14) + \log_2 (x + 2) = 6$.

262. $\log_a y + \log_a (y + 5) + \log_a 0{,}02 = 0$.

263. $\frac{\lg (35 - x^3)}{\lg (5 - x)} = 3$.

264. $1 + \lg x =$
$= \frac{1}{3} \lg \left[b - \frac{(3a - b)(a^2 + ab)^{-1}}{b^{-2}} \right] - \frac{4}{3} \lg b + \frac{1}{3} \lg (a^3$

265. $\lg \left[x - a(1 - a)^{-\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{2} \lg \ 1 + \frac{1}{a}) -$
$- \lg \sqrt{\frac{a^3 + a}{a + 1}} -$

266. $\log_x \sqrt{5} + \log_x (5x) - 2{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2$.

267. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

268. $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}$.

269. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

270. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

271. $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

272. $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.

273. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

274. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}$.

275. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4.$

276. $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{2^{-1}x^{-\frac{1}{2}}} - \sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2} = 0.$

277. $\sqrt[x^2-1]{a^3}\,\sqrt[2x-2]{a}\,\sqrt[4]{a^{-1}} = 1.$

278. $3\log_{xa^2} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2.$

279. $\log_4 (x + 12)\cdot\log_x 2 = 1.$

280. $\log_x (5x^2)\cdot\log_5^2 x = 1.$

281. $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{x-1} + a^x =$
$= (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8).$

282. $5^2\cdot5^4\cdot5^6\ldots5^{2x} = 0{,}04^{-28}.$

283. $4^{x-2} - 17\cdot2^{x-4} + 1 = 0.$

284. $2\cdot4^{2x} - 17\cdot4^x + 8 = 0.$

285. $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0.$

286. $x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}.$

287. $\lg(4^{-1}\cdot2^{\sqrt{x}} - 1) - 1 = \lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2\right) - 2\lg 2.$

288. $2(\lg 2 - 1) + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5).$

289. $5^{\lg x} - 3^{\lg x-1} = 3^{\lg x+1} - 5^{\lg x-1}.$

290. $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x} = \sqrt{10}.$

291. $\lg\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right) = 0.$

292. $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x.$

293. $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$

294. $2\lg 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right)\lg 3 - \lg\left(\sqrt[x]{3} + 27\right) = 0.$

295. $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 =$
$= \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x + 0{,}25}\lg 4.$

296. $\frac{2\lg 2 + \lg(x-3)}{\lg(7x+1) + \lg(x-6) + \lg 3} = \frac{1}{2}.$

297. $\log_5 120 + (x-3) - 2\log_5(1-5^{x-3}) = -\log_5(0,2 - 5^{x-4}).$

Тенгламалар системаси ечилсин:

298. $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}. \end{cases}$

299. $\begin{cases} \log_3 x + og_3 y = 0, \\ x + y = 3,(3). \end{cases}$

300. $\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2, \\ \log_b x - \log_b y = 4. \end{cases}$

301. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3\lg 2. \end{cases}$

302. $\begin{cases} og_{xy}(x-y) = 1, \\ \log_{xy}(x+y) = 0. \end{cases}$

303. $\begin{cases} \log_a\left(1 + \frac{x}{y}\right) = 2 - \log_a y, \\ \log_b x + \log_b y = 4. \end{cases}$

304. $\begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9, \\ x + y - 5a = 0. \end{cases}$

305. $\begin{cases} xy = a^2, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2,5 \lg^2(a^2). \end{cases}$

306. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

307. $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg a, \\ 2(\lg x - \lg y) = \lg b. \end{cases}$

308. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2}, \\ \log_{b^3} x + \log_b y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

309. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2}, \\ \log_{b^2} x - \log_{b^2} y = 1. \end{cases}$

310. $$\begin{cases} \log_v u + \log_u v = 2, \\ u^2 + v = 12. \end{cases}$$

311. $$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{a} + \log_{\frac{y}{\sqrt{b}}} \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

312. $$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

313. $$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

314. $$\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y)\,2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

315. $$\begin{cases} \sqrt[10]{2^x}\sqrt{\sqrt[5]{2^y}} = \sqrt[x]{128}. \\ \lg(x+y) = \lg 40 - \lg(x-y). \end{cases}$$

316. $$\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}. \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[x]{9^{1-y}}, \end{cases}$$

317. $$\begin{cases} 9^{-1}\sqrt[y]{9^x} - 27\sqrt[x]{27^y} = 0, \\ \lg(x-1) - \lg(1-y) = 0. \end{cases}$$

318. $$\begin{cases} \frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg y - \lg(4 - \sqrt{x}) = 0, \\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}} - 125 \cdot 5^{\sqrt{y}} = 0. \end{cases}$$

319. $$\begin{cases} \log_x ay = p, \\ \log_y bx = q. \end{cases}$$

5-БОБ

ПРОГРЕССИЯЛАР

Белгилашлар ва формулалар

a_1—арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади, a_n унинг n-ҳади, d—айирмаси.

u_1 — геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади, u_n унинг n-ҳади, q—махражи.

S_n — прогрессия n та ҳадларининг йиғиндиси, S — чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси.

Арифметик прогрессия формулалари

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \qquad (2)$$

$$S_n = \frac{[2a_1 + d(n-1)]\,n}{2}. \qquad (3)$$

Геометрик прогрессия формулалари

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \qquad (4)$$

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} \ (q > 1) \text{ ёки } S_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q} \quad (q < 1), \qquad (5)$$

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1} \ (q > 1) \text{ ёки } S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q < 1), \qquad (6)$$

$$S = \frac{u_1}{1-q}. \qquad (7)$$

Арифметик прогрессия

320. 5; 9; 13; 17; ... арифметик прогрессиянинг нечта ҳади олинса, йиғинди 10 877 чиқади?

321. Олдинги тўртта ҳадининг йиғиндиси 26 га, шу ҳадларининг кўпайтмаси 880 га тенг бўлган арифметик прогрессия топилсин.

322. Арифметик прогрессияда $a_p = q$; $a_q = p$ бўлса, a_n ифодаси n, p ва q орқали топилсин.

323. Ҳамма икки хонали натурал сонлар йиғиндиси топилсин.

324. Кетма-кет тўртта тоқ сон квадратларининг йиғиндиси улар ораларидаги жуфт сонлар квадратлари йиғиндисидан 48 та ортиқ. Шу тўртта тоқ сон топилсин.

325. Арифметик прогрессиянинг 20 та ҳади бор. Жуфт ўринда турган ҳадларининг йиғиндиси 250, тоқ ўринда турган ҳадларининг йиғиндиси 220. Шу прогрессиянинг иккита ўрта ҳади топилсин.

326. Бир қатор ифодалар берилган: $(a+x)^2$; (a^2+x^2); $(a-x)^2$, ... Улар арифметик прогрессия ташкил этиши исботлансин ва унинг n та ҳадининг йиғиндиси топилсин.

327. Бирор арифметик прогрессиянинг дастлабки n_1 та ҳадининг йиғиндисини S_1 билан, дастлабки n_2 та ҳадининг йиғиндисини S_2 билан, дастлабки n_3 та ҳадининг йиғиндисини S_3 билан белгилаб,

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$$

экани кўрсатилсин.

328. Биринчи ҳади 1, олдинги бешта ҳадининг йиғиндиси ундан кейинги бешта ҳади йиғиндисининг $\frac{1}{4}$ қисмига тенг бўлган арифметик прогрессия ёзилсин.

329. Шундай арифметик прогрессия топилсинки, унинг нечта ҳадини олсак ҳам, уларнинг йиғиндиси доим шу ҳадлар сони квадратнинг уч бараварига тенг бўлсин.

330. 4 га бўлганда қолдиқда бир чиқадиган ҳамма икки хонали сонларнинг йиғиндиси топилсин.

Геометрик прогрессия

331. 1 билан 256 сонлари орасига учта ўрта геометрик сон қўйилсин.

332. Учта сон геометрик прогрессия ташкил этади; бу прогрессиянинг биринчи ва учинчи ҳадларининг йиғиндиси 52, иккинчи ҳадининг квадрати 100. Шу прогрессияни ташкил этувчи учта сон топилсин.

333. Учинчи ҳади билан биринчи ҳади орасидаги айирма 9 га, бешинчи ҳади билан учинчи ҳади орасидаги айирма 36 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг дастлабки бир неча ҳадлари ёзилсин.

334. Геометрик прогрессия ташкил этувчи тўртта сон топилсин. Бу прогрессия четки ҳадларининг йиғиндиси 27, ўрта ҳадларининг кўпайтмаси 72 бўлсин.

335. Геометрик прогрессия ташкил этувчи тўртта сон топилсин, бу прогрессия четки ҳадларининг йиғиндиси 35, ўрта ҳадларининг йиғиндиси 30 бўлсин.

336. $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31$,

ва

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62$$

бўлган геометрик прогрессия топилсин.

337. Геометрик прогрессиянинг бешта ҳади бор; биринчи ҳаддан бошқа ҳадларининг йиғиндиси $19\frac{1}{2}$ га, охирги ҳадидан бошқа ҳадларининг йиғиндиси 13 га тенг. Прогрессиянинг четки ҳадлари топилсин.

338. Геометрик прогрессия тўққиз ҳаддан иборат бўлиб, иккита четки ҳадининг кўпайтмаси 2304, тўртинчи ва олтинчи ҳадларининг йнғиндиси 120. Шу прогрессиянинг биринчи ҳади ва махражи топилсин.

339. Учта сон геометрик прогрессия тишкил қилади. Бу сонларнинг йиғиндиси 126, кўпайтмаси 13 824. Шу сонлар топилсин.

340. Прогрессия ҳадларининг саноғи жуфт сон. Унинг ҳамма ҳадлари йиғиндиси тоқ ўриндаги ҳадлари йиғиндисидан 3 марта катта. Прогрессиянинг махражи топилсин.

Чексиз камаювчи геометрик прогрессия

341. Ушбу $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \quad \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2}, \ldots$

сонлар чексиз камаючи геометрик прогрессия ҳосил қилиши исботлансин ва ҳадлари йиғиндисининг лимити топилсин.

342. Ушбу

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right]$$

ифоданинг олдин ўрта қавс ичидаги қўшилувчилари камаючи геометрик прогрессиянинг ҳадлари эканини исбот қилиб, сўнгра ҳисоблаш керак.

343. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг ҳамма ҳадлари мусбат, биринчи ҳади 4 га тенг, учинчи ҳади билан бешинчи ҳадининг айирмаси $\frac{32}{81}$. Шу прогрессиянинг йиғиндиси топилсин.

344. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг биринчи ва тўртинчи ҳадларининг йиғиндиси 54, иккинчи ва учинчи ҳадларининг йиғиндиси 36. Шу прогрессиянинг йиғиндиси топилсин.

345. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг тоқ ўринларда турган ҳамма ҳадларининг йиғиндиси 36. Жуфт ўринларда турган ҳамма ҳадларининг йиғиндиси 12. Шу прогрессия топилсин.

346. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси 56, ҳадлари квадратларининг йиғиндиси 448. Прогрессиянинг биринчи ҳади ва махражи топилсин.

347. Чексиз камаювчи геометрик прогресссия ҳадларининг йиғиндиси 3. Унинг ҳамма ҳадлари кубларининг йиғиндиси $\frac{108}{13}$. Шу прогрессия топилсин.

348. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳади 6, ҳадларининг йиғиндиси шу ҳадлар квадратлари йиғиндисининг $\frac{1}{8}$ қисмига тенг. Шу прогрессия топилсин.

Арифметик ва геометрик прогрессияларга доир масалалар

349. Бир арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳади 14, учинчи ҳади 16. Шундай геометрик прогрессия тузилсинки, унинг махражи арифметик прогрессиянинг айирмасига тенг бўлиб, иккала прогрессиянинг олдинги учта ҳадларининг йиғиндилари тенг бўлсин.

350. Арифметик прогрессия билан геометрик прогрессия ҳар бирининг биринчи ҳади 3 га тенг, учинчи ҳадлари ҳам бир-бирига тенг. Арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳади геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан 6 та ортиқ. Шу прогрессияларни ёзинг.

351. Геометрик прогрессиянинг биринчи, учинчи ва бешинчи ҳадини бир арифметик прогрессиянинг биринчи, тўртинчи ва ўн олтинчи ҳадлари деб ҳисоблаш мумкин. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади 5 га тенг бўлса, тўртинчи ҳади нимага тенг бўлади?

352. Геометрик прогрессия ташкил қилувчи учта соннинг йиғиндиси 93. Бу сонларни арифметик прогрессиянинг биринчи, иккинчи ва еттинчи ҳадлари деб қараш мумкин. Шу сонлар топилсин.

353. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади 1, олдинги еттита ҳадининг йиғиндиси 2555. Агар етти ҳадли геометрик прогрессиянинг биринчи ва охирги ҳадлари кўрсатилган арифметик прогрессиянинг биринчи ва охирги ҳадларига тенг бўлса, геометрик прогрессиянинг ўрта ҳади топилсин.

354. Арифметик прогрессия ташкил қилувчи учта соннинг йиғиндиси 15 га тенг. Агар уларга мос равишда 1, 4 ва 19 қўшсак, геометрик прогрессия ташкил қилувчи учта сон ҳосил бўлади. Шу сонлар топилсин.

355. Геометрик прогрессия ташкил қилувчи учта соннинг йиғиндиси 26 га тенг. Бу сонларга мос равишда 1, 6 ва 3 қўшсак, арифметик прогрессия ташкил қилувчи учта сон ҳосил бўлади. Шу учта сон топилсин.

356. Учта сон геометрик прогрессия ҳосил қилади. Агар учинчи сонни 64 та камайтирсак, ҳосил бўлган сонлар арифметик прогрессия ташкил этади. Агар шу арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳадини 8 та камайтирсак, геометрик прогрессия ҳосил бўлади. Шу сонлар топилсин.

357. Учта сон бир вақтда ҳам арифметик, ҳам геометрик прогрессия ҳосил қила оладнми?

6-БОБ

БИРЛАШМАЛАР ВА НЬЮТОН БИНОМИ

358. n та ҳарфдан тузилган ўрин алмаштиришлар сонининг $n+2$ та ҳарфдан тузилган ўрин алмаштиришлар сонига нисбати 0,1 нинг 3 га нисбати каби. n топилсин.

359. n та элементдан 3 тадан олиб тузилган группалар сони $n+2$ элементдан 4 тадан олиб тузилган группалар сонидан 5 марта кичик. n топилсин.

360. $\left(\frac{a}{x}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}$ бином ёйилмасининг ўрта ҳади топилсин.

361. $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ бином ёйилмасининг a^7 қатнашган ҳадининг номери топилсин.

362. $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ бином ёйилмасида a ва b нинг бир хил даражалари қатнашган ҳадининг номери топилсин.

363. $\left(\frac{a+1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{a-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$ ифода соддалаштирилсин ва ёйилманинг a қатнашмаган ҳади топилсин.

364. Бир биномнинг даража кўрсаткичи иккинчи биномнинг даража кўрсаткичидан 3 та ортиқ. Иккала ёйилма биномиал коэффициентларининг йиғиндиси 144 га тенг бўлса, шу кўрсаткичлар топилсин.

365. Агар $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^m$ бином ёйилмаси учинчи ҳадининг биномиал коэффициенти 105 га тенг бўлса, шу ёйилманинг ўн учинчи ҳади топилсин.

366. $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^m$ бином ёйилмасининг тўртинчи ва ўн учинчи ҳадларининг коэффициентлари ўзаро тенг. Ёйилманинг x қатнашмаган ҳади топилсин.

367. $\left(a\sqrt[-2]{a} - \sqrt[5]{\frac{-2}{\sqrt{a}}}\right)^m$ бином ёйилмаси бешинчи ҳади коэффициентининг учинчи ҳади коэффициентига нисбати 14 : 3 каби бўлса, ёйилманинг ўрта ҳади топилсин.

368. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^m$ бином ёйилмасининг биринчи, иккинчи ва учинчи ҳадлари коэффициентларининг йиғиндиси 46 га тенг. Ёйилманинг x қатнашмаган ҳади топилсин.

369. $\left(x\sqrt{x} + \sqrt[-3]{x}\right)^m$ бином ёйилмасининг ҳамма биномиал коэффициентлари йиғиндиси 128 га тенг. Шу бином ёйилмасининг таркибида x^5 бўлган ҳади топилсин.

370. Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади $\frac{1}{i}$, махражи эса $(1 + i)$ дан иборат комплекс сон. Шу геометрик прогрессиянинг олтинчи ҳади топилсин.

371. Махражи $\left(1 + \frac{1}{i}\right)$ га, биринчи ҳади i га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг еттинчи ҳади топилсин.

372. n нинг қандай қийматида $(1 + x)^n$ бином ёйилмасининг иккинчи, учинчи ва тўртинчи ҳадларининг коэффициентлари арифметик прогрессия ташкил қилади?

373. $(1 + x)^n$ бином ёйилмасининг бешинчи, олтинчи ва еттинчи ҳадларининг коэффициентлари арифметик прогрессия ташкил қилади. n топилсин.

374. $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}} + a\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$ бином ёйилмасининг тўртинчи ҳади $56a^{5,5}$ га тенг. Бу ифодадаги x топилсин.

375. $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ бином ёйилмасининг учинчи ҳади 240 га тенг. Бу ифодадаги x топилсин.

376. $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ бином ёйилмасининг бошидан еттинчи ҳадининг шу ёйилманинг охиридан еттинчи ҳадига нисбати $\frac{1}{6}$ га тенг. x топилсин.

377. Ушбу $(x+x^{\lg x})^5$ бином ёйилмасининг учинчи ҳади 1 000 000 га тенг. x нинг қиймати топилсин.

378. $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x+1}}+\sqrt[12]{x}\right]^6$ бином ёйилмасининг тўртинчи хади 200 га тенг. x нинг қиймати топилсин.

379. $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\lg\sqrt{x}}\right)^9$ бином ёйилмасининг учинчи ҳади 36 000 га танг. x топилсин.

380. $\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\lg x}\right)^8$ бином ёйилмасининг олтинчи ҳади 5600 га тенг. x топилсин.

381. Ушбу $\left[\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\lg x}}+x\sqrt[2\lg x]{x}\right]^{10}$ бином ёйилмасининг тўққизинчи ҳади 450 га тенг. x топилсин.

382. Агар $\left(10^{\lg\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[\lg x]{10}}\right)^7$ бином ёйилмасининг тўртинчи ҳади 3 500 000 га тенг бўлса, x нинг қиймати қанча бўлади?

383. x нинг қандай қийматида $\left(\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ бином ёйилмасининг бир ҳадидаги x нинг даражаси шу ҳаддан кейинги ҳаддаги x нинг даражасидан икки марта катта бўлганда шу ҳад кейинги ҳаддан 30 та кам бўлади?

384. Бином ёйилмаси тўртинчи ҳадининг биномиал коэффициенти иккинчи ҳадининг биномиал коэффициентидан 5 марта катта бўлса, x нинг қандай қийматида $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$ бином ёйилмасиннинг тўртинчи ҳади бином кўрсаткичидан 20 марта катта бўлади?

385. Агар биномнинг m кўрсаткичи ёйилма учинчи ҳадининг биномиал коэффициентидан 20 та кам эканлиги маълум бўлса, x нинг қандай қийматида $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^m$ бином ёйилмасининг тўртинчи ҳади билан олтинчи ҳади орасидаги айирма 56 га тенг бўлади?

386. Агар биномнинг кейинги учта ҳадининг биномиал коэффициентлари йиғиндиси 22 га тенг эканлиги маълум бўлса, x нинг қандай қийматида $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ бином ёйилмасида учинчи ва бешинчи ҳадларининг йиғиндиси 135 га тенг бўлади?

387. Агар $\left[\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\cdot\lg 3}}\right]^m$ бином ёйилмасининг иккинчи, учинчи ва тўртинчи ҳадларининг биномиал коэффициентлари мос равишда арифметик прогрессиянинг биринчи, учинчи ва бешинчи ҳадларидан иборат эканлиги маълум бўлса, x нинг қандай қийматида шу бином ёйилмасининг олтинчи ҳади 21 га тенг бўлади?

388. Агар бином ёйилмасининг учинчи ҳади биномиал коэффициентининг $\frac{14}{9}$ қисми билан тўртинчи ва бешинчи ҳадларининг биномиал коэффициентлари геометрик прогрессия ҳосил қилиши маълум бўлса, x нинг қандай қийматида $\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{-\frac{1}{2}\lg(6-\sqrt{8x})}+\right.$ $\left.+\sqrt[6]{\frac{5^{\lg(x-1)}}{25^{\lg 5}}}\right]^m$ бином ёйилмасининг тўртинчи ҳади 16,8 бўлади?

389. Агар $\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)^m$ бином ёйилмаси тўртинчи ҳадининг биномиал коэффициенти логарифмининг уч баравари билан иккинчи ҳади биномиал коэффициенти орасидаги айирма 1 га тенг эканлиги маълум бўлса, x нинг қандай қийматида шу бином ёйилмаси учинчи ҳадининг 9 марта орттирилгани билан бешинчи ҳади орасидаги айирма 240 га тенг бўлади?

7-БОБ

АЛГЕБРАИК ВА АРИФМЕТИК МАСАЛАЛАР¹)

390. Замбарак ўқининг дориси 0,8 *кг*, снаряднинг оғирлиги бутун ўқ оғирлигининг $\frac{2}{3}$ қисмини ташкил қилади, гильзасининг оғирлиги ўқ оғирлигининг $\frac{1}{4}$ қисмини ташкил қилади. Замбарак ўқининг оғирлиги топилсин.

391. Заводдаги ҳамма ишчиларнинг 35% и аёллар, қолганлари эркаклар. Заводдаги эркаклар аёллардан 252 киши ортиқ. Ишчиларнинг умумий сони топилсин.

392. Бир мол 138,6 сўмга сотилса, 10% фойда келтиради. Молнинг таннархи топилсин.

393. Ишлаб чиқариш артели маҳсулотини 334,8 сўмга сотиб, 4% зарар қилди. Шу маҳсулотнинг таннархи қанча?

394. Агар 225 *кг* рудадан 34,2 *кг* мис олинса, рудада неча процент мис бор?

395. Нархлар туширилмасдан илгари бир пачка папирос 29 тийин турган бўлса, нархлар туширилгандан кейин 26 тийин бўлди. Нарх неча процент туширилган?

396. Бир килограмм мол 6 сўм 40 тийин турар эди, нархлар туширилгандан кейин 5 сўм 70 тийин бўлди. Молнинг нархи неча процент туширилган?

397. Узумдан майиз солинганда тушган майиз ҳамма узум оғирлигининг 32% ини ташкил қилади. Қанча узумдан 2 *кг* майиз тушади?

398. Экскурсияга бориш учун пул йиғиш керак. Агар ҳар бир экскурсант 75 тийиндан берса, харажатлар учун 4,4 сўм етмайди, агар ҳар бир экскурсант 80 тийиндан берса, 4,4 сўм ортиб қолади. Экскурсияга неча киши бормоқчи?

399. Бир неча киши 72 сўмни баравардан тўлашлари керак. Агар улар 3 киши кам бўлса, ҳар бири 4 сўмдан ортиқ тўлаши керак бўлади. Улар неча киши бўлган?

---

¹) Биз масалаларни алгебраик ва арифметик масалалар деб ажратмаймиз, чунки арифметика йўли билан ечиладиган масалаларни ҳамма вақт алгебра йўли билан ечиш мумкин. Аксинча, тенглама ёрдами билан ечиладиган масалаларни, кўпинча соддагина арифметик йўл билан ечиш мумкин бўлади. Ечилишлар бўлимида биз баъзан арифметик, баъзан алгебраик ечилишни берамиз, лекин бу нарса масала ечиш йўлларини танлашда ўқувчилар ташаббусини бўғмаслиги керак.

400. Биринчи том китобнинг 60 нусхаси билан иккинчи томнинг 75 нусхаси 40,5 сўм туради. Бироқ биринчи том 15%, иккинчи том 10% арзонлаштирилса, 35 сўм 55 тийин тўлаш тўғри келади. Биринчи том китобнинг бир нусхаси қанча ва иккинчи том китобнинг бир нусхаси қанча туради?

401. Қадимий ноёб моллар магазини икки дона буюмни 225 сўмга олиб, 40% фойдасига сотди. Агар молларнинг биридан 25%, иккинчисидан 50% фойда қилган бўлса, магазин ҳар қайси молни неча сўмга олган?

402. Денгиз сувида (оғирлиги бўйича) 5% туз бор. 40 *кг* денгиз сувининг тузини 2% ли қилиш учун унга неча килограмм чучук сув қўшиш керак?

403. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси $3\sqrt{5}$ *м*. Катетларидан бири $133\frac{1}{2}\%$, иккинчиси $16\frac{2}{3}\%$ орттирилса, улар узунликларининг йиғиндиси 14 *м* га тенг бўлади. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари топилсин.

404. Икки қопда 140 *кг* ун бор. Агар бир қопдаги уннинг 12,5% ини олиб, иккинчи қопга солинса, иккала қопдаги ун баравар бўлади. Ҳар қайси қопда неча килограмм ун бор?

405. Икки *A* ва *B* завод бир заказни 12 кунда битириб бермоқчи бўлди. Икки кун ишлагандан кейин *A* завод ремонтга тушди. Заказни тамомлаш вазифаси *B* заводга топширилди. *B* заводнинг ишлаб чиқариш қуввати *A* завод ишлаб чиқариш қувватининг $66\frac{2}{3}\%$ ини ташкил қилади. Заказ неча кунда тайёр бўлиши аниқлансин.

406. Математикадан контрол ишни бажаришда синфнинг 12% ўқувчиси масалани бутунлай еча олмади, 32% бола хато билан ечди, қолган 14 бола тўғри ечди. Синфда нечта ўқувчи бўлган?

407. Рельс узунлигининг 72% ини ташкил қилувчи қисми қирқиб олинди. Қолган қисмининг оғирлиги 45,2 *кг*. Қирқиб олинган қисмининг оғирлиги топилсин.

408. Қотишманинг оғирлиги 2 *кг* бўлиб, таркиби кумуш билан мисдан иборат. Ундаги кумушнинг оғирлиги мис оғирлигининг $14\frac{2}{7}\%$ ини ташкил этади. Қотишмада қанча кумуш бор?

409. Уч ишчи биргаликда 408 сўм олишди. Биринчи ишчи олган пулнинг иккинчи ишчи олган пулга нисбати $7\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$ каби;

учинчи ишчи олган пул биринчи ишчи олган пулнинг $43\frac{1}{3}\%$ ини ташкил этади. Ҳар қайси ишчи қанча пул олган?

410. Уч яшикда 64,2 *кг* қанд бор. Иккинчи яшикдаги қанд биринчи яшикдаги қанднинг $\frac{4}{5}$ қисмини ташкил қилади, учинчи яшикда эса иккинчи яшикдагининг $42\frac{1}{2}\%$ миқдорича қанд бор. Ҳар қайси яшикда қанча қанд бор?

411. Бирида 5%, иккинчисида 40% никел бўлган икки хил пўлат бор. Таркибида 30% никел бўлган 140 *т* пўлат ҳосил қилиш учун ҳар қайси хил пўлатдан қанча олиш керак?

412. Бир парча мис ва қўрғошин қотишмасининг оғирлиги 12 *кг* бўлиб, унда 45% мис бор. Таркибида 40% мис бўлган янги қотишма ҳосил қилиш учун шу қотишмага қанча тоза қўрғошин қўшиш керак?

413. Ўн процентли эритма ҳосил қилиш учун 735 *г* ўн олти процентли йоднинг спиртдаги эритмасига қанча соф спирт қўшиш керак?

414. Оғирлиги 24 *кг* бўлган мис ва рух қотишмасини сувга ботирганда қотишма ўз оғирлигидан $2\frac{8}{9}$ *кг* йўқотди. Сувга ботирганда мис ўз оғирлигининг $11\frac{1}{9}\%$ ини, рух эса ўз оғирлигининг $14\frac{2}{7}\%$ ини йўқотиши маълум. Шу қотишмадаги миснинг ва рухнинг миқдори топилсин.

415. 20 *км* узунликдаги бир изли темир йўл участкасига рельс ётқизиш керак. Бу йўлга ётқизиш учун 25 метрли ва 12,5 метрли рельслар бор. Агар 25 метрли рельсларнинг ҳаммаси ётқизилса, яна 12,5 метрли рельсларнинг 50% ини ҳам ётқизиш керак бўлади. Агар 12,5 метрли рельсларнинг ҳаммаси ётқизилса, 25 метрли рельсларнинг $66\frac{2}{3}\%$ ини ҳам ётқизиш керак бўлади. Ҳар қайси хил рельсдан нечта борлиги топилсин.

416. Мактабни битирган ўқувчилар бир-бирлари билан фотосуратларини алмаштиришди. Агар улар 870 та расм алмаштиришган бўлса, мактабни битирган ўқувчилар нечта бўлган?

417. Икки соннинг ўрта пропорционал миқдори шу сонларнинг кичигидан 12 та ортиқ, шу сонларнинг ўрта арифметик миқдори эса, у сонларнинг каттасидан 24 та кам. Шу сонлар топилсин.

418. Учта соннинг учинчиси иккинчисидан нечта ортиқ бўлса иккинчиси биринчисидан шунча ортиқ. Бу сонлардан иккита кичигининг кўпайтмаси 85, иккита каттасининг кўпайтмаси 115 эканлиги маълум. Шу учта сон топилсин.

419. a сони қандайдир учта соннинг ўрта арифметиги, b эса шу сонлар квадратларининг ўрта арифметиги. Шу сонларнинг иккитадан кўпайтмаларининг ўрта арифметиги a ва b орқали ифодалансин.

420. Периметри 96 *см* бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги бир тахта тунукадан усти очиқ қутича ясалди. Бунинг учун шу тунуканинг бурчакларидан томони 4 *см* бўлган квадратлар қийиб олинди ва четлари буклаб, қалайланди. Агар ҳосил бўлган қутичанинг ҳажми 768 $см^3$ бўлса, бир тахта тунуканинг ўлчамлари қандай бўлган?

421. Шундай икки хонали сон топинг, унинг ўз рақамлари кўпайтмасига бўлишдан чиққан бўлинма $2\frac{2}{3}$ га тенг, ундан ташқари изланган сон билан шу сон рақамларининг тескари тартибда ёзишдан ҳосил бўлган сон айирмаси 18 га тенг.

422. Икки хонали соннинг бирликлари сони ўнликлари сонидан иккита ортиқ, шу соннинг ўз рақамлари йиғиндиси билан кўпайтмаси 144 га тенг. Шу икки хонали сон топилсин.

423. Қуйидаги маълумотларга кўра бутун мусбат сон топилсин: агар унинг ўнг томонига 5 рақами ёзилса, изланган сондан 3 та ортиқ сонга қолдиқсиз бўлинадиган ва бўлинмада бўлувчидан 16 та кам чиқадиган сон ҳосил бўлади.

424. Қуйидагича хоссага эга бўлган иккита икки хонали сон топилсин: агар изланаётган сонлардан каттасининг ўнг томонига 0 қўйиб, ундан кейин кичик сонни ёзсак, кичигининг ўнг томонига катта сонни ёзиб, сўнгра 0 ёзсак, шу йўл билан ҳосил бўлган иккита беш хонали соннинг биринчисини иккинчисига бўлсак, бўлинмада 2, қолдиқда 590 чиқади. Ундан ташқари изланаётган сонлардан каттасининг икки баравари билан кичигининг уч бараваридан тузилган сонларнинг йиғиндиси 72 га тенг эканлиги маълум.

425. Бир ўқувчи 78 сонини ўнлар рақами бирлар рақамидан уч марта катта бўлган икки хонали сонга кўпайтириши керак эди, лекин у хато қилиб, иккинчи кўпайтувчининг рақамларини алмаштирди, натижада ҳақиқий кўпайтмадан 2808 та кам сон ҳосил бўлди. Ҳақиқий кўпайтма қанчага тенг?

426. Икки станция орасидаги масофа 96 *км*. Бу масофани биринчи поезд иккинчи поезддан 40 минут кам вақтда ўтади. Биринчи поезднинг тезлиги иккинчисининг тезлигидан 12 *км/соат* ортиқ. Иккала поезднинг тезлигини топинг.

427. Икки йўловчи бир вақтда бир-бирига қараб *А* ва *В* шаҳарларидан йўлга чиқди. Биринчи йўловчи иккинчисидан бир соатда 2 *км* ортиқ йўл босади ва у иккинчи йўловчи *А* шаҳарга бормасдан бир соат олдин *В* шаҳарга етиб боради. *А* ва *В* шаҳарлари орасидаги масофа 24 *км*. Ҳар қайси йўловчи бир соатда неча километр йўл босади?

428. *А* ва *В* шаҳарлари орасидаги масофа темир йўл билан 66 *км*, сув йўли билан 80,5 *км*. *А* дан поезд пароходга қараганда 4 соат кейин йўлга чиқиб, *В* га пароходдан 15 минут илгари етиб келди. Агар поезднинг тезлиги пароходнинг тезлигидан соатига 30 *км* ортиқ бўлса, поезднинг бир соатлик ўртача тезлиги қанча ва пароходнинг бир соатлик ўртача тезлиги қанча?

429. Бир устахона 810 та костюм тикиши керак эди, иккинчи устахона шунча вақтда 900 та костюм тикиши керак эди; биринчи устахона топшириқни муддатидан 3 кун илгари, иккинчи устахона эса муддатидан 6 кун илгари бажарди. Агар иккинчи устахона бир кунда биринчига қараганда 4 та ортиқ костюм тиккан бўлса, ҳар қайси устахона кунига нечтадан костюм тиккан?

430. Икки пароход учрашгандан кейин, булардан бири жанубга, иккинчиси ғарбга қараб кетди. Учрашгандан икки соат кейин пароходлар орасидаги масофа 60 *км* бўлди. Пароходлардан бирининг тезлиги иккинчисининг тезлигидан соатига 6 *км* ортиқ бўлса, ҳар қайси пароходнинг бир соатлик тезлиги қанча?

431. *А* нуқтада турган ит ўзидан 30 *м* нарида турган тулкини кўриб қолди ва уни қувиб кетди. Ит 2 метрга, тулки эса 1 метрга сакрайди. Тулки уч марта сакраганда ит икки марта сакрайди. Ит *А* нуқтадан қанча масофада тулкига етиб олади?

432. Соатнинг соат стрелкаси бир текис силжийди деб фараз қилайлик. Соат 4 дан қанча вақт ўтганда минут стрелкаси соат стрелкасини қувиб етади?

433. Поезд *А* станциядан чиқиб, *В* станция орқали *С* станцияга жўнади. *А* дан *В* гача бўлган масофани у белгиланган тезлик билан ўтди, *В* дан *С* гача бўлган масофани 25% камайтирилган тезлик билан ўтди. Қайтишда, *С* дан *В* гача бўлган масофани белгиланган тезлик билан юриб, *В* дан *А* гача бўлган масофани 25% камайтирилган тезлик билан ўтди. Агар поезд *В* дан

C га қанча вақтда борган бўлса, *A* дан *B* га ҳам шунча вақтда борган бўлса, ҳамда *A* дан *C* гача бўлган йўлга *C* дан *A* гача бўлган йўлдан (яъни қайтишга) $\frac{5}{12}$ соат кам вақт сарф қилган бўлса, поезд *A* дан *B* га қанча вақтда борган?

434. Велосипедчи 30 *км* йўл босиши керак эди. Велосипедчи тайинланган вақтдан 3 минут кеч йўлга чиқиб, соатига 1 *км* ортиқ тезлик билан юрди ва борадиган жойига ўз вақтида етиб келди. Велосипедчининг тезлиги топилсин.

435. Скорий поезд семафор олдида 16 минут тўхтаб қолди ва жадвалда белгиланганидан 10 *км/соат* ортиқ тезлик билан юриб, кечикишни 80 *км* масофада тўғрилаб олди. Поезднинг жадвалда белгиланган тезлиги қанча?

436. Поезд 840 *км* масофани маълум вақтда босиб ўтиши керак эди. Поезд ярим йўлдаги семафор олдида $\frac{1}{2}$ соат тўхтаб қолди, тайинланган жойга ўз вақтида етиб бориш учун тезлигини соатига 2 *км* оширди. Поезд қанча вақт йўлда бўлган?

437. Ораларидаги масофа 650 *км* бўлган икки шаҳардан икки поезд бир-бирига қараб йўлга чиқди. Агар поездлар бир вақтда жўнаб кетган бўлса, 10 соатдан кейин учрашади. Агар иккинчи поезд биринчидан 4 соат 20 минут олдин йўлга чиқса, биринчи поезд йўлга чиққандан 8 соат кейин учрашади. Ҳар қайси поезднинг ўртача тезлиги топилсин.

438. Ораларидаги масофа 600 *км* бўлган *A* ва *B* станцияларидан икки поезд бир-бирига қараб бир вақтда йўлга чиқди. Иккинчи поезд *A* га келишидан 8 соат олдин биринчи поезд *B* га етиб келади. Биринчи поезд 250 *км* юрганда иккинчи поезд 200 *км* юради. Ҳар қайси поезднинг тезлиги топилсин.

439. Бир киши қишлоқдан станцияга бормоқда. У биринчи соатда 3,5 *км* йўл юриб, сўнгра ҳисоблаб кўрди, агар шу тезлик билан юрса, поездга 1 соат кечикиб борар экан. Шунинг учун қолган йўлни 5 *км/соат* тезлик билан юриб, станцияга поезд жўнашидан 30 минут олдин етиб борди. Бу киши поездгача қанча йўл юриши керак эканлиги топилсин.

440. Москвадан Митишгача 19 *км*. Москвадан Митишга қараб бир хил тезлик билан велосипедчи жўнади; ундан 15 минут кейин шу томонга қараб автомобиль йўлга чиқиб, 10 минутдан кейин велосипедчига етиб олди ва Митишга қараб йўлни давом эттирди. Автомобиль Митишга бориб, тўхтамасдан орқага қайтди ва Москвадан чиққанидан 50 минут кейин велосипедчини иккинчи марта учратди. Автомобилнинг ва велосипедчининг тезлиги топилсин.

441. Эрталаб соат 5 да A станциядан 1080 *км* узоқликдаги B станцияга қараб почта поезди жўнади. Эрталаб соат 8 да B станциядан A станцияга қараб скорий поезд жўнади. Скорий поезд почта поездидан соатига 15 *км* ортиқ юради. Агар поездлар AB йўлнинг ўртасида учрашган бўлса, улар қай вақтда учрашган?

442. A ва B пунктлари орасидаги масофа 78 *км*. A дан B га қараб бир велосипедчи жўнади. 1 соатдан кейин унга қарши B пунктдан иккинчи велосипедчи йўлга чиқди. Иккинчи велосипедчи биринчи велосипедчидан соатига 4 *км* ортиқ юради. B дан 36 *км* нарида улар учрашди. Ҳар қайси велосипедчи учрашгунча неча километр юрган ва ҳар бири қандай тезлик билан юрган?

443. Икки пиёда киши икки қишлоқдан бир-бирига қарши бир вақтда йўлга чиқди ва 3 соат-у 20 минутдан кейин учрашди. Агар биринчи киши иккинчи киши жўнаган жойга, иккинчи кишининг биринчи киши жўнаган жойга борганидан 5 соат кейин борган бўлса, ҳар қайси пиёда бутун масофани қанча вақтда ўтган?

444. Икки турист бир-бирига қараб йўлга чиқди. Уларнинг бири A пунктдан, иккинчиси B пунктдан чиқди. Биринчи турист A пунктдан, иккинчи турист B пунктдан жўнаганидан 6 соат кейин жўнади. Учрашган вақтда қарасалар биринчи турист иккинчидан 12 *км* кам юрган экан. Учрашишдан кейин илгариги тезликлари билан йўлни давом эттириб, биринчиси B га 8 соатдан кейин, иккинчиси A га 9 соатдан кейин етиб келди. AB масофа ва ҳар қайси туристнинг тезлиги топилсин.

445. Икки аэродромнинг биридан дирижабль ва иккинчисидан самолёт бир вақтда бир-бирига қараб учди. Учрашгунча дирижабль самолётга қараганда 100 *км* кам учди, ҳамда у самолёт учган аэродромга учрашишдан 3 соат кейин келди, самолёт эса учрашишдан 1 соату 20 минут кейин дирижабль учган аэродромга етиб келди. Аэродромлар орасидаги масофа ҳамда дирижабль ва самолётнинг тезликлари топилсин.

446. A ва B жойлардан бир вақтда, бир-бирига қараб икки пиёда йўлга чиқди. Учрашган вақтда биринчи пиёда иккинчидан a *км* ортиқ юргани маълум бўлди. Агар улар илгариги тезликлари билан йўлларида давом этишса, биринчи пиёда B га учрашишдан m соат кейин, иккинчиси A га учрашишдан n соат кейин келади. Ҳар қайси йўловчининг тезлиги топилсин.

447. Икки жисм айлана бўйлаб ҳаракат қилади; айланани биринчи жисм иккинчисидан 5 секунд тез айланиб чиқади. Агар улар бир йўналишда ҳаракат қилса, ҳар 100 секундда бири иккинчисининг ёнидан ўтади. Ҳар бир жисм 1 секундда айлананинг қандай қисмини (неча градусни) ўтади?

448. Икки жисм айлана бўйлаб бир томонга ҳаракат қилиб, ҳар 56 минутда бири иккинчисининг ёнидан ўтиб кетади. Агар улар шу тезликлари билан қарама-қарши томонга ҳаракат қилса, ҳар 8 минутда учрашар эди. Ундан ташқари қарама-қарши томонга ҳаракат қилганда яқинлашаётган жисмлар орасидаги масофа (айлана бўйлаб) 24 секундда 40 *м* дан 26 *м* гача камайиши маълум.

Ҳар қайси жисм минутига неча метр йўл босади ва айлананинг узунлиги қанча?

449. Узунлиги c га тенг бўлган айлана бўйлаб икки нуқта бир томонга қараб текис ҳаракат қилади ва ҳар t секундда бир-бири билан учрашади. Бу нуқталарнинг бири бутун айланани иккинчисидан n секунд тез айланиб чиқиши маълум. Ҳар қайси нуқтанинг тезлиги топилсин.

450. Икки шаҳар орасидаги масофа дарё йўли билан 80 *км*. Пароход бу йўлнинг бир бошидан иккинчи бошига 8 соат-у 20 минутда бориб келади. Дарё оқимининг тезлигини соатига 4 *км* деб ҳисоблаб, пароходнинг турғун сувдаги тезлиги топилсин.

451. Моторли қайиқ дарёнинг оқим томонига 28 *км* йўл босди ва шу ондаёқ орқага қайтди; қайиқнинг шу йўлга бориб-келишига 7 соат кетди. Дарёнинг тезлиги соатига 3 *км* эканлиги маълум. Қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги топилсин.

452. Бир киши қайиқда A шаҳардан B шаҳарга 10 соатда бориб келди. Бу шаҳарлар орасидаги масофа 20 *км*. Бу киши оқимга қарши 2 *км* масофани қанча вақтда ўтган бўлса, оқим томонга 3 *км* масофани шунча вақтда ўтиши маълум. Дарё оқимининг тезлиги топилсин.

453. Пароход Киевдан Днепропетровскка икки суткада боради ва 3 суткада қайтиб келади. Сол Киевдан Днепропетровскка қанча вақтда оқиб боради?

454. $AB = 60$ *м* масофада икки жисм M_1 ва M_2 бир-бирига қараб текис ҳаракат қилмоқда. M_1 жисм A дан M_2 жисм B дан чиққанига қараганда 15 секунд илгари чиқди. Ҳар қайси жисм йўлнинг қарама-қарши учига бориб, тўхтамай олдинги тезлиги билан орқага қайтди. Биринчи учрашув M_1 жисм йўлга чиққандан 21 секунд ўтгач, иккинчи учрашув эса 45 секунд ўтгач юз берди. Ҳар қайси жисмнинг тезлиги топилсин.

455. *А* шаҳардан *В* шаҳарга борадиган йўл олдин 3 километргача баландлашиб боради, сўнгра 5 километр текис йўл келади, ундан кейин 6 километр нишабланиб боради. Чопар *А* дан *В* га қараб йўлга чиқиб, ярим йўлга боргандан кейин бир пакетни унутганини пайқаб қолди. У орқасига қайтди ва *А* дан чиққанидан 3 соат-у 36 минут кейин *А* га қайтиб келди. Чопар *А* дан иккинчи марта чиқиб, *В* гача бўлган бутун йўлни 3 соат-у 27 минутда ўтди. Қайтишда эса *А* гача бўлган масофани 3 соат-у 51 минутда ўтди. Агар чопар ҳар қайси йўлни бир хил тезлик билан босди десак, у баландликка қандай тезлик билан, текис йўлда қандай тезлик билан ва нишаб йўлда қандай тезлик билан юрган?

456. Машинистка ўзига топширилган ишни ҳар куни белгиланган нормадан 2 бет ортиқ босса, ишни муддатидан 3 кун илгари тугатади; агарда нормадан 4 бетдан ортиқ босса, муддатидан 5 кун илгари тугатади. У неча бет кўчириши ва қанча вақтда кўчириши керак?

457. Бир ишчи белгиланган муддатда бир қанча бир хил деталлар тайёрлади. Агар у ҳар куни 10 та ортиқ деталь тайёрласа, бу ишни муддатидан $4\frac{1}{2}$ кун олдин тамомлар эди, агар ҳар куни 5 та кам деталь тайёрласа, ишни муддатидан 3 кун кейин битирар эди. Ишчи қанча деталь тайёрлаган ва бунга қанча вақт кетган?

458. Машинистка ҳар куни маълум миқдордаги бетларни босиб, бир ишни белгиланган муддатда тамомлаши керак. Агар ҳар куни белгиланган нормадан 2 бет ортиқ босса, ишни муддатдан икки кун олдин тамомлашини, агар кунига нормадан 60% ортиқ босса, муддатидан 4 кун олдин тамомлаб, унинг устига яна 8 бет ортиқ босишини ҳисоблаб чиқди. Машинистка кунига неча бет босиши ва ишни неча кунда тамомлаши керак?

459. Икки ишчи бир ишни биргалашиб ишлаб, 8 соатда тамомлашди. Агар бу ишни биринчи ишчи ёлғиз ўзи ишласа, иккинчи ишчи ёлғиз ўзи ишлаганига қараганда 12 соат тезроқ тамомлайди. Ҳар қайси ишчи бу ишни ёлғиз ўзи ишласа, неча соатда тамомлай олади?

460. Ҳовузни икки трубадан келган сув 6 соатда тўлдиради. Биринчи трубанинг ўзи бу ҳовузни иккинчи трубага қараганда 5 соат тез тўлдиради. Ҳар қайси труба ёлғиз ўзи бу ҳовузни неча соатда тўлдира олади?

461. Икки ишчига бир қанча бир хил деталлар тайёрлаш топширилган эди. Биринчи ишчи 7 соат, иккинчиси 4 соат ишлагандан кейин бутун ишнинг $\frac{5}{9}$ қисми тамомлангани маълум бўлди. Улар биргаликда яна 4 соат ишлагандан кейин бутун ишнинг $\frac{1}{18}$ қисми қолганини аниқлашди. Бу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи ишласа, неча соатда тамомлар эди?

462. Пароходга кўтарма кран билан юк ортилади. Олдин бир хил кучли 4 та кран ишлади. Улар 2 соат ишлагандан кейин уларга яна камроқ кучли 2 та кўтарма кран қўшилди ва шундан кейин юк ортиш 3 соатда тамом бўлди. Агар ҳамма кран бараварига ишга туширилса, юк ортиш 4,5 соатда тугар эди. Агар битта кучли кран ёлғиз ўзи ишласа, юк ортишни неча соатда тамомлар эди; битта кам кучли кран ёлғиз ўзи ишласа, неча соатда тамомлар эди?

463. Қурилиш учун 8 соат давомида станциядан қурилиш материали ташиш керак эди. Бу материални ташиш учун олдин 30 та уч тонналн машина юборилди. Бу машиналар икки соат ишлагандан кейин яна 9 та беш тонналн машина юборилди; машиналар бирга ишлаб, ишни ўз вақтида тамомлашди. Агар олдин беш тонналн машиналар юборилиб, икки соатдан кейин уч тонналн машиналар юборилганда, кўрсатилган муддатда материалнинг фақат $\frac{13}{15}$ қисми ташилар эди. Бу материални битта уч тонналн машина неча соатда ва битта беш тонналн машина неча соатда ташиб бўлар эди ва 30 та беш тонналн машина неча соатда ташиб бўлар эди?

464. Икки машинисткага ёзиш учун бир иш берилди. Машинисткаларнинг иккинчиси биринчисидач 1 соат кейин ишга бошлади. Биринчи машинистка ишга бошлагандан 3 соат кейин ҳамма ишнинг $\frac{9}{20}$ қисми қолди. Иш тамом бўлгандан кейин ҳисоблаб қараша, ҳар қайси машинистка бутун ишнинг ярмини ёзгани маълум бўлди. Ҳар қайси машинистка ёлғиз ўзи бутун ишни неча соатда ёзиб бўлар эди?

465. A ва B станциялардан бир-бирига қараб икки поезд йўлга чиқди, иккинчи поезд биринчидан ярим соат кейин жўнади. Биринчи поезд йўлга чиққанидан 2 соат кейин поездлар орасида A ва B орасидаги бутун йўлнинг $\frac{19}{30}$ қисми қадар масофа қолди. Улар йўлларида давом этиб, A билан B орасидаги йўлнинг ўртасида учрашди. Бу станциялар орасидаги масофани ҳар қайси поезд қанча вақтда ўтади?

466. Фотография негативларини ювиш учун ўлчамлари 20 *см* × 90 *см* × 25 *см* бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги ванна ишлатилади. Ваннадаги сувни доим аралаштириб туриш учун унга бир крандан сув келиб, иккинчи крандан сув чиқиб туради. Иккинчи кранни бекитиб қўйганда биринчи кран ваннани қанча вақтда тўлдирса, иккинчи кранга тўла ваннани бўшатиш учун шундан 5 минут кам вақт керак бўлади. Агар иккала кран баравар очиб қўйилса, тўла ванна 1 соатда бўшайди. Ҳар қайси крандан бир минутда қанча сув ўтиши топилсин.

467. Бино қурилиши учун маълум вақт ичида 8000 $м^3$ тупроқ қазиб чиқариш керак эди. Ер қазувчилар бригадаси ҳар куни планни 50 $м^3$ ошириб бажарганликлари учун иш муддатидан 8 кун олдин тамомланди. Иш неча кунда бажарилиши керак бўлгани аниқлансин ва ҳар куни неча процент ошириб бажарилгани топилсин.

468. Икки бригада йўлни ремонт қилди. Иккинчи бригада биринчидан бир кун кеч иш бошлаганига қарамасдан иккала бригада 10 *км* дан йўл ремонт қилди. Агар иккала бригада кунига 4,5 *км* йўлни ремонт қилган бўлса, ҳар қайси бригада кунига неча километр йўлни ремонт қилган?

469. Икки ишчи бирга ишлаб бир ишни 12 соатда тамомлади. Олдин биринчи ишчи ишнинг ярмини ишлаб, қолганини иккинчиси ишласа, бутун иш 25 соатда тамомланар эди. Ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи бу ишни қанча вақтда тамомлай олар эди?

470. Қувватлари турлича бўлган икки трактор бирга ишлаб, далани t кунда ҳайдаб тамомлади. Агар олдин битта трактор ўзи ишлаб, даланинг ярмини ҳайдаган бўлиб, сўнгра иккинчи трактор ўзи ишни тамомлаганда, дала k кунда ҳайдалган бўлар эди. Ҳар қайси трактор ёлғиз ўзи бу далани неча кунда ҳайдай олади.

471. Гаванга кираверишдаги фарватерни чуқурлатишда ҳар хил қувватли учта лой оладиган машина ишлади. Агар фақат биринчи машина ишласа, ишга 10 кун ортиқ вақт кетар эди; агар фақат иккинчи машина ишласа, иш 20 кун ортиққа чўзилар эди. Агар ёлғиз учинчи машина ишласа, фарватерни чуқурлаш иши учала машина биргаликда ишлаганидан олти марта кўп вақтга чўзилар эди. Бу ишни ҳар қайси машина ёлғиз ўзи неча кунда битирар эди?

472. Икки ишчининг иккинчиси биринчисидан $1\frac{1}{2}$ кун кейин ишга тушиб, бир ишни 7 кунда тамомлай олади. Агар бу ишни ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи ишласа, биринчи ишчи иккинчига қараганда 3 кун ортиқ ишлашга тўғри келади. Ҳар қайси ишчи ёлғиз ўзи бу ишни неча кунда тамомлайди?

473. Қувватлари турлича бўлган икки трактор бирга ишлаб, колхоз ерини 8 кунда ҳайдаб тамомлади. Дастлаб даланинг ярмини бир трактор ёлғиз ўзи ҳайдаб, кейин иккала трактор бирга ишласа, ҳамма иш 10 кунда тугар эди. Далани ҳар қайси трактор ёлғиз ўзи неча кунда ҳайдай олар эди?

474. Бир неча киши зовур қазимоқчи бўлди. Агар улар баравариға иш бошлашса, бутун иш 6 соатда тугар эди, лекин улар бир-биридан бир хил вақт оралигида кечикиб ишга бошлашди. Охирги киши ишга тушгандан ишга тушиш вақти оралигича вақт ўтгандан кейин иш тугади; бунда ҳар бир киши ишнинг охиригача ишлади.

Агар биринчи ишга тушган киши охирги тушган кишидан 5 марта ортиқ вақт ишлаган бўлса, улар зовурни қанча вақтда қазиб тамомлашган?

475. Уч ишчи биргаликда ишлаб, бир ишни t соатда тамомлай олади. Биринчи ишчи ёлғиз ўзи бу ишни учинчи ишчидан икки марта тез, иккинчи ишчидан бир соат тез тамомлайди. Ҳар қайси ишчи бу ишни ёлғиз ўзи ишласа, қанча вақтда тамомлай олади?

476. Ҳовузга икки крандан сув келади. Олдин биринчи кран очиб қўйилди; у иккинчи краннинг ёлғиз ўзи ишлаганда қанча вақтда ҳовузни тўлдирса, шу вақтнинг учдан бирича вақт очиқ турди. Сўнгра, биринчи кран ёлғиз ўзи ҳовузни қанча вақтда тўлдирса, шу вақтнинг учдан бирича вақт иккинчи кран очиқ турди. Шундан кейин ҳовузнинг $\frac{13}{18}$ қисми сувга тўлди. Агар иккала кран баравар очиқ турганда ҳовуз 3 соат-у 36 минутда тўлса, ҳовузни тўлдириш учун ҳар қайси краннинг ёлғиз ўзига қанча вақт керак бўлиши ҳисоблансин.

477. Электростанция қурилишида ғишт терувчилар бригадаси маълум вақтда 120 минг дона ғишт териши керак эди. Бригада ишни муддатидан 4 кун илгари тамомлади. Агар бригада норма бўйича 4 кунда қанча ғишт териши керак бўлса, 3 кунда шундан 5000 дона ортиқ ғишт тергани маълум бўлса, ҳар кунги ғишт териш нормаси қанча бўлган ва бригада ҳақиқатда кунига қанчадан ғишт терган?

478. Уч идишга сув қуйилган. Агар биринчи идишдаги сувнинг $\frac{1}{3}$ қисмини иккинчи идишга қуйиб, сўнгра иккинчи идишда бўлган сувнинг $\frac{1}{4}$ қисмини учинчи идишга қуйиб, ниҳоят, учинчи идишда бўлган сувнинг $\frac{1}{10}$ қисми биринчи идишга қуйилса, ҳар бир идишда 9 литрдан сув бўлади. Ҳар ҳайси идишда қанча сув бор?

479. Соф спирт тўлдирилган бакдан ундаги спиртнинг бир қисмини қуйиб олиб, ўрнига шунча сув қуйиб қўйилди; сўнгра бакдан яна ўшанча литр аралашма қуйиб олинди, шундан кейин бакда 49 *л* соф спирт қолди. Бакнинг сиғими 64 *л*. Бакдан биринчи сафар қанча спирт ва иккинчи сафар қанча спирт қуйиб олинган[1])?

480. 20 литрли идиш спирт билан тўлдирилди. Ундан бирмунча спирт шу идишга тенг бўлган иккинчи идишга қуйилди ва иккинчи идишнинг қолган қисмига сув қуйиб тўлдирилди ва шу иккинчи идишдаги аралашмадан биринчи идишга қуйиб тўлдирилди. Сўнгра биринчи идишдан иккинчига $6\frac{2}{3}$ *л* аралашма қуйилди; шундан кейин иккала идишдаги спирт миқдорлари баравар бўлди. Дастлаб биринчи идишдан иккинчига қанча спирт қуйилган?

481. 8 *л* сиғимли идишга 16% кислородли ҳаво тўлдирилган. Бу идишдан ҳавонинг бир қисми чиқариб юборилди ва шунча миқдорда азот киритилди, сўнгра яна ўша миқдорда аралашма чиқарилиб, яна шунча азот билан тўлдирилди. Янги аралашмада кислороднинг миқдори 9% га тушиб қолди. Ҳар сафар идишдан неча литр аралашма чиқариб юборилган?

482. Икки колхозчи аёл бозорга 100 дона тухум олиб келишди. Иккала аёл тухумларини турли нарх билан сотиб, баравар миқдорда пул тўплашди. Агар биринчи аёлнинг тухумлари иккинчисиникича бўлса, у 7,2 сўмлик тухум сотган бўлар эди; агар иккинчи аёлнинг тухумлари биринчисиникича бўлса, у 3,2 сўмлик тухум сотган бўлар эди. Ҳар қайси аёлда нечта тухум бўлган?

483. Икки колхозчи аёл бозорга a *л* сут олиб келди ва турли нарх билан сотиб, баравар миқдорда пул тўплашди. Агар биринчи аёл иккинчи аёл сотганча сут сотса, m сўм пул тўплар эди, агар иккинчи аёл биринчи аёл сотганча сут сотса, n сўм пул тўплар эди ($m>n$). Ҳар қайси аёлда неча литр сут бўлган?

484. Бир хил қувватли иккита ичдан ёнар двигателнинг тежамлилигини синаш вақтида улардан бири маълум муддатда 600 *г* бензин сарф қилди, иккинчиси биринчисидан 2 соат кам

---

[1]) Бу масала аралашманинг ҳажми спирт билан сув ҳажмларининг йиғиндисига тенг деб фараз қилиб тузилган. Ҳақиқатда эса аралашманинг ҳажми бир оз кичикроқ бўлади.

ишлаб, 384 *г* бензин сарф қилди. Агар биринчи двигатель бир соатда иккинчи двигателнинг бир соатда сарф қилганича ва иккинчиси бир соатда биринчисининг бир соатда сарф қилганича бензин сарф қилса, иккала двигатель баравар миқдорда бензин сарф қилган бўлар эди. Ҳар қайси двигатель бир соатда қанча бензин сарф қилади?

485. Олтин билан кумушнинг икки хил қотишмаси бор; бир қотишмада олтин миқдорининг кумуш миқдорига нисбати 2 : 3 каби, иккинчисида 3 : 7 каби. Ичидаги олтин ва кумуш 5 : 11 нисбатда бўлган 8 *кг* қотишма ҳосил қилиш учун ҳар қайси қотишмадан қанча олиш керак?

486. Бир бочкадаги аралашмада спирт билан сувнинг миқдори 2 : 3 нисбатда, иккинчи бочкада 3 : 7 нисбатда. Спирт билан сув 3 : 5 нисбатда бўлган 12 челак аралашма ҳосил қилиш учун бу аралашмаларнинг ҳар биридан неча челак олиш керак?

487. Бир қотишмада 1 : 2 нисбатда икки хил металл бор, иккинчи қотишмада эса шу металлар 2 : 3 нисбатда. Таркибида ўша металлар 17 : 27 нисбатда бўлган учинчи бир қотишма ҳосил қилиш учун шу қотишмаларнинг ҳар биридан қанча қисм олиш керак?

488. Учсиз қайиш билан туташтирилган икки ғилдиракнинг кичиги бир минутда каттасидан 400 та ортиқ айланади. Катта ғилдиракнинг 5 марта айланиши учун кетадиган вақт, кичик ғилдиракнинг 5 марта айланиши учун кетадиган вақтдан 1 секунд ортиқ. Ҳар қайси ғилдирак 1 минутда неча марта айланади?

489. Араванинг олдинги ғилдираги 18 *м* масофада кейинги ғилдиракдан 10 та ортиқ айланади. Агар олдинги ғилдирак айланасини 6 *дм* орттириб, кейинги ғилдирак айланаси 6 *дм* камайтирилса, шунча масофада олдинги ғилдирак кейингисидан 4 та ортиқ айланади. Ҳар қайси ғилдирак айланасининг узунлиги топилсин.

490. 600 *т* юкли баржа 3 кунда бўшатилди. Биринчи ва учинчи куни ҳамма юкнинг $\frac{2}{3}$ қисми туширилди. Иккинчи куни биринчи кунгидан кам, учинчи куни иккинчи кунгидан кам юк туширилди; учинчи куни туширилган юкнинг иккинчи куни туширилган юкка нисбатан камайиш проценти билан иккинчи куни туширилган юкнинг биринчи куни туширилган юкка нисбатан камайиш процентининг айирмаси 5 га тенг. Ҳар қайси куни қанча юк туширилгани ҳамда иккинчи ва учинчи куни туширилган юкларнинг камайиш проценти аниқлансин.

491. Икки хил эритманинг бирида 800 *г*, иккинчисида 600 *г* сувсиз сульфат кислота бор. Иккала эритмани қўшиб 10 *кг* янги сульфат кислота эритмаси ҳосил қилинди. Биринчи эритмадаги сувсиз сульфат кислотанинг процент миқдори иккинчи эритмадаги сувсиз сульфат кислотанинг процент миқдоридан 10 та ортиқ бўлса, аралашмадаги ҳар қайси эритманинг оғирлиги топилсин.

492. Иккита ҳар хил мис қотишмаси бор. Биринчи қотишмадаги миснинг проценти иккинчи қотишмадаги мис процентидан 40 та кам. Иккала қотишмани қўшиб эритиб, 36% мис бўлган қотишма ҳосил қилинди. Биринчи қотишмада 6 *кг*, иккинчи қотишмада 12 *кг* мис борлиги маълум бўлса, биринчи қотишмада неча процент ва иккинчи қотишмада неча процент мис бўлгани аниқлансин.

493. Узунлиги 490 *м* бўлган юк поезди билан узунлиги 210 *м* бўлган пассажир поезди икки параллел йўлдан бир-бирига қараб келмоқда. Пассажир поездининг машинисти ўзидан 700 *м* нарида юк поездини кўрди; шундан 28 секунд кейин поездлар учрашди. Агар юк поезди светофор ёнидан пассажир поездига қараганда 35 секунд ортиқ вақтда ўтгани маълум бўлса, ҳар қайси поезднинг тезлиги топилсин.

494. Юк поезди нефть ортилган икки ўқли ва тўрт ўқли цистерналардан тузилган. Поезднинг оғирлиги 940 *т*. Икки ўқли цистерналар тўрт ўқли цистерналардан 5 та ортиқ бўлиб, ҳар бир тўрт ўқли цистерна бир ўқли цистернадан уч марта оғир ва ҳамма тўрт ўқли цистерналардаги нефть оғирлиги (цистерналар оғирлигидан ташқари) ҳамма икки ўқли цистерналардаги нефть оғирлигидан 100 *т* ортиқ. Тўрт ўқли цистернадаги нефтьнинг оғирлиги 40 *т*, икки ўқли цистернадаги нефтнинг оғирлиги тўрт ўқли цистернадаги нефть оғирлигининг 0,3 қисмига тенг. Нечта тўрт ўқли цистерна ва нечта икки ўқли цистерна бор ва ҳар қайси хил цистернанинг оғирлиги қанча?

495. Тоннелнинг икки томонидан ишлай бошлаган икки машина ишни 60 кунда тамомлаши керак. Агар биринчи машина шу вақт ичида қилиши керак бўлган бутун ишининг 30% ини, иккинчи машина ўз ишининг $26\frac{2}{3}$ % ини бажарса, иккаласи 60 *м* тоннел очади. Агар биринчи машина иккинчи машина қиладиган бутун ишнинг $\frac{2}{3}$ қисмини битириши, иккинчи машина биринчи машина қиладиган бутун ишнинг 0,3 қисмини битириши учун биринчи машинага иккинчисига керак бўладиган вақтдан 6 кун ортиқ вақт кетар эди. Ҳар қайси машина бир кунда неча метр тоннель қазийди?

496. Икки бригада бирга ишлаб, йўл участкасининг ремонтини 6 кунда тамомлади. Биринчи бригада ёлғиз ўзи бутун ишнинг 40%ини бажариши учун иккинчи бригада бутун ишнинг $13\frac{1}{3}$% ини бажириши учун кетадиган вақтдан 2 кун ортиқ вақт кетади. Ҳар қайси бригада ёлғиз ўзи ишласа, бутун участкани неча кунда ремонт қила олар эди?

497. Пристандан станцияга 690 *т* юк бешта уч тонналн ва ўнта бир ярим тонналн машиналар билан ташилиши керак эди. Бир неча соат ишлагандан кейин ҳамма машина бутун юкнинг $\frac{25}{46}$ қисмини ташиди. Юк ташишни ўз вақтида тамомламоқ учун ўтган вақтга қараганда 2 соат кам вақт қолди. Шофёрлар олдингига қараганда бир марта ортиқ қатнаганликлари сабабли юк ўз вақтида ташиб бўлинди. Ҳамма юк неча соатда ташиб тамомланган ҳамда бир ярим тонналн машина бир соатда уч тонналн машинадан бир марта ортиқ қатнаган бўлса, дастлаб машиналар соатига неча марта қатнаган?

Эслатма. Ҳар қайси уч тонналн машинага тўла 3 *т* ва ҳар қайси бир ярим тонналн машинага тўла $1\frac{1}{2}$ *т* юк ортилган, деб ҳисобланади.

498. Спорт майдончаси тўғри тўртбурак шаклида бўлиб, томонлари *a* метр ва *b* метр. Майдонча атрофига йўлка қилинган бўлиб, унинг чети ҳам тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, томонлари майдончанинг томонларига параллел ва улардан бир хил узоқликда. Йўлканинг юзи спорт майдончасининг юзига тенг. Йўлканинг эни топилсин.

499. Томоша залида *a* стул бўлиб, бир неча қаторга баравардан қилиб қўйилган. Агар ҳар бир қаторга *b* тадан стул қўшиб, қаторлар сони *c* та камайтирилса, томоша залидаги стуллар сони аввалги сонининг ўндан бир ҳиссаси қадар ортади. Ҳар бир қаторда нечта стул бор?

500. Бир-биридан *d м* масофада бўлган икки жисм бир-бирига қараб ҳаракат қилади ва *a* секунддан кейин учрашади. Агар улар бир томонга қараб шу тезликлари билан ҳаракат қилишса, *b* секунддан кейин учрашади. Ҳар бир жисм ҳаракатининг тезлиги топилсин.

501. Ораларидаги масофа *d км* бўлган *A* ва *B* пунктларидан бир вақтда бир-бирига қараб мотоциклчи ва велосипедчи йўлга чиқди. 2 соатдан кейин улар учрашди ва тўхтатмасдан йўлларига кетаверишди. Велосипедчининг A га боришидан t соат олдин мотоциклчи B га етиб келди. Мотоциклчининг тезлиги ва велосипедчининг тезлиги топилсин.

502. A пунктдан B пунктга қараб пиёда киши йўлга чиқди. a соатдан кейин B дан пиёда томонга қараб велосипедчи йўлга чиқди. Велосипедчи йўлга чиққанидан b соат кейин пиёда билан учрашди. A ва B пунктлар орасидаги масофани ўтиш учун велосипедчига пиёдага қараганда c соат кам вақт керак бўлса, шу масофани ўтиш учун велосипедчига қанча вақт ва пиёдага қанча вақт керак бўлади?

503. Тезлиги v *км/соат* бўлган A поезд тезлиги v_1 *км/соат* бўлган B поезддан кейин йўлга чиқади. A поезднинг кечикиб жўнаши иккала поезднинг тайинланган жойга бир вақтда етиб боришига мўлжалланган. B поезд йўлнинг $\frac{2}{3}$ қисмини ўтгандан кейин тезлигини ярмига камайтиришга мажбур бўлди. Шу сабабдан поездлар тайинланган жойдан a *км* берида учрашди. Белгиланган станциягача бўлган масофа топилсин.

504. Омонат кассага пул қўйган киши бир йилдан кейин 15 сўм процент пули олиши керак эди. Бунинг устига 85 сўм қўшиб, яна бир йилга кассада қолдирди. Бир йилдан кейин омонат пули процентлари билан 420 сўм бўлди. Дастлаб омонат кассага қанча пул қўйилган ва омонат касса йилига неча процент тўлайди?

505. A станокнинг иш унумдорлиги B ва C станоклар иш унумдорликлари йиғиндисининг $m\%$ ини ташкил қилади. B станокнинг иш унумдорлиги эса A ва C станоклар иш унумдорликлари йиғиндисининг $n\%$ ини ташкил қилади. C станокнинг иш унумдорлиги A ва B станоклар унумдорликлари йиғиндисига нисбатан неча процентни ташкил қилади?

506. Заводнинг маҳсулот ишлаб чиқариши ўтган йилга нисбатан биринчи йили $p\%$, иккинчи йили $q\%$ ўсди. Агар заводда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг уч йиллик ўсиши ўрта ҳисоб билан йилига $r\%$ ортган бўлса, учинчи йили завод маҳсулот ишлаб чиқаришининг ортиши неча процент бўлиши керак?

507. Молнинг умумий миқдоридан a проценти P процент фойда билан сотилди, қолган қисмининг b проценти q процент фойда билан сотилди. Агар умумий фойда мол таннархининг $r\%$ ни ташкил қилса, молнинг қолган қисми қандай фойда билан сотилган?

508. Таркибидаги мис проценти турлича бўлиб, m *кг* ва n *кг* оғирликдаги икки қотишмадан бир хил оғирликда икки бўлак кесиб олинди. Кесиб олинган ҳар қайси бўлак қолган бошқа бўлак билан қўшиб эритилди. Шундан кейин иккала қотишмадаги миснинг процент миқдорлари бир хил бўлди. Кесиб олинган ҳар бир бўлакнинг оғирлиги қанча?

509. Бир қанча пул n та тўдага ажратилди. Сўнгра биринчи тўданинг n дан бир қисми олиниб, иккинчи тўдага қўшилди. Шундан кейин иккинчи тўдада ҳосил бўлган пулнинг n дан бир қисми олиниб, учинчи тўдага қўшилди. Сўнгра учинчи тўдада ҳосил бўлган пулнинг n дан бир қисми олиниб, тўртинчи тўдага қўшилди ва ҳоказо. Ниҳоят n-тўдада ҳосил бўлган пулнинг n дан бир қисми олиниб, биринчи тўдага қўшилди. Шундан кейин ҳар бир тўдада A сўмдан пул бўлди. Бундай олиб қўйишдан илгари ҳар қайси тўдада қанча пул бўлган? ($n=5$ бўлган ҳол билан чекланиш мумкин.)

ИККИНЧИ ҚИСМ
ГЕОМЕТРИЯ ВА ТРИГОНОМЕТРИЯ

8-БОБ.
ПЛАНИМЕТРИЯ

510. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 132 га, томонлари квадратларининг йиғиндиси 6050 га тенг. Учбурчакнинг томонлари топилсин.

511. Параллелограммнинг ўткир бурчаги α ва диагоналлари кесишган нуқтадан тенг бўлмаган томонларигача бўлган m ва p масофалар берилган. Параллелограммнинг диагоналлари ва юзи топилсин.

512. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 30 *см*, баландлиги 20 *см*. Ён томонига туширилган баландлиги топилсин.

513. Учбурчакнинг асоси 60 *см*, баландлиги 12 *см* ва асосига ўтказилган медианаси 13 *см*. Учбурчакнинг ён томони топилсин.

514. Катети b га тенг бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларига ташқи томондан квадратлар ясалган. Бу квадратларнинг марказлари ўзаро тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирилган. Ҳосил бўлган учбурчакнинг юзи топилсин.

515. Квадратнинг томонлари $\frac{m}{n}$ нисбатда бўлинган, бунда ҳар бир учи ёнида битта катта ва битта кичик кесма ётади. Кетма-кет бўлиниш нуқталари тўғри чизиқлар билан туташтирилган. Агар берилган квадратнинг томони a га тенг бўлса, ҳосил бўлган тўртбурчакнинг юзи қанчага тенг бўлади?

516. Бир квадратга иккинчи бир квадрат ички чизилган, бунинг учлари биринчи квадратнинг томонларида ётади, томонлари эса биринчи квадрат томонлари билан 30° ли бурчаклар ҳосил қилади. Ички чизилган квадратнинг юзи берилган квадрат юзининг қандай бўлагига тенг?

517. Томони a га тенг бўлган квадратга иккинчи квадрат ички чизилган, бунинг учлари биринчи квадратнинг томонларида ётади.

Иккинчи квадратнинг юзи биринчи квадрат юзининг $\frac{25}{49}$ қисмига тенг бўлса, биринчи квадратнинг томонлари иккинчи квадратнинг учлари билан қандай кесмаларга бўлинганлиги топилсин.

518. Томонлари 3 *м* ва 4 *м* бўлган тўғри тўртбурчакка томонларининг нисбати 1 : 3 каби бўлган иккинчи тўғри тўртбурчак ички чизилган. Шу тўғри тўртбурчакнинг томонлари топилсин.

519. Томони a га тенг бўлган ABC тенг томонли учбурчакка тенг томонли LMN учбурчак ички чизилган, бунинг учлари биринчи учбурчакнинг томонларида ётади ва уларнинг ҳар бирини 1 : 2 нисбатда бўлади. LMN учбурчакнинг юзи топилсин.

520. Периметри $2p$ ва баландлиги h бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари топилсин.

521. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг CA ва CB ён томонларидан CM ва CN тенг кесмалар ажратилган. ABC учбурчакнинг периметри $2P$, унинг асоси $AB = 2a$ ва MN кесма билан кесилган $AMNB$ тўртбурчакнинг периметри $2p$ экани маълум. CM ва CN кесмаларнинг узунлиги топилсин.

522. Асослари a, b ва кичик ён томони c бўлган тўғри бурчакли трапеция берилган. Трапеция диагоналлари кесишган нуқтадан a асосгача бўлган масофа ва кичик ён томонигача бўлган масофа топилсин.

523. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 12 *см*, асосига туширилган баландлиги, асосининг ўртаси билан ён томони ўртасини туташтирувчи кесмага тенг. Шу учбурчакнинг юзи топилсин.

524. Ромбнинг периметри $2p$ *см*, диагоналларининг йиғиндиси m *см*. Ромбнинг юзи топилсин.

525. Трапециянинг катта асоси a, кичик асоси b; катта асоси учидаги бурчаклари 30° ва 45°. Трапециянинг юзи топилсин.

526. Трапециянинг параллел томонлари 16 *см* ва 44 *см*, параллел бўлмаган томонлари 17 *см* ва 25 *см*. Шу трапециянинг юзи ҳисоблансин.

527. Томони a га тенг бўлган мунтазам учбурчакка ички чизилган квадратнинг юзи топилсин.

528. Учбурчакнинг асоси баландлиги билан 36 *см* ва 14 *см* ли кесмаларга бўлинади. Учбурчакнинг асосига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ унинг юзини тенг иккига бўлди. Бу тўғри чизиқ учбурчакнинг асосини қандай бўлакларга бўлган?

529. Учбурчакнинг баландлиги 4 га тенг; у асосни $1:8$ нисбатда икки бўлакка бўлади. Баландликка параллел ва учбурчакни тенгдош бўлакларга бўлувчи тўғри чизиқнинг узунлиги топилсин.

530. ABC учбурчак AC томонига параллел тўғри чизиқлар билан учта тенгдош бўлакларга бўлинган. Бу тўғри чизиқлар a га тенг бўлган AB томонни қандай бўлакларга бўлгани ҳисоблансин.

531. Учбурчакнинг юзи S га тенг; унинг асосига параллел тўғри чизиқ ундан юзи q га тенг бўлган учбурчак ажратади. Учта учи кичик учбурчакнинг учлари билан устма-уст тушган, тўртинчи учи эса катта учбурчакнинг асосида ётган тўртбурчакнинг юзи топилсин.

532. Трапециянинг параллел томонлари a ва b га тенг. Шу томонларга параллел ва трапеция юзини тенг иккига бўлган кесманинг узунлиги топилсин.

533. Ромбнинг ўтмас бурчаги учидан унинг томонларига перпендикулярлар ўтказилган. Ҳар бир перпендикулярнинг узунлиги a га тенг, уларнинг асослари орасидаги масофа b га тенг. Ромбнинг юзи топилсин.

534. Учбурчакнинг икки томони мос равишда 27 *см* ва 29 *см*, учинчи томонининг медианаси 26 *см* га тенг. Учбурчакнинг юзи топилсин.

535. Учбурчакнинг икки томони b ва c, юзи $S = \frac{2}{5} bc$. Учбурчакнинг учинчи a томони топилсин.

536. Трапециянинг асослари a ва b ҳамда ён томонлари c ва d бўйича унинг m ва n диагоналлари топилсин.

537. Параллелограмм берилган, унинг ўткир бурчаги 60°. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг нисбати $\frac{19}{7}$ га тенг. Томонларининг нисбати топилсин.

538. Тенг томонли учбурчак ичида ихтиёрий бир нуқта олиб, ундан учбурчакнинг ҳамма томонларига перпендикулярлар туширилган. Шу уч перпендикулярнинг йиғиндиси учбурчакнинг баландлигига тенг экани исботлансин.

539. Доирадан ташқаридаги нуқтадан иккита кесувчи ўтказилган. Биринчи кесувчининг ички кесмаси 47 *м*, ташқи кесмаси 9 *м*; иккинчи кесувчининг ички кесмаси ташқи кесмадан 72 *м* ортиқ. Иккинчи кесувчининг узунлиги топилсин:

540. Доиранинг марказидан m *см* наридаги нуқтадан доирага уринмалар ўтказилган. Уриниш нуқталари орасидаги масофа a *см*. Доиранинг радиуси топилсин.

541. Радиуси 13 *см* га тенг бўлган доиранинг ичида, марказдан 5 *см* нарида M нуқта берилган. M нуқтадан $AB = 25$ *см* ватар ўтказилган. AB ватарнинг M нуқта билан бўлинган кесмаларининг узунликлари топилсин.

542. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги α га тенг. Шу учбурчакка ички ва ташқи чизилган доиралар радиусларининг нисбати топилсин.

543. Учбурчакнинг томонлари: $a = 13$ *см*, $b = 14$ *см*, $c = 15$ *см*. Булардан иккитаси (a ва b) маркази учинчи томонда ётган доирага уринма бўлади. Доиранинг радиуси топилсин.

544. Радиуси R бўлган доирага бир бурчаги 120° бўлган тенг ёнли учбурчак ташқи чизилган. Унинг томонлари топилсин.

545. Катта катетни диаметр қилиб, унга ярим айлана чизилган. Кичик катет 30 *см*, тўғри бурчак учини ярим айлана гипотенузани кесган нуқта билан туташтирувчи ватар 24 *см*. Шу ярим айлананинг узунлиги топилсин.

546. Тўғри бурчакли учбурчакка ярим айлана ички чизилган, унинг диаметри гипотенузада ётади, маркази эса гипотенузани 15 *см* ва 20 *см* ли кесмаларга бўлади. Ярим айлананинг катетлар билан уриниш нуқталари орасидаги ёйининг узунлиги топилсин.

547. Асоси 4 *см* га, баландлиги 6 *см* га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакнинг ён томонини диаметр қилиб, ярим айлана ясалган. Унинг асос ва ён томон билан кесишиш нуқталари тўғри чизиқ билан туташтирилган. Ярим доирада ҳосил бўлган ички чизилган тўртбурчакнинг юзи топилсин.

548. Асоси $2a$ ва баландлиги h бўлган тенг ёнли учбурчак берилган. Учбурчакка айлана ички чизилган ва айланага учбурчакнинг асосига параллел қилиб уринма ўтказилган. Айлананинг радиуси ва уринманинг учбурчак томонлари орасида қолган кесмаси топилсин.

549. Доирадан ташқарида ётган нуқтадан иккита кесувчи ўтказилган, уларнинг ташқи қисмлари 2 метрдан. Кесувчиларнинг айлана билан кесишган нуқталари бир тўртбурчакнинг учлари бўлади: тўртбурчакнинг икки қарама-қарши томони 6 *м* ва 2,4 *м*. Тўртбурчакнинг юзи топилсин.

550. Учбурчакнинг томонлари 6 *см*, 7 *см*, 9 *см*. Учбурчакнинг учта учини марказ қилиб, ўзаро уринадиган айланалар чизилган. Маркази учбурчакнинг энг кичик бурчаги учида ётган айлана қолган икки айлана билан ички томондан уринади, қолган иккитаси эса ўзаро ташқи томондан уринади. Учала айлананинг радиуслари топилсин.

551. Радиуслари 5 *см* ва 2 *см* бўлган икки айлананинг ташқи уринмаси ички уринмасидан $1\frac{1}{2}$ марта катта. Шу айланаларнинг марказлари орасидаги масофа топилсин.

552. Радиуслари 17 *см* ва 10 *см* бўлган икки айлана марказлари орасидаги масофа 21 *см*. Айланалар марказларини туташтирувчи тўғри чизиқ билан айланалар ташқи уринмаси кесишган нуқтадан айланалар марказларигача бўлган масофалар топилсин.

553. Радиуслари R ва r бўлган икки айлана бир-бирига ташқи томондан уринади; уларга умумий уринмалар (битта ички ва иккита ташқи уринма) ўтказилган. Ички уринманинг ташқи уринмалар орасидаги кесмасининг узунлиги топилсин.

554. Радиуслари R ва r бўлиб ташқи уриниш ҳолатида бўлган икки айланага ташқи умумий уринмалар ўтказилган. Шу уринмалар билан уриниш нуқталарини туташтирувчи ватарлардан ҳосил бўлган трапециянинг юзи топилсин.

555. Радиуслари R ва r бўлган икки айлана бир-бирига ташқи томондан уринади. Бу айланаларга умумий ташқи уринма ўтказилган ва бунда ҳосил бўлган эгри чизиқли учбурчакка айлана ички чизилган. Шу айлананинг радиуси топилсин.

556. Айлананинг бир нуқтасидан ўтказилган икки ватарнинг узунликлари a ва b. Агар уларнинг учлари туташтирилса, юзи S га тенг учбурчак ҳосил бўлади. Айлананинг радиуси топилсин.

557. Радиуси R га тенг бўлган доиранинг марказидан бир томонда ўзаро параллел бўлган учта ватар ўтказилган. Бу ватарлар мос равишда айланага ички чизилган мунтазам олтибурчак, тўртбурчак ва учбурчакнинг томонларига тенг. Доиранинг иккинчи ва учинчи ватарлар орасидаги қисми юзининг биринчи ва иккинчи ватарлар орасидаги қисмининг юзига нисбати топилсин.

558. Тўғри бурчакли учбурчакнинг учидан гипотенузасига туширилган баландлик уни 25,6 *см* ва 14,4 *см* кесмаларга бўлади. Шу учбурчакка ички чизилган доиранинг юзи топилсин.

559. Томони a ва ўткир бурчаги 60° бўлган ромбга ички айлана чизилган. Учлари айлана билан ромб томонларининг уриниш нуқталарида ётган тўғри тўртбурчакнинг юзи топилсин.

560. Радиуси R бўлган айланага ўтказилган 4 та уринма ромб ҳосил қилади, унинг катта диагонали $4R$ га тенг. Бир умумий нуқтадан чиққан икки уринма билан уриниш нуқталари орасидаги кичик ёй билан чегараланган фигуралардан ҳар бирининг юзи топилсин.

561. Доирага ташқи чизилган тенг ёнли трапециянинг юзи S га тенг. Трапециянинг асосидаги ўткир бурчаги $\frac{\pi}{6}$ га тенг. Шу трапециянинг ён томони топилсин.

562. Радиуси 2 *см* га тенг бўлган доирага ташқи чизилган тенг ёнли трапециянинг юзи 20 *см*^{2}. Трапециянинг томонлари топилсин.

563. Доирага трапеция ташқи чизилган, унинг ён томонлари параллел томонларининг каттаси билан α ва β ўткир бурчаклар ҳосил қилади. Трапециянинг юзи Q. Доиранинг радиуси топилсин.

564. Радиуси r бўлган доирага ташқи чизилган тўғри бурчакли трапециянинг энг кичик томони $\frac{3r}{2}$ га тенг. Трапециянинг юзи топилсин.

565. Тўғри бурчакли трапецияга ташқи чизилган доира марказининг бир ён томон учларидан узоқлиги 2 *см* ва 4 *см*. Трапециянинг юзи топилсин.

566. Томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакка доира ички чизилган. Сўнгра шу учбурчакка яна учта доира ички чизилган, улар биринчи доирага ва учбурчакнинг томонларига уринади ва яна шу ички чизилган доираларга ва учбурчак томонларига уринадиган учта доира ички чизилган ва ҳоказо. Ҳамма ички чизилган доиралар юзларининг йиғиндиси топилсин [1].

567. ABC учбурчак доирага ички чизилган; A учидан уринма ўтказилган ва у BC томоннинг давоми билан D нуқтада кесишгунча давом эттирилган. B ва C учларидан уринмага перпендикулярлар ўтказилган, уларнинг кичиги 6 *см* га тенг. Агар $BC = 5$ *см*, $AD = 5\sqrt{6}$ *см* бўлса, бу перпендикулярлар, BC томон ва уринма кесмаси билан ҳосил қилинган трапециянинг юзи топилсин.

---

[1] Яъни ички чизилган доиралар юзлари йиғиндисининг лимити топилсин.

568. Томони a га тенг бўлган мунтазам учбурчакка бир-бирига уринадиган учта тенг доира ички чизилган. Буларнинг ҳар бири берилган учбурчакнинг икки томонига уринади. Шу доираларнинг радиуслари топилсин.

569. Томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчак ичига учбурчакнинг томонларига ва бир-бирига уринувчи учта тенг доира жойлаштирилган. Ўзаро уринувчи доиралар ёйларидан ҳосил бўлган эгри чизиқли учбурчакнинг юзи топилсин (учбурчакнинг учлари ўзаро уриниш нуқталари бўлади).

570. Томони a га тенг бўлган квадратнинг ичига тўртта тенг доира жойлаштирилган; буларнинг ҳар бири квадратнинг икки қўшни томонига ва икки доирага (қолган учтасининг иккитасига) уринади. Бир-бирига уринган доираларнинг ёйлари ҳосил қилган эгри чизиқли тўртбурчакнинг юзи топилсин (тўртбурчакнинг учлари доираларнинг уриниш нуқталари бўлади).

571. Периметри p га тенг, ёйи 120° ли бўлган сегментнинг юзи топилсин.

572. Учбурчакка радиуси 4 *см* бўлган доира ички чизилган. Учбурчакнинг томонларидан бири уриниш нуқтаси билан 6 *см* ва 8 *см* ли бўлакларга бўлинган. Қолган икки томонининг узунликлари топилсин.

573. Тенг томонли учбурчакнинг асосидаги бурчак учидан унга қарши ётган томонга туширилган перпендикуляр шу томонни $m:n$ нисбатда бўлади. Учбурчакнинг бурчаклари топилсин.

574. Диаметрга перпендикуляр бўлган ватар уни $m:n$ нисбатда бўлади. Айлананинг ватар ва диаметр билан бўлинган ёйларининг 1) ҳар бири топилсин.

575. Параллелограммнинг иккита баландлиги h_1 ва h_2 ва периметри $2p$ берилган. Параллелограммнинг бурчаги топилсин.

576. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан чиққан баландлик ва медиана 40 : 41 каби нисбатда бўлса, катетларининг нисбати топилсин.

577. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси c, ўткир бурчакларидан бири α. Ички чизилган доиранинг юзи топилсин.

578. Учбурчакнинг томонлари 25 *см*, 24 *см* ва 7 *см*. Шу учбурчакка ички чизилган ва ташқи чизилган доираларнинг радиуслари топилсин.

---

1) Ёй бирликларида.

579. Ташқи томондан уринувчи икки доиранинг марказлари орасидаги масофа d, ташқи умумий уринмалар орасидаги бурчак φ. Доираларнинг радиуслари топилсин.

580. Ромбнинг юзи Q, унга ички чизилган доиранинг юзи S. Ромбнинг бурчаги топилсин.

581. Доирага мунтазам $2n$ бурчак ички чизилган. Шу доиранинг ўзига мунтазам n бурчак ташқи чизилган. Бу кўпбурчакларнинг юзлари бир-биридан P қадар фарқ қилади. Доиранинг радиуси топилсин.

582. Мунтазам n бурчак томонларининг ўрталарини тўғри чизиқлар билан туташтиришдан ҳосил бўлган n-бурчакка ички чизилган янги мунтазам n бурчак ҳосил бўлди. Шу фигуралар юзларининг нисбати топилсин.

583. Томони a га тенг бўлган мунтазам n бурчакка ташқи айлана чизилган ва унга яна ички айлана чизилган. Шу айланалар орасида ҳосил бўлган ҳалқанинг юзи ва эни топилсин.

584. Радиуси R, марказий бурчаги α бўлган секторга доира ички чизилган. Унинг радиуси топилсин.

585. Радиуси R бўлган доирага бир нуқтадан ўзаро 2α бурчак ҳосил қилувчи иккита уринма ўтказилган. Бу уринмалар билан доира ёйи орасида ҳосил бўлган фигуранинг юзи топилсин.

586. Ўткир бурчаги α ва томони a бўлган ромб шу ўткир бурчак учидан чиққан тўғри чизиқлар билан учта тенгдош қисмга бўлинган. Шу тўғри чизиқ кесмаларининг узунликлари топилсин.

587. 60° ли бурчак ичида унинг томонларидан a ва b масофада турган нуқтадан бурчакнинг учигача бўлган масофа топилсин.

588. Учбурчакнинг a ва b томонлари ва шу томонлар орасидаги бурчак биссектрисасининг узунлиги t маълум. Учбурчакнинг юзи топилсин.

589. Тенг ёнли учбурчак ён томонларининг ҳар бири a га тенг, учбурчак учидан асосига ўтказилган тўғри чизиқнинг узунлиги t га тенг бўлиб, тенг томонлар орасидаги бурчакни $1:2$ нисбатда бўлади. Шу учбурчакнинг юзи топилсин.

590. Учбурчакларнинг бурчаклари маълум, унинг бирор бурчагидан туширилган медиана билан баландлик орасидаги бурчак топилсин.

591. Мунтазам учбурчакнинг томони a. Унинг марказидан $\frac{a}{3}$ радиус билан айлана ички чизилган. Учбурчакнинг айланадан ташқаридаги қисмининг юзи топилсин.

592. Тўғри бурчакли трапециянинг баландлиги h; унинг асосга перпендикуляр бўлмаган томонини диаметр қилиб, чизилган айлана трапециянинг қарама-қарши томонига уринади. Катетлари трапециянинг асослари бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи топилсин.

593. Тўғри бурчакли учбурчак тўғри бурчагининг биссектрисаси медиана билан баландлик орасидаги бурчакни тенг иккига бўлиши исботлансин.

594. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг йиғиндиси ички ва ташқи чизилган айланалар диаметрлари йиғиндисига тенг эканлиги исботлансин.

595. Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусининг ички чизилган айлана радиусига нисбати 5 : 2 каби. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бурчаги топилсин.

596. Параллелограммнинг томонларига ташқи томондан ясалган квадратларнинг марказларини кетма-кет туташтирувчи тўғри чизиқлар ҳам квадрат ҳосил қилиши исботлансин.

9-БОБ

КЎПЁҚЛИЛАР

597. Тўғри бурчакли параллелепипед асосининг томонлари a ва b. Параллелепипеднинг диагонали асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Параллелепипеднинг ён сирти топилсин.

598. Олти бурчакли мунтазам призма энг катта диагоналининг узунлиги d га тенг бўлиб, ён қирра билан α бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажми топилсин.

599. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида ён қиррасининг узунлиги m га тенг бўлиб, асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

600. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми V. Пирамиданинг ён қирраси билан асос текислиги орасидаги бурчак α. Пирамиданинг ён қирраси топилсин.

601. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг ён сирти S *см*^{2}, баландлиги H *см*. Пирамида асосининг томони топилсин.

602. Олти бурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси l га ва асосига ички чизилган доиранинг диаметри d га тенг. Пирамиданинг ҳажми ва ён сирти топилсин.

603. Ҳажми V га тенг тетраэдрнинг [1] баландлиги топилсин.

604. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари a ва b, ўткир бурчаги α. Асосининг катта диагонали параллелепипеднинг кичик диагоналига тенг. Параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

605. Тўғри параллелепипеднинг диагоналлари 9 *см* ва $\sqrt{33}$ *см*, асосининг периметри 18 *см*, ён қирраси 4 *см*. Параллелепипеднинг тўла сирти ва ҳажми топилсин.

606. Уч бурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси l, баландлиги h. Пирамиданинг асосидаги икки ёқли бурчак топилсин.

607. Ён қиррасининг асос текислиги билан ҳосил қилган бурчаги α, диагонал кесимининг юзи S бўлган тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми топилсин. Шунингдек, ён ёқнинг асос текислиги билан ҳосил қилган бурчаги топилсин.

608. Мунтазам пирамиданинг асосида ички бурчакларининг йиғиндиси 540° га тенг кўпбурчак ётади. Пирамиданинг ён қирраси l, асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

609. Ён ёқлари тенг томонли учбурчаклардан иборат беш бурчакли мунтазам пирамида асосининг ён қирра ва ён ёқ билан ҳосил қилган бурчаклари топилсин.

610. Асосининг томони a га тенг бўлган n бурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми V бўйича унинг ён қирраси билан асоси текислиги орасидаги бурчак топилсин.

611. Тўрт бурчакли пирамиданинг асосида диагонали b га ва диагоналлари орасидаги бурчаги α га тенг бўлган тўғри тўртбурчак ётади. Ён қирраларининг ҳар бири асос текислиги билан β бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

612. Пирамиданинг асосида ён томонлари a га, улар орасидаги бурчаги α га тенг бўлган тенг ёнли учбурчак ётади. Пирамиданинг ҳамма ён қирралари асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

---

1) Тетраэдр сўзидан бу ерда мунтазам тўрт ёқли тушунилади (баъзан ҳар қандай уч бурчакли пирамида тетраэдр деб аталади).

613. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг асоси R радиусли доирага ички чизилган тўғри тўртбурчакдан иборат бўлиб, бу тўғри тўртбурчакнинг кичик томони айлананинг $(2\alpha)^\circ$ ли ёйини тортиб туради. Параллелепипеднинг ён сирти S га тенг. Унинг ҳажми топилсин.

614. Тўғри призманинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, бу учбурчакнинг асоси a га ва асосидаги бурчаги α га тенг. Агар призманинг ён сирти призма асослари юзларининг йиғиндисига тенг бўлса, унинг ҳажми топилсин.

615. Олти бурчакли мунтазам пирамиданинг апофемаси m га тенг. Асосидаги икки ёқли бурчак α. Пирамиданинг тўла сирти топилсин.

616. Тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакнинг гипотенузаси орқали учбурчак текислиги билан α бурчак ҳосил қилувчи P текислик ўтказилган. Учбурчакни P текисликка проекциялаш натижасида ҳосил бўлган фигуранинг периметри ва юзи топилсин. Учбурчакнинг гипотенузаси c га тенг.

617. n бурчакли мунтазам пирамида асосининг юзи Q, баландлиги ҳар бир ён қирра билан φ бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ён сирти ва тўла сирти топилсин.

618. Уч бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, ён ёғи асос текислиги билан φ бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

619. Уч бурчакли мунтазам пирамиданинг тўла сирти S. Ён қирра билан асос текислиги орасидаги бурчак α га тенг бўлса, пирамида асосининг томони топилсин.

620. Пирамиданинг асоси ўткир бурчаги α га тенг ромб. Ён ёқлари асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади. Ромбга ички чизилган доиранинг радиуси r га тенг. Пирамиданинг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

621. Беш бурчакли мунтазам пирамида асосининг юзи S, ён сирти σ га тенг. Пирамида ён ёғининг асос текислигига оғиш бурчаги топилсин.

622. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромбдан иборат. Остки асоси томонларининг бири ва устки асосининг шу томонга қарши ётган томони орқали ўтказилган текислик асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади. Ҳосил бўлган кесимнинг юзи Q. Параллелепипеднинг ён сирти топилсин.

623. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, учбурчакнинг асосидаги бурчаги α. Пирамиданинг асосидаги ҳар бир икки ёқли бурчак φ га тенг. Пирамиданинг асосига ички чизилган доира марказидан ён ёғи баландлигининг ўртасигача бўлган масофа d га тенг. Пирамиданинг тўла сирти топилсин.

624. Пирамиданинг асосида радиуси r га тенг доирага ташқи чизилган кўпбурчак ётади; кўпбурчакнинг периметри $2p$ га тенг. Пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан φ бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

625. Уч бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Остки асосининг томони a га, устки асосининг томони b га тенг $(a > b)$. Кесик пирамиданинг ҳажми топилсин.

626. Мунтазам кесик пирамиданинг асосларида томонлари a ва b га тенг квадратлар ётади $(a > b)$. Ён қирралари асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Кесик пирамиданинг ҳажми ва асосларининг томонларидаги икки ёқли бурчакларининг миқдорлари топилсин.

627. Пирамиданинг асосида гипотенузаси c га, ўткир бурчаги α га тенг тўғри бурчакли учбурчак ётади. Ён қирраларининг ҳаммаси асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми ва учидаги текис бурчаклар топилсин.

628. Оғма призманинг асосида тўғри бурчакли ABC учбурчак ётади. Бу учбурчак катетларининг йиғиндиси m га, A учидаги бурчаги α га тенг. Призманинг AC катет орқали ўтувчи ён ёғи асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. AB гипотенуза ва унинг қаршисидаги уч ёқли бурчакнинг C_1 учи орқали текислик ўтказилган. Агар текислик ажратган уч бурчакли пирамиданинг ён қирралари тенг бўлса, шу пирамиданинг ҳажми топилсин.

629. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчакдан иборат. Учбурчакнинг асосидаги бурчак α га тенг. Пирамиданинг ҳамма ён қирралари асос текислиги билан бир хил $\varphi = 90° - \alpha$ бурчак ташкил этади. Пирамиданинг баландлиги ва асосидаги тенг ёнли учбурчакнинг учи орқали ўтказилган кесимнинг юзи Q га тенг. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

630. Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчак. Ён ёқларидан иккитаси асос текислигига перпендикуляр, қолган иккитаси асос текислиги билан α ва β бурчаклар ҳосил қилади. Пирамиданинг баландлиги H. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

631. Пирамиданинг асоси квадрат. Пирамиданинг бир-бирига қарши ётган қирраларидан бири асос текислигига перпендикуляр, иккинчиси асос текислиги билан β бурчак ташкил этади ва узунлиги l га тенг. Қолган ён қирраларининг узунликлари ва уларнинг пирамида асоси текислиги билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

632. Пирамиданинг асосида томони a га тенг мунтазам учбурчак ётади. Ён қирраларидан бири асос текислигига перпендикуляр, қолган иккитаси асос текислиги билан β га тенг бурчаклар ташкил этади. Пирамиданинг энг катта ён ёғининг юзи ва шу ён ёқнинг асос текислигига оғиш бурчаги топилсин.

633. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчакдан иборат. Шу асоснинг ён томонлари a га тенг бўлиб, ўзаро 120° ли бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг шу ўтмас бурчак учидан ўтувчи ён қирраси асос текислигига перпендикуляр бўлиб, қолган иккитаси асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Пирамида асосининг энг катта томони орқали ўтиб, пирамиданинг асосига перпендикуляр бўлган қиррасини тенг иккига бўлувчи текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган кесимнинг юзи топилсин.

634. Уч бурчакли мунтазам пирамида асосига перпендикуляр ва асоснинг икки томонини тенг иккига бўлувчи текислик билан кесилган. Дастлабки пирамида асосининг томони a га ва асосидаги икки ёқли бурчак α га тенг. Текислик кесиб ажратган пирамиданинг ҳажми топилсин.

635. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг учи орқали пирамида асосининг текислиги билан φ бурчак ташкил этувчи, аммо асосининг томонига параллел текислик ўтказилган. Пирамида асосининг томони a, пирамиданинг учидаги текис бурчак α га тенг. Пирамида кесимининг юзи топилсин.

636. Уч бурчакли мунтазам пирамиданинг учи ва пирамида асоси икки томонининг ўрталари орқали текислик ўтказилган. Пирамида асосининг томони a, кесим билан асос текислиги орасидаги бурчак α. Кесимнинг юзи ва берилган пирамидани кесишдан ҳосил бўлган қисмларининг ҳажмлари топилсин.

637. Тетраэдрнинг 1) қирраси a га тенг. Шу тетраэдр ўзининг бир қирраси орқали ўтиб, унинг қаршисидаги қиррани 2 : 1 нисбатда бўлувчи текислик билан кесилган. Ҳосил бўлган кесимнинг юзи ва шу кесимнинг бурчаклари топилсин.

---

1) 603-масалага берилган эслатмага қаралсин.

638. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамида катта асосининг томони a, кичик асосининг томони b, ён ёғининг ўткир бурчаги α га тенг. Шу кесик пирамиданинг ҳажми топилсин.

639. Тўрт бурчакли мунтазам призманинг диагонали ён ёғи билан α бурчак ташкил этади, асосининг томони b га тенг. Призманинг ҳажми топилсин.

640. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг гипотенузаси c ва бир ўткир бурчаги α. Остки асоснинг гипотенузаси ва устки асосдаги тўғри бурчакнинг учи орқали ўтказилган текислик асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Призмадан текислик кесиб ажратган уч бурчакли пирамиданинг ҳажми топилсин.

641. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг бир катети билан гипотенузасининг йиғиндиси m га ва улар орасидаги бурчаги α га тенг. Иккинчи катет ва призманинг бу катетга қарама-қарши ётган уч ёқли бурчак учи орқали асос текислиги билан β бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган. Призманинг текислик билан бўлинган қисмларининг ҳажмлари топилсин.

642. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, асосидаги бурчак α. Пирамида асосидаги ҳар бир икки ёқли бурчак $\varphi = 90° - \alpha$. Пирамиданинг ён сирти S. Пирамиданинг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

643. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, унинг ён томони a, асосидаги бурчаги $\alpha (\alpha > 45°)$. Пирамиданинг ён қирралари асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Шу пирамиданинг баландлиги билан α бурчакларидан бирининг учи орқали текислик ўтказилган. Кесим юзи топилсин.

644. Пирамиданинг асосида қарама-қарши ётган икки бурчаги тўғри бўлган тўртбурчак ётади. Асоснинг тўғри бўлмаган бурчакларининг учларини туташтирувчи диагоналнинг узунлиги l бўлиб, у бурчаклардан бирини α ва β қисмларга ажратади. Асоснинг иккинчи диагонали орқали шу диагоналга перпендикуляр ҳолда ўтказилган кесимнинг юзи S. Призманинг ҳажми топилсин.

645. Пирамиданинг асоси квадрат. Қарама-қарши турган икки ёғи тенг ёнли учбурчаклар бўлиб, улардан бири асос билан ички β бурчак, иккинчиси ташқи ўткир α бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг баландлиги H га тенг. Пирамиданинг ҳажми ва қолган икки ён ёғининг асос текислиги билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

646. Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчакдан иборат. Ён ёқларидан бири асос текислиги билан $\beta = 90^\circ - \alpha$ бурчак ҳосил қилади, унга қарши ётган ёқ асосга перпендикуляр бўлиб, тўғри бурчаги пирамида учида ётувчи ва ўткир бурчаги α га тенг тўғри бурчакли учбурчак шаклидадир. Бу икки ёқ баландликларининг йиғиндиси m. Пирамиданинг ҳажми ва қолган икки ён ёқ юзларининг йиғиндиси топилсин.

647. Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчак. Ён ёқларидан бири тенг ёнли учбурчак шаклида бўлиб, асосга перпендикуляр. Бу ёқнинг қаршисидаги иккинчи ёқнинг ён қирралари b га тенг бўлиб, ўзаро 2α бурчак ҳосил қилади ва биринчи ёққа α бурчак остида қияланган. Пирамиданинг ҳажми ва кўрсатилган икки ёқ орасидаги бурчак топилсин.

648. Асосининг томони a га тенг уч бурчакли мунтазам пирамиданинг учидаги пирамида қирралари орасидаги бурчакларнинг ҳар бири α ($\alpha < 90^\circ$). Пирамиданинг ён ёқлари орасидаги бурчаклари ва асоснинг бир томони орқали қарши ётган ён қиррага перпендикуляр ҳолда ўтказилган кесимнинг юзи топилсин.

649. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам саккиз ёқлининг (октаэдрнинг) ҳажми ва унинг қирраларидаги икки ёқли бурчаклари топилсин.

650. Олти бурчакли мунтазам пирамиданинг ён қиррасидаги икки ёқли бурчак φ га тенг. Пирамида учидаги текис бурчак топилсин.

651. Пирамиданинг асоси $ABCDEF$ мунтазам олтибурчакдан иборат. MA ён қирраси асос текислигига перпендикуляр, унга қарши ётган MD қирра эса асос текислигига α бурчак остида қияланган. Ён ёқларининг асос текислиги билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

652. Пирамиданинг асоси тенг ёнли ABC учбурчак бўлиб, бунда $AB = AC$. Пирамиданинг SO баландлиги асос баландлиги AD нинг ўртасидан ўтади. BC томон орқали AS ён қиррага перпендикуляр ва асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказилган. Берилган пирамидадан кесиб ажратилган ва унинг билан умумий S учга эга бўлган пирамиданинг ҳажми топилсин. Пирамидадан кесиб ажратилган иккинчи қисмининг ҳажми V га тенг.

653. Уч бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га тенг. Ён ёқлари орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи кесим тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Пирамиданинг ҳажми ва ён ёғи билан асос текислиги орасидаги бурчак топилсин.

654. Уч бурчакли мунтазам пирамида асосининг бир томони орқали шу томон қаршисидаги ён қиррага перпендикуляр қилиб текислик ўтказилган. Агар шу текислик ён қиррани $m:n$ нисбатда иккига ажратса ва асоснинг томони q га тенг бўлса, пирамиданинг тўла сирти топилсин.

655. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали d, бу диагонал бир-бирига қўшни бўлган иккита ён ёқ билан бир хил α бурчаклар ҳосил қилади. Параллелепипеднинг ҳажми ва бир учидан чиқувчи уч қирра охирларидан ўтган текислик билан асос текислиги орасидаги бурчак топилсин.

656. Тўғри бурчакли параллелепипед остки асоси диагоналларининг кесишиш нуқтаси ён қирраларидан бирининг ўртаси билан туташтирилган. Бу нуқталарни туташтирувчи кесманинг узунлиги m бўлиб, асос текислиги билан α ва ён ёқларидан бири билан $\beta = 2\alpha$ бурчак ҳосил қилади. Шу ён ёққа қўшни иккинчи ён ёқни асос деб олиб, параллелепипеднинг ён сирти ва ҳажми топилсин. ($\alpha < 30°$ эканлиги исбот қилинсин.)

657. Тўғри призманинг асосида радиуси R га тенг бўлган ярим доирага ички чизилган шундай трапеция ётадики, бу трапециянинг катта асоси доира диаметри билан устма-уст тушади. Кичик асоси эса 2α га тенг ёйни тортиб туради. Асоснинг ён томони орқали ўтувчи ён ёғининг диагонали асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажми топилсин.

658. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали d га тенг бўлиб, ён ёқ билан $\beta = 90° - \alpha$ бурчак ҳосил қилади. Шу диагонал ва диагонал билан кесишувчи ён қирра орқали ўтказилган текислик шу ён қирра билан α бурчак ҳосил қилади ($\alpha > 45°$ эканлиги исботлансин). Параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

659. Уч бурчакли мунтазам призмада устки асоснинг икки учи остки асоснинг уларга қарама-қарши ётган икки томонининг ўрталари билан туташтирилган. Ҳосил бўлган чизиқлар орасидаги остки асосга қараган бурчак α. Асоснинг томони b га тенг. Призманинг ҳажми топилсин.

660. Уч бурчакли мунтазам призмада ён ёғи диагонали билан иккинчи ён ёғи орасидаги бурчак α. Асос қирраси a. Призманинг ён сирти топилсин.

661. Тўғри призманинг асосида тўғри бурчакли ABC учбурчак ётади ва бу учбурчакда $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, катет $AC = b$.

Призмада AB гипотенуза орқали ўтувчи ён ёғининг AC диагонали катет орқали ўтувчи ён ёқ билан β бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажми топилсин.

662. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг тўла сирти S, ён ёғининг пирамида учидаги текис бурчаги α га тенг. Пирамиданинг баландлиги топилсин.

663. n бурчакли мунтазам пирамиданинг учидаги текис бурчак α га, асосининг томони a га тенг. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

664. Тўрт бурчакли мунтазам призмада остки асосининг диагонали ва устки асосининг учларидан бири орқали ўтказилган текислик ундан тўла сирти S га тенг пирамида ажратади. Кесимда ҳосил бўлган учбурчакнинг учидаги бурчаги α га тенг. Призманинг тўла сирти топилсин.

665. Уч бурчакли пирамиданинг ён қирраларининг узунлиги l га тенг. Бу қирраларнинг пирамида учидаги учта текис бурчагидан иккитаси α га, учинчиси β га тенг. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

666. Пирамиданинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, бу учбурчак пирамиданинг шу учбурчак катети орқали ўтган ён ёғининг проекциясидир. Пирамиданинг асосида шу катет қаршисида ётган бурчак α, ён ёқдаги бурчак эса β. Шу ён ёқнинг юзи асоснинг юзидан S қадар ортиқ. Қолган икки ён ёқлар орасидаги фарқ ва ён ёқлар билан асос текислиги орасида ҳосил бўлган бурчаклар топилсин.

667. Уч бурчакли пирамиданинг икки ён ёғи тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчаклар бўлиб, уларнинг гипотенузалари b ва бу гипотенузалар ўзаро α бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

668. Асоси тўғри тўртбурчакдан иборат бўлган пирамиданинг ҳар бир ён қирраси l, пирамида учидаги текис бурчаклардан бири α, иккинчиси β. Бу β га тенг бурчакларнинг биссектрисалари орқали ўтувчи кесимнинг юзи топилсин.

669. Параллелепипеднинг бир учидан чиққан учта қиррасининг узунликлари a, b ва c. Бунда a ва b қирралар ўзаро перпендикуляр, c қирра эса қолганларининг ҳар бири билан α бурчак ҳосил қилади. Параллелепипеднинг ҳажми, ён сирти ва c қирра билан асос текислиги орасидаги бурчак топилсин. (α бурчакнинг қандай қийматларида масала ечимга эга?)

670. Параллелепипеднинг ҳамма ёқлари — томонлари a га ва ўткир бурчаклари α га тенг бўлган бир хил ромблардир. Шу параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

671. Оғма параллелепипеднинг асоси томони a га ва ўткир бурчаги α га тенг бўлган $ABCD$ ромбдан иборат. AA_1 қирраси b га тенг бўлиб, AB ҳамда AD қирралар билан φ бурчак ташкил этади. Параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

672. Тўғри бурчакли параллелепипедда бир учдан чиққан асос диагонали ва катта ён ёқ диагоналлари орқали текислик ўтказилган. Бу диагоналлар орасидаги бурчак β га тенг. Параллелепипед асосига ташқи чизилган айлананинг радиуси R ва асоснинг диагоналлари орасидаги кичик бурчак 2α. Параллелепипеднинг ён сирти, кесим юзи ва кесим текислиги билан асос текислиги орасидаги оғиш бурчаги топилсин.

673. Тўғри призманинг асосида тўғри бурчакли ABC учбурчак ётади. Шу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси R, учбурчакнинг AC катети 2β га тенг ёйни тортиб туради. Иккинчи BC катет орқали ўтувчи ён ёқ диагонали орқали шу ёққа перпендикуляр текислик ўтказилган. Бу текислик асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ён сирти ва текислик кесиб ажратган тўрт бурчакли пирамиданинг ҳажми топилсин.

674. Пирамиданинг асоси трапеция бўлиб, унинг ён томонлари ва кичик асоси бир-бирига тенг, катта асоси a, ўтмас бурчаги α. Пирамиданинг ҳамма ён қирралари асос текислиги билан бир хил β бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

675. Пирамиданинг асоси трапециядан иборат бўлиб, бу трапециянинг диагонали ён томонига перпендикуляр ва трапеция асоси билан α бурчак ҳосил қилади. Ён қирраларининг ҳаммаси бир-бирига тенг. Трапециянинг катта асосидан ўтувчи ён ёқнинг пирамида учидаги текис бурчаги $\varphi = 2\alpha$ ва юзи S. Пирамиданинг ҳажми ва ён қирралари билан асос текислиги орасидаги бурчаклари топилсин.

676. Пирамиданинг асосида томони a га тенг мунтазам учбурчак ётади. Пирамиданинг учидан туширилган баландлиги асос учларидан бири орқали ўтади. Асоснинг шу учга қарши ётган томони орқали ўтувчи ён ёқ асос текислиги билан φ бурчак ташкил этади. Агар шу пирамиданинг бир-бирига тенг ён ёқларидан бири асос қабул қилинса, пирамиданинг ён сирти аниқлансин.

677. Тўғри призманинг асосида ён томони a га, асосидаги бурчаклари α га тенг бўлган тенг ёнли учбурчак ётади. Устки ёқдан иборат учбурчакнинг асосидан ва остки асосининг унга қарши ётган учидан асос текислиги билан β бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган. Призманинг ён сирти ва ундан кесилган тўрт бурчакли пирамиданинг ҳажми топилсин.

678. Пирамиданинг асоси квадрат. Унинг икки ён ёғи асос текислигига перпендикуляр, қолган икки ёғи эса асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Асосга перпендикуляр ён ёққа ташқи чизилган доиранинг радиуси R. Пирамиданинг тўла сирти топилсин.

679. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг бир катети a га ва шу катет қаршисидаги бурчаги α га тенг. Остки асосдаги тўғри бурчак учи орқали гипотенузага параллел қилиб текислик ўтказилган. Бу текислик шу учга қарши ётган ён ёқни кесиб ўтади ва у билан $\beta = 90° - \alpha$ бурчак ҳосил қилади. a катет орқали ўтувчи ён ёқ призманинг кесими билан тенгдош. Призманинг асоси билан кесим орасидаги призма қисмининг ҳажми ва ён сирти топилсин. α бурчакнинг қандай қийматида кесим текислиги асоснинг гипотенузаси орқали ўтувчи ён ёқни кесиши мумкинлиги аниқлансин.

680. Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчак. Ён қирраларидан бири асос текислигига перпендикуляр, икки ён ёғи эса асосининг текислиги билан α ва β бурчаклар ташкил этади. Пирамиданинг баландлиги H. Пирамиданинг ён сирти топилсин.

681. Пирамиданинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, бунинг ўткир бурчакларидан бири α ва бу учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси r. Ён ёқларининг ҳар бири асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми, ён сирти ва тўла сирти топилсин.

682. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг асоси тенг ёнли ABC учбурчак бўлиб, унда $AB = AC$ ва $\angle ABC = \alpha$. Призма устки асосининг B_1 учи остки асосига ички чизилган, радиуси r га тенг айлананинг марказига проекцияланади. Асосининг AC томони ва B_1 учи орқали асос текислиги билан α бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган. Кесиб ажратилган уч бурчакли $ABCB_1$ пирамиданинг тўла сирти ва призманинг ҳажми топилсин.

683. Асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлган пирамиданинг баландлиги асосидаги тўғри бурчакнинг биссектрисаси билан гипотенузасининг кесишган нуқтасидан ўтади. Тўғри бурчагининг учидан ўтувчи ён қирраси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Агар асос тўғри бурчагининг биссектрисаси m ва бу биссектриса гипотенуза билан $45° + \alpha$ бурчак ҳосил қилса, пирами-

данинг ҳажми ва ён ёқларининг асос текислиги билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

684. Пирамиданинг асосида томони a га тенг ромб ётади. Иккита қўшни ён ёғи асос текислиги билан α бурчак ташкил этади, учинчи ён ёғи эса асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. (Тўртинчи ён ёғи ҳам асос текислиги билан шундай бурчак ташкил этишини исбот этинг.) Пирамиданинг баландлиги H. Пирамиданинг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

685. Тўрт бурчакли пирамиданинг асоси ромб бўлиб, унинг томони a га ва ўткир бурчаги α га тенг. Пирамиданинг учи ва асос диагоналлари орқали ўтган текисликлар асос текислиги билан φ ва ψ бурчаклар ташкил этади. Пирамиданинг баландлиги асоснинг бир томонини кесиб ўтади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

686. Оғма призманинг асоси тўғри бурчакли ABC учбурчак бўлиб, унинг катетларидан бири $BC = a$. Устки асосининг B_1 учи BC катетнинг ўртасига проекцияланади. BC катет билан AB гипотенуза орқали ўтувчи ён ёқлар ҳосил қилган икки ёқли бурчак α га тенг. Ён қирралари асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади. Призманинг ён сирти топилсин.

687. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг асоси тенг ёнли ABC учбурчак бўлиб, унда $AB = AC$ ва $\angle BAC = 2\alpha$. Призма устки асосининг A_1 учи остки асосига ташқи чизилган радиуси R га тенг айлананинг марказига проекцияланади. AA_1 ён қирра асоснинг AB томони билан 2α га тенг бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажми ва ён сирти топилсин.

688. Ён қирраси l, иккита қўшни ён ёқ орасидаги икки ёқли бурчаги β га тенг бўлган тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми топилсин.

689. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг диагонали d, остки асосидаги икки ёқли бурчак α, баландлиги H. Шу кесик пирамиданинг ҳажми топилсин.

690. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг ён қирраси l га тенг бўлиб, асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Пирамиданинг диагонали ён қиррасига перпендикуляр. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

691. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг баландлиги H, ён қирраси ва диагонали асос текислиги билан α ва β бурчаклар ташкил этади. Пирамиданинг ён сирти топилсин.

692. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари a ва $a\sqrt{3}$, ён ёғи асос текислиги билан γ бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

693. Тўрт бурчакли мунтазам пирамидага куб шундай ички чизилганки, унинг тўртта учи пирамиданинг ён қирраларида, қолган тўртта учи эса пирамида асосининг текислигида. Пирамиданинг баландлиги H, ён қирраси l. Кубнинг қирраси топилсин.

694. Тўрт бурчакли мунтазам пирамидага куб шундай ички чизилганки, унинг учлари пирамиданинг апофемаларида ётади. Пирамиданинг баландлиги билан ён ёғи орасидаги бурчак α. Пирамида ҳажмининг куб ҳажмига нисбати топилсин.

695. Пирамиданинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг катетлари 6 ва 8. Пирамиданинг учи асос текислигидан 24 бирлик масофада бўлиб, шу текисликнинг асос ичида ётган нуқтасига проекцияланади. Тўртта учи пирамида асосининг текислигида ётган ва шу учларни туташтирувчи қирралари пирамида асосидаги учбурчакнинг мос катетларига параллел бўлган кубнинг қирраси топилсин. Кубнинг қолган тўртта учи шу пирамиданинг ён ёқларида ётади.

696. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг асосидаги икки ёқли бурчак α. Бу пирамиданинг ён қирраси орқали асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказилган. Асоснинг томони a га тенг. Кесимнинг юзи топилсин.

697. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, асосдаги икки ёқли бурчак α. Пирамида асосининг иккита қарама-қарши ётган томонлари орқали бир-бири билан тўғри бурчак ҳосил қилиб кесишувчи иккита текислик ўтказилган. Бу икки текисликнинг ўзаро кесишувчи чизиғи пирамида ўқини кесиб ўтиши маълум бўлса, шу кесишиш чизиғининг пирамида ичидаги узунлиги топилсин.

698. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида асосининг бир учидан шу учга қарши ётган ён қиррага перпендикуляр текислик ўтказилган. Пирамида асосининг томони a, ён қирраси асос текислиги билан φ бурчак ташкил этади ($\varphi > 45^\circ$ эканлигини исбот этинг). Кесим юзи топилсин.

699. Тўрт бурчакли мунтазам призмани кесимда ўткир бурчаги α га тенг ромб ҳосил бўладиган қилиб, текислик билан кесиш талаб қилинади. Кесувчи текислик билан асос текислиги орасидаги бурчак топилсин.

700. Тўғри параллелепипеднинг асоси ўткир бурчаги α га тенг ромбдан иборат. Кесимда учлари ён қирраларда ётган квадрат ҳосил қилиш учун бу параллелепипедни асос текислиги билан қандай оғиш бурчаги остида кесиш керак?

701. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромбдан иборат бўлиб, унинг томони a ва ўткир бурчаги α. Бу параллелепипед α бурчагининг учидан ўтиб, кесимда ўткир бурчаги $\frac{\alpha}{2}$ га тенг ромб ҳосил қилувчи текислик билан кесилган. Шу кесимнинг юзи топилсин.

702. Тетраэдрнинг қирраси b. Қирралардан бирининг ўртасидан бир-бири билан кесишмайдиган иккита қиррасига параллел қилиб текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесимнинг юзи топилсин.

703. Пирамиданинг асоси бир катети a га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Пирамиданинг ён қирраларидан бири асос текислигига перпендикуляр, қолган иккитаси асос текислиги билан бир хил α бурчаклар ташкил этади. Пирамиданинг асосига перпендикуляр текислик кесимда квадрат ҳосил қилади. Шу квадратнинг юзи топилсин.

704. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамида устки асосининг томони a, остки асосининг томони $3a$ ва ён ёқлари остки асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади. Устки асоснинг бир томони орқали шу томон қаршисидаги ён ёққа параллел қилиб текислик ўтказилган. Берилган кесик пирамидадан кесилган тўрт бурчакли призманинг ҳажми ва кесик пирамидадан қолган қисмининг тўла сирти аниқлансин.

705. Асосининг томони a га тенг бўлган уч бурчакли мунтазам призманинг қиррасидаги бир нуқтадан иккита текислик ўтказилган. Бу текисликлардан бири призма остки асосининг бир томони орқали ўтиб, шу асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилади, иккинчиси эса устки асоснинг остки асосда текислик ўтган томонга параллел томони орқали ўтиб, устки асос текислиги билан β бурчак ташкил этади. Призманинг ҳажми ва ҳосил бўлган кесимлар юзларининг йиғиндиси топилсин.

706. Тўрт бурчакли мунтазам призма асосининг икки қўшни томонининг ўрталари орқали учта ён қиррани кесувчи ва асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказилган. Призма асосининг томони b га тенг. Ҳосил бўлган кесимнинг юзи ва ўткир бурчаги топилсин.

707. Тўғри призманинг асосида r радиусли доирага ташқи чизилган ва ўткир бурчаги α бўлган тенг ёнли трапеция ётади. Остки асосининг бир ён томони ва устки асосининг бу томонга қарши ётган бурчак учи орқали асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказилган. Призманинг ён сирти ва кесимнинг юзи топилсин.

708. $ABCA_1B_1C_1$ тўғри призманинг асоси тенг ёнли ABC учбурчак бўлиб, унинг BC асосидаги бурчаклари α. Призманинг ён сирти S. Призма BCC_1B_1 ён ёғининг диагонали орқали асоснинг AD баландлигига параллел ва асос текислигига β бурчак остида ўтказилган текислик кесимининг юзи топилсин.

709. $ABCA_1B_1C_1$ тўғри призманинг асосида B учидаги бурчаги β га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак ётади ($\beta < 45°$). BC ва AC катетлар орқали ўтган ён ёқларининг юзлари орасидаги фарқ S. Уч нуқтадан, яъни устки асосдаги β бурчакнинг B_1 учидан, AA_1 ён қирранинг ўртасидан ва асос текислигида AC катетга нисбатан B учга симметрик жойлашган D нуқтадан ўтувчи ва асос текислиги билан φ бурчак ташкил этувчи текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимнинг юзи топилсин.

710. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг иккита қўшни ён ёқларининг кесишмайдиган диагоналларидан бири асос текислиги билан α бурчак, иккинчиси β бурчак ҳосил қилади. Шу диагоналлар орасидаги бурчак топилсин.

711. $SABC$ уч ёқли бурчакнинг учта текис бурчаги берилган: $\angle BSC = \alpha$; $\angle CSA = \beta$; $\angle ASB = \gamma$. Шу уч ёқли бурчакнинг икки ёқли бурчаклари топилсин.

712. Уч ёқли бурчакнинг икки ёқли бурчакларидан бири A га тенг, бу икки ёқли бурчакка ёпишган текис бурчаклар α ва β Учинчи текис бурчак топилсин.

713. Уч ёқли бурчакнинг текис бурчаклари 45°, 60° ва 45°. Текис бурчаклари 45° га тенг бўлган ёқлар орасидаги икки ёқли бурчак топилсин.

714. Икки ёқли бурчак қиррасида AB кесма берилган. Ёқлардан бирида M нуқта олинган бўлиб, бу нуқтада A нуқтадан AB кесмага α бурчак остида ўтказилган тўғри чизиқ B нуқтадан AB кесмага перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқни кесади. AM тўғри чизиқ икки ёқли бурчакнинг иккинчи ёғи билан β бурчак ҳосил қилади. Икки ёқли бурчакнинг катталиги топилсин.

715. Икки айқаш тўғри чизиқ бир-бирига φ бурчак остида оғишган бўлиб, уларни кесувчи умумий перпендикуляр $PQ = h$.

Бу тўғри чизиқларда A ва B нуқталар берилган; бу нуқталардан PQ кесма α ва β бурчаклар остида кўринади. AB кесманинг узунлиги топилсин.

716. Ораларидаги энг қисқа масофа $PQ = h$ бўлган ўзаро перпендикуляр икки айқаш тўғри чизиқда A ва B нуқталар берилган бўлиб, бу нуқталардан PQ кесма α ва β бурчаклар остида кўринади. AB кесманинг PQ кесмага оғиш бурчаги топилсин.

717. Кесувчи текислик уч бурчакли пирамиданинг ён қирраларини (учидан ҳисоблаганда) $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_3}{n_3}$ нисбатларда бўлади. Шу текислик пирамиданинг ҳажмини қандай нисбатда бўлади?

718. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида баландлигининг ўртасидан ён қиррасига туширилган перпендикулярнинг узунлиги h га тенг ва ён ёғига туширилган перпендикулярнинг узунлиги b га тенг. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

10-БОБ

ДОИРАВИЙ ЖИСМЛАР

719. Конуснинг ясовчиси l га тенг ва бу ясовчи асос текислиги билан 60° бурчак ҳосил қилади. Конуснинг ҳажми топилсин.

720. Конус ясовчисининг узунлиги l, асоси айланасининг узунлиги c. Конуснинг ҳажми топилсин.

721. Цилиндр ён сиртининг ёйилмаси квадрат бўлиб, томони a га тенг. Цилиндрнинг ҳажми топилсин.

722. Цилиндрнинг ён сирти ёйилганда тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг диагонали d га тенг ва асоси билан α бурчак ташкил этади. Цилиндрнинг ҳажми топилсин.

723. Конуснинг ўқ кесими учидаги бурчак 2α га тенг ва конус баландлиги билан ясовчиси узунликларининг йиғиндиси m га тенг. Конуснинг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

724. Конуснинг ҳажми V. Унинг баландлиги тенг уч бўлакка ажратилган ва бўлиниш нуқталаридан асосга параллел текисликлар ўтказилган. Ўрта қисмининг ҳажми топилсин.

725. Конус асосидаги a га тенг ватар α га тенг ёйни тортиб туради, баландлиги эса ясовчи билан β бурчак ташкил этади. Конуснинг ҳажми топилсин.

726. Битта асосга иккита конус ясалган (бири иккинчисининг ичида); кичик конуснинг баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак α, катта конуснинг баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак β. Конуслар баландликларининг айирмаси h. Шу конусларнинг ён сиртлари орасида қолган ҳажм топилсин.

727. Конуснинг ён сирти S, тўла сирти P. Конуснинг баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак топилсин.

728. Конуснинг ён сирти текисликка ёйилганда бурчаги α га, ватари a га тенг доиравий сектордан иборат бўлади. Шу конуснинг ҳажми топилсин.

729. Конуснинг учи орқали асос текислиги билан φ бурчак ҳосил қилувчи ва асос айланасидан α га тенг ёй ажратувчи текислик ўтказилган. Текисликнинг асос марказидан масофаси a га тенг. Конуснинг ҳажми топилсин.

730. Конус асосига ички чизилган квадратнинг томони a га тенг. Конуснинг учидан ва квадратнинг бир томонидан ўтувчи текислик конус сирт билан кесимда учидаги бурчаги α га тенг учбурчак ҳосил қилади. Шу конуснинг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

731. Кесик конуснинг ясовчиси l остки асос текислиги билан α бурчак ташкил этади ва ўзининг устки учи билан қарама-қарши турган ясовчининг остки учини туташтирувчи тўғри чизиққа перпендикуляр. Кесик конуснинг ён сирти топилсин.

732. Ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ҳосил қиладиган ва ҳажми V конус берилган. Конус ўқига перпендикуляр текислик конуснинг ён сиртини тенг иккига бўлиши учун текисликни қандай баландликда ўтказиш керак? Тўла сиртни тенг иккига бўлиш учунчи?

733. Радиуси R га тенг шардан кесиб олинган ва ўқ кесимидаги бурчаги α га тенг шар секторининг ҳажми ва тўла сирти топилсин.

734. Радиуси R га тенг шардан қирқилган шар сегментининг тўла сирти S. Унинг баландлиги топилсин.

735. ABC учбурчакнинг юзи S, бир томони $AC = b$ ва $\angle CAB = \alpha$. Шу ABC учбурчакни AB томон атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

736. Учбурчакнинг a томони, B ва C бурчаклари берилган. Учбурчакни шу берилган томон теварагида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

737. Катта диагонали d ва ўткир бурчаги γ бўлган ромб, ўткир бурчагининг учи орқали катта диагоналига перпендикуляр қилиб ўтказилган ўқ теварагида айланади. Ҳосил бўлган айланиш жисмининг ҳажми топилсин.

738. Учбурчакнинг b ва c томонлари, улар орасидаги α бурчак берилган. Шу учбурчак α бурчакнинг учи орқали учбурчак ташқарисидан ўтган ҳамда b ва c томонлар билан бир хил бурчак ҳосил қилувчи ўқ теварагида айланади. Ҳосил бўлган айланиш жисмининг ҳажми топилсин.

739. Тенг ёнли трапециянинг диагонали ён томонига перпендикуляр. Ён томони b га тенг бўлиб, катта асос билан α бурчак ташкил этади. Шу трапецияни катта асоси теварагида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг сирти топилсин.

740. Конус учи орқали икки текислик ўтказилган. Бу текисликлардан бири асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади ва шу асосни узунлиги a га тенг ватар бўйича кесади. Иккинчи текислик эса асос текислиги билан β бурчак ҳосил қилади ва асосни узунлиги b га тенг ватар бўйича кесади. Конуснинг ҳажми топилсин.

741. Конусга шар ички чизилган. Конус ясовчиси l асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Шарнинг ҳажми топилсин.

742. Конуснинг ён сиртига уринма тўғри чизиқ уриниш нуқтасидан ўтган ясовчи билан θ бурчак ташкил этади. Конуснинг ясовчилари асос текислиги P билан α бурчак ҳосил қилади. Уринма тўғри чизиқ асос текислиги P билан қандай φ бурчак ташкил этади?

743. Ўткир бурчаклари α ва β, кичик баландлиги h бўлган ўтмас бурчакли учбурчак β бурчаги қаршисида ётган томон теварагида айланади. Ҳосил бўлган айланиш жисмининг сирти топилсин.

744. Асоси тепага қаратиб қўйилган, ўқ кесими тенг томонли учбурчакдан иборат конус ичига сув қуйилган ва унга радиуси r га тенг шар солинган. Натижада сувнинг сатҳи шарга уст томондан уринади. Шар сувдан олингандан кейинги сув сатҳининг баландлиги топилсин.

745. Асосининг радиуси R, ясовчиси асос текислиги билан $\frac{\alpha}{2}$ бурчак ҳосил қилувчи конус ичига уч бурчакли тўғри призма шундай чизилганки, унинг остки асоси конус асосида ётади, устки асосининг учлари конуснинг ён сиртида ётади. Призманинг асоси ўткир бурчаги α га тенг тўғри бурчакли учбурчак, призманинг баландлиги конуснинг призма устки асосидан ўтган текислик билан кесимининг радиусига тенг. Призманинг ён сирти топилсин.

746. Асосида томони a га тенг мунтазам учбурчак ётган уч бурчакли пирамидага, остки асоси пирамида асосида ётувчи, устки асоси эса ён ёқларига уринувчи ички цилиндр чизилган. Цилиндрнинг баландлиги $\frac{a}{2}$ га тенг, пирамиданинг ён қирраларидан бири асос текислигига перпендикуляр, ён ёғи эса асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Цилиндрнинг ҳажмини ва цилиндрнинг устки асосидан ўтган текислик кесиб ажратган пирамиданинг ҳажмини топинг (α нинг қандай қийматларида масалани ечиш мумкинлигини аниқланг).

747. Радиуси R га тенг шарга уч бурчакли тўғри призма ички чизилган. Призманинг асоси ўткир бурчаги α га тенг тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг энг катта ён ёғи квадрат. Призманинг ҳажми топилсин.

748. Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчак, бунинг диагоналлари орасидаги ўткир бурчаги α га тенг. Пирамиданинг ён ёқлари эса асос текислиги билан φ бурчак ҳосил қилади. Шу пирамидага ташқи чизилган шарнинг радиуси R. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

749. Конус асосининг радиуси R, ўқ кесими учидаги бурчаги α. Шу конус атрофига чизилган уч бурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми топилсин.

750. Кесик конусга радиуси r га тенг шар ички чизилган. Конуснинг ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Кесик конуснинг ён сирти топилсин.

751. Шар атрофига ясовчилари асос текислиги билан α бурчак ҳосил қилувчи кесик конус чизилган. Шарнинг радиуси r. Шу кесик конуснинг тўла сирти топилсин.

752. Кесик конусга радиуси r га тенг шар ички чизилган. Конуснинг ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Кесик конуснинг ҳажми топилсин.

753. Радиуси R га тенг шар сиртидаги бир нуқтадан ўзаро α бурчак ташкил этувчи учта тенг ватар ўтказилган. Шу ватарларнинг узунлиги топилсин.

754. Радиуси R га тенг шарга кесик конус ички чизилган. Кесик конуснинг асослари шардан ўқ кесимидаги ёйлари α ва β

га тенг иккита сегмент кесади. Кесик конуснинг ён сирти топилсин.

755. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Пирамиданинг апофемаси m га тенг. Пирамидага ички чизилган конуснинг тўла сирти ҳамда ён қирранинг асос текислигига оғиш бурчаги топилсин.

756. Олти бурчакли мунтазам пирамида атрофига конус ташқи чизилган. Пирамиданинг қирраси l га ва икки қўшни ён қирра орасидаги текис бурчак α га тенг. Конуснинг ҳажми топилсин.

757. Уч бурчакли мунтазам пирамидага конус ички чизилган. Пирамиданинг қирраси l ва икки қўшни ён қирра орасидаги текис бурчак α. Конуснинг ҳажми топилсин.

758. Шарга ҳажми шар ҳажмининг $\frac{1}{4}$ қисмига тенг конус ички чизилган. Конуснинг баландлиги H. Шарнинг ҳажми топилсин.

759. Уч бурчакли мунтазам призмага шар ички чизилган, бу шар призманинг учала ёғига ва иккала асосига уринади. Шар сиртининг призманинг тўла сиртига нисбати топилсин.

760. Асосида ўткир бурчаги α га тенг ромб ётган пирамида ичига радиуси R га тенг шар чизилган. Пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан φ бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми топилсин.

761. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида ичига ярим шар шундай ички чизилганки, унинг текис ёғи пирамиданинг асосига параллел, шар сирти эса асосга уринади. Пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Шарнинг радиуси r га тенг. Пирамиданинг тўла сирти топилсин.

762. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида ичига ярим шар шундай чизилганки, унинг текис ёғи пирамиданинг асосида ётади, шар сирти эса пирамиданинг ён ёқларига уринади. Пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан α бурчак ташкил этади ва пирамида асосининг томони билан шарнинг диаметри орасидаги айирма m га тенг. Ярим шар тўла сиртининг пирамида тўла сиртига нисбати ва ярим шарнинг ҳажми топилсин.

763. Асосининг радиуси R га тенг ва баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак α бўлган конус ичига чизилган шар конуснинг асосига ва ён сиртига уринади. Конуснинг шар устидаги қисмининг ҳажми топилсин.

764. Доиравий тўғри конуснинг тўла сирти шу конусга ички чизилган шар сиртидан n марта катта. Шу конус ясовчилари асос текислиги билан қандай бурчак ҳосил қилади?

765. Конусга шар ички чизилган. Улар ҳажмларининг нисбати n га тенг. Конус ясовчиси билан асос текислиги орасидаги бурчак топилсин ($n = 4$ деб олиб, ҳисоблансин).

766. Тўла сирти ўқ кесимининг юзидан n марта катта бўлган конуснинг ясовчиси билан ўқи орасидаги бурчак топилсин.

767. Конусга катта доираси конус асосида ётувчи ярим сфера ички чизилган. Конус тўла сиртининг сфера ён сиртига нисбати $18:15$ каби. Конус учидаги бурчак топилсин.

768. Конуснинг ҳажми конус ичига текис ёғи конус асосида ётадиган, ярим шар сирти эса конуснинг ён сиртига уринадиган қилиб чизилган ярим шар ҳажмидан $1\frac{1}{3}$ марта катта. Конуснинг баландлиги ва ясовчиси орасидаги бурчак топилсин.

769. Сферик сиртнинг маркази конуснинг учида, радиуси конуснинг баландлигига тенг. Бу конуснинг ён сирти билан сферик сиртнинг кесишиш чизиғи конуснинг ён сиртини иккита тенгдош қисмга бўлади. Конуснинг баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак топилсин.

770. Баландлиги H ва ясовчиси билан баландлиги орасидаги бурчаги α бўлган конусни маркази конус учида бўлган сферик сирт билан шундай кесиш керакки, конуснинг ҳажми тенг иккига бўлинсин. Шу сферанинг радиуси топилсин.

771. Конуснинг H га тенг баландлигини диаметр қилиб, унга шар чизилган. Конуснинг ясовчиси билан баландлиги орасидаги бурчак α. Шарнинг конусдан ташқарида ётган қисмининг ҳажми топилсин.

772. Ташқи томондан уринувчи иккита шар O ва O_1 ҳамда уларга ташқи чизилган конус берилган. Шарларнинг радиуслари R ва R_1. Асослари шарларнинг конус сиртига уриниш айланаларидан иборат бўлган кесик конуснинг ён сирти ҳисоблансин.

773. Стол устида бир хил r радиусли тўртта шар бир-бирига тегиб турибди. Булар ҳосил қилган чуқурчага устидан яна шундай радиусли бешинчи шар қўйилган. Бешинчи шарнинг энг юқори нуқтасидан стол текислигигача бўлган масофа топилсин.

774. Ҳар бири қолган учтасига уринадиган қилиб жойланган тўртта бир хил шар атрофига ташқи чизилган конус ўқ кесимининг учидаги бурчаги топилсин.

775. Уч бурчакли мунтазам кесик пирамиданинг ёқлари шарга уринади. Пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Шар сиртининг пирамиданинг тўла сиртига нисбати топилсин.

776. Конус ичига баландлиги конус асосининг радиусига тенг цилиндр чизилган. Цилиндр тўла сиртининг конус асосининг юзига нисбати 3 : 2 каби. Конуснинг ўқи билан ясовчиси орасидаги бурчак топилсин.

777. Тўрт бурчакли мунтазам пирамидага ички чизилган шарнинг радиуси r. Шу пирамиданинг қўшни икки ён ёқлари ҳосил қилган икки ёқли бурчак α. Учи шарнинг марказида, асосининг учлари шарнинг берилган пирамида ён ёқларига уринган нуқталарда бўлган пирамиданинг ҳажми топилсин.

778. Конусга радиуси r га тенг шар ички чизилган. Шарга уринувчи ва конус ясовчиларидан бирига перпендикуляр текислик конус учидан d масофада эканлиги маълум бўлса, конуснинг ҳажми топилсин.

779. Кубнинг қирраси a; AB унинг диагонали. Кубнинг A учида бирлашувчи учта ёғига ва B учидан чиқувчи учта қиррасига уринувчи сферанинг радиуси топилсин. Шунингдек сферанинг кубдан ташқаридаги қисмининг сирти топилсин.

780. Қирраси a га тенг тетраэдрга1) шар шундай чизилганки, бу шар тетраэдрнинг ҳамма қиррасига уринади. Бу шарнинг радиуси ва шарнинг тетраэдрдан ташқаридаги қисмининг ҳажми топилсин.

11-БОБ

ТРИГОНОМЕТРИК ШАКЛ АЛМАШТИРИШЛАР

Айниятлар исботлансин

781. $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha.$

782. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$

783. $2(\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$

784. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$

785. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha.$

---

1) 71-бетдаги изоҳга қаранг.

786. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$

787. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1.$

788, $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$

789. $\frac{\cos 2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$

790. $\frac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right).$

791. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$

792. $\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\frac{1+\sin 2y}{\cos 2y}.$

793. $\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\sec^2\alpha\sec^2\beta.$

794. $\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha.$

795. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1.$

796. $\frac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\mathrm{cosec}\,\alpha.$

797. $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\mathrm{tg}\,3\alpha.$

798. $\sin(a-b)+\sin(a-c)+\sin(b-c)=$
$=4\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}.$

799. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1=0.$

800. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$

801. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=$
$=\sin 2\alpha.$

802. $\frac{1-2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=\mathrm{tg}\,\varphi-\mathrm{ctg}\,\varphi$ экани кўрсатилсин.

803. $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$ экани кўрсатилсин.

804. Айният исботлансин:
$\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)=\sin^2\alpha.$

805. Ушбу ифода соддалаштирилсин:
$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$

806. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлса,

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2$$

экани исботлансин.

807. $A+B+C=\pi$ бўлса,

$$\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C=1$$

экани исботлансин.

808. Исботлансин:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}.$$

809. Исботлансин:

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

Логарифмлаш учун қулай шаклга келтирилсин:

810. $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$.

811. $1-\sqrt{2}\cos\alpha+\cos2\alpha$. ✓

812. $1-\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$.

813. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

814. $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

815. $1-\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha$. ✓

816. $\cos\alpha+\sin2\alpha-\cos3\alpha$. ✓

817. $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

818. $\dfrac{2\sin\beta-\sin2\beta}{2\sin\beta+\sin2\beta}$.

819. $\dfrac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

820. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha$.

821. $\cos2\alpha+\sin2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

822. $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin2\alpha-1$.

823. $\dfrac{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$.

824. $2+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha$. ✓

825. $\operatorname{tg}x-1+\sin x(1-\operatorname{tg}x)+\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}$.

826. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$. ✓

827. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$.

828. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}$.

829. агар $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ бўлса, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

12 - БОБ.

ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР

Тенгламалар ечилсин

830. $1 - \sin 5x = \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2$. ✓

831. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

832. $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$.

833. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

834. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

835. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

836. $\sin(x - 60^\circ) = \cos(x + 30^\circ)$.

837. $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.

838. $\sin^2 x(\operatorname{tg} x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$.

839. $\cos 4x = -2\cos^2 x$.

840. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$.

841. $\sin 3x = \cos 2x$.

842. $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$.

843. $3\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$.

844. $(1 + \cos 4x)\sin 4x = \cos^2 2x$. ✓

845. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.

846. $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.

847. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 1$.

848. $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$.

849. $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x\cos x$.

850. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

851. $\sin x + \cos x = 1$.

852. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

853. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

854. $\sin x\sin 7x = \sin 3x\sin 5x$.

855. $\cos x\sin 7x = \cos 3x\sin 5x$.

856. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$

857. $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x.$

858. $5\cos 2x = 4\sin x.$

859. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$

860. $8\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \sec x.$

861. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos x} = \sec^2 \frac{x}{2} - 1.$ ✓

862. $1 - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi + x}{2} = 0.$

863. $2\left|1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right| = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2}.$ ✓

864. $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \sin x = 4\sin^3 x.$

865. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2.$

866. $2\operatorname{ctg}(x - \pi) - (\cos x + \sin x)(\operatorname{cosec} x - \sec x) = 4.$

867. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sec x - \cos x}{2\sin x}.$

868. $\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}.$

869. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sec(-x) - \cos(2\pi - x).$ ✓

870. $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x \sec^2 x.$

871. $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$

872. $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = 0{,}375.$

873. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x.$

874. $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right).$

875. $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

876. $1 - 3\cos x + \cos 2x = \frac{\operatorname{cosec}(\pi - x)}{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x}.$

877. $[\cos x - \sin(x - \pi)]^2 + 1 = \frac{2\sin^2 x}{\sec^2 x - 1}.$

878. $(\sin x + \cos x)^2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

879. $2 - \sin x\cos 2x - \sin 2x\cos x =$

$$= \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\right|^2.$$

880. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$

881. $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$

882. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x.$

883. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4\cos^2 x} = \sin(x + 30^\circ)\sin(x - 30^\circ).$

884. $\frac{\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x)}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} + \frac{\operatorname{ctg} x}{(1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2}.$

885. $\sec^2 x - \left(\cos x + \sin x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x - 30^\circ) + \cos(60^\circ - x)}{\cos x}.$

886. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}.$

887. $2\sqrt{2}\sin(45^\circ + x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin x}.$

888. $1 - \frac{2(\sin 2x - \cos 2x\operatorname{tg} x)}{\sqrt{3}\sec^2 x} = \cos^4 x - \sin^4 x.$

889. $\sin 3x = 4\sin x\cos 2x.$

890. $\sec x + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x\operatorname{tg}\frac{\pi + x}{2}.$

891. $\frac{\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} - 2\sin(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x) = 0.$

892. $\operatorname{tg}(x - 45^\circ)\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = \frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}.$

893. $\frac{\operatorname{tg}(x + 45^\circ) + \operatorname{tg}(x - 45^\circ)}{2} = \operatorname{tg}(x - 45^\circ)\operatorname{tg}(x + 45^\circ)\operatorname{tg} x.$

894. $\operatorname{tg}(x + \alpha) + \operatorname{tg}(x - \alpha) = 2\operatorname{ctg} x.$

895. $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x + \pi}{2}}.$

896. $\frac{\sin x}{\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x)} =$

$$= 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) - \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

897. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

897a. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$.

Тенгламалар системалари ечилсин:

898. $\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$, $\cos x\cos y = \frac{1}{4}$.

899. $x + y = \alpha$, $\sin x \sin y = m$.

900. $x + y = \alpha$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m$.

901. $x + y = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1$.

902. $2^{\sin x + \cos y} = 1$, $16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4$.

903. $\sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$.

904. $\sin x = 2\sin y$, $\cos x = \frac{1}{2}\cos y$.

13-БОБ

ТЕСКАРИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР

905. Ҳисоблансин:

$$2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}(-1) + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\arccos(-1).$$

906. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ экани исботлансин.

907. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ экани исботлансин.

Ҳисоблансин:

908. $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.

909. $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$.

910. $\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right]\right.$.

911. $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

912. $\sin\left(3 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} + 2 \arccos \frac{1}{2}\right)$.

913. $\cos\left[3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

Айниятлар исботлансин:

914. $\operatorname{arc\,tg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

915. $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

916. $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

917. $\arccos \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

918. $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{32}{43}$.

919. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Тенгламалар ечилсин:

920. $4 \operatorname{arc\,tg}(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$.

921. $6 \arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$.

922. $\operatorname{arc\,tg}(x + 2) - \operatorname{arc\,tg}(x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

923. $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}$.

924. $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1 - x} = \arcsin \frac{1}{3}$.

925. $\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a - b}{a + b} = \operatorname{arc\,tg} x$.

926. $\arcsin 3x = \arccos 4x$.

927. $2 \arcsin x = \arcsin \frac{10x}{13}$.

928. Тенгламалар системаси ечилсин:

$$x + y = \operatorname{arc\,tg} \frac{2a}{1 - a^2}, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a^2 \ (|a| < 1).$$

ЖАВОБЛАР ВА ЕЧИМЛАР

БИРИНЧИ ҚИСМ
АРИФМЕТИКА ВА АЛГЕБРА

1-БОБ
АРИФМЕТИК ҲИСОБЛАШЛАР

1. 6,5625.
2. $29\frac{7}{12}$.
3. $365\frac{5}{8}$.
4. $3\frac{4}{15}$.
5. $18\frac{1}{3}$.
6. 50.
7. 23,865.
8. $36\frac{25}{72}$.
9. 599,3.
10. 84,075.
11. 2,5.
12. $2\frac{17}{21}$.
13. 0,0115.
14. $\frac{157}{280}$.
15. $38\frac{15}{64}$.
16. 6.
17. 700.
18. 100.
19. 10.
20. $7\frac{1}{2}$.
21. 5.
22. 3.
23. $2\frac{3}{80}$.
24. 5.
25. $1\frac{17}{84}$.
26. 10.
27. 1.
28. 1320.
29. 11.
30. 250.
31. 4.
32. 4000.
33. 66.
34. 2.
35. 9.5,
36. 0,09.
37. $\frac{35}{48}$.
38. 2.
39. $-\frac{1}{16}$.
40. $2\frac{1}{3}$.
41. $\frac{1}{8}$.
42. 1301.
43. —20,384.
44. 2,25.
45. $1\frac{1}{8}$.

2-БОБ

АЛГЕБРАИК ШАКЛ АЛМАШТИРИШЛАР

Дастлабки изоҳлар

Бу бобнинг масалаларини (62-масаладан бошлаб) ечишда қуйидагиларни назарда тутиш зарур.

1. Агар илдиздан чиқадиган a сон мусбат (ёки нолга тенг) бўлса ва, ундан ташқари, илдизнинг ўзи мусбат қилиб олинса, $\sqrt[n]{a}$ илдиз арифметик илдиз деб аталишини эслатиб ўтамиз.

Мисоллар. $\sqrt[3]{-27}$ ифода арифметик илдиз бўла олмайди, чунки илдиз остидаги сон манфий. Агар $\sqrt[4]{16}$ ифоданинг фақат мусбат қиймати (яъни 2) қараладиган бўлса, бу ифода арифметик илдиз бўлади. Агар $\sqrt[3]{27}$ ифоданинг фақат ҳақиқий қиймати қараладиган бўлса, бу ифода арифметик илдиз (яъни 3) бўлади (унинг яна иккита мавҳум қиймати бор: $-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ва $-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$). $\sqrt{-16}$ ифода арифметик илдиз бўла олмайди, чунки илдиз остидаги сон манфий.

2. Алгебрада баён қилинадиган радикалларнинг шаклини алмаштириш қоидалари фақат арифметик илдизлар учунгина сўзсиз тўғридир.

Масалан, $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2}$ тенглик x нинг манфий қийматларида тўғри эмас. Масалан, $x=-8$ бўлганда тенгликнинг чап томони фақат битта ҳақиқий қийматига эга бўлади, $\sqrt[3]{-8}=-2$, ўнг томони эса иккита ҳақиқий қийматга эга бўлади: $\sqrt[6]{64}=\pm 2$ (агар илдизнинг мавҳум қийматлари қаралса, у ҳолда $\sqrt[3]{-8}$ нинг учта қиймати бўлади, $\sqrt[6]{64}$ нинг эса олтита қиймати бўлади).

Шуни назарда тутиб, иррационал ифодалар шаклини айний ўзгартириш қилинадиган бу бўлимда биз илдиз остидаги ҳамма ифодалар фақат мусбат (ва ноль) қийматлар[1]) олади, деб фараз қиламиз. Шу билан бирга, соддалаштириладиган ифодага кирув-

---

[1]) Биз бир ҳолда илдиз остидаги ифодаларнинг мусбат бўлиши тўғрисида қабул қилинган келишувдан чекинишга мажбур бўлдик. Бу ўринда биз 64-масалани кўзда тутамиз, бунда куб илдиз остидаги ифода ҳеч қандай аҳволда мусбат бўла олмайди. (Бу масаланинг ечимини 109-бетдан қаранг).

чи ҳарфий миқдорларга баъзи бир қўшимча шартлар қўйилади. Бирмунча ҳолларда биз бу шартларни кўрсатамиз (масалан, **65—71**-масалаларга берилган изоҳларга қаранг). Баъзан ҳарфий миқдорларни қаноатлантириши керак бўлган шартлар масаланинг текстида кўрсатилади. Унда масалани ечишда бу шартларда илдиз остидаги ҳамма ифодалар мусбат эканини исбот қилиш керак.

3. $\sqrt{x^2}=x$ тенглик (бунда $\sqrt{x^2}$ арифметик илдиз) фақат $x\geqslant 0$ бўлгандагина тўғри бўлади. x нинг манфий қийматларида у тўғри эмас; унинг ўрнига $\sqrt{x^2}=-x$ тенглик ўринли бўлади. Иккала ҳолни $\sqrt{x^2}=|x|$ тенглик билан бирлаштириш мумкин. Агар $x=-3$ бўлса, $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=-(-3)$ бўлади (бунда $\sqrt{(-3)^2}$ арифметик илдиз бўлади, чунки илдиз остидаги сон $(-3)^2$ мусбат сон ва илдизнинг қиймати мусбат қилиб олинган). $\sqrt{(-3)^2}=|3|$ ёзиш ҳам мумкин. Бу изоҳни беришнинг сабаби шуки, бу кўпчилик дарсликларда (шу жумладан, А. П. Киселёвнинг „Алгебра“ дарслигининг ҳамма нашрларида ҳам) йўқ. Бу изоҳнинг зарурати қуйидаги мисоллардан кўринади.

1-мисол. $\sqrt{m^2-2mn+n^2}$ ифода соддалаштирилсин.

Ечиш. $\sqrt{m^2-2mn+n^2}=\sqrt{(m-n)^2}=m-n.$
Бу фақат $m\geqslant n$ бўлганда тўғри бўлади. $m<n$ бўлганда унинг ўрнига $\sqrt{m^2-2mn+n^2}=-(m-n)$, яъни $\sqrt{m^2-2mn+n^2}=n-m$ тенгликни ёзиш мумкин. Масалан, $m=2$ ва $n=3$ бўлса, $m-n=-1$ бўлади, у ҳолда

$$\sqrt{m^2-2mn+n^2}=\sqrt{4-12+9}=\sqrt{1}=1.$$

Умумий формула $\sqrt{m^2-2mn+n^2}=|m-n|$ ёки $\sqrt{m^2-2mn+n^2}=|n-m$ кўринишда бўлади.

2-мисол. Ушбу ифода соддалаштирилсин:

$$\frac{\sqrt{4+4p+p^2}-\sqrt{4-4p+p^2}}{\sqrt{4+4p+p^2}+\sqrt{4-4p+p^2}}.$$

Қисқалик учун бу ифодани A билан белгилаб ($p\neq -2$ бўлганда):

$$A=\frac{|2+p|-|2-p|}{|2+p|+|2-p|}=\frac{1-\left|\frac{2-p}{2+p}\right|}{1+\left|\frac{2-p}{2+p}\right|}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Агар $\frac{|2-p|}{|2+p|}$ каср мусбат бўлса,

$$A=\frac{1-\frac{2-p}{2+p}}{1+\frac{2-p}{2+p}}=\frac{p}{2},$$

агар манфий бўлса,

$$A=\frac{1+\frac{2-p}{2+p}}{1-\frac{2-p}{2+p}}=\frac{2}{p}.$$

p нинг қандай қийматларида ҳар иккала ҳол ўринли бўлишини текшириб кўрамиз. $2-p$ ва $2+p$ нинг ишоралари бир хил бўлганда $\frac{2-p}{2+p}$ каср мусбат бўлади. Олдин $2-p$ ва $2+p$ миқдорларнинг иккаласи ҳам мусбат бўлишини талаб қиламиз. $2-p$ миқдор $p<2$ бўлганда мусбат; $2+p$ миқдор $p>-2$ бўлганда мусбат. Демак, $-2<p<2$ бўлганда $2-p$ ва $2+p$ миқдорлар ҳам мусбат бўлади. $2-p$ ва $2+p$ миқдорларнинг иккаласи манфий бўлсин десак, бу талабнинг бажарилмаслигини кўрамиз, чунки $p>2$ бўлганда $2-p$ манфий, $p>-2$ бўлганда $2+p$ манфий бўлади, бу шартлар бирлаша олмайди. Демак, $\frac{2-p}{2+p}$ касри фақат $-2<p<2$ бўлганда мусбат бўлади. $p>2$ қийматларда, шунингдек, $p<-2$ қийматларда $\frac{2-p}{2+p}$ каср манфий бўлади.

Шундай қилиб, $|p|<2$ бўлганда $A=\frac{p}{2}$ ва $|p|>2$ бўлганда $A=\frac{2}{p}$ бўлади. $|p|=2$ бўлганда иккала ифода ярайди.

3-мисол. $\sqrt{a^6}=a^3$ тенглик $a\geqslant 0$ бўлгандагина тўғри бўлади. a нинг манфий қийматларида унинг ўрнига $\sqrt{a^6}=-a^3$ тенглик ўринли бўлади. $a=-1$ бўлганда $\sqrt{(-1)^6}=-(-1)=+1$ бўлади. Бу ерда $\sqrt{(-1)^6}$ ифода арифметик илдиз, чунки илдиз остидаги сон $(-1)^6=1$ мусбат сон ва илдизнинг қиймати мусбат қилиб олинган.

4-мисол. $\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}$ ифодадаги кўпайтувчилар радикал белгисидан ташқарига чиқарилсин.

Бу илдиз фақат $a\geqslant 3$ бўлгандагина арифметик илдиз бўлади, чунки $a<3$ бўлганда $(a-3)^3$ кўпайтувчи манфий бўлади, шунинг учун бутун илдиз остидаги ифода манфий. Ушбу

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=(a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3}$$

тенглик фақат $a\geqslant 5$ бўлганда тўғри; $a<5$ бўлганда унинг ўрнига

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=-(a-5)^3(a-3)\sqrt{a-3}$$

ёзиш керак. Умумий формула

$$\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}=|a-5|^3(a-3)\sqrt{a-3}\ \text{(бунда } a\geqslant 3).$$

4. Умуман, $\sqrt[n]{x^n}=x$ тенглик (бунинг чап томони арифметик илдизни билдиради) x нинг мусбат қийматларидагина (ва $x=0$ бўлганда) тўғри бўлади. Агар n — жуфт сон бўлса, x нинг манфий қийматида $\sqrt[n]{x^n}=x$ ўрнига $\sqrt[n]{x^n}=-x$ ҳосил бўлади. Агар n — тоқ сон бўлса, x нинг манфий қийматида арифметик илдиз бутунлай бўлмайди.

46. Қавс ичидаги охирги уч ҳадни группалаб, кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$a^2-b^2-c^2+2bc=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)\ (a-b+c).$$

Берилган ифода шундай кўринишга келади:

$$(a+c+b)(a+c-b)=(a+c)^2-b^2.$$

Жавоб. $(a+c)^2-b^2$; $139\frac{91}{225}$.

47. Қавс ичидаги ифода $\frac{1}{n-1}$ га тенг. Охирги касрнинг сурат ва махражидаги ҳамма ишораларни қарама-қаршисига алмаштирамиз, шундан кейин суратни кўпайтувчиларга ажратамиз; каср қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{(a+n)(n-1)\,(n^2+n+1)}{a^2-1}.$$

Жавоб. $\frac{n^2+n+1}{n}$.

48. Иккинчи касрнинг махражи $(1+x)(x-2a)$ га тенг. Қавс ичидаги ифода $1+x$ га тенг. Берилган ифода

$$\frac{x}{a(x-2a)}-\frac{2}{x-2a}=\frac{1}{a}\ \text{га тенг.}$$

Жавоб. $\frac{1}{a}$.

49. *Жавоб.* $\frac{1}{a+2x}$.

50. Иккинчи қўшилувчини $\frac{a-130}{3a-1}$ кўринишида ёзамиз. Қавс ичидаги касрларни умумий махражга келтирамиз; $\frac{-3\,(2a^2+9a+10)}{a\,(3a-1)}$ ҳосил бўлади; $2a^2+9a+10$ учҳадни нолга тенглаб ва $a_1=-2$; $a_2=-\frac{5}{2}$ илдизларни топиб, кўпайтувчиларга ажратамиз.

$$2a^2+9a+10=2\,(a+2)\left(a+\frac{5}{2}\right).$$

Энди қавс ичидаги ифода

$$\frac{-3\,(a+2)\,(2a+5)}{a\,(3a-1)}$$

кўринишга келади. Уни

$$\frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}=\frac{4a\,(a-3)\,(3a-1)}{(2+a)\,(2-a)}$$

га кўпайтирамиз.

Жавоб. $\frac{12\,(2a+5)\,(a+3)}{a-2}$.

51. Ҳар бир касрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратиб, уларни қисқартирамиз.

Жавоб. $\frac{ab}{a+b}$.

52. Иккинчи касрнинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз ва бу касрни қисқартирамиз. Бу ифода

$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{1}{x+y}$$

кўринишига келади.

Жавоб. $\frac{1}{x+y}$.

53. Касрларнинг махражлари соддалаштирилгандан кейин

$$\frac{4(x^2+x+1)}{3} \text{ ва } \frac{4(x^2-x+1)}{3}$$

кўринишига келади. Берилган ифодани бундай ёзамиз:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right)=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}.$$

Жавоб. $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

54. Олдинги тўртта каср махражларини кўпайтувчиларга ажратамиз ва биринчи касрни $a-1$ га қисқартирамиз. Қавс ичидаги ифода

$$\frac{1}{a-1}+\frac{2(a-1)}{(a+2)(a-2)}-\frac{4(a+1)}{(a-1)(a+2)}+\frac{a}{(a-1)(a-2)}=$$
$$=\frac{2(a+3)}{(a-1)(a+2)(a-2)}$$

кўринишига келади. Буни $\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}$ касрга кўпайтириш керак. Сўнгги касрнинг суратидаги ҳадларни группалаб, кўпайтувчиларга ажратамиз, махражини кубларнинг йиғиндиси (a^3+3^3) каби кўпайтувчиларга ажратамиз, у ҳолда каср

$$\frac{36(a-1)(a+2)(a-2)}{(a+3)(a^2-3a+9)}$$

кўринишга келади.

Жавоб. $\frac{72}{a^2-3a+9}$.

55. Бўлинувчини ташкил этувчи касрлар йиғиндисини A билан, бўлувчи касрлар йиғиндисини B билан белгилаймиз. A га кирувчи кўп ҳадларни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$A=\frac{3(x+2)}{2(x+1)(x^2+1)}+\frac{(x+2)(2x-5)}{2(x-1)(x^2+1)}.$$

Ҳосил қилинган ифодада $\frac{x+2}{2(x^2+1)}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$A=\frac{x+2}{2(x^2+1)}\cdot\left(\frac{3}{x+1}+\frac{2x-5}{x+1}\right)=\frac{(x+2)(x^2-4)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

ҳосил бўлади. Сўнгра

$$B=\frac{2(x^2-4)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

ни топамиз. A ни B га бўлиб, $\frac{x+2}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\frac{x+2}{2}$.

56. Бўлинувчини A билан, бўлувчини B билан белгилаймиз; A ифодаға кирувчи $x^2-xy-2y^2$ учҳадни нолга тенглаб, ҳосил бўлган тенгламани номаълумлардан бирига, масалан, x га нисбатан ечамиз; $x_1=-y$ ва $x_2=2y$ ни топиб, учҳаднинг кўпайтувчиларга ажралмасини ҳосил қиламиз: $x^2-xy-2y^2=(x+y)(x-2y)$. Энди

$$A=\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(x-2y)}$$

ҳосил бўлади.

Айрилувчи қилиб $x-2y$ ўрнига $2y-x$ ни ёзамиз, шу билан бир вақтда шу касрнинг суратидаги ишораларни ўзгартирамиз; сўнгра касрларни умумий махражга келтирамиз.

$$A=\frac{2x^2+y-2}{(2y-x)(x-y)}$$

ҳосил бўлади. B ифодадаги суратни $(2x^2+y^2)-2^2$ кўринишига келтириб ва махражни (x^2+xy ва $y+x$ га группалаб) кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$B=\frac{(2x^2+y+2)(2x^2+y-2)}{(x+y)(x+y)}.$$

A ни B га бўлиб, $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.

57. Берилган ифодага кирувчи кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратиб,

$$\frac{(a+2)(a-1)}{a^n(a-3)}\cdot\left[\frac{4(a+1)}{4(a+1)(a-1)}-\frac{3}{a(a-1)}\right]$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\frac{a+2}{a^{n+1}}$.

58. Бўлинувчини A билан, бўлувчини B билан белгилаймиз. A касрнинг сурати

$$\frac{1}{2}[4a^2(b+c)^{2n}-1]=\frac{1}{2}[2a(b+c)^n+1][2a(b+c)^n-1]$$

махражи эса

$$a(n^2-a^2-2a-1)=a[n^2-(a+1)^2]=a(n+a+1)(n-a-1).$$

B касрнинг суратини ўзгартмасдан қолдирамиз, махражини эса $-ac(n-a-1)$ кўринишга келтирамиз.

Жавоб. $-\frac{[2a(b+c)^n+1]c}{2(n+a+1)}$.

59. Биринчи усул. Касрларнинг ҳаммасини умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc\ (a-b)(a-c)(b-c)}. \qquad \text{(a)}$$

Махражга кирувчи иккиҳадларни бир-бирига кўпайтириб, $a^2b-ab^2+b^2c-a^2c+ac^2-bc^2$ ни, яъни суратдаги ифодани ҳосил қиламиз. Қисқартиргандан кейин $\frac{1}{abc}$ ҳосил бўлади.

Иккинчи усул. (а) касрнинг суратида $a=b$ фараз қилиб, бунда сурат нолга айланишига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, Безу теоремасига кўра, сурат $(a-b)$ га бўлинади. Бўлинмада

$$a(b-c)-c(b-c)=(b-c)(a-c).$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, сурат $(a-b)(b-c)(a-c)$ га тенг.

Учинчи усул. Берилган ифоданинг фақат олдинги икки касрини умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{b^2-bc-a^2+ac}{ab(a-b)(a-c)(b-c)}$$

ҳосил бўлади. Суратнинг ҳадларини (биринчи билан учинчини ва иккинчи билан тўртинчини) группалаб,

$$(b+a)(b-a)-c(b-a)=(a-b)(c-a-b)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Энди касрни $(a-b)$ га қисқартирамиз ва берилган ифоданинг учинчи касрини қўшамиз.

Жавоб. $\frac{1}{abc}$.

60. Биринчи кўпайтувчи $\frac{a+x+1}{a+x-1}$ га тенг. Ўрта қавс ичидаги ифода $\frac{(a+x)^2-1}{2ax}=\frac{(a+x+1)(a+x-1)}{2ax}$ га тенг. Берилган ифодаларни бир-бирига кўпайтириб, $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$ ни топамиз. x ўр-

нига $\frac{1}{a-1}$ ни қўйсак, сурат $\frac{a^4}{(a-1)^2}$ кўринишга келади, махраж $\frac{2a}{a-1}$ га тенг бўлади.

Жавоб. $\frac{a^3}{2(a-1)}$.

61. Ўрта қавс ичидаги ифодани A билан, кичик қавс ичидаги ифодани B билан белгилаймиз. $A : B^{-1} = AB$ ҳосил бўлади. A ифодани манфий кўрсаткичли даражалардан қутқарсак,

$$A = \frac{2b^2 - 3ab - 2a^2}{a(a+2b)(2b-a)} = \frac{(b-2a)(2b+a)}{a(a+2b)(2b-a)} = \frac{b-2a}{a(2b-a)}$$

ҳосил бўлади. B нинг шаклини ўзгартириб,

$$B = a^n\left(2b + 3a - \frac{6a^2}{2a-b}\right) = a^n \cdot \frac{b(a-2b)}{2a-b}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Ниҳоят, $AB = a^{n-1}b$ ни топамиз (бир-бирига кўпайтирилаётган касрлардан бирининг сурат ва махражидаги ишораларни ўзгартирамиз).

Жавоб. $a^{n-1}b$.

62. Сурат $a^2 - b^2$ шаклга, махраж $a + b$ шаклга алмаштирилади.

Жавоб. $a - b$.

Изоҳ. Илдизлар арифметик илдиз бўлиши учун a ва b сонлар манфий бўлмаслиги керак.

63. Биринчи радикал

$$\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^2} = (a-b)\sqrt[3]{(a+b)^2} \text{ га тенг.}$$

Жавоб. $b\,(a^3 - b^3)$.

Изоҳ. $a \geqslant b$ деб фараз қилинади (бўлмаса биринчи илдиз арифметик илдиз булмайди).

64. Бу мисолда биз илдиз остидаги ифода фақат мусбат қийматлар олиши мумкин, деган келишувдан (102-бетга қаранг) воз кечишга мажбурмиз. Гап шундаки, куб радикал остида турган миқдор ҳамма вақт манфий бўлади. Ҳақиқатан, $\sqrt{6x}$ ва $\sqrt{2x}$ ифодаларни (улар фақат $x \geqslant 0$ бўлганда ҳақиқий қийматга эга бўлади) мусбат деб ҳисоблашимиз керак (бўлмаса, $2\sqrt{6x} - 4\sqrt{2x}$ ифода бир қийматлилигини йўқотади). Лекин у ҳолда $2\sqrt{6x} - 4\sqrt{2x} = \sqrt{24x} - \sqrt{32x}$ айирма манфий бўлади.

Шундай қилиб, биз куб илдиз остида манфий сон турибди, деб фараз қиламиз. У вақтда куб илдизнинг ўзи ҳам манфий қиймат олади. Радикаллар шаклини алмаштириш қоидасини қўлланиш учун биз бундай шакл алмаштиришимиз керак:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}=-\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{6x}}.$$

Энди ўнг томонда турган радикал арифметик илдиз бўлади. Буни берилган кўпайтувчиларнинг биринчиси билан бир хил кўрсаткичга келтиргандан кейин $-\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{6x}}=-\sqrt[6]{(4\sqrt{2x}-2\sqrt{6x})^2}=$ $=-\sqrt[6]{8x(7-4\sqrt{3})}$ ҳосил бўлади. Илдизларни бир-бирига кўпайтириб, $-\sqrt[6]{64x^2[49-(4\sqrt{3})^2]}=-2\sqrt[3]{x}$ ифодани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $-2\sqrt[3]{x}.$

Изоҳ. Агар куб илдиз остидаги ифоданинг манфийлиги эътиборга олинмаса, жавоб нотўғри чиқади: $2\sqrt[3]{x}$ 1).

65. Биринчи радикал $\sqrt[4]{(a+1)^4(a-1)}$ га тенг. $(a+1)$ кўпайтувчини радикал ишораси остидан чиқариб, $|a+1|\sqrt[4]{a-1}$ ифодани ҳосил қиламиз. Берилган ифода

$$\frac{a}{2}|a+1|\sqrt[4]{a-1}\cdot\frac{\sqrt{a-1}}{(a+1)(a+2)}$$

га тенг. Радикалларни бир хил кўрсаткичга келтирамиз:

$$\frac{a}{2}\,\frac{|a+1|\sqrt[4]{(a-1)^3}}{(a+1)(a+2)}.$$

Агар $a+1$ сон мусбат бўлса, $|a+1|=a+1$ бўлади ва қисқартиргандан кейин $\frac{a}{2}\,\frac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{(a+2)}$ ҳосил бўлади.

Изоҳ. $a+1$ сон мусбат ҳам бўлади. Ҳақиқатан, илдиз остидаги $(a+1)^4(a-1)$ ифода мусбат сон (ёки нолга тенг) деб фараз қилингани, $(a+1)^4$ кўпайтувчи эса ҳеч бир вақт манфий бўла олмагани учун $a-1\geqslant 0$, яъни $a\geqslant 1$ бўлади, бу шартга мувофиқ $a+1\geqslant 2$.

Жавоб. $\frac{a}{2}\,\frac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{(a+2)}.$

66. Ҳамма илдизларни арифметик илдиз деб ҳисоблаб,

$$\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\quad\text{ва}\quad\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}\,a^2}{9(1+a)^2}}$$

---

1) Бу китобнинг русча биринчи нашрини тайёрлашда тузувчилар юқорида кўрсатилган келишувга асосланиб, унинг шу мисолда бажарилмаслигига эътибор бермаганлар ва эслатиб ўтилган нотўғри жавобни ҳосил қилганлар.

кўпайтувчиларни бир хил 6 кўрсаткичга келтирамиз. Биринчи ва иккинчи кўпайтувчи мос равишда

$$\sqrt[6]{\frac{(1+a)^3(1+a)}{27a^3}}, \quad \sqrt[6]{\frac{3a^4}{81(1+a)^4}}$$

кўринишга келади. Уларни бир-бирига кўпайтириб, $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$ ни ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Биринчи кўпайтувчи $a > 0$ бўлгандагина арифметик илдиз бўлади ($a < 0$ бўлганда илдиз остидаги ифода манфий бўлади, $a = 0$ бўлганда маъносини йўқотади). Иккинчи кўпайтувчи эса a нинг қиймати ($a = -1$ дан бошқа) ҳар қандай бўлганда ҳам арифметик илдиз бўлади. Демак, a миқдорга ҳар қандай мусбат қиймат бериш мумкин.

Жавоб. $\frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$.

67. ab ни биринчи радикал ишораси остига киритамиз. Берилган ифода

$$\sqrt[n]{a-b}\,\frac{1}{\sqrt[n]{a-b}} = 1$$

кўринишини олади.

Изоҳ. Берилган радикаллар арифметик илдизлар бўлиши учун $a \geqslant b$ бўлиши керак. $a = b$ ҳол бунга кирмайди, чунки иккинчи кўпайтувчи маъносини йўқотади.

Жавоб. 1.

68. Махражлардаги иррационалликни йўқотамиз:

$$(\sqrt{6}-11)(\sqrt{6}+11) = -115.$$

ҳосил қиламиз.

Жавоб. -115.

69. Бўлинувчи $\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{b}$ га тенг; бўлувчи $\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$ га; бўлинма $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$ га тенг.

Изоҳ. Берилган илдизларнинг ҳаммаси арифметик илдиз бўлиши учун учта шарт: $a \geqslant 0$, $a-b \geqslant 0$, $a+b \geqslant 0$ бир вақтда қаноатлантирилиши керак (уларни иккита шарт: $a \geqslant 0$, $|b| < |a|$ билан алмаштириш мумкин).

Жавоб. $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$.

70. Бўлинувчи $\frac{2b}{b^2-a}$ га, бўлувчи $\frac{3b}{b^2-a}$ га тенг. Бўлинма $\frac{2}{3}$. a нинг қиймати ҳар қандай мусбат сон бўлиши мумкин; b эса, $\pm\sqrt{a}$ дан бошқа, ҳар қандай қиймат олиши мумкин.

Жавоб. $\frac{2}{3}$.

71. Биринчи касрнинг сурати

$$\frac{(\sqrt{1+a})^2+(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{|1+a|+|1-a|}{\sqrt{1-a^2}}$$

кўринишга келтирилади. Агар $1+a$ ва $1-a$ ифодалар иккаласи мусбат бўлса, у ҳолда (103-бетда 3-пунктдаги дастлабки изоҳларга қаранг). Сурат $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$ га тенг бўлади. Шу шартда махраж $\frac{|1+a|-|1-a|}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$ бўлади; каср $\frac{1}{a}$ га, берилган ифода эса 0 га тенг.

Изоҳ. Берилган ифодага кирувчи радикаллар арифметик илдизлар бўлиши учун $1+a$ ва $1-a$ миқдорларнинг ишоралари бир хил бўлиши керак. Лекин уларнинг иккаласи ҳам манфий бўлиши мумкин эмас, чунки $a<-1$, шартида $1+a<0$ ва $a>1$ шартида $1-a<0$, бу шартлар бир-бирига зид. $1+a$ ва $1-a$ миқдорларнинг иккаласи ҳам мусбат бўлиши учун $-1<a<1$ шартнинг бажарилиши, яъни $|a|<1$ бўлиши керак ($a=+1$ қиймат бундан мустасно, чунки буларнинг ҳар бирида $\frac{1+a}{1-a}$, $\frac{1-a}{1+a}$ ифодалардан биттаси маъносини йўқотади; $a=0$ қиймат ҳам бундан мустасно, чунки $\frac{1}{a}$ каср маъносини йўқотади).

Жавоб. 0.

72. $\sqrt{x^2-1}$ ифодага $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ ни қўйиб,

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Шартга кўра $a\geqslant 1$ бўлгани учун, $a-\frac{1}{a}\geqslant 0$. Шунинг учун

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

Худди шунинг сингари $\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right)$ ни топамиз.

Радикалларнинг топилган қийматларини берилган ифодада ўрнига қўямиз.

Жавоб. $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$.

73. $\sqrt{a+bx}$ ва $\sqrt{a-bx}$ ифодаларга $x=\frac{2am}{b(1+m^2)}$ ни қўйиб,

$\sqrt{a+bx}=\sqrt{a+\frac{2am}{1+m^2}}=|1+m|\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}$ ва $\sqrt{a-bx}=$

$=|1-m|\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}$ ни топамиз. $1+m^2$ миқдор доим мусбат бўлгани учун, a миқдор ҳам мусбат бўлиши керак ($a<0$ бўлганда иккала илдиз мавҳум, $a=0$ бўлганда илдизлар нолга тенг ва берилган ифода ноаниқ бўлади). Қўшимча шартга кўра $|m|<1$ бўлгани учун $1+m$ ва $1-m$ миқдорларнинг иккаласи ҳам мусбат бўлади.

Берилган ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}+(1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}}{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}-(1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}}=\frac{1}{m}.$$

Жавоб. $\frac{1}{m}$ ($a>0$ бўлганда).

74. Масала бундан олдинги масалага ўхшайди:

$$(m-x)^{\frac{1}{2}}=\left(m-\frac{2mn}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{(n-1)^2}}{\sqrt{n^2+1}}=m^{\frac{1}{2}}\frac{|n-1|}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Шартга кўра $n<1$ бўлгани учун

$$(m-x)^{\frac{1}{2}}=\frac{m^{\frac{1}{2}}(1-n)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Шунга ўхшаш

$$(m+x)^{\frac{1}{2}}=\frac{m^{\frac{1}{2}}(1+n)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Жавоб. $\frac{1}{n}$.

75. $1-x^2$ ифодага $x=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ ни қўямиз.

$$1-x^2=\frac{(1+k)^2-4k}{(1+k)^2}=\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2}$$

ҳосил бўлади. Энди $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1:\sqrt{1-x^2}=\frac{|1+k|}{|1-k|}$ ни топамиз. Қўшимча шартга кўра $k>1$ бўлгани учун, $1+k$ миқдор мусбат, $1-k$ эса манфий. Шунинг учун $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+k}{k-1}$. Биринчи ўрта қавс ичида $\frac{k}{k-1}$ ҳосил бўлади. Иккинчи ўрта қавс ичида $\frac{1}{k-1}$ ҳосил бўлади. Берилган ифода

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{k-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{k-1}}{k}+\sqrt{k-1}$$

га тенг.

Жавоб. $\sqrt{k-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

76. Биринчи қавс ичидаги ифода $\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}$ га тенг (даража кўрсаткичи — 2 фақат учинчи қўшилувчининг суратига тегишлидир!). Бу ифода соддалаштирилгандан кейин $\frac{-(a-1)^2}{4a}$ ёки $\frac{-(1-a)^2}{4a}$ ҳосил бўлади.

$a>-1$ бўлгандагина $\sqrt[3]{(a+1)^{-3}}=\frac{1}{a+1}$ ва $(a+1)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(a+1)^3}$ ифодалар арифметик илдиз бўлади. Бу шартда $\sqrt{(a^2-1)(a-1)}=$ $=\sqrt{(a-1)^2(a+1)}$ радикал ҳам арифметик илдиз бўлади (чунки $(a-1)^2$ кўпайтувчи манфий бўла олмайди). $a\geqslant 1$ бўлгандагина $\sqrt{(a-1)^2(a+1)}=(a-1)\sqrt{a+1}$ тенглик тўғри бўлади. Агар $a<1$ бўлса, $\sqrt{(a-1)^2(a+1)}=-(a-1)\sqrt{a+1}$ бўлади (103-бет, 3-пунктдаги дастлабки изоҳларга қаранг).

Берилган ифода $-\frac{(a-1)^2}{4a}\cdot\left[\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right]$ га тенг.

Изоҳ. $a=\pm 1$ бўлганда ифода маъносини йўқотади.

Жавоб. $a>1$ бўлганда $\frac{a-1}{a+1}$, $-1<a<1$, яъни $|a|<1$ бўлганда $\frac{(a^2+1)(1-a)}{2a(a+1)}$.

77. Берилган ифодани

$$2\left[\sqrt{x^2(x^2-a^2)}-a^2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-a^2}}\right]\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2ax\sqrt{\left(\frac{x}{a}-2\frac{a}{x}\right)^2}}$$ кўринишга

келтириш мумкин, $x^2-a^2>0$, яъни $|x|>|a|$ деб фараз қилинади (акс ҳолда $\sqrt{x^2-a^2}$ илдиз арифметик илдиз бўлмайди; $|x|=$ $=|a|$ бўлган ҳол бундан мустасно, чунки иккинчи илдиз остидаги ифода маъносини йўқотади).

Биринчи кўпайтувчи қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$2|x|\frac{|x^2-a^2|-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=2|x|\frac{x^2-2a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

($x^2-a^2>0$ бўлгани учун $|x^2-a^2|=x^2-a^2$).

$\sqrt{\left(\frac{x}{a}-2\frac{a}{x}\right)^2}$ ифоданинг шакли қуйидагича алмаштирилади:

$$\sqrt{\left(\frac{x^2-2a^2}{ax}\right)^2}=\frac{|x^2-2a^2|}{|a|\,|x|}.$$

Агар $x^2-2a^2\geqslant 0$, яъни $|x|\geqslant|a|\sqrt{2}$ бўлсагина бу ерда суратни x^2-2a^2 кўринишида ёзиш мумкин.

Энди берилган ифода бундай ёзилади:

$$2|x|\,\frac{x^2-2a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}|a|\cdot|x|}{2ax\,|x^2-2a^2|}.$$

$|x|\cdot|x|=|x|^2=x^2$ эканини эътиборга олиб ва уни қисқартириб, $\frac{x^2-2a^2}{a}\cdot\frac{|a|}{|x^2-2a^2|}x$ ифодани ёки шунга ўхшаш $\frac{x^2-2a^2}{a}\left|\frac{a}{x^2-2a^2}\right|x$ ифодани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $|x|>|a|$ шартида берилган ифода $\pm x$ га тенг: $\frac{x^2-2a^2}{a}>0$ бўлганда устки ишора (+), $\frac{x^2-2a^2}{a}<0$ бўлганда остки ишора (—) олинади. Агар $\frac{x^2-2a^2}{a}=0$, яъни $|x|=|a|\sqrt{2}$ бўлса, берилган ифода маъносини йўқотади.

78. Манфий кўрсаткичларни йўқотамиз. Сурат

$$\frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=2ab$$

кўринишга келади, махраж

$$2ab\left(\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}\right)$$

бўлади. $a+\sqrt{ab}=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ ва $b+\sqrt{ab}=\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})$ эканини кўриб, махражни

$$2ab\left(\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)=\frac{2ab}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{ab}$$

кўринишга келтирамиз; демак, берилган ифода $\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$ га тенг.

Жавоб. $\sqrt{ab}$.

79. Биринчи қавс ичидаги ифоданинг шаклини ўзгартириб $\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a}+\sqrt{x})}$ кўринишга келтирамиз. Уни — 2 даражага кўтариб, $\frac{(a+x)(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{4ax}$ ни ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш иккинчи қавс ичидаги ифоданинг ҳам шаклини ўзгартириб,

$\frac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{4ax}$ кўринишга келтирамиз. Айиришда $\frac{a+x}{4ax}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз (соддалаштиргандан кейин қавс ичида $4\sqrt{ax}$ ни ҳосил қиламиз).

Жавоб. $\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$.

80. Соддалаштирилгандан кейин охирги қўшилувчи $\frac{a}{2\sqrt{x^2+a}}$ кўринишга келади. Ҳамма касрларни умумий махражга келтириб, йиғиндида $\frac{2(x^2+a)}{2\sqrt{x^2+a}}=\sqrt{x^2+a}$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\sqrt{x^2+a}$.

81. *Жавоб.* $2(x+\sqrt{x^2-1})$.

82. Ўрта қавс ичидаги ифода $a^{-\frac{3}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}ba^{\frac{2}{3}}=a^{-\frac{4}{3}}b^2$. Берилган ифода $a^{-4}b^5$ га тенг. Бунга

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ва } b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

қийматларни қўямиз.

Жавоб. 1.

83. Берилган ифодани $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$ кўринишга келтирамиз. Бунга

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3} \text{ ва } b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

қийматларни қўйиш керак. $a+1=3-\sqrt{3}$, $\frac{1}{a+1}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ ва ҳоказоларни топамиз.

Жавоб. 1.

84. *Жавоб.* $\sqrt{x^2-4x}$.

85. *Жавоб.* n.

86. Ҳамма илдиз арифметик илдиз бўлиши учун $x-a^2>0$ бўлиши керак. Қавс ичидаги ифода $-\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}{a^2}$ шаклга келтирилади.

Берилган ифода

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^2}}\cdot\left(-\frac{a^2}{4\sqrt{x}\sqrt{x-a^2}}\right)=-\frac{a^2}{4(x-a^2)}$$

га тенг.

Жавоб. $-\dfrac{a^2}{4(x-a^2)}$.

87. Иккинчи касрнинг махражи

$$x^{\frac{3}{2}}-1=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3-1=\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}+1\right)$$

га тенг.

Жавоб. $x-1$.

88. Бўлинувчи

$$2^{\frac{3}{2}}+27y^{\frac{3}{5}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(3y^{\frac{1}{5}}\right)^3=\left(2^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right)\left(2-3\cdot 2^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{5}}+9y^{\frac{2}{5}}\right)$$

га тенг; бўлувчи $2^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}$.

Жавоб. $2-3\sqrt[10]{32y^2}+9\sqrt[5]{y^2}$.

89. Иккинчи ҳаддаги манфий кўрсаткичларни йўқотамиз. Бунинг учун касрнинг сурат ва махражини a^2 га кўпайтирамиз. Суратда a^3-1, махражда

$$a^2\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=a^{\frac{3}{2}}\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)\right]=a^{\frac{3}{2}}(a-1)$$

ҳосил бўлади. Қисқартиргандан кейин $\dfrac{a^2+a+1}{a^{3/2}}$ ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш учинчи ҳад $\dfrac{a-1}{a^{3/2}}$ га тенг.

90. Бўлинувчи ва бўлувчини мос равишда

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}}},\qquad \frac{(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)}$$

шаклга келтирамиз. $\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)=a^3-b^3$ эканини эътиборга оламиз. Бўлинмада a^2+ab+b^2 чиқади. $a=1{,}2$ ва $b=\dfrac{3}{5}$ бўлганда, 2,52 ҳосил бўлади.

Жавоб. a^2+ab+b^2; 2,52.

91. Қавсларни очиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, бўлинувчини

$$6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+9b=3b^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)$$

кўринишга келтирамиз; бўлувчини $a^{\frac{1}{2}}\left(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)$ кўринишига келтирамиз. Бўлинма $3\sqrt{\frac{b}{a}}$; берилган $a=54$ ва $b=6$ қийматларда бўлинма 1 га тенг.

Жавоб. $3\sqrt{\frac{b}{a}}$; 1.

92. Берилган касрнинг сурат ва махражини

$$\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

га кўпайтириб, суратда $\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]=2(a+b)^{-\frac{1}{2}}$ ҳосил қиламиз. Махражда $\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]=-2(a-b)^{-\frac{1}{2}}$ ҳосил бўлади.

Жавоб. $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

93. Айрилувчидаги биринчи кўпайтувчи $1-a^2$ кўринишига келтирилади, у ҳолда

$$a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{(1-a^2)\left[(1-a^2)^{\frac{1}{2}}+a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{1-a^2}.$$

Касрни $(1-a^2)$ га қисқартиргандан кейин

$$a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}-(1-a^2)^{\frac{1}{2}}-a^2(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}=-(1-a^2)^{\frac{1}{2}}$$

ҳосил бўлади.

Жавоб. $-\sqrt{1-a^2}$.

94. Берилган ифода мана бунга тенг:

$$\frac{x^3-1}{\sqrt{x}\,(x+1)(x^2+1)}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{x^3-1}{\sqrt{x}\,(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}=\frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

Жавоб. $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

95. Учинчи ҳаднинг сурати $R^2(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ кўринишга келтирилади. Махражи R^2 га тенг. Берилган ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}+R^2(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+(R^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(R^2-x^2)=2(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Жавоб. $2\sqrt{R^2-x^2}$.

96. Биринчи ва иккинчи қўшилувчини мос равишда

$$\frac{p+q}{pq\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2}, \quad \frac{2\left(p^{\frac{1}{2}}+p^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^3 p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2 p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}$$

кўринишга келтирамиз. Бу қўшилувчиларни умумий махражга келтириб,

$$\frac{p+q+2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{pq\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ифоданинг сурати $\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2$ га тенг.

Жавоб. $\frac{1}{pq}$.

97. Касрли даражалар киритамиз. $a+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ ифодадан $a^{\frac{2}{3}}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз, $x+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ ифодадан эса $x^{\frac{2}{3}}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз. У ҳолда биринчи касрнинг сурати

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}-1=\frac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

бўлади, биринчи каср $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$ кўринишига келади. Ўрта қавс ичидаги ифода энди

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$$

кўринишга келади.

Жавоб. $\frac{a^3}{x^4}$.

98. $a-\sqrt{ax}$ икки ҳадни $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})$ кўринишга келтирамиз. Касрнинг сурати

$$(\sqrt{a}+1)^2-\sqrt{a}=a+\sqrt{a}+1$$

бўлади. Махраж $3(a+\sqrt{a}+1)$ га тенг.

Жавоб. 27.

99. Манфий кўрсаткичли даражаларни йўқотамиз; биринчи қўшилувчи ($2a-3$ га қисқартирилгандан кейин) $\frac{2a+3}{a^{\frac{1}{2}}}$ кўринишга келади; иккинчи қўшилувчи ($a-1$ га қисқартирилгандан кейин) $\frac{a-3}{a^{\frac{1}{2}}}$ кўринишга келади.

Жавоб. $9a$.

100. Биринчи кўпайтувчида $a-b$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз. $\frac{a+b}{a-b}$ миқдор манфий бўла олмайди (акс ҳолда илдизи арифметик илдиз бўлмайди). Берилган ифода

$$(a-b)^2\left[\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2-1\right]=(a-b)^2\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)$$

кўринишни олади.

Жавоб. $2b(a-b)$.

101. Бўлинувчи ва бўлувчини мос равишда

$$\frac{a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\qquad \frac{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{a-b}$$

кўринишга келтирамиз. Агар $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$$

эканини ҳисобга олсак, бўлинмани $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$ га қисқартириш мумкин.

Жавоб. $a\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$.

102. Берилган ифодани $\left|\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}};\frac{a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right|^{-\frac{2}{3}}$ кўринишга келтирамиз. Бўлинувчининг суратини кублар йиғиндиси каби кўпайтувчиларга ажратамиз. Қисқартиргандан кейин ўрта қавс ичида $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ чиқади.

Жавоб. $\sqrt[3]{(a-b)^2}$.

103. $\frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}$ касрни $\sqrt[3]{x}$ га қисқартирамиз. Ўрта қавс ичидаги ифода $\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ кўринишга келтирилади. Бу касрни $\sqrt{x}+2$ га қисқартирамиз. Олдинги берилган ифода

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)^{-2}-\sqrt{(x+4)^2}=(\sqrt{x}-2)^2-|x+4|$$

га тенг. $x>0$ деб фараз қилинади (x манфий бўлганда $\sqrt[3]{x}$ илдиз арифметик илдиз бўлмайди, $x=0$ бўлганда берилган ифода маъносини йўқотади). Шунинг учун $x+4>0$.

Жавоб. $-4\sqrt{x}$.

104. Ўрта қавс ичидаги каср $\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{2}{\sqrt{x}}$ га тенг. Берилган ифода

$$x^3\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=x^3\cdot 32x^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}=32x$$

га тенг.

Жавоб. $32x$.

105. Биринчи касрнинг суратидан $\sqrt[4]{ax}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз. $\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{x}-\sqrt{a}$ эканини эътиборга олган ҳолда, касрни қисқартирамиз. Биринчи кўпайтувчи $\left[-\sqrt[4]{ax}+\right.$

$+ \frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\Big]^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2} = \sqrt{ax}$, иккинчи кўпайтувчи $\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2}$ кўринишни олади. $\sqrt{\frac{a}{x}}$ арифметик илдиз, шунинг учун $1+\sqrt{\frac{a}{x}}$ ифода доим мусбат бўлади.

Жавоб. $\sqrt{a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})$.

106. a ва c миқдорлар мусбат бўлиши керак. Шунинг учун биринчи касрнинг махражи

$$\sqrt{2(a-b^2)^2+8ab^2} = \sqrt{2(a+b^2)^2}$$

шаклга келтирилади ва бу $\sqrt{2}\,(a+b^2)$ га тенг. Бу касрнинг сурати $\sqrt{3}\,(a+b^2)$ га тенг. Иккинчи каср $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{ac}$ га тенг.

Жавоб. $-\sqrt{ac}$.

107. Камаювчи

$$\left\{\sqrt{1+\left[a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}-1\right]}\right\}^{-6} = \frac{x^2}{a^2}$$

га тенг. Айрилувчининг илдиз остидаги ифодаси $(a^2+x^2)^2$ га тенг $[(a^2+x^2)$ миқдор мусбат$]$.

Жавоб. -1.

108. Ўрта қавс ичидаги ифода $\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ га тенг; уни -2 даражага кўтариб, $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{4\sqrt{x}}$ ни ҳосил қиламиз. Бўлувчи $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ га қисқартирилгандан кейин $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{4}$ га тенг бўлади.

Жавоб. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

109. Касрнинг суратида $\sqrt[6]{x}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз; касрни қисқартирамиз; берилган ифода $(2\sqrt[6]{x})^3+4x+4+(\sqrt{x}+1)^2 = 5x+10\sqrt{x}+5$ кўринишга келади.

Жавоб. $5(\sqrt{x}+1)^2$.

110. Биринчи касрдаги $x^{-\frac{1}{3}}$ ни махражга (мусбат кўрсаткич билан) ўтказамиз; каср $\frac{3}{x-2}$ кўринишига келади. Иккинчи касрни $x^{\frac{1}{3}}$ га қисқартирамиз. Берилган ифода

$$\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)^{-1}-\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}=\frac{(x-2)(x-1)}{2x-1}-\frac{3x-2}{1-2x}$$

кўринишга келади.

Жавоб. $\frac{x^2}{2x-1}$.

111. Биринчи кўпайтувчи $\frac{1}{a}$ га тенг. Ўрта қавс ичидаги ифодани квадратга кўтариб, $2a^2-2ab$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $2(a-b)$.

112. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}=x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$ айирмани кубга кўтарамиз. Касрнинг сурати

$$3x-3x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=3x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)$$

га тенг, касрнинг махражи

$$-3a-3x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=-3a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)$$

га тенг. Касрни қисқартириб, $-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ ни ҳосил қиламиз. Берилган ифода

$$\left(-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^3+\sqrt{[(a+x)^3]^{\frac{2}{3}}:a=1}$$

га тенг бўлади.

Жавоб. 1.

113. Биринчи касрнинг сурати мана бунга тенг:

$$a+2\sqrt{ab}-3b=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}-3(\sqrt{b})^2=$$
$$=(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

Жавоб. $\frac{1}{2b}$.

114. Кичик қавс ичидаги биринчи касрнинг махражи

$$\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} - 6\left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{-\frac{1}{2}} - 2b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{-\frac{1}{2}} + 3b^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Иккинчи касрнинг махражи $\left(a^{-\frac{1}{2}} + 3b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ га тенг. Суратни ҳам шунга ўхшаш кўпайтувчиларга ажратамиз.

Жавоб. $\frac{5}{a-9b}$.

115. Қавс ичидаги касрни $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ га қисқартирамиз. Йиғиндиси берилган ифодани ташкил қилувчи касрлардан биринчиси

$$\frac{3\sqrt{a}\,(a- \quad \overline{ab}+b)}{3\sqrt{a}\,[(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3]} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

га тенг. Иккинчи каср

$$\frac{\sqrt{a}\,(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}\,(a-b)} = -\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

га тенг.

Жавоб. 0.

116. *Жавоб.* 3.

117. Манфий кўрсаткичларни йўқотамиз. Ҳосил бўлган

$$a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3$$

ифодани кўпайтувчиларга ажратамиз.

Жавоб. 1.

118. Ўрта қавс ичидаги биринчи қўшилувчининг шаклини ўзгартириб

$$\frac{1-a^2}{\sqrt[3]{a}\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}+1\right]\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}+1\right]}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу касрнинг сурати

$$(1-a)(1+a) = \left[1-\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right]\left[1+\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right]$$

га тенг. Кублар йиғиндиси ва айирмасини кўпайтувчиларга ажратамиз.

Жавоб. a.

119. Қасрнинг суратида $\sqrt[3]{a}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз. Кўпаювчи $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}$ га, кўпайтувчи эса $4\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}\right)$ га тенг.

Жавоб. $4(a-x)$.

120. Қасрни

$$\frac{\sqrt{a}\left[(\sqrt{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3\right]}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}=\sqrt{a}\left(a+\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)$$

шаклга келтирамиз. Биринчи қавс ичидаги ифода (бўлинувчи)

$$\sqrt{a}\left(a+2\sqrt{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2$$

га тенг. Бўлувчи $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)$ га тенг.

Жавоб. a.

121. Камаювчининг махражи $\sqrt{a}\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{x}\right)$ га, сурати эса $\sqrt{a}\sqrt[4]{x}\left[(\sqrt{a})^3+(\sqrt[4]{x})^3\right]$ га тенг. Қисқартиргандан кейин камаювчини $a-\sqrt{a}\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}$ шаклга келтирамиз. Айрилувчи $\sqrt{(a+\sqrt{x})^2}=\left|a+\sqrt{x}\right|$ га тенг. Охирги ифоданинг ўрнига $a+\sqrt{x}$ ёзиш мумкин, чунки $a+\sqrt{x}$ мусбат миқдордир (a миқдор манфий бўла олмайди, чунки бу ифодага $\sqrt{a}$ киради).

Жавоб. a^2x.

122. Махраждаги кўпайтувчилар $1+\sqrt[4]{x}$ га ва $1-\sqrt[4]{x}$ га тенг. Суратни $-x(1-\sqrt{x})$ кўринишга келтириш мумкин.

Жавоб. $-x^3$.

123. Ўрта қавс ичидаги касрнинг сурати мана бунга тенг:

$$\sqrt[4]{a^3}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)+b\sqrt[4]{b^2}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)=\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})\left[\left(\sqrt[4]{a}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{b}\right)^3\right]=\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}\sqrt{b}+b\right).$$

Берилган ифода мана бунга тенг:

$$\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}\sqrt{b}\right)^{-1}+\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}-\sqrt[4]{a}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}\right)}-\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}}=0.$$

Жавоб. 0.

124. Камаювчининг сурати

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}-\frac{\sqrt[3]{ax}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)^2}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}$$

га тенг.

Жавоб. $\sqrt[6]{a}$.

125. Дастлаб олдинги икки касрни қўшамиз. Умумий махраж

$$\left[\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)+a^{\frac{1}{8}}\right]\left[\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)-a^{\frac{1}{8}}\right]=\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)^2-a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1$$

га тенг. $\frac{2\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1}$ ҳосил бўлади. Энди учинчи касрни айирамиз;

умумий махражи $a+a^{\frac{1}{2}}+1$.

Жавоб. $\frac{4}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}$.

126. $\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^2(3+2\sqrt{2})}=1.$

Махражда ҳам шундай шакл алмаштиришни қиламиз. Суратда илдиз остидаги ҳарфий ифода $(\sqrt{x}-2)^3$ га тенг. $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ каср $\sqrt{x}-1$ га қисқаради.

Жавоб. 1.

127. Биринчи касрнинг сурати $a^2\sqrt[6]{a^6b^3}+ab\sqrt[6]{a^5b^3}=$ $=a(a+b)\sqrt[6]{a^5b^3}$ га тенг. Махражи $(b+a)(b-2a)\sqrt[6]{a^3b^3}$, шаклга келтирилади. Шундай қилиб, биринчи каср $\frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a}$ га тенг. Ўрта қавс ичидаги бўлинувчи $\frac{3a^2}{(b-2a)(3-b)}$ га тенг. Уни $\frac{a+b}{3a-ab}$ га бўлиб, $\frac{3a^3}{(b-2a)(a+b)}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $\frac{ab}{a+b}$ ни айириб, $\frac{a(3a^2+2ab-b^2)}{(a+b)(b-2a)}$ ни топамиз.

Берилган ифода $\frac{a\sqrt[3]{a}}{b-2a}-\frac{a^{-\frac{2}{3}}a(3a-b)}{b-2a}=\sqrt[3]{a}$ га тенг.

Жавоб. $\sqrt[3]{a}$.

128. Кўпаювчи $\frac{2x+a}{2x-a}$ га тенг. Иккинчи қавс ичидаги ифода $\sqrt{2x-a}$ га тенг.

Жавоб. $2x+a$.

129. *Жавоб.* $\sqrt{2}$.

130. *Жавоб* . $\frac{1}{x(x-1)}$.

131. Камаювчи $\frac{1}{a+b}$ га, айрилувчи $\frac{b}{(a+b)(a+2b)}$ га тенг.

Жавоб. $\frac{1}{a+2b}$.

132. Биринчи қўшилувчи $\frac{a}{a+b}$ га, иккинчи қўшилувчи $\frac{b}{a}\times$ $\times\frac{2a+b}{a+b}$ га тенг.

Жавоб. $\frac{a+b}{a}$

133. Биринчи қўшилувчи $\frac{a-b}{ab}$ га, иккинчи қўшилувчи $\frac{1}{a}$ га тенг.

Жавоб. $\frac{1}{b}$.

134. $\frac{2b-a}{2b+a}$.

3-БОБ

АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР[1]

135. $\frac{6b+7a}{6b}$ касрни $1+\frac{7}{6}\frac{a}{b}$ шаклга келтирамиз. У ҳолда берилган тенглама

$$\frac{a(b-3a)}{2b^2(b-a)}y=\frac{7}{6}\frac{a}{b}$$

кўринишга келади, бундан $y=\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$ келиб чиқади.

Жавоб. $y=\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$.

136. Махраждан қутқарамиз (умумий махраж a^2-b^2).

Жавоб. $x=0$.

137. Бу тенгламани умумий усулда ечиб,

$$x=\frac{3abc+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{ab+bc+ca}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу касрнинг суратини кўпайтувчиларга ажратиб, уни қисқартириш мумкин ($3abc$ ифодани $abc+abc+abc$ кўринишдаги учҳад шаклига келтириш мумкин ва ҳар бир кейинги ҳадини abc билан группалаймиз). $x=a+b+c$ ҳосил бўлади.

Қуйидаги сунъий усул қўлланилса, ечиш янада соддалашади. $\frac{x-a-b}{c}$ қўшилувчини $\frac{x-(a+b+c)}{x}+1$ шаклга келтирамиз ва чап қисмидаги бошқа иккита қўшилувчини ҳам шундай қиламиз. Тенглама:

$$[x-(a+b+c)]\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0$$

шаклни олади.

Жавоб. $x=a+b+c$.

---

[1] Бу бобдаги масалаларни ечишда маълум миқдорларнинг берилган тенгламанинг маъносини йўқотадиган ёки ечимини йўқотадиган, ё бўлмаса ечимини кўпайтириб юборадиған айрим қийматлари қаралмайди. Масалан, 135-масалада берилган тенглама $b=0$ бўлганда ва $b-a=0$ бўлганда маъносини йўқотади, чунки $b=0$ бўлганда биринчи ва иккинчи ҳадларнинг махражлари нолга айланади, $b-a=0$ бўлганда охирги ҳаднинг махражи нолга айланади. Сўнгра $a=0$ бўлганда тенгламанинг саноқсиз кўп ечимлари бўлади, чунки тенглама $1=1$ шаклга кириб, айниятга айланади. Ниҳоят, $b=3a$ бўлганда тенгламанинг ечими бутунлай бўлмайди, чунки бу ҳолда тенглама $0\cdot y=\frac{7}{18}$ кўринишга келтирилади.

138. Умумий махраж $6cd\,(2c+3d)\,(2c-3d)$.

Жавоб. $z=\frac{c\,(4c^2-9d^2)}{8c^2+27d^2}$.

139. $\frac{2n^2(1-x)}{n^4-1}$ касрни $\frac{2n^2(x-1)}{1-n^4}$ шаклга келтирамиз (махражи кейинги касрнинг махражи билан бир хил бўлиши учун) $\frac{x-1}{n-1}$ касрни $\frac{1-x}{1-n}$ шаклга келтириш фойдали. Ҳамма ҳадларни чапга ўтказамиз ва уларни (биринчи ҳадни тўртинчи билан, иккинчи ҳадни учинчи билан) группалаймиз.

$$(1-x)\left(\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)+\frac{1}{1-n^4}\,[2n^2\,(x-1)-(2x-1)]=0$$

ни ҳосил қиламиз. $\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}$ ни $\frac{2}{1-n^2}$ шаклига келтириб, махраждан қутуламиз.

Жавоб. $x=\frac{3}{4}$.

140. x ли ҳадларни тенгламанинг чап қисмига, маълум ҳадларни ўнг қисмига ўтказиб, ҳар қайси томонни алоҳида умумий махражга келтирамиз:

$$\frac{(3ab+1)\,(a+1)^2-(2a+1)}{a\,(a+1)^2}\,x=\frac{3ab\,(a+1)^2+a^2}{(a+1)^3}$$

ёки

$$\frac{3ab\,(a+1)^2+a^2+2\,a+1-2a-1}{a\,(a+1)^2}\,x=\frac{a\,[3b\,(a+1)^2+a]}{(a+1)^3}$$

ҳосил бўлади. Бундан

$$\frac{a\,[3b\,(a+1)^2+a]}{a\,(a+1)^2}\,x=\frac{a\,[3b(a+1)^2+a]}{(a+1)^3}.$$

Қисқартиргандан кейин

$$x=\frac{a}{a+1}\ \text{ни топамиз.}$$

Жавоб. $x=\frac{a}{a+1}$.

141. Тенгламанинг ҳадларини 140-масаладагидек группалаймиз; шакл алмаштиришлардан кейин

$$\frac{ab\,[3c\,(a+b)^2+ab]}{(a+b)^3}=\frac{a\,[3c\,(a+b)^2+ab]}{a\,(a+b)^2}\,x$$

ҳосил бўлади.

Жавоб. $\frac{ab}{a+b}$.

142. Умумий махраж $(a+b)^2(a-b)$.

Жавоб. $x = \frac{m(a+b)}{a}$.

143. $\frac{mz}{m^2-z^2}$ касрни $\left(-\frac{mz}{z^2-m^2}\right)$ шаклига келтирамиз. Умумий махраж $mz(z^2-m^2)$ бўлади. Бу махражни йўқотиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан кейин $m^2z^2-4m^3z=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг иккита илдизи бор: $z=0$ ва $z=4m$. Лекин, номаълум миқдорли махражни ташлаганда ортиқча илдиз чиқиб қолиши мумкин; умумий махражни нолга айлантирадиган илдиз ортиқча илдиз бўлади. Бу мисолда $z=0$ ортиқча илдиз бўлади. У берилган тенгламани қаноатлантирмайди, чунки $z=0$ бўлганда биринчи ва учинчи ҳадлар маъносини йўқотади. $z=4m$ илдиз умумий махражни нолга айлантирмайди; шунинг учун у ортиқча илдиз эмас.

Жавоб. $z=4m$.

144. Умумий махраж b^4-x^2 бўлади. Ундан қутулиб, $2x(a^2+b^2-2ab)=2(a^2-b^2)$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $x=\frac{a+b}{a-b}$ чиқади. Ортиқча илдизлар йўқ, чунки $x=\frac{a+b}{a-b}$ бўлганда b^4-x^2 махраж нолга айланмайди.

Жавоб. $x=\frac{a+b}{a-b}$.

145. Умумий махраж $(x^2-a^2)(x+n)$. Махражни йўқотиб $x=\frac{n^2}{a}$ ни топамиз. x нинг бу қийматида махраж нолга айланмайди. Демак, $x=\frac{n^2}{a}$ шу тенгламанинг илдизи бўлади.

Жавоб. $x=\frac{n^2}{a}$.

146. $x+a^{-1}$ни $x+\frac{1}{a}$ кўринишда ёзамиз. Шакл алмаштиришдан кейин

$$\frac{2a}{ax+1}:\frac{2}{ax+1}=\frac{x}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. Буни $ax+1$ га қисқартириб, $x=2a$ ни топамиз.

Изоҳ. $ax+1$ нолга тенг бўлмагандагина $ax+1$ га қисқартириш мумкин. Лекин, $x=2a$ бўлганда $ax+1=2a^2+1>0$ бўлади. Шунинг учун ҳосил қилинган илдиз ортиқча эмас. Лекин тенгламамиз, масалан,

$\frac{2a}{x-2a} : \frac{2}{x-2a} = \frac{x}{2}$ бўлганда эди, уни $x=2a$ га қисқартирганда яна $x=2a$ бўлар эди. Лекин бу илдиз ярамайди, чунки $x=2a$ бўлганда $\frac{2a}{x-2a}$ ва $\frac{2}{x-2a}$ касрлар маъноларини йўқотади. Шундай қилиб, $\frac{2a}{x-2a} : \frac{2}{x-2a} = \frac{x}{2}$ тенгламанинг ечими йўқ.

Жавоб. $x = 2a$.

147. Тенгламани

$$\frac{a+x}{a^2+x^2+ax} + \frac{a-x}{a^2+x^2-ax} = \frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

кўринишда ёзамиз. Чап қисмининг умумий махражи $(a^2+x^2+ax)(a^2+x^2-ax)$ бўлади, уни

$$(a^2+x^2)^2-(ax)^2 = a^4+a^2x^2+x^4$$

шаклга келтириш мумкин.

$$\frac{2a^3}{a^4+a^2x^2+x^4} = \frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. $x = \frac{3}{2a^2}$.

148. Номаълумли ҳадларни тенгламанинг чап қисмига ўтказамиз, номаълуми бўлмаган ҳадларни эса ўнг қисмига ўтказамиз:

$$(a-b-1)\sqrt{x} = (a^2-b^2)-(a+b).$$

Ўнг томонини кўпайтувчиларга ажратиб

$$(a-b-1)\sqrt{x} = (a+b)(a-b-1)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан $\sqrt{x} = a+b$ чиқади.

$\sqrt{x}$ ифода квадрат илдизнинг мусбат қийматини билдиргани учун $a+b<0$ бўлганда масаланинг ечими бўлмайди.

Жавоб. $x = (a+b)^2$ $(a+b \geqslant 0$ бўлиш шарти билан).

149. Махраждан қутқариб, ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан кейин $2x^2+6ax+3a^2=0$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1 = \frac{a(\sqrt{3}-3)}{2}$; $x_2 = -\frac{a(\sqrt{3}+3)}{2}$.

150. Умумий махраж $4(x+b)(x-b)$ бўлади. Соддалаштиргандан кейин

$$12x^2-4bx-b^2=0$$

ҳосил бўлади.

Жавоб. $x_1 = \frac{b}{2}$; $x_2 = -\frac{b}{6}$.

151. Умумий махраж $(x-a)^2$ бўлади. Махражни йўқотгандан кейин

$$(x-a)^2-2a(x-a)+(a^2-b^2)=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу квадрат тенгламадан

$$x-a=a\pm b$$

ни топамиз.

Жавоб. $x_1=2a+b$; $x_2=2a-b$.

152. Умумий махраж $bc^2(a-2b)$ бўлади. Махраждан қутқаргандан кейин

$$(cx)^2-(a-2b)\cdot(cx)-b(a-b)=0$$

шаклга келади. Бу тенгламадан

$$cx=\frac{(a-2b)\pm a}{2}.$$

Жавоб. $x_1=\frac{a-b}{c}$; $x_2=-\frac{b}{c}$.

153. Махраждан қутқариб, $4x(x-a)+8x(x+a)=5a^2$ ёки қисқартиргандан кейин

$$12x^2+4ax-5a^2=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1=\frac{a}{2}$; $x_2=-\frac{5a}{6}$.

154. Умумий махраж $n(nx-2)$. Қисқартиришдан кейин тенглама

$$(n-1)x^2-2x-(n+1)=0$$ шаклга киради.

Жавоб. $x_1=\frac{n+1}{n-1}$; $x_2=-1$.

155. Умумий махраж $a(a-x)^2$ бўлади. Соддалаштиргандан кейин

$$(a+1)x^2-2ax+(a-1)=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1=1$; $x_2=\frac{a-1}{a+1}$.

156. Умумий махраж $(x-a)^2$ бўлади. Махраждан қутқаргандан кейин

$$(x-a)^2-2b(x-a)-(a^2-b^2)=0$$

тенгламани хосил қиламиз, уни ечиб $x-a=b\pm a$ ни топамиз.

Жавоб. $x_1=2a+b$; $x_2=b$.

157. Умумий махраж $nx(x-2)(x+2)$. Соддалаштиргандан кейин

$$x^2-(2-n)x-(2n^2+4n)=0$$

тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. $x_1=n+2;\ x_2=-2n$.

158. Биринчи усул. Одатдаги шакл алмаштиришлардан

$$x^2+(a-2n-2a+n)x-(a-2n)\ (2a-n)=0$$

кейин тенгламани ҳосил қиламиз. Охирги тенгламанинг озод ҳади $-(a-2n)$ ва $(2a-n)$ миқдорларнинг кўпайтмасидан, x нинг коэффициенти эса ўша миқдорларнинг қарама-қарши ишора билан олинган йиғиндисидан иборат экани назарга олинса, тенгламанинг ечимини бирданига топиш мумкин.

Иккинчи усул. Бирни тенгламанинг ўнг томонидан чап томонига ўтказиб,

$$\frac{a+x-2n}{2a-n}-\frac{a-2n+x}{x}=0$$

ни ёки $(a-2n+x)\left(\frac{1}{2a-n}-\frac{1}{x}\right)=0$ ни ҳосил қиламиз; бундан:

1) $a-2n+x=0$ ёки $x_1=2n-a$,

2) $\frac{1}{2a-n}-\frac{1}{x}=0$ ёки $x_2=2a-n$.

Жавоб. $x_1=2n-a;\ x_2=2a-n$.

159. $(n-1)^2x^2-a(n-1)x+(a-1)=0$ тенгламани ҳосил қиламиз; касрлар билан амаллар ишлашдан қутулиш учун $(n-1)x=z$ деб олиш ёки

$$[(n-1)x]^2-a[(n-1)x]+a-1=0$$

тенгламадан бевосита $(n-1)x$ ни топиш мумкин. $(n-1)x_1=a-1;\ (n-1)x_2=1$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1=\frac{a-1}{n-1};\ x_2=\frac{1}{n-1}$.

160. Чап томоннинг махражи $(a-x)^2$ га тенг. Тенгламанинг иккала қисмини унга кўпайтириб,

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)^2-\left(\frac{a}{a+b}\right)^2=\frac{5}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2,\ \frac{4}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

ни топамиз. Илдиз чиқариб, қуйидаги икки тенгламадан бирини ҳосил қиламиз:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a-x}{x}=\frac{a}{a+b}\text{ ва }\frac{2}{3}\cdot\frac{a-x}{x}=-\frac{a}{a+b}.$$

Жавоб. $x_1 = \frac{2a(a+b)}{5a+2b}$; $x_2 = \frac{2a(a+b)}{2b-a}$.

161. Олдин

$$(1-ax)^2-(a+x^2)=1+a^2x^2-a^2-x^2$$

ифоданинг шаклини ўзгартирамиз. Ўнг қисмидаги биринчи ҳадни охирги ҳад билан, иккинчи ҳадни учинчи ҳад билан группалаб, $(1-x^2)(1-a^2)$ ни ҳосил қиламиз. Энди берилган тенглама

$$x(x+1)=\frac{ab}{(a-b)^2}$$ шаклга киради.

Жавоб. $x_1=\frac{a}{b-a}$; $x_2=\frac{b}{a-b}$.

162. ax^2+bx+c учҳад қуйидаги биринчи даражали кўпайтувчиларга ажралади: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$; бундаги x_1 ва x_2 лар $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг илдизларидир.

Бу мисолда $a=-3$, $x_1=7$; $x_2=-\frac{10}{3}$, яъни

$$-3(x-7)\left(x+\frac{10}{3}\right).$$

Жавоб. $(7-x)(3x+10)$.

163. $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{ab}$ бўлгани учун тусмол билан $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ ни $\frac{a+b}{a}$ ва $\frac{a-b}{b}$ дан иборат кўпайтувчиларга ажратиш мумкин (уларнинг йиғиндиси $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ га тенг). Лекин, бу ечим бирдан-бир ечим бўладими ёки йўқми эканини аниқлаш керак бўлади. u ва v изланаётган кўпайтувчилар бўлсин. Шартга кўра $uv=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ ва $u+v=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Демак, u ва v ушбу

$$x^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)x+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=0$$

квадрат тенгламанинг илдизларидир. u ва v учун бўлган ифодаларга $\sqrt{\left(\frac{a}{a}+\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}$ радикал киради. Масаланинг рационал ечими бўлишини олдиндан билган ҳолда, радикалдан қутулишга ҳаракат қиламиз. Бунинг учун $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$ ўрнига $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$ ифодани ёзамиз ва унинг ўрнини тўлдириш учун $4\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}$ ни, яъни 4 ни қўшамиз, шунда радикал остида

$\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)-2\right]^2$ тўла квадратни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\frac{a+b}{a}$. $\frac{a-b}{a}$.

164. $15x^3+x^2-2x=x\ (15x^2+x-2)$. Ушбу $15x^2+x-2=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=-\frac{2}{5}$ бўлади. Демак,

$$15x^2+x-2=15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)=(3x-1)\ (5x+2).$$

Жавоб. $x(3x-1)\ (5x+2)$.

165. Биринчи усул. $2x^4+4x^2+2$ йиғиндини $2(x^2+1)^2$ кўринишга келтирамиз.

Иккинчи усул. Кўпҳадни x нинг даражаси камайиб борадиган тартибида жойлаштирамиз ва $4x^2$ ни иккита қўшилувчига ажратамиз: $2x^2+2x^2$, шундан кейин олдинги уч ҳадини бир группа ва кейинги уч ҳадини бир группа қилиб, сўнгра кўпайтирувчиларга ажратамиз.

Жавоб. $(x^2+1)\ (2x^2+x+2)$.

165а. Тенгламанинг чап томонини мана бундай ёзамиз:

$$(1-x^2)^2+4x^2.$$

Тенглама

$$(1-x^2)^2-4x(1-x^2)+4x^2=0 \text{ ёки}$$
$$[(1-x^2)-2x]^2=0$$

кўринишга келади.

Жавоб. $x_1=-1+\sqrt{2}$; $x_2=-1-\sqrt{2}$.

166. Изланган тенглама $\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{a}\right)=0$ бўлади.

Жавоб. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$.

167. Виет теоремасига мувофиқ $x^2+px+q=0$ тенгламанинг x_1, x_2 илдизлари йиғиндиси $-p$ га, кўпайтмаси q га тенг бўлади. Демак,

$$p=-\left(\frac{1}{10-\sqrt{72}}+\frac{1}{10+\sqrt{72}}\right)=\frac{-2\cdot 10}{100-72}=-\frac{20}{28},$$

$$q=\frac{1}{10-\sqrt{72}}\cdot\frac{1}{10+\sqrt{72}}=\frac{1}{28}.$$

Изланган тенглама

$$x^2-\frac{20}{28}x+\frac{1}{28}=0 \quad \text{бўлади.}$$

Жавоб. $28x^2-20x+1=0$.

168. Бу масала ҳам бундан олдинги масала каби ечилади.

Жавоб. $bx^2 - 2a\sqrt{a}x + a^2 = 0$.

169. Виет теоремасига кўра $x_1x_2 = 12$; шартга кўра $x_1 - x_2 = 1$. Бу тенгламалардан x_1 ва x_2 ни (4 ва 3 ёки -3 ва -4), сўнгра $p = -(x_1 + x_2) = \pm 7$ ни топиш мумкин.

Лекин, $x_1 + x_2$ ни топиш учун x_1 ва x_2 ни айрим-айрим топишнинг кераги йўқ. Мана буни ҳисоблаш мумкин:

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 1^2 + 4 \cdot 12 = 49,$$

бундан $p = -(x_1 + x_2) = \pm 7$.

Жавоб. $p = \pm 7$.

170. Бунда $x_1x_2 = \frac{1}{5}$; $x_1 - x_2 = 1$.

Сўнгра, бундан олдинги масаладагидек, $x_1 + x_2 = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$ ни топамиз ва $x_1 + x_2 = \frac{k}{5}$ эканини эътиборга оламиз.

Жавоб. $k = \pm 3\sqrt{5}$.

171. Бунда $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$; $x_1x_2 = a^2$; $x_1 + x_2 = 3a$. Бу ерда учта номаълум бор: x_1, x_2, a. Биз a ни топишимиз керак. Учинчи тенгламани квадратга кўтариб ва бундан иккинчи тенгламанинг иккиланганини айириб, $x_1^2 + x_2^2 = 7a^2$ ни топамиз. Буни биринчи тенглама билан taққослаб, $7a^2 = 1{,}75$ ни топамиз.

Жавоб. $a = \pm \frac{1}{2}$.

172. Виет теоремасига кўра

$$p + q = -p \text{ ва } pq = q.$$

Бу системанинг иккита ечими бор: 1) $p = 0$, $q = 0$, 2) $p = 1$, $q = -2$; Биринчи ҳолда $x^2 = 0$ тенглама, иккинчи ҳолда $x^2 + x - 2 = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. 1) $p = 0$, $q = 0$;
2) $p = 1$; $q = -2$.

173. Изланган тенгламанинг илдизлари $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$ ва $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$ бўлади. $y_1 + y_2$ ни a, b, c коэффициентлар билан ифодалаймиз. Бунинг учун $y_1 + y_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2}$ нинг шаклини $\frac{(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{x_1x_2}$ шаклга келтирамиз ва $(x_1 + x_2)$ ни $-\frac{b}{a}$ га, x_1x_2 ни $\frac{c}{a}$ га алмаштирамиз.

$\frac{b^2-2ac}{ac}$ ҳосил бўлади. Ундан ташқари $y_1y_2=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}=1$. Демак, изланган тенглама

$$y^2-\frac{b^2-2ac}{ac}y+1=0 \text{ бўлади.}$$

Жавоб. $acy^2-(b^2-2ac)y+ac=0$.

174. Бу масалани бундан олдинги масала сингари ечиш ҳам мумкин, лекин қисқароқ йўл билан бориш яхши.

Биринчи ҳолда изланган тенгламанинг иккала илдизи берилган тенгламанинг тегишли илдизларидан икки марта катта бўлиши керак. Демак, $ax^2+bx+c=0$ тенгламани қаноатлантирувчи, номаълум x миқдордан икки марта катта бўлган номаълум y миқдорни топиш керак, $y=2x$ шартидан $x=\frac{y}{2}$ ни топамиз ва уни берилган тенгламага қўйиб,

$$a\left(\frac{y}{2}\right)^2+b\left(\frac{y}{2}\right)+c=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Иккинчи ҳолда $x=\frac{1}{y}$ ни ўрнига қўямиз.

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\left(\frac{1}{b}\right)+c=0 \text{ ни ҳосил қиламиз.}$$

Жавоб. 1) $ay^2+2by+4c=0$;
2) $cy^2+by+a=0$.

175. Биринчи усул. (173-масаланинг ечилишига қаранг). Масаланинг шартига кўра: $y_1+y_2=x_1^3-x_2^3=(x_1+x_2)^3-$

$$-3x_1x_2\ (x_1+x_2).$$

Бунга $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ва $x_1x_2=\frac{c}{a}$ ни қўйиб, $y_1+y_2=-$ $-\frac{b^3-3abc}{a^3}$ ни топамиз. Сўнгра $y_1y_2=(x_1x_2)^3=\frac{c^3}{a^3}$ ва Виет теоремасига кўра изланган тенгламани тузамиз.

Иккинчи усул. (174-масаланинг ечилишига қаранг). Шартга кўра $y=x^3$, яъни $x=\sqrt[3]{y}$. Буни берилган тенгламада ўрнига қўйиб,

$$a\sqrt[3]{y^2}+b\sqrt[3]{y}=-c$$

ни ҳосил қиламиз.

Иррационалликдан қутулиш учун тенгламанинг иккала томонини кубга кўтарамиз ва $3(a\sqrt[3]{y^2})^2\,b\sqrt[3]{y}+3a\sqrt[3]{y^2}(b\sqrt[3]{y})^2$ йиғиндининг шаклини ўзгартириб, $3aby\left[a(\sqrt[3]{y})^2+b\sqrt[3]{y}\right]$ шаклга келтирамиз. Қавс ичидаги ифода топилган тенгламага асосан $-c$ га тенг.

Жавоб. $a^3y^2 + (b^3 - 3abc)\,y + c^3 = 0$.

176. Илдизлари $x_1, x_2, \ldots, x_n$ бўлган ҳар қандай n-даражали тенгламани

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Биквадрат тенглама эса ҳамма вақт абсолют миқдорлари тенг, ишоралари қарама-қарши бўлган икки жуфт илдизга эга бўлади. $x_3 = -x_1$ ва $x_4 = -x_2$ фараз қилиб, биквадрат тенгламани $(x - x_1)(x - x_2)(x + x_1)(x + x_2) = 0$, яъни $(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) = 0$ ёки

$$x^4 - (x_1^2 + x_2^2)\,x^2 + x_1^2x_2^2 = 0$$

шаклда ёзиш мумкин. Лекин шартга кўра

$$x_1^2 + x_2^2 + (-x_1)^2 + (-x_2)^2 = 50$$

ва

$$x_1x_2(-x_1)(-x_2) = 114.$$

Демак, $x_1^2 + x_2^2 = 25$ ва $x_1^2x_2^2 = 144$.

Жавоб. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

177. Агар (коэффициентлари ҳақиқий сонлар бўлган) алгебраик тенгламанинг $a + bi$ комплекс илдизи бўлса, $a + bi$ га қўшма комплекс сон $a - bi$ ҳам унинг илдизи бўлади. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг иккита қўшма илдизи $3 + i\sqrt{6}$ ва $3 - i\sqrt{6}$, борлиги бизга маълум. Бу илдизларнинг иккаласини бевосита текшириб кўриш мумкин, лекин олдин қуйидагича шакл алмаштириш осонроқ бўлади.

Безу теоремасига асосан тенгламанинг чап қисми $x - (3 + i\sqrt{6})$ ва $x - (3 - i\sqrt{6})$ ифодага қолдиқсиз бўлиниши керак, демак, бу ифодаларнинг кўпайтмасига, яъни $[(x - 3) - i\sqrt{6}]\,[(x - 3) + i\sqrt{6}] = x^2 - 6x + 15$ га ҳам бўлиниши керак. Бўлишни бажариб, тенгламанинг чап томонини иккита кўпайтувчига ажратамиз: $4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45 = (x^2 - 6x + 15)(4x^2 - 3)$ ва берилган тенглама иккита тенгламага ажралади:

$$1)\ x^2 - 6x + 15 = 0 \text{ ва } 2)\ 4x^2 - 3 = 0.$$

Биринчисининг илдизлари $x_1 = 3 + i\sqrt{6}$ ва $x_2 = 3 - i\sqrt{6}$; иккинчисининг илдизлари $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлади.

Жавоб. $x_1 = 3 + i\sqrt{6}$; $x_2 = 3 - i\sqrt{6}$; $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

178. Шартга кўра $x = 2$ берилган тенгламани қаноатлантириши керак. Шунинг учун $6 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + m = 0$, бундан

$m = 12$. Ушбу $6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз, бунинг илдизларидан бири 2 га тенг. Безу теоремасига асосан бунинг чап томони $(x - 2)$ га бўлиниши керак. Бўлиб $6x^2 + 5x - 6$ ни ҳосил қиламиз. Демак, тенгламани $(x - 2)(6x^2 + 5x - 6) = 0$ шаклга келтириш мумкин. Унинг илдизлари $x_1 = 2$ илдиздан ташқари, $6x^2 + 5x - 6 = 0$ тенгламанинг x_2, x_3 илдизлари бўлади.

Жавоб. $m = 12$; $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_3 = -\frac{3}{2}$.

179. Берилган тенгламага $x = 2$ ва $x = 3$ ни қўйиб (бундан олдинги масаланинг ечилишига қаранг),

$$4m + n = 10 \text{ ва } 9m + n = -15$$

ни ҳосил қиламиз. Бу системадан $m = -5$, $n = 30$ ни топамиз ва $2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бунинг чап томони $x - 2$ ва $x - 3$ га, демак, $(x - 2)(x - 3)$ кўпайтмага бўлиниши керак. Тенглама $(x - 2)(x - 3)(2x + 5) = 0$ шаклда ёзилади. Унинг илдизлари $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{5}{2}$ бўлади.

Жавоб. $m = -5$; $n = 30$; $x_3 = -\frac{5}{2}$.

180. $x^2 + px + q = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари тенг бўлиши учун илдиз остидаги $\frac{p}{2}\Big)^2 - q$ ифода нолга тенг бўлиши керак. Бу тенгламада $(a\sqrt{a^2 - 3})^2 - 4 = 0$, яъни $a^4 - 3a^2 - 4 = 0$ бўлиши керак. Бу биквадрат тенгламанинг иккита ҳақиқий илдизи ($a = 2$ ва $a = -2$) ва иккита мавҳум илдизи ($a = i$ ва $a = -i$) бор. Ҳақиқий илдизларнигина олиб[1], $x^2 + 4x + 4 = 0$ ва $x^2 - 4x + 4 = 0$ тенгламаларни ҳосил қиламиз; биринчи тенгламанинг илдизлари $x_1 = x_2 = -2$; иккинчисининг илдизлари $x_1 = x_2 = 2$.

Жавоб. $a = 2$ ва $a = -2$ бўлганда.

180а. Тенгламанинг илдизлари

$$x_{1,\,2} = m \pm \sqrt{m^2 - m^2 + 1} = m \pm 1$$

бўлади. Шартга кўра

$$\begin{cases} -2 < m + 1 < 4, \\ -2 < m - 1 < 4 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} -3 < m < 3, \\ -1 < m < 5. \end{cases}$$

Жавоб. $-1 < m < 3$.

181. Радикаллардан бирини, масалан, биринчисини яккалаймиз: $\sqrt{y + 2} = 2 + \sqrt{y - 6}$ бўлади.

---

[1] Берилган тенгламанинг коэффициентларини ҳақиқий сонлар деб фараз қиламиз.

Бундан $3(x+1)=5\sqrt{x(x+1)}$ келиб чиқади. Квадратга кўтаргандан кейин

$$9(x+1)^2-25(x+1)x=0$$

ёки

$$(x+1)[9(x+1)-25x]=0$$

ҳосил бўлади.

Жавоб. $x_1=-1;\ x_2=\frac{9}{16}$.

193. Бу масала бундан аввалги масала каби ечилади.

Жавоб. $x_1=2;\ x_2=-1{,}6$.

194. Берилган тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз. Айний шакл алмаштиришлардан кейин $\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$ ни ҳосил қиламиз. Квадратга кўтарганда берилган тенгламадан ўнг томонининг ишораси билан фарқ қиладиган тенгламани қаноатлантирувчи чет илдиз кириб қолиш хавфи бор. $\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$ тенгламанинг биргина $x=21$ илдизи бор. У чет илдиз эмас, чунки $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}>\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{21}}$.

Жавоб. $x=21$.

195. Тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{x}}.$$

Махраждан қутқарамиз; бунда ортиқча илдиз $x=0$ кириб қолиш хавфи бор (чунки $x=0$ бўлганда махраж нолга айланади). Бошқа ортиқча илдизлар бўлиши мумкин эмас, чунки $x=0$ илдиз $\sqrt{x+\sqrt{x}}=0$ тенгламанинг бирдан-бир илдизидир (**143**-масаланинг ечилишига қаранг).

Соддалаштиргандан кейин $2x-2\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x}=0$ тенгламани ҳосил қиламиз, бунинг илдизларидан бири $x=0$. Бироқ бу илдиз ортиқча, чунки $x=0$ бўлганда дастлабки тенгламанинг ўнг қисми маъносини йўқотади. $\sqrt{x}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}-1\right)=0.$$

Ушбу $2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}-1=0$ тенгламани ечиб (**181**-масаланинг ечилишига қаранг), $x=\frac{25}{16}$ ни топамиз. Ечилишни текширамиз.

Жавоб. $x=\frac{25}{16}$.

196. Олдин махраждаги иррационалликни йўқотамиз. Бунинг учун сурат ва махражни $\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}$ га кўпайтирамиз;

$$\frac{(\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x})^2}{2x}=\frac{27}{x}$$

ёки соддалаштиргандан кейин $\frac{27+\sqrt{27^2-x^2}}{x}=\frac{27}{x}$ ҳосил қиламиз. Бундан $x=\pm 27$ ни топамиз. Иккала илдиз яроқли.

Жавоб. $x=\pm 27$.

197. Радикални яккалаб, тengламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз.

$$x^2-2ax=-x\sqrt{x^2+a^2}$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг $x=0$ илдизи бор. Бошқа илдизларини топиш учун тенгламанинг иккала томонини x га бўламиз (бўлиш мумкин, чунки энди $x\neq 0$). Шундан кейин иккала томонини яна квадратга кўтарамиз. $x=\frac{3}{4}a$ ҳосил бўлади.

Текширишда $x=0$ ва $x=\frac{3}{4}a$ қийматлар ҳамма вақт берилган тенгламани қаноатлантиради деган янглиш хулосага келиш мумкин. Хатонинг моҳиятини яхши тушунтириш учун сонли мисол қараб чиқамиз. $a=-1$ бўлганда берилган тенглама

$$x=-1-\sqrt{1-x\sqrt{x^2+1}}$$

кўринишга келади. $x=0$ ҳам, $x=\frac{3}{4}a=-\frac{3}{4}$ ҳам бу тенгламани қаноатлантирмайди (унинг ечимлари йўқ). a нинг бошқа ҳар қандай манфий қийматида ҳам шундай бўлади.

Хато $\sqrt{a^2}$ миқдорни a га тенг деб ўйлаганликдан келиб чиқади, ваҳоланки, бу фақат $a\geqslant 0$ бўлгандагина тўғридир. $a<0$ бўлганда $\sqrt{a^2}=-a$ бўлади; масалан, $\sqrt{(-3)^2}=-(-3)$.

Тўғри умумий формула (103-бетда 3-пунктдаги дастлабки изоҳни кўринг) мана бундай:

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Бу формуладан фойдаланиб, биз $x=0$ бўлганда (у вақтда тенгламанинг чап томони нолга айланади) ўнг томони $a-\sqrt{a^2}=$ $=a-|a|$ га тенг эканини топамиз. $a\geqslant 0$ бўлганда ҳам бу ифода нолга тенг бўлади, лекин, $a<0$ бўлганда у $2a$ га тенг бўлади. Демак, $a\geqslant 0$ бўлса, $x=0$ қиймат тенгламанинг илдизи бўлади; агар $a<0$ бўлса, у ҳолда $x=0$ илдиз бўлмайди. $x=\frac{3}{4}a$ қийматда ҳам худди шундай бўлади.

Жавоб. Агар $a \geqslant 0$ бўлса, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}a$ бўлади; агар $a<0$ бўлса, тенгламанинг илдизи бўлмайди.

198. Берилган тенгламани манфий кўрсаткичли даражаларсиз ёзганда қуйидаги кўринишга келади[1]:

$$\frac{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\frac{x}{a}}=\frac{1}{4}. \qquad (А)$$

Биринчи усул. Махраждан қутқарамиз: $3\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = 5\cdot\frac{x}{a}$ чап қисми мусбат; демак, ўнг қисми ҳам мусбат. Квадратга кўтарамиз: $\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{9}{16}$. Бундан $\frac{x}{a}=\frac{3}{4}$ келиб чиқади ($-\frac{3}{4}$ қиймат чиқариб ташланади, чунки $\frac{x}{a}>0$).

Иккинчи усул. Махраждаги иррационалликни йўқотамиз:

$$\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-\frac{x}{a}\right]^2=\frac{1}{4}.$$

Қавс ичидаги ифода манфий бўла олмайди; шунинг учун $\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-\frac{x}{a}=\frac{1}{2}$ ёки $\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}+\frac{x}{a}$. Квадратга кўтарамиз: $1+\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2$, бундан $\frac{x}{a}=\frac{3}{4}$.

Жавоб. $x=\frac{3}{4}a$.

---

[1] Бу китобнинг русча биринчи нашрида авторлар ачинарли беparволиклари натижасида хатога йўл қўйишган. Бу тўғрида бундан олдинги масалада огоҳлантирилди. Ҳақиқатан, (А) тенглама қуйидагича хато ёзилган эди:

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}-x}{\sqrt{a^2+x^2}+x}=\frac{1}{4}.$$

Хато шундай келиб чиққан: (А) тенгламада чап томоннинг сурат ва махражи a га кўпайтирилган, сўнгра a илдиз остига олинган. Лекин,

$$a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\sqrt{a^2+x^2}$$

тенглик $a<0$ бўлганда нотўғри бўлади. Бу ҳолда

$$a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=-\sqrt{a^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=-\sqrt{a^2+x^2}$$

бўлади. Натижада, $a<0$ ҳол учун келтирилган жавоб нотўғри бўлган.

199. Масала бундан олдинги масала каби ечилади. Иккинчи усулни қўлланиб,

$$(\sqrt{1+a^2x^2}-ax)^2=\frac{1}{c^2}$$

тенгламани топамиз. $\sqrt{1+a^2x^2}-ax$ ифода ҳамма вақт мусбат бўлади. Шунинг учун $\sqrt{1+a^2x^2}-ax=\frac{1}{|c|}$, яъни $\sqrt{1+a^2x^2}=$ $=ax+\frac{1}{|c|}$. Квадратга кўтарамиз. $x=\frac{|c|^2-1}{2a\,|c|}$ ёки $x=\frac{c^2-1}{2a|c|}$ ни ҳосил қиламиз.

Текшириш. $x=\frac{c^2-1}{2a|c|}$ ни ўрнига қўйиб, $1+a^2x^2=\frac{4c^2+(c^2-1)^2}{4c}=$ $=\frac{(c^2+1)^2}{4c^2}$ ни топамиз. c^2+1 миқдор ҳамма вақт мусбат бўлишини эътиборга олиб,

$$\sqrt{1+a^2x^2}=\frac{c^2+1}{2\,|c|}$$

ни топамиз. Кейинги ҳисоблашлар берилган тенгламанинг ҳамма вақт қаноатлантирилишини кўрсатади.

Жавоб. $x=\frac{c^2-1}{2a|c|}$, яъни $c>0$ бўлганда $x=\frac{c^2-1}{2ac}$; $c<0$ бўлганда $x=\frac{1-c^2}{2ac}$ бўлади.

200. Чап томоннинг сурат ва махражида $\sqrt{x+c}$ ифодани қавсдан ташқарига чиқарамиз ва унга касрни қисқартирамиз[1]).

Қисқартиргандан кейин

$$\frac{\sqrt{x+c}+\sqrt{x-c}}{\sqrt{x+c}-\sqrt{x-c}}=\frac{9(x+c)}{8c}$$

ни ҳосил қиламиз. Махраждаги иррационалликни йўқотамиз. Соддалаштиргандан кейин $8\sqrt{x^2-c^2}=x+9c$ ни топамиз. Бундан $x=\frac{5c}{3}$ ёки $x=-\frac{29}{21}c$ келиб чиқади.

Текшириш $c>0$ бўлганда бу иккала қиймат тенгламани қаноатлантиришини ва $c\leqslant 0$ бўлганда қаноатлантирмаслигини кўрсатади.

Жавоб. $c>0$ бўлганда $x_1=\frac{5}{3}c$ ва $x_2=-\frac{29}{21}c$ бўлади; $c\leqslant 0$ бўлганда тенгламанинг ечими бўлмайди.

---

[1]) $\sqrt{x+c}$ га қисқартиришда $x\neq -c$ деб фараз қиламиз. Агар биз ҳосил бўлган тенгламани ечиб, $x=-c$ ни топганимизда, бу қиймат берилган тенгламанинг илдизи бўлмас эди. Бироқ кейингилардан кўринадики, биз бундай илдиз ҳосил қилмаймиз.

201. Биринчи илдиз остидаги ифодани бундай алмаштирамиз: $x+3-4\sqrt{x-1}=(x-1)-4\sqrt{x-1}+4=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$.

Шунга ўхшаш иккинчи илдиз остидаги ифода $\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2$ га тенг. Берилган тенглама

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1 \qquad \text{(A)}$$

кўринишни олади (2-боб, 3-пунктдаги дастлабки изоҳга қаранг). Уч ҳол бўлиши мумкин: 1) $\sqrt{x-1}>3$; 2) $\sqrt{x-1}<2$; 3) $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$.

Биринчи ҳолда (A) тенглама

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1, \text{ ёки } \sqrt{x-1}=3,$$

кўринишини олади. Бу натижа $\sqrt{x-1}>3$ шартига тўғри келмайди.

Иккинчи ҳолда (A)тенглама $-\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}-3\right)=1$ ёки $\sqrt{x-1}=2$ кўринишга киради. Бу натижа ҳам $\sqrt{x-1}<2$ шартга тўғри келмайди. Учинчи шарт қолади; унда (A) тенглама

$$\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}-3\right)=1 \qquad \text{(B)}$$

кўринишни олади. Бу тенглик айният, демак, (A) тенглама x нинг $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$ бўладиган ҳамма қийматларида қаноатлантирилади.

$\sqrt{x-1}>0$ бўлгани учун тенгсизликнинг учала қисмини квадратга кўтариш мумкин, шундан кейин

$$5\leqslant x\leqslant 10$$

ни топамиз, яъни берилган тенгламанинг ечимлари 5 билан 10 чегарасида бўлади (5 ва 10 қийматлари ҳам киради). Уларнинг ҳаммаси берилган тенгламанинг ечимлари бўлади, чунки улар берилган (A) тенглама (B) айниятга айланадиган 3-ҳолга тўғри келади.

Жавоб. $5\leqslant x\leqslant 10$.

202. Тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз. Ҳамма ҳадларни бир томонга ўтказамиз ва $\sqrt{a+x}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$\sqrt{a+x}\left(4\sqrt{a+x}+4\sqrt{a-x}-\sqrt{x}\right)=0.$$

Бу тенглама иккига ажралади. Биринчиси $\sqrt{a+x}=0$ дан $x=-a$ ни топамиз. Текшириш $a\geqslant 0$ бўлганда бу қиймат берилган тенгламани қаноатлантиришини кўрсатади. $a<0$ бўлганда тенглама маъносини йўқотади (чунки $\sqrt{a-x}$ мавҳум бўлади). Иккинчи тенглама $4(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{x}$ бўлади. Агар уни 183—187-масалалар сингари ечсак, у ҳолда (оппа-очиқ ортиқча илдиз $x=0$ дан бошқа) $x=\frac{64a}{1025}$ ни ҳосил қиламиз. Текшириш бунинг ҳам ортиқча илдиз эканини кўрсатади, демак, иккинчи тенгламанинг бутунлай илдизи йўқ экан. Агар қуйидаги ечиш усули қўлланилса, бунга ишонч ҳосил қилиш осон. Иррационалликни махражга ўтказамиз ($\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}$ ни ўзига қўшма ифода $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$ га кўпайтирамиз ва бўламиз)

$$\frac{8x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{x}$$

ҳосил бўлади. $\sqrt{x}$ га бўлиб (бўлганда илдизлар йўқолмаслиги мумкин, чунки $x=0$ илдиз эмас), $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=8\sqrt{x}$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгламани юқорида ҳосил қилинган $\sqrt{a+x}+$ $+\sqrt{a-x}=\frac{1}{4}\sqrt{x}$ тенгламадан айириб,

$$2\sqrt{a-x}=-\frac{31}{4}\sqrt{x}$$

ни топамиз. Лекин, бу тенгликнинг бўлиши мумкин эмас, чунки тенгликнинг чап томони мусбат сон, ўнг томони эса манфий сон. Агар бунга эътибор бермасдан, иккала томонни квадратга кўтарсак, $x=\frac{64}{1025}a$ ортиқча илдиз ҳосил қилган бўлар эдик.

Жавоб. Агар a мусбат бўлса, $x=-a$; агар a манфий бўлса, тенгламанинг ечими йўқ.

203. Бу масалада иррационалликни махражга кўчириш усулини бемалол қўлланиш мумкин (бундан олдинги масалага қаранг). *Жавоб.* $x=0$.

204. *Жавоб.* $x_1=a$; $x_2=-b$.

205. *Жавоб.* $x=\frac{(a-1)^2}{4}$ ($a\geqslant 1$ бўлганда), $a<1$ бўлганда тенгламанинг ечими йўқ.

206. Берилган тенгламани

$$\frac{(\sqrt{a+x})^3}{ax}=\sqrt{x}$$

ёки

$$(a+x)^{\frac{3}{2}}=ax^{\frac{3}{2}}$$

кўринишга келтириш мумкин, $\frac{2}{3}$ даражага кўтарамиз. $a+x=$

$= a^{\frac{2}{3}} x$ ҳосил бўлади. Бундан $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$. Текшириш.

$$a + x = \frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 1}; \quad (a + x)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{(a + x)^{\frac{3}{2}}}{ax} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Жавоб. $x = \frac{a}{a^{\frac{2}{3}} - 1}$; агар a нинг қиймати -1 билан $+1$ орасида бўлса, у ҳолда тенгламанинг ечими бўлмайди.

207. $\sqrt[4]{x} = z$ деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$\sqrt{x} = (\sqrt[4]{x})^2 = z^2.$$

Тенглама

$$z^2 + z - 12 = 0$$

кўринишни олади. Бундан $z_1 = 3$, $z_2 = -4$. Энди $\sqrt[4]{x}$ мусбат бўлиши керак бўлгани учун, иккинчи илдиз ортиқча.

Жавоб. $x = 81$.

208. $(x - 1)^{\frac{1}{4}} = z$ деб фараз қиламиз. Кейин бундан олдинги масала каби ечилади.

Жавоб. $x = 17$.

209 [1]. Тенгламанинг иккала томонини кубга кўтарамиз.

$$\sqrt{10 + 2x} + \sqrt{15 - 2x} = 7$$

ҳосил бўлади. Бунда радикаллардан бирини яккалаш ҳам, яккаламаслик ҳам мумкин.

Жавоб. $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

210. $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ формулани қўлланиб, тенгламанинг иккала томонини кубга кўтарамиз.

$$x + 3\sqrt[3]{x(2x - 3)}\left[\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x - 3}\right] + 2x - 3 = 12(x - 1)$$

ни ҳосил қиламиз.

---

[1] Бу ерда ва бундан буён ҳам куб илдизларни ва, умуман, тоқ илдизларни арифметик илдизлар деб атамаймиз, бунда илдиз остидаги сон манфий бўлиши ҳам мумкин, деб фараз қиламиз (лекин, албатта ҳақиқий сон бўлиши керак). Илдизнинг қийматини ҳам ҳақиқий сон деб ҳисоблаймиз.

Ўрта қавс ичидаги ифодани берилган тенгламага мувофиқ $\sqrt[3]{12(x-1)}$ ифода билан алмаштириш мумкин.

$$\sqrt[3]{x(2x-3)\cdot 12(x-1)} = 3(x-1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани кубга кўтарамиз. Ҳадларни бир томонга ўтказиб,

$$(x-1)\left[12x(2x-3)-27(x-1)^2\right]=0$$

тенгламани топамиз. Бу тенглама иккига ажралади:

$$x-1=0 \text{ ва } 12x(2x-3)-27(x-1)^2=0.$$

Топилган илдизларни текширамиз.

Жавоб. $x_1=1$, $x_2=3$.

211. Масала бундан олдинги масала каби ечилади.

Жавоб. $x_1=a$; $x_2=b$; $x_3=\frac{a+b}{2}$.

212. $\sqrt[3]{x}=z$ деб фараз қиламиз; у ҳолда $\sqrt[3]{x^2}=z^2$ бўлади. Уни дастлабки тенгламага қўйиб, $2z^2+z-3=0$ ҳосил қиламиз, бундан $z_1=1$; $z_2=-\frac{3}{2}$ чиқади.

Жавоб. $x_1=1$; $x_2=-\frac{27}{8}$.

213. Бу масала ҳам бундан олдинги масала каби ечилади.

Жавоб. $z_1=64$; $z_2=-\frac{125}{8}$.

214. $\sqrt[6]{a+x}=z$ деб фараз қиламиз; у ҳолда $\sqrt{a+x}=z^3$ ва $\sqrt[3]{a+x}=z^2$ бўлади.

Жавоб. $x_1=-a$; $x_2=1-a$.

215. $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=z$ деб фараз қиламиз; у ҳолда $\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=$ $=\frac{1}{z}$ ва бир қатор шакл ўзгартиришлардан кейин тенглама

$$12z^2-7z-12=0$$

шаклни олади, бундан

$$z_1=\frac{4}{3} \text{ ва } z_2=-\frac{3}{4}.$$

Иккинчи илдиз манфий бўлгани учун ташлаб юборилади (140-бетдаги 181-масалага берилган 1-изоҳга қаранг). x ни аниқлаш учун $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=\frac{4}{3}$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x=7$.

216. *Жавоб.* $x = \pm 5$.

217. $\sqrt[3]{x} = z$ деб фараз қиламиз; у ҳолда $\sqrt[3]{x^2} = z^2$ ва $x = z^3$ бўлади.

$$\frac{z^4 - 1}{z^2 - 1} - \frac{z^2 - 1}{z + 1} = 4$$

ҳосил бўлади. Биринчи касрни $z^2 - 1$ га, иккинчисини $z + 1$ га қисқартирамиз. $z^2 - z - 2 = 0$ ҳосил бўлади. Лекин, биринчи касрни фақат $z^2 - 1 \neq 0$ ҳолдагина қисқартириш қонуний, иккинчи касрни $z + 1 \neq 0$ ҳолдагина қисқартириш қонуний бўлади. Ҳолбуки, $z_1 = 2$ ва $z_2 = -1$ илдизлардан иккинчиси $z + 1 = 0$ ни беради. У ярамайди, чунки $z = -1$ бўлганда $x = -1$ бўлади ва берилган тенгламанинг чап томони маъносини йўқотади.

Жавоб. $x = 8$.

218. $\sqrt{x} = z$ деб фараз қилиб, тенгламани

$$\frac{z^2 - 4}{z + 2} = z^2 - 8$$

кўринишига келтирамиз, касрни $z + 2$ га қисқартирамиз (бундан олдинги масаланинг тушунтирилишига қаранг). $z^2 - z - 6 = 0$ ҳосил бўлади, бундан $z_1 = 3$; $z_2 = -2$. Иккинчи илдиз ярамайди, чунки биринчидан, $\frac{z^2 - 4}{z + 2}$ ифода маъносини йўқотади, иккинчидан, z манфий сон бўла олмайди.

Жавоб. $x = 9$.

219. Бу ерда бундан илгариги масалаларда қўлланилган ёрдамчи номаълум киритиш мўлжалланган мақсадга олиб келмайди. Тенгламани $\frac{(\sqrt{a - x})^3 + (\sqrt{x - b})^3}{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}} = a - b$ кўринишга келтирамиз Касрни $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}$ га қисқартирамиз (қисқартириш қонуний, чунки бу сон нолга тенг бўла олмайди). Ихчамлаштиргандан. кейин $\sqrt{(a - x)(x - b)} = 0$ ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1 = a$; $x_2 = b$.

220. Берилган тенгламани $\sqrt{2 - x} \cdot \left(\frac{\sqrt{2 - x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ кўринишга келтирамиз. Бу тенглама иккитага ажралади: биринчиси $\sqrt{2 - x} = 0$; бунинг илдизи $x_1 = 2$; иккинчиси махраждан қутқаргандан кейин $\sqrt{2(2 - x)} = 2 - \sqrt{x}$ бўлади. Бунинг илдизлари $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{16}{9}$.

Жавоб. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{16}{9}$.

221. *Жавоб.* $x = 81$.

222. Агар радикални яккалаб, ҳосил бўлган тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарсак, 4-даражали тенглама ҳосил қиламиз. Лекин, бу мисолда сунъий усулни қўлланишт мумкин. Тенгламани

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5=12$$

кўринишида ёзамиз. $\sqrt{x^2-3x+5}=z$ деб фараз қилиб, $z^2+z-12=0$ ни ҳосил қиламиз. Фақат мусбат илдизни ($z=3$ ни) оламиз.

Жавоб. $x_1=4$; $x_2=-1$.

223. Бундан олдинги масалада қўлланилган усулни қўлланишт мумкин. Бироқ, тенгламанинг ечими йўқлигини олдиндан айтиш мумкин. Ҳақиқатан, $3x^2+5x+1$ миқдор x нинг ҳар қандай қийматида ҳам $3x^2+5x-8$ дан катта. Шунинг учун

$$\sqrt{3x^2+5x+1}>\sqrt{3x^2+5x-8},$$

демак, берилган тенгламанинг чап томони x нинг ҳар қандай қийматида манфий, демак, бирга тенг бўлиши мумкин эмас.

Жавоб. Тенгламанинг ечими йўқ.

224. Илдиз остидаги ифодалардан бирини z билан белгилаймиз—энг осони $y^2+4y+6=z$ деб фараз қилишдир. Тенглама

$$\sqrt{z+2}+\sqrt{z-2}=\sqrt{2z}$$

кўринишга киради. Радикалдан қутулиб, $z^2=4$ ни топамиз. Фақат $z=2$ илдиз ярайди ($z=-2$ бўлганда илдиз остидаги иккала ифода манфий бўлади). $y^2+4y+6=2$ тенгламани ечамиз. Текширамиз.

Жавоб. $y=-2$.

225 1). Ўрнига қўйиш усули билан ечиш мумкин (иккинчи тенгламадан $y=6-x$ ёки $x=6-y$ ни топамиз ва биринчига қўямиз). Қуйидаги сунъий усул мақсадга бирмунча тезроқ олиб келади. Биринчи тенглама $(x-y)^2=4$ шаклга келади, бундан $x-y=2$ ёки $x-y=-2$ келиб чиқади. Иккита система ҳосил бўлади:

$$1)\ \begin{cases} x-y=2, \\ x+y=6; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-y=-2, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $x_1=4,\ y_1=2$;
2) $x_2=2,\ y_2=4$.

---

1) 225-масалада ва бу бобнинг бундан кейинги кўпчилик масалаларида уларни осонлик билан ечиш учун сунъий усулларни қўлланишт жуда зарур. Бу масалаларнинг асосий қийинчилиги ҳар қайси системанинг хусусиятини билиб олиш ва тегишли сунъий усулни топиб олишдан иборатдир.

226. Берилган системани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\begin{cases} xy + (x + y) = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$$

Қисқалик учун $xy = z_1$; $x + y = z_2$ деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 11, \\ z_1 z_2 = 30 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Виет теоремасига асосан z_1 ва z_2 ушбу $z^2 - 11z + 30 = 0$ квадрат тенгламанинг илдизларидир. Бундан $z_1 = 6$; $z_2 = 5$ ёки $z_1 = 5$, $z_2 = 6$. Қуйидаги иккита система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Буларнинг ҳар бирига яна Виет теоремасини қўлланиш (ёки ўрнига қўйиш усули билан ечиш) мумкин.

Жавоб. 1) $x = 5$, $y = 1$; 2) $x = 1$, $y = 5$;
3) $x = 2$, $y = 3$; 4) $x = 3$, $y = 2$.

227. $y^2 = z$ деб фараз қилиб, мана бу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x + z = 7, \\ xz = 12. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $x = 4$, $y = \sqrt{3}$; 2) $x = 4$, $y = -\sqrt{3}$;
3) $x = 3$, $y = 2$; 4) $x = 3$, $y = -2$.

228. $x^2 = z_1$ ва $-y = z_2$ деб фараз қиламиз. Ушбу система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 23, \\ z_1 z_2 = -50. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $x = 5$, $y = 2$;
2) $x = -5$, $y = 2$;
3) $x = i\sqrt{2}$, $y = -25$;
4) $x = -i\sqrt{2}$, $y = -25$.

229. $-xy = z_1$; $x^2 - y^2 = z_2$ деб фараз қиламиз. Қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} z_1 z_2 = -180, \\ z_1 + z_2 = -11. \end{cases}$$

Бундан $z_1=9$; $z_2=-20$ ёки $z_1=-20$; $z_2=9$. Энди қуйидаги иккита системани ҳосил қиламиз:

$$1)\ \begin{cases} xy=-9, \\ x^2-y^2=-20 \end{cases} \quad \text{ва} \quad 2)\ \begin{cases} xy=20, \\ x^2-y^2=9. \end{cases}$$

Биринчи системани ечамиз. Унинг биринчи тенгламасидан $y=-\frac{9}{x}$ ни топамиз. Буни иккинчи тенгламага қўямиз. $x^4+20x^2-81=0$ биквадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-10+\sqrt{181}}\approx\pm\sqrt{3{,}45}\approx\pm 1{,}86,$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{-10-\sqrt{181}}\approx\pm\sqrt{-23{,}45}\approx\pm 4{,}84i.$$

Энди

$$y_{1,2}=\frac{\mp 9}{\sqrt{-10+\sqrt{181}}}\approx\frac{\mp 9}{1{,}86}\approx\mp 4{,}84,$$

$$y_{3,4}\approx\frac{\mp 9}{4{,}84i}\approx\mp 1{,}86i.$$

Иккинчи системани ҳам шу усул билан ечамиз.

Жавоб. 1) $x\approx 1{,}86$, $y\approx -4{,}84$;
2) $x\approx -1{,}86$, $y\approx 4{,}84$;
3) $x\approx 4{,}84i$ $y\approx 1{,}86i$;
4) $x\approx -4{,}84i$, $y\approx -1{,}86i$;
5) $x=5$, $y=4$;
6) $x=-5$, $y=-4$;
7) $x=4i$, $y=-5i$;
8) $x=-4i$, $y=5i$.

230. Озод ҳадларни чиқариб юборамиз, бунинг учун иккинчи тенгламани 7 га кўпайтириб, биринчи тенгламадан айирамиз.

$$-32x^2-2xy+75y^2=0$$

ҳосил бўлади. Бу — бир жинсли иккинчи даражали тенглама (яъни фақат иккинчи даражали ҳадлари бўлган тенглама бўлиб, унда биринчи даражали ҳадлар ва озод ҳадлар йўқ). Тенгламанинг иккала қисмини x^2 га бўлиб (бўлиш мумкин, чунки $x=0$ илдиз эмас), уни $-32-2\frac{y}{x}+75\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$ кўринишга келтирамиз ва бу квадрат тенгламани ечиб, $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ ёки $\frac{y}{x}=-\frac{16}{25}$ ни топамиз. Шу усул билан ҳар қандай иккинчи даражали биржинсли тенгламадан $\frac{y}{x}$ нисбатни топиш мумкин.

Энди қуйидаги иккита системани (ўрнига қўйиш усули билан) ечамиз:

1) $\begin{cases} 5x^2 - 10y^2 - 5 = 0, \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ ва 2) $\begin{cases} 5x^2 - 10y^2 - 5 = 0, \\ \dfrac{y}{x} = -\dfrac{16}{25}. \end{cases}$

Жавоб. 1) $x = 3,\ y = 2;$ 3) $x = \frac{25}{\sqrt{113}},\ y = -\frac{16}{\sqrt{113}};$

2) $x = -3,\ y = -2;$ 4) $x = -\frac{25}{\sqrt{113}},\ y = \frac{16}{\sqrt{113}}.$

231. 1-тенгламани бундай ёзамиз: $x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{2}xy$. У вақтда $(x-y)^2 = \frac{1}{2}xy$ бўлади. 2-тенгламани $2(x-y) = \frac{1}{2}xy$ кўринишда ёзамиз. Демак, $(x-y)^2 - 2(x-y) = 0$.

Бундан $x - y = 0$ ва $x - y = 2$ ни топамиз. Икки система ҳосил бўлади:

1) $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$ ва 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 8. \end{cases}$

Жавоб. 1) $x = y = 0$; 2) $x = 4,\ y = 2$; 3) $x = -2,\ y = -4$.

232. Биринчи тенгламани бундай ёзамиз:

$$(x^2 + 2xy + y^2) = 13 + xy \text{ ёки } (x+y)^2 - 13 = xy.$$

Иккинчи тенгламадан $x + y = 4$ ни шу тенгламага қўйиб, $16 - 13 = xy$ ни топамиз. Энди қуйидаги системани ечамиз:

$$\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $x = 3,\ y = 1$; 2) $x = 1,\ y = 3$.

233. Бундан олдинги масалага ўхшаш ечилади. Янги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} xy = 6, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $x = 3,$ 2) $x = -2,$
$y = 2;$ $y = -3.$

234. $\frac{x}{y} = z$ деб фараз қиламиз; у ҳолда $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$ ва биринчи тенглама $z + \frac{1}{z} = \frac{25}{12}$ ёки $12z^2 - 25z + 12 = 0$ кўринишга келади. Унинг илдизлари $z_1 = \frac{4}{3}$ ва $z_2 = \frac{3}{4}$. Энди қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3}, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}, \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Система биринчи тенгламадан x нинг қийматини иккинчи тенгламага қўйиш билан ечилади.

Жавоб. 1) $x = 4, \quad y = 3;$
2) $x = -4, \quad y = -3;$
3) $x = 3i, \quad y = 4i;$
4) $x = -3i, \quad y = -4i.$

235. Системани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} x^m y^n = ca^m b^n, \\ x^n y^m = ba^m b^n. \end{cases}$$

Бу тенгламаларни бир-бирига кўпайтирамиз ва бирини иккинчисига бўламиз. $(xy)^{m+n} = cda^{2m}b^{2n}$ ва $\left(\frac{x}{y}\right)^{m-n} = \frac{c}{d}$ ни ҳосил қиламиз, бундан $xy = (cd)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{2m}{m+n}} b^{\frac{2n}{m+n}}$ ва $\frac{x}{y} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{m-n}}$. Бу тенгламаларни бир-бирига кўпайтириб, $x^2 = c^{\frac{2m}{m^2-n^2}} d^{\frac{2n}{n^2-m^2}} a^{\frac{2m}{m+n}} b^{\frac{2n}{m+n}}$ ни топамиз. $\left(\frac{x}{y}\right)^{m-n} = \frac{d}{c}$ тенгламани олиб, y^2 учун ифодани шундай топамиз. y нинг ифодаси x учун чиқарилган тенгламадан фақат c ва d ҳарфларининг ўринлари алмашинганлиги билан фарқ қилади.

Жавоб. $x = c^{\frac{m}{m^2-n^2}} d^{\frac{n}{n^2-m^2}} a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}}, \quad y = c^{\frac{n}{n^2-m^2}} d^{\frac{m}{m^2-n^2}} a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}}.$

236. Иккинчи тенгламадаги $x^3 + y^3$ ни $(x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$ кўпайтувчиларга ажратамиз ва иккинчи тенгламани биринчи тенгламага бўламиз. $x + y = 5$ ҳосил қиламиз. Биринчи тенгламанинг ўнг ва чап томонларига $3xy$ дан қўшамиз; $(x + y)^2 = 7 + 3xy$ ҳосил бўлади. Бу тенгламага мувофиқ $(x + y)$ ўрнига 5 ни қўйиб, $xy = 6$ ни топамиз. Энди

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases}$$

системани ечамиз.

Жавоб. 1) $x = 3, \quad y = 2;$
2) $x = 2, \quad y = 3.$

237. Иккинчи тенгламани 3 га кўпайтириб, биринчи тенгламага қўшамиз. $(x + y)^3 = 1$ ҳосил бўлади. Агар ҳақиқий илдизлар билан чекланадиган бўлсак, $x+y=1$ чиқади. Иккинчи тенгламадаги $(x+y)$ ўрнига 1 ни қўйиб, $xy=-2$ ни топамиз. Энди мана бу системани ечамиз:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2. \end{cases}$$

Жавоб: 1) $x=2, \quad y=-1;$
2) $x=-1, \quad y=2.$

238. Бу ҳам олдинги масала каби ечилади.
Жавоб. 1) $x=3, \quad y=2;$
2) $x=2, \quad y=3.$

239. $\frac{x+y}{x-y}=z$ деб фараз қиламиз. Биринчи тенглама $z+\frac{1}{z}=5\frac{1}{5}$ кўринишга келади. Бундан $z=5$ ва $z=\frac{1}{5}$, яъни

$$\frac{x+y}{x-y}=5 \quad \text{ва} \quad \frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{5}$$

бўлади. $\frac{x+y}{x-y}=5$ тенгламадан $y=\frac{2}{3}x$ ни топамиз. Бу тенгламани берилган $xy=6$ тенглама билан биргаликда ечамиз. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{5}$ тенгламадан ҳам шу тарзда фойдаланамиз.

Жавоб. 1) $x=3, \quad y=2;$
2) $x=-3, \quad y=-2;$
3) $x=3i, \quad y=-2i;$
4) $x=-3i, \quad y=2i.$

240. Системадан номаълум z ни йўқотамиз; биринчи тенгламани c га кўпайтириб, ундан иккинчи тенгламани айирамиз, иккинчи тенгламани c га кўпайтириб, ундан учинчи тенгламани айирамиз, қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} (c-a)x+(c-b)y=(c-d), \\ a(c-a)x+b(c-b)y=d(c-d). \end{cases}$$

Бундан x ва y ни топамиз. z ни ҳам шу усулда топамиз.

Жавоб. $x=\frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}; \quad y=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)};$

$$z=\frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)}.$$

241. Элдин u ни йўқотамиз; бунинг учун: 1) иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, уни биринчига қўшамиз; 2) учинчи тенгламани (—2) га кўпайтириб, уни иккинчига қўшамиз; 3) учинчи тенгламани (—3) га кўпайтириб, уни тўртинчига қўшамиз. Қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} 5x-4y+13z=36, \\ -4x-11y+9z=1, \\ -5x-13y+12z=5. \end{cases}$$

Олдин иккинчи тенгламадан учинчи тенгламани айириб бу системадан x ни йўқотамиз. Қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & 5x-4y+13z=36; \\ \text{б)} & x+2y-3z=-4; \\ \text{в)} & -5x-13y+12z=5. \end{array}$$

а) ва в) тенгламаларни қўшамиз, б) тенгламани 5 га кўпайтирамиз ва в) билан қўшамиз. Ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} -17y+25z=41, \\ -3y-3z=-15 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} -17y+25z=41, \\ y+z=5. \end{cases}$$

Бундан $z=3$ ва $y=2$ ни топамиз. б) тенгламадан x ни ва берилган учинчи тенгламадан u ни топамиз.

Жавоб. $x=1$; $y=2$; $z=3$; $u=4$.

242. Иккинчи тенгламадан биринчини айирамиз. $y+2z=1$ ҳосил қиламиз. Бундан $y=1-2z$ келиб чиқади. y нинг бу қийматини биринчи тенгламага қўямиз, $x=z+3$ ни топамиз. x ва y нинг топилган қийматларини учинчи тенгламага қўйиб, $3z^2+z-2=0$ ни ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари $z_1=\frac{2}{3}$ ва $z_2=-1$. z нинг қийматини $x=z+3$ ва $y=1-2z$ тенгламаларга қўйиб, x ва y нинг иккитадан қийматларини топамиз.

Жавоб. 1) $x=\frac{11}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=\frac{2}{3}$;

2) $x=2$, $y=3$, $z=-1$.

243. Биринчи тенгламани квадратга, иккинчи тенгламани кубга кўтарамиз ва учинчи тенгламанинг иккинчи ҳадини тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб, уни квадратга кўтарамиз. Қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} 4x+y-3z=-3, \\ 5x+2y+z=1{,}5, \\ 6x-y-z=0. \end{cases}$$

Жавоб. $x=\frac{9}{58}$, $y=-\frac{6}{29}$, $z=\frac{33}{29}$.

244. Биринчи тенгламани квадратга кўтариб, ундан иккинчи тенгламани айирамиз. $xy+xz+yz=54$ ҳосил бўлади. Учинчи тенгламага мувофиқ олдинги икки қўшилувчини $2yz$ га алмаштириш мумкин. $3yz = 54$, яъни

$$yz = 18. \tag{а}$$

ҳосил бўлади. Энди учинчи тенгламани $xy + xz = 2 \cdot 18$, яъни

$$x(y + z) = 36 \tag{б}$$

шаклида ёзиш мумкин. Биринчи тенглама

$$x + (y + z) = 13 \tag{в}$$

шаклда бўлгани учун (б) ва (в) тенгламаларда x ва $y + z$ ни топиш мумкин:

$$\left\{\begin{aligned} x &= 9, \\ y + z &= 4 \end{aligned}\right. \quad \text{ёки} \quad \left\{\begin{aligned} x &= 4, \\ y + z &= 9 \end{aligned}\right.$$

ҳосил бўлади. y билан z ни айрим-айрим топиш учун (а) тенгламани бирлаштирамиз. Икки система ҳосил қиламиз:

$$1) \left\{\begin{aligned} y + z &= 4, \\ yz &= 18 \end{aligned}\right. \quad \text{ва} \quad 2) \left\{\begin{aligned} y + z &= 9, \\ yz &= 18. \end{aligned}\right.$$

Изоҳ. Биринчи тенгламани квадратга кўтарганда ортиқча илдизлар чиқиб қолиш хавфи туғилади. Лекин ортиқча илдизлар чиққанда ҳам $x + y + z = -13$ тенгламани қаноатлантиради, бу эса (в) тенгламага қарама-қарши бўлар эди.

Жавоб.

1) $x = 9, \quad y = 2 + i\sqrt{14}, \quad z = 2 - i\sqrt{14}$;
2) $x = 9, \quad y = 2 - i\sqrt{14}, \quad z = 2 + i\sqrt{14}$;
3) $x = 4, \quad y = 6, \quad z = 3$;
4) $x = 4, \quad y = 3, \quad z = 6$.

245. Учинчи тенгламани

$$z^2 - xz - yz + xy = 2$$

шаклда ёзамиз. Уни иккинчи тенглама билан қўшиб,

$$z^2 + 2xy = 49 \tag{а}$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан $z^2 = 49 - 2xy$ чиқади. Бу ифодани биринчи тенгламага қўямиз. $(x + y)^2 = 49$, яъни $x + y = \pm 7$ ҳосил бўлади. Олдин $x + y = 7$ деб фараз қиламиз.

Иккинчи тенгламани

$$xy + z(x + y) = 47$$

кўринишда ёзамиз ва бунга (а) дан чиқадиган $xy=\frac{49-z^2}{2}$ ифодани ва $x+y=7$ қийматини қўямиз. $z^2-14z+45=0$ ҳосил бўлади. Бундан $z_1=5$ ва $z_2=9$ чиқади. Агар $z=5$ бўлса, у ҳолда $xy=\frac{49-z^2}{2}=12$; агар $z=9$ бўлса, $xy=\frac{49-z^2}{2}=$ $=-16$ бўлади. Икки система ҳосил қиламиз:

$$1)\ \begin{cases} x+y=7, \\ xy=12 \end{cases} \text{ ва } 2)\ \begin{cases} x+y=7, \\ xy=-16. \end{cases}$$

Булардан ҳар бирининг иккитадан ечими бор. Тўртта ечим ҳосил бўлади:

1) $x=3,\ y=4,\ z=5;$
2) $x=4,\ y=3,\ z=5;$
3) $x=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\ z=9;$
4) $x=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\ z=9.$

Энди $x+y=-7$ деб фараз қиламиз ва ўша усул билан яна тўртта ечим ҳосил қиламиз.

Жавоб.

1) $x=3,\ y=4,\ z=5;$
2) $x=4,\ y=3,\ z=5;$
3) $x=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\ z=9;$
4) $x=\frac{7-\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{7+\sqrt{113}}{2},\ z=9;$
5) $x=-3,\ y=-4,\ z=-5;$
6) $x=-4;\ y=-3,\ z=-5;$
7) $x=\frac{-7+\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},\ z=-9;$
8) $x=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},\ y=\frac{-7+\sqrt{113}}{8},\ z=-9.$

246. Биринчи тенгламадан иккинчи тенгламани, сўнгра учинчи тенгламани айирамиз:

$$(a^3-b^3)+(a^2-b^2)x+(a-b)y=0, \qquad (а)$$
$$(a^3-c^3)+(a^2-c^2)x+(a-c)y=0. \qquad (б)$$

(а) тенгламани $(a-b)$ га ва (б) тенгламани $(a-c)$ га қисқартирамиз:

$$(a^2+ab+b^2)+(a+b)x+y=0, \qquad (в)$$
$$(a^2+ac+c^2)+(a+c)x+y=0. \qquad (г)$$

(г) ни (в) дан айирамиз:

$$(ab - ac + b^2 - c^2) + (b - c)x = 0.$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан

$$x = -\frac{ab - ac + b^2 - c^2}{b - c} = -(a + b + c).$$

Номаълум y ни (в) дан ёки (г) дан топамиз. Энди берилган тенгламаларнинг истаган биридан z ни топамиз.

Жавоб. $x = -(a + b + c)$,
$y = ab + bc + ca$,
$z = -abc$.

247. $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = u$; $\frac{1}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = v$ фараз қиламиз. Бундан шу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 12u + 5v = 5, \\ 8u + 10v = 6. \end{cases}$$

Бунинг илдизлари: $u = \frac{1}{4}$; $v = \frac{2}{5}$, яъни $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{y+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{5}$ бўлади. Бундан $x = 17$; $y = 6$ ни топамиз.

Жавоб. $x = 17$, $y = 6$.

248. Иккинчи тенгламага асосан, биринчи тенгламани $10 - 2\sqrt{xy} = 4$ шаклда ёзиш мумкин. Бундан $xy = 9$. Мана бу система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 9. \end{cases}$$

Жавоб. 1) $x=9$, $y = 1$; 2) $x = 1$, $y = 9$.

249. $\sqrt{\frac{3x}{x+y}} = z$ деб фараз қиламиз. Биринчи тенглама $z - 2 + \frac{1}{z} = 0$ кўринишга киради. Бундан $z = 1$, яъни $\sqrt{\frac{3x}{x+y}} = 1$. Кейинги тенгламадан $y = 2x$ ни топамиз ва уни иккинчи тенгламага қўямиз.

Жавоб. 1) $x = 6$, $y = 12$; 2) $x = -4{,}5$, $y = -9$.

250. Биринчи тенглама $\sqrt[3]{x^2 + y^2} = 2\sqrt[3]{17}$ кўринишга келтирилади. Бундан

$$x^2 + y^2 = 136. \qquad \text{(а)}$$

Иккинчи тенгламани квадратга кўтарамиз; $\sqrt{x^2 - y^2} = 18 - x$, ҳосил бўлади, бундан

$$y^2 = 36x - 324 \tag{б}$$

келиб чиқади. Бу ифодани (а) га қўямиз. $x^2 + 36x - 460 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бундан $x = 10$ ва $x = -46$ ни топамиз. Уни (б) га қўйиб, y ни топамиз. Тўрт жуфт ечим ҳосил бўлади:

$$1)\ x = 10,\ y = 6; \qquad 3)\ x = -46,\ y = 6\sqrt{55}\,i;$$
$$2)\ x = 10,\ y = -6; \qquad 4)\ x = -46,\ y = -6\sqrt{55}\,i.$$

Учинчи ва тўртинчи жуфт ечимлар ярамайди, чунки радикаллар илдизларнинг арифметик қийматларини билдириши керак бўлган $\sqrt{x + y}$ ва $\sqrt{x - y}$ ифодалар (акс ҳолда улар илдизнинг икки хил маъноли бўлиши сабабли ноаниқ бўлади) $x + y$ ва $x - y$ нинг қийматлари комплекс сон бўлганда маъноси бўлмайди. Биринчи ва иккинчи жуфт ечимларни текшириш лозим.

Жавоб. 1) $x = 10$, $y = 6$; 2) $x = 10$, $y = -6$.

251. Системанинг фақат $a \geqslant 0$ бўлгандагина маъноси бўлади (бундан олдинги масаланинг изоҳига қаранг). Биринчи тенгламани квадратга кўтарамиз:

$$\sqrt{x^2 - y^2} = 8a - x. \tag{а}$$

Бу ифодани иккинчи тенгламага қўямиз:

$$\sqrt{x^2 - y^2} = (\sqrt{41} + 5)\ a - x \tag{б}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (*а*) ва (б) тенгламаларни квадратга кўтарамиз:

$$y^2 = -64a^2 + 16ax, \tag{а$'$}$$
$$y^2 = (\sqrt{41} + 5)^2\ a^2 - 2(\sqrt{41} + 5)\,ax \tag{б$'$}$$

(а$'$) ва (б$'$) дан y ни йўқотамиз.

$$\left(130 + 10\sqrt{41}\right) a^2 = \left(26 + 2\sqrt{41}\right) ax$$

ҳосил бўлади, бундан $x = 5a$. (а$'$) дан $y = \pm 4a$ ни топамиз, сўнгра текшириб кўрамиз.

Жавоб. 1) $x=5a$, $y = 4a$; 2) $x = 5a$, $y = -4a$.

252. Биринчи тенгламани квадратга кўтарамиз: $2x^2 - 2\sqrt{x^4 - y^4} = y^4$. Бунга иккинчи тенгламадаги $x^4 - y^4 = 144a^4$ нинг қийматини қўямиз:

$$y^2 = 2x^2 - 24a^2 \qquad (a)$$

Бундан y^4 ни топамиз ва берилган иккинчи тенгламага қўямиз.

$$x^4 - 32a^2x^2 + 240a^4 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бундан $x = \pm\sqrt{20}\,a$ ва $x = \pm\sqrt{12}\,a$. Энди (а) тенгламадан y ни топамиз. $x = \pm\sqrt{20}\,a$ қийматларнинг ҳар бири учун $y = \pm 4a$ бўлади, $x = \pm\sqrt{12}\,a$ қийматларнинг ҳар бири учун $y = 0$ бўлади. Текшириш, олинган олти жуфт ечимдан a 0 бўлганда бири ортиқча эканлигини, бошқалари эса $a < 0$ бўлганда ортиқча эканлигини кўрсатади. Масалан, бир жуфт ечимни олайлик: $x = \sqrt{20}\,a$, $y = 4a$. Буни биринчи тенгламага қўйиб, $\sqrt{36a^2} - \sqrt{4a^2} = 4a$ ни, яъни $6|a| - 2|a| = 4a$ ни топамиз. Бу тенглик $a \geqslant 0$ бўлганда айният бўлади, лекин $a < 0$ бўлганда бу тўғри эмас.

Жавоб. $a \geqslant 0$ бўлганда ечимлар қуйидагича бўлади:

1) $x = \sqrt{20}\,a, \qquad y = 4a;$
2) $x = -\sqrt{20}\,a, \qquad y = 4a;$
3) $x = \sqrt{12}\,a, \qquad y = 0;$
4) $x = -\sqrt{12}\,a, \qquad y = 0.$

$a < 0$ бўлганда ечимлар: 5) $x = \sqrt{20}\,a$, $y = -4a$;
6) $x = -\sqrt{20}\,a$, $y = -4a$ бўлади.

253. Биринчи усул. Иккинчи тенгламадан $x + y = 14 - \sqrt{xy}$ ни топамиз. Уни квадратга кўтарамиз:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 196 + xy - 28\sqrt{xy},$$

бундан

$$x^2 + y^2 + xy = 196 - 28\sqrt{xy}$$

ҳосил бўлади. Биринчи тенгламага асосан $84 = 196 - 28\sqrt{xy}$. Бундан $\sqrt{xy} = 4$ ни, яъни $xy = 16$ ни топамиз. $\sqrt{xy} = 4$ қийматни иккинчи тенгламага қўйиб, $x + y = 10$ ни топамиз. Ушбу

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 16 \end{cases}$$

системани ечамиз.

Иккинчи усул. Биринчи тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - \left(\sqrt{xy}\right)^2 =$$
$$= \left(x + y + \sqrt{xy}\right)\left(x + y - \sqrt{xy}\right) = 84.$$

Бундан иккинчи тенгламага асосан $14(x+y-\sqrt{xy})=84$ ни, яъни $x+y-\sqrt{xy}=6$ ни ҳосил қиламиз. Ушбу

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=6, \\ x+y+\sqrt{xy}=14 \end{cases}$$

системадан $x+y$ ва $\sqrt{xy}$ ни топиш мумкин.

Жавоб. 1) $x=2,\ y=8$; 2) $x=8,\ y=2$.

253а. Биринчи тенгламадан $y=\frac{x-m}{1+mx}$ ни, иккинчи тенгламадан $y=-\frac{2+x}{1+x}$ ни топамиз; бу икки ифодани тенглаб, $\frac{x-m}{1+mx}=$ $=-\frac{2+x}{1+2}$ ни топамиз; бундан $(1+m)x^2+(2+m)x+(2-m)=0$ тенглама келиб чиқади. Бу тенглама

$$(2+m)^2-4(1+m)(2-m)\geqslant 0$$

шартида ҳақиқий илдизларга эга бўлади. Бунинг чап томонини соддалаштиргандан кейин $5m^2-4\geqslant 0$ ни ҳосил қиламиз, бундан $|m|\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$. Бу шартда x ҳақиқий қийматларга эга бўлади, демак, $y=-\frac{2+x}{1+x}$ ҳам ҳақиқий қийматларга эга бўлади.

Жавоб. $|m|\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4-БОБ

ЛОГАРИФМИК ВА КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Дастлабки эслатмалар

Олий мактабларга кирувчилардан олинадиган имтиҳонларда ечиш учун кўпинча асослари турлича бўлган логарифмик тенгламалар берилади. (Масалан, 267, 268, 309—313-масалаларга қаранг.) Уларни ечиш учун ҳамма логарифмларни бир хил асосга келтириш ишни осонлаштиради. Лекин ўрта мактабда бунга тегишли формулалар берилмайди. Шунинг учун биз бу формулаларни зарур бўлган изоҳлар билан келтирамиз.

1. Ушбу формула

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b} \tag{a}$$

логарифм асоси билан соннинг ролларини алмаштиришга имкон беради.

Мисол.

$$\log_8 2 = \frac{1}{\log_2 8} = \frac{1}{3}.$$

Изоҳ. Логарифмнинг таърифига мувофиқ $\log_2 8$ ифода 8 ҳосил қилиш учун 2 ни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичидир. Шундай қилиб, $\log_2 8 = 3$ ёзуви $2^3 = 8$ ёзувнинг бошқача формасидир, холос. Лекин кейинги тенгликни яна бундай ёзиш ҳам мумкин: $\sqrt[3]{8} = 2$, яна $8^{\frac{1}{3}} = 2$. Бинобарин, $\log_8 2 = \frac{1}{3}$.

Умуман $a^x = b$ тенгликни яна бундай ёзиш мумкин: $b^{\frac{1}{x}} = a$. Биринчи тенглик $\log_a b = x$ ни билдиради, иккинчиси эса $\log_b a = \frac{1}{x}$ эканини билдиради, бундан (а) формула келиб чиқади.

2. (а) формула умумийроқ бўлган

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \tag{б}$$

формуланинг хусусий ҳолидир. Бу формула қуйидаги муҳим фактни ифода қилади: турли сонларнинг логарифмларини b асосга кўра билган ҳолда, шу сонларнинг логарифмларини a асосга кўра топиш мумкин; бунинг учун $\log_b a$ га (яъни янги асос бўйича эски асос логарифмига) бўлиш кифоя. $\log_b a$ га бўлиш ўрнига [(а) формулага асосан] $\log_a b$ га кўпайтириш мумкин:

$$\log_a N = \log_a b \ \log_b N. \tag{в}$$

Кўпайтувчи $\log_a b$ *ўтиш модули* (асоси b бўлган логарифмлар системасидан асоси a бўлган логарифмлар системасига ўтиш модули) дейилади.

Мисол. Ўнли логарифмлар жадвали бўлса, 2 асоси бўйича логарифмлар жадвали тузиш мумкин. Бунинг учун $\lg 2 = 0{,}3010$ га бўлиш ёки $\log_2 10 = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}322$ га кўпайтириш кифоя. Масалан,

$$\log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0{,}4771}{0{,}3010} = 1{,}585.$$

Изоҳ. Логарифмнинг таърифига мувофиқ $2^{\log_2 3}=3$. Бу тенгликни 10 асосга кўра логарифмлаймиз. $\log_2 3 \cdot \lg 2 = \lg 3$ ни ҳосил қиламиз, бундан $\log_2 3 = -\frac{\lg 3}{\lg 2}$ келиб чиқади. Шундай усул билан $a^{\log_a N} = N$ айниятдан b асосга кўра логарифмлаб, (б) формулани ҳосил қиламиз.

Белгилашларда адашиб кетмаслик учун текширишда қуйидаги усулни қўлланиш фойдали: $\log_a b$ ифода ўрнига $\frac{b}{a}$ касрни ёзамиз (бу ифодалар ўзаро тенг эмас, албатта); $\log_b a$, $\log_a N$ ва ҳоказо ифодаларни ҳам шу усулда ёзамиз. У ҳолда (а), (б), (в) формулалар ўрнига бошқа, лекин тўғри формулалар ҳосил қиламиз. Масалан, (в) формула ўрнига

$$\frac{N}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{N}{b}$$

формулани ҳосил қиламиз.

254. Биринчи усул.

$$x = 10 \cdot 10^{2\left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right)} = 10 \cdot 10^{\lg 9 - 2\lg 2} = 10 \cdot 10^{\lg \frac{9}{4}}.$$

Логарифмнинг таърифига мувофиқ $10^{\lg \frac{9}{4}} = \frac{9}{4}$, шунинг учун $x = 10 \cdot \frac{9}{4} = 22{,}5$.

Жавоб. $x = 22{,}5$.

Иккинчи усул. Берилган тенгламани логарифмлаб

$$\lg x = \lg 10 + \left(\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2\right) \lg 100,$$

ёки

$$\lg x = \lg 10 + \lg 9 - 2\lg 2 = \lg \frac{10 \cdot 9}{2^2}$$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = 22{,}5$.

255. 254-масаладагидек (иккинчи усул) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lg x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lg 4\right) \log 100; \ \lg x = 1 - \frac{1}{2}\lg 4 = \lg \frac{10}{\sqrt{4}}; x = \frac{10}{\sqrt{4}}.$$

Жавоб. $x = 5$.

256. Бундан олдинги масалалардаги сингари иш кўриб:

$$\lg x = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\lg 16\right)\lg 10 = 1 + \frac{1}{4}\lg 16 = \lg\left(10\sqrt[4]{16}\right);$$

$$x = 10\sqrt[4]{16}$$

ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = 20$.

257. Биринчи усул.

$$x = 7^{2-2\log_7 2} + \frac{1}{5^{\log_5 4}} = \frac{7^2}{7^{\log_7 4}} + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}.$$

(254-масаланинг биринчи усулда ечилиши билан таққосланг.)

Иккинчи усул. Бундай белгилаб оламиз:

$$y = 49^{1-\log_7 2} \text{ ва } z = 5^{-\log_5 4};$$

у ҳолда

$$x = y + z.$$

Бундан олдингидек,

$$\log_7 y = (1 - \log_7 2)\log_7 49$$

ёки

$$\log_7 y = (\log_7 7 - \log_7 2)\,2 = 2\log_7 \frac{7}{2} = \log_7 \frac{49}{4},$$

бундан $y = \frac{49}{4}$; шунга ўхшаш, $z = \frac{1}{4}$, демак, $x = \frac{25}{2}$.

Жавоб. $x = \frac{25}{2}$.

258. $\log_4 \log_3 \log_2 x = \log_4 1$, бундан $\log_3 \log_2 x = 1$; $\log_2 x = 3$.
Жавоб. $x = 8$.

259. Бундан олдинги масалани ечгандагидек иш кўрамиз:

$$1 + \log_b\,[1 + \log_c(1 + \log_p x)] = 1;$$
$$\log_b[1 + \log_c(1 + \log_p x)] = 0.$$

Сўнгра

$$1 + \log_c(1 + \log_p x) = 1;\ \log_c(1 + \log_p x) = 0;$$
$$1 + \log_p x = 1,\ \log_p x = 0;\ x = 1.$$

Жавоб. $x = 1$.

260. Катта қавс ичидаги ифода мусбат сон бўлиши керак, чунки асоси 4 бўлганда манфий сон (ҳақиқий) логарифмга эга бўлмайди. Шунинг учун берилган тенгламани $2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)] = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$ кўринишда ёзиб, мусбат қиймат $\sqrt{4}$, яъни 2 ни ҳосил қилишимиз керак. Шунга ўхшаш шакл алмаштиришларни яна қўлланиб,

$$\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)] = 1,\quad 1+\log_2(1+3\log_2 x) = 3,$$
$$\log_2(1+3\log_2 x) = 2$$

ҳосил қиламиз; демак, $1+3\log_2 x = 4$, $\log_2 x = 1$.

Жавоб. $x = 2$.

261. Берилган тенгламани

$$\log_2(x+14)(x+2) = 6 \text{ ёки } (x+14)(x+2) = 2^6 = 64$$

кўринишга келтирамиз, бундан $x^2+16x-36=0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -18$. Иккинчи илдиз ярамайди, чунки чап томонга $\log_2(x+14)$ ва $\log_2(x+2)$ ифодалар киради, x манфий бўлганда буларнинг ҳақиқий қиймати бўлмайди.

Жавоб. $x = 2$.

262. Берилган тенгламани

$$\log_a[y(y+5)\cdot 0{,}02] = 0$$

кўринишга келтирамиз; бундан

$$y(y+5)\cdot 0{,}02 = 1 \text{ ёки } y^2+5y-50=0$$

келиб чиқади; икки илдиз ҳосил қиламиз: $y_1 = 5$, $y_2 = -10$. Иккинчи илдиз ярамайди (бундан олдинги масалага қаранг).

Жавоб. $y = 5$.

263. Бундай ёзамиз:

$$\lg(35-x^3) = 3\lg(5-x) \text{ ёки } \lg(35-x^3) = \lg(5-x)^3;$$

демак,

$$35-x^3 = (5-x)^3 \text{ ёки } x^2-5x+6=0.$$

Жавоб. $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

264. Урта қавс ичидаги ифоданинг шаклини алмаштириб, $b - \frac{(3a-b)(a^2+ab)^{-1}}{b^{-2}} = \frac{b(a-b)^2}{a(a+b)}$ ҳосил қиламиз. У ҳолда берилган тенглама

$$1+\lg x = \frac{1}{3}\lg\frac{b(a-b)^2}{a(a+b)} - \frac{4}{3}\lg b + \frac{1}{3}\lg[a(a+b)(a-b)]$$

кўринишга келади. Тенгламанинг ўнг томонига кўпайтманинг (ва касрнинг) логарифми ҳақидаги теоремани қўлланамиз:

$$1 + \lg x = \lg(a - b) - \lg b.$$

Бир ўрнига $\lg 10$ олиб, тенгламани $\lg 10 + \lg x = \lg(a - b) - \lg b$ ёки $\lg(10x) = \lg \frac{a-b}{b}$ шаклда ёзамиз; бундан $10x = \frac{a-b}{b}$ чиқади.

Жавоб. $x = \frac{a-b}{10b}$.

265. Берилган тенгламани

$$\lg\left(x - \frac{a}{\sqrt{1-a}}\right) = \lg\sqrt{1 + \frac{1}{a}} + \lg\sqrt{\frac{a(1-a)}{1+a}}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Уни потенцирлаб,

$$x - \frac{a}{\sqrt{1-a}} = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}\sqrt{\frac{a(1-a)}{1+a}}$$

ёки

$$x - \frac{a}{\sqrt{1-a}} = \sqrt{1-a}$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-a}}.$$

Жавоб. $x = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

266. Берилган тенгламани бошқача бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{2}\log_x 5 + \log_x 5 + \log_x x - 2{,}25 = \left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2;$$

$\log_x x = 1$ бўлгани учун, соддалаштиргандан кейин $\log_x^2 5 - 6\log_x 5 + 5 = 0$ ҳосил бўлади. $\log_x 5$ номаълумли квадрат тенгламани ечиб, икки илдиз топамиз: $\log_x 5 = 5$ ва $\log_x 5 = 1$.

Жавоб. $x_1 = \sqrt[5]{5}$; $x_2 = 5$.

267. Биринчи усул. $\log_{16} x = z$ фараз қилиб, $x = 16^z$ ни ёзамиз, бундан $\log_4 x = z\log_4 16 = 2z$ ва $\log_2 x = z\log_2 16 = 4z$ келиб чиқади. Берилган тенглама $z + 2z + 4z = 7$ кўринишига келади, яъни $z = 1$.

Иккинчи усул. Хамма логарифмларни 2 асосга келтирамиз. (б) формулага асосан (164-бет)

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2},$$

шунга ўхшаш $\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{4}$ топилади.

$$\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $\log_2 x = 4$.

Жавоб. $x = 16$.

268. Бундан олдинги масала каби ечилади.

Жавоб. $x = a$.

269. Берилган тенгламани $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{3-7x}$ шаклида ёзамиз, бундан $3x - 7 = 3 - 7x$.

Жавоб. $x = 1$.

270. Берилган тенгламани

$$7 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+2}$$

кўринишига келтирамиз. 3^x билан 5^x ни қавсдан ташқарига чиқариб,

$$3^x(7 \cdot 3 - 3^4) = 5^x(5^2 - 5^3) \quad \text{ёки} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3},$$

бундан $x = -1$ келиб чиқади.

Жавоб. $x = -1$.

271. Берилган тенгламани

$$2^{-3} \cdot 2^{4x-6} = \frac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{-3x}} \quad \text{ёки} \quad 2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x}$$

кўринишда ёзамиз. Бундан

$$4x - 9 = \frac{5}{2}x.$$

Жавоб. $x = 6$.

272. Берилган тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$2^{-x^2} \cdot 2^{2x+2} = 2^{-6} \quad \text{ёки} \quad 2^{-x^2+2x+2} = 2^{-6}.$$

Демак,

$$-x^2 + 2x + 2 = -6.$$

Жавоб. $x_1 = 4$; $x_2 = -2$.

273. Берилган тенгламани

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}};$$

кўринишда ёзамиз. Бундан

$$\frac{5(x+5)}{x-7} = -2 + \frac{7(x+17)}{x-3}.$$

Жавоб. $x = 10$.

274. $\frac{\lg 4}{\lg 8} = \frac{2 \lg 2}{3 \lg 2} = \frac{2}{3}$ бўлгани учун берилган тенгламани мана бундай ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \left(\frac{2}{3}\right)^{(1-x)3} = \frac{2}{3}.$$

Демак,

$$2x + 3(1 - x) = 1.$$

Жавоб. $x = 2$.

275. Берилган тенгламани

$$2^{\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}\right)\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 2^2.$$

шаклга келтирамиз; кўрсаткичларини тенглаб, $\frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2$ ёки $2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. $\sqrt{x} = z$ белгисини киритамиз; у ҳолда $2z^2 - 5z - 3 = 0$ ҳосил бўлади, бундан $z_1 = 3$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Лекин иккинчи илдиз ярамайди, чунки z миқдор $\sqrt{x}$ илдизнинг арифметик қиймати бўлгани учун мусбат сон бўлиши керак. Шундай қилиб, $z = \sqrt{x}$. Бундан $x = 9$.

Жавоб. $x = 9$.

276. Берилган тенгламани $2^{1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}} = 2^{\frac{4}{\sqrt{x}-1}}$ кўринишга келтириш мумкин. Демак, $1 + \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$, бундан $3x - 8\sqrt{x} - 3 = 0$. Бунда $\sqrt{x} = z$ деб олиб, $3z^2 - 8z - 3 = 0$; $z_1 = 3$; $z_2 = -\frac{1}{3}$ эканини топамиз; иккинчи илдиз $z_2 = -\frac{1}{3}$ ярамайди (275-масаланинг ечимига қаранг). Демак, $x = 9$.

Жавоб. $x = 9$.

277. Берилган тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$a^{\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}} = a^0.$$

Демак,

$$\frac{3}{x^2-1}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{4}=0.$$

Ихчамлаштиргандап кейин $x^2-2x-15=0$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1=5$; $x_2=-3$.

278. 164-бетдаги (а) формуладан фойдаланиб,

$$\frac{3}{\log_x x+2\log_x a}+\frac{1}{2\left(\log_x x-\frac{1}{2}\log_x a\right)}=2,$$

ёки

$$\frac{3}{1+2\log_x a}+\frac{1}{2-\log_x a}=2$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Буни $\log_x a$ га нисбатан ечиб,

$$\log_x a=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\frac{7\pm 1}{8}$$

ни топамиз.

Жавоб. $x=a$; $x_2=a^{\frac{4}{3}}$.

279. 164-бетдаги (б) формуладан фойдаланиб,

$$\log_x 2=\frac{\log_4 2}{\log_4 x}=\frac{1}{2\log_4 x}$$

ни топамиз. У ҳолда берилган тенглама $\log_4(x+12)=2\log_4 x$ кўринишини олади, бундан $x+12=x^2$ келиб чиқади. Фақат мусбат илдиз $x=4$ ни оламиз; x нинг манфий қийматида $\log_x 2$ ифоданинг ҳақиқий қиймати бўлмайди.

Жавоб. $x=4$.

280*. Берилган тенгламани бундай ёзамиз: $(\log_x 5+2)\log_5^2 x=1$. Бунда $\log_x 5=\frac{1}{\log_5 x}$ бўлгани учун $\left(\frac{1}{\log_5 x}+2\right)\log_5^2 x=1$ тенгламани ҳосил қиламиз. Буни $\log_5 x$ га нисбатан ечиб $(\log_5 x)_1=$ $=\frac{1}{2}$ ва $(\log_5 x)_2=-1$ ни топамиз.

Жавоб. $x_1=\sqrt{5}$; $x_2=\frac{1}{5}$.

281. Тенгламанинг чап қисми геометрик прогрессиянинг $x+1$ ҳадлари йиғиндисидан иборат, шунинг учун ҳам ($a\neq 1$ ҳолда) $\frac{1-a^{x+1}}{1-a}=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$

ёки

$$1 - a^{x+1} = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$$

ёки

$$1 - a^{x+1} = 1 - a^{16}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $a^{x+1} = a^{16}$; $x+1=16$; $x= 15$ чиқади. $a = 1$ бўлганда геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндисининг умумий формуласини қўлланиб бўлмайди. Бу ҳолда берилган тенгламанинг чап томони $x + 1$ қўшилувчиларнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, буларнинг ҳар бири 1 га тенг, шунинг учун тенглама $x + 1 = 16$ шаклни олади ва биз яна $x = 15$ ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = 15$.

282. Берилган тенгламани

$$5^{2+4+6 \dots +2x} = 5^{56}$$

кўринишда ёзамиз, бундан

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2x = 56 \text{ ёки } 1 + 2 + 3 + \dots + x = 28.$$

Тенгламанинг чап томони арифметик прогрессия ҳадларининг йиғиндисидан иборат. Шунинг учун

$$\frac{(1 + x)x}{2} = 28$$

тенглама ҳосил бўлади, бундан $x_1 = 7$, $x_2 = -8$. Иккинчи илдиз ярамайди, чунки масаланинг мазмунига кўра x бутун мусбат сон бўлиши керак.

Жавоб. $x = 7$.

283. Берилган тенгламани

$$2^{2x} 2^{-4} - 17 \cdot 2^x 2^{-4} + 1 = 0$$

кўринишда ёзамиз. $2^x = z$ билан белгилаб,

$$z^2 - 17z + 16 = 0; \; z_1 = 16; \; z_2 = 1$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан $x_1 = 4$; $x_2 = 0$.

Жавоб. $x_1 = 4$; $x_2 = 0$.

284. Бундан олдинги масалага ўхшаш, $4^x = z$ деб оламиз, $2z^2 - 17z + 8 = 0$ ҳосил бўлади.

Жавоб. $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

285. $9^{\frac{1}{x}} = z$ деб, $3z^2 - 10z + 3 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

286. Берилган тенгламани логарифмлаб (10 асосга кўра),

$$\frac{\lg x + 7}{4} \lg x = \lg x + 1 \quad \text{ёки} \quad \lg^2 x + 3 \lg x - 4 = 0$$

ҳосил қиламиз, бундан $\lg x_1 = 1$; $\lg x_2 = -4$.

Жавоб. $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}000\,1$.

287. Берилган тенгламани унинг ҳар бир томони бирор ифоданинг логарифмидан иборат бўладиган қилиб шаклини ўзгартирамиз. Бунинг учун тенгламанинг чап томонидаги 1 ўрнига lg 10 ёзамиз. Энди берилган тенгламани

$$\lg \frac{4^{-1} 2^{\sqrt{x}} - 1}{10} = \lg \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{2^2}$$

шаклда ёзиш мумкин. Логарифмларнинг тенглигидан сонларнинг тенглиги, яъни

$$\frac{4^{-1} 2^{\sqrt{x}} - 1}{10} = \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{4}$$

келиб чиқади. Соддалаштиргандан кейин

$$2^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} - 24 = 0$$

тенглама келиб чиқади.

$2^{\sqrt{x}} = \left(2^{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$ бўлгани учун $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = z$ деб, $z^2 - 5z - 24 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг илдизлари $z_1 = 8$ ва $z_2 = -3$ бўлади. $z_1 = 8$ ни олиб, $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 8$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $\frac{\sqrt{x}}{2} = 3$, яъни $x = 36$. Иккинчи $z = -3$ илдиз $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = -3$ тенгламага олиб келади. Бу тенгламанинг ечими йўқ (мусбат сон 2 нинг ҳеч қандай даражаси манфий бўла олмайди).

Жавоб. $x = 36$.

288. Кетма-кет қуйидагиларни топамиз (бундан олдинги масаланинг ечилишига қаранг):

$$2 \lg \frac{2}{10} + \lg (5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg \left(\frac{5}{5^{\sqrt{x}}} + 5\right),$$

$$\lg \left(\frac{1}{5}\right)^2 (5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg \left(\frac{5\left(1 + 5^{\sqrt{x}}\right)}{5^{\sqrt{x}}}\right),$$

бундан

$$\frac{1}{25}\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\frac{5\left(1+5^{\sqrt{x}}\right)}{5^{\sqrt{x}}}. \qquad (A)$$

Соддалаштиргандан кейин

$$5^{2\sqrt{x}}-124\cdot 5^{\sqrt{x}}-125=0,$$

бундан $5^{\sqrt{x}}=125$ ёки $5^{\sqrt{x}}=-1$. Иккинчи тенгламанинг ечими йўқ; биринчисидан $\sqrt{x}=3$; $x=9$ чиқади.

(A) тенгламани бошқача ечиш ҳам мумкин. (A) тенгламани $5^{\sqrt{x}}+1\neq 0$ га қисқартириш мумкин, у вақтда $\frac{1}{25}=\frac{5}{5^{\sqrt{x}}}$ ни ҳосил қиламиз; бундан $5^{\sqrt{x}}=125$ ва $x=9$.

Жавоб. $x=9$.

289. Берилган тенгламани

$$5^{\lg x}+5^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}+3^{\lg x-1}$$

кўринишга келтирамиз. $5^{\lg x}$ ва $3^{\lg x}$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$5^{\lg x}\left(1+5^{-1}\right)=3^{\lg x}\left(3+3^{-1}\right) \text{ ёки } \frac{5^{\lg x}}{3^{\lg x}}=\frac{25}{9}; \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2},$$

бундан $\lg x=2$ келиб чиқади.

Жавоб. $x=100$.

290. 10 асос бўйича логарифмлаб,

$$2\lg^4 x-1{,}5\lg^2 x=\frac{1}{2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу биквадрат тенгламанинг ($\lg x$ га нисбатан) иккита ҳақиқий илдизи бор; $\lg x=1$ ва $\lg x=-1$; демак, $x_1=10$, $x_2=0{,}1$.

Жавоб. $x_1=10$, $x_2=0{,}1$.

291. Потенцирлаб, $64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}=1$ ёки $2^{x^2-40x}=\left(\frac{1}{64}\right)^{24}$, яъни $2^{x^2-40x}=2^{-6\cdot 24}$ ни ҳосил қиламиз; бундан $x^2-40x+{}$ $+144=0$ келиб чиқади.

Жавоб. $x_1=36$, $x_2=4$.

292. Логарифмнинг таърифига мувофиқ берилган тенглама $9-2^x=2^{3-x}$ ёки $9-2^x=\frac{2^3}{2^x}$ тенгламага тенг кучли, бундан

$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$. Бу ($2^x$ га нисбатан квадрат) тенгламани ечиб,

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0$$

ни топамиз.

Жавоб. $x_1 = 3$; $x_2 = 0$.

293. 288-масаладагидек $2(4^{x-2} + 9) = 10(2^{x-2} + 1)$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бунда

$$2^{x-2} = 2^x 2^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^x, \quad 4^{x-2} = 4^x 4^{-2} = \frac{1}{16} 4x$$

эканини эътиборга олиб,

$$2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз; бундан, олдинги масаладагидек, $x_1 = 4$; $x_2 = 2$ ни топамиз.

Жавоб. $x_1 = 4$; $x_2 = 2$.

294. Охирги ҳадни тенгликнинг ўнг томонига ўтказсак, ечиш осон бўлади. Сўнгра, 288-масаладагидек, $4 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$ ни ҳосил қиламиз, $3^{1+\frac{1}{2x}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$ эканини кўриб $12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$ тенгламани ҳосил қиламиз. $3^{\frac{1}{2x}} = z$ деб олиб, $3^{\frac{1}{x}}\left(3^{\frac{1}{2x}}\right)^2$ ни назарга олиб, $z^2 - 12z + 27 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз; унинг илдизлари $z_1 = 9$; $z_2 = 3$.

Жавоб. $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

295. Тенгламанинг иккала томонини потенцирлаб (288-масаланинг ечилишига қаранг),

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}{100} = \frac{\sqrt[4]{16}}{4^{\sqrt{x+0,25}}}$$

ни ҳосил қиламиз, бу тенгламани

$$\frac{1}{100}\left(3^{\sqrt{4x+1}} - \frac{16}{2^{\sqrt{4x+1}}}\right) = \frac{2}{2^{\sqrt{4x+1}}}$$

кўринишга келтириш мумкин. Уни махраждан қутқариб,

$$6^{\sqrt{4x+1}} - 16 = 200, \text{ яъни } 6^{\sqrt{4x+1}} = 6^3$$

ни ҳосил қиламиз, бундан $x = 2$.

Жавоб. $x = 2$.

296. Берилган тенгламани

$$4\lg 2+2\lg(x-3)=\lg(7x+1)+\lg(x-6)+\lg 3$$

кўринишга келтирамиз; уни потенцирлаб,

$$2^4(x-3)^2=3(7x+1)(x-6)$$

ни топамиз. Бу квадрат тенгламанинг илдизлари $x_1=9$; $x_2=-3{,}6$. Иккинчи илдиз ярамайди. чунки ундан $x-3=-6{,}6$ келиб чиқади, демак, $\lg(x-3)$ ифоданинг ҳақиқий илдизи йўқ [$\lg(7x+1)$ ва $\lg(x-6)$ ифодалар тўғрисида ҳам шуни айтиш мумкин].

Жавоб. $x=9$.

297. Тенгламанинг ўнг томонини

$$-\log_5(0{,}2-0{,}2\cdot 5^{x-3})=-\log_5 0{,}2-\log_5(1-5^{x-3})$$

кўринишга келтирамиз. (x—3) қўшилувчини $\log_5 5^{x-3}$ шаклда ёзамиз. Ҳадларни бир томонга ўтказгандан кейин

$$\log_5 120+\log_5 5^{x-3}+\log_5 0{,}2=2\log_5(1-5^{x-3})-\log_5(1-5^{x-3})$$

ёки

$$120\cdot 0{,}2\cdot 5^{x-3}=1-5^{x-3}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x=1$.

298. Берилган тенгламани қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} 2^{6x+3}=2^{4y+4} \\ 5^{1+x-y}=5^{\frac{4y+2}{2}} \end{cases}.$$

Даража кўрсаткичларини тенглаштириб,

$$\begin{cases} 6x-4y=1, \\ x-3y\ \ =0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x=\frac{3}{14}$; $y=\frac{1}{14}$.

299. Биринчи тенгламани потенцирлаб,

$$\begin{cases} xy=1, \\ x+y=\frac{10}{3} \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1=3$, $y_1=\frac{1}{3}$; $x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=3$.

300. Алгебрада одатда мусбат сонларнинг мусбат асосдаги логарифмлари қаралади; акс ҳолда соннинг (ҳақиқий) логарифми бўлмаслиги мумкин. Шунинг учун a ва b маълум миқдорларни логарифмларнинг асосларини) мусбат деб ҳисоблаймиз; номаълум x, y миқдорлар („сонлар“) ҳам мусбат бўлиши керак.

Потенцирлаб,

$$xy = a^2, \quad \frac{x}{y} = b^4$$

ни топамиз. Бу системанинг иккита ечими бор:

1) $x = ab^2$; $\quad y = \frac{a}{b^2}$,

2) $x = -ab^2$; $y = -\frac{a}{b^2}$.

Лекин иккинчи ечим ярамайди, чунки a, b нинг мусбат қийматларида x ва y нинг манфий қийматларини беради.

Жавоб. $x = ab^2$; $y = \frac{a}{b^2}$.

301. Потенцирлаб,

$$\frac{x^2+y^2}{10} = 13, \quad \frac{x+y}{x-y} = 8$$

системани ҳосил қиламиз; иккинчи тенгламадан $y = \frac{7}{9}x$ ни биринчи тенгламага қўйиб, иккита ечим ҳосил қиламиз:

$$1)\ x_1 = 9,\ y_1 = 7;\ 2)\ x_2 = -9,\ y_2 = -7.$$

Иккинчи ечим ярамайди, чунки бунда $x + y < 0$ ва $x-y<0$ бўлади (300-масаланинг ечилишига қаранг).

Жавоб. $x = 9$; $y = 7$.

302. Системани потенцирлаб,

$$\begin{cases} x - y = xy, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз.

Бу системанинг иккита ечими бор:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \quad y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Биринчи ечимда $x - y = xy = -2 + \sqrt{5} > 0$.

Иккинчи ечимда

$$x - y = xy = -2 - \sqrt{5} < 0.$$

Иккинчи ечим ярамайди, чунки логарифмнинг асоси xy мусбат бўлиши керак (**300**-масалага қаранг).

Жавоб. $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

303. Потенцирлаб,

$$1 + \frac{x}{y} = \frac{a^2}{y};\ xy = b^4$$

ёки

$$\begin{cases} x + y = a^2, \\ xy = b^4 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системанинг иккита ечими бор:

$$1)\ x_1 = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2},\quad y_1 = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2};$$

$$2)\ x_2 = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2},\quad y_2 = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}.$$

Берилган a ва b миқдорларни (логарифмларнинг асослари бўлгани учун) мусбат деб ҳисоблаб, икки ҳолни бир-биридан фарқ қилишимиз керак:

$$1)\ a^4 < 4b^4,\ \text{яъни}\ a < \sqrt{2}\, b\ \text{ва}\ 2)\ \sqrt{a^4} \geqslant 4b^4,$$

яъни $a \geqslant \sqrt{2}\, b$. Биринчи ҳолда системанинг ечими бўлмайди, чунки x ва y мавҳум сон. Иккинчи ҳолда x ва y ҳақиқий сонлар бўлиши устига, яна мусбат сонлардир, чунки $x + y = a^2$ йиғинди ҳам, $xy = b^4$ кўпайтма ҳам мусбат сондир.

Жавоб. $x = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}$; $y = \frac{a^4 - \sqrt{a^4 - 4b^4}}{2}$.

304. Биринчи тенгламани потенцирлаб,

$$\begin{cases} 4xy = 9a^2, \\ x + y = 5a \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Унинг иккала ечими ҳам ярайди.

Жавоб. 1) $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{9}{2}a$; 2) $x_2 = \frac{9}{2}a$, $y_2 = \frac{a}{2}$.

305. Иккинчи тенгламада x ва y номаълумлар логарифм ишораси остига киргани учун иккаласи ҳам мусбат сон (агар ечими бўлса). a миқдорга келсак, у манфий сон бўлиши ҳам мумкин (чунки логарифм ишораси остида мусбат сон a^2 турибди). Лекин бу ҳолда $\lg(a^2) = 2\lg a$ тенглик ўрнига $\lg(a^2) = 2\lg|a|$ ёзиш керак. Қисқалик учун $\lg x = X$; $\lg y = Y$; $\lg|a| = A$ деб белгилаймиз. Берилган системадаги биринчи тенгламани логарифмлаб,

$$X + Y = 2A, \quad X^2 + Y^2 = 10A^2$$

системани ҳосил қиламиз. Биринчи тенгламани квадратга кўтариб, ундан иккинчини айириб, $XY = -3A^2$ тенгликни ҳосил қиламиз, шундай қилиб, унга тенг кучли

$$X + Y = 2A; \quad XY = -3A^2$$

системани ҳосил қиламиз. Демак, X ва Y га $z^2 - 2Az - 3A^2 = 0$ тенгламанинг илдизлари деб қараш мумкин. Демак, бир ечим $X = 3A$, $Y = -A$, яъни $x = |a|^3$, $y = \frac{1}{|a|}$. Иккинчи ечим: $x = \frac{1}{|a|}$, $y = |a|^3$.

Текшириш иккала ечим ҳам яроқли эканини кўрсатади.

Жавоб. $x_1 = |a|^3$, $y_1 = \frac{1}{|a|}$; $x_2 = \frac{1}{|a|}$, $y_2 = |a|^3$.

306. Иккинчи тенгламадан $y - x = (\sqrt{2})^4 = 4$ бўлади. Демак, $y = x + 4$. Буни биринчи тенгламага қўйиб, $3^x \cdot 2^{x+4} = 576$ ёки $6^x \cdot 2^4 = 576$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = 2$; $y = 6$.

307. Берилган системани мана бундай ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} xy = a, \\ \left(\frac{|x|^2}{y}\right) = b. \end{cases}$$

x билан y нинг иккаласи мусбат сон бўлиши керак, шунинг учун

$$\begin{cases} xy = a, \\ \frac{x}{y} = \sqrt{b}. \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = \sqrt{a}\sqrt[4]{b}$; $y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}$.

308. Берилган тенгламани

$$\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}\log_b x + \log_b y = \frac{3}{2}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бундан

$$x\sqrt{y} = a^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{x}\, y = b^{\frac{3}{2}}.$$

Бу тенгламаларни бир-бирига кўпайтириб, $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ ёки $xy = ab$ ни ҳосил қиламиз. Охирги тенгламани бундан олдинги тенгламаларнинг ҳар бирига бўламиз.

Жавоб. $x = \frac{a^2}{b}$, $y = \frac{b^2}{a}$.

309. Бундан олдинги масала каби ечилади.

Жавоб. $x = a\sqrt[3]{b^2}$; $y = \frac{a}{b\sqrt[3]{b}}$.

310. (а) формуладан (164-бет) фойдаланиб, биринчи тенгламани бундай ёзамиз: $\log_v u + \frac{1}{\log_v u} = 2$, бундан $\log_v u = 1$, яъни $u = v$ эканлиги чиқади. Буни иккинчи тенгламага қўйиб, $u^2 + u - 12 = 0$ тенгламани ҳоснл қиламиз. Фақат мусбат ечим ярайди (300-масаланинг ечилишига қаранг).

Жавоб. $u = v = 3$.

311. $\sqrt[x]{a} = u$ деб белгилаймиз; у ҳолда

$$\sqrt{a} = u^{\frac{x}{2}}$$

ва

$$\log_{\sqrt[x]{a}} \sqrt{a} = \log_u u^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2};$$

шунга ўхшаш

$$\log_{\sqrt[y]{b}} \sqrt{b} = \frac{y}{2}.$$

Демак, иккинчи тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, & (1) \\ x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}. & (2) \end{cases}$$

Бу система берилган системага тенг кучлидир. (2) тенгликни квадратга кўтарамиз:

$$x^2 + 2xy + y^2 = \frac{4a^2}{3} \qquad (2а)$$

(2а) тенгламадан (1) тенгламани айириб,

$$xy = \frac{a^2}{3}$$

ни топамиз. Натижада ушбу

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2a}{3}, & (2) \\ xy = \dfrac{a^2}{3} & (3) \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системанинг биргина ечими бор:

$$x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Изоҳ. Бирор тенгламани квадратга кўтарганда ортиқча илдиз ҳосил қилишимиз мумкин. Бу мисолда ҳам шу аҳвол юз берди: (2а) тенгламанинг (2) тенгламага нисбатан ортиқча ечими бор. Масалан, $x = y = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ қийматлар (2а) тенгламани қаноатлантиради, лекин (2) тенгламани қаноатлантирмайди. Бошқача айтганда $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{4a^2}{3}$ тенглама $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ тенгламага тенг кучли эмас; лекин у икки тенгламага, яъни $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ ва $x + y = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$ тенгламаларга тенг кучлидир. Бундан ташқари, берилган тенглама билан $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $xy = \frac{a^2}{3}$ тенгламалар системаси тенг кучлидир, чунки кейинги системага $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ тенглама киради, шу билан $a \neq 0$ да $x + y = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$ тенглик бўлиш имкони йўқолади. ($a = 0$ бўлганда $x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ ва $x + y = -\frac{2a}{\sqrt{3}}$ тенгламалар бир тенгламанинг ўзи бўлади.)

Лекин биз (2) — (3) системани эмас, балки (1) — (3) системани, яъни

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, & (1) \\ xy = \dfrac{a^2}{3} & (3) \end{cases}$$

системани олганимизда у берилган системага тенг кучли бўлмас эди. Ҳақиқатан, $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ечимдан ташқари яна $x = y = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ ечимга ҳам эга бўлар эди.

Шунинг учун бир ёки бир неча тенгламани квадратга кўтарганда ҳамма вақт ё тенг кучлилик масаласини текшириш, ёки ўрнига қўйиш усули билан қайси илдизлар ярашини ва қайси илдизлар ярамаслигини текшириб кўриш керак.

Жавоб. $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

312. 164-бетдаги (б) формулани эътиборга олиб, $\log_4 x = \frac{1}{2}\log_2 x$ ни ҳосил қиламиз. Бунинг натижасида биринчи тенглама $x = y^2$

кўринишига келади. Ушбу системани ечамиз.

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Жавоб. $x_1 = 4,\ y_1 = 2;\ x_2 = 1,\ y_2 = 1.$

313. 164-бетдаги (б) формуладан фойдаланиб, берилган системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y + \frac{1}{2} \log_2 z = 2, \\ \log_3 y + \frac{1}{2} \log_3 z + \frac{1}{2} \log_3 x = 2, \\ \log_4 z + \frac{1}{2} \log_4 x + \frac{1}{2} \log_4 y = 2. \end{cases}$$

Уни потенцирлаб,

$$\begin{cases} x \sqrt{yz} = 4, \\ y \sqrt{zx} = 9, \\ z \sqrt{xy} = 16. \end{cases} \qquad \text{(а)}$$

ни топамиз. (а) системадаги ҳамма тенгламани бир-бирига кўпайтириб,

$$(xyz)^2 = 4 \cdot 9 \cdot 16$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$xyz = 24 \qquad \text{(б)}$$

чиқади (илдизнинг арифметик қийматини оламиз, чунки берилган тенгламаларнинг маъносига қараганда x, y, z мусбат бўлиши керак). (а) системадаги тенгламаларнинг ҳар бирини квадратга кўтарамиз ва (б) га бўламиз.

Жавоб. $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{27}{8},\ z = \frac{32}{3}.$

314. Биринчи тенгламадан $x + y = 2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}}$, иккинчисидан эса $x + y = 3 \cdot 2^{x-y}$, демак,

$$3^{\frac{x-y}{2}} = 3 \text{ ёки } \frac{x-y}{2} = 1.$$

ни топамиз. Демак, $x + y = 3 \cdot 2^2 = 12.$

Жавоб. $x = 7;\ y = 5.$

315. Берилган система қуйидаги шаклга келади:

$$\frac{x+y}{10} = \frac{7}{x}, \quad x^2 - y^2 = 40.$$

Иккинчи тенгламани биринчи тенгламага бўлиб, $x - y = \frac{4x}{7}$ ни ҳосил қиламиз.

$$x + y = \frac{70}{x} \text{ ва } x - y = \frac{4x}{7}$$

системани ечиб, $x_1 = 7,\ y_1 = 3;\ x_2 = -7,\ y_2 = -3$ ни топамиз. x_2, y_2 илдизлар берилган системадаги иккинчи тенгламани қаноатлантирмайди, чунки $x_2 + y_2$ ва $x_2 - y_2$ сонлар манфийдир.

Жавоб. $x = 7;\ y = 3.$

316. Берилган системани

$$2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5+\frac{3y}{x}},\quad 3^{\frac{x}{y}} = 3^{1+\frac{2-2y}{y}}$$

кўринишга келтирамиз. Бундан

$$\frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x},\quad \frac{x}{y} = 1 + \frac{2-2y}{y}$$

системани ҳосил қиламиз. $\frac{x}{y} = t$ деб белгилаймиз; у ҳолда биринчи тенгламадан $2t^2 - 5t - 3 = 0;\ t_1 = 3,\ t_2 = -\frac{1}{2}$, яъни $\frac{x}{y} = 3$ ёки $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $x = 3y$ ва $x = -\frac{1}{2}y$ ифодаларни топамиз; уларни иккинчи тенгламага қўйиб, $x_1 = -2,\ y_1 = 4;\ x_2 = \frac{3}{2},\ y_2 = \frac{1}{2}$ ни топамиз.

Жавоб. $x_1 = -2,\ y_1 = 4;\ x_2 = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}.$

317. Берилган система қуйидаги шаклга келтирилади:

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x} = 5, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Биринчи тенгламадан (**316**-масаланинг ечилишига қаранг) $\frac{x}{y} = 3$ ёки $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$ ни топамиз. Иккинчи тенгламадан: $x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -2,\ y_2 = 4$. Демак, x_2, y_2 қийматлар тўғри келмайди.

Жавоб. $x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}.$

318. Берилган система қуйидаги системага келтирилади:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 4 - \sqrt{x}, \\ 2\sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y}. \end{cases}$$

Бунда $\sqrt{x}=u$; $\sqrt{y}=v$ белгини киритиб, $uv=4-u$; $2uv=3+v$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1=4$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=9$.

319. Берилган системани

$$ay=x^p,\ bx=y^q$$

шаклда ёзамиз. x ва y (логарифмларнинг асослари бўлгани учун) мусбат сонлар бўлиши керак, шунинг учун дастлабки система фақат a ва b нинг мусбат қийматларидагина ечимга эга бўлиши мумкин. Биринчи тенгламадан $y=\frac{x^p}{a}$ ни топамиз; уни иккинчи тенгламага қўйиб, $x^{pq}=a^qbx$ ни ҳосил қиламиз. $x=0$ илдизни ташлаб (x мусбат бўлиши керак), $x^{pq-1}=a^qb$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $pq=1$ бўлса, бу тенглама ё бутунлай ечимга эга бўлмайди ($a^qb\neq1$ да), ёки айният бўлади ($a^qb=1$ бўлганда). Кейинги ҳолда дастлабки система саноқсиз кўп ечимларга эга бўлади (x — ихтиёрий сон, $y=\frac{x^p}{a}$ ёки y — ихтиёрий сон, $x=\frac{y^q}{b}$. Агар $pq\neq1$ бўлса,

$$x=\sqrt[pq-1]{a^qb},\ y=\sqrt[pq-1]{b^pa}$$

ечимни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x=\sqrt[pq-1]{a^qb}$, $y=\sqrt[pq-1]{b^pa}$ $(pq\neq1)$.

5-БОБ

ПРОГРЕССИЯЛАР

Арифметик прогрессия

320. Шартга кўра $a_1=5$, $d=4$. Бу қийматларни (3) формулага қўйиб, бир қанча шакл ўзгартиришлардан кейин

$$2n^2+3n-10\,877=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари: $n_1=73$ ва $n_2=-74{,}5$; улардан фақат биринчиси ярайди.

Жавоб. 73 ҳад.

321. Шартга кўра

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)=26,$$
$$a_1(a_1+d)(a_1+2d)(a_1+3d)=880.$$

Биринчи тенгламадан $4a_1+6d=26$, бундан $a_1=\frac{13-3d}{2}$. Уни иккинчи тенгламага қўйиб, қавс ичидаги ифодани соддалаштириб,

$$\frac{13-3d}{2}\cdot\frac{13-d}{2}\cdot\frac{13+d}{2}\cdot\frac{13+3d}{2}=880$$

ҳосил қиламиз. Уни махраждан қутқариб ва суратларини бир-бирига кўпайтириб (энг осони биринчи суратни тўртинчи билан ва иккинчи суратни учинчи билан кўпайтиришдир),

$$9d^4 - 1690d^2 + 14\,481 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу биквадрат тенгламанинг илдизларини d', d'', d''', d'''' билан белгилаб, $d' = 3$, $d'' = -3$, $d''' = \frac{\sqrt{1609}}{3}$ ва $d'''' = -\frac{\sqrt{1609}}{3}$ эканини топамиз; $a_1 = \frac{13-3d}{2}$ тенгламадан биринчи ҳаднинг тегишли қийматини топамиз: $a_1' = 2$; $a_1'' = 11$; $a_1''' = \frac{13-\sqrt{1609}}{2}$; $a_1'''' = \frac{13+\sqrt{1609}}{2}$.

Жавоб. Масаланинг тўрт ечими бор:

1) $\div 2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ \ldots,$

2) $\div 11;\ 8;\ 5;\ 2;\ -1;\ \ldots,$

3) $\div \frac{13-\sqrt{1609}}{2};\quad \frac{39-\sqrt{1609}}{2};\quad \frac{39+\sqrt{1609}}{6};\quad \frac{13+\sqrt{1609}}{2};\ \ldots.$

4) $\div \frac{13+\sqrt{1609}}{2};\quad \frac{39+\sqrt{1609}}{6};\quad \frac{39-\sqrt{1609}}{6};\quad \frac{13-\sqrt{1609}}{2};\ \ldots.$

322. a_p билан a_q ни a_1 ва d орқали ифодалаймиз; шартга кўра қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_1 + d(p-1) = q, \\ a_1 + d(q-1) = p. \end{cases}$$

Бундан $d = -1$ ва $a_1 = p + q - 1$ келиб чиқади. (1) формулага асосан

$$a_n (p + q - 1) - (n - 1) = p + q - n.$$

Жавоб. $a_n = p + q - n$.

323. Икки хонали натурал сонлар айирмаси $d = 1$ бўлган арифметик прогрессия ҳосил қилади. Бунда биринчи ҳад $a_1 = 10$, охирги ҳад $a_n = 99$ бўлади. (1) формулага кўра ҳадлар сони $n = 90$ ни топамиз. (2) формуладан:

$$S_n = \frac{(10 + 99)\cdot 90}{2} = 4905.$$

Жавоб. 4905.

324. Тоқ сонларни $n, (n + 2), (n + 4), (n + 6)$ билан белгилаймиз. У ҳолда улар орасидаги жуфт сонлар $(n + 1)$, $(n + 3)$, $n + 5)$ бўлади. Шартга мувофиқ

$$n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + (n + 6)^2 =$$
$$= (n + 1)^2 + (n + 3)^2 + (n + 5)^2 + 48$$

ёки

$$n^2 + [(n+2)^2 - (n+1)^2] + [(n+4)^2 - (n+3)^2] + [(n+6)^2 - \\ - (n+5)^2] - 48 = 0,$$

бундан

$$n^2 + (2n+3) + (2n+7) + (2n+11) - 48 = 0$$

ёки

$$n^2 + 6n - 27 = 0.$$

Бу тенгламани ечиб, $n = 3$ ёки $n = -9$ ҳосил қиламиз.

Жавоб. 1) 3; 5; 7; 9 ёки 2) -9; -7; -5; -3.

325. a_2; a_4; a_6; . . .; a_{20} сонлар ҳадлари айирмаси $2d$ ва ҳадлари саноғи 10 та бўлган арифметик прогрессия ташкил қилади. (3) формулани қўллаииб (бунда a_1 ўрнига a_2 ва d ўрнига $2d$ олиш керак),

$$\frac{(2a_2 + 2d \cdot 9)\,10}{2} = 250,$$

яъни

$$a_2 + 9d = 25$$

ни топамиз. Бунга $a_2 = a_1 + d$ ни қўйиб

$$a_1 + 10d = 25 \tag{а}$$

ни топамиз. Худди шу йўл билан, $\div a_1; a_3; a_5; \ldots; a_{19}$ прогрессияга асосланиб,

$$a_1 + 9d = 22 \tag{б}$$

ни топамиз. (а) ва (б) дан a_1 ва d ни, сўнгра прогрессиянинг ҳамма ҳадларини топиш мумкин. Лекин фақат ўрта ҳадларни, яъни $a_{10} = a_1 + 9d$ ва $a_{11} = a_1 + 10d$ ни топиш талаб қилингани учун (а) билан (б) дан $a_{10} = 22$ ва $a_{11} = 25$ ни топамиз.

Жавоб. Ўрта ҳадлар 22 ва 25 га тенг.

326. $b_1 = (a+x)^2$, $b_2 = (a^2 + x^2)$, $b_3 = (a-x)^2$ белгилашларни киритамиз. $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = -2ax$. Демак, b_1, b_2, b_3 ҳадлар айирмаси $d = -2ax$ бўлган арифметик прогрессияни ташкил қилади. (3) формулага асосан,

$$S_n = \frac{[2(a+x)^2 - 2ax(n-1)]\,n}{2} = [a^2 + (3-n)ax + x^2]\,n.$$

Жавоб. $S_n = [a^2 + (3-n)ax + x^2]\,n$.

327. (3) формулага асосан

$$S_1 = \frac{2a_1 + d(n_1 - 1)}{2} \cdot n_1,$$

$$S_2 = \frac{2a_1 + d(n_2 - 1)}{2} \cdot n_2,$$

$$S_3 = \frac{2a_1 + d(n_3 - 1)}{2} \cdot n_3$$

ёки

$$\frac{S_1}{n_1} = a_1 + \frac{d}{2}(n_1 - 1),$$
$$\frac{S_2}{n_2} = a_1 + \frac{d}{2}(n_2 - 1),$$
$$\frac{S_3}{n_3} = a_1 + \frac{d}{2}(n_3 - 1).$$

Бу тенгликларни мос равишда $(n_2 - n_3)$, $(n_3 - n_1)$ ва $(n_1 - n_2)$ га кўпайтирамиз ва кўпайтмаларни қўшиб,

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = a_1[(n_2 - n_3) + (n_3 - n_1) + (n_1 - n_2)] + \frac{d}{2}[(n_1 - 1)(n_2 - n_3) + (n_2 - 1)(n_3 - n_1) + (n_3 - 1)(n_1 - n_2)]$$

ни топамиз. Ўрта қавслар ичидаги ифодалар айнан нолга тенг, демак,

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$

Шуни исбот қилиш керак эди.

328. Масаланинг шартидан $S_{10} = 5S_5$ келиб чиқади. S_5 ва S_{10} ни (3) формула билан ифодалаб ва шартга кўра $a_1 = 1$ эканини эътиборга олиб,

$$\frac{(2 + 9d)\,10}{2} = 5 \cdot \frac{(2 + 4d)\,5}{2}$$

тенгликни топамиз, бундан: $d = -3$ чиқади.

Жавоб. ÷ + 1; − 2; − 5; − 8; ...

329. Шартга кўра

$$S_n = 3n^2 \text{ ёки } \frac{[2a_1 + d(n - 1)]\,n}{2} = 3n^2.$$

$n \neq 0$, шунинг учун бу тенгламани n га қисқартириб, $2a_1 + dn - d = 6n$ ёки

$$2a_1 - d = (6 - d)\,n \qquad \text{(a)}$$

ни ҳосил қиламиз. Шартга кўра (a) тенглик n нинг ҳар қандай қийматида қаноатлантирилиши керак, лекин (a) нинг чап томонида n бўлмагани ҳолда, агар фақат $6 - d$ кўпайтувчи нолга тенг бўлмаса, n нинг ўзгариши билан ўнг томонининг ҳам қиймати ўзгаради. Фақат $6 - d = 0$ бўлганда тенгламанинг ўнг томони n га боғлиқ бўлмайди (нолга тенг), шунинг учун $d = 6$ бўлиши керак. У ҳолда (a) тенгликдан $2a_1 - d = 0$, яъни $a_1 = \frac{d}{2} = 3$ ни топамиз.

Жавоб. ÷ 3; 9; 15; 21; ...

330. 4 га бўлганда қолдиқда 1 чиқадиган сонлар $4k+1$ кўринишида бўлади (k — ихтиёрий натурал сон). Бундай сонлар айирмаси 4 бўлган арифметик прогрессия ҳосил қилади. Бу шаклдаги икки хонали сонларнинг биринчиси 13 (у $k=3$ бўлганда ҳосил бўлади); охиргиси 97. (1) формуладан (бунда $a_1=13$, $a_n=97$, $d=4$) $n=22$ ни топамиз. (3) формулага асосан йиғиндини топамиз.

k нинг қандай қийматларида $4k+1$ кўринишдаги сонлар икки хонали бўлишини аниқлаш учун қуйидаги тенгсизликлар системасидан фойдаланиш мумкин:

$$\begin{cases} 4k+1 \geqslant 10, \\ 4k+1 < 100. \end{cases}$$

Бу системадан $2\frac{1}{4} \leqslant k < 24\frac{3}{4}$ ни топамиз; демак, k нинг қийматлари 3, 4, 5, ..., 24, буларнинг сони $n=(24-3)+1=22$ бўлади.

Жавоб. 1210.

Геометрик прогрессия

331. Икки (мусбат) a ва b сонларнинг **ўрта геометриги** $a:x=x:b$ пропорциядан топиладиган мусбат x сонидир. 1 билан 256 орасига учта ўрта геометрик қўйиш

$$1:u_2=u_2:u_3=u_3:u_4=u_4:256$$

шартларни қаноатлантирувчи учта u_2, u_3, u_4 сонни топиш деган сўздир. Демак, $u_1=1$, u_2, u_3, u_4 ва $u_5=256$ сонлар геометрик прогрессия ташкил қилади. Прогрессия n-ҳадининг формуласига кўра $256=1\cdot q^4$. Бу тенгламанинг битта мусбат илдизи q бор: $q=\sqrt[4]{256}=4\,(-4;\ +4i;\ -4i$ илдизлар ярамайди). Энди ўша формулага кўра $u_2=4$; $u_3=16$; $u_4=64$ эканини топамиз.

Жавоб. 4; 16; 64.

332. Шартга кўра $u_1+u_3=52$ ва $u_2^2=100$ ёки $u_2=\pm 10$. Геометрик прогрессиянинг хоссасига кўра $u_1u_3=u_2^2=100$; демак, u_1 ва u_3 сонлари $u^2-52u+100=0$ тенгламанинг илдизларидир. Бундан: $u_1=50$ ва $u_3=2$ ёки $u_1=2$ ва $u_3=50$.

Жавоб. Сонлар: 1) 50; 10; 2 ёки 2) 50; -10; 2 бўлади, ёки шу сонларнинг ўзи тескари тартибда келади.

333. Шартга кўра: 1) $u_3-u_1=9$ ва 2) $u_5-u_3=36$ бўлади. $u_n=u_1q^{n-1}$ формулани қўлланиб, бу тенгламаларни мана бу кўринишда ёзамиз: 1) $u_1q^2 - u_1 = 9$; 2) $u_1q^4 - u_1q^2 = 36$. 2) тенгламани 1) тенгламага бўлиб, $q^2 = 4$ ни ҳосил қиламиз; бундан $q = \pm 2$ келиб чиқади; 1) тенгламадан $u_1 = 3$ ни топамиз.

Жавоб. 1) $\div\div 3; 6; 12; 24; 48; \ldots$
2) $\div\div 3; -6; +12; -24; 48; \ldots$

334. Масаланинг шартига кўра $u_1 + u_4 = 27$ ва $u_2u_3 = 72$; лекин $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_4}{u_3}$ ёки $u_2u_3 = u_1u_4$ бўлгани учун иккита тенгламалар системаси ҳосил қиламиз:

$$1)\ u_1 + u_4 = 27 \text{ ва } 2)\ u_1u_4 = 72,$$

бундан $u_1 = 3$ ва $u_4 = 24$ ёки $u_1 = 24$ ва $u_4 = 3$. Энди $u_4 = u_1q^3$ формуладан мос равишда $q = 2$ ёки $q = \frac{1}{2}$ ни топамиз.

Жавоб. 3; 6; 12; 24 ёки бунга тескари тартибда: 24; 12; 6; 3.

335. Масаланинг шартига кўра: 1) $u_1 + u_4 = 35$ ва 2) $u_2 + u_3 = 30$. **333**-масаладагига ўхшаш, q ни топиш учун

$$\frac{1 + q^3}{q(1 + q)} = \frac{35}{30}$$

тенгламани ёки қисқартиргандан кейин $\frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{7}{6}$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$1)\ q = \frac{3}{2};\ u_1 = 8;\ 2)\ q = \frac{2}{3};\ u_1 = 27.$$

Иккита прогрессия ҳосил қиламиз:

1) $\div\div 8; 12; 18; 27; 40{,}5; \ldots,$

2) $\div\div 27; 18; 12; 8; 5\frac{1}{3}; \ldots$. Бу прогрессияларнинг олдинги тўртта ҳадлари бир хил, лекин, тескари тартибда боради.

Жавоб. 8; 12; 18; 27.

336. Берилган иккинчи йиғиндининг ҳар бир ҳадини q га кўпайтирилган олдинги ҳадига алмаштирамиз (геометрик прогрессиянинг таърифига мувофиқ); қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$u_1q + u_2q + u_3q + u_4q + u_5q = 62$$

ёки

$$q(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) = 62.$$

Масаланинг шартига кўра қавс ичидаги ифода 31 га тенг; демак,

$q = 2$. Энди $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$ формуладан фойдаланиб, $31 = \frac{u_1(2^5 - 1)}{2 - 1}$ ни топамиз, бундан $u_1 = 1$.

Жавоб. ∺ 1; 2; 4; 8; ...

337. Масаланинг шартига кўра:

$$1)\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 19{,}5; \qquad 2)\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 13.$$

Масала бундан олдингига ўхшайди.

Жавоб. $u_1 = 1{,}6$ ва $u_5 = 8{,}1$.

338. u_4 ва u_6 — прогрессиянинг бошидан ва охиридан тенг узоқликда бўлган ҳадлар; шунинг учун $u_4 u_8 = u_1 u_9$. Шартга кўра $u_1 u_9 = 2304$, шунинг учун $u_4 u_6 = 2304$; ундан ташқари, шартга кўра $u_4 + u_6 = 120$. Бу икки тенгламадан $u'_4 = 24$; $u'_6 = 96$ ва $u''_4 = 96$; $u''_6 = 24$ ни топамиз. Биринчи ечимни олайлик. $u_n = u_1 q^{n-1}$ формулага кўра

$$1)\ 24 = u_1 q^3; \quad 2)\ 96 = u_1 q^5.$$

2) ни 1) га бўлиб, $q^2 = 4$ ни топамиз, бундан $q = 2$ ёки $q = -2$. Биринчи ҳолда 1) тенглама $u_1 = 3$ ни, иккинчи ҳолда $u_1 = -3$ ни беради. Биринчи ҳолда прогрессиянинг тўққиз ҳади:

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ 96;\ 192;\ 384;\ 768;$$

иккинчи ҳолда:

$$-3;\ 6;\ -12;\ 24;\ -48;\ 96;\ -192;\ 384;\ -768.$$

$u''_4 = 96$; $u''_6 = 24$ ечимни олиб, яна ўша икки қатор ҳадларни топамиз, лекин тескари тартибда чиқади.

Жавоб. 1) $u_1 = 3$; $q = 2$;
2) $u_1 = -3$; $q = -2$;
3) $u_1 = 768$; $q = \frac{1}{2}$;
4) $u_1 = -768$; $q = -\frac{1}{2}$.

339. Шартга кўра: 1) $u_1 + u_2 + u_3 = 126$ ва 2) $u_1 u_2 u_3 = 13824$. u_2 ўзи u_1 билан u_3 орасида ўрта пропорционал миқдор бўлгани учун $u_1 u_3 = u_2^2$; шунинг учун 2) ўрнига $u_2^3 = 13\,824$ ёзиш мумкин, бундан $u_2 = \sqrt[3]{13\,824}$. Бу ҳолда 13 824 ни кўпайтувчиларга ажратиб, $u_2 = 24$ эканини топиш осон. Буни 1) ва 2) тенгликларга қўйиб, $u_1 + u_3 = 102$; $u_1 u_3 = 576$ тенгламалар системасини топамиз. Бунинг ечими: $u_1 = 6$; $u_3 = 96$ ва $u_1 = 96$; $u_3 = 6$.

Фақат ҳадларининг тартиби билан фарқ қиладиган иккита прогрессия ҳосил қиламиз: $\div\div 6;\ 24;\ 96$ ва $\div\div 96;\ 24;\ 6$.

Жавоб. 6; 24; 96.

340. Масаланинг шартидан жуфт ўринда турган ҳадларнинг йиғиндиси тоқ ўринда турган ҳадлар йиғиндисидан икки марта катта экани келиб чиқади, яъни

$$\frac{u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n}}{u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1}} = 2.$$

$a_2;\ u_4;\ u_6;\ \ldots;\ u_{2n}$ ҳадларни $u_2 = u_1q;\ \ u_4 = u_3q;\ \ \ldots\ u_{2n} = {}_{2n-1}q$ ифодалар билан алмаштириб, $q = 2$ ни топамиз.

Жавоб. Прогрессиянинг махражи 2 га тенг.

Чексиз камаювчи геометрик прогрессия

341. Берилган сонлар камаювчи геометрик прогрессия ташкил қилишини исбот қилиш учун $\frac{u_2}{u_1}$ ва $\frac{u_3}{u_2}$ нисбатлар тенг бўладими ёки йўқми ва улар 1 дан кичик бўладими ёки йўқми эканини текшириб кўриш керак. Қуйидагиларни топамиз:

$$1)\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2+\sqrt{2}},$$

$$2)\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = q = \frac{1}{2+\sqrt{2}} < 1$ бўлгани учун берилган сонлар камаювчи геометрик прогрессия ташкил қилади. Унинг йиғиндиси формуласига мувофиқ:

$$S = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\ \ 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}})} = \frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 4 + 3\sqrt{2}.$$

Жавоб. $S = 4 + 3\sqrt{2}$.

342. Бундан олдинги масаладагидек, ўрта қавс ичидаги ифода $\frac{3(\sqrt{3}-2)}{3-1}$ га тенг эканини топамиз. У ҳолда бутун ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$(4\sqrt{3}+8)\cdot\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-1} = -\frac{12}{\sqrt{3}-1} = -6(\sqrt{3}+1).$$

Жавоб. $-6(\sqrt{3}+1)$.

343. Масаланинг шартига кўра:

$$u_1 = 4 \text{ ва } u_3 - u_5 = \frac{32}{81}.$$

$u_n = u_1\, q^{n-1}$ формулага кўра иккинчи тенгликдан

$$u_1q^2 - u_1q^4 = \frac{32}{81}.$$

$u_1 = 4$ эканини ҳисобга олиб, $81q^4 - 81q^2 + 8 = 0$ биквадрат тенгламани ҳосил қиламиз; унинг илдизлари: $q_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ва $q_{3,4} = \pm\frac{1}{3}$. Манфий илдизлар ярамайди, чунки масаланинг шартига кўра ҳамма илдизлар мусбат, мусбат илдизларнинг иккаласи ҳам ярайди, чунки улар бирдан кичик. Иккита чексиз камаювчи прогрессия ҳосил қиламиз.

Жавоб. $S' = 12(3 + 2\sqrt{2})$ ва $S'' = 6$.

344. Масаланинг шартига кўра:

$$u_1 + u_4 = 54 \text{ ва } u_2 + u_3 = 36.$$

$u_n = u_1q^{n-1}$ формула ёрдами билан икки тенглама системасини топамиз:

$$\begin{cases} u_1 + u_1q^3 = 54, \\ u_1q + u_1q^2 = 36 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} u_1(1 + q)(1 - q + q^2) = 54, & (1) \\ u_1q(1 + q) = 36. & (2) \end{cases}$$

(1) тенгламани (2) га бўлиб,

$$\frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{3}{2}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $q_1 = 2$ ва $q_2 = \frac{1}{2}$ ни топамиз. $q_2 = \frac{1}{2} < 1$ илдиз ярайди. (2) тенгламадан $u_1 = 48$ ни топамиз.

Жавоб. $S = 96$.

345. Биринчи усул. Масаланинг шартига кўра:

$$1)\ u_1 + u_3 + u_5 + \ldots = 36,$$
$$2)\ u_2 + u_4 + u_6 + \ldots = 12.$$

Биринчи ва иккинчи йиғиндининг ҳадлари чексиз камаювчи прогрессиялар ташкил қилади, уларнинг махражлари бир хил бўлиб, q^2 га тенг; биринчи прогрессиянинг биринчи ҳади u_1 га тенг, иккинчи прогрессиянинг биринчи ҳади u_2 га, яъни u_1q га тенг. Биринчи ва иккинчи прогрессияларнинг йиғиндиларини чексиз камаювчи прогрессиянинг йиғиндиси формуласига кўра ифодалаб (бунда q ўрнига q^2 ни, иккинчи прогрессияда u_1 ўрнига u_1q ни оламиз): 1) $\frac{u_1}{1-q^2} = 36$ ва 2) $\frac{u_1q}{1-q^2} = 12$ ни ҳосил қиламиз. 2) ни 1) га бўлиб, $q = \frac{1}{3}$ ни ҳосил қиламиз ва биринчи тенгламадан эса $u_1 = 32$ ни топамиз.

Иккинчи усул. $u_2 = u_1q$; $u_4 = u_3q$ ва ҳоказо бўлгани учун $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots = 12$ ўрнига $u_1q + u_3q + u_5q + \ldots = 12$ ёки

$$q(u_1 + u_3 + u_5 + \ldots) = 12 \tag{1}$$

тенгликни оламиз.

$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots = 36$ ни (1) га бўлиб, $q = \frac{1}{3}$ ни топамиз. Иккинчи томондан прогрессия ҳамма ҳадларининг йиғиндиси $12 + 36 = 48$. Чексиз камаювчи прогрессия йиғиндиси формуласига кўра $48 = \frac{u_1}{1-\frac{1}{3}}$, бундан $u_1 = 32$.

Жавоб. ∺ $32; \frac{32}{3}; \frac{32}{9}; \ldots$

346. Масаланинг шартига кўра:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = 56; \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots = 448.$$

Иккинчи йиғиндининг қўшилувчилари ҳам чексиз камаювчи геометрик прогрессия ташкил қилади, унинг биринчи хади u_1^2 ва махражи q^2 бўлади. Бу прогрессияларнинг йиғиндисини ифодалаб,

$$\frac{u_1}{1-q} = 56, \quad \frac{u_1^2}{1-q^2} = 448$$

ёки

$$u_1 = 56(1-q), \tag{1}$$

$$u_1^2 = 448(1-q^2) \tag{2}$$

ни ҳосил қиламиз. (2) ни (1) га бўлиб,

$$u_1 = 8(1+q) \tag{3}$$

ни топамиз. (1) ва (3) тенгламалардан u_1 ни йўқотиб,

$$8(1+q) = 56(1-q)$$

ни ҳосил қиламиз, бундан $q = \frac{3}{4} \cdot$(1) дан $u_1 = 14$ ни топамиз.

Жавоб. $u_1 = 14$, $q = \frac{3}{4}$.

347. Масала бундан олдинги масалага ўхшаш ечилади. u_1 ва q ни топиш учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q}=3, & (1) \\ \dfrac{u_1^3}{1-q^3}=\dfrac{108}{13}. & (2) \end{cases}$$

Бу тенгламалардан u_1 ни йўқотгандан кейин $3q^2-10q+3=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг икки илдизидан фақат $q=\frac{1}{3}$ ярайди (иккинчиси $q=3$ бирдан катта). (1) тенгламадан $u_1=2$ ни топамиз.

Жавоб. ∺ 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; ...

348. Масала **346, 347**-масалаларга ўхшаш ечилади. u_1 ва q ни топиш учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} u_1q=6, & (1) \\ \dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{u_1^2}{1-q^2}. & (2) \end{cases}$$

(2) тенглама $u_1=8(1+q)$ тенгламага тенг кучли. $u_1q=6$, $u_1=8(1+q)$ системадан u_1 ни йўқотиб, $4q^2+4q-3=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг иккита $q_1=-\frac{3}{2}$, $q_2=\frac{1}{2}$ илдизидан фақат иккинчиси ярайди, чунки биринчи илдизнинг абсолют миқдори бирдан катта. (1) тенгламадан $u_1=12$ ни топамиз.

Жавоб. ∺ 12; 6; 3; ...

Арифметик ва геометрик прогрессияларга доир масалалар

349. Масаланинг шартидан:

$$d=16-14=2;\ a_1=14-d=12;$$
$$a_1+a_2+a_3=12+14+16=42$$

тенгликларни топамиз. Демак, изланган геометрик прогрессияда: 1) $q=2$ ва 2) $u_1+u_1q+u_1q^2=42$, бундан $u_1=6$.

Жавоб. ∺ 6; 12; 24; ...

350. Геометрик прогрессиянинг олдинги уч ҳади 3; $3q$; $3q^2$. Шартга кўра, $a_1=3$; $a_2=3q+6$ бўлади; $a_3-a_2=a_2-a_1$ бўлгани учун $a_3=2a_2-a_1=6q+9$. Шартга кўра бу учинчи ҳад геометрик прогрессиянинг учинчи ҳадига, яъни $3q^2$ га тенг. $6q+9=3q^2$ тенгламани ҳосил қиламиз; унинг илдизлари $q=3$ ва $q=-1$. Биринчи ҳолда геометрик прогрессия ∺ 3; 9; 27; ..., арифметик прогрессия ÷ 3; 15; 27; ... бўлади. Иккинчи ҳолда икки қатор сонларни ҳосил қиламиз: 3; -3; 3; -3; ... ва 3;

3; 3; ..., буларни мос равишда махражи $q = -1$ бўлган геометрик прогрессия ва айирмаси $d = 0$ бўлган арифметик прогрессия деб қараш мумкин.

Жавоб. 1) ÷ 3; 15; 27; ...; ∺ 3; 9; 27; ...,

2) ÷ 3; 3; 3; ..., ∺ 3; -3; 3; -3; ....

351. Масала олдинги масалага ўхшайди. Масаланинг шартига кўра $a_1 = u_1 = 5$; демак, $u_3 = 5q^2$; $u_5 = 5q^4$. Сўнгра шартга кўра $a_4 = u_3 = 5q^2$, $u_{16} = u_5 = 5q^4$. Демак, 1) $5q^2 = 5 + 3d$, 2) $5q^4 = 5 + 15d$. Бундан d ни йўқотиб, $q^4 - 5q^2 + 4 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $q^2 = 4$ ёки $q^2 = 1$ бўлади. $a_4 = 5q^2$ бўлгани учун арифметик прогрессиянинг тўртинчи ҳади биринчи ҳолда 20, иккинчи ҳолда 5 бўлади.

Изоҳ. Бу икки ҳолнинг ҳар биридан иккита ҳар хил геометрик прогрессия ҳосил қиламиз; арифметик прогрессиялар эса бир хил бўлади. Биринчи ҳолда қуйидаги геометрик прогрессиялар ҳосил бўлади: ∺ 5; 10; 20; ... ва ∺ 5; -10; 20; ...; арифметик прогрессия эса $\left(\text{айирма } d = \frac{5q^2 - 5}{3} = 5\right)$ ∺ 5; 10; 15; 20; ... бўлади. Иккинчи ҳолда қуйидаги геометрик прогрессияларни ҳосил қиламиз: ∺ 5; 5; 5;... ва ∺ 5; -5; 5; -5; ...; арифметик прогрессия тенг ҳадлардан иборат ÷ 5; 5; 5; ... .

Жавоб. 20 ёки 5.

352. Масаланинг шартига кўра $a_1 = u_1$; $a_2 = u_1 q$; $a_7 = u_1 q^2$. Бундан: 1) $d = a_2 - a_1 = u_1(q - 1)$ ва 2) $6d = a_7 - a_1 = u_1(q^2 - 1)$. Бу тенгликлардан d ни йўқотиб, $u_1(q^2 - 1) = 6u_1(q - 1)$ ни ҳосил қиламиз. $u_1 \neq 0$, шунинг учун $q^2 - 1 = 6(q - 1)$, бундан $q = 5$ ёки $q = 1$. Масаланинг $u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 93$ шартидан мос равишда $u_1 = 3$ ва $u_1 = 31$ ни топамиз.

Жавоб. 1) 3; 15; 75. 2) 31; 31; 31.

353. Бу китобнинг 36-бетидаги (2) формулага асосан $a_7 = 729$ ни топамиз, демак, геометрик прогрессияда $u_1 = a_1 = 1$; $u_7 = a_7 = 729$. Масаланинг шартига кўра ўрта ҳадни топиш керак, бу ҳад прогрессиянинг бошидан ҳам, охиридан ҳам тўртинчи ҳад бўлади, демак, биринчи ҳад u_1, изланган ўрта ҳад u_4 ва охирги ҳад u_7 бўлиб, узлуксиз $u_1 : u_4 = n_4 : u_7$ пропорцияни ҳосил қилади. Бундан $u_4^2 = u_1 u_7$ ва $u_4^2 = 729$.

Жавоб. $u_4 = \pm 27$.

354. Шартга кўра $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ бўлади. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ бўлгани учун $2a_2 = a_1 + a_3$ ва масаланинг шартидан $2a_2 + a_2 = 15$ келиб чиқади. Бундан $a_2 = 5$. У ҳолда $a_1 = 5 - d$; $a_2 = 5$; $a_3 = 5 + d$ ва шартга кўра $u_1 = a_1 + 1 = 6 - d$; $u_2 = a_2 + 4 = 9$; $u_3 = a_3 + 19 = 24 + d$ бўлади. $u_2^2 = u_1 u_3$ бўлгани учун

$$9^2 = (6 - d)(24 + d),$$

бундан $d = 3$, $a_1 = 2$ ёки $d = -21$, $a_1 = 26$.

Жавоб. 1) 2; 5; 8. 2) 26; 5; -16.

355. Масаланинг шартига кўра $a_1 = u_1 + 1$; $a_2 = u_2 + 6$; $a_3 = u_3 + 3$ бўлади, бундан $a_1 + a_2 + a_3 = (u_1 + u_2 + u_3) + (1 + 6 + 3)$ ёки шартга асосан $u_1 + u_2 + u_3 = 26$, бундан

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26 + 10 = 36.$$

Сўнгра масала бундан олдинги масалага ўхшаш ечилади.

Жавоб. 2; 6; 18 ёки 18; 6; 2.

356. Изланган сонлар u_1; u_1q; u_1q^2 бўлади деб фараз қиламиз; у ҳолда масаланинг шартига кўра u_1, u_1q ва $(u_1q^2 - 64)$ сонлар арифметик прогрессия ҳосил қилади, демак,

$$u_1q - u_1 = (u_1q^2 - 64) - u_1q. \qquad (1)$$

Ундан ташқари, масаланинг шартига кўра u_1; $(u_1q - 8)$; $(u_1q^2 - 64)$ сонлар геометрик прогрессия ташкил қилади, демак:

$$(u_1q - 8) : u_1 = (u_1q^2 - 64) : (u_1q - 8). \qquad (2)$$

Ихчамлаштиргандан кейин (1) ва (2) тенгламалар системаси $u_1(q^2 - 2q + 1) = 64$ ва $u_1(q - 4) = 4$ кўринишни олади, бундан $q = 13$ ва $u_1 = \frac{4}{9}$ ёки $q = 5$ ва $u_1 = 4$ ни топамиз.

Жавоб. 1) $\frac{4}{9}$; $\frac{52}{9}$; $\frac{676}{9}$. 2) 4; 20; 100.

357. Изланган сонлар u_1, u_2 ва u_3 бўлади, деб фараз қиламиз. Агар бу сонлар геометрик прогрессиянинг ҳадлари бўлса,

$$u_2^2 = u_1u_3 \qquad (1)$$

бўлади, агар бу сонлар арифметик прогрессиянинг ҳадлари бўлса, у ҳолда

$$2u_2 = u_1 + u_3 \qquad (2)$$

бўлади. (1) ва (2) тенгламалардан u_2 ни йўқотиб, $(u_1 + u_3)^2 = 4u_1u_3$ ёки $(u_1 - u_3)^2 = 0$ ни ҳосил қиламиз, бундан $u_1 = u_3$, (2) дан эса $u_2 = u_1$. Демак, $u_1 = u_2 = u_3$.

Жавоб. Агар учала сон ўзаро тенг бўлса, улар бир вақтда ҳам арифметик прогрессия, ҳам геометрик прогрессия ташкил қила олади.

6-БОБ

БИРЛАШМАЛАР ВА НЬЮТОН БИНОМИ

Белгилашлар:

A_m^n — m элементдан n тадан ўринлаштиришлар сони,

P_n — n элементдан ўрин алмаштиришлар сони,

C_m^n — m элементдан n тадан группалашлар сони,

$T_{k+1} = C_m^k a^k x^{m-k}$ ушбу $(x + a)^m$ бином ёйилмасининг $(k + 1)$-ҳади.

358. Шартга кўра

$$\frac{P_n}{P_{n+2}} = \frac{0,1}{3} \text{ ёки } \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,(n+1)(n+2)} = \frac{1}{30},$$

бундан $(n+1)(n+2) = 30$. Бу тенгламанинг илдизлари $n_1 = 4$; $n_2 = -7$. Иккинчи илдиз ярамайди.

Жавоб. $n = 4$.

359. Масаланинг шартига кўра $5C_n^3 = C_{n+2}^4$ ёки

$$\frac{5n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

бундан

$$5(n-2) = \frac{(n+2)(n+1)}{4}.$$

Жавоб. $n_1 = 14$; $n_2 = 3$.

360. Изланган ҳад

$$T_9 = (-1)^8 C_{16}^8 \left(\frac{a}{x}\right)^8 \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8 = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot\frac{a^8}{x^4}.$$

Жавоб. $12\,870\,\frac{a^8}{x^4}$.

361. $$T_{n+1} = C_{12}^n\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^n\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-n}.$$

Бу ерда a ҳарфи $\frac{n}{2} + \frac{2(12-n)}{3}$ даражада. Шартга кўра $\frac{n}{2} + \frac{2(12-n)}{3} = 7$, бундан $n = 6$, яъни $n + 1 = 7$.

Жавоб. Еттинчи ҳад.

362. $$T_{n+1} = C_{21}^n\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^n\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-n} =$$

$$= C_{21}^n a^{\frac{21-n}{3}-\frac{n}{6}} b^{\frac{n}{2}-\frac{21-n}{6}}.$$

Масаланинг шартига кўра $\frac{n}{2} - \frac{21-n}{6} = \frac{21-n}{3} - \frac{n}{6}$, бундан $n = 9$.

Жавоб. Ўнинчи ҳад.

363. Соддалаштиргандан кейин: $\left(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$ ни ҳосил қиламиз. Энди

$$T_{n+1} = (-1)^n C_{10}^n\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^n\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{10-n} = (-1)^n C_{10}^n a^{\frac{10-n}{3}-\frac{n}{2}}.$$

Масаланинг шартига кўра $\frac{10-n}{3} - \frac{n}{2} = 0$, бундан $n = 4$.

Жавоб. $T_5 = 210$.

364. Биринчи биномнинг даража кўрсаткичи x бўлсин. У ҳолда биноминал коэффициентларнинг йиғиндиси 2^x бўлади. Иккинчи биномнинг биноминал коэффициентлари йиғиндиси 2^{x+3} бўлади. Ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$2^x + 2^{x+3} = 144;\ 2^x(1+8) = 144;\ 2^x = 2^4;\ x = 4.$$

Жавоб. 4 ва 7.

365. $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = 105$, бундан $m = 15$; у ҳолда

$$T_{13} = (-1)^{12} C_{15}^{12} \left(\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12} (9x)^3 = \frac{455}{x^3}.$$

Жавоб. $\frac{455}{x^3}$.

366. Масаланинг шартига кўра $C_m^3 = C_m^{12}$, демак, $m = 15$. У ҳолда

$$T_{n+1} = C_{15}^n \left(\frac{a}{x}\right)^n (x^2)^{15-n} = C_{15}^n a^n x^{30-3n}.$$

Шартга кўра $30 - 3n = 0$; $n = 10$.

Жавоб. $T_{11} = 3003a^{10}$.

367. Шартга кўра $\frac{C_m^4}{C_m^2} = \frac{14}{3}$, яъни $m^2 - 5m - 50 = 0$, бундан $m = 10$ ($m = -5$ илдиз ярамайди). Ёйилманинг ўрта ҳади:

$$T_6 = C_{10}^5 (-1)^5 \left(\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^5 \left(a^{-2}\sqrt{a}\right)^5 = -252.$$

Жавоб. Ўрта (олтинчи) ҳад -252 га тенг.

368. Масаланинг шартига кўра $1 + m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = 46$. Кейин 367-масала сингари ечилади.

Жавоб. Изланган (еттинчи) ҳад $T_7 = 84$.

369. Масаланинг шартига кўра $2^m = 128$, бундан $m - 7$. Энди

$$T_{n+1} = C_7^n x^{-\frac{n}{3}} x^{\frac{3}{2}(7-n)}.$$

Шартга кўра $-\frac{n}{3} + \frac{3}{2}(7-n) = 5$, бундан $n = 3$.

Жавоб. Изланган (тўртинчи) ҳад $T_4 = 35x^5$.

370. Олтинчи ҳад $u_6 = u_1q^5 = \frac{1}{i}(1+i)^5$. Кўпаювчи $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$; $(1+i)^5$ кўпайтувчи Ньютон биноми формуласига мувофиқ $1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5$ га тенг. Демак,

$$u_6 = -i - 5i^2 - 10i^3 - 10i^4 - 5i^5 - i^6.$$

Энди мавҳум бирликнинг даражаларини уларнинг ифодалари билан алмаштирамиз:

$$i^2 = -1;\ i^3 = i^2i = -i;\ i^4 = i^3i = -ii = +1;$$

$$i^5 = i^4i = i;\ i^6 = -1.$$

Изоҳ. Даражанинг асоси $(1+i)$ бўлган бу мисолда (ёки, умуман, асос $a \pm ai$ каби икки ҳад бўлганда) даражага кўтариш осон бўлади. $1+i$ ни квадратга кўтарамиз. $(1+i)^2 = 2i$ ҳосил қиламиз, бундан $(1+i)^5 = (1+i)^4 \cdot (1+i) = (2i)^2 \cdot (1+i) = -4(1+i)$.

Жавоб. $u_6 = -4 + 4i$.

371. Еттинчи ҳад $u_7 = i\left(1+\frac{1}{i}\right)^6$ бўлади. $\frac{1}{i} = -i$ бўлгани учун $u_7 = i(1-i)^6$. Сўнгра бундан олдинги масала каби ечиш мумкин. Ҳар бири $1-i$ га тенг бўлган олтита кўпайтувчи кўпайтмасининг модулини ва аргументини топиш мумкин. $1-i$ миқдорнинг модули $\sqrt{2}$, аргументи $-45°$ бўлади. Демак, кўпайтманинг модули $(\sqrt{2})^6 = 8$, аргументи $6(-45°) = -270°$. Демак,

$$(1-i)^6 = 8\left[\cos(-270°) + i\sin(-270°)\right] = 8i.$$

Жавоб. $u_7 = -8$.

372. Масаланинг шартига кўра C_n^1; C_n^2; C_n^3 сонлар арифметик прогрессия ҳосил қилади. Демак, $C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2$, яъни

$$n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2\cdot\frac{n(n-1)}{2}.$$

n нолга тенг бўлмагани учун тенгликнинг иккала томонини n га бўлиш мумкин. $n^2 - 9n + 14 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг $n_1 = 7$ ва $n_2 = 2$ илдизларидан иккинчиси ярамайди, чунки $n = 2$ бўлганда бином ёйилмасининг фақат учта ҳади бўлади, масаланинг шартига кўра тўртинчи ҳад бор.

Жавоб. $n = 7$.

373. Бундан олдинги масалага ўхшаш ечилади. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ га (бу сон нолга тенг эмас, чунки шартга кўра $n \geqslant 6$) қисқартгандан кейин $n^2 - 21n + 98 = 0$ ҳосил қиламиз.

Жавоб. $n = 14$ ёки $n = 7$.

374. Қавс ичидаги биринчи қўшилувчини $a^{\frac{4}{5}-\frac{x-1}{5}} = a^{\frac{5-x}{5x}}$ кўринишда, иккинчи қўшилувчини $a \cdot a^{\frac{x-1}{x+1}} = a^{\frac{2x}{x+1}}$ кўринишда ёзамиз. Ёйилманинг тўртинчи ҳади $56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}}$га тенг. Масаланинг шартига кўра $56a^{\frac{5-x}{x}+\frac{6x}{x+1}} = 56a^{5,5}$. Демак,

$$\frac{5-x}{x} + \frac{6x}{x+1} = 5,5.$$

Жавоб. $x=2$ ёки $x = -5$.

375. Берилган ифодани $\left[2^{\frac{x-1}{x}} + 2^{\frac{2(3-x)}{4-x}}\right]^6$ кўринишда ёзамиз. Масаланинг шартига кўра

$$15 \cdot 2^{\frac{4(x-1)}{x}}\, 2^{\frac{4(3-x)}{4-x}} = 240,$$

яъни

$$2^{\frac{4(x-1)}{x}+\frac{4(3-x)}{4-x}} = 2^4.$$

Демак,

$$\frac{4(x-1)}{x} + \frac{4(3-x)}{4-x} = 4.$$

Жавоб. $x = 2$.

376. $\left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}\right)^x$ бином ёйилмасининг еттинчи ҳади

$$T_7 = C_x^6 \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x-6} \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^6$$

га тенг, охиридан еттинчи ҳади

$$T_7' = C_x^6 \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{x-6}.$$

Демак,

$$T_7 : T_7' = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{(x-6)-6} \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{6-(x-6)} = 2^{\frac{x-12}{3}}\, 3^{\frac{x-12}{3}} = 6^{\frac{x-12}{3}}.$$

Масаланинг шартига кўра $6^{\frac{x-12}{3}} = \frac{1}{6}$, яъни $6^{\frac{x-12}{3}} = 6^{-1}$. Демак, $\frac{x-12}{3} = -1$.

Жавоб. $x = 9$.

377. Масаланинг шартига кўра $C_5^2 x^3 (x^{\lg x})^2 =$ $10x^{3+2\lg x} = 10^6$ ёки $x^{3+2\lg x} = 10^5$. Бу тенгликни лога, $(3 + 2\lg x)\lg x = 5$ ни топамиз. Охирги тенгламани ечиб, (lg ва $(\lg x_2) = -\frac{5}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x_1 = 10$; $x_2 = 10^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{100\sqrt{10}}$.

378. Масаланинг шартига кўра

$$C_6^3 (\sqrt{x})^{\frac{3}{\lg x+1}} \left(\sqrt[12]{x}\right)^3 = 200, \quad \text{яъни} \quad 20x^{\frac{\lg x+7}{4(\lg x+1)}} = 200.$$

Бу тенгламанинг иккала қисмини 20 га бўлиб ва логарифмлаб, соддалаштиргандан кейин

$$(\lg x)^2 + 3\lg x - 4 = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан $(\lg x_1) = 1$, $(\lg x_2) = -4$.

Жавоб. $x_1 = 10$; $x_2 = 0{,}0001$.

379. Масала бундан олдинги масалага ўхшаш ечилади. $x^{\lg x-2} = 1000$ тенгламани ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган тенгликни логарифмлаб, $(\lg x_1) = 3$ ва $(\lg x_2) = -1$ ни топамиз.

Жавоб. $x_1 = 1000$; $x_2 = 0{,}1$.

380. Бундан олдинги икки масалага ўхшаш ечилади.

Жавоб. $x_1 = 10$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{10}}$.

381. *Жавоб.*

$$x_1 = 100; \; x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{100}}.$$

382. *Жавоб.* $x_1 = 1000$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

383. Масаланинг шартига кўра

$$T_{k+2} - T_{k+1} = 30, \tag{a}$$

бунда

$$T_{k+1} = C_{12}^k x^{-\frac{k}{2}} x^{\frac{12-k}{6}} = C_{12}^k x^{\frac{6-2k}{3}} \text{ ва } T_{k+2} = C_{12}^{k+1} x^{\frac{4-2k}{3}}.$$

Масаланинг шартига кўра $\frac{6-2k}{3}$ кўрсаткич $\frac{4-2k}{3}$ кўрсаткичдан икки марта катта, яъни $\frac{6-2k}{3}=2\cdot\frac{4-2k}{3}$, бундан $k=1$. У ҳолда (а) тенглик соддалаштирилгандан кейин

$$2x^{\frac{4}{3}}-11x^{\frac{2}{3}}+5=0$$

кўринишга келади. $x^{\frac{2}{3}}=y$ ни ўрнига қўямиз.

Жавоб. $x_1=5\sqrt{5}$; $x_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

384*. Масаланинг шартига кўра $5C_m^1=C_m^3$, демак, $5m=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}$ тенглама ҳосил қиламиз. $m\neq0$, шунинг учун тенгламанинг иккала томонини m га бўлиш мумкин. $m_1=7$ ва $m_2=-4$ ҳосил қиламиз. m бутун мусбат сон бўлиши керак, шунинг учун фақат $m_1=7$ илдиз ярайди.

Масаланинг шартига кўра $T_4=7\cdot20$; демак,

$$C_7^3\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4=140.$$

Жавоб. $x=4$.

385. Масаланинг шартига кўра $C_m^2-m=20$; $\frac{m(m-1)}{1\cdot2}-m=20$. Бунда $m_1=8$ ва $m_2=-5$ илдизлардан фақат биринчиси ярайди, чунки биномнинг кўрсаткичи бутун мусбат сон деб фараз қилинади. Биномни $\left(2^{\frac{x}{2}-\frac{3}{16}}+2^{\frac{5}{16}-\frac{x}{2}}\right)^8$ кўринишида ёзамиз. Масаланинг шартига кўра

$$T_4-T_6=56$$

ёки

$$C_8^3 2^{3\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)}2^{5\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)}-C_8^5 2^{5\left(\frac{5}{16}-\frac{x}{2}\right)}2^{3\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{16}\right)}=56.$$

Соддалаштиргандан кейин $56\cdot2^x-56.\frac{2}{2^x}=56$ ҳосил қиламиз. $2^x=y$ фараз қилиб, $y^2-y-2=0$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $y_1=2$ ва $y_2=-1$. $2^x=y$ манфий сон бўла олмагани учун фақат $y_1=2$ ярайди. Демак, $2^x=2$, яъни $x=1$.

Жавоб. $x=1$.

386. Бином ёйилмасининг бошидан ва охиридан баробар узоқликда турган ҳадларнинг биноминал коэффициентлари тенг бўлгани учун, охирги учта ҳадининг коэффициентлари ўрнига олдин-

ги учта ҳадининг коэффициентларини, яъни $1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}=22$ ни олиш мумкин, бундан $m=6$ (олдинги масалага қаранг). Демак, бином $\left(2^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{1-x}{2}}\right)^6$ бўлади. Масаланинг шартига кўра

$$T_3+T_5=135$$

ёки

$$C_6^2\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^2\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^4+C_6^4\left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2=135.$$

Соддалаштиргандан кейин

$$2^{x+1}+2^{2-x}=9 \text{ ёки } 2\cdot 2^x+\frac{2^2}{2^x}=9.$$

Бундан олдинги масалага ўхшаш топамиз: 1) $2^x=4$ ва 2) $2^x=\frac{1}{2}$.

Жавоб. $x_1=2$; $x_2=-1$.

387. Арифметик прогрессиянинг биринчи, учинчи ва бешинчи ҳадлари бўлган a_1, a_3 ва a_5 сонларнинг ўзлари $2a_3=a_1+a_5$ бўладиган арифметик прогрессияни ҳосил қилади. Масаланинг шартига кўра $a_1=C_m^1$; $a_3=C_m^2$; $a_5=C_m^3$ бўлгани учун

$$\frac{2m(m-1)}{1\cdot 2}=m+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Буни m га ($m\neq 0$) қисқартириб, $m^2-9m+14=0$ тенгламани топамиз; бунинг илдизлари $m_1=7$, $m_2=2$. Масаланинг шартига кўра бином ёйилмасида камида олтита ҳад бўлгани учун $m\geqslant 5$, демак, фақат $m_1=7$ илдиз ярайди. Бином

$$\left[2^{\frac{1}{2}\lg\left(10-3^x\right)}+2^{\frac{x-2}{5}\lg 3}\right]^7$$

бўлади. Масаланинг шартига кўра

$$T_6=21$$

ёки

$$C_7^5 2^{(x-2)\lg 3}\,2^{\lg\left(10-3^x\right)}=21.$$

Бундан

$$2^{(x-2)\lg 3+\lg\left(10-3^x\right)}=1=2^0;$$

демак,

$$(x-2)\lg 3+\lg(10-3^x)=0.$$

Уни потенцирлаб,

$$3^{x-2}(10-3^x)=1$$

ёки

$$\frac{3^x}{3^2}(10-3^x)=1$$

ни ҳосил киламиз. Бундан кейин 385-масала каби ечилади.

Жавоб. $x_1=2$; $x_2=0$.

388. Масаланинг шартига кўра $\frac{14}{9}C_m^2$, C_m^3 ва C_m^4 сонлари геометрик прогрессия ташкил қилади; демак,

$$\frac{14}{9}C_m^2C_m^4=\left(C_m^3\right)^2.$$

Тенгликнинг иккала қисмини $m^2(m-1)^2(m-2)$ га бўлиш мумкин, m ҳам, $m-1$ ҳам, $m-2$ ҳам нолга тенг эмас (чунки, масаланинг шартидан $m\geqslant 3$ экани келиб чиқади); $m=9$ ни ҳосил қиламиз. Шартга кўра $T_4=16{,}8$ ёки

$$C_9^3 5^{3\left[\frac{1}{6}\lg(x-1)-\frac{1}{3}\lg 5\right]} 5^{6\left[-\frac{1}{6}\lg\left(6-\sqrt{8x}\right)\right]}=16{,}8.$$

Бундан

$$\frac{1}{2}\lg(x-1)-\lg 5-\lg\left(6-\sqrt{8x}\right)=-1$$

тенглама ҳосил бўлади. Потенцирлагандан кейин

$$10\sqrt{x-1}=5\left(6-\sqrt{8x}\right).$$

Бундан $x_1=50$ ва $x_2=2$. Биринчи илдиз ярамайди; чунки $x=50$ бўлганда $6-\sqrt{8x}$ сони манфий бўлади, демак, логарифми йўқ.

Жавоб. $x=2$.

389. Масаланинг шартига кўра

$$\lg\left(3\cdot C_m^3\right)-\lg C_m^1=1,$$

ёки

$$\lg\frac{3C_m^3}{C_m^1}=\lg 10;$$

бундан $\frac{3C_m^3}{C_m^1}=10$. Соддалаштиргандан кейин $m^2-3m-18=0$ тенгламани топамиз, бу тенгламанинг илдизлари $m_1=6$ ва $m_2=-3$. Демак, бином кўрсаткичи $m=6$ бўлади. Масаланинг $9T_3-T_5=240$ шартидан

$$9C_6^2\, 2^{2\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)}\, 2^{4\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)} - C_6^4\, 2^{4\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{2}\right)}\, 2^{2\left(\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = 240$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан

$$9\cdot 2^{3x-2} - 2^{3x+1} = 16$$

ёки

$$\frac{9\cdot 2^{3x}}{2^2} - 2^{3x}\cdot 2 = 16.$$

Демак,

$$2^{3x} = 2^6 \text{ ва } x = 2.$$

Жавоб. $x = 2$.

7- БОБ

АЛГЕБРАИК ВА АРИФМЕТИК МАСАЛАЛАР

390. Патроннинг оғирлиги снаряд, заряд ва гильза оғирликларидан ташкил топади. Снаряд билан гильзанинг оғирлиги биргаликда бутун патрон оғирлигининг $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ қисмига тенг. Заряд ҳиссасига бутун патрон оғирлигининг $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$ қисми қолади, бу эса 0,8 *кг* бўлади. Демак, патрон оғирлиги 0,8 *кг*$: \frac{1}{12} =$ 9,6 *кг*.

Жавоб. 9,6 *кг*.

391. Эркаклар сони умумий ишчилар сонининг 100% — —35% = 65% ини ташкил қилади. Эркаклар аёллардан 65% — —35% = 30% ортиқ, бу эса 252 киши бўлади. Демак, умумий ишчилар сони $\frac{252\cdot 100}{30} = 840$.

Жавоб. 840 ишчи.

392. Фойданинг проценти таннархга нисбатан олинади (таннарх 100% деб олинади). Демак, сотиладиган баҳо (138,6 сўм) таннархнинг 100% + 10% = 110% ини ташкил қилади. Таннарх

$$\frac{138,6\cdot 100}{110} = 126 \text{ (сўм).}$$

Жавоб. 126 сўм.

393. Зарар (100% деб олинади) таннархга нисбатан процент билан ҳисобланади. Демак, 3348 сўм таннархнинг 100% — 4% = = 96% ини ташкил этади. Маҳсулот артелга

$$\frac{3348 \cdot 100}{96} = 3487{,}5 \text{ сўмга тушган.}$$

Жавоб. 3487 сўм 50 тийин.

394. Рудада $\frac{34{,}2 \cdot 100}{225}\%$ мис бор.

Жавоб. 15,2%.

395*. Нарх 29 тийин — 26 тийин = 3 тийин туширилган. Бу нарх эски нархнинг $\frac{3 \cdot 100\%}{29}$ % ини ташкил қилади. $\frac{3 \cdot 100}{29} = 10\frac{10}{29}$ ни тақрибий ўнли касрга алмаштирамиз.

Жавоб. 10,34%.

396. Масала бундан олдингига ўхшаш ечилади.

Жавоб. 10,94%.

397. Масаланинг шартига кўра 2 *кг* ҳамма узумнинг 32% ини ташкил қилади. Узумнинг оғирлиги $\frac{2 \cdot 100}{32} = 6{,}25$.

Жавоб. 6,25 *кг.*

398. Экскурсантлар сонини x билан белгилаймиз. Биринчи ҳолда тўпланган пул $75x$ тийин бўлади, демак, харажатлар учун $(75x + 440)$ тийин пул керак. Иккинчи ҳолда $80x$ тийин тўпланган бўлади; демак, харажатлар учун $(80x - 440)$ тийин керак. Демак, $75x + 440 = 80x - 440$.

Жавоб. 176 киши.

399. Ҳаммаси x киши бўлсин; ҳар бир киши $\frac{72}{x}$ тўлаши керак. Масаланинг шартига кўра

$$(x - 3)\left(\frac{72}{x} + 4\right) = 72.$$

Жавоб. 9 киши.

400. Биринчи том бир нусхасининг баҳоси x сўм, иккинчи томники y сўм бўлсин. Биринчи шартдан $60x + 75y = 405$ тенглама келиб чиқади. Баҳолар 15% арзон бўлганда биринчи томнинг бир нусхаси $0{,}85x$ сўм туради, 10% арзон бўлганда иккинчи томнинг бир нусхаси $0{,}9\,y$ сўм бўлади. Иккинчи шартдан

$$60 \cdot 0{,}85x + 75 \cdot 0{,}9y = 355\frac{1}{2}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Иккинчи тенглама системасини ечиб, $x = 3$; $y = 3$ ни топамиз.

Жавоб. Биринчи томнинг бир нусхаси 3 сўм, иккинчи томнинг бир нусхаси ҳам 3 сўм туради.

401. Биринчи буюм x сўмга олинган бўлсин. У вақтда иккинчи буюм $(225 - x)$ сўмга олинган бўлади. Биринчи буюм 25% фойдасига сотилган. Демак $1{,}25x$ сўмга сотилган. Иккинчи буюм 50% фойдасига сотилган, демак, $1{,}5\,(225 - x)$ сўмга сотилган. Масаланинг шартига кўра фойданинг умумий проценти (сотиб олиш баҳоси 225 сўмга нисбатан) 40% ини ташкил қилади. Демак, умумий тушган пул $1{,}40 \cdot 225 = 315$ сўм. Ушбу

$$1\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2}(225 - x) = 315$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. Биринчи буюм 90 сўмга, иккинчиси 135 сўмга олинган.

402. 40 *кг* денгиз сувида $40 \cdot 0{,}05 = 2$ *кг* туз бор. 2 *кг* умумий оғирликнинг 2% ини ташкил қилиши учун умумий оғирлик $2 : 0{,}02 = 100$ *кг* бўлиши керак.

Жавоб. 60 *кг* қўшиш керак.

403. Катетларнинг узунликларини x ва y (метр) билан белгилаймиз. Масаланиг шартига кўра $x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2$. Катетлардан бири $133\frac{1}{3}$ %, яъни узунлигининг $\frac{133\frac{1}{3}}{100} = 1\frac{1}{3}$ қисми қадар орттирилгандан кейин биринчи катет $2\frac{1}{3}x$ га тенг бўлади. Иккинчи катет $16\frac{2}{3}$ % орттирилгандан кейин $1\frac{1}{6}y$ га тенг бўлади. $2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. 3 *м* ва 6 *м*.

404. Агар биринчи қопдаги ундан 12,5% олинса, қопда 87,5% ун қолади, бу эса 140 *кг* : 2 = 70 *кг* бўлади. Демак, биринчи қопда $\frac{70 \cdot 100}{87{,}5}$ *кг* ун бор.

Жавоб. Биринчи қопда 80 *кг*, иккинчи қопда 60 *кг* ун бор.

405. Иккала завод бир кунда бутун ишнинг $\frac{1}{12}$ қисмини бажара олади. Шартга кўра B заводнинг иш унумдорлиги A завод

иш унумдорлигининг $66\frac{2}{3}\%$ ини, яъни $\frac{2}{3}$ қисмини ташкил қилади; демак, иккала заводнинг иш унумдорлиги A завод иш унумдорлигининг $1\frac{2}{3}$ қисмини ташкил қилади. Демак, A завод бир кунда бутун ишнинг $\frac{1}{12} : 1\frac{2}{3} = \frac{1}{20}$ қисмини бажара олади. B завод бир кунда бутун ишнинг $\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{30}$ қисмини бажара олади. A завод тўхтагунча бутун ишнинг $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ қисмини бажарди. Бутун ишнинг қолган $\frac{5}{6}$ қисмини бажариш учун B заводга $\frac{5}{6} : \frac{1}{30} = 25$ кун вақт керак.

Жавоб. Заказ $27 (= 25 + 2)$ кунда тайёр бўлади.

406. Масалани тўғри ечган 14 ўқувчи синфдаги ҳамма ўқувчининг $100\% - (12\% + 32\%) = 56\%$ ини ташкил қилади. Синфдаги ҳамма ўқувчилар сони $\frac{14 \cdot 100}{50} = 25$.

Жавоб. 25 ўқувчи.

407. Рельсдан кесиб олинган қисмининг оғирлиги бутун рельс оғирлигининг 72% ини ташкил қилади; демак, қолган қисмининг оғирлиги (45,2 *кг*) бутун рельс оғирлигининг $100\% - 72\% = 28\%$ ини ташкил қилади. Бу оғирликнинг 1 проценти $\frac{45,2}{28}$ бўлади, 72 процент эса $\frac{45,2}{28} \cdot 72 = 116\frac{8}{35}$ *кг* $\approx 116,23$ *кг* бўлади. Рельс оғирлигининг 1% ини топиш ўрнига $x : 45,2 = 72 : 28$ пропорцияни тузиш мумкин.

Жавоб. Кесиб олинган қисмнинг оғирлиги (яхлитланган) 116,2 *кг*.

408. Бутун қотишманинг оғирлиги (2 *кг*) мис оғирлигининг $100\% + 14\frac{2}{7}\% = 114\frac{2}{7}\%$ ини ташкил қилади. Демак, мис оғирлигининг 1 проценти $\frac{4}{114\frac{2}{7}}$ *кг* бўлади. Демак, кумушнинг оғирлиги мис оғирлигининг $14\frac{2}{7}\%$ ини ташкил қилиб,

$$\frac{2}{114\frac{2}{7}} \cdot 14\frac{2}{7} = \frac{1}{4} \text{ кг}$$

га тенг. Мис оғирлигининг 1 % ини топиш ўрнига

$$x:2=14\frac{2}{7}:114\frac{2}{7}$$

пропорцияни тузиш мумкин.

Жавоб. Кумушнинг оғирлиги $\frac{1}{4}$ *кг.*

409. Иккинчи ишчининг иш ҳақи биринчи ишчи иш ҳақининг $1\frac{3}{4}:7\frac{1}{2}=\frac{7}{30}$ қисмини ёки процент билан олганда $\frac{7}{30}\cdot 100\% = 23\frac{1}{3}\%$ ини ташкил қилади. Учала ишчининг умумий иш ҳақи (408 сўм) биринчи ишчи иш ҳақининг

$$100\%+23\frac{1}{3}\%+43\frac{1}{3}\%=166\frac{2}{3}\%$$

ини ташкил қилади. Биринчи ишчи иш ҳақининг бир проценти $\frac{408}{166\frac{2}{3}}$ сўм бўлади, демак, биринчи ишчи

$$\frac{408}{166\frac{2}{3}}\cdot 100=244{,}8 \text{ сўм}$$

иш ҳақи олган. Иккинчи ишчи бу пулнинг $23\frac{1}{3}\%$ ини, яъни

$$\frac{244{,}8\cdot 23\frac{1}{3}}{100}=57{,}12 \text{ сўм},$$

учинчи ишчи

$$\frac{244{,}8\cdot 43\frac{1}{3}}{100}=106{,}08 \text{ сўм}$$

олган.

Жавоб. 244,8 сўм; 57 сўм 12 тийин; 106 сўм 08 тийин.

410. Агар биринчи яшикдаги қанднинг оғирлиги x *кг* бўлса, иккинчи яшикдаги қанднинг оғирлиги $\frac{4}{5}x$ *кг*, учинчи яшикдаги $\frac{4}{5}x\cdot\frac{42\frac{1}{2}}{100}=\frac{17}{50}x$ *кг* бўлади. Масаланинг шартига кўра $x+\frac{4}{5}x+\frac{17}{50}x=64{,}2$. Бундан $x=30$ (*кг*). Бу соннинг олдин $\frac{4}{5}$ қисмини, сўнгра $\frac{17}{50}$ қисмини оламиз.

Жавоб. 30 *кг*, 24 *кг*, 10,2 *кг.*

тенгламани ҳосил қиламиз. Юк поезди светофор ёнидан $\frac{490}{x}$ секундда, пассажир поезди $\frac{210}{y}$ секундда ўтади. Иккинчи тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{490}{x} - \frac{210}{y} = 35.$$

Жавоб. Юк поездининг тезлиги 10 *м/сек*, яъни 36 *км/соат*, пассажир поездининг тезлиги 15 *м/сек*, яъни 54 *км/соат.*

494. Агар тўрт ўқли цистерналар сони x бўлса, икки ўқли цистерналар сони $(x+5)$ бўлади. Агар битта икки ўқли цистернанинг оғирлиги y *т* бўлса, битта тўрт ўқли цистернанинг оғирлиги $3y$ *т* бўлади. Битта икки ўқли цистернадаги нефтнинг оғирлиги $(40 \cdot 0{,}3)$ *т* $= 12$ *т*. Тўрт ўқли цистерна ичидаги нефти билан $(3y+40)$ *т*, икки ўқли цистерна эса ичидаги нефти билан $(y+12)$ *т* келади. Биринчи тенглама

$$x(3y+40)+(x+5)(y+12)=940$$

ҳосил бўлади. Тўрт ўқли цистернадаги ҳамма нефтнинг оғирлиги $(40x)$ *т*, ҳамма икки ўқли цистерналар ичидаги нефти билан $(x+5)(y+12)$ *т* келади. Иккинчи тенглама ҳосил бўлади:

$$40x-(x+5)(y+12)=100.$$

Жавоб. Тўрт ўқли цистерналар 10 та бўлиб, ҳар бирининг оғирлиги 24 *т*, икки ўқли цистерналар 15 та бўлиб, ҳар бирининг оғирлиги 8 *т*.

495. Биринчи машина бир кунда x *м*, иккинчи машина бир кунда y *м* силжиган бўлсин. Биринчи ҳолда биринчи машина бутун ишнинг 30% ини бажариб, $\frac{60x \cdot 30}{100} = 18x$ (*м*) силжир эди. Иккинчи машина $\frac{60 \cdot y \cdot 80}{300} = 16y$ (*м*) силжир эди.

$$18x + 16y = 60$$

тенглама ҳосил бўлади. Иккинчи ҳолда биринчи машина $\frac{2}{3} \cdot 60y$ (*м*) силжиган бўлиб, бу ишга $\frac{2}{3} \cdot 60 \cdot \frac{y}{x}$ кун сарф қилган бўлар эди. Иккинчи машина эса $\frac{3}{10} \cdot 60 \cdot \frac{x}{y}$ кун сарф қилар эди. Иккинчи тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{40y}{x} - \frac{18x}{y} = 6.$$

Агар $\frac{y}{x} = z$ деб фараз қилсак, олдинги система осон ечилади. Масалага $z = \frac{3}{4}$ мусбат қиймат тўғри келади.

Жавоб. Биринчи машина кунига тоннелнинг 2 метрига силжийди; иккинчи машина $1\frac{1}{2}$ метрига силжийди.

496. Биринчи бригада йўл участкасини x кунда ремонт қила олади, иккинчи бригада эса y кунда ремонт қила олади дейлик. Масаланинг шартига кўра

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ \frac{40x}{100} - \frac{40y}{300} = 2 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Жавоб. Биринчи бригада йўл участкасини 10 кунда, иккинчи бригада 15 кунда ремонт қила олар эди.

497. Юкнинг $\left(\frac{25}{46} \cdot 690 = 375\ m\right.$ ни ташкил қилувчи) биринчи қисми x соатда ташилган ва ҳар бир уч тонналн юк машинаси соатига y марта қатнаган бўлсин. У ҳолда ҳар қайси бир ярим тонналн юк машинаси соатига $(y+1)$ марта қатнаган бўлади. Масаланинг шартига кўра юкнинг иккинчи (яъни $690 - 375 = 315\ m$) қисми $(x + 2)$ соатда ташилган; уч тонналн машиналар соатига $(y + 1)$ мартадан қатнаган, бир ярим тонналн машиналар $(y + 1) + 1 = (y + 2)$ мартадан қатнаган бўлади. Ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 5 \cdot 3xy + 10 \cdot 1\frac{1}{2}x\ (y + 1) = 375, \\ 5 \cdot 3(x - 2)(y + 1) + 10 \cdot 1\frac{1}{2}(x - 2)(y + 2) = 315. \end{cases}$$

Соддалаштиргандан кейин бу тенгламалар

$$\begin{cases} 2xy + x = 25, \\ 2xy + 3x - 4y = 27 \end{cases}$$

кўринишга келади. Биринчи тенгламадан иккинчи тенгламани айириб, $2x - 4y = 2$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $2y = x - 1$. Буни биринчи тенгламага қўйиб, $x^2 = 25$, яъни $x = 5$ ни ҳосил қиламиз. Юкнинг биринчи қисми 5 соатда ташиб бўлинган. Иккинчи қисми $5 - 2 = 3$ соатда ташилган.

Жавоб. Юк 8 соатда ташилган, уч тонналн машиналар олдин соатига 2 мартадан қатнаган, бир ярим тонналн машиналар соатига 3 мартадан қатнаган.

498. Агар x — йўлканинг кенглиги бўлса, майдонча йўлка билан бирга $(a+2x)(b+2x)$ *м*^{2} бўлади. $(a+2x)(b+2x)=2ab$ тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. $\frac{1}{4}\left[\sqrt{(a+b)^2+4ab}-(a+b)\right]$.

499. Ҳар бир қатордаги стуллар сонини x билан белгилаймиз; у ҳолда қаторлар сони $\frac{a}{x}$ га тенг бўлади. Ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(x+b)\left(\frac{a}{x}-c\right)=1{,}1\,a.$$

Соддалаштиришлардан кейин:

$$10cx^2+(a+10bc)\,x-10ab=0.$$

Бундан

$$x=\frac{-(a+10bc)\pm\sqrt{(a+10bc)^2+400abc}}{20c}.$$

Агар радикални минус ишора билан олсак, $x<0$ бўлади; агар плюс ишора билан олсак, $x>0$ бўлади.

Жавоб. Ҳар қайси қатордаги стуллар сони

$$\frac{\sqrt{(a+10bc)^2+400abc}-(a+10bc)}{20c}.$$

500. Жисмларнинг тезликларини (*м/сек* да) v_1 ва v_2 билан белгилаймиз; $v_1>v_2$ бўлсин. Биринчи шарт $av_1+av_2=d$ тенгламани, иккинчи шарт $bv_1-bv_2=d$ тенгламани беради.

Жавоб. $v_1=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$; $v_2=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$. $a<b$ бўлгандагина масаланинг ечими бўлади.

501. Мотоциклчининг тезлигини (*км/соат* да) x билан, велосипедчининг тезлигини y билан белгилаймиз.

$$2x+2y=d;\quad \frac{d}{y}-\frac{d}{x}=t$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Жавоб. Мотоциклчининг тезлиги $d\,\frac{t-4+\sqrt{16+t^2}}{4t}$ *км/соат*; велосипедчининг тезлиги $d\,\frac{t+4-\sqrt{16+t^2}}{4t}$ *км/соат*.

502. Агар велосипедчига x соат керак бўлса, пиёдага $(x+c)$ соат керак бўлади. AB масофани y (километр) билан белгилаймиз. Учрашиш жойигача пиёда $\frac{y(a+b)}{x+c}$ *км*, велосипедчи $\frac{by}{x}$ *км* йўл босган. $\frac{(a+b)\,y}{x+c}+\frac{by}{x}=y$ тенгламани ҳосил қиламиз. $y\neq 0$, шунинг учун $\frac{a+b}{x+c}+\frac{b}{x}=1$ ёки $x^2-(a+2b-c)\,x-bc=0$.

Бу тенгламанинг бир мусбат илдизи ва бир манфий илдизи бор (чунки илдизлар кўпайтмаси манфий $-bc$ сонга тенг). Фақат мусбат илдизи ярайди:

$$x=\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}.$$

y масофа ноаниқлигича қолади. $x+c$ миқдорни ё юқорида келтирилган ифодадан, ёки $\frac{a+b}{x+c}+\frac{b}{x}=1$ тенгламадан $x+c=z$ фараз қилиб топиш мумкин. $\frac{a+b}{z}+\frac{b}{z-c}=1$ тенгламани ҳосил қиламиз. Фақат мусбат илдизни оламиз.

Жавоб. Велосипедчига $\frac{a+2b-c+\sqrt{(a+2b-c)^2-4bc}}{2}$ соат керак, пиёдага эса $\frac{a+2b+c+\sqrt{(a+2b-c)^2+4bc}}{2}=$

$$=\frac{(a+2b+c)+\sqrt{(a+2b+c)^2-4\,(a+b)c}}{2}$$

соат керак.

503. Йўл узунлигини x (километрлар) билан белгилаймиз. Масаланинг шартига кўра A поезд жадвал бўйича йўлга чиққандан $\frac{x}{v}$ соат кейин B поездни қувиб етиши керак эди. Ҳақиқатда эса у B поездни $(x-a)$ *км* ўтгандан кейин, яъни $\frac{x-a}{v}$ соатдан кейин қувиб етади. Демак, иккала поезд учрашгунча кўрсатилганидан $\frac{a}{v}$ соат кам вақт йўлда бўлди. Лекин B поезд учрашгунча $\frac{x}{v_1}$ соат йўлда бўлиши керак, ҳақиқатда эса $\frac{2}{3}\,x$ масофани v_1 тезлик билан ва $\frac{1}{3}\,x-a$ масофани $\frac{1}{2}v_1$ тезлик билан ўтди ва шу йўлнинг ҳаммасига $\left(\frac{\frac{2}{3}x}{v_1}+\frac{\frac{1}{3}\,x-a}{\frac{1}{2}v_1}\right)$ соат вақт сарф қилди.

Демак,

$$\frac{x}{v_1}-\left(\frac{\frac{2}{3}x}{v_1}+\frac{\frac{1}{3}\,x-a}{\frac{1}{2}v_1}\right)=\frac{a}{v}.$$

Жавоб. Йўл узунлиги $\frac{3a\,(2v-v_1)}{v}$ *км.* Масаланинг фақат $v_1<2v$ бўлгандагина ечими бўлади.

504. Омонат касса $x\%$ фойда берадиган бўлсин. У ҳолда дастлаб $\frac{1500}{x}$ сўм қўйилган бўлади. Иккинчи йил бошида омонатчи ҳисобида $\frac{1500}{x}+15+85$, яъни $\frac{1500}{x}+100\Big)$ сўм бўлган. Иккинчи йилнинг охирида бу пул $\left(\frac{1500}{x}+100\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$ сўмга айланади. Бундан

$$\left(\frac{1500}{x}+100\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=420$$

тенглама келиб чиқади.

Жавоб. 300 сўм; 5%.

505. A, B, C станокларнинг иш унумдорлигини мос равишда x, y, z билан белгилаймиз. Масаланинг шартига кўра

$$x=\frac{m}{100}(y+z), \quad y=\frac{n}{100}(x+z).$$

Бу тенгламалардан x ва y нинг z орқали ифодаларини топамиз, уларни қўшамиз:

$$x+y=\frac{100(m+n)+2mn}{10\,000-mn}\cdot z.$$

Процентларнинг изланган сони $\frac{z}{x+y}\cdot 100$ га тенг.

Жавоб. $100\cdot\frac{10\,000-mn}{100(m+n)+2mn}$.

506. Биринчи йилдан олдинги йили олинган маҳсулотни ўлчов бирлиги қилиб оламиз. У ҳолда биринчи йил маҳсулоти $1+\frac{p}{100}$ бўлади. Бунга нисбатан 2-йил маҳсулоти $q\%$, яъни $\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}$ қадар ортади ва $\left(1+\frac{p}{100}\right)+\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{q}{100}=\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)$ ни ташкил қилади. Агар 3-йил маҳсулоти $x\%$ ортса, $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{q}{100}\right)\frac{x}{100}$ қадар кўпаяди.

Масаланинг шартига кўра,

$$\frac{1}{3}\Big|\frac{p}{100}+\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}+\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)\frac{x}{100}\Big]=\frac{r}{100}.$$

Жавоб. $\frac{3r-p-q-\frac{pq}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)}\%$.

507. Ҳамма молнинг таннархи m сўм бўлсин. У вақтда биринчи сотилган молнинг таннархи m сўмнинг $a\%$ ини, яъни $\frac{ma}{100}$

сўмни ташкил қилади. Масаланинг шартига кўра сотилган молдан тушган фойда шу пулнинг $p\%$ ини, яъни $\frac{ma}{100}\cdot\frac{p}{100}$ сўмни ташкил қилади.

Биринчи сафар сотилгандан қолган молнинг таннархи $m - \frac{ma}{100} = m\left(1 - \frac{a}{100}\right)$ сўмга тенг. Иккинчи сафар сотилган молнинг таннархи бу пулнинг $b\%$ ини, яъни $m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\cdot\frac{b}{100}$ сўмни ташкил этади. Иккинчи сафар сотилган молдан $q\%$ фойда тушган; демак, бу фойда $m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100}$ сўм бўлади. Иккинчи сафар сотилгандан қолган молнинг таннархи $m - \frac{ma}{100} - m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100} = m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)$ сўмни ташкил қилади. Молнинг бу қолган қисми $x\%$ фойда билан сотилган бўлсин. У ҳолда уни сотишдан келган фойда $m\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}$ сўмни ташкил қилади. Умумий фойда

$$m\left[\frac{a}{100}\cdot\frac{p}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}\right]$$

бўлади. Масаланинг шартига кўра умумий фойда m сўмнинг $r\%$ ини, яъни $\frac{mr}{100}$ сўмни ташкил қилиши керак. Демак,

$$m\left[\frac{a}{100}\cdot\frac{p}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\frac{b}{100}\cdot\frac{q}{100} + \left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)\frac{x}{100}\right] = \frac{mr}{100}.$$

Бу тенглик m га қисқаради.

Жавоб. $$\frac{r - \frac{ap}{100} - \frac{dq}{100}\left(1 - \frac{a}{100}\right)}{\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right)}\%.$$

508. Биринчи усул. Қирқиб олинган ҳар бир бўлакнинг оғирлиги x *кг* бўлсин. Қисқалик учун биринчи (оғирлиги m *кг*) қотишмани „A қотишма“ деб атаймиз. Иккинчисини „B қотишма“ деб атаймиз. Янгидан ҳссил қилинган икки қуймадан бирида A қотишмадан $(m - x)$ *кг* ва B қотишмадан x килограмм бор, иккинчи қуймада эса A қотишмадан x *кг* ва B қотишмадан $(n - x)$ *кг* бор. Масаланинг шартига кўра миснинг процент миқдори иккала қуймада бир хил. Бундай бўлиши иккала қуймадаги A ва B қотишмаларнинг миқдорлари пропорционал бўлган ҳолдагина мумкин. Ушбу

$$\frac{m - x}{x} = \frac{x}{n - x}$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x = \frac{mn}{m + n}$.

Иккинчи усул. A қуйманинг 1 килограмида u *кг* мис' B қуйманинг 1 килограмида v *кг* мис бўлсин. У ҳолда биринчи қуймада $(m-x)u+xv$ *кг* мис, яъни 1 *кг* биринчи қуймага $\frac{(m-x)u+xv}{m}$ *кг* мис тўғри келади. Иккинчи қуйманинг 1 килограмига тўғри келадиган миснинг оғирлиги шунга ўхшаш ифодаланади. Бу икки ифодани тенглаб, x, u, v дан иборат учта номаълуми бўлган

$$n[(m-x)u+xv]=m[(n-x)v+xu]$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Уни

$$(u-v)(mx+nx-mn)=0$$

кўринишга келтирамиз. Масаланинг шартига кўра A ва B қотишмалардаги миснинг процент миқдорлари турлича, яъни $u-v$ айирма нолга тенг бўла олмайди. Демак,

$$mx+nx-mn=0.$$

Жавоб. Ҳар бир бўлак қотишманинг оғирлиги $\frac{mn}{m+n}$ *кг.*

509. Биринчи тўдада дастлаб x_1 сўм, иккинчи тўдада x_2 сўм ва ҳоказо пул бўлсин; охирги n-тўдада дастлаб x_n сўм бўлади. Биринчи тўда алоҳида ўрин тутади, чунки ундан энг олдин $\frac{1}{n}$ қисми олинади ва фақат ишнинг охирида унга n-тўдадан олиб тўлдирилади, қолган ҳар бир тўдани эса аввало ўзидан олдинги тўдадан олиб тўлдирилади, сўнгра эса $\frac{1}{n}$ қисми олинади. Шунинг учун, биринчи тўдадан бошқа, бирор тўдани текширамиз. Унинг номерини k билан белгилаймиз. Дастлаб унда x_k сўм бор эди, унга $(n-1)$-тўдадан бир миқдорда y сўм олиб қўшилди, сўнгра умумий пул $y+x_k$ сўмдан $\frac{1}{n}$ қисми олинди. $(y+x_k)\frac{n-1}{n}$ сўм қолди. Масаланинг шартига кўра

$$(y+x_k)\frac{n-1}{n}=A \tag{1}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан олдинги $(k-1)$-тўдада, агар у биринчи тўда бўлмаса (яъни $k\neq 2$), A сўм қолиши керак (биринчи тўдадаги A сўм унга n-тўдадан олиб қўшилгандагина ҳосил бўлади). Демак, y сўм олишдан олдин унда $A+y$ сўм бор эди. Масаланинг шартига кўра олинадиган y сўм $A+y$ сўмнинг $\frac{1}{n}$ қисмига тенг, яъни

$$y=\frac{1}{n}(A+y). \tag{2}$$

Бундан $y = \frac{1}{n-1}A$ ни топамиз. Буни (1) тенгламага қўйиб, $x_k = A$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (илгари текширишдан чиқариб қўйилган) иккинчи ва биринчи тўдадан ташқари, ҳамма тўдада дастлаб A сўмдан бўлган:

$$x_3 = x_4 = \ldots = x_n = A. \tag{3}$$

Номаълум x_1 ни бундай топиш мумкин. Шартга кўра дастлаб x_1 сўмдан $\frac{1}{n}$ қисми олинади. $x_1\frac{n-1}{n}$ сўм қолади. Бу ишлар натижасида охирги тўдадан биринчи тўдага бир миқдор y сўм олиб қўшилади.

$$y + x_1\frac{n-1}{n} = A \tag{4}$$

тенглама ҳосил бўлади. Юқоридагича (n-тўдага татбиқ қилингани каби) мулоҳаза юритиб, $y = \frac{1}{n-1}A$ ни топамиз. Буни (4) га қўйиб,

$$x_1 = \frac{(n-2)n}{(n-1)^2}A \tag{5}$$

ни топамиз. x_2 ни топиш учун

$$\left(\frac{1}{n}x_1 + x_2\right)\frac{n-1}{n} = A \tag{6}$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда x_1 (5) формула билан топилади. Бу тенгламани ечиб,

$$x_2 = \frac{n(n-1)-(n-2)}{(n-1)^2}A$$

ни топамиз.

Жавоб.

$$x_1 = \frac{n^2-2n}{(n-1)^2}A; \quad x_2 = \frac{n^2-2n+2}{(n-1)^2}A; \quad x_3 = x_4 = \ldots = x_n = A.$$

411. Биринчи хилидан x *т* оламиз; бунда $0{,}05\,x$ *т* никель бўлади. Иккинчи хилидан $(140-x)$ *т* олиш керак, бунда $0{,}40\cdot(140-x)$ *т* никель бўлади. Масаланинг шартига кўра пўлатнинг умумий оғирлиги 140 *т* да $0{,}30\cdot 140$ *т* никель бўлиши керак. Демак, $0{,}05x+0{,}40\cdot(140-x)=0{,}30\cdot 140$. Бундан $x=40$.

Жавоб. Биринчи хилдан 40 *т*, иккинчи хилдан 100 *т*.

412. Қотишмада 12 *кг*·0,45 = 5,4 *кг* мис бор. Янги қотишмада бу 5,4 *кг* миснинг оғирлиги 40% ни ташкил қилгани учун, янги қотишманинг оғирлиги 5,4 : 0,40 = 13,5 *кг*. Демак, 13,5 *кг* — 12 *кг* = 1,5 *кг* қўшиш керак.

Жавоб. 1,5 *кг*.

413. Бундан олдинги масалага ўхшаш ечилади:
1) 735 *г*·0,16 = 117,6 *г*; 2) 117,6 *г* : 0,10 = 1176 *г*; 3) 1176 *г* — 735 *г* = 441 *г*.

Жавоб. 441 *г*.

414. x — миснинг оғирлиги (*кг*) бўлсин. У вақтда $24-x$ рухнинг оғирлиги бўлади. Оғирликни йўқотиш $\frac{1}{9}x$ (мис учун) ва $\frac{1}{7}(24-x)$ (рух учун) бўлади. Демак,

$$\frac{1}{9}x+\frac{1}{7}(24-x)=2\frac{8}{9}.$$

Бундан $x=17$.

Жавоб. 17 *кг* мис, 7 *кг* рух.

415. Узунлиги 25 *м* бўлган рельслар сонини x билан, узунлиги 12,5 *м* бўлган рельслар сонини y билан белгилаймиз. 20 *км* = 20 000 *м* йўл участкасига 40 000 *м* рельс (икки йўл) қўйиш керак. Масаланинг шартига кўра

$$25x+0{,}50\cdot 12{,}5y=40\,000 \quad \text{ва} \quad 12{,}5y+\frac{66\frac{2}{3}}{100}\cdot 25x=40\,000.$$

Жавоб. 25 *м* ли рельслардан 1200 та ва 12,5 *м* ли рельслардан 1600 та.

416. Ўқувчилар сони x бўлсин. Карточкалар алмашинганда ҳар бир ўқувчи $x-1$ дона карточка олади. Ҳамма x ўқувчи $x(x-1)$ карточка олади; масаланинг шартига кўра $x(x-1)=870$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. 30 ўқувчи.

417. Кичик сон x, катта сон y бўлсин $(x<y)$. Биринчи шартдан $\sqrt{xy}=x+12$, иккинчи шартдан $\frac{x+y}{2}=y-24$, яъни $y-$

$-x = 48$ келиб чиқади. Системани ечиб, $x = 6$, $y = 54$ ни топамиз. $6 < 54$ бўлгани учун, бу ечим ярайди.

Жавоб. 6 ва 54.

418. Энг кичик сон x, ундан кейингиси y ва энг каттаси z бўлсин. Учта тенглама ҳосил бўлади:

$$y - x = z - y;\ xy = 85;\ yz = 115.$$

Биринчи тенгламадан $z = 2y - x$ ни топамиз, уни учинчи тенгламага қўйиб, $2y^2 - xy = 115$ ёки иккинчи тенгламага мувофиқ $2y^2 = 200$ ни топамиз. Иккала ечимдан ($x_1 = 8{,}5$, $y_1 = 10$, $z_1 = 11{,}5$; $x_2 = -8{,}5$, $y_2 = -10$, $z_2 = -11{,}5$) биринчи ечим ярайди (чунки $x_1 < y_1 < z_1$), иккинчиси ярамайди (чунки $x_2 > y_2 > z_2$).

Жавоб. 8,5; 10; 11,5.

419.

$$\frac{x + y + z}{3} = a \text{ ва } \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = b$$

берилган. $\frac{xy + yz + zx}{3}$ ни топиш керак. Биринчи тенгламадан $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9a^2$. Иккинчи тенгламага асосан $x^2 + y^2 + z^2 = 3b$. Демак, $3b + 2(xy + yz + zx) = 9a^2$.

Жавоб. $\frac{xy + yz + zx}{3} = \frac{3a^2 - b}{2}$.

420. Агар тунуканинг узунлиги x *см*, эни y *см* бўлса, қутининг узунлиги $(x - 8)$ *см*, эни $(y - 8)$ *см* ва баландлиги 4 *см* бўлади. Масаланинг шартига кўра $4(x - 8)(y - 8) = 768$ ва $2x + 2y = 96$.

Жавоб. Тунуканинг ўлчамлари 32 *см*×16 *см*.

421. Ўнликлар рақами x, бирликлар рақами y бўлсин. (x ва y — бутун мусбат сонлар бўлиб, 10 дан кичик.) Ушбу

$$\frac{10x + y}{xy} = 2\frac{2}{3};\ (10x + y) - (10y + x) = 18$$

системани ҳосил қиламиз. Икки ечимдан ($x = 6$, $y = 4$ ва $x = \frac{1}{8}$, $y = -\frac{15}{8}$) фақат биринчиси ярайди.

Жавоб. 64.

422. Агар ўнликлар сони x бўлса, бирликлар сони $x + 2$ бўлади.

$$[10x + (x + 2)]\,[x + (x + 2)] = 144$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $x = 2$ ва $x = -3\frac{2}{11}$; масаланинг шартига кўра, иккинчи ечим ярамайди.

Жавоб. Изланган сон 24.

423. Изланган сон x бўлсин; унинг ўнг томонига 5 ёзсак, $10x+5$ сонни ҳосил қиламиз. Масаланинг шартига кўра,

$$10x+5=(x+3)(x-13).$$

Жавоб. 22.

424. Катта сон x, кичик сон y бўлсин. Агар катта соннинг ўнг томонига учта рақам (ноль ва кичик соннинг иккита рақами) ёзсак, катта соннинг рақамлари минглар сонини ифодалайди, натижада $1000x+y$ ҳосил қиламиз. Кичик сондан эса $1000y+10x$ сонини ҳосил қиламиз. Масаланинг шартига кўра

$$1000x+y=2(1000y+10x)+590,\ 2x+3y=72.$$

Системани ечиб, $x=21$, $y=10$ ни топамиз. Бу икки хонали сонлар масаланинг шартини қаноатлантиради.

Жавоб. 21 ва 10.

425. Агар кўпайтувчининг бирликлар рақами x бўлса, (x — бутун сон, 10 дан кичик), ўнликлар рақами $3x$ бўлади. Кўпайтувчи $3\cdot 10x+x=31x$ га тенг. Хато ёзилган кўпайтувчи $10x+3x=13x$. Ҳақиқий кўпайтма $78\cdot 13x$ га тенг, хато ҳосил қилинган кўпайтма $78\cdot 13x$. Масаланинг шартига кўра $78\cdot 31x-78\cdot 13x=2808$. Бундан $x=2$ ни топамиз.

Жавоб. Ҳақиқий кўпайтма 4836 га тенг.

426. Биринчи поезднинг тезлиги соатига x *км*. Иккинчи поезднинг тезлилиги соатига $(x-12)$ *км*. Шартга кўра $\frac{96}{x-12}-\frac{96}{x}=\frac{2}{3}$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. Биринчи поезднинг тезлиги соатига 48 *км*, иккинчи поездники соатига 36 *км*.

427. Биринчи кишининг тезлиги v *км/соат* бўлсин; у ҳолда иккинчининг тезлиги $(v-2)$ *км/соат* бўлади. Биринчи киши йўлга $\frac{24}{v}$ соат, иккинчиси $\frac{24}{v-2}$ соат вақт сарфлайди.

$$\frac{24}{v-2}-\frac{24}{v}=1$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. 8 км/соат, 6 *км/соат.*

428. Поезднинг тезлиги x *км/соат* бўлсин; у ҳолда пароходнинг тезлиги $(x-30)$ *км/соат* бўлади. Бутун йўлга поезд $\frac{66}{x}$ соат, пароход $\frac{80,5}{x-30}$ соат вақт сарф қилади. $\frac{80,5}{x-30}-\frac{66}{x}=4+\frac{15}{60}$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. Поезднинг тезлиги 44 *км/соат*; пароходнинг тезлиги 14 *км/соат.*

429. Биринчи устахона кунига x костюм тиккан бўлсин; у ҳолда иккинчи устахона кунига $x+4$ костюм тиккан бўлади. Биринчи устахона бутун ишни $\frac{810}{x}$ кунда тамомлади; демак, ишнинг муддати $\left(\frac{810}{x}+3\right)$ кун бўлган. Иккинчи устахонанинг муддати ҳам шундай бўлади. Демак,

$$\frac{810}{x}+3=\frac{900}{x+4}+6.$$

Жавоб. Биринчи устахона кунига 20 тадан, иккинчиси кунига 24 тадан костюм тиккан.

430. Жанубга бораётган пароходнинг тезлиги соатига x *км*, ғарбга бораётган пароходнинг тезлиги соатига $(x+6)$ *км* бўлсин. Ҳаракат йўналишлари бир-бирига перпендикуляр бўлгани учун, Пифагор теоремасига асосан

$$(2x)^2+[2(x+6)]^2=60^2.$$

Жавоб. Биринчи пароходнинг тезлиги соатига 18 *км*, иккинчи пароходнинг тезлиги соатига 24 *км.*

431. Итнинг икки марта сакраши 4 *м*, тулкининг уч марта сакраши 3 *м* бўлади. Демак, ит 4 *м* га сакраганда ит билан тулки орасидаги масофа 4 *м* — 3 *м* = 1 *м* қисқаради. Ит билан тулки орасидаги дастлабки масофа 1 метрдан 30 марта ортиқ. Демак, ит тулкига 4 *м*·30 = 120 *м* йўл босгандан кейин етиб олади.
Жавоб. 120 *м* масофада.

432. 1 минутда минут стрелкаси 6° бурилади, соат стрелкаси эса $\frac{1^\circ}{2}$ бурилади. Соат 4 ни кўрсатганда соат стрелкаси билан минут стрелкаси орасидаги бурчак 120° бўлади. x минутда стрелкалар мос равишда $6x$ ва $\frac{1}{2}x$ градусга бурилади. Масаланинг шартига кўра $6x-\frac{1}{2}x=120$.

Жавоб. $21\frac{9}{11}$ минутдан кейин.

433. Поезднинг A дан C гача бориши учун кетган вақтни t (соат) билан ва тезликни v (*км/соат*) билан белгилаймиз. Масаланинг шартига кўра AB йўл (*км/соат*) тезлик билан $\frac{t}{2}$ соатда ўтилган, BC йўлни $0{,}75\cdot v$ *км/соат* тезлик билан $\frac{t}{2}$ соатда ўт-

ган. Демак, $AB = v\,\frac{t}{2}$ *км* ва $BC = 0{,}75\cdot v\,\frac{t}{2}$ *км*. Масаланинг шартига кўра қайтишда йўлнинг CB участкаси v тезлик билан, BA участкаси $0{,}75\ v$ тезлик билан ўтилган. Демак, CB участка $\frac{0{,}75vt}{2}:v$ вақтда, яъни $\frac{0{,}75t}{2}$ соатда, BA участка $\frac{vt}{2}:0{,}75\ v$, яъни $\frac{t}{2\cdot 0{,}75}$ соатда ўтилган. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{t}{2\cdot 0{,}75}+\frac{0{,}75t}{2}=\frac{5}{12}+t.$$

Жавоб. 10 соат.

434. Велосипедчи соатига v километр тезлик билан юрган, деб фараз қиламиз; у ҳолда мўлжалланган тезлик $(v-1)$ *км/соат* бўлади. Ҳақиқатда велосипедчи $\frac{30}{v}$ соат йўлда бўлди, аммо $\frac{30}{v-1}$ соат юриши мўлжалланган эди. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{30}{v-1}-\frac{30}{v}=\frac{3}{60}$$

бўлиши керак. Манфий ечим $v=-24$ ярамайди.

Жавоб. 25 *км/соат.*

435. Поезднинг жадвалдаги тезлиги x *км/соат* бўлсин. У ҳолда ҳақиқатдаги тезлиги $(x+10)$ *км/соат* бўлади. Жадвалга кўра йўл $\frac{80}{x}$ соатда ўтилиши керак эди, ҳақиқатда $\frac{80}{x+10}$ соатда ўтилди. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{80}{x}-\frac{80}{x+10}=\frac{16}{60}.$$

Жавоб. 50 *км/соат.*

436. Поезд йўлнинг биринчи ярмини x соатда босди. Кечикмасдан етиб бориш учун йўлнинг иккинчи ярмини $x-\frac{1}{2}$ соатда ўтиши керак бўлди. Поезд йўлнинг биринчи ярмини соатига $\frac{420}{x}$ *км* тезлик билан, иккинчи ярмини соатига $\frac{420}{x-\frac{1}{2}}$ *км* тезлик билан юрди. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{420}{x-\frac{1}{2}}-\frac{420}{x}=2.$$

Тенгламанинг битта мусбат илдизи бор.

Жавоб. 21 соат.

437. Биринчи поезднинг тезлиги соатига x *км*, иккинчи поезднинг тезлиги соатига y *км* бўлсин. Биринчи ҳолда биринчи поезд учрашгунча $10x$ *км*, иккинчи поезд $10y$ *км* юрди. Демак,

$$10x + 10y = 650.$$

Иккинчи ҳолда биринчи поезд учрашгунча 8 *км*, иккинчи поезд (8 соат + 4 соат 20 минут = $12\frac{1}{3}$ соат юрди). $12\frac{1}{3}\ y$ *км* йўл босди. Демак,

$$8x + 12\frac{1}{3}y = 650.$$

Жавоб. Биринчи поезднинг ўртача тезлиги соатига 35 *км*, иккинчи поезднинг ўртача тезлиги соатига 30 *км*.

438. Биринчи поезднинг тезлиги соатига x *км*, иккинчисиники y *км* бўлсин. 600 *км* масофани биринчи поезд $\frac{600}{x}$ соатда, иккинчи поезд $\frac{600}{y}$ соатда босади. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}, \quad \frac{250}{x} = \frac{200}{y}.$$

Жавоб. Биринчи поезднинг тезлиги 50 *км/соат*, иккинчи поезднинг тезлиги 40 *км/соат*.

439. Агар йўлнинг узунлиги x *км* бўлса, қишлоқдан келаётган киши соатига 3,5 *км* тезлик билан юриб, бу масофани $\frac{x}{3,5}$ соатда ўтади. У поездга 1 соат кеч қолгани учун қишлоқдан чиққан пайтида поезднинг жўнашига $\left(\frac{x}{3,5} - 1\right)$ соат қолган эди. Бу киши қишлоқдан чиққанидан бир соат кейин поезднинг жўнашига $\left(\frac{x}{3,5} - 2\right)$ соат қолди, у эса яна $(x - 3,5)$ *км* йўл юриши керак. Бу киши соатига 5 *км* тезлик билан юрса, бу масофани $\frac{x - 3,5}{5}$ соатда ўтади. У поезд жўнашига $\frac{1}{2}$ соат қолганда етиб келгани учун

$$\frac{x}{3,5} - 2 - \frac{x - 3,5}{5} = \frac{1}{2}.$$

Жавоб. 21 *км*.

440. Велосипеднинг тезлиги минутига x *км*, автомобилнинг тезлиги минутига y *км* бўлсин. Автомобиль велосипедчини қувиб етгунча 10 минут, велосипедчи 10 + 15 = 25 минут йўлда бўлди. Бу вақтда уларнинг ўтган масофалари бир хил бўлди. Демак, $25x = 10y$. Қайтишда автомобиль велосипедчини учратганда автомобиль $50y$ *км*, велосипедчи $65x$ *км* юрган бўлади. Бу масофаларнинг йиғиндиси Москвадан Митишгача бўлган масофадан икки марта ортиқ. Шунинг учун $65x + 50y = 38$. Бу тенгламалар системасини ечиб, $x = 0{,}2$; $y = 0{,}5$ ни топамиз.

Жавоб. Велосипедчининг тезлиги 0,2 *км/мин* = 12 *км/соат*.
Автомобилнинг тезлиги 0,5 *км/мин* = 30 *км/соат*.

441. Поездлар скорий поезд йўлга чиққандан x соат кейин учрашган бўлсин. Почта поезди учрашиш пайтигача $(x + 3)$ соат йўлда бўлди. Учрашиш жойига келгунча ҳар бир поезд $1080 : 2 = 540$ (*км*) йўл босган. Демак, биринчи поезднинг тезлиги соатига $\frac{540}{x}$ *км*, иккинчисининг тезлиги соатига $\frac{540}{x+3}$ *км*. Масаланинг шартига кўра $\frac{540}{x} - \frac{540}{x+3} = 15$. Фақат битта $x = 9$ илдиз ярайди.

Жавоб. Скорий поезд йўлга чиққандан 9 соат кейин.

442. Биринчи велосипедчи x соат юрган бўлсин. Бундан олдинги масаладагидек муҳокама юритиб, $\frac{36}{x-1} - \frac{42}{x} = 4$ тенгламани тузамиз.

Жавоб. Биринчи велосипедчи соатига 14 *км* тезлик билан, иккинчиси соатига 18 *км* тезлик билан юрган. Учрашгунча биринчи велосипедчи 3 соат, иккинчиси 2 соат юрган.

443. Пиёда кишиларнинг йўлга чиқиш жойлари орасидаги AB масофа x *км* ва биринчи пиёда бу масофани y соатда ўтсин. Масаланинг шартига кўра иккинчи пиёда BA масофани $(y - 5)$ соатда ўтади. Демак, бир соатда биринчи пиёда $\frac{x}{y}$ *км*, иккинчиси $\frac{x}{y-5}$ *км* йўл босади. Пиёдалар орасидаги масофа бир соатдан кейин $\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y-5}\right)$ *км* қисқаради, $3\frac{1}{2}$ соатдан кейин эса $3\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y-5}\right)$ *км* қисқаради. Улар $3\frac{1}{3}$ соатдан кейин учрашди, шунинг учун $3\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y-5}\right) = x$. $x \neq 0$ бўлгани учун иккала томонни x га бўлиш мумкин.

$$3\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-5}\right) = 1$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан y ни топамиз. x нинг қиймати ноаниқ бўлиб қолади.

Жавоб. Биринчи киши бутун йўлни 10 соатда, иккинчиси 5 соатда ўтади.

444. Учрашиш пунктини C билан белгилаймиз. $AC = x$ *км* бўлсин; у вақтда шартга кўра $CB = (x + 12)$ *км*. Сўнгра шартга кўра биринчи турист CB йўлни 8 соатда ўтди. Демак, унинг тезлиги соатига $\frac{x+12}{8}$ *км*. Шунингдек, иккинчи туристнинг тезлиги соатига $\frac{x}{9}$ *км* эканини ҳам топамиз. Демак, AC йўлни биринчи турист $x: \frac{x+12}{8} = \frac{8x}{x+12}$ соатда, иккинчи турист BC йўлни $\frac{9(x+12)}{x}$ соатда ўтди. Иккинчи турист биринчидан 6 соат ортиқ йўлда бўлди, шунинг учун

$$\frac{9(x+12)}{x} - \frac{8x}{x+12} = 6.$$

Бу тенгламани ечишда ёрдамчи номаълум $\frac{x+12}{x} = z$ ни киритиш мумкин. $9z - \frac{8}{z} = 6$ ни ҳосил қиламиз. Икки илдиздан $\left(z_1 = \frac{4}{3}\right.$ ва $\left.z_2 = -\frac{2}{3}\right)$ иккинчиси ярамайди, чунки, иккала миқдор $x = AC$ ва $x + 12 = CB$ мусбат бўлиши керак. $\frac{x+12}{x} = \frac{4}{3}$ тенгламадан $x = 36$ ни топамиз. Демак, $AC = 36$ *км*, $CB = 48$ *км*.

Жавоб. $AB = 84$ *км*. Биринчи туристнинг тезлиги соатига 6 *км*, иккинчининг тезлиги соатига 4 *км*.

445. Масала бундан олдингига ўхшайди. Дирижабль учрашгунча x *км* учган бўлсин; у вақтда учрашгунча самолёт $(x + 100$ *км*) учган бўлади. Дирижаблнинг тезлиги соатига $\frac{x+100}{3}$ *км*; самолётнинг тезлиги соатига $\frac{x}{1\frac{1}{3}}$ *км*. Дирижабль ўз аэродромидан учрашув жойигача $x : \frac{x+100}{3} = \frac{3x}{x+100}$ соат учди; самолёт эса ўз аэродромидан учрашув жойигача $\frac{1\frac{1}{3}(x+100)}{x}$ соат учди. Қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{3x}{x+100} = \frac{\frac{4}{3}(x+100)}{x}, \text{ яъни } \left(\frac{x}{x+100}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Демак, $\frac{x}{x+100} = \pm\frac{2}{3}$, бундан $x = 200$; иккинчи илдиз ярамайди.

Жавоб. Аэродромлар орасидаги масофа 500 *км*; дирижаблнинг тезлиги 100 *км/соат*; самолётнинг тезлиги 150 *км/соат*.

446. Биринчи усул. Бундан олдинги масала сингари ечиш мумкин. Ушбу

$$\left(\frac{x}{x-a}\right)^2=\frac{n}{m}, \text{ яъни } \frac{x}{x-a}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан

$$x=\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}.$$

Сўнгра тезликларни топамиз:

$$v_1=\frac{x-a}{m} \text{ ва } v_2=\frac{x}{n}.$$

Иккинчи усул. Учрашиш нуқтасини C билан белгилаймиз. Биринчи пиёда CB масофани m соатда ўтгани учун $CB=v_1m$ *км.* Шунга ўхшаш $CA=v_2n$ *км.* Шартга кўра $CA-CB=a$. Ушбу $nv_2-mv_1=a$ тенгламани ҳосил қиламиз. AC участкани ўтиш учун биринчи пиёда $\frac{AC}{v_1}$ соат вақт сарф қилди; демак, йўлга чиққандан то учрашгунча $\frac{v_2n}{v_1}$ соат ўтди. Шунга ўхшаш иккинчи пиёда йўлга чиққан пайтдан то учрашгунча $\frac{v_1m}{v_2}$ соат ўтди. Иккала пиёда бир вақтда йўлга чиққани учун $n\frac{v_2}{v_1}=m\frac{v_1}{v_2}$. Охирги тенгламадан $v_1:v_2=\sqrt{n}:\sqrt{m}$ ни топамиз. Бу тенгламани биринчи тенглама билан бирга ечамиз. Симметрия учун ёрдамчи номаълум $t=\frac{v_1}{\sqrt{n}}=\frac{v_2}{\sqrt{m}}$ ни киритиш фойдали. $v_1=\sqrt{n}\,t$; $v_2=\sqrt{m}\,t$ ифодаларни биринчи тенгламага қўйиб, $(n\sqrt{m}-m\sqrt{n})\,t=a$ ни ҳосил қиламиз, бундан $t=\frac{a}{n\sqrt{m}-m\sqrt{n}}$; энди v_1, v_2 ни топамиз:

$$v_1=\frac{a\sqrt{n}}{n\sqrt{m}-m\sqrt{n}}, \quad v_2=\frac{a\sqrt{m}}{n\sqrt{m}-m\sqrt{n}}.$$

Изоҳ. $n\sqrt{m}>m\sqrt{n}$ бўлган ҳолдагина масаланинг ечими бор; бу тенгсизликнинг иккала томонини $\sqrt{m}\sqrt{n}$ мусбат сонга бўлиб, $\sqrt{n}>\sqrt{m}$, яъни $n>m$ ни ҳосил қиламиз. Бу шартни бевосита масаланинг шартидан ҳосил қилиш ҳам мумкин: учрашгунча биринчи пиёда иккинчи пиёдадан ортиқ масофани ўтгани учун, унинг тезлиги иккинчининг тезлигидан ортиқ бўлади. Иккинчи томондан биринчи пиёдага йўлнинг охирига етишга иккинчига қараганда кам йўл қолди. Демак, биринчи пиёда B га иккинчи пиёда A га боришидан олдинроқ боради.

Жавоб. Биринчи пиёданинг тезлиги $\frac{a\sqrt{n}}{n\sqrt{m}-m\sqrt{n}}$ *км/соат*, иккинчи пиёданинг тезлиги $\frac{a\sqrt{m}}{n\sqrt{m}-m\sqrt{n}}$ *км/соат.*

447. Биринчи жисм 1 секундда x градус, иккинчи жисм y градус юрган бўлсин. Биринчи шартдан $\frac{360}{y}-\frac{360}{x}=5$ ни топамиз. Ҳар бир секундда жисмлар орасидаги масофа (ёй бўйича) $(x-y)$ градус ортади. Бир учрашишдан иккинчи учрашишгача ўтган вақт ичида (яъни 100 секундда) масофа 360° ортиши керак. Шунинг учун $100(x-y)=360$. Ҳосил қилинган системанинг иккита ечими бор ($x_1=18$, $y_1=14{,}4$; $x_2=-14{,}4$, $y_2=-18$). Иккаласи ярайди, лекин уларнинг физик маъноси бир хил (фақат жисмларнинг номерлари ва ҳаракат йўналишлари ўзгаради).

Жавоб. 18°; 14°24′.

448. Бир жисмнинг тезлигини (*м/мин* билан ифодаланган) x билан, иккинчи жисмнинг тезлигини y билан белгилаймиз. $x>y$ деб фараз қиламиз. Жисмлар бир томонга қараб ҳаракат қилсин ва бирор A нуқтада учрашадиган бўлсин. Бундан кейинги учрашиш B нуқтада бўлсин (B нуқта A нуқта билан устма-уст тушмайди деб олдиндан айтиб бўлмайди; масалан, биринчи жисмнинг тезлиги иккинчисининг тезлигидан икки марта ортиқ бўлса, бундай ҳол юз беради; бу ҳолда бундан кейинги учрашишгача биринчи жисм тўла икки марта айланади, иккинчи жисм бир марта айланади).

A дан B га бориш йўлида (бу йўлни бир жисм ёки иккала жисм маълум вақт ичида бир неча марта ўтиши мумкин) иккинчи жисм биринчи жисмдан кейинда қола боради ва иккинчи учрашиш пайтида кейинда қолиш тўла айлана узунлигини ташкил қилади. Жисмларнинг иккита энг яқин бирлашиши орасида 56 минут ўтади. Шу вақт ичида биринчи жисм $56x$ *м*, иккинчи жисм $56y$ *м* юради, демак, айлананинг узунлиги $56x-56y$ га тенг.

Энди жисмлар қарама-қарши йўналишда ҳаракат қиладиган бўлсин. У вақтда энг яқин икки учрашиш орасида ўтган вақтда, яъни 8 минутда улар ўтган йўлларнинг йиғиндиси бир айлана узунлигига тенг бўлади. Демак, айлананинг узунлиги $8x+8y$ га тенг. $56x-56y=8x+8y$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Масаланинг сўнгги шартида 24 секундда жисмлар орасидаги масофа $40-26=14$ (*м*) қисқарди дейилган. Бу 24 секундда жисмлар учрашмади; шунинг учун масофанинг камайиши жисмларнинг 24 секундда $\left(\frac{2}{5}\right.$ минутда$\left.\right)$ ўтган йўлларининг йиғиндисига тенг. Бундан иккинчи тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 14.$$

Жавоб. 20 *м/мин;* 15 *м/мин;* 280 *м.*

449. x ва y нуқталарнинг тезликларини тегишли бирликларда ифодаловчи мусбат сонлар бўлсин (агар c — айлананинг метр билан ифодаланган узунлиги бўлса, тезлик бирлиги 1 *м/сек* бўлади ва ҳоказо; масалада узунлик қандай бирлик билан ўлчаниши айтилмаган). $x > y$ деб фараз қилайлик, у ҳолда қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$tx - ty = c; \quad \frac{c}{y} - \frac{c}{x} = n$$

(биринчи тенгламанинг чиқарилишини бундан олдинги масаладан қаранг). Ўрнига қўйиш билан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$nty^2 + ncy - c^2 = 0.$$

Унинг мусбат илдизи $y = \frac{c(\sqrt{n^2 + 4nt} - n)}{2nt}$ (иккинчи илдиз манфий).

Жавоб. Катта тезлик сон жиҳатдан $\frac{c(\sqrt{n^2 + 4nt} + n)}{2nt}$ га, кичик тезлик $\frac{c(\sqrt{n^2 + 4nt} - n)}{2nt}$ га тенг.

450. Пароходнинг турғун сувдаги тезлиги x *км/соат* бўлсин $\frac{80}{x+4} + \frac{80}{x-4} = 8\frac{1}{3}$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. 20 *км/соат.*

451. *Жавоб.* 9 *км/соат.*

452. Сув оқимининг тезлиги x *км/соат*, қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги y *км/соат* бўлсин. Биринчи шартдан $\frac{20}{y+x} + \frac{20}{y-x} = 10$, иккинчи шартдан $\frac{2}{y-x} = \frac{3}{y+x}$ тенглама келиб чиқади. Бу системани ечиш учун

$$\frac{1}{y+x} = u; \quad \frac{1}{y-x} = v$$

деб олиш қулай. $20u + 20v = 10$; $2v - 3u$ системани ечсак, $u = \frac{1}{5}$; $v = \frac{3}{10}$, яъни $y + x = 5$; $y - x = \frac{10}{3}$. Бундан $x = \frac{5}{6}$.

Жавоб. $\frac{5}{6}$ *км/соат.*

453. Сол Киевдан Днепропетровсккача бўлган a *км* масофага x суткада сузиб борган бўлсин. У ҳолда унинг тезлиги Днепр оқимининг тезлигига тенг бўлиб, суткасига $\frac{a}{x}$ *км* бўлади. Масаланинг шартига кўра оқим томонга бораётган пароходнинг тезлиги суткасига $\frac{a}{2}$ *км* бўлади. Демак, пароходнинг турғун сувдаги тезлиги суткасига $\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{x}\right)$ *км* бўлади. Пароходнинг оқимга қарши тезлиги суткасига $\frac{a}{3}$ *км* бўлгани учун, унинг турғун сувдаги тезлиги суткасига $\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{x}\right)$ *км* га тенг. Ушбу

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{x} = \frac{a}{3} + \frac{a}{x}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. 12 сутка.

454. M_1 жисмнинг тезлиги секундига x *км*, M_2 жисмнинг тезлиги секундига y *км* бўлсин. Биринчи учрашиш пайтигача M_1 жисм 21 секунд, M_2 жисм эса 21 секунд — 15 секунд = 6 секунд йўлда бўлди. Ушбу

$$21x + 6y = 60$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Иккинчи учрашиш пайтигача M_1 жисм 45 секунд, M_2 жисм эса 45 *сек* — 15 *сек* = 30 секунд йўлда бўлди. C — иккинчи учрашиш нуқтаси бўлсин; у ҳолда M_1 жисм иккинчи учрашиш пайтигача $AB + BC$ масофани ўтишга улгурди; M_2 жисм эса $BA + AC$ масофани ўтди. Бу масофаларнинг йиғиндиси $3 \cdot AB$, яъни 180 *м.* Иккинчи тенглама

$$45x + 30y = 180.$$

Жавоб. M_1 жисмнинг тезлиги 2 *м/сек.* M_2 жисмнинг тезлиги 3 *м/сек.*

455. Чопарнинг баландлашиб борадиган йўлдаги тезлиги x *км/соат*, текисликдаги тезлиги y *км/соат* ва нишаблашиб борадиган йўлдаги тезлиги z *км/соат* бўлсин. Чопар ярим йўлдан орқага қайтиб, $14 : 2 = 7$ *км* йўл юрди; 3 *км* баландлашиб борди; 4 *км* текисликда юрди, сўнгра (қайтишда) яна 4 *км* текис йўлда ва, ниҳоят, 3 *км* нишаб йўлда юрди. Масаланинг шартига кўра,

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{3}{5}, \text{ яъни } \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{3}{5}.$$

Бошқа икки шартдан

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = 3\frac{9}{20}; \quad \frac{6}{x} + \frac{5}{y} + \frac{3}{z} = 3\frac{17}{20}$$

келиб чиқади. Олдин $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ ни, сўнгра x, y, z ни топамиз.

Жавоб. Юқорилашиб борадиган йўлда 3 *км/соат*, текис йўлда 4 *км/соат*, нишаб йўлда 5 *км/соат.*

456. Кунлик норма x бет, муддати y кун бўлсин. У ҳолда шартга кўра

$$(x+2)(y-3)=xy \text{ ва } (x+4)(y-5)=xy.$$

Жавоб. 120 бет, 15 кун.

457. Ишчи y кунда x деталь тайёрлаган бўлсин. У ҳолда ҳар куни $\frac{x}{y}$ деталь тайёрланган бўлади. Масаланинг шартига кўра ҳар куни $\frac{x}{y}+10$ деталь тайёрласа, ишни $y-4\frac{1}{2}$ кунда тамомлар эди. Демак, $\left(\frac{x}{y}+10\right)\left(y-4\frac{1}{2}\right)=x$. Иккинчи шарт $\left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3)=x$ тенгламани беради. Қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 10y-4\frac{1}{2}\frac{x}{y}=45, \\ -5y+3\frac{x}{y}=15. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, биринчи билан қўшамиз; $\frac{x}{y}=50$ ҳосил қиламиз. Бу қийматни иккинчи тенгламага қўйиб, $y=27$ ни топамиз. Демак, $x=50y=1350$.

Изоҳ. Агар номаълум x ўрнига z миқдор — бир кунда тайёрланадиган деталлар сонини қўйсак, масалани бундан олдинги масаладек ечиш мумкин. Унда яна ўша система ҳосил бўлиб, унда $\frac{x}{y}$ миқдор z билан алмашинган бўлади.

Жавоб. Ишчи 27 кунда 1350 деталь тайёрлаган.

458. Машинистканинг бир кунлик нормаси x бет, ишни тамомлаш муддати y кун бўлсин; у ҳолда иш xy бет бўлади. Масаланинг шартига кўра машинистка кунига $x+2$ бетдан босиб, ҳамма ишни $y-2$ кунда босади. Бундан ёзиладиган иш $(x+2)(y-2)$ бет экани чиқади. Демак,

$$(x+2)(y-2)=xy.$$

Иккинчи тенгламани ҳам худди шундай ҳосил қиламиз:

$$(x+0{,}60x)(y-4)=xy+8.$$

Жавоб. Бир кунлик норма 10 бет; ҳамма ишни тамомлаш муддати 12 кун.

459. Биринчи ишчи ишни x соатда тамомлайди дейлик. У ҳолда $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}=\frac{1}{8}$ тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. Биринчи ишчи бутун ишни 12 кунда, иккинчи ишчи 24 кунда тамомлай олади.

460. Агар биринчи труба ҳовузни x соатда тўлдирса, иккинчиси $(x+5)$ соатда тўлдиради. Масаланинг шартидан

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$$

тенглама келиб чиқади.

Жавоб. Биринчи труба ҳовузни 10 соатда, иккинчиси 15 соатда тўлдиради.

461. Биринчи ишчи ёлғиз ўзи ишни x соатда, иккинчи ишчи y соатда тамомлай олади. У ҳолда биринчи ишчи бир соатда ишнинг $\frac{1}{x}$ қисмини, иккинчиси $\frac{1}{y}$ қисмини тамомлайди. Масаланинг шартига кўра $7\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=\frac{5}{9}$. Шундан кейин улар 4 соат бирга ишлаб, бутун ишнинг $\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}\right)$ қисмини тамомлашди, бу бутун ишнинг $1-\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{18}\right)=\frac{7}{18}$ қисми бўлади. Иккинчи тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{18}.$$

Уни биринчи тенгламадан айириб, $\frac{3}{x}=\frac{3}{18}$ ни ҳосил қиламиз, бундан $x=18$. Сўнгра $\frac{1}{y}=\frac{1}{24}$ ва $y=24$ ни топамиз.

Жавоб. Биринчи ишчи бутун ишни 18 соатда, иккинчи ишчи 24 соатда тамомлай олади.

462. Изланган сонларни x ва y билан белгилаймиз, тўртта кучли кран $2+3=5$ соат ишлади; иккита кучсиз кран 3 соат ишлади. Шунинг учун (бундан олдинги масаланинг ечимига қаранг):

$$4\cdot5\cdot\frac{1}{x}+2\cdot3\cdot\frac{1}{y}=1.$$

Иккинчи шартдан

$$4\cdot4{,}5\cdot\frac{1}{x}+2\cdot4{,}5\cdot\frac{1}{y}=1.$$

Жавоб. 24 соатда; 36 соатда.

463. Уч тонналн машина юкни x соатда, беш тонналн машина y соатда таший олсин. Масаланинг шартига кўра (461—462-масалаларнинг ечилишига қаранг):

$$30\cdot 8\cdot \frac{1}{x}+9\cdot 6\cdot \frac{1}{y}=1 \text{ ва } 9\cdot 8\cdot \frac{1}{y}+30\cdot 6\cdot \frac{1}{x}=\frac{13}{15}.$$

Жавоб. $x=300$; $y=270$; 30 та беш тонналн машина бутун юкни $270:30=9$ соатда ташийди.

464. Биринчи машинисткага қўл ёзмани ёзиб битириши учун x соат, иккинчи машинисткага y соат керак бўлади. Биринчи машинистка 3 соат, иккинчиси 2 соат ишлаб, бутун ишнинг $1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$ қисмини тамомлади. $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20}$ тенгламани ҳосил қиламиз. Иш тамом бўлгунча машинисткалар баравар ишлашди, яъни ҳар бир машинистка ишнинг ярмини бажарди. Демак, биринчи машинистка $\frac{x}{2}$ соат, иккинчиси $\frac{y}{2}$ соат вақт сарф қилди. Биринчи машинистка иккинчисидан бир соат ортиқ ишлагани учун

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1.$$

Системанинг иккита ечими бор, лекин бири ярамайди, чунки y учун манфий қиймат беради.

Жавоб. Биринчи машинистка 10 соатда, иккинчи машинистка 8 соатда ёза олади.

465. Масала бундан олдингига ўхшайди.

$$\frac{2}{x}+\frac{1,5}{y}=\frac{11}{30};\quad \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=\frac{1}{2}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз, бунда x ва y поездларнинг қанча вақт юрганини билдиради (соат ҳисобида). Системанинг икки ечимидан биттаси ярайди.

Жавоб. 10 соат; 9 соат.

466. Бир минутда биринчи крандан x *л* сув келади, иккинчи крандан y *л* сув оқиб чиқади. Масаланинг шартига кўра $2\cdot 9\cdot 2,5=$ $=45$ *л* сиғадиган тўла ванна иккала кран очиқ турганда 1 соатда бўшайди. Демак, 1 минутда сувнинг миқдори $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$ *л* камаяди. Демак, $y-x=\frac{3}{4}$. Иккинчи томондан биринчи краннинг ёлғиз ўзи ваннани $\frac{45}{x}$ минутда тўлдиради, иккинчи краннинг ёлғиз ўзи ваннани $\frac{45}{y}$ минутда бўшатади. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{45}{x}-\frac{45}{y}=5.$$

Ушбу

$$\begin{cases} y - x = \frac{3}{4}, \\ \frac{45}{x} - \frac{45}{y} = 5 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг иккита ечими бор $\left(x_1 = 2\frac{1}{4};\ y_1 = 3\right.$ ва $\left.x_2 = -3;\ y_2 = -2\frac{1}{4}\right)$. Иккинчи ечим ярамайди (x ва y мусбат сон бўлиши керак).

Жавоб. $2\frac{1}{4}$ *л/мин*; 3 *л/мин.*

467. Ишни тамомлаш муддати x кун бўлсин; у вақтда суткалик план $\frac{8000}{x}$ кубометр бўлади. Бригада $x - 8$ кун ишлади; демак, ҳар куни $\frac{8000}{x-8}$ кубометр тупроқ чиқарилган. Масаланинг шартига кўра $\frac{8000}{x-8} - \frac{8000}{x} = 50$. Бу тенгламанинг икки илдизидан ($x_1 = 40$ ва $x_2 = -32$) фақат мусбати $x = 40$ ярайди. Демак, суткалик план $\frac{8000}{x} = 200$ кубометр бўлади; ошириб адо этилган 50 $м^3$ планнинг

$$\frac{50 \cdot 100}{200} = 25\%$$

ини ташкил қилади.

Жавоб. Ишни тамомлаш муддати 40 кун; планни ошириб адо этиш проценти 25.

468. Биринчи бригада кунига x *км* йўлни ремонт қилган бўлсин; у ҳолда иккинчи бригада кунига $(4,5 - x)$ *км* йўлни ремонт қилган. Биринчи бригада $\frac{10}{x}$ кун ишлаган, иккинчи бригада $\frac{10}{4,5 - x}$ кун ишлаган. Масаланинг шартига кўра $\frac{10}{x} - \frac{10}{4,5 - x} = 1$. Тенгламанинг илдизлари $x_1 = 2$ ва $x_2 = 22,5$. Иккинчи илдиз ярамайди, чунки масаланинг маъносига кўра $4,5 - x$ сони мусбат бўлиши керак.

Жавоб. Биринчи бригада кунига 2 *км*, иккинчи бригада 2,5 *км* йўлни ремонт қилган.

469. Биринчи ишчи бутун ишни x соатда, иккинчи ишчи y соатда тамомлай олсин. Демак, ишнинг ярмини биринчи ишчи $\frac{x}{2}$ соатда, қолган ярмини иккинчи ишчи $\frac{y}{2}$ соатда тамомлайд . Масаланинг шартига кўра $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25$. Иккинчи шарт (461-масалага қаранг) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ тенгламани беради.

Жавоб. Ишчилардан бири (ё биринчи ишчи, ёки иккинчи ишчи) ишни 20 соатда, иккинчиси 30 соатда тамомлайди.

470. Бир трактор далани x кунда, иккинчи трактор y кунда ҳайдайди, деб фараз қиламиз. Қуйидаги системани (бундан олдинги масалага қаранг) ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{t};\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=k.$$

Бу системани $x+y=2k$; $xy=2kt$ система билан алмаштириш мумкин.

Жавоб. Тракторлардан бири $(k+\sqrt{k^2-2kt})$ кунда; иккинчиси $\left(k-\sqrt{k^2-2kt}\right)$ кунда ҳайдай олади, масалани $\frac{k}{2}>t$ бўлганда ечиб бўлади.

471. Учала машина бирга ишлаб, ишни x кунда битира олади. У ҳолда биринчи машинанинг ёлғиз ўзи ишни $(x+10)$ кунда, иккинчи машина ёлғиз ўзи $(x+20)$ кунда ва учинчиси ёлғиз ўзи $6x$ кунда битиради. Биринчи машина бир кунда ишнинг $\frac{1}{x+10}$ қисмини, иккинчи машина $\frac{1}{x+20}$ қисмини, учинчи машина $\frac{1}{6x}$ қисмини бажаради, учаласи бирга ишнинг $\frac{1}{x}$ қисмини битиради. Ушбу

$$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+20}+\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$$

тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. Бутун ишни биринчи машина 20 кунда, иккинчиси 30 кунда ва учинчиси 60 кунда битира олади.

472. Агар иккинчи ишчи бутун ишни x кунда тамомласа, биринчи ишчи $(x+3)$ кунда тамомлайди. Биринчи ишчи 7 кун ишлаб, бутун ишнинг $\frac{7}{x+3}$ қисмини тамомлайди, иккинчи ишчи $7-1\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$ кун ишлаб, бутун ишнинг $\frac{5\frac{1}{2}}{x}$ қисмини тамомлайди.

$$\frac{7}{x+3}+\frac{5\frac{1}{2}}{x}=1$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. Биринчи ишчи бутун ишни 14 кунда, иккинчи ишчи 11 кунда тамомлайди.

473. Биринчи трактор билан бутун далани x кунда, иккинчи трактор билан y кунда ҳайдаш мумкин бўлсин. Биринчи шартдан

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Даланинг ярмини биринчи трактор $\frac{x}{2}$ кунда ҳайдай олади, қолган ярмини иккала трактор 4 кунда ҳайдаб тамомлайди (бутун далани улар 8 кунда ҳайдаган). Иккинчи тенгламани ҳосил қиламиз: $\frac{x}{2} + 4 = 10$, бундан $x = 12$ (кун). Биринчи тенгламадан $y = 24$ (кун) ни топамиз.

Жавоб. Биринчи трактор билан далани 12 кунда, иккинчи трактор билан 24 кунда ҳайдаш мумкин.

474. Ишчилар тенг вақт оралатиб ишга тушгани ва бунинг натижасида биринчи ишчи охирги ишчидан 5 ҳисса ортиқ вақт ишлагани учун ишчилар сони 5 га тенг. Агар охирги ишчи x соат ишлаган бўлса, умумий киши-соатлар сони $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 15x$ бўлади. Масаланинг шартига кўра беш ишчи бирга ишласа, бутун ишни 6 соатда тугатар эди. Демак, $15x = 5 \cdot 6$, бундан $x = 2$. Биринчи ишчи қанча вақт ишлаган бўлса, зовур қазиш иши шунча вақт, яъни $5x$ соат давом этган.

Жавоб. Иш 10 соат давом этган.

475. Биринчи ишчи ишни x соатда тамомлай олсин. У вақтда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{t}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = \frac{1}{4}\left(5t - 2 + \sqrt{25t^2 + 4t + 4}\right)$.

476. Биринчи кран ҳовузни x соатда, иккинчи кран y соатда тўлдиради дейлик. У вақтда биринчи кран бир соатда ҳовузнинг $\frac{1}{x}$ қисмини тўлдиради, масаланинг шартига кўра биринчи кран $\left(\frac{1}{3}\ y\right)$ соат очиқ турди, демак, биринчи крандан келган сув ҳовузнинг $\frac{\frac{1}{3}y}{x}$ қисмини тўлдирди. Иккинчи кран ҳовузнинг $\frac{\frac{1}{3}x}{y}$ қисмини тўлдириши ҳам шу йўл билан топилади. Шундан кейин ҳовузнинг $\frac{13}{18}$ қисми тўлгани учун

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{y}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{y} = \frac{13}{18}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Иккинчи шартдан

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}$$

тенглама келиб чиқади. Бу системани қуйидагича ечиш мумкин. Агар $\frac{y}{x}=z$ деб фараз қилсак, биринчи тенглама

$$\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}=\frac{13}{18}$$

кўринишни олади. Бундан $z_1=\frac{3}{2}$; $z_2=\frac{2}{3}$. Иккинчи тенгламани

$$\frac{y}{x}+1=\frac{5}{18}y$$

кўринишга келтирамиз. Бунга $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$ ни қўйиб, $y=9$ ни топамиз, демак, $x=\frac{2}{3}y=6$.

$\frac{y}{x}+1=\frac{5}{18}y$ тенгламада $\frac{y}{x}$ ўрнига $\frac{2}{3}$ ни қўйиб, $y=6$ ва $x=$ $=9$ ни топамиз.

Жавоб. Кранлардан бири ҳовузни 6 соатда, иккинчиси 9 соатда тўлдиради.

477. Ғишт териш нормаси кунига x минг дона бўлиб, ҳақиқатда кунига y минг дона ғишт терилган бўлса, у вақтда

$$\begin{cases}\frac{120}{x}-\frac{120}{y}=4,\\ 3y-4x=5\end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Жавоб. Кунлик ғишт териш нормаси 10 минг дона, ҳақиқатда эса кунига 15 минг дона ғишт терилган.

478. Қуйидаги жадвалнинг учта устунида кетма-кет учта идишдаги (I; II; III) сувнинг миқдори (литр билан) берилган:

I	x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{1}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z\right]+\frac{2}{3}x$
II	y	$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)$	$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)$
III	z	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z$	$\frac{9}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+y\right)+z\right]$

Охирги устунда турган ифодаларнинг ҳар бири шартга кўра 9 га тенг.

Иккинчи ечилиши[1]). Олдин идишдан идишга *биринчи қуйишдан* кейин II идишда бўлган сувнинг миқдори u ни топамиз. Масаланинг шартига кўра иккинчи қуйиш бу миқдорни $\frac{1}{4}u$ қадар камайтирди, шундан кейин II идишда 9 *л* сув қолди. Демак, $\frac{3}{4}u = 9$, яъни $u = 12$. Энди III идишдаги *дастлабки* сув миқдори z ни топамиз. Биринчи қуйишда ундаги сув миқдори ўзгармай қолди; иккинчи қуйишда $\frac{1}{4}u = 3$ *л* ортди, яъни III идишдаги сув $(z+3)$ *л* бўлди. Учинчи қуйишда бу миқдор $\frac{1}{10}(z+3)$ қадар камайди. Демак, $\frac{9}{10}(z+3) = 9$, яъни $z = 7$. Сўнгра I идишдаги дастлабки сув миқдори x ни топамиз. Биринчи қуйишдан кейин I идишда $\frac{2}{3}x$ литр сув қолди, иккинчи қуйишдан кейин бу миқдор ўзгармади; учинчи қуйишдан кейин у $\frac{1}{10}(z+3) = 1$ қадар ортди. Демак, $\frac{2}{3}x + 1 = 9$, яъни $x = 12$. Ниҳоят, II идишдаги дастлабки сув миқдори y ни топамиз. Биринчи қуйишдан кейин ундаги сув $\frac{1}{3}x = 4$ қадар ортди, натижада (юқорида топилгани каби) 12 *л* га тенг бўлди. Демак, $y = 12 - 4 = 8$.

Жавоб. 12 *л*; 8 *л*; 7 *л*.

479. Агар биринчи сафар x *л* спирт қуйиб олинган бўлса, $(64 - x)$ *л* спирт қолди; иккинчи сафар $\frac{64-x}{64}x$ *л* соф спирт қуйиб олинди.

$$64 - x - \frac{64-x}{64}x = \frac{1}{64}(64-x)^2 \text{ л}$$

соф спирт қолди.

$$\frac{1}{64}(64-x)^2 = 49$$

тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. Биринчи сафар 8 *л*, иккинчи сафар 7 *л* спирт қуйиб олинган.

480. Иккинчи идишдан x *л* спирт олиб, уни сув билан тўлдирганда иккинчи идишдаги ҳар бир литр аралашмада $\frac{x}{20}$ *л* спирт

---

[1]) Бу ечилишни К. А Гетажеев ёзиб юборган (КБ АССР, ст. ЛЕСКЕН, Лескен райони).

бўлади. Ундан яна биринчи идишга x л аралашма қуйилади; бунда $\frac{x}{20}x = \frac{x^2}{20}$ л спирт бўлади. Шундан кейин биринчи идишдаги спирт миқдори $\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$ л бўлади. Энди биринчи идишдан иккинчига $6\frac{2}{3}$ л аралашма қуйилади, яъни $\frac{6^2/_3}{20}$ л ҳамма аралашма миқдорининг $\frac{1}{3}$ қисмини ташкил қилади. Шу билан бирга, спирт миқдори ҳам $\frac{1}{3}$ қадар камаяди, яъни биринчи идишда $\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$ л спирт қолади. Иккала идишдаги спирт миқдори доимо 20 л га тенг бўлиб, масаланинг шартига кўра энди иккала идишда бир хил миқдорда (яъни 10 л дан) спирт бўлгани учун

$$\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right) = 10.$$

Жавоб. 10 л.

481. Идишдан x л ҳаво чиқарилган ва шунча миқдорда азот киритилган бўлсин. Қолган $(8 - x)$ л ҳавода $(8 - x)$ 0,16 л кислород бўлади. Бу миқдор 8 л аралашмага тўғри келади, шунинг учун 1 л аралашмага $\frac{(8-x)\,0,16}{8}$ л кислород тўғри келади. Демак, иккинчи марта x л аралашмани x л азот билан алмаштиргандан кейин $(8 - x)$ л аралашмада $\frac{(8-x)\,0,16}{8} \cdot (8 - x) = (8 - x)^2 \cdot 0,02$ л кислород қолади. Демак, аралашманинг умумий миқдорига (8 л га) нисбатан кислород миқдори $\frac{(8-x)^2 0,02}{8} \cdot 100 = \frac{(8-x)^2}{4}$ бўлади. Масаланинг шартига кўра $\frac{(8-x)^2}{4} = 9$. Иккита илдиз ($x_1 = 2$, $x_2 = 14$) дан фақат биринчиси ярайди, чунки 8 л дан ортиқ ҳаво чиқариб юбориш мумкин эмас.

Жавоб. 2 л.

482. Биринчи аёлда x дона, иккинчи аёлда y дона тухум бўлсин. Биринчи аёл y дона тухум сотган бўлса, масаланинг шартига кўра унга 7,2 сўм пул тушар эди. Демак, бу аёл тухумнинг бир донасини $\frac{7,2}{y}$ сўмдан сотган ва $\frac{7,2}{y}x$ сўм тўплаган бўлар эди. Худди шу йўл билан иккинчи аёлга $\frac{3,2}{x}y$ сўм пул тушганини топамиз. Икки тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{3,2}{x}y = \frac{7,2}{y}x; \quad x + v = 100.$$

Биринчи тенгламадан $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{7,2}{3,2}$, бундан $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ чиқади $\left(\frac{y}{x} = -\frac{3}{2}\right.$ манфий қиймат ярамайди$\left.)\right)$.

Жавоб. Биринчи аёлда 40 дона, иккинчи аёлда 60 дона тухум бўлган.

483. Бундан олдинги масаладаги белгилашларда

$$m\frac{x}{y} = n\frac{v}{x};\ x + y = a$$

системани ҳосил қиламиз. Биринчи тенгламадан $x : y = \sqrt{n} : \sqrt{m}$ ни топамиз. Сўнгра a ни $\sqrt{n}$ ва $\sqrt{m}$ га пропорционал қисмларга бўламиз.

Жавоб. Биринчи аёлда $\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ *л*, иккинчи аёлда $\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ *л* сут бўлган.

484. Биринчи двигатель 1 соатда x *г*, иккинчиси y *г* бензин сарф қилсин; у ҳолда 600 *г* бензинни биринчи двигатель $\frac{600}{x}$ соатда, 384 *г* бензинни иккинчи двигатель $\frac{384}{y}$ соатда сарф қилади. Шартга кўра $\frac{600}{x} - \frac{384}{y} = 2$. Агар биринчи двигатель 1 соатда y *г* бензин сарф қилса, $\frac{600}{x}$ соатда $\frac{600}{x}\cdot y$ *г* бензин сарф қилар эди, агар иккинчи двигатель 1 соатда x *г* бензин сарф қилса, $\frac{384}{y}$ соатда $\frac{384}{y}\cdot x$ *г* бензин сарф қилар эди. Масаланинг шартига кўра $\frac{600y}{x} = \frac{384x}{y}$.

Жавоб. Биринчи двигатель соатига 60 *г*, иккинчиси соатига 48 *г* бензин сарф қилади.

485. Биринчи қотишмадан x *кг* олиш керак, деб фараз қиламиз. У ҳолда x *кг* да $\frac{2}{5}x$ *кг* олтин бўлади, $(8 - x)$ *кг* иккинчи қотишмада эса $\frac{3}{10}(8 - x)$ *кг* олтин бўлади. Масаланинг шартига кўра 8 *кг* янги қотишмада $\frac{5}{16}\cdot 8$ *кг* $= 2,5$ *кг* олтин бўлиши керак. Демак,

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = 2,5.$$

Бундан $x = 1$ (*кг*) ва $8 - x = 7$ (*кг*).

Жавоб. Биринчи қотишмадан 1 *кг*, иккинчи қотишмадан 7 *кг* олиш керак.

486. Бундан олдинги масаланинг ечилишига қаранг.

Жавоб. Биринчи бочкадан 9 челак ва иккинчи бочкадан 3 челак спирт аралашмаси олиш керак.

487. Учинчи қотишмада биринчи қотишманинг x қисми ва иккинчи қотишманинг y қисми бўлсин, яъни биринчи қотишманинг x килограмига иккинчи қотишманинг y килограми тўғри келсин. У ҳолда $(x+y)$ килограмм учинчи қотишмада биринчи металлдан $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$ *кг* ва иккинчи металлдан $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)$ *кг* бўлади. Масаланинг шартига кўра

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)=17:27.$$

Бўлинувчи билан бўлувчини умумий (15) махражга келтириб ва уларни y га бўлиб,

$$\left(5\frac{x}{y}+6\right):\left(10\cdot\frac{x}{y}+9\right)=17:27$$

тенгламани топамиз, бундан $\frac{x}{y}=\frac{9}{35}$.

Жавоб. Биринчи қотишманинг 9 қисмига иккинчи қотишмадан 35 қисм олиш керак.

488. Катта ғилдирак бир минутда x марта, кичик ғилдирак y марта айлансин ва $y>x$ бўлсин.

$$y-x=400;\quad \frac{5}{x}-\frac{5}{y}=\frac{1}{60}$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Иккинчи тенгламани $xy=300(y-x)$ яъни $xy=120\,000$ кўринишига келтириш мумкин.

Жавоб. Катта ғилдирак минутига 200 марта, кичик ғилдирак 600 марта айланади.

489. Олдинги ғилдиракнинг айланаси x *дм*, кейинги ғилдиракнинг айланаси y *дм* бўлсин. Икки тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{y}=10$$

ва

$$\frac{180}{x+6}-\frac{180}{y-6}=4.$$

Биринчи тенгламани $18(y-x)=xy$ шаклга, иккинчи тенгламани $39(y-x)=xy+504$ шаклга келтириш мумкин. Бу икки тенгламадан $y-x=24$; $xy=432$.

Жавоб. Олдинги ғилдиракнинг айланаси 12 *дм*, кейинги ғилдиракнинг айланаси 36 *дм*.

490. Биринчи ва учинчи куни $600 \cdot \frac{2}{3} = 400$ *т* юк туширилган; иккинчи куни 600 *т* — 400 *т* $= 200$ *т* юк туширилган. Биринчи куни x *т* туширилган бўлсин; у вақтда учинчи куни $(400 - x)$ *т* туширилган бўлади. Иккинчи куни туширилган юк биринчи кунгидан $(x - 200)$ *т* кам бўлиб, биринчи куни туширилган юкнинг $\frac{(x-200)100}{x}$% ини ташкил қилади. Учинчи куни иккинчи кунга нисбатан $200 - (400 - x) = (x - 200)$ *т* кам юк туширилган, бу иккинчи куни туширилган юкнинг $\frac{(x-200)100}{200}$% ёки $\frac{x-200}{2}$% ини ташкил этади. Масаланинг шартига кўра

$$\frac{x-200}{2} - \frac{(x-200)100}{x} = 5.$$

Иккита илдиз топамиз: $x_1 = 250$, $x_2 = 160$. Иккинчи илдиз ярамайди, чунки шартга кўра юк тушириш ҳар куни камая боради; ҳолбуки $x = 160$ бўлганда юк тушириш биринчи куни 160 *т*, иккинчи куни 200 *т*, учинчи куни 240 *т* бўлар эди.

Жавоб. Биринчи куни 250 *т*, иккинчи куни 200 *т*, учинчи куни 150 *т* юк туширилган.

491. Биринчи эритма x *кг* бўлсин, у ҳолда иккинчи эритма $(10 - x)$ *кг* бўлади. Биринчи эритмадаги сувсиз сульфат кислотанинг процент миқдори $\frac{0{,}8 \cdot 100}{x} = \frac{80}{x}$, иккинчи эритмада эса $\frac{0{,}6 \cdot 100}{10 - x} = \frac{60}{10 - x}$ бўлади. Шартга кўра

$$\frac{80}{x} - \frac{60}{10 - x} = 10.$$

Тенгламанинг иккита мусбат илдизи бор: $x_1 = 20$ ва $x_2 = 4$. Масаланинг шартига кўра $x < 10$ бўлгани учун, биринчи ечим ярамайди.

Жавоб. 4 *кг* ва 6 *кг*.

492. Биринчи қотишмада x% мис бўлса, иккинчи қотишмада $(x + 40)$% мис бўлади. Биринчи қотишманинг оғирлиги $\frac{6 \cdot 100}{x}$ *кг*, иккинчисининг оғирлиги $\frac{12 \cdot 100}{x + 40}$ *кг*. Ушбу $\frac{600}{x} + \frac{120}{x + 40} = 50$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. 20% ва 60%.

493. Юк поездининг тезлиги x *м/сек*, пассажир поездининг тезлиги y *м/сек* бўлсин. 28 секундда юк поезди $28x$ (*м*), пассажир поезди $28y$ (*м*) йўл юради.

$$28x + 28y = 700$$

ИККИНЧИ ҚИСМ

ГЕОМЕТРИЯ ВА ТРИГОНОМЕТРИЯ

8-БОБ

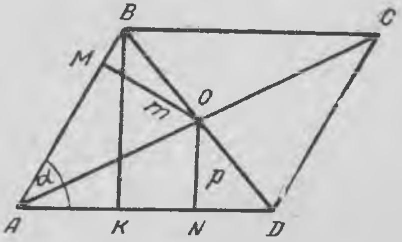
ПЛАНИМЕТРИЯ

510. a ва b—тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари, c—гипотенузаси бўлсин. Шартга кўра $a+b+c=132$ ва $a^2+b^2+c^2 = 6050$. $a^2+b^2=c^2$ бўлгани учун $2c^2=6050$, бундан $c=\sqrt{3025}=55$. Шунинг учун $a+b=77$. Бу тенгликни квадратга кўтариб ва $a^2+b^2=3025$ муносабатни эътиборга олиб $ab=1452$ ни ҳосил қиламиз. Демак, a ва b ушбу

$$x^2-77x+1452=0$$

тенгламанинг илдизларидир.

Жавоб. Учбурчакнинг катетлари 44 ва 33 га, гипотенузаси 55 га тенг.



1-чизма.

511. $ABCD$ параллелограммнинг BK баландлиги (1-чизма) $2ON=2p$ га тенг. $\angle BAK = \alpha$ бўлгани учун $AB=\frac{2p}{\sin\alpha}$, шунга ўхшаш $AD=\frac{2m}{\sin\alpha}$. Параллелограммнинг юзи:

$$S=AD\cdot BK=\frac{4mP}{\sin\alpha}.$$

Диагоналларни косинуслар теоремасига асосан топамиз.

Жавоб. $S=\frac{4mp}{\sin\alpha}$,

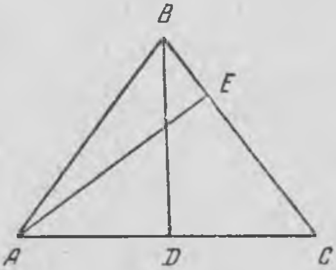
$$BD=\frac{2\sqrt{p^2+m^2-2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha},\qquad AC=\frac{2\sqrt{p^2+m^2+2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

512. Масаланинг шартига кўра $AC=30$ *см* ва $BD=20$ *см* (2-чизма). AE баландликни тўғри бурчакли BDC ва AEC учбурчакларнинг ўхшашлигидан топиш мумкин (уларда C бурчак умумий), лекин ABC учбурчак S юзининг икки ифодасини солиштириш осон. Ҳақиқатан, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ ва $S = \frac{1}{2} BC \cdot AE$. Демак, $AE = \frac{AC \cdot BD}{BC} = \frac{30 \cdot 20}{\sqrt{20^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2}} = 24$ *см.*

Жавоб. 24 *см.*

513. BDE учбурчакдан, бунда $BD = 12$ *см* ва $BE = 13$ *см*, $DE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (*см*) ни топамиз (3-чизма). Демак, $AD = AE - DE = \frac{1}{2} AC - DE = \frac{1}{2} \cdot 60 - 5 = 25$ (*см*) ва $DC = EC + DE = 35$ (*см*). Ён томонларни ADB ва DCB учбурчаклардан топамиз.

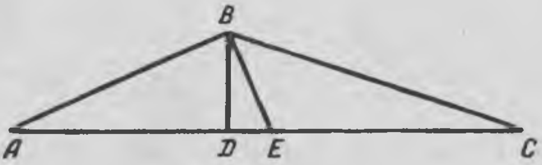
Жавоб. $AB = \sqrt{769} \approx 27{,}7$ *см*, $BC = \sqrt{1369} = 37$ *см.*



2-чизма.

514. ABC — берилган учбурчак бўлсин ($AC = CB = b$). $O_1O_2O_3$ учбурчакнинг S юзини топиш талаб қилинади (4-чизма).

$S = \frac{1}{2} O_2O_3 \cdot O_1C$, бунда $O_2O_3 = AB$ ва $O_1C = AB$. Демак, $S = \frac{1}{2} \cdot AB^2 = b^2$.



3-чизма.

Иккинчи ечилиши. O_1O_2C учбурчак O_1BC учбурчакка тенгдош (буларда O_1C умумий асос ва баландликлари тенг). O_1O_3C учбурчак O_1AC учбурчакка тенгдош (ўша сабабга кўра). Демак, $O_1O_2O_3$ учбурчак O_1BCA квадратга тенгдош.

Жавоб. $S = b^2$.

515. Масаланинг шартига кўра $AB = a$ кесма M нуқта билан $m : n$ нисбатда бўлинади (5-чизма). Шунинг учун $AM = \frac{ma}{m+n}$ ва $MB = \frac{ma}{m+n}$. Шундай қилиб,

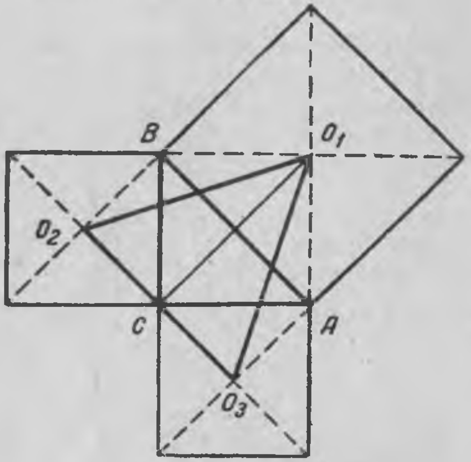
$$BN = CK = DL = \frac{ma}{m+n} \text{ ва } NC = KD = LA = \frac{na}{m+n}.$$

Демак,

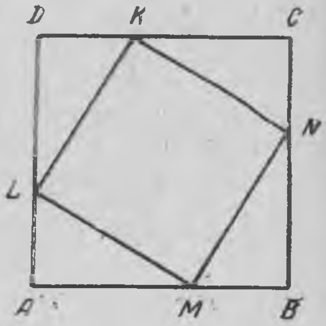
$$LM = MN = NK = KL = \sqrt{\frac{m^2a^2}{(m+n)^2} + \frac{n^2a^2}{(m+n)^2}} = \frac{a}{m+n}\sqrt{m^2+n^2}.$$

Ундан ташқари $LMNK$ тўртбурчакнинг ҳамма бурчаклари тўғри бурчак (чунки ALM ва BMN учбурчакнинг тенглигидан $\angle LMA = \angle MNB = 90° - \angle NMB$. Демак, $\angle LMA + \angle NMB = 90°$; шунинг учун $\angle LMN = 90°$). Демак, $LMNK$ тўртбурчак квадратдир.

Жавоб. $S = \frac{a^2(m^2+n^2)}{(m+n)^2}$.



4-чизма.



5-чизма.

Иккинчи ечилиши. $ABCD$ квадратнинг юзидан тўртта учбурчакнинг умумий юзини айирамиз.

516. Масаланинг шартига кўра $\angle LMA = 30°$ (5-чизма). Демак,

$$AL = \frac{1}{2}ML \quad \text{ва} \quad AM = \frac{\sqrt{3}}{2}ML.$$

Демак,

$$AB = AM + MB = AM + AL = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\,ML.$$

Демак,

$$ABCD_{\text{юзи}} : LMNK_{\text{юзи}} = AB^2 : ML^2 = (1+\sqrt{3})^2 : 4,$$

яъни

$$LMNK_{\text{юзи}} = \frac{4}{(1+\sqrt{3})^2} \cdot ABCD_{\text{юзи}}.$$

Жавоб. Нисбат мана бунга тенг:

$$\frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}=2(2-\sqrt{3})\approx 0{,}54.$$

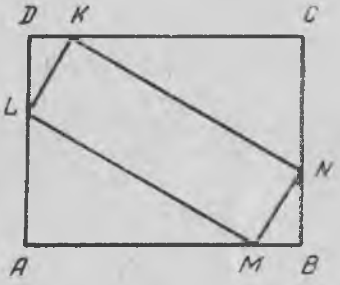
517. AM кесмани (5-чизма) x билан белгилаймиз. У ҳолда $AL = MB = a - x$. Демак,

$$KLMN_{\text{юзи}} = LM^2 = AL^2 + AM^2 = (a-x)^2 + x^2.$$

Масаланинг шартига кўра $(a-x)^2+x^2=\frac{25}{49}a^2$. Бу тенгламани ечамиз.

Жавоб. Изланган кесмалар $\frac{3a}{7}$ га ва $\frac{4a}{7}$ га тенг.

518. Дастлабки изоҳ. Ечилишдан, ички чизилган $KLMN$ тўғри тўртбурчак (6-чизма) учларининг ўрнини кандай топиш кераклиги аниқланади. Ҳозирча $KLMN$ тўғри тўртбурчакни ясашдан бошлаб схематик ясашни бажариш керак.



6-чизма.

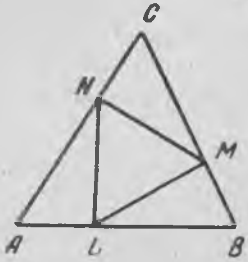
Ечиш. $MB = x$ ва $BN = y$ кесмаларни топамиз. $AB = 4$ бўлгани учун $AM = 4 - x$. DLK ва BNM учбурчаклар тенг (исбот қилинг!); демак, $DL = BN = y$ ва $LA = 3 - y$. LAM ва MNB учбурчаклар ўхшаш, чунки уларнинг ALM ва NMB ўткир бурчаклари тенг (томонлари ўзаро перпендикуляр бурчаклар бўлгани учун). Масаланинг шартига кўра ML томон MN томондан уч марта катта бўлгани учун $LA = 3MB$. Шунингдек, $AM = 3BN$, яъни $3 - y = 3x$ ва $4 - x = 3y$. Бундан $x=\frac{5}{8}$, $y=\frac{9}{8}$ ни топамиз. Энди

$$MN=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{9}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{106}}{8} \quad \text{ва}$$

$$ML=\frac{3\sqrt{106}}{8}.$$

Жавоб. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари: $\frac{\sqrt{106}}{8}\approx 1{,}29$ *м* ва $\frac{3\sqrt{106}}{8}\approx 3{,}87$ *м.*

519. Тенг томонли ABC учбурчакнинг юзи (7-чизма) $\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ га тенг. Масаланинг шартига кўра ANL учбурчакда $AL=\frac{1}{3}a$ ва $AN=\frac{2}{3}a$, унинг ABC учбурчак билан умумий бўлган A бурчаги бор. Демак, бу учбурчаклар юзларининг нисбати томонлари кўпайтмаларининг нисбатига тенг:



7-чизма.

$$\frac{S_{ANL}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{3}a\cdot\frac{2}{3}a}{a\cdot a}.$$

Шунинг учун

$$S_{ANL}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC}=\frac{2}{9}S_{ABC}.$$

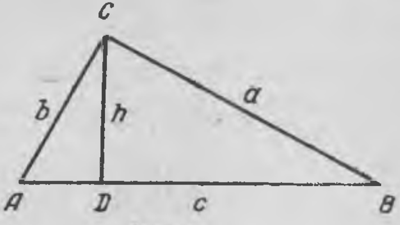
Демак,

$$S_{NLM}=S_{ABC}-3S_{ANL}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Изоҳ. LMN учбурчак ҳам, ABC учбурчакка ўхшаб, тенг томонли (исбот қилинг). Лекин, ABC учбурчак ихтиёрий бўлиб, унинг томонлари ихтиёрий нисбатларда бўлинганда ҳам LMN учбурчакнинг юзини умумий шаклда шу усул билан аниқлаш мумкин.

Жавоб. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

520. 8-чизмадаги белгилашларда $a+b+c=2p$. Бундан $a+b=2p-c$ ва $a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$. Лекин, $a^2+b^2=c^2$ ва $ab=ch$ (512-масаланинг ечилишига қаранг). Шунинг учун $c^2+2ch=4p^2-4pc+c^2$, бундан $c=\frac{2p^2}{h+2p}$. Энди $a+b=\frac{2p(h+p)}{h+2p}$ ва $ab=\frac{2p^2h}{h+2p}$. Демак, a ва b томонлар $x^2-\frac{2p(h+p)}{h+2p}x+\frac{2p^2h}{h+2p}=0$ тенгламанинг илдизларидир.



8-чизма.

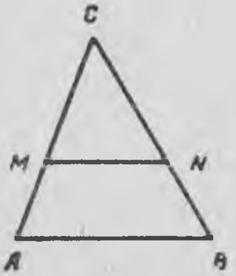
Жавоб. $c=\frac{2p^2}{h+2p}$,

$$a=\frac{p}{h+2p}\left|h+p+\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\right|,$$

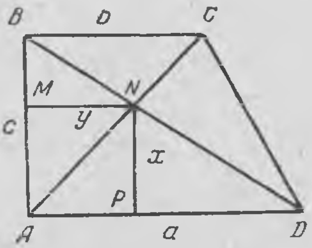
$$b=\frac{p}{h+2p}\left|h+p-\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\right|$$

масаланинг фақат $p\geqslant h\left(\sqrt{2}+1\right)$ бўлгандагина ечими бўлади.

521. ABC учбурчакнинг (9-чизма) AB ва BC ён томонларининг ҳар бири $\frac{2P-2a}{2}=P-a$ га тенг. CM кесманинг узунлиги x бўлсин ($x=CM=CN$). Агар $2P$ дан олдин $CM+CN=2x$ ни айириб, чиққан айирмага MN ни қўшсак, ABC учбурчакнинг $2P$ периметридан $AMNB$ трапециянинг $2P$ периметри ҳосил бўлади. ABC ва MNC учбурчакларнинг ўхшашлигидан



9-чизма.



10-чизма.

$$MN=\frac{AB\cdot MC}{AC}=\frac{2ax}{P-a}.$$

Демак

$$2P-2x+\frac{2ax}{P-a}=2p,$$

бундан

$$x=\frac{(P-a)\ (P-p)}{P-2a}.$$

Жавоб. $CM=CN=\frac{(P-a)(P-p)}{P-2a}$.

522. N нуқтадан (10-чизма) $AD=a$ [1]) асосгача бўлган $NP=x$ масофани ва ён томон $AB=c$ гача бўлган $NM=y$ масофани топиш керак. AMN ва ABC учбурчакларнинг ўхшашлигидан (бунда $BC=b$) $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}$ ни, яъни $\frac{y}{b}=\frac{x}{c}$ ни аниқлаймиз. NPD ва BAD учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{NP}{BA}=\frac{PD}{AD}$, яъни $\frac{x}{c}=$ $=\frac{a-y}{a}$ экани чиқади. Бу икки тенгламани ечамиз.

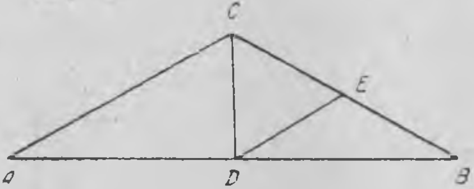
Жавоб. $x=\frac{ac}{a+b}$; $y=\frac{ab}{a+b}$.

---

[1]) *a* катта асос бўладими ёки кичик асос бўладими, барибир, ечилиш бир хил бўлади.

523. ABC (11-чизма) берилган учбурчак бўлсин. DE — учбурчакнинг ўрта чизиғи ва $DE = CD$ бўлгани учун $CD = \frac{1}{2}AC$. Демак, $\angle CAD = 30^\circ$. Шунинг учун $CD = \frac{AD\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ *см.*

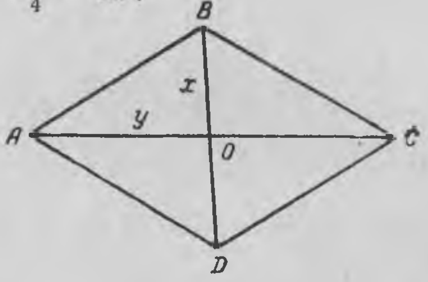
Жавоб. $S = 12\sqrt{3}$ *см*^{2}.



11-чизма.

524. $x = BO$, $y = AO$ деб фараз қиламиз (12-чизма). У ҳолда $ABCD$ ромбнинг S юзи $2xy$ га тенг бўлади. Масаланинг шартига кўра $x + y = \frac{m}{2}$; ундан ташқари, AOB тўғри бурчакли учбурчакдан $\left(\text{унда } AB = \frac{1}{4}2p = \frac{p}{2}\right)$, $x^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ни топамиз. Биринчи тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариб ва иккинчи тенгламани айириб, $2xy = \frac{m^2 - p^2}{4}$ ни топамиз.

Жавоб. $S = \frac{m^2 - p^2}{4}$ *см*^{2}.

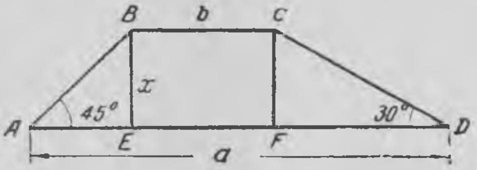


12-чизма.

525. BE баландликни (13-чизма) x билан белгилаймиз. У ҳолда $AE = x$ ва $FD = x\sqrt{3}$ бўлади. $AD = AE + EF + FD$ бўлгани учун $a = x + b + x\sqrt{3}$. Бундан $x = \frac{a - b}{\sqrt{3} + 1} =$ $= \frac{(a - b)(\sqrt{3} - 1)}{2}$.

Жавоб. $S = \frac{(a^2 - b^2)(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

526. Масаланинг шартига кўра $AD = 44$ *см* ва $BC = 16$ *см* (14-чизма). Демак, $AE + FD = 28$ *см*. AE нинг узунлигини x (сантиметр) билан белгилаб, $FD = 28 - x$ ни ҳосил қиламиз.



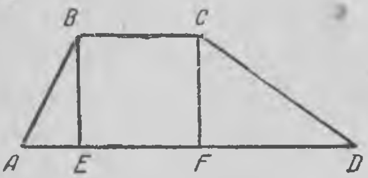
13-чизма.

Шартга кўра $AB = 17$ *см* ва $CD = 25$ *см*. Демак, $BE^2 = 17^2 - x^2$ ва $CF^2 = 25^2 - (28 - x)^2$.

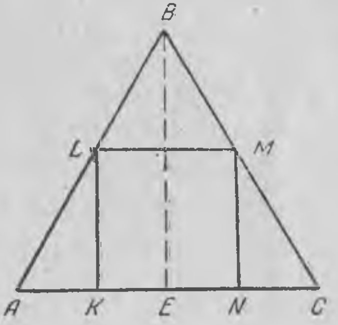
$$17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x = 8$ (*см*). Демак, h баландликни топамиз: $h = BE = \sqrt{17^2 - x^2} = 15$ (*см*). Энди $S = \frac{(a+b)h}{2}$ ни топамиз.

Жавоб. $S = 450$ *см*^{2}.



14-чизма.



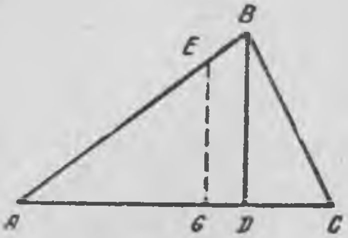
15-чизма.

527. Ички чизилган квадратнинг томонини x билан белгилаймиз (15-чизма). AKL учбурчак $\left(\text{бунда } AK = \frac{AC - LM}{2} = \frac{a - x}{2}, LK = X\right)$ билан AEB учбурчакнинг $\left(\text{бунда } AE = \frac{a}{2} \text{ ва } BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ўхшашлигидан $\frac{a - x}{2} : \frac{a}{2} = x : \frac{a\sqrt{3}}{2}$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ ни топамиз.

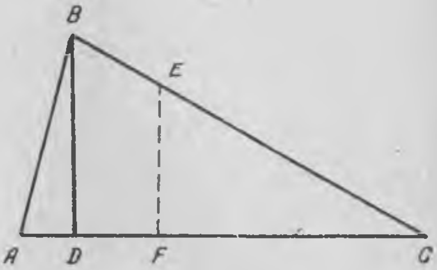
Жавоб. $S = 3a^2 (2 - \sqrt{3})^2 = 3(7 - 4\sqrt{3})a^2$.

528. Масаланинг шартига кўра $AD = 36$ *см* ва $DC = 14$ *см* (16-чизма). Баландликлари умумий бўлган ADB ва CBD учбурчаклар S_1 ва S_2 юзларининг нисбати асосларининг нисбати кабидир, яъни

$$S_1 : S_2 = 36 : 14 = \frac{18}{7}.$$



16-чизма.



17-чизма.

Демак, $S_1 = \frac{18}{25}S$, бунда $S = S_1 + S_2$, яъни ABC учбурчакнинг юзидир. Шартга кўра EG тўғри чизиқ S юзни тенг иккига бўлади; демак, бу тўғри чизиқ AC асосни A ва D нуқталар орасида кесиб ўтади (D ва C нуқталар орасида эмас). AGE учбурчакни ҳосил қиламиз; унинг S_3 юзи $\frac{1}{2}S$ га тенг. AGE ва ADB ўхшаш учбурчаклар юзларининг нисбати AG ва AD томонлари квадратларининг нисбати каби бўлгани учун $\frac{18}{25}S : \frac{1}{2}S = 36^2 : AG^2$. Бундан $AG = 30$ (*см*) ни топамиз. Демак, $GC = AC - AG = (36 + 14) - 30 = 20$ *см.*

Жавоб. 30 *см* ва 20 *см.*

529. Бундан олдинги масаланинг ечилишига қаранг. Масаланинг шартидан $AD : DC = 1 : 8$ чиқади, бундан BDC учбурчакнинг юзи (17-чизма) ABC учбурчак S юзининг $\frac{8}{9}$ қисмини ташкил қилади. Шартга кўра $BD = 4$ бўлгани учун

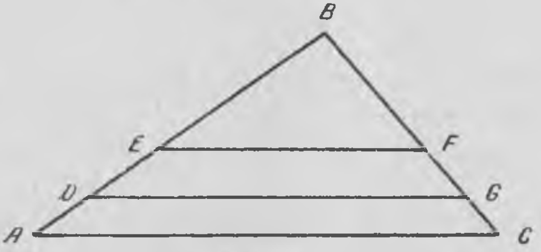
$$EF^2 : 16 = \frac{1}{2}S : \frac{8}{9}S.$$

Жавоб. $EF = 3$.

530. $S_{EBF} = S_{DEFG} = S_{ABGC}$ (18-чизма) бўлгани учун EBF учбурчакнинг юзи DBG учбурчакнинг юзидан икки марта кичик ва ABC учбурчакнинг юзидан уч марта кичик. Бу учбурчаклар

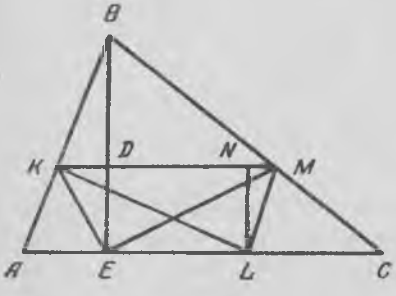
ўхшаш бўлгани учун $EB^2 : DB^2 : AB^2 = 1 : 2 : 3$. Шартга кўра $AB = a$; демак, $EB = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ва $DB = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Жавоб. AB томон $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)$ ва $\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ қисмларга бўлинган.

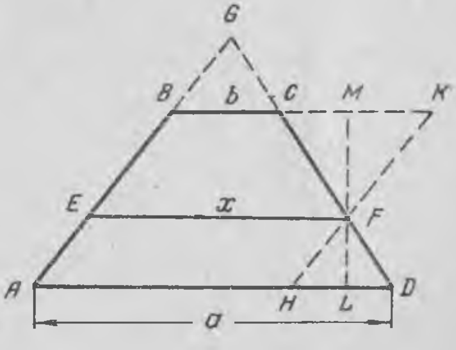


18-чизма.

531. Шартга кўра ABC учбурчакнинг юзи (19-чизма) S га тенг, KBM учбурчакнинг юзи q га тенг. Тўртбурчакнинг учта учи K, B ва M нуқталар билан устма-уст тушади; тўртинчи L учини AC томонда ихтиёрий олиш мумкин. Ҳақиқатан, $LKBM$ тўртбурчакнинг S_1 юзи KBM учбурчакнинг юзи q билан KLM учбурчак юзининг йиғиндисидан иборат, KLM учбурчакнинг юзи L учнинг KM асосга параллел бўлган AC тўғри чизиқ бўйлаб силжиши билан ўзгармайди. ABC учбурчакнинг BE баландлиги AC асоснинг E нуқтасидан ўтсин. L нуқтани E нуқтага жойлаштириб, $KBME$ тўртбурчакни ҳосил қиламиз, унинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлади. Демак, $S_1 = \frac{1}{2}\, KM \cdot BE$ бўлади.



19-чизма.



20-чизма.

$q = \frac{1}{2} KM \cdot BD$ бўлгани учун $S_1 : q = BE : BD$. Лекин, ABC ва KBM учбурчакларнинг ўхшашлигидан $S : q = BE^2 : BD^2$ келиб чиқади. Демак,

$$S_1 = q \cdot \frac{BE}{BD} = q \sqrt{\frac{S}{q}} = \sqrt{Sq}.$$

Изоҳ. Агар L нуқта E нуқта билан устма-уст тушмаса, ечилишнинг шакли қуйидагича ўзгаради.

$S_1 = \frac{1}{2} KM \cdot BD + \frac{1}{2} KM \cdot NL = \frac{1}{2} KM (BD + NL) = \frac{1}{2} KM \cdot BE$ ни топамиз ва бундан буёғи олдингича ечилади.

Жавоб. $\sqrt{Sq}$.

532. $EF = x$ кесма (20-чизма) $ABCD$ ($AD = a$, $BC = b$) трапециянинг юзини тенг иккига бўлсин. У ҳолда $\frac{(a + x) FL}{2} = \frac{(x + b) FM}{2}$, яъни $(a + x) FL = (x + b) FM$ бўлади. FL ва FM баландликларни айрим-айрим топиб бўлмайди (булардан бирининг узунлигини ихтиёрий олиш мумкин), лекин $FL : FM$ нисбатнинг маълум миқдори бор. HFD ва CFK учбурчакларнинг (бунда $HD = a - x$ ва $CK = x - b$) ўхшашлигидан

$$\frac{a - x}{FL} = \frac{x - b}{FM}.$$

Бу тенгликни бундан олдинги тенгликка ҳадлаб кўпайтирсак,

$$a^2 - x^2 = x^2 - b^2$$

бундан

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}.$$

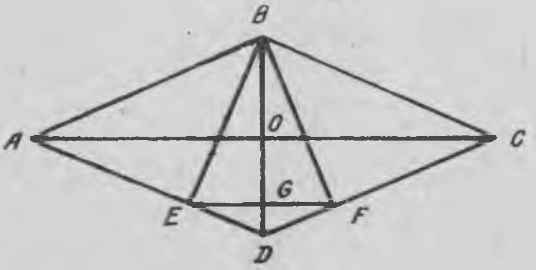
Иккинчи усул. Ён томонларни давом эттириб, бир-бирига ўхшаш BGC, EGF ва AGD учбурчакларни ҳосил қиламиз. Уларнинг S_1, S_2, S_3 юзлари b, x, a ўхшаш томонларининг квадратларига пропорционал, шунинг учун $S_1 = qb^2$, $S_2 = qx^2$, $S_3 = qa^2$ бўлади, бунда q — бирор пропорционаллик коэффициенти (унинг миқдори трапециянинг баландлигига боғлиқ). Шартга кўра $S_2 - S_1 = S_3 - S_2$, яъни

$$q(x^2 - b^2) = q(a^2 - x^2),$$

$q \neq 0$ бўлгани учун $x^2 - b^2 = a^2 - x^2$.

Жавоб. $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

533. Масаланинг шартига кўра $BE = BF = a$ (21-чизма) ва $EF = b$. Демак, $EG = \frac{b}{2}$ ва $BG = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$. Тўғри бурчакли учбурчакдаги (BDE) чизиқларнинг пропорционаллиги ҳақидаги теоремага кўра $BD = \frac{BE^2}{BG} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$. Энди ромбнинг томо-



21-чизма.

нини (AD ни) топамиз. Тенг ёнли ABD ва BEF учбурчаклар ўхшаш, чунки уларнинг бурчаклари (ҳаммаси ўткир) мос равишда тенг (томонлари ўзаро перпендикуляр бўлган бурчаклар бўлгани учун). Демак,

$$AD : BD = BE : EF,$$

яъни

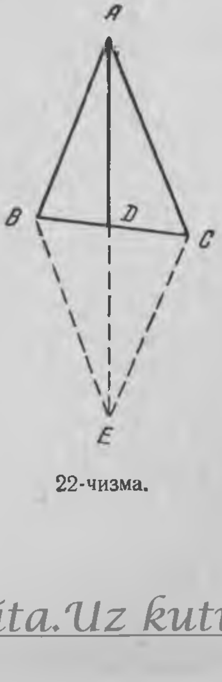
$$AD : \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = a : b.$$

Бундан AD ни, сўнгра ромбнинг $S = AD \cdot a$ юзини топамиз.

Жавоб. $\frac{2a^3}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

534. $AB = 27$ *см* ва $AC = 29$ *см* бўлсин (22-чизма); у ҳолда медиана $AD = 26$ *см* бўлади. AD ни $DE = AD$ масофага давом эттирамиз. $ABEC$ тўртбурчак томонлари 27 *см* ва 29 *см* ли параллелограмм бўлади (исбот қилинг).

ABC учбурчакнинг юзи ҳосил қилинган параллелограмм юзининг ярмини ташкил қилади, лекин ABE учбурчакнинг юзи ҳам $ABEC$ параллелограмм юзининг ярмига тенг бўлади.



22-чизма.

Демак, ABC учбурчакнинг юзи ABE учбурчакнинг юзига тенг, ABE учбурчакнинг томонлари эса маълум ($AB = 27$ *см*; $BE = 29$ *см*; $AE = 52$ *см*). Энди учбурчакнинг юзини Герон формуласи билан ҳисоблаш мумкин:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Жавоб. 270 *см*^{2}.

535. Косинуслар теоремасига асосан $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Энди $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, яъни $\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{4}{5}$ бўлгани учун

$$\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\frac{3}{5}.$$

Икки ечим ҳосил қиламиз, иккаласи ҳам ярайди. (Бир ҳолда A бурчак ўткир, иккинчи ҳолда ўтмас бурчак.)

Жавоб. $a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc}$ ёки $a = \sqrt{b^2+c^2+\frac{6}{5}bc}$.

536. 23-чизманинг белгилашларида ABC учбурчакдан

$$m^2 = b^2+c^2 - 2bc\cos B.$$

$\cos B = \cos(180° - A) = -\cos A$ бўлгани учун

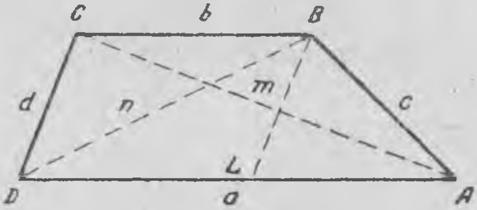
$$m^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A.$$

ADC учбурчакдан

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos D.$$

Бу ифодани бундан олдинги ифодага тенглаб,

$$2bc\cos A + 2ad\cos D = a^2 - b^2 + d^2 - c^2 \qquad (1)$$



23-чизма.

тенгламани ҳосил қиламиз. Шу йўл билан ABD ва CBD учбурчакларни қараб чиқиб,

$$2ac\cos A + 2\,bd\cos D = a^2 - b^2 - (a^2 - c^2) \qquad (2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (1) ва (2) тенгламалардан $\cos A$ ва $\cos D$ ни топиш мумкин, сўнгра m^2 ва n^2 ни топамиз. Ҳисоблаш-ни тубандагича олиб бориш қулай: (1) тенгламани b га, (2) тенгламани a га кўпайтирамиз, сўнгра биринчи тенгламани иккинчи тенгламадан айирамиз.

$$2(a^2-b^2)\,c\cos A=(a^2-b^2)(a-b)-(d^2-c^2)(a+b)$$

ҳосил бўлади. Тенгликнинг иккала томонини (a^2-b^2) $[\neq 0]$ га бўлиб,

$$2c\cos A=a-b-\frac{d^2-c^2}{a-b}$$

ни ҳосил қиламиз. Энди m^2 ни топамиз:

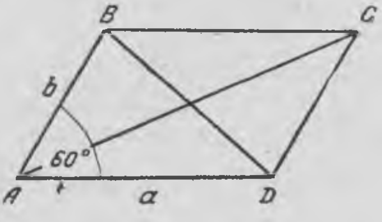
$$m^2=b^2+c^2+(2c\cos A)\,b=c^2+ab-\frac{(d^2-c^2)\,b}{a-b}=$$

$$=\frac{a(c^2-b^2)+b(a^2-d^2)}{a-b}.$$

Шунга ўхшаш $2d\cos D=a-b+\dfrac{d^2-c^2}{a-b}$ ни топамиз, сўнгра $n^2=b^2+d^2+(2d\cos D)\,b=\dfrac{a(d^2-b^2)+b(a^2-c^2)}{a-b}$ ни ҳосил қиламиз.

Изоҳ. $AD=a$ кесма $ABCD$ синиқ чизиқдан кичик. Шунинг учун $a<b+c+d$ шартдагина масаланинг ечими бўлиши мумкин. Бироқ бу шартнинг ўзи етарли эмаслиги қуйидагилардан кўринади: $a>b$ ва $c\geqslant d$ бўлсин (агар бу тенгсизликлар бажарилмаса, белгилашларни ўзгартириш ҳамма вақт мумкин ва шундан кейин тенгсизликлар ўринли бўлади). CD томонга параллел қилиб BL тўғри чизиқни ўтказамиз, $DCBL$ параллелограмм ҳосил бўлади, $BL=CD=d$ ва $DL=CB=b$. ALB учбурчакда $LA=DA-DL=a-b$ томон $AB=c$ ва $BL=d$ томонлар айирмасидан катта. Шунинг учун иккинчи $a-b>c-d$ шартга риоя қилиш керак. Агар иккала шартдан биттаси бажарилмай қолса, m^2 ва n^2 учун ҳосил қилинган ифодалардан ақалли биттаси манфий бўлади.

Масаланинг ечими бўлиши учун шу икки шарт $a<b+c+d$ ва $a-b>c-d$ етарли. Ҳақиқатан, биринчи шартни $a-b<c+d$ кўринишда ёзиш мумкин. Демак, томонлари $AL=a-b$, $AB=c$ ва $BL=d$ бўлган ABL учбурчакни ясаш мумкин. AL томонни $LD=b$ масофа қадар давом эттириб ва $DLBC$ параллелограммни ясаб, $ABCD$ тўртбурчакни ҳосил қиламиз; бу тўртбурчак асослари $AD=a$, $BC=b$ ва ён томонлари $AB=c$ ва $DC=d$ бўлган трапециядир.



24-чизма.

Жавоб. $m^2=\dfrac{a(c^2-b^2)+b(a^2-d^2)}{a-b}$, $n^2=\dfrac{a(d^2-b^2)+b(a^2-c^2)}{a-b}$.

537. 24-чизмадаги белгилашларда $\angle A=60°$, $BD^2=AD^2+AB^2-2\cdot BA\cdot AD\cdot\cos 60°=a^2+b^2-ab$ ва $AC^2=a^2+b^2+ab$.

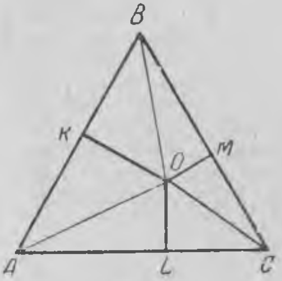
$AC > BD$ бўлгани учун, берилган $\frac{19}{7}$ нисбат $\frac{AC^2}{BD^2}$ га тенг (лекин $\frac{BD^2}{AC^2}$ эмас).

$$\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}=\frac{19}{7} \quad \text{ёки} \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1+\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1-\frac{a}{b}}=\frac{19}{7}$$

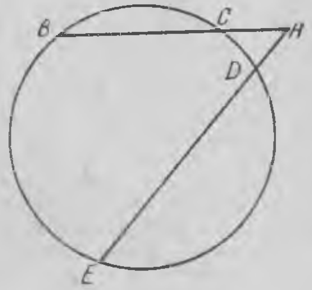
тенгламадан $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ ва $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ ни топамиз. Бу иккала қиймат битта параллелограммни беради (24-чизмада белгилашларни ўзгартириш, яъни AB ни a билан ва AD ни b билан белгилаш мумкин).

Жавоб. Томонлари 3 : 2 нисбатда бўлади.

538. O — тенг томонли ABC учбурчак (25-чизма) ичидаги ихтиёрий нуқта бўлсин. O нуқтани учбурчак учлари билан туташтирамиз. AOB, BOC ва COA учбурчаклар юзларининг йиғиндиси ABC учбурчакнинг юзига тенг. Бу учбурчакнинг бир томонини a билан, баландлигини h билан белгилаб,



25-чизма.



26-чизма.

$$(OK+OL+OM)\frac{a}{2}=\frac{ah}{2}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$h=OK+OL+OM.$$

539. Масаланинг шартига кўра $BC=47$ *м* ва $CA=9$ *м* (26-чизма, бу чизмада ҳақиқий ўлчамларга риоя қилинмаган); демак, $BA=56$ *м*. Бинобарин $AD\cdot AE=9\cdot 56=504$. $AD=x$ бўлсин; у ҳолда $DE=x+72$, демак, $AE=2x+72$. Энди $x(2x+72)=504$ тенгламадан $x=6$ ни топамиз.

Жавоб. $AE=84$ *м*.

540. Масала OAB (27-чизма) учбурчакнинг катетларидан бирини берилган гипотенузаси $OA = m$ ва баландлиги $BD = \frac{a}{2}$ бўйича топишга келтирилади. Учбурчакнинг катта катетини x билан, кичик катетини y билан белгилаймиз. OAB учбурчак юзининг икки хил ифодаланиши (512-масаланинг ечилишига қаранг) $xy = a\frac{m}{2}$, яъни $2xy = am$ тенгламани беради; ундан ташқари, $x^2 + y^2 = m^2$. Бу тенгламаларни ҳадлаб қўшиб ва айириб

$$x + y = \sqrt{m^2 + am}$$

ва

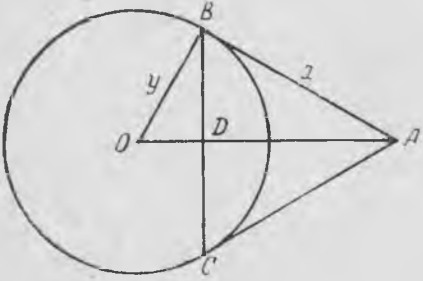
$$x - y = \sqrt{m^2 - am}$$

ни ҳосил қиламиз. x ҳам, y ҳам изланган радиус бўла олади.

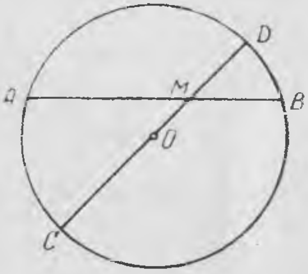
Жавоб. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2 + am} + \sqrt{m^2 - am}\right)$

ёки

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2 + am} - \sqrt{m^2 - am}\right).$$



27-чизма.



28-чизма.

541. Айлананинг радиуси 13 *см* ва $MO = 5$ *см* бўлгани учун $MD = 8$ *см*, $MC = 18$ *см* (28-чизма). MB ни x билан белгилаймиз. У ҳолда $AM = 25 - x$ бўлади. $AM \cdot MB = MD \cdot MC$ бўлгани учун

$$(25 - x)\,x = 18 \cdot 8.$$

Бундан $x_1 = 16$, $x_2 = 9$.

Жавоб. Кесмалар 16 *см* ва 9 *см* га тенг.

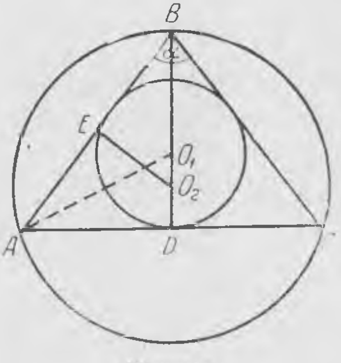
542. EBO_2 учбурчакда (29-чизма), $BE = \frac{1}{2}AB$, бундан

$$R = O_2B = \frac{AB}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

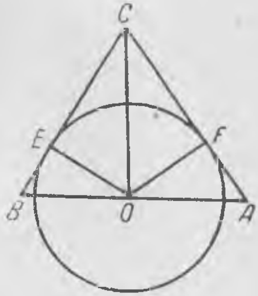
эканини топамиз. ADO_1 учбурчакда $\angle DAO_1 = \frac{1}{2}\angle DAB = \frac{1}{2}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; бу учбурчакдан $r = O_1D = AD\cdot \mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$ ни топамиз. ABD учбурчакда $AD = AB\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ бўлгани учун

$$R : r = \frac{\mathrm{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}.$$

Жавоб. $\frac{R}{r} = \frac{\mathrm{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$.



29-чизма.



30-чизма.

543. Масаланинг шартига кўра $a = BC = 13$ *см*, $b = CA = 14$ *см*, $c = AB = 15$ *см* (30-чизма). $OE = OF$ ни R билан белгилаймиз. ABC учбурчакнинг юзи BOC ва AOC учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг. Бу учбурчакларнинг юзлари мос равишда $\frac{13R}{2}$ ва $\frac{14R}{2}$ га тенг бўлгани учун

$$S_{ABC} = \frac{27R}{2}.$$

Иккинчи томондан Герон формуласига мувофиқ

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 84\,см^2.$$

Юзларнинг бу ифодаларини бир-бирига тенглаймиз.

Жавоб. $R = 6\frac{2}{9}$ *см.*

544. OEB тўғри бурчакли учбурчакда (31-чизма) $\angle EBO = 60^\circ$. Шунинг учун

$$BO\cdot EO\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Демак,

$$BD = R\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{R(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}.$$

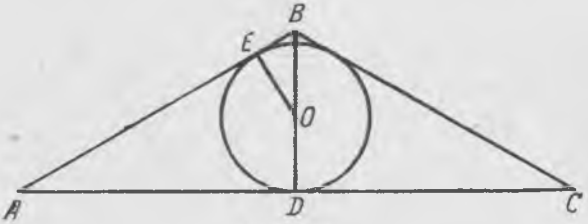
ABD учбурчакдан

$$AB = \frac{2R(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} \text{ ва } AD = R(\sqrt{3}+2).$$

Демак,

$$AC = 2R(\sqrt{3}+2).$$

Жавоб. $AB = BC = \frac{2R(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}$, $AC = 2R(\sqrt{3}+2)$.



31-чизма.

545. ABD учбурчакдан (32-чизма)

$$BD = \sqrt{BA^2 - AD^2} = 18 \text{ см}.$$

$BC \cdot BD = BA^2$ бўлгани учун

$$BC = \frac{BA^2}{BD} = 50 \text{ см}.$$

Демак,

$$AC = \sqrt{BC^2 - BA^2} = 40 \text{ см}.$$

Жавоб. Ярим айлананинг узунлиги 20π га тенг.

546. $ODBE$ тўртбурчакнинг B, D ва E бурчаклари тўғри бурчак ва $DO = OE$ бўлгани учун (33-чизма) бу тўртбурчак квадрат бўлади. Изланган DE ёй бутун айлана узунлигининг тўртдан бирига тенг. Унинг радиусини R билан белгилаймиз. ADO ва OEC учбурчакларнинг тенглигидан

$$\frac{AD}{AO} = \frac{OE}{OC}.$$

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{15^2 - R^2}$$

бўлгани учун $\frac{\sqrt{15^2-R^2}}{15}=\frac{R}{20}$.
Бундан $R=12$.

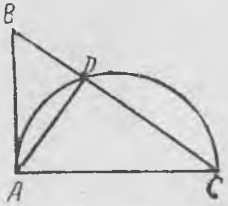
Жавоб. 6π.

547. $ADEB$ тўртбурчакнинг юзи (34-чизма):

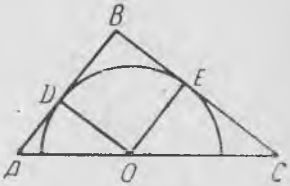
$$S=S_{ABC}-S_{DEC} \text{ га тенг.}$$

$$S_{ABC}=\frac{AC}{2}BD=12\ см^2.$$

S_{DEC} ни топиш учун DEC ва DBC учбурчакларнинг D учи умумий ва баландлиги бир хил (чизмада кўрсатилмаган) эканини



32-чизма.



33-чизма.

назарга оламиз, шу билан бирга $S_{DBC}=\frac{1}{2}S_{ABC}=6\ см^2$. Демак, $S_{DEC}:6=CE:CB$. Номаълум CE кесмани бир (C) нуқтадан ўтказилган кесувчиларнинг хоссасидан топамиз. $CE\cdot CB=CD\cdot CA$, бундан $CE=\frac{CD\cdot CA}{CB}$. Демак,

$$S_{DEC}=6\frac{CE}{CB}=6\ \frac{CD.CA}{CB^2}=6\frac{2\cdot4}{2^2+6^2}=1,2\ см^2.$$

Жавоб. $S=10,8\ см^2$.

548. ABC учбурчакнинг S юзи (35-чизма) унинг $2a+2\sqrt{a^2+h^2}$ периметри билан $\frac{r}{2}$ нинг кўпайтмасига тенг (r — ички чизилган айлананинг радиуси):

$$S=(a+\sqrt{a^2+h^2})\,r.$$

Иккинчи томондан

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BG=ah.$$

Бу икки ифодани тенглаб,

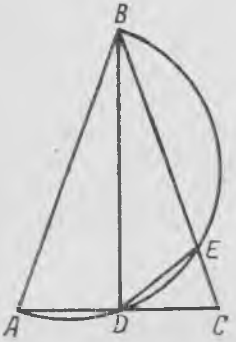
$$r = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + h^2}}$$

ни топамиз. DE кесмани

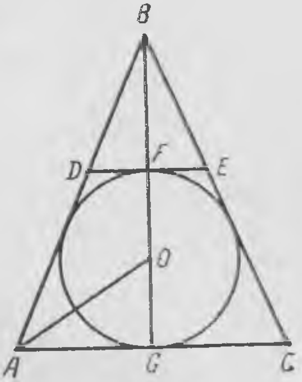
$$DE : AC = BF : BG$$

пропорциядан топамиз, бунда

$$AC = 2a, \; BF = h - 2r \text{ ва } BG = h.$$



34-чизма.



35-чизма.

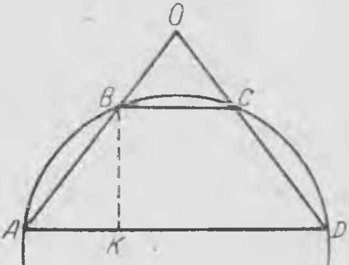
Изоҳ. r миқдорни яна бундай топиш мумкин: AO тўғри чизиқ A бурчакнинг биссектрисаси. Демак, $GO = r$ ва $OB = h - r$ кесмалар AG ва AB томонларга пропорционал, яъни

$$\frac{r}{h - r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Жавоб. $r = \frac{ha}{\sqrt{a^2 + h^2} + a}$;

$$DE = 2a \, \frac{\sqrt{a^2 + h^2} - a}{\sqrt{a^2 + h^2} + a} = \frac{2a\left(\sqrt{a^2 + h^2} - a\right)^2}{h^2}.$$

549. $OB \cdot OA = OC \cdot OD$ (36-чизма) ва $OB = OC$ бўлгани учун $OA = OD$. $ABCD$ тўртбурчакнинг қарама-қарши AB ва CD томонлари тенг; демак, берилган 6 *м* ва 2,4 *м* узунликлар AD ва BC



36-чизма.

томонларга тегишлидир ($AD = 6$ *м*, $BC = 2{,}4$ *м*). AOD бурчакнинг томонларидан тенг кесмалар кесувчи BC ва AD тўғри чизиқлар бир-бирига параллел, шунинг учун $ABCD$ тўртбурчак (тенг ёнли) трапеция. BOC ва AOD учбурчакларнинг тенглигидан

$$BO : AO = BC : AD,$$

бундан

$$AO = \frac{BO \cdot AD}{BC} = \frac{2 \cdot 6}{2{,}4} = 5 \text{ м}.$$

демак, $AB = 3$ *м*. Энди трапециянинг баландлигини топамиз:

$$h = BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{3a^2 - \left(\frac{6 - 2{,}4}{2}\right)^2} = 2{,}4 \text{ м}.$$

Жавоб. $S = 10{,}08$ *м*^{2}.

550. Масаланинг шартига кўра $AB = 6$ *м*, $AC = 7$ *м*, $BC = 9$ *м* (37-чизма). R_A, R_B, ва R_C — марказлари A, B ва C нуқталарда бўлган айланаларнинг изланган радиуслари бўлсин. У ҳолда $R_A + R_B = 6$, $R_C - R_A = 7$, $R_C - R_B = 9$. Бундан R_A, R_B ва R_C радиусларни топамиз.

Жавоб. $R_A = 4$ *м*, $R_B = 2$ *м*, $R_C = 11$ *м*.

551. AB га параллел қилиб O_2E ни ва DC га параллел қилиб O_2P ни ўтказамиз (38-чизма). Шартга кўра $AB = \frac{3}{2}\,CD$, бунда CD ни x билан белгилаймиз. У вақтда $O_2P = x$, $O_2E = \frac{3}{2}\,x$ бўлади. O_1EO_2 ва O_1PO_2 учбурчаклардан

$$O_1O_2^2 = O_1E^2 + \frac{9}{4}x^2 \text{ ва } O_1O_2^2 = O_1P^2 + x^2.$$

Бу икки ифодани тенглаймиз ва

$$O_1E = O_1A - EA = O_1A - O_2B = 5 - 2 = 3 \text{ см}$$

ва шунга ўхшаш

$$O_1P = O_1C + O_2D = 7 \text{ см}$$

эканини эътиборга оламиз. У ҳолда

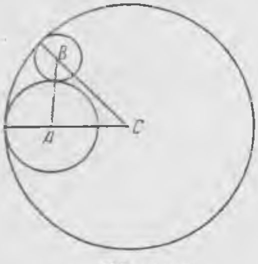
$$9 + \frac{9}{4}x^2 = 49 + x^2$$

тенгламани ҳосил қиламиз; бундан $x^2 = 32$. Шунинг учун

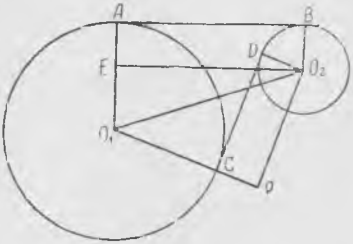
$$O_1O_2^2 = 49 + 32 = 81.$$

Жавоб. $O_1O_2 = 9$ *см*.

552. Айланаларнинг марказлари орасидаги масофа радиусларнинг йиғиндисидан кичик, лекин айирмасидан катта бўлгани учун айланалар кесишади; демак, уларнинг умумий ташқи уринмаси



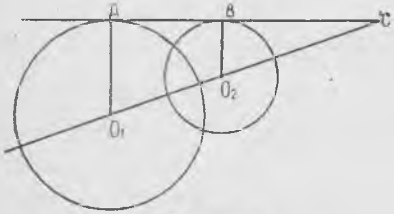
37-чизма.



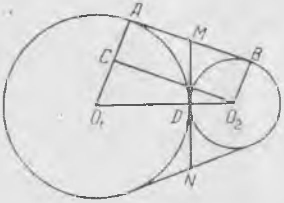
38-чизма.

бор ва умумий ички уринмаси йўқ. $O_1C = x$ ва $O_2C = y$ деб фараз қиламиз (39-чизма). $x - y = O_1O_2 = 21$ *см* ва $x : y = O_1A : O_2B = 17 : 10$.

Жавоб. $O_1C = 51$ *см*, $O_2C = 30$ *см.*



39-чизма.



40-чизма.

553. M нуқтадан (40-чизма) O_1 айланага икки уринма (MD ва MA) ўтади. Демак, $MD = MA$. Шунингдек, $MD = MB$ эканини ҳам шундай исбот қиламиз. Демак,

$$MN = 2MD = AM + MB = AB.$$

AB ни топиш учун AB га параллел қилиб O_2C тўғри чизиқни ўтказамиз. O_1O_2C учбурчакдан (бунда $O_2C = AB$, $O_1O_2 = R + r$ ва $O_1C = R - r$):

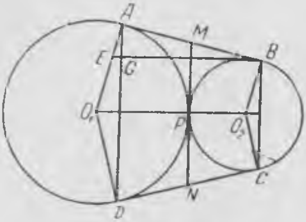
$$AB = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2}$$

ёки

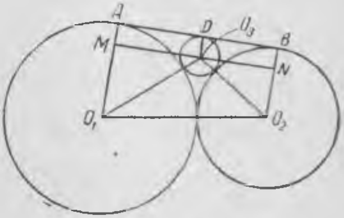
$$AB = 2\sqrt{Rr}.$$

Жавоб. $MN = 2\sqrt{Rr}$.

554. MN — икки айланага умумий уринма бўлсин (41-чизма). $AM = MP = MB$ бўлгани учун MN кесма $ABCD$ трапециянинг ўрта чизиғидир. $MN = AB = 2\sqrt{Rr}$ бўлади (бундан олдинги масаланинг ечилишига қаранг). Энди трапециянинг BG баландлигини топамиз. Тўғри бурчакли (EAB) учбурчакдаги пропорционал чизиқлар ҳақидаги теоремага мувофиқ



41-чизма.



42-чизма.

$$BG = \frac{AB^2}{BE},$$

лекин

$$BE = O_1O_2 = R + r.$$

Демак

$$BG = \frac{4Rr}{R + r}.$$

Жавоб.

$$S = \frac{8\,(Rr)^{^3/_2}}{R + r}.$$

555. Изланган айлананинг радиусини x билан белгилаймиз. Унинг O_3 марказидан (42-чизма) AB га параллел қилиб MN тўғри чизиқни ўтказамиз. AB тўғри чизиқ O_1A, O_2B ва O_3D радиусларга перпендикуляр бўлгани учун $AM = BN = x$, демак, $O_1M = R - x$ ва $O_2N = r - x$. Ундан ташқари, $O_1O_3 = R + x$ ва $O_2O_3 = r + x$. Демак,

$$MO_3 = \sqrt{(R + x)^2 - (R - x)^2} = 2\sqrt{Rx}:$$

худди шунга ўхшаш

$$NO_3 = 2\sqrt{rx}.$$

$MN = 2\sqrt{Rr}$ бўлгани учун (553-масалага қаранг):

$$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr},$$

бундан $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}$ келиб чиқади.

Жавоб. Айлананинг радиуси $\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

556. $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ бўлгани учун (бунда C — ватарлар орасидаги бурчак), $S>\frac{1}{2}ab$ бўлганда масаланинг ечими бўлмайди. Агар $S<\frac{1}{2}ab$ бўлса, $\sin C=\frac{2S}{ab}$ ни топамиз; томонлари a ва b, юзи S бўлган иккита учбурчак мавжуд; C бирида ўткир бурчак, иккинчисида ўтмас бурчакдир. Биринчи ҳолда $\cos C=\sqrt{1-\frac{4S^2}{a^2b^2}}$, иккинчи ҳолда $\cos c=-\sqrt{1-\frac{4S^2}{a^2b^2}}$. Демак,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2\mp 2\sqrt{a^2b^2-4S^2}$$

(C ўткир бурчак бўлса устки ишора, ўтмас бўлса остки ишора олинади). $S=\frac{1}{2}ab$ бўлганда тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади, шунинг учун $c^2=a^2+b^2$.

Учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси $R=\frac{C}{2\sin C}$ формула билан топилади.

Жавоб. $R=-\frac{\sqrt{a^2+b^2\mp 2\sqrt{a^2b^2-4S^2}}}{4S}$. $S>\frac{1}{2}ab$ бўлганда ечим йўқ, $S<\frac{1}{2}ab$ бўлганда иккита ечим бўлади (агар ватарлар орасидаги бурчак ўткир бўлса устки ишора, ўтмас бўлса остки ишора олинади). $S=\frac{1}{2}ab$ бўлганда битта ечим бўлади (ватарлар ўзаро перпендикуляр).

557. Масаланинг шартига кўра (43-чизма) $A_1B_1=a_6=R$, $A_2B_2=a_4=R\sqrt{2}$ ва $A_3B_3=a_3=R\sqrt{3}$. OA_1B_1, OA_2B_2 ва OA_3B_3 учбурчакларнинг баландликлари мос равишда

$$OC_1=\frac{R\sqrt{3}}{2};\ OC_2=\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

ва

$$OC_3=\frac{R}{2}.$$

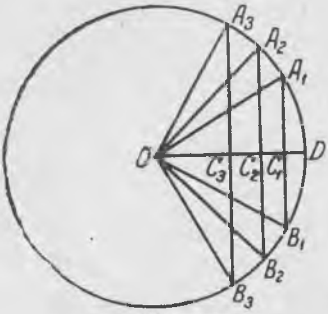
Бундан бу учбурчакларнинг юзларини топамиз. Сўнгра OA_1DB_1 секторнинг юзини топамиз; секторнинг юзи доира юзининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг; шунинг учун $S_{OA_1DB_1}=\frac{1}{6}\pi R^2$. Шунга ўхшаш $S_{OA_2DB_2}=\frac{1}{4}\pi R^2$ ва $S_{OA_3DB_3}=\frac{1}{3}\pi R^2$. Ҳар бир секторнинг юзидан тегишли учбурчакнинг юзини айириб, сегментларнинг юзларини топамиз: $S_1 = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $S_2 = R^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$, $S_3 = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Доиранинг A_1B_1 ва A_2B_2 ватарлари орасидаги қисми

$$S_2 - S_1 = \frac{R^2}{12}(\pi + 3\sqrt{3} - 6).$$

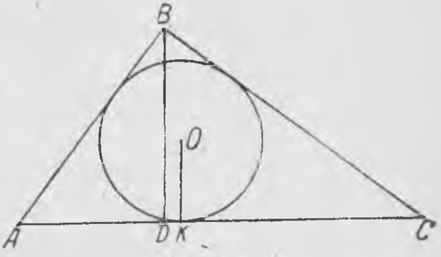
A_2B_2 ва A_3B_3 ватарлар орасидаги қисми

$$S_3 - S_2 = \frac{R^2}{12}(\pi - 3\sqrt{3} + 6).$$

Жавоб. Юзларининг нисбати $\frac{\pi + 3(2 - \sqrt{3})}{\pi - 3(2 - \sqrt{3})}$.



43-чизма.



44-чизма.

558. Ички чизилган доиранинг $OK = r$ радиусини топиш учун (44-чизма) учбурчак юзининг $S = pr$ формуласидан фойдаланамиз (p — учбурчакнинг периметри). Масаланинг шартиға кўра $AD = 14{,}4$ *см*, $DC = 25{,}6$ *см*, шунинг учун $AC = 40$ *см*. Демак, $AB = \sqrt{AD \cdot AC} = 24$ (*см*), $BC = \sqrt{DC \cdot AC} = 32$ (*см*). Демак,

$$p = 48 \text{ см} \text{ ва } S = 384 \text{ см}^2.$$

Жавоб. Доиранинг юзи 64 π *см*^{2} га тенг.

559. AB ва CD параллел тўғри чизиқларнинг уриниш нуқталарини туташтирувчи LN тўғри чизиқ (45-чизма) айлананинг диаметридир. Шунинг учун ички чизилган LEN ва LMN бурчаклар (шунингдек MLE ва MNE бурчаклар ҳам) тўғри бурчаклардир. Демак, $LENM$ тўртбурчак ҳақиқатан тўғри тўртбурчакдир. ABD учбурчак — тенг томонли (чунки, $AB = AD$ ва $\angle A = 60°$); LN

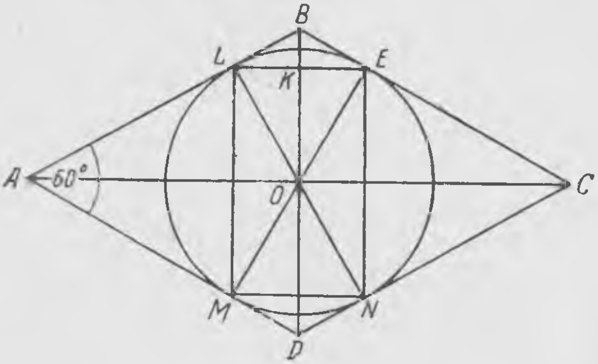
кесма (ромбнинг баландлиги) ABD учбурчакнинг баландлигига тенг, яъни $LN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$S=\frac{1}{2}LN^2\cdot\sin\angle LOE=\frac{1}{2}LN^2\cdot\sin\angle BAD$$

(LOE ва BAD бурчакларнинг томонлари ўзаро перпендикуляр). Демак,

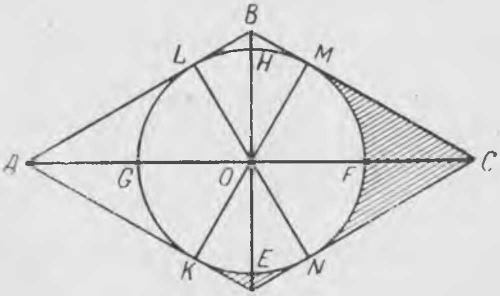
$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin 60^\circ.$$

Жавоб. $S=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.



45-чизма.

560. $MCNF$ фигуранинг S_1 юзини (46-чизма) ва $KDNE$ фигуранинг S_2 юзини топиш талаб қилинади. ($KALG$ ва $LBMN$ фигураларнинг юзлари мос равишда S_1 ва S_2 га тенг). Масала-



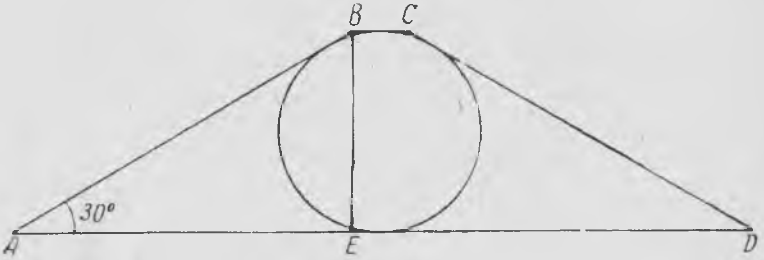
46-чизма.

нинг шартига кўра $AC = 4R$ бўлгани учун $OC = 2 \cdot OM$; бундан $\angle OCM = 30°$. Демак, $\angle MON = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ ва $\angle KON = 60°$ бўлади. $CMON$ тўртбурчакнинг юзи $R^2 \sqrt{3}$ га тенг, $MONF$ секторнинг юзи $\frac{1}{3} \pi R^2$ га тенг. Демак, $S_1 = R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3}$, шунингдек, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} R^2 - \frac{\pi R^2}{6}$.

Жавоб. $S_1 = \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$; $S_2 = \frac{R^2(2\sqrt{3} - \pi)}{6}$.

561. $\angle A = 30°$ бўлгани учун (47-чизма) трапециянинг $BE = h$ баландлиги $\frac{1}{2} AB$ га тенг. Ташқи чизилган тўртбурчакнинг хоссасига кўра $BC + AD = AB + CD = 2AB$. Шунинг учун

$$S = \frac{AB + CD}{2} h = \frac{1}{2} AB^2.$$



47-чизма.

Жавоб. $AB = \sqrt{2S}$.

562. $S = 20$ *см*^{2} юзга ва $BE = 2r = 4$ *см* баландликка кўра (48-чизма) асослар йиғиндисининг ярмини топамиз: $\frac{AD + BC}{2} = 5$ *см*. Демак, $AB = 5$ *см* (бундан олдинги масалага қаранг). Энди $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 3$ *см* ни топамиз. Лекин, AE трапеция асослари айирмасининг ярмига тенг. Ярим йиғинди ва ярим айирмага кўра асосларнинг ўзларини топамиз.

Жавоб. $AD = 8$ *см*, $BC = 2$ *см*, $AB = CD = 5$ *см*.

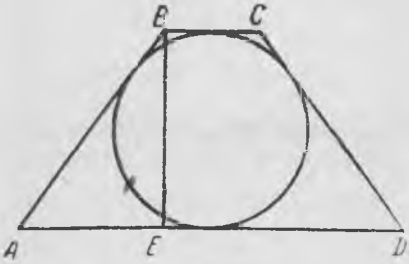
563. $ABCD$ трапециянинг Q юзи (49-чизма):

$$\frac{BC + AD}{2} BM = (BC + AD) R$$

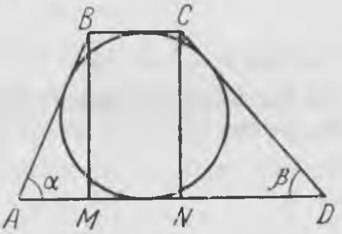
га тенг (R — ички чизилган доиранинг радиуси). Бу трапеция доирага ташқи чизилгани учун $BC + AD = AB + CD$. Лекин $AB = \frac{2R}{\sin \alpha}$, $CD = \frac{2R}{\sin \beta}$. Шунинг учун

$$Q = 2R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = 2R^2\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Жавоб. $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$.



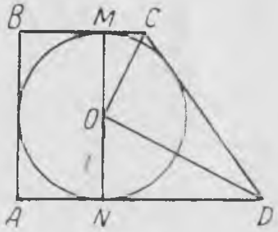
48-чизма.



49-чизма.

564. Трапециянинг асосларига перпендикуляр бўлган AB ён томони (50-чизма) $2r$ га тенг бўлгани учун оғма CD ён томон $2r$ дан катта. Демак, трапециянинг $\frac{3}{2}r$ га тенг бўлган энг кичик томони BC кичик асосидир. Катта AD асосни топиш учун OC ва OD тўғри чизиқларни ўтказамиз. Булар йиғиндиси 180° га тенг бўлган MCD ва NDC бурчакларнинг биссектрисаларидир. Демак, $\angle MCO + ODN = 90^\circ$. Тўғри бурчакли ODN учбурчакдан $\angle NOD + \angle ODN = 90^\circ$. Демак, $\angle NOD = \angle MCO$, бинобарин, ODN ва OCM учбурчаклар ўхшашдир. $ND : ON = OM : MC$ пропорцияни ҳосил қиламиз, бунда $ON = OM = r$ ва $MC = \frac{r}{2}$ (масаланинг шартига кўра). Бундан $ND = 2r$, бинобарин,

$$AD = AN + ND = r + 2r = 3r.$$



50-чизма.

Жавоб. $S = \frac{9r^2}{2}$.

565. OMC ва OND учбурчаклар (50-чизма) ўхшаш (бундан олдинги масалага қаранг). $\frac{OD}{OC} = \frac{4}{2} = 2$ бўлгани учун $\frac{ND}{OM} = 2$

ва $\frac{ON}{MC} = 2$, яъни $ND = 2OM = 2r$ ва $MC = \frac{ON}{2} = \frac{1}{2}r$. Тўғри бурчакли OND учбурчакдан $r^2 + (2r)^2 = 4^2$, бундан

$$r = \frac{4}{\sqrt{5}}\ (см).$$

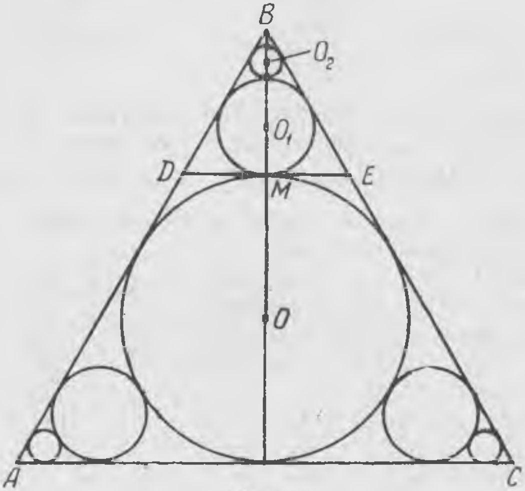
Энди $AD = AN + ND = r + 2r = 3r = \frac{12}{\sqrt{5}}$ *см* ва $BC = \frac{6}{\sqrt{5}}$ *см* ни топамиз. Трапециянинг MN баландлиги

$$2r = \frac{8}{\sqrt{5}}\ см.$$

Жавоб. $S = 14{,}4$ *см*^{2}.

566. Биринчи доиранинг O маркази (51-чизма) $BN = h$ баландликни $BO:ON = 2:1$ нисбатда бўлади. Демак, MN диаметр $\frac{2}{3}h$ га тенг, $BM = \frac{1}{3}h$. Иккинчи доира DBE учбурчакка ички чизилган, унинг баландлиги ABC учбурчакнинг баландлигидан уч марта кичик. Демак, $r_1 = O_1M$ радиус $r = ON$ радиусдан уч марта кичик. Шунинг учун O доиранинг юзи S бўлса $\left[S = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}\right]$, O_1 доиранинг юзи $S_1 = \frac{1}{3^2}S$ бўлади. Бундай доиралар учта бўлгани учун уларнинг умумий юзи:

$$Q_1 = \frac{1}{3}S.$$



51-чизма

Яна шундай муҳокама юритиб, қуйидаги учта доиранинг умумий юзи

$$Q_2 = \frac{1}{3^2} Q_1 = \frac{1}{3^3} S$$

ва ҳоказо бўлишини топамиз. Қўшилувчиларнинг чексиз қаторини ҳосил қиламиз:

$$S + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots = S + \frac{1}{3} S + \frac{1}{3^3} S + \frac{1}{3^5} S + \ldots.$$

Бу қаторнинг ҳадлари $\frac{1}{3} S$ ҳаддан бошлаб (S қўшилувчи алоҳида ажратиб олинади) чексиз камаювчи геометрик прогрессия $a_1 = \frac{1}{3} S$; $q = \frac{1}{3^2}$ ҳосил қилади. Бу прогрессиянинг йиғиндиси:

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3} S}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8} S.$$

Бунга яна S қўшилувчини қўшиш керак.

Жавоб. Изланган юз $\frac{11}{8} S = \frac{11}{96} \pi a^2$.

567. $BMNC$ трапециянинг (52-чизма) юзини топиш учун BM асосни ва MN баландликни топиш керак, чунки CN маълум. Олдин

$$CD = x$$

ни топамиз.

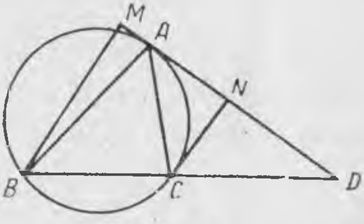
$$x(BC + x) = AD^2$$

ёки

$$x(5 + x) = 150.$$

Бундан

$$CD = x = 10 \text{ (см)}.$$



52-чизма.

BMD ва CND учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{BM}{BD} = \frac{CN}{CD}$ ёки $\frac{BM}{15} = \frac{6}{10}$, бундан $BM = 9$ (*см*). Трапециянинг MN баландлигини $\frac{MN}{BC} = \frac{ND}{CD}$ пропорциядан топамиз, бунда $ND = \sqrt{CD^2 - CN^2}$ бўлади. $MN = 4$ *см* ни топамиз.

Жавоб. $S = 30$ *см*^{2}.

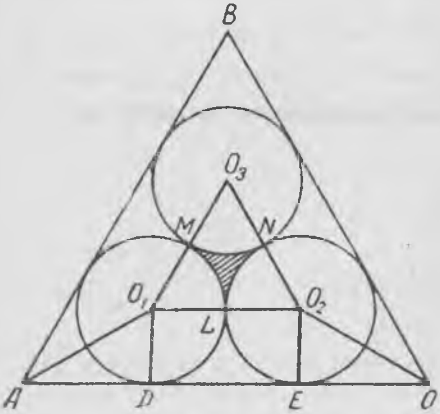
568. O_1, O_2 ва O_3 — ички чизилган тенг доираларнинг марказлари ва r уларнинг радиуси бўлсин (53-чизма). AO_1 ва CO_2 60° ли A ва C бурчакларнинг биссектрисалари бўлгани

учун $\angle O_1AD = 30°$; демак, $AD = EC = r\sqrt{3}$. Сўнгра $DE = O_1O_2 = 2r$. Шунинг учун $2r(1+\sqrt{3}) = a$.

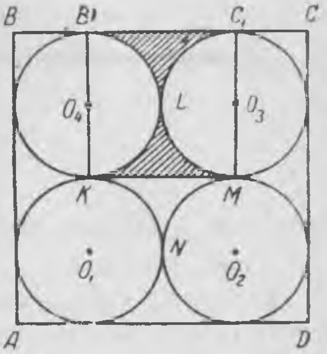
Жавоб. $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}$.

569. $O_1O_2O_3$ учбурчакнинг (53-чизма) юзидан учта O_1ML, O_2LN ва O_3NM секторларнинг умумий юзини айирсак (уларнинг умумий юзи радиуси r бўлган ярим доиранинг юзига тенг), изланган LMN юз (53-чизмада штрихланган) ҳосил бўлади. $O_1O_2O_3$ учбурчакнинг томони $2r = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$ га тенг (бундан олдинги масалага қаранг); шунинг учун

$$S_{O_1O_2O_3} = r^2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{16}.$$



53-чизма.



54-чизма.

Учта секторнинг умумий юзи:

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi a^2(\sqrt{3}-1)^2}{32} = \frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{16}.$$

Жавоб.

$$S = r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a^2(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi)}{16}.$$

570. Масала бундан олдинги масалага ўхшаш ечилади (54-чизма).

Жавоб. $S = \frac{a^2(4-\pi)}{16}$.

Иккинчи хил ечиш. Изланган $KLMN$ фигура 54-чизмада штрихланган фигурага тенгдош. Агар B_1C_1MK квадратдан иккита ярим доирани айирсак, штрихланган фигуранинг юзи ҳосил бўлади.

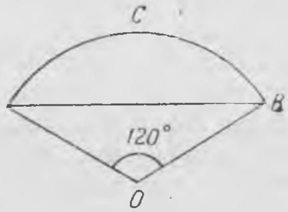
571. Сегмент айланаси ёйининг радиуси R ни топамиз. Унинг периметри ACB ёй билан AB ватар узунликлари йиғиндисига тенг (55-чизма). $\frac{2}{3}\pi R + R\sqrt{3} = p$ ҳосил бўлади, бундан

$$R = \frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}.$$

Сегментнинг S юзи секторнинг юзидан OAB учбурчак юзини айирганда чиққан айирмага тенг, яъни

$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Жавоб. $S = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}.$



55-чизма.

572. ABC учбурчакнинг (56-чизма) AB ва BC томонларини топиш учун $EB = BG = x$ ни аниқлаш кифоя, чунки $AE = AD = 6$ *см* ва $CG = CD = 8$ *см*. Бунинг учун учбурчак юзининг икки ифодаси $S = rp$ билан $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ни таққослаймиз. Бунда p учбурчакнинг ярим периметри, яъни

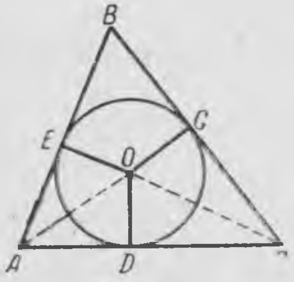
$$\frac{1}{2}(EA + AD + DC + CG + GB + BE) = \frac{1}{2}(28 + 2x) = 14 + x.$$

Ушбу

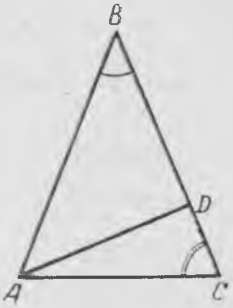
$$4(14 + x) = \sqrt{(14 + x)x \cdot 6 \cdot 8}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $x = 7$ (*см*).

Жавоб. $AB = 13$ *см*; $BC = 15$ *см*.



56-чизма.



57-чизма.

573. $CD : DB = m : n$ бўлсин (57-чизма). У ҳолда $BD : BC = n : (m + n)$. Демак, $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{n}{m+n}.$

$B = 180° - 2C$ бўлгани учун $\cos 2C = \cos(180° - B) = -\frac{n}{m+n}$. Бундан

$$\cos C = \sqrt{\frac{1+\cos 2C}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2(m+n)}}.$$

Жавоб. $B = \arccos\frac{n}{m+n}$;

$$C = \arccos\sqrt{\frac{m}{2(m+n)}}\left[= \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{n}{m+n}\right)\right].$$

574. Айлана жуфт-жуфти билан тенг тўртта $AB = BC$ ва $CD = DA$ ёйга бўлинади (58-чизма). BC ёй 90° дан кичик бўлсин (ҳамма ёйлар 90° дан бўлган энг содда $m:n = 1$ ҳолни бир четкага қўйиб турамиз). BC ёй билан ўлчанадиган $\alpha = \angle BOC$ марказий бурчакни топамиз. Масаланинг шартига кўра $DE{:}EB = m:n$; $\frac{DE}{m}$ миқдорни узунликларнинг ўлчов бирлиги учун қабул қилиб, $DE = m$ ва $EB = n$ ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\frac{DB}{2} = \frac{m+n}{2} \text{ ва } OE = DE - DO = m - \frac{m+n}{2} = \frac{m-n}{2}.$$

Демак,

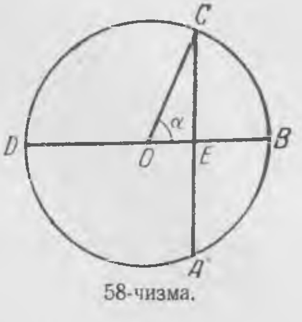
$$\cos\alpha = \frac{OE}{OC} = \frac{m-n}{m+n} \text{ ва } \alpha = \arccos\frac{m-n}{m+n}.$$

CD ёй $180° - \arccos\frac{m-n}{m+n}$ (градус), яъни

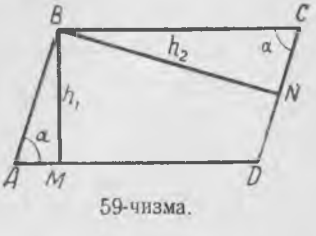
$$\pi - \arccos\frac{m-n}{m+n} \text{ (радиан).}$$

Жавоб. $\frac{\pi}{2}$ дан кичик ёй $\arccos\frac{m-n}{m+n}$ га тенг $(m > n)$; $\frac{\pi}{2}$ дан катта ёй $\pi - \arccos\frac{m-n}{m+n} = \arccos\frac{n-m}{m+n}$ га тенг.

575. α параллелограммнинг бурчаги бўлсин (59-чизма). У ҳолда



58-чизма.



59-чизма.

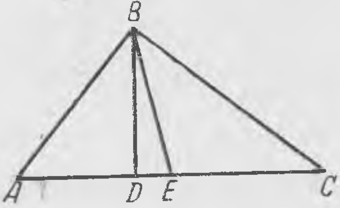
$$h_1 = BM = AB\cdot\sin\alpha \text{ ва } h_2 = BN = BC\cdot\sin\alpha.$$

Демак, $h_1 + h_2 = (AB + BC)\sin\alpha = p\sin\alpha$, бундан $\sin\alpha = \frac{h_1 + h_2}{p}$. Агар α — ўткир (ёки тўғри) бурчак бўлса, у ҳолда $\alpha = \arcsin\frac{h_1 + h_2}{p}$. У ҳолда параллелограммнинг ўтмас (ёки тўғри) бурчаги $\pi - \arcsin\frac{h_1 + h_2}{p}$ бўлади.

Изоҳ. Агар $h_1 + h_2 > p$ бўлса, масаланинг ечими бўлмайди. Агар $h_1 + h_2 < p$ бўлса, масаланинг ечими бўлади ($h_1 + h_2 = p$ бўлганда тўғри тўртбурчак бўлади).

Жавоб. Бурчакларидан бири $\arcsin\frac{h_1 + h_2}{p}$ га, иккинчиси $\pi - \arcsin\frac{h_1 + h_2}{p}$ га тенг.

576. Масаланинг шартига кўра $BD : BE = 40 : 41$ (60-чизма). BD нинг $\frac{1}{40}$ бўлагини узунлик бирлиги учун қабул қиламиз. У ҳолда $BD = 40$, $BE = 41$ бўлади. ABC учбурчак тўғри бурчакли бўлгани ва BE — тўғри бурчакнинг медианаси бўлгани учун $AE = BE = 41$. BDE учбурчак тўғри бурчакли, шунинг учун



60-чизма.

$$DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = 9.$$

Демак, $AD = AE - DE = 32$. ABD ва ABC учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}.$$

Жавоб. $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$.

577. AO тўғри чизиқ (61-чизма) $\alpha = CAD$ бурчакнинг биссектриссаси, шунинг учун $\angle BAO = \frac{\alpha}{2}$. Шунингдек $\angle ABO = \frac{1}{2}\cdot(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. AOD ва BOD учбурчаклардан

$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \text{ ва } DB = OD\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Демак,

$$c = AB = AD + DB = OD\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right|\right..$$

Бундан $r = \dfrac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ ни топамиз. Махражни логарифмлаш учун қулай шаклга келтириш мумкин:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

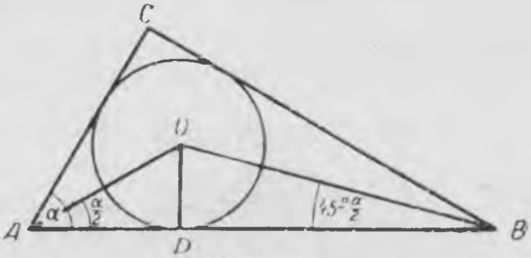
$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Жавоб. $r = c\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Изоҳ. $r = S : p$ формулани қўлланиб (S — учбурчакнинг юзи, p — ярим периметр),

$$r = \frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha}$$

кўринишидаги тенг кучли ечимни ҳосил қилар эдик).



61-чизма.

578. Учбурчакнинг томонларини a, b ва c билан белгилаймиз ва $a = 7$ *см*, $b = 24$ *см*, $c = 25$ *см* бўлсин. $a^2 + b^2 = c^2$ бўлгани учун берилган учбурчак тўғри бурчакли. Демак, ташқи чизилган доиранинг радиуси $R = \frac{c}{2}$. Ички чизилган доиранинг радиусини $r = \frac{S}{p}$ формула билан топамиз, бунда S — учбурчакнинг юзи p — ярим периметри.

Жавоб. $R = 12{,}5$ *см*, $r = 3$ *см*.

579. Масаланинг шартига кўра $\angle BAE = \varphi$ (62-чизма). Демак, $\angle BAO_1 = \frac{\varphi}{2}$ бўлади. $R = O_1B$ ва $r = O_2C$ ни топиш талаб қилинади.

$$R + r = O_1F + FO_2 = O_1O_2 = d.$$

ва

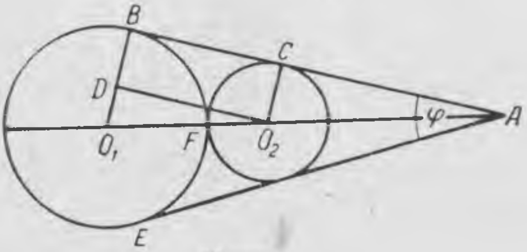
$$R - r = O_1B - O_2C = O_1D.$$

O_1DO_2 учбурчакда

$$\angle O_1O_2D = \angle BAO_1 = \frac{\varphi}{2}$$

бўлиб, ундан

$$O_1D = O_1O_2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$



62-чизма.

яъни $R - r = d\sin\frac{\varphi}{2}$ ни топамиз. Ҳосил бўлган икки тенгламадан

$$R = \frac{d\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2} \text{ ва } r = \frac{d\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2}.$$

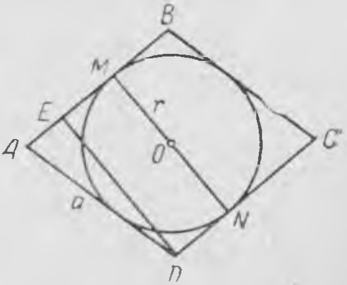
$\sin\frac{\varphi}{2}$ ни $\cos\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right)$ билан алмаштириб, бу ифодаларнинг шаклини ўзгартириш мумкин.

Жавоб. $R = d\cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$, $r = d\sin^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$.

580. 63-чизмадан

$$\sin\angle BAD = \frac{DE}{AD} = \frac{MN}{AD} = \frac{2r}{a}.$$

Масаланинг шартига кўра $MN \cdot DC = Q$, яъни $2ra = Q$ ва ундан ташқари, $\pi r^2 = S$. Бу тенгламалардан r ни алоҳида ва a ни алоҳида топиш мумкин, лекин бизга фақат $\frac{r}{a}$ ни билиш керак бўлгани учун, иккинчи тенгламани биринчи тенгламага ҳадлаб бўлиш яхшироқ. $\frac{\pi r}{2a} = \frac{S}{Q}$, бундан $\frac{r}{a} = \frac{2S}{\pi Q}$.



63-чизма.

Жавоб. $\angle BAD = \arcsin\frac{4S}{\pi Q}$.

581. Мунтазам ички чизилган $2n$ бурчакнинг юзи $\pi R^2 \sin\frac{180^\circ}{n}$ га тенг. Мунтазам ташқи чизилган n бурчакнинг юзи $\pi R^2 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ га тенг. Шартга кўра

$$nR^2\left(\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} - \sin\frac{180^\circ}{n}\right) = P.$$

Бундан

$$R = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{n(\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha)}},$$

бунда $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$. Энди $\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$ ифодани қуйидагича алмаштириш мумкин:

$$\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\,(1 - \cos\alpha) = 2\operatorname{tg}\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Жавоб.

$$R = \sqrt{\frac{P}{n\left(\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} - \sin\frac{180^\circ}{n}\right)}} = \frac{1}{\sin\frac{90^\circ}{n}}\sqrt{\frac{P\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{2n}}.$$

582. Бир исмли мунтазам кўпбурчаклар ўхшашдир; шунинг учун (64-чизма) улар юзларининг (S_1 — ички чизилган кўпбурчакнинг юзи, S_2 — ташқи чизилган кўпбурчакнинг юзи) нисбати радиуслари квадратларининг нисбати кабидир.

$$S_1 : S_2 = OD^2 : OA^2.$$

Лекин OAD учбурчакдан $\frac{OD}{OA} = \cos\angle DOA = \cos\frac{180^\circ}{n}$.

Жавоб. $S_1 : S_2 = \cos^2\frac{180^\circ}{n}$.

583. $AB = a$ (65-чизма) мунтазам n-бурчакнинг томони бўлсин. У ҳолда

$$\angle BON = \alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

ва

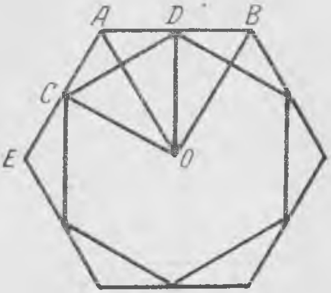
$$\angle NAM = \frac{\alpha}{2} = \frac{90^\circ}{n}$$

(ички чизилган ва α ёйга тиралган бурчак бўлгани учун). Ҳалқанинг юзи

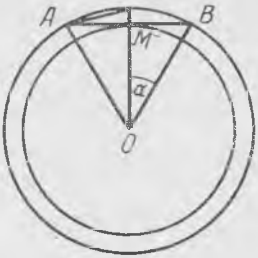
$$Q = \pi\,(OA^2 - OM^2) = \pi\cdot AM^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Ҳалқанинг d энини NAM учбурчакдан топиш мумкин.

Жавоб. $Q = \frac{\pi a^2}{4}$; $d = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{90^\circ}{n}$.



64-чизма.

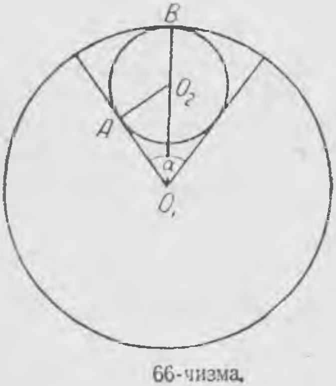


65-чизма.

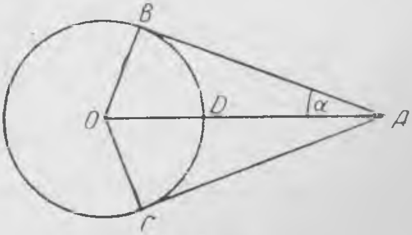
584. Изланган радиусни x билан белгилаймиз (66-чизма) $O_2A = O_2B = x$. O_1O_2A тўғри бурчакли учбурчакда $\angle O_2O_1A = \frac{\alpha}{2}$ ва $O_1O_2 = O_1B - O_2B = R - x$ бўлиб, $O_2A = O_1O_2 \sin\frac{\alpha}{2}$, яъни $x = (R - x)\sin\frac{\alpha}{2}$.

Жавоб.
$$x = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

585. $ABOC$ тўртбурчакнинг юзи (67-чизма) $S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\,OB\cdot AB = R^2 \operatorname{ctg}\alpha$. Ундан марказий бурчаги $(180 - 2\alpha)^\circ$ га тенг бўлган $COBD$ секторнинг S юзини айириш керак.



66-чизма.

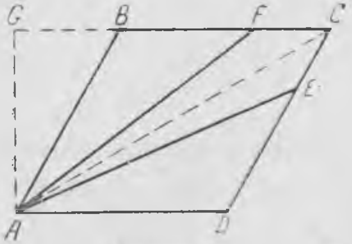


67-чизма.

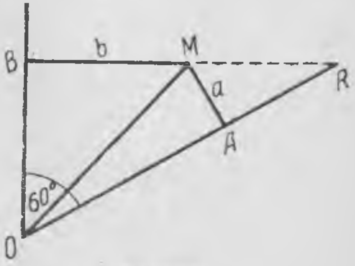
$$S_2 = \pi R^2 \frac{180 - 2\alpha}{360} = \pi R^2 \frac{90 - \alpha}{180}$$

келиб чиқади. (α — градус ўлчови).

Жавоб. $S = S_1 - S_2 = R^2 \left[\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\alpha}{180}\right]$ бунда α — бурчакнинг градус ўлчови, ёки $S = R^2 \left[\operatorname{ctg}\alpha' - \frac{\pi}{2} + \alpha'\right]$, бунда α'— бурчакнинг радиан ўлчови.



68-чизма.



69-чизма.

586. Масаланинг шартига кўра ABF учбурчакнинг юзи (68-чизма) $ABCD$ ромб юзининг $\frac{1}{3}$ қисмини, яъни ABC учбурчак юзининг $\frac{2}{3}$ қисмини ташкил қилади. ABC ва ABF учбурчакларнинг AG умумий баландлиги бўлгани учун

$$BF = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} a.$$

Шунинг учун $AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + \frac{4}{9} a^2 + \frac{4}{3} a^2 \cos\alpha.$

Жавоб. $AF = AE = \frac{a}{3} \sqrt{13 + 12\cos\alpha}.$

587. BM ни (69-чизма) AOB бурчакнинг OA томони билан R нуқтада кесишгунча давом эттирамиз. AMR учбурчакда $\angle AMR = \angle AOB = 60^\circ$ (томонлари ўзаро перпендикуляр бурчаклар бўлгани учун); бу учбурчакдан $MR = 2AM = 2a$ ни топамиз. Демак, $RB = RM + MB = 2a + b$. Энди ROB учбурчакдан (бунда $OR = 2OB$ бўлиб), $(2OB)^2 - OB^2 = (2a + b)^2$. Демак,

$$OB = \frac{2a - b}{\sqrt{3}}.$$

Изланган OM масофа OBM учбурчакдан аниқланади.

Жавоб. $OM = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + ab + b^2}.$

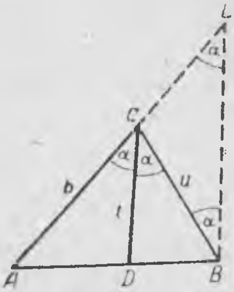
588. Масала $\angle ACB = 2\alpha$ (70-чизма) ни топишга келтирилади. AC ни давом эттириб ва $BL \parallel DC$ ни ўтказиб, $BC = CL = a$ эканлигини (учбурчак ички бурчагининг биссектрисаси тўғрисидаги теоремадагидек) исбот қиламиз ҳамда ADC ва ABL учбурчакларнинг ўхшашлигидан $BL = \frac{(a+b)t}{b}$ ни ҳосил қиламиз, тенг ёнли BCL учбурчакдан эса $BL = 2a\cos\alpha$. Демак, $2a\cos\alpha = \frac{(a+b)t}{b}$; бундан $\cos\alpha$ ни топамиз; сўнгра $\sin\alpha$ ни ва

$$S = \frac{1}{2}at\sin\alpha + \frac{1}{2}bt\sin\alpha = \frac{1}{2}t(a+b)\sin\alpha$$

ни топамиз.

Иккинчи хил ечилиши. ABC учбурчакнинг $\frac{1}{2}ab\sin 2\alpha$ юзи ADC ва BCD учбурчакларнинг $\frac{1}{2}bt\sin\alpha$ ва $\frac{1}{2}at\sin\alpha$ юзлари йиғиндисидан иборат. Демак,

$$ab\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}bt\sin\alpha + \frac{1}{2}at\sin\alpha.$$

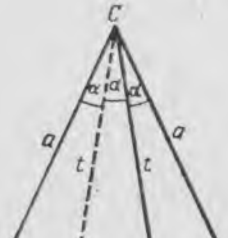


70-чизма.

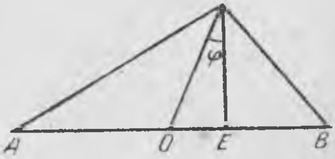
Бундан $\cos\alpha$ ни топамиз.

Жавоб.

$$S = \frac{(a+b)t}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2t^2}.$$



71-чизма.



72-чизма.

589. CD, CE нурлар (71-чизма) ACB бурчакни тенг уч бўлакка бўлсин: $\angle BCD = \angle DCE = \angle ECA = \alpha$. Масаланинг шартига кўра $AC = CB = a$ ва $CE = CD = t$. BCE учбурчакдан, олдинги масаладагига ўхшаш, $\cos\alpha = \frac{(a+t)t}{2at} = \frac{t+a}{2a}$ ни, сўнгра

$\sin\alpha$ ни топамиз. Изланган юз ACE; DCE; BCD учбурчаклар юзларининг йиғиндисидан иборат.

Жавоб. $S = \frac{t}{4a}(2a + t)\sqrt{(3a + t)(a - t)}$.

590. ABC учбурчагида (72-чизма) CE — баландлик, CO — медиана. Изланган OCE бурчакни φ билан белгилаймиз, учбурчакнинг бурчакларини A, B ва C билан белгилаймиз. ACE, BCE ва OCE учбурчаклардан асос кесмалари учун қуйидаги ифодаларни топамиз:

$$AE = EC \cdot \operatorname{ctg} A, \qquad BE = EC \cdot \operatorname{ctg} B$$

ва

$$OE = EC \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

$AO = OB$ бўлгани учун

$$AE - BE = (AO + OE) - (OB - OE) = 2OE.$$

Бу кесмаларнинг топилган ифодаларини ўрнига қўйиб.

$$EC \cdot \operatorname{ctg} A - EC \cdot \operatorname{ctg} B = 2 \cdot EC \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

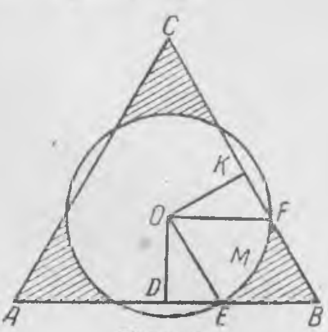
ёки

$$\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{tg} \varphi.$$

ни топамиз

Жавоб. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)$.

591. Изланган S юз (73-чизмада штрихланган юз) $EMFB$ фигура юзининг уч баробарига тенг. Масаланинг шартига кўра $OE = \frac{1}{3} AB = \frac{a}{3}$. Тўғри бурчакли OED учбурчакда OD катет (ички чизилган айлананинг радиуси) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ га тенг; демак $OD = OE \frac{\sqrt{3}}{2}$ Бундан $\angle DEO = 60^\circ$ чиқади. Худди шунга ўхшаш $\angle KFO = 60^\circ$ бўлади. EBF бурчак ҳам 60° бўлгани учун $EO \parallel BF$ ва $OF \parallel BE$, ҳамда $OEBF$ тўртбурчак ромб бўлиб, унинг томони $\frac{a}{3}$ ва O учидаги бурчаги 60°. EOF секторнинг $\frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2$ га тенг бўлган юзини ромбнинг юзи $\left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ дан айирамиз ва айирманинг уч баробарини топамиз.



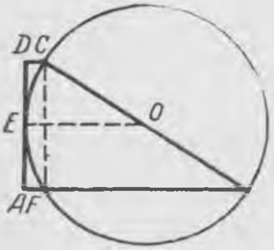
73-чизма.

Жавоб. $S = \frac{a^2}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$.

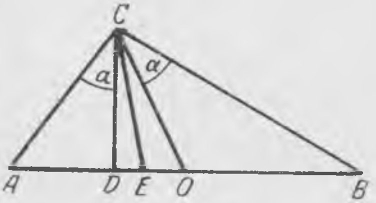
592. $S = \frac{1}{2} AB \cdot DC$ ни топиш талаб қилинади (74-чизма). KFB — тўғри бурчак (ички чизилган ва диаметрга тиралгани учун). Демак, $DC = AF$, шунинг учун $S = \frac{1}{2} AB \cdot AF$. Лекин кесувчининг хоссасига кўра

$$AB \cdot AF = AE^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Жавоб. $S = \frac{h^2}{8}$.

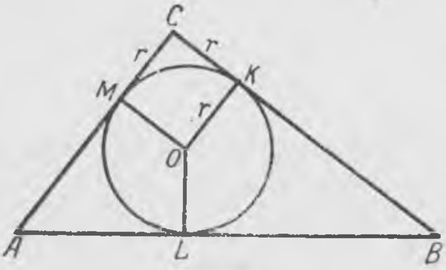


74-чизма.



75-чизма.

593. $\angle DCA = \angle OBC$ (75-чизма) ва $\angle BCO = \angle OBC$ (чунки, OC медиана гипотенузанинг ярмига тенг) бўлгани учун $\angle DCA = \angle BCO$. Лекин масаланинг шартига кўра $\angle ACE = \angle BCE$. Бу тенгликдан олдинги тенгликни айириб, $\angle DCE = \angle OCE$ ни топамиз, яъни CE тўғри чизиқ DCO бурчакни тенг иккига бўлади.



76-чизма.

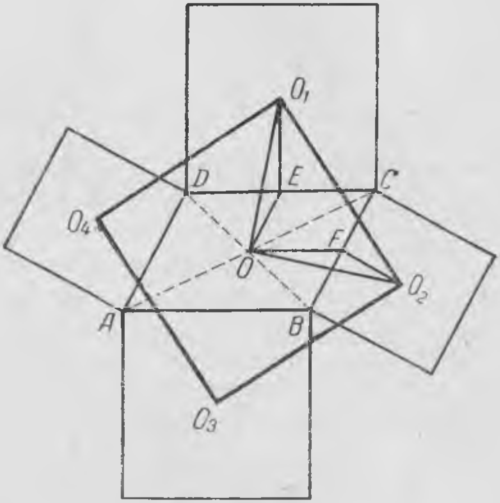
594. ABC тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлананинг $2R$ диаметри AB гипотенузага тенг. Ички чизилган айлананинг $2r$ диаметри $MC + CK$ га тенг ($MOKC$ квадрат бўлгани учун). Демак,

$$AC + BC = (AM + BK) + (MC + CK) = (AL + LB) + $$
$$+ (MC + CK) = 2R + 2r.$$

595. Бу масалада **594**-масаладагидек $a+b=2(r+R)$, яъни $a+b=2\ \frac{2}{5}R+R\Big)=\frac{7}{5}c$ эканини исбот қиламиз. Ундан ташқари, $a^2+b^2=c^2$. Бундан

$$a=\frac{3}{5}c,\quad b=\frac{4}{5}c\ \text{(ёки } a=\frac{4}{5}c,\quad b=\frac{3}{5}c).$$

Жавоб. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\sin B=\frac{4}{5}$.



77-чизма.

596. OEO_1 ва OFO_2 учбурчакларни (77-чизма) ясаймиз ва (E ва F нуқталар параллелограмм томонларининг ўрталари). Бу учбурчаклар тенг. Ҳақиқатан $OE=FC$, масаланинг шартидан $FC=O_2F$ экани келиб чиқади. Демак, $OE=O_2F$ бўлади. $O_1E=OF$ эканини ҳам шундай исбот қиламиз. OEO_1 ва OFO_2 бурчаклар тенг (иккаласи ҳам ўтмас бурчак), чунки уларнинг томонлари ўзаро перпендикуляр. OEO_1 ва OFO_2 учбурчакларнинг тенглигидан $OO_1=OO_2$ ва $\angle OO_1E=\angle O_2OF$ эканлиги келиб чиқади. O_1E ва OF тўғри бурчак ҳосил қилгани учун OO_1 ва OO_2 тўғри чизиқлар ҳам тўғри бурчак ҳосил қилади. Демак, O_1O_2O учбурчак тенг ёнли ва тўғри бурчакли учбурчакдир. O_2O_3O, O_3O_4O ва O_4O_1O учбурчаклар ҳам шундай учбурчаклардир. Бундан $O_1O_2O_3O_4$ шакл квадрат эканлиги келиб чиқади.

9-БОБ

КЎПЁҚЛИЛАР

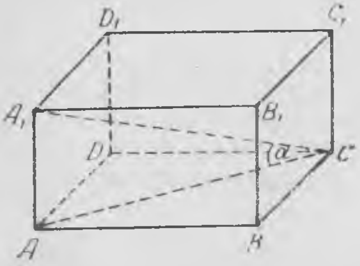
Бу ва бундан кейинги бобларда қуйидагича белгилар қабул қилинган:

V — ҳажм,
S ёки $S_{\text{асос}}$ — асоснинг юзи,
$S_{\text{ён}}$ — ён сирт,
$S_{\text{тўла}}$ — тўла сирт,
a — асоснинг томони,
r — асосга ички чизилган айлананинг радиуси,
R — асосга ташқи чизилган айлананинг радиуси,
H — жисмнинг баландлиги,
h — асоснинг баландлиги.

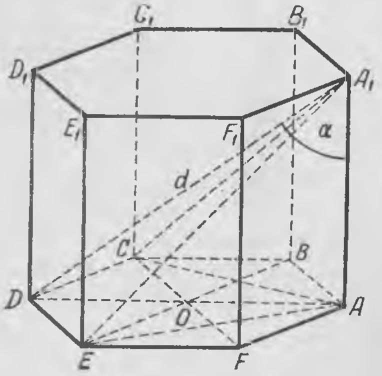
Агар юқорида кўрсатилган миқдорлар бошқача белгиланса, шу замон изоҳ берилади.

Фазовий фигураларнинг тасвирларида майда пунктирлар билан кўринмайдиган чизиқлар белгиланган; йирик пунктирлар билан ёрдамчи чизиқлар тасвирланган.

597. Параллелепипед A_1C диагоналининг (78-чизма) $ABCD$ асос текислигига проекцияси AC (асоснинг диагонали) бўлади. Шунинг учун A_1C билан $ABCD$ текислик орасидаги α бурчак, A_1CA бурчак билан ўлчанади AA_1C учбурчакдан:



78-чизма.



79-чизма.

$$AA_1 = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\,\operatorname{tg}\alpha.$$

Бу ифодани $S_{\text{ён}} = (2a + 2b) \cdot AA_1$формулага қўямиз.

Жавоб. $S_{\text{ён}} = 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}\,\operatorname{tg}\alpha.$

598. Призманинг ҳар бир учидан, масалан, A_1 учидан (79-чизма) учта диагонал (A_1E, A_1D, A_1C) ўтказиш мумкин. Бу диаго-

наллар $ABCDEF$ текислигига асоснинг диагоналлари (AE, AD ва AC) каби проекцияланади. A_1E, A_1D, A_1C оғмалардан қайси бирининг проекцияси узун бўлса, шу оғма энг катта бўлади. Демак, олинган учта диагоналдан энг каттаси A_1D (призмада A_1D га тенг яна диагоналлар бор, аммо ундан узуни йўқ).

Бурчакларидан $\angle DA_1A = \alpha$ ва томонларидан $A_1D = d$ бўлган A_1AD учбурчакдан:

$$H = AA_1 = d\cos\alpha;\ AD = d\sin\alpha.$$

Тенг ёнли AOB учбурчакнинг юзи $\frac{1}{4}\cdot AO^2\cdot\sqrt{3}$. Демак,

$$S_{\text{асос}} = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot AO^2\cdot\sqrt{3} = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{AD}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}.$$

Призманинг ҳажми:

$$V = S\cdot H = \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot AD^2\cdot AA_1$$

ёки

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{8}(d\sin\alpha)^2\cdot d\cos\alpha.$$

Жавоб. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}d^3\sin^2\alpha\cos\alpha.$

Изоҳ 1). Мунтазам олтибурчакни (призманинг асосини) ясаш учун ихтиёрий бир $BCDO$ параллелограмм олиш ва DO, CO, BO тўғри чизиқларни давом эттириб, уларда $OA = OD$, $OF = OC$, $OE = OB$ кесмаларни ажратиш ва бу кесмаларнинг учларини туташтириш мумкин. Унда $ABCDE$ олтибурчак ҳосил бўлади. O нуқта марказни тасвир этади.

599. а) Тасвирлаш усули. Асосда ётувчи квадрат, ихтиёрий $ABCD$ параллелограмм билан тасвирланади (80-чизма). Диагоналлар кесишган O нуқта квадратнинг марказини тасвирлайди. AB томоннинг ўртаси F нуқтани пирамиданинг учи E билан туташтириб, EF апофеманинг тасвирини ҳосил қиламиз.

---

1) Чизманинг очиқлиги кўпинча масаланинг ечилишини осонлаштиради. Шунинг учун бир қанча масалаларда фазовий фигураларни текисликда ясаш усуллари кўрсатилган. Бу кўрсатмалар, қўлда чизганда ҳам яхши чизма ҳосил бўлишига ёрдам беради.

Тасвирлар параллел проекцияларда берилган, яъни проекциялаш йўналиши ихтиёрий. Бу хилдаги проекциялашда параллел чизиқларнинг тасвирлари параллел чизиқлар бўлади (аммо перпендикуляр чизиқларнинг тасвирлари, одатда, перпендикуляр чизиқлар бўлмайди). Бир чизиқнинг ўзида ёки параллел чизиқларда ажратилган тенг кесмалар тасвирда ҳам тенглигича қолади (аммо узунликлари одатда ўзгаради). Параллел бўлмаган тўғри чизиқларда ажратиладиган тенг кесмалар тенг бўлмаган кесмалар билан тасвир этилиши мумкин.

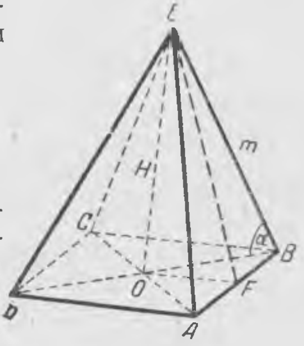
б) Ечиш. Пирамида ҳажми

$$V = \frac{1}{3}x^2H,$$

бунда x — асоснинг томони (80-чизмадаги AB) ва H — пирамиданинг баландлиги (OE); $\alpha = EBO$ бурчак (597-масаланинг ечимини қаранг). EBO учбурчакдан: $H = m\sin\alpha$; $DB = m\cos\alpha$. OAB учбурчакдан: $x = OB\cdot\sqrt{2} = m\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$.

H ва x нинг қийматларини ҳажм формуласига қўйиб, масаланинг жавобини топамиз.

Жавоб. $V = \frac{2}{3}m^3\cos^2\alpha\sin\alpha = \frac{m^3\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{3}$.



80-чизма.

600. Изланаётган ён қиррани m билан белгилаб, бундан олдинги масаладаги каби топамиз:

$$V = \frac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}.$$

Бундан m ни аниқлаймиз.

Жавоб.

$$m = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sin 2\alpha\cos\alpha}}.$$

601. $AB = x$; $EF = y$ дейлик (80-чизма). Унда:

$$S = 2xy. \qquad (1)$$

OEF тўғри бурчакли учбурчакдан, бунда $OE = H$:

$$y^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + H^2. \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалардан y ни йўқотиб

$$x^4 + 4H^2x^2 - S^2 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенглама иккита ҳақиқий илдизга эга, лекин улардан фақат биттаси мусбатдир.

Жавоб. $x = \sqrt{\sqrt{4H^4 + S^2} - 2H^2}$ *см.*

602 [1]. BC ва FE томонларнинг, ўрталари M ва N нуқталарни туташтириб (81-чизма), ички чизилган доира диаметрининг

---

[1] Мунтазам олтибурчакни тасвирлаш ҳақида 285-бетда 598-масалага қаранг.

MN тасвирини ҳосил қиламиз, $MN = d$ ва $OM = \frac{d}{2}$. Иккинчи томондан OM кесма томони a га баравар тенг томонли ($BC = OC = OB$) учбурчакнинг баландлиги бўлгани учун

$$\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ бундан } a = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Пирамиданинг $H = OS$ баландлигини SCO учбурчакдан топамиз:

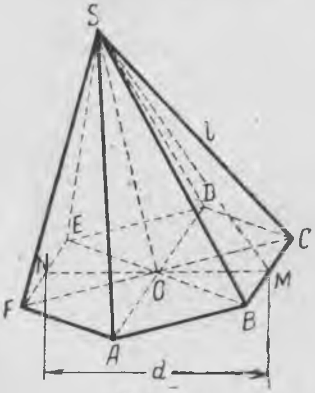
$$H = \sqrt{CS^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - a^2} = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{3}}.$$

Пирамиданинг $m = SM$ апофемасини SCM учбурчакдан топамиз:

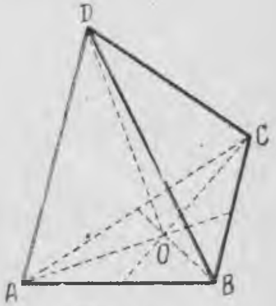
$$m = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{12l^2 - d^2}.$$

Жавоб.

$$V = \frac{d^2}{6}\sqrt{3l^2 - d^2}; \quad S_{\text{ён}} = \frac{d}{2}\sqrt{12l^2 - d^2}.$$



81-чизма.



82-чизма.

603. а) Тасвирлаш усули. Асосни ҳар қандай ABC учбурчак билан тасвирлаш мумкин (82-чизма). Асоснинг маркази медианалар кесишган O нуқта билан тасвирланади[1]).

б) Ечиш. Тетраэдрнинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{асос}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}\, H.$$

---

[1]) O нуқтанинг ўрни аниқлангандан сўнг бу медианаларнинг иккитаси, масалани ечишда кераги бўлмагани учун ўчириб ташланиши, 295-бетдаги 85-чизмадаги каби фақат AE медианада O нуқтагина қолдирилиши мумкин.

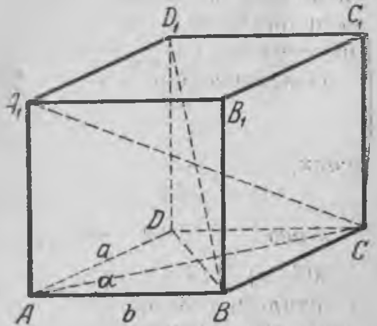
a билан H орасидаги муносабатни AOD учбурчакдан топамиз, бунда $AD = a$; AO кесма эса асосга ташқи чизилган доиранинг радиуси. Демак, $a = R\sqrt{3}$.

AOD учбурчакдан: $H^2 = AD^2 - AO^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2$.

Бундан: $a^2 = \frac{3}{2}H^2$. Энди a^2 нинг топилган қийматини V нинг ифодасига қўйиб, $V = \frac{\sqrt{3}}{8}H^3$ ни ҳосил қиламиз. Бундан H нинг ифодасини топамиз.

Жавоб. $H = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{3}}}$.

604. а) Тасвирлаш усули. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳамма ёқлари тўғри тўртбурчак бўлиб, тўғри параллелепипедда фақат тўртта ён ёғигина тўғри тўртбурчакдир, асосларда эса параллелограмм ётади. Аммо тўғри бурчакли параллелепипедни тасвирлашда (285-бетдаги 78-чизмага қаранг) асосини ҳам параллелограмм кўринишида тасвирлашга мажбурмиз. Шунинг учун тўғри бурчакли параллелепипеднинг чизмаси тўғри параллелепипеднинг чизмасидан ҳеч нарсаси билан фарқ қилмайди ва бу ҳол чизмадан фойдаланишда қўшимча қийинчиликлар туғдиради. Чизмадаги параллелограммнинг ўткир бурчаги ҳақиқатан ҳам тасвирланаётган фигурада ўткир бурчак эканлигини эсда тутиш керак. Янада очиқроқ бўлиши учун бу бурчакни чизмада, 83-чизмадаги каби, жуда ўткир қилиб ясаш ва уни албатта ҳарф билан белгилаш тавсия этилади (бизнинг мисолда α ҳарфи билан белгиланган).



83-чизма.

б) Ечиш. Тўғри параллелепипедда диагоналлар (ҳаммаси тўртта) жуфт-жуфт ҳолда бир-бирига тенг: $A_1C = AC_1$ ва $BD_1 = B_1D$ (83-чизмада AC_1 ва DB_1 диагоналлар ўтказилмаган). $ABCD$ асоснинг ўткир бурчаги $\angle DAB = \alpha$ бўлсин. Унда $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ ўтмас бурчак ва $AC > BD$ бўлади. Демак, параллелепипеднинг кичик диагонали BD_1 (чунки $BD_1^2 = H^2 + BD^2$ бўлиб, $A_1C^2 = H^2 + AC^2$; демак, $BD_1^2 < A_1C^2$). (Масалада берилган $BD_1 = AC$ шартидан H ни топа оламиз.) BDD_1 учбурчакдан:

$$H^2 = BD_1^2 - BD^2 = AC^2 - BD^2.$$

ABD учбурчакдан:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

ABC учбурчакдан эса:

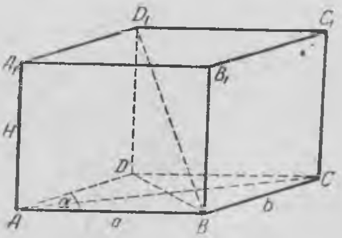
$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha).$$

Демак, $H^2 = 4ab\cos\alpha$.

Жавоб. $V = 2\sin\alpha\sqrt{(ab)^3\cos\alpha}$.

605. Асосининг катта томонини (84-чизмадаги *AB* томонни) *a* ҳарфи билан, кичик (*BC*) томонни *b* ҳарфи билан белгилаймиз. Шартга кўра $a + b = 9$ (*см*). Асоснинг *a* ва *b* томонларини ҳамда ўткир бурчак α ни топиш учун асоснинг диагоналларини ҳисоблаймиз. Бундан олдинги масалани ечишда исбот этилганига кўра, параллелепипеднинг кичик диагонали $[BD_1 = \sqrt{33}$ (*см*)$]$ асоснинг *BD* диагоналига проекцияланади. Шунинг учун $BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2 = (\sqrt{33})^2 - 4^2 = 17$ (*см*^{2}).

Худди шунинг каби $AC^2 = 65$ (*см*^{2}) эканлигини топамиз. Шундай қилиб,



84-чизма.

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 17; \quad a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = 65.$$

Бу тенгламаларни қўшиб $a^2 + b^2 = 41$ эканлигини топамиз. Бу тенгламани масаланинг шартида берилган $a + b = 9$ тенглама билан бирликда ечиб, $a = 5$ ва $b = 4$ ни топамиз (*a* ҳарфи билан асоснинг катта томонини белгилаган эдик).

Тенгламаларни бир-биридан айирсак, $4ab\cos\alpha = 48$, яъни

$$\cos\alpha = \frac{48}{4\cdot5\cdot4} = 0{,}6.$$

Демак,

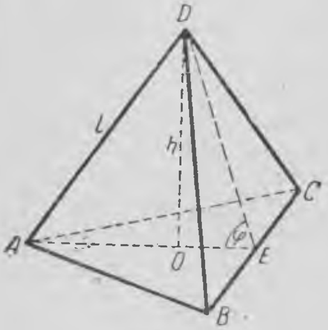
$$S_{\text{асос}} = ab\sin\alpha = 4\cdot5\cdot0{,}8 = 16 \text{ см}^2.$$

Жавоб. $V = 64$ *см*^{3}, $S_{\text{тўла}} = 104$ *см*^{2}.

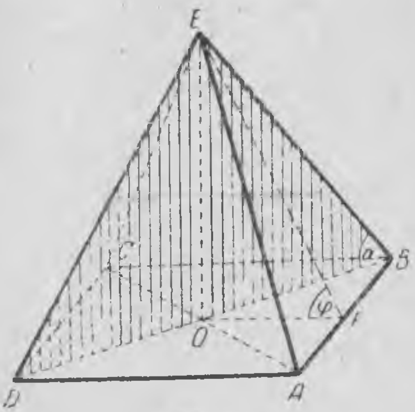
606. а) Тасвирлаш усули. *O* нуқтани ясаш **603**-масалада айтилган (288-бетдаги 82-чизма). *BC* қиррадаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчагини ясаш учун (85-чизма) *BC* кесманинг ўртаси *E* нуқтани *D* ва *A* нуқталар билан туташтирамиз. *E* нуқта қирра ўртасининг тасвиридир; *CDB* ва *CAB* учбурчаклар (аслида) тенг ёнли бўлгани учун *DE* ва *AE* кесмалар *BC* га перпендикулярдир, яъни $\angle DEA = \varphi$ — изланган чизиқли бурчакдир. Пирамиданинг $DO = h$ баландлиги *DEA* текисликда ётади.

б) Ечиш. DEO учбурчакдан $\operatorname{tg}\varphi = \frac{OD}{OE}$, бунда $OD = h$, $OE = \frac{1}{2}AO$ (медианалар $1:2$ нисбатда бўлинади). AO ни AOD учбурчакдан топамиз, бунда $AD = l$.

Жавоб. $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$.



85-чизма.



86-чизма.

607. α бурчак OBE бурчак билан ўлчанади (86-чизма), чунки OB — пирамида BE қиррасининг асос текислигидаги проекцияси. AB қиррадаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги φ ни ясаш учун AB томоннинг ўртаси F нуқтани O ва E нуқталар билан туташтирамиз (606-масалага қаранг). $S_{\text{асос}} = a^2 = \frac{d^2}{2}$ бўлганликдан, V ни ҳисоблаш учун $H = OE$ ва $d = BD$ ни топиш керак. OBE учбурчакдан $H = \frac{d}{2}\operatorname{tg}\alpha$ ва, шартга кўра $\frac{d}{2}H = S$. Бу тенгликларни бир-бирига кўпайтириб, сўнгра уларни ҳадма-ҳад бўлиб, шуни топамиз:

$$H^2 = S\operatorname{tg}\alpha \quad \text{ва} \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2 = S\operatorname{ctg}\alpha.$$

Демак,

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{асос}}\cdot H = \frac{2}{3}\cdot S^{\frac{3}{2}}\operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}}\alpha.$$

φ бурчакни OFE учбурчакдан топамиз, унда

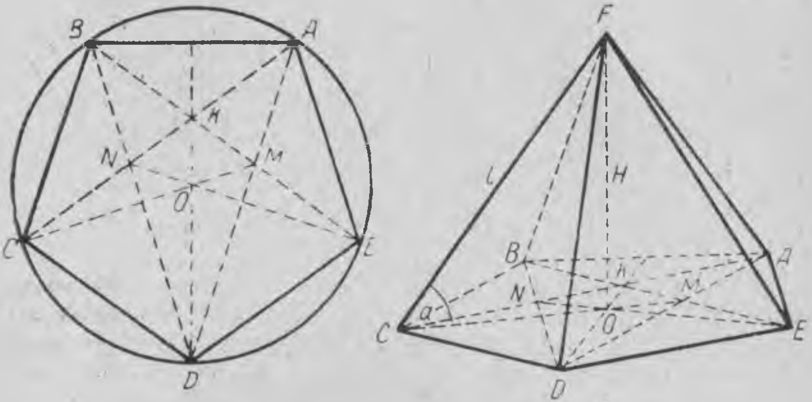
$$OF = \frac{a}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OE}{OF} = H : \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{2} = \sqrt{S \operatorname{tg}\alpha} : \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{S \operatorname{ctg}\alpha} = \sqrt{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

Жавоб. $V = \frac{2}{3} S^{\frac{3}{2}} \operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}} \alpha; \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2} \operatorname{tg}\alpha.$

608. а) Тасвирлаш усули. Пирамиданинг асоси мунтазам бешбурчак ($180° (n - 2) = 540°$ тенгламадан $n = 5$ эканлигини аниқлаймиз). Мунтазам $ABCDE$ бешбурчакда (87-*а* чизма) ҳар бир диагонал (масалан, AD) бошқа ҳар бир диагонал (масалан, BE) билан чет ва ўрта нисбатларда бўлинади. Шунинг учун

$$DM = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} AD \approx 0{,}6\, AD$$



а) б)

87-чизма.

Бундан ташқари ҳар бир диагонал томонларнинг бирига параллел (масалан, $AD \parallel BC$). O марказ CM билан EN нинг кесишиш нуқтасида ётади. Шунинг учун мунтазам бешбурчакнинг тасвирини қуйидагича ясаш мумкин.

Ихтиёрий ABD учбурчакни ясаймиз (87-*б* чизма). AD ва BD томонларини M ва N нуқталар билан чет ва ўрта нисбатда — тахминан

$$AM : MD = 2 : 3$$

нисбатда бўламиз. Бунинг учун бир томонни бўлиш ва $MN \parallel AB$ чизиш кифоя. Сўнгра $AE \parallel BD$ ўтказиб, уни BM тўғри чизиқнинг давоми билан бирор E нуқтада кесишгунча давом эттирамиз. C нуқта ҳам шу хилда ясалади. O марказнинг тасвири CM ва EN чизиқларнинг кесишиш нуқтасида бўлади.

б) Ечиш. COF учбурчакда $\angle OCF = \alpha$ ва $CF = l$,

$$H = OF = l\sin\alpha;\ OC = l\cos\alpha$$

эканлигини аниқлаймиз. Асоснинг юзи

$$S = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot OC\cdot OD\cdot\sin\angle COD = \frac{5}{2}\cdot OC^2\cdot\sin 72^\circ =$$
$$= \frac{5}{2}l^2\cos^2\alpha\sin 72^\circ.$$

Жавоб. $V = \frac{1}{3}SH = \frac{5}{6}l^3\sin 72^\circ\cos^2\alpha\sin\alpha.$

609 1). α бурчакни топиш учун COF учбурчакни кўздан кечирамиз (88-чизма), унда $FC = CB = a$ (шартга кўра CBF учбурчак тенг томонли). OC томони (ташқи чизилган доиранинг радиуси) COU учбурчакдан a орқали ифода қилинади. Бу учбурчакда COU бурчак 36° га тенг ва

$$CU = \frac{a}{2}.$$

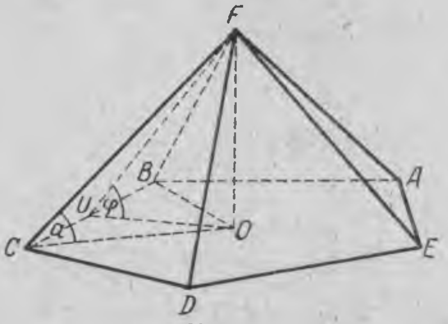
COU учбурчакдан:

$\sin\ 36^\circ = \frac{a}{2} : OC$ ёки

$$OC = \frac{a}{2\sin 36^\circ}.$$

Шунинг учун

$$\cos\alpha = \frac{OC}{CF} = \frac{1}{2\sin 36^\circ}.$$



88-чизма.

φ бурчак OUF учбурчакдан топилади; $FU = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (томони a бўлган тенг томонли учбурчакнинг баландлиги), COU учбурчакдан:

$$OU = \frac{a\operatorname{ctg} 36^\circ}{2}.$$

FOU учбурчакдан:

$$\cos\varphi = \frac{OU}{FU} = \frac{a\operatorname{ctg} 36^\circ}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\sqrt{3}}.$$

Жавоб. $\alpha = \arccos\frac{1}{2\sin 36^\circ},\ \varphi = \arccos\frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\sqrt{3}}.$

---

1) Мунтазам бешбурчакни тасвирлаш ҳақида бундан олдинги масалага қаранг.

610. 88-чизмада $BC = a$, $OU = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$ эканлигини аниқлаган эдик. Демак, n-бурчакли пирамида асосининг юзи

$$S = \frac{na}{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

$V = \frac{1}{3}SH$ формуладан

$$H = \frac{3V}{S} = \frac{12V}{na^2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

эканлигини топамиз. Изланаётган OCF бурчакни α билан белгиласак, унда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{OC},$$

бунда $OC = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

Жавоб. $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{24V\sin\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}{na^3}$.

611-ва ундан кейинги масалаларга доир дастлабки изоҳлар.

Агар пирамиданинг ҳамма ён қирралари асос текислиги билан бир хил бурчак ташкил этса, унда: 1) пирамиданинг ҳамма ён қирралари тенг; 2) пирамида асосининг атрофида ташқи айлана чизиш мумкин; 3) пирамиданинг баландлиги шу айлананинг марказидан ўтади.

Исбот. SA, SB, SC ва бошқа қирралар (89-чизма) $ABCDE$ текислиги билан ўзаро тенг бурчаклар ҳосил қилган деб фараз этайлик. Тўғри бурчакли AOS ва BOS учбурчакларни қарайлик (OS — пирамиданинг баландлиги). Бу учбурчакларда баландлик умумий, OAS ва OBS ўткир бурчаклари тенг (чунки бу бурчаклар SA ва SB қирраларнинг асос текислиги билан ташкил этган бурчагини кўрсатади). Демак, $AS = BS$ бўлади. $BS = CS$ ва бошқа қирраларнинг бир-бирига тенглигини ҳам шу хилда исбот этамиз. Яна шу AOS ва BOS учбурчакларда $AO = OB$.

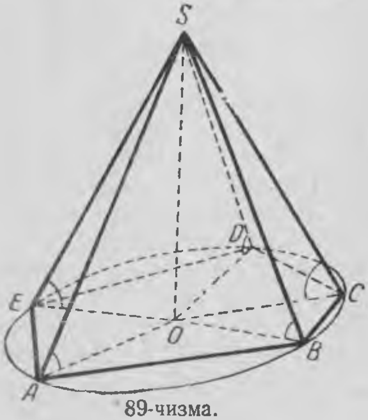
$OB = OC$ ва ҳоказоларни ҳам шу хилда исбот этамиз. Демак, маркази O нуқтада ва радиуси OA кесмага тенг айлана B, C ва ҳоказо нуқталардан ўтади.

611. Ҳозирги исботимизга биноан EO баландлик ташқи чизилган айлананинг марказидан, яъни диагоналлар кесишган O нуқтадан ўтади (90-чизма). Ҳар қандай параллелограммнинг юзи параллелограмм диагоналлари билан шу диагоналлар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг. Шунинг учун $S_{\text{асос}} = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha$.

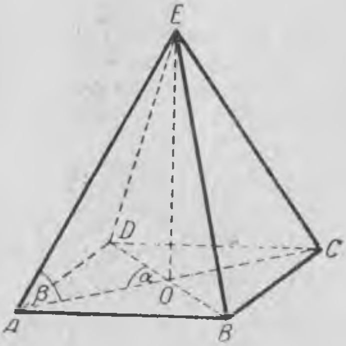
AOE учбурчакдан:

$$H = AO\cdot \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Жавоб. $V = \frac{1}{12}b^3 \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta.$



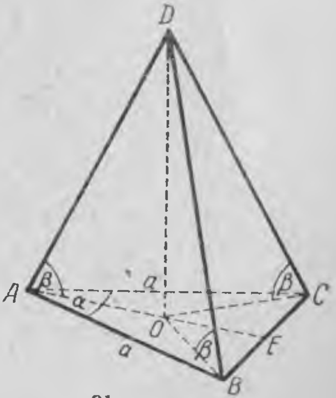
89-чизма.



90-чизма.

612. а) Тасвирлаш усули. Пирамиданинг асоси, 294-бетда баён этилган дастлабки изоҳга биноан, тенг ёнли *ABC* учбурчакка ташқи чизилган айлананинг марказидан ўтиши керак (91-чизма). Аммо бу учбурчак учидаги $\alpha = CAB$ бурчак ихтиёрий бўлгани учун, *O* марказнинг тасвирини *AE* кесманинг (*E* нуқта *BC* томоннинг ўртаси) ҳар қандай нуқтасида, ҳатто унинг *E* нуқтадан ўтиб кетадиган давомида ҳам олиш мумкин. (Кейинги ҳолда α бурчак аслида ўтмас бўлади.)

б) Ечиш. *DO* баландликни *AOD* учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда $\angle OAD = \beta$ бўлиб, $AO = R$ эса ташқи чизилган айлананинг радиуси. Синуслар теоремасига мувофиқ *BC* томон ташқи чизилган айлананинг диаметри $2R$ билан шу *BC* томонга қарши ётган α бурчак синусининг кўпайтмасига тенг. Демак, $R = \frac{BC}{2\sin\alpha}$. Энди $\frac{BC}{2} = BE$ нинг миқдори *ABE* учбурчакдан топилади $\left(\frac{BC}{2} = a\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Демак,



91-чизма.

$$H = R\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha}.$$

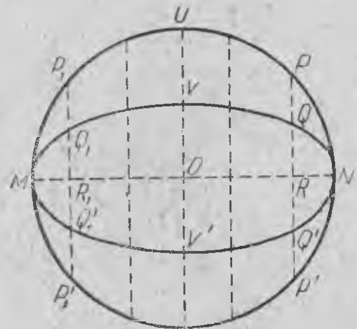
Асоснинг юзи

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha.$$

Жавоб. $V = \dfrac{a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{6}$.

613. а) Тасвирлаш усули. Айлана параллел проекцияда эллипс шаклида тасвирланади.

Эллипсни қуйидагича ясаш мумкин. Айлананинг бирор MN диаметрини чизамиз (92-чизма) ва айлананинг ихтиёрий P нуқтасидан MN га перпендикуляр қилиб PP' тўғри чизиқ ўтказамиз. R нуқта PP' нинг MN билан кесишиш нуқтаси бўлсин. RP кесмани бирор нисбатда (масалан, икки марта) қисқартирамиз ва қисқартирилган RQ кесмани шу PP' тўғри чизиқда R нуқтанинг иккала томонида ажратамиз ($RQ = RQ'$). Айлананинг бир қанча нуқтасидан перпендикулярлар тушириб, худди шу каби эллипснинг бир қанча нуқталарини ҳосил қиламиз.



92-чизма.

Эллипс MN ўққа *(эллипснинг катта ўқи)* ва O марказ орқали MN га перпендикуляр қилиб ўтказилган UU' тўғри чизиққа нисбатан симметрик (VV' — *эллипснинг кичик ўқи*). O нуқта эллипснинг *маркази* дейилади.

Тўғри тўртбурчак атрофига ташқи чизилган айланани тасвирлаш учун аввал ташқи чизилган айланани тасвирловчи $ABCD$ эллипсни чизиб олиш қулайроқдир (93-чизма). Бунда эллипснинг катта ўқини оғма ҳолда жойлаш яхшироқ бўлади[1]. Тўғри тўртбурчакнинг бир томонини эллипснинг ихтиёрий бир AB ватари билан тасвирлаш мумкин ва бу ватарни горизонтал вазиятда чизиш мақсадга мувофиқдир. Эллипснинг маркази O нуқта орқали BD ва AC тўғри чизиқларни ўтказамиз. Ҳосил бўлган $ABCD$ тўртбурчак тўғри тўртбурчакнинг тасвиридир.

б) Ечиш. Ички чизилган CAB бурчакда α° бор, чунки у $(2\alpha)^\circ$ ли BC ёйга тиралади. BAC учбурчакдан $AB = 2R \cos \alpha$; $BC = 2R \sin \alpha$ эканлигини аниқлаймиз. Демак,

$$S = 2(AB + BC) H = 4R (\cos \alpha + \sin \alpha) H.$$

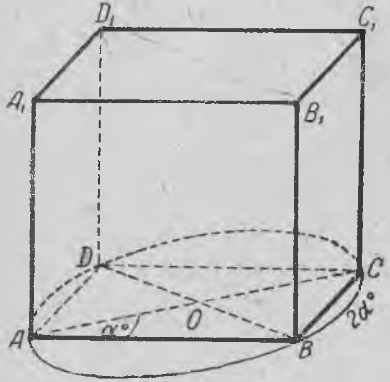
---

[1] 93-чизмада эллипснинг катта ўқи тўғри тўртбурчакнинг AC диагонали қилиб олинган. Бу эса чизмани соддалаштиради, аммо бу мажбурий эмас.

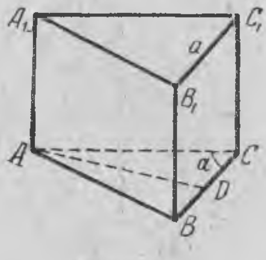
Бундан

$$H = \frac{S}{4R(\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

Энди $V = AB \cdot BC \cdot H$ ни топамиз. Айлананинг $(2\alpha)^\circ$ ли ёйини тўғри тўртбурчакнинг кичик томони тортиб туради, деган шарт ортиқча.



93-чизма.



94-чизма.

Жавоб. $V = \frac{SR\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{SR\sin 2\alpha}{\sqrt{8}\cos(45^\circ - \alpha)}.$

614. Асоснинг юзи $S = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{tg}\alpha$ (94-чизма). Шартга кўра:

$$S_{\text{ён}} = 2S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Иккинчи томондан,

$$S_{\text{ён}} = \left(a + 2\cdot\frac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}\right)H = \frac{2a\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}H.$$

$S_{\text{ён}}$ учун топилган бу икки ифодани тенглаштириб

$$H = \frac{a}{4}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

эканлигини аниқлаймиз.

Жавоб. $V = \frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$

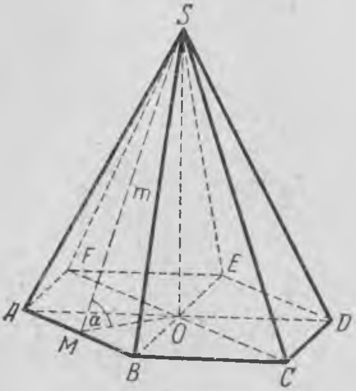
615 [1]. AB томоннинг ўртаси M нуқтани O ва S нуқталар билан туташтирамиз (95-чизма), OMS бурчак — икки ёқли α

---

[1] Мунтазам олтибурчакни тасвирлаш ҳақида 295-бетдаги 598-масалага берилган изоҳга қаранг.

бурчак учун чизиқли бурчагидир (606-масалага қаранг). Демак,

$$OM = SM\cos\alpha = m\cos\alpha.$$



95-чизма.

AOM бурчак 30° га тенг. *AOM* учбурчакдан:

$$AM = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot OM = \frac{\sqrt{3}}{3}m\cos\alpha.$$

Сўнгра

$$S_{\text{асос}} = 6\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}$$

ва

$$S_{\text{ён}} = 6\,\frac{a}{2}\cdot m$$

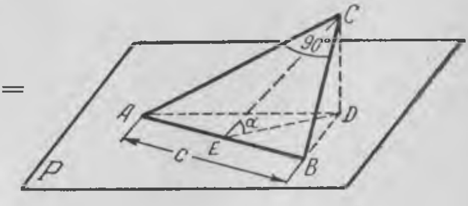
эканлигини аниқлаймиз. $\frac{a}{2}$ нинг топилган қийматини ўрнига қўйсак,

$$S_{\text{тўла}} = S_{\text{асос}} + S_{\text{ён}} = 2\sqrt{3}\,m^2\cos\alpha\,(1+\cos\alpha).$$

Жавоб. $S_{\text{тўла}} = 4\sqrt{3}\,m^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$

616. Масаланинг шартига кўра *AC* ва *CB* оғмалар бир-бирига тенг (96-чизма). Демак, уларнинг проекциялари ҳам тенг: $AD = DB$. Икки ёқли α бурчакнинг чизиқли бурчаги *DEC* бурчакдир (*E* нуқта *AB* томоннинг ўртаси). *ACB* тўғри бурчакли учбурчак бўлгани учун (тўғри бурчаги *C* учида) $CE = AE = \frac{c}{2}$. Демак, $ED = \frac{c}{2}\cos\alpha$. Ниҳоят,

$$AD = BD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \frac{c}{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}.$$



96-чизма.

Жавоб. $S_{ABD} = \frac{c^2\cos\alpha}{4}$,

$$AB + BD + AD = c\,(1 + \sqrt{1+\cos^2\alpha}).$$

617-ва ундан кейинги масалаларга доир дастлабки изоҳлар.

Агар пирамиданинг ҳамма ён ёқлари асос текислиги билан бир хил α бурчак ташкил этса ва баландлиги асоснинг бирор O нуқтасидан ўтса, унда:

1) ҳамма ёқларнинг баландликлари ўзаро тенг;

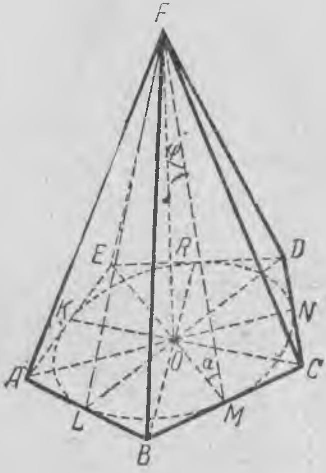
2) пирамиданинг асосига ички айлана чизиш мумкин ва бу айлананинг маркази O нуқта бўлади:

3) $S_{асос} = S_{ён} \cos \alpha$.

Исбот. 1) BFC ён ёқнинг FM баландлигини ўтказамиз (97-чизма) ва M нуқтани O нуқта билан туташтирамиз. OM кесма FM нинг $ABCDE$ текисликдаги проекцияси. Демак, у BC га перпендикуляр („уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан“). Демак, OMF бурчак икки ёқли α бурчакнинг чизиқли бурчагидир. OMF учбурчакдан $FM = \frac{OF}{\sin \alpha}$; $OM = OF. \operatorname{ctg} \alpha$. Агар F учидан ён ёқларнинг FL, FN баландликларини ва бошқа ён ёқларнинг баландликларини ўтказсак, унда худди шу йўл билан бу баландликларнинг ҳаммаси $\frac{OF}{\sin \alpha}$ га тенглигини топамиз,

2) OL, OM ва ҳоказо кесмалар мос равишда AB, BC ва ҳоказо томонларга перпендикуляр ва уларнинг ҳар бири $OF \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ га тенг. Шунинг учун O нуқтани марказ қилиб, OM радиус билан айлана чизилса, унда бу айлана $ABCDE$ асосга ички чизилган бўлади.

3) Пирамида баландлигининг асоси бўлган O нуқта, исботимизга асосан ички чизилган айлананинг марказидир.



97-чизма.

$$4)\ S_{OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot OM = \frac{1}{2} BC (FM \cdot \cos \alpha) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} BC \cdot FM \right) \cos \alpha = S_{FBC} \cos \alpha.$$

Худди шу йўл билан $S_{OAB} = S_{FAB} \cos \alpha$ ва ҳ. к. эканлигини топамиз. Бу $S_{асос} = S_{ён} \cos \alpha$ тенгликларни бир-бирига қўшсак, ҳосил бўлади.

617. Ҳар қандай пирамида FO аландлигининг (97-чизма) BFC ён ёғидаги проекцияси FM тўғри чизиқда ётувчи кесма бўлади. Шунинг учун $\angle OFM = \varphi$. Демак, $\alpha = 90° - \varphi$, яъни ҳамма ён ёқлар асос текислиги билан бир хил бурчак ташкил этади. Исбот қилганимизга кўра

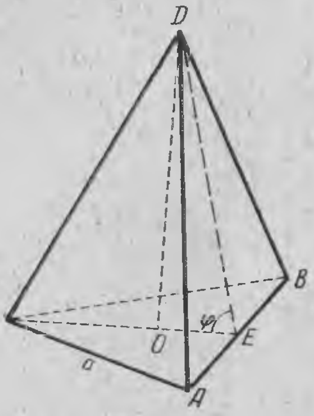
$$S_{ён} = \frac{Q}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\sin \varphi}.$$

Жавоб.

$$S_{\text{ён}} = \frac{Q}{\sin\varphi};\ S_{\text{тўла}} = Q\left(1+\frac{1}{\sin\varphi}\right) = \frac{2Q\cos^2\left(45^\circ-\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi}.$$

618. DOE учбурчакдан (98-чизма) [1]

$$H = OE\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}\cdot CE\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$



98-чизма.

Демак,

$$S_{\text{асос}} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\ \text{ва}\ S_{\text{ён}} = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos\varphi}$$

(ўтган масалага доир дастлабки изоҳга қаранг).

Жавоб.

$$V = \frac{a^3\operatorname{tg}\varphi}{24};$$

$$S_{\text{тўла}} = \frac{a^2\sqrt{3}(1+\cos\varphi)}{4\cos\varphi} = \frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi}.$$

Изоҳ. Ҳамма ён ёқлари асос текислиги билан бир хил φ бурчак ҳосил қилувчи пирамида тўла сиртининг умумий ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_{\text{тўла}} = S_{\text{асос}} + S_{\text{ён}} = S_{\text{асос}}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{2S_{\text{асос}}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

619. Бундан олдинги масалада топилган $S_{\text{тўла}} = \frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi}$ формуладан фойдаланамиз.

Жавоб. $a = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{2S\cos\alpha}{\sqrt{3}}}.$

620. а) Тасвирлаш усули. Ромбнинг қарама-қарши ётган томонларидаги L ва N уриниш нуқталарини туташтирувчи LN тўғри чизиқ (99-*а* чизма) айлана марказидан ўтади. Шунинг учун аввал айланани тасвирловчи эллипсни чизиб (99-*б* чизма), O марказ орқали NL ва KM тўғри чизиқларни ўтказамиз[2]. Уларнинг N, L, K, M учлари орқали эллипсга уринувчи тўғри чизиқлар ўтказамиз. Ромбни тасвир этувчи $ABCD$ параллелограмм ҳосил қиламиз.

---

[1] Тасвирлаш усули ҳақида 288-бетдаги 82-чизмага қаранг.

[2] Эллипсни чизиш ҳақида 296-бетга (613-масала) қаранг.

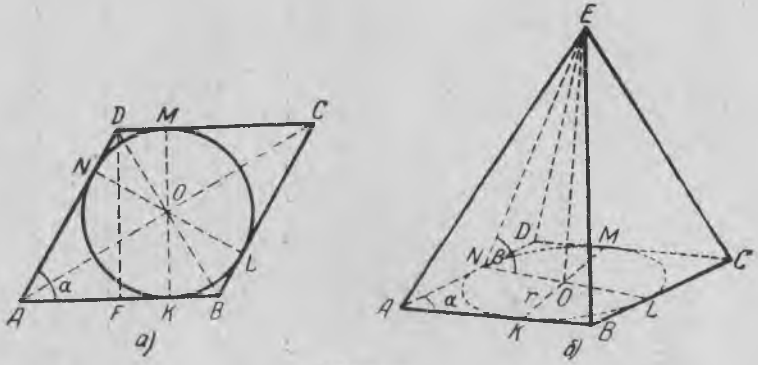
б) Ечиш. $S_{асос}$ ни топиш учун ромбнинг DF баландлигини ва AB томонини топамиз. 99-*а* чизмадан $DF = 2OK = 2r$ ни топамиз; A бурчаги α га тенг бўлган AFD учбурчакдан:

$$a = AD = \frac{DF}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

Сўнгра

$$S_{асос} = AB \cdot DF = a \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$$

эканлигини аниқлаймиз. ONE учбурчакда (99-*б* чизма) $ON = r$ ва $\angle ONE = \beta$; бу учбурчакдан H ни топамиз. $S_{тўла}$ ни топишда бундан олдинги масалага доир изоҳдан фойдаланамиз.



99-чизма.

Жавоб. $V = \frac{4r^3 \operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha}$; $S_{тўла} = \frac{8r^2\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta}$.

621. 618-масалага доир изоҳдан фойдаланилсин.

Жавоб. $\varphi = \arccos\frac{S}{\sigma}$.

622. а) Тасвирлаш усули[1]). Кесим — A_1D_1CB параллелограммдир (100-чизма). A_1D_1CB кесимнинг асос текислиги билан ташкил этган икки ёқли бурчагининг чизиқли бурчагини тасвирлаш учун $ABCD$ ромбнинг баландлигини тасвирловчи DM тўғри чизиқ ўтказамиз. Аслида DM ва DD_1 кесмалар AD қиррага перпендикуляр бўлгани учун DD_1NM текислик AD қиррага перпендикулярдир, демак, шу текислик BC қиррага ҳам перпендику-

---

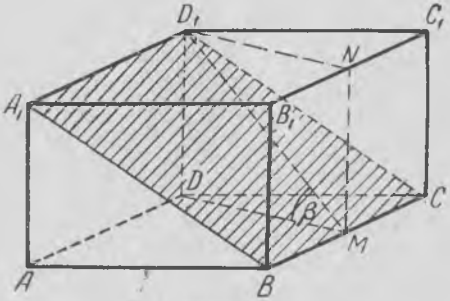
[1]) Тўғри параллелепипедни тасвирлаш ҳақида 289-бетга (604-масала) қаранг.

лярдир. Бу текислик кесим текислигини MD_1 тўғри чизиқ бўйича кесади, бунда $\angle D_1MD = \beta$ бўлади.

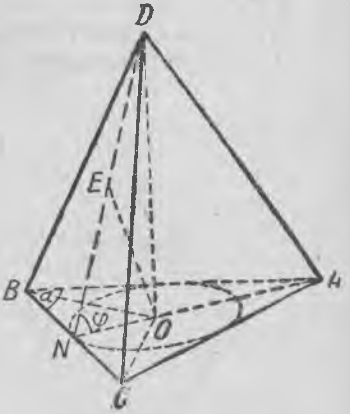
б) Ечиш. Ён сирт бир-бирига тенг тўртта тўғри тўртбурчакдан иборат (чунки параллелепипеднинг асоси ромб). A_1D_1DA ён ёқнинг юзи $S_1 = A_1D_1 \cdot DD_1$, кесимнинг юзи $Q = A_1D_1 \cdot D_1M$.

DMD_1 учбурчакдан $DD_1 = D_1M \cdot \sin\beta$, шунинг учун $S_1 = Q\sin\beta$.

Жавоб. $S_{\text{ён}} = 4Q\sin\beta$.



100-чизма.



101-чизма.

623. 617-масалага берилган дастлабки изоҳ эътиборга олинсин. Шартга кўра $EO = d$ (101-чизма). E нуқта (NOD учбурчак ND гипотенузасининг ўртаси) NOD учбурчак атрофига ташқи чизилган айлананинг марказидир. Шунинг учун $ND = 2\cdot ED = 2\cdot EO = 2d$. Бурчакларидан бири $\angle OND = \varphi$ бўлган DON учбурчакдан асосга ички чизилган доиранинг радиуси $ON = r$ ни топамиз: $r = 2d\cdot\cos\varphi$. Пирамида асосининг юзи $S_{\text{асос}}$ ни топиш учун BN (тенг ёнли ABC учбурчак асосининг ярми) ва AN (шу учбурчакнинг баландлиги) ни топамиз. Ички чизилган доиранинг O маркази α га тенг ABC бурчакнинг биссектрисасида ётади, яъни $\angle OBN = \frac{\alpha}{2}$.

BON учбурчакдан $BN = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ эканлигини топамиз. ABN учбурчакдан $AN = BN\cdot\operatorname{tg}\alpha$ эканлигини топамиз. Демак,

$$S_{\text{асос}} = \frac{1}{2} BC\cdot AN = BN\cdot AN = BN^2\cdot\operatorname{tg}\alpha = r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha =$$

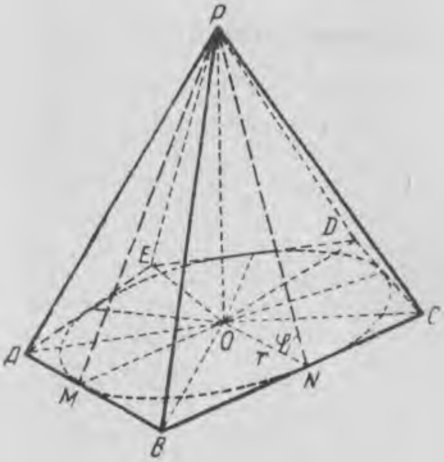
$$= 4d^2\cos^2\varphi\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Бундан (**618**-масалага қаранг):

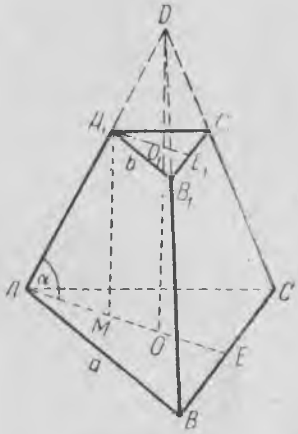
$$S_{\text{тўла}} = \frac{2S_{\text{асос}} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Жавоб. $S_{\text{тўла}} = 8d^2 \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$

624. 617-масалага берилган дастлабки изоҳ[1] эътиборга олинсин. Пирамиданинг баландлигини ONP учбурчакдан топамиз (102-чизма).



102-чизма.



103-чизма.

$H = r \operatorname{tg} \varphi$. Агар a_1, a_2 ва ҳ. к.— асоснинг томонлари бўлса, унда

$$S_{\text{асос}} = S_{AOB} + S_{BOC} + \ldots = \frac{1}{2} AB \cdot OM +$$

$$+ \frac{1}{2} BC \cdot ON + \ldots = \frac{1}{2} a_1 r + \frac{1}{2} a_2 r + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} r (a_1 + a_2 + \ldots) = \frac{1}{2} r \cdot 2p = rp.$$

Жавоб. $V = \frac{r^2 p \operatorname{tg} \varphi}{3}.$

---

[1] Эллипсни чизиш (асосга ички чизилган доиранинг тасвири) ҳақида 296-бетга қаранг (613-масала).

625. а) Тасвирлаш усули. Уч бурчакли мунтазам $DABC$ пирамиданинг тасвирини чизиб (103-чизма)[1], томонлари ABC учбурчакнинг томонларига мос равишда параллел бўлган $A_1B_1C_1$ учбурчакни ясаймиз. $A_1B_1C_1$ учбурчак кесик пирамиданинг устки асосини тасвирлайди. Устки асос марказининг тасвири O_1 пирамида баландлиги DO нинг $A_1B_1C_1$ учбурчак медианаларидан бири A_1E_1 билан кесишиш натижасида ҳосил бўлади. OO_1 га параллел ва AE медианадаги M нуқтада туталувчи A_1M кесма кесик пирамиданинг A_1 нуқтадан туширилган баландлигини тасвирлайди. (DA_1, DB_1, DC_1 ва DO_1 кесмаларини ўчириш мумкин.)

б) Ечиш. Кесик пирамиданинг ҳажми:

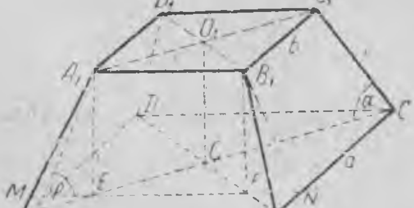
$$V = \frac{H}{3}\left(Q + q + \sqrt{Qq}\right),$$

бунда Q ва q ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг юзлари, $Q = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; $q = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$. Кесик пирамиданинг баландлиги $H = A_1M_1$ ни AA_1M учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда $\angle MAA_1 = \alpha$ ва $AM = AO - A_1O_1$. Аммо $AO = ABC$ учбурчакка, A_1O_1 эса $A_1B_1C_1$ учбурчакка ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари. Шунинг учун $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ва $A_1O_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Демак,

$$AM = \frac{a-b}{\sqrt{3}};\ H = \frac{a-b}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\alpha.$$

Жавоб. $V = \frac{1}{12}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha$.

626. а) Тасвирлаш усули. Кесик пирамида бундан олдинги масалада айтилганча тасвирланади. Изланган икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчагини тасвирлаш учун OO_1 га параллел қилиб A_1E ва B_1F кесмаларни ўтказамиз (104-чизма) ва уларни AC ҳамда BD диагоналлар билан кесишгунча давом эттирамиз. EF тўғри чизиқни ўтказамиз; бу чизиқ AB га параллел бўлади ва AD ҳамда BC қирраларни M ва N нуқталарда кесади. MA_1B_1N текислик AD қиррага перпендикуляр, чунки бу текислик шу қиррага перпендикуляр бўлган A_1E_1 ва MN тўғри чизиқлар орқали ўтади. Демак, $EMA_1 = \varphi$ бурчак AD қиррадаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчагидир.



104-чизма.

---

[1] Уч бурчакли мунтазам пирамидани тасвирлаш ҳақида 288-бетга қаранг (82-чизма).

б) Ечиш. MA_1B_1N трапециядан: $ME = \frac{a-b}{2}$. Кесик пирамиданинг баландлигини AEA_1 учбурчакдан топамиз, унда $AE = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Шундай қилиб,

$$H = A_1E = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha.$$

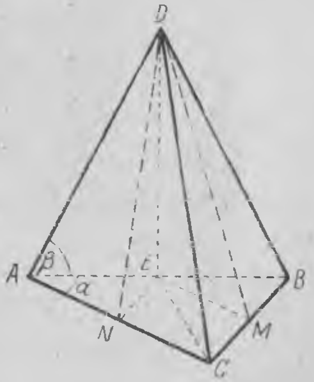
Ҳажмни $V = \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2)$ формуладан топамиз. Изланаётган $\varphi = EMA_1$ бурчакни A_1ME учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда $ME = \frac{a-b}{2}$ (MNB_1A_1 трапециядан). Шундай қилиб:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1E}{ME} = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha : \frac{a-b}{2}.$$

Жавоб. $V = \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{2}}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$.

627. 294-бетдаги **611**-масалага доир дастлабки изоҳни қараб чиқинг. Пирамиданинг баландлиги асосга ташқи чизилган айлананинг марказидан ўтиши керак. Аммо тўғри бурчакли ABC учбурчакда (105-чизма) марказ AB гипотенузанинг ўртаси E нуқтада ётади. Демак, AE, BE ва CE кесмалар AD, BD ва CD ён қирраларнинг асос текислигидаги проекциялари ва $\angle DAE = \angle DBE = \angle DCE = \beta$ бўлади. Пирамиданинг ҳажмини $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC \cdot CB}{2} \cdot DE$ формуладан топамиз. $\triangle ABC$ дан: $AC = c \cos \alpha$, $BC = c \sin \alpha$; $\triangle ADE$ дан: $DE = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta$. Пирамида учидаги текис бурчакларни қуйидагича белгилаймиз:

$$\angle ADB = \theta_1, \quad \angle BDC = \theta_2, \quad \angle ADC = \theta_3.$$



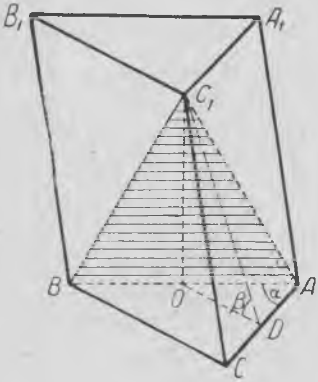
105-чизма.

Бу учбурчаклар тенг ёнли бўлгани учун баландликлари DE, DM ва DN ўзларига мос томонларнинг ўртасидан ўтади. $\triangle ABD$ дан: $\angle \theta_1 = 180° - 2\beta$; $\triangle DBC$ дан: $\sin \frac{\theta_2}{2} = \frac{MB}{BD}$ ва ADC дан: $\sin \frac{\theta_3}{2} = \frac{AN}{AD}$. $\triangle ADE$ дан: $AD = DB = \frac{c}{2 \cos \beta}$; $\triangle ABC$ дан: $MB = \frac{BC}{2} = \frac{c}{2} \sin \alpha$ ва $AN = \frac{AC}{2} = \frac{c}{2} \cos \alpha$.

Жавоб. $V = \frac{c^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta}{24}$,

$$\theta_1 = 180^\circ - 2\beta,$$
$$\theta_2 = 2 \arcsin (\sin \alpha \cos \beta),$$
$$\theta_3 = 2 \arcsin (\cos \alpha \cos \beta).$$

628. C_1ABC пирамиданинг ҳажмини топиш талаб этилади (106-чизма). Унинг ён қирралари бир-бирига тенг бўлгани учун асос текислиги билан бир хил бурчаклар ҳосил қилади (бу теорема 294-бетдаги **611**-масалага доир дастлабки изоҳда исбот этилган теоремага тескари) ва C_1O баландлик ABC учбурчакка ташқи чизилган айлана марказидан ўтади. Бу учбурчак тўғри бурчакли бўлгани учун O нуқта AB гипотенузанинг ўртасида ётади (бундан олдинги масалага қаранг). ODC_1 бурчак (D нуқта AC катетнинг ўртаси) ACC_1A_1 ён ёқнинг асос текислиги билан ташкил этган бурчагини кўрсатади. BC ва AC катетларни



106-чизма.

$$BC + AC = m \text{ ва } BC = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

тенгламалардан топамиз. Булардан

$$AC = \frac{m}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{m \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad BC = \frac{m \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

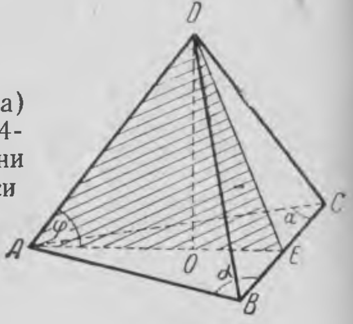
Сўнгра $S_{\text{асос}} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$ ни топамиз. H баландликни DOC_1 учбурчакдан топамиз, бунда $OD = \frac{1}{2}\ BC$ (учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлгани учун).

Жавоб. $V = \frac{1}{12} \frac{m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^3} \operatorname{tg} \beta =$

$$= \frac{m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24 \sqrt{2} \cos^3 (\alpha - 45^\circ)} \operatorname{tg} \beta.$$

629. O нуқта ABC асосга (107-чизма) ташқи чизилган айлананинг маркази (294-бетда **611**-масалага доир дастлабки изоҳни қаранг). $OA = R$ шу айлананинг радиуси Пирамиданинг ҳажми:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC \cdot AE}{2} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AE \cdot DO}{2} \cdot BC =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot Q \cdot BC$$



107-чизма.

$\left(\text{чунки } \frac{AE\cdot DO}{2} = Q\right)$. BC томонни синуслар теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$BC = 2R\sin(180° - 2\alpha) = 2R\sin 2\alpha.$$

$\triangle ADO \sim \triangle ABE$ (чунки $\angle ADO = \angle ABE = \alpha$); демак, $\frac{AO}{AE} = \frac{OD}{BE}$ 1)), бундан: $AO\cdot BE = AE\cdot OD$. Бу ифодага $AO = R$, $BE = \frac{BC}{2}$, $AE\cdot OD = 2Q$ қийматларини қўйиб,

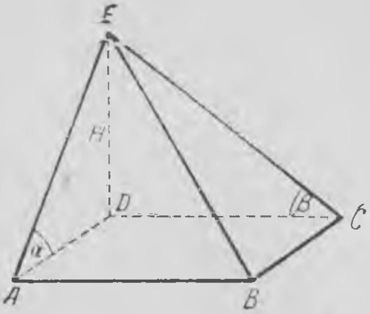
$$\frac{R\cdot BC}{2} = 2Q$$

ҳосил қиламиз. Бу ифодадаги R нинг ўрнига унинг $\frac{BC}{2\sin 2\alpha}$ қийматини қўйиб, BC ни топамиз:

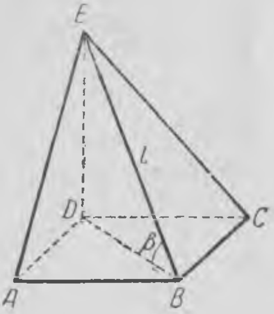
$$BC = \sqrt{8Q\sin 2\alpha}.$$

Жавоб. $V = \frac{1}{3}\cdot(2Q)^{\frac{3}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}2\alpha.$

630. Агар ADE ва CDE ёқлар (108-чизма) асос текислигига перпендикуляр бўлса, унда DE қирра пирамиданинг баландлигидир. DAE бурчак икки ёқли $EABC$ бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади, чунки DAE текислик AB қиррага перпендикулярдир (исбот этинг!). Демак, $\angle DAE = \alpha$; шунга ўхшаш $\angle DCE = \beta$. ADE ва



108-чизма.



109-чизма.

---

1) 107-чизма (бунда $AO < AE$) бу муносабатга мос эмаслиги равшан. Аммо масалада берилган $\varphi = 90° - \alpha$ шартни аниқроқ тасвирловчи чизма унча очиқ бўлмас эди.

CDE учбурчаклардан (бунда $DE = H$) AD ва DC ни топиб, уларни $V = \frac{1}{3} AD \cdot DC \cdot H$ формулага қўямиз.

Жавоб. $V = \frac{1}{3} H^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

631. BDE учбурчакда (109-чизма) $\angle EBD = \beta$ (исбот этинг!). Шу учбурчакдан

$$DE = l \sin \beta \text{ ва } BD = l \cos \beta.$$

Демак, $AD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{l \cos \beta}{\sqrt{2}}$.

ADE учбурчакдан $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2}$ ни топамиз. AE қирранинг асос текислиги билан ҳосил қилган φ бурчаги $\angle DAE$ дан иборатдир (исбот этинг!). ADE учбурчакдан:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DE}{AD}.$$

Жавоб. $DE = l \sin \beta$; $AE = CE = l \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \beta}{2}}$;

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \beta).$$

632. ADB ёқ энг катта юзга эга (110-чизма), чунки унинг баландлиги DE қолган икки ёқнинг DC баландлигидан катта, асослар эса ҳамма ёқларда бир хил. ACD учбурчакдан:

$$AD = \frac{a}{\cos \beta} \text{ ва } H = a \operatorname{tg} \beta.$$

Сўнгра ADE учбурчакдан

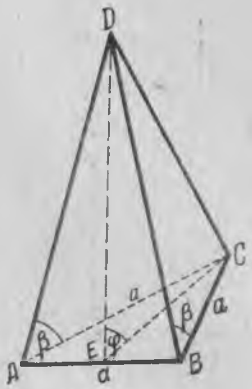
$$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \beta} - \frac{a^2}{4}}$$

эканлигини аниқлаймиз.

ADB ёқнинг асос текислиги билан ташкил этган φ бурчаги $\angle CED$ дан иборатдир (исбот этинг!). DEC учбурчакдан:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{EC},$$

бунда $EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



110-чизма.

Жавоб. $S = \frac{a^2}{4 \cos \beta} \sqrt{4 - \cos^2 \beta}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{3}}$.

633. Кесманинг юзи $S = \frac{1}{2} AB \cdot NM$ (111-чизма). Тўғри бурчакли ACN учбурчакдан (бунда $\angle CAN = 30°$):

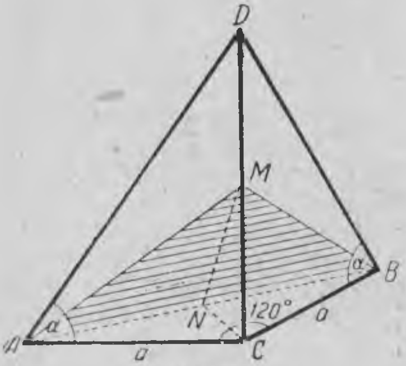
$$AN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \text{ ва } CN = \frac{1}{2} a.$$

NCM учбурчакдан:

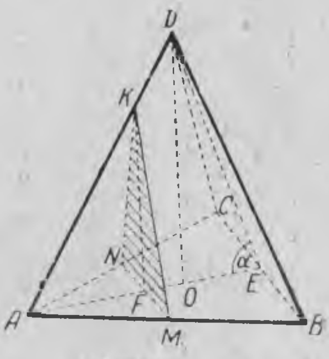
$$MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2},$$

бунда $H = a \operatorname{tg} \alpha$ ни ACD учбурчакдан топиш мумкин.

Жавоб. $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$.



111-чизма.



112-чизма.

634. а) Тасвирлаш усули[1]. ABC асосга перпендикуляр, асоснинг AB ва AC томонларини тенг иккига бўлувчи кесимни (112-чизма) тасвирлаш учун MN ўрта чизиқни ўтказамиз. MN нинг AE медианани кесиш нуқтаси F дан OD баландликка параллел қилиб FK чизиқни ўтказамиз. Изланган кесим NMK бўлади. Ҳақиқатан, NMK текислик ABC текисликка перпендикуляр FK чизиғи орқали ўтади (демак, NMK текислик ABC текисликка перпендикуляр).

Икки ёқли α бурчак AED бурчак билан ўлчанади (исбот этинг!). AED текислик KF тўғри чизиқ орқали ўтади, чунки K ва F нуқталар AED текисликда ётади.

---

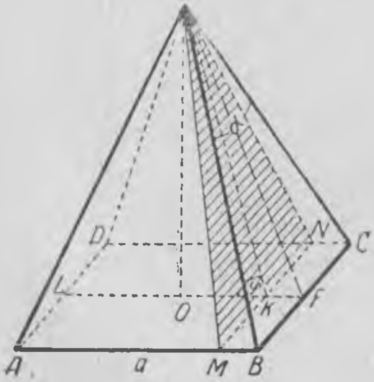
[1] Мунтазам уч бурчакли пирамидани тасвирлаш ҳақида 288-бетдаги 603-масалага қаранг.

б) Ечиш. $KANM$ пирамиданинг асоси учун AMN учбурчакни оламиз. Унинг S юзи ABC учбурчак юзининг $\frac{1}{4}$ қисмини ташкил этади, яъни $S = \frac{1}{16}a^2\sqrt{3}$. Энди AFK ва AOD учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб, KF баландликни OD орқали ифодалаймиз. AF кесма $\frac{3}{4}$ AO га тенг бўлгани учун $\left(\text{чунки } AF = \frac{1}{2}\ AE;\ AO = \frac{2}{3}\ AE\right)$, $KF = \frac{3}{4}\ OD$. Энди OD кесмани DOE учбурчакдан топамиз; бу учбурчакда

$$OE = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ ва } \angle DEO = \alpha.$$

Жавоб. $V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{128}$.

635. Асос текислиги кесим текислиги билан кесишадиган MN тўғри чизиқ (113-чизма) асоснинг BC томонига параллел φ бурчакни ясаш учун $OF \parallel AB$ ўтказамиз ва OF билан MN чизиқларнинг кесишиш нуқтаси K ни F нуқта билан туташтирамиз. Унда $\angle OKE = \varphi$ (буларнинг ҳаммасини исбот этинг!). Кесим юзи $S = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot KE$, бунда $MN = a$ ва $KE = \frac{H}{\sin \varphi}$. Бунда H баландлик EOF учбурчакдан топилади; бу учбурчакда $OF = \frac{a}{2}$ ва $FE = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (EBF учбурчакдан). Шундай қилиб



113-чизма.

$$H = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\sin \alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Жавоб. $S = \frac{a^2\sqrt{\cos \alpha}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi}$.

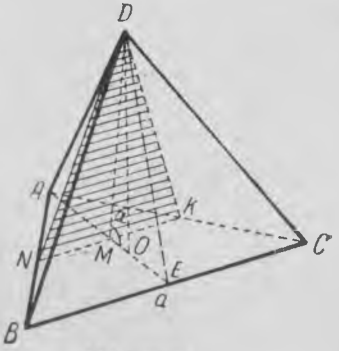
636[1]). Кесимда DKN учбурчакни ҳосил қиламиз (114-чизма). 634-масаладаги каби AED текислик BC томонга перпендикуляр эканини исботлаймиз. Демак, у KN ўрта чизиққа перпендикуляр-дир. Бундан $\angle DME$—икки ёқли α бурчакнинг чизиқли бурчаги экани чиқади. OMD учбурчакдан $OM = \frac{1}{6} AE = \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{3}}{2}$, бундан:

$$DM = \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha}$$

эканлигини топамиз. Кесим юзи

$$S = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} a^2}{48 \cos \alpha}.$$

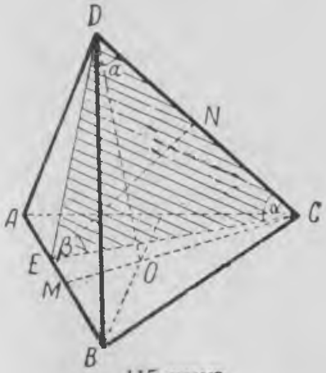
$DAKN$ пирамида асосининг юзи $DABC$ пирамида асосининг юзидан тўрт марта кичик, уларнинг баландликлари эса умумий. Шунинг учун $DAKN$ пирамиданинг ҳажми $V_1 = \frac{1}{4} V$, бунда V— $DABC$ пирамиданинг ҳажми. Демак, $DKNBC$ пирамиданинг ҳажми $V_2 = \frac{3}{4} V$.



114-чизма.

$DABC$ пирамиданинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{асос}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times$$
$$\times \frac{a\sqrt{3}}{12} \operatorname{tg} \alpha.$$



115-чизма.

Жавоб. $S = \frac{\sqrt{3} a^2}{48 \cos \alpha}$;

$V_1 = \frac{a^3}{192} \operatorname{tg} \alpha$;

$V_2 = \frac{a^3}{64} \operatorname{tg} \alpha$.

637. Шартимизга биноан $BE : EA = 2 : 1$ (115-чизма). Кесим DEC учбурчакдан иборат. Шу кесимнинг юзи S ни топамиз. DEC учбурчак — тенг ёнли, чунки AEC ва AED учбурчаклар тенг ($AC = AD$; AE томон умумий ва $\angle CAE = \angle DAE = 60°$) ва уларнинг мос томонлари бўлгани учун $EC = ED$.

---

[1]) Мунтазам уч бурчакли пирамидани тасвирлаш ҳақида 288-бетдаги 82-чизмага қаранг.

DEC кесимнинг EN баландлигини ўтказамиз; у вақтда $S=\frac{a\cdot EN}{2}$. Энди EN ни аниқлаш учун олдин ACE учбурчакдан (косинуслар теоремасига асосан) EC ни топамиз:

$$EC^2=AC^2+AE^2-2\cdot AE\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=\frac{7}{9}a^2.$$

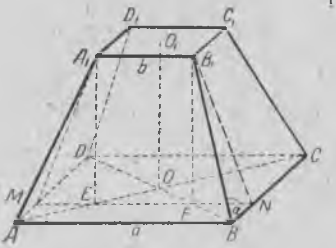
Энди $\triangle ENC$ дан:

$$EN=\sqrt{EC^2-NC^2}=\sqrt{\frac{7}{9}a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{6}\sqrt{19}.$$

Кесимнинг $ECD=EDC$ бурчакларини α билан белгилаймиз. Унда $\angle CED=\pi-2\alpha$ бўлади. CEN учбурчакдан: $\cos\alpha=\frac{CN}{EC}=\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Жавоб. $S=\frac{\sqrt{19}a^2}{12}$; $\alpha=\arccos\frac{3}{2\sqrt{7}}$;

$\beta=\pi-2\arccos\frac{3}{2\sqrt{7}}$.



116-чизма.

638[1]). Кесик пирамиданинг BCC_1B_1 ён ёғи (116-чизма) тенг ёнли трапеция бўлиб, унинг асослари $BC=a$ ва $B_1C_1=b\,(a>b)$ ва a асосидаги бурчаги α. B_1N кесма шу ён ёқнинг баландлиги.

$B_1N=\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha$ эканини топамиз

B_1NF учбрчакда $FN=\frac{a-b}{2}$, ундан

$$H=B_1F=\sqrt{NB_1^2-FN^2}=\frac{a-b}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$$

эканлигини топамиз. Талаб этилган ҳажм

$$V=\frac{H}{3}(a^2+b^2+ab)=\frac{a^3-b^3}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

1-изоҳ. Агар α ўткир бурчак 45° дан кичик бўлса, илдиз тагидаги ифода манфий бўлади. Аммо α бурчак 45° дан кичик бўла олмайди. Ҳақиқатан ҳам, уч ёқли C бурчакнинг $BCC_1=\alpha$ ва $DCC_1=\alpha$ текис бурчакларининг йиғиндиси учинчи BCD текис бурчагидан доимо катта бўлади; лекин $\angle BCD=90^\circ$, шунинг учун $2\alpha>90^\circ$, яъни $\alpha>45^\circ$.

2-изоҳ. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$ ифодани алмаштириб

$$\sqrt{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$$

---

[1]) Кесик пирамиданинг тасвир ҳақида 625-ҳамда 626-масалаларга қаранг.

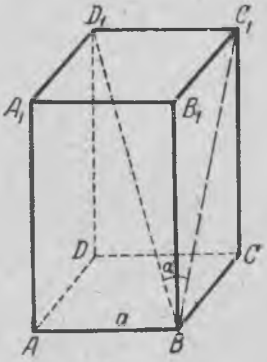
шаклига келтириш мумкин. 2α бурчак $90°$ дан катта (аммо $180°$ дан кичик, чунки α ўткир бурчак) бўлгани учун $\cos 2\alpha$ ҳамма вақт манфийдир. Демак, илдиз тагидаги ифода ($-\cos 2\alpha$) доим мусбат бўлади.

Жавоб. $V = \frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha} = \frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{\cos(180°-2\alpha)}$.

639. BD_1 диагоналнинг BCC_1B_1 ён ёққа туширилган проекцияси (117-чизма) BC_1 дан иборат. Шунинг учун $\angle C_1BD_1 = \alpha$. Томонларидан $D_1C_1 = b$ бўлган BC_1D_1 учбурчакдан: $BC_1 = b\operatorname{ctg}\alpha$ ни топамиз. B_1C_1B учбурчакдан:

$$H = \sqrt{BC_1^2 - B_1C_1^2} = \sqrt{b^2\operatorname{ctg}^2\alpha - b^2} = \frac{b\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Унда: $V = b^2H = b^3\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.



117-чизма.

Изоҳ. Бу жойда илдиз тагидаги ифода $\cos 2\alpha$ (638-масалага доир 2-изоҳга қаранг) ҳамма вақт мусбат, чунки $\alpha < 45°$. Ҳақиқатан,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{D_1C_1}{BC_1} = \frac{B_1C_1}{BC_1}.$$

Аммо B_1C_1 ўзи BB_1C_1 учбурчакнинг катети, BC_1 эса гипотенузаси. Шунинг учун $\operatorname{tg}\alpha < 1$, яъни $\alpha < 45°$.

Жавоб. $V = b^3\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

640. Агар CD (118-чизма) ABC учбурчакнинг $AB = c$ гипотенузасига туширилган баландлиги бўлса (тасвирда CD ни ACB бурчак ичида ихтиёрий чизиш мумкин), унда $\angle CDC_1 = \beta$ (исбот этинг!). $CD = AB\cdot\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}c\sin 2\alpha$ ва $H = CC_1 = CD\cdot\operatorname{tg}\beta$. Бу ифодаларни

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}c\cdot CD\cdot H$$

формулага қўямиз.

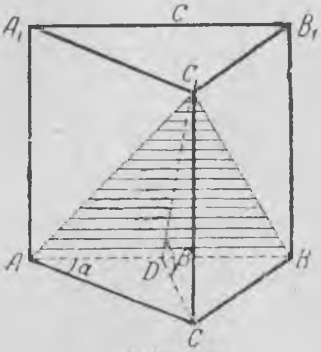
Жавоб. $V = \frac{1}{24}c^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$.

641. Призманинг қисмларидан бири уч бурчакли B_1ABC пирамида (119-чизма). Унинг ҳажми $V_1 = \frac{1}{3}V$, бунда V — призманинг ҳажми. Демак, иккинчи қисмининг (тўрт бурчакли $B_1A_1C_1CA$ пирамиданинг) ҳажми $V_2 = \frac{2}{3}V$.

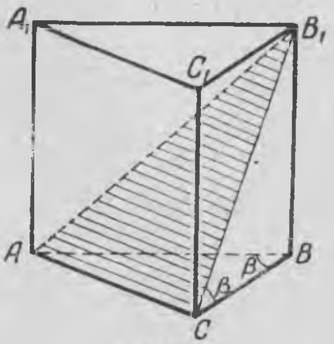
V ни топайлик. Шартимизга биноан $BC + AB = m$, ABC учбурчакдан $BC = AB \cdot \cos\alpha$. Демак, $BC = \frac{m\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Призма асосининг юзи:

$$S = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2}\cdot BC^2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha.$$



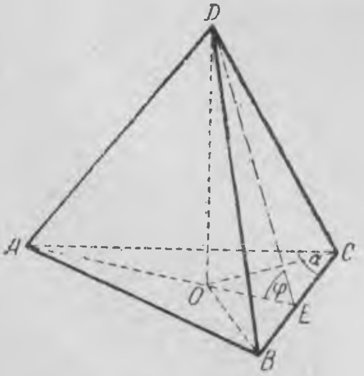
118-чизма.



119-чизма.

Призманинг баландлиги $H = BB_1$ ни BCB_1 учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда $\angle BCB_1 = \beta$ (исбот этинг!). $H = BC \cdot \mathrm{tg}\,\beta$ ҳосил бўлади.

Жавоб. $V_1 = \frac{m^3\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{48\cos^6\frac{\alpha}{2}}$; $V_2 = \frac{m^3\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.



120-чизма.

642. 617-масалага доир дастлабки изоҳга мувофиқ $S_{acoc} = S\cos\varphi = S\sin\alpha$. Иккинчи томондан $S_{acoc} = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4}$. Бу икки ифодани бир-бирига тенглаб, $a = 2\sqrt{S\cos\alpha}$ эканлигини аниқлаймиз. O нуқта (ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази; 120-чизма) учбурчак биссектрисаларининг кесишиш нуқтасида ётади. Демак,

$$\angle OCE = \frac{\alpha}{2} \text{ ва } OE = EC\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

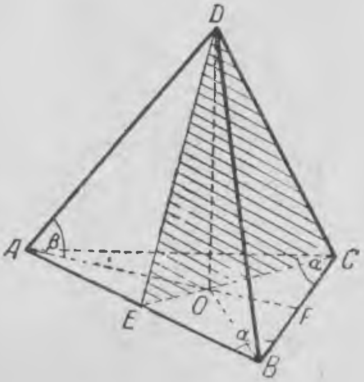
DOE учбурчакдан:

$$H = OE\cdot\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Жавоб. $V=\frac{1}{3}(S\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

$$S_{\text{тўла}}=S(1+\cos\varphi)=2S\cos^2 45^\circ-\frac{\alpha}{2}\Big).$$

643. 121-чизмада $OA=OC=R$ — тенг ёнли ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуслари ($AB=AC=a$). Берилган $\alpha>45^\circ$ шартга биноан O марказ ABC учбурчак ичида ётади ($\alpha<45^\circ$ бўлса, $\angle A=180^\circ-2\alpha$ ўтмас бурчак бўлар эди ва ташқи чизилган айлананинг маркази ABC учбурчакнинг ташқарисида ётарди ва унда пирамиданинг баландлиги ва C учи орқали ўтказилган текислик пирамидани кесмас эди ва ҳеч қандай кесим ҳосил бўлмас эди). Пирамиданинг баландлиги O марказдан ўтади (294-бетдаги **611**-масалага доир дастлабки изоҳга қаранг).



121-чизма.

AOD учбурчакдан: $H=R\operatorname{tg}\beta$. Синуслар теоремасига асосан $AC=a=2R\sin\alpha$ бўлгани учун $H=\frac{a}{2\sin\alpha}\operatorname{tg}\beta$.

Энди кесимнинг CE асосини ACE учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда $\angle CAE=180^\circ-2\alpha$ ва тенг ёнли AOC учбурчак ($AO=OC=R$) асосида ётувчи ACE бурчак CAO бурчакка тенг, яъни

$$\angle CAO=\frac{1}{2}\angle CAE=90^\circ-\alpha.$$

Демак, $\angle AEC=3\alpha-90^\circ$. Синуслар теоремасига биноан $\frac{CE}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\frac{a}{\sin(3\alpha-90^\circ)}$, бундан:

$$CE=\frac{a\sin(180^\circ-2\alpha)}{\sin(3\alpha-90^\circ)}=\frac{a\sin2\alpha}{\sin(3\alpha-90^\circ)}.$$

Изоҳ. Махражга ($-\cos3\alpha$) ёзиш мумкин; аммо $45^\circ<\alpha<90^\circ$ бўлгани учун 3α бурчак 135° билан 270° орасида бўлади; шундай қилиб ($-\cos3\alpha$) мусбат сон бўлади. Шунинг учун жадвалдан фойдаланиб ҳисоблашда 45° билан 180° орасидаги $3\alpha-90^\circ$ бурчак билан иш кўриш қулайроқдир.

Жавоб. $S=\frac{a^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sin(3\alpha-90^\circ)}$.

644. 1) Призма асосининг юзи Q ни топамиз (122-чизма): $Q = S_1 + S_2$, бунда S_1 — тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг юзи; S_2 — тўғри бурчакли ADC учбурчакнинг юзи.

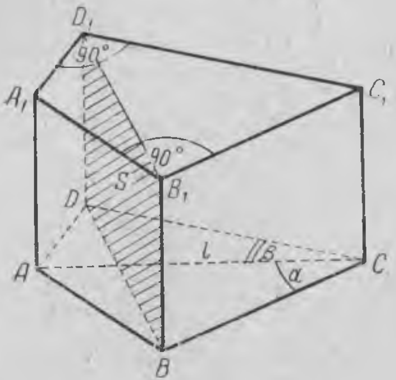
$$S_1 = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{l \sin \alpha \cdot l \cos \alpha}{2} = \frac{l^2 \sin 2\alpha}{4}$$

ва

$$S_2 = \frac{l^2 \sin 2\beta}{4}.$$

Демак, $Q = \frac{l^2}{4}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) =$

$$= \frac{l^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{2}.$$



122-чизма.

2) Призманинг баландлиги H ни $S = BD \cdot H$ шартидан топамиз. $ABCD$ тўртбурчакнинг B ва D учларидаги бурчаклар йиғиндиси 180° бўлгани учун унинг ташқарисига диаметри AC диагонал бўладиган айлана чизиш мумкин, чунки бу диаметрга ички чизилган тўғри бурчаклар тиралади. Бу айланага ички чизилган BCD учбурчакдан (синуслар теоремасига асосан)

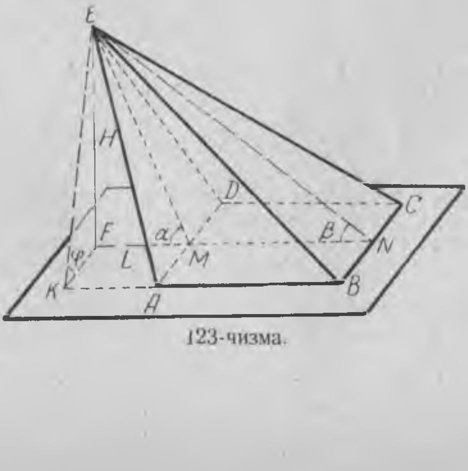
$$BD = AC \cdot \sin \angle DCB = l \sin(\alpha + \beta)$$

$$H = \frac{S}{BD} = \frac{S}{l \sin(\alpha + \beta)}.$$

эканлигини топамиз. Демак,

Жавоб. $V = \frac{1}{2} S \cdot l \cos(\alpha - \beta)$.

645. ADE ва BCE ёқлар (123-чизма) тенг ёнли учбурчаклардир. EMN текислик (M ва N нуқталар AD ва BC қирраларнинг ўрталари) BC ва AD га перпендикуляр ва пирамиданинг EF ба-



123-чизма.

ландлигидан ўтади (исбот қилинг!). Шартимизга кўра EMN учбурчакнинг ташқи бурчаги $\alpha = \angle EML$ — ўткир бурчак. Шунинг учун EF баландлик MN нинг давомини кесади.

V ҳажмни топиш учун $ABCD$ квадратнинг AB томонини топамиз:

$$AB = MN = NF - MF = H(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha).$$

Демак,

$$V = \frac{1}{3} AB^2 \cdot H = \frac{1}{3} H^3 (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)^2.$$

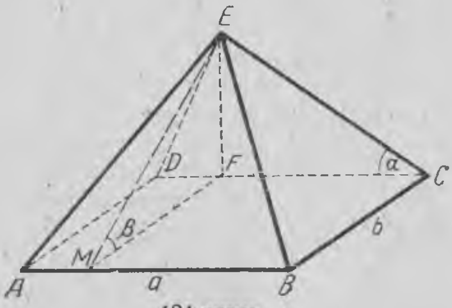
ABE ён ёқ билан асос текислиги орасидаги икки ёқли φ бурчакнинг чизиқли бурчагини топамиз. Бунинг учун икки ёқли бурчакни AB қиррага перпендикуляр EFK текислик билан кесамиз. Бу текисликни тасвирлаш учун $FK \parallel AD$ ни ўтказиш ва уни AB қирранинг давоми билан кесишгунча узайтириш керак (исбот этинг!). EFK учбурчакдан:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H}{FK} = \frac{2H}{AB} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Жавоб. $V = \frac{1}{3} H^3 (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \frac{1}{3} H^3 \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}$;

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

646. Пирамиданинг EF баландлиги (124-чизма) асос текислигига перпендикуляр бўлган CED ёқда ётади. AB қиррага перпендикуляр қилиб EF орқали ўтказилган текислик пирамида асосини BC га параллел MF тўғри чизиқ бўйича кесади, AEB ён ёқни эса AB га перпендикуляр ME тўғри чизиқ бўйича кесади ($\angle EMF = \beta$). Пирамида асосидаги AD ва BC тўғри чизиқлар DEC текисликка перпендикуляр, яъни $\angle BCE = 90°$ ва $\angle ADE = 90°$ (буларнинг ҳаммасини исбот қилиш керак).



124-чизма.

$H=EF$ баландликни топамиз. Шартимизга биноан $EF+EM=m$; бундан ташқари $EM=\frac{EF}{\sin\beta}$. Шунинг учун $EF\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)=m$, бундан:

$$H=EF=m:\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)=m:\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=\frac{m\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Сўнгра тўғри бурчакли DEC учбурчакдан:

$$a=DC=\frac{EC}{\cos\alpha}=\frac{H}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Ниҳоят,

$$b=BC=MF=H\operatorname{ctg}\beta=H\operatorname{tg}\alpha.$$

Демак,

$$V=\frac{1}{3}Hab=\frac{1}{3}H^3\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{H^3}{3\cos^2\alpha}.$$

BEC ва AED ён ёқлар юзларининг йиғиндиси

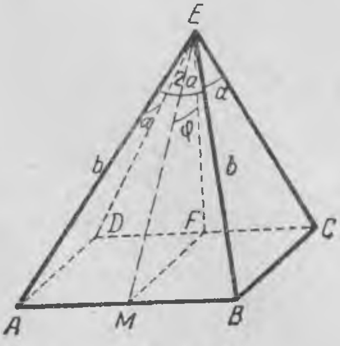
$$S_1+S_2=\frac{1}{2}BC\cdot EC+\frac{1}{2}AD\cdot ED=\frac{1}{2}b(EC+ED)=$$

$$=\frac{1}{2}b\left(\frac{H}{\sin\alpha}+\frac{H}{\cos\alpha}\right).$$

Жавоб. $V=\frac{m^3\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$;

$$S_1+S_2=\frac{m^2(\sin\alpha+\cos\alpha)}{8\cos^4\frac{\alpha}{2}}=\frac{m^2\cos(45^\circ-\alpha)}{4\sqrt{2}\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

647. а) Тасвирлаш усули. EF баландликни (125-чизма) DC томоннинг ўртаси F нуқтага ўтказамиз. Пирамиданинг E учини AB томоннинг ўртаси M нуқта билан туташтирамиз. Унда $\varphi=FSM$ бурчак пирамиданинг ABE ва DCE ёқлари орасидаги бурчакни тасвирлайди (исбот этинг!).



125-чизма.

б) Ечиш. BCE — тўғри бурчакли учбурчак ва унда $\angle BEC=\alpha$ (исбот этинг!). Демак, $BC=b\sin\alpha$. ABE учбурчакдан: $AB=2b\sin\alpha$ ва $ME=b\cos\alpha$. MFE учбурчакда $MF=BC=b\sin\alpha$, бу учбурчакдан

$$FE=\sqrt{ME^2-MF^2}=$$

$$=b\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=b\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Изоҳ. Бу ерда илдиз тагидаги $\cos\alpha$ ифода ҳамма вақт мусбат, чунки

$2\alpha < 90°$. Ҳақиқатан, уч ёқли бурчакнинг B учидаги иккита текис $\left(\angle ABE = \frac{180° - 2\alpha}{2}\right.$ ва $\left.\angle CBE = 90° - \alpha\right)$ бурчакнинг йиғиндиси учинчи ($\angle ABC = 90°$) бурчакдан катта, яъни $\frac{180° - 2\alpha}{2} + (90° - \alpha) > 90°$ ёки $2\alpha < 90°$.

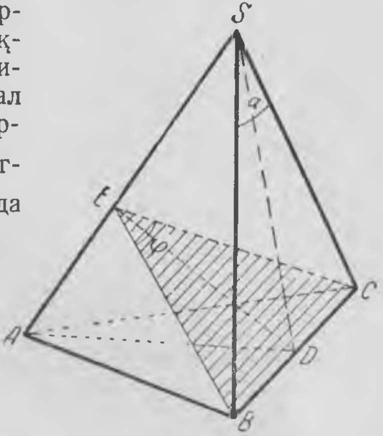
φ бурчакни унинг синуси орқали топиш яхшироқ.

Жавоб. $V = \frac{2}{3} b^3 \sin^2\alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$; $\varphi = \arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$.

648. BCE текислик (126-чизма) асоснинг BC томони орқали AS қиррага перпендикуляр қилиб ўтказилган. Ён ёқлари орасидаги икки ёқли бурчаклар (уларнинг ҳаммаси бир-бирига тенг) $BEC = \varphi$ бурчак билан ўлчанади. BEC учбурчак тенг ёнли.

Кесимнинг юзи S ни ва φ бурчакни аниқлаш учун DE ни (D нуқта BC томоннинг ўртаси) топиш кифоя. Бунинг учун навбат билан аввал BS ни (BSD учбурчакдан, бу учбурчакда $BD = \frac{a}{2}$ ва $\angle BSD = \frac{\alpha}{2}$), сўнгра BE ни (BSE учбурчакдан, бунда $\angle BSE = \alpha$) ва, ниҳоят, $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2}$ ни топамиз.

$$DE = a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}.$$



126-чизма.

Энди кесим юзини топамиз:

$$S = \frac{a}{2}\cdot DE = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$$

ва $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{BD}{EB} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

1-изоҳ. S учдаги текис бурчаклар йиғиндиси доим 360° дан кичик. Шунинг учун $0 < \alpha < 120°$. Бу шартда $2\cos\frac{\alpha}{2} > 1$, яъни $\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} < 1$, демак, $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ тенглама ҳамма вақт ечимга эга.

2-изоҳ. Агар $\alpha > 90°$, яъни пирамида ён ёғининг учидаги ASB бурчак ўтмас бўлса, ASB учбурчак баландлиги асосининг давомини кесади ва BEC текислик пирамидани кесмайди, демак, ҳеч қандай кесим ҳосил бўлмайди. Ҳолбуки

$$S = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$$

формула α бурчак ўтмас бўлганда ҳам (120° дан кичик бўлиши лозим, 1-изоҳга қаранг) S нинг муайян қийматини беради.

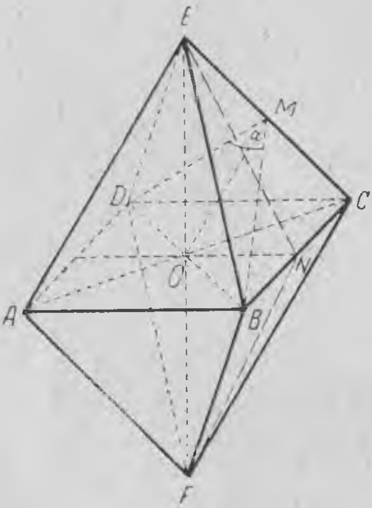
Жавоб. $\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\sec\frac{\alpha}{2}\right)$;

$$S = \frac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

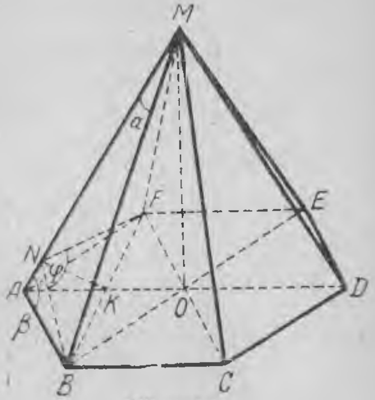
649. Октаэдрнинг саккиз ёғи ҳам тенг томонли учбурчаклар бўлиб, $NE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (127-чизма). $ABCD$ тўртбурчак—квадрат. Бу квадрат текислиги октаэдрни бир-бирига тенг иккита мунтазам пирамидага бўлганликдан $V = 2\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot OE$, бунда

$$OE = \sqrt{EN^2 - ON^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Октаэдрнинг ҳамма икки ёқли бурчаклари бир-бирига тенг. $\angle BMD = \alpha$(M нуқта CE томоннинг ўртаси). CE қиррадаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги (исбот этинг!) OMB учбурчакдан:



127-чизма.



128-чизма.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{BM} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Жавоб. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$; $\alpha = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

650[1]. Тенг ёнли BMA ва FMA учбурчаклар бир-бирига тенг (128-чизма). Шунинг учун, уларнинг B ва F учларидан туширил-

---

[1] Мунтазам олтибурчакни тасвирлаш ҳақида 287-бетдаги 598-масалага доир изоҳга қаранг.

ган баландликлари бу учбурчакларнинг умумий томонидаги битта N нуқтадан ўтади ва $BN = FN$ бўлади. BNF бурчак φ га тенг (исбот этинг!). $\beta = BAM$ бурчак изланган $\alpha = BMA$ бурчак орқали

$$\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

формула билан ифода қилинади. Энг олдин β бурчакнинг тригонометрик функциясини топамиз. Тўғри бурчакли ABN учбурчакдан:

$$\sin\beta = \frac{BN}{a} \text{ (} a \text{ — асоснинг томони).}$$

Тенг ёнли BNF учбурчакдан: $BN = \frac{BK}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. Аммо $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (тенг томонли ABO учбурчакнинг баландлиги бўлгани учун).

Демак,

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

яъни

$$\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

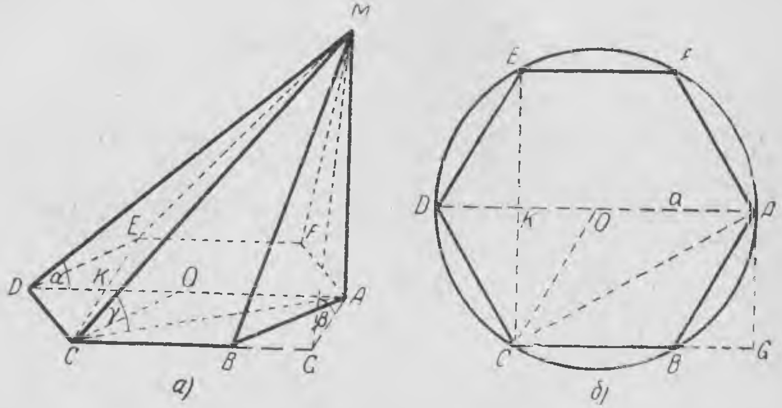
Изоҳ. Мунтазам олти бурчакли пирамида қиррасидаги икки ёқли бурчак ҳамма вақт FAB бурчакдан катта (BNF ва BAF учбурчакларни таққосланг), яъни 120° дан катта. Шунинг учун $\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$ миқдор ҳамма вақт 1 дан кичик.

Жавоб. $\alpha = 2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$.

651. $ABCDEF$ текислигига перпендикуляр AM қирра орқали ўтувчи AMF ва AMB ёқлар (129-*а* чизма) асос текислиги билан тўғри бурчаклар ташкил этади. EMF ва CMB ёқларнинг асос текислиги билан ташкил этган β бурчакларнинг умумий миқдорини аниқлаймиз. A нуқтадан CB тўғри чизиққа AG перпендикулярни туширамиз (бу тўғри чизиқнинг тасвири CE га параллел бўлиши керак, 129-*б* чизма). Унда $\beta = \angle AGM$ бўлади (исбот этинг!).

Тўғри бурчакли AMG учбурчакдан $\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{AG}$, бунда $AG = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (129-б чизма). Аммо AMD учбурчакдан $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{2a}$; демак,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2H}{a\sqrt{3}} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}.$$



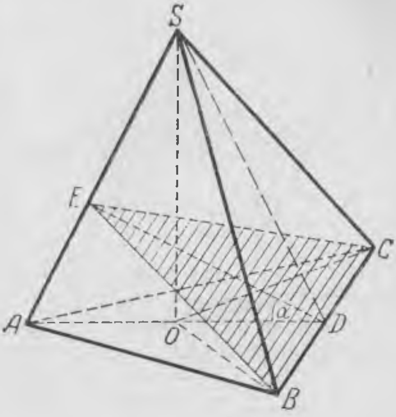
129-чизма.

$AC \perp DC$ бўлгани учун (исбот этинг!), $\gamma = \angle ACM$ — пирамиданинг DCM (ва DEM) ёғи билан асос текислиги орасидаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчагидир. ACM учбурчакдан $\operatorname{tg}\gamma = \frac{H}{AC}$, бунда $AC = a\sqrt{3}$ (129-б чизма).

Жавоб. $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}$; $\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}$.

652. Бир тўғри чизиқ орқали иккинчи тўғри чизиққа перпендикуляр қилиб текислик ўтказиш фақат бу тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр бўлган ҳолдагина мумкин бўлади. $BC \perp AS$ эканлигини исбот қиламиз (130-чизма). AS қирра ва SO баландлик орқали ASO текисликни ўтказамиз. A ва O нуқталар ҳам ASO текислигига, ҳам асос текислиги ABC га тегишли бўлгани учун, бу текисликлар AO тўғри чизиқ бўйича, яъни тенг ёнли ABC учбурчакнинг AD баландлиги бўйича кесишади. OCD ва OBD учбурчаклар тенг (исбот этинг!), шунинг учун $OB = OC$; демак, SC ва SB оғмалар ҳам бир-бирига тенг. Демак, тенг ёнли BSC учбурчакнинг медианаси бўлган SD тўғри чизиқ шу учбурчакнинг баландлиги ҳам бўлади. Исбот этганимизга биноан, AD ва AS тўғри чизиқлар BC қиррага перпендикуляр бўлгани учун, BC қирра ADS текисликка, демак, шу текисликда ётган AS тўғри чизиққа ҳам перпендикулярдир. Шуни исбот қилиш талаб этилган эди.

AS га перпендикуляр қилиб, BC орқали текислик ўтказиш учун AS тўғри чизиққа DE перпендикулярларни тушириш кифоя. BEC текислик AS қиррага перпендикуляр бўлади, чунки унда ётган икки тўғри чизиқ (DE ва BC) битта AS га перпендикулярдир. BC қиррага перпендикуляр ADS текислик икки ёқли α бурчак билан кесишиб, ADE бурчакни ҳосил қилади (бу бурчак шу икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги).



130-чизма.

ASD учбурчак—тенг ёнли (чунки SO баландлик AD асоснинг ўртасидан ўтади). Демак,

$$\angle ASD = 2\angle ASO = 2\alpha$$

(томонлари ўзаро перпендикуляр бўлгани учун $\angle ASO = \angle ADE = \alpha$). $SBCE$ пирамида V_1 ҳажмининг $ABCE$ пирамиданинг V ҳажмига нисбати (бу пирамидалар умумий BCE асосга эга) баландликларининг нисбати кабидир, яъни: $V_1 : V = SE : AE$.

DSE учбурчакдан:

$$SE = DE \cdot \operatorname{ctg} \angle ESD = DE \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha;$$

AED учбурчакдан:

$$AE = DE \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Демак,

$$V_1 : V = \operatorname{ctg} 2\alpha : \operatorname{tg} \alpha.$$

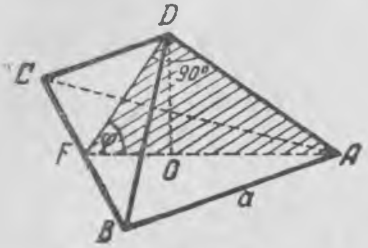
Жавоб. $V_1 = V \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$.

653[1]. AD қиррадаги (131-чизма) икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи кесим ўтказиш учун шу икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчагини аниқлаб олиш керак. BDC бурчак ана шу чизиқли бурчакдир, чунки BDC текислик AD қиррага перпендикулярдир. Ҳақиқатан, ҳар қандай мунтазам пирамидада AD ён

---

[1] Уч бурчакли мунтазам пирамидани тасвирлаш ҳақида 288-бетдаги 603-масалага қаранг.

қирра асоснинг қаршисида ётган BC томонга перпендикуляр бўлади (аввалги масаладаги каби исбот этилади); ундан ташқари бу ҳолда AD қирра FD тўғри чизиққа ҳам перпендикулярдир. Ҳақиқатан, шартимизга биноан AFD учбурчак тўғри бурчакли, унинг A ва F учларидаги бурчаклари албатта ўткир бўлгани учун ADF тўғри бурчак бўлади. $OF = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$ бўлгани учун $OD = \sqrt{OF \cdot OA} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{бунда } R = \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. Пирамиданинг BCD ёғи билан асос текислиги орасидаги бурчакни $\varphi = \angle AFD$ билан белгиласак, унда



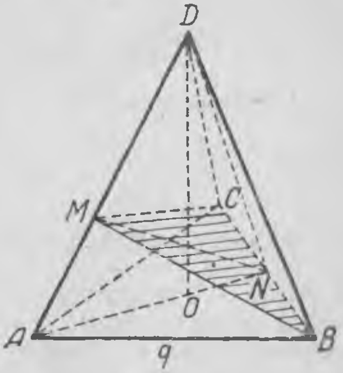
131-чизма.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OD}{OF} = \frac{R}{\sqrt{2}} : \frac{R}{2} = \sqrt{2}.$$

Изоҳ. AD ён қирра BD қирра билан (ва CD қирра билан) тўғри бурчак ҳосил қилади; пирамидамиз мунтазам бўлгани учун BD ва DC қирралар ҳам ўзаро тўғри бурчак ҳосил қилади.

Жавоб. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$.

654[1]). Тўла сиртни ҳисоблаш учун фақат ND апофема номаълум. Уни аниқлаш учун аввал AD қирранинг унга туширилган MN перпендикуляр билан бўлинган AM ва MD кесмаларини топамиз (132-чизма). (N нуқта BC нинг ўртаси.) Сўнгра ANM учбурчакдан $\left(\text{унда } AN = \frac{q\sqrt{3}}{2}\right)$ MN ни топамиз ва, ниҳоят, NMD учбурчакдан ND ни топамиз.



132-чизма.

Масаланинг шартида $AM : MD$ ва $MD : AM$ нисбатлардан қайси бири $m : n$ га тенглиги айтилмаган, шунинг учун $MD = mx$, $MA = nx$ деб олиш мумкинки, унда $AD = (m + n)x$ бўлади. AMN ва ADO учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

---

[1]) Уч бурчакли мунтазам пирамидани тасвирлаш ҳақида 88-бетдаги 603-масалага қаранг.

$$\frac{AM}{AO} = \frac{AN}{AD}, \quad \text{бунда} \quad AN = \frac{q\sqrt{3}}{2}$$

ва

$$AO = \frac{2}{3}AN = \frac{q\sqrt{3}}{3}$$

эканлигини аниқлаймиз. Натижада

$$nx\cdot(m+n)\,x = \frac{q\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{q\sqrt{3}}{3}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан

$$x = \frac{q}{\sqrt{2n\,(m+n)}}.$$

Демак,

$$MD = \frac{mq}{\sqrt{2n\,(m+n)}}$$

ва

$$AM = \frac{nq}{\sqrt{2n\,(m+n)}}.$$

Сўнгра

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = \frac{q^2(n+3m)}{4\,(m+n)}$$

ва

$$ND^2 = MD^2 + MN^2 = \frac{q^2(n+2m)}{4n}$$

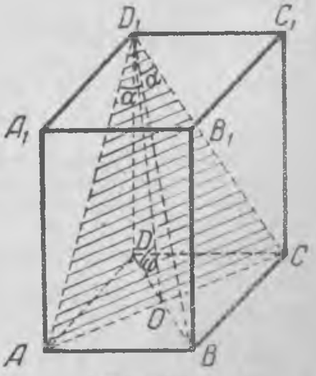
Энди тўла сиртни топамиз:

$$S_{\text{тўла}} = \frac{q^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3q\cdot ND}{2}.$$

Жавоб.

$$S_{\text{тўла}} = \frac{q^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left[1+\sqrt{\frac{3(n+2m)}{n}}\right].$$

655. Бунда $\angle BD_1A = \alpha$ ва $\angle BD_1C = \alpha$ (133-чизма) (исбот этинг!). BD_1A ва BD_1C учбурчаклар тенг (исбот этинг!). Демак, $ABCD$ асос—квадрат, унинг томони $a = d\sin\alpha$. Сўнгра



133-чизма.

$$AD_1 = d\cos\alpha$$

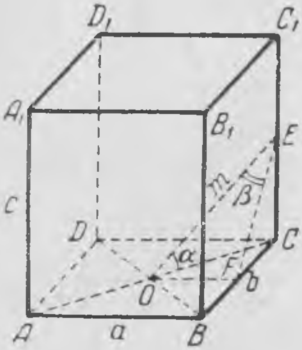
ва

$$H = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\alpha} = d\sqrt{\cos 2\alpha}.$$

ACD_1 текислик асос текислиги билан $\varphi = DOD_1$ бурчакни ҳосил қилади; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DD_1}{OD} = H : \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Жавоб. $V = d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$; $\quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}\right)$.

656. $\angle EOC = \alpha$ (134-чизма). OE кесманинг BB_1C_1C ён ёқ билан ташкил этган β бурчакни ясаш учун $OF \perp BC$ ўтказамиз. Шу ёқда OE нинг проекцияси FE бўлади ва $\angle OEF = \beta$. Агар. $AB = a$, $BC = b$ ва $CC_1 = c$ деб белгиласак, унда $V = abc$ ва $S_{\text{ён}} = 2(a + c)b$ бўлади. OEF, учбурчакдан:



134-чизма.

$$\frac{a}{2} = OF = m \sin\beta = m \sin 2\alpha;$$

$$FE = m\cos\beta = m\cos 2\alpha.$$

OEC учбурчакдан:

$$\frac{c}{2} = EC = m\sin\alpha.$$

FEC учбурчакдан:

$$\frac{b}{2} = FC = \sqrt{FE^2 - EC^2} = m\sqrt{\cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Илдиз тагидаги ифодани логарифмлаш учун қулай шаклга келтирамиз:

$$\cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{2} = \cos 3\alpha \cos\alpha.$$

Демак,

$$b = 2m\sqrt{\cos 3\alpha\cos\alpha.}$$

Изоҳ. OEF бурчакка тенг β бурчак $90° - \alpha$ га тенг OEC бурчакдан кичик (уларнинг синусларини солиштиринг!). Шартга кўра $\beta = 2\alpha$ бўлгани учун $2\alpha < 90° - \alpha$. Демак, $\alpha < 30°$ бўлиши керак.

Жавоб. $V = 8m^3 \sin 2\alpha \sin\alpha \sqrt{\cos 3\alpha\cos\alpha}$;

$$S_{\text{ён}} = 16m^2 \sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos 3\alpha\cos\alpha.}$$

657. а) Тасвирлаш усули. Ярим айлана ярим эллипс шаклида тасвирланади (AB — эллипснинг бирор диаметри, 135-чизма)[1], DC чизиқ AB диаметрга параллел қилиб ўтказилади. AB га перпен-

---

[1] Эллипсни чизиш ҳақида 296-бетга қаранг (613-масала).

дикуляр тўғри чизиқлар AM ва BL уринмаларга параллел қилиб тасвирланади.

б) Ечиш. $AB = a$; $DC = b$; $DF = CE = h$ деб белгилаймиз; унда

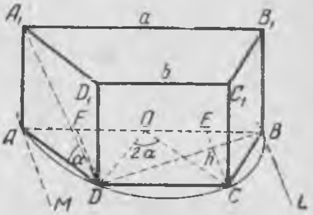
$$V = \frac{a+b}{2} hH.$$

Шартимизга кўра $a = 2R$; шартли олинган b томонни BCD учбурчакдан синуслар теоремасига асосан топамиз, унда DBC бурчак $\overset{\frown}{DC} = 2\alpha$ ёйнинг ярми балан ўлчанади; $b = 2R \sin\alpha$. ODF учбурчакда $OD = R$; AOD бурчак AD ёй билан ўлчанади;

$$\overset{\frown}{AD} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha,$$

h ни топамиз:

$$h = FD = R \sin(90^\circ - \alpha) = R \cos\alpha.$$



135-чизма.

H баландликни A_1AD учбурчакдан топамиз: бунда $\angle A_1DA = \alpha$ (исбот этинг!) ва AD ни тўғри бурчакли ADB учбурчакдан топиш мумкин, бунда $\overset{\frown}{AD}$ ёйга тиралган ABD бурчак $\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ га тенг. Шундай қилиб

$$H = 2R \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\alpha.$$

Демак,

$$V = 2R^3 (1 + \sin\alpha) \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha.$$

Бу ифодада бир қанча соддалаштиришлар қилиш мумкин, яъни

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ ва ҳ. к.}$$

Жавоб. $V = R^3 \sin 2\alpha \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

658. D_1B диагоналнинг AA_1D_1D ён ёққа туширилган проекцияси AD_1 бўлади (136-чизма); шунинг учун $\angle AD_1B = \beta$. Кесим текислиги DBB_1D_1 билан ADD_1A_1 ёқ текислиги орасидаги α бурчак ADB бурчак билан ўлчанади (исбот этинг!). AD_1B учбурчакдан AB ва AD_1 томонларни топамиз. ABD учбурчакдан AD томонни ва AD_1D учбурчакдан $DD_1 = H$ ни топамиз:

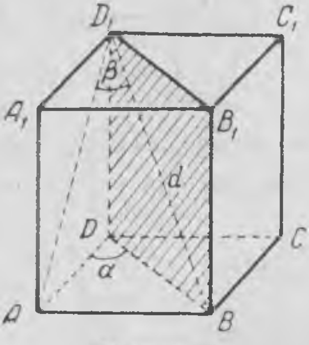
$$H = \sqrt{AD_1^2 - AD^2} = \sqrt{d^2 \sin^2\alpha - d^2 \cos^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha} =$$
$$= \frac{d}{\sin\alpha} \sqrt{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha} = \frac{d}{\sin\alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Изоҳ. β бурчак α бурчакдан ҳамма вақт кичик (уларнинг тангенсларини солиштиринг!). Шартга кўра $\beta = 90° - \alpha$ бўлгани учун $90° - \alpha < \alpha$, демак, $\alpha > 45°$.

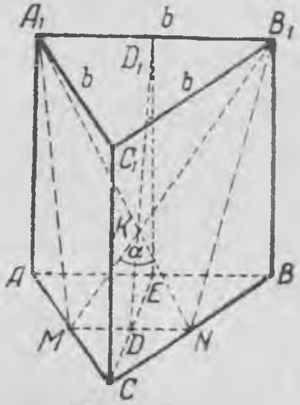
$$45° < \alpha < 90°$$

тенгсизликдан 2α бурчак иккинчи чоракда эканлиги маълум бўлади. Демак, $\cos 2\alpha < 0$ ва $-\cos 2\alpha > 0$. Ҳисоблаш қулай бўлиши учун $-\cos 2\alpha$ ни $\cos(180° - 2\alpha)$ ифода билан алмаштириш керак, чунки $180° - 2\alpha$ бурчак биринчи чоракда бўлади.

659. Ўтказилган чизиқлар A_1N ва B_1M (137-чизма). A_1B_1NM тўртбурчак тенг ёнли трапеция (исбот этинг!). Тенг ёнли MKN учбурчакдан $\left(\text{бу учбурчакда } \angle MKN = \alpha \text{ ва } MN = \frac{b}{2}\right)$:



136-чизма.



137-чизма.

Жавоб. $V = d^3 \cos\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha \sqrt{\cos(180° - 2\alpha)}$.

$$KD = \frac{b}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

A_1KB_1 учбурчакдан:

$$KD_1 = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Бу икки тенгликни қўшсак,

$$DD_1 = \frac{3b}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

ҳосил бўлади. DED_1 учбурчакдан $\left(\text{бунда } DE = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{4}b\sqrt{3}\right)$:

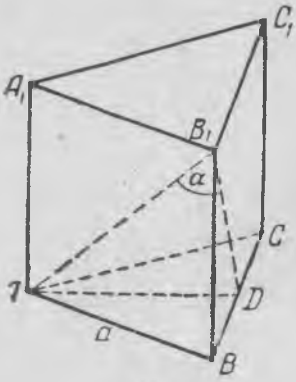
$$H = ED_1 = \frac{3b}{4}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{3b}{4}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2 60°} =$$

$$= \frac{3b}{4}\sqrt{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} 60°\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} 60°\right)} =$$

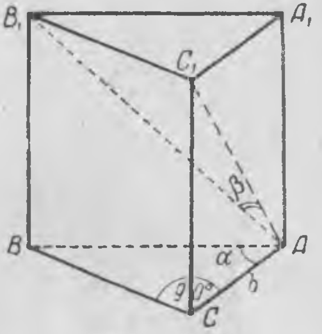
$$= \frac{3b\sqrt{\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)\ \sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin 60°}.$$

Жавоб. $V = \frac{3b^3}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)}.$

660. AB_1 диагонал билан BB_1C_1C ён ёқ орасидаги бурчакни ясаш учун AB_1 нинг шу ёқдаги проекциясини топиш керак (138-чизма). A нуқта BC томоннинг ўртаси D нуқтага проекцияланади



138-чизма.



139-чизма.

(исбот этинг!). Проекция B_1D бўлади, демак, $\angle AB_1D = \alpha$ B_1BD учбурчакдан:

$$H = BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2};$$

B_1D ни тўғри бурчакли AB_1D учбурчакдан топамиз. H учун топилган ифода бундан олдинги масаладаги каби шакл алмаштирилади.

Жавоб. $S_{\text{ён}} = \frac{3a^2\sqrt{\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)}}{\sin\alpha}.$

661. AB_1 диагоналнинг AA_1C_1C ёқдаги проекцияси AC_1 бўлади (139-чизма), бунда $\angle B_1AC_1 = \beta$. Призманинг баландлиги

$$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2}$$

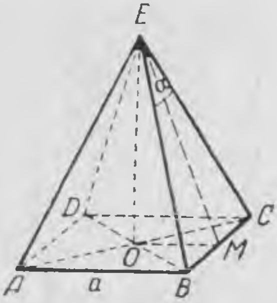
бўлиб, A_1C_1 гипотенуза тўғри бурчакли B_1AC_1 учбурчакдан топилади, яъни

$$CC_1=\sqrt{b^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta-b^2}=b\operatorname{ctg}\beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}=$$

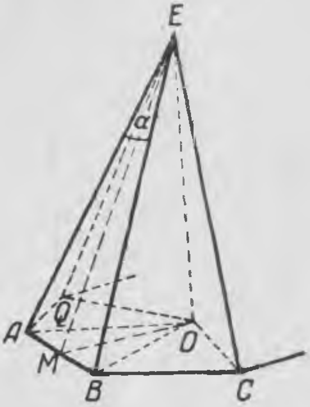
$$=\frac{b}{\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Жавоб. $V=\frac{b^3\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$

662. Шартга кўра $a^2+2a\cdot ME=S$ (140-чизма). Аммо BME учбурчакдан $ME=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Демак, $S=a^2\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$; бундан $a=\sqrt{\frac{S}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{\alpha}}}$.



140-чизма.



141-чизма.

Энди OME учбурчакдан

$$H=\sqrt{ME^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{S\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)}.$$

$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1$ ифодани қуйидагича алмаштириш мумкин:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}45^\circ=\frac{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 45^\circ\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Жавоб. $H=\sqrt{\frac{S\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}.$

663. AOM учбурчакда (141-чизма) $\angle AOM = \frac{180^\circ}{n}$ бўлиб, бундан:

$$OM = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n},$$

демак,

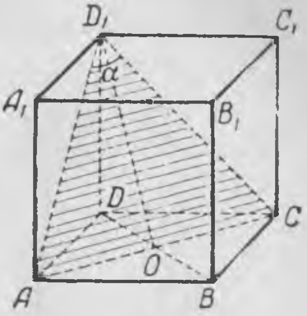
$$S_{\text{асос}} = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

EOM учбурчакдан:

$$H = \sqrt{ME^2 - OM^2} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

Илдиз остидаги ифода 659-масаладаги каби алмаштирилади.



142-чизма.

Жавоб. $V = \dfrac{na^3\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\sin\left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{24\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{180^\circ}{n}}.$

664. $OD = OA$ ни x билан белгилаймиз (142-чизма). Унда

$$OD_1 = AO\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

ва

$$H = DD_1 = \sqrt{OD_1^2 - OD^2} = x\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

D_1ADC пирамиданинг S тўла сирти

$$S = DO\cdot AO + AD\cdot H + AO\cdot OD_1 =$$

$$= x^2 + x\sqrt{2}\,x\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} + x\cdot x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Бундан

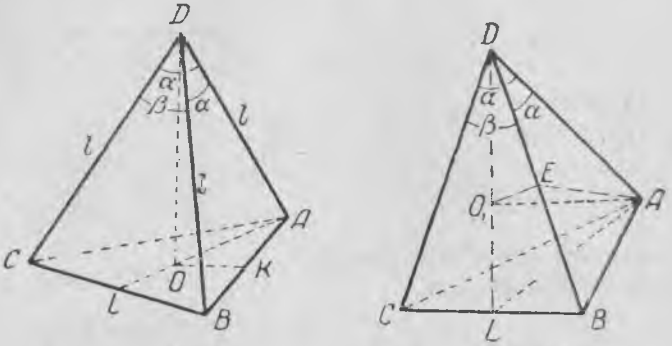
$$x^2 = \frac{S\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Призманинг тўла сирти

$$S_{\text{тула}} = 4x^2 + 4\cdot x\sqrt{2}\cdot H = 4x^2\left(1 + \frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Жавоб. $S_{\text{тўла}} = \dfrac{4S\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}}.$

665. DO баландлик ABC учбурчакка ташқи чизилган доиранинг O марказидан ўтади (143-*а* чизма). ABC учбурчакда $AB = AC = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$ ва $BC = 2l\sin\frac{\beta}{2}$[1]. O нуқта AB томоннинг ўртасидан унга ўтказилган KO перпендикулярда ётади. Шунинг учун AOK ва ABL учбурчакларнинг ўхшашлигидан $AO : \frac{1}{2}AB = AB : AL$ пропорцияни ёза оламиз, бундан



а) *б)*

143-чизма.

$$AO = \frac{\frac{1}{2}AB^2}{AL} = \frac{2l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}}.$$

Сўнгра AOD учбурчакдан

$$H = \sqrt{l^2 - AO^2} = l\sqrt{\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}$$

ва

$$V = \frac{1}{3\cdot 2}BC\cdot AL\cdot H = \frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Илдиз остидаги ифоданинг шаклини **656**-масалада кўрсатилгани каби алмаштириш мумкин.

Иккинчи усул. Пирамиданинг асоси учун BDC ёқни қабул қиламиз (143-*б* чизма), унинг юзи $S_{асос} = \frac{1}{2}l^2\sin\beta$.

---

[1] 294-бетдаги 611-масалага доир дастлабки изоҳга қаранг.

BDC ёқ ADL текисликка. перпендикуляр (исбот этинг!). Демак, пирамиданинг AO_1 баландлиги шу текисликда ётади. BD га O_1E перпендикулярни ўтказамиз. O_1DE ва BDL учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{O_1D}{ED}=\frac{BD}{DL}$, унда ADE учбурчакдан

$$ED=l\cos\alpha,\ BD=l \text{ ва } DL=l\cos\frac{\beta}{2},$$

бундан $O_1D=\frac{l\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

ADO_1 учбурчакдан

$$H=AO_1=\sqrt{AD^2-DO_1^2}=\frac{l}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Жавоб. $V=\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$.

666. ABC учбурчак (144-чизма) DBC учбурчакнинг проекцияси бўлгани учун DA қирра асос текислигига перпендикуляр бўлади. ABC учбурчакнинг юзи

$$S_1=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

BCD учбурчакнинг юзи

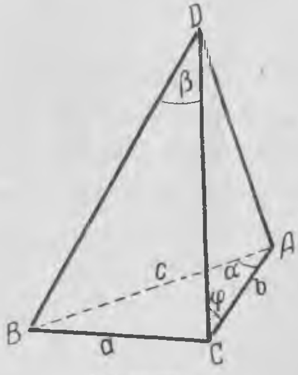
$$S_2=\frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\beta.$$

Шартга кўра

$$\frac{1}{2}a^2(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)=S,$$

бундан

$$a=\sqrt{\frac{2S}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}}.$$



144-чизма.

DAS ёқнинг юзи $S_3=\frac{1}{2}bH$ ва DAB ёқнинг юзи $S_4=\frac{1}{2}cH$. Демак,

$$S_4-S_3=\frac{1}{2}H(c-b)=\frac{1}{2}aH(\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha).$$

H баландликни ACD учбурчакдан топамиз:

$$H=\sqrt{DC^2-AC^2}=\sqrt{a^2\operatorname{ctg}^2\beta-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Демак,

$$S_4 - S_3 = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha} \quad (\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2S}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha} \quad (\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) =$$

$$= \frac{S(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha}{(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha)^2}} = S \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}}.$$

ADC ва ADB ён ёқлар асос текислиги билан тўғри бурчаклар ҳосил қилади. BDC ёқнинг асос текислиги билан ҳосил қилган бурчаги $\angle DCA = \varphi$ чизиқли бурчак билан ўлчанади;

$$\cos\varphi = \frac{AC}{DC} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}.$$

Жавоб. $S_4 - S_3 = S \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}}$; $\varphi = \arccos\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}\right)$.

667. Пирамиданинг ҳамма ён қирралари тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари бўлгани учун бир-бирига тенг (145-чизма); шунинг учун пирамиданинг DO баландлиги асосга ташқи чизилган айлананинг O марказидан ўтади;

$$S_{\text{асос}} = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha.$$

DOC учбурчакда $H = \sqrt{DC^2 - OC^2}$ бўлиб, унда $DC = \frac{b}{\sqrt{2}}$ ва $OC = R$ эса ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси. ABC учбурчак тенг ёнли бўлгани учун $\angle BAC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ва, демак, синуслар теоремасига биноан

$$BC = 2R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right),$$

бундан

$$OC = R = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Жавоб. $V = \frac{1}{6} b^3 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\alpha}.$

668. Баландлик асосга ташқи чизилган айлананинг марказидан ўтади[1] (146-чизма). AED ва BEC бурчакларнинг биссектрисалари тенг ёнли AED ва BEC учбурчакларнинг медианалари ҳам бўлади. MEN кесимнинг юзи $\frac{MN}{2} \cdot OE$ га тенг, бунда $\frac{MN}{2} = AK = l\sin\frac{\alpha}{2}$.

---

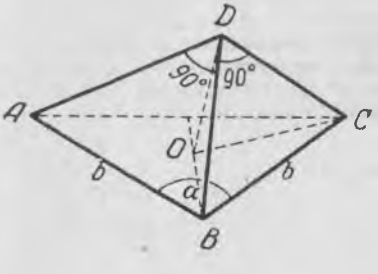
[1] 294-бетдаги **661**-масалага доир дастлабки изоҳга қаранг.

EOK учбурчакдан

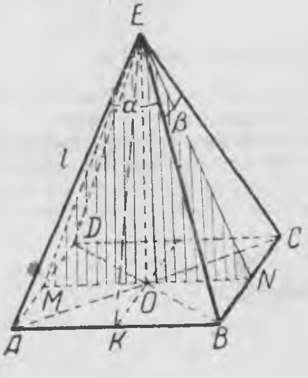
$$OE = \sqrt{EK^2 - OK^2},$$

бунда

$$EK = l\cos\frac{\alpha}{2} \text{ ва } OK = BN = l\sin\frac{\beta}{2}.$$



145-чизма.



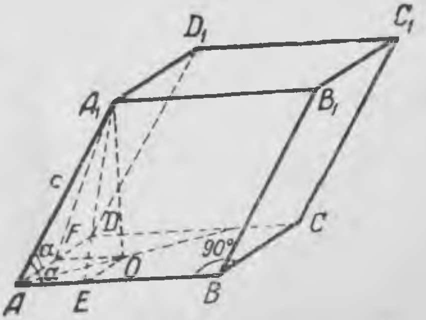
146-чизма.

Демак

$$OE = l\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = l^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$

669. Параллелепипеднинг A_1 учи орқали (147-чизма) AB га перпендикуляр қилиб A_1EO текисликни, AD га перпендикуляр қилиб A_1FO текисликни ўтказамиз. Бу текисликлар асос текислигига перпендикуляр бўлади (исботланг!) ва уларнинг A_1O кесишиш чизиғи параллелепипеднинг баландлиги бўлади. Ҳосил бўлган тўғри бурчакли A_1AE ва A_1AF учбурчаклар бир-бирига тенг (уларда $AA_1 = c$ — умумий гипотенуза ва $\angle A_1AE = \angle A_1AF = \alpha$). Демак, $A_1E = A_1F$ ва шунинг учун A_1OE ва A_1OF



147-чизма.

учбурчаклар бир-бирига тенг, демак, $OE = OF$ ва AO тўғри чизиқ BAD бурчакнинг биссектрисаси бўлади. Тўғри бурчакли A_1EO учбурчакдан: $H = \sqrt{A_1E^2 - OE^2}$. Аммо $AEOF$ квадрат бўлгани учун $OE = AE$. Бунда AE ва A_1E ни AA_1E учбурчакдан топиб, $H = \sqrt{A_1E^2 - CE^2}$ ифодасига қўйсак:

$$H = c\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2a}$$

эканлигини топамиз.

Изоҳ. Пирамиданинг A учидаги уч ёқли бурчакда иккита текис бурчагининг ҳар бири α га тенг, учинчиси тўғри бурчак, демак, иккита текис бурчакнинг йиғиндиси 2α учинчи бурчакдан ($90°$) дан катта бўлиши керак, яъни $2\alpha > 90°$ ёки $a > 45°$. Бу шартда $-\cos 2a > 0$ ва, демак, H нинг қиймати ҳақиқий, AA_1 ён қирра асос текислиги билан $\angle A_1AO = \varphi$ бурчак ташкил этади, чунки AO — қирранинг асос текислигидаги проекцияси ва

$$\cos\varphi = \frac{AO}{AA_1} = \sqrt{2}\cos\alpha.$$

Жавоб. $V = abc\sqrt{\cos(180° - 2\alpha)}$; $S_{\text{ён}} = 2c(a+b)\sin\alpha$;
$\varphi = \arccos\left(\sqrt{2}\cos\alpha\right)$.

670. Бу масаладаги ясаш ҳам бундан аввалги масаладаги каби. BAD бурчакнинг биссектрисаси ромбнинг AC диагонали бўлади (148-чизма)

$$S_{\text{асос}} = a^2\sin\alpha.$$

AA_1E учбурчакдан

$$H = \sqrt{AA_1^2 - AE^2},$$

бунда $AA_1 = a$; AE ни аниқлаш учун аввал AA_1F учбурчакдан AF ни, сўнгра тўғри бурчакли AEF учбурчакдан AE ни топамиз:

$$AE = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

бундан

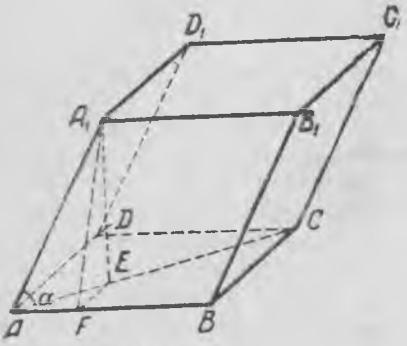
$$H = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

Жавоб. $V = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

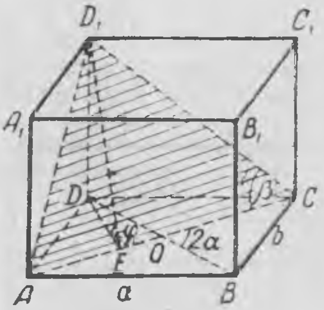
671. Масала бундан аввалги масала сингари ечилади. Ана шу 148-чизманинг ўзидан фойдаланиш мумкин, фақат α билан

$\angle A_1AB$ ни эмас, балки BAD бурчакни белгилаш ва $\angle A_1AD$ ни эса φ билан белгилаш керак, холос.

Жавоб. $V = 2a^2b \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right)}$.



148-чизма.



149-чизма.

672. $ABCD$ асос тўғри тўртбурчак (149-чизма). Икки ёқли D_1ACD бурчакнинг чизиқли бурчагини ясаш учун DD_1 қирра орқали AC га перпендикуляр қилиб текислик ўтказамиз; бу текислик икки ёқли бурчакнинг ёқлари билан кесишиш натижасида чизиқли бурчак $\angle D_1ED = \varphi$ ҳосил бўлади. Бу бурчакнинг косинуси

$$\cos\varphi = \frac{DE}{D_1E} = \frac{h_1}{h}.$$

Бундай белгилаймиз:

$$AB = DC = a, \ BC = AD = b (a > b), \ DD_1 = H,$$
$$D_1E = h \text{ ва } DE = h_1.$$

Тенг ёнли AOB учбурчакда AB асосдаги ички бурчаклар йиғиндиси 2α дан иборат ташқи бурчакка тенг. Демак, $\angle BAC = \alpha$. ABC учбурчакдан

$$a = 2R\cos\alpha; \ b = 2R\sin\alpha.$$

DEC учбурчакда $\angle ACD = \alpha$, бундан

$$h_1 = a\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha \text{ ва } EC = a\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha.$$

D_1EC учбурчакдан:

$$h = EC\cdot\operatorname{tg}\beta = 2R\cos^2\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

D_1DE учбурчакдан:

$$H = \sqrt{D_1E^2 - DE^2} = \sqrt{h^2 - h_1^2} =$$

$$= \sqrt{4R^2\cos^4\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta - 4R^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 2R\cos^2\alpha\sqrt{\mathrm{tg}^2\beta - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

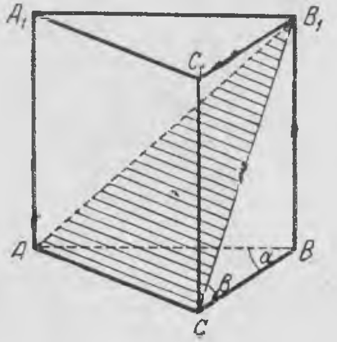
$\mathrm{tg}^2\beta - \mathrm{tg}^2\alpha$ ифодани 659-масаладаги каби алмаштирамиз.

Жавоб.

$$S_{\text{ён}} = 8R^2\cos\alpha\cos(45^\circ - \alpha)\sec\beta\sqrt{2\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)};$$

$$S_{\text{кесим}} = 2R^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta; \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}\right).$$

673. Агар AC катет 2β га тенг ёйни тортиб турса (150-чизма), шу ёйга тиралган ички чизилган ABC бурчак β га тенг бўлади. BB_1C_1C ёққа перпендикуляр ҳолда B_1C диагонал орқали ўтувчи текислик AC орқали ўтиши керак, чунки AC ана шу ёққа перпендикуляр; B_1ACB икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги $\angle B_1CB = \beta$. AB гипотенуза ташқи чизилган айлананинг диаметри; демак, $AB = 2R$. Энди $BC = a$, $AC = b$ ва $AB = c$ деб белгилаймиз. ACB_1 текислик призмадан тўрт бурчакли $B_1AA_1C_1C$ пирамидани ажратади. B_1ABC пирамиданинг ҳажми призма ҳажмининг $\frac{1}{3}$ улушига тенг бўлгани учун тўрт бурчакли пирамидадан қолган қисмининг ҳажми призма ҳажмининг $\frac{2}{3}$ улушига тенг. Агар $B_1AA_1C_1C$ пирамиданинг ҳажмини V_1 билан, призманинг ҳажмини V билан белгиласак, унда



150-чизма.

$$V_1 = \frac{2}{3}V = \frac{2}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot H = \frac{abH}{3}$$

бўлади.

ABC учбурчакдан a ва b ни, B_1BC учбурчакдан эса H ни топамиз. Ён сирт учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$S_{\text{ён}} = (2R\cos\beta + 2R\sin\beta + 2R)\cdot 2R\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\beta =$$
$$= 4R^2\sin\beta(\cos\beta + \sin\beta + 1).$$

Қавс ичидаги ифодани логарифмлаш учун қулай шаклга келтириш мумкин:

$$\cos\beta + \sin\beta + 1 = (1 + \cos\beta) + \sin\beta =$$
$$= 2\cos^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right) =$$

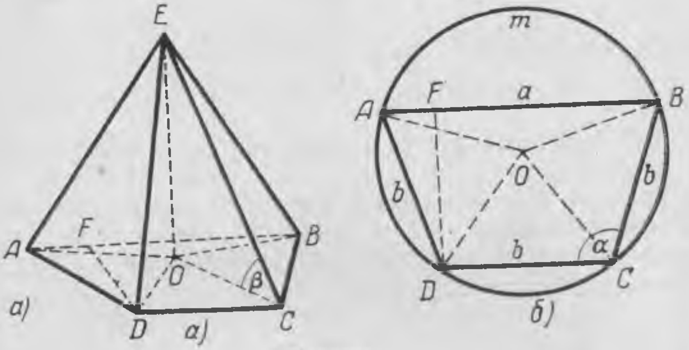
$$= 2\cos\frac{\beta}{2}\left[\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \sin\frac{\beta}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

Жавоб. $S_{\text{ён}} = 8\sqrt{2}R^2\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right);$

$$V_1 = \frac{4}{3}R^3\sin\beta\sin 2\beta.$$

674. EO баландлик (151-*а* чизма) $ABCD$ трапецияга ташқи чизилган айлананинг маркази O нуқтадан ўтади[1]. $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DC}$ ва $\overset{\frown}{CB}$ ёйлар бир-бирига тенг (151-*б* чизма), чунки шартга кўра AD,



151-чизма.

DC ва CB томонлар ўзаро тенг ва $\angle B = (180^\circ - \alpha)$ бурчак ADC ёйнинг ярми билан ўлчанади. Демак, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DC}$ ва $\overset{\frown}{CB}$ ёйларнинг ҳар бирида $(180^\circ - \alpha)$ градус бор; демак, $\overset{\frown}{AmB}$ ёйда $360^\circ - 3(180^\circ - \alpha) = 3\alpha - 180^\circ$ бор. AOB учбурчакдан (бунда $AB = a$):

$$AO = R = \frac{a}{2\sin\frac{3\alpha - 180^\circ}{2}} = -\frac{a}{2\cos\frac{3\alpha}{2}}$$

$\left(\cos\frac{3\alpha}{2}\right.$ миқдор манфий, чунки α ўтмас бурчак, демак, $135^\circ < \frac{3\alpha}{2} < 270^\circ\left.\right)$. ODC учбурчакдан:

$$DC = b = 2R\sin\frac{180^\circ - \alpha}{2} = -\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

---

[1] 294-бетдаги 611-масалага доир дастлабки изоҳга қаранг.

ADF учбурчакда $AD = b$ ва $\angle A = 180° - \alpha$. Бу учбурчакдан трапециянинг DF баландлигини топамиз:

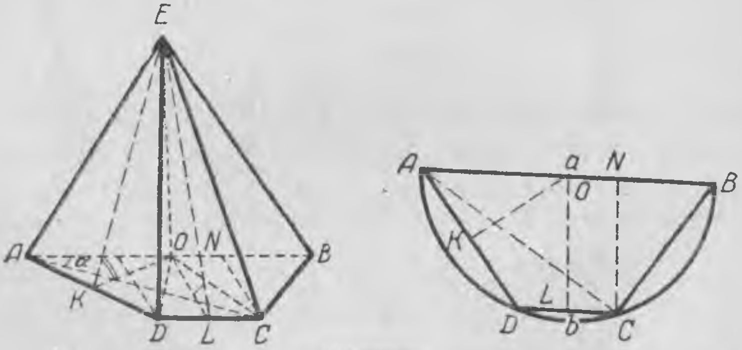
$$DF = h = b \sin\alpha = -\frac{a \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

BOE учбурчакда $OB = R$ (151-*a* чизмага қаранг) ва $\angle OBE = \beta$ бундан $H = R \operatorname{tg} \beta$. Асоснинг юзи

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h = -\frac{a^2\left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{2\cos^2\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a^3\cos^3\alpha}{2\cos^2\frac{3\alpha}{2}}.$$

$$\textit{Жавоб. } V = -\frac{a^3 \sin^3\alpha \operatorname{tg}\beta}{12\cos^3\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a^3\sin^3\alpha \operatorname{tg}\beta}{12\cos^3\left(180° - \frac{3\alpha}{2}\right)}.$$

675. EO баландлик $ABCD$ трапецияга ташқи чизилган айлананинг маркази O нуқтадан ўтади[1] (152-чизма). $ACB = 90°$ бурчак шу айланага ички чизилганлиги сабабли диаметрга тиралган бўлиши керак. Иккинчи хил айтганда, O марказ AB томонда ётади. $ABCD$ трапеция айланага ички чизилганлиги сабабли тенг ёнли; демак, $\angle DAB = \angle CBA$.



152-чизма.

$AB = a$; $DC = b$; $\angle AEB = \varphi = 2\alpha$ деб белгилаймиз. Шартга кўра $\frac{1}{2}aH = S$, тенг ёнли AEB учбурчакдан $a = 2H \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 2H \operatorname{tg}\alpha$.

---

[1] 294-бетдаги 611-масалага доир дастлабки изоҳга қаранг.

Бу икки тенгламадан H ни ва a ни топамиз:

$$H=\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha} \text{ ва } a=2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}.$$

$b=DC$ томонни диаметри a га тенг айланага ички чизилган ADC учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда

$$\angle DAC=\angle DAB-\angle CAB=\angle CBA-\angle CAB.$$

Аммо ACB учбурчак — тўғри бурчакли бўлгани учун $\angle CBA=$ $=90^\circ-\angle CAB$. Демак,

$$\angle DAC=90^\circ-2\angle CAB=90^\circ-2\alpha \text{ ва } b=a\sin(90^\circ-$$
$$-2\alpha)=a\cos 2\alpha.$$

Ниҳоят,

$$CN=h=AC\sin\alpha=a\cos\alpha\sin\alpha.$$

Энди ҳажм учун мана бу ифодани ҳосил қиламиз:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+b}{2}hH=\frac{1}{6}a^2(1+\cos 2\alpha)\cos\alpha\sin\alpha H=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 4S\operatorname{tg}\alpha\, 2\cos^2\alpha\cos\alpha\sin\alpha\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin^2 2\alpha}{3}\sqrt{S^3\operatorname{ctg}\alpha}.$$

ABE ёқ $ABCD$ текислик билан тўғри бурчак ҳосил қилади. ADE ёқ билан $ABCD$ текислик орасидаги φ_1 бурчакни аниқлаш учун O нуқтадан AD га перпендикуляр туширамиз (бу перпендикуляр BD диагоналга параллел OK тўғри чизиқ каби тасвирланади, чунки BD диагонал AD га перпендикулярдир; BD диагонал чизмада тасвирланмаган; $\angle EKO=\varphi_1$). AOK учбурчакда $\angle OAK=\angle ABC=90^\circ-\angle CAB=90^\circ-\alpha$. Шунинг учун

$$OK=AO\cdot\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{a}{2}\cos\alpha$$

ва

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{H}{OK}=\frac{2H}{a\cos\alpha}=\frac{2H}{2H\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

DCE ёқ билан $ABCD$ текислик орасидаги φ_2 бурчакни топиш учун $OL\perp DC$ ўтказамиз; $\angle ELO=\varphi_2$. $OL=NC=h$ бўлгани учун

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{H}{h}=\frac{H}{a\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin^2\alpha}.$$

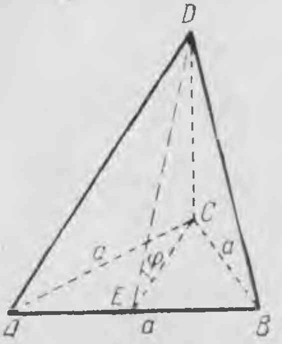
Жавоб.

$$V=\frac{\sin^2 2\alpha}{3}\sqrt{S^3\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\varphi_1=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{cosec}\alpha);\qquad \varphi_2=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\alpha\right).$$

676. *ABC*, *ABD* ва *ACD* учбурчаклар юзларининг йиғиндисини топиш керак (153-чизма). *ABC* учбурчакнинг юзи:

$$S_1 = \frac{1}{2} AB\cdot CE = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$



153-чизма.

ABD учбурчакнинг юзи:

$$S_2 = \frac{1}{2} AB\cdot DE = AB\cdot\frac{1}{2}\,\frac{CE}{\cos\varphi} = \frac{S_1}{\cos\varphi};$$

ACD учбурчакнинг юзи:

$$S_3 = \frac{1}{2} AC\cdot CD = \frac{1}{2} AB\cdot CD =$$
$$= \frac{1}{2}AB\cdot CE\cdot \mathrm{tg}\,\varphi = S_1\mathrm{tg}\,\varphi.$$

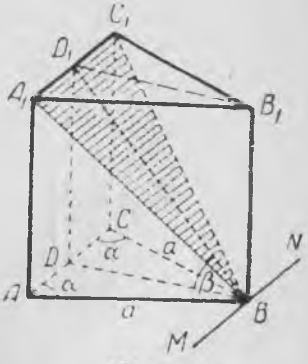
Демак,

$$S_{\text{ён}} = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}(1 +$$
$$+ \cos\varphi + \sin\varphi).$$

Қавс ичидаги ифода **673**-масалада кўрсатилгани каби алмаштирилади ва $2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ га тенг бўлади. $S_{\text{ён}}$ формулада махраждаги $\cos\varphi$ ни $\sin(90^\circ - \varphi)$ билан ифода қилсак, унда $S_{\text{ён}}$ ифодасини $\cos\left(45^\circ - \frac{4}{2}\right)$ га қисқартиш мумкин.

Жавоб. $S_{\text{ён}} = \dfrac{a^2\sqrt{6}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}.$

677. *ABC* асос текислиги (154-чизма) *AC* тўғри чизиқ орқали, A_1BC_1 кесим текислиги эса *AC* тўғри чизиққа параллел A_1C_1 тўғри чизиқ орқали ўтганлиги учун, икки ёқли β бурчакнинг *MN* қирраси *AC* ва A_1C_1 тўғри чизиқларга параллелдир. Шунинг учун чизиқли бурчакни ясаш мақсадида $BD\perp AC$ ва $BD_1\perp A_1C_1$ ларни ўтказамиз (*D* ва D_1 нуқталар *AC* ва A_1C_1 нинг ўрталари бўлади).



154-чизма.

Призманинг ён сирти:

$$S_{\text{ён}} = (2AB + AC)\cdot DD_1 = (2AB + AC)\cdot BD\cdot \mathrm{tg}\,\beta =$$
$$= 2a^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Тўрт бурчакли $BACC_1A_1$ пирамиданинг V_1 ҳажми призма ҳажми V нинг $\frac{2}{3}$ улушига тенг (673-масалага қаранг); демак,

$$V_1 = \frac{2}{3} S \cdot DD_1,$$

бунда

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha.$$

Жавоб. $S_{\text{ён}} = 4a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$;

$$V_1 = \frac{a^3}{3} \sin 2\alpha \sin\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

678. 630-масаладаги сингари DCE ёқ (155-чизма) асос текислиги $ABCD$ билан $\alpha = \angle ADE$ ва BCE ёқ билан эса $\alpha = ABE$ бурчак ташкил этишини исботлаймиз; бу иккала ёқ ҳам тўғри бурчакли учбурчаклардир ($\angle CDE = \angle CBE = 90^\circ$).

ADE учбурчакнинг юзи S_1 (бу учбурчакка тенг ABE учбурчакнинг юзи ҳам): $S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AE$.

ABE учбурчакдан (бунда $BE = 2R$):

$$AB = 2R\cos\alpha, \qquad AE = 2R\sin\alpha,$$

демак, $S_1 = 2R^2 \sin\alpha\cos\alpha$.

CDE учбурчакнинг юзи S_2 (CBE учбурчакнинг юзи ҳам):

$$S_2 = \frac{1}{2} BC \cdot BE = \frac{1}{2} AB \cdot BE = 2R^2 \cos\alpha.$$

Шундай қилиб

$$S_{\text{тўла}} = S + 2S_1 + 2S_2 = 4R^2 (\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha) =$$
$$= 4R^2 \cos\alpha (\cos\alpha + \sin\alpha + 1).$$

Қавс ичидаги ифодада **674**-масалада кўрсатилгани каби шакл алмаштирилади.

Жавоб. $S_{\text{тўла}} = 8\sqrt{2} R^2 \cos\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

679. ECD кесим текислиги (156-чизма) AB гипотенузага параллел ва ABB_1A ёқ текислигини AB га параллел ED тўғри чизиқ бўйича кесади. AB ва ED тўғри чизиқларга CM ва CF перпендикулярларни тушириб, тўғри бурчакли CMF учбурчак ҳосил қиламиз, бунда $\angle CFM = \beta$ (исбот этинг!). Демак,

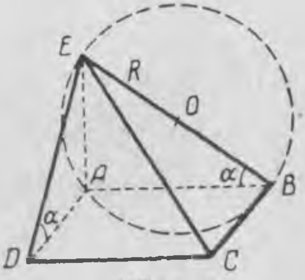
$$\triangle CMF = \triangle CMB$$

(бу учбурчакларда CM — умумий катет ва $\angle CBM = 90^\circ - \alpha$, шартга кўра $\beta = 90^\circ - \alpha$).

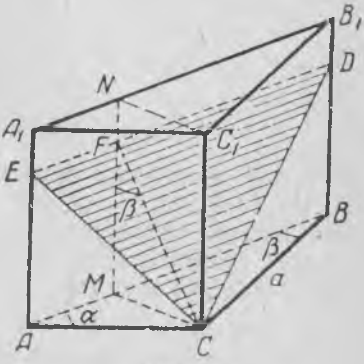
Асоси $ABDE$ — тўғри тўртбурчак, баландлиги $CM = a\sin\beta = a\cos\alpha$ га тенг $CABDE$ пирамиданинг V ҳажмини топиш талаб этилади. Бу ҳажм:

$$V = \frac{1}{3}\cdot AB\cdot MF\cdot CM = \frac{1}{3}\cdot AB\cdot MB\cdot CM = \frac{1}{3}\cdot BC^2\cdot CM = \frac{1}{3}a^3\cos\alpha$$

(BC катет AB билан MB орасида ўрта пропорционал кесмадир).



155-чизма.



156-чизма.

Призманинг ён сирти

$$S_{ён} = (BC + AB + AC)H = aH\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right);$$

бунда aH — призма CBB_1C_1 ёғининг юзи бўлиб, бу юз шартга кўра CDE учбурчакдан иборат кесим юзига тенг, яъни

$$aH = S_{кесим} = \frac{1}{2}AB\cdot CF = \frac{1}{2}AB\cdot CB = \frac{a^2}{2\sin\alpha}.$$

Демак,

$$S_{ён} = \frac{a^2}{2\sin\alpha}\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right) = \frac{a^2}{2\sin^2\alpha}(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha).$$

Қавс ичидаги ифода **673**-масаладаги каби алмаштирилади.

CDE текислик ABB_1A_1 ёқни кесиши учун $MF = MB = a\sin\alpha$ кесма $MN = H = \frac{a^2}{2\sin\alpha} : a = \frac{a}{2\sin\alpha}$ кесмадан қисқа бўлиши керак. $a\sin\alpha < \frac{a}{2\sin\alpha}$ тенгсизлигидан $\sin^2\alpha < \frac{1}{2}$, яъни $\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ эканлигини топамиз. Демак, α бурчак 45° дан кичик бўлиши лозим.

Жавоб. $V = \frac{a^3\cos\alpha}{3}$; $S_{ён} = \frac{\sqrt{2}a^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$;

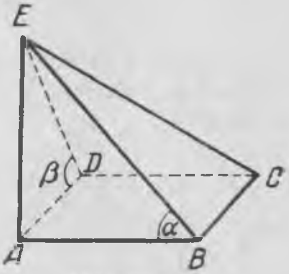
$\alpha < 45°$.

680. (157-чизма.) Пирамиданинг ён сирти:

$$S_{\text{ён}} = \frac{H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2} + \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta}{2} + \frac{H^2 \operatorname{ctg} \beta}{2 \sin \alpha} + \frac{H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin \beta}.$$

Бундан:

$$S_{\text{ён}} = \frac{H^2}{2 \sin \alpha \sin \beta} (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \beta + \cos \alpha).$$



157-чизма.

Қавс ичидаги ифодани логарифмлаш учун қулай ҳолатга келтириш мумкин: $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta)$ ва $\cos \beta + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ эканлигини назарга олиб, $\sin (\alpha + \beta) + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} +$

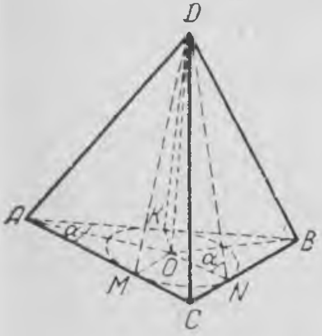
$$+ 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

ифодани ёза оламиз. Энди $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ни $\sin \left(90° - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ билан алмаштирсак ва қавс ичидаги ифодани синуслар йиғиндиси деб қараб шакл алмаштирсак,

$$4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \left(45° - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45° - \frac{\beta}{2} \right)$$

ифодасини ҳосил қиламиз.

Жавоб. $S_{\text{ён}} = \dfrac{2H^2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \left(45° - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45° - \frac{\beta}{2} \right)}{\sin \alpha \sin \beta}$



158-чизма.

681. $r = ON$ — пирамида асосига ички чизилган доиранинг радиуси бўлсин[1] DON учбурчакда (158-чизма): $DO = H = r \operatorname{tg} \alpha$. Ички чизилган айлананинг O маркази A ва B бурчаклар биссектрисалари кесишган нуқтада ётгани учун

$$\angle OAM = \frac{\alpha}{2}$$

ва

$$\angle OBN = \frac{90° - \alpha}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}.$$

---

[1] 299-бетдаги 617-масалага доир дастлабки изоҳга қаранг.

C бурчак тўғри бурчак бўлгани учун $MCNO$ тўртбурчак квадрат, $MC = CN = r$. Демак,

$$AC = b = AM + MC = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 1\right)$$

ва

$$CB = a = r\left[\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + 1\right].$$

Қавс ичидаги ифодалар **662**-масаладаги каби алмаштирилади ва натижада пирамида асосининг юзи учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$S_{\text{асос}} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\sqrt{2}\,r\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Демак,

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{асос}}\cdot H = \frac{1}{3}r^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Агар $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$

эканлиги назарга олинса, бу ифодани соддалаштириш мумкин. Пирамиданинг ён сиртини ва тўла сиртини

$$S_{\text{ён}} = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos\alpha}; \qquad S_{\text{тўла}} = \frac{2\,S_{\text{асос}}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\,^{1)}$$

формулалардан фойдаланиб топиш мумкин.

Жавоб. $$V = \frac{r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}; \qquad S_{\text{ён}} = \frac{r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)};$$

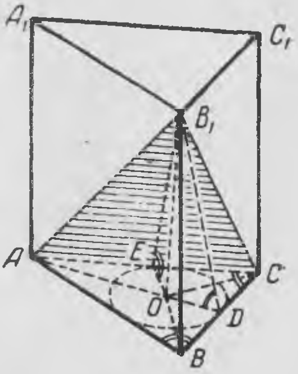
$$S_{\text{тўла}} = \frac{r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

---

1) 299-бетдаги 617 ва 618-масалаларга қаранг.

682. Текислик призмадан шундай B_1ABC пирамида (159-чизма) кесадики, бу пирамиданинг баландлиги унинг асосига ички чизилган айлананинг O марказидан ўтади, шунинг учун ҳамма ён ёқлари асос текислиги билан тенг α бурчаклар ҳосил қилади. Демак,

$$S_{\text{тўла}} = \frac{2\,S_{\text{асос}}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\,^{1)}).$$



159-чизма.

Пирамида асосининг юзи

$$S_{\text{асос}} = \frac{BC\cdot AD}{2} = DC\cdot AD.$$

OCD учбурчакда $OD = r$ ва $\angle OCD = \frac{\alpha}{2}$ бўлиб, ундан $DC = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ эканлигини ва ADC учбурчакдан $AD = DC\cdot\operatorname{tg}\alpha = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$ эканлигини топамиз.

Демак,

$$S_{\text{асос}} = r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha \quad \text{ва} \quad S_{\text{тула}} = \frac{2\,r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha\,\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Топилган ифодаларда $\operatorname{tg}\alpha$ ни $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$ шаклида ёзиб, соддалаштириш мумкин.

Призма ҳажми

$$V = S_{\text{асос}}\cdot H,$$

бунда $H = r\operatorname{tg}\alpha$ ($\triangle\, B_1OD$ дан).

Жавоб. $$S_{\text{тўла}} = \frac{4\,r^2\cos^4\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha};$$

$$V = r^3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\alpha.$$

683. BMC учбурчакда (160-чизма) $\angle MCB = 45°$; $\angle MBC = 180° - (45° + \alpha) - 45° = 90° - \alpha$. Бу учбурчакдан синуслар теоремасига асосан: $\frac{BC}{\sin(45° + \alpha)} = \frac{m}{\sin(90° - \alpha)}$. Бундан

$$BC = a = \frac{m\sin(45° + \alpha)}{\cos\alpha}.$$

---

1) 299 ва 341-бетлардаги 617 ва 618-масалаларга қаранг.

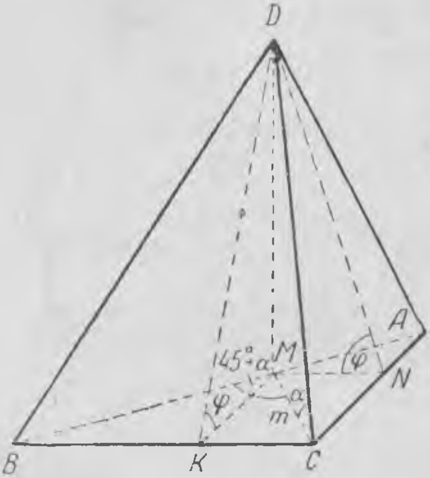
ABC учбурчакдан

$$AC = b = a \operatorname{ctg} \alpha = \frac{m \sin (45^\circ + \alpha)}{\sin \alpha}.$$

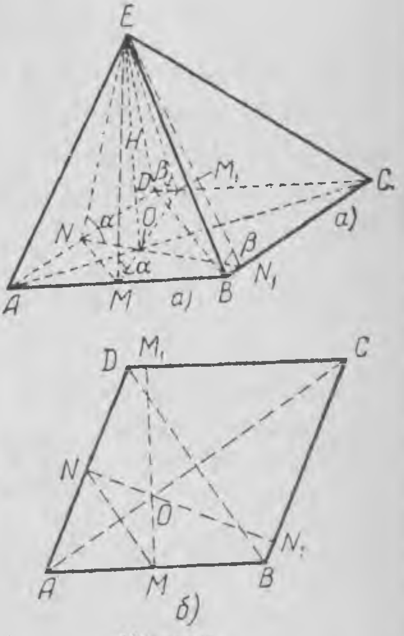
DCM учбурчакдан

$$H = m \operatorname{tg} \alpha.$$

Икки ёқли $DACB$ ва $DBCA$ бурчакларнинг чизиқли бурчаклари $\angle DNM$ ва $\angle DKM$ бўлади; MKC ва MNC учбурчаклар тенг (гипотенузалари ва биттадан ўткир бурчакларига кўра) ҳамда DMK ва DNM учбурчаклар (гипотенуза ва бир катетларига кўра) тенг бўлгани учун DNM ва DKM бурчаклар ўзаро тенгдир. Бу бурчакларнинг миқдорини φ билан белгилаймиз, у вақтда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{MN}$, бунда $MN = \frac{m}{\sqrt{2}}$.



160-чизма.



161-чизма.

Жавоб. $V = \frac{1}{6} m^3 \frac{\sin^2 (45^\circ + \alpha)}{\cos^2 \alpha}$; $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$.

684. ABE — пирамиданинг биринчи ён ёғи (161-*а* чизма), ADE эса иккинчи ён ёғи бўлсин. Масаланинг шартига кўра улар асос текислиги билан бир хил α бурчаклар ташкил этади. Бундан

пирамиданинг баландлиги ўтган O нуқта AC диагоналда ётади, деган хулоса чиқади. Ҳақиқатан, агар O нуқтадан (161-*б* чизма) AB ва AD томонларга OM ва ON перпендикулярлар[1] туширилса, унда $\angle OME=\alpha$ ва $\angle ONE=\alpha$ бўлади (исбот қилинг!); демак, $OM=H\operatorname{ctg}\alpha$ ва $ON=H\operatorname{ctg}\alpha$, яъни $OM=ON$. Демак, O нуқта BAD бурчакнинг биссектрисасида, яъни $ABCD$ ромбнинг AC диагоналида ётади.

Лекин унда ҳам $OM_1=ON_1$ бўлади (OM_1 ва ON_1 кесмалар OM ва ON нинг давоми); бундан OM_1E ва ON_1E учбурчакларнинг тенглиги, бундан эса $\angle ON_1E=\angle OM_1E$ тенглик келиб чиқади. Мана шуни исбот қилиш талаб этилган эди.

OME учбурчакдан $OM=H\operatorname{ctg}\alpha$ ва OM_1E учбурчакдан $OM_1=$ $=H\operatorname{ctg}\beta$ эканлигини топамиз. Демак, ромбнинг баландлиги

$$h=MM_1=H(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta).$$

Демак,

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{асос}}H=\frac{1}{3}ahH=\frac{1}{3}aH^2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta);$$

$$S_{\text{тўла}}=S_{\text{асос}}+2S_{ABE}+2S_{BEC}=a(h+ME+N_1E),$$

бунда $ME=\frac{H}{\sin\alpha}$, $N_1E=\frac{H}{\sin\beta}$. У ҳолда

$$S_{\text{тўла}}=aH\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\beta+\frac{1}{\sin\beta}\right)=$$

$$=aH\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}\right).$$

Қавс ичидаги касрларнинг сурат ва махражларини $\frac{\alpha}{2}$ ва $\frac{\beta}{2}$ билан ифодалаб, касрлар қисқартирилса:

$$S_{\text{тўла}}=aH\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

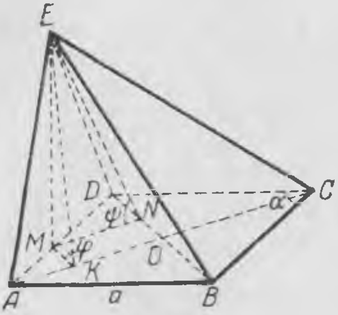
Жавоб. $V=\frac{1}{3}aH^2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=\frac{1}{3}aH^2\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

$$S_{\text{тўла}}=aH\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)=\frac{aH\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

---

[1] Фазовий чизмада (161-*а* чизма) бу перпендикулярлардан бирини, масалан OM ни, ихтиёрий тўғри чизиқ билан тасвирлаш мумкин, аммо бундан сўнг иккинчи перпендикуляр муайян бир тарзда ясалади, чунки MN тўғри чизиқ BD диагоналга параллел бўлиши керак. Буни текис чизмада (161-*б* чизма) исбот қилиш осон.

685. $\angle A$ — ромбнинг ўткир бурчаги бўлсин (162-чизма). Унда AC — ромбнинг катта диагонали ва $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$ бўлади. $MK \perp AC$ ва $MN \perp BD$1) ўтказамиз. EAC текислик билан асос текислиги орасидаги бурчак φ бўлсин. Унда $\angle MKE = \varphi$ ва $\angle MNE = \psi$ бўлади. Hни аниқлаш учун MK ва MN ни H орқали ифода қиламиз:



162-чизма.

$$MK = H \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{ва} \quad MN = H \operatorname{ctg} \psi;$$

бу ифодаларни

$$a = AD = AM + MD = \frac{MK}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{MN}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

муносабатларга қўямиз. Унда

$$a = H \left(\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \psi}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)$$

ҳосил бўлади.

Жавоб. $V = \dfrac{a^3 \sin \alpha}{3 \left(\dfrac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\operatorname{ctg} \psi}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)} = \dfrac{a^3 \sin^2 \alpha}{6 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \varphi + \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \psi \right)},$

бунда икки ёқли φ бурчакнинг қирраси ромбнинг катта диагонали, икки ёқли ψ бурчакнинг қирраси эса ромбнинг кичик диагоналидир.

686. 163-чизмадаги AB кесма асоснинг гипотенузасини тасвирлайди. α нинг чизиқли бурчагини ясаш учун BB_1 қиррани шу қиррага перпендикуляр текислик билан кесиш керак. Бу ҳолда бундай текисликни AC катет орқали ўтказиш мумкин. Буни исбот қилиш учун $AC \perp BB_1$ эканлигини исбот этиш лозим.

Масаланинг шартига кўра B_1 уч BC катетдаги D нуқтага (BC нинг ўртаси) проекцияланади. Демак, агар B нуқта орқали BC га перпендикуляр KL тўғри чизиқ ўтказилса, KL тўғри

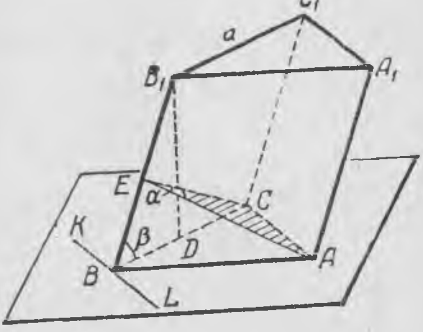
---

1) 162-чизмада $MK \parallel BD$ ва $MN \parallel AC$ ўтказиш керак, чунки ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр (бундан аввалги изоҳ билан солиштиринг).

чизиқ BB_1 га ҳам перпендикуляр бўлади (уч перпендикуляр ҳақидаги теорема). $AC \parallel KL$ бўлгани учун $AC \perp BB_1$. Мана шуни исбот этиш талаб этилган эди.

AC орқали BB_1 га перпендикуляр AEC текисликни ўтказамиз. Призманинг ён сирти перпендикуляр кесим периметри $CE+AC+AE$ билан BB_1 қирранинг кўпайтмасига тенг. Тўғри бурчакли BCE учбурчакда $\angle CBE=\beta$ (исбот этинг!) ва $BC=a$, бундан $CE=a\sin\beta$ эканини топамиз. KL тўғри чизиқ, демак, унга параллел AC тўғри чизиқ ҳам BB_1C_1C ёққа перпендикуляр. Шунинг учун ACE учбурчак — C учидаги бурчаги тўғри бўлган тўғри бурчакли учбурчакдир.

Демак, $AC = CE\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ва $AE = \frac{CE}{\cos\alpha}$. Демак, $CE+AC+AE = a\sin\beta\left(1+\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.



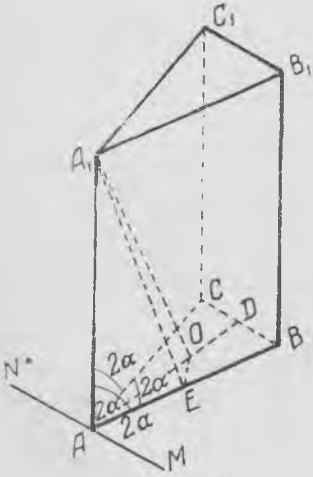
163-чизма.

BB_1 қиррани BDB_1 учбурчакдан топамиз (бунда $BD=\frac{a}{2}$). $BB_1=\frac{a}{2\cos\beta}$, шундай қилиб:

$$S_{ён} = (CE+AC+AE)\cdot BB_1 = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\beta}{2}\left(1+\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Қавс ичидаги ифодани **673**-масалада кўрсатилгани каби ва $\cos\alpha$ ни **681**-масалада кўрсатилгани каби алмаштирамиз.

Жавоб. $S_{ён} = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.



164-чизма.

687. Бундан олдинги масаладаги сингари AA_1 қирранинг BC га перпендикуляр эканлигини (164-чизма), демак, BB_1 ҳам BC га перпендикуляр эканлигини ва BB_1C_1C ёқ тўғри тўртбурчак эканлигини исбот этамиз. $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 2\alpha$ (исботини

669-масаладан қаранг); демак, AA_1C_1C ёқ билан AA_1B_1B ёқ бир-бирига тенг. E нуқта AB томоннинг ўртаси ва $EO \perp AB$ (O нуқта $\triangle ABC$ га ташқи чизилган айлананинг маркази); бундай экан $A_1E \perp AB$ (уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага биноан). Синуслар теоремасига кўра

$$AB = 2\,R \sin (90^\circ - \alpha) = 2\,R \cos \alpha,$$

унда

$$S_{\text{асос}} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 2\alpha = 2\,R^2 \cos^2 \alpha \, \sin 2\alpha.$$

AA_1E учбурчакдан

$$AA_1 = l = \frac{AE}{\cos 2\alpha} = \frac{AB}{2 \cos 2\alpha} = \frac{R \cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

AA_1O учбурчакдан

$$H = \sqrt{l^2 - R^2} = \frac{R}{\cos 2\alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}$$

(илдиз тагидаги ифоданинг шаклини 656-масаладаги сингари алмаштирамиз). $BC = 2BD = 2 \cdot AB \cdot \sin \alpha$. Демак,

$$V = S_{\text{асос}} \cdot H = 2R^2 \cos^2 \alpha \sin 2\alpha \, \frac{R}{\cos 2\alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha} =$$

$$= 2R^3 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 2\alpha}$$

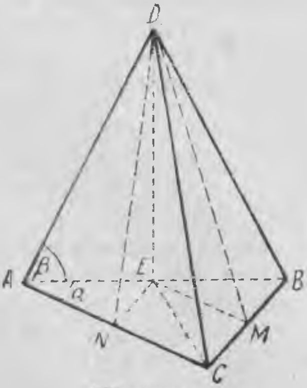
ва

$$S_{\text{ён}} = 2S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} = 2l \cdot AB \cdot \sin 2\alpha + 2l \cdot AB \cdot \sin \alpha =$$

$$= 2l \cdot AB (\sin 2\alpha + \sin \alpha).$$

Жавоб. $V = 2R^3 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \sqrt{\sin 3\alpha \sin \alpha}$;

$$S_{\text{ён}} = \frac{8R^2 \cos^2 \alpha \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos 2\alpha}.$$



165-чизма.

688. OCE учбурчакнинг OM баландлигини ўтказамиз (165-чизма); унда $\angle BMD = \beta$ (исботланг!). $OC = OB$ ни x билан белгилаймиз ва x ни $OC^2 = CE \cdot CM$ формуладан топамиз, бунда $CE = l$ ва $CM = \sqrt{x^2 - OM^2}$. OMB учбурчакдан

$$OM = OB \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = x \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

эканлигини аниқлаймиз.

Булардан

$$CM = x\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Бу ифодани $OC^2 = CE \cdot CM$ формулага қўйиб,

$$x^2 = lx\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

$x = 0$ илдиз масаланинг шартига тўғри келмаслиги кўриниб турибди, шунинг учун

$$x = OC = l\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}$$

илдиз олинади. Демак,

$$H = \sqrt{CE^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - x^2} = l\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Энди ҳажмни топамиз:

$$V = \frac{1}{3}2x^2H.$$

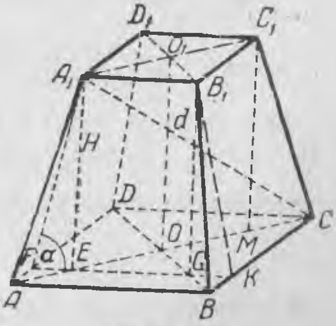
Изоҳ. $\cos\beta$ манфий миқдор, чунки $\frac{\beta}{2} > 45°$ (чунки $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{OB}{OM} = \frac{OC}{OM}$, аммо OC оғма OM перпендикулярдан узун, демак, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} > 1$).

Жавоб.

$$V = \frac{2}{3}l^3\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{2}{3}l^3\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cos\beta}{\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

689. A_1FE учбурчакда (166-чизма) $\angle A_1FE = \alpha$, бу учбурчакдан $FE = H\operatorname{ctg}\alpha$ ни топамиз. A_1CE учбурчакдан (бунда $A_1C = d$) $EC = \sqrt{d^2 - H^2}$ ни топамиз. Демак,

$$EK = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{d^2 - H^2}{2}}.$$



166-чизма.

Энди асосларнинг томонларини топамиз:

$$AB = a = EK + EF$$

ва

$$A_1B_1 = EG = b = EK - GK = EK - EF,$$

кесик пирамида ҳажмининг формуласига кирувчи

$$a^2 + ab + b^2$$

миқдор учун

$$(EK + EF)^2 + (EK + EF)(EK - EF) + (EK - EF)^2 =$$
$$= 3EK^2 + EF^2$$

ифодани топамиз.

Жавоб. $V = \frac{H}{3}(3 \cdot EK^2 + EF^2) = \frac{H}{6}[3(d^2 - H^2) + 2H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha]$.

690. $AA_1 = l$ ва $\angle A_1AC = \beta$ белгиларни киритиб, бундан олдинги масаладаги 166-чизманинг ўзидан фойдаланиш мумкин. Тўғри бурчакли AA_1C учбурчакдан $AC = \frac{l}{\cos \beta}$ ни топамиз; яъни $a = FK = \frac{l}{\sqrt{2} \cos \beta}$. AA_1E учбурчакдан $H = l \sin \beta$ ва $AE = l \cos \beta$, унда $FE = \frac{l \cos \beta}{\sqrt{2}}$; демак,

$$b = EG = FK - 2FE = \frac{l}{\sqrt{2} \cos \beta}(1 - 2\cos^2 \beta) = -\frac{l \cos 2\beta}{\sqrt{2} \cos \beta}.$$

Энди пирамиданинг ҳажмини топамиз:

$$V = \frac{H}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{l^3 \sin \beta}{6 \cos^2 \beta}(1 - \cos 2\beta + \cos^2 2\beta).$$

Бу ифодадаги сурат ва махраж $(1 + \cos 2\beta)$ га (кублар йиғиндиси формуласини татбиқ этиб) кўпайтирилса, соддароқ ифода ҳосил қиламиз.

Изоҳ. β бурчак 45° дан катта бўлиши керак, чунки $FK > 2 \cdot FE$. Шунинг учун $\cos 2\beta < 0$.

Жавоб. $V = \frac{l^3 \sin \beta}{6 \cos^2 \beta}(1 - \cos 2\beta + \cos^2 2\beta) = \frac{l^3 \sin \beta (1 + \cos^2 2\beta)}{12 \cos^4 \beta}$.

691. AA_1E ва EA_1C учбурчаклардан (167-чизма)[1]:

$$AE = H \operatorname{ctg} \alpha \text{ ва } EC = H \operatorname{ctg} \beta.$$

Кесик пирамиданинг ён сирти

$$S_{\text{ён}} = 4 \cdot \frac{a + b}{2} \cdot A_1N = 2(a + b) \cdot A_1N.$$

A_1N апофемани A_1EN учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда

$$EN = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{H}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha$$

---

[1] Кесик пирамидани тасвирлаш ҳақида 289-бетга қаралсин.

ва

$$A_1N = H\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot$$

Аммо

$$a+b = AB + A_1B_1 = 2A_1B_1 + 2AN = 2\cdot NB =$$
$$= EC\cdot\sqrt{2} = H\cdot\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta.$$

Демак,

$$S_{\text{ён}} = 2H\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta H\sqrt{1+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot$$

Жавоб. $S_{\text{ён}} = 2H^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

692. A_1EN учбурчакда (167-чизманинг ўзи)

$$EN = AN = \frac{AB - A_1B_1}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-1\right);$$

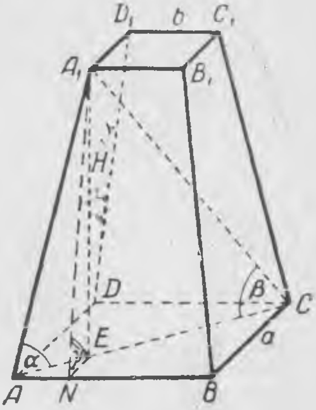
шу учбурчакдан:

$$H = A_1E = \frac{a}{2}\,(\sqrt{3}-1)\operatorname{tg}\gamma$$

ва

$$A_1N = \frac{a\,(\sqrt{3}-1)}{2\cos\gamma}.$$

Энди кесик пирамида ҳажмининг ва ён сиртининг ифодасини ёза оламиз:



167-чизма.

$$V = \frac{H}{3}\,(3a^2 + a^2 + a^2\sqrt{3}) = \frac{a^3}{6}\,(\sqrt{3}-1)\,(4+\sqrt{3})\operatorname{tg}\gamma$$

ва

$$S_{\text{ён}} = 2\,(AB + A_1B_1)\,A_1N = 2a\,(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{a\,(\sqrt{3}-1)}{2\cos\gamma} = \frac{2a^2}{\cos\gamma}.$$

Демак,

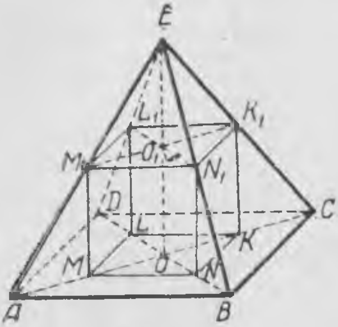
$$S_{\text{тўла}} = S_{\text{ён}} + 3a^2 + a^2 = \frac{2a^2\,(1+2\cos\gamma)}{\cos\gamma}.$$

Қавс ичидаги ифодани логарифмлаш учун қулай кўринишга келтириш мумкин.

Жавоб. $V = \frac{a^3\,(3\sqrt{3}-1)\operatorname{tg}\gamma}{6} \approx 0{,}7a^3\operatorname{tg}\gamma;$

$$S_{\text{тўла}} = \frac{2a^2(1+2\cos\gamma)}{\cos\gamma} = \frac{8a^2\cos\left(\frac{\gamma}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}-30^\circ\right)}{\cos\gamma}.$$

693. Кубнинг томонини x билан белгилаймиз (168-чизма).



168-чизма.

EO_1K_1 ва EOC учбурчакларнинг ўхшашлигидан:

$$\frac{EO_1}{EO} = \frac{O_1K_1}{OC}$$

пропорцияни ёза оламиз. Бунда

$$EO_1 = EO - OO_1 = H - x;$$

$$EO = H, \quad O_1K_1 = \frac{x}{\sqrt{2}};$$

$$OC = \sqrt{l^2 - H^2}.$$

Демак,
$$\frac{H-x}{H} = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{l^2-H^2}}.$$

Жавоб. $x = \dfrac{H\sqrt{2(l^2-H^2)}}{H+\sqrt{2(l^2-H^2)}}$.

694. EOF учбурчакда $OF = \frac{a}{2}$ ва $\angle OEF = \alpha$ (169-чизма). Бу учбурчакдан $H = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ эканлигини аниқлаймиз. Демак, пирамиданинг ҳажми

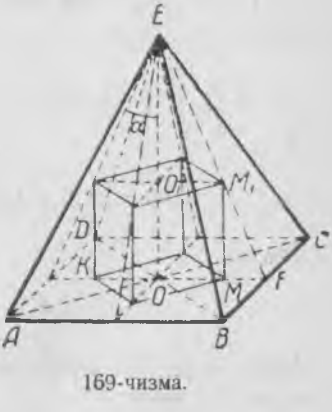
$$V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{6}a^3\operatorname{ctg}\alpha.$$

Асос томони a ни кубнинг қирраси $x = MM_1$ орқали ифода қиламиз:

$$a = 2OF = 2OM + 2MF = KM + 2MM_1\cdot\operatorname{tg}\alpha = x\sqrt{2} + 2x\operatorname{tg}\alpha.$$

Демак,
$$V = \frac{x^3(\sqrt{2}+2\operatorname{tg}\alpha)^3\operatorname{ctg}\alpha}{6}.$$

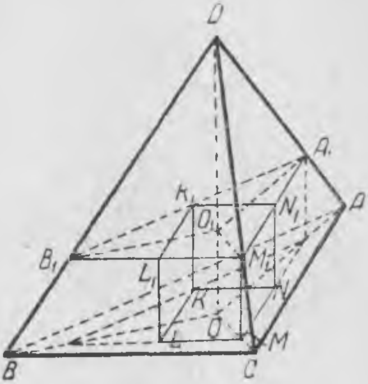
Бунда $x^3 = V_1$ — кубнинг ҳажми.



169-чизма.

Жавоб. $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{(\sqrt{2}+2\operatorname{tg}\alpha)^3\operatorname{ctg}\alpha}{6}$.

695. а) Ясаш усули. Аввал кубнинг $K_1L_1M_1N_1$ „устки“ ёғи ётган $A_1M_1B_1$ кесимни (170-чизма) тасвир этамиз (бу кесим тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унда тўғри бурчак M_1 учида). K_1, L_1, M_1, N_1 учлар ён ёқларда ётгани учун $A_1M_1B_1$ учбурчакнинг томонларида бўлади (M_1 нуқта тўғри бурчакнинг учига тушади, M_1K_1 тўғри чизиқ тўғри бурчакнинг биссектрисасини тасвирлайди, чунки $M_1N_1 = M_1L_1$). Энди $KLMNK_1L_1M_1N_1$ кубни тасвирлаймиз. Бунинг учун $K_1L_1M_1N_1$ тўртбурчак ичида DO баландликнинг $K_1L_1M_1N_1$ ёқ билан кесишиш нуқтасини тасвирловчи ихтиёрий бир O нуқта оламиз ва уни $KLMN$ тўртбурчакдаги ўзи билан мос равишда жойлашган O нуқта билан туташтирамиз. O_1A_1, O_1B_1, O_1M_1 тўғри чизиқларни ва буларга мос равишда параллел OA, OB, OM тўғри чизиқларни ўтказамиз. DA_1, DB_1 ва DM_1 нинг мос равишда OA, OB ва OM билан кесишган A, B, C нуқталарини, яъни пирамида асосининг учларини топамиз.



170-чизма.

б) Ечиш. Шартимизга биноан $AC = 6$; $BC = 8$; $DO = 24$[1]). Кубнинг қиррасини x билан белгилаймиз. У вақтда $OO_1 = x$ ва $DO_1 = 24 - x$ бўлади. Пирамиданинг асосига параллел кесимнинг хоссасига мувофиқ $B_1M_1 : BC = DO_1 : DO$, яъни $B_1M_1 : 8 = (24 - x) : 24$, бундан

$$B_1M_1 = \frac{8(24-x)}{24} = \frac{24-x}{3}.$$

$K_1B_1L_1$ ва ABC учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$K_1L_1 : B_1L_1 = 6 : 8,$$

бунда

$$K_1L_1 = x \text{ ва } B_1L_1 = B_1M_1 - M_1L_1 = \frac{24-x}{3} - x = \frac{24-4x}{3}.$$

Демак, $x : \frac{24-4x}{3} = 6 : 8$, бундан $x = 3$.

Жавоб. 3.

696. BCC_1B_1 кесим (171-чизма) трапециядир (исбот этинг!). MNE текисликни ўтказамиз (M ва N нуқталар AD ва BC томон-

---

[1]) 170-чизмада бу муносабатлар эътиборга олинмаган.

баландлиги бўлган EO тўғри чизиқни кесади. Иккинчи томондан, BED учбурчак текислигида ётган (ва ҳозир исбот этиладиган) шу учбурчакнинг асосига параллел бўлган KN диагонал ҳам BED учбурчакнинг баландлиги бўлган EO тўғри чизиқни кесади. $KCNM$ текислик OE тўғри чизиқ билан битта умумий O_1 нуқтага эга бўлгани учун, KN ва MC диагоналлар бир-бири билан шу нуқтада кесишади.

$KCNM$ текислик AE қиррага перпендикуляр; шунинг учун EMK ва EMN бурчаклар — тўғри бурчаклардир. Тўғри бурчакли EMK ва EMN учбурчаклар ўзаро тенг (исботланг!); демак, $MK = MN$ ва $EK = EN$. Кейинги тенгликдан $KN \parallel BD$ ва $KO_1 = O_1N$ эканлиги чиқади. Демак, MC ва KN диагоналлар ўзаро перпендикуляр ва $S_{\text{кесим}} = \frac{1}{2} MC \cdot KN$.

Тўғри бурчакли AMC учбурчакда $\angle CAM = \varphi$ ва $AC = a\sqrt{2}$. Шу учбурчакдан MC диагонални топамиз: $MC = \sqrt{2}\sin\varphi$.

Тенг ёнли KEN учбурчакда $\angle EKN = \varphi$; бу учбурчакдан KN диагонални топамиз: $KN = 2 \cdot O_1E \cdot \operatorname{ctg}\varphi$, бунда $O_1E = OE - OO_1$. OE кесма AOE (ёки BOE) учбурчакдан топилади: $OE = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi$. OCO_1 учбурчакда $\angle OCO_1 = 90° - \angle MAC = 90° - \varphi$, шу учбурчакдан OO_1 кесмани топамиз:

$$OO_1 = OC \cdot \operatorname{tg}(90° - \varphi) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\varphi.$$

Энди KN учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$KN = 2 \cdot O_1E \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\varphi - \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right)\operatorname{ctg}\varphi = a\sqrt{2}(1 - \operatorname{ctg}^2\varphi).$$

Демак,

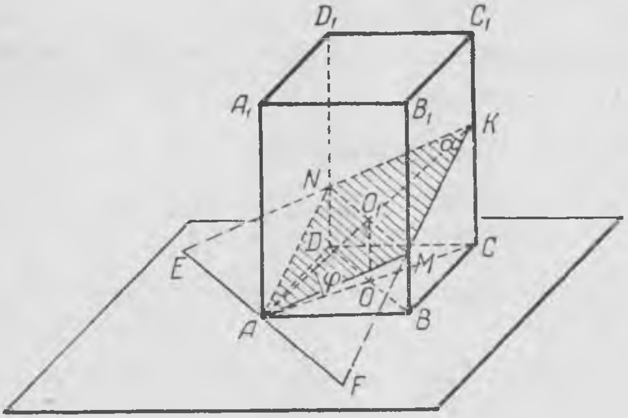
$$S_{\text{кесим}} = \frac{1}{2} MC \cdot KN = a^2(1 - \operatorname{ctg}^2\varphi)\sin\varphi = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}.$$

Изоҳ. AE га перпендикуляр $KCNM$ текислик пирамидани кесиб, унда кесим ҳосил қилиши учун унинг AE тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси бўлган M нуқта AE кесманинг давомида эмас, унинг ўзида ётиши керак, бунинг учун AEC бурчак ўткир бўлиши, яъни $\angle AEC = 180^0 - 2\varphi < 90°$ бўлиши лозим. Демак, $\varphi > 45°$; шунинг учун $\cos 2\varphi$ манфий миқдордир.

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a^2\cos(180° - 2\varphi)}{\sin\varphi}$.

699. Призма ён сиртининг кесимида ҳосил бўлган $AMKN$ тўртбурчак (174-чизма) доим параллелограмм бўлади (исбот этинг!). Бу тўртбурчак ромб бўлиши учун $AM = AN$ бўлиши лозим. ADN ва ABM учбурчакларнинг тенглигидан (исбот этинг!) $DN = BM$

экани чиқади. Бундай экан, MN тўғри чизиқ BD тўғри чизиққа параллел, демак, MN тўғри чизиқ $ABCD$ текисликка ҳам параллелдир. Бундай экан, $AMKN$ текислик билан $ABCD$ текисликнинг кесишиш чизиғи бўлган EF тўғри чизиқ MN диагоналга



174-чизма.

(BD диагоналга ҳам) параллел, демак, ромбнинг иккинчи диагонали AK га (AC диагоналга ҳам) перпендикулярдир. Бундан $\varphi = \angle CAK$ — изланган икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги экани чиқади. Ромбнинг маркази O_1 нуқтани призма асосининг маркази билан туташтирувчи OO_1 тўғри чизиқ асосга перпендикулярдир (исбот этинг!).

AOO_1 учбурчакдан:

$$\cos\varphi = \frac{AO}{AO_1} = \frac{OB}{AO_1} = \frac{O_1M}{AO_1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

эканлигини топамиз.

Изоҳ. AM ва AN тўғри чизиқлар орқали ўтказилган текислик CC_1 қиррани $CC_1 \geqslant CK$ бўлганда, яъни призманинг баландлиги

$$a\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

дан кичик бўлмаган ҳолдагина кесади. Акс ҳолда на A нуқта орқали ва на AA_1 қирранинг бошқа бир нуқтаси орқали талаб этилган текисликни ўтказиб бўлмайди.

Жавоб. $\varphi = \arccos\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Масала фақат $H \geqslant \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ шарти бажарилсагина ечимга эга бўлади.

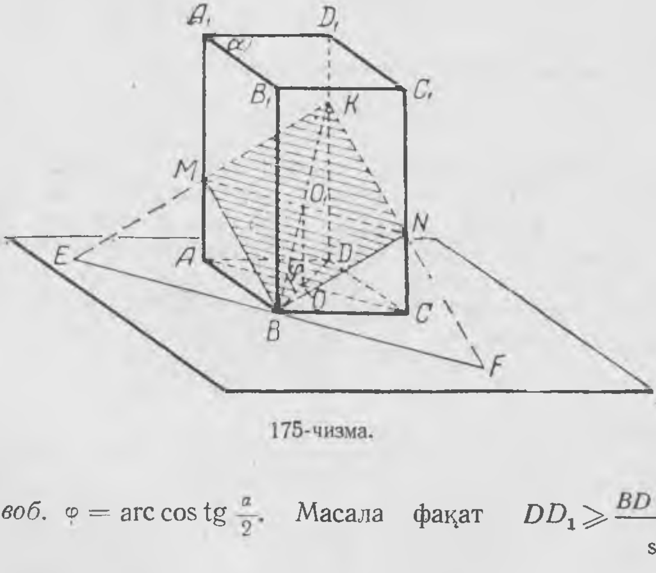
700[1]. Бундан олдинги масаланинг ечими билан солиштиринг. $MN = AC$ (175-чизма) ва $BK > BD$ ҳамда масаланинг шартига кўра $BK = MN$ бўлгани учун $AC > BD$, яъни AC кесма ромбнинг катта диагоналидир, шунинг учун $\angle ABC$ — ўтмас, $\angle BAD$ эса ўткир.

$\varphi = \angle OBO_1$ — изланган икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги. OO_1B учбурчакдан $\cos\varphi = \frac{OB}{O_1B}$, бунда $OB = OA \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Аммо $OA = O_1M = O_1B$ бўлгани учун

$$\cos\varphi = \frac{O_1B \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{O_1B} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Бунда $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} < 1$, чунки α — ўткир бурчак.



175-чизма.

Жавоб. $\varphi = \arccos\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Масала фақат $DD_1 \geqslant \frac{BD\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ шарти бажарилгандагина ечимга эгадир.

701. Бундан аввалги масалага солиштиринг. $BNKM$ ромб кесимининг юзи (176-чизма):

$$S_{\text{кесим}} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot BK = 2MO_1 \cdot BO_1.$$

---

[1] Тўғри призмани тасвирлаш ҳақида 289-бетга қаралсин (83-чизма).

MO_1B учбурчакда $\angle MBO_1 = \frac{\alpha}{4}$; бу учбурчакдан

$$BO_1 = MO_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{4}.$$

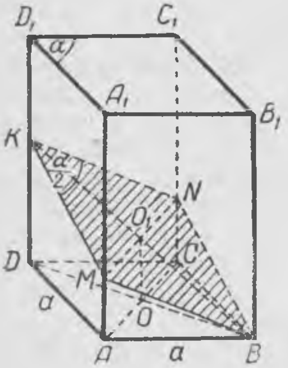
Демак,

$$S_{\text{кесим}} = 2 \cdot MO_1^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{4} = 2 \cdot AO^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{4}.$$

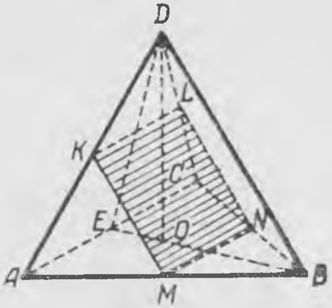
AOB учбурчакда $AB = a$ ва $\angle ABO = \frac{\alpha}{2}$; бу учбурчакдан AO кесмани топамиз:

$$AO = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = 2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{4}$.



176-чизма.



177-чизма

702[1]. Кесувчи текислик AB қирранинг ўртаси M нуқта орқали (177-чизма) AC ва BD қирраларга параллел қилиб ўтказилган бўлсин. AC қирра ABC учбурчак текислигида ётади. Шунинг учун M нуқта орқали AC га параллел ҳолда ўтган текислик ABC ёқни AC га параллел MN тўғри чизиқ бўйича кесади. Демак, MN кесма ABC учбурчакнинг ўрта чизиғидир $\left(MN = \frac{1}{2} AC = \frac{b}{2}\right)$, яъни N нуқта BC қирранинг ўртасидир. BD қирра BCD учбурчак текислигида ётади, кесим текислиги эса BD қиррага параллел. Шунинг учун $NL \parallel BD \left(NL = \frac{1}{2} BD = \frac{b}{2}\right)$ ва L нуқта CD қирранинг

---

[1] Мунтазам уч бурчакли призмани тасвирлаш ҳақида 288-бетга қаралсин (82-чизма).

ўртасидир. $MK = \frac{b}{2}$ ва K нуқта AD қирранинг ўртаси эканлиги ҳам шундай исботланади. Демак,

$$KL \parallel AC \text{ ва } KL = \frac{b}{2}.$$

Демак, $MNLK$ кесим ромбдир. Аммо, ундан ташқари, NMK тўғри бурчак. Ҳақиқатан, BD қирра BDE текислигида ётади (E нуқта AC қирранинг ўртаси), бу текислик эса AC қиррага перпендикуляр. Демак, $BD \perp AC$. Аммо, исботланганига кўра $MK \parallel BD$ ва $MN \parallel AC$; шундай бўлса, $MK \perp MN$. Бундан $MNLK$ — квадрат ва бу квадратнинг томони $\frac{b}{2}$ га тенглиги чиқади.

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = \frac{b^2}{4}$.

703. CD (178-чизма) асос текислигига перпендикуляр ён қирра бўлсин. Шартга кўра $\angle DAC = < DBC = \alpha$ бўлгани учун $AC = CB$, яъни ABC учбурчак — учи C нуқтадаги тенг ёнли учбурчакдир, демак, шартга мувофиқ $\angle C = 90°$. Пирамиданинг ABC асосига перпендикуляр ҳар қандай кесим икки бурчаги ($\angle NKL$ ва $\angle KLM$) тўғри бўлган $NKLM$ тўртбурчакдир. Бу тўртбурчак квадрат бўлиши учун $KN = KL = LM = x$ бўлиши керак. AKN ва BLM учбурчакларнинг тенглигидан (исбот этинг!) $AK = BL$ экани чиқади. Демак. $KC = CL$ ва $KC = \frac{KL}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. AKN учбурчакдан:

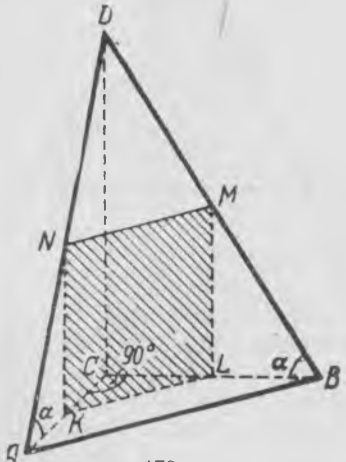
$$AK = KN \cdot \text{ctg}\,\alpha = x\,\text{tg}\,\alpha.$$

$$KC + AK = AC = a$$

бўлгани учун

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + x\,\text{ctg}\,\alpha = a$$

тенгламани туза оламиз, бундан



178-чизма.

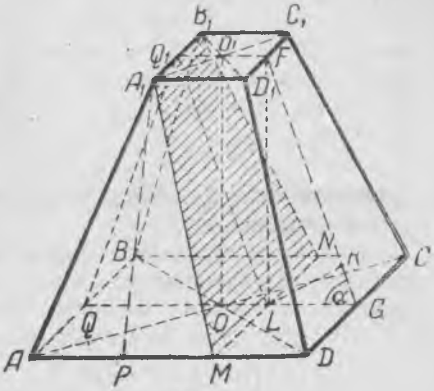
$$x = \frac{a\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}\,\text{ctg}\,\alpha}.$$

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = x^2 = \frac{2a^2}{(1 + \sqrt{2}\,\text{ctg}\,\alpha)^2}$.

704. Кесимда (179-чизма) DD_1C_1C ён ёққа тенг MA_1BN трапеция ҳосил бўлади (исбот этинг!). Кесик пирамидадан кесиб олинган $A_1B_1C_1D_1MNCD$ қисмда $A_1D_1 = B_1C_1 = NC = MD$, чунки булар параллел текисликлар орасидаги параллел кесмалардир. Ҳосил бўлган жисм асоси CC_1D_1D дан иборат оғма призмадир. Кесик пирамиданинг FG апофемаси ва асосининг OG апофемаси орқали $FGQQ_1$ текислик ўтказамиз, унда $\angle FGL = \alpha$ ҳосил бўлади (исбот этинг!). L нуқтадан GF тўғри чизиққа туширилган LK перпендикуляр призманинг баландлиги бўлади (исбот этинг!). LKG учбурчакда $LG = Q_1F = a$, бу учбурчакдан $LK = a\sin\alpha$ эканлигини аниқлаймиз. FLG учбурчакдан $FG = \frac{LG}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}$ эканлигини топамиз. Призманинг ҳажмини ушбу

$$V = \frac{D_1C_1 + DC}{2} \cdot FG \cdot LK$$

формула билан ҳисоблаймиз.



179-чизма.

A_1B_1NM текислик кесиб ажратган AMA_1B_1NB жисмнинг тўла сиртини топамиз. AA_1B_1B ёқ MA_1B_1N кесимга тенгдош (исбот этинг!). Бу ёқлардан ҳар бирининг юзи $S_1 = \frac{a + 3a}{2} \cdot QQ_1$ бўлиб, унда $QQ_1 = FG = \frac{a}{\cos\alpha} \cdot AA_1M$ ва BNB_1 ёқлардан ҳар бирининг юзи $S_2 = \frac{AM \cdot A_1P}{2}$ бўлиб, $AM = AD - MD = 3a - a = 2a$ ва $A_1P = FG = \frac{a}{\cos\alpha}$. $ABNM$ ёқнинг юзи $S_3 = AM \cdot AB = 2a \cdot 3a$. Шундай қилиб изланган тўла сирт:

$$S = 2S_1 + 2S_2 + S_3.$$

Жавоб. $V = 2a^3 \operatorname{tg}\alpha$; $S = \frac{12a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

705-ва ундан кейинги масалаларга доир дастлабки изоҳлар

705-ва ундан кейинги учта масалани ечишда қуйидаги теоремадан фойдаланамиз.

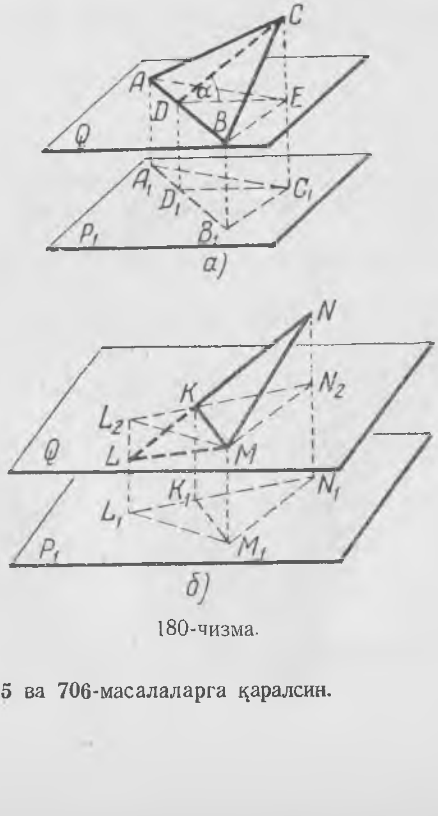
Агар P текисликда ётган $ABCDE$ . . . кўпбурчак P_1 текисликка $A_1B_1C_1D_1E_1$ . . . кўпбурчак шаклда проекцияланса (проекция — тўғри бурчакли), унда $ABCDE$ ... кўпбурчакнинг S юзи билан $A_1B_1C_1D_1E_1$ . . . кўпбурчакнинг S_1 юзи орасида

$$S_1 = S\cos\alpha$$

муносабат бўлади, бунда α бурчак P ва P_1 текисликлар орасидаги бурчакдир.

Олий ўқув юртларига кириш имтиҳонларида кўпинча шундай масалалар бериладики, уларни бу теоремасиз ечиш қийин бўлади1). Ҳолбуки бу теорема бизнинг тригонометрия дарсликларимизда йўқ. Шунинг учун бу теореманинг исботини берамиз.

Исбот. Аввало проекцияланувчи шакл ABC учбурчакдан иборат бўлиб, унинг битта AB томони проекция текислиги P га параллел бўлган ҳолни қараб чиқамиз (180-*а* чизма). AB орқали P_1 текисликка параллел қилиб Q



180-чизма.

---

1) Масалан, 705 ва 706-масалаларга қаралсин.

текисликни ўтказамиз (E нуқта проекцияловчи CC_1 тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси). Унда $A_1B_1C_1$ учбурчакка тенг ABE учбурчак ҳосил бўлади. ACB учбурчакнинг CD баландлигини ўтказамиз; ED тўғри чизиқ AEB учбурчакнинг баландлиги, $\alpha = \angle EDC$ бурчак эса P ва P_1 текисликлар орасидаги икки ёқли $CABE$ бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади. DCE учбурчакдан $DE = CD \cdot \cos\alpha$ эканлигини топамиз. Демак,

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} AB \cdot DC \cdot \cos\alpha = S \cos\alpha.$$

Сўнгра проекцияланувчи шакл томонлари P_1 текисликка параллел бўлмаган LMN учбурчакдан иборат ҳолни кўздан кечирамиз (180-*б* чизма). Бундай учбурчакни юқорида кўрилган учбурчак типидаги иккита учбурчакка ажратиш мумкин. Бунинг учун бу учбурчакнинг бирор (P_1 текисликка жуда ҳам яқин бўлмаган, ундан жуда ҳам узоқ бўлмаган) M учидан P_1 текисликка параллел Q текислик ўтказиш кифоя; бу текислик LMN учбурчакни P_1 текисликка параллел KM тўғри чизиқ бўйича кесади. Агар S' ва S'' юзлар KMN ва LMK учбурчакларнинг юзлари, $S_1^{'}$ ва $S_1^{''}$ юзлар бу учбурчаклар проекцияларининг ($K_1M_1N_1$ ва $L_1M_1K_1$ учбурчакларнинг) юзлари бўлса, унда исбот этганимизга асосан:

$$S_1^{'} = S' \cos\alpha \text{ ва } S_1^{''} = S'' \cos \alpha$$

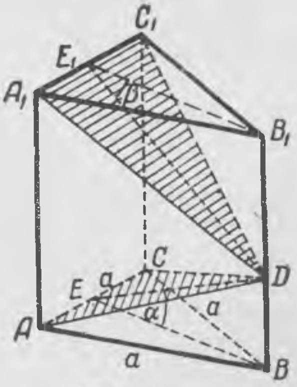
бўлади. Аммо $S = S' + S''$ ва $S_1 = S_1^{'} + S_1^{''}$ бўлгани учун

$$S_1 = S_1^{'} + S_1^{''} = S' \cos\alpha + S'' \cos\alpha = (S' + S'') \cos\alpha = S \cos a.$$

Кўпбурчакнинг томонлари учтадан ортиқ бўлган ҳолда, уни учбурчакларга бўламиз ва, аввалгидек мулоҳаза юритиб, умумий теоремани исбот қиламиз.

Шуни айтиб ўтамизки, бу теорема эгри чизиқли шакллар учун ҳам тўғридир. Буни исбот этиш учун эгри чизиқли шаклга ички кўпбурчак чизиш ва лимитга ўтиш керак.

705. Маълумки (181-чизма), $S_{\text{асос}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ва $H = BB_1 = BD + DB_1$.



181-чизма.

Бунда BED ва B_1E_1D учбурчаклардан (E ва E_1 нуқталар AC ва A_1C_1 томонларнинг ўрталари):

$$BD = BE \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

ва

$$B_1D = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\beta$$

Демак,

$$V = S_{\text{асос}} \cdot H = \frac{3a^3}{8} (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \frac{3a^3 \sin(\alpha + \beta)}{8\cos\alpha\cos\beta}.$$

ADC кесим остки асос текислигига ABC учбурчак шаклида проекцияланади. Исбот этганимизга асосан (дастлабки изоҳга қаранг) ADC кесимнинг S юзи ва ABC учбурчакнинг юзи $S_{\text{асос}} = S \cos\alpha$ муносабати билан боғланган, бундан $S = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos\alpha}$.

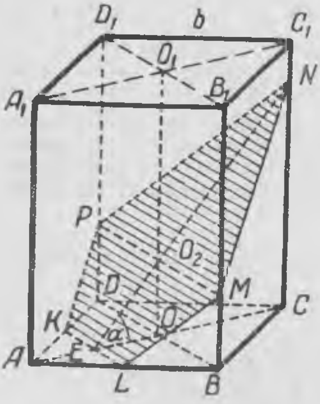
Шундай йўл билан (A_1DC_1 ни устки асосга проекциялаб) A_1DC_1 кесимнинг юзи $S' = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos\beta}$ эканлигини аниқлаймиз. Демак,

$$S + S' = S_{\text{асос}}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right).$$

Жавоб. $V = \frac{3a^2\sin(\alpha+\beta)}{8\cos\alpha\cos\beta}$;

$$S + S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\sqrt{3}\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

706. а) Тасвирлаш усули. AB ва AD томонларнинг (182-чизма) ўрталари K ва L нуқталарни туташтирамиз. KL билан AC нинг кесишиш нуқтаси E орқали EN тўғри чизиқ ўтказамиз (NEC бурчак икки ёқли α бурчакнинг чизиқли бурчагини тасвирлайди). EN билан OO_1 (ўқ тасвири) кесишадиган O_2 нуқта орқали $PM \parallel BD$ ўтказамиз. $KLMNP$ бешбурчак кесимни тасвирлайди. Бунинг исботи қуйидаги ечишдан келиб чиқади.



182-чизма.

б) Ечиш. $KL \parallel BD$ бўлгани учун $KLMNP$ текислик (KL орқали ўтувчи текислик) DBB_1D_1 диагонал текислик (BD орқали ўтади) билан KL ва BD га параллел PM тўғри чизиқ бўйича кесишади. Призманинг OO_1 ўқи DBB_1D_1 диагонал текисликда ётади ва, демак, PM тўғри чизиқ билан кесишади. ACC_1A_1 диагонал текислик билан $KLMNP$ текислик NE тўғри чизиқ бўйича кесишади (E нуқта — KL нинг ўртаси); бу тўғри чизиқ ҳам OO_1 ўқ билан кесишади. Аммо, PM ва EN тўғри чизиқлар ётган $KLMNP$ текислик OO_1 ўқ билан фақат бир O_2 нуқтада кесишгани учун EN ва MP тўғри чизиқларнинг иккаласи ҳам шу нуқтадан ўтади, яъни PM ва EN тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси OO_1 ўқда ётади. EC ва EN тўғри чизиқлар KL га перпендикуляр (уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага биноан); демак, $\angle CEN = \alpha$.

$KLBCD$ бешбурчакнинг S юзи $ABCD$ квадрат юзи билан AKL учбурчак юзи орасидаги айирмага тенг:

$$S = b^2 - \frac{b^2}{8} = \frac{7}{8}b^2.$$

$KLMNP$ бешбурчак кесимнинг юзи $S_{\text{кесим}}$ 705-масалага доир дастлабки изоҳда исбот этилган теоремадан фойдаланиб топилади (366-бетга қаранг). Демак, $\frac{7}{8}b^2 = S_{\text{кесим}} \cos\alpha$, яъни

$$S_{\text{кесим}} = \frac{7b^2}{8\cos\alpha}.$$

MO_2N ва BOC учбурчакларни (уларда $BO = MO_2$ ва $MN > BC$) таққослаб, $\angle MNO_2 < \angle BCO$ эканлигига ишонамиз. Аммо $\angle BCO = 45°$ бўлгани учун $\angle MNO_2 < 45°$ ва, демак, $\varphi = \angle MNP$ ўткир бурчак. Кесимнинг қолган бурчаклари ўтмас [ўтмас бурчак $NMO_2 = (90° \angle MNO_2) > 45°$; $\angle MLK = 180° - \angle LMO_2 = 180° - \angle NMO_2$].

MO_2N учбурчакдан:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{MO_2}{NO_2},$$

аммо

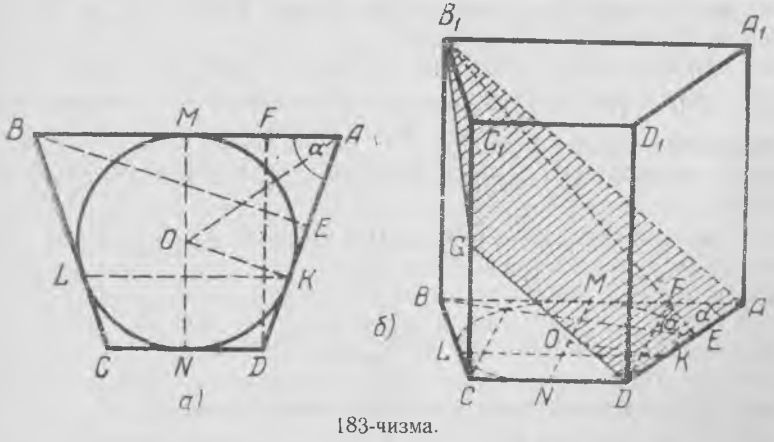
$$NO_2 = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{MO_2}{\cos\alpha}.$$

Демак,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \cos\alpha.$$

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = \frac{7b^2}{8\cos\alpha}$; $\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg}(\cos\alpha)$.

707. а) Тасвирлаш усули. Аввал призманинг асосини айрим чизиб оламиз (183-*а* чизма). Сўнгра асосга ички чизилган доирани тасвирловчи эллипсни (183-*б* чизма) ўткамиз[1]). Эллипснинг бирор MN диаметрини чизиб, унинг учлари орқали CD ва

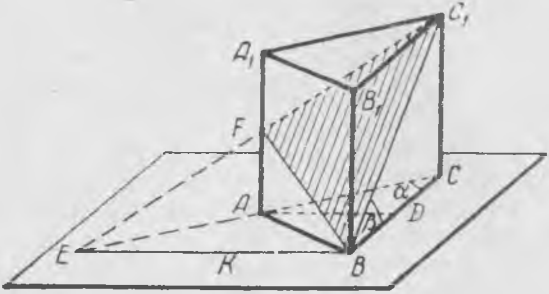


183-чизма.

---

[1]) Эллипсни чизиш ҳақида 296-бетга (92-чизма) қаралсин.

AB уринмаларни ўтказамиз; бу уринмалар тенг ёнли трапеция асослари ётган тўғри чизиқларни тасвирлайди. CD ва AB тўғри чизиқларга параллел қилиб бирор KL тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ эллипсни кесган K ва L нуқталар орқали эллипсга уринмалар (DA ва BC) ўтказамиз. $ABCD$ тўртбурчак доирага ташқи чизилган тенг ёнли трапецияни тасвирлайди. Сўнгра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри призманинг тасвирини ясаймиз. AD ён томон ва B_1 уч орқали ўтувчи текислик AA_1B_1B ёқни AB_1 тўғри чизиқ бўйича, бу ёққа параллел DD_1C_1C ёқни эса AB_1 га параллел DG тўғри чизиқ бўйича кесади. Кесимда AB_1GD тўртбурчак ҳосил бўлади. B нуқта орқали K уриниш нуқтасига олиб борувчи OK радиусга параллел қилиб BE тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ B нуқтадан AD томонга туширилган перпендикулярни тасвирлайди. Демак, BEB_1 бурчак икки ёқли α бурчак чизиқли бурчагининг тасвиридир.



184-чизма.

б) Ечиш. DFA учбурчакда (183-б чизма) $DF = MN = 2r$ ва $\angle DAF = \alpha$. Бу учбурчакдан $BC = AD = \frac{2r}{\sin\alpha}$ эканлигини аниқлаймиз. AB ни a билан, CD ни b билан, $AD = BC$ ни c билан белгилаймиз. Ташқи чизилган тўртбурчакнинг хоссасига асосан

$$a + b = AB + CD = AD + BC = 2c = \frac{4r}{\sin\alpha}.$$

Унда

$$S_{\text{асос}} = \frac{a+b}{2} h = \frac{2r}{\sin\alpha} \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}.$$

Демак (**705**-масалага доир дастлабки изоҳга қаранг),

$$S_{\text{кесим}} = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos\alpha} = \frac{4r^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{8r^2}{\sin 2\alpha}.$$

Аввал BEA учбурчакдан BE ни аниқлаб, сўнгра BB_1E учбурчакдан $H = BE$ баландликни топамиз. BEA учбурчакда

$$AB = a = 2AM = 2OM \cdot \mathrm{ctg} \angle OAM = 2r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Бу учбурчакдан:

$$BE = a \sin\alpha \text{ ва } H = BE \cdot \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Демак,

$$H = 2r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Энди ён сиртни топамиз:

$$S_{\text{ён}} = H(a + b + 2c) = 4\,Hc.$$

Жавоб. $S_{\text{ён}} = 16\,r^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$; $S_{\text{кесим}} = \frac{8r^2}{\sin 2\alpha}$.

708. а) Тасвирлаш усули. Кесувчи P текисликни BCC_1B_1 ёқнинг икки диагоналидан хоҳлаган бири орқали ўтказиш мумкин (184-чизма). Бу текисликни BC_1 диагонал орқали ўтказамиз. Шартга кўра $P \parallel AD$. Демак, P текислик ABC асос текислигини AD га параллел BK тўғри чизиқ бўйича кесади (BK тўғри чизиқ бутунлай ABC учбурчакдан ташқарида ётади). BCC_1B_1 ёқ AD га перпендикуляр бўлгани учун, BK тўғри чизиққа ҳам перпендикулярдир, демак, CBC_1 бурчак BK қиррадаги икки ёқли β бурчакнинг чизиқли бурчагидир.

Энди призманинг P текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган учбурчакни тасвирлаймиз. Бу учбурчакнинг бир томони (BC_1) маълум; қарама-қарши учини, яъни P текисликнинг AA_1 қирра билан кесишиш нуқтасини топишгина қолади. Бунинг учун BK тўғри чизиқ билан AC қирранинг давоми кесишган E нуқтани C_1 нуқта билан туташтириш кифоя. C_1E тўғри чизиқ AA_1 қиррани кесган F нуқта изланган уч бўлади.

Буни исбот қиламиз. E нуқта P текислик билан ABC текислик кесишган BE тўғри чизиқда ётгани учун бу нуқта P текисликнинг нуқтаси бўлади. Иккинчи томондан E нуқта ACC_1A_1 текислик билан ABC текислик кесишган AC тўғри чизиқда ётади; демак, бу нуқта ACC_1A_1 текисликка тегишли (ACC_1A_1 ёқнинг давомида ётади). Шундай қилиб, E нуқта P ва ACC_1A_1 текисликларнинг кесишиш чизиғида ётувчи нуқтадир. C_1 нуқта ҳам, шартга кўра, шу текисликларнинг кесишиш чизиғида ётади. Демак, P ва ACC_1A_1 текисликлар C_1E тўғри чизиқ бўйича кесишади, яъни бу тўғри чизиқда кесимнинг CC_1A_1A ёғидаги C_1F томони ётади. Шундай қилиб, C_1E билан AA_1 қирра кесишган F нуқта— изланган учдир.

б) Ечиш. ABC учбурчак P текисликда ётган FBC_1 учбурчакнинг асос текислигидаги проекцияси бўлгани учун

$$S_{\text{кесим}} = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos\beta} = \frac{\frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha}{\cos\beta},$$

бунда $a = AC$ — тенг ёнли ABC учбурчакнинг ён томони. a^2 ни S ён сирт орқали ифода қиламиз. Унда

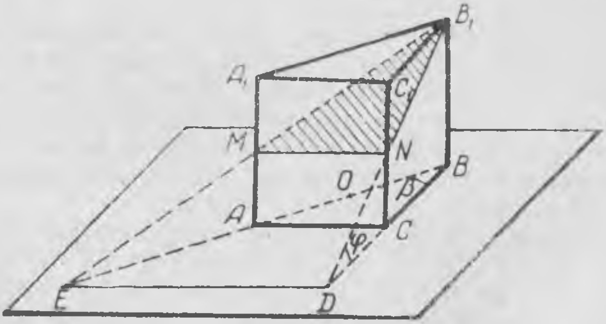
$$S = (2AC + BC)\cdot CC_1$$

бўлади, бунда $AC = a$, $BC = 2a\cos\alpha$ ва $CC_1 = BC\cdot\operatorname{tg}\beta = 2a\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$. Демак,

$$S = 4a^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta = 8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = \dfrac{S}{16}\,\dfrac{\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\cos\beta\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{4\sin\beta}.$

709. а) Тасвирлаш усули. Асоснинг катетини тасвирловчи BC кесмани (185-чизма) $CD = BC$ масофага узайтиб, аслида AC катетга нисбатан B нуқтага симметрик бўлган D нуқтани ҳосил қиламиз.



185-чизма.

AA_1 қирранинг ўртаси M нуқтани оламиз ҳамда призманинг B_1, M ва D нуқталар орқали ўтган P текислик билан кесимини тасвирлаймиз. Бунинг учун B_1 ва D нуқталарни туташтирамиз. Бу тўғри чизиқнинг CC_1 қирра билан кесишиш нуқтаси N ни топамиз. B_1NM учбурчак изланган кесим бўлади. Ҳақиқатан, D нуқта

BC тўғри чизиқда ётади ва, демак, CBB_1C_1 текисликка тааллуқлидир (D нуқта CBB_1C_1 ёқнинг давомида ётади). Аммо D нуқта P текисликда ҳам ётади, шунинг учун бу нуқта P текисликнинг CBB_1C_1 текислик билан кесишиш чизиғида бўлади. Худди шунингдек, B_1 нуқта ҳам шу чизиқда эканлиги топилади. Демак, P ва BCC_1B_1 текисликлар B_1D тўғри чизиқ бўйича кесишади. B_1D нинг CC_1 қирра билан кесишиш нуқтаси N — кесим учларидан биридир, призманинг кесими B_1NM учбурчакдир.

$BC = CD$ ва $CN \parallel BB_1$ бўлгани учун CN кесма BB_1D учбурчакнинг ўрта чизиғи, яъни N нуқта CC_1 қирранинг ўртасидир. Демак, MN тўғри чизиқ асос текислигида ётувчи AC тўғри чизиққа параллелдир. Бунинг натижасида P текисликнинг асос текислиги билан кесишувчи DE тўғри чизиғи ҳам AC га параллел ва, демак, BCC_1B_1 ёқ текислигига перпендикулярдир. Шунинг учун BDB_1 бурчак DE қиррадаги икки ёқли φ бурчакнинг чизиқли бурчагидир.

б) Ечиш.

$$S_{\text{кесим}} = \frac{S_{\text{асос}}}{\cos\varphi} = \frac{ab}{2\cos\varphi}$$

(бундан олдинги масаланинг ечимига қаранг), бунда $a = BC$, $b = AC$. Аммо $b = a \operatorname{tg}\beta$ бўлгани учун

$$S_{\text{кесим}} = \frac{a^2 \operatorname{tg}\beta}{2\cos\varphi}.$$

a^2 ни топамиз. Шартга кўра β бурчак ABC учбурчак ўткир бурчакларининг кичиги; демак, $b<a$ ва ACC_1A_1 ёқнинг bH юзи BCC_1B_1 ёқнинг aH юзидан кичикдир. Шунинг учун бу юзларнинг айирмаси

$$S = (a - b)H$$

(бу айирмани мусбат деб фараз қиламиз). DBB_1 учбурчакда $BD = 2BC = 2a$. Бу учбурчакдан $H = 2a \operatorname{tg}\varphi$ эканлигини аниқлаймиз. Демак,

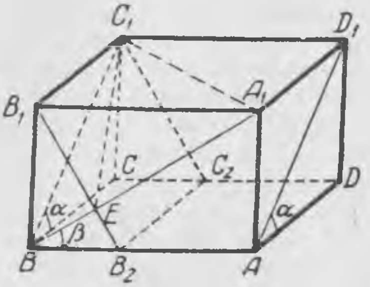
$$S = 2a^2(1 - \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\varphi.$$

Бунда a^2 ни топамиз.

Жавоб. $S_{\text{кесим}} = \frac{S}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta}{(1 - \operatorname{tg}\beta)\sin\varphi} = \frac{S}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(45^\circ - \beta)\sin\varphi}.$

710. Ўзаро кесишмайдиган BA_1 ва AD_1 диагоналлар орасидаги φ бурчак (186-чизма) BA_1 билан AD_1 га параллел BC_1 тўғри чизиқлар орасидаги A_1BC_1 бурчакка тенг: $\varphi = \angle A_1BC_1$. Масаланинг шартидан маълумки $\angle CBC_1 = \angle DAD_1 = \alpha$ ва $\angle ABA_1 = \beta$. Энди φ бурчакни аниқлаш учун $A_1C_1^2$ ни аввал A_1BC_1 учбурчакдан (косинуслар теоремаси бўйича), сўнгра тўғри бурчакли $A_1B_1C_1$ учбурчакдан топамиз ва топилган ифодаларни тенглаштирамиз. Унда:

$$BA_1^2 + BC_1^2 - 2\cdot BA_1\cdot BC_1\cdot\cos\varphi = B_1A_1^2 + B_1C_1^2.$$



186-чизма.

Бундан

$$2\cdot BA_1\cdot BC_1\cdot\cos\varphi = (BA_1^2 - B_1A_1^2)+(BC_1^2-B_1C_1^2) = 2\cdot BB_1^2.$$

Бу тенгликка (BAA_1 учбурчакдан)

$$BA_1 = \frac{AA_1}{\sin\beta} = \frac{BB_1}{\sin\beta}$$

ва $BC_1 = \frac{BB_1}{\sin\alpha}$ қийматларни қўямиз. Натижада

$$\cos\varphi = \sin\alpha\ \sin\beta$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Иккинчи усул. B_1C_1 қирра орқали BA_1 га перпендикуляр қилиб $B_1C_1B_2C_2$ текисликни ўтказамиз (бу мумкин, чунки $B_1C_1\perp BA_1$). E нуқта BA_1 ва B_1B_2 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. Тўғри бурчакли BC_1E учбурчакдан: $BE=BC_1\cos\varphi$ тўғри бурчакли BB_1E учбурчакдан (бу учбурчакда $\angle B_1BE = 90° - \beta$):

$$BE = BB_1\cdot\cos(90° - \beta) = BB_1\cdot\sin\beta.$$

BB_1C_1 учбурчакда $\angle B_1BC_1 = 90° - \alpha$. Бу учбурчакдан $BB_1 = BC_1\cdot\sin\alpha$, демак,

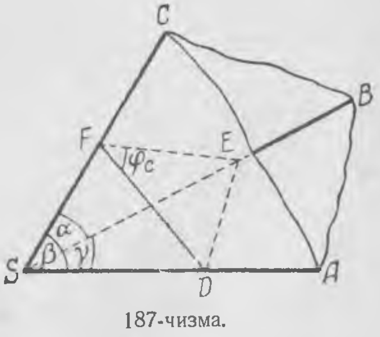
$$BE = BC_1\cdot\sin\alpha\sin\beta.$$

BE кесманинг иккала ифодасини тенглаб,

$$BC_1\cdot\cos\varphi = BC_1\cdot\sin\alpha\ \sin\beta$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta$.



187-чизма.

711. SA, SB, SC қирралардаги икки ёқли бурчакларни (187-чизма) мос равишда φ_A, φ_B, φ_C билан белгилаймиз. SC қирранинг бирор F нуқтаси орқали SF га перпендикуляр қилиб DFE текисликни ўтказамиз. У вақтда $\angle DFE = \varphi_C$ бўлади. EFD учбурчакдан ва FSD учбурчакдан ED^2 ни топамиз, сўнгра ҳосил бўлган ифодаларни тенглаштирамиз:

$$FE^2 + FD^2 - 2\cdot FE\cdot FD\cdot\cos\varphi_C = SE^2 + SD^2 - 2\cdot SE\,.\,SD\cdot\cos\gamma.$$

Бундан

$$2\cdot FE\cdot FD\cdot\cos\varphi_C=2\cdot SE\cdot SD\cdot\cos\gamma-(SE^2-FE^2)-(SD^2-FD^2),$$

яъни

$$2\cdot FE\cdot FD\cdot\cos\varphi_C=2\cdot SE\cdot SD\cdot\cos\gamma-2\cdot SF^2.$$

Бу тенгликка

$$FE=SF\cdot\operatorname{tg}\alpha;$$
$$FD=SF\cdot\operatorname{tg}\beta;$$
$$SE=\frac{SF}{\cos\alpha}$$

ва

$$SD=\frac{SF}{\cos\beta}$$

қийматларини қўямиз. Натижада

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\varphi_C=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1$$

ҳосил қиламиз, бундан

$$\cos\varphi_C=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Шунинг сингари $\cos\varphi_A$ ва $\cos\varphi_B$ ни топамиз.

Жавоб. $\cos\varphi_A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$;

$$\cos\varphi_B=\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha};$$

$$\cos\varphi_C=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

712. Бундан аввалги масала каби ечилади.
Жавоб. $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos A$.

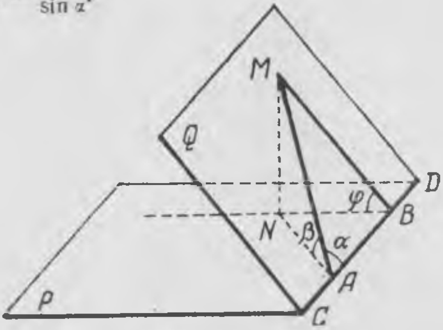
713. 711-масалага қаранг.
Жавоб. Изланган бурчак 90° га тенг.

714. M нуқта Q ёқда ётган бўлсин (188-чизма). Шартга кўра AM тўғри чизиқ AB билан α бурчак ҳосил қилади, MB тўғри чизиқ AB га перпендикуляр. BM орқали қиррага перпендикуляр қилиб MBN текисликни ўтказамиз ва M нуқтадан BN га MN перпендикулярни туширамиз. MN кесма NA га ҳам перпендикуляр ва $\angle MAN=\beta$ бўлади (исбот этинг!). $\angle\varphi=$ $=\angle NBM$ — чизмада белгилаймиз. φ бурчакни NBM учбурчакдан топамиз. ANM учбурчакдан $MN=AM\cdot\sin\beta$ ва AMB учбурчакдан: $BM=AM\cdot\sin\alpha$.

NBM учбурчакдан:

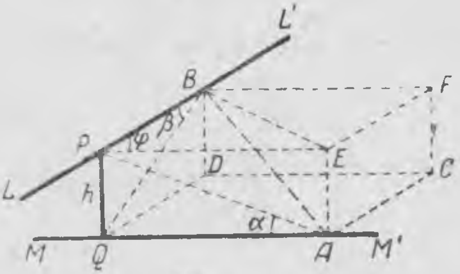
$$\sin\varphi = \frac{MN}{BM} = \frac{AM\sin\beta}{AM\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Жавоб. $\sin\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.



188-чизма.

715. 189-чизма *PQ* кесма ўзаро айқаш *LL'* ва *MM'* тўғри чизиқларга умумий перпендикулярни тасвирлайди.



189-чизма.

PQ кесманинг *A* нуқтадан кўриниш бурчагини ҳосил қилиш учун *AP* нурни ўтказиш керак; унда $\angle PAQ = \alpha$ бўлади. Шунга ўхшаш $\angle PBQ = \beta$. Энди *P* нуқта орқали *MM'* га параллел қилиб *PE* тўғри чизиқни ўтказамиз. Унда *MM'* ва *LL'* тўғри чизиқлар орасидаги бурчак (аниқлашга кўра) $\varphi = \angle EPB$. *A* нуқтадан *PE* тўғри чизиққа *AE* перпендикулярни туширамиз ва *AB* кесмани ўтказамиз (қирралари *PQ*, *QA* ва *PB* дан иборат параллелепипеднинг тасвирини ҳосил қилувчи қолган ҳамма чизиқлар фақат чизманинг очиқ бўлиши учун ўтказилган).

Тўғри бурчакли *BPQ* учбурчакдан:

$$PB = PQ\operatorname{ctg}\beta = h\operatorname{ctg}\beta.$$

Шунинг сингари

$$PE = QA = h\operatorname{ctg}\alpha.$$

Сўнгра

$$BE^2 = PB^2 + PE^2 - 2\cdot PB\cdot PE\cos\varphi =$$
$$= h^2(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi).$$

AE тўғри чизиқ EPB текисликка перпендикуляр, чунки бу чизиқ PB ва PE тўғри чизиқларнинг умумий перпендикуляри PQ тўғри чизиққа параллелдир. Тўғри бурчакли AEB учбурчакдан

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = h^2 + BE^2.$$

Жавоб. $AB^2 = h^2(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi)$.

716. Бундан аввалги масаланинг чизмаси (бу масалада $\varphi = 90°$). PBE учбурчакдан:

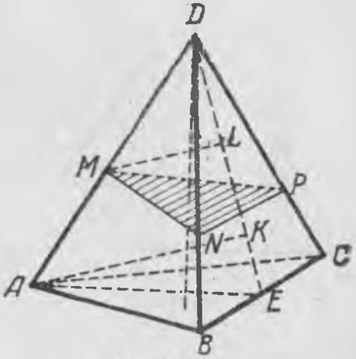
$$BE = \sqrt{PE^2 + PB^2} = h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}.$$

AB ва PQ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак, PQ га параллел AB ва AE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка тенг. Бу бурчакни γ билан белгиласак:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{BE}{AE} = \frac{h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}}{h}.$$

Жавоб. $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}$.

717. $\frac{DM}{MA} = \frac{m_1}{n_1}$, $\frac{DN}{NB} = \frac{m_2}{n_2}$, $\frac{DP}{PC} = \frac{m_3}{n_3}$ бўлсин (190-чизма).



190-чизма.

Аввало $DMNP$ пирамида V_1 ҳажмининг $DABC$ пирамиданинг V_2 ҳажмига нисбатини топамиз. BDC ёқни $DABC$ пирамиданинг асоси учун ва NPD ёқни $DMNP$ пирамиданинг асоси учун қабул қиламиз. DA қирра DBC текисликка DE тўғри чизиқда ётувчи кесма бўлиб проекциялансин. Унда A ва M нуқталар DE тўғри чизиқда ётувчи бирор K ва L нуқталарга проекцияланади. Демак, $AK = h$ ва $ML = h_1$ баландликлар ADE текисликда ётади ва DML ҳамда DAK учбурчаклар ўхшаш. Демак,

$$\frac{h_1}{h} = \frac{DM}{DA} = \frac{DM}{DM + MA} = \frac{m_1}{m_1 + n_1}.$$

NDP асос юзи S_1 нинг BDC асоснинг S юзига нисбати $DN\cdot DP$ кўпайтманинг $DB\cdot DC$ кўпайтмага нисбати кабидир (чунки

NDP ва BDC учбурчаклар умумий D бурчакка эга). Бундан

$$\frac{S_1}{S}=\frac{DN}{DB}\cdot\frac{DP}{DC}=\frac{m_2}{m_2+n_2}\cdot\frac{m_3}{m_3+n_3}.$$

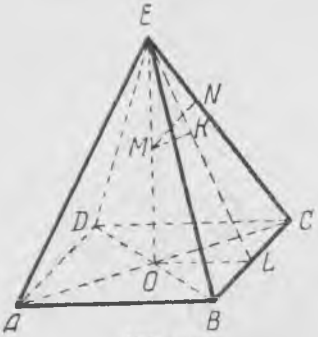
Демак,

$$\frac{V_1}{V}=\frac{h_1}{h}\cdot\frac{S_1}{S}=\frac{m_1m_2m_3}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)}.$$

Энди $DABC$ пирамида ҳажми иккала бўлагининг ўзаро нисбати $\frac{V_1}{V-V_1}$ ни топамиз.

Жавоб. $\frac{V_1}{V-V_1}=\frac{m_1m_2m_3}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)-m_1m_2m_3}.$

718. Ечиш плани. OEL ва MEK учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб (191-чизма) OL кесмани $MK=b$ ва $ME=\frac{H}{2}$ орқали ифодалаймиз; OCE ва MEN учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб, OC кесмани $MN=h$ ва $ME=\frac{H}{2}$ орқали ифодалаймиз. Топилган ифодаларни $OC^2=2\cdot OL^2$ муносабатга қўйиб, тенглама ҳосил қиламиз ва бу тенгламадан H нинг қийматини топамиз.



191-чизма.

Ечиш. OEL ва MEK учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$OL:H=MK:EK,$$

яъни

$$OL:H=b:\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2-b^2},$$

бундан

$$OL^2=\frac{4b^2H^2}{H^2-4b^2}.$$

Шунинг каби

$$OC^2=\frac{4h^2H^2}{H^2-4h^2}$$

эканлигини аниқлаймиз. Демак, $\frac{4h^2H^2}{H^2-4h^2}=2\frac{4b^2H^2}{H^2-4b^2}$. Иккала томонни ҳам H^2 га бўлиб, шакл алмаштирилгандан кейин

$$H=\frac{2bh}{\sqrt{2b^2-h^2}}$$

ҳосил қиламиз. Энди

$$OL^2=\frac{4b^2H^2}{H^2-4b^2}=\frac{2b^2h^2}{h^2-b^2}$$

ва

$$V=\frac{1}{3}(2OL)^2\cdot H$$

эканлигини топамиз.

Жавоб. $\frac{16b^3h^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$.

10-БОБ.

АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ

719. *Жавоб.* $V=\frac{\pi l^3}{8\sqrt{3}}$.

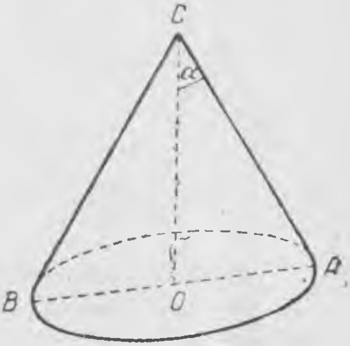
720. *Жавоб.* $V=\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$.

721. *Жавоб.* $V=\frac{a^3}{4\pi}$.

722. *Жавоб.* $V=\frac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.

723. Асоснинг радиуси $R=l\sin\alpha$ (192-чизма)1), конуснинг баландлиги $H=l\cos\alpha$. Конуснинг ҳажми

$$V=\frac{\pi R^2H}{3}=\frac{\pi l^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3}.$$



192-чизма.

Конуснинг тўла сирти

$$S_{\text{тўла}}=\pi R(l+R)=\pi l^2\sin\alpha(1+\sin\alpha).$$

Шартга кўра $l+H=m$; демак,

$$l=\frac{m}{1+\cos\alpha}=\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Жавоб. $V=\frac{\pi m^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$; $S_{\text{тўла}}=\frac{\pi m^2\sin\alpha\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

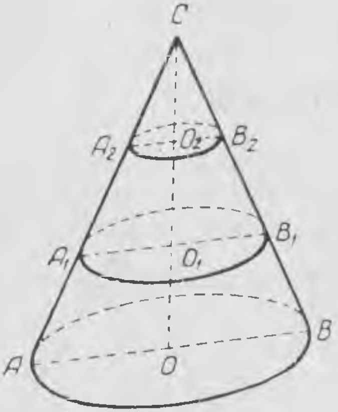
724 (193-чизма). A_1B_1 ва A_2B_2 текисликлар ABC конусдан шу конуснинг ўзига ўхшаш A_1CB_1 ва A_2CB_2 конусларни ажра-

---

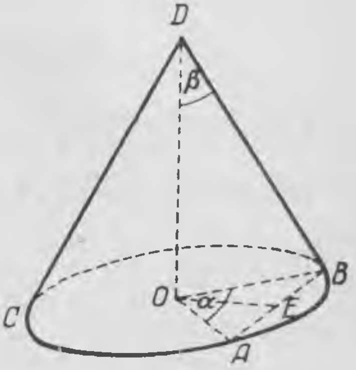
1) Эллипсни чизиш ҳақида (конус асосида ётувчи айланани тасвирлаш) 296-бетга қаралсин.

тади. Бу конуслар ҳажмлари (V, V_1 ва V_2) нинг нисбатлари баландликлари кубларининг нисбатлари кабидир:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\left(\frac{2}{3}H\right)^3}{H^3} \text{ ва } \frac{V_2}{V} = \frac{\left(\frac{1}{3}H\right)^3}{H^3}$$

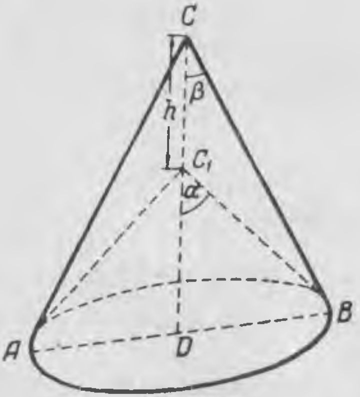


193-чизма.



194-чизма.

$A_1A_2B_1B_2$ ўрта қисмининг $V_{\text{ўрта}}$ ҳажми $V_1 - V_2$ айирмага тенг. Биринчи пропорциядан иккинчи пропорцияни айириб, $V_{\text{ўрта}}$ ни топамиз.



195-чизма.

Жавоб. $V_{\text{ўрта}} = \frac{7}{27}V.$

725. AOE учбурчакдан (194-чизма):

$$OA = R = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

OBD учбурчакдан $H = R\operatorname{ctg}\beta$.

Жавоб. $V = \frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}.$

726. Шартга кўра $OC - OC_1 = h$ (195-чизма). Маълумки,

$$OC = R\operatorname{ctg}\beta$$

ва

$$OC_1 = R\operatorname{ctg}\alpha.$$

Демак,

$$R = \frac{h}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Изланган V ҳажм ACB ва AC_1B конуслар ҳажмларининг айирмасига тенг. Демак,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(OC-OC_1)=\frac{1}{3}\pi R^2h.$$

Жавоб. $V=\frac{\pi h^3}{3(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)^2}=\frac{\pi h^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha-\beta)}.$

727. Масаланинг шартига кўра конуснинг ён сирти $\pi Rl=S$. Асосининг юзи $S_{\text{асос}}=\pi R^2=P-S$.

$\pi R^2=P-S$ тенгликни $\pi Rl=S$ тенгликка ҳадма-ҳад бўлсак,

$$\frac{R}{l}=\frac{P-S}{S}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Изланган бурчакни β билан белгилаймиз; OBD учбурчакдан (194-чизмага қаранг):

$$\sin\beta=\frac{R}{l}.$$

Жавоб. $\beta=\arcsin\frac{P-S}{S}.$

728. Тенг ёнли ADA_1 учбурчакдан (196-чизма) $AD=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ эканлигини аниқлаймиз. Агар α бурчак ADA_1 бурчакнинг радиан ўлчови бўлса, унда

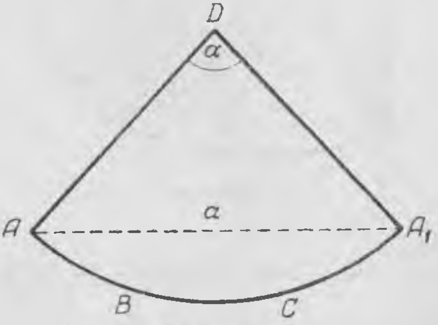
$$\overset{\frown}{ABCA_1}=AD\cdot\alpha=\frac{a\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ён сиртни ёйишдан олдин AD кесма конуснинг ясовчиси эди, демак,

$$l=AD=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ва $\overset{\frown}{ABCA_1}$ ёй асос айланаси эди, яъни

$$2\pi R=\frac{a\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$



196-чизма.

Конуснинг баландлиги

$$H=\sqrt{l^2-R^2}=\frac{a}{4\pi\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}.$$

Жавоб. $V=\frac{\alpha^2a^3\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}{192\pi^2\sin^3\frac{\alpha}{2}}$,

бунда α — берилган бурчакнинг радиан ўлчови.

729. *DOM* бурчак (197-чизма) φ бурчакка тенг, φ бурчак эса *DEO* бурчакка тенг. *ODM* ва *OEM* учбурчаклардан:

$$OD = H = \frac{a}{\cos\varphi}$$

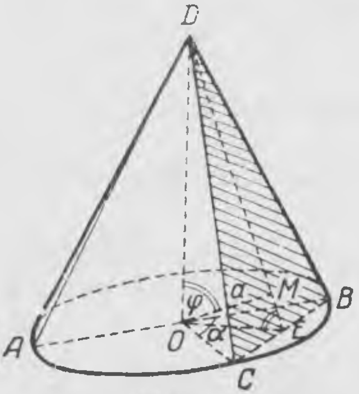
ва

$$OE = \frac{a}{\sin\varphi}.$$

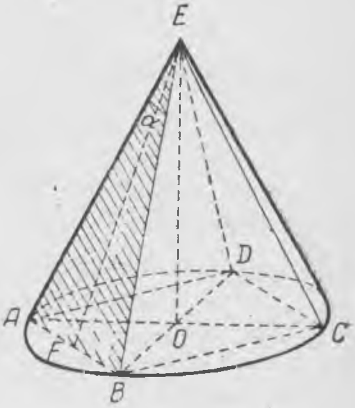
OCE учбурчакдан:

$$OC = R = \frac{OE}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Жавоб. $V = \dfrac{\pi a^3}{3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$



197-чизма.



198-чизма.

730. Конус асосининг радиуси $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (198-чизма). *AEF* учбурчакдан: $AE = l = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

AOE учбурчакдан:

$$H = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Конуснинг тўла сирти:

$$S_{\text{тўла}} = \pi R(l + R) = \frac{\pi a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Қавс ичидаги ифоданинг шаклини қуйидагича алмаштириш мумкин:

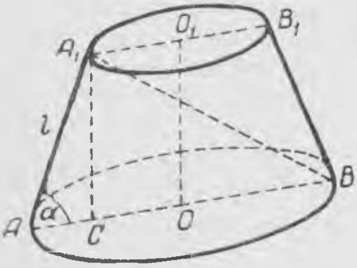
$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\alpha}{2}=\sin 45^\circ+\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{90^\circ+\alpha}{4}\cos\frac{90^\circ-\alpha}{4}.$$

Жавоб. $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$;

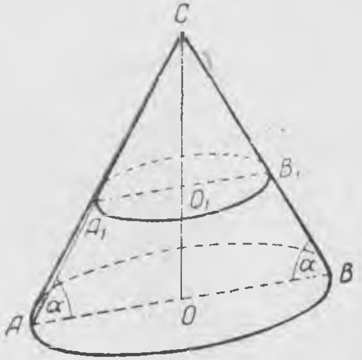
$$S_{\text{тўла}}=\frac{\pi a^2\left(1+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi a^2\sin\frac{90^\circ+\alpha}{4}\cos\frac{90^\circ-\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

731. AA_1C учбурчакдан (199-чизма) $AC=l\cos\alpha$. AA_1B учбурчакдан $AB=2R=\dfrac{l}{\cos\alpha}$ ва $AO=R=\dfrac{l}{2\cos\alpha}$. Демак,

$$A_1O_1=r=AO-AC=l\left(\frac{1}{2\cos\alpha}-\cos\alpha\right).$$



199-чизма.



200-чизма.

Энди кесик конуснинг ён сиртини топамиз:

$$S_{\text{ён}}=\pi l(R+r)=\pi l^2\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right).$$

Жавоб. $S_{\text{ён}}=\dfrac{\pi l^2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\pi l^3\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

732. $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$ ва $R=H\operatorname{ctg}\alpha$ муносабатлардан

$$H=\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}\quad\text{ва}\quad R=\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{ctg}\alpha}{\pi}}.$$

Ён сиртни тенг иккига бўлиш талаб этилсин. ABC ва A_1B_1C конуслар ўхшаш бўлгани учун (200-чизма), улар S ва S_1 ён сиртларининг нисбати $H^2 = OC^2$ нинг $H_1^2 = O_1C^2$ га нисбати каби бўлади. Демак, $H_1 : H = \sqrt{S_1 : S} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, яъни $H_1 = \frac{H}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$

Энди тўла сиртни тенг иккига бўлиш талаб этилсин. Унда

$$\pi R_1 l_1 = \frac{1}{2}\pi(R^2 + Rl).$$

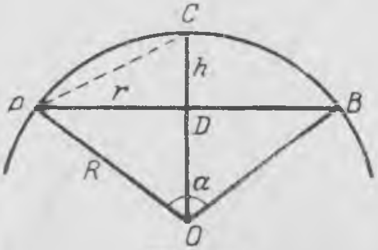
Бунда R_1 ўрнига $R_1 = H_1 \operatorname{ctg}\alpha$, l_1 ўрнига унинг қиймати $l_1 = \frac{H_1}{\sin\alpha}$, l ўрнига $l = \frac{H}{\sin\alpha}$ қийматини қўйсак,

$$\pi H_1^2 \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\pi}{2}\left(H^2 \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{H^2 \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

ҳосил бўлади, бундан $H_1 = H\cos\frac{\alpha}{2}$.

Жавоб. Агар ён сирт тенг иккига бўлинса, унда $H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$; агар тўла сирт тенг иккига бўлинса, унда

$$H_1 = \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}.$$



201-чизма.

733. Шарнинг радиусини R билан (201-чизма), ACB сегмент сиртнинг DC баландлигини h билан ва DA кесмани r билан белгилаймиз. Секторнинг ҳажми $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$. ACD учбурчакда $\angle CAD = \frac{\alpha}{4}$ ($\overset{\frown}{BC} = \frac{\alpha}{2}$ ёйга тиралган ички чизилган бурчак бўлгани учун). Бу учбурчакдан $h = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$. ADO учбурчакдан $r = R\sin\frac{\alpha}{2}$. Демак,

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

Секторнинг тўла сирти ACB сегментнинг $2\pi Rh$ га тенг сирти билан AOB конуснинг πrR га тенг ён сиртидан иборат. Демак, $S_{\text{тўла}} = 2\pi Rh + \pi rR = \pi R(2h + r)$.

Жавоб.

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{4};\quad S_{\text{тўла}} = \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} + 1\right).$$

734 (201-чизмага қаранг). Бундан олдинги масаладаги белгилашларда $S = 2\pi Rh + \pi r^2$. ADO учбурчакдан $AO^2 = AD^2 + OD^2$;

$OD = R - h$ бўлгани учун $R^2 = r^2 + (R - h)^2$ ва $r^2 = 2Rh - h^2$. Демак, $S = 4\pi Rh - \pi h^2$. Бундан

$$h = 2R \pm \frac{\sqrt{4\pi^2R^2 - \pi S}}{\pi}.$$

$h < R$ бўлгани учун „плюс“ ишора тўғри келмайди.

Жавоб. $h = 2R - \sqrt{4R^2 - \frac{S}{\pi}}$.

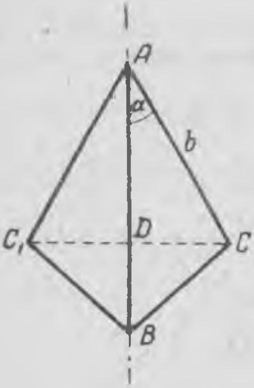
735. 202-чизмада ABC учбурчакнинг AB томон атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ўқ кесими тасвирланган. Бу жисм икки конусдан иборат. Унинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot DC^2 \cdot AD + \frac{1}{3}\pi \cdot DC^2 \cdot DB =$$

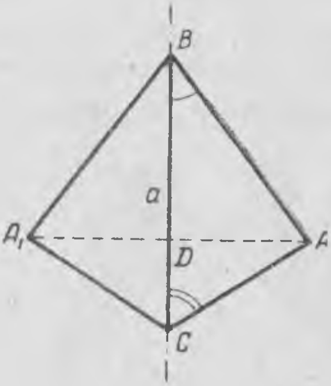
$$= \frac{\pi}{3} DC^2 (AD + DB) = \frac{\pi}{3} DC^2 \cdot AB.$$

Бунда $DC \cdot AB = 2S$ ва $DC = b \sin \alpha$ эканлигини эътиборга оламиз.

Жавоб. $V = \frac{2\pi Sb \sin \alpha}{3}$.



202-чизма.



203-чизма.

736. Айланиш жисмининг ҳажми (бундан олдинги масалага қаранг):

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot DA^2 \cdot (BD + DC) = \frac{1}{3}\pi a \cdot DA^2$$

бўлади (203-чизма). DA узунлигини топиш учун бундай қиламиз. BAD учбурчакдан $BD = DA \cdot \operatorname{ctg} B$ эканлигини, DAC учбурчакдан эса $DC = DA \cdot \operatorname{ctg} C$ эканлигини топамиз.

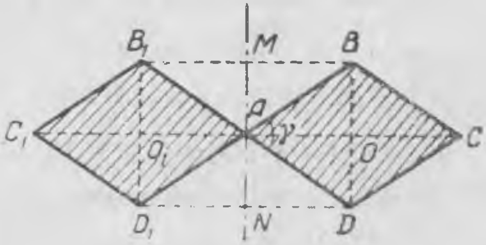
Демак,

$$a = BD + DC = DA(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C).$$

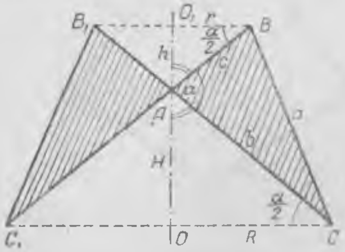
Бу тенгликдан DA ни топамиз.

Жавоб. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi a^3}{(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)^2}=\frac{\pi a^3 \sin^2 B \sin^2 C}{3\sin^2(B+C)}$.

737. Айланиш жисмининг ҳажми (унинг кесими 204-чизмада тасвирланган) $AMBC$ ва $ANDC$ трапецияларнинг айланишидан ҳосил бўлган иккита тенг кесик конус ҳажмларининг йиғиндисидан AMB ва AND учбурчакларнинг айланишидан ҳосил бўлган иккита тенг конус ҳажмлари йиғиндисининг айирмасига тенг. Кесик конус бир асосининг радиуси $AC=d$, иккинчи асосининг радиуси $MB=\frac{d}{2}$. Демак,



204-чизма.



205-чизма.

$$V=2\left|\frac{\pi\cdot BO}{3}\left(d^2+\frac{d^2}{4}+\frac{d^2}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\pi\cdot BO}{3}\cdot\frac{d^2}{4}\right|=\pi d^2\cdot BO.$$

AOB учбурчакдан

$$BO=\frac{d}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Жавоб. $V=\frac{\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}$.

738. Айланиш жисмининг ҳажми V (205-чизма) OO_1BC трапециянинг айланишидан ҳосил бўлган кесик конус ҳажмидан AO_1B ва AOC учбурчаклар айланишидан ҳосил бўлган иккита конус ҳажмлари йиғиндисининг айрилганига тенг. Шартга кўра $\angle BAO_1=\angle CAO$ бўлгани учун $\angle BAO_1=\angle CAO=90°-\frac{\alpha}{2}$.

Демак,

$$\angle O_1BA=\angle OCA=\frac{\alpha}{2}.$$

205-чизмадаги белгилашларда AOC учбурчакдан: $H = b\sin\frac{\alpha}{2}$, $R = b\cos\frac{\alpha}{2}$, A_1OB учбурчакдан $h = c\sin\frac{\alpha}{2}$, $r = c\cos\frac{\alpha}{2}$. Демак,

$$V = \frac{\pi}{3}(H + h)(R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi}{3}HR^2 - \frac{\pi}{3}hr^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}[(b + c)(b^2 + bc + c^2) - b^3 - c^3].$$

Жавоб. $V = \frac{\pi bc(b + c)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{3}$.

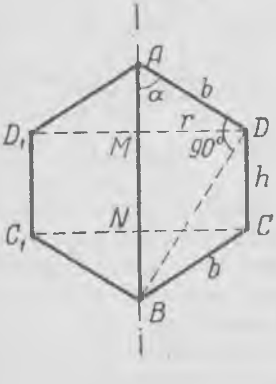
739. Айланиш жисмининг юзи S (206-чизма) ўқ кесимлари DAD_1 ва CBC_1 учбурчаклардан иборат иккита тенг конус ён сиртлари йиғиндиси билан ўқ кесими CDD_1C_1 дан иборат цилиндр ён сирти йиғиндисига тенг. 206-чизмадаги белгилашларга мувофиқ:

$$r = b\sin\alpha,\quad h = MN = AB - 2AM = \frac{b}{\cos\alpha} - 2b\cos\alpha.$$

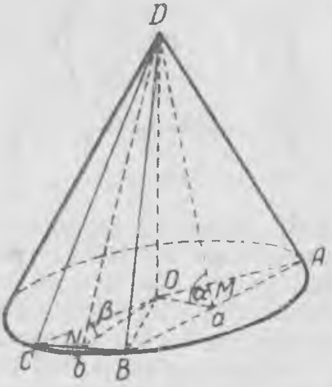
Демак,

$$S = 2\pi r(b + h) = \frac{2\pi b^2\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha).$$

Жавоб. $S = 2\pi b^2\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha) = 4\pi b^2\operatorname{tg}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}$.



206-чизма.



207-чизма.

740. Бу текисликларни конус баландлиги атрофида α ва β бурчакларни ўзгартирмай айлантириб, уларни 207-чизмада тасвирланган вазиятга, яъни конуснинг умумий BD ясовчиси бўйича бир-бири билан кесишадиган вазиятга келтириш мумкин. OBM ва OBN учбурчаклардан

$$OB^2 = R^2 = \frac{a^2}{4} + OM^2 = \frac{b^2}{4} + ON^2$$

эканлигини топамиз; бунда $OM = H\operatorname{ctg}\alpha$ ва $ON = H\operatorname{ctg}\beta$. Демак,

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + H^2\operatorname{ctg}^2\alpha \quad \text{ва} \quad \frac{a^2}{4} + H^2\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{b^2}{4} + H^2\operatorname{ctg}^2\beta.$$

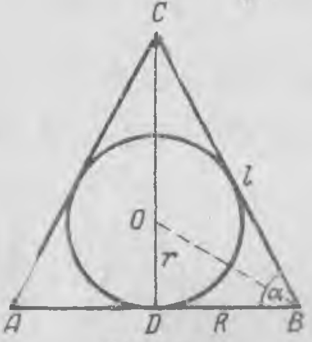
Бу тенгламалардан H ва R ни топамиз.

Жавоб. $V = \frac{\pi(b^2\operatorname{ctg}^2\alpha - a^2\operatorname{ctg}^2\beta)\sqrt{b^2 - a^2}}{24(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta)^{3/2}}$.

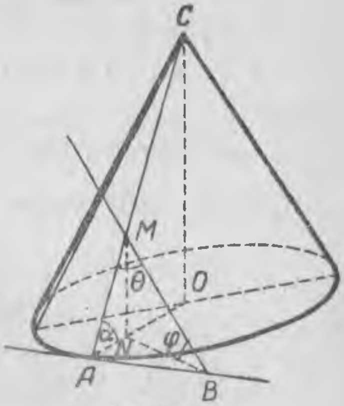
741. 208-чизмада конуснинг ўқ кесими тасвирланган. Бу ўқ кесим r радиусли шар билан кесишиб, $OD = r$ радиусли ABC учбурчакка ички чизилган айлана ҳосил қилади. Бу радиус

$$r = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = l\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Жавоб. $V = \frac{4\pi l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{3}$.



208-чизма.



209-чизма.

742. Конус ён сиртидаги M нуқта орқали (209-чизма) CMA ясовчи билан $\theta = BMA$ бурчак ҳосил қилувчи MB уринма тўғри чизиқ ўтказилган. Бундан ташқари яна $\alpha = OAM$ бурчак ҳам маълум. MB тўғри чизиқ билан конус асосининг текислиги P орасидаги φ бурчакни топиш талаб этилади.

Конусга уринувчи MB тўғри чизиқ текисликни асос айланасига уринма AB тўғри чизиқдаги бирор B нуқтада кесиб ўтади[1]. M нуқтадан OA радиусга MN перпендикулярни тушириб, BM тўғри чизиқнинг P текисликдаги BN проекциясини ҳосил қиламиз. Демак, $\varphi = \angle NBM$. Тўғри бурчакли AMN учбурчакдан: $AM = \frac{MN}{\sin\alpha}$; тўғри бурчакли MAB учбурчакдан:

$$MB = \frac{AM}{\cos\theta} = \frac{MN}{\sin\alpha\cos\theta};$$

---

[1] Буни фақат конус ён сиртига уринманинг таърифига асосан исботлаш мумкин. Аммо бундай таъриф элементар геометрияда берилмайди.

тўғри бурчакли MNB учбурчакдан:

$$\sin\varphi = \frac{MN}{MB} = \sin\alpha\cos\theta.$$

Жавоб. $\varphi = \arcsin(\sin\alpha\cos\theta)$.

743. Айланиш жисмининг S сирти ўқ кесимлари BAB_1 ва BCB_1 дан иборат иккита конуснинг ён сиртлари йиғиндисига тенг. 210-чизмадан: $S = \pi Rc + \pi Ra$. Тўғри бурчакли CBE учбурчакдан:

$$a = \frac{h}{\sin\beta};$$

синуслар теоремасига кўра

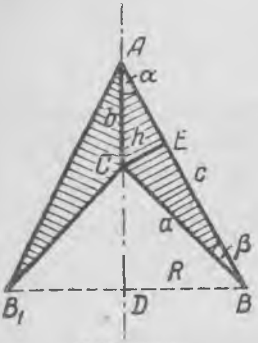
$$\frac{c}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]} = \frac{a}{\sin\alpha};$$

бундан

$$c = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

Тўғри бурчакли BCD учбурчакда $\angle BCD = \alpha+\beta$; бу учбурчакдан $R = a\sin(\alpha+\beta)$. Демак,

$$S = \frac{\pi h^2 \sin(\alpha+\beta)[\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha]}{\sin^2\beta\sin\alpha}.$$



210-чизма.

Квадрат қавс ичидаги ифоданинг шаклини синуслар йиғиндиси формуласига асосан алмаштириш мумкин.

Жавоб. $S = \dfrac{2\pi h^2\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha\sin^2\beta}.$

744. 211-чизмада конус шаклли идишнинг ўқ кесими тасвирланган; ADB — сувнинг сатҳи. ABC учбурчак — тенг томонли; DKL доира (шарнинг катта доираси) шу учбурчакка ички чизилган. 211-чизмадаги белгилашларга кўра: $R = OD\cdot\operatorname{tg}60^\circ = r\sqrt{3}$ ва $H = CD = 3r$[1]). Идишдаги сувнинг V ҳажми ABC конуснинг ҳажмидан шар ҳажмининг камига тенг, яъни

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2H - 4r^3) = \frac{5}{3}\pi r^3.$$

211-чизма.

---

[1]) Тенг томонли учбурчакка ички чизилган доиранинг радиуси шу учбурчак баландлигининг учдан бир қисмига тенг; бу хулоса ҳар қандай учбурчакда медианаларнинг кесишиш нуқтаси ҳар бир медианани 1 : 2 нисбатда бўлишидан келиб чиқади.

Шар сувдан олинса, сув MN сатҳгача пасаяди ва MNC конусни тўлдиради. $CE = h$ бўлсин. Унда $ME = CE \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Демак,

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot ME^2 \cdot CE = \frac{\pi h^3}{9}.$$

Ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\pi h^3}{9} = \frac{5}{3} \pi r^3.$$

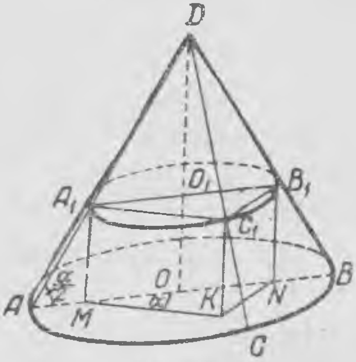
Жавоб. $h = r \sqrt[3]{15}$.

745. Агар O_1A_1 радиусни r билан белгиласак (212-чизма), унда призманинг A_1M баландлиги ҳам r га тенг бўлади. $A_1B_1C_1$ учбурчакда $A_1B_1 = 2r$, унда

$$A_1C_1 = 2r \cos \alpha$$

ва

$$B_1C_1 = 2r \sin \alpha.$$



212-чизма.

AA_1M учбурчакда $AM = R - r$, шу учбурчакдан r нинг қийматини топамиз: $R - r = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Бундан

$$r = \frac{R}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Энди призманинг ён сиртини топамиз:

$$S_{\text{ён}} = (2r + 2r \cos \alpha + 2r \sin \alpha) \cdot r = \frac{2R^2}{\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2} (1 + \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Жавоб. $S_{\text{ён}} = \frac{2R^2 (1 + \cos \alpha + \sin \alpha)}{\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2} R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{\cos \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

746. Цилиндрнинг $R = OF$ (213-чизма) радиуси $\frac{1}{3}$ BF га тенг[1]. Аммо,

$$BF = BE - FE = BE - FE_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$= \frac{a}{2} (\operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{a \sin (\alpha - 30°)}{2 \sin \alpha \sin 30°} = \frac{a \sin (\alpha - 30°)}{\sin \alpha}.$$

---

[1] 389-бет охиридаги изоҳга қаралсин.

Шунинг учун цилиндрнинг ҳажми

$$V_1 = \pi \cdot OF^2 \cdot FE_1 =$$
$$= \pi \left[\frac{a \sin (\alpha - 30°)}{3 \sin \alpha}\right]^2 \frac{a}{2}.$$

$DA_1B_1C_1$ пирамиданинг ҳажми

$$V_2 = \frac{1}{3} \frac{A_1C_1}{2} \cdot B_1E_1 \cdot B_1D.$$

Бунда

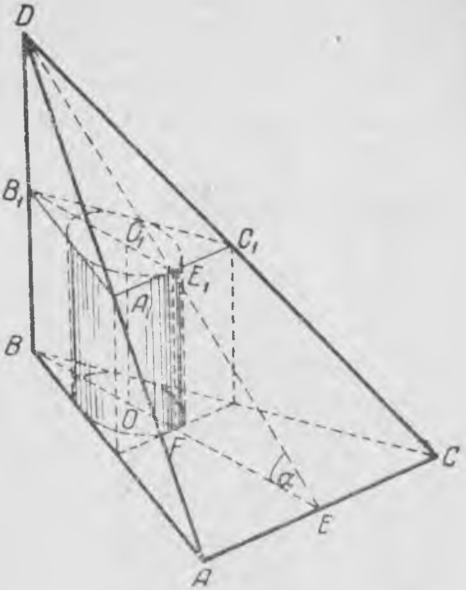
$$B_1E_1 = FB = \frac{a \sin (\alpha - 30°)}{\sin \alpha}$$

ва

$$B_1D = B_1E_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$
$$B_1E_1 = \frac{A_1C_1 \cdot \sqrt{3}}{2};$$

бундан

$$\frac{A_1C_1}{2} = \frac{B_1E_1}{\sqrt{3}},$$
$$V_2 = \frac{B_1E_1^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{3}}.$$



213-чизма.

Бу ерда $BE > FE$ бўлганда, яъни $\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ ёки $\operatorname{ctg} 30° > \operatorname{ctg} \alpha$ шартида масала ечимга эга бўлади, демак $\alpha > 30°$.

Жавоб. $V_1 = \frac{\pi a^3 \sin^2 (\alpha - 30°)}{18 \sin^2 \alpha}$;

$$V_2 = \frac{a^3 \sin^3 (\alpha - 30°) \operatorname{tg} \alpha}{3\sqrt{3} \sin^3 \alpha}.$$

747-ва ундан кейинги масалаларга доир дастлабки изоҳ.

Шарни унинг кесимлари билан, шунингдек, шарга ички чизилган ва шарга ташқи чизилган жисмларни тўғри тасвирлаш усуллари анча мураккабдир. Шунинг учун бу китобни тузувчилар, мумкин қадар яққол ва шу билан бирга ўқувчиларнинг чизмани мустақил бажариши осонроқ бўладиган, схематик чизмалар бериш билан чекланиш мумкин деб ҳисобладилар. Схематик чизма етарли даражада яққол бўлмаган ҳолларда, чизма билан бир қаторда ҳажмий тасвирлар ҳам берилди.

валги масалага қаранг) ва тўғри бурчакли AOD учбурчакдан $AF\cdot FD = OF^2$ ёки $r_1r_2 = r^2$ бўлгани учун

$$S_{\text{тўла}} = \pi l^2 + \pi l^2 - 2\pi r^2 = 2\pi (l^2 - r^2).$$

Бу ифодага $l = \frac{2r}{\sin\alpha}$ ни қўямиз.

Жавоб. $S_{\text{тўла}} = 2\pi r^2\left(\frac{4}{\sin\alpha} - 1\right).$

752. Бундан олдинги масалага қаралсин.

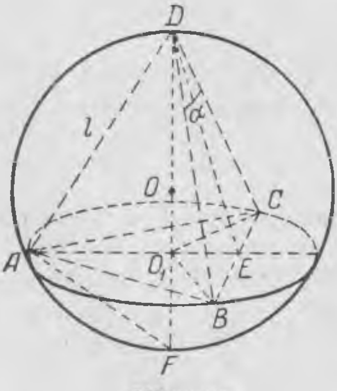
$$V = \pi\cdot\frac{2r}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = \frac{2\pi r}{3}\,[(r_1 + r_2)^2 - r_1r_2] = \frac{2\pi r}{3}\,(l^2 - r^2).$$

Бу ифодага $l = \frac{2r}{\sin\alpha}$ ни қўямиз.

Жавоб. $V = \frac{2\pi r^3}{3}\left(\frac{4}{\sin^2\alpha} - 1\right).$

753. Бир-бирига тенг DA, DB, DC ватарларни (218-чизма) l билан белгилаймиз. Тенг ёнли DBC учбурчакдан $BC = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Шунингдек $AB = AC = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Демак, ABC учбурчак — тенг томонли учбурчакдир.

ABC текислигига DO_1 перпендикулярни туширамиз ва DO_1A, DO_1B, DO_1C учбурчакларнинг тенглигини аниқлаб, $AO_1 = BO_1 = CO_1$ эканлигини, яъни O_1 нуқта асоснинг маркази эканлигини исботлаймиз (демак, $DABC$ пирамида — мунтазам). A, B, C нуқталар шар сиртида ётгани учун OA, OB, OC кесмалар бир-бирига тенг, яъни $OA = OB = OC$ (O нуқта—шарнинг маркази). O нуқтадан ABC текисликка перпендикуляр тушириб, бу перпендикулярнинг асоси бўлган O нуқта ABC учбурчакнинг маркази эканлигини, яъни O нуқтанинг O_1 нуқта билан устма-уст тушишини исбот этамиз. Демак, OO_1 кесма (демак, DO_1 кесма ҳам) шарнинг диаметрида ётади (218-чизмада DF билан кўрсатилган). Тўғри бурчакли DAF учбурчакда $DF = 2R$; бу учбурчакдан $l^2 = DA^2 = 2R\cdot DO_1$ эканлигини топамиз. DO_1 кесмани l билан яна битта муносабат воситасида боғлаш мумкин, яъни



218-чизма.

$$DO_1 = \sqrt{AD^2 - AO_1^2},$$

бунда

$$AD = l, \qquad AO_1 = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l \sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Демак,

$$D\Theta_1 = l\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Бу ифодани $l^2 = 2R \cdot DO_1$ тенгликдаги DO_1 ўрнига қўямиз ва

$$l = 2R\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}$$

эканлигини топамиз. Бу тенгликни логарифмлаш учун қулай шаклга келтирамиз:

$$l = 2R\sqrt{1 - \frac{2(1-\cos\alpha)}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + 2\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{3}}\sqrt{2(\cos 60^\circ + \cos\alpha)} =$$

$$= \frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Жавоб. $l = 2R\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}} =$

$$= \frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

754. Тенг ёнли $ABCD$ трапеция (219-чизма) кесик конуснинг ўқ кесимини тасвирлайди. Шартга кўра $\angle AOB = \alpha$ ва $\angle DOC = \beta$. Шунинг учун

$$R_1 = AE = AO\sin\frac{\alpha}{2} = R\sin\frac{\alpha}{2} \text{ ва } R_2 = DF = R\sin\frac{\beta}{2}.$$

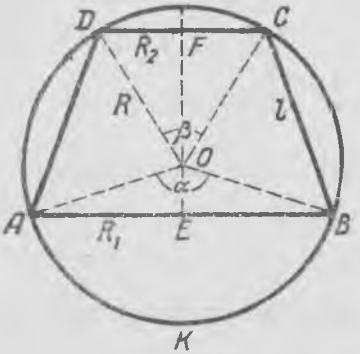
$\angle AOD = \frac{360^\circ - (\alpha + \beta)}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Шунинг учун $l = AD =$

$$= 2R\cos\frac{\alpha + \beta}{4}.$$

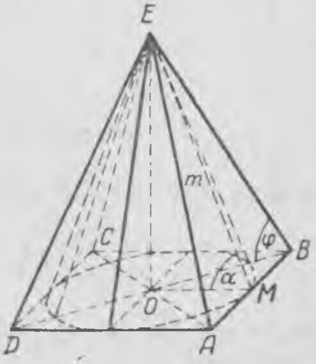
Демак,

$$S_{\text{ён}} = \pi l(R_1 + R_2) = 2\pi R^2 \cos\frac{\alpha+\beta}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Жавоб. $S_{\text{ён}} = 2\pi R^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}$.



219-чизма.



220-чизма.

755. *OME* учбурчакдан (220-чизма)

$$OM = r = m\cos\alpha; \quad EO = H = m\sin\alpha$$

эканлигини аниқлаймиз.

$S_{\text{тўла}} = \pi r(r + l)$ формулага асосан (бунда $l = m$)

$$S_{\text{тўла}} = \pi m^2\cos\alpha\,(1 + \cos\alpha)$$

ёки

$$S_{\text{тўла}} = 2\pi m^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

эканлигини аниқлаймиз. *BE* ён қирра билан асос текислиги орасидаги $\varphi = EBO$ бурчакни *EBO* учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда $OB = OM\sqrt{2} = m\sqrt{2}\cos\alpha$. Тўғри бурчакли *EBO* учбурчакдан

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{EO}{OB} = \frac{m\sin\alpha}{m\sqrt{2}\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Жавоб. $S_{\text{тўла}} = 2\pi m^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$.

756. *ASB* учбурчакдан (221-чизма): $AB = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$.

Демак, $R = OA = AB = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$. *ASO* учбурчакдан:

$$SO = H = \sqrt{l^2 - R^2} = l\sqrt{1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

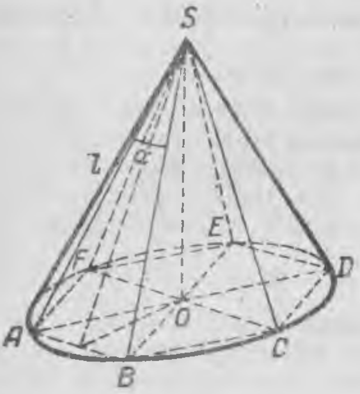
Демак,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{\pi}{3}\cdot 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot l\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

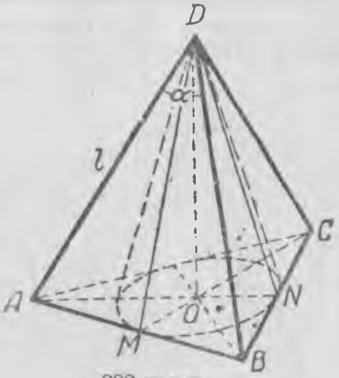
Илдиз остидаги ифодани, 753-масаладаги каби, логарифмлаш учун қулай шаклга келтириш мумкин; унда

$$1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}=4\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Жавоб. $V=\frac{8}{3}\pi l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$



221-чизма.



222-чизма.

757. ADM учбурчакдан (222-чизма) $AM=l\sin\frac{\alpha}{2}$. AMO учбурчакдан

$$r=OM=AM\cdot\operatorname{tg}30^\circ=l\sin\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ва

$$R=AO=\frac{AM}{\cos 30^\circ}=\frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

AOD учбурчакдан эса

$$OD=H=\sqrt{l^2-R^2}=\frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Конуснинг ҳажми

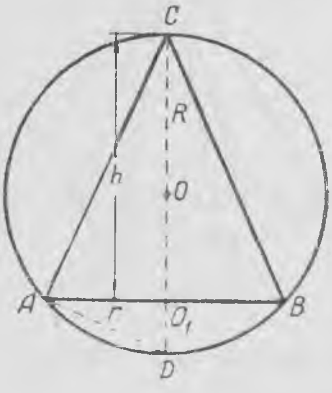
$$V=\frac{\pi}{3}r^2H=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Илдиз тагидаги ифодани **753**-масаладаги каби алмаштириш мумкин.

Жавоб. $V = \frac{\pi l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{9\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{2\pi l^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}}{9\sqrt{3}}.$$

758. 223-чизмадаги белгилашларда шарнинг ҳажми $\frac{4}{3}\pi R^3$ га, ABC конуснинг ҳажми эса $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot CO_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H$ га тенг. Шартга кўра $\frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi S^3$, яъни $r^2 H = R^3$.



223-чизма.

r билан R орасидаги яна бир боғланишни тўғри бурчакли CAD учбурчакдан топамиз: $AO_1^2 = CO_1 \cdot DO_1$, яъни $r^2 = H(2R - H)$. Бу ифодани олдинги тенгликка қўйиб,

$$R^3 - 2H^2R + H^3 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенглама номаълум R га нисбатан учинчи даражали бўлсада, унинг бир ечимини, яъни $R = H$ эканлигини дарров пайқаб олиш мумкин (буни бевосита масала шартидан ҳам билиб олиш мумкин, чунки асосининг радиуси ва баландлиги шарнинг радиусига тенг бўлган конуснинг ҳажми шар ҳажмининг $\frac{1}{4}$ улушига тенг). Демак (Безу теоремасига кўра), тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиш мумкин, улардан бири $(R - H)$ дан иборат бўлади. Шунинг учун $R^3 - 2H^2R + H^3$ ни $R - H$ га бўлиш ёки бундай шакл алмаштиришни татбиқ этиш мумкин:

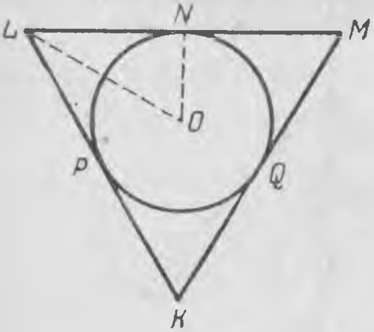
$$R^3 - 2H^2R + H^3 = (R^3 - H^2R) - (H^2R - H^3) = R(R -$$
$$- H)(R + H) - H^2(R - H) = (R - H)(R^2 + RH - H^2) = 0.$$

$R^2 + RH - H^2 = 0$ тенглама фақат битта $R = \frac{H(\sqrt{5} - 1)}{2}$ мусбат илдизга эга (иккинчи манфий $R = -\frac{H(\sqrt{5} + 1)}{2}$ илдиз ярамайди). Геометрик нуқтаи назардан бунинг маъноси шар радиуси конус баландлигининг чет ва ўрта нисбатда бўлингандаги катта қисмига тенг деган сўздир.

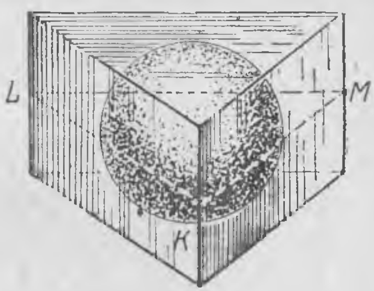
Жавоб. Масала иккита ечимга эга:

$$V = \frac{4}{3}\pi H^3 \text{ ва } V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5}-2\right)H^3.$$

759. Призманинг баландлиги унга ички чизилган шарнинг диаметрига ($2R$ га) тенг. Агар шарнинг O маркази орқали призма асосига параллел текислик ўтказилса, призма кесимида призманинг асосига тенг бўлган тенг томонли KLM учбурчак (224-чизма)[1], шар кесимида эса KLM учбурчакка ички чизилган шарнинг PNQ катта доираси ҳосил бўлади. LON учбурчакда $ON = R$ ва $\angle NLO = 30°$. Бу учбурчакдан $LN = R\sqrt{3}$ эканлигини топамиз. Демак, $LM = a = 2R\sqrt{3}$. Призманинг ён сирти $S_{\text{ён}} = 3aH = 12R^2\sqrt{3}$. Асоснинг юзи



224-чизма.



224-*а* чизма.

$$S_{\text{асос}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3R^2\sqrt{3}.$$

Демак,

$$S_{\text{тўла}} = 12R^2\sqrt{3} + 6R^2\sqrt{3} = 18R^2\sqrt{3}.$$

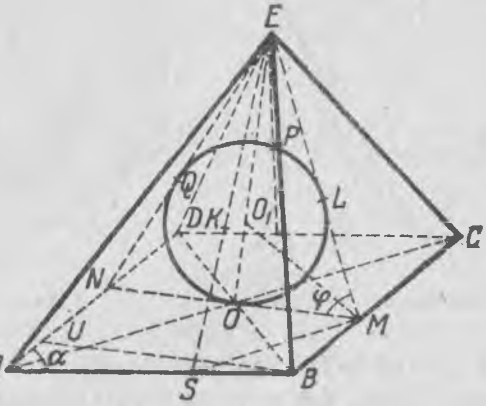
Шарнинг сирти эса $4\pi R^2$ га тенг.

Жавоб. Изланган нисбат $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ га тенг.

---

[1] Яққоллик учун 224-чизма ёнида 224-*а* тасвир берилди, бунда қаралаётган жисмнинг тасвири яққол кўриниб турибди. Бундай „қўш“ тасвирлар бундан кейинги баъзи масалаларда ҳам берилади. Бу тасвирлар жуда фойдали бўлса ҳам, лекин ўқувчиларнинг чизишлари шарт эмас.

760. а) Тасвирлаш усули. Пирамидага ички чизилган шарнинг (агар бу пирамидага ички шар чизиш мумкин бўлса) O_1 маркази BEC ён ёқдан ва $ABCD$ асосдан бир хил масофада туриши керак (225-чизма). Шунинг учун бу марказ BC қиррадаги икки ёқли φ бурчакнинг биссектриса текислигида ётиши керак. Худди шунингдек O_1 марказ AB, AD, DC қирралардаги икки ёқли φ бурчакларнинг биссектриса текисликларида ҳам ётиши лозим. Демак, O_1ABCD пирамиданинг ҳамма ён ёқлари (чизмада тасвир этилмаган) асос текислиги билан бир хил $\frac{\varphi}{2}$ бурчак ҳосил қилади. Бундан кўринадики, O_1ABCD пирамиданинг O_1O баландлиги $ABCD$ ромбга ички чизилган айлананинг O марказидан ўтади (299-бетдаги 617-масалага доир изоҳга қаранг). Берилган пирамиданинг EO баландлиги ҳам шу марказдан ўтади. Демак, шарнинг O_1 маркази EO баландликда ётади.



225-чизма.

Шарнинг BEC ёқ текислиги билан уриниш нуқтаси шарнинг O_1 марказидан BEC текислигига туширилган перпендикулярнинг L асосидир. Бундан O_1EL текислик BEC ёққа перпендикуляр эканлиги келиб чиқади (исбот этинг!). Шу билан бирга O_1EL текислик $ABCD$ асос текислигига перпендикуляр (чунки O_1EL текислик EO баландлик орқали ўтади). Демак, O_1EL текислик BC қиррага перпендикулярдир. Бундан маълум бўладики, O_1EL ва $ABCD$ текисликлар ўзаро кесишувчи MN тўғри чизиқ ромбнинг (O марказдан ўтказилган) баландлигидир. Бу мулоҳазалар шарнинг пирамида ён ёқлари билан уриниш нуқталаридан қолган учтаси (K, Q ва P) учун ҳам тўғридир.

Бундан қуйидагича ясаш келиб чиқади. $ABCD$ ромбнинг NOM баландлигини тасвирлаймиз (бу баландликнинг горизонтал вазиятда бўлиши маъқул), сўнгра NEM кесимни (тенг ёнли учбурчак) ясаймиз ва, ниҳоят, NEM учбурчакка ички чизилган айланани тасвирлаймиз. Бу айлана ME ва NE томонларга уринган L ва Q нуқталар, шарнинг BEC ва AED ёқлар билан уриниш нуқталари бўлади. K нуқтани тасвирлаш учун $MS \parallel AC$ ўтказамиз. Унда OS тўғри чизиқ (чизмада кўрсатилмаган) ромбнинг иккинчи баландлигини тасвирлайди (исбот этинг!). ES тўғри чизиқни чизамиз ва L нуқта орқали MS га параллел қилиб LK тўғри чизиқни ўтказамиз (чизмада кўрсатилмаган). Тўртинчи P нуқта ҳам шунинг сингари ясалади. Бу ясашдан, O_1 марказли ва $R = O_1L$ радиусли шар ҳақиқатан ҳам пирамидага ички чизилганлиги чиқади.

б) Ечиш. MOO_1 учбурчакдан

$$OM = OO_1 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

эканлигини топамиз. Демак,

$$H = OE = OM\cdot\operatorname{tg}\varphi = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Сўнгра BUA учбурчакдан (бу учбурчакда $BU \parallel MN$)

$$AB = a = \frac{BU}{\sin\alpha} = \frac{2\cdot OM}{\sin\alpha} = \frac{2R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}.$$

Демак.

$$S_{\text{асос}} = a^2\sin\alpha = \frac{4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}.$$

Жавоб. $V = \dfrac{4R^3\operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}}{3\sin\alpha}.$

761. а) Тасвирлаш усули. Ярим шар экваторининг (яъни ярим шарни чегараловчи доиранинг) маркази O (226-чизма)[1] пирамиданинг SO_1 баландлигида ётади.

$OM = OO_1 = r$ бўлгани учун M нуқта OO_1M_1 бурчакнинг O_1M биссектрисасида ётади. O_1M нинг SF билан кесишиш нуқтаси M ни белгилаб, асосга параллел $KLMN$ кесимни тасвирлаймиз. Кесим томонларининг ўрталари K, L, M, N нуқталар экваторнинг ён ёқлар билан уриниш нуқталари бўлади. KO_1M ярим доира ярим шарни ESF текислик кесишидан ҳосил бўлган кесимдир.

---

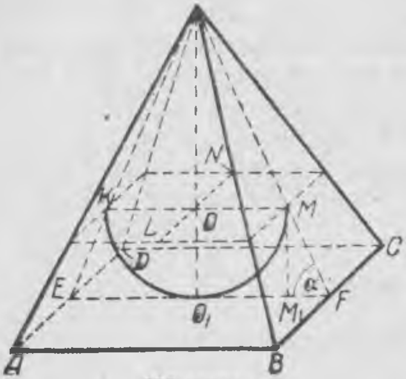
[1] 399-бет охиридаги изоҳга қаралсин.

б) Ечиш. Асоснинг томони

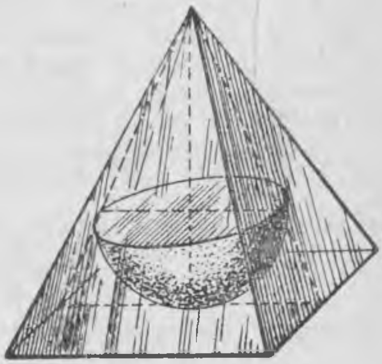
$$a = EF = 2 \cdot O_1F = 2\,(O_1M_1 + M_1F).$$

Аммо, $O_1M_1 = OM = r$ ва $M_1F = MM_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = r \operatorname{ctg} \alpha$. Демак,

$$a = 2r\,(1 + \operatorname{ctg} \alpha).$$



226-чизма.



226-*а* чизма.

Пирамиданинг тўла сирти:

$$S_{\text{тўла}} = \frac{2S_{\text{асос}} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

(619-масалага доир изоҳга қаралсин). Бунда

$$S_{\text{асос}} = a^2 = 4r^2\,(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

Жавоб. $S_{\text{тўла}} = \dfrac{8r^2\,(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \dfrac{4r^2 \sin^2 (45 + \alpha)}{\cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$

762. ESF текислик (227-чизма)[1] ярим шар билан кесишганда пирамиданинг апофемаларига (Q ва G нуқталарда) уринувчи NPM ярим доира ҳосил қилади. Агар пирамида асосининг томонини a билан, ярим шарнинг радиусини r билан белгиласак, унда ярим шарнинг тўла сирти

$$S_1 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2,$$

---

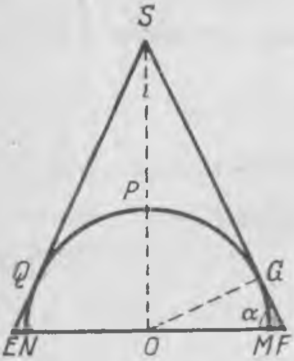
[1] 399-бет охиридаги изоҳга қаралсин.

пирамиданинг тўла сирти

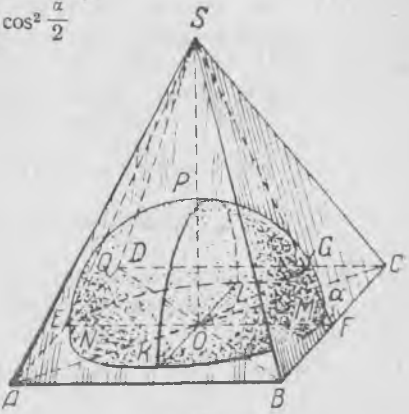
$$S_2 = \frac{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

бўлади (**619**-масалага доир изоҳга қаранг). Бу сиртларнинг нисбати

$$q = \frac{3\pi r^2\cos\alpha}{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$



227-чизма.



227-а чизма.

OGF учбурчакдан $OG = OF\cdot\sin\alpha$, яъни $r = \frac{a}{2}\sin\alpha$. Бу ифодани бундан олдинги тенгликка қўямиз.

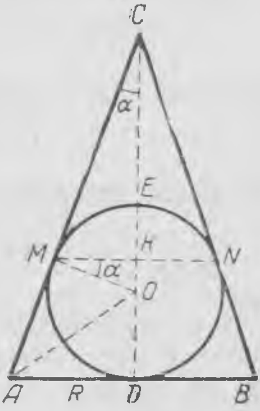
Ярим шарнинг V ҳажмини ҳисоблаш учун $a - 2r = m$ шартидан ва олдин топилган $r = \frac{a}{2}\sin\alpha$ тенгликдан r нинг қийматини топамиз:

$$r = \frac{m\sin\alpha}{2(1-\sin\alpha)} = \frac{m\sin\alpha}{4\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Жавоб. $q = \frac{3\pi}{8}\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$;

$$V = \frac{\pi m^3\sin^3\alpha}{96\sin^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

763. 228-чизмада конуснинг ўқ кесими ва бу конусга ички чизилган шарнинг кесими тасвирланган. Изланаётган V ҳажм MCN конус ҳажмидан MEN шар сегмент ҳажмининг айирилганига тенг. Демак,



228-чизма.

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot MK^2\cdot KC-\pi\cdot KE^2\left(r-\frac{1}{3}KE\right),$$

бунда r — шарнинг радиуси. AOD учбурчакдан:

$$r=OD=AD\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle DAC}{2}=R\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

эканлигини аниқлаймиз. Энди OMK учбурчакдан (бу учбурчакда $\angle OMK=\alpha$, чунки OMK ва MCK бурчакларнинг томонлари ўзаро перпендикуляр): $MK=OM\cdot\cos\alpha=r\cos\alpha$ ва $OK=r\sin\alpha$. Демак, $KE=OE—OK=r(1-\sin\alpha)$. Ниҳоят, $KC=MK\cdot\operatorname{ctg}\alpha=$ $=r\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha$. Энди талаб этилган ҳажм ифодасини ёза оламиз:

$$V=\frac{\pi}{3}r^3\cos^3\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\pi r^2(1-\sin\alpha)^2\left[r-\frac{r(1-\sin\alpha)}{3}\right]=$$
$$=\frac{\pi}{3}r^3\left[\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}-(1-\sin\alpha)^2(2+\sin\alpha)\right].$$

Бу ифодани соддалаштириш мумкин. Бунинг учун аввал $\cos^4\alpha$ нинг шаклини ўзгартириб, сўнгра $(1-\sin\alpha)^2$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз:

$$\cos^4\alpha=(1-\sin^2\alpha)^2=(1-\sin\alpha)^2(1+\sin\alpha)^2.$$

Энди ҳажм ифодаси

$$V=\frac{\pi r^3(1-\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}\left[(1+\sin\alpha)^2-(2+\sin\alpha)\sin\alpha\right]$$

шаклини олади. Ўрта қавс ичидаги ифода бирга тенг. Демак,

$$V=\frac{\pi r^3(1-\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}.$$

Бу ифодада r нинг ўрнига унинг топилган

$$r=R\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

қийматини қўямиз. Бундан ташқари

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

формуладан фойдаланамиз.

Жавоб. $V=\dfrac{4\pi R^3\operatorname{tg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha}.$

764. 229-чизмадаги белгилашларда масаланинг шарти $\pi R(l+$ $+R)=n\cdot 4\pi r^2$ тенглик билан ифодаланади. OBO_1 учбурчакдан: $r=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, BOC учбурчакдан: $BC=l=\frac{R}{\cos\alpha}$. Олдинги тенглик πR^2 га қисқартирилгандан сўнг

$$1+\frac{1}{\cos\alpha}=4n\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

шаклини олади. Энди

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

формуладан фойдаланиб, олдинги тенгликдаги $\cos\alpha$ ўрнига унинг қийматини қўйсак,

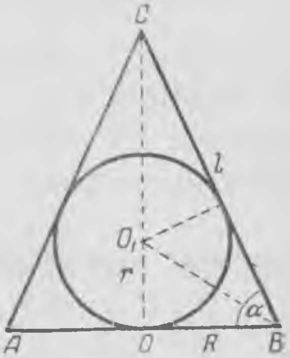
$$\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=4n\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=z$ деб фараз қиламиз[1]):

$$z^4-z^2+\frac{1}{2n}=0,$$

бундан

$$z^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}.$$



229-чизма.

Бундан кўринадики, $n<2$ бўлганда масаланинг ечими бўлмайди (илдиз тагидаги сон манфий). $n\geqslant2$ бўлганда z^2 миқдорнинг иккала қиймати ҳам мусбат $\left(\text{чунки } \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\sqrt{\frac{1}{4}}, \text{ яъни } \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{2}\right)$. Тенгламадаги $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ миқдор мусбат бўлиши керак, шунинг учун фақат иккита ечимга эга бўлишимиз мумкин:

$$z=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}}$$

ва

$$z=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}}.$$

$\frac{\alpha}{2}$ бурчак 45° дан кичик бўлгани учун $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ нинг қиймати

---

[1]) Махраждан қутулсак, чет илдиз $\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=1\right)$ ҳосил қилган бўлар эдик, аммо бундай илдиз ярамайди, чунки у бошланғич тенгламани қониқтирмайди.

бирдан кичик бўлиши керак; демак, $z^2 < 1$ бўлиши лозим. Аммо бу тенгсизликка доимо риоя қилинган, чунки

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

ва

$$\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{2}.$$

Жавоб. Масала фақат $n \geqslant 2$ бўлганда ечимга эга. $n > 2$ бўлганда ечим иккита, яъни

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}};$$

$n = 2$ бўлганда иккала ечим ҳам бир хил бўлади $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

765. 229-чизмадаги белгилашларга биноан

$$\frac{1}{3}\pi R^2H = n\cdot\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Бу тенгликка

$$r = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ ва } H = R\operatorname{tg}\alpha$$

қийматларини қўйсак,

$$\operatorname{tg}\alpha = 4n\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Энди

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

формулани татбиқ этиб ва $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ни z билан белгилаб

$$z\left(\frac{1}{1-z^2}-2nz^2\right)=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама иккита тенгламага ажралади, аммо улардан бири ($z = 0$) масаланинг шартига тўғри келмайди (α бурчак нолга тенг бўла олмайди). Иккинчи тенглама $z^4 - z^2 + \frac{1}{2n} = 0$ шаклга келтирилади, яъни бундан олдинги масаладаги тенглама билан бир хил бўлади. Иккита ечим ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}}}.$$

$n = 4$ бўлганда, ечимларнинг бири

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \cos 22^\circ 30' \approx 0{,}9239;$$

иккинчи ечим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin 22^\circ 30' \approx 0{,}3827$$

(бундан $\alpha_1 \approx 85^\circ 28'$ ва $\alpha_2 \approx 41^\circ 53'$).

Жавоб. Бундан олдинги масаланинг жавоби кабидир. $n = 4$ бўлганда

$$\alpha_1 = 2 \operatorname{arc\,tg} (\cos 22^\circ 30') (\approx 85^\circ 28'),$$
$$\alpha_2 = 2 \operatorname{arc\,tg} (\sin 22^\circ 30') (\approx 41^\circ 53').$$

766. Ўқ кесимининг юзи RH кўпайтмага тенг. Тўла сирт $\pi R l + \pi R^2$. Шартга кўра $\frac{\pi (l + R)}{H} = n$. Агар β—ўқ билан ясовчи орасидаги бурчак бўлса, $R = l \sin \beta$ ва $H = l \cos \beta$. Бу ифодаларни ёзилган тенгликка қўйсак

$$\frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{n}{\pi}.$$

Бу тенгламани турли усуллар билан ечиш мумкин. Энг қисқа йўли $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ формулани татбиқ этишдир; унда

$$\frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1 + \cos (90^\circ - \beta)}{\sin (90^\circ - \beta)} = \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$$

тенглигини ҳосил қиламиз. Демак, $\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{n}{\pi}$. Бундан $45^\circ - \frac{\beta}{2}$ бурчакни, сўнгра β бурчакни топиш мумкин.

Бироқ n нинг ҳар қандай қийматида ҳам масала ечимга эга бўлавермайди. Ҳақиқатан, β бурчак 0 билан 90° орасидадир; ундай бўлса $45^\circ - \frac{\beta}{2}$ бурчак 0 билан 45° орасида бўлади, яъни $\frac{n}{\pi} = \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$ миқдор албатта бирдан катта, яъни $n > \pi$ бўлиши керак. $n = 1, 2, 3$ бўлганда масаланинг ечими бўлмайди.

Изоҳ. $\frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{n}{\pi}$ тенгламани яна бундай ечиш ҳам мумкин. Бу тенгламани $\frac{n}{\pi} \cos \beta - 1 = \sin \beta$ шаклга келтирамиз ва тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз, сўнгра $\sin^2 \beta$ ни $1 - \cos^2 \beta$ билан алмаштирамиз. Тенгламани ечиб иккита илдиз ҳосил қиламиз: улардан бири $\cos \beta = 0$, бу чет илдиз бўлади (бу илдиз $\frac{n}{\pi}\cos\beta - 1 = -\sin\beta$ тенгламанинг ечимидир); иккинчи илдиз

$$\cos\beta = \frac{2n\pi}{\pi^2 + n^2}.$$

олдинги ечим билан бир хил бўлади.

Аммо, энди $n = 1, 2, 3$ қийматларида ҳам масала ечимга эга деган нотўғри хулосага келиш осон. Ҳақиқатан n нинг ҳар қандай мусбат қийматида $\frac{2n\pi}{\pi^2 + n^2}$ миқдор 0 билан 1 орасида бўлади $\left(\text{чунки } 1 - \frac{2n\pi}{\pi^2+n^2} = \frac{(\pi-n)^2}{\pi^2+n^2} \quad 0\right)$. Шунинг учун 0 билан 90° орасида косинусининг қиймати $\frac{2n\pi}{\pi^2 + n^2}$ га тенг бўлган бурчак ҳамма вақт топилади.

Бу муҳокаманинг хатоси қуйидагидан иборат: $\cos\beta = \frac{2n\pi}{\pi^2 + n^2}$ муносабатдан ва берилган тенгламадан $\sin\beta = \frac{n^2 - \pi^2}{\pi^2 + n^2}$ экани келиб чиқади. Бундан $n > \pi$ бўлиши кераклиги чиқади (акс ҳолда β бурчак манфий бўлади, бу эса мумкин эмас).

Жавоб. Агар $n < \pi$ бўлса, масаланинг ечими йўқ. Агар $n > \pi$ бўлса, унда

$$\beta = 90° - 2 \operatorname{arc\,ctg} \frac{n}{\pi}$$

ёки

$$\beta = \arccos\frac{2n\pi}{\pi^2 + n^2} = \arcsin\frac{n^2 - \pi^2}{n^2 + \pi^2}.$$

767. 230-чизмадаги белгилашга асосан

$$\frac{R(l + R)}{2r^2} = \frac{18}{5}.$$

AOD учбурчакдан

$$r = R\cos\angle AOD = R\cos\angle ACO = R\cos\frac{\alpha}{2}$$

ва *AOC* учбурчакдан

$$l = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Олдинги тенглик, энди мана бу шаклни олади:

$$\frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{18}{5}, \text{ яъни } \frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{18}{5}.$$

Касрни $1 + \sin\frac{\alpha}{2}$ га қисқартирамиз (бу миқдор нолга тенг эмас).

Тенглама

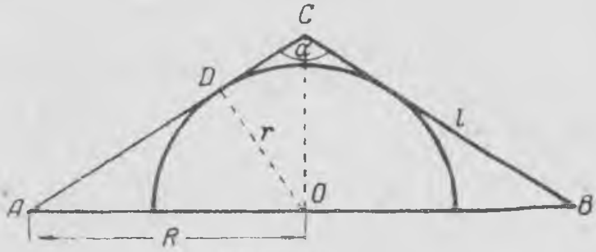
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{36}=0$$

шаклга келади.

Жавоб. $$\alpha_1=2\arcsin\frac{5}{6}\,(\approx 112°53')$$

$$\text{ва }\alpha_2=2\arcsin\frac{1}{6}\,(\approx 19°11').$$

768. Аввалги масаладаги белгилашларга мувофиқ $\frac{\pi}{3}R^2H=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$ муносабатга эга бўламиз. Изланган бурчакни β билан



230-чизма.

белгилаймиз $\left(230\text{-чизмада }\beta=\frac{\alpha}{2}\right)$. У вақтда $r=R\cos\beta$ ва $H=R\operatorname{ctg}\beta$. Аввалги муносабатдан $3\operatorname{ctg}\beta-8\cos^3\beta=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг иккала қисмини $\operatorname{tg}\beta$ га кўпайтириб (бу миқдор масаланинг мазмунига кўра нолга тенг бўла олмайди),

$$3-8\sin\beta\cos^2\beta=0$$

тенгламани, бундан

$$8\sin^3\beta-8\sin\beta+3=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу учинчи даражали тенгламани ечиш учун бирор сунъий йўл татбиқ этишга тўғри келади. Масалан, тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиш мумкин:

$$\begin{aligned}8\sin^3\beta-8\sin\beta+3&=(8\sin^3\beta-1)-(8\sin\beta-4)=\\&=[(2\sin\beta)^3-1]-4(2\sin\beta-1)=\\&=(2\sin\beta-1)[(2\sin\beta)^2+2\sin\beta+1-4].\end{aligned}$$

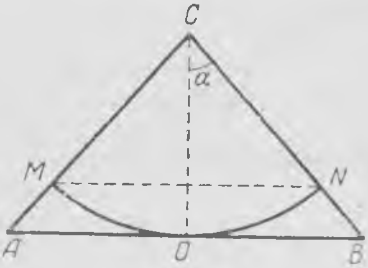
Демак, топилган тенглама иккита тенгламага ажралади. Биринчи тенгламадан $\sin\beta=\frac{1}{2}$, иккинчисидан $\sin\beta=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$. (Квадрат тенгламанинг иккинчи ечими ярамайди.) Текшириш топилган ечимнинг иккаласи ҳам яроқли эканлигини кўрсатади.

Жавоб. $\beta_1 = 30°$; $\beta_2 = \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}$.

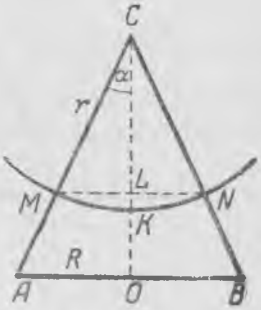
769. Шартга кўра MCN конуснинг (231-чизма) ён сирти ACB конус ён сиртининг ярмига тенг бўлиши керак. Аммо бу конуслар ён сиртларининг нисбати ясовчилари квадратларининг нисбати каби, яъни $\frac{CN^2}{CB^2} = \frac{1}{2}$. Лекин $CN = CO$ бўлгани учун

$$\left(\frac{CO}{CB}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ яъни } \cos^2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Жавоб. $\alpha = 45°$.



231-чизма.



232-чизма.

770. Масаланинг шартига кўра $CMKN$ шар секторининг V ҳажми (232-чизма) ACB конус ҳажмининг ярмига тенг бўлиши керак. KL кесмани h билан, конуснинг CO баландлигини H билан белгилаймиз. Унда $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$. Ушбу тенгликни ҳосил қиламиз: $\frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 H$, яъни $4r^2h = R^2H$ ёки $4r^2h = H^3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

h нинг миқдорини r орқали ифодалаймиз:

$$h = LK = CK - CL = r - r\cos\alpha = 2r\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Бу қийматни топилган тенгламада h нинг ўрнига қўйсак

$$8r^3\sin^2\frac{\alpha}{2} = H^3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $r = \frac{H}{2}\sqrt[3]{\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

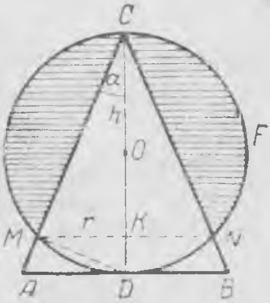
771. 233-чизмада шарнинг ҳажми топилиши керак бўлган қисмининг ўқ кесими штрихланган. Бу V ҳажм $CEMKNF$ шар сегментининг V_2 ҳажмидан MCN конуснинг V_1 ҳажмини айиришдан ҳосил бўлади. MK ни r билан ва KC ни h билан белгилаймиз. Шарнинг радиуси $OC = \frac{1}{2}CD = \frac{H}{2}$ бўлгани учун

$$V = V_2 - V_1 = \pi h^2\left(\frac{H}{2} - \frac{h}{3}\right) - \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Бунга $h = MC \cdot \cos\alpha = H\cos^2\alpha$ ва $r = MC \cdot \sin\alpha = H\cos\alpha\sin\alpha$ ифодаларини қўйиш керак (агар аввал $r^2 = MK^2$ ни $CK \cdot KD = h(H-h)$ билан алмаштириб олинса, ҳисоблаш соддалашади); унда

$$V = \frac{\pi h^2 H}{6}.$$

Жавоб. $V = \dfrac{\pi H^3 \cos^4\alpha}{6}.$



233-чизма.

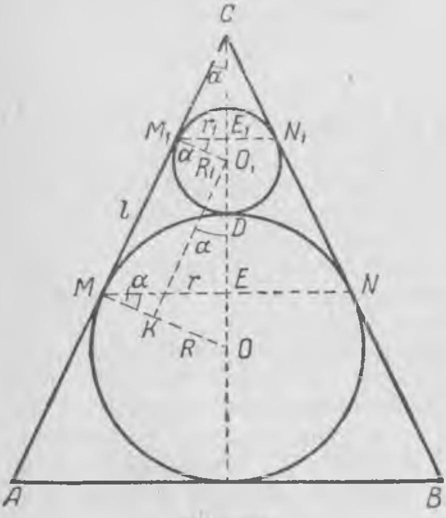
772. 234-чизмадаги белгилашларга асосан $S_{\text{ён}} = \pi(r + r_1)\,l$. Уриниш нуқталарига $OM = R$ ва $O_1M_1 = R_1$ радиусларни ҳамда OM га перпендикуляр қилиб O_1K тўғри чизиқни ўтказамиз. $O_1M_1E_1$, OME ва O_1KO учбурчакларни ҳосил қиламиз. Бу учбурчаклар бир-бирига ўхшаш (чунки улар биттадан тенг α ўткир бурчакка эга бўлган тўғри бурчакли учбурчаклардир). O_1KO учбурчакдан:

$$O_1O = R + R_1; \quad OK = R - R_1; \; O_1K = MM_1 = l.$$

Демак,

$$l = \sqrt{(R+R_1)^2 - (R-R_1)^2} = 2\sqrt{RR_1}.$$

Ўзаро ўхшаш OME ва O_1KO учбурчаклардан $\frac{r}{l} = \frac{R}{R+R_1}$ пропорцияни ёза оламиз,



234-чизма.

бундан

$$r = \frac{lR}{R+R_1} = \frac{2R\sqrt{RR_1}}{R+R_1}.$$

Ўзаро ўхшаш $O_1M_1E_1$ ва O_1KO учбурчаклардан:

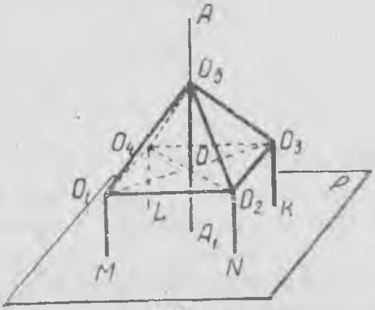
$$\frac{r_1}{l} = \frac{R_1}{R+R_1}$$

пропорцияни ёза оламиз, бундан

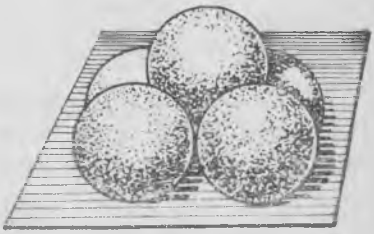
$$r_1 = \frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R+R_1}.$$

Жавоб. $S_{ён} = 4\pi RR_1$.

773. P текисликда (235-чизма) радиуслари r га тенг тўртта шар ётибди¹⁾; M, N, K ва L нуқталар — шарларнинг P текислик билан уриниш нуқталари. Бу шарларнинг O_1, O_2, O_3, O_4 марказлари текисликдан $O_1M = O_2N = O_3K = O_4L = r$ қадар узоқликдадир. Ўзаро уриниб турган икки шар марказлари орасидаги масофа $2r$, яъни $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1 = 2r$. Бу шарлар устига бешинчи шар шундай қўйилганки, у олдинги тўртта шарнинг ҳар бирига уринади; демак, бу шарнинг маркази O_5 нуқта ҳам олдинги тўртта шарнинг O_1, O_2, O_3, O_4 марказларидан $2r$ масофада туради, яъни $O_1O_5 = O_2O_5 = O_3O_5 = O_4O_5 = 2r$. Шунинг учун $O_5O_1O_2O_3O_4$ фигуранинг ҳамма қирралари (ҳам асосдаги, ҳам ёндаги қирралари) бир-бирига тенг тўрт бурчакли мунтазам пирамидадир. Бешинчи шарнинг маркази P текисликдан $OO_5 + OA_1 = OO_5 + r$ га тенг масофада жойлашган. Бешинчи шарнинг энг юқори A нуқтаси A_1O_5 перпендикулярнинг давомида O_5 марказдан $O_5A = r$ масофада бўлади. Шундай қи-



235-чизма.


235-а чизма.

---

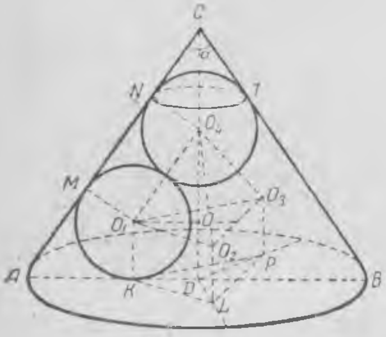
[1] 399-бет охиридаги изоҳга қаранг.

либ, бешинчи шарнинг энг юқори нуқтаси A дан P текисликкача бўлган AA_1 масофа $2r + OO_5$ га тенг. OO_5 кесмани тўғри бурчакли O_1OO_5 учбурчакдан топамиз. Бу учбурчакда

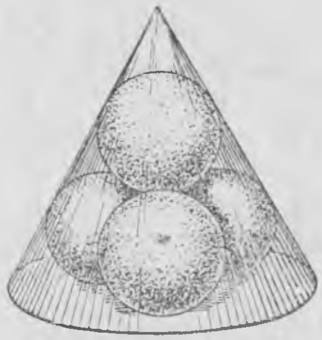
$$O_1O_5 = 2r \text{ ва } OO_1 = \frac{O_1O_2}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}}.$$

Жавоб. $AA_1 = r(2 + \sqrt{2})$·

774. Берилган тўртта шарнинг марказлари O_1, O_2, O_3, O_4 бирбиридан $2r$ га тенг масофада бўлиши керак (бундан олдинги масалага қаранг). Демак, $O_1O_2O_3O_4$ фигура — қирраси $2r$ га тенг мунтазам тетраэдр. Бу тўртта шар атрофига ташқи чизилган ACB конус (236-чизма)[1]) улардан бири бўлган O_4 шарга NT айлана бўйича уринади. Қолган учта шарнинг ҳар бирига (масалан, O_1 шарга) икки нуқтада уринади; улардан бири (K нуқта) асосда, иккинчиси (M нуқта) ён сиртда ётади. Конус ўқи тетраэдрнинг O_4O баландлиги билан устма-уст тушади. O марказ уриниш нуқтаси M орқали ўтувчи ACD ўқ кесими текислигида ётади (чунки O_1M тўғри чизиқ конус билан шарнинг умумий уринма текислигига перпендикуляр, ACD ўқ кесимининг текислиги эса шу уриниш текислигига перпендикулярдир). Демак, ACD текислик O_1 шарни катта доира бўйича кесади; бу текислик O_4 шарни ҳам катта доира бўйича кесади ва AC ясовчи шу катта доираларнинг умумий уринмасидир. Демак, $AC \parallel O_1O_4$ ва $\angle O_1O_4O = \angle ACD = \frac{\alpha}{2}$ (α бурчак — ўқ кесимининг C учидаги изланган бурчакдир). Демак, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OO_1}{O_1O_4}$. Аммо $O_1O_4 = 2r$, OO_1 кесма ($O_1O_2O_3$ учбурчак-



236-чизма.



236-а чизма.

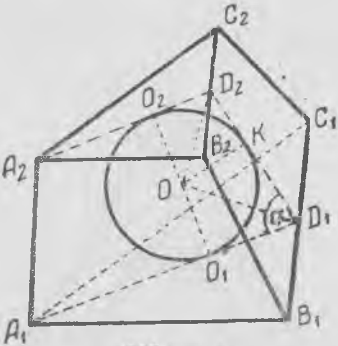
---

[1]) 399-бет охиридаги изоҳга қаранг.

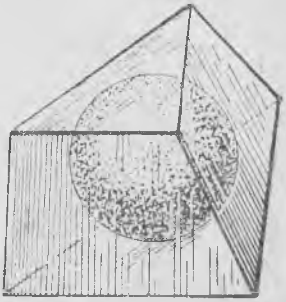
ка ташқи чизилган доиранинг радиуси) $\frac{O_1O_2}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ·Бу қий атларни ўрнига қўйсак, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Бундан $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

Жавоб. $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} = \arccos\frac{1}{3}$.

775. Кесик пирамиданинг A_1A_2 қиррасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текислик (237-чизма)1) O_1O_2 баландлик орқали ўтади ва $B_1C_1C_2B_2$ ёққа перпендикулярдир (исбот этинг!).



237-чизма.



237-*a* чизма.

Қолган иккита ён қирралар учун ҳам шундайдир. Шунинг учун пирамида ёқларига уринувчи шарнинг маркази кесик пирамида баландлигида ётади (яъни баландликнинг ўртасида бўлади, чунки шар пирамида асосларига ҳам уринади), шарнинг $B_1C_1C_2B_2$ ёқ билан уриниш нуқтаси бўлган K нуқта шу ёқнинг D_1D_2 апофемасида ётади. Бошқа ён ёқлар учун ҳам шундай бўлади. Шундай қилиб,

$$S_{\text{тўла}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1^2 + a_2^2) + 3 \cdot \frac{(a_1 + a_2)\,l}{3}$$

($a_1 = B_1C_1$ ва $a_2 = B_2C_2$ — асосларнинг томонлари ва $l = D_1D_2$ —ён ёқнинг апофемаси). Агар $r_1 = O_1D_1$ ва $r_2 = O_2D_2$ — асосларга ички чизилган доираларнинг радиуслари бўлса, унда $a_1 = 2r_1\sqrt{3}$ ва $a_2 = 2r_2\sqrt{3}$ бўлади. Шунинг учун

$$S_{\text{тўла}} = 3\sqrt{3}\,(r_1^2 + r_2^2) + 3\sqrt{3}\,(r_1 + r_2)\,l.$$

---

1) 399-бет охиридаги изоҳга қаранг.

751-масаладаги каби $r_1 + r_2 = l$ ва $r_1^2 + r_2^2 = l^2 - 2r^2$.

Унда $S_{\text{тўла}} = 6\sqrt{3}\,(l^2 - r^2 = 6\sqrt{3}\left(\frac{4r^2}{\sin^2\alpha} - r^2\right)$.

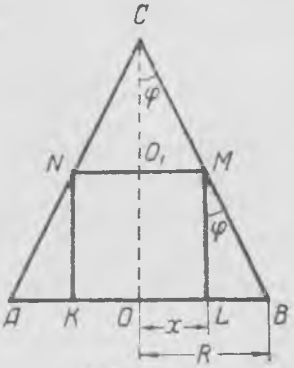
Жавоб. $S_{\text{шар}} : S_{\text{тўла}} = \frac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}\,(4 - \sin^2\alpha)}$.

776. Цилиндр асосининг OL радиусини (238-чизма) x билан, конус асосининг OB радиусини R билан белгилаймиз. Шартга кўра $ML = R$ бўлгани учун цилиндрнинг тўла сирти $S_{\text{тўла}} = 2\pi x^2 + 2\pi xR$.

Шартимизга кўра $2\pi x^2 + 2\pi xR = = \frac{3}{2}\pi R^2$ ёки $x^2 + Rx - \frac{3}{4}R^2 = 0$, бундан $x = \frac{R}{2}$ (иккинчи $x = -\frac{3}{2}R$ манфий ечим ярамайди). LMB учбурчакдан:

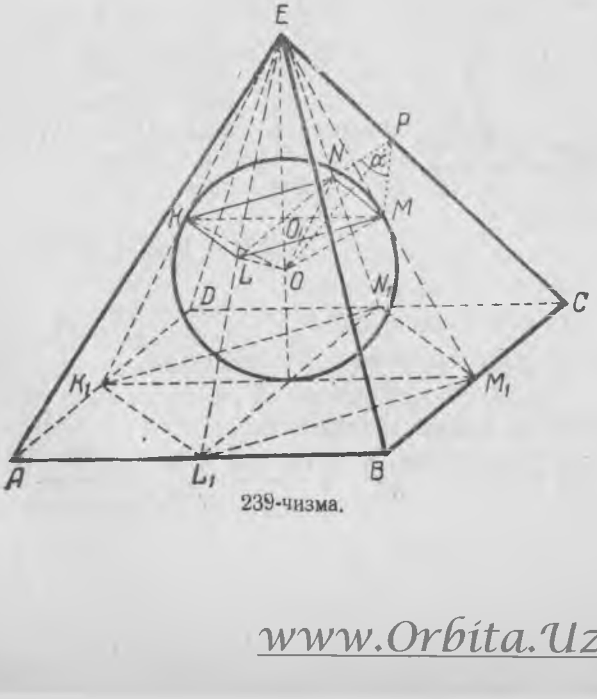
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{LB}{LM} = \frac{R - x}{R} = \frac{1}{2}.$$

Жавоб. $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$.



238-чизма.

777. Ички чизилган шарнинг O маркази (239-чизма) пирамиданинг баландлигида ётади, шарнинг ён ёқлар билан уриниш нуқталари K, L, M, N эса EK_1, EL_1, EM_1, EN_1 апофемаларда ётади (775-масалага солиштириб кўринг). Ҳажми топиш талаб этилган пирамиданинг асоси бўлган $KLMN$ тўртбурчак квадратдир.



239-чизма.

OM ва ON радиуслар орқали NOM текисликни ўтказамиз. Бу текислик BEC ёққа перпендикуляр бўлади (чунки бу текислик BEC текисликка перпендикуляр бўлган OM тўғри чизиқ орқали ўтади); бу текислик DEC ёққа ҳам перпендикулярдир (чунки ON орқали ўтади). Демак, NOM текислик EC қиррага перпендикулярдир.

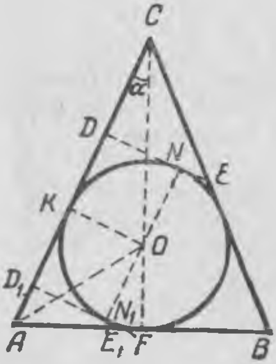
P нуқта NOM текислик билан EC қирранинг кесишиш нуқтаси бўлсин. У ҳолда NPM бурчак икки ёқли α бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади. $OMPN$ тўртбурчакда иккита бурчак (M ва N учлардаги бурчаклар) тўғри бурчаклардир. У ҳолда $\angle NOM = 180° - \alpha$. Демак,

$$a = NM = 2 \cdot OM \cdot \sin \frac{180° - \alpha}{2} = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

OO_1M учбурчакда $O_1M = \frac{a}{\sqrt{2}}$; бу учбурчакдан

$$h = OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = r\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Жавоб. $V = \frac{4}{3} r^3 \cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{3} r^3 \cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\alpha}.$



240-чизма.

778. Конуснинг берилган ясовчисига (240-чизмада бу ясовчи CA) перпендикуляр ва ички чизилган шарга уринувчи иккита текислик ўтказиш мумкин; бу текисликларнинг уриниш нуқталари (N ва N_1 нуқталар) CA га параллел бўлган NN_1 диаметрда ётади.

Аввал шарга N нуқтада уринувчи ND текислик олинади деб фараз қиламиз. $ONDK$ тўртбурчак (K нуқта CA ясовчининг шарга уриниш нуқтаси) — квадратдир. Демак, $DK = ON = r$. Шартга кўра $CD = d$. Демак, $CK = d + r$. KOC учбурчакдан:

$$CO = \sqrt{(d + r)^2 + r^2}.$$

Демак,

$$H = CF = OF + OC = r + \sqrt{(d + r)^2 + r^2}.$$

AFC ва KOC учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$AF : H = OK : KC$$

пропорцияни ёза оламиз, бундан

$$R = AF = \frac{OK \cdot H}{KC} = \frac{r\,[r + \sqrt{(d + r)^2 + r^2}]}{d + r}.$$

Агар N_1D_1 текислик олинса, унда $d = CD_1$ бўлади ва худди аввалги йўл билан

$$H = r + \sqrt{(d - r)^2 + r^2}$$

ва

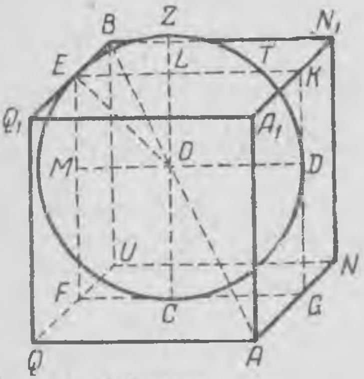
$$R = \frac{r\,[r + \sqrt{(d - r)^2 + r^2}]}{d - r}.$$

Жавоб. $V = \dfrac{\pi r^2\,[r + \sqrt{(d+r)^2 + r^2}]^3}{3\,(d + r)^2}$

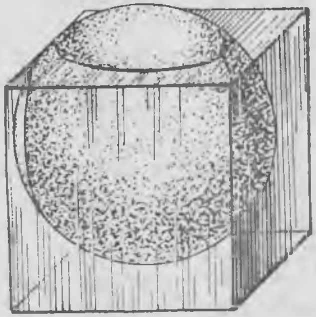
ёки

$$V = \frac{\pi r^2\,[r + \sqrt{(d - r)^2 + r^2}]^3}{3\,(d - r)^2}.$$

779. Шарнинг O маркази (241-чизма)[1] AB диагоналда ётади. Ҳақиқатан, O нуқта AA_1N_1N ва AA_1Q_1Q ёқлардан бир хил узоқликда. Демак, бу нуқта AA_1 қиррадаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликда ётади. Худди шунингдек, O нуқта MN қиррадаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликда ётиши лозим. Бу икки текислик AB диагонал бўйича кесишади.



241-чизма.



241-*а* чизма.

C ва D нуқталар — шарнинг $ANUQ$ ва AA_1N_1N ёқлар билан уриниш нуқталари, r — шарнинг радиуси бўлсин. У вақтда $OC = OD = r$ ва $ODGC$ текислик AN қиррага ва шунингдек, BQ_1 қиррага перпендикулядир.

Шартимизга биноан BQ_1 қирра шарга урингани учун $ODGC$ текислик қиррани мана шу қирранинг шар билан уриниш нуқтаси бўлган E нуқтада кесиб ўтади; демак, $OE = r$. Иккинчи томондан, E нуқта $ODGC$ текислик кубни кесганда кесимда ҳо-

---

[1] 399-бет охиридаги изоҳга қаранг.

сил бўлган $FGKE$ квадратнинг бир учидир. Демак. $MOLE$ тўртбурчак квадратдир (OL ва OM кесмалар OC ва OD тўғри чизиқларнинг давомидир). Бундан $OM = \frac{r}{\sqrt{2}}$ экани чиқади. $OM + OD =$ $= MD = a$ бўлгани учун $\frac{r}{\sqrt{2}} + r = a$; бундан: $r = (2 - \sqrt{2})\,a$.

Сфера сиртининг кубдан ташқарида ётган қисми бир-бирига тенг учта сегментдан иборат бўлиб, улардан бири $EZTL$. Бу сегментнинг сирти:

$$2\pi r \cdot LZ = 2\pi r\,(CZ -- CL) = 2\pi r\,(2r - a).$$

Жавоб. $r = \left(2 - \sqrt{2}\right) a;\quad S = 6\pi a^2\left(10 - 7\sqrt{2}\right).$

780. $ABCD$ тетраэдр қирраларига уринувчи шарнинг маркази (242 ва 242-*а* чизмалар) 1) тетраэдрнинг маркази билан устма-уст тушади (яъни A, B, C, D учлардан бир хил узоқликда турган O нуқтанинг устига тушади), шарнинг қирраларга уриниш нуқталари қирраларнинг ўрталаридир. Масалан, N уриниш нуқтаси AD қирранинг ўртасидир. Ҳақиқатан, AOB, BOC, COA, BOD, COD ва AOD тенг ёнли учбурчакларнинг олтитаси ҳам (фақат битта AOD учбурчак чизилган) бир-бирига тенгдир (чунки уларнинг учала томонлари бир-бирига тенг). Демак, уларнинг OM, ON ва ҳоказо баландликлари бир-бирига тенг. Шунинг учун, агар радиусини $ON = r$ га тенг қилиб олиб, ташқи шар чизилса, бу шар қирраларнинг ўрталари бўлган L, M, N, Q K, R нуқталардан ўтади ва шу нуқталарда қирраларга уринади (чунки $ON \perp AD$ ва ҳ. к.).

Тетраэдрнинг DG баландлиги ва AD қирраси орқали ADG текислик ўтказамиз. Бу текислик BC қиррага перпендикуляр бўлади (исботи 652-масалада берилган) ва бу қиррани унинг ўртаси M нуқтада кесади. Кесимда AMD дан иборат тенг ёнли ($AM = MD$) учбурчак ҳосил бўлади. Бу учбурчакнинг MN баландлигини ўтказамиз (N нуқта AD қирранинг ўртаси). O марказ MN да ётади (чунки O марказ A ва D нуқталардан бир хил узоқликда). Демак, $MO = NO$. Бундан $r = \frac{MN}{2}$ чиқади. MN баландлик ANM учбурчакдан аниқланади: бу учбурчакда $AN = \frac{a}{2}$ ва $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (чунки AM — тенг томонли ABC учбурчакнинг апофемаси). Шундай қилиб,

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

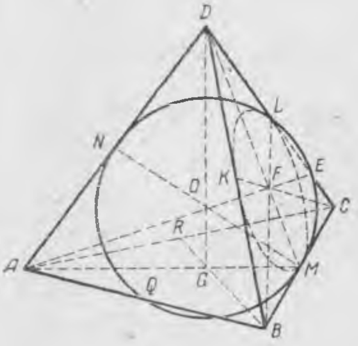
---

1) 399-бет охиридаги изоҳга қаранг.

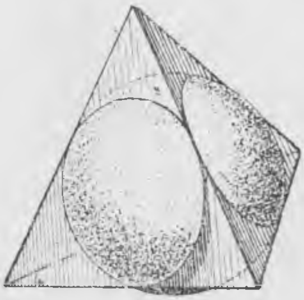
Демак,

$$r = \frac{MN}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Шарнинг тетраэдрдан ташқарида жойлашган қисми шардан тетраэдрнинг ёқлари билан кесилган бир-бирига тенг тўртта сегментдан иборат. Ёқлардан бири, масалан, *BDC* ёқни кўздан



242-чизма.



242-*а* чизма.

кечирайлик. Сегмент асосидаги *LMK* доира тенг томонли *BDC* учбурчакка ички чизилган (чунки учбурчакнинг томонлари шарга уринади; демак, бу томонлар *BDC* текисликда ётган *LMK* кичик доирага ҳам уринади). Бу доиранинг радиуси $FM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Бундан:

$$OF = \sqrt{OM^2 - FM^2} = \sqrt{r^2 - FM^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

Демак, сегментнинг баландлиги

$$h = FE = OE - OF = \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{2}}{12}(3 - \sqrt{3}).$$

Сегментлардан бирининг ҳажми

$$V_c = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) =$$

$$= \pi \left[\frac{a\sqrt{2}}{12}(3 - \sqrt{3})\right]^2 \cdot \left[\frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{36}(3 - \sqrt{3})\right] =$$

$$= \frac{\pi a^3 \sqrt{2}(9 - 4\sqrt{3})}{432};$$

изланган ҳажм $V = 4V_c$.

Изоҳ. BCD учбурчакка ички чизилган *LҚM* доира эллипс шаклида тасвирланади. Агар K, L, M нуқталардан бошқа, F нуқтага нисбатан шу нуқталарга мос равишда симметрик яна учта нуқта белгилаб олинса, бу эллипсни қўлда осонгина чизиб бўлади (F нуқта BDC учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси).

Жавоб. $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}(9 - 4\sqrt{3})}{108}$.

11-БОБ

ТРИГОНОМЕТРИК ШАКЛ АЛМАШТИРИШЛАР.

781. Секансларни косинуслар воситасида ифодалаймиз; тенгликнинг чап томонида

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$$

ҳосил қиламиз. Аммо

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

бўлгани учун, чап томон:

$$\frac{2}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{2}{\cos 2\alpha} = 2\sec 2\alpha.$$

782. Чап томонни умумий махражга келтирамиз ва

$$2\sin\alpha\cos(\alpha + \beta)$$

ифодани

$$\sin[\alpha + (\alpha + \beta)] + \sin[\alpha - (\alpha + \beta)] = \sin(2\alpha + \beta) + \sin(-\beta)$$

шаклига келтирамиз.

783. Чап томонни бундай алмаштирамиз:

$$\frac{2(1 + \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cdot 2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Бундан $\frac{\alpha}{2}$ бурчакка ўтиш учун

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}{2\operatorname{ctg}\varphi}$$

формуладан фойдаланамиз $\left(\frac{\alpha}{2}\text{ бурчак } \varphi \text{ деб олинади}\right)$. Натижада

$$2\operatorname{ctg}\alpha = 2\,\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

784. Тенгликнинг чап томонидаги касрнинг сурат ва махражини $\cos\alpha$ га бўлиб,

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$

ифодасини ҳосил қиламиз. Энди $1=\operatorname{tg}45^\circ$ бўлгани учун, ҳосил қилинган ифодани

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}45^\circ}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$$

шаклида ёза оламиз. Шуни исбот қилиш талаб этилган эди.

785. Чап томоннинг сурат ва махражини $\cos\alpha+\sin\alpha$ га кўпайтирамиз, сўнгра соддалаштириб, $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ ёки

$$\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

786. $\sin^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ бўлгани учун, чап томонни

$$\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}$$

шаклда ифодалаймиз. Сўнгра косинуслар айирмаси формуласини татбиқ этиб (ёки $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$ ва $\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$ ифодаларини йиғинди ва айирма косинуси формуласи бўйича очиб)

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha}{2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

787. Сурат $\cos 2\alpha$ га тенг; махраж эса

$$2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

шаклга келади. Энди

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$$

формуласидан фойдаланиб,

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ифода $\cos 2\alpha$ га тенг, демак, чап томон 1 га тенг.

788. Тенгликни бундай ёзамиз: $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

Энди $\frac{\pi}{4}-\alpha$ бурчакни $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ бурчакнинг ярми деб қараб ҳамда ярим бурчак синуси ва косинуси формулаларини татбиқ этиб, исботланиши талаб қилинган тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

789. Тангенс ва котангенсни синус ва косинус орқали ифода қилайлик:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Топилган бу ифодани чап томоннинг махражига қўямиз; унда чап томонда

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$$

ифодани ҳосил қиламиз.

790. $\sin\alpha$ ни $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ билан ва $\cos\alpha$ ни $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ билан алмаштирамиз ҳамда косинуслар йиғиндиси ва синуслар айирмаси формулаларини татбиқ этамиз.

791. Суратдаги бирни $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ билан алмаштирамиз, $\sin 2\alpha$ ни эса $2\sin\alpha\cos\alpha$ билан алмаштирамиз. Унда суратда $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$ ҳосил бўлади. Махраж эса мана бунга тенг:

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

Касрни $\cos\alpha+\sin\alpha$ га қисқартириб,

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

ҳосил қиламиз. Сурат ва махражни $\cos\alpha$ га бўлиб

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha},$$

яъни тенгликнинг ўнг томонини ҳосил қиламиз [784-масалада бу ифода $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ шаклга келтирилиши кўрсатилган].

792. 790-масаладаги сингари чап томонни $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$ шаклга келтирамиз. Энди $\frac{\alpha}{2}$ ни $\frac{\pi}{4}-y$ деб олиб, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

формуласини татбиқ этамиз. Натижада

$$\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}=\frac{1+\sin 2y}{\cos 2y}$$

ҳосил қиламиз.

793. Берилган айниятнинг чап томонини синус ва косинус билан ифодалаб, ҳосил бўлган касрларни бир-биридан айирамиз ва квадратлар айирмаси формуласини татбиқ этиб, чап томонни

$$\frac{(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

шаклга келтирамиз. Бу ифодадан берилган тенгликнинг ўнг томонидаги ифодани ҳосил қилиш осон.

794. $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$ формулани татбиқ этамиз (бунда $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ ўрнига $\frac{\varphi}{2}$ олинган). Натижада

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бундан сўнг чап томондаги ифоданинг шаклини алмаштириб, ўнг томондаги ифодани ҳосил қиламиз.

795. Бундан олдинги масала каби ечилади.

796. $2\cos^2\alpha$ ни $1+\cos 2\alpha$ билан алмаштирамиз; унда сурат $2(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$ шаклига келади. Махражнинг ҳадларини $(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\sin 3\alpha-\sin\alpha)$ кўринишда группалаштирамиз ва бундан сўнг косинуслар айирмаси ҳамда синуслар айирмаси формулаларини татбиқ этамиз. Сўнгра $2\sin\alpha$ ни қавсдан ташқарига чиқариб,

$$2\sin\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Буни $2(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$ га қисқартириб, берилган тенгликнинг ўнг томонини ҳосил қиламиз.

797. Айниятнинг чап томонидаги касрнинг суратини бундай алмаштирамиз:

$$\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha\cos 2\alpha-\sin 3\alpha=$$
$$=\sin 3\alpha(2\cos 2\alpha-1).$$

Касрнинг махражида ҳам шундай алмаштиришларни бажариб, $\cos 3\alpha(2\cos 2\alpha-1)$ ҳосил қиламиз ва касрни шу ифодага қисқартириб $\operatorname{tg}3\alpha$ ни ҳосил қиламиз.

798. Айниятнинг чап томонидаги олдинги иккиҳад йиғиндисини синуслар йиғиндиси формуласи бўйича алмаштирамиз, чунончи қўшилувчи $\sin(b-c)$ га эса иккиланган бурчак синус деб қараймиз. Натижада

$$2\sin\frac{2a-b-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}+2\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}=$$
$$=2\cos\frac{b-c}{2}\left[\sin\frac{2a-b-c}{2}+\sin\frac{b-c}{2}\right]$$

Қавс ичидаги ифодага синуслар йиғиндиси формуласини татбиқ этамиз.

799. $\sin^6 x+\cos^6 x$ ифодани кублар йиғиндиси деб қараб, уни кўпайтувчиларга ажратамиз ва бунда $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ эканлигини назарда тутамиз. Натижада тенгликнинг чап томони

$$-\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x-\cos^4 x+1=1-(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=0$$

шаклга келади.

800. Сўнгги иккиҳад йиғиндисини синуслар йиғиндиси каби алмаштирсак

$$\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=2\sin(\pi+\alpha)\cos\frac{\pi}{3}=$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha$$

ҳосил бўлади. Демак, чап томон нолга тенг.

801.

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}=$$
$$=\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}{2}=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

эканлигини назарда тутиб, тенгликнинг чап томонини
$\sin(45^\circ+\alpha+30^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha-30^\circ+\alpha)-$
$-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)$
шаклига келтириш мумкин. $\sin 75^\circ=\cos 15^\circ$ бўлгани учун бу ифода $\cos 15^\circ\sin(15^\circ+2\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=$
$=\sin(15^\circ+2\alpha-15^\circ)=\sin 2\alpha$
шаклини олади. Талаб этилган исбот шу эди.

802. Чап томондаги касрнинг суратини

$$(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)-2\cos^2\varphi=\sin^2\varphi-\cos^2\varphi$$

шаклда ёзамиз.

803. Ўнг томондаги $\sin 2\alpha$ ни $2\sin\alpha\cos\alpha$ билан алмаштирамиз. Сўнгра касрни $2\sin\alpha$ га қисқартириб, ўнг томонда $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ га тенг $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ ифодасини ҳосил қиламиз.

804. Иккинчи ва учинчи ҳадларни бирлаштириб, қавс ташқарисига $\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$ ни чиқарамиз. Натижада чап томон

$$\cos^2\varphi - (\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi)$$

шаклини олади. Йиғиндининг айирмага кўпайтмасининг шаклини бундай алмаштирамиз:

$$\cos^2\varphi - \cos^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\alpha\sin^2\varphi =$$
$$= \cos^2\varphi(1-\cos^2\alpha) + \sin^2\alpha\sin^2\varphi =$$
$$= \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\varphi.$$

Бу ифода $\sin^2\alpha$ га тенг.

805. $\cos(\alpha+\beta)$ ни очиб

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$$

ифодани ҳосил қиламиз. Учинчи ҳадни ўзгаришсиз қолдириб, қолган ҳадларни группалаймиз ва қуйидагича шакл алмаштирамиз:

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta) + (\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) =$$
$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta.$$

Энди берилган ифода қуйидаги шаклга келади:

$$(\sin\alpha\cos\beta)^2 + (\cos\alpha\sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = \sin^2(\alpha+\beta).$$

Жавоб. $\sin^2(\alpha+\beta)$.

806. Олдинги учҳад йиғиндисини қуйидагича алмаштирамиз:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma.$$

Шартга кўра $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + [1 - \cos^2(\alpha+\beta)]$$

ёки

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 - \cos(\alpha+\beta)\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

шаклга келтирамиз. Аммо ўрта қавс ичидаги ифода $2\cos\alpha\cos\beta$ га тенг ва $\alpha+\beta = \pi-\gamma$ бўлгани учун

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta.$$

Бундан эса исботланаётган муносабат келиб чиқади.

807. Чап томонни $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) \operatorname{ctg} C$ шаклда ёзамиз. Қавс ичидаги ифода $\frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}$ га тенг, C бурчакни ўзига тенг $\pi - (A+B)$ бурчак билан алмаштирсак, $\operatorname{ctg} C$ кўпайтувчи — $-\operatorname{ctg}(A+B)$ шаклни олади. Демак, берилган ифода

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - \frac{\cos(A+B)}{\sin A \sin B}$$

ифодага тенг. Йиғинди косинусининг формуласини татбиқ этиб, уни

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - \left(\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} - \frac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B}\right) =$$
$$= \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - (\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1) = 1$$

шаклга келтирамиз.

808. $\cos\frac{\pi}{5}$ ва $\cos\frac{2\pi}{5}$ кўпайтувчиларни $\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}$ ва $\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}$ ифодаларга алмаштирамиз. Унда чап томон $\sin\frac{4\pi}{5} : 4\sin\frac{\pi}{5}$ шаклга келади. Аммо

$$\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$$

бўлгани учун чап томон $\frac{1}{4}$ га тенг бўлади.

809. Чап томонни синуслар йиғиндиси формуласи бўйича алмаштирамиз. $2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$ ҳосил бўлади. Сўнгра бундан олдинги масаладаги каби давом эттирилади.

810. $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ бўлгани учун, берилган ифода $2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$ ёки $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)$ шаклни олади. $\frac{1}{2}$ ўрнига $\cos 60°$ ёзамиз. Унда $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + 60°\right)$ ҳосил бўлади.

Жавоб. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4} + 30°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4} - 30°\right)$.

811. Берилган ифодани олдинги масаладаги каби алмаштириб, $2\cos\alpha\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ифодани ҳосил қиламиз. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ўрнига $\cos 45°$ ёзамиз.

Жавоб. $4\cos\alpha\sin\frac{45° + \alpha}{2}\sin\frac{45° - \alpha}{2}$.

812. Берилган ифодани $\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$ шаклда ёзамиз. Бу ифода, **656**-масаладаги каби, логарифмлаш учун қулай шаклга келтирилади.

Жавоб. $\cos 2\alpha \cos 2\beta$.

813. Берилган ифода ҳадларини

$$(1+\cos\alpha)+(\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha)$$

шаклида группалаймиз ва иккинчи группада қавс ташқарисига $\operatorname{tg}\alpha$ ни чиқарамиз. Бундан $(1+\cos\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)$ ҳосил бўлади. $(1+\operatorname{tg}\alpha)$ ўрнига $\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}$ ни ёзамиз.

Жавоб. $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

814. $1-\cos\alpha+2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ва $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ формулаларини татбиқ этиб, суратда

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

ҳосил қиламиз. Қавс ичидаги ифода $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ га тенг. Синуслар йиғиндиси формуласини татбиқ этиб, бу ифодани $\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ шаклга келтирамиз.

Жавоб. $2\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

815. Берилган ифода $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$ га тенг. Бу касрнинг сурати $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ шаклга келади (олдинги масалага қаранг). Махражни

$$\sin(90^\circ-\alpha)=2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

шаклда ифодалаб, касрни яна соддалаштирамиз.

Жавоб. $\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

816. $\cos\alpha-\cos 3\alpha=2\sin 2\alpha\sin\alpha$ бўлгани учун

$$2\sin 2\alpha\sin\alpha+\sin 2\alpha=2\sin 2\alpha\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=2\sin 2\alpha(\sin\alpha+\sin 30^\circ).$$

Жавоб. $4\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)$.

817. Берилган ифода

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\text{ га, яъни }2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

га тенг.

Жавоб. $2\operatorname{tg}2\alpha$.

818. $\sin 2\beta$ ни $2\sin\beta\cos\beta$ га алмаштириб ва $2\sin\beta$ га қисқартириб

$$\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$$

ифодани ҳосил қиламиз; сўнгра $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}$ формулани татбиқ этиб, $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

819. $\sqrt{2}-(\cos\alpha+\sin\alpha)$ суратдаги $\cos\alpha+\sin\alpha$ йиғиндини ва махраждаги $\sin\alpha-\cos\alpha$ айирмани 814-масаладаги сингари алмаштириб,

$$\frac{\sqrt{2}\,[1-\cos(\alpha-45^\circ)]}{\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha-45^\circ}{2}}{2\sin\frac{\alpha-45^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-45^\circ}{2}}$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\operatorname{tg}\frac{\alpha-45^\circ}{2}$.

820. Сўнгги иккиҳад йиғиндисининг шаклини алмаштирамиз

$$\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha=\frac{\cos 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Жавоб. $2\operatorname{ctg}\alpha$.

821. $\cos 2\alpha$ ни $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ га, $\sin 2\alpha$ ни $2\sin\alpha\cos\alpha$ га алмаштирамиз.

Жавоб. 1.

822. $2\sin^2\alpha-1$ ни $-\cos 2\alpha$ га алмаштирамиз ва берилган ифодани $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$ шаклга келтирамиз. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ўрнига $\cos 30^\circ$ ва $\frac{1}{2}$ ўрнига $\sin 30^\circ$ ёзамиз.

Жавоб. $2\sin(2\alpha-30^\circ)$.

823. Касрнинг сурати

$$\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos 2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}$$

га тенг. Касрнинг махражи

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$$

га тенг.

Жавоб. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$.

824. Берилган ифода

$$2+\frac{2}{\sin 4\alpha}=\frac{2}{\sin 4\alpha}(1+\sin 4\alpha)$$

га тенг (бундан олдинги масалага қаранг). Қавс ичидаги ифода

$$1+\cos(90^\circ-4\alpha)=2\cos^2\frac{90^\circ-4\alpha}{2}$$

га тенг.

Жавоб. $\frac{4\cos^2(45^\circ-2\alpha)}{\sin 4\alpha}$.

825. Сўнгги қўшилувчи $\cos^2 x$ га тенг. Демак, берилган ифода $(\operatorname{tg}x-1)(1-\sin x)+\cos^2 x$ кўринишга келади. $\cos^2 x$ ни $1-\sin^2 x$ га алмаштириб, $1-\sin x$ ни қавс ташқарисига чиқарамиз. Натижада

$$(1-\sin x)[(\operatorname{tg}x-1)+1+\sin x]=(1-\sin x)(\operatorname{tg}x+\sin x)=$$
$$=(1-\sin x)\operatorname{tg}x(1+\cos x).$$

Биринчи кўпайтувчи бундан олдинги масаладаги каби алмаштирилади.

Жавоб. $4\operatorname{tg}x\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)$.

826. Касрнинг сурати

$$(1+\cos 2\alpha)+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)=2\cos^2\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha$$

га тенг, махражи $\cos\alpha+\cos 2\alpha$ га тенг.

Жавоб. $2\cos\alpha$.

827. Берилган ифода мана шунга тенг:

$$(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=$$
$$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha).$$

Бу эса $\cos^2\beta-\cos^2\alpha$ га тенг ва 656-масалани ечишдаги каби шакл алмаштирилади.

Жавоб. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

828. Берилган ифодани $\cos x\cos y\cos z$ дан иборат умумий махражга келтирамиз. Сурат

$$\sin x\cos y\cos z+\sin y\cos z\cos x+\sin z\cos x\cos y-$$
$$-\sin[(x+y)+z]$$

бўлади. Сўнгги ҳад мана бунга тенг: $-\sin(x+y)\cos z - -\cos(x+y)\sin z$. Аввалги иккиҳад йиғиндиси $-\sin(x+y)\cos z$ ҳад билан бир-бирини йўқотади ва сурат

$$\sin z\cos x\cos y-\cos(x+y)\sin z=$$
$$=\sin z\,[\cos x\cos y-\cos(x+y)]$$

шаклни олади. $\cos(x+y)$ ифодада қавсни очиб, суратда $\sin z\sin x\sin y$ ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z$.

829. Берилган ифода $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\gamma$ га тенг. Аммо шартга кўра $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$; бу ифода

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

га тенг. Қавс ташқарисига $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ ни (ёки $2\sin\frac{180^\circ-\gamma}{2}=$ $=2\cos\frac{\gamma}{2}$ ни) чиқарамиз. Қавс ичида $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ифода ҳосил бўлади ва бу ифода косинуслар йиғиндиси формуласи бўйича шакл алмаштиради.

Жавоб. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

12 - БОБ

ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР

830. Тенгламани соддалаштириб, $\sin 5x-\sin 3x=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Энди синуслар айирмаси формуласини татбиқ этиб, $2\sin x\cos 4x=0$ ҳосил қиламиз ва тенглама икки тенгламага, яъни $\sin x=0$ ва $\cos 4x=0$ тенгламаларга ажралади. Биринчи тенгламадан $x=\pi n$ (n — ҳар қандай бутун сон), иккинчи тенгламадан

$$4x=2\pi n\pm\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(4n\pm1),$$

яъни

$$x=\frac{\pi}{8}(4n\pm1).$$

$4n\pm1$ ифода ҳамма тоқ сонларни ўз ичига олади (-3, 1, 5, 9, 13 ва ҳоказо тоқ сонлар $4n+1$ ифодадан ҳосил бўлади; -1, 3, 7, 11, 15 ва ҳоказо тоқ сонлар $4n-1$ ифодадан ҳосил бўлади). Шунинг учун $4n\pm1$ ўрнига $2n+1$ (ёки $2n-1$) ёзиш мумкин, бунда n — ҳар қандай бутун сон.

Жавоб. $x=\pi n$; $x=\frac{\pi}{8}(2n+1)$, бунда n — ҳар қандай бутун сон.

831. Тенгламанинг чап томонини қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x &= \\ &= (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = \\ &= 2\sin 2x \cos x + 2\sin 3x \cos x = \\ &= 2\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 4\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x.\end{aligned}$$

Тенглама мана бу шаклни олади:

$$\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x = 0$$

ва учта тенгламага ажралади:

$$\sin\frac{5x}{2} = 0;\ \cos\frac{x}{2} = 0;\ \cos x = 0.$$

Жавоб. $x = 72°n$; $x = 180°(2n + 1)$; $x = 90°(2n + 1)$.

832. Тенгламанинг $\cos(x + 60°)$ ва $1 + \cos 2x$ ҳадларини қуйидагича алмаштирамиз:

$$\cos(x + 60°) = \cos[90° - (30° - x)] = \sin(30° - x)$$

ва

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x.$$

Тенглама

$$\sin(x + 30°) + \sin(30° - x) = 2\cos^2 x$$

шаклни олади. Энди синуслар йиғиндиси формуласини татбиқ этамиз ва

$$\sin 30° \cos x - \cos^2 x = 0$$

ёки

$$\cos x\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = 90°(2n + 1)$; $x = 60°(6n \pm 1)$.

833. Тенгламанинг ҳамма ҳадини чап томонга ўтказамиз ва қуйидагича группаларга ажратамиз:

$$(\sin x + \sin 3x) - (\cos x + \cos 3x) + (\sin 2x - \cos 2x) = 0.$$

Олдинги икки группани алмаштириб,

$$2\sin 2x \cos x - 2\cos 2x \cos x + (\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

ёки

$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама иккига ажралади:

$$2\cos x + 1 = 0 \text{ ва } \sin 2x - \cos 2x = 0.$$

Биринчи тенгламадан $\cos x = -\frac{1}{2}$, бундан эса $x = 2\pi n \pm \frac{2}{3}\pi$ эканлигини аниқлаймиз. Иккинчи тенгламанинг ҳар бир ҳадини $\cos 2x$ га бўлиб, $\operatorname{tg} 2x = 1$, бундан эса $2x = \pi n + \frac{\pi}{4}$ эканлигини аниқлаймиз.

Жавоб. $x = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)$; $x = \frac{\pi}{8}(4n + 1)$.

834. Тенглама ҳадларини қуйидагича группаларга ажратамиз:

$$(\cos 2x + \cos 6x) - (1 + \cos 8x) = 0.$$

Бунга $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$ формулани татбиқ этиб ва косинуслар йиғиндисини алмаштириб,

$$2\cos 4x \cos 2x - 2\cos^2 4x = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $2\cos 4x$ ни қавсдан ташқарига чиқарамиз ва косинуслар айирмаси $\cos 2x - \cos 4x$ ифодани алмаштирсак

$$\cos 4x \sin 3x \sin x = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама учта тенгламага ажралади

$$1)\ \cos 4x = 0;\ 2)\ \sin 3x = 0;\ 3)\ \sin x = 0.$$

Учинчи тенгламани ечишнинг ҳожати йўқ, чунки ечимларининг ҳаммаси $\sin 3x = 0$ тенгламанинг ечимлари орасида бўлади. Ҳақиқатан, агар $\sin x = 0$ бўлса унда $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$ бўлади.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1)$; $x = \frac{\pi n}{3}$.

835. Ўнг томонда $\sin 3x$ ўрнига $2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$ ни ёзамиз. Унда тенглама

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

ёки $\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$ шаклни олади. Қавс ичидаги ифодани мана бу шаклда ёзамиз:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - \cos\frac{3x}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Демак, берилган тенглама учта тенгламага ажралади:

$$1)\ \sin\frac{3x}{2} = 0;\ 2)\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0;\ 3)\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Жавоб. $x = \frac{2\pi n}{3}$; $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$; $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$.

836. Тенгламанинг ўнг томони

$$\sin[90° - (x + 30°)] = \sin(60° - x) = -\sin(x - 60°)$$

га тенг. Тенглама

$$\sin(x - 60°) = -\sin(x - 60°)$$

ёки

$$\sin(x - 60°) = 0$$

шаклга келади. Бундан

$$x - 60° = 180°n.$$

Жавоб. $x = 60°(3n + 1)$.

837. $2\sin^2 x$ ни $1 - \cos 2x$ билан алмаштириб, тенгламани $2\sin 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$ шаклга келтирамиз. Бу тенглама икки тенгламага ажралади: 1) $\cos 2x = 0$; 2) $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Аммо $\frac{1}{2} = \sin 30°$ бўлгани учун, иккинчи тенгламадан

$$3x = 180°n + (-1)^n 30°$$

эканлигини аниқлаймиз.

Жавоб. $x = 45°(2n + 1)$; $x = 60°n + (-1)^n 10°$.

838. Тенгламанинг ўнг томонини бундай ёзамиз:

$$3(\sin x \cos x - \sin^2 x + 1) = 3(\sin x \cos x + \cos^2 x) =$$
$$= 3\cos^2 x(\operatorname{tg} x + 1).$$

Бу тенглама икки тенгламага ажралади:

$$1)\ \operatorname{tg} x + 1 = 0;\ 2)\ \sin^2 x - 3\cos^2 x = 0.$$

Иккинчи тенгламадан $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$ эканлигини аниқлаймиз.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1)$.

839. Тенгламани бундай ёзамиз:

$$\cos 4x + 2\cos^2 x = 0.$$

Аммо $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ бўлгани учун чап томон

$$(1 + \cos 4x) + \cos 2x = 2\cos^2 2x + \cos 2x$$

га тенг. Бундан

$$\cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама икки тенгламага ажралади:

$$1)\ \cos 2x = 0;\quad 2)\ 2\cos 2x + 1 = 0.$$

Иккинчи тенгламадан $2x = 360°n \pm 120°$.

Жавоб. $x = 180°n \pm 45°$; $x = 180°n \pm 60°$.

840. Тенгламанинг иккала томонини $\sin x$ га кўпайтирамиз ва ўнг томондаги бирни $\sin^2 x + \cos^2 x$ билан алмаштириб, $\sin x \cos x = \cos^2 x$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Тенгламанинг иккала томонини $\sin x$ га кўпайтириш билан чет илдиз ҳосил қилмаймиз, чунки x учун топилган қийматларнинг биттасида ҳам $\sin x$ нолга айланмайди.

Жавоб. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1)$.

841. Тенгламани бундай ёзамиз: $\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$. Бу тенглама икки тенгламага ажралади:

$$1)\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{ва} \quad 2)\ \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Биринчи тенгламадан $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, бундан $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$. Иккинчи тенгламадан $x = \frac{\pi}{10}(4n+1)$.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$; $x = \frac{\pi}{10}(4n+1)$.

842. Тенгламанинг иккала томонига ҳам $2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}$ ифодани қўшамиз; шундан сўнг тенгламанинг чап томонида

$$\sin^4\frac{x}{3} + 2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \left(\sin^2\frac{x}{3} + \cos^2\frac{x}{3}\right)^2 = 1$$

ҳосил бўлади ва берилган тенглама

$$1 = \frac{5}{8} + 2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} \quad \text{ёки} \quad 2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} = \frac{3}{8}$$

шаклни олади. Тенгламанинг иккала томонини 2 га кўпайтирамиз ва иккиланган бурчак синусига доир формулани татбиқ этамиз. Натижада $\sin^2\frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$ ҳосил қиламиз, бундан $\sin\frac{2x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{2}(3n \pm 1)$.

843. Тенгламани

$$3\,\mathrm{tg}^2 x - (1 + \mathrm{tg}^2 x) = 1$$

шаклга келтирамиз ва $\mathrm{tg}\, x$ га нисбатан ечамиз:

$$\mathrm{tg}\, x = \pm 1.$$

Жавоб. $x = 45^\circ(2n+1)$.

844. $1+\cos 4x$ ни $2\cos^2 2x$ га алмаштирамиз.

Жавоб. $x=\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}$; $x=\frac{\pi n}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$.

845. Тенгламанинг иккала томонига $2\sin^2 x\cos^2 x$ ни қўшиб, $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\cos 4x+2\sin^2 x\cos^2 x$ ёки

$$1-\cos 4x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x=\frac{\pi}{2}n$.

846. $\sin 2x$ ни $2\sin x\cos x$ билан алмаштирамиз ва тенгламанинг ҳамма ҳадларини $\cos^2 x$ га бўламиз. Илдиз йўқолиш ҳоли рўй бермаслиги кўриниб турибди. Ҳақиқатан, агар $\cos x=0$ бўлса, $\sin x=\pm 1$ бўлади, аммо бу қийматлар берилган тенгламани қониқтирмайди. Натижада

$$3-\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x=0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан

$$\operatorname{tg} x=1 \text{ ва } \operatorname{tg} x=-3.$$

Жавоб. $x=\pi n+\frac{\pi}{4}$; $x=\pi n-\operatorname{arc\,tg} 3$.

847. Бир ўрнига $\sin^2 x+\cos^2 x$ ни ёзамиз ва тенгламанинг иккала томонини $\cos^2 x$ га бўлиб (олдинги масаланинг ечилишига қаранг),

$$\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{tg} x=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани ечиб,

$$\operatorname{tg} x=0 \text{ ва } \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$$

эканлигини аниқлаймиз.

Жавоб. $x=\pi n$; $x=\frac{\pi}{3}(3n-1)$.

848. Тенгламанинг ўнг томонидаги 2 ни $2\sin^2 x+2\cos^2 x$ шаклида ёзамиз, шундан сўнг тенглама бундан олдинги тенгламадек ечилади.

Жавоб. $x=\pi n+\frac{\pi}{4}$; $x=\pi n-\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{4}$.

849. *Жавоб.* $x=\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $x=\pi n+\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}$.

850. $\sqrt{3}$ ни $\operatorname{ctg} 30^\circ$ билан алмаштирамиз („ёрдамчи бурчак“ киритамиз). Унда берилган тенглама

$$\sin x+\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}\cos x=1$$

ёки

$$\sin x \sin 30^\circ + \cos x \cos 30^\circ = \sin 30^\circ,$$

ёки

$$\cos(x - 30^\circ) = \frac{1}{2}$$

шаклида ёзилади. Бундан $x - 30^\circ = 360^\circ n \pm 60^\circ$.

Жавоб. $x = 360^\circ n + 90^\circ = 90^\circ(4n + 1)$; $x = 360^\circ n - 30^\circ = 30^\circ(12n - 1)$.

851. Тенгламанинг чап томонини $\sqrt{2}\cos(x - 45^\circ)$ кўпайтма шаклида ёзамиз. Унда тенглама $\cos(x - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ шаклида бўлади ва бундан $x - 45^\circ = 360^\circ n - 45^\circ$ ва $x - 45^\circ = 360^\circ n + 45^\circ$, яъни $x = 360^\circ n$ ва $x = 360^\circ n + 90^\circ$ ёки $x = 90^\circ \cdot 4n$ ва $x = 90^\circ(4n + 1)$ эканлигини аниқлаймиз.

Иккинчи усул. Тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз ва унда

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$$

ёки $\sin 2x = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг ечими $x = 90^\circ n$, лекин бу ечимлар орасида чет илдизлар ҳам бор (бундан олдинги натижа билан солиштиринг).

Чет илдизлар тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариш натижасида пайдо бўлади; шу билан берилган тенгламадан бошқа яна $\sin x + \cos x = -1$ тенгламани ҳосил қиламиз (бу тенгламадан ҳам $\sin 2x = 0$ ҳосил бўлади). Чет илдизларни ташлаш учун текшириш ўтказамиз. $n = 0$ бўлганда $x = 0^\circ$ бўлади, бу ечим берилган тенгламани қониқтиради. $n = 4, 8, 12$ ва, умуман, $n = 4k$ бўлганда (яъни $x = 90^\circ \cdot 4k = 360^\circ k$) бўлганда ҳам тенглама қониқтирилади. $n = 1$ бўлганда $x = 90^\circ$ бўлади ва бу ечим ҳам берилган тенгламани қониқтиради. $n = 5, 9, 13$ ва умуман $4k + 1$ (яъни $x = 90^\circ(4k + 1) = 90^\circ + 360^\circ k$) бўлганда ҳам берилган тенглама қониқтирилади. Аммо $n = 2, 6, 10$ бўлганда (умуман $n = 4k + 2$ бўлганда) ва $n = 3{,}7, 11$ (умуман $n = 4k + 3$ бўлганда) берилган тенглама қониқтирилмайди (унинг ўрнига $\sin x + \cos x = -1$ тенглама қониқтирилади).

Жавоб. $x = 90^\circ \cdot 4n$; $x = 90^\circ(4n + 1)$.

852. Тенгламанинг ўнг томонини бундай алмаштирамиз:

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2.$$

Бундан сўнг тенглама

$$\sin x + \cos x = (\sin x + \cos x^2)$$

ёки

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$$

шаклни олади. Бу тенглама эса икки тенгламага ажралади:

$$1)\ \sin x + \cos x = 0;$$
$$2)\ \sin x + \cos x - 1 = 0.$$

Биринчи тенгламани ечиб $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$ эканлигини аниқлаймиз. Иккинчи тенглама бундан олдинги масалада ечилган.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$; $x = \frac{\pi}{2} \cdot 4n$.

853. 851-масала каби ечилади.
Жавоб. $x = 15^\circ (8n + 1)$.

854. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ формулани татбиқ этиб, $\frac{1}{2}[\cos(x - 7x) - \cos(x + 7x)] = \frac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)]$ тенгламани ҳосил қиламиз ва буни соддалаштирсак, $\cos 6x - \cos 2x = 0$ шаклга келади. Бу тенглама иккита тенгламага ажралади: $\sin 4x = 0$ ва $\sin 2x = 0$, иккинчи тенгламанинг ҳамма илдизлари биринчи тенглама илдизлари орасида бўлади.

Жавоб. $x = \frac{\pi n}{4}$.

855. Тенгламанинг ўнг ва чап томонига

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

формулани татбиқ этамиз.

Жавоб. $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1)$.

856. Берилган тенгламанинг иккала томонини 4 га кўпайтириб,

$$4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 2(2x)$$

ёки

$$\sin 2x (2 \sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0$$

шаклда ёзамиз. Сўнгра $2 \sin x \sin 3x$ ни $\cos 2x - \cos 4x$ га алмаштирамиз (854-масалага қаранг). Натижада

$$\sin 2x (\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0$$

ёки $\sin 2x \cos 4x = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

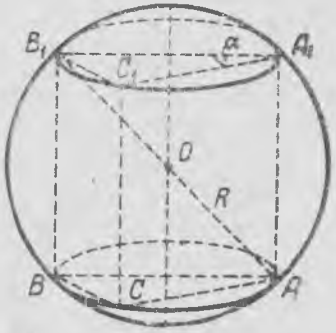
Жавоб. $x = \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1)$.

857. $\sin^2 x$ ни $1 - \cos^2 x$ билан алмаштирамиз; натижада

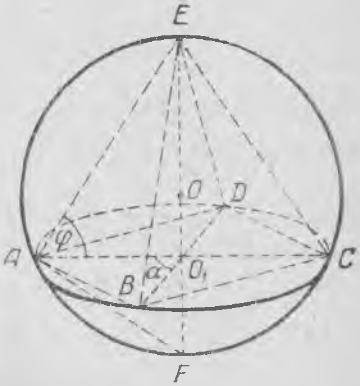
$$5 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$$

747. Призма асосларининг текисликлари (214-чизмадаги BAC ва $B_1A_1C_1$) шарни айланалар бўйича кесади. Тўғри бурчакли ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар шу айланаларга ички чизилган. Шунинг учун AB ва A_1B_1 гипотенузалар бу айланаларнинг диаметрларидир. ABB_1A_1 текислик шарнинг марказидан ўтади. ABB_1A_1 тўртбурчак шартга кўра квадрат бўлгани учун $H = AA_1 = R\sqrt{2}$ ва $AB = R\sqrt{2}$.

Жавоб. $V = \frac{R^3 \sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$



214-чизма.



215-чизма.

748. Пирамида асосининг текислиги шарни асос атрофига ташқи чизилган $ABCD$ доира бўйича кесади (215-чизма). Пирамиданинг баландлиги шу доира маркази O_1 нуқтадан ўтади (чунки қирраларнинг ҳаммаси асос текислигига бир хилда оғишган), шунингдек шар маркази O нуқтадан ҳам ўтади. Асос диагонали AC ва пирамиданинг E учи орқали ўтказилган текислик шарни пирамиданинг AEC диагонал кесимига ташқи чизилган катта доира бўйича кесиб ўтади. $\triangle AEC$ да AEC бурчак $180° - 2\varphi$ га тенг. Бу учбурчакдан синуслар теоремасига асосан $AC = 2R\sin(180° - 2\varphi) = 2R\sin 2\varphi$ эканлигини топамиз; демак, $AO_1 = R\sin 2\varphi$.

AEO_1 учбурчакдан пирамиданинг баландлигини топамиз:

$$EO_1 = H = AO_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi = R\sin 2\varphi \operatorname{tg}\varphi.$$

Жавоб. $V = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 2\varphi \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi.$

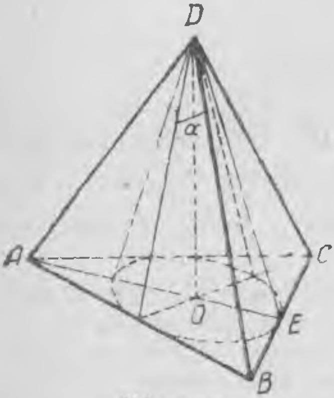
749. Асосга ички чизилган айлананинг OE радиуси R га тенг (216-чизма) бўлгани учун $AB = 2R\sqrt{3}$. DOE учбурчакдан

$$DO = H = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

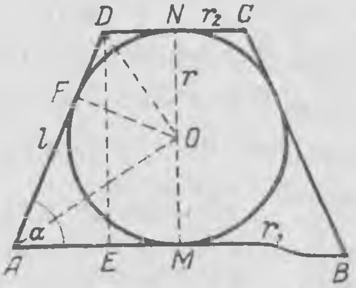
Жавоб. $V = \sqrt{3}R^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

750. 217-чизмада кесик конуснинг ўқ кесими тасвирланган. Кесик конуснинг ён сирти

$$S_{\text{ён}} = \pi l(r_1 + r_2) = \pi\cdot AD\cdot(AM + DL).$$



216-чизма.



217-чизма.

Аммо $AM + DN = AF + DF = AD$. Шунинг учун $S_{\text{ён}} = \pi\cdot AD^2$. AED учбурчакда $DE = MN = 2r$, бу учбурчакдан $AD = \frac{2r}{\sin\alpha}$.

Жавоб. $S_{\text{ён}} = \frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$.

751. Бундан олдинги масалага қаранг. Кесик конуснинг тўла сирти $S_{\text{тўла}} = S_{\text{ён}} + \pi(r_1^2 + r_2^2)$.

AOM учбурчакдан (217-чизмага қаранг):

$$AM = r_1 = OM\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

DON учбурчакда $\angle ODN = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, бу учбурчакдан

$$DN = r_2 = r\operatorname{ctg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Агар $r_1^2 + r_2^2$ йиғинди $r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2$ билан алмаштирилса, ҳисоблаш анча осонлашади. $r_1 + r_2 = l$ ва $S_{\text{ён}} = \pi l^2$ (авҳосил бўлади ва бу тенгламадан $\cos x = \frac{\sqrt{19}-2}{5}$ эканлигини аниқлаймиз. $\cos x$ нинг иккинчи қиймати $\cos x = -\frac{\sqrt{19}+2}{5}$ ярамайди, чунки бунинг абсолют қиймати бирдан катта.

Жавоб. $x = 2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{19}-2}{5}$.

858. $\cos 2\alpha$ формулани қўлланиб ва косинусни синус билан ифода қилиб, $10\sin^2 x + 4\sin x - 5 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = \pi n + (-1)^n \arcsin\frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10}$.

859. Йиғинди тангенсининг формуласини татбиқ этиб,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва берилган тенгламани[1] $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$ кўринишга келтирамиз.

Жавоб. $x = \pi n + \operatorname{arc\,tg}(2 \pm \sqrt{3})$.

860. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ ва $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ бўлгани учун берилган тенгламани

$$\frac{8(1-\cos x)}{1+\cos x} = 1 + \frac{1}{\cos x}$$

шаклга келтира оламиз ва буни соддалаштириб $9\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$ ёки $(3\cos x - 1)^2 = 0$ шаклга келтирамиз.

Жавоб. $x = 2\pi n \pm \arccos\frac{1}{3}$.

861. Берилган тенгламанинг чап томони

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1+\cos x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

га тенг. Тенгламанинг ўнг томони $\sec^2\frac{x}{2} - 1 = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ га тенг.

---

[1] Махраждан қутулиш пайтида чет илдизлар ҳосил бўлиши мумкин, бундан кейинги учта масалада текшириш ўтказмаймиз (уларда чет илдизлар йўқ). 865-масаладан бошлаб текширишга кўпроқ эътибор берилади. Шунингдек, 867-масалага ҳам қаранг.

Натижада

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Жавоб. $x=2\pi n$; $x=\frac{\pi}{2}(4n+1)$.

862. $\cos(\pi-x)=-\cos x$ ва $\sin\frac{\pi+x}{2}=\cos\frac{x}{2}$ бўлгани учун берилган тенгламани $1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0$ ёки $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$ шаклга келтира оламиз.

Жавоб. $x=\pi(2n+1)$; $x=\frac{4\pi}{3}(3n\pm1)$.

863. Ушбу

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x \text{ ва } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$

келтириш формулаларини қўлланиб,

$$2(1+\cos x)-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Энди $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$ формуладан фойдаланамиз; у вақтда тенглама иккита тенгламага ажралади:

$$1)\ 1+\cos x=0; \qquad 2)\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Жавоб. $x=\pi(2n+1)$; $x=\pi n+(-1)^n\frac{\pi}{3}$.

864. $\cos^2 x$ ни $1-\sin^2 x$ билан алмаштириб, тенгламани соддалаштирсак,

$$3\sin x+\cos x=0$$

ёки

$$\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}$$

ҳосил бўлади.

Жавоб. $x=\pi n-\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{3}$.

865. Берилган тенгламанинг чап томони мана бунга тенг:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)}.$$

Касрни $1+\cos x$ га қисқартирамиз. Бунда $1+\cos x\neq0$ деб фараз қиламиз (чунки агар кейин $\cos x=-1$ бўладиган ечим топилса, у ечим ярамас эди). Натижада $\frac{1}{\sin x} = 2$, яъни $\sin x = \frac{1}{2}$ тенглама ҳосил бўлади ($\sin x$ нинг бу қийматида $\cos x$ нинг қиймати — 1 га тенг бўлмайди).

Жавоб. $x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$.

866. Келтириш формулаларига асосан

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = -\operatorname{ctg}(\pi - x) = \operatorname{ctg} x.$$

Бунга биноан берилган тенгламани

$$2 \operatorname{ctg} x - (\cos x + \sin x)\left(\frac{1}{\operatorname{sni} x} - \frac{1}{\cos x}\right) = 4$$

шаклда ёзиш мумкин.

Тенгламанинг чап томонини умумий махражга келтирсак, тенглама

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = 4$$

шаклга келади, бундан $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ ёки $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{2} n + (-1)^n \frac{\pi}{12}$.

867. Тенгламанинг ўнг томони мана бу ифодага тенг.

$$\frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{2 \sin x} = \frac{1 - \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x}.$$

Касрни $\sin x$ га қисқартирамиз. Бунда $\sin x \neq 0$ деб фараз қилинади. Агар $\sin x = 0$ бўладиган ечим топилса, у ярамайди. Натижада берилган тенглама (тенгламанинг чап томонига келтириш формулаларини татбиқ этамиз)

$$\sin x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

ёки

$$\sin x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x = 0$$

шаклга келади. Бу тенгламани

$$\sin x\left(1 + \frac{1}{2 \cos x}\right) = 0$$

шаклга келтириш ҳам мумкин, бу тенгламз икки тенгламага ажралади:

$$1)\ \sin x = 0 \text{ ва } 2)\ 1 + \frac{1}{2 \cos x} = 0.$$

Биринчи тенглама чет илдиз беради, чунки биз олдин касрни $\sin x$ га қисқартган эдик. Ишнинг моҳиятини аниқроқ билиб олиш

чун ўнг томонга $\sin x = 0$ ни қўямиз; унда $\cos x$ ўрнига 1 ёки — 1 ўйиш тўгри келади. Иккала ҳолда ҳам $\frac{0}{0}$ шаклдаги ноаниқ ифо- ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)$.

868. Берилган тенгламанинг чап томони

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

а тенг. Бу ифодани $1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ га қисқартирсак (бунда $1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \neq$ 0 деб фараз қилинади; олдинги масаланинг ечимига қаранг), $-\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ҳосил бўлади ва берилган тенглама

$$-\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2}$$

ки

$$\sin \frac{x}{2}\left(\sec \frac{x}{2} + 2\right) = 0$$

аклга келади. Бу тенглама икки тенгламага ажралади:

$$1)\ \sin \frac{x}{2} = 0 \text{ ва } 2)\ \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Иккинчи тенгламадан $\frac{x}{2} = 360°n \pm 120°$ эканини топамиз ва $x = 720°n \pm 240°$ ечим ҳосил қиламиз. Биринчи тенглама фақат ет илдиз ($x = 360°n$) беради; бунинг сабаби бундан олдинги саладагидан бошқача. Берилган тенгламага $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ миқдорнинг аъносини йўқотувчи қиймати киради ($x = 360°n$ бўлганда „чекизликка айланади“); демак, тенгламанинг бутун чап томони тўгри) маънога эга бўлмайди.

Изоҳ. Тенгламанинг чап томонини кенг маънода қуйидагича ёзиш мумин. Агар x бурчакни чексиз равишда $360°n$ га (0°, 360°, 720° га ва ҳ. к.) қинлата борсак, бунда чап томон чексиз равишда нолга яқинлаша боради. оль миқдорни (чап томоннинг лимити) чап томоннинг қиймати (кенг маънода) сб қараш табиийдир. Бу ҳолда $x = 360° \cdot n$ илдиз чет илдиз бўлмайди. Аммо лементар математикада ифодага бу хилда кенг маъно бериш одати йўқ.

Жавоб. $x = 240° (3n \pm 1)$.

869. Келтириш формуласидан фойдаланиб

$$\sin x - \operatorname{tg} x = \sec x - \cos x$$

ёки

$$\sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \cos x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Тенгламанинг иккала томонини $\cos x$ га кўпайтирамиз (ёки, иккинчи хил айтганда, умумий махражга келтириб, бу махражни ташлаб юборамиз). Бунда $\cos x \neq 0$ деб фараз қилинади, чунки $\cos x = 0$ бўлса, унда $\frac{\sin x}{\cos x}$ ва $\frac{1}{\cos x}$ ифодалар маъносини йўқотади („чексизликка айланади“). Натижада

$$\cos x \sin x - \sin x = \sin^2 x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама иккита тенгламага ажралади:

$$1)\ \sin x = 0 \text{ ва } 2)\ \cos x - \sin x = 1.$$

Иккинчи тенгламани $\sqrt{2} \cdot \cos(45° + x) = 1$ шаклда ёзиш мумкин (851-масалага солиштиринг). Бундан:

$$x = 360°n \text{ ва } x = 360°n - 90°.$$

$x = 360°\,n$ ечим биринчи тенгламанинг ечимлари $(x = 180°n)$ орасида бор, $x = 360°n - 90°$ эса чет илдиздир, чунки

$$\cos(360°n - 90°) = 0.$$

Жавоб. $x = 180°\,n$.

870. $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$ ва $\cos^2 2x = \cos^2 2x - \sin^2 x$ формулани татбиқ этиб, берилган тенгламани

$$1 - \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

шаклга келтирамиз. Бу тенглама $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$ шаклга келади.

Жавоб. $x = \pi n;\ x = \frac{\pi}{4}(4n+1)$.

871. Берилган тенгламани

$$\frac{\sin^3 x(\sin x + \cos x)}{\sin x} + \frac{\cos^3 x(\sin x + \cos x)}{\cos x} = \cos^2 x - \sin^3 x$$

шаклда ёзиб оламиз. Бунда $\sin x \neq 0$ ва $\cos x \neq 0$ деб фараз қилиб, касрларни қисқартирамиз. Тенгламанинг ҳамма ҳадини бир томонга олиб ўтамиз ва $\sin x + \cos x$ ни қавс ташқарисига чиқарамиз. Натижада

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x + \sin x) = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. $\sin^2 x + \cos^2 x$ ни 1 билан алмаштирамиз. Тенглама иккита тенгламага ажралади:

$$1)\ \sin x + \cos x = 0,\quad 2)\ \cos x - \sin x = 1.$$

Биринчи тенгламадан $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$ ни топамиз; иккинчи тенглама (869-масалага қаранг). $x = 2\pi n$ ва $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$ ечимларга эга. Буларнинг иккаласи ҳам чет илдиз, чунки $x = 2\pi n$ бўлганда $\sin x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$ бўлганда эса $\cos x = 0$ бўлади.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$.

872. Учланган бурчаклар формулаларини татбиқ этамиз:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x^{1)}.$$

Тенгламанинг чап томони

$$3\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{3}{4}\sin 4x$$

шаклга келади ва берилган тенглама $\sin 4x = \frac{1}{2}$ кўринишни олади.

Жавоб. $x = \frac{\pi n}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}$.

873. Берилган тенгламани бундай ёзамиз:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$$

ва ўнг томонига икки бурчак айирмаси тангенсининг формуласини қўлланиш учун тенгликнинг иккала томонини $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x$ ифодага бўламиз. Натижада

$$\frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg}(3x - x)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2x(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x)$$

ёки

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = 0.$$

Учта тенгламани айрим-айрим кўздан кечирамиз:

$$1)\ \operatorname{tg} 3x = 0;\quad 2)\ \operatorname{tg} 2x = 0;\quad 3)\ \operatorname{tg} x = 0.$$

---

1) Агар китобхон бу формулалардан бехабар бўлса, у ҳолда бу формулаларни китобхон ўзи чиқариши мумкин. Бунинг учун аввал икки бурчак йиғиндиси $(2\alpha + \alpha)$ нинг синуси ва косинуси формулаларини, сўнгра 2α бурчак синуси ва косинуси формулаларини татбиқ этиш керак.

Биринчи тенгламанинг ечими $x = \frac{\pi n}{3}$. Учинчи тенглама ҳеч қандай янги ечим бермайди, чунки унинг ҳамма ечими ($x = \pi m$) биринчи тенгламанинг ечимларига киради ($n = 3m$ бўлганда $\frac{\pi n}{3} = \pi m$). Иккинчи тенгламадан $x = \frac{\pi n}{2}$ эканлигини топамиз. n жуфт бўлганда бу ечимлар янги ҳеч нарса бермайди ($n = 2k$ бўлганда $\frac{\pi n}{2} = \pi k$); n тоқ бўлганда ($n = 2n' + 1$) бу ечимларнинг биттаси ҳам берилган тенгламанинг ечими бўлмайди. Ҳақиқатан, тенгламадаги $\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{tg} 3x$ миқдорлар $x = \frac{\pi}{2}(2n' + 1)$ бўлганда маъносини йўқотади („чексизликка айланади“). Шунинг учун иккинчи тенгламани ташлаш керак.

Жавоб. $x = \frac{\pi n}{3}$.

874. Айирма косинусининг формуласини татбиқ этиб, тенгламанинг ўнг томонини $\sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$ кўринишга келтирамиз. Шунинг учун чап томонни ҳам $\frac{x}{2}$ аргумент воситасида ифода қиламиз. Унда

$$(1 + \cos x) + \sin x = 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$$

ҳосил бўлади. Тенгламанинг ҳамма ҳадларини бир томонга ўтказиб,

$$\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама иккита тенгламага ажралади, улардан бири $x = 360^\circ n - 90^\circ$, иккинчиси $x = 720^\circ n \pm 90^\circ$ ечимни беради. Сўнгги ифодадаги қўш ишорани битта плюс ишорага алмаштириш мумкин, чунки $720^\circ n - 90^\circ$ миқдорларнинг ҳаммаси $360^\circ n - 90^\circ$ миқдорлар орасида бўлади (агар $360^\circ n - 90^\circ$ ифодада фақат жуфт n лар олинса, яъни $n = 2n'$ деб қаралса, унда $720^\circ n' - 90^\circ$ ҳосил қиламиз).

Жавоб. $x = 360^\circ n - 90^\circ$; $x = 720^\circ n + 90^\circ$.

875. Берилган тенгламани $\sin^2 2x = \sin 3x + \sin x$ шаклда ёзамиз; бундан $\sin^2 2x = 2\sin 2x\cos x$ тенгликни ёза оламиз.

Ҳамма ҳадларни тенгликнинг бир томонига ўтказсак,
$\sin 2x(\sin 2x - 2\cos x) = 0$ ёки $2\sin 2x \cos x(\sin x - 1) = 0$
ҳосил қиламиз. Бу тенглама учта тенгламага ажралади:

$$1)\ \sin 2x = 0;\ 2)\ \cos x = 0;\ 3)\ \sin x = 1.$$

Сўнгги икки тенгламани олмасак ҳам бўлади, чунки уларнинг ҳамма ечимлари биринчи тенгламанинг ечимларига киради. (Маълумки, $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$. Демак, $\cos x = 0$ ёки $\sin x = 1$ бўлса, унда $\sin 2x = 0$.)

Жавоб. $x = 90°n$.

876. Берилган тенгламанинг чап томони $2\cos^2 x - 3\cos x$ га тенг. $x = \frac{\pi}{2}n$ бўлганда, тенгламанинг ўнг томони маъносини йўқотади, чунки x нинг бу қийматида $\operatorname{ctg} 2x$ чексизликка айланади. Шунинг учун $x \neq \frac{\pi}{2}n$ деб ҳисоблаймиз. Унг томоннинг махражи

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(2\cos^2 x - 1) - 2\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{-1}{2\sin x \cdot \cos x}$$

га тенг ва тенгламанинг ўнг томони:

$$-\operatorname{cosec}(\pi - x)\cdot 2\sin x \cdot \cos x = -2\operatorname{cosec} x \cdot \sin x \cdot \cos x,$$

га тенг. Бу ифодадаги $\operatorname{cosec} x \cdot \sin x$ кўпайтмани $\left(\text{яъни } \frac{\sin x}{\sin x} \text{ ни}\right)$ бир билан алмаштириш мумкин, чунки x нинг $\frac{\sin x}{\sin x}$ касрни ноаниқ $\frac{0}{0}$ кўринишга келтирувчи қийматларини чиқариб ташлаганмиз. Натижада

$$2\cos^2 x - 3\cos x = -2\cos x$$

ёки

$$\cos x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан: $\cos x = 0$ ва $\cos x = \frac{1}{2}$. Биринчи ҳолда $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ ҳосил қиламиз; бу қийматларни биз юқорида ташлаб юборган эдик.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)$.

Изоҳ. Агар тенгламанинг ўнг томони 868-масалада (441-бет) кўрсатилгандек кенг маънода тушунилса, $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$ қийматлар ҳам тенгламанинг ечимлари бўлади.

877. Тенгламанинг чап томони

$$(\cos x + \sin x)^2 + 1 = 2 + 2\cos x \sin x$$

га тенг, ўнг томони $\frac{2\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2\cos^2 x$ га тенг ва бунда $\sin x \neq 0$ деб фараз этилади. Тенглама $2(1 - \cos^2 x) + 2\cos x \sin x = 0$ ёки $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$ шаклни олади. Бу тенглама иккита тенгламага ажралади: $\sin x + \cos x = 0$ ва $+\sin x = 0$. Аммо $\sin x = 0$ бўлганда тенгламанинг ўнг томони (тўппа-тўғри) маънога эга бўлмайди.

Жавоб. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

878. Тенгламанинг ўнг томони

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

га тенг.

Бундан сўнг масала олдинги масала каби ечилади.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = n\pi$.

879. Тенгламанинг чап томони $2 - \sin 3x$ га, ўнг томони $1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 1 - \cos 3x$ га тенг. Демак, тенглама

$$\cos 3x - \sin 3x + 1 = 0$$

кўринишни олади. Бу тенгламани 851-масалани ечишда татбиқ этган биринчи усул билан ечамиз. Бунинг учун аввал $\cos 3x - \sin 3x$ ни $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$ шаклга келтирамиз. Натижада $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, яъни $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ тенглама ҳосил бўлади. Демак,

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ яъни } 3x = \frac{\pi}{4}\ [1 + (-1)^n] + \pi n.$$

n жуфт сон бўлганда ўрта қавсдаги ифода 2 га тенг, тоқ сон бўлганда нолга тенг. Шунинг учун $n = 2n'$ (n' — бутун сон) деб олинса, $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n'$ ҳосил бўлади, агар $n = 2n' + 1$ деб олинса, $3x = \pi(2n' + 1)$ ҳосил бўлади.

Иккинчи хил ечиш. 851-масалада кўрсатилган иккинчи усулдан бошқа (у усул чет илдизлар пайдо қилади), бу ерда (шунингдек 851-масалада ҳам) яна қуйидаги усулдан фойдаланиш мумкин.

Юқоридаги каби, $\cos 3x - \sin 3x + 1 = 0$ тенгламани ҳосил қилиб, сўнгра

$$1 + \cos 3x = 2\cos^2\frac{3x}{2} \text{ ва } \sin 3x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

формулаларни татбиқ этамиз. Натижада ҳосил бўлган тенглама иккита тенгламага ажралади. Бу тенгламалардан бирини $\left(\cos\frac{3x}{2} = 0\right)$ ечиб $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, яъни $3x = \pi(2n + 1)$ эканлигини аниқлаймиз. Иккинчи тенглама $\left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 0\right)$ ушбу $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, яъни $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ илдизни беради.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{3}(2n + 1)$; $x = \frac{\pi}{6}(4n + 1)$.

880. $1 + \sin 2x$ ифодасини

$$(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin x\cos x = (\cos x + \sin x)^2$$

кўринишда ёзамиз ва $\operatorname{tg} x$ ни $\frac{\sin x}{\cos x}$ билан алмаштирамиз. Сўнгра ҳамма ҳадларни умумий махражга ($\cos x$) келтирамиз ва $\cos x \neq 0$ деб фараз қилиб, уни ташлаймиз. Натижада

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x + \sin x) = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама иккита тенгламага ажралади, биринчиси

$$\cos x + \sin x = 0$$

бўлиб, унинг ечими

$$x = \frac{\pi}{4}(4n - 1),$$

иккинчи тенглама

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 1 = 0 \text{ ёки } \cos 2x - 1 = 0,$$

бунинг ечими: $x = \pi n$.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = \pi n$.

881. $1 - \sin 2x$ ни $(\cos x - \sin x)^2$ шаклида, $\cos 2x$ ни эса $(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$ шаклида ифода қиламиз. $\cos x - \sin x$ ни нолга тенг эмас деб фараз қилиб, касрни ана шу миқдорга қисқартирамиз. Натижада

$$\cos x + \sin x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ўшандай фараз билан касрдан кутулиб,

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x) = 0$$

ёки

$$(\cos x - \sin x - 1)(\cos x + \sin x) = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

$\cos x + \sin x = 0$ тенгламани ечиб $x = \pi n - \frac{\pi}{4}$ ни топамиз. $\cos x - \sin x - 1 = 0$ тенгламани қуйидагича ечиш мумкин (879-масалага солиштиринг). Бу тенгламани

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1,$$

яъни

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n$ эканлигини аниқлаймиз. n жуфт $(= 2m)$ бўлганда $x = \pi n = 2\pi m$ бўлади. n тоқ $(n = 2m - 1)$ бўлганда

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(4m - 1).$$

879-масалани ечишнинг иккинчи усулини татбиқ этинг.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$; $x = 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2}(4n - 1)$.

882. Берилган тенгламанинг ўнг томони $\cos 2x$ га, чап томони

$$(\cos x + \sin x)^2(\cos x - \sin x) = (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x) =$$
$$= (\cos x + \sin x)\cos 2x$$

га тенг.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1)$; $x = 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2}(4n + 1)$.

883. Берилган тенгламанинг чап томони

$$\frac{1}{4} - \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{4\cos^2 x} = \frac{1}{4} - \sin^2 x$$

га тенг ($\cos x \neq 0$ деб фараз этилади). Тенгламанинг ўнг томонига $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ формулани татбиқ этиб,

$$\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - (1 - 2\sin^2 x)\right] = \frac{-1 + 4\sin^2 x}{4}$$

ни ҳосил қиламиз. Энди тенглама

$$\frac{1}{4} - \sin^2 x = -\left(\frac{1}{4} - \sin^2 x\right)$$

кўринишга келади, бундан $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, яъни $\sin x = \frac{1}{2}$ ёки $\sin x = -\frac{1}{2}$. Ечим иккита: $x = 180°n + (-1)^n 30°$ ва $x = 180°n - (-1)^n \cdot 30°$. Бу икки ечимни битта формула билан ёзиш мумкин: $x = 180°n \pm 30°$.

Жавоб. $x = 30° (6n \pm 1)$.

884. Берилган тенгламанинг чап томони $\sin 60° \cos x$ га, ўнг томони эса

$$\operatorname{tg} x \cos^4 x + \operatorname{ctg} x \sin^4 x = \sin x \cos^3 x + \cos x \sin^3 x$$

га тенг (сўнгги шакл алмаштиришда $\cos x \neq 0$ ва $\sin x \neq 0$ деб фараз қилинади). Бу ифода эса

$$\sin x \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x \cos x$$

га тенг. Тенглама

$$\cos x (\sin 60° - \sin x) = 0$$

кўринишга келтирилади. Бу тенглама иккита тенгламага ажралади ва булардан бири ($\cos x = 0$) чет илдиз беради.

Жавоб. $x = 180°n + (-1)^n 60°$.

885. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ формулани татбиқ этиб, чап томонда $\sec^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x$ ҳосил қиламиз ($\sin x$ га қисқартиришда $\sin x \neq 0$ деб фараз қилинади). Натижада тенгламанинг чап томони

$$\frac{\sin (x - 30°) + \sin (x + 30°)}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos 30°}{\cos x} = \sqrt{3} \operatorname{tg} x$$

га тенг бўлади. Тенглама $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$ кўринишига келтирилади ва иккита тенгламага ажралади. Бу тенгламалардан бири, яъни $\operatorname{tg} x = 0$ тенглама чет илдиз беради (чунки агар $\operatorname{tg} x = 0$ бўлса, унда $\sin x = 0$).

Жавоб. $x = 60° (3n + 1)$.

886. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ифода $\frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2}{\sin x}$

кўринишга келтирилади. Ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{2} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x}.$$

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4} (2n + 1)$.

887. Берилган тенгламанинг чап томони $2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$ га тенг, ўнг томони эса $\frac{2\cos^2 x}{1+\sin x}=\frac{2(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}=2(1-\sin x)$ га тенг. Натижада

$2(\sin x+\cos x)=2(1-\sin x)$ ёки $(1-\cos x)-2\sin x=0$, ёки

$$2\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

тенглама ҳосил бўлади.

Жавоб. $x=2\pi n$; $x=2(\pi n+\operatorname{arc\,tg}2)$.

888. Чап томондаги каср

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x-\cos 2x\,\mathrm{tg}\,x)\cos^2 x=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x)\cos x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\cos x$$

га тенг. Тенгламанинг ўнг томони

$$(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

га тенг (иккиланган бурчакка ўтиш бу жойда фойдасиздир). Энди тенгламани

$$(1-\cos^2 x)+\sin^2 x-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\cos x=0$$

ёки

$$2\sin^2 x-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\cos x=0$$

шаклда ёзамиз.

Жавоб. $x=180^\circ n$; $x=180^\circ n+30^\circ$.

889. Тенгламанинг чап томони $3\sin x-4\sin^3 x$ га тенг, ўнг томони эса $4\sin x(1-2\sin^2 x)$ га тенг. Натижада тенглама

$$\sin x(4\sin^2 x-1)=0$$

шаклни олади.

Жавоб. $x=180^\circ n$; $x=180^\circ n\pm 30^\circ$

890. Тенгламанинг ўнг томони

$$\sin x+\cos x\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}+\cos x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

га тенг. Бу ифоданинг сурати $\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}$ га тенг ва шунинг учун ўнг томонда $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ ҳосил бўлади. Тенгламанинг чап томони $\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}$ га тенг. Натижада тенглама

$$\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$$

кўринишга келади. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ ни қавс ташқарисига чиқарсак,

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\left(\frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x} - 1\right) = 0, \text{ яъни } \operatorname{ctg}\frac{x}{2}(\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$; $x = 2\pi n + \pi$.

891. Касрнинг махражи

$$\frac{\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x}{\cos x\cos 2x} = \frac{\sin x}{\cos x\cos 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$$

га тенг. Касрнинг ўзи эса $\sin 2x$ га тенг. Тенглама

$$\sin 2x - 2\sin(45^\circ + x)\cos(45^\circ + x) = 0$$

ёки

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

кўринишни олади. Бу тенгламадан $\operatorname{tg} 2x = 1$.

Жавоб. $x = 90^\circ n + 22^\circ 30'$.

892. Маълумки,

$$\operatorname{tg}(x - 45^\circ)\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = \operatorname{tg}(x - 45^\circ)\operatorname{ctg}(45^\circ - x) = -1;$$

бунда $x \neq 45^\circ(2n+1)$ деб фараз этилади, чунки акс ҳолда кўпайтувчилардан бири нолга, иккинчиси эса чексизликка айланади. Ўнг томондаги ифоданинг махражи

$$-\frac{\cos x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = -\frac{2\cos x}{\sin x} = -2\operatorname{ctg} x$$

кўринишга келади; бунда $x \neq 180^\circ n$ деб фараз этилади, чунки акс ҳолда ё $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ё $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ маъносини йўқотади (чексизликка айланади). Натижада

$$-\operatorname{tg} x = -\frac{4\cos^2 x}{2\operatorname{ctg} x}$$

тенгламани ҳосил қиламиз ва бу тенглама ($x \neq 180^\circ n$ деб фараз қилганда) $\operatorname{tg} x \cos 2x = 0$ кўринишга келтирилади. Бу сўнгги тенгламанинг ечимлари: $x = 180^\circ n$ ва $x = 45^\circ (2n+1)$; аммо бу ечимлар қилинган фаразга тўғри келмайди.

Жавоб. Тенгламанинг ечими йўқ.

893. Берилган тенгламанинг ўнг томони $-\operatorname{tg} x$ га тенг (бундан олдинги масалага қаранг). Тенгламанинг чап томонини

$$\frac{1}{2}[\operatorname{tg}(x+45^\circ) - \operatorname{ctg}(x+45^\circ)] =$$

$$= \frac{\sin^2(x+45^\circ) - \cos^2(x+45^\circ)}{2\sin(x+45^\circ)\cos(x+45^\circ)} = -\operatorname{ctg}(2x+90^\circ)$$

кўринишга келтирамиз. Натижада

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(-x)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $2x$ ва $-x$ бурчаклар бир-биридан $180^\circ n$ га фарқ қилади, деган хулосага келамиз ва $2x = -x + 180^\circ n$ тенгламадан $x = 60^\circ n$ эканлигини аниқлаймиз.

Жавоб. $x = 60^\circ n$.

894. Берилган тенгламанинг чап томони

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)} = \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2x)}$$

га тенг. Натижада

$$\frac{2\sin 2x}{\cos 2\alpha + \cos 2x} = 2\operatorname{ctg} x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Энди $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ва $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ формулаларни татбиқ этсак, тенглама

$$\cos x(2\sin^2 x - \cos 2x - \cos 2\alpha) = 0$$

шаклга келади. Агар

$$2\sin^2 x - \cos 2x - \cos 2\alpha = 0$$

тенгламада $2\sin^2 x$ ўрнига $1 - \cos 2x$ ёзсак, тенглама

$$2\cos 2x = 1 - \cos 2\alpha$$

кўринишга келади, бундан

$$\cos 2x = \sin^2 \alpha.$$

Жавоб. $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$; $x = \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos(\sin^2\alpha)$.

895. Тенгламанинг чап томони $1 - \sin x$ га тенг, ўнг томондаги ифоданинг махражи

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$

га тенг. Бу ифода соддалаштирилса $\frac{2}{\sin x}$ шаклга келади. Натижада $1 - \sin x = \sin x$ тенгламани ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x = 180°n + (-1)^n 30°$.

896. Тенгламанинг чап томони $\operatorname{tg} x$ га тенг. Ўнг томони (894-масалага солиштиринг) $1 + 2\operatorname{tg} x$ га тенг.

Жавоб. $x = 45° (4n - 1)$.

897. Маълумки,

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2,$$

шунга ўхшаш

$$\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1 + \sin 2x}{2}\right)^2.$$

Тенглама $1 - \cos 2x + \sin 2x = 0$ ёки $2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 0$ шаклга келади.

Жавоб. $x = \pi n$; $x = \pi n - \frac{\pi}{4}$.

897а. Тенгламани (бундан олдинги масалага қаранг)

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sin 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$$

шаклда ифода қиламиз. Алгебраик шакл алмаштиришдан сўнг

$$3 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 2\sin^2 2x = \frac{9}{2}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $\sin^2 2x$ ни $1 - \cos^2 2x$ билан алмаштириб

$$\cos^2 2x + 2\cos 2x - \frac{1}{2} = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани ечиб

$$\cos 2x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

эканлигини аниқлаймиз ($\cos 2x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ қийматни ташлаймиз, чунки унинг абсолют қиймати 1 дан катта).

Жавоб. $x = \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

898. Биринчи тенгламанинг чап томонини $\frac{1}{2}(\cos x + \cos y)$ кўринишида ёзиб оламиз. Сўнгра системани ечиб, $\cos x = \frac{1}{2}$ ва $\cos y = \frac{1}{2}$ эканлигини топамиз.

Жавоб. $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; $y = 2\pi l \pm \frac{\pi}{3}$.

899. $\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$
бўлгани учун иккинчи тенгламани

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2m$$

шаклда ёзиш мумкин. Аммо $x + y = \alpha$ бўлгани учун $\cos(x - y) = 2m + \cos\alpha$; бундан

$$x - y = 2\pi n \pm \arccos(2m + \cos\alpha).$$

Демак, берилган система икки системага ажралади:

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = 2\pi n + \arccos(2m + \cos\alpha) \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = 2\pi n - \arccos(2m + \cos\alpha). \end{cases}$$

Жавоб.
$$\begin{cases} x_1 = \pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha), \\ y_1 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \pi n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha), \\ y_2 = -\pi n + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\arccos(2m + \cos\alpha). \end{cases}$$

900. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ формулани татбиқ этиб, иккинчи тенгламани $\frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = m$ шаклда ёзамиз. Махраждаги $\cos x \cos y$ ни $\frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$ билан ва $x + y$ ни α билан алмаштирсак,

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(x - y)} = m$$

ёки

$$\cos(x - y) = \frac{2\sin\alpha}{m} - \cos\alpha$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, ё

$$x-y=2\pi n+\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right),$$

ёки

$$y-x=2\pi n+\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгламаларнинг ҳар бирини айрим $x+y=\alpha$ тенглама билан бирга ечиш керак. Лекин ҳосил бўлган иккита системадан бири иккинчисидан фақат номаълум сонларнинг ўзаро ролларини алмаштиришлари билан фарқ қилади, шунинг учун системалардан бирини ечиш кифоя.

Жавоб. $x_1(=y_2)=\pi n+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right);$

$$y_1(=x_2)=-\pi n+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right).$$

901. Бундан олдинги масала каби ечилади.

Жавоб.

$x_1=\frac{\pi}{4}(4n+1)$	$x_2=-\pi n$
$y_1=-\pi n$	$y_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$

902. $1=2^0$ ва $4=16^{\frac{1}{2}}$ бўлгани учун, берилган системани

$$\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

шаклда ёзиш мумкин, бундан

1) $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos y=-\frac{1}{2}$ ва 2) $\sin x=-\frac{1}{2}$, $\cos y=\frac{1}{2}$.

Жавоб. $x_1=180°n+(-1)^n 30°$, $y_1=360°n\pm 120°$;
$x_2=180°n-(-1)^n 30°$, $y_2=360°n\pm 60°$.

903. Иккинчи тенгламани

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{1}{3}$$

шаклда ёзиш мумкин, бунда биринчи тенгламага биноан

$\sin x\ \sin y=\frac{1}{4\sqrt{2}}$. Натижада

$$\cos x\cos y=\frac{3}{4\sqrt{2}},\quad \sin x\sin y=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларни ҳадма-ҳад аввал қўшиб, сўнгра айириб

$$\cos(x-y)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ва} \quad \cos(x+y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ҳосил қиламиз, бундан

$$x+y=2\pi m\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}},\ x-y=2\pi k\pm\frac{\pi}{4},$$

бунда m ва k — ихтиёрий бутун сонлар. Бу тенгламаларнинг ҳар бирида $\pm$ ишоралардан хоҳлаган бирини олиш мумкин.

Изоҳ. $m+k$ ва $m-k$ сонлар ҳам бутун сонлар, аммо жуда ҳам ихтиёрий эмас (агар улардан бири жуфт бўлса, иккинчиси ҳам жуфт; агар бири тоқ бўлса, иккинчиси ҳам тоқдир).

Жавоб. 1) $x=\pi n+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$,

$y=\pi t+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$;

2) $x=\pi n+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$,

$y=\pi t+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$;

3) $x=\pi n-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$,

$y=\pi t-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$;

4) $x=\pi n-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$,

$y=\pi t-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$;

буларда $n=m+k$; $t=m-k$ (m ва k ихтиёрий бутун сонлар).

904. Берилган тенгламаларнинг иккала томонларини квадратга кўтарамиз ва уларни ҳадма-ҳад қўшамиз. Натижада

$$1=4\sin^2 y+\frac{1}{4}\cos^2 y \quad \text{ёки} \quad 1=4(1-\cos^2 y)+\frac{1}{4}\cos^2 y$$

ҳосил қиламиз, бундан $\cos^2 y=\frac{4}{5}$ ва $\sin^2 y=\frac{1}{5}$ эканлигини топамиз. Бундан сўнг $\cos y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ ва $\sin y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ ифодаларда хоҳлаган ишорани ола оламиз (демак, y бурчак 0 дан 360° гача тўртта қийматга эга бўлиши мумкин). Бу қийматларни берилган тенгламаларга қўйиб, x ва y бурчаклар қуйидаги тўртта муносабатнинг бирини қониқтиришини аниқлаймиз:

1) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin y = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

2) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin y = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

4) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Бу муносабатлардан биринчисини қараб чиқайлик. Агар $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ тенгликни айрим олсак, унда бу тенгликдан $x = 2\pi n \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ эканлигини топамиз. Аммо (арккосинус бош қийматининг таърифига биноан) $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ биринчи ёки иккинчи чоракка тааллуқли бўлиб, бу чоракларда синус доим мусбатдир. Демак, фақат плюс ишорани қолдириш керак. Ҳақиқатан, $x = 2\pi n \pm \varphi$ тенгликдан $\sin x = \pm \sin \varphi = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ деган хулоса чиқади. Аммо биз олган биринчи муносабатда $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (лекин $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ эмас). y бурчак учун ҳам худди шундай. Демак, x ва y биринчи муносабатни қониқтирганда

$$x = 2\pi n + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$y = 2\pi n_1 + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}},$$

бунда n ва n_1—ҳар қандай бутун сонлар. Яна шундай мулоҳаза юритиб, иккинчи муносабат учун ҳам

$$x = 2\pi n - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y = 2\pi n_1 - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$$

эканлигини топамиз ва учинчи, тўртинчи муносабатлар учун ҳам x ва y қийматларини аниқлаймиз.

Жавоб. $x = 2\pi n \pm \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$

$$y = 2\pi n_1 \pm \arccos\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

буларда қавс ичидаги ишоралар x учун ҳам, y учун ҳам бир хил ва аркуслар олдидаги ишоралар ҳам бир хилдир.

13-БОБ

ТЕСКАРИ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР

905. $\operatorname{arc}\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-1)=\frac{3\pi}{4},$

$$\operatorname{arc}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc}\cos(-1)=\pi.$$

Жавоб. $\frac{5\pi}{6}$.

906. $\varphi=\operatorname{arc}\cos x$ бурчак 0 билан 180° орасида бўлади (арккосинус бош қийматининг таърифига биноан). Демак, $\sin\varphi$ мусбат (ёки нолга тенг). $\cos\varphi=x$, бундан $\sin\varphi=+\sqrt{1-x^2}$ (радикал олдида фақат плюс ишора олинади). Демак,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \text{яъни} \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc}\cos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Мана шуни исбот этиш талаб этилган эди.

907. Бундан олдинги масаланинг ечилишига қаранг.

908. $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{4}\right)=\varphi$ деб фараз қилайлик, унда $\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{3}{4}$ бўлади. φ бурчак 90° билан 180° орасида (чунки арккотангенснинг бош қиймати 0 билан 180° орасида). $\sin\frac{\varphi}{2}$ ни топиш талаб этилади. Энди $\sin\frac{\varphi}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$ формулани татбиқ этамиз, бунда $\pm$ ишоралардан фақат $+$ ишорани олиш керак (чунки $\frac{\varphi}{2}$ бурчак биринчи чоракда). Олдин $\cos\varphi$ ни

$$\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$$

формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=-\frac{3}{5}$$

(радикал олдида фақат плюс ишора оламиз, чунки φ бурчак иккинчи чоракда). Энди $\sin\frac{\varphi}{2}$ нинг қийматини топамиз:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Жавоб. $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

909. $\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\varphi$ деб оламиз; унда $\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ бўлади. φ бурчак $-90°$ билан $0°$ орасида бўлади (чунки арксинуснинг бош қиймати $-90°$ билан $+90°$ орасида). $\sin\frac{\varphi}{2}$ ни топиш талаб этилади. Бу миқдор манфий бўлади. Шунинг учун

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

формуладан фақат минус ишорани қолдириш керак. Натижада

$$\sin\frac{\varphi}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

ҳосил қиламиз, бунда

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$$

(радикал олдида фақат плюс ишорани оламиз).

Жавоб. $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)\right]=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

910. $\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)$ бурчак $90°$ билан $180°$ орасида (бундан олдинги икки масаланинг ечилишига қаранг). Демак, $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ мусбат ва $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$ бўлади (радикал олдида фақат плюс ишора олинади). Бунга $\cos\varphi=-\frac{4}{7}$ ни қўямиз.

Жавоб. $\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right]=\frac{\sqrt{33}}{11}$.

911. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$ ва $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ бўлгани учун

$$\operatorname{tg}\left(5\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1.$$

Жавоб. -1.

912. Маълумки $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ ва $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\cdot$ Бундан буёғи худди олдинги масаладаги каби давом эттирилади.

Жавоб. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

913. *Жавоб.* $\frac{1}{2}$.

914. Фараз қилайлик,

$$\operatorname{arc\,tg}(3+2\sqrt{2})=\alpha, \qquad (1)$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\beta \qquad (2)$$

бўлсин. Бундан

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4} \qquad (3)$$

эканлигини исбот қилиш талаб этилади. Аввал $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ ни топамиз:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

(1) ва (2) тенгликлардан фойдаланиб

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{(3+2\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+(3+2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}}=1 \qquad (4)$$

эканлигини топамиз. Иккинчи томондан (1) ва (2) дан α ва β бурчакларнинг ҳар бири 0 билан $\frac{\pi}{2}$ орасида эканлиги кўриниб турибди ва $\alpha>\beta$ $\left(\text{чунки } 3+2\sqrt{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; демак, $\alpha-\beta$ бурчак албатта 0 билан $\frac{\pi}{2}$ орасида бўлади; (4) тенгликдан $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$. Мана шуни исбот этиш талаб этилган эди.

Изоҳ. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ га, яъни 45° га тенг эканлигини (на 225° га ва на —135° га ва ҳоказо тенг эмаслигини) исбот қилиш учун, жадваллардан фойдаланиб α ва β бурчакларни бевосита топиш ҳам мумкин. Бунда қўпол тақрибий ҳисоблаш билан чегараланиш мумкин (масалан, фақат градусларнигина олиш мумкин). Масалан, $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ деб олиб, $\alpha\approx\operatorname{arc\,tg}5{,}8$ эканлигини, яъни тахминан 80° эканлигини топамиз $\left(\text{хато } \frac{1^\circ}{2} \text{ дан ошмайди}\right)$. Худди шунингдек, $\beta\approx\operatorname{arc\,tg}0{,}7\approx 35^\circ$ эканлигини топамиз $\left(\text{бунда ҳам хато } \frac{1^\circ}{2}\right.$ дан ошмайди). Демак, $\alpha-\beta$ бурчак 45° дан 1° чегарасидагина фарқ қилади, холос. Демак, $\alpha-\beta$ бурчак 45° га тенгдир.

915. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}=\alpha$, $\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\beta$[1] деб фараз қиламиз, унда

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ва} \quad \cos\beta=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}.$$

---

[1] Масалани α ва β ёрдамчи миқдорлар киритилмасдан 914-масалага доир изоҳда баён этилган усул билан ечиш ҳам мумкин.

α ва β бурчакларнинг ҳар бири биринчи чоракда [1] бўлади.

$\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ эканлигини исбот қилиш талаб этилади. $\sin(\alpha-\beta)$ ни топамиз; бунинг учун аввало

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{ва} \quad \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$$

ни ҳисоблаймиз (радикаллардан ҳар бирининг олдида фақат плюс ишора оламиз, чунки α ва β бурчаклар биринчи чоракда):

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ва} \quad \sin\beta = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{12}},$$

демак,

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{12}} = \frac{\sqrt{6}+1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}.$$

Топилган иррационал ифоданинг $\frac{1}{2}$ га тенглигини исбот этамиз. Бунинг учун „икки қат иррационалликни“ соддалаштирамиз: $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{5-\sqrt{24}}$. Энди бу ифодани

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

формуладан фойдаланиб алмаштирамиз (бунда $A = 5$, $B = 24$):

$$\sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Лекин илдиз тагидаги $5 - 2\sqrt{6}$ ифодани $3 + 2 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ кўринишда ёзиш мумкин, унда

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$ [2]).

α ва β бурчакларнинг ҳар бири 0 билан $\frac{\pi}{2}$ орасида бўлгани учун $\alpha - \beta$ бурчак албатта $-\frac{\pi}{2}$ билан $+\frac{\pi}{2}$ орасида бўлади,

---

[1] Арккосинуснинг бош қиймати 0 билан π орасидадир.

[2] $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ мусбат сон.

унда $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ тенгликдан $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ келиб чиқади. Мана шуни исбот этиш талаб этилган эди[1]).

916. $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$, $\arcsin\frac{5}{13} = \beta$, $\arcsin\frac{16}{65} = \gamma$ бўлсин (бундан олдинги икки масалага қаранг). Унда

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}; \quad \sin\beta = \frac{5}{13}, \quad \cos\beta = \frac{12}{13};$$

$$\sin\gamma = \frac{16}{65}, \ \cos\gamma = \frac{63}{65}.$$

Бундан $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$ ва $\cos(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}$.

α ва β бурчакларнинг иккаласи ҳам биринчи чоракда. Шунинг учун $\alpha + \beta$ бурчак 0° билан 180° орасида бўлади, $\alpha + \beta$ бурчакнинг косинуси мусбат бўлгани учун $\alpha + \beta$ бурчак биринчи чоракда бўлади. Ундан ташқари, $\cos(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ ва $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$. Шунинг учун $\alpha + \beta$ ва $\frac{\pi}{2} - \gamma$ бир-биридан фақат $2\pi n$ гагина фарқ қилиши мумкин, $\frac{\pi}{2} - \gamma$ ҳам биринчи чоракда бўлгани учун $n = 0$. Демак, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, яъни $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Мана шуни исбот этиш талаб этилган эди.

917. Маълумки, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ ни β билан белгилаймиз, унда $\cos\beta = -\frac{1}{7}$ бўлади. β бурчак $\frac{\pi}{2}$ билан π орасига жойлашган (бундан олдинги уч масалага қаранг). Шунинг учун

$$\sin\beta = +\sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} \ \left[\text{аммо} - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} \ \text{эмас}\right], \ \text{яъни}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{7}\sqrt{3}.$$

Энди $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)$ нинг қийматини топамиз:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\beta - \sin\frac{\pi}{3}\sin\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot - \left(\frac{1}{7}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{3} = -\frac{13}{14}.$$

---

[1]) Агар $\sin(\alpha - \beta)$ ўрнига $\cos(\alpha - \beta)$ ни ҳисобласак, унда $\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ эканлигини топган бўлар эдик; $-\frac{\pi}{2}$ билан $\frac{\pi}{2}$ орасида $\alpha - \beta$ нинг иккита қийматини топган бўлар эдик; шунинг учун дастлаб $\alpha > \beta$, яъни $\cos\alpha < \cos\beta$ эканлигини аниқлаб олиш тўғри келар эди.

Бу айниятнинг тўғрилигини исбот этиш учун аввал $\frac{\pi}{3}+\beta$ бурчакнинг иккинчи чоракда эканлигига ишонч ҳосил қилиш керак [чунки тенгламанинг ўнг томонидаги $\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$ бурчак иккинчи чоракда ётади]. $\beta = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ бурчак $\frac{\pi}{2}$ билан π орасида; демак $\frac{\pi}{3}+\beta$ бурчак $\frac{5\pi}{6}$ билан $\frac{4\pi}{3}$ орасида бўлади. Бироқ, бу мулоҳазадан $\frac{\pi}{3}+\beta$ бурчак иккинчи чоракда бўлади деган хулоса чиқмайди $\left(\text{ахир } \frac{4\pi}{3} \text{ бурчак учинчи чоракда бўлади-ку}\right)$.

Аммо, агар $-\frac{1}{7} > -\frac{1}{2}$ эканлиги, демак

$$\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) < \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),$$

яъни $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) < \frac{2\pi}{3}$ эканлиги назарга олинса, ундан $\frac{\pi}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) < \pi$ деган хулоса чиқади. Аммо олдинги мулоҳазага биноан бу бурчак $\frac{5\pi}{6}$ бурчакка қараганда катта бўлгани учун, иккинчи чоракда ётади. Шу билан берилган айният исбот этилган бўлади.

Изоҳ. $\frac{\pi}{3}+\beta$ бурчакнинг иккинчи чоракда (учинчида эмас) бўлишлигини яна қуйидагича исботлаш мумкин. Маълумки,

$$\left(\sin\frac{\pi}{3}+\beta\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\beta + \cos\frac{\pi}{3}\sin\beta =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{3} = \frac{3}{14}\sqrt{3}.$$

Бу сон мусбат бўлгани учун $\frac{\pi}{3}+\beta$ бурчак иккинчи чоракда бўлади.

918. $\text{acr tg}\frac{1}{5} = \alpha$ ва $\text{arc tg}\,\frac{1}{4} = \beta$ бўлсин, унда $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{5}$ ва $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{4}$. Энди

$$\text{tg}\,(2\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,2\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,2\alpha\,\text{tg}\beta}$$

ифодани ҳисоблаймиз. Бунинг учун аввал $\text{tg}\,2\alpha$ ни, сўнгра $\text{tg}\,(2\alpha + \beta)$ ни топамиз.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{32}{43}.$$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ ва $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$ бурчаклар биринчи чоракда, аммо бундан $2\alpha+\beta$ бурчак (учинчи чоракда эмас) биринчи чоракда деган хулоса чиқмайди. Бироқ α ва β бурчакларнинг ҳар бири $\frac{\pi}{4}$ дан кичик эканлиги назарга олинса (чунки уларнинг тангенслари 1 дан кичик), унда $2\alpha+\beta$ бурчак $\frac{3\pi}{4}$ дан кичик эканлиги чиқади, бунинг устига $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{32}{43}$ мусбат бўлгани учун $2\alpha+\beta$ биринчи чоракда ётади, яъни $2\alpha+\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{32}{43}$. Мана шуни исбот этиш талаб этилган эди.

Изоҳ. $2\alpha+\beta$ бурчак биринчи чорак чегарасидан чиқмаслигини исбот этиш учун бу бурчакни (қўпол равишда бўлса ҳам) жадвал воситасида топиш мумкин (914-масалага доир изоҳга қаранг). Мана буларни ҳосил қиламиз:

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} \approx 11^\circ$, $\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} \approx 14^\circ$, бундан $2\alpha+\beta \approx 36^\circ$ бўлади.

919. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \alpha$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \beta$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} = \gamma$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \delta$ деб фараз қиламиз; аввало $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ни топамиз;

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{4}{7},$$

сўнгра

$$\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)+\gamma] = \frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{7}{9}$$

ва, ниҳоят,

$$\operatorname{tg}[(\alpha+\beta+\gamma)+\delta] = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}} = 1.$$

Бундан олдинги масаладаги сингари $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ бурчакнинг биринчи чоракда эканлигини исбот қиламиз. Демак, $\alpha+\beta+$ $+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$.

920. Маълумки, $\operatorname{arc\,tg}(x^2-3x-3)=\frac{\pi}{4}$, бундан $x^2-3x-3=$ $=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, яъни $x^2-3x-3=1$. Бу тенгламани ечиб, $x_1=4$, $x_2=-1$ ни топамиз.

Жавоб. $x_1=4$; $x_2=-1$.

Изоҳ. Агар $\operatorname{arc\,tg}(x^2-3x-3)=\frac{\pi}{4}$ тенглама ўрнига $\operatorname{arc\,tg}(x^2-3x-$ $-3)=-\frac{3\pi}{4}$ тенгламани олган бўлсак, бундай тенгламанинг ечими бўлмас эди, чунки арктангенснинг бош қиймати $-\frac{3\pi}{4}$ га тенг бўла олмайди. Агар бу ҳолга эътибор берилмаса, яна шу $x^2-3x-3=1$ тенгламани ҳосил қилиш мумкин, аммо бунинг илдизлари ярамайди.

921. $\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\frac{\pi}{6}$, бундан

$$x^2-6x+8{,}5=0{,}5.$$

Жавоб. $x_1=4$; $x_2=2$.

922. Тенглама иккала томонининг тангенсини олиб ва $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\alpha)=\alpha$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}=1$$

ҳосил қиламиз, бундан $x_1=-1$; $x_2=-2$. Бу илдизларни текшириб кўрайлик. Агар $x=-1$ бўлса, унда

$$\operatorname{arc\,tg}(x+2)=\operatorname{arc\,tg}1=\frac{\pi}{4} \text{ ва } \operatorname{arc\,tg}(x+1)=\operatorname{arc\,tg}0=0.$$

Демак, берилган тенглама қониқтирилади. Иккинчи илдизнинг ҳам яроқли эканлигини шу йўл билан исбот қиламиз.

Жавоб. $x_1=-1$; $x_2=-2$.

Изоҳ. Текширишнинг нима учун зарур эканлиги қуйидаги мисолдан кўринади. Берилган тенгламадан фақат озод ҳаднинг қиймати билан фарқ қилувчи

$$\operatorname{arc\,tg}(x+2)-\operatorname{arc\,tg}(x+1)=-\frac{3\pi}{4}$$

тенгламани кўрайлик. Бу тенгламанинг ечими йўқ эканлигини олдиндан айтиб бўлмайди (920-масалага солиштиринг). Агар

$$\operatorname{arc\,tg}(x+2)=-\frac{\pi}{3} \quad \text{ва} \quad \operatorname{arc\,tg}(x+1)=\frac{5}{12}\pi$$

десак (бу қийматлар арктангенснинг бош қийматлари бўлиши мумкин), унда тенгламанинг чап томони $-\frac{3\pi}{4}$ га тенг бўлар эди. Қаралаётган тенглама иккала томонининг тангенсини олсак яна $\frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)(x+1)}=1$ тенгламани ҳосил қиламиз, лекин энди $x_1=-1$, $x_2=-2$ илдизларнинг биттаси ҳам ярамайди.

920-масалага доир изоҳга ҳам қаранг.

923. Тенглама иккала томонининг тангенсини оламиз. Бунинг учун аввал

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

эканлигини топамиз (бундан олдинги масалага қаранг); унда $\frac{\frac{4}{3}-x}{1+\frac{4x}{3}}=1$ ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг илдизи $x=\frac{1}{7}$; буни текшириб кўриш керак (бундан олдинги масалага доир изоҳга қаранг). Тенгламанинг чап томонига $x=\frac{1}{7}$ ни қўйиб, $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-$ $-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$ ҳосил қиламиз. $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ бурчак 0 билан $\frac{\pi}{4}$ орасида (чунки $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}<1$). $\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$ бурчак ҳам шу чегарада ётади. 2α бурчак биринчи чоракда, $2\alpha-\beta$ бурчак эса $-\frac{\pi}{2}$ билан $\frac{\pi}{2}$ орасида ётади. Аммо $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=1$, демак, $2\alpha-\beta=\pi n+\frac{\pi}{4}$. Бироқ $n=0$ бўлгандагина $2\alpha-\beta$ бурчак топган чегараларимиз ичига тушади. Демак, берилган тенглама қониқтирилади.

Жавоб. $x=\frac{1}{7}$.

924. Тенгликнинг иккала томонидан синусни оламиз. Бундай фараз қилиш мумкин:

$$\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}=\alpha \text{ ва } \arcsin\sqrt{1-x}=\beta$$

(915-масаланинг ечилишига қаранг); лекин $\sin(\arcsin x)=x$ (бу тенглик арксинуснинг таърифидан бевосита келиб чиқади) формуладан ва $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ формуладан 1) фойдаланиб,

---

1) Бу формула қуйидагича чиқарилади. $\arcsin x=\alpha$ деб оламиз. Унда $\sin\alpha=x$ ва $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$. Радикал олдида фақат плюс ишора олинади, чунки $\alpha=\arcsin x$ бурчак -90° билан $+90^\circ$ орасида ётади (арксинуснинг бош қиймати). α ўрнига $\arcsin x$ ифодасини қўйсак, талаб этилган формула ҳосил бўлади.

юқоридаги белгилашларни олмасак ҳам бўлади. Демак, чап томоннинг синуси мана бунга тенг:

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-x},$$

берилган тенглама

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{9x-4}}{3\sqrt{x}}\sqrt{1-x}=\frac{1}{3}$$

кўринишга келади. Бу тенгламани ечиб, $x=\frac{2}{3}$ эканлигини топамиз. Бу илдизни текшириб кўриш керак (922-масалага доир изоҳга қаранг), яъни

$$\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}=\arcsin\frac{1}{3}$$

айниятни исботлаш керак.

Бунинг исботи 917-масаладаги каби олиб борилади.

Жавоб. $x=\frac{2}{3}$.

925. Тенглама иккала томонининг тангенсини олиб,

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a}{b}\cdot\frac{a-b}{a+b}}=x$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $x=1$ ни топамиз.

Бу қийматни текшириб кўриш лозим (922-масалага доир изоҳга қаранг). $x=1$ ни берилган тенгламага қўйсак,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b}=45^\circ \tag{1}$$

ҳосил қиламиз. Энди

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}=\varphi \tag{2}$$

белгини киритамиз. Бунда φ бурчак (арктангенснинг бош қиймати)

$$-90^\circ<\varphi<90^\circ \tag{3}$$

чегаралар орасида. Бу белгилашга мувофиқ

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{arc\,tg}\frac{b\operatorname{tg}\varphi-b}{b\operatorname{tg}\varphi+b}=\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tg}(\varphi-45^\circ). \tag{4}$$

Бунда ушбу

$$\varphi - \operatorname{arc\,tg} \operatorname{tg} (\varphi - 45^\circ) = 45^\circ \qquad (5)$$

тенгликни текшириб кўриш керак бўлади. Бу тенглик фақат

$$\operatorname{arc\,tg} \operatorname{tg} (\varphi - 45^\circ) = \varphi - 45^\circ \qquad (6)$$

бўлсагина тўғри бўлади. (6) тенглик фақат $\varphi - 45^\circ$ бурчак (арктангенснинг бош қиймати)

$$-90^\circ < \varphi - 45^\circ < 90^\circ \qquad (7)$$

чегаралар ичида бўлсагина тўғри бўлади, яъни унда

$$-45^\circ < \varphi < 135^\circ \qquad (8)$$

бўлади. (3) тенгсизликни эътиборга олиб φ бурчак учун янада торроқ чегаралар топамиз, яъни

$$-45^\circ < \varphi < 90^\circ. \qquad (9)$$

(2) ва (9) дан

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} (-45^\circ),$$

яъни

$$\frac{a}{b} > -1 \qquad (10)$$

эканлигини топамиз.

Аксинча $\frac{a}{b} > -1$ бўлганда φ бурчак (9) тенгсизликни қониқтиради.

Демак, берилган тенглама $\frac{a}{b} > -1$ бўлганда ($x = 1$) ечимга эга бўлади, $\frac{a}{b} < -1$ бўлганда эса ечими бўлмайди.

Масалан, $a = -\sqrt{3}$, $b = 1$ бўлса,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} = \operatorname{arc\,tg} \left(-\sqrt{3}\right) = -60^\circ;$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a-b}{a+b} = \operatorname{arc\,tg} \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} \approx \operatorname{arc\,tg} 3{,}732 = 75^\circ$$

бўлади; демак, берилган тенгламанинг чап томони -135° га тенг, ўнг томони эса $x = 1$ бўлганда 45° га тенг.

Жавоб. $\frac{a}{b} > -1$ бўлганда, $x = 1$; $\frac{a}{b} < -1$ бўлганда тенгламанинг ечими бўлмайди.

926. Тенглама иккала томонининг косинусини оламиз. $\sqrt{1-9x^2}=4x$ ҳосил бўлади (924-масалага қаранг). Бу тенглама фақат бир илдизга эга, у ҳам бўлса $x=\frac{1}{5}$. Бу илдизни текшириб кўрамиз.

$\alpha=\arcsin 3x=\arcsin\frac{3}{5}$ бурчак биринчи чоракда;

$\beta=\arccos 4x=\arccos\frac{4}{5}$ бурчак ҳам биринчи чоракда бўлади. Бунда $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, демак, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Иккинчи томондан, $\cos\beta=$ $=\frac{4}{5}$; демак, $\alpha=\beta$.

Жавоб. $x=\frac{1}{5}$.

927. Тенглама иккала томонининг синусини оламиз.

$2x\sqrt{1-x^2}=\frac{10x}{13}$ ҳосил қиламиз (924-масалага қаранг). Бу тенгламани ечиб $x_1=0$, $x_2=+\frac{12}{13}$, $x_3=-\frac{12}{13}$ эканлигини аниқлаймиз. Бу илдизларни текшириб кўрамиз.

Жавоб. $x=0$; $x=+\frac{12}{13}$.

928. Биринчи тенгламадан

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{2a}{1-a^2},$$

яъни

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{2a}{1-a^2}.$$

Иккинчи тенгламани эътиборга олиб

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-a^2}=\frac{2a}{1-a^2}\quad\text{ёки}\quad\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2a$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Энди

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2a,\quad\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=a^2$$

тенгламалар системасидан $\operatorname{tg}x=a$; $\operatorname{tg}y=a$ эканлигини аниқлаймиз. Бундан $x=180°n+\operatorname{arc\,tg}a$, $y=180°m+\operatorname{arc\,tg}a$ эканлиги чиқади, бунда n ва m бутун сонлар. Аммо улардан фақат биттасини ихтиёрий равишда олиш мумкин, чунки биринчи тенгламага кўра $x+y$ миқдор арктангенснинг бош қиймати бўлгани учун $-90°$ билан $+90°$ орасида бўлиши лозим.

n ва m нинг яроқли қийматларини ажратиб олиш учун топилган ифодаларни биринчи тенгламага қўйиб кўрамиз. Натижада

$$180°(n+m)+2\operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{1-a^2} \qquad (A)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Шартга мувофиқ $|a|<1$ бўлгани учун $\operatorname{arc\,tg} a$ бурчак $-45°$ билан $+45°$ орасида, яъни $2\operatorname{arc\,tg} a$ бурчак $-90°$ билан $+90°$ орасида бўлади. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2a}{1-a^2}$ (арктангенснинг бош қиймати) бурчак ҳам ана шу чегараларда бўлади. Демак, бу икки бурчак бир-биридан 180° дан кам фарқ қилади. Шунинг учун (A) тенглик фақат $n+m=0$ бўлгандагина ўринлидир.

Жавоб. $x = 180°n + \operatorname{arc\,tg} a$; $y = -180°n + \operatorname{arc\,tg} a$.

МУНДАРИЖА

БИРИНЧИ ҚИСМ

Арифметика ва алгебра

ИККИНЧИ ҚИСМ

Геометрия ва тригонометрия